

Eric Busatto Santiago

Existência de medidas invariantes em transformações contínuas

São José do Rio Preto

2015

Eric Busatto Santiago

Existência de medidas invariantes em transformações contínuas

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Sistemas Dinâmicos, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Benito Frazão Pires

São José do Rio Preto

2015

Santiago, Eric Busatto.

Existência de medidas invariantes em transformações contínuas /
Eric Busatto Santiago. -- São José do Rio Preto, 2015
50 f.

Orientador: Benito Frazão Pires

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio
de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Teoria dos sistemas dinâmicos. 3. Teoria ergódica.
4. Geometria. 5. Topologia. 6. Transformações (Matemática) I. Pires,
Benito Frazão. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita
Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 517.93

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Eric Busatto Santiago

Existência de medidas invariantes em transformações contínuas

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Sistemas Dinâmicos, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Benito Frazão Pires
Professor Associado
USP - Ribeirão Preto
Orientador

Prof. Dr. Ali Messaoudi
Professor Associado
UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. Américo López Gálvez
Professor Doutor
USP - Ribeirão Preto

São José do Rio Preto, 7 de Agosto de 2015.

À minha família
dedico.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais e a toda minha família pelo apoio e incentivo durante a realização deste trabalho.

À Laura Rezzieri Gambera, por estar ao meu lado, pelo companheirismo, carinho e compreensão sempre presentes.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Benito Frazão Pires, pela confiança e orientação durante o mestrado.

Aos professores que tive na graduação e na pós graduação, pelo profissionalismo, pelos desafios propostos e ensinamentos, os quais tentarei levar sempre comigo. Em especial, ao Prof. Dr. Everaldo de Mello Bonotto, pela amizade e por acompanhar os meus passos desde a iniciação científica.

À Bernadete Marano, pela amizade, pelos anos em que foi minha orientadora no Kumon e pela forma inspiradora e competente de sempre buscar o melhor para seus alunos.

Agradeço a todos os meus amigos. À Rafaela Carvalho, por estar sempre disposta a ouvir e ajudar todos que estão a sua volta. Aos meus amigos Marcelo Bongarti e Rodrigo Contreras, pela amizade que temos desde o começo do mestrado e pelas risadas diárias. Ao Pedro Benedini, pela amizade sincera e pelos ótimos momentos compartilhados. Ao meu amigo Allan Souza, pelas conversas e apoio sempre constante.

À CAPES pelo apoio financeiro.

*“Try not to become a man of
success, but rather try to become a
man of value.”*

(Albert Einstein)

Resumo

Seja $T : X \rightarrow X$ uma transformação contínua, onde X é um espaço métrico compacto. Neste trabalho, provaremos a existência de uma medida de probabilidade de Borel μ que é invariante por T . Este resultado é conhecido como Teorema de Krylov-Bogolyubov.

Palavras-chave: Medidas invariantes, medida de probabilidade, transformações contínuas.

Abstract

Let $T : X \rightarrow X$ be a continuous transformation, where X is a compact metric space. In this work, we prove the existence of a Borel probability measure μ which is invariant under T . This result is known as the Krylov-Bogolyubov Theorem.

Keywords: Invariant measures, probability measure, continuous transformations.

Sumário

Introdução	10
1 Preliminares	13
1.1 Resultados auxiliares	13
2 O Teorema da Representação de Riesz	16
2.1 Alguns resultados preliminares	16
2.2 Prova do Teorema da Representação de Riesz	19
3 O Teorema do ponto fixo de Markov-Kakutani	25
3.1 Prova do Teorema de Markov-Kakutani	25
4 O Teorema de Krylov-Bogolyubov	29
4.1 Recorrência e ergodicidade	29
4.2 Medidas em espaços métricos	32
4.3 Existência de medidas invariantes	42

Introdução

A Teoria Ergódica é o estudo matemático do comportamento médio de sistemas dinâmicos a longo prazo. Para entender como surge este tipo de estudo, considere um sistema de k partículas se movimentando em $\mathbb{R}^3$ sob a ação de forças conhecidas. Suponha que o estado do sistema em um tempo dado é determinado sabendo as posições e os momentos de cada uma das k partículas. Então em um tempo dado o sistema é determinado por um ponto em $\mathbb{R}^{6k}$. Ao longo do tempo, o sistema se altera de acordo com as equações diferenciais que governam o movimento, as chamadas equações hamiltonianas. Se tivermos uma condição inicial e se for possível resolver unicamente as equações diferenciais, então a solução correspondente nos dará todo o histórico do movimento do sistema, que é determinado por uma curva em $\mathbb{R}^{6k}$.

A palavra “ergódico” foi introduzida por Boltzmann para descrever a ação das órbitas de um determinado fluxo em uma superfície de energia, um tipo de problema que surge em mecânica estatística. Boltzmann acreditava que as órbitas típicas de um fluxo preenchem toda a superfície de energia e chamou esta afirmação de hipótese ergódica. Posteriormente foi provado que tal afirmação era falsa e a propriedade necessária para obter a igualdade entre as médias temporais e as médias espaciais de um sistema foi chamada de ergodicidade. Sistemas dinâmicos para os quais vale esta igualdade foram denominados ergódicos.

O principal objetivo da Teoria Ergódica é estudar o comportamento de sistemas dinâmicos relativamente a medidas que permanecem invariantes sob a ação da dinâmica. Uma medida μ é invariante por uma transformação mensurável $T : X \rightarrow X$, onde X pode ser um espaço métrico ou um espaço topológico, se $\mu(E) = \mu(T^{-1}(E))$ para todo conjunto mensurável E . Além das aplicações nos sistemas hamiltonianos e na mecânica estatística, entre outras áreas correlatas, o estudo das medidas invariantes se faz necessário para obter informações intrínsecas dos sistemas dinâmicos, tais como no Teorema de Recorrência de Poincaré: ele afirma que a órbita de quase todo ponto, relativamente a qualquer medida de probabilidade invariante, regressa arbitrariamente perto do ponto inicial.

Considere os exemplos seguintes. Sejam $X = \mathbb{R}$ munido da σ -álgebra de Borel na reta e $f : X \rightarrow X$

definida por $f(x) = x + 1$. Não é difícil ver que f deixa invariante a medida de Lebesgue na reta (que é infinita). Por outro lado, podemos notar que nenhum ponto é recorrente para f . Usando a versão topológica do Teorema de Recorrência de Poincaré, podemos concluir que f não pode admitir uma medida invariante finita. Note que, neste caso, o espaço X não é compacto. Agora, considere $Y = [0, 1]$ munido da sua respectiva σ -álgebra de Borel e seja $g : Y \rightarrow Y$ dada por $g(y) = y/2$ se $0 < y \leq 1$ e $g(0) = 1$. Note que não existem pontos em $(0, 1]$ recorrentes para g , pois a órbita de qualquer um destes pontos converge para zero. Assim, se existe alguma probabilidade invariante m , ela precisa dar peso total ao único ponto recorrente, que é $y = 0$. Em outras palavras, m precisa ser a medida de Dirac, que é dada por $\delta_0(A) = 1$ se o ponto 0 está em A e $\delta_0(A) = 0$ se o ponto 0 não está em A , onde A é um conjunto mensurável. No entanto, δ_0 não é invariante por g . De fato, considerando $A = \{0\}$, temos $\delta_0(A) = 1$, mas a sua pré-imagem $g^{-1}(A)$ é o conjunto vazio, que tem medida nula. Portanto esta transformação não admite uma medida de probabilidade invariante. Observe que g é uma função descontínua.

Neste trabalho, provaremos o Teorema de Krylov-Bogolyubov, o qual garante que sempre existe uma medida de probabilidade de Borel invariante por uma transformação contínua $T : X \rightarrow X$ num espaço métrico compacto X . Foram estudadas duas formas de demonstrar este teorema de existência. Na primeira demonstração, utilizamos duas ferramentas principais: o Teorema da Representação de Riesz para medidas e o Teorema do ponto fixo de Markov-Kakutani. O Teorema da Representação de Riesz garante que dado um funcional linear contínuo positivo no espaço $C(X)$ das funções reais contínuas definidas no espaço métrico compacto X , então existe uma medida em relação à qual podemos representar o funcional dado. O Teorema de Markov-Kakutani garante a existência de um ponto que é fixado por todos os elementos de uma família de transformações contínuas afins. Primeiramente, consideramos um espaço métrico X e denotamos por $M(X)$ a coleção das medidas de probabilidade de Borel em X . Equipamos $M(X)$ com a menor topologia que torna contínua a aplicação de $M(X)$ em $\mathbb{R}$ dada por $\mu \mapsto \int f d\mu$ para cada $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Esta topologia que definimos em $M(X)$ é chamada de topologia fraca* em $M(X)$. Quando X é compacto, $M(X)$ é um espaço metrizável. Usando o Teorema da Representação de Riesz, mostramos que o espaço $M(X)$ é compacto na topologia fraca* quando X é compacto. Feito isto, consideramos uma transformação contínua $T : X \rightarrow X$ num espaço métrico compacto e definimos a aplicação $T_* : M(X) \rightarrow M(X)$ por $(T_*\mu)(B) = \mu(T^{-1}(B))$, $B \in \mathcal{B}(X)$, que é a medida imagem da medida μ pela transformação T . A aplicação T_* é contínua e afim. Assim, como $T_* : M(X) \rightarrow M(X)$ é uma transformação contínua afim em um espaço compacto convexo, podemos usar o Teorema de Markov-Kakutani para mostrar que T_* tem um ponto fixo. Desse modo, mostraremos que existe uma medida em $M(X)$ que é invariante por

T . A segunda demonstração do Teorema de Krylov-Bogolyubov é como segue. Sabendo que $M(X)$ é compacto na topologia fraca*, definimos uma sequência de medidas $(\mu_k)_{k \geq 1}$ em $M(X)$. Assim, esta sequência deve possuir algum ponto de acumulação, ou seja, existe uma subsequência que converge para uma medida μ em $M(X)$. Desse modo, provamos que essa medida satisfaz $T_*\mu = \mu$ e, portanto, μ é invariante por T .

Alguns resultados auxiliares que foram utilizados ao longo desta dissertação são lembrados no capítulo 1, tais como a aproximação de funções mensuráveis por uma sequência de funções simples, o Teorema de Radon-Nikodym e o Teorema da Decomposição de Lebesgue. No capítulo 2, desenvolvemos a demonstração do Teorema da Representação de Riesz. No capítulo 3, desenvolvemos a demonstração do Teorema de Markov-Kakutani. O capítulo 4 é dedicado à demonstração do principal teorema deste trabalho. Na seção 4.1 apresentamos a definição de ergodicidade e algumas formas de caracterizar esta definição. Na seção 4.2 estudamos algumas propriedades de medidas em espaços métricos, tais como a regularidade das medidas de probabilidade e a metrizabilidade e compacidade do espaço $M(X)$. Na seção 4.3 demonstramos o Teorema de Krylov-Bogolyubov e algumas propriedades do conjunto das medidas invariantes por uma transformação contínua.

Preliminares

Neste capítulo serão lembrados os enunciados de alguns resultados que foram utilizados ao longo deste trabalho, tais como o Teorema de Radon-Nikodym e o Teorema da Decomposição de Lebesgue.

1.1 Resultados auxiliares

Sejam X um conjunto não vazio e $\mathcal{M}$ uma σ -álgebra em X . Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função simples se ela pode ser escrita na forma $\sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$, onde $a_i \in \mathbb{R}$, $A_i \in \mathcal{M}$ para todo $i = 1, \dots, n$ e os conjuntos A_i são subconjuntos disjuntos de X . Funções simples são sempre mensuráveis. O teorema a seguir garante que toda função mensurável não negativa pode ser aproximada por funções simples. A demonstração deste fato se encontra em [4].

Teorema 1.1. *Seja $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável. Se $h : X \rightarrow [0, \infty]$ é mensurável, então existe uma sequência $(\phi_n)_{n \geq 1}$ de funções simples tal que $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots \leq h$, $\phi_n \rightarrow h$ pontualmente, e $\phi_n \rightarrow h$ uniformemente em qualquer conjunto no qual h seja limitada.*

Sejam $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável e μ, ν medidas positivas em $(X, \mathcal{M})$. Dizemos que ν é absolutamente contínua com respeito à μ se $\nu(A) = 0$ para todo $A \in \mathcal{M}$ com $\mu(A) = 0$. Escrevemos $\nu \ll \mu$ para denotar que ν é absolutamente contínua com respeito à μ . A importância do conceito de continuidade absoluta entre medidas se expressa no Teorema de Radon-Nikodym, onde obtemos a representação de uma medida com relação a outra através de uma função mensurável que é única em quase todo ponto. A demonstração deste resultado se encontra em [2].

Teorema 1.2 (Teorema de Radon-Nikodym). *Sejam $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável e μ, ν medidas positivas σ -finitas em $(X, \mathcal{M})$. Se ν é absolutamente contínua com respeito à μ , então existe uma*

função mensurável $g : X \rightarrow [0, \infty)$ tal que vale

$$\nu(A) = \int_A g d\mu$$

para todo $A \in \mathcal{M}$. Além disso, g é única em μ -quase todo ponto. A função g é chamada de derivada de Radon-Nikodym de ν com respeito à μ e é denotada por $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Dado X um conjunto não vazio, seja $\mathcal{B}(X)$ a σ -álgebra dos subconjuntos de Borel de X . Duas medidas de probabilidade μ, m em $(X, \mathcal{B}(X))$ são mutuamente singulares se existe algum $B \in \mathcal{B}(X)$ com $\mu(B) = 0$ e $m(X \setminus B) = 0$. O teorema de decomposição a seguir garante que uma medida de probabilidade pode ser escrita de forma única em termos dos conceitos de continuidade absoluta e de medidas mutuamente singulares.

Teorema 1.3 (Teorema da Decomposição de Lebesgue). *Sejam μ, m duas medidas de probabilidade em $(X, \mathcal{B}(X))$. Existem um único $p \in [0, 1]$ e únicas medidas de probabilidade μ_1, μ_2 em $(X, \mathcal{B}(X))$ tais que*

$$\mu = p\mu_1 + (1 - p)\mu_2,$$

onde $\mu_1 \ll m$ e μ_2 é mutuamente singular com respeito à m .

Sejam (M, d) um espaço métrico. No próximo resultado provaremos as principais propriedades da distância de um ponto de M a um subconjunto não vazio de M e que serão de grande utilidade mais adiante.

Lema 1.4. *Se E é um subconjunto não vazio de um espaço métrico M , defina a distância de $x \in M$ a E por*

$$\rho_E(x) = \inf_{y \in E} d(x, y).$$

Então valem as seguintes propriedades:

- (i) $\rho_E(x) = 0$ se, e somente se, $x \in \overline{E}$;
- (ii) ρ_E é uma função uniformemente contínua em M .

Demonstração. (i) Seja $x \in \overline{E}$. Então existe uma sequência $(z_n)_{n \geq 1} \subset E$ com $z_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$. Daí para todo $\epsilon > 0$, existe um inteiro positivo N tal que $d(x, z_n) < \epsilon$ para todo $n \geq N$. Se $\rho_E(x) = \delta > 0$, tomando $0 < \epsilon < \delta$, para todo $n \geq N$ temos

$$d(x, z_n) < \epsilon < \delta = \rho_E(x) = \inf_{y \in E} d(x, y),$$

o que é um absurdo. Portanto $\rho_E(x) = 0$. Reciprocamente, suponha $\rho_E(x) = 0$. Então para todo $\epsilon > 0$, existe $z \in E$ tal que

$$d(x, z) < \inf_{y \in E} d(x, y) + \epsilon = \rho_E(x) + \epsilon = 0 + \epsilon = \epsilon,$$

isto é, $d(x, z) < \epsilon$. Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, isto mostra que em qualquer vizinhança de x podemos encontrar um ponto $z \in E$. Portanto $x \in \overline{E}$.

(ii) Afirmamos que vale a desigualdade

$$|\rho_E(x) - \rho_E(y)| \leq d(x, y)$$

para todo $x, y \in M$. De fato, para todo $z \in E$ e para todo $y \in M$, pela desigualdade triangular para $x \in M$, temos

$$\rho_E(x) = \inf_{w \in E} d(x, w) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Uma vez que $z \in E$ é arbitrário, temos

$$\rho_E(x) \leq d(x, y) + \inf_{z \in E} d(y, z) = d(x, y) + \rho_E(y),$$

o que implica $\rho_E(x) - \rho_E(y) \leq d(x, y)$. Analogamente, temos $\rho_E(y) - \rho_E(x) \leq d(x, y)$. Assim, obtemos

$$|\rho_E(x) - \rho_E(y)| \leq d(x, y)$$

para todo $x, y \in M$, como queríamos. Dessa forma, dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \epsilon > 0$. Logo se $x, y \in M$ e $d(x, y) < \delta$, então

$$|\rho_E(x) - \rho_E(y)| \leq d(x, y) < \delta = \epsilon,$$

ou seja, $|\rho_E(x) - \rho_E(y)| < \epsilon$. Portanto ρ_E é uma função uniformemente contínua em M . $\square$

O lema seguinte relaciona a topologia de um espaço métrico M com a convergência de uma sequência de pontos neste espaço. A demonstração deste resultado se encontra em [7].

Lema 1.5. *Um subconjunto $F \subset M$ é fechado no espaço métrico M se, e somente se, F contém o limite de cada sequência $(x_n)_{n \geq 1} \subset F$ que converge em M .*

O Teorema da Representação de Riesz

Sejam X um espaço métrico compacto e $C(X)$ o espaço das funções reais contínuas definidas em X . Neste capítulo provaremos o Teorema da Representação de Riesz para medidas, que afirma que dado um funcional linear contínuo positivo em $C(X)$, então existe uma medida em relação à qual podemos representar o funcional dado. Mais precisamente, este teorema garante que se $L : C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear contínuo positivo com $L(1) = 1$, então existe uma medida de probabilidade de Borel μ tal que temos $L(f) = \int f d\mu$ para toda função $f \in C(X)$.

2.1 Alguns resultados preliminares

Nesta seção apresentaremos as ferramentas e resultados que serão essenciais para provar o Teorema da Representação de Riesz. Começaremos com a proposição a seguir, que nos diz que dois subconjuntos compactos disjuntos de um espaço métrico sempre podem ser separados por abertos disjuntos.

Proposição 2.1. *Seja X um espaço métrico e sejam K e L subconjuntos compactos disjuntos de X . Então existem subconjuntos abertos disjuntos U e V de X com $K \subset U$ e $L \subset V$.*

Demonstração. Vamos assumir que os conjuntos K e L são ambos não vazios, pois caso contrário podemos tomar os abertos como sendo $\emptyset$ e X . Começaremos com o caso onde K contém exatamente um ponto. Seja x este ponto. Como K e L são disjuntos, então $x \neq y$ para todo $y \in L$. Assim, como X é um espaço métrico, para cada $y \in L$ existem abertos disjuntos U_y e V_y com $x \in U_y$ e $y \in V_y$. Logo $L \subset \bigcup_{y \in L} V_y$ e, como L é compacto, segue que existem $y_1, \dots, y_n \in L$ tais que $L \subset \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$. Então os conjuntos U e V definidos por $U = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$ e $V = \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$ são os abertos desejados. Agora consideremos

o caso onde K possui mais de um elemento. Acabamos de mostrar que para cada $x \in K$ existem abertos disjuntos, digamos U_x e V_x , com $x \in U_x$ e $L \subset V_x$. Logo $K \subset \bigcup_{x \in K} U_x$ e, como K é compacto, segue que existem $x_1, \dots, x_k \in K$ tais que $K \subset \bigcup_{i=1}^k U_{x_i}$. Definindo os abertos $U = \bigcup_{i=1}^k U_{x_i}$ e $V = \bigcap_{i=1}^k V_{x_i}$, temos $K \subset U$, $L \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Proposição 2.2. *Sejam X um espaço métrico compacto, $x \in X$ e U um aberto em X com $x \in U$. Então existe um aberto V com $x \in V \subset \bar{V} \subset U$ e $\bar{V}$ compacto.*

Demonstração. Como U é aberto em X e $x \in U$, temos que existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset U$. Seja $V = B(x, r/2)$. Então temos

$$x \in V \subset \bar{V} \subset B(x, r) \subset U.$$

Além disso, como $\bar{V}$ é fechado e X é compacto, temos $\bar{V}$ compacto. $\square$

Proposição 2.3. *Sejam X um espaço métrico compacto, K um subconjunto compacto de X e U um aberto em X com $K \subset U$. Então existe um aberto V com $K \subset V \subset \bar{V} \subset U$ e $\bar{V}$ compacto.*

Demonstração. Seja $x \in K$. Então $x \in U$ e, pela Proposição 2.2, temos que existe um aberto V_x com $x \in V_x \subset \bar{V}_x \subset U$ e $\bar{V}_x$ compacto. Assim $K \subset \bigcup_{x \in K} V_x$ e, como K é compacto, segue que existem $x_1, \dots, x_n \in K$ tais que $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$. Definindo $V = \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$, temos

$$K \subset V \subset \bar{V} = \overline{\bigcup_{i=1}^n V_{x_i}} = \bigcup_{i=1}^n \bar{V}_{x_i} \subset U.$$

Além disso, como $\bar{V}$ é fechado e X é compacto, temos $\bar{V}$ compacto. $\square$

Lembremos do conceito de normalidade em espaços topológicos. Como consequência da Proposição 2.1, obtemos o fato de que todo espaço métrico compacto é um espaço normal.

Definição 2.4. *Seja X um espaço topológico Hausdorff. Dizemos que X é normal se para cada par A, B de fechados disjuntos em X , existem abertos disjuntos U, V em X com $A \subset U$ e $B \subset V$.*

Proposição 2.5. *Todo espaço métrico compacto é normal.*

Demonstração. Seja X um espaço métrico compacto. Então X é Hausdorff. Se K, L são fechados disjuntos em X , como X é compacto, então K, L são compactos disjuntos. Pela Proposição 2.1, existem abertos disjuntos U, V com $K \subset U$ e $L \subset V$. Isto mostra que X é normal. $\square$

A seguir vamos recordar o enunciado do Lema de Urysohn, um dos resultados centrais da Topologia. Ele nos diz que dois subconjuntos fechados disjuntos de um espaço topológico normal podem ser separados por uma função contínua. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [8].

Teorema 2.6 (Lema de Urysohn). *Seja X um espaço topológico normal e sejam A, B subconjuntos fechados disjuntos de X . Então existe uma função contínua $f : X \rightarrow [0, 1]$ satisfazendo $f(x) = 0$ para todo $x \in A$ e $f(x) = 1$ para todo $x \in B$.*

Seja f uma função real definida em um espaço métrico compacto X . O suporte de f , denotado por $\text{supp}(f)$, é definido como sendo o conjunto $\overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$. Note que, como X é compacto, o suporte de f é sempre um subconjunto compacto. A proposição a seguir garante que dados um subconjunto compacto K e um subconjunto aberto U de um espaço métrico compacto tal que $K \subset U$, então sempre existe uma função contínua que é limitada pelas funções características de K e U e cujo suporte está contido no aberto U . Utilizaremos o Lema de Urysohn em sua demonstração.

Proposição 2.7. *Sejam X um espaço métrico compacto, K um subconjunto compacto de X e U um aberto em X com $K \subset U$. Então existe uma função contínua f definida em X que satisfaz $\chi_K \leq f \leq \chi_U$ e $\text{supp}(f) \subset U$.*

Demonstração. Pela Proposição 2.3, existe um aberto V em X com $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$, onde $\overline{V}$ é compacto. Como K é compacto e X é um espaço métrico, segue que K é fechado. Além disso, $\overline{V} \setminus V = \overline{V} \cap V^c$ é fechado. Note que K e $\overline{V} \setminus V$ são subconjuntos disjuntos de $\overline{V}$. Assim, pelo Teorema 2.6 (Lema de Urysohn) aplicado ao espaço métrico compacto $\overline{V}$, temos que existe uma função contínua $g : \overline{V} \rightarrow [0, 1]$ com $g(x) = 1$ para cada $x \in K$ e $g(x) = 0$ para cada $x \in \overline{V} \setminus V$. Defina a função $f : X \rightarrow [0, 1]$ por $f = g$ em $\overline{V}$ e $f = 0$ em $X \setminus \overline{V}$. Note que f é contínua em $\overline{V}$ e é constante, e portanto contínua, em $X \setminus V$. Assim, segue a continuidade da função f . Além disso, temos $\chi_K \leq f \leq \chi_U$ e

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}} \subset \overline{V} \subset U,$$

ou seja, $\text{supp}(f) \subset U$. □

O lema seguinte é uma consequência da Proposição 2.1 e o utilizaremos para mostrar o último resultado desta seção.

Lema 2.8. *Sejam X um espaço métrico, K um subconjunto compacto de X e U_1, U_2 subconjuntos abertos de X tais que $K \subset U_1 \cup U_2$. Então existem conjuntos compactos K_1 e K_2 com $K = K_1 \cup K_2$, $K_1 \subset U_1$ e $K_2 \subset U_2$.*

Demonstração. Sejam $L_1 = K \setminus U_1$ e $L_2 = K \setminus U_2$. Então L_1 e L_2 são compactos. Além disso, L_1 e L_2 são disjuntos. De fato, se $x_0 \in L_1 \cap L_2$, então $x_0 \in K$, $x_0 \notin U_1$ e $x_0 \notin U_2$. Mas isto implica $x_0 \in U_1 \cup U_2$ e $x_0 \notin U_1 \cup U_2$, o que é um absurdo. Portanto $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. Assim, pela Proposição 2.1, existem abertos V_1 e V_2 com $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $L_1 \subset V_1$ e $L_2 \subset V_2$. Sejam $K_1 = K \setminus V_1$ e $K_2 = K \setminus V_2$. Então K_1 e K_2 são compactos. Além disso, temos

$$K_i = K \cap V_i^c \subset K \cap L_i^c = K \cap U_i \subset U_i$$

para $i = 1, 2$, ou seja, $K_1 \subset U_1$ e $K_2 \subset U_2$. Para finalizar a demonstração, basta observar que

$$K_1 \cup K_2 = (K \cap V_1^c) \cup (K \cap V_2^c) = K \cap (V_1^c \cup V_2^c) = K \cap X = K.$$

□

Proposição 2.9. *Sejam X um espaço métrico compacto, f uma função em $C(X)$ e $U_1, \dots, U_n$ subconjuntos abertos de X tais que $\text{supp}(f) \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$. Então existem funções $f_1, \dots, f_n$ em $C(X)$ tais que $f = f_1 + f_2 + \dots + f_n$ e para cada $i = 1, \dots, n$ o suporte de f_i está contido em U_i . Além disso, se f é não negativa, então cada f_i pode ser escolhida como sendo não negativa.*

Demonstração. Primeiro suponha $n = 2$. Usando o Lema 2.8, temos que existem conjuntos compactos K_1 e K_2 tais que $K_1 \subset U_1$, $K_2 \subset U_2$ e $\text{supp}(f) = K_1 \cup K_2$. Pela Proposição 2.7, obtemos funções h_1 e h_2 em $C(X)$ que satisfazem $\chi_{K_i} \leq h_i \leq \chi_{U_i}$ e $\text{supp}(h_i) \subset U_i$ para $i = 1, 2$. Defina as funções g_1 e g_2 por $g_1 = h_1$ e $g_2 = h_2 - \min\{h_1, h_2\}$. Então g_1 e g_2 são não negativas, seus suportes estão contidos em U_1 e U_2 , respectivamente, e satisfazem $g_1(x) + g_2(x) = \max\{h_1, h_2\}(x) = 1$ para cada x em $\text{supp}(f)$. A prova para o caso $n = 2$ está completa definindo as funções f_1 e f_2 por $f g_1$ e $f g_2$, respectivamente. O caso geral pode ser provado por indução e usando o que foi provado anteriormente para escrever f como soma de duas funções tendo suportes contidos em $\bigcup_{i=1}^{n-1} U_i$ e em U_n , respectivamente, e então usar a hipótese de indução para decompor a primeira destas funções como soma de $n - 1$ funções. □

2.2 Prova do Teorema da Representação de Riesz

Nesta seção vamos enunciar e provar o Teorema da Representação de Riesz. Primeiramente, lembremos que uma medida exterior é uma função $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ definida na coleção dos subconjuntos de um conjunto X satisfazendo: $\mu^*(\emptyset) = 0$, $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ se $A \subset B \subset X$ (monotocidade) e $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ para toda sequência $(A_n)_{n \geq 1}$ de subconjuntos de X (subaditividade enumerável). O teorema que enunciaremos a seguir é o fato principal na teoria de

medidas exteriores e sua demonstração pode ser encontrada em [2]. Ele nos diz que sempre conseguimos obter uma medida a partir de uma medida exterior.

Teorema 2.10. *Sejam X um conjunto, μ^* uma medida exterior em X e $\mathcal{M}_{\mu^*}$ a coleção dos subconjuntos μ^* -mensuráveis de X . Então $\mathcal{M}_{\mu^*}$ é uma σ -álgebra e a restrição de μ^* a $\mathcal{M}_{\mu^*}$ é uma medida em $\mathcal{M}_{\mu^*}$.*

Seja U um subconjunto aberto do espaço métrico compacto X . Escrevemos $f \prec U$ para indicar que uma função f em $C(X)$ satisfaz $0 \leq f \leq \chi_U$ e $\text{supp}(f) \subset U$. Agora, enunciaremos e provaremos o principal resultado deste capítulo.

Teorema 2.11 (Teorema da Representação de Riesz). *Seja X um espaço métrico compacto e seja $L : C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo tal que L é um operador positivo, isto é, $f \geq 0$ implica $L(f) \geq 0$, e $L(1) = 1$. Então existe uma medida de probabilidade de Borel μ tal que temos*

$$L(f) = \int f d\mu$$

para toda função $f \in C(X)$.

Demonstração. Defina a função μ^* em cada subconjunto aberto U de X por

$$\mu^*(U) = \sup\{L(f) : f \in C(X) \text{ e } f \prec U\} \quad (2.1)$$

e então defina μ^* para cada subconjunto A de X por

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu^*(U) : U \text{ é aberto e } A \subset U\}. \quad (2.2)$$

Nos próximos resultados veremos que a função μ^* é uma medida exterior em X e, então, a medida μ desejada é obtida fazendo a restrição de μ^* à $\mathcal{B}(X)$, lembrando que $\mathcal{B}(X)$ denota a σ -álgebra dos subconjuntos de Borel de X . □

Proposição 2.12. *Sejam X e L como no enunciado do Teorema 2.11 e seja μ^* definida por 2.1 e 2.2. Então μ^* é uma medida exterior em X e todo subconjunto de Borel de X é μ^* -mensurável.*

Demonstração. A relação $\mu^*(\emptyset) = 0$ e a monotocidade de μ^* são claras. Precisamos verificar a subaditividade enumerável de μ^* . Primeiro suponha que $(U_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência de subconjuntos abertos de X e vamos verificar que vale

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(U_n).$$

Seja f uma função em $C(X)$ e que satisfaz $f \prec \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Então $\text{supp}(f) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, onde $\text{supp}(f)$ é um subconjunto compacto. Logo existe um inteiro positivo N tal que $\text{supp}(f) \subset \bigcup_{n=1}^N U_n$. Pela Proposição 2.9, existem funções $f_1, \dots, f_N$ em $C(X)$ tais que $f = f_1 + \dots + f_N$ e $f_n \prec U_n$ para $n = 1, \dots, N$. Como $L(f) = L(f_1 + \dots + f_N) = \sum_{n=1}^N L(f_n)$ e $L(f_n) \leq \mu^*(U_n)$ para $n = 1, \dots, N$, obtemos

$$L(f) = \sum_{n=1}^N L(f_n) \leq \sum_{n=1}^N \mu^*(U_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(U_n).$$

Assim, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(U_n)$ é uma cota superior para $L(f)$. Pela equação 2.1, obtemos

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(U_n),$$

como queríamos. Agora suponha que $(A_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência arbitrária de subconjuntos de X . A desigualdade $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ é claramente verdadeira se $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) = \infty$. Então vamos supor $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) < \infty$. Isto implica $\mu^*(A_n) < \infty$ para cada $n \geq 1$. Seja $\epsilon > 0$. Usando a equação 2.2, para cada $n \geq 1$ podemos escolher um aberto U_n com $A_n \subset U_n$ e

$$\mu^*(U_n) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Logo $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ e, usando a monotocidade de μ^* , temos

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(U_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, obtemos $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$. Isto prova a subaditividade enumerável de μ^* . Portanto μ^* é uma medida exterior.

Podemos mostrar que todo subconjunto de Borel de X é μ^* -mensurável verificando que todo subconjunto aberto de X é μ^* -mensurável. Seja $U \subset X$ aberto. Para mostrar que U é μ^* -mensurável, basta verificar que vale

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^c) \quad (2.3)$$

para todo $A \subset X$ com $\mu^*(A) < \infty$. Seja $A \subset X$ com $\mu^*(A) < \infty$ e seja $\epsilon > 0$. Usando a equação 2.2, podemos escolher um aberto V com $A \subset V$ e $\mu^*(V) \leq \mu^*(A) + \epsilon$. Se mostrarmos que vale

$$\mu^*(V) \geq \mu^*(V \cap U) + \mu^*(V \cap U^c) - 2\epsilon, \quad (2.4)$$

então vamos obter

$$\mu^*(A) + \epsilon \geq \mu^*(V) \geq \mu^*(V \cap U) + \mu^*(V \cap U^c) - 2\epsilon \geq \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^c) - 2\epsilon,$$

ou seja,

$$\mu^*(A) + \epsilon \geq \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^c) - 2\epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, vamos obter a desigualdade 2.3, mostrando que U é μ^* -mensurável. Assim, devemos verificar que a desigualdade 2.4 é verdadeira. Seja f_1 uma função em $C(X)$ com $f_1 \prec V \cap U$ e $L(f_1) \geq \mu^*(V \cap U) - \epsilon$. Seja $K = \text{supp}(f_1)$. Como K é fechado, então $V \cap K^c$ é aberto. Além disso, como $K = \text{supp}(f_1) \subset V \cap U \subset U$, temos $V \cap U^c \subset V \cap K^c$. Então existe uma função f_2 em $C(X)$ que satisfaz $f_2 \prec V \cap K^c$ e $L(f_2) \geq \mu^*(V \cap K^c) - \epsilon \geq \mu^*(V \cap U^c) - \epsilon$. Como $f_1 + f_2$ satisfaz $(f_1 + f_2) \prec V$ e $L(f_1 + f_2) \leq \mu^*(V)$, temos

$$\mu^*(V) \geq L(f_1 + f_2) = L(f_1) + L(f_2) \geq \mu^*(V \cap U) + \mu^*(V \cap U^c) - 2\epsilon$$

e a desigualdade 2.4 segue. Isto prova que U é μ^* -mensurável e a demonstração da proposição está completa. $\square$

Lema 2.13. *Sejam X e L como no enunciado do Teorema 2.11 e seja μ^* definida por 2.1 e 2.2. Suponha $A \subset X$ e $f \in C(X)$. Se $\chi_A \leq f$, então $\mu^*(A) \leq L(f)$. Se $0 \leq f \leq \chi_A$ e se A é compacto, então $L(f) \leq \mu^*(A)$.*

Demonstração. Primeiro suponha $\chi_A \leq f$. Seja $0 < \epsilon < 1$ e defina U_ϵ por

$$U_\epsilon = \{x \in X : f(x) > 1 - \epsilon\}.$$

Como f é contínua, então U_ϵ é aberto. Além disso, cada função g em $C(X)$ que satisfaz $g \leq \chi_{U_\epsilon}$ também satisfaz $g \leq \frac{1}{1-\epsilon}f$. Sendo L um funcional linear positivo e $\frac{1}{1-\epsilon}f - g \geq 0$, temos

$$0 \leq L\left(\frac{1}{1-\epsilon}f - g\right) = \frac{1}{1-\epsilon}L(f) - L(g),$$

ou seja, $L(g) \leq \frac{1}{1-\epsilon} L(f)$. Daí a equação 2.1 implica

$$\mu^*(U_\epsilon) \leq \frac{1}{1-\epsilon} L(f).$$

Como $A \subset U_\epsilon$ e como ϵ pode ser tomado arbitrariamente próximo de 0, segue que $\mu^*(A) \leq L(f)$.

Agora suponha $0 \leq f \leq \chi_A$, onde A é compacto. Seja U um aberto com $A \subset U$. Então $f \prec U$ e a equação 2.1 implica $L(f) \leq \mu^*(U)$. Como U é um aberto arbitrário que contém A , a equação 2.2 implica $L(f) \leq \mu^*(A)$. $\square$

Finalmente, a proposição a seguir nos garante que vale a igualdade que queremos obter no Teorema 2.11.

Proposição 2.14. *Sejam X e L como no enunciado do Teorema 2.11 e seja μ^* definida por 2.1 e 2.2. Seja μ a restrição de μ^* à $\mathcal{B}(X)$ e seja μ_1 a restrição de μ^* à σ -álgebra $\mathcal{M}_{\mu^*}$ dos conjuntos μ^* -mensuráveis. Então μ e μ_1 são medidas e vale*

$$\int f d\mu = \int f d\mu_1 = L(f)$$

para cada $f \in C(X)$.

Demonstração. Como μ^* é uma medida exterior, o Teorema 2.10 implica que μ_1 é uma medida em $\mathcal{M}_{\mu^*}$. Pela Proposição 2.12, temos que todo subconjunto de Borel de X é μ^* -mensurável, ou seja, $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{M}_{\mu^*}$. Assim, μ é uma medida em $\mathcal{B}(X)$. Vamos mostrar que valem as igualdades $L(f) = \int f d\mu = \int f d\mu_1$ para cada $f \in C(X)$. Como cada função em $C(X)$ é a diferença de duas funções não negativas em $C(X)$, podemos restringir nossa atenção para uma função não negativa f em $C(X)$. Seja $\epsilon > 0$ e para cada inteiro positivo n defina a função f_n por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) \leq (n-1)\epsilon, \\ f(x) - (n-1)\epsilon & \text{se } (n-1)\epsilon < f(x) \leq n\epsilon, \\ \epsilon & \text{se } f(x) > n\epsilon. \end{cases}$$

Então cada f_n pertence a $C(X)$ e temos $f = \sum_{n \geq 1} f_n$. De fato, seja $x \in X$ fixo. Então existe n_0 tal que $(n_0 - 1)\epsilon < f(x) \leq n_0\epsilon$ e $f_{n_0}(x) = f(x) - (n_0 - 1)\epsilon$. Se $n > n_0$, então $f_n(x) = 0$ e se $n < n_0$, então

$f_n(x) = \epsilon$. Assim, temos

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} f_n(x) &= \sum_{n < n_0} f_n(x) + f_{n_0}(x) + \sum_{n > n_0} f_n(x) \\ &= (n_0 - 1)\epsilon + f(x) - (n_0 - 1)\epsilon \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Além disso, existe um inteiro positivo N tal que $f_n = 0$ se $n > N$. Seja $K_0 = \text{supp}(f)$ e seja $K_n = \{x \in X : f(x) \geq n\epsilon\}$ para cada inteiro positivo n . Então temos $\epsilon\chi_{K_n} \leq f_n \leq \epsilon\chi_{K_{n-1}}$ para cada n . Assim, pelo Lema 2.13 e usando propriedades básicas da integral, temos $\epsilon\mu(K_n) \leq L(f_n) \leq \epsilon\mu(K_{n-1})$ e $\epsilon\mu(K_n) \leq \int f_n d\mu \leq \epsilon\mu(K_{n-1})$ para cada n . Como $f = \sum_{n=1}^N f_n$, obtemos as relações

$$\sum_{n=1}^N \epsilon\mu(K_n) \leq L(f) \leq \sum_{n=0}^{N-1} \epsilon\mu(K_n)$$

e

$$\sum_{n=1}^N \epsilon\mu(K_n) \leq \int f d\mu \leq \sum_{n=0}^{N-1} \epsilon\mu(K_n).$$

Isto mostra que $L(f)$ e $\int f d\mu$ pertencem a um intervalo de comprimento

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \epsilon\mu(K_n) - \sum_{n=1}^N \epsilon\mu(K_n) &= \epsilon\mu(K_0) + \sum_{n=1}^{N-1} \epsilon\mu(K_n) - \sum_{n=1}^{N-1} \epsilon\mu(K_n) - \epsilon\mu(K_N) \\ &= \epsilon\mu(\text{supp}(f)) - \epsilon\mu(K_N). \end{aligned}$$

Como este comprimento é, no máximo, igual a $\epsilon\mu(\text{supp}(f))$ e como ϵ é arbitrário, $L(f)$ e $\int f d\mu$ devem coincidir. Além disso, é claro que $\int f d\mu_1 = \int f d\mu$. Isto termina a demonstração da proposição. Para finalizar a demonstração do Teorema 2.11, observe que

$$\mu(X) = \int 1 d\mu = L(1) = 1$$

e, portanto, μ é uma medida de probabilidade. □

O Teorema do ponto fixo de Markov-Kakutani

O objetivo deste capítulo é enunciar e demonstrar o Teorema do ponto fixo de Markov-Kakutani, que garante a existência de um ponto que é fixado por todos os elementos de uma família de transformações contínuas afins.

3.1 Prova do Teorema de Markov-Kakutani

Antes de enunciar e demonstrar o principal resultado deste capítulo, vamos recordar alguns fatos válidos para espaços topológicos em geral.

Proposição 3.1. *Se X, Y são espaços topológicos, temos que valem as seguintes propriedades:*

- (i) *se X é compacto e $F \subset X$ é fechado, então F é compacto;*
- (ii) *se $f : X \rightarrow Y$ é uma função contínua e X é compacto, então $f(X)$ é compacto;*
- (iii) *se X é Hausdorff e $K \subset X$ é compacto, então K é fechado.*

Demonstração. (i) Seja $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família de abertos em X com $F \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$. Então $\mathcal{D} = \mathcal{C} \cup F^c$ é uma cobertura aberta de X . Como X é compacto, existem $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in L$ tais que

$$X = C_{\lambda_1} \cup C_{\lambda_2} \cup \dots \cup C_{\lambda_n} \cup F^c.$$

Como $F \subset X$ e $F \cap F^c = \emptyset$, obtemos $F \subset C_{\lambda_1} \cup C_{\lambda_2} \cup \dots \cup C_{\lambda_n}$. Portanto F é compacto.

(ii) Seja $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família de abertos em Y com $f(X) \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$. Como f é contínua, então $f^{-1}(C_\lambda)$ é aberto em X para todo $\lambda \in L$. Além disso, $X = \bigcup_{\lambda \in L} f^{-1}(C_\lambda)$, ou seja, $(f^{-1}(C_\lambda))_{\lambda \in L}$ é uma

cobertura aberta de X . Como X é compacto, existem $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in L$ tais que $X = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(C_{\lambda_i})$. Então

$$f(X) = f\left(\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(C_{\lambda_i})\right) \subset \bigcup_{i=1}^n f(f^{-1}(C_{\lambda_i})) \subset \bigcup_{i=1}^n C_{\lambda_i},$$

ou seja, $f(X) \subset \bigcup_{i=1}^n C_{\lambda_i}$. Portanto $f(X)$ é compacto.

(iii) Vamos mostrar que K^c é aberto. Seja $p \in K^c$. Então $p \neq x$ para todo $x \in K$. Como X é um espaço Hausdorff, para cada $x \in K$ existem abertos disjuntos G_x e H_x com $x \in G_x$ e $p \in H_x$. Assim, $K \subset \bigcup_{x \in K} G_x$. Como K é compacto, existem $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$ tais que $K \subset \bigcup_{i=1}^n G_{x_i}$. Seja $A = H_{x_1} \cap H_{x_2} \cap \dots \cap H_{x_n}$. Então A é aberto e $p \in A$. Além disso, temos $A \cap K = \emptyset$, o que implica $A \subset K^c$. Logo K^c é aberto e, portanto, K é fechado. $\square$

A seguir veremos o significado de uma família de subconjuntos ter a propriedade da interseção finita e relacionaremos este conceito com compacidade.

Definição 3.2. *Sejam X um conjunto e $\mathcal{F} = (F_i)_{i \in I}$ uma família de subconjuntos de X . Dizemos que $\mathcal{F}$ tem a propriedade da interseção finita se para qualquer conjunto finito de índices $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset I$ temos*

$$F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \dots \cap F_{i_k} \neq \emptyset.$$

Teorema 3.3. *Seja X um espaço topológico. Então X é compacto se, e somente se, para toda família $\mathcal{F} = (F_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos fechados de X com a propriedade da interseção finita temos $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda \neq \emptyset$.*

Demonstração. Vamos supor que exista uma família $\mathcal{F} = (F_\lambda)_{\lambda \in L}$ de fechados em X com a propriedade da interseção finita e $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda = \emptyset$. Logo $X = \bigcup_{\lambda \in L} F_\lambda^c$, ou seja, $(F_\lambda^c)_{\lambda \in L}$ é uma cobertura aberta de X . Como X é compacto, existem $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in L$ tais que $X = F_{\lambda_1}^c \cup F_{\lambda_2}^c \cup \dots \cup F_{\lambda_n}^c$. Então

$$F_{\lambda_1} \cap F_{\lambda_2} \cap \dots \cap F_{\lambda_n} = \emptyset,$$

o que contradiz o fato de que $\mathcal{F}$ tem a propriedade da interseção finita. Reciprocamente, seja $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma cobertura aberta de X . Então $X = \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$, o que implica $\bigcap_{\lambda \in L} C_\lambda^c = \emptyset$. Assim, $(C_\lambda^c)_{\lambda \in L}$ é uma família de fechados em X que não tem a propriedade da interseção finita. Logo existem $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in L$ tais que $C_{\lambda_1}^c \cap C_{\lambda_2}^c \cap \dots \cap C_{\lambda_n}^c = \emptyset$, o que implica $X = C_{\lambda_1} \cup C_{\lambda_2} \cup \dots \cup C_{\lambda_n}$ e, portanto, X é compacto. $\square$

Um espaço vetorial topológico é um espaço vetorial X munido de uma topologia relativamente à qual as duas operações (adição de vetores e produto de um escalar por um vetor) são contínuas. Um

conjunto A em um espaço vetorial topológico X é limitado se dada qualquer vizinhança V da origem de X existe $\epsilon > 0$ tal que $\alpha A \subseteq V$ sempre que $|\alpha| < \epsilon$. O lema seguinte afirma que todo conjunto compacto em um espaço vetorial topológico é limitado. Este fato será usado como argumento para concluir a prova do Teorema de Markov-Kakutani e sua demonstração pode ser encontrada em [3].

Lema 3.4. *Um subconjunto compacto de um espaço vetorial topológico é limitado.*

O enunciado e a demonstração do resultado central deste capítulo é como segue.

Teorema 3.5 (Teorema de Markov-Kakutani). *Sejam K um subconjunto convexo compacto de um espaço vetorial topológico Hausdorff X e $\mathcal{F}$ uma família de transformações contínuas afins $T : K \rightarrow K$. Suponha que todos os elementos de $\mathcal{F}$ comutam. Então existe um ponto $p \in K$ tal que $T(p) = p$ para cada $T \in \mathcal{F}$, ou seja, existe um ponto $p \in K$ que é fixado por todos os elementos de $\mathcal{F}$.*

Demonstração. Sejam n um inteiro positivo e $T \in \mathcal{F}$. Defina

$$T_n = \frac{1}{n}(I + T + \cdots + T^{n-1}).$$

Seja $\mathcal{T} = \{T_n(K) : n \geq 1 \text{ e } T \in \mathcal{F}\}$. Então cada elemento de $\mathcal{T}$ é convexo e compacto (pelo item (ii) da Proposição 3.1). Como K é convexo, temos $T_n(K) \subseteq K$. Dados um inteiro positivo m e $S \in \mathcal{F}$, defina $S_m = \frac{1}{m}(I + S + \cdots + S^{m-1})$. Como todos os elementos de $\mathcal{F}$ comutam por hipótese, então T_n e S_m comutam. Assim, temos

$$T_n(S_m(K)) \subseteq S_m(K)$$

e

$$T_n(S_m(K)) = S_m(T_n(K)) \subseteq T_n(K),$$

ou seja, $T_n(S_m(K)) \subseteq T_n(K) \cap S_m(K)$. Isto mostra que toda subcoleção finita de elementos de $\mathcal{T}$ possui interseção não vazia, onde $T_n(K)$ é fechado para todo $n \geq 1$ (pelo item (iii) da Proposição 3.1). Pelo Teorema 3.3, obtemos

$$\bigcap_{T \in \mathcal{F}, n \geq 1} T_n(K) \neq \emptyset.$$

Logo existe $p \in \bigcap_{T \in \mathcal{F}, n \geq 1} T_n(K)$. Se $T \in \mathcal{F}$ e $T(p) \neq p$, existe uma vizinhança U da origem de X tal que $T(p) - p \notin U$. Se n é um inteiro positivo arbitrário, como $p \in T_n(K)$, existe $q \in K$ tal que

$$p = \frac{1}{n}(I + T + \cdots + T^{n-1})(q).$$

Então $T(p) - p = \frac{1}{n}(T^n - I)(q) \notin U$. Como $T^n(q) \in K$, então $\frac{1}{n}(K - K)$ não é um subconjunto de U

qualquer que seja n , onde $K - K = \{x - y : x, y \in K\}$. Logo $K - K$ não é limitado em X . Por outro lado, $K - K = F(K \times K)$, onde $F(x, y) = x - y$, e então $K - K$ é compacto. Mas isto contradiz o Lema 3.4. Portanto $T(p) = p$ para toda $T \in \mathcal{F}$. $\square$

O Teorema de Krylov-Bogolyubov

Neste capítulo, estudaremos a existência de medidas invariantes por uma transformação contínua $T : X \rightarrow X$ em um espaço métrico compacto X .

4.1 Recorrência e ergodicidade

O propósito desta seção é apresentar o Teorema de Recorrência de Poincaré, um resultado que é satisfeito por todas as transformações que preservam alguma medida de probabilidade e que enfatiza a importância de mostrar que tais medidas existem. No que segue, caracterizaremos a ergodicidade de uma transformação mensurável e isto nos será importante para estudar algumas propriedades do conjunto das medidas invariantes.

Teorema 4.1 (Teorema de Recorrência de Poincaré). *Seja $T : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável que preserva a medida de probabilidade $m : \mathcal{B}(X) \rightarrow [0, 1]$ e considere $E \in \mathcal{B}(X)$ com $m(E) > 0$. Então quase todos os pontos de E retornam para E infinitas vezes sob iterações positivas de T , isto é, existe $F \subset E$ com $m(F) = m(E)$ tal que para cada $x \in F$ existe uma sequência $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ de números naturais com $T^{n_i}(x) \in F$ para cada i .*

Demonstração. Para $N \geq 0$ seja $E_N = \bigcup_{n=N}^{\infty} T^{-n}(E)$. Então $\bigcap_{N=0}^{\infty} E_N$ é o conjunto de todos os pontos de X que entram no conjunto E infinitas vezes sob iterações positivas de T . Logo o conjunto $F = E \cap \bigcap_{N=0}^{\infty} E_N$ consiste de todos os pontos de E que entram em E infinitas vezes sob iterações positivas de T . Se $x \in F$, então existe uma sequência $0 < n_1 < n_2 < \dots$ de números naturais com $T^{n_i}(x) \in E$ para cada i . Além disso, para cada i temos $T^{n_i}(x) \in F$, pois $T^{n_j - n_i}(T^{n_i}(x)) \in E$ para todo j . Falta mostrar que vale $m(F) = m(E)$. Como $T^{-1}(E_N) = E_{N+1}$ e T preserva a medida m , temos

$m(E_N) = m(T^{-1}(E_N)) = m(E_{N+1})$ e, portanto, $m(E_0) = m(E_N)$ para todo N . Uma vez que $E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \dots$, temos $m\left(\bigcap_{N=0}^{\infty} E_N\right) = m(E_0)$. Como $E \subset E_0$, obtemos $m(F) = m(E \cap E_0) = m(E)$. $\square$

Definição 4.2. *Seja $(X, \mathcal{B}(X), m)$ um espaço de probabilidade. Dizemos que uma transformação mensurável $T : X \rightarrow X$ que preserva a medida de probabilidade $m : \mathcal{B}(X) \rightarrow [0, 1]$ é ergódica se os únicos elementos $B \in \mathcal{B}(X)$ com $T^{-1}(B) = B$ satisfazem $m(B) = 0$ ou $m(B) = 1$.*

Existem várias outras maneiras de caracterizar a ergodicidade de uma transformação mensurável e vamos apresentar algumas delas no teorema a seguir.

Teorema 4.3. *Se $T : X \rightarrow X$ é uma transformação mensurável que preserva a medida de probabilidade $m : \mathcal{B}(X) \rightarrow [0, 1]$, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) T é ergódica;
- (ii) os únicos elementos $A \in \mathcal{B}(X)$ com $m(T^{-1}(A) \Delta A) = 0$ são aqueles com $m(A) = 0$ ou $m(A) = 1$;
- (iii) para todo $A \in \mathcal{B}(X)$ com $m(A) > 0$, temos $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A)\right) = 1$;
- (iv) para todo $A, B \in \mathcal{B}(X)$ com $m(A) > 0$ e $m(B) > 0$, existe $n > 0$ com $m(T^{-n}(A) \cap B) > 0$.

Demonstração. (i) $\implies$ (ii) : Seja $A \in \mathcal{B}(X)$ com $m(T^{-1}(A) \Delta A) = 0$. Devemos construir um conjunto B com $T^{-1}(B) = B$ e $m(A \Delta B) = 0$. Para cada $n \geq 0$ temos $m(T^{-n}(A) \Delta A) = 0$, pois

$$T^{-n}(A) \Delta A \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} T^{-(i+1)}(A) \Delta T^{-i}(A) = \bigcup_{i=0}^{n-1} T^{-i}(T^{-1}(A) \Delta A)$$

e, portanto, $m(T^{-n}(A) \Delta A) \leq nm(T^{-1}(A) \Delta A)$. Seja $B = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i}(A)$. Pelos fatos anteriores, temos $m\left(A \Delta \bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i}(A)\right) \leq \sum_{i=n}^{\infty} m(A \Delta T^{-i}(A)) = 0$ para cada $n \geq 0$. Como os conjuntos $\bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i}(A)$ decrescem com n , temos $m(B \Delta A) = 0$ e, portanto, $m(B) = m(A)$. Além disso,

$$T^{-1}(B) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-(i+1)}(A) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=n+1}^{\infty} T^{-i}(A) = B.$$

Portanto, obtemos um conjunto B com $T^{-1}(B) = B$ e $m(B \Delta A) = 0$. Por ergodicidade, devemos ter $m(B) = 0$ ou $m(B) = 1$. Portanto $m(A) = 0$ ou $m(A) = 1$.

(ii) $\implies$ (iii) : Sejam $A \in \mathcal{B}(X)$ com $m(A) > 0$ e $A_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A)$. Então A_0 é mensurável, $T^{-1}(A_0) \subset A_0$ e $m(T^{-1}(A_0)) = m(A_0)$. Daí

$$m(T^{-1}(A_0) \triangle A_0) = m(T^{-1}(A_0) \setminus A_0) + m(A_0 \setminus T^{-1}(A_0)) = m(\emptyset) + m(A_0) - m(T^{-1}(A_0)) = 0.$$

Por (ii) segue que $m(A_0) = 0$ ou $m(A_0) = 1$. Por outro lado, não podemos ter $m(A_0) = 0$, pois $T^{-1}(A) \subset A_0$ e $m(T^{-1}(A)) = m(A) > 0$. Portanto $m(A_0) = 1$, ou seja, $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A)\right) = 1$.

(iii) $\implies$ (iv) : Sejam $A, B \in \mathcal{B}(X)$ com $m(A) > 0$ e $m(B) > 0$. Pelo item (iii) temos $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A)\right) = 1$. Seja $W = \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A)$. Como

$$m(X \setminus W) = m(X) - m(W) = 0$$

e $B \setminus W \subseteq X \setminus W$, segue que $m(B \setminus W) = 0$. Daí

$$m(B) = m(B \cap W) + m(B \setminus W) = m(B \cap W).$$

Então

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B \cap T^{-n}(A))\right) = m\left(B \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A)\right) = m(B \cap W) = m(B) > 0.$$

Se $m(B \cap T^{-n}(A)) = 0$ para todo $n \geq 1$, então

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B \cap T^{-n}(A))\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(B \cap T^{-n}(A)) = 0$$

e isto implica $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B \cap T^{-n}(A))\right) = 0$, o que é uma contradição. Portanto

$$m(B \cap T^{-n}(A)) > 0$$

para algum $n \geq 1$.

(iv) $\implies$ (i) : Seja $A \in \mathcal{B}(X)$ com $T^{-1}(A) = A$ e suponha $0 < m(A) < 1$. Então

$$m(X \setminus A) = m(X) - m(A) = 1 - m(A) > 0,$$

$T^{-n}(A) = A$ para todo $n \geq 1$ e

$$m(T^{-n}(A) \cap (X \setminus A)) = m(A \cap (X \setminus A)) = m(\emptyset) = 0$$

para todo $n \geq 1$, o que contradiz (iv). Portanto $m(A) = 0$ ou $m(A) = 1$. Logo T é ergódica. $\square$

4.2 Medidas em espaços métricos

Nesta seção, nosso interesse é estudar as propriedades das medidas de probabilidade em espaços métricos, a começar pela regularidade e algumas consequências. Para isso, vamos considerar um espaço métrico X munido da métrica d e da σ -álgebra $\mathcal{B}(X)$ dos subconjuntos de Borel de X . Denotaremos por $M(X)$ a coleção das medidas de probabilidade de Borel em X , ou seja, $M(X)$ é a coleção das medidas de probabilidade definidas no espaço mensurável $(X, \mathcal{B}(X))$.

Teorema 4.4. *Uma medida de probabilidade de Borel m em um espaço métrico X é regular, isto é, para todo $B \in \mathcal{B}(X)$ e para todo $\epsilon > 0$, existem um aberto U_ϵ e um fechado C_ϵ com $C_\epsilon \subseteq B \subseteq U_\epsilon$ e $m(U_\epsilon \setminus C_\epsilon) < \epsilon$.*

Demonstração. Vamos denotar por $\mathcal{R}$ a coleção de todos os conjuntos tais que a condição de regularidade é satisfeita e mostremos que $\mathcal{R}$ é uma σ -álgebra. De fato, claramente temos $X \in \mathcal{R}$, pois dado $\epsilon > 0$ basta tomar $U_\epsilon = C_\epsilon = X$. Dado $A \in \mathcal{R}$, mostremos que $A^c \in \mathcal{R}$. Para todo $\epsilon > 0$ existem um aberto U_ϵ e um fechado C_ϵ tais que $C_\epsilon \subseteq A \subseteq U_\epsilon$ e $m(U_\epsilon \setminus C_\epsilon) < \epsilon$. Daí $U_\epsilon^c \subseteq A^c \subseteq C_\epsilon^c$, onde U_ϵ^c é fechado e C_ϵ^c é aberto. Além disso,

$$m(C_\epsilon^c \setminus U_\epsilon^c) = m(U_\epsilon \setminus C_\epsilon) < \epsilon.$$

Portanto $A^c \in \mathcal{R}$. Agora, mostremos que $\mathcal{R}$ é fechado com respeito à união enumerável. Sejam $(A_j)_{j \geq 1} \subset \mathcal{R}$, $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ e $\epsilon > 0$. Como $A_j \in \mathcal{R}$ para cada $j \geq 1$, existem um aberto $U_{\epsilon,j}$ e um fechado $C_{\epsilon,j}$ tais que $C_{\epsilon,j} \subseteq A_j \subseteq U_{\epsilon,j}$ e

$$m(U_{\epsilon,j} \setminus C_{\epsilon,j}) < \frac{\epsilon}{3j},$$

para cada $j \geq 1$. Sejam $U_\epsilon = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_{\epsilon,j}$ e $\tilde{C}_\epsilon = \bigcup_{j=1}^{\infty} C_{\epsilon,j}$. Como m é uma medida de probabilidade, temos

$$\lim_{r \rightarrow \infty} m \left(\bigcup_{j=1}^r C_{\epsilon,j} \right) = m \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} C_{\epsilon,j} \right) = m(\tilde{C}_\epsilon).$$

Logo existe um inteiro positivo k tal que

$$m\left(\tilde{C}_\epsilon \setminus \bigcup_{j=1}^k C_{\epsilon,j}\right) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Defina $C_\epsilon = \bigcup_{j=1}^k C_{\epsilon,j}$ e note que C_ϵ é fechado. Assim, temos $C_\epsilon \subseteq \tilde{C}_\epsilon \subseteq A \subseteq U_\epsilon$. Além disso,

$$\begin{aligned} m(U_\epsilon \setminus C_\epsilon) &\leq m(U_\epsilon \setminus \tilde{C}_\epsilon) + m(\tilde{C}_\epsilon \setminus C_\epsilon) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(U_{\epsilon,j} \setminus C_{\epsilon,j}) + m(\tilde{C}_\epsilon \setminus C_\epsilon) \\ &< \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{3^j} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

ou seja, $m(U_\epsilon \setminus C_\epsilon) < \epsilon$. Portanto $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{R}$. Isto prova que $\mathcal{R}$ é uma σ -álgebra.

Para completar a demonstração, vamos mostrar que $\mathcal{R}$ contém todos os subconjuntos fechados de X . Sejam C fechado e $\epsilon > 0$. Para cada $n \geq 1$ defina

$$U_n = \{x \in X : d(C, x) < 1/n\}.$$

Então temos $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \cdots \supseteq U_n \supseteq \cdots$. Pelo item (ii) do Lema 1.4, a função

$$\rho_C(x) = d(C, x) = \inf_{y \in C} d(y, x)$$

é uniformemente contínua em X . Portanto U_n é aberto para todo $n \geq 1$. Além disso, temos $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n =$

C . De fato, seja $w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Então $d(C, w) < \frac{1}{n}$ para todo $n \geq 1$. Como $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$,

existe um inteiro positivo n_0 tal que $\frac{1}{n_0} < \epsilon$. Assim, $d(C, w) < \frac{1}{n_0} < \epsilon$, ou seja, $d(C, w) < \epsilon$. Como

$\epsilon > 0$ é arbitrário, segue que $d(C, w) = 0$ e então, pelo item (i) do Lema 1.4, temos $w \in \overline{C} = C$. Logo

$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \subseteq C$. Reciprocamente, se $w \in C = \overline{C}$, então $d(C, w) = 0 < \frac{1}{n}$ para todo $n \geq 1$. Portanto

$w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ e $C \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Escolha k tal que $m(U_k \setminus C) < \epsilon$ e sejam $C_\epsilon = C$ e $U_\epsilon = U_k$. Então $C_\epsilon \subseteq C \subseteq U_\epsilon$, onde C_ϵ é fechado e U_ϵ é aberto. Isto mostra que $C \in \mathcal{R}$. Portanto $\mathcal{R}$ contém todos os subconjuntos fechados de X . $\square$

Lema 4.5. *Para uma medida de probabilidade de Borel m em um espaço métrico X , temos*

$$m(B) = \sup\{m(C) : C \text{ é fechado e } C \subseteq B\}$$

e

$$m(B) = \inf\{m(U) : U \text{ é aberto e } U \supseteq B\}$$

para todo $B \in \mathcal{B}(X)$.

Demonstração. Seja $B \in \mathcal{B}(X)$ e defina os conjuntos $Z = \{m(C) : C \text{ é fechado e } C \subseteq B\}$ e $W = \{m(U) : U \text{ é aberto e } U \supseteq B\}$. Pelo Teorema 4.4, para todo $\epsilon > 0$ existem um aberto U_ϵ e um fechado C_ϵ com $C_\epsilon \subseteq B \subseteq U_\epsilon$ e $m(U_\epsilon \setminus C_\epsilon) < \epsilon$. Assim, $Z \neq \emptyset$ e $W \neq \emptyset$. Além disso, Z é limitado superiormente e W é limitado inferiormente. Logo existem o supremo de Z e o ínfimo de W . Como $B \setminus C_\epsilon \subseteq U_\epsilon \setminus C_\epsilon$, temos $m(B \setminus C_\epsilon) \leq m(U_\epsilon \setminus C_\epsilon) < \epsilon$, o que implica $m(B) - m(C_\epsilon) < \epsilon$. Assim, dado $\epsilon > 0$ existe um fechado C_ϵ com $C_\epsilon \subseteq B$ e

$$m(B) - \epsilon < m(C_\epsilon) \leq m(B).$$

Portanto $m(B) = \sup Z$. Por outro lado, como $U_\epsilon \setminus B \subseteq U_\epsilon \setminus C_\epsilon$, temos $m(U_\epsilon \setminus B) \leq m(U_\epsilon \setminus C_\epsilon) < \epsilon$, o que implica $m(U_\epsilon) - m(B) < \epsilon$. Assim, dado $\epsilon > 0$ existe um aberto U_ϵ com $U_\epsilon \supseteq B$ e

$$m(B) \leq m(U_\epsilon) < m(B) + \epsilon.$$

Portanto $m(B) = \inf W$. □

Corolário 4.6. *Para uma medida de probabilidade de Borel m em um espaço métrico X , temos*

$$m(U) = \sup\{m(K) : K \text{ é compacto e } K \subseteq U\}$$

para todo subconjunto aberto U de X .

O próximo resultado nos diz que cada elemento $m \in M(X)$ é determinado pela forma como ele integra funções contínuas.

Teorema 4.7. *Sejam m e μ duas medidas de probabilidade de Borel em um espaço métrico X . Se $\int f dm = \int f d\mu$ para toda $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, então $m = \mu$.*

Demonstração. Pelo Lema 4.5, é suficiente mostrar que vale $m(C) = \mu(C)$ para todo fechado $C \subseteq X$. Sejam C fechado e $\epsilon > 0$. Pela regularidade da medida m (Teorema 4.4), existe um aberto U com

$C \subseteq U$ e $m(U \setminus C) < \epsilon$. Defina $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin U \\ \frac{d(x, X \setminus U)}{d(x, X \setminus U) + d(x, C)} & \text{se } x \in U. \end{cases}$$

Se $x \in U$, então $x \notin X \setminus U = \overline{X \setminus U}$ e, pelo item (i) do Lema 1.4, segue que $d(x, X \setminus U) \neq 0$. Logo f está bem definida. Além disso, f é contínua, $f = 0$ em $X \setminus U$, $f = 1$ em C e $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in X$. Assim,

$$\begin{aligned} \mu(C) &= \int \chi_C d\mu \leq \int f d\mu = \int f dm = \int_U f dm + \int_{X \setminus U} f dm = \int_U f dm \\ &\leq \int_U 1 dm \\ &= m(U) \\ &= m(U \setminus C) + m(C) \\ &< \epsilon + m(C), \end{aligned}$$

ou seja, $\mu(C) < \epsilon + m(C)$. Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, obtemos $\mu(C) \leq m(C)$. Analogamente, temos $m(C) \leq \mu(C)$. Portanto $m(C) = \mu(C)$ para todo fechado $C \subseteq X$ e o resultado segue. $\square$

O próximo teorema a ser demonstrado garante a metrizabilidade de $M(X)$ quando X é um espaço métrico compacto. Para mostrar este resultado, vamos definir uma topologia em $M(X)$. Lembremos dos fatos de que o conjunto $C(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é contínua}\}$ é um espaço de Banach quando munido da norma $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$, $f \in C(X)$, e que este espaço é separável. Assim, $C(X)$ admite um subconjunto enumerável $(f_k)_{k \geq 1}$ de funções contínuas com a propriedade de que $(f_k)_{k \geq 1}$ é denso em $C(X)$.

Definição 4.8. A topologia fraca* em $M(X)$ é definida como sendo a menor topologia que torna a aplicação $\mu \mapsto \int f d\mu$ contínua para cada $f \in C(X)$. Uma base é dada pela coleção dos conjuntos da forma

$$V_\mu(f_1, \dots, f_k; \epsilon) = \left\{ m \in M(X) : \left| \int f_i dm - \int f_i d\mu \right| < \epsilon, 1 \leq i \leq k \right\} \quad (4.1)$$

onde $\mu \in M(X)$, $k \geq 1$, $f_i \in C(X)$ para todo $1 \leq i \leq k$ e $\epsilon > 0$.

Proposição 4.9. A coleção $\{V_\mu(f_1, \dots, f_k; \epsilon)\}$ é uma base para uma topologia sobre $M(X)$.

Demonstração. Basta observar os dois fatos seguintes:

$$(i) \quad M(X) \subseteq \bigcup_{\mu, f_1, \dots, f_k, \epsilon} \{V_\mu(f_1, \dots, f_k; \epsilon)\};$$

(ii) se $\nu \in V_\mu(\phi_1, \dots, \phi_{n_1}; \epsilon_1) \cap V_m(\varphi_1, \dots, \varphi_{n_2}; \epsilon_2)$, então

$$V_\nu(\phi_1, \dots, \phi_{n_1}, \varphi_1, \dots, \varphi_{n_2}; \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}) \subseteq V_\mu(\phi_1, \dots, \phi_{n_1}; \epsilon_1) \cap V_m(\varphi_1, \dots, \varphi_{n_2}; \epsilon_2).$$

□

Notemos que a topologia definida em $M(X)$ por 4.1 não depende da métrica colocada em X .

Teorema 4.10. *Sejam X um espaço métrico compacto e $(f_k)_{k \geq 1}$ um subconjunto denso de $C(X)$.*

Para medidas $m, \mu \in M(X)$, defina a função $d_{M(X)} : M(X) \times M(X) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$d_{M(X)}(m, \mu) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\int f_k dm - \int f_k d\mu|}{2^k \|f_k\|}.$$

Então o espaço $M(X)$ é metrizável na topologia fraca e $d_{M(X)}$ é uma métrica em $M(X)$. Além disso, tal métrica gera a topologia fraca*.*

Demonstração. Primeiramente, mostremos que a função $d_{M(X)}$ é uma métrica em $M(X)$. De fato, claramente $d_{M(X)}(m, \mu) > 0$ se $m \neq \mu$ e $d_{M(X)}(m, \mu) = d_{M(X)}(\mu, m)$ para quaisquer m, μ em $M(X)$. Se $m = \mu$, então $|\int f_k dm - \int f_k d\mu| = 0$ para todo $k \geq 1$, o que implica $d_{M(X)}(m, \mu) = 0$. Reciprocamente, se $d_{M(X)}(m, \mu) = 0$, então $\int f_k dm = \int f_k d\mu$ para todo $k \geq 1$, onde $(f_k)_{k \geq 1} \subset C(X)$. Pelo Teorema 4.7, obtemos $m = \mu$. Assim, $d_{M(X)}(m, \mu) = 0$ se, e somente se, $m = \mu$. Para verificar a desigualdade triangular, observemos que para quaisquer $\mu_1, \mu_2, m \in M(X)$, temos

$$\begin{aligned} d_{M(X)}(\mu_1, \mu_2) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\int f_k d\mu_1 - \int f_k d\mu_2|}{2^k \|f_k\|} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\int f_k d\mu_1 - \int f_k dm| + |\int f_k dm - \int f_k d\mu_2|}{2^k \|f_k\|} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\int f_k d\mu_1 - \int f_k dm|}{2^k \|f_k\|} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\int f_k dm - \int f_k d\mu_2|}{2^k \|f_k\|} \\ &= d_{M(X)}(\mu_1, m) + d_{M(X)}(m, \mu_2), \end{aligned}$$

ou seja, $d_{M(X)}(\mu_1, \mu_2) \leq d_{M(X)}(\mu_1, m) + d_{M(X)}(m, \mu_2)$. Portanto $d_{M(X)}$ é uma métrica em $M(X)$. Considere o espaço métrico $(M(X), d_{M(X)})$. Para cada $k \geq 1$ fixo, a aplicação $\mu \mapsto \int f_k d\mu$ é contínua

em $(M(X), d_{M(X)})$. De fato, de

$$\frac{|\int f_k dm - \int f_k d\mu|}{2^k \|f_k\|} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\int f_k dm - \int f_k d\mu|}{2^k \|f_k\|} = d_{M(X)}(m, \mu),$$

obtemos $\left| \int f_k dm - \int f_k d\mu \right| \leq 2^k \|f_k\| d_{M(X)}(m, \mu)$. Assim, dado $\epsilon > 0$, se $m, \mu \in M(X)$ e se $d_{M(X)}(m, \mu) < \delta$, onde $0 < \delta < \frac{\epsilon}{2^k \|f_k\|}$, temos

$$\left| \int f_k dm - \int f_k d\mu \right| \leq 2^k \|f_k\| d_{M(X)}(m, \mu) < 2^k \|f_k\| \delta < \epsilon.$$

Portanto a aplicação $\mu \mapsto \int f_k d\mu$ é uniformemente contínua para cada $k \geq 1$ e, em particular, é contínua para cada $k \geq 1$. Agora, afirmamos que a aplicação $\mu \mapsto \int f d\mu$ é contínua em $(M(X), d_{M(X)})$ para cada $f \in C(X)$. De fato, dada $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, como $(f_k)_{k \geq 1}$ é denso em $C(X)$, para todo $k \geq 1$ existe $n_k > k$ tal que

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$$

para todo $x \in X$. Assim, para toda medida $\nu \in M(X)$, temos

$$\left| \int f_{n_k} d\nu - \int f d\nu \right| \leq \int |f_{n_k} - f| d\nu \leq \frac{1}{k} \nu(X) = \frac{1}{k}. \quad (4.2)$$

Desse modo, para $m, \mu \in M(X)$ e pela desigualdade obtida em 4.2, temos

$$\begin{aligned} \left| \int f dm - \int f d\mu \right| &\leq \left| \int f dm - \int f_{n_k} dm \right| + \left| \int f_{n_k} dm - \int f_{n_k} d\mu \right| + \left| \int f_{n_k} d\mu - \int f d\mu \right| \\ &\leq \frac{1}{k} + \left| \int f_{n_k} dm - \int f_{n_k} d\mu \right| + \frac{1}{k} \\ &= \frac{2}{k} + \left| \int f_{n_k} dm - \int f_{n_k} d\mu \right|. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Fazendo $m \rightarrow \mu$ em 4.3, obtemos

$$\lim_{m \rightarrow \mu} \left| \int f dm - \int f d\mu \right| \leq \frac{2}{k},$$

uma vez que a aplicação $\mu \mapsto \int f_k d\mu$ é contínua para cada $k \geq 1$ e $\left| \int f_{n_k} dm - \int f_{n_k} d\mu \right| \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow \mu$. Como k é arbitrário, obtemos $\lim_{m \rightarrow \mu} \int f dm = \int f d\mu$ e, portanto, a aplicação $\mu \mapsto \int f d\mu$ é contínua em $(M(X), d_{M(X)})$ para cada $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua.

Falta mostrar a relação entre a métrica $d_{M(X)}$ e a topologia fraca* dada pela base de vizinhanças

da forma

$$V_\mu(f_1, \dots, f_n; \epsilon) = \left\{ m \in M(X) : \left| \int f_k dm - \int f_k d\mu \right| < \epsilon, 1 \leq k \leq n \right\},$$

onde $\mu \in M(X)$ e $\epsilon > 0$. Afirmamos que $V_\mu(f_1, \dots, f_n; \epsilon)$ é aberto em $(M(X), d_{M(X)})$. De fato, como

$$V_\mu(f_1, \dots, f_n; \epsilon) = \bigcap_{k=1}^n A_k$$

e $A_k = \left\{ m \in M(X) : \left| \int f_k dm - \int f_k d\mu \right| < \epsilon \right\}$ é aberto em $(M(X), d_{M(X)})$ para cada $1 \leq k \leq n$, segue que $V_\mu(f_1, \dots, f_n; \epsilon)$ é aberto em $(M(X), d_{M(X)})$. Para mostrar a recíproca, é suficiente provar que cada bola $\{m \in M(X) : d_{M(X)}(m, \mu) < \epsilon\}$ em $(M(X), d_{M(X)})$ contém um conjunto $V_\mu(g_1, \dots, g_n; \delta)$, onde $n \geq 1$, $g_k \in C(X)$ para todo $1 \leq k \leq n$ e $\delta > 0$. Se $\mu \in M(X)$ e $\epsilon > 0$ são dados, escolha N tal que

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{2}{2^k} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Seja

$$\delta = \frac{\epsilon}{2} \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{2^k \|f_k\|} \right)^{-1}.$$

Então temos $V_\mu(f_1, \dots, f_N; \delta) \subset \{m \in M(X) : d_{M(X)}(m, \mu) < \epsilon\}$. □

O resultado a seguir nos fornece propriedades equivalentes sobre a convergência de uma sequência de medidas em $M(X)$.

Proposição 4.11. *Sejam X um espaço métrico compacto e $(f_j)_{j \geq 1}$ um subconjunto denso de $C(X)$.*

As seguintes propriedades para uma sequência $(\mu_k)_{k \geq 1} \subset M(X)$ são equivalentes:

- (i) $\lim_{k \rightarrow \infty} d_{M(X)}(\mu_k, \mu) = 0$;
- (ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_j d\mu_k = \int f_j d\mu$ para todo $j \geq 1$;
- (iii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \int f d\mu_k = \int f d\mu$ para toda $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua.

Demonstração. Para mostrar que (i) implica (ii), basta observar que para todo $j \geq 1$ temos a desigualdade

$$\left| \int f_j d\mu_k - \int f_j d\mu \right| \leq 2^j \|f_j\| d_{M(X)}(\mu_k, \mu).$$

Fazendo $k \rightarrow \infty$, como $\lim_{k \rightarrow \infty} d_{M(X)}(\mu_k, \mu) = 0$, obtemos $\left| \int f_j d\mu_k - \int f_j d\mu \right| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, ou seja, $\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_j d\mu_k = \int f_j d\mu$ para todo $j \geq 1$. Agora, mostremos que (ii) implica (iii). Seja $\epsilon > 0$ dado. Por (ii) existe um inteiro positivo n_0 tal que $k \geq n_0$ implica

$$\left| \int f_j d\mu_k - \int f_j d\mu \right| < \frac{\epsilon}{3} \quad (4.4)$$

para todo $j \geq 1$. Dada $f \in C(X)$, seja f_j tal que $\|f_j - f\| < \frac{\epsilon}{3}$. Para uma medida qualquer $\nu \in M(X)$, temos

$$\left| \int f_j d\nu - \int f d\nu \right| \leq \int |f_j - f| d\nu \leq \int \|f_j - f\| d\nu < \frac{\epsilon}{3} \nu(X) = \frac{\epsilon}{3}. \quad (4.5)$$

Assim, pelas desigualdades 4.4 e 4.5, para todo $k \geq n_0$ temos

$$\begin{aligned} \left| \int f d\mu_k - \int f d\mu \right| &\leq \left| \int f d\mu_k - \int f_j d\mu_k \right| + \left| \int f_j d\mu_k - \int f_j d\mu \right| + \left| \int f_j d\mu - \int f d\mu \right| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto $\lim_{k \rightarrow \infty} \int f d\mu_k = \int f d\mu$ para toda $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, como queríamos.

Para finalizar a demonstração, mostremos que (iii) implica (i). Seja $\epsilon > 0$ dado. Como a série $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}$ é convergente, temos que existe um inteiro positivo j_0 tal que

$$\sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \frac{\epsilon}{4}. \quad (4.6)$$

Devemos mostrar que existe um inteiro positivo n_0 tal que $k \geq n_0$ implica $d_{M(X)}(\mu_k, \mu) < \epsilon$, onde $d_{M(X)}(\mu_k, \mu)$ é dado por

$$\begin{aligned} d_{M(X)}(\mu_k, \mu) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left| \int f_j d\mu_k - \int f_j d\mu \right|}{2^j \|f_j\|} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left| \int \frac{f_j}{\|f_j\|} d\mu_k - \int \frac{f_j}{\|f_j\|} d\mu \right| \\ &= \sum_{j=1}^{j_0} \frac{1}{2^j} \left| \int \frac{f_j}{\|f_j\|} d\mu_k - \int \frac{f_j}{\|f_j\|} d\mu \right| + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left| \int \frac{f_j}{\|f_j\|} d\mu_k - \int \frac{f_j}{\|f_j\|} d\mu \right|. \quad (4.7) \end{aligned}$$

Notemos que para todo $j \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} \left| \int \frac{f_j}{\|f_j\|} d\mu_k - \int \frac{f_j}{\|f_j\|} d\mu \right| &\leq \left| \int \frac{f_j}{\|f_j\|} d\mu_k \right| + \left| \int \frac{f_j}{\|f_j\|} d\mu \right| \\ &\leq \int \frac{|f_j|}{\|f_j\|} d\mu_k + \int \frac{|f_j|}{\|f_j\|} d\mu \\ &\leq \int 1 d\mu_k + \int 1 d\mu = \mu_k(X) + \mu(X) = 2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Assim, por 4.6 e pela desigualdade obtida em 4.8, vem

$$\sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left| \int \frac{f_j}{\|f_j\|} d\mu_k - \int \frac{f_j}{\|f_j\|} d\mu \right| \leq \sum_{j=j_0+1}^{\infty} 2 \frac{1}{2^j} < 2 \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2}. \quad (4.9)$$

Por (iii) temos $\lim_{k \rightarrow \infty} \int \frac{f_j}{\|f_j\|} d\mu_k = \int \frac{f_j}{\|f_j\|} d\mu$ para cada $1 \leq j \leq j_0$. Logo para cada $1 \leq j \leq j_0$ existe um inteiro positivo N_j tal que $k \geq N_j$ implica $\left| \int \frac{f_j}{\|f_j\|} d\mu_k - \int \frac{f_j}{\|f_j\|} d\mu \right| < \frac{\epsilon}{2}$. Tomando $n_0 = \max\{N_1, \dots, N_{j_0}\}$, segue que $k \geq n_0$ implica

$$\left| \int \frac{f_j}{\|f_j\|} d\mu_k - \int \frac{f_j}{\|f_j\|} d\mu \right| < \frac{\epsilon}{2} \quad (4.10)$$

para todo $1 \leq j \leq j_0$. Se $k \geq n_0$, por 4.7 e pelas desigualdades 4.9 e 4.10, obtemos

$$d_{M(X)}(\mu_k, \mu) < \frac{\epsilon}{2} \cdot \sum_{j=1}^{j_0} \frac{1}{2^j} + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto $\lim_{k \rightarrow \infty} d_{M(X)}(\mu_k, \mu) = 0$, como queríamos. $\square$

Finalizamos esta seção com o teorema que garante a compacidade do espaço $M(X)$ quando X é um espaço métrico compacto. Em sua demonstração faremos uso do Teorema da Representação de Riesz.

Teorema 4.12. *Se X é um espaço métrico compacto, então $M(X)$ é compacto na topologia fraca*.*

Demonstração. Por questão de simplicidade, vamos escrever $\mu(f)$ para denotar $\int f d\mu$. Seja $(f_i)_{i \geq 1} \subset C(X)$ um subconjunto enumerável denso. Seja $(\mu_k)_{k \geq 1}$ uma sequência em $M(X)$ e provemos que ela admite uma subsequência convergente. Consideremos a sequência numérica $(\mu_k(f_1))_{k \geq 1}$. Note que $|\mu_k(f_1)| \leq \|f_1\|$ para todo $k \geq 1$, ou seja, esta sequência é limitada por $\|f_1\|$. Logo ela tem uma subsequência convergente, a qual denotaremos por $(\mu_k^{(1)}(f_1))_{k \geq 1}$. Consideremos a sequência numérica $(\mu_k^{(1)}(f_2))_{k \geq 1}$. Ela é limitada e, portanto, possui uma subsequência convergente $(\mu_k^{(2)}(f_2))_{k \geq 1}$. Note que $(\mu_k^{(2)}(f_1))_{k \geq 1}$ também converge. Procedendo desta maneira, para cada $i \geq 1$ obtemos uma

subsequência $(\mu_k^{(i)})_{k \geq 1}$ de $(\mu_k)_{k \geq 1}$ tal que

$$(\mu_k^{(i)})_{k \geq 1} \subseteq (\mu_k^{(i-1)})_{k \geq 1} \subseteq \cdots \subseteq (\mu_k^{(1)})_{k \geq 1} \subseteq (\mu_k)_{k \geq 1}$$

e $(\mu_k^{(i)}(f_j))_{k \geq 1}$ converge para cada $1 \leq j \leq i$. Considere a diagonal $(\mu_k^{(k)})_{k \geq 1}$. A sequência $(\mu_k^{(k)}(f_i))_{k \geq 1}$ converge para todo $i \geq 1$. Mostremos que $(\mu_k^{(k)}(f))_{k \geq 1}$ converge para toda $f \in C(X)$. Dado $\epsilon > 0$, podemos escolher f_i tal que $\|f - f_i\| < \frac{\epsilon}{3}$. Como $(\mu_k^{(k)}(f_i))_{k \geq 1}$ converge, existe um inteiro positivo N tal que se $n, m \geq N$ então

$$|\mu_n^{(n)}(f_i) - \mu_m^{(m)}(f_i)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Daí se $n, m \geq N$ temos

$$\begin{aligned} |\mu_n^{(n)}(f) - \mu_m^{(m)}(f)| &\leq |\mu_n^{(n)}(f) - \mu_n^{(n)}(f_i)| + |\mu_n^{(n)}(f_i) - \mu_m^{(m)}(f_i)| + |\mu_m^{(m)}(f_i) - \mu_m^{(m)}(f)| \\ &= \left| \int f d\mu_n^{(n)} - \int f_i d\mu_n^{(n)} \right| + |\mu_n^{(n)}(f_i) - \mu_m^{(m)}(f_i)| + \left| \int f_i d\mu_m^{(m)} - \int f d\mu_m^{(m)} \right| \\ &\leq \|f - f_i\| + |\mu_n^{(n)}(f_i) - \mu_m^{(m)}(f_i)| + \|f_i - f\| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

e, portanto, a sequência $(\mu_k^{(k)}(f))_{k \geq 1}$ converge para toda $f \in C(X)$. Assim, para cada $f \in C(X)$ define $L(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k^{(k)}(f)$. Então L é linear e limitado, pois

$$\begin{aligned} L(c_1 f_1 + c_2 f_2) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int (c_1 f_1 + c_2 f_2) d\mu_k^{(k)} = c_1 \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_1 d\mu_k^{(k)} + c_2 \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_2 d\mu_k^{(k)} \\ &= c_1 L(f_1) + c_2 L(f_2) \end{aligned}$$

para quaisquer $f_1, f_2 \in C(X)$ e quaisquer constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e

$$|L(f)| = \left| \lim_{k \rightarrow \infty} \int f d\mu_k^{(k)} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \int f d\mu_k^{(k)} \right| \leq \|f\|$$

para toda $f \in C(X)$. Além disso,

$$L(1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int 1 d\mu_k^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k^{(k)}(X) = 1$$

e $f \geq 0$ implica $L(f) \geq 0$. Pelo Teorema 2.11 (Teorema da Representação de Riesz), existe uma medida $\mu \in M(X)$ tal que $L(f) = \int f d\mu$ para toda $f \in C(X)$. Portanto

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f d\mu_k^{(k)} = \int f d\mu$$

para toda $f \in C(X)$. Pela Proposição 4.11, segue que $\lim_{k \rightarrow \infty} d_{M(X)}(\mu_k^{(k)}, \mu) = 0$, ou seja, a sequência $(\mu_k^{(k)})_{k \geq 1}$ converge para μ em $M(X)$. Isto mostra que $M(X)$ é compacto na topologia fraca*. $\square$

4.3 Existência de medidas invariantes

Seja $T : X \rightarrow X$ uma transformação contínua num espaço métrico compacto X . Nesta seção mostraremos que sempre existe uma medida $\mu \in M(X)$ invariante por T . Primeiramente, notemos que $T^{-1}(\mathcal{B}(X)) \subset \mathcal{B}(X)$, uma vez que o conjunto $\{E \in \mathcal{B}(X) : T^{-1}(E) \in \mathcal{B}(X)\}$ é uma σ -álgebra e contém os conjuntos abertos. Isto mostra que T é mensurável. Assim, para cada $\mu \in M(X)$, vamos definir uma aplicação $T_* : M(X) \rightarrow M(X)$ dada por

$$(T_*\mu)(B) = \mu(T^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}(X).$$

Por questão de simplicidade, podemos escrever $\mu \circ T^{-1}$ ao invés de $T_*\mu$. Para cada $\mu \in M(X)$, note que $T_*\mu = \mu \circ T^{-1}$ é uma medida e a chamamos de medida imagem da medida μ pela transformação T . Observe que a aditividade enumerável de $\mu \circ T^{-1}$ segue da aditividade enumerável de μ . No lema a seguir mostramos que vale um resultado análogo à mudança de variáveis quando integramos em relação à medida que acabamos de definir.

Lema 4.13. *Para toda $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, temos $\int f d(\mu \circ T^{-1}) = \int f \circ T d\mu$.*

Demonstração. Se f é a função característica de um conjunto $A \in \mathcal{B}(X)$, temos

$$\int \chi_A d(\mu \circ T^{-1}) = \mu(T^{-1}(A)) = \int \chi_{T^{-1}(A)} d\mu = \int \chi_A \circ T d\mu.$$

Assim, $\int h d(\mu \circ T^{-1}) = \int h \circ T d\mu$ se h é uma função simples. A mesma fórmula vale se h for uma função mensurável não negativa, pois pelo Teorema 1.1 podemos tomar uma sequência crescente $(\phi_n)_{n \geq 1}$ de funções simples que converge pontualmente para h . Portanto o caso geral segue decompondo uma função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ como diferença de funções não negativas. $\square$

Teorema 4.14. *A aplicação $T_* : M(X) \rightarrow M(X)$ é contínua e afim.*

Demonstração. Se $f \in C(X)$, pelo Lema 4.13 temos

$$\int f d(\mu \circ T^{-1}) = \int f \circ T d\mu.$$

Seja $(\mu_n)_{n \geq 1}$ uma sequência convergindo para μ em $M(X)$. Pela Proposição 4.11, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f d(\mu_n \circ T^{-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f \circ T d\mu_n = \int f \circ T d\mu = \int f d(\mu \circ T^{-1}).$$

Pela Proposição 4.11 novamente, segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n \circ T^{-1} = \mu \circ T^{-1}$, ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} T_* \mu_n = T_* \mu$. Portanto a aplicação T_* é contínua. Além disso, se $m, \mu \in M(X)$ e $p \in [0, 1]$ temos

$$\begin{aligned} T_*(pm + (1-p)\mu)(A) &= (pm + (1-p)\mu)(T^{-1}(A)) \\ &= pm(T^{-1}(A)) + (1-p)\mu(T^{-1}(A)) \\ &= pT_*(m(A)) + (1-p)T_*(\mu(A)) \\ &= (pT_*(m) + (1-p)T_*(\mu))(A) \end{aligned}$$

para todo $A \in \mathcal{B}(X)$. Isto mostra que a aplicação T_* é afim. $\square$

Como $T_* : M(X) \rightarrow M(X)$ é uma transformação contínua afim de um espaço compacto convexo, podemos usar o Teorema de Markov-Kakutani para mostrar que T_* tem um ponto fixo. Desse modo, mostraremos que existe uma medida em $M(X)$ que é invariante por T e então vamos obter o Teorema de Krylov-Bogolyubov.

Teorema 4.15 (Teorema de Krylov-Bogolyubov). *Se $T : X \rightarrow X$ é uma transformação contínua definida no espaço métrico compacto X , então existe uma medida de probabilidade de Borel $\mu \in M(X)$ que é invariante por T .*

Demonstração. A primeira parte da demonstração consiste em mostrar que $M(X)$ pode ser considerado um subconjunto compacto convexo do espaço

$$C(X)^* = \{h : C(X) \rightarrow \mathbb{R} : h \text{ é funcional linear contínuo}\}$$

munido da topologia induzida. Para ver isto, considere a aplicação $F : M(X) \rightarrow C(X)^*$ definida por

$$F(\mu)(\phi) = \int \phi d\mu.$$

As seguintes afirmações são verdadeiras:

(i) $F(\mu) \in C(X)^*$. De fato, $F(\mu)$ é linear. Além disso,

$$|F(\mu)(\phi)| = \left| \int \phi d\mu \right| \leq \|\phi\|$$

para toda $\phi \in C(X)$. Portanto $F(\mu) \in C(X)^*$.

(ii) F é afim. De fato, para quaisquer medidas $m, \mu \in M(X)$ e para todo $0 \leq p \leq 1$, temos $pm + (1-p)\mu \in M(X)$ e

$$\begin{aligned} F(pm + (1-p)\mu)(\phi) &= \int \phi d(pm + (1-p)\mu) \\ &= p \int \phi dm + (1-p) \int \phi d\mu \\ &= pF(m)(\phi) + (1-p)F(\mu)(\phi). \end{aligned}$$

A injetividade de F segue do Teorema 4.7. Assim, podemos identificar $M(X)$ com a sua imagem $F(M(X))$, que é um subconjunto convexo de $C(X)^*$. Ele também é compacto, pois a topologia colocada em $M(X)$ é herdada de $C(X)^*$. Assim, pelo Teorema 3.5 (Teorema de Markov-Kakutani), a aplicação $T_* : M(X) \rightarrow M(X)$ tem um ponto fixo, isto é, existe $\mu \in M(X)$ tal que $T_*\mu = \mu$. Logo existe $\mu \in M(X)$ com $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{B}(X)$ e, portanto, μ é invariante por T . $\square$

Uma outra forma de mostrar que uma transformação contínua admite uma medida de probabilidade de Borel invariante é dada pela demonstração a seguir.

Demonstração alternativa do Teorema de Krylov-Bogolyubov: Seja $\mu_0 \in M(X)$ e defina a sequência $(\mu_k)_{k \geq 1}$ por

$$\mu_k = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k T_*^j \mu_0,$$

onde $T_*^j \mu_0(A) = \mu_0(T^{-j}(A))$ para $A \in \mathcal{B}(X)$ e $j \geq 0$. Note que $(\mu_k)_{k \geq 1} \subset M(X)$, pois μ_k é uma medida e

$$\mu_k(X) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k T_*^j \mu_0(X) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \mu_0(T^{-j}(X)) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \mu_0(X) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k 1 = 1$$

para cada $k \geq 1$. Como $M(X)$ é compacto na topologia fraca*, temos que existe $\mu \in M(X)$ e uma subsequência $(\mu_{n_k})_{k \geq 1}$ com

$$\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{n_k}.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
 T_*\mu &= T_* \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k + 1} \sum_{j=0}^{n_k} T_*^j \mu_0 \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} T_* \left(\frac{1}{n_k + 1} \sum_{j=0}^{n_k} T_*^j \mu_0 \right) \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k + 1} \sum_{j=1}^{n_k+1} T_*^j \mu_0 \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k + 1} \left(\sum_{j=0}^{n_k} T_*^j \mu_0 - \mu_0 + T_*^{n_k+1} \mu_0 \right) \\
 &= \mu - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k + 1} \mu_0 + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k + 1} T_*^{n_k+1} \mu_0.
 \end{aligned}$$

Agora, afirmamos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k + 1} \mu_0 = 0$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k + 1} T_*^{n_k+1} \mu_0 = 0$. De fato, como μ_0 é limitada e $\frac{1}{n_k + 1} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, segue a primeira afirmação. Para a segunda afirmação, basta observar que

$$\frac{1}{n_k + 1} T_*^{n_k+1} \mu_0(E) = \frac{1}{n_k + 1} \mu_0(T^{-(n_k+1)}(E)) \leq \frac{1}{n_k + 1}$$

para todo conjunto mensurável $E \subset X$. Como $\frac{1}{n_k + 1} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, a segunda afirmação está provada. Logo obtemos $T_*\mu = \mu$, ou seja, $\mu \circ T^{-1} = \mu$. Portanto μ é invariante por T . $\square$

Observe que a demonstração alternativa do Teorema de Krylov-Bogolyubov nos fornece um modo bastante simples de obter medidas invariantes. Dados um espaço métrico compacto X e uma transformação contínua $T : X \rightarrow X$, seja $M(X, T) = \{\mu \in M(X) : T_*\mu = \mu\}$. Ou seja, o conjunto $M(X, T)$ consiste das medidas $\mu \in M(X)$ que são invariantes pela transformação T . O Teorema de Krylov-Bogolyubov garante que $M(X, T) \neq \emptyset$. Nos próximos resultados estabelecemos uma condição para que uma medida em $M(X)$ pertença à $M(X, T)$ e provamos algumas propriedades deste conjunto e sua relação com ergodicidade.

Teorema 4.16. *Se $T : X \rightarrow X$ é uma transformação contínua num espaço métrico compacto X e $\mu \in M(X)$, então $\mu \in M(X, T)$ se, e somente se, $\int f \circ T d\mu = \int f d\mu$ para toda $f \in C(X)$.*

Demonstração. Se $\mu \in M(X, T)$ então $\mu = T_*\mu = \mu \circ T^{-1}$ e, pelo Lema 4.13, temos

$$\int f \circ T d\mu = \int f d(\mu \circ T^{-1}) = \int f d\mu$$

para toda $f \in C(X)$. Reciprocamente, se $\int f \circ T d\mu = \int f d\mu$ para toda $f \in C(X)$, pelo Lema 4.13 temos $\int f d(\mu \circ T^{-1}) = \int f d\mu$ para toda $f \in C(X)$. Pelo Teorema 4.7, segue que $\mu \circ T^{-1} = \mu$, ou

seja, $\mu \in M(X, T)$. □

Teorema 4.17. *Se X é um espaço métrico compacto e $T : X \rightarrow X$ é uma transformação contínua, então valem as seguintes propriedades:*

- (i) $M(X, T)$ é um subconjunto compacto de $M(X)$;
- (ii) $M(X, T)$ é convexo;
- (iii) μ é um ponto extremo de $M(X, T)$ se, e somente se, μ é uma medida ergódica com respeito à transformação T ;
- (iv) se $\mu, m \in M(X, T)$ são ambas ergódicas e $\mu \neq m$, então elas são mutuamente singulares.

Demonstração. (i) Seja $(\mu_n)_{n \geq 1}$ uma sequência em $M(X, T)$ convergindo para $\mu \in M(X)$. Pela Proposição 4.11 e pelo Lema 4.13, para toda $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua temos

$$\begin{aligned} \int f d(\mu \circ T^{-1}) &= \int f \circ T d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f \circ T d\mu_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f d(\mu_n \circ T^{-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\mu_n \\ &= \int f d\mu, \end{aligned}$$

ou seja, $\int f d(\mu \circ T^{-1}) = \int f d\mu$. Pelo Teorema 4.7, segue que $\mu \circ T^{-1} = \mu$ e, portanto, $\mu \in M(X, T)$. Pelo Lema 1.5, segue que $M(X, T)$ é fechado em $M(X)$. Como $M(X)$ é compacto na topologia fraca*, temos que $M(X, T)$ é um subconjunto compacto de $M(X)$.

(ii) Sejam $m, \mu \in M(X, T)$. Então $m(T^{-1}(A)) = m(A)$ e $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{B}(X)$. Assim, para todo $0 \leq p \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} (pm + (1-p)\mu)(T^{-1}(A)) &= pm(T^{-1}(A)) + (1-p)\mu(T^{-1}(A)) \\ &= pm(A) + (1-p)\mu(A) \\ &= (pm + (1-p)\mu)(A) \end{aligned}$$

para todo $A \in \mathcal{B}(X)$. Portanto $pm + (1-p)\mu \in M(X, T)$ e $M(X, T)$ é convexo.

(iii) Suponha $\mu \in M(X, T)$ e que μ não é ergódica. Então existe $E \in \mathcal{B}(X)$ com $T^{-1}(E) = E$ e $0 < \mu(E) < 1$. Para cada $B \in \mathcal{B}(X)$ defina as medidas μ_1 e μ_2 por

$$\mu_1(B) = \frac{\mu(B \cap E)}{\mu(E)} \quad \text{e} \quad \mu_2(B) = \frac{\mu(B \cap (X \setminus E))}{\mu(X \setminus E)},$$

respectivamente. Então

$$\mu_1(X) = \frac{\mu(X \cap E)}{\mu(E)} = \frac{\mu(E)}{\mu(E)} = 1$$

e

$$\begin{aligned} \mu_1(T^{-1}(B)) &= \frac{\mu(T^{-1}(B) \cap E)}{\mu(E)} = \frac{\mu(T^{-1}(B) \cap T^{-1}(E))}{\mu(E)} \\ &= \frac{\mu(T^{-1}(B \cap E))}{\mu(E)} \\ &= \frac{\mu(B \cap E)}{\mu(E)} = \mu_1(B) \end{aligned}$$

para todo $B \in \mathcal{B}(X)$, ou seja, $\mu_1 \in M(X, T)$. Analogamente, $\mu_2 \in M(X, T)$. Além disso, $\mu_1 \neq \mu_2$ e

$$\mu(B) = \mu(E)\mu_1(B) + (1 - \mu(E))\mu_2(B)$$

para todo $B \in \mathcal{B}(X)$. Portanto μ não é um ponto extremo de $M(X, T)$. Reciprocamente, suponha que $\mu \in M(X, T)$ é ergódica e $\mu = p\mu_1 + (1 - p)\mu_2$, onde $\mu_1, \mu_2 \in M(X, T)$ e $0 < p < 1$. Devemos mostrar que $\mu_1 = \mu_2$. Seja $A \in \mathcal{B}(X)$ com $\mu(A) = 0$. Então

$$p\mu_1(A) + (1 - p)\mu_2(A) = \mu(A) = 0,$$

onde $0 < p < 1$, o que implica $\mu_1(A) = \mu_2(A) = 0$. Portanto $\mu_1 \ll \mu$, ou seja, μ_1 é absolutamente contínua com respeito à μ . Como μ_1, μ são medidas positivas e σ -finitas, pelo Teorema 1.2 (Teorema de Radon-Nikodym), a derivada de Radon-Nikodym $\frac{d\mu_1}{d\mu}$ existe e vale

$$\mu_1(A) = \int_A \frac{d\mu_1}{d\mu} d\mu$$

para todo $A \in \mathcal{B}(X)$, onde $\frac{d\mu_1}{d\mu} \geq 0$. Seja

$$E = \left\{ x \in X : \frac{d\mu_1}{d\mu}(x) < 1 \right\}.$$

Então E é mensurável e temos

$$\begin{aligned}
 \int_{E \cap T^{-1}(E)} \frac{d\mu_1}{d\mu} d\mu + \int_{E \setminus T^{-1}(E)} \frac{d\mu_1}{d\mu} d\mu &= \int_E \frac{d\mu_1}{d\mu} d\mu \\
 &= \mu_1(E) \\
 &= \mu_1(T^{-1}(E)) \\
 &= \int_{T^{-1}(E)} \frac{d\mu_1}{d\mu} d\mu \\
 &= \int_{T^{-1}(E) \cap E} \frac{d\mu_1}{d\mu} d\mu + \int_{T^{-1}(E) \setminus E} \frac{d\mu_1}{d\mu} d\mu,
 \end{aligned}$$

o que implica

$$\int_{E \setminus T^{-1}(E)} \frac{d\mu_1}{d\mu} d\mu = \int_{T^{-1}(E) \setminus E} \frac{d\mu_1}{d\mu} d\mu,$$

ou seja,

$$\mu_1(E \setminus T^{-1}(E)) = \mu_1(T^{-1}(E) \setminus E). \quad (4.11)$$

Além disso, temos $\frac{d\mu_1}{d\mu} < 1$ em $E \setminus T^{-1}(E)$, $\frac{d\mu_1}{d\mu} \geq 1$ em $T^{-1}(E) \setminus E$ e

$$\begin{aligned}
 \mu(T^{-1}(E) \setminus E) &= \mu(T^{-1}(E)) - \mu(T^{-1}(E) \cap E) \\
 &= \mu(E) - \mu(E \cap T^{-1}(E)) \\
 &= \mu(E \setminus T^{-1}(E)).
 \end{aligned}$$

Suponha $\mu(E \setminus T^{-1}(E)) \neq 0$. Então temos

$$\begin{aligned}
 \mu_1(E \setminus T^{-1}(E)) &= \int_{E \setminus T^{-1}(E)} \frac{d\mu_1}{d\mu} d\mu < \int_{E \setminus T^{-1}(E)} 1 d\mu \\
 &= \mu(E \setminus T^{-1}(E)) \\
 &= \mu(T^{-1}(E) \setminus E) \\
 &= \int_{T^{-1}(E) \setminus E} 1 d\mu \\
 &\leq \int_{T^{-1}(E) \setminus E} \frac{d\mu_1}{d\mu} d\mu \\
 &= \mu_1(T^{-1}(E) \setminus E),
 \end{aligned}$$

isto é, $\mu_1(E \setminus T^{-1}(E)) < \mu_1(T^{-1}(E) \setminus E)$, o que contradiz 4.11. Portanto $\mu(E \setminus T^{-1}(E)) = 0$ e,

consequentemente, $\mu(T^{-1}(E) \setminus E) = 0$. Assim,

$$\mu(T^{-1}(E) \triangle E) = \mu(T^{-1}(E) \setminus E) + \mu(E \setminus T^{-1}(E)) = 0.$$

Como μ é ergódica com respeito à T , pelo Teorema 4.3 devemos ter $\mu(E) = 0$ ou $\mu(E) = 1$. Se $\mu(E) = 1$, então

$$\mu_1(X) = \int_E \frac{d\mu_1}{d\mu} d\mu < \int_E 1 d\mu = \mu(E) = 1,$$

o que contradiz $\mu_1(X) = 1$. Portanto devemos ter $\mu(E) = 0$. Analogamente, se

$$F = \left\{ x \in X : \frac{d\mu_1}{d\mu}(x) \geq 1 \right\},$$

temos $\mu(F) = 0$. Assim, $\frac{d\mu_1}{d\mu}(x) = 1$ para μ -quase todo ponto $x \in X$ e $\mu_1 = \mu$. Da equação

$$\mu = p\mu_1 + (1-p)\mu_2,$$

segue que $\mu_1 = \mu_2$. Logo μ é um ponto extremo de $M(X, T)$.

(iv) Pelo Teorema 1.3 (Teorema da Decomposição de Lebesgue), existem únicas medidas de probabilidade μ_1, μ_2 e um único $p \in [0, 1]$ tais que $\mu = p\mu_1 + (1-p)\mu_2$, onde $\mu_1 \ll m$ e μ_2 é mutuamente singular com respeito à m . Como $\mu \in M(X, T)$ e a aplicação T_* é afim, temos

$$\mu = T_*\mu = T_*(p\mu_1 + (1-p)\mu_2) = pT_*\mu_1 + (1-p)T_*\mu_2.$$

Além disso, $T_*\mu_1 \ll T_*m = m$ e $T_*\mu_2$ é mutuamente singular com respeito à $T_*m = m$. Pela unicidade da decomposição de μ , devemos ter $T_*\mu_1 = \mu_1$ e $T_*\mu_2 = \mu_2$, ou seja, $\mu_1, \mu_2 \in M(X, T)$. Como μ é ergódica, pelo item (iii) temos que μ é um ponto extremo de $M(X, T)$. Assim, devemos ter $p = 0$ ou $p = 1$. Se $p = 1$, então $\mu = \mu_1$ e $\mu \ll m$. Fazendo um argumento análogo ao que foi feito no item (iii) com a derivada de Radon-Nikodym $\frac{d\mu}{dm}$, vamos obter $\mu = m$, o que é uma contradição. Se $p = 0$, então $\mu = \mu_2$ e, portanto, μ é mutuamente singular com respeito à m . $\square$

Como consequência imediata da demonstração do item (iii) do teorema anterior, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 4.18. *Sejam X um espaço métrico compacto e $T : X \rightarrow X$ uma transformação contínua. Se $\mu_1, \mu \in M(X, T)$, $\mu_1 \ll \mu$ e μ é ergódica com respeito à transformação T , então $\mu_1 = \mu$.*

Referências Bibliográficas

- [1] BOGACHEV, V. I. *Measure Theory Volume I*. Springer, 2007.
- [2] COHN, D. L. *Measure Theory*. Birkhäuser, 1980.
- [3] DUNFORD, N., SCHWARTZ J. T. *Linear Operators*. Interscience Publishers, INC., New York, 1958.
- [4] FOLLAND, G. B. *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications*. John Wiley & Sons. Inc., 1999.
- [5] FURSTENBERG, H. *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory*. Princeton University Press, 1981.
- [6] KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley & Sons. Inc., 1989.
- [7] LIMA, E. L. *Espaços métricos*. Coleção Projeto Euclides, 2009.
- [8] MUNKRES, J. R. *Topology*. Prentice Hall, 2000.
- [9] PARTHASARATHY, K. R. *Introduction to Probability and Measure*. Hindustan Book Agency, 2005.
- [10] PARTHASARATHY, K. R. *Probability measures on metric spaces*. Academic Press, New York, 1967.
- [11] PETERSEN, K. *Ergodic Theory*. Cambridge University Press, 1983.
- [12] RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, 1970.
- [13] WALTERS, P. *An Introduction to Ergodic Theory*. Springer, 1981.

Autorizo a reprodução xerográfica para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 07 / 08 / 2015

Eric Rosatto Santiago

Assinatura