



14X
Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.001/96

Termodinâmica de buracos negros

Evelise Gausmann

Orientador



Prof. Dr. George Emanuel Avraam Matsas

Janeiro 1996



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

Termodinâmica de Buracos Negros

Evelise Gausmann

Orientador: George Emanuel Avraam Matsas

Dissertação de Mestrado

" I know why there are so many
people who love chopping wood.
In this activity one immediately
sees the results." Albert Einstein

Agradecimentos

À George Matsas pela orientação, pelo brilho com que fala da natureza, pela pessoa e profissional que é.

À Felice Pisano pelo apoio técnico e moral.

À Maria C. Tijero pelo apoio moral.

À Jordan Del Nero, Aneliza Borin, Orieta Ramos, Josiane Pôncio e Kathia Fehsenfeld pela constante presença mesmo que distante.

Ao Gargamel, Zé e Tadeu; À Rozane; À Telma; À Amarildes e Jonatan por tudo.

Ao Orlando e Sandro pelo apoio.

Aos meus pais e irmão pelo sustento emocional.

À Deus por ter me colocado junto a essas pessoas e por ter me dado forças para vencer algumas das minhas falhas.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos a formulação matemática decorrente da Teoria da Relatividade Geral que segrega a analogia entre a física de buracos negros e termodinâmica. Para tornar clara essa analogia, estudamos as quatro soluções de buracos negros conhecidas. Finalmente, analisamos algumas consequências do enunciado das quatro leis da termodinâmica de buracos negros.

Palavras Chave: Equações de Einstein, Relatividade Geral, termodinâmica de buracos negros.

Área de conhecimento: 1.05.01.03-7

Abstract

In this work, we present the mathematical formulation which results from the General Theory of Relativity that suggests an analogy between black holes physics and thermodynamics theory. In order to make this analogy clear we study the four known solutions which results in black holes. Finally, we analyse some consequences that come out directly from the four laws of the black holes thermodynamic theory.

Keywords: Einstein's Equation, General Relativity, black holes thermodynamic theory.

Índice

Introdução	1
1 Soluções Estacionárias e Axissimétricas	5
1.1 Solução de Schwarzschild	7
1.2 Solução de Reissner-Nordstrom	14
1.3 Solução de Kerr e de Kerr-Newman	19
1.4 Massa, Carga elétrica e Momento angular	21
2 Métrica de Kerr-Newman	26
2.1 Extensão de Kruskal	27
2.2 Métrica de Kerr	33
3 Extração de energia em buracos negros!?	40
4 Termodinâmica de Buracos Negros	47
4.1 Área de Horizontes e Entropia	47
4.2 As 4 Leis da Termodinâmica de Buracos Negros	56
4.3 Termodinâmica de Buracos Negros	57
Conclusão	64
A Campos vetoriais não são invariantes por rotações sobre esferas 2-dim.	65
B Método de Bases Ortonormais - Tetradas	69

Introdução

Das quatro interações da matéria, eletromagnética, nuclear forte e fraca, e gravitacional; a gravitacional se distingue por sua “rebeldia ” quando são feitas tentativas de unificação das quatro interações. O porquê dessa “rebeldia ”, dessa dificuldade, motiva várias pessoas em seus trabalhos. Aqui, no entanto, nos motivaremos simplesmente pela beleza dessa, rebelde, mas vital interação: a gravitacional. Nada reflete melhor a beleza da gravitação do que a própria teoria que a descreve, a Teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein. Com certeza, nem mesmo Einstein tinha idéia de todas as consequências de sua teoria, entre as quais objetos chamados buracos negros. Até mesmo Einstein, em princípio, não acreditou na existência de buracos negros.

Schwarzschild foi quem primeiramente obteve uma solução de buraco negro. Schwarzschild resolveu as Eqs. de Einstein para o espaço-tempo gerado por um corpo esfericamente simétrico e de vácuo em seu exterior, obtendo o seguinte resultado

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

onde fizemos $G = c = 1$ e M é a massa do corpo medida por um observador no infinito. Essa é a chamada métrica de Schwarzschild, a qual constitui uma boa aproximação para um espaço-tempo gerado por uma estrela não rotante. Uma característica dessa solução é a estaticidade decorrente, não de uma escolha, mas sim, da própria solução das Eqs. de Einstein no vácuo para um espaço-tempo esfericamente simétrico. Assim, se uma estrela colapsar gradualmente, mantendo sua simetria esférica e vácuo em seu exterior, o espaço-tempo gerado pelo colapso estelar ainda será dado pela métrica de Schwarzschild. Note, no entanto, que a métrica acima apresenta pontos singulares em $r = 2M$ e $r = 0$. Deixaremos o colapso estelar de lado por um momento e nos deteremos em uma estrela tipo o Sol.

Uma estrela tipo o Sol gera um espaço-tempo descrito por Schwarzschild. A singularidade na métrica não é importante no caso dessas estrelas, pois seus raios são maiores que $2M$. A solução para as Eqs. de Einstein no interior da estrela não é mais Schwarzschild, obviamente, pois não é mais uma solução de vácuo que descreverá a matéria da qual a estrela é formada. Aproximaremos a matéria estelar por um fluido perfeito. A solução das Eqs. de Einstein para uma distribuição estática e esfericamente simétrica para um fluido perfeito traz consigo uma importante consequência conhecida como Eq. de Tolman-Oppenheimer-Volkoff para o equilíbrio hidrostático. Essa equação tem a forma

$$\frac{dP}{dr} = - (P + \rho) \frac{m(r) + 4\pi r^3 P}{r [r - 2m(r)]},$$

onde P e ρ são respectivamente pressão e densidade de massa-energia do fluido e $m(r)$ é

dado por

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'.$$

Tomando o limite Newtoniano da Eq. de T.O.V obtemos a equação do equilíbrio hidrostático Newtoniano

$$\frac{dP_N}{dr} \cong -\frac{\rho m(r)}{r^2}.$$

Ao analisarmos essas duas equações, notamos que para valores positivos da pressão e densidade a equação relativística apresenta valores de maior magnitude que os da equação newtoniana. Isso implica que em sistemas onde efeitos relativísticos são significativos é mais “difícil” manter o equilíbrio entre a pressão provocada pelos constituintes da estrela e a pressão gravitacional.

É interessante ressaltar que a solução das Eqs. de Einstein trazem um resultado ainda mais importante com relação a estabilidade de uma estrela. Mesmo sem considerar detalhes da estrutura de sua composição e exigindo somente que a densidade satisfaça $\frac{d\rho}{dr} \leq 0$, há uma relação entre massa total, M , da estrela e seu raio, R , que limita sua estabilidade. Esse limite ocorre para um valor fixo do raio, o que satisfaz

$$M \leq \frac{4}{9}R.$$

Apesar disso, uma estrela como o Sol está em constante evolução e por consequência, a queima de seu combustível principal, hidrogênio, traz constantes alterações em sua estrutura. Uma dessas etapas da evolução estelar é a de anãs brancas, na qual a estrela permanece estável até uma massa $M \approx 1,4M_\star$, onde $M_\star$ é a massa do sol. A evolução estelar provoca uma expansão inicial da estrela seguida de uma contração, só estabilizada na fase de anã branca, quando o princípio de exclusão de Pauli aplicado a elétrons é tal que provoca uma pressão capaz de se contrapor a pressão gravitacional. Nessa fase a equação para o equilíbrio hidrostático é ainda a Newtoniana.

Efeitos relativísticos tornam-se importantes quando o princípio de exclusão de Pauli para elétrons da anã branca não sustenta a pressão gravitacional provocando nova contração estelar. Temos, então, uma estrela de nêutrons, na qual a pressão gravitacional dada pela Eq. T.O.V, é equilibrada pela pressão exercida por um gás degenerado de nêutrons (principal constituinte de uma estrela nesta fase).

A estrutura da estrela nesta fase de evolução é bastante complicada, sendo muito difícil definir uma equação de estado para ela. Há, portanto, pequenas divergências nos valores limites para a estabilidade de uma estrela de nêutrons de acordo com sua equação de estado. Este valor fica em torno de $M \approx (2 - 3) M_\star$.

Uma estrela de nêutrons apresenta uma alta densidade, toda sua massa é concentrada em diâmetro de poucos quilômetros. O espaço-tempo externo a uma estrela desse tipo é Schwarzschild, no entanto, o raio da estrela ainda permanece maior que duas vezes o valor da massa. O equilíbrio, se a equação não alcançou o raio de Schwarzschild, pode ser sustentado pelo gás degenerado de nêutrons. Não há dados observacionais que comprovem que o colapso estelar dê, realmente, origem a buracos negros, e muito menos já se observou um buraco negro.

Uma estrela quando atinge um raio no valor de duas vezes sua massa, fica impossível evitar o colapso estelar. A superfície $r = 2M$, na métrica de Schwarzschild é uma superfície

tipo luz. Um fóton movendo-se livremente seguindo uma curva geodésica tipo luz, uma vez tendo-a atravessado jamais conseguirá retornar. Isso, devido ao fato que em Schwarzschild $r = 2M$ também é uma superfície de infinito redshift. Uma partícula massiva qualquer seguirá uma curva tipo tempo, e portanto, também não escapará além da superfície $r = 2M$, a qual chamaremos de horizonte de eventos.

No interior de um horizonte de eventos, as partículas lá confinadas são inevitavelmente arrastadas na direção de $r = 0$. Em $r = 0$, temos um ponto de infinita curvatura. Um observador aproximando-se da singularidade sentirá em seu corpo as forças de maré aumentando rapidamente e alcançando um valor infinito em um tempo próprio finito. Em poucas palavras, as forças de maré “esmagarão” o observador mesmo antes dele alcançar a singularidade, onde essas forças são infinitas.

Singularidades no espaço-tempo representam regiões onde nossas teorias físicas não são aplicáveis. No entanto, de acordo com o chamado “*Princípio do Censor Cósmico*”, singularidades sempre estarão “protegidas” por horizonte de eventos. Assim, a singularidade não será “vista” por um observador no infinito.

Um buraco negro, então, é caracterizado pela presença um horizonte de eventos. O horizonte de eventos terá uma área bem definida, a qual tenderá a crescer por meio de qualquer processo físico clássico que provocar sua variação.

Ao contrário do que se imagina, é possível extrairmos uma certa quantidade de energia de buracos negros. Um desses mecanismos de extração de energia é a colisão de dois buracos negros de Schwarzschild. Uma certa quantidade de energia será extraída durante a colisão através de ondas gravitacionais.

Outro método no qual é possível extraírmos energia ocorre com buracos negros rotantes devido a propriedades de sua ergosfera¹. Uma partícula que nessa região fragmenta-se em duas partes, onde um dos fragmentos cai na singularidade e outro escapa para o infinito, a energia desse último poderá ser superior àquela da partícula inicial. Neste caso, além de energia, essa partícula também extrairá momento angular do buraco negro em rotação. Uma sequência finita de processos desse tipo pode levar a zero o momento angular do buraco negro e conseqüentemente eliminar a ergosfera. Sem ergosfera, no entanto, esse método torna-se impossível.

Apesar desses mecanismos clássicos permitirem a extração de energia, a área do horizonte de eventos nunca decresce classicamente. Esse fato sugeriu uma possível analogia entre a área do horizonte de eventos de um buraco negro e a entropia de um sistema termodinâmico. No entanto, é preciso que, além de uma simples analogia entre um parâmetro, tenhamos uma completa formulação matemática que sustente essa semelhança.

A formulação matemática que sustenta a analogia entre área de buracos negros e entropia foi desenvolvida por Bardeen, Carter e Hawking. É bastante interessante como dois sistemas de naturezas, até onde se sabe, bastante diferentes apresentam tal semelhança.

As 4 leis da termodinâmica clássica são de origem puramente experimental, descrevendo macroscopicamente a matéria. Ao contrário, as 4 leis da termodinâmica de buracos negros são conseqüências de uma teoria. Os parâmetros extensivos, aqui, são funções de três parâmetros: massa, momento angular e carga elétrica. Esses são os três únicos parâmetros que caracterizam um buraco negro estacionário. Além deles toda e qualquer informação

¹Região compreendida entre a superfície de limite estático, $\xi^a \xi_a = 0$, e o horizonte de eventos.

sobre o corpo que colapsou é totalmente perdida. Este é conhecido como “Teorema de *no hair*” : “um buraco negro não tem cabelos”.

Contudo, classicamente, como veremos, a entropia é analoga a área do horizonte de eventos, a qual é finita. A temperatura também deverá ser finita já que é proporcional a chamada gravidade superficial. Assim, um buraco negro deverá estar em equilíbrio com a radiação térmica em alguma temperatura diferente de zero. No entanto, classicamente, isso é impossível já que um buraco negro poderá absorver a radiação térmica, mas não poderá emitir radiação.

Hawking, após ter mostrado que classicamente um buraco negro não emite radiação, mostrou que considerando aspectos quânticos, um buraco negro cria e emite partículas. A radiação emitida por um buraco negro é tipo radiação de corpo negro com temperatura proporcional a gravidade superficial (inversamente proporcional a sua massa).

Nesta dissertação faremos uma revisão de alguns aspectos que, para nós, são os mais relevantes da física de buracos negros clássicos e da termodinâmica de buracos negros. Como já dissemos, não estudaremos aspectos quânticos. No capítulo 1, desenvolveremos as soluções de buracos negros existentes. São elas, Solução de Schwarzschild, Solução de Reissner-Nordström, Solução de Kerr e de Kerr-Newman, as quais representam a família de Kerr de soluções estacionárias e axissimétricas. No capítulo 2, analisaremos essas soluções. No capítulo 3, verificaremos as possibilidades de extração de energia de um buraco negro usando processos clássicos. No quarto e último capítulo, desenvolveremos os mecanismos matemáticos necessários para enunciar as 4 leis da termodinâmica de buracos negros. Finalmente, usaremos as 4 leis para verificarmos o comportamento termodinâmico de buracos negros. Usaremos, no decorrer da dissertação as constantes c e G , velocidade da luz e constante gravitacional iguais a um.

Capítulo 1

Soluções Estacionárias e Axissimétricas

Primeiramente, iremos determinar a geometria do espaço-tempo que dará origem à solução de Kerr-Newman das Eqs. de Einstein. A solução de Kerr-Newman é uma solução estacionária e axissimétrica das Eqs. de Einstein.

Por estacionário, entendemos o espaço-tempo com um grupo de isometrias por translação temporal, σ_t , no qual as órbitas são geradas por um campo vetorial de Killing tipo tempo ξ^a , tal que

$$\mathcal{L}_\xi g_{ab} = 0. \quad (1.1)$$

Isto significa que um observador seguindo uma órbita ξ^a não sentirá mudanças na métrica, implicando na Eq. de Killing

$$\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0. \quad (1.2)$$

Por axissimétrico, entendemos o espaço-tempo com um grupo de isometrias por rotações, χ_ϕ , no qual as órbitas são fechadas e geradas por um campo de Killing tipo espaço ψ^a , satisfazendo igualmente (1.1) e (1.2).

Uma solução estacionária e axissimétrica deve conter as duas isometrias e ainda, devemos exigir que a ação delas comute, ou seja, que

$$[\xi, \psi] = 0. \quad (1.3)$$

Escolhemos, então, coordenadas tais que ξ e ψ sejam campos vetoriais coordenados $\xi^a = (\partial/\partial t)^a$ e $\psi^a = (\partial/\partial \phi)^a$, associados ao seguinte sistema de coordenadas, $x^0 = t$, $x^1 = \phi$, x^2 , x^3 .

Sabendo que ξ^a e ψ^a satisfazem (1.1), e portanto são campos de Killing, temos que¹

$$\frac{\partial g_{ab}}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial g_{ab}}{\partial \phi} = 0.$$

Notamos com isto, que g_{ab} não depende de t e ϕ , portanto

¹Já que $\mathcal{L}_\xi g_{ab} = \xi^c \nabla_c g_{ab} + g_{ab} \nabla_b \xi^c + g_{bc} \nabla_a \xi^c = 0$ mas com $\xi^c = (1, \vec{0})$, obtemos que $\mathcal{L}_\xi g_{ab} = \xi^0 \nabla_0 g_{ab} + g_{ac} \nabla_b \xi^c + g_{bc} \nabla_a \xi^c = \frac{\partial g_{ab}}{\partial t} + g_{ac} \nabla_b \xi^c + g_{bc} \nabla_a \xi^c$, a equação (1.1) implica que $\nabla_b \xi_a + \nabla_a \xi_b = 0$. Assim, $\frac{\partial g_{ab}}{\partial t} = 0$ de forma que $\mathcal{L}_\xi g_{ab} = \frac{\partial g_{ab}}{\partial t} = 0$. Da mesma forma ocorre para $\psi^c = (0, 1, 0, 0)$.

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} (x^2, x^3) dx^\mu dx^\nu. \quad (1.4)$$

Para determinarmos $g_{\mu\nu} (x^2, x^3)$, usaremos um teorema que nos diz que, sub-espacos bi-dimensionais em cada ponto, gerados por vetores ortogonais à ξ^a e ψ^a , são integráveis.

“ **Teorema 1** : Seja ξ^a e ψ^a dois campos de Killing que comutam, tais que :

i# $\xi_{[a} \psi_b \nabla_c \xi_{d]} = \xi_{[a} \psi_b \nabla_c \psi_{d]}$ cada um se anula em pelo menos um ponto do espaço-tempo (o qual, em particular, será verdade se ambos ξ^a ou ψ^a anularem em um ponto) e;

ii# $\xi^a R_a{}^{[b} \xi^c \psi^{d]} = \psi^a R_a{}^{[b} \xi^c \psi^{d]} = 0$. Então os planos bi-dimensionais ortogonais a ξ^a e ψ^a são integráveis. ”[1](os índices entre colchetes estão antissimetrizados)

Satisfazendo esse teorema, podemos escolher as coordenadas x^2 e x^3 do espaço-tempo sobre as superfícies bi-dimensionais integráveis e estendê-las a todo espaço-tempo através das curvas integrais de ξ^a e ψ^a . Dessa forma, em coordenadas t, ϕ, x^2, x^3 , teremos a métrica

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -V & W & 0 & 0 \\ W & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22} & g_{23} \\ 0 & 0 & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

onde $g_{02} = g_{03} = g_{12} = g_{13} = 0$, pois $g_{02} = g(t, x^2) = \langle t, x^2 \rangle = 0$, já que $t \perp x^2$. O mesmo acontece para ϕ . Por sua vez definimos

$$\begin{aligned} -V &= -g_{00} = -\xi_a \xi^a \\ W &= g_{01} = \xi_a \psi^a \\ X &= g_{11} = \psi_a \psi^a. \end{aligned}$$

Agora, se definirmos uma função escalar ρ por

$$\rho^2 = - \left| \begin{array}{cc} -V & W \\ W & X \end{array} \right| = -(-VX - W^2) = VX + W^2, \quad (1.6)$$

e assumirmos $\nabla_a \rho \neq 0$, podemos escolher $x^2 = \rho$. Da mesma forma $x^3 = z$, de modo que $\nabla_a \rho \perp \nabla_a z$, assim $g_{23} = 0$. Então, substituindo as componentes de $g_{\mu\nu}$ em (1.4), escreveremos o elemento de linha como

$$ds^2 = -V dt^2 + 2W dt d\phi + X d\phi^2 + U^2 d\rho^2 + U^2 \Lambda dz^2, \quad (1.7)$$

onde $g_{22} = U^2$, $g_{33} = U^2 \Lambda$. Escrevendo

$$\omega = \frac{W}{V}$$

e

$$\rho^2 = XV + W^2 \implies X = V^{-1} \rho^2 - V\omega^2,$$

encontramos

$$ds^2 = -V(dt - \omega d\phi)^2 + V^{-1}\rho^2 d\phi^2 + U^2 d\rho^2 + U^2 \Lambda dz^2. \quad (1.8)$$

Essa métrica é a mais geral para um espaço-tempo axissimétrico, estacionário, satisfazendo o Teo.1.

Particularizando a métrica (1.8), encontraremos quatro soluções para as Eqs. de Einstein. Uma delas, a mais simples e possivelmente a mais importante, é a solução de Schwarzschild. A solução de Schwarzschild, além de ser estacionária é também estática e além de axissimétrica é esfericamente simétrica. A (1.8) deverá, portanto, ser adaptada a estas novas exigências, estaticidade e esfericidade, da geometria do espaço-tempo. Essa solução é encontrada quando consideramos o tensor de energia e momento, T_{ab} , das Eqs. de Einstein, igual a zero, ou seja, é uma solução de vácuo. Contudo, se considerarmos o mesmo espaço-tempo da solução de Schwarzschild, estático e esfericamente simétrico, mas com

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi} \left\{ F_{ac} F_b{}^c - \frac{1}{4} g_{ab} F_{de} F^{de} \right\}, \quad (1.9)$$

ou seja, T_{ab} descrevendo o campo eletromagnético gerado por uma distribuição de matéria esfericamente simétrica e carregada com carga elétrica, e , obteremos a solução de Reissner-Nordstrom. Detalharemos, adiante, a obtenção dessas duas soluções.

A terceira solução das Eqs. de Einstein para a (1.8) é a chamada solução de Kerr. A solução de Kerr é derivada diretamente da resolução das Eqs. de Einstein para a métrica (1.8), sem exigir simetria esférica ou estaticidade. No entanto, a solução de Kerr representa o espaço-tempo gerado por um corpo em rotação no vácuo, como consequência de T_{ab} ser nulo, ocorrem simplificações na (1.8). Essas simplificações serão feitas mais tarde. Já, se considerarmos T_{ab} , dado pela (1.9), devido a uma distribuição axissimétrica de matéria carregada com carga elétrica, e , as simplificações, devido ao vácuo, na métrica (1.8), não serão mais possíveis. Obteremos, então, a quarta solução, a solução de Kerr-Newman. A solução das Eqs. de Einstein para o caso de Kerr e Kerr-Newman são matematicamente difíceis de serem resolvidas, portanto, não as encontraremos aqui. Limitar-nos-emos a apresentá-las, analisando suas consequências.

1.1 Solução de Schwarzschild

A solução de Schwarzschild é estática e esfericamente simétrica. No entanto, mostraremos que não precisamos exigir estaticidade na construção do espaço-tempo, pois será consequência de exigirmos somente simetria esférica e solução de vácuo das Eqs. de Einstein. O Teorema de Birkoff é que nos garante isso.

Teorema de Birkoff: Seja a geometria de uma região do espaço-tempo esfericamente simétrica e solução das Eqs. de Einstein no vácuo. Então a geometria é necessariamente dada pela solução de Schwarzschild e portanto é estática.

Prova:

Consideremos uma variedade $\mathcal{M}^4$ esfericamente simétrica, tal que o grupo de isometrias deve conter um sub-grupo isomorfo a $SO(3)$. A coleção de pontos resultante da ação deste sub-grupo, S , em um dado ponto $\mathcal{P} \in \mathcal{M}^4$, são esferas bi-dimensionais, s . Podemos

interpretar a isometria $S(3)$ como rotações. Dessa forma, o espaço-tempo esfericamente simétrico, fica invariante sob rotações.

A métrica de uma esfera bi-dimensional, s , é

$$(ds^2)_s = \mathcal{R}^2(s) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

onde θ e ϕ são definidos sobre s e $4\pi\mathcal{R}^2$ é a área da superfície s . O conjunto dessas superfícies bi-dimensionais forma uma variedade $\mathcal{M}^2 \in \mathcal{M}^4$.

Devemos assumir a existência de uma 4-velocidade, u , em $\mathcal{M}^4$, da qual o ponto $\mathcal{P} = c(\tau)$ é uma trajetória, com $u = \left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)$, assim a aplicação de uma rotação, $\mathcal{A}$, no ponto $\mathcal{P}$ também será uma trajetória de u . A projeção de u em s deve ser nula, já que não há campos vetoriais em s invariantes por rotações (veja apêndice A). Concluimos, então, que u é ortogonal à esfera bi-dimensional s . Além disso, se tivermos duas trajetórias de u partindo de um ponto $c_1(0) = \mathcal{A}c_2(0)$, então, uma mesma rotação representará também $c_1(\tau) = \mathcal{A}c_2(\tau)$, já que trajetórias devem ser definidas por um ponto qualquer. Dessa forma, em $\mathcal{M}^2$, a aplicação do sub-grupo, S , em $c_1(\tau)$ e $c_2(\tau)$, representarão a mesma curva. Sua tangente $\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)$, chamaremos também de u . Teremos, então, um campo vetorial u , em $\mathcal{M}^2$. Cada trajetória de u , em $\mathcal{M}^2$, será rotulada por um valor r função de s , assim, em $\mathcal{M}^2$, r será função da aplicação do sub-grupo, S , que resultou em s , em $\mathcal{M}^2$.

A função $r(S(\mathcal{P}))$, descrita acima, é o rótulo de cada esfera bi-dimensional; portanto independe de τ , assim $\frac{dr}{d\tau} = 0$. Ambos r, τ são parâmetros correspondentes à curva, portanto é possível efetuarmos transformações, tais que $\tau' = \tau'(\tau)$ e $r' = r'(r)$. Em $\mathcal{M}^4$, tomando a esfera bi-dimensional, s , na hipersuperfície $\tau = 0$, definimos θ e ϕ como coordenadas. As coordenadas θ e ϕ estendem-se por toda a hipersuperfície, de tal forma que são constantes em curvas ortogonais à s , ou seja, que a variação $\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_{\theta\phi}$ de r , seja ortogonal a cada s em $\tau = 0$. Para $\tau \neq 0$, θ e ϕ devem ser constantes ao longo das curvas com tangente u . Cada esfera bi-dimensional s terá r e τ constantes, portanto, $\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)_{r\tau\phi}$ e $\left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right)_{r\tau\theta}$ estão sobre a esfera, assim

$$\begin{aligned} g_{t\theta} &= g\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial\theta}\right) = 0, \\ g_{t\phi} &= g\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial\phi}\right) = 0, \\ g_{r\theta} &= g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial\theta}\right) = 0, \\ g_{r\phi} &= g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial\phi}\right) = 0. \end{aligned}$$

Construiremos, dessa forma, nosso sistema de coordenadas, no qual r, t, θ, ϕ são as coordenadas.

Definidos, espaço-tempo e sistema de coordenadas, escreveremos a métrica para o espaço-tempo esfericamente simétrico

$$\begin{aligned} ds^2 &= -g_{00}(t, r) dt^2 + g_{11}(t, r) dr^2 + 2g_{01}(t, r) dt dr \\ &\quad + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Notemos que é possível, devido à g_{00} e g_{01} dependerem somente em r e t , efetuarmos uma transformação de coordenadas, tal que

$$t' = t - \int \frac{g_{01}(t, r)}{g_{00}(t, r)} dr, \quad (1.11)$$

a qual, quando diferenciada, produz

$$g_{00}(t, r) dt' = g_{00}(t, r) dt - g_{01}(t, r) dr.$$

Tomando o quadrado de $g_{00}(t, r) dt'$,

$$(dt')^2 = \frac{1}{g_{00}(t, r)} \left[g_{00}(t, r) dt^2 + \frac{[g_{01}(t, r)]^2}{g_{00}(t, r)} dr^2 - 2g_{01}(t, r) dt dr \right],$$

então,

$$g_{00}(t, r) dt^2 - 2g_{01}(t, r) dt dr = g_{00}(t, r) dt'^2 - \frac{[g_{01}(t, r)]^2}{g_{00}(t, r)} dr^2. \quad (1.12)$$

Substituindo este resultado na (1.10), fazendo $t' = t$, teremos

$$ds^2 = -f(t, r) dt^2 + h(t, r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (1.13)$$

onde

$$f(t, r) = g_{00}(t, r)$$

e

$$h(t, r) = \frac{[g_{01}(t, r)]^2}{g_{00}(t, r)} + g_{11}(t, r).$$

Para provarmos por completo o Teo. de Birkoff, nos falta ainda mostrar que $f(t, r)$ e $h(t, r)$, ao encontrarmos a solução de vácuo das Eqs. de Einstein, tornam-se funções somente de r . Resolveremos as Eqs. de Einstein para o elemento de linha (1.13) pelo método de Tetradas (veja apêndice B)

O método de tetradas se baseia em escrever a métrica em uma base ortonormal não coordenada de campos vetoriais, $(\hat{e}_\mu)^a$, que satisfazem

$$(\hat{e}_\mu)^a (\hat{e}_\nu)_a = \eta_{\mu\nu}, \quad (1.14)$$

onde $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$; $\hat{\mu}\hat{\nu} = 0, \dots, 3$ rotulando o vetor da base; e $a = 0, \dots, 3$ rotulando a componente do vetor $\hat{e}_\mu$. Os índices com acento circunflexo denotam índices de tetradas.

Uma base conveniente para a métrica (1.13), e que satisfaz a condição (1.14) seria²

$$\begin{aligned} (\hat{e}_0)^a (\hat{e}_0)_a &= -1 \\ g^{ab} (\hat{e}_0)_a (\hat{e}_0)_b &= -1 \\ g^{ab} f^{1/2} (dt)_a f^{1/2} (dt)_b &= -1 \\ g^{ab} f (dt)_a (dt)_b &= -1 \\ g^{00} f (dt)_0 (dt)_0 &= -1 \\ -f^{-1} f &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\widehat{e_0})_a &= f^{1/2} (dt)_a \\
 (\widehat{e_1})_a &= h^{1/2} (dr)_a \\
 (\widehat{e_2})_a &= r (d\theta)_a \\
 (\widehat{e_3})_a &= r \sin \theta (d\phi)_a
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Calculando $\partial_{\square a} (\widehat{e_{\widehat{\mu}}})_{b\square}$ para $\widehat{\mu} = 0, \dots, 3$, obtemos

$$\partial_{\square a} (\widehat{e_0})_{b\square} = \frac{1}{2} f^{-1/2} \frac{\partial f}{\partial r} (dr)_{\square a} (dt)_{b\square} \tag{1.16}$$

$$\partial_{\square a} (\widehat{e_1})_{b\square} = \frac{1}{2} h^{-1/2} \frac{\partial h}{\partial t} (dt)_{\square a} (dr)_{b\square}; \tag{1.17}$$

$$\partial_{\square a} (\widehat{e_2})_{b\square} = (dr)_{\square a} (d\theta)_{b\square}; \tag{1.18}$$

$$\partial_{\square a} (\widehat{e_3})_{b\square} = \sin \theta (dr)_{\square a} (d\phi)_{b\square} + r \cos \theta (d\theta)_{\square a} (d\phi)_{b\square}. \tag{1.19}$$

Mas, da definição de conexão 1-forma e da condição de livre torção, (veja apêndice B equações (B.4) e (B.17)) temos que

$$\partial_{\square a} (\widehat{e_{\widehat{\sigma}}})_{b\square} = \sum_{\widehat{\mu}, \widehat{\nu}} \eta^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}} (\widehat{e_{\widehat{\mu}}})_{\square a} \omega_{b\square \widehat{\sigma}\widehat{\nu}}. \tag{1.20}$$

Relembrando que $\omega_{a\widehat{\mu}\widehat{\nu}} = -\omega_{a\widehat{\nu}\widehat{\mu}}$ e que $\eta^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}$ é diagonal, notamos que os únicos termos não nulos, na (1.20), são aqueles com $\widehat{\mu} = \widehat{\nu}$.

As equações (1.16), (1.17), (1.18) e (1.19), foram obtidas derivando diretamente $(\widehat{e_{\widehat{\mu}}})^b$. Usaremos, agora, a equação (1.20) à fim de obtermos essas mesmas derivadas, as quais igualaremos aos seus respectivos resultados obtidos por derivação direta. Fazendo isto, resolveremos o sistema de equações encontrado, obtendo, então, os valores de $\omega_{a\widehat{\mu}\widehat{\nu}}$.

Assim, da (1.16)

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} f^{-1/2} \frac{\partial f}{\partial r} (dr)_{\square a} (dt)_{b\square} &= h^{1/2} (dr)_{\square a} \omega_{b\square \widehat{01}} + r (d\theta)_{\square a} \omega_{b\square \widehat{02}} \\
 &\quad + r \sin \theta (d\phi)_{\square a} \omega_{b\square \widehat{03}},
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

da (1.17)

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} h^{-1/2} \frac{\partial h}{\partial t} (dt)_{\square a} (dr)_{b\square} &= f^{1/2} (dt)_{\square a} \omega_{b\square \widehat{10}} + (d\theta)_{\square a} \omega_{b\square \widehat{12}} \\
 &\quad + r \sin \theta (d\phi)_{\square a} \omega_{b\square \widehat{13}},
 \end{aligned} \tag{1.22}$$

da (1.18)

$$(dr)_{\square a} (d\theta)_{b\square} = -f^{1/2} (dt)_{\square a} \omega_{b\square 20} + h^{1/2} (dr)_{\square a} \omega_{b\square 21} + r \sin \theta (d\phi)_{\square a} \omega_{b\square 23}, \quad (1.23)$$

e da (1.19)

$$\begin{aligned} \sin \theta (dr)_{\square a} (d\phi)_{b\square} + r \cos \theta (d\theta)_{\square a} (d\phi)_{b\square} = & -f^{1/2} (dt)_{\square a} \omega_{b\square 30} \\ & + h^{1/2} (dr)_{\square a} \omega_{b\square 31} \\ & + r (d\theta)_{\square a} \omega_{b\square 32}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Usando a equação (1.21), por associação termo a termo, concluímos que

$$\omega_{b02} = \omega_{b03} = 0,$$

e

$$\omega_{b01} = \frac{1}{2} \frac{f^{-1/2}}{h^{1/2}} \frac{\partial f}{\partial r} (dt)_b;$$

da equação (1.22)

$$\omega_{b12} = \omega_{b13} = 0,$$

e

$$\omega_{b01} = -\frac{1}{2} \frac{f^{-1/2}}{h^{1/2}} \frac{\partial h}{\partial t} (dr)_b;$$

da equação (1.23)

$$\omega_{b21} = h^{-1/2} (d\theta)_b,$$

e

$$\begin{aligned} \omega_{b23} &= 0, \\ \omega_{b20} &= 0; \end{aligned}$$

e finalmente, da equação (1.24)

$$\begin{aligned} \omega_{b31} &= h^{-1/2} \sin \theta (d\phi)_b, \\ \omega_{b32} &= \cos \theta (d\phi)_b, \end{aligned}$$

e

$$\omega_{b30} = 0.$$

Agrupando os valores para cada $\omega_{b\mu\nu}$ encontramos

$$\begin{aligned} \omega_{b02} &= \omega_{b03} = 0, \\ \omega_{b01} &= \frac{1}{2} (fh)^{1/2} \{f' (dt)_b - h (dr)_b\}, \\ \omega_{b21} &= h^{-1/2} (d\theta)_b, \\ \omega_{b31} &= h^{-1/2} \sin \theta (d\phi)_b, \\ \omega_{b32} &= \cos \theta (d\phi)_b. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Com esses dados, podemos calcular o tensor de Riemann que, como mostrado no apêndice B, equação (B.10), é dado por

$$R_{ab\widehat{\mu}\widehat{\nu}} = \nabla_a \omega_{b\widehat{\mu}\widehat{\nu}} - \nabla_b \omega_{a\widehat{\mu}\widehat{\nu}} - \sum_{\alpha, \beta} \eta^{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}} \{ \omega_{a\widehat{\beta}\widehat{\mu}} \omega_{b\widehat{\alpha}\widehat{\nu}} - \omega_{b\widehat{\beta}\widehat{\mu}} \omega_{a\widehat{\alpha}\widehat{\nu}} \}. \quad (1.26)$$

Então,

$$\begin{aligned} R_{ab\widehat{0}\widehat{1}} &= \nabla_a \omega_{b\widehat{0}\widehat{1}} - \nabla_b \omega_{a\widehat{0}\widehat{1}} - \eta^{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}} \{ \omega_{a\widehat{\beta}\widehat{0}} \omega_{b\widehat{\alpha}\widehat{1}} - \omega_{b\widehat{\beta}\widehat{0}} \omega_{a\widehat{\alpha}\widehat{1}} \} \\ &= \nabla_a \left[\frac{f'}{2} (fh)^{-1/2} (dt)_b \right] - \nabla_b \left[\frac{f'}{2} (fh)^{-1/2} (dt)_a \right] \\ &\quad - \nabla_a \left[\frac{\dot{h}}{2} (fh)^{-1/2} (dr)_b \right] + \nabla_b \left[\frac{\dot{h}}{2} (fh)^{-1/2} (dr)_a \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left[f' (fh)^{-1/2} \right] (dr)_{\square a} (dt)_{b\square} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\dot{h} (fh)^{-1/2} \right] (dr)_{\square a} (dt)_{b\square}, \end{aligned} \quad (1.27)$$

pois $\omega_{a\widehat{0}\widehat{0}} = \omega_{a\widehat{\alpha}\widehat{0}} = \omega_{a\widehat{\alpha}\widehat{1}} = 0$; e

$$R_{ab\widehat{0}\widehat{2}} = \frac{f'}{f^{1/2}h} (d\theta)_{\square a} (dt)_{b\square} - \frac{\dot{h}}{f^{1/2}h} (d\theta)_{\square a} (dr)_{b\square}, \quad (1.28)$$

$$R_{ab\widehat{0}\widehat{3}} = \frac{f' \sin \theta}{f^{1/2}h} (d\phi)_{\square a} (dt)_{b\square} - \frac{\dot{h} \sin \theta}{f^{1/2}h} (d\phi)_{\square a} (dr)_{b\square}, \quad (1.29)$$

$$R_{ab\widehat{1}\widehat{2}} = h^{-3/2} h' (dr)_{\square a} (d\theta)_{b\square}, \quad (1.30)$$

$$R_{ab\widehat{1}\widehat{3}} = h^{-3/2} h' \sin \theta (dr)_{\square a} (d\phi)_{b\square}, \quad (1.31)$$

$$R_{ab\widehat{2}\widehat{3}} = 2 (1 - h^{-1}) \sin \theta (d\theta)_{\square a} (d\phi)_{b\square}. \quad (1.32)$$

Pela equação (B.13) do apêndice B, o tensor de Ricci é dado por

$$\begin{aligned} R_{\widehat{\rho}\widehat{\mu}} &= \sum_{\widehat{\sigma}, \widehat{\nu}} \eta^{\widehat{\sigma}\widehat{\nu}} R_{\widehat{\rho}\widehat{\sigma}\widehat{\mu}\widehat{\nu}} \\ &= \sum_{\sigma, \nu} \eta^{\sigma\nu} R_{ab\widehat{\mu}\widehat{\nu}} \left(e_{\widehat{\rho}} \right)^a \left(e_{\widehat{\sigma}} \right)^b. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Então, usando os valores para $R_{ab\widehat{\mu}\widehat{\nu}}$ dados pelas equações (1.27) à (1.32) e os valores para $(e_{\widehat{\mu}})^a$ da (1.15), obteremos os seguintes resultados para $R_{\widehat{\rho}\widehat{\mu}}$

$$R_{00} = (fh)^{-1/2} \frac{d}{dr} \left[(fh)^{-1/2} f' \right] + 2 (rfh)^{-1} f' + (fh)^{-1/2} \frac{d}{dt} \left[(fh)^{-1/2} \dot{h} \right], \quad (1.34)$$

$$R_{11} = -\frac{1}{2} (fh)^{-1/2} \frac{d}{dr} \left[(fh)^{-1/2} f' \right] + (rh^2)^{-1} h' - (fh)^{-1/2} \frac{d}{dt} \left[(fh)^{-1/2} \dot{h} \right], \quad (1.35)$$

$$R_{22} = R_{33} = -\frac{1}{2}(rfh)^{-1}f' + \frac{1}{2}(rh^2)^{-1}h' + r^{-2}(1 - h^{-1}), \quad (1.36)$$

$$R_{10} = -\frac{2}{r(fh)^{1/2}h}\dot{h}. \quad (1.37)$$

Das Eqs. de Einstein

$$\begin{aligned} G_{ab} &= R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}, \\ &= 8\pi T_{ab}, \end{aligned} \quad (1.38)$$

para o vácuo $T_{ab} = 0$, então,

$$\begin{aligned} R_{ab} &= \frac{1}{2}Rg_{ab} \\ 2R_{ab} &= Rg_{ab} \\ 2R^{ab}g_{ab} &= R \\ 2R &= R \\ \Rightarrow R &= 0 \\ \Rightarrow R_{ab} &= 0. \end{aligned}$$

Mas

$$R_{\widehat{\mu\nu}} = R_{ab}(\widehat{e_\mu})^a(\widehat{e_\nu})^b,$$

portanto, se $R_{ab} = 0$, $R_{\widehat{\mu\nu}}$ também o será. Podemos, então, solucionar as Eqs. de Einstein para o vácuo por apenas igualar as equações (1.34), (1.35), (1.36) e (1.37) a zero.

Primeiramente, tomemos a equação (1.37), igualada a zero, da qual obtemos

$$\frac{\partial h}{\partial t} = 0, \quad (1.39)$$

a qual nos indica que h é função somente de r . Igualando a zero a equação (1.36) e simplificando-a, obtemos

$$-(rfh)^{-1}f' + (rh^2)^{-1}h' + 2r^{-2}(1 - h^{-1}) = 0.$$

Usando o fato de $\dot{h} = 0$, na equação (1.34) e (1.35), o último termo dessas equações anula, tal que quando igualadas a zero e adicionadas, obtemos

$$f'/f + h'/h = 0.$$

Essa equação diferencial tem como solução

$$f = \mathcal{K}(t)h^{-1}. \quad (1.40)$$

Substituindo o resultado encontrado acima, para f , na equação (1.36) obtemos que

$$-f' + r^{-1} (\mathcal{K}(t) - f) = 0,$$

a qual, tem uma solução do tipo

$$f = \mathcal{K}(t) + \frac{C \cdot \mathcal{J}(t)}{r}. \quad (1.41)$$

Sabemos, da equação (1.40), que f é uma função de t e r , mas h , pela (1.39), é somente função de r . Assim, de forma a compatibilizar o encontrado nas equações (1.40) e (1.41), devemos ter que $\mathcal{K}(t) = \mathcal{J}(t)$, tal que

$$f = \mathcal{K}(t) \left(1 + \frac{C}{r}\right)$$

e assim

$$h = \left(1 + \frac{C}{r}\right)^{-1}.$$

Encontrados $f(t, r)$ e $h(r)$ podemos retomar a métrica dada em (1.13) e substituir nela os valores encontrados, dessa forma

$$ds^2 = -(1 - C/r) \mathcal{K}(t) dt^2 + (1 - C/r)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin \theta d\phi^2).$$

Notemos que é possível redefinirmos nossa coordenada temporal através de uma transformação do tipo

$$t_* = \int \mathcal{K}(t)^{1/2} dt.$$

Com isso, encontramos a métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin \theta d\phi^2), \quad (1.42)$$

e finalmente finalizamos a prova do Teorema de Birkoff.

O fato de termos definido $C \equiv 2M$, se dá a estarmos tratando de um espaço-tempo assintoticamente plano, tornaremos isso claro mais adiante.

1.2 Solução de Reissner-Nordstrom

A solução de Reissner-Nordstrom é, como a de Schwarzschild, estática e esfericamente simétrica, contudo, não é de vácuo. A solução de Reissner-Nordstrom descreve o espaço-tempo externo a um corpo esfericamente simétrico, estático e carregado de carga elétrica, e .

Partiremos do elemento de linha dado em Schwarzschild, equação (1.13), mas exigindo estaticidade diretamente por excluir a dependência temporal em h e f . Temos então o elemento de linha

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + h(r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1.43)$$

Aqui, $T_{ab} \neq 0$ pois não há mais vácuo externo ao corpo e sim um campo eletromagnético gerado pelo corpo esfericamente simétrico e carregado. Dessa forma, T_{ab} é dado pela equação (1.9). Devemos obter as componentes de T_{ab} , para isso, primeiramente devemos encontrar F_{ab} que satisfaça a simetria esférica da distribuição de matéria. A forma mais geral de F_{ab} é

$$F_{ab} = X(e_0)_{\square a} (e_1)_{b\square} + Y(e_0)_{\square a} (e_2)_{b\square} + W(e_0)_{\square a} (e_3)_{b\square} + K(e_1)_{\square a} (e_2)_{b\square} + M(e_1)_{\square a} (e_3)_{b\square} + N(e_2)_{\square a} (e_3)_{b\square}. \quad (1.44)$$

F_{ab} é antissimétrico nos índices, $F_{ab} = -F_{ba}$, e combina campo elétrico e magnético, tal que, para um observador com 4-velocidade, v^a , a quantidade

$$E_a = F_{ab}v^b$$

é o campo elétrico medido pelo observador. Já

$$B_a = -\frac{1}{2}\epsilon_{ab}{}^{cd}F_{cd}v^b$$

é o campo magnético, onde ϵ_{abcd} é um tensor totalmente antissimétrico.

O campo elétrico medido por um observador seguindo um campo de Killing $\xi^a = (1, 0, 0, 0)$ é, então, dado por

$$\begin{aligned} E_a &= F_{ab}\xi^b \\ &= -F_{ba}\xi^b \\ &= X(e_0)_{\square 0} (e_1)_{a\square} + Y(e_0)_{\square 0} (e_2)_{a\square} + W(e_0)_{\square 0} (e_3)_{a\square} \end{aligned}$$

contudo, F_{ab} deve ser compatível com a simetria esférica do espaço-tempo, consequentemente, E_a e B_a devem respeitar a simetria esférica do espaço-tempo. Para que isso ocorra, o segundo e terceiro termos em θ e ϕ , devem ser nulos. Concluimos, então, que $Y = W = 0$. O campo elétrico será radial e dado por

$$E_r = X(e_0)_{\square 0} (e_1)_{r\square}. \quad (1.45)$$

O campo magnético medido pelo observador seguindo ξ^b será

$$B_a = -\frac{1}{2}\epsilon_{ab}{}^{cd}F_{cd}\xi^b,$$

onde $\epsilon_{abcd} = 0$ para índice repetidos, então,

$$\begin{aligned} B_a &= -\frac{1}{2}\epsilon_{a0}{}^{cd}F_{cd} \\ &= -\frac{1}{2}\left[K\epsilon_{a0}{}^{12}(e_1)_{\square 1}(e_2)_{2\square} + M\epsilon_{a0}{}^{13}(e_1)_{\square 1}(e_3)_{3\square} + N\epsilon_{a0}{}^{23}(e_2)_{\square 2}(e_3)_{3\square}\right]. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Na equação (1.46) os únicos valores não nulos para 'a' são

$$\begin{aligned} B_3 &= -\frac{1}{2}K\epsilon_{30}{}^{12}(e_1)_{\square 1}(e_2)_{2\square} \\ B_2 &= -\frac{1}{2}M\epsilon_{20}{}^{13}(e_1)_{\square 1}(e_3)_{3\square} \\ B_1 &= -\frac{1}{2}N\epsilon_{10}{}^{23}(e_2)_{\square 2}(e_3)_{3\square} \end{aligned}$$

Pelo mesmo motivo que, para o campo elétrico as direções θ e ϕ do campo deveriam ser nulas, aqui, para o campo magnético, o mesmo deve acontecer. Disso, temos que K e M devem ser nulos. A única componente de B_a não nula será

$$B_r = -\frac{1}{2} N \epsilon_{10}{}^{23} (e_2)_{\square 2} (e_3)_{3\square}. \quad (1.47)$$

Dessa forma, um F_{ab} geral satisfazendo a simetria esférica é

$$F_{ab} = 2A(r) (e_0)_{\square a} (e_1)_{b\square} + 2B(r) (e_2)_{\square a} (e_3)_{b\square}. \quad (1.48)$$

Precisamos agora encontrar os valores de $A(r)$ e $B(r)$, de forma a F_{ab} ser bem definido. Exigindo que $B(r)$ seja nulo, estaremos eliminando a componente do campo magnético. Isso será feito pois, fisicamente não estamos interessados em analisar o caso na presença de um monopolo magnético.

Encontraremos $A(r)$ usando que F_{ab} deve satisfazer as Eqs. de Maxwell livre de fontes, tal que

$$\nabla^a F_{ab} = 0, \quad (1.49)$$

mas

$$\nabla^a F_{ab} = g^{ca} \nabla_a F_{cb},$$

então,

$$g^{ca} \nabla_a F_{cb} = 0. \quad (1.50)$$

Substituindo a (1.48), com $B(r) = 0$, na (1.49), teremos

$$\begin{aligned} g^{ca} \nabla_a F_{cb} &= 2g^{ca} \{ \partial_a [A(r)] (e_0)_{\square c} (e_1)_{b\square} + A(r) \nabla_a [(e_0)_{\square c}] (e_1)_{b\square} \\ &\quad + A(r) (e_0)_{\square c} \nabla_{[a} (e_1)_{b\square}] \}. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Para calcularmos $\nabla_a (e_\nu)_c$, da equação (1.51), usaremos a equação (B.16) do apêndice B que nos mostra que

$$\nabla_a (e_\nu)_c = \eta^{\mu\xi} (e_\xi)_c \omega_{a\mu\nu}, \quad (1.52)$$

pela (1.51), precisamos dos valores da (1.52) para $\nu = 0, 1$. Então, teremos

$$\nabla_a (e_0)_c = (e_1)_c \omega_{a10}$$

e

$$\nabla_a (e_1)_b = -(e_0)_b \omega_{a01} + (e_2)_b \omega_{a21} + (e_3)_b \omega_{a31}.$$

Substituindo estes resultados na equação (1.51), assim como os valores de $(e_\mu)_a$ e $\omega_{a\mu\nu}$, dados nas eq.(1.15) e (1.25), lembrando que aqui, assumimos que h e f independem de t , obtemos, para os índices $c = a$, que

$$g^{ca} \nabla_a F_{cb} = 2g^{ca} [\partial_a (A(r)) (fh)^{1/2} (dt)_{\square c} (dr)_{b\square} \quad (1.53)$$

$$+ A(r) h^{-1/2} f^{1/2} r (dt)_{\square c} (d\theta)_{b\square} (d\theta)_a \quad (1.54)$$

$$+ A(r) h^{-1/2} f^{1/2} r \sin^2 \theta (dt)_{\square c} (d\phi)_{b\square} (d\phi)_a].$$

A fim de satisfazer a equação (1.49), igualaremos a equação (1.53) a zero, tal que, fazendo simplificações encontramos

$$\partial_r A(r) + 2 \frac{A(r)}{r} = 0,$$

onde a solução é

$$A = -er^{-2}, \quad (1.55)$$

para $e^k = e$, onde e é a carga elétrica. Esta escolha ficará fisicamente clara mais adiante. A equação (1.48) fica

$$F_{ab} = -\frac{2e}{r^2} (e_0)_{\square a} (e_1)_{b\square},$$

onde

$$\begin{aligned} \widetilde{F}_{01} &= -\frac{e}{r^2}, \\ \widetilde{F}_{10} &= \frac{e}{r^2}. \end{aligned} \quad (1.56)$$

A equação para T_{ab} , dada na (1.9), em bases tetradas é

$$T_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \widetilde{F}_{\widehat{\mu}\widehat{\lambda}} \widehat{F}_{\widehat{\nu}}^{\widehat{\lambda}} - \frac{1}{4} \eta_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}} \widetilde{F}_{\widehat{\lambda}\widehat{\xi}} \widehat{F}^{\widehat{\lambda}\widehat{\xi}} \right\}. \quad (1.57)$$

Substituindo os valores de $\widetilde{F}_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}$, dados na (1.56), encontramos os seguintes valores para os $T_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}$,

$$\begin{aligned} T_{\widehat{11}} &= -\frac{1}{8\pi} \frac{e^2}{r^4}, \\ T_{\widehat{00}} &= T_{\widehat{22}} = \frac{1}{8\pi} \frac{e^2}{r^4}. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Devemos, agora, resolver as Eqs. de Einstein para a métrica (1.43) com $T_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}$ dado por (1.58). Os valores para $R_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}$, no caso de Reissner-Nordstrom, são os mesmos de Schwarzschild, no entanto, aqui, como já assumimos que h e f independem de t , as derivadas parciais de f e h em relação a t são nulas, dessa forma

$$\begin{aligned} R_{\widehat{00}} &= (fh)^{-1/2} \frac{d}{dr} \left[(fh)^{-1/2} f' \right] + 2 (rfh)^{-1} f', \\ R_{\widehat{10}} &= 0, \\ R_{\widehat{11}} &= -\frac{1}{2} (fh)^{-1/2} \frac{d}{dr} \left[(fh)^{-1/2} f' \right] + (rh^2)^{-1} h', \\ R_{\widehat{22}} &= R_{\widehat{33}} = -\frac{1}{2} (rfh)^{-1} f' + \frac{1}{2} (rh^2)^{-1} h' + r^{-2} (1 - h^{-1}). \end{aligned} \quad (1.59)$$

Levantando os índices destes $R_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}$, tal que, $R_{\widehat{\mu}}^{\widehat{\nu}} = R_{\widehat{\mu}\widehat{\beta}} \eta^{\widehat{\beta}\widehat{\nu}}$, calculamos o escalar de curvatura R por

$$R = R_{\widehat{0}}^{\widehat{0}} + R_{\widehat{1}}^{\widehat{1}} + R_{\widehat{2}}^{\widehat{2}} + R_{\widehat{3}}^{\widehat{3}},$$

então,

$$R = -(fh)^{-1/2} \frac{d}{dr} [(fh)^{-1/2} f'] - 2[rfh]^{-1} f' + 2[rh^2]^{-1} h' + 2r^{-2} [1 - h^{-1}]. \quad (1.60)$$

Substituindo os valores obtidos nas (1.58), (1.59) e (1.60), nas Eqs. de Einstein, encontramos o seguinte sistema de equações

$$G_{00} = (rh^2)^{-1} h' + r^{-2} (1 - h^{-1}) = \frac{e^2}{r^4}, \quad (1.61)$$

$$G_{11} = (rfh)^{-1} f' - r^{-2} (1 - h^{-1}) = -\frac{e^2}{r^4}, \quad (1.62)$$

$$G_{22} = \frac{1}{2} (fh)^{-1/2} \frac{d}{dr} [(fh)^{-1/2} f'] + \frac{1}{2} (rfh)^{-1} f' - \frac{1}{2} (rh^2)^{-1} h' = \frac{2e^2}{r^4}. \quad (1.63)$$

Somando a equação (1.62) com a equação (1.61), encontramos a seguinte equação diferencial

$$\frac{h'}{h} + \frac{f'}{f} = 0,$$

a qual tem uma solução do tipo

$$f = h^{-1} e^c,$$

onde e^c é uma constante arbitrária que será eliminada redefinindo nossa coordenada temporal por $t' = \int e^{c/2} dt$. Dessa forma, já podemos considerar de início considerar, e^c unitária, tal que

$$h = f^{-1} \quad (1.64)$$

Substituindo esse resultado na (1.63), obtemos a equação diferencial

$$\frac{df'}{dr} + 2\frac{f'}{r} = \frac{2e^2}{r^4},$$

cujas solução é

$$f = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right),$$

então, como $h = f^{-1}$,

$$h = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)^{-1}.$$

Substituindo os valores de f e h na métrica (1.43), obtemos a solução de Reissner-Nordstrom

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (1.65)$$

a qual representa o espaço-tempo externo a um corpo esfericamente simétrico e estático, com massa M , e carregado eletricamente com carga e .

1.3 Solução de Kerr e de Kerr-Newman

A solução de Kerr e Kerr-Newman são encontradas resolvendo as Eqs. de Einstein para a métrica (1.8). A solução de Kerr é de vácuo equivalendo a solução de Schwarzschild, só que para uma geometria axissimétrica e estacionária representando um corpo em rotação. A métrica (1.8), para uma solução de vácuo, sofre algumas simplificações em sua forma devido ao Teo.1. Relembrando, a condição (i) do Teo.1 seria satisfeita se ξ^a ou ψ^a se anulassem em um ponto. No caso axissimétrico, ψ^a é nulo sobre o eixo de rotação do corpo, portanto a condição (i) é satisfeita. A condição (ii) é que $\xi^a R_a \lrcorner^b \xi^c \psi^d \lrcorner = \psi^a R_a \lrcorner^b \xi^c \psi^d \lrcorner = 0$, o que, no vácuo, é trivialmente satisfeito, já que $R_{ab} = 0$. Dessa forma, ρ e z da métrica (1.8), são definidos sobre uma superfície bi-dimensional ortogonal ao plano formado por ξ^a e ψ^a , e estendidos por todo espaço-tempo através das curvas integrais de ξ^a e ψ^a .

Calculando as componentes de R_{ab} , no plano formado por ξ^a e ψ^a , teremos que

$$R_t^t + R_\phi^\phi = (\nabla_a t) R_b^a \xi^b + (\nabla_a \phi) R_b^a \psi^b,$$

onde $R^a_b = g^{ac} R_{cb}$. Dessa forma, podemos expressar

$$R_t^t + R_\phi^\phi = g^{tt} R_{tt} + 2g^{t\phi} R_{t\phi} + g^{\phi\phi} R_{\phi\phi} = 0$$

o que produz [1]

$$D_a D^a \rho = 0 \quad (1.66)$$

onde D_a é a derivada covariante na superfície bi-dimensional formada por ρ e z .

Como consequência da expressão (1.66), se tivermos $\rho = \text{const}$, $\nabla_a \rho$ será nulo somente em alguns pontos isolados e nosso sistema de coordenadas quebrará nesses pontos. Em muitos casos é possível mostrar que $\nabla_a \rho \neq 0$ de forma que ρ e z são globalmente bem comportadas.

Abrindo a expressão (1.66) em termos da métrica bi-dimensional

$$ds^2 = U^2 (d\rho^2 + \Lambda dz^2),$$

obtemos

$$D^\nu D_\nu \rho = \frac{1}{2U^2 \Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} = 0, \quad (1.67)$$

onde os termos em $\frac{\partial \rho}{\partial z}$ são nulos. A equação (1.67), considerando que $U, \Lambda \neq 0$, implica em que Λ só depende de z . Portanto, se Λ é função somente de z , observando a métrica (1.8), notamos que é possível efetuarmos uma transformação na coordenada z , tal que $z = \int \Lambda^{1/2} dz'$. A métrica (1.8) é reescrita na forma

$$ds^2 = -V (dt - \omega d\phi)^2 + V^{-1} [\rho^2 d\phi^2 + e^{2\gamma} (d\rho^2 + dz^2)], \quad (1.68)$$

onde $\gamma = \frac{1}{2} \ln(VU^2)$.

Como no caso de Schwarzschild, a solução de Kerr é uma solução de vácuo. As Eqs. de Einstein, para o vácuo, se reduzem a $R_{ab} = 0$. A resolução deste sistema de equações

para a métrica (1.68) nos dá a solução de Kerr. Não estaremos interessados aqui, no desenvolvimento matemático desta solução, limitando-nos a apresentá-la. A solução de Kerr, em coordenadas esféricas, tem a forma

$$ds^2 = - \left(\frac{\Delta' - a^2 \sin^2 \theta}{\Xi'} \right) dt^2 + \frac{2a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta')}{\Xi'} dt d\phi \quad (1.69)$$

$$+ \left(\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta' a^2 \sin^2 \theta}{\Xi'} \right) \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\Xi'}{\Delta'} dr^2 + \Xi' d\theta^2,$$

com

$$\Xi' = r^2 + a^2 \cos^2 \theta,$$

e

$$\Delta' = r^2 + a^2 - 2Mr.$$

Newman obteve uma generalização da solução de Kerr, para o caso de um espaço-tempo axissimétrico, estacionário e na presença de um campo elétrico gerado por uma distribuição de matéria carregada com carga elétrica, e . A solução de Kerr-Newman, como é conhecida, é solução das Eqs. de Einstein para a métrica (1.8) com T_{ab} descrito pela (1.9) e dada por

$$ds^2 = - \left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Xi} \right) dt^2 + \frac{2a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\Xi} dt d\phi \quad (1.70)$$

$$+ \left(\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Xi} \right) \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\Xi}{\Delta} dr^2 + \Xi d\theta^2,$$

com

$$A_a = \left[-\frac{er}{\Xi} (dt)_a - a \sin^2 \theta (d\phi)_a \right],$$

onde

$$\Xi = r^2 + a^2 \cos^2 \theta,$$

$$\Delta = r^2 + a^2 + e^2 - 2Mr,$$

e é a carga elétrica, m a massa e $a = J/M$, tal que, J é o momento angular devido a rotação do corpo. Notemos que se fizermos $e = 0$ e $A_a = 0$ na (1.70), obteremos a solução de Kerr (1.69). Por outro lado, se mantivermos $e, m \neq 0$ e $a = 0$, a (1.70), resulta na solução de Reissner-Nordstrom (1.65), já se fizermos $m \neq 0$ mas $e = a = 0$, na (1.70), encontraremos a solução de Schwarzschild dada na (1.42).

Relembremos que, ao encontrarmos a solução de Schwarzschild, definimos uma constante de integração, C , como sendo proporcional a massa do corpo. Da mesma forma, fizemos na solução de Reissner-Nordstrom, quando, na (1.55), identificamos uma constante e^k como sendo a carga elétrica, e , e na solução de Kerr e Kerr-Newman ao se identificar uma constante com o momento angular J . Em todos esses casos, isso só foi possível devido a métrica (1.8) ser assintoticamente plana. Esse fato nos permitiu identificar, no infinito, nossas constantes com os valores bem conhecidos da teoria Newtoniana. Na próxima seção trataremos de interpretar fisicamente estes três parâmetros.

1.4 Massa, Carga elétrica e Momento angular

Começemos por interpretar a escolha da carga elétrica. As Eqs. de Maxwell em relatividade geral são escritas na forma

$$\nabla^a F_{ab} = -4\pi j_b \quad (1.71)$$

e

$$\nabla_{[a} F_{bc]} = 0. \quad (1.72)$$

No entanto, podemos escrevê-las na notação de formas diferenciais, tal que, sabendo que $F_{ab} = F_{[ab]}$, em notação de formas, teremos

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} F_{ab} dx^a \wedge dx^b,$$

tal que, aplicando o operador derivada exterior, o qual converte uma p -forma em uma $(p+1)$ -forma, d em $\mathbf{F}$, obtemos que

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{2} \nabla_c F_{ab} dx^c \wedge dx^a \wedge dx^b,$$

mas, pela (1.72), podemos escrever o primeiro par das Eqs. de Maxwell, livre de fonte, em notação de formas como segue

$$d\mathbf{F} = 0.$$

Já o segundo par das Eqs. de Maxwell pode ser obtido usando o dual de $\mathbf{F}$

$$*\mathbf{F} = \frac{1}{4} F^{ab} \epsilon_{abcd} dx^c \wedge dx^d,$$

o qual, aplicando o operador d

$$d*\mathbf{F} = \frac{1}{4} \epsilon_{abde} \nabla_c F^{ab} dx^c \wedge dx^d \wedge dx^e.$$

Escreveremos uma quantidade $*j$ como

$$*j = \frac{1}{3!} j^a \epsilon_{acde} dx^c \wedge dx^d \wedge dx^e.$$

Fazendo com que

$$d*\mathbf{F} = 4\pi *j,$$

obtemos, consequentemente, que

$$\frac{1}{4} \epsilon_{abde} \nabla_c F^{ab} = \frac{4\pi}{3!} j^a \epsilon_{acde}.$$

Essa equação, quando contraída com $\epsilon^{fcd e}$, em ambos os lados,

$$\frac{1}{4} \delta_{[a}^f \delta_{b]}^c \nabla_c F^{ab} = \pi j^a \delta_a^f,$$

da qual, obtemos

$$\nabla_c F^{[fc]} = 4\pi j^f,$$

esse é o segundo par das Eqs. de Maxwell.

Agora, de posse das Eqs. de Maxwell escritas em notação de formas, integraremos o segundo par,

$$d^*F = 4\pi^*j$$

sobre uma hipersuperfície tri-dimensional Σ , tal que,

$$\int_{\Sigma} d^*F = \int_{\Sigma} 4\pi^*j. \quad (1.73)$$

Aplicando o teorema de Stokes no lado esquerdo da (1.73), teremos que

$$\int_{\Sigma} d^*F = \int_{\partial\Sigma} {}^*F,$$

o que implica em

$$\int_{\partial\Sigma} {}^*F = \int_{\Sigma} 4\pi^*j, \quad (1.74)$$

onde $\partial\Sigma$ é a superfície bi-dimensional que limita o volume Σ . Contudo

$$\int_{\Sigma} 4\pi^*j = 4\pi \int_{\Sigma} j^a t_a d\Sigma,$$

onde em $\int_{\Sigma} j^a t_a d\Sigma$, j^a é o fluxo de corrente e t_a é o vetor normal a Σ . O lado direito nos dá a carga elétrica total encerrada no volume Σ . Assim,

$$\int_{\Sigma} 4\pi^*j = 4\pi e,$$

implicando pela (1.74) em

$$\int_{\partial\Sigma} {}^*F = 4\pi e. \quad (1.75)$$

A (1.75) pode ser escrita na forma

$$\int_{\partial\Sigma} F^{ab} t_a \eta_b \tilde{\epsilon}_{cd} = 4\pi e$$

onde usamos que $\epsilon_{abcd} = \frac{1}{4} t_{[a} \tilde{\epsilon}_{bcd]}$, $\frac{1}{3} \tilde{\epsilon}_{bcd} = \eta_{[b} \tilde{\epsilon}_{cd]}$ e η_b é normal a $\partial\Sigma$ e $\tilde{\epsilon}_{cd}$ é o elemento de volume em $\partial\Sigma$. Escrevemos, então,

$$\int_{\partial\Sigma} F^{ab} t_a \eta_b dA = 4\pi e. \quad (1.76)$$

Usando, agora, que $E^b = F^{ab} t_a$, na (1.76), teremos que

$$\int_{\partial\Sigma} E^b \eta_b dA = 4\pi e,$$

o que mostra que a lei de Gauss permanesse válida também em espaço-tempo curvo. Dessa forma podemos associar a constante encontrada na (1.55) com a carga elétrica.

A questão referente à massa é um pouco mais complicada, devido a estar relacionada com a definição de energia em Relatividade Geral. Observando as Eqs. de Einstein, podemos notar que seu lado esquerdo, G_{ab} , descreve unicamente as propriedades do espaço-tempo, já o lado direito representa as propriedades de energia da matéria. O problema, então é o fato das Eqs. de Einstein descreverem propriedades locais do espaço-tempo e matéria. Dessa forma, localmente teremos como expressar a densidade de energia de matéria do espaço-tempo, medida por um observador, nesse caso $\nabla^a T_{ab} = 0$ expressa uma lei de conservação local de energia.

Globalmente, em geral, isto não ocorre devido a ausência de uma noção de densidade de energia do campo gravitacional. No entanto, podemos usar a noção de energia total de um sistema isolado. Um sistema isolado em Relatividade Geral seria o análogo a uma partícula em Relatividade Especial. Assim, devemos determinar o 4- momento do sistema isolado, em um sistema de referência em repouso, e então definir a massa total do espaço-tempo assintoticamente plano examinando a influência do campo gravitacional em corpos distantes.

Na teoria Newtoniana o potencial ϕ satisfaz a Eq. de Laplace numa região de vácuo, tal que, $\vec{\nabla}^2 \phi = 0$. Pela fórmula da lei de Gauss

$$m = \frac{1}{4\pi} \int_s \vec{\nabla} \phi \cdot \widehat{N} dA, \quad (1.77)$$

onde s é a superfície bi-dimensional que encerra toda a fonte e $\widehat{N}$ é o vetor normal, saindo de s . Se $\vec{\nabla} \phi$ é a força que deve ser exercida em uma unidade de massa para deixá-la no lugar, da (1.77), $4\pi m$ é a força total exercida para que a matéria distribuída sob s permaneça no lugar.

Um espaço-tempo assintoticamente plano e estático nos oferece um sistema de referência em repouso dado pelo campo de Killing ξ^a . A noção de permanecer em repouso, então, é dada por seguir uma órbita ξ^a . ξ^a é normalizado de forma que o "fator de redshift" $V \equiv (-\xi_a \xi^a)^{1/2}$ é aproximadamente 1 para $r \rightarrow \infty$. A aceleração na órbita de ξ^a é dada por

$$\bar{a}^b = \left(\frac{\xi^a}{V} \right) \nabla_a \left(\frac{\xi^b}{V} \right) = \frac{1}{V^2} \xi^a \nabla_a \xi^b. \quad (1.78)$$

Por (1.78) a força local que deve ser exercida sobre uma unidade de massa, de forma a mantê-la no lugar é $\sqrt{a^b a_b}$. Agora, qual deverá ser a força que um observador localizado no infinito deve exercer, por meio de um corda, para manter a mesma unidade de massa em seu lugar, no outro extremo da corda?

Imaginemos que nossa unidade de massa é uma partícula de massa unitária, com 4-momento, satisfazendo a equação da geodésica, portanto, sua contração com o campo de Killing ξ^a , fica constante através da curva geodésica. A energia,

$$E = -m u_a \xi^a,$$

é, então, uma constante através da geodésica. A 4- velocidade, u_a , da partícula, no extremo oposto da corda, é igual a $\frac{\xi^a}{\sqrt{-\xi^b \xi_b}}$, então,

$$E = \frac{-m \xi^a \xi_a}{\sqrt{-\xi^b \xi_b}}.$$

No entanto,

$$dE = -\nabla_b E dx^b = -F_b dx^b$$

o que implica em

$$\begin{aligned} F_b &= -\nabla_b \frac{(\xi^a \xi_a)}{\sqrt{-\xi^c \xi_c}} \\ &= -\frac{1}{V} \nabla_b (\xi^a \xi_a) - \xi^a \xi_a \nabla_b \left(\frac{1}{V} \right) \\ &= -\frac{1}{2V} \nabla_b (\xi^a \xi_a) \\ &= -\frac{1}{V} \xi^a \nabla_b \xi_a \\ &= \frac{1}{V} \xi^a \nabla_a \xi_b \end{aligned} \tag{1.79}$$

Notemos que a (1.78) (observador junto à partícula) difere da (1.79) (observador no infinito) por um valor de V . Podemos interpretar a quantidade

$$F = \int_s N^b \frac{\xi^a}{V} \nabla_a \xi_b dA, \tag{1.80}$$

como a força total exercida pelo observador no infinito para segurar uma unidade de massa, onde N^b é vetor normal a s , sobre toda hipersuperfície s ortogonal a ξ^a . Devemos usar o fato de que a Eq. de Killing é antissimétrica, para mostrar que $\xi^a N^b$, na (1.80) também o é. E, assim, escreveremos a (1.80)

$$\begin{aligned} F &= \frac{2}{2} \int_s V^{-1} \xi^a N^b \nabla_a \xi_b dA \\ &= \frac{1}{2} \int_s N^{ab} \nabla_a \xi_b dA \end{aligned}$$

onde $N^{ab} = 2V^{-1} \xi^a N^b$, mas como

$$\frac{1}{4} \epsilon_{abcd} = -\frac{\xi^a \tilde{\epsilon}_{bcd}}{V}$$

e então,

$$\tilde{\epsilon}_{bcd} = \frac{\xi^a}{V} \epsilon_{abcd},$$

mas, $\tilde{\epsilon}_{cd} = N^b \tilde{\epsilon}_{bcd}$ e portanto,

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{cd} &= \frac{\xi^a}{V} N^b \epsilon_{abcd} \\ &= \frac{2}{2} V^{-1} \xi^a N^b \epsilon_{abcd} \\ &= \frac{1}{2} N^{ab} \epsilon_{abcd}. \end{aligned}$$

Podemos, então, escrever

$$\epsilon_{abcd} = -N_{\square ab} \tilde{\epsilon}_{cd \square},$$

e, assim,

$$\begin{aligned} F &= -\frac{1}{2} \int_s \epsilon_{abcd} \nabla^c \xi^d \\ &= -\int_s \alpha, \end{aligned}$$

onde α pode ser visto como uma 2-forma.

Podemos ver que o integrando satisfaz que

$$\begin{aligned} \epsilon^{efab} \nabla_f [\epsilon_{abcd} \nabla^c \xi^d] &= \epsilon^{efab} \epsilon_{abcd} \nabla_f \nabla^c \xi^d \\ &= -4 \delta^{\square e}{}_{\square c} \delta^f{}_{\square d} \nabla_f \nabla^c \xi^d \\ &= -4 \nabla_f \nabla^{\square e} \xi^f{}_{\square} \\ &= 4 \nabla_f \nabla^f \xi^e \\ &= -4 R^e{}_f \xi^f, \end{aligned}$$

o qual, quando contraído com ϵ_{elmn} nós dá

$$\begin{aligned} \epsilon^{efab} \epsilon_{elmn} \nabla_f [\epsilon_{abcd} \nabla^c \xi^d] &= -4 R^e{}_f \xi^f \epsilon_{elmn} \\ -3! \delta^{\square f}{}_{\square l} \delta^a{}_{\square m} \delta^b{}_{\square n} \nabla_f [\epsilon_{abcd} \nabla^c \xi^d] &= -4 R^e{}_f \xi^f \epsilon_{elmn} \\ \frac{2.3}{4} \nabla_{\square l} [\epsilon_{mn \square cd} \nabla^c \xi^d] &= R^e{}_f \xi^f \epsilon_{elmn} \\ \nabla_{\square l} [\epsilon_{mn \square cd} \nabla^c \xi^d] &= \frac{2}{3} R^e{}_f \xi^f \epsilon_{elmn}. \end{aligned}$$

Na região de vácuo temos que $R_{ab} = 0$, portanto se escrevemos $\alpha_{ab} = \epsilon_{abcd} \nabla^c \xi^d$ teremos que

$$d\alpha = 0.$$

Aplicando o teorema de Stokes ao volume limitado pelas 2-esferas S e S' , na região de vácuo teremos que $-\frac{1}{2} \int_s \epsilon_{abcd} \nabla^c \xi^d$, independente de S da mesma forma que (1.77). Associando, então, as duas equações, definimos naturalmente

$$m = \frac{-1}{8\pi} \int \epsilon_{abcd} \nabla^c \xi^d, \quad (1.81)$$

para a massa total de um espaço-tempo assintoticamente plano, estático e de vácuo na região exterior. Contudo, a independência em S se dá devido à ξ^a ser campo de Killing, com isso, podemos dizer que a definição acima vale também para o caso estacionário assintoticamente chato mas com vácuo somente no infinito.

Da mesma forma que fizemos para a massa e carga elétrica, encontramos que

$$J = ma = \int_s \frac{1}{16\pi} \epsilon_{abcd} \nabla^c \psi^d$$

para o momento angular total.

Capítulo 2

Métrica de Kerr-Newman

No capítulo anterior, encontramos quatro soluções das Eqs. de Einstein para um espaço-tempo assintoticamente plano, axissimétrico e estacionário. Mostramos que, particularizando o elemento de linha geral (1.8), encontramos três soluções para as Eqs. de Einstein, além daquela derivada diretamente da (1.8) para um campo elétrico dada por Newman. Vimos também que, como era de se esperar, a solução de Kerr-Newman é a solução mais geral para uma métrica assintoticamente plana, axissimétrica e estacionária. Dela, podemos extrair as três outras soluções por impor condições sob os três parâmetros, M, e, J que a caracterizam. No entanto, desprezaremos a carga elétrica, e , presente na solução de Kerr-Newman e na de Reissner-Nordstrom, já que um corpo com razão carga elétrica-massa muito grande, atrairá partículas de carga oposta, neutralizando-se. Analizaremos, então, a solução de vácuo dada por Kerr

$$ds^2 = - \left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Xi} \right) dt^2 + \frac{2a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\Xi} dt d\phi \quad (2.1)$$
$$+ \left(\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Xi} \right) \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\Xi}{\Delta} dr^2 + \Xi d\theta^2,$$

onde

$$\Xi = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$$

e

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr.$$

Primeiramente, tomemos o caso onde $a = 0$, o qual, para $M \neq 0$, recai na solução de Schwarzschild

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.2)$$

A solução de Schwarzschild apresenta dois pontos nos quais as componentes da métrica têm um comportamento singular. Em $r = 2M$, temos um desses pontos, tal que

$$g_{tt} = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \rightarrow 0$$

e

$$g_{rr} = \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \rightarrow \infty.$$

A superfície $r = 2M$ é uma superfície de infinito redshift. Um observador em repouso próximo a essa superfície tem seu tempo próprio,

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} dt,$$

aproximando de zero à medida que $r \rightarrow 2M$. Isso implica que um observador “sente” o tempo passar infinitamente mais lento que um observador no infinito.

Outra característica dessa superfície pode ser notada ao observarmos que de $r = 2M$ até $r = 0$, g_{tt} fica positivo, tipo espaço, e g_{rr} fica negativo, tipo tempo. A coordenada r , agora, representa a coordenada temporal, e portanto, as componentes da métrica variarão com o tempo. Um observador ao atravessar a superfície $r = 2M$ não poderá permanecer mais em repouso. Essa superfície também será chamada limite estático.

Há outro ponto singular em $r = 0$, nesse ponto tanto g_{rr} e g_{tt} são singulares. Na próxima seção estudaremos estes dois pontos divergentes.

2.1 Extensão de Kruskal

Vimos que, na métrica de Schwarzschild, existem dois pontos divergentes, em $r = 2M$ e em $r = 0$. A primeira vista podemos pensar que o espaço-tempo possui duas singularidades, contudo, isso nem sempre é verdade. A dificuldade já se inicia em definir uma singularidade no espaço-tempo. Em Relatividade Geral, uma singularidade tem um enfoque diferente daquele dado em outras teorias físicas, pois nelas, a variedade e a estrutura da métrica são bem definidas em todos os pontos e o que é necessário determinar é o valor das quantidades físicas nestes pontos. Nestes casos é fácil interpretar o fato de quantidades terem valores infinitos ou indefinidos. O que ocorre em Relatividade Geral são singularidades na própria estrutura do espaço-tempo sobre o qual definiremos nossas quantidades físicas. Dessa forma, não poderemos nem mesmo considerar a singularidade como um “lugar” já que a variedade não apresenta estrutura naquele ponto.

De que forma, então, definiremos uma singularidade? Uma definição baseada nas componentes coordenadas da métrica poderia ser usada, no entanto, transformações de coordenadas alteram o valor de tais componentes, “mascarando” a estrutura do espaço-tempo. Outra forma, é observar se a curvatura “explode” nas singularidades. O problema é que o tensor de campo $R_{abc}{}^d$, que descreve a curvatura, pode também divergir devido a um mau comportamento de suas componentes, causado, por sua vez, por um mau comportamento da base coordenada ou tetrad. Esse problema pode ser contornado analisando os escalares de curvatura, R , $R_{ab}R^{ab}$, $R_{abcd}R^{abcd}$. Um desses escalares de curvatura divergindo em um ponto significa que esse ponto é realmente singular. Por outro lado mesmo quando um escalar é finito, isso não significa que o espaço-tempo não será singular.

Assim, a divergência de um escalar de curvatura em um ponto nos garante uma singularidade física, no entanto, não há certezas quando o escalar é finito em um ponto. Podemos resolver esse problema analisando geodésicas no espaço-tempo. Curvas geodésicas cobrem todo o espaço-tempo, com exceção de pontos verdadeiramente singulares, nos quais as geodésicas simplesmente terminam, ou seja, a variação da curva geodésica, com relação a um parâmetro afim que a caracteriza, é infinita. Estas geodésicas são chamadas geodésicas

incompletas. Podemos definir um espaço-tempo singular sempre que possuir geodésicas incompletas. Além disso, devemos analisar os escalares de curvatura e observar se divergem ao longo da geodésica. Caso isso não ocorra devemos observar o próprio tensor de curvatura se ele diverge. Não havendo divergências no escalar de curvatura, nem em componentes do tensor de curvatura, possuímos uma boa indicação da inexistência de uma singularidade. Resta-nos, então, tentarmos estender o sistema de coordenadas a esses pontos, usando as geodésicas.

Vimos que na métrica de Schwarzschild existem dois candidatos a singularidades. Analisaremos ambos paralelamente. O escalar de curvatura para Schwarzschild tem o valor

$$R = \frac{8M^2 - 4Mr}{r^4 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)} + \frac{4M}{r^3},$$

o qual, no limite $r \rightarrow 2M$, anula, já em $r \rightarrow 0$, R diverge. Contudo, como vimos, o fato de R anular em $r \rightarrow 2M$, não nos garante a existência de uma singularidade, portanto, devemos analisar a possibilidade de não estarmos em um bom sistema de coordenadas, o qual gera uma singularidade não física. Analisemos, então, a equação da geodésica.

Devemos observar se em $r = 2M$, a curva geodésica “termina” para valores finitos do deslocamento próprio de um observador. Escreveremos a equação da geodésica (em uma base coordenada) como

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0,$$

a qual, para as coordenadas¹ r e t tem a forma

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{2M}{r(r-2M)} \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} = 0 \quad (2.3)$$

e

$$\frac{d^2 r}{ds^2} - \frac{M}{r(r-2M)} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + \frac{M}{r^3} (r-2M) \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0. \quad (2.4)$$

Da métrica de Schwarzschild temos, com θ e ϕ constantes, que

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = 1. \quad (2.5)$$

Resolvendo o sistema de equações formado por (2.3), (2.4) e (2.5) para r , obtemos

$$\frac{d^2 r}{ds^2} - \frac{M}{r^2} = 0,$$

a qual, tem como solução

$$\frac{s}{2M} = -\frac{2}{3} \left(\frac{r}{2M}\right)^{\frac{3}{2}} + \text{const.}$$

Podemos notar que para $r = 2M$ o deslocamento próprio é finito e não nulo, portanto, um observador seguindo uma geodésica a princípio, poderia passar por $r = 2M$ sem que nada

¹As coordenadas θ e ϕ são feitas constantes, o que é possível devido a simetria esférica.

lhe acontecesse, contudo isso ainda não é conclusivo. Esse fato, somado ao fato do escalar de curvatura, R , não divergir em $r = 2M$, nos faz crer que realmente o espaço-tempo é extensível através de $r = 2M$. Já para $r = 0$, podemos notar que a curva geodésica anula, terminando em $r = 0$ para um deslocamento próprio finito. Tentaremos, então, estender o sistema de coordenadas através de $r = 2M$, comprovando que esse ponto não apresenta uma singularidade física e que mesmo num sistema de coordenadas intimamente ligado a estrutura do espaço-tempo, o ponto $r = 0$ permanece singular. Isso só vem a confirmar o que já sabíamos devido a divergência de R , que em $r = 0$ temos uma singularidade física.

Introduziremos uma família de geodésicas e usaremos um parâmetro afim ao longo delas como coordenadas. Em particular, no caso de Schwarzschild, devido à simetria esférica, para analisarmos a região de $r = 2M$ é suficiente tomar a parte bi-dimensional formada por r e t . Em duas dimensões, podemos garantir que tal método é eficiente para estender as coordenadas de Schwarzschild para $r = 2M$. As geodésicas nulas se dividem em duas classes “ingoing” e “outgoing”. Suas tangentes são tais que não se sobrepõem em nem ao menos um ponto. Uma de nossas coordenadas será constante ao longo de cada geodésica “ingoing” e outra constante ao longo de cada geodésica “outgoing”, formando uma grade de geodésicas nulas cobrindo o espaço-tempo. As únicas possíveis singularidades resultantes do uso de coordenadas nulas, são eliminadas por uma reparametrização afim.

Tomemos a parte bi-dimensional da métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2.$$

Da condição para geodésica nula

$$0 = g_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2,$$

onde $\dot{t} = \frac{dt}{d\tau}$ e $\dot{r} = \frac{dr}{d\tau}$, teremos

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2,$$

e, assim,

$$dt = \pm \frac{r}{r - 2M} dr.$$

Ao integrarmos a equação acima para dt , obtemos

$$t = \pm r_* + \text{const}$$

com

$$r_* = r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right).$$

As coordenadas nulas serão, então, definidas por

$$\begin{aligned} u &= t - r_*, \\ v &= t + r_*, \end{aligned}$$

e dessa forma, diferenciando

$$\begin{aligned} du &= dt - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr, \\ dv &= dt + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr, \end{aligned}$$

consequentemente

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dudv. \quad (2.6)$$

Usando as definições de u e v , eliminamos t e relacionamos r com as novas coordenadas, tal que,

$$e^{\frac{r}{2M}} \left(\frac{r}{2M} - 1 \right) = e^{(v-u)/4M}.$$

Substituindo este valor na nova métrica (2.6), obtemos

$$ds^2 = - \frac{2M}{r} e^{-\frac{r}{2M}} e^{\frac{(v-u)}{4M}} dudv. \quad (2.7)$$

Notemos que, para $r = 2M$, a singularidade permanece, pois $v \rightarrow -\infty$ e $u \rightarrow \infty$ neste ponto. Mas como dissemos, uma reparametrização deve resolver. Devemos redefinir as coordenadas como

$$\begin{aligned} U(u) &= -e^{\frac{-u}{4M}} \\ V(v) &= e^{\frac{v}{4M}}, \end{aligned}$$

tal que, em $r \rightarrow 2M$, $U \rightarrow 0$, eliminando a singularidade, dessa forma,

$$ds^2 = - \frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}} dU dV. \quad (2.8)$$

Observemos que o termo $-\frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}}$ não diverge em $r = 2M$, mas que, no entanto, em $r = 0$ a divergência continua existindo, como era de se esperar. Fazendo uma última transformação de coordenadas, tal que

$$T = \frac{(U + V)}{2}$$

e

$$X = \frac{(V - U)}{2},$$

obteremos

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}} (-dT^2 + dX^2). \quad (2.9)$$

A relação entre nossas coordenadas originais r e t e estas últimas X e T é

$$\left(\frac{r}{2M} - 1 \right) e^{\frac{r}{2M}} = X^2 - T^2 \quad (2.10)$$

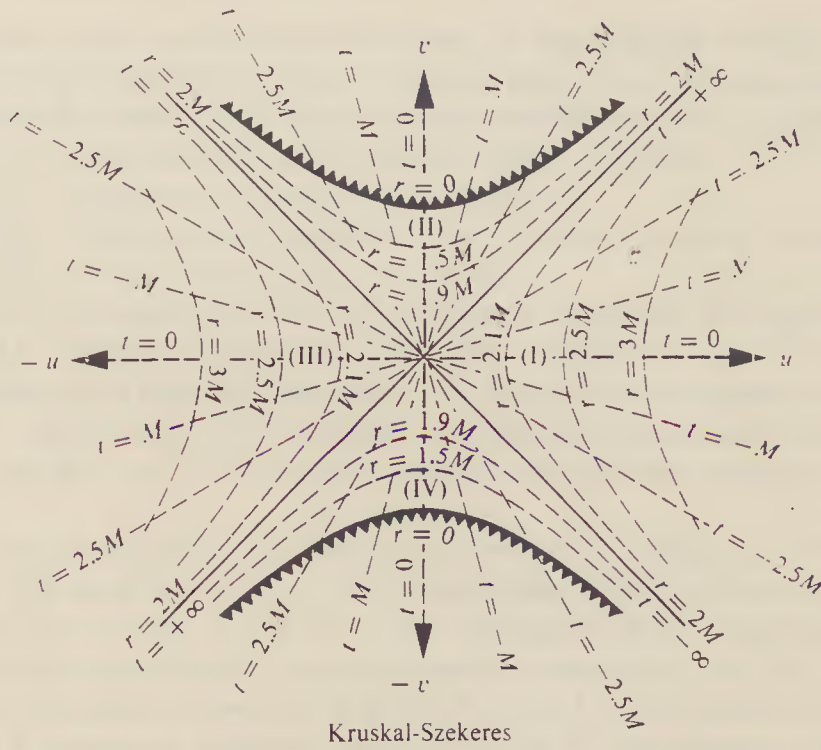


Figura 2.1: Extensão de Kruskal, extraído de [3], onde em nossa notação $X = u$ e $T = v$

e

$$\frac{t}{2M} = \ln \left(\frac{T + X}{X - T} \right) = 2 \tanh^{-1} \left(\frac{T}{X} \right) \quad (2.11)$$

Ao plotarmos o gráfico $T \times X$ para valores de r e t , teremos uma visão bastante clara da geometria do espaço-tempo de Schwarzschild geodesicamente completo.

Pela equação (2.10) notamos que a cada $r = \text{const}$ obtemos uma hipérbole na Figura 2.1, com assintota em $X = \pm T$, para $r = 2M$. A cada $t = \text{const}$ obteremos linhas retas, as quais passam através da origem. A superfície $r = 2M$, que equivale a $X = \pm T$, divide o espaço-tempo em quatro regiões. As duas regiões acima de $X = -T$ apresentam uma região assintoticamente plana, região I, e uma região que encerra a singularidade, região II, em $r = 0$. As duas regiões são separadas por uma superfície de $r = 2M$. Observemos, na Figura 2.1, que, na superfície $r = 2M$, se um observador sobre ela emitir um sinal de luz, o cone de luz gerado por este evento nos mostrará que nem mesmo a luz poderá escapar da singularidade em $r = 0$. Isso ocorre porque toda região futura do cone de luz, para um evento ocorrido sobre $r = 2M$ ou em regiões de $r < 2M$, estarão na região II. A superfície $r = 2M$ forma 45° com relação a X e T . Um raio de luz percorre a superfície nula do cone de luz, o qual também forma 45° com a horizontal. Não havendo, dessa forma, como escapar dessa região. Devido a superfície $r = 2M$ ser, tal que, uma vez atravessada não há como retornar, a chamaremos de “horizonte de eventos”. Esse horizonte de eventos envolve toda a singularidade $r = 0$, isso caracteriza um buraco negro.

As duas outras regiões, abaixo de $X = -T$, tem comportamento equivalente aos descritos acima, no entanto, com tempo reverso. Uma partícula sairia da singularidade,

caindo em outra região assintoticamente plana. A singularidade envolvida pela superfície $r = 2M$, nesse caso chamaremos buraco branco. Em resumo, em coordenadas de Kruskal o espaço-tempo de Schwarzschild geodesicamente completo dado na Figura 2.1, apresenta:

- Região I : região assintoticamente plana, “nosso” universo.
- Região II : buraco negro, região de não escape.
- Região III : região assintoticamente plana , universo “paralelo ao nosso”.
- Região IV : buraco branco, região de saída.

Dessa forma, a trajetória de uma partícula seria a seguinte: Na região I, na direção de r decrescente e t crescente, a partícula passa pela superfície $r = 2M$, entra na região II e inevitavelmente cai na singularidade em $r = 0$. As partículas reaparecem, ou são criadas, na região IV , saindo de $r = 0$ na direção de t crescente, passa por $r = 2M$ novamente, entrando na região I ou III e, portanto, em um novo universo também assintoticamente plano.

Devemos analisar, agora, o que ocorre no interior da superfície $r = 2M$. Como vimos, na métrica de Schwarzschild, em $r < 2M$ a métrica não é mais estática já que a coordenada radial torna-se tipo tempo. A métrica, então, dependerá de uma coordenada tipo tempo. Examinaremos, primeiramente, a parte espacial da geometria para um dado tempo fixo. Usaremos as coordenadas espaciais r e ϕ com $\theta = \pi/2$ (o que é possível já que a simetria esférica deixa a geometria invariante por rotações em θ). Esse espaço bi-dimensional será mergulhado em um espaço 3-dimensional, de coordenadas r, ϕ e z . A coordenada z é artificial, usada para facilitar a visualização. Mostraremos esse gráfico para o caso em que $T = 0$, coincidindo com $t = 0$. Em geral (como podemos ver pela Figura 2.1) as curvas $t = \text{const}$ e as $T = \text{const}$ não coincidem , o que dificulta determinarmos a escolha de curvas com parte temporal constante.

A métrica de Schwarzschild, para $t = \text{const}$ e $\theta = \pi/2$ fica

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2.$$

Essa métrica será mergulhada em um elemento de linha 3-dimensional Euclidiano na forma

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2;$$

onde z será função de r . Assim, escrevendo $z = z(r)$ e $dz = \left(\frac{dz}{dr}\right) dr$, teremos

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right] dr^2 + r^2 d\phi^2.$$

Identificando essa métrica com a de Schwarzschild, obtemos

$$1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1},$$

tal que

$$dz = \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} - 1\right]^{1/2} dr,$$

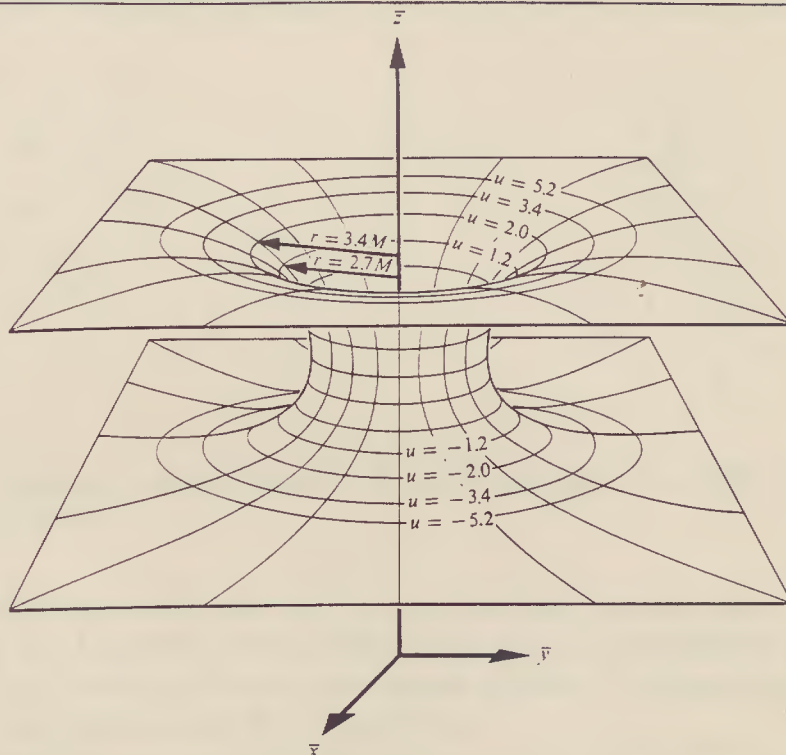


Figura 2.2: Parabolóide de revolução, extraído de [3]

quando integrada de 0 a r produz

$$z(r) = [8M(r - 2M)]^{1/2}.$$

A superfície mergulhada no espaço Euclidiano é descrita por um parabolóide de revolução, a qual é representada na Figura 2.2.

Observemos que para $T = 0$, a hipersuperfície tipo espaço se estende de $X = \infty$ ($r = \infty$), através de $X = 0$ ($r = 2M$) para $X = -\infty$ ($r = \infty$). A geometria desta hipersuperfície consiste de um “túnel” ligando dois universos assintoticamente planos, ligados por $r = 2M$. A evolução temporal pode ser observada por uma sequência destes diagramas. Mostraremos, aqui, uma sequência de diagramas obtidos por tomarmos valores constantes de T escolhidos arbitrariamente. A escolha dessas hipersuperfícies são também arbitrárias, no entanto, a geometria da evolução temporal dependerá dessa escolha. Qualitativamente, contudo, a natureza da evolução é a mesma.

Em valores de $T = 0$ a geometria apresenta um túnel, ao passo que em $1 > T > 0$ e $0 > T > -1$ o raio do túnel, que era $2M$, passa a diminuir até que para $T = -1$ e $T = 1$ o túnel se fecha completamente (em $r = 0$) desconectando os dois universos.

2.2 Métrica de Kerr

A métrica de Kerr (2.1) apresenta complicações maiores na sua análise, com relação àquelas encontradas em Schwarzschild. Isso pode ser visto, superficialmente, por notar que o termo g_{01} na métrica não anula. Veremos, adiante, as consequências desse fato para a geometria do espaço-tempo.



Figura 2.3: Diagramas representando a dinâmica na região $r < 2M$. Extraído de [3], na ordem A-B-C-D-E-F-G

A métrica (2.1) apresenta dois valores, nos quais ela, aparentemente, se torna singular. $\Sigma = 0$ e $\Delta = 0$. A análise das singularidades, aqui, é basicamente a mesma feita em Schwarzschild no entanto, a faremos em menos detalhes. Concentrar-nos-emos mais nas consequências das propriedades do espaço-tempo.

Uma singularidade em $\Sigma = 0$, implica em

$$r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0,$$

mas, a única solução real para esta equação ocorre quando $\theta = \pi/2$ e $r = 0$. Caso, agora, calculássemos o escalar de curvatura, R , para métrica de Kerr, veríamos que nesses valores de θ e r , R diverge, portanto, temos uma singularidade física em $\Sigma = 0$. Podemos observar, na solução de Kerr em (2.1), que a derivada da componente g_{00} em relação a r , em $r = 0$ não é nula

$$\frac{\partial g_{00}}{\partial r} = +2M. \quad (2.12)$$

No entanto, escrevendo g_{00} em termos de $z = r \cos \theta$, de forma que, θ varie de 0 à π , onde na direção de $\theta = 0$, temos a direção positiva de z , a (2.12) implica em que $\frac{\partial g_{00}}{\partial z}$ em $z = 0$ dependerá de como $\frac{\partial g_{00}}{\partial z}$ se aproxima de $z = 0$. Aproximando-se de $z = 0$ por $z > 0$ implica em $\frac{\partial g_{00}}{\partial z} > 0$ e por $z < 0$, $\frac{\partial g_{00}}{\partial z} < 0$. Há, portanto, uma descontinuidade em $\frac{\partial g_{00}}{\partial z}$, em $z = 0$, a segunda derivada $\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial z^2}$ também diverge em $z = 0$. O mesmo comportamento é notado em outras componentes da métrica, exceto na g_{22} . Em consequência disso, como o tensor de curvatura envolve segundas derivadas, concluímos que há uma singularidade em $r = 0$. Chamaremos esta singularidade de uma singularidade física, já que, não é possível eliminá-la por meio de uma extensão de coordenadas tipo Kruskal em Schwarzschild.

Nas coordenadas da (2.1), a singularidade em $\Sigma = 0$, representa um disco. Em coordenadas retangulares dadas por[2]

$$\begin{aligned} x &= (r^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} \sin \theta \cos [\phi - f(r)], \\ y &= (r^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} \sin \theta \sin [\phi - f(r)], \\ z &= r \cos \theta, \end{aligned}$$

onde

$$f(r) \equiv a \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2 - 2Mr + a^2} + \tan^{-1} \frac{a}{r},$$

a singularidade é representada por um anel. Como podemos ver, nestas coordenadas $r = 0$ corresponde á $x^2 + y^2 = a^2 \sin^2 \theta$ e $z = 0$. Para θ variando de 0 á $\pi/2$, teremos $x^2 + y^2 \leq a^2$ e $z = 0$, tal que sua borda, $x^2 + y^2 = a^2$, em $r = 0$ e $\theta = \pi/2$ é, portanto, uma singularidade em forma de aro (Veja Figura 2.4).

O outro valor singular, $\Delta = 0$, implica em

$$r^2 + a^2 - 2Mr = 0,$$

onde encontramos dois valores para r que anulam Δ ,

$$r_{\pm} = M \pm (M^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.13)$$

Note que a equação $\Delta = 0$ não apresentará solução real se $M^2 < a^2$. Imaginemos que admitíssemos uma solução imaginária para $\Delta = 0$. Nesse caso singularidade em $\Sigma = 0$ será chamada de singularidade nua. A presença de uma singularidade nua, em um espaço-tempo não dará origem a um buraco negro, já que esse se caracteriza pela presença de um horizonte de eventos. Devido a essas dificuldades R. Penrose formulou o que chamou de “Princípio do Censor Cósmico” em 1979, onde “proíbe” a existência de singularidades nuas. Aqui, enunciaremos o “Princípio Censor Cósmico” como [1].

“Todo, fisicamente razoável, espaço-tempo será globalmente hiperbólico, isto é, com excessão de uma possível singularidade inicial, (tal como o “big bang”) não deverá haver singularidades “visíveis” a qualquer observador.” Assim, consideraremos impossível soluções não reais para $\Delta = 0$.

Esses valores de $r = r_{\pm}$ são singularidades de natureza diferente da encontrada para $\Sigma = 0$, pois para esses valores $R_{\mu\nu}$ não diverge. Uma extensão similar a de Kruskal, em Schwarzschild, nos mostra que a singularidade em $\Delta = 0$ representa uma má escolha do sistema de coordenadas. Essas superfícies apresentam as mesmas características apresentadas pela superfície $r = 2M$, em Schwarzschild. Ambas são superfícies tipo luz, causando uma inversão nas coordenadas, ou seja, a coordenada r , tipo espaço, torna-se tipo tempo. Isso ocorrerá entre r_+ e r_- , região a qual apresenta $g_{rr} < 0$. Como em Schwarzschild, chamaremos cada uma dessas superfícies de horizonte de eventos.

Em Schwarzschild, o horizonte de eventos e a superfície de desvio infinito ocorriam no mesmo lugar, $r = 2M$. Em Kerr, no entanto, isso não ocorre. O fato de existir uma superfície de desvio infinito, $\xi^a \xi_a = 0$, é totalmente desconectado da existência do horizonte em $\Delta = 0$. Verifiquemos, então, a superfície de desvio infinito

$$\xi^a \xi_a = g_{tt} = 0$$

a qual, implica em

$$r_{1,2} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}.$$

A Figura 2.4, nos mostra claramente a localização dessas superfícies no espaço-tempo de Kerr. Na parte mais externa se encontra a superfície de desvio infinito, $r = r_1$, seguida

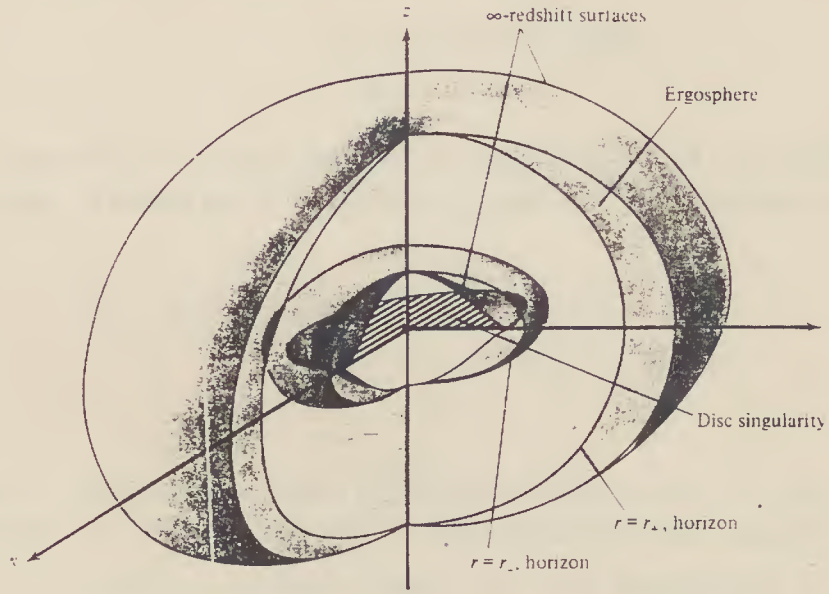


Figura 2.4: Buraco negro de Kerr, extraído de [2]

pelo horizonte de eventos em $r = r_+$, o horizonte em $r = r_-$ e novamente a superfície de desvio infinito $r = r_2$, e finalmente no interior de todas essas superfícies, a singularidade em $r = 0$.

A região compreendida entre r_1 e r_+ é chamada ergosfera. A ergosfera apresenta características muito interessantes. Nessa região o campo de Killing, $\xi^a = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$, tipo tempo, torna-se tipo espaço. Um observador nessa região teria que ter uma velocidade maior que a da luz para seguir uma órbita de ξ^a , dessa forma, não haverá como um observador permanecer estacionário nessa região. Um observador deve sempre satisfazer a equação

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu < 0. \quad (2.14)$$

Tomando as componentes desta equação de acordo com a métrica em (2.1), obtemos

$$\begin{aligned} 0 > & -\left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) \dot{t}^2 - \frac{2a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\Sigma} \dot{\phi} \dot{t} \\ & + \left(\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \\ & + \frac{\Sigma}{\Delta} \dot{r}^2 + \Sigma \dot{\theta}^2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Devemos observar, na desigualdade acima, sob quais condições ela é satisfeita. Tomemos, primeiramente, os valores de Σ e Δ e analisemos se são positivos ou negativos. O valor de

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$$

é notoriamente positivo. Δ também é positivo, já que $a^2 \leq M^2$ e o maior valor de r na ergosfera é $2M$. Passemos a verificar os termos da (2.15). O numerador do termo em $\dot{t}^2$

$$\Delta - a^2 \sin^2 \theta = r^2 + a^2 - 2Mr - a^2 \sin^2 \theta$$

$$= r^2 + a^2 \cos^2 \theta - 2Mr$$

$$< 0,$$

dessa forma, o termo em $\dot{t}^2$ é sempre positivo. Os termos em $\dot{r}^2$ e $\dot{\theta}^2$ são também positivos, já que Σ e Δ o são. O termo em $\dot{\phi}^2$ é positivo, já que Σ e $\sin^2 \theta$ são sempre positivos e o numerador

$$\begin{aligned} (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta &> (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \\ &= r^2 + a^2 r^2 + 2Mra^2 \\ &> 0, \end{aligned}$$

também é positivo. Nos resta somente analisarmos o termo em $\dot{\phi} \dot{t}$, no entanto, para que a desigualdade em (2.14) seja satisfeita, esse termo deve ser negativo na ergosfera.

A componente $g_{\phi t}$ da métrica é negativa, então, devemos garantir que $\dot{\phi} \dot{t}$ seja positivo. Analisemos $\dot{t}$,

$$\dot{t} = \frac{dt}{d\tau} = u^a \nabla_a t$$

onde u^a é o vetor tangente a $\nabla_a t$. Verifiquemos o comportamento de $\nabla_a t$,

$$\nabla_a t \nabla^a t = g^{ab} \nabla_a t \nabla_b t = g^{tt}.$$

Calculemos, de forma a obter g^{tt} , a matriz inversa das componentes da métrica (2.1), a qual terá os valores

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{g_{33}}{(g_{00}g_{33} - g_{03}^2)} & 0 & 0 & \frac{-g_{03}}{(g_{00}g_{33} - g_{03}^2)} \\ 0 & g_{11}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22}^{-1} & 0 \\ \frac{-g_{03}}{(g_{00}g_{33} - g_{03}^2)} & 0 & 0 & \frac{g_{00}}{(g_{00}g_{33} - g_{03}^2)} \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

então,

$$\begin{aligned} \nabla_a t \nabla^a t &= \frac{1}{\left(g_{00} - \frac{g_{03}^2}{g_{33}}\right)} \\ &= \frac{\Sigma \left[(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta\right]}{-\Delta \left[(r^2 + a^2)^2 - a^2 \sin^2 \theta\right]}. \end{aligned}$$

Da análise, feita acima, dos outros coeficientes podemos notar que $\nabla_a t \nabla^a t$ será sempre negativo. Isto implica em $\nabla_a t$ é tipo tempo na ergosfera, no entanto, não sabemos se $\nabla_a t$ é direcionado para o passado ou para o futuro. Sabemos que u^a , por definição, é tipo tempo e direcionado para o futuro. Devemos determinar a direção de $\nabla_a t$, para isto, analizaremos a contração de $\nabla_a t$ com algum tensor tipo tempo, e direcionado para o futuro, bem conhecido na ergosfera. Para essa finalidade usaremos o campo de Killing $\xi^a = (\partial/\partial t)^a$,

já que na ergosfera sabemos que ele é tipo tempo e direcionado para o futuro. Efetuando sua contração com $\nabla_a t$ obtemos

$$\nabla_a t (\partial/\partial t)^a = \nabla_0 t = \frac{\partial t}{\partial t} = 1.$$

O que mostra que $\nabla_a t$ é tipo tempo, no entanto, na ergosfera é direcionado para o passado. Assim

$$u^a \nabla_a t > 0,$$

logo, se $g_{\phi t} < 0$, para que o termo em $\dot{\phi}t$ seja negativo, $\dot{\phi} > 0$, ou seja, $\frac{d\phi}{d\tau} > 0$ para qualquer observador na ergosfera. Consequência disto é que observadores na ergosfera serão forçados a rodar na direção de rotação do buraco negro. Um análogo à família de observadores em repouso, por seguir órbitas de ξ^a fora do buraco negro de Kerr, são agora, observadores ditos “localmente não rodantes”. Esses observadores são definidos por estarem em repouso com respeito a uma hipersuperfície $t = \text{const}$. Podemos mostrar que realmente esses observadores possuem momento angular nulo. Para isso, pela definição de momento angular $L = u^a \psi_a$, devemos obter o valor de u^a .

Vimos que da definição de observadores localmente não rodantes, devemos determinar uma hipersuperfície, a qual não varie com t , ou seja,

$$D_x t = x^a \nabla_a t = 0,$$

então encontramos que esta direção é $\nabla_a t$. Consequentemente u^a deve ser proporcional a $\nabla_a t$, e portanto dado por

$$u^a = \frac{-\nabla^a t}{\sqrt{-\nabla_b t \nabla^b t}}.$$

Assim

$$\begin{aligned} L &= u^a \psi_a \\ &= g_{ab} u^a \psi^b \\ &= g_{01} u^0 + g_{11} u^1. \end{aligned}$$

Substituindo os valores de u^a obtemos

$$\begin{aligned} L &= \frac{-g_{01} \nabla^0 t}{\sqrt{-g^{00}}} - \frac{g_{11} \nabla^1 t}{\sqrt{-g^{00}}} \\ &= \frac{-g_{01} g^{00}}{\sqrt{-g^{00}}} - \frac{g_{11} g^{01}}{\sqrt{-g^{00}}} \end{aligned}$$

e usando a métrica inversa de $g_{\mu\nu}$ dada em (2.16), mostramos que $L = 0$.

Vimos, anteriormente, que um observador qualquer deve rodar, na ergosfera, na mesma direção de rotação do buraco negro. Então, qual deverá ser a velocidade angular coordenada destes observadores?

Definiremos nossa velocidade angular coordenada, por

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt},$$

ou em termos do tempo próprio

$$\begin{aligned}
 \Omega &= \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \\
 &= u^a \nabla_a \phi (u^b \nabla_b t)^{-1} \\
 &= \frac{u^a \delta_a^1}{u^b \delta_b^0} \\
 &= \frac{-g^{01} \nabla_0 t}{-g^{00} \nabla_0 t} \\
 &= \frac{-g_{01}}{g_{11}}.
 \end{aligned}$$

Substituindo os valores de g_{01} e g_{11} da métrica (2.1), obtemos

$$\Omega = \frac{a(r^2 + a^2 - \Delta)}{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}. \quad (2.17)$$

Dessa maneira, referenciais inerciais, na ergosfera, seriam arrastados devido a rotação do espaço-tempo. Como podemos notar, Ω depende de r . Então, se supormos um observador na ergosfera rotando com velocidade angular Ω e gradualmente se aproximando do horizonte de eventos em $r = r_+$, para r muito próximo de r_+ a velocidade angular do observador deverá ser a mesma velocidade de rotação do buraco negro. Assim, definiremos Ω_H como

$$\begin{aligned}
 \Omega_H &= \lim_{r \rightarrow r_+} \Omega \\
 &= \frac{a}{r_+^2 + a^2}.
 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Desde que uma combinação linear de dois campos de Killing também é um campo de Killing, podemos escrever

$$\chi^a = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a + \Omega_H \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right)^a \quad (2.19)$$

o qual é tangente a geodésica nula que gera o horizonte de eventos de um Buraco Negro de Kerr. Através da (2.19) podemos interpretar Ω_H como a velocidade angular do Buraco Negro de Kerr.

Capítulo 3

Extração de energia em buracos negros!?

No capítulo 2 analisamos as soluções das Eqs. de Einstein para a geometria do espaço-tempo representada pela (1.8). A análise feita nos passa a idéia de que buracos negros são sorvedouros de matéria. Nada pode escapar de seu campo gravitacional, nem mesmo a luz. No entanto, veremos que, devido à natureza da ergosfera, será possível extrair energia de um Buraco Negro de Kerr. Isso foi mostrado por R. Penrose em 1969.

Já vimos que na ergosfera o campo de Killing, ξ^a , que até então era tipo tempo, torna-se tipo espaço. Esse fato é de vital importância nesse método de extração de energia, já que a energia, E , é definida como

$$E = -p^a \xi_a, \quad (3.1)$$

onde $p^a = mu^a$. Dessa forma, uma partícula de teste com energia dada pela (3.1) não será necessariamente positiva. Podemos ter na ergosfera partículas com energia negativa, medida por um observador no infinito, que quando absorvidas pelo buraco negro extraem sua energia. Veremos em que condições esse mecanismo ocorre e é eficaz.

Seja uma partícula, partindo do infinito, percorrendo uma curva geodésica com 4-momento p_0^a e energia $E = -p_0^a \xi_a$. Suponhamos que conseguissemos um mecanismo, tal que, ao entrar na ergosfera, a partícula se partisse em dois fragmentos. Por conservação local de momento, o 4-momento p_1^a e p_2^a dos dois fragmentos deveriam ser tais que

$$p_0^a = p_1^a + p_2^a.$$

Consequentemente, pela contração com ξ^a , teremos

$$E_0 = E_1 + E_2,$$

a qual, representa a conservação local de energia. Imaginemos que, destes dois fragmentos, um caia no horizonte e o outro consiga escapar, para infinitamente longe do buraco negro seguindo uma geodésica. O fragmento "1" com energia E_1 , o qual cai no horizonte, pode, por ξ^a ser tipo espaço na ergosfera, ter energia negativa. Suponhamos que tenha energia negativa. Assim, a

$$E_0 = E_1 + E_2$$

implica

$$E_2 = E_0 + E_1,$$

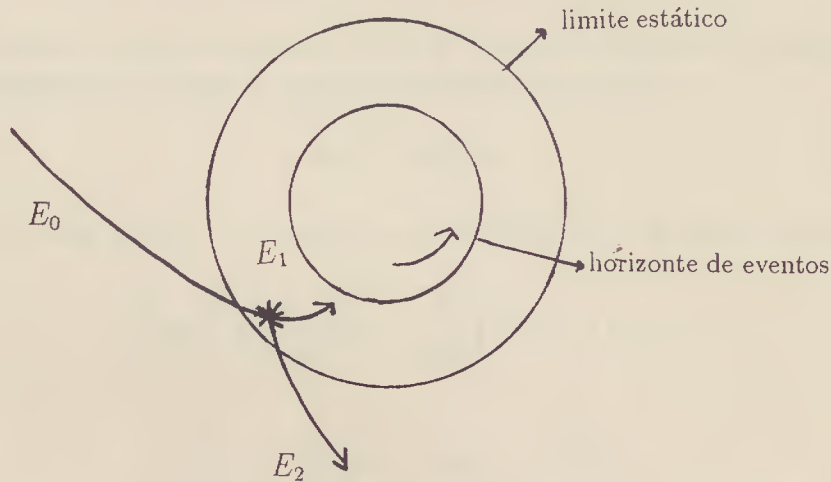


Figura 3.1: Visão superior de um buraco negro de Kerr, representando o Mecanismo Penrose

já que E_1 é negativo. Como podemos notar, o fragmento “2” escapa para infinito com energia E_2 maior, por um valor de E_1 , que a partícula que incidiu no buraco negro (Veja Figura 3.1). A massa M , do buraco negro, fica reduzida a $M - |E_1|$. Se isso é possível, e é, devido a natureza do próprio buraco negro, poderíamos imaginar que por esse processo, um buraco negro poderia ser extinguido. No entanto, a energia extraída pelo Mecanismo Penrose, como é conhecido, é limitada. Isso se deve ao fato de que ao permitirmos a absorção, pelo buraco negro, de uma partícula com energia negativa, permitimos também que ela tenha momento angular negativo, ou seja, contrário ao do buraco negro, o que reduz o momento angular do mesmo. Quando o momento angular do buraco negro, J , torna-se nulo, automaticamente não teremos mais ergosfera, como podemos notar se fizermos $J = 0$ na equação (2.1). Consequentemente, sem ergosfera não será mais possível extrair energia via Mecanismo Penrose.

Deveremos definir esse limite de extração de energia. Usaremos para isso, o campo de Killing χ^a , definido em (2.19), já que χ^a é nulo e direcionado para o futuro no horizonte. Assim, uma partícula com 4-momento, p^a , seguindo uma curva geodésica, quando contraída com χ^a será constante e menor que zero no buraco negro. Sendo assim,

$$\begin{aligned} 0 &> p^a \chi_a \\ &= p^a (\xi_a + \Omega_H \psi_a) \\ &= -E + \Omega_H L, \end{aligned}$$

portanto,

$$-E + \Omega_H L < 0$$

ou

$$L < E/\Omega_H. \quad (3.2)$$

Isso comprova que se há uma partícula com energia negativa na ergosfera, ela terá também momento angular negativo. Outra consequência dessa desigualdade é o fato de que a absorção de uma partícula de energia E e momento angular L , pelo buraco negro, causará uma variação em seus parâmetros. Isso ocorre de tal forma que o buraco negro sofre uma variação em sua massa igual a energia da partícula, $\delta M = E$, da mesma forma

sofre uma variação no momento angular igual ao momento angular da partícula, $\delta J = L$. Assim, a desigualdade (3.2) para a variação do buraco negro fica

$$\delta J < \delta M / \Omega_H. \quad (3.3)$$

Substituindo os valores de Ω_H e r_+ dados em (2.18) e (2.13), na (3.3), encontramos

$$\frac{2}{J} M^2 \left(M + \sqrt{M^2 - \frac{J^2}{M^2}} \right) \delta M - \delta J > 0. \quad (3.4)$$

Definindo

$$M_{irr}^2 = \frac{1}{2} \left[M^2 + (M^4 - J^2)^{1/2} \right] \quad (3.5)$$

e substituindo na (3.4), obtemos

$$4 \frac{M}{J} M_{irr}^2 \delta M - \delta J > 0. \quad (3.6)$$

No entanto, se invertemos a (3.5), escrevendo M como função de M_{irr} e J ,

$$M^2 = M_{irr}^2 + \frac{J^2}{4M_{irr}^2}, \quad (3.7)$$

e diferenciando-a, obtemos

$$2M\delta M = 2M_{irr}\delta M_{irr} + \frac{J\delta J}{2M_{irr}^2} - \frac{J^2}{2M_{irr}^3}\delta M_{irr}.$$

Assim, isolando δM_{irr} , teremos que

$$\delta M_{irr} = \frac{JM_{irr} \left[\frac{4M}{J} M_{irr}^2 \delta M - \delta J \right]}{4M_{irr}^4 - J^2} \quad (3.8)$$

é a variação de M_{irr} . Contudo, o que representa M_{irr} ?

Observando a (3.3) ou a (3.4), podemos notar que essas equações limitam a diferença entre o termo proporcional à variação da massa e o termo da variação de momento angular a valores positivos. Isso significa que, ao passo que extraírmos massa de um buraco negro, estaremos extraindo também seu momento angular. A equação (3.3) é quem impõe limites nessa extração. M_{irr} , então, representará a massa, a partir da qual não será mais possível extrair energia de um buraco negro via Mecanismo Penrose. Analisando a (3.8), verificaremos esta afirmação. Pela (3.6) o termo em colchetes da (3.8) é positivo. O termo JM_{irr} será positivo, já que não temos momento angular nem massa negativos no buraco negro. O denominador deve ser analisado no caso extremo, ou seja, para uma solução real da (3.5), $J^2 \leq M^4$, então, no caso extremo $2M_{irr}^2 = M^2$, portanto o denominador da (3.8) é positivo. Assim, a (3.8) será sempre positiva,

$$\delta M_{irr} > 0.$$

Isso confirma a afirmação que fizemos de que M_{irr} representa, via Mecanismo Penrose, a massa irredutível de um buraco negro.

Chamaremos de energia rotacional do buraco negro, a energia extraída por Mecanismo Penrose, já que o que limita sua extração é a redução do momento angular inicial, J_0 , a zero. A quantidade de energia extraída ou energia rotacional do buraco negro de massa inicial M_0 é $M_0 - M_{irr}$. De uma forma geral, podemos obter um limite para a extração de energia de um buraco negro por calcular sua área, A . Isso é possível devido ao Teorema da Área do buraco negro, provado por Hawking em 1971. Esse teorema prova que a área de um buraco negro nunca decresce via processos clássicos [Teorema 12.2.6-[1]].

Calculemos a área do horizonte de eventos de um buraco negro, onde a área, A , é definida por

$$A = \int_{r=r_+} \sqrt{g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}} d\theta d\phi$$

onde

$$g_{\theta\theta} = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$$

e

$$g_{\phi\phi} = \frac{(r^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}.$$

Então,

$$\begin{aligned} A &= \int_{r=r_+} (r^2 + a^2) \sin \theta d\theta d\phi \\ &= 4\pi (r^2 + a^2) \\ &= 4\pi [2M^2 + 2(M^4 - a^2 M^2)] \\ &= 16\pi M_{irr}^2, \end{aligned} \tag{3.9}$$

onde mostramos que a área, A , do buraco negro é proporcional ao quadrado da massa irredutível. Consequentemente, se A nunca decresce, M_{irr} realmente será irredutível.

Outro caso de extração de energia ocorre quando estudamos a colisão de dois buracos negros de Schwarzschild. Ambos estão, inicialmente, infinitamente separados e em repouso. Suas massas são respectivamente M_1 e M_2 . A evolução do sistema deve ser, tal que, aproxime um buraco negro do outro até que colidam formando um único buraco negro de Schwarzschild de massa M_f . A energia irradiada nesse processo é

$$E_{irr\ rad} = M_1 + M_2 - M_f. \tag{3.10}$$

A área total do sistema é, então

$$\begin{aligned} A_i &= A_1 + A_2 \\ &= 16\pi (M_1^2 + M_2^2)_i, \end{aligned}$$

contudo, a área final é

$$A_f = 16\pi M_f^2.$$

Pelo Teorema da Área devemos ter que $A_f \geq A_i$, assim

$$M_f^2 \geq (M_1^2 + M_2^2)_i. \quad (3.11)$$

Mas, da (3.10)

$$(M_1 + M_2 - E_{\text{irrad}})^2 \geq (M_1^2 + M_2^2),$$

tomando a raiz quadrada da desigualdade acima e isolando E_{irrad} , obtemos que

$$E_{\text{irrad}} \leq M_1 + M_2 - (M_1^2 + M_2^2)^{1/2}.$$

Para o caso particular da dois buracos negro idênticos $M_1 = M_2$. A energia irradiada será

$$\begin{aligned} E_{\text{irrad}} &\leq 2M_1 - (2M_1^2)^{1/2} \\ &\leq 2M_1 \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right) \\ &\leq 29\% M_1. \end{aligned}$$

Esse processo permite extraírmos até 29% da massa de um buraco negro. Dados numéricos indicam que esse valor é muito menor.

Na equação (3.7) escrevemos a massa, M , de um buraco negro como função de sua massa irreduzível e seu momento angular. Sabemos que é possível extrair uma certa quantidade de energia deste buraco negro. Certamente, também é possível injetar energia neste buraco negro, causando um aumento de seu momento angular, J . Essa oscilação no valor de M devido à J , mantendo fixo M_{irr} , chamaremos de uma transformação reversível. Isso porque, assim como podemos dar energia ao buraco negro, podemos retirá-la. As transformações reversíveis podem ocorrer em um limite que vai de $J = 0, M^2 = M_{\text{irr}}^2$ até $J = M^2, M^2 = 2M_{\text{irr}}^2$.

Como vimos, a massa irreduzível, como o próprio nome diz, não decresce. No entanto, não há nada que a impeça de crescer. Contudo, tendo uma vez aumentado, não poderá decrescer ao valor inicial. Isso caracteriza uma transformação irreversível em um buraco negro de Kerr. A Figura 3.2 demonstra essas transformações.

Obteremos, agora, a equação de movimento de uma partícula de massa, μ , unitária, seguindo uma geodésica. Dessa forma, as equações do movimento serão obtidas por resolver o sistema de equações

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = k \quad (3.12)$$

onde $k = 0$ para curvas tipo luz, $k = -1$ para curvas tipo tempo, e

$$p_\mu = g_{\mu\nu} u^\nu.$$

Como consideramos uma partícula massiva qualquer, tomaremos $k = -1$. Por simplicidade tomaremos uma partícula de massa unitária.

Associaremos, $p_t = -E$ e $p_\phi = J$, as quais são constantes de movimento quando consideramos um movimento geodésico e a simetria do espaço-tempo. De acordo com os valores de $g_{\mu\nu}$ dados na (2.1), no plano equatorial $\theta = \pi/2$, escreveremos

$$-1 = -E \dot{t} + p_\phi \dot{\phi} + \dot{r} p_r \quad (3.13)$$

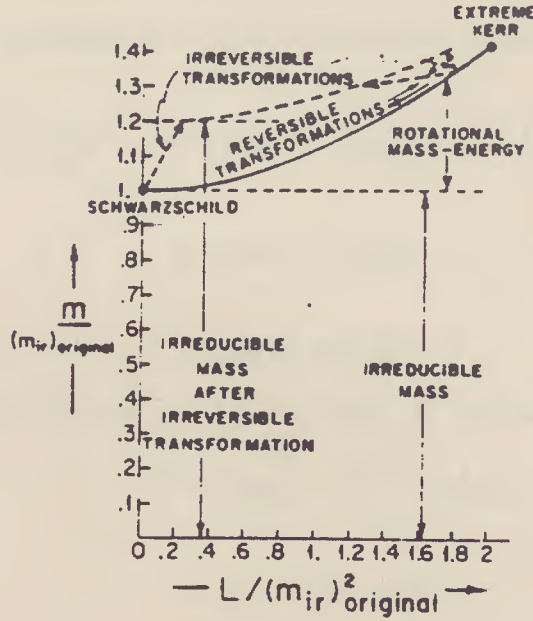


Figura 3.2: Apresenta a relação entre M e J para um buraco negro com M_{irr} inicialmente fixa. Extraído de [6]

e . . .

$$\begin{aligned}
 -E \dot{t} &= -\left(\frac{2Ma}{r}\right) \dot{t} \dot{\phi} - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2, \\
 J \dot{\phi} &= \left(\frac{-2Ma}{r}\right) \dot{t} \dot{\phi} + \left(r^2 + \frac{2Ma^2}{r} + a^2\right) \dot{\phi}^2, \\
 p_r \dot{r} &= \frac{r^2}{\Delta} \dot{r}^2.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Resolvendo o sistema de equações formado pelas equações (3.14) encontramos que

$$\begin{aligned}
 \dot{r} &= p_r \left(\frac{r^2}{\Delta}\right)^{-1}, \\
 \dot{t} &= \left[E - \left(\frac{2Ma}{r}\right) \dot{\phi}\right] \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \\
 \dot{\phi} &= \frac{p_\phi (r - 2M) + 2MaE}{\frac{4M^2a^2}{r} + (r - M) \left(r^2 + \frac{2Ma^2}{r} + a^2\right)}.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Substituindo os valores encontrados, nas equações (3.15), na (3.13), obtemos, após simplificações, que

$$E^2 \left[r^4 + a^2 (2Mr + r^2) \right] - 4MaE p_\phi r - (r^2 - 2Mr) p_\phi^2 - r^2 \Delta = (p_r \Delta)^2 \tag{3.16}$$

Essa será a equação de movimento para uma partícula livre, de massa unitária e descarregada, em um campo gravitacional gerado por um buraco negro de Kerr e se aproximando

dele por um plano equatorial $\theta = \pi/2$. Resolvendo a equação (3.16) para a energia E , encontramos que

$$E = Bap_\phi + \left\{ \left[B^2 a^2 - D^{-1} (2Mr + r^2) p_\phi^2 \right] + D^{-1} \left[r^2 \Delta + (p_r \Delta)^2 \right] \right\}, \quad (3.17)$$

onde

$$D = r^4 + a^2 (2Mr + r^2)$$

e

$$B = 2MrD^{-1}.$$

No horizonte de eventos em $r = r_+$, a energia, E , da partícula será

$$E = \Omega_H p_\varphi + D^{-1/2} |p_r \Delta|_+, \quad (3.18)$$

onde

$$D_+ = (r_+^2 + a^2)^2$$

e

$$p_r \Delta = r^2 p^r; |p_r \Delta|_+ = r_+^2 p_+^r.$$

Comparemos o valor da energia em (3.18), para uma partícula no horizonte, com a diferencial da equação (3.8), a qual representa a relação entre a variação da massa, área e momento angular de um buraco negro de Kerr, dada por [7]

$$dM = \Theta dJ + \theta d\alpha, \quad (3.19)$$

onde $\alpha = A/4\pi$, $\theta = \frac{1}{4} (r_+ + r_-) / \alpha$ e $\Theta = a/\alpha$.

Notemos que a absorção, pelo buraco negro, de uma partícula com energia dada pela (3.18) provocará um aumento na área do buraco negro correspondente a $\theta^{-1} A^{-1/2} |p_r \Delta|_+$. Isso é claro da associação do último termo da (3.18) com o último da (3.19). Note também que se nossa partícula for absorvida pelo buraco negro no ponto de inflexão, em $\dot{r} = 0$ e consequentemente, $p_r = 0$, não haverá crescimento na área do buraco negro causado pela absorção dessa partícula [6].

Capítulo 4

Termodinâmica de Buracos Negros

Vimos no capítulo 3 que, mesmo por processos clássicos, podemos extrair energia de um buraco negro. Vimos, no entanto, que essa extração de energia é limitada de tal forma que em nenhum caso a área do buraco negro decresce. Essa situação é muito similar à encontrada em termodinâmica devido a entropia. Neste capítulo desenvolvemos matematicamente essa analogia.

4.1 Área de Horizontes e Entropia

No capítulo 3 na (3.9), definimos a área de um buraco negro como proporcional ao quadrado de sua massa irreduzível, M_{irr} . Pelo Teorema da Área, M_{irr} poderá aumentar de forma irreversível, por meio do que chamamos transformações irreversíveis. Outra classe de transformações, as reversíveis, aumentam a massa total do burco negro, no entanto, M_{irr} permanece invariável. Essa diferença entre a massa total e M_{irr} , é a energia que podemos extrair de um buraco negro por meio dos processos clássicos citados anteriormente.

Em termodinâmica ocorre algo similar com a função entropia. Pela segunda lei termodinâmica não há nenhum processo físico no qual a função entropia decresça. Desenvolveremos, agora, as condições necessárias para a verificação dessa analogia.

No capítulo 2, encontramos um campo de Killing, χ^a , normal ao horizonte de um buraco negro estacionário,

$$\chi^a = \xi^a + \Omega_H \psi^a.$$

O horizonte de eventos é uma superfície nula. Dessa forma, χ^a , normal a ela, satisfaz $\chi^a \chi_a = 0$, no horizonte. A quantidade $\nabla^a (\chi^b \chi_b)$, também será normal ao horizonte e, portanto, proporcional a χ^a

$$\nabla^a (\chi^b \chi_b) = -2k \chi^a \quad (4.1)$$

Notemos que o lado esquerdo da (4.1) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \nabla^a (\chi^b \chi_b) &= 2\chi_b \nabla^a \chi^b, \\ &= -2\chi_b \nabla^b \chi^a, \\ &= -2\chi^b \nabla_b \chi^a, \end{aligned}$$

já que χ^a satisfaz a Eq. de Killing. Então, devido a (4.1), teremos que

$$\chi^b \nabla_b \chi^a = k \chi^a. \quad (4.2)$$

Ao tomarmos a derivada de Lie da equação acima com respeito a χ^a verificamos que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_\chi(\chi^c \nabla_c \chi^a) &= \chi^b \nabla_b (\chi^c \nabla_c \chi^a) + \chi^c \nabla_c \chi^b (\nabla^a \chi_b) \\
 &= \chi^b \chi^c \nabla_b \nabla_c \chi^a + \chi^b \nabla_c \chi^a (\nabla_b \chi^c) + \chi^c \nabla_c \chi^b (\nabla^a \chi_b) \\
 &= \chi^b \chi_c (\nabla_b \nabla^c \chi^a) + \chi_b \nabla^b \chi^c (\nabla_c \chi^a) - \chi^c \nabla_c \chi_b (\nabla^b \chi^a) \\
 &= \chi^b \chi_c (\nabla_b \nabla^c \chi^a) + \chi_b \nabla^b \chi^c (\nabla_c \chi^a) - \chi_b \nabla^b \chi^c (\nabla_c \chi^a) \\
 &= \chi^b \chi_c (\nabla_b \nabla^c \chi^a) \\
 &= -\chi_b \chi_c R^{cab}{}_d \chi^d,
 \end{aligned}$$

no entanto, $R^{cab}{}_d$ é antissimétrico, mas $\chi_b \chi_c \chi^d$ é simétrico e portanto a contração de ambos, anula. Dessa forma, considerando $\chi^a \neq 0$, verificamos que

$$\mathcal{L}_\chi k = 0 \quad (4.3)$$

De acordo com a (4.3), k , é uma constante sobre a órbita gerada por χ^a , no entanto, devemos demonstrar que k é uma constante sobre todo o horizonte, ou seja, não varia de uma órbita para outra de χ^a . Para um buraco negro de Kerr-Newman, k tem o valor [1]

$$k = \frac{(M^2 - a^2 - e^2)^{1/2}}{2M [M + (M^2 - a^2 - e^2)^{1/2}] - e^2}. \quad (4.4)$$

Observando a equação (4.2), notamos que é exatamente a equação da geodésica em uma parametrização não-afim. Reparametrizando a equação (4.2), definimos o vetor k^a como

$$k^a = e^{-kv} \chi^a, \quad (4.5)$$

onde v é definido por

$$\chi^a \nabla_a v = 1. \quad (4.6)$$

Assim, no horizonte

$$\begin{aligned}
 k^b \nabla_b k^a &= e^{-kv} \chi^b \nabla_b e^{-kv} \chi^a \\
 &= e^{-kv} [e^{-kv} \chi^b \nabla_b \chi^a + \chi^a \chi^b \nabla_b (e^{-kv})] \\
 &= e^{-2kv} [\chi^b \nabla_b \chi^a - \chi^a \chi^b \nabla_b (kv)] \\
 &= e^{-2kv} [\chi^b \nabla_b \chi^a + \chi^a k \chi^b \nabla_b v],
 \end{aligned}$$

a qual, juntamente com a equação (4.2) e (4.6) nos dá

$$\begin{aligned}
 k^b \nabla_b k^a &= e^{-2kv} [k \chi^a - k \chi^a] \\
 &= 0.
 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Essa é exatamente a equação da geodésica em uma parametrização afim, tal que a relação entre o parâmetro afim λ e o parâmetro de Killing v é

$$\frac{d\lambda}{dv} \propto e^{kv}$$

com $k \neq 0$ teremos $\lambda \propto e^{kv}$. No entanto, χ^a é ortogonal no horizonte, assim, pelo Teorema de Frobenius, no horizonte vale que

$$\chi_{\square a} \nabla_b \chi_{c \square} = 0, \quad (4.8)$$

o que implica em

$$\chi_a \nabla_b \chi_c - \chi_a \nabla_c \chi_b + \chi_b \nabla_c \chi_a - \chi_b \nabla_a \chi_c + \chi_c \nabla_a \chi_b - \chi_c \nabla_b \chi_a = 0,$$

e, portanto,

$$\chi_c \nabla_a \chi_b - \chi_c \nabla_b \chi_a = -(\chi_a \nabla_b \chi_c - \chi_a \nabla_c \chi_b + \chi_b \nabla_c \chi_a - \chi_b \nabla_a \chi_c).$$

Usando a Eq. de Killing, podemos escrever

$$\begin{aligned} 2\chi_c \nabla_a \chi_b &= -4 \left(\frac{\chi_a \nabla_b \chi_c - \chi_b \nabla_a \chi_c}{2} \right) \\ &= -4\chi_{\square a} \nabla_b \chi_{c \square}, \end{aligned}$$

tal que,

$$\chi_c \nabla_a \chi_b = -2\chi_{\square a} \nabla_b \chi_{c \square}, \quad (4.9)$$

no horizonte. Ao contraírmós a equação (4.9) com $\nabla^a \chi^b$

$$\begin{aligned} \chi_c (\nabla_a \chi_b) (\nabla^a \chi^b) &= -2 (\chi_a \nabla^a \chi^b) (\nabla_b \chi_c) \\ &= -2k \chi^b \nabla_b \chi_c, \end{aligned}$$

a qual, usando novamente a equação (4.2), fica

$$\chi_c (\nabla_a \chi_b) (\nabla^a \chi^b) = -2k^2 \chi_c,$$

implicando em

$$k^2 = -\frac{1}{2} (\nabla_a \chi_b) (\nabla^a \chi^b). \quad (4.10)$$

A partir da equação (4.10), podemos interpretar fisicamente a quantidade k . Primeiramente, notemos que

$$\begin{aligned} 3 (\chi^{\square a} \nabla^b \chi^{c \square}) (\chi_{\square a} \nabla_b \chi_{c \square}) &= 3 \left\{ \frac{1}{6} (\chi^a \nabla^b \chi^c - \chi^a \nabla^c \chi^b + \chi^b \nabla^c \chi^a - \chi^b \nabla^a \chi^c + \chi^c \nabla^a \chi^b \right. \\ &\quad \left. - \chi^c \nabla^b \chi^a) \frac{1}{6} (\chi_a \nabla_b \chi_c - \chi_a \nabla_c \chi_b + \chi_b \nabla_c \chi_a - \chi_b \nabla_a \chi_c \right. \\ &\quad \left. + \chi_c \nabla_a \chi_b - \chi_c \nabla_b \chi_a) \right\}. \end{aligned}$$

Usando a Eq. de Killing

$$\begin{aligned} 3 (\chi^{\square a} \nabla^b \chi^{c \square}) (\chi_{\square a} \nabla_b \chi_{c \square}) &= \{ (\chi_a \nabla_b \chi_c - \chi_b \nabla_a \chi_c + \chi_c \nabla_a \chi_b) \\ &\quad \cdot \frac{1}{3} (\chi^a \nabla^b \chi^c - \chi^b \nabla^a \chi^c + \chi^c \nabla^a \chi^b) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \{ \chi^a \chi_a (\nabla_b \chi_c) (\nabla^b \chi^c) - (\chi_a \nabla_b \chi_c) (\chi^b \nabla^a \chi^c) \\
&\quad + (\chi_a \nabla_b \chi_c) (\chi^c \nabla^a \chi^b) + (\chi_b \nabla_a \chi_c) (\chi^a \nabla^b \chi^c) \\
&\quad + \chi^b \chi_b (\nabla_a \chi_c) (\nabla^a \chi^c) - (\chi_b \nabla_a \chi_c) (\chi^c \nabla^a \chi^b) \\
&\quad + (\chi_c \nabla_a \chi_b) (\chi^a \nabla^b \chi^c) - (\chi_c \nabla_a \chi_b) (\chi^b \nabla^a \chi^c) \\
&\quad + \chi^c \chi_c (\nabla_a \chi_b) (\nabla^a \chi^b) \},
\end{aligned}$$

trocando os índices contraídos e usando novamente a Eq. de Killing, encontramos

$$3 (\chi^{\square a} \nabla^b \chi^c) (\chi_{\square a} \nabla_b \chi_c) = \chi^a \chi_a (\nabla_b \chi_c) (\nabla^b \chi^c) - 2 (\chi^a \nabla^b \chi^c) (\chi_b \nabla_a \chi_c). \quad (4.11)$$

Esta relação é válida para todo espaço-tempo. No entanto, no horizonte, o gradiente do lado esquerdo da (4.11) é nulo, considerando que $\chi_{\square a} \nabla_b \chi_c = 0$ no horizonte. Assim, desde que $\nabla^a (\chi^b \chi_b) \neq 0$ para $k \neq 0$, obteremos

$$\chi^a \chi_a (\nabla_b \chi_c) (\nabla^b \chi^c) = 2 (\chi^a \nabla^b \chi^c) (\chi_b \nabla_a \chi_c), \quad (4.12)$$

no horizonte. Tomando o limite da (4.12) ao se aproximar do horizonte

$$\lim_{\rightarrow h} \left\{ \frac{\chi^a \chi_a (\nabla_b \chi_c) (\nabla^b \chi^c)}{\chi^a \chi_a} \right\} = \lim_{\rightarrow h} \left\{ \frac{2 (\chi^a \nabla^b \chi^c) (\chi_b \nabla_a \chi_c)}{\chi^a \chi_a} \right\},$$

pela Regra de L'Hospital, temos que

$$(\nabla_b \chi_c) (\nabla^b \chi^c) = \lim_{\rightarrow h} \left\{ \frac{2 (\chi^a \nabla^b \chi^c) (\chi_b \nabla_a \chi_c)}{\chi^a \chi_a} \right\}.$$

Então, escreveremos a (4.10) como

$$k^2 = - \lim_{\rightarrow h} \left\{ \frac{(\chi^b \nabla_b \chi^c) (\chi^a \nabla_a \chi_c)}{\chi^d \chi_d} \right\}. \quad (4.13)$$

Contudo, relembrando, a equação (1.78) do capítulo 2 podemos escrever a aceleração da órbita de χ^a como

$$\begin{aligned}
a &= (a^c a_c)^{1/2} \\
&= \left[\frac{(\chi^b \nabla_b \chi^c) (\chi^b \nabla_b \chi_c)}{(-\chi^d \chi_d) (-\chi^d \chi_d)} \right]^{1/2}.
\end{aligned}$$

Assim, a (4.10) fica

$$k = \lim(Va), \quad (4.14)$$

onde $V = (-\chi^d \chi_d)^{1/2}$, a qual, para o caso estático, temos $\chi^a = \xi^a$. Dessa maneira poderemos interpretar k como o limite da força exercida no infinito, sobre uma partícula

teste para mantê-la fixa ao se aproximar do horizonte. k é chamado gravidade superficial do buraco negro.

Usaremos a definição (4.5) e a equação (4.8) para mostrar que, no horizonte, obtemos

$$\begin{aligned}
 k_{\square a} \nabla_{b \square} k_c &= \frac{k_a \nabla_b k - k_b \nabla_a k_c}{2} \\
 &= \frac{1}{2} e^{-2kv} \{ \chi_a [-\chi_c \nabla_b (kv)] + \chi_a \nabla_b \chi_c + \chi_b \chi_c \nabla_a (kv) - \chi_b \nabla_a \chi_c \} \\
 &= -\frac{1}{2} e^{-2kv} [\chi_c \chi_a \nabla_b (kv) - \chi_c \chi_b \nabla_a (kv) + \chi_b \nabla_a \chi_c - \chi_a \nabla_b \chi_c] \\
 &= -e^{-2kv} \left[\chi_c \chi_{\square a} \nabla_{b \square} (kv) + \frac{\chi_b \nabla_a \chi_c - \chi_a \nabla_b \chi_c}{2} \right] \\
 &= -e^{-2kv} \chi_c \left[\chi_{\square a} \nabla_{b \square} (kv) + \frac{\nabla_a \chi_b}{2} \right].
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

A contração da equação (4.15) com $\chi^{\square c} \nabla^b \square$, operador projeção,

$$4\chi^{\square c} \nabla^b \square k_{\square a} \nabla_{b \square} k_c = -4e^{-2kv} \chi^{\square c} \nabla^b \square \chi_c \left[\frac{\nabla_a \chi_b}{2} + \chi_{\square a} \nabla_{b \square} (kv) \right], \tag{4.16}$$

leva a resultados interessantes. Devido aos cálculos serem bastante extensos, calcularemos primeiramente o lado esquerdo da (4.16),

$$\begin{aligned}
 4\chi^{\square c} \nabla^b \square k_{\square a} \nabla_{b \square} k_c &= \chi^c \nabla^b (k_a \nabla_b k_c - k_b \nabla_a k_c) - \chi^b \nabla^c (k_a \nabla_b k_c - k_b \nabla_a k_c) \\
 &= \chi^c k_a (\nabla^b \nabla_b k_c) - \chi^c (\nabla^b k_a) (\nabla_b k_c) \\
 &\quad - \chi^c k_b (\nabla^b \nabla_a k_c) - \chi^c (\nabla^b k_b) (\nabla_a k_c) \\
 &\quad - \chi^b k_a (\nabla^c \nabla_b k_c) - \chi^b (\nabla^c k_a) (\nabla_b k_c) \\
 &\quad + \chi^b k_b (\nabla^c \nabla_a k_c) + \chi^b (\nabla^c k_b) (\nabla_a k_c),
 \end{aligned}$$

onde $\chi^b k_b = 0$, e usando a (4.6) escrevemos

$$\begin{aligned}
 4\chi^{\square c} \nabla^b \square k_{\square a} \nabla_{b \square} k_c &= \chi^c k_a [\nabla^b \nabla_b (e^{-kv} \chi_c)] - \chi^c [\nabla^b (e^{-kv} \chi_a)] [\nabla_b (e^{-kv} \chi_c)] \\
 &\quad - \chi^c k_b [\nabla^b \nabla_a (e^{-kv} \chi_c)] - \chi^c [\nabla^b (e^{-kv} \chi_b)] [\nabla_a (e^{-kv} \chi_c)] \\
 &\quad - \chi^b k_a [\nabla^c \nabla_b (e^{-kv} \chi_c)] - \chi^b [\nabla^c (e^{-kv} \chi_a)] [\nabla_b (e^{-kv} \chi_c)] \\
 &\quad + \chi^b [\nabla^c (e^{-kv} \chi_b)] [\nabla_a (e^{-kv} \chi_c)] \\
 &= \chi^c k_a e^{-kv} \{ \nabla^b \nabla_b \chi_c - 2(\nabla_b \chi_c) \nabla^b (kv) \} \\
 &\quad + \chi^c e^{-2kv} \{ (\nabla^b \chi_a) (\nabla_b \chi_c) - \chi_a (\nabla_b \chi_c) \nabla^b (kv) \} \\
 &\quad + \chi^c k_b e^{-kv} \{ -\nabla^b \nabla_a \chi_c + (\nabla_a \chi_c) \nabla^b (kv) + (\nabla^b \chi_c) \nabla_a (kv) \} \\
 &\quad + \chi^c k_b e^{-kv} \{ (\nabla_a \chi_c) \nabla^b (kv) \} \\
 &\quad + \chi^b k_a e^{-kv} \{ \nabla^c \nabla_c \chi_b + (\nabla_b \chi_c) \nabla^c (kv) + \chi_c \nabla^c \nabla_b (kv) \\
 &\quad - \chi_c \nabla_b (kv) \nabla^c (kv) \} \\
 &\quad + \chi^b e^{-2kv} \{ -(\nabla^c \chi_a) (\nabla_b \chi_c) + \chi_c (\nabla^c \chi_a) \nabla^b (kv) \\
 &\quad + \chi_a (\nabla_b \chi_c) \nabla^c (kv) - \chi_a \chi_c \nabla^b (kv) \nabla^c (kv) \} \\
 &\quad + \chi^b e^{-2kv} \{ -(\nabla^c \chi_b) (\nabla_a \chi_c) + \chi_c (\nabla^c \chi_b) \nabla^a (kv) \}.
 \end{aligned}$$

Após usarmos a (4.2) e que $\nabla_a \nabla_b \chi_c = -R_{bca}{}^d \chi_d$, efetuamos simplificações e encontramos

$$4\chi^c \nabla^b \nabla_c k_{[a} \nabla_{b]} k_c = e^{-2kv} \left(k^2 \chi_a + \chi^b \chi_a \chi^c \nabla_c \nabla_b (kv) - 2\chi_a \chi_d R^d{}_c \chi^c \right)$$

Calcularemos, agora, o lado direito da (4.16)

$$\begin{aligned} -4e^{-2kv} \chi^c \nabla^b \nabla_c \chi_c \left[\frac{\nabla_a \chi_b}{2} + \chi_{[a} \nabla_{b]} (kv) \right] &= (\chi^c \nabla^b - \chi^{\tilde{b}} \nabla^c) \{ e^{-2kv} \chi_c \\ &\quad \cdot [\nabla_a \chi_b + \chi_a \nabla_b (kv) - \chi_b \nabla_a (kv)] \} \\ &= \chi^b \chi_c \nabla^c \{ e^{-2kv} [\nabla_a \chi_b + \chi_a \nabla_b (kv) \\ &\quad - \chi_b \nabla_a (kv)] \} - \chi^c (\nabla^b \chi_c) e^{-2kv} \\ &\quad \cdot [\nabla_a \chi_b + \chi_a \nabla_b (kv) - \chi_b \nabla_a (kv)] \\ &= e^{-2kv} \{ \chi_c \chi_a k (v \nabla^c k + k \nabla^c v) \\ &\quad - \chi^b \chi_c \chi_a k (\nabla_b v) k (\nabla^c v) \\ &\quad + \frac{\chi^b \chi_c}{2} \chi_a \nabla^c (v \nabla_b k + k \nabla_b v) \\ &\quad + \frac{\chi^b}{2} k \chi_a k \nabla_b v + \frac{k \chi^b}{2} \nabla_a \chi_b \\ &\quad + \frac{\chi_a}{2} k^2 \chi^b \nabla_b v \}. \end{aligned}$$

Após simplificações, obtemos que

$$-4e^{-2kv} \chi^c \nabla^b \nabla_c \chi_c \left[\frac{\nabla_a \chi_b}{2} + \chi_{[a} \nabla_{b]} (kv) \right] = e^{-2kv} \{ k^2 \chi_a + \chi^b \chi_c \chi_a \nabla^c \nabla_b (kv) \}.$$

Dessa forma, juntando os resultados de ambos os lados da (4.16), obtemos

$$e^{-2kv} \left(k^2 \chi_a + \chi^b \chi_a \chi^c \nabla_c \nabla_b (kv) - 2\chi_a \chi_d R^d{}_c \chi^c \right) = e^{-2kv} \{ k^2 \chi_a + \chi^b \chi_c \chi_a \nabla^c \nabla_b (kv) \},$$

o que implica em

$$\chi_a \chi_d R^d{}_c \chi^c = 0,$$

e, portanto,

$$R_{ab} k^a k^b = 0. \quad (4.17)$$

Usaremos novamente o operador projeção $\chi_{[d} \nabla_{c]}$, contraindo-o com a equação (4.2)

$$\begin{aligned} \chi_{[d} \nabla_{c]} (\chi^b \nabla_b \chi_a) &= \chi_{[d} \nabla_{c]} (k \chi_a) \\ (\chi_{[d} \nabla_{c]} \chi^b) (\nabla_b \chi_a) + \chi^b \chi_{[d} \nabla_{c]} \nabla_b \chi_a &= \chi_a \chi_{[d} \nabla_{c]} k + k \chi_{[d} \nabla_{c]} \chi_a. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Mas se $\chi_a \nabla_b \chi_c = -2\chi_{[d} \nabla_{c]} \chi_a$ e $\chi^b \nabla_b \chi_a = k \chi_a$, então, o primeiro termo do lado esquerdo da (4.18) fica

$$\begin{aligned} (\chi_{[d} \nabla_{c]} \chi^b) (\nabla_b \chi_a) &= -\frac{1}{2} (\chi^b \nabla_d \chi_a) \nabla_b \chi_a \\ &= -\frac{1}{2} k \chi_a \nabla_d \chi_c \\ &= k \chi_{[d} \nabla_{c]} \chi_a. \end{aligned}$$

Assim, teremos

$$k\chi_{\square d}\nabla_{\square}\chi_a + \chi^b\chi_{\square d}\nabla_{\square}\nabla_b\chi_a = \chi_a\chi_{\square d}\nabla_{\square}k + k\chi_{\square d}\nabla_{\square}\chi_a, \quad (4.19)$$

e portanto,

$$-\chi^b R_{ba\square c}{}^e\chi_{d\square}\chi_e = \chi_a\chi_{\square d}\nabla_{\square}k, \quad (4.20)$$

Usando esse mesmo operador projeção e aplicado-o na (4.9),

$$\begin{aligned} \chi_{\square d}\nabla_{\square}(\chi_c\nabla_a\chi_b) &= -2\chi_{\square d}\nabla_{\square}(\chi_{\square a}\nabla_b\chi_c) \\ (\chi_{\square d}\nabla_{\square}\chi_c)(\nabla_a\chi_b) + \chi_c\chi_{\square d}\nabla_{\square}\nabla_a\chi_b &= -2(\chi_{\square d}\nabla_{\square}\chi_{\square a})\nabla_b\chi_c - 2(\chi_{\square d}\nabla_{\square}\nabla_{\square b}\chi_{|c|})\chi_{a\square}, \end{aligned}$$

onde, o primeiro termo do lado esquerdo se cancela com o primeiro termo do lado direito¹, assim,

$$\chi_c\chi_{\square d}\nabla_{\square}\nabla_a\chi_b = -2(\chi_{\square d}\nabla_{\square}\nabla_{\square b}\chi_{|c|})\chi_{a\square}. \quad (4.21)$$

Usando que $\nabla_a\nabla_b\chi_c = -R_{bca}{}^f\chi_f$, na equação (4.21), escreveremos

$$-\chi_c R_{ab\square e}{}^f\chi_{d\square}\chi_f = 2\chi_{\square a}R_{b\square c\square e}{}^f\chi_{d\square}\chi_f,$$

a qual, quando contraída com g^{ce} , nos dá

$$\begin{aligned} -g^{ce}\chi_c R_{ab\square e}{}^f\chi_{d\square}\chi_f &= g^{ce}2\chi_{\square a}R_{b\square c\square e}{}^f\chi_{d\square}\chi_f, \\ -\chi^e R_{ab\square e}{}^f\chi_{d\square}\chi_f &= 2\chi_{\square a}R_{b\square}{}^e{}_{\square e}{}^f\chi_{d\square}\chi_f, \\ &= [\chi_{\square a}R_{b\square}{}^c{}_c{}^f\chi_d\chi_f - \chi_{\square a}R_{b\square}{}^c{}_d{}^f\chi_c\chi_f]. \end{aligned}$$

O lado esquerdo anula pela contração do tensor de Riemann com tensores simétricos, no lado direito, invertemos os índices, de forma a contraí-los, obtendos que

$$-\chi_{\square a}R_{b\square}{}^f\chi_f\chi_d = \chi_{\square a}R_{b\square cd}{}^f\chi^c\chi_f. \quad (4.22)$$

Notemos que o lado direito da equação (4.22) tem a mesma forma do lado esquerdo da equação (4.20), dessa forma, associaremos as duas equações, tal que

$$\chi_{\square d}\nabla_{\square}k = -\chi_{\square d}R_{c\square}{}^f\chi_f. \quad (4.23)$$

Em nenhum momento até aqui, nós nos referimos às Eqs. de Einstein em nossa análise. Agora, usaremos as Eqs. de Einstein na análise da equação (4.23). Retomemos a equação (4.17)

$$R_{ab}k^ak^b = 0,$$

a qual, usando as Eqs. de Einstein, podemos escrever que

$$R_{ab}k^ak^b = 8\pi \left[T_{ab}\chi^a\chi^b - \frac{1}{2}Tg_{ab}\chi^a\chi^b \right]$$

¹ $(\chi_{\square d}\nabla_{\square}\chi_c)(\nabla_a\chi_b) = (\chi_{\square a}\nabla_{|d}\chi_{e|})\nabla_b\chi_c,$
 $-\frac{1}{2}\chi_c(\nabla_d\chi_e)(\nabla_a\chi_b) = \frac{1}{2}[(\chi_a\nabla_d\chi_e) - (\chi_b\nabla_d\chi_e)\nabla_a\chi_c],$
 $-\frac{1}{2}\chi_c(\nabla_d\chi_e)(\nabla_a\chi_b) = (\nabla_d\chi_e)\chi_{\square a}\nabla_b\chi_c,$
 $-\frac{1}{2}\chi_c(\nabla_d\chi_e)(\nabla_a\chi_b) = -\frac{1}{2}\chi_c(\nabla_d\chi_e)(\nabla_a\chi_b),$ onde usamos repetidamente a (4.10).

e portanto, como $g_{ab}\chi^a\chi^b = 0$ no horizonte,

$$T_{ab}\chi^a\chi^b = 0. \quad (4.24)$$

Pela condição de energia dominante, $-T^a{}_b\chi^b$ deve ser um vetor nulo ou tipo tempo direcionado para o futuro. No entanto, pela (4.24), $-T^a{}_b\chi^b$ deve estar na mesma direção de χ^a , ou seja, $\chi_{\square c}T_{a\square b}\chi^b = 0$. Portanto, o lado direito da (4.23) anula, consequentemente

$$\chi_{\square d}\nabla_{\square}k = 0. \quad (4.25)$$

Da (4.25), contraída com χ^c , obtemos

$$\chi^c\chi_d\nabla_c k - \chi^c\chi_c\nabla_d k = 0,$$

onde $\chi^c\chi_c = 0$ no horizonte, portanto, .

$$\chi_d\chi^c\nabla_c k = 0.$$

Dessa forma, k é constante sobre o horizonte, ou seja, $\epsilon^{abcd}\chi_d\nabla_c k = 0$. No entanto, $\epsilon^{abcd}\chi_d$ é tangente ao horizonte, então $\nabla_c k$ é ortogonal e proporcional à χ_c , já que χ_c é ortogonal ao horizonte, portanto $\nabla_c k = \lambda\chi_c$, o que implica em $k = \text{const}$.

Obteremos, agora, a fórmula da massa para um espaço-tempo axissimétrico, estacionário e solução das Eqs. de Einstein. No capítulo 2, definimos, na equação (1.81), a massa de um espaço-tempo assintoticamente plano, estático e de vácuo. Vimos também que esta definição se estende a espaço-tempo assintoticamente plano, estacionário e de vácuo somente no infinito, desde que $T_{ab} \neq 0$ vá a zero rapidamente no infinito. A (1.81) é integrada sobre s , a 2-esfera, a qual é fronteira de uma hipersuperfície Σ , de forma que $\Sigma \cup s = \mathcal{M}$ compacta e com fronteira. Então, podemos aplicar o teorema de Stokes na (1.81),

$$\begin{aligned} M &= -\frac{1}{8\pi} \int_s \alpha \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} d\alpha \\ &= -\frac{3}{8\pi} \int_{\Sigma} \nabla_{\square e} \{ \epsilon_{ab\square cd} \nabla^c \xi^d \} \\ &= -\frac{2}{8\pi} \int_{\Sigma} R^d{}_f \xi^f \epsilon_{deab} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} R_{ab} n^a \xi^b dV \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left(T_{ab} - \frac{1}{2} T g_{ab} \right) n^a \xi^b dV. \end{aligned} \quad (4.26)$$

A equação (4.26) não considera a presença de um buraco negro, ou seja, um horizonte de eventos. Para isso, consideremos Σ uma hipersuperfície tipo espaço assintoticamente plana que intercepta o horizonte em uma 2-esfera $\mathcal{H}$, limite de Σ . Assim, a (4.26) é modificada por um termo devido ao horizonte, tal que

$$M = 2 \int_{\Sigma} \left(T_{ab} - \frac{1}{2} T g_{ab} \right) n^a \xi^b dV - \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{H}} \epsilon_{abcd} \nabla^c \xi^d. \quad (4.27)$$

O último termo poderá ser calculado notando que, no horizonte, $\chi^a = \xi^a + \Omega_H \psi^a$, assim

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{H}} \varepsilon_{abcd} \nabla^c \xi^d &= \int_{\mathcal{H}} \varepsilon_{abcd} \nabla^c \chi^d - \int_{\mathcal{H}} \varepsilon_{abcd} \Omega_H \nabla^c \psi^d \\ &= \int_{\mathcal{H}} \varepsilon_{abcd} \nabla^c \chi^d - 16\pi \Omega_H J_H, \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde usamos que

$$J_H = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{H}} \varepsilon_{abcd} \nabla^c \psi^d.$$

O primeiro termo do lado direito da (4.28) pode ser reescrito considerando que o elemento de volume ε_{ab} em $\mathcal{H}$ pode ser dado por

$$\varepsilon_{qb} = \varepsilon_{abcd} N^c \chi^d,$$

onde N^c é o vetor nulo direcionado para o futuro e normal à $\mathcal{H}$, “entrando” na superfície. N^c é normalizado tal que $N^c \chi_c = -1$. Assim, teremos que

$$\begin{aligned} \varepsilon^{ab} \varepsilon_{abcd} \nabla^c \chi^d &= N_e \chi_f \varepsilon^{abef} \varepsilon_{abcd} \nabla^c \chi^d \\ &= -4 \delta^e_c \delta^f_d \chi_f \nabla^c \chi^d \\ &= -4 N_c \chi_d \nabla^c \chi^d \\ &= -4 N_c (-k \chi^c) \\ &= -4k. \end{aligned}$$

O primeiro termo da (4.28) fica

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{H}} \varepsilon_{abcd} \nabla^c \chi^d &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{H}} (\varepsilon^{ef} \varepsilon_{efcd} \nabla^c \chi^d) \varepsilon_{ab} \\ &= -2k \int_{\mathcal{H}} \varepsilon_{ab} \\ &= -2kA, \end{aligned}$$

onde usamos que

$$\begin{aligned} \varepsilon_{efcd} \varepsilon^{ef} \varepsilon_{ab} &= (-1)^s n! \delta^e_a \delta^f_b \varepsilon_{efcd} \\ &= 2\varepsilon_{abcd}, \end{aligned}$$

e $A = \int_{\mathcal{H}} \varepsilon_{ab}$ é a área do horizonte.

Assim, a equação (4.27) fica

$$M = 2 \int_{\Sigma} \left(T_{ab} - \frac{1}{2} T g_{ab} \right) n^a \xi^b dV + \frac{kA}{4\pi} + 2\Omega_H J_H. \quad (4.29)$$

Devemos, agora, analisar o resultado de uma pequena variação nos parâmetros da (4.29). Uma variação na métrica e, portanto, nos parâmetros da (4.29) só é possível usando a liberdade de aplicarmos difeomorfismos [1] para as soluções, assegurando que ξ^a , ψ^a e a localização do horizonte na variedade permaneçam invariáveis.

Assim, realizando uma variação na (4.29)

$$\begin{aligned}
 \delta M &= 2\delta \left[\int_{\Sigma} \left(T_{ab} - \frac{1}{2} T g_{ab} \right) n^a \xi^b dV \right] + \delta \left(\frac{kA}{4\pi} \right) + 2\delta (\Omega_H J_H) \\
 &= 2 \int_{\Sigma} \delta \left[\left(T_{ab} - \frac{1}{2} T g_{ab} \right) n^a \xi^b dV \right] + \frac{\delta k A}{4\pi} + \frac{k \delta A}{4\pi} + 2\delta \Omega_H J_H + 2\Omega_H \delta J_H \\
 &= 2 \int_{\Sigma} \delta \left[\left(T_{ab} - \frac{1}{2} T g_{ab} \right) n^a \xi^b dV \right] + \frac{k}{4\pi} \delta A + 2\Omega_H \delta J_H + \frac{A}{4\pi} \delta k + 2J_H \delta \Omega_H.
 \end{aligned}$$

Usando que $T = -\frac{1}{8\pi}R$, temos

$$\begin{aligned}
 \delta M &= \int_{\Sigma} \delta \left(2T_{ab} - \frac{1}{8\pi} R g_{ab} \right) n^a \xi^b dV + \frac{k}{4\pi} \delta A + 2\Omega_H \delta J_H + \frac{A}{4\pi} \delta k + 2J_H \delta \Omega_H \\
 &= 2\delta \int_{\Sigma} T_{ab} n^a \xi^b dV - \frac{1}{8\pi} \delta \int_{\Sigma} R g_{ab} n^a \xi^b dV + \frac{k}{4\pi} \delta A + 2\Omega_H \delta J_H + \frac{A}{4\pi} \delta k + 2J_H \delta \Omega_H.
 \end{aligned}$$

No entanto, a variação e posterior integração, usando o teorema de Stokes no segundo termo de δM , tem como resultado, $-\delta M$ ao integrarmos no infinito e $-\frac{A}{4\pi} \delta k - 2J_H \delta \Omega_H$ na integração sobre o horizonte, de forma que a fórmula para a variação da massa fica [9]

$$2\delta M = 2\delta \int T^a_b \xi^b n_a dV + 2\Omega_H \delta J_H + \frac{k}{4\pi} \delta A.$$

Em caso de vácuo, $T_{ab} = 0$, teremos

$$\delta M = \Omega_H \delta J_H + \frac{k}{8\pi} \delta A.$$

4.2 As 4 Leis da Termodinâmica de Buracos Negros

Na seção anterior obtivemos uma completa analogia matemática entre a física de buracos negros e termodinâmica clássica, por obter a relação entre a variação da massa, área e momento angular de um buraco negro

$$\delta M = \frac{1}{8\pi} k \delta A + \Omega_H \delta J_H. \quad (4.30)$$

A 1ª lei termodinâmica afirma que um sistema termodinâmico é completamente descrito pela relação

$$\delta E = T \delta S + P \delta V, \quad (4.31)$$

onde δE é a variação de energia interna do sistema, T a temperatura, δS a variação de entropia e o termo $P \delta V$ são os termos que representam trabalho.

Notemos, então, que δM e δE , $\frac{1}{8\pi} k \delta A$ e $T \delta S$, $\Omega_H \delta J_H$ e $P \delta V$ são termos análogos, já que M representa a energia do “sistema” buraco negro, $\Omega_H \delta J_H$ representa o termo de trabalho²

²Lembremos também que, se $T_{ab} \neq 0$ representa um campo elétrico, o termo de sua variação também representaria trabalho, já que é pelo momento angular e carga elétrica que podemos obter transformações reversíveis no sistema buraco negro.

e pelo Teorema da Área, δA , é sempre positiva, assim como δS , então, associaremos $\frac{1}{8\pi}k$ a T . No entanto, para que $\frac{1}{8\pi}k$ e T sejam análogos, devemos considerar que a temperatura, T , pela lei zero da termodinâmica é constante sobre todo corpo em equilíbrio térmico. Na equação (4.25), mostramos que k é constante sobre todo o horizonte de eventos. A lei zero da termodinâmica de buracos negros é, então, sustentada por k ser constante sobre todo o horizonte de um buraco negro estacionário e, portanto, análogo à temperatura.

Nos falta, ainda, considerar que pela 3ª lei termodinâmica a temperatura de zero absoluto é impossível de ser alcançada por qualquer processo físico. Dessa forma uma completa analogia entre k e T só é possível se k nunca for nulo. Observemos a (4.4) para um buraco negro de Kerr-Newmann. Notemos que, para que k , na (4.4), anule, precisamos ter que $M^2 < a^2 + e^2$, ou seja, um buraco negro extremo, dando origem a uma singularidade nua. Dessa forma a redução de k a zero, por uma sequência finita de processos físico, violaria o “*Princípio do Censor Cósmico*,” estabelecido por R. Penrosé. Assim, a 3ª lei da termodinâmica de buracos negros enuncia que é impossível, por qualquer processo físico, reduzir k a zero.

A 2ª lei é imediatamente enunciada considerando o Teorema da Área, portanto,

$$\delta A \geq 0$$

para qualquer processo físico.

Completa a analogia entre os termos da (4.30) e (4.31), enunciamos a 1ª lei da termodinâmica de buracos negro como: qualquer sistema termodinâmico, formado por buracos negros, é completamente descrito pela relação (4.30).

4.3 Termodinâmica de Buracos Negros

Nesta seção, desenvolveremos algumas das consequências de termos estabelecido, na seção anterior, as 4 leis da termodinâmica de buracos negros. A equação (3.5) é a relação mais importante para o desenvolvimento dessa teoria, já que ela contém toda informação sobre o estado termodinâmico do “sistema” buraco negro.

Substituindo a equação (3.9) na (3.5), escreveremos a (3.5) como função da área

$$\frac{A}{16\pi} = \frac{1}{2} \left[M^2 + (M^4 - J^2)^{1/2} \right]. \quad (4.32)$$

Corrigiremos, agora, a analogia entre área do horizonte de eventos e entropia, a qual não é $A = S$, mas sim

$$S = \frac{1}{4}kA, \quad (4.33)$$

onde k é a constante de Boltzmann. A função $M = M(S, J)^3$ deveria ser, como em termodinâmica clássica, uma função homogênea e de primeira ordem em relação aos parâmetros extensivos, S e J , no entanto, a (4.32) não é uma função homogênea de primeira ordem. Isso se deve a natureza do buraco negro, a qual, ao contrário dos sistemas termodinâmicos usuais, não pode ser dividido em subsistemas separados e idênticos. Esse fato é bem exemplificado quando consideramos a colisão de dois buracos negros. A área de dois buracos

³Correspondente a (4.32), usando a analogia dada em (4.33).

negros podem ser adicionadas, mas após a colisão, pela (3.11), não há perda de energia total, ao contrário pode haver aumento na massa irreduzível⁴, caracterizando uma transformação irreversível. Apesar disso, chamaremos S e J de parâmetros extensivos do sistema buraco negro.

Resolvendo a (4.32), teremos

$$M = \left[2S + \left(\frac{1}{8S} \right) J^2 \right]^{1/2}, \quad (4.34)$$

onde usamos unidades, tais que $k \approx \frac{1}{8\pi}$. Invertendo a equação (4.34), de forma a obtermos uma função $S = S(M, J)$,

$$16S^2 - 8M^2S + J^2 = 0,$$

a qual produz

$$S = \frac{M^2}{4} + \frac{1}{4} [M^4 - J^2]^{1/2}. \quad (4.35)$$

A diferenciação da (4.34), nos dá

$$dM = \frac{\partial M}{\partial S} dS + \frac{\partial M}{\partial J} dJ,$$

de forma que nossos parâmetros intensivos são definidos por

$$\begin{aligned} T &\equiv \frac{\partial M}{\partial S} \\ &= \frac{1}{M} - \frac{J^2}{16MS^2}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

e

$$\begin{aligned} \Omega_H &\equiv \frac{\partial M}{\partial J} \\ &= \frac{J}{8MS}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

T é exatamente $\frac{k}{2}$ dado em (4.4) e Ω_H é a mesma velocidade do horizonte que calculamos na (2.18). As equações (4.36) e (4.37), as quais expressam os parâmetros intensivos em termos dos parâmetros extensivos, serão as nossas equações de estado.

Em termodinâmica clássica, a primeira lei é uma equação homogênea de primeira ordem nos parâmetros extensivos, e em consequência disso, ela pode ser escrita na forma de Euler. Aqui, no entanto, nossa primeira lei não é de primeira ordem, como podemos ver, já que

$$M(\lambda S, \lambda J) \neq \lambda M(S, J)$$

e, sim

$$M(\lambda S, \lambda J) = \lambda^{1/2} M(S, J).$$

⁴Consequentemente, um aumento na área do buraco negro final.

Assim, a primeira lei da termodinâmica de buracos negros é uma equação homogênea de ordem $1/2$ e, então, a forma equivalente a de Gibbs-Duhem é dada por Smarr em 1973 e tem a forma [5]

$$\frac{1}{2}M = TS + \Omega_H J, \quad (4.38)$$

a qual, quando diferenciada, fica

$$-\frac{1}{2}dM = SdT + Jd\Omega_H,$$

onde

$$\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{\Omega_H} = -2S, \quad (4.39)$$

e

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \Omega_H}\right)_T = -2J. \quad (4.40)$$

Analisaremos, agora, as quantidades que nos informam as propriedades físicas de nosso sistema termodinâmico buraco negro. Uma dessas quantidades é a chamada capacidade térmica

$$C_J = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_J. \quad (4.41)$$

Podemos interpretar a capacidade térmica como a capacidade do buraco negro de absorver energia de forma reversível, ou seja, a temperatura aumenta isotropicamente (J e e constantes). Calculemos, então, C_J eliminando M entre a (4.35) e a primeira das (4.36) mantendo J constante. Obtemos [5]

$$C_J = \frac{8MS^3T}{J^2 - 8T^2S^3}. \quad (4.42)$$

Para um buraco negro de Schwarzschild a (4.42) fica

$$C = -\frac{1}{T^2},$$

a qual é negativa, isso significa que ao irradiar, um buraco negro de Schwarzschild se “aquece”. Isso pode ser visto também ao notarmos que quando fizemos colidir dois buracos negro de Schwarzschild, extraímos energia. No entanto, a área do horizonte final aumenta e sua temperatura diminui.

Outro interessante resultado da (4.42) para um buraco negro de Kerr é notado quando observamos seu denominador. Notamos que para $J^2 = 8T^2S^3$, C_J diverge. Já vimos que ao aproximarmos o buraco negro do caso extremo $T \rightarrow 0, S \rightarrow \frac{1}{4}M^2 > 0$, dessa forma, $C_J \rightarrow 0_+$.

A Figura 4.1 nos mostra o comportamento de C_J como função de J mantendo M fixa. A descontinuidade ocorre para $J^2 = \alpha M^4$ com algum valor de α , satisfazendo

$$\alpha^2 + 6\alpha = 3,$$

impondo $0 < \alpha < 1$, assim $\alpha = 0,464$.

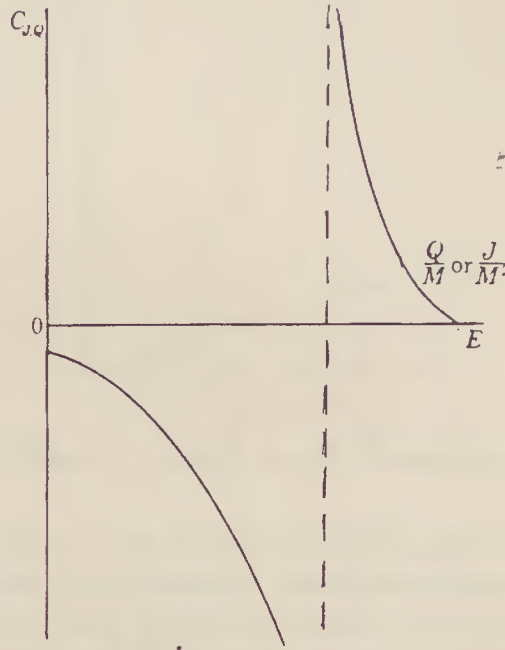


Figura 4.1: Divergência da capacidade térmica de um buraco negro. Extraído de [5]

Notemos que não há descontinuidade na equação (4.38) devido às relações (4.39) e (4.40). Há, no entanto, descontinuidade em C_J , para o valor de $\alpha = 0,464$. Caracterizaremos essa descontinuidade como uma transição de fase de segunda ordem no buraco negro.

Usando as equações (4.36) e (4.37) calculemos a razão

$$\frac{\Omega_H}{T} = \frac{2SJ}{16S^2 - J^2}.$$

No entanto,

$$S = \frac{M^2}{4} + \frac{M^2}{4} \left[1 - \frac{J^2}{M^4} \right]^{1/2},$$

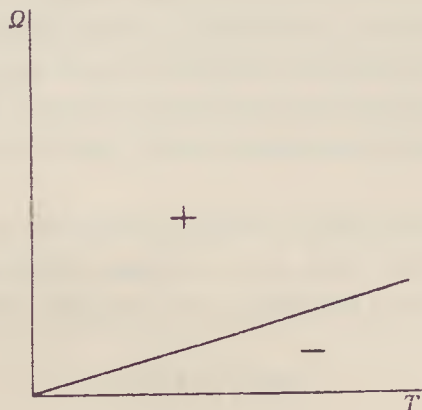
e fazendo $J^2 = \alpha M^4$, obtemos

$$S^2 = \frac{J^2}{16\alpha} \left[1 + (1 - \alpha)^{1/2} \right]^2.$$

Dessa forma, a razão $\frac{\Omega_H}{T}$ para o valor de $\alpha = 0,464$, fica

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_H}{T} &= \frac{\alpha^{1/2} \left[1 + (1 - \alpha)^{1/2} \right]}{2 \left[1 + (1 - \alpha)^{1/2} \right]^2 - 2\alpha} \\ &\cong 0,23. \end{aligned}$$

Ao plotarmos o gráfico $\frac{\Omega_H}{T} = 0,23$, obtemos uma linha reta representando a transição de fase em $\alpha = 0,464$. Veja Figura 4.2. Os sinais representam os valores positivos e negativos do calor específico a $J = \text{const}$. A linha reta representa a transição de fase.

Figura 4.2: Razão Ω_H/T . Extraído de [5]

No capítulo 3, estudamos o caso de dois buracos negros de Schwarzschild, inicialmente separados, os quais colidem posteriormente. Agora, consideremos esses dois buracos negros como um sistema termodinâmico. Inicialmente cada buraco negro é mantido encerrado em uma “caixa” adiabática em equilíbrio a uma temperatura constante. Cada buraco negro tem massas M e m e temperaturas T e t respectivamente. Assumimos diferentes valores para os parâmetros termodinâmicos de cada buraco negro, portanto, devemos assumir também que a interação entre eles seja tão pequena a ponto de ser negligenciada. Isso é possível, mantendo uma separação entre eles muito superior que o raio de Schwarzschild.

O equilíbrio entre esses dois sistemas é alcançado quando removemos as paredes que separam os dois sistemas permitindo que os buracos negros colidam adiabaticamente. A massa do sistema final será a soma das massas de cada buraco negro, $(M + m) = M_f$. Dessa forma, como a massa de um buraco negro é inversamente proporcional à temperatura

$$\begin{aligned} T_f &= \frac{1}{M_f} \\ &= (M + m)^{-1} \\ &= \frac{Tt}{(T + t)}. \end{aligned}$$

A temperatura do sistema final diminui com relação a de cada buraco negro inicial. No entanto, calculando a entropia inicial e final do sistema

$$S_i = \frac{1}{4} (M^2 + m^2)$$

e

$$\begin{aligned} S_f &= \frac{1}{4} (M + m)^2 \\ &= \frac{1}{4} (M^2 + m^2) + \frac{1}{2} Mm, \end{aligned}$$

podemos notar que a entropia final é maior que a inicial por um termo $\frac{1}{2}Mm$. Esse aumento na entropia torna o processo altamente irreversível.

O processo descrito acima para sistemas termodinâmicos formados por buracos negros difere grandemente dos sistemas usuais. Isso pode ser visto quando consideramos dois buracos negros de mesma massa. Após a colisão o sistema formado ainda terá sua entropia acrescida por um fator de $\frac{M^2}{2}$ e uma temperatura reduzida a metade com relação àquela de cada buraco negro antes da colisão. Em sistemas usuais não há aumento na entropia, em processos similares.

Consideraremos, agora, um processo reversível, onde é permitido aos dois buracos negros transferirem energia de um buraco negro a outro sem que colidam. Uma transformação reversível só é possível quando impomos que a entropia total não varie, assim, $dS = 0$. De acordo com a primeira lei

$$dM = TdS_1$$

e

$$dm = tdS_2,$$

portanto,

$$\frac{dM}{T} + \frac{dm}{t} = 0.$$

usando a relação entre massa e temperatura

$$MdM + m dm = 0. \quad (4.43)$$

Como permitimos que os buracos negros troquem energia no processo, suas massas serão variáveis. As respectivas massas dos buracos negros variarão de suas massas iniciais até a massa final de equilíbrio entre os dois buracos negros. Integraremos a (4.43),

$$\int_{M_i}^{M_f} M dM = - \int_{m_i}^{M_f} m dm.$$

Efetuada a integral, obtemos que a massa de equilíbrio de cada buraco negro é dada por

$$M_f = \left[\frac{1}{2} (M_i^2 + m_i^2) \right]^{1/2}$$

e a temperatura de equilíbrio fica

$$T_f = \frac{\sqrt{2} T_i t_i}{(T_i^2 + t_i^2)^{1/2}}.$$

A energia extraída no processo por meio de trabalho é

$$M_i + m_i - 2 \left[\frac{1}{2} (M_i^2 + m_i^2) \right]^{1/2},$$

ou seja, podemos extrair o quadrado da diferença entre as massas iniciais dos buracos negro $(M_i + m_i)^2$. A temperatura média do sistema diminui dos buracos negros iniciais para os finais.

Nossos dois últimos exemplos apresentam diferentes formas de chegarmos ao equilíbrio entre buracos negros. No primeiro, um processo irreversível, no qual os buracos negros

colidem adiabaticamente, entrando em equilíbrio ao formarem um só buraco negro. Nesse processo quando dois buracos negros idênticos colidem há um aumento na entropia, no entanto, em sistemas termodinâmicos usuais isso não ocorre. Já, no segundo, assumimos de início, um processo reversível, no qual a entropia não varia. Os buracos negros podem transferir energia de um para o outro sem colidirem. Nesse caso é possível extraírmos energia de buracos negros.

Conclusão

Classicamente, foi obtido por Carter, Barden e Hawking a formulação matemática que originou na analogia formal entre a física de buracos negros e termodinâmica. No entanto, fisicamente, devido a um buraco negro classicamente não emitir partículas e radiação, essa analogia não representa que as quantidades análogas sejam as mesmas. Isso significa que, classicamente, a temperatura e a gravidade superficial, por exemplo, são análogas matematicamente, mas são quantidades diferentes fisicamente.

O buraco negro, por não emitir radiação, é considerado estar a uma temperatura termodinâmica de zero absoluto. Isso contraria as 4 leis termodinâmicas. Pensando nesse problema, Hawking em 1974, estudou possíveis aspectos quânticos na física de buracos negros. Ele conseguiu provar que, ao contrário do que ele havia provado anteriormente, um buraco negro poderá emitir radiação térmica com mesmo espectro da radiação de corpo negro.

Considerando efeitos quânticos a relação entre física de buracos negros e termodinâmica fica completa, física e matematicamente. Implicações disso ocorrem no conceito de área e entropia de um buraco negro desenvolvidas nessa dissertação, afirmamos que a área de um buraco negro nunca decresce. Portanto, considerando a nova informação, a segunda lei termodinâmica deve ser alterada. Assim, a segunda lei termodinâmica generalizada afirma que em qualquer sistema termodinâmico a entropia total do universo deve aumentar.

Apesar da generalização da segunda lei termodinâmica para buracos negros, as 4 leis da termodinâmica valem para o sistema buraco negro. Disso, analisamos algumas quantidades termodinâmicas interessantes desenvolvidas por Davies em 1976. Uma dessas quantidades é a capacidade térmica de um buraco negro. Essa quantidade diverge para um certo valor, caracterizando uma transição de fase, no entanto, fisicamente, essa transição de fase é uma incognita. Devido a trabalhos com fluidos auto-gravitantes em rotação mostrarem a perda de axissimetria e estabilidade em um valor crítico de sua razão energia rotacional por energia gravitacional Newtoniana, Davies sugeriu algo similar acontecendo na transição de fase de segunda ordem em um buraco negro de Kerr. Segundo ele, um buraco negro de Kerr ficaria instável “entrando em uma fase dinâmica, não axissimétrica, na qual novos graus de liberdade termodinâmica aparecem.”

Há ainda muitas dúvidas com respeito à física de buracos negros, começando inclusive pela sua existência. Faltam dados experimentais que comprovem nossa teoria para a matéria sob influência de um campo gravitacional forte ao ponto de curvar o espaço-tempo significativamente.

Apêndice A

Campos vetoriais não são invariantes por rotações sobre esferas 2-dim.

Devemos, aqui, provar que não existem campos vetoriais invariantes por rotações sobre uma esfera bi-dimensional. Seja v um vetor qualquer sobre uma esfera bi-dimensional e ζ_1^a e ζ_2^a dois campos de Killing nesta esfera com o elemento de linha

$$ds^2 = R \left(d\theta + \sin^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (\text{A.1})$$

Sabemos que um dos campos de Killing em (A.1) é $\psi^a = \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right)^a$.

Para obter a prova a que nos propomos mostraremos que é impossível obtermos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\zeta_1} v &= 0, \\ \mathcal{L}_{\zeta_2} v &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

para qualquer que seja v .

Antes disso, devemos encontrar o segundo campo de Killing. Da Eq. de Killing

$$\zeta_{\mu;\nu} + \zeta_{\nu;\mu} = 0$$

temos que

$$\partial_\nu \zeta_\mu + \partial_\mu \zeta_\nu - 2\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \zeta_\lambda = 0 \quad (\text{A.3})$$

Da equação para os símbolos de Cristofell, temos

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\beta} \{ \partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu} \}. \quad (\text{A.4})$$

Obtemos, usando a (A.3) e (A.1), três equações, tais que

$$\begin{aligned} \partial_\phi \zeta_\phi - \Gamma^\theta_{\phi\phi} \zeta_\theta - \Gamma^\phi_{\phi\phi} \zeta_\phi &= 0, \\ \partial_\theta \zeta_\theta - \Gamma^\theta_{\theta\theta} \zeta_\theta - \Gamma^\phi_{\theta\theta} \zeta_\phi &= 0, \\ \partial_\theta \zeta_\phi + \partial_\phi \zeta_\theta - 2\Gamma^\theta_{\theta\phi} \zeta_\theta - \Gamma^\phi_{\theta\phi} \zeta_\phi &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Usando os valores necessários dos símbolos de Cristofell e substituindo-os nas equações acima, (A.5), obtemos as seguintes equações

$$\begin{aligned} \partial_\phi \zeta_\phi + \sin \theta \cos \theta \zeta_\theta &= 0, \\ \partial_\theta \zeta_\theta &= 0, \\ \partial_\theta \zeta_\phi + \partial_\phi \zeta_\theta - \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} \zeta_\phi &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

A $\partial_\theta \zeta_\theta = 0$ implica em que ζ_θ não depende de θ , portanto, $\zeta_\theta = f(\phi)$. Substituindo ζ_θ nas demais equações da (A.6), obtemos

$$\begin{aligned}\partial_\phi \zeta_\phi &= \sin \theta \cos \theta f(\phi), \\ \partial_\theta \zeta_\phi - \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} \zeta_\phi &= -f'(\phi).\end{aligned}\tag{A.7}$$

A primeira equação implica em

$$\zeta_\phi = -\sin \theta \cos \theta \int f(\phi) d\phi,$$

a qual quando substituída na segunda,

$$\begin{aligned}\partial_\theta \left(-\sin \theta \cos \theta \int f(\phi) d\phi \right) + 2 \cos^2 \theta \int f(\phi) d\phi &= -f'(\phi) \\ -\sin \theta \partial_\theta (\cos \theta) \int f(\phi) d\phi - \cos \theta \partial_\theta (\sin \theta) \int f(\phi) d\phi + 2 \cos^2 \theta \int f(\phi) d\phi &= \\ \sin^2 \theta \int f(\phi) d\phi + \cos^2 \theta \int f(\phi) d\phi &= \\ \int f(\phi) d\phi &= \end{aligned}$$

assim,

$$-\partial_\phi f(\phi) = \int f(\phi) d\phi$$

então,

$$-\partial^\phi \partial_\phi f(\phi) = f(\phi),$$

e, portanto,

$$f''(\phi) + f(\phi) = 0.\tag{A.8}$$

A solução geral para essa equação diferencial será

$$\begin{aligned}f(\phi) &= A \cos \phi + B \sin \phi, \\ &= A \cos(\phi + B).\end{aligned}$$

Assim,

$$\zeta_\theta = A \cos(\phi + B)$$

e

$$\zeta_\phi = -\frac{\sin 2\theta}{2} A \sin(\phi + B) + const.$$

Substituindo ζ_ϕ e ζ_θ nas equações (A.7), obtemos que as constantes ficam, $const = 0$, $A = 1$, onde podemos fazer $B = 0$, assim

$$\begin{aligned}\zeta_2 &= \zeta^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \\ &= \cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi}.\end{aligned}$$

Encontrados os dois campos de Killing para (A.1)

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= \frac{\partial}{\partial \phi}, \\ \zeta_2 &= \cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi},\end{aligned}$$

devemos usar as equações dadas na (A.2). A primeira nos dá

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\zeta_1} v &= [\zeta_1, v] \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial \phi}, v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right] \\ &= \frac{\partial v^\mu}{\partial \phi}.\end{aligned}\tag{A.9}$$

Já a segunda, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\zeta_2} v &= [\zeta_2, v] \\ &= \left[\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi}, v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right] \\ &= \left[\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta}, v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right] - \left[\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi}, v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right] \\ &= \cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} \left(v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) - v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ &\quad - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \left(v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) + v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ &= \cos \phi \frac{\partial v^\mu}{\partial \theta} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) - v^\mu \frac{\partial \cos \phi}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ &\quad - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin \phi \frac{\partial v^\mu}{\partial \phi} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) + v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin \phi \right) \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right).\end{aligned}\tag{A.10}$$

Para provarmos que a (A.9) e (A.10) nunca se anulam, devemos analisa-las para cada coordenada θ e ϕ , assim, obtemos o seguinte sistema de equações. Para as (A.9), temos

$$\frac{\partial v^\phi}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow v^\phi = h(\theta),$$

e

$$\frac{\partial v^\theta}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow v^\theta = g(\theta),$$

e para as (A.10)

$$\cos \phi \frac{\partial v^\theta}{\partial \theta} + v^\phi \sin \phi = 0 \Rightarrow \frac{\partial v^\theta}{\partial \theta} = -v^\phi \frac{\sin \phi}{\cos \phi}$$

e

$$\cos \phi \frac{\partial v^\phi}{\partial \theta} + v^\phi \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cos \phi + \frac{v^\theta}{\sin \theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v^\phi}{\partial \theta} - v^\phi \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = -\frac{v^\theta}{\sin \theta \cos \phi}.$$

Resolvendo o sistema de equações, da primeira e terceira das quatro acima, obtemos

$$\frac{\partial v^\theta}{\partial \theta} = -h(\theta) \frac{\sin \phi}{\cos \phi},$$

a qual implica em

$$v^\theta = -\frac{\sin \phi}{\cos \phi} \int H(\theta) d\theta,$$

mas da segunda equação, v^θ deveria ser função somente de θ , dessa forma

$$v^\theta = -\tan \phi \int H(\theta) d\theta,$$

deveria ter sua derivada, com relação a ϕ , nula

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^\theta}{\partial \phi} &= -\int H(\theta) d\theta \frac{\partial \tan \phi}{\partial \phi} \\ &= -\sec^2 \phi \int H(\theta) d\theta, \end{aligned}$$

no entanto, $\frac{\partial v^\theta}{\partial \phi}$ nunca anula.

Substituindo v^θ na quarta equação

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^\phi}{\partial \theta} - v^\phi \frac{\cos \theta}{\sin \theta} &= \frac{\tan \phi \int H(\theta) d\theta}{\cos \phi \sin \theta} \\ &= \frac{\tan \phi}{\cos \phi} K(\theta) \end{aligned}$$

a qual quando integrada

$$v^\phi e^{-\int \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta} = \int \frac{\tan \phi}{\cos \phi} K(\theta) e^{-\int \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta} d\theta,$$

assim,

$$v^\phi = \int \frac{\tan \phi}{\cos \phi} \Theta(\theta),$$

onde

$$\Theta(\theta) = \frac{K(\theta) e^{-\int \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta}}{e^{-\int \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta}}.$$

Substituindo esse resultado na primeira equação

$$\frac{\partial v^\phi}{\partial \phi} = (\sec^3 \phi + \cos \phi \sec \phi \tan^2 \phi) (\Theta(\theta)),$$

a qual, também nunca anula.

Dessa forma, mostramos que o sistema de equações encontrado não tem solução, portanto, mostramos que as equações (A.2), não são satisfeitas para nenhum v .

Apêndice B

Método de Bases Ortonormais - Tetradas

O método de tetradas promove uma maneira mais simples e direta no cálculo das soluções das Eqs. de Einstein. Esse método consiste em escrever a métrica geral de um espaço-tempo em bases ortonormais não coordenadas de campos vetoriais, $(e_\mu)^a$, onde os índices gregos indicam índices de tetradas e os latinos as componentes do vetor (e_μ) , satisfazendo que

$$(e_\mu)^a (e_\nu)_a = \eta_{\mu\nu}, \quad (\text{B.1})$$

onde $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, $\mu, \nu = 0, \dots, 3$ e $a = 0, \dots, 3$.

A relação (B.1) implica em

$$\sum_{\mu, \nu} \eta_{\mu\nu} (e_\mu)^a (e_\nu)_b = \delta^a_b. \quad (\text{B.2})$$

Isso pode ser verificado ao contrairmos a (B.2) com um vetor qualquer, $(e_\sigma)^b$,

$$\eta_{\mu\nu} (e_\mu)^a (e_\nu)_b (e_\sigma)^b = \delta^a_b (e_\sigma)^b.$$

Usando a (B.1) escrevemos

$$\begin{aligned} \eta^{\mu\nu} \eta_{\nu\sigma} (e_\mu)^a &= \delta^a_b (e_\sigma)^b \\ \delta^\mu_\sigma (e_\mu)^a &= \delta^a_b (e_\sigma)^b \\ (e_\sigma)^a &= (e_\sigma)^a. \end{aligned}$$

A igualdade é preservada, portanto, qualquer projeção dos dois tensores (lado direito e esquerdo da (B.2)) são iguais, como consequência disso os próprios tensores são iguais.

Para que possamos determinar a curvatura de uma métrica usando bases ortonormais é necessário atendermos a três condições. Tais condições devem poder ser expressas em bases ortonormais. A primeira dessas condições é que o operador derivada seja compatível com a métrica, ou seja, $\nabla_a g_{bc} = 0$. a segunda, o operador derivada deve ser de livre torção, $\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f$, onde f é uma função. A terceira expressa o tensor de Riemann em termos de operadores derivada

$$2\nabla_{[a} \nabla_{b]} w_c = R_{abc}{}^d w_d. \quad (\text{B.3})$$

Começamos definindo a conexão 1-forma $w_{a\mu\nu}$, por

$$w_{a\mu\nu} = (e_\mu)^b \nabla_a (e_\nu)_b, \quad (\text{B.4})$$

onde suas componentes, $w_{a\mu\nu}$, são chamados coeficientes de rotação de Ricci e dados por

$$w_{\lambda\mu\nu} = (e_\lambda)^a (e_\mu)^b \nabla_a (e_\nu)_b. \quad (\text{B.5})$$

Sabendo que

$$\nabla_a [(e_\nu)_b (e_\mu)^b] = (e_\mu)^b \nabla_a (e_\nu)_b + (e_\nu)_b \nabla_a (e_\mu)^b,$$

e, portanto, a (B.4) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} w_{a\mu\nu} &= \nabla_a (e_\nu)_b (e_\mu)^b - (e_\nu)_b \nabla_a (e_\mu)^b \\ &= \nabla_a \eta_{\nu\mu} - (e_\nu)_b \nabla_a (e_\mu)^b \\ &= - (e_\nu)_b \nabla_a (e_\mu)^b \\ &= -w_{a\nu\mu}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

A (B.6) juntamente com a (B.1) implica em $\nabla_a g_{bc} = 0$ e assim, em bases tetradas a primeira condição é escrita como

$$w_{a\mu\nu} = -w_{a\nu\mu}.$$

Usemos, agora, a terceira condição, escrevendo o tensor de Riemann como função dos coeficientes de rotação de Ricci. Primeiramente, escreveremos R_{abcd} em bases ortonormais,

$$\begin{aligned} R_{\rho\sigma\mu\nu} &= R_{abcd} (e_\rho)^a (e_\sigma)^b (e_\mu)^c (e_\nu)^d, \\ &= (e_\rho)^a (e_\sigma)^b (e_\mu)^c (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) (e_\nu)_c, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

onde

$$(e_\mu)^c (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) (e_\nu)_c = \nabla_a \{ (e_\mu)^c \nabla_b (e_\nu)_c \} - [\nabla_a (e_\mu)^c] [\nabla_b (e_\nu)_c]. \quad (\text{B.8})$$

O último termo, da (B.8), pode ser escrito como

$$\begin{aligned} [\nabla_a (e_\mu)^c] [\nabla_b (e_\nu)_c] &= [\nabla_a (e_\mu)^f] \delta^c_f [\nabla_b (e_\nu)_c] \\ &= \sum_{\alpha,\beta} \eta^{\alpha\beta} [\nabla_a (e_\mu)^f] (e_\alpha)^c (e_\beta)_f [\nabla_b (e_\nu)_c], \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

onde na última igualdade, usamos a relação (B.2). Assim,

$$\begin{aligned} R_{\rho\sigma\mu\nu} &= (e_\rho)^a (e_\sigma)^b \{ \nabla_a [(e_\mu)^c \nabla_b (e_\nu)_c] - \sum_{\alpha,\beta} \eta^{\alpha\beta} [\nabla_a (e_\mu)^f] (e_\alpha)^c (e_\beta)_f [\nabla_b (e_\nu)_c] \\ &\quad + \nabla_b [(e_\mu)^c \nabla_a (e_\nu)_c] - \sum_{\alpha,\beta} \eta^{\alpha\beta} [\nabla_b (e_\mu)^f] (e_\alpha)^c (e_\beta)_f [\nabla_a (e_\nu)_c] \} \\ &= (e_\rho)^a (e_\sigma)^b \{ \nabla_a w_{b\mu\nu} - \nabla_b w_{a\mu\nu} - \sum_{\alpha,\beta} \eta^{\alpha\beta} [w_{a\beta\mu} w_{b\alpha\nu} - w_{b\beta\mu} w_{a\alpha\nu}] \} \\ &= (e_\rho)^a (e_\sigma)^b \nabla_a w_{b\mu\nu} - (e_\rho)^a (e_\sigma)^b \nabla_b w_{a\mu\nu} - \sum_{\alpha,\beta} \eta^{\alpha\beta} [w_{\rho\beta\mu} w_{\sigma\alpha\nu} - w_{\sigma\beta\mu} w_{\rho\alpha\nu}]. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

onde notamos que o primeiro e segundo termos da (B.10) podem ser escritos como

$$(e_\rho)^a (e_\sigma)^b \nabla_a w_{b\mu\nu} = (e_\rho)^a \nabla_a [(e_\sigma)^b w_{b\mu\nu}] - w_{b\mu\nu} (e_\rho)^a \nabla_a (e_\sigma)^b. \quad (\text{B.11})$$

No entanto,

$$w_{b\mu\nu} (e_\rho)^a \nabla_a (e_\sigma)^b = w_{\lambda\mu\nu} (e_\xi)_b \eta^{\xi\lambda} (e_\rho)^a \nabla_a (e_\sigma)^b, \quad (\text{B.12})$$

onde usamos que

$$w_{\lambda\mu\nu} = (e_\lambda)^b w_{b\mu\nu}$$

contraído com $\eta^{\xi\lambda} (e_\xi)_b$, produz

$$\begin{aligned} \eta^{\alpha\xi} (e_\xi)_b w_{\lambda\mu\nu} &= \eta^{\alpha\xi} (e_\xi)_b (e_\lambda)^b w_{b\mu\nu} \\ &= \eta^{\alpha\xi} \eta_{\xi\lambda} w_{b\mu\nu} \\ &= \delta^\alpha_\lambda w_{b\mu\nu} \\ &= w_{b\mu\nu}. \end{aligned}$$

A (B.12) ainda pode ser reescrita notando que

$$\begin{aligned} w_{b\mu\nu} (e_\rho)^a \nabla_a (e_\sigma)^b &= w_{\lambda\mu\nu} (e_\rho)^a \eta^{\xi\lambda} (e_\xi)_b \nabla_a (e_\sigma)^b \\ &= w_{\alpha\mu\nu} w_{\rho\beta\sigma} \eta^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Assim, a (B.11) fica

$$(e_\rho)^a (e_\sigma)^b \nabla_a w_{b\mu\nu} = (e_\rho)^a \nabla_a w_{\sigma\mu\nu} - \eta^{\alpha\beta} w_{\rho\beta\sigma} w_{\alpha\mu\nu},$$

e, portanto, a (B.10)

$$\begin{aligned} R_{\rho\sigma\mu\nu} &= (e_\rho)^a \nabla_a w_{\sigma\mu\nu} - \eta^{\alpha\beta} w_{\rho\beta\sigma} w_{\alpha\mu\nu} - (e_\sigma)^b \nabla_b w_{\rho\mu\nu} + \eta^{\alpha\beta} w_{\sigma\beta\rho} w_{\alpha\mu\nu} \\ &\quad - \sum_{\alpha,\beta} \eta^{\alpha\beta} [w_{\rho\beta\mu} w_{\sigma\alpha\nu} - w_{\sigma\beta\mu} w_{\rho\alpha\nu} - w_{\rho\beta\sigma} w_{\alpha\mu\nu} + w_{\sigma\beta\rho} w_{\alpha\mu\nu}]. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

A (B.13) expressa a terceira condição como função dos coeficiente de rotação de Ricci. O tensor de Ricci, então, é dado por

$$R_{\rho\mu} = \sum_{\sigma,\nu} \eta^{\sigma\nu} R_{\rho\sigma\mu\nu}. \quad (\text{B.14})$$

Falta-nos expressar a condição de livre torção em bases tetradas. A condição de livre torção pode ser expressa em termos do comutador de dois campos vetoriais e do operador derivada

$$[v, w]^b = v^a \nabla_a w^b - w^a \nabla_a v^b.$$

A relação acima vale para qualquer campo vetorial em qualquer base, o que implica em

$$\begin{aligned} (e_\sigma)_a [e_\mu, e_\nu]^a &= (e_\sigma)_a \{ (e_\mu)^b \nabla_b (e_\nu)^a - (e_\nu)^b \nabla_b (e_\mu)^a \} \\ &= (e_\mu)^b \nabla_b (e_\nu)^a - (e_\nu)^b (e_\sigma)_a \nabla_b (e_\mu)^a \\ &= (e_\mu)^b w_{b\sigma\nu} - (e_\nu)^a w_{a\sigma\mu} \\ &= w_{\mu\sigma\nu} - w_{\nu\sigma\mu}. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Ou, de outra forma, podemos escrever

$$\nabla_{\square a} (e_\sigma)_{b\square} = \sum_{\sigma,\nu} \eta^{\mu\nu} (e_\mu)_{\square a} w_{b\square\sigma\nu}, \quad (\text{B.16})$$

a qual quando contraída com $(e_\rho)^a (e_\sigma)^b$ e usando a definição de conexão 1-forma, produz

$$\begin{aligned} (e_\rho)^a (e_\sigma)^b \nabla_{\square a} (e_\sigma)_{b\square} &= \sum_{\mu,\nu} \eta^{\mu\nu} (e_\rho)^a (e_\sigma)^b (e_\mu)_{\square a} w_{b\square\sigma\nu} \\ (e_\rho)^a w_{a\lambda\sigma} - (e_\sigma)^b w_{b\rho\sigma} &= 2 \sum_{\mu,\nu} \eta^{\mu\nu} (e_\rho)^a (e_\mu)_{\square a} (e_\sigma)^b w_{b\square\sigma\nu} \\ &= \sum_{\mu,\nu} \eta^{\mu\nu} (e_\rho)^a (e_\mu)_a (e_\sigma)^b w_{b\sigma\nu} - \sum_{\mu,\nu} \eta^{\mu\nu} (e_\rho)^a (e_\mu)_b (e_\sigma)^b w_{a\sigma\nu} \\ &= \sum_{\mu,\nu} \eta^{\mu\nu} \eta_{\rho\mu} w_{\lambda\sigma\nu} - \sum_{\mu,\nu} \eta^{\mu\nu} \eta_{\lambda\mu} w_{\rho\sigma\nu} \\ &= w_{\lambda\sigma\rho} - w_{\rho\sigma\lambda}, \end{aligned}$$

o que confirma a (B.16).

A condição de livre torção implica em que a derivada antissimetrisada de uma 1-forma é independente do operador derivada, e consequentemente a (B.16) pode ser escrita em termos da derivada ordinária,

$$\partial_{\square a} (e_\sigma)_{b\square} = \sum_{\mu,\nu} \eta^{\mu\nu} (e_\mu)_{\square a} w_{b\square\sigma\nu}. \quad (\text{B.17})$$

Referências Bibliográficas

- [1] Robert M. Wald (1984). *General Relativity*. The University of Chicago Press.
- [2] Ohanian (1976). *Gravitation and Spacetime*. W.W. Norton.
- [3] W. Misner, S. Thorne, Wheeler (1973). *Gravitation*. W.H. Freeman.
- [4] I.D. Novikov and V.P. Frolov (1986). *Physics of Black Holes*. Kluwer Academic Publishers.
- [5] P.C.W. Davies (1977). *Proc. R. Soc. Lond. A.* **353**, 499.
- [6] D. Christodoulou (1970). *Physical Review Letters* **25**, 22, 1596.
- [7] J.D. Bekenstein (1973). *Physical Review* **D7** 8, 2333.
- [8] B. Carter (1968). *Phys. Rev.* **174**, 1559.
- [9] J.M. Barden, B. Carter, S.W. Hawking (1973) *Commun. Math. Phys.* **31**, 161.

