

Jayro do Nascimento Neto

**Determinação de expoentes de Lyapunov em sinais aeroelásticos
experimentais**

São João da Boa vista
2020

Jayro do Nascimento Neto

**Determinação de expoentes de Lyapunov em sinais aeroelásticos
experimentais**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, junto ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Interunidades, entre o Instituto de Ciência e Tecnologia de Sorocaba e o Campus de São João da Boa Vista da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”.

Orientador: Prof. Dr. Rui Marcos Grombone de Vasconcellos

Coorientador: Prof. Dr. André Alves Ferreira

São João da Boa Vista
2020

N244d

Nascimento Neto, Jayro do

Determinação de expoentes de Lyapunov em sinais aeroelásticos
experimentais / Jayro do Nascimento Neto. -- São João da Boa Vista, 2020

137 p. : il., tabs., fotos

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Câmpus
Experimental de São João da Boa Vista, São João da Boa Vista

Orientador: Rui Marcos Grombone de Vasconcellos

Coorientador: André Alves Ferreira

1. Sistemas não lineares. 2. Comportamento caótico nos sistemas. 3.
Aeroelasticidade. 4. Ruído. 5. Método de decomposição. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Câmpus Experimental de São
João da Boa Vista. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Jayro do Nascimento Neto

**Determinação de expoentes de Lyapunov em sinais aeroelásticos
experimentais**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, junto ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Interunidades, entre o Instituto de Ciência e Tecnologia de Sorocaba e o Campus de São João da Boa Vista da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Rui Marcos Grombone de Vasconcellos
UNESP – Câmpus de São João da Boa Vista - SP
Orientador

Prof. Dr. Flávio Donizeti Marques
USP – Câmpus São Carlos

Prof^a. Dr^a. Andreia Raquel Simoni Saldanha
IFSP – São Carlos

São João da Boa Vista
30 de novembro de 2020

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Determinação de expoentes de Lyapunov em sinais aeroelásticos experimentais

AUTOR: JAYRO DO NASCIMENTO NETO

ORIENTADOR: RUI MARCOS GROMBONE DE VASCONCELLOS

COORIENTADOR: ANDRE ALVES FERREIRA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: Automação pela Comissão Examinadora:



Prof. Dr. RUI MARCOS GROMBONE DE VASCONCELLOS (Participação Virtual)
Coordenadoria de Curso de Engenharia Aeronáutica / Câmpus de São João da Boa Vista



Prof. Dr. FLÁVIO DONIZETI MARQUES (Participação Virtual)
Departamento Engenharia Mecânica / EESC/USP



Prof. Dr. ANDREIA RAQUEL SIMONI SALDANHA (Participação Virtual)
CTTMA - SCL / IFSP Campus São Carlos

Sorocaba, 30 de novembro de 2020

“When a butterfly flutters its wings in one part of the world, it can eventually cause a hurricane in another.”

**Edward Norton Lorenz
The Essence of Chaos**

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me deixar estar aqui, viver, pesquisar e aprender.

Em especial agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Rui Marcos Grombone de Vasconcellos pela oportunidade da realização desse trabalho, pela paciência durante toda a pesquisa e pela orientação.

Ao meu coorientador Prof. Dr. André Alves Ferreira me auxiliando com comentários e direcionamentos ao longo da pesquisa.

Aos professores, colegas e funcionários que de alguma forma contribuíram para a realização desse trabalho.

Aos meus pais que com muita luta investiram e apoiaram para que seus filhos, sempre seguissem o caminho do bem e focados nos estudos.

À Kelly, uma pessoa parceira, sempre motivadora, que soube conduzir a nossa família com amor e carinho quando eu não estive presente.

Agradeço à UNESP - Universidade Estadual Paulista - Júlio de Mesquita Filho, por conceder a oportunidade de executar este trabalho.

RESUMO

NASCIMENTO NETO, J. (2020). *Determinação de expoentes de Lyapunov em sinais aeroelásticos experimentais*. São João da Boa Vista, 2020. 137p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho.

A caracterização de sinais experimentais com origem em sistemas não-lineares é de fundamental importância para o desenvolvimento de modelos matemáticos mais precisos. Sistemas aeroelásticos tendem a ser não-lineares por natureza e a não-linearidade pode levar a situações imprevisíveis e algumas vezes incontroláveis. A análise de sinais experimentais ainda representa a forma mais efetiva de se caracterizar a maioria dos fenômenos que ocorrem nas diversas condições de operação de uma aeronave, seja novos projetos ou ao longo da vida útil de uma aeronave em função de desgastes. Através de simulações numéricas ou experimentos, é possível alternar parâmetros, conhecer diferentes dinâmicas de um sistema não-linear e caracterizá-lo. As ferramentas de análise não-linear de sinais possibilitam identificar e caracterizar o comportamento de um sistema dinâmico não-linear, onde uma das características mais importantes é a classificação do comportamento entre estabilidade, instabilidade e o tipo de instabilidade para que técnicas de prevenção e/ou controle sejam implementadas. Porém, técnicas de caracterização do comportamento não-linear, como a determinação do maior expoente de Lyapunov, podem ser afetadas pela presença de ruído, inevitável em sinais obtidos experimentalmente, podendo causar uma caracterização incorreta. O conhecido atrator estranho de Lorenz será analisado com diferentes parâmetros e níveis de ruído, para aplicação de dupla filtragem digital através do método SVD e caracterização do sistema através do invariante expoente de Lyapunov. A recuperação qualitativa e quantitativa comprovada junto a resultados já conhecidos na literatura, irá validar a implementação do algoritmo utilizado, para calcular o maior expoente de Lyapunov e caracterizar os sinais aeroelásticos experimentais do grupo de pesquisa. Os resultados obtidos neste trabalho revelam que o método SVD é um eficiente filtro digital. A filtragem é indispensável previamente a reconstrução do espaço de estados, evitando distorções nas trajetórias do espaço de estados reconstruído, resultando em uma caracterização mais precisa pelo expoente de Lyapunov. Os maiores valores estimados, estão presentes em uma região de maior instabilidade, possivelmente com múltiplas soluções. Todos os sinais aeroelásticos experimentais analisados apresentaram resultados positivos, sugerindo fortes evidências de comportamento caótico.

Palavras-chave: Expoentes de Lyapunov. Sistemas Não-lineares. Caos. Decomposição em valores singulares. Sinais aeroelásticos. Ruído.

ABSTRACT

NASCIMENTONETO, J. (2020). *Determination of Lyapunov exponents in experimental aeroelastic signals*. São João da Boa Vista, 2020. 137p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho.

The characterization of experimental signals with origin in non-linear systems is the fundamental importance to the development of accurate mathematical models. Aeroelastic systems are intrinsically non-linear and the non-linearity can lead to unpredictable and sometimes uncontrollable situations. The analyses of experimental signals still representing the most effective way to characterize the major part of phenomena that occur in several conditions of operation of the aircraft, from project or over the cycle of life, due to wear. Through numerical simulations or experiments, it is possible to change parameters, in order to observe different dynamics of a non-linear system and characterize it. Tools of nonlinear signal analysis make it possible to identify and characterize the behavior of a nonlinear system, where one of the most important characteristics is the classification of the behavior between stability, instability and the type of instability so that, prevention or control techniques are implemented. However, techniques for characterizing nonlinear behavior, such as determining the largest Lyapunov exponents, can be affected by the presence of noise, inevitable in signals obtained experimentally, which can cause an incorrect characterization. The well-known strange attractor of Lorenz will be analyzed with different parameters and noise levels, for the application of double digital filtering through the SVD method and characterization of the system using the Lyapunov exponents. The qualitative and quantitative recovery, compared with results from literature, will validate the implementation of the algorithm used, to calculate the largest Lyapunov exponent and characterize the experimental aeroelastic signals. The results obtained in this work reveal that the SVD method is an efficient digital filter. Filtering is indispensable prior to the reconstruction of the state space, avoiding distortions in the state space, resulting in a more precise characterization by the Lyapunov exponents. The highest estimated values are present in a region of greater instability, possibly with multiple solutions. All experimental aeroelastic signals analyzed showed positive results, suggesting strong evidence of chaotic behavior.

Keywords: Lyapunov exponents. Non-linear systems. Chaos. Singular value decomposition. Aeroelastic signals. Noise.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 – Atrator tridimensional do modelo de Lorenz.	3
Figura 1.2 – O triângulo aeroelástico de forças (BISPLINGHOFF, 1996) . . .	8
Figura 2.1 – Espaço construído com coordenadas e a trajetória percorrida na evolução temporal	15
Figura 2.2 – a) Ponto fixo poço, b) ponto fixo fonte e c) ponto fixo sela	16
Figura 2.3 – Ponto fixo 2-dim: a) Ponto fixo poço, b) ponto fixo fonte, c) ponto fixo sela tipo 1 e d) ponto fixo sela tipo 2	19
Figura 2.4 – Oscilatórios: a) centro, b) espiral estável e c) espiral instável . .	19
Figura 2.5 – Caracterização do pontos fixos de acordo com os coeficientes do polinômio característico	20
Figura 2.6 – Duas trajetórias vizinhas num atrator estranho	22
Figura 3.1 – Série temporal do atrator caótico de Rössler – $x(t)$	23
Figura 3.2 – Solução do sistema dinâmico: a) Contínuo e b) discreto	24
Figura 3.3 – Evolução no tempo (a) Resposta periódica; (b) resposta caótica	25
Figura 3.4 – Gráfico de um sinal de ruído branco gaussiano	27
Figura 3.5 – Série temporal de Lorenz: a) sem ruído e b) contaminada por ruído branco SNR=25/1	29
Figura 3.6 – Espaço de estados de Lorenz: a) sem ruído e b) contaminado por ruído branco SNR=25/1	29
Figura 3.7 – Informações no domínio do tempo e domínio da frequência . . .	30
Figura 3.8 – FFT oscilador Duffing (a)Resposta caótica; (b) resposta periódica	30
Figura 3.9 – Funções periódicas e respectivos espectros de potências	32
Figura 3.10 – Sinal temporal com duas frequência e seu espectro	32
Figura 3.11 – Série temporal aperiódica e seu espectro de potências	33

Figura 3.12 – FFT de sinais caóticos e aleatórios	34
Figura 4.1 – Atratores caóticos 3-dimensionais	36
Figura 4.2 – Método das derivadas: a) Lorenz sem ruído e b) Lorenz com ruído SNR=25/1	38
Figura 4.3 – Método das coordenadas defasadas: a) informação mútua e b) autocorrelação	39
Figura 4.4 – Determinação de defasagem τ por informação mútua	41
Figura 4.5 – Método da defasagem reconstruindo espaço de estados de modelo de Lorenz	42
Figura 4.6 – Série temporal de Rössler: a) sem ruído e b) contaminada por ruído branco	49
Figura 4.7 – Espectro de frequências para a série temporal de Rössler	50
Figura 4.8 – Número do valor singular	50
Figura 4.9 – Projeção em três dimensões: a) espaço de estados original, obtido das equações por simulação numérica. b) Espaço reconstruído	51
Figura 4.10 - Trecho da série temporal de Rössler contaminada SNR=25/1.	51
Figura 4.11 – Série temporal de Rössler original e filtrada por SVD	52
Figura 5.1 – Expoentes de Lyapunov	53
Figura 5.2 – Evolução de um elemento esférico em um elipsoide	54
Figura 5.3 – Evolução tridimensional de um elemento esférico em um elipsoide.	55
Figura 5.4 – Sinais dos expoentes de Lyapunov para possíveis atratores tridimensionais	56
Figura 5.5 – Representação gráfica da trajetória de referência e da trajetória vizinha	57
Figura 5.6 – Representação esquemática do método proposto por Wolf	58
Figura 5.7 – Cálculo dos expoentes de Lyapunov	59

Figura 5.8 – Critério prático para substituição de vizinhos	60
Figura 6.1 – Sistemas de Lorenz caótico	62
Figura 6.2 – Sistema bidimensional e série temporal de Lorenz caótico	63
Figura 6.3 – Atrator de Lorenz – 3D X-Y-Z	64
Figura 6.4 – Influência das condições iniciais na resposta caótica	64
Figura 6.5 – Série temporal do modelo de Lorenz	65
Figura 6.6 – Trecho da série temporal que originou sinal	65
Figura 6.7 – Sinal reamostrado e normalizado	66
Figura 6.8 – Espaço de estados tridimensional reconstruído	67
Figura 6.9 – Primeira evolução (iterada).a) Início b)Ampliação	67
Figura 6.10 – Algoritmo de Wolf: a) início estimativas e b)sistema percorrido	68
Figura 6.11 – Maior expoente de Lyapunov sem ruído	68
Figura 6.12 – Série temporal de Lorenz: a) sem ruído, b) relação SNR=25/1 c) relação SNR=15/1 e d) relação SNR=5/1	69
Figura 6.13 –Espaço estados reconstruído: a)Derivada b)defasagem c)SVD	70
Figura 6.14 – Espaço de estados reconstruído: a) relação SNR=5/1 b) relação SNR=15/1 e c) relação SNR=25/1	71
Figura 6.15 – Série temporal de Lorenz original e contaminada por AWGN .	72
Figura 6.16 – Algoritmo de Wolf estimando o maior expoente no modelo de Lorenz com ruído	72
Figura 6.17 – Maior expoente de Lyapunov. a) SNR=50/1 e b)SNR=35/1 . .	73
Figura 6.18 – Maior expoente de Lyapunov. a) SNR=30/1 e b)SNR=5/1 . . .	74
Figura 6.19 – Calculando maior expoente de Lyapunov	75
Figura 6.20 – Sinal ruidoso: a) espectro de frequências, b) espectro em dB .	77
Figura 6.21 – Número do valor singular	77

Figura 6.22 – Espaço de estados prévio a estimativa do expoente de Lyapunov: a) com ruído b) filtrado por SVD e c) Sinal original	78
Figura 6.23 – Série temporal de Lorenz original e filtrada por SVD	79
Figura 6.24 – Maior expoente de Lyapunov do modelo de Lorenz	79
Figura 6.25 – Maior expoente de Lyapunov filtrado por SVD. a) SNR=5/1, b) SNR=10/1 e c) SNR=15/1	80
Figura 6.26 – Espaço de estados SNR=15/1 e sinal original	81
Figura 6.27 – Espaço de estados do modelo de Lorenz SNR=15/1	82
Figura 6.28 – Espaço de estados reconstruídos por SVD: a) primeira filtragem e b) segunda filtragem	82
Figura 6.29 – Espaço de estados do modelo de Lorenz SNR=5/1	83
Figura 6.30 – Espaço de estados reconstruídos por SVD: a) primeira filtragem e b) segunda filtragem	83
Figura 6.31 – Maior expoente de Lyapunov do modelo de Lorenz	84
Figura 6.32 – Método aplicado em diferentes níveis de ruído	85
Figura 6.33 – Maior expoente de Lyapunov do modelo de Lorenz SNR=50/1	86
Figura 7.1 – Seção aeroelástica típica com superfície de controle	87
Figura 7.2 – (a) Esquema da estrutura experimental (b) Detalhe da asa.	88
Figura 7.3 – (a) Suporte principal do experimento (b) Montagem final	89
Figura 7.4 – (a) Detalhe do mecanismo de ajuste de folga (b) Detalhe da suspensão	89
Figura 7.5 – (a) Encoder para torção (b) Encoder para a superfície de comando	90
Figura 7.6 – Encoder linear para flexão	90
Figura 7.7 – Amplitude do movimento da superfície de comando para velocidade crescente e decrescente	92
Figura 7.8 – Ampliação da região da Figura 7.6	93
Figura 8.1 – Série temporal resposta aeroelástica experimental $U = 1,041U_f$	94

Figura 8.2 – Trecho da série temporal $U = 1,041U_f$ que deu origem ao sinal	95
Figura 8.3 – Sinal normalizado velocidade escoamento crescente $U=1,041U_f$	95
Figura 8.4 – Espectro de frequência $U = 1,041U_f$	95
Figura 8.5 – Espaço de estados reconstruídos por SVD para $U = 1,041U_f$: a) primeira filtragem e b) segunda filtragem.	96
Figura 8.6 – Série temporal $U = 1,041U_f$ original e filtrada por SVD.	97
Figura 8.7 – Espaço de estados 3-dimensional reconstruído pelo método da defasagem	98
Figura 8.8 – Algoritmo de Wolf: a) Sistema dinâmico b)ampliação da região	98
Figura 8.9 – Obtenção do maior expoente de Lyapunov $U = 1,041U_f$: a) Espaço de estados 3-dimensional reconstruído pelo método defasagem, b) espaço percorrido pelo algoritmo ec)espectro de Lyapunov pelo algoritmo	99
Figura 8.10 – Espaço de estados reconstruído por SVD após filtragem simples e filtragem dupla, para incremento de velocidade	100
Figura 8.11 – Estimativa do maior expoente de Lyapunov pelo método de Wolf, para incremento de velocidade	101
Figura 8.12 – Evolução do espaço de estados com o incremento de velocidade de escoamento	102
Figura 8.13 – Espectros de frequência com o incremento de velocidade de escoamento	103
Figura 8.14 – Espaço de estados reconstruído por SVD após filtragem simples e filtragem dupla, velocidade decrescente, acima de <i>flutter</i>	104
Figura 8.15 – Espaço de estados reconstruído por SVD após filtragem simples e filtragem dupla, velocidade decrescente, abaixo de <i>flutter</i>	105
Figura 8.16 – Estimativa do maior expoente de Lyapunov pelo método de Wolf, para velocidade decrescente, acima da velocidade de <i>flutter</i>	106
Figura 8.17 – Estimativa do maior expoente de Lyapunov pelo método de Wolf, para velocidade decrescente, abaixo da velocidade de <i>flutter</i>	107
Figura 8.18 – Evolução do espaço de estados com o decremento da velocidade de escoamento	108
Figura 8.19 –Espectro de frequência para velocidade decrescente $0,9028U_f$	108

Figura 8.20 – Espaço de estados reconstruídos após dupla filtragem para velocidade decrescente: (a) abaixo da velocidade de <i>flutter</i> $U = 0,9028U_f$ e (b) acima da velocidade de <i>flutter</i> $U = 1,017U_f$	109
Figura 8.21 – Espaço de estados reconstruído por SVD após dupla filtragem, velocidade decrescente $U = 0,9028U_f$	110
Figura 8.22 – Espaço de estados reconstruído por SVD após dupla filtragem, velocidade crescente $U = 1,041U_f$	110

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Pontos fixos para espaços de estados bidimensionais	18
Tabela 6.1 – Parâmetros utilizados no algoritmo de Wolf para sinais de Lorenz	66
Tabela 6.2 – Maior expoente de Lyapunov pelo estimado algoritmo de Wolf.	76
Tabela 6.3 – Resultados para o maior expoente de Lyapunov em diferentes níveis de ruído SNR após filtragem por SVD.	81
Tabela 6.4 – Resultados para o maior expoente de Lyapunov em diferentes níveis de ruído SNR após dupla filtragem por SVD.	85
Tabela 7.1 – Velocidades consideradas na análise experimental	91
Tabela 8.1 – Parâmetros utilizados no algoritmo de Wolf sinais aeroelásticos	97
Tabela 8.2 – Maior expoente de Lyapunov com incremento de velocidade de escoamento após dupla filtragem	103
Tabela 8.3 – Maior expoente de Lyapunov com decremento de velocidade de escoamento após dupla filtragem	109

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ADC	<i>Analog-to-Digital converter</i> (Conversor Analógico-Digital)
AWGN	<i>Additive White Gaussian Noise</i> (Ruído gaussiano branco aditivo)
c.i.	Condição inicial
DAC	<i>Digital-to-Analog Converter</i> (Conversor Digital-Analógico)
DCI	Dependência das Condições Iniciais
DFT	<i>Discrete Fourier Transform</i> (Transformada de Fourier Discreta)
DSP	<i>Digital Signal Processor</i> (Processador de Sinal Digital)
e.d.o.	Equações diferenciais ordinárias
ESD	<i>Energy Spectral Density</i> (Densidade espectral de energia)
F_c	Frequência de Corte
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i> (Transformada de Fourier Rápida)
FNN	<i>Fake Nearby Neighbors</i> (Falsos Vizinhos próximos)
MOD	<i>Method of Delays</i> (Método dos Atrasos ou da Defasagem)
PSD	<i>Power Spectral Density</i> (Densidade Espectral de Potência)
PIV	<i>Particle Image Velocimetry</i> (Velocimetria de Imagem de Partícula)
RMS	<i>Root Mean Square</i> (Raiz do valor quadrático)
SNR	<i>Signal-to-Noise Ratio</i> (Relação sinal/ruído)
SVD	<i>Singular Value Decomposition</i> (Decomposição em Valores Singulares)
T_s	Intervalo de Amostragem

LISTA DE SÍMBOLOS

dB	Decibéis
D_e	Dimensão de imersão
d_0	Diâmetro da esfera inicial
d_j	Distância entre o j -ésimo para de vizinhos
d_{max}	Distância mínima para novos vizinhos
d_{min}	Distância máxima para novos vizinhos
L	Distância entre dois pontos de trajetórias vizinhas
L'	Comprimento inicial evoluído
M	Número de passos de reposição
n'	Dimensão do sistema dinâmico
N	Tamanho do sinal
$P(f)$	Transformada de Fourier
RAD	Radianos
t_0	Tempo inicial
th_{max}	Erro máximo para assumir novos vizinhos
Δt	Instante entre duas amostras
T	Período
$x(t)$	Série temporal experimental
ε	Raio da esfera
λ_i	Expoente de Lyapunov
λ_1	Maior expoente de Lyapunov
λ'	Autovalores
Θ	Direção do vetor ortonormal à trajetória inicial
α	Torção
β	Superfície de comando

β'	Ângulo de abertura do cone para novos vizinhos
δ	Constante de Feigenbaum
τ	Defasagem
ω	Flexão

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Sistemas aeroelásticos não-lineares	7
1.2	Objetivos do trabalho	10
1.3	Organização da dissertação.	11
2	SISTEMAS DINÂMICOS	13
2.1	Sistemas dinâmicos lineares e não-lineares	13
2.2	Sistemas dinâmicos unidimensionais e bidimensionais	15
2.3	Sistemas dinâmicos tridimensionais e caos	20
3	ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS	23
3.1	Introdução	23
3.2	Sinais ou séries temporais	24
3.3	Ruído em processamento de sinal	26
3.4	Transformada de Fourier	29
3.5	Filtros digitais	34
4	RECONSTRUÇÃO DO ESPAÇO DE ESTADOS	36
4.1	Introdução	36
4.2	Método das coordenadas defasadas (MOD)	38
4.2.1	Dimensão de imersão	39
4.2.2	Tempo de defasagem (“ <i>time-delay</i> ”)	40
4.2.3	Método da informação mútua média	41
4.3	Decomposição em valores singulares	42
4.4	SVD para reconstrução do espaço de estados	44
4.5	SVD como filtragem digital de séries temporais	51
5	DETERMINAÇÃO DE EXPOENTES DE LYAPUNOV	53
5.1	Introdução	53
5.2	Algoritmo de Wolf et al.	57
5.3	Algoritmo de Rosenstein et al.	61

6	CARACTERIZAÇÃO DE COMPORTAMENTO CAÓTICO EM SÉRIES TEMPORAIS OBTIDAS NUMERICAMENTE	62
6.1	Atrator caótico do modelo de Lorenz	62
6.2	Ruído branco adicionado a série	69
6.3	Efeito do ruído na reconstrução do espaço de estados	70
6.4	Efeito do ruído na estimativa do maior expoente de Lyapunov .	72
6.5	Aplicação de SVD para filtragem e efetividade na determinação correta do maior expoente de Lyapunov	77
7	CARACTERIZAÇÃO DE COMPORTAMENTO CAÓTICO EM SÉRIES TEMPORAIS AEROELÁSTICAS OBTIDAS EXPERIMENTALMENTE	87
7.1	Dispositivo com três graus de liberdade - folga.	87
7.2	Efeito da velocidade de escoamento para o modelo com três graus de liberdade.	91
8	RESULTADOS.	94
9	CONSIDERAÇÕES FINAIS.	112
9.1	Conclusões.	112
9.2	Sugestões para trabalhos futuros.	113
	REFERÊNCIAS	114

1 INTRODUÇÃO

A caracterização do comportamento não-linear de sistemas através de sinais obtidos experimentalmente é de fundamental importância para o desenvolvimento de modelos matemáticos mais precisos, especialmente em sistemas de alta complexidade, como sistemas aeroelásticos. A aeroelasticidade estuda a interação entre a deformação de uma estrutura elástica em um escoamento aerodinâmico e o esforço inercial resultante. Quando existe a interação entre estas forças surgem os fenômenos aeroelásticos que podem causar perigosas deformações, oscilações e instabilidades, sendo por isso, de grande importância prática em aeronáutica (VASCONCELLOS, 2012, p.21). Sistemas aeroelásticos tendem a ser não-lineares por natureza e a não-linearidade pode levar a situações imprevisíveis e algumas vezes incontroláveis. Tais efeitos são conhecidos e em algumas situações podem ser modelados numericamente, no entanto, a análise de sinais experimentais ainda representa a forma mais efetiva de se caracterizar a maioria dos fenômenos que ocorrem nas diversas condições de operação de uma aeronave, seja novos projetos ou ao longo da vida útil de uma aeronave em função de desgastes.

Projetos visam melhorar o conforto das aeronaves, segurança de voo, boa controlabilidade e toda prevenção de falhas previamente a sua operação. São realizados inúmeros ensaios e experimentos simulando diversas condições reais de voo, que podem originar dados sobre a dinâmica de cada sistema, expostos as mais diversas situações. Estes sinais são analisados através de técnicas para que se caracterize as dinâmicas e se necessário que seja feita a prevenção. Com sinais obtidos experimentalmente é possível reconstruir o espaço de estados, conhecer a dinâmica e caracterizar o comportamento do sistema, classificando-o entre estável, instável e o tipo de instabilidade.

Para a análise de sistemas aeroelásticos, quase sempre não-lineares, apresentando alta complexidade, comportamentos como bifurcações, oscilações de ciclo limite e caos, são necessárias técnicas modernas de dinâmica não-linear que podem ser aplicadas tanto na modelagem de sistemas como na análise posterior de sua resposta. Para tanto torna-se necessário o entendimento de conhecimentos básicos sobre dinâmica não-linear.

A dinâmica amplamente difundida nas mais diversas áreas do conhecimento, originalmente tratava-se de um ramo da física. Em meados de 1600, Newton

desenvolveu as equações diferenciais, descreveu as suas três leis de movimento e a lei da gravitação universal, e as combinou para explicar as leis de movimento planetário de Kepler. Newton em seu estudo resolveu o problema com dois corpos, tratava-se do cálculo do movimento da terra ao redor do sol, utilizando a lei do quadrado inverso da atração gravitacional entre eles. Estudos seguintes de matemáticos e físicos tentaram implementar o método analítico de Newton em problemas com três corpos (terra, sol e lua) tornando-se um problema de difícil resolução. Após décadas de estudos, observou-se que seria impossível descrever em fórmulas explícitas, a resolução de problemas para movimentos de três corpos (STROGATZ, 1994, p. 2).

O avanço surgiu com o trabalho de Poincaré no final do século XIX. Seu ponto de vista sobre o assunto tratava com ênfase a questão qualitativa ao invés da quantitativa. Poincaré desenvolveu uma abordagem geométrica para analisar esta questão. Assim, em vez de procurar por fórmulas, ele partiu para uma abordagem qualitativa, utilizando técnicas geométricas e topológicas (MONTEIRO, 2011, p. 20).

Poincaré também foi a primeira pessoa a vislumbrar a possibilidade do caos em um sistema determinístico, apresentando um comportamento imprevisível ou aleatório (não-linear), extrema sensibilidade às condições iniciais, com causa e efeito não sendo proporcionais tornando-se impossível a previsão ao longo do tempo.

A percepção da existência do caos ocorreu durante estudo no problema de três corpos, onde Poincaré buscou simplificar, assumindo que a massa de um corpo é muito menor do que a dos outros dois, $M_1 \sim M_2 \gg m$. O problema até então insolúvel, foi separado em dois problemas mais simples, podendo calcular analiticamente os movimentos de M_1 e M_2 , e posteriormente foi calculado o movimento do corpo de massa m .

O caos ainda ficou em segundo plano até metade do século XX, pois a dinâmica estudava osciladores não-lineares e suas aplicações. Muitas tecnologias surgiram através dos osciladores não-lineares como rádio, radar, laser, entre outras. Na teoria os osciladores também influenciaram o desenvolvimento de novas técnicas matemáticas.

A invenção do computador de alta velocidade na década de 1950 foi um divisor de águas na história da dinâmica (STROGATZ, 1994, p. 3). Com o computador foi possível simular equações de maneiras que antes seria impossível, possibilitando

experimental situações sobre sistemas não-lineares. Entre estes experimentos está a descoberta de Lorenz, que em 1963 descobriu o movimento caótico de um atrator estranho. Edward Norton Lorenz foi um matemático e meteorologista que estudou um modelo simplificado de testes de convecção na atmosfera, visando obter previsões climáticas futuras. Lorenz simplificou em um sistema composto por três equações diferenciais ordinárias, um modelo que simulava no computador a evolução das condições climáticas. Durante as simulações, percebeu que as soluções para suas equações não apresentavam equilíbrio ou um estado periódico, e sim oscilações irregulares e aperiódicas. Notou-se também extrema sensibilidade as condições iniciais, ao simular com duas condições iniciais ligeiramente diferentes, resultando em dinâmicas totalmente diferentes. Pequenas causas, que seriam pequenos erros na medição do estado inicial da atmosfera, seriam amplificadas levando a efeitos de previsões embaraçosas. Mas Lorenz mostrou que existia uma certa ordem mesmo no caos. Ao plotar o atrator tridimensional, as soluções do seu sistema de equações resultavam em um conjunto de pontos em formato de borboleta, ilustrada na Figura 1.1. Lorenz argumentou que este conjunto de pontos deveria ser “um complexo infinito de superfícies”, hoje é considerado um exemplo de fractal (STROGATZ, 1994, p. 3).

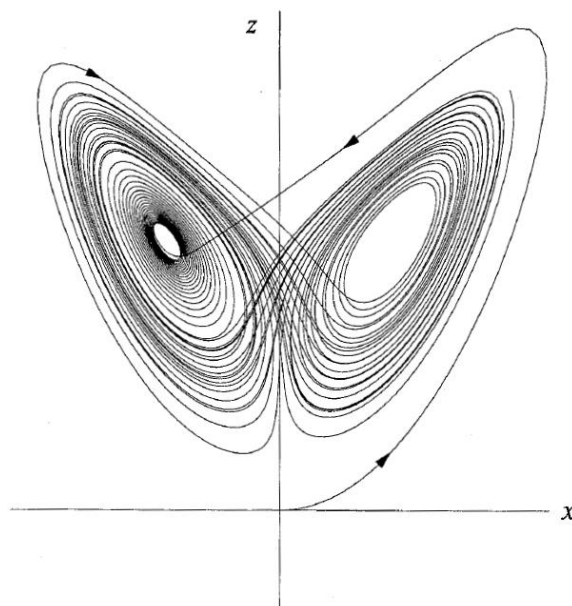


Figura 1.1 – Atrator tridimensional do modelo de Lorenz (STROGATZ, 1994).

Este trabalho de Lorenz não causou grande impacto até a década de 1970, anos em que o caos, parte da dinâmica, surge com força em novos estudos e desenvolvimentos. Em 1971, Ruelle e Takens propuseram uma nova teoria sobre turbulência e caos. A teoria apresentava turbulência em fluídos, baseado em considerações abstratas sobre atratores estranhos. Anos depois May apresenta exemplos de caos no mapa logístico. Em seguida, surge a descoberta mais surpreendente de todas, realizada pelo físico Feigenbaum. Uma regularidade inesperada na cascata de duplicações do período da equação logística. A duplicação de períodos, onde os pontos fixos mudam de 2^{n-1} para 2^n pontos de bifurcação obedecendo uma lei de escala, que se aproximam de um valor constante, conhecida como constante de Feigenbaum δ (FERRARA; PRADO, 2017, p. 177).

Na década de 1970 ainda houve duas grandes descobertas em dinâmica. Mandelbrot popularizou os fractais, produzindo em computador magníficos gráficos e apresentando a aplicação em diversas áreas. Outra descoberta feita por Winfree foi aplicação de métodos geométricos da dinâmica a oscilações biológicas.

Na década de 1980, existiram diversos estudos em dinâmica, devido ao grande interesse no caos, fractais, osciladores e suas aplicações. A teoria do caos mostrou que certos eventos podiam ter ocorrido de modo aleatório. Um sistema dinâmico que apresenta uma resposta caótica, possui características não-lineares, podendo ser imprevisível ao longo do tempo, dependendo dos parâmetros utilizados neste sistema. O caos possui forte dependência das condições iniciais e o sistema dinâmico deve possuir dimensão maior ou igual a 3. Além disso, uma resposta caótica está associada a existência da ferradura de Smale, caracterizando a presença de uma estrutura fractal (SAVI, 2017, p. 149).

A resposta caótica para um sistema dinâmico apresenta um atrator estranho, do tipo de um conjunto Cantor, com dimensão fractal. O espaço de estados poderia ser construído através de modelos matemáticos, que analiticamente seriam impraticáveis à medida que as dimensões aumentavam. Em dados experimentais, onde tem-se apenas a série temporal, tornava-se necessário extrair as informações sobre toda a dinâmica do sistema e reconstruir o espaço de estados para realizar caracterização. A reconstrução do espaço de estados é baseada no teorema de imersão de Takens que permite reconstruir um espaço de estados D_e -dimensional similar ao espaço de estados original, a partir de uma única variável (SAVI, 2017, p.

240). Basicamente, utiliza-se 3 métodos na reconstrução do espaço de estados: método das derivadas ou coordenadas derivativas (Packard et al., 1980); decomposição em valores singulares (SVD) (Broomhead e King, 1986); e método das coordenadas defasadas (Packard et al., 1980; Takens, 1981). Esse espaço reconstruído topologicamente equivale-se ao original, inclusive preservando os invariantes geométricos do sistema, como os expoentes de Lyapunov.

Para diagnosticar e compreender um sistema dinâmico caótico, foram desenvolvidos alguns invariantes como a dimensão do atrator, a entropia e os expoentes de Lyapunov. Sendo os expoentes de Lyapunov um invariante geométrico do sistema dinâmico, que possibilitam definir suas características essenciais (SAVI, 2017, p. 179). Este invariante que permite quantificar o quanto caótico é o comportamento e a sensibilidade às condições iniciais, tornou-se um dos mais empregados para caracterizar o caos. Desenvolvido pelo matemático russo Aleksandr Mikhailovick Lyapunov, os expoentes caracterizam um sistema caótico quando, pelo menos um expoente do espectro de Lyapunov é positivo. Isto significa que duas trajetórias, vizinhas, divergem exponencialmente na evolução do tempo.

Em 1985 Wolf et al., apresenta o primeiro algoritmo para estimar o maior expoente de Lyapunov a partir de dados experimentais. O método das trajetórias está relacionado com a evolução da distância, no espaço tangente, de duas trajetórias inicialmente próximas, onde a taxa média de alongamento é quantificada pelo expoente de Lyapunov. O algoritmo visa estimar expoentes não negativos, justamente para caracterização qualitativa e quantitativa do comportamento dinâmico. A proposta em obter apenas o maior expoente deve-se a caracterização de toda a dinâmica do sistema, ser definida pelo maior expoente. Para caracterização do caos, ou seja, aumento da distância entre os pontos em virtude da iteração é necessário que o expoente de Lyapunov seja positivo.

Dois algoritmos posteriormente desenvolvidos dentro da classificação de método das trajetórias, foram propostos por Rosenstein et al. (1993) e Kantz (1994), considerando que a divergência entre duas trajetórias em uma determinada direção pode oscilar ao longo do sinal. Assim, o maior expoente efetivo é definido como sendo o coeficiente angular de uma região que apresenta uma curva provocada pela instabilidade.

Cignetti et al. (2012) comparou a sensibilidade do algoritmo de Wolf e Rosenstein em estimar a estabilidade dinâmica local, utilizando um pequeno conjunto

de dados. Os dados de um sistema caótico, foram gerados através do atrator de Lorenz, visando estimar o maior expoente de Lyapunov, alternando parâmetros como dimensão de imersão, *delay* utilizado na reconstrução do espaço de estados e o tamanho do conjunto de dados. Ao fixar a dimensão de imersão e o *delay* para ambos os algoritmos, e variar apenas a quantidade de pontos do sinal, observou-se que para pequeno conjunto de dados o algoritmo de Wolf parece ser mais apropriado e para o sinal com maior conjunto de dados o algoritmo de Rosenstein apresentou resultados mais adequados para os expoentes de Lyapunov.

Os expoentes de Lyapunov apresentam um diagnóstico dinâmico muito útil na caracterização de sistemas caóticos. Vários métodos foram desenvolvidos para determinar expoentes de Lyapunov de séries temporais nas últimas décadas. Mas devido a presença de ruído nas séries temporais, em dados experimentais reais, os métodos enfrentam desafios para calcular o expoente de Lyapunov (Liu et al., 2010; Mehdizadeh, 2017; Yang e Wu, 2011). A presença de ruído pode ter efeitos adversos no expoente de Lyapunov, pois aumenta a possibilidade do algoritmo escolher falsos vizinhos no espaço de estados (Kantz, 1994; Yang e Wu, 2011) resultando em uma estimativa de valores incorretas do expoente de Lyapunov (Mehdizadeh e Sanjari, 2017). No estudo original de Rosenstein (Rosenstein et al., 1993), observou-se um erro de até 80% para o valor do expoente de Lyapunov de diferentes atratores na presença de ruído. Liu et al. (2010) estima o expoente máximo de Lyapunov para um sistema tridimensional com ruído branco adicional e cita a interferência do ruído no valor estimado. Rispens et al. (2014) utilizando os atratores de Lorenz e Rössler, também demonstraram que o percentual de erro dos valores do expoente de Lyapunov estava na faixa de 10-100%. Em um estudo recente, Mehdizadeh e Sanjari (2017) geraram uma série temporal e reconstruíram o espaço de estados com dimensão de imersão igual a 3 e atraso de 100 amostras. Utilizaram o algoritmo de Rosenstein para calcular o maior expoente de Lyapunov. Para determinar o efeito do ruído nos valores dos expoentes de Lyapunov adicionaram sete níveis de ruído branco gaussiano (SNR=55-25 dB com etapas de 5 dB). Os resultados demonstraram alto percentual de erro na presença de ruído, aproximadamente 60% de erro na estimativa do expoente de Lyapunov, sob diferentes níveis de ruído. Nas observações do trabalho sugerem que uma filtragem das séries temporais, pode ser mais apropriada antes do cálculo do expoente de Lyapunov. Os sinais experimentais reais sempre apresentam ruído de fundo, por este motivo procura-se uma alta relação sinal/ruído

durante o experimento, para que o sinal seja coletado sem grandes alterações, distorções, entre outros. Após dados coletados, utiliza-se a filtragem digital de sinais visando minimizar o efeito ocasionado pelo ruído e aproximar-se do sinal original.

Em séries experimentais o ruído é inevitável e pode comprometer resultados obtidos pelo método da defasagem. Esses efeitos podem ser minimizados por técnicas de filtragem (SIMONI, 2008, p.13). O sinal pode ser filtrado eletronicamente durante o experimento, porém, esta técnica nem sempre produz resultado satisfatório. A filtragem digital pode ser aplicada posteriormente ao experimento realizado.

Outros métodos de reconstrução do espaço de estados têm sido implementados. Vasconcellos (2007) utilizando o método da decomposição em valores singulares, reconstruiu o espaço de estados, utilizando as séries temporais experimentais obtendo bons resultados, mesmo em sinais ruidosos.

A filtragem utilizando a decomposição em valores singulares (SVD) é utilizada por Gan et al. (2015), visando atenuar ruídos aleatórios em dados sísmicos. A implementação do SVD de forma local (LSVD) ou global (GSVD) são utilizadas a fim de melhorar a relação sinal/ruído (SNR) dos dados coletados.

Recentemente, Epps e Krivitzky (2019) utilizaram, com sucesso, a decomposição em valores singulares em dados ruidosos, especificamente para filtragem do ruído em imagens (PIV, do inglês *particle image velocimetry*). Para os dados experimentais ruidosos, os modos SVD inferiores permanecem relativamente isentos de ruído, possibilitando a filtragem de dados mantendo os modos inferiores. Foi constatado que a eficiência da filtragem por SVD depende do nível de ruído dos dados, porém, mesmo em casos onde a distorção da imagem era considerável provocada pela contaminação do ruído, o SVD possibilitou recuperar através da filtragem, um resultado próximo da imagem sem ruído.

1.1 Sistemas aeroelásticos não-lineares

Sistemas aeroelásticos são quase sempre não-lineares, muitas vezes apresentando comportamentos como: bifurcações, oscilações de ciclo limite e caos (SHETA et al, 2002).

Aeroelasticidade é o termo utilizado por engenheiros aeronáuticos como a ciência que estuda as consequências da interação mútua entre forças de inércia,

forças aerodinâmicas e forças elásticas, simultaneamente agindo em uma estrutura exposta à um escoamento (BISPLINGHOFF et al., 1996, p. 16).

Forças de inércia são decorrentes das acelerações às quais a massa do corpo está sujeita. Forças elásticas são decorrentes das reações elásticas do corpo que se deforma, sendo uma deformação sofrida pela estrutura, mas que retoma suas condições iniciais. E por fim, forças aerodinâmicas são decorrentes do escoamento de fluido, como o próprio ar, ao qual o corpo se move dentro. A Figura 1.2 representa o conhecido triângulo aeroelásticos de forças (BISPLINGHOFF, 1996), no qual os fenômenos aeroelásticos dinâmicos são apresentados como resultado da interação entre as três forças.

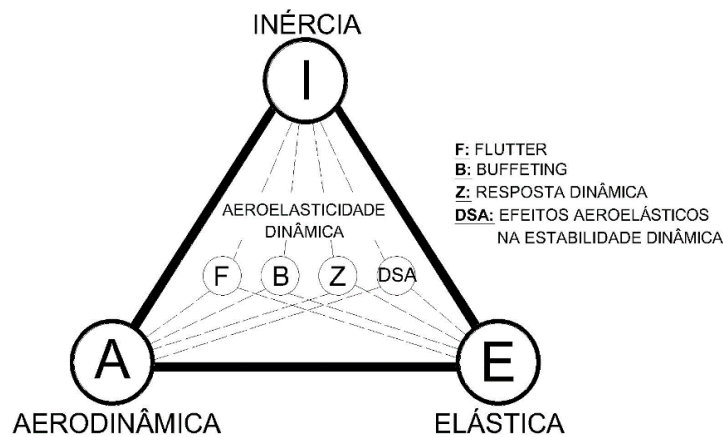


Figura 1.2 – O triângulo aeroelásticos de forças (BISPLINGHOFF, 1996).

As aeronaves modernas, são projetadas com estruturas leves, aerodinâmicas, e muito flexíveis para atender as situações que estão expostas durante o voo. Esta flexibilidade necessária e inevitável no projeto da estrutura é a fundamental responsável pelos vários fenômenos aeroelásticos. Fenômenos que devem ser conhecidos, evitados e controlados para que não ocorram eventos catastróficos.

Fenômenos aeroelásticos lineares podem ser previstos em projeto e evitados, no entanto, sistemas aeroelásticos reais são inerentemente não-lineares e a não-linearidade pode levar a situações imprevisíveis e algumas vezes incontroláveis (VASCONCELLOS, 2012, p. 23). Diversas pesquisas têm sido realizadas para identificar e caracterizar os efeitos aeroelásticos não-lineares, visando minimizar ou até mesmo utilizar de maneira favorável em voo (DOWELL; TANG, 2002). Em experimentos são desenvolvidos modelos teóricos, além de soluções para problemas práticos em muitas áreas onde a teoria existente ainda não é consistente

(BISPLINGHOFF et al., 1996). No ramo da aeronáutica, os experimentos podem necessitar de muitas medidas simultâneas de sinais, tornando-se complicado a coleta de dados e encarecendo demasiadamente. Porém, utilizando técnicas para análise de sistemas dinâmicos não-lineares, torna-se possível resgatar importantes características do sistema. Um sinal ou série temporal obtido em experimento pode ser utilizado em técnicas de reconstrução do espaço de estados, possibilitando analisar fenômenos aeroelásticos (SIMONI, 2008, p. 3).

Simoni (2008) apresenta que poucos resultados tem sido observados na literatura técnica sobre técnicas de análise aeroelástica não-linear utilizando métodos de reconstrução do espaço de estados. Marques et al. (2003, 2006) e Simoni et al. (2005) apresentaram estudos preliminares sobre reconstruir o espaço de estados, utilizando dados experimentais aeroelásticos não-lineares.

Os resultados apresentados por Marques et al. (2003, 2004) demonstraram que a utilização de técnicas de reconstrução para análise aeroelástica é bastante promissor na caracterização dos fenômenos não-lineares. Os dados obtidos experimentalmente contêm informações essenciais de toda a dinâmica do sistema. Assim, o estudo das respostas aeroelásticas obtidas em experimentos podem resultar em uma melhor compreensão dos fenômenos não-lineares, inclusive possibilitando verificar-se novos problemas (SIMONI, 2008, p.4).

Em aeronaves modernas, projetadas para serem leves e rápidas, com estrutura aerodinâmica, somado ao fluído no qual se move dentro durante voo, surgem respostas aeroelásticas não-lineares. As condições normais de uma aeronave em operação somado aos desgastes de peças e conjuntos aumentam ainda mais as medidas não-lineares a serem analisadas. Neste contexto, modelos matemáticos aeroelásticos podem apresentar limitações, os efeitos aerodinâmicos não-lineares são mais difíceis de analisar, em função das equações que governam o sistema nem sempre possuem solução analítica, promovendo assim, a utilização de dados experimentais para reconstruir a dinâmica não-linear aeroelástica.

As não-linearidades em sistemas aeronáuticos são divididas em termos de sua origem na aerodinâmica e estrutura (SIMONI, 2008, p. 5). As não-linearidades aerodinâmicas podem estar ligadas ao movimento de ondas de choques sobre a asa e corpo de uma aeronave, também pelos efeitos viscosos da separação do escoamento durante o voo. Quanto à estrutura tem-se o desgaste natural de uma peça

empregada na aeronave que sofre com ciclos de movimento, fadiga ou folga principalmente nas superfícies de controle (LEE et al., 1999).

Uma aeronave antes de ser operada sob condições reais de uso, deve ser submetida a análises teóricas, a testes em simuladores de voo, para prevenir falhas previamente a sua operação. No entanto, a análise de sinais experimentais, como os obtidos nas fases de ensaios em solo e ensaios em voo ainda representam a forma mais efetiva de se caracterizar a maioria dos fenômenos que ocorrem nas diversas condições de operação de uma aeronave, servindo inclusive como entrada para o aumento da confiabilidade dos modelos matemáticos. Para tanto, é fundamental o uso de técnicas de análise de sinais e técnicas para classificar e identificar o comportamento não-linear.

1.2 Objetivos do trabalho

Técnicas de caracterização do comportamento não-linear, como a determinação do maior expoente de Lyapunov, podem ser afetadas pela presença de ruído. Sinais experimentais sempre apresentam ruídos em diferentes níveis, dependendo dos sensores e sistemas de aquisição. O objetivo do trabalho é aplicar o método da decomposição em valores singulares (do inglês *Singular Value Decomposition* – SVD) para filtrar sinais contaminados, minimizando assim a interferência do ruído, para a caracterização do comportamento não-linear através do maior expoente de Lyapunov.

As séries temporais com dinâmica não-linear caótica serão extraídas inicialmente do atrator estranho de Lorenz, obtidas numericamente. As séries temporais extraídas do atrator serão contaminadas com dez níveis de ruído branco gaussiano (SNR=50-5 dB com etapas de 5 dB) simulando, em situação controlada, que a série tenha sido coletada em experimento.

Após os testes em séries temporais obtidas dos modelos matemáticos, a técnica será aplicada em sinais aeroelásticos experimentais obtidos anteriormente pelo grupo de pesquisa.

Com os resultados obtidos, espera-se demonstrar, como contribuições desse trabalho, as vantagens da aplicação da referida técnica para filtragem, reconstruindo

o espaço de estados eficientemente, diminuindo consideravelmente os efeitos do ruído e permitindo uma estimativa mais precisa do maior expoente de Lyapunov em sinais contaminados.

1.3 Organização da dissertação

Esta dissertação está dividida em nove capítulos. Neste primeiro Capítulo é apresentado a motivação para realizar a caracterização de um sistema dinâmico não-linear e uma revisão na literatura sobre dinâmica, métodos para reconstruir a dinâmica do sistema a partir das séries temporais e algoritmos para estimar os expoentes de Lyapunov. Mostra também possíveis efeitos que o ruído presente no sinal pode ocasionar em uma caracterização e os métodos utilizados ultimamente para filtrar estes sinais ruidosos. Ainda no Capítulo é introduzido alguns conceitos de aeroelasticidade, a dinâmica também não-linear dos sistemas aeroelásticos e os motivos que causam esta não-linearidade, seja em novos projetos ou aeronaves em uso.

O Capítulo 2 apresenta alguns conceitos sobre sistemas dinâmicos, como identificar e classificar o sistema dinâmico. Os sistemas dinâmicos não-lineares, como identificar esta não-linearidade e as características existentes em um sistema dinâmico não-linear. Apresenta tipos de atratores para os sistemas dinâmicos unidimensional, bidimensional e tridimensional introduzindo os efeitos do caos.

No Capítulo 3 são apresentadas noções para análise de sinais. Apresenta definições sobre série temporal e respostas para diferentes dinâmicas. Mostra a interferência do ruído em relação ao sinal e suas séries temporais ruidosas. Apresenta como alternar a mudança no domínio do tempo para a frequência, através da transformada rápida de Fourier e a vantagem em utilizar filtros digitais previamente a reconstrução do espaço de estados.

O Capítulo 4 apresenta métodos para reconstruir o espaço de estados a partir da série temporal. Mostra como implementar a reconstrução pelo método da defasagem e como obter os parâmetros dimensão de imersão, *delay* e informação mútua. Apresenta também conceitos sobre a decomposição em valores singulares, a aplicação do SVD na filtragem digital das séries temporais ruidosas e as técnicas necessárias para definir os parâmetros exigidos na utilização do método na reconstrução do espaço de estados. No Capítulo utiliza-se a série temporal de um

atrator caótico, contaminado com ruído, sendo submetida a filtragem digital pela técnica SVD.

No capítulo 5 são apresentados os algoritmos de Wolf et al. e Rosenstein et al., ambos para calcular o maior expoente de Lyapunov de uma série temporal.

Os expoentes de Lyapunov são calculados no Capítulo 6. Para o cálculo do maior expoente de Lyapunov é utilizado o algoritmo de Wolf (1985). O algoritmo reconstrói o espaço de estados pelo método da defasagem e percorre o atrator estimando o maior expoente do sistema dinâmico. Neste Capítulo o sinal não-linear utilizado é extraído do atrator de Lorenz. O maior expoente de Lyapunov é calculado para o sinal sem ruído, sendo este o valor de referência. O sinal então é contaminado por ruído branco com diferentes relações sinal/ruído (SNR) e calcula-se o maior expoente para estes sinais ruidoso. Os sinais contaminados são filtrados previamente pelo método SVD e novamente estima-se o maior expoentes de Lyapunov. Os resultados são comparados.

O capítulo 7 apresenta o experimento já realizado pelo grupo de pesquisa, apresentando em detalhes o dispositivo com três graus de liberdade e a fixação da superfície de comando com a introdução da folga. Apresenta ainda detalhes técnicos sobre a estrutura utilizada para fixação da asa, detalhes sobre a asa, o túnel de vento e informações sobre aquisição dos dados experimentais.

No Capítulo 8 são apresentadas as séries temporais aeroelásticas experimentais da superfície de comando, originadas do experimento com três graus de liberdade e folga não-linear. Um caso é escolhido como exemplo e todas as ferramentas para análise da série temporal são utilizadas, concluindo com a caracterização pelo maior expoente de Lyapunov. Os sinais obtidos são normalizados, submetidos a dupla filtragem digital pelo método SVD e caracterizados através dos expoentes de Lyapunov. Os resultados de todos os casos referentes a variação de velocidade de escoamento durante o experimento, são tabelados para análise e caracterização de cada dinâmica.

No Capítulo 9 são apresentadas as considerações finais através das conclusões e sugestões para continuidade deste trabalho.

2 SISTEMAS DINÂMICOS

2.1 Sistemas dinâmicos lineares e não-lineares

Os sistemas dinâmicos podem ser descritos de duas formas, através de equações diferenciais e mapas iterados. Quando a dinâmica do sistema é dada por equações diferenciais a evolução do sistema é descrita em tempo contínuo, e quando utiliza-se mapas iterados é observada uma dinâmica onde o tempo é discreto. Os mapas também podem ser úteis, tanto para fornecer exemplos simples de caos, como sendo ferramentas para analisar as soluções periódicas ou caóticas de equações diferenciais (STROGATZ, 1994, p. 5).

Uma equação diferencial ordinária (e.d.o.), envolve apenas derivadas ordinárias dx/dt e d^2x/dt^2 . Existe apenas uma variável independente, o tempo t . Uma estrutura geral para equações ordinárias é apresentada pelo sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{2.1}$$

O ponto que aparece acima do símbolo, neste sistema sobre x , indica uma derivada obtida em relação ao tempo t (por exemplo $\dot{x}_i \equiv dx_i/dt$). A expressão \dot{x} era a notação de Newton para derivadas. As variáveis x_1, \dots, x_n podem representar ocorrência de determinados eventos, populações de diferentes espécies em um ecossistema ou as posições e velocidades dos planetas no sistema solar. As funções f_1, \dots, f_n são definidas pelo problema analisado. Sendo as funções $f_i(\cdot)$ que definem as características do sistema sendo linear ou não-linear.

Onde a função $f_i(\cdot)$ apresenta somente termos à primeira potência, tem-se uma função linear, caracterizando o sistema como linear. No entanto se as funções forem não-lineares, o sistema também será não-linear.

Um sistema linear pode ser resolvidos analiticamente com certa facilidade, já em sistemas não-lineares torna-se mais difícil, muitas vezes inviável a obtenção de

soluções analíticas. Sistemas não-lineares não podem ser divididos em partes para serem resolvidas separadamente (STROGATZ, 1994, p. 8).

Sistemas dinâmicos podem ser autônomos, se as funções não dependerem explicitamente do tempo. Caso contrário (se $f = f(x,y,t)$) o sistema é dito não-autônomo (FERRARA; PRADO, 2017, p. 15). Uma e.d.o. não-autônoma pode ser reduzida a um sistema autônomo ao inserir mais uma dimensão no sistema. Segundo Ferrara e Prado (2017), a redução ocorre ao considerarmos o tempo como uma variável adicional, *i.e.*, $t = z$, tal que $dz/dt = 1$. A redução de uma (ou mais) e.d.o. de ordem superior em duas (ou mais) e.d.o. de primeira ordem também ocorre se considerar uma nova variável $y = \dot{x}$. Como exemplo de um sistema dinâmico não-autônomo temos o oscilador harmônico amortecido e forçado. Depende explicitamente do tempo, como pode-se observar na seguinte equação:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + w_0^2 x = F_0/m \cos(\omega t) \quad (2.2)$$

A transformação da equação de movimento (2.2) em um sistema de três equações diferenciais de primeira ordem acopladas, ocorre considerando uma nova variável $\dot{x} = y$, e o tempo como uma variável adicional $t = z$, tal que $dz/dt = 1$ ($\dot{z} = 1$) obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y , \\ \dot{y} &= f(x,y,z) = (F_0/m) \cos(\omega z) - \gamma y - w_0^2 x , \\ \dot{z} &= 1 , \end{aligned} \quad (2.3)$$

que constitui um sistema de três equações de primeira ordem acopladas e autônomas, pois foi removida a dependência do tempo ao adicionar uma nova dimensão ao sistema (3 graus de liberdade: x,y,z).

O número de variáveis, corresponde a dimensão do espaço abstrato n' -dimensional, onde são representadas as soluções do sistema dinâmico. O sistema que possui duas dimensões, apresenta um par de funções $x_1(t)$ e $x_2(t)$, que podem representar, por exemplo, as posições e velocidades dos planetas no sistema solar.

O espaço de estados para este sistema dinâmico 2-dimensional pode ser construído através das coordenadas (x_1, x_2) , onde a solução para as funções $(x_1(t), x_2(t))$ representará um ponto deslocando-se ao longo de uma curva nesse espaço, conforme apresenta a Figura 2.1.

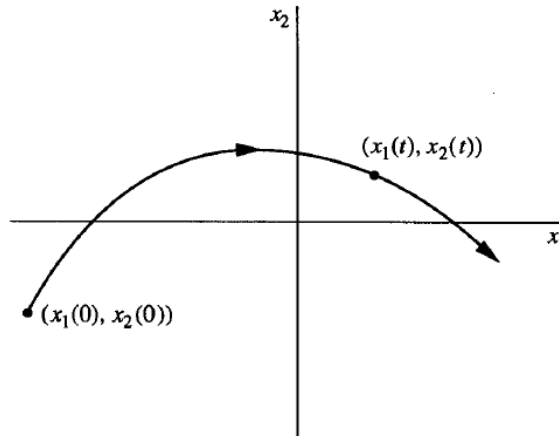


Figura 2.1 – Espaço construído com coordenadas (x_1, x_2) e a trajetória percorrida na evolução temporal (STROGATZ, 1994).

A curva formada pelo deslocamento do ponto partindo de uma posição inicial até a próxima posição, evoluindo no tempo é chamada de trajetória, e o espaço preenchido por estas trajetórias é chamado de espaço de fase ou espaço de estados (STROGATZ, 1994, p. 7).

2.2 Sistemas dinâmicos unidimensionais e bidimensionais

Um sistema pode ser definido como um conjunto de objetos agrupados por alguma interação ou interdependência, de modo que existam relações de causa e efeito nos fenômenos que ocorrem com os elementos desse conjunto (MONTEIRO, 2011, p. 41). Um sistema dinâmico, apresenta algumas grandezas que caracterizam os objetos do sistema e que sofrem variações a medida que o tempo evolui. Em termos matemáticos, um sistema dinâmico pode ser representado por equações diferenciais ordinárias. O número de variáveis que caracterizam o estado do sistema, define a dimensão do espaço de estados. No caso do crescimento exponencial populacional, a equação diferencial que descreve o sistema é de primeira ordem.

$$\dot{x} = rx \quad (2.4)$$

onde x é a população no tempo t e r é a taxa de crescimento. O sistema é classificado primeira ordem e linear em x .

Segundo Strogatz (1994), equação logística para uma única espécie (mapa logístico unidimensional), pontos fixos e bifurcações são descritos por equações de primeira ordem, pois necessitam de apenas uma variável para solucionar o problema.

Sistemas de dimensão um ($n = 1$) apresentam apenas uma variável de estado. A equação desse sistema dinâmico é descrita por:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.5)$$

O sistema apresentado define que f atua sobre as variáveis de estado x , definindo o próximo instante no tempo. É uma descrição quadro a quadro do que acontece, descrevendo a evolução no tempo das variáveis de estado, permitindo prever o futuro a partir do passado (SAVI, 2017, p. 69). Descrevem matematicamente entidades em movimento, permitindo prever sua dinâmica no tempo.

Quando tem-se ponto fixo ou ponto de equilíbrio do sistema os pontos x para os quais $\dot{x} = 0$, as trajetórias que passam próximas de um ponto fixo podem ser atraídas ou repelidas por ele, dependendo de qual tipo é este ponto fixo. Os pontos fixos são classificados em três tipos: poço, fonte e sela. O ponto fixo tipo sorvedouro (poço) atrai as trajetórias para si, pois trata-se de um ponto fixo estável. O ponto fixo tipo fonte repele as trajetórias que passam próximas, sendo instável. Já o ponto fixo tipo sela atrai e repele, dependendo da direção que as trajetórias se aproximam (VASCONCELLOS, 2007, p.15). A Figura 2.2 ilustra os diferentes tipos de ponto fixo.

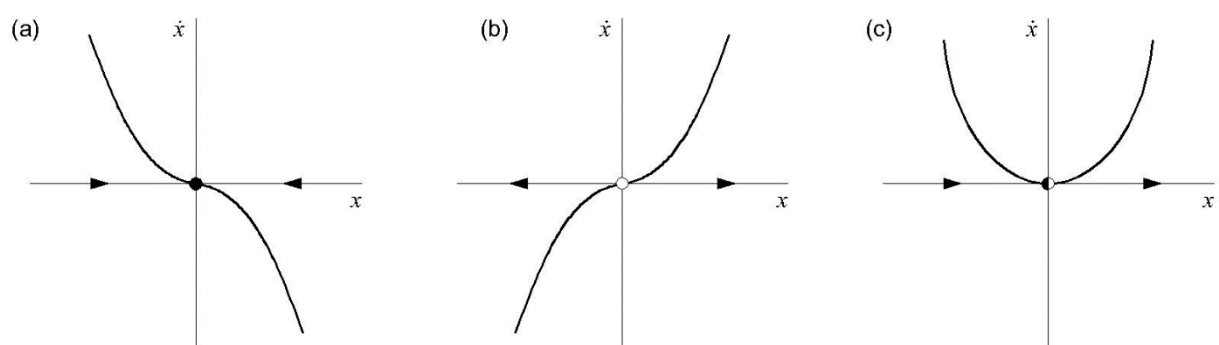


Figura 2.2 – a) Ponto fixo poço, b) ponto fixo fonte e c) ponto fixo sela (STROGATZ, 1994).

A estabilidade do ponto fixo (x^*, y^*) depende dos autovalores, simbolizados por λ' . O sinal da derivada pode identificar o tipo de ponto fixo. Quando temos sinal negativo trata-se de um ponto fixo poço, portanto estável, se o sinal for positivo tem-se ponto fixo fonte, portanto instável. Quando o autovalor é igual a zero, o ponto fixo é uma sela identificando assim as seguintes possibilidades para os tipos de pontos de equilíbrio.

Estável: = {tal que $\lambda' < 0$ }

Instável: = {tal que $\lambda' > 0$ }

Centro: = {tal que $\lambda' = 0$ }

Conhecendo o tipo de ponto de fixo é possível deduzir como as trajetórias irão evoluir ao longo do tempo no espaço de estados. Para sistemas unidimensionais, as trajetórias só podem ser atraídas para pontos fixos estáveis ou repelidas de pontos fixos instáveis, sem oscilação ou reversão da direção (VASCONCELLOS, 2007, p. 16).

Sistemas dinâmicos com duas dimensões possuem mais variações de comportamento e um novo tipo de atrator deve ser introduzido para explicá-los (HILBORN, 2000, p. 87).

Segundo Strogatz (1994), pêndulos e osciladores harmônicos são descritos por equações de segunda ordem, pois necessitam de duas variáveis para solucionar os problemas. No caso do balanço de um pêndulo temos uma equação de segunda ordem, em função das duas variáveis presentes na equação.

$$\ddot{x} + \frac{g}{L} \sin x = 0 \quad (2.6)$$

onde x é o seu ângulo atual e \dot{x} a velocidade angular. Para solucionar a equação o sistema necessita de duas variáveis para caracterizar o espaço de estados, sendo classificado como segunda ordem e não-linear.

Sistemas bidimensionais ($n=2$) apresentam portanto duas variáveis de estado, x_1 e x_2 . A equação desse sistema dinâmico é descrita por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (2.7)$$

No caso bidimensional, os pontos fixos são os pontos (x_{o1}, x_{o2}) que satisfazem a condição:

$$f_1(x_{o1}, x_{o2}) = 0 \quad (2.8)$$

$$f_2(x_{o1}, x_{o2}) = 0$$

O tipo de ponto fixo é descrito pelo valor numérico da derivada de f_1 e f_2 para o ponto fixo. No caso bidimensional, a função é dependente de duas variáveis, considera-se quatro derivadas parciais. O comportamento do ponto fixo dependerá dessas quatro derivadas, sendo que cada ponto fixo tem dois autovalores reais ou um par de autovalores complexos (HILBORN, 2000, p. 88).

Para resolução do problema, faz-se necessário uma expansão em série de Taylor da equação (2.7) nas vizinhanças do ponto fixo (x_{o1}, x_{o2}) , desprezando termos de derivada maior que um. O resultado obtido é um par de equações diferenciais lineares de primeira ordem com coeficientes constantes. Esses coeficientes são os valores numéricos das derivadas parciais no ponto fixo (VASCONCELLOS, 2007, p. 17). Os coeficientes são utilizados na construção da matriz Jacobiana do sistema, descrito por:

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

sendo f_{ij} a derivada parcial $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$,

Sendo TrJ definido como o traço das matriz Jacobiana, obtido pela somatória dos elementos da diagonal principal e Δ o determinante da matriz Jacobiana, o ponto fixo pode ser identificado conforme Tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Pontos fixos para espaços de estados bidimensionais.

	$TrJ < 0$	$TrJ > 0$
$\Delta > (1/4)(TrJ)^2$	poço espiral (atrator)	fonte espiral (repulsor)
$0 < \Delta < (1/4)(TrJ)^2$	poço (atrator)	fonte (repulsor)
$\Delta < 0$	ponto sela (tipo 1)	ponto sela (tipo 2)

Fonte: VASCONCELLOS, 2007, p.18

As Figuras 2.3 e 2.4 ilustram um resumo das diferentes possibilidades para os tipos de pontos de equilíbrio no espaço de estados. A Figura 2.3 apresenta os quatro comportamentos não-oscilatórios das trajetórias (poço, fonte, sela tipo 1 e sela tipo 2).

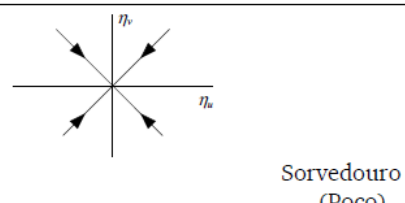
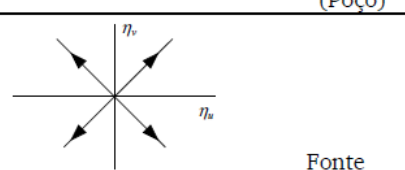
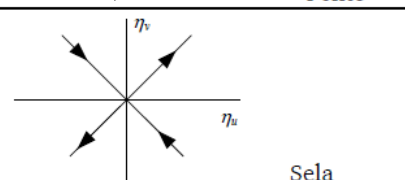
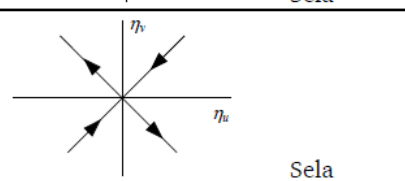
(a)	$\Delta > 0$	$\text{tr}(A) < 0$ $\sqrt{\Delta} < \text{tr}(A)$		Sorvedouro (Poço)
(b)	$\Delta > 0$	$\text{tr}(A) > 0$ $\sqrt{\Delta} < \text{tr}(A)$		Fonte
(c)	$\Delta > 0$	$\text{tr}(A) < 0$ $\sqrt{\Delta} > \text{tr}(A)$		Sela
(d)	$\Delta > 0$	$\text{tr}(A) > 0$ $\sqrt{\Delta} > \text{tr}(A)$		Sela

Figura 2.3 – Ponto fixo 2-dim: a) ponto fixo poço, b) ponto fixo fonte, c) ponto fixo sela tipo 1 e d) ponto fixo sela tipo 2 (SAVI, 2017).

A Figura 2.4 apresenta os comportamentos oscilatórios.

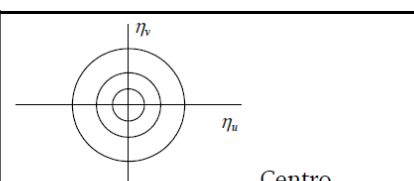
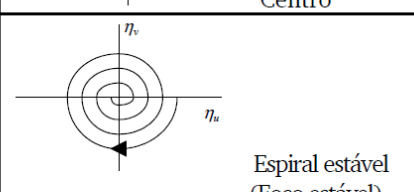
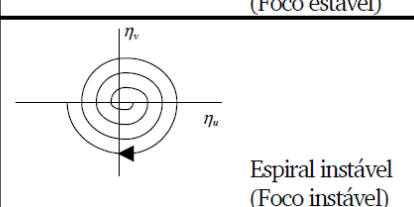
(a)	$\Delta < 0$	$\text{tr}(A) = 0$		Centro
(b)	$\Delta < 0$	$\text{tr}(A) < 0$		Espiral estável (Foco estável)
(c)	$\Delta < 0$	$\text{tr}(A) > 0$		Espiral instável (Foco instável)

Figura 2.4 – Oscilatórios: a) centro, b) espiral estável e c) espiral instável (SAVI, 2017).

Em termos dos coeficientes da equação característica, a Figura 2.5 apresenta as identificações das regiões que definem cada tipo de ponto fixo.

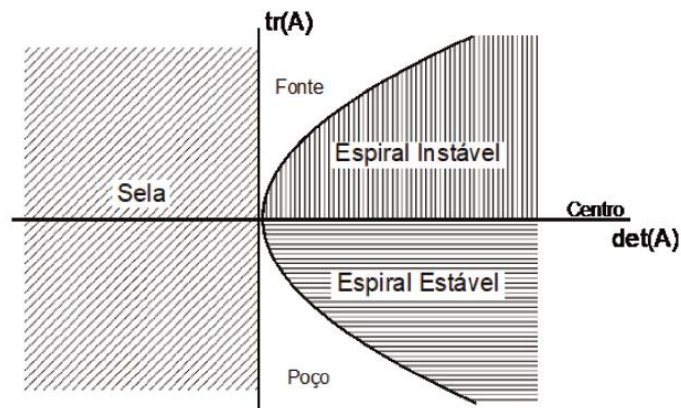


Figura 2.5 – Caracterização dos pontos fixos de acordo com os coeficientes do polinômio característico (SAVI, 2017).

2.3 Sistemas dinâmicos tridimensionais e caos

Uma não-linearidade pode ser compreendida a partir da ideia de que pequenas causas podem estar associadas a grandes efeitos. Assim, modelos não-lineares de fenômenos naturais são mais realísticos quando comparados aos modelos com aproximações lineares (SAVI, 2017, p. 33).

O termo não-linear refere-se a uma dinâmica que não apresenta um único sentido. Um sistema dito dinâmico não-linear evolui no tempo com um comportamento muitas vezes não periódico, com múltiplos caminhos, podendo apresentar os mais variados finais. Desta maneira, muitas vezes não é possível obter uma solução analítica para os sistemas não-lineares. A alternativa para avaliar como o sistema dinâmico evolui ao longo do tempo é a utilização de métodos numéricos que descrevem o problema real, contínuo no tempo, através de uma discretização (SAVI, 2017, p. 74). Assim, as equações de movimento do sistema dinâmico, são transformadas em um sistema algébrico, podendo ser resolvido.

Em sistemas dinâmicos não-lineares as previsões futuras são possíveis desde que se conheça as condições iniciais. Entretanto sua dinâmica pode ser mudada completamente ao sofrer mínimas alterações dos seus parâmetros no presente. A Figura 1.1 apresentou o conhecido atrator caótico de Lorenz, que ilustra um sistema

dinâmico não-linear, onde seu comportamento futuro é previsível, se as condições iniciais (c.i.) forem conhecidas.

Outro fator que identifica um sistema dinâmico não-linear é a sensibilidade às condições iniciais. Ao realizar duas simulações, com mínima alteração na condição inicial do sistema, nota-se inicialmente que as duas órbitas evoluem no tempo com certa proximidade, mas na medida que o tempo evolui, é possível observar uma divergindo da outra. Dentre as características essenciais do caos tem-se a sensibilidade a condições iniciais, sendo esta a essência da não-linearidade em que pequenas causas podem estar associadas a grande efeitos na evolução do tempo.

Um sistema com comportamento caótico determinístico pode ocorrer em sistemas com pelo menos três graus de liberdade. Assim, um sistema dinâmico que apresenta comportamento caótico será composto de duas ou mais equações não-lineares.

Em sistemas dissipativos, podem existir regiões limitadas do espaço de estados, chamadas atratores, para as quais trajetórias convergem (MONTEIRO, 2011, p. 421). O sistema dinâmico tende a ser atraído a medida que o tempo evolui, para um atrator. Em sistema dinâmico de tempo contínuo, autônomo e bidimensional, temos dois tipos de atratores segundo teorema de Poincaré-Bendixson, atrator ponto fixo e atrator ciclo limite (periódico). Num sistema tridimensional temos outras duas figuras, atrator superfície toroidal (toro) e atrator estranho.

Sendo o atrator um conjunto de invariante para o qual órbitas próximas convergem depois de um tempo suficientemente longo, temos o atrator estranho quando inicialmente pontos arbitrariamente próximos estarão exponencialmente separados (divergem) depois de um tempo suficientemente longo. Segundo a definição de Ruelle e Takens (1971), um atrator é chamado estranho quando as linhas de fluxo dependem sensitivamente das condições iniciais.

Um sistema dinâmico que apresenta comportamento caótico possui um atrator estranho no seu espaço de estados. Este nome foi introduzido por Ruelle e Takens, num trabalho sobre o processo de transição de fluxo laminar para fluxo turbulento em fluidos. Um atrator estranho apresenta um comportamento aparentemente imprevisível.

Atualmente existem várias definições para o caos. Aqui destaca-se três princípios importantes como a existência de dependência sensível às condições iniciais, causa e efeito não são proporcionais e a não-linearidade.

Como pequenos desvios nas condições iniciais sempre ocorrem, seja devido a imprecisões inerentes ou pela existência de ruído experimental, a posição de uma trajetória dentro de um atrator estranho não é previsível de maneira trivial (FERRARA; PRADO, 2017, p. 88). O caos determinístico assim como a imprevisibilidade da dinâmica de um atrator caótico está associado à dependência das condições iniciais. Essa dependência, existindo, resulta das não-linearidades presentes no sistema, ocasionando divergência exponencial entre duas trajetórias vizinhas, como apresentado na Figura 2.6.

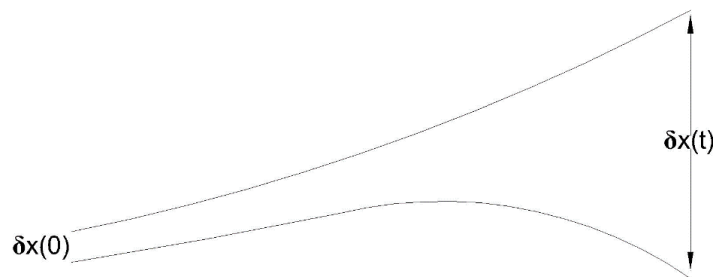


Figura 2.6 – Num atrator estranho duas trajetórias vizinhas no espaço de fases divergem. (FERRARA; PRADO, 2017, p. 136).

Para caracterização da dinâmica caótica dos atratores estudados, utiliza-se um dos invariantes mais empregados, os expoentes de Lyapunov. Este invariante mede a taxa de divergência de trajetórias vizinhas no espaço de estados, da chamada de fiduciária. Quando temos uma divergência, as trajetórias estão se afastando portanto o expoente é positivo e quando temos uma convergência entre as trajetórias o resultado é negativo. É possível, identificar o comportamento de um atrator pelo sinal dos expoentes de Lyapunov. A dimensão do atrator, resulta na quantidade de expoentes estimados. No caso de um atrator tridimensional ($n=3$), teremos três expoentes: Atrator ponto fixo caracteriza-se por todos os expoentes negativos (-,-,-). As trajetórias convergem para um único ponto. Atrator ciclo limite caracteriza-se por um expoente nulo e os outros negativos (0,-,-). O expoente nulo corresponde à direção ao longo da trajetória. No caso do atrator toro, existem duas direções ao longo da trajetória, resultando em dois expoentes nulos (0,0,-). Em um atrator estranho, um dos expoente é positivo, existe a dependência as condições iniciais (DCI). Portanto, um atrator estranho que tem pelo menos um expoente positivo e possui dependência sensível às condições iniciais, apresenta dinâmica caótica.

3 ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS

3.1 Introdução

Nem sempre é possível construir um modelo matemático que seja capaz de descrever um sistema dinâmico. Para que seja possível analisar sistemas dinâmicos, sem conhecer detalhes sobre a dinâmica, ou sem a existência de um modelo matemático, utiliza-se da análise de séries temporais ou de sinais.

As séries temporais podem ser obtidas a partir de experimentos ou de simulações numéricas. Uma série temporal é um conjunto discreto de uma observação de um sistema dinâmico (SAVI, 2017, p. 235). Geralmente a série temporal é originada da observação de apenas uma variável de estado. Em uma série temporal tem-se informações sobre toda a dinâmica do sistema, incluindo as variáveis não observadas. Na maioria das análises, onde os sinais são extraídos de experimentos, temos apenas a série temporal para extrair informações que estão presentes no sinal, reconstruir a dinâmica do sistema e caracterizar corretamente.

As séries temporais apresentam o processo ou fenômeno físico através de uma grandeza medida em função do tempo. Na posição vertical temos a grandeza física que porta as informações e na posição horizontal a variável de descrição do suporte. A Figura 3.1 apresenta a própria variável de estado x , da série temporal de Rössler $x(t)$.

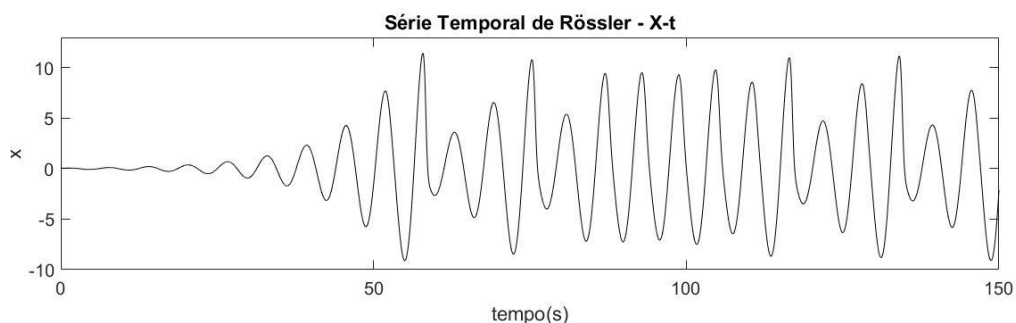


Figura 3.1 – Série temporal do atrator caótico de Rössler – $x(t)$.

Uma série temporal contém informações de toda a dinâmica do sistema, incluindo as variáveis não observadas (SAVI, 2017, p. 235). Como em muitos experimentos o que tem-se para analisar são as séries temporais, torna-se necessário conhecer as técnicas e suas aplicações para extrair as informações corretas contidas

na série. Para interpretar as informações, utiliza-se de ferramentas apropriadas para reconstruir a dinâmica do sistema a partir dos dados obtidos.

3.2 Sinais ou séries temporais

Um sinal ou série temporal é uma função representando uma quantidade ou variável, tipicamente, ela contém informação sobre o comportamento ou natureza do sistema dinâmico. Define-se série temporal como uma sequência de observação de uma variável ao longo do tempo. Segundo teorema de imersão de Takens (1981), série temporal possui informação sobre todos os estados não observáveis de um sistema. A informação está presente no sinal e precisa ser extraída dele, ser interpretada.

Na concepção determinista existe uma relação funcional entre S e x , assumindo que para um dado valor de x associa-se um único valor de S . Já na concepção estocástica existe uma relação probabilística entre S e x , assumindo que para um valor de x associa-se um valor de S com probabilidade P .

Um sinal pode ser de tempo contínuo $x(t)$ e de tempo discreto $x[n]$, Figura 3.2. Define-se contínuo no tempo se estiver definido durante todo o tempo, t sendo uma variável contínua. A amplitude do sinal pode ou não variar com o tempo. Outra característica do sinal contínuo no tempo é a existência de derivada ao longo de todo o intervalo considerado.

Já para o sinal com valores discretos ao longo do tempo, também chamado sinal digital, os valores estão definidos apenas em instantes de tempos fixos.

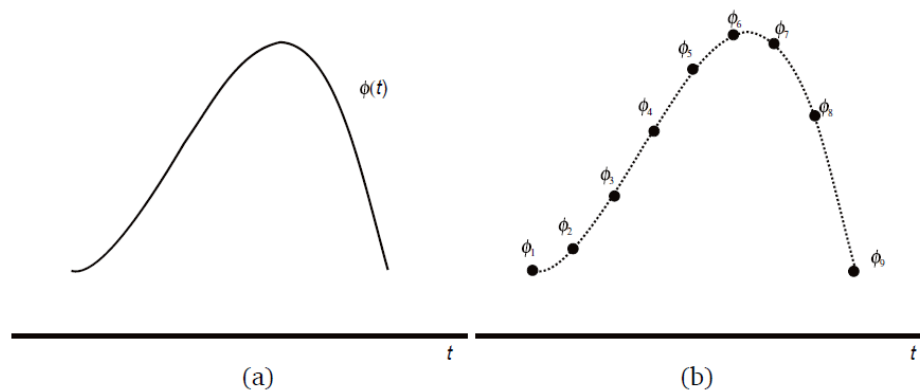


Figura 3.2 – Solução do sistema dinâmico: (a) Contínua e (b) Discreta, aproximada por um método numérico (SAVI, 2017).

Um sinal de tempo discreto $x[n]$ pode representar um fenômeno para o qual a variável independente é inerentemente discreta ou pode ser obtida amostrando um sinal contínuo no tempo $x(t)$, sendo: $x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_n), \dots$, Simplificando tem-se: $x[0], x[1], \dots, x[n], \dots$, ou $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$, definindo que:

$$x_n = x[n] = x(t_n) \quad (3.1)$$

Onde os x_n 's são as amostras e o intervalo de tempo entre as amostras consecutivas é o que chamamos de intervalo de amostragem. Quando tem-se intervalos de amostragem iguais define-se que:

$$x_n = x[n] = x(nT_s) \quad (3.2)$$

onde o intervalo de amostragem é definido como a constante T_s .

Uma série temporal $x(t)$ do oscilador de Duffing é apresentada na Figura 3.3 com comportamento periódico e não-periódico. Nota-se no seu eixo vertical a grandeza física que porta a informação e no eixo horizontal (t) a variável de descrição do suporte. A série temporal obtida através de simulação numérica, com parâmetro $\mu = 4$ apresenta a evolução temporal com comportamento periódico, se repetindo no tempo Figura 3.3(a). Alterando o parâmetro $\mu = 7,5$ a série temporal ilustrada na Figura 3.3(b), passa a apresentar um comportamento não-periódico difícil de ser previsto (SAVI, 2017, p. 170).

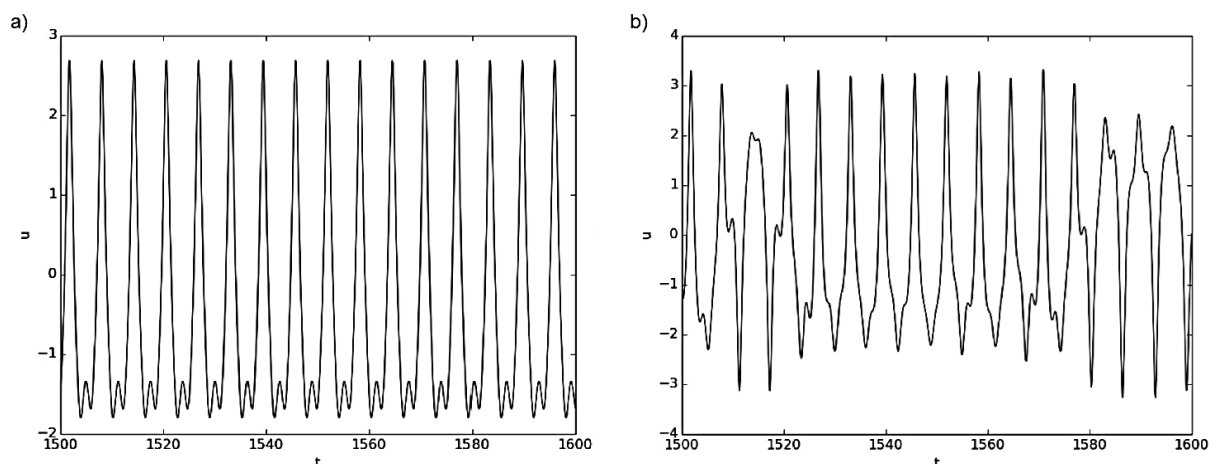


Figura 3.3 – Evolução no tempo: (a) resposta periódica e (b) resposta caótica (SAVI, 2017).

De maneira geral, a série temporal é originada da observação de apenas uma variável de estado. Pode-se observar a própria variável de estado ou alguma grandeza associada à ela (SAVI, 2017, p. 235).

Em sinais experimentais é inevitável a presença de ruído em sinais ou séries temporais. A contaminação por ruído pode resultar em interpretações incorretas dos resultados e conseqüentemente uma caracterização também incorreta.

3.3 Ruído em processamento de sinal

Kantz (2004) afirma que todos os dados experimentais estão de certa forma contaminados por ruído, e que o nível do ruído pode limitar o desempenho do algoritmo mesmo para previsões simples.

Savi (2017) afirma ser inevitável a presença de ruído em sinais experimentais, e que obscurece as informações disponíveis, tornando seu estudo uma tarefa difícil.

Nota-se que a presença de ruído geralmente é inevitável durante processamento de sinais. Dados experimentais sempre serão contaminados por ruído eletrônico ou por situações externas durante o experimento como vibrações, variações de temperatura, variações de umidade, corrente de ar, entre outros. Para minimizar possíveis ruídos e aumentar a relação sinal/ruído (abreviada por SNR, do inglês, *Signal to Noise Ratio* e RSR em português) comumente realiza-se previamente ao experimento um controle do ambiente onde será realizada a medição.

Em experimentos podem ser utilizados instrumentos para filtragem analógica visando atenuar ou minimizar o ruído durante a coleta. Em sinais gerados computacionalmente ou sinais experimentais já coletados e armazenados, pode-se utilizar filtros digitais para obter uma redução de ruído. Aplicar uma técnica, por exemplo, de reconstrução de espaço de estados, partindo de uma série temporal ruidosa pode gerar uma caracterização imprecisa e levar a conclusões equivocadas.

Reduzir a interferência do ruído no sinal, torna-se portanto necessário previamente a uma análise da dinâmica, afinal, as informações serão extraídas do sinal ou série temporal. Para efeito de análise, considera-se que o sinal analisado possui incertezas sendo contaminado por ruídos de observação. Uma maneira de entender o sinal é dada por:

$$s(t) = \Xi(x) + \zeta \quad (3.3)$$

onde $\zeta = \zeta_0 R(-1, +1)$ é um ruído aleatório (SAVI, 2017, p. 236).

Em alguns casos o ruído significa sinais aleatórios, imprevisíveis, que não contém informações úteis e que podem ser identificados em técnicas de análise de sinais. O ruído pode ser classificado por suas propriedades estatísticas (às vezes chamadas de “cor” do ruído) e pela forma como ele modifica o sinal pretendido. Como exemplo, o ruído branco foi nomeado em função da luz branca, por apresentar densidade espectral de potência plana, embora a luz que aparece branca geralmente não tenha uma densidade espectral de potência plana sobre a banda visível (STEIN, 1999).

O ruído branco gaussiano vem sendo muito implementado em ferramentas computacionais para adicionar ruído em um determinado sinal. Ao adicionar o ruído branco é possível simular sinais semelhantes em aquisições durante experimentos. A sigla utilizada para identificar o ruído branco gaussiano aditivo têm origem no termo em inglês (AWGN – *Additive White Gaussian Noise*), trata-se de um modelo básico de ruído, adicionado a um sinal para imitar o efeito de muitos processos aleatórios que ocorrem na natureza. A Figura 3.4 apresenta uma série de 1000 pontos de ruído branco gaussiano.

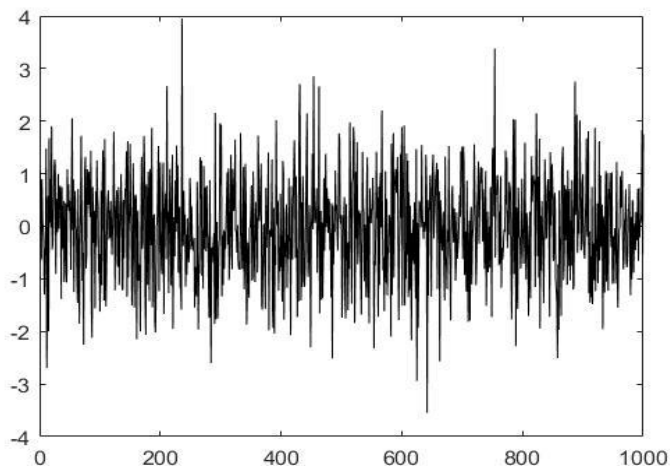


Figura 3.4 – Gráfico de um sinal de ruído branco gaussiano contendo 1000 pontos.

Ao adicionar o ruído branco em uma série temporal, normalmente utiliza-se uma relação entre a amplitude do sinal e a amplitude do ruído adicionado, ou seja, uma relação sinal/ruído (SNR, do inglês *Signal to Noise Ratio*). A relação sinal/ruído é um termo para a razão entre as potências de um sinal contendo alguma informação e o ruído, dada por:

$$SNR = \frac{P_{sinal}}{P_{ruído}} \quad (3.4)$$

onde P é a potência média. As potências tanto do sinal, quanto do ruído devem ser medidas no mesmo ou em pontos equivalentes de um mesmo sistema, e dentro de uma mesma largura de banda.

Quando o sinal e o ruído são medidos na mesma impedância, a razão sinal/ruído pode ser calculada pela raiz da amplitude em ambos, dado por:

$$SNR = \left(\frac{A_{sinal}}{A_{ruído}} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k^2}}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n r_k^2}} \right)^2 \quad (3.5)$$

onde A é o valor quadrático médio (RMS, do inglês *Root Mean Square*) da amplitude, s é o vetor que representa o sinal original, r é o vetor de ruído e n o comprimento do vetor do sinal. Quanto maior for esta razão, melhor será a identificação do sinal puro do ruído existente.

A Figura 3.5 apresenta um trecho de uma série temporal obtida do modelo de Lorenz sem ruído, e contaminada com ruído branco SNR=25/1, ambas com amplitudes normalizadas. Os respectivos espaço de estados reconstruídos são apresentados na Figura 3.6, onde nota-se que a presença do ruído na série temporal, distorce a dinâmica do sistema.

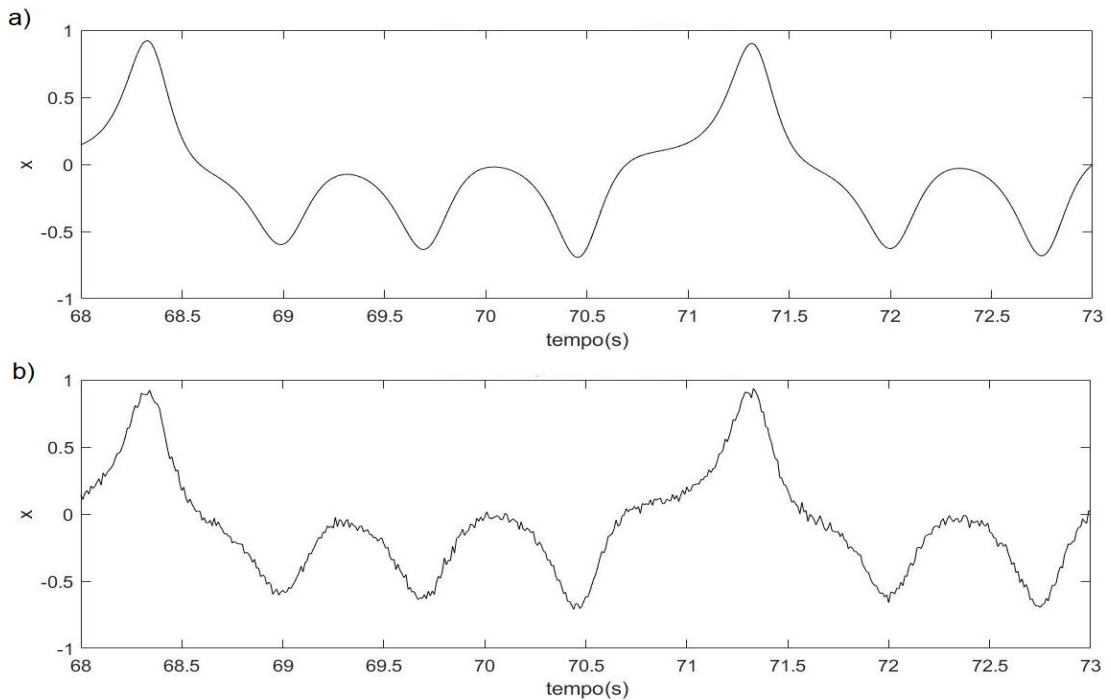


Figura 3.5 – Série temporal de Lorenz: a) sem ruído e b) contaminada por ruído branco SNR=25/1.

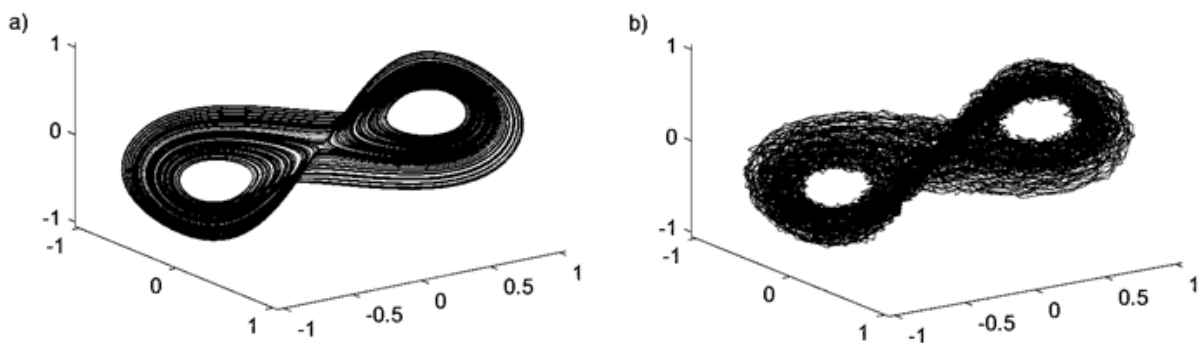


Figura 3.6 – Espaço de estados de Lorenz: a) sem ruído e b) contaminado ruído branco SNR=25/1.

3.4 Transformada de Fourier

As séries possuem informações de todo o sistema, sendo possível acessar essas informações no domínio do tempo ou no domínio da frequência, conforme Figura 3.7. Trata-se do mesmo sinal com dois modos diferentes de observar. Um sinal pode ser decomposto em várias componentes senoidais, com frequências diferentes. Entende-se que na Figura 3.7(a), o gráfico está no domínio do tempo, sendo possível visualizar como um sinal varia ao longo do tempo. Na Figura 3.7(b), o gráfico está no domínio da frequência, sendo possível visualizar quanto do sinal reside em cada faixa de frequência.

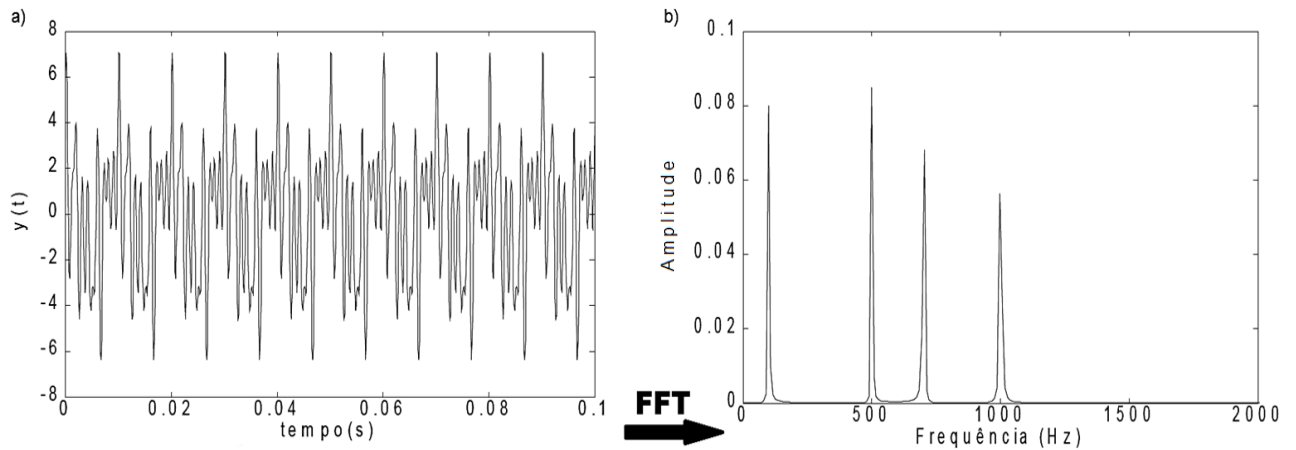


Figura 3.7 – Informações no domínio: a) do tempo e b) domínio da frequência.

Para alternar esta mudança no domínio do tempo ou no domínio da frequência da série utilizamos as transformadas. Existem casos onde a série no domínio da frequência possibilita um realce das informações a serem extraídas durante a análise de sistemas dinâmicos.

Em análises tradicionais de sinais experimentais utiliza-se a análise espectral (espectro de potências) sendo um método clássico para identificar tipo de irregularidade (ou regularidade) presentes na série temporal $x(t)$.

A Figura 3.8 apresenta a FFT do mesmo oscilador de Duffing para resposta caótica e periódica. Nota-se no espectro da resposta caótica um espectro contínuo, não possibilitando identificar claramente as características do sinal. Já na resposta periódica, um sistema dinâmico discreto, temos picos bem identificados.

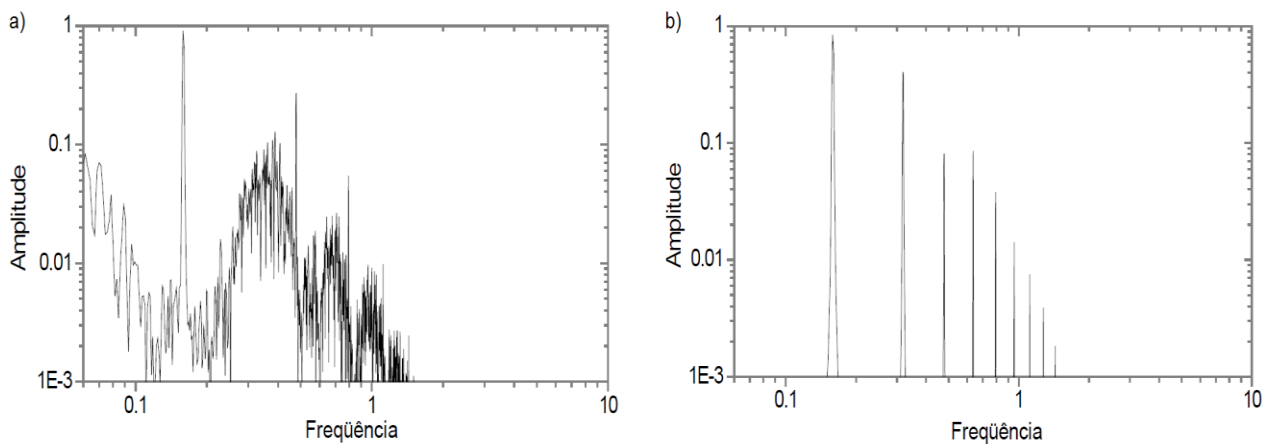


Figura 3.8 – FFT oscilador de Duffing: (a) resposta caótica; (b) resposta periódica (SAVI, 2017).

Esta relação entre os domínios pode ser obtida através da transformada espectral, ou em particular de Fourier. Isto possibilita identificar como certas frequências contribuem para essa série (SAVI, 2017, p. 236).

Se a evolução no tempo de um sistema dinâmico é dada por $f(t)$, ou, quando resultado de uma série de medidas realizadas a intervalos de tempos regulares Δt , por uma série temporal $x(t) = \{x(t), x(t + \Delta t), x(t + 2\Delta t) \dots\}$. Qualquer função $f(t)$ pode ser representada pela superposição de um número (eventualmente infinito) de componentes periódicas (FERRARA; PRADO, 2017, p. 284). Cada componente presente no sistema, apresenta um peso relativo, que é determinado pela análise espectral. Quando tem-se uma função $f(t)$ periódica, o espectro apresenta uma combinação linear de oscilações cujas frequências são múltiplos inteiros de um frequência básica ω . Esta combinação linear é a série de Fourier. Quando a função $f(t)$ é não-periódica, caso que encontramos com maior frequência, o espectro apresenta variações contínuas e utiliza-se a chamada transformada de Fourier para descrever $f(t)$ em relação as frequências. A transformada de Fourier de $f(t)$ é dada por:

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt ; \quad (3.6)$$

onde $f(\omega)$ indica o peso relativo com que a frequência ω aparece na composição de $f(t)$. Para obter o espectro de potências $P(\omega)$ calcula-se o módulo quadrado de $f(\omega)$, sendo:

$$P(\omega) = |f(\omega)|^2 \quad (3.7)$$

Sinais periódicos de período T resultam em um espectro com um pico bem definido na frequência correspondente a esse período e, geralmente, picos menores nos harmônicos dessa frequência, sendo $4\pi/T, 6\pi/T, \dots, 2n\pi/T$ conforme Figura 3.9.

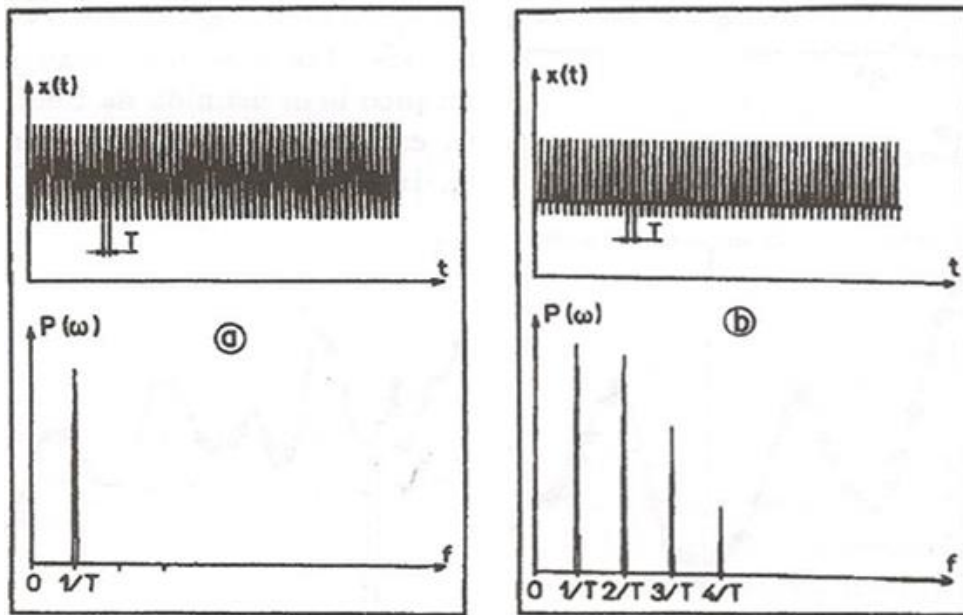


Figura 3.9 – Funções periódicas e respectivos espectros de potências. (a) Função senoidal; (b) Função periódica que contém harmônicos. Espectro em escala logarítmica (P. BERGÉ et al.).

Quando o sinal é não-periódico, onde ocorre superposição de movimentos periódicos de períodos incomensuráveis, o espectro torna-se bem complicado, porém formado por picos bem localizados nas frequências.

$$\omega_n = | m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \dots + m_r\omega_r | , \quad (3.8)$$

onde os m_i são inteiros arbitrários e ω_i são as frequências associadas aos períodos de cada oscilação independente que comparece no movimento (FERRARA; PRADO, 2017, p. 290). A Figura 3.10 apresenta a série temporal *quasi*-periódica composta por duas frequências incomensuráveis e seu respectivo espectro de potência ilustrando, além das duas frequências de base f_1 e f_2 , as combinações $f_p = m_1f_1 + m_2f_2$.

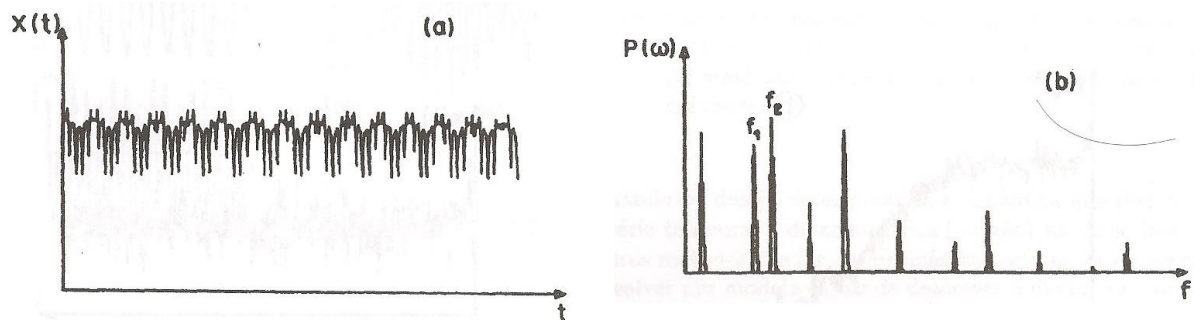


Figura 3.10 – (a) Sinal temporal com duas frequências incomensuráveis f_1 e f_2 ; (b) espectro de potências (P. BERGÉ et al.).

Em sinais aperiódicos os espectros de potências são contínuos conforme ilustrado na Figura 3.11. Este tipo de espectro contínuo caracteriza um sinal caótico ou estocástico (ruído branco).

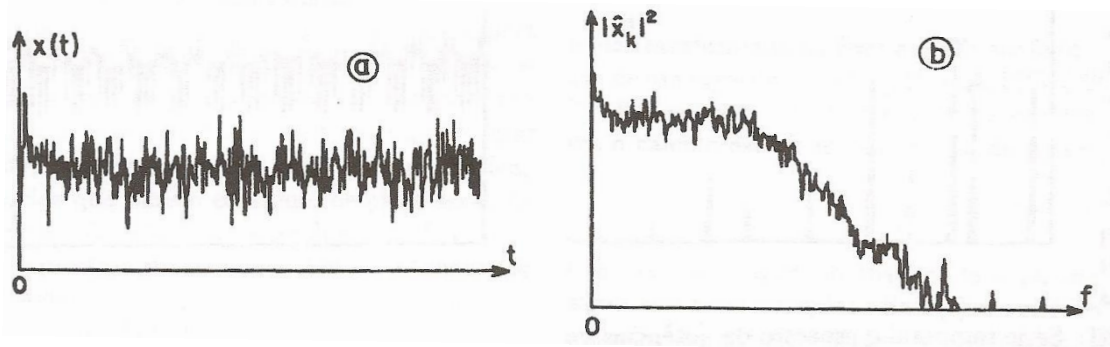


Figura 3.11 – (a) Série temporal aperiódica; (b) espectro de potências para o sinal representado em (a) (P. BERGÉ et al.).

Uma versão da transformada discreta de Fourier (DFT) tornou-se muito utilizada por sua eficiência. A transformada rápida de Fourier (FFT) é um algoritmo disponível em pacotes comerciais, que calcula com rapidez a transformada discreta de Fourier e sua inversa. A análise converte uma série temporal, por exemplo, com domínio do tempo, para uma representação no domínio da frequência, possibilitando através da densidade espectral, visualizar no espectro a frequência do processo e as periodicidades.

O cálculo da transformada de Fourier pode ser feito com rapidez utilizando um algoritmo conhecido como FFT (*Fast Fourier Transform*), disponível em ferramentas computacionais voltadas para o cálculo estatístico ou análise de sinais experimentais.

A transformada rápida de Fourier tornou-se muito utilizada devido à sua rapidez e eficácia. Press et al. (1992) fornecem detalhes sobre a técnica, além de diversos pacotes disponibilizarem a função em ferramentas computacionais.

Um sistema dinâmico caótico pode ser caracterizado por apresentar um espectro com subharmônicos a partir de uma frequência inicial dominante (frequência de forçamento do sistema). Já para sistemas dinâmicos periódicos observam-se espectros discretos de frequência, apresentados na Figura 3.12.

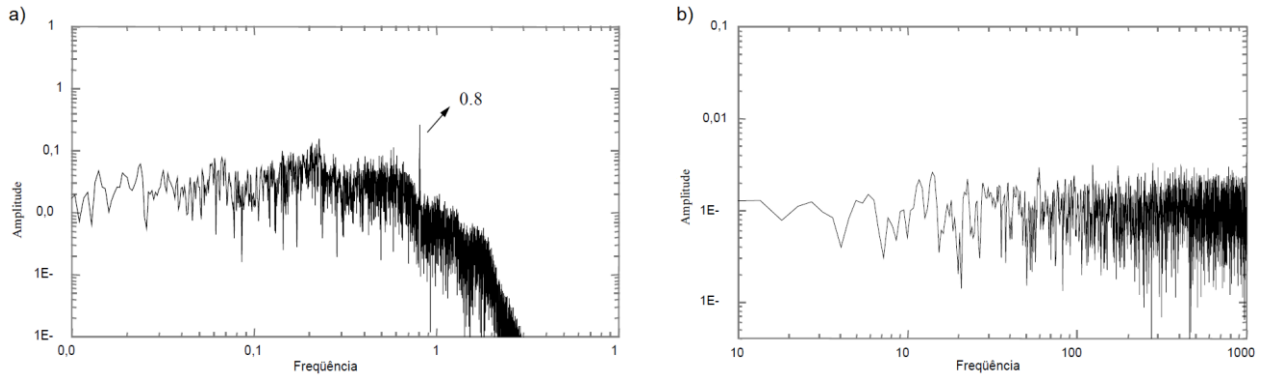


Figura 3.12 – FFT: a) Sinais caóticos e b) aleatórios (SAVI 2017).

Como a maioria dos sinais são contaminados por ruído este torna-se um agravante para a transformada. Quando não existe a presença de ruído no sinal é fácil caracterização durante a análise, visto que apenas no sinal aleatório, todo o espectro é preenchido em uma faixa contínua pela transformada. Quando o sinal é ruidoso, temos o ruído adicionado ao sinal, resultando em um espectro distribuído por todo o domínio da frequência em ambos os sinais (caótico e aleatório). Na presença de ruído um sinal seja caótico ou periódico resulta em um espectro de frequência, preenchido por toda a transformada dificultando a caracterização.

Uma série temporal ruidosa, situação frequente na maioria dos sinais coletados, pode dificultar ou até impedir que consiga extrair as informações corretas durante a análise. Os efeitos negativos do ruído podem ser minimizados através de técnicas de filtragem seja por filtros analógicos, eletronicamente, previamente a aquisição do sinal, ou filtros digitais, utilizados em computador após aquisição (VASCONCELLOS, 2007, p. 43). Quando as características do ruído são diferentes daquelas que originam o sinal, é sempre possível filtrá-las.

3.5 Filtros digitais

Na análise de sinais experimentais geralmente utiliza-se o processamento off-line, onde o sinal já foi coletado, sendo necessário armazená-lo antes de ser processado. Este sinal é submetido a um conversor analógico-digital para ser processado no computador. O modo mais direto de utilização de um filtro digital é convoluir o sinal de entrada com a resposta ao impulso do filtro digital (VASCONCELLOS, 2007, p. 45).

A convolução é uma operação matemática formal. Empregando a convolução na técnica de análise de sinais, ela descreve a inter-relação entre o sinal de entrada, a resposta ao impulso e o sinal de saída. O sinal de entrada sendo $x[n]$ entra um sistema linear com resposta ao impulso $h[n]$, que apresenta o sinal de saída $y[n]$.

$$x[n] * h[n] = y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n - k] \quad (3.9)$$

onde $*$ indica a operação convolução (HSU, 1995).

Em análise de sinais o objetivo de se aplicar um filtro é separar ou evidenciar informações de interesse das informações de não interesse. As informações são obtidas no domínio do tempo ou no domínio da frequência. No domínio do tempo descreve o momento a amplitude de um evento. Já no domínio da frequência descreve em quais frequências oscila o sistema, qual a fase e a amplitude desse movimento periódico (SMITH, 1999).

Um filtro digital eficiente pode ser obtido com o método da decomposição em valores singulares (SVD), desenvolvido por Broomhead e King (1986). O método além de realizar a filtragem da série temporal também reconstrói o espaço de estados do sistema dinâmico (VASCONCELLOS, 2007, p. 46).

4 RECONSTRUÇÃO DO ESPAÇO DE ESTADOS

4.1 Introdução

Quando as equações diferenciais que formam um sistema dinâmico são conhecidas, pode se caracterizar o atrator calculando as dimensões D_0 , D_1 , D_2 e os expoentes de Lyapunov (MONTEIRO, 2011, p. 443). Porém, em situações reais, tem-se apenas uma série temporal de dados experimentais. Muitas vezes não se sabe quais são as variáveis, qual o sistema de equações, nem os parâmetro que governam a dinâmica do sistema.

O espaço de fase ou espaço de estados, é um espaço n -dimensional, formado pelos eixos eixo- x_1 , eixo- x_2 , ..., eixo- x_n . Um estado é representado como um ponto com coordenadas $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ nesse espaço. Com o passar do tempo, esse ponto se move, sendo sua evolução temporal determinada pelas n equações diferenciais de primeira ordem (MONTEIRO, 2011, p. 66).

Para os atratores caóticos analisados de Lorenz e Rössler, ambos com sistema composto por três equações diferenciais ordinárias, apresentando um espaço 3-dimensional, formado pelos eixos x , y e z . A Figura 4.1 exibe os atratores gerados por simulação numérica, com parâmetros caóticos.

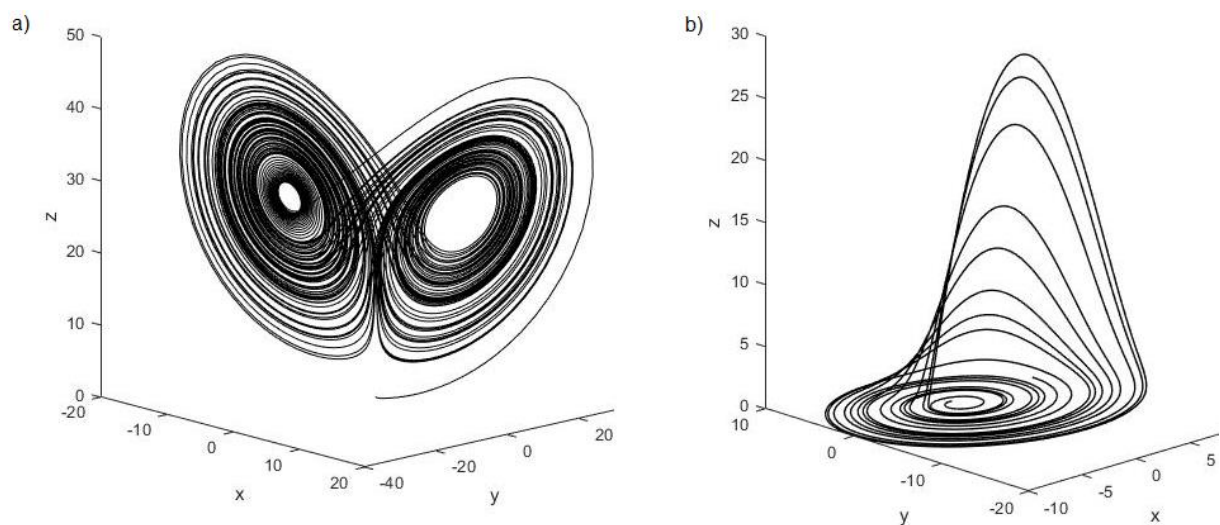


Figura 4.1 – Atratores caóticos 3-dimensionais: a) Atrator de Lorenz e b) atrator de Rössler.

Esses atratores caóticos são gerados a partir de suas conhecidas equações, por simulação numérica computacional. Porém, partindo de um sinal ou série temporal é necessário utilizar técnicas de reconstrução para obter-se os espaço de estados.

Como uma série temporal contém informação sobre todo o sistema, as técnicas buscam extrair as informações de variáveis não observáveis da série temporal (SAVI 2017, p.239). A reconstrução baseia-se no teorema de imersão de Takens (1981), que possibilita reconstruir o espaço de estados similar ao original, partindo de uma única variável. É possível reconstruir o espaço de estados topologicamente equivalente ao original, possibilitando resgatar invariantes do sistema, como os expoentes de Lyapunov.

Do espaço de estados é possível extrair informações como a dimensão do sistema, se é estável ou instável, se o sistema é determinístico, estocástico ou caótico e como o sistema evolui com a variação de parâmetros.

Savi (2017) afirma que basicamente existem três métodos utilizados na reconstrução do espaço de estados: método das derivadas ou coordenadas derivativas (Packard et al., 1980); decomposição em valores singulares (SVD) (Broomhead e King, 1986); e método das coordenadas defasadas (Packard et al., 1980; Takens, 1981).

O método das derivadas acredita que as coordenadas são aproximações numéricas das derivadas de ordem sucessivamente superiores de uma variável medida, sendo:

$$\dot{s} \approx \frac{s[t_0 + (n + 1)\Delta t] - s(t_0 + n\Delta t)}{\Delta t} \quad (4.1)$$

sendo $s(t_0 + n \Delta t)$ o sinal ($n = 1, 2, \dots, N$) é a quantidade de amostras do sistema e Δt o intervalo entre duas amostras consecutivas.

Uma desvantagem em reconstruir o espaço de estados por este método ocorre quando existe a presença de ruído no sinal. Ao derivar numericamente durante as etapas de reconstrução, nota-se uma sensibilidade ao ruído. A Figura 4.2 apresenta uma reconstrução pelo método, utilizando uma série temporal do modelo de Lorenz sem ruído, Figura 4.2(a), onde é possível verificar a topologia do atrator, e uma série temporal contaminada SNR=25/1 onde o atrator fica desfigurado, Figura 4.2(b).

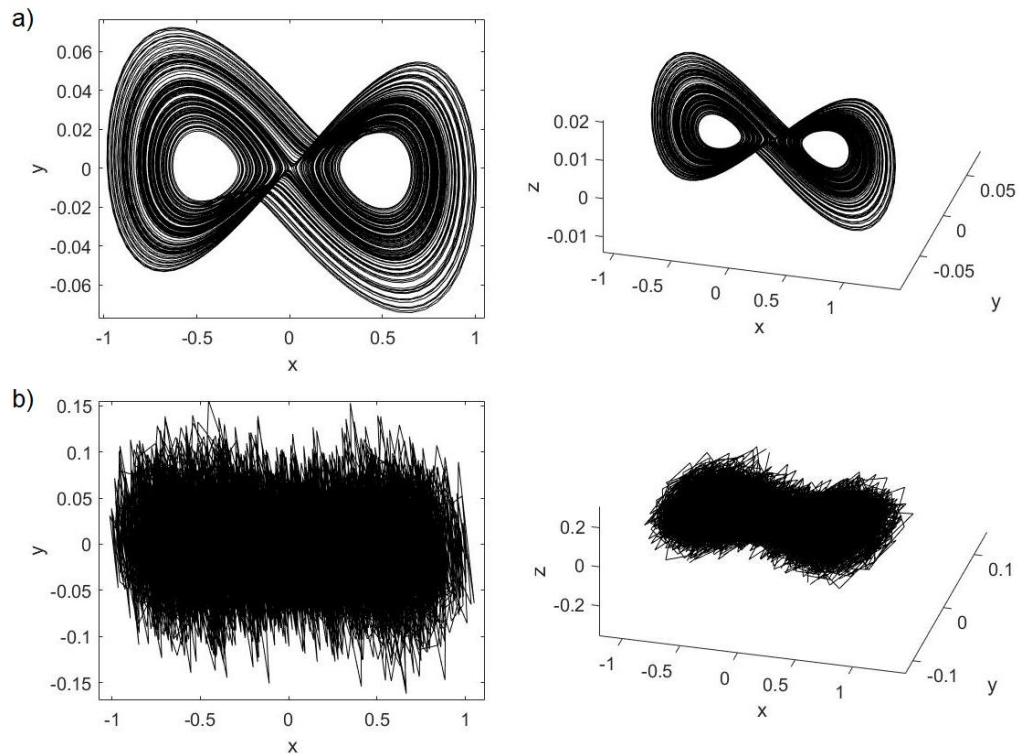


Figura 4.2 – Método das derivadas: a) Lorenz sem ruído e b) Lorenz com ruído SNR=25/1.

4.2 Método das coordenadas defasadas (MOD)

A reconstrução do espaço de estados por meio de coordenadas defasadas, foi proposto por Ruelle (1979) e Packard (1980) e posteriormente por Takens (1981) e Sauer et al. (1991), onde utiliza-se da defasagem no tempo para realizar a reconstrução. Uma nova variável de estado é gerada a partir da defasagem da série temporal original. A defasagem é pré-determinada por outros métodos e a dimensão de imersão também deve ser pré-determinada. Ambos chamados de parâmetros de imersão: tempo de defasagem, τ , determina a defasagem entre as coordenadas; e dimensão de imersão, D_e , define quantas defasagens são necessárias para reconstruir a dinâmica (SAVI, 2017, p. 241).

Uma série temporal representada por $s(n)$, ($n = 1, 2, \dots, N$), sendo N o número total de amostras. O espaço de estados reconstruído por este método é dado por:

$$u(n) = \{s(n), s(n + \tau), \dots, s(n + (D_e - 1) \tau)\} \quad (4.2)$$

sendo $u(n)$ a dinâmica reconstruída na imersão e D_e a dimensão de imersão do sistema.

A escolha dos parâmetros de imersão pode afetar a reconstrução do espaço de estados. Caso a dimensão de imersão não seja suficientemente grande ou o tempo de defasagem, a análise através desta reconstrução pode ser incorreta. Em séries experimentais, a defasagem encontrada pode não ser a ideal, principalmente se determinada por autocorrelação. Além da autocorrelação é possível determinar a defasagem por informação mútua, porém ambos apresentam sensibilidade ao ruído e complexidade, ocasionando grandes chances de erro, conforme Figura 4.3.

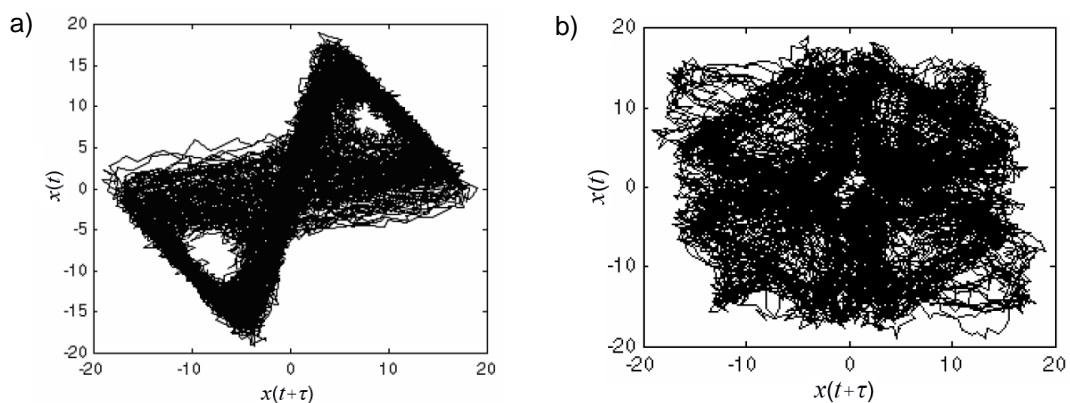


Figura 4.3 – Método das coordenadas defasadas: a) Informação mútua e b) autocorrelação (VASCONCELLOS, 2007).

4.2.1 Dimensão de imersão

Savi (2017) afirma que basicamente existem três métodos para determinar a dimensão de imersão, D_e : o método da saturação de algum invariante do sistema (Grassberger e Procaccia, 1983); a decomposição em valores singulares (SVD) (Broomhead e King, 1986); e o método dos falsos vizinhos ou método dos falsos vizinhos próximos (*FNN*) (Kennel et al., 1992).

O método da saturação de algum invariante do sistema busca estimar um invariante, variando o valor da dimensão de imersão. Quando ocorre a conversão do invariante para um determinado valor, conforme a dimensão de imersão aumenta, esta é definida como dimensão mínima de imersão. Desvantagens do método é o tempo computacional necessário na execução e sensibilidade ao ruído.

Para o método SVD utiliza-se da diagonal da matriz de covariância, onde são identificados os seus autovalores. O número obtido de autovalores não nulos é o valor da dimensão mínima de imersão.

O método dos falsos vizinhos próximos (*FNM*) foi desenvolvido visando obter a dimensão mínima sem que ocorra cruzamento de órbita consigo mesmo. Os pontos de cruzamento de órbitas representam vizinhos, que não serão vizinho em dimensões maiores, sendo então considerados como falsos vizinhos. Assim, a dimensão mínima de imersão do sistema associa-se a uma situação onde não existem falsos vizinhos.

4.2.2 Tempo de defasagem (“*time-delay*”)

O tempo de defasagem, τ , é quem define a defasagem entre as coordenadas no método das coordenadas defasadas. A definição de uma defasagem pequena pode causar resultados distorcidos, já a defasagem grande pode tornar os vetores desconectados.

Se a defasagem for muito pequena, $x(t)$ e $x(t + \tau)$ terão praticamente o mesmo valor. Para um atrator com dimensão maior que dois, por exemplo os atratores de Lorenz e Rössler que são tridimensionais, se forem reconstruído em uma dimensão igual a dois, vão ficar comprimidos em torno da diagonal $y = x$, apresentará esse atrator uma dependência linear entre ξ_1 e ξ_2 , situação que não acontece nas componentes reais (FERRARA; PRADO, 2017, p. 298). Por outro lado, as séries temporais experimentais são finitas, seus respectivos espaço de estados tem volume finito, onde a defasagem não pode ser arbitrariamente muito grande, podendo ocasionar nos vetores reconstruídos uma completa descorrelação, no seu espaço de estados.

A escolha do passo de reconstrução é na grande maioria dos casos arbitrária. Como a reconstrução por defasagem depende muito da escolha correta do passo, o procedimento deve ser apropriado para obter-se este parâmetro de imersão corretamente durante a análise. Segundo Savi (2017) dois métodos devem ser destacados: a função de autocorrelação e o método da informação mútua (Fraser e Swinney, 1986).

4.2.3 Método da informação mútua média

Este método determina o tempo de defasagem τ , sendo este um dos parâmetros de imersão empregados no método das coordenadas defasadas.

Vasconcellos (2007), afirma que o método da informação mútua para a determinação do τ é o mais indicado em caso de sistemas não-lineares. Como pode-se observar na Figura 4.3 a reconstrução do espaço de estados por este método resultou em um atrator com menores distorções.

A Figura 4.4 ilustra o gráfico da informação mútua média para a determinação da defasagem.

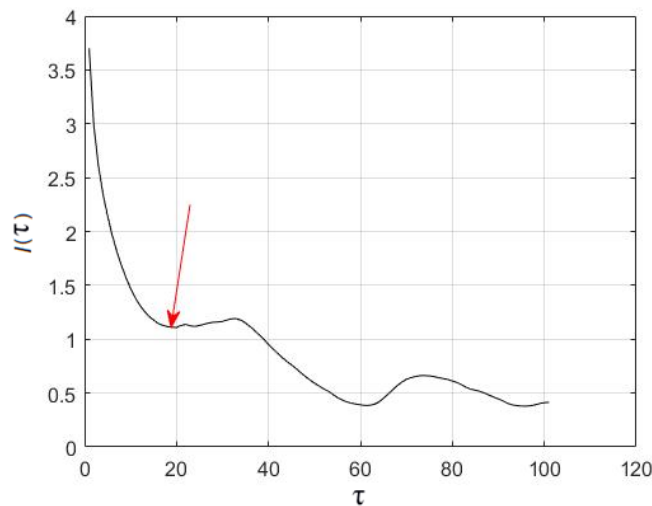


Figura 4.4 – Determinação de defasagem τ por Informação Mútua.

O valor da defasagem τ ideal é o identificado ao primeiro mínimo local de $l(\tau)$ (FRASER e SWINNEY, 1986). Conforme ilustrado na Figura 4.4, esse valor está em aproximadamente $\tau = 19$.

Implementando o método MOD com a defasagem estimada pelo método da informação mútua, foi possível reconstruir o espaço de estados do modelo de Lorenz sendo apresentado na Figura 4.5.

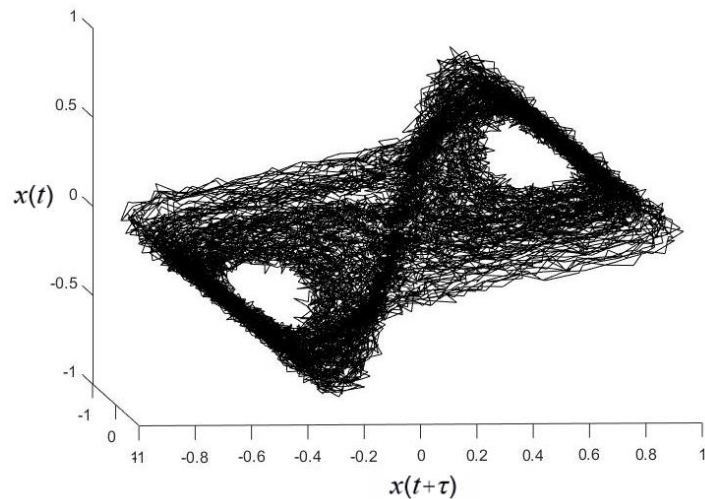


Figura 4.5 – Método da Defasagem reconstruindo espaço de estados do modelo de Lorenz.

O efeito do ruído é notório nas trajetórias, além das distorções indicarem que a defasagem estimada provavelmente não é a ideal para utilização no método.

4.3 Decomposição em valores singulares

A decomposição em valores singulares (SVD) trata-se da decomposição de uma matriz em três outras matrizes. A decomposição é como dividir a matriz original por fatoração em outras três. Uma matriz nomeada \mathbf{X} , é construída de trajetória com os elementos da série temporal através da aplicação de uma janela n na série.

A matriz \mathbf{X} , é uma matriz $m \times n$ onde cada coluna (n) da matriz será um vetor de estado no espaço de imersão. O método necessita de uma base ortogonal que descreva com eficácia a dinâmica, obtida pela seguinte equação:

$$\mathbf{X} = \mathbf{S} \mathbf{D} \mathbf{C}^T \quad (4.3)$$

onde \mathbf{D} são os valores singulares e \mathbf{C}^T a nova base ortogonal.

A trajetória deve ser projetada na nova base ortogonal \mathbf{C} , sendo necessário efetuar o produto $\mathbf{X} \mathbf{C}$. Como resultado tem-se:

$$(\mathbf{X} \mathbf{C})^T (\mathbf{X} \mathbf{C}) = \mathbf{D}^2 \quad (4.4)$$

Esse resultado apresenta na base **C** dados totalmente descorrelacionados, em função da matriz de covariância apresentar elementos só na diagonal.

Sem a presença de ruído, o número de vetores c_0 é suficiente para descrever a dinâmica sendo igual ao número n' de valores singulares não-nulos (diferente de zero).

Uma matriz **D** resultado da equação 4.3 apresenta os estimados valores singulares diferente de zero. Neste caso temos três valores singulares, sendo uma base **C** tridimensional que descreve a dinâmica do sistema.

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Ao implementar o método SVD como técnica de reconstrução, o espaço de estados é reconstruído pela decomposição da matriz de trajetória em valores singulares. Para aplicação do método é necessário determinar uma janela via FFT e a dimensão de imersão que é determinada durante o processo de reconstrução.

O processo de reconstrução, em muitos casos amplifica o efeito do ruído, introduzindo dispersões consideráveis que afetam a caracterização do sistema. Os resultados demonstram que este método não apresenta sensibilidade ao ruído. O método da decomposição em valores singulares tem se mostrado eficaz ao ser aplicado em séries temporais ruidosas e ainda pode ser utilizado como filtro digital.

Diferentes de outras técnicas de reconstrução, o método de reconstrução por decomposição em valores singulares (SVD), desenvolvido por Broomhead e King (1986) dispensa a filtragem da série temporal, eliminando assim distorções e defasagem no sinal que ocorrem durante filtragem convencional.

4.4 SVD para reconstrução do espaço de estados

O método da decomposição em valores singulares, desenvolvido por Broomhead e King (1986) dispensa a necessidade de se escolher uma defasagem. O método utiliza-se das propriedades da matriz de covariância para gerar coordenadas descorrelacionadas.

A variância de uma variável aleatória X , geralmente apresentada por σ^2_x ou simplesmente σ^2 ou ainda $\text{var}(X)$ é a medida da dispersão de uma distribuição sobre a média (VASCONCELLOS, 2007, p. 47):

$$\sigma^2 = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \quad (4.6)$$

onde μ é a média e n o número de elementos da variável X .

Pequenos valores de σ^2 indicam uma concentração da massa da distribuição nas vizinhanças da média. Quando σ^2 é igual a zero, toda a massa da distribuição está concentrada na média (SOONG, 2004).

A covariância, normalmente denotada por σ_{xy} , mede o grau de independência entre duas variáveis aleatórias. Se X e Y são duas variáveis aleatórias, a covariância entre elas é dada pela seguinte equação:

$$\sigma_{xy} = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_x)(Y_i - \mu_y) \quad (4.7)$$

onde n é o número total de amostras, μ_x é a média da variável X e μ_y é a média da variável Y (SOONG, 2004).

O sinal da covariância indica o tipo de relação entre as variáveis, sendo que um sinal negativo indica uma dependência inversa. A dependência entre as variáveis torna-se mais forte a medida que o valor absoluto é maior.

As variáveis envolvidas no processo, em situações com três ou mais são denotadas como (X_1, X_2, \dots, X_n) uma representação conveniente para a variância e covariância entre cada variável é a matriz de covariância $\mathbf{\Lambda}$, definida por:

$$\mathbf{\Lambda} = E \{ (\mathbf{X} - \mathbf{m}_x)(\mathbf{X} - \mathbf{m}_x)^T \} \quad (4.8)$$

onde $E \{ \}$ é o operador valor esperado (SOONG, 2004), \mathbf{X} é um vetor coluna com componentes (X_1, X_2, \dots, X_n) e o vetor \mathbf{m}_x representa as respectivas médias.

A matriz $\mathbf{\Lambda}_{n \times n}$ possui em sua diagonal as variâncias de cada variável e as covariâncias são os demais elementos da matriz. Uma representação estrutural da matriz é dado por:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \text{var}(X_1) & \text{cov}(X_1, X_2) & \cdots & \text{cov}(X_1, X_n) \\ \text{cov}(X_2, X_1) & \text{var}(X_2) & \cdots & \text{cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \text{cov}(X_n, X_1) & \text{cov}(X_n, X_2) & \cdots & \text{var}(X_n) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

sendo a diagonal da matriz como variância indicada por $\text{var}(\)$ e a covariância indicada por $\text{cov}(\)$. Assumindo que a $\text{cov}(X_i, X_j) = \text{cov}(X_j, X_i)$, a matriz de covariância é simétrica, sendo $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}^T$.

A matriz de covariância é construída com as informações contidas na série temporal. É possível encontrar a melhor base para a projeção da trajetória do espaço de estados e separar os estados de maior variância (onde está contida a dinâmica) dos de menor variância (onde está o ruído).

A aplicação de uma janela de n elementos à uma série temporal de N pontos resulta em uma sequência de $N = N_T - (n - 1)$ vetores $\{x_i \in \mathfrak{R}^n / i = 1, 2, 3, \dots, N\}$ no espaço de imersão.

A matriz de trajetória \mathbf{X} é construída por esta sequência de vetores assim representados:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^T \\ \mathbf{X}_2^T \\ \dots \\ \mathbf{X}_n^T \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

sendo \mathbf{x}_i^T um vetor transposto composto por n elementos da série temporal e \mathbf{x}_{i+1}^T composto pelos n elementos seguintes.

As colunas da matriz de trajetória compõe os vetores de estado \mathbf{x}_i na trajetória reconstruída no espaço de imersão \mathfrak{R}^n . Após construir n vetores no espaço de imersão, deseja-se encontrar um conjunto de vetores linearmente independentes em \mathfrak{R}^n que melhor descreva o espaço de estados durante a reconstrução (VASCONCELLOS, 2007, p.49). Esses vetores denotados como $\{\mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ em \mathfrak{R}^n formam parte da base ortonormal, que pode ser construída como uma combinação linear dos vetores na trajetória reconstruída em \mathfrak{R}^n usando a equação:

$$\mathbf{s}_i^T \mathbf{X} = \sigma_i \mathbf{c}_i^T \quad (4.11)$$

sendo \mathbf{s}_i e \mathbf{c}_i autovetores e σ_i autovalores.

De acordo com o teorema da decomposição em valores singulares (MEYER, 2000), pode ser provado que os vetores \mathbf{s}_i e \mathbf{c}_i são autovetores da matriz de estrutura $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ e da matriz de covariância $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ da trajetória, de acordo com as relações:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}\mathbf{X}^T \mathbf{s}_i &= \sigma_i^2 \mathbf{s}_i \\ \mathbf{X}^T\mathbf{X} \mathbf{c}_i &= \sigma_i^2 \mathbf{c}_i \end{aligned} \quad (4.12)$$

Os vetores \mathbf{s}_i e \mathbf{c}_i são os vetores singulares de \mathbf{X} e σ_i são os valores singulares. A decomposição em valores singulares de \mathbf{X} foi descrita na equação 4.3. Uma matriz \mathbf{X} decomposta em outras três matrizes.

onde $\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_n]$, $\mathbf{C} = [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n]$ e $\mathbf{D} = \text{diag}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n]$, é uma matriz diagonal, assumindo $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$.

Segundo o teorema SVD, o número de autovalores não-nulos da matriz estrutura e da matriz de covariância são iguais. Esta relação n' (onde $n' \leq n$) é o número de valores não-nulos, assim definido:

$$\text{posto } \mathbf{X}\mathbf{X}^T = \text{posto } \mathbf{X}^T \mathbf{X} = n' \quad (4.13)$$

O número de autovetores independentes \mathbf{c}_i suficientes para descrever a dinâmica é igual ao número n' de autovalores não-nulos σ_i . O mesmo número corresponde à dimensão de imersão (VASCONCELLOS, 2007, p. 50). A trajetória descrita na nova base $\{\mathbf{c}_i, i = 1, 2, \dots, n'\}$ através da projeção da matriz de trajetória \mathbf{X} na base $\{\mathbf{c}_i\}$, dada pelo produto $\mathbf{X}\mathbf{C}$. A nova matriz de trajetória $\mathbf{X}\mathbf{C}$ foi descrita na equação 4.4. Esta equação expressa o fato de que na base $\{\mathbf{c}_i\}$ as componentes das trajetórias estão descorrelacionadas, em função $\{\mathbf{c}_i\}$ ser obtida da diagonal da matriz de covariância, motivo pelo qual a defasagem (τ) neste método pode ser omitida. Esse resultado apresenta que cada σ_i^2 é a projeção da média quadrática da trajetória correspondente \mathbf{c}_i no espaço de imersão. Como se a trajetória explora-se um elipsoide n' -dimensional, sendo os $\{\mathbf{c}_i\}$ determinando as direções e os $\{\sigma_i\}$ determinando os comprimentos dos eixos principais do elipsoide (BROOMHEAD; KING, 1986).

Quando tem-se uma perturbação ocasionada por ruído, a tendência é que ocorra uma sobreposição ao comportamento determinístico e nas direções associadas aos autovalores σ_i pequenos ou nulos são dominados pelo ruído.

Na contaminação provocada por ruído branco, os valores singulares de \mathbf{X} são denotados com a seguinte relação:

$$\sigma_i^2 = \bar{\sigma}_i + \langle \xi^2 \rangle, i = 1, 2, \dots, n \quad (4.14)$$

sendo $\bar{\sigma}_i$ os autovalores referente a dinâmica determinística e $\langle \xi^2 \rangle$ sendo a perturbação da matriz de covariância ocasionada pelo ruído.

O ruído torna todos os valores singulares da matriz de trajetória em não-nulos, impossibilitando a definição de imersão do sistema dinâmico. Torna-se necessário um método que faça esta distinção entre as duas contribuições. A equação 4.14, indica que no caso do ruído branco, a existência de um piso constante formado por valores não-nulos, apresenta-se através de um diagrama chamado espectro singular. Este espectro relaciona o tamanho do valor singular com seu índice, sendo uma característica utilizada para separar componentes determinísticas. Apenas as componentes acima deste piso que são utilizadas na formação de uma nova matriz de trajetória, obtidas pela equação:

$$\bar{\mathbf{X}} = \sum_{\sigma_i > \text{ruído}} (\mathbf{X} \mathbf{c}_i) \mathbf{c}_i^T \quad (4.15)$$

sendo $\bar{\mathbf{X}}$ a nova matriz de trajetória, filtrada.

Utilizando o método por decomposição em valores singulares, conforme descrito nos passos anteriores, pode-se reconstruir o espaço de estados com eficácia, reduzindo os efeitos do ruído na série temporal. O método também recupera a série temporal através da filtragem, possibilitando considerar o SVD com uma técnica de filtragem.

A janela (n) utilizada no método necessita ser adequada a série. Para definição correta do número, o critério apresentado a seguir é suficiente para escolha.

$$n = \frac{2 \pi}{(f_c T_s)} \quad (4.16)$$

onde f_c é a maior frequência com intensidade significativa presente no sinal em rad/s e T_s é o intervalo de amostragem (BROOMHEAD; KING, 1986).

Implementando o método SVD para reconstrução de um atrator tridimensional não-linear com parâmetros caótico, utiliza-se o modelo de Rössler como exemplo. Otto E. Rössler construiu em 1976 o sistema de Rössler sendo tridimensional de equações diferenciais. Para verificar a eficácia do método SVD, o espaço de estados do atrator de Rössler foi reconstruído utilizando a série temporal de uma solução (x), determinada via simulação numérica, pelo sistema de equações:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + (x - c)\end{aligned}\tag{4.17}$$

onde a , b e $c > 0$ são os parâmetros do sistema e x , y e z são os estados. Para o sistema de Rössler, os parâmetros que resultam em uma resposta caótica são $a = b = 0,2$ e $c = 6,3$. As condições iniciais são $(u_0; v_0; w_0) = (0,1; -0,1; 0,5)$, com vetor tempo de 0 à 150s, com intervalo de tempo entre cada instante de 0,001s.

A série temporal é contaminada com ruído branco gaussiano SNR=25/1. A Figura 4.6 apresenta a série temporal de Rössler sem ruído e com ruído branco, respectivamente, ambas reamostradas e normalizadas.

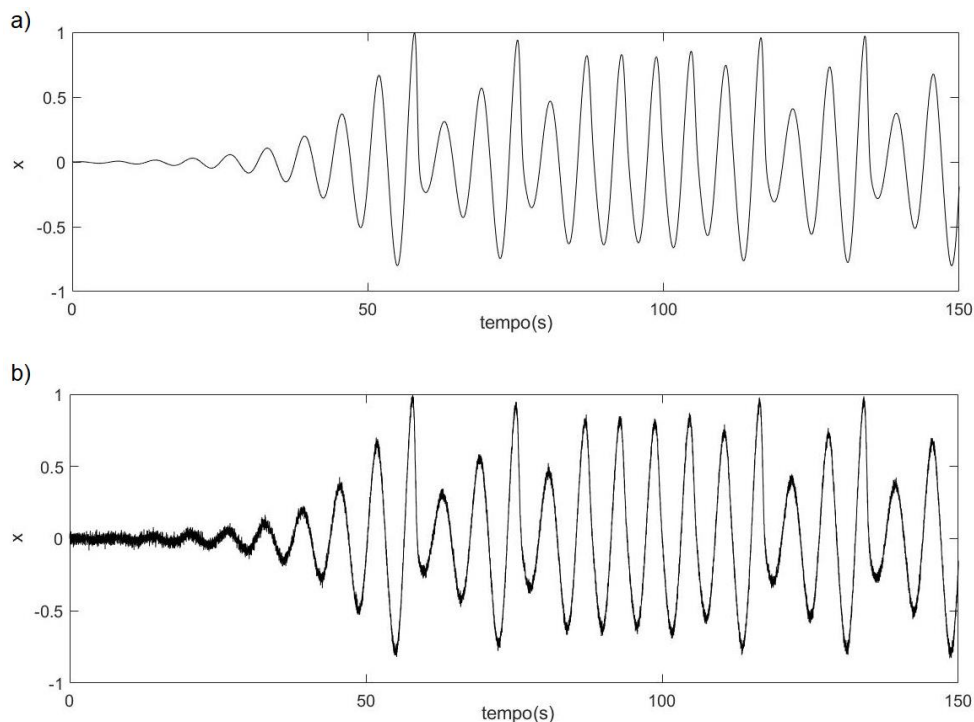


Figura 4.6 – Série temporal do modelo de Rössler: a) sem ruído e b) contaminada por ruído branco.

A série temporal sem ruído e a contaminada por ruído branco, foram normalizadas, visando apresentarem a mesma amplitude para sequência da técnica empregada.

Para determinação da janela n , utiliza-se o espectro de frequências em decibéis:

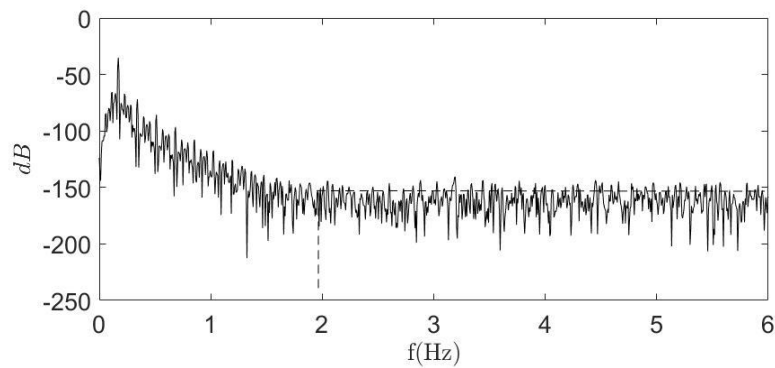


Figura 4.7 – Espectro de frequência em dB para a série temporal de Rössler com ruído.

A maior frequência significativa no sinal é aproximadamente 2 Hz . Aplicando a equação 4.16, encontra-se $n = 50$.

O espectro singular para série temporal é construído utilizando os valores singulares obtidos pela equação 4.12, conforme apresenta a Figura 4.8.

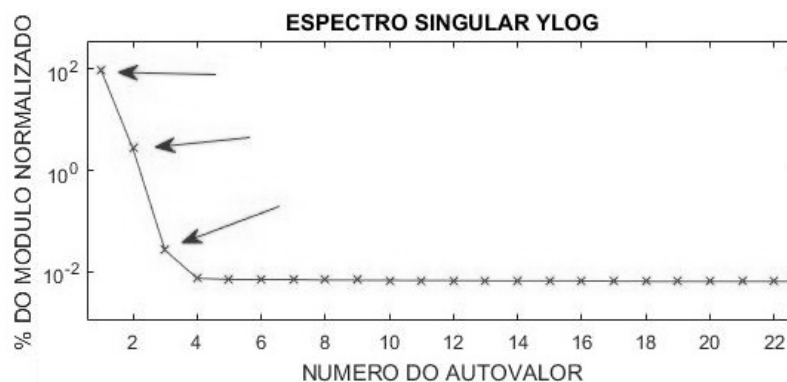


Figura 4.8 – Espectro singular da série temporal do modelo de Lorenz: três valores singulares acima do ruído.

É possível observar na Figura 4.8 a presença de três valores singulares acima do ruído. Isto indica que a dimensão de imersão é três, informação apenas confirmada por se tratar de um atrator conhecido com sistema dinâmico 3-dimensional. Somente esses três valores singulares serão utilizados na reconstrução, conforme a equação 4.15.

A Figura 4.9(a) apresenta a projeção em três dimensões do espaço de estados original, obtido através de simulação numérica e isento de ruído. Na Figura 4.9(b) o espaço de estados é reconstruído pelo método SVD, utilizando sinal contaminado por ruído, simulando em situação controlada um sinal experimental.

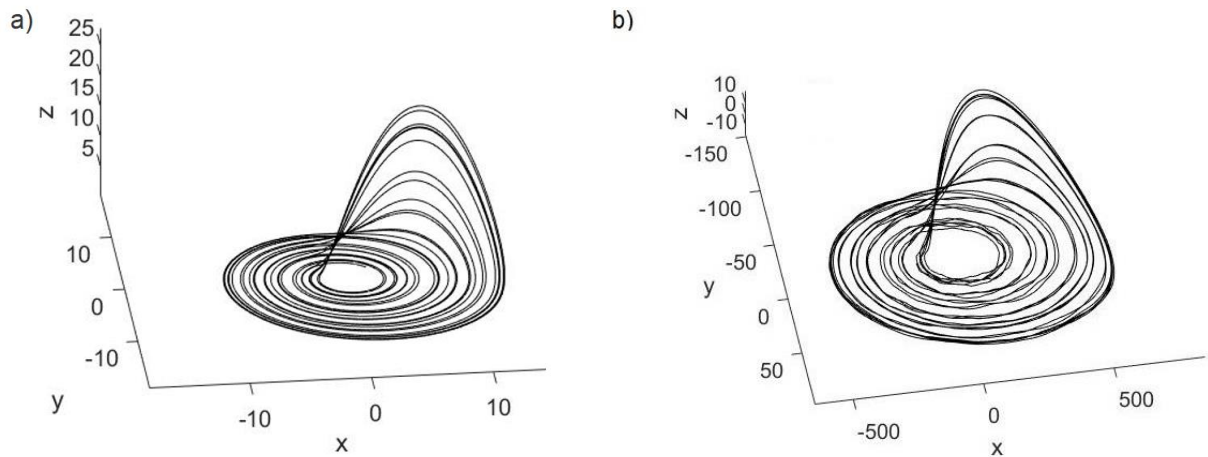


Figura 4.9 – Projeção em três dimensões do atrator de Rössler: a) Espaço de estados original, obtido das equações por simulação numérica e b) Espaço de estados reconstruído pelo método SVD.

4.5 SVD como filtragem digital de séries temporais

Ao implementar o método da decomposição em valores singulares para reconstrução do espaço de estados, observa-se que o SVD pode ser utilizado como eficaz filtro digital em séries temporais. A filtragem por SVD pode ser muito útil para atenuação do ruído sem causar defasagem ou distorções. A Figura 4.10 mostra um trecho da série temporal de Rössler contaminada com ruído SNR=25/1.

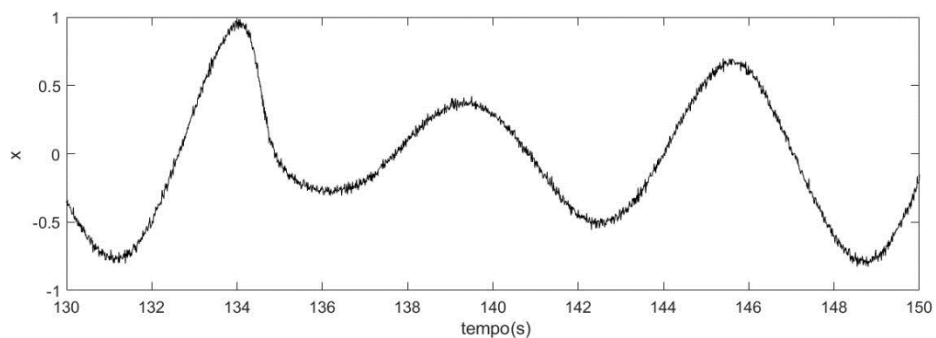


Figura 4.10 – Trecho da série temporal de Rössler contaminada SNR=25/1.

Após reconstruir o espaço de estados pelo método SVD, foi possível extrair novamente o sinal, agora filtrado pelo método, e comparar com a série temporal original. A Figura 4.11 mostra um trecho da série temporal de Rössler original e filtrada por SVD. Nota-se que não ocorre defasagem ou perda de informação após filtragem.

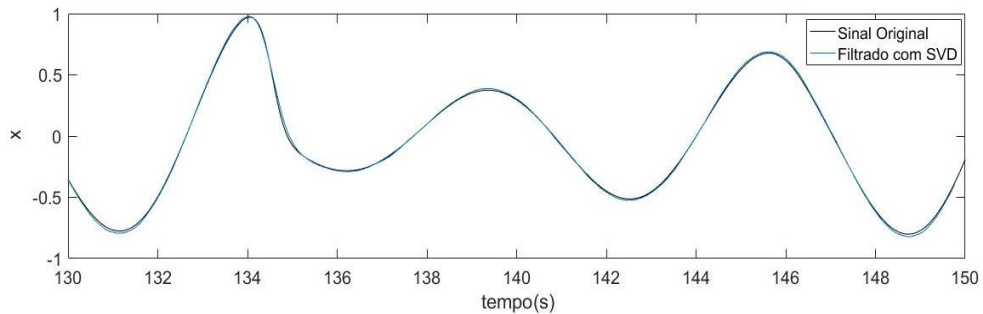


Figura 4.11 – Série temporal de Rössler original (preto) e filtrada por SVD (azul) sobrepostas, a informação não é perdida nos picos e o sinal não está defasado.

Como SVD pode corresponder como um bom filtro digital, dispensa a filtragem prévia da série temporal ao implementar uma técnica de reconstrução do espaço de estados. Torna-se uma grande vantagem a filtragem ocorrer internamente durante a execução do método, uma vez que a filtragem convencional pode provocar distorções e defasagem no sinal.

Os resultados obtidos pela aplicação do método da decomposição em valores singulares na série temporal de Rössler mostram que o método SVD é menos suscetível a erros que o método da defasagem para reconstrução do espaço de estados, por não necessitar de outros parâmetros de imersão. A série temporal foi filtrada de maneira simples e eficaz utilizando SVD, Vasconcellos (2007, p. 60):

A técnica da reconstrução do espaço de estados procura obter um espaço de estados do sistema dinâmico estudado similar ao original, sem um modelo matemático. Desta forma, não tem como comparar com o espaço de estados real. Por isso, quanto menores as chances de erro, melhor, e a reconstrução do espaço de estados por SVD tem se mostrado muito mais segura.

5 DETERMINAÇÃO DE EXPOENTES DE LYAPUNOV

5.1 Introdução

Os sistemas caóticos são caracterizados pela divergência exponencial das trajetórias conforme a dinâmica do sistema evolui no tempo. Ferrara e Prado (2017) afirmam ser extremamente difícil, senão impossível na prática, seguir a evolução de um fluxo caótico quando a divergência das trajetórias sobre o atrator torna-se rápida. Esta taxa de divergência de trajetórias pode ser medida pelos expoentes característicos de Lyapunov ou números de Lyapunov. Os expoentes de Lyapunov medem esta divergência entre as trajetórias e quantificam a dependência sensível às condições iniciais. Trata-se de um invariante geométrico do sistema dinâmico que define suas principais características. É uma das técnicas mais empregadas para caracterizar o caos. O conceito é promover uma perturbação em torno da trajetória fiduciária (trajetória de referência) e monitorar como esta perturbação irá evoluir no tempo. Inicialmente esta trajetória em seu estado atual apresenta o formato de uma hipersfera, ao provocar esta perturbação, ocorre uma divergência entre as trajetórias, algumas vezes exponencialmente, e geometricamente em função do afastamento ocasionado pela perturbação passamos a ter uma hiperelipsoide (SAVI, 2017, p. 180). A Figura 5.1 ilustra a divergência motivada pela perturbação.

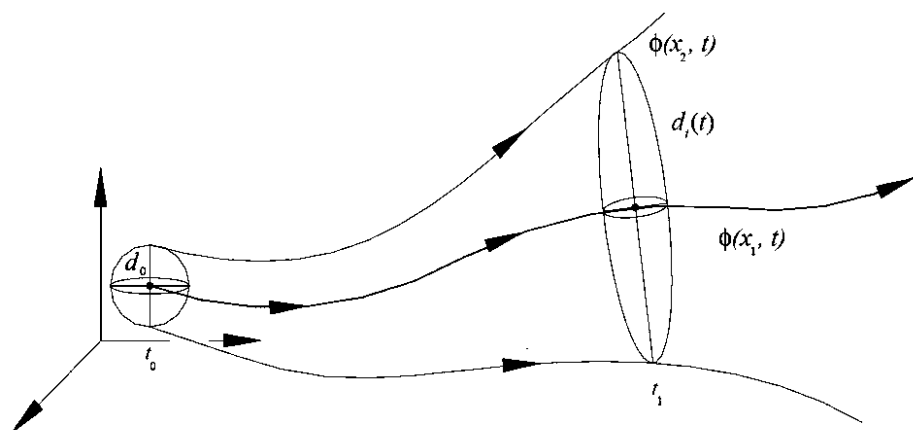


Figura 5.1 – Expoentes de Lyapunov em termos geométricos, a hipersfera é deformada em um hiperelipsoide (SAVI, 2017).

A condição inicial apresenta as trajetórias no estado atual t_0 , formando uma hiperesfera perfeita, com diâmetro definido d_0 , tendo como valores dos eixos o seu respectivo raio. Ao sofrer a perturbação, as rotas divergem em relação a trajetória fiduciária e passa a ser uma hiperelipsoide à medida que o tempo evolui. No instante t_1 , é apresentado uma hiperelipsoide em função da divergência entre as rotas, contraindo o eixo x_1 e alongando o eixo x_2 .

Para medir a taxa de divergência entre as trajetórias e assim quantificar dependência sensitiva as condições iniciais, utilizam-se os expoentes característicos de Lyapunov ou números de Lyapunov (FERRARA; PRADO, 2017, p. 139).

Os expoentes de Lyapunov quantificam esta distância da periferia da hiperesfera ao centro da mesma, que representa o quanto divergiram ou convergiram as trajetórias. Quando o sistema dinâmico não-linear apresenta uma divergência, as trajetórias se afastam e o expoente de Lyapunov estimado é positivo. Ao contrário temos uma convergência, quando as trajetórias se contraem a medida que o sistema evolui no tempo, apresentando o expoente de Lyapunov negativo.

Com a evolução temporal o fluxo deforma a hiperesfera em uma hiperelipsoidal com eixo principais $\mathcal{E}_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, m$. A Figura 5.2 é uma representação bidimensional da evolução do elemento esférico de raio $\mathcal{E}_0(x_0)$ no ponto inicial x_0 , com a dinâmica evoluindo no tempo torna-se um elipsoide com eixos principais $\mathcal{E}_1(t)$ e $\mathcal{E}_2(t)$.

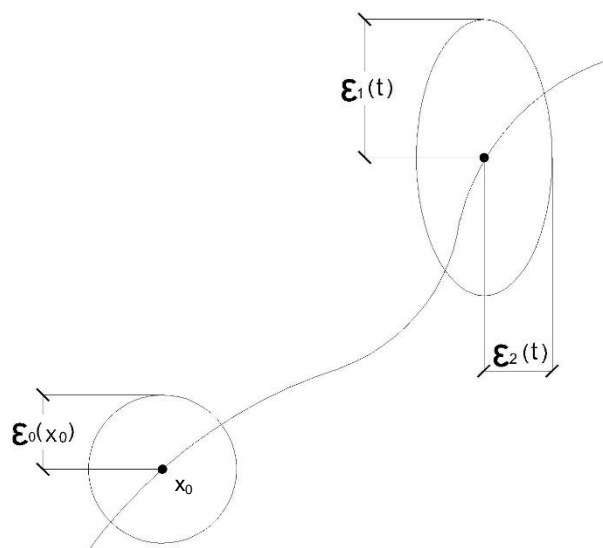


Figura 5.2 – Evolução de um elemento esférico em um elipsoide (FERRARA; PRADO, 2017).

O crescimento exponencial dos eixos principais $\varepsilon_k(t)$ são medidos pelos expoentes de Lyapunov e assim definidos:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon_0(x_0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{\varepsilon_i(t)}{\varepsilon_0(x_0)}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (5.1)$$

Assim, os expoentes de Lyapunov λ_i dependem do estado inicial x_0 , porém em muitos casos eles permanecem constantes ao longo de uma significativa região do espaço de estados. A relação da divergência em cada instante de tempo, tendo como referência a posição inicial é dada por:

$$\lambda_i = \frac{1}{t} \ln \left(\frac{\varepsilon_i(t)}{\varepsilon_0(x_0)} \right) \quad (5.2)$$

Da equação 5.2 é imediato que:

$$\varepsilon_i(t) \sim \varepsilon_0(x_0) e^{\lambda_i t} \quad (5.3)$$

A Figura 5.3 é uma representação tridimensional da evolução de um elemento esférico em um elipsoide, onde nota-se a dobra, expansão em uma direção $\varepsilon_1(t)$ e contração na outra direção $\varepsilon_2(t)$.

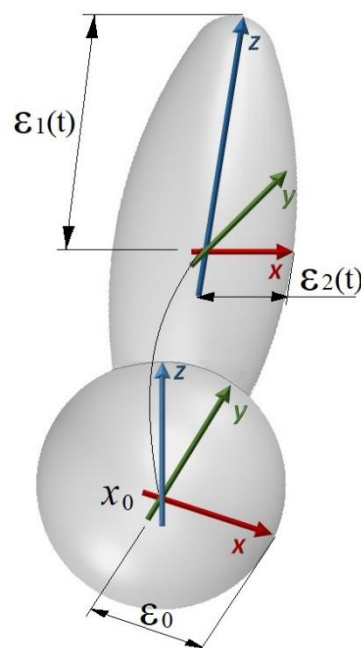


Figura 5.3 – Evolução tridimensional de um elemento esférico em um elipsoide.

Os expoentes de Lyapunov λ fornecem a taxa média de divergência das trajetórias. Utiliza-se média pois, em geral, para um tempo t finito, o valor de λ depende da condição inicial x_0 .

O sinal dos expoentes de Lyapunov possibilitam identificar a dinâmica do sistema. No caso de um espaço de estados tridimensional serão três expoentes de Lyapunov. Podendo ocorrer os seguintes casos para um sistema tridimensional:

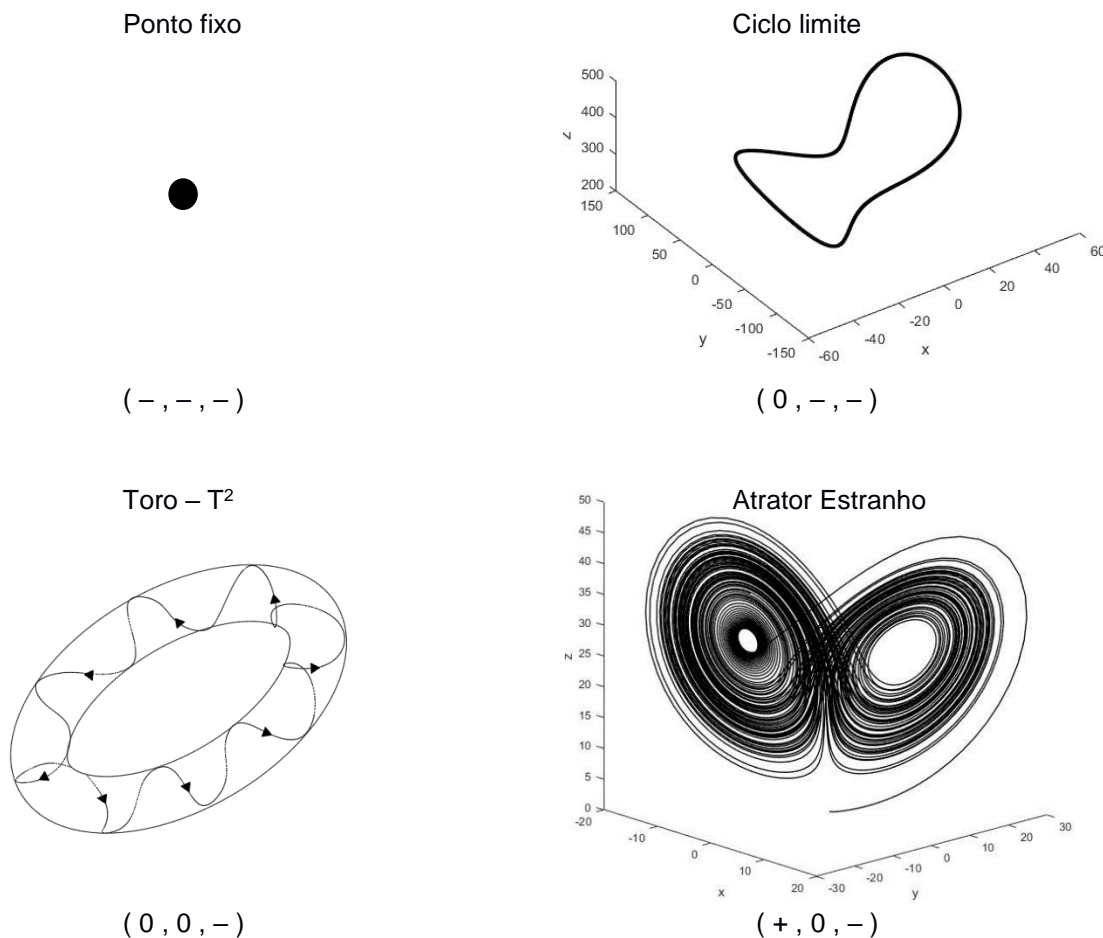


Figura 5.4 – Sinais dos expoentes de Lyapunov para possíveis atratores tridimensionais (FERRARA; PRADO, 2017).

A existência de um ou mais expoentes de Lyapunov positivos define uma instabilidade orbital nas direções associadas. Para uma solução caótica, e um atrator estranho, a dimensão do espaço de estados deve ser $n \geq 3$.

Existem diversas maneiras de se fazer a estimativa numérica de expoentes de Lyapunov. Neste trabalho aborda-se o cálculo do maior expoente de Lyapunov em sistemas dinâmicos não-lineares, empregando o método sugerido por Wolf.

5.2 Algoritmo de Wolf et al.

Atualmente existem diversos algoritmos desenvolvidos para obter os expoentes de Lyapunov. O primeiro algoritmo criado para calcular os expoentes de Lyapunov diretamente de séries temporais foi desenvolvido por Wolf et al. O método é uma adaptação dos métodos propostos anteriormente por Benettin et al. e por Shimada e Nagashima. O algoritmo proposto por Wolf permite estimar o maior expoente de Lyapunov, sendo este, quem determina o comportamento geral do sistema. No caso de um sistema dinâmico caótico, estima os expoentes de Lyapunov não negativos de uma série temporal.

O algoritmo utiliza-se de um sinal para reconstruir o espaço de estados pelo método de defasagem. A partir do espaço de estados tridimensional reconstruído, a ferramenta computacional percorre toda a dinâmica do atrator e estima a distância que uma rota divergiu ou convergiu da trajetória de referência ao sofrer perturbação. O algoritmo mede o maior expoente de Lyapunov, num determinado momento. No exemplo clássico da hiperelipse, o eixo que divergiu exponencialmente (alongou) que terá o valor estimado. O maior expoentes de Lyapunov positivo (λ_1) é calculado num primeiro momento, e, depois, o segundo maior expoente de Lyapunov (λ_2), e assim sucessivamente até percorrer todo o conjunto de pontos que formam o sistema.

A separação entre dois pontos, denominada L , define o eixo principal, sendo a distância do ponto da trajetória de referência, P_0 , até o ponto da trajetória vizinha, Q_0 , naquele determinado instante de tempo (t_0), ilustrado na Figura 5.5. A cada novo instante de tempo, onde define-se novos pontos a reortonormalização é substituída pela procura de um novo ponto, próximo a trajetória de referência.

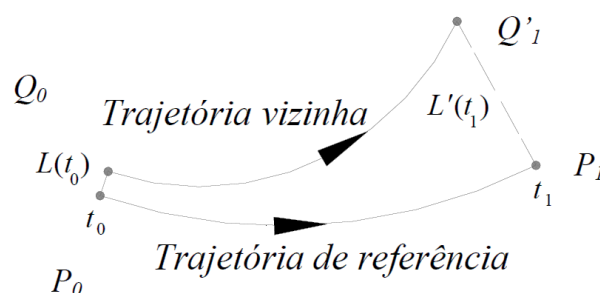


Figura 5.5 – Representação gráfica da trajetória de referência e da trajetória vizinha (SAVI, 2017).

A trajetória fiducial (referência) é formada pelo conjunto de pontos do atrator reconstruído pelo algoritmo, dada pela sequência de pontos $P_0(t_0), P_1(t_1), P_2(t_2), \dots$, até percorrer todo o sistema dinâmico. Seja $Q_0(t_0)$ o vizinho no atrator reconstruído mais próximo de $P_0(t_0)$ e $L(t_0)$ a distância entre P_0 e Q_0 no instante t_0 (Figura 5.6). A distância neste instante de tempo $L(t_0)$, pode ser dada por $L_0 = |P_0(t_0) - Q_0(t_0)| < \varepsilon$, ou seja, $Q_0(t_0)$ está dentro da hipersfera de raio ε centrada em $P_0(t_0)$. O algoritmo acompanha a evolução temporal de P_0 e Q_0 até o instante t_1 , onde observa-se que as distâncias entre os pontos P_1 e Q_1 divergem e L'_0 excedendo ε .

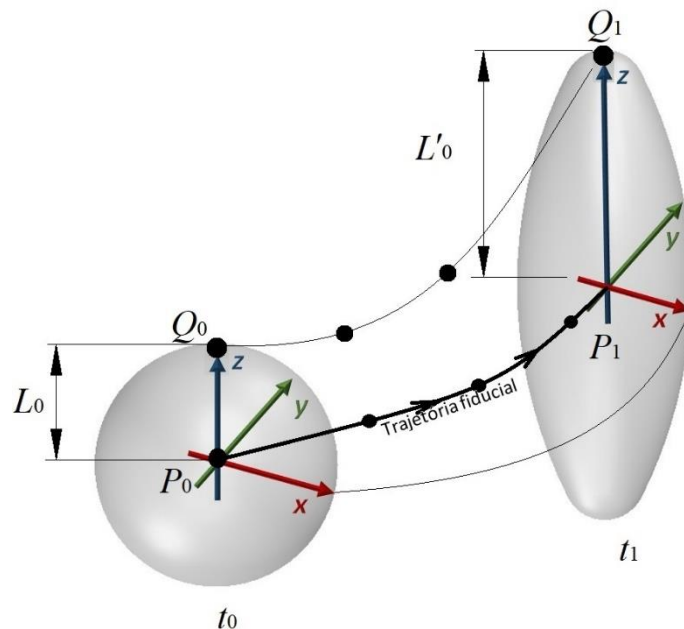


Figura 5.6 – Representação esquemática do método proposto por Wolf.

O maior expoente de Lyapunov é estimado a partir da taxa de crescimento do segmento L_i . Quando o comprimento do segmento que liga os dois pontos excede um certo valor ε , um novo vizinho é escolhido de forma a minimizar o ângulo β'_i . A Figura 5.7 ilustra como é realizada a substituição Q_0 por um novo vizinho, mais próximo de $P_1(t_1)$, que esteja na direção do segmento L'_0 e tal que $L_1 = |P_1(t_1) - Q_1(t_1)| < \varepsilon$. O algoritmo percorre todo o conjunto de pontos $P(t_i)$ da trajetória fiducial do atrator reconstruído.

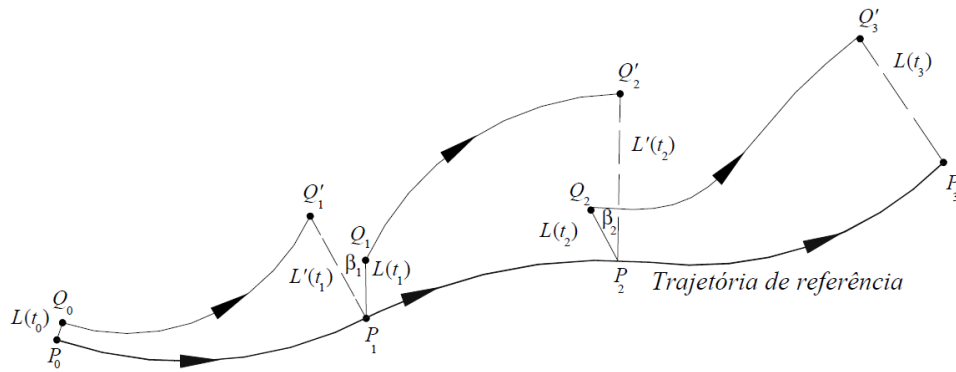


Figura 5.7 – Cálculo dos expoentes de Lyapunov (SAVI, 2017).

Quando ocorre a divergência entre os pontos P_i e Q_i durante a evolução temporal (t_1, t_2, \dots, t_n), a taxa de crescimento dos segmentos (L'_0) excede ε (raio da esfera) e não satisfaz a condição proposta. Observa-se na Figura 5.7 que um novo vizinho (Q), mais próximo é definido, por estar na direção do segmento, ou próximo, visando minimizar o ângulo β'_i formado entre o segmento $L'(t_i)$ e o novo segmento $L(t_1)$, originado pelo ponto P da trajetória de referência e o novo vizinho. Este novo vizinho é escolhido pelo algoritmo através dos parâmetros inseridos na rotina, como distância mínima e máxima entre os pontos e o ângulo máximo.

Uma comparação entre os eixos principais do hiperelipsoide com os eixos da hiperesfera define a divergência entre as trajetórias. Determina-se a razão entre as distâncias, obtendo o maior expoente de Lyapunov positivo como a média de $\log_2 L'_i/L_i$ ao longo da trajetória fiducial, dada por:

$$\lambda_1 = \frac{1}{t_M - t_0} \sum_{i=0}^{M-1} \log_2 \frac{L'_i}{L_i} \quad (5.4)$$

sendo M o número total de vezes que escolheu um vizinho novo próximo a trajetória fiducial.

Ferrara e Prado (2017) afirmam que, no limite de um número infinito de pontos na série temporal e na ausência de ruído é sempre possível proceder à escolha de um novo vizinho que esteja da direção do segmento L'_{i-1} . Na prática, os experimentos geram séries finitas e ruidosas. A busca por um novo vizinho, nestas condições reais,

é obtida pelo ponto que está próximo de $P(t_i)$ e que esteja dentro de um cone de altura ε cujo o eixo de simetria coincida com o segmento L'_{i-1} e com ângulo de abertura $\beta'=\pi/9$, representado na Figura 5.8. Se não localizar nenhum ponto dentro desse cone, aumenta-se o ângulo β' até encontrar um vizinho. Se mesmo assim não for possível, torna-se o novo vizinho, o ponto mais próximo do ponto $P(t_i)$ da trajetória fiduciária, desprezando qualquer que seja o ângulo β' e o valor de ε .

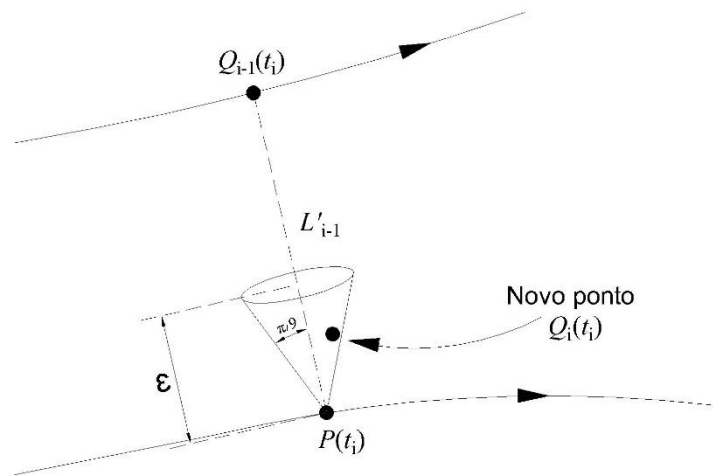


Figura 5.8 – Critério prático para a substituição de vizinhos (FERRARA e PRADO, 2017).

Em essência, a avaliação da divergência entre as trajetórias vizinhas deve considerar uma média do crescimento exponencial em vários pontos sobre a trajetória (SAVI, 2017, p. 182). Quando a distância, ou seja, o segmento $L(t)$ torna-se muito grande, um novo vizinho (novo ponto) encontra-se no interior do cone de altura ε e ângulo $\pi/9$.

Savi (2017) afirma que o algoritmo de Wolf (1985) é bem estabelecido para situações em que o sistema dinâmico possui um modelo matemático que permite a sua linearização em torno de uma determinada órbita.

Ao executar o algoritmo de Wolf, deve-se especificar o tamanho do sinal N , ou seja, a quantidade de pontos existentes, que serão utilizados na reconstrução do espaço de estados. A reconstrução é realizada pelo método da defasagem, portanto define-se os parâmetros de imersão, tau (τ) e dimensão de imersão (D_e); A menor distância (d_{min}), a maior distância (d_{max}) tangente entre as trajetórias, e o ângulo são

definidos como parâmetros para escolha de novos vizinhos, podendo ser modificados em sinais ruidosos; e o passo de evolução, T_{EV} , que determina os instantes de tempo (t) onde serão medidos os expoentes até percorrer todos os pontos da trajetória fiduciária.

5.3 Algoritmo de Rosenstein et al.

Posteriormente, Rosenstein et al. (1993) desenvolveu um algoritmo baseado no método de Wolf et al. (1985). O algoritmo é similar ao de Kantz (1994), sendo que a distância entre as trajetórias é definida como a norma Euclidiana no espaço de estados reconstruído, utilizando também somente uma trajetória vizinha (SAVI, 2007, p. 256). Kantz (1994) cita que ao utilizar apenas um vizinho, dentro de uma vizinhança de pontos, pode induzir a erros estatísticos em sinais ruidosos.

O algoritmo de Rosenstein et al. (1993) é fundamentado no trabalho de Sato et al. (1987), e o expoente é estimado como:

$$\lambda_1 = \frac{1}{i\Delta t} \frac{1}{(M-i)} \sum_{j=1}^{M-i} \log_2 \frac{d_j(i)}{d_j(0)} \quad (5.5)$$

sendo Δt o período de amostragem, $d_j(i)$ é a distância entre o j -ésimo par de vizinhos após i passos discretos no tempo e $M = N_0 - (d-1) T$.

Simoni (2008) apresenta que o algoritmo proposto por Rosenstein têm sido apontado como melhor opção para o cálculo dos expoente de Lyapunov para séries de dados experimentais com ruído.

Savi (2017) afirma que o algoritmo de Rosenstein apresenta bons resultados para sistemas discretos (mapas), mas em sistemas contínuos (equações diferenciais) os resultados não são muito eficazes.

6 CARACTERIZAÇÃO DE COMPORTAMENTO CAÓTICO EM SÉRIES TEMPORAIS OBTIDAS NUMERICAMENTE.

6.1 Atrator caótico do modelo de Lorenz

Em 1963, Edward N. Lorenz construiu o sistema composto por três equações diferenciais ordinárias, sendo autônomo, originalmente derivado de Saltzman (1962) desenvolvido para problemas meteorológicos.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= x(\rho - z) - y \\ \dot{z} &= xy - \beta z \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3, (\sigma, \rho, \beta, > 0).$$

Os parâmetros do sistema σ , β , ρ , definem o comportamento. O atrator de Lorenz apresenta resposta caótica para $\sigma=10$, $\beta=8/3$ e $\rho=28$. A Figura 6.1 ilustra o resultado da simulação numérica nos parâmetros caóticos citados e condições iniciais $(u_0; v_0; w_0) = (0, 1; -0, 1; 0, 5)$.

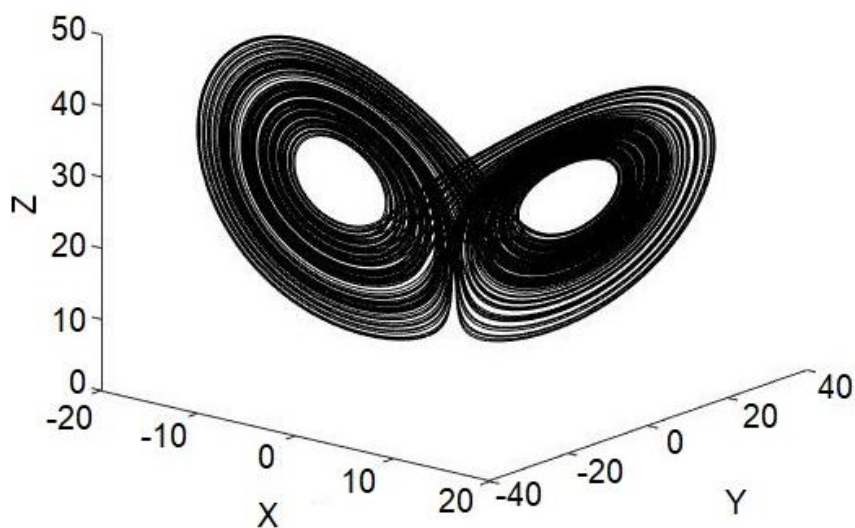


Figura 6.1 – Atrator de Lorenz obtido via simulação numérica com parâmetros caóticos.

A Figura 6.2 ilustra o mesmo resultado da simulação numérica anterior em projeções bidimensionais do espaço de estados e história temporal das variáveis de estado. É possível verificar em 2D o famoso formato de borboleta associado ao comportamento caótico e as séries temporais não periódicas.

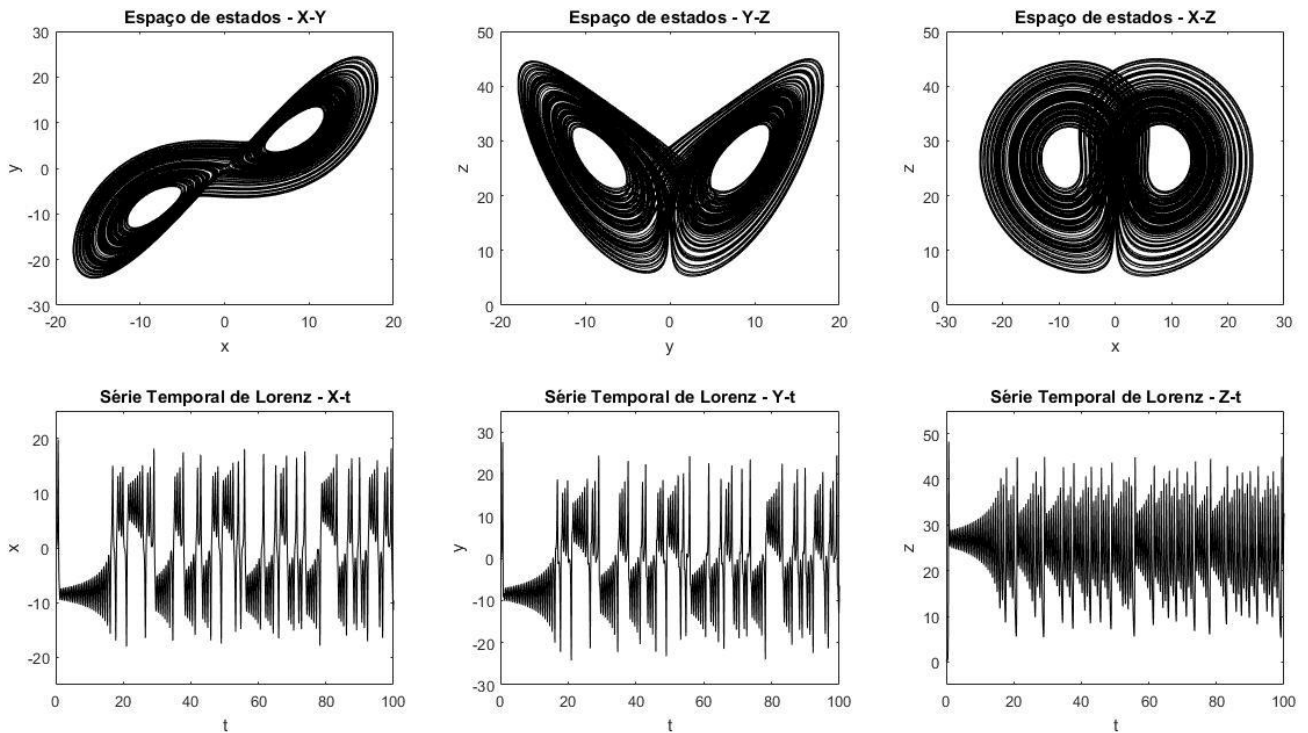


Figura 6.2 – Sistema bidimensional e série temporal de Lorenz caótico.

O conceito de atrator caótico apresenta a dependência sensível às condições iniciais, onde a dinâmica do sistema pode ser alterada por pequenas perturbações e a causa e efeito não são proporcionais. Pequenas causas podem estar associadas a grandes efeitos.

A sensibilidade às condições iniciais no modelo de Lorenz pode ser constatada na Figura 6.3, onde foram realizadas duas simulações com mínima alteração nas condições iniciais dadas por $(u_0; v_0; w_0) = (0,1; -0,1; 0,5)$ e $(u_0; v_0; w_0) = (0,101; -0,1; 0,5)$.

As séries temporais, ilustradas na Figura 6.4 foram obtidas por simulação numérica, através das equações do modelo de Lorenz, com as mesmas condições iniciais citadas na Figura 6.3, no tempo de $200s$, e com os mesmos parâmetros caóticos. Nota-se que ao evoluir no tempo, mesmo sendo pequena a diferença entre as condições iniciais, após $20s$ temos um efeito divergente entre as séries.

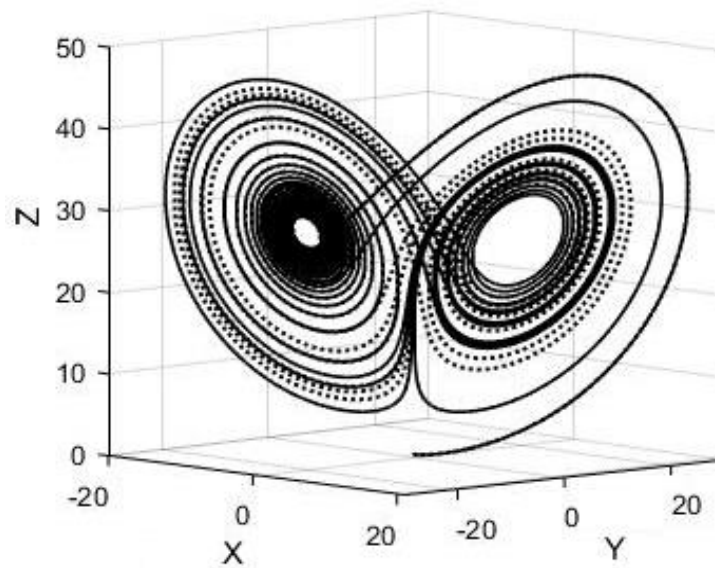


Figura 6.3 – Atrator de Lorenz gerado por duas simulações com mínima alteração nas c.i.

Nas Figuras 6.3 e 6.4 verificam-se duas simulações, com mínima diferença na condição inicial do sistema. Inicialmente as duas órbitas evoluem no tempo com certa proximidade, mas na medida que o tempo evolui, é possível observar uma (linha cheia) divergindo da outra (linha pontilhada).

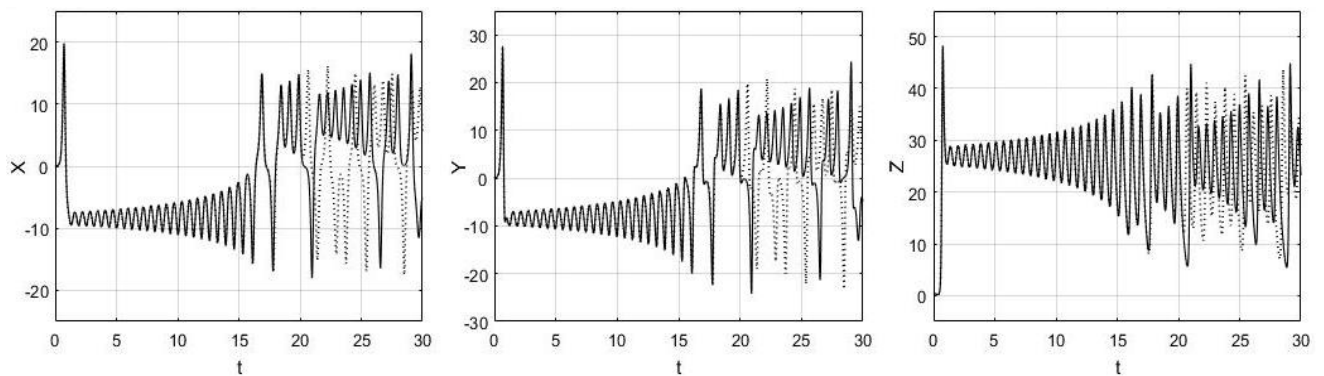


Figura 6.4 – Influência das condições iniciais na resposta caótica.

A proposta inicial foi utilizar o sinal extraído da série temporal do atrator caótico de Lorenz, pois certamente trata-se de um sinal não-linear, assim como a maioria dos sinais aeroelásticos. Como em sinais experimentais sempre existe a presença de ruído, o sinal foi contaminado com diferentes relações sinal/ruído, simulando um sinal coletado experimentalmente, sendo este submetido a implementação do método da decomposição em valores singulares (SVD), realizando uma filtragem digital e posteriormente ao algoritmo de Wolf, para estimar o maior expoente de Lyapunov.

A série temporal foi obtida por simulação numérica, através das equações do modelo de Lorenz, com as condições iniciais $(u_0; v_0; w_0) = (0,1; -0,1; 0,1)$, no tempo de 200s. O intervalo de amostragem (T_s) entre cada instante foi de 0,001s, resultando em um sinal com 200.000 pontos, ilustrado na Figura 6.5.

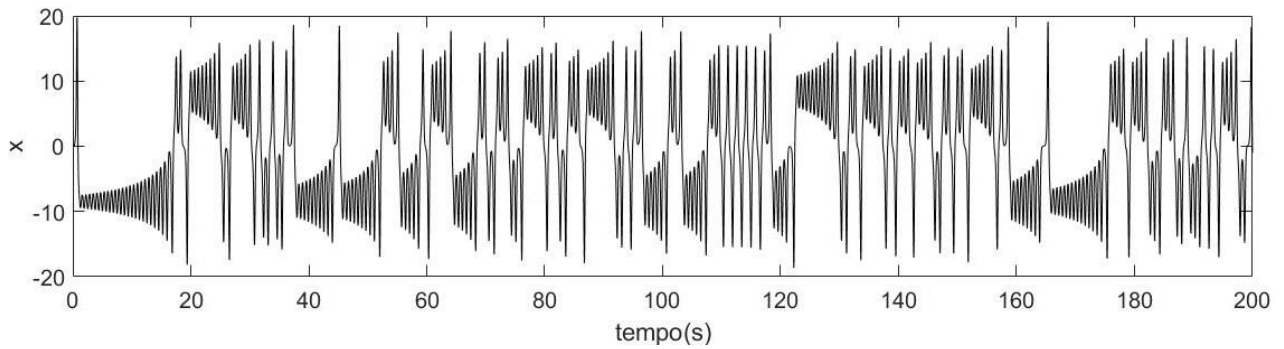


Figura 6.5 – Série temporal do modelo de Lorenz.

O sinal foi reamostrado para que a cada 10 pontos fosse selecionado apenas 1, reduzindo o sinal para 20.000 pontos e então normalizado. Deste sinal reamostrado e normalizado apenas o seguinte trecho da série temporal (Figura 6.6) foi utilizado.

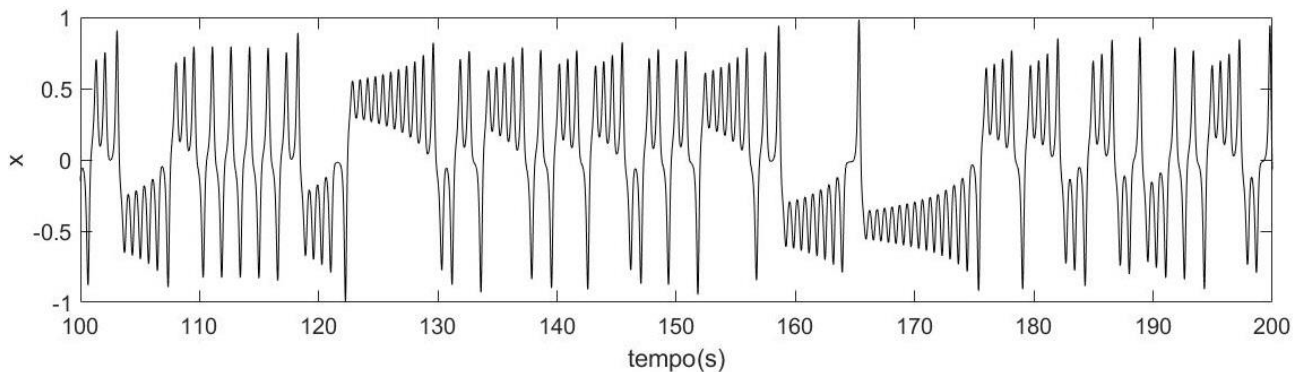


Figura 6.6 – Trecho da série temporal que deu origem ao sinal.

Antes de submeter o sinal ao método da decomposição em valores singulares (SVD) o sinal foi normalizado, para que todos os sinais a serem posteriormente analisados apresentassem as mesmas amplitudes. A Figura 6.7 apresenta o sinal reamostrado e normalizado, contendo 10.000 últimos pontos, que foi submetido ao algoritmo de Wolf.

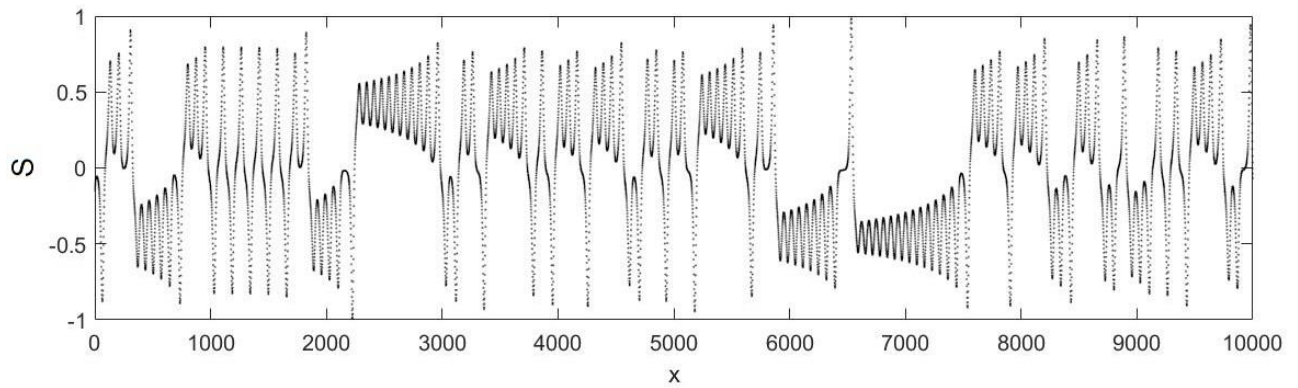


Figura 6.7 – Sinal reamostrado e normalizado.

Para execução do algoritmo, são necessários os parâmetros previamente definidos, que serão referência para a rotina durante o processo de varredura do atrator. A Tabela 6.1 apresenta os valores utilizados para estimar o maior expoente de Lyapunov através do algoritmo. As distâncias e o ângulo para determinar um novo vizinho, podem ser alterados em sinais ruidosos, pois o efeito do ruído causa distorções e afastamento entre os pontos que formam o sinal. Todos os resultados apresentados para o caso de Lorenz, foram gerados utilizando os seguintes parâmetros.

Tabela 6.1 – Parâmetros utilizados no algoritmo de Wolf para sinais de Lorenz.

Descrição	Valores
Tamanho do sinal (N)	10.000
Defasagem (Tau – τ)	10
Dimensão de imersão (D_e)	3 ... (tridimensional)
Instante tempo	0,01 s
Erro máximo de orientação (th_{max})	30
Distância mínima (d_{min})	0,001
Distância máxima (d_{max})	0,3
Tempo de evolução (T_{ev})	20

Fonte: Elaborado pelo autor

O algoritmo reconstrói o espaço de estados tridimensional (X,Y,Z) pelo método da defasagem, utilizando o sinal. Após reconstruir o espaço de estados, o algoritmo percorre os pontos da trajetória de referência e avalia a cada instante de tempo, o maior expoente de Lyapunov, através das equações de movimento. A Figura 6.8 apresenta o atrator reconstruído pelo algoritmo.

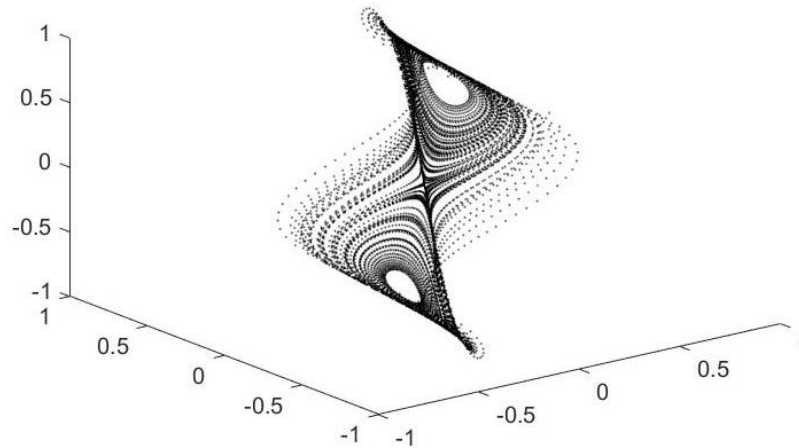


Figura 6.8 – Espaço de estados tridimensional reconstruído pelo algoritmo.

O algoritmo inicia a varredura dos pontos presentes no atrator, realizando a estimativa do maior expoente de Lyapunov, conforme dados de entrada da Tabela 6.1. O sinal contém 10.000 pontos que a cada evolução corresponde 20 iterações, conforme apresenta a Figura 6.9.

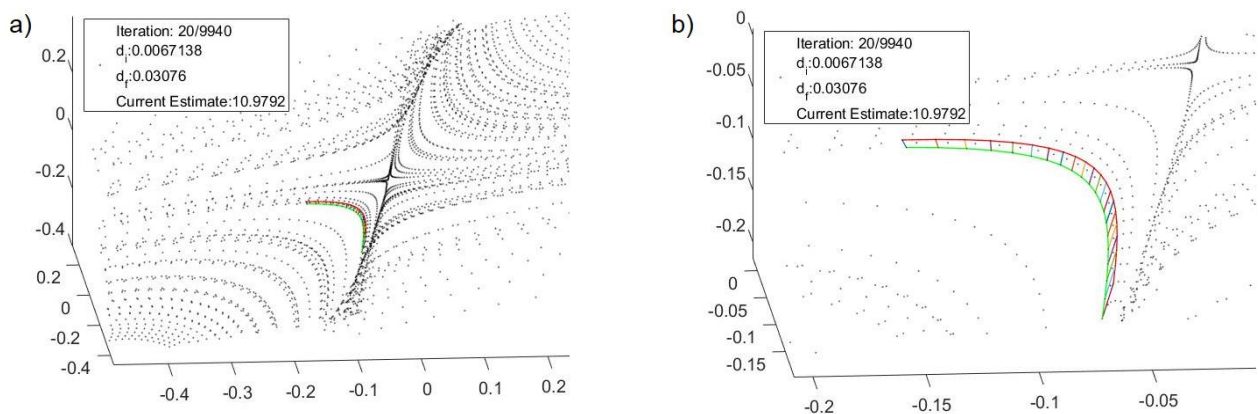


Figura 6.9 – Primeira evolução (iterada): a) Início da varredura e b) Ampliação da região (a).

Para obter o expoente de Lyapunov e assim caracterizar o sistema, foi executado o algoritmo de Wolf até que todos os pontos do atrator fossem percorridos e calculados as distâncias entre os pontos consecutivos. Como trata-se de uma dinâmica caótica a distância é positiva entre os pontos, ocorre uma divergência e as

distâncias são calculadas para estimar o maior expoente de Lyapunov. A Figura 6.10(a) demonstra o resultado da varredura feita pelo algoritmo, após percorrer todo o sistema, e a Figura 6.10(b) uma ampliação do mesmo atrator onde foi estimado o maior expoente de Lyapunov, para o sinal isento de ruído.

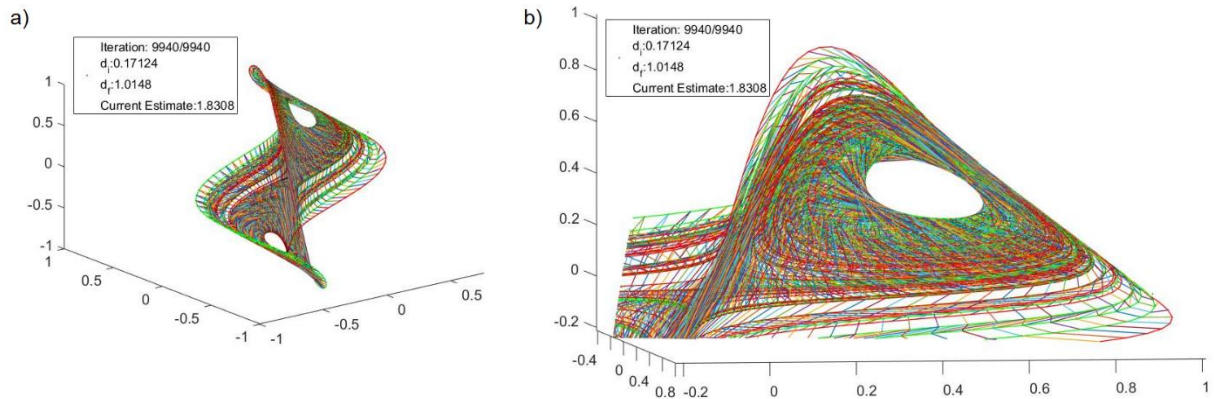


Figura 6.10 – Algoritmo de Wolf: a) Sistema dinâmico percorrido e b) ampliação da região (a).

Foi estimado o maior expoente de Lyapunov com o algoritmo de Wolf, para obter o valor de referência do sinal sem ruído. A Figura 6.11 apresenta a evolução da estimativa do maior expoente de Lyapunov, com o aumento dos passos de evolução vai se estabilizando em torno de $\lambda \sim 1,83$, caracterizando, portanto, o comportamento caótico apresentado pelo sistema com os parâmetros selecionados e ao lado, o seu espaço de estados.

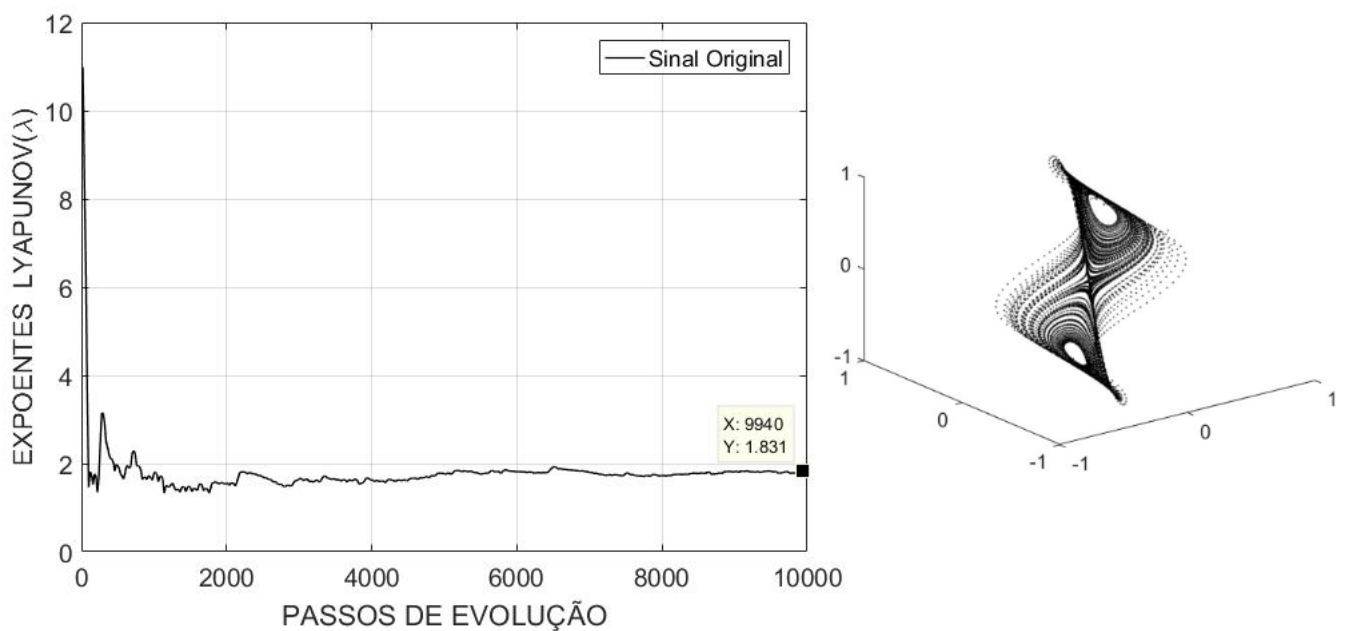


Figura 6.11 – Obtenção do maior expoente de Lyapunov de Lorenz sem ruído, pelo método de Wolf.

6.2 Ruído branco adicionado a série

A aplicação do ruído branco via ferramenta computacional demonstra que quanto maior a relação sinal/ruído (SNR), menores são os efeitos de distorção nas séries temporais. Os resultados da contaminação na série temporal de Lorenz com diferentes níveis de ruído, é observado na Figura 6.12, que apresenta um trecho de cada série analisada.

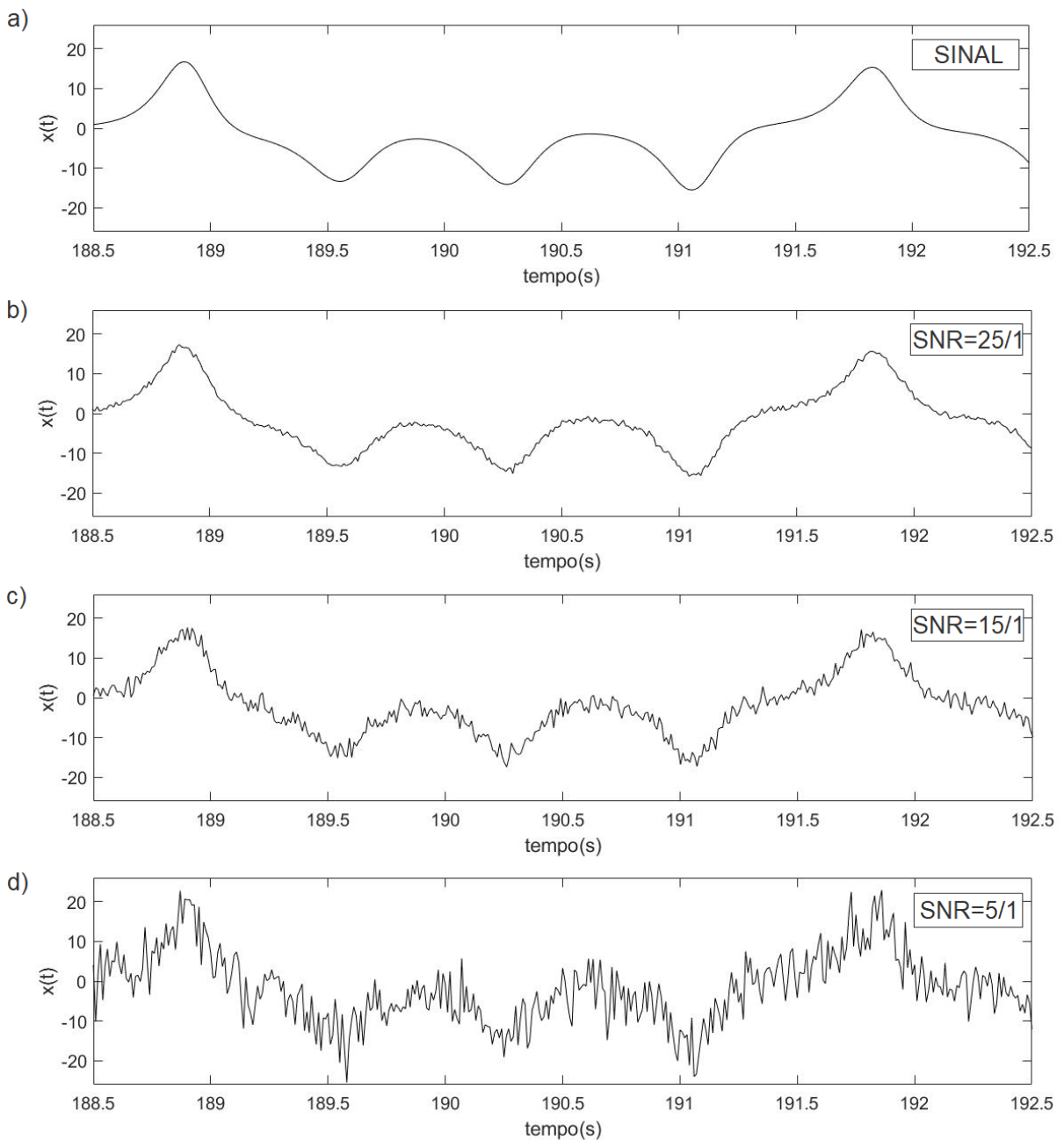


Figura 6.12 – Trechos das séries temporais de Lorenz. a) Sinal sem ruído, b) relação SNR=25/1, c) relação SNR=15/1 e d) relação SNR=5/1.

6.3 Efeito do ruído na reconstrução do espaço de estados

Um sinal coletado em experimento geralmente está acompanhado de ruído. A presença inevitável do ruído pode afetar os pontos deste sinal, causando distorções, e alterando a topologia do atrator. Ao reconstruir o espaço de estados com sinais contaminados por ruído branco, com as relações sinal/ruído citadas anteriormente, pode-se observar que a dinâmica do sistema é distorcida e resulta em um atrator desfigurado. A Figura 6.13 apresenta três diferentes técnicas de reconstruir o espaço de estados, neste caso utilizando o sinal contaminado com ruído $SNR=25/1$. A Figura 6.13(a), apresenta a reconstrução através da técnica de derivadas, sendo possível visualizar que este método amplifica ainda mais o ruído durante a reconstrução. A Figura 6.13(b) utilizou-se o método da defasagem através do algoritmo de Wolf. Já na Figura 6.13(c) a técnica utilizada foi a decomposição em valores singulares (SVD).

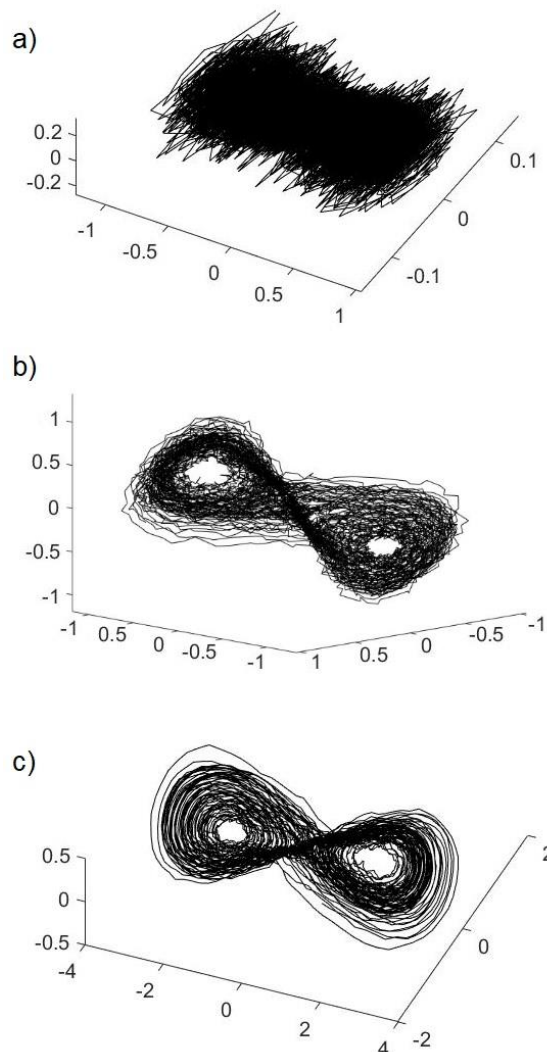


Figura 6.13 – Espaço de estados reconstruído por três diferentes métodos:

a) derivadas, b) defasagem e c) SVD.

Para estimar o maior expoente de Lyapunov nos sinais contaminados, utilizou-se o algoritmo de Wolf, que em sua rotina utiliza-se da reconstrução do espaço de estados pelo método de defasagem. Os níveis de distorções observados nas respectivas séries temporais, também foram observados nos atratores reconstruídos. A menor relação sinal/ruído $SNR=5/1$ resultou em um atrator que não apresenta semelhanças ao modelo de Lorenz. Nem as duas bacias de atração, características deste atrator foi visualizada neste sinal contaminado. Observa-se que em um sinal com maior relação sinal/ruído, o resultado aproxima-se do sinal original.

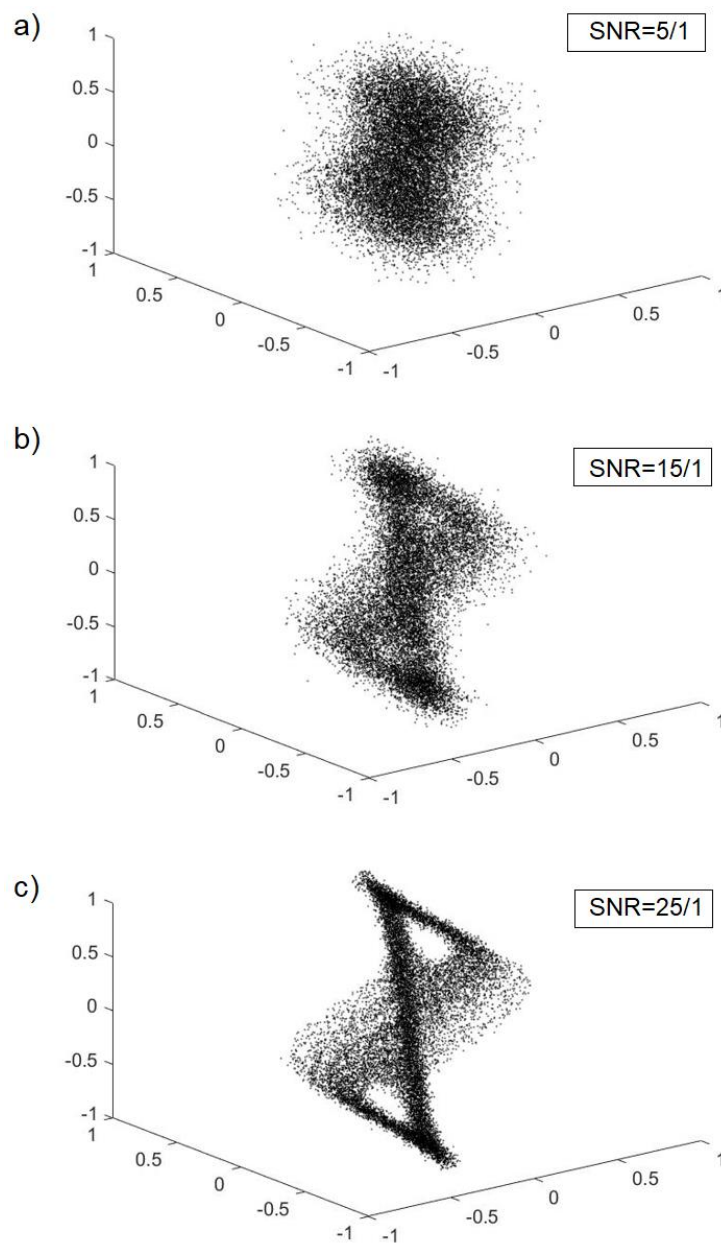


Figura 6.14 – Espaço de estado reconstruído: a) relação $SNR=5/1$, b) relação $SNR=15/1$ e c) relação $SNR=25/1$.

6.4 Efeito do ruído na estimativa do maior expoente de Lyapunov

O sinal de Lorenz foi contaminado com ruído branco gaussiano (AWGN) em diferentes relações sinal/ruído (SNR). O sinal original normalizado, foi contaminado com SNR=5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45 e 50/1. A Figura 6.15 apresenta um trecho da série temporal, de onde foi extraído o sinal, sem ruído e contaminado com ruído SNR=25/1 sobrepostos.

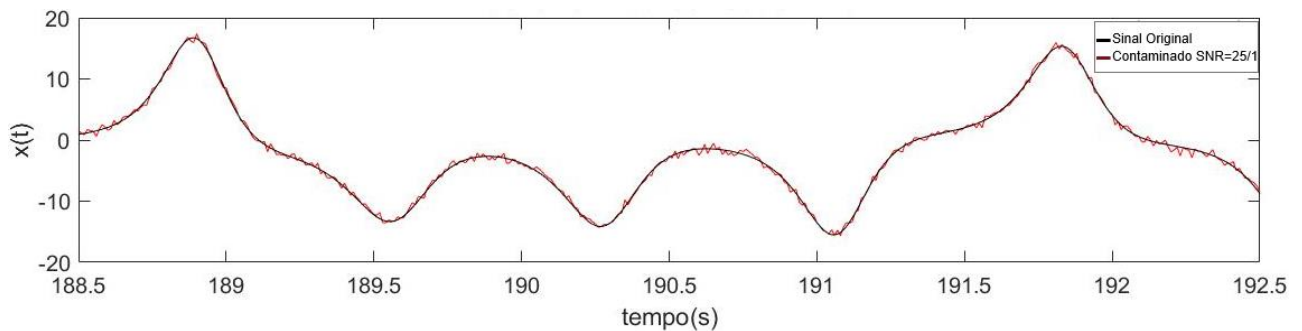


Figura 6.15 – Série temporal de Lorenz original (preto) e contaminada por AWGN (vermelho) sobrepostas.

O sinal contaminado com ruído branco foi normalizado antes de estimar o expoente de Lyapunov. O maior expoente de Lyapunov calculado para caracterizar o sistema dinâmico contendo ruído, também foi obtido através do algoritmo de Wolf. A Figura 6.16 apresenta o resultado do algoritmo após percorrer todos os pontos do atrator reconstruído, contaminado com ruído SNR=25/1.

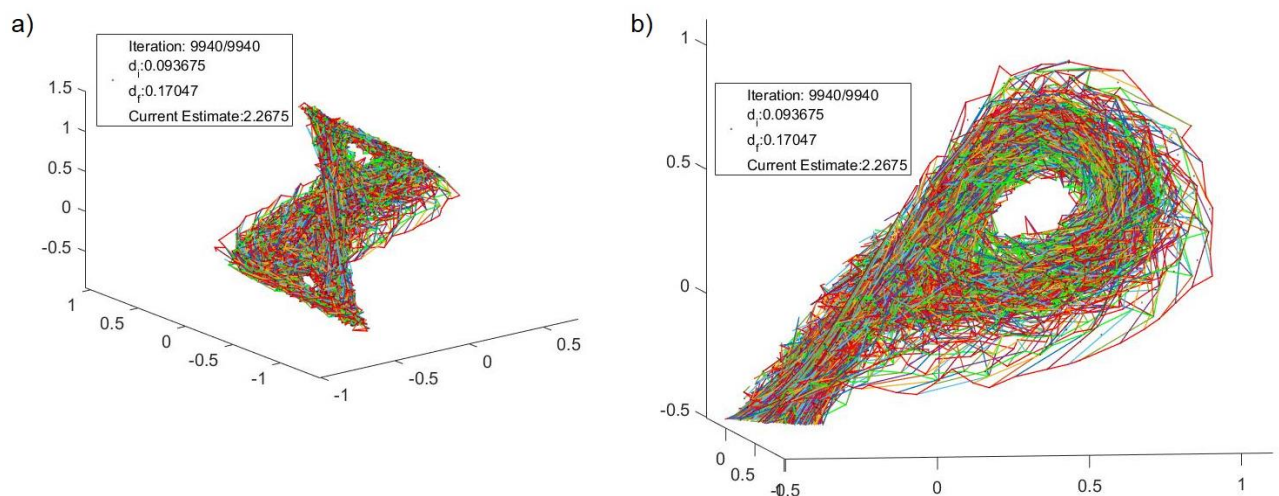


Figura 6.16 – Algoritmo de Wolf estimando o maior expoente de Lyapunov: a) Sistema dinâmico percorrido com ruído e b) ampliação da região (a).

A presença do ruído realmente distorce os pontos e conseqüentemente seu respectivo espaço de estados reconstruído, para esta relação sinal/ruído $SNR=25/1$, apresentados na Figura 6.16 anteriormente.

O algoritmo foi executado em todos os sinais contaminados com diferentes relações sinal/ruído, visando identificar faixas de contaminação que não influenciariam no invariante expoente de Lyapunov. Em experimentos que geram sinais, procura-se as mais altas relações sinal/ruído, visando um menor efeito do ruído de fundo. Inicialmente o algoritmo de Wolf foi executado em sinais contaminados com as mais altas relações. A Figura 6.17 apresenta o maior expoente de Lyapunov e ao lado, o seu espaço de estados para $SNR=50/1$ e $SNR=35/1$.

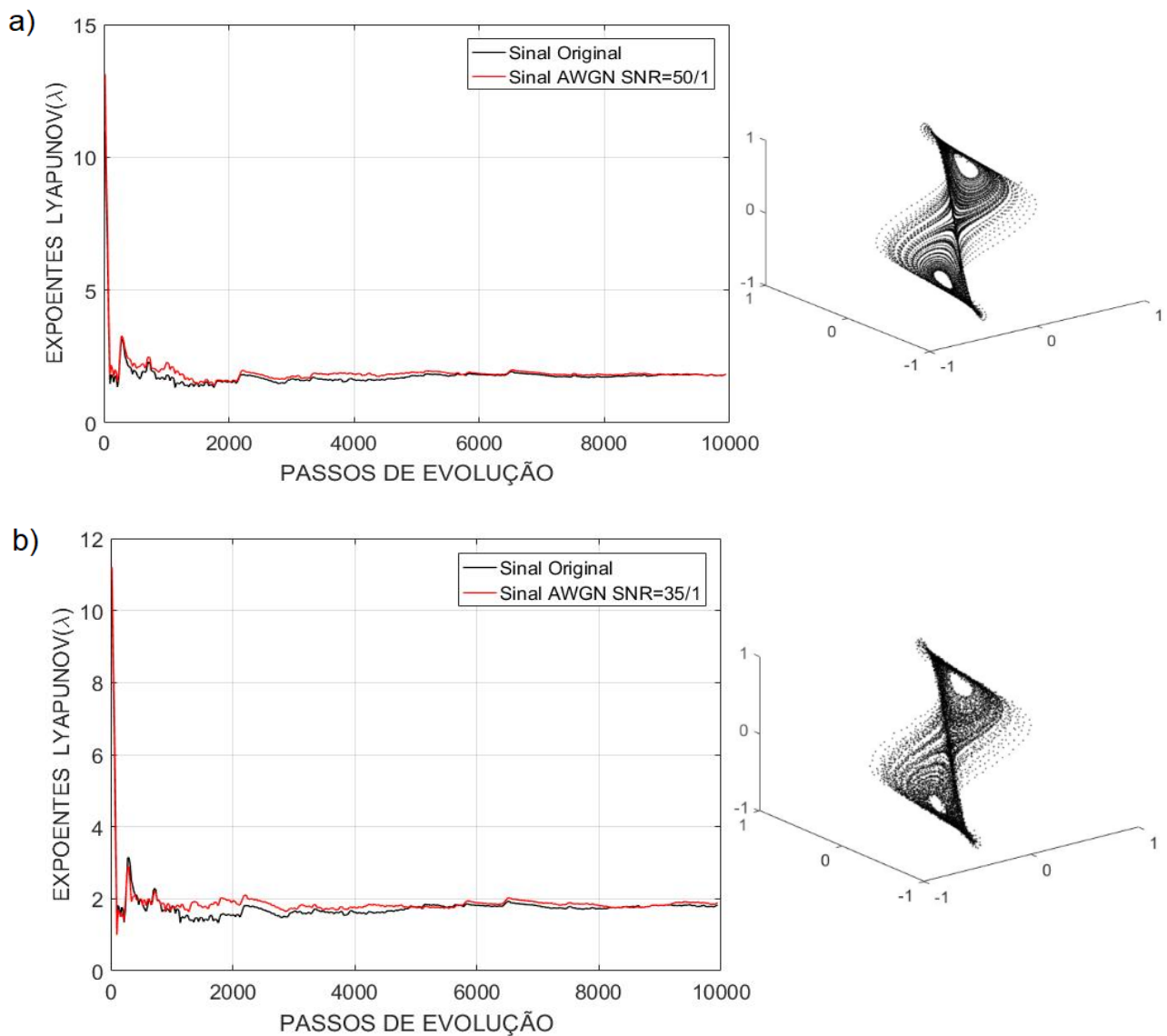


Figura 6.17 – Estimativa do maior expoente de Lyapunov pelo método de Wolf para o original (preto) e contaminado por ruído (vermelho): a) Relação sinal/ruído $SNR=50/1$ e b) relação sinal/ruído $SNR=35/1$.

Mesmo o sinal estando contaminado com ruído, para relação entre $SNR=35/1$ e $SNR=50/1$, observa-se nos respectivos espaço de estados reconstruídos uma similaridade topológica com o atrator do sinal original. Após o algoritmo executar a varredura do atrator e estimar o maior expoente de Lyapunov, observa-se que o procedimento numérico leva um tempo para convergir, mas que convergem para um valor muito próximo, estando praticamente sobrepostas.

Abaixo desta faixa de relação sinal/ruído os atratores reconstruídos apresentam distorções, divergências ainda maiores entre os pontos do sinal e resultam em expoentes acima do valor de referência do sinal original. A Figura 6.18 apresenta o maior expoente de Lyapunov e ao lado, o seu espaço de estados para $SNR=30/1$ e $SNR=5/1$.

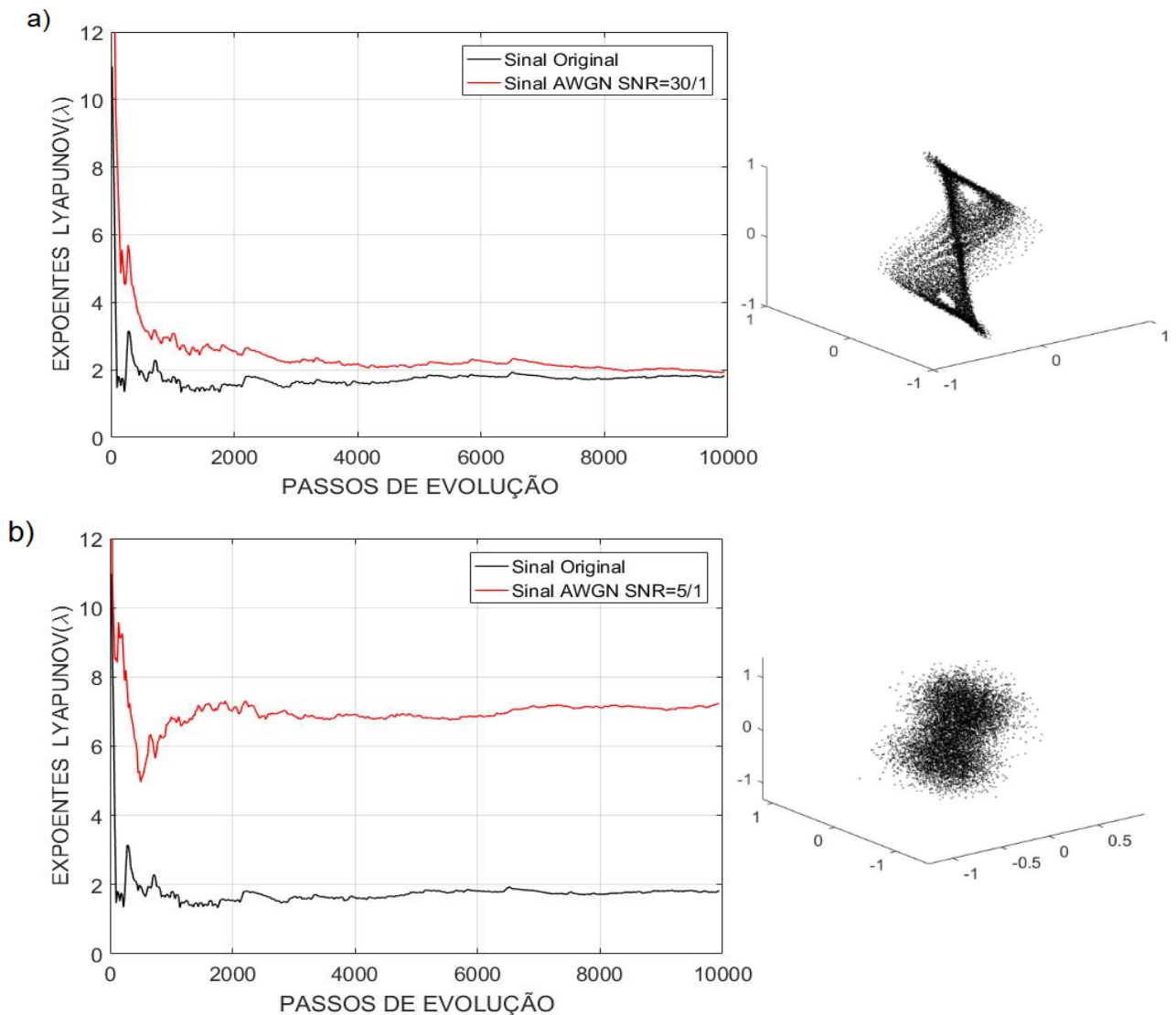


Figura 6.18 – Estimativa do maior expoente de Lyapunov pelo método de Wolf para o original (preto) e contaminado por ruído (vermelho): a) Relação sinal/ruído $SNR=30/1$ e b) relação sinal/ruído $SNR=5/1$.

Como citado, o efeito do ruído distorce a dinâmica do sistema e quando o algoritmo percorre os pontos, estimando os expoentes de Lyapunov, o valor do maior expoente do sinal ruidoso aumenta em função da divergência entre os pontos, ocasionada pela contaminação. A Figura 6.19 apresenta o algoritmo sendo executado após percorrer mil pontos do atrator em diferentes níveis de contaminação.

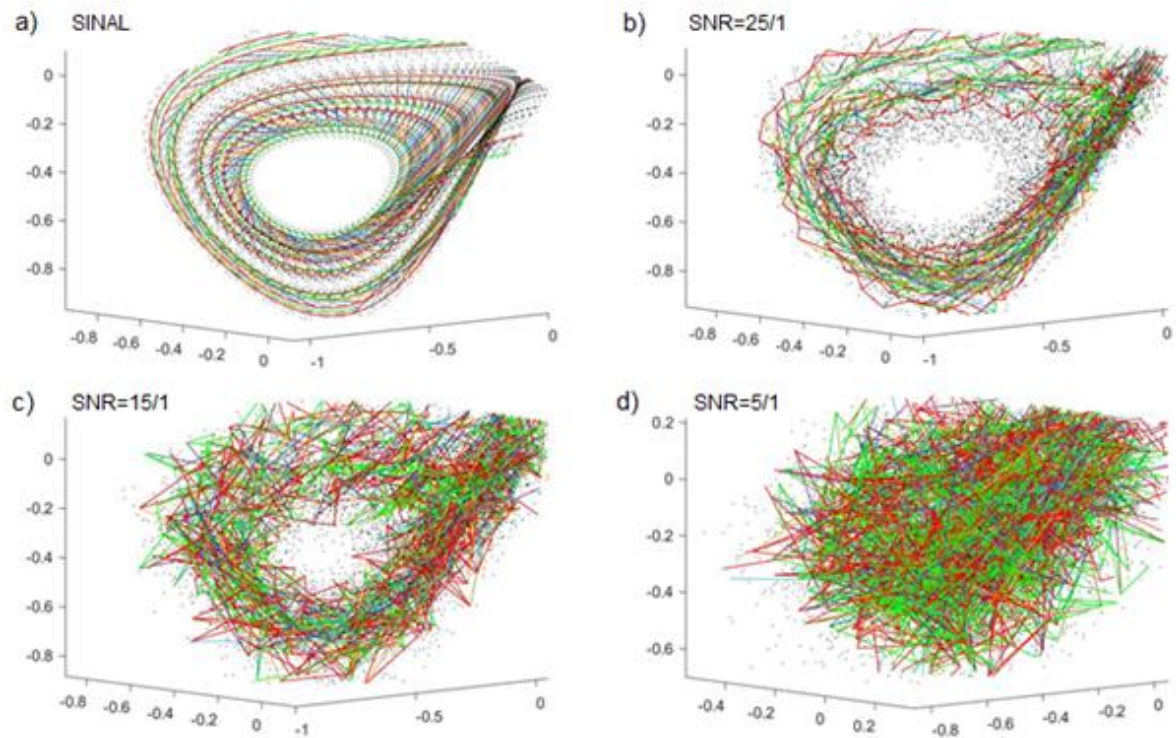


Figura 6.19 – Algoritmo de Wolf calculando maior expoente de Lyapunov:
a) Sinal, b) SNR=25/1, c) SNR=15/1 e d) SNR=5/1.

A Tabela 6.2 apresenta o maior expoente de Lyapunov obtido através do algoritmo para o sinal sem ruído (referência) e os demais sinais contaminados com diferentes relações sinal/ruído. O resultado demonstra que o sinal contendo ruído apresenta além de distorções no espaço de estados, valor maior para o expoente de Lyapunov até uma faixa de contaminação. Quando se tem relações sinal/ruído mais altas o invariante não sofre alteração na caracterização do sistema dinâmico.

Tabela 6.2 – Maior expoente de Lyapunov estimado pelo algoritmo de Wolf.

Descrição	SNR	Valor λ
Sinal Original (referência)	--	1,83
Sinal com ruído AWGN – 5	5/1	7,24
Sinal com ruído AWGN – 10	10/1	4,60
Sinal com ruído AWGN – 15	15/1	3,19
Sinal com ruído AWGN – 20	20/1	2,25
Sinal com ruído AWGN – 25	25/1	2,19
Sinal com ruído AWGN – 30	30/1	1,99
Sinal com ruído AWGN – 35	35/1	1,89
Sinal com ruído AWGN – 40	40/1	1,79
Sinal com ruído AWGN – 45	45/1	1,72
Sinal com ruído AWGN – 50	50/1	1,83

Fonte: Elaborado pelo autor

6.5 Aplicação de SVD para filtragem e efetividade na determinação correta do maior expoente de Lyapunov

A aplicação do método da decomposição em valores singulares reconstrói o espaço de estados e realiza a filtragem digital do sinal contaminado. Para implementação do método SVD, é necessário apenas a determinação da janela n para realizar a reconstrução do espaço de estados e durante a sua execução é necessário definir a dimensão de imersão. A janela é definida pelo espectro de frequências em decibéis. Para o sinal contaminado $SNR=25/1$, definiu-se a frequência de corte (f_c) em 7 Hz , determinando a janela $n = 14$. A Figura 6.20 apresenta o espectro de frequência onde a frequência de corte foi definida.

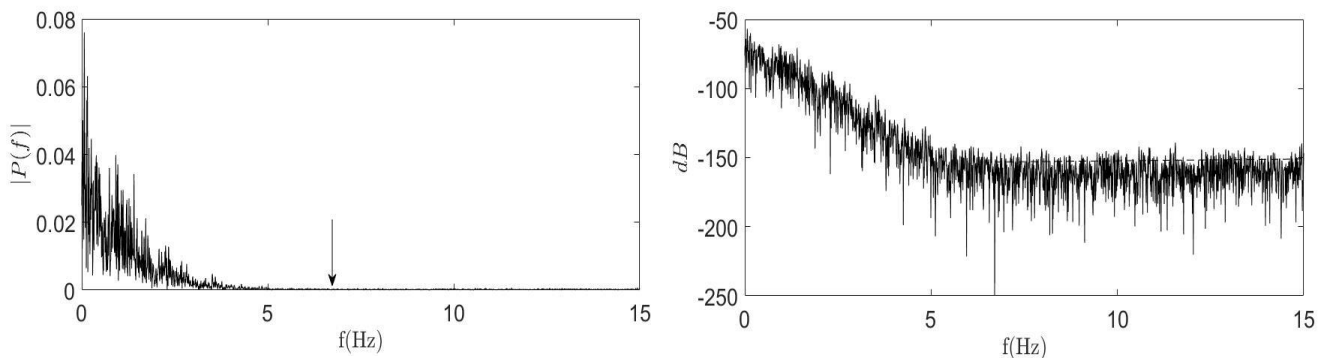


Figura 6.20 – Espectro de frequência para série temporal do modelo de Lorenz com ruído: a) espectro frequência via FFT e b) espectro em dB.

Tem-se a definição da dimensão de imersão pela quantidade de números que estão acima do piso formado. O piso formado trata-se do ruído e para todos os casos nesta primeira etapa analisados, o resultado acima do piso corresponde a três, confirmando a informação de um atrator tridimensional de Lorenz.

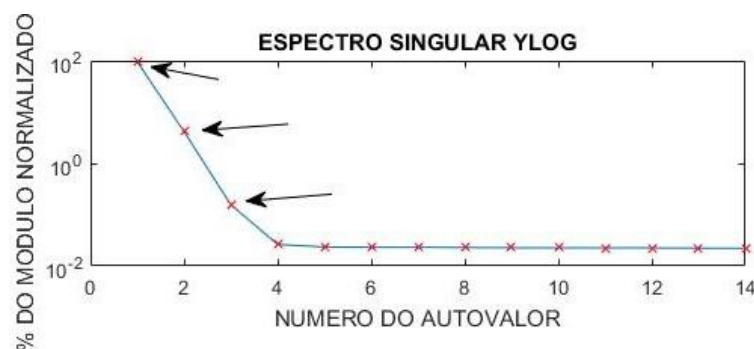


Figura 6.21 – Espectro singular da série temporal do modelo de Lorenz: três valores singulares acima do piso.

Após realizar a filtragem pelo método da decomposição em valores singulares (SVD), foi possível visualizar um atrator reconstruído com sua topologia recuperada, os pontos do sistema dinâmico ordenados, apresentando uma melhora significativa comparado ao atrator reconstruído pelo método da defasagem, durante execução do algoritmo de Wolf sem ter sido filtrado previamente. A reconstrução pelo algoritmo utilizando o sinal filtrado por SVD, recuperou quase toda a dinâmica, ficando muito próxima da dinâmica do sinal sem ruído. A Figura 6.22 apresenta os espaço de estados reconstruídos primeiramente com sinal contaminado, relação sinal/ruído $SNR=25/1$ (Figura 6.22(a)), apresenta a reconstrução utilizando o sinal após filtragem por SVD (Figura 6.22(b)) e a reconstrução utilizando sinal sem ruído (Figura 6.22(c)).

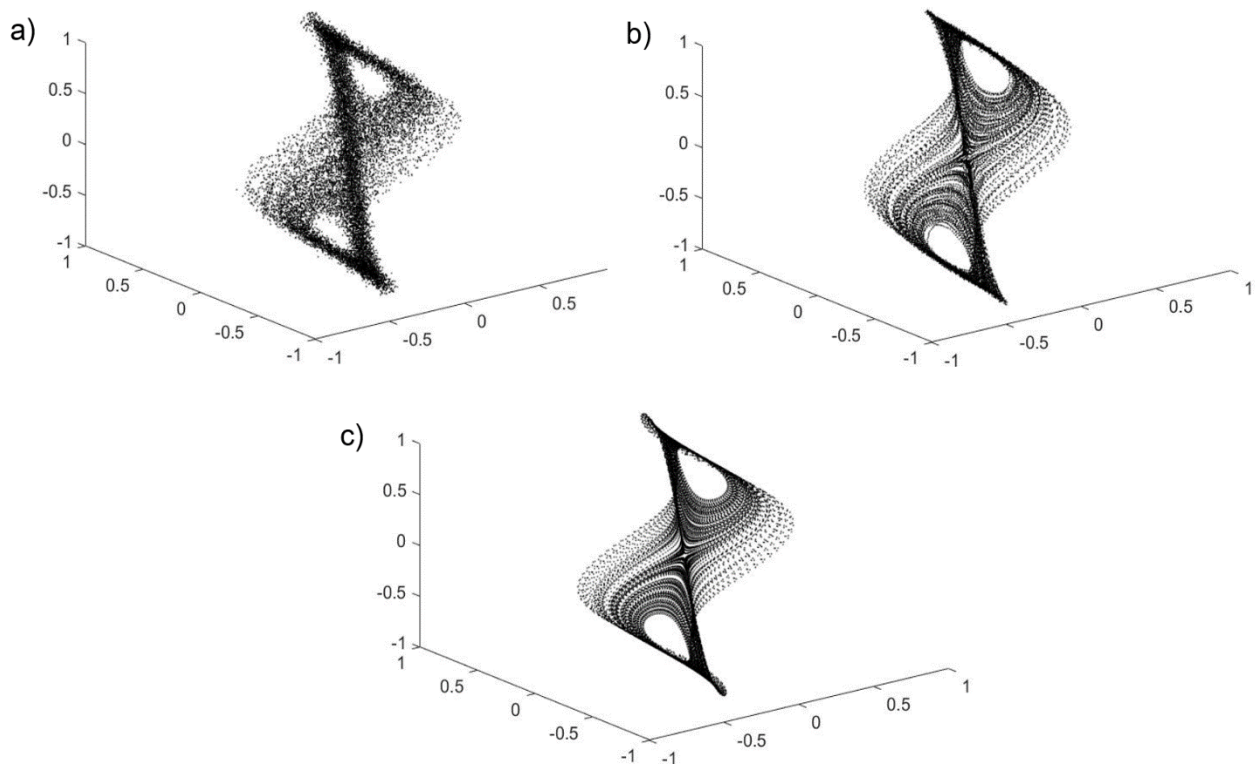


Figura 6.22 – Espaço de estados: a) contaminado com ruído branco $SNR=25/1$, b) espaço de estado após filtragem por SVD e c) espaço de estados do sinal original.

Outra vantagem do método SVD é que durante a reconstrução, o sinal é filtrado pelo método simultaneamente. O sinal é submetido a uma filtragem digital e o resultado na série temporal pode ser observado na Figura 6.23, onde as séries foram geradas juntas (sobrepostas).

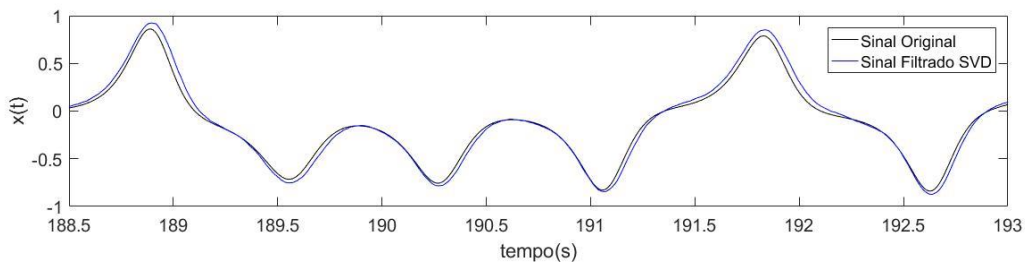


Figura 6.23 – Série temporal de Lorenz original (preto) e filtrada por SVD (azul) sobrepostas.

O filtro digital baseado no método da decomposição em valores singulares (SVD), recuperou quase todas as características originais do sinal, conforme demonstrado no espaço de estados e série temporal após aplicação do método SVD. Ao implementar o algoritmo de Wolf para obter o maior expoente de Lyapunov agora para o sinal filtrado, verificou-se que o valor do maior expoente retornou ao estimado para o sinal original, confirmando que todas as características qualitativas e quantitativas do sistema foram resgatadas. Valor estimado após filtragem $\lambda \sim 1,80$.

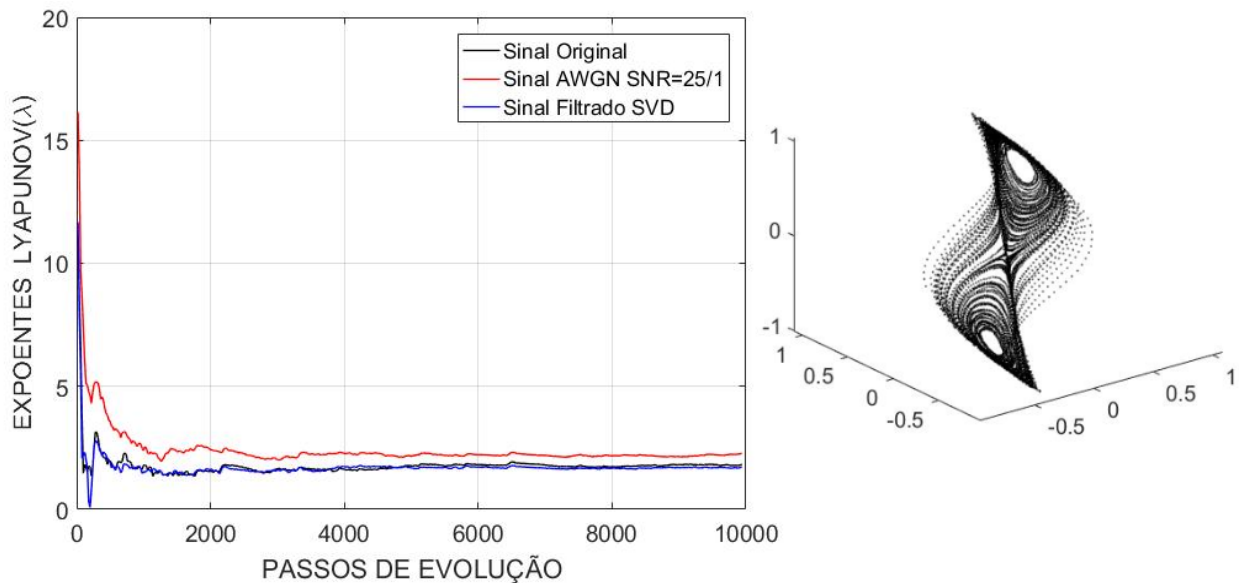


Figura 6.24 – Estimativa do maior expoente de Lyapunov do modelo de Lorenz para o original (preto), contaminado por ruído (vermelho) e filtrado por SVD (azul), convergência com 10.000 passos.

Os sinais que apresentaram um aumento considerável no valor do maior expoente de Lyapunov, em função da contaminação por ruído, foram submetidos a filtragem por SVD e novamente implementou-se o algoritmo para realizar nova estimativa. Os sinais contaminados com relações sinal/ruído SNR=20/1, SNR=25/1 e SNR=30/1 após filtragem por SVD retomaram o valor do maior expoente de Lyapunov

do sinal original. Para os sinais contaminados com baixas relações sinal/ruído, $SNR=5/1$, $SNR=10/1$ e $SNR=15/1$ a filtragem por SVD recuperou parcialmente as características topológicas do atrator, reduzindo também quantitativamente o maior expoente de Lyapunov, porém não sendo suficiente para aproximar-se do valor original, conforme ilustra a Figura 6.25.

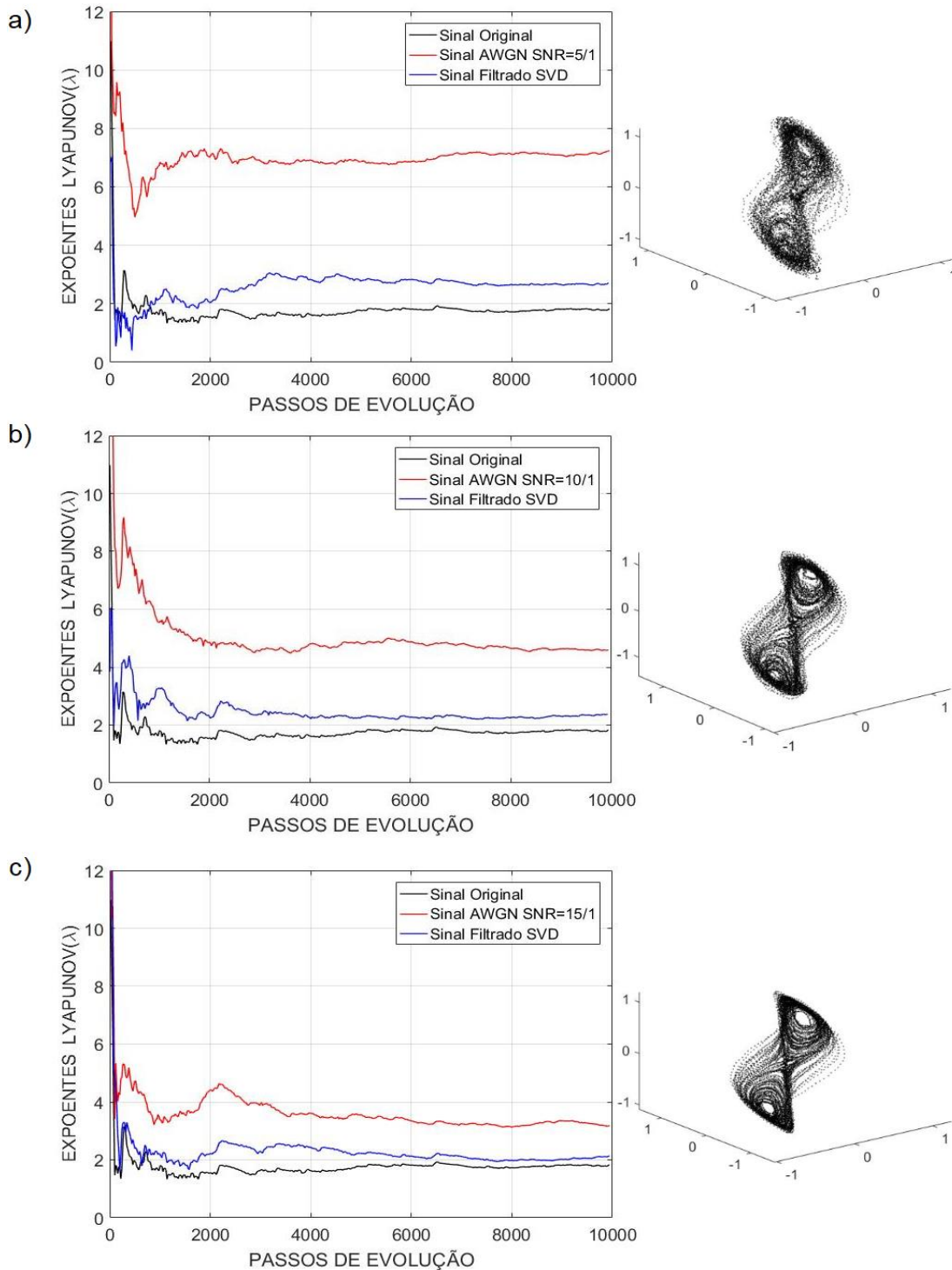


Figura 6.25 – Estimativa do maior expoente de Lyapunov do modelo de Lorenz para o original (preto), contaminado por ruído (vermelho) e filtrado por SVD (azul), convergência com 10.000 passos: a) Relação sinal/ruído $SNR=5/1$, b) relação sinal/ruído $SNR=10/1$ e c) relação sinal/ruído $SNR=15/1$.

Após realizar a filtragem por SVD e estimar o maior expoente de Lyapunov os resultados obtidos são apresentados na Tabela 6.3.

Tabela 6.3 – Resultados para o maior expoente de Lyapunov em diferentes níveis de ruído SNR após filtragem por SVD.

Descrição	SNR	Valor λ	Filtragem SVD
Sinal Original (referência)	--	1,83	--
Sinal com ruído AWGN – 5	5/1	7,24	2,71
Sinal com ruído AWGN – 10	10/1	4,60	2,38
Sinal com ruído AWGN – 15	15/1	3,19	2,10
Sinal com ruído AWGN – 20	20/1	2,25	1,85
Sinal com ruído AWGN – 25	25/1	2,19	1,80
Sinal com ruído AWGN – 30	30/1	1,99	1,78

Fonte: Elaborado pelo autor

Para os sinais cuja filtragem por SVD não foi suficiente para recuperar as informações qualitativas e quantitativas do atrator, estes sinais foram submetidos a uma segunda filtragem (dupla filtragem) por SVD para verificar a reconstrução do espaço de estados e o invariante expoente de Lyapunov estimado. Foi proposta uma dupla filtragem, realizando novamente a determinação da janela, a dimensão de imersão, que já é conhecida, e novamente através da técnica reconstruiu-se o espaço de estados e filtragem do sinal. A Figura 6.26 apresenta o espaço de estados após dupla filtragem do sinal contaminado SNR=15/1 e o sinal original.

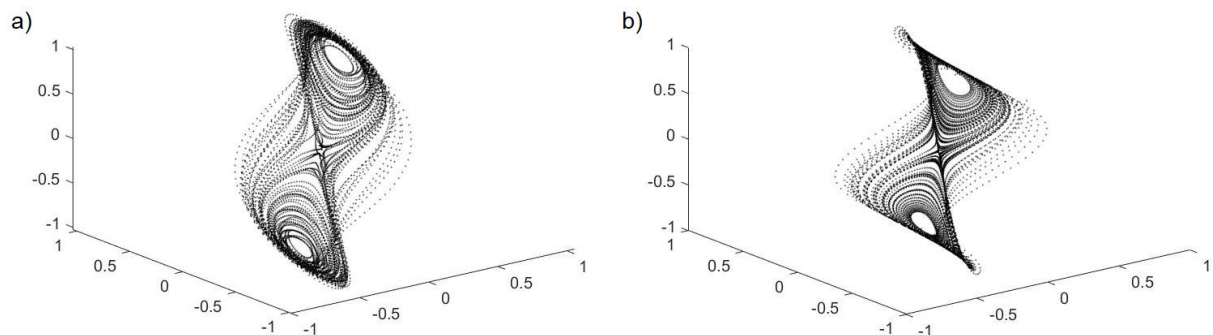


Figura 6.26 – Espaço de estados prévio a estimativa do expoente de Lyapunov:

a) espaço de estados após dupla filtragem por SVD

b) espaço de estados do sinal original.

A dupla filtragem possibilitou resgatar as características originais do sinal contaminado com relação sinal/ruído SNR=15/1. O efeito do ruído, apresentado na Figura 6.27 tinha distorcido a dinâmica do atrator.

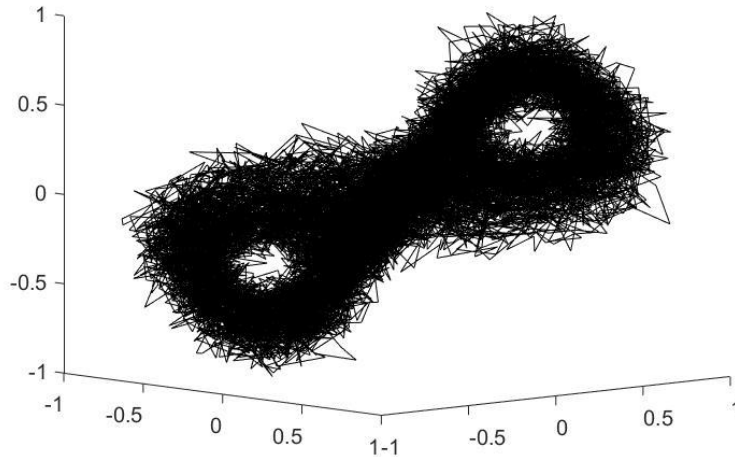


Figura 6.27 – Espaço de estados do modelo de Lorenz contaminado SNR=15/1.

A Figura 6.28 apresenta como ficaram os espaços de estados após primeira e segunda filtragem, onde foram recuperadas as características qualitativas e quantitativas do sistema, resultando em uma estimativa mais precisa do maior expoente de Lyapunov em sinais contaminados.

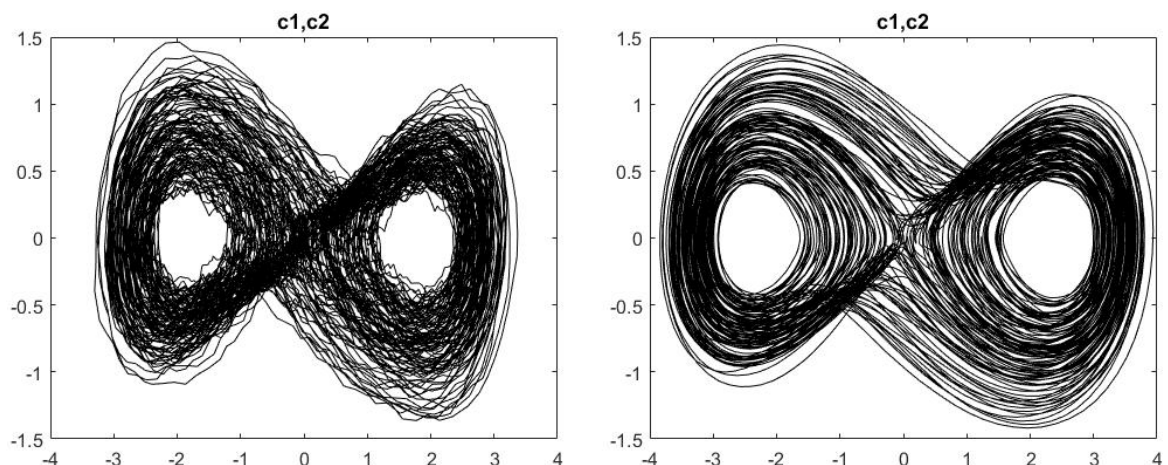


Figura 6.28 – Espaço de estados reconstruído por SVD: a) primeira filtragem e b) segunda filtragem.

O maior expoente de Lyapunov estimado para o sinal contaminado, após ser duplamente filtrado, retornou ao valor de referência $\lambda \sim 1,85$. Foi possível após dupla filtragem resgatar as características originais do sinal.

No caso de contaminação onde a relação foi a menor $SNR=5/1$ proposta no trabalho, foi possível verificar uma desconstrução total do atrator, ocasionada pelo ruído. O efeito do ruído, ilustrado na Figura 6.29 apresenta o atrator irreconhecível.

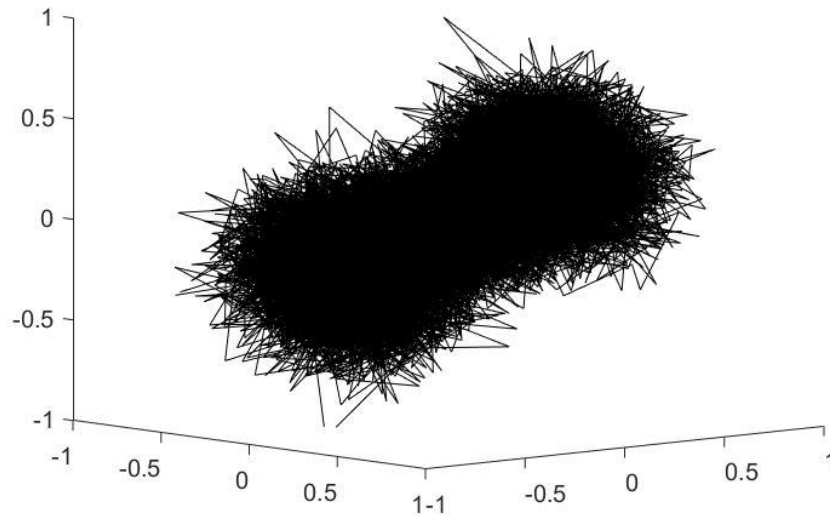


Figura 6.29 – Espaço de estados do modelo de Lorenz contaminado $SNR=5/1$.

Uma vantagem deste método foi a filtragem realizada no sinal durante execução da técnica. Ao aplicar o método SVD mesmo em sinais contaminados com baixa relação sinal/ruído, notou-se após reconstrução as duas bacias de atração características do atrator de Lorenz. A Figura 6.30 apresenta como ficaram os espaços de estados após primeira e segunda filtragem, onde foram recuperadas as características principais do sistema, resultando em uma estimativa mais próxima do maior expoente de Lyapunov em sinais contaminados.

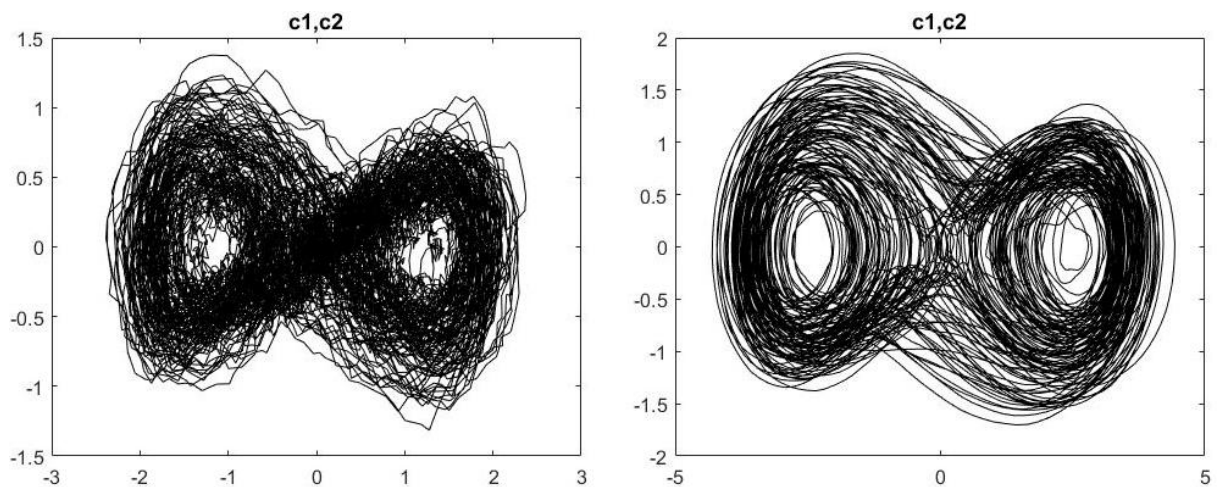


Figura 6.30 – Espaço de estados reconstruído por SVD: a) primeira filtragem e b) segunda filtragem.

O maior expoente de Lyapunov estimado para o sinal contaminado, após ser duplamente filtrado, aproximou-se do valor de referência como observado na Figura 6.31. Para relação sinal/ruído SNR=5/1 obteve-se $\lambda \sim 2,25$, e para relação sinal/ruído SNR=10/1 obteve-se $\lambda \sim 2,13$.

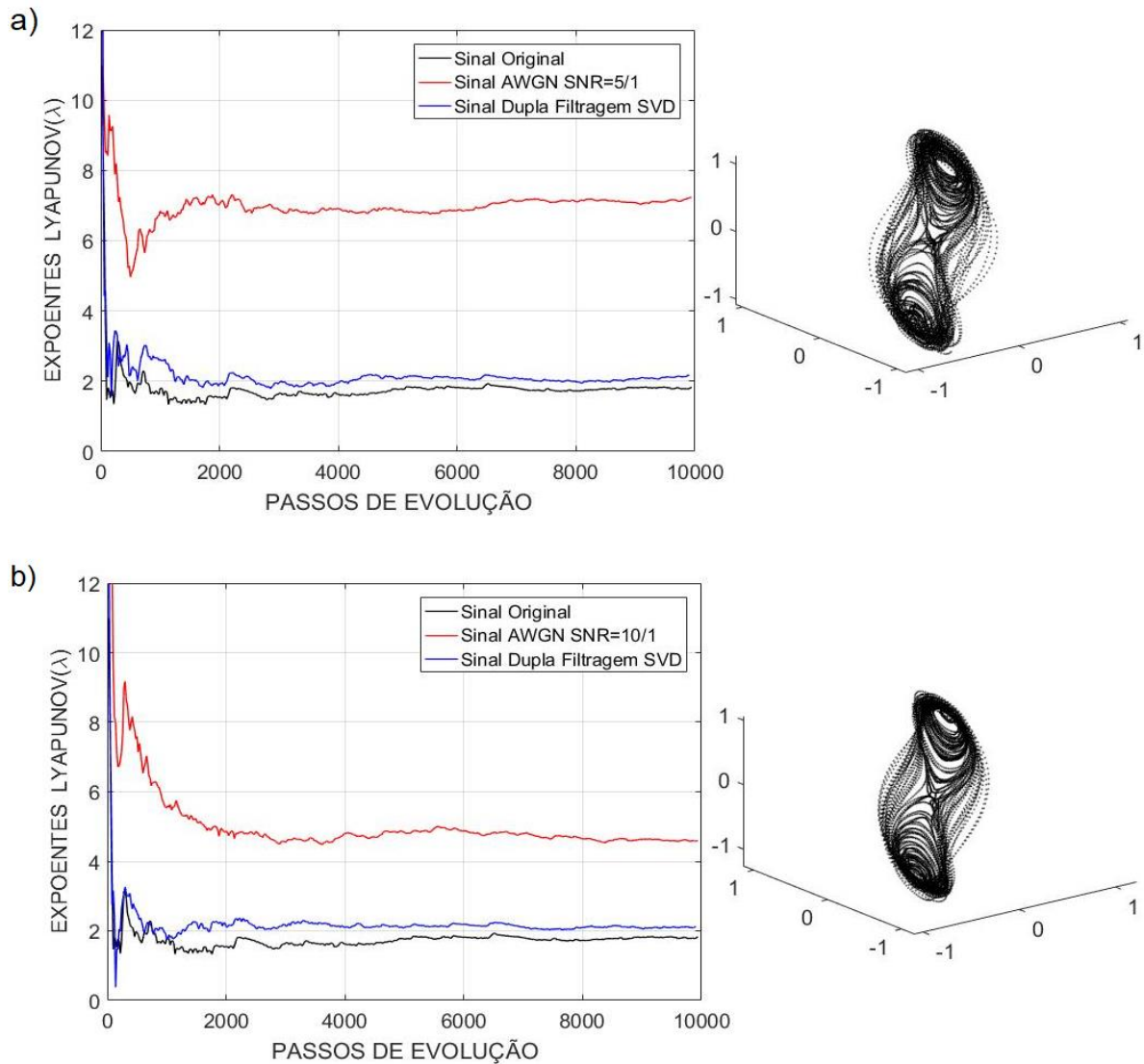


Figura 6.31 – Estimativa do maior expoente de Lyapunov do modelo de Lorenz para o original (preto), contaminado por ruído (vermelho) e dupla filtragem por SVD (azul), convergência com 10.000 passos: a) Relação sinal/ruído SNR=5/1 e b) relação sinal/ruído SNR=10/1.

A reconstrução do espaço de estados pelo método da decomposição em valores singulares foi implementada em diferentes níveis de ruído. A Figura 6.32 apresenta o resultado da reconstrução para SNR=5/1, 10/1 e 15/1, onde tem-se o espaço tridimensional contaminado por ruído, o resultado após primeira filtragem e o resultado após segunda filtragem por SVD, em espaço de estados bidimensionais.

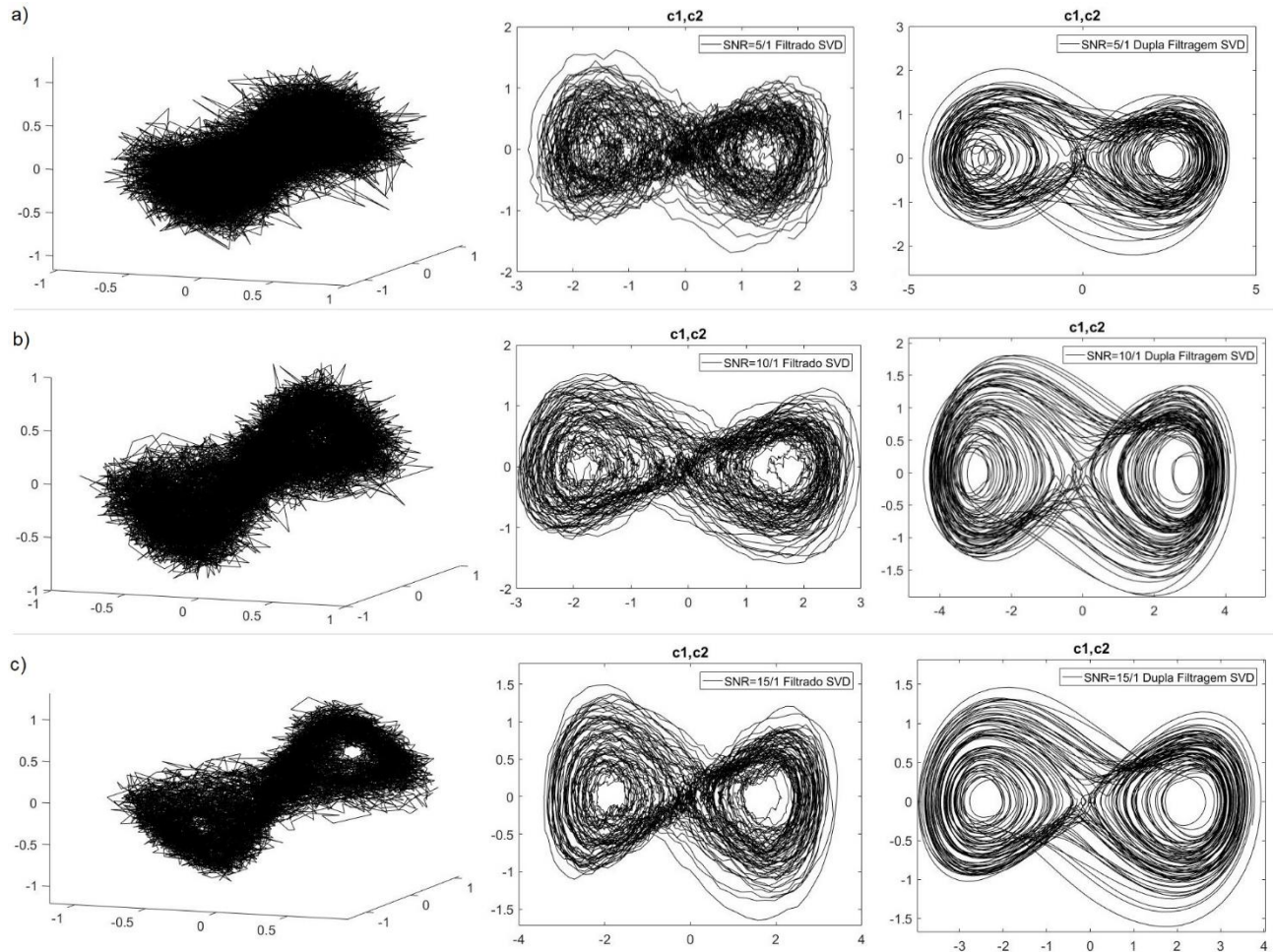


Figura 6.32 – Método SVD aplicado como dupla filtragem em casos com baixa relação sinal/ruído.

Tabela 6.4 – Resultados para o maior expoente de Lyapunov em diferentes níveis de ruído SNR após dupla filtragem por SVD.

Descrição	SNR	Valor λ	1ª Filtragem SVD	2ª Filtragem SVD
Sinal Original (referência)	--	1,83	--	--
Sinal com ruído AWGN – 5	5/1	7,24	2,71	2,21
Sinal com ruído AWGN – 10	10/1	4,60	2,38	2,13
Sinal com ruído AWGN – 15	15/1	3,19	2,10	1,85
Sinal com ruído AWGN – 20	20/1	2,25	1,85	--
Sinal com ruído AWGN – 25	25/1	2,19	1,80	--
Sinal com ruído AWGN – 30	30/1	1,99	1,78	--

Fonte: Elaborado pelo autor

Para relações sinal/ruído mais altas, faixa de $SNR=35$ à $SNR=50/1$ o ruído não alterou consideravelmente o atrator, resultando em um expoente de Lyapunov que se aproximou muito do valor de referência, sem precisar filtrar o sinal. Para relações sinal/ruído na faixa intermediária de $SNR=20/1$ à $SNR=30/1$ foi necessário previamente utilizar o filtro por SVD para minimizar o ruído presente no sinal, e assim, o resultado do maior expoente de Lyapunov se aproximou do valor de referência.

A contaminação na faixa de $SNR=5/1$ à $SNR=15/1$ afetou consideravelmente o sinal, distorcendo significativamente o espaço de estados, mesmo passando por dupla filtragem, os valores obtidos para o maior expoente de Lyapunov, apesar de muito mais próximos, ainda apresentaram uma diferença significativa em relação ao valor de referência.

É possível verificar que quando se tem alta relação sinal/ruído, o sinal contaminado tem o maior expoente muito próximo do sinal original. Na Figura 6.33, com $SNR=50/1$ é possível observar pequena variação em torno do valor de estabilização. Mesmo quando submetidos ao método SVD, sinais com alta relação sinal/ruído acabam ficando com expoente de Lyapunov ligeiramente diferentes do valor de referência do sinal original.

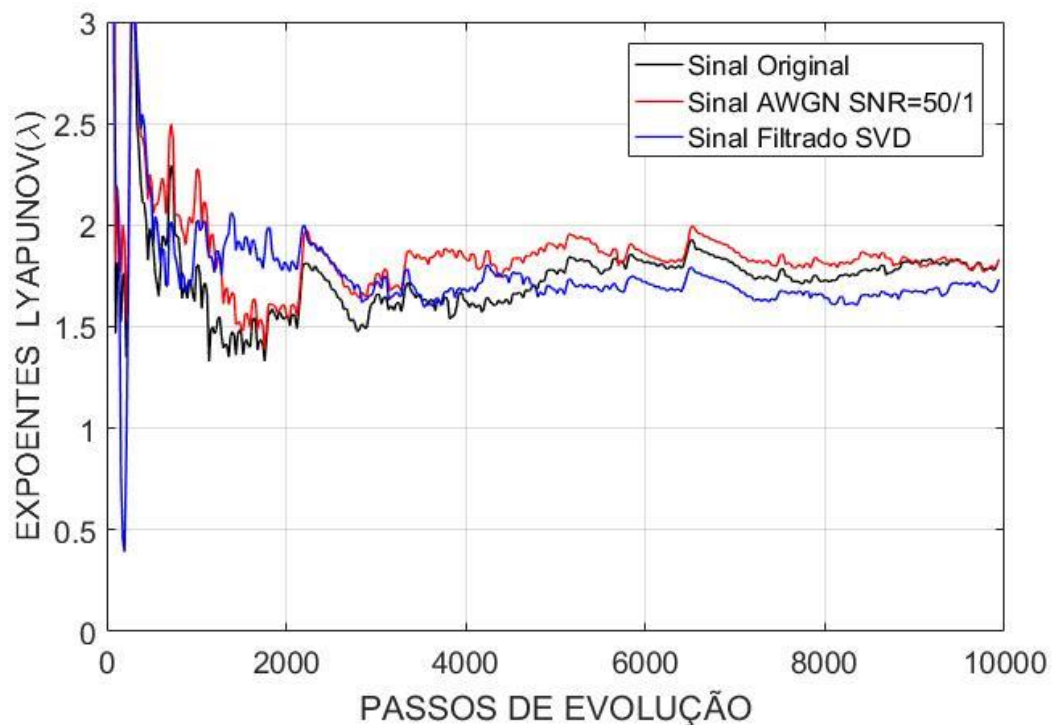


Figura 6.33 – Estimativa do maior expoente de Lyapunov do modelo de Lorenz para o original (preto), contaminado por ruído (vermelho) e filtrado por SVD (azul), convergência com 10.000 passos:

Alta relação sinal ruído apresentam valores estimado muito próximos.

7 CARACTERIZAÇÃO DE COMPORTAMENTO CAÓTICO EM SÉRIES TEMPORAIS AEROELÁSTICAS OBTIDAS EXPERIMENTALMENTE

Considerando os resultados positivos observados pela eficiente filtragem digital realizada pelo método SVD, possibilitando uma estimativa correta do maior expoente de Lyapunov pelo algoritmo de Wolf, a metodologia será agora aplicada em sinais aeroelásticos experimentais.

A proposta do presente trabalho é aplicar o método SVD como um filtro digital eficiente, de maneira que a dupla filtragem seja realizada em sinais aeroelásticos experimentais, minimizando a interferência de ruído, visando a correta caracterização do comportamento não-linear como um sinal caótico ou não caótico, através da estimativa do maior expoente de Lyapunov.

7.1 Dispositivo com três graus de liberdade - Folga

Os sinais aeroelásticos experimentais analisados foram gerados a partir de um experimento realizado no laboratório de Aeroelasticidade da EESC-USP em 2012, simulando uma seção típica de asa com três graus de liberdade, sendo flexão, torção e superfície de comando, com capacidade de introdução de não-linearidades concentradas nas molas de torção e superfície de comando.

O esquema da seção típica com três graus de liberdade (flexão, torção e superfície de comando) é apresentado na Figura 7.1.

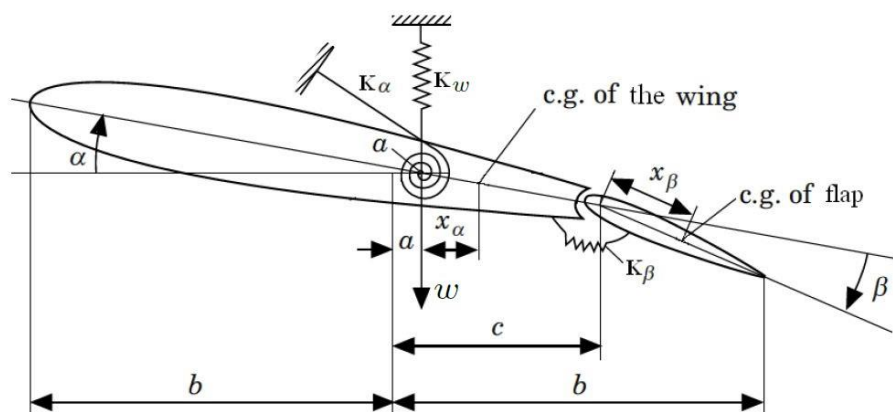


Figura 7.1 – Seção aeroelástica típica com superfície de controle (LI; GUO; XIANG, 2010).

As variáveis de flexão e torção são indicadas por ω e α , respectivamente, a variável do movimento da superfície de comando é representada por β . A flexão ω e a torção α são medidas no eixo elástico e o ângulo β da superfície de controle é medido na linha de articulação. Além disso, ab representa a distância entre o eixo elástico e a corda média, c representa a distância do eixo elástico ao eixo de articulação da superfície de controle e b é a semicorda do aerofólio (VASCONCELLOS, 2012, p.39).

O dispositivo experimental com três graus de liberdade foi projetado com um suporte e uma suspensão composta por vigas paralelas para movimento de flexão, com rolamentos de baixo atrito e um arame de aço-mola para torção, onde foi instalada a asa. A asa foi construída em Isopor® cortado por uma máquina CNC no perfil NACA0012, que foi revestida por uma camada de tecido de fibra de vidro e resina epóxi, resultando em um material compósito com extrema rigidez, sendo a superfície de comando conectada ao restante do perfil através de micro rolamentos.

A Figura 7.2 exibe um esquema do projeto da estrutura metálica utilizado para instalação da asa, que também é exibida em detalhes.

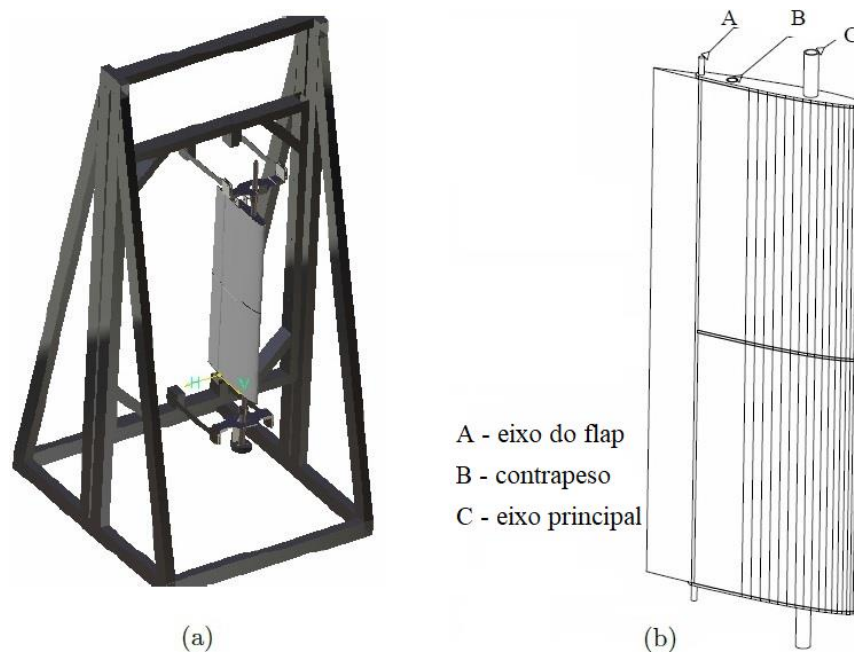


Figura 7.2 – (a) Esquema da estrutura experimental (b) Detalhe da asa (VASCONCELLOS, 2012).

A Figura 7.3(a) apresenta o suporte fabricado em estrutura metálica, projetado com elementos de fixação que possibilitam ajustes de altura e nível, posicionado na saída do túnel de vento. O túnel é do tipo soprador, com abertura de $500\text{mm} \times 500\text{mm}$ e velocidade máxima em torno de 15m/s .

A Figura 7.3(b) apresenta a montagem final do dispositivo à frente do túnel, já com a asa instalada no suporte e o posicionamento do dispositivo experimental bem próximo ao bocal de saída, minimizando os efeitos indesejáveis da expansão do fluxo de ar.

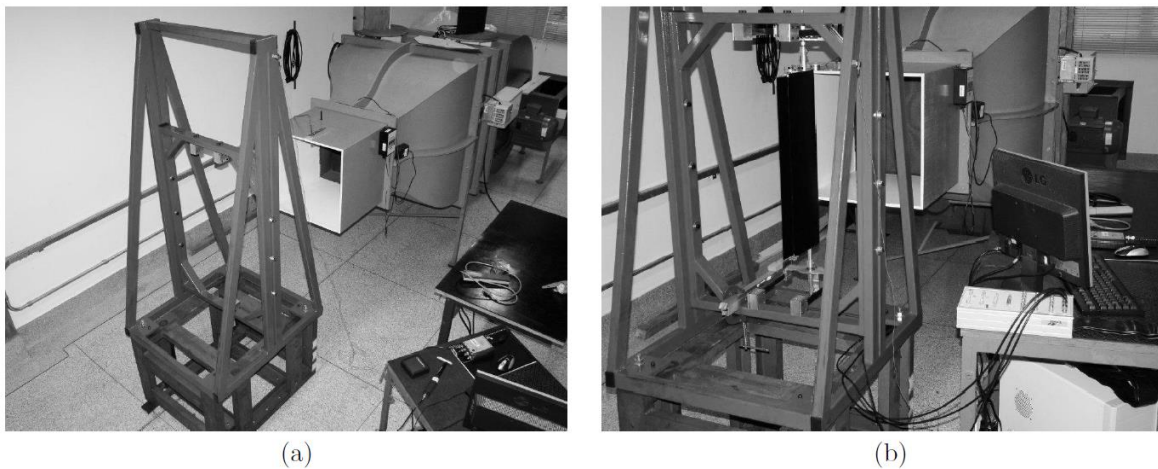


Figura 7.3 – (a) Suporte principal (EESC/USP – 2012) (b) Montagem final (VASCONCELLOS, 2012).

O eixo da superfície de comando é ligado ao restante do perfil por um arame de aço-mola, onde um mecanismo de batente ajustável permite a introdução da folga no sistema. A Figura 7.4(a) apresenta detalhe do mecanismo de folga, e os detalhes da suspensão, com a placa central, o perfil e rolamentos podem ser observados na Figura 7.4(b).

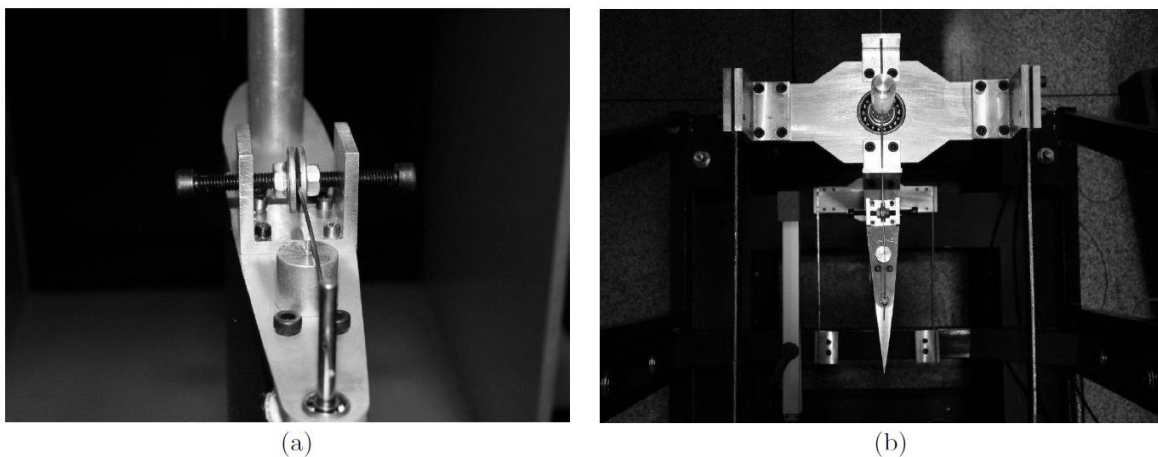


Figura 7.4 – (a) Detalhe do mecanismo de ajuste de folga (EESC/USP – 2012) (b) Detalhe da suspensão (VASCONCELLOS, 2012).

Dados experimentais foram coletados nos três graus de liberdade utilizando encoders ópticos USDigital®, sendo dois circulares para os movimentos de torção e superfície de comando (Figuras 7.5(a) e (b)) e um linear para a flexão (Figura 7.6). Os sinais foram adquiridos, tratados e armazenados utilizando uma placa controladora DSpace® em conjunto com Simulink®.

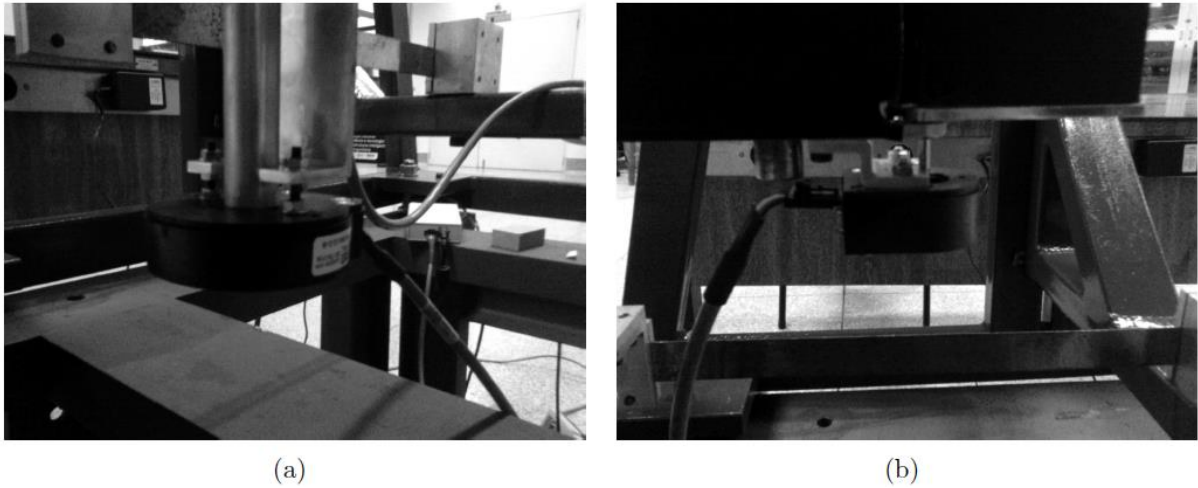


Figura 7.5 – (a) Encoder para torção (EESC/USP-2012) (b) Encoder para a superfície de comando (VASCONCELLOS, 2012).

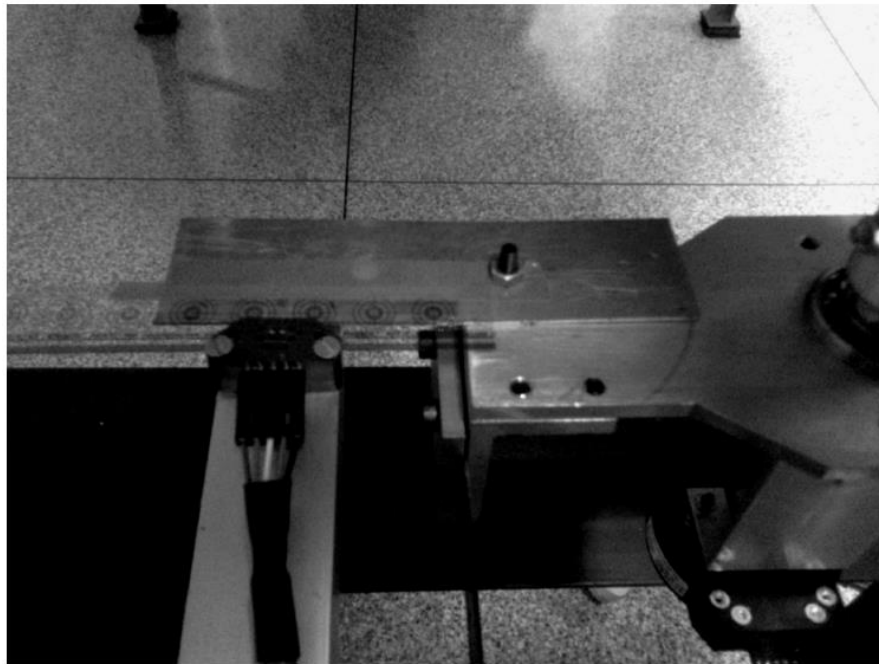


Figura 7.6 – Encoder linear para flexão (VASCONCELLOS, 2012).

7.2 Efeito da velocidade de escoamento para o modelo com três graus de liberdade

Neste trabalho os sinais aeroelásticos experimentais submetidos à aplicação das ferramentas de análise, foram coletados da superfície de comando (Figura 7.5 (b)).

Vasconcellos (2012), caracterizou não-linearidade nos sinais aeroelásticos obtidos experimentalmente, no modelo com três graus de liberdade, devido a folga. Uma condição inicial pré estabelecida era aplicada à flexão e devido o mecanismo de folga (Figura 7.4(a)) estar aberto, o sistema ficava livre para oscilar. O dados foram coletados a cada mudança de velocidade de escoamento do túnel de vento. Inicialmente com velocidades baixas sendo incrementada até a velocidade máxima do túnel. Nesse ponto, ainda com o sistema em movimento autossustentado, iniciou o decremento de velocidade.

Tabela 7.1 – Velocidades consideradas na análise experimental.

Ordem	U/U_f	$U \left(\frac{m}{s}\right)$
	1	13,58
	1,041	14,14
Velocidade crescente	1,064	14,46
	1,066	14,48
	1,062	14,42
	1,038	14,10
	1,017	13,82
Velocidade decrescente	0,9806	13,32
	0,9675	13,14
	0,9396	12,76
	0,9028	12,26

Fonte: VASCONCELLOS, 2012

Para os casos considerados, apresentados na Tabela 7.1, não constam valores onde o movimento era amortecido. Os dados apresentam U como velocidade de

escoamento, e U_f como velocidade de *flutter* experimental obtida sendo $13,58\text{m/s}$. Na sequência do trabalho adota-se U/U_f na aplicação das ferramentas de análise.

A Figura 7.7 apresenta a amplitude do movimento da superfície de comando para cada velocidade coletada durante o experimento. Nota-se que para velocidades crescentes até em torno da velocidade de *flutter*, o movimento era amortecido. Após a velocidade de *flutter*, o sistema entrou em oscilações autossustentadas, com amplitude limitada em todos os graus de liberdade, inclusive na deflexão da superfície de comando. Sem a interrupção do movimento os dados foram coletados, tendo a velocidade incrementada até o limite máximo da velocidade do túnel e ao atingir a velocidade máxima, a mesma foi sendo decrescida e os dados sendo coletados a cada mudança de velocidade. Durante a diminuição da velocidade o sistema apresentou movimento mesmo abaixo da velocidade de *flutter*, apresentando um comportamento subcrítico.

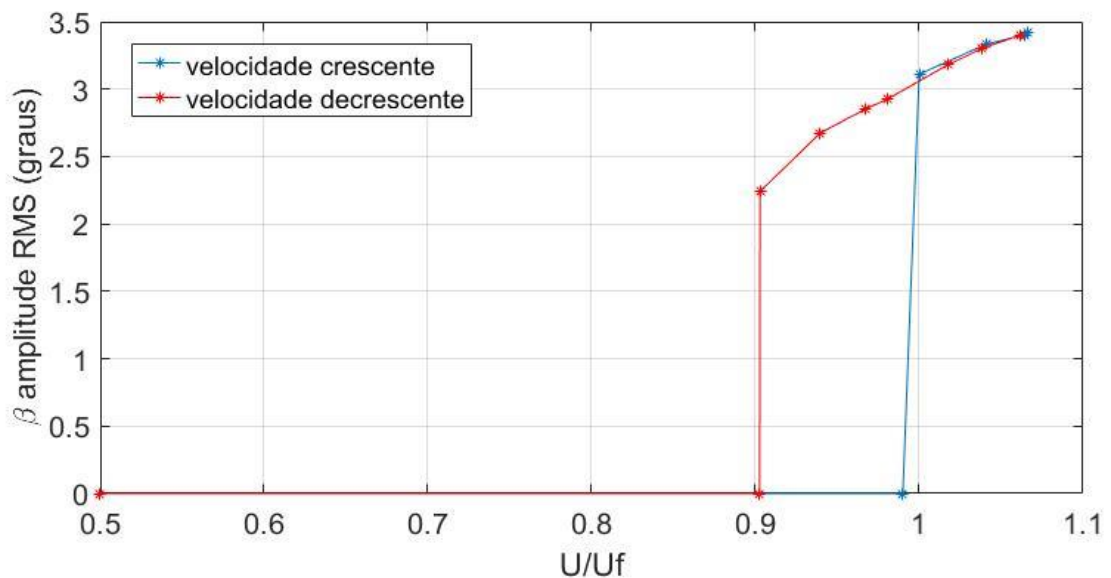


Figura 7.7 – Amplitude do movimento da superfície de comando, velocidade crescente e decrescente. (VASCONCELLOS, 2012).

Em detalhe, é possível visualizar que após o movimento amortecido, tem-se quatro (4) velocidades crescentes coletadas e após decremento da velocidade foram sete (7) velocidades computadas, evidenciando uma região com dependência da condição inicial, com ao menos duas soluções possíveis.

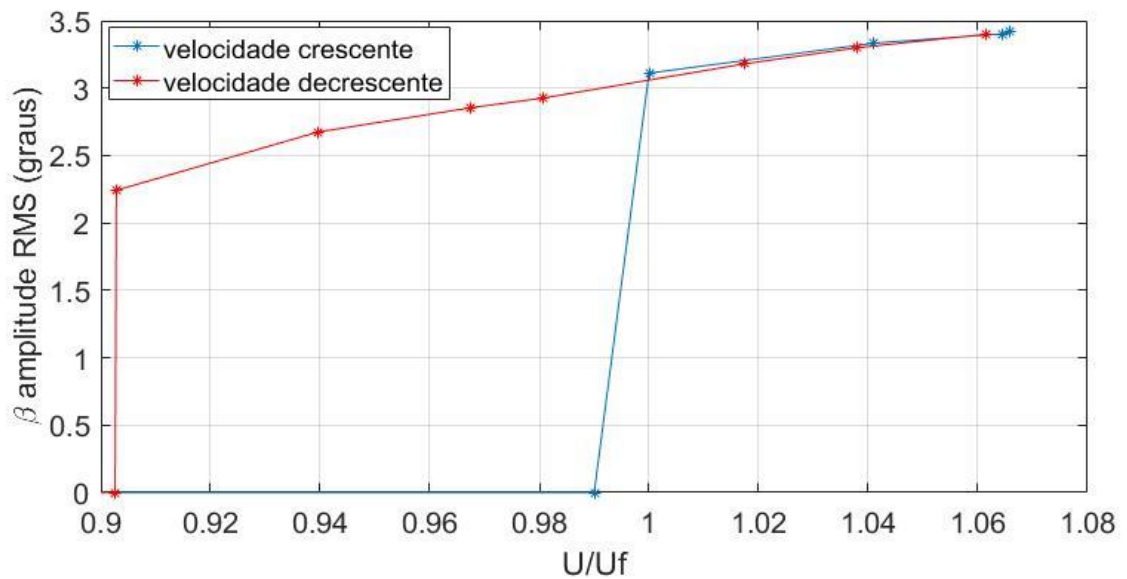


Figura 7.8 – Região ampliada da Figura 7.7 (VASCONCELLOS, 2012).

Todas as velocidades de escoamento definidas no experimento (Tabela 7.1), deram origem as séries temporais experimentais aeroelásticas da superfície de comando (*flap*). As séries temporais relacionadas ao gráfico de amplitude (Figura 7.8) serão utilizadas para determinação dos expoentes de Lyapunov através das técnicas propostas. Os sinais serão extraídos das respectivas séries temporais. Um determinado trecho, estacionário, será normalizado e submetido a dupla filtragem pelo método SVD, para que todos os sinais a serem posteriormente analisados apresentem as mesmas amplitudes. Após a filtragem minimizar efeitos de possíveis ruídos, os sinais serão submetidos ao algoritmo de Wolf para estimativa do maior expoente de Lyapunov e caracterização do sistema através deste invariante.

8 RESULTADOS

Neste capítulo, os resultados obtidos com a utilização das técnicas para análise e caracterização dos dados experimentais serão apresentados. O modelo experimental com três graus de liberdade e folga na superfície de comando, descrito na Seção 7.1, foi utilizado gerando as respectivas séries temporais. No experimento foram coletados os dados para cada grau de liberdade, sendo torção α , flexão ω , e superfície de comando β . Neste trabalho, as séries temporais em análise e caracterização, tratam-se exclusivamente das coletadas na superfície de comando.

Todas as velocidades de escoamento definidas no experimento (Tabela 7.1), originaram séries temporais aeroelásticas experimentais da superfície de comando. As séries foram submetidas a dupla filtragem por SVD, normalizadas e posteriormente implementado o algoritmo de Wolf para estimar o maior expoente de Lyapunov. A aplicação das ferramentas de análise segue demonstrada para o caso onde a velocidade de escoamento crescente $U = 1,041U_f$ ($14,14m/s$), no tempo de $50s$. O intervalo de amostragem (T_s) entre cada instante foi de $0,001s$, resultando em um sinal com 50.000 pontos, ilustrado na Figura 8.1.

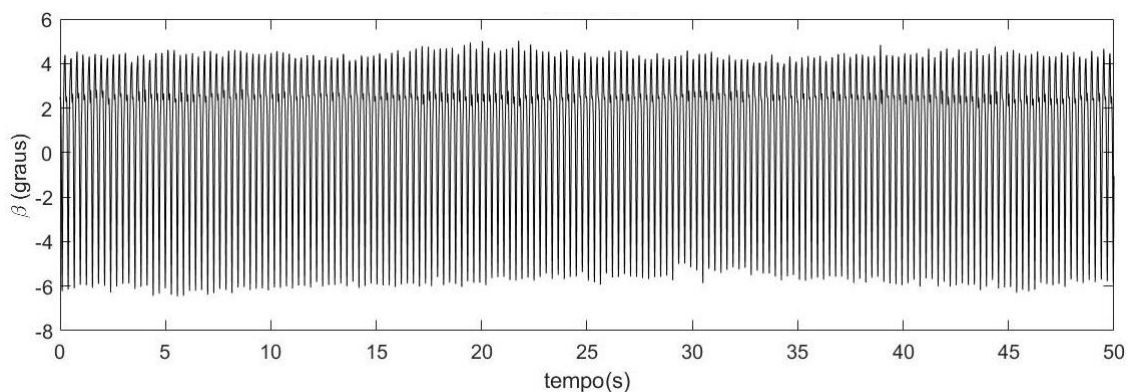


Figura 8.1 – Série temporal da resposta aeroelástica experimental $U = 1,041U_f$.

Foi utilizado um trecho de $8s$ da série temporal para caracterização, reduzindo o sinal para 8.000 pontos. Deste sinal apenas o seguinte trecho da série temporal (Figura 8.2) foi utilizado.

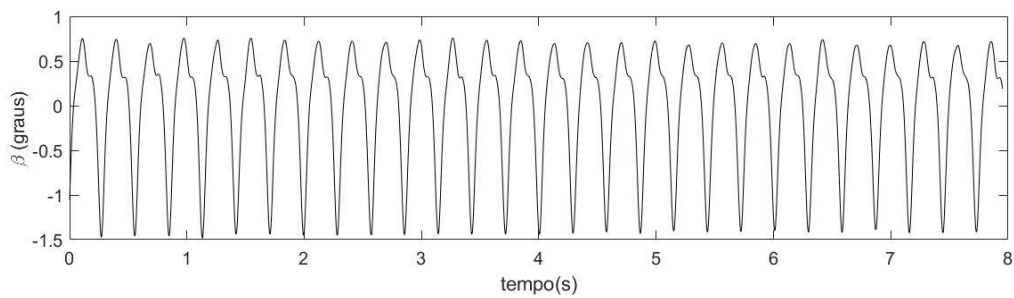


Figura 8.2 – Trecho da série temporal $U = 1,041U_f$, que deu origem ao sinal.

Antes de submeter o sinal ao método da decomposição em valores singulares (SVD) o sinal foi normalizado, para que todos os sinais a serem posteriormente analisados apresentassem as mesmas amplitudes. A Figura 8.3 apresenta o sinal normalizado, com 8.000 pontos, que foi submetido a filtragem por SVD.

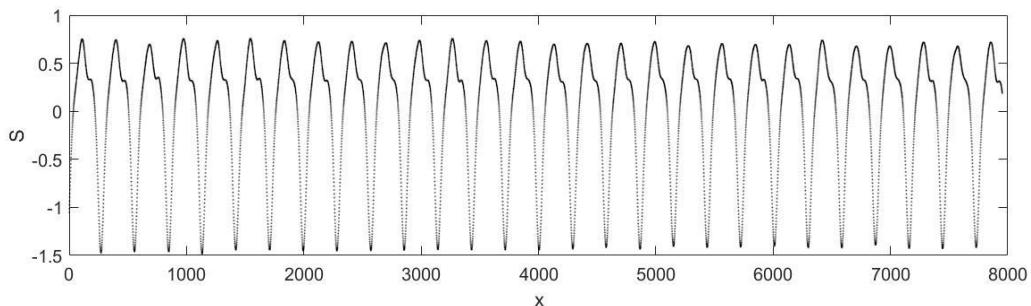


Figura 8.3 – Sinal normalizado velocidade escoamento crescente $U = 1,041U_f$.

A aplicação do método da decomposição em valores singulares reconstrói o espaço de estados e realiza a filtragem digital do sinal. Para os sinais aeroelásticos experimentais analisados, foram realizadas dupla filtragem pelo método SVD. Para o caso apresentado com velocidade de escoamento $U = 1,041U_f$, definiu-se a frequência de corte (f_c) em 40 Hz , determinando a janela $n=25$. A Figura 8.4 apresenta o espectro de frequência onde a frequência de corte foi definida.

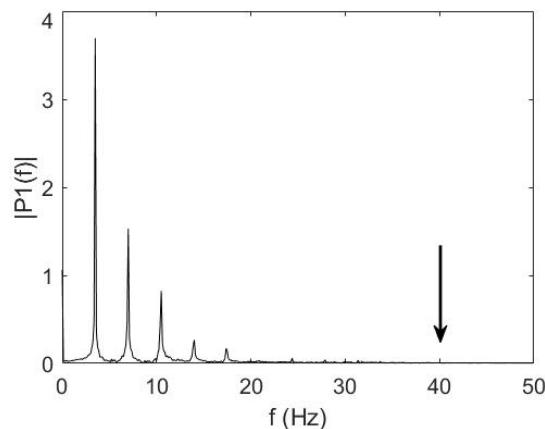


Figura 8.4 – Espectro de frequências $U = 1,041U_f$.

A série temporal para o caso $U = 1,041U_f$ demonstra um comportamento periódico, sendo também observado em seu espectro de frequência picos bem identificados, possivelmente uma função periódica que contém harmônicos.

Com este único parâmetro determinado por FFT é possível realizar a filtragem digital por SVD e conseqüentemente a reconstrução do espaço de estados. O espaço de estados do sistema é então reconstruído, a partir da série temporal $\beta(t)$ de cada condição. Vasconcellos (2012) define a dimensão de imersão d pelo método de Cao (CAO, 1997), em todos os sinais aeroelásticos experimentais apresentados na Tabela 7.1, a dimensão de imersão encontrada foi 3. Como exemplo, a Figura 8.5 apresenta o espaço de estados reconstruído para a condição $U = 1,041U_f$, após filtragem e dupla filtragem por SVD.

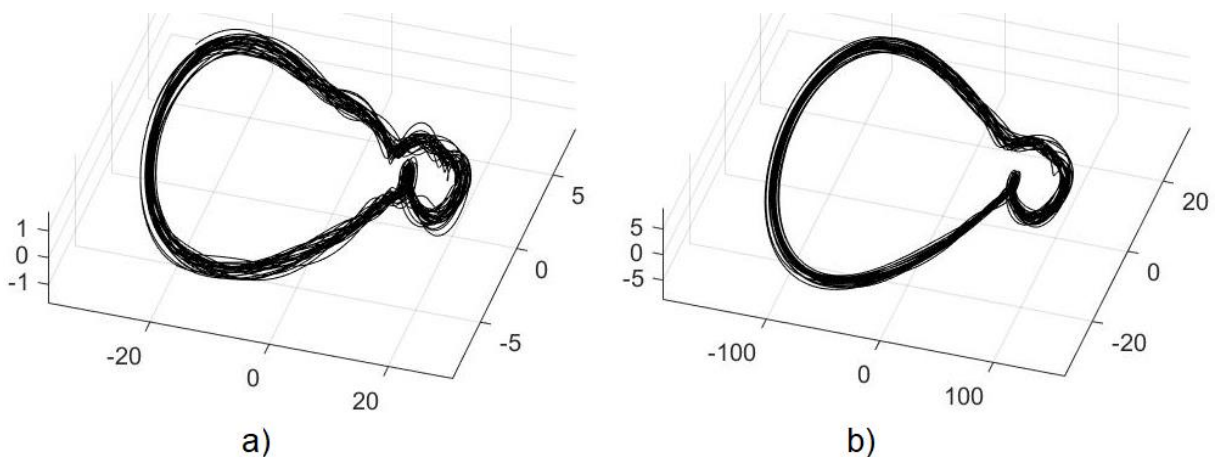


Figura 8.5 – Espaço de estados reconstruído por SVD para $U = 1,041U_f$: a) primeira filtragem e b) segunda filtragem.

Durante a filtragem digital e conseqüentemente reconstrução do espaço de estados pelo método SVD, onde o sinal utilizado refere-se a $U = 1,041U_f$, observa-se que após a primeira filtragem (Figura 8.5(a)), as trajetórias ainda apresentam afastamento e desordem. Ao submeter o sinal a uma segunda filtragem pelo método SVD, o atrator apresenta melhor organização em suas trajetórias, eliminando a maioria das distorções (Figura 8.5(b)), presentes no sinal coletado.

A filtragem digital realizada simultaneamente pelo método SVD durante a reconstrução pode ser observada na Figura 8.6, onde as séries foram geradas juntas (sobrepostas).

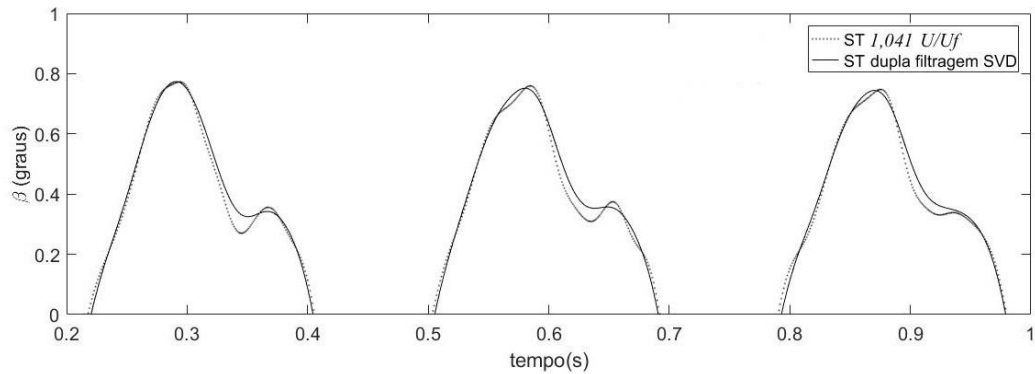


Figura 8.6 – Série temporal $U = 1,041U_f$ original (pontilhada) e filtrada por SVD (linha cheia).

Após dupla filtragem pelo método SVD, o sinal foi submetido ao algoritmo criado por Wolf, com os parâmetros previamente definidos apresentados na Tabela 8.1. Todos os resultados para estimativa do maior expoente de Lyapunov nos sinais aeroelásticos experimentais apresentados neste trabalho, foram gerados utilizando os seguintes parâmetros.

Tabela 8.1 – Parâmetros utilizados no algoritmo de Wolf para sinais aeroelásticos.

Descrição	Valores
Tamanho do sinal (N)	8.000
Defasagem (Tau – τ)	20
Dimensão de imersão (D_e)	3 (tridimensional)
Instante tempo	0,01 s
Erro máximo de orientação (th_{max})	30
Distância mínima (d_{min})	0,001
Distância máxima (d_{max})	0,3
Tempo de evolução (T_{ev})	20

Fonte: Elaborado pelo autor

O algoritmo reconstrói o espaço de estados tridimensional pelo método de defasagem, utilizando o sinal. Após reconstruir o espaço de estados, o algoritmo percorre os pontos da trajetória de referência e estima a cada instante de tempo, o

maior expoente de Lyapunov, através das equações de movimento. A Figura 8.7 apresenta o atrator reconstruído pelo algoritmo de Wolf utilizando método da defasagem.

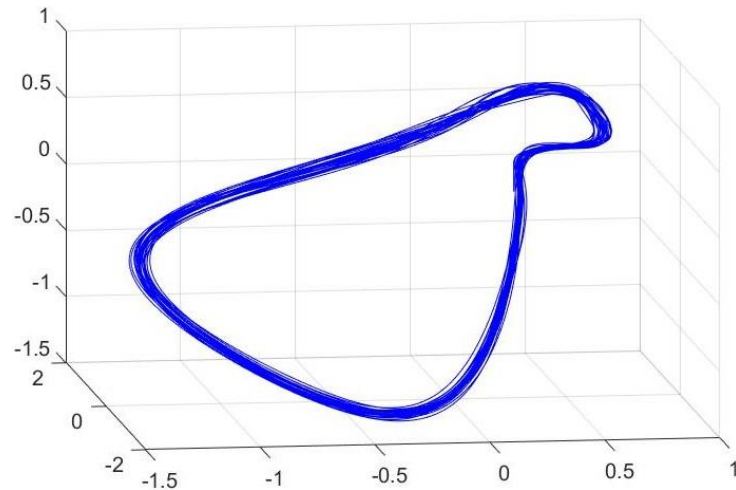


Figura 8.7 – Espaço de estados tridimensional reconstruído pelo método da defasagem.

Para obter os expoentes de Lyapunov e assim caracterizar o sistema, foi executado o algoritmo de Wolf até que todos os pontos do atrator fossem percorridos e calculados as distâncias entre os pontos consecutivos. A Figura 8.8(a) demonstra o resultado da varredura feita pelo algoritmo, após percorrer todo o sistema, e a Figura 8.8(b) uma ampliação do mesmo atrator onde nota-se os segmentos demonstrando as divergências entre os pontos da trajetória de referência e os pontos vizinhos, estimado assim o maior expoente de Lyapunov.

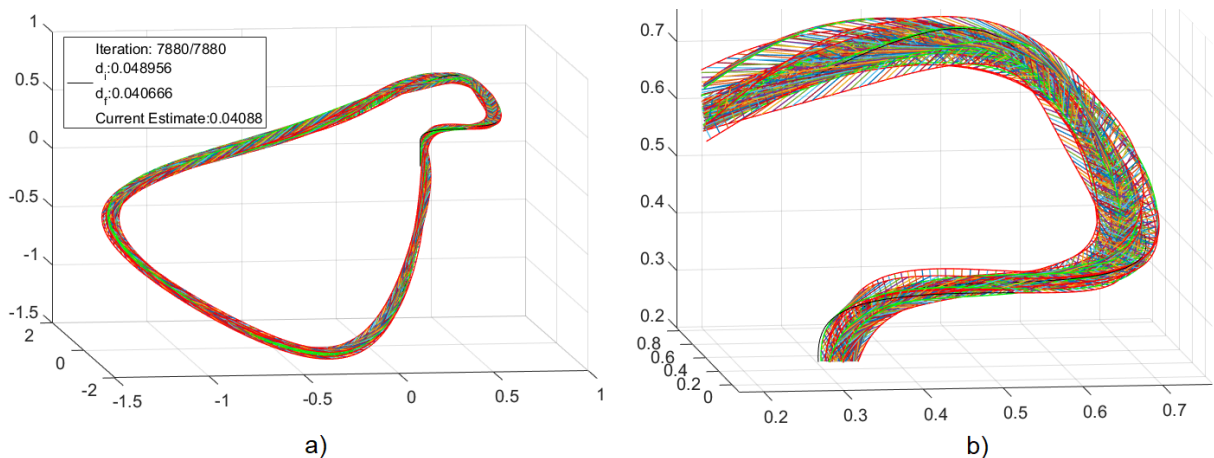


Figura 8.8 – Algoritmo de Wolf estimando o maior expoente de Lyapunov: a) Sistema dinâmico totalmente percorrido e b) ampliação da região (a).

Foi estimado o maior expoente de Lyapunov com o algoritmo para $U = 1,041U_f$. A Figura 8.9 apresenta a evolução da estimativa do maior expoente de Lyapunov, com o aumento dos passos de evolução vai se estabilizando em torno de $\lambda \sim 0,04$, apesar de muito próximo de zero, o expoente é positivo, indicando comportamento caótico fraco. Do espaço de fase pode-se notar que as trajetórias apesar de próximas, não se repetem exatamente.

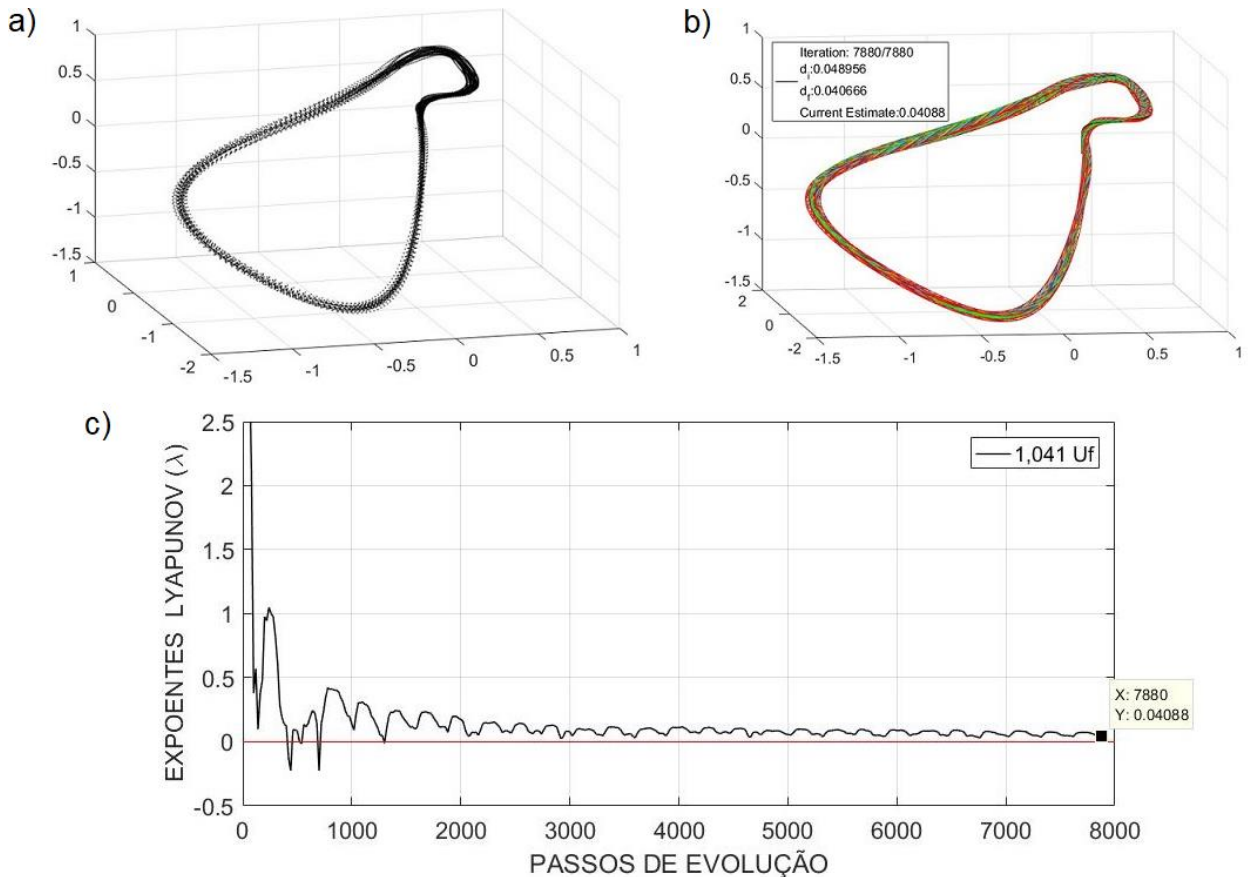


Figura 8.9 – Obtenção do maior expoente de Lyapunov $U = 1,041U_f$: a) Espaço de estados tridimensional reconstruído pelo método da defasagem, b) Espaço de estados percorrido pelo algoritmo e c) espectro de Lyapunov gerado pelo algoritmo.

As ferramentas de análise utilizadas para o caso $U = 1,041U_f$, foram implementadas em todas as velocidades de escoamento (crescentes e decrescentes) da Tabela 7.1. Durante o experimento foram coletados os dados em cada variação de velocidade de escoamento que apresentaram amplitudes. Os casos considerados, tiveram suas respectivas séries temporais submetidas as técnicas de análise e caracterização do comportamento. Os sinais para velocidade de escoamento crescente foram duplamente filtrados e o resultado ilustra a Figura 8.10.

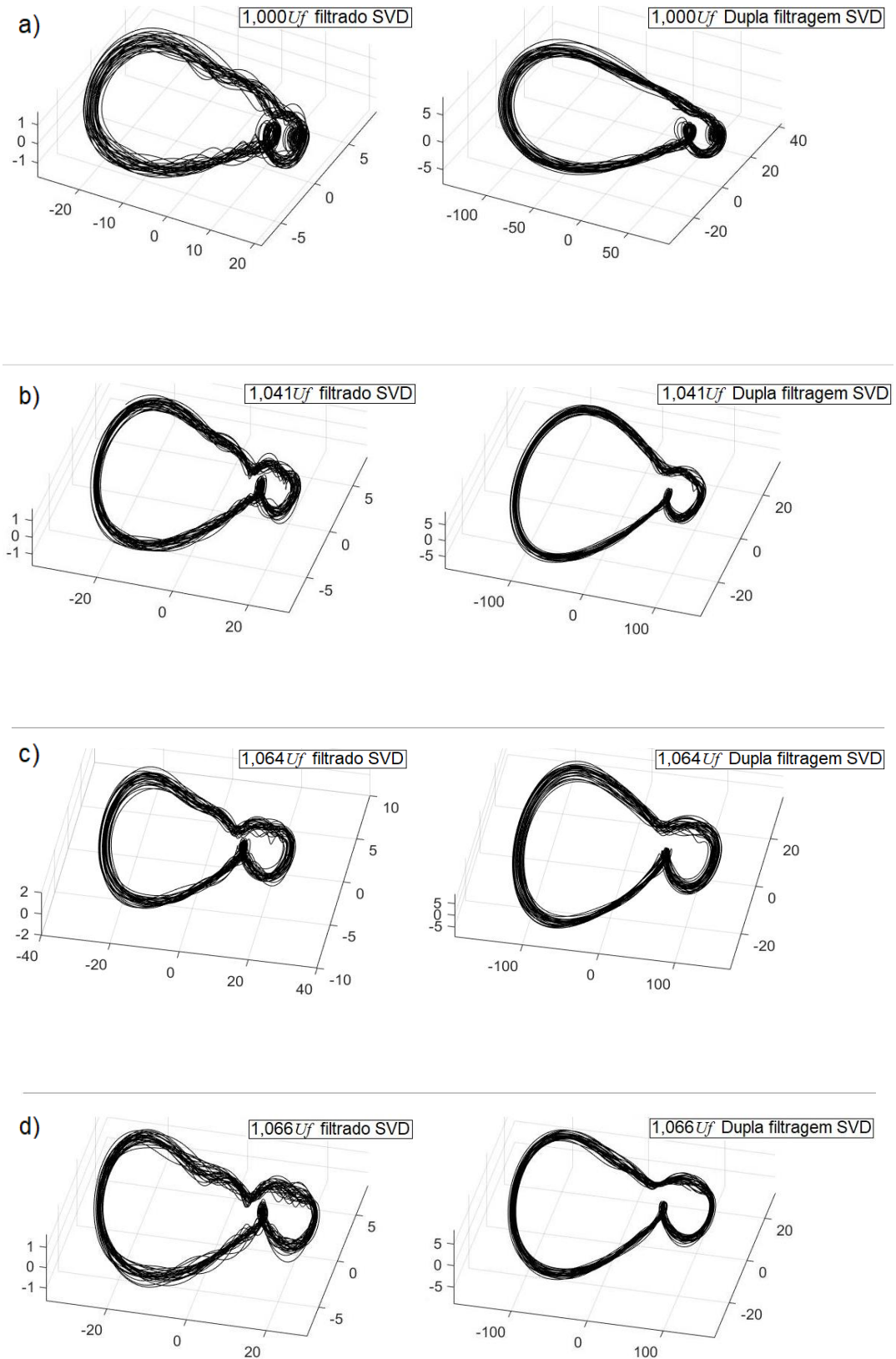


Figura 8.10 – Espaço de estados reconstruído por SVD após filtragem simples e filtragem dupla, para incremento de velocidade.

Após dupla filtragem dos sinais aeroelásticos referente as velocidades de escoamento crescentes, foi implementado o algoritmo de Wolf para estimativa do maior expoente de Lyapunov em cada caso.

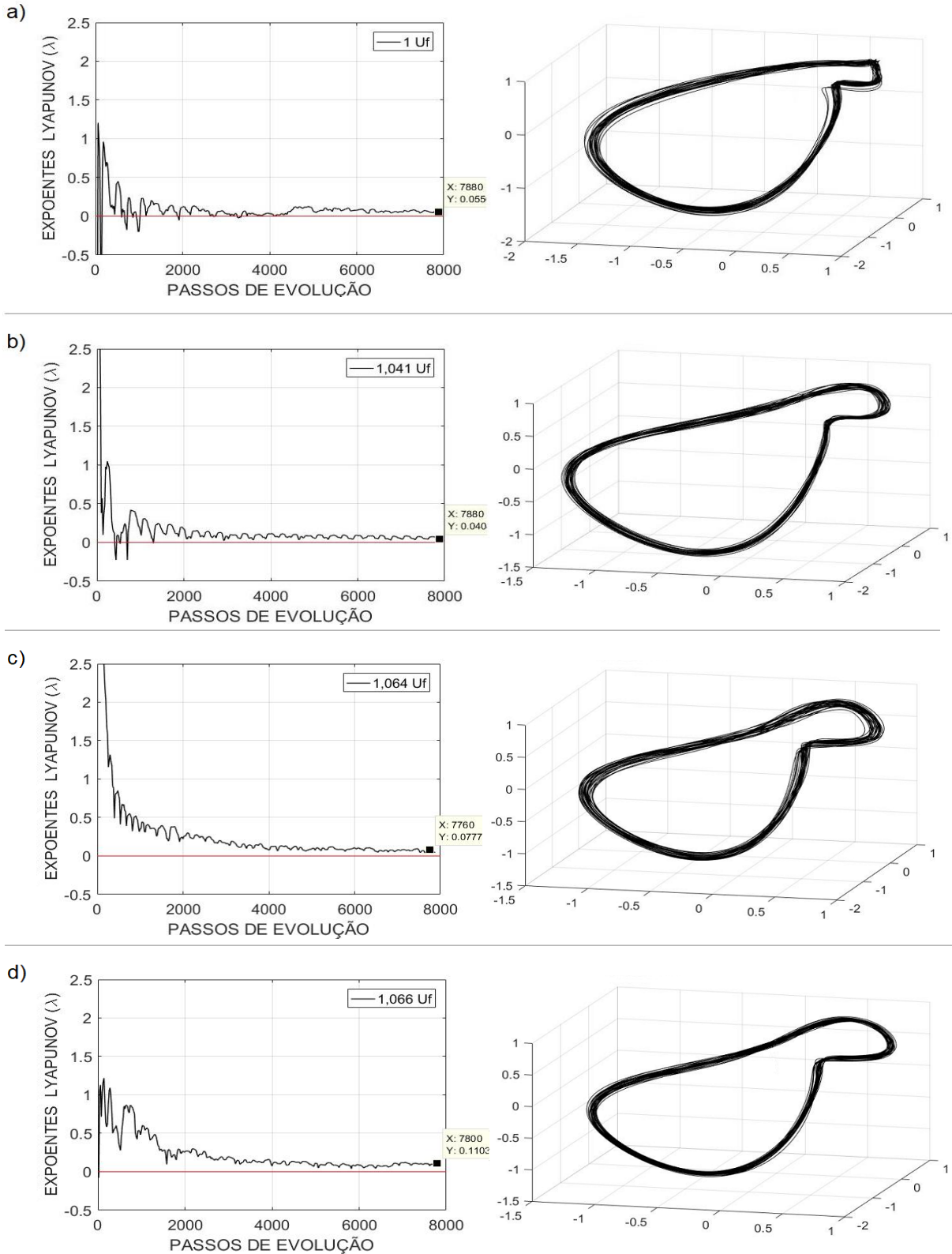


Figura 8.11 – Estimativa do maior expoente de Lyapunov pelo método de Wolf, para incremento de velocidade.

O algoritmo de Wolf reconstrói o espaço de estados pelo método da defasagem, sendo este parâmetro obtido previamente pelo método da informação mútua. A Figura 8.12 apresenta a evolução do espaço de estados com o incremento de velocidade para superfície de comando, reconstruídos pelo algoritmo.

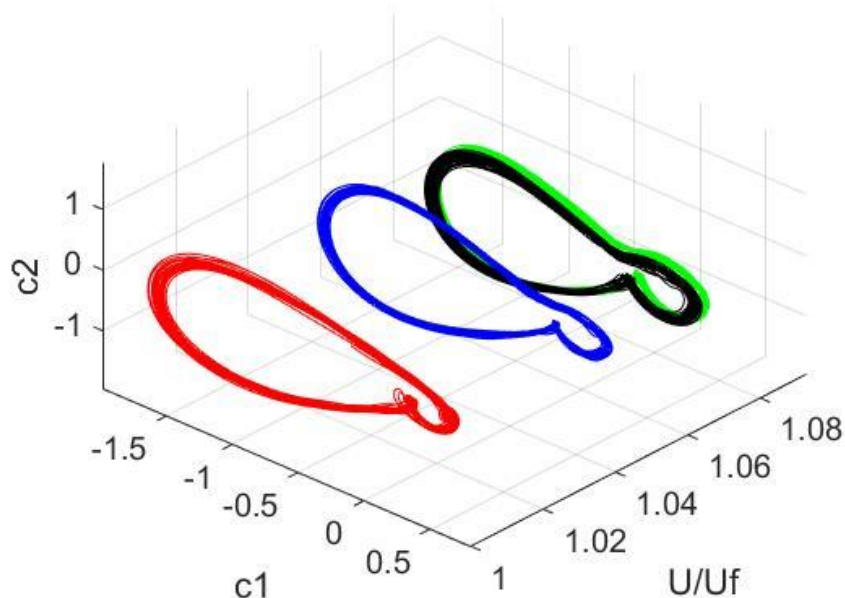


Figura 8.12 – Evolução do espaço de estados com o incremento de velocidade de escoamento.

Nota-se nos espaços de estados reconstruídos a presença de uma laçada coincidente para os casos analisados. Além disso, é possível observar nos respectivos espectros de frequência (Figura 8.13) mudanças sutis nas frequências, mantendo-se a frequência principal em torno de $3,52Hz$.

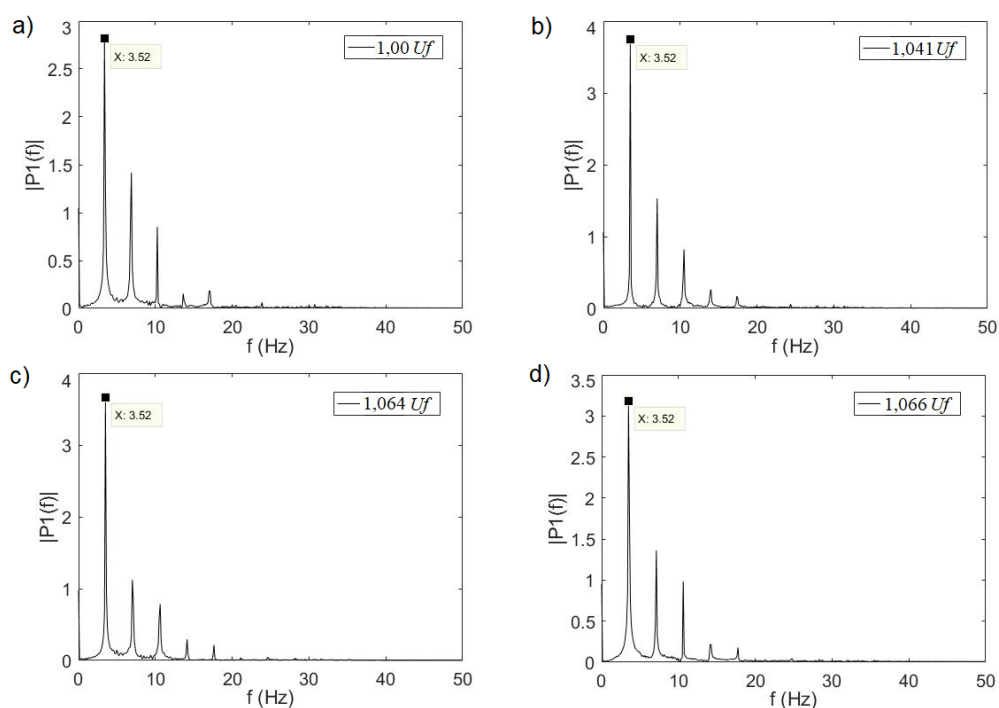


Figura 8.13 – Espectros de frequência com o incremento de velocidade de escoamento.

Após realizar a dupla filtragem por SVD e estimar o maior expoente de Lyapunov para as velocidades incrementadas, os resultados obtidos são apresentados na Tabela 8.2.

Tabela 8.2 – Maior expoente de Lyapunov com incremento de velocidade de escoamento após dupla filtragem.

Descrição	U/U_f	$U \left(\frac{m}{s}\right)$	Valor λ
Sinal aeroelástico experimental	1	13,58	0,06
Sinal aeroelástico experimental	1,041	14,14	0,04
Sinal aeroelástico experimental	1,064	14,46	0,08
Sinal aeroelástico experimental	1,066	14,48	0,12

Fonte: Elaborado pelo autor

Para os sinais coletados durante a fase de velocidade de escoamento decrescente, também foi realizada dupla filtragem pelo método SVD, o sinal foi normalizado e submetido ao algoritmo de Wolf, para calcular o maior expoente de Lyapunov.

A Figura 8.14 apresenta os respectivos atratores reconstruídos após dupla filtragem, com velocidades de escoamento experimental acima da velocidade de *flutter*. Após dupla filtragem digital é possível visualizar um atrator reconstruído com sua topologia ordenada, os pontos do sistema dinâmico mais próximos, apresentando uma melhora significativa comparado ao atrator reconstruído após primeira filtragem.

A Figura 8.15 apresenta os respectivos atratores reconstruídos após dupla filtragem, com velocidades de escoamento experimental abaixo da velocidade de *flutter*.

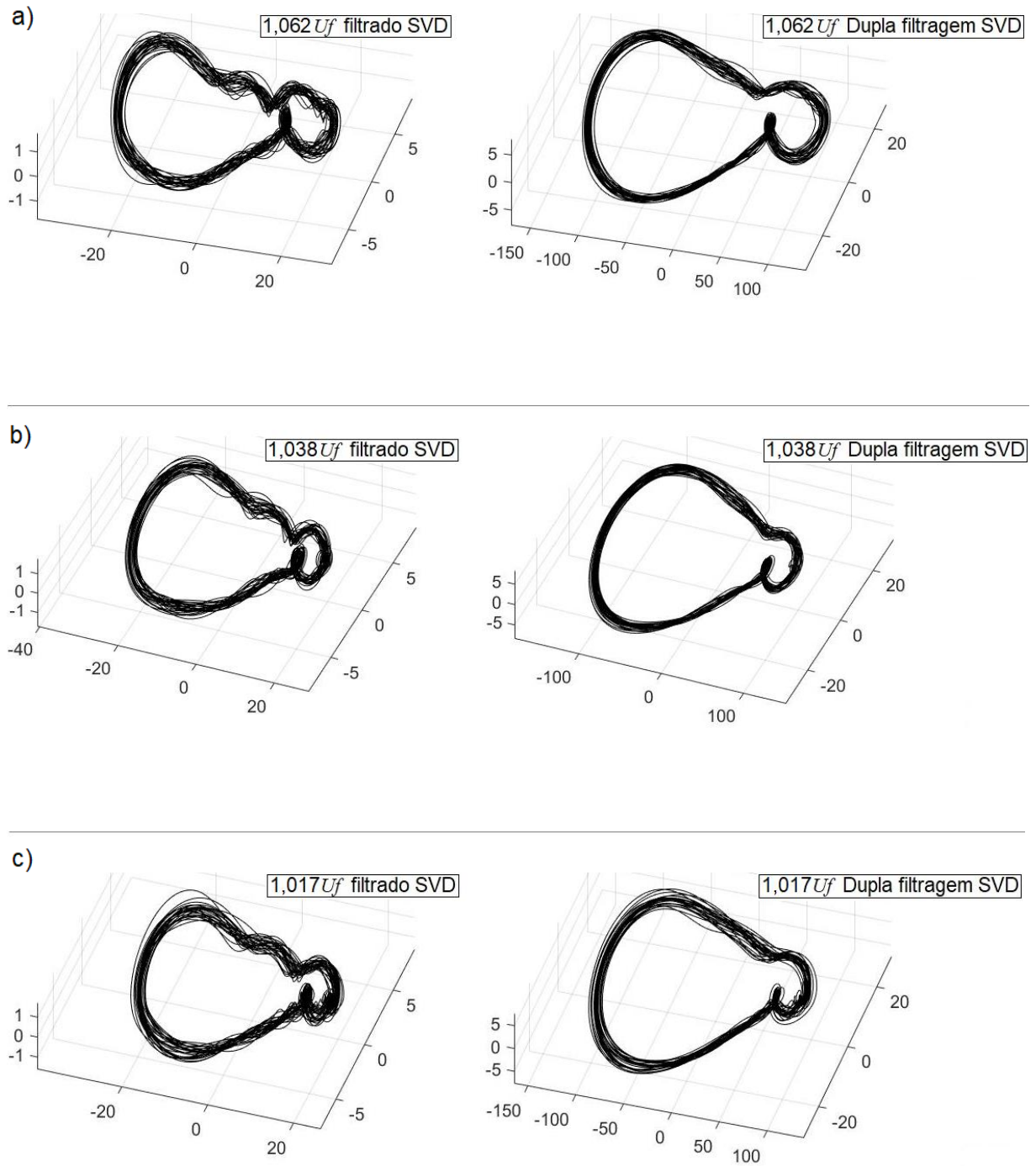


Figura 8.14 – Espaço de estados reconstruído por SVD após filtragem simples e filtragem dupla, velocidade decrescente, acima da velocidade de *flutter*.

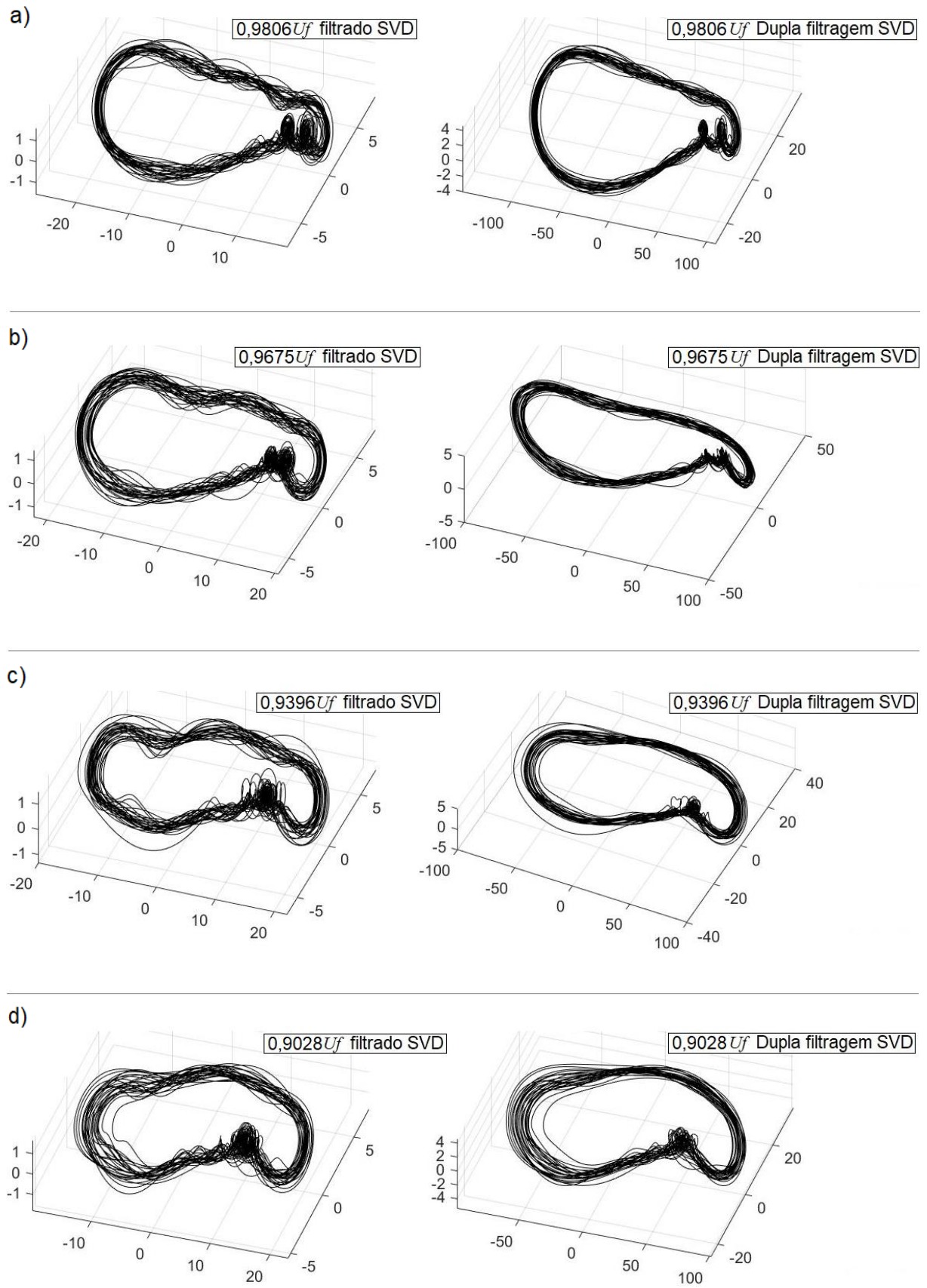


Figura 8.15 – Espaço de estados reconstruído por SVD após filtragem simples e filtragem dupla, velocidade decrescente, abaixo da velocidade de *flutter*.

Após dupla filtragem dos sinais aeroelásticos referente as velocidades de escoamento decrescente, foi implementado o algoritmo de Wolf para estimativa do maior expoente de Lyapunov para cada caso. Para os casos ilustrados na Figura 8.16, foram calculados os expoentes para velocidades experimentais durante decréscimo, ainda acima da velocidade de *flutter*.

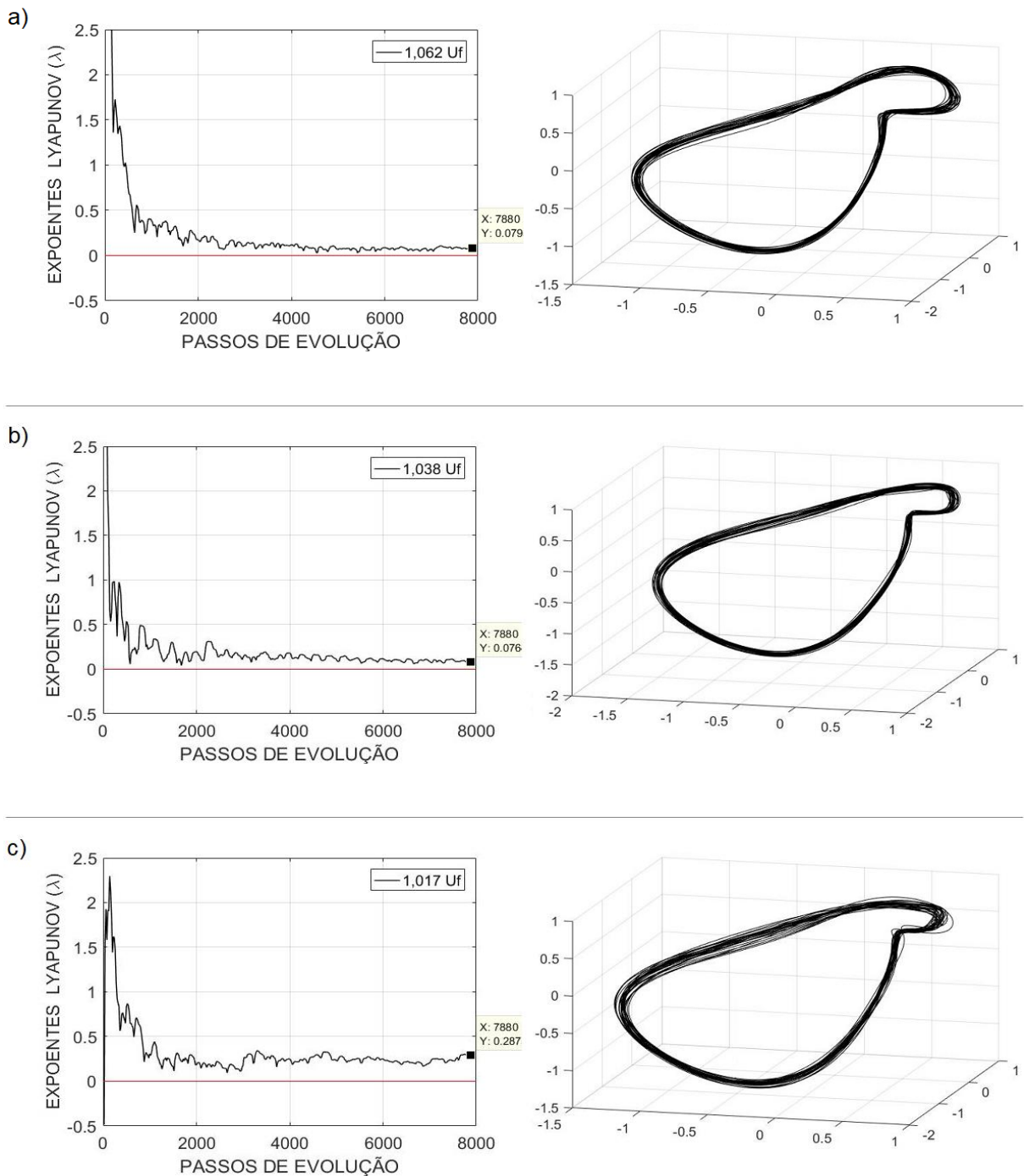


Figura 8.16 – Estimativa do maior expoente de Lyapunov pelo método de Wolf, para velocidade decrescente, acima da velocidade de *flutter*.

A Figura 8.17 apresenta os casos onde foram calculados os expoentes para velocidades experimentais durante decréscimo, abaixo da velocidade de *flutter*.

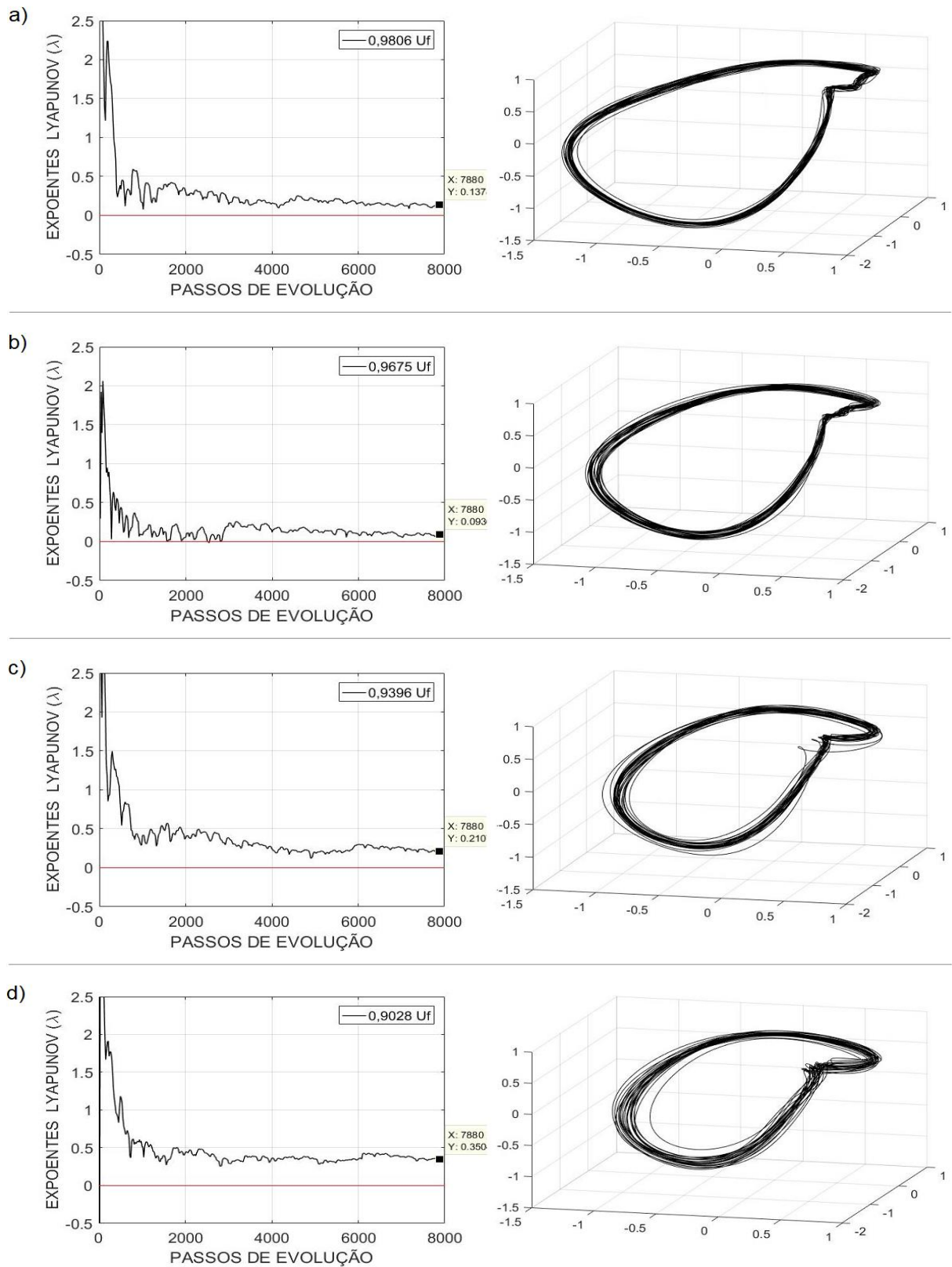


Figura 8.17 – Estimativa do maior expoente de Lyapunov pelo método de Wolf, para velocidade decrescente, abaixo da velocidade de *flutter*.

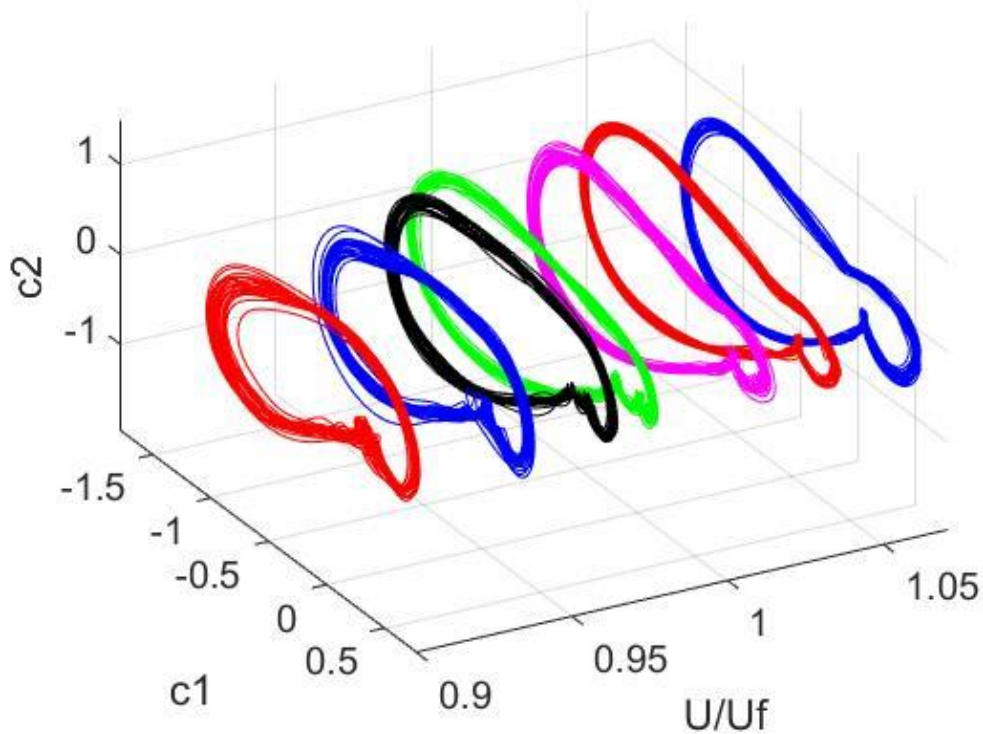


Figura 8.18 – Evolução do espaço de estados com o decréscimo da velocidade de escoamento.

Os casos analisados de velocidades decrescentes durante o experimento, também apresentam um acoplamento como frequência principal ($\sim 3,52\text{Hz}$). Porém, em alguns casos nota-se uma outra frequência considerável no espectro (Figura 8.19). Estes casos com dupla laçada, apresentaram maiores valores de expoentes de Lyapunov, apresentam comportamento mais complexo, sendo quantitativamente e qualitativamente (dinâmicas complexas) fortes indicativos de caos.

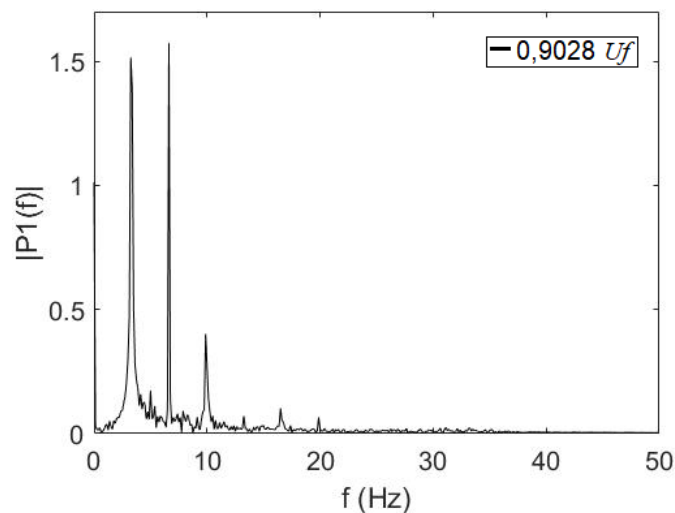


Figura 8.19 – Espectro de frequência para velocidade decrescente $U = 0,9028U_f$.

Tabela 8.3 – Maior expoente de Lyapunov com decremento de velocidade de escoamento após dupla filtragem.

Descrição	U/U_f	$U \left(\frac{m}{s}\right)$	Valor λ
Sinal aeroelástico experimental	1,062	14,42	0,08
Sinal aeroelástico experimental	1,038	14,10	0,08
Sinal aeroelástico experimental	1,017	13,82	0,29
Sinal aeroelástico experimental	0,9806	13,32	0,14
Sinal aeroelástico experimental	0,9675	13,14	0,10
Sinal aeroelástico experimental	0,9396	12,76	0,21
Sinal aeroelástico experimental	0,9028	12,26	0,35

Fonte: Elaborado pelo autor

De fato, o maior expoente de Lyapunov, estimado pelo método de Wolf para todos os sinais aeroelásticos experimentais analisados, apresentaram resultados positivos, sendo forte indicativo de um comportamento caótico. Para os casos que apresentaram os maiores valores estimados em média, observados durante o decremento da velocidade, sendo $U = 0,9028U_f$ e $U = 1,017U_f$ com expoentes estimados em $\lambda \sim 0,35$ e $\lambda \sim 0,29$ respectivamente, nota-se ainda uma maior complexidade, mais espalhamento das trajetórias vizinhas e a presença de mais laçadas no atrator reconstruído, conforme Figura 8.20. Esta dinâmica complexa observada no espaço de fase mesmo após dupla filtragem e a presença de novas frequências nos respectivos espectros, confirmam comportamento caótico.

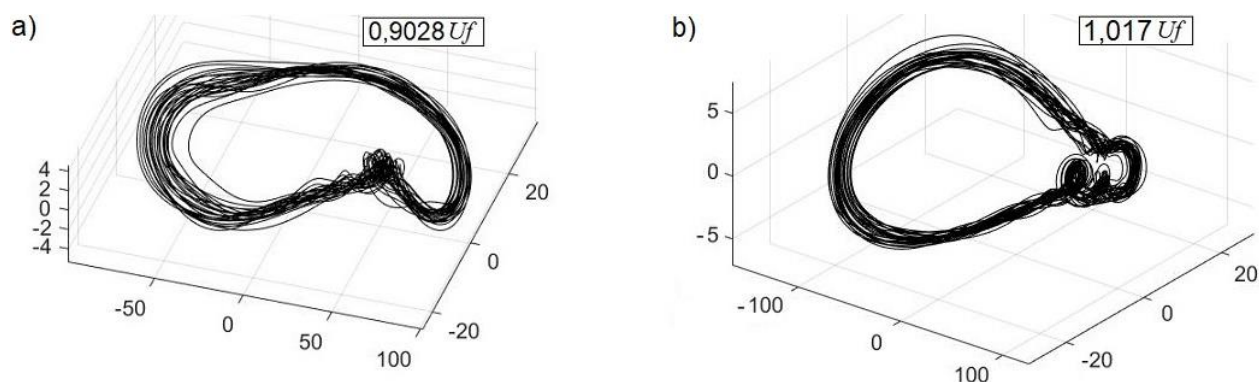


Figura 8.20 – Espaço de estados reconstruído após dupla filtragem para velocidade decrescente: (a) abaixo da velocidade de *flutter* $U = 0,9028U_f$ e (b) acima da velocidade de *flutter* $U = 1,017U_f$.

O caso que apresentou o maior expoente de Lyapunov positivo, sendo $U = 0,9028U_f$ com expoente $\lambda \sim 0,35$, apresenta no seu espaço de estados reconstruído, um atrator com trajetórias afastadas e maior complexidade devido a presença de mais laçadas.

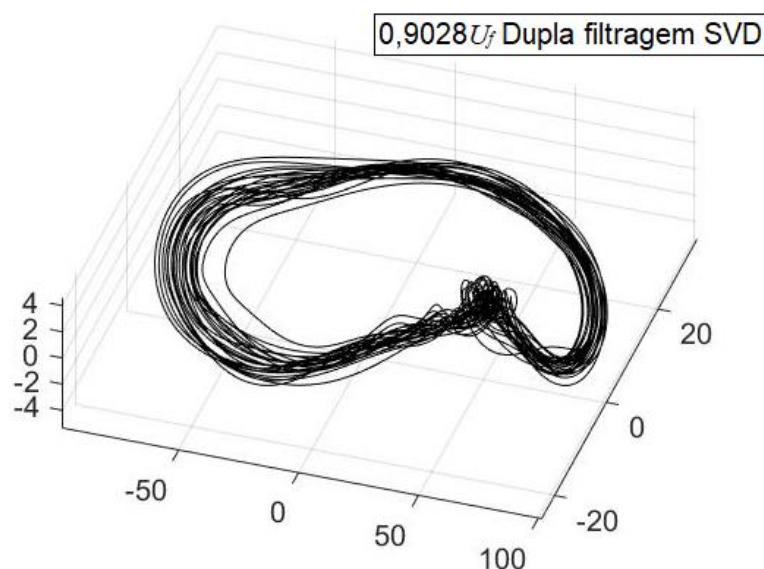


Figura 8.21 – Espaço de estados reconstruído por SVD após dupla filtragem, velocidade decrescente $U = 0,9028U_f$.

O caso que apresentou o menor expoente de Lyapunov positivo, sendo $U = 1,041U_f$ com expoente $\lambda \sim 0,04$, apresenta em seu espaço de estados reconstruído, um atrator com maior organização, trajetórias próximas, mas que não se repetem exatamente. Mesmo o expoente muito próximo de zero, o expoente é positivo, indicando comportamento caótico fraco.

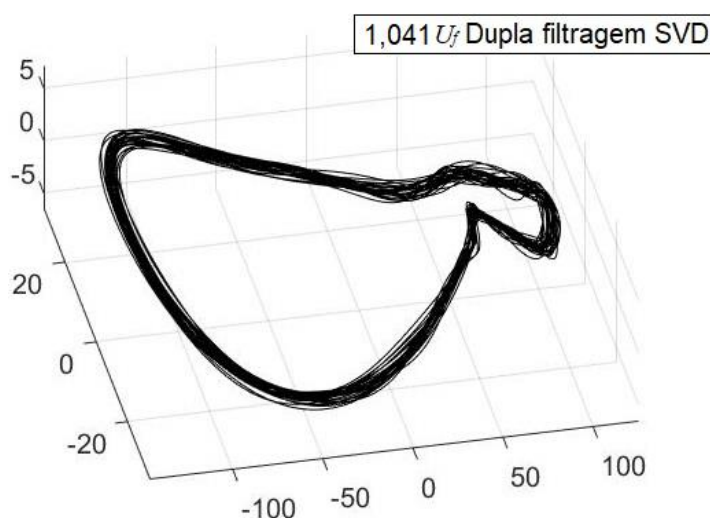


Figura 8.22 – Espaço de estados reconstruído por SVD após dupla filtragem, velocidade crescente $U = 1,041U_f$.

Os resultados que apresentaram maiores valores de expoentes de Lyapunov em média, foram estimados em velocidades de decremento e abaixo da velocidade de *flutter* (Tabela 8.3). Os maiores valores estimados, estão presentes em uma região de maior instabilidade, possivelmente com múltiplas soluções na região de histerese. Quando a velocidade de escoamento é incrementada, não aparece movimento para velocidades abaixo da velocidade de *flutter*, mas quando a velocidade é decrescida aparecem movimentos oscilatórios na região. Esta região onde observa-se uma histerese, onde existe a possibilidade de ter duas ou mais soluções e, portanto, maior complexidade, nota-se a clara dependência as condições iniciais. Fato que caracteriza essa bifurcação como do tipo subcrítica (VASCONCELLOS, 2012, p.66).

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

9.1 Conclusões

Neste trabalho de pesquisa, as ferramentas de análise de séries temporais não-lineares e de identificação foram utilizadas para caracterizar a dinâmica das séries temporais aeroelásticas experimentais da superfície de comando de uma seção típica.

O experimento com três graus de liberdade e folga na superfície de comando foi realizado visando aplicar as técnicas de análise e caracterização, utilizando-se das informações obtidas com resultados anteriores do grupo de estudo, para caracterizar as não-linearidades presentes.

O emprego do método da decomposição em valores singulares, aplicado em séries temporais obtidas numericamente e experimentalmente, possibilitou uma filtragem digital eficiente permitindo resgatar características qualitativas e quantitativas do sistema, reconstruindo o espaço de estados eficientemente, reduzindo consideravelmente os efeitos do ruído e permitindo uma estimativa mais precisa do maior expoente de Lyapunov em sinais contaminados.

Os resultados mostram que a não-linearidade provocada pelo mecanismo de folga aberto, tende a introduzir uma dinâmica complexa no sistema e a implementação das técnicas propostas possibilitou a recuperação de informações importantes das séries temporais aeroelásticas experimentais.

A implementação do algoritmo de Wolf, possibilitou reconstruir o espaço de estados a partir das séries temporais aeroelásticas experimentais. Foi possível observar qualitativamente o tipo de comportamento, forma e propriedades de simetria do atrator e quantitativamente estimar o invariante expoente de Lyapunov diretamente do sinal. Este invariante possibilitou caracterizar o comportamento do sistema. Os resultados positivos obtidos em todos os casos analisados, sugerem forte indício de comportamento caótico.

Após esta análise do comportamento, onde todos os casos foram caracterizados caóticos, os valores estimados apresentaram uma região com maior instabilidade, podendo apresentar diferentes soluções, dependendo das condições iniciais. O comportamento do sistema nesta região de histerese, não apresentou movimentos para velocidades crescentes, mas para velocidades decrescentes existe

movimento na mesma região. Esta dependência as condições iniciais, somado aos maiores valores estimados dos expoentes, caracterizam uma região com maior tendência caótica.

O efeito da folga tende a provocar uma dinâmica muito mais complexa no sistema. Que dinâmicas mais complexas com frequências adicionais, resultando em laçadas adicionais no espaço de estados, tendem a apresentar maiores expoentes de Lyapunov e conseqüentemente sendo forte indício de comportamento caótico mais intenso.

Como contribuição do presente trabalho, destaca-se a caracterização dos efeitos de não-linearidades, como provocados pela folga, em sistemas aeroelásticos através das ferramentas de análise de séries temporais não-lineares experimentais. Outra inovação é aplicação do método SVD como dupla filtragem do sinal experimental, atenuando consideravelmente possíveis efeitos de ruídos presentes no sinal, durante a aquisição. A implementação do método de Wolf permitiu estimar o maior expoente de Lyapunov diretamente do sinal. Os resultados permitiram identificar uma faixa de velocidades, relacionada com a região de histerese onde os expoentes de Lyapunov tendem a apresentar valores maiores, indicando maior complexidade do sistema na referida região.

9.2 Sugestões para trabalhos futuros

Em trabalhos futuros, as técnicas e métodos utilizados para análise das séries experimentais apresentadas também podem ser utilizadas para analisar os dados obtidos através do experimento executado com três graus de liberdade, nos dados coletados para torção e flexão, gerando respectivas séries temporais que podem ser analisadas e caracterizadas.

Implementar outro algoritmo que possibilite calcular o maior expoente de Lyapunov diretamente da reconstrução por SVD, sem a necessidade do método da defasagem e comparar com os resultados já obtidos do algoritmo de Wolf et al, visando confirmar os resultados também são sugestões para os próximos trabalhos.

REFERÊNCIAS

BISPLINGHOFF, R. L.; ASLHEY, H.; HALFMAN, R. L. *Aeroelasticity*. [S.1.]: Dover Publications, 1996.

BROOMHEAD, D. S. ; KING, G. P. Extracting Qualitative Dynamics from Experimental Data, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 20, p. 217-236, june. 1986.

CAO, L. Practical method for determining the minimum embedding dimension of a scalar time series. *Physica D*, v. 20, p. 217-236, 1986.

CHAPMAN, S, J. Matlab Programming for Engineers. 4. ed. Australia. Thomsom corporation. 2008.

CIGNETTI, F., DECKER, L. M., STERGIU, N. Sensitivity of the Wolf's and Rosenstein's algorithms to evaluate local dynamic stability from small gait data sets. *Annals Biomedical Engineering*. v. 40, n. 5, p. 1122–1130, may. 2012.

COLLAR, A. The expanding domain of aeroelasticity. *Journal of the Royal Aeronautical Society*, v. 50, n. 428, p. 613-636, 1946.

DOWELL, E.; TANG, D. Nonlinear aeroelasticity and unsteady aerodynamics. *AIAA Journal*, v. 40, n. 9, p. 1187-1196, 2002.

EPPS, B. P.; KRIVITZKY, E. M.; Singular value decomposition of noisy data: noise filtering. *Experiments in Fluids*. SPRINGER. 60:126, 2019.

FERRARA, N. F.; PRADO, C. P. C. *Caos: Uma Introdução*. 3. Reimpressão. São Paulo: Blucher, 2017. 402p.

GAN, S.; CHEN, Y.; ZU, S.; QU, S.; ZHONG, W.; Structure-oriented singular value decomposition for random noise attenuation of seismic data. *Journal of Geophys. Eng.* 12, p. 262-272, 2015.

HILBORN, R. C., *Chaos and Nonlinear Dynamics*. 2.ed. New York: Oxford U. Press, 2000.

HSU, H. P., *Theory and Problems of Signal and Systems*. New York: McGraw-Hill, 1995.

KAMALANAND, K.; JAWAHAR, P.M. Unscented transformation for estimating the Lyapunov exponents of chaotic time series corrupted by random noise. *International Journal of Mathematical and Computational Sciences*. v. 7, n. 4, p. 658-663, 2013.

KANTZ, H.. A Robust method to estimate the maximal Lyapunov exponent of a time series. Fachbereich Physik, Universität Wuppertal, Gauss-strasse 20,42097 Weppertal, Germany. ELSEVIER. *Physics Letters A* 185 (1994) 77-78.

LEE, B. H. K.; PROCE, S.J., WONG, Y. S., Nonlinear aeroelastic analysis of airfoils bifurcations and chaos. *Progress in Aerospace Sciences*, v. 35, p. 205-334, apr.1999.

LI, D.; GUO, S.; XIANG, J. Aeroelastic dynamic response and control of an airfoil section with control surface nonlinearities. *Journal of Sound and Vibration*, n. 329, p. 4756-4771, 2010.

LIU, X., CAI, X., YANG, J. The maximal Lyapunov exponent for a three-dimensional system driven by white noise. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 15, p. 3498-3506, 2010.

LYNCH, S. *Dynamical System with Applications using MATLAB*. 2. ed. Softcover reprint of the original: Birkhäuser, 2014. 514p.

LORENZ, E. N. Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of Atmospheric Science*. v.20, n. 2, p. 130-141, 1963.

MARQUES, F. D.; BELO, E. M.; OLIVEIRA, V. A.; ROSOLEN, J. R.. Non-linear analysis of stall-induced oscillations of na aeroelastic wing. In: 2º CONGRESSO TEMÁTICO DE DINÂMICA E CONTROLE DA SBMAC. Rio Claro – SP, 2003.

MARQUES, F. D.; BELO, E. M.; OLIVEIRA, V. A.; ROSOLEN, J. R.; SIMONI, A. R. Non-linear phenomena analysis of stall-induced aeroelastic oscillations. In: PROCEEDINGS OF THE 45th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC STRUCTURES, STRUCTURAL DYNAMICS AND MATERIALS CONF. Palm Spring, USA, CD Rom, 2004.

MARQUES, F. D.; BELO, E. M.; OLIVEIRA, V. A.; ROSOLEN, J. R.; SIMONI, A. R. On the investigation of state space reconstruction of nonlinear aeroelastic response time series. *Shock and Vibration*, Hindawi Publishing Corporation, V. 13, N. 4-5, p. 393-407, 2006.

MARQUES, F. D.; VASCONCELLOS, R. M. G. de. Non-linear aeroelastic signals analysis using time series techniques. In: *20th International Congress of Mechanical Engineering-COBEM*. [S.1.: s.n.], 2009.

MEHDIZADEH, S.; SANJARI, M. A.; Effect of noise and filtering on largest Lyapunov exponent of time series associated with human walking. *Journal of Biomechanics*. 64, p. 236-239, 2017.

MONTEIRO, L. H. A.; *Sistemas Dinâmicos*. 3. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011. 670p.

PACKARD, N. H.; CRUTCHFIELD, J.; FARMER, J. D.; SHAW, R. S. Geometry from a time series. *Physical review letters*, APS, v. 45, n. 9, p. 712, 1980.

PEREIRA, D. A. *Efeito de não-linearidades estruturais na resposta aeroelásticas de aerofólios*. Dissertação de Mestrado. Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos. SP, 2015.

RISPENS, S. M.; PIJNAPPELS, M.; VAN DIEEN, J. H.; VAN SCHOOTEN, K.S.; BEEK, P.J. A benchmark test of accuracy and precision in estimating dynamical systems characteristics from a time series. *Journal of Biomechanics*. 47, p. 470-475, 2014,

ROSENSTEIN, M.T., COLLINS, J. J.; DELUCA, C. J. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets. *Physica D*. v. 65. n. 1-2, p. 117-134, 1993.

RÖSSLER, O. E. Na equation for contínuos chãos. *Physics Letters*, v. 57a. n. 5, p. 398-398, 1976.

SANTOS, I. F. *Dinâmica de Sistemas Mecânicos, Modelagem, Simulação, Visualização*. Editora Makron Books, 2001

SATO, S.; SANO, M.; SAWADA, Y. Pratical methods of measuring the generalized dimension and the largest Lyapunov exponente in high dimensional chaotic system. *Progress of Theoretical Physics*, v. 77, n. 1, p. 1 – 5, 1987.

SAVI, M. A. *Dinâmica Não-Linear e Caos*. 2. ed. Rio de Janeiro: E-papers, 2017. 391p.

SHETA, F.; HARRAND, V.J.; THOMPSON, D. E.; STRGANAC, T. W. Computation and experimental investigation of limit cicle oscillations of nonlinear aeroelastic system. *Journal of Aircraft*, v. 39, n. 1, p. 133-141, 2002.

SMITH, S. W., *Digital signal processing*. 2. ed. San Diego: California Technical Publishing, 1999.

SIMONI A. R. *Análise de séries temporais aeroelásticas experimentais não-lineares*. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos. SP, 2008.

STEIN, M. L. (1999). Interpolação de dados espaciais: algumas teorias para Kriging . Série Springer em Estatística. Springer. p. 40.

STROGATZ, S. H., *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. *Reading: Perseus*, 1994.

SOONG, T. T., *Fundamentals of Probability and Statistics for Engineers*, Chichester: John Wiley & Sons, 2004.

TAKENS, F., Detecting strange attractors in turbulence, (Ed.). *Dynamical system and turbulence, lecture notes in mathematics*, In: HAND, D.; YOUNG, L.. (Ed.) New York: Springer-Verlag, v. 898, p. 366-381, 1981.

VASCONCELLOS, R. M. G. *Reconstrução do espaço de estados aeroelásticos por decomposição em valores singulares*. Dissertação de Mestrado. Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos. SP, 2007.

VASCONCELLOS, R. M. G. *Caracterização e detecção da não-linearidade associada á folga em sistemas aeroelásticos*. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos. SP, 2012.

VASCONCELLOS, R. M. G.; ABDELKEFI, A.; HAJJ, M. R.; ALMEIDA, D. P.; MARQUES, F. D. Airfoil control surface discontinuous nonlinearity experimental assessment and numerical model validation. *Journal of Vibration and Control*, published online before print, 2014.

WOLF, A.; SWIFT, J. B.; SWINNEY, H. L.; VASTANO, J. A. Determining Lyapunov exponents from a Time Series. *Physica D*, v. 16, p. 285-317, 1985.

YANG, C. X.; WU, C. Q.; A robust method on estimation of Lyapunov exponents from a noisy time series. *Nonlinear Dynamics*. 64, p. 279-292, april 2011.