

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

KLEYTON VINICYUS GODOY

UM ESTUDO DO PROCESSO DE RECONHECIMENTO HISTÓRICO:
O CASO DE ARTHUR CAYLEY

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Campus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, com parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientador: Profa. Dra. Adriana Cesar de Mattos

Apoio: FAPESP. Processo nº 2011/05133-3

Rio Claro - SP

2013

KLEYTON VINICYUS GODOY

UM ESTUDO DO PROCESSO DE RECONHECIMENTO HISTÓRICO:
O CASO DE ARTHUR CAYLEY

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Campus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, com parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Apoio: FAPESP. Processo nº 2011/05133-3

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Adriana Cesar de Mattos – Orientadora – IGCE-UNESP-Rio Claro-SP

Prof. Dr. Marcos Vieira Teixeira – IGCE-UNESP-Rio Claro-SP

Prof. Dr. Oscar João Abdounur – IME-USP-São Paulo-SP

Profa. Dra. Arlete de Jesus Brito (Suplente) – IB-UNESP-Rio Claro-SP

Prof. Dr. Wagner Rodrigues Valente (Suplente) – UNIFESP-Guarulhos-SP

Resultado: Aprovado

Rio Claro, SP 15 de Outubro de 2013

AGRADECIMENTOS

Meus agradecimentos vão a todos aqueles que contribuíram diretamente ou indiretamente para a realização dessa dissertação. Dessa forma, não poderia deixar de agradecer:

A minha orientadora Profa. Dra. Adriana Cesar de Mattos pela confiança, orientações, materiais para desenvolvimento da pesquisa, apoio e estímulo para a realização dessa dissertação.

Aos meus pais Maria Ester Nardon Godoy e Antônio Carlos Tadeu Godoy por todo apoio, carinho e estímulo que me deram para a finalização desse trabalho.

Ao meu amigo Nilson Diego de Alcântara Santos pela grande parceria no decorrer da elaboração dessa dissertação e nas tentativas e resultados que obtivemos em relação a buscarmos entendermos os cálculos na Teoria dos Quânticos. Minha grande amiga piracicabana Maria Teresa Zampieiri, por me ajudar na transcrição de dois pareceres em relação às memórias de Arthur Cayley.

Ao professor Dr. Marcos Vieira Teixeira pelo empréstimo de alguns materiais que contribuíram na realização deste trabalho e também pelas discussões ocorridas durante as Reuniões do Grupo de História da Matemática. Além dos seus apontamentos e sugestões no Exame de Qualificação.

Ao professor Dr. Oscar João Abdounur, pelas contribuições e colocações apresentadas durante o Exame de Qualificação dessa dissertação, e também, por me dar um grande suporte quando fui apresentar um trabalho resultado dessa dissertação em um evento nos Estados Unidos.

Aos professores Dr. Wagner Rodrigues Valente e Dra. Arlete de Jesus Brito por aceitarem participar como Suplentes deste trabalho.

Aos professores, Henrique Lazari, Romulo Campos Lins, Rosana Giaretta Sguerra Miskulin, Adriana Cesar de Mattos, Maria Lúcia Wodewotzky, Claudemir Murari e Sueli Javaroni, pelos ensinamentos no decorrer das disciplinas ministradas que cursei.

Aos professores Marcelo Borba, Marcus Maltempi, Miriam Penteado, Roger Miarka, Arlete de Jesus Brito e Heloísa da Silva, Carina Alves pela ajuda em atividades desenvolvidas e relacionadas ao programa durante esse período.

Aos funcionários do Departamento de Matemática Hugo, Elisa, Ana e José Ricardo que sempre foram atenciosos quando lhes solicitei alguma ajuda.

A secretária do Programa de Pós-Graduação Inajara, pela ajuda em diversos momentos em que foi solicitada.

Aos professores Ms. Gustavo Barbosa e Ms. Joana D'Arc da Silva por depositarem sua confiança em mim e terem enviado cartas de recomendação para o meu ingresso no programa.

To Clive Kanés and Tony Crilly, for their essential contributions to this research.

A profa. Dra. Luciana Zanardi, pelos comentários e sugestões para o desenvolvimento dessa dissertação durante a I Atividade Inaugural de 2012 do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática.

To my friend Bradley, we met at the event History of Science Society Annual Meeting 2012, and since then we have exchanged information about our studies.

Aos meus amigos e colegas do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Em especial: Elma Coelho, Adriel Gonçalves Oliveira, Maria Teresa Zampieri, Zaqueu Bueno, Juliana Martins, Viviane Oliveira, Sandra Villas Boas, Luana Oliveira Sampaio, Ormil Alves, Silvana Matucheski, Miliam Juliana Ferreira, Bruno Henrique Labriola, Simone Queiroz, Amanda Moura, Lucas Mazzi, Carmen Rosane Pinto Franzon, Vinicius Machacheski, Paulo César Abreu de Farias, Vanessa Benites, Danilo Olímpio, Douglas Alexandre, Andriceli Richit, Rodrigo Rafael Gomes, José Eduardo Ferreira, Jesaías da Silva, Filipe Fernandes, Luciano Lima, Nilson Diego, Flávio Coelho, Jean Toillier, Fabíola de Oliveira, Margarete Farias, Fernanda Rosa, Raquel Milani, Lucieli Trivizolli, entre outros, por terem escutado e contribuído de alguma forma quando me ouviram falar a respeito desse trabalho.

Dentre esses alunos citados acima, agradeço de coração aos discentes Elmha, Adriel, Carmen, Juliana, Sandra, Luana, Zaqueu, Maria Teresa e Viviane por todo apoio manifestado nas minhas idas a Rio Claro, e terem contribuído com suas companhias em momentos difíceis, por meio de inúmeros conselhos, durante esse período como aluno da Unesp.

Agradeço também aos discentes que me apoiaram durante meu período como representante discente do Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática, principalmente os discentes Daise Lago, que foi minha suplente, Michela, Maria Teresa, Andriceli, Margarete, Sérgio Carrazedo, Silvana, José Eduardo, Bruna Both, Marinéia, Juliana Viol, Bruno Missé, Nilton Silveira, Miliam Ferreira, Aparecida Chiari, entre outros, por constantes apoios ou ocuparem funções discentes, minimizando a sobrecarga de tarefas sobre minha pessoa.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo financiamento inicial dessa pesquisa.

E finalmente agradeço a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) por ter financiado a maior parte dessa pesquisa. Processo nº 2011/05133-3.

“Viver nada mais é que um conjunto de mortes até o óbito do sujeito. Durante a vida, a cada nova experiência morremos e renascemos, de modo que a cada ‘reencarnação’, suprimos aquela deficiência que nos levou a ‘morte’”.

(Kleyton Godoy parafraseando Lacan)

RESUMO

A finalidade desta dissertação é estudar o reconhecimento histórico atribuído ao matemático Arthur Cayley na História da Matemática. Iniciamos este trabalho relatando sua trajetória escolar no *King's College* de Londres e *Trinity College*, em Cambridge. Em 1852, Cayley foi eleito membro da *Royal Society of London*. Portanto, realizamos um estudo em relação ao seu processo de admissão e do estado da *Royal Society of London* nesse período. É possível encontrar o nome de Arthur Cayley nos principais mecanismos de reconhecimento matemático da época, portanto, verificamos esse reconhecimento por meio dos pareceres relativos às suas publicações abordando a Teoria dos Invariantes na *Philosophical Transactions of Royal Society of London*. Fora da Inglaterra, o reconhecimento matemático de Cayley é constatado pelas suas publicações no *Crelle* (Alemanha), *Liouville* e *Comptes rendus* (França). Devido ao seu prestígio, Cayley foi convidado para publicar em revistas matemáticas da Itália e Estados Unidos. O reconhecimento acadêmico de Arthur Cayley é decretado em 1863, quando foi eleito à primeira Cadeira de Professor Sadleirian de Matemática Pura da Universidade de Cambridge. Ao final de tratar essas questões, finalizamos com uma discussão sobre o processo de reconhecimento histórico na Matemática, em especial, o caso de Arthur Cayley.

Palavras-chave: Arthur Cayley. Reconhecimento Histórico. Reconhecimento Matemático. Reconhecimento Acadêmico. Royal Society of London.

ABSTRACT

The aim of this dissertation is to study the historical recognition awarded to the mathematician Arthur Cayley in the History of Mathematics. We started this work reporting their trajectory at King's College London and at Trinity College, Cambridge. In 1852, Cayley was elected Fellow of the Royal Society of London. Therefore, we conducted a study regarding their admissions process and the state of the Royal Society of London in this period. It's possible find the name of Arthur Cayley in the main recognition mechanisms mathematician of the time, therefore, we see this recognition by means of referees concerning about their publications addressing the Invariant Theory in Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Outside England, the recognition mathematician from Cayley is remarkable for its publications in Crelle (Germany), Liouville and Comptes rendus (France). Because of its prestige, Cayley was invited to publish in mathematical journals from Italy and the United States. The academic recognition of Arthur Cayley is decreed in 1863, when he was elected to the first Sadleirian Chair Professor of Pure Mathematics at Cambridge University. At the end of dealing with these issues, we concluded with a discussion of the process of historical recognition in mathematics, in particular the case of Arthur Cayley.

Key-words: Arthur Cayley. Historical Recognition. Mathematical recognition. Academic recognition. Royal Society of London.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	11
CAPÍTULO 0 – Do arquivo	15
CAPÍTULO 1 – A trajetória escolar de Arthur Cayley	18
1.1 – King’s College.....	19
1.2 – Trinity College	28
CAPÍTULO 2 – Royal Society of London	44
2.1 – Um breve panorama	44
CAPÍTULO 3 – Reconhecimento Matemático no século XIX	59
3.1 – Royal Society of London	61
3.1.1 – O processo de admissão	61
3.1.2 – As publicações	69
3.1.3 – Os pareceres	79
3.2 – Alemanha: Crelle	153
3.3 – Publicações na França	159
CAPÍTULO 4 – O reconhecimento acadêmico de Arthur Cayley	163
4.1 – A cadeira de Sadleirian no Trinity College	168

CAPÍTULO 5 – Celebridade	172
5.1 – Publicações na Itália	172
5.2 – Publicações nos Estados Unidos	175
5.3 – Publicações na Enciclopédia Britânica	177
 CAPÍTULO 6 – Do Reconhecimento Histórico	179
 Considerações Finais	185
 Referências Bibliográficas.....	192
 Apêndices	198
Apêndice 1 – Uma Memória de Introdução aos Quânticos	199
Apêndice 2 – Uma Segunda Memória dos Quânticos	219

Introdução

Entendemos que, se a Educação Matemática possui a preocupação sobre como tornar alguém capaz de aprender matemática, o estudo relativo a pessoas que chegaram a ter reconhecimento histórico pode nos dizer muito sobre os que não só aprenderam Matemática como foram também responsáveis por parte de sua criação (MATTOS, 2006).

Para tanto, fixamos um período, um local e um matemático para realizar a pesquisa: a *Royal Society of London*, durante o século XIX, e trabalhos do matemático Arthur Cayley (1821-1895), publicados na *Philosophical Transaction of Royal Society of London*. De acordo com Crilly (2006), Cayley foi aceito na *Royal Society* no ano de 1852.

No ano de 1854, Cayley publicou “*An Introductory Memoir on Quantics*” que marcou o início de uma série de publicações referentes à Teoria dos Invariantes na *Philosophical Transaction of Royal Society of London*.

Em relação ao seu reconhecimento histórico, Cayley é citado nos livros de História da Matemática publicados no final do século XIX e durante o século XX (MATTOS, 2007). De acordo com Mattos e Tanaami (2006), o primeiro livro de História da Matemática em que aparece o nome de Arthur Cayley foi escrito por Walter Willian Rouse Ball em 1888 e publicado pela editora Macmillian em 1893.

Propomos, portanto, analisar o processo de reconhecimento histórico obtido por Arthur Cayley devido à *Royal Society of London*, instituição considerada extremamente respeitável para validação de reconhecimento científico na segunda metade do século XIX.

Selecionamos alguns trabalhos de Cayley publicados na *Royal Society of London*, bem como os pareceres destas publicações. Admitimos que por meio desses materiais e através da fundamentação teórica baseada nos autores Max Weber, Foucault e Baudrillard, nós somos capazes de analisar os critérios de julgamento utilizados nos trabalhos de Cayley e identificar elementos que contribuíram para o seu reconhecimento na História da Matemática.

É importante salientarmos que o processo de julgamento científico tem início “formal” no ato da submissão de artigos. Entretanto, o parecer favorável à publicação parece não depender apenas de aspectos técnicos (MATTOS, 2007). De acordo com Baudrillard (1972), o reconhecimento de uma teoria (parecer favorável) implica na produção de códigos de prestígio (valor-signo).

A pesquisa é de caráter qualitativo, prática que de acordo com André (1995), tem se tornado crescente para concretizar pesquisas em Educação atualmente. Para obter os dados referentes à pesquisa, iremos recorrer ao processo de análise de documentos, pois como bem diz Lüdke e André (1986), “a análise documental pode se constituir numa técnica valiosa de abordagem de dados qualitativos, seja complementando as informações obtidas por outras técnicas, seja desvelando aspectos novos de um tema ou problema”.

Os materiais utilizados nessa dissertação são fontes primárias como: registros, pareceres e estatuto da *Royal Society of London*; e de fontes secundárias: artigos e livros de autores que se referiram à história da *Royal Society of London* e Arthur Cayley.

O interesse de se estudar esse assunto no Mestrado, se deu através de uma Iniciação Científica, cujo título era “Teoria dos Invariantes: cúbricas binárias”, realizada no ano de 2007 durante o último ano da minha graduação.

Naquela ocasião o foco era apenas estudar a Teoria dos Invariantes e a Matemática Inglesa do século XIX. Essa Iniciação Científica teve supervisão da professora Adriana Cesar de Mattos, que na época era professora do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Metodista de Piracicaba e havia trazido para o Laboratório de Ensino de Matemática, daquela universidade, um acervo bibliográfico digitalizado, coletados durante sua pesquisa de Pós-Doutorado na Inglaterra. Dessa forma, o acesso aos documentos classificados como fonte primária foi possível por meio do acervo bibliográfico digitalizado pela professora Adriana Cesar de Mattos.

É importante salientar que essa pesquisa não tem pretensão de focar amplamente a vida biográfica do matemático Arthur Cayley. Entretanto, destacamos alguns pontos importantes da vida de Cayley, tomando como base a cronologia apresentada por Tony Crilly (2006):

1821: Nascimento de Arthur Cayley, em 16 de Agosto, filho de Henry Cayley (1768-1850) e Maria Antonia Doughty (1794-1875).

1835: Ano de ingresso no *King's College* de Londres.

1838: Inicia seus estudos no *Trinity College*, em Cambridge.

1841: Publica seu primeiro artigo matemático¹.

1842: Graduação na Universidade de Cambridge, Trinity College.

1845: Descobre a Álgebra dos Octônios, que passou a ser denominado como "*Cayley numbers*". Faz visitas a Escandinávia e a Alemanha.

1846: Adentra ao *Lincoln's Inn* como um estudante de advocacia.

1847: Cayley conhece Sylvester², que viria a ser seu maior amigo.

1848: Visita Dublin e conhece diversos matemáticos irlandeses.

1849: Inicia seu trabalho como Bar³ no *Lincoln's Inn*.

1851: Descobre uma nova base para a Teoria dos Invariantes.

1852: Eleito a *fellow* na *Royal Society of London*.

1854: Início da sua série de dez publicações sobre a Memória dos Quânticos. Amplia a noção de grupo de permutações de Galois.

1858: Desenvolve a noção de Matrizes e explora a Álgebra das Matrizes.

1859: Define a noção de distância em Geometria Projetiva. Premiada com a *Royal Medal* na *Royal Society of London*.

1863: Se casa com Susan Moline (1831-1923). Eleito a Cadeira de Sadleirian de Matemática Pura na Universidade de Cambridge.

1864: Introduz a Geometria Não-Euclidiana na Inglaterra.

¹ Esta publicação aconteceu no *Cambridge Mathematics Journal*, cujo título foi "*On a Theorem in the Geometry of Position*".

² James Joseph Sylvester (1814-1897).

³ Advogado.

1868-1870: Presidente da *London Mathematical Society*.

1870: Nascimento de seu primeiro filho, Henry Cayley (1870-1949).

1872: Nascimento de sua filha: Mary (1872-1950).

1872-1874: Presidente da *Royal Astronomical Society*.

1878: Publicação da Décima Memória dos Quânticos.

1880: Visita Felix Klein em *Munique*.

1882: Visita a *Johns Hopkins University*, Baltimore, USA. Premiado com a *Copley Medal* na *Royal Society of London*.

1883-1884: Presidente da *British Association for the Advancement of Science*.

1884: Premiado com a primeira *De Morgan Medal* da *London Mathematical Society*.

1895: Falece em 26 de Janeiro, em Cambridge.

Capítulo 0

DO ARQUIVO

Segundo Mattos (2008) o arquivo “em si” consultado não significa a condição material para construir uma interpretação plausível em História, em particular da Matemática.

No presente estudo é possível verificar que matemáticos contemporâneos de Arthur Cayley, que também tiveram seus estudos em Cambridge ou foram membros da *Royal Society of London* desaparecem do âmbito histórico. Portanto, Mattos (2008) assumiu que se um nome pertence à maioria dos livros de História da Matemática, então reconhecido ele é.

Cayley, de acordo Mattos (2008):

was quoted in the books of History of Mathematics such as A short Account of the History of Mathematics (Ball, 1893, 1901, 1919), Men of Mathematics (Bell, 1965), História da Matemática (Boyer, 1974), A History of Mathematics (Cajori, 1894, 1919, 1922, 1928, 1938), Introdução à História da Matemática (Eves, 1995), A History of Mathematics: An Introduction (Katz, 1998), Development of Mathematics in The 19th Century (Klein, 1928), The short History of Mathematics (Sandford, 1930), History of Modern Mathematics (Smith, 1896, 1900, 1906), The progress of Algebra in the last quarter of a century (Smith, 1925), History of Mathematics (Smith, 1958), and 100 years of Mathematics (Temple, 1981)(p.2-3).

Segundo Mattos (2008) “*The dissemination of a work is essential (...) A work, to become part of the History, depends on a sort of effort, namely, an effort which produces value to a theory or to a name*” (p.4).

A nossa proposta nesta dissertação é estudar sobre o processo de reconhecimento histórico na Matemática, mais especificamente, o caso de Arthur Cayley, cujo resultado é o seu reconhecimento na História da Matemática, portanto, fazemos uso do trabalho de Mattos (2008) no que condiz com história e valor.

Mattos (2008) considera que:

Who or what should produce value on a theory or a name? Remarkably, for a work to be considered valued must become known. It does not matter if people hate or love it, or make it trivial, but rather dissemination of a work is essential, since there is no work valued if it is not mentioned in the History. Referees, examiners, lecturers or interlocutors were part of Cayley's academic life. His credibility is the result of their effort, an effort to produce prestige based on his work (p.3).

Cartas trocadas entre Ball⁴, o historiador, Forsyth⁵, Sadlerian (Cadeira de Matemática Pura), Henry Cayley⁶ (filho) evidenciam que organizar o Arquivo de Arthur Cayley não foi uma tarefa simples.

Apesar de todas as dificuldades, em 1898, apenas três anos após a morte de Arthur Cayley, “*The collected mathematical papers of Arthur Cayley*”, foi publicado pela Cambridge: at the University Press, a coletânea contendo os 967 trabalhos desenvolvidos por Cayley.

Mattos (2008) complementa que:

Dissemination is responsibility of historians. The archive organization provides material conditions to historians' work, insofar as it is a 'proof' of historical recognition. Historians of Mathematics and mathematicians occasionally organize the documents related to a person that they recognize as a meaningful name in order to preserve his/her memory. The historian of Mathematics, Walter William Rouse Ball, Fellow of Trinity College (University of Cambridge), and the mathematician Andrew Russel Forsyth, Sadlerian Professor of Pure Mathematics (University of Cambridge), were responsible for organizing Cayley's documents. It is possible to verify, based on on their letters, that they put effort into organizing the documents in order to make the material accessible to the historians (p.3).

Em uma carta enviada para to Henry Cayley (filho) em 25 de Setembro de 1923, Ball escreve⁷: *I gather that everything of value in the MS memoirs and*

⁴ Walter William Rouse Ball (1850-1925).

⁵ Andrew Russel Forsyth (1858-1942), sucessor de Cayley como Professor Sadlerian de Matemática Pura da Universidade de Cambridge.

⁶ Henry Cayley (1870-1949). Primeiro filho de Arthur Cayley com Susan Moline. Arthur resolveu dar o nome de seu pai em seu filho.

⁷ Trinity College Library. University of Cambridge. H. Cayley/W. W. R. Ball. 25 September, 1923. Add. 0.6.6³⁹⁽¹⁾.

papers has been already printed. All appears to have been carefully examined by Forsyth many years ago, and nothing more can be picked out for publication.

Capítulo 1

A TRAJETÓRIA ESCOLAR DE ARTHUR CAYLEY

Esse capítulo tem o objetivo apresentar registros do período em que Arthur Cayley era estudante no *King's College* de Londres e no *Trinity College* em Cambridge. Crilly (2006) relata sobre a educação de Arthur Cayley na biografia que escreveu referente ao matemático, portanto, destacamos que sua obra será a fonte dos dados descritos neste capítulo.

Arthur Cayley era um menino inglês de família de posses. Seu pai Henry Cayley, era “merchant⁸” e era casado com Maria Antonia. Além de Arthur, o casal teve outros 4 filhos: Sophia (1816-1889), William Henry (1818-1819), Charles Bagot (1823-1883) e Henrietta Caroline (1828-1886). A família de Cayley é de procedência russa e Crilly (2006) aponta que os antepassados de Cayley já possuíam posses e ocuparam posições de destaque na sociedade inglesa desde o século XI.

Crilly (2006) comenta que Henry Cayley (pai) teria conhecido o Reverendo George Brown Francis Potticary durante alguma situação cotidiana, e durante este encontro Potticary teria comentado com o pai de Arthur Cayley sobre um estabelecimento de ensino privado que ele administrava, dessa forma, em 1831, tanto Arthur que na época tinha 10 anos e seu irmão mais novo Charles Bagot Cayley, foram matriculados na *Potticary's School*. A escola atendia alunos com idades de 8-15 anos e, tal como acontecia com outras escolas particulares na área, teve como objetivo proporcionar uma educação adequada para os jovens cavalheiros.

Segundo Crilly (2006), Arthur mostrou uma habilidade matemática desde cedo, entretanto, Crilly (2006) comenta que essa afirmação não pode ser concluída a partir do sucesso de provas concretas, pois não encontrou registros escolares suficientes desse período que confirmassem este fato.

⁸ Podemos entender como Comerciante.

Crilly (2006) apresenta uma observação de um professor de Matemática de Cayley: “*for sums in Long Division to do while the other little boys were at play*” (2006, p.17). Essa nota sugere que Cayley encontrou conforto na companhia dos “números” e a segurança de um mundo atemporal separado de seus colegas de classe e sua autossuficiência por cálculos aritméticos foi se desenvolvendo. Em seguida, o biógrafo de Cayley comenta que, quando mais tarde na vida, Francis Galton⁹, perguntou a Cayley sobre a origem do seu interesse pela matemática, ele respondeu que “*had an early taste for arithmetic*” e uma parcialidade “*for long-division sums*” (CRILLY, 2006, p.17). Isso é pertinente, pois a divisão longa é um ponto onde a aritmética dá lugar à matemática real e uma atividade lúdica poderia facilmente ter alimentado o embrião matemático de Cayley. Embora a capacidade de realizar cálculos complexos não fazer de uma pessoa um matemático, no caso de Cayley podemos imaginar que a habilidade técnica foi combinada com um agudo senso de mistério e beleza, uma fonte de admiração que permaneceu com ele toda a sua vida. Sem dúvida, seu gosto por este tipo de exercício aritmético foi um fator na determinação de sua futura carreira (CRILLY, 2006).

“Because he was proposed by a proprietor of the College, his parents qualified for the lower annual fee of £18-17s-od, but it was still a sizeable sum”, aos 14 anos, Arthur deixou a *Potticary’s School* e em agosto de 1835 ingressou como aluno na Seção Sênior do *King’s College* de Londres¹⁰ (CRILLY, 2006).

1.1 – King’s College

O *King’s* foi organizado em duas seções, a Seção Júnior, que oferecia ensino normal de assuntos elementares, e uma distinta Seção Sênior. Os alunos que entravam para a Seção Senior geralmente eram de três formas. A primeira forma eram alunos que entravam para as classes de Literatura Geral e da ciência, esses alunos formaram uma entrada anual de cerca de cento e vinte a cada ano, Cayley era um deles. A segunda forma era ser um estudante de Medicina. A terceira maneira de adentrar nessa Seção eram os casos de estudantes ocasionais, ou seja, alunos que poderiam participar de parte do

⁹ Francis Galton (1822-1911). Antropólogo e matemático inglês.

¹⁰ Instituição de Ensino fundada em 1829 pelo rei George IV (1762-1830), mas que passou a atender o público apenas em 1831.

curso normal de três anos. De acordo com Crilly (2006), *“for most, the King’s College course in the senior department led to a career in business, a career in one of the professions or progression to Oxford or Cambridge (p.19).*

Crilly (2006) destaca alguns apontamentos feitos por John Ruskin¹¹ (1819-1900), que antes de ir para Oxford em 1837, estudou no *King’s College* de Londres em 1836 junto com Arthur Cayley durante a aula de Literatura Inglesa. Crilly (2006), apresenta uma fala de Ruskin em relação ao ambiente acadêmico do *King’s College*:

It is a very sudden change from the unlearned, mercantile moneymarking, abominable bustle, which prevails in the Strand, to the sublimity of silence which reigns in that spacious court: long vistas of Corinthian columns, lofty arches and tall porticoes echo your tread and when you enter the tall door way, mount the noble staircase, and leaning against the base of a massive column, whose richly carved capital extends above your head the graceful leaves of its acanthi, look down long passages on either side, arch beyond arch retiring in infinite perspective, the light falling with variable force through the upper windows, and striking on the figures of the gownsmen flitting up and down among the shadows of the corridors in silent and abstruse meditation (p.19).

Ruskin comparou a agitação infernal da rua Strand de Londres com o ambiente do *King’s College* de Londres e descreve alguns aspectos da arquitetura do prédio do *King’s* para enfatizar uma estética fina, que ele contemplava na medida em que a descreve.

A Seção Sênior do *King’s College* parecia mais um *College* de Oxford ou Cambridge do que uma escola secundária. Normalmente, um estudante da idade de Cayley entraria no departamento júnior e só passaria para a Seção Sênior com a idade de 16 anos. O regulamento para a entrada na Seção Sênior era bastante rigoroso: *“The Principal will inquire into their attainments and former conduct; and, except in cases of remarkable proficiency, of which he will be the judge, none will be admitted under the age of Sixteen years”*. Entretanto, as autoridades reconheceram claramente o incomum desempenho escolar do garoto e, após comprovarem a sua proficiência, ele foi autorizado a

¹¹ Escritor britânico. Ficou conhecido por seus trabalhos como crítico de arte e crítico social britânico.

entrar direto para a Seção Sênior com apenas quatorze anos (CRILLY, 2006, p.19).

O curso regular de três anos na Seção Sênior era composto por: Ensino Religioso, Clássicos Gregos e Latinos, Matemática Pura e Mista, História e Literatura Inglesa, além de estudar uma Linguagem Moderna, se fosse de desejo do aluno. No segundo ano, era possível selecionar alguns outros cursos para ampliar os seus estudos. As opções eram: Filosofia Natural, Astronomia, Filosofia Experimental, Geologia, Química, Botânica e Zoologia (CRILLY, 2006).

A Seção Sênior tinha como prática o “ensino professoral”, e esse ensino era baseado em textos clássicos e não ir muito além deles, ou seja, focar nos clássicos. Os professores do colégio eram homens eruditos que realizavam pesquisas e davam aulas públicas, algumas das quais eram muito populares. Nos primeiros anos, o colégio foi capaz de atrair uma excelente equipe, o que as autoridades do colégio orgulhosamente os proclamava como “*men of parts*”. Eles não eram apenas especialistas, podiam ser denominados como “*professor of everything*” (CRILLY, 2006).

Ocupar o cargo de professor no *King's College* no período de 1830 a 1840 não significava que os professores tinham dedicação exclusiva ao colégio. Muitos combinavam suas funções de ensino com outros empregos. O matemático Matthew O'Brien (1814-1855), por exemplo, foi um que ao mesmo tempo, era professor de Filosofia Natural e Astronomia no *King's College* e também exercia atividades como professor na *Royal Military Academy* de Woolwich. Os professores recebiam um salário básico, mas o modo de remuneração era baseada em uma espécie de sistema de bônus, em que uma parte do salário era pago por meio de taxas estudantis (CRILLY, 2006).

As autoridades escolares tomavam um grande cuidado para que os funcionários contratados fossem anglicanos e ortodoxos. Era obrigatório que os professores pertencessem e participassem da Igreja da Inglaterra. A única exceção eram os professores de Línguas Modernas e aqueles que se especializaram em estudos orientais. Os possíveis candidatos deveriam possuir essa qualificação, e o próximo passo era dependente de aprovação

pelo Bispo de Londres. A prática dessa restrição religiosa não diminuiu a qualidade acadêmica do pessoal. Por exemplo, Charles Lyell (1797-1875), um importante geologista de sua época, foi professor de Geologia nos dois primeiros anos de fundação do *King's College* (CRILLY, 2006).

Entre as disciplinas ofertadas no *King's College*, a química foi um assunto que atraiu a atenção de Arthur e que ele relacionou para sua matemática muitos anos depois. O seu professor de Química foi John Frederic Daniell (1790-1845), inventor da Pilha de Daniell. Ele foi o primeiro professor a ocupar essa posição no Colégio e acumulava atividades como Ministro das Relações Exteriores na *Royal Society of London*¹² e Conferencista na *East India Company Military Seminary*. O programa da disciplina de Química de Daniell incluía Química Orgânica, a sua organização e os detalhes dos seus produtos, assim como os processos de Análise Biológica. Este foi o início do vivo interesse de Cayley no assunto. As lições aprendidas na juventude, não são facilmente dissipadas e é significativo que a química, a ciência progressiva visto como de forma contínua e rápida evolução, para Cayley, desempenhou um papel enriquecedor em alguns importantes problemas da área de matemática em sua própria pesquisa da década de 1870 e 1880. Daniell tinha uma postura interessante para a metodologia que empregou no ensino: a Química para ele era uma ciência exploratória e ele fez questão de ensinar usando o Método Indutivo “*of reasoning from the chemical phenomena observed and not from preordained theories*” (CRILLY, 2006, p.21).

Vários outros professores foram membros da *Royal Society of London*. Henry Moseley (1801-1872), que se formou em Cambridge, em 1826, foi eleito para a *Royal Society* em 1839. Ele se tornou o professor de Filosofia Natural, Filosofia Experimental e Astronomia no *King's College* e esteve na equipe no período de 1831 até 1844, ano em que deixou o *King's* para a realização de pesquisas sobre a estabilidade de navios nas geleiras (CRILLY, 2006).

¹² Sociedade científica fundada em Londres no século XVII (28 de Novembro de 1660), cuja finalidade era e continua sendo, produzir e divulgar ciência.

Charles Wheatstone (1802-1875) assumiu a parte experimental do trabalho de Moseley e tornou-se professor de Filosofia Experimental em 1834. Wheatstone era um homem de amplos interesses científicos, embora ele tenha escrito um artigo fundamental em matemática, ele mostrou um pouco mais do que um interesse passageiro no assunto. Wheatstone passou a fazer parte do círculo mais amplo de cientistas com quem Cayley socializou na década de 1850 (CRILLY, 2006).

Richard Jones (1790-1855), o professor de Economia Política no *King's College*, defendeu a criação de uma Sociedade de Estatística expressada na sua aula inaugural no *King's College* em fevereiro de 1833. Embora o colégio tenha passado por dificuldades financeiras nos primeiros anos, sobreviveu e estes homens estabeleceram um ethos científico altamente considerado que pavimentou o caminho para futuras carreiras científicas para si e vários de seus alunos (CRILLY, 2006).

No lado das artes, Gabriele Rossetti (1783-1854) foi o professor de italiano, e, portanto, isento da regra que restringe as nomeações da faculdade para os anglicanos. Ele era o pai de Dante (1828-1882), William (1829-1919), e Christina Rossetti (1830-1894), e ao longo da vida de Cayley, ele foi firmando laços com esta família de artistas, ainda mais quando posteriormente, Charles Bagot Cayley (1823-1883), seu irmão mais novo, que foi outro estudante excepcional no *King's College*, também manifestou um interesse em aprender Literatura Italiana com este notável professor (CRILLY, 2006).

Robert William Browne foi o professor de Literatura Clássica de Arthur Cayley. Um autor prolífico, que conseguiu converter as experiências de vida em impressão. Em suas aulas, ele introduziu seus alunos para a amplitude do pensamento grego - para Homer e Aristóteles - que teve uma grande influência em sua mente e hábitos de pensamento. Browne era uma autoridade em História da Literatura Grega e Romana, escreveu um trabalho em dois volumes sobre cada assunto, no qual ele escreveu sobre a filosofia de Tales, Anaxímenes, Herachus e Pitágoras (CRILLY, 2006).

Se os clássicos da Filosofia Grega tem ligação direta ou indireta com a opinião do matemático Cayley sobre ciência ou com sua formação intelectual¹³, dificilmente encontraríamos alguma evidência de conexão sobre tal influência.

Desde 1831, quando o *King's College* abriu ao público, sempre houve uma cadeira de Matemática. O seu primeiro ocupante, Thomas Grainger Hall (1803-1881), ficou no cargo durante quase quarenta anos. Hall tinha se formado na Universidade de Cambridge em 1824 como Senior Wrangler¹⁴, e para os primeiros anos, passou seu tempo em Devon trabalhando como tutor. Em seus primeiros anos, ele também atuou como o professor de História no *King's*. Hall foi principalmente, um escritor de livros matemáticos, mas ele também escreveu artigos. Ele se baseou principalmente na *Encyclopaedia Metropolitana on the calculus of variations and the calculus of differences* para a escrita dos livros didáticos (CRILLY, 2006).

Hall parece ter sido um desses valiosos professores de matemática que estão sempre minuciosos, mas não excessivamente pedante. Ele suportou uma carga horária pesada, ensinava matemática para cada uma das turmas dos três anos da Seção Sênior do *King's College* e tinha todas as manhãs da semana ocupadas durante cada um dos três períodos do ano. Quando Cayley entrou na escola, Hall pretendia adotar "todos os ramos da matemática geralmente ensinadas nas universidades, e [como] serão entregues na ordem que pode ser encontrado mais conveniente". Cayley, assim, recebeu um curso abrangente, semelhante a um nível universitário. No primeiro ano de curso, Hall ensinou os livros de Euclides 1-4, 6, 11 (Linhas, Círculos, Áreas, Figuras Regulares Simples, e Sólidos Geométricos), Princípios de Álgebra, Trigonometria Plana, o uso de Tabelas Logarítmicas e Geometria Descritiva. No segundo ano, acrescentou Seções Cônicas, a aplicação da álgebra à geometria, Trigonometria Esférica e, provavelmente, as três primeiras seções do *Principia* de Newton. O terceiro ano de curso foi reservada para tópicos como Equações Diferenciais e as partes analíticas de Hidrostática, Óptica, e Astronomia (CRILLY, 2006).

¹³ Não estamos falando de erudição, mas o modo de raciocinar.

¹⁴ São os alunos de Cambridge que conquistam graus de primeira classe decorrentes de passar com êxito no exame Tripos de Matemática ao final de sua graduação. Era considerada a maior conquista intelectual na sociedade britânica.

Dentre os “livros didáticos” de Hall, um que merece uma menção especial é sua obra intitulada *Treatise on the Differential and Integral Calculus*, que foi publicada em 1834 e saiu em uma segunda edição ampliada três anos depois, portanto, a elaboração, redação e ampliação ocorreu durante o período que Cayley participou do colégio. Com novas edições aparecendo mais tarde, mexeu com os jovens alunos que poderiam dominar o seu conteúdo, obviamente, com base na matéria ensinada em suas aulas. A presença de Hall no colégio foi um estímulo ao pensamento matemático. O próprio Hall se beneficiou das reformas de Cambridge na matemática instigadas pela *Sociedade Analítica*¹⁵ e é bastante natural para descobrir que seu livro promulgou as suas opiniões sobre a base de cálculo. Em capítulos posteriores ele lidou com o Teorema de Lagrange, a “pedra” fundamental do cálculo das operações e que governou a abordagem algébrica para o cálculo que foi a prosperar na Inglaterra por todo o século. É provável que Cayley teria sido atraído por este assunto quando ele começou a sua carreira de matemático, e ele iria seguir os seus métodos e princípios ao longo de sua pesquisa mais tarde (CRILLY, 2006).

Foi significativo Cayley ter obtido sua introdução a tópicos avançados em uma idade jovem. Além disso, Hall certamente foi uma das poucas pessoas na Inglaterra que iria considerar o ensino desses temas ao nível da escola. Os alunos puderam até mesmo passar a assuntos mais avançados sob sua supervisão. Quando terminou seu livro, ele recomendou-os a estudar o tratado de Lacroix *Differential and Integral Calculus* (1816) e *Collection of Examples* (1820) de George Peacock. Quando Cayley adentrou no *King's College*, coincidiu com o período de maior atividade de Hall em matemática, pois, ele estava em seus trinta e poucos anos e ainda ativo como professor. Em 1845 ele foi nomeado como prebendeiro¹⁶ da Catedral de St. Paul, momento esse que significou que as atividades de carreira igreja estavam substituindo seus entusiasmos matemáticos. Na década de 1830, o jovem assistente de Hall e professor universitário em matemática foi o ascético e bem-intencionado John Allen. Enquanto Hall foi o professor, Allen acessorava os estímulos

¹⁵ Fundada em 1812, tinha como objetivo promover o uso de Leibniz ou cálculo analítico em oposição ao cálculo newtoniano.

¹⁶ Aquele que arrematava as prebendas ou as rendas de um bispado.

matemáticos. Ele entrou para o *Trinity College*, Cambridge, 1828 e formou-se em 1832 e foi professor de matemática do *King's College* no período de 1832-1839, quando então ele se tornou um dos primeiros inspetores da escola. Allen era um amigo próximo dos autores Edward Fitzgerald¹⁷ (1809-1883) e William Makepeace Thackeray¹⁸ (1811-1863), em Cambridge, e ele conhecia Tennyson¹⁹ (1809-1892) e outros contemporâneos ilustres (CRILLY, 2006).

De Thomas Hall, e, possivelmente, de John Allen, Arthur teria ganho mais do que uma apreciação elementar de Euclides. Os temas que Hall ensinou no *King's College* eram geralmente ensinados em Oxford e Cambridge. Em Eton, uma escola pública de liderança, a matemática não era obrigatória até 1837, enquanto antes desse tempo, o ensino de matemática era praticamente inexistente. Em Harrow, outra das principais escolas públicas da Inglaterra, no ano de 1837, todos os meninos tinham que estudar Euclides, em certa medida, mas nas duas horas por semana atribuído à matemática do ensino, dificilmente iam além da aritmética, um pouco de álgebra, e o mínimo de Euclides, apesar da presença do jovem escritor de livros de matemática elementar John William Colenso (1814-1883), na equipe a partir de 1838 até 1842. Mesmo mais tarde, em 1867, apenas três horas por semana foram dedicados ao estudo da matemática nessas escolas, e a matemática estudada estava em uma posição inferior em relação às escolas clássicas. No *King's College* a preparação dos alunos em relação à matemática era um objeto essencial para preparação de seus alunos para entrarem na graduação em Cambridge. Em Londres, tanto o *King's College* e o "*Godless*" *University College*, que na época tinha Augustus De Morgan (1806-1871) à frente da matemática, eram apontados como os ambientes mais favoráveis para o estudo de matemática na Inglaterra. Com De Morgan, Cayley poderia ter estudado matemática mais pura, mas o seu curso no *King's College* envolveu uma proporção substancial de "Matemática Mista" – a aplicação da matemática a problemas físicos (CRILLY, 2006).

Sem dúvida, Arthur Cayley tomou para si familiarizar com as partes de Euclides que não apareceram no programa do *King's College*. No terceiro ano

¹⁷ Poeta inglês.

¹⁸ Romancista inglês.

¹⁹ Poeta inglês.

do curso, uma liberdade considerável foi oferecida aos alunos nos cursos que eles estudavam. Era algo como o velho "*Grammar School third year sixth form*" em que os adolescentes permaneciam na escola, a fim de se prepararem para os exames de admissão em Oxford ou Cambridge. É provável que Cayley tenha consultado o livro V de Euclides sobre a teoria da proporção de Eudoxo, ainda no *King's College*. É difícil pensar que ele complementou suas leituras por obrigação, Cayley era um estudante incomum, e a tradição matemática grega moldava seu pensamento matemático e, talvez, a sua escolha de matemática como uma vocação. Nos anos posteriores, o seu amor pelos Elementos de Euclides continuou a manifestar-se e pôs-se para estudar ao nível da escola sem nenhum indício de equívocos. Com entusiasmo desenfreado, ele proclamou (em 1883): "não há quase nada de matemática mais bonita do que o seu maravilhoso quinto livro, e ele também tem no sétimo livros, oitavo, nono e décimo plena e habilmente desenvolvidos os primeiros princípios da Teoria dos Números, incluindo a Teoria dos Incomensuráveis" (CRILLY, 2006, p.24).

Os registros acadêmicos de Arthur Cayley no *King's College* mostra que ele obteve uma conquista acadêmica sólida. Ele levou diversos prêmios acadêmicos oferecidos pelo colégio. No final do seu primeiro ano, com a idade de quatorze anos, ele foi premiado em Matemática, Literatura Inglesa, Francês, e Clássicos. No ano seguinte, quando a maioria de seus concorrentes tinham dezoito anos, ele ganhou os prêmios de Matemática, Literatura Inglesa e História. Cayley parecia estar adequadamente preparado para entrar em Cambridge depois de seus dois primeiros anos, mas em uma idade tão jovem, isso era inaudito. Em seu terceiro ano, o registro histórico mostra que ele não ganhou nenhum prêmio nas disciplinas tradicionais (CRILLY, 2006).

Esse último episódio, a princípio, pode parecer um fato surpreendente, mas, depois de inúmeras conquistas nos anos anteriores, não havia mais nada para Cayley provar em termos de seu empenho acadêmico. Entretanto, de acordo com Crilly (2006), ele obteve a nota mais alta no exame realizado durante o período de inverno em seu terceiro ano. Além disso, na entrega anual de prêmios, em Maio de 1838, ele recebeu a Medalha de Prata de Química do arcebispo de Canterbury. Esse prêmio geralmente era vencido exclusivamente por cientistas especialistas ou estudantes de medicina. Na

véspera da premiação, ele foi introduzido para o *Trinity College*, com a idade de dezesseis anos.

1.2 - Trinity College

Em Outubro de 1838, Arthur Cayley passou a residir no *Trinity College*, em Cambridge. Ele estava prestes a embarcar em tão brilhante carreira acadêmica de graduação como qualquer estudante em Cambridge, durante o século XIX. Devido seus dons apresentados durante seus estudos no *King's College*, em Londres, Cayley provavelmente já era conhecido com antecedência antes de sua entrada no *Trinity College*, pois, os laços entre essas duas instituições anglicanas eram fortes (CRILLY, 2006).

Em seu primeiro ano na universidade, Cayley teve como tutor George Peacock (1791-1858). Entre os calouros e colegas que adentraram junto com Cayley, e que suas famílias possuíam uma vasta quantidade de terras e riquezas, foram Meyer Amschel Rothschild (1818-1874), o quarto filho do magnata Nathan Meyer Rothschild (1777-1836), e George John Manners (1820-1874), o terceiro filho do duque de Rutland, outros dois que vieram sob a jurisdição de Peacock. Atuando como professor de matemática no *Trinity* desde 1815 e tutor universitário a partir de 1823, Peacock forneceu uma ligação entre o *King's College* e o *Trinity College*. Além de Peacock, Thomas Thorp (1797-1878) e William Whewell (1794-1866), também estavam responsáveis pela tutoria de Arthur Cayley. Os tutores atuavam como uma espécie de “pai”, eles davam orientações gerais e cuidavam dos assuntos financeiros de seus alunos, além de serem responsáveis pela supervisão da matrícula. Peacock levava seus deveres como tutor a sério, sendo bastante curioso, ele costumava dizer que "as inspeções em seus alunos não eram minuciosas, muito menos vexatórias, mas eram sempre eficazes" (CRILLY, 2006).

As aulas na universidade tinha uma quantidade de alunos variada, contendo um máximo de quarenta alunos. A rotina dos calouros era vagarosa: as aulas ocorriam durante algumas horas da manhã, após as quais, iam visitar seus professores tutores. Em seguida, almoço e uma caminhada longa, estendendo até o "Grantchester Grind"²⁰, onde passavam um determinado

²⁰ Um vilarejo que abrigava a maioria dos professores ativos e aposentados de Cambridge.

tempo. Durante às 15:00, na sala de jantar, os alunos socializavam entre si, até a hora do jantar. Além desses períodos, os estudantes também culminavam passar as suas noites estudando (CRILLY, 2006).

O *Trinity College* viu-se principalmente como uma instituição de ensino com responsabilidades para com os jovens estudantes. Quando os alunos chegaram ao *Trinity*, eles entraram na "família" da faculdade, e como membros mais jovens de uma família de classe alta bem regulamentada, rapidamente tornavam-se conscientes de sua própria posição humilde em relação à estrutura e às regras a que estavam sujeitos na universidade. Houve um alto grau de supervisão na vida universitária e a presença dos alunos na faculdade eram gravados em grandes livros encadernados em couro de semana-a-semana. Para Cayley, o regime de estrita observância religiosa começou desde o *King's College*, em Londres, e foi mantida no *Trinity*, onde os estudantes eram obrigados a assistir na capela, diariamente às sete horas de cada manhã, e duas vezes aos domingos. Em caso de não cumprir as atividades, vários níveis de punição estavam disponíveis para o "reitor júnior" aplicar, e, em caso de continuidade do não cumprimento das regras, o aluno era expulso da faculdade. Entretanto, essa alta compulsão não poderia suportar por muito tempo na nova era e os alunos estavam começando a afirmar a sua independência (CRILLY, 2006).

No ano que Cayley foi para a universidade, havia sinais de rebelião contra diversas restrições impostas pela universidade. Em fevereiro de 1838, houve uma animada queixa em relação à frequência obrigatória na capela, e foi criada a "Sociedade para a Prevenção da Crueldade contra os Estudantes". Diversos tutores foram satirizados pelos manifestantes, entretanto, a reputação de Peacock saiu ilesa e ele foi classificado como "nosso doce pássaro". A existência de tais regras mostra que a faculdade era acima de tudo uma comunidade e quando os estudantes foram admitidos, eles eram regidos pelas regras internas da Sociedade. No entanto, essa Sociedade, não era imune à vida de fora e Cayley estava exposto para o mundo vitoriano²¹, diferentemente do *King's College*, em Londres, que era uma instituição de grande parte da

²¹ Período do reinado da Rainha Vitória (1819-1901) que compreendeu os anos de 1837-1901.

classe média, mas que possuía um ambiente diferente de Cambridge na década de 1840 (CRILLY, 2006).

Em relação aos estudos matemáticos, Cayley iniciava um curso que duraria dez termos e culminaria em seis dias de exames no Senado. Claramente, um prazo mais longo que o curso normal de três anos para o grau ordinário. A peculiaridade da matemática no currículo em Cambridge, neste momento, e ao longo do século, era que ele não foi ensinado a fim de fornecer uma base para futuros estudos sobre o assunto. Não houve concepção do sujeito como aquele que deve ser envolvido com a formação dos futuros trabalhadores científicos em matemática, muito menos futuras matemáticas. A matemática foi incutida como treinamento para a mente. De acordo com essa crença firmemente defendida, a matemática infundiu o espírito de força e disciplina e era o caráter de formação. Temas baseados matematicamente, como a Lógica, Aritmética, Geometria e Astronomia tinha tradicionalmente formado o currículo medieval: a matemática continua a ser apropriada para a educação de um “cavalheiro” quando Cayley foi para a Universidade (CRILLY, 2006).

Matemática foi tema em Cambridge em meados do século XVIII, quando o grau de matemática moderna surgiu, era o único caminho para uma licenciatura até a década de 1820, quando o grau de estudos clássicos tornou-se uma opção. Remanescentes do velho sistema permaneceram e os candidatos eram obrigados a estudar matemática a nível de honras e alcançar o status “Optime Junior” no exame Tripos de matemática antes de prosseguir para os Tripos clássicos. Muitos tiveram seus estudos bloqueados por não passarem neste requisito. Sucesso ou fracasso para apreciar matemática, então como agora, depende, em grande medida, do professor, sentado diante de William Whewell, um de seus tutores, seria uma experiência muito diferente do que com Peacock liderando o caminho (CRILLY, 2006).

Em sua juventude, George Peacock tinha sido um membro da influente *Sociedade Analítica* em Cambridge e tinha reconhecido a influência que um professor universitário poderia exercer. Na causa de aumentar o amor da ciência e da matemática, ele prometeu usar este poder. Como um reformador ardente em seus primeiros anos, ele mostrou sua habilidade como um pensador matemático independente. Seu trabalho em álgebra levou ao conceito mais amplo do assunto do que o confinado à representação de

"quantidade" por símbolos. Em seu *Treatise on Algebra* (1830), os alunos foram orientados, nos "*principles of symbolic calculation*". No ano que Cayley ingressou em Cambridge, Peacock estava no ponto de codificar ainda mais essas ideias. Embora ocupado com isso, sua carreira acadêmica e profissional da igreja foram avançando. Ele havia sido nomeado Professor Lowndeano²² em 1837 e Deão²³ da Catedral de Ely em 1839, mas no ano de intervenção, o primeiro ano de Cayley, ele foi a porta de entrada em estudos matemáticos do jovem (CRILLY, 2006).

Nessa época, a reputação do *Trinity* em matemática não era particularmente elevada. O estudante campeão em Cambridge era o Wrangler Senior, o aluno primeiro colocado no Tripos Ordem Matemática de mérito, mas o *Trinity* obteve a honra de ter apenas alguns sucessos esporádico em suas fileiras. Sua primazia entre as faculdades de Cambridge, durante o início do século XIX foi devido à sua forte reputação clássicos, que Wordsworth (1770-1850) tinha incentivado e promovido. Este atendia sua clientela da escola pública, cuja educação foi formada pelos estudos literários da Grécia e de Roma, em vez de matemática. Dessa forma, por outro aspecto, a superioridade do *Trinity* em clássicos, não nos parece estranho. Dentre os professores de matemática da universidade, James Challis²⁴ (1803-1882) e Peacock, ambos eram professores recém-nomeados. Na realidade, havia poucas funções docentes ligadas a cátedra além de suas aulas e tinham praticamente nenhuma influência sobre o currículo do ensino de graduação Peacock foi eleito para a cadeira de "Astronomia e Geometria", resistente, mas (CRILLY, 2006).

obedientemente ele deu suas primeiras aulas sobre Astronomia, mas Matemática Pura foi seu forte. Levando isso em conta, ele chegou a um acordo com Challis que ele iria restringir-se à "Geometria" de seu título. Assim, em Outubro de 1838, quando Cayley chegou como um calouro, é provável que as aulas de Peacock eram somente sobre Álgebra e Geometria. O conteúdo dos

²² Estabelece que o professor titular deveria ministrar dois cursos de vinte aulas a cada ano, um em Astronomia e o outro em Geometria, e passar no mínimo seis semanas realizando observações astronômicas.

²³ Dignidade eclesiástica a que está inerente à presidência da Corporação dos cônegos de sé.

²⁴ Professor Plumiano de Astronomia e Filosofia Experimental, esse professor tinha o objetivo de erigir um observatório e adquirir utensílios e instrumentos (quadrantes, telescópios, etc.), para uso dele e de seus sucessores.

dois volumes do *Treatise on Algebra*, publicados em 1842 e 1845, contêm a maturação de seus pensamentos sobre o fundamento da álgebra. Ele fez frequentes referências às obras de matemáticos do continente europeu, uma continuação de sua missão de trazer obras Continentais²⁵ a Cambridge e enfatizou a importância da álgebra aplicada à geometria (CRILLY, 2006).

Uma participação em aulas professorais não era necessária para o sucesso nos Tripos, só podemos conjecturar se Cayley estava entre o grande número de pessoas que assistiram as aulas de Peacock. O mais provável que ele tenha feito, sendo um jovem com ambicioso, certamente fez questão de ouvir as aulas de um líder em seu assunto favorito durante seu primeiro ano na universidade. Se não participou, ele não teria essa chance novamente. A carreira de Peacock foi desviada para Ely, no ano seguinte, na nomeação como Deão, onde deveres incluíam a administração cotidiana da grande catedral medieval. Os alunos que frequentavam suas aulas na Universidade de Cambridge foram caindo gradualmente. Depois de um começo ativo ele veio para tratar sua cátedra como uma sinecura²⁶ (CRILLY, 2006).

Peacock entregou sua tutela no Trinity para John Moore Heath (1808-1882), que atuou como seu tutor assistente durante os seis anos anteriores. É improvável que Heath teria sido a mesma influência matemática em Cayley. A transição de Peacock para Heath teria sido de pouca importância para o progresso matemático de Cayley, pois até então, ele estava em segurança nas mãos de seu professor particular para o exame Tripos de Matemática William Hopkins (1793-1866). Além disso, Cayley e os alunos que haviam estudado o programa de matemática, concebido pelo *King's College*, em Londres, por Thomas Hall, sem dúvida, estavam bem preparados, pois seus estudos praticamente cobriram o primeiro ano do programa de Cambridge (CRILLY, 2006).

O jovem Cayley, ao adentrar no *Trinity College*, tinha agora as riquezas da Biblioteca de Wren²⁷ à sua disposição. Mas o que ler? O primeiro ponto de orientação foi Peacock, que confirmou seus primeiros empréstimos. Em sua primeira visita poderíamos ter esperado que ele iria emprestar um livro para

²⁵ Forma de se referir a Europa Continental.

²⁶ Emprego remunerado, de pouco ou nenhum trabalho.

²⁷ Biblioteca do Trinity College.

apoiar o seu curso de matemática, mas na verdade, ele tirou os três volumes de *Principles of Geology* escrito por Charles Lyell (1797-1875). Este livro tão enormemente popular na época, ricamente ilustrado com mapas e diagramas. Seu título completo, *Principles of Geology: being an attempt to explain the former changes of the earth's surface by reference to causes now in operation*, indica o caráter revolucionário de sua tese e é responsável por sua recepção controversa em um país onde questões como a Idade da Terra foram levados muito a sério. O fato de Arthur Cayley ter pego emprestado esse livro é um indicativo de seu interesse ativo nas questões intelectuais da época (CRILLY, 2006).

Cayley realizou uma nova visita até a biblioteca e desta vez estava lá para tirar obras desafiadoras em matemática. Aos 17 anos, procurou obras nas prateleiras da biblioteca por parte dos matemáticos franceses da geração anterior, provavelmente efeito da influência em Cambridge por meio da *Sociedade Analítica*. Cayley primeiro selecionou *Géométrie Descriptive* por Gaspard Monge (1746-1818), e também, os *Elements de géométrie*, de Adrien Marie Legendre (1752-1833), e *Méchanique Analytique* por Joseph-Louis Lagrange (1736-1813). Estes assuntos foram temas de seus artigos publicados vários anos mais tarde, mas é notável que o processo de absorção começou durante seus primeiros dias na universidade. Depois da pausa de Natal, a influência francesa continuou com *Théorie analytiques des probabilités* de Laplace (1749-1827), e o *Traité du calcul différentielle et du calcul integral*, de Lacroix (1765-1843). Para uma boa comparação, uma seleção das obras de Rabelais²⁸, nas versões em inglês e francesa, foram emprestados durante a primavera de 1839. Durante sua carreira de graduação, Cayley fez uso limitado da biblioteca da faculdade, mas o que ele tinha emprestado mostra uma dieta equilibrada. Nos anos seguintes, ele absorveu outras obras clássicas, como as *Leçons sur le calcul des fonctions* por Lagrange, o *Exercices de mathématiques* de Cauchy, o *Traité de Méchaniques Céleste* por Laplace, e a *Analise des équations indéterminées* por Joseph Fourier (1768-1830). Estas fontes de enriquecimento matemático, certamente sugerem uma curiosidade intelectual de sondagem. Quanto a orientação que recebeu é difícil de julgar, embora a

²⁸ Francis Rabelais (1494-1553), escritor, padre e médico francês na época do Renascimento.

influência dos dons foi sentida, sem dúvida, mais do que no primeiro ano mais tarde (CRILLY, 2006).

Após os exames universitários do primeiro ano em Matemática, Latim e Grego, os vinte melhores estudantes foram colocados em uma classe especial, visando a preparação deles para o concurso Tripos a ser realizado três anos depois. Aproximando-se de seu último ano de estudo, Robert Leslie Ellis (1817-1859), estudante da mesma época de Cayley, comenta que tinha desprezo desta preparação, e escreveu em seu diário: "Eu detesto o sistema daqui, esmagando nosso corpo e nossa mente para uma finalidade inútil". Por outro lado, não havia nenhum sinal de que Cayley sentiu oprimido, na verdade, ele lidou bem. No início do verão de 1839, Cayley e Ellis encontraram-se no mesmo ônibus com destino à metrópole (onde o pai de Ellis mantinha uma casa em Hampstead). Ellis escreveu em seu diário um breve reconhecimento: "*Cayley in the coach—the great man of the freshmen. He has my pity—yet probably needs none*" (CRILLY, 2006, p. 35)

Ao final da Páscoa de 1840, houve um exame em que todos os alunos foram testados nos clássicos e o livro de Palcy, *Evidences of Christianity*. Este exame, denominado "*Little-Go*", foi um grande obstáculo para alguns, mas não para Arthur Cayley. Um desafio mais rigoroso veio algumas semanas depois, quando aos 19 anos, competiu com setenta ou oitenta alunos nos exames para uma bolsa de estudos no *Trinity*. As provas escritas incluíram traduções de textos em Latim e Grego, o conhecimento da civilização clássica e Matemática. Era uma questão de prestígio pessoal para um aluno ser apontado como um estudioso. Cayley foi o campeão dentre todos os alunos que realizaram o exame. Nos grandes livros da fundação, ele agora passaria a ser designado como um grande estudioso e colocado na folha de pagamento. Além disso, por ser designado como ajudante com o ensino de tarefas por um de seus tutores, ele ainda recebeu um subsídio adicional para o aluguel de seus quartos (CRILLY, 2006).

Em 1841, William Whewell se tornou o diretor do *Trinity College*, o início de seu reinado de 25 anos, e durante sua administração, o *Trinity* reforçou ainda mais sua respeitável reputação. Até o momento que Cayley chegou, Whewell estava cansado de sua atividade como tutor e passou a pleitear as carreiras administrativas da universidade. Whewell era um político universitário,

cujos pontos de vista sobre questões da Reforma Curricular assumiu maior destaque. Ele mostrou uma postura conservadora, tinha idéias firmes sobre quais eram os temas adequados para alunos de graduação e expressou a opinião de que o estudo de Clássicos, Gregos e Latim, eram elementos indispensáveis de uma educação liberal, mas era a Matemática que iria suplementar e servir de apoio para a formação do raciocínio lógico. Para Whewell, as disciplinas que valiam a pena, eram aquelas que ele considerava como atemporais. Uma vez que estes assuntos tivessem sido dominados, aí sim, os alunos poderiam estudar os assuntos “progressistas”, como química. Para ele, a matemática tinha a qualidade primordial de se preocupar com verdades indiscutíveis, enquanto que temas como a química não foram capazes de fazer essa afirmação. Assim, Cayley estava estudando um assunto valorizado, e devido sua atração para a química na sua juventude, ele não teria achado graça à luz do rigor de Whewell (CRILLY, 2006).

É óbvio que Cayley teve um sucesso contínuo no *Trinity*. Ele distinguiu-se ainda como calouro, quando passou para o ano *Sophister Junior* e no ano *Sophister Senior*. Em cada um desses anos, ele foi colocado na classe especial, e ganhou uma premiação em cada um desses anos. Em 1841, seu ano de *Sophister Senior*, ele marcou tantos pontos sobre seus rivais que o examinador ressaltou o nome de Cayley para demarcar o seu desempenho do resto. Aqueles na classe especial – “*First Class*” foram: Cayley, Bryan²⁹, Cubitt³⁰, Fenn JF³¹, Shaw³², Smith B F³³. Nesta lista, há uma forte ligação entre o *Trinity College* e o *King’s College*, de Londres, pois Cayley, Fenn, Shaw e Smith eram todos do *King’s College*. Benjamin Smith, se juntou à *Sociedade Filosófica de Cambridge* e foi um aliado de Cayley, cuja amizade continuou depois de Cambridge (CRILLY, 2006).

Enquanto a educação de Cambridge significou uma educação universitária centrada, muito mais do que é o caso de hoje, o talento matemático de Cayley foi sendo descoberto fora dos muros do *Trinity*. Entre os

²⁹ Reginald Guy Brian (1819-1912), após os estudos atuou na Direção e Vice-direção de diversos colégios protestantes na Europa.

³⁰ Joseph Cubitt (1811-1872), engenheiro civil.

³¹ Joseph Finch Fenn (1820-1884), se dedicou ao clérigo após os estudos.

³² B. Shaw. Ganhou o grau de primeira-classe em Clássicos, mas não se tornou Senior Wrangler.

³³ Benjamin Franklin Smith (1816-1893).

estudantes de outras faculdades, ele se tornou uma espécie de celebridade em Cambridge antes mesmo da aprovação no exame Tripos (CRILLY, 2006).

Para tentar garantir seu sucesso no exame, Cayley escolheu o popular William Hopkins (1793-1866) como seu treinador matemático particular. Os treinadores mantinham um olho de águia sobre as questões do Tripos e como elas apareceram de ano para ano e passavam as melhores técnicas do exame para os seus alunos particulares. Para os homens, o exame era o único foco de seu estudo. Eles tinham que enfrentar o olhar da universidade em todos os exames, com a coroação do famoso título "*Senior Wranglership*" como prêmio, ou, se não for isso, uma posição respeitável no topo da Ordem de Mérito. A Ordem de Mérito foi uma instituição nacional e completamente em consonância com os ideais da sociedade vitoriana, que salientou o individualismo. Alcançar a posição de *Senior Wrangler* era o pivô de todo o sistema. Quando a importância do Tripos de Matemática sofreu uma mudança radical durante o século XIX, a existência do *Senior Wranglership* nunca foi seriamente tão desafiada (CRILLY, 2006).

Esses treinadores particulares, eram geralmente, homens de grande erudição, mas, o mais importante, homens que tinham conseguido passar pelo sistema de Cambridge. Não poderiam haver melhores opções. William Hopkins, obteve o título de *Senior Wrangler* em 1827, cuja base matemática foi forte, incluindo Augusto De Morgan como seu professor. Hopkins era um treinador de sucesso, a renda derivada de suas tutorias iam muito além do salário pago aos ocupantes das prestigiadas cadeiras de Cambridge. Hopkins se tornou amplamente conhecido como um "fabricante de Wrangler Sênior" e poderia contar muitos cientistas vitorianos notáveis entre sua clientela. Em um período de 22 anos, ele treinou o melhor aluno em nada menos que dezessete vezes, feito superado apenas pelo seu próprio aluno EJ Routh³⁴, que dominou a cena do treinamento na segunda metade do século (CRILLY, 2006).

Um homem de temperamento refinado, Hopkins tinha um interesse cuidadoso em seus estudantes, avaliando sua capacidade no futuro no exame

³⁴ Edward John Routh (1831-1907). Em 1863, este matemático foi um dos sete candidatos que concorreram com Arthur Cayley pela primeira cadeira de Sadleirian na Universidade de Cambridge.

e aconselhava-os sobre as suas perspectivas futuras. Seus alunos, por sua vez, foram atraídos pela sua reputação, um fator que garantia o seu ensino ser muito procurado. A reputação dos treinadores diminuía se os seus alunos não fossem colocados em uma posição mais elevada na ordem de mérito, e em uma ocasião, até mesmo o grande Hopkins sofreu um revés, mas ele se recuperou no ano seguinte, com uma série de sucessos, incluindo os dois primeiros lugares. A sua casa em Cambridge se tornou um foco para eventos sociais entre a nova geração científica, dons e estudantes, certamente eles estavam animados. Solteiros que frequentavam sua casa eram criteriosamente emparelhado com as filhas da elite local por meio da esposa de seu segundo casamento (ele era viúvo da primeira esposa) (CRILLY, 2006).

Em seu papel como treinador, Hopkins ensinou cálculo diferencial, cálculo das variações, instrumentação astronômica, hidrostática e dinâmica, teoria lunar e planetária, mecânica, óptica, som e luz. Ele preparava seus alunos para os Tripos com suas aulas impecáveis. Um de seus pontos fortes, era que ele poderia relacionar a matemática para uma experiência mais ampla do mundo físico e para a filosofia. Para Cayley e todos os iniciantes matemáticos e cientistas que participaram de seu curso de estudo, tiveram uma experiência rigorosa. Como subproduto, os alunos de Hopkins ganharam uma atitude de pesquisa em seus trabalhos e isso gerou um "espírito de investigação", foi talvez esse o seu maior presente para seus estudantes. Hopkins expôs seus alunos a teorias "up-to-date", como as obras de Lagrange *Berlin Mémoires* e *Mécanique Analytique*. Por meio da leitura desses trabalhos, Cayley mostrou ao seu treinador um novo teorema que ele tinha deduzido em integrais múltiplas, e este trabalho altamente técnico, resultou em dois artigos publicados no *Cambridge Mathematical Journal*. (CRILLY, 2006).

Em janeiro de 1842, Cayley despontava como o grande favorito do *Trinity College* para obter uma boa colocação da universidade no exame Tripos (CRILLY, 2006).

Desde o seu surgimento, em meados do século XVIII, o exame Tripos para o bacharelado tinha evoluído para um sistema mais aprimorado. Os antigos exames orais, realizados em latim, aos poucos deu lugar a um sistema de exame escrito com documentos contendo questões impressas. Embora se alongar em anos posteriores, em 1842 havia seis dias de exame contínuo

compreendendo 33 horas de trabalhos escritos. Todos os dias, inclusive sábado, os candidatos sentavam para serem examinados duas horas e meia de manhã e três horas à tarde. Esse exame acontecia na sede do Senado em Londres. Os graduandos competiam tanto para si e para o prestígio de sua universidade, este ano havia 120 candidatos, dos quais 20 eram do *Trinity* (CRILLY, 2006).

O exame de 1842 representou um desafio intelectual formidável. Vários anos depois, o alcance dos Tripos foi reduzido, mas as perguntas que Cayley era obrigado a responder ainda foram selecionados a partir de um amplo programa de estudos (CRILLY, 2006).

A cada ano, a universidade nomeava um quarteto de Cambridge à Casa Senado, sendo dois moderadores para supervisionar o processo e definir questões mais dois examinadores para ajudar. O moderador sênior foi Thomas Gaskin (1810-1887), apoiado pelo DF Gregory³⁵, o editor do *Cambridge Mathematical Journal* e, segundo alguns, o melhor matemático na universidade (CRILLY, 2006).

Eram todos homens jovens. Cayley tinha apenas alguns meses após ter completado 20 anos, nem mesmo ainda possuía a idade de maioridade quando ele sentou-se pronto para realizar o exame no Senado, tremendo no frio. Sentado perto dele estavam William Castlehow e Samuel Carter (do *Emmanuel College*, dois homens perto da capacidade e com a esperança de brilhar por seu colégio e a si mesmos. Edward Cook e James Clubbe oriundos de *St. John's*, grande rival do *Trinity College* (CRILLY, 2006).

O primeiro papel do exame foi introdutório e levou a rubrica: "Cálculo Diferencial não era para ser usado". No próprio papel, os candidatos foram convidados a responder a tantas perguntas que podiam, portanto, vantagem para um escritor com velocidade. A resolução de problemas também foi testada, portanto, rapidez e prontidão foram habilidades testadas. As questões do exame foram definidas antes de Cayley refletir que essas perguntas seriam temas de seu futuro como pesquisador. Foi apontado que no exame, as questões foram equilibradas entre a Matemática Pura (sobre temas como o cálculo diferencial e integral, geometria analítica) e Matemática Mistas (que

³⁵ Duncan Farquharson Gregory (1813-1844).

incluía perguntas sobre óptica, hidrostática, astronomia e *Principia* de Newton, um estudo obrigatório para qualquer aluno) (CRILLY, 2006).

Crilly (2006) apresenta algumas das questões encontradas durante a realização do exame Tripos de Cayley em 1942:

“Enuncie e prove o Lema X. de Newton. (a partir do *Principia*)”

“Investigue o Teorema de Sturm para separar as raízes de uma equação. (publicado por Sturm, em 1835)”

“Explique como a atração da Lua sobre a Terra, cada um sendo supostamente estacionário, aumentaria as águas do mar, no lado da Terra mais próximo da Lua, e também no lado mais distante dela. Assumindo que a expressão para a altura da maré é determinado pelo tempo e lugar, encontre o tempo de maré alta”.

O estudo da astronomia foi uma parte importante do currículo do *Trinity* e foi examinado minuciosamente. "Astronomia", escreveu Whewell, "não é só a rainha das ciências, mas em um sentido mais estrito do termo, a única ciência perfeita", de modo que era um sujeito admirável para o exame a partir deste ponto de vista (CRILLY, 2006). Havia algumas questões gerais do tipo:

“Investigue a alteração do eixo maior da órbita de um planeta perturbado”.

Algumas perguntas foram mais especializadas:

"Encontre o movimento horário dos nódulos da Lua em uma órbita circular, e mostre que o movimento horário médio dos nódulos é a metade do movimento horário, quando a Lua está em syzygy”.

Com uma gama de questões dedicadas à matemática da astronomia, não é de surpreender que os graduados de Cambridge pegou um estudo sério de Astronomia e continuaram esta tradição quando eles deixaram a universidade e tornaram-se membros influentes da *Royal Astronomical Society*. Cayley era um e fez muitas contribuições relacionadas com o movimento da lua e problemas geométricos relacionados com a astronomia (CRILLY, 2006).

De acordo com Crilly (2006), algo desenvolvido nos Tripos com imensa importância na educação matemática de Cayley foi o surgimento da geometria analítica. A “Revolução Analítica” que tinha recebido incentivo da Sociedade Analítica em sua passagem de curta duração, foi gradualmente deslocando a geometria descritiva. Nos primeiros trinta anos do século, esta abordagem algébrica à geometria foi firmemente estabelecida na Inglaterra. Vários livros didáticos, ou Continentais apareceram, tais como: *Principles of Analytical Geometry* [1826] de Hamilton, *Analytical Geometry of Three Dimensions* [1830] de John Hymcrs e também seu *Treatise on Conic Sections* [1837]. Estes tratados, foi um material a partir de um ponto de vista avançado e ajudou a estabelecer firmemente geometria analítica com um lugar de destaque no exame Tripos. No exame de 1842, Cayley teve a oportunidade de responder a perguntas nesse aspecto, tais como:

"Encontre as equações para uma reta tangente em qualquer ponto de uma curva de dupla curvatura [a curva espaço]. Encontre também a equação para o lugar geométrico de todas as retas tangentes que podem ser atraídas para uma superfície em um ponto".

Algumas questões de Matemática Mista também apareceram no caderno de questões:

“Explique o objeto e as vantagens de vasculhar o cano de uma arma”.

“Situe e prove o princípio das velocidades virtuais, aplicá-la e encontrar a condição de equilíbrio quando três forças atuam sobre um ponto”.

“Explique plenamente a causa de distorção de imagens formadas por lentes e espelhos, e mostre em que caso as extremidades de uma imagem formada por uma lente é mais ampliada do que as partes centrais, e em que casos eles são menos ampliada.”

"Um carro se move sobre uma estrada de ferro com uma determinada velocidade em torno de uma curva de raio dado: Encontre o valor pelo qual o trilho

exterior deve ser elevada, acima do interno, a fim de que o carro não deve ser tombado para o lado de fora”.

“Supondo-se que, na expressão para o raio de uma camada mais ou menos esférica da terra, considerada como uma massa heterogênea rotativa inicialmente fluida, todos os coeficientes de Laplace exceto os que desaparecem da segunda ordem; prove que os estratos de igual densidade são todos esferóides concêntricos de revolução, cujos eixos coincidem sobre as quais a terra revolve”. Obs: Os coeficientes de Laplace, são denominados atualmente como Polinômios de Legendre.

“Declare os outros resultados da hipótese de fluidez original da Terra, a hipótese subsidiária feita em obtê-los, e as provas da verdade da teoria decorrente da comparação de seus resultados com a observação”.

Após o exame, Cayley largou a caneta de pena e saiu do Senado. O Tripos finalmente tinha acabado, mas como ele iria comemorar sua nova liberdade no final do dia? A maioria de seus colegas celebraram com alívio, e desencadearam em exuberantes travessuras estudantis. Em vez disso, Cayley foi para a biblioteca da faculdade. Cinco dias contínuos de exame não anularam o seu apetite por matemática e pegou emprestado *Géométrie de position*, de Lazare Carnot. *Politics* de Aristóteles foi outro empréstimo, e um outro para descontração intitulado *Lettres de Madame de Sévigné, de sa Famille, et de ses Amis*, escrito pela Marquesa de Sévigné, com seus contos picantes da nobreza francesa. Dessa forma, todo o barulho dos exames parecem ter sido levemente colocados de lado (CRILLY, 2006).

Com os resultados Tripos iminentes, Cayley fez planos de ir para Londres. Sentado no ônibus noturno, ele tem a fama de ter tido os resultados entregues até ele, mas "ele calmamente colocou-o no bolso, resignando-se muito contente da necessidade de esperar até o amanhecer para o conhecimento de seu conteúdo". A Ordem de Mérito compreende três classes. Wranglers, Senior Optimes e Junior Optimes, com todos os alunos que aparecem em uma lista numerada. Os Wranglers são os alunos da primeira classe, esse nome "Wrangler" talvez tenha vindo das disputas orais que foram o método de examinar no Tripos, no século XVIII (CRILLY, 2006).

Em 1842, os doze primeiro colocados dentre trinta e oito que obtiveram a classe Wrangler (entretanto, na ordem de mérito, continha 114 alunos ao todo) foram:

1. Cayley	Trinity
2. Simpson ³⁶	St. John's
3. Mayor R. B.	St. John's
4. Fuller	St. Peter's
5. Bird	St. John's
6. Jarvis	Corpus Christie
7. Shortland ³⁷	Pembroke
8. Austin	St. Peter's
9. Fenwick	Corpus Christie
10. Jones	Clare
11. Frost	St. John's
12. Parnell	St. John's

Em janeiro de 1842, Cayley, foi o foco de atenção quando ele tomou o seu lugar no Senado como a celebridade do dia. Os acadêmicos vestiram seus trajes cerimoniais, a bandeira foi pendurada livremente entre portas e edifícios, e os sinos soaram. Cayley foi apresentado ao vice-chanceler com toda a pompa que Cambridge conseguiu lhe reunir: O Senior Wrangler é conduzido sozinho em meio a enormes aplausos que abalam o edifício. Cayley obteve a maior honra que a Universidade tem de conceder a um intelectual singular (CRILLY, 2006).

É importante destacarmos que o prêmio de Senior Wrangler, na época, não era um fato comum no *Trinity College*. Cayley tinha ganho a reputação de ser um mero matemático, o que lhe fez grande injustiça, pois ele era realmente um homem de muita informação variada. Destaco ainda que após o sucesso no Tripos de Matemática, Cayley novamente mostrou suas altas habilidades ao ganhar o monetário "*Smith's Prize*", prêmio concedido após um cronograma que compreende uma semana de exames competitivos. A diferença entre o

³⁶ Charles Turner Simpson.

³⁷ Peter Frederick Shortland (1815-1888). Seguiu carreira na marinha.

“*Smith’s Prize*” e o Tripos era um balanceamento maior em questões de Filosofia Natural ao invés de Matemática.

CAPÍTULO 2

ROYAL SOCIETY OF LONDON

O objetivo desse capítulo é dar um panorama da situação da *Royal Society of London* no período compreendido do final do século XVIII até a primeira metade do século XIX, desde que esse foi o período de maior desvalorização do atributo: produzir ciência.

Além disso, as ideias apresentadas nesse capítulo são importantes para relatar as condições que o matemático Arthur Cayley adentrou nessa “prestigiosa” Sociedade.

Para fundamentar esse capítulo irei me basear principalmente na obra de Gleason (1991), que escreve a História da *Royal Society of London* desde a sua criação, fixaremos apenas o período que nos interessa: a primeira metade do século XIX.

2.1 - UM BREVE PANORAMA

Após a Revolução Industrial houve uma mudança de foco no cenário britânico, principalmente em mudanças que envolveram a estrutura tradicional de família. Devido a construção das indústrias nas cidades e o crescimento de moradias que foram surgindo aos seus entornos, a noção de família que os ingleses tinham foi destruída aos poucos por conta da migração em massa dos moradores do campo para passar a viver nas cidades, ou seja, uma nação de artesãos e agricultores estava se transformando em uma nação de operários e moradores da cidade (GLEASON, 1991).

Essa transformação foi significativa para evidenciar a desigualdade social da população em virtude do predomínio crescente do interesse mercantil, gerando uma classe média forte e cuja base era sustentada por grosseiras injustiças cometidas aos pobres e indigentes nas favelas que foram se formando nas cidades. Essas ações contribuíram para que fosse plantado um

sentimento de desilusão, estado de incerteza e descontentamento em diversos aspectos da sociedade ao final do século XVIII e nutridas no início do século XIX (GLEASON, 1991).

Como uma forma de reação à essas mudanças políticas, sociais e econômicas relativas a sociedade britânica, uma nova consciência de responsabilidade social surgiu: os homens iniciaram debates em relação às questões prementes do crescimento populacional, a situação dos pobres e ao estado da educação no país. Um espírito de reforma parecia permear todos os aspectos da sociedade, mas o caminho para a reforma foi muitas vezes repleta de frustração e decepção (GLEASON, 1991).

Um segmento da sociedade que estava intimamente afetado pelas mudanças trazidas pela Revolução Industrial, era a comunidade científica do país. Através da crescente ascensão industrial, principalmente no norte da Inglaterra, o desenvolvimento da tecnologia, assumiu um papel mais proeminente na sociedade. É importante salientar que coincidentemente com a mudança na orientação da ciência, houve uma mudança nas origens sociais daqueles que estavam envolvidos nesse processo de industrialização, e os velhos laços aristocráticos estavam sendo substituídos por fortes raízes da classe média (GLEASON, 1991).

Durante toda essa mudança no cenário da sociedade britânica, a *Royal Society of London* continuava detendo a hegemonia da produção e divulgação da ciência na Inglaterra, entretanto, após a Revolução Industrial, ela foi desafiada por novas sociedades provinciais oriundas das cidades industriais do norte (GLEASON, 1991).

Segundo Gleason (1991, p.2), essa época foi um período em que os homens da ciência se atreveram a criticar o estado da ciência na Inglaterra, a partir do momento em que eles começaram a reavaliar e redefinir os seus objetivos e expectativas. Dessa forma, o final do século XVIII e início do século XIX foi marcado por um compromisso renovado com a mudança e inovação dos homens da ciência inglesa, inspirados em seu desejo de uma reforma na casa.

Naquele período a ciência estava se desenvolvendo ao longo de linhas profissionais na Alemanha e na França, enquanto que na Inglaterra ela estava passando por uma auto-avaliação crítica (GLEASON, 1991).

A partir do final do século XVIII, houve dúvidas por parte da sociedade e dos homens da ciência em relação ao prestígio da *Royal Society of London*. A instituição passou a sofrer constantes críticas por conta da grande quantidade de membros da Sociedade que não tinham nenhum vínculo com a criação de novas técnicas científicas ou tecnológicas, ocupando apenas a posição de padrinhos/patronos (homens que não eram cientistas, mas financiavam as pesquisas).

Com as críticas que rodeavam através dos jornais e revistas da época, a *Royal Society of London* passou a ser questionada se ainda merecia ser considerada o centro organizacional para os cientistas ingleses, pois a *Royal Society of London* foi se tornando uma amálgama solta de cientistas e padrinhos/patronos (GLEASON, 1991).

A ciência na Inglaterra não era nem organizada e nem apadrinhada o suficiente, pois não havia tradição de formação científica no país, quer fosse nas universidades ou nas escolas públicas principais, e os homens de ciência não contavam com subsídios diretos do governo de apoio mínimos para o desenvolvimento de suas pesquisas. Embora houvesse um número de homens notáveis da ciência na Inglaterra, na época não havia nenhum sentimento de comunidade ou de cooperação institucional entre as sociedades científicas britânicas existentes nesse período (GLEASON, 1991).

Uma informação que gerava um considerável desagrado por parte da comunidade científica na Inglaterra era a ideia de estar ficando para trás em relação aos países considerandos grandes potências e competidores direto da Inglaterra na produção e desenvolvimento de tecnologia. De acordo com Gleason (1991, p.4), enquanto a França e a Alemanha estavam engajadas no desenvolvimento de um sistema educacional em que a ciência teórica e tecnológica estavam intimamente combinadas, a Inglaterra não beneficiava de qualquer vantagem comparável em relação aos seus concorrentes.

A exceção se dava somente nas sociedades científicas provinciais do norte do país, onde havia um sentimento de comunidade e foram totalmente influenciadas pela Revolução Industrial. Era também nessas sociedades que a teoria e a aplicação prática dos conhecimentos científicos estavam unidas, visto que os novos campos científicos foram principalmente dedicados à tecnologia. Entretanto, apesar dessas sociedades provinciais terem alguma instrução técnica, eram essencialmente associações voluntárias ou clubes, sustentadas somente pelas contribuições individuais dos membros. Essas sociedades se diferiam da *Royal Society of London*, tanto em sua orientação de classe média empresa e na sua incorporação bem sucedida de ciência e tecnologia (GLEASON, 1991).

Dessa forma, Gleason (1991, p.21) diz que, enquanto nas novas sociedades provinciais no norte da Inglaterra a ciência e tecnologia desenvolvia um relacionamento próximo, na *Royal Society of London* isso se manteve fisicamente e filosoficamente separadas.

As três primeiras décadas do século XIX foram marcadas por uma reavaliação do estado da ciência, especialmente na matemática. Podemos verificar essa informação através de uma crítica publicada, na época, pelos editores da *Edinburgh Review*³⁸:

It is certainly a curious problem with respect to national genius, whence it arises, that the country in Europe most generally acknowledged to abound in men of strong intellect and sound judgment, should, for the last 70 or 80 years, have been inferior to so many of its neighbours in the cultivation of the science which requires the greatest and most steady exertion of the understanding; and that this relaxation should immediately follow the period when the greatest of all mathematical discoveries had been made in the same country (EDINBURGH REVIEW, VOL 27, 1816, p.99).

Essa crítica foi direcionada no sentido de que a matemática ensinada na Inglaterra era diferente da ensinada na França e Alemanha.

Gleason (1991, p.4), comenta que gradualmente foi surgindo uma consciência mais profunda dos problemas que afligiam a *Royal Society of*

³⁸ Influente revista de circulação na sociedade britânica no século XIX, fundada em 1802 e encerrando suas atividades em 1929.

London e um impulso para reformá-los, pois no início do século XIX, a *Royal Society of London* continuava a ser submetida a duras críticas por aqueles que sentiam que a Sociedade já não refletia os interesses da comunidade científica emergente. Os principais críticos eram herdeiros do descontentamento social que prevalecia na época.

Essa insatisfação com a *Royal Society of London* começou a ser expressada, tanto privada como publicamente. Gleason (1991, p.5), relata que os críticos alegavam que a Sociedade, a partir da última metade do século XVIII, foi se definhando e deixando de honrar com seu objetivo original, que era o de produzir ciência e conhecimento natural, e ainda acusaram que faltava o espírito dinâmico que havia caracterizado as glórias dos trabalhos e conhecimentos produzidos do passado na instituição. As críticas recebidas eram no sentido de que a *Royal Society of London* tinha se "*afundado numa espécie de inércia*" (GLEASON, 1991).

Voltando a falar sobre a crise do prestígio da *Royal Society of London*, um dos fatores, senão o maior, e que passou a gerar irritação da comunidade científica no final do século XVIII até meados do século XIX, era a grande quantidade de membros não-científicos que a Sociedade tinha, de acordo com Gleason (1991, p.3), "*the number of fellows had increased significantly, from one-hundred-twenty-five in 1700 to close to five-hundred at the end of the century, almost sixty percent of whom were non-scientists*".

Ao longo do século XVIII e meados do século XIX, a *Royal Society* estava intimamente ligada com os interesses aristocráticos. As críticas em relação a essa grande quantidade de membros não científicos, enfatizavam que a *Royal Society of London* priorizava a riqueza ao invés de verdadeiros conhecimentos científicos.

Segundo Gleason (1991), uma das críticas apontou que se a sociedade mantivesse a primazia de pessoas com boas condições financeiras como critério de admissão, ela poderia "*boast of being the richest scientific association in Europe, but . . . never . . . the most learned*" (GLEASON, 1991, p.5).

Em relação a exorbitante quantidade de membros não-científicos quando comparado a quantidade de membros que produziam ciência de fato na *Royal Society of London*, o *journal Westminster Review*, uma revista britânica, publicou em 1828 que “*the Royal Society is not conspicuously rich in science when we number its long list of members; and it has not always been ready in finding adequate presidents and secretaries*” (GLEASON, 1991, p.5).

Nessa crítica, pudemos perceber que a revista também joga a responsabilidade da crise que amargava a *Royal Society of London* em seus membros de destaque no Conselho da sociedade. De acordo com Gleason (1991, p.4), as críticas na época, apontavam que o ex-presidente da Sociedade, o botânico Joseph Banks (1743-1820), que assumiu a presidência em 1771 e ocupou esse cargo durante 41 anos, era o maior responsável pelo estado amargável em que se encontrava a Sociedade.

Gleason (1991), ainda informa que o *journal Westminster Review*, continua falando que a ciência “*was not properly an object of cultivation in England. If it were, it would be respected, courted, applauded*” (GLEASON, 1991, p.5). Finalizando a crítica, os editores concluíram que ao invés dos indivíduos, o maior problema era o sistema que vinha sendo adotado pela sociedade (GLEASON, 1991).

O sistema criticado pela revista, se refere à priorização e facilidade para membros não-científicos adentrarem ao corpo de membros da *Royal Society of London* desde que possuíssem uma grande influência na sociedade inglesa ou ser provido de muitas riquezas.

Após a eleição do químico Humphry Davy (1778-1829), como presidente da sociedade em 1820, de acordo com Gleason (1991, p.6), os membros científicos puderam observar uma mudança em relação ao modo de administração da Sociedade, visto que em seu primeiro discurso, ele descreveu suas esperanças e aspirações para a Sociedade. Em sua fala, Gleason (1991), escreve que ele discutiu a relação entre a *Royal Society* com novas sociedades científicas, expressando a esperança de que as experiências de grande importância que pudessem exigir fundos dos indivíduos dessas sociedades, poderiam ser patrocinado através da utilização dos recursos financeiros da

Sociedade. Essa atitude de Davy, beneficiaria os membros científicos que não apresentavam uma boa condição financeira para adentrar a Sociedade, pois a admissão, taxas e anuidade da Sociedade eram valores altos para alguém que não pertencesse às classes economicamente privilegiadas (GLEASON, 1991).

Continuando com o discurso de Davy, ele considerou mais pertinente um rejuvenescimento da comunidade científica na Inglaterra, e aconselhou os companheiros da Sociedade:

A right to expect from those amongst ... [them] gifted with adequated talents, who have not yet laboured for science, some proofs of their zeal in promoting its progress Let us then labour together, and steadily endeavour to gain what are perhaps the noblest objects of ambition--acquisitions which may be useful to our fellow-creatures. Let it not be said, that, a period when our empire was at its highest pitch of greatness, the sciences began to decline: let us rather hope that posterity will find, in the Philosophical Transactions of our days, proofs that we were not unworthy of the times in which we lived (GLEASON, 1991, p.7).

Ao longo de sua história, o prestígio da *Royal Society of London* refletiu o estado de suas finanças, o zelo e a energia dos oficiais e Conselhos, bem como o número e composição dos membros. Gleason (1991, p.7), afirma que não era tanto a Sociedade que deixou sua marca na ciência, mas sim os membros que forneceram a inspiração e direção para os rumos da ciência.

A década de 1820 foi marcada por promessas e decepções. Quando Davy foi eleito presidente, ele reconheceu as responsabilidades de seu cargo "*with a high sense of their importance, and a sanguine expectation and desire of promoting the interests of the Royal Society and of science*" (GLEASON, 1991, p.7). Por meio de seu discurso, pudemos notar que ele estava consciente da importância de admitir mais membros científicos na sociedade, entretanto, Gleason (1991, p.8), comenta que ele estava determinado a ser zeloso ao exame dos candidatos apresentados para compor a sociedade e que apesar de suas boas intenções, o número de membros admitidos anualmente manteve-se elevada, exceto durante os anos 1823 a 1825, que teve uma média anual de 26.

Gleason (1991, p.8), diz que em 1827 os membros sentiram a necessidade de realizar uma reforma no sistema da Sociedade. O astrônomo

James South (1785-1867), membro desde 1821, encaminhou uma proposta ao Conselho da sociedade, que em resposta, criou uma comissão denominada *Wollaston Committee*, para "*consider the best means of limiting the number of members admitted to the Royal Society, and to make such suggestions on that subject as may seem to them conducive to the welfare of the Society*" (GLEASON, 1991, p.8).

Essa comissão foi criada como uma tentativa de dar início a uma discussão dos procedimentos de admissão e apaziguar as críticas consideravam o excessivo número de membros não-científicos como uma das principais razões para os males que aflingiam a Sociedade.

A *Wollaston Committee* considerou que uma percentagem tão elevada de membros não-científicos é capaz de exercer uma grande influência sobre a direção da Sociedade, portanto, recomendou que um controle imediato deveria ser implementado no procedimento de admissão dos novos membros, diminuindo para somente quatro novos membros a quantidade de eleitos anualmente, com a finalidade de reduzir o número de membros que era de 714 para 400 (GLEASON, 1991).

Entretanto, podemos perceber que há um fator conflitante nessa decisão, pois reduzir a quantidade de membros não-científicos da Sociedade significaria diminuir o número de padrinhos para custear as pesquisas desenvolvidas e conseqüentemente, a quantidade de recursos financeiros captados pela Sociedade através de taxas e anuidades, por exemplo, também seria menor. Ou seja, essa diminuição implicaria na redução da arrecadação monetária da *Royal Society of London*.

Segundo Gleason (1991, p.8), a prática de admitir um grande número de membros não-científicos remontam aos primórdios da Sociedade, quando um número de homens da sociedade que jamais tiveram algum contato de aprendizado na ciência e nem estavam interessados em trabalhar ativamente para o seu avanço, foram admitidos, e de acordo com Gleason (1991, p.9), essa atitude se fez necessária em virtude dos fundadores da Sociedade desfrutarem apenas de algumas parcelas de terra, que foram doadas a Sociedade, que revendeu boa parte dessas, mas certamente não evitaria a

escassez de recursos, portanto, a *Royal Society of London* necessitaria depender fortemente das contribuições financeiras dos membros não-científicos.

Gleason (1991, p.9), informa que essa não foi a primeira demonstração de preocupação com a predominância de membros não-científicos na Sociedade, pois em 1683, ainda nos primórdios da Sociedade, o arquiteto Christopher Wren (1632-1723) e que também presidiu a *Royal Society* nos anos compreendidos entre 1680-1682, advertiu ao Conselho para estudar a "*desirability of cheking the indiscriminate admission of candidates who possessed inadequate qualifications*" (GLEASON, 1991, p.9).

Cinquenta anos mais tarde, durante a presidência do médico Hans Sloane (1660-1753) e sucessor de Isaac Newton (1643-1727), outra tentativa foi feita para modificar a influência dos membros não-científicos. Foi analisado pelo Conselho a ideia de limitar o número desses membros, entretanto essa proposta fora negada (GLEASON, 1991).

Voltando ao ano de 1827, as recomendações da *Wollaston Committee* foram arquivadas. O engenheiro Davies Gilbert (1767-1839) foi eleito o novo presidente em 1828, e embora ele tivesse participado da *Wollaston Committee*, inclusive assinando o relatório entregue ao Conselho no ano anterior, sentia que tais reformas seriam desaconselháveis naquele momento. Gilbert

was sure the best thing to do was leave the constitution of the Society untouched, for it had everything to recommend it It was a unique body which gathered to itself men of varying distinction, and set no limits to knowledge To revise the constitution in order to exclude persons who were geologists, landowners who were engineers, and soldiers who were botanists seemed to deny their natural rights to eminence, even though they were but part-timers (GLEASON, 1991, p.10).

Com essa atitude, Gilbert sinalizava que não iria investir em propostas que caminhassem para uma mudança no sistema da instituição. Entretanto, o sentimento de Gilbert não era compartilhado por todos membros, alguns estavam convencidos e se lembravam das palavras de Humphry Davy no discurso ao assumir seu mandato como presidente, de que o futuro da ciência

inglesa pertencia a uma nova geração de investigadores científicos (GLEASON, 1991).

É importante lembrar que quando Humphry Davy assumiu o cargo em 1820, ele se comprometeu a preservar o prestígio da Sociedade, entretanto com a derrota do relatório da *Wollaston Committee*, Gleason (1991, p.21), relata que os rumores de descontentamento que vinham sendo abafados durante os anos anteriores, começaram a ser ouvidas mais distintamente. Essa derrota soou para o declínio da controvérsia científica.

Essa insatisfação com as ideias do atual presidente e da manutenção do sistema da *Royal Society of London* foi manifestada publicamente em 1830 pelo matemático e filósofo Charles Babbage (1791-1871), membro desde 1816 da sociedade, através do seu livro intitulado *Reflections on the Decline of Science in England, and on some of its Causes*.

Nesse livro, podemos ver uma comparação em relação ao número de membros da *Royal Society of London* com outras três comunidades científicas ilustres da Europa: *Institute of France*, *Royal Academy of Berlin* e a *Italian Academy of Forty*.

Tabela 1: Quadro comparativo entre quatro sociedades científicas européias

Name Country.	Population.	Number of Members of its Academy.	Number of Foreign Members.
1. England .	22,299,000	685 -	50
2. France .	32,058,000	75	{ 8 Mem. 100 Corr.
3. Prussia .	12,415,000	38	
4. Italy . .	12,000,000	40	8

Fonte: (BABBAGE, 1830, p. 31)

E ainda apresenta a seguinte proporção resultante da tabela comparativa acima:

It appears then, that in France, one person out of 427,000 is a member of the Institute. That in Italy and Prussia, about one out of 300,000 persons is a member of their Academies. That in England, every 32,000 inhabitants produces a Fellow of the Royal Society. Looking merely at these proportions, the estimation of a seat in the Academy of Berlin, must be more than nine times as valuable as a similar situation in England; and a member of the Institute of France will be more than thirteen times more rare in his country than a Fellow of the Royal Society is in England (BABBAGE, 1830, p.31).

Ele ainda comenta que esses números refletem o respeito, ou mesmo falta dele, aos olhos dos membros e não-membros da *Royal Society of London*. E comenta que a razão de ter escrito esse livro se deu por conta das diversas tentativas frustradas de limitar a entrada de membros não-científicos na Sociedade. Em relação a não mudança do sistema da Sociedade ele declara:

My object is to amend it; but, like all deeply-rooted complaints, the operation which alone can contribute to its cure, is necessarily painful. Had the words of remonstrance or reproof found utterance through other channels, I had gladly been silent, content to support by my vote the reasonings of the friend of science and of the Society. But this has not been the case, and after frustrated efforts to introduce improvements, I shall now endeavour, by the force of plain, but perhaps painful truths, to direct public opinion in calling for such a reform, as shall rescue the Royal Society from contempt in our own country, from ridicule in others (BABBAGE, 1830, p.44).

Como mostrado anteriormente, a *Royal Society* recebeu diversas críticas durante esse período, entretanto, de acordo com Gleason (1991, p.12), Babbage foi o primeiro a expressar sua insatisfação sobre os assuntos internos da Sociedade. Em seu livro ele denuncia diversos aspectos, principalmente as desigualdades no sistema eleitoral, alegando que o interesse da ciência e seu avanço, tem sido negligenciada em favor daqueles que podiam pagar as taxas elevadas para admissão.

Além de Babbage, Gleason (1991, p.13), informa que o ex-patriota italiano e médico Augustus Bozzi Granville (1783-1872), membro da *Royal Society* desde 1817, também publicou um livro na mesma época, intitulado como *Science Without a Head*, em que declarou que, embora a Sociedade

tivesse aumentado sua lista de membros para mais de setecentos, seria difícil destacar mais do que meia dúzia de trabalho duro e homens da ciência experimental tornado-se visível por seus trabalhos.

Apesar de muitos pontos desses trabalhos não serem novidades em relação ao que já se estavam comentando na época, Gleason (1991, p.13), diz que suas reflexões despertaram um sentimento de injustiça e de orgulho ferido. Através do estímulo da sua indignação, os homens da ciência novamente partiram para a tentativa de empregar a reforma do sistema da *Royal Society*. Ao longo da década de 1830, o estado da ciência na Inglaterra e na *Royal Society* estava aberta e entusiasticamente discutidos nos cafés e clubes privados, documentos políticos e jornais científicos, correspondência privada e diários pessoais.

Mesmo com os manifestos públicos, Gleason (1991, p.15), relata que a ciência inglesa não recebeu a atenção nacional que Babbage e os outros declinistas pretendiam: apoio financeiro, prêmios e honrarias públicas. Numa altura em que outros governos foram buscar a orientação de seus homens da ciência, na ciência inglesa faltou apoio organizacional, o patrocínio do governo, e estímulo acadêmico. Poucos cientistas e cargos universitários, resultados da pouca atenção dada para a educação e segurança financeira dos homens de ciência.

Nas eleições presidenciais da sociedade em 1830, Gleason (1991, p.15), afirma que muitos membros científicos ficaram desiludidos pelos recentes acontecimentos na Sociedade e principalmente com a derrota do candidato que estavam apoiando, o astrônomo William Herschel (1738-1822). Insatisfeitos com o resultado e decididos a remodelar a ciência inglesa, vários dos principais apoiantes de Herschel se uniram para formar uma nova sociedade científica na tentativa de estabelecer um sentido de organização para a comunidade científica. Nasce daí então, em 1831, a *British Association for the Advancement of Science*³⁹.

Gleason (1991, p.16), aponta que a exclusividade dessa nova sociedade era a sua orientação democrática e profissional. Os fundadores da *British*

³⁹ Arthur Cayley veio a presidir esta Sociedade nos anos de 1883-1884.

Association estavam dispostos a aceitar a adesão de qualquer um que teve pelo menos um artigo publicado por alguma das sociedades filosóficas do Império Britânico. Além disso, eles previam uma sociedade científica organizada e dirigida por cientistas para seu benefício mútuo. A *British Association* foi concebida para funcionar como um corpo de trabalho, onde homens de diferentes partes da Inglaterra pudessem se reunir para conhecerem novos cientistas e compartilhar ideias. A autora ainda informa que essa Sociedade teve uma característica inovadora em relação as demais sociedades científicas inglesas: apoio para pesquisas independentes. Pela primeira vez, cientistas britânicos receberam auxílio financeiro, bem como o incentivo institucional para que pudessem continuar seus estudos. Essa atmosfera promoveu um sentimento de comunidade e esforço cooperativo que estava faltando na Inglaterra na época (GLEASON, 1991).

A década de 1830, segundo Gleason (1991, p.17), foi marcada pelo surgimento de cientistas autoconscientes e uma nova valorização das necessidades da ciência na Inglaterra, a *British Association for the Advancement of Science* proporcionou um espaço público para esses cientistas aumentarem suas especializações.

Devido a rápida expansão da ciência no século XIX, era praticamente impossível um homem abraçar diversos ramos da filosofia, e os cientistas começaram a dedicar sua atenção para áreas específicas de pesquisa. Gleason (1991, p.17), expõe que essa fase reflete o exato momento em que os cientistas deslocaram suas posições de pesquisadores dedicados e cultivadores amadores, passando a ser substituídos pelos cientistas profissionais.

Com esses inegáveis avanços alcançados pela *British Association*, a *Royal Society of London* lentamente despertou para a necessidade de uma reforma, dessa forma, cientes do sucesso das comissões de especialização de novos cientistas da *British Association*, a *Royal Society* formou comitês científicos para informar o Conselho sobre os méritos relativos dos vários trabalhos e artigos submetidos para a concessão e publicação (GLEASON, 1991, p.17-18).

Na década de 1840, Gleason (1991, p.18), expõe que os membros científicos da *Royal Society* estavam começando a avaliar as necessidades da Sociedade em termos de seu compromisso com a melhoria do conhecimento natural. Dessa forma, os reformadores de 1846 dedicaram suas atenções para a revisão da estrutura interna da Sociedade, embora conscientes dos problemas inerentes à administração, eles foram determinados para limitar o número de membros novos anualmente admitidos. Eles acreditavam que, uma vez que o problema fundamental fosse eliminado, outras questões poderiam resolver por si. Com a atitude de restringir os seus membros e examinar cuidadosamente as qualificações científicas dos candidatos a admissão, havia esperança para exercer uma influência viável para a comunidade científica e tornar verdadeiramente representativa dos interesses dos homens de ciência, ou seja, estavam transformando a *Royal Society of London* numa sociedade verdadeiramente científica (GLEASON, 1991).

Assim, na *Royal Society*, as velhas forças aristocráticas direcionaram seus negócios até que a revisão do estatuto em 1846 pavimentou o caminho para a ascensão de interesses científicos (GLEASON, 1991).

Os anos de reforma da *Royal Society*, aconteceram juntamente com as mudanças educacionais na Inglaterra, nesse sentido, Gleason (1991, p.20), acrescenta que nesse mesmo período o governo britânico organizou comissões para revisar os cursos de Oxford e Cambridge, além disso, criou novas instituições para fornecer a instrução necessária na ciência aplicada e tecnologia, como o *Royal College of Chemistry* que foi fundado em 1845 e a *Government School of Mines and Science Applied to the Arts*, inaugurado em 1851. Embora o ideal de uma educação liberal ainda fosse reverenciada, houve uma nova ênfase no aspecto profissional e utilitarista da educação, a fim de unir homens práticos e cientistas para trabalharem em conjunto no intuito de promover o prestígio da nação e da industrialização (GLEASON, 1991).

A Reforma da *Royal Society*, de acordo com Gleason (1991, p.20) não reflete uma revolta dentro das fileiras da ciência, mas sim um reconhecimento da necessidade de mudar.

Pudemos perceber que essa primeira metade do século XIX pode ser caracterizada pela transformação e revitalização das instituições científicas, bem como social da Inglaterra. Consideramos que esse período foi marcado por uma era de revoltas e reformas que viriam a alterar a vida dos homens e o sistema da sociedade inglesa a partir da segunda metade do século XIX.

Além disso, pudemos observar que as frustrações e descontentamentos dos homens da ciência nas décadas de 20 e 30, geraram insatisfações entre uma parte desses homens, de modo que passassem a manifestar publicamente as suas inquietações em relação ao estado da ciência inglesa.

Houve também a criação de uma nova sociedade científica por esses homens, onde puderam implementar as suas ideias e obtiveram um grande sucesso, despertou e amadureceu a sociedade para uma mudança no sistema educacional da nação e da própria *Royal Society*.

Dessa forma, os antigos sentimentos de frustração foram substituídos por empenho e determinação na década de 40, e considerando que houve uma lacuna na vida científica da Inglaterra nos primeiros anos do século XIX, a criação da *British Association for the Advancement of Science* e da reforma implementada na *Royal Society of London* em 1847, ajudaram a superar isso. Após a reforma, podemos entender que a *Royal Society of London* evoluiu do seu estado de guardiã passiva da ciência para uma promotora ativa de seu avanço.

CAPÍTULO 3

RECONHECIMENTO MATEMÁTICO

Arthur Cayley foi um matemático que avançou em assuntos que foram importantes no seu contexto, como o avanço nas definições de Grupo das Permutações de Galois, a publicação dos resultados dos Octônios, bem como todo o seu desenvolvimento da Teoria dos Invariantes, que depois teve fim com as publicações de David Hilbert (1862-1943) na Alemanha. Embora tenha tido seu fim, segundo Olver (1999), esses resultados permaneceram e vieram a servir de base para a Teoria da Representação e Teoria dos Conjuntos que vieram a florescer no século XX.

Entendemos como reconhecimento matemático a aprovação de suas publicações matemáticas, pois de acordo com Baudrillard (1972), o reconhecimento de uma teoria (parecer favorável) implica na produção de códigos de prestígio (valor-signo). Além disso, esse reconhecimento se deu perante seus semelhantes, ou seja, outros matemáticos.

Analisaremos esse reconhecimento por meio dos pareceres em relação às Memórias dos Quânticos, que foram divididas em dez memórias, e publicadas na *Philosophical Transactions of Royal Society of London* a partir de 1854, sendo a última publicada em 1878. Observo que infelizmente não consegui encontrar os pareceres referentes à Decima Memória dos Quânticos para esta pesquisa, entretanto, não irá prejudicar no resultado, visto que essa memória foi publicada, portanto, teve reconhecimento favorável. Além disso, teremos os pareceres das memórias anteriores para constataremos o reconhecimento matemático de Arthur Cayley.

Em paralelo precisamos nos ater a textos específicos que remetem o nome de Cayley na Europa Continental, pois no século XIX para um matemático ser prestigiosamente reconhecido pelos seus feitos na matemática, não bastava ser célebre localmente, ainda mais na Inglaterra. A *Royal Society of London* era uma entre outras, como a *Academia de Berlim* ou de *Paris*. Por isso,

consideramos a relação entre o nome: Cayley e Europa Continental. Klein⁴⁰ (1979) considerava que a Alemanha bem como a França estava em posição superior em relação à Inglaterra neste período. Portanto, entendemos ser razoável verificar a entrada de Cayley na Europa Continental.

Em troca de mensagens com Tony Crilly⁴¹, biógrafo de Arthur Cayley, sobre os trabalhos importantes em que Cayley é referido, o primeiro é *Traité des Substitutions et des Équation Algébriques* do matemático francês Camille Jordan (1838-1922) publicado em 1870; outro importante nome é o matemático alemão Felix Klein (1849-1925) em 1874. Em relação ao reconhecimento histórico do século XIX é importante considerar que a Alemanha e França eram as referências na área, portanto era necessário que os franceses ou alemães citassem Cayley, caso contrário seu trabalho não seria referência.

Jordan (1870) utiliza o trabalho de Cayley na representação analítica das Substituições, no Livro I de seu Tratado. A importância dessa citação se remete ao fato desta ser a primeira publicação em que o nome de Cayley foi mencionado por alguém de peso. Trata-se, portanto de reconhecimento de seu trabalho, colocando-o na ordem epistemológica relativa ao que pode ser chamado de Matemática do século XIX, aspecto que é essencial no concernimento ao reconhecimento histórico. Uma forma de reconhecimento não somente institucional, pois Jordan o citou bem como poderia não tê-lo feito.

Há ainda uma carta de Cayley endereçada ao físico e matemático alemão, Julius Plücker⁴² (1801-1868), o que naturalmente foi antes de 1868 (falecimento de Plücker), na carta ele agradece ao fato de Plücker tê-lo citado, contudo não há o nome da revista nem a data.

Essas citações fortalecem ainda mais o reconhecimento matemático de Arthur Cayley. Além da Inglaterra, podemos concluir que Cayley teve um

⁴⁰ Klein, F. **Development of Mathematics in The 19th Century**. Translated by M. Ackerman. Massachusetts: Math SCI Press, 1979. (Translation of *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19 Jahrhundert*. Teil I, Berlin, 1928).

⁴¹ Dr. Tony Crilly é historiador da Matemática, publicou em 2006 a biografia de Arthur Cayley, ele é reconhecido atualmente como uma das pessoas que mais conhecem o trabalho do matemático inglês. Atualmente ele trabalha na *Middlesex University* em Londres.

⁴² Desenvolveu trabalhos importantes na área de Geometria Analítica e Física. Foi *Fellow* da *Royal Society of London* em 1855 e obteve a *Royal Society Medal Copley* em 1866.

grande prestígio no Continente, afinal o matemático teve diversas publicações nos melhores *journals* matemáticos conceituados da época e de maiores circulações e influência no desenvolvimento da matemática na época. Dessa forma, nesse capítulo também faremos um levantamento das publicações de Arthur Cayley na Alemanha e França.

3.1 – ROYAL SOCIETY OF LONDON

Após a reforma da *Royal Society*, houve uma reestruturação nos estatutos da Sociedade a fim de priorizar a entrada de membros que pudessem contribuir para o avanço da ciência na Inglaterra.

Desde a sua fundação, os membros admitidos pela *Royal Society of London*, deveriam utilizar a sigla RSF – *Royal Society Fellow* – ao lado da identificação do autor em suas publicações e também nos panfletos de divulgação de alguma aula ou palestras.

Quando me referir a algum membro da *Royal Society of London*, também irei utilizar a palavra *Fellow*, que possui o mesmo significado de “membro”, “companheiro” e outros sinônimos.

Arthur Cayley foi eleito *Fellow* no ano de 1852. Portanto, Cayley foi submetido no seu julgamento pelas diretrizes estabelecidas por meio de um rigoroso estatuto que teve início a sua reformulação em 1846, mas somente implementado a partir de 1847.

3.1.1 – O PROCESSO DE ADMISSÃO

O Conselho da *Royal Society of London* era composto pelos membros da Sociedade e possuía cinco cargos de destaque com as seguintes atribuições:

O *presidente*, que era quem transmitia as decisões finais tomadas pelos membros do Conselho, e também efetivava a entrada de novos membros na Sociedade;

O *tesoureiro*, que cuidava das questões financeiras da Sociedade;

O *secretário principal*, responsável para analisar novos nomes para compor a Sociedade, fiscalizar se os membros estavam cumprindo suas obrigações de acordo com o Estatuto, e repassar ao presidente qualquer assunto novo relacionado à Sociedade e a seus membros;

E, finalmente, um *ministro relacionado aos assuntos estrangeiros*, responsável por facilitar a comunicação entre os membros da *Royal Society of London* com outras comunidades científicas.

Além dos cargos de destaque, segundo o Estatuto, o Conselho devia ser composto por onze membros experientes da Sociedade e de dez novos membros (STATUTES OF THE ROYAL SOCIETY, 1847).

Segundo o Estatuto de 1847, as obrigações dos membros eram promover o bem da Sociedade e fazer com que ela progredisse cada vez mais através da produção de novos conhecimentos por parte de seus integrantes, e posteriormente publicá-los em revistas e jornais conceituados da época e de grande relevância, a novas descobertas nas ciências. Em hipótese alguma seria aceito que os membros escrevessem ou possuísse em mãos qualquer documento que difamasse a imagem da sociedade. Caso algum deles descumprisse este princípio, isso acarretaria sua expulsão sumária da comunidade (STATUTES OF THE ROYAL SOCIETY, 1847).

Outra obrigação dos membros da *Royal Society* era a de comparecer às reuniões dos integrantes e às reuniões extraordinárias. A reunião mais importante era chamada de “eleições de aniversários”, ocorridas periodicamente, para reformulação do conselho, através de votações entre os membros da comunidade, e para, também julgar e sacramentar a entrada de novos membros na Sociedade.

Os membros da *Royal Society*, de acordo com o Estatuto de 1847, antes de indicar novos candidatos para integrar a comunidade, deveriam deixá-los cientes de todas as obrigações a serem cumpridas. Para integrar a Sociedade, o candidato a “*Fellow*” deveria possuir uma recomendação por escrito de seis ou mais membros da *Royal Society of London*. Além das recomendações e informações pessoais, os candidatos deveriam ainda realizar alguns

pagamentos requeridos pela sociedade. Após a comprovação dos pagamentos, o candidato finalmente seria submetido ao processo de julgamento descrito no Estatuto da Sociedade.

Ainda, segundo o Estatuto de 1847, no ritual de admissão dos novos candidatos, o presidente nomeava, após aprovação dos outros membros da Sociedade, dois “*Scrutators*” – uma função que poderíamos chamar de examinadores – com o intuito de ajudar o secretário na análise das listas de nomes para a escolha dos novos candidatos. Essa lista deveria ser entregue pelos membros para o secretário ou um dos examinadores. O nome de cada novo membro deveria ser observado por um dos secretários para a contabilização dos votos. Após este procedimento era dado início às votações.

Ao final, os votos eram contabilizados pelos *Scrutators* e pelo secretário, sendo que os nomes com maior número de votos eram anunciados como *Fellows*. Em seguida, havia uma reunião onde era feita a leitura da ata. Após concluída, o candidato subscrevia as suas obrigações, já apresentadas a ele na “Escritura”, e em seguida era nomeado pelo presidente ao pronunciar: “*I do, by the authority, and in the name, of the Royal Society of London, for improving natural knowledge, admit you a Fellow thereof.*” (STATUTES OF THE ROYAL SOCIETY, 1847, *Chapter I*- Pará. 8, artigo: XIV).

Se qualquer pessoa eleita recusasse subscrever a obrigação acima, a eleição dessa pessoa era anulada, com sua expulsão da Sociedade (STATUTES OF THE ROYAL SOCIETY, 1847).

Em abril de 1852, Arthur Cayley apresentou seu primeiro trabalho para a *Royal Society of London*: “*Analytical Researches Connected with Steiner’s Extension of Malfatti’s Problem*”. De acordo com Crilly (2006), ele havia se interessado por esse problema anteriormente e sabia de sua história. O geômetra italiano Gian Francesco Malfatti (1731-1807), colocou o problema da construção de três círculos em um triângulo dado, cada um deles tocando os outros dois círculos e dois lados do triângulo (Figura 1).

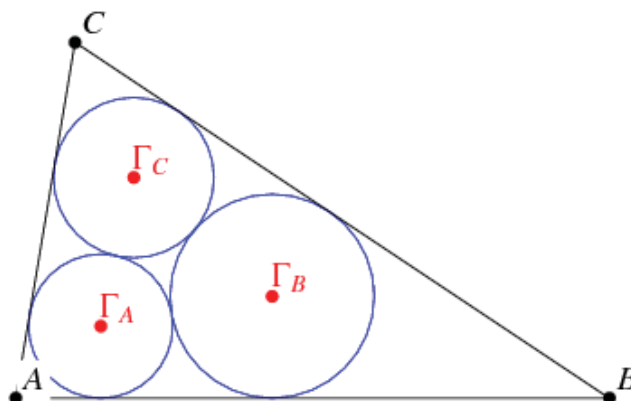


Figura 1 – Círculos de Malfatti

Fonte: <http://mathworld.wolfram.com/MalfattiCircles.html>, Acesso em 12/07/12

Sua solução foi publicada em 1803, entretanto, o problema e suas variantes ganhou uma sequência entre os matemáticos. Segundo Crilly (2006), o geômetra suíço Jacob Steiner (1796-1863), apresentou uma generalização em que ele substituiu as três linhas retas por três secções de uma superfície quádrlica e resolveu utilizando apenas “*geometria pura*”. Cayley, em seu artigo, fez uso da geometria analítica para investigar essa generalização de Steiner.

Duas semanas após a submissão de seu artigo na *Royal Society*, Cayley foi incluso numa lista de 15 candidatos propostos pelo Conselho para serem submetidos à eleição. A proposta de adesão do matemático para entrar na *Royal Society* não se deu por acaso, ele já havia sido convidado para adentrar a sociedade três anos antes, em virtude da necessidade da *Royal Society* eleger cientistas ativos e matemáticos nos primeiros anos após reforma de 1847. (CRILLY, 2006).

A reforma da Constituição da *Royal Society of London* de 1847 permitiu que a sociedade gradualmente abandonasse a sua imagem amadora. Após a reforma, como falamos no capítulo anterior e apontado por Gleason (1991), a prioridade na admissão de novos componentes baseava-se na produção científica dos membros ao invés da sua quantidade de riqueza, afim de elevar os padrões de pesquisa. Com essa atitude, Crilly (2006, p.179) afirma que:

"Instead of being a club for the aristocracy and the well-connected, it now intended to promote the membership of 'scientific men'"

Crilly (2006) comenta que o grande parceiro de Charles Darwin (1809-1882), o biólogo Thomas Henry Huxley (1825-1895), foi eleito no ano anterior à Cayley e fez uma nota em seu diário comentando que ele foi eleito para a *Royal Society of London* em um momento em que se tornar membro dela é a fase mais difícil do que qualquer outro período na história da sociedade.

Após as reformas, o governo britânico começou a reconhecer a importância da posição detida pela *Royal Society* e passou a fornecer modestas doações monetárias para apoio à pesquisa. Essas doações, *The Government Grant Fund*, foram usadas por matemáticos e Cayley iria utilizar para custear as despesas na construção de modelos geométricos e em fazer os cálculos para a Teoria dos Invariantes (CRILLY, 2006).

Arthur Cayley leu seu artigo sobre o problema de Malfatti para a *Royal Society* em maio 1852. Na reunião do Conselho, realizada em 3 de Junho de 1852, ele foi eleito a *Fellow* no primeiro escrutínio. O matemático James Joseph Sylvester foi o seu principal proponente, e também era um dos Conselheiros da sociedade naquele período. Na sua qualificação para a adesão, Cayley foi listado como o autor de "*various papers*" da *Cambridge Philosophical Transactions*, *Crelle's Journal*, *Liouville's Journal*, *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, e *Philosophical Magazine*. Quando perguntado sobre: "*Discoverer of?*", Sylvester simplesmente entrevistou e disse: "*Hyperdeterminants*" e para a questão: *Eminent as a?*, novamente, Sylvester acrescentou: "*Geometer and Analyst*". Como seria de esperar, a lista de apoiantes da candidatura de Cayley não era pequena, e não menos que 21 membros do Conselho assinaram sua certificação (CRILLY, 2006, p.180).

Aqueles que o acolheram para a sociedade eram pessoas importantes que ele conheceu no decorrer de sua vida e contribuíram para endossar a certificação de Arthur Cayley em razão do conhecimento pessoal, inclui seus grandes amigos de Cambridge, o físico-matemático William Thomson (1824-1907) e os Senior Wranglers George Gabriel Stokes (1819-1903) e John Couch Adams (1819-1892), que foram seus tutores cada um por um ano, em 1841 e

1843, respectivamente. Os seus contatos do *University College*, de Londres: o matemático-advogado Charles Hargreaves (1820-1866) e John Graves (1806-1870), que também foi um matemático-advogado e na época havia se tornado *Poor-Law Inspector*, uma espécie de inspetor da aplicação das leis aos pobres, e que teve uma angústia com Cayley no passado, por ele ter avançado na corrida dos estudos em relação à descoberta dos Octônios (CRILLY, 2006).

A lista continua com Charles Wheatstone (1802-1875), que tinha sido um de seus professores no *King's College*, Londres. Dentre os signatários de Cambridge, também estavam o seu tutor de matemática William Hopkins (1793-1866) e William Whewell (1794-1866), o formidável diretor do *Trinity College*. O naturalista Richard Owen (1804-1892), amigo de Cayley e vice-chanceler da *University of London* por 20 anos. E finalizando essa lista de certificação em razão do conhecimento pessoal em relação à Cayley, estava John Gray (1800-1875), um promotor do *Blackheath Mechanic's Institution* e que havia publicado mais de mil artigos e memórias (CRILLY, 2006).

Os signatários de Cayley em relação aos Conhecimentos Gerais incluíram o meteorologista James Glaisher (1809-1903), o cientista de óptica, David Brewster (1781-1868) e George Biddell Airy (1801-1892), matemático e astrônomo com quem ele tratou de questões referentes à matemática (CRILLY, 2006).

George Peacock (1791-1858), que introduziu os métodos continentais na Grã-Bretanha nos primeiros anos do século, e segundo Crilly (2006), Peacock declarou estar entregando as rédeas da matemática para os próximos, foi chamado para dar o parecer no artigo *Analytical Researches Connected with Steiner's Extension of Malfatti's Problem* de Arthur Cayley e anunciou que a "*Algebra Moderna*", era algo novo para o público britânico. Peacock, com seus 61 anos, havia feito seu trabalho em matemática e agora estava usando sua energia no serviço da Catedral de Ely, localizada em Cambridgeshire, Inglaterra.

Todo o tempo de sua eleição, Cayley embarcou na parte mais fértil de sua vida matemática, durante o qual ele publicou praticamente tudo o que ele produziu. Sua publicação em revistas da Inglaterra aumentou, assim como o

valor do seu trabalho foi mantido nas revistas do continente (*Continental journals*) e ele começou a escrever memórias longas com o intuito de publicá-las na *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. Como membro da *Royal Society*, Cayley tinha praticamente assegurada a publicação de seus trabalhos e ele foi capaz de emitir uma série de memórias de assuntos bastante abstratos e de um considerável número de páginas na *Philosophical Transactions* (CRILLY, 2006).

No início da década de 1850, as vias para publicações matemáticas na Grã-Bretanha estavam diminuindo. Os editores da *Philosophical Magazine* tinham receio de muitas páginas cheias de símbolos, temendo um inchaço de reclamações dos leitores. A revista *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* estava passando por momentos difíceis financeiramente, e o *The Mathematician*, uma revista com sede na Academia Militar de Woolwich, havia recentemente fechado. A revista *The Mathematician*, em sua despedida, depois de apenas três volumes, os seus editores pintaram um quadro pessimista para os outros editores de revistas matemáticas:

As a people [the British] we are indeed become so practical and so physical, that there is now no journal open to the discussion of pure geometrical science: - except, indeed, it present itself occasionally under the guise of 'practical utility' or 'physical application'; or else assume a form so transcendental as to bewilder thoughtful readers, and excite the wondering admiration of the 'oracle' of the social party (CRILLY, 2006, p.181).

As dificuldades de publicação ficaram no caminho da carreira de Cayley, afinal ele não era editor de nenhuma revista matemática, entretanto, com a sua experiência, ele tinha as revistas de Cambridge à sua disposição e agora, eleito *Fellow* da *Royal Society of London*, ele teve acesso a *Philosophical Transactions* (CRILLY, 2006).

Em Londres, a sua carreira entrou em uma nova fase. Além de sua atividade legal, ele participou da organização da ciência na capital. Lá, com a *Royal Society*, ele se envolveu com a administração da *Royal Astronomical Society*. A *British Association for the Advancement Science* foi outro corpo que ele apoiou e fez parte. Com tudo isso, ele se tornou uma espécie de homem-

científico da cidade, que o levou a se tornar Membro da Sociedade Real, o que lhe foi especialmente conveniente (CRILLY, 2006).

Em junho de 1852, poucos dias depois de sua eleição para a *Royal Society*, Cayley foi para a sala de Sylvester situada em *Lincoln's Inn Fields*. No escritório externo, Thomson estava escrevendo uma carta para o matemático George Stokes (1819-1903). Thomson não tinha o mesmo entusiasmo de Cayley para a matemática pura e pensava ser um desperdício de seus dons. Ainda assim, ele ficou impressionado com o talento matemático de Cayley, mas ele acreditava que os seus serviços deviam ser prestados ao mundo ao invés de domínios rarefeitos como álgebra pura. Para o entretenimento de Stokes, ele acrescentou que a carta "*foi escrita no escuro, com Cayley e Sylvester falando sobre os invariantes o tempo todo*" (CRILLY, 2006, p.182, tradução nossa). A conversa incessante no escritório interno estava preocupada com a publicação de uma nova descoberta para ser publicada no *Liouville's Journal* (CRILLY, 2006).

Com apenas um ano na *Royal Society*, Cayley foi proposto para a concessão de sua prestigiosa *Royal Medal*, baseado na força de seus trabalhos passados e também pelo artigo que tratou sobre o problema de Malfatti, que ele havia publicado na *Philosophical Transactions*.

Em 2 de junho de 1853, o irlandês James Booth (1806-1879), que morava na Inglaterra, também especializado em Geometria e Análise, propôs-lhe o prêmio. Isso foi destacado por William Hopkins durante a Reunião do Conselho, além disso, ele registrou ainda que "*Arthur Cayley be placed on the list of candidates for a Royal Medal for his Analytical Researches published in the Philosophical Transactions, Cambridge Journal and Philosophical Magazine*" (CRILLY, 2006, p.182).

Nessa mesma reunião, o químico August Wilhelm von Hofmann e Charles Darwin também foram propostos para concorrer a *Royal Medal*. Na reunião do Conselho subsequente, mais concorrentes foram adicionados a lista, o químico Edward Frankland, o físico-químico John Tyndall, que entrou no mesmo ano de Cayley, o botânico John Lindley, e Robert P. Bunsen, outro químico (CRILLY, 2006).

Surpreendentemente, Sylvester que já estava há quatorze anos na sociedade, também foi acrescentado a essa lista. Entretanto, no dia da premiação, Charles Darwin e John Tydall foram os recomendados para serem premiados pela rainha.

De qualquer forma, concordamos com o destaque dado por Crilly (2006), em que ele destaca que só o fato de Cayley ter sido apresentado para uma *Royal Medal* somente após um ano de filiação na *Royal Society of London*, foi um reconhecimento significativo por parte de seus pares. Entretanto, Arthur Cayley veio a ganhar essa medalha no ano de 1859. Seu grande amigo e companheiro Sylvester, foi premiado com essa medalha também, porém posterior a Cayley, em 1861.

3.1.2 – AS PUBLICAÇÕES

De acordo com a coletânea “*The collected mathematical papers of Arthur Cayley*” publicado em 1898, pela Cambridge: at the University Press, Arthur Cayley teve 967 trabalhos publicados. Essa coletânea foi lançada três anos após a morte de Cayley.

De acordo com Crilly (2006), apesar da vasta quantidade de artigos, Cayley se destacou principalmente nas publicações relacionadas à Teoria dos Invariantes, assunto que foi a temática de seu primeiro artigo após a sua adesão na Sociedade. No artigo *An Introductory Memoir on Quantics*, ele apresentou uma nova reformulação para a Teoria dos Invariantes e também introduziu nas *Transactions* a linguagem e as definições dessa teoria. Esta memória marcou o início de uma série de publicações referentes à Teoria dos Invariantes na *Philosophical Transaction of Royal Society of London*.

Essa teoria, segundo Olver (1999), se tornou moda em meados do século XIX. Nesse período, o tema esteve presente com grande frequência em inúmeras revistas de matemática na Europa. De acordo com (GODOY e MATTOS, p.2, 2011), a movimentação em torno do assunto envolveu vários matemáticos num propósito comum, saber sobre “...*the finitude of the number of fundamental invariants*” (OLVER, p.6, 1999).

Conforme (GODOY e MATTOS, p.7, 2011), houve uma efervescência sobre o assunto na segunda metade do século XIX principalmente na Inglaterra e Alemanha. George Boole⁴³ é referido ao começo dessa Teoria por meio da publicação de seu artigo *Exposition of the General Theory of Linear Transformations*, em 1841. De acordo com Parshall (2006) e Crilly (1986), os matemáticos Arthur Cayley e James Joseph Sylvester são apontados como os principais contribuídores da Teoria dos Invariantes no cenário britânico.

A Teoria dos Invariantes consiste no estudo das propriedades intrínsecas das formas (polinômios), propriedades que não são afetadas por uma mudança de variáveis e do ponto de vista geométrico também se mantém.

Para entender melhor essa definição, vamos tomar como exemplo o quântico $Q = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Devemos observar que Q é de ordem 2 e apresenta duas variáveis, portanto, é uma forma quadrática binária.

Se uma forma homogênea estiver definida nas variáveis x e y , utilizando Cayley (1854), ela será denominada *quântico binário*. Caso haja três, ou seja, x , y e z , a denominação será *quântico ternário*, com quatro variáveis, *quântico quartenário*, e assim por diante. Se existirem q variáveis, podemos chamar essa forma de *quântico q -ária*. O grau de um quântico nas variáveis $x, y, z, \dots$, é chamado de *ordem*. Quânticos de primeira, segunda, terceira, quarta, p ordens são chamados respectivamente de: linear, quadrático, cúbico, quártico, ..., p -ico.

Pelo Método de Boole (1841), que consiste em aplicar diferenciações sucessivas nas variáveis no intuito de diminuir a ordem das formas homogêneas em $(n - 1)$, podemos obter $ac - b^2$, como invariante desse quântico.

Primeiramente, aplica-se uma derivada em relação à variável x e outra em relação à y , temos, $\frac{dQ}{dx} = 2ax + 2by$ e $\frac{dQ}{dy} = 2bx + 2cy$. Dividindo ambas as equações por 2 e colocando-as num sistema linear homogêneo, iremos obter:

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ bx + cy = 0 \end{cases}$$

⁴³ George Boole (1815-1864), depois da publicação de seu artigo referente à Teoria dos Invariantes, passou a desenvolver trabalhos em Lógica.

Calcula-se o determinante do sistema obtido que resultará no invariante deste quântico.

Sabendo o Invariante dessa forma, deve-se aplicar uma transformação linear no quântico Q . Os coeficientes dessa transformação podem ser dispostos em linhas e colunas, formando o que chamaremos de *módulo de substituição* ou *módulo da transformação*. Este módulo será simbolizado pela letra M .

Aplicaremos a transformação linear $\begin{cases} x = lX + mY \\ y = l'X + m'Y \end{cases}$, que também pode ser escrita na forma $M = \begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix}$.

Iremos obter então:

$$Q = a(lX + mY)^2 + 2b(lX + mY)(l'X + m'Y) + c(l'X + m'Y)^2$$

Desenvolvendo temos,

$$Q = a(l^2X^2 + 2lmXY + m^2Y^2) + 2b(l'lX^2 + lm'XY + l'mXY + mm'Y^2) + c(l'^2X^2 + 2l'm'XY + m'^2Y^2)$$

Aplica-se a distributiva,

$$Q = al^2X^2 + 2almXY + am^2Y^2 + 2bll'X^2 + 2blm'XY + 2bl'mXY + 2bmm'Y^2 + cl'^2X^2 + 2cl'm'XY + cm'^2Y^2$$

E finalmente agrupamos os coeficientes com suas variáveis correspondentes,

$$Q = (al^2 + 2bll' + cl'^2)X^2 + 2(alm + blm' + bl'm + cl'm')XY + (am^2 + 2bmm' + cm'^2)Y^2$$

Temos:

$$A = al^2 + 2bll' + cl'^2,$$

$$B = alm + b(lm' + l'm) + cl'm',$$

$$C = am^2 + 2bmm' + cm'^2.$$

Assim, $ax^2 + 2bxy + cy^2$ se torna $AX^2 + 2BXY + CY^2$.

Anteriormente, concluímos que $ac - b^2$ é um Invariante deste quântico. Para averiguarmos este resultado, é necessário que se mantenha a forma:

$$AC - B^2 = (l^2 m'^2 - 2ll' mm' + l'^2 m^2)(ac - b^2)$$

ou

$$AC - B^2 = M^2(ac - b^2)$$

Substituindo os valores de A, B e C, temos:

$$AC = a^2 l^2 m^2 + 2abl^2 mm' + acl^2 m'^2 + 2abll' m^2 + 4b^2 ll' mm' + 2bc ll' m'^2 \\ + acl'^2 m^2 + 2bcl'^2 mm'^2 + c^2 l'^2 m'^2$$

$$-B^2 = -a^2 l^2 m^2 - abl^2 mm' - abll' m^2 - ac ll' mm' - abl^2 mm' - b^2 l^2 m'^2 \\ - b^2 ll' mm' - bcl l' m'^2 - abll' m^2 - b^2 ll' mm' - b^2 l'^2 m^2 - bcl'^2 mm' \\ - ac ll' mm' - bcl l' m'^2 - c^2 l'^2 m'^2$$

$$AC - B^2 = acl^2 m'^2 + 2b^2 ll' mm' + acl'^2 m^2 - 2ac ll' mm' - b^2 l^2 m'^2 - b^2 l'^2 m^2$$

Falta ainda calcularmos $M^2(ac - b^2)$.

$$M^2(ac - b^2) = acl^2 m'^2 + 2b^2 ll' mm' + acl'^2 m^2 - 2ac ll' mm' - b^2 l^2 m'^2 - \\ b^2 l'^2 m^2$$

Dessa forma, concluímos que $AC - B^2 = M^2(ac - b^2)$. Portanto, $ac - b^2$, de fato, é invariante do quântico Q.

De acordo com Crilly (1986), Cayley removeu as raízes históricas da teoria e elevou os invariantes para uma condição abstrata. Além disso, ele introduziu a palavra “Quântico” para substituir o termo “polinômio homogêneo” (Função racional e integral). Um quântico ou um polinômio homogêneo, são “polinômios que sempre mantêm o mesmo valor na soma dos expoentes das variáveis de cada um de seus termos”.

Cayley (1854,1856a), propôs caracterizar os invariantes e covariantes como formas algébricas que são capazes de reduzir um quântico à zero através da aplicação de um operador diferencial.

Crilly (p. 202, 2006), comenta que essas mudanças deixaram os pareceristas das primeiras memórias com grandes dificuldades para entender o

assunto. Embora eles reconhecessem a importância dessas publicações, eles consideraram os artigos muito abstratos e criticaram principalmente a introdução da terminologia “quântico”.

Boole, segundo Crilly (2006), levantou objeções em relação a essa escolha, pois para ele esse novo termo tem um significado etimologicamente pobre, uma vez que essa palavra se trata de um adjetivo latino que "expressa nada". Além de Boole, Crilly (2006), aponta que John Graves, um dos pareceristas da primeira memória, relatou que o artigo tem caráter abstrato e acreditava que a introdução da nova terminologia era desnecessária.

A segunda memória dos quânticos foi submetida à *Royal Society* em 14 e Abril de 1855, e segundo Crilly (p. 204, 2006), essa memória é considerada a mais importante e central para o entendimento das próximas.

Igualmente como foi a primeira memória, este segundo artigo também foi considerado extremamente teórico e abstrato pelos pareceristas. Cayley (1856a) apresentou um teorema relacionado aos covariantes. Crilly (p. 205, 2006), relata ainda que Cayley tenta responder uma questão nessa memória, uma pergunta diferente e mais profunda sobre invariantes irreduzíveis de um quântico binário: “Eles são em número finito, ou são, como os números primos, de extensão infinita?”.

Apresento nos apêndices 1 e 2 desta dissertação, uma tradução das duas primeiras memórias de Arthur Cayley em relação aos Quânticos.

Tomando como fonte a coletânea de 1898, podemos encontrar as dez memórias publicadas por Cayley na *Philosophical Transactions of Royal Society of London*, o volume da publicação das Transactions, as páginas em que podem ser encontradas e o ano da publicação das memórias:

- 1) *An Introductory Memoir on Quantics* – Volume 144, páginas 244-258, publicado em 1854.
- 2) *A Second Memoir on Quantics* – Volume 146, páginas 101-126, publicado em 1856.

- 3) *A Third Memoir on Quantics* – Volume 146, páginas 627-647, publicado em 1856.
- 4) *A Fourth Memoir on Quantics* – Volume 148, páginas 415-427, publicado em 1858.
- 5) *A Fifth Memoir on Quantics* – Volume 148, páginas 429-460, publicado em 1858.
- 6) *A Sixth Memoir on Quantics* – Volume 149, páginas 61-90, publicado em 1859.
- 7) *A Seventh Memoir on Quantics* – Volume 151, páginas 277-292, publicado em 1861.
- 8) *An Eighth Memoir on Quantics* – Volume 157, páginas 513-567, publicado em 1867.
- 9) *A Ninth Memoir on Quantics* – Volume 160, páginas 17-50, publicado em 1871.
- 10) *A Tenth Memoir on Quantics* – Volume 169, parte II, páginas 603-661, publicado em 1878.

Além das dez memórias que abordam a Teoria dos Invariantes, através da coletânea de 1898, pudemos verificar que Cayley publicou outros 47 artigos na *Philosophical Transactions of Royal Society of London*:

- 1) *Analytical Researches connected with Steiner's Extension of Malfatti's Problem* – Volume 142, páginas 253-278, publicado em 1852.
- 2) *Researches on the Partition of Numbers* – Volume 145, páginas 127-140, publicado em 1855.

- 3) *A Memoir on Caustics* – Volume 147, páginas 273-312, publicado em 1857.
- 4) *A Memoir on Curves of the Third Order* – Volume 147, páginas 415-446, publicado em 1857.
- 5) *A Memoir on the Symmetric Function of the Roots of an Equation* – Volume 147, páginas 489-496, publicado em 1857.
- 6) *A Memoir on the Resultant of a System of two Equation* – Volume 147, páginas 703-715, publicado em 1857.
- 7) *On the Symmetric Functions of the Roots of certain Systems of two Equations* – Volume 147, páginas 717-726, publicado em 1857.
- 8) *A Memoir on the Conditions for the Existence of given Systems of Equalities among the Roots of an Equation* – Volume 147, páginas 727-731, publicado em 1857.
- 9) *Tables of the Sturmian Functions for Equations of the Second, Third, Fourth, and Fifth Degrees* – Volume 147, páginas 733-736, publicado em 1857.
- 10) *The problem of Polyhedra* – Volume 147, páginas 183-185, publicado em 1857.
- 11) *A Memoir on the Theory of Matrices* – Volume 148, páginas 17-37, publicado em 1858.
- 12) *A Memoir on the Automorphic Linear Transformation of a Bipartite, Quadric Function* – Volume 148, páginas 39-46, publicado em 1858.

- 13) *Supplementary Researches on the Partition of Numbers* – Volume 148, páginas 47-52, publicado em 1858.
- 14) *On the Tangential of a Cubic* – Volume 148, páginas 461-463, publicado em 1858.
- 15) *On the Double Tangents of a Plane Curve* – Volume 149, páginas 193-212, publicado em 1859.
- 16) *On the Conic of Five-pointic Contact at any Point of a Plane Curve* – Volume 149, páginas 371-400, publicado em 1859.
- 17) *On the Equation of Differences for an Equation of any Order and in particular for the Equations of the Orders two, three, four, and five* – Volume 150, páginas 93-112, publicado em 1860.
- 18) *Demonstration of a Theorem in Finite Differences* – Volume 150, páginas 321-323, publicado em 1860.
- 19) *On an Extension of Arbogast's Method of Derivations* – Volume 151, páginas 37-43, publicado em 1861.
- 20) *On the Equation for the Product of the Differences of all but one of the Roots of a given Equation* – Volume 151, páginas 45-59, publicado em 1861.
- 21) *On the Porism of the In-and-circumscribed Polygon* – Volume 151, páginas 225-239, publicado em 1861.
- 22) *On a New Auxiliary Equation in the Theory of Equations of the Fifth Order* – Volume 151, páginas 263-276, publicado em 1861.
- 23) *On the Double Tangents of a Curve of the Fourth Order* – Volume 151, páginas 357-362, publicado em 1861.

- 24) *On Tschirnhausen's Transformation* – Volume 151, páginas 561-578, publicado em 1861.
- 25) *On the Analytical Theory of the Conic* – Volume 152, páginas 639-662, publicado em 1862.
- 26) *On Skew Surfaces, otherwise Scrolls* – Volume 153, páginas 453-483, publicado em 1863.
- 27) *A Second Memoir on Skew Surfaces, otherwise Scrolls* – Volume 154, páginas 559-576, publicado em 1864.
- 28) *On the Sextactic Points of a Plane Curve* – Volume 155, páginas 545-578, publicado em 1865.
- 29) *A Supplementary Memoir on the Theory of Matrices* – Volume 156, páginas 25-35, publicado em 1866.
- 30) *Addition to the Memoir on Tschirnhausen's Transformation* – Volume 156, páginas 97-100, publicado em 1866.
- 31) *A Supplementary Memoir on Caustics* – Volume 157, páginas 7-16, publicado em 1867.
- 32) *On the Curves which satisfy given Conditions* – Volume 158, páginas 75-143, publicado em 1868.
- 33) *Second Memoir on the Curves which satisfy given Conditions: the Principle of Correspondence* – Volume 158, páginas 145-172, publicado em 1868.
- 34) *Addition to Memoir on the Resultant of a System of two Equations* – Volume 158, páginas 173-180, publicado em 1868.

- 35) *On the Conditions for the existence of three equal Roots or of two pairs of equal Roots of a Binary Quartic or Quintic* – Volume 158, páginas 577-588, publicado em 1868.
- 36) *A Third Memoir on Skew Surfaces, otherwise Scrolls* – Volume 159, páginas 111-126, publicado em 1869.
- 37) *A Memoir on the Theory of Reciprocal Surfaces* – Volume 159, páginas 201-229, publicado em 1869.
- 38) *A Memoir on Cubic Surfaces* – Volume 159, páginas 231-326, publicado em 1869.
- 39) *A Memoir on Abstract Geometry* – Volume 160, páginas 51-63, publicado em 1870.
- 40) *On the problem of the in-and-circumscribed triangle* – Volume 161, páginas 369-412, publicado em 1871.
- 41) *Corrections and Additions to the Memoir on the Theory of Reciprocal Surfaces* – Volume 162, páginas 83-87, publicado em 1872.
- 42) *On curvature and orthogonal surfaces* – Volume 163, páginas 229-251, publicado em 1873.
- 43) *A memoir on the transformation of elliptic functions* – Volume 164, páginas 397-456, publicado em 1874.
- 44) *A memoir on prepotentials* – Volume 165, páginas 675-774, publicado em 1875.
- 45) *On the bicircular quartic – Addition to Professor Casey's memoir: "On a new form of tangential equation"* – Volume 167, páginas 441-460, publicado em 1877.

46) *Addition to memoir on the transformation of elliptic functions* – Volume 169, parte II, páginas 419-424, publicado em 1878.

47) *A memoir on the single and double tetha-functions* – Volume 171, parte III, páginas 897-1002, publicado em 1880.

Como pudemos observar, Cayley na década de 1850, publicou diversos artigos nas *Transactions of Royal Society of London*, época em que Crilly (2006), considera como o período mais fértil de produções do matemático. Além das publicações referentes aos Invariantes, Crilly (2006), observa que os artigos do matemático em relação à Teoria de Matrizes também gerou grande repercussão na época e avanços para a noção atual de matrizes nos dias de hoje.

Cada uma dessas obras publicadas na *Philosophical Transactions of Royal Society of London* foi aferida por outros matemáticos que faziam parte da Sociedade, que julgaram os trabalhos por meio da apresentação do objeto matemática descritos nos artigos submetidos à publicação.

3.1.3 – OS PARECERES

O objetivo da *Royal Society of London*, como em qualquer sociedade científica, é "organizar" a Ciência. A fim de fazer isso, essas Sociedades utilizam procedimentos de julgamento e estruturas para cada tema apresentado. Dentro da *Royal Society of London*, os árbitros (pareceristas) decidem sobre as obras que eles vão publicar. As decisões dos árbitros são submetidos à autoridade do Conselho para a aprovação final. Na verdade, as decisões dos pareceristas determinam a cooptação ou a exclusão do trabalho proposto no campo das ciências (MATTOS, 2007).

Nos Estatutos da *Royal Society of London* (1847), em relação a publicação de artigos, no Capítulo XIII é relatado que qualquer membro com o objetivo de submeter algum trabalho para publicação deve comunicar a Sociedade, bem como, uma das obrigações dos membros era que de tempos em tempos eles publicassem novos trabalhos nas *Transactions*. No mesmo

item do Estatuto (Capítulo XIII, I, p.21), é dito que é de responsabilidade do Conselho criar uma comissão para julgar o artigo proposto. Essa comissão tem liberdade de escolher qualquer *Fellow*, desde que seja qualificado no ramo específico da ciência, para deliberar sobre o aceite ou não do artigo submetido para publicação.

Ainda nesse item (Capítulo XIII, III, IV, p.21), é descrito que para a entrada de qualquer artigo nas *Transactions* da Sociedade, o parecer da Comissão é tomada como base e deve ser lido na reunião do Conselho. Se algum membro desejar, o próprio artigo pode ser lido junto do parecer. Após colocada a questão de se o artigo deverá ser aceite ou não na *Philosophical Transactions*, caberá ao Conselho julgar o aceite, a não ser que opinião da maioria do Conselho seja a favor de adiar a consideração para uma próxima reunião. É previsto que qualquer questão deve ser sempre decidido por votação, e por maioria de votos, mas se houver uma igualdade de votos, uma análise mais aprofundada da questão será adiada para a próxima reunião do Conselho. Nessa reunião, durante a segunda votação sobre a mesma questão, se resultar novamente uma igualdade de votos, automaticamente resultará no não aceite da publicação do artigo.

Neste item, iremos tratar de analisar alguns dos pareceres referentes aos trabalhos de Arthur Cayley na *Royal Society of London*, mais precisamente, iremos olhar para os pareceres referentes às Memórias dos Quânticos, que foi onde Cayley desenvolveu várias propriedades relacionadas a Teoria dos Invariantes, que é um dos pontos principais do seu reconhecimento histórico na História da Matemática.

O primeiro artigo submetido por Arthur Cayley na *Philosophical Transactions of Royal Society of London* foi o intitulado *Analytical Researches connected with Steiner's Extension of Malfatti's Problem* em 1852. Sendo este o primeiro, justifica por si só sua importância e relacionamos este parecer neste item também. O responsável por emitir o parecer a essa publicação foi seu ex-professor George Peacock.

Os pareceristas responsáveis pelas Memórias foram: John Thomas Graves e William Thomson (Memória 1), Phillip Kelland⁴⁴ e James Booth⁴⁵ (Memória 2), Philip Kelland e William Spottiswoode⁴⁶ (Memória 3) e a partir das Memórias 4 a 9, os pareceristas foram William Spottiswoode e Bartholomew Price⁴⁷. Como dito anteriormente, infelizmente não encontrei informações a respeito da décima memória até o fechamento deste trabalho.

Apresentamos primeiramente os pareceres e uma transcrição dos mesmos. Posteriormente iremos tratar o que foi apontado pelos pareceristas, buscando reforçar o reconhecimento matemático de Arthur Cayley.

⁴⁴ Phillip Kelland (1808-1879), matemático inglês, fellow na *Royal Society* desde 1838, desenvolveu trabalhos sobre Teoria das Ondas, Calor, Equações Diferenciais e alguns artigos tratando de propriedades gerais de Diferenciais.

⁴⁵ James Booth (1806-1879), matemático irlandês, fellow na *Royal Society* desde 1846, desenvolveu trabalhos voltados a Geometria, Curvas e Superfícies.

⁴⁶ William Spottiswoode (1825-1883), matemático inglês, fellow na *Royal Society* desde 1853, desenvolveu principalmente trabalhos voltados a Álgebra, Teoria dos Determinantes e Aplicação de Análise Geométrica. Foi presidente da *Royal Society* no período de 1878-1883.

⁴⁷ Bartholomew Price (1818-1898), matemático inglês, foi professor de Lewis Carrol (1832-1898), e desenvolveu diversos assuntos de Cálculo abordados sob o aspecto do Cálculo Infinitesimal, por meio da publicação de seus Tratados.

41
 D-ary Ely June 21. 1852

My dear Sir

I have looked through Cayley's Paper, but I have not attempted except in a few cases to verify the results: in fact a pressure of engagements, which prevent my attending the Council tomorrow, has made it impossible for me to devote that amount of time & labour to its examination, which alone could make my opinion of much value. I will very frankly confess also that the close of investigations with which this paper is connected are in advance of me & I have not for the last three or four

90

Figura 2 – Parecer Peacock (Página 1)

Fonte: Royal Society of London. Referees Reports (1850-1855). London: June 21 1852, RR. 2.41.

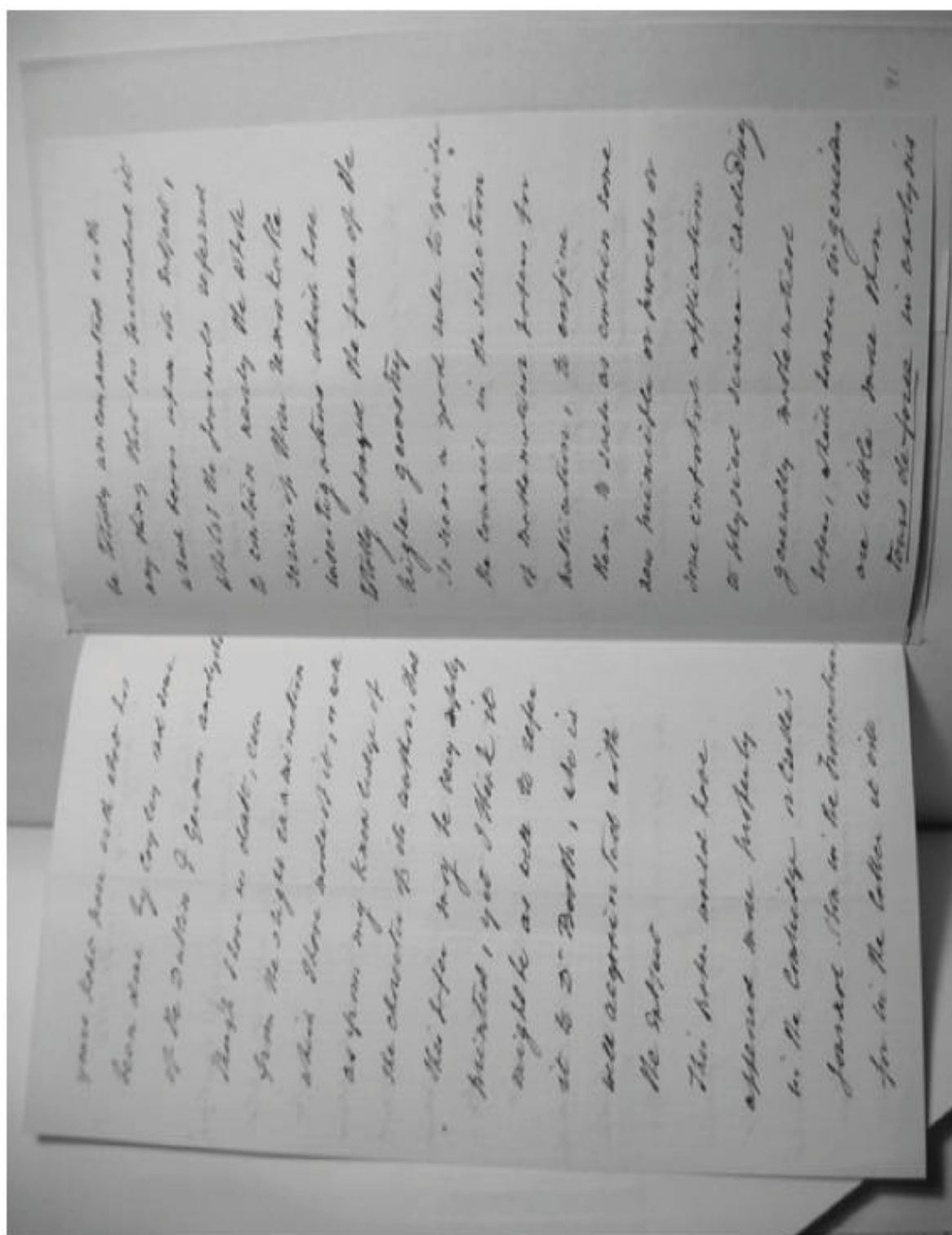


Figura 3 – Parecer Peacock (Páginas 2 e 3)

Fonte: Royal Society of London. *Referees Reports (1850-1855)*. London: June 21 1852, RR. 2.41.

as that some such limitation
the transactions might be
overrun by mathematics
which would soon be read.

In the case of Cayley's paper
his high character as an
analyst would exempt him
from the application of this
principle, more especially
as it is the first which he
has presented to the Society.
I should therefore be myself
disposed at once to
print it on the credit
of the author.

Believe me

My dear Sir
Very truly yours
G. Peacock

Figura 4 – Parecer Peacock (Página 4)

Fonte: Royal Society of London. *Referees Reports (1850-1855)*. London: June 21 1852, RR. 2.41.

Eis a transcrição do parecer:

I have looked through Cayley's paper, but i have non attempted except in a few cases to verify the results: in fact a pressure a engagement, where prevent my attending the Council tomorrow, has made it impossible for me to devote ____ A time I labor to its ____, which ____ could make my opinion a much value I will very frankly confess also that the class of investigations with which this paper is connected are in advance of me & I have not for the last three or four years kept pace with what has been done by Cayley and some of the Dublin and German analysts though I have no doubt, even from the slight examination which I have made of it, as well as from my knowledge of the character of its author, that this paper may be very safely printed, yet i think it might he as well to refer it to J. Booth, ____ is well ____ feel with the subject.

This paper would have appeared more property in the Cambridge or Crelle's Journal than in the Transactions.

For in the latter ____ be totally unconnected as the any thing that has preceded it ____ refers its subject, which the journals referred to contain ready the whole series of these remarkable investigations which have totally ____ the fall of the higher Geometry.

It seems good a good ____ to guide the Council in the selection a mathematicians papers for publications, to ____ them to ____ as contain some new principle on process as ____ application to physical sciences : ____ generally mathematical.

(...) In the case of Cayley's paper [on Malfatti's problem] his high character as an analyst would exempt it from the application of this principle, more especially as it is the first which he has presented to the Society (...).

George Peacock inicia seu parecer relatando que verificou alguns dos cálculos descritos no artigo, bem como deixou de verificar outros em algumas exceções. Ele relata ainda que não poderá comparecer na reunião do Conselho em virtude da pressão de um noivado. Não podemos esquecer que Peacock deixou suas pesquisas de lado para se dedicar em atividades na igreja, mais especificamente na Catedral de Ely.

Ele confessa que esse artigo apresentado por Cayley está além do seu tempo, visto que ele não tem se mantido a uns 3 ou 4 anos a mesma intensidade e ritmo de dedicação de outros matemáticos, como Cayley, matemáticos de Dublin e analistas alemães. Entretanto, Peacock afirma não abrigar dúvidas, apesar do leve exame que fez no trabalho de Cayley, que em virtude do conhecimento do caráter do autor, este artigo pode ser impresso com total segurança, embora ele ainda achasse necessário que o matemático James Booth também poderia dar sua opinião sob os resultados apresentados no artigo *Analytical Researches connected with Steiner's Extension of Malfatti's Problem*.

Peacock analisa que esse trabalho seria mais pertinente a alguma revista matemática, como as revistas de Cambridge e o Crelle ao invés da *Philosophical Transactions*, e que esta Sociedade deveria dar maior prioridade a trabalhos que envolvam ciências físicas em vez de trabalhos puramente matemáticos.

Ele comenta que se a Sociedade estiver interessada em um resultado essencialmente matemático, ele não tinha hesitações em recomendar a sua publicação, e que embora de sua preferência de artigos que envolvam ciências físicas, ele estava disposto a abrir uma exceção para o trabalho de Cayley por conta do que estava apresentado no artigo, o isenta em fazer valer esse princípio devido aos desenvolvimentos analíticos de caráter elevado.

Dessa forma, Peacock finaliza o aceite do trabalho, principalmente levando em consideração a boa impressão que ele tem em relação ao seu autor, Arthur Cayley.

Em 1854, Arthur Cayley envia sua segunda publicação, *An Introductory Memoir on Quantics*, marcando o início da série de publicações com a temática da Teoria dos Invariantes. Junto do artigo, ele escreve na carta de submissão uma explicação do termo Quântico e “facientes”:

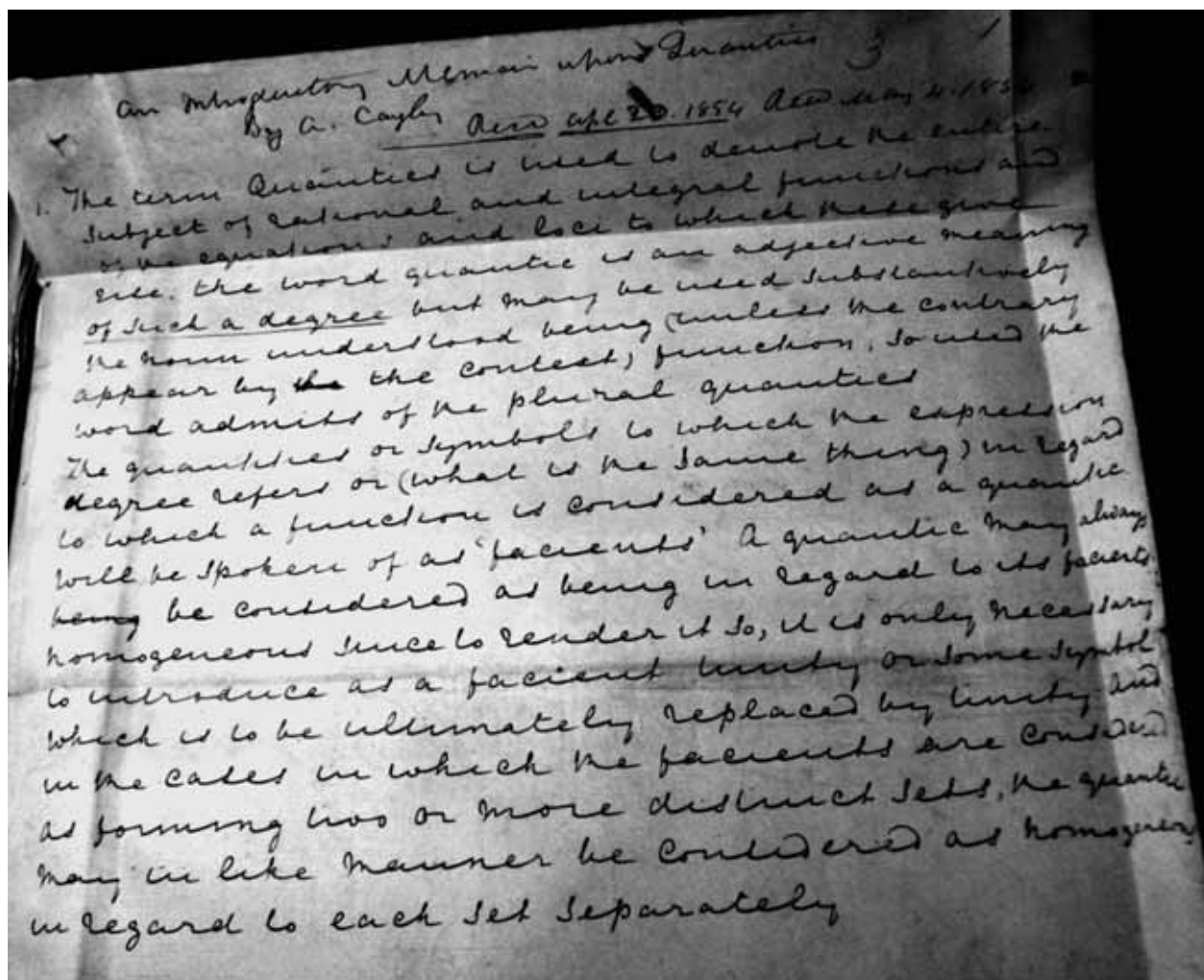


Figura 5 – Carta de Cayley submetendo o artigo “An Introductory Memoir on Quantics”

Fonte: Royal Society of London. *Philosophical Transaction*. London: April 20 1854, PT. 49.3.

Eis a transcrição:

The term quantic is used to denote the entire subject of rational and integral functions and of the equations and loci to which these give rise. The word quantic is an adjective meaning of such a degree and may be used substantively the noun understood being (unless the contrary appear by the context) function; so used the word of the plural quantics.

The quantities or symbols to which the expression degree refers or (what is the same thing) in regard to which a function is considered as a quantic will be spoken of as 'facients'. A quantic may always be considered as being in regards to its facients homogeneous since to render it so, it is only necessary to introduce as a facient unity or some symbol which is to be ultimately replaced by unity; and in the cases in which the facients are considered as forming two or more distinct sets, the quantic may, in like manner, be considered as homogeneous in regards to each set separately.

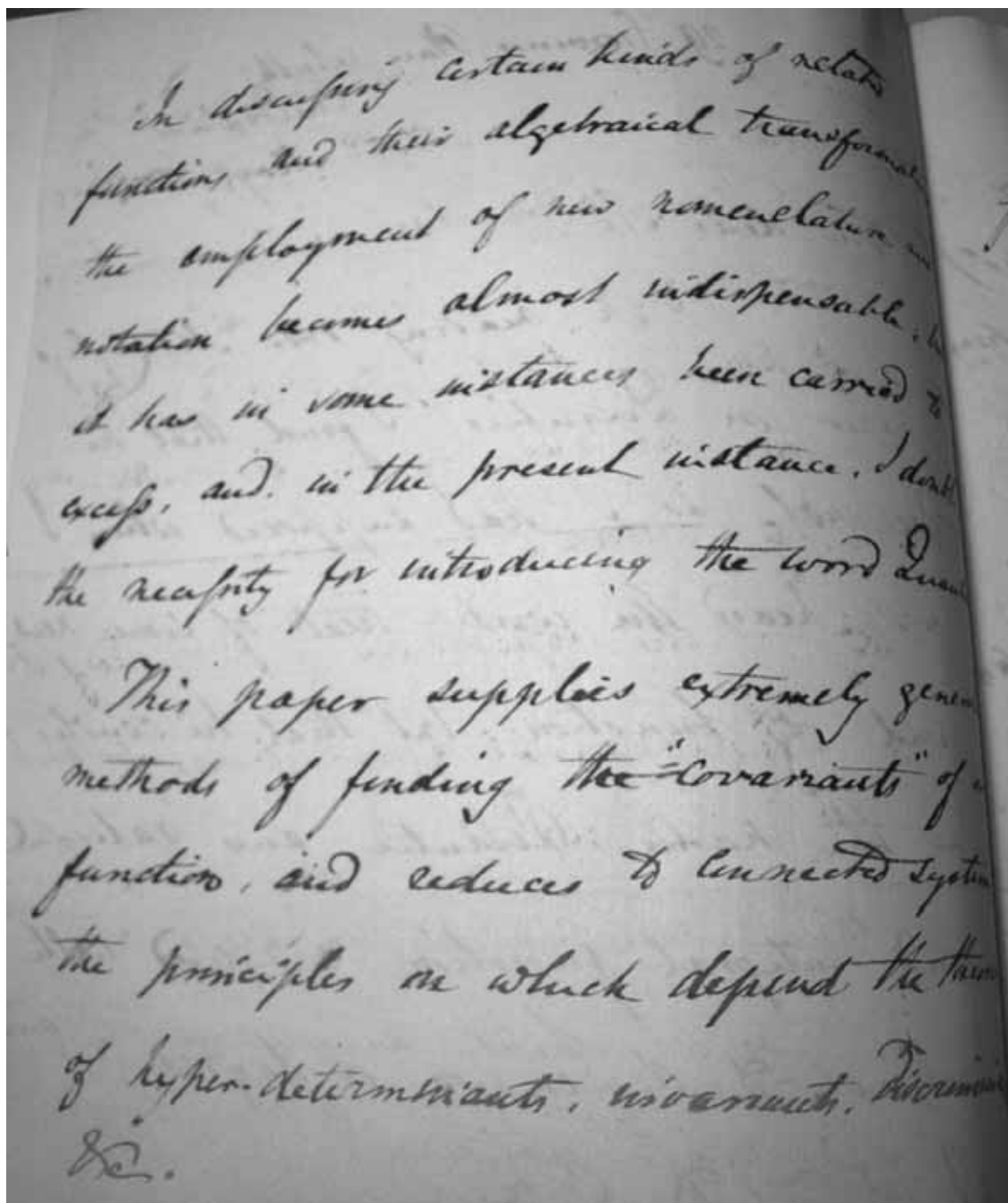
Daremos então a sequência de pareceres em relação sua Memória dos Quânticos:

42
 13th May 1854
 29 Grosvenor Place (Smith)
 Cheltenham
 13th May 1854
 My dear Sir,
 On reading over Mr. Cayley's
 paper on Quantics. I find that he
 does not (as I had supposed when I
 first heard the word) treat of some new
 kind of function, but that he denotes
 by the name Quantic any rational
 and integral function considered with
 respect to dimension or degree.
 C. R. Wild Esq.

Figura 6 – Parecer de Mr. John Graves em relação à Primeira Memória dos Quânticos (Página 1)

Fonte: Royal Society of London. *Referees Reports (1850-1855)*. London: May 13 1854, RR.

2.42.

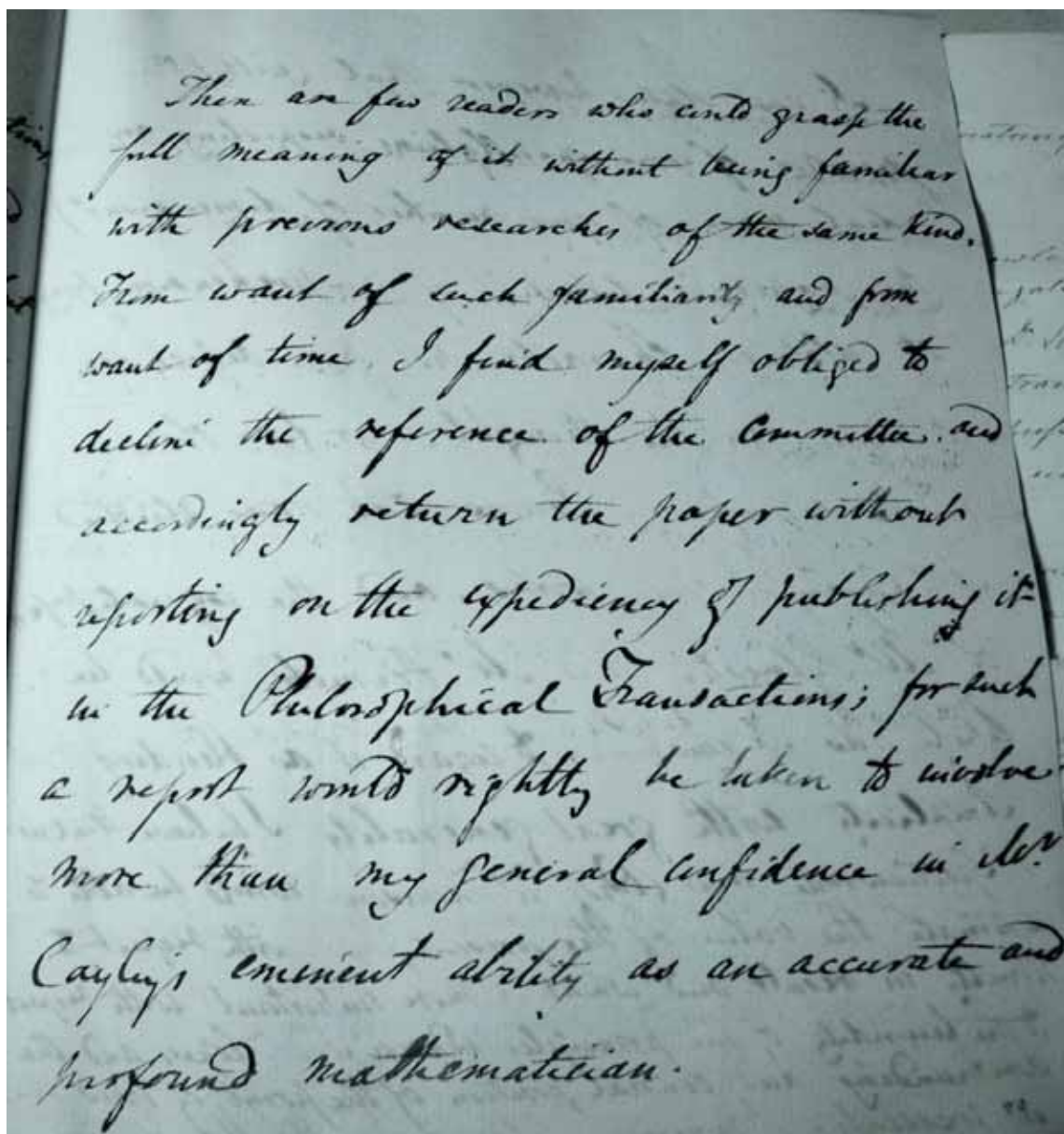


In discussing certain kinds of relations
 functions and their algebraical transformations
 the employment of new nomenclature and
 notation becomes almost indispensable, but
 it has in some instances been carried to
 excess, and in the present instance, I doubt
 the necessity for introducing the word Quantic.

 This paper supplies extremely general
 methods of finding the "Covariants" of a
 function, and reduces to connected system
 the principles on which depend the theory
 of hyper-determinants, invariants, Discriminants
 &c.

Figura 7 – Parecer de Mr. John Graves em relação à Primeira Memória dos Quânticos (Página 2)

Fonte: Royal Society of London. *Referees Reports* (1850-1855). London: May 13 1854, RR. 2.42.



Then are few readers who could grasp the
 full meaning of it without being familiar
 with previous researches of the same kind.
 From want of such familiarity and from
 want of time I find myself obliged to
 decline the reference of the Committee, and
 accordingly return the paper without
 reporting on the expediency of publishing it
 in the Philosophical Transactions; for such
 a report would rightly be taken to involve
 more than my general confidence in Mr.
 Cayley's eminent ability as an accurate and
 profound mathematician.

Figura 8 – Parecer de Mr. John Graves em relação à Primeira Memória dos Quânticos (Página 3)

Fonte: Royal Society of London. *Referees Reports (1850-1855)*. London: May 13 1854, RR. 2.42.

I can state however that (with the exception of some speculations respecting an "ideal space of any number of dimensions") the paper is difficult of comprehension from its abstract character, not from defect of clearness in the thoughts, nor from obscurity in the expression. Persons who have studied Mr. Cayley's other works, and the cognate papers of Mr. Sylvester and Mr. Hermite, would be likely, as I imagine I regard it as blending great simplicity with great generality. I believe that Mr. W. Spottiswoode and Prof. W. Thomson would be able to estimate the value of the present paper with respect to novelty in result, and (what is more important) with respect to the soundness of the principles which it develops, and the commanding and central position of the point of view which it presents. I remain, Yours faithfully, John T. Graves

Figura 9 – Parecer de Mr. John Graves em relação à Primeira Memória dos Quânticos (Página 4)

Fonte: Royal Society of London. Referees Reports (1850-1855). London: May 13 1854, RR.

Eis a transcrição:

On reading over Mr. Cayley's paper on Quantics, I find that he does not (as I had supposed when I first heard the word) treat of some new kind of function but that he denotes by the name Quantic any rational and integral function considered with respect to dimension or degree.

In discussing certain kinds of related functions and their algebraic transformations the employment of this nomenclature and notation becomes almost indispensable, but it has in the present instances been carried to excess and in the present instance, I doubt, the necessity for introducing the term quantic.

This paper supplies extremely general methods of finding the "covariants" of functions and reduces to connected systems the principles on which depend the of hyperdeterminants, invariants, discriminants.

There are few readers who could grasp the full meaning of it without being familiar with previous researches of the same kind.

From want of such familiarity and from want of time I find myself obliged to decline the reference of the committee and accordingly return the paper without reporting on the expediency of publishing it in the Philosophical Transaction; for such a report would rightly be taken to involve more than my general confidence in Mr. Cayley's eminent ability as an accurate and profound mathematician.

I can state however that (with the exception of speculations an "ideal spaces of any number of dimensions") the paper is difficult of comprehension from its abstract character, not from defect of clearness in the thoughts, nor from obscurity in the expressions. Persons who have studied Mr. Cayley's other works and the congregate papers of Mr. Sylvester and Mr. Hermite would be likely as I imagine to regard it as blending great simplicity with great generality I believe that Mr. Spottiswoode and Prof. W. Thomson would be able to estimate the value of the present paper with respect to the fecundity of the principles which it develops and the commanding and central position of the point of view which I presents.

Auchincloss, Large
 Aug 12, 1854
 Mr. Carley's "Introductory Memoir
 on Quantics" having been
 referred to me by the
 Committee on Papers, I have
 read it, and I have no
 hesitation in recommending
 that it should be published
 in the Transactions. I have
 written to the author on
 one or two ~~points~~ points
 where it appeared to
 me that some additional
 explanations or illustra-
 tions might make his

Figura 10 – Parecer de Mr. William Thompson em relação à Primeira Memória dos Quânticos
 (Página 1)

Fonte: Royal Society of London. *Referees Reports (1850-1855)*. London: August 12 1854, RR.
 2.43.

work more easily read.
 Should the Committee
 decide on printing his
 paper, it will not be
 necessary to make any
 delay on this account
 unless Mr Carly himself
 makes application to
 have his manuscript
 returned. The additions
 which I suggest may
 I believe be inserted
 without inconvenience
 on the proofs.
 William Thomson

Figura 11 – Parecer de Mr. Willian Thompson em relação à Primeira Memória dos Quânticos (Página 2)

Fonte: Royal Society of London. *Referees Reports (1850-1855)*. London: August 12 1854, RR. 2.43.

Eis a transcrição do parecer:

London, August 12 1854

Mr. Cayley's Introductory Memoir on Quantics having been referred to me by the Committee on Papers. I have no hesitation in recommending that it should be published in the Transaction.

I have written to the author on one or two points where it appeared to me that some additional explanation or illustrations might make his work more easily read.

Should the Committee decide on printing his paper, it will not be necessary to make any delay on this account unless Mr. Cayley himself makes application to have his manuscript returned. The additions which I suggest may I believe be inserted without inconvenience on the proofs.

William Thomson

To the "Committee on Papers"

Podemos ver que a Memória de Introdução aos Quanticos apresenta um aspecto muito curioso e interessante em relação aos seus pareceres. Na leitura da transcrição pudemos observar que Graves não emitiu uma opinião favorável em relação a esta publicação, ele decidiu abdicar a sua apreciação, alegando que não possuía familiaridade com o assunto presente na memória e nem tempo para se debruçar no entendimento das definições e métodos para cálculo de covariantes descritos na publicação.

Graves relata que poucas pessoas seriam capazes de ter uma noção por completo dos conceitos presentes nessa memória sem o conhecimento prévio de outras leituras complementares. Ele aponta que esse artigo apresenta métodos gerais para calcular covariantes de funções e que dependem do conhecimento de outros significados como hiperdeterminantes, invariantes e discriminantes.

Em relação à introdução do termo “Quântico”, Graves considerou que essa nova terminologia era desnecessária, pois em sua opinião não se tratava de uma propriedade nova como ele pensava ser antes de ter contato com a publicação. Ele comenta que se houvesse uma discussão a certos tipos de funções e transformações algébricas, o emprego desta nomenclatura seria indispensável, mas no caso das funções apresentadas no artigo, podemos interpretar que ele considerou apenas uma maneira alternativa de se referir aos polinômios homogêneos racional e integral.

Ao final do parecer, ele declara que o artigo possui um caráter abstrato, sendo assim, de difícil compreensão, entretanto, ele comenta que a dificuldade não se deu por falta da clareza nos pensamentos e obscuridade nas expressões apresentadas no artigo. Nessa sua fala, entendo que ao menos, diversos conceitos presentes na memória, Graves teve um entendimento. Parshall (2006) relata que provavelmente o matemático declinou o seu julgamento em virtude de algum ressentimento por Cayley ter sido mais rápido que ele na descoberta dos octônios, pois de acordo com Parshall (2006, p.189) *“Arthur Cayley and John Graves almost immediately extend Hamilton’s ideas to eight-dimensional octonions that satisfy neither the commutative nor the associative laws of multiplication”*. John Graves foi aluno e discípulo de

Hamilton⁴⁸, que desenvolveu a Teoria dos Quatérnios, portanto, o natural seria que Graves avançasse os estudos de seu mestre, entretanto, Cayley foi mais rápido, e em 1845 publicou sobre os Octônios. Crilly (2006, p.180) também relata que Graves “*had once been anxious that Cayley would pip him in the race for the octaves*”. Provavelmente, esse fato apesar de ter acontecido no passado, deve ter sido levado em consideração por Graves quando caiu em suas mãos o aceite da publicação de Arthur Cayley na *Philosophical Transactions of Royal Society of London*.

Por fim, Graves recomenda que outras pessoas que tenham estudado os trabalhos anteriores de Arthur Cayley, Sylvester e Hermite⁴⁹ teriam melhores condições do que ele para aferir a publicação. Ele sugere em seu parecer ao Conselho que Spottiswoode e Thomson seriam capazes de estimar, com respeito e propriedade a fecundidade dos princípios desenvolvidos, o valor da memória introdutória aos quânticos, ao invés dele. Dessa forma, ele não aprova e nem desaprova a inserção desse artigo nas *Transactions*, podemos ver que ele se considera inapto para averiguar os resultados.

Acredito que Parshall (2006) pode estar certa, pois Graves diz em seu parecer que caso ele desse uma aprovação na publicação de Arthur Cayley, estaria dando mais que sua palavra em relação à confiança da capacidade eminente de Cayley como um matemático preciso e profundo, ou seja, estaria dando a Cayley o seu reconhecimento como matemático.

Em contrapartida, se tomarmos o parecer de William Thomson, veremos que em nenhum momento ele hesitou a inclusão da memória de Cayley na *Philosophical Transactions*. Thomson relata que escreveu a Cayley que um ou dois pontos apresentados no artigo caberia uma maior explicação ou ilustração adicional para fazer com que seu trabalho tivesse uma leitura de mais fácil compreensão, e que apesar disso, ele não vê nenhum contratempo para que essa publicação seja adiada, a não ser que o próprio Cayley venha a pedir isso. Concluímos que Thomson fez valer a sua autoridade e garantiu, mesmo com a “declinação” de Graves, a publicação da Primeira Memória dos

⁴⁸ William Rowan Hamilton (1805-1865), matemático irlandês.

⁴⁹ Charles Hermite (1822-1901), matemático francês.

Quânticos de Arthur Cayley na *Philosophical Transactions of Royal Society of London* em 1854.

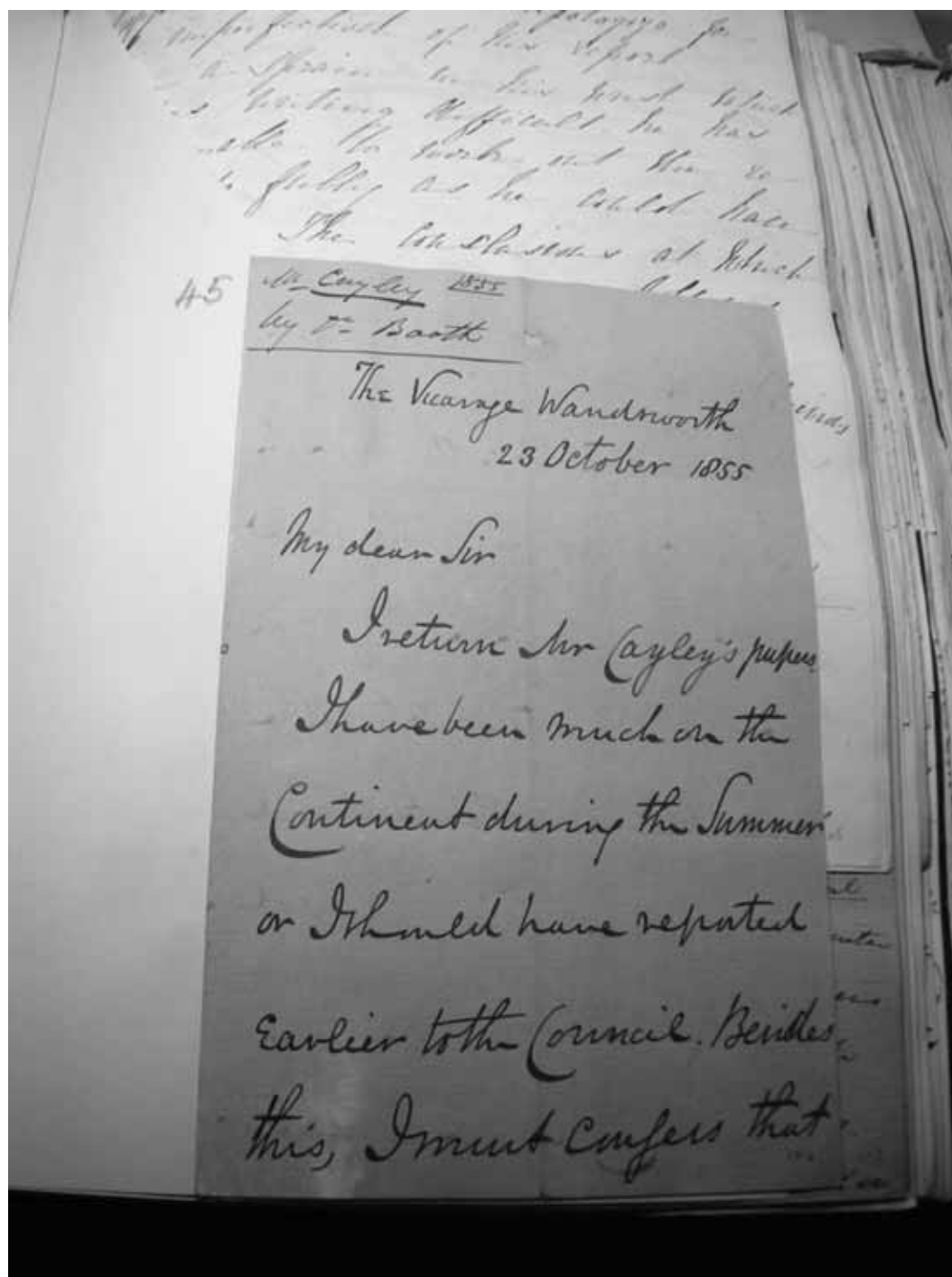


Figura 12 – Parecer de James Booth em relação à Segunda Memória dos Quânticos (Página 1)

Fonte: Royal Society of London. *Referees Reports (1850-1855)*. London: October 23 1855, RR. 2.45.

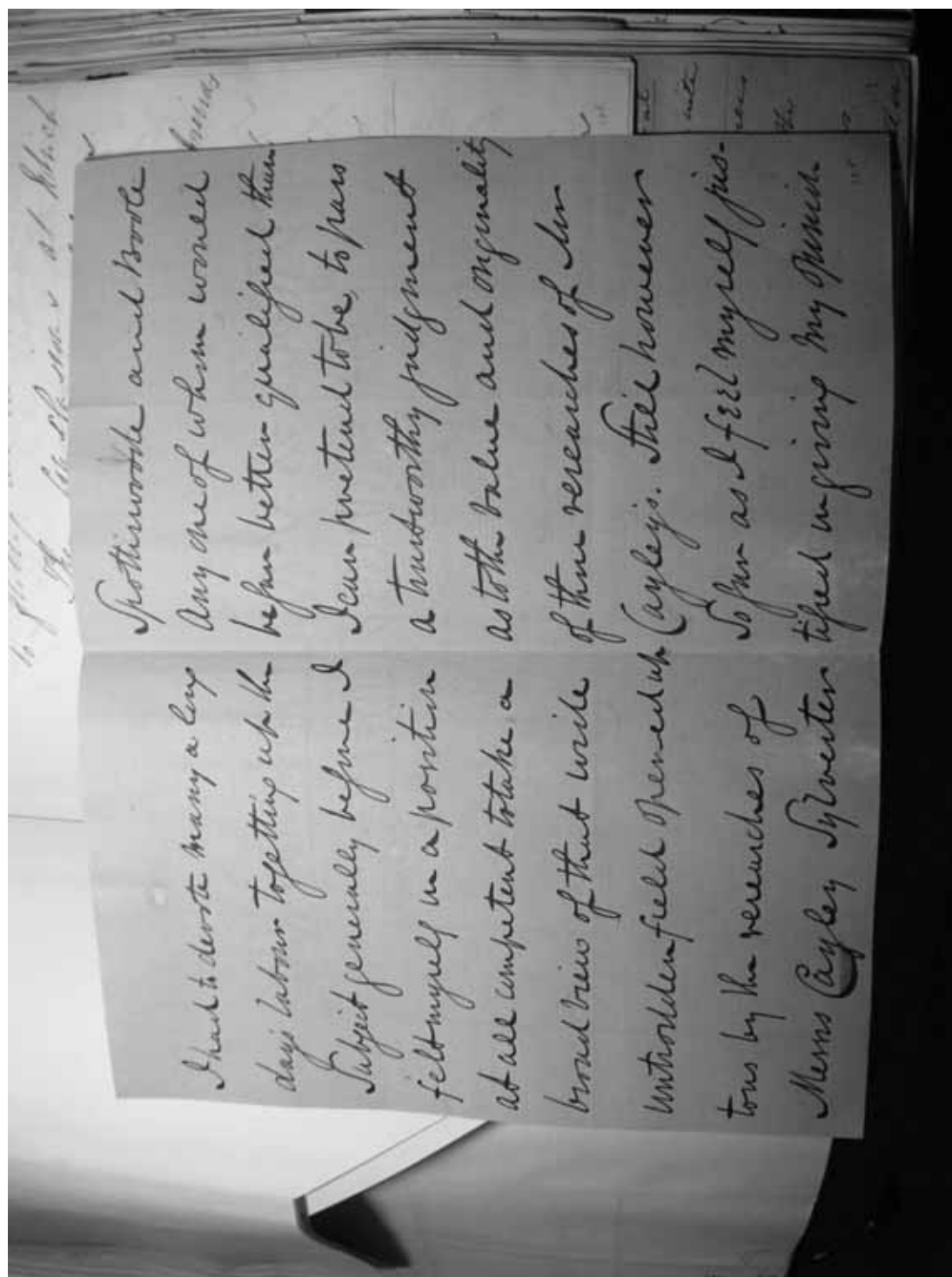


Figura 13 – Parecer de James Booth em relação à Segunda Memória dos Quânticos (Páginas 2 e 3)

Fonte: Royal Society of London. *Referees Reports (1850-1855)*. London: October 23 1855, RR. 2.45.

I have no doubt whatever
that Mr Cayley's Memoir
with its Supplement
ought to be published in
the Philosophical Transactions

Believe me my dear Sir
faithfully yours
James Booth

G. G. Stokes Esq
Secretary of the Royal Society

Figura 14 – Parecer de James Booth em relação à Segunda Memória dos Quânticos (Página 4)

Fonte: Royal Society of London. *Referees Reports (1850-1855)*. London: October 23 1855, RR. 2.45.

Eis a transcrição:

I return Mr Cayley papers.

I have much been on the Continent during the Summer ___ i should have reported earlier to the Council. Besides this, i must confess that i have to devote many a long days labour to getting up this subject generally before i felt myself in a position at all competent to take a broad view of that ___ ___ field opened up to us by the researches of Messrs Cayley Sylvester Spootswood and Boole any one of when worked before better qualified than i can pretend to be to pass a trustworthy judgment as to the value and originality of than researches of Mr Cayley's. Still however so far as fell myself justified in giving my opinion i have no doubt whatever that Mr Cayley's memoir with its supplement ought to be published in the Philosophical Transactions.

Report on Mr Cayley's Memoirs
 Professor Kelland begs to apologize for
 the imperfection of his report
 upon a paper in his hand which
 renders writing difficult. He has
 been unable to work out the re-
 sults so fully as he could have
 wished. The conclusions at which
 he has arrived are as follows
 1. On Quaternions
 This being the continuation of a former
 Memoir and being in itself very
 carefully composed and original,
 there can be no hesitation in
 recommending for publication
 2. Three papers on the properties of
 Numbers
 The Author states that these researches
 remain, dear Sir,
 Yr faithfully
 J. Kelland

Figura 15 – Parecer de Kelland em relação à Segunda Memória dos Quânticos (Página 1)

Fonte: Royal Society of London. *Referees Reports* (1850-1855). London: November 2
1855, RR. 2.46.

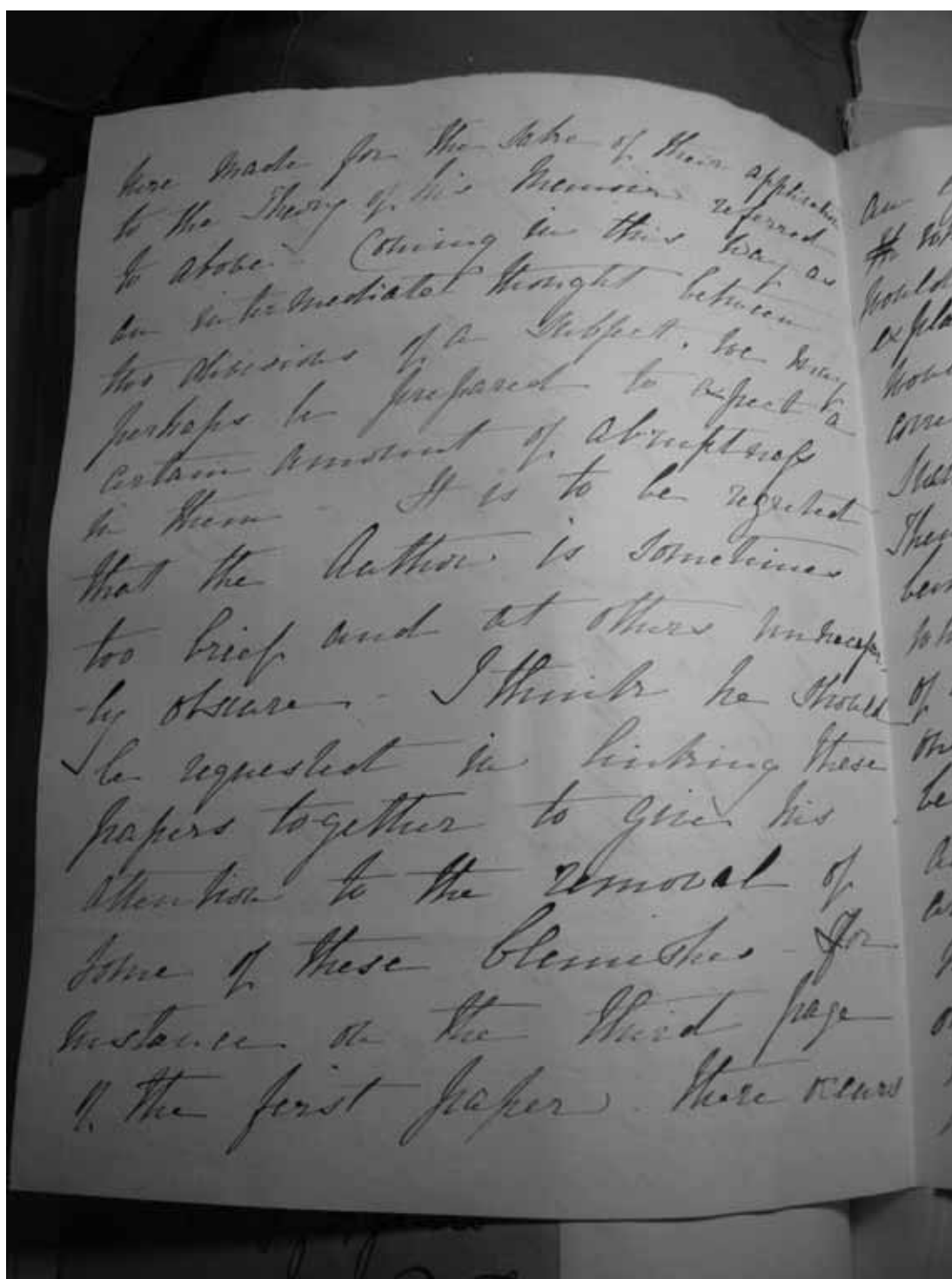


Figura 16 – Parecer de Kelland em relação à Segunda Memória dos Quânticos (Página 2)

Fonte: Royal Society of London. *Referees Reports (1850-1855)*. London: November 2
 1855, RR. 2.46.

equation which I have mentioned
 whose meaning two or three words
 explain itself. But which does not
 explain itself. The same remarks
 would apply ~~to the~~ where a
 corresponding equation occurs
 which briefly appears unnecessary
 as to obscurity a passage has
 been marked on the next page
 which consists of the demonstration
 of the simple property of the roots of
 the equation. It is possible that this may
 be a form of writing which has
 advantages - but these advantages
 are by no means apparent - and
 never to allude to the property
 on which the whole demonstration
 turns whilst the obscure word
 indeterminate is made use of

Figura 17 – Parecer de Kelland em relação à Segunda Memória dos Quânticos (Página 3)

Fonte: Royal Society of London. Referees Reports (1850-1855). London: November 2
 1855, RR. 2.46.

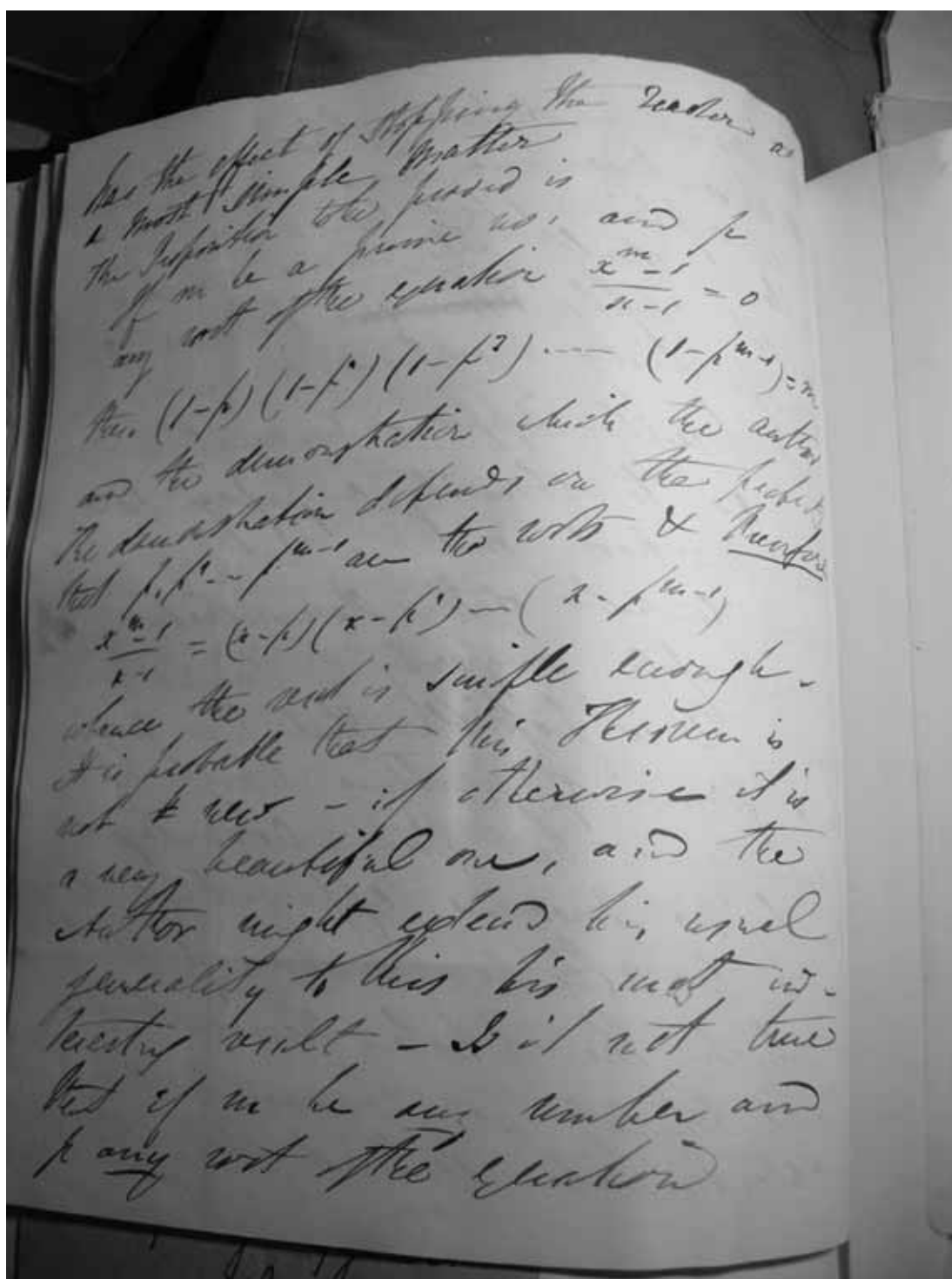


Figura 18 – Parecer de Kelland em relação à Segunda Memória dos Quânticos (Página 4)

Fonte: Royal Society of London. *Referees Reports (1850-1855)*. London: November 2 1855, RR. 2.46.

$x^u - 1 = 0$, the product
 $(1-p)(1-p^2) \dots (1-p^{u-1}) = 0$
 or 0. The author's demon-
 stration does not enable us to
 answer this question.
 Whatever recommendations the Committee
 may decide on making to Mr. Cayley
 there can be no doubt of the propriety
 of inserting the paper in the *Philosophical*
Transactions.
 Michl. Kelland

Remain dear Sir,

Figura 19 – Parecer de Kelland em relação à Segunda Memória dos Quânticos (Página 5)

Fonte: Royal Society of London. *Referees Reports (1850-1855)*. London: November 2 1855, RR. 2.46.

Eis a transcrição:

Professor Kelland begs to apologize for the imperfection of his report I ___ a ___ in his ___ which ___ writing difficult he has been enable to works out the results to fully as he would have published. The conclusions at which he has arrived are as follows 1th Quantics.

This being the continuation of a previous memoir and being in itself ___ carefully confessed and original there can be no hesitation in recommending for publication.

2. I have paper on the partition of number.

The author i take that these researches here made for the take of their application to the Theory of his Memoir referred to above. Coming in this way as an intermediate ___ between ___ decisions in a subject. ___ may perhaps be prepared to expect a certain ___ of ___ in then. It is to be regressed that the author is sometimes to brief and at others ___ obscure. I think he should be requested in ___ these papers together to gives his Memoir to the removal of some of these blemishes for instance on the third page in the first paper there ___ an equation which those i have marked _____ meaning two or three words would explain that which does list explain itself. The same remarks would apply wherever a corresponding equation access _____ brevity appears _____ then as to obscurity a passage have been marked on the next page which consists of the demonstration of a simple property of the roots of the. It is possible that this may be a form of printing which has advantages but these advantages are by no means apparent and never to allude to the property on which the whole demonstration _____ the obscure word indeterminate is made _____ of has the effect of ___ the leader as a most simple matter.

The ___ ___ ___ is of m be a prisme $m\theta$ and f any root of the equation $\frac{x^m-1}{x-1} = 0$ then $(1-f)(1-f^\alpha)(1-f^\beta) \dots (1-f^{m-1}) = m$ and the demonstration which the author the demonstration ___, are the ___ that

$f, f^\alpha, \dots, f^{m-1}$ are the roots & $\frac{x^m - 1}{x - 1} = (x - f)(x - f^\alpha) \dots (x - f^{m-1})$ whence the result is simple enough.

It is probably that his Theorem is $\frac{x^m - 1}{x - 1} = (x - f)(x - f^\alpha) \dots (x - f^{m-1})$ - if otherwise it is a very beautiful $\frac{x^m - 1}{x - 1}$, and the author might $\frac{x^m - 1}{x - 1}$ his $\frac{x^m - 1}{x - 1}$ generality to this his most interesting result. $\frac{x^m - 1}{x - 1}$ true that if m be any number and f any root of the equation $x^m - 1 = 0$, the $\frac{x^m - 1}{x - 1} = (1 - f)(1 - f^\alpha) \dots (1 - f^{m-1}) = m$ the author demonstration does $\frac{x^m - 1}{x - 1}$ enable $\frac{x^m - 1}{x - 1}$ this Memoir.

Whatever recommendation the Committee may decide on making to Mr Cayley there can be no doubt of the propriety of inserting the paper in the Royal Society Transaction.

Primeiramente destacamos o parecer de James Booth, que antes de tudo, inicia pedindo desculpas ao Conselho por ter ido ao Continente e não comunicado essa sua ida anteriormente. Além disso, Booth era um matemático irlandês, que assim como John Graves, estudou no *Trinity College* de Dublin, portanto, havia uma ligação entre esses dois matemáticos.

Booth relatou que para se considerar competente em relação a temática abordada e ser capaz de oferecer uma apreciação fidedigna aos resultados apresentados na Segunda Memória dos Quânticos, ele dedicou muito tempo para tentar entender sobre o tema abordado no artigo, tendo se baseado nos estudos de Sylvester, Boole, Spottiswoode e inclusive do próprio Cayley, a fim de ter uma visão ampla do campo que se referia essa publicação no qual ele devia dar o seu julgamento. Ele ainda pondera que esses matemáticos citados, são mais capacitados para qualificar o valor e a originalidade das pesquisas de Cayley ao invés dele, mas que ele poderia fingir ser uma pessoa com conhecimento amplo do assunto abordado.

Apesar dessa sua afirmação, ele diz então, que como cabe a ele sentenciar o julgamento da entrada dessa publicação na *Philosophical Transactions*, Booth diz não ter dúvidas de que a segunda Memória dos Quânticos devesse ser incluída nas *Transactions*.

Pelas suas palavras, podemos ver que ele seguiu a mesma linha de Graves ao relatar que o assunto dos quânticos deveria ser tratado por matemáticos que tivessem um maior conhecimento sobre os tópicos abordados pela Teoria dos Invariantes, entretanto, ele não omitiu sua opinião quanto à publicação da memória, mesmo com suas críticas, ele considerou a pertinência do artigo para ser publicada pela *Royal Society of London*.

Em relação ao parecer de Kelland, ele também inicia seu parecer pedindo desculpas ao Conselho por qualquer imperfeição em seu relatório. Logo no início de suas palavras, Kelland comenta ter tido grande dificuldade para entender os resultados apresentados e que percebeu que esse artigo se tratava de uma extensão da Primeira Memória dos Quânticos. Sendo assim, ele diz algo bastante plausível, que foi considerar que como a Segunda

Memória era o prosseguimento de uma memória anterior, não deveria haver hesitação em aprovar esta continuação.

Kelland relata em seu parecer que tinha em mãos o artigo de Cayley em relação à Partição dos Números, e que para remover algumas manchas em virtude da leitura da Segunda Memória, ele buscou entender alguns conceitos explicitados na sua memória anterior. Entretanto, ele aponta que algumas passagens e demonstrações de Cayley foram muito breves, e acrescenta que talvez essas brevidades nas passagens possam ter algum tipo de vantagem, mas que quaisquer que sejam essas vantagens, elas não estão aparentes e não aludem as propriedades demonstradas, tornando-as obscuras, ao invés de ter o efeito de tornar a questão mais simples.

Após essas considerações, Kelland desenvolve alguns resultados apresentados por Cayley para buscar o entendimento descrito na Memória. Ele afirma que se as conclusões de um determinado teorema denotado por Cayley teve foram as mesmas conclusões que ele obteve a partir do que observou, os resultados são extremamente simples, caso contrário, ou seja, os resultados serem muito mais gerais, o resultado é bem mais interessante.

Kelland finaliza seu parecer dizendo, que qualquer que seja a recomendação ao Conselho, não se pode haver dúvidas quanto à conveniência da inserção do artigo de Cayley na *Philosophical Transactions of Royal Society of London*.

47

Revolt. 24 April 1856

Dear Sir,

I have looked through
the accompanying paper by
Mr Cayley & have no hesitation
in recommending its publi-
cation with his other papers
on the same subject.

Remain, dear Sir,
Yrs faithfully
W Pottiswood

W. Beld

Figura 20 – Parecer de Spottiswood em relação à Terceira Memória dos Quânticos

Fonte: Royal Society of London. *Referees Reports* (1856-1858). London: April 24 1856,
RR. 3.47.

Eis a transcrição:

I have looked through the accompanying paper by Mr Cayley i have no hesitation in recommending its publication with his other papers on the same subject.

48 On the third memoir upon
 Quaternions by H. Cayley.
 This memoir is occupied
 almost exclusively with
 tables, & collected
 results - To verify
 these tables, or to
 enter on a careful
 examination of the
 results would be a
 labour of such
 magnitude - & so
 little interest that
 I fear most persons
 would not attempt

Figura 21 – Parecer de Kelland em relação à Terceira Memória dos Quânticos (Página 1)

Fonte: Royal Society of London. *Referees Reports* (1856-1858). London: Month (??)
 Day (??) 1856, RR. 3.48.

decline to undertake
 it. Should the Council
 of the Royal Society
 deem it necessary,
 there is no person
 but Mr. Sylvester
 who might probably
 be expected to enter
 on the task -
 I may state
 generally that
 the being in the
 direction in which
 analysis is extending
 in Germany,

Figura 22 – Parecer de Kelland em relação à Terceira Memória dos Quânticos (Página 2)

Fonte: Royal Society of London. *Referees Reports (1856-1858)*. London: Month (??)
 Day (??) 1856, RR. 3.48.

2^o as possible to become
 at some future day
 of applied value
 and 3^o as the work of
 a gentleman who has
 established a continuous
 reputation for his
 usefulness in a sci-
 entific department
 on these three points
 I think the present
 Memoir should be
 accepted by the
 Council of the Royal
 Society Philip Kelland

Figura 23 – Parecer de Kelland em relação à Terceira Memória dos Quânticos (Página 3)

Fonte: Royal Society of London. *Referees Reports* (1856-1858). London: Month (??)

Day (??) 1856, RR. 3.48.

Eis a transcrição:

This memoir is ___ almost exclusively with tables & calculates results - to ___ their tables on to enter in a careful examination after results would be a labour of ___ manifested to little influent that i fear most feel ___ a ___ ___ decline of undertake ___ the council of the Royal Society ___ if neccessary, there is no person ___ Mr Sylvester ___ probably he expected to ___ on the last.

I may take generally that 1º being in the direction in which analysis is extensive is in Germany, 2º as probably to the case at ___ any of applied value and 3º as their work of a gentleman ___ has established a continental reputation for his researches in a ___ on these ___

I think the present memoir should be accepted by the Council of the Royal Society.

Na Terceira Memória dos Quânticos, novamente Kelland foi recomendado pelo Conselho para fazer o julgamento da publicação do artigo submetido por Arthur Cayley. Ele aponta que essa memória praticamente se refere à apresentação de tabelas como resultados de seus cálculos.

Entretanto, dessa vez, ele se mostrou um pouco receoso quanto ao que foi apresentado por Cayley, devido não ter uma fluência considerável sobre o assunto, e comenta que se necessário, não teria problemas o Conselho da Sociedade decliná-lo da posição de dar uma opinião sobre o assunto. Kelland considerou que Sylvester seria mais indicado que ele para dar um julgamento quanto a essa memória.

Como aparentemente Kelland teve alguma dificuldade sobre o entendimento e compreensão da Terceira Memória, ele se apoiou para dar seu parecer em outros três fatos:

1º) Ele comenta que o assunto apresentado tem uma análise extensa na Alemanha, portanto, os resultados estão em consonância e direção com o assunto que estava sendo estudado e pesquisado no Continente;

2º) Pondera que provavelmente há um grande valor proveniente dos resultados demonstrados no presente artigo;

3º) Kelland ainda ajuíza que Arthur Cayley, bem como os seus trabalhos, estabeleceram uma reputação Continental por meio de suas pesquisas.

Portanto, em virtude dessas exposições, Kelland finaliza seu parecer escrevendo que a Terceira Memória dos Quânticos deveria ser aceita pelo Conselho da *Royal Society of London*.

As palavras de Kelland evidenciam o reconhecimento matemático de Arthur Cayley, principalmente na Alemanha, por meio do Crelle. Podemos observar que ele descreveu que teve grande dificuldade de entender as publicações de Cayley, mas em virtude da sua vasta publicação fora da Inglaterra, ou seja, no Continente Europeu, ele não hesitou em aprovar a sua publicação. Portanto, ele assumiu que aferiu por conta do reconhecimento matemático e prestígio que Arthur Cayley havia alcançado na época, e não

porque ele teve um entendimento dos resultados descritos na Terceira Memória.

Quanto ao outro parecerista, parece que finalmente o Conselho da *Royal Society of London* deu atenção aos comentários dos árbitros anteriores em relação à indicação do matemático Spottiswoode. Por meio de suas pesquisas e pelas palavras dos outros pareceristas, podemos entender que Spottiswoode estava muito preparado e que era uma pessoa respeitada para aferir sua opinião em relação aos trabalhos de Arthur Cayley com elevada credibilidade, em outras palavras, era o sujeito ideal para perfilhar o reconhecimento matemático sobre os estudos de Arthur Cayley.

Ele foi muito breve em sua avaliação, e relatou que ele não tinha nenhuma hesitação em recomendar a publicação da Terceira Memória, bem como qualquer outro trabalho da mesma temática.

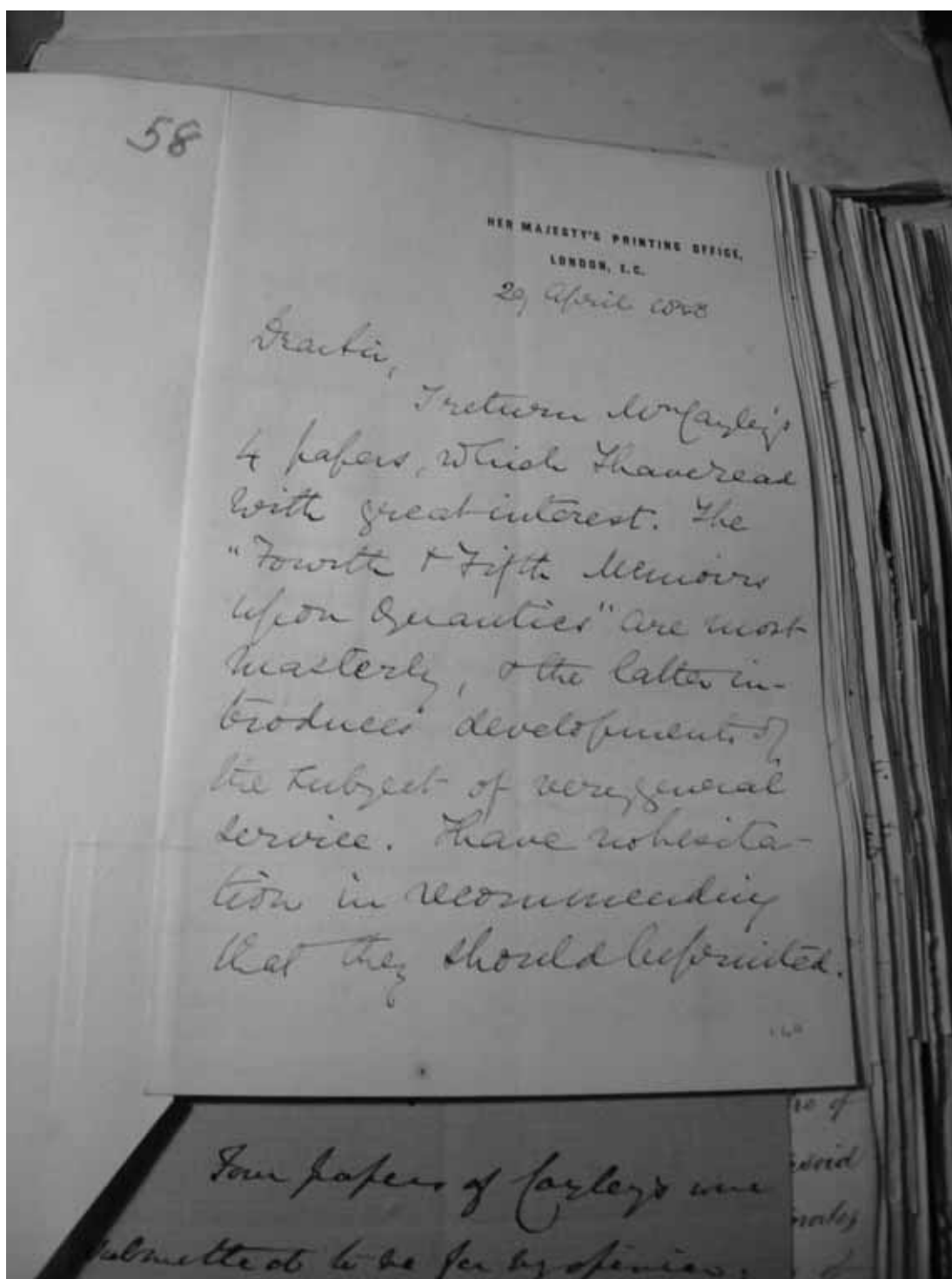


Figura 24 – Parecer de Price em relação a Quarta e Quinta Memória dos Quânticos e outros 2 artigos (Página 1)

Fonte: Royal Society of London. *Referees Reports (1856-1858)*. London: May 4 1858, RR. 3.59.

The author points out, as the focus of the extremely
 from the centre of the ellipse, of a circle, which
 would be the central reading of
 noted, appears to be the observation
 tended by that probability and
 continuity which belongs particularly
 to Mr. Farley: and it is also a
 good example of the application
 of his method: yet it is to that
 was a paper little adapted to
 a theoretical demonstration
 to the M. S. Transactions.
 It seems however I have
 referred to Mr. Spottiswoode,
 who undertakes to edit the
 type. It is very differently
 MacTutor's *Principles*

Mr. Farley is well known as the
 probability, that is due
 to him as to the reason of the
 Royal Society that they should
 by several opinions, it is uncer-
 tain in the Transactions.
 I also am of opinion that the
 known in the Transactions of
 a paper should ~~be~~ be printed
 in the Transactions.
 The last as for the paper
 the danger which is the last
 of Mr. Farley's theory
 part of an *Illustration* published

Figura 25 – Parecer de Price em relação a Quarta e Quinta Memória dos Quânticos e outros 2 artigos (Páginas 2 e 3)

Fonte: Royal Society of London. *Referees Reports (1856-1858)*. London: May 4 1858, RR. 3.59.

Eis a transcrição:

___ papers of Cayley was submitted to the at ___

Two of them are severally the fourth and fifth Memoirs on Quantics. I have no hesitation in recommending the Council to have that printed in the Transactions. They are do immediatly ___ with the former memoir ___ ___ exhibited applications of the systens of ___ to mark

Mr Cayley is working ___ great ___ that his due by him and to the ___ the Royal Society that they should by disable opinions ___ to the Transactions.

I also ___ opinion that the memoir on the Tangential of a Cubic should be printed on the Transactions.

The ___ and fourth of papers the ___ with is no ___ of Planes dramatically found of an Ellipsoid perpendicular to central radius ___, appears to the ___ ___ by that probability and ___ ___ ___ ___ Mr Cayley: and ___ is also a good example of the application of his method: ___ ___ ___ that his a paper better qualified to a Mathematical Journal than to the R. S. Transactions.

The several memoirs i have ___ to Mr. Spootwood ___ undertakes to returns them ____.

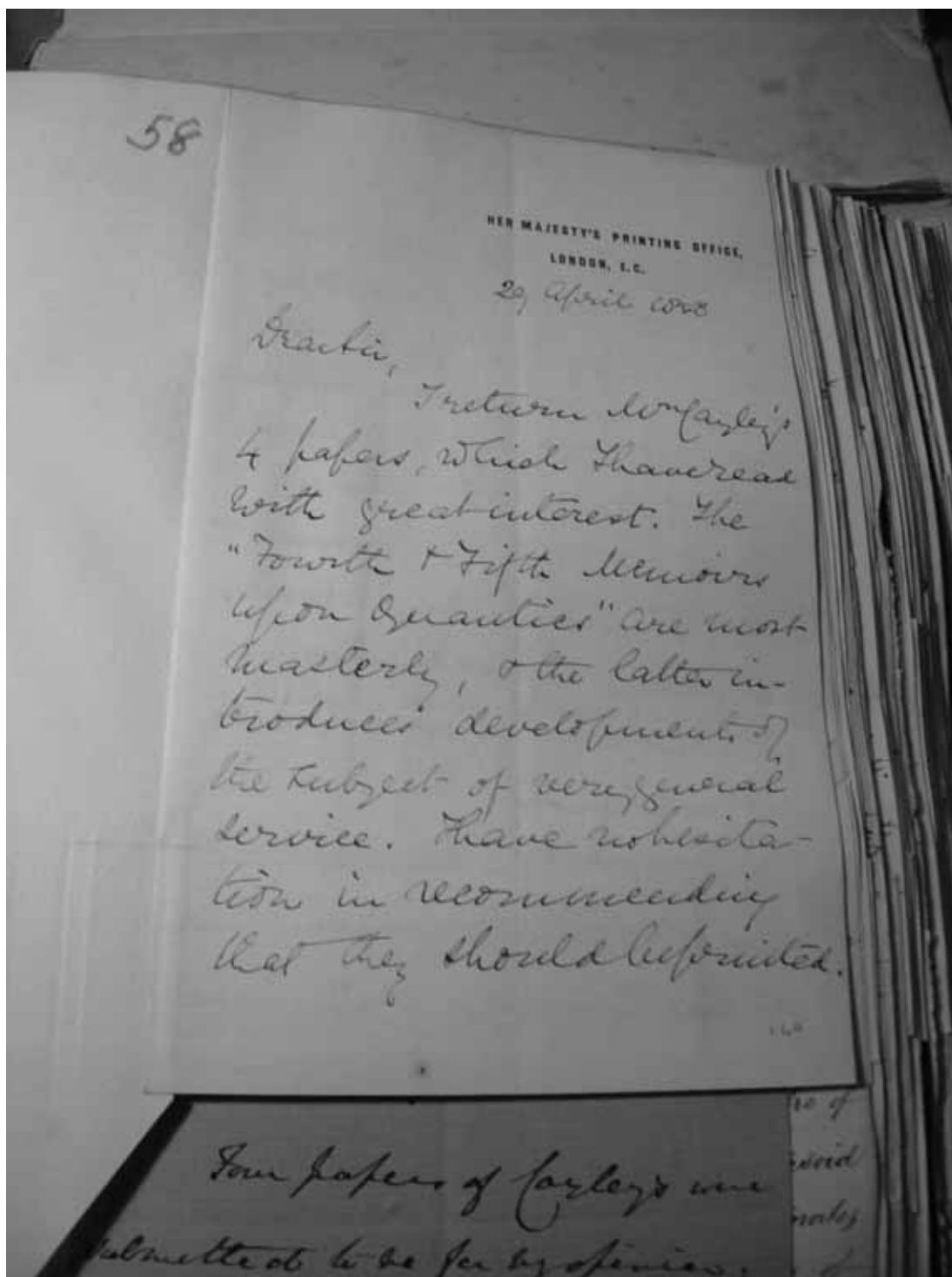


Figura 26 – Parecer de Spottiswood em relação a Quarta e Quinta Memória dos Quânticos e outros 2 artigos (Página 1)

Fonte: Royal Society of London. *Referees Reports* (1856-1858). London: April 29 1858, RR. 3.58.

would also support the
 printing of the paper on
 the material of the
 book, because it is obvious
 of the paper to his paper
 on the other of the third
 order, & that because the
 the resulting impression
 is itself illustrative of
 the subject of Quantics &
 Co-variables.

About the remaining
 paper "on the superposition
 to the envelope of", have

some hesitation. This with-
 out doubt interesting &
 masterly; but, as it relates
 rather to a special problem
 than to a general principle,
 & does not introduce any
 distinct new method, the
 perhaps better suited for
 a mathematical periodical
 than for the Philosophical
 Transactions.

Freeman de la
 40 faultfully
 Choldar Wolter

Figura 27 – Parecer de Spottiswood em relação a Quarta e Quinta Memória dos Quânticos e outros 2 artigos (Página 2)

Fonte: Royal Society of London. *Referees Reports* (1856-1858). London: April 29 1858, RR. 3.58.

Eis a transcrição:

I return Mr Cayley's 4 papers which i have read with great interest. "The fourth & fifth Memoirs upon Quantics" are most masterly, of the latter introduces development of the subject of general service. I have no hesitation in recommending that the should be printed.

I would also suggest the printing of the paper "On the Tangential of a Cubic", ____ because it is a kind of ____ to his paper on curves of the third order, ____ because the resulting ____ is itself illustrative of the subject Quantic & Covariants.

About the remaining paper About the remaining paper 'On the Surface which is the Envelope &c', I have some hesitation. [It is] without doubt interesting & masterly; but, as it relates rather to a special problem than to a general principle, & does not introduce any distinctly new method, it is perhaps better suited for a mathematical periodical than for the Philosophical Transactions.

Arthur Cayley enviou diversos artigos para serem publicados numa mesma edição na *Philosophical Transactions*, principalmente na década de 50 do século XIX, portanto, nesses casos, o Conselho da Sociedade, tinha como saída, ordenar que os árbitros julgassem mais de uma publicação em um mesmo parecer. A Quarta Memória dos Quânticos, bem como a Quinta Memória dos Quânticos foram analisadas de uma vez, caíram nessa situação em virtude da proximidade da submissão dos artigos por Cayley. Além das memórias, os pareceristas também avaliaram outros dois artigos em um mesmo parecer: “*On the Tangential of a Cubic*” e “*On the Surface which is the Envelope &c*”.

Spottiswoode permaneceu como árbitro, e em relação às duas memórias ele foi enfático. Ele disse que ambos os resultados contidos nessas duas publicações são magistrais e que não tinha nenhuma hesitação em recomendar a inserção delas para impressão na *Philosophical Transactions*.

Em relação ao artigo “*On the Tangential of a Cubic*” ele relata que a publicação aborda sobre curvas de terceira ordem, e sugere a publicação deste artigo com a justificativa de que os resultados apresentados são ilustrações dos covariantes, assunto descrito nas Memórias dos Quânticos.

Quanto ao outro artigo “*On the Surface which is the Envelope &c*”, Spottiswood não se mostrou favorável à publicação desse artigo nas *Transactions*, ele alegou que embora os resultados fossem interessantes e magistrais, os resultados se referiam mais a um problema específico do que um princípio geral, portanto, não introduz um método distamente novo em relação ao assunto, sendo assim, ele recomenda que este artigo de Cayley devesse ser publicado em uma revista matemática ao invés da *Philosophical Transactions*.

Além de Spottiswood, Bartholomew Price foi o outro parecerista das recém-referidas publicações.

Ao tratar da Quarta Memória e Quinta Memória dos Quânticos, Price ajuíza que não tem nenhuma hesitação em recomendar suas publicações nas *Transactions*. Ele complementa que essas memórias são continuações de

artigos anteriores e que o matemático Arthur Cayley tem trabalhado arduamente e de maneira formidável nesse assunto, e que, portanto, essas memórias, em sua opinião, deveriam ser aprovadas automaticamente, sem precisar passar por um julgamento, ou seja, ele sugeriu ao Conselho que as Memórias dos Quânticos quando submetidas, deveriam ser aceitas imediatamente, sendo desnecessárias quaisquer opiniões em relação a elas.

Ao tratar do artigo “*On the Tangential of a Cubic*”, ele simplesmente escreve ser da opinião que este trabalho deve ser publicado nas *Transactions*.

Quanto ao artigo restante, “*On the Surface which is the Envelope &c*”, Price compartilha a mesma opinião de Spottiswoode de que esses resultados são importantes aplicações de seus métodos em relação a encontrar planos perpendiculares ao raio central de um elipsoide, mas que estes resultados estariam melhores qualificados para serem publicados em uma revista matemática ao invés das *Transactions*.

Embora os dois pareceristas estivessem de acordo ao encaminhamento da não aprovação do artigo “*On the Surface which is the Envelope &c*”, de acordo com Deapeaux (2011), o Conselho trouxe ainda um terceiro avaliador exclusivamente para aferir em relação a esse artigo: Smith⁵⁰.

Em suas palavras, conforme Despeaux (2011) aponta, ele primeiramente comenta que se a *Transactions* estiver interessada em um resultado intrinsecamente matemático, ele não tinha nenhum impedimento para a recomendação da publicação desse artigo: “*the question of the publication of this paper in our transactions depended on its intrinsic merits or even on its mathematical interest, I should have no hesitation in recommending it for publication* (SMITH, 1858 apud DESPEAUX, 2011, p.8)”.

Entretanto, ele continuou seu parecer comentando que os resultados matemáticos deveriam ser julgados levando em consideração outros fatores que não fossem estritamente matemáticos, pois para ele esse artigo visava discutir um problema matemático sem correlacionar nenhuma outra área de

⁵⁰ Archibald Smith⁵⁰ (1813-1872), matemático e advogado escocês.

interesse, sendo assim, o mais recomendado seria que fosse publicado em uma revista especializada em matemática:

it appears to me that there is a more important question of principle involved of which the Council at large can judge as well as the referees, and that is whether the solution of such a mathematical problem as is proposed in this paper, viz., the discussion of a particular Curve or surface, which as far as I am aware has no interest beyond itself, and in particular no physical or historical interest, nor even such general Mathematical interest as the discussion of a class of curves or surfaces would possess, and which discussion neither introduces nor exemplifies any new mode of investigation finds its most appropriate place in our transactions, or whether it is not rather better fitted for publication in some exclusively Mathematical Journal (SMITH, 1858 apud DESPEAUX, 2011, p.8).

Em virtude do declínio de ambos, e das declarações de Smith, de acordo com Despeaux (2011), o artigo “*On the Surface which is the Envelope &c*”, teve apenas o seu *abstract* publicado na *Transactions*. Essa informação pode ser confirmada também por meio da Coletânea de Artigos de Cayley publicada em 1898, pude observar que esse artigo não se encontra entre as publicações de Cayley na *Philosophical Transactions of Royal Society of London*, entretanto, Cayley seguiu as recomendações descritas nos pareceres e submeteu seus resultados desta teoria em *journals* de matemática.

Vale a pena ressaltar que mesmo não considerando a publicação do último artigo na *Royal Society*, ambos pareceristas reconheceram a importância dos resultados descritos no artigo, ou seja, o objeto matemático apresentado por Cayley foi reconhecido de forma satisfatória, novamente ele teve seu reconhecimento matemático apesar de declinarem essa publicação para configurar na *Transactions*, visto que eles indicaram que Cayley tentasse submeter esses resultados em um *journal* matemático. Como a *Royal Society* estava em busca de resultados novos nos diversos ramos da ciência, fato este apontado por Gleason (1991), pesou o evento dos pareceristas apontarem seu artigo se tratar de uma situação particular ao invés de um princípio geral da aplicação de um determinado método descrito no seu trabalho.

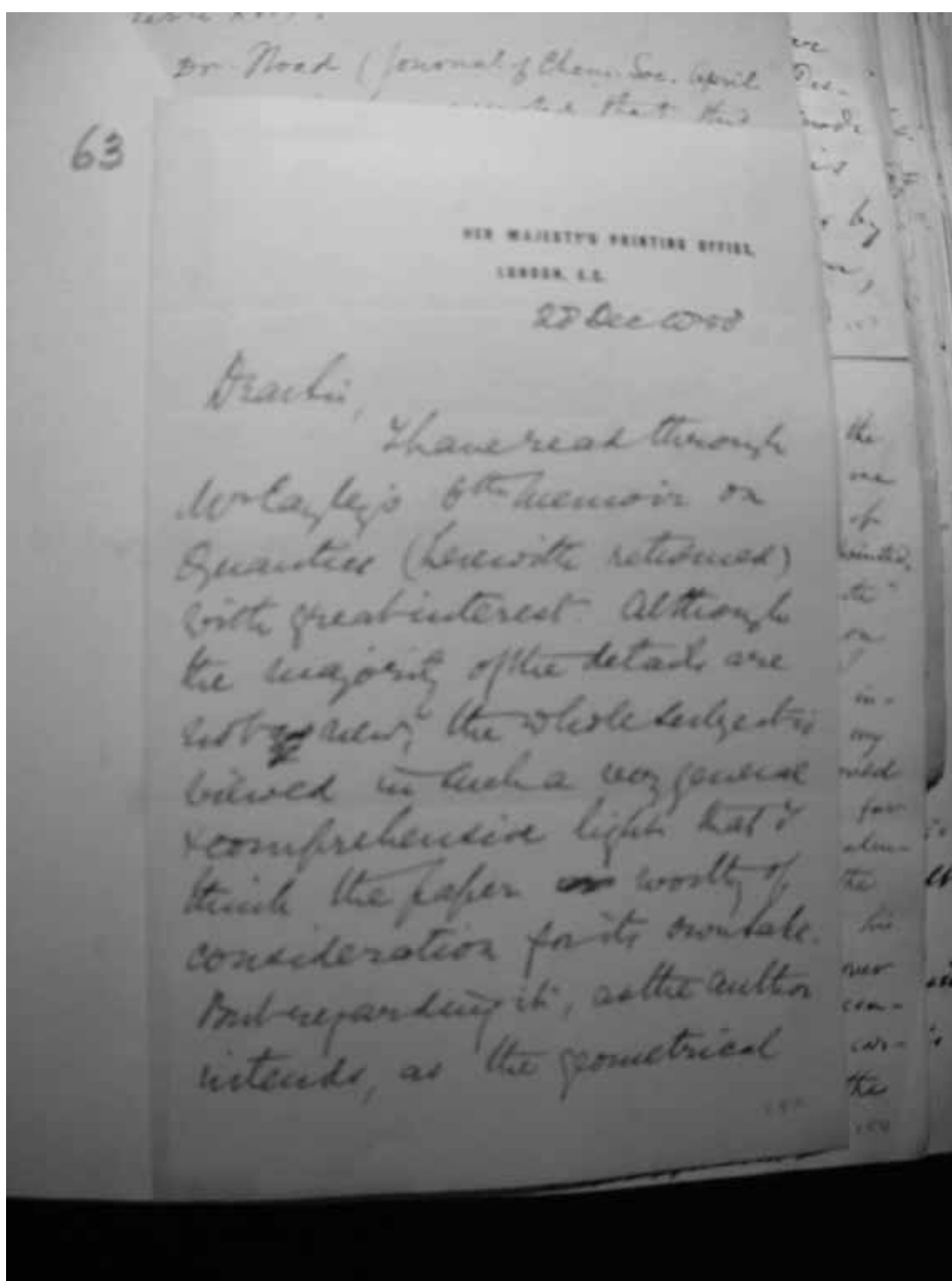


Figura 28 – Parecer de Spottiswoode em relação à Sexta Memória dos Quânticos (Página 1)

Fonte: Royal Society of London. *Referees Reports* (1856-1858). London: December 28
1858, RR. 3.63.

aspect of the subject treated
 in his former very remar-
 kable memoirs, I have no
 hesitation in recommending
 it for publication in the
 Transactions.

I remain, dear Sir,
 very faithfully
 W. Spottiswoode

C. Rhoddy

Figura 29 – Parecer de Spottiswoode em relação à Sexta Memória dos Quânticos (Página 2)

Fonte: Royal Society of London. *Referees Reports* (1856-1858). London: December 28 1858, RR. 3.63.

Eis a transcrição:

I have read through Mr Cayleys 6th memoir on quantics (herewith returned) with great interest. Although the ___ point of the details are ___ __ ___, the whole subjects believed in ___ ___ ___ general comprehended light that outside the paper worthy of consideration for its own take.

___ __ ___, as the author intend as the geometrical aspect of the subject treated in his paper former ___ remarkable memoirs, I have no hesitation in recommending it for publication in the Transactions.

62
 Penelope College, Oxford
 Dec 22nd 1858.
 Dear Sir,
 I have carefully perused
 the Sixth Memoir on Quaternions
 by Mr Farley. It is for the
 most part a discussion of the
 applicability of his theory of quan-
 tities expressed to functions of two or
 three dimensions; and the principles
 of the theory of Quaternions is also
 introduced and explained.
 It contains much new matter,

Figura 30 – Parecer de Price em relação à Sexta Memória dos Quânticos (Página 1)

Fonte: Royal Society of London. *Referees Reports* (1856-1858). London: December 22 1858, RR. 3.62.

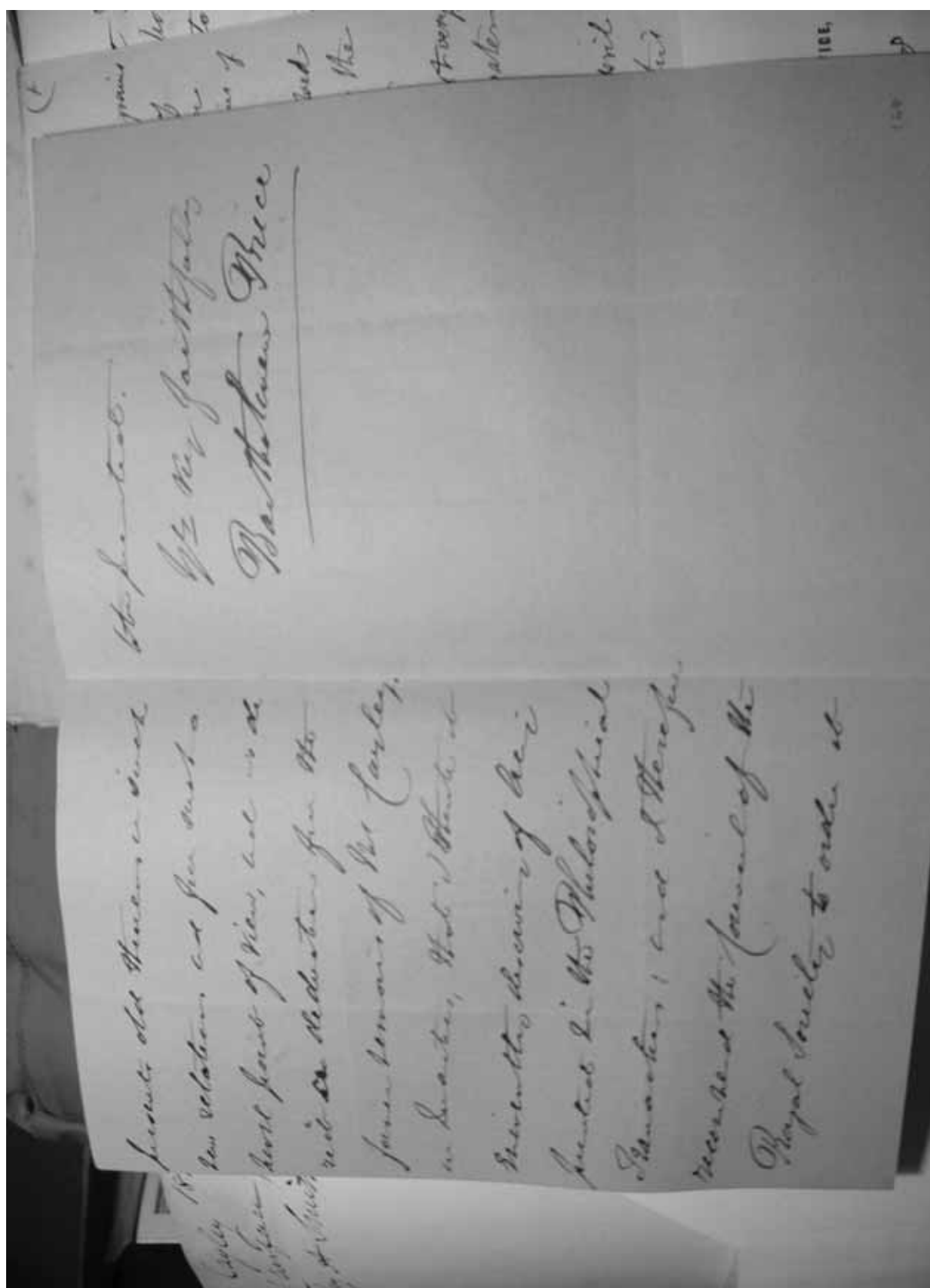


Figura 31 – Parecer de Price em relação à Sexta Memória dos Quânticos (Páginas 2 e 3)

Fonte: Royal Society of London. *Referees Reports (1856-1858)*. London: December 22 1858,

RR. 3.62.

Eis a transcrição do parecer:

I have carefully forward the sixth Memoir on Quantics by Mr Cayley. I ____ for the ____ ____ a ____ of the application of his theory of Quantics on paper to Geometry of ten dimensions; and the principle of duality of Geometry is also introduced and plained. It certain had new ____ presents old theorem in which new relation and ____ ____ have point of view, and describ dedution for the former Memoir of Mr. Cayley on Quantics, that I attended ____ ____ of ____ printed in the Philosophical Transactions, and I therefore recommend the Council of the Royal Society to order it to be printed.

Para julgar a inserção da Sexta Memória dos Quânticos, os matemáticos Spottiswoode e Price foram mantidos como pareceristas pelo Conselho da *Royal Society of London*. Entretanto, podemos ver que apesar das considerações de Price em seu parecer anterior de que essas memórias dispensavam uma análise para sua inserção nas *Transactions*, o Conselho da Sociedade não atendeu sua recomendação e cumpriu o papel de seguir o que estava descrito no estatuto da *Royal Society*.

Spottiswoode relata que leu a Sexta Memória com grande interesse, e que não tinha nenhuma hesitação em recomendar ao Conselho a publicação deste artigo na *Philosophical Transactions* devido os resultados apresentarem aspectos geométricos de suas notáveis memórias anteriores referentes a Teoria dos Quânticos.

Price também destaca as aplicações geométricas presentes na Sexta Memória, especialmente em relação à explicação do Princípio da Dualidade Geométrica, bem como a aplicação da Teoria dos Quânticos na geometria de dez dimensões apresentados por Cayley neste trabalho.

Ele ainda comenta que Cayley apresenta novas relações decorrentes de um teorema apresentado em outra memória que ele foi parecerista. Interpreto essa afirmação de Price, no nosso entendimento atual de termos matemáticos, que Cayley apresentou alguns corolários referentes a um teorema definido anteriormente em uma de suas memórias, certamente a Quarta ou a Quinta Memória.

Dessa forma, ele termina seu parecer recomendando ao Conselho da *Royal Society of London* que este artigo deveria ser publicado.

Novamente, ambos pareceristas dão um julgamento favorável à sua memória e consequentemente ampliando o reconhecimento matemático de Arthur Cayley em relação ao que se referia ao assunto.

46

12 January 81
Buckingham Gate
4 May 1861

Dear Sir,

I return Mr. Cayley's
"Seventh Memoir on Quan-
tics", which I have no hesi-
tation in recommending
for publication in the Philo-
sophical Transactions.

It exceeds perhaps in
power, and certainly does
in precision, several of the
Earlier Memoirs in the Series;

Figura 32 – Parecer de Spottiswoode em relação à Sétima Memória dos Quânticos (Página 1)

Fonte: Royal Society of London. *Referees Reports (1859-1862)*. London: May 4 1861, RR. 4.46.

is not out completely (so
 far as regards the quantities
 which form the subject of
 the present paper) the higher
 theory of the relations of
 In-, Co-, & Contra-variant
 inter se. But it is unnecessary
 for the present purpose, to
 enter further into details.
 I remain dear Sir
 Very faithfully
 Wm Spottiswoode
 W. Spottiswoode

Figura 33 – Parecer de Spottiswoode em relação à Sétima Memória dos Quânticos (Página 2)

Fonte: Royal Society of London. *Referees Reports (1859-1862)*. London: May 4 1861, RR. 4.46.

Eis a transcrição:

I return Mr Cayley's "Seventh Memoir on Quantics", which i have no hesitation to recommending for publication in the Philosophical Transactions.

He exceed perhaps in power. as it certainly does in generality, several on the early memoirs in the series to ____ out completely (so far as regards the Quantics which form the subject of the present paper) the higher theory of the relations of In -, Co-, ____-variant intensive. ____ ____ for the present purpose, to enter further into details.

47
 Report, May 1st 1861. 32
 Gentlemen
 I have carefully perused
 the paper by Mr. Whittaker
 on the subject, and am of opinion
 that it deserves insertion in the
 Philosophical Transactions.
 Accordingly I respectfully re-
 commend you to order it to be printed
 in the same. Y^{rs} faithfully
 Bartholomew Price
 To the Committee of Papers of the
 Royal Society
 of successive revision - for, pre-
 sension in the form
 Re. Ex² + Dr³ + Dr⁴

Figura 34 – Parecer de Price em relação à Sétima Memória dos Quânticos

Fonte: Royal Society of London. *Referees Reports* (1859-1862). London: May 1 1861,
 RR. 4.47.

Eis a transcrição:

I have carefully forward Mr Cayley's seventh Memoir on Quantics, and in my opinion that it deserves insertion in the Philosophical Transactions.

Accordingly I see faithfully recommend print order it to be printed in the Trans.

Em relação à Sétima Memória, tanto Price quanto Spottiswoode foram breves em suas avaliações.

Bartholomew Price vai direto ao ponto e deixa bem claro que a Sétima Memória dos Quânticos merece inserção na *Philosophical Transactions of Royal Society of London*.

Price finaliza seu parecer, podemos entender que ele está dizendo estar se colocando em uma posição fiel em recomendar ao Conselho da Sociedade uma ordem de publicação deste artigo.

Indo de encontro com as palavras de Price, Spottiswoode também inicia seu julgamento por meio do parecer denotando que também não possui nenhuma hesitação na publicação deste artigo na *Philosophical Transactions*.

Ele ainda considera que Cayley tenha excedido na generalidade, assim como fez em suas primeiras memórias que dizrespeito aos Quânticos, entrando em mais pormenores das propriedades dos Invariantes e Covariantes.

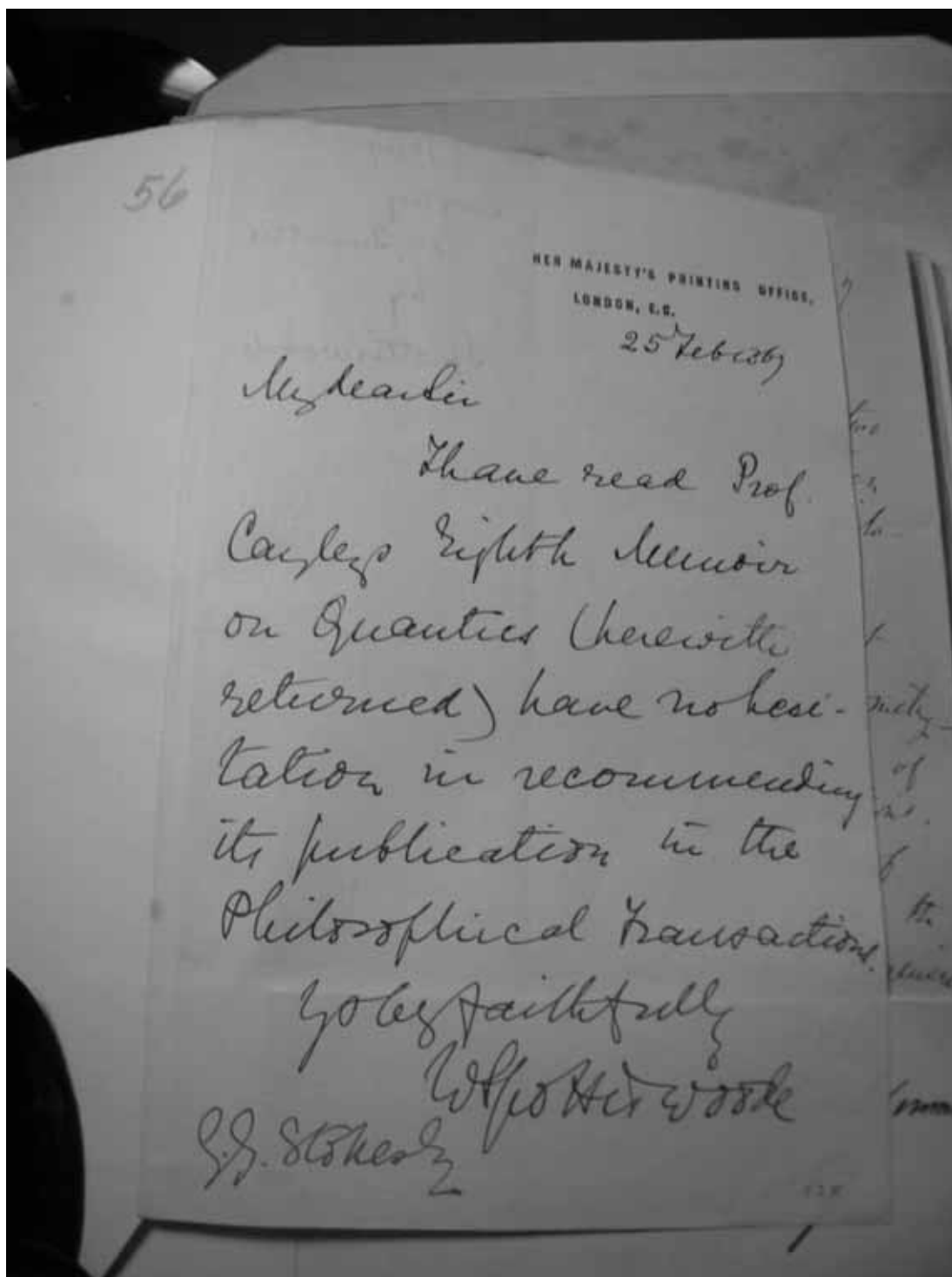


Figura 35 – Parecer de Spottiswoode em relação à Oitava Memória dos Quânticos

Fonte: Royal Society of London. *Referees Reports (1866-1869)*. London: February 25 1867, RR. 6.56.

Eis a transcrição:

I have read Prof. Cayley eighth memoir on Quantics i herewith returned, i have no hesitation in recommending its publication in the Philosophical Transactions.

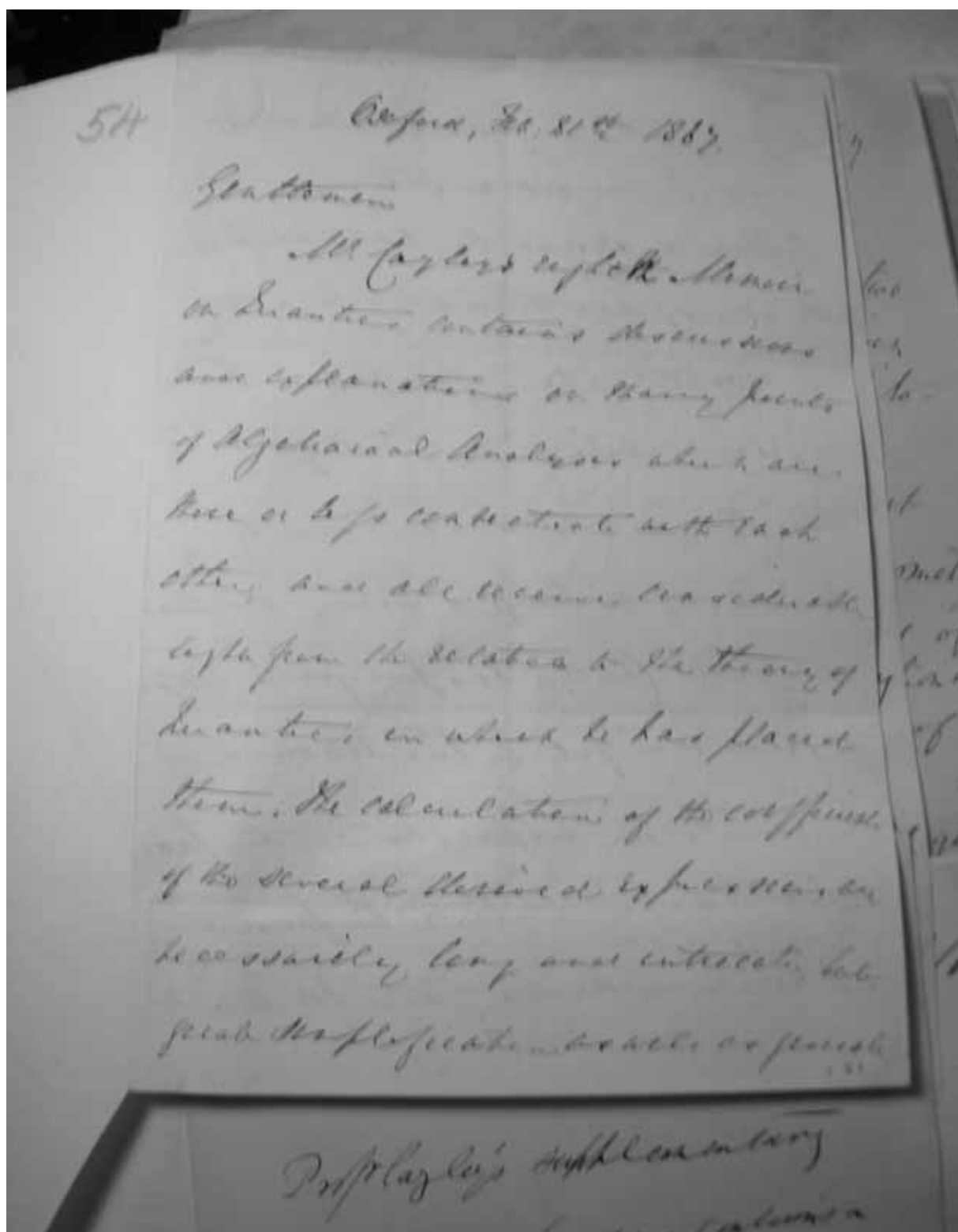


Figura 36 – Parecer de Price em relação à Oitava Memória dos Quânticos (Página 1)

Fonte: Royal Society of London. *Referees Reports (1866-1869)*. London: February 18
1867, RR. 6.54.

Let me say from the first, in
 what I consider, Thomas
 Faraday's work on the nature of pro-
 ducts of his theory of electricity,
 being applications of it to gases, then
 of great interest to the philosopher
 and the mathematician, and the
 founder of so large a theory, as he
 who Mr. Faraday has put forth, before
 a public body, as his teacher and
 his friend, the approbation of the great
 name which he put out
 it is an honor, and I must be

that that the theory of displacement
 by Faraday, was brought to notice
 by his writing, as a most suc-
 cessful one (as the case has been)
 far more than that in which it has been
 been explained.

I am strongly of opinion that the
 Faraday's theory deserves credit
 in the Philosophical Transactions.

I have the honor to
 be, dear Sir,
 Your obedient servant
 Bartholomew Price

To the President and Council of
 the Royal Society.

I have the honor to

Figura 37 – Parecer de Price em relação à Oitava Memória dos Quânticos (Páginas 2 e 3)
Fonte: Royal Society of London. *Referees Reports* (1866-1869). London: February 18 1867,
 RR. 6.54.

Eis a transcrição:

Mr Cayley eighth Memoir on Quantics contains ____ ____ ____ on many points of Algebraical Analyses which are there ____ ____ ____ with each other ____ all receive considerable length from the related to the theory of Quantics in which he has placed them. The calculation of the coefficients of the several ____ expires memoir necessarily long ____ ____ ____, ____ ____ as well as general ____ ____ ____ which he considers then..

They are ____ the natural products of his theory of Quantics(...).

I am strongly ____ ____ that Mr Cayley's Memoir deserves insertion in the Philosophical Transactions.

Podemos perceber que cada vez mais, Spottiswoode e Price são mais diretos em seus comentários referentes ao aceite das Memórias dos Quânticos. Isso nos leva a ponderar que isso se deu em virtude de a essa altura, Oitava Memória, o reconhecimento matemático de Arthur Cayley estava mais do que provado, principalmente no que se referem as suas publicações no campo da Teoria dos Quânticos.

Spottiswoode de cara já sentencia o que ele pensa a respeito da inserção desta memória, relatando que ele leu a Oitava Memória e não tinha hesitações em recomendar sua publicação na *Philosophical Transactions*.

Em relação à Price, ele mesmo deixou claro em um de seus pareceres, que por ele não havia necessidade desse protocolo. Entretanto, podemos crer que como membro da Sociedade, uma vez recebida uma ordem, no caso a de emitir um parecer, certamente poderia lhe causar alguma implicação em relação ao descumprimento dessa negação de acatar uma decisão do Conselho da *Royal Society of London*, sendo assim, para evitar quaisquer aborrecimentos, ele continuou a cumprir seu papel delegado como parecerista destas publicações de Cayley.

Dessa forma, Price inicia sua análise comentando que a Oitava Memória dos Quânticos possui muitos pontos de Análise Algébrica e que todos esses pontos são tratados tendo uma extensão considerável com a Teoria dos Quânticos.

Finalizando seu parecer, Price recomenda fortemente que esta memória seja inserida e merece seu espaço na *Philosophical Transactions of Royal Society of London*.

HER MAJESTY'S PRINTING OFFICE,
LONDON, E.C.

30 May 1870

Practi

Herewith return
Prof. Cayley's & Minette
Memorandum on Quantics, c. 17
which I strongly recom- 1870.
mend to be printed in
the Transactions. That

The way in which the
author supplies the defect pointed
out in original theory, as in
well as the desiderata still remain

Yours obedient servant

Figura 38 – Parecer de Spootwood em relação à Nona Memória dos Quânticos (Página 1)

Fonte: Royal Society of London. *Referees Reports* (1870-1872). London: May 30 1870,
RR. 7.16.

remaining for a complete
 exhaustion of the subject
 as stated with perfect
 clearness in the Abstract.
 & the last page of the paper;
 I do not, in my opinion,
 in any way invalidate
 its claims for publica-
 tion.

I am dear Sir
 Yr faithfully
 W Spottiswoode
 W Stohes

Figura 39 – Parecer de Spottiswoode em relação à Nona Memória dos Quânticos (Página 2)

Fonte: Royal Society of London. *Referees Reports* (1870-1872). London: May 30 1870, RR. 7.16.

Herewith return Prof. Cayley ninth memoir on quantics, which I strongly recommend to be printed in the Transactions.

The way in which the author supplies the defend of his original theory, as well as the ____ still remaining for a complete exhaustion of the research of the subject are stated with perfect clear the abstract of the last ____ in my opinion in anyway invalidate its claims for publication.

To the President and Council of
 The Royal Society 17
 11, St. Giles, Square
 July 30: 1870.
 Gentlemen
 I am of opinion that
 Professor Cayley's Ninth
 Memoir on Quaternions should
 be printed in extenso in
 the Philosophical Transactions
 and remain
 your obedient servant
 Nathaniel Price.

Figura 40 – Parecer de Price em relação à Nona Memória dos Quânticos

Fonte: Royal Society of London. *Referees Reports* (1870-1872). London: July 30 1870, RR. 7.17.

Eis a transcrição:

I am of opinion that professor Cayley's ninth Memoir on Quantics should be printed in extenso in the Philosophical Transactions.

Cayley estava praticamente finalizando sua Teoria dos Quânticos na *Philosophical Transactions of Royal Society of London*, sendo esta sua penúltima memória em relação a esta Teoria na Sociedade.

Dando continuidade à análise dos artigos submetidos por Arthur Cayley, Spottiswoode e Price novamente foram convocados pelo Conselho da *Royal Society* para darem seu veredito em relação aos resultados apresentados na Nona Memória para sacramentar a pertinência da inclusão desta memória na *Transactions*.

Spottiswoode novamente foi breve em seu parecer e relata que após realizar a leitura da Nona Memória, ele recomenda fortemente a impressão desta publicação na *Philosophical Transactions*.

Dando continuidade a sua aferição, ele continua dizendo que a maneira que Cayley defende sua teoria original, se referindo a Teoria dos Quânticos, bem como o restante dos resultados de sua exaustiva pesquisa sobre o assunto, são apresentados de um modo perfeitamente claro, e que em sua opinião, de forma alguma, há como invalidar a reivindicação de Arthur Cayley para a publicação deste trabalho.

Price decreta que para ele, a Nona Memória dos Quânticos, deveria ser publicada na íntegra na *Philosophical Transactions*.

3.2 – ALEMANHA: CRELLE

O *journal* Crelle foi fundado em 1826 pelo matemático alemão August Leopold Crelle (1780-1855), e teve continuidade mesmo após a morte do seu fundador e editor. Essa revista matemática se mantém ativa e segue publicando importantes resultados na área de Matemática.

Os trabalhos de Arthur Cayley obtiveram grande reconhecimento por parte dos editores do *Crelle*. Essa informação é fácil de ser comprovada, afinal,

Cayley publicou 78 vezes nessa importante revista matemática alemã e de bastante influência nos rumos da área de Matemática.

Esse fato reforça mais ainda nossa afirmação de que Cayley foi um matemático que obteve reconhecimento por meio dos resultados descritos em seus trabalhos, e também clareia o porquê de Phillip Kelland ter afirmado em seu parecer relativo à Terceira Memória dos Quânticos que Arthur Cayley era um matemático de reconhecimento continental.

De acordo com Mattos e Tanaami (2006), o Crelle não possuía pareceres naquela época. Os resultados eram dados por meio de julgamentos, entretanto, os vereditos eram dados apenas oralmente durante as reuniões para selecionar os artigos a serem publicados pelo *journal*. Eis uma lista contendo todas suas publicações no Crelle:

Tabela 2 – Publicações de Arthur Cayley no Crelle

Ano	Publicação
1845	<i>Note sur deux Formules données par MM. Eisestein et Hesse</i>
1846	<i>Mémoire sur les Hyperdétérminantx</i>
1846	<i>Sur quelques Théorèmes de la Géométrie de Position</i>
1846	<i>Problème de Géométrie Analytique</i>
1846	<i>Sur quelques Propriétés des Déterminants Gauches</i>
1847	<i>Recherches sur l'Élimination, et sur la Théorie des Courbes</i>
1847	<i>Note sur les Hyperdétérminants</i>
1847	<i>Sur quelques Théorèmes de la Géométrie de Position</i>
1848	<i>Note sur les Fonctions Elliptiques</i>
1848	<i>Sur les Déterminants Gauches</i>

1848	<i>Sur quelques Théorèmes de la Géométrie de Position</i>
1848	<i>Note sur les Fonctions du Second Ordre</i>
1850	<i>Note sur quelques Formules relatives aux Coniques</i>
1850	<i>Sur le Problème des Contacts</i>
1850	<i>Note sur un Système de certaines Formules</i>
1850	<i>Note sur quelques Formules qui se rapportent à la Multiplication des Fonctions Elliptiques</i>
1851	<i>Note sur l'Addition des Fonctions Elliptiques</i>
1851	<i>Note sur quelques Théorèmes de la Géométrie de Position</i>
1851	<i>Mémoire sur les Coniques inscrites dans une même Surface du Second Ordre</i>
1851	<i>Note sur la Solution de l'équation $x^{257} - 1 = 0$</i>
1851	<i>Note relative à la sixième section du Mémoire sur quelques Théorèmes de la Géométrie de Position</i>
1851	<i>Note sur quelques Formules qui se rapportent à la Multiplication des Fonctions Elliptiques</i>
1851	<i>Note sur la Théorie des Hyperdétérminants</i>
1854	<i>Nouvelles Recherches sur les Covariants</i>
1855	<i>Réponse à une Question proposée par M. Steiner</i>
1855	<i>Sur un Théorème de M. Schläfli</i>
1855	<i>Remarques sur la Notation des Fonctions Algébriques</i>
1855	<i>Note sur les Covariants d'une Fonction Quadratique, Cubique ou Biquadratique à deux Indéterminées</i>
1855	<i>Sur la Transformation d'une Fonction Quadratique en elle-même par</i>

	<i>des Substitutions linéaires</i>
1855	<i>Recherches Ultérieures sur les Déterminants gauches</i>
1855	<i>Recherches sur les Matrices dont les termes sont des fonctions linéaires d'une seule Indéterminée</i>
1856	<i>Note sur une formule pour la réversion des séries</i>
1857	<i>Note sur la méthode d'élimination de Bezout</i>
1857	<i>Note sur l'équation $x^2 - Dy^2 = \pm 4, D \equiv 5(mod.8)$</i>
1857	<i>Mémoire sur la forme canonique des fonctions binaires</i>
1857	<i>Addition au Mémoire sur la forme canonique des fonctions binaires</i>
1857	<i>Deuxième Note sur une formule pour la réversion des séries</i>
1858	<i>Sur quelques formules pour la transformation des intégrales elliptiques</i>
1858	<i>Note sur la composition du nombre 47 par rapport aux vingttroisièmes racines de l'unité</i>
1858	<i>Théorème sur les déterminants gauches</i>
1859	<i>Note sur les normales d'une conique</i>
1859	<i>Addition à la composition du nombre 47 par rapport aux vingttroisièmes racines de l'unité</i>
1860	<i>Sur l'invariant le plus simple d'une fonction quadratique bi-ternaire, et sur le résultant de trois fonctions quadratiques ternaires</i>
1860	<i>Démonstration d'un théorème de Jacobi par rapport an problème</i>

	<i>de Pfaff</i>
1861	<i>Note sur la transformation de Tschirnhausen</i>
1861	<i>Deuxième Note sur la transformation de Tschirnhausen</i>
1862	<i>Tables des formes quadratiques binaires pour les déterminants négatifs depuis $D = -1$ jusqu'à $D = -100$, pour les déterminants positifs non carrés depuis $D = 2$ jusqu'à $D = 99$, et pour les treize déterminants négatifs irréguliers qui se trouvent dans le premier millier</i>
1862	<i>Note sur l'élimination</i>
1863	<i>Note sur la réalité des racines d'une équation quadratique</i>
1864	<i>Nouvelles recherches sur l'élimination et la théorie des courbes</i>
1865	<i>Suite des recherches sur l'élimination et la théorie des courbes</i>
1865	<i>Note sur la surface du quatrième ordre de Steiner</i>
1865	<i>Note sur les singularités supérieures des courbes planes</i>
1866	<i>Sur un théorème relatif à huit points situés sur une conique</i>
1866	<i>Sur un cas particulier de la surface du quatrième ordre avec seize points singuliers</i>
1867	<i>Note sur une transformation géométrique</i>
1868	<i>Note sur l'algorithme des tangentes doubles d'une courbe du quatrième ordre</i>
1871	<i>Note sur la surface du quatrième ordre douée de seize points singuliers et de seize plans singuliers</i>

1876	<i>Correction of two numerical errors in Sohnke's paper respecting modular equations</i>
1877	<i>On the double θ-functions in connexion with a 16-nodal quartic surface</i>
1877	<i>Further investigations on the double ϑ-functions</i>
1878	<i>On the 16-nodal quartic surface</i>
1878	<i>A memoir on the double ϑ-functions</i>
1879	<i>On a theorem relating to covariants</i>
1879	<i>On the triple ϑ-functions</i>
1879	<i>On the tetrahedroid as a particular case of the 16-nodal quartic surface</i>
1879	<i>Algorithm for the characteristics of the triple ϑ-functions</i>
1879	<i>On the triple ϑ-functions</i>
1880	<i>On the addition of the double ϑ-functions</i>
1883	<i>On the bitangents of a plane quartic</i>
1883	<i>On the sixteen-nodal quartic surface</i>
1885	<i>Note on hyperelliptic integrals of the first order</i>
1887	<i>Note on a formula relating to the zero-value of a theta-function</i>
1887	<i>Note on the theory of linear differential equations</i>
1887	<i>Note on the theory of linear differential equations</i>
1891	<i>On some problems of orthomorphosis</i>
1893	<i>On Halphen's characteristic n, in the theory of curves in space</i>

1893	<i>On the sextic resolvent equations of Jacobi and Kronecker</i>
------	--

Fonte: CAYLEY, A. **The Collected Mathematical Papers**, Cambridge Library Collection – Mathematics, 14 volumes, Cambridge University Press, 1898.

3.3 – PUBLICAÇÕES NA FRANÇA

Em 1844, Arthur Cayley tem seu primeiro artigo aceito no Continente. Essa publicação se deu em uma das revistas mais influentes no século XIX, junto com o *Crelle*, em termos de publicações na área de matemática, o famoso *Journal de mathématiques pures et appliquées* (JMPA), popularmente conhecido *Journal de Liouville*, fundado em 1836 pelo matemático francês Joseph Liouville (1809-1882). Esta revista matemática ainda continua em atividade nos dias de hoje. Arthur Cayley publicou 19 vezes nessa influente revista, eis uma relação de suas publicações no *Liouville*:

Tabela 3 – Publicações de Arthur Cayley no Liouville

Ano	Publicação
1844	<i>Mémoire sur les Courbes du Troisième Ordre</i>
1845	<i>Mémoire sur les Fonctions doublement périodiques</i>
1845	<i>Nouvelles remarques sur les Courbes du Troisième Ordre</i>
1845	<i>Sur quelques Intégrales Multiples</i>
1845	<i>Addition à la Note sur quelques Intégrales Multiples</i>
1845	<i>Mémoire sur les Courbes à double Courbure et les Siirfaces développables</i>
1845	<i>Démonstration d'un Théorème de M. Chasles .</i>
1846	<i>Sur la Surface des Ondes</i>
1846	<i>Note sur les Fonctions de M. Sturm</i>
1846	<i>Sur quelques Formules du Calcul Intégral</i>

1848	<i>Démonstration d'un Théorème de M. Boole concernant des Intégrales Multiples</i>
1848	<i>Sur la généralisation d'un Théorème de M. Jellett qui se rapporte aux Attractions</i>
1848	<i>Nouvelles Recherches sur les Fonctions de M. Sturm</i>
1848	<i>Sur les Fonctions de Laplace</i>
1849	<i>Sur quelques Transmutations des Lignes Courbes</i>
1850	<i>Addition au Mémoire sur quelques Transmutations des Lignes Courbes</i>
1854	<i>Deuxième Mémoire sur les Fonctions doublement Périodiques</i>
1857	<i>Sur l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}} dt}{(a+bt-ct^2)^{\mu+1}}$</i>
1862	<i>Note sur les fonctions al (x), &c., de M. Weierstrass</i>

Fonte: CAYLEY, A. **The Collected Mathematical Papers**, Cambridge Library Collection – Mathematics, 14 volumes, Cambridge University Press, 1898.

A partir da década de 60 no século XIX, Arthur Cayley publicou ativamente na revista científica francesa, fundada em 1835, até então denominada *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, de Paris. Posteriormente, em 1866, passou a ser conhecida como *Comptes rendus de l'Académie des Science*, entretanto, popularmente sempre foi conhecida como *Comptes rendus*.

A partir de 1866, essa revista passou a ser dividida em 5 seções: *Sciences mathématiques*, *Sciences physiques*, *Sciences chimiques*, *Sciences naturelles* e *Vie académique*. É importante salientar que essa revista faz parte da Academia Francesa de Ciências, portanto, o fato de Arthur Cayley ter publicado diversas vezes no *proceedings* dessa Sociedade, nos mostra a credibilidade e prestígio que o matemático tinha perante essa instituição acadêmica francesa.

Eis a relação dos 24 artigos que Arthur Cayley publicou na *Comptes Rendus*:

Tabela 4 – Publicações de Arthur Cayley na *Comptes Rendus*

Ano	Publicação
1861	<i>Note relative aux droites en involution de M. Sylvester</i>
1861	<i>Sur les cônes du second ordre qui passent par six points donnés</i>
1862	<i>Considérations générales sur les courbes en espace</i>
1862	<i>Sur le problème du polygone inscrit et circonscrit. Lettre à M. Poncelet</i>
1863	<i>Sur un mémoire de Jacobi. Extrait d'une lettre à M. J. Bertrand</i>
1864	<i>Considérations générales sur les courbes en espace. Courbes du cinquième ordre</i>
1864	<i>Sur les coniques qui touchent des courbes d'ordre quelconque. Extrait d'une lettre à M. Chasles</i>
1865	<i>Théorème relatif à l'équilibre de quatre forces</i>
1866	<i>Note sur la correspondance de deux points sur une courbe</i>
1866	<i>Sur les Coniques déterminées par cinq conditions de contact avec une courbe donnée</i>
1866	<i>Note sur quelques formules de M. E. de Jonquières, relatives aux Courbes qui satisfont à des conditions données</i>
1867	<i>Sur la transformation cubique d'une fonction elliptique</i>
1868	<i>Théorème relatif à la théorie des substitutions</i>

1872	<i>Sur les courbes aplaties</i>
1872	<i>Sur une surface quartique aplatie</i>
1872	<i>Sur les surfaces divisibles en carrés par leurs courbes de courbure et sur la théorie de Dupin</i>
1872	<i>Sur la condition pour qu'une famille de surfaces données puisse faire partie d'un système orthogonal</i>
1874	<i>Note sur une formule d'intégration indéfinie</i>
1880	<i>Note sur la théorie des courbes de l'espace</i>
1888	<i>Note sur les surfaces minima et la théorème de Joachimsthal</i>
1890	<i>Sur les racines d'une équation algébrique</i>
1890	<i>Sur l'équation modulaire pour la transformation de l'ordre 11</i>
1890	<i>Sur les surfaces minima</i>
1893	<i>Sur la fonction modulaire χ^ω</i>

Fonte: CAYLEY, A. **The Collected Mathematical Papers**, Cambridge Library Collection – Mathematics, 14 volumes, Cambridge University Press, 1898.

CAPÍTULO 4

O RECONHECIMENTO DE ARTHUR CAYLEY NA COMUNIDADE ACADÊMICA

Para tratar do Reconhecimento Acadêmico em relação ao matemático Arthur Cayley, tomarei como base principalmente as definições apresentadas por Mattos (2003) e Marafon (2001), onde ela trata de estudar as relações de poder na constituição de um indivíduo para as instituições, de forma que sejam reconhecidos como matemáticos. Para isso, Mattos (2003), baseia-se na justificativa do "saber-fazer" Matemática, como uma das formas de julgamento da competência exercida para classificar os indivíduos.

O *Reconhecimento Acadêmico* é a constituição de códigos de prestígio (valor-signo) exercido através da vigilância. É produzido em instituições (aparelhos ideológicos - Althusser, 1985), como as universidades, centros de pesquisa, academias, sociedades científicas, entre outros. O elemento básico dessas instituições é o fato de se governarem com normas estatuídas (que devem concordar com o Estado de Direito, seja esse democrático ou não), em prol de um objeto (Engenharia, Matemática, Física etc.) que deve ser investido de 'valor' ou prestígio, com base no código de utilidade (Baudrillard, 1972), o qual justifica e garante a manutenção (existência) financeira e administrativa dessas instituições (MATTOS, 2001).

Os *aparelhos ideológicos do estado (AIE)*, de acordo com Althusser (1980), são as instituições que auxiliam na manutenção de uma ideologia de produção, e consequentemente na reprodução de seus meios de produção. Tratam-se, em sua maioria, de estabelecimentos de caráter privado que ditam regras de conduta, valores éticos e morais numa sociedade. Desempenha a função de mantenedor dos interesses da superestrutura sobre a infra-estrutura (de forma silenciosa e sorrateira) mediante o uso de determinadas ideologias. É constituída por escolas, igrejas, família, etc.

Segundo Althusser (1985), essa *superestrutura* é formada pelos substratos superiores da pirâmide social onde se concentra a menor parte da população. Dirige o Estado e, através de Normas e Leis regulamenta a infraestrutura, garantindo a sua própria sustentabilidade com o auxílio dos AIE e dos Aparelhos Repressivos do Estado (ARE). Administra o desenvolvimento econômico do Estado, usufruindo dos benefícios do desenvolvimento econômico do Estado advindos da ação das forças de trabalho da base da sociedade. Por fim, a infraestrutura, é a base da pirâmide social, onde se concentra a maior parcela da população. Constitui a força de reprodução material de uma sociedade, composta pelos agentes oprimidos pela estrutura de poder dominante. Caracteriza-se por observar os princípios dos Aparelhos Ideológicos do Estado, mas não determiná-los. Proporciona o desenvolvimento econômico do Estado sem, contudo, usufruir de seus benefícios. Sofre as sanções do Aparelho Repressivo do Estado quando viola ou questiona a estrutura ideológica dominante.

O fato de pertencer à comunidade científica significa diferenciar-se do resto que não pertence a ela; articular saberes específicos, como Topologia, Álgebra, Teoria das Singularidades, Mecânica Racional; assumir uma posição na carreira, cuja estrutura é hierárquica (princípio da diferenciação/código de utilidade – Baudrillard 1972). Para operar essa distribuição, é necessário que haja matemáticos capazes de julgar os ingressantes. Neste sentido, encontramos um outro saber que o matemático profissional articula: julgar.

No processo de reconhecimento, há constituição de prestígio (Baudrillard, 1972) sobre os novos membros que iniciam suas carreiras. Os rituais marcam seus passos, as normas proporcionam os limites, leva-se em conta a adaptação à disciplina (conduta) estabelecida pelas instituições a que pertenceram os candidatos (escolas, universidades entre outros) e, então, são produzidos os pareceres, isto é, chega-se a uma conclusão acerca do candidato. Aquele que foi capaz de permanecer na instituição, e se utilizar do prestígio proporcionado por ela, mostrou, antes de qualquer coisa, que foi capaz de se submeter à disciplina, que foi capaz de permitir ser classificado, enquadrado. Não deixa de ser o primeiro passo da carreira.

O indivíduo como efeito do poder para Althusser (1985), a função de toda ideologia (que é o que define, na medida em que a categoria de sujeito é constitutiva de toda ideologia) é "constituir" indivíduos concretos em sujeitos. O objetivo do reconhecimento é transformar indivíduos concretos em sujeitos investidos de prestígio, isto é, classificá-los, por exemplo, para os matemáticos e até mesmo bons matemáticos (MATTOS, 2003).

Para Baudrillard (1972), o matemático nada mais é do que uma correlação entre a forma-mercadoria (para ter as condições de fazer) e objeto (saber fazer), que se submete desde o primeiro momento com as condições que garantam a sua própria existência, o lugar a partir do qual "ele" fala, neste sentido, o matemático, como o físico ou o engenheiro torna-se nada mais do que um dos efeitos do poder de Foucault (2000).

Para Althusser (1985), no momento em que alguém é entendido (reconhecido) como um matemático, ou um professor de matemática, ele é submetido através da ideologia (MATTOS, 2003).

Uma dificuldade acerca de uma definição completamente satisfatória de ideologia é que enquanto conceito filosófico, a própria definição de ideologia está sujeita, no tempo, a diversas interpretações, sob a influência de determinadas ideologias. A definição do conceito de ideologia depende da ideologia? Sim, e somente podemos distinguir diferentes ideologias quando nos identificamos numa ideologia e a transcendemos, comparando-a com outros modos de se pensar. Admitindo a visão histórica de Marx, de que toda a história da humanidade é a dada por lutas de classes, o que temos então é uma classe tentando impor sua ideologia sobre as demais classes. Uma vez determinada uma estrutura dominante de poder, a disseminação de sua ideologia permite a reprodução dos meios de produção.

Os Aparelhos Ideológicos de Estado funcionam através de uma ideologia, que é uma estrutura que subjaz uma determinada estrutura de poder ditando suas regras de comportamento, seus valores e conceitos, como por exemplo, a ética e a moral. Todavia, a ideologia não fornece parâmetros apenas à estrutura dominante, mas também às outras que lhe são distintas. Logo, parece natural pensar que diversas ideologias podem subsistir num

mesmo lugar e ao mesmo tempo. A diferença é que a ideologia dominante se impõe, por diversas formas de repressão, estabelecendo as “regras do jogo”, isto é, as maneiras como as relações deverão ocorrer, e, utilizamos o termo *relações* aqui num sentido bastante amplo, não se restringindo às relações sociais, mas também àquelas entre agentes repressores e reprimidos.

Os sujeitos estão a todos os momentos em um processo denominado reconhecimento ideológico do espaço ou de outros sujeitos. Este reconhecimento se dá através das interpretações dos indivíduos aos fatos que ocorrem consigo e em seu redor. O reconhecimento ideológico num primeiro momento pode ser constatado perante as evidências do que se é observado a partir de determinados atos ou palavras – comportamentos. Pode-se dizer que os sujeitos são interpelados (intimidados) por uma ideologia. Não há como os indivíduos existirem de modo que não possam ser situados em alguma ideologia; ou seja, o indivíduo é reconhecido por uma determinada ideologia X ou Y. Parece-nos impossível que os sujeitos não se rotulem e não sejam rotulados a partir das suas ideologias.

Para Lacan (1992), o tema é nada mais do que um significante (SI), que funciona representando ele (o sujeito) para um outro significante (S2), no momento em que SI (significante-mestre) intervém, o sujeito é produzido para S2 (série de significantes). No discurso do mestre, SI é a função do significante em que se apoiou a essência do mestre. Enquanto próprio reino do escravo é o conhecimento, designado pelo S2. O escravo, hoje uma classe, é tanto na família como no Estado. Ela está lá porque ela tem saber-fazer (*savoir-faire*) (MATTOS, 2003).

Entendemos como SI o sujeito interveniente, o *mestre*. Este sujeito se enquadra como SI independentemente de sua vontade ou consciência, carrega uma grande responsabilidade de jamais demonstrar fraqueza. As suas ordens devem ser obedecidas não porque tenhamos algum benefício de suas atitudes ou idéias, mas porque ele assim quer, então assim deverá ser. É preciso que tudo ocorra conforme a lei. Entanto, o S2, consiste no *saber*, é também o conhecimento que se busca no sujeito por parte do outro ou de si mesmo.

A pessoa que se coloca para falar na frente de uma comissão examinadora (posição do mestre) já está na posição de escravo. Após confessar que ela sabe, ela se encontra na posição de escravo através da apreensão de sua função no plano do conhecimento, através da inclinação de escárnio (Lacan, 1998). Este autor faz uma distinção entre as duas faces do conhecimento, isto é, a face articulada e este saber-fazer. Então, aparentemente, como o conhecimento animal, mas que o escravo não é absolutamente privado deste aparelho, que faz dele um dos mais redes articuladas de linguagem. Isto tem a ver com este *thai* perceber, estes *camada cond*, o aparelho articulado, pode ser transmitido, o que significa que transmitida do bolso do escravo ao do mestre. É aí que reside todo o esforço para separar o que é chamado episteme. A função da episteme [colocar-se em boa posição] especificado como o conhecimento transmissível. É sempre tomada inteiramente a partir das técnicas dos artesãos, isto é, dos servos. O que está em questão é a extração de sua essência para que esse conhecimento se torna o conhecimento do mestre (MATTOS, 2003).

Segundo Mattos (2003), o verdadeiro mestre não deseja saber absolutamente nada - ele quer que as coisas se movam, a funcionar. Pesquisadores profissionais no Brasil existem em instituições como universidades, centros de pesquisa e outros - em locais onde exercem suas práticas, no sentido de Althusser (1985), estará em consonância com a ideologia que permeia estes aparelhos. Seja ou não esses profissionais estão de acordo com a política exercida não é exatamente de interesse, mas sim o fato de que todos eles, independentemente do que eles acreditam, realizar o trabalho como um dever a ser cumprido (Weber, 2000).

No exercício das suas práticas, a fala é a forma de expressão que acende a 'submissão' para a ordem social. Quando o sujeito se submete ao exame, na medida em que ele fala ou escreve, ele pronuncia-se, compromete-se em relação ao Outro. O sujeito, quando ele faz uso da palavra (escrita ou falada), o reconhecimento se torna impossível. Desta forma, na medida em que ele fala, o assunto está sempre à mercê do que ele é capaz de articular na frente do outro. Se ela denuncia a falta de conhecimento das regras básicas

para viajar através da hierarquia acadêmica, então o sujeito é um forte candidato para não pertencentes a essa ordem (MATTOS, 2003).

"Assim o discurso pronunciado estipula o privilégio que a mercadoria força de trabalho qualificada assume" (Marafon, 1996). Quando ele fala, o sujeito se posiciona dentro de da pessoa que está autorizada a examinar, para constituir um juiz (MATTOS, 2003).

Segundo Foucault (2004), o exame está no centro dos processos que constituem o indivíduo como efeito e objeto de poder, como efeito e objeto do conhecimento. É ele que, combinando vigilância hierárquica e sanção normalizadora, realiza funções disciplinares de separação e classificação, de extração máxima das forças e do tempo, de acumulação genética contínua, de composição ótima das aptidões, assim, da fabricação do celular, a individualidade biológica, genética e combinatória.

4.1 – A CADEIRA DE SADLEIRIAN NO TRINITY COLLEGE

Em 1860, Cayley estava se aproximando dos 40 anos de idade. Para complementar sua renda e ganhar experiência, Cayley tentou obter alguns alunos particulares, um desejo lembrado por Sylvester: "Algum tempo atrás [no final de 1858] você disse que desejava obter alunos em Matemática para estudar com você, eu não preciso dizer que eu acho você equipado para um trabalho melhor remunerado, mas não me sinto na liberdade de julgar você neste assunto, portanto, por favor deixe-me saber se eu tenho a liberdade de mencionar o seu nome a um grupo que tem me aplicado a recomendar alguém com quem um jovem amigo pode se preparar em Matemática mais avançada para qualificá-lo em um exame competitivo" (CRILLY, 2006).

Havia agitações esperançosas em Cambridge, pois a "*The Royal Comission*", passou a indagar sobre o estado da universidade na metade do século XIX, e chamou a atenção, entre outras coisas, da deficiência para o ensino de matemática. O estabelecimento da Cadeira de Sadleirian de Matemática Pura foi colocado em movimento pelo Parlamento em discussões relativas a modernização da Universidade de Cambridge (1856).

Crilly (2006), aponta que a proposta foi feita ao Conselho recém-constituído do Senado da universidade que uma "nova direção deve ser dado ao Sadleirian" e este foi aprovado em 26 de novembro de 1857, a restrição para a álgebra dos leitorados originais foi removida para levar em conta os desenvolvimentos modernos em matemática. Nem todos eram a favor de um novo professor; Stokes era da opinião de que as cadeiras existentes deviam ser adequadamente financiadas antes da criação de outras. Não obstante a objeções, a rainha Vitória aprovou formalmente a criação da cadeira e, após um período decorrido, um anúncio formal, apareceu no *Times*, em maio de 1863:

An election of a person to fill the office of Sadlerian Professor of Pure Mathematics will take place at Clare College lodge on Wednesday, the 10th of June, at 10 o'clock in the morning. All candidates for election to the said professorship are requested to communicate with the Vice-Chancellor (Edward Atkinson, Master of Clare College) on or before Saturday, the 6th of June. The electors are the Vice-Chancellor, the Master of Trinity College [William Whewell], the Master of St. Peter's College [Henry Cookson], the Master of St. John's College [William Bateson], the Lucasian [George Gabriel Stokes], the Plumian [James Challis], and the Lowndean [John Couch Adams] Professors (CRILLY, 2006, p. 255).

Não deixando nada ao acaso, no mesmo dia Cayley fez sua aplicação. Foi a oportunidade que ele esperava: "Peço respeitosamente para me oferecer como um candidato para a cadeira de Sadleirian atrevo-me a esperar de que a minha ligação com a universidade e da direção especial de meus estudos para o avanço da matemática pura venha ser considerado como circunstâncias a meu favor". Não havia espaço para deslizes e ele rapidamente organizou a impressão de sua lista de publicações. O currículo vitae foi enviado para o vice-chanceler. Ele foi claramente projetado para impressionar, o livreto impresso rapidamente, tinha listado nada menos do que 318 de suas publicações (CRILLY, 2006).

Outros sete candidatos declararam-se. Dentre eles, Norman Macleod Ferrers⁵¹, Edward John Routh e John Clough Williams-Ellis⁵², de acordo com Crilly (2006), ele os classifica como jovens sem esperança real de sucesso.

Além dos três citados, completando a lista de inscritos, se candidataram também os residentes de Cambridge: Thomas Gaskin (1810-1887), James G. Mould, Percival Frost (1817-1898), e Isaac Todhunter⁵³ (1820-1884), que Crilly (2006), aponta que se fosse em outros tempos, provavelmente teriam sido finalistas, cada um com uma chance real de ser nomeado.

Gaskin tinha sido o moderador do Tripos de Matemática quando Cayley se graduou em 1842, mas ele publicou pouco em matemática e passou os últimos anos como um treinador particular. Frost, Senior Wrangler em 1839, era um treinador bem conceituado, que escreveu livros sobre a geometria das curvas e iria conseguir a distinção de ensino em *WK Clifford* vários anos depois. Todhunter com a idade de vinte e oito anos foi Senior Wrangler em 1848, tendo se graduado na Universidade Londres, dessa forma, aluno de De Morgan. Todhunter era um homem ambicioso que tinha sucedido no mundo acadêmico por meio de trabalho árduo. Ele escreveu numerosos textos de nível escolar e, quando ele se candidatou para a cadeira Sadleirian, ele tinha acabado de publicar o livro *History of the Calculus of Variations* (1861). Em favor de Todhunter, também havia o fato de que ele tinha sido recentemente eleito para a *Royal Society of London* (CRILLY, 2006).

Os eleitores para a escolha do ocupante da primeira Cadeira de Sadleirian de Matemática Pura no *Trinity College* foram: Professor Stokes, Professor Adams e Professor Challis, e três cabeças de faculdades: um do Trinity, um de St. John's e outro de St. Peter's. Os eleitores não deram

⁵¹ Norman Macleod Ferrers (1829-1903). Estudou no Etton College e obteve o primeiro lugar como Senior Wrangler em 1851. Foi editor das obras completas do físico-matemático George Green (1793-1841), publicado em 1871.

⁵² John Clough Williams-Ellis (1833-1913). Estudou no Sidney Sussex College, obtendo o terceiro lugar como Senior Wrangler em 1856.

⁵³ Publicou obras na área de Cálculo e Álgebra, como *Treatise on the Differential Calculus and the Elements of the Integral Calculus* em 1852 e *Treatise on Algebra* em 1858. Este matemático também fez publicações referentes à História da Matemática: *History of the Mathematical Theory of Probability from the time of Pascal to that of Lagrange* em 1865 e *History of the Mathematical Theories of Attraction and Figure of the Earth from Newton to Laplace* em 1873.

nenhum voto a quaisquer um dos outros candidatos e a eleição de Arthur Cayley pareceu se tratar apenas uma mera formalidade.

Crilly (2006), expõe que um pequeno aviso apareceu no *Times* em 11 de junho: "O Sr. Arthur Cayley M.A. do *Trinity College*, foi neste dia o professor Sadleirian eleito da Matemática Pura".

É importante destacarmos que Whewell, o "cabeça" que estava presente no processo de escolha do candidato pelo *Trinity College*, foi tutor de Arthur Cayley antes de se tornar diretor do *Trinity College*. Whewell era o diretor na época em que Cayley foi o primeiro colocado no exame Tripos de Matemática, e consequentemente obteve o primeiro lugar como *Senior Wrangler* no ano de 1842 e também foi uma das pessoas que indicou a entrada de Cayley na *Royal Society of London* por meio de uma carta de recomendação em 1852.

Além disso, é importante lembrarmos que James Challis, George Gabriel Stokes e John Couch Adams também participaram da educação de Arthur Cayley. Challis dividia as aulas com Peacock e foi professor de Astronomia de Cayley, enquanto Stokes e Adams foram seus tutores cada um por um ano.

Stokes também esteve presente para receber o matemático durante sua adesão a *Royal Society* em 1852 e foi responsável por diversos pareceres em relação aos trabalhos de Arthur Cayley, resultando na publicação destes artigos na *Philosophical Transactions of Royal Society of London*, em virtude de uma apreciação favorável dos artigos. Certamente esse histórico deve ter pesado a favor de Cayley na escolha de quem iria ocupar a posição de Sadleirian em Matemática Pura na Universidade de Cambridge.

A eleição de Cayley para ocupar essa cadeira de Sadleirian se encaixa perfeitamente na definição de reconhecimento acadêmico apresentado por Mattos (2001,2003), portanto, esse resultado sacramentou de vez o seu reconhecimento matemático, pois o que foi levado em consideração para o seu reconhecimento acadêmico, foi justamente ter sido apontado como uma pessoa que sabe-fazer matemática perante uma instituição acadêmica, no caso, a Universidade de Cambridge.

CAPÍTULO 5

CELEBRIDADE

Decidimos empregar o termo “celebridade” nos casos em que Arthur Cayley foi convidado para publicar em revistas de circulação internacional fora da Inglaterra, mais especificamente na Itália e nos Estados Unidos, em que o matemático foi convidado por Tortolini e Sylvester, respectivamente, para que suas publicações configurassem em suas recentes revistas científicas.

Nesse capítulo constam também as publicações de Arthur Cayley na Enciclopédia Britânica, considerada por Kister (1994), a mais acadêmica das enciclopédias. A presença de Cayley nessa publicação, também foi enquadrada neste tópico por conta do fato de caso alguma pessoa fosse consultar suas definições, seriam os escritos de Cayley que iriam ser lidos, dessa forma, o termo “celebridade” nesse caso não se refere ao convite de uma publicação, mas sim na notoriedade de Cayley estar presente em uma das publicações mais importantes da atualidade e da época.

5.1 – PUBLICAÇÕES NA ITÁLIA

Barnaba Tortolini (1808-1874) fundou o primeiro jornal científico italiano com uma presença internacional e foi um distinto professor de matemática na Universidade de Roma por 30 anos. De acordo com suas informações na Wikipedia (acessado em 05 de Maio de 2013), Tortolini foi citado em obras de Cauchy, Boole e Liouville. Embora ele fosse um matemático produtivo e professor dedicado, Tortolini é lembrado principalmente por seu papel na fundação e publicar a primeira revista científica internacional italiana, o *Annali di Scienze matematiche e fisiche*, em 1850.

Ao publicar sua própria pesquisa no exterior, ele ressaltou sua crença na importância da internacionalização dos resultados matemáticos e fez contato com diferentes culturas que refletem os pontos de vista e padrões de rigor promovido pelos editores estrangeiros. Durante seu mandato, o conteúdo da

revista distorcida cada vez mais para a matemática pura e longe de aplicação e os temas em outras ciências.

Arthur Cayley estava entre os autores estrangeiros que publicaram em sua revista. É interessante o fato de Cayley ter sido um dos convidados estrangeiros para publicar nessa revista, nos abre a possibilidade de pensar que o fundador da revista Tortolini, queria matemáticos de prestígio na época para credibilizar sua recente revista, dessa forma, as suas publicações, por tabela, também ganhariam certo crédito, afinal estavam postando em sua revista autores com notável respeito e reconhecimento matemático, além do mais, Tortolini fez uso dessa revista para tratar de questões políticas na Itália em prol da unificação dos estados italianos, portanto, sentimos tocado a pensar que trazer essas celebridades internacionais vinha de encontro em seus esforços e interesses de reforçar a credibilidade do teor dos artigos contidos nesta revista científica.

Além de Arthur Cayley, a recente revista científica criada por Tortolini, também contou com publicações do matemático Carl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851), provavelmente algum resultado póstumo ou resultados de Jacobi apresentados em outras revistas matemáticas, visto que pela data da criação da revista de Tortolini, o matemático Jacobi não estava mais vivo. Contou também com publicações de James Joseph Sylvester.

Certamente, Tortolini tomou conhecimento de Arthur Cayley por suas publicações no Crelle ou Liouville. Isso só mostra o quanto estar presente no Continente era importante para difundir o conhecimento na matemática e a influência e importância dos resultados dos matemáticos presentes nessas revistas. Eis as primeiras 7 publicações de Cayley nessa revista:

Tabela 5 – Publicações de Arthur Cayley na revista de Tortolini

Ano	Publicação
1856	<i>Note sur un théorème général par rapport à l'élimination</i>
1857	<i>Note sur un théorème d'Abel.</i>

1859	<i>Sur la surface qui est l'enveloppe des plans conduits par les points d'un ellipsoïde perpendiculairement aux rayons menés par le centre</i>
1859	<i>Sur quelques formules pour la différentiation</i>
1859	<i>Note sur l'équation des différences pour une équation donnée de degré quelconque</i>
1860	<i>Sur la courbe parallèle à l'ellipse</i>
1860	<i>Sur la surface parallèle à l'ellipsoïde</i>

Fonte: CAYLEY, A. **The Collected Mathematical Papers**, Cambridge Library Collection – Mathematics, 14 volumes, Cambridge University Press, 1898.

A publicação da revista foi interrompida por conta de Tortolini usar este veículo de comunicação em artigos que tratavam sobre a beneficência da união dos estados italianos para uma nação. Com a nova sede em Milão, a fim de sair das proximidades do papado, a revista volta a entrar em circulação em 1866 sob o nome de *Annali di matematica pura ed applicata* e perdura até os dias de hoje.

Essa revista, contou após seu retorno, com publicações de outros grandes matemáticos, além de Arthur Cayley, tais como Alfred Clebsch⁵⁴ (1833-1872), Elwin Christoffel⁵⁵ (1829-1900), Paul Gordan⁵⁶ (1837-1912), Camille Jordan, Charles Hermite, Rudolf Sturm⁵⁷ (1841-1919), Carl Neumann⁵⁸ (1832-1925), Hermann Schwarz⁵⁹ (1843-1921) and Georg Friedrich Bernard Riemann⁶⁰ (1826-1866). Podemos ver a supremacia de matemáticos alemães convidados na volta do *Annali di matematica*, nessa lista, só temos Arthur Cayley configurando representando a Inglaterra, dado que Jordan e Hermite eram matemáticos franceses.

Arthur Cayley apareceu na revista em outras três oportunidades:

⁵⁴ Matemático alemão.

⁵⁵ Matemático alemão.

⁵⁶ Matemático alemão.

⁵⁷ Matemático alemão.

⁵⁸ Matemático alemão.

⁵⁹ Matemático alemão.

⁶⁰ Matemático alemão.

Tabela 6 – Publicações de Arthur Cayley no Annali di matematica

Ano	Publicação
1867	<i>Démonstration nouvelle du théorème de M. Casey par rapport aux cercles qui touchent à trois cercles donnés</i>
1868	<i>Note sur quelques torses sextiques</i>
1868	<i>Addition à la Note sur quelques torses sextiques</i>

Fonte: CAYLEY, A. **The Collected Mathematical Papers**, Cambridge Library Collection – Mathematics, 14 volumes, Cambridge University Press, 1898.

5.2 – PUBLICAÇÕES NOS ESTADOS UNIDOS

Em 1877, de acordo com Parshall (1998), James Joseph Sylvester se tornou o primeiro professor de matemática da recém universidade americana inaugurada denominada *Johns Hopkins University*, nos Estados Unidos, mais precisamente em Baltimore, Maryland. Parshall (1998) relata que essa não foi a primeira vez que o matemático esteve presente no continente americano, pois no início da década de 40 do século XIX, foi professor da Universidade de Virgínia por um curto período, retornando para Inglaterra em 1843. Devido a sua religião, judaísmo. Sylvester foi bastante prejudicado em sua carreira acadêmica na Inglaterra, e se nos perguntarmos por que ele não concorreu também a Cadeira de Sadleirian em Matemática Pura em 1863, a resposta chega até ser simples, foi pelo fato dele ser judeu, esse fato elimina praticamente todas as chances dele na Inglaterra, que prezava professores com crença anglicana.

O fato das instituições educacionais na Inglaterra se indisporerem a ter em seu quadro profissional trabalhadores de determinadas crenças religiosas, evidencia que os exames na época não levavam somente em consideração o núcleo duro, no caso de Sylvester, a matemática. Portanto, Sylvester teve de buscar alternativas ao longo de sua carreira, sendo reconhecido academicamente principalmente nos Estados Unidos.

No ano de 1878, Sylvester fundou o periódico *American Journal of Mathematics*. Não é de se estranhar a presença de Arthur Cayley já na primeira edição do periódico, afinal Cayley e Sylvester sempre foram grandes amigos e mantiveram contato mesmo com a ida de Sylvester aos Estados Unidos. Essas publicações são interessantes, pois sendo este o primeiro periódico matemático norte-americano, certamente poderia gerar uma grande influência em diversos matemáticos do continente americano e Arthur Cayley estava lá, como exemplo de matemático a ser seguido. Logicamente essa afirmação é uma suposição minha. Entretanto, essa revista também tinha circulação na Europa, e assim Cayley continuou a disseminar e desenvolver suas publicações no Continente Europeu.

As publicações desse periódico eram anuais, e Cayley figurou com 27 artigos:

Tabela 7 – Publicações de Arthur Cayley no *American Journal of Mathematics*

Ano	Publicação
1878	<i>The theory of groups</i>
1878	<i>The theory of groups ; graphical representation</i>
1878	<i>A link-work for x^2: extract from a letter to Mr Sylvester</i>
1879	<i>The Newton-Fourier imaginary problem</i>
1879	<i>The mechanical construction of conformable figures</i>
1879	<i>Calculation of the minimum N.G.F. of the binary seventhic</i>
1881	<i>On the 34 concomitants of the ternary cubic</i>
1881	<i>Specimen of a literal table for binary quantics, othervise a partition table</i>
1881	<i>On the analytical forms called trees</i>
1881	<i>On the 8-square imaginaries</i>

1881	<i>Tables for the binary sextic</i>
1882	<i>A memoir on the Abelian and Theta Functions</i> Capítulos I a III publicados em 1882 Capítulos IV e V publicados em 1885
1884	<i>Note on a partition series</i>
1885	<i>A memoir on seminvariants</i>
1885	<i>Tables of the symmetric functions of the roots, to the degree 10, for the form $1 + bx + \frac{cx^2}{1.2} + \dots = (1 - \alpha x)(1 - \beta x)(1 - \gamma x) \dots$</i>
1885	<i>Non-unitary partition tables</i>
1885	<i>Seminvariant tables</i>
1887	<i>On the transformation of elliptic functions</i>
1888	<i>On the transformation of elliptic functions (sequel)</i>
1889	<i>On the surfaces with plane or spherical curves of curvature</i>
1889	<i>On the theory of groups</i>
1891	<i>On a soluble quintic equation</i>
1892	<i>Corrected seminvariant tables for the weights 11 and 12</i>
1893	<i>On symmetric functions and seminvariants</i>
1893	<i>Tables of pure reciprocants to the weight 8</i>
1893	<i>Note on the so-called quotient G/H in the theory of groups</i>

Fonte: CAYLEY, A. **The Collected Mathematical Papers**, Cambridge Library Collection – Mathematics, 14 volumes, Cambridge University Press, 1898.

5.3 – PUBLICAÇÕES NA ENCICLOPÉDIA BRITÂNICA

Outras publicações que merecem certo destaque, são as definições submetidas por Arthur Cayley na *Encyclopaedia Britannica*, uma importante fonte de pesquisa para consultar o significado de milhões de palavras. E dentre

os matemáticos da época, foram as suas definições que foram reconhecidas por esta conceituada enciclopédia sobre determinados conceitos. Caso as pessoas viessem procurar informações em relação às palavras que constam na Tabela 8, elas leriam as definições que Cayley escreveu sobre:

Tabela 8 – Publicações de Arthur Cayley na *Encyclopaedia Britannica*

Ano	Publicação
1878	Curve
1878	Equation
1879	Function
1879	Galois
1879	Gauss
1879	Geometry (Analytical)
1882	Landen
1882	Locus
1883	Monge
1884	Numbers (partitions of)
1884	Numbers (theory of)
1886	Series
1887	Surface
1888	Wallis (John)

Fonte: CAYLEY, A. **The Collected Mathematical Papers**, Cambridge Library Collection – Mathematics, 14 volumes, Cambridge University Press, 1898.

CAPÍTULO 6

Do Reconhecimento Histórico

No que se refere às estruturas de reconhecimento histórico fazemos uso do que D'Ambrosio nomeia por sistema de filtros. Sistema de filtros é o meio utilizado para credenciar aqueles confiáveis para agir em funções que garantem a administração do conhecimento, segundo uma ideologia. O sistema 'filtra' os candidatos por meio de diplomas, exames, habilitações profissionais, títulos acadêmicos, certificados e outros semelhantes.

No presente estudo, as sociedades científicas e regras para publicação são consideradas como sistemas de filtros, uma vez que o papel dessas associações é definir os que deverão assumir a condição de cientista.

Os documentos obtidos na *Royal Society of London* exibem o papel da vigilância no processo de eleição de novos membros e acerca do que cabe ser publicado. Ambas funcionam com base em um Conselho, ou seja, era uma organização do tipo de Colegiados no sentido weberiano. Na *Royal Society of London* os pareceres eram autorizados por um Conselho (colegiado).

Segundo Weber (1964), *"Toda clase de dominación puede ser despojada de su carácter monocrático, vinculado a una persona, por medio del principio de colegialidad"* (p.218).

A Congregação, como descrita na citação anterior, é uma colegialidade de funções, no sentido weberiano, em que as disposições de autoridades não monocráticas se manifestam após o prévio conselho e votação. Segundo a lei, várias pessoas devem cooperar para produzir uma disposição obrigatória, portanto, mostra não ser suficiente uma apenas para produzir tal efeito. E, neste caso, valem os dois princípios "a) el principio de unanimidad, o b) el principio mayoritario" (Weber, 1964, p.218).

La colegialidad significa casi inevitablemente (...) una traba a las decisiones precisas y inívocas y, sobre todo, rápidas. (...) Dentro de las instancias directivas de carácter colegiado la posición dominante del miembro director fue pasando por lo general a una de preeminencia formal y material. (...) El interés por reviver la colegialidad de dirección brota la mayor

parte de las veces de la necesidad de debilitar al soberano como tal. Y luego de la desconfianza e el resentimiento contra la dirección monocrática, si bien menos por parte de los dominados – que la mayoría de las veces anhelan un “caudillo”- que por parte de los miembros del cuadro administrativo. Cosa que se aplica no sólo a las capas sociales que se encuentran en una situación de privilegio negativo, sino sobre todo a aquellas otras que están precisamente en una situación de privilegio positivo. La colegialidad no es en absoluto nada específicamente “democrática”. Allí donde las capas privilegiadas intentaron contra la amenaza de las que se encontraban en una situación de privilegio negativo trataran siempre – y tenían que hacerlo así – de impedir que surgiera un poder de mando monocrático que pudiera apoyarse en estas últimas; por tanto, junto a la igualdad rigurosa de los privilegiados (...) siempre trataran de crear e mantener magistraturas colegiadas con facultades de control y decisión absoluta (Weber, 1964, pp.222- 223).

Weber diz ainda que,

La colegialidad proporciona a la administración una mayor “solidez” en sus consideraciones. Y allí donde, aún hoy, se prefiere esa solidez a la precisión y rapidez se suele recurrir a la colegialidad. (...) De todos os modos, la colegialidad divide la responsabilidad y en caso de cuerpos de gran dimensión la disuelve por completo, mientras que la monocracia la fija de un modo claro e indudable (Weber, 1964, p.233).

Outro ponto a ser considerado é o de que se alguém vai parar na história, esse ente histórico precisa ter feito alguma coisa, seja por algum atributo próprio, ou então tenha provocado ou significado um valor reconhecido coletivamente em um determinado período em um dado contexto.

A questão do atributo vai de acordo com a ação do ente. No caso do matemático Arthur Cayley, por exemplo, ele avançou em assuntos que foram importantes no seu contexto, como o avanço nas definições de Grupo das Permutações de Galois, a publicação dos resultados dos Octônios, importantes resultados na Teoria das Matrizes, determinantes e como Sylvester declara em 1852, de acordo com Crilly (2006), na reunião do Conselho de admissão do matemático, a criação dos hiperdeterminantes. Além disso, todo o seu desenvolvimento na Teoria dos Invariantes, que depois teve desfecho com as publicações de David Hilbert na Alemanha. Embora tenha tido seu fim, esses resultados, conforme Olver (1999), permaneceram e serviram de base para a Teoria da Representação e Teoria dos Conjuntos que vieram a florescer no século XX.

Acredito que o fato desses resultados terem sido importantes, foi crucial para o seu reconhecimento histórico e também pela comunidade acadêmica e científica, principalmente o Crelle na Alemanha; e na França, o Liouville e o Comptes rendus (da Academia Francesa de Ciências). A aceitação de suas publicações nessas revistas de grande circulação e prestígio na época, culminou na sua credibilidade como matemático. Além do fato inegável do seu reconhecimento matemático por meio do aceite de suas publicações nessas revistas do continente, na *Philosophical Transactions of Royal Society of London* e outras revistas da Inglaterra, outra evidência interessante que pudemos encontrar, aconteceu na Itália, em que um matemático chamado Tortolini, professor da Universidade de Roma, fundou um *journal* em meados da década de 50 do século XIX, e que para "moralizar" sua revista, tratou de aliciar estrangeiros renomados na época para publicar nela, sendo Arthur Cayley um dos convidados.

De acordo com Mattos (2008, p.2): *Cayley's work had been known in the community by means of his publications. Although he did not have a direct connection with the Mathematics Community due to his income, he belonged to this community by through publications.* Podemos perceber que Arthur Cayley fez a sua aceitação na comunidade, ele deu as ferramentas necessárias para isso, correu o risco de o que tinha a oferecer, no seu caso, suas investigações matemáticas, fossem negadas, mas como pudemos ver no decorrer dos dados apresentados nesta dissertação, suas contribuições matemáticas foram aceitas e adentraram ao campo da matemática.

O efeito de criação ou intervenção política (decisões formais e ações coletivas e públicas) ou religiosa (opções coletivas baseadas em moral religiosa, o fato de a sociedade ser contra o aborto, por exemplo) ou técnica (vacina) que ganhem reconhecimento social (público em comunidades específicas e mesmo pequenas) de depois histórico (registro e permanência) é, no mínimo, uma relação entre atuação de uma pessoa e de uma estrutura social que reage e motivos que servem para continuar uma disputa ou várias em movimento, tendo em vista o desacordo, a celebração, a vitória ou até mesmo a derrota.

Dessa forma, para você se inserir em um determinado contexto, tem de correr certos riscos: ou seremos louvados por nossas atitudes ou então ser duramente criticado por elas, sendo em alguns casos a pessoa sendo até expulsa ou ignorada no contexto em que pretendeu se enquadrar em busca de algum tipo de reconhecimento de seu trabalho.

Enfim, esses fatos são mais do que senso comum, são fatos que realmente aconteceram, e pelo menos os que ocorreram na *Royal Society of London*, temos os pareceres para comprovar, visto que até um dos pareceristas, Phillip Kelland, descreveu que tinha grande dificuldade de entender os resultados descritos em uma das publicações de Cayley, mas em virtude da sua vasta publicação fora da Inglaterra, ou seja, no Continente Europeu, esse parecerista não hesitou em aprovar a sua publicação. Ou seja, ele aferiu por conta do reconhecimento e prestígio que Cayley havia alcançado na época e não porque ele teve um entendimento dos resultados descritos na publicação que lhe coube dar um parecer.

Apesar de ninguém saber explicar como tudo começou, a história registra o efeito ou efeitos passados, contudo apesar da sensação que temos da duração dos entes históricos, a certeza mesmo é sobre total desconhecimento de futuro histórico seja qual for o ente histórico em questão, por bem ou por mal e em geral por acaso participamos dos efeitos, a atuação é conjunta. Todos tem alguma opinião para as singularidades legais, morais, vantajosas para as coisas impensadas, ou insensatas, ou estranhas, ou sem sentido, ou por tradição, a história trata de efeitos e não de estátuas (MATTOS, 2013⁶¹).

Os trabalhos de Arthur Cayley desencadearam o reconhecimento do matemático. Sabemos que existem diversas pessoas que trabalham com a matemática, entretanto, o que justifica essas pessoas não alcançarem uma grande projeção nacional ou internacional? Cayley foi um matemático que obteve esse êxito tanto nacionalmente e internacionalmente, pertenceu juntamente com outros matemáticos de sociedades na Inglaterra, em que seu

⁶¹ MATTOS, A.C. **Sobre História (Kleyton)** [mensagem na lista da SBEM: sbem-l@listas.rc.unesp.br]. Mensagem recebida por kvgodoy@yahoo.com.br em 20 Jun 2013.

nome, foi um dos poucos que se sobressaíram dentre os diversos integrantes dessas sociedades em sua época.

Além da *Royal Society of London*, o matemático também fez parte da *London Mathematical Society*. Segundo Crilly (2006), Cayley presidiu esta sociedade durante os anos de 1868-1870. Se nos perguntarmos sobre como o primeiro conselho se formou, sempre é de modo “espontâneo”, pois como decidir sobre os membros do primeiro conselho? Na *London Mathematical Society* o primeiro conselho foi criado em 1866, e a autoridade estava baseada no reconhecimento matemático atribuído aos que a criaram principalmente pelas suas publicações, em revistas importantes no período, tais como *Nouvelle Annales de Mathematiques*, *Liouville*, *Quarterles Journal of Mathematics* ou o famoso e respeitado *Crelle*, no qual Cayley publicou várias vezes.

Segundo Mattos (2003) as autoridades eram assim reconhecidas, tomando como base outras autoridades. O credenciamento (D'Ambrosio, 1989) é realizado de tal modo a garantir o funcionamento em direção a um consenso tolerado (PEREIRA, 2005). A publicação é um sistema de filtros (D'Ambrosio, 1989 in Marafon, 2001). Por essa razão, os pareceristas possuem papel capital, o de fiscalizar o objeto que concerne ao conhecimento, pelo menos no que se refere a sua permissão de assim ser denominado. O parecerista deve proceder em conformidade com o Conselho, contudo, é conveniente lembrar que a alteração de rumo pode acontecer. É nas reuniões, o espaço ‘público’ para o enfrentamento, que se torna plausível a mudança.

Do ponto de vista histórico os membros do conselho adquirem nomes. Arthur Cayley foi membro das sociedades mencionadas, portanto julgou e foi julgado quando submeteu seus artigos à publicação ou quando se tornou membro das sociedades. Passou pelo sistema de filtros, cuja consequência foi tornar-se parte dos que decidiam sobre a direção que a Matemática Inglesa do século XIX deveria assumir.

Segundo Mattos e Tanaami (2006), pela análise de História da Matemática o nome de Cayley é mencionado a partir de meados do século XIX. Desse modo, foi possível chegar no primeiro livro em que é citado seu nome. O primeiro livro em que aparece o nome de Cayley é: *A short Account of the*

History of Mathematics, escrito por Walter Willian Rouse Ball (1850-1925) e publicado pela Macmillian em 1888. Essa consulta foi realizada pelos dados consultados da *British Library* de Londres.

De acordo com estudos realizados sobre processos acadêmicos, principalmente no que se refere aos julgamentos de cadeiras ou cátedras em instituições acadêmicas, sociedades científicas entre outros verificamos que a estrutura de julgamento está condizente com a estrutura de julgamento em geral, o modelo do tribunal ou de um conselho acadêmico não são coisas distintas a rigor. Contudo na Ciência é pressuposto que a Teoria seja produto de uma vontade de “verdade” (Foucault, 1987), portanto que seu resultado fique a parte do processo de reconhecimento. No presente trabalho procuraremos estudar a relação entre as estruturas de julgamento e a Teoria.

Do ponto de vista dos livros de História da Matemática foi fixado a Teoria dos Invariantes, cujo aparecimento se deu no século XIX, principalmente com os ingleses, e sua morte segundo Fisher (1996) na década de 1940. Para o estudo em questão não é necessário verificar se a Teoria ainda vive, mas sim se faz parte da História da Matemática, a prova está nos livros de História da Matemática. Esta Teoria garantiu a presença do nome de Arthur Cayley na História da Matemática (MATTOS e TANAAMI, 2006).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como pudemos verificar, Arthur Cayley foi premiado por diversas conquistas durante seus estudos no *King's College* de Londres e posteriormente no *Trinity College*, em Cambridge. Durante sua vida escolar, certamente o seu maior reconhecimento se deu por meio do resultado do exame Tripos de Matemática, em que ficou classificado como primeiro colocado como Senior Wrangler em 1842.

Na *Royal Society of London*, foi eleito a *Fellow* no ano de 1852. Portanto, Cayley foi submetido no seu julgamento pelas diretrizes estabelecidas no estatuto que teve início a sua reformulação em 1846, mas somente implementado a partir de 1847.

Dessa forma, Arthur Cayley já teve seu prestígio colocado em teste logo em sua tentativa de adentrar na *Royal Society of London*, pois sua condição de membro foi julgada segundo os princípios estabelecidos no Estatuto e o objeto Matemática foi verificado por meio do artigo submetido pelo matemático nesse processo, que foi avaliado por um membro da Sociedade que aferiu a sua publicação e registrou o veredito por meio de um parecer. Em ambas as situações, Arthur Cayley obteve um resultado satisfatório, ou seja, adentrou a Sociedade e teve seu artigo publicado na *Philosophical Transactions of Royal Society of London*.

Além disso, uma das condições para se tornar membro da *Royal Society*, eram as cartas de recomendação assinada por seis ou mais membros. A carta de recomendação parece assumir um papel razoável no processo de eleição para *Royal Society*. Mas qual o seu papel?

No sentido de Foucault (1987), o papel da recomendação é a garantia de que o candidato tenha como provar uma conduta adequada à posição de membro. Eis o papel da vigilância permanente, a opinião sobre o que somos nós diante dos outros, de específicos “outros”.

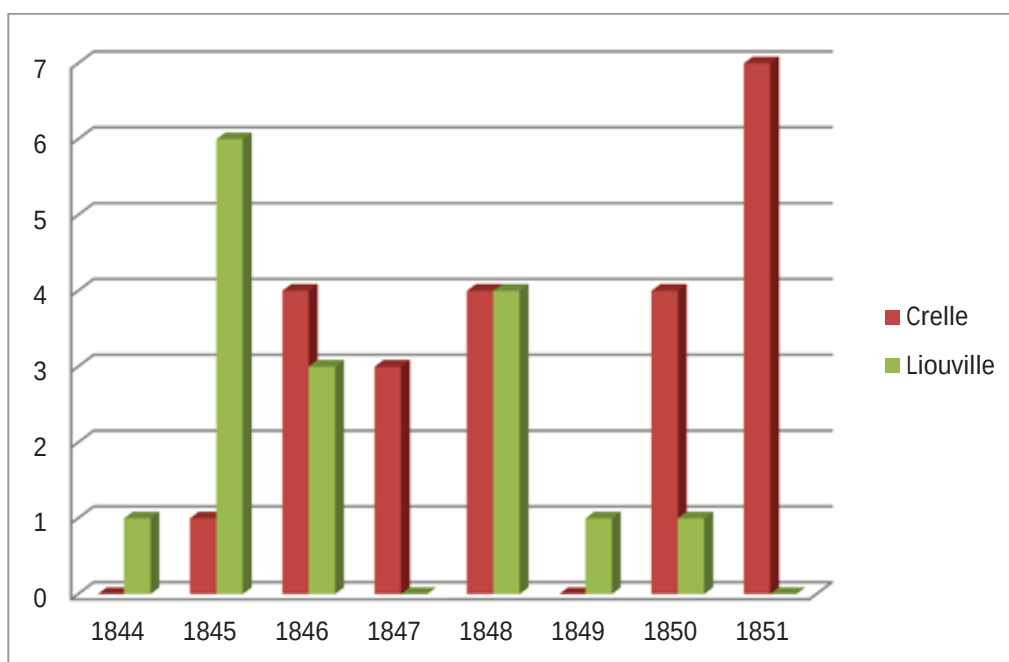
Acredito que essas recomendações também sejam para comprovar a influência do candidato na comunidade científica ou a capacidade do candidato desenvolver pesquisas, pois como apontado, após a reforma, a *Royal Society*

of London estava priorizando a entrada de membros que pudessem promover o crescimento e o avanço da ciência na Inglaterra na tentativa de recuperar o prestígio dela.

Arthur Cayley se destacou por suas contribuições na Matemática Pura, principalmente no desenvolvimento da Teoria dos Invariantes, entretanto, no período, a *Royal Society of London* buscava cientistas que contribuíssem nas ciências naturais ou aplicadas para o desenvolvimento industrial e tecnológico da Inglaterra, portanto, um matemático puro ter sido aceito nesse período, mostra a importância e reconhecimento matemático de Arthur Cayley.

Outro fator que certamente deve ter contribuído muito para a entrada de Cayley na *Royal Society of London* era o fato de ele ser um matemático que costumava publicar em importantes revistas do Continente. Vejamos essa afirmação por meio do Gráfico 1:

Gráfico 1 - Quantidade de publicações de Arthur Cayley no Crelle e Liouville no período de 1844-1851



É possível observar que no período que antecedeu sua entrada na Sociedade, de modo a se tornar *Fellow* da *Royal Society of London* em 1852, Cayley teve uma quantidade considerável de publicações no *Crelle* da Alemanha e no *Liouville* da França. O Conselho da Sociedade provavelmente

deve ter levado em consideração essa situação, visto que após o período de crise de prestígio que a *Royal Society* sofreu até a primeira metade do século XIX, ter em seu quadro científico membros que levassem o conhecimento produzido na Inglaterra para o Continente ajudaria acelerar o processo de a *Royal Society of London* recuperar o seu respeito perante as demais sociedades científicas da Europa.

Em relação ao reconhecimento acadêmico de Arthur Cayley, foi principalmente marcado pela posição que assumiu na Universidade de Cambridge, em 1863. Cayley se graduou em 1842, como era quase impossível uma Cadeira vaga para uma cátedra em Matemática, Geometria ou Astronomia no *Trinity*, *St. John's*, *St. Peter's* ou outro *College* de Cambridge, ele fez o mesmo que vários matemáticos fizeram, optou por renda de trabalhos em repartições públicas e exerceu funções “burocráticas”. Cayley viveu desse modo por 21 anos, ou seja, antes de 1863, matemática era uma espécie de entretenimento durante os períodos que não estava atuando como *Bar*. Sylvester foi colega de trabalho de Cayley no escritório de advocacia *Lincoln's Inn* e talvez durante expediente desenvolveram boa parte de suas contribuições para a Teoria dos Invariantes. Outra forma que os matemáticos da época atuavam para ganhar dinheiro, eram se tornar treinadores/professores particular para o exame Tripos de Matemática.

Na *Main Library* estão os estatutos sobre a eleição para Sadleirian. Na eleição, Cayley teve todos os votos; além dele, houve sete inscritos. Naturalmente, em 1863 ele já era incontestavelmente matemático, membro da *Royal Society of London* e já havia publicado muitos artigos nas principais revistas científicas da época, como o *Crelle*, ou seja, fazia parte do círculo acadêmico.

Quanto aos outros candidatos: T. Gaskin; J.G. Niould; P. Frost; I. Todhunter; N.U. Ferrers; E.J. Roul; J.C.W. Ellis, somente sobre o candidato I. Todhunter há referência de suas publicações na *British Library*. O fato interessante é que nomes, provavelmente com um percurso semelhante ao de Cayley no que condiz com a educação formal, apenas um é encontrado por

meio de consulta ao acervo da *British Library*⁶², pois publicou alguns livros na área de Álgebra. É possível interpretarmos que boa parte desses nomes não possui “importância”, afinal seus vestígios estão relacionados ao percurso de Cayley em uma situação isolada.

Em relação ao reconhecimento histórico de Arthur Cayley podemos destacar a *Teoria dos Invariantes*, cujo aparecimento se deu no século XIX principalmente com os ingleses e de acordo com Fischer (1996), teve seu desfecho com os resultados publicados por Hilbert na Alemanha. Crilly (2006) menciona que a *Teoria dos Invariantes* está sendo utilizada na Ciências da Computação nos dias atuais. Para o estudo que reportamos não é necessário verificar se a Teoria ainda vive, mas sim ao fato de que faz parte da História da Matemática, a prova está nos livros de História da Matemática. Essa Teoria, como dito anteriormente, consiste no estudo das propriedades intrínsecas das *formas* (polinômios), propriedades que não são afetadas por uma mudança de variáveis e do ponto de vista geométrico também permanecem invariantes. Por exemplo, fatoração ou multiplicidade de raízes, mesmo que os valores explícitos das raízes bem como seus coeficientes não forem os mesmos a *forma* não muda. Transformar uma *forma* em outra, de modo a conseguir a *forma* mais simples, por exemplo, via uma mudança de coordenadas. O problema das *formas* e seus invariantes podem ser exemplificados com a forma quadrática binária. Essa forma consiste:

$$u = a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y^2$$

Na notação simbólica alemã:

$$u = (a_1 x + a_2 y)^2 \text{ ou } u = a_x^2$$

Esta forma, a forma quadrática binária, possui formas algébricas irreduzíveis com a propriedade invariante. O estudo, que envolve os invariantes e a *forma*, procura encontrar invariantes que garantem uma nova *forma* equivalente à primeira. Por exemplo, via a aplicação de uma transformação linear na *forma* inicial obtemos uma segunda baseada em uma estrutura em

⁶² Biblioteca Nacional do Reino Unido. Possui aproximadamente, até o momento [Outubro de 2013], cerca de 150 milhões de itens cadastrados.

que o discriminante torna-se evidente seja qual for a transformação linear aplicada. Este assunto garantiu a presença de Cayley na História da Matemática. O livro base para este estudo é *An Introduction to the Algebraic of Quantics* de Edwin Bailey Elliot, publicado pela Oxford (At the Clarendon Press) em 1895, este é um dos mais indicados livros para o estudo da *Teoria dos Invariantes*, uma síntese dos resultados de Arthur Cayley e James Joseph Sylvester.

O reconhecimento matemático de Cayley é incontestável, o matemático foi um dos que mais publicou trabalhos na área, precisamente 967 publicações registradas: difundidas em diversas revistas científicas da Inglaterra (799), e 168 publicações em revistas internacionais contemplando a Alemanha (78), a França (43), a Itália (10) e os Estados Unidos (27).

Outro fato importante para se mencionar em termos do reconhecimento histórico do matemático Arthur Cayley, é sobre Ball, que escreveu o primeiro livro na história da matemática em que aparece o nome de Cayley. Ball também era *fellow* no *Trinity College*, portanto, estava no mesmo local que Cayley. Ele ficou responsável por organizar o arquivo do matemático. Interessante o movimento necessário para que o arquivo adquira materialidade. Muitos outros nomes são mencionados, mas um em particular, o sucessor de Cayley na posição de Sadleirian após sua morte em 1895, Andrew Russel Forsyth (1858-1942), assumiu o papel de auxiliar na constituição do arquivo de Cayley.

Essa análise foi possível por meio das correspondências trocadas entre Ball e os interessados em determinados documentos. Ele distribuiu a documentação entre diversos locais da Universidade de Cambridge. Por exemplo, em carta que enviou a Ball, em 13 de junho de 1923, Forsyth lhe sugeriu enviar as cartas de Sylvester a Cayley para St. John's; Ball assim procedeu. O critério usado neste exemplo foi o fato de as cartas de Cayley para Sylvester estarem arquivadas em St. John's.

Tomando como referência o movimento que coube a Ball, ou seja, arquivar o material sobre Cayley, justifica a condição dada a Arthur Cayley de

pertencer à História da Matemática. Esse movimento mostra um esforço para petrificar um nome.

Naturalmente o poder de petrificar um nome não é centralizado. Para que o reconhecimento seja histórico não pode ser local, principalmente neste período, portanto, foi importante verificarmos os primeiros trabalhos em que o nome Arthur Cayley foi citado fora do solo britânico, e como apontado, os primeiros trabalhos em que Cayley foi citado se deram por Plücker, fato constatado pela carta de agradecimento enviada por Arthur Cayley ao matemático, mas que não continha data e nem o nome da publicação; e também nas citações de Jordan e Klein, nos anos de 1870 e 1874, respectivamente. Além disso, como apontado por Mattos (2005) no Capítulo “Do Arquivo”, Arthur Cayley continuou a ser citado nos livros de História da Matemática posteriores a sua época, fato que culmina o seu reconhecimento na História da Matemática.

Diante do apresentado, fica evidente que para obter algum tipo de reconhecimento naquela época, um fato essencial era você estar no círculo onde encontravam outros matemáticos, alguns faziam parte, mas não obtiveram o reconhecimento histórico, entretanto, se você não fizesse parte dele a chance de algum tipo de reconhecimento (qualquer que seja) era praticamente nulo, então fazer parte do círculo acadêmico e se submeter aos colegiados, era uma condição mínima para que posteriormente esse matemático venha a ter um reconhecimento histórico.

Portanto, ser inglês de classe alta, ter estudado no *King's College* de Londres, *Trinity College* (Cambridge), publicado no Continente europeu, ser membro da *Royal Society* e outras sociedades científicas não garantem seu nome na História da Matemática, mas os nomes que encontramos na História da Matemática existem de modo positivo ou negativo para as instituições acadêmicas (Universidade de Cambridge), sociedades científicas (*Royal Society of London*, *London Mathematical Society*, *Royal Astronomical Society*, *British Association for the Advancement of Science*), journals matemáticos (*Crelle*, *Liouville*, *Philosophical Magazine*, *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*), entre outros. Fora desta estrutura “comunidade acadêmica” um matemático não existe.

Dessa forma, a partir do nome Arthur Cayley emergem estruturas tais como *London Mathematical Society*, *Royal Society of London*, journal *Crelle*, *Sadlerian*, ou seja, meios de reconhecimento matemático e acadêmico inglês do século XIX, conseqüentemente fez parte do círculo acadêmico com outros matemáticos, por exemplo, Sylvester que certamente devido a grande amizade que tinha com Cayley, além do prestígio indiscutível alcançado por Cayley na época, considerou chamar o matemático para figurar suas publicações na revista científica americana que fundou.

Galois (1811-1832) é outro bom exemplo. A publicação foi póstuma, mas seu trabalho foi publicado, além disso, ele existiu no círculo matemático francês. De Morgan brigou com a *Royal Society of London* e esta instituição serviu a ele, afinal depois disso criou sua própria Sociedade, a *London Mathematical Society*. Boole não fez universidade, mas era inglês e "calhou" de conhecer a "turma" da *Royal Society of London*. Como podemos ver, de alguma forma ou de outra, esse tipo de estrutura de "comunidade acadêmica" e "círculo científico" fizeram parte desses e certamente de diversos outros matemáticos presentes na História da Matemática.

Se pensarmos em um eremita que fez um brilhante trabalho matemático, mas nunca saiu de seu refúgio e ninguém nunca viu seu trabalho, ele não possui existência histórica, portanto, conforme Foucault (2004), equivale ao "nada". O valor não está na alma de um indivíduo, é preciso fazer parte de um círculo e jogar com os demais e desse modo temos efeitos, pareceres, teoria, sociedades e ainda assim não há garantia do reconhecimento histórico.

Finalizando, deixamos aqui uma sugestão de trabalho a ser desenvolvido, que é o de verificar a trajetória dos diversos nomes de matemáticos encontrados na História da Matemática e verificar como essas estruturas aparecem. Além disso, uma questão que pode vir a ser aprofundada em outro trabalho ou então para quem se interessar pelo tema: nesta dissertação constatamos que para obter o reconhecimento histórico alguns fatores são essenciais, entretanto, será que existe um método geral para obter o reconhecimento histórico seja ele na matemática ou em qualquer outra área do conhecimento?

Referências Bibliográficas

Índice de Documentos

- (1) Royal Society of London. *Statutes of The Royal Society*. London: MDCCCXLVII, 1847.
- (2) Royal Society of London. *Philosophical Transaction*. London: April 20 1854, PT. 49.3.
- (3) Royal Society of London. *Referees Reports (1850-1855)*. London: June 21 1852, RR. 2.41.
- (4) Royal Society of London. *Referees Reports (1850-1855)*. London: May 13 1854, RR. 2.42.
- (5) Royal Society of London. *Referees Reports (1850-1855)*. London: August 12 1854, RR. 2.43.
- (6) Royal Society of London. *Referees Reports (1850-1855)*. London: November 2 1855, RR. 2.46.
- (7) Royal Society of London. *Referees Reports (1850-1855)*. London: October 23 1855, RR. 2.45.
- (8) Royal Society of London. *Referees Reports (1856-1858)*. London: April 24 1856, RR. 3.47.
- (9) Royal Society of London. *Referees Reports (1856-1858)*. London: Month (??) Day (??) 1856, RR. 3.48.
- (10) Royal Society of London. *Referees Reports (1856-1858)*. London: April 29 1858, RR. 3.58.
- (11) Royal Society of London. *Referees Reports (1856-1858)*. London: May 4 1858, RR. 3.59.
- (12) Royal Society of London. *Referees Reports (1856-1858)*. London: December 22 1858, RR. 3.62.

(13) Royal Society of London. *Referees Reports (1856-1858)*. London: December 28 1858, RR. 3.63.

(14) Royal Society of London. *Referees Reports (1856-1858)*. London: May 5 1858, RR. 3.60.

(15) Royal Society of London. *Referees Reports (1859-1862)*. London: May 4 1861, RR. 4.46.

(16) Royal Society of London. *Referees Reports (1859-1862)*. London: May 1 1861, RR. 4.47.

(17) Royal Society of London. *Referees Reports (1866-1869)*. London: February 25 1867, RR. 6.56.

(18) Royal Society of London. *Referees Reports (1866-1869)*. London: February 18 1867, RR. 6.54.

(19) Royal Society of London. *Referees Reports (1870-1872)*. London: May 30 1870, RR. 7.16.

(20) Royal Society of London. *Referees Reports (1870-1872)*. London: July 30 1870, RR. 7.17.

(21) Trinity College Library. University of Cambridge. H. Cayley/W. W. R. Ball. 25 September, 1923. Add. 0.6.6³⁹⁽¹⁾.

(22) Trinity College Library. University of Cambridge. H. Cayley/W. W. R. Ball. 27 September, 1923. Add. 0.6.6³⁷.

(23) Trinity College Library. University of Cambridge. A. R. Forsyth/W. W. R. Ball. 13 June, 1923. Add. 22.1.

Trabalhos impressos

ANDRÉ, M. E. D. A. **Etnografia da Prática Escolar**: Campinas: Papirus, 1995.

ALTHUSSER, Louis. **Aparelhos ideológicos de Estado**. 2. ed. Trad. de Valter José Evangelista e Maria Laura Viveiros de Castro. Rio de Janeiro: Graal, 1985.

BABBAGE, C. **Reflections on the Decline of Science in England, and on some of its Causes.** Dorset Street, Manchester Square, 1830.

BALL, W.W. R. **A short Account of the History of Mathematics.** Second edition. London: Macmillian an CO., Limited: 1893.

BAUDRILLARD, J. **Para uma crítica da Economia Política do Signo.** Translated by A. Alves. São Paulo: Livraria Martins Fontes Editora Ltda, 1972.

BOOLE, G., “Exposition of a general theory of linear transformations”, **The Cambridge Mathematical Journal.** vol.III, November, Part. I. 1841.

BOOLE, G., “Exposition of a general theory of linear transformations”, **The Cambridge Mathematical Journal.** vol.III, November, Part. II. 1841.

BOYER, C.B. **História da Matemática.** Edgard Blücher. São Paulo. 1974.

BURRAGE, M.; TORSTENDAHL, R. **Professions in theory and history: rethinking the study of the professions.** London : Sage, 1990.

CAJORI, F. **A History of Mathematics.** Macmillan & Co.: New York & London, 1938.

CAYLEY, A. An Introductory memoir on quantics. In: **Philosophical Transaction of Royal Society of London.** London, 1854, 144, pp. 244-258.

CAYLEY, A. A Second memoir upon quantics. In: **Philosophical Transaction of Royal Society of London.** London, 1856a, 146, pp. 101-126.

CAYLEY, A. A Third memoir upon quantics. In: **Philosophical Transaction of Royal Society of London.** London, 1856b, 147, pp. 627-647.

CAYLEY, A. **The Collected Mathematical Papers,** Cambridge Library Collection – Mathematics, 14 volumes, Cambridge University Press, 1898.

CRILLY, T. **Arthur Cayley Mathematician Laureate of the Victorian Age.** Baltimore, The John Hopkins University Press, 2004.

CRILLY, T. The Rise of cayley's Invariant Theory (1841-1862). In: **Historia Mathematica.** V.13, 1986, p. 241-254.

CRILLY, T. The young Arthur Cayley. In: **Notes and Records of the Royal Society**. London, v.52 (2), 1998, pp.267-282.

D'AMBROSIO, U. "Do Misticismo à Mistificação". In: **Congresso Latino-Americano de História da Ciência e da Tecnologia**, 2, p. 505-509, 1989.

DESPEAUX, S. E. **Fit to print? Referee reports on mathematics for the nineteenth-century journals of the Royal Society of London**, Notes & Records of the Royal Society, Londres, 2011.

ELLIOT, E. B. **An Introduction to the Algebra of Quantics**, Oxford: At the Clarendon Press, 1895.

FISHER, S.C. **The Death of a Mathematical theory: a Study in the Sociology of Knowledge**. Archive for the History of Exact Sciences, 3, 1996.

FOUCAULT, M. **Vigiar e punir. Nascimento da Prisão**. Trad. Raquel Ramalhe. 23a Ed. Vozes - RJ, 2000.

FOUCAULT, M. **A ordem do discurso**. Aula Inaugural no Collège de France, Pronunciada em 2 de Dezembro de 1970. Leituras Filosóficas. 11a Ed. Loyola - SP, 2004.

GODOY, K. V., MATTOS, A. C. Um breve estudo sobre invariantes de formas quadradas. Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, Recife, 2011. Disponível em: http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/1345/768.

GLEASON, M. L. **The Royal Society of London: Years of Reform 1827-1847**, Harvard Dissertations in the History of Science: Garland Publishing, 1991.

KATZ, V.J. **A History of Mathematics: An Introduction**. 2.ed. Massachusetts, Addison-Wesley, 1998.

KISTER, K. F. Kister's Best Encyclopedias: A comparative guide to general and specialized encyclopedias. 2nd ed. Ed: Phoenix, AZ: Oryx Press, 1994.

LACAN, J. **O seminário, Livro 17: O avesso da psicanálise (1969 - 1970)**. Rio de Janeiro: Zahar, 1992.

LACAN, J. Subversão do Sujeito. In: **LACAN, Jacques. *Escritos***. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1998.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A.. **Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MARAFON, A.C.M. **A vocação matemática como reconhecimento acadêmico**. Campinas (SP): UNICAMP, 2001. 325p. Tese de Doutorado – Curso de Pós-Graduação em Educação, UNICAMP-FE, 2001.

MATTOS, A. C. Retroactive effect of mathematical vocation. In: **3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education**. Athens, Greece, 2003.

MATTOS, A.C. The process of recognition in the history of mathematics. In : **Proceedings of 11th International Congress of Mathematics Education (ICME), 2008. Monterrey. Mexico. Proceedings.** <http://tsg.icme11.org/document/get/626>

MATTOS, A.C. **The role of the referee in the History of Mathematics**. In : **Proceedings of 5th European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education (EUS - 5), 2007, Praga, Republica Checa. Proceedings.** <http://www.pedf.cuni.cz/kmdm/esu5>

MATTOS, A.C. TANAAMI, S. **Reconhecimento na história da Matemática: O caso de Arthur Cayley**. In : **4^a Mostra Acadêmica da Universidade Metodista de Piracicaba, 2006, Piracicaba, Brasil. Procedido de** <http://www.unimep.br/phpg/mostraacademica/anais/4mostra/pdfs/119.pdf>

OLVER, P. J. **Classical Invariant Theory**. Cambridge: At the University Press, 1999.

PARSHALL, K. H., The British development of the theory of invariants (1841-1895). **BSHM Bulletin**. 2006, **21**, 186-199.

PARSHALL, K. H., **James Joseph Sylvester: Life and Work in letters**. Oxford, Clarendon Press: 1998.

PARSHALL, K. H., **The Mathematical Legacy of James Joseph Sylvester**. University of Virginia, Charlottesville: 1999. pp. 247-267.

REVIEW, EDINBURGH. The Edinburgh Review. Printed by David Walison. Edinbrugh: Volume XXVII, 1816. p.99

Weber, M. **Economía y sociedad. Esbozo de sociología comprensiva**, trad. J. Medina Echavarría, ed. J. Winckelmann, FCE, México, 1964.

WEBER, M. **Economia e sociedade: fundamentos da sociologia compreensiva**. Tradução de Regis Barbosa e Karen Elsabe Barbosa, Revisão Técnica: Gabriel Cohn. Brasília: Ed. da UnB, 2000.

WEBER, M. **A ética protestante e o “espírito” do capitalismo**. Antônio Flávio Pierucci (Ed.). São Paulo: Companhia das Letras, 2004.

WIKIPEDIA CONTRIBUTORS, **Barnaba Tortolini**, *Wikipedia, The Free Encyclopedia*, http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Barnaba_Tortolini&oldid=554727287. Acessado em: 05 de Maio de 2013.

Zizek, S. **Como Marx inventou o sir'oma?** In: Zizek, S. Um Mapa da Ideologia. (Transl.). Rio de Janeiro: Contraponto Editora Ltda, 1996.

APÊNDICES

Apresento a tradução que fiz das duas primeiras memórias publicadas por Cayley sobre os Invariantes nos apêndices 1 e 2 dessa dissertação.

Vale a pena ressaltar que mantive a organização dos artigos. Cayley apresenta uma numeração a partir de sua memória introdutória que se estende até a sua última memória, ou seja, a sequência termina na décima memória dos quânticos. Essa numeração é utilizada pelo matemático nas memórias subsequentes para se referir a propriedades já publicadas nas versões anteriores.

Em relação à primeira memória, a única nota de rodapé do texto, foi acrescentada por mim e não pelo Cayley. A segunda memória possui três notas de rodapé, sendo que adicionei apenas a segunda, as restantes são notas de rodapé demarcadas por Arthur Cayley.

Finalizando, as notas de rodapé dos apêndices não dão continuidade a sequência de notas de rodapé da dissertação, ou seja, no primeiro e no segundo artigo a marcação das notas também se iniciam pelo número 1.

Apêndice 1 - Uma Memória de Introdução aos Quânticos

[1] O termo Quântico é usado para denotar todo o assunto de funções racional e integral, equações e qualquer propriedade derivada destas funções e equações. A palavra “quântico” é um adjetivo, que significa algo como “um tal grau”, mas pode ser usada substantivamente, e esse substantivo pode ser entendido como uma função. Essa palavra pode ser utilizada também no plural, “quânticos”.

As quantidades ou símbolos referentes à expressão “grau”, ou em relação de como a função é considerada um quântico, serão chamadas de “facientes”. Um quântico pode ser considerado sempre, em virtude dos seus facientes, como homogêneo, uma vez que é necessário apenas introduzir uma unidade faciente ou algum símbolo que pode ser substituído pela unidade; e nos casos em que os facientes são considerados formados por dois ou mais conjuntos distintos, o quântico pode, da mesma maneira, ser considerado como homogêneo em relação a cada conjunto separadamente.

[2] A expressão “uma equação”, pode ser entendida como uma equação obtida ao igualar qualquer quântico à zero. Não faço nenhuma distinção considerável das palavras “grau” e “ordem” ao aplicar essas palavras numa equação ou sistema de equações, porém, no geral irei utilizar mais a palavra ordem, do que grau. As equações de um sistema podem ser independentes, ou estarem sujeitas a relações de conexão entre as diferentes equações do sistema (sendo esse assunto de extrema complexidade e dificuldade). É importante deixar claro, que em qualquer sistema de quaisquer equações, devemos assumir que as equações não são suficientes para determinar a relação entre os facientes, para isso deve juntar ao sistema diversas equações lineares entre os facientes, assim, essas relações poderão ser determinadas, lembrando que a ordem do sistema é igual à ordem da equação que determina qualquer uma dessas relações. Para uma única equação, a forma a ser determinada será nada mais do que a forma da equação.

[3] Uma equação ou sistema de equações representa, ou é representada por um local geométrico. Isso pressupõe que os facientes dependam das quantidades $x, y, \dots$, as coordenadas de um ponto no espaço; e toda série de

pontos, cujas coordenadas satisfazem uma equação ou um sistema de equações, constituem um local geométrico. Para evitar complexidade, é indicado tomar os facientes como coordenadas, ou em todos casos, considerar esses facientes como funções lineares das coordenadas; dessa maneira, a forma do local geométrico terá a mesma forma da equação, ou do sistema de equações.

[4] Considero que há um espaço ideal de qualquer número de dimensões, mas é claro que, na acepção comum da palavra, o espaço é de três dimensões. Entretanto, o plano é um espaço de duas dimensões, e podemos considerar a reta como um espaço de uma dimensão. Não deve ser observado com ênfase dizer que, a única ideia que pode ser formada de um espaço de duas dimensões é o plano, ou num espaço de uma dimensão, a reta. Para evitar complexidade, tomo como base a geometria plana ao invés da geometria de três dimensões, portanto, será desnecessário dizer o espaço, ou o número de suas dimensões, já que a preocupação será somente com duas dimensões, o plano.

É dito simplesmente que x, y, z são coordenadas de um ponto (estritamente falando, é a razão entre essas quantidades que são coordenadas, e as quantidades x, y, z , elas mesmas são indeterminadas, isto é, elas são apenas para determinar um fator comum, de modo que supondo que as coordenadas de um ponto são α, β, γ , queremos dizer apenas que $x : y : z = \alpha : \beta : \gamma$, e nunca iremos obter como resultado $x, y, z = \alpha, \beta, \gamma$, somente teremos como resultado $x : y : z = \alpha : \beta : \gamma$; uma vez que isso tenha sido entendido, não há objeção para falar de x, y, z como coordenadas). Agora as noções de coordenadas e de um ponto são meramente relativas; se quisermos, podemos considerar $x : y : z$ como parâmetros de uma curva contendo duas variáveis paramétricas; tal curva torna-se possível determinar quando assumimos $x : y : z = \alpha : \beta : \gamma$, e essa curva não é nada mais do que o ponto cujas coordenadas são α, β, γ , ou podemos ainda chamar de ponto (α, β, γ) . E se as coordenadas (x, y, z) são conectadas por uma equação, em seguida, dar a essas coordenadas do sistema valores que satisfazem a equação, o lugar geométrico dos pontos correspondentes a esses valores é o lugar geométrico que representa ou é representado pela equação. Com isso, está fixada a noção

de curva para qualquer ordem, e em particular, a noção de uma reta como a curva da primeira ordem.

A teoria inclui, como um caso muito particular, a teoria comum da reciprocidade em geometria plana; só temos a dizer que a palavra “ponto” deve significar “reta”, e a palavra “reta” deve ser entendida como “ponto”, e que expressões apropriadas ou aplicáveis a um ponto e uma reta, respectivamente, deve ser interpretado para aplicar a uma reta e um ponto, respectivamente, e qualquer teorema relacionados com pontos e retas, se tornará um teorema correspondente, em relação a retas e pontos. E da mesma maneira em relação às curvas de ordem superior, quando as ideias de reciprocidade aplicáveis a essas curvas são adequadamente desenvolvidas.

[5] Um quântico de graus $m, m' \dots$ nos conjuntos $(x, y \dots), (x', y' \dots), \dots$ é representado em sua grande maioria por uma notação como,

$$(*) (x, y \dots)^m (x', y' \dots)^{m'} \dots,$$

onde a marca $*$, pode ser considerada como indicativo da generalidade absoluta do quântico; qualquer quântico pode ser considerado como soma de uma série de termos $x^\alpha y^\beta \dots x'^{\alpha'} y'^{\beta'} \dots$, dos graus adequados dos diversos conjuntos, cada termo multiplicado por um coeficiente; esses coeficientes podem ser meros múltiplos numéricos de únicas letras ou elementos como $a, b, c, \dots$, ou quaisquer funções (em geral, funções racionais e integrals) de tais elementos; isso explica o significado da expressão “os elementos de um quântico”: no caso em que os coeficientes são meros múltiplos numéricos dos elementos, nós podemos, em geral, falar indiferentemente dos elementos, ou dos coeficientes. Foi dito que os coeficientes podem ser múltiplos numéricos de únicas letras ou elementos como $a, b, c, \dots$, pelo coeficiente numérico apropriado de um termo $x^\alpha y^\beta \dots x'^{\alpha'} y'^{\beta'} \dots$, ou seja, o coeficiente desse termo na expansão de:

$$(x + y \dots)^m (x' + y' \dots)^{m'} \dots,$$

e representado pela notação:

$$(a, b, \dots)(x, y \dots)^m (x', y' \dots)^{m'} \dots),$$

um quântico que cada termo é multiplicado por um apropriado coeficiente numérico como pelo coeficiente literal ou elemento que pertence ao conjunto $(a, b, \dots)$ dos coeficientes literais ou elementos.

Em outras palavras, represento pela notação $(a, b, \dots)(x, y \dots)^m (x', y' \dots)^{m'} \dots)$, um quântico em que cada termo é multiplicado somente por coeficientes literais ou elementos pertencentes ao conjunto $(a, b, \dots)$ dos coeficientes literais ou elementos. E uma distinção se aplica nos casos onde os coeficientes são funções dos elementos $(a, b, \dots)$.

[6] Considerando o quântico:

$$(*) (x, y \dots)^m (x', y' \dots)^{m'} \dots),$$

E selecionando dois quaisquer facientes do mesmo conjunto, por exemplo, os facientes x, y , observo que sempre haverá uma operação sobre os elementos, equivalente no que diz respeito ao quântico para a operação $x\partial_y$; se diferenciarmos com relação a cada elemento, multiplicar por funções próprias dos elementos e somar, iremos obter o mesmo resultado da diferenciação com ∂_y e multiplicarmos por x . O mais simples exemplo vai mostrar isso, assim como, uma prova formal; por exemplo, considerando $3ax^2 + bxy + 5cy^2$ (os coeficientes numéricos foram tomados ao acaso), temos $\frac{1}{3}b\partial_a + 10c\partial_b$ equivalente a $x\partial_y$; se tratando de $a(x - \alpha y)(x - \beta y)$, teremos como resultado $-a(\alpha + \beta)\partial_a + \alpha^2\partial_\alpha + \beta^2\partial_\beta$ equivalente a $x\partial_y$, e assim em qualquer outro caso. Represento por $\{x\partial_y\}$ a operação sobre os elementos equivalentes a $x\partial_y$, e escrevo as séries de operações

$$\{x\partial_y\} - x\partial_y, \dots \quad \{x'\partial_{y'}\} - x'\partial_{y'}, \dots$$

onde x, y são considerados como sendo sucessivamente substituídos por todas as permutações de dois diferentes facientes do conjunto $(x, y, \dots)$; x', y' como sucessivamente substituídos por todas as permutações de dois facientes do conjunto $(x', y', \dots)$, e assim por diante; e isso é chamado de “todo o sistema”

(sistema todo), e esse sistema é feito de sistemas parciais correspondentes aos conjuntos de diferentes facientes; a partir da definição, é possível concluir que o quântico é reduzido a zero por cada uma das operações do sistema todo. Além do próprio quântico, há uma variedade de outras funções que são reduzidas a zero por cada uma das operações do sistema todo; tal função é chamada de *covariante* do quântico, e no caso que contém apenas os elementos, *invariante*.

[7] A definição de um covariante pode, entretanto, ser generalizada em duas direções: podemos considerar dois ou mais quânticos ao invés de apenas um; as operações $\{x\partial_y\}$, embora representadas pelos mesmos símbolos x, y , se trata de diferentes quânticos, diferentes significados, e nós podemos formar a soma $\Sigma\{x\partial_y\}$, onde o somatório se refere aos diferentes quânticos: só temos de considerar no lugar do sistema citado anteriormente, o sistema

$$\Sigma\{x\partial_y\} - x\partial_y, \dots; \quad \Sigma\{x'\partial_{y'}\} - x'\partial_{y'}, \dots$$

e assim, obtemos a definição de um covariante de dois ou mais quânticos.

Da mesma forma, podemos considerar em conexão com cada conjunto de facientes qualquer número de novos conjuntos, os facientes em qualquer um desses novos conjuntos correspondem cada um a cada um com os do conjunto original; e podemos admitir todos esses novos conjuntos para o covariante. Isso dá origem a soma $S\{x\partial_y\}$, onde o somatório refere-se a toda série de conjuntos correspondentes. No lugar do sistema que fala da definição original, podemos considerar o sistema:

$$\{x\partial_y\} - S(x\partial_y), \dots \{x'\partial_{y'}\} - S(x'\partial_{y'}), \dots$$

ou se estamos lidando com dois ou mais quânticos, temos o sistema:

$$\Sigma\{x\partial_y\} - S(x\partial_y), \dots; \quad \Sigma\{x'\partial_{y'}\} - S(x'\partial_{y'}), \dots$$

e assim, obtemos a definição generalizada de um covariante.

[8] Um covariante pode ser definido simplesmente como uma função reduzida à zero por cada uma das operações do sistema todo. Ao lidar com

quânticos dados, é possível sem perda de generalidade, considerar o covariante como uma função da forma do quântico, isto é, como sendo uma função homogênea racional e integral em relação aos diferentes conjuntos separadamente, e como sendo também, uma função racional e integral dos elementos. Em particular, nos casos onde os coeficientes são meros múltiplos numéricos dos elementos, o covariante deve ser considerado como uma função homogênea racional e integral em relação aos diferentes conjuntos separadamente, e também homogêneo em relação aos coeficientes ou elementos. E o termo “covariante” inclui, como já observado, “invariante”.

É bom ressaltar que, se o mesmo quântico for representado por meio de diferentes conjuntos de elementos, então os símbolos $\{x\partial_y\}$ que correspondem a essas diferentes formas do mesmo quântico, são meras transformações um do outro, isto é, em virtude das relações entre os diferentes conjuntos de elementos idênticos.

[9] O que precede é um retorno a generalização do método empregado na primeira parte do livro de memórias publicado no *Camb. Math. Jour.*, t. IV. [1845], e *Camb. And Dubl. Math. Jour.*, t. I. [1846], sob título “On Linear Transformations,” e *Crelle*, t. xxx. [1846], sob o título de “*Mémoire sur lês Hyperdéterminants*,” e que eu refiro como minha memória original. Considero os invariantes de um quântico

$$(*) (x_1, x_2, x_3, \dots, x_m)(y_1, y_2, y_3, \dots, y_m),$$

lineares em relação a n conjuntos de cada um deles de m facientes, e eu represento os coeficientes de um termo $x_r y_s z_t \dots$ por $rst \dots$; não há dificuldade em ver que α, β são dois números diferentes quaisquer fora das séries $1, 2, \dots, m$, a operação $\{x_\beta \partial_{x_\alpha}\}$ é idêntica com a operação:

$$\sum \sum \dots \left(\alpha st \dots \frac{d}{d\beta st \dots} \right),$$

onde os somatórios referem-se a $s, t, \dots$ e ambos passam respectivamente de 1 para m ; e a condição para que uma função seja assumida como um invariante, isto é, para conter apenas os coeficientes, podendo ser reduzida a zero pela operação $\{x_\beta \partial_{x_\alpha}\} - x_\beta \partial_{x_\alpha}$, é simplesmente a condição de que tal função pode

ser reduzida a zero pela operação $\{x_\beta \partial_{x_\alpha}\}$; a condição em questão, é portanto, dizer que a equação anterior é

$$\sum \sum \dots \left(\alpha_{st} \dots \frac{d}{d\beta_{st} \dots} \right) u = 0$$

da minha memória original.

[10] Mas a definição nessa presente memória inclui também o método utilizado na segunda parte da minha memória original. Esse método é substancialmente o seguinte: para maior simplicidade, vamos considerar o quântico

$$U = (*) (x, y, \dots)^m$$

contendo somente o conjunto $(x, y, \dots)$, e vamos tomar $U_1, U_2 \dots$ como o quântico formado quando o conjunto $(x, y, \dots)$ é sucessivamente substituído pelos conjuntos $(x_1, y_1, \dots), (x_2, y_2, \dots), \dots$, o número desses novos conjuntos é igual ou maior do que o número de facientes no conjunto. Suponha que $A, B, C, \dots$ são qualquer um dos determinantes

$$\left\| \begin{array}{cccc} \partial_{x_1}, & \partial_{x_2}, & \partial_{x_3}, & \dots \\ \partial_{y_1}, & \partial_{y_2}, & \partial_{y_3}, & \\ & \vdots & & \end{array} \right\|$$

formando então, as derivações

$$A^p B^q C^r \dots U_1 U_2 \dots,$$

onde $p, q, r \dots$ são quaisquer inteiros positivos, a função, assim obtida, é um covariante envolvendo os conjuntos $(x_1, y_1, \dots), (x_2, y_2, \dots), \dots$, e se após essas diferenciações nós trocarmos esses conjuntos pelo conjunto original $(x, y, \dots)$, teremos um covariante envolvendo somente o conjunto original $(x, y, \dots)$ e os covariantes do quântico. É fácil mostrar que qualquer uma dessas derivações é um covariante de acordo com a definição dada nessa memória, mas para fazer isso algumas explicações preliminares são necessárias.

[11] Eu considero duas operações quaisquer P, Q , envolvendo cada uma ou qualquer uma das diferenciações em relação às variáveis contidas em

outras delas. É necessário investigar o efeito da operação $P.Q$, onde a operação Q deve ser primeiramente efetuada sobre algum operando Ω , e a operação P , é então, realizada sobre o operando $Q\Omega$. Suponha que P envolve as diferenciações $\partial_a, \partial_b, \dots$ em relação as variáveis $a, b, \dots$ contidas em Q e Ω , devemos, como de costume, na operação P substituir $\partial_a, \partial_b, \dots$ por $\partial_a + \partial'_a, \partial_b + \partial'_b, \dots$ onde os símbolos não acentuados são operados somente sobre Ω , e os símbolos acentuados operados somente sobre Q . Suponha que P é expandido em potências ascendentes de $\partial'_a, \partial'_b, \dots$, na forma $P + P_1 + P_2 + \dots$, temos primeiro de encontrar os valores de $P_1Q, P_2Q, \dots$, que opera efetivamente sobre Q como operando das diferenciações $\partial'_a, \partial'_b, \dots$. Os símbolos $PQ, P_1Q, P_2Q, \dots$, conterá então somente as diferenciações $\partial_a, \partial_b, \dots$ que operam sobre Ω , e o significado da expressão sendo uma vez entendido, podemos escrever:

$$P.Q = PQ + P_1Q + P_2Q + \dots$$

Em particular, se P for uma função linear de $\partial_a, \partial_b, \dots$, temos de substituir P por $P + P_1$, onde P_1 é a mesma função de $\partial'_a, \partial'_b, \dots$ e P é de $\partial_a, \partial_b, \dots$, portanto, nesse caso temos:

$$P.Q = PQ + P(Q),$$

onde sobre o lado direito do termo PQ as diferenciações $\partial_a, \partial_b, \dots$ são consideradas e não afetam de maneira alguma o símbolo Q , enquanto o termo $P(Q)$ é o que foi representado anteriormente em cada caso por P_1Q .

Da mesma maneira, se Q é uma função linear de $\partial_a, \partial_b, \partial_c, \dots$, ou se P é uma função linear de $a, b, c, \dots$,

$$Q.P = QP + Q(P);$$

e das duas equações (obviamente $PQ = QP$) derivam:

$$P.Q - Q.P = P(Q) - Q(P),$$

que é a forma em que as equações são mais frequentemente utilizadas.

[12] Eu volto para a expressão

$$A^p B^q C^r \dots U_1 U_2 \dots,$$

e suponho que após as diferenciações, os conjuntos $(x_1, y_1, \dots), (x_2, y_2, \dots), \dots$, são substituídos pelo conjunto original $(x, y, \dots)$. Para mostrar que esse resultado é um covariante, temos de provar que é reduzido à zero por uma operação $\mathfrak{D}^1 =$

$$\{x\partial_y\} - x\partial_y$$

A mudança dos conjuntos $(x_1, y_1, \dots), (x_2, y_2, \dots), \dots$, para o conjunto original $(x, y, \dots)$ pode ser adiada até depois da operação $\mathfrak{D}$, desde que $x\partial_y$ é substituído por $x_1\partial_{y_1} + x_2\partial_{y_2} + \dots$, ou ainda, $Sx\partial_y$; por isso, devemos escrever $\mathfrak{D} = \{x\partial_y\} - Sx\partial_y$. Agora na equação

$$A.\mathfrak{D} - \mathfrak{D}.A = A(\mathfrak{D}) - \mathfrak{D}(A),$$

onde, como antes, $A(\mathfrak{D})$ denota o resultado da operação A efetuada sobre $\mathfrak{D}$ como operando, e similarmente, $\mathfrak{D}(A)$ o resultado da operação $\mathfrak{D}$ realizada sobre A como operando, vemos primeiramente que $A(\mathfrak{D})$ é um determinante de duas linhas que são idênticas, portanto, igual a zero; já que $\mathfrak{D}$ não envolve qualquer diferenciação afetando A , $\mathfrak{D}(A)$ também é igual a zero. Portanto, $A.\mathfrak{D} - \mathfrak{D}.A = 0$ ou A e $\mathfrak{D}$ são permutáveis. Da mesma maneira, $\mathfrak{D}$ é permutável com $B, C, \dots$, e conseqüentemente $\mathfrak{D}$ é permutável com $A^p B^q C^r \dots$. Agora $\mathfrak{D}U_1 U_2 \dots = 0$; daí vem

$$\mathfrak{D}.A^p B^q C^r \dots U_1 U_2 \dots = 0,$$

ou $A^p B^q C^r \dots U_1 U_2 \dots$ é um covariante, a proposição de que era para ser provada.

[13] Eu passo para um teorema que leva a um outro método de encontrar os covariantes de um quântico. Para essa finalidade, considero o quântico:

$$(*) (x, y \dots)^m (x', y' \dots)^{m'} \dots,$$

¹ Cayley utiliza originalmente o símbolo  ao invés de $\mathfrak{D}$, entretanto, nesse texto será denotado a segunda forma (Nota de rodapé do tradutor).

os coeficientes que são meros múltiplos numéricos dos elementos $(a, b, c, \dots)$; e em conexão com esse quântico, considero as funções lineares $\xi x + \eta y \dots$, $\xi' x' + \eta' y' \dots$, que podem ser tratadas como $(\xi, \eta, \dots), (\xi', \eta', \dots), \dots$ como coeficientes, podendo ser representada na forma:

$$(\xi, \eta, \dots)(x, y, \dots), \quad (\xi', \eta', \dots)(x', y', \dots), \dots$$

podemos a partir do quântico (que por conveniência, será chamado de U) formar um quântico operatório (que será chamado de Θ)

$$(*) (\xi, \eta, \dots)^m (\xi', \eta', \dots)^{m'} \dots,$$

os coeficientes são meros múltiplos numéricos de $\partial_a, \partial_b, \partial_c, \dots$, tal que:

$$\Theta U = (\xi, \eta, \dots | x, y, \dots)^m (\xi', \eta', \dots | x', y', \dots)^{m'} \dots$$

isto é, um produto de potência de funções lineares. É importante observar que em relação ao quântico Θ e seus covariantes ou outras derivações, os símbolos $\partial_a, \partial_b, \partial_c, \dots$, são considerados como elementos em relação ao que podemos diferenciar.

O quântico Θ dá origem aos símbolos $\{\xi \partial_\eta\}, \dots$, analogamente aos símbolos $\{x \partial_y\}, \dots$, formado do quântico U . Suponha agora que ϕ é qualquer quântico, contendo também os coeficientes de todos ou qualquer um dos conjuntos de Θ . Então $\{x \partial_y\}$ sendo uma função linear de $a, b, c, \dots$ as variáveis que as diferenciações em ϕ se relacionam, temos:

$$\phi. \{x \partial_y\} = \phi \{x \partial_y\} + \phi(\{x \partial_y\});$$

novamente, $\{\eta \partial_\xi\}$ sendo uma função linear das diferenciações em relação as variáveis $\partial_a, \partial_b, \partial_c, \dots$ em ϕ , temos:

$$\{\eta \partial_\xi\}. \phi = \{\eta \partial_\xi\} \phi + \{\eta \partial_\xi\}(\phi);$$

essas equações servem para mostrar o significado das notações $\phi(\{x \partial_y\})$ e $\{\eta \partial_\xi\}(\phi)$, e existe entre esses símbolos, a equação singular:

$$\phi(\{x\partial_y\}) = \{\eta\partial_\xi\}(\phi)$$

[14] A demonstração geral dessa equação não apresenta uma grande dificuldade, mas para evitar a necessidade de fixar sobre uma notação para distinguir os coeficientes de termos diferentes e por causa da simplicidade, vou exibir por meio de um exemplo, o princípio da transformação geral. Considere o quântico

$$U = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3,$$

isso dá

$$\Theta = \xi^3\partial_a + \xi^2\eta\partial_b + \xi\eta^2\partial_c + \eta^3\partial_d;$$

ou para uma maior clareza, $\partial_a, \partial_b, \partial_c, \partial_d$ são representados por $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, então:

$$\Theta = \alpha\xi^3 + \beta\xi^2\eta + \gamma\xi\eta^2 + \delta\eta^3,$$

temos então,

$$\{x\partial_y\} = 3b\partial_a + 2c\partial_b + d\partial_c,$$

e,

$$\{\eta\partial_\xi\} = 3\alpha\partial_\beta + 2\beta\partial_\gamma + \gamma\partial_\delta$$

Agora, considerando ϕ como uma função de $\partial_a, \partial_b, \partial_c, \partial_d$, ou, o mesmo que dizer, de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, podemos escrever

$$\phi(\{x\partial_y\}) = \phi(3b\alpha + 2c\beta + d\gamma);$$

E se na expressão de ϕ escrevermos $\alpha + \partial_a, \beta + \partial_b, \gamma + \partial_c, \delta + \partial_d$ para $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (onde somente os símbolos $\partial_a, \partial_b, \partial_c, \partial_d$ devem ser considerados como afetando a, b, c, d conforme consta no operando $3b\alpha + 2c\beta + d\gamma$), e rejeitarmos o primeiro termo (ou termo independente de $\partial_a, \partial_b, \partial_c, \partial_d$ na expansão), temos o valor necessário de $\phi(\{x\partial_y\})$. Esse valor é

$$(\partial_a \phi \partial_a + \partial_b \phi \partial_b + \partial_c \phi \partial_c)(3b\alpha + 2c\beta + d\gamma);$$

Realizando as diferenciações $\partial_a, \partial_b, \partial_c, \partial_d$, o valor é

$$(3\alpha\partial_\beta + 2\beta\partial_\gamma + \gamma\partial_\delta)\phi,$$

isto é, temos:

$$\phi(\{x\partial_y\}) = \{\eta\partial_\xi\}(\phi)$$

[15] Suponha agora que ϕ é um covariante de Θ , então a operação ϕ efetuada sobre qualquer covariante de U dá origem ao sistema

$$(*) (x, y \dots)^m (x', y' \dots)^{m'} \dots,$$

$$(\xi, \eta, \dots)(x, y, \dots), \quad (\xi', \eta', \dots)(x', y', \dots), \dots$$

Para provar isso, deve ser primeiramente observado que, no que diz respeito a $(\xi, \eta, \dots)(x, y, \dots) \dots$, temos que $\{x\partial_y\} = \eta\partial_\xi, \dots$. Dessa forma, considerando $\{x\partial_y\}, \dots$ como se referindo ao quântico U , a operação $\Sigma\{x\partial_y\} - x\partial_y$ será equivalente a $\{x\partial_y\} + \eta\partial_\xi - x\partial_y$, e portanto, cada covariante do sistema deve ser reduzido a zero por cada uma das operações

$$\mathfrak{D} = \{x\partial_y\} + \eta\partial_\xi - x\partial_y$$

Sendo esse o caso, temos:

$$\mathfrak{D}.\phi = \mathfrak{D}\phi + \mathfrak{D}(\phi),$$

$$\phi.\mathfrak{D} = \phi\mathfrak{D} + \phi(\mathfrak{D}),$$

equações que podem ser substituídas por:

$$\mathfrak{D}.\phi = \mathfrak{D}\phi + \eta\partial_\xi(\phi),$$

$$\phi.\mathfrak{D} = \phi\mathfrak{D} + \phi(\{x\partial_y\}),$$

e conseqüentemente (em virtude do teorema) por:

$$\mathfrak{D}.\phi = \mathfrak{D}\phi + \eta\partial_\xi(\phi),$$

$$\phi.\mathfrak{D} = \phi\mathfrak{D} + \{\eta\partial_\xi\}(\phi);$$

e, temos portanto,

$$\mathfrak{D}.\phi - \phi.\mathfrak{D} = -(\{\eta\partial_\xi\} - \eta\partial_\xi)(\phi);$$

ou, uma vez que ϕ é um covariante de Θ , nós temos que $\mathfrak{D}.\phi = \phi.\mathfrak{D}$. E desde que cada covariante do sistema é reduzido a zero pela operação $\mathfrak{D}$, e portanto, pela operação $\phi.\mathfrak{D}$, os covariantes também podem ser reduzidos a zero pela operação $\mathfrak{D}.\phi$, o que é a mesma coisa dizer que, o covariante operado por ϕ , é reduzido a zero pela operação $\mathfrak{D}$, então, é um covariante, isto é, ϕ operado sobre um covariante resulta um covariante.

[16] No caso do quântico tal que

$$U = (*) (x, y \dots)^m (x', y' \dots)^{m'} \dots),$$

podemos ao invés dos novos conjuntos $(\xi, \eta, \dots), (\xi', \eta', \dots) \dots$ empregar os conjuntos $(y, -x), (y', -x'), \dots$. O quântico operativo Θ , no caso, é definido pela equação $\Theta U = 0$, e se ϕ ser, como antes, qualquer covariante de Θ , então ϕ operado sobre um covariante de U resultará um covariante de U . A prova é quase semelhante que o caso anterior; em vez da equação $\phi(\{x\partial_y\}) = \{\eta\partial_\xi\}(\phi)$, temos a equação análoga

$$\phi(\{x\partial_y\}) = -\{x\partial_y\}(\phi),$$

onde no lado esquerdo, $\{x\partial_y\}$ se refere a U , mas no lado direito, $\{x\partial_y\}$ se refere a Θ , e ao invés de $\mathfrak{D} = \{x\partial_y\} + \eta\partial_\xi - x\partial_y$, temos simplesmente, $\mathfrak{D} = \{x\partial_y\} - x\partial_y$.

[17] Eu passo para o quântico

$$(*) (x, y)^m,$$

que em geral, tenho considerado sob a forma:

$$(a, b, \dots, b', a')(x, y)^m,$$

ou ainda, sob a forma:

$$(a, b, \dots, b', a' \mathfrak{D} x, y)^m,$$

o que denota a notação anterior, deve ser lembrado,

$$ax^m + \frac{m}{1}bx^{m-1}y \dots + \frac{m}{1}b'xy^{m-1} + a'y^m,$$

e a última notação

$$ax^m + bx^{m-1}y \dots + b'xy^{m-1} + a'y^m.$$

Em casos particulares, os coeficientes serão representados todos eles sem letras acentuadas, assim $(a, b, c, d)(x, y)^3$ será utilizado para denotar

$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$, e $(a, b, c, d)(x, y)^3$ será usado para denotar $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$, e assim será em todos os casos similares.

Aplicando os métodos gerais ao quântico $(a, b, \dots, b', a')(x, y)^m$, vemos que:

$$\{y\partial_x\} = a\partial_b + 2b\partial_c \dots + mb'\partial_{a'},$$

$$\{x\partial_y\} = mb\partial_a + (m-1)c\partial_b \dots + a'\partial_b;$$

de fato, com esses significados dos símbolos, o quântico é reduzido a zero por cada uma das operações $\{y\partial_x\} - y\partial_x$, $\{x\partial_y\} - x\partial_y$; portanto, de acordo com a definição, qualquer função que é reduzida a zero por cada uma das últimas operações mencionadas, é um covariante do quântico. De acordo com uma observação anterior, o covariante pode ser considerado como uma função racional e integral, separáveis homogêneas em relação aos facientes (x, y) e aos coeficientes $(a, b, \dots, b', a')$. Se ao invés de um único conjunto (x, y) , o covariante conter os conjuntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$, então o quântico deve ser reduzido a zero por cada uma das operações $\{y\partial_x\} - Sy\partial_x$, $\{x\partial_y\} - Sx\partial_y$ (onde $Sy\partial_x = y_1\partial_1 + y_2\partial_2 + \dots$), mas eu vou principalmente atender aos casos em que o covariante contém somente o conjunto (x, y) .

Suponha, para simplificar, que o quântico é representado por U , e tomemos $U_1, U_2, \dots$ ser o que U se transforma quando o conjunto (x, y) é sucessivamente substituído pelos conjuntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$. Suponha além disso, que $\overline{12} = \partial_{x_1}\partial_{y_2} - \partial_{x_2}\partial_{y_1}, \dots$, então a função

$$\overline{12^p} \overline{13^q} \overline{23^r} \dots U_1 U_2 U_3 \dots,$$

em que, depois das diferenciações, os novos conjuntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$ podem ser substituídos pelo conjunto original (x, y) , sendo um covariante do quântico U . E se o número de diferenciações sejam de tal modo que faça os facientes desaparecerem, isto é, se a soma de todos os índices $p, q, \dots$ dos termos $\overline{12}, \dots$ que contém o simbólico número 1, a soma de todos índices $p, q, \dots$ que contém o simbólico número 2, e assim por diante, se cada uma resultar igual ao grau do quântico, temos um invariante. O quântico operativo Θ torna-se no caso em consideração:

$$\Theta = (\partial_a, -\partial_b, \dots \pm \partial_a \chi x, y)^m,$$

os sinais sendo alternadamente positivo e negativo; e é fácil verificar que essa expressão dá de forma idêntica $\Theta U = 0$, e qualquer covariante de Θ operado sobre um covariante de U dá origem a um covariante de U .

[18] Mas o quântico

$$(a, b, \dots, b', a')(x, y)^m,$$

considerado como decomponível em fatores lineares, isto é, como expresso na forma:

$$a(x - \alpha y)(x - \beta y) \dots,$$

dá origem a uma nova série de resultados. Temos nesse caso,

$$\{y\partial_x\} = \partial_\alpha + \partial_\beta \dots,$$

$$\{x\partial_y\} = -(\alpha + \beta \dots)a\partial_a + \alpha^2\partial_\alpha + \beta^2\partial_\beta + \dots;$$

de fato, com esses significados dos símbolos, o quântico é reduzido a zero por cada uma das operações $\{x\partial_y\} - x\partial_y, \{y\partial_x\} - y\partial_x$, e temos consequentemente a definição de covariante de um quântico considerada como expressada na forma

$a(x - \alpha y)(x - \beta y) \dots$. E vai ser lembrado que esses e os valores antigos dos símbolos $\{x\partial_y\}$ e $\{y\partial_x\}$ são, quando o mesmo quântico é considerado como

representado sob as duas formas $(a, b, \dots, b', a')(x, y)^m$ e $a(x - \alpha y)(x - \beta y) \dots$, idênticos.

[19] Considere agora a expressão

$$a^\theta (x - \alpha y)^j (x - \beta y)^k \dots (\alpha - \beta)^p \dots,$$

onde a soma dos índices $j, p, \dots$ de todos os fatores que contêm α , a soma dos índices $k, p, \dots$ de todos os fatores que contêm β , e assim por diante, são respectivamente iguais ao índice θ do coeficiente a . O índice θ e o índice $p, \dots$, podem ser considerados como arbitrários, no entanto, dentro dos limites, darei valores positivos (inclusive o 0) para os índices $j, k, \dots$.

A expressão em questão é reduzida a zero por cada uma das operações $\{x\partial_y\} - x\partial_y, \{y\partial_x\} - y\partial_x$; e assim é também, o caso com as expressões obtidas permutando de qualquer maneira as raízes $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, e portanto, com a expressão

$$a^\theta \sum (x - \alpha y)^j (x - \beta y)^k \dots (\alpha - \beta)^p \dots,$$

onde $\sum$ denota uma soma em relação a todas as diferentes permutações das raízes $\alpha, \beta, \gamma, \dots$.

A função assim obtida (que é uma função racional de $(a, b, \dots, b', a')$) será um covariante, e se supormos $\mu = m\theta - 2Sp$, onde Sp denota a soma de todos os índices p dos diferentes termos de $(\alpha - \beta)^p, \dots$, então o covariante será de ordem μ (isto é, de grau μ nos facientes x, y), e de grau θ nos coeficientes.

[20] Em ligação com esse covariante

$$a^\theta \sum (x - \alpha y)^j (x - \beta y)^k \dots (\alpha - \beta)^p \dots,$$

de ordem μ e de grau θ nos coeficientes, do quântico

$$U = a(x - \alpha y)(x - \beta y) \dots,$$

considere o covariante

$$\sum (\overline{12^p} \dots) V_1 V_2 \dots V_m,$$

do quântico

$$V = (*) (x, y)^\phi,$$

em que, depois das diferenciações, os conjuntos $(x_1, y_1)(x_2, y_2), \dots$ são substituídas pelo conjunto original (x, y) . O último covariante mencionado será de ordem $m(\phi - \theta) + \mu$, e terá o grau m nos coeficientes; e em particular se $\phi = \theta$, isto é, se V for um quântico de ordem θ , então o covariante terá ordem μ e de grau m nos coeficientes. Assim, para um covariante de grau θ nos coeficientes, de um quântico de ordem m , corresponde a um covariante de grau m nos coeficientes, de um quântico de ordem θ ; os dois covariantes em questão, sendo tomado cada um deles de mesma ordem μ . É importante notar, que se tivéssemos começado com o covariante do quântico V , um processo reverso levaria ao covariante do quântico U . Podemos, portanto, dizer que os covariantes de uma dada ordem e de grau θ nos coeficientes, de um quântico de ordem m , correspondem cada um a cada um com o covariante de mesma ordem e de grau m nos coeficientes, de um quântico de ordem θ ; e em particular, os invariantes de grau θ de um quântico de ordem m , correspondem cada um a cada um com os invariantes de grau m de um quântico de ordem θ .

Essa é a lei de reciprocidade demonstrada por M. Hermite, por um método que (estou inclinado a pensar) é substancialmente idêntico com o que tenho usado, embora apresentados de uma forma muito diferente: a descoberta da lei, considerada como uma lei relacionada ao *número* de invariantes, é devido ao Mr. Sylvester. O significado preciso dessa lei, mencionados no último ponto de vista, requer algumas explicações. Suponha que nós conhecemos todos os invariantes realmente independentes de um quântico de ordem m , a lei nos dá o número de invariantes de grau m do quântico de ordem θ (é conveniente assumirmos $\theta > m$), assim, os invariantes do grau em questão, que são linearmente independentes, ou asyzygéticos, isto é, de tal forma que não existe qualquer múltiplo numérico desses invariantes que tenham a soma igual a zero; mas, os invariantes em questão podem e em geral serão ligados *entre si* e com os outros invariantes do quântico que pertencem por equações não-lineares: e em particular, o sistema de invariantes de grau m compreenderá todos os invariantes de que o grau (se houver) são

funções racional e integral dos invariantes de graus menores. As observações como se aplicam, se referem a um sistema de covariantes de uma dada ordem e de grau m nos coeficientes, de um quântico de ordem θ .

[21] O número de covariantes realmente independentes de um quântico $(*) (x, y)^m$ é precisamente igual a ordem m do quântico, isto é, qualquer covariante é uma função (geralmente uma função irracional somente expressa como a raiz de uma equação) de qualquer m covariantes independentes, e da mesma maneira, o número de invariantes realmente independentes é $m - 2$; podemos, se quisermos, tomar $m - 2$ invariantes realmente independentes como parte de um sistema de m covariantes independentes; o quântico por si só pode ser tomado como um dos outros dois covariantes, e qualquer outro covariante como o outro de dois covariantes; podemos, portanto, dizer que cada covariante é uma função (geralmente uma função irracional somente expressa como a raiz de uma equação) de $m - 2$ invariantes, de um quântico em si mesmo e de um dado covariante.

[22] Considere qualquer covariante do quântico

$$(a, b, \dots, b', a')(x, y)^m,$$

e que ele seja de ordem μ , e de grau θ nos coeficientes. É muito fácil mostrar que $m\theta - \mu$ é necessariamente par²: para que um quântico de uma ordem ímpar admita apenas invariantes de um grau par.

Entretanto, há uma distinção importante entre os casos de $m\theta - \mu$ necessariamente par e “*oddly even*”. No primeiro caso, o covariante permanece inalterado pela substituição de (y, x) , $(a, b, \dots, b', a')$ para (x, y) , $(a, b, \dots, b', a')$; no segundo caso, o efeito da substituição é mudar o sinal do covariante.

² Observo que foi somente com a descoberta de um invariante de grau 18 de um quântico de ordem 5 (Invariante de M. Hermite), que removeu uma impressão errada errada que eu tinha estado sob desde o início do assunto, que $m\theta$ era necessariamente par.

No primeiro caso, o covariante pode ser chamado de, *covariante simétrico*, e no segundo caso, covariante “*skew*”. De passagem, pode se notar que, o mais simples invariante “*skew*”, é o invariante de grau 18 de um quântico de ordem 5, descoberto por M. Hermite.

[23] Há outra condição muito simples que deve ser válida para todo covariante do quântico

$$(a, b, \dots, b', a')(x, y)^m,$$

se considerarmos os facientes (x, y) como sendo respectivamente de pesos $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$, e os coeficientes $(a, b, \dots, b', a')$, como sendo respectivamente de pesos $-\frac{1}{2}m, -\frac{1}{2}m + 1, \dots, \frac{1}{2}m - 1, \frac{1}{2}m$, então, o peso de cada termo do covariante será zero. Essa é a afirmação mais elegante da lei, mas para evitar quantidades negativas, a afirmação pode ser modificada, como segue: – se os facientes (x, y) são considerados como sendo de pesos 1, 0 respectivamente, e os coeficientes $(a, b, \dots, b', a')$ como sendo de pesos $0, 1, \dots, m - 1, m$, respectivamente, então, o peso do termo de cada covariante será $\frac{1}{2}(m\theta + \mu)$.

[24] As leis anteriores quanto à forma de um covariante foram mencionados por meio de antecipação, principalmente por causa do comentário, que eles até agora definem a forma de um covariante, a tornar, em muitos casos práticos, com uma quantidade moderada de trabalho para completar as investigações através das operações $\{x\partial_y\} - x\partial_y$ e $\{y\partial_x\} - y\partial_x$. De fato, para encontrar os invariantes de uma dada ordem, e um dado grau nos coeficientes, satisfazendo as condições prescritas como a simetria e peso: tal função, se reduzida à zero por uma das operações em questão, será, por causa da simetria, reduzida à zero pelas outras operações em questão; é, portanto, somente necessário para efeito acima de, por exemplo, a operação $\{x\partial_y\} - x\partial_y$, e para se possível determinar, os coeficientes indeterminados de tal maneira a tornar o resultado igual à zero: é claro que, quando isso não pode ser feito, não há qualquer covariante da forma em questão. Além disso, é importante observar que, em relação aos invariantes, que se um invariante for expandido em uma série de potências ascendentes do primeiro coeficiente a , e

o primeiro termo da expansão é conhecido, todos os demais termos podem ser deduzidos por meras diferenciações. Há um caso muito importante, no qual o valor do primeiro termo (isto é, o valor do invariante quando a é colocado igual a 0), pode ser deduzido a partir de um invariante correspondente de ordem imediatamente inferior; o caso em questão, é o do discriminante (ou função que igualada a zero expressam a igualdade de um par de raízes); pelo Teorema de Joachimsthal, se no discriminante do quântico $(a, b, \dots, b', a')(x, y)^m$, escrevermos $a = 0$, o resultado contém b^2 como um fator, e despojado desse fator, é precisamente o discriminante do quântico de ordem $m - 1$ obtido de um quântico por termos escrito $a = 0$ e jogando fora o fator x : esse método é uma prática muito conveniente para o cálculo de discriminantes de quânticos de ordem sucessivas. É também importante observarmos, em relação aos covariantes, que quando o primeiro ou o último coeficiente de qualquer covariante (isto é, os coeficientes de maior potência dos facientes) é conhecido, todos os outros coeficientes podem ser deduzidos por meras diferenciações.

PÓS-ESCRITO adicionado em 7 de Outubro de 1854. – Eu tenho, desde que a memória anterior foi escrita, encontrado em relação aos covariantes de um quântico $(*)(x, y \dots)^m$, que uma função de qualquer ordem e grau nos coeficientes satisfazem a condição necessária quanto ao peso, tal que pode ser reduzida a zero por uma das operações $\{x\partial_y\} - x\partial_y, \{y\partial_x\} - y\partial_x$, será necessariamente reduzida a zero pela outra das duas operações, isto é, ele será um covariante; e eu tenho sido assim, levado a descoberta da lei para o número de covariantes aszygéticos de uma dada ordem e grau de coeficientes; dessa lei, eu deduzo como um corolário, a lei da reciprocidade de MM. Sylvester e Hermite. Eu espero voltar ao assunto numa próxima memória.

Apêndice 2 - Uma Segunda Memória dos Quânticos

Essa memória é entendida como uma continuação da anterior “*An Introductory Memoir upon Quantics*” (1854), e essa memória deve ser lida acompanhada da primeira; os parágrafos dessas duas memórias estão numerados em continuação. O principal tema dessa memória é o teorema que me referi no pós-escrito da Memória de Introdução aos Quânticos e também apresentar vários desenvolvimentos resultantes em relação ao número e forma dos covariantes de um quântico binário.

[25] Eu tenho falado de covariantes e invariantes aszygéticos, e terei a oportunidade de abordar sobre covariantes e invariantes irreduzíveis. Considerando uma função geral u determinada como um invariante ou covariante por meio de um sistema de equações diferenciais parciais, o matemático pondera que essa função será conveniente para explicar o que se entende por integral aszygético e integral irreduzível. Dado um conjunto $(a, b, c, \dots)$, covariante ou invariante de uma função, presume-se que o sistema admite integrals da forma $u = P, u = Q, \dots$, onde $P, Q, \dots$, são funções homogêneas racionais e integrals do conjunto $(a, b, c, \dots)$, e, além disso, se o sistema é de tal forma que $P, Q, \dots$, são integrals, $\phi(P, Q, \dots)$ também é um integral. Considerando apenas os integrals que são funções homogêneas racionais e integrals do conjunto $(a, b, c, \dots)$, integrals $P, Q, R, \dots$, não ligados por qualquer equação linear ou syzygy (tais como $\lambda P + \mu Q + \nu R \dots = 0$),⁽¹⁾ são chamadas de aszygéticas, mas ao falar das integrals aszygéticas de um grau particular, fica implícito que as integrals é um sistema que cada integral de mesmo grau pode ser expresso como uma função linear (tais como $\lambda P + \mu Q + \nu R \dots$) dessas integrals. Qualquer integral P não expresso como uma função homogênea racional e integral de integrals de graus inferiores, é chamado de integral irreduzível.

¹ É absolutamente necessário observar, que os multiplicadores $\lambda, \mu, \nu, \dots$, e geralmente qualquer coeficiente ou quantidade não expressamente indicada para conter o conjunto $(a, b, c, \dots)$, são considerados como independentes do conjunto, ou usando uma palavra conveniente, são considerados como “triviais”.

[26] Suponha agora que $A_1, A_2, A_3, \dots$, correspondem ao número de integrals aszygéticos dos graus de 1, 2, 3, ..., e $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$, determinam as equações. Logo,

$$A_1 = \alpha_1$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\alpha_1(\alpha_1 + 1) + \alpha_2$$

$$A_3 = \frac{1}{6}\alpha_1(\alpha_1 + 1)(\alpha_1 + 2) + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_3$$

$$A_4 = \frac{1}{24}\alpha_1(\alpha_1 + 1)(\alpha_1 + 2)(\alpha_1 + 3) + \frac{1}{2}\alpha_1(\alpha_1 + 1)\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \frac{1}{2}\alpha_2(\alpha_1 + 1) + \alpha_4$$

⋮

Que é a mesma coisa, supor que:

$$1 + A_1x + A_2x^2 + \dots = (1 - x)^{-\alpha_1}(1 - x^2)^{-\alpha_2}(1 - x^3)^{-\alpha_3} \dots;$$

uma pequena observação vai mostrar que α_r representa o número de integrals irreduzíveis de grau r menos o número de relações lineares ou syzygies ou integrals não-irreduzíveis de mesmo grau. Facilmente podemos notar que as integrals aszygéticas de grau 1 são irreduzíveis, $A_1 = \alpha_1$. Representando as integrals irreduzíveis de grau 1 por $X, X', \dots$, então as integrals compostas $X^2, XX', \dots$, cujo número é $\frac{1}{2}\alpha_1(\alpha_1 + 1)$, devem ser incluídas entre as integrals aszygéticas de grau 2; e se essas integrals compostas forem aszygéticas, permanecerá $A_2 - \frac{1}{2}\alpha_1(\alpha_1 + 1)$ para o número de integrals irreduzíveis de grau 2. Entretanto, se existirem syzygies entre essas integrals compostas, o número a ser subtraído de A_2 será $\frac{1}{2}\alpha_1(\alpha_1 + 1)$ menos o número desses syzygies, assim, teremos $A_2 - \frac{1}{2}\alpha_1(\alpha_1 + 1)$, isto é, α_2 é igual ao número de integrals irreduzíveis de grau 2 menos o número de syzygies dessas integrals compostas de mesmo grau. Novamente, supondo que α_2 é negativo, temos $\alpha_2 = -\beta_2$, podemos supor para uma maior simplicidade que não há integrals irreduzíveis de grau 2, mas que as integrals compostas desse grau, $X^2, XX', \dots$, são ligadas por β_2 syzygies, tal que, $\lambda X^2 + \mu XX', \dots = 0$, $\lambda_1 X^2 + \mu_1 XX', \dots = 0$. As integrals

asyzygéticas de grau 4 incluem $X^4, X^3X', \dots$, cujo número é $\frac{1}{24}\alpha_1(\alpha_1 + 1)(\alpha_1 + 2)(\alpha_1 + 3)$; mas essas integrals compostas não são asyzygéticas, elas estão conectadas por syzygies que são aumentativos de β_2 , sendo esses syzygies do segundo grau:

$$(\lambda X^2 + \mu XX' \dots)X^2 = 0, (\lambda X^2 + \mu XX' \dots)XX' = 0, \dots, (\lambda_1 X^2 + \mu_1 XX' \dots)X^2 = 0, \\ (\lambda_1 X^2 + \mu_1 XX' \dots)XX' = 0, \dots,$$

que possui um número de $\frac{1}{2}\alpha_1(\alpha_1 + 1)\beta_2$. E esses syzygies são eles próprios não asyzygéticos, ligados por syzygies secundários como:

$$\lambda_1(\lambda X^2 + \mu XX' \dots)X^2 + \mu_1(\lambda X^2 + \mu XX' \dots)XX' + \dots - \lambda(\lambda_1 X^2 + \mu_1 XX' \dots)X^2 \\ - \mu(\lambda_1 X^2 + \mu_1 XX' \dots)XX' - \dots = 0$$

que possui um número de $\frac{1}{2}\beta_2(\beta_2 - 1)$. Dessa forma, o número real de syzygies entre as integrals compostas $X^4, X^3X', \dots$, é portanto, $\frac{1}{2}\alpha_1(\alpha_1 + 1)\beta_2 - \frac{1}{2}\beta_2(\beta_2 - 1)$, e o número de integrals de grau 4 decorrentes das integrals e syzygies dos graus 1 e 2, é:

$$\frac{1}{24}\alpha_1(\alpha_1 + 1)(\alpha_1 + 2)(\alpha_1 + 3) - \frac{1}{2}\alpha_1(\alpha_1 + 1)\beta_2 + \frac{1}{2}\beta_2(\beta_2 - 1)$$

Esta forma acima também pode ser escrita por $-\alpha_2$ ao invés de β_2 , resultando em:

$$\frac{1}{24}\alpha_1(\alpha_1 + 1)(\alpha_1 + 2)(\alpha_1 + 3) + \frac{1}{2}\alpha_1(\alpha_1 + 1)\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_2(\alpha_2 + 1)$$

As integrals de grau 1 e 3 originam $\alpha_1\alpha_3$ integrals de grau 4, e se todas as integrals obtidas acima foram asyzygetic, deve-se obter:

$$A_4 - \frac{1}{24}\alpha_1(\alpha_1 + 1)(\alpha_1 + 2)(\alpha_1 + 3) - \frac{1}{2}\alpha_1(\alpha_1 + 1)\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_2(\alpha_2 + 1) - \alpha_1\alpha_3$$

Isto é, α_4 como o número de integrals irreduzíveis de grau 4, entretanto, se existir alguns syzygies ainda na composição do integral, então α_4 , será o número das integrals irreduzíveis de grau 4 menos o número dos syzygies restantes, e assim por diante.

[27] Pode se observar, que para qualquer equação diferencial parcial dada, ou sistema dessas equações, sempre haverá um número finito ν , tais que, dado ν integrals independentes, todos os outros integrals é uma função (geralmente uma função irracional somente expressa como a raiz de uma equação) das ν integrals independentes; e se a essas integrals nós juntarmos uma única outra integral que não é uma função racional das ν integrals, podemos ver que todos os outros integrals serão uma função racional de $\nu + 1$ integrals; mas qualquer outro integral não será, em geral, uma função uma função racional e integral de $\nu + 1$ integrals; e [incorreto] não há, em geral, qualquer número finito quaisquer que sejam de integrals, de modo que cada outro integral é uma função racional e integral dessas integrals, isto é, o número de integrals irreduzíveis é, em geral, infinito; e parece que, isso é de fato, no caso da teoria dos covariantes.

[28] No caso dos covariantes ou invariantes de um quântico binário, A_n , é dado pelo (aparecerá na sequência) coeficiente no desenvolvimento de x^n , no crescimento das potências de x em $\frac{\varphi x}{f x}$, onde $f x$ é da forma:

$$(1 - x)^{\beta_1}(1 - x^2)^{\beta_2}..(1 - x^k)^{\beta_k}$$

O grau de φx é menor que de $f x$. Portanto:

$$1 + A_1x + A_2x^2 + \dots = \frac{\varphi x}{f x},$$

E conseqüentemente:

$$\varphi x = (1 - x)^{\beta_1 - \alpha_1}(1 - x^2)^{\beta_2 - \alpha_2}..(1 - x^k)^{\beta_k - \alpha_k}(1 - x^{k+1})^{-\alpha_{k+1}} \dots$$

Agora, cada fator racional de um binomial $1 - x^m$ é o fator irreduzível de $1 - x^{m'}$, onde m' é igual ou é um submúltiplo de m . Para que essa série $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$ tenha fim, é necessário que φx seja constituído de fatores em que cada um é um fator irreduzível de um binomial $1 - x^m$. Caso φx não possua fatores dessa forma, a série $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$ vai continuar *ad infinitum*, e podemos ver que não há nenhum ponto na série, pelo que os termos para além desse, são todos negativos, isto é, haverá covariantes ou invariantes irreduzíveis de graus indefinidamente altos; e o número de invariantes ou covariantes serão infinitos. O primeiro caso que, o número de invariantes é infinito, é o quântico

de sétima ordem, ou séptica; o primeiro caso, o número de covariantes é infinito, é o quântico de quinta ordem, ou quántica. [Como já é sabido, essas conclusões são incorretas, o número de invariantes ou covariantes irreduzíveis, são finitos para todos os casos.]

[29] Retomando a teoria dos quânticos binários, considero o quântico:

$$(a, b, \dots, b', a')(x, y)^m$$

Escrevendo:

$$\{y\partial_x\} = a\partial_b + 2b\partial_c + \dots + mb'\partial_{a'} = X$$

$$\{x\partial_y\} = mb\partial_a + \overline{m-1}c\partial_b + \dots + a'\partial_{b'} = Y$$

Qualquer função que é reduzida a zero por cada uma das operações $X - y\partial, Y - x\partial$, é covariante de um quântico, mas um covariante sempre será considerado como uma função homogênea separável em relação aos facientes (x, y) e dos coeficientes $(a, b, \dots, b', a')$. E as palavras ordem e grau serão tomadas para se referir aos facientes e aos coeficientes, respectivamente.

Eu começo por provar o teorema enunciado. Segue imediatamente da definição, que um covariante é reduzido à zero pela operação:

$$\overline{X - y\partial_x} \cdot \overline{Y - x\partial_y} - \overline{Y - x\partial_y} \cdot \overline{X - y\partial_x},$$

que é equivalente a

$$X.Y - Y.X + y\partial_y - x\partial_x$$

agora

$$X.Y = XY + X(Y)$$

$$Y.X = YX + Y(X)$$

onde XY e YX são operações equivalentes, e

$$X(Y) = 1ma\partial_a + \overline{2m-1}b\partial_b + \dots + m1b'\partial_{b'}$$

$$Y(X) = m1b\partial_b + \dots + \overline{2m-1}b'\partial_{b'} + 1ma'\partial_{a'}$$

de onde

$$\begin{aligned} X(Y) - Y(X) &= ma\partial_a + \overline{m-2}b\partial_b \dots - \overline{m-2}b'\partial_{b'} - m\alpha'\partial_{\alpha'} \\ &= k \text{ (supôr)} \end{aligned}$$

e o covariante é, portanto, reduzido a zero pela operação

$$k + y\partial_y - x\partial_x$$

Agora em relação aos termos $a^ab^b \dots b'^ba'^a \dots x^iy^j$, nós temos:

$$\begin{aligned} k &= ma + \overline{m-2}\beta \dots - \overline{m-2}\beta' - m\alpha' \\ y\partial_y - x\partial_x &= j - i \end{aligned}$$

Assim, é possível observarmos que em cada termo de um covariante temos de ter,

$$ma + \overline{m-2}\beta \dots - \overline{m-2}\beta' - m\alpha' + j - i = 0,$$

isto é, se (x, y) são considerados como sendo os pesos $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ respectivamente, e $(a, b, \dots, b', a')$ com os pesos $-\frac{1}{2}m, -\frac{1}{2}m + 1, \dots, \frac{1}{2}m - 1, \frac{1}{2}m$ respectivamente, então os pesos de cada um dos termos do covariante é zero.

Entretanto, se (x, y) tiverem seus pesos considerados como 1 e 0, e $(a, b, \dots, b', a')$ com os pesos de $0, 1, \dots, \overline{m-1}, m$, respectivamente, podemos escrever que:

$$m(\alpha + \beta + \dots + \beta' + \alpha') + j + i - 2(\beta + \dots + \overline{m-1}\beta' + m\alpha' + i) = 0,$$

e supondo que o covariante é de ordem μ e possui grau θ , cada termo do covariante terá $\frac{1}{2}(m\theta + \mu)$ como peso.

É conveniente ressaltar, que em qualquer função de coeficientes de grau θ e peso q , temos:

$$X.Y - Y.X = m\theta - 2q$$

[30] Considere agora um covariante,

$$(A, B, \dots B', A' \chi(x, y)^\mu)$$

de ordem μ e grau θ , o covariante pode ser reduzido a zero por cada uma das operações $X - y\partial_x$ e $Y - x\partial_y$, nos levando para um sistema de equações:

$$XA = 0$$

$$XB = \mu A$$

$$XC = \overline{\mu - 1}B$$

$$\vdots$$

$$XB' = 2C'$$

$$XA' = B'$$

e

$$YA = B$$

$$YB = 2C$$

$$\vdots$$

$$YC' = \overline{\mu - 1}B'$$

$$YB' = \mu A'$$

$$YA' = 0$$

Se essas equações são satisfeitas, a função será um covariante.

Assumo que A é uma função de grau θ e de peso $\frac{1}{2}(m\theta + \mu)$, satisfazendo a condição $XA = 0$.

Os resultados obtidos por sucessivas operações de Y sobre a função A , são representados por $YA, Y^2A, Y^3A, \dots$. A função Y^sA será de grau θ e de peso $\frac{1}{2}(m\theta + \mu) + s$. Cayley afirma que na série de termos $YA, Y^2A, Y^3A, \dots$, chegaremos a um termo que é igual a zero. De fato, pois se m é o maior peso

de qualquer coeficiente, o peso de Y^s é no máximo igual a $m\theta$, portanto, se $\frac{1}{2}(m\theta - \mu) + s > m\theta$ ou $s > \frac{1}{2}(m\theta + \mu)$, nós temos $Y^s A = 0$.

Para simplificar a escrita, irei utilizar XY ao invés de $X.Y$, e assim será nos casos similares. No que diz respeito a $Y^s A$, temos,

$$XY - YX = \mu - 2s.$$

Daí vem, $(XY - YX)A = \mu A$

e conseqüentemente, $XYA = YXA + \mu A = \mu A$

Similarmente, $(XY - YX)YA = \overline{\mu - 2}YA$

portanto, $XY^2A = YXYA + \overline{\mu - 2}YA$

$$= \mu YA + \overline{\mu - 2}YA = 2(\mu - 1)YA$$

Novamente, $(XY - YX)Y^2A = \overline{\mu - 4}Y^2A$

portanto, $XY^3A = YXY^2A + \overline{\mu - 4}Y^2A$

$$= 2\overline{\mu - 1}Y^2A + \overline{\mu - 4}Y^2A = 3(\mu - 2)Y^2A$$

ou generalizando,

$$XY^s A = s(\mu - s + 1)Y^s A.$$

Trocando, $s = \mu + 1, \mu + 2, \mu + 3, \dots$, temos,

$$XY^{\mu+1}A = 0$$

$$XY^{\mu+2}A = -(\mu + 2)1.Y^{\mu+1}A$$

$$XY^{\mu+3}A = -(\mu + 3)2.Y^{\mu+2}A$$

$\vdots$

que são equações que mostram que:

$$Y^{\mu+1}A = 0;$$

a não ser que isto seja assim, isto é, se $Y^{\mu+1}A \neq 0$, então, da segunda equação $XY^{\mu+2}A=0$, e portanto, $Y^{\mu+2}A=0$, da terceira equação $XY^{\mu+3}A=0$, portanto, $Y^{\mu+3}A=0$, e assim por diante, temos então que $Y^{\mu+1}A = 0$.

[31] As suposições que têm sido feitas quanto à função de A, originam as equações:

$$\begin{aligned}XA &= 0 \\XYA &= \mu A \\XY^2A &= 2(\mu - 1)YA \\&\vdots \\XY^\mu A &= \mu Y^{\mu-1}A \\Y^{\mu+1}A &= 0\end{aligned}$$

e se, agora, assumirmos que:

$$B = YA, C = \frac{1}{2}YB, \dots, A' = \frac{1}{\mu}YB'$$

o sistema se torna,

$$\begin{aligned}XA &= 0 \\XB &= \mu A \\XC &= \overline{\mu - 1}B \\&\vdots \\XA' &= B' \\YA' &= 0;\end{aligned}$$

Desse modo, todo o sistema de equações que expressam $(A, B, \dots, B', A')(x, y)^\mu$ é um covariante.

Teorema: Dado um quântico $(a, b, \dots, b', a')(x, y)^m$, se A é uma função de coeficientes de grau θ e de peso $\frac{1}{2}(m\theta + \mu)$ satisfazendo a condição $XA = 0$, e se $B, C, \dots, B', A'$ são determinadas pelas equações

$$B = YA, C = \frac{1}{2}YB, \dots, A' = \frac{1}{\mu}YB'$$

então

$$(A, B, \dots, B', A')(x, y)^\mu$$

será um covariante.

Em particular, uma função A de grau θ e de peso $\frac{1}{2}m\theta$, satisfazendo a condição $XA = 0$ (e também $YA = 0$), essa função será um invariante.

[32] Considero agora para A , a função mais geral de coeficientes, de grau θ e peso $\frac{1}{2}(m\theta - \mu)$. Então XA é uma função de grau θ e de peso $\frac{1}{2}(m\theta - \mu) - 1$, e os coeficientes arbitrários da função A são determinados de modo que, $XA = 0$. O número de coeficientes arbitrários é igual ao número de termos de A , e o número de equações é igual ao número de termos em XA . Assim, o número dos coeficientes arbitrários que permanecem indeterminados é igual ao número de termos em A menos o número de termos em XA , e o covariante será completamente determinado quando o coeficiente de maior grau for conhecido. O número de covariantes aszygéticos de ordem μ e grau θ , é igual ao número de termos de grau θ e peso $\frac{1}{2}(m\theta - \mu)$ menos o número de termos grau θ e peso $\frac{1}{2}(m\theta - \mu) - 1$.

[33] Farei nesse momento, alguns exemplos do cálculo de covariantes pelo método apenas explicado. É muito conveniente para essa finalidade, começar por formar as partes literais pelo Método de Derivação de Arbogast²: formando tabelas, como as quais vem a seguir:

² Arbogast's Method of Derivations (Nota de rodapé do tradutor).

a	b	c
-----	-----	-----

a^2	ab	ac b^2	bc	b^2
-------	------	---------------	------	-------

a	b	c	d
-----	-----	-----	-----

a^2	ab	ac b^2	ad bc	bd c^2	cd	d^2
-------	------	---------------	--------------	---------------	------	-------

a^3	a^2b	a^2c ab^2	a^2d abc b^3	abd ac^2 b^2c	acd b^2d bc^2	ad^2 bcd c^3	bd^2 c^2d	cd^2	d^3
-------	--------	------------------	--------------------------	---------------------------	---------------------------	--------------------------	------------------	--------	-------

a^4	a^3b	a^3c a^2b^2	a^3d a^2bc ab^3	a^2bd a^2c^2 ab^2c b^4	a^2cd ab^2d abc^2 b^3c	a^2d^2 $abcd$ ac^3 b^3d b^2c^2	abd^2 ac^2d b^2cd bc^3	acd^2 b^2d^2 bc^2d c^4	ad^3 bcd^2 c^3d	bd^3 c^2d^2	cd^3	d^4
-------	--------	--------------------	-----------------------------	---	---	--	---	---	-----------------------------	--------------------	--------	-------

a	b	c	d	e
-----	-----	-----	-----	-----

a^2	ab	ac b^2	ad bc	ae bd c^2	be cd	bd c^2	cd	d^2
-------	------	---------------	--------------	-----------------------	--------------	---------------	------	-------

a^3	a^2b	a^2c ab^2	a^2d abc b^3	a^2e abd ac^2 b^2c	abe acd b^2d bc^2	ace ad^2 b^2e bcd c^3	ade bce bd^2 c^2d	ae^2 bde c^2e cd^2	be^2 cde d^3	ce^2 d^2e	de^2	e^3
-------	--------	------------------	--------------------------	-------------------------------------	------------------------------------	---	------------------------------------	-------------------------------------	--------------------------	------------------	--------	-------

[34] No caso da cúbica $(a, b, c, d)(x, y)^3$, as tabelas mostram que haverá um único invariante de grau 4. Representando como,

$$Aa^2d^2 + Babcd + Cac^3 + Db^3d + Eb^2c^2,$$

que deve ser operado com $a\partial_b + 2b\partial_c + 3c\partial_d$. Isso resulta em:

$+ B$		$+ 6A$	a^2cd
$+ 3D$	$+ 2B$		ab^2d
$+ 2E$	$+ 6C$	$+ 3B$	abc^2
	$+ 4E$	$+ 3D$	b^3c

Ou seja, $B + 6A = 0$, $3D + 2B = 0$, $2E + 6C + 3B = 0$ e $4E + 3D = 0$. Colocando que $A = 1$, obtém-se $B = 6, C = 4, D = 4$ e $E = -3$, sendo assim, o invariante será dado por:

$$a^2d^2 - 6abcd + 4ac^3 + 4b^3d - 3b^2c^2.$$

Há também, um covariante de ordem 3 e grau 3. O coeficiente de x^3 é:

$$Aa^2d + Babcd + Cb^3,$$

que operado com $a\partial_b + 2b\partial_c + 3c\partial_d$, resulta em:

$- 3$	$+ 8$ $- 2$	$- 1$ $- 2$	ad^2 bcd c^3
-------	----------------	----------------	--------------------------

Dessa forma, temos que o coeficiente de y^3 é:

$$-ad^2 + 3bcd - 2c^3,$$

E o covariante dessa forma será:

$a^2d + 1$ $abc - 3$ $b^3 + 2$	$abd + 3$ $ac^2 - 6$ $b^2c + 3$	$acd - 3$ $b^2d + 6$ $bc^2 - 3$	$ad^2 - 1$ $bcd + 3$ $c^3 - 2$	$\chi(x, y)^3$
--------------------------------------	---------------------------------------	---------------------------------------	--------------------------------------	----------------

[Agora escrevo os coeficientes numéricos depois ao invés de antes dos termos literais.]

Eu tenho trabalhado o exemplo em detalhes, como um modelo mais conveniente do método para os cálculos de covariantes mais complicados³.

[35] O número de termos de grau θ e o peso q são iguais ao número de maneiras em que q pode ser composto como uma soma de θ termos com os elementos $(0,1,2,\dots,m)$, um número que é igual ao coeficiente de $x^q z^\theta$ e o número de covariantes aszygéticos de qualquer grau do quântico $(*)$ $(x,y)^m$ pode ser determinado por meio do desenvolvimento de:

³ Nota acrescentada em 7 de Fevereiro de 1856. – O método que segue para o cálculo de um invariante ou do coeficiente líder de um covariante, em princípio, parece ser idêntico com o mencionado no texto. Anote todos os termos de peso imediatamente inferior que o do covariante ou coeficiente líder, e opere cada um desses separadamente com o símbolo

$$ind. b. \frac{b}{a} + 2. ind. c. \frac{c}{b} + \dots (m-1) ind. b'. \frac{b'}{a},$$

onde temos de primeiramente multiplicar por uma fração, rejeitando as potências negativas, e em seguida pelo índice da letra adequada do termo. Igualando os resultados a zero, obteremos equações entre os termos do invariante ou coeficiente líder, e substituindo nessas equações cada termo pelo seu coeficiente numérico no invariante ou coeficiente líder, temos as equações de ligação desses coeficientes numéricos. Assim, para o discriminante da cúbica, os pesos imediatamente inferiores são $a^2cd, ab^2d, abc^2, b^3c$, e operando em cada um desses, separadamente com o símbolo

$$ind. b. \frac{b}{a} + 2ind. c. \frac{c}{b} + 3ind. d. \frac{d}{c},$$

encontramos

$abcd$		$+6 a^2 d^2$
$3 b^3 d$	$+2 abcd$	
$2 b^2 c^2$	$+6 ac^3$	$+3 abcd$
	$+4 b^2 c^2$	$+3 b^3 d$

e igualando as linhas horizontais a zero, e assumindo $a^2 d^2 = 1$, temos $a^2 d^2 = 1, abcd = -6, ac^3 = 4, b^3 d = 4, b^2 c^2 = -3$, o valor do discriminante mencionado no texto.

$$\frac{1}{(1-z)(1-xz)(1-x^2z)\dots(1-x^mz)}$$

No caso da cúbica, por exemplo, a função para ser desenvolvida é:

$$\frac{1}{(1-z)(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)}$$

que é igual a,

$$1 + z(1 + x + x^2 + x^3) + z^2(1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 2x^5 + x^6) + \dots,$$

onde os coeficientes são dados pela tabela a seguir; por conta da simetria, a série de coeficientes para cada potência de z é continua apenas para os termos que não se encontram nos extremos.

										1	(0)	
									1	1	(1)	
								1	1	2	2	(2)
							1	1	2	3	3	(3)
					1	1	2	3	4	4	5	(4)
			1	1	2	3	4	5	6	6		(5)
	1	1	2	3	4	5	7	7	8	8		(6)

A partir desta tabela, podemos fazer uma nova ao subtrair cada coeficiente pelo coeficiente anterior, resultando em:

									1	(0)	
								1	0	(1)	
							1	0	1	0	(2)
						1	0	1	1	0	(3)
			1	0	1	1	1	1	0	1	(4)
		1	0	1	1	1	1	1	1	0	(5)
1	0	1	1	1	1	2	0	1	0	(6)	

Essas linhas fixam o número e denotam as características dos covariantes de graus 0, 1, 2, 3, A linha (0), ao ser interpretada, mostra que há um único covariante de grau 0, sendo que esse covariante é naturalmente, é uma constante, podendo ser excluída. Na linha (1), é possível verificar que há um único covariante de grau 1 de ordem 3, essa linha é a cúbica, e será representada por U . A linha (2) mostra que há dois covariantes asyzygéticos de grau 2, um de ordem 6, chamado de U^2 , e o outro de ordem 2, representado por H . Já na linha (3), temos três covariantes asyzygéticos de grau 3, um de ordem 9, chamado de U^3 , outro de ordem 5 (UH), e um de ordem 3, representado por Φ . Enquanto isso, a linha (4), apresenta cinco covariantes asyzygéticos de grau 4, um de ordem 12, chamado de U^4 , um de ordem 8, como U^2H , um de ordem 6, H^2 , e finalmente, outro de 0, ou seja, um invariante, que será representado por ∇ . A linha (5) tem seis covariantes asyzygéticos de grau 5, um de ordem 15, U^5 , um de ordem 11, U^3H , um de ordem 3, $U^2\Phi$, um de ordem 7, UH^2 , um de ordem 5, $H\Phi$, e um de ordem 3, representado por ∇U . A linha (6) mostra 8 covariantes asyzygéticos de grau 6, um de ordem 18, denotado por U^6 , um de ordem 14, U^4H , um de ordem 12, $U^3\Phi$, um de ordem 10, U^2H^2 , um de ordem 8, $UH\Phi$, dois de ordem 6 (isto é, os três covariantes H^3 , Φ^2 e ∇U^2 não são asyzygéticos, mas são conectados por uma única equação linear ou syzygy), e um de ordem 2, dado por ∇H . Há ainda os covariantes irreduzíveis U, H, Φ, ∇ interligados por uma equação linear ou syzygy entre H^3, Φ^2 e ∇U^2 , sendo este, de fato, o sistema de covariantes irreduzíveis, lembrando que, ∇ é o único invariante.

[36] Os covariantes asyzygéticos são da forma $U^p H^q \nabla^r$, ou então, da forma $U^p H^q \nabla^r \Phi$. Desde que U, H, ∇ sejam de graus 1, 2 e 4, respectivamente, e Φ grau 3, o número de covariantes asyzygéticos de grau m da primeira forma é igual ao coeficiente de x^m em $1 \div (1-x)(1-x^2)(1-x^4)$, e o número de covariantes asyzygéticos de grau m da segunda forma é igual ao coeficiente de x^m em $x^3 \div (1-x)(1-x^2)(1-x^4)$. Portanto, o número total de covariantes asyzygéticos é igual ao coeficiente de x^m em $(1+x^3) \div (1-x)(1-x^2)(1-x^4)$, ou ainda:

$$\frac{1 - x^6}{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)(1 - x^4)}$$

Reciprocamente, se esta expressão para o número de covariantes asyzygéticos de grau m foi estabelecida de forma independente, segue que os invariantes irreduzíveis são quatro, e possuem os graus 1, 2, 3 e 4, entretanto, são ligados por uma equação de grau 6. Em relação aos invariantes, temos que cada invariante é da forma ∇^p , isto é, o número de invariantes asyzygéticos de grau m , é igual ao coeficiente de x^m em $\frac{1}{1-x^4}$, dessa forma, segue que há um único invariante irreduzível de grau 4.

[37] No caso de uma quântico quártico, a função a ser desenvolvida é,

$$\frac{1}{(1 - z)(1 - xz)(1 - x^2z)(1 - x^3z)(1 - x^4z)}$$

E os coeficientes são dados pela tabela:

																			1	(0)												
																			1	1	1	(1)										
																			1	1	2	2	3	(2)								
																			1	1	2	3	4	4	5	(3)						
																			1	1	2	3	5	5	7	7	8	(4)				
																			1	1	2	3	5	6	8	9	11	11	12	(5)		
																			1	1	2	3	5	6	9	10	13	14	16	16	18	(6)

Repetindo o mesmo processo feito na cúbica (subtrair cada coeficiente pelo coeficiente anterior), teremos a nova tabela,

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Examinando a tabela, segue informações de alguns covariantes irreduzíveis: a própria quártica, denominada de U ; um invariante de grau 2, denotado por I ; um covariante de ordem 4 e grau 2, chamado de H ; um invariante de grau 3, representado por J ; e um covariante de ordem 6 e grau 3, simbolizado por Φ ; mas os covariantes irreduzíveis estão ligados por uma equação de grau 6. Há uma equação linear ou syzygy entre Φ^2 , I^3H^3 , I^2JH^2U , IJ^2HU^2 e J^3U^3 ; sendo esse, o sistema completo de covariantes irreduzíveis da quártica. Os únicos invariantes irreduzíveis são I e J .

[38] Os covariantes asyzygéticos são da forma $U^pI^qH^rJ^s$, ou então, da forma $U^pI^qH^rJ^s\Phi$, e o número de covariantes asyzygéticos de grau m é igual ao coeficiente de x^m em $(1 + x^3) \div (1 - x)(1 - x^3)^2(1 - x^3)$, ou ainda:

$$\frac{1 - x^6}{(1 - x)(1 - x^2)^2(1 - x^3)^2}$$

E os invariantes asyzygéticos são da forma I^pJ^q , e o número de invariantes asyzygéticos de grau m é igual ao coeficiente de x^m em $1 \div (1 - x^2)(1 - x^3)$.

[39] No caso do quántico de quinta ordem, a função a ser desenvolvida é:

$$\frac{1}{(1 - z)(1 - xz)(1 - x^2z)(1 - x^3z)(1 - x^4z)(1 - x^5z)}$$

Partindo novamente para o recurso da tabela, os coeficientes serão dados por:

[40] Eu represento o número de maneira que q pode ser escrito como uma soma de m termos, com os elementos $0, 1, 2, \dots, m$, em que cada elemento está sendo repetido por um número indefinido de vezes pela notação,

$$P(0, 1, 2, \dots, m)^\theta q$$

Brevemente, é dado que,

$$P'(0, 1, 2, \dots, m)^\theta q = P(0, 1, 2, \dots, m)^\theta q - P(0, 1, 2, \dots, m)^\theta (q - 1).$$

Então, para um quântico de ordem m , o número de covariantes asyzygéticos de grau θ e de ordem μ é:

$$P'(0, 1, 2, \dots, m)^\theta \frac{1}{2} (m\theta - \mu).$$

Em relação aos invariantes, temos que o número de invariantes asyzygéticos de grau θ é:

$$P'(0, 1, 2, \dots, m)^\theta \frac{1}{2} m\theta$$

Para encontrar o número total de covariantes asyzygéticos de grau θ , deve primeiramente ser suposto que $m\theta$ é par; então, atribuindo para μ os sucessivos valores $0, 2, 4, \dots, m\theta$, teremos que:

$$\begin{aligned} & P\left(\frac{1}{2}m\theta\right) - P\left(\frac{1}{2}m\theta - 1\right) \\ & + P\left(\frac{1}{2}m\theta - 1\right) - P\left(\frac{1}{2}m\theta - 2\right) \\ & \vdots \\ & + P(2) - P(1) \\ & + P(1) \\ & = P\left(\frac{1}{2}m\theta\right), \end{aligned}$$

Ou seja, quando $m\theta$ é par, o número de covariantes asyzygéticos de grau θ é,

$$P(0, 1, 2, \dots, m)^{\theta} \frac{1}{2} m\theta,$$

E de forma similar, quando $m\theta$ é ímpar, o número de covariantes asyzygéticos de grau θ é,

$$P(0, 1, 2, \dots, m)^{\theta} \frac{1}{2} (m\theta - 1).$$

Essas duas fórmulas podem ser escritas numa fórmula só, quando $m\theta$ é ímpar $\frac{1}{2}m\theta$ é uma fração, portanto, $P(\frac{1}{2}m\theta)$ desaparece, e quando $m\theta$ é par $\frac{1}{2}(m\theta - 1)$ é uma fração, e $P\frac{1}{2}(m\theta - 1)$ desaparece. Sendo assim, Cayley (ANO), enuncia um Teorema, que diz que para um quântico de ordem m , o número de covariantes asyzygéticos de grau θ , é:

$$P(0, 1, 2, \dots, m)^{\theta} \frac{1}{2} m\theta + P(0, 1, 2, \dots, m)^{\theta} \frac{1}{2} (m\theta - 1).$$

[41] Funções como $P(\frac{1}{2}m\theta)$, através do método explicado em meu artigo “*Researches on the Partition of Numbers*”, podem ser determinadas como os coeficientes de x^{θ} em certas funções de x . Tenho calculado alguns casos particulares:

$$P'(0, 1, 2, \dots, m)^{\theta} \frac{1}{2} m\theta = \text{coeficiente } x^{\theta} \text{ em } \phi m,$$

Então,

$$\phi 2 = \frac{1}{1 - x^2}$$

$$\phi 3 = \frac{1}{1 - x^4}$$

$$\phi 4 = \frac{1}{(1 - x^2)(1 - x^3)}$$

$$\phi 5 = \frac{1 - x^6 + x^{12}}{(1 - x^4)(1 - x^6)(1 - x^8)}$$

$$\phi 6 = \frac{(1 - x)(1 + x - x^3 - x^4 - x^5 + x^7 + x^8)}{(1 - x^2)^2(1 - x^3)(1 - x^4)(1 - x^5)}$$

$$\phi_7 = \frac{1 - x^6 + 2x^8 - x^{10} + 5x^{12} + 2x^{14} + 6x^{16} + 2x^{18} + 5x^{20} - x^{22} + 2x^{24} - x^{26} + x^{28}}{(1 - x^4)(1 - x^6)(1 - x^8)(1 - x^{10})(1 - x^{12})}$$

$$\phi_8 = \frac{(1 - x)(1 + x - x^3 - x^4 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} - x^{13} + x^{15} + x^{16})}{(1 - x^2)^2(1 - x^3)^2(1 - x^4)(1 - x^5)(1 - x^7)};$$

$$P(0, 1, 2, \dots, m)^{\theta} \frac{1}{2} m\theta = \text{coeficiente de } x^{\theta} \text{ em } \psi m,$$

Então,

$$\psi_2 = \frac{1}{(1 - x)(1 - x^2)}$$

$$\psi_3 = \frac{1 + x^4}{(1 - x^2)^2(1 - x^4)}$$

$$\psi_4 = \frac{1 - x + x^2}{(1 - x)^2(1 - x^2)(1 - x^3)}$$

$$\psi_5 = \frac{1 + x^2 + 6x^4 + 9x^6 + 12x^8 + 9x^{10} + 6x^{12} + x^{14} + x^{16}}{(1 - x^2)^2(1 - x^4)(1 - x^6)(1 - x^8)};$$

$$P(0, 1, 2, \dots, m)^{\theta} \frac{1}{2} (m\theta - 1) = \text{coeficiente de } x^{\theta} \text{ em } \psi, m,$$

Então,

$$\psi, 3 = \frac{x + x^3}{(1 - x^2)^2(1 - x^4)}$$

$$\psi, 5 = \frac{x + 4x^3 + 8x^5 + 10x^7 - 10x^9 + 8x^{11} + 4x^{13} + x^{15}}{(1 - x^2)^2(1 - x^4)(1 - x^6)(1 - x^8)}$$

E pelo que precedeu, parece que para um quântico de ordem m , o número de covariantes aszygéticos de grau θ para m par, é o coeficiente de x^{θ} em ψm , enquanto que para m ímpar, é o coeficiente x^{θ} em $(\psi m + \psi, m)$. E o número de invariantes aszygéticos de grau θ é coeficiente de x^{θ} em ϕm . Segue algumas considerações, primeiramente, sobre os Invariantes:

[42] Para a forma quadrática, o número de invariantes aszygéticos de grau θ é dado pelo coeficiente x^{θ} em:

$$\frac{1}{1-x^2}$$

que leva a conclusão que esta forma possui um único invariante irreduzível de grau 2.

[43] O número de invariantes aszygéticos de grau θ na forma cúbica, pode ser encontrado através do coeficiente x^θ em:

$$\frac{1}{1-x^4},$$

vemos que essa forma também possui um único invariante irreduzível, entretanto, de grau 4.

[44] Na forma quártica, o número de invariantes aszygéticos de grau θ é encontrado no coeficiente x^θ de:

$$\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)},$$

resultando em dois invariantes irreduzíveis, um de grau 2 e outro de grau 3.

[45] Para a forma quártica, o número de invariantes aszygéticos de grau θ , será dado pelo coeficiente x^θ em:

$$\frac{1-x^6+x^{12}}{(1-x^4)(1-x^8)(1-x^{12})(1-x^{18})}.$$

O numerador é um fator irreduzível de $1-x^{36}$, isto é, pode ser escrito da forma $(1-x^{36})(1-x^6) \div (1-x^{18})(1-x^{12})$; e substituindo este valor, o coeficiente x^θ pode ser obtido em:

$$\frac{1-x^{36}}{(1-x^4)(1-x^8)(1-x^{12})(1-x^{18})}.$$

Dessa forma, temos que a quártica possui quatro invariantes irreduzíveis, que são de graus 4, 8, 12 e 18, e esses invariantes são ligados por uma equação de grau 36, ou seja, o dobro do invariante de grau 18 é uma função racional e integral dos outros três invariantes. Esse resultado, foi descoberto por M. Hermite.

[46] Em relação à forma sêxtica, o número de invariantes aszygéticos de grau θ é o coeficiente x^θ em:

$$\frac{(1-x)(1+x-x^3-x^4-x^5+x^7+x^8)}{(1-x^2)^2(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}.$$

O segundo fator do numerador é uma forma irreduzível do fator $1-x^{30}$, ou seja, é equivalente a $(1-x^{30})(1-x^5)(1-x^3)(1-x^2) \div (1-x^{15})(1-x^{10})(1-x^6)(1-x)$; e substituindo este valor, o coeficiente de x^θ será,

$$\frac{1-x^{30}}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^{10})(1-x^{15})}.$$

Assim, podemos verificar que há cinco invariantes irreduzíveis, que possuem os graus 2, 4, 6, 10 e 15, além disso, esses invariantes são ligados por uma equação de grau 30, ou seja, o dobro do invariante de grau 15 é uma função racional e integral dos outros quatro invariantes.

[47] O quántico séptico tem o número de invariantes aszygéticos de grau θ dado pelo coeficiente de x^θ :

$$\frac{1-x^6+2x^8-x^{10}+5x^{12}+2x^{14}+6x^{16}+2x^{18}+5x^{20}-x^{22}+2x^{24}-x^{26}+x^{32}}{(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)(1-x^{10})(1-x^{12})}$$

O numerador é igual a $(1-x^6)(1-x^8)^{-2}(1-x^{10})(1-x^{12})^{-5}(1-x^{14})^{-4} \dots$, onde a série de fatores não termina, assim, o número de invariantes irreduzíveis é infinito. Substituindo o valor anterior, o número de invariantes aszygéticos de grau θ é dado pelo coeficiente x^θ em $(1-x^4)^{-1}(1-x^8)^{-3}(1-x^{12})^{-6}(1-x^{14})^{-4} \dots$

Os quatro primeiros índices dão o número de invariantes irreduzíveis de cada grau correspondente, ou seja, 1, 3, 6 e 4 são as quantidades de invariantes dos graus 4, 8, 12 e 14, respectivamente, entretanto, não se pode afirmar que isso acontece para os termos subseqüentes. Para verificar essa afirmação, é observado que há 1, 4, 10 e 4 invariantes aszygéticos dos graus em questão, respectivamente. Portanto, há um único invariante irreduzível de grau 4, chamado de X_4 , um invariante composto de grau 8, denotado por X_4^2 ,

dessa forma, há três invariantes irreduzíveis deste grau, representados por X_8, X'_8, X''_8 . Os invariantes compostos de grau 12 são 4, simbolizados por $X_4^3, X_4X_8, X_4X'_8, X_4X''_8$, e não podem ser ligados por qualquer syzygy, pois, se fosse assim X_4^2, X_8, X'_8, X''_8 seriam ligados por um syzygy, ou haveria menos de três invariantes irreduzíveis de grau 8. Portanto, há precisamente 6 invariantes irreduzíveis de grau 12. Uma vez que os invariantes irreduzíveis de graus 4, 8 e 12 não originam qualquer invariante composto de grau 14, existem somente 4 invariantes irreduzíveis de grau 14.

[48] Na forma de oitava ordem, o número de invariantes asyzygéticos de grau θ é o coeficiente x^θ de:

$$\frac{(1-x)(1+x-x^3-x^4+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}-x^{12}-x^{13}+x^{15}+x^{16})}{(1-x^2)^2(1-x^3)^2(1-x^4)(1-x^5)(1-x^7)};$$

e o segundo fator do numerador é $(1-x)^{-1}(1-x^2)^{-1}(1-x^3)^{-1}(1-x^6)^{-1}(1-x^8)^{-1}(1-x^9)^{-1}(1-x^{10})^{-1}(1-x^{16})(1-x^{17})(1-x^{18}) \dots$, onde a série de fatores não termina, assim, o número de invariantes irreduzíveis é infinito. Substituindo o valor do segundo numerador, o número de invariantes asyzygéticos de grau θ é dado pelo coeficiente x^θ , $(1-x^2)^{-1}(1-x^3)^{-1}(1-x^4)^{-1}(1-x^5)^{-1}(1-x^6)^{-1}(1-x^7)^{-1}(1-x^8)^{-1}(1-x^9)^{-1}(1-x^{10})^{-1}(1-x^{16})(1-x^{17})(1-x^{18}) \dots$

Há certamente um, e somente um invariante irreduzível para os graus 2, 3, 4, 5 e 6, mas a fórmula não mostra o número de invariantes irreduzíveis dos graus 7 em diante. Representando os invariantes irreduzíveis de graus 2, 3, 4, 5 e 6 por X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 , é possível originar três invariantes compostos de grau 7, $X_2X_2X_3, X_2X_5, X_3X_4$, que pode ser ou não conectados por um syzygy; se eles não estiverem ligados por um syzygy, haverá um único invariante irreduzível de grau 7, mas se essas composições estiverem relacionadas a um syzygy, teremos dois invariantes irreduzíveis de grau 7. É inútil no momento, prosseguir com uma discussão mais profundada.

Considerando agora os covariantes:

[49] Na forma quadrática, o número de covariantes aszygéticos de grau θ é o coeficiente x^θ de:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)},$$

onde podemos observar que há dois covariantes irreduzíveis de graus 1 e 2, que se trata da quadrática em si e o invariante.

[50] Para a forma cúbica, o número de covariantes aszygéticos de grau θ , será o coeficiente x^θ em:

$$\frac{(1+x)(1+x^2)}{(1-x^2)^2(1-x^4)}.$$

O primeiro fator do numerador é um fator irreduzível de $1-x^2$, que é igual a $(1-x^2) \div (1-x)$, e o segundo fator do numerador é um fator irreduzível de $1-x^4$, equivalente a $(1-x^4) \div (1-x^2)$. Substituindo esses valores, teremos que o coeficiente de x^θ é $\frac{1-x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$.

Assim, vemos que há quatro covariantes irreduzíveis de graus 1, 2, 3 e 4, mas que eles estão relacionados a uma equação de grau 6. O covariante de grau 1 é a própria cúbica, simbolizada por U , enquanto os outros covariantes são representados por H (possui grau 2 e ordem 3), ϕ (possui grau 3 e ordem 3) e ∇ (possui grau 4 e ordem 0, ou seja, é um invariante).

[51] A forma quártica tem o número de covariantes aszygéticos de grau θ dado pelo coeficiente x^θ de:

$$\frac{1-x+x^2}{(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)},$$

o numerador é um fator irreduzível de $1-x^6$, que é igual a $(1-x^6)(1-x) \div (1-x^2)(1-x^3)$. Realizando a substituição desse valor, teremos que o coeficiente de x^θ será:

$$\frac{1-x^6}{(1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^2}.$$

Podemos observar que há cinco covariantes irreduzíveis, um de grau 1, dois de grau 2 e dois de grau 3, ambos ligados por uma equação de grau 6. O covariante irreduzível de grau 1 é a própria quártica, chamado de U , os outros covariantes são representados por I (grau 2 e ordem 0), H (grau 2 e ordem 4), J (grau 3 e ordem 0) e ϕ (grau 3 e ordem 6). É importante dizer que I e J são invariantes.

[52] O número de covariantes asyzygéticos de grau θ da forma quártica é dado pelo coeficiente x^θ em:

$$\frac{1 + x + x^2 + 4x^3 + 6x^4 + 8x^5 + 9x^6 + 10x^7 + 12x^8 + 10x^9 + 9x^{10} + 8x^{11} + 6x^{12} + 4x^{13} + x^{14} + x^{15} + x^{16}}{(1 - x^2)^2(1 - x^4)(1 - x^6)(1 - x^8)}$$

Que possui o numerador,

$$(1 + x)^2(1 - x + 2x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + x^6 + 5x^7 + x^8 + 3x^9 + 2x^{10} + x^{11} + 2x^{12} - x^{13} + x^{14});$$

O primeiro fator é $(1 - x)^{-2}(1 - x^2)^2$ e o segundo fator é,

$$(1 - x)(1 - x^2)^{-2}(1 - x^3)^{-3}(1 - x^4)^{-2}(1 - x^5)^{-2}(1 - x^6)^5(1 - x^7)^5(1 - x^8)^7(1 - x^9)^1(1 - x^{10})^{-9}(1 - x^{11})^{-19} \dots,$$

Percebemos que essa série não termina, portanto, o número de covariantes irreduzíveis é infinito. Substituindo os valores anteriores, a expressão do número de covariantes asyzygéticos de grau θ é o coeficiente x^θ de:

$(1 - x)(1 - x^2)^{-2}(1 - x^3)^{-3}(1 - x^4)^{-3}(1 - x^5)^{-2}(1 - x^6)^4(1 - x^7)^5(1 - x^8)^6(1 - x^9)^1(1 - x^{10})^{-9}(1 - x^{11})^{-19} \dots$, que está de acordo com o resultado anterior: o número de covariantes irreduzíveis dos graus 1, 2, 3 e 4 são 1, 2, 3 e 3, respectivamente. Para o grau 5, o número de covariantes irreduzíveis é três, mas há um syzygy entre os covariantes compostos do grau em questão. A diferença $3 - 1 = 2$ é o índice tomado com o sinal invertido do fator $(1 - x^5)^{-2}$.

[53] Eu considero um sistema de covariantes asyzygéticos de um quántico de qualquer grau e ordem, o sistema pode ser substituído por outro sistema, cujos termos são quaisquer funções lineares do sistema original, e

isso é necessário para investigar quais covariantes devem ser selecionados como mais adequado para representar o sistema de covariantes asyzygéticos; então, essas considerações parecem fornecer uma regra conveniente de seleção. Deixando as partes literais dos termos e tomando os coeficientes de maior potência de x ou coeficientes líderes, esses podem ser representados por $M_\alpha, M_\beta, M_\gamma, \dots$, e essas quantidades podem ser arranjadas na ordem natural ou alfabética. O primeiro da ordem dessas quantidades M , pode ser chamado de termo líder do covariante.

Ao determinar corretamente os multiplicadores das funções lineares, podemos formar um covariante cujo termo principal é menor que os termos líderes de qualquer outro covariante (a definição implica de que há um covariante), chamado de Θ . Podemos, analogamente, formar um covariante tal que o termo líder é menor do que cada termo líder dos outros covariantes, com exceção de Θ_1 , ou melhor, podemos formar sistema de covariantes tais que, uma vez que se ϕ_2 seja um covariante que possui a propriedade em questão, $\phi_2 + k\Theta_1$ terá a mesma propriedade, mas k pode ser determinado de modo que o covariante deve conter o termo líder de Θ_1 , isto é, podemos formar um covariante Θ_2 tal que o termo líder é menor que cada termo líder de cada um dos outros covariantes, com exceção de Θ_1 , e o termo líder de Θ_1 não está em Θ_2 ; e só existe um covariante, Θ_2 . Novamente, podemos formar um covariante Θ_3 tal que o termo líder seja menor do que cada termo líder de cada um dos outros covariantes, com exceção de Θ_1 e Θ_2 , e os termos líder de Θ_1 e Θ_2 , nenhum deles está em Θ_3 ; tendo assim, apenas um covariante, Θ_3 . E assim por diante, até que chegamos a um covariante, cujo termo líder, é maior do que cada um dos termos líderes dos outros covariantes, e conseqüentemente, não obtém o termo líder dos outros covariantes. Então, temos uma série de covariantes $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \dots$, contendo o número adequado de termos, e assim, esses covariantes, podem ser tomados para representar os covariantes asyzygéticos do grau e ordem em questão.

A fim de tornar os covariantes Θ bem definidos numericamente em relação ao sinal, podemos supor que o covariante está entre os termos menores (podemos rejeitar os fatores numéricos comuns a todos os termos), e

podemos fazer o termo líder ser positivo. O termo líder com o coeficiente numérico apropriado (se for diferente da unidade) e com a potência adequada de x (ou a ordem da função) anexada, será, quando os covariantes são tabulados, sendo suficiente para indicar, sem qualquer ambiguidade, o covariante em particular referido. Acrescento uma tabela dos covariantes de uma forma quadrática, uma cúbica e uma quártica, e os covariantes de graus 1, 2, 3, 4 e 5, de uma forma quártica, e também dois invariantes da forma quártica.

[Exceto para o quântico em si, a soma algébrica de qualquer coluna é igual à zero, ou seja, a soma dos coeficientes de sinal + é igual ao da soma dos coeficientes de sinal –, e eu tenho, como forma de verificação numérica, inserido abaixo de cada coluna, essa soma com os sinais $\pm$]

Tabelas de Covariantes (Nos. 1 ao 16).

No. 1.	No. 2.
$(\begin{array}{ c c c } \hline a+1 & b+2 & c+1 \\ \hline \end{array}) \mathfrak{X} x, y)^2.$	$\begin{array}{ c } \hline ac+1 \\ b^2-1 \\ \hline \end{array}$ ± 1

As tabelas Nos. 1 e 2 são os covariantes de uma quadrática binária. No. 1 é a própria quadrática; No. 2 é o invariante quadrático, que é também o discriminante.

No. 3.	No. 4.
$(\begin{array}{ c c c c } \hline a+1 & b+3 & c+3 & d+1 \\ \hline \end{array}) \mathfrak{X} x, y)^3.$	$(\begin{array}{ c c c } \hline ac+1 & ad+1 & bd+1 \\ b^2-1 & bc-1 & c^2-1 \\ \hline \end{array}) \mathfrak{X} x, y)^2$ $\pm 1 \quad \pm 1 \quad \pm 1$

No. 5.						No. 6.	
(	$a^2d + 1$	$abd + 3$	$acd - 3$	$ad^2 - 1$	$\Im(x, y)^3$	(	$a^3d^3 + 1$
	$abc - 3$	$ac^2 - 6$	$b^2d + 6$	$bcd + 3$			$abcd - 6$
	$b^3 + 2$	$b^2c + 3$	$bc^2 - 3$	$c^3 - 2$			$ac^3 + 4$
	± 3	± 6	± 6	± 3			$b^3d + 4$
							$b^2c^2 - 3$
							± 9

As tabelas Nos. 3, 4, 5 e 6 são os covariantes de uma cúbica binária. No. 3 é a cúbica em si; No. 4 é o covariante quadrático, ou Hessian; No. 5 é o covariante cúbico; No. 6 é o invariante, ou discriminante. Podemos escrever ainda, No. 3 = U , No. 4 = H , No. 5 = ϕ , No. 6 = ∇ , que é idêntico a:

$$\phi^2 - \nabla U^2 + 4H^3 = 0.$$

No. 7.

(	$a + 1$	$b + 4$	$c + 6$	$d + 4$	$e + 1$	$\Im(x, y)^4$
---	---------	---------	---------	---------	---------	---------------

No. 8.

$ae + 1$
$bd - 4$
$c^2 + 3$
± 4

No. 9.

(	$ac + 1$	$ad + 2$	$ae + 1$	$be + 2$	$bd + 1$	$\Im(x, y)^4$
	$b^2 - 1$	$bc - 2$	$bd + 2$	$cd - 2$	$c^2 - 1$	
	± 1	± 2	± 3	± 2	± 1	

No. 10.	
(	$ace + 1$
	$ad^2 - 1$
	$b^2e - 1$
	$bcd + 2$
	$c^3 - 1$
	± 3

No. 11.								
(	$a^2d + 1$	$a^2e + 1$	$abe + 5$	$ace \dots$	$ade - 5$	$ae^2 - 1$	$be^2 - 1$	$\Im(x, y)^5$
	$abc - 3$	$abd + 2$	$acd - 15$	$ad^2 - 10$	$bce + 15$	$bde - 2$	$cde + 3$	
	$b^3 + 2$	$ac^2 - 9$	$b^2d + 10$	$b^2e + 10$	$bd^2 - 10$	$c^2e + 9$	$d^3 - 2$	
		$b^2c + 6$	$bc^2 \dots$	$bcd \dots$	$c^2d \dots$	$cd^2 - 6$		
	± 3	± 9	± 15	± 10	± 15	± 9	± 3	

No. 12.		
a^3e^3	+	1
a^2bde^2	-	12
$a^2c^2e^2$	-	18
a^2cd^2e	+	54
a^2d^4	-	27
ab^2ce^2	+	54
ab^2d^2e	-	6
abc^2de	-	180
$abcd^3$	+	108
ac^4e	+	81
ac^3d^2	-	54
b^4e^2	-	27
b^3cde	+	108
b^3d^3	-	64
b^3c^3e	-	54
$b^2c^2d^2$	+	36
bc^4d	...	
c^5	...	
± 442		

As tabelas Nos. 7, 8, 9, 10 e 11 são os covariantes irreduzíveis de uma quártica. No. 7 é a própria quártica; No. 8 é o invariante quadrático; No. 9 é covariante quadrático, ou Hessian; No. 10 é o invariante cúbico; e No. 11 é o covariante cúbico. A tabela No. 12 é o discriminante. Podemos escrever, No. 7 = U , No. 8 = I , No. 9 = H , No. 10 = J , No. 11 = ϕ , No. 12 = ∇ , então, os covariantes irreduzíveis estão ligados pela equação idêntica a:

$$JU^3 - IU^2H + 4H^3 + \phi^2 = 0,$$

e, temos,

$$\nabla = I^3 - 27J^2.$$

[As tabelas Nos. 13 a 24, que vem a seguir, e também as de Nos. 25 e 26 que são dadas em 143 (*Tables of covariants M to W of the binary quintic: from the second, third, fifth, eighth, ninth and tenth memoirs on quantics*) relatam a quártica binária. Inseri nos títulos as letras maiúsculas A, B, ... L e também Q e Q' porque me refiro a esses covariantes da quártica. A é a quártica por si mesma, C é o Hessian, G é o invariante quártico, J é um covariante linear: Q é simplesmente o invariante de ordem 8 e Q' é o

discriminante. Como se pode observar, na memória original temos $AI + BF - CE = 0$; e $Q' = G^2 - 128Q$, apenas o coeficiente 128 foi dado por engano como 1152.]

A. No. 13.

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline a+1 & b+5 & c+10 & d+10 & e+5 & f+1 \\ \hline \end{array} \right) \mathfrak{I}(x, y)^5$$

B. No. 14.

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline ae+1 & af+1 & bf+1 \\ bd-4 & be-3 & ce-4 \\ c^2+3 & cd+2 & d^2+3 \\ \hline \end{array} \right) \mathfrak{I}(x, y)^2$$

$\pm 4 \quad \quad \pm 3 \quad \quad \pm 4$

C. No. 15.

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline ac+1 & ad+3 & ae+3 & af+1 & bf+3 & cf+3 & df+1 \\ b^2-1 & bc-3 & bd+3 & be+7 & ce+3 & de-3 & e^2-1 \\ \hline \end{array} \right) \mathfrak{I}(x, y)^6$$

$\pm 1 \quad \quad \pm 3 \quad \quad \pm 6 \quad \quad \pm 8 \quad \quad \pm 6 \quad \quad \pm 3 \quad \quad \pm 1$

D. No. 16.

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline abf \dots & acf+1 & adf+1 & aef \dots \\ ace+1 & ade-1 & ae^2-1 & bdf+1 \\ ad^2-1 & b^2f-1 & bcf-1 & be^2-1 \\ b^2e-1 & bce+1 & bde+1 & c^2f-1 \\ bcd+2 & bd^2+1 & c^2e+1 & cde+2 \\ c^3-1 & c^2d-1 & cd^2-1 & d^3-1 \\ \hline \end{array} \right) \mathfrak{I}(x, y)^3$$

$\pm 3 \quad \quad \pm 3 \quad \quad \pm 3 \quad \quad \pm 3$

E. No. 17.

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline a^2f+1 & abf+5 & acf+2 & adf-2 & aef-5 & af^2-1 \\ abe-5 & ace-16 & ade-12 & ae^2-8 & bdf+16 & bef+5 \\ acd+2 & ad^2+6 & b^2f+8 & bcf+12 & be^2+9 & cdf-2 \\ b^2d+8 & b^2e-9 & bce-38 & bde+38 & c^2f-6 & ce^2-8 \\ bc^2-6 & bcd+38 & bd^2+72 & c^2e-72 & cde-38 & d^2e+6 \\ c^3-24 & c^2d-32 & cd^2+32 & d^3+24 & & \\ \hline \end{array} \right) \mathfrak{I}(x, y)^5$$

$\pm 11 \quad \quad \pm 49 \quad \quad \pm 82 \quad \quad \pm 82 \quad \quad \pm 49 \quad \quad \pm 11$

F. No. 18.

$a^2d + 1$	$a^2e + 2$	$a^2f + 1$	$abf + 7$	$acf + 5$	$adf - 5$	$acf - 7$	$af^2 - 1$	$bf^2 - 2$	$ef^2 - 1$
$abc - 3$	$abd + 1$	$abe + 11$	$ace - 8$	$ade - 40$	$ae^2 - 16$	$bdf + 8$	$bef - 11$	$cef - 1$	$def + 3$
$b^3 + 2$	$ac^2 - 12$	$acd - 34$	$ad^2 - 34$	$b^3f + 16$	$bcf + 40$	$be^2 - 29$	$cdf + 34$	$d^2f + 12$	$e^3 - 2$
	$b^2c + 9$	$b^2d + 16$	$b^2e + 29$	$bce + 47$	$bde - 47$	$c^2f + 34$	$ce^2 - 16$	$de^2 - 9$	
		$bc^2 + 6$	$bcd - 2$	$bd^2 - 44$	$c^2e + 44$	$cde + 2$	$d^2e - 6$		
			$c^3 + 8$	$c^2d + 16$	$cd^2 - 16$	$d^3 - 8$			
± 3	± 12	± 34	± 44	± 84	± 84	± 44	± 34	± 12	± 3

 $\mathfrak{X}(x, y)^3$

G. No. 19.

$$\begin{aligned}
 &a^2f^2 + 1 \\
 &abef - 10 \\
 &acdf + 4 \\
 &ace^2 + 16 \\
 &ad^2e - 12 \\
 &b^2df + 16 \\
 &b^2e^2 + 9 \\
 &bc^2f - 12 \\
 &bcd e - 76 \\
 &bd^3 + 48 \\
 &c^3e + 48 \\
 &c^3d^2 - 32
 \end{aligned}$$

 ± 142

H. No. 20.

$a^2df + 1$	$a^2ef + 2$	$a^2f^2 + 1$	$abf^2 + 2$	$acf^2 + 1$
$a^2e^2 \dots$	$abdf - 4$	$abef - 4$	$acef - 4$	$adef - 3$
$abcf - 3$	$abe^2 - 10$	$acdf - 2$	$ad^2f - 2$	$ae^3 + 2$
$ahde - 5$	$ac^2f - 2$	$ace^2 + 4$	$ade^2 + 4$	$b^2f^2 \dots$
$ac^2e + 10$	$acde + 24$	$ad^2e \dots$	$b^2ef - 10$	$bcef - 5$
$acd^2 - 4$	$ad^3 - 12$	$b^2df + 4$	$bcd f + 24$	$bd^2f + 10$
$b^3f + 2$	$b^2cf + 4$	$b^2e^2 - 9$	$bce^2 + 16$	$bde^2 - 5$
$b^2ce - 5$	$b^2de + 16$	$bc^2f \dots$	$bd^2e - 22$	$c^2df - 4$
$b^2d^2 + 14$	$bc^2e - 22$	$bcde + 50$	$c^3f - 12$	$c^3e^2 + 14$
$bc^2d - 16$	$bcd^3 - 4$	$bd^3 - 36$	$c^2de - 4$	$cd^2e - 16$
$c^4 + 6$	$c^3d + 8$	$c^3e - 36$	$cd^3 + 8$	$d^4 + 6$
	$c^2d^2 + 28$			
± 33	± 54	± 87	± 54	± 33

 $\mathfrak{X}(x, y)^4$

I. No. 21.

$a^2cf + 1$	$a^2df + 2$	$a^2ef \dots$	$a^2f^2 \dots$	$abf^2 \dots$	$acf^2 - 2$	$adf^2 - 1$
$a^2de - 1$	$a^2e^2 - 2$	$abdf + 2$	$abef \dots$	$acef - 2$	$adef \dots$	$ae^2f + 1$
$ab^2f - 1$	$abcf - 10$	$abe^2 - 2$	$acdf \dots$	$ad^2f + 1$	$ae^3 + 2$	$bcf^2 + 1$
$abce - 2$	$abde + 10$	$ac^2f - 1$	$ace^2 - 20$	$ade^2 + 1$	$b^2f^2 + 2$	$bdef + 2$
$abd^2 + 4$	$ac^2e \dots$	$acde - 2$	$ad^2e + 20$	$b^2ef + 2$	$bcef \dots$	$be^3 - 3$
$ac^2d - 1$	$acd^2 \dots$	$ad^3 + 3$	$b^2df + 20$	$bcd^2 + 2$	$bd^2f + 10$	$c^2ef - 4$
$b^3e + 3$	$b^3f - 2$	$b^2cf - 1$	$b^2e^2 \dots$	$bce^2 - 5$	$bde^2 - 14$	$cd^2f + 1$
$b^2cd - 6$	$b^2ce + 14$	$b^2de + 5$	$bc^2f - 20$	$bd^2e - 1$	$c^2df - 10$	$cde^2 + 6$
$bc^2 + 3$	$b^2d^2 + 2$	$bc^2e + 1$	$bcd^2 \dots$	$c^3f - 3$	$c^2e^2 - 2$	$d^3e - 3$
	$bc^2d - 26$	$bcd^2 - 9$	$bd^3 - 20$	$c^2de + 9$	$cd^2e + 26$	
	$c^4 + 12$	$c^3d + 4$	$c^3e + 20$	$cd^3 - 4$	$d^4 - 12$	
		$c^2d^2 \dots$				
± 11	± 40	± 15	± 60	± 15	± 40	± 11

 $\mathcal{Q}(x, y)^6$

J. No. 22.

$a^2cf^2 + 1$	$a^2df^2 + 1$
$a^2def - 2$	$a^2e^2f - 1$
$a^2e^3 + 1$	$abcf^2 - 2$
$ab^2f^2 - 1$	$abdef - 4$
$abcef - 4$	$abe^3 + 6$
$abd^2f + 8$	$ac^2ef + 8$
$abde^2 - 2$	$acd^2f - 2$
$ac^2df - 2$	$acde^2 - 12$
$ac^2e^2 + 14$	$ad^3e + 6$
$acd^2e - 22$	$b^3f^2 + 1$
$ad^4 + 9$	$b^2cef - 2$
$b^3ef + 6$	$b^3d^2f + 14$
$b^2cdf - 12$	$b^3de^2 - 15$
$b^2ce^2 - 15$	$bc^2df - 22$
$b^3d^2e + 10$	$bc^2e^2 + 10$
$bc^3f + 6$	$bcd^2e + 30$
$bc^2de + 30$	$bd^4 - 15$
$bcd^3 - 20$	$c^4f + 9$
$c^4e - 15$	$c^3de - 20$
$c^2d^2 + 10$	$c^3d^3 + 10$
± 95	± 95

 $\mathcal{Q}(x, y)^3$

K. No. 23.

a^2bf^2 ...	$a^2cf^2 + 1$	$a^2df^2 - 1$	a^2ef^2 ...
$a^2cef + 1$	$a^2def - 5$	$a^2e^2f + 1$	$abdf^2 - 1$
$a^2d^2f - 3$	$a^2e^3 + 4$	$abcf^2 + 5$	$abe^2f + 1$
$a^2de^2 + 2$	$ab^2f^2 - 1$	$abdef - 8$	$ac^2f^2 + 3$
$ab^2ef - 1$	$abcef + 8$	$abe^3 + 3$	$acdef - 14$
$abcdf + 14$	$abd^2f + 11$	$ac^2ef - 11$	$ace^3 + 8$
$abce^2 - 11$	$abde^2 - 17$	$acd^2f + 11$	$ad^3f + 9$
$abd^2e - 1$	$ac^2df - 11$	$acde^2 + 6$	$ad^2e^2 - 6$
$ac^3f - 9$	$ac^2e^2 - 16$	$ad^3e - 6$	$b^2cf^2 - 2$
$ac^2de + 14$	$acd^2e + 44$	$b^3f^2 - 4$	$b^2def + 11$
$acd^3 - 6$	$ad^4 - 18$	$b^2cef + 17$	$b^2e^3 - 9$
$b^3df - 8$	$b^3ef - 3$	$b^2d^2f + 16$	$bc^2ef + 1$
$b^3e^2 + 9$	$b^2cdf - 6$	$b^2de^2 - 21$	$bcd^2f - 14$
$b^2c^2f + 6$	$b^2ce^2 + 21$	$bc^2df - 44$	$bcd^2e^2 + 16$
$b^2cde - 16$	$b^2d^2e - 5$	$bc^2e^2 + 5$	$bd^3e - 3$
$b^2d^3 + 8$	$bc^3f + 6$	$bcd^2e + 39$	$c^3df + 6$
$bc^3e + 3$	$bc^2de - 39$	$bd^4 - 12$	$c^3e^2 - 8$
$bc^2d^2 - 2$	$bcd^3 + 22$	$c^4f + 18$	$c^2d^2e + 2$
c^4d ...	$c^4e + 12$	$c^3de - 22$	cd^4 ...
	$c^3d^2 - 8$	$c^2d^3 + 8$	
± 57	± 129	± 129	± 57

 $\mathcal{Q}(x, y)^3$

L. No. 24.

a^2ef ...	a^2f^2 ...	a^2bf^2 ...	$a^2cf^2 - 1$	$a^2df^2 + 1$	a^2ef^2 ...	a^2f^3 ...	abf^3 ...
a^2bdf ...	a^2bef ...	$a^2cef - 3$	$a^2def + 7$	$a^2e^2f - 1$	$abdf^2 + 3$	$abef^2$...	$acef^2$...
a^2be^2 ...	$a^2cdf + 7$	$a^2d^2f + 12$	$a^2e^3 - 6$	$abcf^2 - 7$	$abe^2f - 3$	$acd^2f - 7$	$ad^2f^2 - 2$
$a^2c^2f + 2$	$a^2ce^2 - 10$	$a^2de^2 - 9$	$ab^2f^2 + 1$	$abdef + 26$	$ac^2f^2 - 12$	$ace^2f + 7$	$ade^2f + 4$
$a^2cde - 5$	$a^2d^2e + 3$	$ab^2ef + 3$	$abcef - 26$	$abe^3 - 19$	$acdef + 18$	$ad^2ef + 7$	$ae^4 - 2$
$a^2d^3 + 3$	$ab^2df - 7$	$abcdf - 18$	$abd^2f + 32$	$ac^2ef - 32$	$ace^3 + 6$	$ade^3 - 7$	b^2ef^2 ...
$ab^3cf - 4$	$ab^2e^2 + 10$	$abce^2 - 18$	$abde^2 - 8$	$acd^3f + 18$	$ad^3f + 3$	$b^2df^2 + 10$	$bcd^2f^2 + 5$
$ab^2de + 5$	$abc^2f - 7$	$abd^2e + 30$	$ac^2df - 18$	$acde^2 + 53$	$ad^2e^2 - 15$	$b^2e^2f - 10$	$bce^2f - 5$
$abc^2e + 5$	$abcde - 8$	$ac^3f - 3$	$ac^2e^2 + 6$	$ad^3e - 39$	$b^2cf^2 + 9$	$bc^2f^2 - 3$	$bd^2ef - 5$
$abcd^2 - 7$	$abd^3 + 9$	$ac^2de + 45$	$acd^2e + 52$	$b^2f^2 + 6$	$b^2def + 18$	$bedef + 8$	$bde^3 + 5$
$ac^3d + 1$	$ac^3e + 22$	$acd^3 - 39$	$ad^4 - 39$	$b^2cef + 8$	$b^2e^3 - 27$	$bce^2 - 2$	$c^2f^2 - 3$
$b^4f + 2$	$ac^2d^2 - 19$	$b^2df - 6$	$b^2ef + 19$	$b^2d^2f - 6$	$bc^2ef - 30$	$bd^2f - 22$	$c^2def + 7$
$b^3ce - 5$	$b^3cf + 7$	$b^2e^2 + 27$	$b^2cdf - 53$	$b^2de^2 - 20$	$bcd^2f - 45$	$bd^2e^2 + 19$	$c^2e^2 + 2$
$b^3d^2 - 2$	$b^2de + 2$	$b^2c^2f + 15$	$b^2ce^2 + 20$	$bc^2df + 45$	$bcd^2e^2 + 87$	$c^3ef - 9$	$cd^2f - 1$
$b^2c^2d + 8$	$b^2c^2e - 19$	$b^2cde - 87$	$b^2d^2e - 25$	$bc^2e^2 + 25$	$bd^3e - 12$	$c^2d^2f + 19$	$cd^2e^2 - 8$
$bc^4 - 3$	$b^2cd^2 - 11$	$b^2d^3 + 6$	$bc^3f + 39$	$bcd^2e - 52$	$c^3df + 39$	$c^2de^2 + 11$	$d^4e + 3$
	$bc^3d + 33$	$bc^3e + 12$	$bc^2de - 45$	bd^4 ...	$c^3e^2 - 6$	$cd^3e - 33$	
	$c^5 - 12$	$bc^2d^2 + 57$	$bcd^3 + 65$	$c^4f + 39$	$c^2d^2e - 57$	$d^5 + 12$	
		$c^4d - 24$	c^4e ...	$c^3de - 65$	$cd^4 + 24$		
			$c^3d^2 - 20$	$c^2d^3 + 20$			
± 26	± 93	± 207	± 241	± 241	± 207	± 93	± 26

 $\mathcal{Q}(x, y)^7$

No. 25, $Q = +1 a^3cdf^3 + \&c.$ }
 No. 26, $Q' = +1 a^4f^4 + \&c.$ } [see post, 143.]