



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Ilha Solteira

FACULDADE DE ENGENHARIA

MICHAEL DOWGLAS DE GOIS SILVA

**CONTROLE HÍBRIDO H_∞ E AMR EM EDIFÍCIO DE ESTRUTURAS METÁLICAS
SUJEITO A VIBRAÇÕES EXCESSIVAS CAUSADAS PELA AÇÃO DINÂMICA DO
VENTO E DO TERREMOTO**

Ilha Solteira
2023



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Ilha Solteira

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

MICHAEL DOWGLAS DE GOIS SILVA

**CONTROLE HÍBRIDO \mathcal{H}_∞ E AMR EM EDIFÍCIO DE ESTRUTURAS METÁLICAS
SUJEITO A VIBRAÇÕES EXCESSIVAS CAUSADAS PELA AÇÃO DINÂMICA DO
VENTO E DO TERREMOTO**

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia
de Ilha Solteira – Unesp como parte dos
requisitos para obtenção do título de Doutor em
Engenharia Mecânica na área de Mecânica dos
Sólidos.

Prof. Dr. Fábio Roberto Chavarette
Orientador

Ilha Solteira
2023

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

S586c Silva, Michael Dowglas de Gois.
Controle híbrido H-infinito e AMR em edifício de estruturas metálicas sujeito a vibrações excessivas causadas pela ação dinâmica do vento e do terremoto / Michael Dowglas De Gois Silva. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2023
163 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Mecânica dos Sólidos, 2023

Orientador: Fábio Roberto Chavarette

Inclui bibliografia

1. Shear Building. 2. Terremoto. 3. Vento. 4. Controle H-Infinito. 5. AMR. 6. Controlador Híbrido.


Amanda Sertori dos Santos

Bibliotecária - CRB/8-9061
Seção Técnica de Referência, Atendimento ao
Usuário e Documentação
Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação


CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA TESE: CONTROLE HÍBRIDO H E AMR EM EDIFÍCIO DE ESTRUTURAS METÁLICAS SUJEITO A VIBRAÇÕES EXCESSIVAS CAUSADAS PELA AÇÃO DINÂMICA DO VENTO E DO TERREMOTO

AUTOR: MICHAEL DOWGLAS DE GOIS SILVA


ORIENTADOR: FABIO ROBERTO CHAVARETTE

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Mecânica, área: Mecânica dos Sólidos pela Comissão Examinadora:

Documento assinado digitalmente
 FABIO ROBERTO CHAVARETTE
Data: 15/06/2023 12:05:54-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


Prof. Dr. FABIO ROBERTO CHAVARETTE (Participação Virtual)

Departamento de Engenharia Física e Matemática / Instituto de Química - UNESP

Documento assinado digitalmente
 FLAVIO ANDRADE FARIA
Data: 16/06/2023 21:17:27-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


Prof. Dr. FLAVIO ANDRADE FARIA (Participação Virtual)

Departamento de Matemática / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Documento assinado digitalmente
 HENRIQUE ANTONIO MENDONÇA FARIA
Data: 16/06/2023 07:41:41-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dr. HENRIQUE ANTONIO MENDONÇA FARIA (Participação Virtual)

Programa de Pós-Graduação em Química / Instituto de Química - UNESP


Documento assinado digitalmente
 DOUGLAS DA COSTA FERREIRA
Data: 15/06/2023 15:49:33-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. DOUGLAS DA COSTA FERREIRA (Participação Virtual)

Coordenador da Pós-graduação Online Engenharia da Produção / Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

Prof. Dr. MARCEL WILLIAN REIS SALES (Participação Virtual)

Campus Trindade / Instituto Federal Goiano

Documento assinado digitalmente
 MARCEL WILLIAN REIS SALES
Data: 15/06/2023 13:30:36-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Ilha Solteira, 15 de junho de 2023

RESUMO

As cargas dinâmicas dos terremotos e dos ventos podem destruir vidas, causar colapso nas estruturas civis e interromper serviços básicos prestados à população. Neste cenário, os projetos estruturais devem ser desenvolvidos para diminuir os danos induzidos por essas ações. O objetivo deste trabalho é projetar um controlador híbrido baseado na otimização \mathcal{H}_∞ via realimentação de estados e no amortecedor magneto reológico (AMR), para mitigar as vibrações excessivas de um edifício em estruturas metálicas de três pavimentos, representado através do modelo *shear building*, submetido a ação dinâmica do vento, do sismo e a ação simultânea das duas. Na análise numérica são utilizados o computador e o software MATLAB, onde códigos implementados geram os resultados esperados baseados na modelação matemática. É feita uma análise qualitativa e quantitativa dos dados, com gráficos do histórico no tempo e plano de fase para os estados do sistema. Com a aplicação da técnica de controle \mathcal{H}_∞ via realimentação de estados, os deslocamentos reduziram cerca de 75%. Já com o AMR essa redução foi de 78%. Com a aplicação em conjunto das duas técnicas de controle, essa redução foi de 100% nas três situações analisadas no trabalho. Com isso, as verificações em relação aos deslocamentos máximos, foram atendidas para a NBR 15421:2006, NBR 8800:2008 e NBR 6118:2014. A partir dos resultados, conclui-se que o controlador híbrido se mostrou eficiente e atingiu o objetivo proposto. As entradas exógenas no sistema tiveram influência nula no comportamento da saída do sistema.

Palavras-chave: *shear building*; terremoto; vento; controle \mathcal{H}_∞ ; AMR; controlador híbrido;

ABSTRACT

The dynamic loads from earthquakes and winds can destroy lives, cause collapse in civil structures, and interrupt basic services provided to the population. In this scenario, structural designs must be developed to decrease the damage induced by these actions. The objective of this work is to design a hybrid controller based on the optimization \mathcal{H}_∞ via state feedback and the magneto-rheological damper (AMR), to mitigate the excessive vibrations of a three-story steel frame building, represented through the shear building model, subjected to the dynamic action of wind, earthquake and the simultaneous action of both. In the numerical analysis, digital computer and MATLAB software are used, where implemented codes generate the expected results based on the mathematical modeling. A qualitative and quantitative analysis of the data is performed, with graphs of the time history and phase plane for the system states. With the application of the control technique \mathcal{H}_∞ via state feedback, the displacements were reduced by 75%. With AMR this reduction was 78%. With the joint application of the two control techniques, this reduction was 100% in the three situations analyzed in this work. Thus, the verifications in relation to the maximum displacements were met for NBR 15421:2006, NBR 8800:2008 and NBR 6118:2014. From the results, it is concluded that the hybrid controller proved to be more efficient and achieved the proposed objective. The exogenous inputs to the system had zero influence on the behavior of the system output.

Keywords: shear building; earthquake; wind; \mathcal{H}_∞ control; AMR; hybrid controller;

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras Latinas

A	Matriz de dinâmica; Área de atuação do vento na edificação
A_n	Matriz dinâmica do sistema em malha fechada
a_0	Fator de amortecimento de Rayleigh
a_1	Fator de amortecimento de Rayleigh
B	Matriz de entrada
B_1	Matriz de entrada de distúrbio
B_{1v}	Matriz de entrada de distúrbio do vento
B_{1s}	Matriz de entrada de distúrbio do terremoto
$B_{1(v+s)}$	Matriz de entrada de distúrbio vento e do terremoto
B_2	Matriz de entrada de controle
b	Parâmetro em função da categoria do terreno
C	Matriz de saída; Matriz de amortecimento
C_a	Coeficiente de arrasto
c_i	Amortecimento do pavimento tipo; Amortecimento do AMR
c_0	Coeficiente de amortecimento viscoso
D	Matriz de transmissão direta
D_1	Matriz de transmissão direta de distúrbio
D_2	Matriz de transmissão direta de controle
E	Módulo de elasticidade do material
$F_c(t)$	Força de controle \mathcal{H}_∞ no sistema
$F_i(t)$	Forças externas em função do tempo
F_{MR}	Força gerada pelo AMR
f	Frequência das rajadas
$f_D(t)$	Força de amortecimento em função do tempo
$f_I(t)$	Força de inércia em função do tempo
$f_S(t)$	Força elástica em função do tempo
f_y	Tensão de escoamento do aço
g	Aceleração da gravidade
H	Altura do edifício

h	Altura do pavimento tipo
$\ H_\infty\ $	Norma \mathcal{H}_∞ do sistema
I	Matriz identidade
i	Corrente elétrica
K	Matriz de rigidez; Matriz de ganho de realimentação
k_i	Rigidez do pavimento tipo; Rigidez do AMR
k_0	Coefficiente de rigidez elástica
M	Matriz de massa
m	Número de funções harmônicas; Ordem da matriz de estados
m_i	Massa do pavimento tipo
n	Ordem da matriz de estados; Parâmetro do AMR em $[s^{-1}]$
P	Matriz positiva definida
p	Expoente da lei potencial de variação de S_2
q_f	Pressão flutuante
q_3	Pressão de rajada
q_{600}	Pressão média
\bar{q}_0	Pressão dinâmica
$S(f)$	Densidade espectral do vento
S_1	Fator topográfico
S_3	Fator estatístico
t	Tempo
t_0	Tempo inicial
u	Deslocamento característico
\bar{u}	Deslocamento médio
$u_i(t)$	Vetor de entrada do controle; deslocamento em função do tempo no pavimento tipo
V_0	Velocidade básica do vento
\bar{V}_p	Velocidade de projeto
V_3	Velocidade de rajada
V_{600}	Velocidade média
W	Matriz positiva definida
$w(t)$	Vetor de entradas exógenas

$w_v(t)$	Vetor de entradas exógenas do vento
$w_s(t)$	Vetor de entradas exógenas do terremoto
$w_{(v+s)}(t)$	Vetor de entradas exógenas do vento e do terremoto
$x(t)$	Vetor de espaço de estados
$y(t)$	Vetor de saída
z	Variável evolucionária hysterética; Cota acima do terreno
z_r	Altura de referência: 10m

Letras Gregas

ω	Frequência em rad/s
ω_n	Frequencia natural
λ	Autovalor
θ	Ângulo de fase
μ	Escalar relacionado ao cálculo da norma \mathcal{H}_∞
α	Coeficiente de rigidez do AMR
γ	Parâmetro do AMR em $[m^{-2}]$; Expoente da lei potencial de expressão do modo de vibração
ε	Parâmetro do AMR adimensional
β	Parâmetro do AMR em $[m^{-2}]$
ξ	Razão de amortecimento da estrutura; Coeficiente de amplificação dinâmica
Φ	Matriz modal
σ	Velocidade de cisalhamento do vento; Desvio padrão

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	GENERALIDADES.....	12
1.2	JUSTIFICATIVA.....	14
1.3	OBJETIVOS.....	15
1.3.1	Objetivo Geral	15
1.3.2	Objetivos Específicos	15
1.4	METODOLOGIA.....	16
1.5	DELIMITAÇÃO DA PESQUISA.....	18
2	REVISÃO DE LITERATURA	19
2.1	SISTEMAS DINÂMICOS.....	19
2.1.1	Espaço de fase	21
2.1.2	Estabilidade	21
2.1.2.1	<i>Estabilidade de Lyapunov</i>	23
2.1.2.2	<i>Ponto de equilíbrio</i>	23
2.1.3	Caos	27
2.1.4	Expoentes de Lyapunov	28
2.1.4.1	<i>Algoritmo de Wolf et al. (1985)</i>	31
2.1.4.2	<i>Algoritmo de Rosenstein et al. (1993)</i>	34
2.1.4.3	<i>Algoritmo de Mohammadi (2009)</i>	38
2.2	ESTUDOS PRÉVIOS SOBRE O ASSUNTO.....	39
3	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	46
3.1	MODELO <i>SHEAR BUILDING</i>	46
3.1.1	Equações de equilíbrio	48
3.1.1.1	<i>Redução de ordem do sistema de equações diferenciais</i>	53
3.1.2	Parâmetros físicos	54
3.2	CARGA DINÂMICA DO VENTO.....	56
3.2.1	NBR 6123:1988	57
3.2.2	Método do vento sintético	60
3.2.3	Aplicação no modelo estudado	64

3.3	CARGA DINÂMICA DO TERREMOTO.....	66
3.3.1	NBR 15421:2006	67
3.3.2	Carga dinâmica sísmica aleatória	70
3.3.3	Aplicação no modelo estudado	74
4	ANÁLISE DINÂMICA	79
4.1	ESTABILIDADE DO SISTEMA.....	79
4.2	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS COM EXCITAÇÃO EXTERNA.....	85
4.2.1	Ação do Vento	85
4.2.2	Ação do Terremoto	89
4.2.3	Ação Simultânea do Vento e Terremoto	93
4.2.4	Comportamento Caótico	97
5	PROJETO DO CONTROLADOR	99
5.1	BREVE HISTÓRICO.....	99
5.2	TEORIA DO CONTROLE MODERNO.....	100
5.3	DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES.....	101
5.4	CONTROLE H_∞ VIA REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS.....	103
5.4.1	Aplicação no modelo estudado	106
5.4.1.1	Ação do Vento	109
5.4.1.2	Ação do Terremoto	113
5.4.1.3	Ação Simultânea do Vento e Terremoto	118
5.5	AMORTECEDOR MAGNETO REOLÓGICO.....	122
5.5.1	Aplicação no modelo estudado	127
5.5.1.1	Ação do Vento	129
5.5.1.2	Ação do Terremoto	132
5.5.1.3	Ação Simultânea do Vento e Terremoto	136
5.6	CONTROLADOR HÍBRIDO H_∞ E AMR.....	140
5.6.1	Aplicação no modelo estudado	141
5.6.1.1	Ação do Vento	141
5.6.1.2	Ação do Terremoto	144
5.6.1.3	Ação Simultânea do Vento e Terremoto	147

6	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	150
6.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	151
	REFERÊNCIAS.....	152
	APÊNDICE A – Parâmetros para cálculo da ação dinâmica do	
	vento.....	160

1 INTRODUÇÃO

1.1 GENERALIDADES

Um tema cada vez mais presente no cotidiano das pessoas são os desastres naturais. Eles têm tido uma recorrência e impactos cada vez mais intensos. Sendo responsáveis por expressivas perdas e danos, de caráter econômico, social e ambiental. Por isso eles devem ser bem conhecidos quanto à sua ocorrência, mecanismos, medidas de prevenção e mitigação de danos. Esses desastres podem ser provocados por diversos fenômenos, tais como, terremotos, tornados, furações, tempestades, entre outros (TOMINAGA; SANTORO; AMARAL, 2009).

No Brasil, nota-se que não tem uma grande frequência de sismos de alta magnitude devido à sua posição geográfica no centro da placa Sul-Americana. Porém, já ocorreram sismos de magnitudes consideráveis no solo brasileiro, como por exemplo, em ordem crescente na escala Richter: em João Câmara, Rio Grande do Norte, em 1986, com magnitude de 5,1; em Pacajus, Ceará, em 1980, com magnitude de 5,2; no mar, a 215 km da costa do estado de São Paulo, em 2008, com magnitude de 5,2; na divisa do Acre com Amazonas, em 2007, com magnitude de 6,1; e o maior deles com magnitude de 6,6, na Serra do Tombador, Mato Grosso, em 1955 (BRANDÃO, 2021).

Em 2006, estimulada pela constatação de eventos sísmicos registrados no Brasil e pela necessidade de adequação das normas técnicas brasileiras às exigências internacionais, a ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas – divulgou a NBR 15421:2006 – Projeto de estruturas resistentes a sismos. Ela indica que as ações sísmicas não podem ser desconsideradas no Brasil. Com a publicação dessa norma, as pesquisas no Brasil aumentaram, com o objetivo de entender melhor o sismo agindo nas estruturas (BRITO, 2017).

Desastres causados pela ação do vento também aconteceram no Brasil. Em 2011, um prédio em Belém do Pará, atingiu o estado limite último devido as ações do vento, provocando o seu colapso. Um tornado raro destruiu a cidade de Xanxerê, Santa Catarina, em 2015, os ventos a 250 km/h atingiram quase 3000 casas. Em 2020, também em Santa Catarina, aconteceu a formação de um fenômeno conhecido como “ciclone bomba” que provocou estragos nas edificações, os ventos chegaram a 120 km/h (G1, 2016; EL PAIS, 2015; G1, 2020).

Essas ações do vento nos projetos estruturais são normatizadas pela ABNT NBR 6123:1988 – Forças devidas ao vento em edificações. Esta norma apresenta duas vertentes de cálculo para consideração do vento nas estruturas, considerando como carga estática e como carga dinâmica. A norma estabelece também critérios para determinação da velocidade do vento, levando em consideração a região do Brasil, características geométricas da edificação e topográficas do terreno.

As cargas dinâmicas dos terremotos e dos ventos podem destruir vidas, causar colapso nas estruturas civis e interromper serviços básicos prestados à população. Neste cenário, os projetos estruturais devem ser desenvolvidos para diminuir os danos induzidos por essas ações. Tornando-se cada vez mais necessário a representação correta e real tanto do comportamento estrutural como dos ventos e terremotos, para se garantir a segurança estrutural (BOSSE, 2017).

A ocorrência de carregamentos dinâmicos naturais provoca vibrações excessivas que podem ser críticas para integridade estrutural, causando danos por fadiga, além de ultrapassar os estados limites de serviço, trazendo desconforto para o usuário. Sendo assim, tem aumentado o interesse em investigar e desenvolver técnicas de controle que melhorem o comportamento dinâmico das estruturas (RIBEIRO, 2018).

Com o aumento populacional e a verticalização das cidades nas últimas décadas, as estruturas se tornaram mais sujeitas as vibrações devido a projetos estruturais altos, esbeltos, flexíveis e leves. Apesar que a estrutura possa sofrer deslocamentos sem ocorrência de colapso, as vibrações excessivas se tornam um problema, quando é verificado as situações de serviço da edificação. O amortecimento baixo dos materiais de alta resistência, a utilização de estruturas pré-moldadas, onde as ligações são totalmente articuladas ou parcialmente engastadas, podem justificar esse comportamento (ILLESCAS e ICAZA, 2019).

O comportamento dinâmico de uma estrutura depende basicamente dos seus parâmetros de massa, rigidez e amortecimento. Sendo assim, a forma mais simples para que uma estrutura tenha um comportamento satisfatório a vibrações é garantindo sua flexibilidade para absorver parte da excitação, enquanto se mantém firme o bastante para resistir as demais cargas. Porém, essas medidas podem ser insuficientes para garantir a integridade estrutural sob vibrações excessivas, sobretudo quando esta apresenta frequências próximas as frequências naturais da

estrutura, que podem causar ressonância e conseqüentemente o colapso estrutural (PANDIT; BISWAL, 2020).

O controle de vibração estrutural aumentou significativamente nas últimas décadas. Uma das áreas de aplicação para o projeto de controle é a proteção de estruturas de engenharia civil de carregamentos dinâmicos, como vento e terremoto forte. Nos últimos anos, cresceu a atenção mundial para mitigar os efeitos dessas cargas dinâmicas (GHAFFARZADEH, 2015).

Portanto, é essencial fazer o controle da amplitude das vibrações das estruturas, principalmente nos casos de ressonância. Em muitos casos apenas o aumento da rigidez e da massa do sistema não soluciona o problema, já que as frequências naturais são modificadas. Sendo assim, torna-se necessário fazer o controle estrutural, que é uma tecnologia para proteção de estruturas que promove uma alteração nas propriedades de rigidez e amortecimento da estrutura. Para isso, são adicionados dispositivos externos, que reduzem os efeitos da excitação induzida, por meio da alteração das características dinâmicas da estrutura. Dessa forma, ocorre a transformação da energia vibratória em energia de dissipação, reduzindo os níveis de danos sofridos pela estrutura principal. Estes dispositivos de controle podem ser classificados como passivos, ativos, híbridos e semiativos (BANDYOPADHYAY *et al.*, 2021)

Neste contexto, esta tese tem como objeto de estudo, um edifício em estruturas metálicas com três andares, considerado como uma estrutura do tipo *shear frame*, submetido a vibrações excessivas causadas pela ação dinâmica do vento e do sismo. Para reduzir as vibrações, deslocamentos e restabelecer a estabilidade estrutural serão utilizadas as seguintes técnicas de controle: H_∞ via realimentação de estados, AMR e controlador híbrido.

1.2 JUSTIFICATIVA

A ação dinâmica dos sismos e ventos podem gerar danos às edificações, causar colapso total ou parcial da estrutura e proporcionar desconforto aos usuários. Neste cenário, buscar estratégias que minimizem os efeitos dessas ações nas estruturas são de real importância, pois podem garantir a vida útil da edificação e a segurança das pessoas. Portanto, é cada vez mais necessário estudar esses

fenômenos naturais, para sua correta compreensão e representação, para poder analisar seu comportamento frente a estruturas reais.

Nos últimos anos tem-se empregado esforços na pesquisa e desenvolvimento de metodologias e dispositivos de controle estrutural, especialmente para mitigar a resposta das edificações em relação aos ventos, aos sismos e as vibrações induzidas pelo homem. Esses estudos são essenciais para diminuir vibrações notáveis ao conforto humano, nocivos ao bom funcionamento da edificação e de equipamentos instalados.

Nessa perspectiva, o desenvolvimento dessa tese pode ser justificado pela necessidade de implementar, no estado atual da literatura, o conhecimento de controle de vibrações excessivas em estruturas submetidas a sismos e vento, de forma a obter a melhor redução da resposta dinâmica. Essas vibrações são indesejáveis tanto do ponto de vista do conforto como da segurança. Os sistemas de controle melhoram o processo de dissipação de energia, aumentando o amortecimento das estruturas e melhorando seu desempenho frente a tais perturbações. E reduzem os deslocamentos estruturais melhorando o seu comportamento em serviço.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo Geral

Projetar um controlador híbrido baseado na otimização \mathcal{H}_∞ via realimentação de estados e no AMR, para mitigar as vibrações excessivas, causadas pela ação dinâmica do vento e sismo, em um edifício com três pavimentos de estruturas metálicas, representado através do modelo *shear building*.

1.3.2 Objetivos Específicos

Com o intuito de atingir o objetivo geral, são levantados os seguintes objetivos específicos:

- Analisar a estabilidade do modelo estrutural;

- Obter as cargas dinâmicas do vento através da norma NBR 6123 (ABNT,1988), do modelo do vento sintético modificado (CARRIL, 2000) e do espectro de potência de Davenport;
- Obter as cargas dinâmicas do terremoto através da norma NBR 15421(ABNT, 2006) e do espectro de potência de Kanai-Tajimi;
- Obter e analisar a resposta dinâmica do sistema submetido a excitações externas do vento e terremoto;
- Justificar o comportamento caótico do modelo sujeito a vibrações excessivas através dos expoentes de Lyapunov;
- Aplicar a técnica de controle \mathcal{H}_∞ via realimentação de estados e analisar a eficiência do controlador.
- Aplicar a técnica de controle AMR e analisar a eficiência do controlador.
- Aplicar a técnica de controle híbrido \mathcal{H}_∞ via realimentação de estados e AMR, e analisar a eficiência do controlador.
- Verificar os deslocamentos máximos de acordo com a NBR 15421 (ABNT, 2006), NBR 8800 (ABNT, 2008) e NBR 6118 (ABNT, 2014).

1.4 METODOLOGIA

O objeto estudado neste trabalho, é um edifício considerado para efeitos de modelação, como uma estrutura do tipo *shear building*, ou seja, um pórtico cujas vigas, que representam os pavimentos do edifício, possuem rigidez muito superior à rigidez dos pilares. Sendo que as deformações axiais deste último, são consideradas desprezíveis. Já os deslocamentos das vigas, são dados pelas translações das suas extremidades. Portanto, as vigas não se deslocam verticalmente e nem sofrem rotações. O deslocamento é representado por uma única coordenada horizontal, sendo assim, cada pavimento do edifício possui um grau de liberdade, e deste modo, cada andar implica em um grau de liberdade.

No caso do modelo utilizado para exemplo numérico, tem-se três andares, ou seja, três graus de liberdade. Trata-se de um edifício de estruturas metálicas, onde as características da estrutura foram obtidas no trabalho de Corbani (2006). Para se

determinar a matriz de amortecimento, será adotado o método proposto por Rayleigh.

Para obtenção das equações de equilíbrio utiliza-se os conceitos teóricos de Euler-Lagrange, em termos de energias do sistema, que correspondem ao sistema de equações obtidos aplicando o princípio de D’Alambert, nos diagramas de corpo livre. Posteriormente analisa-se o comportamento de estabilidade estrutural do sistema a partir dos autovalores da matriz Jacobiana do sistema.

As ações dinâmicas do terremoto são obtidas utilizando os parâmetros da NBR 15421 (ABNT, 2006) e do espectro de potência de Kanai-Tajimi. Já as ações do vento são obtidas utilizando os parâmetros da NBR 6123 (ABNT, 1988), do modelo do vento sintético modificado (CARRIL, 2000) e do espectro de potência de Davenport.

Na integração ao longo do tempo do sistema de equações diferenciais, para se obter as respostas temporais o método numérico utilizado é o de Runge-Kutta de 4ª ordem. Na verificação do comportamento caótico do sistema submetido a vibrações excessivas é utilizado o expoente de Lyapunov. Para isso utiliza-se o algoritmo desenvolvido por Mohammadi (2009), que foi baseado no método de Rosenstein *et al.* (1993) com algumas modificações.

O primeiro projeto do controlador será baseado na otimização \mathcal{H}_∞ via realimentação de estados, utilizando o método matemático das LMIs. O segundo projeto será baseado no controlador AMR, utilizando o modelo de Bouc-Wen modificado. E por fim será desenvolvido e aplicado o controlador híbrido, com a junção dessas duas técnicas. A análise comparativa entre os deslocamentos máximos, será feita para verificar a eficiência dos controladores e o atendimento das NBR 15421 (ABNT, 2006), NBR 8800 (ABNT, 2008) e NBR 6118 (ABNT, 2014).

Na análise numérica são utilizados o computador digital e o software MATLAB, onde códigos implementados geram os resultados esperados baseados na modelação matemática. É feita uma análise qualitativa e quantitativa dos dados, com gráficos do histórico no tempo e plano de fase para os três estados do sistema, já que o modelo estudado possui três equações diferenciais ordinárias.

1.5 DELIMITAÇÃO DA PESQUISA

O algoritmo implementado para simulação do vento e sismo implica em históricos de carregamento periódicos. O edifício é considerado como uma estrutura rígida, modelo *shear building*. Toda a pesquisa está baseada em simulação computacional, pesquisas e resultados experimentais não serão abordados.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Este capítulo tem como objetivo fornecer ao leitor um resumo dos conceitos básicos necessários para o desenvolvimento do trabalho. Não será o foco expor complexas equações matemáticas fundamentais, pois, além de poderem ser encontradas nas referências básicas, a maior parte do trabalho foi desenvolvido por funções estabelecidas no software onde serão feitas as simulações numéricas. Sendo assim, o conteúdo aqui abordado não se estenderá além dos limites do objetivo do trabalho.

2.1 SISTEMAS DINÂMICOS

Um sistema dinâmico pode ser definido como um conjunto de objetos de qualquer natureza agrupados por alguma interdependência. Seus estados evoluem no tempo de acordo com alguma lei dinâmica, ou seja, resultado da ação de um operador de evolução determinista. O estudo teórico de sistemas dinâmicos consiste basicamente na construção e análise de modelos matemáticos. Em geral, é possível representar um sistema dinâmico a partir de diferentes modelos, cada qual dependente do propósito e da precisão esperada de suas previsões (WIGGINS, 2003).

O estado de um sistema é definido por variáveis de estado e sua evolução no tempo é governada por uma equação de movimento. Assim, um sistema dinâmico descreve a evolução no tempo das variáveis de estado, proporcionando o conhecimento do futuro a partir do passado (SAVI, 2017). Matematicamente, um sistema dinâmico pode ser representado por um sistema de equações diferenciais ordinárias, conforme a equação (2.1):

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

A equação (2.1) estabelece que f age sobre as variáveis de estado x , definindo o próximo instante do tempo. Tal ação pode ser vista através de um campo vetorial que, em cada ponto, é definido por f que representa a variação no tempo de x . Esse campo vetorial define as características do sistema dinâmico, sendo

dependente de parâmetros. Deste modo, pode ser definido por $f = f(x; \mu)$, onde μ representa um conjunto de parâmetros do sistema.

A equação (2.2) descreve a evolução no tempo de um sistema dinâmico expressando o seu estado a partir do instante anterior de forma discreta e, é chamada de mapa ou mapeamento.

$$X_{i+1} = F(X_i), X \in \mathbb{R}^n \quad (2.2)$$

Um sistema dinâmico é caracterizado pelo fato dele ser linear ou não. Segundo Savi (2017), um sistema é linear se as seguintes condições forem satisfeitas:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad x, y \in \mathbb{R}^n \quad (2.3)$$

$$f(\mu x) = \mu f(x), \mu \in \mathbb{R} \quad (2.4)$$

Um sistema dinâmico é dito autônomo quando não depende explicitamente do tempo. Por outro lado, o sistema é dito não-autônomo quando existe uma dependência explícita do tempo, $t \in \mathbb{R}$ (SAVI, 2017).

Os sistemas dinâmicos podem ser classificados como conservativos ou dissipativos. Analisando um fluxo no espaço de fases pelo teorema de Liouville, pode-se verificar se o sistema é conservativo, ou não, observando a evolução temporal de um hiper volume n -dimensional, definido pelo conjunto de condições iniciais, sendo n a dimensão do espaço de fases. Se o fluxo preservar o volume no espaço de fases, o sistema é dito conservativo. Se o volume no espaço de fases diminui com o tempo, o sistema é dissipativo. As trajetórias dos sistemas dissipativos, quando o sistema não diverge, convergem para o atrator, que é um subespaço do espaço de fase para qual convergem todos os movimentos relativos a um determinado conjunto de condições iniciais após o desaparecimento da influência da resposta transiente (VILLATE, 2019).

Em sistemas autônomos contínuos com três dimensões, podem-se ter os seguintes tipos de atratores (HOFF, 2014):

- Ponto de equilíbrio estável: é um ponto no espaço de fases cujo comportamento do sistema converge e independe do tempo;

- Atrator periódico ou ciclo limite: é um conjunto de valores para o qual o comportamento do sistema converge, exibindo um comportamento periódico (movimento regular);
- Atrator quase periódico: exibe um comportamento quase periódico com duas frequências fundamentais independentes. O comportamento quase periódico sugere uma situação dinâmica na qual as órbitas nunca se fecham sobre si mesmas, entretanto, sem apresentar dependência sensível às condições iniciais;
- Atrator caótico: é um atrator que apresenta um comportamento aperiódico, e dependência sensível às condições iniciais, ou seja, a distância entre duas trajetórias cresce exponencialmente, mas o atrator ocupa um volume finito no espaço de fases.

Os sistemas não-lineares de um modo geral, não possuem solução analítica. Alternativamente para avaliar a evolução do sistema são utilizados métodos numéricos que descrevem o problema real, contínuo no tempo, através de uma discretização. Esses sistemas são mais complexos que os sistemas lineares e apresentam alguns fenômenos que esta última classe não apresenta, como: dependência da amplitude de excitação; Tempo de escape infinito; Pontos de equilíbrio múltiplos; Não unicidade da solução; Dependência crítica dos parâmetros; Bifurcações; Caos ou dependência crítica às condições iniciais; Ciclos limite ou oscilações; Existência de harmônicas e de sub-harmônicas (MONTEIRO, 2019).

Um método numérico estabelece um modelo análogo discreto, associado ao modelo original proposto para descrever um dado sistema físico. Desta forma, a utilização de um método numérico deve levar em consideração se o modelo análogo por ele construído possui um comportamento compatível com o modelo original. A discretização transforma um sistema contínuo em um mapa (SAVI, 2017).

2.1.1 Espaço de fase

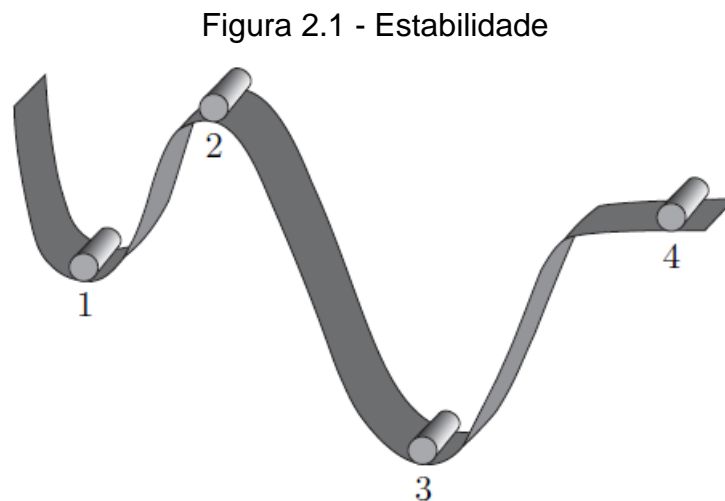
O estado de um sistema dinâmico pode ser representado por meio de um ponto com coordenadas $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_i(t)$, determinadas em um tempo t . As $x_i(t)$ coordenadas que compõem o ponto são conhecidas como variáveis de estado e o espaço n -dimensional ao qual pertencem é denominado espaço de estados ou espaço de fases (MONTEIRO, 2019).

No espaço de estados, a dinâmica dos pontos é dada pelo conjunto de equações diferenciais (2.1) e a dimensão do espaço equivale à quantidade de variáveis de estado. As f_i funções representam as variações temporais das $x_i(t)$ variáveis de estado e determinam o campo de velocidades de um sistema, também chamado de campo vetorial, em que a velocidade instantânea é dada pela primeira derivada em função do tempo (VILLATE, 2019).

O espaço de fase ou espaço de estados de um sistema dinâmico é definido como o espaço formado pelas variáveis dependentes do sistema, x . Trata-se de um quadro da realidade que evolui no tempo de acordo com o campo f . Uma determinada solução é obtida a partir do conhecimento de suas condições iniciais, definida por um ponto no espaço (SAVI, 2017).

2.1.2 Estabilidade

O conceito de estabilidade é fundamental no estudo de sistemas dinâmicos, e pode ser ilustrado através do sistema descrito na figura 2.1, que mostra um cilindro de massa m em repouso em diferentes pontos de uma superfície.



Fonte: Savi (2017).

Os pontos que têm inclinação zero representam pontos de equilíbrio estático (pontos 1, 2, 3 e 4), entretanto, o tipo de equilíbrio destes pontos é essencialmente diferente. Assim, em (1), se o sistema é atingido por perturbações externas infinitesimais (pequenos deslocamentos ou pequenas velocidades) o cilindro oscilará em torno da posição de equilíbrio (1). Esta posição de equilíbrio é chamada de

estável e ocorre também no ponto (3). No ponto (2), ao contrário do ponto (1), tem-se que o equilíbrio é instável acontece após a perturbação, o corpo não retorna à configuração inicial, assumindo uma nova posição distante da origem. E no ponto (4) o equilíbrio é chamado de neutro ou indiferente, ou seja, após uma perturbação, o corpo tende a permanecer na sua configuração. (SAVI, 2017).

Portanto, deve-se enfatizar o tipo de perturbação e a definição de estabilidade que se está considerando, quando se estuda a estabilidade de um sistema. É perguntado como um sistema de configuração de equilíbrio não perturbada se comporta quando este sofre uma perturbação.

Monteiro (2019) afirma que no estudo de problemas de instabilidade se destacam quatro elementos:

- A configuração inicial de equilíbrio cuja estabilidade se deseja investigar;
- A classe e a magnitude das perturbações;
- Os parâmetros que medem a propagação dessas perturbações;
- O período em relação ao qual se estará interessado em comparar o comportamento do sistema perturbado com o não perturbado

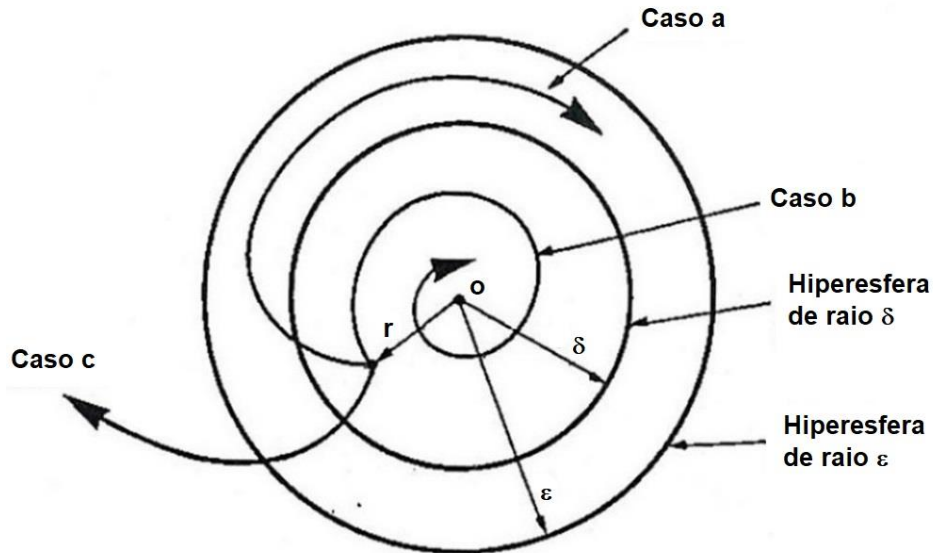
2.1.2.1 Estabilidade de Lyapunov

Um critério de estabilidade local bastante utilizado é o chamado critério de Lyapunov é usado para estudar a estabilidade das soluções de um sistema dinâmico por meio do cálculo dos autovalores de um sistema linearizado em torno dos pontos de equilíbrio. Dessa forma, o primeiro método de Lyapunov consiste estritamente de uma análise de estabilidade local nas proximidades de um ponto (WIGGINS, 2003).

As definições de Lyapunov são usualmente dadas em termos da origem 0 do espaço fase. Neste caso, pode-se classificar o comportamento do sistema em três categorias (figura 2.2): Caso a – A origem é estável; Caso b – A origem é assintoticamente estável; Caso c – A origem é instável. Vê-se que a estabilidade como definida por Lyapunov requer que a solução, quando submetida a uma perturbação r , permaneça dentro da hipersfera de raio ϵ . Estabilidade assintótica requer que a solução retorne ao ponto original de equilíbrio quando o tempo tende ao infinito. Já a instabilidade ocorre se a esfera de raio ϵ é alcançada. A quantidade δ pode ser entendida como o valor máximo de perturbação que pode ser imposto tal que, exista sempre a possibilidade de ocorrência de uma solução estável. Neste

caso, a hiperesfera de raio δ seria chamada de fronteira de estabilidade (VILLATE, 2019).

Figura 2.2 - Definições de estabilidade de Lyapunov



Fonte: Villate (2019).

2.1.2.2 Ponto de equilíbrio

O ponto de equilíbrio de um sistema dinâmico pode ser definido como sendo a coordenada em que o sistema permanece estacionário ao longo do tempo. Portanto, esse ponto é onde a solução não tem variação a medida em que o tempo evolui. Mecanicamente, seria um ponto onde o sistema possui velocidade e acelerações nulas (SAVI, 2017).

Usualmente o comportamento dinâmico é estudado através da equação de movimento linearizada, o que permite conhecer o comportamento da estrutura apenas na vizinhança da origem. Na análise de sistemas lineares bidimensionais, as possíveis soluções são responsáveis em formar diferentes padrões geométricos no plano de fases. Sendo assim, identificar esses padrões permite descobrir de forma rápida a natureza as soluções (MONTEIRO, 2019).

Seja um sistema linear que tem a representação do sistema de EDO's autônomas de (2.1) da seguinte forma:

$$\dot{x} = Ax \quad (2.5)$$

em que A é uma matriz constante $n \times n$ não-singular e $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. A solução analítica desse sistema é dada por:

$$x(t) = e^{At} x_0 \quad (2.6)$$

As soluções expressas em (2.7) do sistema de equações (2.6) são obtidas utilizando-se a propriedade da exponencial matricial, sendo e^{At} avaliada da seguinte forma (SAVI, 2017):

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \dots + \frac{t^n}{n!} A^n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \quad (2.7)$$

Calcular a expressão (2.7) pode ser extremamente trabalhoso. Uma forma de simplificar a resolução, consiste em mudar as coordenadas de forma que a solução final é dada por:

$$x(t) = T \text{diag} (e^{t\lambda_i}) T^{-1} x_0 \quad (2.8)$$

A matriz T é escolhida de forma que a operação $T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_i)$, onde λ_i são os autovalores de A . A matriz A diagonaliza-se nessa operação quanto T for a matriz formada pelos autovetores linearmente independentes de A . Dessa forma, considere que a solução do sistema (2.5) é dada por (SAVI, 2017):

$$x = e^{t\lambda} v \quad (2.9)$$

Substituindo (2.9) em (2.5) e realizando algumas manipulações obtêm-se o seguinte sistema linear homogêneo de equações:

$$(A - \lambda I)v = 0 \quad (2.10)$$

onde λ são os autovalores da matriz A , $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ o autovetor associado a cada autovalor e I a matriz identidade. As soluções não-triviais de (2.10) existem quando (SAVI, 2017):

$$\det(A - \lambda I) = 0 \text{ ou } P(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \quad (2.11)$$

O polinômio (2.11) é chamado polinômio característico e suas raízes são os autovalores da matriz A . Considerando o sistema de equação (2.5) bidimensional, para $n = 2$ o polinômio (2.11) tem como solução a seguinte expressão:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2} = \frac{\tau \pm \sqrt{D}}{2} \quad (2.12)$$

em que τ é o traço da matriz A e Δ seu determinante. Com base nos parâmetros τ e Δ , que determinam os autovalores em (2.12), é possível classificar os padrões dinâmicos em regiões conforme descrito a seguir (VILLATE, 2019; SAVI, 2006):

- **Sela:** Um ponto de equilíbrio recebe esta designação se $\Delta < 0$. Este ponto é classificado como instável e possui autovalores reais e de sinais opostos.

- **Nó:** Quando $\Delta > 0$ e $D > 0$. Os autovalores neste caso são reais e de mesmo sinal. Se $\tau > 0$ o nó é instável e se $\tau < 0$ o nó é dito assintoticamente estável.

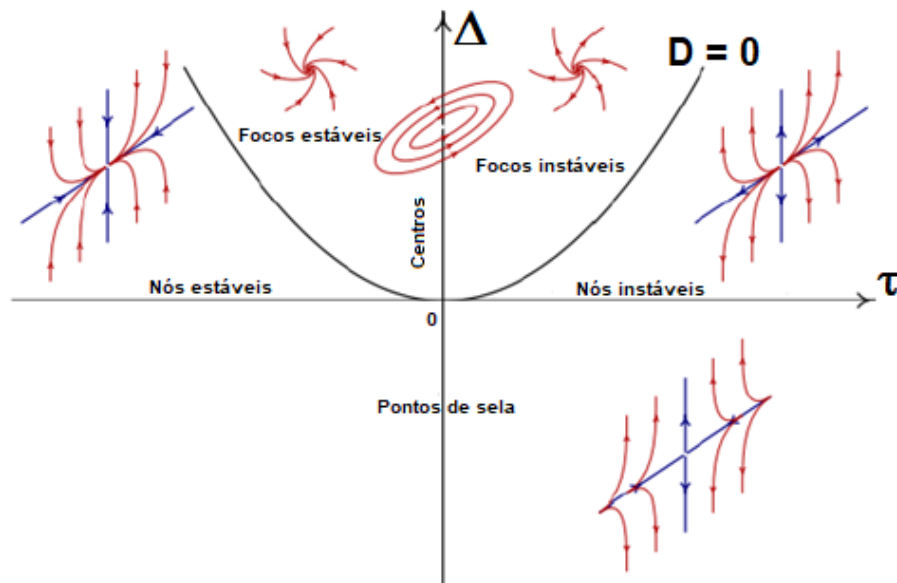
- **Foco:** Quando $\Delta > 0$ e $D < 0$. Os autovalores são pares complexos conjugados. Se $\tau > 0$ o foco é instável e se $\tau < 0$ o foco é dito assintoticamente estável.

- **Centro:** Quando $\tau = 0$. Esse ponto é classificado como marginalmente estável.

- **Nó impróprio:** Quando $\Delta > 0$ e $D = 0$. Nesse caso existem autovalores repetidos e o ponto pode ser estável se $\tau < 0$.

Na figura 2.3 ilustra-se as regiões de estabilidade dos pontos de equilíbrio, como também o formato geométrico das soluções no plano de fases. Em um ponto de sela as soluções se aproximam em uma direção e se afastam por outra. Em pontos do tipo nós e focos estáveis as soluções se aproximam assintoticamente do ponto quando $t \rightarrow \infty$, sendo que no último as soluções se aproximam em formas de espirais. As soluções instáveis, se afastam do ponto seguindo o mesmo padrão quando $t \rightarrow \infty$. No ponto denominado centro, as soluções não são atraídas nem repelidas para o ponto e seu comportamento dinâmico é descrito por curvas fechadas no retrato de fases (SAVI, 2017; MONTEIRO, 2019).

Figura 2.3 - Formato geométrico das soluções e classificação dos pontos de equilíbrio em um sistema, bidimensional em função de τ , Δ e D .



Fonte: Villate (2019).

2.1.3 Caos

Sistemas dinâmicos não-lineares são passíveis de apresentar um comportamento caótico desde que algumas condições sejam satisfeitas. Savi (2017) define o caos como sendo um comportamento, onde o sistema experimenta uma dinâmica com diversas possibilidades de respostas. Já de acordo com Monteiro (2019), não existe uma definição universalmente aceita para o caos, mas as seguintes características são quase sempre exibidas pelas soluções de sistemas caóticos:

- Oscilações aperiódicas das variáveis de estado;
- Alta sensibilidade às condições iniciais;
- Alta sensibilidade à alteração de parâmetros;
- Imprevisibilidade após um tempo relativamente curto;
- Espectro de frequência contínuo, de banda larga, porém limitado;
- Estacionaridade, isto é, embora aperiódico, os padrões tendem a se repetir;
- Presença do atrator estranho.

Sistemas com comportamentos caóticos apresentam trajetórias no espaço de estado que convergem para um atrator. O termo atrator é definido como sendo o comportamento que um sistema dinâmico que independe do ponto de partida, tende

a convergir para um ponto (atrator). A visualização do atrator caótico de um sistema dinâmico se faz por meio do mapa de Poincaré, onde nota-se uma coleção de pontos dispostos de uma maneira organizada (SAVI, 2017).

De acordo com Villate (2019), para que um sistema apresente um atrator caótico, são necessárias as seguintes condições:

- Possuir pelo menos três variáveis dinâmicas independentes;
- Conter termos não lineares que acople várias das variáveis;
- Ser dissipativo;
- Instabilidade de todos os pontos de equilíbrio.

De acordo com Monteiro (2019), somente sistemas tridimensionais ou de ordem superior podem apresentar comportamento caótico. Segundo o autor, o espaço tridimensional é o mínimo espaço suficiente que permite a divergência entre trajetórias, limitação das soluções e unicidade da trajetória, ou seja, características de um atrator estranho caótico.

Conforme Layek (2015), sistemas de segunda ordem variantes no tempo podem apresentar comportamento caótico, no entanto esses podem ser transformados em sistemas invariantes no tempo com acréscimo de uma variável de estado.

2.1.4 Expoentes de Lyapunov

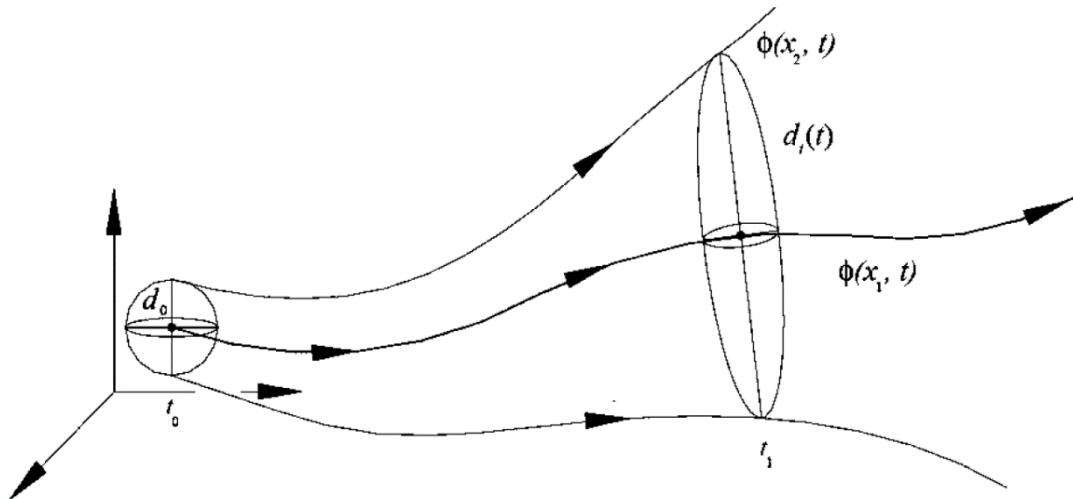
Existe uma variedade de métodos para verificação do comportamento caótico de um sistema, que são identificados pela divergência exponencial das trajetórias conforme a evolução dinâmica. Um desses métodos é a determinação dos expoentes de Lyapunov, que medem essa taxa de divergência e quantificam a sensibilidade às condições iniciais. É a técnica mais empregada para caracterizar o caos (FERRARA; PRADO, 2017).

A ideia é provocar uma perturbação em torno da trajetória de referência e acompanhar como esta perturbação evoluirá no tempo. Esta trajetória inicialmente apresenta o formato de uma hiperesfera, com a perturbação, acontece um afastamento entre as trajetórias, surgindo assim uma hiperelipsoide (SAVI, 2017).

A figura 2.4 representa a divergência motivada pela perturbação. No estado inicial t_0 as trajetórias formam uma hiperesfera, com diâmetro d_0 , tendo como valores dos eixos o seu raio. Após a perturbação, as rotas se afastam em relação a trajetória

de referência e passam a ser um hiperelipsoide à medida que o tempo evolui, diminuindo o eixo x_1 e aumentando o eixo x_2 (NASCIMENTO NETO, 2020).

Figura 2.4 - Expoentes de Lyapunov em termos geométricos, a hiperesfera é deformada em um hiperelipsoide.



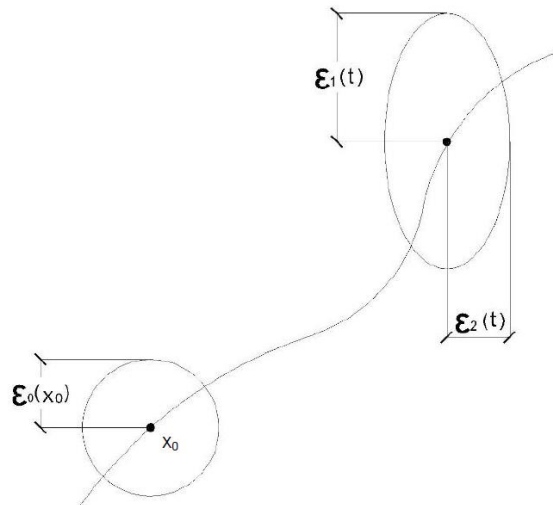
Fonte: Savi (2017).

Quando o sistema dinâmico apresenta uma convergência, as trajetórias se contraem e o expoente de Lyapunov estimado é negativo. Caso apresente uma divergência, as trajetórias se afastam ao longo do tempo, apresentando o expoente de Lyapunov positivo (FERRARA; PRADO, 2017).

À medida que o sistema evolui no tempo a esfera se transforma em uma elipsoide com eixos principais $\varepsilon_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, m$. Na figura 2.5 está ilustrado a representação da evolução do elemento esférico bidimensional, de raio $\varepsilon_0(x_0)$ no ponto inicial x_0 , com a perturbação, torna-se um elipsoide com eixos principais $\varepsilon_1(t)$ e $\varepsilon_2(t)$.

O aumento exponencial dos eixos principais $\varepsilon_k(t)$ são calculados com os expoentes de Lyapunov (λ), seus valores são definidos pela equação (2.13), onde λ_i são ordenados do maior para o menor. Eles dependem da condição inicial x_0 , mas em vários casos permanecem sem alteração ao longo de uma parte considerável do plano fase. Na equação (2.14) é relacionado as divergências ao longo do tempo, pegando o ponto inicial como referência. A partir da equação (2.14), chega-se na equação (2.15).

Figura 2.5 - Evolução bidimensional de um elemento esférico em um elipsoide.



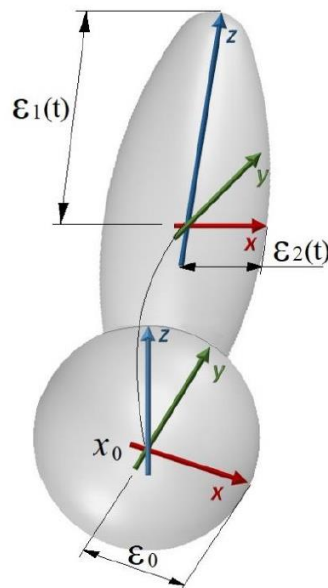
Fonte: Ferrara; Prado (2017).

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon_0(x_0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{\varepsilon_i(t)}{\varepsilon_0(x_0)}, i = 1, \dots, m. \quad (2.13)$$

$$\lambda_i = \frac{1}{t} \ln \frac{\varepsilon_i(t)}{\varepsilon_0(x_0)} \quad (2.14)$$

$$\varepsilon_i(t) \approx \varepsilon_0(x_0) e^{\lambda_i t} \quad (2.15)$$

Figura 2.6 - Evolução tridimensional de um elemento esférico em um elipsoide.



Fonte: Nascimento Neto (2020).

A ilustração que tem três dimensões da transformação de um elemento esférico em elipsoide, pode ser visto na figura 2.6, onde pode-se notar o aumento na

direção z, representado por $\varepsilon_1(t)$ e uma redução na direção x, que está representado por $\varepsilon_2(t)$. Observa-se também que o eixo y também sofre alteração.

Os expoentes de Lyapunov resultam através da média a taxa de divergência das trajetórias, pois, para um tempo finito t , o valor de λ depende do estado inicial x_0 .

Segundo Pavan e Molina (2013), o expoente de Lyapunov fornece a seguinte interpretação, se:

- $\lambda < 0$ Sistema Determinístico Estável (SDE);
- $\lambda = 0$ Sistema Determinístico Periódico (SDP);
- $0 < \lambda < \infty$ Sistema Caótico Determinístico (SCD);
- $\lambda \rightarrow \infty$ Sistema Probabilístico (SP – ruído ou hipercaótico);

De acordo com Ferrara e Prado (2017) a presença de um ou mais expoentes de Lyapunov positivos define uma falta de estabilidade nas direções associadas. Para um sistema com solução caótica, e um atrator estranho, a dimensão do espaço de estados deve ser ≥ 3 .

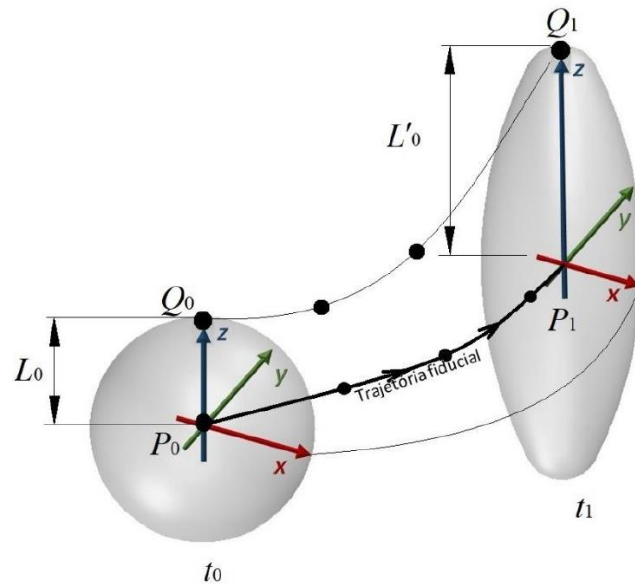
Existem várias maneiras para se calcular o expoente de Lyapunov. E esse é o objetivo de dois algoritmos clássicos usados para facilitar este processo: Wolf *et al.* (1985) e Rosenstein *et al.* (1993). O primeiro é muito usado, mas susceptível a resultados errôneos, uma vez que ele não testa a presença de divergência exponencial, e apenas assume que ela esteja presente. Já o segundo testa diretamente a presença da divergência de trajetórias possibilitando assim analisar se faz sentido calcular o expoente de Lyapunov para um determinado conjunto de dados (KANTZ; SCHREIBER, 2004).

2.1.4.1 Algoritmo de Wolf et al. (1985)

Foi o primeiro algoritmo desenvolvido para calcular expoentes de Lyapunov para séries temporais, e sua principal ideia está baseada na evolução da distância, no espaço tangente, de duas trajetórias próximas nos instantes iniciais.

A partir de uma série temporal, um retrato de fase é reconstruído pelas coordenadas defasadas. Procura-se um vizinho do ponto inicial t_0 e chama-se a distância entre esses dois pontos de $L(t_0)$. No próximo tempo t_1 , essa distância evolui para $L'(t_1)$ (figura 2.7).

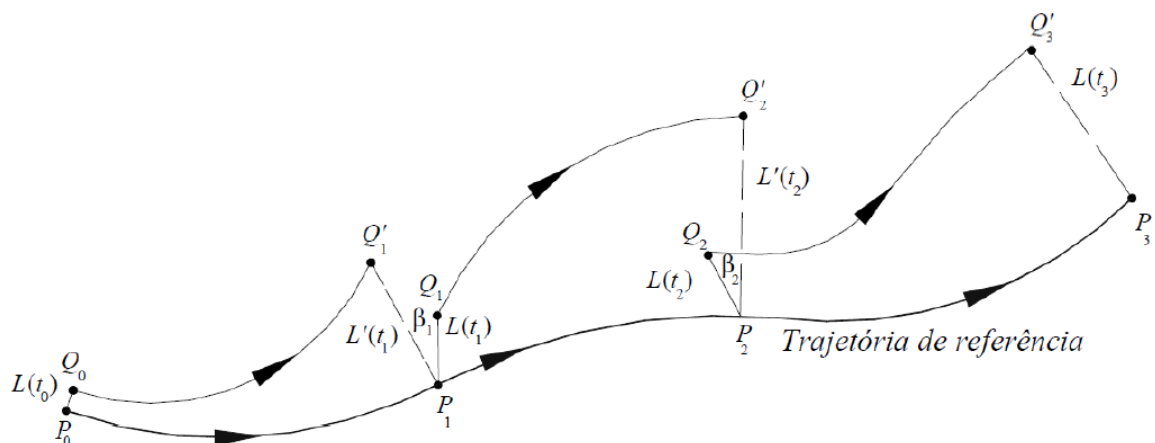
Figura 2.7 - Representação esquemática do método proposto por Wolf.



Fonte: Nascimento Neto (2020).

Essa distância é analisada ao longo da série. O objetivo é encontrar um ponto onde a distância entre ele e o novo ponto seja pequena. Caso não seja encontrado, retorna-se aos pontos que já foram usados. Repete-se esse procedimento até que a trajetória de referência (fiducial) passe em todos os pontos ao longo do sinal (figura 2.8).

Figura 2.8 - Cálculo dos expoentes de Lyapunov.



Fonte: Savi (2017).

Sendo assim, o maior expoente de Lyapunov é dado pela equação (2.16), onde M é o número de vezes que escolheu um vizinho novo próximo a trajetória fiducial:

$$\lambda_i = \frac{1}{t_m - t_0} \sum_{k=1}^M \log_2 \frac{L'(t_k)}{L(t_{k-1})} \quad (2.16)$$

Na figura 2.9 é mostrada a sequência do algoritmo de Wolf *et al.* (1985) para o cálculo dos expoentes de Lyapunov para séries temporais experimentais:

Figura 2.9 - Passos para a implementação do algoritmo de Wolf *et al.* (1985).

- 1) LER A SÉRIE TEMPORAL X(t)
- 2) DEFINIR A DEFASAGEM, A DIMENSÃO E O PASSO DE REPOSIÇÃO
- 3) DEFINIR AS COORDENADAS DEFASADAS
- 4) CALCULAR O VIZINHO MAIS PRÓXIMO AO PRIMEIRO PONTO
 - 4.1) CALCULAR A DISTÂNCIA ENTRE O PONTO FIDUCIAL E O CANDIDATO
 - 4.2) VERIFICAR SE A DISTÂNCIA É MENOR QUE A DISTÂNCIA INICIAL E MAIOR QUE A DISTÂNCIA MÍNIMA (RÚIDO)
- 5) CALCULAR A DISTÂNCIA ENTRE OS PONTOS EVOLUÍDOS
- 6) CALCULAR A DISTÂNCIA ENTRE O ÚLTIMO PAR DE PONTOS E CALCULAR O EXPOENTE DE LYAPUNOV
- 7) PROCURAR PELO PONTO DE REPOSIÇÃO
 - 7.1) CALCULAR A DISTÂNCIA ENTRE O PONTO FIDUCIAL E O CANDIDATO
 - 7.2) VERIFICAR SE A DISTÂNCIA É MENOR QUE A DISTÂNCIA INICIAL E MAIOR QUE A DISTÂNCIA MÍNIMA (RÚIDO)
- 8) ENCONTRAR A MUDANÇA ANGULAR PARA O NOVO VETOR
- 9) SALVAR PONTO COM MENOR MUDANÇA ANGULAR ATÉ AGORA
- 10) ENCONTRANDO O NOVO VIZINHO, VOLTAR AO ITEM (5).
- 11) TERMINAR O PROGRAMA QUANDO A TRAJETÓRIA FIDUCIAL CHEGAR AO FIM

Fonte: Simoni (2008).

Segundo Savi (2017), o algoritmo de Wolf *et al.* (1985) é bem sucedido em sistemas dinâmicos na qual o modelo matemático permite a linearização de uma determinada órbita. Ao utilizá-lo, deve ser indicado a quantidade de pontos existentes, que serão usados para reconstrução do espaço de estados.

Para essa reconstrução será utilizado o método da defasagem, sendo assim necessário a definição dos parâmetros de imersão: tau (τ) e dimensão de imersão (D_e). É preciso determinar a menor e maior distância tangente as trajetórias, e o ângulo são estabelecidos como critérios para escolha de novos vizinhos; e para

determinação dos instantes de tempo (t) é necessário indicar o passo de evolução, onde serão mensurados os expoentes de Lyapunov até passar por todos os pontos da trajetória de referência (NASCIMENTO NETO, 2020).

2.1.4.2 Algoritmo de Rosenstein et al. (1993)

A partir da ideia de Wolf *et al.* (1985), dois algoritmos parecidos foram elaborados por Rosenstein *et al.* (1993) e por Kantz (1994). Eles levam em consideração a divergência entre trajetórias adjacentes numa determinada direção que oscila ao longo do sinal, gerando um espectro dos expoentes efetivos. Sendo assim, o maior expoente de Lyapunov é dado pelo coeficiente angular da trajetória associada a direção de menor estabilidade. (SAVI, 2017).

O algoritmo de Rosenstein *et al.* (1993) permite calcular o maior expoente de Lyapunov de uma série temporal experimental e analisa todos os dados disponíveis. Ele é de fácil implementação, rápido e robusto no que diz respeito a mudança no tamanho da amostra, dimensão de imersão, passo de reconstrução e nível de ruído. Com ele é possível calcular simultaneamente a dimensão de correlação. Sendo assim, o roteiro de cálculo gera resultados tanto do nível de caos quanto da complexidade do modelo (VAGTINSKI, 2013).

O primeiro passo do método é a reconstrução dinâmica do atrator através de uma série temporal, para isso é usado o método dos atrasos temporais. A trajetória reconstruída pode ser representada como uma matriz, onde cada coluna é um vetor do plano fase, na forma:

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_M)^T \quad (2.16)$$

onde X_i é o estado do sistema no tempo discreto i . Para uma série temporal com N pontos, cada X_i é dado pela equação (2.17), em que p é o passo de reconstrução:

$$X_i = (x_i, x_{i+p}, \dots, x_{i+(m-1)p}) \quad (2.17)$$

Desse modo, \mathbf{X} é uma matriz $M \times m$, e as constantes M, m, p e N são relacionados de acordo com a equação (2.18):

$$M = N - (m - 1)p \quad (2.18)$$

O teorema de Takens é usado para estimativa da dimensão de imersão, ou seja, para $m \geq 2D_0 + 1$. Em relação a escolha do passo de reconstrução p , o algoritmo se mostra eficiente (VAGTINSKI, 2013).

Após a reconstrução do espaço de estados, o próximo passo é a busca dos “vizinhos próximos” de cada ponto da trajetória. O próximo vizinho X_j é encontrado através da procura do ponto que reduza a distância a um ponto de referência X_j , que é expresso pela equação (2.19):

$$d_j(0) = \min_{X_j} \|X_j - X_j\| \quad (2.19)$$

onde $d_j(0)$ é a distância inicial do j -ésimo ponto ao próximo vizinho e $\| \quad \|$ simboliza a norma Euclidiana. Uma regra adicional colocada aos próximos vizinhos, é que sua distância de tempo deve ser maior que o período médio da série temporal, que é dada pela equação (2.20), onde T é o período médio da série temporal:

$$|i - j| > T \quad (2.20)$$

Com esta restrição é possível considerar cada par de vizinhos como condições iniciais próximas para diferentes trajetórias. Usando a transformada rápida de Fourier é estimado o período médio. No algoritmo de Rosenstein *et al.* (1993) o maior expoente de Lyapunov é estimado como a taxa média de divergência dos próximos vizinhos:

$$\lambda_1(t) = \frac{1}{i \Delta t} \frac{1}{(M - i)} \sum_{j=1}^{M-i} \ln \frac{d_j(i)}{d_j(0)} \quad (2.21)$$

sendo Δt o período de amostragem, $d_j(i)$ é a distância entre o j -ésimo par de vizinhos após i passos discretos no tempo e $M = N_0 - (d - 1)T$, que representa o número de pontos reconstruídos.

Rosenstein *et al.* (1993) diz que a definição matemática do maior expoente de Lyapunov pode ser dada pela equação (2.22), onde $d(t)$ é a distância média das trajetórias no tempo t e C é a constante que reduz a separação inicial:

$$d(t) = C e^{\lambda_1(t)} \quad (2.22)$$

Para determinar o λ_1 na equação (2.22), é considerado que o j -ésimo par de próximos vizinhos se afastam aproximadamente igual a taxa dada pelo maior expoente de Lyapunov, onde C_j é a separação inicial na equação (2.23). Aplicando o logaritmo nos dois lados da equação (2.23), tem-se a equação (2.24):

$$d_j(i) \approx C_j e^{\lambda_1(i\Delta t)} \quad (2.23)$$

$$\ln d_j(i) \approx \ln C_j + \lambda_1(i\Delta t) \quad (2.24)$$

Considerando $j = 1, 2, \dots, M$, a expressão acima simboliza um conjunto de linhas quase paralelas, com inclinação proporcional a λ_1 . Na equação (2.23) a normalização na divergência dos vizinhos, dada por C_j não se faz necessária para o cálculo de λ_1 , como pode ser visto na equação (2.24), diminuindo o esforço computacional. Dessa forma, na metodologia de Rosenstein *et al.* (1993), o maior expoente de Lyapunov pode ser obtido através de um ajuste linear pelo método dos mínimos quadrados, aplicada a uma linha média, dada por:

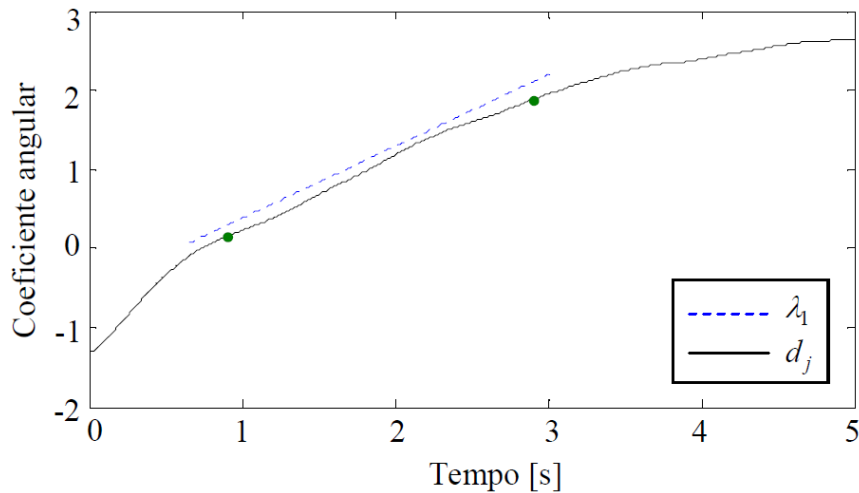
$$y(i) = \frac{1}{\Delta t} \langle \ln d_j(i) \rangle \quad (2.24)$$

onde $\langle \rangle$ simboliza a média dos valores de d_j . Esse processo para obter o valor médio das divergências é fundamental para resultados de λ_1 mais precisos, usando séries com menos pontos e na presença de ruído (ROSENSTEIN *et al.*, 1993).

Para visualizar esse método, Vagtinski (2013) construiu um gráfico $\langle \ln d_j(i) \rangle$ pelo tempo, para diversos valores de m , figura 2.10. Depois de uma curta transição, há uma grande região linear que é usada para calcular o maior expoente de Lyapunov. Rosenstein *et al.*, (1993) diz que as curvas saturam para grandes valores

de $i\Delta t$, porque o sistema respeita os limites no espaço de fases e a separação média das trajetórias não pode superar o “tamanho” do atrator.

Figura 2.10 - Gráfico do valor médio do logaritmo da divergência em função do tempo para o atrator de Lorenz.



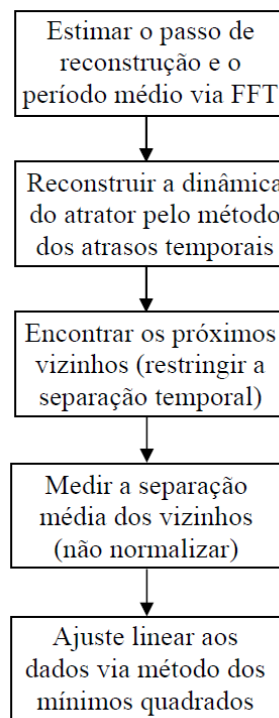
Fonte: Vagtinski (2013).

Para calcular o maior valor do expoente de Lyapunov, é fundamental analisá-lo para vários valores da dimensão de imersão m , pois normalmente esse valor não é conhecido previamente para séries experimentais. No método de Rosenstein *et al.*, (1993) se obtém resultados bons para $m \geq n$, que é bem inferior ao critério de Takens, onde n é a dimensão topológica do conjunto. Os sistemas caóticos são efetivamente estocásticos quando colocados em um espaço fase que é bem pequeno para suportar uma dinâmica real. A reta para o cálculo de λ_1 pode ser obtida de um gráfico do coeficiente angular pelo tempo, onde a faixa com valores constantes, ou seja, inclinação zero, indica a região procurada (VAGTINSKI, 2013).

No método proposto por Takens, de atrasos temporais, os expoentes de Lyapunov e a dimensão são aproximadamente iguais, tanto para o atrator reconstruído quanto para o original. A reconstrução do espaço de estados e o cálculo do maior expoente de Lyapunov foram testados e obtiveram resultados coerentes com a literatura, inicialmente em dois modelos dinâmicos tradicionais: o atrator de Rössler e de Lorenz (NASCIMENTO NETO, 2020).

Na figura 2.11 está representado um fluxograma do algoritmo de Rosenstein *et al.*, (1993) para o cálculo do maior expoente de Lyapunov:

Figura 2.11 - Fluxograma adaptado do algoritmo de Rosenstein *et al.* (1993) para o cálculo do maior expoente de Lyapunov.



Fonte: Vagtinski (2013).

De acordo com Savi (2017) a metodologia de Rosenstein *et al.* (1993) traz resultados bons para sistemas discretos (mapas), mas em sistemas contínuos (equações diferenciais) os resultados não são muito eficazes. Para Simoni (2008) essa metodologia tem sido indicada como melhor alternativa para o cálculo de expoentes de Lyapunov para séries de dados experimentais com ruído.

2.1.4.3 Algoritmo de Mohammadi (2009)

Neste trabalho utiliza-se o algoritmo desenvolvido por Mohammadi (2009), para o cálculo do maior expoente de Lyapunov. Este código está na linguagem do Matlab e utiliza o método de Rosenstein *et al.* (1993) com algumas modificações. Ele permite que o usuário selecione o atraso de incorporação (τ) e a dimensão de incorporação (m), mas caso o usuário não atribua esses valores o algoritmo selecionará automaticamente esses valores.

Para o cálculo do τ é utilizada a função de autocorrelação e informações mútuas mínimas são usadas no código. São usados outros dois métodos para

escolher o valor adequado da dimensão de incorporação: falsos vizinhos mais próximos e geometria simplética.

Na utilização do código é necessário entrar: com os dados da série temporal; o τ incorporando o atraso da reconstrução do espaço de estados, caso não tenha essa informação é necessário colocar 0 que o programa irá calcular o τ ; o m que é a dimensão de incorporação, da mesma forma que no τ , caso não tenha esse valor, colocar 0 que o programa achará a dimensão adequada.

Como saída ele traz o maior expoente de Lyapunov e expoentes de Lyapunov para vários KS (entropia). Mohammadi (2009) diz que o desenvolvimento destes expoentes é muito útil. Caso m tenha sido selecionado de forma correta, a curva terá inclinação razoavelmente horizontal. Se não houver suavidade, com seção curva, o indicado é tentar com outro valor de m .

2.2 ESTUDOS PRÉVIOS SOBRE O ASSUNTO

Magluta (1993) estudou as vantagens e limitações dos sistemas de controle passivo para a mitigação das vibrações, através de simulações numéricas e ferramentas teóricas. A validação do método é feita através de comparações com resultados experimentais e estudo paramétrico com sistemas estruturais simples sob ação de diversos tipos de carregamentos.

Symans e Constantinou (1999) fizeram comparação dos sistemas de controle passivo, ativo e semiativo para o comportamento dinâmico causado pelas ações sísmicas. É fornecida uma revisão detalhada da literatura, onde mostra que os dispositivos de controle semiativos melhoram o comportamento de estruturas civis sob ação de terremoto em larga escala.

Moutinho (2007) caracteriza sistemas de controle que são aplicados em estruturas e estabelece critérios para os níveis máximos de vibração em estruturas de acordo com as normas portuguesas e estrangeiras, para o conforto e bom funcionamento para o usuário. Traz o estudo de sistemas de controle clássicos e modernos, com a finalidade de analisar e dimensionar os sistemas ativos.

Gómez (2007) estudou a eficiência de um amortecedor de massa sintonizado (AMS) na geometria de pêndulo para redução do comportamento dinâmico de uma estrutura quando submetida a excitações dinâmicas do vento e terremoto. Os

parâmetros ótimos do amortecedor são fornecidos quando a estrutura está submetida a excitações ambientes aleatórias dadas por funções de densidade espectral de potência. Para as ações dinâmicas foram consideradas inicialmente a função de densidade espectral constante (ruído branco) e posteriormente objetivando representações mais reais, foram utilizados o espectro de Tajimi-Kanai (terremoto) e o espectro de Davenport (vento). Para a simulação, foi considerado um *shear frame* de dez andares reduzido a um grau de liberdade pelo método de superposição modal.

Lima (2007) apresentou uma análise dinâmica da laje de um edifício comercial, utilizado como academia de ginástica. É avaliada a sua resposta quando submetida ao carregamento oriundo de atividades humanas de pular e dançar, quanto a critérios de normas internacionais que estabelecem deslocamentos e acelerações admissíveis. São elaboradas propostas de controle estrutural para atenuação de vibrações excessivas por meio da instalação de AMS na estrutura estudada. Os resultados mostram uma atenuação nos valores máximos de velocidade e aceleração verticais na estrutura com a utilização das técnicas de controle desenvolvidas.

Santos (2009) fez simulações numéricas e computacionais para mitigação das vibrações excessivas em lajes de concreto armado utilizando AMS, objetivando achar qual a posição mais indicada para redução eficiente das vibrações através desse sistema de controle. Para a ação dinâmica foi considerada a ação humana.

Carneiro (2009) verificou a eficiência de controle semiativo, utilizando amortecedores MR, e comparou aos controles passivo e ativo. Avaliando numericamente a eficiência do controle aplicado a um modelo de um edifício de dois pavimentos submetido a uma aceleração na base. Concluindo que o controle semiativo se mostrou eficiente em reduzir os deslocamento e acelerações do edifício.

Abreu e Lopes Jr (2010) investigaram um procedimento sistemático na aplicação do algoritmo de controle ótimo H_2 para controlar a vibração de um edifício de dois andares sob excitação sísmica. O desempenho do controlador na redução da resposta dinâmica é testado experimentalmente em um banco de ensaio que representa o edifício submetido à aceleração do solo por terremoto usando um sistema de mesa de agitação e controlado por um driver de massa ativo. Os resultados mostram que a estratégia de controle ótimo H_2 , quando usada na

estrutura em escala de bancada, reduzem as respostas dinâmicas significativamente com o controlador ideal projeto.

Battista e Pfeil (2010) objetivando reduzir as oscilações causadas pelo vento na ponte Rio-Niterói, desenvolveram um sistema de controle passivo de múltiplos atenuadores dinâmicos sincronizados, que foi instalado no vão central da ponte. A eficiência do sistema de controle é validada através de comparações de resultados temporais obtidos da estrutura original e controlada. O seu bom desempenho pode ser constatado até hoje na ponte Rio-Niterói.

Parisenti (2011) realizou um estudo de análise dinâmica de edifícios de concreto armado submetido a sismos, com ênfase na aplicação em projeto estrutural. Apresentam-se no trabalho os critérios de projeto da norma brasileira NBR 15421 (ABNT, 2006) para o projeto de estruturas sismo-resistentes. São abordados alguns exemplos de edifícios e observou-se que os diversos parâmetros de projetos da norma influenciam significativamente na obtenção das forças horizontais sísmicas, principalmente, o tipo de solo sob a fundação da edificação e o tipo de estrutura sismo-resistente.

Rossato, Miguel e Miguel (2016) avaliaram através de simulação numérica, o comportamento dinâmico de um prédio de 9 pavimentos submetidos à excitação sísmica, antes e após a instalação de um AMS. É utilizado o registro de aceleração do solo no terremoto El Centro, ocorrido em 1940. Faz-se o dimensionamento do AMS com diferentes relações de massas (AMS-Estrutura) e determinam-se as novas respostas dinâmicas da estrutura, visando à redução dos deslocamentos com uma menor relação custo-benefício. Após a instalação do AMS mostrou-se uma redução significativa nos deslocamentos e acelerações máximas do edifício. Nos deslocamentos as reduções foram de 46% até 58% e para as acelerações as reduções foram de 48% a 68%.

Fernandes (2016) fez análises numéricas e computacionais para demonstrar a eficiência de um controlador do tipo AMS em uma estrutura sob ação de forças sísmicas. Essas ações foram obtidas utilizando o método de Tajimi-Kanai. Com o objetivo de reduzir as vibrações excessivas foi proposto um controle híbrido estrutural, associando a técnica de controle semiativo com o amortecedor magneto reológico acoplado ao AMS. Os resultados mostram que a técnica de controle híbrido adotada é eficiente para esse tipo de solicitação e que pode ser utilizada para mitigar danos causados às estruturas.

Gkatzogias e Kappos (2016) compilaram as tecnologias de controle semiativo em estruturas civis que proporcionavam o controle da resposta sísmica, levando em consideração adaptação e confiança, quando comparados a controle passivos e ativos. Os resultados foram obtidos a partir de estudos analíticos e experimentais de dispositivos semiativos.

Oliveira (2016) sugere uma alternativa ao dissipador do tipo *Added Damping and Stiffness* (ADAS), realizando a otimização topológica de um dissipador metálico aplicado para redução de vibrações em edificações sujeitas a terremotos, considerando através de análise numérica e experimental o formato adequado desse dispositivo. Na simulação as estruturas foram submetidas a uma excitação sísmica correspondente ao registrado no terremoto *El Centro* com dados normalizados para uma aceleração máxima de projeto de 0,33g. A partir dos resultados conclui-se que o dissipador metálico aumenta de forma considerável a dissipação de energia em relação à estrutura que não possui nenhum tipo de controle.

Rabelo (2016) indicou propostas de minimização das vibrações nas arquibancadas do Estádio Nacional de Brasília, com o objetivo de redução das acelerações com o uso de AMS e Amortecedores de Massa Sintonizados Múltiplos (AMSM). Simulações numéricas foram feitas considerando carregamento dinâmico devido a ação humana nas arquibancadas e as acelerações foram obtidas nos pontos de maior deslocamento. Os valores encontrados são comparados com os valores limites das normas brasileiras. A partir dos resultados, conclui-se que a adoção dos amortecedores reduz as acelerações e deslocamentos a níveis aceitáveis em praticamente todas as situações analisadas, mostrando-se uma solução eficiente.

Carmona (2016) propôs um amortecedor para atenuação de vibrações excessivas em lajes de concreto através de uma análise numérica e experimental. Foi projetado a partir de um estudo paramétrico, um AMS e encontrada a sua melhor posição. Como excitação foram consideradas cargas dinâmicas geradas pela ação humana. Com os resultados verificou-se o desempenho do AMS na redução da resposta das acelerações da estrutura, que se mostrou como uma solução alternativa simples para problemas de vibrações excessivas, e tem um baixo custo de fabricação.

Peña (2017) estudou numericamente a influência da interação solo-estrutura (ISE) no desempenho da técnica de acoplamento estrutural, que é ligar duas edificações vizinhas por meio de um dispositivo de acoplamento, com o objetivo de diminuir os efeitos dinâmicos em função das propriedades mecânicas de cada estrutura. Os resultados encontrados no trabalho evidenciam a importância da consideração dos efeitos de ISE na análise dinâmica de estruturas acopladas.

Chavarette (2017) estudou a ocorrência de ações sísmicas sobre estruturas civis, e como forma de minimizar as vibrações causadas pela excitação sísmica foi desenvolvido um controle híbrido estrutural. Para obtenção do carregamento sísmico foi utilizado o espectro Tajimi-Kanai. Com os resultados, comprovou-se que a estratégia de controle híbrido adotado demonstra eficiência para esse tipo de situação e pode ser utilizada como forma de auxiliar na atenuação de danos provocados às estruturas, evitando prejuízos econômicos, perdas biológicas e materiais.

Bosse (2017) avaliou a sensibilidade dos parâmetros de frequência de sintonização e razão da massa dos AMS que influenciam seu desempenho para controlar vibrações em edifícios sob carregamentos sísmicos. Para isso utilizou um modelo mais preciso em elementos finitos de pórtico plano não linear geométrico para obtenção do comportamento estrutural de um edifício *shear building* de 20 pavimentos. Na simulação dos terremotos, desenvolveu-se um programa para geração de processos estocásticos totalmente não estacionários e espectro compatíveis, simulados para três diferentes configurações de solo. Os resultados encontrados mostram que o AMS sintonizados para altas frequências tem melhor desempenho na minimização de deslocamentos e frequências de oscilação da estrutura. Essa conclusão vai contra a literatura, de que dispositivos sintonizados para a primeira frequência natural são mais eficientes. O melhor desempenho do AMS foi observado em dispositivos com altas razões de massa (maiores que 10%) e moderadas a altas frequências de sintonização.

Kalehsar e Khodaie (2018) indicaram um novo sistema estrutural para minimização das vibrações causadas pela ação do vento em edifícios super altos. A proposta é uma combinação de uma estrutura tubular externa e uma estrutura interna central, separadas na parte superior e inferior. Para validação do método foi comparado com uma estrutura controlada pelo sistema AMS. Os resultados revelam que a nova proposta reduz as vibrações induzidas pelo vento e pode garantir o conforto do usuário em solicitações extremas do vento.

Ribeiro (2018) apresentou uma proposta para análise numérica de um edifício sujeito a forças dinâmicas de vento, através de uma simulação de iteração fluido-estrutura bidimensional. As vibrações são controladas por meio de sistema de controle ativo (controle ótimo) e sistema de controle semiativo (magneto reológico). A partir dos resultados, a metodologia proposta apresentou bons resultados quando comparada com resultados numéricos e experimentais presentes na literatura. E tem como vantagem a previsão do comportamento de uma estrutura excitada pelo vento e controlada por sistemas de controle estrutural.

Rahmani e Könke (2019) modificaram um algoritmo genérico com a adição de operadores genéricos multivariados e utilizaram-no para otimizar a posição e os parâmetros de Múltiplos Atenuadores Dinâmicos Sincronizados (MADS) em um edifício de 76 pavimentos submetidos a ações sísmicas. A partir dos resultados, foi notado que, sob excitações com grande amplitude nos modos mais altos, distribuir os MADS ao longo da altura do edifício é mais eficaz que usar um único dispositivo. Conclui-se também que a frequência do terremoto influencia significativamente na localização ideal dos atenuadores.

Roy e Matsagar (2020) investigaram os efeitos em edifícios de aço de vários andares equipados com dispositivos de controle com resposta passiva de vibração dissipativa de energia sob forças induzidas por terremotos e ventos. Os dispositivos de controle de resposta passiva incluem contraventamentos de aço, amortecedores viscosos e viscoelásticos. Chegou-se à conclusão de que os dispositivos passivos são eficazes para controlar a resposta no nível mais baixo de demanda, no entanto, os mesmos dispositivos passivos podem não ser adequados para os níveis de demanda mais elevados.

Brandão e Miguel (2020) investigaram o uso de Atenuador Dinâmico Sincronizado (ADS) e MADS otimizados para redução do *story drift* e do máximo deslocamento horizontal, de um edifício *shear frame* de 10 pavimentos sob ação de diferentes terremotos. Foram avaliados três modelos: um ADS no topo, MADS distribuídos horizontalmente no topo e MADS dispostos verticalmente ao longo da estrutura. Os resultados indicam que todos os modelos foram adequados para respeitar os limites impostos pela normativa.

Liu *et al.* (2020) propuseram um método para determinar os parâmetros ótimos de um ADS no domínio da frequência, através de um algoritmo genérico, para estruturas sob excitação aleatória. Para análise numérica foi utilizada uma torre

de concreto armado de seção tubular com 168m de altura, modelada em elementos finitos 3D, sob ação do vento e equipada com um ADS, onde a otimização, foi usada para obter os parâmetros de projeto do dispositivo. O estudo experimental foi feito em uma plataforma vibratória, no qual um ADS foi projetado, conectado em um edifício de sete andares em escala reduzida e submetido a vários sismos. O objetivo do estudo experimental era avaliar o desempenho do ADS projeto pelo método propostos e comparando com a literatura. Os resultados mostram que o ADS projetado pelo método de otimização apresentou desempenho superior, quando comparado ao método de referência.

Recentemente, Brandão (2021) estudou sobre a otimização de parâmetros de projeto e posições de ADS simples e MADS, destinados ao controle de vibrações em edifícios submetidos a excitações sísmicas, objetivando a redução do deslocamento relativo entre pavimentos. Para isso, foram estudados três edifícios reais com diferentes alturas, os quais foram submetidos a um conjunto de três sismos reais e a um artificial. Os resultados mostraram que todos os cenários conseguiram controlar a estrutura, garantindo que o deslocamento entre os pavimentos não ultrapasse os valores limites estabelecidos em normas.

3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Com o avanço das pesquisas e tecnologias a compreensão do comportamento estrutural das edificações vem evoluindo rápido. Muito por causa da possibilidade de análise computacional com poder de processamento cada vez mais eficaz, permitindo a elaboração e aprimoramento de novos e mais complexos modelos de cálculo. Possibilitando assim, a análise dinâmica de estruturas com maior grau de liberdade e quantidade de parâmetros nas equações. Conseqüentemente, obtêm-se resultados mais próximos do real.

Este capítulo tem como objetivo apresentar a formulação utilizada na elaboração dos códigos computacionais. Aqui estão descritos o modelo de estudo e o método de cálculo das ações dinâmicas consideradas.

3.1 MODELO *SHEAR BUILDING*

O modelo *shear building* é utilizado na modelagem de um edifício de múltiplos pavimentos. Nele a estrutura é considerada um pórtico com pisos rígidos, com n graus de liberdade, que corresponde ao número de pavimentos da edificação e molas em paralelo que representam a rigidez dos pilares de cada pavimento. Dessa forma, pode-se analisar o comportamento da estrutura de uma forma intermediária aos modelos reduzidos para um grau de liberdade e aos modelos contínuos. Chegando assim, a resultados mais reais sem grande esforço computacional (SORIANO, 2014).

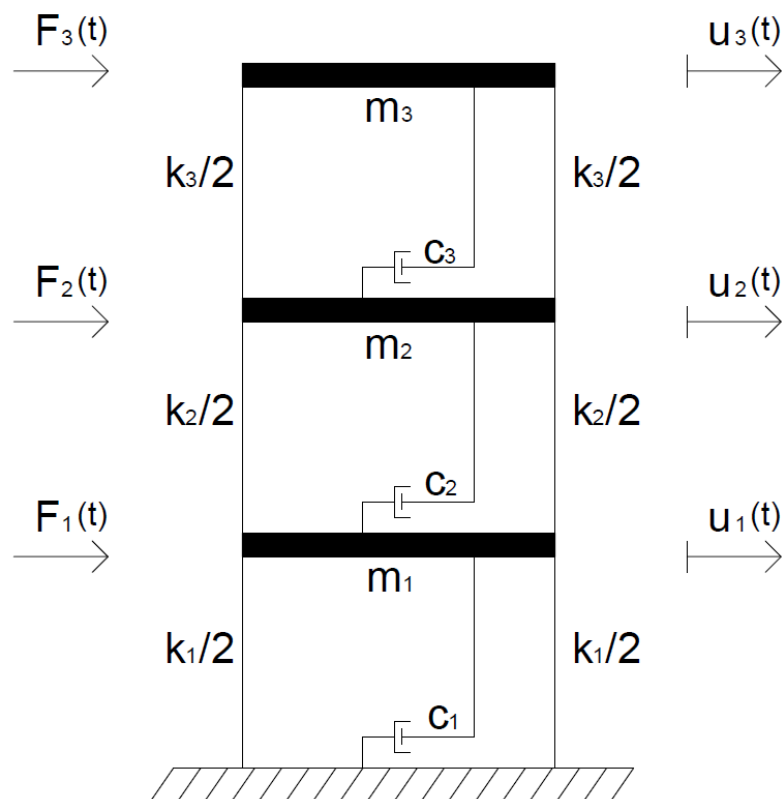
Um edifício com modelo do tipo *shear building* é definido como uma estrutura que não possui rotações nas barras horizontais e que as colunas são inextensíveis. Para que a estrutura tenha esse comportamento, são levantadas as seguintes hipóteses, que devem ser obedecidas (BRASIL e SILVA, 2015; PAZ e KIM, 2019):

- Nos nós não existem liberdade rotacional e as lajes possuem rigidez bem maiores que as rigidez dos pilares;
- Deve-se desprezar a deformação axial dos pilares, ou seja, durante o movimento horizontal as lajes permanecem no mesmo nível;
- Na altura de cada pavimento existe uma massa equivalente à soma das massas das vigas, lajes e pilares daquele andar.
- As ações são aplicadas apenas no plano do pórtico;

Em outras palavras, o edifício é simétrico, as lajes são infinitamente rígidas e os pilares não sofrem deformação axial. E conseqüentemente, o único movimento dos nós é horizontal.

O modelo estudado é um edifício com três pavimentos, como ilustrado na figura 3.1, tem-se três massas concentradas no nível dos pavimentos, conectadas por barras que apresentam rigidez e amortecimentos dos pilares daquele pavimento.

Figura 3.1 – Modelo *shear building* com três pavimentos.



Fonte: Autor.

Onde:

m_i, k_i, c_i : massa, rigidez e amortecimento de cada pavimento tipo;

$u_i(t)$: deslocamento em função do tempo em cada pavimento tipo;

$F_i(t)$: força externa em função do tempo em cada pavimento tipo;

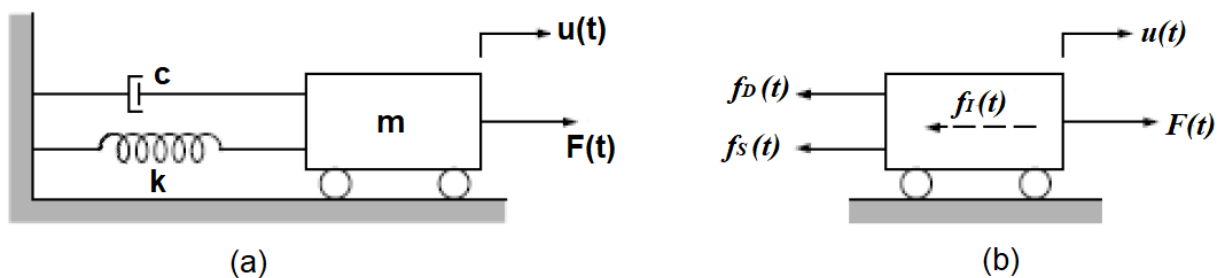
Sendo: $i = 1, 2$ e 3 , que corresponde o número de pavimentos.

As equações de movimento de cada pavimento podem ser determinadas por uma análise do diagrama de corpo livre, que será descrito na próxima seção.

3.1.1 Equações de equilíbrio

Considere um sistema de um grau de liberdade, sendo o seu diagrama de corpo livre representado na figura 3.2. Toda a massa do sistema está concentrada no bloco rígido, que está restrito pelos roletes com relação a deslocamentos na vertical e, portanto, só pode se mover horizontalmente. Logo, todo o deslocamento da estrutura pode ser descrito pela função $u(t)$. A resistência elástica ao deslocamento advém da mola e sua constante k , enquanto o mecanismo de perda de energia é representado pelo amortecedor c . A força externa está descrita pela componente $F(t)$.

Figura 3.2 – Sistema de um grau de liberdade: (a) modelo massa-mola-amortecedor (b) diagrama de corpo livre.



Fonte: Autor.

O equilíbrio desse corpo rígido pode ser descrito através do princípio de D'Alambert, com a seguinte equação (BRASIL e SILVA, 2015):

$$f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = F(t) \quad (3.1)$$

Essas forças à esquerda da igualdade representa uma função do deslocamento $u(t)$ ou de suas derivadas. O movimento da massa do bloco causa a força de inércia, que corresponde ao produto da massa e aceleração:

$$f_I(t) = m\ddot{u}(t) \quad (3.2)$$

Multiplicando a constante de amortecimento pela velocidade do conjunto, tem-se a força de amortecimento, no caso de amortecimento viscoso:

$$f_D(t) = c\dot{u}(t) \quad (3.3)$$

Usando a Lei de Hooke, tem-se a força elástica, que é o produto da rigidez e o deslocamento do conjunto:

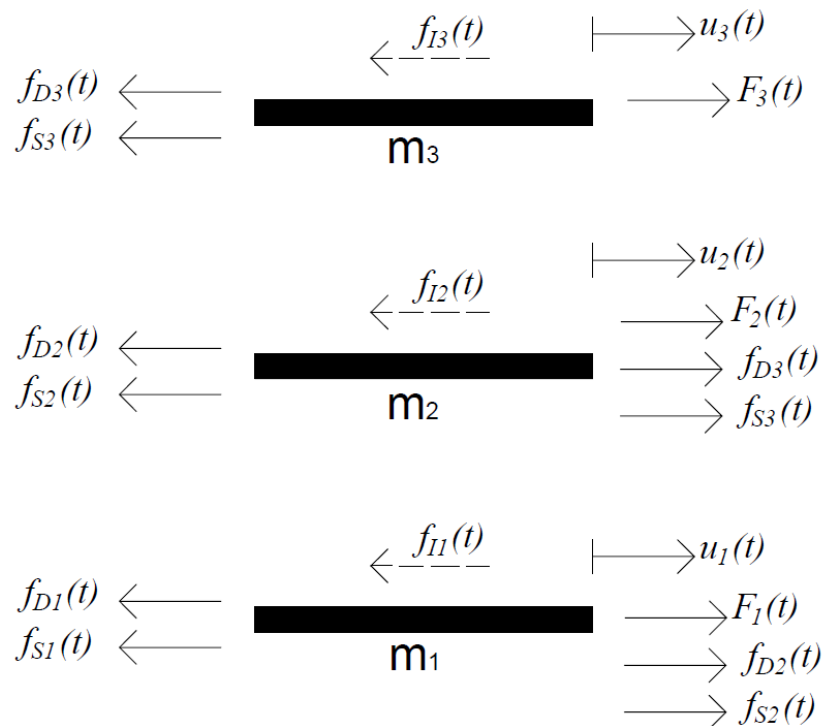
$$f_S(t) = ku(t) \quad (3.4)$$

Substituindo as equações (3.2), (3.3) e (3.4) em (3.1), tem-se a equação de movimento do sistema de um grau de liberdade, que é descrito por uma equação diferencial ordinária de segunda ordem:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = F(t) \quad (3.5)$$

Com o intuito de aplicar esses conceitos para o sistema de três graus de liberdade estudado neste trabalho, é ilustrado na figura 3.3, o diagrama de corpo livre do modelo estrutural representado na figura 3.1.

Figura 3.3 – Diagrama de corpo livre do edifício com três graus de liberdade.



Onde:

$$f_{I1}(t) = m_1\ddot{u}_1 ; f_{D1}(t) = c_1\dot{u}_1 ; f_{S1}(t) = k_1u_1 \quad (3.6)$$

$$f_{I2}(t) = m_2\ddot{u}_2 ; f_{D2}(t) = c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) ; f_{S2}(t) = k_2(u_2 - u_1) \quad (3.7)$$

$$f_{I3}(t) = m_3\ddot{u}_3 ; f_{D3}(t) = c_3(\dot{u}_3 - \dot{u}_2) ; f_{S3}(t) = k_3(u_3 - u_2) \quad (3.8)$$

Aplicando o princípio de D'Alambert no diagrama de corpo livre da figura 3.3 e utilizando as equações (3.6), (3.7) e (3.8), tem-se:

$$\begin{cases} m_1\ddot{u}_1 + c_1\dot{u}_1 + k_1u_1 - c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) - k_2(u_2 - u_1) = F_1(t) \\ m_2\ddot{u}_2 + c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + k_2(u_2 - u_1) - c_3(\dot{u}_3 - \dot{u}_2) - k_3(u_3 - u_2) = F_2(t) \\ m_3\ddot{u}_3 + c_3(\dot{u}_3 - \dot{u}_2) + k_3(u_3 - u_2) = F_3(t) \end{cases} \quad (3.9)$$

Reorganizando os termos do sistema de equações (3.9), tem-se:

$$\begin{cases} m_1\ddot{u}_1 + (c_1 + c_2)\dot{u}_1 - c_2\dot{u}_2 + (k_1 + k_2)u_1 - k_2u_2 = F_1(t) \\ m_2\ddot{u}_2 + (c_2 + c_3)\dot{u}_2 - c_2\dot{u}_1 - c_3\dot{u}_3 + (k_2 + k_3)u_2 - k_2u_1 - k_3u_3 = F_2(t) \\ m_3\ddot{u}_3 - c_3\dot{u}_2 + c_3\dot{u}_3 - k_3u_2 + k_3u_3 = F_3(t) \end{cases} \quad (3.10)$$

A equação (3.5) pode ser escrita na forma matricial:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (3.11)$$

Onde:

\mathbf{M} – a matriz de massa;

\mathbf{C} – a matriz de amortecimento;

\mathbf{K} – a matriz de rigidez;

\mathbf{F} – o vetor de forças;

$\ddot{\mathbf{U}}$ – o vetor de aceleração;

$\dot{\mathbf{U}}$ – o vetor de velocidades;

\mathbf{U} – o vetor de deslocamentos.

Usando a forma matricial (3.11), o sistema de equações (3.10) pode ser representado pelas seguintes matrizes:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}; \quad \ddot{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{bmatrix}; \quad (3.12)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix}; \quad \dot{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{bmatrix}.$$

O sistema de equações de movimento (3.10) pode ser obtido por outros métodos, sendo um deles o método de Euler-Lagrange, que é uma formulação alternativa, reescrita de maneira equivalente em termos da energia cinética (T) e potencial (U) do corpo:

$$T = \frac{1}{2} m_i \dot{u}_i^2 + \frac{1}{2} I_i m \dot{\theta}^2 \quad (3.13)$$

$$U = \frac{1}{2} k_i u_i \quad (3.14)$$

Sendo: I_i o momento de inércia da massa e $\dot{\theta}$ a velocidade angular em rad/s, no caso de um corpo rígido.

Pode-se calcular os termos que são essencialmente dissipativos. A energia dissipativa (E_d), no caso de amortecimento viscoso, é dada por:

$$E_d = \frac{1}{2} c_i \dot{u}_i^2 \quad (3.15)$$

Sabe-se que o Lagrangiano (L) pode ser definido pela equação (3.16), e a equação de Lagrange pode ser obtida pela expressão geral (3.17):

$$L = T - V \quad (3.16)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial u_i} = F_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.17)$$

Adicionando o termo dissipativo e expandindo a equação (3.17), pode-se obter a equação de Lagrange para o caso geral:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial u_i} + \frac{\partial U}{\partial u_i} + \frac{\partial E_d}{\partial \dot{u}_i} = F_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.18)$$

Sendo: F_i a força externa aplicada na coordenada i do sistema.

Através da equação (3.18), pode-se escrever a equação do movimento de um sistema de vários graus de liberdade, sem a necessidade de fazer um diagrama de corpo livre de cada termo do sistema. Sendo assim, possível obter a matriz de massa, amortecimento e rigidez do sistema em análise.

Aplicando esse procedimento no modelo *shear building* da figura (3.1), usando as equações (3.13) a (3.18), a energia cinética (T) total do sistema, através da equação (3.13), é dada por:

$$T(\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{u}_3) = \frac{1}{2} (m_1 \dot{u}_1^2 + m_2 \dot{u}_2^2 + m_3 \dot{u}_3^2) \quad (3.19)$$

Apesar de ser um corpo rígido, em caso de edifícios considera-se a velocidade angular $\dot{\theta}$ igual a zero, pelo fato da sua rotação ser muito pequena, podendo assim ser desprezada.

A energia potencial (U) total do sistema, usando a equação (3.14), é dada por:

$$U(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{2} (k_1 u_1^2 + k_2 (u_2 - u_1)^2 + k_3 (u_3 - u_2)^2) \quad (3.20)$$

O termo da energia dissipativa (E_d) para este sistema, usando a equação (3.15), pode ser calculado como:

$$E_d(\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{u}_3) = \frac{1}{2} (c_1 \dot{u}_1^2 + c_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1)^2 + c_3 (\dot{u}_3 - \dot{u}_2)^2) \quad (3.21)$$

Aplicando a equação (3.18) para a coordenada u_1 , tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial u_1} + \frac{\partial U}{\partial u_1} + \frac{\partial E_d}{\partial \dot{u}_1} = F_1(t) \quad (3.22)$$

Com base nas equações (3.19), (3.20) e (3.21), e após solucionar a expressão (3.22), chega-se na equação de movimento para esta coordenada:

$$m_1\ddot{u}_1 + c_1\dot{u}_1 + c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1)(-1) + k_1u_1 + k_2(u_2 - u_1)(-1) = F_1(t) \quad (3.23)$$

Reorganizando os termos, tem-se:

$$m_1\ddot{u}_1 + (c_1 + c_2)\dot{u}_1 - c_2\dot{u}_2 + (k_1 + k_2)u_1 - k_2u_2 = F_1(t) \quad (3.24)$$

Fazendo de modo análogo para as coordenadas u_2 e u_3 , chega-se nas seguintes equações de movimento para estas coordenadas, respectivamente:

$$m_2\ddot{u}_2 + (c_2 + c_3)\dot{u}_2 - c_2\dot{u}_1 - c_3\dot{u}_3 + (k_2 + k_3)u_2 - k_2u_1 - k_3u_3 = F_2(t) \quad (3.25)$$

$$m_3\ddot{u}_3 - c_3\dot{u}_2 + c_3\dot{u}_3 - k_3u_2 + k_3u_3 = F_3(t) \quad (3.26)$$

Como pode ser observado, o sistema de equações (3.10) corresponde ao conjunto de equações (3.24), (3.25) e (3.26). Portanto, pode-se concluir que as matrizes (3.12) são as mesmas matrizes obtidas pelo método de Euler-Lagrange.

3.1.1.1 Redução de ordem do sistema de equações diferenciais

Para facilitar as análises, é possível transformar o sistema de equações (3.10) em um sistema de equações diferenciais ordinária de primeira ordem. Sendo assim, sejam:

$$u_1 = y_1; \quad \dot{y}_1 = y_2; \quad u_2 = y_3; \quad \dot{y}_3 = y_4; \quad u_3 = y_5; \quad \dot{y}_5 = y_6 \quad (3.27)$$

Derivando (3.27) em relação ao tempo, tem-se as seguintes relações:

$$\dot{u}_1 = \dot{y}_1 = y_2; \quad \dot{y}_1 = \dot{y}_2 = \ddot{u}_1; \quad \dot{u}_2 = \dot{y}_3 = y_4; \quad (3.28)$$

$$\dot{y}_3 = \dot{y}_4 = \ddot{u}_2; \quad \dot{u}_3 = \dot{y}_5 = y_6; \quad \dot{y}_5 = \dot{y}_6 = \ddot{u}_3.$$

Substituindo as definições feitas em (3.27) e (3.28), no sistema de equações (3.10), isolando as derivadas de primeira ordem em cada uma das equações, considerando que não há excitação externa e adicionando as novas variáveis ao sistema, tem-se:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\frac{(k_1 + k_2)y_1}{m_1} - \frac{(c_1 + c_2)y_2}{m_1} + \frac{k_2 y_3}{m_1} + \frac{c_2 y_4}{m_1} \\ \dot{y}_3 = y_4 \\ \dot{y}_4 = \frac{k_2 y_1}{m_2} + \frac{c_2 y_2}{m_2} - \frac{(k_2 + k_3)y_3}{m_2} - \frac{(c_2 + c_3)y_4}{m_2} + \frac{k_3 y_5}{m_2} + \frac{c_3 y_6}{m_2} \\ \dot{y}_5 = y_6 \\ \dot{y}_6 = \frac{k_3 y_3}{m_3} + \frac{c_3 y_4}{m_3} - \frac{k_3 y_5}{m_3} - \frac{c_3 y_6}{m_3} \end{cases} \quad (3.29)$$

Sendo assim, a matriz Jacobiana do sistema é dada por:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{(k_1 + k_2)}{m_1} & -\frac{(c_1 + c_2)}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \frac{c_2}{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} & -\frac{(k_2 + k_3)}{m_2} & -\frac{(c_2 + c_3)}{m_2} & \frac{k_3}{m_2} & \frac{c_3}{m_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{k_3}{m_3} & \frac{c_3}{m_3} & -\frac{k_3}{m_3} & -\frac{c_3}{m_3} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

3.1.2 Parâmetros físicos

Para as simulações numéricas foram adotados os parâmetros físicos apresentados na tabela 3.1, que foram utilizados por Chopra (1995) e Corbani (2006). Esse exemplo trata de uma edificação em estrutura metálica e o amortecimento da estrutura é representado pela matriz de amortecimento de Rayleigh, com taxa de amortecimento nos dois primeiros modos de vibração de 5%. Foi adotado o módulo de elasticidade E de 205 GPa, a altura dos pilares l_i em todos os pavimentos é 3 m e a tensão de escoamento f_y de 250 MPa (aço A36).

Tabela 3.1 – Parâmetros físicos do modelo.

Pavimento	Massa (Kg)	Rigidez (N/m)
1	45.344	33.379.175
2	45.344	25.603.543
3	45.344	15.250.045

Fonte: Autor.

Com as definições das características físicas da estrutura, pode-se obter as frequências naturais e respectivos modos de vibração. Para determinação das frequências próprias do sistema é efetuado uma análise do movimento em regime de vibração livre e sem amortecimento.

Substituindo os valores da tabela 3.1 nas matrizes \mathbf{M} e \mathbf{K} indicadas em (3.12), os valores das frequências é um cálculo direto que consiste na resolução dos autovalores do seguinte sistema:

$$\det(\mathbf{K} - \omega_n^2 \cdot \mathbf{M}) = 0 \quad (3.31)$$

Pelas propriedades das matrizes \mathbf{M} e \mathbf{K} sabe-se, então, que ω_n é a frequência natural para cada um dos n modos de vibração do sistema, com os seguintes valores:

$$\omega_n = \begin{bmatrix} 10,80 \\ 26,33 \\ 41,57 \end{bmatrix} \text{ (rad/s)} \quad (3.32)$$

Assim, cada frequência (ω_n) corresponde a um modo de vibração (Φ_n). Os modos de vibração consistem na determinação dos autovetores do seguinte sistema:

$$(\mathbf{K} - \omega_n^2 \cdot \mathbf{M}) \cdot \Phi_n = 0 \quad (3.33)$$

O cálculo analítico de (3.33) leva à solução de um sistema de equações indeterminadas e, por essa razão, tem que se arbitrar um valor em cada modo de maneira a que os outros dois valores venham em função do valor arbitrado. Normalmente o valor arbitrado é o da unidade para simplificar os cálculos, mas como os valores aqui obtidos foram através do MATLAB, a atribuição foi feita aleatoriamente pelo programa. Sabendo que existem n modos de vibração, pode-se criar a matriz modal $n \times n$:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0,0012 & -0,0026 & -0,0037 \\ 0,0025 & -0,0028 & 0,0028 \\ 0,0038 & 0,0027 & -0,0007 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

É de salientar que a determinação das frequências naturais da estrutura e seus respectivos modos de vibração foram calculados considerando o amortecimento nulo, o que na realidade não acontece, pois, em todas as estruturas ocorre amortecimento.

Para se determinar a matriz de amortecimento, será usado o método de Rayleigh, abordado em Clough e Penzien (1975). Para isso, utiliza-se 5% de taxa de amortecimento (ξ), relativo aos dois primeiros modos naturais de vibração da estrutura. No caso de dois modos, serão, ξ_r e ξ_s , respectivamente. Com isso, a matriz de amortecimento de Rayleigh pode ser escrita como:

$$\mathbf{C} = A_0 \mathbf{M} + A_1 \mathbf{K} \quad (3.35)$$

onde A_0 e A_1 são obtidas resolvendo-se o sistema:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_r} & \omega_r \\ \frac{1}{\omega_s} & \omega_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_r \\ \xi_s \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

os valores ω_r e ω_s são as frequências naturais de vibração da estrutura para os dois modos para os quais foram arbitradas as taxas de amortecimento.

Na estrutura estudada, os valores das frequências dos dois modos de vibração são: $\omega_r = 10,80 \text{ rad/s}$ e $\omega_s = 26,33 \text{ rad/s}$. Substituindo esses valores em (3.35) e a taxa de amortecimento $\xi_r = \xi_s = 0,05$, obtém-se $A_0 = 0,7659$ e $A_1 = 0,0027$. Aplicando os valores encontrados na equação (3.35), juntamente com as matrizes \mathbf{M} e \mathbf{K} indicadas em (3.12), chega-se na matriz de amortecimento.

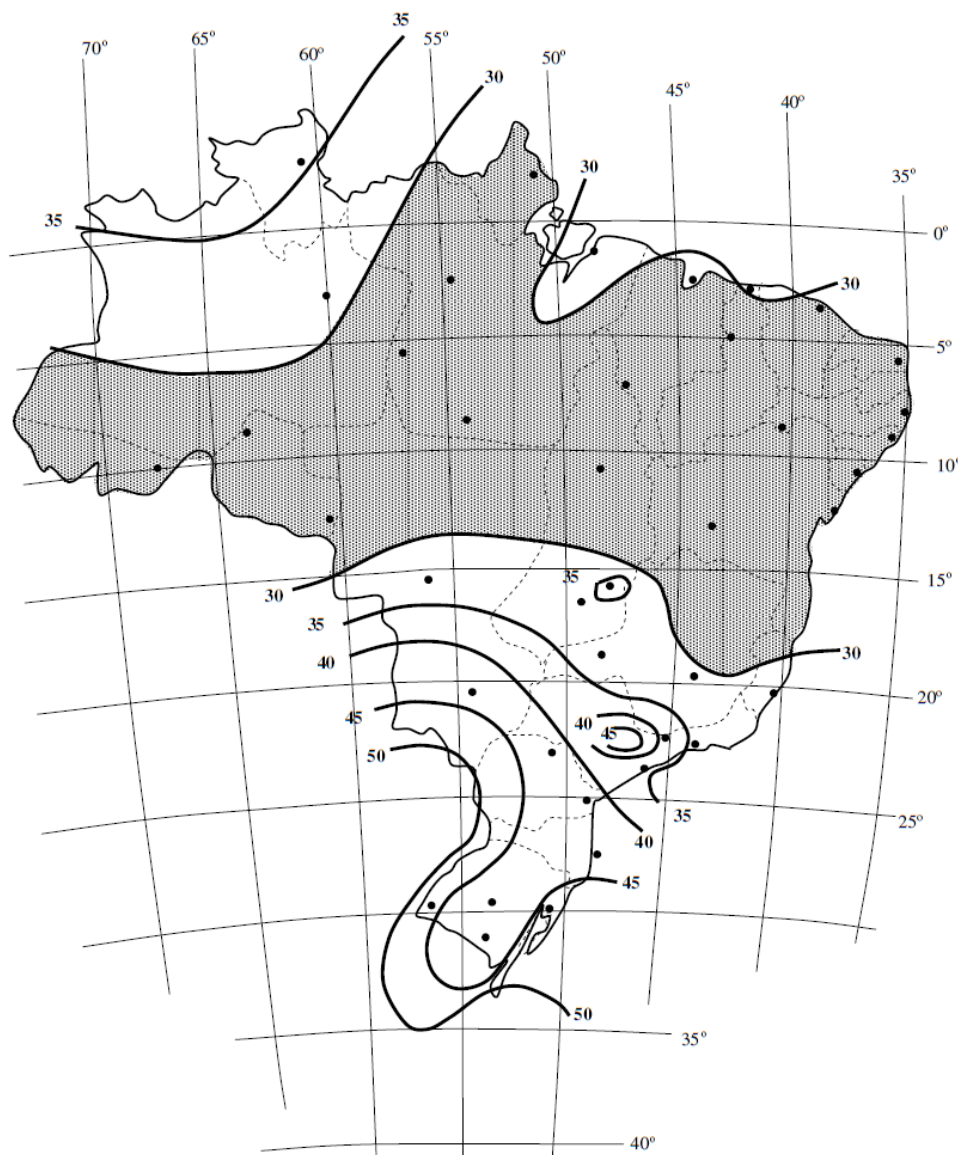
3.2 CARGA DINÂMICA DO VENTO

Para as simulações serão consideradas ações dinâmicas do vento no terceiro pavimento do modelo estudado (figura 3.1), ou seja, a $F_3(t)$ será a força externa provocada pelo vento. Para isso, será utilizado a NBR 6123 (ABNT, 1988), que estabelece parâmetros e definições para determinar as forças devidas o vento em edificações. Será usado também, o método do vento sintético modificado, proposto por Carril (2000). Para fins de cálculo, o vento será considerado um carregamento de séries temporais, obtido através do espectro de Davenport.

3.2.1 NBR 6123:1988

Na NBR 6123 (ABNT, 1988) são definidas condições para determinar a ação do vento em estruturas de modo geral, onde esses conceitos são baseados no estudo estatístico aproximado proposto por Davenport na década de sessenta, com algumas alterações ao calcular a resposta flutuante.

Figura 3.4 – Isopletas de velocidade básica do vento (V_0 em m/s).



Fonte: ABNT NBR 6123 (1988).

Segundo a norma, a velocidade básica do vento (V_0) é obtida através de isopletas que foram desenvolvidas por meio de registros das estações meteorológicas no Brasil. Ela é definida como sendo a velocidade de uma rajada em

um período de 3s, excedida em média uma vez em 50 anos, a dez metros de altura do terreno em campo aberto e plano. A figura 3.4 mostra as isopletas, que permitem determinar a velocidade V_0 nas diferentes regiões do Brasil.

Com a velocidade básica é possível determinar a velocidade de projeto (\bar{V}_p), que corresponde a uma média de dez minutos a dez metros do solo em um terreno aberto e com poucos obstáculos:

$$\bar{V}_p = 0,69V_0S_1S_3 \quad (3.37)$$

Sendo que:

S_1 é o fator topográfico;

S_3 é o fator estatístico.

O fator topográfico S_1 , considera as grandes variações locais na superfície do terreno e a norma brasileira fornece valores padronizados para condições típicas topográficas. O fator estatístico S_3 é fundamentado em bases estatísticas, que leva em consideração o grau de segurança necessário para a vida útil da edificação. Os fatores S_1 e S_3 são determinados a partir das recomendações da NBR 6123 (ABNT, 1988).

A norma brasileira traz dois métodos de análise de estruturas submetidas a excitações aleatórias do vento. Um deles é o método simplificado, que considera somente a contribuição do primeiro modo de vibração para o cálculo da resposta flutuante. Neste caso a frequência natural da estrutura, o correspondente modo de vibração e o amortecimento modal são obtidos de forma estimada em função da altura da edificação e das características do seu sistema estrutural.

O modelo simplificado é adotado para estruturas apoiadas na base e de altura inferior a 150 metros. Neste caso, a variação da pressão dinâmica em função da altura é expressa por:

$$q(z) = \bar{q}_0 b^2 \left[\left(\frac{z}{z_r} \right)^{2p} + \left(\frac{h}{z_r} \right)^p \left(\frac{z}{h} \right)^\gamma \frac{1 + 2\gamma}{1 + \gamma + p} \xi \right] \quad (3.38)$$

$$\bar{q}_0 = 0,613 \bar{V}_p^2 \quad (3.39)$$

Sendo:

\bar{q}_0 a pressão dinâmica do vento em N/m^2 em função da velocidade de projeto (\bar{V}_p) em m/s;

b o parâmetro em função da categoria do terreno;
 z a cota acima do terreno;
 z_r a altura de referência: 10m ;
 p o expoente da lei potencial de variação de S_2 ;
 h a altura da edificação acima do terreno, medida até o topo da platibanda ou nível do beiral;
 γ o expoente da lei potencial de expressão do modo de vibração;
 ξ o coeficiente de amplificação dinâmica.

A primeira parcela dentro do colchete da equação (3.38) é relativa à resposta média, já a segunda parcela equivale à amplitude máxima da resposta flutuante. Estes parâmetros e expoentes são apresentados na norma em função da categoria de rugosidade do terreno.

Sendo a pressão uma função contínua em função da altura, a força estática equivalente é determinada por:

$$F = qAC_a \quad (3.40)$$

onde:

C_a é o coeficiente de arrasto que depende da intensidade de turbulência e da geometria da estrutura em estudo, obtido pelos ábacos na NBR 6123 (ABNT, 1988);

A é a área de atuação do vento na edificação;

q é a pressão dinâmica do vento.

A amplitude máxima da aceleração pode ser calculada pela seguinte expressão:

$$a = 4\pi^2 f_j^2 u_j \quad (3.41)$$

Sendo f_j a frequência natural de vibração e u_j é o deslocamento devido à parcela flutuante.

A norma brasileira estabelece que a máxima amplitude de aceleração não ultrapasse $0,1\text{m/s}^2$. A verificação do conforto do usuário deve ser feita para velocidades do vento com maior probabilidade de ocorrência que a velocidade de projeto. A norma considera admissível que essa amplitude seja excedida em média, uma vez a cada dez anos.

3.2.2 Método do vento sintético

O método do vento sintético foi desenvolvido por Franco (1993) e foram propostas modificações por Carril (2000), que também serão adotadas neste trabalho. Este método é usado para o cálculo do efeito dinâmico do vento em estruturas e é baseado na técnica de Monte Carlo para representação das pressões flutuantes do vento.

O procedimento é utilizado por programas e algoritmos que permitem a inclusão de séries temporais de carregamento. Através do espectro de potência, as forças do vento podem ser decompostas em m harmônicos, sendo um deles ressonante, ou seja, coincidente com a frequência natural da estrutura. O ângulo fase é variado aleatoriamente e utiliza-se um modelo aproximado para representar a correlação espacial das forças do vento em função da frequência de rajada. Com a excitação da estrutura separadamente por m harmônicos, resulta-se o espectro da resposta, sendo ele deslocamentos, velocidade ou esforços solicitantes. Integrando o espectro da resposta obtém-se a resposta de pico. Uma análise estatística é feita para se obter a resposta característica na coordenada analisada.

Posteriormente, a estrutura é excitada mais uma vez com as forças harmônicas da combinação pseudo aleatória, que obtiveram a resposta mais perto da resposta característica, dessa forma pode-se gerar, valores característicos próximos do real em toda a estrutura.

A NBR 6123 (ABNT, 1988), recomenda um intervalo de tempo para a velocidade média de 600 segundos e a velocidade de rajada de 3 segundos para a categoria II a uma altura de 10m. Visando simplificar o método, Franco (1993) generalizou esta relação para todas as categorias e altitudes. A modificação proposta por Carril (2000) é que se considere para cada categoria e altitude, as fórmulas contidas na norma brasileira para a velocidade média e de rajada. Com isso, a pressão média e a pressão máxima flutuante serão distintas para cada categoria do terreno e cada altura da edificação.

Portanto, a velocidade média (V_{600}) e velocidade de rajada (V_3), adotando os valores de b e p , correspondentes, conforme a NBR 6123 (ABNT, 1988), são dadas por:

$$V_{600}(z) = 0,69bV_0 \left(\frac{z}{10} \right)^p \quad (3.42)$$

$$V_3(z) = bV_0 \left(\frac{z}{10} \right)^p \quad (3.43)$$

Tendo como base a equação (3.39), pode-se determinar agora a parte flutuante das pressões do vento:

$$q_f = q_3 - q_{600} = 0,613(V_3^2 - V_{600}^2) \quad (3.44)$$

onde:

q_f é a pressão flutuante; q_3 e q_{600} são as pressões obtidas com a velocidade de rajada e média, respectivamente.

A parte flutuante é então separada em um número finito de harmônicos (m) conforme o espectro de potência das rajadas. A expressão de densidade espectral de potencial utilizada será a sugerida por Davenport:

$$\frac{fS(f)}{\sigma^2} = 4 \frac{X_1^2}{(1 + X_1^2)}; \quad \text{onde: } X_1 = \frac{1200f}{\bar{V}} \quad (3.45)$$

sendo:

f a frequência das rajadas; $S(f)$ a densidade espectral do vento; σ é a velocidade de cisalhamento do vento; X_1 é a frequência adimensional; \bar{V} a velocidade média, que será igual a \bar{V}_p .

Como é utilizado o espectro de Davenport, o método sugere que seja escolhida a faixa de frequências de 0,0017Hz até 2,5Hz para a decomposição do espectro de potência, ou seja, períodos de 0,4s até 600s. A parcela flutuante da pressão do vento $q(t)$ pode ser representada por no mínimo 11 harmônicos, sendo um deles o ressonante, e os outros múltiplos ou submúltiplos desta escolha. Sendo assim, tem-se que a pressão flutuante do vento pode ser calculada com as seguintes equações:

$$q(t) = \sum_{k=1}^m C_k \cos(\omega_k t - \theta_k) \quad (3.46)$$

$$C_k = \sqrt{2 \int_k S(f) df} \quad (3.47)$$

sendo:

k a faixa de frequência de cada harmônico; m o número total de harmônicos; C_k, ω_k, θ_k a amplitude, frequência e ângulo de fase da função harmônica, respectivamente;

Os valores de C_k são determinados por integração do espectro de potência nos intervalos de frequência dos harmônicos m . A amplitude do harmônico k devem ser ajustadas a partir dos coeficientes C_k , para representar a pressão flutuante q_f . Dessa forma a amplitude ajustada q_k' para cada um dos harmônicos é dada por:

$$q_k' = \frac{C_k}{\sum_{k=1}^m C_k} q_f = c_k q_f \quad (3.48)$$

Considerando r o valor de k ressonante, Franco (1993) sugere reduzir à metade do valor do coeficiente c_r , que é amplitude do harmônico ressonante. Ele propõe que a soma das amplitudes c_k possua valor unitário. Para isso, deve-se acrescentar um valor correspondente a 25% de c_r nos valores dos coeficientes logo após e antes da amplitude do harmônico ressonante, conforme as equações a seguir:

$$cc_r = \frac{c_r}{2}; \quad cc_{r+1} = c_{r+1} + \frac{c_r}{4}; \quad cc_{r-1} = c_{r-1} + \frac{c_r}{4} \quad (3.49)$$

sendo: cc_k amplitude dos harmônicos normalizados; cc_r amplitude do harmônico ressonante normalizado;

A série de carregamentos que geram os históricos de carga são obtidas pela soma dos componentes harmônicos conforme uma determinação pseudo aleatória dos ângulos de fases, dando assim uma representação randômica ao processo:

$$q(t) = \sum_{k=1}^m cc_k \cos(\omega_k t - \theta_k) \quad (3.50)$$

A escolha dos ângulos de fase (θ_k) de cada um dos 11 harmônicos são obtidos de forma aleatória, entre $0 \leq \theta_k \leq 2\pi$, para cada θ_k será definido uma pressão de carregamento no tempo. A análise estatística é feita através da técnica de Monte Carlo, gerando-se randomicamente 20 históricos de carregamento para a estrutura. Levando em consideração a distribuição gaussiana, o deslocamento com

probabilidade de 95% de ocorrência, o qual limita em apenas 5% a probabilidade deste valor ser superado, é obtido por:

$$u = \bar{u} + 1,65\sigma \quad (3.51)$$

sendo:

u o valor máximo característico do deslocamento em uma coordenada; \bar{u} o valor médio dos deslocamentos e σ o desvio padrão dos deslocamentos nesta coordenada, correspondente aos 20 carregamentos gerados randomicamente.

Para se determinar todos os valores característicos dos deslocamentos, velocidade, aceleração e esforços solicitantes na estrutura analisada, adota-se a série temporal cuja resposta mais se aproxima da resposta característica (u) determinada estatisticamente pela equação (3.51). De acordo com Carril (2000), obtém-se dessa forma uma boa representação das características do vento real.

Finalmente, os harmônicos de forças (F_{flut}) e pressões flutuantes (Q), são dados por:

$$F_{flut} = QAC_a\xi \quad (3.52)$$

$$Q = q_f q(t) \quad (3.53)$$

Uma importante consideração na sistematização deste método é o conceito do tamanho da rajada, que é a dimensão de uma rajada perfeitamente correlacionada. Neste contexto, o comprimento da rajada (Δz_k) para cada harmônico é dado pela equação:

$$\Delta z_k = \frac{\bar{V}_p}{7f_k} \quad (3.54)$$

sendo f_k a frequência de cada harmônico em Hz.

Franco (1993) propõe algumas condições, para utilização do método: (i) O número de harmônicos deve ser maior que 11. Quanto maior for m , mais preciso é o método; (ii) O período de um dos harmônicos deve coincidir com o período fundamental da estrutura; (iii) Os períodos das funções harmônicas devem ser múltiplos ou submúltiplos do período ressonante por um fator de 2.

3.2.3 Aplicação no modelo estudado

A estrutura do edifício ilustrada na figura 3.1 e descrita no item 3.1.2 é analisada numericamente pelo método do vento sintético. Os dados necessários no que se referem as características da estrutura e parâmetros do vento definidos pela NBR 6123 (ABNT, 1988), estão relacionados na tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Propriedades da geometria do edifício e características do vento.

h	9m
Dimensão	28,30 x 12,20m
V_0	45 m/s
Categoria	IV
Classe	B
S_1	1
S_3	1,1
C_a	1,2
b	0,85
p	0,125
ξ	1,5

Fonte: Autor.

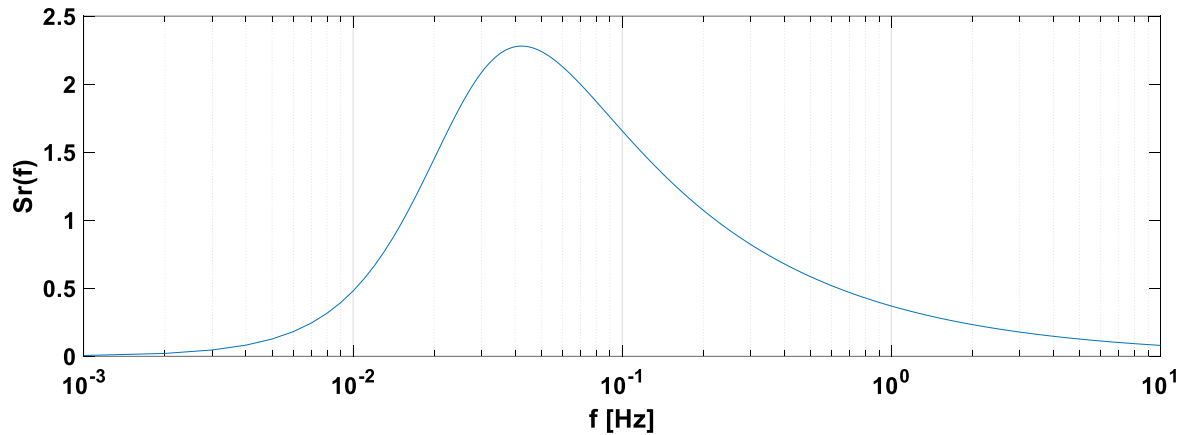
Os parâmetros acima permitem a determinação do carregamento do vento. Usando a equação (3.37) chega-se a uma $\bar{V}_p = 34,16 \text{ m/s}$. Através da equação (3.42) e (3.43) obtém-se $V_{600} = 26,05 \text{ m/s}$ e $V_3 = 37,75 \text{ m/s}$, respectivamente.

A determinação dos coeficientes cc_k para obtenção da amplitude de cada função harmônica é feita através da integração numérica do espectro de Davenport $S(f)$ dada pela equação (3.45) com três pontos de Gauss. O espectro de Davenport em escala logarítmica está ilustrado na figura 3.5.

Para facilitar o cálculo da integração numérica, foi elaborada uma planilha automatizada no Excel que está na tabela A.1 no Apêndice A. Os resultados consolidados desses coeficientes para cada harmônico são apresentados na tabela 3.3, observando-se que o harmônico dois é o ressonante, que corresponde a

primeira frequência natural da estrutura: $\omega_{n1} = 10,80 \text{ rad/s}$; $T_{n1} = 0,582\text{s}$; $f_{n1} = 1,718\text{Hz}$. Sendo: $r_k = T_k/T_r$ e $T_k = 1/f_k$.

Figura 3.5 – Espectro da potência do vento (Davenport).



Fonte: Autor

Tabela 3.3 – Amplitudes das componentes harmônicas do vento.

k	r_k	$T_k(s)$	$f_k(\text{Hz})$	ω_k (rad/s)	c_k	cc_k
1	0,5	0,291	3,4360	21,5890	0,04648	0,06111
r=2	1	0,582	1,7180	10,7945	0,05855	0,02927
3	2	1,164	0,8590	5,3973	0,07372	0,08835
4	4	2,328	0,4295	2,6986	0,09265	0,09265
5	8	4,657	0,2148	1,3493	0,11560	0,11560
6	16	9,313	0,1074	0,6747	0,14034	0,14034
7	32	18,626	0,0537	0,3373	0,15571	0,15571
8	64	37,253	0,0268	0,1687	0,14021	0,14021
9	128	74,505	0,0134	0,0843	0,09559	0,09559
10	256	149,010	0,0067	0,0422	0,05352	0,05352
11	512	298,021	0,0034	0,0211	0,02764	0,02764

Fonte: Autor.

A geração randômica dos ângulos de fase é feita pelo próprio programa MATLAB e 20 análises de carregamento foram realizadas para encontrar a resposta característica da estrutura, de acordo com a equação (3.51). Os valores de θ_k , gerados para cada um dos 11 harmônicos correspondentes aos 20 históricos de carga, estão apresentados na tabela A.3 no Apêndice A. Foi elaborado um algoritmo no MATLAB para análise no domínio do tempo, com uma carga composta por um

somatório de 11 harmônicos, conforme a equação (3.50), combinadas aleatoriamente para cada uma das 20 séries temporais de carregamento.

Franco (1993) sugere a definição de uma grandeza significativa para a análise estatística, que neste trabalho será o deslocamento máximo no 3º pavimento da estrutura. Que será obtido na série temporal, entre as 20 séries analisadas, fornecendo o valor da grandeza significativa que mais se aproxime do valor obtido estatisticamente, sendo esta série chamada de carregamento característico. Sendo assim, a combinação 17 da tabela A.4 no Apêndice A, foi adotada como carregamento característico, por apresentar resultados mais próximos dos determinados estatisticamente, para o deslocamento máximo no 3º pavimento.

Finalmente, a série temporal do carregamento característico do vento pode ser lançada no algoritmo do MATLAB, para calcular o histórico no tempo dos deslocamentos, velocidades e seus planos de fase. Para isso, acrescenta-se na equação (3.29), a parcela da força externa causada pelo vento $F_3(t)$ no 3º pavimento, resultando nas seguintes equações de equilíbrio:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\frac{(k_1 + k_2)y_1}{m_1} - \frac{(c_1 + c_2)y_2}{m_1} + \frac{k_2 y_3}{m_1} + \frac{c_2 y_4}{m_1} \\ \dot{y}_3 = y_4 \\ \dot{y}_4 = \frac{k_2 y_1}{m_2} + \frac{c_2 y_2}{m_2} - \frac{(k_2 + k_3)y_3}{m_2} - \frac{(c_2 + c_3)y_4}{m_2} + \frac{k_3 y_5}{m_2} + \frac{c_3 y_6}{m_2} \\ \dot{y}_5 = y_6 \\ \dot{y}_6 = \frac{k_3 y_3}{m_3} + \frac{c_3 y_4}{m_3} - \frac{k_3 y_5}{m_3} - \frac{c_3 y_6}{m_3} + \frac{F_3(t)}{m_3} \end{cases} \quad (3.55)$$

3.3 CARGA DINÂMICA DO TERREMOTO

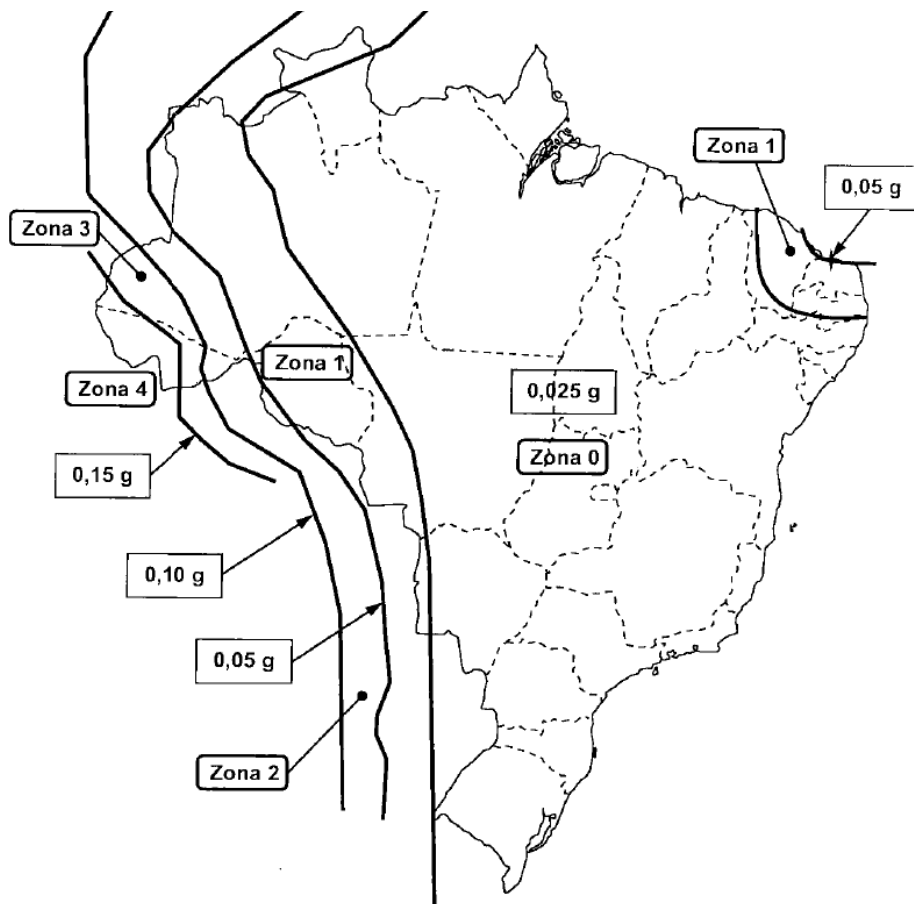
Para as simulações, também serão consideradas ações dinâmicas do terremoto no primeiro pavimento do modelo estudado (figura 3.1), ou seja, a $F_1(t)$ será a força externa provocada pelo sismo. Será simulado apenas a ação do sismo e posteriormente, será simulado a ação conjunta do vento e sismo. Para isso, será utilizado a NBR 15421 (ABNT, 2006), que estabelece parâmetros e critérios para determinar as forças dos sismos em estruturas. A metodologia utilizada será baseada no modelo do vento sintético, abordada nos trabalhos de Corbani (2006) e

Brandão (2021). Para fins de cálculo, o sismo será considerado um carregamento de séries temporais, obtido através do espectro de Kanai-Tajimi.

3.3.1 NBR 15421:2006

Em 2006, estimulada pela constatação de maiores atividades sísmicas registradas no Brasil nos anos anteriores, e pela necessidade de estabelecer normas técnicas brasileiras de acordo com às exigências internacionais, para uma maior integração econômica com outros países do mundo, a ABNT elaborou e publicou a NBR 15421:2006 – Projetos de estruturas resistentes a sismos. Ela estabelece critérios exigíveis para a análise da segurança das estruturas sujeitas às ações de sismos, objetivando a preservação da vida, redução de danos e a manutenção da funcionalidade na edificação, durante e após um evento sísmico (MIRANDA, 2010).

Figura 3.6 – Mapeamento da aceleração sísmica horizontal característica no Brasil para terrenos da classe B (“Rocha”).



Fonte: ABNT NBR 15421 (2006).

A NBR 15421 (ABNT, 2006) divide o território brasileiro em cinco zonas sísmicas, para que seja possível calcular as acelerações sísmicas horizontais (a_g), conforme mostrado na figura 3.6. Esses valores são normalizados para terrenos Classe B (Rocha, conforme item 6.2 da norma) nas faixas estabelecidas na tabela 3.4, onde $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ (aceleração da gravidade). Os valores de a_g são independentes do período da estrutura.

De acordo com a norma brasileira, os valores a serem considerados para a_g nas zonas 1 a 3, podem ser obtidos por interpolação das curvas da figura 3.6 ou, se for o caso, a partir de um estudo sísmológico e geológico específico para o projeto de qualquer estrutura.

Tabela 3.4 – Zonas sísmicas.

Zona sísmica	Valores de a_g
Zona 0	$a_g = 0,025g$
Zona 1	$0,025g \leq a_g \leq 0,05g$
Zona 2	$0,05g \leq a_g \leq 0,10g$
Zona 3	$0,10g \leq a_g \leq 0,15g$
Zona 4	$a_g = 0,15g$

Fonte: ABNT NBR 15421 (2006).

Alguns países possuem acelerômetros instalados em prédios, para se saber melhor, o seu comportamento aos terremotos. Além de fornecer informações importantes sobre terremotos, os dados registrados servem como base para futuros cálculos estruturais (PARISENTI, 2011).

Conforme a norma brasileira, estruturas dimensionadas para zonas 0 e 1 são classificadas como categoria sísmicas A, as localizadas na zona 2 classificam-se como categoria sísmicas B, já nas zonas 3 e 4 como categoria C. Para efeito de análise das estruturas, quando esta estiver localizada na zona 0, nenhum requisito de resistência antissísmicas é exigido.

As propriedades do terreno podem amplificar os efeitos de um terremoto, portanto a norma classifica os diferentes tipos de terreno de acordo com a tabela 3.5. Os parâmetros geotécnicos adotados na classificação são avaliados nos 30m superiores do terreno. Situações em que não se conhece a velocidade média de propagação de ondas de cisalhamento (v_s), a classificação do terreno pode ser feita

através do número médio de golpes (N), do ensaio de SPT normatizado pela NBR 6484 (ABNT,2020).

Tabela 3.5 – Classes do terreno.

Classe do terreno	Designação da Classe do terreno	Propriedades médias para os 30 m superiores do terreno	
		v_s	N
<i>A</i>	Rocha sã	$v_s \geq 1500$ m/s	(não aplicável)
<i>B</i>	Rocha	1500 m/s $\geq v_s \geq 760$ m/s	(não aplicável)
<i>C</i>	Rocha alterada ou solo muito rígido	760 m/s $\geq v_s \geq 370$ m/s	$N \geq 50$
<i>D</i>	Solo rígido	370 m/s $\geq v_s \geq 180$ m/s	$50 \geq N \geq 15$
<i>E</i>	Solo mole	$v_s \leq 180$ m/s	$N \leq 15$
	-	Qualquer perfil incluindo camada com mais de 3 m de argila mole	
<i>F</i>	-	Solo exigindo avaliação específica, como: <ol style="list-style-type: none"> 1. Solos vulneráveis à ação sísmica, como solos liquefazíveis, argilas muito sensíveis e solos colapsíveis fracamente cimentados; 2. Turfa ou argilas muito orgânicas; 3. Argilas muito plásticas; 4. Estratos muito espessos (≥ 35 m) de argila mole ou média. 	

Fonte: ABNT NBR 15421 (2006).

Na avaliação do desempenho sísmico, deve-se verificar se os deslocamentos estruturais podem implicar em danos ou perda da estabilidade. Os deslocamentos limites, em relação aos pavimentos estabelecidos pela norma, aplicam-se às categorias sísmicas B ou C e dependem do tipo de ocupação da edificação conforme estabelecido na tabela 4 da NBR 15421 (ABNT, 2006), estando limitados aos seguintes valores:

$$I - 0,020 h_{sx}; \quad II - 0,015 h_{sx}; \quad III - 0,010 h_{sx} \quad (3.56)$$

onde:

h_{sx} é a distância entre os pisos das lajes.

Para fins de classificação da edificação quanto à sua utilização, objetivando à proteção das edificações cuja funcionalidade seja definida como essencial para a preservação da vida humana ou que afetem maior número de pessoas frente a eventos sísmicos, a norma classifica as estruturas em três categorias de utilização.

A cada categoria é associado um fator de importância de utilização (I) conforme a tabela 4 da NBR 15421 (ABNT, 2006):

- Categoria III - $I = 1,5$ para estruturas essenciais (hospitais, corpo de bombeiros, estações de água, energia...);
- Categoria II - $I = 1,25$ para locais com reunião de pessoas (escolas, postos de saúde, penitenciárias...);
- Categoria I - $I = 1,0$ para as demais estruturas.

As partes do sistema estrutural formada pelos elementos responsáveis de resistir às forças sísmicas é chamada de sistema estrutural sismo-resistente. Esses sistemas são classificados de acordo com a tabela 6 da NBR 15421 (ABNT, 2006), onde cada um possui três parâmetros: coeficiente de modificação de resposta (R), coeficiente de sobre-resistência (Ω_0), e o coeficiente de amplificação de deslocamento, (C_d).

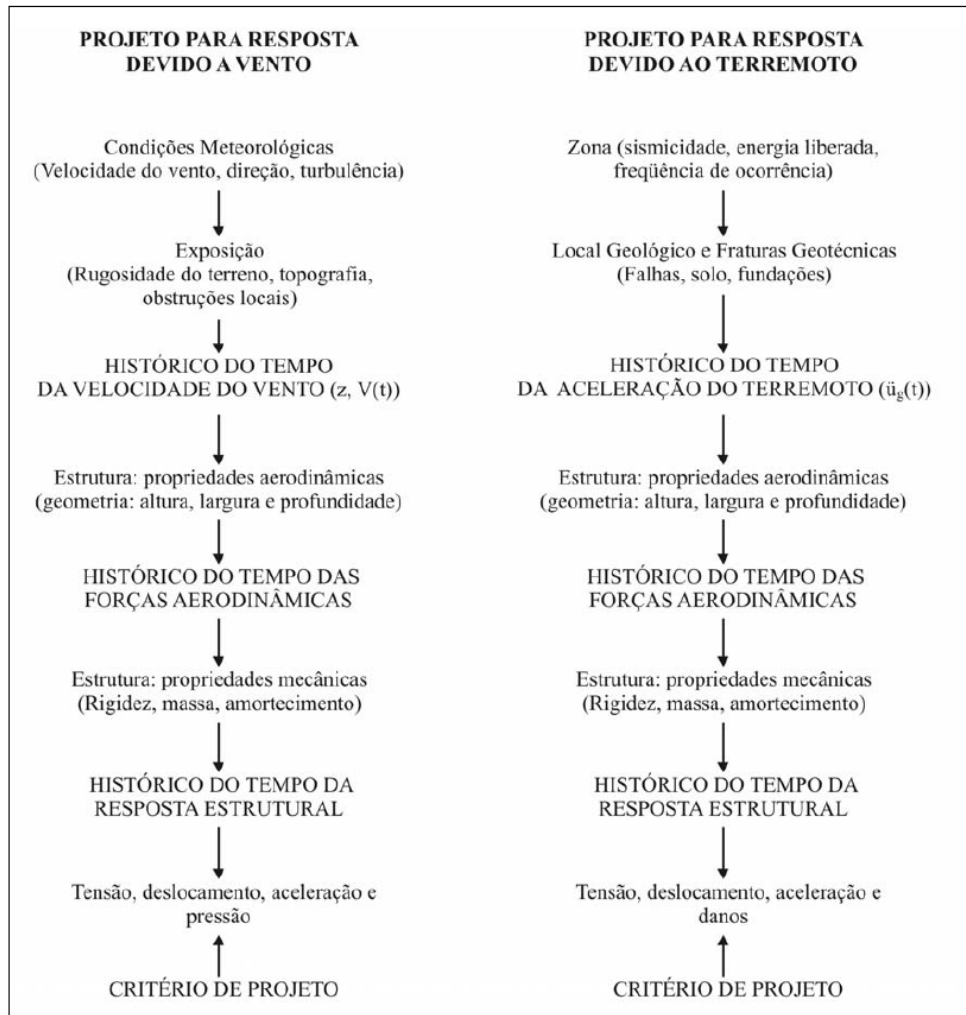
O coeficiente de resposta (R) é utilizado para determinação das forças de projeto nos elementos estruturais. Portanto, todas as respostas modais resultantes em termos de esforços solicitantes, devem ser multiplicadas pelo fator I/R . O coeficiente de sobre-resistência Ω_0 , corrige os resultados das forças reduzidas obtidos a partir do coeficiente R , nos elementos que precisam continuar tendo um comportamento elástico linear durante o sismo, caso por exemplo, de pilares que são elementos predominantemente comprimidos. Já o coeficiente C_d , corrigem os deslocamentos obtidos com as forças reduzidas devido ao coeficiente R , portanto, todas as respostas obtidas em termos de deslocamentos devem ser corrigidas, sendo multiplicadas pelo fator C_d/R .

3.3.2 Carga dinâmica sísmica aleatória

As similaridades existentes entre a metodologia para simular carregamentos devidos ao vento e a terremotos, facilitam a migração de conceitos utilizados em um caso para o outro. Embora, algumas modificações precisam ser feitas. A metodologia do vento sintético, abordada no item 3.2.2, será também utilizada com adaptações, para análise dinâmica sísmica aleatória. Com intuito de ilustrar essa

semelhança, na figura 3.7, mostra-se a sequências de análise para determinação das solicitações sob a ação do vento e do terremoto.

Figura 3.7 – Procedimento para determinação das solicitações devidas à ação do vento e terremoto.



Fonte: Corbani (2006).

No método original, a ação do vento em dada direção é dividida numa parcela média e uma flutuante. Onde a parcela média é aplicada estaticamente à estrutura, e a parcela flutuante é dividida em séries de componentes harmônicos com ângulos de fase aleatórios. Nesta parcela são utilizando no mínimo 11 componentes harmônicos, sendo um deles o ressonante, e os outros múltiplos ou submúltiplos desta escolha pelo fator 2. Segundo Corbani (2006), numa versão melhorada, faz-se esse fator igual à razão entre as frequências naturais do primeiro e do segundo modos de vibração, estabelecendo-se assim as funções ressoantes com esses modos fundamentais da estrutura. A amplitude dos componentes harmônicos é

obtida a partir da função de densidade espectral de potência da velocidade do vento. Pode-se consultar a aplicação desse processo no item 3.2.3.

Adaptando para terremotos, o carregamento estocástico equivalente a essa ação é proporcional às acelerações do solo. A duração e faixa de frequência é outro fator muito importante para essa ação. No primeiro aspecto, Chopra (1995) sugere uma duração de tempo entre 15 e 50 segundos.

Fazendo de forma análoga a metodologia de Franco (1993) e adaptando as equações (3.46) e (3.47) para a ação do terremoto, a função de aceleração do solo $\ddot{u}_g(t)$ e a amplitude dos harmônicos C_k são dados, respectivamente por:

$$\ddot{u}_g(t) = \sum_{k=1}^m C_k \cos(\omega_k t - \theta_k) \quad (3.57)$$

$$C_k = \sqrt{2 \int_k S_{\ddot{u}_g}(\omega) d\omega} \quad (3.58)$$

onde: $S_{\ddot{u}_g}(\omega)$ é a função densidade espectral de potência da aceleração do solo.

Os valores de C_k , são obtidos a partir da integração da Função Densidade Espectral de Potência (PSDF), na faixa de frequência do harmônico k ($d\omega$). De acordo com Chopra (1995), a PSDF indica a distribuição da energia contida num fenômeno em diversas frequências.

Nas análises dinâmicas realizadas neste trabalho, utilizam-se registros de sismos artificiais. Para isso, foi desenvolvido um programa no MATLAB para gerar registros sísmicos, a partir do espectro de Kanai-Tajimi. No qual, através de uma equação empírica, calcula-se o espectro de uma excitação sísmica, tendo como base um ruído branco gaussiano e possui como parâmetros de entrada, além do intervalo de frequência do sinal, a frequência natural do solo e seu amortecimento. É um modelo muito disseminado e bastante utilizado, onde a aceleração do solo é representada como um processo aleatório estacionário.

Neste trabalho, seguirá a proposta usada por Corbani (2006), que é utilizar a seguinte formulação para o PSDF de Kanai-Tajimi:

$$S_{\ddot{u}_g}(\omega) = \frac{Hr}{1 + 4H^2} \frac{1 + 4H^2 r^2}{(1 - r^2)^2 + 4H^2 r^2} \quad (3.59)$$

sendo:

H o amortecimento do solo, em geral entre 0,6 e 0,7; r a relação adimensional de frequências, ω/ω_g ; ω_g a frequência natural característica do solo, conforme a tabela 3.6.

Tabela 3.6 – Frequências de vibração de alguns tipos de terrenos, segundo Kanai e Tajimi.

Tipo de Movimento	Tipo de Terreno	Freq. do Movimento ω_g (rad/s)
Horizontal	Aluviões	18.4
	Aluviões sobre Rocha	22.9
	Rocha	27.0
Vertical	Aluviões	26.2
	Aluviões sobre Rocha	29.1
	Rocha	38.8

Fonte: Brandão (2021).

A partir do PSDF, as amplitudes adimensionais dadas pela equação (3.58) ficam na forma:

$$C_k = \sqrt{2 S_{\ddot{u}_g}(\omega_k) \Delta\omega} \quad (3.60)$$

sendo:

$\Delta\omega = \omega_{n1}/\omega_{n2}$, onde ω_{n1} e ω_{n2} representa a frequência natural do primeiro e segundo modo de vibração da estrutura, respectivamente.

No modelo proposto por Franco (1993), para o caso do vento, são estabelecidas no mínimo onze funções harmônicas. Para o caso de terremotos, Corbani (2006) investigou qual seria o número adequado de funções harmônicas, e a melhor posição do termo ressoante. Os resultados estão representados na tabela 3.7, que relaciona o período ressoante (T_r), o número de funções (m) interessantes para gerar um acelerograma e o termo mais adequado para o harmônico ressoante (r).

Assim como no método do vento sintético, deve-se fazer o tratamento estatístico descrito no item 3.2.2, para determinar o valor característico dos ângulos de fases que serão adotados nos componentes harmônicos da equação (3.57).

Tabela 3.7 – Relação entre período ressonante, termo ressoante e número de funções harmônicas.

T_r (s)	r	m	f_r (Hz)
0,2	5	11	5,00
0,3	6	11	3,33
0,4	6	11	2,50
0,5	6	11	2,00
0,6	7	11	1,67
0,7	7	11	1,43
0,8	7	11	1,25
0,9	7	11	1,11
1,0	7	11	1,00

Fonte: Corbani (2006).

3.3.3 Aplicação no modelo estudado

Para a estrutura do edifício ilustrada na figura 3.1 e descrita no item 3.1.2, é feita a formulação da carga dinâmica do terremoto, utilizando o método descrito no item anterior. Os dados necessários no que se referem as características da estrutura, do solo e os parâmetros do terremoto definidos pela NBR 15421 (ABNT, 2006), estão relacionados na tabela 3.8.

Em relação ao fator de importância, foi considerado a categoria de utilização III, que são estruturas definidas como essenciais. Por se tratar de um edifício em estrutura metálica, a sua estrutura sismo resistente foi considerada de pórticos de aço momento resistente com detalhando usual, conforme a tabela 6 da NBR 15421 (ABNT, 2006). Entrando com o tipo de terreno na tabela 3.6, obtém-se a frequência natural característica do solo (ω_g). As frequências naturais dos dois primeiros modos de vibração da estrutura, calculadas no item 3.1.2, são $\omega_{n1} = 10,80 \text{ rad/s}$ ($T_{n1} = 0,582s$) e $\omega_{n2} = 26,33 \text{ rad/s}$ ($T_{n2} = 0,239s$).

Arredondando o primeiro período natural da estrutura para $T_{n1} \cong 0,6s$, a partir tabela 3.7, obtém-se que o número de funções harmônicas mais adequado para representar o terremoto são de 11 harmônicos, com o sétimo termo ressoante.

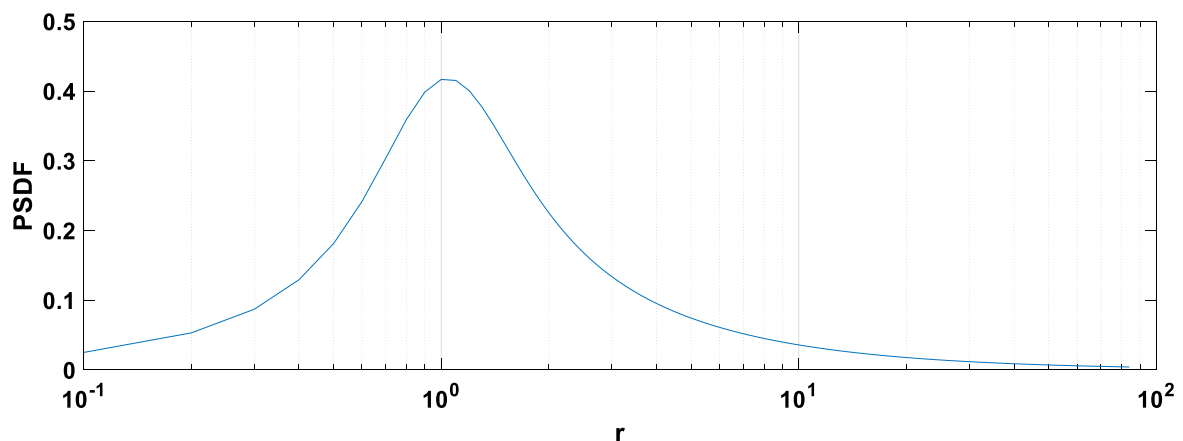
Tabela 3.8 – Parâmetros da estrutura, do solo e do terremoto.

Zona	4
a_g	0,15g
Categoria Sísmica	C
Classe do Terreno	B
Tipo de terreno	Rocha
I	1,5
R	3,5
H	0,6
ω_g	27 rad/s

Fonte: Autor.

Com o auxílio do MATLAB, gerou-se o PSDF a partir da equação (3.59), com os valores de $H = 0,6$ e $\omega_g = 27$ rad/s, para amortecimento e frequência natural característica do solo, respectivamente. Para obter os valores das frequências das componentes harmônicas, foi adotada a sugestão de Corbani (2006): usar múltiplos e submúltiplos com fator igual à razão entre as frequências naturais do primeiro e do segundo modos de vibração, sendo $\Delta\omega = 0,41$. A figura 3.8 representa o PSDF de Kanai-Tajimi em escala logarítmica, variando r de 0,01 até 84, com incremento de tempo utilizado de 0,001 s.

Figura 3.8 – PSDF de Kanai-Tajimi.



Fonte: Autor

Realizando a integração do PSDF, determina-se as amplitudes das funções harmônicas para cada faixa de frequência através da equação (3.60). Na tabela 3.9, estão relacionadas as amplitudes de cada componentes harmônicos do terremoto

com cada frequência circular correspondente. Os termos ressoantes do primeiro e segundo modo de vibração da estrutura são a sétima e a sexta posição, respectivamente. Com essa faixa de frequência, resulta-se um carregamento mais desfavorável a estrutura. As demais frequências são obtidas como submúltiplas ou múltiplas das frequências naturais ($\Delta\omega = 0,41$).

Tabela 3.9 – Amplitudes das componentes harmônicas do terremoto.

k	r_k	$T_k(s)$	ω_k (rad/s)	r	$S_{\ddot{u}_g}$	C_k
1	0,005	0,003	2267,70	83,989	0,0042	0,0587
2	0,012	0,007	930,16	34,450	0,0100	0,0906
3	0,028	0,016	381,53	14,131	0,0250	0,1432
4	0,069	0,040	156,50	5,796	0,0630	0,2273
5	0,168	0,098	64,19	2,377	0,1800	0,3843
6	0,410	0,239	26,33	0,975	0,4100	0,5800
r = 7	1,000	0,582	10,80	0,400	0,1280	0,3240
8	2,437	1,418	4,43	0,164	0,0440	0,1901
9	5,941	3,458	1,82	0,067	0,0170	0,1184
10	14,485	8,430	0,75	0,028	0,0080	0,0813
11	35,314	20,552	0,31	0,011	0,0029	0,0317

Fonte: Autor.

Visando determinar a aceleração máxima, usando a equação (3.57) e os parâmetros da NBR 15421 (ABNT, 2006), a combinação harmônica das acelerações será dada pela expressão:

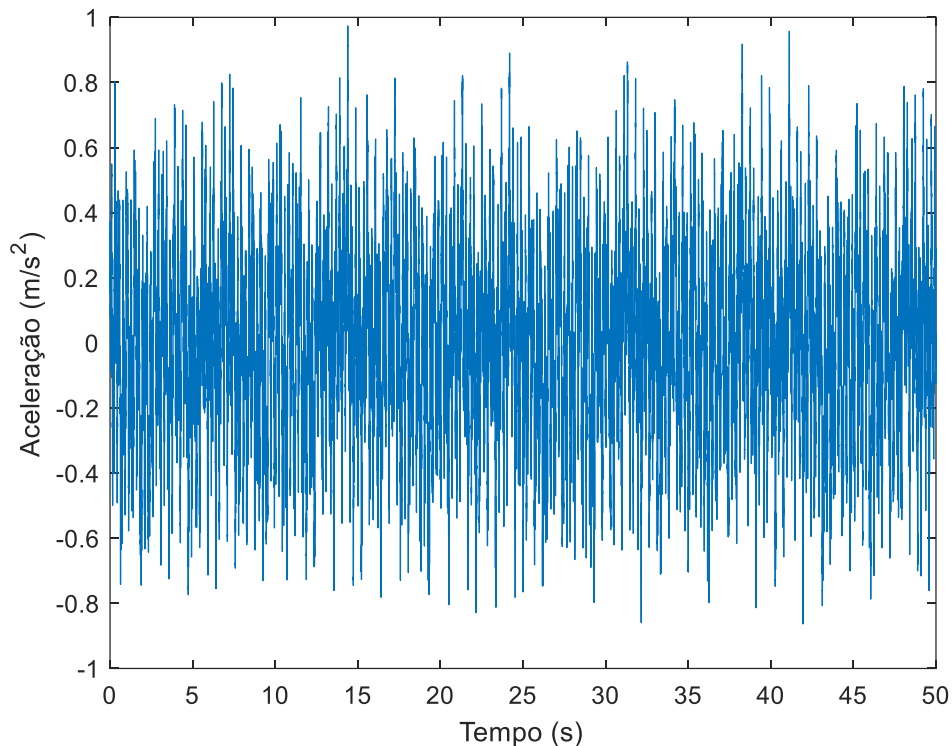
$$\ddot{u}_g(t) = \frac{I}{R} a_g \sum_{k=1}^m C_k \cos(\omega_k t - \theta_k) \quad (3.61)$$

De forma análoga a metodologia da análise estatística para a ação do vento, os valores de θ_k , gerados para cada um dos 11 harmônicos correspondentes aos 20 históricos de carga, estão apresentados na tabela A.3 no Apêndice A. Foi elaborado um algoritmo no MATLAB, para análise no domínio do tempo com uma carga composta por um somatório de 11 harmônicos, conforme a equação (3.61), combinadas aleatoriamente para cada uma das 20 séries temporais de carregamento. A combinação 18 da tabela A.5 no Apêndice A, foi adotada como carregamento característico, por apresentar resultados mais próximos dos

determinados estatisticamente, para o deslocamento máximo no 3º pavimento do modelo estudado.

Com o objetivo de calcular a aceleração do solo causada pelo terremoto, é feita uma rotina no MATLAB com intervalo incremental de 0,0025s, que segundo Carril (2006) assegura a convergência do processo de integração numérica. O histórico de aceleração do solo resultante, usando os dados da tabela 3.8, para o tempo total de 50s, é ilustrado na figura 3.9.

Figura 3.9 – Histórico de acelerações do solo.



Fonte: Autor

Finalmente, a série temporal do carregamento característico do sismo pode ser lançada no algoritmo do MATLAB, para calcular o histórico no tempo dos deslocamentos, velocidades e seus planos de fase. Para isso, acrescenta-se na equação (3.29), a parcela da força externa causada pelo terremoto $F_1(t)$, no primeiro pavimento do edifício. Para excitação na base da estrutura, o carregamento dinâmico dá-se pelo produto entre a massa e a aceleração ao longo do tempo, com sentindo oposto a essa aceleração. Sendo assim:

$$F_1(t) = -m_1 \ddot{u}_g(t) \quad (3.62)$$

Acrescentando a equação (3.62) em (3.29), tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\frac{(k_1 + k_2)y_1}{m_1} - \frac{(c_1 + c_2)y_2}{m_1} + \frac{k_2 y_3}{m_1} + \frac{c_2 y_4}{m_1} - \ddot{u}_g(t) \\ \dot{y}_3 = y_4 \\ \dot{y}_4 = \frac{k_2 y_1}{m_2} + \frac{c_2 y_2}{m_2} - \frac{(k_2 + k_3)y_3}{m_2} - \frac{(c_2 + c_3)y_4}{m_2} + \frac{k_3 y_5}{m_2} + \frac{c_3 y_6}{m_2} \\ \dot{y}_5 = y_6 \\ \dot{y}_6 = \frac{k_3 y_3}{m_3} + \frac{c_3 y_4}{m_3} - \frac{k_3 y_5}{m_3} - \frac{c_3 y_6}{m_3} \end{array} \right. \quad (3.63)$$

4 ANÁLISE DINÂMICA

Este capítulo apresenta os resultados obtidos a partir das formulações matemáticas apresentadas no capítulo anterior, sendo apresentados em duas seções: uma verificando a estabilidade do sistema dinâmico, e outra com as simulações e análises do sistema sujeito as ações do vento, do terremoto e a ação simultânea dessas duas.

4.1 ESTABILIDADE DO SISTEMA

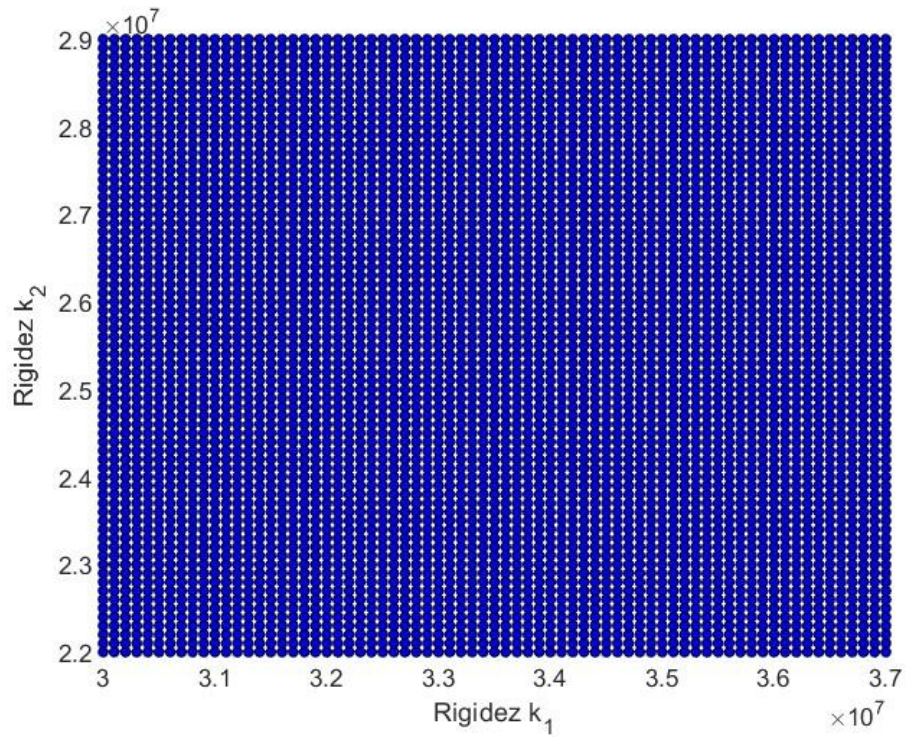
Nesta seção, é investigada a estabilidade dinâmica do modelo estudado neste trabalho, representado na figura 3.1. A partir dos autovalores da matriz Jacobiana do sistema, representa pela equação (3.30), analisa-se e classifica-se, a estabilidade da estrutura. Para isso foi desenvolvido um algoritmo baseado na teoria da seção 2.1.2, considerando que o sistema não está sob influência da excitação externa.

Inicialmente, foi analisada a estabilidade da estrutura para os parâmetros físicos apresentados na seção 3.1.2 e condições iniciais nulas. Foram calculados computacionalmente os autovalores da matriz Jacobiana, que deram números reais menores que zero, classificando assim a estrutura como estável, segundo Lyapunov. Com isso, pode-se verificar que o modelo estudado é naturalmente estável.

Com o objetivo de analisar a robustez da estabilidade estrutural, repetiu-se a verificação, considerando uma incerteza de 10% para os valores de rigidez, apresentados na tabela 3.1 e mantendo os demais valores fixos. Para isso, foi implementado o algoritmo, para mapear a estabilidade da estrutura em função da combinação entre k_1 , k_2 e k_3 . Definiu-se no programa que o ponto azul e vermelho, indicaria estabilidade e instabilidade, respectivamente. Com isso, obteve-se os diagramas das figuras 4.1, 4.2 e 4.3, que combinam as faixas de valores, com um passo de 10^5 , entre k_1 , k_2 e k_3 . Pode-se observar que para todas as combinações a estrutura apresenta um comportamento estável, representado pelos pontos azuis.

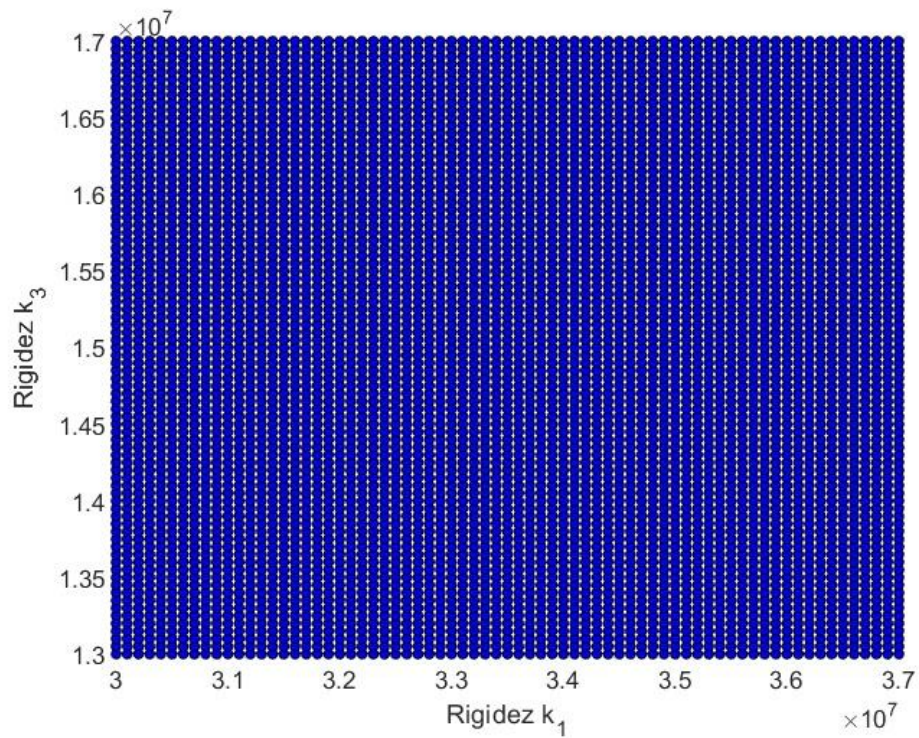
Para uma estrutura civil, que é o caso do modelo estudado, os pontos de estabilidade estão relacionados a não ocorrência das seguintes condições estruturais: perda do equilíbrio; esgotamento da capacidade resistente, no seu todo ou em parte; colapso no seu todo ou em parte. Já a instabilidade está associada a ocorrência de alguma dessas condições (ABNT, 2008).

Figura 4.1 – Diagrama de estabilidade estrutural para incertezas em k_1 e k_2 .



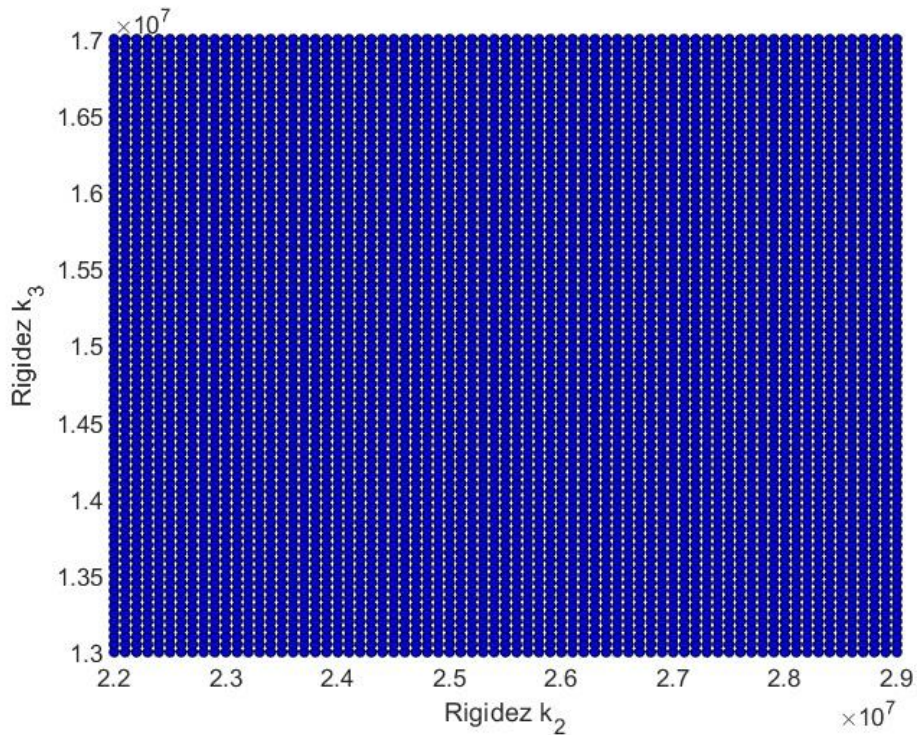
Fonte: Autor.

Figura 4.2 – Diagrama de estabilidade estrutural para incertezas em k_1 e k_3 .



Fonte: Autor.

Figura 4.3 – Diagrama de estabilidade estrutural para incertezas em k_2 e k_3 .



Fonte: Autor.

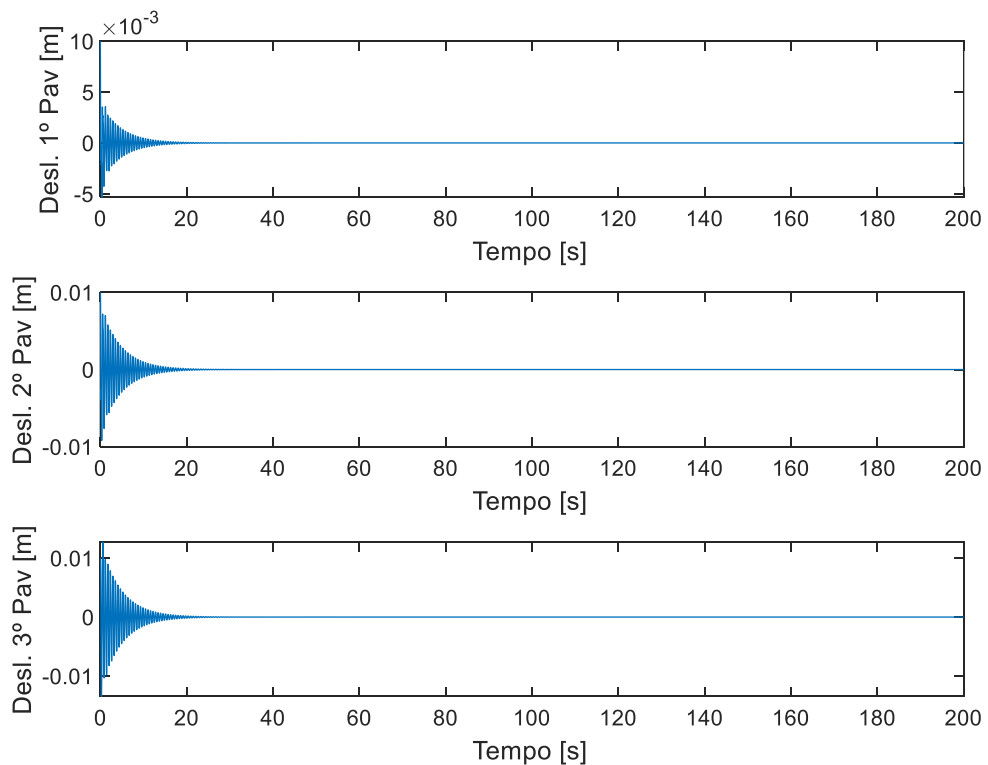
Posteriormente, repetiu-se a verificação, considerando uma incerteza de 10% para os valores da massa, apresentados na tabela 3.1 e mantendo os demais parâmetros fixos. E os resultados foram análogos ao da rigidez. A estrutura se mostrou estável, apesar das incertezas apresentadas nos seus parâmetros.

Analisa-se também, a resposta temporal da estrutura sem excitação externa, considerando as condições iniciais para deslocamentos e velocidades nulas, os parâmetros físicos nominais apresentados na seção 3.1.2 e uma pequena perturbação inicial. Para isso, é necessária a integração ao longo do tempo do sistema de equações diferenciais ordinária de primeira ordem (3.29), a partir de algum método numérico. Neste trabalho, a técnica escolhida é o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, que apresenta uma boa estabilidade numérica, com o passo de 0.01 em 200 segundos, que corresponde a 20000 pontos. Esta quantidade de pontos é necessária para se observar o comportamento transiente, aproximadamente por volta de 2000 pontos, e o regime permanente, entre 2000 e 20000 pontos.

A figura 4.4, apresenta o deslocamento em função do tempo do 1º, 2º e 3º pavimento. Pode-se observar que após uma perturbação inicial o sistema apresenta

oscilações em torno do ponto de equilíbrio no regime transiente, mas no regime permanente o amortecimento faz o sistema retornar à posição de origem, o ponto de equilíbrio estável. Portanto, o sistema tem comportamento estável para as condições aplicadas, o que era esperado de acordo com os resultados dos diagramas de estabilidade.

Figura 4.4 – Resposta temporal sem excitação – Deslocamento.

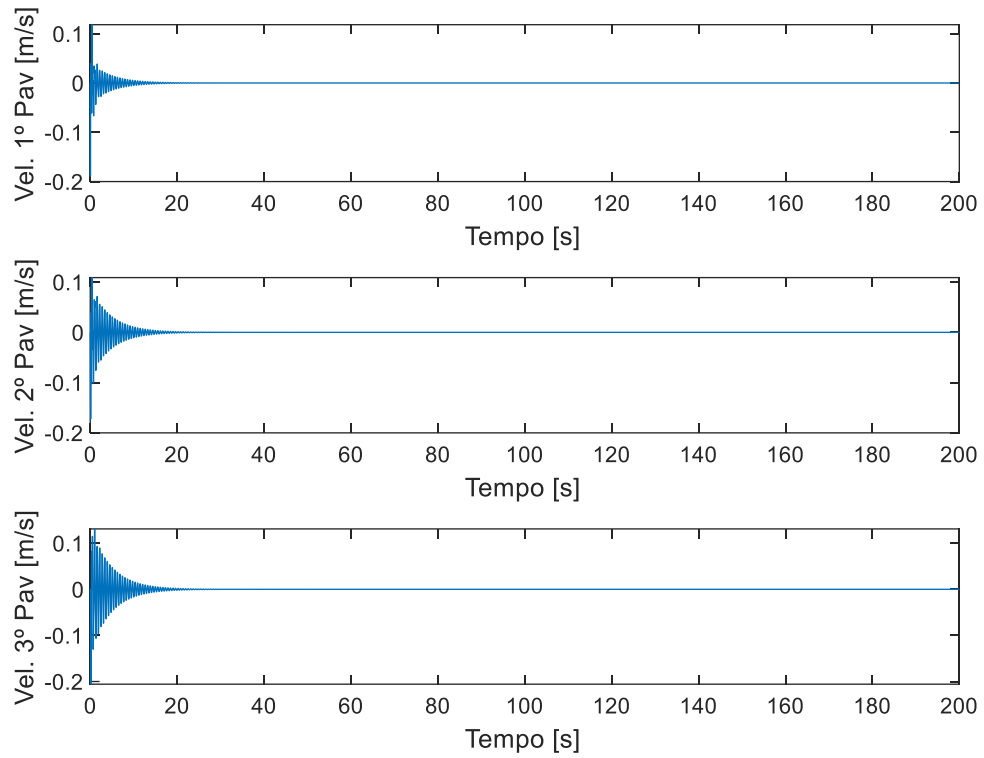


Fonte: Autor.

A figura 4.5 apresenta a velocidade em função do tempo, dos três pavimentos, que tem um comportamento análogo a figura 4.4, que após oscilações no regime transiente, retorna à posição de equilíbrio, apresentando um comportamento estável.

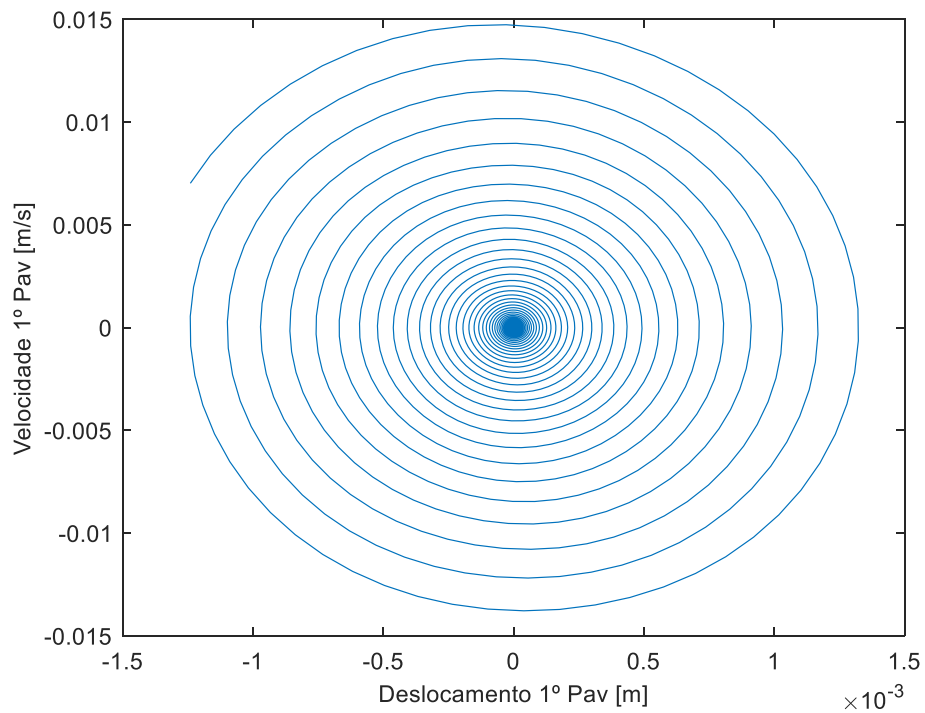
Já nas figuras 4.6, 4.7 e 4.8, apresentam-se os planos de fase do 1º, 2º e 3º pavimento, respectivamente. Neles as coordenadas da velocidade e deslocamento se relacionam, para descrever o movimento do sistema. Observando as três figuras, nota-se duas fases bem definidas, que são: a fase ativa, representando o momento inicial transiente e a fase de repouso, representando o momento permanente. Comprova-se assim, que o sistema é estável, uma vez que a orbita retorna ao ponto de equilíbrio.

Figura 4.5 – Resposta temporal sem excitação – Velocidade.



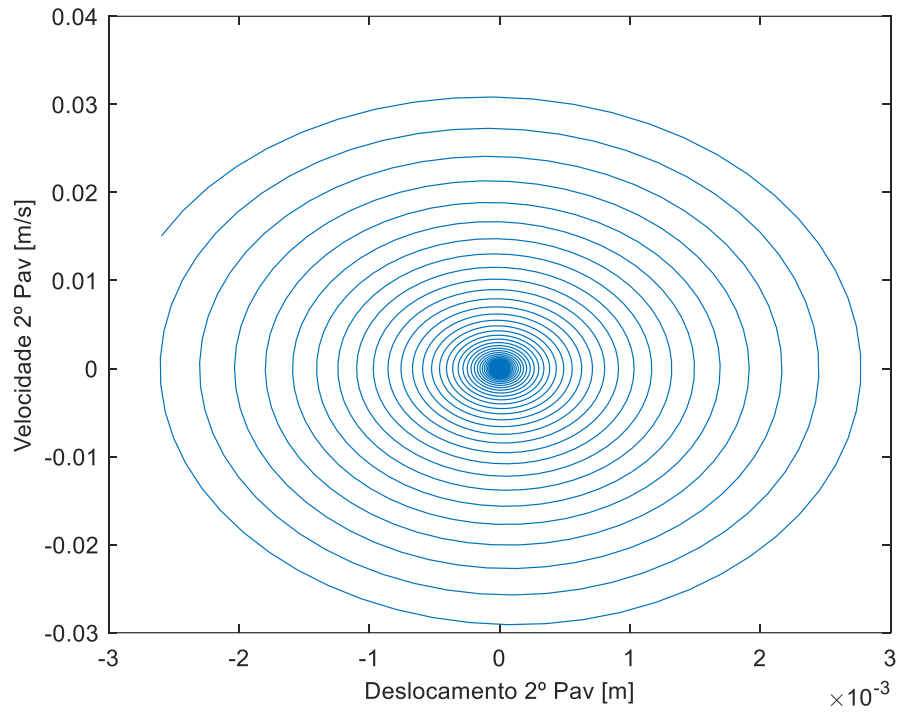
Fonte: Autor.

Figura 4.6 – Resposta temporal sem excitação – Plano de Fase 1º Pav.



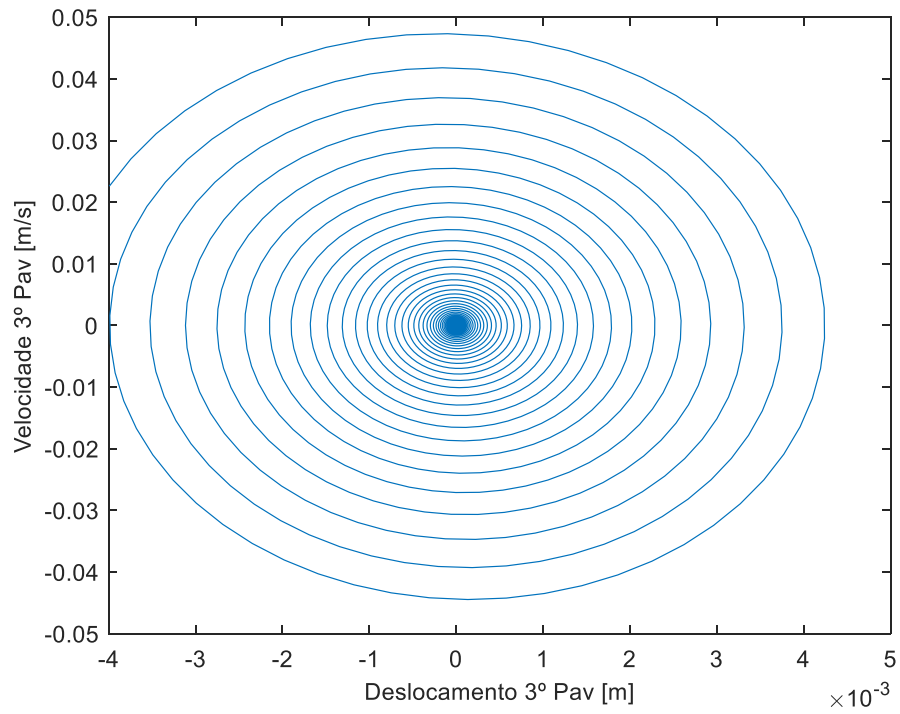
Fonte: Autor.

Figura 4.7 – Resposta temporal sem excitação – Plano de Fase 2º Pav.



Fonte: Autor.

Figura 4.8 – Resposta temporal sem excitação – Plano de Fase 3º Pav.



Fonte: Autor.

Finaliza-se o estudo da estabilidade do sistema sem excitações externas. Na próxima seção, será apresentado o sistema estrutural sob influência de ações externas.

4.2 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS COM EXCITAÇÃO EXTERNA

Os resultados das simulações numéricas apresentadas nesta seção, tem a mesma metodologia e condições iniciais apresentadas na seção anterior. Serão apresentadas as respostas temporais do modelo estudado, para os parâmetros físicos apresentados na seção 3.1.2, mais a ação externa do ambiente na estrutura: ação do vento (seção 3.2), do terremoto (seção 3.3) e a ação conjunta destas. Analisa-se a resposta pelo tempo de 50 segundos com passo de 0.01, que corresponde a 5000 pontos. A escolha do tempo é baseada na duração de um terremoto, sugerido por Chopra (1995). Este mesmo tempo será adotado para análise do vento, para efeito de comparação.

4.2.1 Ação do Vento

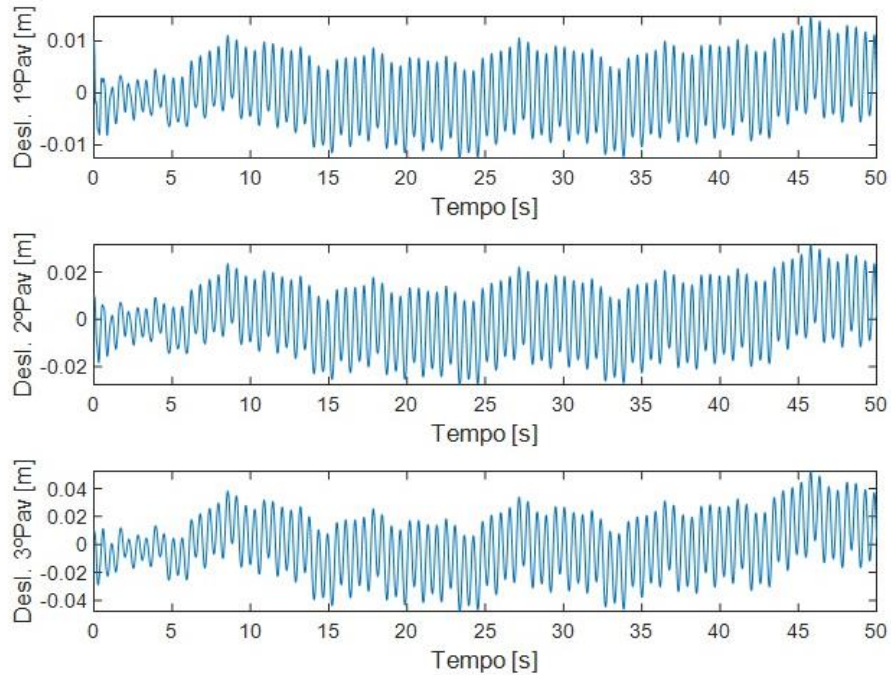
Para as respostas ao longo do tempo apresentadas nesta subseção, é necessária integração ao longo do tempo do sistema de equações (3.55). A figura 4.9, apresenta o deslocamento em função do tempo com a ação do vento para os três pavimentos. Pode-se notar que, diferente da resposta sem excitação (figura 4.4), os deslocamentos devido a ação do vento possuem valores menores nos segundo iniciais (0 a 5s), no qual vão aumentando gradativamente ao longo do tempo. Após 5s a estrutura não se estabiliza no ponto de equilíbrio, e apresenta um comportamento oscilatório irregular.

Comparando os três pavimentos, na figura 4.9, observa-se que eles possuem comportamento parecido quanto as oscilações ao longo do tempo, apresentando picos e vales na mesma faixa temporal. Em relação aos deslocamentos, o 3º pavimento possui os maiores valores, sendo o pico máximo de 0.0523 m, no intervalo aproximado de 23s a 25s.

A figura 4.10, apresenta a velocidade em função do tempo com a ação do vento, nos três pavimentos. Observa-se que as velocidades apresentam valores significativos no segundo inicial, na sequência apresentam uma leve redução e vão

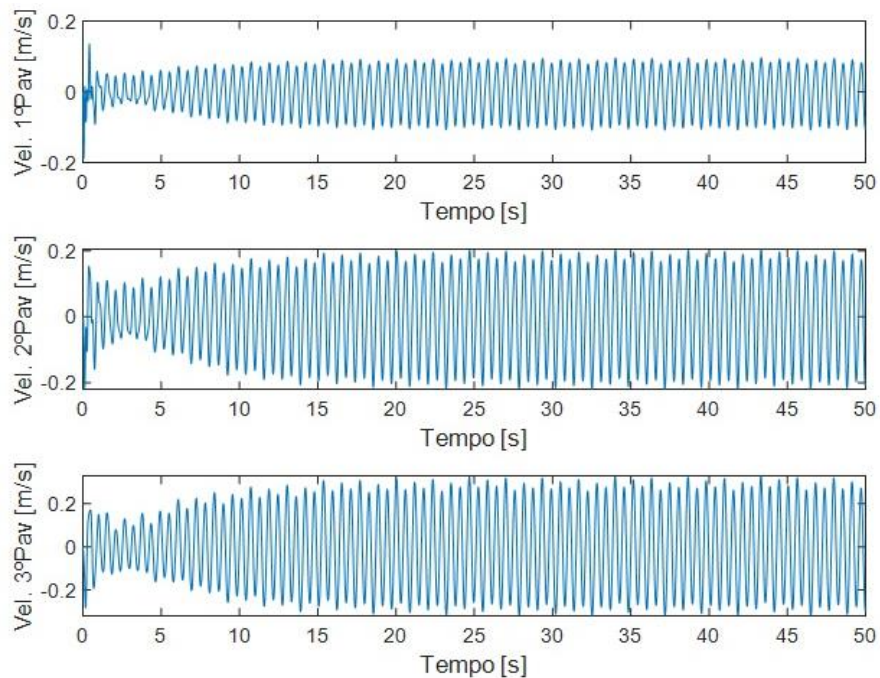
aumentando gradativamente até estabilizarem-se e oscilarem de forma constante, nos três pavimentos. Assim como os deslocamentos (figura 4.9), o 3º pavimento apresenta as maiores velocidades, sendo 0.3288 m/s, a mais crítica.

Figura 4.9 – Resposta temporal com excitação do vento – Deslocamento.



Fonte: Autor.

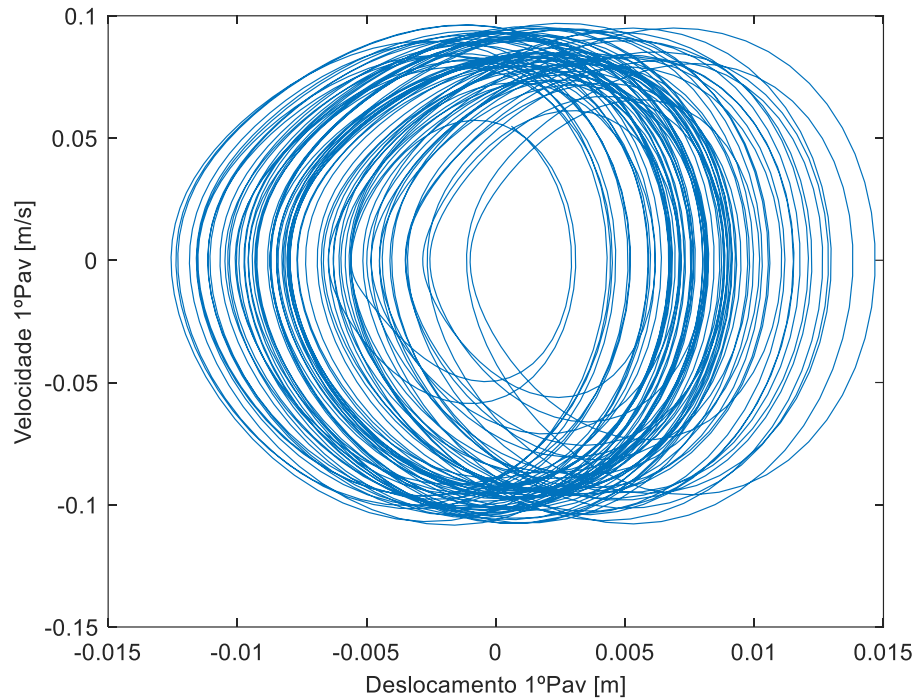
Figura 4.10 – Resposta temporal com excitação do vento – Velocidade.



Fonte: Autor.

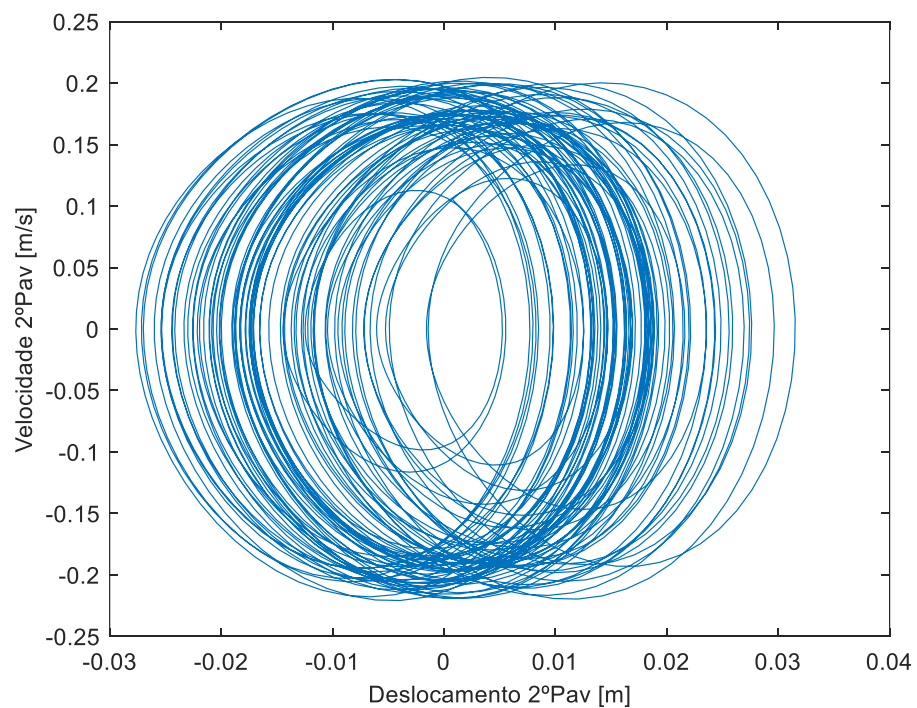
Já nas figuras 4.11, 4.12 e 4.13, apresentam-se os planos de fase com a ação do vento do 1º, 2º e 3º pavimento, respectivamente.

Figura 4.11 – Resposta temporal com excitação do vento – Plano de Fase 1º Pav.



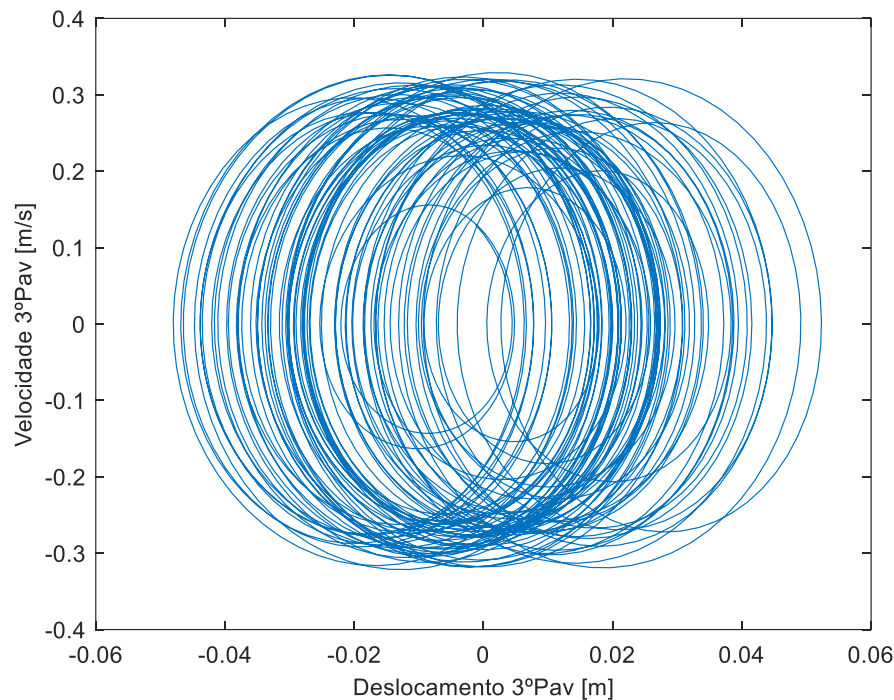
Fonte: Autor.

Figura 4.12 – Resposta temporal com excitação do vento – Plano de Fase 2º Pav.



Fonte: Autor.

Figura 4.13 – Resposta temporal com excitação do vento – Plano de Fase 3º Pav.



Fonte: Autor.

Com a ação do vento, o amortecimento da estrutura não é o suficiente para zerar os deslocamentos e velocidades ao longo do tempo. Na figura 4.9, nota-se que os deslocamentos não oscilam em torno do ponto de equilíbrio, diferente da velocidade, na figura 4.10. E este comportamento é demonstrado nas figuras 4.11 a 4.13, onde os planos de fase devido a oscilação irregular do deslocamento, têm um formato cilíndrico, diferente das figuras 4.6 a 4.8, que possuem um formato orbital. Sendo assim, a estrutura não retorna ao ponto de equilíbrio nos três pavimentos, pois está sob influência da excitação do vento.

As normas brasileiras estabelecem os limites máximos de deslocamentos para os elementos estruturais e não-estruturais. A NBR 8800 (ABNT, 2008) preconiza para deslocamentos no topo do edifício a relação de $H/400$ e entre pisos de $h/500$, sendo H a altura total da edificação e h altura do pé-direito. Já a NBR 6118 (ABNT, 2014) recomenda que para elementos não-estruturais, como a parede, o deslocamento lateral de edifícios deve ser no máximo de $H/1700$ para o topo, e $h/850$ entre os pisos. Essa diferença grande entre os critérios, se justifica pelo fato de os elementos não-estruturais terem a resistência e o módulo de elasticidade baixo. Portanto, é necessário um critério de deslocamento mais rigoroso, para se evitar o colapso.

A tabela 4.1 traz esses comparativos, onde mostra que em todas as situações, os deslocamentos estão acima do limite. Para o deslocamento total foi somado os deslocamentos máximos nos três pavimentos, e na relação entre os pisos, foi adotado o 3º pavimento por ser o mais crítico. A altura total da edificação estudada é de 9 m e altura do pé-direito é de 3 m.

Tabela 4.1 – Deslocamentos máximos – ação do vento.

NBR	Deslocamento	Valor máximo (cm)	Limite (cm)	Situação
8800	Topo do edifício	9.85	2.25	Acima
	Entre pisos	5.23	0.60	Acima
6118	Topo do edifício	9.85	0.53	Acima
	Entre pisos	5.23	0.36	Acima

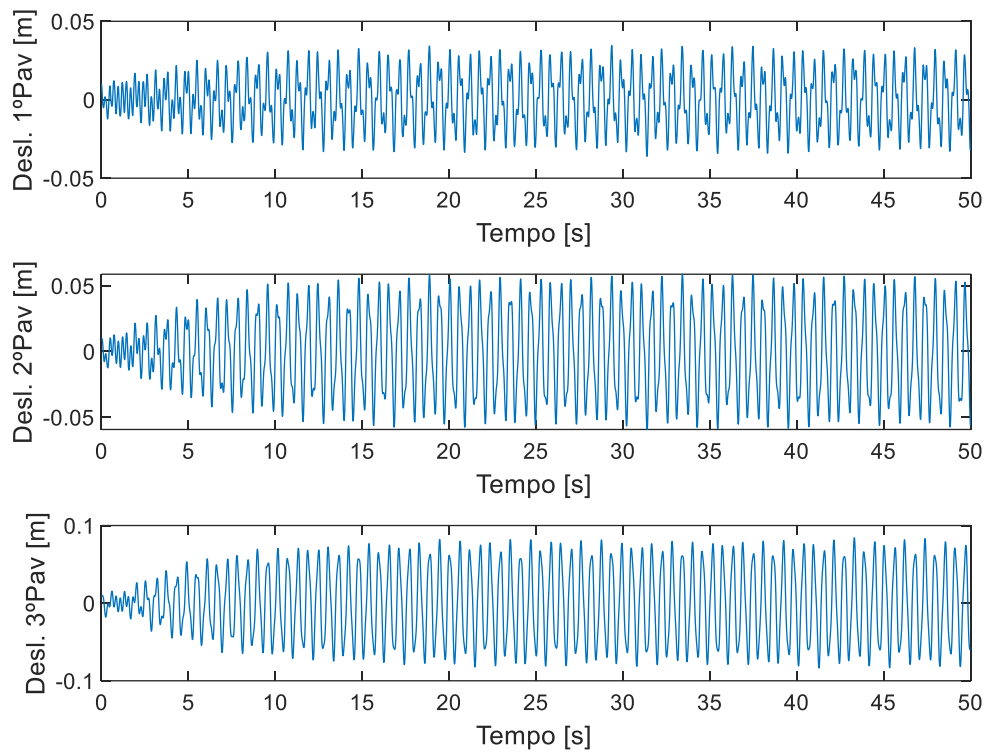
Fonte: Autor.

4.2.2 Ação do Terremoto

Nesta subseção, apresentam-se os resultados das simulações numéricas, aplicando a excitação sísmica obtida através do espectro de Kanai-Tajimi. Para as respostas temporais apresentadas, é necessária a integração ao longo do tempo do sistema de equações (3.63).

A figura 4.14 apresenta o deslocamento em função do tempo, com a ação do terremoto para os três pavimentos. Pode-se observar na figura 4.14, que os deslocamentos nos três pavimentos possuem comportamentos análogos para a mesma faixa de tempo, que vão aumentando gradativamente, até se estabilizarem em uma oscilação constante em torno do ponto de equilíbrio. Os picos e vales são próximos entre si e ocorrem com uma frequência parecida. O terceiro pavimento apresenta os maiores deslocamentos, sendo 0.0843 m o valor crítico, ocorrendo pela primeira vez no intervalo aproximado de 20s a 23s. Assim como na ação do vento, a estrutura não se estabiliza no ponto de equilíbrio, e apresenta um comportamento oscilatório regular.

Figura 4.14 – Resposta temporal com excitação sísmica – Deslocamento.



Fonte: Autor.

Seguindo a mesma metodologia apresentada na subseção anterior, a tabela 4.2 traz as análises dos deslocamentos máximos, segundo as normas brasileiras. Acrescenta-se na análise, a verificação indicada na NBR 15421 (ABNT, 2006), dada pela equação (3.56). De forma análoga ao vento, em todas as situações, os deslocamentos estão acima do limite.

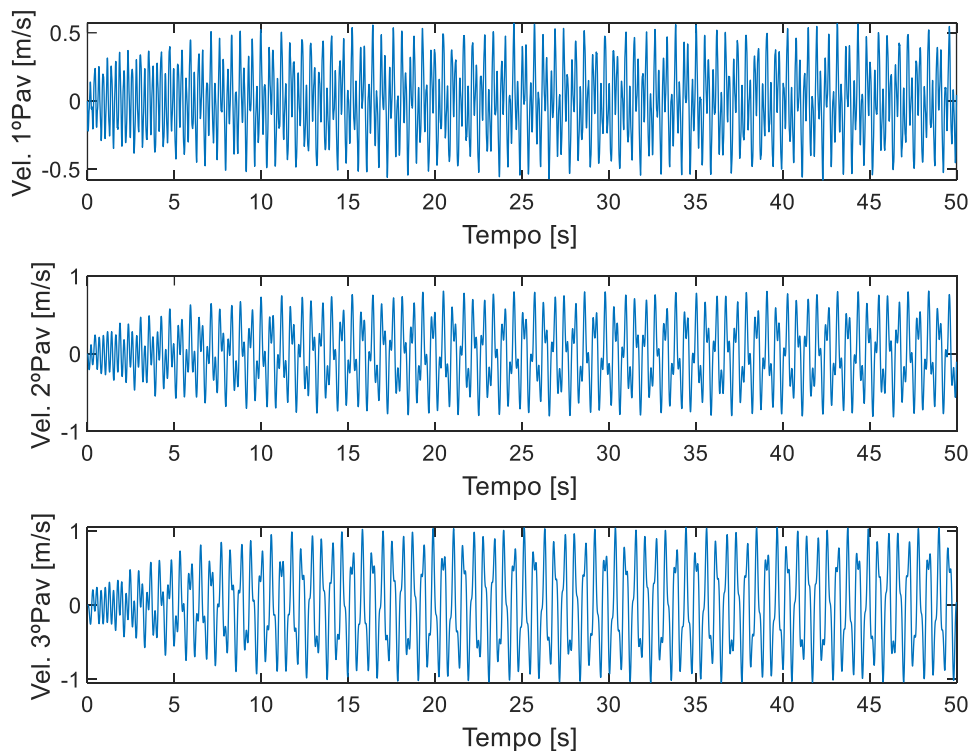
Tabela 4.2 – Deslocamentos máximos – ação sísmica.

NBR	Deslocamento	Valor máximo (cm)	Limite (cm)	Situação
8800	Topo do edifício	17.76	2.25	Acima
	Entre pisos	8.43	0.60	Acima
6118	Topo do edifício	17.76	0.53	Acima
	Entre pisos	8.43	0.36	Acima
15421	Entre pisos	8.43	3.00	Acima

Fonte: Autor.

A figura 4.15 apresenta a velocidade em função do tempo, com a ação do terremoto para os três pavimentos. Nota-se um comportamento análogo aos deslocamentos, aumento gradativo até se estabilizarem e oscilarem de forma constante. A frequência de pico e vale são maiores na velocidade. O terceiro pavimento apresenta as maiores velocidades, sendo 1.0456 m/s o seu valor crítico.

Figura 4.15 – Resposta temporal com excitação sísmica – Velocidade.



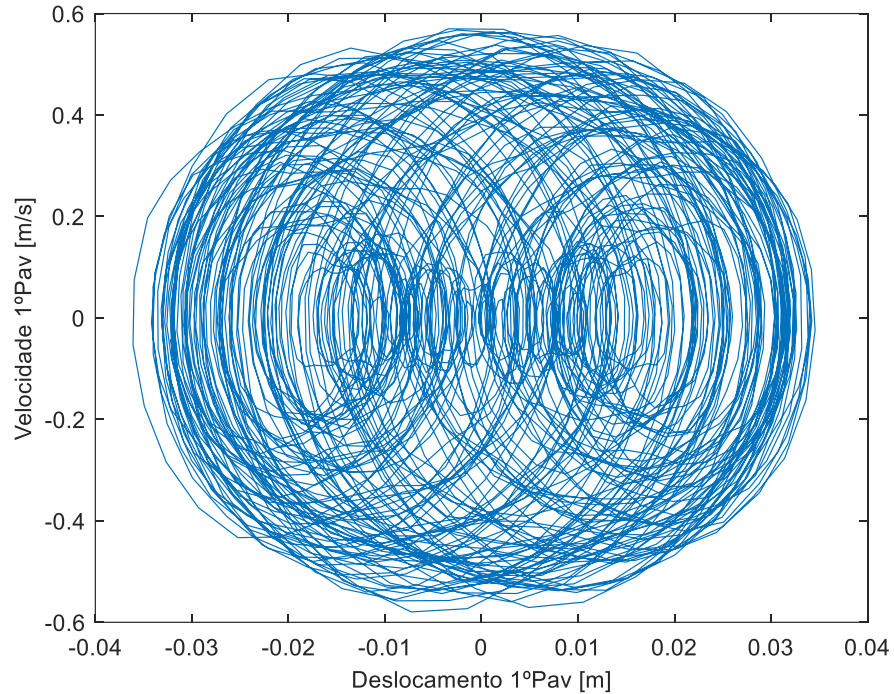
Fonte: Autor.

Os planos de fase dos três pavimentos estão representados nas figuras 4.16, 4.17 e 4.18. Observa-se que os planos de fase possuem um formato elíptico, com curvas irregulares que ficam orbitando em torno do ponto de equilíbrio.

Comparando as simulações da ação do vento, com as ações sísmicas, pode-se notar que a última apresenta os maiores valores em velocidade, deslocamento e vibrações. Em relação ao comportamento temporal, elas se diferem. Os deslocamentos com a ação do vento não oscilam em torno do ponto de equilíbrio, como na ação sísmica. As velocidades no vento, apresentam valores significativos no segundo inicial, já na ação sísmica esses valores são nulos. Analisando a forma e comportamento dos planos de fase essas diferenças ficam ainda mais visíveis. Na ação do vento, o plano de fase possui um formato cilíndrico e com curvas bem

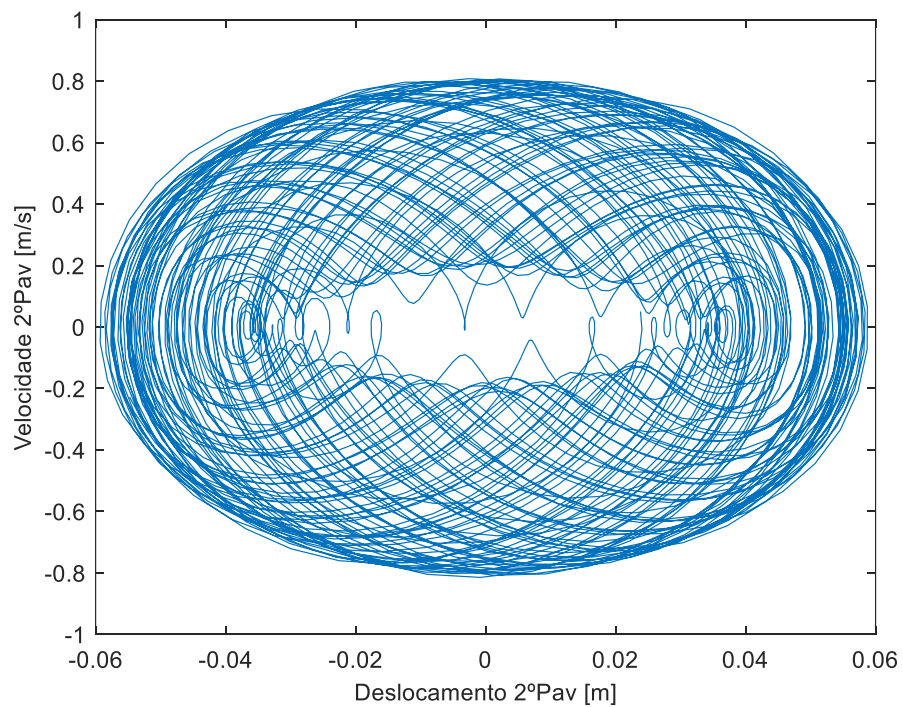
definidas. Já na ação sísmica ele possui um formato elíptico e com comportamento irregular.

Figura 4.16 – Resposta temporal com excitação sísmica – Plano de Fase 1º Pav.



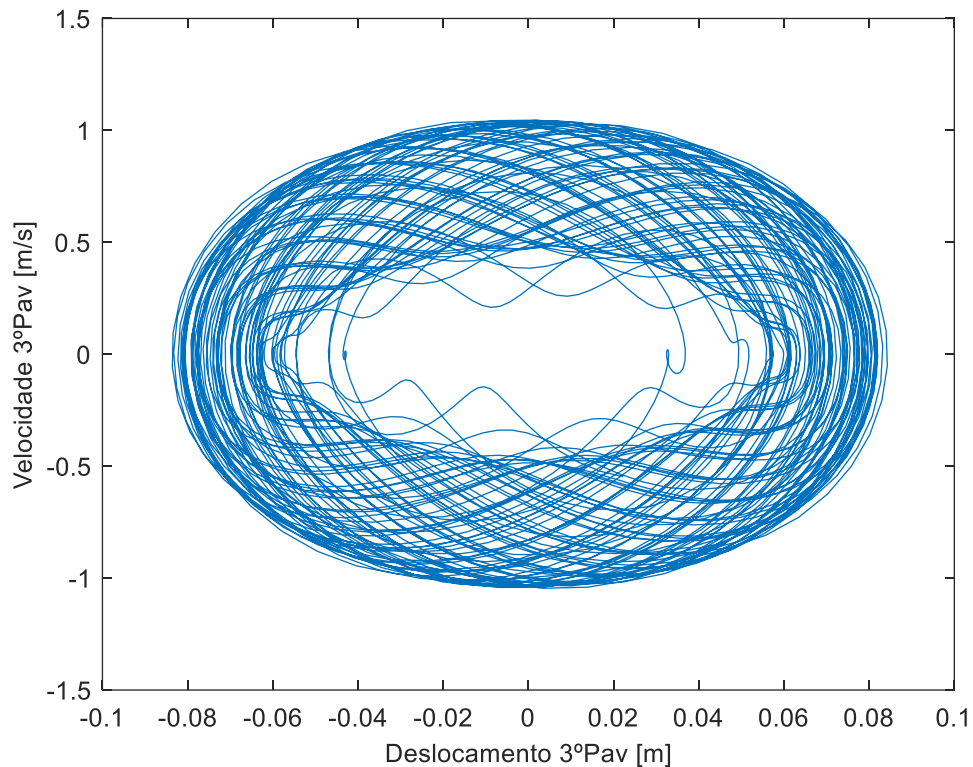
Fonte: Autor.

Figura 4.17 – Resposta temporal com excitação sísmica – Plano de Fase 2º Pav.



Fonte: Autor.

Figura 4.18 – Resposta temporal com excitação sísmica – Plano de Fase 3º Pav.



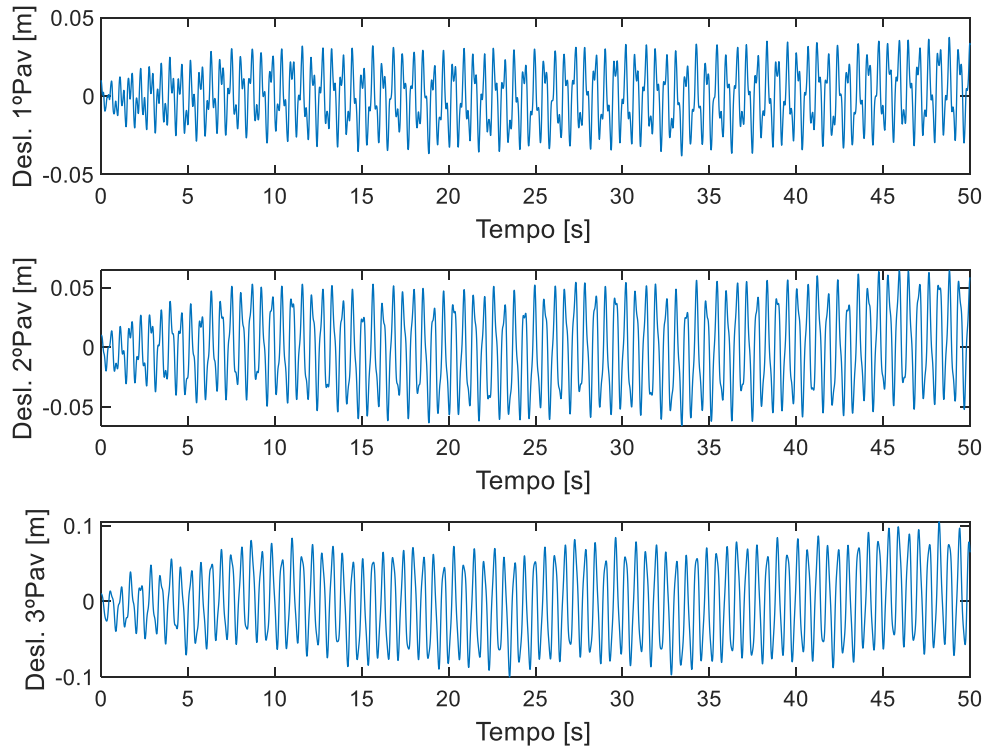
Fonte: Autor.

4.2.3 Ação Simultânea do Vento e Terremoto

Nesta subseção, apresentam-se os resultados das simulações numéricas, aplicando simultaneamente a ação do vento e a excitação sísmica. Para isso, acrescentou-se a parcela relativa à excitação sísmica, equação (3.62), no sistema de equações (3.55). Considerou-se os mesmos parâmetros e metodologia apresentados nas subseções anteriores.

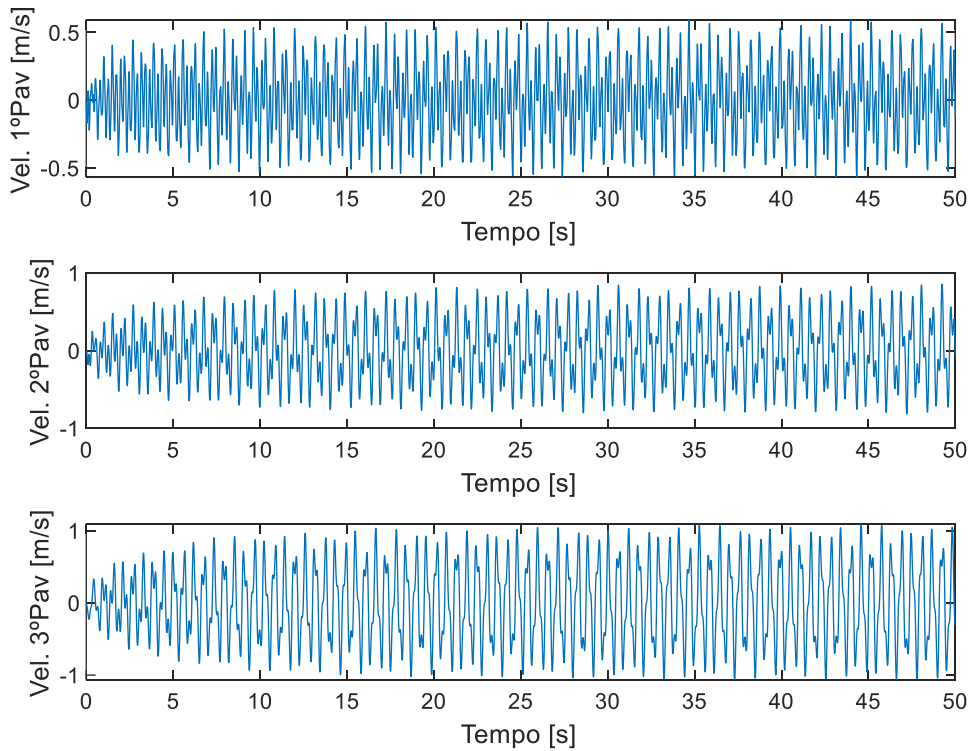
As figuras 4.19 e 4.20, apresentam o deslocamento e a velocidade em função do tempo, respectivamente, para a excitação conjunta do vento e terremoto para os três pavimentos. Pode-se observar que, os deslocamentos obtidos no 1º e 2º pavimento, preservaram as características apresentadas nas simulações com a excitação sísmica. Onde ele aumenta gradativamente até se estabilizar e oscilar de maneira constante em torno do ponto de equilíbrio. Já no 3º pavimento, pode-se observar a influência da ação do vento, já que os deslocamentos têm oscilações irregulares. Esse comportamento pode ser justificado, pelo fato que a força do terremoto e do vento está sendo aplicada no 1º e 3º pavimento, respectivamente.

Figura 4.19 – Resposta temporal com ação simultânea – Deslocamento.



Fonte: Autor.

Figura 4.20 – Resposta temporal com ação simultânea – Velocidade.



Fonte: Autor.

Com a ação conjunta das excitações, houve um aumento nos deslocamentos, quando se compara as ações isoladamente. Já em relação a velocidade, houve um aumento em relação ao vento e se manteve o valor, em relação ao terremoto. O valor crítico do deslocamento e velocidade foi de 0.1051 m e 1.0883 m/s, respectivamente, ambos no 3º pavimento. A tabela 4.3 traz as análises dos deslocamentos máximos, segundo as normas brasileiras.

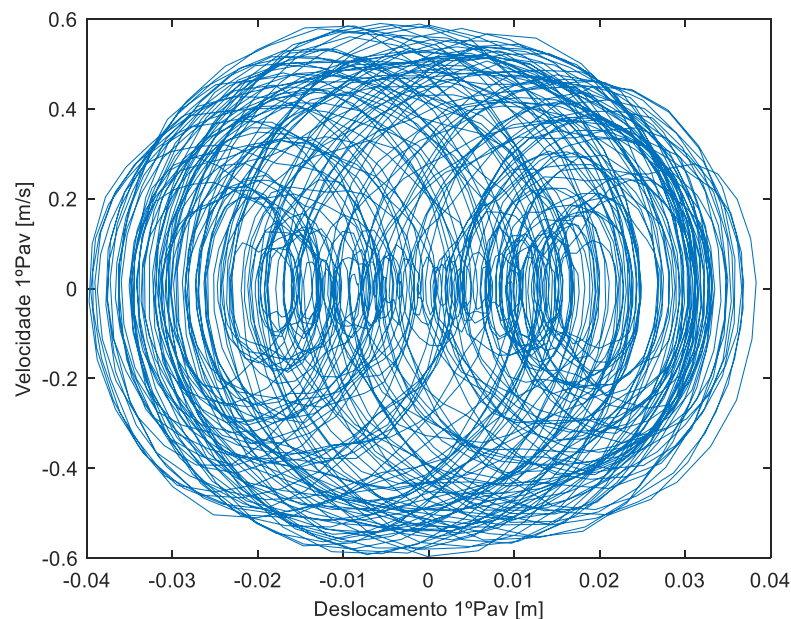
Tabela 4.3 – Deslocamentos máximos – ação simultânea

NBR	Deslocamento	Valor máximo (cm)	Limite (cm)	Situação
8800	Topo do edifício	20.67	2.25	Acima
	Entre pisos	10.51	0.60	Acima
6118	Topo do edifício	20.67	0.53	Acima
	Entre pisos	10.51	0.36	Acima
15421	Entre pisos	10.51	3.00	Acima

Fonte: Autor.

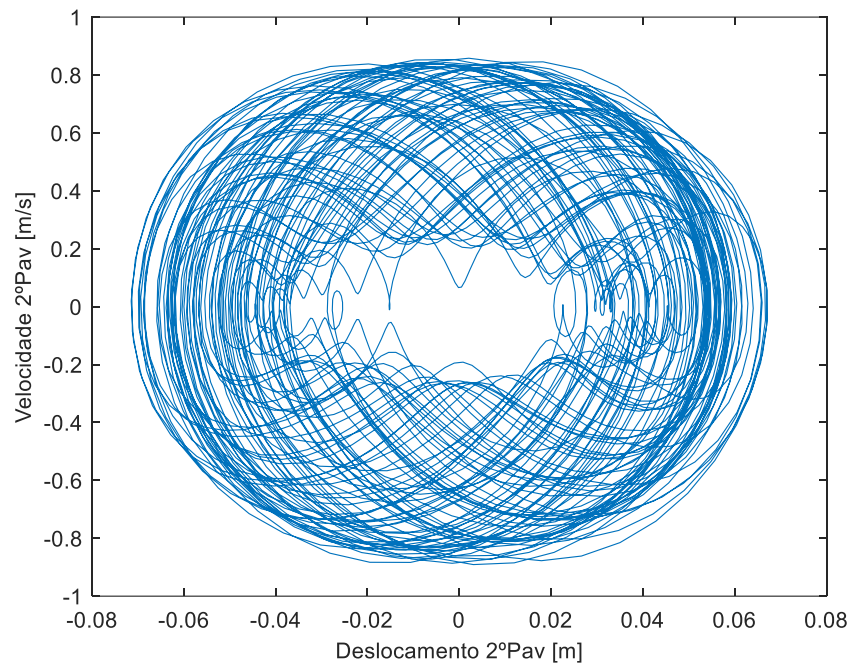
Os planos de fase dos três pavimentos estão representados nas figuras 4.21, 4.22 e 4.23. Observa-se que os planos de fase preservaram as características da ação sísmica.

Figura 4.21 – Resposta temporal com ação simultânea – Plano de Fase 1º Pav.



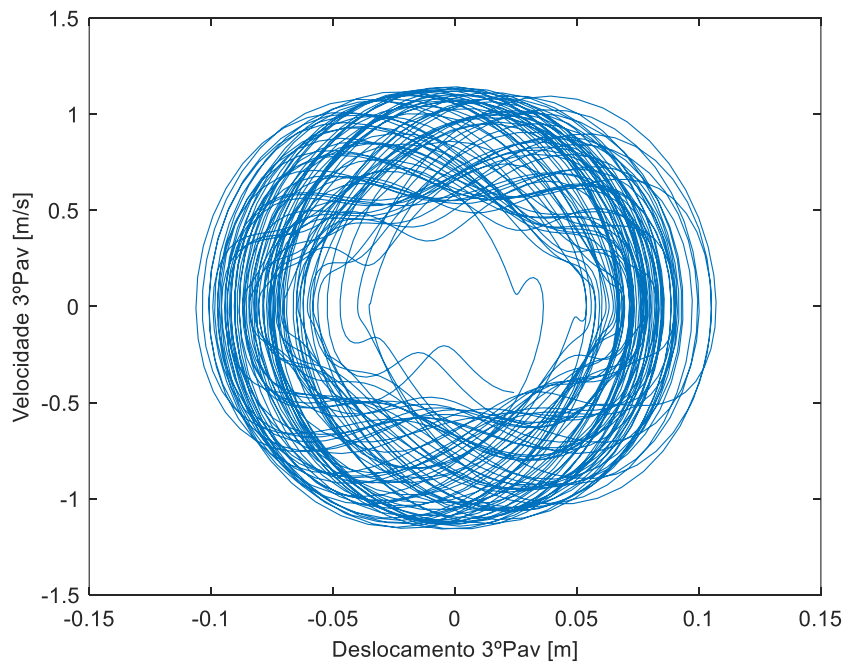
Fonte: Autor.

Figura 4.22 – Resposta temporal com ação simultânea – Plano de Fase 2º Pav.



Fonte: Autor.

Figura 4.23 – Resposta temporal com ação simultânea – Plano de Fase 3º Pav.



Fonte: Autor.

Sendo assim, pode-se verificar que o sistema não apresenta um comportamento estável, pois não retorna a um ponto de equilíbrio. Na próxima subseção, será investigado se a estrutura apresenta um comportamento caótico.

4.2.4 Comportamento Caótico

A partir dos resultados apresentados para as simulações com excitações externas, pode-se verificar que a edificação não possui rigidez suficiente para assegurar a estabilidade frente às ações externas. Portanto, faz-se necessário o cálculo do expoente de Lyapunov, apresentado na subseção 2.1.4, para verificar se a estrutura apresenta um comportamento caótico. Para isso, utiliza-se o algoritmo desenvolvido por Mohammadi (2009), que é baseado na metodologia de Wolf *et al.* (1985) e Rosenstein *et al.* (1993).

Como o objetivo de obter os expoentes de Lyapunov, foram lançadas no algoritmo as séries temporais obtidas com o modelo do edifício, para os carregamentos do vento, do sismo e a ação simultânea de ambos. Os resultados estão relacionados na tabela 4.4.

O modelo possui seis dimensões, portanto possui seis expoentes de Lyapunov. Eles foram ordenados do maior para o menor, conforme indica a literatura. Pode-se observar que para o vento os valores deram menores e com baixa variação, quando comparado com o sismo. Já para a ação com maior intensidade, a simultânea, os valores dos expoentes de Lyapunov deram maiores e com maior variação, o que significa que a taxa de divergência das trajetórias foi mais expressiva, quando comparado com as outras duas situações.

Tabela 4.4 – Expoentes de Lyapunov

AÇÃO DO VENTO					
$\lambda_1 = 0.3790$	$\lambda_2 = 0.3529$	$\lambda_3 = 0.3528$	$\lambda_4 = 0.3525$	$\lambda_5 = 0.3443$	$\lambda_6 = 0.3439$
AÇÃO SÍSMICA					
$\lambda_1 = 0.6043$	$\lambda_2 = 0.5126$	$\lambda_3 = 0.3279$	$\lambda_4 = 0.2993$	$\lambda_5 = 0.2881$	$\lambda_6 = 0.2243$
AÇÃO SIMULTÂNEA					
$\lambda_1 = 0.7661$	$\lambda_2 = 0.5114$	$\lambda_3 = 0.4917$	$\lambda_4 = 0.4903$	$\lambda_5 = 0.3713$	$\lambda_6 = 0.3696$

Fonte: Autor.

Pode-se analisar a partir dos valores na tabela 4.4, que nas três situações todos os expoentes de Lyapunov deram positivos, ou seja, o sistema é caótico. Segundo Savi (2017), isso implica que a trajetória diverge exponencialmente da

órbita original, indicando um sistema não estável, do tipo caótico, o que caracteriza o colapso total ou em partes da estrutura. Pelo fato de a estrutura não apresentar mais um comportamento estável, e sim um comportamento caótico, se faz necessário a aplicação de técnicas de controle que permitam a integridade estrutural sob efeito das excitações apresentadas. Essa aplicação será feita no próximo capítulo.

5 PROJETO DO CONTROLADOR

Neste capítulo, serão apresentadas as teorias e resultados para o projeto de um controlador por realimentação de estados. A técnica usada é a otimização \mathcal{H}_∞ , utilizando o método matemático das Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs – do inglês *Linear Matrix Inequalities*).

5.1 BREVE HISTÓRICO

O primeiro controlador automático foi desenvolvido por James Watt, no século XVIII, para controlar a velocidade de uma máquina a vapor. Outros trabalhos de importância foram feitos por Minorsky, Nyquist e Hazen, dando início a teoria do controle. Minorsky, em 1922, propôs controladores automáticos para conduzir navios e provou como poderia determinar sua estabilidade através de equações diferenciais. Em 1932, Nyquist determinou a estabilidade de sistemas a malha fechada, com base na resposta estacionária de sistemas a malha aberta, com excitações senoidais. Já Hazen, em 1934, usou o termo “servomecanismos” para indicar sistemas de controle de posição, e desenvolveu o projeto de servomecanismos a relé capazes de seguir, de perto, uma excitação variável no tempo (OGATA, 2010).

Na década de 1940, os engenheiros projetaram sistemas de controle a malha fechada visando o desempenho, através de métodos de resposta de frequência. O método do lugar das raízes foi desenvolvido por Evans, no final da década de 40 até o início dos anos 50. Esses dois métodos representam o núcleo da teoria de controle clássica, que possibilitaram sistemas estáveis que respeitam critérios de desempenho. Apesar desses sistemas serem aceitos, eles não são projetados segundo algum critério de otimização. Este critério foi adotado nos projetos a partir do final da década de 1950 (OGATA, 2010).

Com a alta complexidade dos sistemas modernos, com muitas entradas e muitas saídas, a descrição de um sistema de controle gera muitas equações. Sendo assim, a teoria de controle clássica, que trata somente de sistemas com uma única entrada e uma única saída (SISO), se mostra insuficiente para lidar com sistemas de múltiplas entradas e saídas (MIMO). Com a disponibilidade de computadores, por

volta de 1960, foi possível a análise temporal de sistemas complexos, iniciando o surgimento da teoria de controle moderna baseada nas técnicas de análise e síntese através de variáveis de estado (OGATA, 2010).

A 2ª guerra mundial estimulou a pesquisa em sistemas de controle, e o setor aeroespacial impulsionou o desenvolvimento do controle moderno. As áreas militares e industriais também evoluíram para atender as rigorosas exigências quanto a peso, exatidão e custos de projetos de sistemas de controle. Os sistemas MIMO puderam ser analisados por matrizes de transferências, modelos por espaço de estados, controlabilidade e observabilidade (CUBILLOS, 2020).

Entre 1960 e 1980, foram investigados o controle ótimo, que pode ser definido como a formulação, em linguagem matemática, com o objetivo de minimizar ou maximizar o índice de desempenho almejado, atendendo simultaneamente, as restrições impostas. Para a formulação de controle ótimo é necessário um modelo matemático do processo a ser controlado, uma declaração das restrições físicas e a especificação de um índice de desempenho que mensura a eficácia da ação de controle (ATHANS e FALB, 2007).

De 1980 até os dias de hoje, as teorias de controle têm focado no controle robusto, no controle \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , e tópicos relacionados. Devido o avanço da tecnologia, é comum a utilização dos computadores como parte integrante dos sistemas de controle. Aplicações recentes da teoria de controle incluem outras áreas além da engenharia, tais como biologia, medicina e economia (CUBILLOS, 2020).

5.2 TEORIA DO CONTROLE MODERNO

Os avanços da engenharia moderna, estão na direção de sistemas mais complexos, devido às exigências de desempenho e precisão. Sendo assim, a teoria de controle moderno surgiu para melhorar o desempenho, aumentar a capacidade de resolução de problemas complexos e facilitar o acesso para computadores de grande porte. A principal diferença da teoria do controle moderno para a clássica, se dá pela representação dos sistemas em termos de suas variáveis de estados, que é uma representação ao longo do tempo. Já o controle clássico, usa a representação dos sistemas em termos de funções de transferências, que é uma representação em frequência (OGATA, 2010).

Portanto, a modelagem de sistemas na teoria do controle moderno, pode ser representado por um sistema linearizado invariante no tempo (LTI) expresso em espaços de estados, dado por (OGATA, 2010):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (5.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

sendo $x(t) \in R^n$ o vetor de estados, $u(t) \in R^m$ o vetor de entrada de controle, $y(t) \in R^q$ as saídas do sistema, $A \in R^{n \times n}$ a matriz de dinâmica, $B \in R^{n \times m}$ a matriz de entrada de controle, $C \in R^{q \times n}$ a matriz de saída e $D \in R^{q \times m}$ a matriz de transmissão direta.

O controle de sistemas tem como objetivo, dado um estado inicial t_0 , calcular uma entrada de controle $u(t)$ definida para todo $t \geq t_0$ que seja capaz de conduzir os estados ao ponto de equilíbrio $x(t) = 0$ em um período finito. A possibilidade de calcular tal entrada é a definição de controlabilidade no tempo t_0 (AGULHARI, 2013).

5.3 DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES

As LMIs têm sido utilizadas com frequência como uma ferramenta na análise e projeto de sistemas de controle. O seu uso na análise de sistema dinâmicos vem de mais de 100 anos atrás, a partir dos trabalhos desenvolvidos por Lyapunov. Ele demonstrou que o sistema dinâmico (5.2) é assintoticamente estável, ou seja, todas as trajetórias convergem para zero, se e somente se, existir uma matriz P positiva definida tal que a inequação (5.3) seja verdadeira (BOYD *et al.*, 1994a).

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (5.2)$$

$$A'P + PA < 0 \quad (5.3)$$

O requisito $P > 0$ e a inequação (5.3) é conhecida como desigualdade de Lyapunov em P , que é uma forma especial de uma LMI. A notação $P > 0$ indica que uma determinada matriz simétrica P é positiva definida, ou seja, quando $P = P'$ e $P \in R^{n \times n}$, os seus autovalores são números reais maiores que zero. Já a notação $P \geq 0$ indica que a matriz P é positiva semidefinida, ou seja, quando $P = P'$ e $P \in$

$R^{n \times n}$, os seus autovalores são números reais positivos ou nulos. Sendo assim, analisando a inequação (5.3), pode-se afirmar que a condição necessária e suficiente para se obter a estabilidade assintótica do sistema (5.2), é que a matriz A possua todos os seus autovalores com parte real negativa. O único estado de equilíbrio encontra-se na origem (BOYD *et al.*, 1994b).

Um grande passo para a popularização das LMIs, foi o desenvolvimento de algoritmos eficientes para a sua solução. Esses programas são capazes de resolver problemas envolvendo LMIs, em pouco tempo em comparação com métodos antigos. Aos poucos programas matemáticos começaram a incluir esses algoritmos, tornando-os acessíveis. No Matlab tem bibliotecas, como o Yalmip e Sedumi, que são destinadas especificamente à solução de LMIs (CRUSIUS, 1996; ESTEVES, 2020).

O trabalho de Boyd *et al.* (1994a, 1994b) possibilitou estudos com diversas abordagens, como a estabilidade robusta de sistemas lineares, otimização por meio de LMIs, controle robusto \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , projeto de controladores robustos de sistemas sujeitos a incertezas e projeto ótimo de controladores robustos de sistemas sujeitos a incertezas.

De forma genérica, as LMIs podem ser descritas da seguinte forma (BOYD *et al.*, 1994a):

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^n x_i F_i > 0 \quad (5.4)$$

sendo $x_i \in R^n$ as variáveis do problema e $F_i \in R^{n \times n}$ matrizes conhecidas.

Uma propriedade importante de LMI é que o seu conjunto de soluções é convexo. Isso é importante, numericamente, pois garante que o problema de encontrar uma solução qualquer de uma LMI, consiste na busca de um elemento qualquer num conjunto convexo. Sendo assim, a inequação (5.4) não apresenta uma solução analítica geral. Porém, ela pode ser resolvida, caso exista pelo menos uma solução. A importância da convexidade se deve a duas razões principais: a resolução numérica do requisito em (5.4) garante a existência de uma solução que representa o valor mínimo global; várias LMIs podem ser expressas por uma LMI obtida pelo agrupamento de restrições, o que permite a imposição de um número

arbitrário de restrições armazenadas em um vetor de variáveis de decisão sem perda da convexidade (ORTUNHO,2015).

Algumas desigualdades matriciais não lineares podem ser transformadas em LMIs utilizando alguns mecanismos de manipulação. Uma destas manipulações, utilizadas neste trabalho, é o Complemento de Schur, que pode ser visto com detalhes em Boyd *et al.* (1994a) e Vanantwerp e Braatz (2000).

5.4 CONTROLE \mathcal{H}_∞ VIA REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS

Apresenta-se nesta seção, o controle \mathcal{H}_∞ considerando realimentação de estados para um sistema contínuo. Grande parte do que é apresentado aqui, foi retirado das notas de aulas do Prof. Dr. Edvaldo Assunção, da disciplina “Projeto de Controladores Robustos \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ via LMI”, ministrada em 2022 na UNESP – Ilha Solteira.

Escrevendo o sistema (5.1) considerando a ação de entradas exógenas, que representam perturbações externas ao sistema, tem-se:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B_2u(t) + B_1w(t) \\ y(t) &= Cx(t) + D_2u(t) + D_1w(t)\end{aligned}\tag{5.5}$$

Sendo: $w(t) \in R^m$ o vetor de distúrbio, $B_2 \in R^{n \times m}$ a matriz de entrada de controle, $B_1 \in R^{n \times m}$ a matriz de entrada de distúrbio, $D_2 \in R^{q \times m}$ a matriz de transmissão direta de controle, $D_1 \in R^{q \times m}$ a matriz de transmissão direta de distúrbio.

O objetivo é encontrar uma matriz $K \in R^{m \times n}$, chamada matriz de ganho de realimentação ou matriz de controle, que satisfaça a condição:

$$u(t) = Kx(t)\tag{5.6}$$

Substituindo (5.6) em (5.5) torna o sistema em malha fechada, ou seja, o sistema controlado com realimentação de estados:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A + B_2K)x(t) + B_1w(t) \\ y(t) &= (C + D_2K)x(t) + D_1w(t)\end{aligned}\tag{5.7}$$

Dado que o sistema (5.7) é linear, sua estabilidade será definida pelos autovalores da matriz $A_n = (A + B_2K)$. Assim, para um sistema controlável e assintoticamente estável, o ganho de realimentação K poderá ser escolhido de forma que todos os autovalores de A_n tenha a parte real negativa.

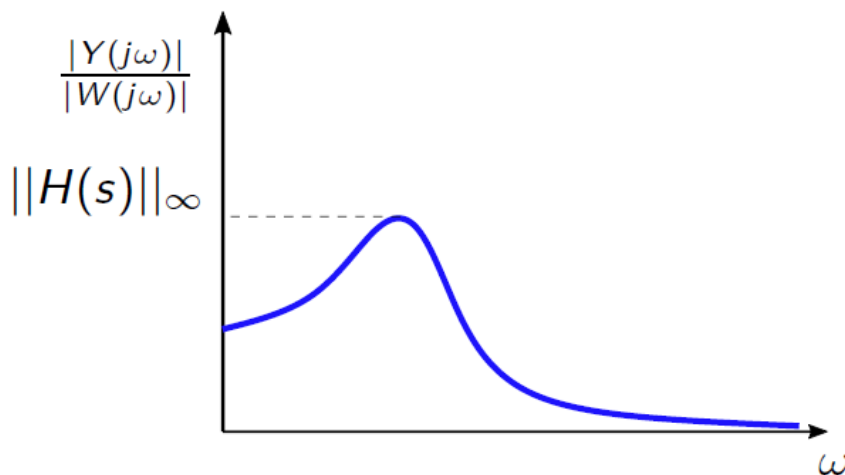
Para a formulação correta do problema é necessário primeiro definir a norma \mathcal{H}_∞ . Considerando o sistema (5.5) com $u(t) = 0$, então sua norma \mathcal{H}_∞ é caracterizada pelo maior valor do módulo da relação entre a frequência dos sinais de saída $y(t)$ e da entrada exógena $w(t)$ (TROFINO *et al.*, 2005). Sendo definida matematicamente por:

$$\|H(s)\|_\infty = \max_{\omega \in \mathbb{R}^+} \sigma_{max}(H(j\omega)) = \max_{\omega \in \mathbb{R}^+} \frac{|Y(j\omega)|}{|W(j\omega)|} \quad (5.8)$$

Sendo $H(s)$ a função de transferência que relaciona a saída $y(t)$ e a entrada exógena $w(t)$ do sistema (5.5), $Y(j\omega)$ a resposta em frequência da saída $y(t)$ e $W(j\omega)$ a resposta em frequência da entrada exógena $w(t)$.

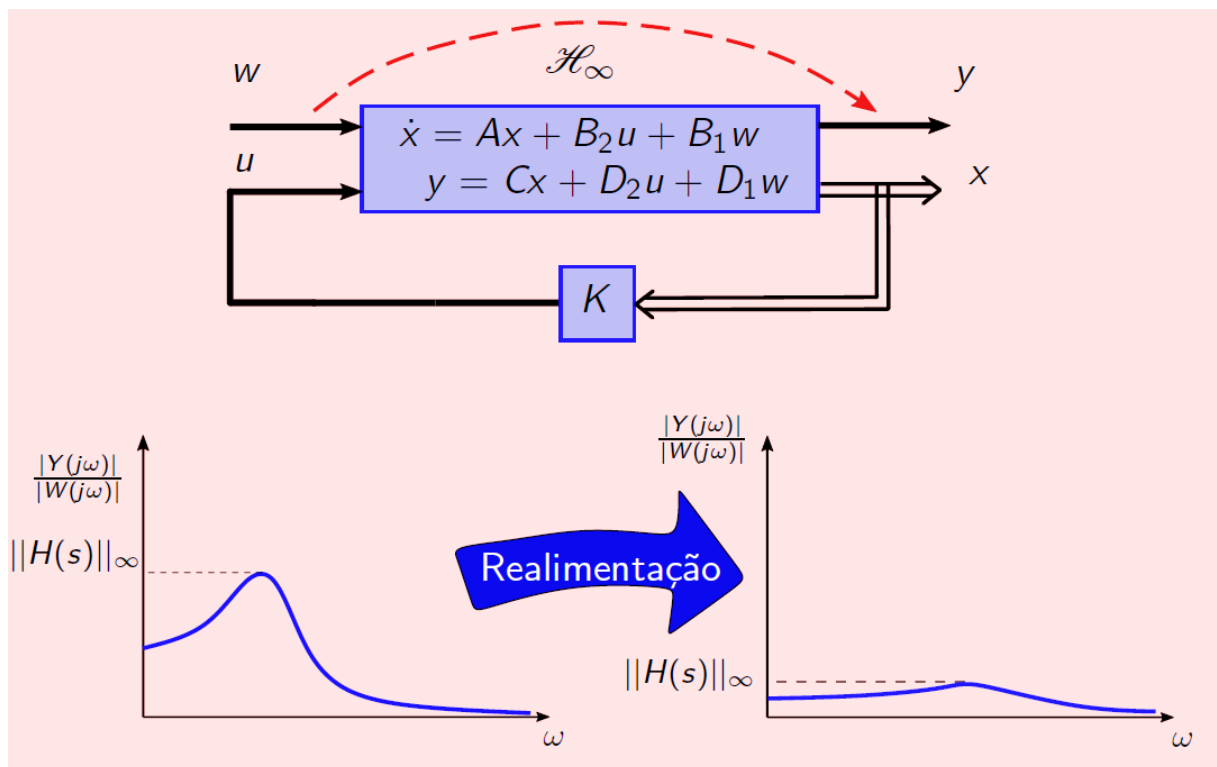
A figura 5.1 é conhecida como o Diagrama de Bode, a norma \mathcal{H}_∞ do sistema (5.5) é caracterizada pelo maior valor do módulo da relação $Y(j\omega)/W(j\omega)$, ou seja, o maior valor da resposta em frequência $|H(j\omega)|$. Assim, a norma \mathcal{H}_∞ está associada ao pior caso, o máximo valor de $|H(j\omega)|$ indica o caso de maior impacto que a entrada exógena $w(t)$ provoca na saída do sistema $y(t)$.

Figura 5.1 – Diagrama de Bode



O objetivo é projetar um controlador $K \in R^{m \times n}$, tal que $u(t) = Kx(t)$, que estabilize assintoticamente e minimize os impactos da entrada exógena $w(t)$ na saída $y(t)$, “afundando” a norma \mathcal{H}_∞ do sistema em malha fechada (5.7), através da realimentação de estado. Essa ideia, que é chamada de controle ótimo \mathcal{H}_∞ , está representada na figura 5.2.

Figura 5.2 – Controle ótimo \mathcal{H}_∞



Fonte: Assunção (2019).

O sistema (5.7) é estabilizável por realimentação de estado se, e somente se, existir uma solução para o problema convexo de otimização (BOYD *et al.*, 1994a):

$$\min \mu$$

sujeito a

$$W = W' > 0$$

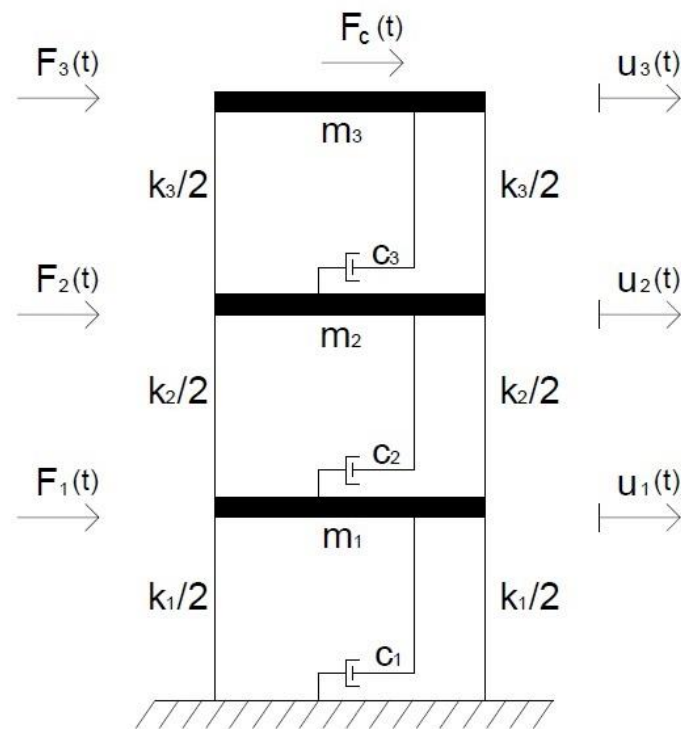
$$\begin{bmatrix} AW + WA' + B_2Z + Z'B_2' & WC' + Z'D_2' & B_1 \\ CW + D_2Z & -\mu I & D_1 \\ B_1' & D_1' & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.9)$$

Na solução ótima, $K = ZW^{-1}$ assegura $\|H(s)\|_{\infty} \leq \sqrt{\mu}$. Maiores detalhes podem ser encontrados em Boyd *et al.*, (1994a). A prova da LMI (5.9) pode ser encontrada em Peres (1997) e Palma (2007).

5.4.1 Aplicação no modelo estudado

Uma vez que as equações dinâmicas do sistema (3.29) são equações lineares e invariantes no tempo, o modelo *shear building* com três pavimentos pode ser reescrito na forma de espaço de estados da equação (5.5). Na figura 5.3 está representado o modelo estrutural do edifício, considerando a força de controle $F_c(t)$, atuando no 3º pavimento, que será vista como o atuador dos controladores.

Figura 5.3 – Modelo *shear building* com ação da força de controle.



Fonte: Autor.

Definiu-se que o vetor de entrada $u(t)$ será dado pela equação (5.10). As entradas exógenas $w(t)$ serão dadas pela ação do vento e do terremoto, que foram definidas na seção 3.2 e 3.3, respectivamente.

$$u(t) = F_c(t) = Kx(t) \quad (5.10)$$

O vetor de estado $x(t)$ e o vetor de saída $y(t)$ serão compostos por seis elementos, conforme o sistema de equações (3.29). As seis saídas $y(t)$ serão posteriormente utilizadas a fim de comparar com os resultados apresentados no Capítulo 4.

$$x(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Assim, a partir do sistema de equações dinâmicas (3.29) e dos vetores $u(t)$, $x(t)$, $y(t)$ definidos nas equações (5.10) e (5.11), respectivamente, as matrizes da equação (5.5), que correspondem à representação do modelo *shear building* na forma de espaço de estados, serão dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-(k_1 + k_2)}{m_1} & \frac{-(c_1 + c_2)}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \frac{c_2}{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} & \frac{-(k_2 + k_3)}{m_2} & \frac{-(c_2 + c_3)}{m_2} & \frac{k_3}{m_2} & \frac{c_3}{m_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{k_3}{m_3} & \frac{c_3}{m_3} & -\frac{k_3}{m_3} & -\frac{c_3}{m_3} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/m_3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D_2 = D_1 = 0 \quad (5.13)$$

$$B_{1v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/m_3 \end{bmatrix} \quad w_v(t) = F_3(t) \quad (5.14)$$

$$B_{1s} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad w_s(t) = \ddot{u}_g(t) \quad (5.15)$$

$$B_{1(v+s)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1/m_3 & 0 \end{bmatrix} \quad w_{(v+s)}(t) = \begin{bmatrix} F_3(t) \\ \ddot{u}_g(t) \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Sendo: B_{1v} e $w_v(t)$ referente a entrada exógena do vento; B_{1s} e $w_s(t)$ referente a entrada exógena do terremoto; $B_{1(v+s)}$ e $w_{(v+s)}(t)$ referente a entrada exógena simultânea do vento e do terremoto;

Agrupando-se essas matrizes de acordo com a equação (5.5), pode-se obter a representação completa do modelo estudado na forma de espaço de estados. Utilizando o *solver Sedumi* do MATLAB, o controlador \mathcal{H}_∞ foi obtido resolvendo a LMI (5.9). As respostas temporais apresentadas nas próximas subseções, foram obtidas com a mesma metodologia apresentada no Capítulo 4, com a diferença que no sistema de malha fechada foi adotada a equação (5.7) para simulações. A cor vermelha foi adotada para representar o sistema controlado e a cor azul para representar o sistema sem controle.

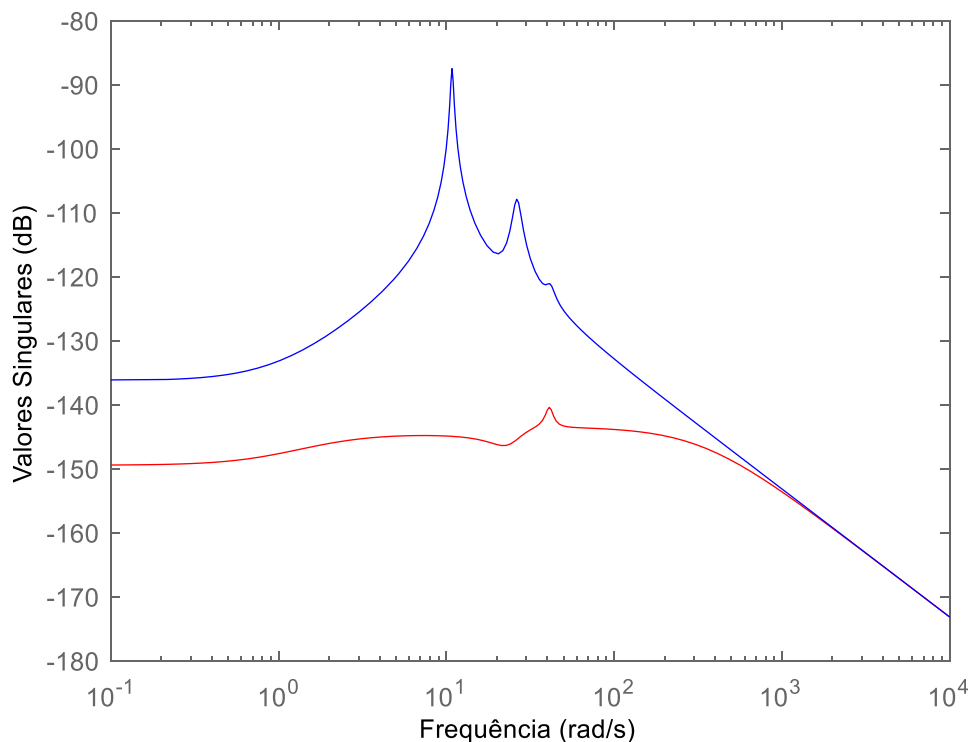
5.4.1.1 Ação do Vento

Para os resultados apresentados nesta subseção foram usadas as componentes (5.14) na equação (5.5). Solucionando as LMIs apresentadas em (5.9) o seguinte ganho de realimentação foi obtido:

$$K = [2.4340 \quad -0.0554 \quad 2.5114 \quad -0.0646 \quad -2.0944 \quad -0.1554] \cdot 10^8 \quad (5.17)$$

Através da função *sigma* no MATLAB foi possível obter o Diagrama de Bode, figura 5.4, para o sistema controlado (cor vermelha) e o sistema sem controle (cor azul). Pode-se notar que, o controle \mathcal{H}_∞ via realimentação de estados, reduziu a norma \mathcal{H}_∞ , diminuindo assim, o impacto que a ação vento $w_v(t)$ provoca na saída do sistema $y(t)$.

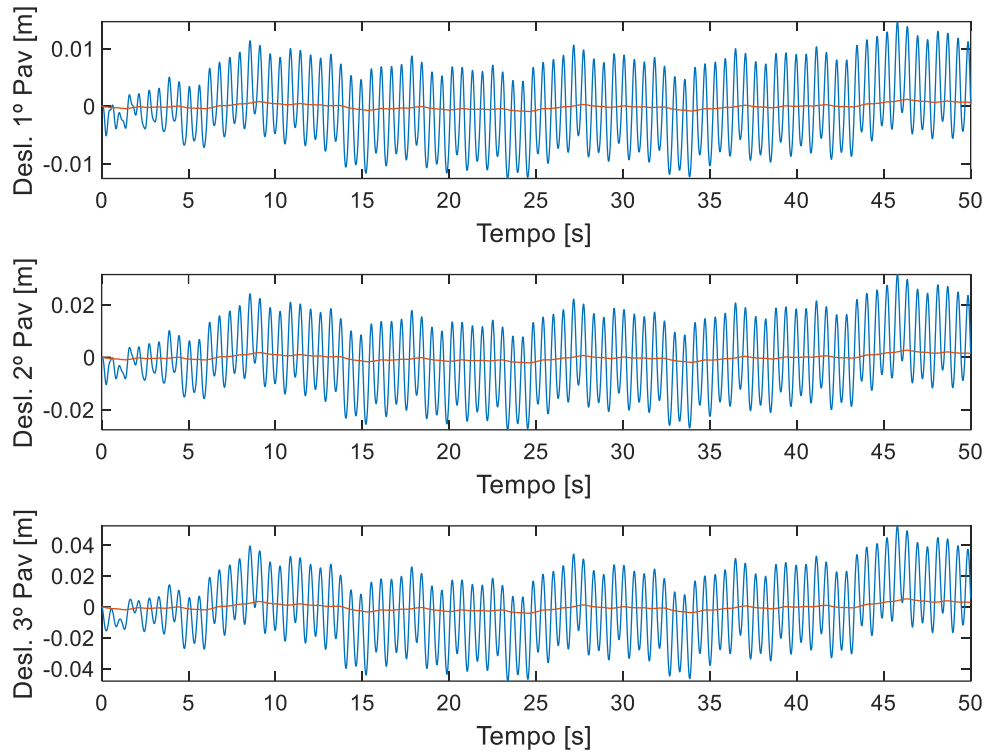
Figura 5.4 – Diagrama de Bode – Ação do vento.



Fonte: Autor.

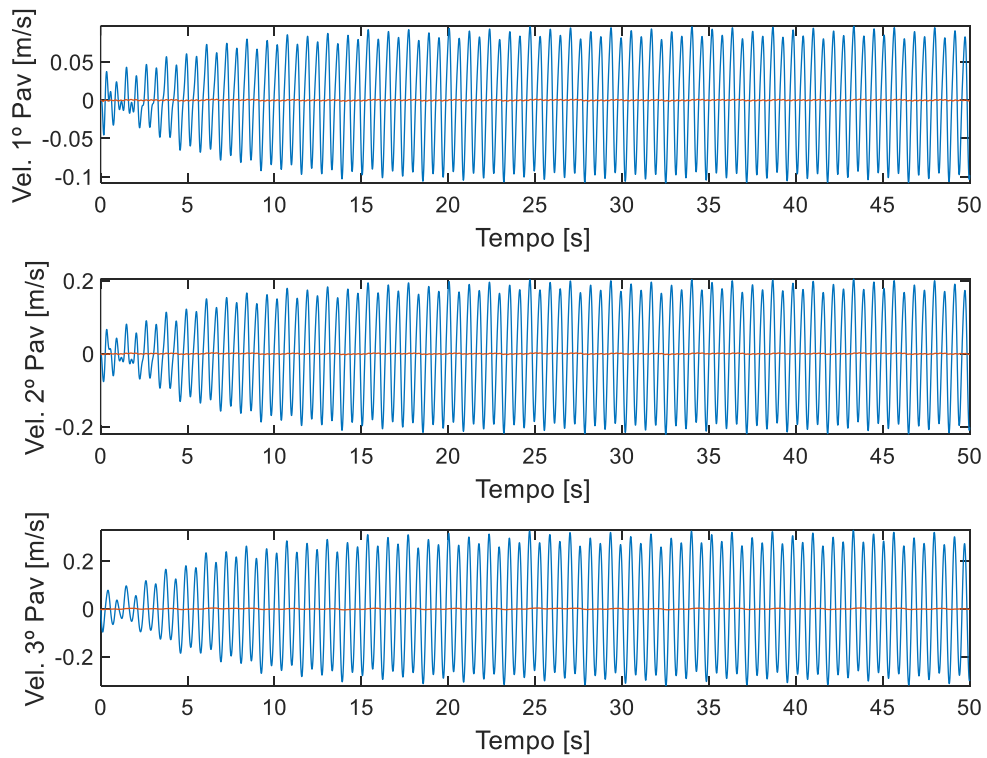
A figura 5.5 compara os deslocamentos com e sem controle, para a ação do vento nos três pavimentos. Já a figura 5.6 compara as velocidades.

Figura 5.5 – Controle \mathcal{H}_∞ para ação do vento – Deslocamento.



Fonte: Autor.

Figura 5.6 – Controle \mathcal{H}_∞ para ação do vento – Velocidade.

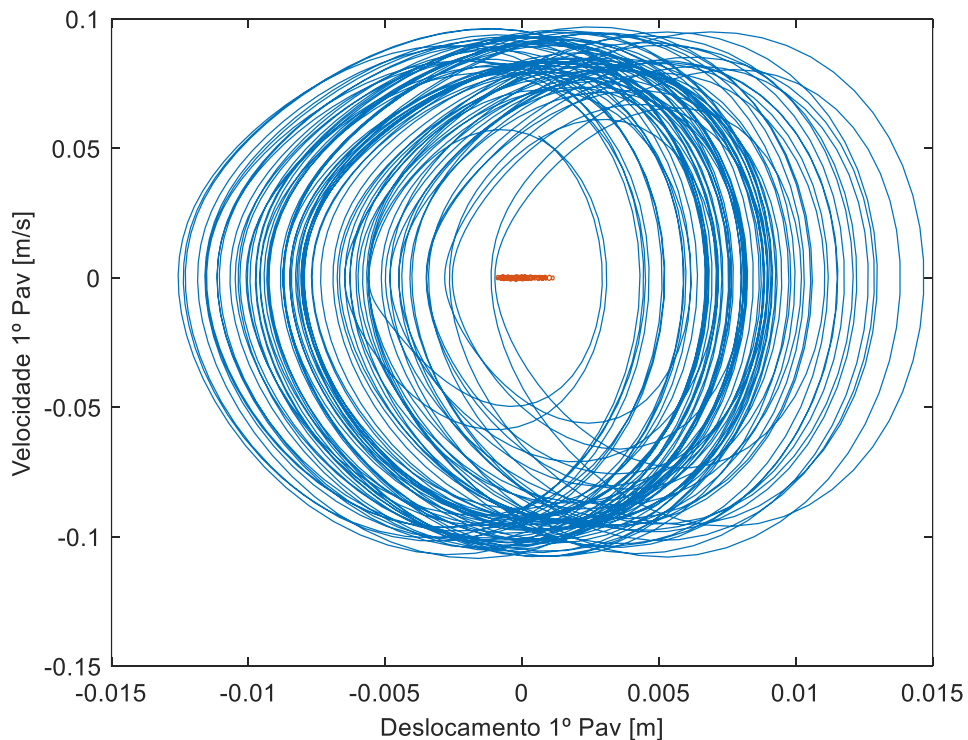


Fonte: Autor.

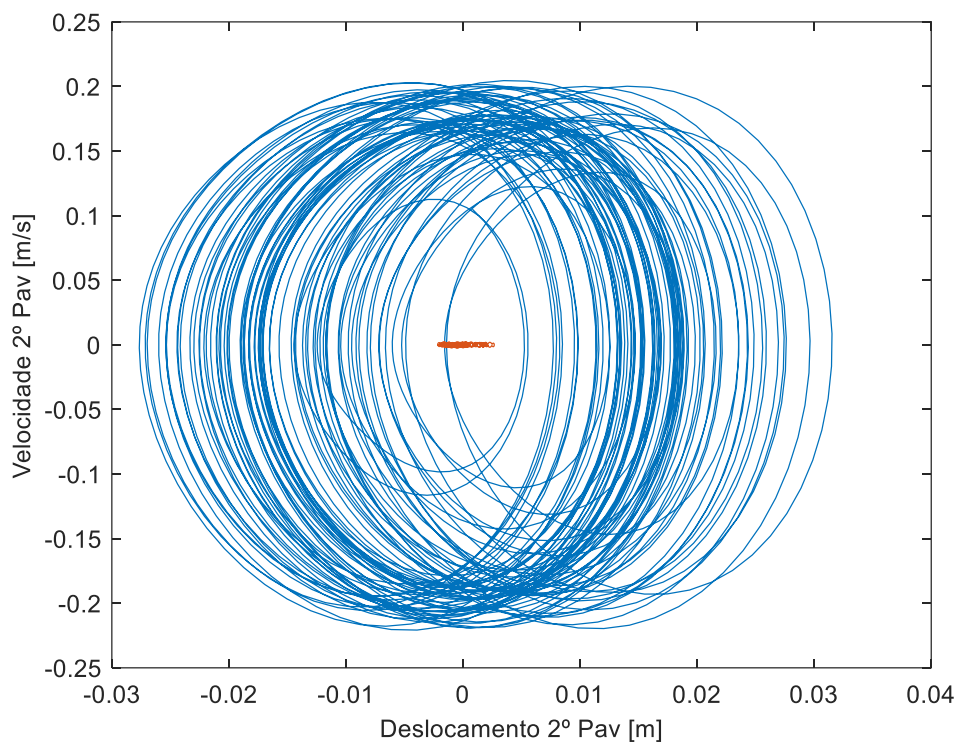
Pode-se observar que tanto na figura 5.5 quanto na 5.6, os valores foram diminuídos consideravelmente. A resposta temporal do sistema em malha fechada, em ambas as situações, apresenta pequenas oscilações quando comparadas ao sistema de malha aberta. Esse comportamento já era esperado quando se analisa o Diagrama de Bode, figura 5.4, já que com a minimização da norma \mathcal{H}_∞ , a entrada exógena (ação do vento) teve mínima influência no comportamento da saída (deslocamento e velocidade).

As figuras 5.5 e 5.6 apresentaram um comportamento similar as figuras 4.4 e 4.5, respectivamente. Ou seja, após oscilações no regime transiente, retorna à posição de equilíbrio, apresentando um comportamento estável. As figuras 5.7, 5.8 e 5.9 apresentam os planos de fase do 1º, 2º e 3º pavimento, respectivamente, tanto para a estrutura sem controle sob ação do vento (azul) quanto para estrutura com o projeto de controlador \mathcal{H}_∞ via realimentação de estados (vermelho). Para estes casos também pode-se notar uma diminuição considerável na amplitude dos planos.

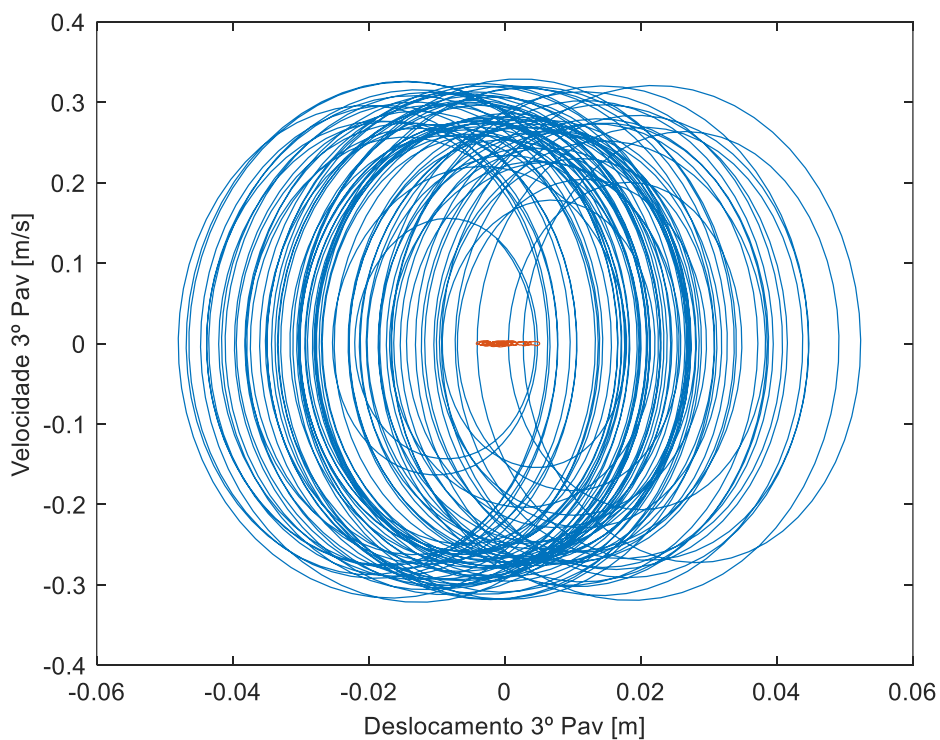
Figura 5.7 – Controle \mathcal{H}_∞ para ação do vento – Plano de Fase 1º Pav.



Fonte: Autor.

Figura 5.8 – Controle \mathcal{H}_∞ para ação do vento – Plano de Fase 2º Pav.

Fonte: Autor.

Figura 5.9 – Controle \mathcal{H}_∞ para ação do vento – Plano de Fase 3º Pav.

Fonte: Autor.

Seguindo a mesma ideia apresentada na seção 4.2, a tabela 5.1 traz os valores do deslocamento máximo total e no 3º pavimento, no modelo estudado. Os deslocamentos após o controle \mathcal{H}_∞ , apresentaram uma redução de cerca de 90%, quando comparados aos valores sem o controle, apresentados na tabela 4.1. Com a redução, os valores ainda ficaram abaixo do limite determinado pela NBR 8800 (ABNT, 2008) e acima do determinado pela NBR 6118 (ABNT, 2014).

Tabela 5.1 – Deslocamentos máximos – Controle \mathcal{H}_∞ para ação do vento.

NBR	Deslocamento	Valor máximo (cm)	Limite (cm)	Situação
8800	Topo do edifício	1.00	2.25	Abaixo
	Entre pisos	0.51	0.60	Abaixo
6118	Topo do edifício	1.00	0.53	Acima
	Entre pisos	0.51	0.36	Acima

Fonte: Autor.

A partir dos resultados apresentados, pode-se analisar que, através da realimentação de estados e do projeto de controlador \mathcal{H}_∞ , o sistema foi estabilizado e sua norma \mathcal{H}_∞ foi minimizada, atingindo assim o objetivo do controlador.

5.4.1.2 Ação do Terremoto

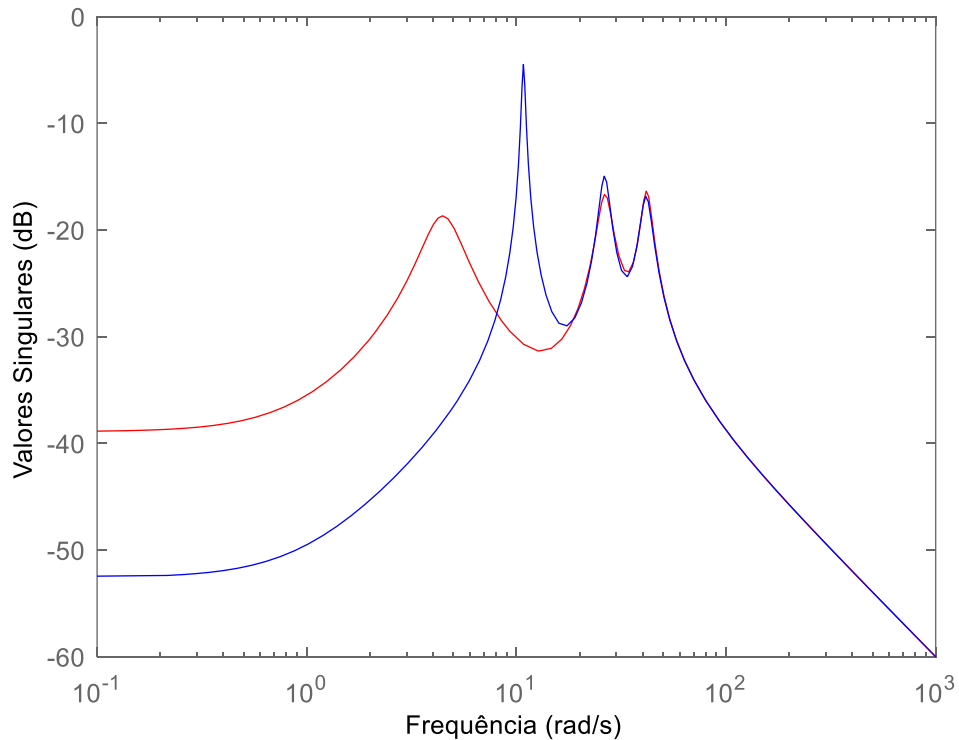
Os resultados apresentados nesta subseção utilizam as componentes (5.15) na equação (5.5). Resolvendo as LMIs apresentadas em (5.9) o seguinte ganho de realimentação foi obtido:

$$K = [-2.3113 \quad 0.1516 \quad 6.8743 \quad -0.0554 \quad 3.1260 \quad -0.1108] \cdot 10^6 \quad (5.18)$$

A figura 5.10, traz o Diagrama de Bode, para o sistema em malha fechada (cor vermelha) e o sistema em malha aberta (cor azul). Pode-se observar que, assim como na ação do vento, houve o “afundamento” da norma \mathcal{H}_∞ , após o controle por

realimentação de estados. Com isso, a entrada exógena do terremoto $w_s(t)$ terá mínima influência no comportamento da saída do sistema $y(t)$.

Figura 5.10 – Diagrama de Bode – Ação do terremoto.

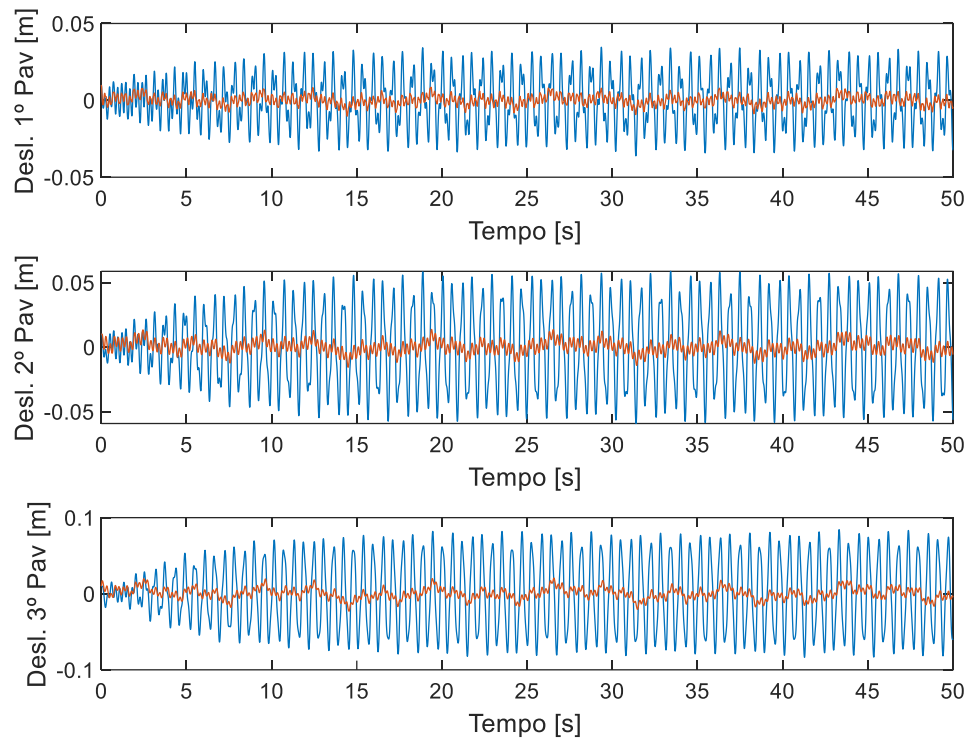


Fonte: Autor.

As figuras 5.11 e 5.12 comparam as respostas temporais do deslocamento e velocidade, respectivamente, do sistema com controle e sem controle. Pode-se notar que em ambas as figuras, os valores foram reduzidos consideravelmente no sistema controlado, representado pela cor vermelha. Esse comportamento já era esperado analisando o Diagrama de Bode, figura 5.10, já que com a minimização da norma \mathcal{H}_∞ , a entrada exógena (ação do terremoto) teve mínima influência no comportamento da saída (deslocamento e velocidade).

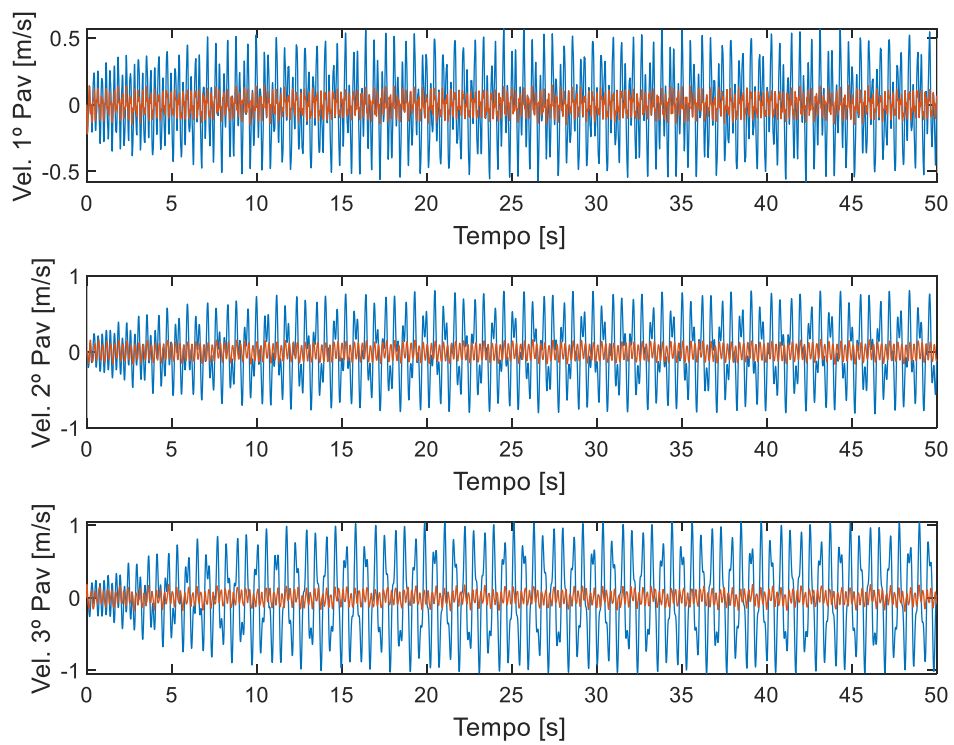
Quando se compara as figuras 5.11 e 5.12, com as figuras 5.5 e 5.6, respectivamente, nota-se que a resposta temporal controlada da ação do vento teve um comportamento com menos oscilações que a resposta temporal controlada da ação do terremoto. O controlador estabilizou o sistema, minimizou a norma \mathcal{H}_∞ , mas manteve o comportamento oscilatório da ação do sismo, que é caracterizado pela aceleração com grande variação de amplitude em um curto espaço de tempo (figura 3.9).

Figura 5.11 – Controle \mathcal{H}_∞ para ação do terremoto – Deslocamento.



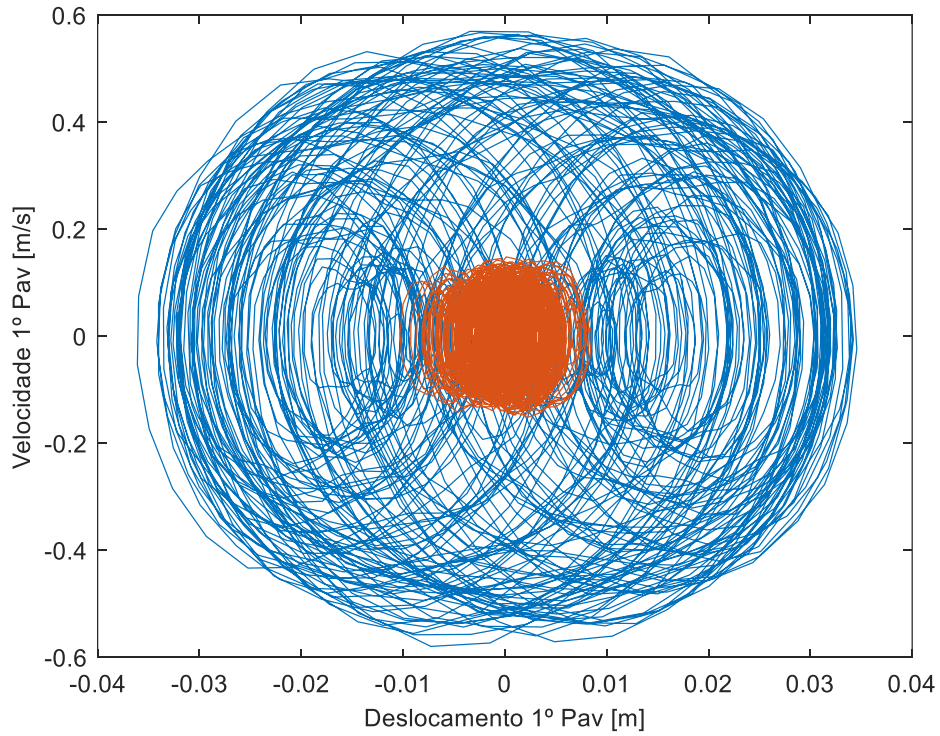
Fonte: Autor.

Figura 5.12 – Controle \mathcal{H}_∞ para ação do terremoto – Velocidade.



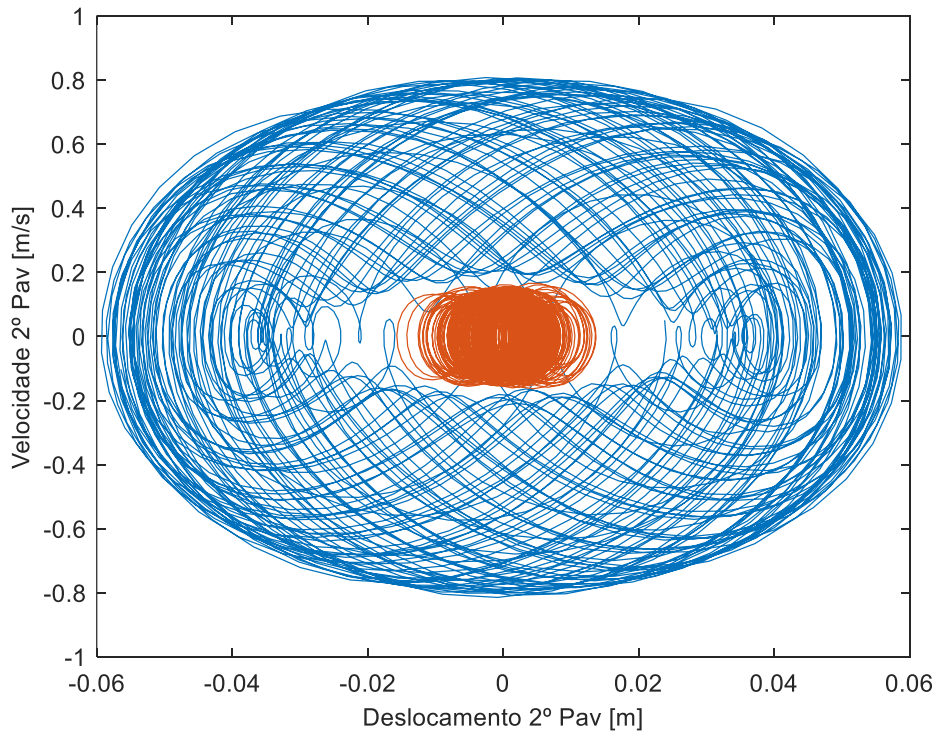
Fonte: Autor.

Figura 5.13 – Controle \mathcal{H}_∞ para ação do terremoto – Plano de Fase 1º Pav.



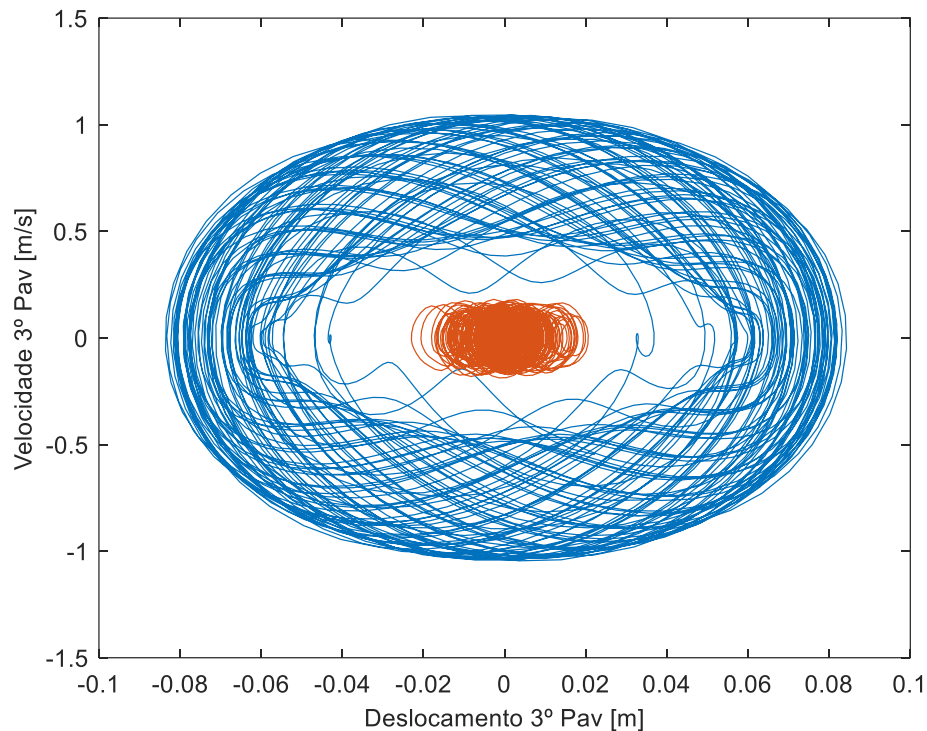
Fonte: Autor.

Figura 5.14 – Controle \mathcal{H}_∞ para ação do terremoto – Plano de Fase 2º Pav.



Fonte: Autor.

Figura 5.15 – Controle \mathcal{H}_∞ para ação do terremoto – Plano de Fase 3º Pav.



Fonte: Autor.

As figuras 5.13, 5.14 e 5.15 apresentam os planos de fase do 1º, 2º e 3º pavimento, respectivamente, tanto para a estrutura sem controle sob ação do terremoto (azul) quanto para estrutura com o projeto de controlador \mathcal{H}_∞ via realimentação de estados (vermelho). Pode-se notar a redução considerável na amplitude nos planos de fase, o que era esperado a partir das respostas temporais, figura 5.11 e 5.12. Quando se compara os planos de fases do vento (figura 5.7, 5.8 e 5.9) com os planos de fase do terremoto, a diferença de comportamento fica mais visível. Ambas possuem uma variação no deslocamento, mas o terremoto possui uma grande variação também na velocidade.

A tabela 5.2 mostra os valores do deslocamento máximo total, dado pela somatória do deslocamento máximo dos três pavimentos, e o deslocamento máximo entre os pisos, que é do 3º pavimento. Os deslocamentos após o controle \mathcal{H}_∞ , apresentaram uma redução de cerca de 75%, quando comparados aos valores sem o controle, apresentados na tabela 4.2. Com essa redução, apenas a verificação da NBR 15421 (2006) foi atendida.

Tabela 5.2 – Deslocamentos máximos – Controle \mathcal{H}_∞ para ação do terremoto.

NBR	Deslocamento	Valor máximo (cm)	Limite (cm)	Situação
8800	Topo do edifício	4.43	2.25	Acima
	Entre pisos	2.06	0.60	Acima
6118	Topo do edifício	4.43	0.53	Acima
	Entre pisos	2.06	0.36	Acima
15421	Entre pisos	2.06	3.00	Abaixo

Fonte: Autor.

5.4.1.3 Ação Simultânea do Vento e Terremoto

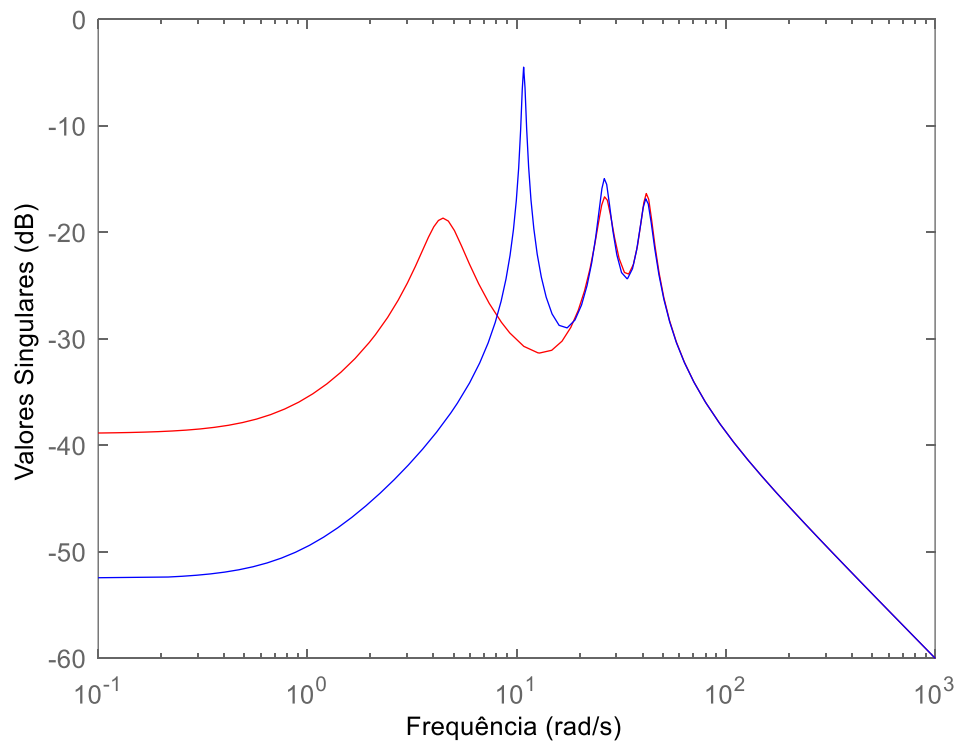
Nesta subseção utilizam as componentes (5.16) na equação (5.5) para as simulações numéricas dos resultados. Resolvendo as LMIs apresentadas em (5.9) o seguinte ganho de realimentação foi obtido:

$$K = [-2.3113 \quad 0.1516 \quad 6.8743 \quad -0.0554 \quad 3.1260 \quad -0.1108] \cdot 10^6 \quad (5.19)$$

A figura 5.16, traz o Diagrama de Bode, para o sistema com controle (cor vermelha) e o sistema sem controle (cor azul). Pode-se observar que, o vetor de ganho K e o Diagrama de Bode foram os mesmos para a ação isolada do terremoto. Isso porque, na equação (5.16) o coeficiente que multiplica a ação do vento ($1/m_3$) possui a ordem bem menor que o coeficiente que multiplica a ação do terremoto (-1), o que faz predominar no sistema a característica da ação do sismo.

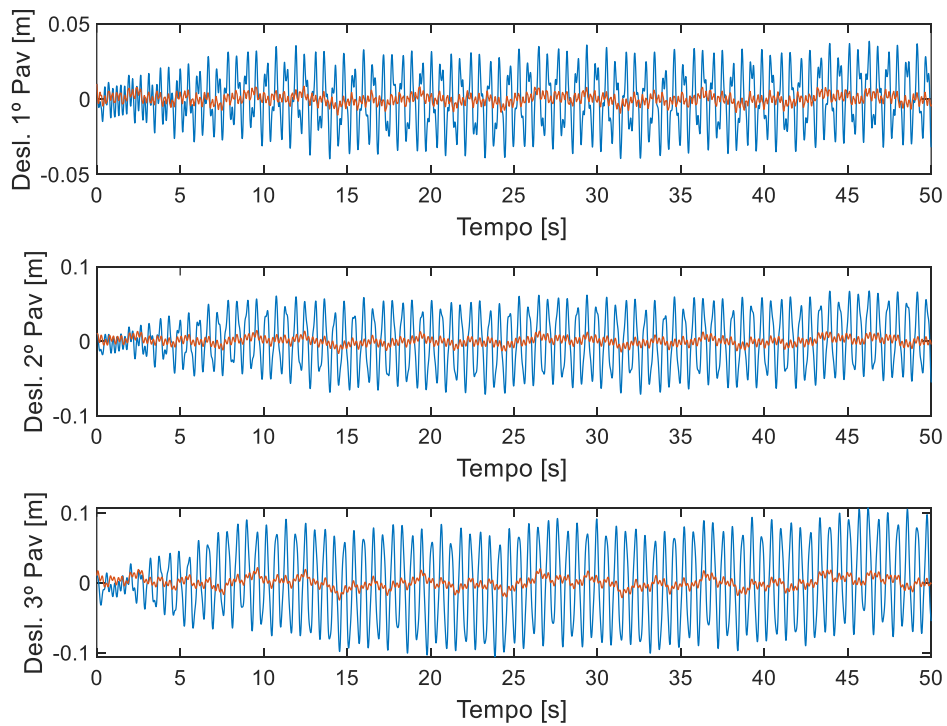
E este comportamento pode ser observado nas figuras 5.17 e 5.18, que comparam as respostas temporais dos deslocamentos e velocidades, respectivamente, do sistema com controle e sem controle. Pode-se notar que em ambas as figuras, as amplitudes foram reduzidas consideravelmente no sistema controlado. Esse comportamento já era esperado a partir dos resultados anteriores. Nota-se também que a predominância da ação do terremoto no sistema, já que as amplitudes dos deslocamentos e velocidades apresentam grande variação para uma pequena faixa de tempo.

Figura 5.16 – Diagrama de Bode – Ação simultânea.



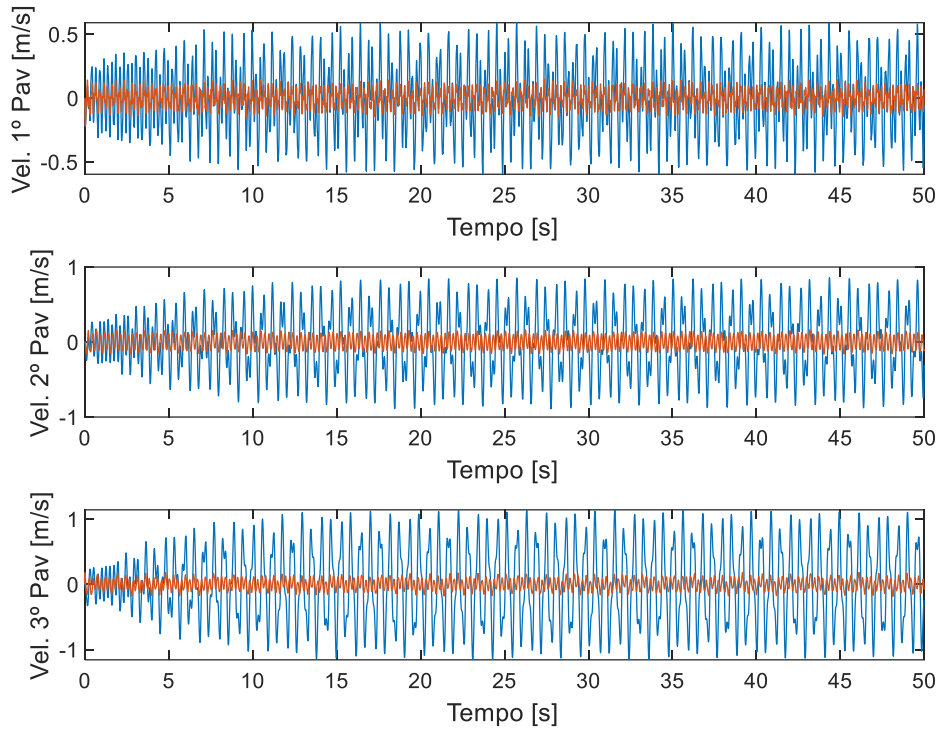
Fonte: Autor.

Figura 5.17 – Controle \mathcal{H}_∞ para ação simultânea – Deslocamento.



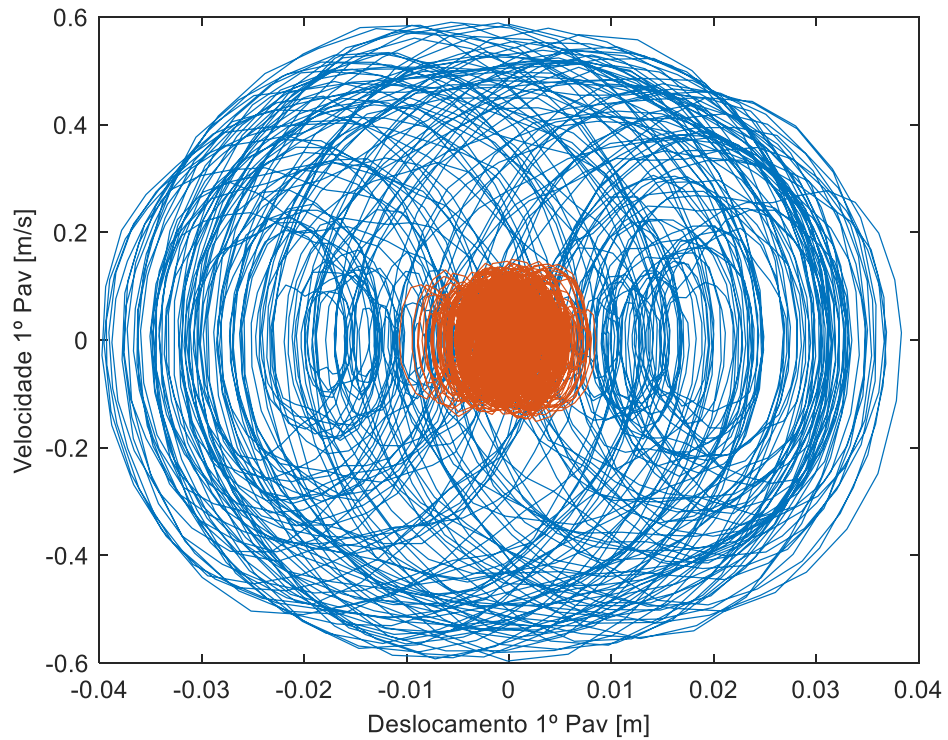
Fonte: Autor.

Figura 5.18 – Controle \mathcal{H}_∞ para ação simultânea – Velocidade.

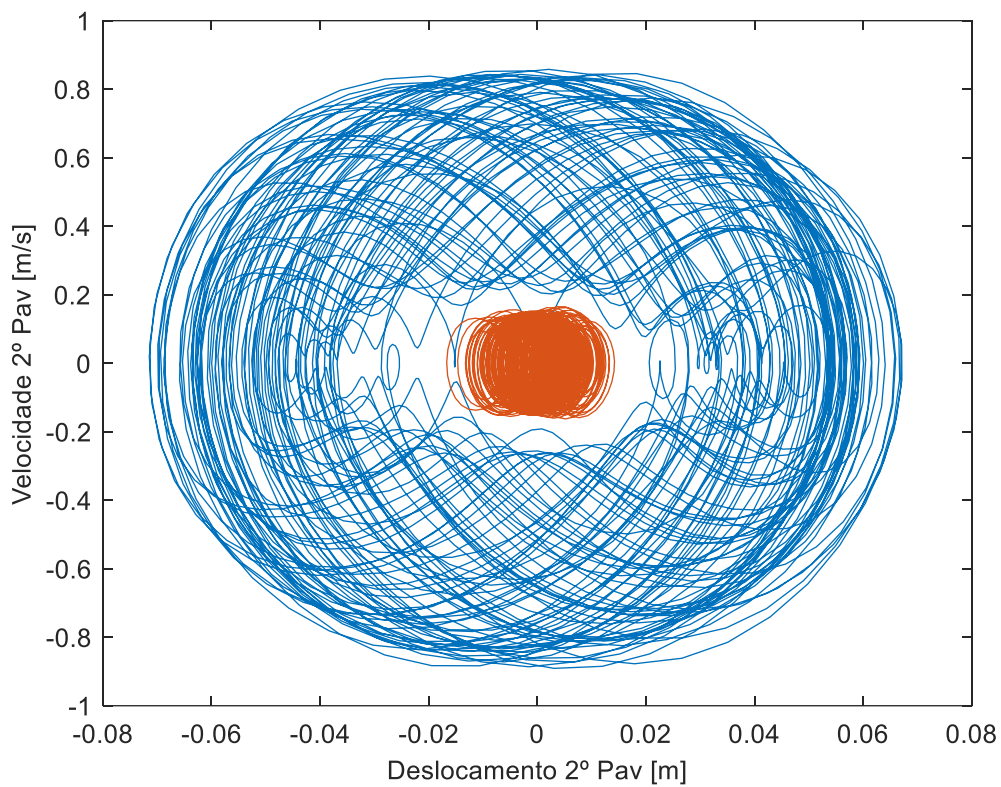


Fonte: Autor.

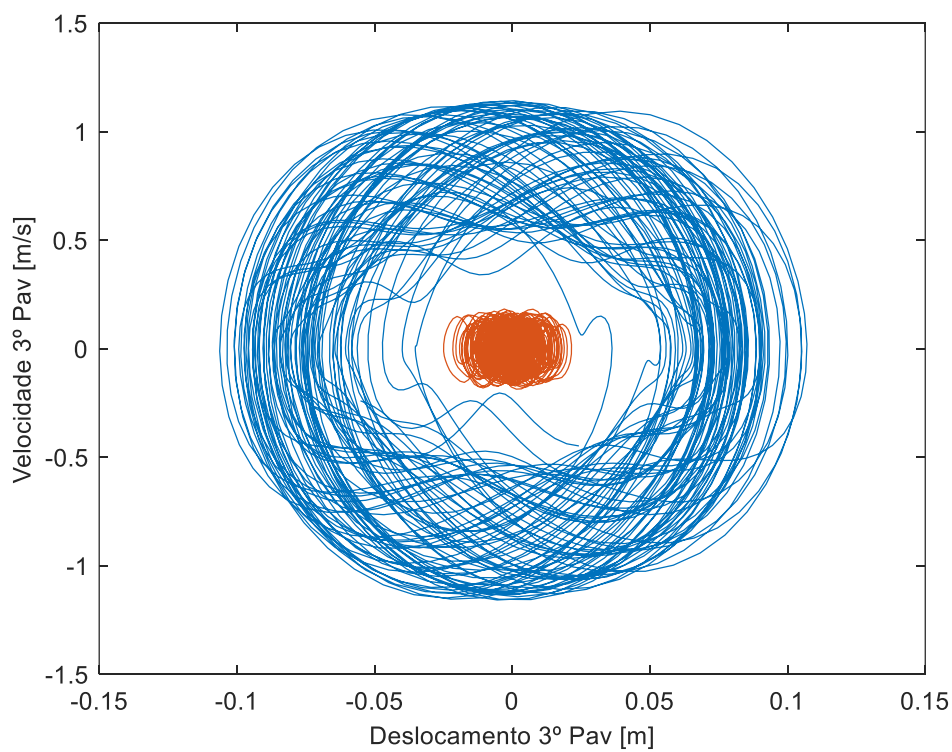
Figura 5.19 – Controle \mathcal{H}_∞ para ação simultânea – Plano de Fase 1º Pav.



Fonte: Autor.

Figura 5.20 – Controle \mathcal{H}_∞ para ação simultânea – Plano de Fase 2º Pav.

Fonte: Autor.

Figura 5.21 – Controle \mathcal{H}_∞ para ação simultânea – Plano de Fase 3º Pav.

Fonte: Autor.

As figuras 5.19, 5.20 e 5.21 apresentam os planos de fase do 1º, 2º e 3º pavimento, respectivamente, tanto para a estrutura sem controle (azul) quanto para estrutura com o projeto de controlador \mathcal{H}_∞ via realimentação de estados (vermelho). Para a ação simultânea do vento e terremoto no sistema, também pode-se notar uma diminuição considerável na amplitude dos planos de fase. A partir destes pode-se verificar uma estabilidade no sistema em malha fechada, que apresenta pequenos deslocamentos e velocidades em torno do ponto de equilíbrio. A partir das simulações, pode-se analisar que, através da realimentação de estados e do projeto de controlador \mathcal{H}_∞ , o sistema foi estabilizado e sua norma \mathcal{H}_∞ foi minimizada, atingindo assim o objetivo do controlador também para ação simultânea.

A tabela 5.3 mostra os valores do deslocamento máximo total da estrutura e o deslocamento máximo do 3º pavimento. Após o controle \mathcal{H}_∞ , o deslocamento total da estrutura apresentou uma redução de 77%, já o deslocamento máximo do 3º pavimento apresentou uma redução de 79%, quando comparados aos valores apresentados na tabela 4.3. De forma análoga a ação do terremoto, apenas a verificação da NBR 15421 (2006) foi atendida.

Tabela 5.3 – Deslocamentos máximos – Controle \mathcal{H}_∞ para ação simultânea.

NBR	Deslocamento	Valor máximo (cm)	Limite (cm)	Situação
8800	Topo do edifício	4.57	2.25	Acima
	Entre pisos	2.15	0.60	Acima
6118	Topo do edifício	4.57	0.53	Acima
	Entre pisos	2.15	0.36	Acima
15421	Entre pisos	2.06	3.00	Abaixo

Fonte: Autor.

5.5 AMORTECEDOR MAGNETO REOLÓGICO

Apresenta-se neste item, o controle estrutural, a partir do uso do amortecedor magneto reológico (AMR). Que são dispositivos de controle semiativos que podem ter seu fator de amortecimento alterado instantaneamente, além de apresentar uma

alta estabilidade, confiabilidade e seu funcionamento ser obtido de forma silenciosa (TANAKA, 2017).

Considerado um material inteligente, o fluido magneto reológico (MR) é uma mistura de óleo com micro partículas ferromagnéticas sensíveis a ação de um campo magnético. E quando ele é exposto a uma intensidade de campo magnético ou corrente elétrica, passa de um líquido de fluxo livre a um semissólido com intensidade de força controlável. As partículas ferromagnéticas tendem a se alinhar em estruturas lineares, paralelas às linhas de fluxo magnético, que dificultam o escoamento do fluido e, conseqüentemente, aumentam sua viscosidade (CHAVARETTE, 2017; TANAKA, 2017).

A figura 5.22 apresenta um modelo esquemático de um AMR com a aplicação do campo magnético ($B > 0$) e sem ($B = 0$). Já a figura 5.23 demonstra duas possíveis configurações de aplicação à estrutura. Essa tecnologia já está em uso em estruturas civis com o objetivo de mitigar ações como ventos e sismos. E a sua primeira aplicação em um edifício ocorreu em 2001, quando dois AMR de 30 toneladas foram usados no Museu Nacional de Ciências Emergentes e Inovações em Tóquio, no Japão (CARNEIRO, 2009).

Figura 5.22 – Modelo esquemático do AMR.

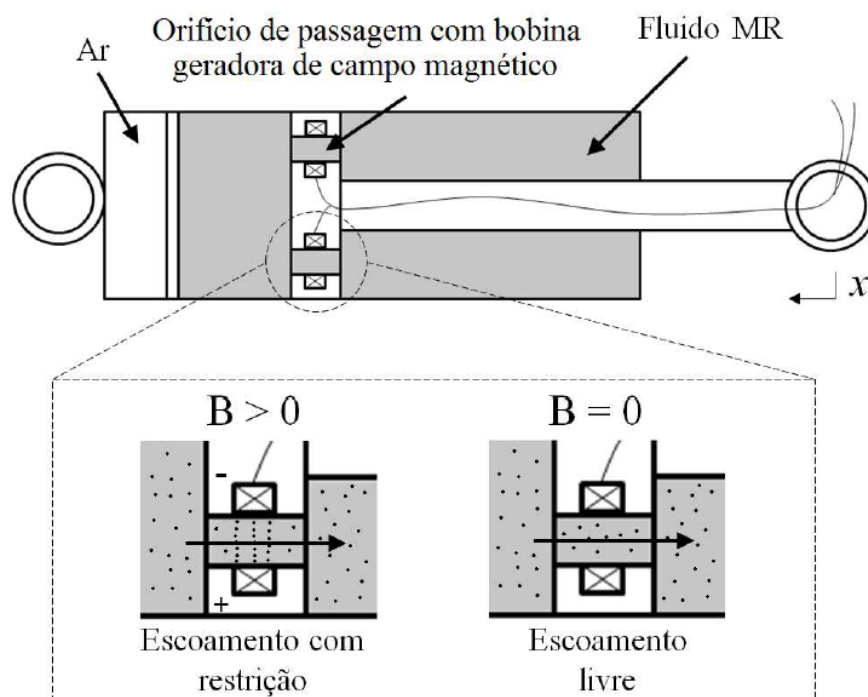
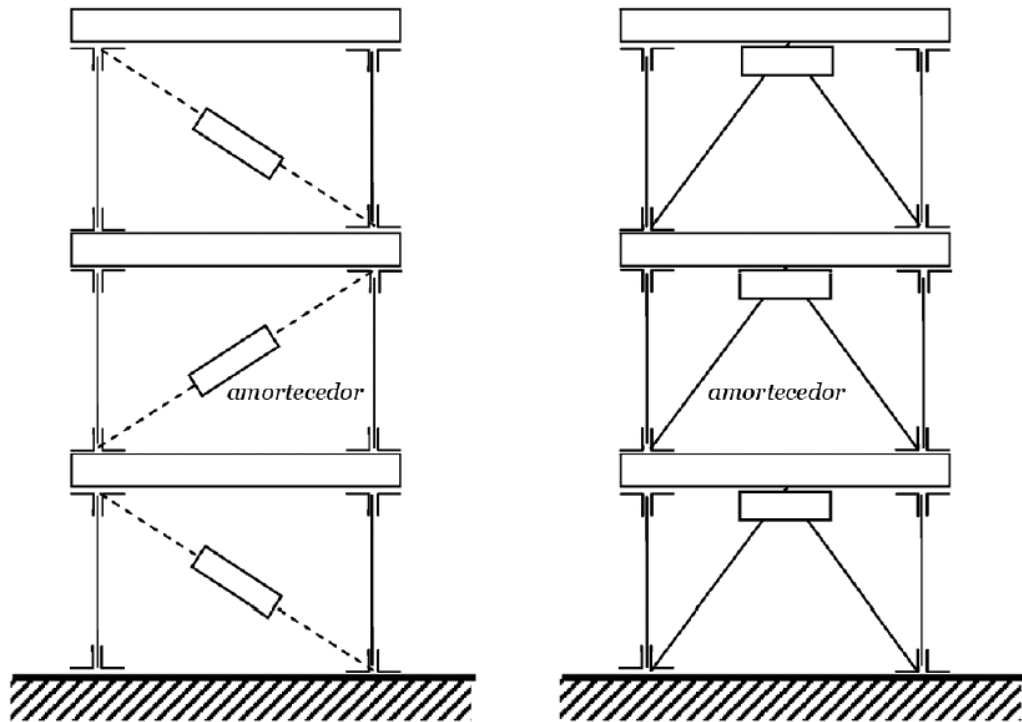


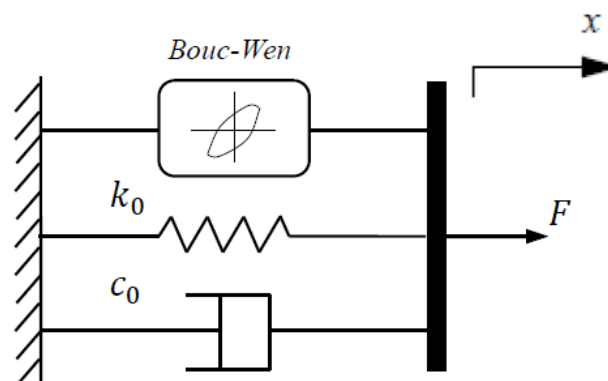
Figura 5.23 – Possíveis configurações estruturais do AMR.



Fonte: Casciati *et al.* (2006).

Para o desenvolvimento do sistema de controle dos atuadores MR, é necessário que o modelo matemático esteja fiel ao seu comportamento dinâmico. Esta tem sido uma busca constante por parte dos pesquisadores, o que demonstra uma procura cada vez maior do aperfeiçoamento dos atuais modelos existentes. O mais referenciado e utilizado na maior parte das pesquisas que envolvem AMR é o modelo paramétrico de Bouc-Wen modificado, apresentado no trabalho de Spencer *et al.* (1997). Ele surgiu a partir do modelo Bouc-Wen, representado na figura 5.24, que retrata o comportamento de um AMR típico.

Figura 5.24 – Modelo de Bouc-Wen.



Fonte: Spencer *et al.* (1997).

Este modelo, figura 5.24, possui grande versatilidade e pode exibir uma ampla variedade de comportamentos histeréticos. A força gerada deste modelo é representada por:

$$F = c_0 \dot{x} + k_0(x - x_0) + \alpha z \quad (5.20)$$

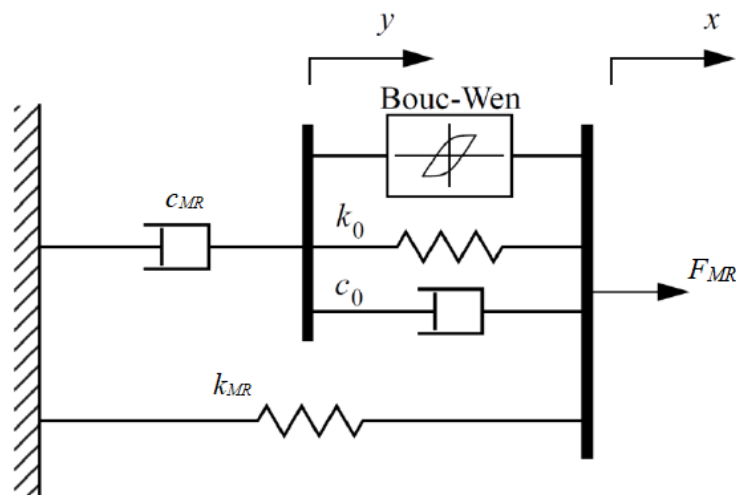
Sendo que z é uma variável evolucionária que é responsável pelo comportamento histerético, governada por:

$$\dot{z} = -\gamma |\dot{x}| z |z|^{n-1} - \beta \dot{x} |z|^n + \varepsilon \dot{x} \quad (5.21)$$

Sendo: c_0 o coeficiente de amortecimento viscoso [Ns/m]; k_0 o coeficiente de rigidez elástica [N/m]; x_0 o deslocamento inicial [m]; α o coeficiente de rigidez [N/m]; γ [m^{-2}], β [m^{-2}], n [s^{-1}] e ε , dependem das características do amortecedor, onde ε é constante.

Objetivando uma melhor precisão em sua aplicação, foram feitas mudanças no modelo Bouc-Wen. O modelo proposto por Spencer *et al.* (1997), figura 5.25, é capaz de descrever com maior exatidão o comportamento de dispositivos que apresentam uma rápida queda da força quando a velocidade do pistão passa por zero. Sendo considerado o melhor para aplicações automobilísticas, por diminuir o desconforto vibro acústico (ALMEIDA, 2022).

Figura 5.25 – Modelo de Bouc-Wen modificado.



Fonte: Spencer *et al.* (1997) - adaptado.

As equações que regem o comportamento dinâmico do modelo Bouc-Wen modificado são descritas por (LAI e LIAO, 2002):

$$c_{MR} \dot{y} = \alpha z + k_0(x - y) + c_0(\dot{x} - \dot{y}) \quad (5.22)$$

A variável z pode ser obtida pela equação (5.21):

$$\dot{z} = -\gamma|\dot{x} - \dot{y}|z|z|^{n-1} - \beta(\dot{x} - \dot{y})|z|^n + \varepsilon(\dot{x} - \dot{y}) \quad (5.23)$$

Resolvendo (5.22) em função de \dot{y} , obtêm-se:

$$\dot{y} = \frac{1}{c_0 + c_{MR}} [\alpha z + c_0 \dot{x} + k_0(x - y)] \quad (5.24)$$

A força total do modelo de Bouc-Wen modificado é dada por :

$$F_{MR} = \alpha z + k_0(x - y) + c_0(\dot{x} - \dot{y}) + k_{MR}(x - x_0) \quad (5.25)$$

Podendo ser rescrita da seguinte forma:

$$F_{MR} = c_{MR}\dot{y} + k_{MR}(x - x_0) \quad (5.26)$$

Sendo: F_{MR} a força gerada pelo AMR; c_{MR} o fator de amortecimento do AMR; k_{MR} a rigidez associada ao AMR; \dot{y} a velocidade do embolo do pistão do AMR; x o deslocamento do AMR; c_0 o fator de amortecimento inicial; k_0 o coeficiente de rigidez inicial do conjunto e x_0 o deslocamento inicial do AMR.

As equações (5.27), (5.28) e (5.29) trazem parâmetros dependentes da variável i , corrente elétrica, obtida pela equação (5.30), que é um filtro de primeira ordem que representa o retardo da corrente do circuito elétrico em relação a tensão elétrica de entrada v :

$$\alpha(i) = \alpha_a + \alpha_b(i) \quad (5.27)$$

$$c_0(i) = c_{0a} + c_{0b}(i) \quad (5.28)$$

$$c_{MR}(i) = c_{MRa} + c_{MRb}(i) \quad (5.29)$$

$$\dot{u} = -\eta(u - v) \quad (5.30)$$

Neste modelo, são necessários quatorze parâmetros para caracterizar o AMR. Seus valores otimizados são determinados através do ajuste do modelo de acordo com dados experimentais obtidos em teste laboratoriais. Este modelo é o que apresenta maior exatidão, no entanto, quando utilizado em sistemas de controle, a solução de todas essas equações exige naturalmente um certo esforço computacional, já que possui três equações diferenciais, fora as equações da dinâmica do circuito elétrico (LAI e LIAO, 2002).

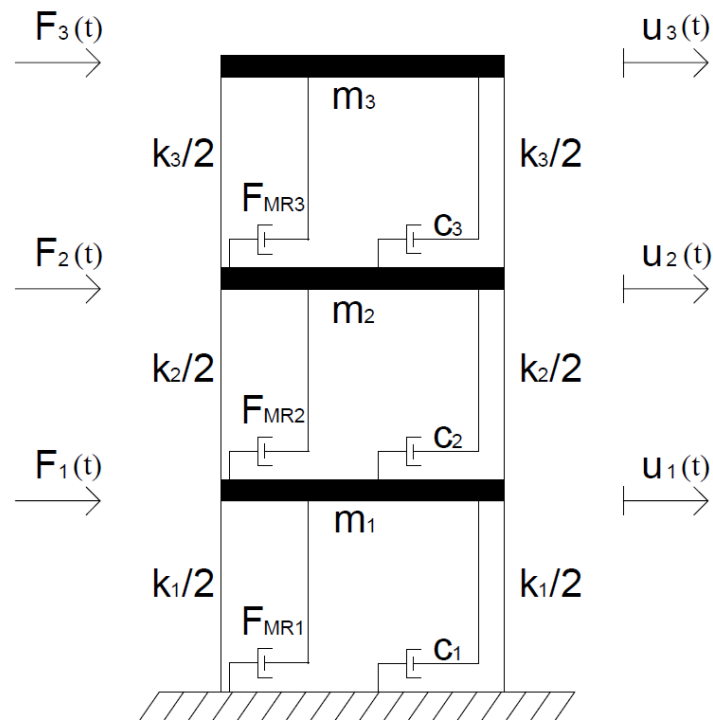
A fim de contornar esse problema, este trabalho propõe usar uma expressão aproximada para a equação (5.26). Onde força F_{MR} não apresenta explicitamente uma dependência da variável de controle que deve ser a corrente elétrica. Segundo Tusset e Balthazar (2013), baseado em Dominguez *et al.* (2006), que realizou estudos sobre o comportamento de AMR e através de dados experimentais, escreveu a função (5.31) que é dependente da corrente elétrica:

$$F_{MR} = \frac{3,2}{(3e^{-3,4i}) + 1} \dot{x} + k_0 x + \frac{8,5}{(1,28e^{-3,9i}) + 1} z \quad (5.31)$$

5.5.1 Aplicação no modelo estudado

Na figura 5.26 está representado o modelo estrutural do edifício, considerando a força do AMR, atuando nos três pavimentos.

Figura 5.26 – Modelo *shear building* com ação do AMR.



Fonte: Autor.

A partir do sistema (3.29), fazendo a análise de equilíbrio, a dinâmica da estrutura é determinada de acordo com as equações de movimento (5.32). Sendo \dot{y}_7 , \dot{y}_8 e \dot{y}_9 a aplicação da equação (5.23), para F_{MR1} , F_{MR2} e F_{MR3} , respectivamente.

$$\begin{cases}
\dot{y}_1 = y_2 \\
\dot{y}_2 = -\frac{(k_1 + k_2)y_1}{m_1} - \frac{(c_1 + c_2)y_2}{m_1} + \frac{k_2 y_3}{m_1} + \frac{c_2 y_4}{m_1} - \frac{F_{MR1}}{m_1} + \frac{F_{MR2}}{m_1} \\
\dot{y}_3 = y_4 \\
\dot{y}_4 = \frac{k_2 y_1}{m_2} + \frac{c_2 y_2}{m_2} - \frac{(k_2 + k_3)y_3}{m_2} - \frac{(c_2 + c_3)y_4}{m_2} + \frac{k_3 y_5}{m_2} + \frac{c_3 y_6}{m_2} - \frac{F_{MR2}}{m_2} + \frac{F_{MR3}}{m_2} \\
\dot{y}_5 = y_6 \\
\dot{y}_6 = \frac{k_3 y_3}{m_3} + \frac{c_3 y_4}{m_3} - \frac{k_3 y_5}{m_3} - \frac{c_3 y_6}{m_3} - \frac{F_{MR3}}{m_3} \\
\dot{y}_7 = -\gamma |y_2| |y_7| |y_7|^{n-1} - \beta y_2 |y_7|^n + \varepsilon y_2 \\
\dot{y}_8 = -\gamma |y_4 - y_2| |y_8| |y_8|^{n-1} - \beta (y_4 - y_2) |y_8|^n + \varepsilon (y_4 - y_2) \\
\dot{y}_9 = -\gamma |y_6 - y_4| |y_9| |y_9|^{n-1} - \beta (y_6 - y_4) |y_9|^n + \varepsilon (y_6 - y_4)
\end{cases} \quad (5.32)$$

A partir da equação (5.31), tem-se que:

$$F_{MR1} = \frac{3,2}{(3e^{-3,4i}) + 1} y_2 + k_0 y_1 + \frac{8,5}{(1,28e^{-3,9i}) + 1} y_7 \quad (5.33)$$

$$F_{MR2} = \frac{3,2}{(3e^{-3,4i}) + 1} (y_4 - y_2) + k_0 (y_3 - y_1) + \frac{8,5}{(1,28e^{-3,9i}) + 1} y_8 \quad (5.34)$$

$$F_{MR3} = \frac{3,2}{(3e^{-3,4i}) + 1} (y_6 - y_4) + k_0 (y_5 - y_3) + \frac{8,5}{(1,28e^{-3,9i}) + 1} y_9 \quad (5.35)$$

A tabela 5.4 traz os parâmetros do AMR usados nas simulações (TUSSET e BALTHAZAR, 2013; ROEFERO, CHAVARETTE e MISHRA, 2022):

Tabela 5.4 – Parâmetros do AMR para simulação.

Parâmetros do atuador	Valores
$\gamma [m^{-2}]$	408720
$\beta [m^{-2}]$	-360220
$n [s^{-1}]$	2
ε	634
$i [A]$	2
$k_0 [N/m]$	-155.63

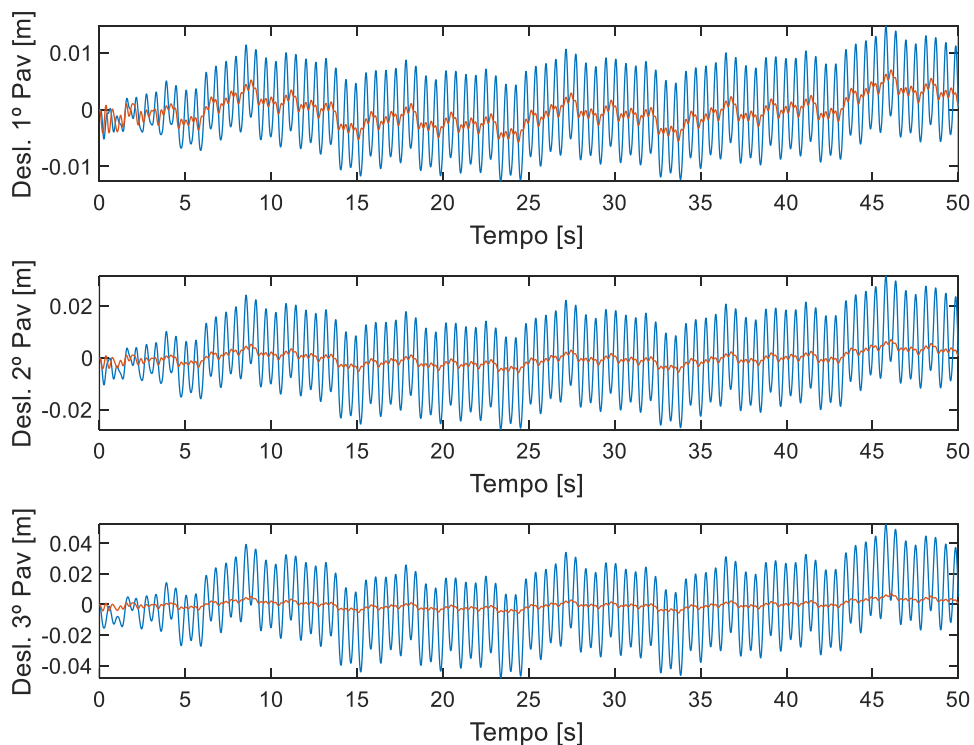
Fonte: Autor.

Implementando essas funções e parâmetros em um algoritmo no MATLAB, e fazendo a integração ao longo do tempo, obteve-se as respostas temporais, que serão apresentadas nas próximas subseções. Elas foram obtidas com a mesma metodologia apresentada no Capítulo 4. Seguindo o mesmo padrão da seção anterior, a cor vermelha foi adotada para representar o sistema controlado e a cor azul para representar o sistema sem controle.

5.5.1.1 Ação do Vento

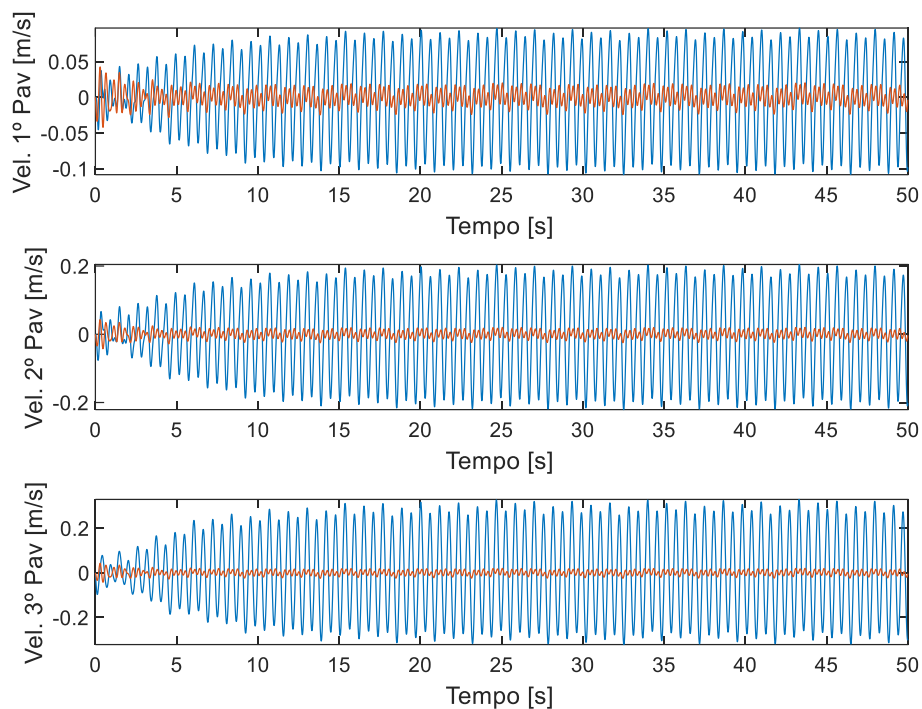
Para os resultados apresentados nesta subseção, foi considerada a carga dinâmica do vento, no terceiro pavimento do modelo estudado (figura 5.26), ou seja, a $F_3(t)$ será a força externa provocada pelo vento. Essa carga foi adicionada ao sistema de equações (5.32), e neste será feita a integração ao longo do tempo. As figuras 5.27 e 5.28, apresentam respectivamente, a comparação dos deslocamentos e velocidades com e sem controle, para a ação do vento nos três pavimentos. Pode-se observar que nas duas figuras, os valores foram diminuídos consideravelmente.

Figura 5.27 – Controle AMR para ação do vento – Deslocamento.



Fonte: Autor.

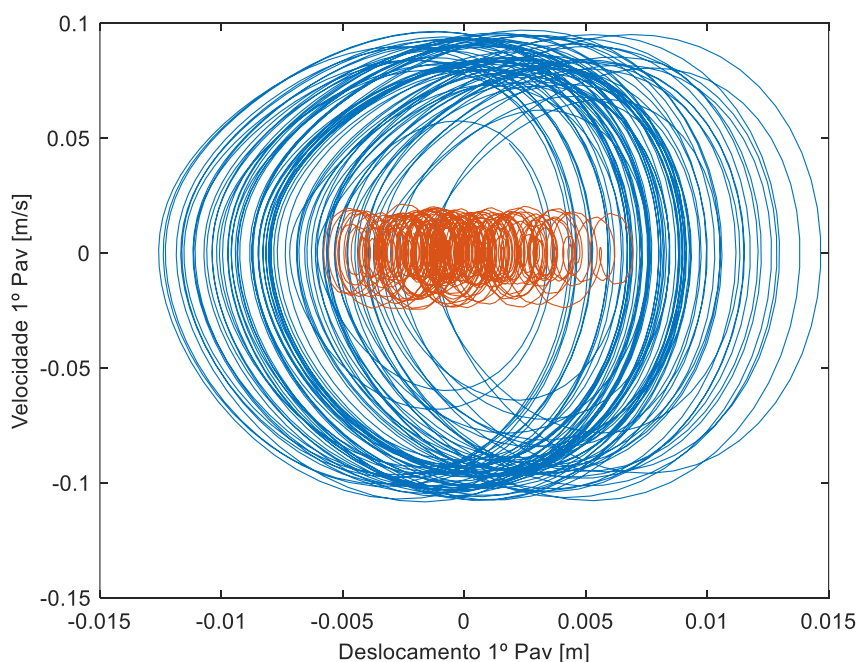
Figura 5.28 – Controle AMR para ação do vento – Velocidade.



Fonte: Autor.

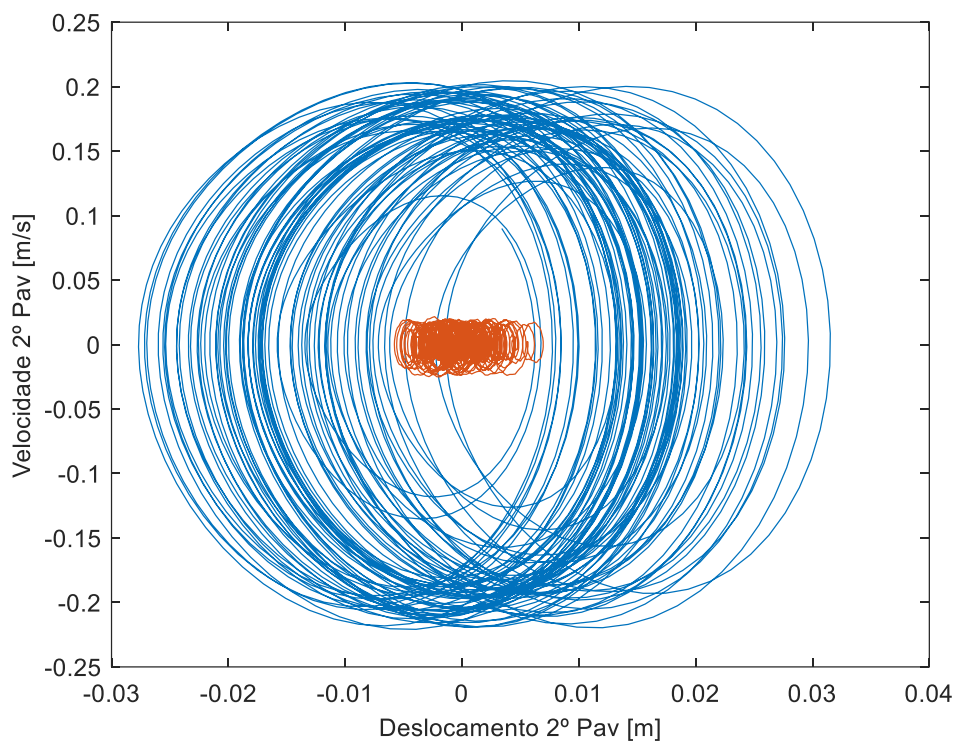
A resposta temporal do sistema controlado, em ambas as situações, apresenta pequenas oscilações quando comparadas ao sistema sem controle. As figuras 5.27 e 5.28 apresentaram uma maior variação de amplitude ao longo do tempo, que as figuras 5.5 e 5.6, respectivamente.

Figura 5.29 – Controle AMR para ação do vento – Plano de Fase 1º Pav.



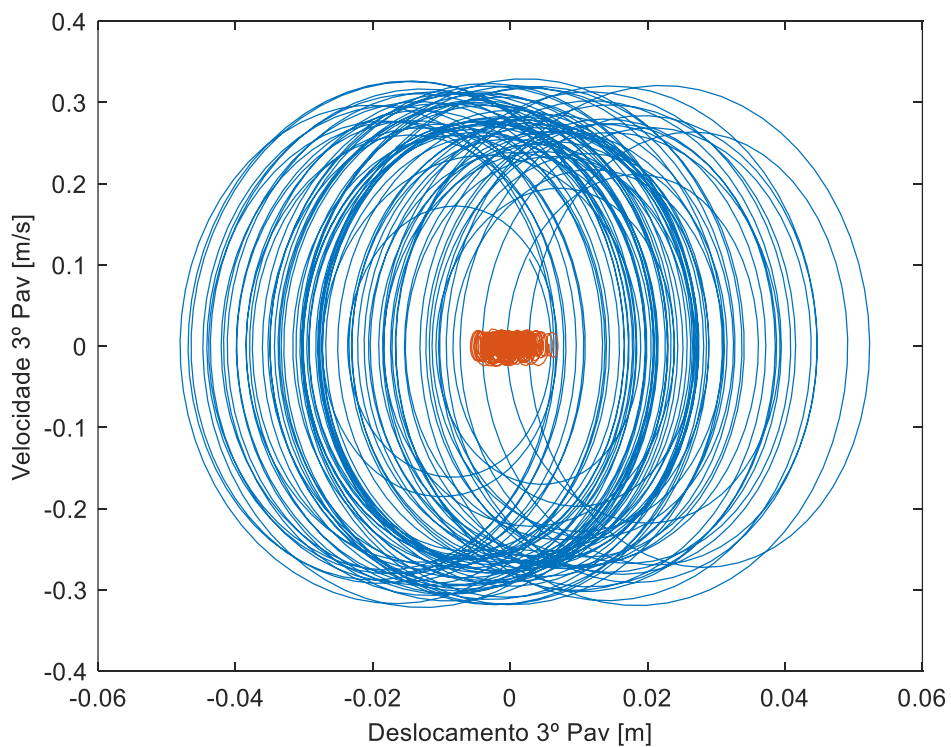
Fonte: Autor.

Figura 5.30 – Controle AMR para ação do vento – Plano de Fase 2º Pav.



Fonte: Autor.

Figura 5.31 – Controle AMR para ação do vento – Plano de Fase 3º Pav.



Fonte: Autor.

As figuras 5.29, 5.30 e 5.31 apresentam os planos de fase do 1º, 2º e 3º pavimento, respectivamente, tanto para a estrutura sem controle sob ação do vento, quanto para estrutura com o projeto de controlador AMR. Para estes casos também pode-se notar uma diminuição considerável na amplitude dos planos. Quando comparados aos planos de fase obtidos com a o controlador \mathcal{H}_∞ via realimentação de estados, figuras 5.7, 5.8 e 5.9, a variação de amplitude ao longo do tempo para o AMR fica mais evidente.

A tabela 5.5 traz os valores do deslocamento máximo total e no 3º pavimento, no modelo estudado. Os deslocamentos após o controle AMR, apresentaram uma redução de 78% entre piso e 86% no topo do edifício, quando comparados aos valores sem o controle, apresentados na tabela 4.1. Apesar da redução significativa, apenas para a verificação do deslocamento no topo do edifício, segundo a NBR 8800 (ABNT, 2008), ficou abaixo do limite.

Tabela 5.5 – Deslocamentos máximos – Controle AMR para ação do vento.

NBR	Deslocamento	Valor máximo (cm)	Limite (cm)	Situação
8800	Topo do edifício	2.10	2.25	Abaixo
	Entre pisos	0.70	0.60	Acima
6118	Topo do edifício	2.10	0.53	Acima
	Entre pisos	0.70	0.36	Acima

Fonte: Autor.

A partir dos resultados apresentados, pode-se analisar que, através do controlador AMR, o sistema foi estabilizado e ficou constatado a minimização das oscilações da estrutura, atingindo assim o objetivo do controlador.

5.5.1.2 Ação do Terremoto

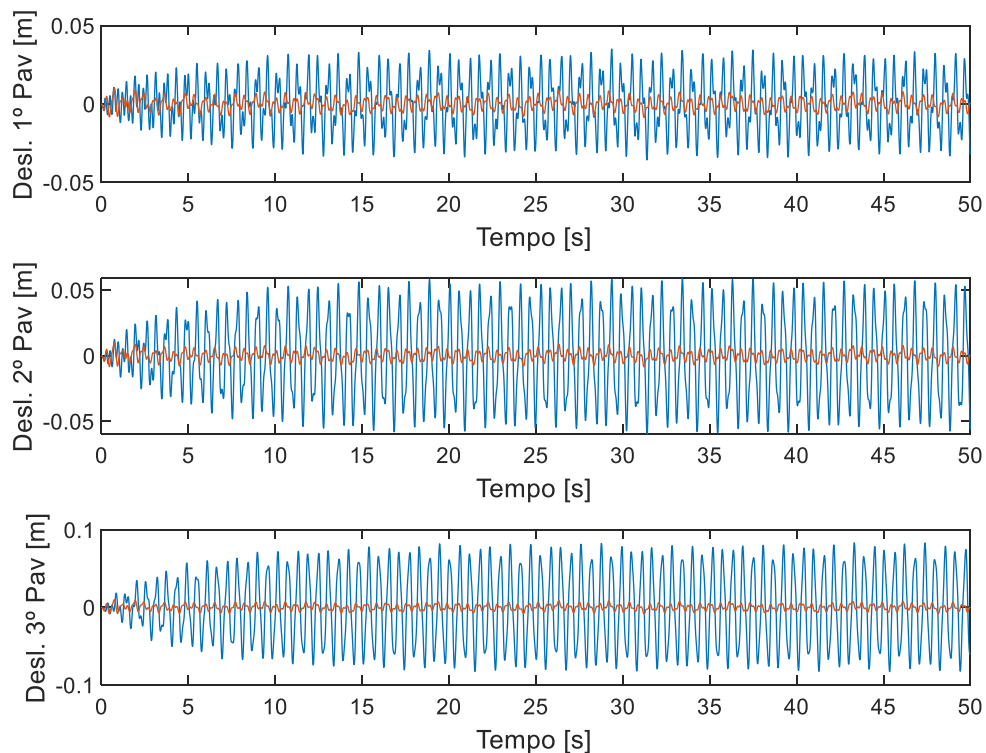
Seguindo a mesma ideia da seção anterior, para os resultados apresentados nesta subseção, foi considerada a ação dinâmica do terremoto no primeiro pavimento do modelo estudado (figura 5.26), ou seja, a $F_1(t)$ será a força externa

provocada pelo sismo. Sendo assim, a equação (3.62) foi adicionada ao sistema de equações (5.32), de maneira análoga ao sistema (3.63). Ao fazer a integração ao longo do tempo obteve-se as figuras 5.32 e 5.33, que comparam os deslocamentos e velocidades, respectivamente, do sistema com controle e sem controle. Pode-se notar que em ambas as figuras, os valores foram reduzidos consideravelmente no sistema controlado, representado pela cor vermelha.

Quando se compara as figuras 5.32 e 5.33, com as figuras 5.11 e 5.12, respectivamente, nota-se que a resposta temporal controlada AMR teve uma maior redução das amplitudes, que a resposta temporal controlada \mathcal{H}_∞ via realimentação de estados.

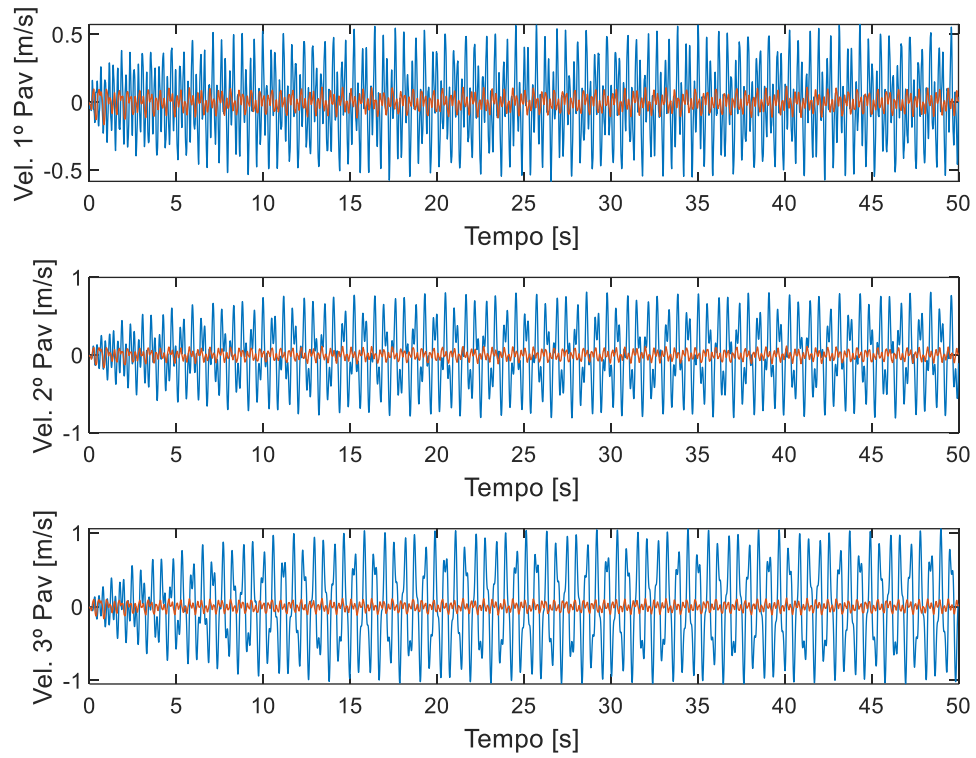
As figuras 5.34, 5.35 e 5.36, apresentam os planos de fase do 1º, 2º e 3º pavimento, respectivamente, tanto para a estrutura sem controle sob ação do terremoto (azul) quanto para estrutura com o projeto de controlador AMR (vermelho). Pode-se notar a redução considerável na amplitude nos planos de fase, o que era esperado a partir das respostas temporais.

Figura 5.32 – Controle AMR para ação do terremoto – Deslocamento.



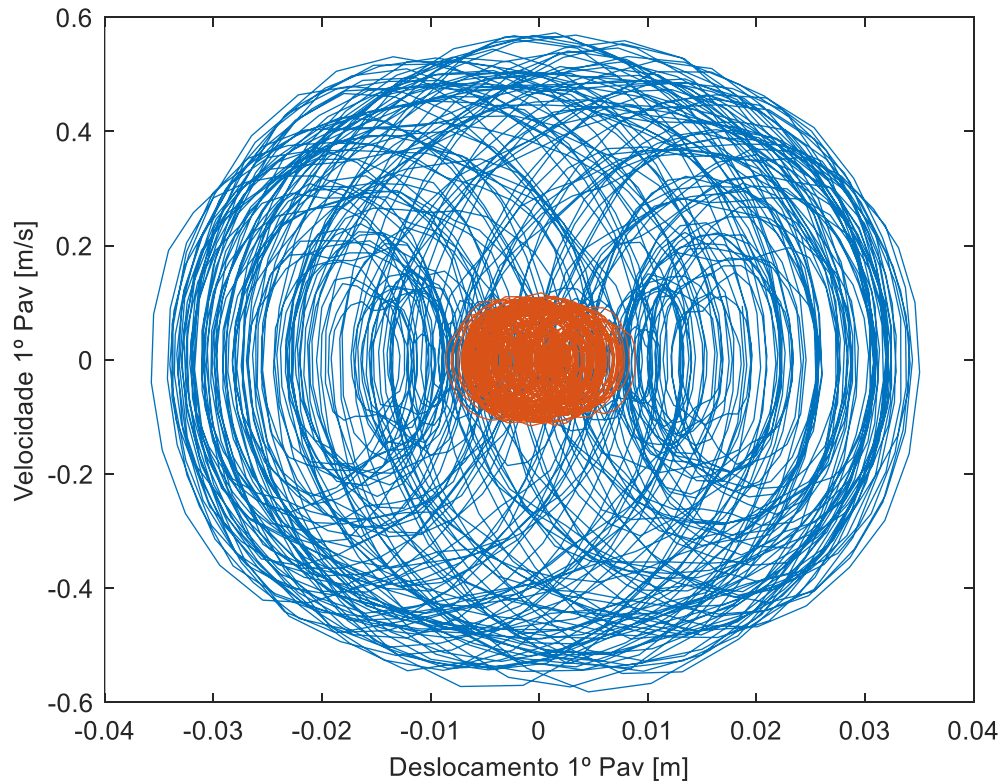
Fonte: Autor.

Figura 5.33 – Controle AMR para ação do terremoto – Velocidade.



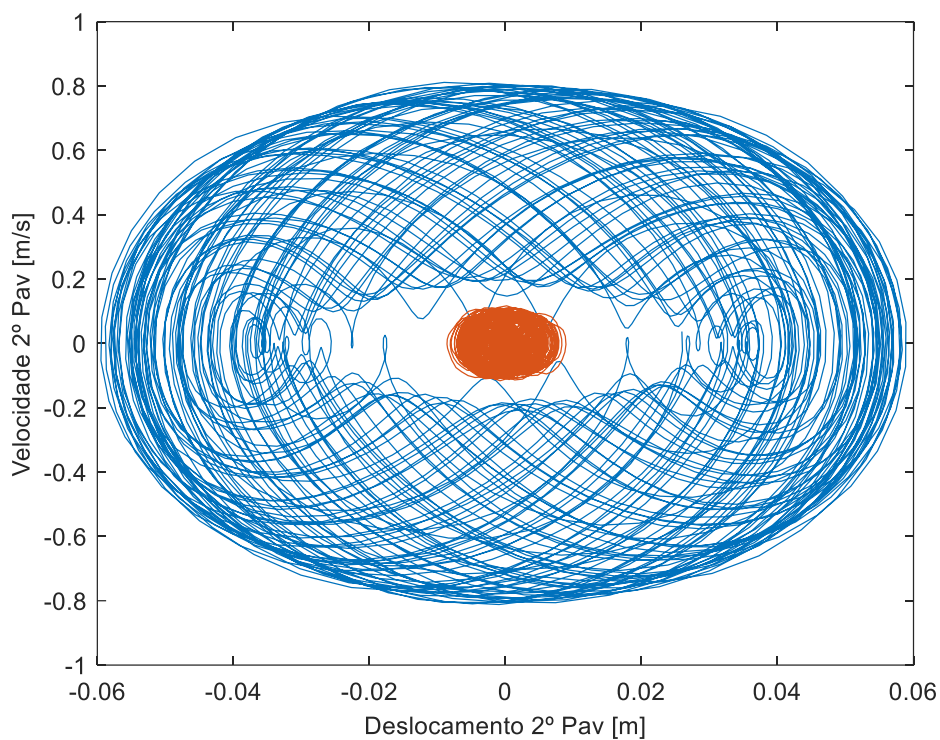
Fonte: Autor.

Figura 5.34 – Controle AMR para ação do terremoto – Plano de Fase 1º Pav.



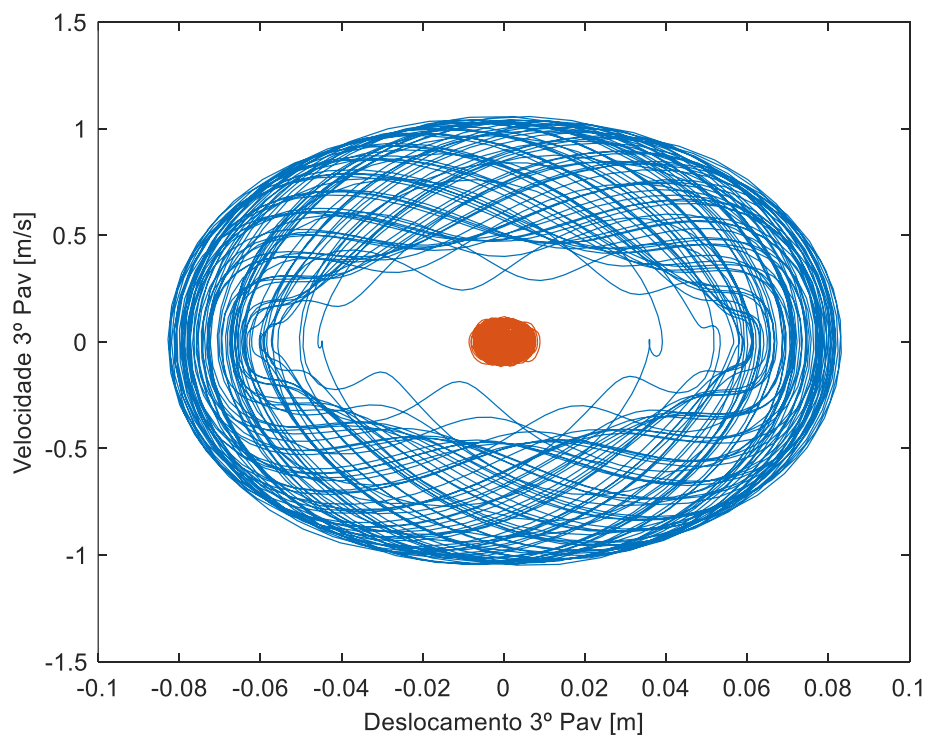
Fonte: Autor.

Figura 5.35 – Controle AMR para ação do terremoto – Plano de Fase 2º Pav.



Fonte: Autor.

Figura 5.36 – Controle AMR para ação do terremoto – Plano de Fase 3º Pav.



Fonte: Autor.

Quando se compara os planos de fases do sistema controlado \mathcal{H}_∞ via realimentação de estados (figura 5.13, 5.14 e 5.15), com as figuras 5.34, 5.35 e 5.36, a redução das amplitudes fica mais visível.

A tabela 5.6 traz a verificação do deslocamento no topo do edifício e entre os pisos, de acordo com as normas brasileiras. Os deslocamentos após o controle AMR, apresentaram uma redução superior a 83%, quando comparados aos valores sem o controle, apresentados na tabela 4.2. Com essa redução, apenas a verificação da NBR 15421 (2006) ficou abaixo do limite.

Tabela 5.6 – Deslocamentos máximos – Controle \mathcal{H}_∞ para ação do terremoto.

NBR	Deslocamento	Valor máximo (cm)	Limite (cm)	Situação
8800	Topo do edifício	3.00	2.25	Acima
	Entre pisos	1.00	0.60	Acima
6118	Topo do edifício	3.00	0.53	Acima
	Entre pisos	1.00	0.36	Acima
15421	Entre pisos	1.00	3.00	Abaixo

Fonte: Autor.

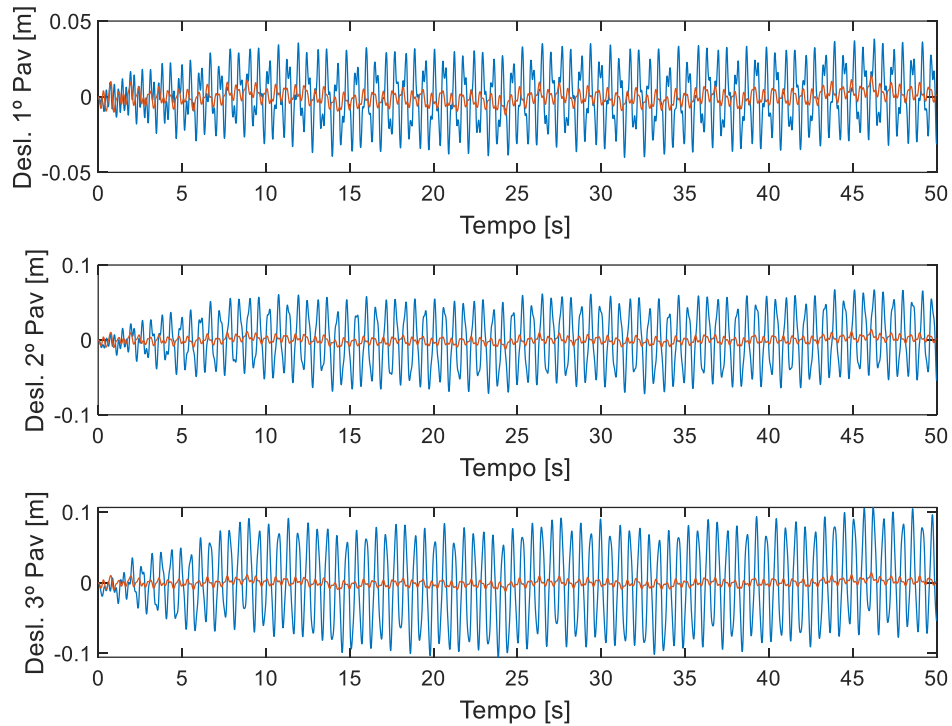
5.5.1.3 Ação Simultânea do Vento e Terremoto

Para as simulações apresentadas nesta subseção, foram consideradas simultaneamente a ação dinâmica do vento $F_3(t)$ e a ação dinâmica do terremoto $F_1(t)$, no terceiro e primeiro pavimento do modelo estudado (figura 5.26), respectivamente. De forma análoga as subseções anteriores, foram obtidas as figuras 5.37 e 5.38, que comparam os deslocamentos e velocidades, respectivamente, do sistema com controle e sem controle. Pode-se observar que nas duas figuras, as amplitudes das respostas temporais foram reduzidas.

Quando se compara as figuras 5.37 e 5.38, com as figuras 5.17 e 5.18, respectivamente, observa-se que as oscilações de amplitudes para o controlador AMR foram menores. As figuras 5.39, 5.40 e 5.10, apresentam os planos de fase do

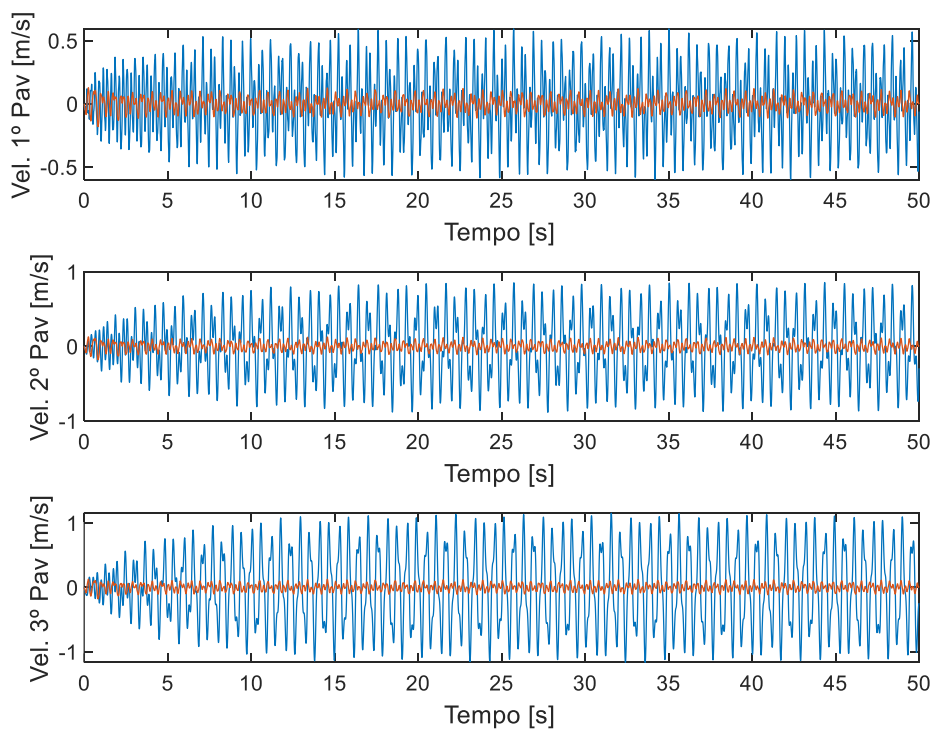
1º, 2º e 3º pavimento, respectivamente, tanto para a estrutura sem controle sob ação simultânea, quanto para estrutura com o projeto de controlador AMR.

Figura 5.37 – Controle AMR para ação simultânea – Deslocamento.



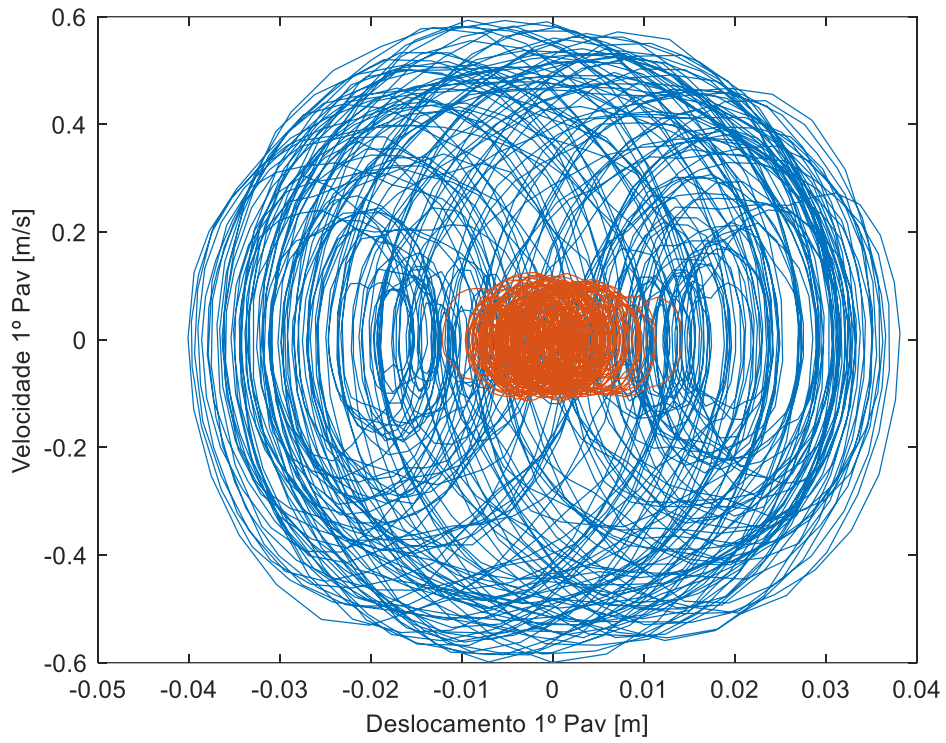
Fonte: Autor.

Figura 5.38 – Controle AMR para ação simultânea – Velocidade.



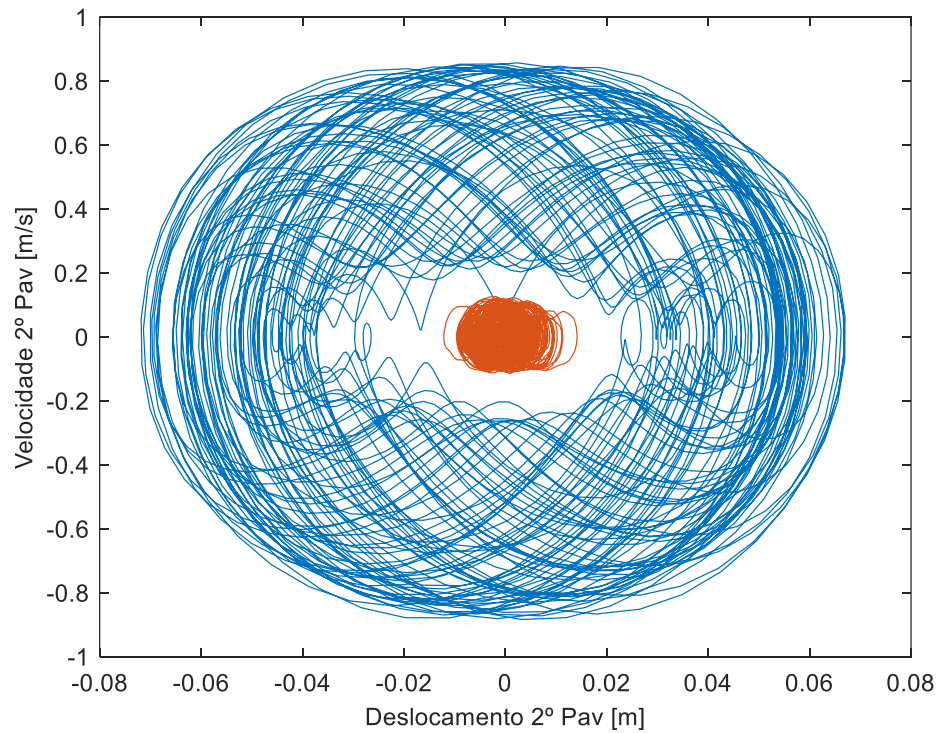
Fonte: Autor.

Figura 5.39 – Controle AMR para ação simultânea – Plano de Fase 1º Pav.



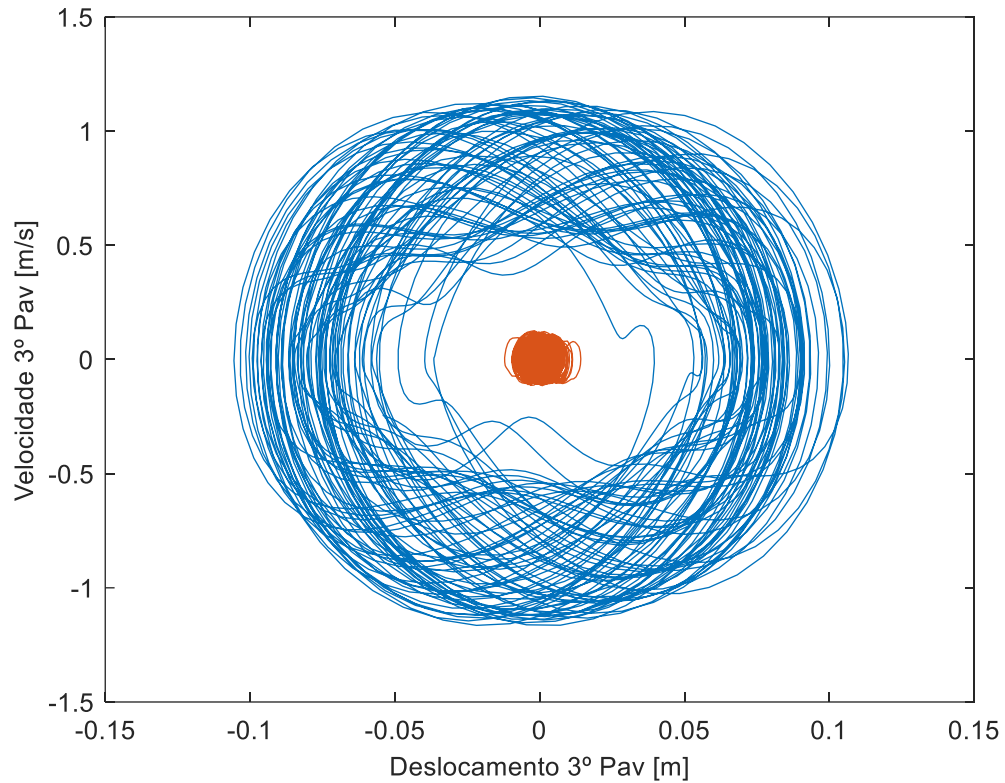
Fonte: Autor.

Figura 5.40 – Controle AMR para ação simultânea – Plano de Fase 2º Pav.



Fonte: Autor.

Figura 5.41 – Controle AMR para ação simultânea – Plano de Fase 3º Pav.



Fonte: Autor.

Comparando as figuras 5.39, 5.40 e 5.41, com os planos de fases do sistema controlado \mathcal{H}_∞ via realimentação de estados (figura 5.19, 5.20 e 5.21), a redução das amplitudes nas duas direções fica mais perceptível.

Tabela 5.7 – Deslocamentos máximos – Controle AMR para ação simultânea.

NBR	Deslocamento	Valor máximo (cm)	Limite (cm)	Situação
8800	Topo do edifício	4.25	2.25	Acima
	Entre pisos	1.42	0.60	Acima
6118	Topo do edifício	4.25	0.53	Acima
	Entre pisos	1.42	0.36	Acima
15421	Entre pisos	1.42	3.00	Abaixo

Fonte: Autor.

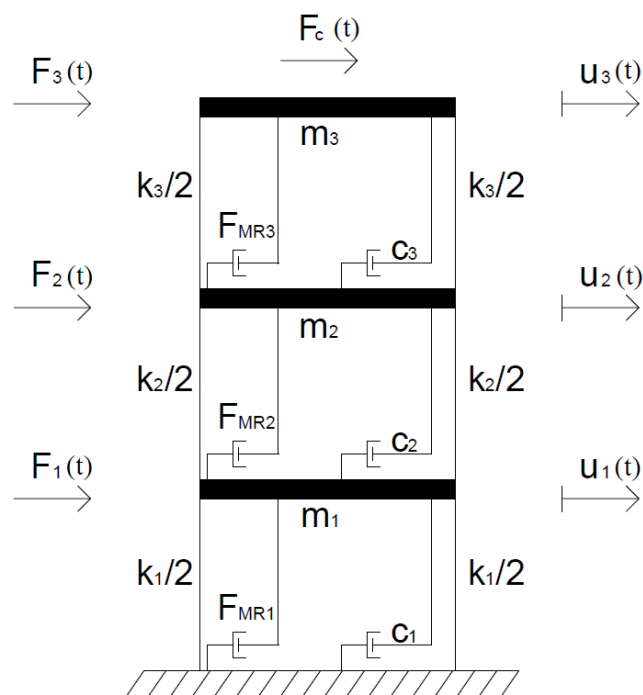
A tabela 5.7, traz essa confirmação, já que os deslocamentos após o controle AMR, o deslocamento total da estrutura apresentou uma redução de 79%, já o deslocamento máximo do 3º pavimento apresentou uma redução de 86%, quando comparados aos valores apresentados na tabela 4.3. De forma análoga a ação do terremoto, apenas a verificação da NBR 15421 (2006) foi atendida.

Analisando os resultados apresentados, para ação do terremoto e ação simultânea, pode-se verificar que através do controlador AMR, o sistema foi estabilizado, suas as oscilações foram mitigadas e seus deslocamentos reduziram, atingindo assim o objetivo do controlador.

5.6 CONTROLADOR HÍBRIDO \mathcal{H}_∞ E AMR

Com o objetivo de reduzir ainda mais as amplitudes das respostas temporais, propõe-se nessa seção, a utilização do controle híbrido, que é a combinação do controle ativo com o controle semi-ativo. O controlador \mathcal{H}_∞ via realimentação de estados será o controle ativo, e o controlador AMR será o controle semi-ativo. Na figura 5.42 está representado o modelo estrutural do edifício, considerando o controlador híbrido.

Figura 5.42 – Modelo *shear building* com ação do controlado híbrido.



Juntando os dois controles, a partir do sistema (5.7), tem-se:

$$\dot{x}(t) = (A + B_2K)x(t) + B_1w(t) + B_3f(t) \quad (5.36)$$

$$y(t) = (C + D_2K)x(t) + D_1w(t)$$

Sendo: $f(t)$ é o vetor de forças do AMR e B_3 é a matriz de entrada do AMR.

Para resolver o sistema (5.36), serão adotadas as metodologias abordadas nas seções (5.4) e (5.5). As matrizes do sistema (5.36) serão as definidas no item 5.4.1 e o controlador K adotado em cada caso, será o obtido nos subitens 5.4.1.1 a 5.4.1.3. As componentes do sistema (5.36), correspondente ao AMR, são:

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1/m_1 & 1/m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/m_2 & 1/m_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/m_3 \end{bmatrix} \quad f(t) = \begin{bmatrix} F_{MR1} \\ F_{MR2} \\ F_{MR3} \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

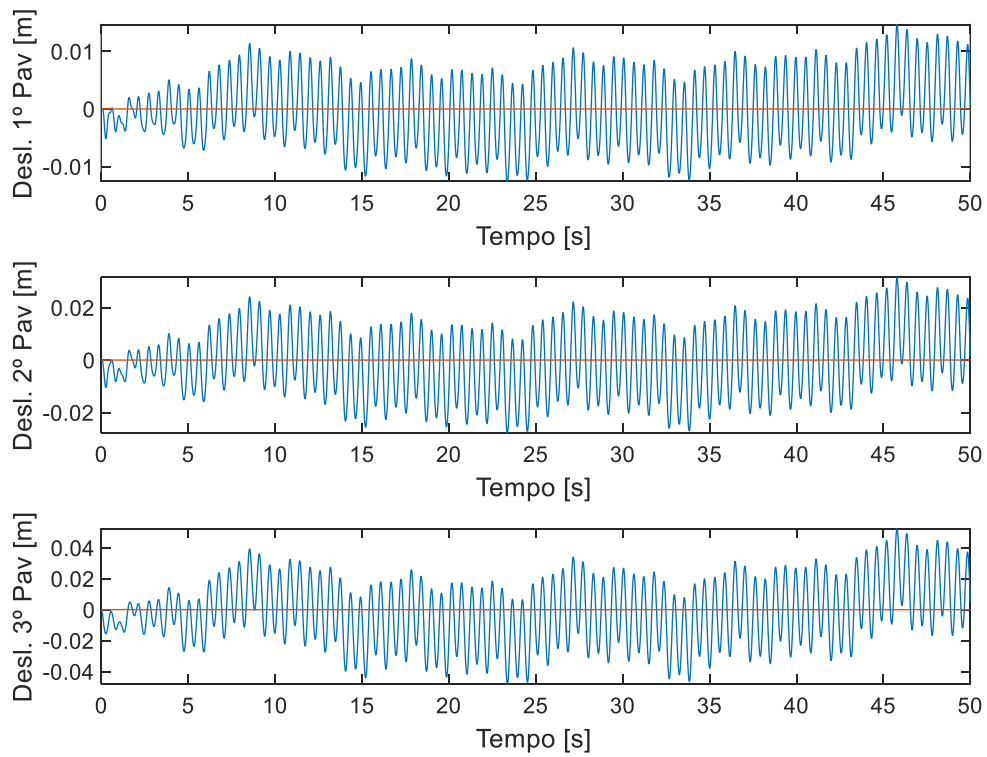
Implementando essas funções e parâmetros em um algoritmo no MATLAB, e fazendo a integração ao longo do tempo, obteve-se as respostas temporais, que serão apresentadas nas próximas subseções. Usando a mesma metodologia apresentada no Capítulo 4 e seguindo o mesmo padrão das seções anteriores, a cor vermelha foi adotada para representar o sistema controlado e a cor azul para representar o sistema sem controle.

5.6.1.1 Aplicando no modelo estudado

5.6.1.1 Ação do Vento

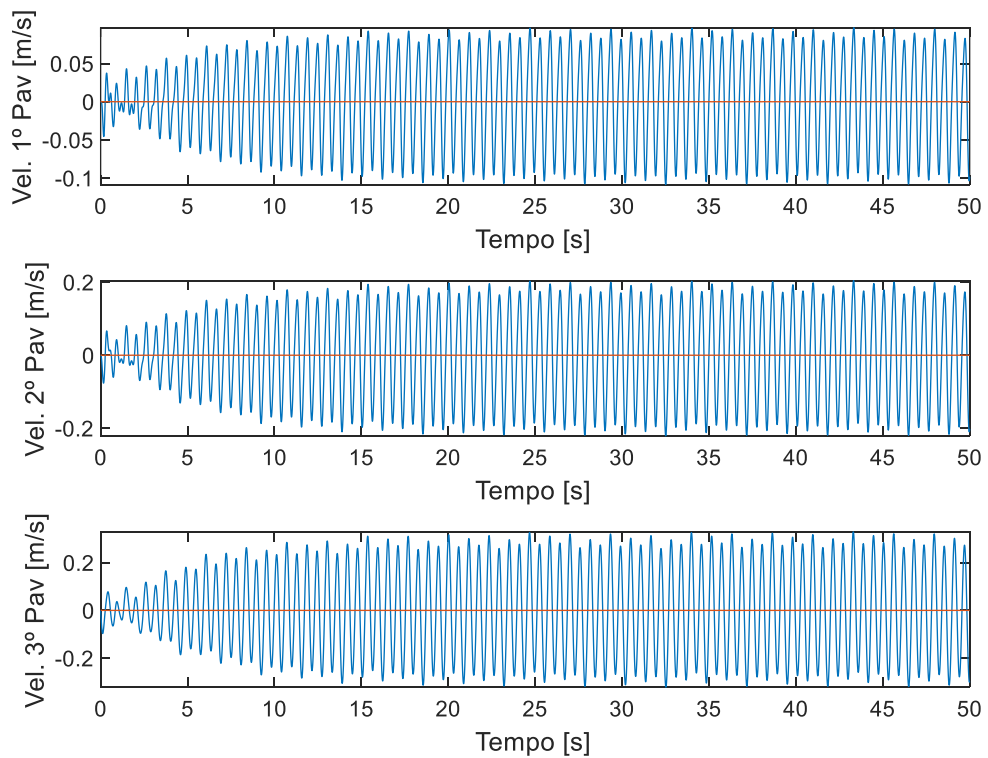
Para os resultados apresentados nesta subseção, foram usados as componentes (5.14) e o controlador K (5.17) no sistema (5.36), e neste será feita a integração ao longo do tempo. As figuras 5.43 e 5.44, apresentam respectivamente, a comparação dos deslocamentos e velocidades com e sem controle, para a ação do vento. Pode-se observar que nas duas figuras, os valores ficaram na posição de equilíbrio.

Figura 5.43 – Controle híbrido para ação do vento – Deslocamento.



Fonte: Autor.

Figura 5.44 – Controle híbrido para ação do vento – Velocidade.



Fonte: Autor.

A resposta temporal do sistema controlado, em ambas as situações, apresenta oscilações nulas quando comparadas ao sistema sem controle. As figuras 5.43 e 5.44 apresentaram um comportamento similar, após o regime transiente das figuras 4.4 e 4.5, respectivamente. Ou seja, fica na posição de equilíbrio, apresentando um comportamento estável. Ao gerar os planos de fase tanto para a estrutura sem controle sob ação do vento, quanto para estrutura com o projeto de controlador híbrido, a resposta foi similar das figuras 4.11 a 4.13, ou seja, só apareceu o plano de fase sem controle, já que no sistema controlado os deslocamentos e as velocidade ao longo do tempo, possuem a coordenada na origem.

A tabela 5.8 traz os valores do deslocamento máximo total e no 3º pavimento, no modelo estudado. Os deslocamentos após o controle híbrido, apresentaram uma redução de 100%, quando comparados aos valores sem o controle, apresentados na tabela 4.1. Com isso, a verificação ficou abaixo do limite das duas normas analisadas.

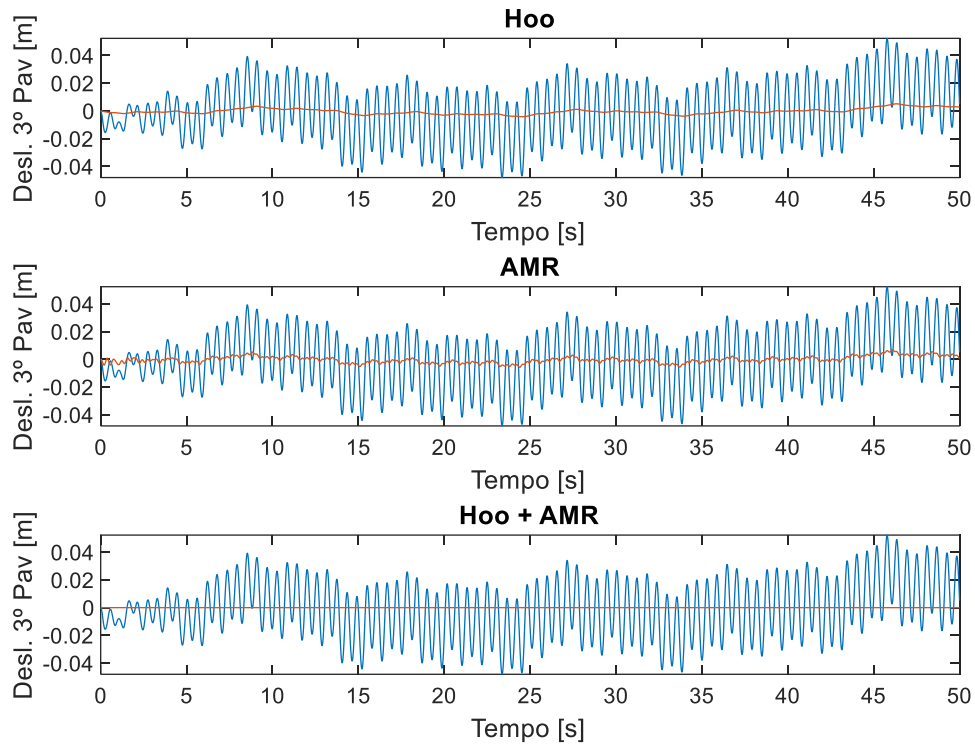
Tabela 5.8 – Deslocamentos máximos – Controle híbrido para ação do vento.

NBR	Deslocamento	Valor máximo (cm)	Limite (cm)	Situação
8800	Topo do edifício	$4.79.10^{-4}$	2.25	Abaixo
	Entre pisos	$2.38.10^{-4}$	0.60	Abaixo
6118	Topo do edifício	$4.79.10^{-4}$	0.53	Abaixo
	Entre pisos	$2.38.10^{-4}$	0.36	Abaixo

Fonte: Autor.

Com os resultados apresentados, pode-se analisar que o controlador híbrido atingiu o seu objetivo, e se mostrou mais eficiente que a atuação isolada do controlador \mathcal{H}_∞ via realimentação de estados e AMR. E esse comportamento, pode ser verificado através da figura 5.45, que traz a comparação das respostas temporais do deslocamento no terceiro pavimento, para o controlador \mathcal{H}_∞ , AMR e híbrido. Observando a figura, nota-se que no controlador \mathcal{H}_∞ e AMR a resposta fica oscilando em torno do ponto de equilíbrio, já no controlador híbrido a resposta fica em repouso no ponto de equilíbrio. O impacto que a ação vento $w_v(t)$ provoca na saída do sistema $y(t)$ é nulo, como se não tivesse excitação externa.

Figura 5.45 – Controle \mathcal{H}_∞ , AMR e híbrido para ação do vento – Deslocamento.



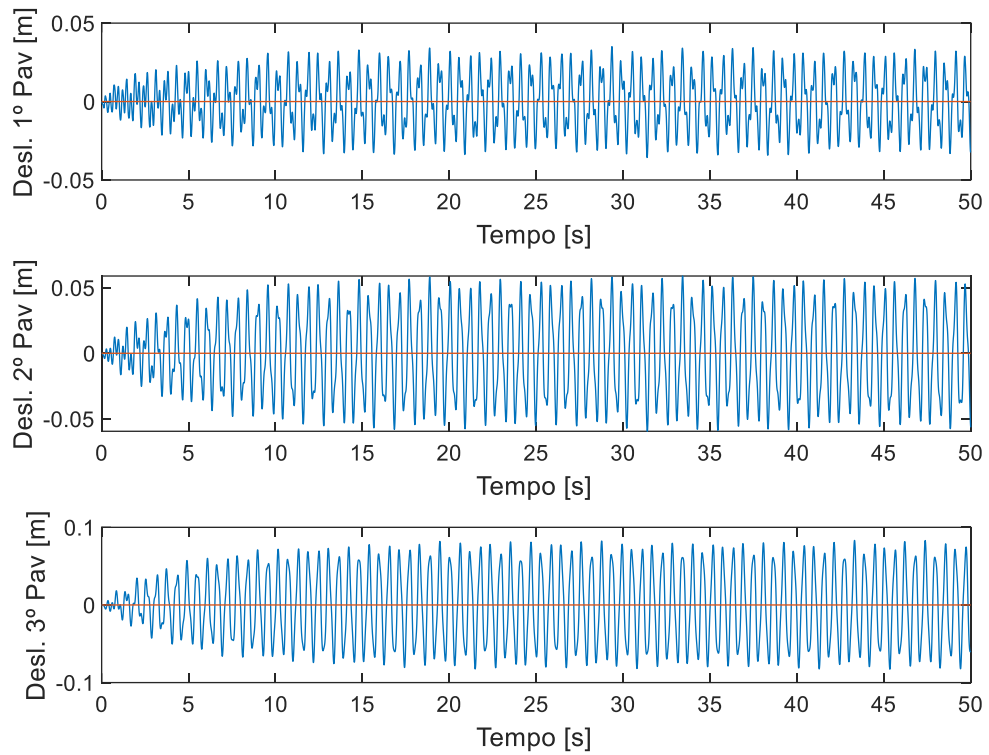
Fonte: Autor.

5.6.1.2 Ação do Terremoto

Nos resultados apresentados nesta subseção, foram usados as componentes (5.15) e o controlador K (5.18) no sistema (5.36). Ao fazer a integração ao longo do tempo obteve-se as figuras 5.46 e 5.47, que comparam os deslocamentos e velocidades, respectivamente, do sistema com controle e sem controle para ação do terremoto. Pode-se notar, que assim como a ação do vento, os deslocamentos e velocidades ficaram estáveis e na posição de equilíbrio no sistema controlado, representado pela cor vermelha. Apresentando uma resposta igual ao sistema sem excitação, após o regime transiente, das figuras 4.4 e 4.5.

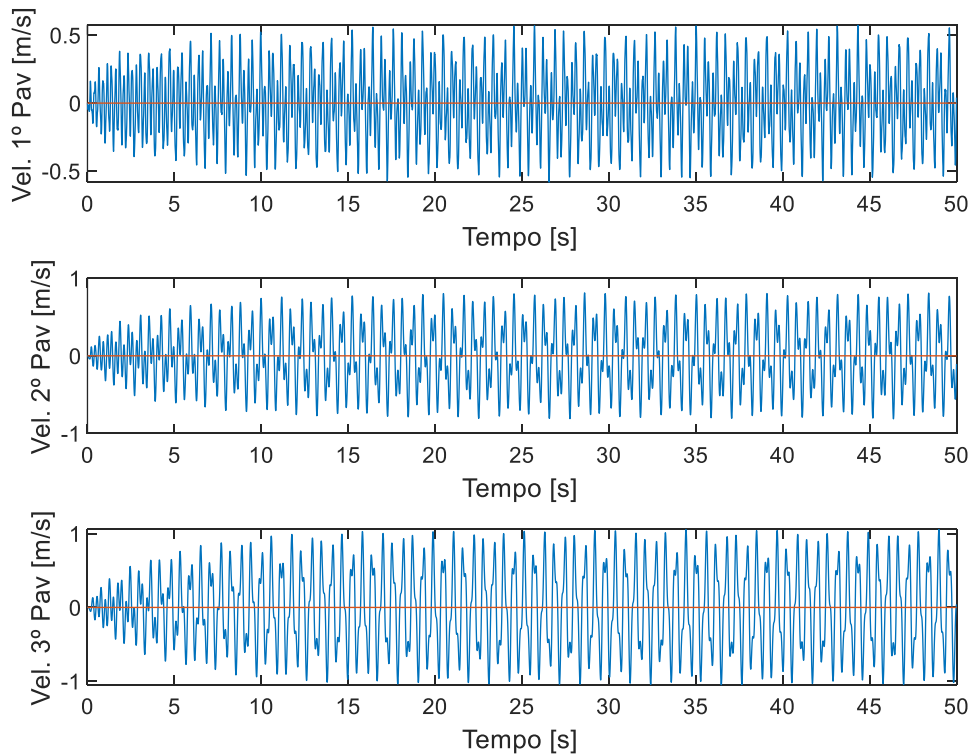
Os planos de fase gerados, para se comparar o sistema de malha aberta com o de malha fechada, foram iguais das figuras 4.16 a 4.18, sendo possível visualizar apenas o plano de fase sem controle, já que no sistema controlado todas as coordenadas estão na origem.

Figura 5.46 – Controle híbrido para ação do terremoto – Deslocamento.



Fonte: Autor.

Figura 5.47 – Controle híbrido para ação do terremoto – Velocidade.



Fonte: Autor.

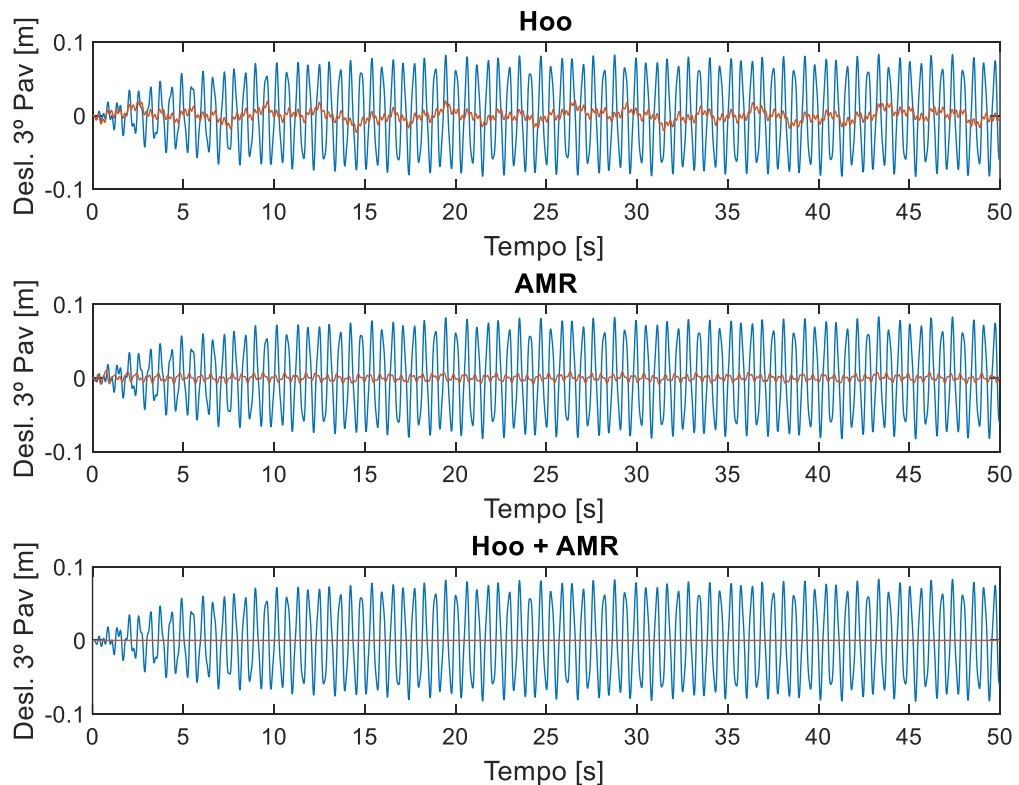
A tabela 5.9 traz as verificações dos deslocamentos máximos. Os deslocamentos após o controle híbrido, apresentaram uma redução de 100%, quando comparados aos valores sem controle, apresentados na tabela 4.2. Com isso, o deslocamento apresentado na estrutura ficou abaixo do limite preconizado nas três normas analisadas.

Tabela 5.9 – Deslocamentos máximos – Controle híbrido para ação do terremoto.

NBR	Deslocamento	Valor máximo (cm)	Limite (cm)	Situação
8800	Topo do edifício	$4.98 \cdot 10^{-4}$	2.25	Abaixo
	Entre pisos	$1.72 \cdot 10^{-4}$	0.60	Abaixo
6118	Topo do edifício	$4.98 \cdot 10^{-4}$	0.53	Abaixo
	Entre pisos	$1.72 \cdot 10^{-4}$	0.36	Abaixo
15421	Entre pisos	$1.72 \cdot 10^{-4}$	3.00	Abaixo

Fonte: Autor.

Figura 5.48 – Controle \mathcal{H}_∞ , AMR e híbrido para ação do terremoto – Deslocamento.



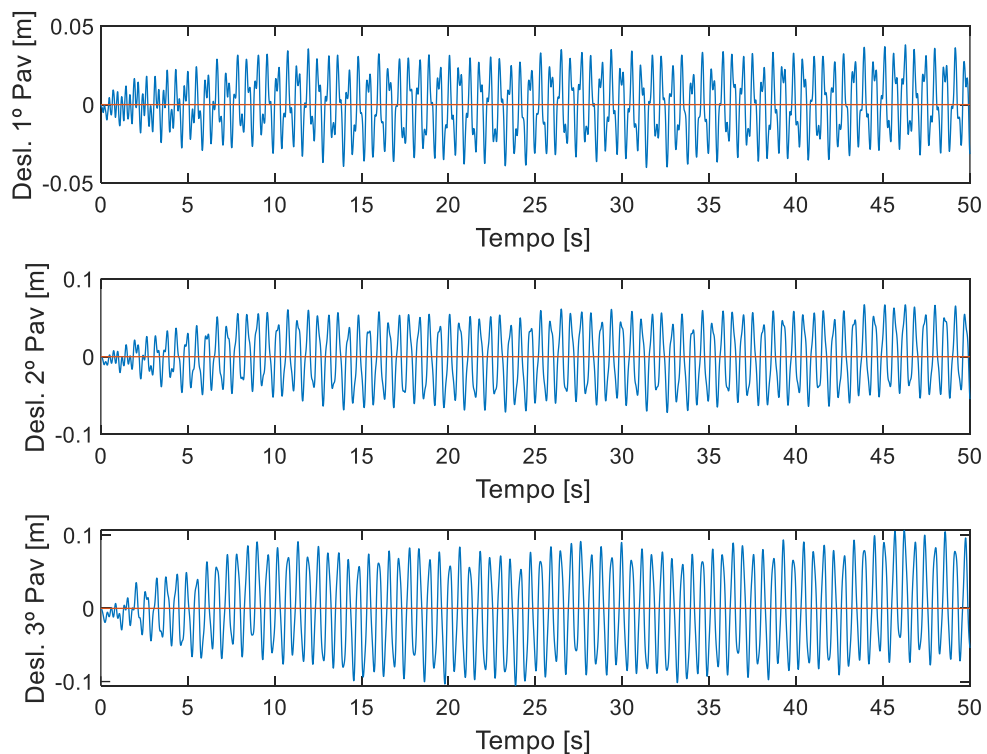
Fonte: Autor.

A figura 5.48, traz a comparação das respostas temporais do deslocamento no terceiro pavimento, para o controlador \mathcal{H}_∞ , AMR e híbrido para a ação do terremoto. Pode-se analisar que o controlador híbrido se mostrou mais eficiente, atingindo o seu objetivo. A entrada exógena do terremoto $w_s(t)$ teve influência nula no comportamento da saída do sistema $y(t)$.

5.6.1.3 Ação Simultânea do Vento e Terremoto

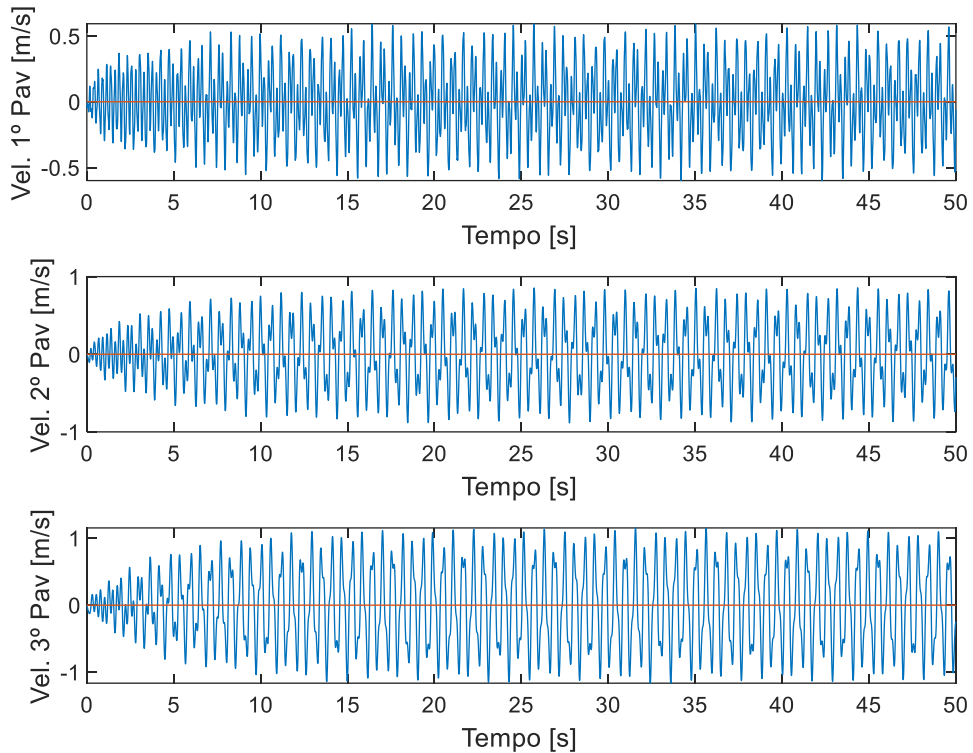
Para as simulações apresentadas nesta subseção, foram consideradas as componentes (5.16) e o controlador K (5.19) no sistema (5.36), e neste será feita a integração ao longo do tempo. De forma análoga as subseções anteriores, foram obtidas as figuras 5.49 e 5.50, que comparam os deslocamentos e velocidades, respectivamente, do sistema com controle e sem controle. E apesar de ter uma ação conjunta, os resultados foram iguais as simulações das ações isoladas do vento e terremoto, onde a estrutura apresentou deslocamento e velocidade na posição de equilíbrio ao longo do tempo.

Figura 5.49 – Controle híbrido para ação simultânea – Deslocamento.



Fonte: Autor.

Figura 5.50 – Controle híbrido para ação simultânea – Velocidade.



Fonte: Autor.

Tabela 5.10 – Deslocamentos máximos – Controle híbrido para ação simultânea.

NBR	Deslocamento	Valor máximo (cm)	Limite (cm)	Situação
8800	Topo do edifício	$8.34 \cdot 10^{-4}$	2.25	Abaixo
	Entre pisos	$3.49 \cdot 10^{-4}$	0.60	Abaixo
6118	Topo do edifício	$8.34 \cdot 10^{-4}$	0.53	Abaixo
	Entre pisos	$3.49 \cdot 10^{-4}$	0.36	Abaixo
15421	Entre pisos	$3.49 \cdot 10^{-4}$	3.00	Abaixo

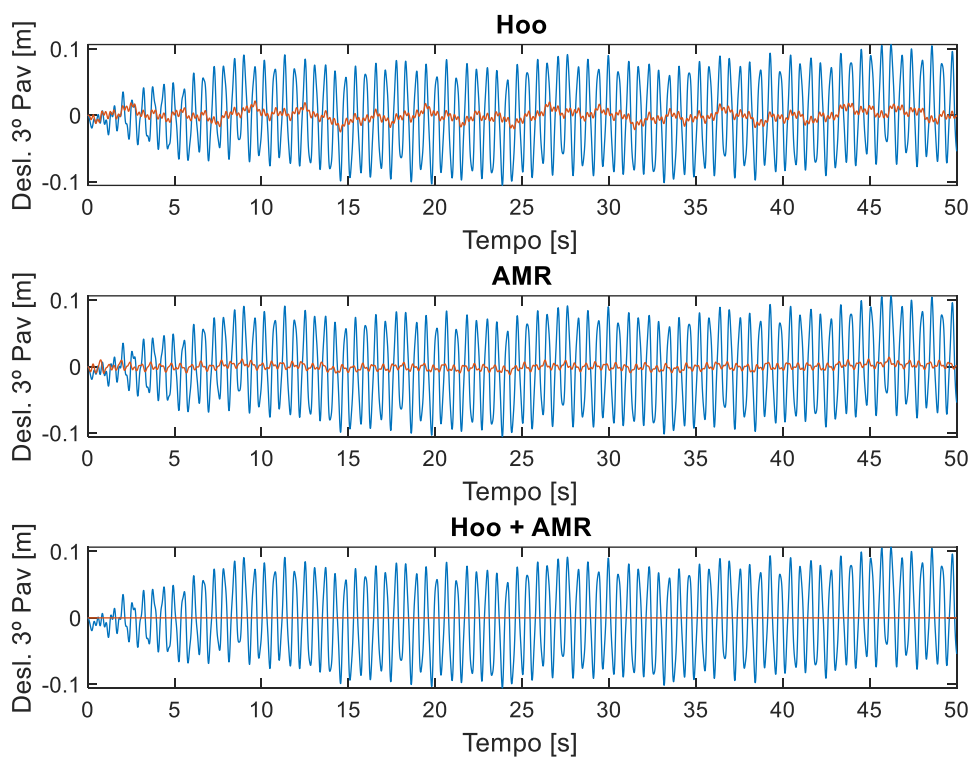
Fonte: Autor.

Os planos de fase gerados, para se comparar o sistema controlado com o sistema sem controle, foram iguais das figuras 4.21 a 4.23, sendo possível visualizar apenas o plano de fase sem controle, já que no sistema de malha fechada está em equilíbrio na origem. A partir da tabela 5.10, pode-se verificar que a ação simultânea, também apresentou uma redução de 100% no seu deslocamento máximo, quando

comparados aos valores sem controle apresentados na tabela 4.3, ficando abaixo do limite estabelecido nas três normas analisadas.

A figura 5.48, mostra a eficiência do controlador híbrido ao compará-lo ao controlador \mathcal{H}_∞ e AMR. A entrada exógena $w_{(v+s)}(t)$ teve influência nula no comportamento da saída do sistema $y(t)$, atingindo assim o objetivo do controlador também para ação simultânea.

Figura 5.51 – Controle \mathcal{H}_∞ , AMR e híbrido para ação do simultânea - Deslocamento.



Fonte: Autor.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi simulado o comportamento dinâmico de um edifício de três pavimentos, representado através do modelo *shear building*, submetido a vibrações excessivas causadas pela ação dinâmica do vento, do terremoto e a ação conjunta de ambos. Constatou-se que essas ações aumentaram consideravelmente os deslocamentos e as velocidades da estrutura. Pelo fato da estrutura não demonstrar mais um comportamento estável, e sim um comportamento caótico, caracterizando assim o colapso total ou em partes da estrutura, se fez necessário a aplicação de técnicas de controle que permitam a integridade estrutural sob efeito das excitações apresentadas.

A primeira técnica de controle aplicada foi a otimização \mathcal{H}_∞ via realimentação de estados, utilizando o método matemático das LMIs. Para a ação do vento, o sistema teve uma redução no seu deslocamento máximo de 78% entre piso e 86% no topo do edifício, apresentando uma resposta temporal estabilizada com poucas variações de amplitude. Com a redução, os valores ficaram abaixo do limite determinado pela NBR 8800:2008 e acima do determinado pela NBR 6118:2014. Já ação do terremoto e na ação simultânea, houve uma redução de mais de 75% nos deslocamentos máximos, e em ambas as situações a resposta temporal apresentou variações de amplitudes. Com essa redução, apenas a verificação da NBR 15421:2006 ficou abaixo do limite. A partir dos resultados apresentados, pode-se concluir que, através da realimentação de estados e do projeto de controlador \mathcal{H}_∞ , o sistema foi estabilizado e sua norma \mathcal{H}_∞ foi minimizada, atingindo assim o objetivo do controlador.

A segunda técnica de controle aplicada foi o AMR, utilizando o modelo de Bouc-Wen modificado. A simulação com a ação do vento, apresentou uma redução nos deslocamentos máximos, de 78% entre piso e 86% no topo do edifício, quando comparados aos valores sem o controle. Apesar da redução significativa, apenas para a verificação do deslocamento no topo do edifício, segundo a NBR 8800:2008, ficou abaixo do limite. Já nas simulações com a ação do terremoto e a ação simultânea, houve uma redução de mais de 79% nos deslocamentos máximos. Com a redução, apenas a verificação da NBR 15421:2006 foi atendida. Analisando os resultados apresentados, pode-se concluir que através do controlador AMR, o

sistema foi estabilizado, suas as oscilações foram mitigadas e seus deslocamentos reduziram, atingindo assim o objetivo do controlador.

Com o objetivo de reduzir ainda mais as amplitudes das respostas temporais, foi desenvolvida e aplicada a técnica de controle híbrido \mathcal{H}_∞ via realimentação de estados e o AMR. Com isso, as três ações simuladas neste trabalho, apresentaram uma redução de 100% nos seus deslocamentos, apresentando um comportamento similar ao sistema sem ações externas. Sendo assim, as verificações em relação aos deslocamentos máximos, foram atendidas para as três normas analisadas neste trabalho. A partir desses resultados, pode-se concluir que o controlador híbrido se mostrou mais eficiente e atingiu o objetivo proposto. As entradas exógenas no sistema tiveram influência nula no comportamento da saída do sistema.

6.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Para trabalhos futuros sugere-se: melhorar o modelo proposto incluindo incertezas nos parâmetros e desenvolvendo um projeto de controlador híbrido robusto; a aplicação da técnica de controle híbrido H_2 via realimentação de estados e o AMR; aplicar a técnica desenvolvida neste trabalho em um edifício com lajes pré-moldadas, fazendo possíveis comparações com os resultados apresentados.

REFERÊNCIAS

ABREU, G. L. C. M.; LOPES JR, V. H_2 Optimal control for earthquake excited structures. CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA, 6., 2010, Campina Grande. **Anais [...]**. Campina Grande: ABCM, 2010.

AGULHARI, C. M. **Estabilidade e controle de sistemas lineares e variantes no tempo com parâmetros incertos**. 106 f. 2013. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2013.

ALMEIDA, A. K. **Otimização estrutural e controle de vibrações através de amortecedores magneto reológicos em edifícios altos submetidos à ação dinâmica do vento**. 121 f. 2022. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2022.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS – ABNT. **NBR 6118**: Projetos de estruturas de concreto: Procedimento. Rio de Janeiro: ABNT, 2014. 238 p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS – ABNT. **NBR 6123**: Forças devidas ao vento em edificações. Rio de Janeiro: ABNT, 1988. 66 p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS – ABNT. **NBR 6484**: Solo: sondagens de simples reconhecimento com SPT: Método de ensaio. Rio de Janeiro: ABNT, 2020. 28 p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS – ABNT. **NBR 8800**: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. Rio de Janeiro: ABNT, 2008. 237 p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS – ABNT. **NBR 15421**: Projetos de estruturas resistentes a sismos: procedimento. Rio de Janeiro: ABNT, 2006. 26 p.

ASSUNÇÃO, E. **Projeto de controladores robustos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ via LMI**: slides da disciplina de projeto de controladores robustos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ via LMI do curso de pós-graduação de engenharia elétrica da UNESP. Ilha Solteira: UNESP, 2019.

ATHANS, M.; FALB, O.L. **Optimal control**: an introduction to the theory and its applications. New York: Dover, 2007.

BANDYOPADHYAY, S.; PARULEKAR, Y. M.; SENGUPTA, A.; CHATTOPADHYAY, J. Structure soil structure interaction of conventional and base-isolated building subjected to real earthquake. **Structures**, London, v. 32, p. 474-493, Aug. 2021.

BATTISTA, R. C.; PFEIL, M. S. Control of wind oscillations of Rio-Niteroi bridge, Brazil. **Proceedings of the institution of civil engineers-structures and buildings**, London, v. 163. n. 2, p. 87- 96, 2010.

BOSSE, R. M. **Desempenho de TMDs em edifícios submetidos a terremotos**. 2017. 126 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

BOYD, S.; BALAKRISHNAN, V.; FERON, E.; EL GHAOUI, L. **Linear matrix Inequalities in systems and control theory**. Philadelphia: Studies in Applied Mathematics - SIAM, 1994a. 193 p.

BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. History of linear matrix inequalities in control theory. *In*: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 1994, Baltimore. **Proceedings** [...]. Maryland: Washington, 1994b. p. 31-34.

BRANDÃO, F. S. **Otimização de atenuadores dinâmicos sincronizados para o controle de vibrações em edifícios submetidos à excitação sísmica**. 2021. 171 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2021.

BRANDÃO, F. S.; MIGUEL, L. F. F. Vibration control in buildings under seismic excitation using optimized tuned mass dampers. **Frattura ed integrità Strutturale**, Italy, v. 12. n. 45, p. 14-32, 2020.

BRASIL, R. M. R. F.; SILVA, M. A. **Introdução à dinâmica das estruturas**. 2 ed. Rio de Janeiro: Editora Blucher, 2015. 270p.

BRITO, R. C. **Acelerogramas artificiais de sismos aplicados a edificações**. 2017. 77 f. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017. p.

BUZACHERO, L. F. S. **Controle robusto chaveado de sistemas lineares variantes no tempo com aplicação em falhas estruturais**. 2014. 122 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Elétrica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Ilha Solteira, 2014.

CARMONA, J. E. C. **Proposta de um amortecedor para atenuação de vibrações em pisos de concreto: análise numérica e experimental**. 2016. 309 f. Tese (Doutorado em Estruturas e Construção Civil) – Universidade de Brasília. Brasília, 2016.

CARNEIRO, R. B. **Controle semi-ativo de vibrações em estruturas utilizando amortecedor magnetorreológico**. 2009. 153 f. Tese (Doutorado em Estruturas e Construção Civil) – Universidade de Brasília, Brasília, 2009.

CARRIL, C. F. J. **Análise numérica e experimental do efeito dinâmico do vento em torres metálicas treliçadas para telecomunicações**. 2000. 143 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas e Fundações) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2000.

CASCIATI, F.; MAGONETTE, G. ; MARAZZI, F. **Technology of Semiactive Devices and Applications in Vibration Mitigation**. New York: John Wiley & Sons Ltd, 2006. 240 p.

CHAVARETTE, F. R. **Projeto de controlador híbrido aplicado a vibrações**. 2017. 62 f. Tese (Livre docência) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Ilha Solteira, 2017.

CHOPRA, A. K. **Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering**. New Jersey: Prentice Hall, 1995. 729p.

CLOUGH, R.; PENZIEN, J. **Dynamics of structures**. New York: McGraw-Hill, 1975. 634p.

CORBANI, S. **Análise dinâmica elasto-plástica de estruturas metálicas sujeitas a excitação aleatória de sismos**. 2006. 81 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.

CRUSIUS, C. A. R. **Formulação LMI para problemas de performance e robustez**. 1996. 118 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Elétrica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1996.

CUBILLOS, X. C. M. **Controle de atitude de um satélite aplicando a união dos métodos SDRE e H-infinito**. 2020. 168 f. Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espaciais /Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2020.

DOMINGUEZ, A., SEDAGHATI, R., STIHARU, I. A new dynamic hysteresis model for magnetorheological dampers. **Smart Mater: Struct**, [S. l.], v. 15, p.1179–1189, 2006.

ESTEVEZ, L. M. **Controle robusto H_∞ com realimentação parcial dos estados aplicado a diferentes sistemas mecânicos**. Tese (Doutorado em Engenharia de Elétrica) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. Ilha Solteira, 2020. 70 p.

FERNANDES, D. B. **Controle híbrido para minimização de vibrações**. 2016. 65 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Ilha Solteira, 2016.

FERRARA, N. F.; PRADO, C. P. C. **Caos: uma introdução**. 3. reimpressão. São Paulo: Blucher, 2017. 402p.

Formação de ‘ciclone bomba’ e passagem de tempestades provocam ao menos três mortes em Santa Catarina, **G1**. Florianópolis, 30 de junho de 2020. Disponível em: <https://g1.globo.com/sc/santa-catarina/noticia/2020/06/30/fortes-ventos-e-chuva-provocam-estragos-em-cidades-de-sc.ghtml>. Acesso em: 22/12/2021.

FRANCO, M. Direct along wind dynamic analysis of tall structures. **Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP**, São Paulo, v. 9303, 1993.

GHAFFARZADEH, H. Semi-active control of structures equipped with FDSAB using integrated genetic algorithm-fuzzy controller and neural networks. **International**

Journal of Emerging Engineering Research and Technology, Lahore, v. 3, p. 13-24, 2015.

GKATZOGIAS, K. I.; KAPPOS, A. J. Semi-active control systems in bridge engineering: a review of the current state of practice. **Structural engineering internacional**, [S. l.], v. 26, n. 4, p. 290-300, 2016.

GOMEZ, A. L. Z. **Controle de vibrações em edifícios submetidos à ação de cargas dinâmicas utilizando amortecedor de massa sintonizado na forma de pêndulo**. 2007. 86 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) – Universidade de Brasília, Brasília, 2007.

HOFF, A. **Estruturas de bifurcação em sistemas dinâmicos quadridimensionais**. 2014. 65 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Centro de Ciências Tecnológicas, Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2014.

ILLESCAS, M. A. G.; ICAZA, L. A. Model reduction of shear building models: A quantitative approach for master degrees of freedom selection. **Engineering Structures**. [S. l.], v. 179, p. 512-522, 2019.

JUSTIÇA do Pará condena engenheiro do edifício Real Class por homicídio. **G1**. Belém, 31 maio 2016. Disponível em:

<http://g1.globo.com/pa/para/noticia/2016/05/justica-do-para-condena-engenheiro-do-edificio-real-class-por-homicidio.html>. Acesso em: 22/12/2021.

KALEHSAR, H. E.; KHODAIE, N. Wind induced vibration control of super-tall buildings using a new combined structural system. **Journal of wind engineering and industrial aerodynamics**, Amsterdam, v. 172, p. 256-266, 2018.

KANTZ, H. A Robust method to estimate the maximal Lyapunov exponent of a time series. Fachbereich Physik, Universitat Wuppertal, Gauss-strasse 20,42097 Weppertal, Germany. ELSEVIER. **Physics Letters**, Amsterdam, v. 185, p. 77-78, 1994.

KANTZ, H.; SCHREIBER, T. **Nonlinear time series analysis**. [S.l.]: Cambridge university press, 2004. v. 7.

LAI, C. Y.; LIAO, W. Vibration control of a suspension system via a magnetorheological fluid damper. **Journal of Vibration and Control**, London, v. 8, n. 4, p. 527-547, 2002.

LAYEK, G. **An introduction to dynamical systems and chaos**. New York: Springer, 2015.

LIMA, D. V. F. L. **Controle de vibrações induzidas em uma laje de academia de ginástica com a utilização de amortecedores de massa sintonizados**. 2007. 148 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) – Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2007.

LIU, Y.; WANG, K.; MERCAN, O.; CHEN, H.; TAN, PING. Experimental and numerical studies on the optimal design of tuned mass dampers for vibration control of high-rise structures. **Engineering Structures**, [S. l.], v. 211, n. 15, p.1-15, 2020.

MAGLUTA, C. **Sistemas dinâmicos passivos para absorção de vibrações estruturais**. 1993. 283 f. Tese (Doutorado em Ciências em Engenharia Civil) – COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1993.

MIRANDA, P. S. T. **Avaliação da vulnerabilidade sísmica na realidade predial brasileira**. 2010. 133 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, 2010.

MOHAMMADI, S., **LYAPROSEN**: MATLAB function to calculate Lyapunov exponent. Chestnut Hill: University of Tehran, 2009. Disponível em: <https://econpapers.repec.org/software/bocbocode/t741502.htm>

MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas dinâmicos**. 4 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2019.

MOUTINHO, C. M. R. **Controlo passivo e activo de vibrações em pontes de peões**. 1998. 200 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas de Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto. Porto, 1998.

NASCIMENTO NETO, J. **Determinação de expoentes de Lyapunov em sinais aeroelásticos experimentais**. 2020. 138 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Ciência e Tecnologia de Sorocaba e Campus Experimental de São João da Boa Vista, São João da Boa Vista, 2020.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5 ed. São Paulo: Editora Pearson Prentice Hall, 2010.

OLIVEIRA, F. S. **Otimização topológica de dissipadores metálicos aplicados ao controle de vibrações em estruturas**. 2016. 175 f. Tese (Doutorado em Estruturas e Construção Civil) – Universidade de Brasília, Brasília, 2016.

ORTUNHO, T. V. **Projeto de controladores robustos para acionamento de um motor de indução trifásico**. 2020. 140 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Elétrica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. Ilha Solteira, 2020.

PALMA, P.H.T. **Identificação experimental e controle ativo de vibrações aplicadas em estruturas inteligentes**. 2007. 147 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Ilha Solteira, 2007.

PANDIT, A. R.; BISWAL, K. C. Seismic control of multi degree of freedom structure outfitted with sloped bottom tuned liquid damper. **Structures**, [S. l.], v. 25, p. 229-240, 2020.

- PARISENTI, R. **Estudo de análise dinâmica e métodos da NBR 15421 para projeto de edifícios submetidos a sismos**. 2011. 219 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2011.
- PAVAN, C. K.; MOLINA, E.C.; Identificação de um sistema físico sem EDO's através do Expoente de Lyapunov aplicado em dados de sísmica passiva. *In: CONGRESSO DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL*, 2., 2013. **Anais [...]**. Bauru: UNESP, 2013.
- PAZ, M.; KIM, Y. H. **Structural dynamics: theory and computation**. 6 ed. New York: Springer, 2019. 634p.
- PEÑA, L. A. P. **Resposta dinâmica de edificações adjacentes acopladas: considerações sobre a interação solo-estrutura**. Tese (Doutorado em Estruturas e Construção Civil) – Universidade de Brasília, Brasília, 2017.
- PERES, P.L.D. **Controle H_2 e H_∞ : caracterização por desigualdades matriciais lineares**. 1997. 180 f. Tese (Livre Docência) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1997.
- RABELO, L. J. G. **Proposta de um sistema de controle de vibrações para o estádio nacional**. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) – Universidade de Brasília, Brasília, 2016.
- RAHMANI, H. R.; KÖNKE, C. Seismic control of tall buildings using distributed multiple tuned mass dampers. **Advances in civil engineering**, London, v. 2019, special issue, p. 256-275, 2019.
- RAO, S. S. **Mechanical Vibrations**. 6 ed. São Paulo: Editora Pearson, 2017. 1291p.
- RIBEIRO, M. **Análise numérica e computacional de sistema de controle de vibrações estruturais induzidas pela ação do vento**. 2018. 134 f. Tese (Doutorado em Modelagem Computacional) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2018.
- ROEFERO, L. G. P; CHAVARETTE, F. R.; MISHRA, L. N. Linear quadratic regulator applied to a magnetorheological damper aiming attenuate vibration in an automotive suspension. **TWMS J. App. And Eng. Math**, Istanbul, v. 12, n. 4, p. 1189-1201, 2022.
- ROSENSTEIN, M. T.; COLLINS, J. J.; DELUCA, C. J. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, Amsterdam, v. 65, n. 1-2, p. 117-134, 1993.
- ROSSATO, L. V.; MIGUEL, L. F. F.; MIGUEL, L. F. F. Estimativa de razão de massas ideal de amortecedor de massa sintonizada para controle de vibrações em estruturas. *In: IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING*, 27. Brasília, DF, 2016. **Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia**, v. 2, n. 13, 2017. Doi: 10.26512/ripe.v2i13.21631

ROY, T.; MATSAGAR, V. Probabilistic assessment of steel buildings installed with passive control devices under multi-hazard scenario of earthquake and wind. **Structural safety**, Amsterdam, v. 85, 2020.

SANTOS, M. D. S. **Análise numérica do controle de vibrações em lajes de edifícios utilizando amortecedores de massa sintonizados**. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) – Universidade de Brasília. Brasília, 2009.

SAVI, M. A. **Dinâmica não-linear e caos**. 2 ed. Rio de Janeiro: Editora e-papers, 2017. 391p.

SIMONI, A. R. **Análise de series temporais aeroelásticas experimentais não lineares**. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2008.

SORIANO, H. L. **Introdução à dinâmica das estruturas**. 1 ed. Rio de Janeiro: Editora GEN LTC, 2014. 480p.

SPENCER JR, B. F.; DYKE, S. J.; SAIN, M. K.; CARLSON, J. D. Phenomenological model for magnetorheological dampers. **Journal of engineering mechanics**. v. 123. n. 3. p. 230-238, 1997.

SYMANS, M. D.; CONSTANTINOU, M. C. Semi-active control systems for seismic protection of structures: a state-of-the-art review. **Engineering structures**. [S. l.], v. 21. n. 6, p. 469-487, 1999.

TANAKA, M. C. **Controle inteligente de vibrações utilizando amortecedor magneto reológico**. 2017. 132 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Centro de Tecnologia, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2017.

TOMINAGA, L. K.; SANTORO, J.; AMARAL, R. **Desastres naturais: conhecer para prevenir**. 1. ed. São Paulo: Ed. Instituto Geológico, 2009. 196 p.

TORNADO raro destrói cidade em Santa Catarina. **EL PAÍS**. Florianópolis, 21 abr. 2015. Disponível em: https://brasil.elpais.com/brasil/2015/04/22/politica/1429658455_139701.html. Acesso em: 22/12/2021.

TROFINO, A.; COUTINHO, D.; BARBOSA, K. Improved \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ conditions for robust analysis and control synthesis of linear systems. **Controle & Automação**, Campinas, v. 16, n. 4, p. 427–434, 2005.

TUSSET, A.M., BALTHAZAR, J. M. On the chaotic suppression of both ideal and nonideal duffing based vibrating systems, using a magnetorheological damper. **Differential Equations and Dynamical Systems**, New Delhi, v. 21, n. 1-2, p. 105-121, 2013.

VAGTINSKI, A. P. **Determinação de parâmetros que caracterizam o fenômeno da biestabilidade em escoamentos turbulentos.** Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

VANANTWERP, J. G. E BRAATZ, R. D. A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities. **Journal of Process Control**, [s.l.], v. 10, 2000. p. 363-385.

VILLATE, J. E. **Dinâmica e sistemas dinâmicos.** 5 ed. Porto: Universidade do Porto, 2019. 412 p.

WIGGINS, S., **Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos.** 2 ed. New York: Springer, 2003.

WOLF, A.; SWIFT, J. B.; SWINNEY, H. L.; VASTANO, J. A. Determining Lyapunov exponents from a Time Series. **Physica d**, Amsterdam, v. 16, p. 285-317, 1985.

APÊNDICE A – Parâmetros para cálculo da ação dinâmica do vento

Tabela A.1 – Integração numérica – cálculo de cc_k .

k	ξ_i	W_i	f_k	X_1	$S(f)$	$S(f)W_i$	$\sum S(f)W_i$	$\int S(f) = (L/2)S(f)W_i$	C_k – eq. (3.52)	c_k	$c_k(\%)$	cc_k	$cc_k(\%)$
1	-0,775	0,556	2,663	93,558	0,194	0,108	0,330	0,407	0,902	0,04648	4,65	0,06111	6,11
	0	0,889	3,436	120,720	0,164	0,146							
	0,775	0,556	4,434	155,768	0,138	0,077							
2	-0,775	0,556	1,331	46,779	0,308	0,171	0,524	0,646	1,137	0,05855	5,85	0,02927	2,93
	0	0,889	1,718	60,360	0,260	0,231							
	0,775	0,556	2,217	77,884	0,219	0,122							
3	-0,775	0,556	0,666	23,390	0,488	0,271	0,831	1,025	1,432	0,07372	7,37	0,08835	8,84
	0	0,889	0,859	30,180	0,412	0,366							
	0,775	0,556	1,108	38,942	0,348	0,193							
4	-0,775	0,556	0,333	11,695	0,769	0,427	1,313	1,618	1,799	0,09265	9,27	0,09265	9,27
	0	0,889	0,430	15,090	0,651	0,579							
	0,775	0,556	0,554	19,471	0,551	0,306							
5	-0,775	0,556	0,166	5,847	1,186	0,659	2,044	2,520	2,245	0,11560	11,56	0,11560	11,56
	0	0,889	0,215	7,545	1,016	0,903							
	0,775	0,556	0,277	9,736	0,865	0,481							
6	-0,775	0,556	0,083	2,924	1,688	0,939	3,012	3,713	2,725	0,14034	14,03	0,14034	14,03
	0	0,889	0,107	3,773	1,508	1,340							
	0,775	0,556	0,139	4,868	1,318	0,733							
7	-0,775	0,556	0,042	1,462	1,861	1,035	3,707	4,571	3,024	0,15571	15,57	0,15571	15,57
	0	0,889	0,054	1,886	1,883	1,674							
	0,775	0,556	0,069	2,434	1,796	0,998							
8	-0,775	0,556	0,021	0,731	1,208	0,671	3,006	3,707	2,723	0,14021	14,02	0,14021	14,02
	0	0,889	0,027	0,943	1,523	1,354							
	0,775	0,556	0,035	1,217	1,764	0,981							

9	-0,775	0,556	0,010	0,365	0,452	0,251	1,397	1,723	1,856	0,09559	9,56	0,09559	9,56
	0	0,889	0,013	0,472	0,681	0,605							
	0,775	0,556	0,017	0,608	0,973	0,541							
10	-0,775	0,556	0,005	0,183	0,128	0,071	0,438	0,540	1,039	0,05352	5,35	0,05352	5,35
	0	0,889	0,007	0,236	0,207	0,184							
	0,775	0,556	0,009	0,304	0,329	0,183							
11	-0,775	0,556	0,003	0,091	0,033	0,018	0,117	0,144	0,537	0,02764	2,76	0,02764	2,76
	0	0,889	0,003	0,118	0,055	0,049							
	0,775	0,556	0,004	0,152	0,090	0,050							
Total								19,419	1	100	1	100	

Fonte: Autor.

Tabela A.2 – Parâmetros para o cálculo da força do vento.

A	254,70	Área de influência
q_3	873,54	Pressão de pico (N/m ²)
q_{600}	415,90	Pressão estática (N/m ²)
F_{est}	127113,7	Carregamento estático (N)
q_f	457,65	Pressão flutuante (N/m ²)

Fonte: Autor.

Tabela A.3 – Ângulos de fase θ_k .

Comb	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7	θ_8	θ_9	θ_{10}	θ_{11}
1	5,3230	2,8726	2,4378	4,3503	3,3776	3,8825	5,3272	0,0209	2,9474	2,0124	4,9809
2	3,6576	4,3677	0,4399	2,1820	0,7065	3,3285	6,2171	3,9689	0,9481	4,8509	3,4848
3	3,0006	5,0532	5,2555	0,7430	4,7685	4,4839	3,7121	0,3981	0,1677	0,1381	2,8472
4	5,2963	1,9985	3,8589	4,8706	4,4448	0,6079	3,6401	2,4097	0,3745	0,1412	2,9254
5	3,4412	0,2247	0,3081	3,9740	4,5068	2,5057	4,7033	5,4327	0,1412	3,9283	3,1533
6	0,8738	1,6722	5,6994	1,9622	3,0506	4,4291	3,1588	4,3553	5,6601	0,6078	4,3400
7	4,3248	2,9894	5,3711	0,1190	2,1963	1,4032	3,7186	1,0350	6,1569	4,6274	5,5361
8	3,7541	1,3513	4,3583	3,1805	2,6069	3,8626	3,3670	3,5533	4,4996	5,1367	0,6233
9	3,9764	3,4533	1,7697	2,9162	1,8561	0,2590	5,0314	0,8634	6,1538	5,7655	0,2163
10	5,8524	5,5510	5,3365	4,1735	2,4946	5,7213	6,1062	1,7557	1,0168	2,5956	5,3682
11	2,6976	4,3783	6,1611	0,6707	4,9269	5,4755	4,7899	2,6259	0,3249	1,4575	4,4084
12	6,1909	5,7736	3,8064	3,2045	0,2181	3,2045	0,9458	4,3684	5,5323	4,5633	1,8976
13	5,8877	0,9289	6,2433	0,4936	1,3826	1,8365	3,7128	0,6488	6,1980	4,2764	4,8400
14	2,7481	5,5814	0,6033	2,6496	2,5513	5,8043	4,7221	0,5113	4,7545	3,7048	2,6874
15	4,8635	4,9725	6,2402	3,5099	2,1562	5,6231	5,0061	0,2191	4,5652	3,5074	2,0085
16	3,7980	3,0308	2,5541	3,0997	2,4015	1,7723	0,9905	5,1644	1,6441	1,5158	2,0412
17	5,2012	2,4751	3,4343	4,8275	4,4537	0,1491	3,1470	1,4667	4,7628	3,0934	3,0397
18	4,6128	4,4628	5,8321	2,3414	0,0699	1,9603	4,3717	0,1188	0,1677	4,6583	4,9449
19	3,4876	0,5244	2,6737	0,4026	3,6008	0,3940	4,3975	2,1092	0,6175	0,8411	3,5679
20	5,0267	3,1526	5,4640	1,0769	3,4102	3,6680	1,8719	2,6669	1,9237	0,1794	4,7702

Fonte: Autor.

Tabela A.4 – Deslocamento máximo no 3º pavimento das 20 séries temporais de carregamento do Vento.

SÉRIE	DESLOCAMENTO (m)
1	0,0577
2	0,0448
3	0,0392
4	0,0479
5	0,0493
6	0,0456
7	0,0518
8	0,0419
9	0,0448
10	0,0446
11	0,0488
12	0,0448
13	0,0406
14	0,0448
15	0,0471
16	0,0505
17	0,0523
18	0,0418
19	0,0494
20	0,0485
Média (\bar{u})	0,04681
Desvio Padrão (σ)	0,00445
Gauss (u)	0,05415

Fonte: Autor.

Tabela A.5 – Deslocamento máximo no 3º pavimento das 20 séries temporais de carregamento do Terremoto.

SÉRIE	DESLOCAMENTO (m)
1	0,0833
2	0,0834
3	0,0842
4	0,0840
5	0,0839
6	0,0837
7	0,0836
8	0,0838
9	0,0852
10	0,0833
11	0,0839
12	0,0830
13	0,0836
14	0,0830
15	0,0840
16	0,0836
17	0,0833
18	0,0843
19	0,0826
20	0,0826
Média (\bar{u})	0,083615
Desvio Padrão (σ)	0,00061
Gauss (u)	0,08462

Fonte: Autor.