

MARCELA APARECIDA GUERREIRO MACHADO

MONITORAMENTO DE PROCESSOS: UMA ANÁLISE DA PRODUÇÃO
CIENTÍFICA DA DOCENTE APÓS O DOUTORADO

Tese apresentada à Faculdade de
Engenharia do Campus de
Guaratinguetá, Universidade
Estadual Paulista, para a obtenção
do título de Livre Docente em
Estatística.

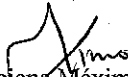
Guaratinguetá
2016

Machado, Marcela Aparecida Guerreiro
M149m Monitoramento de processos: uma análise da produção científica da
docente após o doutorado / Marcela Aparecida Guerreiro Machado –
Guaratinguetá, 2017.
115 f.: il.
Bibliografia: f. 112-115

Tese (Livre-Docência) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de
Engenharia de Guaratinguetá, 2017.

1. Processo decisório por critério múltiplo. 2. Controle de processo –
Métodos estatísticos. I. Título.

CDU 65.012.4


Luciana Máximo
Bibliotecária/CRB-8 3595

DADOS CURRICULARES

MARCELA APARECIDA GUERREIRO MACHADO

NASCIMENTO	14.05.1982 – SÃO PAULO / SP
FILIAÇÃO	Marcos de Lélis Brandão Machado Maria Sueli Guerreiro Machado
2000/2004	Curso de Graduação em Engenharia de Produção Mecânica FEG – UNESP
2005/2006	Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, nível de Mestrado, na Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá da UNESP
2006/2009	Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, nível de Doutorado, na Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá da UNESP

MACHADO, M. A. G. MONITORAMENTO DE PROCESSOS: UMA ANÁLISE DA PRODUÇÃO CIENTÍFICA DA DOCENTE APÓS O DOUTORADO. 2016. 115f. Tese de Livre Docência em Estatística – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2016.

RESUMO

A docente analisa sua produção científica, enfatizando as pesquisas realizadas após o seu doutorado, concluído em 2009. Trata-se de uma série de 17 artigos versando sobre gráficos de controle para o monitoramento de processos univariados e multivariados. Com relação à processos univariados, a docente investigou o desempenho dos gráficos de controle autocorrelacionados e também com regras especiais de decisão. Com relação à processos multivariados, propôs novas estatísticas para o monitoramento do vetor de médias e/ou da matriz de covariâncias e, mais recentemente, vem investigando o desempenho dos gráficos de controle para o monitoramento de processos multivariados autocorrelacionados, com e sem regras especiais de decisão.

Palavras-chave: gráficos de controle; processos univariados; processos multivariados; processos autocorrelacionados; regras especiais de decisão.

MACHADO, M. A. G. Process monitoring: an analysis of the scientific production after the author's doctorate. 2016. 115f. Tese de Livre Docência em Estatística – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2016.

ABSTRACT

The author analysis yours scientific production, focusing on the research published after the conclusion of her doctorate, in 2009. It is a set of 17 articles about control charts for monitoring univariate and multivariate processes. Regarding univariate processes, the author investigated the performance of autocorrelated control charts and control charts with special runs rules. Regarding multivariate processes, the author proposed new statistics for monitoring the mean vector and/or the covariance matrix, and recently, has been investigating the performance of the control charts for monitoring multivariate autocorrelated processes, with or without special runs rules.

Keywords: control charts; univariate processes; multivariate processes; autocorrelated processes; special runs rules.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
1.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	9
1.2	ORGANIZAÇÃO DA TESE	17
2	GRÁFICOS DE CONTROLE UNIVARIADOS USUAIS	19
2.1	GRÁFICOS DE CONTROLE PARA O MONITORAMENTO DA MÉDIA DO PROCESSO	19
2.2	GRÁFICOS DE CONTROLE PARA O MONITORAMENTO DA DISPERSÃO DO PROCESSO	21
2.2.1	Gráfico de R	21
2.2.2	Gráfico de S^2	21
2.3	COMPARANDO OS GRÁFICOS DE R E S^2	22
2.4	OS GRÁFICOS CONJUNTOS DE $\bar{X}$ & R E $\bar{X}$ E S^2	23
2.4.1	Comparando os gráficos conjuntos univariados	24
3	GRÁFICOS DE CONTROLE MULTIVARIADOS	25
3.1	GRÁFICOS DE CONTROLE PARA O MONITORAMENTO DO VETOR DE MÉDIAS	25
3.1.1	Gráfico de T^2	25
3.1.2	Gráficos simultâneos de $\bar{X}$	27
3.2	GRÁFICOS DE CONTROLE PARA O MONITORAMENTO DA MATRIZ DE COVARIÂNCIAS	29
3.2.1	Gráfico de S	29
3.2.1	Gráfico da máxima variância (gráfico de VMAX).....	30
3.3	MONITORAMENTO CONJUNTO DO VETOR DE MÉDIAS E DA MATRIZ DE COVARIÂNCIAS	32

3.3.1	Gráfico de MVMAX	33
3.3.2	Comparando os gráficos conjuntos para o monitoramento de processos multivariados	36
4.	ESTATÍSTICAS MAIS SIMPLES E MAIS EFICIENTES PARA O MONITORAMENTO DE PROCESSOS MULTIVARIADOS	40
4.1	O GRÁFICOS DE RMAX	41
4.1.1	Comparando os gráficos de RMAX e de VMAX	44
4.1.2	Comparando o gráfico S com o gráfico de RMAX	45
4.2	O GRÁFICOS DE MRMAX	45
4.2.1	Propriedades do gráfico de MRMAX	47
4.2.2	Comparando os gráficos de MRMAX e MVMAX	48
4.3	GRÁFICO DE MRMAX COM REGRAS SUPLEMENTARES DE DECISÃO	51
4.3.1	Comparando os gráficos de MRMAX com regra especial e regras suplementares de decisão	54
5	ESTUDO DO EFEITO DA AUTOCORRELAÇÃO NO DESENVOLVIMENTO DOS GRÁFICOS DE CONTROLE	56
5.1	GRÁFICOS DE CONTROLE UNIVARIADOS AUTOCORRELACIONADOS	57
5.1.1	O gráfico de $\bar{X}$ com parâmetros variáveis	57
5.1.2	Desempenho do gráfico de $\bar{X}$ VP	58
5.1.3	Gráfico de $\bar{X}$ com amostragem dupla	63
5.1.4	Desempenho do gráfico de $\bar{X}$ com amostragem dupla	64
5.1.5	O efeito da correlação nos gráficos de $\bar{X}$ VP e com amostragem dupla	65
5.2	O EFEITO DA AUTOCORRELAÇÃO NO	

PLANEJAMENTO DAS CARTAS DE CONTROLE DE $\bar{X}$ E EWMA	69
5.3 PLANEJAMENTO ESTATÍSTICO-ECONÔMICO DO GRÁFICO DE $\bar{X}$ PARA O MONITORAMENTO DE PROCESSOS AUTOCORRELACIONADOS	74
5.4 GRÁFICOS DE CONTROLE MULTIVARIADOS PARA O MONITORAMENTO DE PROCESSOS AUTOCORRELACIONADOS.....	79
5.4.1 Gráfico de T^2 para o monitoramento de processos autocorrelacionados	79
5.4.2 Gráficos simultâneos de $\bar{X}$ para o monitoramento de gráficos de controle bivariados autocorrelacionados	81
6 ESTRATÉGIAS DE AMOSTRAGEM QUE REDUZEM O EFEITO DA AUTOCORRELAÇÃO NO DESEMPENHO DOS GRÁFICOS DE CONTROLE	83
6.1 GRÁFICO UNIVARIADO PARA O MONITORAMENTO DE PROCESSOS AUTOCORRELACIONADOS COM A ADIÇÃO DE ESTRATÉGIAS DE AMOSTRAGEM	83
6.2 GRÁFICOS DE CONTROLE MULTIVARIADOS COM ESTRATÉGIAS DE AMOSTRAGEM	87
7 REGRAS ESPECIAIS DE DECISÃO QUE MELHORAM A EFICIÊNCIA DOS GRÁFICOS DE CONTROLE	92
7.1 GRÁFICOS DE CONTROLE UNIVARIADOS COM REGRA ESPECIAL DE DECISÃO	93
7.1.1 Gráfico de $\bar{X}$ com regra especial de decisão	93
7.1.2 Gráfico de $\bar{X}$ com regra especial de decisão: regra side-sensitive	96
7.1.3 Gráfico de controle Syn-$\bar{X}$ side-sensitive	99
7.2 GRÁFICO DE CONTROLE BIVARIADO COM REGRA	

	ESPECIAL DE DECISÃO	108
8	CONCLUSÕES.....	109
8.1	TRABALHOS FUTUROS	111
	REFERÊNCIAS DA AUTORA.....	112
	DEMAIS REFERÊNCIAS.....	114

1. INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Os gráficos de controle foram inicialmente desenvolvidos e utilizados por Walter A. Shewhart, por volta de 1924 (SHEWHART, 1931). Quando o gráfico de Shewhart está em uso, amostras de tamanho fixo são retiradas do processo em intervalos regulares. De acordo com os fundamentos estabelecidos por Shewhart, sempre que um ponto é plotado na região de ação do gráfico, o responsável pelo processo deve iniciar uma investigação, visando encontrar causas especiais que afetam a qualidade dos produtos, como por exemplo, um desgaste de ferramenta que altera a dimensão dos eixos que estão sendo manufaturados (COSTA et al. (2005)).

O gráfico de Shewhart é uma ferramenta de monitoramento simples que não demanda recursos computacionais, portanto bastante oportuna para a época em que surgiu. As facilidades computacionais de hoje têm viabilizado alterações à idéia original de Shewhart (MACHADO, 2009). Muitas são as estratégias que vêm sendo propostas visando melhorar o desempenho dos gráficos de controle, tanto para o monitoramento de processos univariados quanto multivariados, com observações autocorrelacionadas ou não.

A pesquisa apresentada nesta tese é uma análise crítica do conteúdo dos 17 artigos da docente publicados após o doutoramento (entre 2010 e 2016), que tratam de algumas dessas estratégias. Para o caso univariado, a docente estudou os gráficos de controle com regras especiais de decisão e autocorrelacionados. Para o caso multivariado, propôs novas estatísticas para o monitoramento do vetor de médias e/ou da matriz de covariâncias e, mais recentemente, vem investigando o desempenho dos gráficos de controle para o monitoramento de processos multivariados autocorrelacionados, com e sem regras especiais de decisão. A pesquisa da docente tem se baseado no desenvolvimento matemático das expressões necessárias para obtenção das propriedades dos gráficos de controle.

A docente iniciou os estudos sobre gráficos de controle em 2003, quando então bolsista de Iniciação Científica da FAPESP. Deu continuidade a esses estudos em seus projetos de mestrado (bolsa CAPES, 2005-2006), doutorado (bolsa FAPESP, 2006-2009) e Jovem Pesquisadora (auxílio FAPESP, 2009-2013). Em 2009 foi contratada como Professora Assistente Doutor em RDIDP – regime de dedicação integral à docência e a pesquisa - pelo Departamento de Produção da FEG/UNESP, desde 2012 é bolsista de Produtividade em Pesquisa nível 2 do CNPq e em 2013 teve um projeto Universal aprovado, com vigência até 2017, fatores esses que tem contribuído para que a docente se dedique à pesquisa no tema.

No total, a docente publicou, na última década, 30 artigos em periódicos nacionais e internacionais sobre o tema gráficos de controle para o monitoramento de processos, sendo 13 deles do período anterior ao doutoramento (2007-2009) e 17 do período após o doutoramento (2010-2016), como já mencionado.

Os artigos foram publicados nas seguintes revistas internacionais e nacionais: Brazilian Journal of Operations and Production Management (BJOPM), Communications in Statistics (CS): Theory and Methods (CS-T) e Simulation and Computation (CS-S), Computer and Industrial Engineering (CAIE), European Journal of Operational Research (EJOR), Expert Systems with Applications (EXP), Gestão & Produção (GP), International Journal of Production Economics (IJPE), International Journal of Production Research (IJPR), International Journal of Advanced Manufacturing Technology (IJAMT), Journal of Applied Statistics (JAS), Pesquisa Operacional (PO), Produção e Quality and Reliability Engineering International (QREI).

O Quadro 1 mostra os artigos em ordem cronológica, a revista em que foi publicado, seu respectivo Qualis (segundo classificação da CAPES), o número de citações até maio de 2016, segundo a base de dados Scopus, e o tema principal de pesquisa. Os temas de pesquisa foram classificados em quatro categorias: T1) gráficos de controle univariados autocorrelacionados; T2) gráficos de controle univariados com regras especiais de decisão; T3) gráficos de controle multivariados e T4) gráficos de controle multivariados autocorrelacionados, com ou sem regras especiais de decisão.

Segundo o Quadro 1, os artigos da docente já foram citados 155 vezes. O artigo de número 15, da revista JAS do ano de 2011, e o de número 12, da revista QREI de 2009, foram os mais citados, seguidos pelos artigos de número 6, da IJPE de 2008, e de número 10 da IJAMT de 2009. O número de citações desses quatro artigos corresponde a aproximadamente 63,0% do total de citações.

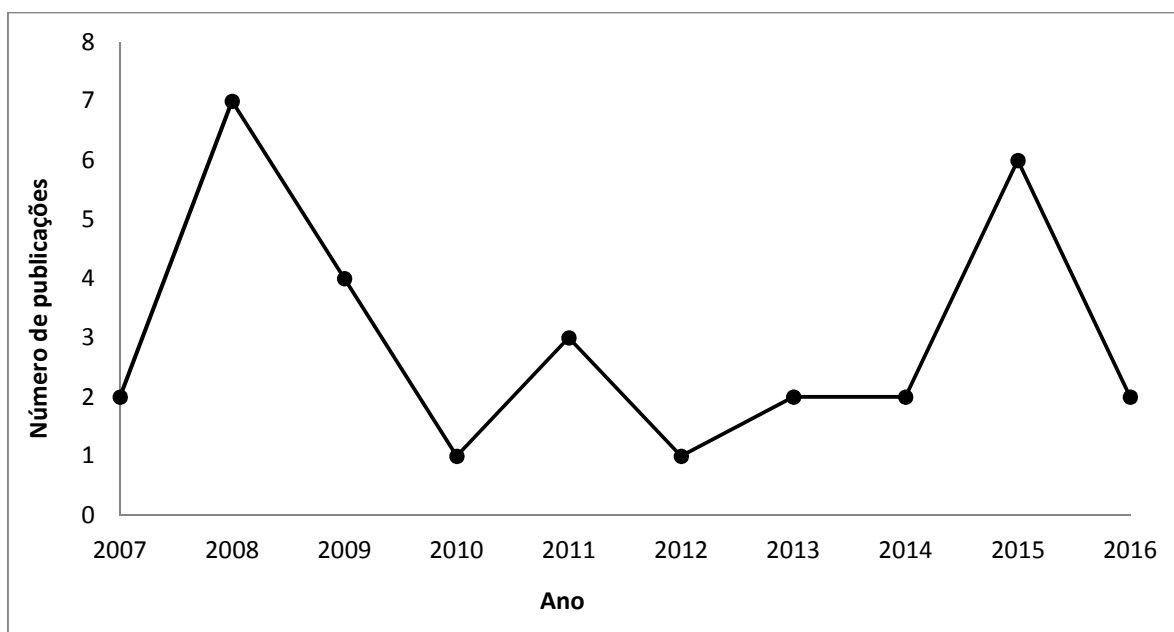
Quadro 1: Artigos da docente em ordem cronológica

Artigo	Ano	Revista	Qualis	155 citações até 17/05/2016 (SCOPUS)	Tema principal
1	2007	PROD	B2	-	T1
2	2007	PO	B2	-	T3
3	2008	PROD	B2	-	T3
4	2008	BJOPM	B4	-	T3
5	2008	CS/S	B1	10	T3
6	2008	IJPE	A1	22	T3
7	2008	PO	B2	-	T1
8	2008	PO	B2	-	T3
9	2008	JAS	B1	8	T3
10	2009	IJAMT	B1	19	T3
11	2009	PO	B2	-	T3
12	2009	QREI	B1	25	T3
13	2009	IJAMT	B1	8	T3
14	2010	GP	B2	-	T3
15	2011	JAS	B1	4	T3
16	2011	IJPE	A1	31	T1
17	2011	PROD	B2	-	T3
18	2012	EXP	A2	8	T1
19	2013	GP	B2	-	T1
20	2013	CAIE	A2	2	T3
21	2014	IJPR	A2	4	T1
22	2014	CS/T	B1	4	T2
23	2015	IJPR	A2	0	T2
24	2015	QREI	B1	7	T4
25	2015	IJAMT	B1	0	T4
26	2015	EJOR	A1	2	T4
27	2015	QREI	B1	0	T2
28	2015	IJPR	A2	0	T4
29	2016	CAIE	A2	1	T2
30	2016	CAIE	A2	0	T4

Fonte: Produção do próprio autor

A Figura 1 estratifica os artigos pelo ano. Os anos de 2008 e 2015 foram os com maiores números de publicações. Em 2008, a docente estava trabalhando em seu doutorado. Em 2015, a maioria dos artigos publicados são resultados das pesquisas de doutorado dos seus orientados Bruno Chaves Franco e Roberto Campos Leoni.

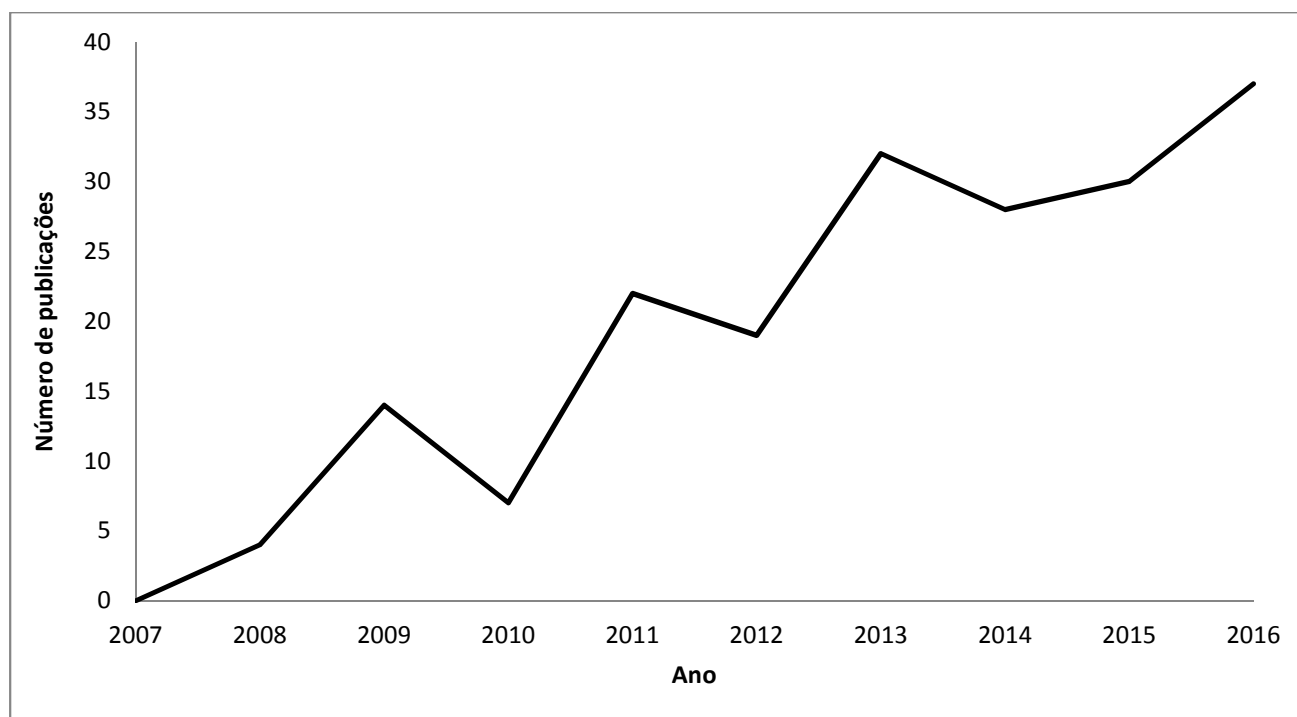
Figura 1: Número de artigos publicados por ano



Fonte: Produção do próprio autor

A Figura 2 apresenta o número de citações por ano, totalizando 193 citações. O número de citações do ano de 2016 foi estimado, uma vez que a consulta foi realizada em maio de 2016. O coeficiente angular da reta é aproximadamente quatro, o que indica uma taxa crescente de quatro citações por ano.

Figura 2: Número de citações por ano



Fonte: Produção do próprio autor

Segundo a base de dados Scopus, o índice h da docente é oito, ou seja, a docente tem 8 artigos que foram citados no mínimo 8 vezes, ver Quadro 2. Os artigos 15 e 18 são os mais citados do período após o doutoramento. Ambos tratam do tema T1 de pesquisa, isto é, os gráficos de controle univariados autocorrelacionados.

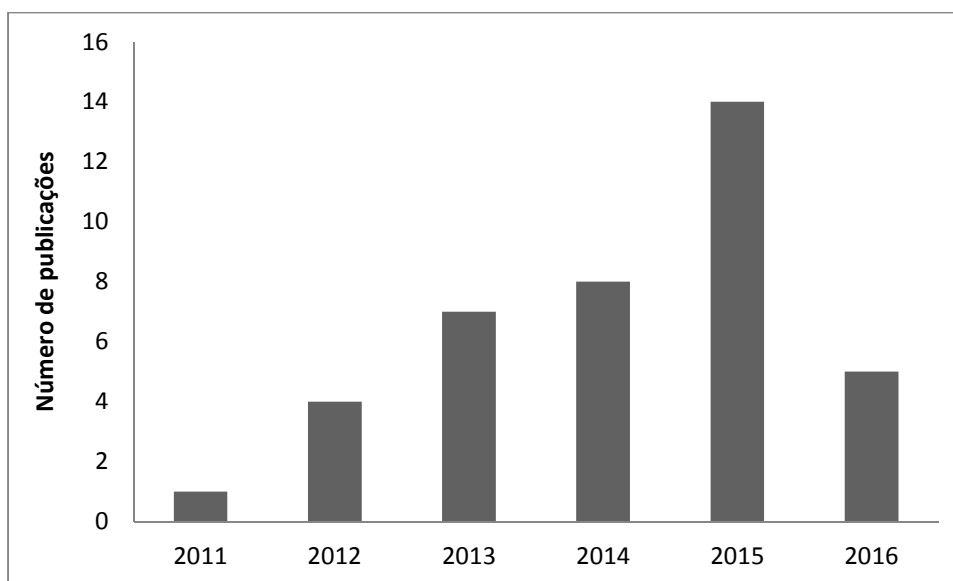
Quadro 2: Artigos da docente que tem mais citações (índice h-8)

Artigo	Revista	Ano	Qualis	Citações até 17/05/2016 (SCOPUS)	Tema principal
15	JAS	2011	A1*	31	T1
6	IJPE	2008	A1	22	T3
12	QREI	2009	B1	25	T3
10	IJAMT	2009	B1	19	T3
5	CS/S	2008	B1	10	T3
13	IJAMT	2009	B1	8	T3
9	JAS	2008	B1	8	T3
18	EXP	2012	A2*	8	T1

Fonte: Produção do próprio autor; *Artigos mais citados do período após o doutoramento

A Figura 3 apresenta a quantidade de artigos, segundo o ano de publicação, em que os dois artigos mais citados da docente do período após o doutoramento ocorreram.

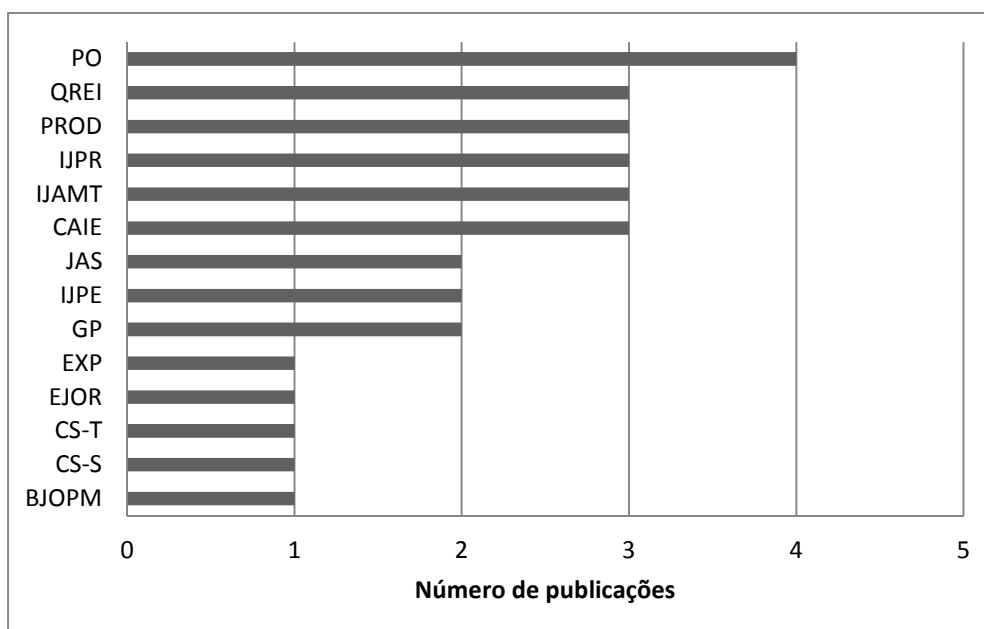
Figura 3: Citações estratificadas por ano (JAS 2011 e EXP 2012)



Fonte: Produção do próprio autor

A Figura 4 destaca o número de artigos publicados por periódico. Os artigos da docente foram publicados em 14 revistas diferentes; um terço em periódicos nacionais e dois terços em periódicos internacionais.

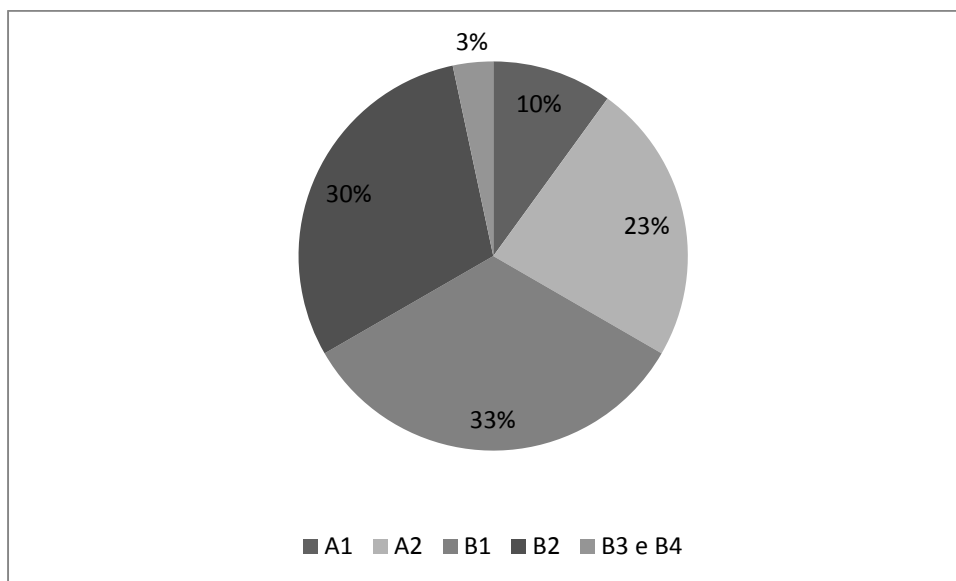
Figura 4: Número de artigos por periódico



Fonte: Produção do próprio autor

A Figura 5 estratifica os artigos segundo o Qualis.

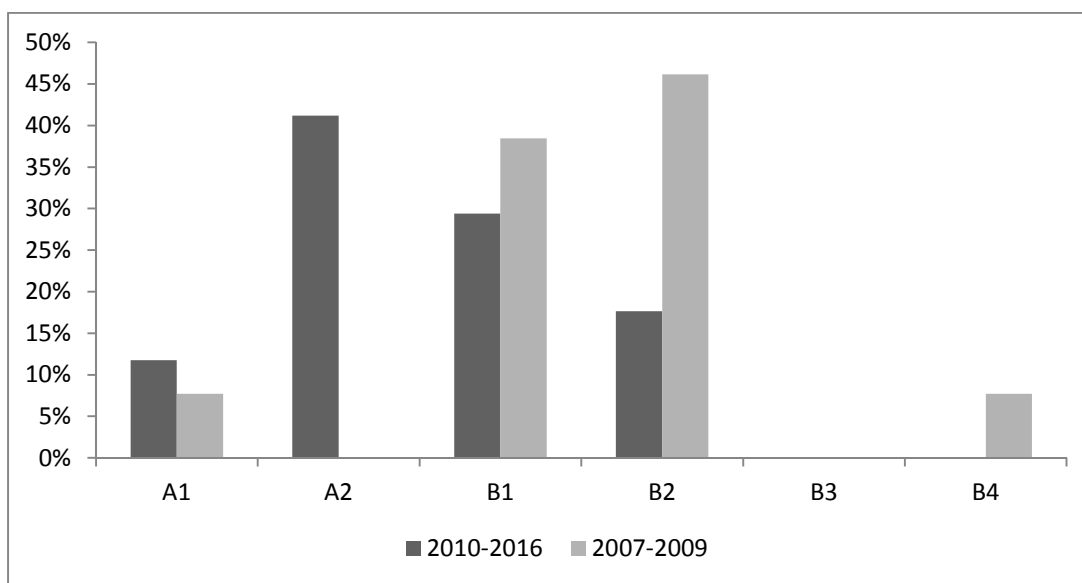
Figura 5: Estratificação dos artigos segundo o Qualis



Fonte: Produção do próprio autor

A Figura 6 estratifica o número de artigos segundo o Qualis e período o de publicação, antes do doutorado (2007-2009) e após o doutorado (2010-2016). Observa-se que antes do doutorado, os artigos foram em sua maioria, publicados em periódicos classificados como B1 e B2; após o doutorado, em periódicos A1 e A2.

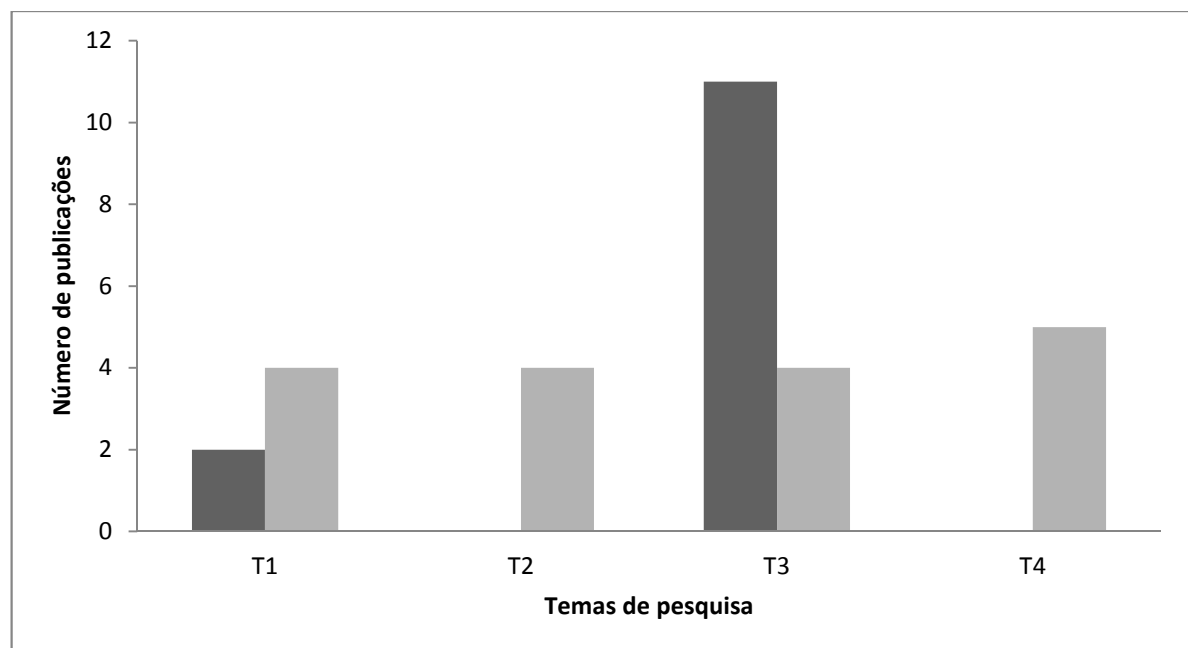
Figura 6: Qualis dos artigos por período.



Fonte: Produção do próprio autor

A Figura 7 estratifica as publicações pelos temas de pesquisa e segundo o período de publicação, antes do doutoramento (2007-2009) e após o doutoramento (2010-2016). Observa-se que antes do doutoramento, a docente se dedicou quase em sua totalidade ao tema de pesquisa T3. Após o doutoramento, a pesquisa da docente se diversificou pelos quatro temas de pesquisa – recorda-se que os temas de pesquisa, já descritos anteriormente, são: T1) gráficos de controle univariados autocorrelacionados; T2) gráficos de controle univariados com regras especiais de decisão; T3) gráficos de controle multivariados e T4) gráficos de controle multivariados autocorrelacionados, com ou sem regras especiais de decisão.

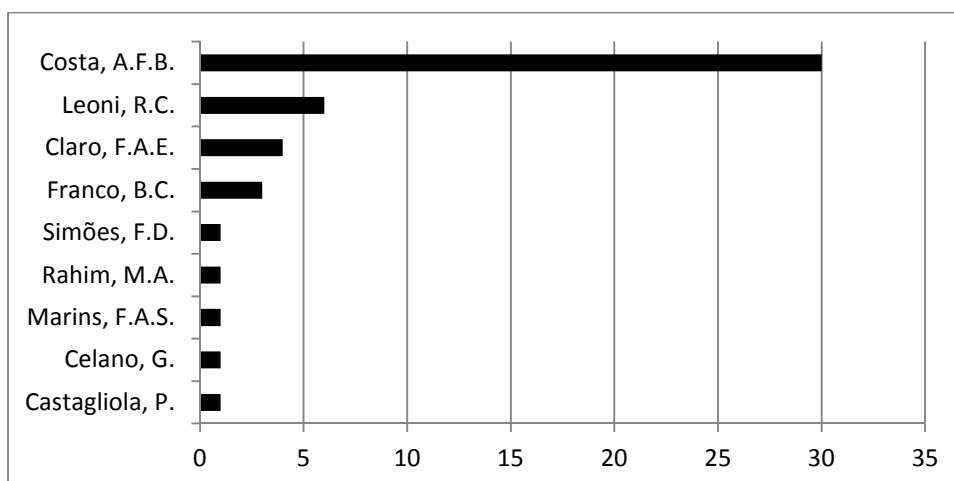
Figura 7: Número de publicações por tema de pesquisa



Fonte: Produção do próprio autor

A docente contou com a colaboração de nove co-autores, sendo seis deles de instituições nacionais e três de instituições internacionais, ver Figura 8.

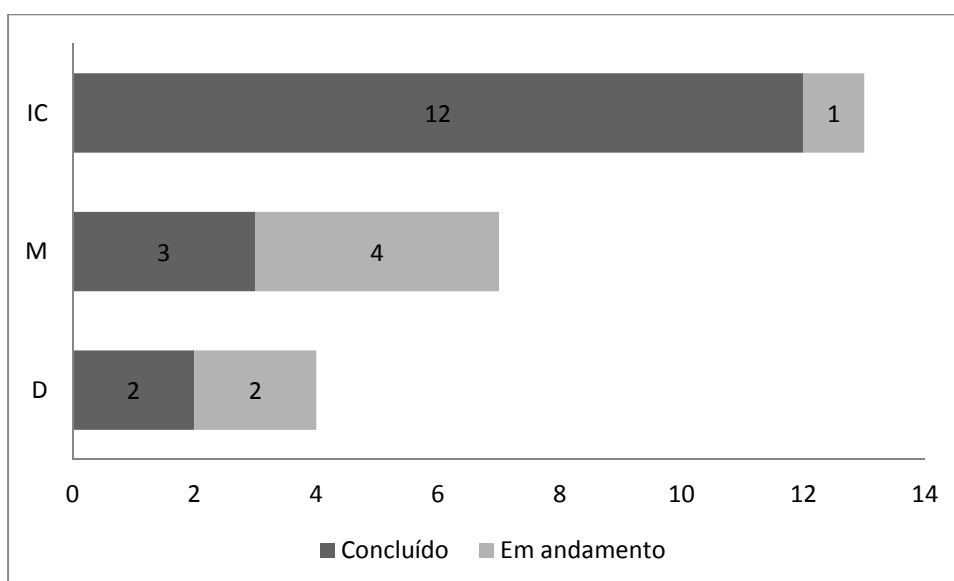
Figura 8: Co-autores



Fonte: Produção do próprio autor

A docente orientou alunos de Iniciação Científica (IC), mestrado (M) e doutorado (D) e tem orientações em andamento, ver Figura 9.

Figura 9: Orientações da docente



Fonte: Produção do próprio autor

O Quadro 3 apresenta as principais contribuições dos artigos da docente, que serão discutidas em detalhes nos capítulos de 4 a 7.

Quadro 3: Principais contribuições dos artigos da docente

Tema	Artigos (2007-2009)	Artigos (2010-2016)	Total de citações
Proposição de estatísticas mais simples e mais eficientes para o monitoramento de processos multivariados	[3-6;8;10-14]	[16,17,20]	90
Estudo do efeito da autocorrelação no desenvolvimento dos gráficos de controle	[1,7]	[15,18,19,24]	46
Estratégias de amostragem que reduzem o efeito da autocorrelação no desempenho dos gráficos de controle	-	[21,25,26,28]	6
Regras especiais de decisão que melhoram a eficiência dos gráficos de controle	-	[22,23,27,29,30]	5

Fonte: Produção do próprio autor

1.2 ORGANIZAÇÃO DA TESE

A tese está estruturada em oito capítulos. Neste primeiro capítulo foi apresentada uma breve descrição sobre os artigos da docente e a seguir descreve-se a organização do texto.

Os Capítulos 2 e 3 são dedicados à apresentação dos gráficos de controle univariados e multivariados mais usuais e suas propriedades.

O Capítulo 4 é dedicado à revisão dos artigos da docente que tratam de novas estatísticas para o monitoramento da matriz de covariâncias e para o monitoramento conjunto do vetor de médias e da matriz de covariâncias.

O Capítulo 5 é dedicado à revisão dos artigos da docente sobre gráficos de controle autocorrelacionados, tanto univariados quanto multivariados.

No Capítulo 6 estão os principais resultados obtidos pela docente com relação nos artigos que tratam de novas estratégias de amostragens para o monitoramento de processos autocorrelacionados, univariados e multivariados.

O Capítulo 7 é dedicado à revisão dos artigos da docente sobre gráficos de controle univariados e multivariados com regras especiais de decisão.

No Capítulo 8 estão as conclusões e sugestões para futuras pesquisas.

2. GRÁFICOS DE CONTROLE UNIVARIADOS USUAIS

2.1 GRÁFICO DE CONTROLE PARA O MONITORAMENTO DA MÉDIA DO PROCESSO

Quando o gráfico de Shewhart, mais especificamente o gráfico de $\bar{X}$, está em uso, amostras de tamanho n são retiradas a cada intervalo de tempo h e o valor da estatística de $\bar{X}$ é calculado para cada amostra e plotado no gráfico de controle. Este dispositivo estatístico pode ser visto como uma seqüência de testes de hipóteses, onde, a cada intervalo de tempo h , testam-se sempre as mesmas hipóteses:

$$H_0 : \text{Processo em controle} \quad (2.1)$$

$$H_1 : \text{Processo fora de controle} \quad (2.2)$$

ou,

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad (2.3)$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0 \quad (2.4)$$

onde μ_0 é o valor-alvo ou o valor médio em controle da variável aleatória X .

Se o processo estiver em controle (H_0 verdadeira), α representa o risco (probabilidade) de erroneamente se considerar o processo fora de controle (“**alarme falso**”). Se o processo estiver fora de controle (H_1 verdadeira), β representa o risco (probabilidade) de erroneamente se considerar o processo em controle (“**não-detecção**”). A consequência de ordem prática associada ao erro do tipo I (alarme falso) é intervir no processo na hora errada, quando o mesmo está isento de causas especiais (o que em si já acarreta um custo — de interrupção do processo, de mão de obra — além de um risco de desajustar um processo que estava ajustado); e a consequência de ordem prática associada ao erro do tipo II (não detecção) é não intervir no processo na hora certa, quando o mesmo está sob a influência de causas especiais. (COSTA et al. (2005)).

Os limites de controle do gráfico de $\bar{X}$ são estabelecidos — usando os valores em controle dos parâmetros do processo, μ_0 e σ_0 — a $\pm k$ desvios padrões amostrais, $\sigma_{\bar{X}}$, da linha média ($LM = \mu_0$), ou seja, em $\mu_0 \pm k \sigma_0 / \sqrt{n}$, onde k é o fator de abertura dos limites de controle. Para uma abertura dos limites de controle de ± 3 desvios padrões amostrais, o risco α é igual a 0,0027.

Quando a hipótese H_1 é a hipótese verdadeira (processo sob a influência de causas especiais), o ideal seria que o primeiro ponto plotado já caísse fora dos limites de controle (sinalizando o estado de falta de controle). Contudo, isto nem sempre ocorre, em especial se o deslocamento sofrido pela média do processo for pequeno. É usual expressar este deslocamento em unidades iguais ao desvio padrão da variável X , de forma que o novo valor da média, μ_1 , pode ser escrito como $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0$, portanto

$$\delta = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_0} \quad (2.5)$$

De um modo geral, se $\delta \geq 1,5$, então rapidamente um valor de $\bar{X}$ cairá fora dos limites de controle. Caso contrário, existirá uma certa inércia (COSTA et al. (2005)).

O desempenho dos gráficos de controle é medido pelo número médio de amostras até o sinal (NMA). Durante o período em controle o $NMA = 1/\alpha$ e é denominado NMA_0 e, durante o período fora de controle, $NMA = 1/p_d$, sendo $p_d = 1 - \beta$. Quando um processo está sob controle, é desejável que o número médio de amostras retiradas do processo desde o início do monitoramento até o sinal (NMA_0) seja grande, de modo a garantir poucos alarmes falsos. Quando um processo está fora de controle, é desejável que o número médio de amostras retiradas desde a ocorrência de uma causa especial até o sinal (NMA) seja pequeno, de modo a garantir uma rápida detecção da causa especial.

A Tabela 1 apresenta os valores de NMA para diferentes combinações de δ e de n .

Tabela 1. Valores de NMA para diferentes combinações de n e de δ

δ	n				
	2	3	4	5	9
0,25	250,0	200,0	166,7	142,9	83,3
0,5	90,9	62,5	43,5	33,3	14,9
0,75	38,5	22,7	14,9	10,8	4,4
1,0	17,9	9,8	6,3	4,5	2,0
1,25	9,2	5,0	3,2	2,4	1,3
1,5	5,3	2,9	2,0	1,6	1,1
2,0	2,3	1,5	1,2	1,1	1,0
3,0	1,1	1,0	1,0	1,0	1,0

(Fonte: adaptado de Costa et al. 2005)

2.2 GRÁFICOS DE CONTROLE PARA O MONITORAMENTO DA DISPERSÃO DO PROCESSO

Assim como é importante monitorar a média do processo, é também importante monitorar a sua variabilidade. Os gráficos mais utilizados para o monitoramento da dispersão do processo são os gráficos de R e de S^2 . Os dois gráficos serão brevemente discutidos nas seções 2.2.1 e 2.2.2 e comparados, em termos da eficiência em detectar desajustes no processo, na seção 2.2.3.

2.2.1 Gráfico de R

Para o caso univariado, o gráfico da amplitude R é uma ferramenta bastante utilizada no monitoramento da variabilidade do processo. Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ as observações da variável X , de uma distribuição normal com média μ e desvio padrão σ , organizadas em subgrupos de tamanho $n > 1$. A amplitude amostral R é dada por $\max[x_1, x_2, \dots, x_n] - \min[x_1, x_2, \dots, x_n]$, $x_i = (X_i - \mu)/\sigma$. Considera-se apenas os casos em que a causa especial aumenta a variabilidade do processo; então, o gráfico de R sinaliza se $R > CL$, sendo $CL = k\sigma_0$ o limite de controle do gráfico de R . A ocorrência da causa especial aumenta o desvio padrão de σ_0 para $a\sigma_0$. O poder do gráfico de R é dado por

$$P_D = F_w(LC/a) \quad (2.6)$$

sendo $F_w(\cdot)$ a função distribuição da variável aleatória $W = R/\sigma$, onde $1 - F_w(\cdot)$ é tabelada, ver Costa et al. (2005).

2.2.2 Gráfico de S^2

Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ as observações da variável X , de uma distribuição normal com média μ e desvio padrão σ , organizadas em subgrupos de tamanho $n > 1$. A variância amostral S^2 é

definida por $S^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{n-1}$. Considera-se apenas os casos em que a causa especial aumenta

a variabilidade do processo; então, o gráfico de S^2 sinaliza se $S^2 > LC$, sendo $LC = \frac{\sigma_0^2}{n-1} \chi_{n-1, \alpha}^2$

o limite de controle do gráfico de S^2 . A ocorrência da causa especial aumenta a variância de σ_0^2 para $\sigma^2 = a^2 \sigma_0^2$. O poder do gráfico de S^2 é dado por:

$$p_d = \Pr \left[F > \frac{\chi_{n-1, \alpha}^2}{a^2} \right] \quad (2.7)$$

onde $F \sim \chi_{n-1}^2$. Consequentemente, o NMA para o gráfico de S^2 é dado por :

$$NMA = \frac{1}{\Pr \left[F > \frac{\chi_{n-1, \alpha}^2}{a^2} \right]} \quad (2.8)$$

2.3. COMPARANDO OS GRÁFICOS DE R E S^2

Nesta seção compara-se a eficiência do gráfico de R com a do gráfico de S^2 . Os valores de NMA para os dois gráficos estão na Tabela 2, considerando $n=5$ e $\alpha = 0,005$. O gráfico de S^2 é sempre mais rápido do que o gráfico de R na detecção de desajustes na dispersão do processo. Entretanto, a redução no NMA fornecida pelo gráfico de S^2 é pequena, menos de 11,0%, ver os valores de P_v na Tabela 2, onde:

$$P_v = 100\% \frac{(NMA_R - NMA_{S^2})}{NMA_{S^2}} \quad (2.9)$$

O estudo com valores de $n > 5$ levaram a maiores valores de P_v .

Tabela 2: Valores de NMA para os gráficos de R e S^2 ($n=5$).

a^2	LC	R	S^2	$P_v (\%)$
		4.886	3.715	-
1.0		200.0	200.0	-
1.1		114.1	110.7	3.12
1.2		71.7	67.9	5.52
1.3		48.4	45.2	7.08
1.4		34.6	32.0	8.16
1.5		25.9	23.8	8.87
2.0		9.61	8.71	10.3
3.0		3.72	3.42	8.77
5.0		1.87	1.78	5.06

Fonte: adaptado de Costa e Machado (2011)

2.4 OS GRÁFICOS CONJUNTOS DE $\bar{X}$ & R E $\bar{X}$ & S^2

Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ as observações da variável X , de uma distribuição normal com média μ e variância σ^2 , organizadas em subgrupos de tamanho $n > 1$. Quando o processo está em controle, a média e a variância são iguais a μ_0 e σ_0^2 respectivamente. A ocorrência da causa especial altera a média de μ_0 para $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0$ e/ou a variância de σ_0^2 para $\sigma_1^2 = a^2\sigma_0^2$, com $\delta > 0$ e $a > 1.0$.

Os limites de controle superior e inferior para o gráfico de $\bar{X}$ são, respectivamente

$$LSC_{\bar{X}} = \mu_0 + k_1\sigma_0/n^{1/2} \quad (2.10)$$

$$LIC_{\bar{X}} = \mu_0 - k_1\sigma_0/n^{1/2} \quad (2.11)$$

onde k_1 é o coeficiente de abertura dos limites de controle do gráfico de $\bar{X}$. O limite superior de controle para o gráfico de R é dado por:

$$LSC_R = k_2\sigma_0 \quad (2.12)$$

onde k_2 é o coeficiente de abertura do limite de controle do gráfico de R . Assume-se o limite inferior de controle igual a 0.

O limite de controle para o gráfico de controle para p gráfico de S^2 é:

$$LC = \frac{\sigma_0^2}{n-1} \chi_{n-1, \alpha}^2 \quad (2.13)$$

A probabilidade P dos gráficos conjuntos sinalizarem é dada por:

$$P = P_M + P_D - P_M P_D. \quad (2.14)$$

Então, $NMA=1/P$.

A probabilidade P_M do gráfico de $\bar{X}$ exceder os limites de controle superior ou inferior é dada por:

$$P_M = \Phi\left(-k_1/a - \delta n^{1/2}/a\right) + \Phi\left(-k_1/a + \delta n^{1/2}/a\right) \quad (2.15)$$

onde $\Phi(\cdot)$ é a função acumulada da distribuição normal.

Se o gráfico de R é utilizado para monitorar a dispersão do processo, então a probabilidade P_D de R exceder o limite de controle é dada pela expressão (2.6).

Se o gráfico de S^2 é utilizado para monitorar a dispersão do processos, então a probabilidade P_D de S^2 exceder o limite de controle é dada pela expressão (2.7).

2.4.1 Comparando os gráficos conjuntos univariados

Nesta seção compara-se a eficiência em detectar desajustes no processo dos gráficos conjuntos de $\bar{X}$ e R com a eficiência dos gráficos conjuntos de $\bar{X}$ e S^2 . Os valores de NMA para os dois gráficos estão na Tabela 3, considerando $n=5$ e $\alpha = 0,005$. Os gráficos conjuntos de $\bar{X}$ e S^2 são sempre mais eficientes do que os gráficos conjuntos de $\bar{X}$ e R . Entretanto, a redução no NMA fornecida pelos gráficos conjuntos de $\bar{X}$ e S^2 é pequena, menos de 9,0%, ver os valores de P_v na Tabela 3, onde:

$$P_v = 100\% \frac{(NMA_{\bar{X}R} - NMA_{\bar{X}S^2})}{NMA_{\bar{X}S^2}}$$

O estudo com valores de $n > 5$ levaram a maiores valores de P_v .

Tabela 3: Valores de NMA para os gráficos conjuntos ($n=5$).

a	δ	$\bar{X} \& S^2$	$\bar{X} \& R$	$P_v (\%)$	a	δ	$\bar{X} \& S^2$	$\bar{X} \& R$	$P_v (\%)$
1.0	0	200	200	0.0	1.5	0	24.78	26.44	6.70
	0.2	129.07	129.07	0.0		0.2	21.45	22.67	5.69
	0.4	52.23	52.23	0.0		0.4	14.75	15.3	3.73
	0.6	20.52	20.52	0.0		0.6	9.1	9.3	2.20
	0.8	9.02	9.02	0.0		0.8	5.56	5.63	1.26
	1.0	4.6	4.6	0.0		1.0	3.57	3.59	0.56
1.2	0	70.9	73.3	3.39	2.0	0	8.78	9.52	8.43
	0.2	54.34	55.74	2.58		0.2	8.2	8.83	7.68
	0.4	29.14	29.52	1.30		0.4	6.79	7.21	6.19
	0.6	14.23	14.32	0.63		0.6	5.2	5.42	4.23
	0.8	7.29	7.31	0.27		0.8	3.85	3.96	2.86
	1.0	4.12	4.13	0.24		1.0	2.87	2.92	1.74

Fonte: adaptado de Costa e Machado (2011)

3. GRÁFICOS DE CONTROLE MULTIVARIADOS

3.1 GRÁFICOS DE CONTROLE PARA O MONITORAMENTO DO VETOR DE MÉDIAS

3.1.1 Gráfico de T^2

Desde que foi criado por Hotelling em 1947, o gráfico de controle baseado na estatística de T^2 para o monitoramento de processos multivariados passou a ser o dispositivo estatístico mais usual no monitoramento do vetor de médias de duas ou mais características de qualidade.

O gráfico de controle de T^2 é utilizado no monitoramento simultâneo de p variáveis de interesse. Quando o vetor das médias e a matriz de covariâncias, μ_0 e Σ_0 , de um processo p -variado distribuído normalmente são conhecidos, a estatística T^2 de Hotelling para a i -ésima amostra é dada por:

$$T_i^2 = n(\bar{X}_i - \mu_0)' \Sigma_0^{-1} (\bar{X}_i - \mu_0), \quad (3.1)$$

onde n é o tamanho da i -ésima amostra e $\bar{X}_i$ é o vetor das médias amostrais dos p parâmetros para a amostra i . Quando o processo está sob controle, T_i^2 segue uma distribuição de qui-quadrado com p graus de liberdade. Portanto:

$$LC = \chi_{p,\alpha}^2 \quad (3.2)$$

onde α é, durante o período em controle, a probabilidade de alarme falso e p é o número de variáveis sendo monitoradas.

Durante o período fora de controle, a causa especial gera alterações de magnitude d nos parâmetros do processo, sendo $d = \sqrt{(\mu - \mu_0)' \Sigma^{-1} (\mu - \mu_0)}$, onde μ é o vetor de médias das p características de qualidade após a ocorrência da causa especial. Após a ocorrência da causa especial, T_i^2 tem distribuição de qui-quadrado não-central com parâmetro de não-centralidade $\lambda_d = nd^2$, sendo n o tamanho da amostra, isto é, $T_i^2 \sim \chi_p^2(\lambda_d)$.

O NMA é dado por:

$$NMA = \frac{1}{1 - \beta} \quad (3.3)$$

onde $\beta = Pr(\chi_p^2(\lambda_d) < LC)$.

Quando $p=2$, assume-se que as variáveis originais têm uma distribuição normal bivariada com o vetor de médias e a matriz de covariâncias dados respectivamente por $\boldsymbol{\mu}' = \boldsymbol{\mu}'_0 = (0; 0)$ e $\boldsymbol{\Sigma}_0 = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$. Com o processo em controle, assume-se que $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 1$. Após a ocorrência da causa especial, o vetor de médias $\boldsymbol{\mu}$ do processo se altera de $\boldsymbol{\mu}'_0 = (0,0)$ para $\boldsymbol{\mu}'_1 = (\mu_{01} + \delta_1 \sigma_1; \mu_{02} + \delta_2 \sigma_2)$. Os valores de NMA para o gráfico de T^2 estão na Tabela 4, considerando $n=5$ e $\alpha = 0,005$.

Tabela 4: Valores de NMA para o gráfico de T^2 ($p = 2$ e $\rho \geq 0,0$)

		ρ			
		0	0,3	0,5	0,7
δ_1	δ_2				
0,0	0,0	200,0	200,0	200,0	200,0
0,0	0,5	115,6	110,5	99,7	78,0
0,0	1,0	41,9	38,0	30,6	19,0
0,0	1,5	15,8	13,9	10,5	5,94
0,5	0,5	76,9	91,7	99,7	106,7
0,5	1,0	33,0	40,1	41,9	38,7
0,5	1,5	13,6	15,8	15,0	11,4
1,0	1,0	18,5	25,8	30,60	35,25
1,0	1,5	9,36	13,0	15,01	15,73
1,5	1,5	5,76	8,53	10,51	12,58

Fonte: Produção do próprio autor

Tabela 5: Valores de NMA para o gráfico de T^2 ($p = 2$ e $\rho \leq 0,0$)

δ_1	δ_2	ρ			
		0	-0,3	-0,5	-0,7
0,0	0,0	200,0	200,0	200,0	200,0
0,0	0,5	115,6	110,5	99,7	78,0
0,0	1,0	41,9	38,0	30,6	19,0
0,0	1,5	15,8	13,9	10,5	5,94
0,5	0,5	76,9	57,8	41,9	23,4
0,5	1,0	33,0	22,8	15,0	7,35
0,5	1,5	13,6	9,39	6,10	3,04
1,0	1,0	18,5	11,3	6,88	3,23
1,0	1,5	9,36	5,65	3,48	1,80
1,5	1,5	5,76	3,40	2,16	1,29

Fonte: Produção do próprio autor

3.1.2 Gráficos simultâneos de $\bar{X}$

Semelhante ao gráfico de $\bar{X}$, o gráfico de T^2 é pouco sensível a deslocamentos pequenos a moderados dos parâmetros do processo. Alternativamente, Machado e Costa (2008) propuseram, para o caso bivariado, o uso simultâneo de dois gráficos de $\bar{X}$ univariados (gráficos SU $\bar{X}$).

Nas Tabelas 6 e 7 estão os valores de NMA para os gráficos gráficos SU $\bar{X}$ e para o gráfico de T^2 , onde δ_1 e $\delta_2 = 0,5; 1,0; 1,5$ e $\rho = 0,0; \pm 0,3; \pm 0,5; \pm 0,7$. Nessas tabelas, considera-se somente os casos em que $\delta_2 \geq \delta_1$. A condição contrária ($\delta_1 < \delta_2$) leva aos mesmos valores de NMA s.

Quando a correlação é positiva ($\rho > 0$), os gráficos de $\bar{X}$ univariados têm, em geral, um melhor desempenho, ver Tabela 6. Quando a correlação é negativa ($\rho < 0$), os gráficos de T^2 tem um melhor desempenho, ver Tabela 7. Se é conhecida a informação de que a causa especial altera apenas uma variável de cada vez, então o gráfico de T^2 é a melhor opção, exceto quando $\rho = 0,0$. Entretanto, mesmo neste caso, a redução no NMA fornecida pelos gráficos SU $\bar{X}$ é muito pequena.

A idéia de se utilizar gráficos de $\bar{X}$ univariados para o monitoramento de processos trivariados também foi explorada no doutorado da autora. Quando comparado com o dos gráficos de Hotelling, o desempenho dos gráficos de $\bar{X}$ univariados em uso conjunto foi insatisfatório. Deste modo, a autora se sentiu desmotivada em dar continuidade a esses estudos. Dedicou-se, então, ao estudo dos gráficos de controle para o monitoramento da matriz de covariâncias de processos multivariados.

Tabela 6 - Valores de NMA para o gráfico de T^2 e para os gráficos $SU \bar{X}$ ($\rho \geq 0,0$)

		ρ							
		0,0		0,3		0,5		0,7	
		$SU \bar{X}$	T^2	$SU \bar{X}$	T^2	$SU \bar{X}$	T^2	$SU \bar{X}$	T^2
	LSC	3,023	10,597	3,021	10,597	3,015	10,597	2,996	10,597
	LIC	-3,023	-	-3,021	-	-3,015	-	-2,996	-
δ_1	δ_2								
0,0	0,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0
0,0	0,5	117,4	115,6	117,4	110,5	117,5	99,7	115,8	78,0
0,0	1,0	41,6	41,9	41,6	38,0	41,5	30,6	40,3	19,0
0,0	1,5	15,1	15,8	15,1	13,9	15,0	10,5	14,5	5,94
0,5	0,5	83,2	76,9	84,0	91,7	85,4	99,7	87,0	106,7
0,5	1,0	36,4	33,0	36,9	40,1	37,5	41,9	37,8	38,7
0,5	1,5	14,4	13,6	14,5	15,8	14,6	15,0	14,5	11,4
1,0	1,0	23,44	18,5	24,1	25,8	24,93	30,60	25,96	35,25
1,0	1,5	11,89	9,36	12,3	13,0	12,65	15,01	13,01	15,73
1,5	1,5	8,09	5,76	8,50	8,53	8,91	10,51	9,42	12,58

Fonte: adaptado de Machado e Costa (2008)

Tabela 7 - Valores de NMA para o gráfico de T^2 e para os gráficos $SU \bar{X}$ ($\rho \leq 0,0$)

		ρ							
		0,0		-0,3		-0,5		-0,7	
		$SU \bar{X}$	T^2	$SU \bar{X}$	T^2	$SU \bar{X}$	T^2	$SU \bar{X}$	T^2
	LSC	3,023	10,597	3,021	10,597	3,015	10,597	2,996	10,597
	LIC	-3,023	-	-3,021	-	-3,015	-	-2,996	-
δ_1	δ_2								
0,0	0,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0
0,0	0,5	117,4	115,6	117,4	110,5	117,5	99,7	115,8	78,0
0,0	1,0	41,6	41,9	41,6	38,0	41,5	30,6	40,3	19,0
0,0	1,5	15,1	15,8	15,1	13,9	15,0	10,5	14,5	5,94
0,5	0,5	83,2	76,9	82,6	57,8	81,7	41,9	78,3	23,4
0,5	1,0	36,4	33,0	36,1	22,8	35,7	15,0	34,1	7,35
0,5	1,5	14,4	13,6	14,3	9,39	14,1	6,10	13,6	3,04
1,0	1,0	23,44	18,5	23,1	11,3	22,8	6,88	21,8	3,23
1,0	1,5	11,89	9,36	11,7	5,65	11,5	3,48	11,1	1,80
1,5	1,5	8,09	5,76	7,85	3,40	7,71	2,16	7,43	1,29

Fonte: adaptado de Machado e Costa (2008)

Na seção seguinte serão detalhados os gráficos de controle utilizados no monitoramento da matriz de covariâncias.

3.2 GRÁFICOS DE CONTROLE PARA O MONITORAMENTO DA MATRIZ DE COVARIÂNCIAS

Assim como é importante monitorar o vetor de médias de um processo, é também importante monitorar a sua matriz de covariâncias Σ .

3.2.1 Gráfico de $|\mathbf{S}|$

O primeiro gráfico de controle utilizado no monitoramento da matriz de covariâncias Σ , o gráfico da variância amostral generalizada $|\mathbf{S}|$, foi proposto por Alt (1985).

Quando $p=2$ e o processo está sob controle, $\frac{2(n-1)|\mathbf{S}|^{1/2}}{|\Sigma|^{1/2}}$ tem distribuição de qui-quadrado com

$2n - 4$ graus de liberdade. A matriz de covariâncias $\mathbf{S}$ é dada por $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}$, sendo s_{11} e s_{22} as

variâncias amostrais de X_1 e X_2 respectivamente e $s_{12} = s_{21}$ as covariâncias amostrais. O limite de controle para o gráfico de $|\mathbf{S}|$ é dado por:

$$LC = \frac{(\chi_{2n-4, \alpha}^2)^2 |\Sigma_0|}{4(n-1)^2} \quad (3.4)$$

A magnitude da perturbação é dada por γ^2 , onde γ^2 é a razão entre $|\Sigma_1|$ e $|\Sigma_0|$. Sendo assim, o gráfico de $|\mathbf{S}|$ terá o mesmo poder de detecção para qualquer perturbação na matriz de covariâncias que resulte no mesmo valor de γ^2 , independente da causa especial afetar apenas a variável X_1 ou apenas a variável X_2 (caso I), ou ambas (caso II). De acordo com a expressão (3.5) do *NMA* para o gráfico de $|\mathbf{S}|$, o desempenho deste gráfico independe da correlação:

$$NMA = \frac{1}{\Pr(\chi_{2n-4}^2 \geq (\chi_{2n-4, \alpha}^2)/\gamma)} \quad (3.5)$$

Quando se tem p variáveis para controlar, Anderson (2003) forneceu a distribuição de $|\mathbf{S}|$, dada por:

$$\frac{(n-1)^p \cdot |\mathbf{S}|}{|\mathbf{\Sigma}_0|} \equiv \prod_{i=1}^p \chi_{n-1}^2. \quad (3.6)$$

Aparisi et al. (1999) obtiveram a expressão para calcular a função densidade de probabilidade de $J_{n,p} \equiv \frac{(n-1)^p \cdot |\mathbf{S}|}{|\mathbf{\Sigma}_0|}$. Baseado em $J_{n,p}$, o limite superior de controle para o gráfico de $|\mathbf{S}|$ é:

$$LSC = \frac{J_{n,p}^\alpha \cdot |\mathbf{\Sigma}_0|}{(n-1)^p} \quad (3.7)$$

e o poder do gráfico é dado por:

$$1 - \beta = \Pr\left(J_{n,p} > \frac{J_{n,p}^\alpha}{\gamma^2}\right). \quad (3.8)$$

3.2.2 Gráfico da máxima variância (gráfico de VMAX)

Alternativamente ao gráfico de $|\mathbf{S}|$, Costa e Machado (2008) propuseram o gráfico da máxima variância, gráfico de VMAX, da matriz de covariâncias $\mathbf{\Sigma}$ de processos multivariados.

A estatística de monitoramento corresponde ao maior valor das variâncias amostrais

padronizadas $S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^n x_{ij}^2}{n}$ $i = 1, 2, \dots, p$, onde $x_{ij} = (X_{ij} - \mu_i)/\sigma_i$ com $X_1, X_2, \dots, X_p$ sendo p características de qualidade que seguem uma distribuição normal, ou seja, $VMAX = \max\{S_1^2, S_2^2, \dots, S_p^2\}$.

Supõe-se que com o processo em controle a matriz de covariâncias é dada por

$$\mathbf{\Sigma}_0 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}, \text{ sendo } \sigma_{ij}, i = j = 1, 2, \dots, p \text{ as variâncias de } X_1, X_2, \dots, X_p \text{ e } \sigma_{ij},$$

com $i \neq j = 1, 2, \dots, p$, as covariâncias entre X_i e X_j .

A ocorrência da causa especial altera a matriz de covariâncias de Σ_0 para

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} a_1 \cdot a_1 \cdot \sigma_{11} & a_1 \cdot a_2 \cdot \sigma_{12} & \cdots & a_1 \cdot a_p \cdot \sigma_{1p} \\ a_1 \cdot a_2 \cdot \sigma_{21} & a_2 \cdot a_2 \cdot \sigma_{22} & \cdots & a_2 \cdot a_p \cdot \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1 \cdot a_p \cdot \sigma_{p1} & a_2 \cdot a_p \cdot \sigma_{p2} & \cdots & a_p \cdot a_p \cdot \sigma_{pp} \end{bmatrix}. \quad \text{As correlações } \rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j},$$

$i, j = 1, 2, \dots, p$, com $i \neq j$, não são afetadas pela causa especial.

Se a estatística VMAX for maior do que o limite de controle LC , o gráfico sinaliza um desajuste do processo. De acordo com Costa e Machado (2008), o poder do gráfico de VMAX para o caso bivariado é dado por

$$P_D = 1 - \int_0^{nLC/q^2} \Pr \left[\chi_{n, (t\rho^2/1-\rho^2)}^2 < \frac{nLC}{a_2^2(1-\rho^2)} \right] \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} e^{-t/2} t^{(n/2)-1} dt, \quad (3.9)$$

lembrando que a notação χ_n^2 representa uma distribuição de qui-quadrado com n graus de liberdade e $\chi_{n, (\rho^2/1-\rho^2)}^2$ representa uma distribuição de qui-quadrado com n graus de liberdade e com o parâmetro de não-centralidade dado por $(\rho^2/1-\rho^2)\chi_n^2$. Fazendo uso da sub-rotina DCSNDF da biblioteca IMSL FORTRAN (1995), a qual calcula a função de distribuição de qui-quadrado não-central, torna-se mais simples obter o valor da integral na expressão (3.9). Costa e Machado (2008) obtiveram o poder do gráfico de VMAX para o caso multivariado.

A Tabela 8 apresenta os valores de NMA para o gráfico de VMAX. De acordo com a Tabela 8, o coeficiente de correlação têm uma certa influência nas propriedades do gráfico de VMAX.

Tabela 8 - Valores de NMA para o gráfico de VMAX ($p=2, n=5$)

		ρ			
$a_1^2 = a_2^2$	LC	0,0	0,3	0,5	0,7
		3,677	3,675	3,668	3,646
1,0		200,0	200,0	200,0	200,0
1,1		139,1	139,3	139,7	140,5
1,2		101,6	101,8	102,4	103,6
1,3		77,1	77,4	78,0	79,3
1,4		60,5	60,8	61,4	62,6
1,5		48,7	49,0	49,6	50,8
2,0		21,6	21,9	22,3	23,2
3,0		8,64	8,80	9,09	9,59
5,0		3,73	3,82	3,98	4,25

Fonte: adaptado de Costa e Machado (2008)

A Tabela 9 compara os valores de NMA do gráfico de VMAX com os do gráfico de $|\mathbf{S}|$. Da Tabela 9 observa-se que o gráfico de VMAX é sempre mais eficiente que o gráfico da variância amostral generalizada $|\mathbf{S}|$. Essa tabela foi construída para $\rho=0,5$.

Tabela 9 - Valores de NMA para os gráficos de VMAX e de $|\mathbf{S}|$ ($p=2, \rho=0,5$)

		n			
		4		5	
$a_1^2 = a_2^2$	LC	S	VMAX	S	VMAX
		6,134	4,094	5,375	3,668
1,0		200,0	200,0	200,0	200,0
1,1		146,8	143,0	141,4	139,7
1,2		112,5	107,0	104,6	102,4
1,3		89,1	82,9	80,5	78,0
1,4		73,3	66,1	64,1	61,4
1,5		60,4	54,1	51,9	49,6
2,0		30,2	25,4	24,1	22,3
3,0		13,6	10,7	10,2	9,09
5,0		6,37	4,77	4,58	3,98

Fonte: adaptado de Costa e Machado (2008)

A estatística VMAX além de ser mais fácil de ser calculada do que a estatística da variância amostral generalizada $|\mathbf{S}|$ que depende do cálculo do determinante de uma matriz de covariâncias, se mostrou mais eficiente, ver Tabela 9. O artigo Machado e Costa (2008a) da autora já foi citado 22 vezes segundo consulta realizada em maio de 2016 na base de dados Scopus, ver Capítulo 1 para detalhes. O gráfico de VMAX foi tema de outros artigos da docente, ver Machado et al. (2008), Machado e Costa (2008b), Costa e Machado (2009), Machado et al. (2009), Machado et al. (2009a) e Machado et al. (2009b).

3.3 MONITORAMENTO CONJUNTO DO VETOR DE MÉDIAS E DA MATRIZ DE COVARIÂNCIAS

Os gráficos de T^2 e $|\mathbf{S}|$ são os mais usuais no monitoramento conjunto do vetor de médias e da matriz de covariâncias de processos multivariados. Contudo, o cálculo dessas estatísticas não é simples.

Alternativamente, Machado et al. (2009a) propuseram o gráfico de T^2 combinado com o gráfico de VMAX e o gráfico de MVMAX com regra especial de decisão.

A idéia de se utilizar o gráfico de T^2 combinado com o gráfico de VMAX não trouxe melhorias na velocidade de detecção de desajustes do processo em relação ao uso do gráfico de T^2 combinado

com o gráfico de $|\mathbf{S}|$. Contudo, vale lembrar que a estatística de VMAX é bem mais simples que a de $|\mathbf{S}|$.

O gráfico de MVMAX, baseado em médias e variâncias amostrais, foi proposto por Machado et al (2009a) com o pensamento voltado a uma ferramenta estatística simples para o monitoramento de processos multivariados

Na seção 3.3.1 descreve-se o gráfico de MVMAX.

3.3.1 Gráfico de MVMAX

Machado et al (2009a) propuseram o gráfico de MVMAX para o monitoramento conjunto do vetor de médias e da matriz de covariâncias de processos multivariados, alternativamente aos gráficos conjuntos de T^2 e $|\mathbf{S}|$.

A estatística de MVMAX é baseada no maior valor entre médias e variâncias amostrais. Para o caso bivariado $MVMAX = \max(|Z_1|, |Z_2|, W_1, W_2)$, onde $Z_1 = \sqrt{n}(\bar{X}_1 - \mu_{01})/\sigma_1$, $Z_2 = \sqrt{n}(\bar{X}_2 - \mu_{02})/\sigma_2$, e as variâncias amostrais ponderadas e padronizadas, $W_1 = kS_1^2/\sigma_1^2$ e $W_2 = kS_2^2/\sigma_2^2$, $S_1^2 = \sum_{j=1}^n (x_{1j} - \bar{X}_1)^2 / n - 1$ e $S_2^2 = \sum_{j=1}^n (x_{2j} - \bar{X}_2)^2 / n - 1$. A constante de ponderação k é determinada de tal sorte que, durante o período em controle, as quatro estatísticas $(|Z_1|, |Z_2|, W_1, W_2)$ tenham todas a mesma probabilidade de assumirem valores maiores que LC , isto é, de excederem o limite de controle do gráfico MVMAX.

O gráfico proposto sinaliza um desajuste no processo quando ao menos um dos valores amostrais das quatro estatísticas $(|Z_1|, |Z_2|, W_1, W_2)$ exceder o limite de controle, LC .

Como o gráfico proposto requer apenas o cálculo de estatísticas já familiares do usuário, isto é, médias e variâncias amostrais, ele é muito mais simples de ser utilizado se comparado com os gráficos de T^2 e $|\mathbf{S}|$. Além disso, com base em qual, ou quais, das estatísticas $|Z_1|$, $|Z_2|$, W_1 , W_2 excederam os limites de controle, é possível saber as variáveis que foram afetadas pela causa especial.

O gráfico de MVMAX também tem probabilidade P de sinalizar, lembrando que $P = P_M + P_D - P_M P_D$. A probabilidade p_m de $|Z_1|$ e/ou $|Z_2|$ exceder o limite de controle é dada por:

$$P_M = 1 - \int_{-LC - \delta_1 \sqrt{n}}^{LC - \delta_1 \sqrt{n}} \int_{-LC - \delta_2 \sqrt{n}}^{LC - \delta_2 \sqrt{n}} f(Z_1, Z_2) d_{Z_1} d_{Z_2} \quad (3.10)$$

De acordo com Machado et al. (2009a) a probabilidade P_D do gráfico de MVMAX para o caso bivariado é dada por:

$$P_D = 1 - \int_0^{\frac{(n-1)LC}{ka_1^2}} \Pr \left[\chi_{n, (t\rho^2/1-\rho^2)}^2 < \frac{(n-1)LC}{ka_2^2(1-\rho^2)} \right] \frac{1}{2^{(n-1)/2} \Gamma[(n-1)/2]} e^{-t/2} t^{[(n-1)/2]-1} dt, \quad (3.11)$$

lembrando que a notação $\chi_{n,m}^2$ representa uma distribuição de qui-quadrado não-central com n graus de liberdade e parâmetro de não-centralidade dado por m . A constante de ponderação k é determinada de tal sorte que, durante o período em controle, as médias e variâncias amostrais tenham a mesma probabilidade de assumirem valores maiores que LC , isto é, de excederem o limite de controle do gráfico MVMAX. O procedimento descrito em Machado et al. (2009a) pode ser utilizado para a obtenção das propriedades do gráfico de MVMAX multivariado.

O gráfico de MVMAX foi proposto com o pensamento voltado a uma ferramenta estatística simples para o monitoramento de processos multivariados. O desempenho deste gráfico é viável quando se utiliza a regra especial de decisão de dois pontos na região de ação, também conhecida por regra *synthetic* e proposto pela primeira vez por Wu e Spedding (2000) - a regra *synthetic* será melhor detalhada no Capítulo 7). Como o usuário normalmente não se sente seguro em intervir no processo após a ocorrência de um ponto na região de ação, o uso desta regra especial de decisão com o gráfico de MVMAX parece ser bem oportuno.

Quando a regra especial de decisão está em uso, o NMA_{ss} mede o tempo que o gráfico de controle com regra especial de decisão leva para sinalizar uma alteração no processo. O NMA_{ss} para o gráfico de MVMAX com regra especial de decisão foi obtido utilizando-se o modelo de cadeia de Markov descrito por Davis e Woodall (2002), lembrando que com a regra especial de decisão o sinal é dado quando ocorrem dois pontos na região de ação, não necessariamente vizinhos, porém não distantes um do outro por mais de L intervalos h . O procedimento utilizado para obter o NMA_{ss} para o gráfico de MVMAX com regra especial de decisão é descrito abaixo:

Com L e NMA_0 dados, encontrar o valor de Q_0 tal que:

$$s_0' \times M \times \mathbf{1} = \left(1 - \sqrt{1 - 1/NMA_0}\right)^{-1} \quad (3.12)$$

onde NMA_0 é número médio de amostras entre alarmes falsos (especificado quando da construção do gráfico de controle), M é uma matriz de zeros exceto $m_{11} = Q_0$; $m_{12} = -Q_0$; $m_{i, i+1} = Q_0 - 1$, $i=1, 2, \dots, L$; e $m_{L+1,1} = Q_0 - 1$; $\mathbf{1}$ é um $(L+1) \times 1$ vetor de uns; e s_0 é um vetor $(L+1) \times 1$ com $s_1 = [1 + (L-1)Q_0]^{-1}$ e $s_j = Q_0 s_1$, $j=2, \dots, L+1$. O limite de controle do gráfico proposto,

LC , é obtido da expressão (3.10), fazendo $\delta_1 = \delta_2 = 0$ e $p_d = 1 - \sqrt{1 - Q_0}$. A constante de ponderação k é obtida pela expressão (3.11) fazendo $a_1 = a_2 = 1$ e $p_s = 1 - \sqrt{1 - Q_0}$.

Com a_1 , a_2 , δ_1 e δ_2 dados tem-se:

$$NMA_{ss} = s'_0 \times \mathbf{M} \times \mathbf{1} \quad (3.13)$$

onde $\mathbf{M}$ é agora uma matriz de zeros exceto para $m_{11} = Q$; $m_{12} = -Q$; $m_{i, i+1} = Q - 1$, $i = 1, 2, \dots, L$; e $m_{L+1, 1} = Q - 1$, sendo $Q = 1 - p_d$ com p_d dado pela expressão (3.11); e $\mathbf{1}$ é um vetor $(L+1) \times 1$ de uns.

A Tabela 10 mostra o efeito do parâmetro de projeto L no desempenho do gráfico MVMAX. A medida em que L aumenta, o desempenho do gráfico melhora. A melhora é mais acentuada na faixa em que L varia de 1 até 6. Por exemplo, se L varia de 1 até 6, considerando $a = b = 1$ e $c = d = 0,5$, o NMA diminui de 21,4 para 17,5, o que representa uma redução percentual no valor do NMA de aproximadamente 18,0%. Por outro lado, se L varia de 6 até 10, o NMA diminui de 5,2 para 5,1, o que representa uma redução percentual no valor do NMA de aproximadamente 2,0%.

Tabela 10 - Influência do parâmetro L no desempenho do gráfico MVMAX $(\rho=0,5$; matriz de covariâncias muda de Σ_0 para Σ_1)

				$n=5$										
				L										
					1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_1	a_2	δ_1	δ_2	LC	2,350	2,469	2,536	2,582	2,617	2,644	2,667	2,687	2,703	2,719
1,0	1,0	0	0		200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0
		0	0,5		45,3	40,9	39,1	37,9	37,3	36,8	36,3	36,1	35,9	35,7
		0,5	0,5		21,4	19,2	18,4	17,9	17,7	17,5	17,4	17,3	17,3	17,3
1,25	1,25	0	0		13,6	12,0	11,3	11,0	10,8	10,8	10,6	10,6	10,6	10,6
		0	0,5		8,9	7,8	7,3	7,1	7,0	7,0	6,9	6,9	6,9	6,9
		0,5	0,5		6,5	5,7	5,4	5,3	5,2	5,2	5,2	5,1	5,1	5,1
1,5	1,0	0	0		10,1	8,5	7,9	7,5	7,3	7,3	7,1	7,0	7,0	7,0
		0	0,5		7,6	6,5	6,1	5,9	5,8	5,8	5,7	5,7	5,7	5,7
		0,5	0		7,2	6,0	5,6	5,3	5,2	5,2	5,0	5,0	5,0	4,9
		0,5	0,5		5,8	5,0	4,7	4,5	4,4	4,4	4,3	4,3	4,3	4,3

Fonte: adaptado de Machado et al. (2009a)

3.3.2 Comparando os gráficos conjuntos para o monitoramento de processos multivariados

As Tabelas de 11 a 13 apresentam os NMAs do gráfico MVMAX e dos gráficos de T^2 e $|S|$ em uso simultâneo para diferentes perturbações nos parâmetros do processo. Na detecção de desajustes do processo, o gráfico proposto tem um desempenho geral superior ao dos gráficos de T^2 e $|S|$ em uso simultâneo, exceto quando a correlação entre as duas características de qualidade é muito alta.

Quando a correlação é muito alta e a causa especial desloca a média e/ou a variabilidade de apenas uma das variáveis, X_1 ou X_2 , os gráficos de T^2 e $|S|$ são, em geral, mais ágeis do que gráfico MCMAX. A habilidade dos gráficos de T^2 e $|S|$ em uso simultâneo em sinalizar um desajuste no processo é tanto melhor quanto maior for a correlação ρ entre as variáveis X_1 e X_2 . A correlação ρ tem pouca influência no desempenho do gráfico MVMAX.

Tabela 11 - Valores do *NMA* - gráficos simultâneos de T^2 e $|S|$ e gráfico MVMAX ($\rho = 0,0$)

		$n=5$					$L=7$					
		δ_1	0	0	0,5	0,5	0	0,75	0,75	0	1,0	1,0
		δ_2	0	0,5	0	0,5	0,75	0	0,75	1,0	0	1,0
a_1	a_2											
1,0	1,0	200,0	48,9*	49,2	19,9	16,7	16,8	5,4	6,8	6,6	2,3	
		200,0	36,3**	36,3	17,4	10,8	10,8	5,1	4,3	4,3	2,3	
1,25	1,0	42,6	22,2	17,5	11,0	11,2	8,9	4,4	5,2	4,7	2,1	
		28,2	15,0	12,1	8,6	7,3	6,2	3,8	3,7	3,5	2,1	
1,5	1,0	15,3	10,7	9,0	6,7	6,9	5,8	3,5	4,0	3,7	2,0	
		7,5	5,9	5,2	4,5	4,2	3,8	3,8	2,8	2,7	1,9	
1,25	1,25	15,6	9,9	9,8	9,8	6,2	6,3	3,5	3,9	3,9	2,0	
		10,2	6,7	6,7	5,0	4,4	4,4	2,9	2,9	2,9	1,9	
1,5	1,5	4,4	3,6	3,6	3,1	3,0	3,0	2,3	2,4	2,4	1,7	
		3,0	2,6	2,6	2,4	2,3	2,3	1,9	1,9	1,9	1,6	

Fonte: adaptado de Machado et al. (2009a); * gráficos simultâneos de T^2 e $|S|$; **gráfico MVMAX

Tabela 12 - Valores do *NMA* - gráficos simultâneos de T^2 e $|S|$ e gráfico MVMAX ($\rho = 0,5$)

		$n=5$					$L=7$					
		δ_1	0	0	0,5	0,5	0	0,75	0,75	0	1,0	1,0
		δ_2	0	0,5	0	0,5	0,75	0	0,75	1,0	0	1,0
a_1	a_2											
1,0	1,0	200,0	38,4*	38,5	34,8	10,8	10,8	10,6	4,1	4,2	4,1	
		200,0	36,3**	36,3	17,4	10,8	10,8	5,1	4,3	4,3	2,3	
1,25	1,0	41,6	17,7	14,1	15,8	7,6	6,6	7,1	3,5	3,5	3,5	
		26,5	14,4	11,7	8,4	7,2	6,1	3,8	3,6	3,5	2,1	
1,5	1,0	14,6	8,9	7,7	8,4	5,2	4,6	5,0	3,0	2,9	3,0	
		7,1	5,7	5,0	4,3	4,1	3,7	2,8	2,7	2,7	1,9	
1,25	1,25	15,9	8,7	8,6	8,6	4,9	4,8	4,9	2,9	2,9	2,9	
		10,6	6,9	6,9	5,1	4,5	4,5	3,0	2,9	2,9	1,9	
1,5	1,5	4,3	3,5	3,5	3,4	2,7	2,7	2,7	2,1	2,1	2,1	
		3,2	2,8	2,8	2,5	2,4	2,4	2,0	2,0	2,0	1,6	

Fonte: adaptado de Machado et al. (2009a); *gráficos simultâneos de T^2 e $|S|$; **gráfico MVMAX

Tabela 13 - Valores do NMA - gráficos simultâneos de T^2 e $|S|$ e gráfico MVMAX ($\rho = 0,7$)

		$n=5$					$L=7$					
		δ_1	0	0	0,5	0,5	0	0,75	0,75	0	1,0	1,0
		δ_2	0	0,5	0	0,5	0,75	0	0,75	1,0	0	1,0
a_1	a_2											
1,0	1,0	200,0	20,6*	20,2	39,7	5,7	5,6	12,9	2,3	2,3	5,0	
		200,0	36,3**	36,3	17,4	10,8	10,8	5,1	4,3	4,3	2,3	
1,25	1,0	39,1	11,9	9,8	17,1	4,6	4,2	8,2	2,2	2,2	4,1	
		25,1	14,0	11,4	8,2	7,1	6,0	3,8	3,6	3,6	2,1	
1,5	1,0	13,1	6,9	5,8	8,3	3,6	3,4	5,3	2,0	2,1	3,3	
		6,7	5,5	4,9	4,2	4,0	3,6	2,7	2,7	2,6	1,9	
1,25	1,25	15,7	6,9	6,8	9,2	3,5	3,5	5,4	2,0	2,0	3,3	
		11,2	7,2	7,2	5,3	4,6	4,6	3,0	3,0	3,0	1,9	
1,5	1,5	4,3	3,1	3,1	3,6	2,3	2,3	2,9	1,7	1,7	2,2	
		3,4	2,9	2,9	2,6	2,5	2,5	2,0	2,0	2,0	1,6	

Fonte: adaptado de Machado et al. (2009a); *gráficos simultâneos de T^2 e $|S|$; **gráfico MVMAX

Na Tabela 14 estão os valores de P_v , que corresponde a probabilidade do gráfico de controle sinalizar que a causa especial afetou a média e/ou a variância da variável X_1 , isto é, $Z_1 > LC$ ou $W_1 > LC$, quando na verdade ela afetou a média e/ou a variância de X_2 . Dessa tabela, observa-se que a probabilidade do gráfico sinalizar erroneamente é muito pequena (menor do que 1,0 %).

Tabela 14 - Valores de P_v para o gráfico de MVMAX (%)

		$n=5$					$L=7$				
		δ_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		δ_2	0,5	0,75	1,0	1,5	2,0				
a_1	a_2										
1,0	1,25		0,68	0,61	0,49	0,23	0,06				
1,0	1,5		0,65	0,57	0,47	0,25	0,09				
1,0	1,75		0,61	0,54	0,46	0,27	0,12				
1,0	2,0		0,58	0,52	0,44	0,28	0,14				

Fonte: adaptado de Machado et al. (2009a)

Para o caso multivariado, as comparações entre os gráficos conjuntos levaram às mesmas conclusões.

Nos próximos capítulos serão descritos os resultados obtidos pela autora após o doutorado.

4. ESTATÍSTICAS MAIS SIMPLES E MAIS EFICIENTES PARA O MONITORAMENTO DE PROCESSOS MULTIVARIADOS

A ideia de se trabalhar com estatísticas mais simples de monitoramento surgiu da pesquisa de doutorado da autora (MACHADO, 2009).

Dando continuidade a essa idéia, de se trabalhar com estatísticas mais simples de monitoramento, após a conclusão do doutorado a docente estudou o desempenho do gráfico de controle baseado em amplitudes amostrais (gráfico RMAX) para o monitoramento da matriz de covariâncias de processos multivariados. Para o caso univariado, o gráfico da amplitude é uma ferramenta bastante utilizada no monitoramento da variabilidade do processo. Entretanto, de acordo com uma vasta pesquisa na literatura, observou-se que ainda não existiam estudos sobre as propriedades do gráfico de controle baseado em amplitudes amostrais para o monitoramento da matriz de covariâncias de processos multivariados.

Em Costa e Machado (2011), os autores apresentaram o desenvolvimento matemático necessário para a obtenção das propriedades do gráfico de RMAX.

O gráfico de RMAX é, na grande maioria das vezes, mais eficiente do que o gráfico de $|\mathbf{S}|$ em detectar perturbações na matriz de covariâncias. Por outro lado, o gráfico de VMAX é sempre mais eficiente em detectar alterações na matriz de covariâncias do que o gráfico de RMAX.

Em Costa e Machado (2011a), os autores propuseram o gráfico de controle MRMAX, baseado nas médias e nas amplitudes amostrais para o monitoramento simultâneo do vetor de médias e da matriz de covariâncias de processos multivariados. Como os gráficos propostos exigem apenas o cálculo de estatísticas já familiares do usuário, isto é, médias e amplitudes amostrais, ele é muito mais simples de ser utilizado se comparado com os gráficos existentes até então na literatura, os gráficos de T^2 e $|\mathbf{S}|$, que envolve o cálculo de vetores e matrizes.

O gráfico de MRMAX com regras suplementares de decisão foi proposto em Costa e Machado (2013). A regra de decisão de Shewhart, quando da criação dos gráficos de controle, é bastante simples: um ponto amostral dentro dos limites de controle de 3-sigma significa que o operador não deve intervir no processo; um ponto fora desses limites significa que o operador deve intervir no processo em busca de causas especiais. No entanto, após a criação do gráfico de controle, surgiu um número infundável de novas regras de decisão, todas com o propósito de acelerar a detecção de alterações no processo. Em geral, essas regras são definidas apenas para o gráfico de $\bar{X}$. Para exemplificar, suponha a seguinte regra: o sinal é produzido sempre que 6 pontos consecutivos caírem todos de um mesmo lado, abaixo ou acima, da linha média. Existem inúmeras outras regras de decisão. O gráfico de MRMAX com a

adição de regras tem melhor desempenho do que o gráfico de MRMAX baseado na regra básica de decisão.

4.1 O GRÁFICO DE RMAX

O gráfico de RMAX utiliza uma nova estatística, estatística RMAX, baseada nas amplitudes amostrais para o monitoramento da matriz de covariâncias Σ de processos multivariados com p características de qualidade que seguem uma distribuição normal multivariada. A estatística RMAX corresponde ao maior valor de $R_i = \max[X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}] - \min[X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}]$, ou seja, $RMAX = \max\{R_1, R_2, \dots, R_p\}$, onde X_{ij} , $i = 1, 2, \dots, p$, $j = 1, 2, \dots, n$, é uma matriz $p \times n$ das medições das características de qualidade realizadas nos n itens da amostra. Quando o processo está em controle, a

matriz de covariâncias é dada por $\Sigma_0 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$, onde σ_{ij} , $i = j = 1, 2, \dots, p$, são as p

variâncias das características de qualidade e σ_{ij} , com $i \neq j = 1, 2, \dots, p$, são as covariâncias entre duas características de qualidade.

Se a estatística RMAX exceder o limite de controle (LC), o gráfico de controle sinaliza o desajuste do processo. O gráfico de R é insensível a decréscimos na variância do processo, especialmente para amostras pequenas; conseqüentemente, este gráfico não tem limite inferior de controle. Baseado neste fato, sugere-se o uso do gráfico de RMAX para a detecção de aumento nas variâncias e nas covariâncias do processo. A ocorrência da causa especial altera a matriz de

covariâncias de Σ_0 para $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} a_1 \cdot a_1 \cdot \sigma_{11} & a_1 \cdot a_2 \cdot \sigma_{12} & \cdots & a_1 \cdot a_p \cdot \sigma_{1p} \\ a_1 \cdot a_2 \cdot \sigma_{21} & a_2 \cdot a_2 \cdot \sigma_{22} & \cdots & a_2 \cdot a_p \cdot \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1 \cdot a_p \cdot \sigma_{p1} & a_2 \cdot a_p \cdot \sigma_{p2} & \cdots & a_p \cdot a_p \cdot \sigma_{pp} \end{bmatrix}$. As correlações $\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$,

$i, j = 1, 2, \dots, p$, com $i \neq j$, não são afetadas pela causa especial. Considera-se que $a_k > 1$, $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ e $a_i \geq 1$, $i \neq k \in \{1, 2, \dots, p\}$.

O poder do gráfico de RMAX é dado por:

$$P_D = 1 - F_n(w_1, w_2) \quad (4.1)$$

onde $w_1 = LC/ka_1$ e $w_2 = LC/ka_2$. LC foi dividido por a_i para satisfazer a condição de que $x_i/a_i\sigma_i \sim N(\mu_i, 1)$, com $i = 1, 2$.

O NMA é dado por

$$NMA = \frac{1}{1 - F_n(w_1, w_2)}. \quad (4.2)$$

Sejam (x_1, x_2) o par de valores das duas características de qualidade de cada item inspecionado. Considere que $y_1 = \min(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n})$ e $y_2 = \min(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n})$. Considere também dois casos, I_1 e I_2 . I_1 é o caso onde (y_1, y_2) , isto é, um item da amostra apresenta os menores valores das duas características de qualidade e I_2 é o caso onde $[(y_1, x_2 > y_2) \cap (x_1 > y_1, y_2)]$, ou seja, um item da amostra apresenta o menor valor para a primeira característica de qualidade e outro item apresenta o menor valor para a segunda característica de qualidade.

Sendo assim,

$$F(w_1, w_2) = I_1 + I_2 = n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} D_1^{n-1} dF(y_1, y_2) + n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (n-1) D_1^{n-2} D_2 dG(y_1, y_2) \quad (4.3)$$

onde

$$F(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{y_1} \int_{-\infty}^{y_2} \exp\left(\frac{-y_1^2 - 2\rho y_1 y_2 + y_2^2}{2(1-\rho^2)}\right) dy_1 dy_2 \quad (4.4)$$

e

$$G(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{y_1} \int_{-\infty}^{y_2} \exp\left(\frac{-y_1^2 + y_2^2}{2}\right) dy_1 dy_2. \quad (4.5)$$

A probabilidade D_1 é dada por:

$$\begin{aligned} D_1 &= \Pr[y_1 < x_1 \leq y_1 + w_1, y_2 < x_2 \leq y_2 + w_2] \\ &= B(y_1 + w_1, y_2 + w_2, \rho) - B(y_1 + w_1, y_2, \rho) - B(y_1, y_2 + w_2, \rho) + B(y_1, y_2, \rho) \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde $B(x, y, \rho)$ é a função de distribuição de uma normal bivariada com média zero e uma dada correlação.

A probabilidade D_2 é dada por:

$$\begin{aligned} D_2 &= \Pr[y_1 < x_1 \leq y_1 + w_1 / y_2] \Pr[y_2 < x_2 \leq y_2 + w_2 / y_1] \\ &= [\Phi(A_1) - \Phi(A_2)][\Phi(A_3) - \Phi(A_4)] \end{aligned} \quad (4.7)$$

De acordo com a distribuição condicional, $x / y \sim N(\rho y; (1 - \rho^2))$, ver Mood *et al.* (1974). Então:

$$A_1 = (y_1 + w_1 - y_2 \rho) / \sqrt{1 - \rho^2}$$

$$A_2 = (y_1 - y_2 \rho) / \sqrt{1 - \rho^2}$$

$$A_3 = (y_2 + w_2 - y_1\rho)/\sqrt{1-\rho^2}$$

$$A_4 = (y_2 - y_1\rho)/\sqrt{1-\rho^2}$$

onde $\Phi(x)$ é a função distribuição acumulada da normal padronizada.

Durante o período em controle, $a_1 = a_2 = 1$. Como o risco de alarme falso é uma função decrescente contínua de LC , realiza-se uma busca exaustiva utilizando a expressão (A1) para obter o valor de k que torna P_D igual a um valor de α especificado, lembrando que $NMA_0 = 1/\alpha$. Durante o período fora-de-controle, com os valores de ρ , n e LC , a_1 e a_2 especificados, a expressão (4.1) é utilizada para obter o NMA , lembrando que $NMA = (1/P_D)$.

Costa e Machado (2011) apresentam também o desenvolvimento matemático necessário para a obtenção da expressão do NMA para o gráfico de RMAX quando $p = 3$.

As Tabelas 15 e 16 contêm os valores de NMA para o gráfico de RMAX. Na Tabela 15, $p = 2$, $n=5$ e $\rho = 0, 0,3, 0,5, 0,7$. Na Tabela 16, $p = 3$, $n=5$ e $(\rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{23}) = (0,0;0,0;0,0), (0,5;0,5;0,5), (0,7;0,5;0,2)$. Adotou-se $NMA_0 = 200,0$.

O coeficiente de correlação ρ tem alguma influência no gráfico de RMAX (ver Tabelas 15 e 16). Quando a causa especial afeta apenas uma das variáveis, correlações altas levam a valores de NMA ligeiramente inferiores. Quando a causa especial afeta todas as variáveis, a medida em que os coeficientes de correlação aumentam de 0 para 0,7, o NMA diminui, ver Tabela 15.

Tabela 15 - Análise da influência da correlação no desempenho do gráfico de RMAX ($p=2$).

		ρ			
		0,0	0,3	0,5	0,7
LC		5,152	5,150	5,145	5,128
a_1	a_2				
1,0	1,0	200,0	200,0	200,0	200,0
1,25	1,0	31,5	31,5	31,5	31,3
1,25	1,25	17,3	17,5	17,9	18,6
1,5	1,0	9,09	9,09	9,09	8,98
1,25	1,5	7,47	7,56	7,72	7,96
1,5	1,5	4,91	5,01	5,20	5,51

Fonte: adaptado de Costa e Machado (2011)

Tabela 16 - Valores de *NMA* para o gráfico de RMAX ($p=3, n=5$).

				ρ_{12}	0,0	0,5	0,7
				ρ_{13}	0,0	0,5	0,5
				ρ_{23}	0,0	0,5	0,2
a_1	a_2	a_3	LC	5,301	5,294	5,289	
1,0	1,0	1,0		200,0	200,0	200,0	
1,25	1,0	1,0		38,4	38,8	38,9	
1,0	1,25	1,0		38,4	38,8	38,7	
1,0	1,0	1,25		38,4	38,8	38,3	
1,25	1,25	1,0		21,5	22,3	23,4	
1,25	1,0	1,25		21,5	22,3	22,2	
1,0	1,25	1,25		21,5	22,3	21,5	
1,25	1,25	1,25		15,0	16,0	16,1	
1,5	1,5	1,5		4,02	4,45	4,51	

Fonte: adaptado de Costa e Machado (2011)

4.1.1 Comparando os gráficos de RMAX e de VMAX

As Tabelas 17 e 18 comparam os valores de *NMA* para os gráficos de RMAX e de VMAX. Na Tabela 17, $p = 2$ e na Tabela 18, $p = 3$. Essas Tabelas foram obtidas considerando os coeficientes de correlação iguais a 0,5. O gráfico de VMAX é sempre mais eficiente em detectar alterações na matriz de covariâncias, ou seja, apresenta menores valores de *NMA*, do que o gráfico de RMAX. A redução nos valores de *NMA* fornecido pelo gráfico de VMAX é substancialmente grande, mais do que 27,0%, ver os valores de P_v nas Tabelas 17 e 18.

Tabela 17 - Valores de *NMA* para os gráficos de RMAX e de VMAX ($p=2, \rho=0,5$).

a_1	a_2	LC	n					
			4			5		
			VMAX	RMAX	%	VMAX	RMAX	P_v (%)
			4,094	4,960	-	3,668	5,145	-
1,0	1,0		200,0	200,0	0	200,0	200,0	-
1,25	1,0		28,5	35,8	25,6	24,7	31,5	27,5
1,25	1,25		16,2	20,5	26,5	13,9	17,9	28,8
1,5	1,0		8,11	10,9	34,4	6,70	9,09	35,7
1,25	1,5		6,94	9,24	33,1	5,78	7,72	33,6
1,5	1,5		4,69	6,24	33,1	3,91	5,20	33,0

Fonte: adaptado de Costa e Machado (2011)

Tabela 18 - Valores de NMA para os gráficos de RMAX e de VMAX ($p=3, \rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23}=0,5$).

a_1	a_2	a_3	LC	n					
				4			5		
				VMAX	RMAX	%	VMAX	RMAX	P_v (%)
				4,313	5,113	-	3,851	5,294	-
1,0	1,0	1,0		200,0	200,0	0	200,0	200,0	-
1,25	1,0	1,0		34,8	43,9	26,1	30,1	38,8	28,9
1,25	1,25	1,0		19,9	25,6	28,6	17,1	22,3	30,4
1,25	1,25	1,25		14,4	18,4	27,8	12,3	16,0	30,1
1,5	1,5	1,5		4,05	5,38	32,8	3,39	4,45	31,3

Fonte: adaptado de Costa e Machado (2011)

4.1.2 Comparando o gráfico de $|S|$ com o gráfico de RMAX

A Tabela 19 compara o gráfico de RMAX com o gráfico de $|S|$. Essa Tabela foi obtida considerando os coeficientes de correlação iguais a 0,5. O gráfico de RMAX é mais rápido em sinalizar um desajuste na matriz de covariâncias do processo do que o gráfico de $|S|$, exceto quando a causa especial aumenta a variância de todas as p características de qualidade.

4.2 O GRÁFICO DE MRMAX

O gráfico de MRMAX, proposto por Costa e Machado (2011a), é baseado nas médias e nas amplitudes amostrais para o monitoramento do vetor de médias μ e/ou da matriz de covariâncias Σ de processos multivariados com p características de qualidade que seguem uma distribuição normal multivariada. O ponto amostral plotado no gráfico corresponde ao maior valor entre $(|Z_1|, |Z_2|, \dots, |Z_p|, W_1, W_2, \dots, W_p)$, $i = 1, 2, \dots, p$, onde $Z_i = \sqrt{n}(\bar{X}_i - \mu_i) / \sigma_i$ e $W_i = kR_i / \sigma_i$. Como a estatística de monitoramento é o maior valor entre médias e amplitudes amostrais, o gráfico é denominado de gráfico de MRMAX.

A constante de ponderação k é determinada de tal sorte que, durante o período em controle, as estatísticas $(|Z_1|, |Z_2|, \dots, |Z_p|, W_1, W_2, \dots, W_p)$ tenham todas a mesma probabilidade de assumirem valores maiores que LC , isto é, de excederem o limite de controle do gráfico MRMAX.

Quando o processo está sob controle o vetor de médias e a matriz de covariâncias são dados

respectivamente por $(\mu = \mu_0 \text{ e } \Sigma = \Sigma_0)$, onde $\mu'_0 = (\mu_1; \mu_2; \dots, \mu_p)$ e $\Sigma_0 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$. A

ocorrência da causa especial altera o vetor de médias de μ_0 para $\mu'_1 = (\mu_1 + \delta_1 \sigma_1; \mu_2 + \delta_2 \sigma_2; \dots; \mu_p + \delta_p \sigma_p)$ e/ou a matriz de covariâncias de Σ_0 para

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} a_1 \cdot a_1 \cdot \sigma_{11} & a_1 \cdot a_2 \cdot \sigma_{12} & \cdots & a_1 \cdot a_p \cdot \sigma_{1p} \\ a_1 \cdot a_2 \cdot \sigma_{21} & a_2 \cdot a_2 \cdot \sigma_{22} & \cdots & a_2 \cdot a_p \cdot \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1 \cdot a_p \cdot \sigma_{p1} & a_2 \cdot a_p \cdot \sigma_{p2} & \cdots & a_p \cdot a_p \cdot \sigma_{pp} \end{bmatrix}. \text{ As correlações } \rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}, i, j = 1, 2, \dots, p, \text{ com } i \neq j$$

, não são afetadas pela causa especial. Após a ocorrência da causa especial pelo menos um valor de δ_i deve ser maior do que zero e/ou pelo menos um valor de a_i deve ser maior do que um, $i = 1, 2, \dots, p$.

Tabela 19 - Os valores de NMA para os gráficos de RMAX e de $|S|$ ($n=5$)

$p=2$				$p=3$				
		$ S $	RMAX				$ S $	RMAX
	LC	5,375	5,145		LC	4,620	5,294	
a_1	a_2			a_1	a_2	a_3		
1,0	1,0	200,0	200,0	1,0	1,0	1,0	200,0	200,0
$\sqrt{1,2}$	1,0	104,6	96,9	$\sqrt{1,2}$	1,0	1,0	125,3	96,9
$\sqrt{1,4}$	1,0	64,1	49,6	$\sqrt{1,4}$	1,0	1,0	87,3	49,6
$\sqrt{2}$	1,0	24,1	13,0	$\sqrt{2}$	1,0	1,0	41,6	13,0
$\sqrt{3}$	1,0	10,2	4,53	$\sqrt{3}$	1,0	1,0	20,7	4,53
$\sqrt{5}$	1,0	4,58	2,08	$\sqrt{5}$	1,0	1,0	9,93	2,08
1,0	1,0	200,0	200,0	1,0	1,0	1,0	200,0	200,0
$\sqrt[4]{1,2}$	$\sqrt[4]{1,2}$	104,6	110,6	$\sqrt[4]{1,2}$	$\sqrt[4]{1,2}$	1,0	125,3	127,4
$\sqrt[4]{1,4}$	$\sqrt[4]{1,4}$	64,1	70,0	$\sqrt[4]{1,4}$	$\sqrt[4]{1,4}$	1,0	87,3	85,4
$\sqrt[4]{2}$	$\sqrt[4]{2}$	24,1	27,8	$\sqrt[4]{2}$	$\sqrt[4]{2}$	1,0	41,6	35,0
$\sqrt[4]{3}$	$\sqrt[4]{3}$	10,2	12,0	$\sqrt[4]{3}$	$\sqrt[4]{3}$	1,0	20,7	14,6
$\sqrt[4]{5}$	$\sqrt[4]{5}$	4,58	5,28	$\sqrt[4]{5}$	$\sqrt[4]{5}$	1,0	9,93	6,17
				1,0	1,0	1,0	200,0	200,0
				$\sqrt[5]{1,2}$	$\sqrt[5]{1,2}$	$\sqrt[5]{1,2}$	125,3	132,0
				$\sqrt[5]{1,4}$	$\sqrt[5]{1,4}$	$\sqrt[5]{1,4}$	87,3	94,4
				$\sqrt[5]{2}$	$\sqrt[5]{2}$	$\sqrt[5]{2}$	41,6	46,4
				$\sqrt[5]{3}$	$\sqrt[5]{3}$	$\sqrt[5]{3}$	20,7	23,0
				$\sqrt[5]{5}$	$\sqrt[5]{5}$	$\sqrt[5]{5}$	9,93	11,0

Fonte: adaptado de Costa e Machado (2011)

O gráfico proposto sinaliza um desajuste no processo quando a estatística MRMAX excede o limite de controle, LC .

Como o gráfico proposto requer apenas o cálculo de estatísticas já familiares do usuário, isto é, médias e amplitudes amostrais, ele é muito mais simples de ser utilizado se comparado com os gráficos de T^2 e $|S|$. Além disso, com base em qual, ou quais, das estatísticas $(|Z_1|, |Z_2|, \dots, |Z_p|, W_1, W_2, \dots, W_p)$ excederem os limites de controle, é possível saber as variáveis que foram afetadas pela causa especial.

4.2.1 Propriedades do gráfico de MRMAX

O caso bivariado será utilizado para ilustrar como as propriedades do gráfico de MRMAX foram obtidas, isto é, a probabilidade de alarme falso α e o poder de detecção P . O fato das variáveis Z_1 e Z_2 serem independentes de W_1 e de W_2 facilita a obtenção das propriedades do gráfico MRMAX.

O gráfico de MRMAX tem probabilidade P de sinalizar, $P = P_M + P_D - P_M P_D$.

A probabilidade P_M de $|Z_1|$ e/ou $|Z_2|$ exceder o limite de controle é dada por:

$$P_M = 1 - \int_{-LC-\delta_1\sqrt{n}}^{LC-\delta_1\sqrt{n}} \int_{-LC-\delta_2\sqrt{n}}^{LC-\delta_2\sqrt{n}} f(Z_1, Z_2) d_{Z_1} d_{Z_2} \quad (4.8)$$

onde $f(Z_1, Z_2)$ é a função de distribuição da normal bivariada padronizada, lembrando que LC é o limite de controle do gráfico de MRMAX. A probabilidade P_M pode ser facilmente obtida para $p > 2$ utilizando o algoritmo dado por Serel *et al.* (2000).

A probabilidade P_D de W_1 e/ou W_2 exceder o limite de controle é dada pela expressão (4.1). A probabilidade P pode ser facilmente estendida para o caso multivariado.

Quando a regra de um ponto na região de ação do gráfico de controle é adotada e a probabilidade de alarme falso é especificada em α , o limite de controle do gráfico de MRMAX é obtido pela expressão (8), com $\delta_1 = \delta_2 = 0$ e $P_M = 1 - \sqrt{1 - \alpha}$. O valor de k é obtido pela expressão (4.1), com $a_1 = a_2 = 1$ e $P_D = 1 - \sqrt{1 - \alpha}$. A subrotina BNRDF disponível na biblioteca do Fortran (1995) foi utilizada para calcular a função distribuição da normal bivariada. O gráfico de MRMAX não é sempre mais rápido na sinalização de desajustes do que os gráficos de T^2 e $|S|$ em uso conjunto. Entretanto, o uso da regra especial de decisão, introduzida por Wu e Spedding (2000), melhora o desempenho do gráfico de MRMAX.

Quando a regra especial de decisão está em uso, o NMA_{ss} mede o tempo que o gráfico de controle com regra especial de decisão leva para sinalizar uma alteração no processo. O NMA_{ss} para o gráfico de MRMAX com regra especial de decisão foi obtido utilizando-se o modelo de cadeia de Markov descrito por Davis e Woodall (2002), lembrando que com a regra especial de decisão o sinal é dado quando ocorrem dois pontos na região de ação, não necessariamente vizinhos, porém não distantes um do outro por mais de L intervalos h . O procedimento utilizado para obter o NMA_{ss} para o gráfico de MRMAX é o mesmo já descrito na seção 3.1.

A Tabela 20 mostra o efeito do parâmetro de projeto L no desempenho do gráfico MRMAX. A medida em que L aumenta, o desempenho do gráfico melhora. A melhora é mais acentuada na faixa em que L varia de 1 até 6. Por exemplo, se L varia de 1 até 6, considerando $a_1 = a_2 = 1$ e $\delta_1 = \delta_2 = 0,5$, o NMA diminui de 21,4 para 17,5, o que representa uma redução percentual no valor do NMA de aproximadamente 18,0%. Por outro lado, se L varia de 6 até 10, o NMA diminui de 17,5 para 17,3, o que representa uma redução percentual no valor do NMA de aproximadamente 1,0%.

Tabela 20 - Influência do parâmetro L no desempenho do gráfico de MRMAX
($p=2, \rho=0,5$).

					$n=5$									
					L									
a_1	a_2	δ_1	δ_2	$LC=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1,0	1,0	0	0		200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0
		0	0,5		45,3	40,9	39,1	37,9	37,2	36,8	36,3	36,1	35,8	35,8
		0,5	0,5		21,4	19,2	18,4	17,9	17,7	17,5	17,4	17,3	17,3	17,3
1,25	1,25	0	0		15,4	13,6	12,9	12,5	12,3	12,1	12,1	12,0	12,0	11,9
		0	0,5		9,67	8,43	7,98	7,74	7,60	7,5	7,5	7,4	7,4	7,4
		0,5	0,5		6,95	6,06	5,75	5,59	5,50	5,5	5,4	5,4	5,4	5,4
1,5	1,0	0	0		9,82	8,28	7,69	7,36	7,17	7,0	7,0	6,9	6,8	6,8
		0	0,5		7,42	6,40	6,03	5,84	5,73	5,7	5,6	5,6	5,6	5,6
		0,5	0		7,02	5,90	5,49	5,27	5,14	5,1	5,0	5,0	4,9	4,9
		0,5	0,5		5,68	4,89	4,60	4,46	4,38	4,3	4,3	4,3	4,3	4,2

Fonte: adaptado de Costa e Machado (2011a)

4.2.1 Comparando os gráficos de MRMAX e MVMAX

Nesta seção os gráficos de MRMAX e MVMAX com regra especial de decisão são comparados. Para o caso bivariado, Machado et al. (2009a) compararam o gráfico de MVMAX com regra especial

de decisão com os gráficos conjuntos de T^2 e $|\mathbf{S}|$ e ele é, em geral, mais rápido em sinalizar desajustes no processo, exceto quando a correlação entre as duas variáveis é alta.

A Tabela 21 compara os valores de NMA_{ss} para os gráficos de MRMAX e MVMAX com regra especial de decisão, em que $\rho = 0,0; 0,5; 0,7$, a_1 e $a_2 = 1,0; 1,25; 1,5$ e δ_1 e $\delta_2 = 0,0; 0,5; 0,75; 1,0$. Adotou-se $NMA_0 = 200,0$. Se é conhecida a informação de que a causa especial altera apenas uma variável de cada vez, então o gráfico de MRMAX é, em geral, a melhor opção. Para os outros casos, o gráfico de MVMAX é, em geral, mais eficiente do que o gráfico de MRMAX. Entretanto, mesmo nestes casos, a redução no NMA_{ss} fornecida pelo gráfico de MVMAX é muito pequena. Para o caso em que a causa especial não afeta a dispersão do processo, os gráficos de MVMAX e MRMAX têm o mesmo desempenho para qualquer perturbação. A correlação entre as duas variáveis tem pequena influência no desempenho de ambos os gráficos.

Para o caso multivariado ($p > 2$), a comparação entre os gráficos de MVMAX e MRMAX com regra especial de decisão levaram às mesmas conclusões.

A Tabela 21 foi obtida considerando três valores diferentes de a_1 e a_2 e quatro valores diferentes de δ_1 e δ_2 . O arranjo ortogonal, neste caso, é composto de 144 combinações; entretanto, esta tabela apresenta apenas uma metade do arranjo ortogonal. A explicação é que os casos simétricos ($a_1 = c_1$, $a_2 = c_2$, $\delta_1 = c_3$ e $\delta_2 = c_4$) e ($a_1 = c_2$, $a_2 = c_1$, $\delta_1 = c_4$ e $\delta_2 = c_3$), com $c_1, c_2 \in \{1; 1,25; 1,5\}$ e $c_3, c_4 \in \{0; 0,5; 0,75; 1,0\}$, levam aos mesmos valores de NMA_{ss} .

Tabela 21 - Valores de NMA_{ss} para os gráficos de MVMAX e MRMAX com regra especial de decisão ($n=5$ e $L=7$).

Matriz de covariâncias			Vetor de médias												
			δ_1	0	0	0,5	0,5	0	0,75	0,5	0,75	0,75	0	1,0	1,0
a_1	a_2	ρ	δ_2	0	0,5	0	0,5	0,75	0	0,75	0,5	0,75	1,0	0	1,0
1,0	1,0	0,0		200,0	36,3*	36,3	17,4	10,8	10,8	7,9	7,9	5,1	4,3	4,3	2,3
				200,0	36,3**	36,3	17,4	10,8	10,8	7,9	7,9	5,1	4,3	4,3	2,3
		0,5		200,0	36,3*	36,3	17,4	10,8	10,8	7,9	7,9	5,1	4,3	4,3	2,3
				200,0	36,3**	36,3	17,4	10,8	10,8	7,9	7,9	5,1	4,3	4,3	2,3
		0,7		200,0	36,3*	36,3	17,4	10,8	10,8	7,9	7,9	5,1	4,3	4,3	2,3
				200,0	36,3**	36,3	17,4	10,8	10,8	7,9	7,9	5,1	4,3	4,3	2,3
1,25	1,0	0,0		25,1	14,0	11,4	8,2	7,1	6,0	5,2	5,0	3,8	3,6	3,4	2,1
				28,2	15,0	12,1	8,6	7,3	6,2	5,4	5,1	3,8	3,7	3,5	2,1
		0,5		25,2	14,0	11,4	8,2	7,1	6,0	5,2	5,0	3,8	3,6	3,4	2,1
				26,5	14,4	11,7	8,4	7,2	6,1	5,3	5,1	3,8	3,6	3,5	2,1
		0,7		25,0	14,0	11,4	8,2	7,1	6,0	5,2	5,0	3,8	3,6	3,4	2,1
				25,1	14,0	11,4	8,2	7,1	6,0	5,2	5,0	3,8	3,6	3,6	2,1
1,5	1,0	0,0		7,0	5,6	5,0	4,3	4,1	3,7	3,4	3,3	2,8	2,7	2,7	1,9
				7,5	5,9	5,2	4,5	4,2	3,8	3,5	3,4	3,8	2,8	2,7	1,9
		0,5		7,0	5,6	5,0	4,3	4,1	3,7	3,4	3,3	2,8	2,7	2,7	1,9
				7,1	5,7	5,0	4,3	4,1	3,7	3,4	3,3	2,8	2,7	2,7	1,9
		0,7		6,9	5,6	5,0	4,3	4,1	3,7	3,4	3,3	2,8	2,7	2,7	1,9
				6,7	5,5	4,9	4,2	4,0	3,6	3,3	3,3	2,7	2,7	2,6	1,9
1,25	1,25	0,0		11,6	7,3	7,3	5,3	4,7	4,7	3,8	3,8	3,0	3,0	3,0	1,9
				10,2	6,7	6,7	5,0	4,4	4,4	3,7	3,7	2,9	2,9	2,9	1,9
		0,5		12,1	7,5	7,5	5,4	4,7	4,7	3,9	3,9	3,1	3,0	3,0	2,0
				10,6	6,9	6,9	5,1	4,5	4,5	3,7	3,7	3,0	2,9	2,9	1,9
		0,7		12,5	7,7	7,7	5,5	4,8	4,8	3,9	3,9	3,1	3,1	3,1	2,0
				11,2	7,2	7,2	5,3	4,6	4,6	3,8	3,8	3,0	3,0	3,0	1,9
1,25	1,5	0,0		5,2	4,1	4,2	3,4	3,2	3,2	2,8	2,8	2,4	2,4	2,4	1,8
				4,1	3,4	3,5	3,0	2,8	2,8	2,5	2,5	2,2	2,2	2,2	1,7
		0,5		5,4	4,2	4,3	3,5	3,2	3,3	2,8	2,8	2,4	2,5	2,4	1,8
				4,3	3,5	3,6	3,1	2,9	2,9	2,6	2,6	2,2	2,3	2,3	1,7
		0,7		5,5	4,2	4,4	3,5	3,3	3,3	2,9	2,9	2,4	2,5	2,5	1,8
				4,7	3,7	3,8	3,2	3,0	3,0	2,7	2,7	2,3	2,3	2,3	1,7
1,5	1,5	0,0		3,4	2,9	2,9	2,6	2,5	2,5	2,3	2,3	2,0	2,1	2,1	1,6
				3,0	2,6	2,6	2,4	2,3	2,3	2,1	2,1	1,9	1,9	1,9	1,6
		0,5		3,6	3,1	3,1	2,7	2,6	2,6	2,3	2,3	2,1	2,1	2,1	1,6
				3,2	2,8	2,8	2,5	2,4	2,4	2,2	2,2	2,0	2,0	2,0	1,6
		0,7		3,8	3,2	3,2	2,8	2,6	2,6	2,4	2,4	2,1	2,2	2,2	1,7
				3,4	2,9	2,9	2,6	2,5	2,5	2,3	2,3	2,0	2,0	2,0	1,6

Fonte: adaptado de Costa e Machado (2011a); * gráfico MRMAX; ** gráfico MVMAX

A Tabela 22 compara os valores de NMA para os gráficos conjuntos de T^2 e $|\mathbf{S}|$ com os valores de NMA_{ss} para o gráfico de MRMAX com regra especial de decisão, considerando o caso trivariado. O gráfico de MRMAX com regra especial de decisão é, em geral, mais rápido em sinalizar desajustes do processo do que os gráficos conjuntos de T^2 e $|\mathbf{S}|$, exceto nos casos em que a causa especial afeta a média de apenas uma das variáveis e não afeta a matriz de covariâncias.

Tabela 22 - Valores de NMA para os gráficos conjuntos de T^2 e $|\mathbf{S}|$ e para o gráfico de MRMAX ($n=5$; $\rho=0,5$ e $L=7$).

Matriz de covariâncias			Vetor de médias								
			δ_1	0	0	0	0,5	0,5	0,5	0,0	0,5
			δ_2	0	0,5	0	0	0,5	0	0,5	0,5
a_1	a_2	a_3	δ_3	0	0	0,5	0	0	0,5	0,5	0,5
1,0	1,0	1,0		200,0*	38,3	38,3	38,3	25,8	25,8	25,8	37,9
				200,0**	46,2	46,2	46,2	25,4	25,4	25,4	17,9
1,25	1,0	1,0		57,6	21,5	21,5	17,0	14,1	14,1	16,1	19,7
				32,6	18,8	18,8	14,2	11,3	11,3	13,7	9,58
1,25	1,25	1,0		25,7	11,6	13,4	11,6	9,15	9,96	9,96	12,0
				16,1	9,58	11,6	9,58	7,30	8,11	8,11	6,62
1,25	1,25	1,25		13,7	8,0	8,0	8,0	6,78	6,78	6,78	7,87
				10,6	7,3	7,3	7,3	5,93	5,93	5,93	5,19

Fonte: adaptado de Costa e Machado (2011a); * gráficos conjuntos de T^2 e $|\mathbf{S}|$; ** gráfico MRMAX

A regra especial de decisão não foi adotada para os gráficos conjuntos de T^2 e $|\mathbf{S}|$, pois não é simples lidar com dois gráficos de controle e a regra de dois pontos na região de ação.

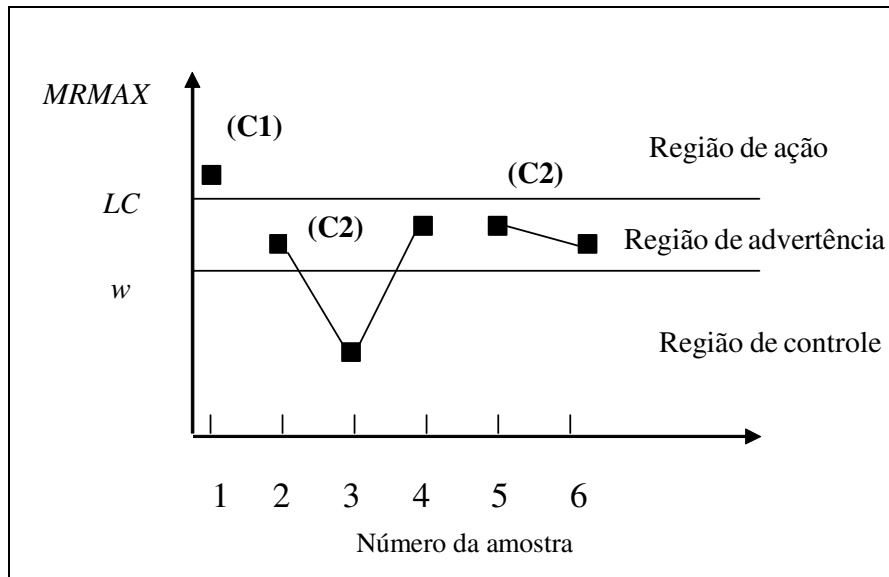
4.3 GRÁFICO DE MRMAX COM REGRAS SUPLEMENTARES DE DECISÃO

Uma notação simples e geral para descrever diferentes regras de decisão é $C: (s;m;a;b)$, com a seguinte interpretação: no gráfico de $\bar{X}$, um sinal ocorre sempre que, dentre os m últimos pontos, ao menos s estiver no intervalo (w, LC) , onde $1 \leq s \leq m$ e $w < LC$, sendo w o limite de advertência e LC o limite de controle. De acordo com essa notação, a regra básica “um ponto fora dos limites de controle” é expressa como $C_1:(1;1;LC;\infty)$ ou $(1;1; -\infty;-LC)$, sendo $k=3,0$ no caso dos limites usuais de 3-sigma.

Costa e Machado (2013) investigaram o desempenho do gráfico de MRMAX quando as regras C_3 e C_4 são adotadas, sendo $C_2:(2;3;w;LC)$ e $C_3:(3;4;w;LC)$.

A Figura 10 mostra os três cenários que levam o gráfico de MRMAX baseado na regra suplementar C_2 a sinalizar.

Figura 10 – Gráfico de MRMAX - regra suplementar C_2



Fonte: adaptado de Costa e Machado (2013)

A eficiência dos gráficos propostos é medida pelo número médio de amostras até o sinal NMA_{ss} .

O NMA_{ss} do gráfico de MRMAX baseado na regra suplementar C_2 pode ser obtido com o auxílio de uma Cadeia de Markov representada pela matriz (4.9). É uma Cadeia de Markov com 3 estados transientes (A, A1, B) e um estado absorvente (C). Esses estados são definidos de acordo com a posição dos pontos amostrais no gráfico de controle.

Estado A: os últimos dois pontos amostrais pertencem ao intervalo $(0;w)$;

Estado A1: a amostra anterior pertence ao intervalo $(w;LC)$ e a amostra atual pertence ao intervalo $(0;w)$;

Estado B: a amostra anterior pertence ao intervalo $(0;w)$ e a amostra atual pertence ao intervalo $(w;LC)$;

Estado C: o estado absorvente C é alcançado quando o último estado transiente é o estado A e a amostra atual cai acima de LC ou o último estado transiente é o estado A1 ou B e a amostra atual cai acima de w.

Seja $p_1 = P[\text{próximo ponto amostral observado cairá na região } (0;w)]$, $p_2 = P[\text{próximo ponto amostral observado cairá na região } (w;LC)]$ e $p_3 = 1 - p_1 - p_2 = P[\text{próximo ponto amostral observado cairá na região } (LC, \infty)]$. Tem-se que:

$$\begin{array}{c} \text{Estados} \end{array} \quad \begin{array}{c} A \quad A1 \quad B \quad C \end{array} \quad \begin{bmatrix} p_1 & 0 & p_2 & (1 - p_1 - p_2) \\ p_1 & 0 & 0 & (1 - p_1) \\ 0 & p_1 & 0 & (1 - p_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

O NMA_{ss} é dado por

$$\mathbf{S} \times \mathbf{NMA} \quad (4.10)$$

onde $\mathbf{S}$ é o vetor de probabilidades iniciais e $\mathbf{NMA}$ é o vetor de NMAs levando em consideração cada estado não absorvente como o estado inicial. Então,

$$\mathbf{NMA}_{ss} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{1}, \quad (4.11)$$

onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade $(L+1)$ por $(L+1)$, $\mathbf{R}$ é a matriz de transição dada em (4.9) sem a última linha e coluna e $\mathbf{1}$ é um vetor unitário $(L+1)$. O vetor $\mathbf{S}' = (\frac{p_1 + p_2}{D}, \frac{p_2}{D}, \frac{p_2}{D})$, com $D = p_1 + 3p_2$, é obtido resolvendo o sistema de equações lineares:

$$\mathbf{S} = \mathbf{R}_{adj} \mathbf{S}, \text{ sujeito a } \mathbf{S1} = 1, \quad (4.12)$$

onde $\mathbf{R}_{adj}$ é uma versão ajustada da matriz $\mathbf{R}$:

$$\begin{bmatrix} \frac{p_1}{p_1 + p_2} & 0 & \frac{p_2}{p_1 + p_2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Seguindo o mesmo procedimento, obtém-se o vetor $\mathbf{S}' = (S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6)$ para a regra suplementar C_3 :

$$S_1 = \frac{(p_1 + p_2)^3}{E}, \quad S_2 = \frac{(p_1 + p_2)p_1 p_2}{E}, \quad S_3 = S_5 = \frac{(p_1 + p_2)p_2^2}{E}, \quad S_4 = \frac{(p_1 + p_2)^2 p_2}{E} \quad \text{e} \quad S_6 = \frac{p_1 p_2^2}{E}, \quad \text{onde}$$

$$E = p_1^3 + 5p_1^2 p_2 + 9p_1 p_2^2 + 4p_2^3.$$

4.3.1 Comparando os gráficos de MRMAX com regra especial e regras suplementares de decisão

Nesta seção o gráfico de MRMAX baseado na regra básica de decisão é comparado com o gráfico de MRMAX com regra especial (dois pontos na região de ação) e regras suplementares de decisão (regras C_2 e C_3), denominados por gráficos de MRMAX-1, MRMAX-2, MRMAX-3 e MRMAX-4. A Tabela 23 compara os valores de NMA para tais gráficos, em que $p=2$; $\rho = 0,5$; a_1 e $a_2 = 1,0; 1,25; 1,5$ e δ_1 e $\delta_2 = 0,0; 0,5; 0,75; 1,0$. Adotou-se $NMA_0 = 200,0$.

O gráfico de MRMAX com a adição de regras, especial ou suplementar, tem melhor desempenho do que o gráfico de MRMAX baseado na regra básica de decisão.

Se é conhecida a informação de que a causa especial altera apenas a matriz de covariâncias, então os gráficos de MRMAX-3 e MRMAX-4 são a melhor opção e apresentam desempenho bastante similar. Este comportamento se repete para pequenos deslocamentos do vetor de médias. Para deslocamentos maiores, o desempenho dos gráficos de MRMAX-2, MRMAX-3 e MRMAX-4 é praticamente o mesmo. Vale ressaltar, porém, que é mais simples de se lidar com a regra especial de dois pontos na região de ação do gráfico do que com as regras suplementares.

Tabela 23 - Valores de NMA para os gráficos de MRMAX-1, MRMAX-2, MRMAX-3 e MRMAX-4.
($n=5$ e $\rho = 0,5$).

Matriz de covariâncias		Vetor de médias												
		δ_1	0	0	0.5	0.5	0	0.75	0.5	0.75	0.75	0	1.0	1.0
a_1	a_2	δ_2	0	0.5	0	0.5	0.75	0	0.75	0.5	0.75	1.0	0	1.0
1.0	1.0	200.0 ⁽¹⁾	47.3	47.3	27.0	15.6	15.6	12.6	12.6	8.4	6.1	6.1	3.4	
		200.0 ⁽²⁾	36,3	36,3	17,4	10,8	10,8	7,9	7,9	5,1	4,3	4,3	2,3	
		200.0 ⁽³⁾	34.8	34.8	16.3	10.8	10.8	7.8	7.8	5.3	4.6	4.6	2.6	
		200.0 ⁽⁴⁾	34.0	34.0	15.3	10.5	10.5	7.5	7.5	5.1	4.6	4.6	2.7	
1.25	1.0	32.2	21.4	15.1	12.3	11.3	7.9	8.2	7.1	5.6	5.4	4.3	2.8	
		25,2	14,0	11,4	8,2	7,1	6,0	5,2	5,0	3,8	3,6	3,4	2,1	
		22.8	13.6	11.0	8.0	7.2	6.0	5.3	5.1	3.9	3.8	3.6	2.3	
		22.8	13.2	10.8	7.8	7.0	6.0	5.2	5.0	3.9	3.8	3.6	2.4	
1.5	1.0	9.0	7.9	6.3	5.8	6.1	4.5	4.8	4.3	3.4	3.9	3.2	2.4	
		7,0	5,6	5,0	4,3	4,1	3,7	3,4	3,3	2,8	2,7	2,7	1,9	
		5.5	4.7	4.2	3.7	3.6	3.3	3.1	3.0	2.6	2.6	2.5	1.9	
		5.5	4.6	4.2	3.7	3.6	3.3	3.1	3.0	2.7	2.6	2.5	2.0	
1.25	1.25	18.1	11.1	11.1	8.1	3.4	3.4	5.6	5.6	4.3	4.0	4.0	2.5	
		12,1	7,5	7,5	5,4	4,7	4,7	3,9	3,9	3,1	3,0	3,0	2,0	
		10.9	7.1	7.1	5.3	4.7	4.7	3.9	3.9	3.2	3.1	3.1	2.1	
		10.8	7.0	7.0	5.3	4.7	4.7	3.9	3.9	3.2	3.1	3.1	2.2	
1.25	1.5	7.6	5.6	6.1	4.8	4.2	4.6	3.7	3.9	3.2	3.0	3.2	2.1	
		5,4	4,2	4,3	3,5	3,2	3,3	2,8	2,8	2,4	2,5	2,4	1,8	
		4.4	3.5	3.6	3.1	2.9	2.9	2.6	2.6	2.3	2.3	2.3	1.8	
		4.3	3.5	3.6	3.1	2.9	2.9	2.6	2.7	2.3	2.3	2.3	1.8	
1.5	1.5	5,0	4,2	4,2	3,6	3,4	3,4	3,0	3,0	2,6	2,6	2,6	1,9	
		3,6	3,1	3,1	2,7	2,6	2,6	2,3	2,3	2,1	2,1	2,1	1,6	
		2.8	2.5	2.5	2.3	2.2	2.2	2.0	2.0	1.9	1.8	1.8	1.5	
		2.8	2.5	2.5	2.3	2.2	2.2	2.1	2.1	1.9	1.9	1.9	1.5	

Fonte: adaptado de Costa e Machado (2013)

⁽¹⁾ MRMAX-1; ⁽²⁾ MRMAX-2 ($L=7$); ⁽³⁾ MRMAX-3 ($\pi_2=0,03$); ⁽⁴⁾ MRMAX-4 ($\pi_2 = 0,07$)

5. ESTUDO DO EFEITO DA AUTOCORRELAÇÃO NO DESENVOLVIMENTO DOS GRÁFICOS DE CONTROLE

A autocorrelação reduz o desempenho dos gráficos de controle. Em sendo assim, muitos autores vem se dedicando ao projeto de gráficos de controle mais eficientes para o monitoramento de processos autocorrelacionados. Claro et al (2007, 2008) trataram dos gráficos de controle de EWMA - *Exponentially Weighted Moving-Average* – e com amostragem dupla, respectivamente, utilizados no monitoramento de processos cujas observações podem ser descritas por um modelo autoregressivo de primeira ordem (AR1).

Os gráficos de controle são projetados para detectar a presença de causas especiais nos processos de produção. Quando o gráfico tradicional de $\bar{X}$ é utilizado existe uma suposição implícita de que a média do processo é uma variável que assume apenas dois valores: o seu valor-alvo e um segundo valor que é dado pelo valor-alvo mais um deslocamento resultante da ocorrência da causa especial. Entretanto, em algumas situações, é mais realístico assumir que a média do processo oscila embora nenhuma causa especial possa ser identificada, ver Reynolds et al (1996).

Quando a média do processo oscila de acordo com um modelo AR (1), um desenvolvimento matemático complexo utilizando cadeia de Markov e métodos de equações integrais é proposto em Reynolds et al (1996) para obtenção das propriedades do gráfico de $\bar{X}$. Alternativamente, Costa e Machado (2011b) desenvolveram uma abordagem mais simples, baseada apenas em cadeias de Markov, para obtenção das propriedades do gráfico de $\bar{X}$.

Franco et al. (2012) adotaram a abordagem baseada em uma cadeia de Markov proposta por Costa e Machado (2011b) para o planejamento econômico-estatístico do gráfico de $\bar{X}$ quando a média do processo oscila. A vantagem do planejamento econômico-estatístico dos gráficos de controle é de se estabelecer um esquema de monitoramento que leva em consideração os custos.

Leoni et al. (2013) também adotaram a abordagem de Costa e Machado (2011b) para propor o gráfico de EWMA quando a média do processo oscila. O gráfico de EWMA é concorrente ao gráfico de $\bar{X}$ e é melhor na sinalização de pequenos desajustes. Os autores estudaram o efeito da autocorrelação no planejamento de um gráfico de controle de $\bar{X}$ e de EWMA.

O caso multivariado também vem sendo estudado. Leoni et al. (2015) se dedicaram à proposição de gráficos de controle multivariados para o monitoramento de processos autocorrelacionados. Até o momento, os resultados se restringem ao caso bivariado. O desempenho do gráfico de controle de T^2 com observações correlacionadas e autocorrelacionadas foi estudado. Assumiu-se que as observações podem ser descritas por um modelo vetorial autoregressivo de primeira ordem (VAR1). A autocorrelação tem um grande impacto no desempenho do gráfico; dependendo do nível de

autocorrelação, o gráfico de T^2 com tamanho de amostra unitário é mais eficiente do que o gráfico de T^2 com tamanho de amostra dois ou cinco. O efeito combinado da correlação e da autocorrelação também foi investigado. Alternativamente, Leoni et al (2015b) propuseram o uso conjunto de dois gráficos de $\bar{X}$ para o monitoramento de gráficos de controle bivariados autocorrelacionados.

5.1 GRÁFICOS DE CONTROLE UNIVARIADOS AUTOCORRELACIONADOS

5.1.1 O gráfico de $\bar{X}$ com parâmetros variáveis

Quando o gráfico de $\bar{X}$ tradicional é utilizado no monitoramento de processos, uma amostra de tamanho n_0 é retirada a cada intervalo de tempo h_0 , e o valor de $\bar{X}$ é plotado no gráfico de controle com limites superior e inferior de controle, $LSC = \mu_0 + k_0\sigma_{\bar{X}}$ e $LIC = \mu_0 - k_0\sigma_{\bar{X}}$, onde k_0 é o coeficiente de abertura do limite de controle. O gráfico de $\bar{X}$ com parâmetros variáveis (VP) é uma modificação do gráfico de $\bar{X}$ tradicional. No gráfico de $\bar{X}$ VP, os parâmetros de projeto do gráfico n , h , e k variam entre dois valores. A posição do ponto amostral determina o tamanho da próxima amostra e o instante de amostragem. Um ponto amostral na região central adia a retirada da próxima amostra e diminui o seu tamanho; $h_1 > h_0$ é o instante de amostragem da próxima amostra de tamanho $n_1 < n_0$. Por outro lado, um ponto amostral na região de advertência acelera a retirada da próxima amostra e aumenta o seu tamanho; $h_2 < h_0$ é o tempo mínimo para retirada da próxima amostra de $n_2 > n_0$. Assim como o gráfico de $\bar{X}$, o gráfico de $\bar{X}$ VP sinaliza quando um ponto amostral cai na região de ação do gráfico. O gráfico VP tem limites de advertência e de ação dados, respectivamente, por $\mu_0 \pm k_i\sigma_{\bar{X}_i}$ e $\mu_0 \pm w_i\sigma_{\bar{X}_i}$, onde $i=1$ se $\bar{X}$ é a média de uma amostra pequena e $i=2$ se $\bar{X}$ é a média de uma amostra grande.

O modelo proposto por Reynolds *et al.* (1996) é utilizado para investigar o efeito do comportamento oscilatório da média do processo μ no desempenho do gráfico de $\bar{X}$. De acordo com este modelo, se amostras $i-1$ e i estão $t>0$ unidades de tempo afastadas, então $\mu(i)$ pode ser expressa em termos de $\mu(i-1)$ como

$$\mu(i) = (1 - \phi^t)\xi + \phi^t\mu(i-1) + \alpha_i(t) \quad i = 1, 2, \dots \quad (5.1)$$

onde ϕ^t é a correlação entre $\mu(i-1)$ e $\mu(i)$, que são os valores da média do processo quando as amostras $(i-1)$ e i são retiradas. Quando o esquema VP está em uso, t depende da posição da amostra

$(i-1)$. Se o ponto amostral $(i-1)$ cai na região central (advertência) do gráfico de $\bar{X}$, segue que $t = h_1$ ($t = h_2$), onde $h_1 > h_0 > h_2$. De acordo com Reynolds *et al.* (1996), se $\mu_0 \sim N(\xi; \sigma_\mu^2)$ então $\alpha_i(t) \sim N[0; (1 - \phi^{2t})\sigma_\mu^2]$, onde $\sigma_\mu^2 = \sigma_\alpha^2 / (1 - \phi^{2h_0})$. Se o tempo para obter uma amostra é insignificante em relação ao tempo entre amostras, então a j -ésima observação no tempo de amostragem t_i pode ser escrita como

$$X_{ij} = \mu(i) + e_{ij} \quad i = 1, 2, 3, \dots, \text{ e } j = 1, 2, \dots, n_i, \quad (5.2)$$

onde e_{ij} é o j -ésimo erro aleatório no tempo de amostragem t_i . A média amostral no tempo de amostragem t_i é

$$\bar{X}_i = \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} / n_i = \mu(i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (5.3)$$

onde $\varepsilon_i = \sum_{j=1}^{n_i} e_{ij} / n_i$ segue uma distribuição normal i.i.d. com média 0 e variância $\sigma_{\varepsilon_i}^2 = \sigma_e^2 / n_i$. A estatística $\bar{X}_i$ é normalmente distribuída com média ξ e variância

$$\sigma_{\bar{X}_i}^2 = \sigma_\mu^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2. \quad (5.4)$$

O efeito da correlação no gráfico de $\bar{X}$ é avaliado considerando diferentes valores de ϕ e ψ , onde $\psi = \sigma_\mu^2 / \sigma_x^2 = \sigma_\mu^2 / (\sigma_\mu^2 + \sigma_e^2)$. Sem perdas de generalidade, assume-se que $\sigma_e^2 = 1,00$.

5.1.2 Desempenho do gráfico de $\bar{X}$ VP

A velocidade com a qual um gráfico de controle detecta desajustes na média do processo é uma medida de eficiência do gráfico. Quando o intervalo de tempo entre retiradas de amostras é variável, a velocidade é medida pelo tempo esperado até o sinal (TES). O TES é o tempo esperado entre a alteração da média e o sinal. O tempo esperado do ciclo (TEC) é o tempo esperado desde o início da produção até o primeiro sinal após a alteração do processo. Se a ocorrência da causa especial segue uma distribuição exponencial com parâmetro λ , então

$$TES = TEC - \frac{1}{\lambda}. \quad (5.5)$$

Antes da ocorrência da causa especial, $\xi = \mu_0$, e depois que ela ocorre, $\xi = \mu_0 + \delta\sigma_x$. Segundo Costa (1997), se $\lambda < 0,0001$, a sua influência no valor de TES é pequena e além disso, Reynolds *et al.* (1988) concluíram, por meio de simulações, que a distribuição *a priori* do período em que o processo permanece em controle também tem pequena influência no TES. A propriedade de falta de memória

da distribuição exponencial permite que o cálculo do TEC seja realizado por meio de uma Cadeia de Markov. Se a média μ do processo oscila de acordo com um modelo AR (1), utiliza-se seu valor a cada instante de amostragem para definir os estados transientes da cadeia de Markov. Assim para se trabalhar com uma cadeia de Markov finita, discretiza-se μ em m valores $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$. Fixando uma amplitude de $10\sigma_\mu$, isto é, $\mu_1 = \mu_0 - 5\sigma_\mu$, $\mu_m = \mu_0 + 5\sigma_\mu$, segue que $\mu_j = \mu_0 - [5\sigma_\mu - 2(j-1)\Delta]$, onde $\Delta = 5\sigma_\mu / (m-1)$. A Cadeia de Markov é composta por quatro conjuntos de estados transientes. O estado do processo (se em controle ou fora de controle) quando a amostra $(i+1)$ é retirada e a posição do ponto amostral i define os quatro conjuntos de estados transientes, ver Tabela 24.

Tabela 24: Os quatro conjuntos de estados transitórios.

amostra i		amostra $(i+1)$		
Posição do ponto amostral (Região)	Valor da média do processo	Estado da média do processo	Estado da Cadeia de Markov	Conjunto de estados
Central	$\mu(i+1) = \mu_l$ $l \in \{1, 2, \dots, m\}$	Em controle ($\xi = \xi_0$)	l	Primeiro
Advertência		Em controle ($\xi = \xi_0$)	$l+m$	Segundo
Central		Fora de controle ($\xi = \xi_1$)	$l+2m$	Terceiro
Advertência		Fora de controle ($\xi = \xi_1$)	$l+3m$	Quarto

Fonte: adaptado de Costa e Machado (2011b)

Se o processo está em controle quando a amostra $(i+1)$ é retirada e o ponto amostral i cai na região central do gráfico de $\bar{X}$, dado que ele não caiu na região de ação, então o estado no primeiro conjunto de m estados é alcançado. O valor da média do processo quando a amostra $(i+1)$ é retirada define o estado correto, isto é, o estado (l) indica que $\mu(i+1) = \mu_l$, para $l \in \{1, 2, \dots, m\}$. A condição de que a amostra i não cai na região de ação do gráfico permanece em vigor enquanto as amostras são retiradas com o processo em controle. Alternativamente, se o ponto amostral i cai na região de advertência do gráfico de $\bar{X}$, então um estado no segundo conjunto de m estados é alcançado.

O valor da média do processo quando a amostra $(i+1)$ é retirada define o estado, isto é, estado $(l+m)$ indica que $\mu(i+1) = \mu_l$, para $l \in \{1, 2, \dots, m\}$. Se o processo está fora de controle quando a amostra $(i+1)$ é retirada e o ponto amostral i cai na região central, então um estado no terceiro conjunto de m estados é alcançado. O valor da média do processo quando a amostra $(i+1)$ é retirada define o estado, isto é, estado $(l+2m)$ indica que $\mu(i+1) = \mu_l$, para $l \in \{1, 2, \dots, m\}$. Alternativamente,

se o ponto amostral i cai na região de advertência do gráfico de $\bar{X}$, então um estado do quarto conjunto de m estados é alcançado. Novamente, o valor da média do processo quando a amostra $(i+1)$ é retirada define o estado, isto é, estado $(l+3m)$ indica que $\mu(i+1)=\mu_l$, para $l \in \{1, 2, \dots, m\}$. Se o ponto amostral $(i+1)$ cair na região de ação, então o estado da Cadeia de Markov define a natureza do sinal.

Se o estado for qualquer um do primeiro ou segundo (terceiro ou quarto) conjunto de estados, então o sinal é um alarme falso (verdadeiro).

O estado absorvente é alcançado quando o alarme verdadeiro ocorre. Após a ocorrência de um alarme falso, um procedimento aleatório é necessário para determinar o próximo instante de amostragem.

O procedimento aleatório decide adiar a retirada da próxima amostra ou retirá-la o mais breve possível.

Com probabilidade p_0 , a decisão é adiar a retirada da próxima amostra e com probabilidade $1-p_0$, a decisão é retirá-la o mais breve possível.

A probabilidade p_0 é dada pela relação entre o número esperado de vezes que os estados pertencentes ao primeiro conjunto de estados são visitados e o número esperado de vezes que os estados pertencentes ao primeiro ou segundo conjuntos de estados são visitados.

A matriz de transição é dada por $\mathbf{Q}=[p(a,b)]$, $a,b \in \{1, 2, \dots, 4m\}$, onde (a) representa os estados iniciais da Cadeia de Markov e (b) representa os estados correntes. Se $V_d = e^{-\lambda h_d}$ e $Z_d^\delta(\mu) \sim N[(\mu + \delta\sigma_x)\sigma_{\bar{x}_d}^{-1}; \sigma_e\sigma_{\bar{x}_d}^{-1} / \sqrt{n_d}]$, para $d=1, 2$, e $p_{rs}^d = \Pr\{|\alpha_d - \mu_s + \phi^{h_d}\mu_r| < \Delta \mid \alpha_d \sim N[0; (1-\phi^{2h_d})\sigma_\mu^2]\}$, com $\Delta = 5\sigma_\mu / (m-1)$, então $p(a,b)$ pode ser escrita em função de $p_{rs}(=p_{rs}^1)$ e $q_{rs}(=p_{rs}^2)$, para $r,s \in \{1, 2, \dots, m\}$:

$$p(r,s) = p_{rs} \Pr[|Z_1^0(\mu_r)| < w_1 \mid |Z_1^0(\mu_r)| < k_1] V_1$$

$$p(r,s+m) = q_{rs} \Pr[w_1 < |Z_1^0(\mu_r)| < k_1 \mid |Z_1^0(\mu_r)| < k_1] V_2$$

$$p(r,s+2m) = (V_1^{-1} - 1)p(r,s)$$

$$p(r,s+3m) = (V_2^{-1} - 1)p(r,s+m)$$

$$p(r+m,s) = p_{rs} \Pr[|Z_2^0(\mu_r)| < w_2 \mid |Z_2^0(\mu_r)| < k_2] V_1$$

$$p(r+m,s+m) = q_{rs} \Pr[w_2 < |Z_2^0(\mu_r)| < k_2 \mid |Z_2^0(\mu_r)| < k_2] V_2$$

$$p(r+m,s+2m) = (V_1^{-1} - 1)p(r+m,s)$$

$$p(r+m, s+3m) = (V_2^{-1} - 1)p(r+m, s+m)$$

$$p(r+2m, s) = p(r+2m, s+m) = 0$$

$$p(r+2m, s+2m) = p_{rs} \Pr[|Z_1^\delta(\mu_r)| < w_1 | |Z_1^\delta(\mu_r)| < k_1]$$

$$p(r+2m, s+3m) = q_{rs} \Pr[w_1 < |Z_1^\delta(\mu_r)| < k_1 | |Z_1^\delta(\mu_r)| < k_1]$$

$$p(r+3m, s) = p(r+3m, s+m) = 0$$

$$p(r+3m, s+2m) = p_{rs} \Pr[|Z_2^\delta(\mu_r)| < w_2 | |Z_2^\delta(\mu_r)| < k_2]$$

$$p(r+3m, s+3m) = q_{rs} \Pr[w_2 < |Z_2^\delta(\mu_r)| < k_2 | |Z_2^\delta(\mu_r)| < k_2]$$

lembrando que se $Z_d^\delta(\mu)\sigma_{\bar{X}_d}$ é a distribuição de $\bar{X}$ quando o processo está fora de controle (se $\delta = 0$ o processo está em controle), o valor oscilatório da média do processo é μ , o tamanho da amostra é n_d , e V_d é a probabilidade do processo permanecer em controle durante o intervalo de amostragem h_d .

Das propriedades elementares das Cadeias de Markov, tem-se que

$$TEC = b'(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}t, \quad (5.6)$$

onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade de ordem $4m$, $\mathbf{t}' = [t_1; t_2; t_3; t_4]$ e $\mathbf{b} = [b_1; b_2; b_3; b_4]$ é o vetor de probabilidades iniciais, onde t_i e b_i

$$t_1 = (h_1, h_1, \dots, h_1)$$

$$t_2 = (h_2, h_2, \dots, h_2)$$

$$b_1 = (p_1, p_2, \dots, p_m)$$

$$b_2 = (p_{1+m}, p_{2+m}, \dots, p_{2m})$$

$$b_3 = (p_{1+2m}, p_{2+2m}, \dots, p_{3m})$$

$$b_4 = (p_{1+3m}, p_{2+3m}, \dots, p_{4m})$$

com

$$p_i = \Pr[\mu_i - \Delta < \mu < \mu_i + \Delta | \mu \sim N(\mu_0; \sigma_\mu^2)] p_0 V_1$$

$$p_{i+m} = \Pr[\mu_i - \Delta < \mu < \mu_i + \Delta | \mu \sim N(\mu_0; \sigma_\mu^2)] (1 - p_0) V_2$$

$$p_{i+2m} = (V_1^{-1} - 1)p_i$$

$$p_{i+3m} = (V_2^{-1} - 1)p_{i+m}$$

Uma comparação entre gráficos de controle só é apropriada se os gráficos a serem comparados possuírem as mesmas propriedades quando em controle, isto é, o mesmo $TMAF$, $\bar{n}$, e $\bar{h}$, onde $TMAF$ é o tempo esperado entre alarmes falsos, $\bar{n}$ o tamanho médio das amostras, e $\bar{h}$ o tempo médio entre amostragens. Geralmente, $TMAF = 370,4$, $\bar{n} = n_0$, e $\bar{h} = h_0$, onde n_0 e h_0 são, respectivamente, o tamanho de amostra e o intervalo de amostragem do gráfico de $\bar{X}$ tradicional. Quando o período em controle é caracterizado por um processo cuja média permanece fixa em seu valor alvo, os parâmetros de um gráfico VP (n_1, n_2) e (h_1, h_2) são determinados em função das seguintes equações

$$n_1 p_0 + n_2 (1 - p_0) = n_0, \quad (5.6)$$

$$h_1 p_0 + h_2 (1 - p_0) = h_0, \quad (5.7)$$

As restrições nas equações (5.6) e (5.7) garantem que, em média, o gráfico de $\bar{X}$ com parâmetros fixos e o gráfico de $\bar{X}$ com parâmetros variáveis demandem a mesma frequência de amostras e de itens a inspecionar. De acordo com Costa (1998), os valores de (n_1, n_2, h_2) são selecionados. O intervalo de amostragem h_1 é dado por

$$h_1 = (h_0 - h_2) \frac{n_2 - n_1}{n_2 - n_0} + h_2. \quad (5.8)$$

Quando a média do processo oscila de acordo com um modelo AR (1), p_0 é dada pela relação entre o número esperado de vezes que os estados pertencentes ao primeiro conjunto de estados são visitados e o número esperado de vezes que os estados pertencentes ao primeiro ou segundo conjuntos de estados são visitados. Seja $\mathbf{H} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$, $\mathbf{q} = [\mathbf{1}; \mathbf{0}; \mathbf{0}; \mathbf{0}]$ e $\mathbf{q}_1 = [\mathbf{1}; \mathbf{1}; \mathbf{0}; \mathbf{0}]$, onde $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ são vetores linha $1 \times m$ de zeros e uns, respectivamente, então

$$p_0 = \frac{\mathbf{bHq}}{\mathbf{bHq}_1}. \quad (5.9)$$

Para obter o $TMAF$, considera-se apenas o primeiro e o segundo conjunto de estados transientes, isto é, $\mathbf{Q}^0 = [p(r, s)]$, $r, s \in \{1, 2, \dots, 2m\}$. As probabilidades de transição são redefinidas como

$$p(i, j) = p_{ij} \Pr[|Z_1^0(\mu_i)| < w_1]$$

$$p(i, j + m) = q_{ij} \Pr[w_1 < |Z_1^0(\mu_i)| < k_1]$$

$$p(i + m, j) = p_{ij} \Pr[|Z_2^0(\mu_i)| < w_2]$$

$$p(i+m, j+m) = q_{ij} \Pr[w_2 < |Z_2^0(\mu_i)| < k_2]$$

Das propriedades elementares das Cadeias de Markov, segue que

$$TMAF = \mathbf{b}' (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^0)^{-1} \mathbf{t}, \quad (5.10)$$

onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade de ordem $2m$, $\mathbf{t}' = [t_1; t_2]$ e $\mathbf{b} = [b_1; b_2]$ é o vetor de probabilidades iniciais, sendo t_i e b_i

$$t_1 = (h_1, h_1, \dots, h_1)$$

$$t_2 = (h_2, h_2, \dots, h_2)$$

$$b_1 = (p_1, p_2, \dots, p_m)$$

$$b_2 = (p_{1+m}, p_{2+m}, \dots, p_{2m})$$

com

$$p_i = \Pr[\mu_i - \Delta < \mu < \mu_i + \Delta] \mid \mu \sim N(\mu_0; \sigma_\mu^2) \quad p_0$$

$$p_{i+m} = \Pr[\mu_i - \Delta < \mu < \mu_i + \Delta] \mid \mu \sim N(\mu_0; \sigma_\mu^2) \quad (1 - p_0)$$

Neste estudo adota-se $n_1 = 2$, $n_2 = 2, 9$ ou 20 , $h_1 = 0,1$, $k_1 = 3,5$ ou $6,0$, $w_1 = w_2 = w$, $n_0 = 5$ e $h_0 = 1,00$. O intervalo de amostragem h_2 é função de n_0, h_0, n_1, n_2 e h_1 , ver expressão (5.8). Os valores de k_2 e w são aqueles para os quais $TMAF = 370,4$ e $bHq/bHq_1 = p_0$. A condição imposta $w_1 = w_2 = w$ reduz ligeiramente a eficiência do gráfico em sinalizar alterações no processo; entretanto, reduz substancialmente os esforços com os cálculos para se obter w e k_2 . Lin (2009) foi o primeiro a obter as propriedades do gráfico de $\bar{X}$ VP. Ele assumiu que a média do processo oscila de acordo com um modelo AR (1); entretanto, ele utilizou uma abordagem mais complexa baseada em cadeias de Markov e métodos de equações integrais. Além disso, ele comparou o gráfico de $\bar{X}$ com parâmetros fixos e variáveis sem levar em consideração as equações (5.6), (5.7) e (5.8), ou seja, há três equações e quatro parâmetros a serem determinados (h_1, n_1, h_2, n_2) ; um dos parâmetros deve ser função dos outros três. De acordo com a equação (5.8), h_1 foi escolhido para ser o parâmetro dependente.

5.1.3 Gráfico de $\bar{X}$ com amostragem dupla

O gráfico com amostragem dupla (DS) também é uma modificação do gráfico de $\bar{X}$ tradicional. No esquema baseado na amostragem dupla, amostras de tamanho $n = n_1 + n_2$ são retiradas do processo a cada intervalo de tempo h_0 . No primeiro estágio, n_1 itens são inspecionados e suas características de

qualidade são medidas e utilizadas para calcular $\bar{X}_1$, isto é, a média amostral do primeiro estágio. O valor de $\bar{X}_1$ é plotado em um gráfico de $\bar{X}$ com limites de advertência e ação, dados por $\mu_0 \pm w\sigma_{\bar{X}_1}$ e $\mu_0 \pm k_1\sigma_{\bar{X}_1}$, respectivamente. Se $\bar{X}_1$ cair na região central do gráfico de $\bar{X}$, a amostragem é interrompida e o processo é considerado em controle. Se $\bar{X}_1$ cair na região de advertência do gráfico de $\bar{X}$, a amostragem vai para o segundo estágio onde as n_2 unidades restantes são inspecionadas e suas características de qualidade são medidas e utilizadas para calcular $\bar{Y}$, ou seja, a média de todos os n itens. O valor de $\bar{Y}$ é plotado em um gráfico de $\bar{Y}$ com limite de ação dado por $\mu_0 \pm k_2\sigma_{\bar{Y}}$. O gráfico de controle sinaliza quando $\bar{X}_1$ ou $\bar{Y}$ cai na região de ação do gráfico.

O modelo proposto por Reynolds *et al.* (1996) é utilizado para investigar o efeito do comportamento oscilatório da media do processo μ no desempenho do gráfico de $\bar{X}$ com amostragem dupla. Quando a amostragem dupla está em uso, os intervalos de amostragem são fixos e iguais a h_0 . De acordo com as expressões (5.1) e (5.4),

$$\mu(i) = (1 - \phi^{h_0})\xi + \phi^{h_0}\mu(i-1) + \alpha_i(t) \quad i = 1, 2, \dots \quad (5.11)$$

$$\sigma_{\bar{X}_1}^2 = \sigma_{\mu}^2 + \sigma_e^2 / n_1 \quad (5.12)$$

$$\sigma_{\bar{Y}}^2 = \sigma_{\mu}^2 + \sigma_e^2 / n. \quad (5.13)$$

5.1.4 Desempenho do gráfico de $\bar{X}$ com amostragem dupla

Como a média μ do processo oscila de acordo com um modelo AR (1), utiliza-se seu valor a cada instante de amostragem i para definir os estados transientes da cadeia de Markov. Assim para se trabalhar com uma cadeia de Markov finita, discretiza-se μ em m valores $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$. Se nem $\bar{X}_1$ nem $\bar{Y}$, da amostra $(i+1)$, cai na região de ação, então o valor da média do processos quando a amostra i é retirada define o estado da cadeia de Markov. Se o valor da média do processo quando a amostra i é retirada é $\mu(i) = \mu_l$, então o estado (l) é alcançado, para $l \in \{1, 2, \dots, m\}$. O estado absorvente é alcançado quando o gráfico com amostragem dupla sinaliza. A matriz de transição é dada por

$$\mathbf{Q}^1 = [p(r, s)], \quad r, s \in \{1, 2, \dots, m\},$$

onde $p(r, s)$ representa a probabilidade de transição do estado r para p estado s . Se a média do processo é discretizada em m valores $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$, com $\mu_j = \mu_0 - [5\sigma_{\mu} - 2(j-1)\Delta]$, segue que

$$p(r, s) = p_a(\mu_r) \Pr\{|\alpha - \mu_s + \phi^{h_0}\mu_r| < \Delta \mid \alpha \sim N[0; (1 - \phi^{2h_0})\sigma_{\mu}^2]\}.$$

A probabilidade $p_a(\mu)$ de decidir se o processo está em controle quando a média μ oscila de acordo com um modelo AR (1) é dada por

$$p_a(\mu) = \Phi[A(w)] - \Phi[A(-w)] + \int_{A(-k_1)}^{A(-w)} B(z)f(z)dz + \int_{A(w)}^{A(k_1)} B(z)f(z)dz, \quad (5.14)$$

onde

$$A(i) = \frac{i\sigma_{\bar{X}_1} - (\mu + \delta\sigma_x)}{\sigma_e} \sqrt{n_1}, \quad (5.15)$$

$$B(z) = \Phi\{[k_2\sigma_{\bar{Y}} - (\mu + \delta\sigma_x)]n/\sqrt{n_2} - z\sqrt{n_1/n_2}\} - \Phi\{[-k_2\sigma_{\bar{Y}} - (\mu + \delta\sigma_x)]n/\sqrt{n_2} - z\sqrt{n_1/n_2}\} \quad (5.16)$$

e $f(\cdot)$ é a função densidade da distribuição normal padrão.

Das propriedades elementares das Cadeias de Markov, tem-se que

$$TES = b' (I - Q)^{-1} t \quad (5.17)$$

O valor de $TMAF$ é o valor do TES para $\delta=0$. Se $p_i = \Pr[\mu_i - \Delta < \mu < \mu_i + \Delta] | \mu \sim N(\mu_0; \sigma_\mu^2)$, então $b = (p_1, p_2, \dots, p_m)$, onde b é o vetor de probabilidades iniciais.

O vetor t é o vetor de intervalos de amostragem, isto é, $t' = (h_0, h_0, \dots, h_0)$. Quando os intervalos entre amostragens são todos de mesmo tamanho h_0 , tem-se que

$$TES \approx h \cdot NMA - h_0 / 2. \quad (5.18)$$

Se $f' = [\bar{n}(u_1), \bar{n}(u_2), \dots, \bar{n}(u_m)]$ é o vetor do tamanho médio das amostras, então o tamanho médio das amostras durante o período em controle é dado por

$$\bar{n} = b' (I - Q)^{-1} f, \quad (5.19)$$

onde $\bar{n}(\mu) = n_1 + n_2 \{ \Phi[A(k_1)] - \Phi[A(w_1)] + \Phi[A(-w_1)] - \Phi[A(-k_1)] \}$ sendo

$$A(i) = (i\sigma_{\bar{X}_1} - \mu)\sigma_e^{-1} \sqrt{n_1}.$$

5.1.5 O efeito da correlação nos gráficos de $\bar{X}$ VP e com amostragem dupla

Nesta seção avalia-se o efeito da correlação nos gráficos de $\bar{X}$ VP e com amostragem dupla. Os resultados nas Tabelas 25 e 26 mostram que o efeito geral do aumento de ϕ e ψ é o aumento do tempo necessário para se detectar um desajuste e a redução da vantagem dos gráficos de $\bar{X}$ VP e com

amostragem dupla em relação ao gráfico de $\bar{X}$ tradicional com parâmetros fixos (FP). Por exemplo, quando $\phi=0,4$ e $\psi=0,1$, o gráfico FP para $n_0=5$ demanda em média 7,58 unidades de tempo para detectar um desajuste de $\delta=1,0$, enquanto o gráfico VP para $(n_1, n_2, k_1) = (2; 9; 6,0)$ demanda em média 3,15 unidades de tempo. O gráfico com amostragem dupla para $(n_1, n_2, k_1) = (2; 9; 6,0)$ demanda em média 4,13 unidades de tempo. Quando $\phi=0,8$ e $\psi=0,5$, o gráfico FP demanda em média 37,3 unidades de tempo para detectar um desajuste de $\delta=1,0$, enquanto o gráfico VP para $(n_1, n_2, k_1) = (2; 9; 6,0)$ demanda em média 33,2 unidades de tempo. O gráfico com amostragem dupla para $(n_1, n_2, k_1) = (2; 9; 6,0)$ demanda em média 34,9 unidades de tempo. Os números em parênteses nas Tabelas 25 e 26 são os percentuais de redução na velocidade com a qual o esquema FP sinaliza quando a amostragem dupla ou o esquema VP é adotado. De acordo com esses números, a amostragem dupla sempre melhora a habilidade do gráfico FP em sinalizar alterações na média do processo de diferentes magnitudes; mas não se pode dizer o mesmo do esquema VP. Os dois esquemas, o VP e a amostragem dupla, tem melhor desempenho geral quando k_1 é grande ($k_1=6,0$), ou seja, se o gráfico VP é utilizado é a amostra é pequena, o valor de $\bar{X}$ nunca cai na região de ação; alternativamente, se a amostragem dupla está em uso, o gráfico nunca sinaliza antes da amostragem ir para o segundo estágio. Os limites de controle $\mu_0 \pm k_1 \sigma_{\bar{X}_1}$ podem ser descartados, o que simplifica o projeto e a implementação dos gráficos VP e com amostragem dupla e também melhora o desempenho geral de tais gráficos. O gráfico de $\bar{X}$ VP sempre sinaliza mais rápido do que o gráfico de $\bar{X}$ com amostragem dupla. Como já observado por Reynolds *et al.* (1996), quando ϕ e ψ são grandes, o ganho marginal na velocidade com a qual o gráfico de $\bar{X}$ sinaliza não justifica o uso de esquemas adaptativos. Neste estudo, o desempenho dos gráficos de controle foi medido pelo TES.

Tabela 25: TES dos gráficos de $\bar{X}$ VP e com amostragem dupla, para $\phi=0,4$ e $TMAF=370,4$.

ψ	Esquema	h_1	h_2	n_1	n_2	k_1	k_2	w	δ			
									0,5	1,0	1,5	2,0
0,1	VP	3,7	0,1	2	6	3,5	3,0548	0,3336	31,0 (39)*	4,63 (39)	2,18 (-11)	1,84 (-130)
		1,675	0,1	2	9	3,5	3,0574	0,8479	24,1 (53)	3,20 (58)	1,25 (36)	0,94 (-18)
		3,7	0,1	2	6	6,0	3,04035	0,3334	30,6 (40)**	4,61 (39)	2,18 (-11)	1,86 (-133)
		1,675	0,1	2	9	6,0	3,02045	0,84737	23,3 (54)	3,15 (58)	1,25 (36)	0,96 (-20)
0,1	DS			2	6	3,5	3,014	0,6722	39,9 (22)	5,31 (30)	1,34 (32)	0,63 (21)
				2	9	3,5	2,9777	0,9635	34,1 (33)	4,35 (43)	1,12 (43)	0,59 (26)
		1	1	2	6	6	2,968	0,6724	37,7 (26)	5,05 (33)	1,29 (34)	0,62 (23)
				2	9	6	2,9272	,96414	32,1 (37)	4,13 (46)	1,08 (45)	0,58 (28)
0,5	FP	1	1	5	5	3,00			51,1	7,58	1,96	0,80
		3,7	0,1	2	6	3,5	3,0100	0,6712	95,0 (15)	20,5 (19)	6,78 (14)	3,28 (-8)
		1,675	0,1	2	9	3,5	3,0115	0,962	92,2 (17)	19,1 (25)	5,90 (25)	2,47 (19)
		3,7	0,1	2	6	6,0	2,992	0,6716	94,7 (15)	20,4 (20)	6,79 (14)	3,30 (-9)
0,5	VP	1,675	0,1	2	9	6,0	2,9915	0,9624	91,2 (18)	18,9 (26)	5,86 (25)	2,47 (19)
		1	1	2	6	3,5	3,0100	0,6712	106,8 (4)	23,8 (6)	7,28 (7)	2,79 (8)
		1	1	2	9	3,5	3,0115	0,962	104,5 (6)	23,0 (9)	6,99 (11)	2,67 (12)
				2	6	6,0	2,992	0,6716	106,0 (5)	23,5 (7)	7,19 (9)	2,76 (9)
0,5	DS			2	9	6,0	2,9915	0,9624	103,6 (7)	22,7 (11)	6,90 (12)	2,63 (13)
		1	1	5	5	2,99			111,2	25,4	7,86	3,04

Fonte: adaptado de Costa e Machado (2011b)

* $100 * (TES_{FP} - TES_{VP}) / TES_{FP}$, ** $100 * (TES_{FP} - TES_{DS}) / TES_{FP}$

Tabela 26: TES dos gráficos de $\bar{X}$ VP e com amostragem dupla, para $\phi=0,8$, $TMAF=370,4$.

ψ	Esquema								δ			
		h_1	h_2	n_1	n_2	k_1	k_2	w	0,5	1,0	1,5	2,0
0,1	VP	3,7	0,1	2	6	3,5	3,129	0,3464	38,5 (34)*	5,95 (38)	2,31 (1)	1,85 (-118)
		1,675	0,1	2	9	3,5	3,1195	0,8672	33,7 (42)	4,50 (53)	1,35 (42)	0,95 (-12)
		3,7	0,1	2	6	6,0	3,1145	0,3461	38,1 (35)**	5,90 (38)	2,31 (1)	1,87 (-120)
		1,675	0,1	2	9	6,0	3,0824	0,8663	32,7 (44)	4,40 (54)	1,35 (42)	0,97 (-14)
	DS			2	6	3,5	3,014	0,6722	48,8 (16)	7,11 (26)	1,58 (32)	0,64 (25)
				2	9	3,5	2,9777	0,9635	42,8 (26)	5,98 (38)	1,29 (45)	0,59 (31)
		1	1	2	6	6	2,968	0,6724	45,9 (21)	6,78 (29)	1,51 (35)	0,63 (26)
				2	9	6	2,9272	,96414	40,7 (30)	5,68 (41)	1,24 (47)	0,59 (31)
	FP	1	1	5	5	3,00			58,2	9,58	2,33	0,85
	VP	3,7	0,1	2	6	3,5	3,2405	0,7486	126,3 (7)	33,9 (9)	11,94 (6)	5,15 (-8)
		1,675	0,1	2	9	3,5	3,2449	1,2964	125,8 (7)	33,4 (10)	11,19 (12)	4,28 (10)
		3,7	0,1	2	6	6,0	3,2350	0,74863	126,1 (7)	33,9 (9)	11,94 (6)	5,17 (-9)
		1,675	0,1	2	9	6,0	3,2345	1,2964	125,4 (8)	33,2 (11)	11,15 (12)	4,28 (10)
0,5	DS	1	1	2	6	3,5	2,9191	0,6656	132,2 (3)	35,8 (4)	11,97 (6)	4,42 (7)
		1	1	2	9	3,5	2,9115	0,9540	130,7 (4)	35,1 (6)	11,64 (8)	4,25 (11)
				2	6	6,0	2,9065	0,6662	131,8 (3)	35,6 (5)	11,90 (6)	4,39 (8)
				2	9	6,0	2,8972	0,9540	130,1 (4)	34,9 (6)	11,56 (9)	4,21 (12)
	FP	1	1	5	5	2,99			111,2	25,4	12,70	4,76

Fonte: adaptado de Costa e Machado (2011b)

5.2 O EFEITO DA AUTOCORRELAÇÃO NO PLANEJAMENTO DAS CARTAS DE CONTROLE DE $\bar{X}$ E EWMA

Leoni et al (2013) investigaram o quanto o efeito oscilatório da média afeta os valores ótimos de (n, h, k) , bem como o desempenho do gráfico de $\bar{X}$ e de EWMA.

A magnitude do deslocamento da média do processo, expressa em unidades δ do desvio padrão de X , depende de σ_μ . Em dois processos, um em que a média não oscila, isto é $\sigma_\mu=0$, e outro em que ela oscila muito, isto é $\sigma_\mu = 0,8$, a causa especial atua de forma diferente; no caso em que a média não oscila, a magnitude do deslocamento é de δ (supondo $\sigma_e=1,00$), já no processo em que a média oscila o deslocamento é 28% maior ($\sqrt{0,64+1,00} \delta$). Não há evidências para assumir que o deslocamento da média do processo é maior nos casos em que ela oscila, e muito menos que haja uma correlação entre a magnitude do deslocamento da média ($\delta\sqrt{\sigma_\mu^2 + \sigma_e^2}$) e a variância de seu movimento oscilatório (σ_μ^2). Assim, uma forma mais lógica de se analisar o efeito da autocorrelação no desempenho do gráfico de controle consiste em expressar o deslocamento da média do processo sempre em unidades δ da variação das medidas de X dentro da amostra - σ_e . As Tabelas 9 e 10 apresentam os *NMA*s para diferentes combinações de δ , ϕ e ψ , e, para efeito de comparação, deslocamentos da média $\delta\sigma_e$ e $\delta\sigma_x$.

De acordo com as Tabelas 27 e 28, o gráfico de controle de $\bar{X}$ perde desempenho (*NMA* aumenta) à medida que ψ aumenta. Em outras palavras, quanto maior é a parcela da variabilidade de X resultante do movimento oscilatório da média do processo, em relação a sua variabilidade total, mais lento é o gráfico na sinalização de causas especiais que a faz oscilar em torno de um ponto distante de seu valor “alvo”. Deslocamentos da média de $\delta\sigma_x$ são maiores que de $\delta\sigma_e$, o que implica, naturalmente, em uma resposta mais rápida do gráfico de $\bar{X}$, pois para deslocamentos maiores, o *NMA* é sempre menor. Para uma comparação justa em relação a um processo independente (processo em que a média não oscila) a Tabela 28 apresenta uma comparação adequada quando considera apenas deslocamentos de $\delta\sigma_e$.

Tabela 27 - NMA para o gráfico de $\bar{X}$ – deslocamentos de $\delta\sigma_x$

L	n=1				n=4			
	$\phi=0,0$	$\phi=+0,8$			$\phi=0,0$	$\phi=+0,8$		
		$\psi=0,1$	$\psi=0,5$	$\psi=0,9$		$\psi=0,1$	$\psi=0,5$	$\psi=0,9$
3,0000		2,9993	2,9790	2,9029	3,0000	2,9929	2,931	2,8758
δ	NMA							
0,0	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40
0,5	155,20	157,90	171,70	188,60	45,40	66,90	138,40	184,20
1,0	43,90	46,00	55,80	67,30	6,60	12,10	38,90	64,40
1,5	15,00	16,20	21,40	27,30	2,10	3,50	13,70	25,80
2,0	6,30	6,90	9,50	12,50	1,20	1,50	5,50	11,60
3,0	2,00	2,10	2,60	3,20	1,00	1,00	1,50	2,90
4,0	1,20	1,20	1,20	1,30	1,00	1,00	1,00	1,20
5,0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Fonte: adaptado de Leoni et al (2013)

Tabela 28 - NMA para o gráfico de $\bar{X}$ - deslocamentos de $\delta\sigma_e$

L	n=1				n=4			
	$\phi=0,0$	$\phi=+0,8$			$\phi=0,0$	$\phi=+0,8$		
		$\psi=0,1$	$\psi=0,5$	$\psi=0,9$		$\psi=0,1$	$\psi=0,5$	$\psi=0,9$
3,0000		2,9993	2,979	2,9029	3,0000	2,9929	2,931	2,8758
δ	NMA							
0,0	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40
0,5	155,20	168,50	238,00	339,40	45,40	74,20	206,00	338,10
1,0	43,90	51,80	106,30	270,00	6,60	14,10	79,50	266,50
1,5	15,00	18,70	49,20	198,90	2,10	4,10	33,90	194,50
2,0	6,30	8,10	24,90	142,70	1,20	1,80	16,10	138,50
3,0	2,00	2,40	7,90	74,40	1,00	1,00	4,50	71,40
4,0	1,20	1,30	3,10	41,00	1,00	1,00	1,70	39,00
5,0	1,00	1,00	1,60	23,90	1,00	1,00	1,10	22,60

Fonte: adaptado de Leoni et al (2013)

A carta de controle de $\bar{X}$ é a mais conhecida no monitoramento de processos, porém ela só é indicada para a sinalização de grandes deslocamentos na média. O esquema concorrente denominado gráfico de controle EWMA é melhor na sinalização de pequenos desajustes, especialmente com o parâmetro de ponderação (λ) próximo a zero (Claro *et al.*, 2007). Propõe-se neste artigo o uso do

gráfico de EWMA com limites alargados em virtude do comportamento oscilatório da média do processo. Com o processo em controle, os limites de ação do gráfico de EWMA foram então ajustados para se ter um *NMA* de 370,4. Os *NMA*s foram obtidos por simulação; segundo Lu e Reynolds (1999a) a aplicação de métodos numéricos para determinar o *NMA* do gráfico de controle de EWMA é computacionalmente lenta e, dependendo dos parâmetros do modelo, alguns resultados são incertos; portanto, o uso da simulação nestes casos leva a resultados mais confiáveis. As Tabelas 29, 30, 31, 32 e 33 apresentam os *NMA*s para diferentes combinações de δ , λ , ϕ e ψ . Nessas tabelas aparecem em destaque (negrito) os valores mínimos do *NMA*.

De acordo com as Tabelas 28 e 29, quando a média do processo não oscila, $n=1$ e $\delta \leq 2$, o gráfico EWMA sinaliza com mais rapidez se comparado com o gráfico de controle de $\bar{X}$ (ver Tabela 28) na sinalização. Por exemplo, para $\lambda=0,05$, $n=1$ e $\delta=0,5$, o esquema EWMA requer em média 25,7 amostras (Tabela 29) para detectar a alteração na média do processo, enquanto que o gráfico de $\bar{X}$ requer 155,20 amostras (Tabela 28) para detectar a mesma alteração. Na Tabela 29, observa-se que aumentando λ o desempenho do esquema EWMA se assemelha ao do gráfico de $\bar{X}$, lembrando que com $\lambda=1$ o gráfico de EWMA é um gráfico de $\bar{X}$ (Costa *et al.*, 2005).

A autocorrelação entre os valores da média do processo prejudica o desempenho dos gráficos de controle. Tem-se um aumento significativo no número médio de amostras que o gráfico de controle requer para sinalizar uma alteração na média do processo. Na Tabela 29, para $n=1$, $\lambda=0,05$ e um deslocamento da média do processo de $\delta=0,5$, isenta de oscilação, isto é $\sigma_\mu = 0$, o *NMA*=25,7, ao passo que, na presença de uma correlação moderada ($\phi=0,4$) e uma parcela alta de variabilidade de X fruto da oscilação da média ($\psi = 0,9$) o *NMA* =199,7 (ver Tabela 30), ou seja, aproximadamente 7,8 vezes maior.

Quando comparado com o gráfico de $\bar{X}$, o esquema EWMA na presença de forte oscilação da média ($\psi = 0,9$) e elevado grau de autocorrelação ($\phi=0,8$), se mostra mais ágil na detecção de pequenos e grandes deslocamentos. Por exemplo, para $n=1$ e $\delta=0,5$, o *NMA*=339,40 (Tabela 28), caso esteja em uso o gráfico de $\bar{X}$, e *NMA*=283,8 (Tabela 31), caso esteja em uso o gráfico de EWMA ($\lambda=0,05$). Quando há um grande deslocamento ($\delta=5,0$), tem-se para o gráfico de $\bar{X}$ um *NMA*=23,9 (Tabela 28) enquanto que para o gráfico de EWMA o *NMA* = 19,0 (Tabela 31). Para $n=4$ e $\delta=0,5$, o *NMA*=338,10 (Tabela 28), caso esteja em uso o gráfico de $\bar{X}$, e *NMA*=195,30 (Tabela 33), caso esteja em uso o gráfico de EWMA ($\lambda=0,05$). Quando há um grande deslocamento ($\delta = 5,0$), tem-se para o

gráfico de $\bar{X}$ um NMA= 22,6 (Tabela 28) enquanto que para o gráfico de EWMA ($\lambda=0,05$) o NMA = 9,20 (Tabela 33).

Tabela 29 - NMA para o gráfico EWMA – $\psi=0$; $n=1$ e 4.

N		1,0								4,0									
$\delta=(\xi-\xi_0)/\sigma_e$		0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0	$\delta=(\xi-\xi_0)/\sigma_e$		0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0
L	λ									L	λ								
2,490	0,05	25,7	10,5	6,7	4,9	4,0	3,3	2,6	2,1	2,485	0,05	10,5	4,9	3,3	2,6	2,1	1,9	1,5	1,3
2,701	0,10	27,5	9,5	5,7	4,1	3,3	2,8	2,1	1,8	2,696	0,10	9,5	4,1	2,7	2,1	1,8	1,5	1,2	1,0
2,805	0,15	31,3	9,4	5,3	3,8	2,9	2,5	1,9	1,6	2,802	0,15	9,4	3,8	2,5	1,9	1,6	1,4	1,1	1,0
2,858	0,20	35,4	9,6	5,1	3,5	2,7	2,3	1,8	1,5	2,855	0,20	9,6	3,5	2,3	1,8	1,5	1,2	1,0	1,0
2,895	0,25	40,5	10,0	5,1	3,4	2,6	2,1	1,6	1,3	2,896	0,25	10,1	3,4	2,1	1,6	1,3	1,1	1,0	1,0
2,925	0,30	46,2	10,7	5,1	3,3	2,5	2,1	1,6	1,3	2,925	0,30	10,7	3,3	2,1	1,6	1,3	1,1	1,0	1,0
2,945	0,35	52,0	11,6	5,2	3,3	2,4	2,0	1,5	1,2	2,945	0,35	11,6	3,3	2,0	1,5	1,2	1,1	1,0	1,0
2,956	0,40	57,5	12,5	5,4	3,3	2,4	1,9	1,4	1,2	2,960	0,40	12,5	3,3	1,9	1,4	1,2	1,0	1,0	1,0
2,976	0,50	71,3	15,1	5,9	3,4	2,4	1,8	1,3	1,1	2,980	0,50	15,1	3,4	1,8	1,3	1,1	1,0	1,0	1,0

Fonte: adaptado de Leoni et al (2013)

Tabela 30 - NMA para o gráfico EWMA – $\psi=0,9$; $n=1$; $\phi=0,4$

$\delta=(\xi-\xi_0)/\sigma_e$		0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0
L	λ								
3,479	0,05	199,7	88,0	48,6	31,5	22,9	17,9	12,3	9,3
3,684	0,10	228,8	107,7	56,9	34,8	23,8	17,6	11,3	8,2
3,748	0,15	251,0	125,7	66,5	39,6	26,0	18,6	11,2	7,8
3,750	0,20	263,8	140,4	75,5	44,6	28,6	20,0	11,5	7,7
3,732	0,25	273,6	152,3	83,7	49,5	31,7	21,8	12,0	7,8
3,703	0,30	284,1	163,9	91,9	54,8	34,7	23,5	12,6	8,0
3,656	0,35	287,9	170,7	98,1	58,8	37,4	25,4	13,3	8,2
3,622	0,40	299,2	182,8	107,6	64,6	41,2	27,5	14,2	8,6
3,513	0,50	299,5	195,5	117,8	72,5	46,2	31,0	15,7	9,3

Fonte: adaptado de Leoni et al (2013)

Tabela 31 - NMA para o gráfico de EWMA – $\psi=0,9$; $n=1$; $\phi=0,8$

$\delta=(\xi-\xi_0)/\sigma_e$		0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0
L	λ								
5,654	0,05	283,8	181,9	115,8	77,9	55,1	41,7	26,7	19,0
5,641	0,10	306,4	211,1	136,6	91,0	63,4	46,3	27,4	18,3
5,430	0,15	314,9	223,4	149,1	100,9	69,6	50,1	28,8	18,4
5,203	0,20	317,7	231,6	157,8	107,2	75,0	53,7	30,2	18,9
4,981	0,25	319,1	237,4	164,3	112,9	78,3	56,1	31,6	19,4
4,781	0,30	328,6	246,1	170,5	118,3	82,5	59,6	32,9	19,9
4,570	0,35	320,8	243,2	171,2	119,1	84,1	60,2	33,4	20,2
4,394	0,40	327,0	248,4	175,9	122,4	86,5	62,1	34,5	20,5
4,074	0,50	330,7	255,3	183,5	127,8	90,7	65,3	36,0	21,2

Fonte: adaptado de Leoni et al (2013)

Tabela 32 - NMA para o gráfico de EWMA – $\psi=0,9$; $n=4$; $\phi=0,4$

$\delta=(\xi-\xi_0)/\sigma_e$		0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0
L	λ								
6,321	0,05	128,3	48,4	26,9	18,2	13,7	10,9	7,8	6,2
6,851	0,10	157,9	57,6	29,1	18,1	12,9	10,0	6,8	5,2
7,096	0,15	180,0	68,4	32,9	19,4	13,2	9,8	6,5	4,8
7,240	0,20	200,4	80,0	37,9	21,5	14,0	10,1	6,3	4,6
7,329	0,25	216,6	90,7	43,2	23,9	15,2	10,6	6,4	4,5
7,392	0,30	229,4	101,2	48,6	26,9	16,6	11,4	6,6	4,5
7,429	0,35	239,4	111,8	54,5	29,8	18,2	12,2	6,8	4,6
7,454	0,40	250,6	122,0	60,8	33,3	20,2	13,3	7,1	4,6
7,501	0,50	273,2	144,0	74,8	41,5	24,9	16,1	8,1	5,0

Fonte: adaptado de Leoni et al (2013)

Tabela 33 - NMA para o gráfico de EWMA – $\psi=0,9$; $n=4$; $\phi=0,8$

$\delta=(\xi-\xi_0)/\sigma_e$		0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0
L	λ								
8,90	0,05	195,3	85,9	47,7	31,0	22,6	17,5	12,1	9,2
9,41	0,10	225,3	105,0	55,6	34,0	23,2	17,2	11,0	8,0
9,56	0,15	246,3	122,7	65,2	38,5	25,4	18,1	11,0	7,7
9,55	0,20	257,1	135,8	72,6	43,0	27,7	19,4	11,2	7,5
9,50	0,25	272,0	149,2	81,7	48,3	30,7	21,0	11,7	7,6
9,40	0,30	277,8	159,6	89,0	52,8	33,5	22,6	12,2	7,7
9,30	0,35	289,3	170,8	96,9	58,0	36,8	24,6	12,9	8,0
9,17	0,40	293,4	179,0	103,7	62,2	39,4	26,4	13,7	8,3
8,88	0,50	298,4	190,8	114,6	70,1	44,8	29,8	15,1	8,9

Fonte: adaptado de Leoni et al (2013)

5.3 PLANEJAMENTO ESTATÍSTICO-ECONÔMICO DO GRÁFICO DE $\bar{X}$ PARA O MONITORAMENTO DE PROCESSOS AUTOCORRELACIONADOS

Duncan (1956) publicou o primeiro modelo totalmente econômico para o planejamento ótimo dos gráficos de controle de Shewhart, além de incorporar a metodologia formal de otimização na determinação dos parâmetros de projeto. A vantagem de se utilizar o planejamento econômico-estatístico para o projeto de gráficos de controle é obter uma técnica adequada ao processo em que se pretende monitorar, levando em consideração os custos envolvidos neste monitoramento.

Adota-se a abordagem baseada em uma cadeia de Markov proposta por Costa e Machado (2011b) para o planejamento econômico-estatístico do gráfico de $\bar{X}$ quando a média do processo oscila.

No desenvolvimento do modelo de custo, Duncan assume que o processo é caracterizado por uma média em controle $\xi = \xi_0$ e que a causa especial altera a média de $\xi = \xi_0$ para $\xi = \xi_0 \pm \delta\sigma_e$. Assim, como o período sob controle segue uma distribuição exponencial, o intervalo de tempo que o processo permanece neste estado tem média $1/\lambda$, portanto, dada a ocorrência da causa especial entre a $(j-1)^{a}$ e a j^{a} amostras, o tempo esperado de ocorrência dentro deste intervalo é dado por:

$$\tau = \frac{\int_{(j-1)h}^{jh} e^{-\lambda t} \lambda(t - (j-1)h) dt}{\int_{(j-1)h}^{jh} e^{-\lambda t} \lambda dt} = \frac{1 - (1 + \lambda h)e^{-\lambda h}}{\lambda(1 - e^{-\lambda h})} \quad (5.20)$$

O ciclo de produção é composto por quatro períodos: (1) o período em controle, com tempo esperado $1/\lambda$, (2) o período fora de controle, com tempo esperado $h \cdot NMA - \tau$, onde NMA é o número médio de amostras até o sinal, (3) o tempo gn para retirar uma amostra e interpretar os resultados, e (4) o tempo D para encontrar a causa especial. Desta forma, o tempo esperado de um ciclo completo é:

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} + \frac{h}{(1 - \beta)} - \tau + gn + D \quad (5.21)$$

O lucro por hora quando o processo está em controle é V_0 , e quando está fora de controle é $V_1 < V_0$. Os custos fixos e variáveis para se retirar e inspecionar uma amostra são a_1 e a_2 , respectivamente. Então, o rendimento esperado por ciclo é

$$E(C) = V_0 \frac{1}{\lambda} + V_1 \left(\frac{h}{(1 - \beta)} - \tau + gh + D \right) - a_3 - \frac{a_4 \cdot e^{-\lambda h}}{1 - e^{-\lambda h}} - (a_1 + a_2 n) \frac{E(T)}{h} \quad (5.22)$$

onde a_3 e a_4 são, respectivamente, o custo de determinação da causa especial e o custo de investigação do alarme falso. A função custo horária $E(L)$ é dada por

$$E(L) = V_0 - \frac{E(C)}{E(T)} = \frac{(a_1 + a_2 n)}{h} + \frac{a_5 (h/(1-\beta) - \tau + gh + D) - a_3 - a_4 \cdot \alpha \cdot e^{-\lambda h} / (1 - e^{-\lambda h})}{1/\lambda + h/(1-\beta) - \tau + gn + D} \quad (5.24)$$

onde $a_5 = V_0 - V_1$.

Os valores ótimos de n , h e L são aqueles que minimizam $E(L)$. Uma restrição é imposta na otimização para assegurar uma taxa média de alarmes falsos menor do que 0,003 ($\bar{\alpha} \leq 0.003$); esta restrição é aplicada a taxa média de alarmes falsos, pois a cada amostragem a taxa de alarmes falsos tem um valor diferente devido ao movimento oscilatório da média do processo. O modelo de otimização é o que segue:

$$\begin{aligned} & \text{Min } E(L) \\ & s.a. \begin{cases} \bar{\alpha} \leq 0.003 \\ 1 \leq n \leq 20 \\ 1 \leq L \leq 5 \\ 0,1 \leq h \leq 10 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Quando a média do processo oscila de acordo com um modelo AR (1), uma cadeia de Markov é utilizada para obtenção do NMA e do NMA_0 (número médio de alarmes falsos por ciclo). Em cada estado transiente da cadeia de Markov proposta, a média do processo assume diferentes valores. Para se ter uma cadeia de Markov com estados transientes finitos a média foi discretizada em m valores: $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$. Fixando-se uma amplitude de 14, isto é, $\mu_1 = \mu_0 - 7\sigma_\mu$, $\mu_m = \mu_0 + 7\sigma_\mu$, segue que $\mu_j = \mu_0 - [(m-1) - 2(j-1)]\Delta$, onde $j = 1, 2, \dots, m$ e $\Delta = 7\sigma_\mu / (m-1)$.

O estado absorvente é alcançado quando $\xi = \xi_0 \pm \delta\sigma_x$ e o valor de $\bar{X}$ cai fora dos limites de controle. A matriz de transição é dada por $Q = [p(a, b)]$, $a, b \in \{1, 2, \dots, m\}$. Então $p(a, b)$ representa a probabilidade de transição do estado (a) para o estado (b):

$$p(a, b) = \Pr[|\bar{X} - \mu_0| < L\sigma_{\bar{X}} \mid \bar{X} \sim N(\mu_a, \frac{\sigma_e^2}{n})] * \Pr[\alpha - \mu_b + \phi^h \mu_a < \Delta \mid \alpha \sim N(0; (1 - \phi^{2h})\sigma_\mu^2)] \quad (5.26)$$

Das propriedades elementares da cadeia de Markov:

$$NMA = b(1 - Q)^{-1}t \quad (5.27)$$

onde $b = (p_1, p_2, \dots, p_m)$, com $p_i = \Pr[|\mu - \mu_i| < \Delta | \mu \sim N(\xi_0; \sigma_\mu^2)]$, é o vetor de probabilidades iniciais e $t = (1, 1, \dots, 1)$. Para obter NMA_0 , uma nova cadeia de Markov é definida $Q_0 = [p(a, b)]$, $a, b \in \{1, 2, \dots, m\}$, onde $p(a, b) = e^{-\lambda h} * \Pr[|\alpha - \mu_b + \phi^h \mu_a| < \Delta | \alpha \sim N(0; (1 - \phi^{2h})\sigma_\mu^2)]$. Assume-se que quando a cadeia de Markov está em qualquer um dos m estados e um alarme falso ocorre, esta ocorrência não muda as probabilidades de transição $p(a, b)$. Segue que

$$NMA_0 = b(1 - Q_0)^{-1} fa \quad (5.28)$$

onde $fa = (fa_1, fa_2, \dots, fa_m)$, com $fa_j = \Pr[|\bar{X} - \mu_0| > L\sigma_{\bar{X}} | \bar{X} \sim N(\mu_j; \sigma_e^2/n)]$.

A função custo horária, $E(L)$, decorrente da alteração do processo é dada por:

$$E(L) = \frac{(a_1 + a_2 n)}{h} + \frac{a_5(h.NMA - \tau + gh + D) - a_3 - a_4.NMA_0}{1/\lambda + h.NMA - \tau + gn + D} \quad (5.29)$$

Os valores ótimos de n , h e k são aqueles que minimizam $E(L)$. Utiliza-se o algoritmo genético (AG) na otimização. O AG tem sido aplicado com sucesso como um algoritmo de busca para encontrar economicamente o projeto ótimo de vários gráficos de controle. Porém, deve-se atentar à definição de seus parâmetros, e neste aspecto o planejamento de experimentos, mais precisamente os arranjos ortogonais de Taguchi, auxiliam na determinação de valores dos parâmetros que apresentassem soluções boas em um tempo de processamento aceitável.

Um arranjo ortogonal L9 foi utilizado para se determinar os parâmetros do AG: tamanho da população (TP), número de gerações (NG), probabilidade de mutação (PM) e probabilidade de cruzamento (PC). Os níveis sugeridos para cada parâmetro (fator) são apresentados no Quadro 4.

Quadro 4: Níveis para cada parâmetro do AG

Parâmetros	Nível 1	Nível 2	Nível 3
Tamanho da população (PS)	10	50	100
Intervalo de geração (GN)	10	20	100
Taxa de Mutação (MR)	0,05	0,1	0,5
Taxa de Cruzamento (CR)	0,55	0,75	0,95

Fonte: adaptado de Franco et al (2012)

Como se utiliza uma cadeia de Markov para obtenção do NMA e α , e toda vez a função $E(L)$ é calculada, os quatro parâmetros do AG precisam ser escolhidos de forma a oferecer uma solução boa em um tempo de processamento razoável. Os valores de δ , ψ e de ϕ e dos parâmetros de custo foram fixados em $a_1 = 1$, $a_2 = 0,1$, $a_3 = 25$, $a_4 = 50$, $a_5 = 100$, $\lambda = 0,05$, $\delta = 1,5$, $\psi = 0$, $\phi = 0$, e em cada tentativa os três níveis dos quatro parâmetros do AG eram variados de acordo com a segunda, terceira,

quarta e quinta colunas da Tabela 34. Foram registrados três tempos de processamento para cada tentativa e a função sinal-ruído (SN), ver Tabela 34, onde SN é calculada pela expressão (5.30).

$$SN_i = -10 * \log \left(\sum_{\mu=1}^{N_i} \frac{T_{\mu}^2}{N_i} \right) \quad (5.30)$$

Depois de calculada a função Sinal-Ruído para os nove experimentos, foi obtido o valor médio de SN para cada parâmetro (fator) e nível, como apresentado na Tabela 34. Como o objetivo é a minimização do valor de E(L), o problema é do tipo quanto menor SN, melhor. Assim, determina-se a melhor combinação com base no maior valor absoluto do valor médio de SN. Observa-se que a melhor combinação apresentada pela matriz ortogonal L9 é $PC = 0,55$; $PM = 0,5$; $TP = 100$ e $NG = 10$.

Tabela 34: Projeto de Experimento de um arranjo ortogonal L9

Tratamento	PS	GN	MR	CR	T1	T2	T3	SN
1	1	1	1	1	11.406	11.430	11.767	-21.241
2	1	2	2	2	11.501	11.304	11.874	-21.261
3	1	3	3	3	11.515	11.975	11.305	-21.290
4	2	1	2	3	11.489	11.610	11.885	-21.336
5	2	2	3	1	11.828	11.566	11.301	-21.264
6	2	3	1	2	11.954	11.776	11.646	-21.432
7	3	1	3	2	11.448	11.302	11.351	-21.113
8	3	2	1	3	11.437	11.363	11.625	-21.195
9	3	3	2	1	11.383	11.546	11.878	-21.292

Fonte: adaptado de Franco et al (2012)

Emprega-se o planejamento de experimentos, mais especificamente os arranjos ortogonais, com análise de variâncias (ANOVA) e regressões múltiplas, para investigar os efeitos de ϕ , Ψ , δ , λ , D , e dos custos a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 nos valores ótimos dos parâmetros dos gráficos (n, L, h) , no valores de NMA_0 , NMA e $E(L)$ e no valor de Pd - como o poder de detecção do gráfico não é constante, devido ao movimento oscilatório da média, considera-se o seu valor médio, $\overline{Pd}$. Depois de se fixar os níveis das variáveis independentes, um arranjo ortogonal de Taguchi L36 foi aplicado, ver Franco et al (2012) para detalhes.

De acordo com Franco et al. (2012), somente ψ e a_2 afetam o tamanho da amostra n ; ϕ e ψ afetam o coeficiente dos limites de controle L ; δ , ψ e a_1 afetam o intervalo de amostragem h ; δ e ψ afetam o poder de detecção Pd ; δ , ψ , λ , a_3 e a_5 afetam a função custo horária $E(L)$.

À medida que ψ ou a_2 aumenta n diminui; à medida que ϕ e ψ aumenta L também aumenta; à medida que δ e a_1 diminui ou ψ aumenta h diminui; à medida que δ diminuiu a ψ aumenta Pd diminui; à medida que δ diminui ou ψ , λ , a_3 e a_5 aumenta $E(L)$ diminui.

Observando a Tabela 35 é possível avaliar a influência da correlação (ϕ) e do grau de oscilação da média do processo (ψ) no poder do gráfico de controle. Os demais parâmetros foram fixados em $a_1 = 1$, $a_2 = 0,1$, $a_3 = 25$, $a_4 = 50$, $a_5 = 100$, $\lambda = 0,05$, $\delta = 1,5$ e $D = 1$. O poder reduz drasticamente quando ψ aumenta, e esse efeito é intensificado para maiores valores de ϕ . Se 10% é um valor mínimo tolerável para $\overline{Pd}$, então o gráfico de $\overline{X}$ se torna uma ferramenta pouco útil para o monitoramento de processos cuja média oscila, para $\psi > 0.3$. O custo horário $E(L)$ aumenta demasiadamente à medida que ψ aumenta; o mesmo não se observa para ϕ .

O efeito do movimento oscilatório da média do processo no planejamento econômico do gráfico de $\overline{X}$ foi avaliado considerando uma causa especial que altera a média do processo de $\pm \delta\sigma_e$. Em todos os outros artigos que lidam com a oscilação da média (Reynolds *et al.* (1996) e Costa e Machado (2011b), assume-se que a média do processo com grandes movimentos oscilatórios está sujeita a perturbações maiores, isto é, $\pm \delta\sigma_x$. Não foram encontradas razões que expliquem essa dependência. As Tabelas 34 e 35 são as mesmas, porém na Tabela 34 a magnitude da perturbação é dada por $\pm \delta\sigma_e$ e na Tabela 35 por $\pm \delta\sigma_x$. Comparando as duas Tabelas, observa-se que quando a perturbação é dada por $\pm \delta\sigma_x$ o efeito real do movimento oscilatório da média no custo horário $E(L)$ é mascarado (ver coluna “% Custo”, porcentagem de aumento no custo horário $E(L)$ devido a autocorrelação; perturbações de magnitude $\pm \delta\sigma_x$ sempre levam a menores porcentagens se comparado com perturbações de magnitude $\pm \delta\sigma_e$).

Tabela 35 - O efeito de Ψ no valor de $\overline{Pd}$ do gráfico de $\bar{X}$ assumindo $\xi = \xi_0 \pm \delta\sigma_e$

EXP.	ϕ	ψ	Δ	N	L	h	NMA ₀	NMA	$\overline{Pd}$	Custo	% Custo
1	0	0	1.5	11	2.974	0.932	0.06	1.02	0.97730	11.28	0%
2	0	0.1	1.5	11	2.975	0.775	0.08	1.56	0.64143	13.14	16%
3	0	0.3	1.5	9	2.975	0.338	0.18	5.70	0.17538	19.79	75%
4	0	0.5	1.5	6	2.996	0.241	0.23	18.52	0.05401	29.46	161%
5	0	0.7	1.5	5	2.997	0.143	0.38	49.99	0.02000	41.04	264%
6	0	0.9	1.5	2	2.998	0.127	0.43	159.70	0.00626	62.09	450%
7	0.4	0	1.5	11	2.974	0.932	0.06	1.02	0.97730	11.28	0%
8	0.4	0.1	1.5	11	2.975	0.742	0.08	1.70	0.58798	13.55	20%
9	0.4	0.3	1.5	6	2.989	0.308	0.18	11.64	0.08589	25.06	122%
10	0.4	0.5	1.5	5	2.995	0.180	0.31	43.58	0.02295	40.38	258%
11	0.4	0.7	1.5	2	2.995	0.150	0.37	116.72	0.00857	57.13	406%
12	0.4	0.9	1.5	1	2.995	0.123	0.45	343.08	0.00291	78.03	592%
13	0.8	0	1.5	11	2.974	0.932	0.06	1.02	0.97730	11.28	0%
14	0.8	0.1	1.5	11	2.974	0.748	0.08	1.98	0.50515	14.39	28%
15	0.8	0.3	1.5	5	2.979	0.262	0.22	24.33	0.04111	33.86	200%
16	0.8	0.5	1.5	3	2.979	0.153	0.38	100.68	0.00993	54.73	385%
17	0.8	0.7	1.5	2	2.980	0.137	0.42	262.31	0.00381	74.42	560%
18	0.8	0.9	1.5	1	2.985	0.127	0.45	739.15	0.00135	91.66	712%

Fonte: adaptado de Franco et al (2012)

Tabela 36 - O efeito de Ψ no valor de $\overline{Pd}$ do gráfico de $\bar{X}$ assumindo $\xi = \xi_0 \pm \delta\sigma_x$

EXP.	Φ	ψ	δ	N	L	h	NMA ₀	NMA	$\overline{Pd}$	Custo	% Custo
1	0	0	1.5	11	2.978	0.942	0.06	1.02	0.97708	11.28	0%
2	0	0.1	1.5	11	2.978	0.770	0.08	1.42	0.70533	12.69	12%
3	0	0.3	1.5	9	2.978	0.430	0.14	3.38	0.29545	16.52	46%
4	0	0.5	1.5	5	2.996	0.241	0.23	6.91	0.14469	19.45	72%
5	0	0.7	1.5	4	2.998	0.153	0.36	10.22	0.09782	22.37	98%
6	0	0.9	1.5	2	2.998	0.137	0.40	13.83	0.07229	23.23	106%
7	0.4	0	1.5	11	2.978	0.942	0.06	1.02	0.97708	11.28	0%
8	0.4	0.1	1.5	11	2.975	0.755	0.08	1.51	0.66027	12.99	15%
9	0.4	0.3	1.5	6	2.989	0.323	0.17	6.60	0.15142	19.73	75%
10	0.4	0.5	1.5	5	2.995	0.280	0.20	14.11	0.07089	26.01	130%
11	0.4	0.7	1.5	2	2.995	0.195	0.28	26.62	0.03757	31.10	176%
12	0.4	0.9	1.5	1	2.995	0.183	0.30	37.57	0.02662	35.51	215%
13	0.8	0	1.5	11	2.978	0.942	0.06	1.02	0.97708	11.28	0%
14	0.8	0.1	1.5	11	2.978	0.800	0.07	1.69	0.59044	13.59	20%
15	0.8	0.3	1.5	5	2.980	0.345	0.17	11.87	0.08423	25.71	128%
16	0.8	0.5	1.5	3	2.980	0.230	0.25	32.57	0.03070	36.62	225%
17	0.8	0.7	1.5	1	2.985	0.131	0.43	70.79	0.01413	43.77	288%
18	0.8	0.9	1.5	1	2.986	0.130	0.44	118.45	0.00844	54.73	385%

Fonte: adaptado de Franco et al (2012)

5.4 GRÁFICOS DE CONTROLE MULTIVARIADOS PARA O MONITORAMENTO DE PROCESSOS AUTOCORRELACIONADOS

5.4.1 Gráfico de T^2 para o monitoramento de processos autocorrelacionados

Leoni et al (2015) consideraram o modelo vetorial autoregressivo de primeira ordem VAR (1) para estudar o efeito da autocorrelação e da correlação cruzada no desempenho do gráfico de T^2 .

O modelo vetorial autoregressivo de primeira ordem VAR (1) é dado por

$$\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{X}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (5.31)$$

onde $\mathbf{X}_t \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Gamma})$ é o vetor $(p \times 1)$ de observações no tempo t (p é o número de variáveis), $\boldsymbol{\mu}$ é o vetor de médias, $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ é um vetor aleatório normal multivariado e independente com vetor de médias iguais a zero e matriz de covariância $\boldsymbol{\Sigma}_e$, e $\boldsymbol{\Phi}$ é uma matriz $(p \times p)$ dos parâmetros de autocorrelação. Segundo Kalgonda e Kulkarni (2004), a matriz de correlação cruzada de $\mathbf{X}_t$ tem a seguinte propriedade: $\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\Phi}' + \boldsymbol{\Sigma}_e$. Após alguns cálculos obtém-se que

$$\text{Vec } \boldsymbol{\Gamma} = \left(\mathbf{I}_{p^2} - \boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Phi} \right)^{-1} \text{Vec } \boldsymbol{\Sigma}_e \quad (5.32)$$

onde $\otimes$ é o produto de Kronecker e Vec é o operador que transforma a matriz em vetor através do empilhamento das colunas.

Para estudar o efeito da autocorrelação e da correlação cruzada no desempenho do gráfico de T^2 assume-se $p=2$ e:

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

onde ρ é o coeficiente de correlação entre X e Y .

De (5.32) e (5.33) segue:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 = (1-a^2)^{-1} & \sigma_{XY} = \rho(1-ab)^{-1} \\ \sigma_{XY} = \rho(1-ab)^{-1} & \sigma_Y^2 = (1-b^2)^{-1} \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

Leoni et al. (2015) obtiveram a matriz de covariâncias cruzadas $\boldsymbol{\Gamma}_{\bar{X}}$:

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\bar{X}} = \begin{pmatrix} \zeta_X^2 = \frac{\sigma_X^2}{n} \left[1 + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)a^j \right] & \zeta_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{n} \left[1 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)a^j + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)b^j \right] \\ \zeta_{XY} & \zeta_Y^2 = \frac{\sigma_Y^2}{n} \left[1 + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)b^j \right] \end{pmatrix}$$

onde n é o tamanho da amostra e $\sigma_X^2 = \frac{1}{1-a^2}$; $\sigma_Y^2 = \frac{1}{1-b^2}$; $\sigma_{XY} = \frac{\rho}{1-ab}$. Quando os elementos da diagonal não principal de $\boldsymbol{\Phi}$ são zeros,

$$\zeta_{XY} / \sqrt{\zeta_X^2 \zeta_Y^2} = \rho \quad (5.35)$$

Assume-se que em controle $\mu'=(0, 0)$, e após a ocorrência da causa especial o vetor de medias inicial muda para $\mu'=(\delta_X, \delta_Y)$.

A estatística T^2 é dada por:

$$T^2 = (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu})' \Gamma_{\bar{\mathbf{X}}}^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}) \quad (5.36)$$

É conhecido o fato de que a autocorrelação reduz o desempenho do gráfico de $\bar{X}$; Leoni et al (2015) mostraram que a autocorrelação também reduz o desempenho do gráfico de T^2 .

5.4.2 Gráficos simultâneos de $\bar{X}$ para o monitoramento de gráficos de controle bivariados autocorrelacionados

Leoni et al (2015a) propuseram o uso conjunto de dois gráficos de $\bar{X}$ para o monitoramento de gráficos de controle bivariados autocorrelacionados.

O erro do tipo I para os gráficos simultâneos de $\bar{X}$ utilizados para monitorar processos com variáveis correlacionadas e observações autocorrelacionadas é dado por:

$$\alpha = 1 - \Pr\left(\left|\bar{X} / \zeta_X\right| < k \cap \left|\bar{Y} / \zeta_Y\right| < k\right) \quad (5.37)$$

$$= 1 - \Pr\left(-k < Z_1 < k \cap -k < Z_2 < k\right) \quad (5.38)$$

$$= 1 - \int_{-k}^k \int_{-k}^k f(z_1, z_2) dz_1 dz_2 \quad (5.39)$$

onde $f(z_1, z_2)$ é a função densidade de uma distribuição normal bivariada com correlação ρ e coeficiente de abertura do limite de controle k . O erro do tipo II é dado por:

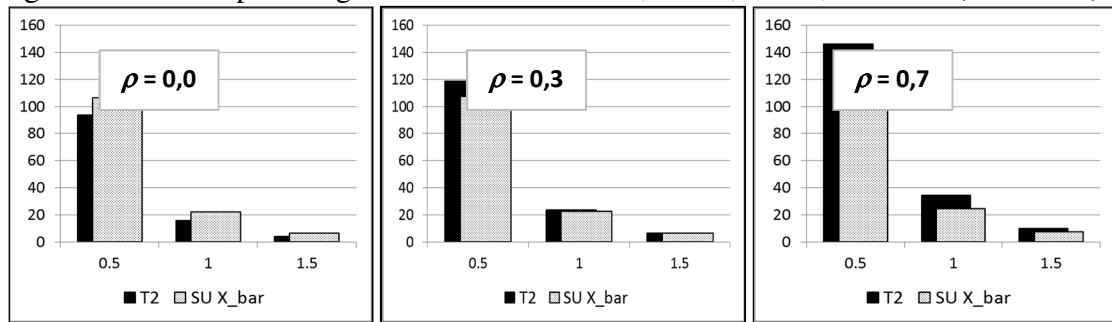
$$\beta = \Pr\left(\left|(\bar{X} - \delta_X) / \zeta_X\right| < k \cap \left|(\bar{Y} - \delta_Y) / \zeta_Y\right| < k\right) \quad (5.40)$$

$$= \Pr \left(-k - \frac{\delta_X}{\zeta_X} < Z_1 < k - \frac{\delta_X}{\zeta_X} \cap -k - \frac{\delta_Y}{\zeta_Y} < Z_2 < k - \frac{\delta_Y}{\zeta_Y} \right) \quad (5.41)$$

Para estudar o efeito da autocorreção e da correlação cruzada no desempenho dos gráficos de $SU \bar{X}$ e T^2 , assume-se um processo bivariado e $n=4$. O desempenho dos gráficos foi medido pelo NMA. Adota-se $NMA_0=370,4$.

A Figura 11 mostra o caso em que as observações das variáveis são autocorrelacionadas e as perturbações afetam o vetor de médias em controle. O gráfico de T^2 é fortemente afetado pela correlação; o mesmo não é observado com relação aos gráficos $SU \bar{X}$. Quando as variáveis são correlacionadas ($\rho > 0$), os gráficos $SU \bar{X}$ tem melhor desempenho do que o gráfico de T^2 .

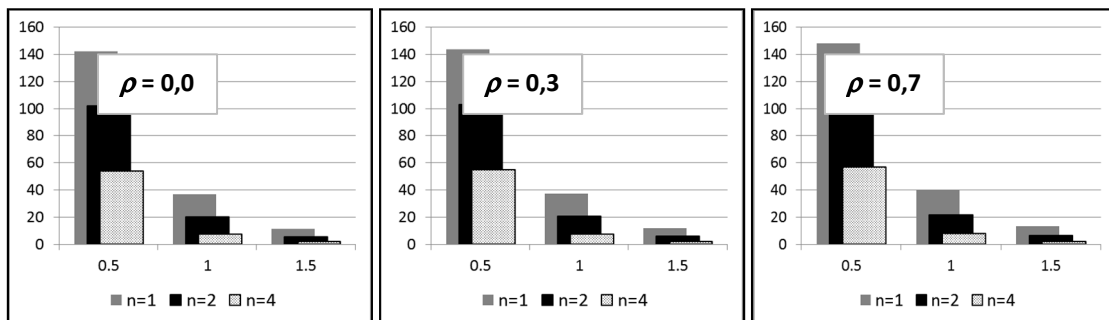
Figura 11 – NMA para os gráficos de T^2 e $SU \bar{X}$, $a=0.5$, $b=0.5$, $\delta_X=\delta_Y \in (0.5, 1.0, 1.5)$.



Fonte: adaptado de Leoni et al (2015)

A Figura 12 ilustra o efeito do tamanho da amostra no desempenho dos gráficos simultâneos. Dependendo da correlação, os gráficos de $SU \bar{X}$ apresentam melhor desempenho com tamanho de amostra unitário.

Figura 12 – NMA para os gráficos de $SU \bar{X}$, $a=0.0$, $b=0.5$, $\delta_X=\delta_Y \in (0.5, 1.0, 1.5)$.



Fonte: adaptado de Leoni et al (2015)

6. ESTRATÉGIAS DE AMOSTRAGEM QUE REDUZEM O EFEITO DA AUTOCORRELAÇÃO NO DESEMPENHO DOS GRÁFICOS DE CONTROLE

6.1 GRÁFICO UNIVARIADO PARA O MONITORAMENTO DE PROCESSOS AUTOCORRELACIONADOS COM A ADIÇÃO DE ESTRATÉGIAS DE AMOSTRAGEM

Para utilizar um gráfico de controle convencional (por exemplo, o gráfico de $\bar{X}$), é necessário que as observações sejam independentes. Muitos processos, porém, produzem observações autocorrelacionadas e não podem ser monitorados pelos gráficos convencionais.

Franco et al (2015) propuseram uma nova estratégia de amostragem para reduzir o efeito da autocorrelação. A estatística de monitoramento é a média dos valores da característica de qualidade $X \sim N(\mu_0, \sigma_0)$. São retirados a cada instante de tempo $i=1,2,\dots$, amostras de tamanho n . As observações $\{X_{i,1}, X_{i,2}, \dots, X_{i,n}\}$, da característica de qualidade x são descritas por um modelo vetorial autoregressivo de primeira ordem VAR (1), dado por

$$X_{i,t} - \mu_0 = \phi(X_{i,t-1} - \mu_0) + \varepsilon_t \text{ para } t = 1, 2, \dots, n \quad (6.1)$$

onde μ_0 é a média do processo em controle, $\varepsilon_t, t=1,2,\dots,n$ são variáveis normalmente distribuídas com média 0 e desvio-padrão σ_ε e ϕ é o coeficiente de autocorrelação do modelo AR(1). O intervalo de amostragem é suficientemente longo para assumir que $X_{i,t}$ e $X_{i+1,t}, t=1,2,\dots,n$ são independentes. Da teoria de Séries Temporais, sabe-se que a variância do processo em controle é dada por:

$$\sigma_0^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi^2}, \quad (6.2)$$

sendo $\bar{X}_i = \frac{1}{n}(X_{i,1} + \dots + X_{i,n})$ a média da i -ésima amostragem, Alwan e Radson (1992) mostraram que $\sigma_{\bar{X}}$ é dado por

$$\sigma(\bar{X}_i) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}C_2(n, \phi)} \quad (6.3)$$

onde

$$C_2(n, \phi) = \sqrt{\frac{n}{n + \sum_{j=1}^{n-1} 2(n-j)\phi^j}} = \sqrt{\frac{n}{n + 2\left(\frac{\phi^{n+1} - n\phi^2 + (n-1)\phi}{(\phi-1)^2}\right)}} \quad (6.4)$$

Apesar da equação (6.4) ser válida para qualquer $\phi \in (-1,1)$, (ou seja, autocorrelações positivas e negativas), neste estudo foca-se apenas no caso de autocorrelações positivas, que é o caso mais comum em processos reais. Os limites inferior e superior de controle LIC e LSC do gráfico de $\bar{X}$ para o monitoramento de observações autocorrelacionadas de acordo com o modelo VAR (1) são:

$$LSC, LIC = \mu_0 \pm k \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}C_2(n, \phi)} \quad (6.5)$$

onde $k > 0$ é o coeficiente dos limites de controle. Para um tamanho fixo de amostra n , a função $C_2(n, \phi)$ diminui à medida que ϕ aumenta; conseqüentemente, valores maiores de ϕ levam a uma maior amplitude dos limites de controle, ver equação (6.5).

A ocorrência da causa especial altera a média de μ_0 para $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0$, onde $\delta = \frac{|\mu_0 - \mu_1|}{\sigma_0}$ é a magnitude da perturbação. Costa e Castagliola (2011) obtiveram a expressão para o cálculo de β do gráfico de $\bar{X}$ para processos autocorrelacionados:

$$\beta = \Phi(k - \delta\sqrt{n} \cdot C_2(n, \phi)) - \Phi(-k - \delta\sqrt{n} \cdot C_2(n, \phi)) \quad (6.6)$$

onde $\Phi(\dots)$ é a função acumulada da distribuição normal. Então, o Pd é:

$$Pd = \Phi(-k - \delta\sqrt{n}C_2(n, \phi)) + \Phi(-k + \delta\sqrt{n}C_2(n, \phi)) \quad (6.7)$$

e $NMA=1/P_D$. A equação (6.7) mostra que a autocorrelação tem um efeito negativo no desempenho do gráfico de controle, pois $C_2(n, \phi) < 1$ reduz a magnitude da perturbação de δ para $\delta(1 - C_2(n, \phi))$.

Para reduzir esse efeito da autocorrelação no desempenho do gráfico de controle, Costa e Castagliola (2011) propuseram uma estratégia de amostragem denominada como s -skip, onde cada amostra é obtida pela coleta de um item da linha de produção e então espaçam-se $s=0,1,2,\dots$ itens consecutivos antes de selecionar o próximo item. Por definição, a estratégia 0 -skip corresponde a estratégia convencional de amostragem. Quando a estratégia de espaçar as amostras está em uso, a equação (1) muda para:

$$X_{i,t} - \mu_0 = \phi^{s+1}(X_{i,t-s-1} - \mu_0) + \varepsilon'_t \quad (6.8)$$

onde $\varepsilon'_t = \varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \dots + \phi^s\varepsilon_{t-s}$. A estratégia de espaçar as medidas $\{X_{i,1}, X_{i,s+2}, X_{i,2s+3}, X_{i,3s+4}, \dots\}$ segue um modelo AR(1) com parâmetro ϕ^{s+1} . Os valores de P_D e NMA são obtidos pela equação (6.7), com $C_2(n, \phi^{s+1})$. Costa e Castagliola (2011) mostraram que a) a estratégia s -skip reduz o NMA ;

b) o efeito da autocorrelação é minimizado espaçando 2 itens ($s=2$), no caso de autocorrelações moderadas ($\phi=0,5$), ou 3 itens ($s=3$), no caso de altas correlações ($\phi \geq 0,7$).

A estratégia proposta por Franco et al (2015) consiste em tomar itens de amostras consecutivas $\{X_{i-1,1}, X_{i-1,2}, \dots, X_{i-1,n}\}$ e $\{X_{i,1}, X_{i,2}, \dots, X_{i,n}\}$ cada uma de tamanho n , nos instantes $i-1$ e i , para formar uma amostra. Então, no instante i a amostra $\{Y_{i,1}, Y_{i,2}, \dots, Y_{i,n}\}$ é composta da seguinte maneira:

$$\{X_{i,1}, X_{i-1,2}, X_{i,3}, X_{i-1,4}, \dots, X_{i,n-1}, X_{i-1,n}\} \text{ se } n \text{ é par,}$$

$$\{X_{i,1}, X_{i-1,2}, X_{i,3}, X_{i-1,4}, \dots, X_{i,n}, X_{i-1,n-1}\} \text{ se } n \text{ é ímpar.}$$

As observações $\{X_2, X_4, \dots\}$ que não foram utilizadas para formar a amostra no instante i são utilizadas para formar a próxima amostra $i+1$. Exemplo: suponha que sejam retiradas duas amostras consecutivas formadas por itens de diferentes instantes de amostragem de tamanho 5 cada uma: a amostra é formada pelo primeiro, terceiro e quinto itens da amostra retirada no instante i e o segundo e quarto itens da amostra retirada no instante $i-1$. O segundo e o quarto itens da amostra do instante i são utilizados na formação da amostra $i+1$ e assim por diante.

Seja $\bar{Y}_i$ a média da amostra formada no instante i , então

$$\bar{Y}_i = \frac{n_{i-1}}{n} \times \underbrace{\frac{1}{n_{i-1}} \sum_{t=1}^{n_{i-1}} X_{i-1,2t}}_{\bar{X}'_{i-1}} + \frac{n_i}{n} \times \underbrace{\frac{1}{n_i} \sum_{t=1}^{n_i} X_{i,2t-1}}_{\bar{X}'_i} \quad (6.9)$$

onde $\bar{X}'_{i-1}$ e $\bar{X}'_i$ são as médias das sub-amostras que contribuíram para formar a amostra, nos instantes $i-1$ e i , respectivamente onde n_{i-1} e n_i são os tamanhos das sub-amostras satisfazendo $n_{i-1} + n_i = n$ e

$$\begin{aligned} - \quad n_{i-1} = n_i = \frac{n}{2} \quad & \text{se } n \text{ é par,} \\ - \quad n_{i-1} = \frac{n-1}{2}, n_i = \frac{n+1}{2} \quad & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{aligned}$$

Como $\bar{X}'_{i-1}$ e $\bar{X}'_i$ são independentes, a variância $\sigma^2(\bar{Y}_i)$ é dada por

$$\sigma^2(\bar{Y}_i) = \left(\frac{n_{i-1}}{n}\right)^2 \cdot \sigma^2(\bar{X}'_{i-1}) + \left(\frac{n_i}{n}\right)^2 \cdot \sigma^2(\bar{X}'_i) \quad (6.10)$$

Pela equação (6.3) tem-se que:

$$\sigma^2(\bar{Y}_i) = \left(\frac{n_{i-1}}{n}\right)^2 \frac{\sigma_0^2}{n_{i-1} C_{\frac{1}{2}}^2(n_{i-1}, \phi^2)} + \left(\frac{n_i}{n}\right)^2 \frac{\sigma_0^2}{n_i C_{\frac{1}{2}}^2(n_i, \phi^2)} = \frac{\sigma_0^2}{n C_{\frac{1}{2}}^2(n, \phi)}, \quad (6.11)$$

onde

$$C_3(n, \phi) = \left(\frac{n_{i-1}}{n} \cdot \frac{1}{C_2^2(n_{i-1}, \phi^2)} + \frac{n_i}{n} \cdot \frac{1}{C_2^2(n_i, \phi^2)} \right)^{-1/2}. \quad (6.12)$$

Quando não há autocorrelação, ou seja $\phi=0$, tem-se que $C_2^2(n_i, \phi^2) = 1$ e $\sigma^2(\bar{Y}_i) = \sigma_0^2/\sqrt{n}$. Os limites de controle LSC e LIC para o gráfico de $\bar{Y}_i$ são dados por (6.5).

Se uma causa especial ocorre entre duas amostras consecutivas entre os instantes $i-1$ e i , então

$$\bar{X}'_{i-1} \sim N(\mu_0, \sigma(\bar{X}'_{i-1})) \quad \text{com} \quad \sigma(X'_{i-1}) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n_{i-1}} C_2(n_{i-1}, \phi^2)} \quad (6.13)$$

$$\bar{X}'_i \sim N(\mu_0 + \delta\sigma_0, \sigma(\bar{X}'_i)) \quad \text{com} \quad \sigma(X'_i) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n_i} C_2(n_i, \phi^2)} \quad (6.14)$$

e, como consequência, para a primeira amostra formada imediatamente após a ocorrência da causa

especial tem-se que $\bar{Y}_i \sim N\left(\mu_0 + \frac{n_i}{n} \delta\sigma_0, \sigma(\bar{Y}_i)\right)$. A probabilidade de ocorrer o erro do tipo II é

$$\beta_1 = \Phi\left(k - \frac{n_i}{n} \cdot \delta\sqrt{n} \cdot C_3(n, \phi)\right) - \Phi\left(-k - \frac{n_i}{n} \cdot \delta\sqrt{n} \cdot C_3(n, \phi)\right) \quad (6.15)$$

A partir da segunda amostra tem-se que

$$\begin{aligned} & \bar{X}_{i-1} \sim N(\mu_0 + \delta\sigma_0, \sigma(\bar{X}_{i-1})), \\ & \bar{X}_i \sim N(\mu_0 + \delta\sigma_0, \sigma(\bar{X}_i)), \end{aligned}$$

e, consequentemente $\bar{Y}_i \sim N(\mu_0 + \delta\sigma_0, \sigma(\bar{Y}_i))$. A probabilidade de ocorrer o erro do tipo II é

$$\beta = \Phi(k - \delta\sqrt{n} \cdot C_3(n, \phi)) - \Phi(-k - \delta\sqrt{n} \cdot C_3(n, \phi)) \quad (6.16)$$

Então, o NMA para o gráfico de controle para amostras formadas em instantes diferentes de amostragem é dado por:

$$\begin{aligned} NMA &= 1 \times (1 - \beta_1) + 2 \times \beta_1(1 - \beta) + 3 \times \beta_1\beta(1 - \beta) + 4 \times \beta_1\beta^2(1 - \beta) + \dots \\ &= 1 - \beta_1 + \beta_1(1 - \beta) \sum_{i=2}^{\infty} i\beta^{i-2} \end{aligned} \quad (6.17)$$

ou seja

$$NMA = \beta_1 \left(\frac{2 - \beta}{1 - \beta} - 1 \right) + 1 \quad (6.18)$$

Após a obtenção das propriedades do gráfico proposto, investigou-se a influência da autocorrelação (ϕ), do tamanho da amostras (n) e da perturbação no processo (δ) no desempenho de tal gráfico (baseado na estratégia de espaçar as amostras - skip) e comparou sua eficiência com a do gráfico baseado na estratégia de amostragem tradicional.

O efeito negativo da autocorrelação no desempenho do gráfico de $\bar{X}$ pode ser reduzido com o uso das estratégias de amostragem. Por exemplo, se as observações são altamente autocorrelacionadas, ($\phi=0,9$) e a estratégia tradicional de amostragem está em uso o NMA para $\delta = 0.5$ e $n = 4$ é 142,62. O NMA reduz para 131,23 (-8,0%) e 121,04 (-15,1%) quando as amostras são espaçadas de um ou dois itens, respectivamente, ver Tabela 37. À medida que n aumenta, o NMA diminui.

Tabela 37: NMA para o gráfico de $\bar{X}$ baseado na estratégia de amostragem MS ($NMA_0=370,4$ e $n=4$)

	ϕ		
	0	0,5	0,9
$\delta=0,1$			
$s=0$	308,43	337,82	350,69
$s=1$	308,43	325,43	348,38
$s=2$	308,43	317,58	346,04
$\delta=0,5$			
$s=0$	43,89	93,20	142,62
$s=1$	43,89	66,07	131,23
$s=2$	43,89	54,31	121,04
$\delta=1,0$			
$s=0$	6,30	18,53	37,68
$s=1$	6,30	11,02	32,57
$s=2$	6,30	8,37	28,36

Fonte: adaptado de Franco et al (2015)

6.2 GRÁFICOS DE CONTROLE MULTIVARIADOS COM ESTRATÉGIAS DE AMOSTRAGEM

Leoni et al (2015b, 2015c) estudaram o desempenho do gráfico T^2 baseado nas estratégias de amostragem MS e skip.

A Tabela 38 compara a eficiência do gráfico de T^2 tradicional (STD) com o gráfico de T^2 baseado na estratégia MS. Adota-se NMA_0 de 370.4 e o tamanho de amostra igual a 5.

Em geral, a estratégia MS reduz o efeito da autocorrelação no desempenho do gráfico de T^2 (menores valores de NMA em negrito).

Tabela 38 – NMA para os gráficos de T^2 ; $n=5$.

			0.3		0.5		0.7		0.9		0.3		0	
			0.3		0.5		0.7		0.9		0.9		0.5	
			0		0		0		0		0		0	
			0		0		0		0		0		0	
ρ	δx	δy	STD	MS	STD	MS	STD	MS	STD	MS	STD	MS	STD	MS
0.	0	0	370.4	370.4	370.4	370.	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.
	0	0.5	88.02	59.47	137.6	88.2	211.7	149.2	312.1	271.4	314.9	276.0	138.9	90.2
	0	1	14.23	8.54	30.93	14.9	74.6	36.54	204.2	137.2	209.9	143.5	31.46	15.4
	0	1.5	3.78	2.98	8.79	4.57	26.79	11.26	119.8	64.24	125.6	68.73	8.97	4.71
	0.	0	88.02	59.47	137.6	88.2	211.7	149.2	312.1	271.4	93.05	63.75	46.84	48.1
	0.	0.5	61.37	39.29	104.2	61.7	177.0	115.0	292.9	243.4	95.67	64.7	46.2	39.3
	0.	1	15.44	9.22	33.22	16.1	78.75	39.09	209.4	142.5	84.63	52.48	22.56	13.5
	0.	1.5	4.39	3.29	10.25	5.17	30.6	12.97	129.2	71.19	66.08	36.18	8.87	4.95
	1	0	14.23	8.54	30.93	14.9	74.6	36.54	204.2	137.2	15.58	9.35	5.68	6.58
	1	0.5	15.44	9.22	33.22	16.1	78.75	39.09	209.4	142.5	16.45	9.83	6.5	7.16
	1	1	8.22	5.26	18.83	8.97	50.66	22.89	169.1	103.9	16.3	9.54	5.58	5.27
	1	1.5	3.53	2.86	8.18	4.32	25.15	10.55	115.5	61.15	15.18	8.59	3.86	3.36
	1.	0	3.78	2.98	8.79	4.57	26.79	11.26	119.8	64.24	4.14	3.17	1.72	2.53
	1.	0.5	4.39	3.29	10.25	5.17	30.6	12.97	129.2	71.19	4.33	3.27	1.88	2.7
	1.	1	3.53	2.86	8.18	4.32	25.15	10.55	115.5	61.15	4.4	3.29	1.87	2.56
	1.	1.5	2.29	2.24	5.04	3.08	16.1	6.82	88.32	42.88	4.34	3.22	1.7	2.24
0.	0	0	370.4	370.4	370.4	370.	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.
	0	0.5	60.28	38.5	102.7	60.6	175.3	113.5	291.9	242.0	308.7	267.8	109.1	69.7
	0	1	8.01	5.15	18.39	8.76	49.7	22.38	167.4	102.4	197.6	132.3	20.38	10.5
	0	1.5	2.24	2.21	4.92	3.03	15.71	6.66	86.97	42.03	113.5	60.91	5.49	3.47
	0.	0	60.28	38.5	102.7	60.6	175.3	113.5	291.9	242.0	82.52	56.3	31.54	34.8
	0.	0.5	77.17	51.04	124.5	77.4	198.6	135.8	305.2	261.2	95.33	66.04	51.84	48.2
	0.	1	16.12	9.61	34.5	16.7	81.02	40.52	212.1	145.3	93.07	59.94	29.7	16.5
	0.	1.5	3.72	2.95	8.63	4.51	26.37	11.08	118.7	63.45	77.24	43.56	10.27	5.12
	1	0	8.01	5.15	18.39	8.76	49.7	22.38	167.4	102.4	12.84	7.96	3.52	4.66
	1	0.5	16.12	9.61	34.5	16.7	81.02	40.52	212.1	145.3	14.87	9.18	5.49	6.99
	1	1	11.56	7.06	25.71	12.2	64.74	30.69	190.9	124.0	16.21	9.81	6.5	6.6
	1	1.5	4.35	3.27	10.15	5.13	30.36	12.86	128.6	70.75	16.47	9.59	5.24	4.17
	1.	0	2.24	2.21	4.92	3.03	15.71	6.66	86.97	42.03	3.42	2.85	1.29	2.1
	1.	0.5	3.72	2.95	8.63	4.51	26.37	11.08	118.7	63.45	3.79	3.05	1.55	2.48
	1.	1	4.35	3.27	10.15	5.13	30.36	12.86	128.6	70.75	4.1	3.2	1.8	2.69
	1.	1.5	3.1	2.64	7.1	3.89	22.16	9.27	107.3	55.36	4.31	3.28	1.9	2.54
0.	0	0	370.4	370.4	370.4	370.	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.
	0	0.5	10.63	6.55	23.85	11.3	61.06	28.59	185.6	118.9	294.8	250.4	42.94	31.4
	0	1	1.41	1.76	2.62	2.16	8.16	3.88	55.94	24.25	172.3	111.4	5.08	4.23
	0	1.5	1.01	1.19	1.14	1.43	2.28	1.93	18.29	7.23	91.02	47.39	1.6	2.01
	0.	0	10.63	6.55	23.85	11.3	61.06	28.59	185.6	118.9	63.57	43.53	8.32	13.7
	0.	0.5	91.81	62.47	142.1	92.0	216.0	153.7	314.2	274.7	85.75	61.32	39.58	52.3
	0.	1	6.1	4.16	14.2	6.87	40.27	17.56	150.1	87.65	96.41	65.14	35.18	16.2
	0.	1.5	1.26	1.65	2.16	1.98	6.47	3.31	47.13	19.79	87.28	50.87	7.12	3.68
	1	0	1.41	1.76	2.62	2.16	8.16	3.88	55.94	24.25	8.65	5.87	1.25	2.37
	1	0.5	6.1	4.16	14.2	6.87	40.27	17.56	150.1	87.65	11.12	7.41	2.14	4.39
	1	1	15.24	9.11	32.84	15.9	78.07	38.67	208.5	141.6	13.65	8.88	4.59	7.27
	1	1.5	2.96	2.57	6.77	3.76	21.22	8.88	104.5	53.49	15.66	9.76	6.47	5.01
	1.	0	1.01	1.19	1.14	1.43	2.28	1.93	18.29	7.23	2.39	2.37	1	1.52
	1.	0.5	1.26	1.65	2.16	1.98	6.47	3.31	47.13	19.79	2.78	2.6	1.03	1.83
	1.	1.5	4.05	3.12	9.44	4.84	28.5	12.02	124.2	67.4	3.63	3.06	1.5	2.69

Fonte: adaptado de Leoni et al (2015b)

As Tabela 39 e 40 apresentam os valores de NMA para o gráfico de T^2 tradicional e o gráfico de T^2 baseado na estratégia MS. Na Tabela 39, $\delta_1 = \delta_2$ e na Tabela 40, $\delta_1 \neq \delta_2$). Ambas foram obtidas com $n=4$.

Tabela 39 – NMA para os gráficos de T^2 , $\delta_1 = \delta_2$.

(a, b)		(0, 0)		(0, 0.2)		(0, 0.5)		(0, 0.7)		
S		0	1	2	0	1	2	0	1	2
δ_1	δ_2	NMA	NMA	NMA	NMA	NMA	NMA	NMA	NMA	NMA
0.0	0.0	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
$\rho=0.0$										
.50	.50	27.73	34.43	29.74	28.78	46.56	40.51	37.09	55.16	51.84
.75	.75	7.74	9.99	8.40	8.09	14.47	12.17	10.92	17.96	16.58
1.00	1.00	3.06	3.89	3.30	3.18	5.63	4.72	4.24	7.07	6.03
1.25	1.25	1.68	2.02	1.78	1.73	2.78	2.38	2.18	3.43	3.17
1.50	1.50	1.21	1.36	1.25	1.23	1.71	1.53	1.43	2.03	1.90
$\rho=0.3$										
.50	.50	39.83	48.07	42.20	40.96	59.46	53.24	49.45	64.48	61.80
.75	.75	11.92	15.06	12.79	12.33	19.80	17.16	15.61	22.03	20.84
1.00	1.00	4.62	5.87	4.97	4.79	7.86	6.74	6.10	8.83	8.30
1.25	1.25	2.34	2.89	2.49	2.41	3.79	3.28	2.99	4.24	3.99
1.50	1.50	1.51	1.77	1.58	1.54	2.21	1.95	1.81	2.43	2.31
$\rho=0.7$										
.50	.50	55.82	64.12	58.39	56.95	67.08	66.04	63.61	65.51	67.22
.75	.75	18.24	21.87	19.34	18.72	23.23	22.75	21.64	22.51	23.29
1.00	1.00	7.19	8.76	7.66	7.40	9.36	9.14	8.66	9.04	9.39
1.25	1.25	3.48	4.20	3.70	3.57	4.49	4.38	4.16	4.34	4.49
1.50	1.50	2.06	2.42	2.16	2.10	2.56	2.51	2.39	2.48	2.56

(a, b)		(0, 0)		(0.2, 0.2)		(0.5, 0.5)		(0.7, 0.7)		
S		0	1	2	0	1	2	0	1	2
δ_1	δ_2	NMA	NMA	NMA	NMA	NMA	NMA	NMA	NMA	NMA
0.0	0.0	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
$\rho=0.0$										
.50	.50	27.73	43.87	31.98	29.90	93.65	64.57	52.09	159.45	129.50
.75	.75	7.74	13.43	9.15	8.45	36.68	22.08	16.69	80.52	58.64
1.00	1.00	3.06	5.22	3.57	3.31	15.74	8.85	6.54	41.01	27.61
1.25	1.25	1.68	2.60	1.89	1.79	7.62	4.25	3.19	21.85	13.98
1.50	1.50	1.21	1.63	1.30	1.26	4.19	2.44	1.91	12.35	7.71
$\rho=0.3$										
.50	.50	39.83	60.48	45.39	42.68	118.51	85.46	70.57	187.11	156.80
.75	.75	11.92	20.25	14.01	12.98	51.43	32.28	24.86	103.84	78.44
1.00	1.00	4.62	8.05	5.45	5.04	23.53	13.57	10.09	56.91	39.68
1.25	1.25	2.34	3.88	2.70	2.52	11.72	6.53	4.83	31.98	21.04
1.50	1.50	1.51	2.25	1.68	1.59	6.43	3.61	2.73	18.70	11.86
$\rho=0.7$										
.50	.50	55.82	81.12	62.78	59.41	145.92	109.97	92.97	214.55	185.10
.75	.75	18.24	30.04	21.27	19.78	70.22	46.13	36.31	130.24	102.03
1.00	1.00	7.19	12.50	8.49	7.85	34.52	20.64	15.55	76.85	55.62
1.25	1.25	3.48	6.00	4.08	3.78	17.96	10.17	7.52	45.73	31.13
1.50	1.50	2.06	3.33	2.35	2.20	10.02	5.57	4.13	27.90	18.16

Fonte: adaptado de Leoni et al (2015c)

Tabela 40 – NMA para os gráficos de T^2 , $\delta_1 \neq \delta_2$.

(a, b)		(0, 0)		(0, 0.2)		(0, 0.5)			(0, 0.7)		
S		0	1	2	0	1	2	0	1	2	
δ_1	δ_2	NMA	NMA	NMA	NMA	NMA	NMA	NMA	NMA	NMA	
0.0	0.0	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	
$\rho=0.0$											
.50	1.00	6.50	9.99	7.42	6.97	20.48	14.41	11.75	33.41	27.67	23.58
1.00	.50	6.50	7.17	6.72	6.62	8.15	7.69	7.41	8.72	8.51	8.32
.50	1.50	2.22	3.43	2.51	2.37	8.44	5.28	4.12	17.76	13.15	10.33
1.50	.50	2.22	2.31	2.25	2.23	2.43	2.37	2.34	2.49	2.47	2.45
1.00	1.50	1.61	2.10	1.74	1.67	3.54	2.71	2.34	5.25	4.50	3.96
1.50	1.00	1.61	1.79	1.66	1.64	2.09	1.94	1.85	2.29	2.22	2.15
$\rho=0.3$											
.50	1.00	8.76	14.02	10.10	9.43	29.07	20.06	16.14	44.37	36.84	31.38
1.00	.50	8.76	9.15	8.87	8.81	9.40	9.26	9.12	9.40	9.40	9.35
.50	1.50	2.56	4.24	2.96	2.76	11.48	6.80	5.15	24.25	17.56	13.54
1.50	.50	2.56	2.57	2.57	2.57	2.55	2.57	2.57	2.53	2.55	2.56
1.00	1.50	2.12	2.98	2.34	2.23	5.23	3.88	3.27	7.18	6.18	5.43
1.50	1.00	2.12	2.31	2.18	2.15	2.51	2.40	2.32	2.56	2.53	2.49
$\rho=0.7$											
.50	1.00	8.30	15.70	10.27	9.38	39.85	25.91	19.99	58.22	49.07	41.80
1.00	.50	8.30	7.56	8.24	8.35	6.92	7.97	8.38	7.20	7.91	8.32
.50	1.50	1.88	3.35	2.26	2.09	1.75	6.84	4.93	32.26	22.39	16.67
1.50	.50	1.88	1.77	1.89	1.91	12.74	1.94	2.02	1.89	2.03	2.12
1.00	1.50	2.56	4.19	2.98	2.77	7.87	5.75	4.69	9.24	8.45	7.60
1.50	1.00	2.56	2.45	2.55	2.56	2.24	2.46	2.53	2.22	2.38	2.47
(a, b)		(0, 0)	(0.2, 0.2)	(0.5, 0.5)	(0.7, 0.7)						
S		0	1	2	0	1	2	0	1	2	
δ_1	δ_2	NMA	NMA	NMA	NMA	NMA	NMA	NMA	NMA	NMA	
0.0	0.0	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	
$\rho=0.0$											
.50	1.00	6.50	11.33	7.68	7.10	31.74	18.81	14.13	72.02	51.69	39.67
1.00	.50	6.50	11.33	7.68	7.10	31.74	18.81	14.13	72.02	51.69	39.67
.50	1.50	2.22	3.64	2.55	2.38	11.00	6.12	4.53	30.26	19.82	14.33
1.50	.50	2.22	3.64	2.55	2.38	11.00	6.12	4.53	30.26	19.82	14.33
1.00	1.50	1.61	2.46	1.80	1.71	7.14	3.99	3.00	20.60	13.13	9.36
1.50	1.00	1.61	2.46	1.80	1.71	7.14	3.99	3.00	20.60	13.13	9.36
$\rho=0.3$											
.50	1.00	8.76	15.13	10.34	9.56	40.53	24.67	18.74	86.86	63.93	49.96
1.00	.50	8.76	15.13	10.34	9.56	40.53	24.67	18.74	86.86	63.93	49.96
.50	1.50	2.56	4.30	2.97	2.77	13.02	7.27	5.37	34.97	23.19	16.89
1.50	.50	2.56	4.30	2.97	2.77	13.02	7.27	5.37	34.97	23.19	16.89
1.00	1.50	2.12	3.46	2.44	2.28	10.43	5.80	4.30	28.90	18.86	13.61
1.50	1.00	2.12	3.46	2.44	2.28	10.43	5.80	4.30	28.90	18.86	13.61
$\rho=0.7$											
.50	1.00	8.30	14.37	9.80	9.06	38.82	23.52	17.82	84.07	61.60	47.98
1.00	.50	8.30	14.37	9.80	9.06	38.82	23.52	17.82	84.07	61.60	47.98
.50	1.50	1.88	2.99	2.14	2.01	8.90	4.95	3.69	25.15	16.24	11.65
1.50	.50	1.88	2.99	2.14	2.01	8.90	4.95	3.69	25.15	16.24	11.65
1.00	1.50	2.56	4.29	2.97	2.77	13.00	7.26	5.37	34.93	23.16	16.86
1.50	1.00	2.56	4.29	2.97	2.77	13.00	7.26	5.37	34.93	23.16	16.86

Fonte: adaptado de Franco et al (2015)

Em geral, a estratégia skip melhora o desempenho do gráfico de T^2 utilizado para monitorar processos bivariados autocorrelacionados.

7. REGRAS ESPECIAIS DE DECISÃO QUE MELHORAM A EFICIÊNCIA DOS GRÁFICOS DE CONTROLE

Quando a regra especial de decisão de dois pontos na região de ação está em uso, o gráfico de controle sinaliza somente quando um segundo ponto cai na região de ação, e sob a condição de que o número de amostras entre os dois pontos que caíram na região de ação, não seja superior a um valor inteiro L .

O gráfico baseado na regra dos dois pontos é conhecido como *Synthetic Control Chart* e foi proposto por Wu e Spedding (2000).

Quando a regra especial de decisão de dois pontos na mesma região de ação está em uso, o gráfico de controle sinaliza quando os dois pontos ocorrem na região de ação superior ou inferior, e sob a condição de que o número de amostras entre os dois pontos que caíram na região de ação, não seja superior a um valor inteiro L . O gráfico baseado na regra dos dois pontos na mesma região de ação é conhecido como *Side Sensitive Control Chart*.

Machado e Costa (2014) se dedicaram ao desenvolvimento, por meio de cadeias de Markov, das expressões analíticas necessárias para obter as propriedades dos gráficos de controle com regras especiais de decisão. Os autores mostraram que há uma falha nos cálculos apresentados por Davis e Woodall (2002), trabalho pioneiro na obtenção das propriedades dos gráficos de controle com regra especial de decisão.

Costa e Machado (2015) propuseram o gráfico de $\bar{X}$ side-sensitive, com amostragem dupla (AD). Lembrando que quando o gráfico de $\bar{X}$ com amostragem dupla está em uso, a amostragem é realizada em dois estágios, sendo que as amostras de tamanho n são divididas em sub-amostras de tamanho n_1 e n_2 , tal que $n = n_1 + n_2$. Uma média amostral da sub-amostra de tamanho n_1 distante do valor-alvo da média do processo, leva ao segundo estágio da amostragem, onde as n_2 unidades restantes são inspecionadas e a média amostral considerando a amostra de tamanho n é calculada e comparada com os limites de controle.

Quando a amostragem dupla é utilizada em conjunto com a regra *side-sensitive*, o ponto acima (abaixo) do limite de controle é a média da primeira amostra de tamanho n_1 ou a média da amostra de tamanho n .

Costa e Machado (2015) mostraram que, em termos de eficiência, o gráfico synthetic com amostragem dupla não é melhor do que o gráfico de $\bar{X}$ com amostragem dupla. A eficiência do gráfico synthetic com amostragem dupla melhora quando se adota a regra *side-sensitive*, mas não o suficiente para superar o gráfico de $\bar{X}$ com amostragem dupla.

Wu et al (2010) propuseram um esquema que combina o gráfico baseado na regra de dois pontos na região de ação (*synthetic rule*) e o gráfico de $\bar{X}$, denominado gráfico Syn- $\bar{X}$. O gráfico Syn- $\bar{X}$ tem região de advertência e região de ação. O gráfico sinaliza quando um ponto amostral cai na região de ação e/ou $NA < L$, onde NA é o número de amostras conformes entre duas amostras consecutivas não-conformes. A amostra é considerada não-conforme quando o seu valor amostral gerar um ponto na região de advertência.

Machado e Costa (2014a) mostraram que o gráfico Syn- $\bar{X}$ chart, proposto por Wu et al (2010), tem melhor desempenho quando a regra *side-sensitive* é adotada, lembrando que um gráfico de controle *side-sensitive* não sinaliza quando os pontos fora dos limites de controle estão em lados opostos da linha média.

7.1 GRÁFICOS DE CONTROLE UNIVARIADOS COM REGRA ESPECIAL DE DECISÃO

7.1.1 Gráfico de $\bar{X}$ com regra especial de decisão

Quando a regra especial de decisão está em uso, o gráfico de controle sinaliza somente quando um segundo ponto cai na região de ação, e sob a condição de que o número de amostras entre os dois pontos que caíram na região de ação, não seja superior a um valor inteiro L .

A matriz de transição em (7.1) é utilizada para obter o NMA_{ss} do gráfico de $\bar{X}$ quando se adota a regra especial de decisão.

	00..00	0..001	0..010	0..100	...	010..0	100..0	Signal
00...00	A	B	0	0	...	0	0	0
0..001	0	0	A	0	...	0	0	B
0..010	0	0	0	A	...	0	0	B
...	..	...	...	...	...	...	...	...
001..0	0	0	0	0	...	A	0	B
010..0	0	0	0	0	...	0	A	B
100..0	A	0	0	0	...	0	0	B
Signal	0	0	0	0	...	0	0	1

(7.1)

Os estados transientes descrevem a posição dos últimos m pontos amostrais; “1” significa que o ponto amostral caiu fora dos limites de controle e “0” significa que o ponto amostral caiu na região central. Por exemplo, o estado transiente (010..0) é alcançado quando o segundo ponto dos últimos m pontos cai na região de ação e todos os outros pontos caem na região central. Os eventos “0” e “1” ocorrem com probabilidade A e $B=1-A$, respectivamente.

O NMA_{ss} é dado por $\mathbf{S}' \mathbf{NMA}$, onde $\mathbf{S}$ é o vetor de probabilidades iniciais e $\mathbf{NMA}$ é o vetor de NMAs levando em consideração cada estado não absorvente como o estado inicial. Então, $\mathbf{NMA}_{ss} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{1}$, onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade $(L+1)$ por $(L+1)$, $\mathbf{R}$ é a matriz de transição dada em (27) sem a última linha e coluna e $\mathbf{1}$ é um vetor unitário $(L+1)$. O vetor $\mathbf{S}' = (1/C, B/C, \dots, B/C)$, com $C=1+LB$, é obtido através da resolução do sistema de equações lineares $\mathbf{S}' \mathbf{R}_{adj} = \mathbf{S}$, sujeito a $\mathbf{S}' \mathbf{1} = 1$. A matriz $\mathbf{R}_{adj}$ é uma versão ajustada de $\mathbf{R}$, onde A e B na primeira linha são mantidos e os As restantes são substituídos por 1s. A matriz $\mathbf{R}_{adj}$ é dada por:

$$\begin{pmatrix} A & B & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

Apesar de Davis e Woodall (2002) terem declarado que as probabilidades estacionárias deveriam ser obtidas com o processo em controle, eles obtiveram $\mathbf{S}$ com $A = \Pr[|Z| < k | Z \sim N(d;1)]$ - k é o fator de abertura dos limites de controle - isto é, as probabilidades estacionárias foram calculadas com $\mu = \mu_0 + d\sigma_{\bar{x}}$, o valor fora de controle da média do processo. Por exemplo, quando $(L, k, d) = (5, 2.263, 2)$, o $\mathbf{NMA}' = (5,105; 2,806; 3,196; 3,885)$, $\mathbf{S}'_0 = (0,9162; 0,0279; 0,0279; 0,0279)$ e $\mathbf{S}'_1 = (0,4339; 0,1886; 0,1886; 0,1886)$; onde $\mathbf{S}'_0$ é o vetor $\mathbf{S}$ calculado com $A = \Pr[|Z| < k | Z \sim N(0;1)]$ e $\mathbf{S}'_1$ é o vetor $\mathbf{S}$ calculado com $A = \Pr[|Z| < k | Z \sim N(d;1)]$. O NMA_{ss} é dado por $\mathbf{S}'_0 \mathbf{NMA} = 5,0$. Na Tabela 2 de Davis e Woodall (2002), o valor de $\mathbf{S}'_1 \mathbf{NMA} = 4,1$. A Tabela 18 mostra os valores de $\mathbf{S}'_0 \mathbf{NMAs}$ e $\mathbf{S}'_1 \mathbf{NMAs}$ para $L=1, 5$, e 10 e d variando de 0 até $3,0$. Dependendo da magnitude da perturbação, a diferença percentual entre $\mathbf{S}'_1 \mathbf{NMA}$ e $\mathbf{S}'_0 \mathbf{NMA}$ varia de 0 a 37% .

Tabela 41. Valores de S'_1 NMA e S'_0 NMA

L	1			5			10		
k	1.944			2.263			2.386		
d	S'_0 ARL	S'_1 ARL	%	S'_0 ARL	S'_1 ARL	%	S'_0 ARL	S'_1 ARL	%
0	389.6	389.6	0.0	414.9	414.9	0.0	423.7	423.7	0.0
0.1	373.0	373.0	0.0	393.0	393.0	0.0	400.0	399.8	0.0
0.2	329.0	328.9	0.0	336.9	336.6	0.1	339.7	339.3	0.1
0.3	271.2	271	0.1	266.9	266.4	0.2	266.1	265.2	0.3
0.4	212.7	212.5	0.1	200.7	200	0.3	198	196.7	0.7
0.5	161.7	161.4	0.2	146.7	145.7	0.7	143.7	141.9	1.3
0.6	120.9	120.5	0.3	106.2	105	1.1	103.5	101.5	1.9
0.7	90.0	89.5	0.6	77.0	75.7	1.7	75.1	72.9	2.9
0.8	67.1	66.6	0.7	56.4	55.0	2.5	55.2	52.9	4.2
0.9	50.5	49.9	1.2	42.0	40.5	3.6	41.3	39.0	5.6
1	38.4	37.8	1.6	31.8	30.3	4.7	31.5	29.2	7.3
1.1	29.6	29.0	2.0	24.5	23.1	5.7	24.5	22.3	9.0
1.2	23.2	22.6	2.6	19.3	17.8	7.8	19.5	17.3	11.3
1.3	18.4	17.8	3.3	15.4	14.0	9.1	15.8	13.7	13.3
1.4	14.8	14.2	4.1	12.6	11.2	11.1	13.0	11.0	15.4
1.5	12.1	11.5	5.0	10.4	9.1	12.5	10.8	8.9	17.6
1.6	10.1	9.5	5.9	8.8	7.5	14.8	9.2	7.4	19.6
1.7	8.5	7.9	7.1	7.5	6.3	16.0	7.9	6.2	21.5
1.8	7.2	6.7	6.9	6.5	5.3	18.5	6.9	5.2	24.6
1.9	6.3	5.7	9.5	5.7	4.6	19.3	6.1	4.5	26.2
2	5.5	4.9	10.9	5.0	4.1	21.6	5.4	3.9	27.8
2.1	4.9	4.3	12.2	4.5	3.5	22.2	4.9	3.4	30.6
2.2	4.3	3.8	11.6	4.1	3.1	24.4	4.4	3.0	31.8
2.3	3.9	3.4	12.8	3.8	2.8	26.3	4.0	2.7	32.5
2.4	3.6	3.1	13.9	3.5	2.5	28.6	3.7	2.5	32.4
2.5	3.3	2.8	15.2	3.2	2.3	28.1	3.4	2.2	35.3
2.6	3.1	2.6	16.1	3.0	2.1	30.0	3.2	2.1	34.4
2.7	2.9	2.4	17.2	2.9	2.0	31.0	3.0	1.9	36.7
2.8	2.7	2.2	18.5	2.7	1.8	33.3	2.8	1.8	35.7
2.9	2.6	2.1	19.2	2.6	1.7	34.6	2.7	1.7	37.0
3.0	2.5	2.0	20.0	2.5	1.6	36.0	2.5	1.6	36.0

Fonte: adaptado de Machado e Costa (2014)

7.1.2 Gráfico de $\bar{X}$ com regra especial de decisão: regra *side-sensitive*

Quando a regra synthetic está em uso, o gráfico de controle sinaliza quando os dois pontos ocorrem na região de ação superior ou inferior, e sob a condição de que o número de amostras entre os dois pontos que caíram na região de ação, não seja superior a um valor inteiro L .

A matriz de transição apresentada em (29) é utilizada para obter o NMA_{ss} do gráfico de $\bar{X}$ quando se adota a regra *side-sensitive*.

	100..0	010..0	...	0..010	0..001	00..00	0..001	0..010	0..100	...	100..0	Sinal
100..0	0	0	...	0	0	A	B^+	0	0	...	0	B^-
010..0	A	0	...	0	0	0	B^+	0	0	...	0	B^-
001..0	0	A	...	0	0	0	B^+	0	0	...		B^-
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
0..001	0	0	...	A	0	0	B^+	0	0	...	0	B^-
00..00	0	0	...	0	B^-	A	B^+	0	0	...	0	0
0..001	0	0	...	0	B^-	0	0	A	0	...	0	B^+
0..010	0	0	...	0	B^-	0	0	0	A	...	0	B^+
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
010..0	0	0	...	0	B^-	0	0	0	0	...	A	B^+
100..0	0	0	...	0	B^-	A	0	0	0	...	0	B^+
Sinal	0	0	...	0	0	0	0	0	0	...	0	1

(29)

Os estados transientes descrevem a posição dos últimos m pontos amostrais; “1” significa que o ponto amostral caiu abaixo do limite inferior de controle, “0” significa que o ponto amostral caiu na região central, e “1” significa que o ponto amostral caiu acima do limite superior de controle. Por exemplo, o estado transiente (010..0) é alcançado quando o segundo dos últimos m pontos amostrais caem abaixo do limite inferior de controle e todos os outros pontos amostrais caem na região central. Se o estado atual é (00...01), (0...010)...(001...0), (010...0), ou (100...0) e o próximo ponto amostral cai abaixo do limite inferior de controle, a Cadeia de Markov muda para o estado 00...01. Similarmente, se o estado atual é (00...01), (0...010)...(001...0), (010...0), ou (100...0) e o próximo ponto amostral cai acima do limite superior de controle, a cadeia de Markov muda para o estado 00...01. Os eventos “1”, “0”, e “1” ocorrem com probabilidades B^- , A , e B^+ , respectivamente. Então, $NMA_{ss} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}\mathbf{1}$, onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade $(2L+1)$ por $(2L+1)$, $\mathbf{R}$ é a matriz de transição dada em (29) sem a última linha e sem a última coluna e $\mathbf{1}$ é um vetor unitário $(2L+1)$. O vetor de probabilidades iniciais $\mathbf{S}$ é dado por $D^{-1}\mathbf{S}'_C$, onde $\mathbf{S}'_C = (C^{L-1}, C^{L-2}, ..., C^0, 2C^L(1-A)^{-1}, C^0, ..., C^{L-2}, C^{L-1})$, $D=2+2C+2C^2+...+2C^{L-1}+2C^L(1-A)^{-1}$, e $C=2A/(1+A)$, com $A = \Pr[|Z| < k | Z \sim N(0;1)]$.

O vetor $\mathbf{S}$ é obtido através da resolução do sistema $\mathbf{S}'\mathbf{R}_{aj} = \mathbf{S}$, sujeito a $\mathbf{S}'\mathbf{1} = 1$. A matriz $\mathbf{R}_{aj}$ é uma versão ajustada de $\mathbf{R}$, onde as células que não contém zero são divididas por $(1-B)$, onde $B = B^+ = B^- = \Pr[Z > k | Z \sim N(0;1)]$; as células que não contém zero na linha “00..00” não sofrem alterações. A matriz $\mathbf{R}_{aj}$ é dada por:

$$\frac{1}{1-B} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & A & B & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & \dots & 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A & 0 & 0 & B & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & B-B^2 & A(1-B) & B-B^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & B & 0 & 0 & A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & B & 0 & 0 & 0 & A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & B & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & A \\ 0 & 0 & \dots & 0 & B & A & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

A Tabela 42 mostra o valores de $NMAss$ dos gráficos de $\bar{X}$ quando se adotam as regras especiais de decisão para $L=1, 5$, e 10 e $d\sqrt{n}$ variando de 0 a 3.0 , sendo d a magnitude da perturbação no processo e n o tamanho da amostra. O gráfico de $\bar{X}$ quando se adota a regra side sensitive sinaliza, em média, 23% mais rápido do que o gráfico de $\bar{X}$ com regra synthetic.

Tabela 42. NMAss dos gráficos de controle com regras especiais de decisão

L	1			5			10		
K	1.944	1.794		2.263	2.130		2.386	2.258	
D	Synthetic	SS Synt	%	Synthetic	SS Synt	%	Synthetic	SS Synt	%
0	389.6	390		414.9	415.8		423.7	424.9	
0.1	373.0	359.8	3.5	393.0	376.7	4.1	400	383	4.3
0.2	329.0	290.3	11.8	336.9	291.7	13.4	339.7	293.4	13.6
0.3	271.2	216.7	20.1	266.9	208.4	21.9	266.1	207.7	21.9
0.4	212.7	156.7	26.3	200.7	145.3	27.6	198.0	144	27.3
0.5	161.7	112.8	30.2	146.7	101.7	30.7	143.7	100.7	29.9
0.6	120.9	81.8	32.3	106.2	72.3	31.9	103.5	71.8	30.6
0.7	90.0	60.2	33.1	77.0	52.5	31.8	75.1	52.4	30.2
0.8	67.1	45	32.9	56.4	39	30.9	55.2	39.1	29.2
0.9	50.5	34.2	32.3	42.0	29.5	29.8	41.3	29.9	27.6
1	38.4	26.4	31.3	31.8	22.9	28.0	31.5	23.4	25.7
1.1	29.6	20.8	29.7	24.5	18.1	26.1	24.5	18.6	24.1
1.2	23.2	16.6	28.4	19.3	14.5	24.9	19.5	15.1	22.6
1.3	18.4	13.5	26.6	15.4	11.9	22.7	15.8	12.5	20.9
1.4	14.8	11.1	25.0	12.6	9.9	21.4	13	10.5	19.2
1.5	12.1	9.3	23.1	10.4	8.4	19.2	10.8	9	16.7
1.6	10.1	7.9	21.8	8.8	7.2	18.2	9.2	7.7	16.3
1.7	8.5	6.8	20.0	7.5	6.3	16.0	7.9	6.8	13.9
1.8	7.2	5.9	18.1	6.5	5.5	15.4	6.9	6	13.0
1.9	6.3	5.2	17.5	5.7	4.9	14.0	6.1	5.3	13.1
2	5.5	4.6	16.4	5.1	4.4	13.7	5.4	4.8	11.1
2.1	4.9	4.2	14.3	4.5	4	11.1	4.9	4.4	10.2
2.2	4.3	3.8	11.6	4.1	3.7	9.8	4.4	4	9.1
2.3	3.9	3.5	10.3	3.8	3.4	10.5	4	3.7	7.5
2.4	3.6	3.2	11.1	3.5	3.2	8.6	3.7	3.4	8.1
2.5	3.3	3	9.1	3.2	3	6.3	3.4	3.2	5.9
2.6	3.1	2.8	9.7	3.0	2.8	6.7	3.2	3	6.3
2.7	2.9	2.7	6.9	2.9	2.7	6.9	3.0	2.8	6.7
2.8	2.7	2.6	3.7	2.7	2.6	3.7	2.8	2.7	3.6
2.9	2.6	2.4	7.7	2.6	2.5	3.8	2.7	2.6	3.7
3.0	2.5	2.4	4.0	2.5	2.4	4.0	2.5	2.5	0.0

Fonte: adaptado de Machado e Costa (2014)

7.1.3 Gráfico de controle syn- $\bar{X}$ *side-sensitive*

Wu *et al.* (2010) propuseram um esquema que combina o gráfico baseado na regra synthetic e o gráfico de $\bar{X}$, denominado gráfico Syn- $\bar{X}$. O gráfico Syn- $\bar{X}$ tem região de advertência e região de ação. O gráfico sinaliza quando um ponto amostral cai na região de ação e/ou $NA < L$, onde NA é o número de amostras conformes entre duas amostras consecutivas não-conformes. A amostra é considerada não-conforme quando o seu valor amostral gerar um ponto na região de advertência.

Machado e Costa (2014a) se dedicaram à obtenção, por meio de cadeias de Markov, das expressões analíticas necessárias para obter as propriedades do gráfico Syn- $\bar{X}$ com base na regra especial de decisão *side-sensitive* (gráfico SS Syn- $\bar{X}$), lembrando que um gráfico de controle *side-sensitive* não sinaliza quando os pontos fora dos limites de controle estão em lados opostos da linha média.

Os limites de controle são dados por $LSC = \mu_0 + k\sigma_{\bar{X}}$ e $LIC = \mu_0 - k\sigma_{\bar{X}}$, onde μ_0 é a média em controle, k é o fator de abertura dos limites de controle e $\sigma_{\bar{X}}$ é o desvio-padrão das médias amostrais.

Durante o período em controle, a média do processo permanece igual a $\mu = \mu_0$. Depois da ocorrência da causa especial, a média μ_0 se altera para $\mu = \mu_0 \pm d\sigma_{\bar{X}}$, onde d é a magnitude da perturbação no processo. Assume-se que o desvio-padrão do processo não se altera.

A matriz de transição para obter os valores de $NMAss$ do gráfico SS Syn- $\bar{X}$ é dada por:

	100..0	010..0	...	0..010	0..001	00..00	0..001	0..010	0..100	...	100..0	Signal
100..0	0	0	...	0	0	A	B^+	0	0	...	0	$1 - A - B^+$
010..0	A	0	...	0	0	0	B^+	0	0	...	0	$1 - A - B^+$
001..0	0	A	...	0	0	0	B^+	0	0	...	0	$1 - A - B^+$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
0..001	0	0	...	A	0	0	B^+	0	0	...	0	$1 - A - B^+$
00..00	0	0	...	0	B^-	A	B^+	0	0	...	0	$1 - A - B^- - B^+$
0..001	0	0	...	0	B^-	0	0	A	0	...	0	$1 - A - B^-$
0..010	0	0	...	0	B^-	0	0	0	A	...	0	$1 - A - B^-$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
010..0	0	0	...	0	B^-	0	0	0	0	...	A	$1 - A - B^-$
100..0	0	0	...	0	B^-	A	0	0	0	...	0	$1 - A - B^-$
Signal	0	0	...	0	0	0	0	0	0	...	0	1

(7.4)

Os estados descrevem a posição dos últimos L pontos amostrais; “1” significa que o ponto amostral caiu na região inferior de advertência, “0” significa que o ponto caiu na região central e “-1” significa que a média amostral caiu na região superior de advertência, ver Figura 3. Os eventos “1”, “0”, e “-1” ocorrem com probabilidades B^- , A , e B^+ , respectivamente.

O NMA_{ss} é dado por $S' NMA$, onde S é o vetor de probabilidades iniciais e NMA é o vetor de NMAs levando em consideração cada estado não absorvente como o estado inicial. Então, $NMA_{ss} = (I - R)^{-1} \mathbf{1}$, onde I é a matriz identidade $(L+1)$ por $(L+1)$, R é a matriz de transição dada em (25) sem a última linha e coluna e $\mathbf{1}$ é um vetor unitário $(L+1)$. O vetor $S' = (1/C, B/C, \dots, B/C)$, com $C=1+LB$, é obtido através da resolução do sistema de equações lineares $S' R_{adj} = S$, sujeito a $S' \mathbf{1} = 1$. A matriz R_{adj} é uma versão ajustada de R , onde A e B na primeira linha são mantidos e os A s restantes são substituídos por 1 s. A matriz R_{adj} é dada por:

O NMA_{ss} é dado por $S' NMA$, onde S é o vetor de probabilidades iniciais e NMA é o vetor de NMAs levando em consideração cada estado não absorvente como o estado inicial. Então, $NMA_{ss} = (I - R)^{-1} \mathbf{1}$, onde I é a matriz identidade $(2L+1)$ by $(2L+1)$, R é a matriz de transição dada em (37) sem a última linha e a última coluna e $\mathbf{1}$ é um vetor unitário $(2L+1)$. O vetor S é dado por $D^{-1} S'_C$ onde $S'_C = (C^{L-1}, C^{L-2}, \dots, C^0, 2C^L(1-A)^{-1}, C^0, \dots, C^{L-2}, C^{L-1})$, $D=2+2C+2C^2+\dots+2C^{L-1}+2C^L(1-A)^{-1}$, e $C=2A/(1+A)$, com $A = \Pr[|Z| < w | Z \sim N(0;1)]$. É obtido através da resolução do sistema de equações lineares $S' R_{adj} = S$, sujeito a $S' \mathbf{1} = 1$. A matriz R_{adj} é uma versão ajustada de R , onde todas as células que não são iguais a zero são divididas por $(A+B)$, com $B = B^+ = B^- = \Pr[w < Z < k | Z \sim N(0;1)]$, exceto as células da linha “00..00” que são divididas por $(A+2B)$. A matriz R_{adj} é dada por:

$$\frac{1}{A+B} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & A & B & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & \dots & 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A & 0 & 0 & B & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & B/E & A/E & B/E & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & B & 0 & 0 & A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & B & 0 & 0 & 0 & A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & B & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & A \\ 0 & 0 & \dots & 0 & B & A & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

onde $E = 1 + B/(A+B)$.

Quando o gráfico Syn- $\bar{X}$ não é *side sensitive* a matriz de transição é mais simples:

	00..00	0..001	0..010	...	010..0	100..0	Signal
00..00	A	B	0	0	...	0	$1-A-B$
0..001	0	0	A	0	...	0	$1-A$
0..010	0	0	0	A	...	0	$1-A$
...	...	...	...	...	...	...	...
010..0	0	0	0	0	...	A	$1-A$
100..0	A	0	0	0	...	0	$1-A$
Signal	0	0	0	0	...	0	1

(7.6)

As Tabelas de 43 a 45 apresetam os valores de NMA_{ss} para os gráficos Syn- $\bar{X}$ e SS Syn- $\bar{X}$, para $NMA_0=370.4$, $L=1, 5$, e 10 e $d\sqrt{n}$ variando de 0 to 3.0 . Os coeficientes k são iguais a 3.5 (Tabela 43), 3.7 (Tabela 44) e 4.0 (Tabela 45). O gráfico SS Syn- $\bar{X}$ tem melhor desempenho do que o gráfico Syn- $\bar{X}$ chart.

Essas Tabelas apresentam também os valores de P_v , que correspondem a porcentagem de redução nos valores de NMA_{ss} do gráfico de Syn- $\bar{X}$ quando ele é *side-sensitive*. Em alguns casos, o gráfico SS Syn- $\bar{X}$ é 30% mais rápido do que o gráfico Syn- $\bar{X}$ (valores de P_v em negrito na Tabela 44, quando $L=1$ e $0.5 < (d\sqrt{n}) < 0.9$ e na Tabela 42, quando $L=1$ e $0.5 < (d\sqrt{n}) < 1.1$ e quando $L=5$ e $0.5 < (d\sqrt{n}) < 0.9$).

Tabela 43. NMAss dos gráficos Synthetic- $\bar{X}$ e SS Synthetic- $\bar{X}$ ($k=3.5$)

L	1		5		10	
w	1.9703	1.8227	2.2708	2.1400	2.3859	2.2614
δ	Syn- $\bar{X}$	SS Syn- $\bar{X}$	Syn- $\bar{X}$	SS Syn- $\bar{X}$	Syn- $\bar{X}$	SS Syn- $\bar{X}$
0	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4
0.1	353.2	342.3	350.5	337.8	349.6	336.6
0.2	308.6	277.4	299.9	265.4	297.4	262.5
0.3	251.4	207.9	237.6	192.4	233.8	189.2
0.4	195.2	150.8	179.2	135.8	175.2	133.2
0.5	147.4	108.7	131.7	95.9	128.2	94.2
0.6	109.7	78.9	95.9	68.7	93.3	67.7
0.7	81.5	58.0	70.1	50.1	68.3	49.7
0.8	60.7	43.3	51.7	37.3	50.6	37.3
0.9	45.7	32.8	38.7	28.4	38.1	28.6
1	34.7	25.3	29.5	22.0	29.2	22.4
1.1	26.8	19.8	22.8	17.4	22.9	17.8
1.2	20.9	15.8	18.0	14.0	18.2	14.5
1.3	16.6	12.8	14.4	11.4	14.7	12.0
1.4	13.4	10.5	11.8	9.5	12.1	10.0
1.5	10.9	8.7	9.7	8.0	10.1	8.5
1.6	9.0	7.3	8.2	6.9	8.6	7.3
1.7	7.6	6.3	7.0	6.0	7.3	6.4
1.8	6.5	5.4	6.0	5.2	6.4	5.6
1.9	5.6	4.7	5.3	4.6	5.6	5.0
2	4.8	4.2	4.6	4.1	4.9	4.4
2.1	4.3	3.8	4.1	3.7	4.4	4.0
2.2	3.8	3.4	3.7	3.4	3.9	3.6
2.3	3.4	3.1	3.4	3.1	3.6	3.3
2.4	3.1	2.8	3.1	2.9	3.2	3.0
2.5	2.8	2.6	2.8	2.7	3.0	2.8
2.6	2.6	2.4	2.6	2.5	2.7	2.6
2.7	2.4	2.3	2.4	2.3	2.5	2.4
2.8	2.2	2.1	2.3	2.2	2.3	2.3
2.9	2.1	2.0	2.1	2.1	2.2	2.1
3.0	2.0	1.9	2.0	2.0	2.1	2.0
<i>EQL</i>	240.7	194.3	202.1	182.0	223.8	187.5

Fonte: adaptado de Machado e Costa (2014a)

Tabela 44 - NMAss dos gráficos Synthetic- $\bar{X}$ e SS Synthetic- $\bar{X}$ ($k=3.7$)

L	1		5		10	
w	1.9494	1.8000	2.2534	2.1205	2.3701	2.2433
δ	Syn- $\bar{X}$	SS Syn- $\bar{X}$	Syn- $\bar{X}$	SS Syn- $\bar{X}$	Syn- $\bar{X}$	SS Syn- $\bar{X}$
0	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4
0.1	353.9	342.0	350.8	336.8	349.8	335.5
0.2	310.5	276.4	300.6	263.1	297.6	260.0
0.3	254.3	206.7	238.5	189.7	234.0	186.2
0.4	198.4	149.7	179.8	133.3	175.1	130.5
0.5	150.2	107.8	132.0	94.0	128.0	92.1
0.6	112.0	78.3	96.0	67.2	92.9	66.1
0.7	83.2	57.6	70.0	49.1	67.9	48.5
0.8	62.0	43.0	51.6	36.5	50.3	36.5
0.9	46.6	32.7	38.6	27.8	37.9	28.0
1	35.5	25.2	29.4	21.6	29.1	21.9
1.1	27.3	19.8	22.8	17.1	22.7	17.5
1.2	21.4	15.8	17.9	13.8	18.1	14.3
1.3	17.0	12.8	14.4	11.3	14.7	11.8
1.4	13.7	10.5	11.8	9.4	12.1	9.9
1.5	11.2	8.8	9.8	8.0	10.1	8.5
1.6	9.3	7.4	8.2	6.8	8.6	7.3
1.7	7.8	6.3	7.0	6.0	7.4	6.4
1.8	6.6	5.5	6.1	5.2	6.4	5.6
1.9	5.7	4.8	5.3	4.7	5.6	5.0
2	5.0	4.3	4.7	4.2	5.0	4.5
2.1	4.4	3.8	4.2	3.8	4.5	4.1
2.2	3.9	3.5	3.8	3.5	4.0	3.7
2.3	3.5	3.2	3.4	3.2	3.6	3.4
2.4	3.2	2.9	3.2	2.9	3.3	3.1
2.5	2.9	2.7	2.9	2.7	3.1	2.9
2.6	2.7	2.5	2.7	2.6	2.8	2.7
2.7	2.5	2.4	2.5	2.4	2.6	2.5
2.8	2.3	2.2	2.4	2.3	2.4	2.3
2.9	2.2	2.1	2.2	2.1	2.3	2.2
3.0	2.1	2.0	2.1	2.0	2.1	2.1
<i>EQL</i>	246.8	196.4	222.4	182.0	225.3	187.8

Fonte: adaptado de Machado e Costa (2014a)

Tabela 45 - NMAss dos gráficos Synthetic- $\bar{X}$ e SS Synthetic- $\bar{X}$ ($k=4.0$)

L	1		5		10	
w	1.9376	1.7872	2.2435	2.1095	2.3612	2.2331
δ	Syn- $\bar{X}$	SS Syn- $\bar{X}$	Syn- $\bar{X}$	SS Syn- $\bar{X}$	Syn- $\bar{X}$	SS Syn- $\bar{X}$
0	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4
0.1	354.4	342.0	351.0	336.4	350.0	335
0.2	312.2	276.4	301.4	262.1	298.2	258.8
0.3	257.0	206.6	239.5	188.5	234.7	184.8
0.4	201.3	149.7	180.9	132.3	175.7	129.3
0.5	152.9	107.9	132.8	93.2	128.3	91.1
0.6	114.4	78.3	96.6	66.6	93.2	65.4
0.7	85.1	57.7	70.4	48.6	68.0	48.1
0.8	63.5	43.1	51.9	36.3	50.4	36.1
0.9	47.8	32.8	38.8	27.6	37.9	27.8
1	36.4	25.4	29.5	21.5	29.1	21.8
1.1	28.1	20.0	22.9	17	22.8	17.4
1.2	22.0	15.9	18.0	13.7	18.1	14.2
1.3	17.4	12.9	14.5	11.3	14.7	11.8
1.4	14.1	10.7	11.8	9.4	12.2	9.9
1.5	11.5	8.9	9.8	8	10.2	8.5
1.6	9.5	7.5	8.3	6.9	8.7	7.3
1.7	8.0	6.5	7.1	6	7.5	6.4
1.8	6.8	5.6	6.2	5.3	6.5	5.7
1.9	5.9	4.9	5.4	4.7	5.7	5.1
2	5.2	4.4	4.8	4.2	5.1	4.6
2.1	4.6	3.9	4.3	3.9	4.6	4.1
2.2	4.1	3.6	3.9	3.5	4.1	3.8
2.3	3.7	3.3	3.5	3.3	3.7	3.5
2.4	3.3	3.0	3.3	3	3.4	3.2
2.5	3.1	2.8	3.0	2.8	3.2	3
2.6	2.8	2.6	2.8	2.6	2.9	2.8
2.7	2.6	2.5	2.6	2.5	2.7	2.6
2.8	2.5	2.3	2.5	2.4	2.5	2.5
2.9	2.3	2.2	2.3	2.2	2.4	2.3
3.0	2.2	2.1	2.2	2.1	2.3	2.2
<i>EQL</i>	254.4	199.8	225.8	183.4	228.7	189.9

Fonte: adaptado de Machado e Costa (2014a)

A Tabela 46 compara os valores de NMA_{ss} do gráfico de controle com regra especial de decisão, ou seja, o gráfico proposto por Wu e Spedding (2000), com a sua versão *side-sensitive* (gráfico SS synthetic). Quando k tende ao infinito o gráfico SS Syn- $\bar{X}$ se reduz ao gráfico SS synthetic. A Tabela 46 foi construída para $NMA_0=370.4$, $L=1, 5$, e 10 e as perturbações na média do processo variando entre 0 e 3.0 . Em média, quando o gráfico com regra especial de decisão é *side-sensitive*, ele sinaliza 17% mais rápido. Maiores detalhes sobre o gráfico com regra especial de decisão pode ser encontrado em Machado e Costa (2014).

A Tabela 47 compara a eficiência em detectar perturbações no processo de três gráficos de controle: o gráfico de $\bar{X}$, o gráfico SS synthetic e o gráfico SS Syn- $\bar{X}$. O gráfico SS synthetic tem melhor desempenho do que o gráfico de $\bar{X}$, exceto quando $(d\sqrt{n}) > 2.6$. O gráfico SS Syn- $\bar{X}$ é sempre mais eficiente do que o gráfico de $\bar{X}$, exceto quando $(d\sqrt{n}) > 2.7$ e $k=4.0$. O gráfico SS Syn- $\bar{X}$ é menos eficiente do que o gráfico SS synthetic para valores pequenos de $d\sqrt{n}$. Ele se torna mais eficiente do que o gráfico SS synthetic quando $(d\sqrt{n}) > a_1$. O valor de a_1 depende do fator de abertura dos limites de controle k : $(a_1; k) = (1.0; 4.0), (1.3; 3.7), (1.5; 3.5)$ e $(1.8; 3.3)$. Quando k é grande ($k=4.0$), o gráfico SS synthetic e o gráfico SS Syn- $\bar{X}$ são similares quanto ao desempenho.

Tabela 46 - NMAss dos gráficos tradicionais e side sensitive ($k=\infty$)

L	1		5		10	
w	1.9328	1.7820	2.1998	2.1051	2.35756	2.2289
δ	standard	SS	standard	SS	standard	SS
0	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4
0.1	354.7	342.0	351.7	336.4	350.2	334.9
0.2	313.3	276.6	303.4	261.9	298.7	258.4
0.3	258.7	207.0	242.6	188.3	235.4	184.5
0.4	203.4	150.1	184.2	132.2	176.4	129.0
0.5	155.0	108.3	135.9	93.1	128.9	90.9
0.6	116.2	78.7	99.1	66.6	93.6	65.3
0.7	86.6	58.0	72.4	48.6	68.4	48.0
0.8	64.8	43.5	53.3	36.3	50.6	36.1
0.9	48.8	33.1	39.9	27.6	38.1	27.8
1	37.2	25.7	30.3	21.5	29.3	21.8
1.1	28.8	20.2	23.4	17.1	22.9	17.5
1.2	22.6	16.2	18.4	13.8	18.3	14.3
1.3	17.9	13.1	14.8	11.4	14.9	11.9
1.4	14.5	10.9	12.1	9.5	12.3	10.0
1.5	11.9	9.1	10.0	8.1	10.3	8.6
1.6	9.9	7.7	8.4	7.0	8.8	7.4
1.7	8.3	6.6	7.2	6.1	7.6	6.5
1.8	7.1	5.8	6.2	5.4	6.6	5.8
1.9	6.2	5.1	5.5	4.8	5.9	5.2
2	5.4	4.6	4.9	4.3	5.2	4.7
2.1	4.8	4.1	4.4	4.0	4.7	4.3
2.2	4.3	3.7	4.0	3.6	4.3	3.9
2.3	3.9	3.4	3.6	3.4	3.9	3.6
2.4	3.6	3.2	3.4	3.1	3.6	3.3
2.5	3.3	3.0	3.1	3.0	3.3	3.1
2.6	3.1	2.8	2.9	2.8	3.1	2.9
2.7	2.9	2.7	2.8	2.7	2.9	2.8
2.8	2.7	2.5	2.6	2.5	2.8	2.7
2.9	2.6	2.4	2.5	2.4	2.6	2.5
3.0	2.5	2.4	2.5	2.4	2.5	2.4
EQL	264.6	206.2	232.5	188.0	234.4	194.0

Fonte: adaptado de Machado e Costa (2014a)

Tabela 47 - NMAs dos gráficos de $\bar{X}$ e NMAss dos gráficos side-sensitive synthetic e Synthetic- $\bar{X}$.

	<i>NMA</i>	<i>SSNMA</i>				
<i>L</i>	-	5	5	5	5	5
<i>K</i>	3	-	4	3.7	3.5	3.3
<i>W</i>	-	2.1051	2.1095	2.1205	2.1400	2.1857
δ	$\bar{X}$	synthetic	Synthetic- $\bar{X}$			
0	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4
0.1	352.9	336.4	336.4	336.8	337.8	340.0
0.2	308.4	261.9	262.1	263.1	265.4	271.1
0.3	253.1	188.3	188.5	189.7	192.4	199.5
0.4	200.1	132.2	132.3	133.3	135.8	142.3
0.5	155.2	93.1	93.2	94.0	95.9	101.3
0.6	119.7	66.6	66.6	67.2	68.7	72.8
0.7	92.3	48.6	48.6	49.1	50.1	53.2
0.8	71.6	36.3	36.3	36.5	37.3	39.6
0.9	55.8	27.6	27.6	27.8	28.4	30.0
1	43.9	21.5	21.5	21.6	22.0	23.2
1.1	34.8	17.1	17.0	17.1	17.4	18.3
1.2	27.8	13.8	13.7	13.8	14.0	14.6
1.3	22.4	11.4	11.3	11.3	11.4	11.9
1.4	18.2	9.5	9.4	9.4	9.5	9.9
1.5	15.0	8.1	8.0	8.0	8.0	8.3
1.6	12.4	7	6.9	6.8	6.9	7.1
1.7	10.3	6.1	6.0	6.0	6.0	6.1
1.8	8.7	5.4	5.3	5.2	5.2	5.3
1.9	7.4	4.8	4.7	4.7	4.6	4.7
2	6.3	4.3	4.2	4.2	4.1	4.2
2.1	5.4	4	3.9	3.8	3.7	3.7
2.2	4.7	3.6	3.5	3.5	3.4	3.4
2.3	4.1	3.4	3.3	3.2	3.1	3.1
2.4	3.6	3.1	3.0	2.9	2.9	2.8
2.5	3.2	3	2.8	2.7	2.7	2.6
2.6	2.9	2.8	2.6	2.6	2.5	2.4
2.7	2.6	2.7	2.5	2.4	2.3	2.3
2.8	2.4	2.5	2.4	2.3	2.2	2.1
2.9	2.2	2.4	2.2	2.1	2.1	2.0
3	2.0	2.4	2.1	2.0	2.0	1.9
<i>EQL</i>	288.9	188.8	183.4	182.0	182.2	186.1

Fonte: adaptado de Machado e Costa (2014a)

Costa e Machado (2015) e Costa e Machado (2016) estenderam os estudos adotando a amostragem dupla e o tamanho de amostra variável.

Em geral, o desempenho do gráfico de $\bar{X}$ com AD não melhora quando ele é combinado com a regra synthetic, exceto quando os gráficos combinados são projetados para uma elevada proteção contra alarmes falsos e tamanhos pequenos de amostra. Com a regra side-sensitive, o desempenho

geral do gráfico de $\bar{X}$ com AD melhora, mas não o suficiente para superar o gráfico de $\bar{X}$ com AD. A regra side sensitive melhora o desempenho do gráfico de $\bar{X}$ com amostra de tamanho variável.

7.2 GRÁFICO DE CONTROLE BIVARIADO COM REGRA ESPECIAL DE DECISÃO

Simões et al (2016) estenderam os estudos para o caso bivariado. As conclusões são similares às do caso univariado.

8. CONCLUSÕES

Os artigos da docente do período pós doutorado trataram de novos gráficos de controle para o monitoramento de processos univariados e multivariados. Com relação ao caso univariado, tratou-se dos gráficos de controle para processos autocorrelacionados e com regras especiais de decisão. Com relação ao caso multivariado, tratou-se dos gráficos de controle baseado em amplitudes amostrais, dos gráficos de controle para o monitoramento conjunto do vetor de médias e da matriz de covariâncias e dos gráficos de controle para o monitoramento de processos multivariados autocorrelacionados, com e sem regras especiais de decisão.

As principais contribuições desses trabalhos foram:

- a) a obtenção das propriedades do gráfico de RMAX. O gráfico de RMAX é sempre mais eficiente do que o gráfico de $|\mathbf{S}|$, exceto quando a causa especial aumenta a variância de todas as p características de qualidade.
- b) a proposição de nova estatística para o monitoramento simultâneo do vetor de médias e da matriz de covariâncias de processos multivariados, a estatística MRMAX. Quando o gráfico de MRMAX é comparado com os gráficos conjuntos de T^2 e $|\mathbf{S}|$, conclui-se que: o gráfico de MRMAX é, em geral, mais rápido em sinalizar desajustes do processo do que os gráficos conjuntos de T^2 e $|\mathbf{S}|$, exceto nos casos em que a causa especial afeta a média de apenas uma das variáveis e não afeta a matriz de covariâncias. Vale lembrar também que o gráfico de MRMAX é muito mais simples de ser utilizado se comparado com os gráficos de T^2 e $|\mathbf{S}|$, pois requer apenas o cálculo de estatísticas conhecidas do usuário, isto é, médias e amplitudes amostrais. O desempenho deste gráfico é viável quando se utiliza a regra especial de decisão de dois pontos na região de ação.
- c) a obtenção das propriedades do gráfico de MRMAX quando as regras suplementares de decisão estão em uso. Os desempenhos dos gráficos de MRMAX com regras suplementares foram comparados com os dos gráficos de MRMAX com regra especial e regra básica de decisão. Dos resultados obtidos, observou-se que o gráfico de MRMAX com a adição de regras, especial ou suplementar, tem melhor desempenho do que o gráfico de MRMAX baseado na regra básica de decisão. Se é conhecida a informação de que a causa especial altera apenas a matriz de covariâncias, então os gráficos de MRMAX com regras suplementares são a melhor opção. Vale ressaltar, porém, que é mais simples de se lidar com a regra especial de dois pontos na região de ação do gráfico do que com as regras suplementares.

- d) a obtenção das propriedades dos gráficos de controle de $\bar{X}$ autocorrelacionados em que a média do processo oscila de acordo com um modelo AR (1). Mostrou-se que as propriedades de tais gráficos podem ser obtidas por meio de cadeias de Markov.
- e) o estudo do efeito da autocorrelação no planejamento de um gráfico de controle de $\bar{X}$ e de EWMA em que a média do processo oscila de acordo com um modelo AR (1). Quando a média do processo oscila, e esta oscilação é grande, o ganho em poder de detecção não compensa a adoção de amostras, isto é, o melhor desempenho é alcançado com observações individuais. O mesmo não é observado com o esquema EWMA;
- f) a realização do planejamento econômico-estatístico dos gráficos de controle de $\bar{X}$ para o monitoramento de processos autocorrelacionados, sob a hipótese de que a média do processo oscila. Os principais resultados encontrados mostraram que a autocorrelação reduz significativamente o poder de detecção do gráfico, o tamanho da amostra, o intervalo de amostragem e o inverso é observado para o fator de abertura dos limites de controle e o custo de monitoramento. A vantagem de se utilizar o planejamento econômico-estatístico para o projeto de gráficos de controle é obter uma técnica adequada ao processo em que se pretende monitorar, levando em consideração os custos envolvidos neste monitoramento.
- g) a obtenção das propriedades do gráfico de T^2 para o monitoramento de processos correlacionados e autocorrelacionados. Observou-se que a autocorrelação tem um grande impacto no desempenho do gráfico e que muitas vezes é melhor adotar amostras de tamanho unitário. Os resultados se restringem ao caso bivariado.
- h) a investigação do desempenho de dois gráficos simultâneos de $\bar{X}$ (gráficos SU $\bar{X}$) para monitorar processos autocorrelacionados bivariados e mostrou que para níveis altos de correlação e autocorrelação os gráficos propostos tem melhor desempenho do que o gráfico de T^2 .
- i) a verificação de que ao se adotar a estratégia de amostragem *s-skip* ao invés da tradicional de subgrupo, o desempenho do gráfico de controle destinado ao monitoramento de processos autocorrelacionados melhora.
- j) a observação de que as estratégias de amostragem *s-skip* e MS reduzem o efeito da autocorrelação no desempenho do gráfico de T^2 utilizado para monitorar processos bivariados.
- k) a constatação de que o trabalho de Davis e Woodall (2002) apresenta falhas nos cálculos utilizados para obtenção das propriedades dos gráficos de controle com regra especial de decisão.
- l) a constatação que ao se utilizar a regra de dois pontos na região superior de ação ou de dois pontos na região inferior de ação, e sob a condição de que o número de amostras entre os dois pontos que

caíram na região de ação, não seja maior do que um valor inteiro L pré-especificado, o gráfico de $\bar{X}$ sinaliza causas especiais em média 23% mais rápido do que o gráfico com a regra de dois pontos em qualquer lado da região de ação.

m) a observação de que o gráfico Syn- $\bar{X}$, proposto em Wu et al. (2010), tem melhor desempenho quando a regra *side-sensitive* é adotada, lembrando que um gráfico de controle *side-sensitive* não sinaliza quando os pontos fora dos limites de controle estão em lados opostos da linha média.

n) a constatação de que, em termos de eficiência em detectar um desajuste no processo, o gráfico synthetic com amostragem dupla não é melhor do que o gráfico de $\bar{X}$ com amostragem dupla. A eficiência do gráfico synthetic com amostragem dupla melhora quando se adota a regra *side-sensitive*, mas não o suficiente para superar o gráfico de $\bar{X}$ com amostragem dupla.

o) a verificação de que o gráfico de $\bar{X}$ com amostra de tamanho variável tem melhor desempenho quando se adota a regra *side-sensitive*, especialmente quando a taxa de alarmes falsos e a taxa de amostragem não podem ser muito altos.

j) a obtenção das propriedades do gráfico de T^2 bivariado com regras especiais de decisão para o monitoramento de processos autocorrelacionados.

8.1 TRABALHOS FUTUROS

Uma possível extensão dessa pesquisa é a ampliação dos estudos para o caso em que os parâmetros do processo são estimados, portanto considerados desconhecidos.

Uma outra vertente ainda não explorada é o estudo do desempenho dos gráficos de controle propostos para o monitoramento da matriz de covariâncias quando as observações são autocorrelacionadas.

Seria interessante aplicar os resultados obtidos nestes trabalhos no monitoramento de processos reais.

REFERÊNCIAS DA AUTORA

- CLARO, F. A. E.; COSTA, A.F.B.; MACHADO, M. A. G. Gráficos de controle de EWMA e $\bar{X}$ para monitoramento de processos autocorrelacionados. **Produção**, v. 17, p. 536-546, 2007.
- COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. Synthetic control chart with two-stage sampling for monitoring bivariate processes. **Pesquisa Operacional**, v. 27, p. 117-130, 2007.
- CLARO, F. A. E.; COSTA, A.F.B.; MACHADO, M. A. G. Double sampling $\bar{X}$ control chart for a first order autoregressive process. **Pesquisa Operacional**, v. 28, p. 545-562, 2008.
- COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. Bivariate control charts with double sampling. **Journal of Applied Statistics**, v. 35, p. 809-822, 2008.
- COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. A new chart for monitoring the covariance matrix of bivariate processes. **Communications in Statistics – Simulation and Computation**, v. 37, p. 1453-1465, 2008.
- COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. A new chart based on the sample variances for monitoring the covariance matrix of multivariate processes. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 41, p. 770-779, 2009.
- COSTA, A.F.B.; MACHADO, M. A. G.; CLARO, F. A. E. Gráfico de controle MCMAX para o monitoramento simultâneo do vetor de médias e da matriz de covariâncias. **Gestão & Produção**, v. 17, p.1-8, 2010.
- COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. A control chart based on sample ranges for monitoring the covariance matrix of multivariate processes. **Journal of Applied Statistics**, v. 38, p. 233-245, 2011.
- COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. Monitoring the mean vector and the covariance matrix of multivariate processes with sample means and sample ranges, **Produção**, v. 21, p. 197-208, 2011a.
- COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. Variable parameter and double sampling charts in the presence of correlation: The Markov chain approach. **International Journal of Production Economics**, v. 130, p. 224-229, 2011b.
- COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. A single chart with supplementary runs rules for monitoring the mean vector and the covariance matrix of multivariate processes. **Computers & Industrial Engineering**, v. 66, p. 431-437, 2013.
- COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. The steady-state behavior of the synthetic and side-sensitive synthetic double sampling $\bar{X}$ charts. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 31, p. 297-303, 2015.
- COSTA, A. F. B., MACHADO, M. A. G., A side-sensitive synthetic chart combined with a VSS $\bar{X}$ bar chart. **Computer and Industrial Engineering**, v. 91, p. 205-214, 2016.

FRANCO, B.C.; COSTA, A.F.B.; MACHADO, M.A.G. Economic-statistical design of the chart used to control a wandering process mean using genetic algorithm. **Expert Systems with Applications**, v. 39, p. 12961-12967, 2012.

FRANCO, B. C.; CELANO, G.; CASTAGLIOLA, P.; COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. A new sampling strategy for the Shewhart control chart monitoring a process with wandering mean. **International Journal of Production Research**, v. 52, p. 1-18, 2015.

LEONI, R. C.; COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. O efeito da autocorrelação no planejamento das cartas de controle de Xbarra e EWMA. **Gestão & Produção**, v. 20, p. 98-110, 2013.

LEONI, R. C.; COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. The effect of the autocorrelation on the performance of the T2 chart. **European Journal of Operational Research**, v. 247, p. 115-165, 2015.

LEONI, R. C.; MACHADO, M. A. G., COSTA, A. F. B. Simultaneous Univariate $\bar{X}$ Charts to Control Bivariate Processes with Autocorrelated Data. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 31, p. 1641-1648, 2015a.

LEONI, R. C.; COSTA, A. F. B. ; FRANCO, B. C. ; MACHADO, M. A. G. The skipping strategy to reduce the effect of the autocorrelation on the T2 chart's performance. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 80, p. 1547-1559, 2015c.

LEONI, R. C.; MACHADO, M. A. G., COSTA, A. F. B. The T2 chart with mixed samples to control bivariate autocorrelated processes. **International Journal of Production Research**, v. 54, p. 3294-3310, 2015b.

MACHADO, M. A. G; COSTA, A. F. B. The use of principal components and simultaneous univariate charts to control multivariate processes. **Pesquisa Operacional**, v. 28, p. 173-196, 2008.

MACHADO, M. A. G; COSTA, A. F. B. The double sampling and the EWMA charts based on the sample variances. **International Journal of Production Economics**, v. 114, p. 134-148, 2008a.

MACHADO, M. A. G; COSTA, A. F. B. Monitoring the mean vector and the covariance matrix of bivariate processes. **Brazilian Journal of Operations and Production Management**, v. 5, p. 47-62, 2008b.

MACHADO, M. A. G.; De MAGALHÃES, M.S; COSTA, A. F. B. Gráfico de controle de VMAX para o monitoramento da matriz de covariâncias, **Revista Produção**, v. 18, p. 222-239, 2008.

MACHADO, M. A. G. **Gráficos de controle para o monitoramento de processos multivariados 2009**. 158f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2009.

MACHADO, M. A. G.; COSTA, A. F. B.; CLARO, F. A. E. Monitoring bivariate processes. **Pesquisa Operacional**, v. 29, p. 547-562, 2009.

MACHADO, M. A. G.; COSTA, A. F. B.; MARINS, F. A. S. Control charts for monitoring the mean vector and the covariance matrix of bivariate processes. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 45, p. 545-562, 2009a.

MACHADO, M. A. G.; COSTA, A. F. B.; RAHIM, M. A. The synthetic control chart based on two sample variances for monitoring the covariance matrix. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 25, p. 595-606, 2009b.

MACHADO, M. A. G.; COSTA, A. F. B. Some comments regarding the synthetic Xbar chart. **Communications in Statistics. Theory and Methods**, v. 43, p. 2897-2906, 2014.

MACHADO, M. A. G.; COSTA, A. F. B. A side-sensitive synthetic chart combined with an Xbar chart. **International Journal of Production Research**, v. 52, p. 3404-3416, 2014a.

SIMÕES, F. D.; LEONI, R. C.; COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. Synthetic charts to control bivariate processes with autocorrelated data. **Computers & Industrial Engineering**, v. 97, p. 15-25, 2016.

DEMAIS REFERÊNCIAS

ALT, F. B. **Multivariate control charts**. Encyclopedia of Statistical Sciences. Kotz, S., Johnson, N. L., Eds.; Wiley, 1985.

ANDERSON, T. W. An Introduction to Multivariate Statistical Analysis. Stanford: John Wiley. 2003.

ALWAN, L. C., RADSON, D. Time-series investigation of sub sample mean charts. **IIE Transactions**, v. 24, p. 66-80, 1992.

APARISI, F.; JABALOYES, J.; CARRIÓN, A. Statistical properties of the ISI multivariate control chart. **Communication in Statistics – Theory and Methods**, v. 28, p. 2671-2686, 1999.

COSTA, A.F.B. $\bar{X}$ control charts with variable sample sizes and sampling intervals. **Journal of Quality Technology**, v. 29, p. 197-204, 1997.

COSTA, A. F. B. Joint $\bar{X}$ and R charts with variable parameters. **IIE Transactions**, v. 30, p. 505-514, 1998.

COSTA, A.F.B.; EPPRECHT E.K.; CARPINETTI, L.C.R. **Controle Estatístico de Qualidade**. 2. ed. São Paulo: Editora Atlas, 2005. 334 p.

COSTA, A.F.B.; CASTAGLIOLA, F. C. Effect of measurement error and autocorrelation on the X chart. *Journal of Applied Statistics*, v.38, p.661-673, 2011.

DAVIS, R.B.; WOODALL, W.H. Evaluating and improving the synthetic control chart. **Journal of Quality Technology**, v. 34, p. 200-208, 2002.

DUNCAN, A. J. The economic design of X-charts used to maintain current control of a process. *Journal of the American Statistical Association*, v. 51, p. 228–242, 1956.

LIN, Y. C. The variable parameters control charts for monitoring autocorrelated processes. **Communications in Statistics- Simulation and Computation**, v. 38, p. 729-749, 2009.

LU, C. W.; REYNOLDS, M. R. Control charts for monitoring the mean and variance of autocorrelated processes. **Journal of Quality Technology**, v.31, p. 259-274, 1999.

MICROSOFT FORTRAN POWER STATION 4.0. Professional Edition with Microsoft IMSL Mathematical and Statistical Libraries. **Microsoft Corporation**, 1995.

REYNOLDS, M. R. et al. $\bar{X}$ charts with variable sampling interval. **Technometrics**, v. 30, p. 181-192, 1988.

REYNOLDS JR, M.R.; ARNOLD, J.C. Variable sampling interval $\bar{X}$ charts in the presence of correlation. **Journal of Quality Technology**, v. 28, p. 12-30, 1996.

SHEWHART, W. A. Economic control of quality of manufactured product. D. Van Nostrand Company, NY-EUA, 501 p., 1^a ed., 1931.

WU, Z.; SPEDDING, T.A. A synthetic control chart for detecting small shifts in the process mean. **Journal of Quality Technology**, v. 32, p. 32-38, 2000.