



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
Campus de Ilha Solteira

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**“Diagnose de Trincas em Sistemas Rotativos, Utilizando  
Modelos de Falhas Através da Metodologia dos Observadores  
de Estados”**

Jesus Antônio Fernandes Júnior

**Orientador:** Prof. Dr. Gilberto Pechoto de Melo

**Co-Orientador:** Prof. Dr. Gustavo Luis Chagas Manhães de Abreu

Dissertação apresentada à Faculdade de  
Engenharia - UNESP – Campus de Ilha  
Solteira, para obtenção do título de Mestre  
em Engenharia Mecânica.

Área de Conhecimento: Mecânica dos  
Sólidos.

Ilha Solteira – SP  
Dezembro de 2011

## FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação  
Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da UNESP - Ilha Solteira.

F363d

Fernandes Júnior, Jesus Antônio.

Diagnose de trincas em sistemas rotativos, utilizando modelos de falhas através da metodologia dos observadores de estados / Jesus Antônio Fernandes Júnior. -- Ilha Solteira : [s.n.], 2012

142 f. : il.

Dissertação (mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de Conhecimento: Mecânica dos Sólidos, 2012

Orientador: Gilberto Pechoto de Melo

Co-orientador: Gustavo Luis Chagas Manhães de Abreu

1. Detecção de falhas baseada em modelos.
2. Observadores de estados.
3. Observadores de estados com entradas desconhecidas.
4. Sistemas rotativos.
5. Localização de falhas (Engenharia).



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

### **CERTIFICADO DE APROVAÇÃO**

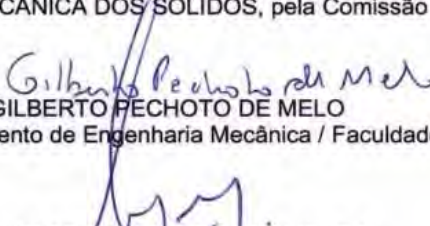
**TÍTULO:** Diagnose de Trincas em Sistemas Rotativos, Utilizando Modelos de Falhas Através da Metodologia dos Observadores de Estados

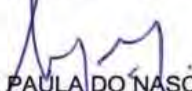
**AUTOR:** JESUS ANTÔNIO FERNANDES JUNIOR

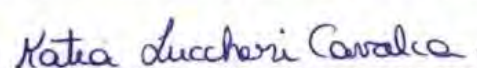
**ORIENTADOR:** Prof. Dr. GILBERTO PECHOTO DE MELO

**CO-ORIENTADOR:** Prof. Dr. GUSTAVO LUIZ CHAGAS MANHÃES DE ABREU

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica ,  
Área: MECANICA DOS SÓLIDOS, pela Comissão Examinadora:

  
Prof. Dr. GILBERTO PECHOTO DE MELO  
Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

  
Prof. Dr. LUIZ DE PAULA DO NASCIMENTO  
Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

  
Profa. Dra. KÁTIA LUCHESE CAVALCA DEDINI  
Departamento de Projeto Mecânico / Universidade Estadual de Campinas

Data da realização: 21 de dezembro de 2011.

*Dedico este trabalho a minha família, meus amigos e a minha namorada pela imensa motivação  
nesta etapa da minha vida.*

*...e a memória de Edivino Benedito Guimarães, Irene Giglioli Fernandes e  
Gabriel Briante Garcia.*

## Agradecimentos

---

*A Deus*

*Aos meus pais, Jesus Antônio Fernandes e Maria Alzenir Guimarães Fernandes.*

*A minha irmã, Juliana Carla Fernandes.*

*A minha namorada, Iara de Souza Barbosa.*

*Ao amigo e orientador, Gilberto Pechoto de Melo.*

*Aos amigos e colegas, Marcelo Dias de Lima, Thiago Andreotti, Rodrigo Augusto Ferreira, Isac Soler Gibin Júnior, Victor Suman Guirao, Marcelo Camargo da Silva, William Monte Verde, Marcelo Ferrarezi da Silva, Tiago Henrique Machado, Fernando Brandão de Oliveira, Breno Marotti de Oliveira, Ricardo Vendrame Borges, Bruno César Piza de Araújo, Fabio Kenji Suguimoto, Franco Barbi, Cássio Tomé de Faria, Lucas Aziz Trevisan, Thiago Galbiati Lagoin, Sanderson Manoel da Conceição, Marcelo Francisco Maesta, Edson Luiz Valverde Castilho Filho, Vinícius Fernandes, Aldemir Aparecido Cavallini Júnior, Vitor Ramos Franco, Sérgio Nunes Caetano, Felipe Ignácio Ferreira da Silva, Éliton Silva Batista, Thiago Antônio Rocha Abdala, Flávio Molnar Piancastelli de Siqueira, Juliano Estadulho dos Santos, Jorge Ribeiro dos Santos Júnior, Kleber Sevioli Pinheiro e Thiago Fernando Segura Butarello.*

*A toda a equipe do Departamento de Engenharia Mecânica da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, em especial aos professores João Antônio Pereira, Luiz de Paula do Nascimento, Marcio Antônio Bazani, Antônio Eduardo Turra, Vicente Lopes Júnior, Gustavo Luis Chagas Manhães de Abreu, Amarildo Tabone Paschoalini, Michael John Brennan, Sérgio Said Mansur, João Batista Aparecido, José Luiz Gasche, José Luiz Seixlack, Edson Del Rio Vieira e ao técnico Carlos José Santana.*

*Ao professor Shreyas Sundaram*

*A professora Kátia Lucchesi Cavalca Dedini*

*A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes)*

*"A condição natural dos corpos não é o repouso, mas o movimento."*  
*Galileu Galilei – físico, matemático, astrônomo e filósofo italiano.*

## Resumo

---

Os métodos de diagnose de falhas buscam evitar que estas ocorram sem predição, de modo que medidas preventivas possam ser tomadas para garantir a integridade física dos equipamentos e pessoas envolvidas no processo em que o sistema monitorado está inserido. Os eixos rotativos são elementos passíveis de fenômenos prejudiciais causados pela própria condição de movimento, que são refletidas na ciclagem das tensões atuantes em seu material. Este trabalho propõe a detecção em tempo real de trincas em eixos rotativos, pelo monitoramento do sistema em operação, usando a metodologia dos observadores de estados. Inicialmente, o projeto de observadores de estado via Regulador Linear Quadrático e Filtro de Kalman é introduzido. Em seguida, os observadores de estados com entradas desconhecidas são apresentados. Os modelos numéricos são obtidos por discretização através do Método dos Elementos Finitos e pelo ajuste da resposta em frequência. A validação numérica do método proposto é feita pela identificação de alterações de parâmetros de rigidez de um sistema massa-mola-amortecedor e de trincas simuladas em um eixo rotativo numérico através de um modelo de falha empírico. A validação experimental da técnica proposta é obtida pela identificação de um entalhe transversal causado no eixo de um sistema rotativo experimental.

**Palavras-chave:** Detecção de falhas baseada em modelos. Observadores de estados. Observadores de estados com entradas desconhecidas. Sistemas rotativos.

## Abstract

---

The faults diagnosis methods seeks to avoid them not to occur without prediction, so that preventive tasks can be taken to ensure the physical integrity of equipments and people involved in the process where the monitored system is inserted. The rotating shafts are elements capable of harmful phenomena caused by its own movement condition, which are reflected on the cycling of the acting stresses on its material. This work proposes the real-time structural crack detection in rotating shafts, by the monitoring of the system in operation, using the methodology of the state observers. Initially, the project of state observers via Linear Quadratic Regulator and Kalman Filter are introduced. Then, the unknown input state observers are presented. The numerical models are obtained by discretization through the Finite Elements Method and the frequency response fitting. The numerical validation of the proposed method is verified by the identification of stiffness parameters change of a mass-spring-damper system and flaws simulated in a numerical rotating shaft using an empirical model of failure. The experimental validation is obtained by the identification of a transversal dent caused in the shaft of an experimental rotating system.

**Keywords:** Model-based fault detection. State observers. Unknown input state observers. Rotating systems.

## Lista de Figuras

---

|             |                                                                                                                                                                                                            |    |
|-------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1-   | Fluxograma de um processo de monitoramento. ....                                                                                                                                                           | 28 |
| Figura 2 -  | Diagrama de blocos da representação em espaço de estados. ....                                                                                                                                             | 36 |
| Figura 3 -  | Diagrama de blocos de um sistema de observação de estados. ....                                                                                                                                            | 53 |
| Figura 4 -  | Diagrama de blocos de observação de estados com a presença de ruídos de estado e ruídos de observação. ....                                                                                                | 55 |
| Figura 5 -  | Diagrama de blocos de um sistema de estimação <i>offline</i> com atraso, dos estados de um sistema com a presença de ruídos de estados, ruídos de medição e excitações desconhecidas. ....                 | 57 |
| Figura 6 -  | Sistema de monitoramento baseado na estimação redundante de estados. ....                                                                                                                                  | 65 |
| Figura 7 -  | Sistema de monitoramento baseado em observadores de estados tradicionais. ....                                                                                                                             | 66 |
| Figura 8 -  | Diagrama de blocos de um sistema de observação plena de um sistema generalizado utilizando um observador baseado em um sistema reduzido. ....                                                              | 68 |
| Figura 9 -  | Diagrama de blocos de um sistema de observação plena de um sistema generalizado com entradas desconhecidas utilizando um observador baseado em um sistema reduzido. ....                                   | 68 |
| Figura 10 - | Sistema de coordenadas de um disco em um eixo flexível girante. $R_0[X \ Y \ Z]$ – Sistema inercial. $R[x \ y \ z]$ – Sistema móvel solidário ao disco. ....                                               | 70 |
| Figura 11 - | Elemento de eixo delimitado por dois pontos nodais, com quatro graus de liberdade cada. ....                                                                                                               | 72 |
| Figura 12 - | Coordenadas inerciais e móveis do centro geométrico C e coordenadas móveis do ponto arbitrário B no eixo. ....                                                                                             | 75 |
| Figura 13 - | Massa de desbalanceamento ....                                                                                                                                                                             | 79 |
| Figura 14 - | Exemplo básico de um sistema rotativo. ....                                                                                                                                                                | 80 |
| Figura 15 - | Valores dos coeficientes utilizados na formulação da matriz de rigidez do elemento trincado. ....                                                                                                          | 84 |
| Figura 16 - | Sistema massa-mola-amortecedor. ....                                                                                                                                                                       | 86 |
| Figura 17 - | Respostas temporais reais e estimadas pelo observador de estados global obtidas antes (a) e depois (b) da inserção da falha no sistema massa-mola-amortecedor utilizando o observador de Luenberger . .... | 88 |
| Figura 18 - | Valores $RMS^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador de Luenberger, para o sistema com redução de 20% de $k_2$ . ....                            | 89 |
| Figura 19 - | Ruído de medição da resposta de aceleração da massa 2. ....                                                                                                                                                | 90 |
| Figura 20 - | Respostas temporais reais e estimadas pelo observador global obtidas antes (a) e depois (b) da inserção da falha no sistema massa-mola-amortecedor utilizando o Filtro de Kalman ....                      | 90 |
| Figura 21 - | Valores $RMS^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o Filtro de Kalman, para o sistema com redução de 20% de $k_2$ . ....                                    | 91 |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                         |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 22 - Respostas temporais reais e estimadas pelo observador global obtidas antes (a) e depois (b) da inserção da falha no sistema massa-mola-amortecedor utilizando o observador com entradas desconhecidas. ....                                                                 | 92  |
| Figura 23 - Valores RMS-1 dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o sistema com redução de 20% de $k_2$ .....                                                                                      | 93  |
| Figura 24 - Desenho representativo do sistema rotativo experimental. ....                                                                                                                                                                                                               | 94  |
| Figura 25 - Modelo simplificado do sistema rotativo experimental. ....                                                                                                                                                                                                                  | 95  |
| Figura 26 - Diagrama de Campbell do modelo do sistema rotativo experimental. ....                                                                                                                                                                                                       | 95  |
| Figura 27 - Respostas temporais reais e estimadas pelo observador global obtidas antes (a) e depois (b) da inserção da falha no modelo do sistema rotativo utilizando o observador de Luenberger. ....                                                                                  | 97  |
| Figura 28 - Valores RMS <sup>-1</sup> dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador de Luenberger, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 30% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 1. .... | 98  |
| Figura 29 - Valores RMS <sup>-1</sup> dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador de Luenberger, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 30% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 2. .... | 99  |
| Figura 30 - Valores RMS <sup>-1</sup> dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador de Luenberger, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 40% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 1. .... | 100 |
| Figura 31 - Valores RMS <sup>-1</sup> dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador de Luenberger, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 40% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 2. .... | 101 |
| Figura 32 - Ruídos de medição das resposta de aceleração vertical dos mancais 1 (a) e 2 (b). ...                                                                                                                                                                                        | 102 |
| Figura 33 - Respostas temporais reais e estimadas pelo observador global obtidas antes (a) e depois (b) da inserção da falha no modelo do sistema rotativo utilizando o Filtro de Kalman. ....                                                                                          | 103 |
| Figura 34 - Valores RMS <sup>-1</sup> dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o Filtro de Kalman, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 30% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 1. ....         | 104 |
| Figura 35 - Valores RMS <sup>-1</sup> dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o Filtro de Kalman, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 30% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 2. ....         | 105 |
| Figura 36 - Valores RMS <sup>-1</sup> dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o Filtro de Kalman, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 40% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 1. ....         | 106 |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 37 - Valores $RMS^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o Filtro de Kalman, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 40% do diâmetro, utilizando a leitura do mancal 2. ....                                                                          | 106 |
| Figura 38 - Respostas temporais reais e estimadas pelo observador global obtidas antes (a) e depois (b) da inserção da falha no modelo do sistema rotativo utilizando o observador com entradas desconhecidas. ....                                                                                                                 | 108 |
| Figura 39 - Valores $RMS^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 30% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 1. ....                                       | 109 |
| Figura 40 - Valores $RMS^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o sistema rotativo com trinca com profundidade de 30% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 2. ....                                                 | 110 |
| Figura 41 - Valores $RMS^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 40% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 1. ....                                       | 111 |
| Figura 42 - Valores $RMS^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 40% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 2. ....                                       | 112 |
| Figura 43 - Sistema rotativo experimental. ....                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 113 |
| Figura 44 - Massa desbalanceada acoplada no disco, representada pelo parafuso de fixação do disco no eixo. ....                                                                                                                                                                                                                     | 114 |
| Figura 45 - Acelerômetros acoplados nos mancais 1 (a) e 2 (b). ....                                                                                                                                                                                                                                                                 | 114 |
| Figura 46 - Respostas da aceleração vertical dos mancais 1 (a) e 2 (b), obtidas do sistema íntegro em operação. ....                                                                                                                                                                                                                | 115 |
| Figura 47 - Ruídos de medição obtidos dos acelerômetros acoplados nos mancais 1 (a) e 2 (b). ....                                                                                                                                                                                                                                   | 115 |
| Figura 48 - Entalhe com profundidade de 30% do diâmetro do eixo, na região correspondente ao elemento 1 do modelo. ....                                                                                                                                                                                                             | 116 |
| Figura 49 - Respostas temporais reais e estimadas pelo observador global obtidas antes (a) e depois (b) da inserção da falha no sistema rotativo experimental, no primeiro caso, utilizando o observador com entradas desconhecidas. ....                                                                                           | 117 |
| Figura 50 - Valores $RMS^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o sistema rotativo experimental com trinca com profundidade de 30% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 1. ....                                    | 118 |
| Figura 51 - Valores $RMS^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o sistema rotativo experimental com trinca com profundidade de 30% do diâmetro na região correspondente ao elemento 1 no modelo, utilizando a leitura do mancal 2. .... | 119 |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 52 - Entalhe com profundidade de 40% do diâmetro do eixo, na região correspondente ao elemento 1 do modelo. ....                                                                                                                                                                                                             | 120 |
| Figura 53 - Valores $RMS^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o sistema rotativo experimental com trinca com profundidade de 40% do diâmetro, utilizando a leitura do mancal 1. ....                                                  | 120 |
| Figura 54 - Valores $RMS^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o sistema rotativo experimental com trinca com profundidade de 40% do diâmetro na região correspondente ao elemento 1 no modelo, utilizando a leitura do mancal 2. .... | 121 |
| Figura 55 - Respostas da aceleração vertical dos mancais 1 (a) e 2 (b), obtidas do sistema íntegro em operação. ....                                                                                                                                                                                                                | 122 |
| Figura 56 - Ruídos de medição obtidos dos acelerômetros acoplados nos mancais 1 (a) e 2 (b). ....                                                                                                                                                                                                                                   | 122 |
| Figura 57 - Entalhe com profundidade de 30% do diâmetro do eixo, na região correspondente ao elemento 5 do modelo. ....                                                                                                                                                                                                             | 123 |
| Figura 58 - Respostas temporais reais e estimadas pelo observador global obtidas antes (a) e depois (b) da inserção da falha no sistema rotativo experimental, no segundo caso, utilizando o observador com entradas desconhecidas. ....                                                                                            | 124 |
| Figura 59 - Valores $RMS^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o sistema rotativo experimental com trinca com profundidade de 30% do diâmetro na região correspondente ao elemento 5 no modelo, utilizando a leitura do mancal 1. .... | 125 |
| Figura 60 - Valores $RMS^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o sistema rotativo experimental com trinca com profundidade de 30% do diâmetro na região correspondente ao elemento 5 no modelo, utilizando a leitura do mancal 2. .... | 126 |
| Figura 61 - Entalhe com profundidade de 40% do diâmetro do eixo, na região correspondente ao elemento 5 do modelo. ....                                                                                                                                                                                                             | 127 |
| Figura 62 - Valores $RMS^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o sistema rotativo experimental com trinca com profundidade de 40% do diâmetro na região correspondente ao elemento 5 no modelo, utilizando a leitura do mancal 1. .... | 127 |
| Figura 63 - Valores $RMS^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o sistema rotativo experimental com trinca com profundidade de 40% do diâmetro na região correspondente ao elemento 5 no modelo, utilizando a leitura do mancal 2. .... | 128 |
| Figura 64 - Desvios entre pontos da curva a ser ajustada (curva contínua) e da curva de referência (curva pontilhada). ....                                                                                                                                                                                                         | 135 |
| Figura 65 - Fluxograma do processo iterativo de busca do ponto de mínimo local da função objetivo. ....                                                                                                                                                                                                                             | 136 |
| Figura 66 - Modelo simplificado do sistema rotativo experimental. ....                                                                                                                                                                                                                                                              | 137 |
| Figura 67 - Entrada e saídas do sistema em análise transiente para obtenção das respostas no domínio da frequência, no plano z-y. ....                                                                                                                                                                                              | 139 |

|                                                                                                                                                                                          |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 68 - Respostas no domínio da frequência do sistema real e do modelo numérico ajustado, obtidas da aceleração vertical do mancal 1 do primeiro sistema rotativo experimental. .... | 140 |
| Figura 69 - Respostas no domínio da frequência do sistema real e do modelo numérico ajustado, obtidas da aceleração vertical do mancal 2 do primeiro sistema rotativo experimental. .... | 140 |
| Figura 70 - Respostas no domínio da frequência do sistema real e do modelo numérico ajustado, obtidas da aceleração vertical do mancal 1 do segundo sistema rotativo experimental. ....  | 141 |
| Figura 71 - Respostas no domínio da frequência do sistema real e do modelo numérico ajustado, obtidas da aceleração vertical do mancal 2 do segundo sistema rotativo experimental. ....  | 141 |

## Lista de Tabelas

---

|             |                                                                                                                                                                                                                                                                             |     |
|-------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Tabela 1 –  | Parâmetros físicos do sistema massa-mola-amortecedor. ....                                                                                                                                                                                                                  | 87  |
| Tabela 2 –  | Valores $\text{RMS}^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo observador global antes e depois da inserção da falha no sistema massa-mola-amortecedor utilizando o observador de Luenberger.....                                                                           | 88  |
| Tabela 3 –  | Valores $\text{RMS}^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador de Luenberger, para o sistema com redução de 20% de $k_2$ .....                                                                                       | 89  |
| Tabela 4 –  | Valores $\text{RMS}^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo observador global antes e depois da inserção da falha no sistema massa-mola-amortecedor utilizando o Filtro de Kalman. ....                                                                                  | 91  |
| Tabela 5 –  | Valores $\text{RMS}^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o Filtro de Kalman, para o sistema com redução de 20% de $k_2$ . ....                                                                                              | 91  |
| Tabela 6 –  | Valores $\text{RMS}^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo observador global antes e depois da inserção da falha no sistema massa-mola-amortecedor utilizando o observador com entradas desconhecidas. ....                                                             | 92  |
| Tabela 7 –  | Valores $\text{RMS}^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o sistema com redução de 20% de $k_2$ .....                                                                          | 93  |
| Tabela 8 –  | Valores singulares de Hankel e normas Hankel modal do modelo completo do sistema rotativo experimental em operação. ....                                                                                                                                                    | 96  |
| Tabela 9 –  | Valores $\text{RMS}^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo observador global antes e depois da inserção da trinca no modelo do sistema rotativo utilizando o observador de Luenberger. ....                                                                             | 98  |
| Tabela 10 – | Valores $\text{RMS}^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador de Luenberger, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 30% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 1. .... | 99  |
| Tabela 11 – | Valores $\text{RMS}^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador de Luenberger, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 30% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 2. .... | 99  |
| Tabela 12 – | Valores $\text{RMS}^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador de Luenberger, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 40% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 1. .... | 100 |
| Tabela 13 – | Valores $\text{RMS}^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador de Luenberger, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 40% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 2. .... | 101 |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Tabela 14 – Valores $\text{RMS}^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo observador global antes e depois da inserção da trinca no modelo do sistema rotativo utilizando o Filtro de Kalman. ....                                                                                                  | 103 |
| Tabela 15 – Valores $\text{RMS}^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o Filtro de Kalman, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 30% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 1. ....                      | 104 |
| Tabela 16 – Valores $\text{RMS}^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o Filtro de Kalman, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 30% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 2. ....                      | 105 |
| Tabela 17 – Valores $\text{RMS}^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o Filtro de Kalman, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 40% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 1. ....                      | 106 |
| Tabela 18 – Valores $\text{RMS}^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o Filtro de Kalman, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 40% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 2. ....                      | 107 |
| Tabela 19 – Valores $\text{RMS}^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo observador global antes e depois da inserção da falha no modelo do sistema rotativo utilizando o observador com entradas desconhecidas. ....                                                                              | 108 |
| Tabela 20 – Valores $\text{RMS}^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 30% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 1. .... | 109 |
| Tabela 21 – Valores $\text{RMS}^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 30% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 2. .... | 110 |
| Tabela 22 – Valores $\text{RMS}^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 40% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 1. .... | 111 |
| Tabela 23 – Valores $\text{RMS}^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 40% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 2. .... | 112 |
| Tabela 24 – Valores $\text{RMS}^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo observador global antes e depois da inserção da falha no sistema rotativo experimental, no primeiro caso, utilizando o observador com entradas desconhecidas. ....                                                        | 116 |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Tabela 25 – Valores $\text{RMS}^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o sistema rotativo experimental com trinca com profundidade de 30% do diâmetro na região correspondente ao elemento 1 no modelo, utilizando a leitura do mancal 1. .... | 118 |
| Tabela 26 – Valores $\text{RMS}^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o sistema rotativo experimental com trinca com profundidade de 30% do diâmetro na região correspondente ao elemento 1 no modelo, utilizando a leitura do mancal 2. .... | 119 |
| Tabela 27 – Valores $\text{RMS}^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o sistema rotativo experimental com trinca com profundidade de 40% do diâmetro na região correspondente ao elemento 1 no modelo, utilizando a leitura do mancal 1. .... | 120 |
| Tabela 28 – Valores $\text{RMS}^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o sistema rotativo experimental com trinca com profundidade de 40% do diâmetro, utilizando a leitura do mancal 2. ....                                                  | 121 |
| Tabela 29 – Valores $\text{RMS}^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo observador global antes e depois da inserção da falha no sistema rotativo experimental, no segundo caso, utilizando o observador com entradas desconhecidas. ....                                                                                               | 123 |
| Tabela 30 – Valores $\text{RMS}^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o sistema rotativo experimental com trinca com profundidade de 30% do diâmetro na região correspondente ao elemento 5 no modelo, utilizando a leitura do mancal 1. .... | 125 |
| Tabela 31 – Valores $\text{RMS}^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o sistema rotativo experimental com trinca com profundidade de 30% do diâmetro na região correspondente ao elemento 5 no modelo, utilizando a leitura do mancal 2. .... | 126 |
| Tabela 32 – Valores $\text{RMS}^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o sistema rotativo experimental com trinca com profundidade de 40% do diâmetro na região correspondente ao elemento 5 no modelo, utilizando a leitura do mancal 1. .... | 127 |
| Tabela 33 – Valores $\text{RMS}^{-1}$ dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o sistema rotativo experimental com trinca com profundidade de 40% do diâmetro na região correspondente ao elemento 5 no modelo, utilizando a leitura do mancal 2. .... | 128 |
| Tabela 34 – Parâmetros conhecidos do sistema rotativo experimental. ....                                                                                                                                                                                                                                                                   | 138 |
| Tabela 35 – Parâmetros desconhecidos do sistema rotativo experimental. ....                                                                                                                                                                                                                                                                | 138 |
| Tabela 36 – Valores iniciais e valores ajustados dos parâmetros desconhecidos, obtidos na primeira análise do sistema. ....                                                                                                                                                                                                                | 141 |
| Tabela 37 – Valores iniciais e valores ajustados dos parâmetros desconhecidos, obtidos na segunda análise do sistema. ....                                                                                                                                                                                                                 | 142 |

## Lista de Símbolos

---

|                      |                                                                      |
|----------------------|----------------------------------------------------------------------|
| $A$                  | Matriz dinâmica do sistema em espaço de estados                      |
| $B$                  | Matriz de entradas do sistema em espaço de estados                   |
| $n$                  | Número de estados                                                    |
| $C$                  | Matriz de saídas do sistema em espaço de estados                     |
| $D$                  | Matriz de transmissão direta do sistema em espaço de estados         |
| $m$                  | Número de entradas                                                   |
| $p$                  | Número de saídas                                                     |
| $x$                  | Vetor de estados                                                     |
| $u$                  | Vetor de entradas                                                    |
| $y$                  | Vetor de saídas                                                      |
| $q$                  | Vetor de coordenadas generalizadas                                   |
| $M$                  | Matriz de massa                                                      |
| $C_a$                | Matriz de amortecimento                                              |
| $K$                  | Matriz de rigidez                                                    |
| $B_0$                | Matriz de entradas do sistema em coordenadas generalizadas           |
| $C_{oq}$             | Matriz de saídas de deslocamento                                     |
| $C_{ov}$             | Matriz de saídas de velocidade                                       |
| $\alpha'$ e $\beta'$ | Constantes escalares empíricas de proporcionalidade de amortecimento |
| $Q$                  | Vetor de coordenadas generalizadas no domínio de Laplace             |
| $V$                  | Matriz de autovetores                                                |
| $\Omega$             | Matriz de autovalores                                                |
| $w$                  | Frequência natural                                                   |
| $M_m$                | Matriz modal de massa                                                |

|                   |                                                                                                         |
|-------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $K_m$             | Matriz modal de rigidez                                                                                 |
| $C_{am}$          | Matriz modal de amortecimento                                                                           |
| $C_{mq}$          | Matriz modal de saídas de deslocamento                                                                  |
| $C_{mv}$          | Matriz modal de saídas de velocidade                                                                    |
| $B_m$             | Matriz modal de entradas do sistema em coordenadas generalizadas                                        |
| $Z$               | Matriz de fatores de amortecimento modais                                                               |
| $\zeta$           | Fator de amortecimento modal                                                                            |
| $A_{mbd}$         | Matriz dinâmica do sistema em espaço de estados em coordenadas modais em blocos diagonais               |
| $B_{mbd}$         | Matriz de entradas do sistema em espaço de estados em coordenadas modais em blocos diagonais            |
| $C_{mbd}$         | Matriz de saídas do sistema em espaço de estados em coordenadas modais em blocos diagonais              |
| $C^*$             | Matriz de controlabilidade                                                                              |
| $O^*$             | Matriz de observabilidade                                                                               |
| $W_c$             | Matriz grammiana de controlabilidade                                                                    |
| $W_o$             | Matriz grammiana de observabilidade                                                                     |
| $\Gamma, V$ e $U$ | Matrizes diagonal e unitárias, respectivamente, obtidas da decomposição singular da matriz $H$          |
| $H$               | Matriz produto das matrizes $P$ e $Q$                                                                   |
| $P$ e $Q$         | Matrizes obtidas da decomposição dos grammianos de controlabilidade e observabilidade, respectivamente. |
| $W_{cb}$          | Matriz grammiana de controlabilidade do sistema balanceado                                              |
| $W_{ob}$          | Matriz grammiana de observabilidade do sistema balanceado                                               |
| $\gamma$          | Valor singular de Hankel                                                                                |
| $\ G\ _h$         | Norma Hankel                                                                                            |

|                         |                                                                                                                 |
|-------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $e_h$                   | Energia eliminada do sistema pela redução modal                                                                 |
| $A'$                    | Matriz dinâmica do sistema em espaço de estados no domínio temporal discreto                                    |
| $B'$                    | Matriz de entradas do sistema em espaço de estados no domínio temporal discreto                                 |
| $C_a$                   | Matriz de saídas de aceleração do sistema em espaço de estados                                                  |
| $x_e$                   | Vetor de estados estimados                                                                                      |
| $y_e$                   | Vetor de saídas do observador de estados                                                                        |
| $L_k$                   | Matriz de ganho ou matriz do observador de estados                                                              |
| $e$                     | Vetor de erro de estimação                                                                                      |
| $K_k$                   | Matriz de ganho em malha fechada                                                                                |
| $J$                     | Índice de desempenho quadrático                                                                                 |
| $Q'$                    | Matriz hermitiana positiva definida de ponderação da importância do erro de estimação                           |
| $R'$                    | Matriz hermitiana positiva definida de ponderação da importância do dispêndio de energia dos sinais de controle |
| $P_k$                   | Matriz de covariância dos estados do sistema                                                                    |
| $w$                     | Vetor de ruídos de estado                                                                                       |
| $v$                     | Vetor de ruídos de medição                                                                                      |
| $E$                     | Matriz de transmissão direta dos ruídos de estado                                                               |
| $Q$                     | Matriz de covariância dos ruídos de estado                                                                      |
| $R$                     | Matriz de covariância dos ruídos de medição                                                                     |
| $\alpha$                | Número de passos temporais discretos de avanço                                                                  |
| $\bar{x}$               | Vetor de estados expandido                                                                                      |
| $n$                     | Vetor de ruídos expandido                                                                                       |
| $\bar{A}$               | Matriz dinâmica expandida                                                                                       |
| $\bar{B}$ e $\bar{B}_n$ | Matrizes de entradas expandidas                                                                                 |

|                             |                                                                                        |
|-----------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| $\bar{C}$                   | Matriz de saídas expandida                                                             |
| $\bar{\Theta}_\alpha$       | Matriz de saídas expandida para $\alpha$ passos de avanço                              |
| $M_\alpha$ e $M_{n,\alpha}$ | Matrizes de transmissão direta expandida para $\alpha$ passos de avanço                |
| $T'$                        | Matriz de transformação de coordenadas                                                 |
| $\bar{F}$                   | Base ortogonal do espaço nulo à esquerda de $M_{\alpha-1}$                             |
| H                           | Base ortogonal do espaço nulo à esquerda de $F\bar{\Theta}_\alpha$                     |
| $\beta_\alpha$              | Número de estados estimados obtidos diretamente das saídas do sistema                  |
| $\hat{x}_1$                 | Vetor de estados estimados obtidos diretamente das saídas do sistema                   |
| $\hat{x}_2$                 | Vetor de estados estimados obtidos pelo observador                                     |
| $U$                         | Base ortogonal do espaço nulo de $\bar{F}$                                             |
| $N$                         | Base ortogonal do espaço nulo à esquerda das últimas $\alpha m$ colunas de $GM_\alpha$ |
| $P_{k,x}$                   | Matriz de covariância do vetor de estados do sistema original                          |
| $x_{er}$                    | Vetor dos estados dos $l$ modos estimados pelo observador                              |
| $M_g$                       | Matriz global de massa do sistema                                                      |
| $D_g$                       | Matriz global de amortecimento estrutural proporcional do sistema                      |
| $G_g$                       | Matriz global giroscópica do sistema                                                   |
| $K_g$                       | Matriz global de rigidez do sistema                                                    |
| $\dot{\phi}, \Omega$        | Velocidade angular do rotor                                                            |
| $T$                         | Função de energia cinética.                                                            |
| $U$                         | Função de energia potencial.                                                           |
| $R$                         | Função de dissipação de energia de Rayleigh.                                           |
| $F_q$                       | Vetor de excitações generalizadas.                                                     |
| $q_i$                       | Vetor de coordenadas do $i$ -ésimo ponto nodal do sistema                              |
| $u$                         | Deslocamento linear horizontal do ponto nodal do elemento de eixo                      |

|                      |                                                                            |
|----------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| $w$                  | Deslocamento linear vertical do ponto nodal do elemento de eixo            |
| $\theta$             | Deslocamento angular do ponto nodal do elemento de eixo em torno do eixo X |
| $\psi$               | Deslocamento angular do ponto nodal do elemento de eixo em torno do eixo Z |
| $\omega_{R / R_0}$   | Velocidade angular do disco solidária ao sistema de coordenadas móvel      |
| $\omega_{R^R / R_0}$ | Velocidade angular do disco solidária ao sistema de coordenadas inercial   |
| $\omega_x$           | Velocidade angular do disco em relação ao eixo x                           |
| $\omega_y$           | Velocidade angular do disco em relação ao eixo x                           |
| $\omega_z$           | Velocidade angular do disco em relação ao eixo x                           |
| $T_D$                | Energia cinética do disco                                                  |
| $m_D$                | Massa do disco                                                             |
| $I_{D_x}$            | Momento de inércia do disco em relação ao eixo x                           |
| $I_{D_y}$            | Momento de inércia do disco em relação ao eixo y                           |
| $I_{D_z}$            | Momento de inércia do disco em relação ao eixo z                           |
| $I_R$                | Tensor de inércia do disco                                                 |
| $M_D$                | Matriz de massa do disco                                                   |
| $G_D$                | Matriz do efeito giroscópio do disco                                       |
| $T_E$                | Energia cinética do elemento de eixo                                       |
| $q_x$                | Vetor de coordenadas do sistema na direção x                               |
| $q_z$                | Vetor de coordenadas do sistema na direção z                               |
| $\rho$               | Densidade do material do elemento                                          |
| $S$                  | Área da seção transversal do elemento                                      |
| $L$                  | Comprimento do elemento de eixo                                            |

|                     |                                                                                                |
|---------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $I$                 | Momento de inércia da área da seção transversal do elemento em relação ao eixo neutro          |
| $N_1$ e $N_2$       | Funções de deslocamento entre os pontos nodais do elemento de eixo                             |
| $M_E$               | Matriz de massa clássica do elemento de eixo                                                   |
| $M_{SE}$            | Matriz do efeito secundário de inércia rotacional do elemento de eixo                          |
| $G_E$               | Matriz do efeito giroscópio do elemento de eixo                                                |
| $u^*$               | Deslocamento horizontal do ponto nodal em relação ao sistema de coordenadas móvel              |
| $w^*$               | Deslocamento vertical do ponto nodal em relação ao sistema de coordenadas móvel                |
| $E$                 | Módulo de elasticidade do material do elemento                                                 |
| $U_1$               | Energia potencial de deformação elástica do elemento de eixo devida à Flexão                   |
| $U_2$               | Energia potencial de deformação elástica do elemento de eixo devida à aplicação de força axial |
| $F_0$               | Força axial aplicada no eixo                                                                   |
| $U_E$               | Energia potencial de deformação elástica combinada do elemento de eixo                         |
| $K_{E1}$ e $K_{E2}$ | Matrizes de rigidez clássicas do eixo                                                          |
| $K_{E3}$ e $K_{E4}$ | Matrizes de rigidez do eixo devido à aplicação de força axial                                  |
| $\alpha_c$          | Coefficiente de cisalhamento                                                                   |
| $S_r$               | Área da seção transversal reduzida                                                             |
| $G$                 | Módulo de Cisalhamento                                                                         |
| $\nu$               | Coefficiente de Poisson                                                                        |
| $K_g$               | Matriz de rigidez global do eixo                                                               |
| $K_C$               | Matriz de rigidez clássica do elemento de eixo                                                 |
| $K_F$               | Matriz de rigidez do elemento de eixo devido à aplicação de força axial                        |

|         |                                                                             |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------|
| $m_u$   | Massa desbalanceada do sistema rotativo                                     |
| $T_m$   | Energia cinética da massa desbalanceada um                                  |
| $d_u$   | Deslocamento da massa desbalanceada em relação ao centro geométrico do eixo |
| $q_m$   | Vetor de translação do ponto nodal do eixo                                  |
| $f_u$   | Componente horizontal da força de desbalanceamento                          |
| $f_w$   | Componente vertical da força de desbalanceamento                            |
| $C_s$   | Matriz de amortecimento da suspensão do sistema rotativo                    |
| $K^f_c$ | Matriz de rigidez clássica do elemento de eixo com falha                    |

## Lista de Siglas

---

|      |                                                                      |
|------|----------------------------------------------------------------------|
| FEM  | Finite Elements Method (Método dos Elementos Finitos)                |
| RMS  | Root Mean Square (Raiz da Média Quadrática)                          |
| FRF  | Frequency Response Function (Função de Resposta em Frequência)       |
| SISO | Single Input Single Output (Única Entrada Única Saída)               |
| MIMO | Multiple Input Multiple Output (Múltiplas Entradas Múltiplas Saídas) |

# Sumário

---

|            |                                                                                                                                      |           |
|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b>   | <b>INTRODUÇÃO E REVISÃO DA LITERATURA .....</b>                                                                                      | <b>27</b> |
| <b>1.1</b> | <b>Diagnose de Falhas em Sistemas Mecânicos .....</b>                                                                                | <b>27</b> |
| 1.1.1      | <i>Diagnose de Falhas via Observadores de Estados .....</i>                                                                          | 29        |
| <b>1.2</b> | <b>Diagnose de Trincas em Sistemas de Rotativos .....</b>                                                                            | <b>30</b> |
| <b>1.3</b> | <b>Ajuste de Incertezas de Modelos Numéricos Através do Ajuste da Resposta em Frequência via Métodos dos Mínimos Quadrados .....</b> | <b>32</b> |
| <b>1.4</b> | <b>Objetivos do Trabalho .....</b>                                                                                                   | <b>32</b> |
| <br>       |                                                                                                                                      |           |
| <b>2</b>   | <b>FUNDAMENTOS TEÓRICOS.....</b>                                                                                                     | <b>34</b> |
| <b>2.1</b> | <b>Sistemas de Controle .....</b>                                                                                                    | <b>34</b> |
| 2.1.1      | <i>Definição de Espaço de Estados .....</i>                                                                                          | 34        |
| 2.1.2      | <i>Modelo de Sistema Dinâmico em Espaço de Estados .....</i>                                                                         | 36        |
| 2.1.3      | <i>Modelo de Sistema Estrutural em Espaço de Estados .....</i>                                                                       | 37        |
| 2.1.3.1    | <i>Modelo em Coordenadas Nodais .....</i>                                                                                            | 38        |
| 2.1.3.2    | <i>Modelo em Coordenadas Modais.....</i>                                                                                             | 39        |
| 2.1.4      | <b>Controlabilidade e Observabilidade.....</b>                                                                                       | <b>44</b> |
| 2.1.4.1    | <i>Princípio da Dualidade .....</i>                                                                                                  | 46        |
| 2.1.5      | <b>Redução de Modelos.....</b>                                                                                                       | <b>46</b> |
| 2.1.5.1    | <i>Realização Balanceada .....</i>                                                                                                   | 47        |
| 2.1.5.2    | <i>Norma Hankel .....</i>                                                                                                            | 48        |
| 2.1.6      | <i>Modelos em Espaço de Estados no Domínio Temporal Discreto .....</i>                                                               | 49        |
| 2.1.7      | <i>Modelos em Espaço de Estados Utilizando Sensores de Aceleração .....</i>                                                          | 50        |
| <b>2.2</b> | <b>Observadores de Estado .....</b>                                                                                                  | <b>51</b> |
| 2.2.1      | <b>Observador de Luenberger .....</b>                                                                                                | <b>52</b> |
| 2.2.1.1    | <i>Regulador Linear Quadrático .....</i>                                                                                             | 54        |
| 2.2.2      | <b>Filtro de Kalman.....</b>                                                                                                         | <b>55</b> |
| 2.2.3      | <b>Observador de Estados com Entradas Desconhecidas.....</b>                                                                         | <b>56</b> |
| <b>2.3</b> | <b>Metodologia de Detecção de Falhas via Observadores de Estados .....</b>                                                           | <b>65</b> |
| <b>2.4</b> | <b>Modelo de Sistema Rotativo .....</b>                                                                                              | <b>69</b> |
| 2.4.1      | <i>Modelo em Coordenadas Nodais .....</i>                                                                                            | 69        |

|         |                                                                                       |            |
|---------|---------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 2.4.1.1 | <i>Modelo de Disco</i> .....                                                          | 70         |
| 2.4.1.2 | <i>Modelo de Eixo</i> .....                                                           | 71         |
| 2.4.1.3 | <i>Forças de Desbalanceamento</i> .....                                               | 79         |
| 2.4.1.4 | <i>Modelo Global</i> .....                                                            | 80         |
| 2.5     | <b>Modelo de Falha</b> .....                                                          | <b>83</b>  |
| 2.5.1   | <i>Modelo Analítico de Trinca</i> .....                                               | 84         |
| <br>    |                                                                                       |            |
| 3       | <b>SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL</b> .....                                                  | <b>86</b>  |
| 3.1     | <b>Sistema Massa-Mola-Amortecedor</b> .....                                           | <b>86</b>  |
| 3.1.1   | <i>Observador de Luenberger</i> .....                                                 | 87         |
| 3.1.2   | <i>Filtro de Kalman</i> .....                                                         | 89         |
| 3.1.3   | <i>Observador com Entradas Desconhecidas</i> .....                                    | 92         |
| 3.2     | <b>Sistema Rotativo</b> .....                                                         | <b>94</b>  |
| 3.2.1   | <i>Observador de Luenberger</i> .....                                                 | 97         |
| 3.2.2   | <i>Filtro de Kalman</i> .....                                                         | 101        |
| 3.2.3   | <i>Observador com Entradas Desconhecidas</i> .....                                    | 107        |
| <br>    |                                                                                       |            |
| 4       | <b>VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL</b> .....                                                   | <b>113</b> |
| 4.1     | <b>Primeiro Caso</b> .....                                                            | <b>115</b> |
| 4.2     | <b>Segundo Caso</b> .....                                                             | <b>121</b> |
| <br>    |                                                                                       |            |
| 5       | <b>CONCLUSÃO</b> .....                                                                | <b>129</b> |
| <br>    |                                                                                       |            |
|         | <b>Referências</b> .....                                                              | <b>131</b> |
| <br>    |                                                                                       |            |
|         | <b>ANEXO A - Ajuste de Parâmetros Utilizando o Método dos Mínimos Quadrados</b> ..... | <b>135</b> |

# 1 INTRODUÇÃO E REVISÃO DA LITERATURA

---

Uma das grandes preocupações dos setores industriais está relacionada com a disponibilidade dos processos de produção. Tais processos são compostos por uma cadeia de sistemas mecânicos destinados à realização de tarefas específicas que, em sua maioria, são essenciais para a harmonia de um regime produtivo. A simples falha de um componente mecânico pode resultar na quebra desta harmonia, que reflete em perdas de produção e prejuízos materiais e humanos. Este capítulo introduz os conceitos que acercam os tipos de falha que serão tratados neste trabalho, bem como a metodologia que o mesmo propõe na busca da predição de tais ocorrências, antes que estas proporcionem prejuízos maiores.

## 1.1 Diagnose de Falhas em Sistemas Mecânicos

De acordo com Gertler (1988), a diagnose de uma falha consiste em três tarefas:

1. Detecção, i.e., a indicação de que alguma falha possa estar ocorrendo no sistema
2. Isolamento, i.e., a determinação do local exato da falha
3. Identificação, i.e., a determinação da gravidade da falha

Segundo Isermann (1984), uma falha é entendida como um desvio não permitido de uma propriedade característica de um sistema que o leva a não realizar sua finalidade. O mesmo autor classifica as etapas de monitoramento de um sistema mecânico de acordo com o fluxograma da Figura 1. Se uma falha ocorre em um processo ou sistema, a mesma precisa ser detectada tão antecipadamente quanto possível. Esta etapa pode ser realizada através da análise de desvios das variáveis medidas ou estimadas com relação aos seus valores normais. Quando este desvio é considerado inaceitável, é detectada a ocorrência de falha, que conduz a análise para a próxima etapa; a diagnose da falha. O escopo do presente trabalho envolve até este ponto do fluxograma de monitoramento da Figura 1, visto que as etapas posteriores à diagnose da falha representam decisões tomadas de acordo com os resultados obtidos deste diagnóstico.

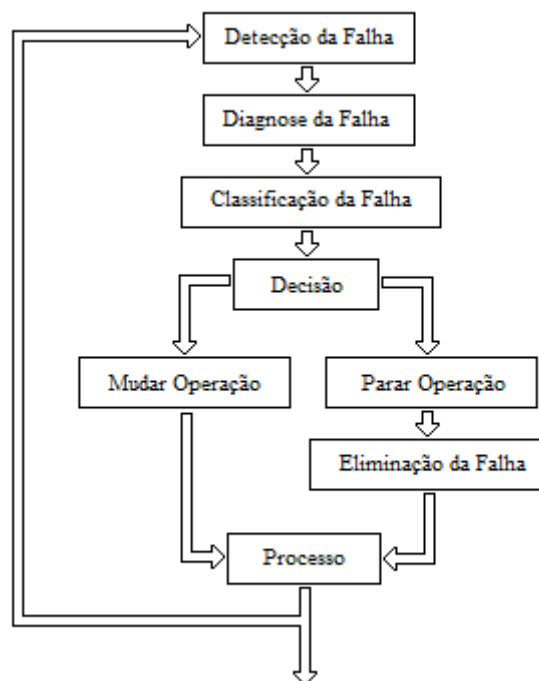
De acordo com Gertler (1988), as técnicas de diagnose de falha podem ser separadas em dois grandes grupos:

- Métodos que não usam de um modelo matemático da planta
- Métodos que usam de um modelo matemático da planta.

sendo que o último utiliza, em sua maioria, modelos lineares em tempo discreto ou discretizados de modelos em tempo contínuo.

Segundo Edwards et al. (1998), nos métodos baseados em modelos, o número de variáveis e parâmetros levados em conta deve ser o máximo possível para construir um modelo matemático detalhado do sistema em observação. Natke e Cempel (1991) partem da definição de que uma falha causará uma alteração no comportamento dinâmico do sistema e pode-se construir um modelo para detectar tais mudanças de modo a permitir sua detecção e seu diagnóstico. Diferentes métodos de detecção de falhas baseados em modelos tem sido desenvolvidos nos últimos vinte anos. Willsky (1976) estudou métodos para a detecção de mudanças abruptas em sistemas dinâmicos estocásticos, incluindo o uso de filtros sensitivos específicos a diferentes falhas. Frank (1990) estudou a detecção e o isolamento de falhas em processos automáticos utilizando técnicas de geração residual baseada em modelos usando identificação de parâmetros e métodos de estimação de estados.

**Figura 1- Fluxograma de um processo de monitoramento.**



Fonte: Isermann (1984).

A utilização de modelos matemáticos obtidos da discretização de sistemas contínuos pelo FEM tem sido amplamente empregada em métodos de diagnose de falhas em sistemas contínuos. As delimitações físicas representadas pelos elementos finitos na estrutura permitem o isolamento de falhas na modelagem do sistema, permitindo a simulação de seu comportamento dinâmico na presença de falhas, que podem ser inseridas no modelo na forma de variação de parâmetros estruturais. Cacciola e Muscolino (2002) estudaram o comportamento determinístico de uma viga na presença de uma trinca transversal não propagante, obtendo uma modelagem para este tipo de falha em vigas discretizadas utilizando elementos finitos.

### ***1.1.1 Diagnose de Falhas via Observadores de Estados***

Dentro do contexto das técnicas de diagnose de falhas baseadas em modelos, destaca-se a metodologia dos observadores de estado. Kalman (1960) e Luenberger (1963) mostraram que os estados de um sistema podem ser estimados conhecendo-se suas entradas e suas saídas, introduzindo assim as metodologias de projeto de observadores de estado para sistemas estocásticos e determinísticos, respectivamente. A metodologia de diagnose de falhas utilizando observadores de estado compara a saída medida do sistema real em análise com a saída estimada pelos observadores de estados, que contém as informações do sistema íntegro e das possíveis falhas que possam ocorrer no sistema.

Garcia e Frank (1997) revisaram as principais aproximações de diagnose de falhas baseada em observadores aplicada a sistemas não lineares, utilizando a extensão dos métodos de diagnose aplicados a sistemas lineares. Ele mostra que o uso de aproximações lineares é limitado quando o sistema a ser monitorado é fortemente não linear, fato que ocorre com a natureza de muitos processos industriais. Os problemas devido à consideração de modelos mais generalizados, assim como o projeto de observadores correspondentes não-lineares, ainda são pertinentes por conta da dificuldade de se estimar o estado ou o vetor de medição de um sistema desta natureza, mesmo quando a linearidade é conhecida ou distúrbios não estão presentes.

Melo (1998) desenvolveu uma metodologia para diagnose de falhas em sistemas mecânicos usando observadores de estado, onde parâmetros sujeitos a falhas são escolhidos e observadores robustos são projetados de modo a identificar tais falhas, sendo que o observador global destina-se a monitorar a condição de sistema íntegro. Melo e Araújo (2007) analisaram o desenvolvimento de uma trinca, através da metodologia dos observadores de estado, com simulações computacionais de uma viga engastada discretizada pelo Método dos Elementos Finitos (FEM). Esta técnica consiste no desenvolvimento de um modelo do sistema a ser analisado e na comparação dos dados obtidos com os dados estimados. A diferença entre esses dados gera um resíduo, que é o dado de análise. A capacidade deste método em reestruturar os estados não mensuráveis do sistema permite a estimação dos estados em localidades de difícil acesso. Marano (2002) aplicou a metodologia de detecção e localização de falhas via observadores de estado em sistemas mecânicos com variação de parâmetros. Watanabe (2010) aplicou a metodologia dos observadores de estados para detectar, localizar e acompanhar a propagação de trincas em estruturas reticuladas tridimensionais.

A necessidade do domínio das entradas do sistema representa uma restrição à utilização destes observadores, visto que nem sempre estas informações estão disponíveis. Nos últimos anos, vários trabalhos têm sido feitos no sentido de se obter informações sobre as excitações de um sistema. Melo et al. (1994) e Pacheco (2001) recorreram ao uso de métodos no domínio temporal na solução de problemas de identificação de forças de excitação. Pacheco e Steffen Jr. (2003) utilizaram de funções ortogonais na representação dos sinais de entrada e saída de sistemas não lineares. Morais (2006) utilizou a metodologia dos observadores de estado na

diagnose de falhas em sistemas mecânicos com excitações desconhecidas, identificadas via funções ortogonais.

Nas últimas três décadas, estudos foram iniciados na busca de observadores de estados com entradas desconhecidas (DAROUACH et al, 2003; HOU; PATTON, 1998; JIN E TAHK, 2005; KITANIDIS, 1987; SABERI et al, 2000; SUNDARAM E HADJICOSTIS, 2005). Os trabalhos mais recentes mostraram que a utilização de estimadores *offline*, ou seja, com estimação de estados em atraso com relação ao sinal de entrada, contorna algumas condições de existência que restringem a utilização de estimadores com entradas desconhecidas. Foi mostrado também que a utilização de estimadores *offline* ótimos, do tipo *smoother*, pode correlacionar os ruídos do sistema com os erros de estimação do observador de modo que estes se tornem coloridos. Sundaram e Hadjicostis (2006) propuseram uma solução para este problema, aumentando apropriadamente a dimensão do sistema de estimação.

## 1.2 Diagnose de Trincas em Sistemas de Rotativos

Largamente empregados em sistemas mecânicos de processos produtivos, os sistemas rotativos têm se tornado cada vez mais leves e velozes, como resultado do progresso da engenharia nestas áreas. Dada a grande importância destes sistemas, o estudo e o desenvolvimento de técnicas de detecção de falhas crescem com o aumento da preocupação em relação às consequências de uma quebra repentina de um eixo girante, de modo que uma eventual trinca estrutural seja detectada antes que esta tenha se propagado para uma profundidade crítica.

Sabnavis et al (2004) divide o processo de falha em eixos rotativos em três estágios cronológicos;

1. Iniciação da trinca
2. Propagação da trinca
3. Rompimento do eixo

Segundo o autor, o primeiro estágio é causado por fatores geométricos e/ou metalúrgicos e está relacionado ao surgimento de minúsculas descontinuidades. O segundo estágio compreende o crescimento das descontinuidades como resultado da ciclagem das tensões atuantes no componente. Falhas de operação, tensões térmicas e/ou residuais, zonas termicamente afetadas por soldagem, presença de hidrogênio no aço, elevada temperatura de transição dúctil-frágil e condições ambientais são exemplos de propagadores de trinca. O terceiro e último estágio ocorre quando as tensões atuantes na seção de falha excedem a tensão admissível do material do eixo.

Segundo Edwards et al. (1998), as técnicas modernas de monitoramento da condição de sistemas rotativos envolvem diferentes temas, sendo a análise de vibrações a mais importante e informativa. As técnicas de diagnose de trincas em sistemas rotativos baseadas em sinais de vibração representam uma porção significativa dos trabalhos relacionados ao monitoramento

da condição deste tipo de sistema. Destes trabalhos, vários autores têm direcionado seu estudo no desenvolvimento de técnicas baseadas em modelos.

Wauer (1988) estudou o comportamento dinâmico de um componente de rotor com uma trinca utilizando o modelo de eixo de Timoshenko, que também considera a flexibilidade torcional e longitudinal. A trinca aberta é simulada usando um elemento complexo de mola com rigidez e amortecimento reduzidos que, junto com as modificações que simulam a trinca fechada, formulam as condições de abertura e fechamento da descontinuidade. As equações que governam o sistema são então obtidas e preparadas por aproximações especiais para a aplicação de métodos variacionais diretos, em uma forma simplificada substituindo a descontinuidade geométrica por uma descontinuidade de carregamento no local da trinca.

Bachschmid et al. (2000) apresentaram um método robusto para identificar a localização e a profundidade de trincas em rotores, criando um modelo confiável de elementos finitos do sistema para estabelecer a relação entrada-saída provocada pelo sintoma da falha. Sekhar (2003) propôs um método baseado em modelos para a identificação em tempo real de trincas em um rotor, onde as mudanças no sistema provocadas pela falha são levadas em conta através do uso de forças equivalentes no modelo matemático.

A metodologia dos observadores de estados tem sido amplamente empregada na diagnose de falhas em sistemas rotativos. Lemos (2004) aplicou esta técnica na detecção de falhas de sistemas rotativos considerando suas fundações. Outros trabalhos têm sido feitos também no sentido de solucionar o problema do não domínio das forças de excitação de sistemas rotativos autoexcitados. Melo (2008) identificou as forças de desbalanceamento em sistemas rotativos através do uso de funções ortogonais. Koroishi (2009) utilizou a mesma técnica de identificação dos sinais de entrada de um sistema rotativo autoexcitado ao utilizar a metodologia dos observadores de estados na diagnose de falhas.

O Método dos Elementos Finitos representa uma poderosa ferramenta de discretização de sistemas contínuos no desenvolvimento de modelos numéricos para sistemas mecânicos estruturais. Lalanne e Ferraris (1990) apresentaram uma modelagem sistemática e prática para a predição do comportamento de sistemas rotativos, utilizando o Método dos Elementos Finitos. As técnicas de diagnose de falhas baseadas em modelos utilizam o conceito de elemento finito no sentido de isolar os efeitos estruturais causados por uma falha em um sistema contínuo. O isolamento desta influência é muito importante na construção dos modelos que serão utilizados no projeto dos observadores de estados robustos destinados a localizar e quantificar falhas. Quanto maior o número de elementos finitos considerados na discretização do sistema, mais precisa é a localização da falha. Porém, em contrapartida, a ordem do modelo numérico se eleva.

### **1.3 Ajuste de Incertezas de Modelos Numéricos Através do Ajuste da Resposta em Frequência via Métodos dos Mínimos Quadrados**

A obtenção de um modelo numérico confiável está relacionada com o domínio das incertezas do sistema real, visto que a obtenção de certos parâmetros pode ser impossível ou inviável. Uma técnica comum que visa à melhoria da confiabilidade dos modelos numéricos é através do ajuste baseado na minimização de funções, sobre um espaço de parâmetros que representam as incertezas deste modelo. O Método dos Mínimos Quadrados representa uma técnica de otimização numérica que busca o melhor ajustamento para um conjunto de informações através da minimização da soma dos quadrados das diferenças em relação aos valores de referência. O problema de mínimos quadrados ordinários exige que as variáveis do problema sejam lineares entre si, o que a torna perfeitamente aplicável no ajuste de modelos numéricos de sistemas lineares e invariantes no tempo.

As técnicas de ajuste de modelos consistem na solução de um problema inverso, ou seja, conhecido o comportamento de um sistema físico, deseja-se determinar um modelo analítico que reproduza exatamente este comportamento. Desta forma, métodos matemáticos têm sido desenvolvidos no sentido de manipular as incertezas do modelo de forma a aproximar dados reais e dados numéricos (CAMPOS, 2002). O Método dos Mínimos Quadrados representa uma técnica de otimização numérica que busca a melhor aproximação entre duas curvas através da minimização da soma dos quadrados das diferenças entre valores de referência e os respectivos valores em ajuste.

O ajuste de modelos numéricos utilizando respostas no domínio da frequência experimentais é interessante devido à grande quantidade de informações que contém do sistema em questão. O Método dos Elementos Finitos têm sido largamente utilizado para este fim, empregando-se tanto técnicas diretas de ajuste das matrizes de massa, rigidez e amortecimento, como através de métodos iterativos que ajustam os parâmetros incertos utilizados na modelagem (CAMPOS, 2002). A utilização de métodos iterativos refinados que buscam a minimização de uma função, linear ou não linear, sobre um espaço de parâmetros dentro de uma região de confiança, pode fornecer resultados ainda mais precisos.

### **1.4 Objetivos do Trabalho**

Embora muitos estudos tenham comprovado a eficácia numérica da metodologia dos observadores de estado na diagnose de falhas em sistemas mecânicos, esta metodologia ainda encontra obstáculos para a sua ampla aplicação na prática. Um dos fatos pode estar relacionado ao não domínio das forças de excitação atuantes no sistema, visto que tais informações são necessárias na dinâmica dos observadores de estados tradicionais. As forças de excitação podem ser originadas pela dinâmica do próprio sistema, como é o caso dos sistemas rotativos, ou por influência de sistemas ou fenômenos periféricos que estão fora do domínio de monitoramento.

Muitas técnicas têm sido desenvolvidas no sentido de se identificar as excitações desconhecidas de sistemas mecânicos. Embora tais técnicas têm oferecido bons resultados, o presente trabalho busca oferecer uma alternativa funcionalmente mais simplificada para a diagnose de falhas via observadores de estado, onde o conhecimento das forças de excitação não é mais necessário. A simplificação numérico-computacional é obtida através da redução da ordem do observador de estados através do truncamento modal, porém mantendo sua ordem completa de estimação dos estados.

O ajuste das respostas no domínio da frequência, através do Método dos Mínimos Quadrados, é utilizado na obtenção de um modelo preciso de sistema rotativo, contornando as incertezas de alguns parâmetros estruturais presentes.

Os principais objetivos do trabalho podem ser classificados como:

- Introdução dos observadores de estados determinísticos (Observador de Luenberger) e estocásticos (Filtro de Kalman).
- Introdução dos observadores de estados com entradas desconhecidas.
- Simulação e análise das metodologias de diagnose de falhas utilizando observadores de estados, aplicadas em um modelo numérico de sistema massa-mola-amortecedor e em um modelo numérico de sistema rotativo discretizado por elementos finitos.
- Aplicar a metodologia de diagnose de falhas proposta em um sistema rotativo experimental, representando um caso real de sistema estrutural com excitação desconhecida.

## 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

---

### 2.1 Sistemas de Controle

A complexidade dos sistemas de engenharia atuais requer uma forma de análise e projeto que leve em conta a realização de tarefas complexas e precisas. A teoria de controle convencional é limitada no sentido de ser aplicável somente em sistemas de apenas uma entrada e uma saída. Esta teoria é baseada nas funções de transferência, ou seja, nas respostas no domínio da frequência. A teoria de controle moderno contrasta com a teoria de controle convencional no sentido de que a primeira é aplicável a sistemas com entradas e saídas múltiplas, lineares e não lineares e variantes ou invariantes no tempo (OGATA, 2002). Esta teoria moderna é fundamentada na descrição de um conjunto de equações de primeira ordem que podem ser combinadas numa equação matricial de primeira ordem, chamada de equação de estados. Esta representação, chamada de espaço de estados, fornece uma forma conveniente e compacta de análise e modelagem de sistemas multivariáveis.

#### 2.1.1 Definição de Espaço de Estados

O conceito de estado de um sistema dinâmico se refere a um conjunto de  $n$  variáveis, chamadas de variáveis de estado, que descrevem completamente um sistema e suas saídas para com as suas entradas. Uma descrição matemática de um sistema em termos das  $n$  de variáveis de estados, juntamente com o conhecimento destas variáveis em um tempo inicial  $t_0$  e das entradas deste sistema para o tempo  $t \geq t_0$ , são suficientes para predizer os estados futuros e as saídas deste sistema para todo o tempo  $t > 0$  (ROWELL, 2002).

De uma forma geral, as equações de estados podem ser escritas na forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x(t), u(t), t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x(t), u(t), t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x(t), u(t), t)\end{aligned}\tag{1}$$

onde  $f_i$  representa a  $i$ -ésima função generalizada em termos das variáveis de estado, das entradas do sistema e do tempo. Considerando o caso de sistemas lineares e invariantes no tempo, de ordem  $n$  e com  $r$  entradas, a equação (1) pode ser representada por uma equação matricial que representa o acoplamento das  $n$  equações diferenciais de primeira ordem com coeficientes constantes, na forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

que podem ser escritas na forma compacta

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3)$$

onde  $x(t)$  é um vetor coluna  $nx1$ ,  $u(t)$  é um vetor coluna de ordem  $mx1$ ,  $A$  é uma matriz quadrada  $nxn$  e  $B$  é uma matriz retangular  $nxm$ . A matriz  $A$  é chamada de matriz dinâmica, que tem a função de acoplar as variáveis de estado, e a matriz  $B$  é chamada de matriz de entradas, que tem a função de direcionamento e de peso das entradas do sistema. A equação (3) é chamada de equação matricial de estados.

As saídas do sistema podem ser descritas como sendo uma combinação linear do vetor de estados  $x(t)$  e do vetor de entradas  $u(t)$ . De uma forma geral, as equações de saídas podem ser escritas na forma

$$\begin{aligned} y_1(t) &= g_1(x(t), u(t), t) \\ y_2(t) &= g_2(x(t), u(t), t) \\ &\vdots \\ y_p(t) &= g_p(x(t), u(t), t) \end{aligned} \quad (4)$$

onde as funções  $g_i$  são funções generalizadas em termos das variáveis de estado, das entradas do sistema e do tempo. O vetor de saídas  $y(t)$ , que contém as  $p$  variáveis de saída do sistema, pode ser escrito na forma matricial generalizada

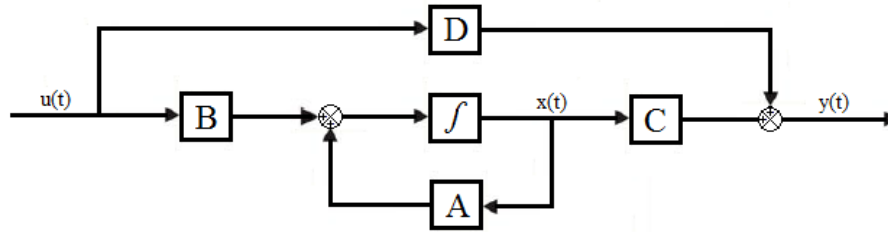
$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{p1} & \cdots & d_{pm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix} \quad (5)$$

ou na forma compacta

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (6)$$

onde  $y(t)$  é um vetor coluna  $px1$ . A matriz  $C$  é chamada de matriz de saídas, que tem a função de direcionamento e de peso das variáveis de estado, e a matriz  $D$  é chamada de matriz de transmissão direta, que tem a função de direcionamento e de peso com relação à influência das entradas nas saídas do sistema. A equação (5) é chamada de equação matricial de saídas. O diagrama de blocos da Figura (2) representa o fluxo das informações de um sistema através das matrizes da representação em espaço de estados, no domínio temporal contínuo.

**Figura 2 - Diagrama de blocos da representação em espaço de estados.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

### 2.1.2 Modelo de Sistema Dinâmico em Espaço de Estados

Sistemas dinâmicos em geral podem ser descritos por equações diferenciais ordinárias lineares de ordem  $k$  onde o tempo é a variável independente. Estas equações podem ser rearranjadas e representadas na forma de equações matricial-vetoriais de primeira ordem. Considerando o sistema de ordem  $k$

$$q^{(k)}(t) + a_1 q^{(k-1)}(t) + \dots + a_{k-1} \dot{q}(t) + a_k q(t) = u(t), \quad (7)$$

tem-se que o conhecimento das condições iniciais  $q(0), \dot{q}(0) \dots q^{(k-1)}(0)$ , juntamente com o sinal de entrada  $u(t)$ , prediz o comportamento do sistema. Desta forma,  $q(t), \dot{q}(t) \dots q^{(k-1)}(t)$  podem ser representados por um conjunto de  $k$  variáveis de estado, na forma

$$\begin{aligned} x_1(t) &= q(t) \\ x_2(t) &= \dot{q}(t) \\ &\vdots \\ x_n(t) &= q^{(k-1)}(t) \end{aligned} \quad (8)$$

Combinando (7) e (8), pode-se obter

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_2(t) \\ x_2(t) &= x_3(t) \\ &\vdots \\ x_n(t) &= -a_k x_1(t) - \dots - a_1 x_k(t) + u(t) \end{aligned} \quad (9)$$

que pode ser escrita na forma de (3), onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_k & -a_{k-1} & -a_{k-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

A saída do sistema pode ser dada na forma

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (12)$$

Que pode ser escrita na forma de (2.6), onde

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

e  $D$  é uma matriz nula contendo o mesmo número de linhas que  $C$  e o mesmo número de colunas que  $B$ . O caso que envolve derivadas na excitação não é considerado, pois  $q(t), \dot{q}(t), \dots, q^{(k-1)}(t)$  não podem ser classificados como um conjunto de variáveis de estado. Isto ocorre pelo motivo de o rearranjo feito em (9) não conduzir a uma solução única.

### 2.1.3 Modelo de Sistema Estrutural em Espaço de Estados

Modelos analíticos de sistemas estruturais podem ser derivados das leis de movimento de Newton, das equações de movimento de Lagrange ou do princípio de D'Alembert. Um modelo estrutural pode ser construído através da discretização do sistema pelo Método dos Elementos Finitos ou identificado via métodos de identificação modal. Estes modelos são descritos por equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, que podem ser rearranjadas e descritas na forma de espaço de estados.

### 2.1.3.1 Modelo em Coordenadas Nodais

Modelos analíticos de sistemas estruturais em coordenadas nodais podem ser descritos em termos dos deslocamentos, velocidades e acelerações dos pontos nodais do sistema discretizado. Um modelo estrutural descrito em coordenadas nodais é representado por uma equação diferencial matricial de segunda ordem na forma

$$M\ddot{q}(t) + C_a\dot{q}(t) + Kq(t) = B_0u(t) \quad (14)$$

$$y = C_{oq}q + C_{ov}\dot{q} \quad (15)$$

onde  $\ddot{q}(t)$  representa o vetor de acelerações nodais,  $\dot{q}(t)$  o vetor de velocidades nodais e  $q(t)$  o vetor de deslocamentos nodais. A matriz  $M$  é uma matriz simétrica positiva definida que representa a massa do sistema. A matriz  $K$  é uma matriz simétrica positiva semi-definida que representa a rigidez do sistema. A matriz  $C_a$  é uma matriz positiva semi-definida, não necessariamente simétrica, que representa o amortecimento do sistema. Em sistemas estruturais, devido à inexatidão das naturezas de dissipação de energia, é comum considerar um amortecimento proporcional. Esta proporcionalidade considera que a matriz de amortecimento seja uma combinação linear das matrizes de massa e de rigidez, na forma

$$C_a = \alpha'M + \beta'K \quad (15)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são grandezas escalares não negativas.

A representação do modelo em espaço de estados em coordenadas nodais é obtida das equações (15) e (16), reescritas na forma

$$\ddot{q}(t) + M^{-1}C_a\dot{q}(t) + M^{-1}Kq(t) = M^{-1}B_0u(t) \quad (16)$$

$$y = C_{oq}q + C_{ov}\dot{q} \quad (17)$$

onde as matrizes  $C_{oq}$  e  $C_{ov}$  representam as matrizes de saídas para deslocamentos e para velocidades, respectivamente.

O modelo em espaço de estados de um sistema estrutural trata da representação de uma equação matricial diferencial ordinária de segunda ordem em uma equação matricial diferencial ordinária de primeira ordem. Desta forma, utilizando a notação de estados de (8), pode-se assumir que

$$x_1(t) = q(t) \quad (18)$$

$$x_2(t) = \dot{q}(t) \quad (19)$$

Desta forma, combinando com (16) e (17), obtém-se as seguintes equações diferenciais de primeira ordem

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (20)$$

$$\dot{x}_2(t) = -M^{-1}Kx_1(t) - M^{-1}C_a x_2(t) + M^{-1}B_0 u(t) \quad (21)$$

$$y = C_{oq}x_1(t) + C_{ov}x_2(t) \quad (22)$$

Considerando o vetor de estados na forma

$$x(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{Bmatrix} \quad (23)$$

as equações (20) e (21) podem ser escritas na forma de (3), obtendo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C_a \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}B_0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

e a equação (22) na forma de (6), obtendo

$$C = [C_{oq} \quad C_{ov}] \quad (26)$$

$$D = [0]_{n \times m} \quad (27)$$

### 2.1.3.2 Modelo em Coordenadas Modais

A equação matricial diferencial ordinária de segunda ordem que descreve a dinâmica de um sistema mecânico pode ser definida por coordenadas independentes. Esta representação é composta por  $n$  equações de movimento desacopladas que compõe a dinâmica do sistema completo, como uma composição de  $n$  sistemas de um grau de liberdade.

A representação em coordenadas modais pode ser obtida por transformação linear do modelo em coordenadas nodais através da matriz modal. A matriz modal é obtida a partir do modelo em coordenadas nodais de (14) não amortecido ( $C_a=0$ ) e não excitado ( $u(t)=0$ ), na forma

$$M\ddot{q}(t) + Kq(t) = 0 \quad (28)$$

Aplicando a transformada de Laplace em (28), considerando como nulas as condições iniciais do vetor  $q$ , tem-se

$$MQ(s)s^2 + KQ(s) = 0 \quad (29)$$

onde  $s$  é uma grandeza complexa cujas partes real e imaginária, neste caso, representam a convergência e a frequência de resposta do sistema livre, respectivamente. Para o presente caso de sistema não amortecido, a parte real é nula ( $s=j\omega$ ). Reescrevendo (29), tem-se

$$KQ(s) = -Ms^2Q(s) \quad (30)$$

A equação acima representa um problema algébrico de autovalor e autovetor. Isto significa que existe um conjunto de  $n$  valores de  $s^2$  (chamados de autovalores) que, associados aos respectivos  $n$  vetores correspondentes  $Q(s)$  (chamados de autovetores), são soluções da referida igualdade em (30).

Expressando (30) com todos os autovalores e respectivos autovetores do sistema, obtêm-se

$$KV = M\Omega^2V \quad (31)$$

sendo  $\Omega$  uma matriz diagonal composta pelos autovalores generalizados e  $V$  uma matriz cujas colunas representam os autovetores correspondentes, nas formas:

$$\Omega = \begin{bmatrix} -s_1 & & & 0 \\ & -s_2 & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & -s_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 & & & 0 \\ & w_2 & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & w_n \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$V = [Q_1(s) \quad Q_2(s) \quad \dots \quad Q_n(s)] = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{21} & \dots & q_{n1} \\ q_{12} & q_{22} & \dots & q_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{1n} & q_{2n} & \dots & q_{nn} \end{bmatrix} \quad (33)$$

onde  $q_{ij}$  representa o  $j$ -ésimo deslocamento do  $i$ -ésimo modo correspondente a  $i$ -ésima frequência natural  $w_i$  do sistema.

A matriz  $V$  tem a propriedade de diagonalizar as matrizes de massa e de rigidez em função do princípio da ortogonalidade do sistema não amortecido. Estas matrizes diagonalizadas são chamadas de matrizes modais de massa e de rigidez, respectivamente, e são obtidas nas formas

$$M_m = V^T M V \quad (34)$$

$$K_m = V^T K V \quad (35)$$

A mesma transformação pode ser aplicada no termo referente ao amortecimento em (14), obtendo assim a matriz modal de amortecimento, na forma

$$C_{am} = V^T C_a V \quad (26)$$

A matriz de amortecimento modal é diagonal apenas quando a matriz de amortecimento do sistema em coordenadas nodais é simétrica. Em sistemas rotativos, por exemplo, a matriz modal de amortecimento não é diagonal, pois a matriz de efeito giroscópico não é simétrica.

O vetor de deslocamento em coordenadas modais pode ser relacionado com o vetor de deslocamento em coordenadas nodais através da transformação linear

$$q(t) = V q_m(t) \quad (37)$$

Substituindo (37) em (21) e (22), pré-multiplicando por  $V^T$ , obtém-se

$$V^T M V \ddot{q}_m(t) + V^T C_a V \dot{q}_m(t) + V^T K V q_m(t) = V^T B_0 u(t) \quad (38)$$

$$y = C_{mq} q_m(t) + C_{mv} \dot{q}_m(t) \quad (39)$$

onde

$$C_{mq} = C_{oq} V \quad (40)$$

e

$$C_{mv} = C_{ov} V \quad (41)$$

Substituindo (34), (35) e (36) em (38), pré-multiplicando por  $M_m^{-1}$ , tem-se

$$\ddot{q}_m(t) + M_m^{-1} C_{am} \dot{q}_m(t) + M_m^{-1} K_m q_m(t) = B_m u(t) \quad (42)$$

onde

$$B_m = M_m^{-1} V^T B_0 \quad (43)$$

A equação (42) pode ser representada na forma

$$\ddot{q}_m(t) + 2Z\Omega\dot{q}_m(t) + \Omega^2 q_m(t) = B_m u(t) \quad (44)$$

onde  $Z$  é uma matriz diagonal composta pelos fatores de amortecimento modais do sistema, que pode ser obtida na forma

$$Z = 0.5 M_m^{-1} C_{am} \Omega^{-1} = 0.5 M_m^{-0.5} K_m^{-0.5} C_{am} = \begin{bmatrix} \zeta_1 & & & 0 \\ & \zeta_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \zeta_n \end{bmatrix} \quad (45)$$

onde  $\zeta_i$  representa o fator de amortecimento do  $i$ -ésimo modo. A diagonalidade das matrizes  $\Omega$  e  $Z$  demonstra que o sistema em (44) é composto por  $n$  equações de estado desacopladas, que podem ser escritas na forma equivalente

$$\ddot{q}_{mi}(t) + 2\zeta_i w_i \dot{q}_{mi}(t) + w_i^2 q_{mi}(t) = b_{mi} u(t) \quad (46)$$

onde  $b_{mi}$  representa a  $i$ -ésima linha de  $B_m$  e  $q_{mi}$  representa o deslocamento do  $i$ -ésimo modo do sistema. O mesmo pode ser considerado para a equação de saídas em (39), na forma

$$y(t) = c_{mqi} q_{mi}(t) + c_{mvi} \dot{q}_{mi}(t) \quad (47)$$

onde  $c_{mqi}$  e  $c_{mvi}$  representam a  $i$ -ésima coluna de  $C_{mq}$  e  $C_{mv}$ , respectivamente.

Utilizando a notação de estados de (8), pode-se assumir que

$$x_1(t) = q_m(t) \quad (47)$$

e

$$x_2(t) = \dot{q}_m(t) \quad (48)$$

Desta forma, combinando com (44) e (39), obtém-se as seguintes equações diferenciais de primeira ordem

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (49)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\Omega^{-1} x_1(t) - 2Z\Omega x_2(t) + B_m u(t) \quad (50)$$

$$y = C_{mq} x_1(t) + C_{mv} x_2(t) \quad (51)$$

Considerando o vetor de estados na forma

$$x(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_m(t) \\ \dot{q}_m(t) \end{Bmatrix} \quad (52)$$

as equações (49) e (50) podem ser escritas na forma de (3), obtendo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\Omega^2 & -2Z\Omega \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix} \quad (54)$$

e a equação (51) na forma de (6), obtendo

$$C = [C_{mq} \quad C_{mv}] \quad (55)$$

$$D = [0]_{n \times m} \quad (56)$$

O modelo em espaço de estados em coordenadas modais até então não favorece a redução modal. A forma de representação de espaço de estados em coordenadas modais é convenientemente apresentada na forma de blocos diagonais. Nesta representação, a matriz dinâmica é composta por  $n$  blocos diagonais  $2 \times 2$ , sendo que cada bloco representa o estado de um modo de vibração do sistema. O vetor de estados modal na representação em blocos diagonais é dado na forma

$$x(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix} \quad (57)$$

Sendo que cada componente representa o deslocamento e a velocidade do  $i$ -ésimo modo, na forma

$$x_i(t) = \begin{bmatrix} q_{mi}(t) \\ \dot{q}_{mi}(t) \end{bmatrix} \quad (58)$$

O vetor de estados em coordenadas modais na representação em blocos diagonais pode ser relacionado com o vetor de estados em coordenadas modais original através da transformação linear de coordenadas

$$\begin{Bmatrix} q_{m1} \\ \dot{q}_{m1} \\ q_{m2} \\ \dot{q}_{m2} \\ \vdots \\ q_{mn} \\ \dot{q}_{mn} \end{Bmatrix} = T' \begin{Bmatrix} q_{m1} \\ q_{m2} \\ \vdots \\ q_{mn} \\ \dot{q}_{m1} \\ \dot{q}_{m2} \\ \vdots \\ \dot{q}_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_1 \\ e_2 & 0 \\ 0 & e_2 \\ \vdots & \vdots \\ e_n & 0 \\ 0 & e_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{m1} \\ q_{m2} \\ \vdots \\ q_{mn} \\ \dot{q}_{m1} \\ \dot{q}_{m2} \\ \vdots \\ \dot{q}_{mn} \end{Bmatrix} \quad (59)$$

onde  $e_i$  é um vetor linha composto de  $n$  elementos nulos, com exceção do  $i$ -ésimo elemento, que é unitário.

Aplicando esta transformação linear na equação matricial de estados e na equação matricial de saídas, na base modal, obtêm-se as matrizes do modelo em espaço de estados descrito em coordenadas modais em blocos diagonais, nas formas

$$A_{mbd} = T' A T'^{-1} = \text{diag}(A_{mbd_i})_{i=1,2,\dots,n} = \begin{bmatrix} A_{mbd_1} & & & 0 \\ & A_{mbd_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_{mbd_n} \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$B_{mbd} = T' B = \begin{bmatrix} B_{mbd_1} \\ B_{mbd_2} \\ \vdots \\ B_{mbd_n} \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$C_{mbd} = C T'^{-1} = \begin{bmatrix} C_{mbd_1} & C_{mbd_2} & \dots & C_{mbd_n} \end{bmatrix} \quad (62)$$

onde

$$A_{mbd_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w_i^2 & -2\xi_i w_i \end{bmatrix} \quad (63)$$

$$B_{mbd_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{m_i} \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$C_{mbd_i} = \begin{bmatrix} c_{mq_i} & c_{mv_i} \end{bmatrix} \quad (65)$$

O subscrito “*mbd*” nas matrizes do modelo em espaço de estados indica que este se encontra descrito no domínio de coordenadas modais em blocos diagonais. As matrizes  $A_{mbd_i}$ ,  $B_{mbd_i}$  e  $C_{mbd_i}$  representam a matriz dinâmica, a matriz de entradas e a matriz de saídas na base modal, respectivamente, do  $i$ -ésimo modo do sistema. Nota-se que a matriz de transmissão direta não sofre alteração na transformação da representação modal original para a representação modal em blocos diagonais.

#### 2.1.4 Controlabilidade e Observabilidade

A definição de controlabilidade de um sistema dinâmico descrito em espaço de estados está relacionada com a interação das entradas do sistema com os seus estados. Um sistema linear, representado pelo par  $(A,B)$ , é dito completamente controlável em  $t_0$  se for possível haver uma entrada contínua  $u(t)$ , sendo  $t_0 \leq t \leq t_1$ , que levará o estado completo inicial  $x(t_0)$  para  $x(t_1)$  em um tempo finito, sendo  $t_1 > t_0$ . Uma das formas de se determinar se um sistema é completamente controlável é através da análise do posto da matriz conhecida como matriz de controlabilidade, dada por

$$C = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (66)$$

Se o posto da matriz de controlabilidade for  $n$ , o sistema é completamente controlável.

A definição de observabilidade de um sistema dinâmico descrito em espaço de estados está relacionada com a iteração dos estados do sistema com as suas saídas. Um sistema linear, representado pelo par  $(A,C)$ , é dito completamente observável em  $t_0$  se o estado completo inicial  $x(t_0)$  puder ser determinado a partir da saída  $y(t)$ , sendo  $t_0 \leq t \leq t_1$  e  $t_1 > t_0$ . Considerando um sistema discreto, uma das formas de se determinar se este sistema é ou não completamente observável, é através da análise do posto da matriz conhecida como matriz de observabilidade, dada por

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (67)$$

Se o posto da matriz de observabilidade a  $n$ , o sistema é completamente observável.

Estes critérios são limitados no sentido de fornecerem apenas uma informação binária com relação à controlabilidade e a observabilidade de um sistema, pois não são capazes de quantificar estas propriedades quando este sistema não é completamente controlável ou completamente observável. Outro problema surge com o aumento da ordem do sistema, que implica em grandes cálculos exponenciais matriciais que podem levar a erros de ordem numérica.

Segundo Gawronski (2003), uma forma alternativa utiliza as matrizes grammianas de controlabilidade e de observabilidade para determinar estas propriedades do sistema expressando de forma qualitativa a controlabilidade e a observabilidade, respectivamente, de sistemas descritos na forma de espaço de estados. As matrizes grammianas de controlabilidade e observabilidade podem ser obtidas, respectivamente, da solução estacionária das equações matriciais algébricas de Lyapunov que seguem

$$AW_c + W_c A^T + BB^T = 0 \quad (68)$$

$$A^T W_o + W_o A + C^T C = 0 \quad (69)$$

Se o sistema for controlável, ou pelo menos estabilizável, a matriz grammiana de controlabilidade será positiva definida. Se o sistema for observável, ou pelo menos detectável, a matriz grammiana de observabilidade será positiva definida.

### 2.1.4.1 Princípio da Dualidade

Segundo Ogata (2002), a controlabilidade e a observabilidade de um sistema dinâmico são relacionadas através do princípio da dualidade. Considerando um sistema descrito em espaço de estados, dado por  $S_1$ , na forma

$$S_1 \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad \begin{matrix} (70) \\ (71) \end{matrix}$$

tem-se que o seu sistema dual, dado por  $S_2$ , é dado na forma:

$$S_2 \begin{cases} \dot{z}(t) = A^* z(t) + C^* u(t) \\ y(t) = B^* z(t) + Du(t) \end{cases} \quad \begin{matrix} (72) \\ (73) \end{matrix}$$

onde o índice \* indica o transposto conjugado da matriz. O princípio da dualidade estabelece que o sistema  $S_1$  será completamente controlável se o sistema  $S_2$  for completamente observável, e vice-versa.

### 2.1.5 Redução de Modelos

Um sistema estrutural discretizado pelo Método dos Elementos Finitos pode resultar em um modelo com muitos graus de liberdade. Tipicamente, modelos com grande número de graus de liberdade causam dificuldades numéricas em análises dinâmicas, sem considerar os custos computacionais (GAWRONSKI, 2003). As técnicas de redução de modelos em geral têm o objetivo de fornecer um modelo reduzido que tenha a mesma essência do modelo completo. Uma das técnicas mais utilizadas é a do truncamento modal, que reduz um modelo em espaço de estados em coordenadas modais através da eliminação dos modos menos representativos do sistema. No entanto, há várias formas de avaliar a importância dos modos de um sistema em espaço de estados.

As matrizes gramianas de controlabilidade e de observabilidade dependem diretamente do vetor de estados do sistema e seus autovalores sofrem alterações quando há alguma transformação de coordenadas. No entanto, os autovalores do produto entre as matrizes gramianas de controlabilidade e observabilidade são invariantes com relação à transformação de coordenadas. Estes valores são conhecidos como valores singulares de Hankel, e são amplamente usados na análise de redução modal de modelos de sistemas dinâmicos. Os métodos de redução de modelos que utilizam os valores singulares de Hankel mais empregados são os da realização balanceada e da norma Hankel.

### 2.1.5.1 Realização Balanceada

Um caso específico ocorre quando as matrizes grammianas de controlabilidade e de observabilidade são matrizes diagonais idênticas. Esta propriedade representa que cada estado deste sistema é tão controlável quanto observável, da mesma forma que pode ser utilizada para avaliar a influência de cada estado na dinâmica do sistema. Um sistema em espaço de estados balanceado, ou em coordenadas balanceadas, pode ser obtido de um sistema em espaço de estados generalizado através da transformação linear

$$x(t) = T' x_b(t) \quad (74)$$

onde a matriz  $T'$ , e sua inversa, são determinadas nas formas

$$T' = P U \Gamma^{-0.5} \quad (75)$$

$$T'^{-1} = \Gamma^{-0.5} V^T Q \quad (76)$$

As matrizes  $\Gamma$ ,  $V$  e  $U$  são obtidas da decomposição em valores singulares da matriz  $H$ , que representa o produto das matrizes  $P$  e  $Q$ , na forma

$$H = V \Gamma U^T = Q P \quad (77)$$

As matrizes  $P$  e  $Q$  também podem ser obtidas da decomposição dos grammianos de controlabilidade e observabilidade, respectivamente, nas formas

$$W_c = P P^T \quad (78)$$

e

$$W_o = Q^T Q \quad (79)$$

As matrizes grammianas de controlabilidade do sistema balanceado e do sistema generalizado podem ser relacionadas pela matriz de transformação  $R$ , na forma

$$W_{cb} = T'^{-1} W_c T'^{-T} \quad (80)$$

Substituindo (75), (76) e (78) em (80), obtém-se

$$W_{cb} = T'^{-0.5} V^T Q P P^T Q^T V \Gamma^{-0.5} \quad (81)$$

Utilizando (77), tem-se que

$$W_{cb} = T'^{-0.5} V^T H H^T V \Gamma^{-0.5} = T'^{-0.5} V^T V \Gamma U^T U \Gamma V^T V \Gamma^{-0.5} \quad (82)$$

que, considerando que  $V^T V = I$  e  $U^T U = I$ , (82) pode ser escrita na forma

$$W_{cb} = \Gamma^{-0.5} \Gamma^2 \Gamma^{-0.5} = \Gamma \quad (83)$$

O mesmo procedimento pode ser feito com a matriz grammiana de observabilidade do sistema balanceado, que resultará em

$$W_{ob} = \Gamma \quad (84)$$

comprovando que a transformação (74) fornece um sistema balanceado. Os valores singulares de Hankel deste sistema são representados decrescentemente pelos itens da matriz diagonal  $\Gamma$ , na forma

$$\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \quad (85)$$

Isto representa que a redução modal pode ser feita eliminando-se os últimos modos no vetor de estados, pois representam os modos com os menores valores singulares de Hankel do sistema.

### 2.1.5.2 Norma Hankel

Uma alternativa ao uso do método da realização balanceada na redução de modelos é o uso da norma Hankel. Neste método, trabalha-se com o modelo em espaço de estados em coordenadas modais. A norma Hankel é uma medida da quantidade de energia que pode ser armazenada em um sistema, sendo representada pelo maior valor singular de Hankel, na forma

$$\|G\|_h = \gamma_{\max} \quad (86)$$

Utilizando esta análise em um sistema descrito na forma de espaço de estados em coordenadas modais dispostos na forma de blocos diagonais, pode-se quantificar a representatividade de cada modo deste sistema. Considerando a tripla  $[A_{mbdi}, B_{mbdi}, C_{mbdi}]$ , representando a dinâmica do  $i$ -ésimo modo do sistema, a norma Hankel deste sistema pode ser dada pela forma aproximada

$$\|G_i\|_h = \gamma_i \cong \frac{\|B_{mbdi}\|_2 \|C_{mbdi}\|_2}{4\zeta_i w_i} = \frac{\left[ \text{tr}(B_{mbdi} B_{mbdi}^T) \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \text{tr}(C_{mbdi} C_{mbdi}^T) \right]^{\frac{1}{2}}}{4\zeta_i w_i} \quad (87)$$

De acordo com Glover (1984), o limite superior da quantidade de energia que é despendida quando um sistema sofre uma redução modal pode ser expressa na forma absoluta

$$e_h = \|G - G_r\|_h \leq \sum_{n_r+1}^n \gamma_i \quad (88)$$

onde  $n_r$  representa o número de estados do modelo reduzido.

### 2.1.6 Modelos em Espaço de Estados no Domínio Temporal Discreto

As representações em espaço de estados até então foram demonstradas através de equações diferenciais. No entanto, um sistema em espaço de estados pode ser descrito por equações discretas, ou de diferenças, no domínio do tempo. Esta análise é bastante importante na implementação computacional de modelos, pois os dados obtidos experimentalmente se apresentam sempre na forma temporal discreta. Sem perda de generalidade, as técnicas que serão apresentadas nos capítulos seguintes envolverão apenas os casos de sistemas em espaço de estados em tempo discreto.

A equação matricial de primeira ordem que representa um modelo generalizado em espaço de estados na forma temporal contínua, na forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (89)$$

pode ser resolvida analiticamente, obtendo

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad (90)$$

Definindo o tempo como uma soma discreta de intervalos iguais, chamados de períodos de amostragem, pode-se escrever  $t$  e  $t_0$ , respectivamente, nas formas

$$t = Tk + T \quad (91)$$

e

$$t_0 = Tk \quad (92)$$

sendo  $T$  o período de amostragem, obedecendo o teorema da amostragem de Nyquist. Este teorema prevê que o período de amostragem deve ser maior que o dobro do período da maior frequência presente no sinal a ser amostrado. Este teorema tem o objetivo de prevenir a ocorrência do fenômeno de *aliasing*, que representa a perda de informações no processo inverso, ou seja, na transformação do sinal discreto em sinal contínuo.

Substituindo (91) e (92) em (90), obtém-se

$$x(Tk + T) = e^{A(T)} x(Tk) + \int_{Tk}^{Tk+T} e^{A(Tk+T-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad (2.93)$$

Como  $u(\tau) = u(kT)$  para  $kT \leq \tau < Tk+T$ , a equação acima pode ser escrita na forma

$$x(Tk + T) = e^{A(T)} x(Tk) + \left( \int_{Tk}^{Tk+T} e^{A(Tk+T-\tau)} d\tau \right) Bu(Tk) \quad (2.94)$$

A integral em (94) pode ser expressa na forma

$$\int_{tK}^{T_k+T} e^{A(T_k+T-\tau)} d\tau = \int_0^T e^{A(\eta)} d\eta \quad (95)$$

onde  $\eta = T_k + T - \tau$ . Substituindo em (94), obtêm-se

$$x(T_k + T) = e^{A(T)} x(T_k) + \left( \int_0^T e^{A\eta} d\eta \right) Bu(T_k) \quad (96)$$

A equação acima pode ser expressa na forma

$$x(T_k + T) = A'x(T_k) + B'u(T_k) \quad (97)$$

A equação (97) representa o modelo em espaço de estados na forma temporal discreta, onde  $A'$  e  $B'$  são as matrizes dinâmica e de entradas, nas formas

$$A' = e^{AT} \quad (98)$$

$$B' = \left( \int_0^T e^{A\eta} d\eta \right) B \quad (99)$$

As equações em (98) e (99) podem ser expressas também na forma de séries de Taylor para função exponencial, que seguem, respectivamente

$$A' = I + AT \left( \frac{1}{2!} AT + \frac{1}{3!} A^2 T^2 + \dots \right) \quad (100)$$

$$B' = \left( \frac{1}{2!} AT + \frac{1}{3!} A^2 T^2 + \dots \right) TB \quad (101)$$

As matrizes de saídas e de transmissão direta não sofrem alteração em relação à forma temporal contínua.

### 2.1.7 Modelos em Espaço de Estados Utilizando Sensores de Aceleração

A utilização de sensores de aceleração em estruturas é bastante comum devido à sua simplicidade, além do fato de que não requerem de uma referência para as medições. Porém, a aceleração dos graus de liberdade de um sistema estrutural não é representada no vetor de estados da representação do modelo em espaço de estados. Desta forma, esta informação não pode ser expressa apenas como uma combinação linear do vetor de estados do sistema, mas sim de sua forma derivativa.

Considerando-se a equação de saídas de um sistema estrutural em espaço de estados na forma genérica

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (102)$$

cujo vetor de estados é dado por

$$x(t) = \begin{Bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{Bmatrix} \quad (103)$$

e sua derivada por

$$\dot{x}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{q}(t) \\ \ddot{q}(t) \end{Bmatrix}, \quad (104)$$

deseja-se obter  $\ddot{q}(t)$  através de  $y(t)$ . Desta forma, a equação de saídas deste sistema deve ser uma combinação linear de (104), na forma

$$y(t) = C_a \dot{x}(t) \quad (105)$$

Substituindo (3) em (105), esta se torna

$$y(t) = C_a Ax(t) + C_a Bu(t) \quad (106)$$

Como pode ser notado, a equação (106) é semelhante à equação de saídas em (102). Assim, as matrizes de saídas e de transmissão direta do sistema serão, respectivamente,

$$C = C_a A \quad (107)$$

e

$$D = C_a B \quad (108)$$

## 2.2 Observadores de Estado

É indiscutível a importância de se conhecer completamente o comportamento de um sistema dinâmico. No entanto, muitas variáveis de um sistema dinâmico podem não estar disponíveis para medição ou, quando disponíveis, requerem um grande número de sensores. Muitas técnicas de controle e de monitoramento de sistemas são baseadas no conhecimento do vetor de estados completo do modelo numérico. Desta forma, a obtenção das respostas destas variáveis deve ser feita de forma estimada.

Luenberger (1966) demonstrou que os estados de um sistema dinâmico determinístico podem ser estimados a partir do conhecimento das suas entradas e das suas saídas, desde que este sistema seja observável, ou pelo menos detectável. Este dispositivo, baseado em um sistema de controle em malha fechada, é conhecido como Observador de Luenberger. No entanto, este tipo de observador não leva em consideração a presença de interferências estocásticas nos estados e nas respostas obtidas do sistema. Kalman (1960) desenvolveu um observador ótimo, conhecido como Filtro de Kalman, que leva em consideração os distúrbios e os erros de

observação que podem ocorrer em um sistema a ser observado. Estas duas metodologias de estimação de estados envolvem o formato clássico de observadores de estado, que utilizam as entradas e as saídas do sistema de modo a obter uma estimativa do vetor de estados do sistema. Todos os desenvolvimentos serão apresentados no domínio temporal discreto. Por motivo de simplificação, as matrizes de estados discretas serão apresentadas sem o sobrescrito “ $\sim$ ”.

### 2.2.1 Observador de Luenberger

Considerando o sistema em espaço de estados no domínio discreto na forma

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \quad \begin{matrix} (109) \\ (110) \end{matrix}$$

deseja-se obter uma estimativa do vetor de estados deste sistema, denotada por  $x_e$ , através do modelo dinâmico discreto descrito na forma

$$\begin{cases} x_e(k+1) = Ax_e(k) + Bu(k) + L_k(y(k) - y_e(k)) \\ y_e(k) = Cx_e(k) + Du(k) \end{cases} \quad \begin{matrix} (111) \\ (112) \end{matrix}$$

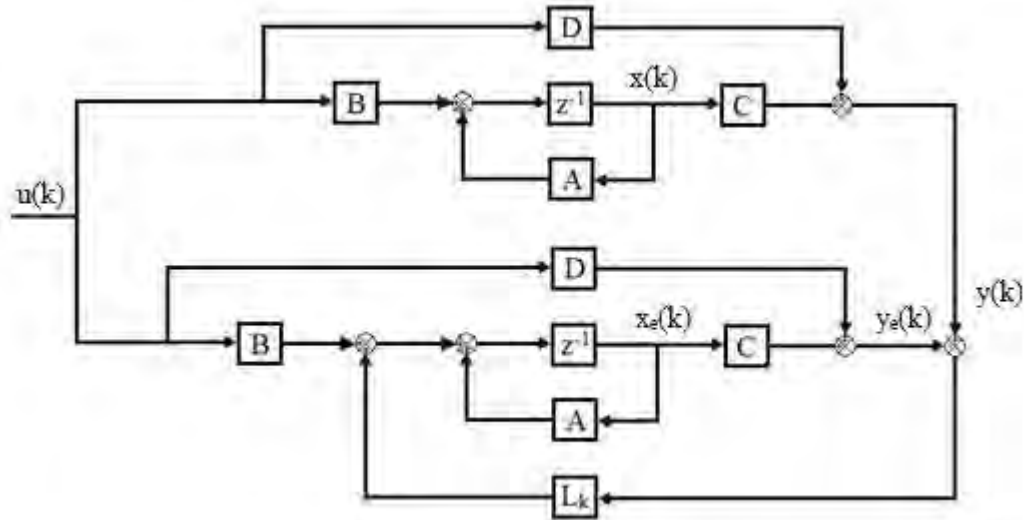
Este sistema em malha fechada representa o observador de estados tradicional, conhecido como observador de Luenberger, representado pelo diagrama de blocos da Figura 3. Como pode ser notado, o último termo da equação (111) é proporcional ao erro de estimação. Esta informação é retroalimentada no observador no sentido de minimizar a diferença entre as respostas reais e as respostas estimadas pelo observador. A dinâmica desta diferença pode ser expressa pelo sistema

$$e(k+1) = (A - L_k C)e(k) \quad (113)$$

onde

$$e(k) = x(k) - x_e(k) \quad (114)$$

**Figura 3 - Diagrama de blocos de um sistema de observação de estados.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

O sistema em (113) representa a dinâmica do erro de estimação. A estabilidade deste sistema representa que este erro convergirá para zero, independentemente das suas condições iniciais. Desta forma, o cálculo da matriz  $L_k$  é feito de modo que os pólos do sistema em (113) sejam estáveis. Este processo em si representa o projeto do observador de estados de ordem plena. O projeto do observador de estados de ordem plena pode ser feito também utilizando o princípio da dualidade. Considerando o sistema original dualizado, na forma

$$\begin{cases} z(k+1) = A^* z(k) + C^* u(k) \end{cases} \quad (115)$$

$$\begin{cases} y(k) = B^* z(k) + D u(k) \end{cases} \quad (116)$$

e estabelecendo uma lei de controle em malha fechada dada por

$$u(k) = -K_k z(k) \quad (117)$$

tem-se que  $K$  deve ser calculado de forma que os polos do sistema

$$z(k+1) = (A^* - C^* K_k) z(k) \quad (118)$$

sejam estáveis. O sistema em (118) pode ser escrito na forma equivalente

$$z(k+1) = (A - K^T C) z(k) \quad (119)$$

Comparando com (113), pode-se estabelecer a relação

$$K_k^T = L_k \quad (120)$$

que representa a equivalência entre o projeto do observador de estados de ordem plena para um dado sistema e o projeto de um controlador em malha fechada para o respectivo sistema dual.

Muitas técnicas podem ser utilizadas no cálculo da matriz do ganho do observador. Técnicas baseadas na alocação dos polos podem ser empregadas, porém isto deve ser feita em compromisso com a rapidez adequada da convergência do erro de estimação. É importante considerar que o aumento da velocidade de convergência implica na ampliação dos efeitos indesejados relacionados à sensibilidade do sistema às perturbações e ruídos de medição. Outro fator que deve ser considerado no projeto de observadores de estados é o número de polos a serem alocados, que pode tornar o processo de alocação exaustivo e inviável quando o sistema possuir um número elevado de graus de liberdade.

### 2.2.1.1 Regulador Linear Quadrático

O projeto de observadores de estado de ordem plena pode ser feito através da aplicação de uma lei de controle ótimo no sistema dual em malha fechada no sentido de minimizar o índice de desempenho quadrático dado por

$$J = \sum_{i=0}^{\infty} (z(k)^T Q' z(k) + u(k)^T R' u(k)) \quad (121)$$

onde  $Q'$  e  $R'$  são matrizes hermitianas positiva definidas que determinam a importância relativa do erro e do dispêndio de energia dos sinais de controle (Ogata, 2002). Considerando que o sistema em malha fechada seja estável, o índice de desempenho pode ser reduzido para

$$J = z(0)^* P_k z(0) \quad (122)$$

Desta forma, este índice de desempenho pode ser expresso em função apenas do estado inicial do sistema e da matriz  $P_k$ , que representa a única solução estacionária positiva definida da equação matricial discreta de Riccati, na forma

$$P_{k+1} = Q + A(P_k - P_k C^* (R + C P_k C^*)^{-1} C P_k) A^* \quad (123)$$

onde a matriz  $P_k$  é iniciada como sendo a própria matriz  $Q$ . A matriz de controle  $K_k$  minimiza a função de custo quadrática quando obedece a relação

$$K_k = (R + C P_k C^*)^{-1} C P_k A^* \quad (124)$$

Desta forma, a matriz  $L_k$  do observador de estados de ordem plena pode ser obtida utilizando a relação em (120).

### 2.2.2 Filtro de Kalman

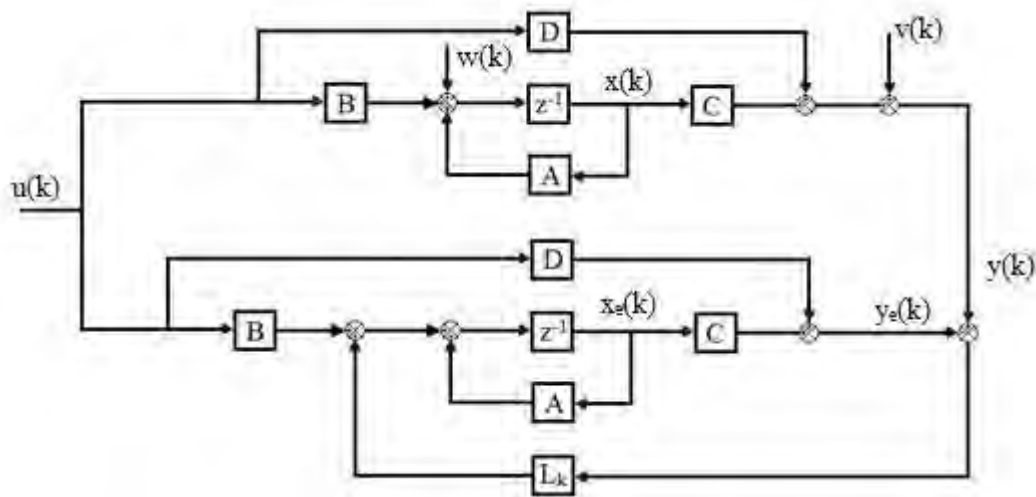
As técnicas de projeto de observadores de estado até então não consideram a presença de distúrbios e interferências no sistema. O filtro de Kalman representa um estimador recursivo que trata o problema de interferências estocásticas que podem estar presentes em qualquer sistema dinâmico, como mostra o diagrama de blocos da Figura 4. Considerando o sistema em espaço de estados no domínio discreto

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + w(k) \end{cases} \quad (125)$$

$$\begin{cases} y(k) = Cx(k) + Du(k) + Ew(k) + v(k) \end{cases} \quad (126)$$

tem-se que este sistema é corrompido por  $w(k)$ , que representa o ruído de excitação de estados, e  $v(k)$ , que representa o ruído de medição ou de observação.

**Figura 4 - Diagrama de blocos de observação de estados com a presença de ruídos de estado e ruídos de observação.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A matriz  $E$  representa a matriz de transmissão direta do ruído de observação na saída do sistema. Estes sinais não são correlacionados e são caracterizados como ruídos brancos representados por variáveis aleatórias com distribuição normal gaussiana, representados por

$$w(k) \approx N(0, Q) \quad (127)$$

e

$$v(k) \approx N(0, R) \quad (128)$$

onde  $Q$  e  $R$  são as matrizes de covariância dos ruídos de estado e de medição, respectivamente.

Estas matrizes podem sofrer variações ao longo do processo, porém serão consideradas constantes nos desenvolvimentos neste trabalho. O filtro de Kalman representa um estimador

recursivo ótimo que minimiza a covariância do erro de estimação. O processo iterativo do filtro de Kalman pode ser dividido em uma parte preditora e uma parte corretora.

A parte corretora é responsável por projetar uma estimativa *a priori* dos estados do sistema e da matriz de covariância dos estados do próximo passo no processo iterativo através, respectivamente, das equações

$$x_e^-(k+1) = Ax_e(k) + Bu(k) \quad (129)$$

e

$$P_{k+1}^- = AP_k A^T + Q \quad (130)$$

onde  $P_k$  representa a matriz de covariância dos estados no instante  $k$  e o índice “-” representa a estimativa *a priori*. A parte corretora é responsável por incorporar as informações obtidas do estado seguinte, fornecendo a estimativa *a posteriori* da matriz do observador de estados, dos estados do sistema e da matriz de covariância de estados no próximo passo do processo iterativo através, respectivamente, das equações

$$L_k = P_k^- C^T (CP_k^- C^T + R)^{-1} \quad (131)$$

$$x_e(k+1) = x_e^-(k+1) + L_k (y(k) - y_e(k)) \quad (132)$$

e

$$P_{k+1} = (I - L_k C) P_{k+1}^- \quad (133)$$

e as saídas do sistema dadas pela equação

$$y_e(k) = Cx(k) + Du(k) \quad (134)$$

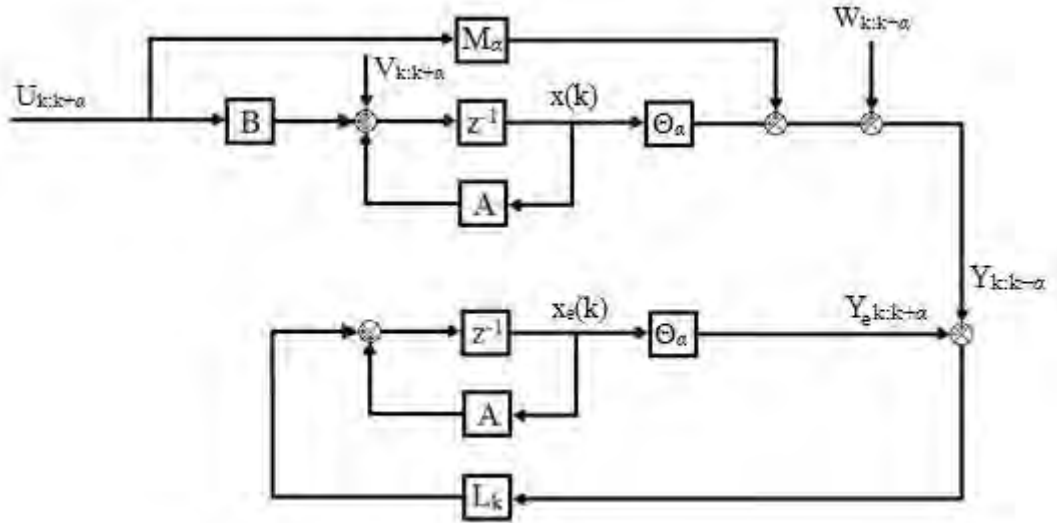
Pode ser notado que a equação em (132) do processo iterativo do estimador de Kalman é semelhante à equação do observador de estados de ordem plena em (111). Como pode ser notado, o Filtro de Kalman fornece uma estimativa instantânea para  $x(k)$ , baseada em  $u(k)$ ,  $y(k-1)$  e  $y(k)$ . Isto representa um caso de estimação *online*. A estimação *online* de estados representa a estimação dos estados no presente instante usando todas as medições até o presente instante (VAN DER HEIJDEN et al, 2004). No caso do Filtro de Kalman, trata-se de um estimador *online* ótimo.

### 2.2.3 Observador de Estados com Entradas Desconhecidas

Um caso importante de observação de estados diz respeito à presença de excitações desconhecidas no sistema. A não disponibilidade das informações referentes às excitações de um sistema impede a utilização de observadores de estados baseados nas técnicas tradicionais. A seguir será apresentado o projeto de observadores de estados para sistemas com entradas

desconhecidas, baseado na estimação *offline* com atraso, ou seja, utilizando-se das saídas atuais e posteriores do sistema, como mostra a Figura 5.

**Figura 5 - Diagrama de blocos de um sistema de estimação *offline* com atraso, dos estados de um sistema com a presença de ruídos de estados, ruídos de medição e excitações desconhecidas.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Considerando-se um sistema generalizado em espaço de estados no domínio discreto cuja resposta é expressa com  $\alpha+1$  passos temporais discretos, na forma:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + w(k) \end{cases} \quad (135)$$

$$Y_{k:k+\alpha} = \Theta_{\alpha} x(k) + M_{\alpha} U_{k:k+\alpha} + M_{w,\alpha} W_{k:k+\alpha} + V_{k:k+\alpha} \quad (136)$$

onde

$$Y_{k:k+\alpha} = \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ \vdots \\ y(k+\alpha) \end{bmatrix} \quad (137)$$

$$\Theta_{\alpha} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{\alpha} \end{bmatrix} \quad (138)$$

$$M_\alpha = \begin{bmatrix} D & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{\alpha-1}B & CA^{\alpha-2}B & \cdots & D \end{bmatrix} \quad (139)$$

$$U_{k:k+\alpha} = \begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ \vdots \\ u(k+\alpha) \end{bmatrix} \quad (140)$$

$$M_{w,\alpha} = \begin{bmatrix} E & 0 & \cdots & 0 \\ C & E & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{\alpha-1} & CA^{\alpha-2} & \cdots & E \end{bmatrix} \quad (141)$$

$$W_{k:k+\alpha} = \begin{bmatrix} w(k) \\ w(k+1) \\ \vdots \\ w(k+\alpha) \end{bmatrix} \quad (142)$$

e

$$V_{k:k+\alpha} = \begin{bmatrix} v(k) \\ v(k+1) \\ \vdots \\ v(k+\alpha) \end{bmatrix} \quad (143)$$

deseja-se projetar um observador de estados independentemente das entradas do sistema, na forma:

$$x_e(k+1) = Ax_e(k) + L_k(Y_{k:k+\alpha} - Y_{e,k:k+\alpha}) \quad (144)$$

O objetivo deste observador é obter uma estimativa de  $x(k)$ , reduzindo-se o erro médio quadrático de estimação e atenuando-se os efeitos dos ruídos do sistema. Por se tratar de um filtro baseado em instâncias posteriores das saídas do referido sistema, trata-se de um observador ótimo do tipo *smoother*. Neste trabalho, o atraso do observador será feito com passos temporais constantes, representando um caso específico conhecido como *fixed-lag smoother*.

Como pode ser notado, este observador se tornará um estimador *online* para o caso quando não houver nenhum passo de atraso, i.e.,  $\alpha=0$ . No entanto, a importância de se construir um estimador com  $\alpha>0$  está relacionada com o tratamento das interferências estocásticas externas

no sistema e com uma condição de existência para alguns sistemas, como será mostrado adiante.

De (135), (136) e (144), pode-se obter a dinâmica do erro de estimação na forma

$$\begin{aligned} e(k+1) = & (A - L_k \Theta_\alpha) e(k) + Bu(k) - L_k M_\alpha U_{k:k+\alpha} \\ & - L_k M_{w,\alpha} W_{k:k+\alpha} - L_k V_{k:k+\alpha} + w(k) \end{aligned} \quad (145)$$

A influência das entradas do sistema na dinâmica do observador pode ser anulada satisfazendo-se

$$L_k M_\alpha = [B \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \quad (146)$$

No entanto, algumas restrições envolvem a relação acima. A primeira restrição se refere à condição de inversão do sistema, que representa a existência de uma correspondência direta entre suas entradas e suas saídas. A condição de inversão, ou invertibilidade, de um sistema linear e invariante no tempo discreto pode ser dada na forma

$$\text{posto}[M_\alpha] - \text{posto}[M_{\alpha-1}] = r \quad (147)$$

onde  $\alpha$  representa o número de passos discretos de atraso de estimação.

Outra restrição diz que a invertibilidade deste sistema ocorre se, e somente se, sua inversão com relação à primeira restrição ocorrer até  $(n-q+1)$  passos de atraso. Para o caso específico onde  $D=0$ , a invertibilidade ocorrerá se, e somente se, sua inversão ocorrer até  $(n-r+1)$  passos de atraso (WILLSKY, 1974).

Combinando as duas condições de existência, tem-se que a invertibilidade do sistema (2.128)-(2.129) ocorrerá se, e somente se

$$\text{posto}[M_{n-q+1}] - \text{posto}[M_{n-q}] = r \quad (148)$$

onde  $q$  é a dimensão do espaço nulo de  $D$ .

Se a condição em (2.141) é satisfeita para  $\alpha > 0$ , o erro de estimação se torna uma função de múltiplos passos temporais dos ruídos de estados e dos ruídos de observação. Isto significa que estes ruídos passam a ter um comportamento de ruído colorido. No estudo de estimadores baseados no Filtro de Kalman, tem sido mostrado que a presença de ruídos coloridos pode ser tratada através da expansão da ordem do estimador (ANDERSON E MOORE, 1979). Sundaram e Hadjicostis (2006) utilizaram esta técnica na construção de um estimador ótimo para (2.128)-(2.129), como será mostrado a seguir.

Considerando que (148) é satisfeita para o sistema (135)-(136) com  $\alpha > 0$ , tem-se que este pode ser reescrito na forma expandida

$$\bar{x}(k+1) = \bar{A}\bar{x}(k) + \bar{B}u(k) + \bar{B}_n n(k) \quad (149)$$

$$y(k) = \bar{C}\bar{x}(k) + Du(k) \quad (150)$$

onde

$$\bar{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ W_{k:k+\alpha-1} \\ V_{k:k+\alpha-1} \end{bmatrix} \quad (151)$$

$$n(k) = \begin{bmatrix} w_{k+\alpha} \\ v_{k+\alpha} \end{bmatrix} \quad (152)$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & I_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_n & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (153)$$

$$\bar{B} = [B^T \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0]^T \quad (154)$$

$$\bar{B}_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & I_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I_p \end{bmatrix}^T \quad (155)$$

e

$$\bar{C} = [C \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0 \quad I_p \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0] \quad (156)$$

O sistema expandido em (149 - 150) tem dimensão  $\alpha(n+m)+n$ . A equação de saídas para  $\alpha+1$  passos temporais discretos é dada por

$$Y_{k:k+\alpha} = \bar{\Theta}_\alpha \bar{x}(k) + M_\alpha U_{k:k+\alpha} + M_{n,\alpha} n(k) \quad (157)$$

onde

$$\bar{\Theta}_\alpha = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 & \cdots & 0 & I_p & 0 & \cdots & 0 \\ CA & C & 0 & \cdots & 0 & 0 & I_p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{\alpha-1} & CA^{\alpha-2} & CA^{\alpha-3} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CA^\alpha & CA^{\alpha-1} & CA^{\alpha-2} & \cdots & C & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (158)$$

$$M_{n,\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C & I_m \end{bmatrix} \quad (159)$$

Um grupo de equações em (157) é independente do vetor de ruídos  $n(k)$ . Sundaram e Hadjicostis (2006) definiram uma transformação linear que divide o sistema (149)-(150) em dois grupos de estados, na forma

$$\hat{x}(k) = T' \bar{x}(k) = \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \end{bmatrix} \quad (160)$$

onde

$$T' = \begin{bmatrix} F\bar{\Theta}_\alpha \\ H \end{bmatrix} \quad (161)$$

A matriz  $F$  de (161) é dada por

$$F = [\bar{F} \quad 0] \quad (162)$$

onde  $\bar{F}$  é uma matriz cujas linhas formam uma base ortogonal do espaço nulo à esquerda de  $M_{\alpha-1}$ . A matriz  $H$  deve ser determinada de forma que  $T'$  seja inversível e ortogonal. Desta forma,  $H$  pode ser representada pela base ortogonal do espaço nulo à esquerda de  $F\bar{\Theta}_\alpha$ .

Aplicando a transformação linear (160) em (149), obtém-se o referido sistema

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k+1) \\ \hat{x}_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F\bar{\Theta}_\alpha \\ H \end{bmatrix} \bar{B}u(k) + \begin{bmatrix} F\bar{\Theta}_\alpha \\ H \end{bmatrix} \bar{B}_n \bar{n}(k) \quad (163)$$

cujos primeiros  $\beta_\alpha$  estados, representados por  $\hat{x}_1(k)$ , podem ser obtidos diretamente através da relação

$$\hat{x}_1(k) = F\bar{\Theta}_\alpha \bar{x}(k) = FY_{k:k+\alpha} \quad (164)$$

sendo

$$\beta_\alpha = \alpha p - \text{posto} [M_{\alpha-1}] \quad (165)$$

Desta forma, o papel do estimador de estados é restringido à estimação dos estados representados por  $\hat{x}_2(k)$ . A equação que representa a dinâmica dos estados  $\hat{x}_2(k)$  é dada por

$$\hat{x}_2(k+1) = \bar{A}_{21}\hat{x}_1(k) + \bar{A}_{22}\hat{x}_2(k) + H\bar{B}u(k) + H\bar{B}_n\bar{n}(k) \quad (166)$$

Substituindo (164) em (163), tem-se

$$\hat{x}_2(k+1) = \bar{A}_{22}\hat{x}_2(k) + \bar{A}_{21}PY_{k:k+\alpha} + H\bar{B}u(k) + H\bar{B}_n\bar{n}(k) \quad (167)$$

Aplicando a transformação (161) na equação de saídas em (157), pré-multiplicando por  $Q$ , tem-se

$$QY_{k:k+\alpha} = Q\bar{\Theta}_\alpha T'^{-1}\hat{x}(k) + QM_\alpha U_{k:k+\alpha} + QM_{n,\alpha}n(k) \quad (168)$$

onde

$$Q = \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix} \quad (169)$$

$$G = \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (170)$$

A matriz  $U$  deve ser determinada de modo que  $\begin{bmatrix} \bar{F} \\ U \end{bmatrix}$  seja inversível. Desta forma,  $U$  pode representar a base do espaço nulo de  $\bar{F}$ . A equação (168) pode ser escrita na forma

$$\begin{bmatrix} P \\ G \end{bmatrix} Y_{k:k+\alpha} = \begin{bmatrix} I_{\beta_\alpha} & 0 \\ L_1 & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ GM_\alpha \end{bmatrix} U_{k:k+\alpha} + \begin{bmatrix} 0 \\ GM_{n,\alpha} \end{bmatrix} n(k) \quad (171)$$

onde

$$\begin{bmatrix} L_1 & L_2 \end{bmatrix} = G\bar{\Theta}_\alpha T'^{-1} \quad (172)$$

Desta forma, a equação de saídas referente à dinâmica dos estados  $\hat{x}_2(k)$  pode ser dada na forma

$$GY_{k:k+\alpha} = L_1\hat{x}_1(k) + L_2\hat{x}_2(k) + GM_\alpha U_{k:k+\alpha} + GM_{n,\alpha}n(k) \quad (173)$$

Substituindo (164) em (173), fazendo os devidos rearranjos, esta se torna

$$(G - L_1F)Y_{k:k+\alpha} = L_2\hat{x}_2(k) + GM_\alpha U_{k:k+\alpha} + GM_{n,\alpha}n(k) \quad (174)$$

Desta forma, deseja-se construir um observador de ordem plena para o sistema representado por (167) e (174) na forma

$$\hat{x}_e(k+1) = \bar{A}_{22}\hat{x}_e(k) + \bar{A}_{21}PY_{k:k+\alpha} + L_k((G - L_1F)Y_{k:k+\alpha} - \hat{y}_e(k)) \quad (175)$$

$$\hat{y}_e(k) = L_2\hat{x}_e(k) \quad (176)$$

A matriz  $L_k$  é determinada de forma a minimizar o erro médio quadrático de estimação entre  $\hat{x}_2(k)$  e  $\hat{x}_e(k)$  e executar a função de *smoother*, que minimiza os efeitos dos ruídos de estados e de observação do sistema.

A dinâmica do erro de estimação é dada na forma

$$\begin{aligned} e(k+1) = & (\bar{A}_{22} - L_k L_2) e(k) + (L_k G M_{n,\alpha} - H \bar{B}_n) n(k) \\ & + (L_k G M_\alpha - [H \bar{B} \quad 0 \quad \cdots \quad 0]) U_{k:k+\alpha} \end{aligned} \quad (177)$$

Como pode ser notado em (177), o ruído não possui mais o comportamento colorido que ocorre em (145). A influência das entradas do sistema pode ser cancelada da dinâmica do observador fazendo-se

$$L_k G M_\alpha = [H \bar{B} \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \quad (178)$$

Considerando que o sistema satisfaça a condição em (2.141), a matriz  $L_k$  pode ser determinada introduzindo uma matriz  $N$  que satisfaça a relação

$$N G M_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_r & 0 \end{bmatrix} \quad (179)$$

onde  $N$  seja uma matriz cujas linhas formam uma base ortogonal para o espaço nulo à esquerda das últimas  $\alpha m$  colunas de  $G M_\alpha$ . A matriz  $L_k$  em (178) pode ser expressa também na forma

$$L_k = \hat{L}_k N \quad (180)$$

onde matriz  $\hat{L}_k$  é composta por duas partes

$$\hat{L}_k = \begin{bmatrix} \hat{L}_{1,k} & \hat{L}_{2,k} \end{bmatrix} \quad (181)$$

sendo que  $\hat{L}_{1,k}$  possui  $(m-r)$  colunas e  $\hat{L}_{2,k}$  possui  $r$  colunas. Isto significa que o número de saídas do sistema deve ser maior do que o seu número de entradas. Um caso específico ocorre quando o número de saídas é igual ao número de entradas. Neste caso, o observador perde a sua capacidade de minimizar o erro médio quadrático de estimação, restando apenas a função de filtro *smoother*.

Substituindo (179) e (180) em (178), esta se torna

$$\begin{bmatrix} \hat{L}_{1,k} & \hat{L}_{2,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_r & 0 \end{bmatrix} = [H \bar{B} \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \quad (182)$$

A equação (182) fornece a relação

$$\hat{L}_{2,k} = H\bar{B} \quad (183)$$

Substituindo (144) e (181) em (174), pode-se obter as relações

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = NL_2 \quad (184)$$

e

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} = NGM_{n,\alpha} \quad (185)$$

onde  $\Phi_2$  e  $\Psi_2$  possuem  $r$  colunas cada. Desta forma, a equação (174) pode ser reescrita na forma

$$e(k+1) = (\bar{A}_{22} - \hat{L}_{1,k}\Phi_1 - \hat{L}_{2,k}\Phi_2)e(k) + (\hat{L}_{1,k}\Psi_1 - \hat{L}_{2,k}\Psi_2 - H\bar{B}_n)n(k) \quad (186)$$

Substituindo (183) em (186), esta se torna

$$e(k+1) = (\bar{A}_{22} - H\bar{B}\Phi_2 - \hat{L}_{1,k}\Phi_1)e(k) + (\hat{L}_{1,k}\Psi_1 + H\bar{B}\Psi_2 - H\bar{B}_n)n(k) \quad (187)$$

Para efeito de simplificação, a equação (187) pode ser representada na forma

$$e(k+1) = (\Lambda - \hat{L}_{1,k}\Phi_1)e(k) + (\hat{L}_{1,k}\Psi_1 + I)n(k) \quad (188)$$

onde

$$\Lambda = \bar{A}_{22} - H\bar{B}\Phi_2 \quad (189)$$

e

$$I = H\bar{B}\Psi_2 - H\bar{B}_n \quad (190)$$

Desta forma, a matriz  $\hat{L}_{1,k}$  é calculada iterativamente, satisfazendo a relação

$$\hat{L}_{1,k} = (\Lambda P_k \Phi_1^T - \Pi \Pi \Psi_1^T)(\Phi_1 P_k \Phi_1^T + \Psi_1 \Pi \Psi_1^T)^{-1} \quad (191)$$

onde

$$\Pi = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \quad (192)$$

e  $P_k$  é a matriz de covariância do erro de estimação, cuja dinâmica é dada pela equação

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= \Lambda P_k \Lambda^T + \Pi P_k \Pi^T - \hat{L}_{1,k}(\Lambda P_k \Phi_1^T - \Pi \Pi \Psi_1^T)^T - (\Lambda P_k \Phi_1^T - \Pi \Pi \Psi_1^T) \hat{L}_{1,k}^T \\ &+ \hat{L}_{1,k}(\Phi_1 \Pi \Phi_1^T + \Psi_1 \Pi \Psi_1^T) \hat{L}_{1,k}^T \end{aligned} \quad (193)$$

A condição inicial dos estados do estimador pode ser obtida pela transformação

$$\hat{x}_e(0) = HE\{\bar{x}(0)\} \quad (194)$$

assegurando que o estimador seja inicializado com um valor esperado igual a zero. O valor estimado do vetor de estados original pode ser dado pela transformação inversa

$$x(k) = [I_n \quad 0]^T \begin{bmatrix} FY_{k:k+\alpha} \\ \hat{x}_e(k) \end{bmatrix} \quad (195)$$

e a matriz de covariância do erro de estimação do vetor de estados original é dada por

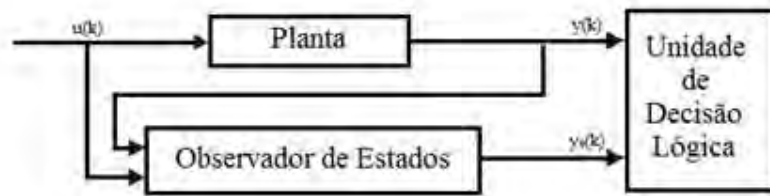
$$P_{k,x} = [I_n \quad 0] H^T P_x H \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (196)$$

## 2.3 Metodologia de Detecção de Falhas via Observadores de Estados

A metodologia de detecção de falhas utilizando observadores de estado é baseada na estimação redundante, ou seja, na estimação dos estados que estão sendo medidos. Esta metodologia parte do princípio que o sinal residual gerado entre o sinal real e o sinal estimado é mínimo quando o modelo numérico do observador de estados representa com fidelidade o sistema real em observação.

A detecção de falhas via observadores de estado é baseada na modelagem do sistema íntegro, visto que este modelo é utilizado no projeto do observador de estados denominado observador global. Isto representa que qualquer variação de parâmetros do sistema monitorado irá refletir no residual gerado da estimação redundante das variáveis de medição do sistema. A Figura 6 representa um sistema de monitoramento baseado na estimação redundante de estados.

**Figura 6 - Sistema de monitoramento baseado na estimação redundante de estados.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

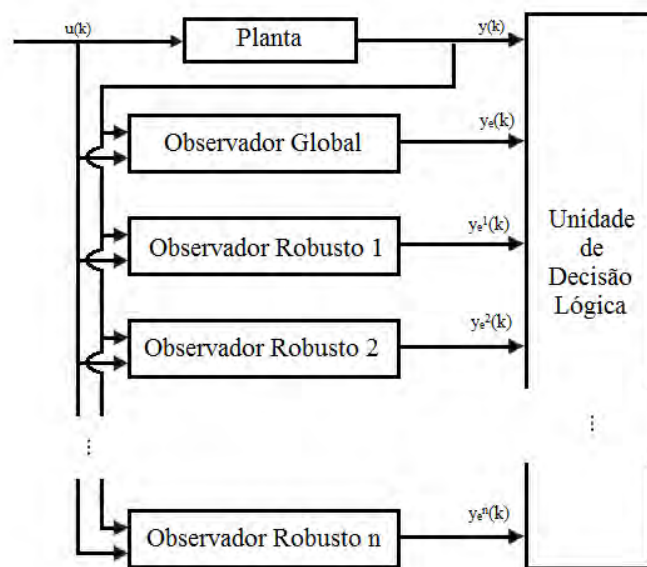
A identificação de falhas via observadores de estado é baseada na construção de uma classe de observadores denominados robustos, pois são destinados a identificar falhas específicas. Uma vantagem desta técnica está relacionada com a variabilidade de falhas que podem ser modeladas em um observador, porém isto exige uma quantidade elevada de observadores robustos. Isto representa que qualquer falha que possa ser modelada numericamente pode ser

detectada pelo observador robusto. Em contrapartida, para cada variação ou combinação de falhas, um observador robusto terá de ser projetado, aumentando a complexidade da construção do banco de observadores.

Quando uma falha surge no sistema monitorado, o sinal residual gerado com o observador de estados global sofre uma ampliação e o sinal residual do observador robusto que representa a falha ocorrente no sistema sofre uma atenuação. Esta análise representa uma avaliação qualitativa dos sinais residuais. No entanto, a comparação visual dos sinais pode ser inviável ou fornecer resultados imprecisos. Desta forma, é comum utilizar-se de valores numéricos que possam representar cada sinal residual, como o valor da raiz da média quadrática dos valores do sinal, ou valor RMS.

A análise utilizando valores RMS dos sinais residuais facilita a criação de uma lógica de comparação e avaliação dos resultados. O sistema de monitoramento pode ser conectado a uma unidade de decisão lógica que avalia as alterações nestes valores e determina as ações a serem tomadas. A dinâmica de monitoramento baseado nos observadores de estados ditos tradicionais é mostrada na Figura 7.

**Figura 7 - Sistema de monitoramento baseado em observadores de estados tradicionais.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

As metodologias de monitoramento de sistemas dinâmicos em geral devem fornecer diagnósticos com certa rapidez, visto que a evolução de uma ocasional falha deve ser acompanhada pelo sistema de monitoramento. A metodologia de detecção e identificação de falhas utilizando observadores de estado é baseada em rotinas computacionais que geram os sinais residuais produzidos pela comparação dos sinais medidos com os respectivos sinais estimados pelos observadores de estados global e robustos. O custo computacional requerido para esta tarefa pode ser elevado, visto que sistemas que possuem muitos graus de liberdade representam sistemas em espaço de estados de ordem elevada. Consequentemente, a ordem dos observadores de estados também será elevada.

Uma solução para a redução do custo computacional desta metodologia está na redução da ordem dos sistemas utilizados no projeto dos observadores de estados. Dado que os modos de um sistema dinâmico sejam ortogonais, a resposta temporal de um estado deste sistema pode ser expressa como uma combinação linear das respostas dos estados modais, na forma

$$\begin{aligned}
 q_i(t) &= q_{1i} q_{1m}(t) + q_{2i} q_{2m}(t) + q_{3i} q_{3m}(t) + \cdots + q_{ni} q_{nm}(t) \\
 \dot{q}_i(t) &= q_{1i} \dot{q}_{1m}(t) + q_{2i} \dot{q}_{2m}(t) + q_{3i} \dot{q}_{3m}(t) + \cdots + q_{ni} \dot{q}_{nm}(t) \\
 &\vdots \\
 q_i^{(k)}(t) &= q_{1i}^{(k)} q_{1m}^{(k)}(t) + q_{2i}^{(k)} q_{2m}^{(k)}(t) + q_{3i}^{(k)} q_{3m}^{(k)}(t) + \cdots + q_{ni}^{(k)} q_{nm}^{(k)}(t)
 \end{aligned} \tag{197}$$

onde  $q_i(t)$  representa a resposta temporal do  $i$ -ésimo grau de liberdade,  $q_{ni}$  representa a configuração do  $i$ -ésimo grau de liberdade do sistema para o  $n$ -ésimo modo e  $q_{nm}(t)$  representa a resposta temporal modal do  $n$ -ésimo modo, uma estimativa deste sinal pode ser gerada através da reconstrução dos estados modais pelo observador de estados.

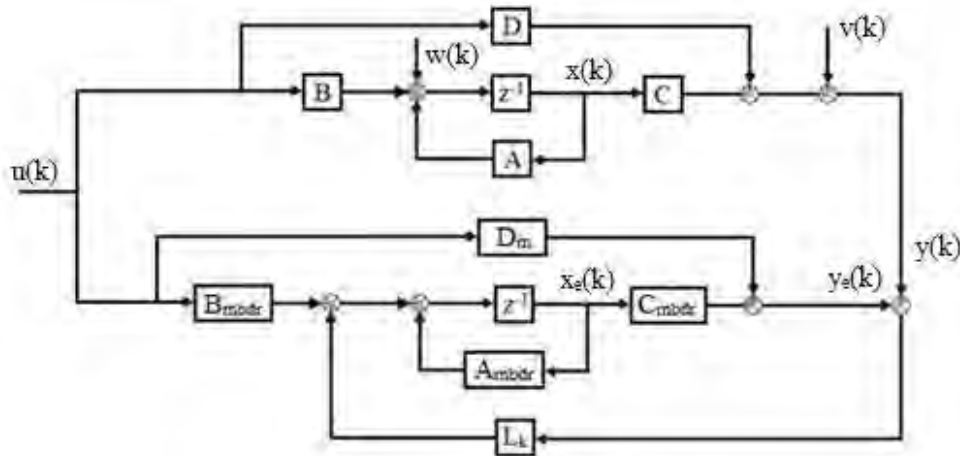
Visto que as equações em (197) são compostas por termos com energias proporcionais à representatividade do respectivo modo no sistema, os termos de baixa energia podem ser excluídos da combinação linear que compõe as respostas, sem a perda significativa de informações. O vetor dos estados a serem reconstruídos pelo observador pode ser composto apenas pelas respostas modais referentes aos  $l$  modos mais representativos do sistema, na forma

$$x_{er}(t) = \begin{bmatrix} q_{1m}(t) \\ \dot{q}_{1m}(t) \\ \vdots \\ q_{1m}^{(k)}(t) \\ q_{2m}(t) \\ \dot{q}_{2m}(t) \\ \vdots \\ q_{2m}^{(k)}(t) \\ \vdots \\ q_{lm}(t) \\ \dot{q}_{lm}(t) \\ \vdots \\ q_{lm}^{(k)}(t) \end{bmatrix} \tag{198}$$

Isto representa que um observador de estados de ordem plena pode ser projetado de modo a estimar as respostas temporais em (197) utilizando-se de um sistema de ordem reduzida, sem perda considerável de precisão. A redução da precisão do observador baseado em sistemas reduzidos pode ser considerada proporcionalmente à perda de energia decorrente da redução modal do sistema. Desta forma, o projeto de observadores de estado pode ser feito utilizando sistemas em espaço de estados no domínio modal em blocos diagonais reduzidos, segundo as metodologias de análise e truncamento modal apresentados neste trabalho. O diagrama de

blocos da Figura 8 representa o fluxograma em tempo discreto de estimação plena dos estados de um sistema generalizado  $(A,B,C,D)$  utilizando um observador de estados em coordenadas modais reduzido por truncamento modal  $(A_{mldr},B_{mldr},C_{mldr},D_m)$ .

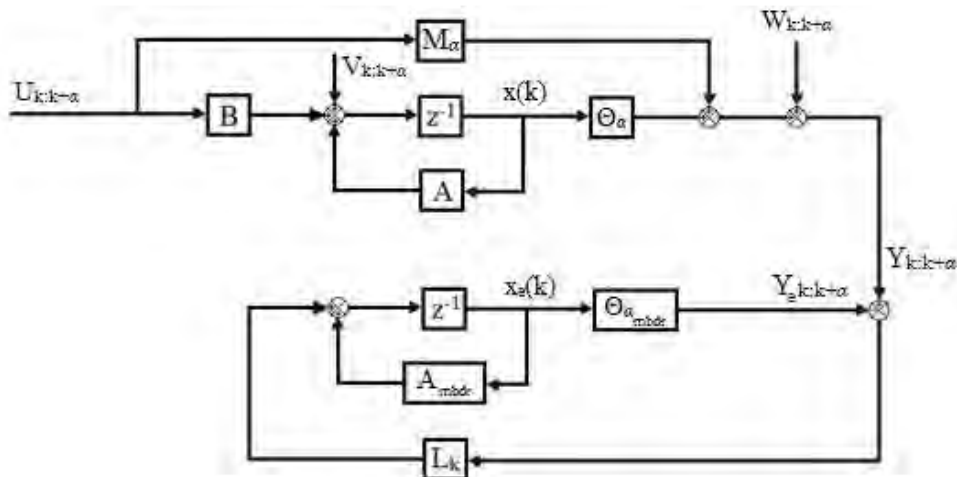
**Figura 8 - Diagrama de blocos de um sistema de observação plena de um sistema generalizado utilizando um observador baseado em um sistema reduzido.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

O mesmo procedimento pode ser feito utilizando o observador de estados com entradas desconhecidas, para sistemas cujas entradas não podem ser utilizadas no processo de estimação de estados, como mostra o fluxograma em tempo discreto da Figura 9.

**Figura 9 - Diagrama de blocos de um sistema de observação plena de um sistema generalizado com entradas desconhecidas utilizando um observador baseado em um sistema reduzido.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Neste trabalho, o processo de análise dos modos e redução modal do sistema é feita no domínio temporal contínuo e o processo de estimação dos estados é feito no domínio temporal discreto.

## 2.4 Modelo de Sistema Rotativo

Neste capítulo, serão apresentadas as equações de movimento dos componentes básicos de um sistema rotativo, bem como o modelo matemático em coordenadas nodais segundo Lalanne e Ferraris (1990). O respectivo modelo em coordenadas modais pode ser obtido utilizando a mesma metodologia descrita no Item 2.1.3.2.

### 2.4.1 Modelo em Coordenadas Nodais

As  $n$  equações diferenciais de segunda ordem que regem a dinâmica de um sistema rotativo flexível, em regime permanente, podem ser escritas na forma matricial

$$M_g \ddot{q}(t) + (D_g + \dot{\phi} G_g) \dot{q}(t) + (K_g) q(t) = B_0 u(t) \quad (199)$$

As equações diferenciais de (199) provém da equação de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T(t)}{\partial \dot{q}(t)} \right) - \frac{\partial T(t)}{\partial q(t)} + \frac{\partial U(t)}{\partial q(t)} + \frac{\partial R(t)}{\partial \dot{q}(t)} = F_q(t) \quad (200)$$

O vetor global de deslocamento nodal  $q$  do sistema é composto pelos vetores de deslocamentos nodais  $q_i$  de cada ponto nodal do sistema discreto. Cada ponto nodal do sistema rotativo em questão contém dois graus de liberdade de translação ( $u$  e  $w$ ) e dois graus de liberdade de rotação ( $\theta$  e  $\psi$ ). O vetor de coordenadas generalizadas do sistema, em função do tempo, é dado por

$$q(t) = [q_1(t) \quad q_2(t) \quad \cdots \quad q_n(t)]^T \quad (201)$$

onde

$$q_i(t) = [u_i(t) \quad w_i(t) \quad \theta_i(t) \quad \psi_i(t)]^T \quad (202)$$

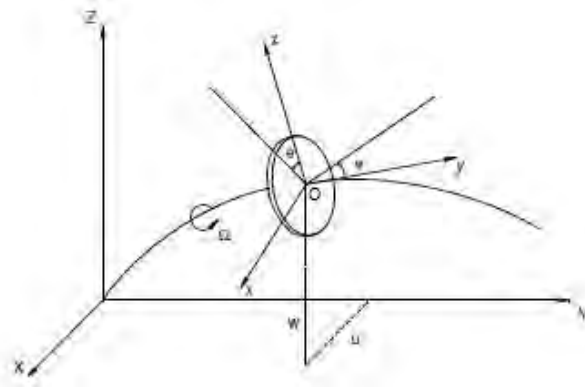
representa as coordenadas do  $i$ -ésimo ponto nodal.

Todas as matrizes globais em (199) são quadradas e de ordem  $n$ , e os vetores de deslocamento nodal e de forças de excitação generalizadas têm dimensão  $1 \times n$ .  $n$  representa o número de graus de liberdade do sistema, i.e.,  $n=4n_n$ , sendo  $n_n$  o número de pontos nodais do sistema.

Um sistema rotativo pode ser representado basicamente por um eixo girante com discos acoplados e suportado por mancais. O modelo global do rotor é construído a partir da aplicação de (200) nas equações de movimento do sistema discretizado, que contém os cálculos envolvendo a dinâmica dos elementos de eixo, dos discos e dos mancais. As equações de movimento utilizarão o sistema de coordenadas mostrado na Figura 10 para a

obtenção das energias cinética e potencial, bem como os trabalhos virtuais realizados por cada um dos componentes do modelo.

**Figura 10 - Sistema de coordenadas de um disco em um eixo flexível girante.  $R_0[X Y Z]$  – Sistema inercial.  $R[x y z]$  – Sistema móvel solidário ao disco.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

#### 2.4.1.1 Modelo de Disco

O disco é representado como uma fatia circular rígida, como mostrado na Figura 2.9, caracterizada apenas por sua energia cinética. Possui movimentos de translação e rotação em duas direções, além da rotação em torno de seu próprio eixo longitudinal. Seja  $\Psi$  deslocamento angular do disco em torno do eixo inercial  $Z$ , seguida pelo deslocamento angular  $\theta$  em torno do eixo móvel  $x_1$  e pelo deslocamento angular  $\Phi$  em torno do eixo móvel  $y$ . A velocidade angular do disco é

$$\omega_{R/R_0} = \dot{\Psi}Z + \dot{\theta}x_1 + \dot{\Phi}y \quad (203)$$

Expressando todas as componentes da velocidade angular do disco no sistema de coordenadas inercial, tem-se

$$\omega_{R/R_0}^R = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\Psi} \cos(\theta) \sin(\phi) + \dot{\theta} \cos(\phi) \\ \dot{\phi} + \dot{\Psi} \sin(\theta) \\ \dot{\Psi} \cos(\theta) \cos(\phi) + \dot{\theta} \sin(\phi) \end{bmatrix} \quad (204)$$

O movimento de translação do disco é representado pelos deslocamentos  $u$  e  $w$  do centro do disco  $O$  em  $R_0$ . Lalanne e Ferraris (1990) demonstram a expressão para a energia cinética do disco em função de seus deslocamentos e de suas rotações na base inercial

$$T_D = \frac{1}{2} m_D (\dot{u}^2(t) + \dot{w}^2(t)) + \frac{1}{2} (I_{D_x} \omega_x^2 + I_{D_y} \omega_y^2 + I_{D_z} \omega_z^2) \quad (205)$$

Sendo  $m_D$  a massa do disco e  $I_{Dx}$ ,  $I_{Dy}$  e  $I_{Dz}$  componentes do tensor de inércia

$$I_R = \begin{bmatrix} I_{D_x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{D_y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{D_z} \end{bmatrix} \quad (206)$$

referente ao centro  $O$  do disco no sistema de coordenadas  $R$ :

Por efeito de simplificação, algumas considerações são feitas. O disco é considerado simétrico ( $I_{Dx} = I_{Dz}$ ), os ângulos  $\theta$  e  $\Psi$  são pequenos e a velocidade angular é constante ( $\dot{\phi} = \Omega$ ). Desta forma, (I.1.7) se torna

$$T_D(t) = \frac{1}{2} m_D (\dot{u}^2(t) + \dot{w}^2(t)) + \frac{1}{2} I_{D_x} (\dot{\theta}^2(t) + \dot{\Psi}^2(t)) + \frac{1}{2} I_{D_y} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\Psi}(t)\theta(t)) \quad (207)$$

Substituindo (207) em (200), derivando em relação ao vetor de deslocamento nodal correspondente ao ponto nodal do eixo onde o disco está acoplado, tem-se

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_D}{\partial \dot{q}_i(t)} \right) - \frac{\partial T_D}{\partial q_i(t)} = M_D \ddot{q}_i(t) + \Omega G_D \dot{q}_i(t) \quad (208)$$

onde  $M_D$  e  $G_D$  representam as matrizes de massa e de efeito giroscópio do disco, respectivamente, e são escritas na forma

$$M_D = \begin{bmatrix} m_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{D_x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{D_x} \end{bmatrix} \quad (209)$$

$$G_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{D_y} \\ 0 & 0 & I_{D_y} & 0 \end{bmatrix} \quad (210)$$

As matrizes em (209) e (210) representam as matrizes de massa clássica e giroscópica do disco, respectivamente.

#### 2.4.1.2 Modelo de Eixo

O elemento de eixo é modelado como uma viga de seção transversal circular e invariante ao longo de seu comprimento, caracterizado pelas energias cinética e potencial, que fornecem as matrizes de inércia, de efeito giroscópio e de rigidez elementares. A formulação geral da

energia cinética do eixo provém da integração da energia cinética do disco ao longo do comprimento do elemento de eixo. Para um elemento de eixo com comprimento  $L$ , a expressão para a energia cinética é

$$T_E(t) = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2(t) + \dot{w}^2(t)) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\theta}^2(t) + \dot{\psi}^2(t)) dy + \rho I L \Omega^2 + 2 \rho I \Omega \int_0^L \dot{\psi}(t) \theta(t) dy \quad (211)$$

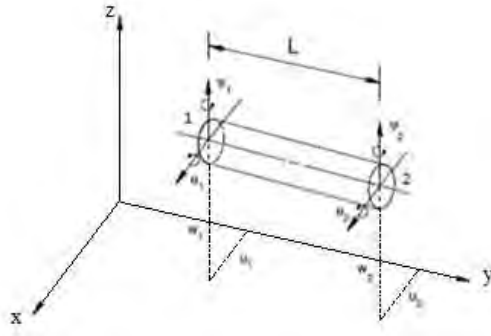
sendo  $\rho$  a densidade do material do eixo,  $S$  a área da seção transversal da viga e  $I$  o momento de inércia de área da seção transversal em relação ao eixo neutro.

A primeira integral da equação da energia cinética do eixo representa a expressão clássica da energia cinética da viga em flexão; a segunda integral representa o efeito secundário de inércia rotacional (modelo de Timoshenko); o terceiro termo é uma constante de influência nula nas equações; e o último termo representa o efeito giroscópico.

O elemento de viga é delimitado por dois pontos nodais, como mostrado na Figura 11, e os graus de liberdade são representados pelo vetor de coordenadas global dado na forma

$$q(t) = [u_1(t) \quad w_1(t) \quad \theta_1(t) \quad \psi_1(t) \quad u_2(t) \quad w_2(t) \quad \theta_2(t) \quad \psi_2(t)]^T \quad (212)$$

**Figura 11 - Elemento de eixo delimitado por dois pontos nodais, com quatro graus de liberdade cada.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

O vetor em (212) pode ser reorganizado e dividido entre os vetores de coordenadas correspondentes aos deslocamentos e rotações nas direções  $X$  e  $Z$ , respectivamente, nas formas

$$q_x(t) = [u_1(t) \quad \psi_1(t) \quad u_2(t) \quad \psi_2(t)]^T \quad (213)$$

e

$$q_z(t) = [w_1 \quad \theta_1 \quad w_2 \quad \theta_2]^T \quad (214)$$

Os deslocamentos e rotações nas direções  $Z$  e  $X$  são relacionados, respectivamente, por

$$\theta(t) = \frac{\partial w(t)}{\partial y(t)} \quad (215)$$

e

$$\psi(t) = -\frac{\partial u(t)}{\partial y(t)} \quad (216)$$

Os deslocamentos no interior do elemento finito são obtidos admitindo-se que estes ocorrem segundo funções de deslocamento polinomiais típicas de uma viga em flexão, que são

$$u(t) = N_1(y)q_x(t) \quad (217)$$

e

$$w(t) = N_2(y)q_z(t) \quad (218)$$

sendo  $N_1$  e  $N_2$  as funções de deslocamento entre os pontos nodais do elemento, nas formas

$$N_1(y) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3} & -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} & \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3} & \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \end{bmatrix} \quad (219)$$

$$N_2(y) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3} & -y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} & \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3} & -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \end{bmatrix} \quad (220)$$

Substituindo (211) em (200), utilizando os termos (212) a (218), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_E(t)}{\partial \dot{q}_e(t)} \right) - \frac{\partial T_E(t)}{\partial q_e(t)} &= [M_E + M_{SE} \mathbb{I} \ddot{q}(t)] + \Omega [G_E \mathbb{I} \dot{q}(t)] = \\ &\left( \begin{bmatrix} M_{E_1} & M_{E_2} \\ M_{E_2}^T & M_{E_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{SE_1} & M_{SE_2} \\ M_{SE_2}^T & M_{SE_3} \end{bmatrix} \right) [\ddot{q}(t)] + \Omega \begin{bmatrix} G_{E_1} & G_{E_2} \\ G_{E_2}^T & G_{E_3} \end{bmatrix} [\dot{q}(t)] \end{aligned} \quad (221)$$

A primeira matriz do primeiro termo de (221) representa a matriz de massa clássica do elemento de eixo, sendo que  $M_{E_1}$ ,  $M_{E_2}$  e  $M_{E_3}$  são

$$M_{E_1} = \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L \\ 0 & 156 & 22L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (222)$$

$$M_{E_2} = \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -13L & 0 & 0 & -3L^2 \end{bmatrix} \quad (223)$$

$$M_{E_3} = \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (224)$$

A segunda matriz do primeiro termo de (221) representa a influência do efeito secundário de inércia rotacional do elemento de eixo, sendo que  $M_{SE_1}$ ,  $M_{SE_2}$  e  $M_{SE_3}$  são

$$M_{SE_1} = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (225)$$

$$M_{SE_2} = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 3L & 0 & 0 & -L^2 \end{bmatrix} \quad (226)$$

$$M_{SE_3} = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (227)$$

O terceiro termo de (221) representa o efeito giroscópio do elemento eixo, sendo que  $G_{E_1}$ ,  $G_{E_2}$  e  $G_{E_3}$  são:

$$G_{E_1} = \frac{\rho I}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (228)$$

$$G_{E_2} = \frac{\rho I}{15L} \begin{bmatrix} 0 & 36 & -3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & -3L \\ -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & -3L & -L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (229)$$

$$G_{E_3} = \frac{\rho I}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & 3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & 3L \\ -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (230)$$

A energia potencial de deformação é dada por:

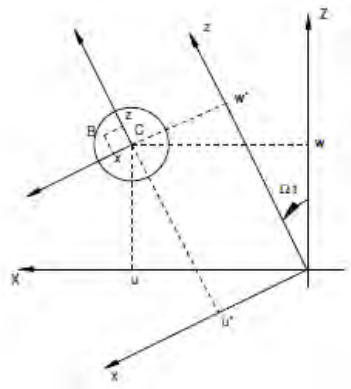
$$U(t) = \frac{1}{2} \int_{\tau} \varepsilon^t(t) \sigma(t) d\tau = \frac{1}{2} \int_{\tau} \varepsilon^t(t) E \varepsilon(t) d\tau \quad (231)$$

onde  $\varepsilon$  é a deformação longitudinal específica devido à tensão aplicada  $\sigma$ ,  $\tau$  é o volume do elemento e  $E$  é o módulo de elasticidade do material.

A Figura 12 mostra o deslocamento de um ponto arbitrário  $B$  da viga em relação ao centro geométrico  $C$ . Os pares  $(u, w)$  e  $(u^*, w^*)$  representam as coordenadas do centro geométrico em relação aos eixos inercial e móvel, respectivamente. Segundo Lalanne e Ferraris (1990), a deformação longitudinal do ponto  $B$  pode ser representada por

$$\varepsilon(t) = -x(t) \frac{\partial^2 u^*(t)}{\partial y^2(t)} - z(t) \frac{\partial^2 w^*(t)}{\partial y^2(t)} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^*(t)}{\partial y(t)} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w^*(t)}{\partial y(t)} \right)^2 \quad (232)$$

**Figura 12 - Coordenadas inerciais e móveis do centro geométrico C e coordenadas móveis do ponto arbitrário B no eixo.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

É possível notar que a deformação representada em (232) é constituída de uma parcela linear e outra não linear. Substituindo (232) em (231), mantendo-se as simplificações geométricas consideradas anteriormente e desconsiderando os termos de segunda ordem, obtém-se a energia potencial de deformação elástica do elemento de eixo devida à flexão

$$U_1(t) = \frac{E}{2} \int_0^L \left[ I_z \left( \frac{\partial^2 u^*(t)}{\partial y^2(t)} \right)^2 + I_x \left( \frac{\partial^2 w^*(t)}{\partial y^2(t)} \right)^2 \right] dy(t) \quad (233)$$

sendo  $I_z$  e  $I_x$  os momentos de inércia da área da seção transversal em relação aos eixos  $z$  e  $x$  do sistema de coordenadas móvel, respectivamente.

A deformação elástica do eixo devido à aplicação de uma força axial  $F_0$  adiciona uma segunda contribuição para a energia potencial, dada por

$$U_2(t) = \int_0^L \left[ \frac{F_0}{S} \varepsilon \right] d\tau = \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial u^*(t)}{\partial y(t)} \right)^2 + \left( \frac{\partial w^*(t)}{\partial y(t)} \right)^2 \right] dy(t) \quad (234)$$

Desta forma, energia potencial combinada de deformação é dada por

$$\begin{aligned} U_E(t) = U_1(t) + U_2(t) &= \frac{E}{2} \int_0^L \left[ I_z \left( \frac{\partial^2 u^*(t)}{\partial y^2(t)} \right)^2 + I_x \left( \frac{\partial^2 w^*(t)}{\partial y^2(t)} \right)^2 \right] dy(t) \\ &+ \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial u^*(t)}{\partial y(t)} \right)^2 + \left( \frac{\partial w^*(t)}{\partial y(t)} \right)^2 \right] dy(t) \end{aligned} \quad (235)$$

Os deslocamentos do centro geométrico  $C$  na base de coordenadas inerciais é obtido pela transformação linear da base de coordenadas móvel, na forma

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^*(t) \\ w^*(t) \end{bmatrix} \quad (236)$$

Substituindo (235) em (234), tem-se

$$\begin{aligned} U_E(t) &= \frac{E}{2} \int_0^L \left[ I_z \left( \cos(\Omega t) \frac{\partial^2 u(t)}{\partial y^2(t)} - \sin(\Omega t) \frac{\partial^2 w(t)}{\partial y^2(t)} \right)^2 \right] dy(t) \\ &+ \frac{E}{2} \int_0^L \left[ I_x \left( \sin(\Omega t) \frac{\partial^2 u(t)}{\partial y^2(t)} + \cos(\Omega t) \frac{\partial^2 w(t)}{\partial y^2(t)} \right)^2 \right] dy(t) \\ &+ \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial u(t)}{\partial y(t)} \right)^2 + \left( \frac{\partial w(t)}{\partial y(t)} \right)^2 \right] dy(t) \end{aligned} \quad (237)$$

Considerando-se a simetria da seção transversal do eixo ( $I_z = I_x = I$ ), a expressão acima se torna

$$\begin{aligned} U_E(t) &= \frac{EI}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial^2 u(t)}{\partial y^2(t)} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2 w(t)}{\partial y^2(t)} \right)^2 \right] dy(t) + \\ &+ \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial u(t)}{\partial y(t)} \right)^2 + \left( \frac{\partial w(t)}{\partial y(t)} \right)^2 \right] dy(t) \end{aligned} \quad (238)$$

Substituindo (217) e (218) em (238), tem-se

$$\begin{aligned}
U_E(t) = & \frac{EI}{2} \int_0^L \left[ \partial q_x^t(t) \frac{d^2 N_1^t(y)}{dy(t)^2} \frac{d^2 N_1(y)}{dy(t)^2} \partial q_x(t) + \right. \\
& \left. + \partial q_z^t(t) \frac{d^2 N_2^t(y)}{dy(t)^2} \frac{d^2 N_2(y)}{dy(t)^2} \partial q_z(t) \right] dy(t) + \\
& + \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[ \partial q_x^t(t) \frac{dN_1^t(y)}{dy(t)} \frac{dN_1(y)}{dy(t)} \partial q_x(t) + \right. \\
& \left. + \partial q_z^t(t) \frac{dN_2^t(y)}{dy(y)} \frac{dN_2(y)}{dy(t)} \partial q_z(t) \right] dy(t)
\end{aligned} \tag{239}$$

Integrando (239), obtêm-se

$$U_E(t) = \frac{1}{2} \left[ \partial q_x^t(t) K_{E1} \partial q_x(t) + \partial q_z^t(t) K_{E2} \partial q_z(t) + \right. \\
\left. + \partial q_x^t(t) K_{E3} \partial q_x(t) + \partial q_z^t(t) K_{E4} \partial q_z(t) \right] \tag{240}$$

Expressando (240) em função do vetor de coordenadas global, tem-se

$$U_E(t) = \frac{1}{2} \left[ \partial q^t(t) (K_{E1} + K_{E2}) \partial q(t) + \partial q^t(t) (K_{E3} + K_{E4}) \partial q_e(t) \right] \tag{241}$$

As matrizes  $K_{E1}$  e  $K_{E2}$  são as matrizes de rigidez clássicas e  $K_{E3}$  e  $K_{E4}$  são as matrizes de rigidez devido à aplicação da força axial no eixo. Lalanne e Ferraris (1990) consideram o efeito de cisalhamento através do coeficiente  $\alpha_c$ , dado por:

$$\alpha_c = \frac{12EI}{GS_r L^2} \tag{242}$$

onde  $S_r$  é a área reduzida da seção transversal, que neste caso é considerada inalterada em relação à seção transversal  $S$ , e  $G$  o módulo de cisalhamento, dado por:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{243}$$

sendo  $\nu$  o coeficiente de Poisson do material. A matriz de rigidez clássica elementar  $K_C$  é obtida de  $K_{E1}$  e  $K_{E2}$  e a matriz de rigidez elementar devido à aplicação da força axial  $K_F$  é obtida de  $K_{E3}$  e  $K_{E4}$ . Substituindo (242) em (200), derivando em relação ao vetor de deslocamento elementar, tem-se

$$\frac{\partial U(t)}{\partial q_e(t)} = K_g q(t) = (K_C + K_F) q(t) \tag{244}$$

A matriz  $K_C$  é expressa por

$$K_C = \frac{EI}{(1+\alpha_c)L^3} \begin{bmatrix} K_{C_1} & K_{C_2} \\ K_{C_2}^T & K_{C_3} \end{bmatrix} \quad (245)$$

onde

$$K_{C_1} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+\alpha_c)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+\alpha_c)L^2 \end{bmatrix} \quad (246)$$

$$K_{C_2} = \begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & -6L & (2+\alpha_c)L^2 & 0 \\ 6L & 0 & 0 & (2+\alpha_c)L^2 \end{bmatrix} \quad (247)$$

$$K_{C_3} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & -6L & (4+\alpha_c)L^2 & 0 \\ 6L & 0 & 0 & (4+\alpha_c)L^2 \end{bmatrix} \quad (248)$$

A matriz  $K_F$  é expressa por

$$K_F = \frac{F_0}{30L} \begin{bmatrix} K_{F_1} & K_{F_2} \\ K_{F_2} & K_{F_3} \end{bmatrix} \quad (249)$$

onde

$$K_{11} = \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (250)$$

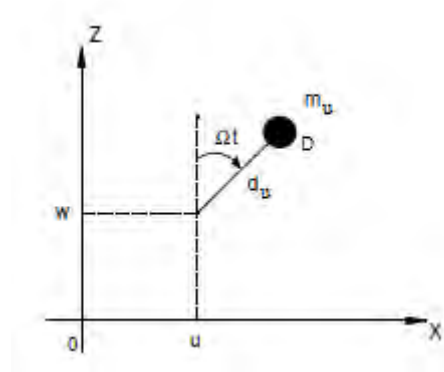
$$K_{F_2} = \begin{bmatrix} -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 3L & 0 & 0 & -L^2 \end{bmatrix} \quad (251)$$

$$K_{F_3} = \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (252)$$

### 2.4.1.3 Forças de Desbalanceamento

As forças de desbalanceamento que agem em um sistema rotativo são produzidas por massas deslocadas do centro de rotação. A Figura 13 representa uma massa  $m_u$  a uma distância  $d_u$  do centro geométrico do eixo, perpendicular ao eixo  $y$  e mantendo-se sua coordenada constante ao longo do mesmo.

**Figura 13 - Massa de desbalanceamento**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

O deslocamento da massa  $m_u$  em  $R_0$  é dado por

$$\overline{OD}_{R_0}(t) = \begin{bmatrix} u(t) + d_u \sin(\Omega t) \\ cte \\ w(t) + d_u \cos(\Omega t) \end{bmatrix} \quad (253)$$

Derivando (253) em relação ao tempo, tem-se a velocidade da massa  $m$  em  $R_0$ .

$$\frac{d\overline{OD}_{R_0}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{u}(t) + d_u \Omega \cos(\Omega t) \\ cte \\ \dot{w}(t) - d_u \Omega \sin(\Omega t) \end{bmatrix} \quad (254)$$

Desta forma, a energia cinética da massa  $m$  é

$$T_m(t) = \frac{m_u}{2} \left( \dot{u}^2(t) + \dot{w}^2(t) + \Omega^2 d_u^2 + 2\Omega d_u \dot{u}(t) \cos(\Omega t) - 2\Omega d_u \dot{w}(t) \sin(\Omega t) \right) \quad (255)$$

A expressão (255) pode ser simplificada omitindo-se os termos invariantes no tempo e considerando que a massa  $m$  é muito menor que a massa do rotor, tornando-se

$$T_m(t) = m_u \Omega d_u [\dot{u}(t) \cos(\Omega t) - \dot{w}(t) \sin(\Omega t)] \quad (256)$$

A expressão da energia cinética da massa desbalanceada é obtida aplicando-se (200) em (256), derivando-se em relação ao vetor de translação do ponto nodal, assim produzindo

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T_m(t)}{\partial \dot{q}_{tn}(t)} \right) - \frac{\partial T_m(t)}{\partial q_{tn}(t)} = -m_u d_u \Omega^2 \begin{bmatrix} \sin(\Omega t) \\ \cos(\Omega t) \end{bmatrix} \quad (257)$$

sendo o vetor de translação do ponto nodal dado por

$$q_{tn} = [u(t) \quad w(t)]^T \quad (258)$$

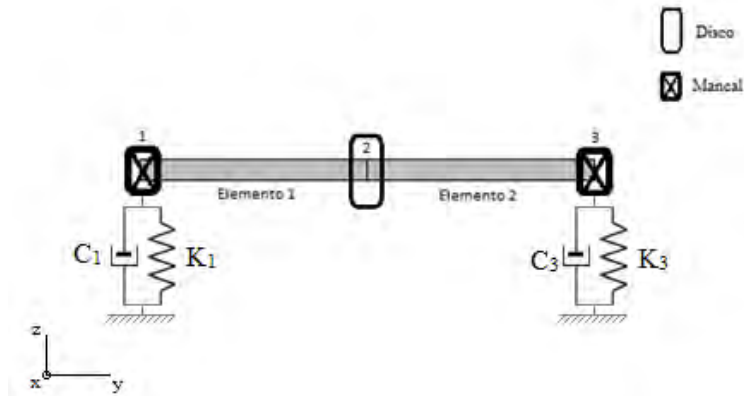
A expressão (257) corresponde à massa desbalanceada situada no eixo  $z$  em  $t=0s$ . Para uma massa desbalanceada situada em uma posição angular  $\alpha$  em  $t=0s$ , o vetor de excitações generalizadas do sistema é

$$F_q = \begin{bmatrix} f_u(t) \\ f_w(t) \end{bmatrix} = -m_u d_u \Omega^2 \begin{bmatrix} \sin(\Omega t) + \alpha \\ \cos(\Omega t) + \alpha \end{bmatrix} \quad (259)$$

#### 2.4.1.4 Modelo Global

O modelo matemático global do rotor em (199) é obtido através da integração das matrizes de massa, rigidez e amortecimento dos discos, mancais e elementos de eixo que compõem o modelo. A Figura 14 mostra um modelo simplificado de um sistema rotativo contendo um eixo discretizado com dois elementos finitos, um disco centralizado e um mancal rígido em cada extremidade do eixo.

**Figura 14 - Exemplo básico de um sistema rotativo.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Neste caso, o mancal é fixo e sua rigidez interna é considerada suficientemente alta para que o movimento relativo com o eixo seja desconsiderado. As massas dos mancais serão desconsideradas em função destas serem consideradas muito menores do que a massa do eixo.

As matrizes de massa e de efeito giroscópio são obtidas substituindo a equação da energia cinética do sistema, dada por

$$T(t) = T_{elemento1}(t) + T_{elemento2}(t) + T_{disco}(t), \quad (260)$$

na equação (200), e derivando em relação às acelerações e velocidades nodais. Assim obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T(t)}{\partial \dot{q}(t)} \right) - \frac{\partial T(t)}{\partial q(t)} = & \begin{bmatrix} M^1_{E_{11}} + M^1_{SE_{11}} & M^1_{E_{22}} + M^1_{SE_{22}} \\ M^1_{E_{22}} + M^1_{SE_{22}} & M^1_{E_{33}} + M^1_{SE_{33}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} M^2_{E_{11}} + M^2_{SE_{11}} & M^2_{E_{22}} + M^2_{SE_{22}} \\ M^2_{E_{22}} + M^2_{SE_{22}} & M^2_{E_{33}} + M^2_{SE_{33}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_2(t) \\ \ddot{q}_3(t) \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} G^1_{E_{11}} & G^1_{E_{22}} \\ G^1_{E_{22}} & G^1_{E_{33}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix} \\ & + \Omega \begin{bmatrix} G^2_{E_{11}} & G^2_{E_{22}} \\ G^2_{E_{22}} & G^2_{E_{33}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \end{bmatrix} + [M^2_D] \ddot{q}_2(t) + \Omega [G^2_D] \dot{q}_2(t) \end{aligned} \quad (261)$$

sendo

$$q(t) = [q_1(t) \quad q_2(t) \quad q_3(t)]^T \quad (262)$$

Rearranjando e escrevendo (261) em função dos vetores globais de aceleração e de velocidade do sistema, tem-se

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T(t)}{\partial \dot{q}(t)} \right) - \frac{\partial T(t)}{\partial q(t)} = M_g \ddot{q}(t) + G_g \dot{q}(t) \quad (263)$$

onde

$$M_g = \begin{bmatrix} M^1_{E_{11}} + M^1_{SE_{11}} & M^1_{E_{22}} + M^1_{SE_{22}} & 0 \\ M^1_{E_{22}} + M^1_{SE_{22}} & M^1_{E_{33}} + M^1_{SE_{33}} + M^2_{E_{11}} + M^2_{SE_{11}} + M^2_D & M^2_{E_{22}} + M^2_{SE_{22}} \\ 0 & M^2_{E_{22}} + M^2_{SE_{22}} & M^2_{E_{33}} + M^2_{SE_{33}} \end{bmatrix} \quad (264)$$

e

$$G_g = \begin{bmatrix} G^1_{E_{11}} & G^1_{E_{22}} & 0 \\ G^1_{E_{22}} & G^1_{E_{33}} + G^2_{E_{11}} + G^2_D & G^2_{E_{22}} \\ 0 & G^2_{E_{22}} & G^2_{E_{33}} \end{bmatrix} \quad (265)$$

sendo  $M_g$  a matriz de massa do sistema, formada por (222) a (224) e (225) a (227), e  $G_g$  a matriz de efeito giroscópico do sistema, formada por (228) a (230).

A matriz de rigidez do sistema é obtida substituindo a equação da energia potencial global do sistema, dada por

$$U(t) = U_{elemento1}(t) + U_{elemento2}(t) + U_{suspensão1}(t) + U_{suspensão3}(t) \quad (266)$$

na equação (200), derivando em relação aos deslocamentos nodais. Assim obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U(t)}{\partial q(t)} \right) = & \begin{bmatrix} K_{C_{11}}^1 + K_{F_{11}}^1 + K_{suspensão1} & K_{C_{22}}^1 + K_{F_{22}}^1 \\ K_{C_{22}}^1 + K_{F_{22}}^1 & K_{C_{33}}^1 + K_{F_{33}}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} \\ + & \begin{bmatrix} K_{C_{11}}^2 + K_{F_{11}}^2 & K_{C_{22}}^2 + K_{F_{22}}^2 \\ K_{C_{22}}^2 + K_{F_{22}}^2 & K_{C_{33}}^2 + K_{F_{33}}^2 + K_{suspensão3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (267)$$

sendo

$$K_{suspensão1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (268)$$

$$K_{suspensão3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (269)$$

Rearranjando e escrevendo (267) em função do vetor de deslocamento global, tem-se

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial q} \right) = K_g q \quad (270)$$

sendo

$$K_g = \begin{bmatrix} K_{C_{11}}^1 + K_{F_{11}}^1 & K_{C_{22}}^1 + K_{F_{22}}^1 & 0 \\ K_{C_{22}}^1 + K_{F_{22}}^1 & K_{C_{33}}^1 + K_{F_{33}}^1 + K_{C_{11}}^2 + K_{F_{11}}^2 & K_{C_{22}}^2 + K_{F_{22}}^2 \\ 0 & K_{C_{22}}^2 + K_{F_{22}}^2 & K_{C_{33}}^2 + K_{F_{33}}^2 \end{bmatrix} \quad (271)$$

sendo  $K_g$  a matriz global de rigidez do sistema, formada por (246) a (248) e (250) a (252).

A matriz global de amortecimento estrutural proporcional, que está associado à dissipação de energia mecânica pelo material do eixo, pode ser dada pela combinação linear

$$D_g = \alpha M_g + \beta K_g \quad (272)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são grandezas escalares empíricas. O fato de as matrizes globais de massa e de rigidez serem simétricas implica que a matriz de amortecimento proporcional também é simétrica. a adição dos efeitos de amortecimento das suspensões dos mancais na matriz global de amortecimento estrutural é feita substituindo a equação do fator de dissipação de Rayleigh, dada por

$$R(t) = R_{suspensão1}(t) + R_{suspensão3}(t) \quad (273)$$

na equação (200), derivando em relação às velocidades nodais. Assim obtém-se

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial R(t)}{\partial \dot{q}(t)} \right) = \begin{bmatrix} C_{suspensão1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{suspensão3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \end{bmatrix} \quad (274)$$

sendo

$$C_{suspensão1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (275)$$

$$C_{suspensão3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (276)$$

Rearranjando e escrevendo (274) em função do vetor de velocidade global, tem-se

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial R(t)}{\partial \dot{q}(t)} \right) = C_s \dot{q}(t) \quad (277)$$

sendo

$$C_s = \begin{bmatrix} C_{suspensão1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{suspensão3} \end{bmatrix} \quad (278)$$

Desta forma, a matriz de amortecimento global do sistema rotativo em questão é dada por

$$C_g = C_s + D_g + \dot{\phi} G_g \quad (279)$$

A matriz de entradas  $B_0$  relaciona o vetor de entradas do sistema com os graus de liberdade do mesmo. Neste caso, o disco possui um desbalanceamento que provoca excitações nos graus de liberdade referentes ao deslocamento vertical e horizontal do segundo ponto nodal do eixo discretizado ( $u_2$  e  $w_2$ ). Sendo o vetor de entradas dado por (259), a matriz de entradas do sistema é dada na forma

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (280)$$

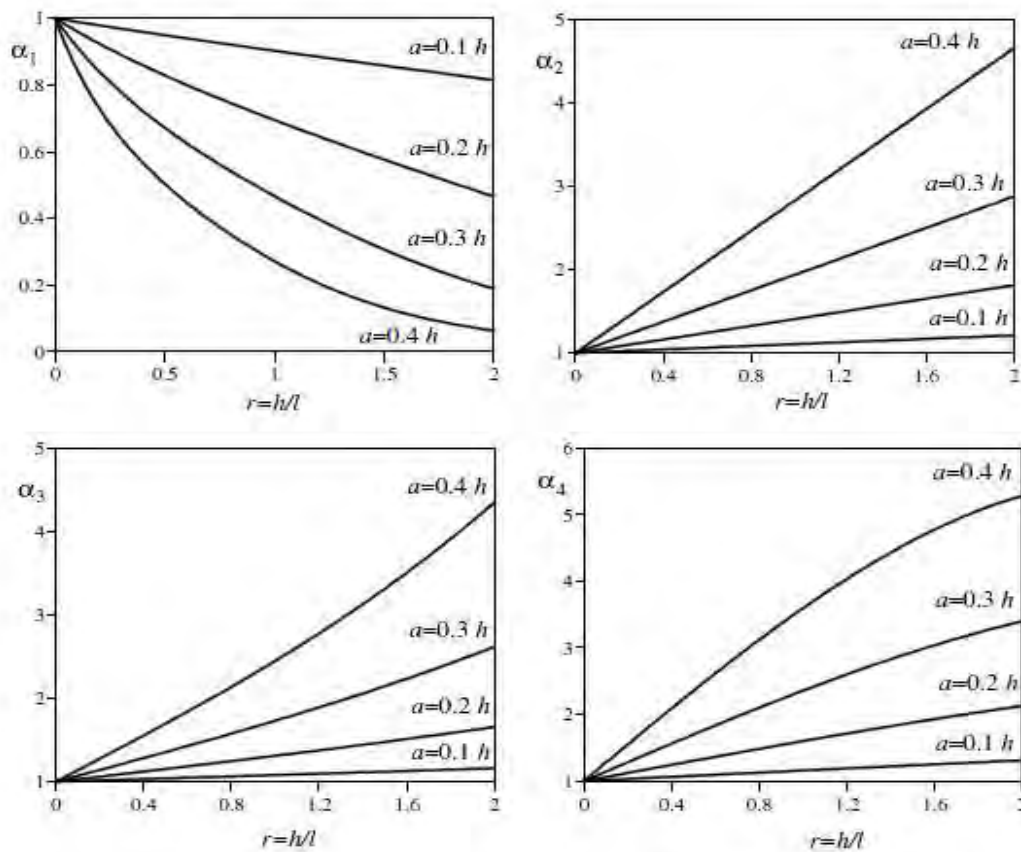
## 2.5 Modelo de Falha

Neste capítulo será apresentado o modelo de falha que é utilizado no projeto dos observadores robustos, destinado a simular a influência da trinca na rigidez no modelo estrutural do sistema.

### 2.5.1 Modelo Analítico de Trinca

Muscolino et al (2003) desenvolveram um modelo de trinca para elementos de viga utilizando o modelo de Euler-Bernoulli. O comportamento dinâmico de vigas com trincas foi estudado e coeficientes empíricos relacionados com a altura e o comprimento do elemento finito foram obtidos, como mostram as curvas interpoladas na Figura 15, onde  $r$  representa a relação altura/comprimento do elemento e  $a$  representa a profundidade da trinca em percentuais com relação à altura do mesmo.

**Figura 15 - Valores dos coeficientes utilizados na formulação da matriz de rigidez do elemento trincado.**



Fonte: Muscolino et al. (2003)

Os coeficientes empíricos  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  e  $\alpha_4$  são inseridos na matriz de rigidez clássica do elemento com falha, de modo a inserir a influência da trinca no mesmo. A matriz de rigidez de um elemento de viga segundo o modelo de viga de Euler-Bernoulli difere do modelo de viga de Timoshenko apenas pelo termo escalar referente ao efeito de cisalhamento. Desta forma, esta modelagem de falha pode ser aplicada na matriz de rigidez clássica (245) seguindo a mesma sistemática utilizada na matriz de rigidez utilizando o modelo de Euler-Bernoulli, obtendo assim a matriz de rigidez clássica do elemento com trinca, segundo a modelagem de Timoshenko, na forma

$$K^f_c = \frac{\alpha_1 EI}{(1 + \alpha_c)L^3} \begin{bmatrix} K^f_{c_1} & K^f_{c_2} \\ K^f_{c_2}^T & K^f_{c_3} \end{bmatrix} \quad (281)$$

onde

$$K^f_{c_1} = \begin{bmatrix} 12\alpha_2 & 0 & 0 & -6L\alpha_2 \\ 0 & 12\alpha_2 & 6L\alpha_2 & 0 \\ 0 & 6L\alpha_2 & (4 + \alpha_c)L^2\alpha_3 & 0 \\ -6L\alpha_2 & 0 & 0 & (4 + \alpha_c)L^2\alpha_3 \end{bmatrix} \quad (282)$$

$$K^f_{c_2} = \begin{bmatrix} -12\alpha_2 & 0 & 0 & -6L\alpha_2 \\ 0 & -12\alpha_2 & 6L\alpha_2 & 0 \\ 0 & -6L\alpha_2 & (2 + \alpha_c)L^2\alpha_4 & 0 \\ 6L\alpha_2 & 0 & 0 & (2 + \alpha_c)L^2\alpha_4 \end{bmatrix} \quad (283)$$

e

$$K^f_{c_3} = \begin{bmatrix} 12\alpha_2 & 0 & 0 & 6L\alpha_2 \\ 0 & 12\alpha_2 & -6L\alpha_2 & 0 \\ 0 & -6L\alpha_2 & (4 + \alpha_c)L^2\alpha_3 & 0 \\ 6L\alpha_2 & 0 & 0 & (4 + \alpha_c)L^2\alpha_3 \end{bmatrix} \quad (284)$$

Este modelo de falha representa a influência na rigidez causada por uma trinca estática em um elemento finito de viga. Porém, a dinâmica de abertura e fechamento da trinca causada pela flexão do elemento não é considerada nesta modelagem. Isto representa uma simplificação considerável na modelagem da falha, visto que tal fenômeno tem bastante influência na dinâmica de eixos rotativos flexíveis com a presença de trinca.

### 3 SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL

Este capítulo trata da aplicação numérica da metodologia proposta de detecção e identificação de falhas utilizando observadores de estados baseados em sistemas no domínio modal. O primeiro caso considera um sistema massa-mola-amortecedor de três graus de liberdade, excitado por uma força harmônica em um dos graus de liberdade. A detecção e identificação da falha, representada pela redução de rigidez em uma das molas do sistema, são feitas utilizando observadores de estados sem redução modal, visto que se trata de um sistema de baixa ordem.

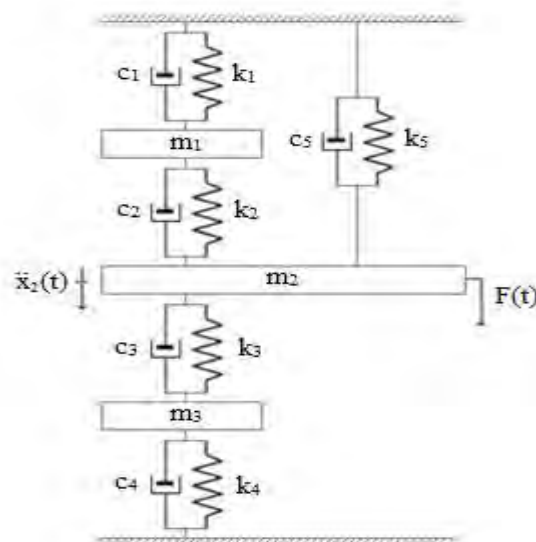
O segundo caso considera um sistema rotativo discretizado em elementos finitos, auto-excitado por desbalanceamento. Neste caso, devido à alta ordem do sistema, os observadores de estado são projetados utilizando modelos em espaço de estados de ordem reduzida através do truncamento dos modos pouco representativos.

Nas análises de detecção e identificação de falhas, é utilizado o inverso do valor RMS do sinal residual, denotado por  $\text{RMS}^{-1}$ . Este índice é empregado por motivo de conveniência para a análise qualitativa dos sinais residuais obtidos.

#### 3.1 Sistema Massa-Mola-Amortecedor

Nesta simulação, considera-se o sistema massa-mola-amortecedor mostrado na Figura 16. A falha é inserida no sistema através da redução da rigidez de uma das molas.

**Figura 16 - Sistema massa-mola-amortecedor.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A Tabela 1 apresenta os valores dos parâmetros físicos do sistema da Figura 16, que é excitado por uma força harmônica de amplitude unitária e frequência de 8 Hz, na forma

$$F(t) = \cos(2\pi 8t) \approx \cos(50,3t) \quad (285)$$

**Tabela 1 – Parâmetros físicos do sistema massa-mola-amortecedor.**

| Parâmetro                                     | Símbolo [Unidade] | Valor |
|-----------------------------------------------|-------------------|-------|
| Massa 1                                       | $m_1$ [Kg]        | 4     |
| Massa 2                                       | $m_2$ [Kg]        | 6     |
| Massa 3                                       | $m_3$ [Kg]        | 5     |
| Rigidez da mola 1                             | $k_1$ [N/m]       | 10000 |
| Rigidez da mola 2                             | $k_2$ [N/m]       | 10000 |
| Rigidez da mola 3                             | $k_3$ [N/m]       | 10000 |
| Rigidez da mola 4                             | $k_4$ [N/m]       | 10000 |
| Rigidez da mola 5                             | $k_5$ [N/m]       | 10000 |
| Coeficiente de amortecimento do amortecedor 1 | $c_1$ [Ns/m]      | 0.1   |
| Coeficiente de amortecimento do amortecedor 2 | $c_2$ [Ns/m]      | 0.1   |
| Coeficiente de amortecimento do amortecedor 3 | $c_3$ [Ns/m]      | 0.1   |
| Coeficiente de amortecimento do amortecedor 4 | $c_4$ [Ns/m]      | 0.1   |
| Coeficiente de amortecimento do amortecedor 5 | $c_5$ [Ns/m]      | 0.1   |

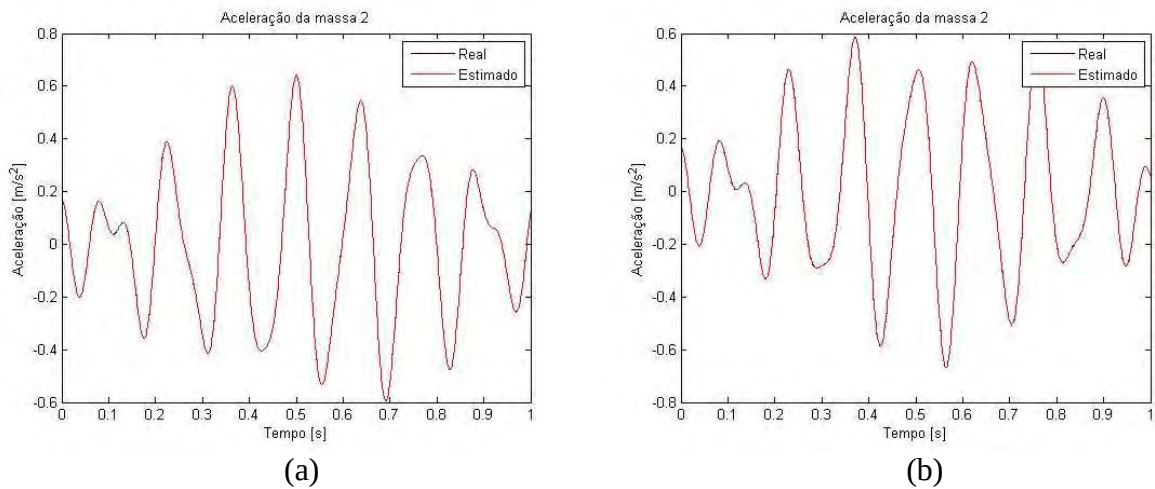
Fonte: Elaboração do próprio autor.

As condições iniciais dos estados do sistema são consideradas nulas, utilizando-se um tempo de análise de 1s com passo temporal de 0.001s. Uma falha é inserida no sistema através da redução de 20% de  $k_2$ . Um banco de observadores robustos às reduções de 10%, 20%, 30% e 40% das rigidezes das molas do sistema sujeitas à falha é projetado, utilizando a resposta temporal da aceleração da massa 2.

### 3.1.1 Observador de Luenberger

Nesta simulação, a identificação da falha inserida no referido sistema é feita utilizando-se dos observadores de Luenberger, projetados via Regulador Linear Quadrático. A detecção da presença de falha no sistema é feita através da análise do sinal residual produzido pelo observador global. A Figura 17 mostra a resposta real e estimada do sistema obtida antes e depois da inserção da falha no mesmo. Os valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos são mostrados na Tabela 2.

**Figura 17 - Respostas temporais reais e estimadas pelo observador de estados global obtidas antes (a) e depois (b) da inserção da falha no sistema massa-mola-amortecedor utilizando o observador de Luenberger .**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

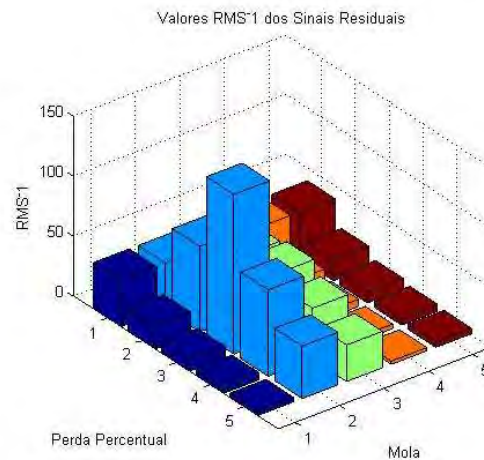
**Tabela 2 – Valores  $\text{RMS}^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo observador global antes e depois da inserção da falha no sistema massa-mola-amortecedor utilizando o observador de Luenberger.**

| $\text{RMS}^{-1}$<br>(sistema sem falha) | $\text{RMS}^{-1}$<br>(sistema com redução<br>de 20% de $k_4$ ) |
|------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| 123,52                                   | 38,71                                                          |

Fonte: Elaboração do próprio autor.

A verificação visual do distanciamento entre o sinal real e o sinal estimado produzido pelo observador é imprecisa e inviável quando esta diferença é pequena. Analisando os dados da Tabela 2, verifica-se que houve uma diminuição do valor  $\text{RMS}^{-1}$  do sinal residual, indicando a ocorrência de falha no sistema. Detectada a presença de falha no sistema, a identificação é feita pela análise qualitativa dos valores  $\text{RMS}^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelos observadores robustos, como mostram a Figura 18 e a Tabela 3.

**Figura 18 - Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador de Luenberger, para o sistema com redução de 20% de  $k_2$ .**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Tabela 3 – Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador de Luenberger, para o sistema com redução de 20% de  $k_2$ .**

|                  |        | Mola       |            |            |            |            |
|------------------|--------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Perda Percentual |        | 1( $k_1$ ) | 2( $k_2$ ) | 3( $k_3$ ) | 4( $k_4$ ) | 5( $k_5$ ) |
|                  | 1(0%)  | 38,72      | 38,72      | 38,72      | 38,72      | 38,72      |
|                  | 2(10%) | 19,28      | 71,27      | 49,99      | 12,43      | 17,35      |
|                  | 3(20%) | 9,44       | 133,16     | 53,31      | 5,97       | 9,18       |
|                  | 4(30%) | 5,77       | 72,14      | 42,51      | 3,76       | 6,18       |
|                  | 5(40%) | 3,95       | 43,78      | 30,42      | 2,71       | 4,66       |

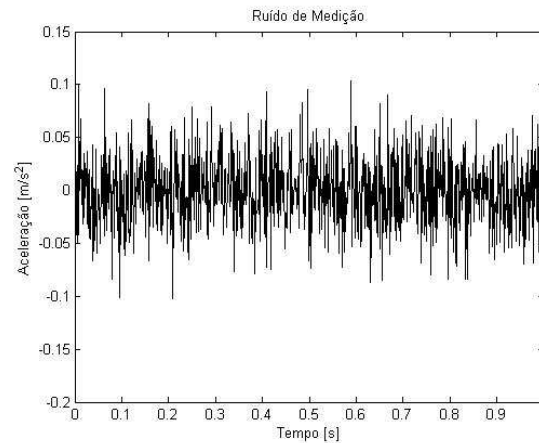
Fonte: Elaboração do próprio autor.

A análise qualitativa dos dados da Tabela 3 fornecidos pelo banco de observadores robustos mostra que o observador de coordenadas (3,2) apresenta o maior índice  $RMS^{-1}$ , identificando a presença da respectiva falha no sistema analisado, i.e., perda de 20% na rigidez da mola 2.

### 3.1.2 Filtro de Kalman

Nesta simulação, a identificação da falha inserida no referido sistema é feita utilizando-se dos observadores projetados via Filtro de Kalman. Nesta análise, considera-se a presença de um ruído de medição, mostrado na Figura 19, que é somado no sinal da resposta da aceleração da massa 2. A presença de ruídos de estado não é considerada.

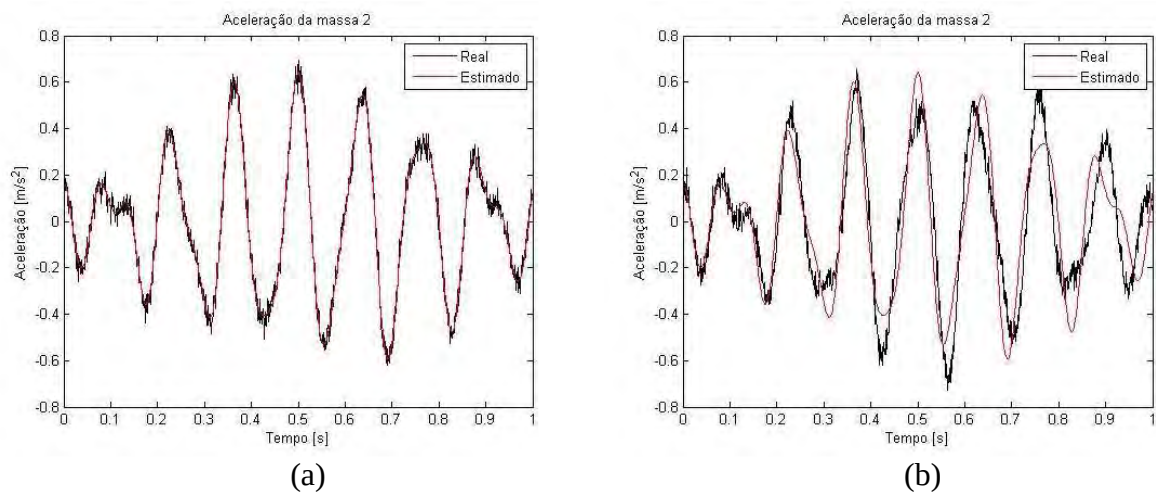
**Figura 19 - Ruído de medição da resposta de aceleração da massa 2.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A covariância do ruído de medição da aceleração da massa 2 é de 0,0011. A mesma análise para detecção e identificação da falha utilizada na seção anterior é aplicada nesta seção. A Figura 20 mostra a resposta real e estimada do sistema obtida antes e depois da inserção da falha no mesmo. Os valores  $\text{RMS}^{-1}$  dos sinais residuais produzidos são mostrados na Tabela 4.

**Figura 20 - Respostas temporais reais e estimadas pelo observador global obtidas antes (a) e depois (b) da inserção da falha no sistema massa-mola-amortecedor utilizando o Filtro de Kalman.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

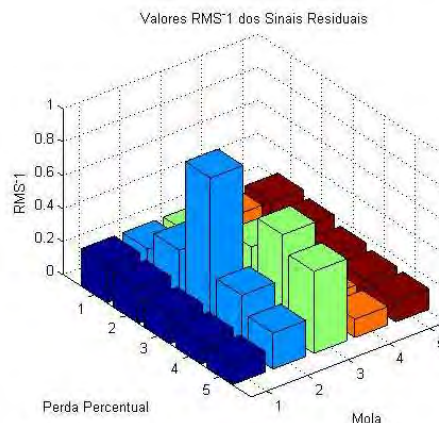
**Tabela 4 – Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo observador global antes e depois da inserção da falha no sistema massa-mola-amortecedor utilizando o Filtro de Kalman.**

| $RMS^{-1}$<br>(sistema sem falha) | $RMS^{-1}$<br>(sistema com redução<br>de 20% de $k_4$ ) |
|-----------------------------------|---------------------------------------------------------|
| 0,87                              | 0.23                                                    |

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Analisando os gráficos da Figura 20 e os dados da Tabela 4, nota-se a diminuição do índice que indica o distanciamento do sinal real e do sinal estimado pelo observador global, indicando a presença de falha no sistema. Detectada a presença de falha, a identificação da falha é feita através da comparação dos índices  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos, que para o presente caso é mostrado na Figura 21 e na Tabela 5.

**Figura 21 - Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o Filtro de Kalman, para o sistema com redução de 20% de  $k_2$ .**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Tabela 5 – Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o Filtro de Kalman, para o sistema com redução de 20% de  $k_2$ .**

|                  |        | Mola       |            |            |            |            |
|------------------|--------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Perda Percentual |        | 1( $k_1$ ) | 2( $k_2$ ) | 3( $k_3$ ) | 4( $k_4$ ) | 5( $k_5$ ) |
|                  | 1(0%)  | 0,23       | 0,23       | 0,23       | 0,23       | 0,23       |
|                  | 2(10%) | 0,21       | 0,35       | 0,28       | 0,18       | 0,20       |
|                  | 3(20%) | 0,17       | 0,87       | 0,40       | 0,14       | 0,16       |
|                  | 4(30%) | 0,14       | 0,32       | 0,60       | 0,12       | 0,13       |
|                  | 5(40%) | 0,13       | 0,22       | 0,49       | 0,11       | 0,13       |

Fonte: Elaboração do próprio autor.

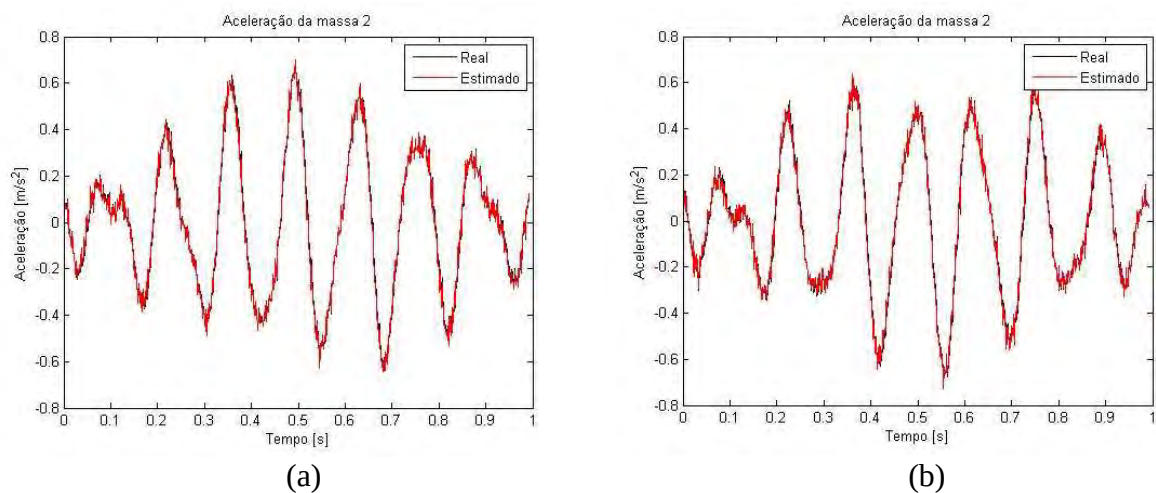
Os dados fornecidos pela Figura 21 e pela Tabela 5 mostram que o observador robusto de coordenadas (3,2) fornece o maior índice  $RMS^{-1}$  da análise, identificando a falha no sistema

analisado assim como foi feito utilizando o observador de Luenberger, porém agora com a presença de ruídos nas respostas do sistema.

### 3.1.3 Observador com Entradas Desconhecidas

Nesta simulação, a identificação da falha inserida no referido sistema é feita utilizando-se dos observadores com entradas desconhecidas. Assim como na simulação anterior, considera-se a presença do mesmo ruído de medição, bem como a desconsideração da presença de ruídos de estado no sistema. O procedimento de detecção e identificação de falha é o mesmo utilizado nos itens anteriores. A Figura 22 mostra a resposta real e estimada do sistema obtida antes e depois da inserção da falha no mesmo. Os valores  $\text{RMS}^{-1}$  dos sinais residuais produzidos são mostrados na Tabela 6.

**Figura 22 - Respostas temporais reais e estimadas pelo observador global obtidas antes (a) e depois (b) da inserção da falha no sistema massa-mola-amortecedor utilizando o observador com entradas desconhecidas.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Tabela 6 – Valores  $\text{RMS}^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo observador global antes e depois da inserção da falha no sistema massa-mola-amortecedor utilizando o observador com entradas desconhecidas.**

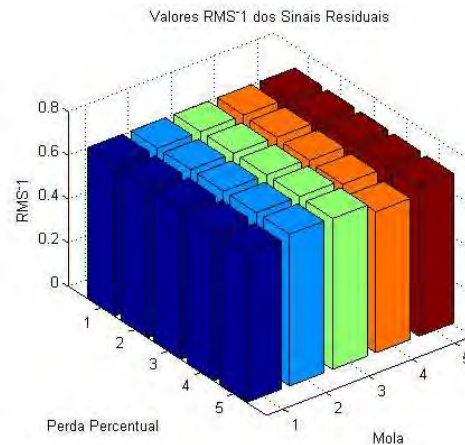
| $\text{RMS}^{-1}$<br>(sistema sem falha) | $\text{RMS}^{-1}$<br>(sistema com redução<br>de 20% de $k_4$ ) |
|------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| 0.7212                                   | 0.6947                                                         |

Fonte: Elaboração do próprio autor.

De acordo com os dados da Tabela 6, a presença da falha foi detectada pelo observador global, refletindo na redução do valor  $\text{RMS}^{-1}$  do sinal residual produzido por este observador.

A identificação da falha é feita analisando os valores  $\text{RMS}^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelos observadores robustos, mostrados na Figura 23 e na Tabela 7.

**Figura 23 - Valores RMS-1 dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o sistema com redução de 20% de  $k_2$ .**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Tabela 7 - Valores  $\text{RMS}^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o sistema com redução de 20% de  $k_2$ .**

|                         |        | Mola       |            |            |            |            |
|-------------------------|--------|------------|------------|------------|------------|------------|
|                         |        | 1( $k_1$ ) | 2( $k_2$ ) | 3( $k_3$ ) | 4( $k_4$ ) | 5( $k_5$ ) |
| <b>Perda Percentual</b> | 1(0%)  | 0,6947     | 0,6947     | 0,6947     | 0,6947     | 0,6947     |
|                         | 2(10%) | 0,6936     | 0,6954     | 0,6943     | 0,6908     | 0,6932     |
|                         | 3(20%) | 0,6912     | 0,6955     | 0,6938     | 0,6841     | 0,6914     |
|                         | 4(30%) | 0,6874     | 0,6953     | 0,6939     | 0,6737     | 0,6893     |
|                         | 5(40%) | 0,6813     | 0,6951     | 0,6927     | 0,6486     | 0,6868     |

Fonte: Elaboração do próprio autor.

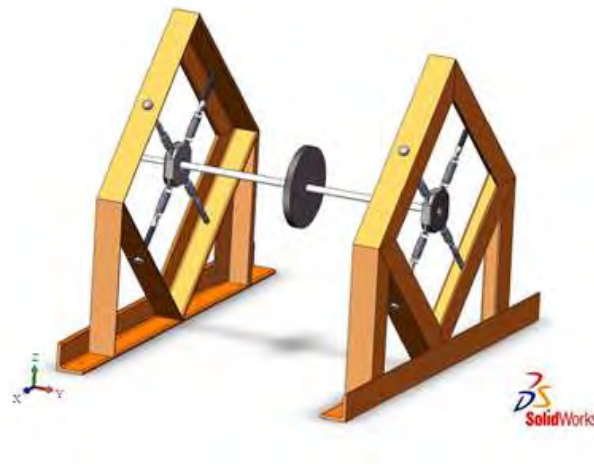
Assim como nas simulações anteriores, o observador robusto de coordenadas (3,2) fornece o maior índice  $\text{RMS}^{-1}$  da análise, indicando a ocorrência da respectiva falha no sistema analisado e identificando-a corretamente. Nesta análise, nota-se que a diferença entre os índices que identificam a falha no sistema é bem menor do que nas análises anteriores.

Isto indica que a utilização dos observadores com entradas desconhecidas podem fornecer resultados menos precisos. No entanto, a robustez com relação à presença de forças de excitação desconhecidas no sistema torna este tipo de observador uma ferramenta com aplicabilidade muito mais ampla do que os observadores utilizados nas simulações anteriores, i.e., observador de Luenberger e Filtro de Kalman. A necessidade de monitorar a integridade estrutural de sistemas cujas entradas não estão disponíveis para medição mostra a importância do observador com entradas desconhecidas no problema de detecção e identificação de falhas em sistemas autoexcitados, como será mostrado no item a seguir.

### 3.2 Sistema Rotativo

Nesta simulação, considera-se o sistema rotativo experimental representado pelo desenho mostrado na Figura 24. A Figura 25 representa o modelo simplificado deste sistema. Os parâmetros físicos do modelo e as dimensões dos elementos utilizados da discretização do sistema estão mostrados na Tabela 34 do Anexo A. Os parâmetros de rigidez e amortecimento fornecidos pela Tabela 36 são considerados para as suspensões do eixo do modelo.

**Figura 24 – Desenho representativo do sistema rotativo experimental.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

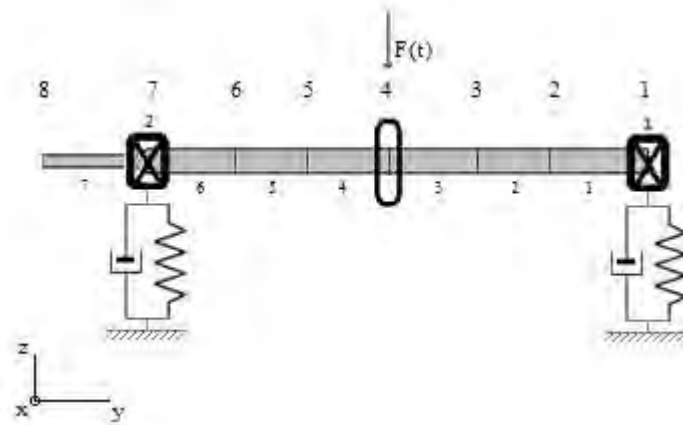
A presente análise considera apenas o plano de movimento vertical do sistema. Esta simplificação é possível por se tratar de um modelo com dois planos de movimento desacoplados. No entanto, este desacoplamento cessa à medida que o eixo rotativo começa a girar, em função do efeito giroscópico. Na presente simulação, esta influência não é considerada.

O referido sistema rotativo é autoexcitado pela presença de um desbalanceamento no disco central, localizado no ponto nodal 4 do modelo discretizado, representado na simulação por uma força harmônica na forma

$$F(t) = 0.0003 \Omega^2 \cos(\Omega t) \quad (286)$$

sendo  $\Omega$  a rotação do eixo, em rad/s.

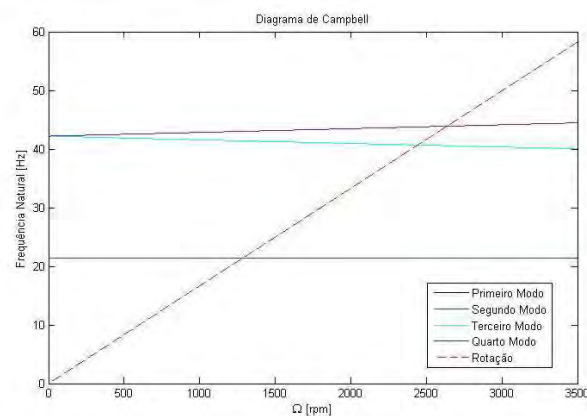
**Figura 25 – Modelo simplificado do sistema rotativo experimental.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

O monitoramento da integridade deste sistema é feito com o mesmo operando com uma rotação de 1970 rpm ( $\sim 32,8$  Hz). Esta rotação é escolhida por se tratar de um ponto seguro de operação, i.e., distante dos modos do sistema, como mostra o diagrama de Campbell na Figura 26.

**Figura 26 – Diagrama de Campbell do modelo do sistema rotativo experimental.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

O modelo completo do sistema rotativo em questão possui 4 graus de liberdade por ponto nodal, totalizando 32 graus de liberdade, ou seja, 32 modos. O modelo em espaço de estados deste sistema possui 64 estados, sendo considerado um sistema de alta ordem, o que implica no alto custo computacional na utilização de observadores de estado na detecção e localização de falhas. Na utilização de observadores de estado com entradas desconhecidas, pelo fato deste utilizar de um sistema em espaço de estados expandido, o custo computacional é ainda maior. Desta forma, uma análise é feita inicialmente para quantificar a importância dos modos do sistema com relação às suas saídas. A Tabela 8 mostra os valores singulares de Hankel do modelo completo e as normas Hankel para cada modo do referido sistema rotativo em operação, utilizando sensores de aceleração.

**Tabela 8 – Valores singulares de Hankel e normas Hankel modal do modelo completo do sistema rotativo experimental em operação.**

| <b>Modo</b> | <b>Frequência<br/>[rad/s]<br/>(<math>\Omega = 1970</math> rpm)</b> | <b>Valor<br/>Singular de<br/>Hankel</b> | <b>Norma Hankel<br/>Modal</b> |
|-------------|--------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|-------------------------------|
| <b>1</b>    | 134,02                                                             | 18,74                                   | 14,83                         |
| <b>2</b>    | 134,03                                                             | 18,46                                   | 0,09                          |
| <b>3</b>    | 257,14                                                             | 16,11                                   | 0,07                          |
| <b>4</b>    | 272,77                                                             | 16,04                                   | 0,13                          |
| <b>5</b>    | 461,46                                                             | 15,01                                   | 0,84                          |
| <b>6</b>    | 461,96                                                             | 12,93                                   | 10,36                         |
| <b>7</b>    | 1330,13                                                            | 12,10                                   | 8,69                          |
| <b>8</b>    | 1600,34                                                            | 11,18                                   | 0,01                          |
| <b>9</b>    | 2639,13                                                            | 5,66                                    | 8,13                          |
| <b>10</b>   | 2687,12                                                            | 4,26                                    | 26,07                         |
| <b>11</b>   | 4595,93                                                            | 3,61                                    | 0,00                          |
| <b>12</b>   | 4632,10                                                            | 3,15                                    | 37,37                         |
| <b>13</b>   | 5593,48                                                            | 1,17                                    | 0,00                          |
| <b>14</b>   | 5620,27                                                            | 1,15                                    | 25,53                         |
| <b>15</b>   | 13976,65                                                           | 1,03                                    | 0,00                          |
| <b>16</b>   | 13987,80                                                           | 0,37                                    | 5,09                          |
| <b>17</b>   | 14217,52                                                           | 0,34                                    | 3,56                          |
| <b>18</b>   | 14226,16                                                           | 0,16                                    | 0,00                          |
| <b>19</b>   | 25623,07                                                           | 0,15                                    | 1,16                          |
| <b>20</b>   | 25635,08                                                           | 0,12                                    | 0,00                          |
| <b>21</b>   | 32251,05                                                           | 0,09                                    | 0,00                          |
| <b>22</b>   | 32275,98                                                           | 0,07                                    | 1,07                          |
| <b>23</b>   | 37775,41                                                           | 0,06                                    | 1,22                          |
| <b>24</b>   | 37798,99                                                           | 0,02                                    | 0,08                          |
| <b>25</b>   | 60740,28                                                           | 0,01                                    | 0,34                          |
| <b>25</b>   | 60787,84                                                           | 0,01                                    | 0,00                          |
| <b>26</b>   | 61845,76                                                           | 0,01                                    | 0,17                          |
| <b>28</b>   | 61883,17                                                           | 0,00                                    | 0,00                          |
| <b>29</b>   | 92526,13                                                           | 0,00                                    | 0,07                          |
| <b>30</b>   | 92591,70                                                           | 0,00                                    | 0,00                          |
| <b>31</b>   | 105739,83                                                          | 0,00                                    | 0,09                          |
| <b>32</b>   | 105840,47                                                          | 0,00                                    | 0,00                          |

Fonte: Elaboração do próprio autor.

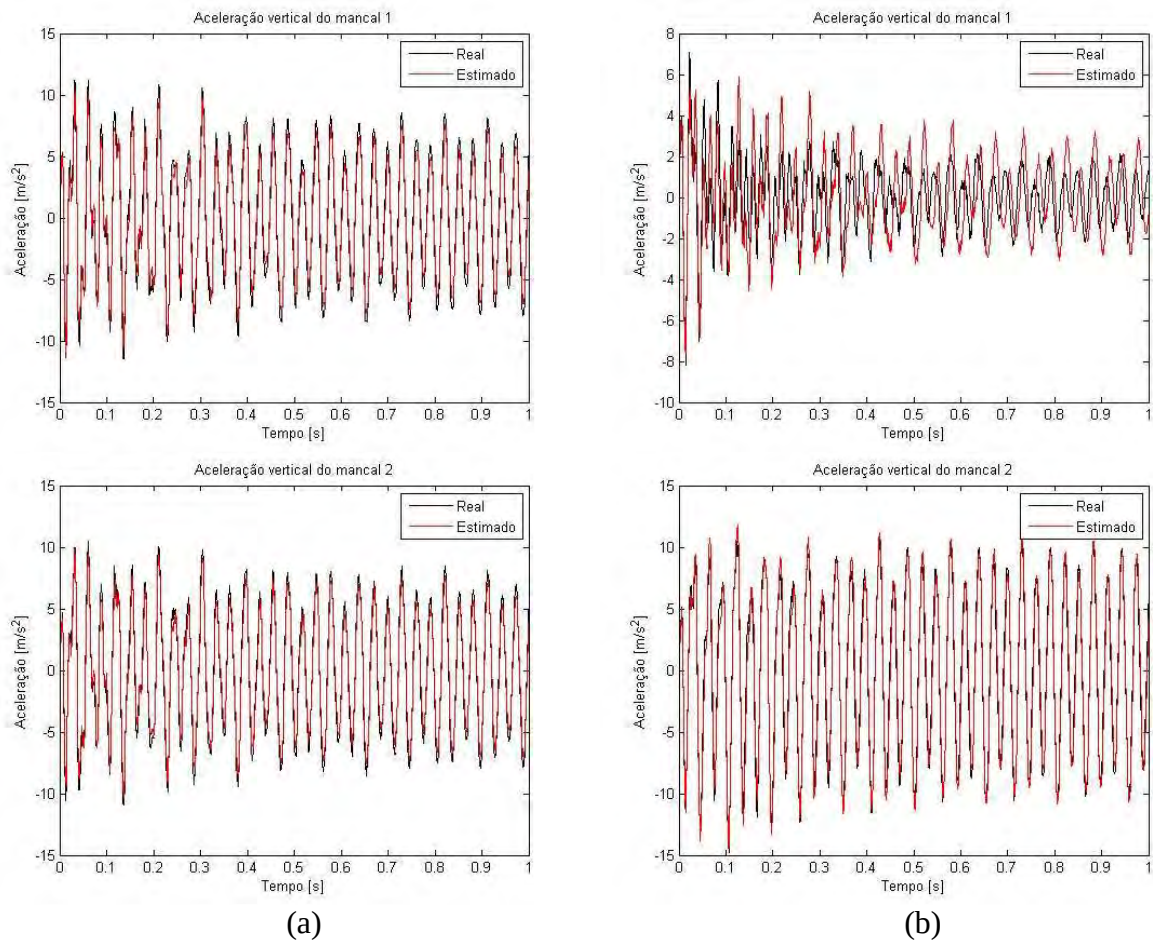
O truncamento modal pode levar em consideração um limite mínimo para o valor da norma Hankel, ou um número máximo de modos a serem considerados. Analisando os dados da Tabela 8, nota-se a grande representatividade dos seis primeiros modos, ou seja, das três primeiras ressonâncias do sistema rotativo. Desta forma, apenas estes modos serão considerados na modelagem do sistema utilizado no projeto dos observadores de estados que seguirão.

### 3.2.1 Observador de Luenberger

Esta simulação trata da detecção e da identificação de falha no referido modelo de sistema rotativo, utilizando observadores de Luenberger, projetados via Regulador Linear Quadrático. O procedimento realizado é o mesmo do sistema massa-mola-amortecedor. A falha é inserida no sistema utilizando a modelagem de trinca do Item 2.5.1.

Inicialmente, é considerado o surgimento de uma trinca na região correspondente ao elemento 1 no eixo do sistema rotativo discretizado, com profundidade correspondente a 30% do diâmetro. A Figura 27 mostra as respostas em aceleração obtidas dos dois mancais do sistema rotativo antes e depois da inserção da falha, com as respectivas respostas estimadas pelo observador global. Os valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos são mostrados na Tabela 9.

**Figura 27 - Respostas temporais reais e estimadas pelo observador global obtidas antes (a) e depois (b) da inserção da falha no modelo do sistema rotativo utilizando o observador de Luenberger.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

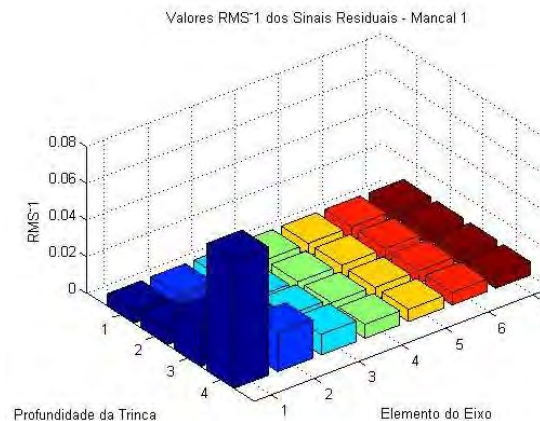
**Tabela 9 – Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo observador global antes e depois da inserção da trinca no modelo do sistema rotativo utilizando o observador de Luenberger.**

|                 | $RMS^{-1}$<br>(sistema sem falha) | $RMS^{-1}$<br>(sistema com trinca com profundidade de 30% do diâmetro no elemento 1) |
|-----------------|-----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Mancal 1</b> | 0,035                             | 0,018                                                                                |
| <b>Mancal 2</b> | 0,039                             | 0,032                                                                                |

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Pela análise dos índices  $RMS^{-1}$  obtidos pelo observador global, verifica-se que a presença da falha foi detectada pelo mesmo, tanto pela análise da resposta do mancal 1 quanto pela análise da resposta do mancal 2. Esta mesma análise mostra que a falha pode ser detectada mesmo pela análise da resposta tanto de um ponto localizado próximo quanto de um ponto localizado distante da ocorrência da falha. A identificação da falha é feita através da análise dos valores  $RMS^{-1}$  obtidos dos observadores robustos, como mostram as Figura 28 e 29 e as Tabelas 10 e 11.

**Figura 28 - Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador de Luenberger, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 30% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 1.**



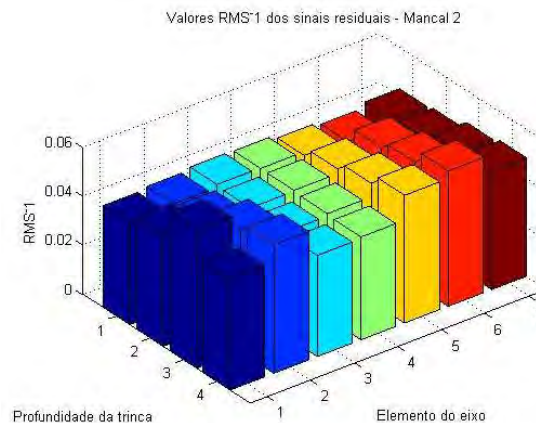
Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Tabela 10 – Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador de Luenberger, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 30% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 1.**

|                               |               | Elemento do Eixo |       |       |       |       |       |       |
|-------------------------------|---------------|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                               |               | 1                | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     |
| <b>Profundidade da Trinca</b> | <b>1(10%)</b> | 0,017            | 0,017 | 0,018 | 0,018 | 0,018 | 0,018 | 0,018 |
|                               | <b>2(20%)</b> | 0,022            | 0,021 | 0,019 | 0,019 | 0,019 | 0,019 | 0,018 |
|                               | <b>3(30%)</b> | 0,058            | 0,038 | 0,025 | 0,020 | 0,020 | 0,022 | 0,019 |
|                               | <b>4(40%)</b> | 0,052            | 0,053 | 0,028 | 0,021 | 0,021 | 0,022 | 0,019 |

Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Figura 29 - Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador de Luenberger, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 30% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 2.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Tabela 11 – Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador de Luenberger, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 30% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 2.**

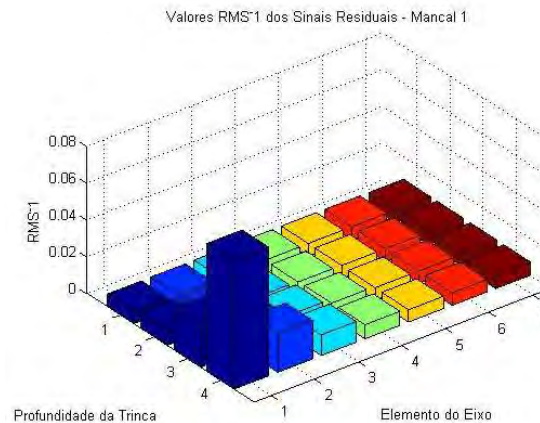
|                               |               | Elemento do Eixo |       |       |       |       |       |       |
|-------------------------------|---------------|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                               |               | 1                | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     |
| <b>Profundidade da Trinca</b> | <b>1(10%)</b> | 0,041            | 0,042 | 0,043 | 0,043 | 0,042 | 0,040 | 0,043 |
|                               | <b>2(20%)</b> | 0,045            | 0,044 | 0,043 | 0,043 | 0,045 | 0,047 | 0,043 |
|                               | <b>3(30%)</b> | 0,056            | 0,049 | 0,042 | 0,042 | 0,048 | 0,050 | 0,047 |
|                               | <b>4(40%)</b> | 0,045            | 0,052 | 0,041 | 0,042 | 0,052 | 0,055 | 0,048 |

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Pela análise dos valores  $RMS^{-1}$  obtidos do banco de observadores robustos, tem-se que o observador de coordenadas (3,1) apresenta o maior índice, nas análises dos dois mancais. Isto representa que a respectiva falha deste observador, no caso a trinca com profundidade de 30% do diâmetro do eixo localizada no elemento 1, foi identificada no sistema.

Agora, considera-se que esta trinca tenha se propagado e atingido uma profundidade equivalente a 40% do diâmetro do eixo. O procedimento de identificação de falha é realizado novamente, obtendo os valores  $\text{RMS}^{-1}$  do banco de observadores mostrados nas Figuras 30 e 31 e nas Tabelas 12 e 13.

**Figura 30 - Valores  $\text{RMS}^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador de Luenberger, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 40% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 1.**



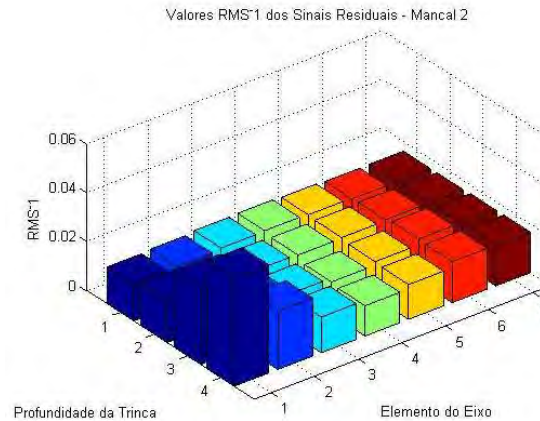
Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Tabela 12 – Valores  $\text{RMS}^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador de Luenberger, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 40% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 1.**

|                        |        | Elemento do Eixo |       |       |       |       |       |       |
|------------------------|--------|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                        |        | 1                | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     |
| Profundidade da Trinca | 1(10%) | 0,006            | 0,007 | 0,007 | 0,007 | 0,007 | 0,007 | 0,007 |
|                        | 2(20%) | 0,008            | 0,008 | 0,007 | 0,007 | 0,007 | 0,007 | 0,007 |
|                        | 3(30%) | 0,023            | 0,014 | 0,010 | 0,007 | 0,007 | 0,007 | 0,007 |
|                        | 4(40%) | 0,070            | 0,021 | 0,011 | 0,008 | 0,007 | 0,007 | 0,007 |

Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Figura 31 - Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador de Luenberger, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 40% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 2.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Tabela 13 – Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador de Luenberger, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 40% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 2.**

|                        |        | Elemento do Eixo |       |       |       |       |       |       |
|------------------------|--------|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                        |        | 1                | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     |
| Profundidade da Trinca | 1(10%) | 0,015            | 0,015 | 0,016 | 0,016 | 0,016 | 0,016 | 0,016 |
|                        | 2(20%) | 0,017            | 0,017 | 0,016 | 0,015 | 0,016 | 0,016 | 0,016 |
|                        | 3(30%) | 0,031            | 0,021 | 0,015 | 0,013 | 0,015 | 0,017 | 0,016 |
|                        | 4(40%) | 0,044            | 0,024 | 0,015 | 0,012 | 0,014 | 0,017 | 0,016 |

Fonte: Elaboração do próprio autor.

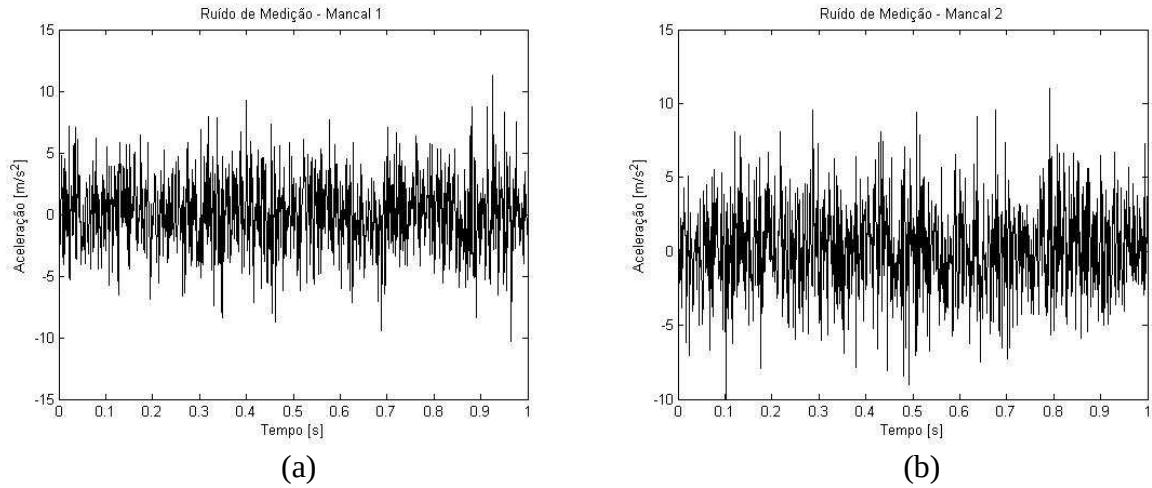
Os resultados fornecidos pelo banco de observadores robustos nesta nova análise mostram que o observador robusto de coordenadas (4,1) fornece o maior valor  $RMS^{-1}$ , representando que a progressão da falha no sistema foi identificada. Nota-se também que a identificação da falha pode ser feita pela análise da resposta tanto de um ponto localizado próximo quanto de um ponto localizado distante da ocorrência da falha. Uma melhora da precisão da identificação da falha também pode ser notada com o aumento da trinca no eixo. Isto deve ao maior impacto desta na resposta dinâmica do sistema, fator que é fundamental para o bom desempenho da técnica proposta.

### 3.2.2 Filtro de Kalman

Esta simulação trata da detecção e da identificação de falha no referido modelo de sistema rotativo, utilizando observadores projetados via Filtro de Kalman. A mesma falha considerada na simulação anterior é utilizada nesta análise, que agora considera a presença de ruídos de

medição. A Figura 32 mostra os sinais de interferência que são somados nas respostas obtidas dos dois mancais do sistema rotativo em questão.

**Figura 32 - Ruídos de medição das resposta de aceleração vertical dos mancais 1 (a) e 2 (b).**



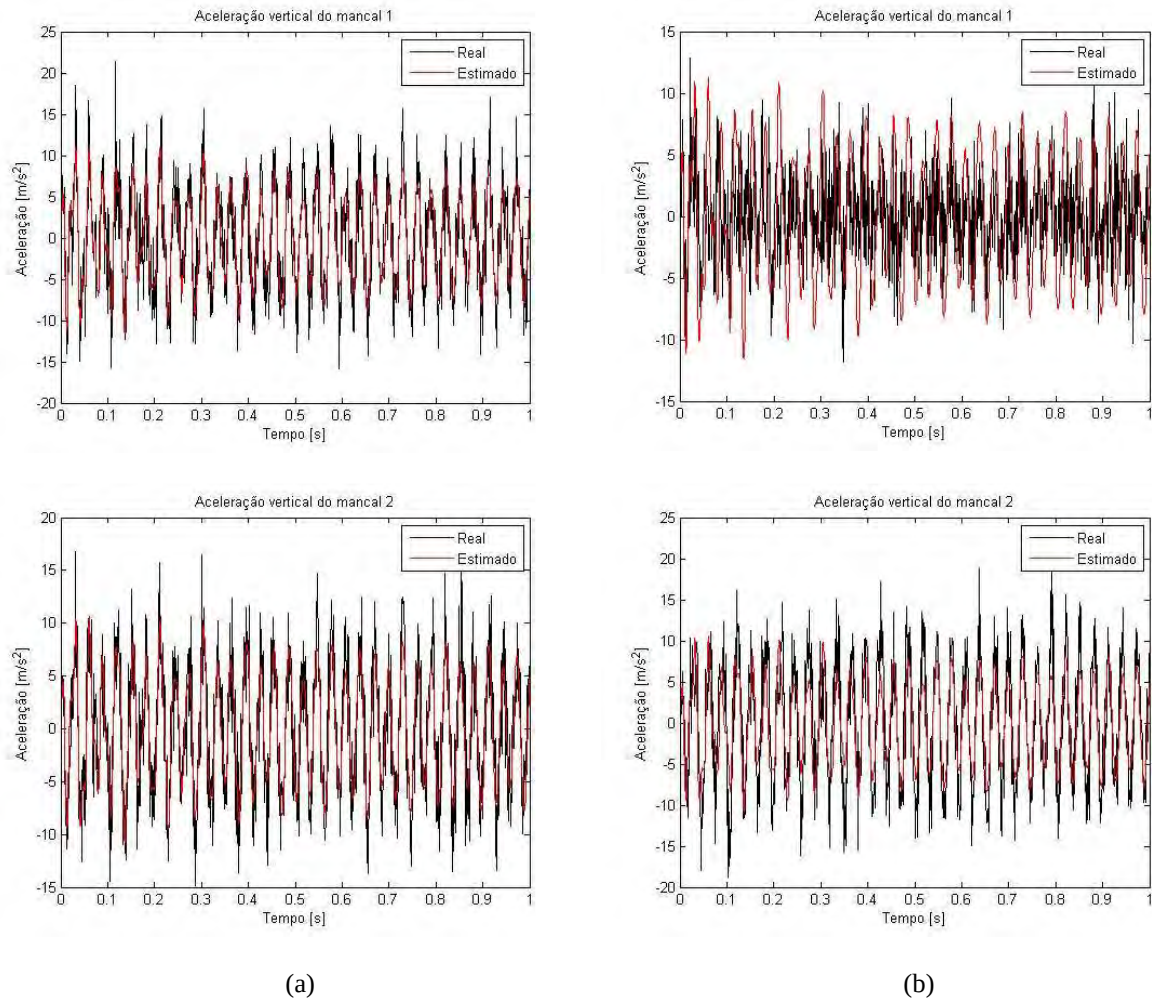
Fonte: Elaboração do próprio autor.

A matriz de covariância dos ruídos de medição das respostas de aceleração vertical dos mancais 1 e 2 é

$$R_k = \begin{bmatrix} 9,58 & 0,42 \\ 0,42 & 9,60 \end{bmatrix} \quad (287)$$

A Figura 33 mostra as respostas em aceleração obtidas dos dois mancais do sistema rotativo, antes e depois da inserção da falha, com as respectivas respostas estimadas pelo observador global. Os valores  $\text{RMS}^{-1}$  dos sinais residuais produzidos são mostrados na Tabela 14.

**Figura 33 - Respostas temporais reais e estimadas pelo observador global obtidas antes (a) e depois (b) da inserção da falha no modelo do sistema rotativo utilizando o Filtro de Kalman.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

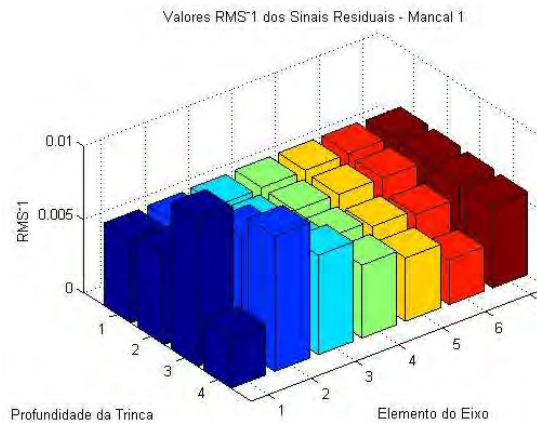
**Tabela 14 – Valores  $\text{RMS}^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo observador global antes e depois da inserção da trinca no modelo do sistema rotativo utilizando o Filtro de Kalman.**

|                 | $\text{RMS}^{-1}$<br>(sistema sem falha) | $\text{RMS}^{-1}$<br>(sistema com<br>trinca com<br>profundidade<br>de 30% do<br>diâmetro no<br>elemento 1) |
|-----------------|------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Mancal 1</b> | 0,0091                                   | 0,0057                                                                                                     |
| <b>Mancal 2</b> | 0,0094                                   | 0,0073                                                                                                     |

Fonte: Elaboração do próprio autor.

A análise dos valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais obtidos pelo observador global revela que a presença da falha foi detectada através da resposta tanto do mancal 1 como do mancal 2. A identificação da falha utiliza a mesma análise dos valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais dos observadores robustos utilizada na simulação anterior. Os resultados destas análises são mostrados nas Figuras 34 e 35 e nas Tabelas 15 e 16.

**Figura 34 - Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o Filtro de Kalman, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 30% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 1.**



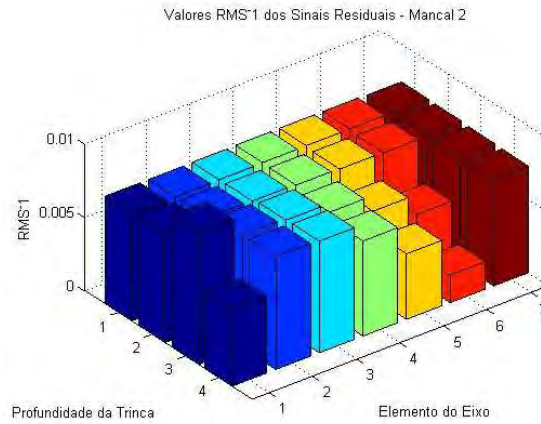
Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Tabela 15 – Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o Filtro de Kalman, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 30% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 1.**

|                        |        | Elemento do Eixo |        |        |        |        |        |        |
|------------------------|--------|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|                        |        | 1                | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      |
| Profundidade da Trinca | 1(10%) | 0,0056           | 0,0057 | 0,0058 | 0,0058 | 0,0059 | 0,0058 | 0,0058 |
|                        | 2(20%) | 0,0061           | 0,0060 | 0,0059 | 0,0058 | 0,0057 | 0,0057 | 0,0058 |
|                        | 3(30%) | 0,0103           | 0,0080 | 0,0064 | 0,0054 | 0,0050 | 0,0047 | 0,0057 |
|                        | 4(40%) | 0,0034           | 0,0096 | 0,0069 | 0,0050 | 0,0043 | 0,0031 | 0,0057 |

Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Figura 35 - Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o Filtro de Kalman, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 30% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 2.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Tabela 16 – Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o Filtro de Kalman, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 30% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 2.**

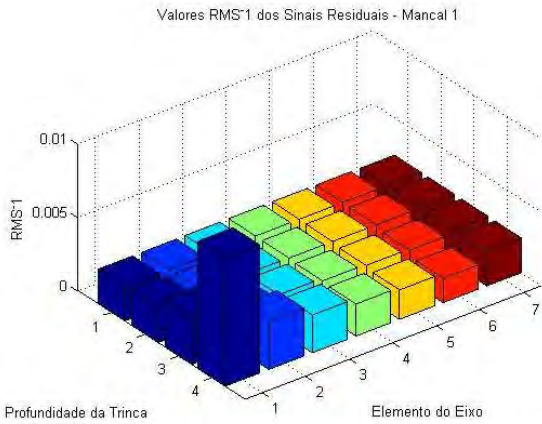
|                        |        | Elemento do Eixo |        |        |        |        |        |        |
|------------------------|--------|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|                        |        | 1                | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      |
| Profundidade da Trinca | 1(10%) | 0,0073           | 0,0073 | 0,0073 | 0,0073 | 0,0073 | 0,0074 | 0,0073 |
|                        | 2(20%) | 0,0075           | 0,0074 | 0,0073 | 0,0073 | 0,0072 | 0,0072 | 0,0073 |
|                        | 3(30%) | 0,0092           | 0,0079 | 0,0076 | 0,0069 | 0,0058 | 0,0044 | 0,0072 |
|                        | 4(40%) | 0,0053           | 0,0080 | 0,0077 | 0,0064 | 0,0043 | 0,0018 | 0,0072 |

Fonte: Elaboração do próprio autor.

A análise qualitativa dos valores  $RMS^{-1}$  dos residuais gerados pelos observadores robustos, mostra que o observador de coordenadas (3,1) se destaca por fornecer o maior valor deste índice, que indica a ocorrência da respectiva falha no sistema analisado, que no caso se refere à presença de uma trinca no elemento 1 do eixo, com profundidade de 30% do diâmetro.

Assim como na simulação anterior, considera-se que esta trinca tenha se propagado e tomado uma profundidade equivalente a 40% do diâmetro do eixo. O procedimento de identificação de falha é realizado novamente, obtendo os valores  $RMS^{-1}$  do banco de observadores mostrados nas Figuras 36 e 37 e nas Tabelas 17 e 18.

**Figura 36 - Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o Filtro de Kalman, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 40% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 1.**



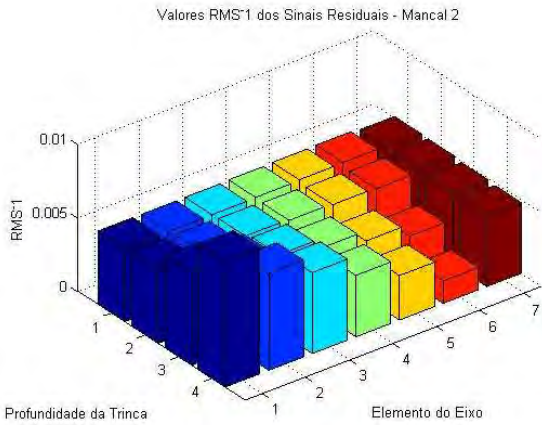
Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Tabela 17 – Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o Filtro de Kalman, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 40% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 1.**

|                        |        | Elemento do Eixo |        |        |        |        |        |        |
|------------------------|--------|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|                        |        | 1                | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      |
| Profundidade da Trinca | 1(10%) | 0,0024           | 0,0024 | 0,0024 | 0,0024 | 0,0024 | 0,0024 | 0,0024 |
|                        | 2(20%) | 0,0025           | 0,0024 | 0,0024 | 0,0024 | 0,0024 | 0,0024 | 0,0024 |
|                        | 3(30%) | 0,0033           | 0,0028 | 0,0025 | 0,0023 | 0,0022 | 0,0021 | 0,0024 |
|                        | 4(40%) | 0,0090           | 0,0034 | 0,0026 | 0,0022 | 0,0020 | 0,0017 | 0,0024 |

Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Figura 37 - Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o Filtro de Kalman, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 40% do diâmetro, utilizando a leitura do mancal 2.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Tabela 18 – Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o Filtro de Kalman, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 40% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 2.**

|                               |               | (Elemento do Eixo) |        |        |        |        |        |        |
|-------------------------------|---------------|--------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|                               |               | 1                  | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      |
| <b>Profundidade da Trinca</b> | <b>1(10%)</b> | 0,0050             | 0,0050 | 0,0051 | 0,0051 | 0,0051 | 0,0052 | 0,0051 |
|                               | <b>2(20%)</b> | 0,0051             | 0,0051 | 0,0051 | 0,0050 | 0,0049 | 0,0049 | 0,0050 |
|                               | <b>3(30%)</b> | 0,0062             | 0,0057 | 0,0053 | 0,0046 | 0,0040 | 0,0031 | 0,0049 |
|                               | <b>4(40%)</b> | 0,0085             | 0,0065 | 0,0056 | 0,0042 | 0,0031 | 0,0015 | 0,0048 |

Fonte: Elaboração do próprio autor.

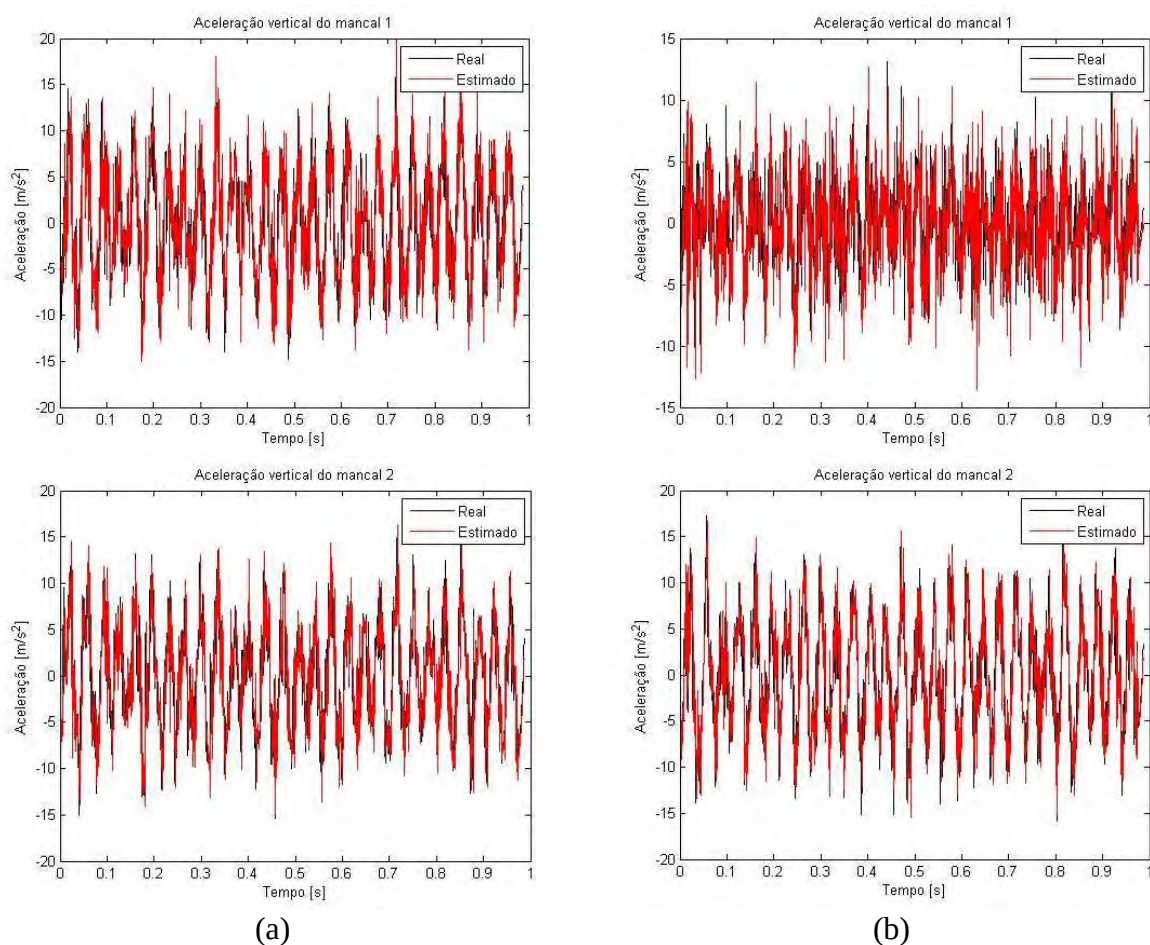
Assim como na análise utilizando o observador de Luenberger para o sistema rotativo sem a presença de ruídos de medição, verifica-se que o observador robusto de coordenadas (4,1) fornece o maior valor  $RMS^{-1}$  para a inserção deste tipo de falha, indicando corretamente a progressão da falha no sistema, mesmo com a presença de ruídos de medição. Também é verificado que a identificação da falha pode ser feita pela análise da resposta tanto de um ponto localizado próximo quanto de um ponto localizado distante da ocorrência da falha, no caso os mancais 1 e 2, respectivamente.

Desta forma, pode ser mostrado que as simulações numéricas de detecção e identificação de falhas utilizando o observador de Luenberger para sistemas determinísticos e utilizando o filtro de Kalman para sistemas estocásticos fornecem resultados satisfatórios. No entanto, a utilização destes tipos de observadores se restringe apenas em sistemas com entradas conhecidas.

### 3.2.3 Observador com Entradas Desconhecidas

Nesta simulação, as mesmas situações tratadas nas análises anteriores são consideradas, porém agora utilizando o observador com entradas desconhecidas. Agora, assume-se que a força de excitação do sistema não está disponível para o observador de estados, visto que se trata de um sistema autoexcitado. Inicialmente, utiliza-se a mesma falha considerada nos itens anteriores, representada pela trinca no elemento 1 com profundidade de 30% do diâmetro do eixo. Assim como nas análises anteriores, a detecção da presença de falha no sistema é feita analisando-se os valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo observador global antes e depois da inserção da trinca no modelo. Os resultados deste procedimento são apresentados na Figura 38 e na Tabela 19.

**Figura 38 - Respostas temporais reais e estimadas pelo observador global obtidas antes (a) e depois (b) da inserção da falha no modelo do sistema rotativo utilizando o observador com entradas desconhecidas.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Tabela 19 – Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo observador global antes e depois da inserção da falha no modelo do sistema rotativo utilizando o observador com entradas desconhecidas.**

|                 | $RMS^{-1}$<br>(sistema sem falha) | $RMS^{-1}$<br>(sistema com<br>trinca com<br>profundidade<br>de 30% do<br>diâmetro no<br>elemento 1) |
|-----------------|-----------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Mancal 1</b> | 0,038                             | 0,011                                                                                               |
| <b>Mancal 2</b> | 0,037                             | 0,028                                                                                               |

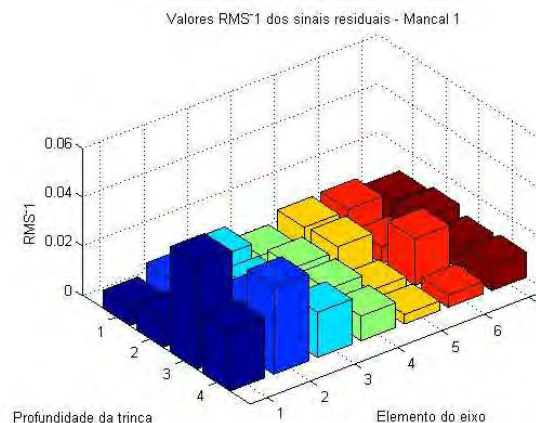
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Analisando os resultados, verifica-se que a presença da falha foi detectada pelo observador global, através da redução dos valores  $RMS^{-1}$  obtidos utilizando tanto a resposta do mancal 1 como a resposta do mancal 2. Verifica-se que mesmo com a presença de ruídos de medição,

este tipo de observador fornece resultados satisfatórios na detecção de alterações estruturais do referido sistema.

O procedimento de identificação da falha é o mesmo das análises anteriores. As Figuras 39 e 40 e as Tabelas 20 e 21 fornecem os valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos.

**Figura 39 - Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 30% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 1.**



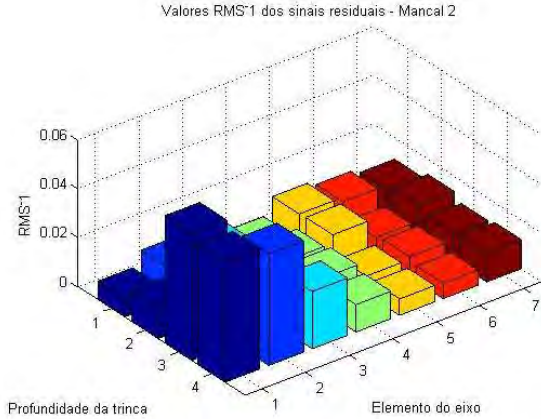
Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Tabela 20 – Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 30% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 1.**

|                        |        | Elemento do Eixo |       |       |       |       |       |       |
|------------------------|--------|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                        |        | 1                | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     |
| Profundidade da Trinca | 1(10%) | 0,007            | 0,012 | 0,014 | 0,008 | 0,013 | 0,013 | 0,009 |
|                        | 2(20%) | 0,011            | 0,009 | 0,011 | 0,012 | 0,014 | 0,007 | 0,012 |
|                        | 3(30%) | 0,043            | 0,020 | 0,011 | 0,012 | 0,005 | 0,019 | 0,009 |
|                        | 4(40%) | 0,024            | 0,035 | 0,018 | 0,010 | 0,004 | 0,005 | 0,010 |

Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Figura 40 - Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o sistema rotativo com trinca com profundidade de 30% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 2.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

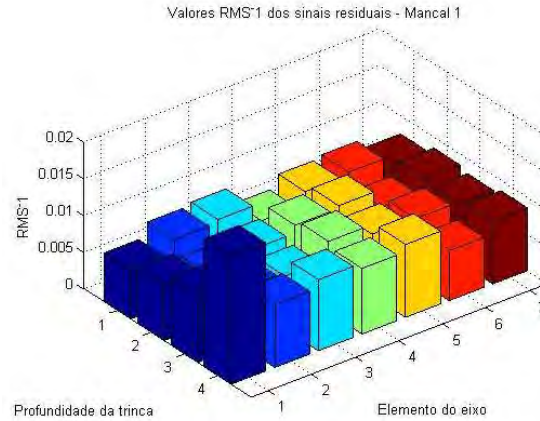
**Tabela 21 – Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 30% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 2.**

|                               |               | Elemento do Eixo |       |       |       |       |       |       |
|-------------------------------|---------------|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                               |               | 1                | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     |
| <b>Profundidade da Trinca</b> | <b>1(10%)</b> | 0,007            | 0,013 | 0,014 | 0,008 | 0,015 | 0,013 | 0,011 |
|                               | <b>2(20%)</b> | 0,012            | 0,010 | 0,013 | 0,012 | 0,015 | 0,007 | 0,014 |
|                               | <b>3(30%)</b> | 0,052            | 0,017 | 0,012 | 0,013 | 0,007 | 0,008 | 0,011 |
|                               | <b>4(40%)</b> | 0,049            | 0,046 | 0,023 | 0,011 | 0,007 | 0,006 | 0,012 |

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Analisando os resultados fornecidos pelos observadores robustos, tem-se que a falha foi corretamente identificada tanto pela utilização da resposta do mancal 1 quanto pela utilização da resposta do mancal 2. Considerando agora a propagação da falha para uma profundidade equivalente a 40% do diâmetro do eixo, o procedimento de identificação de falha é feito novamente. Os resultados desta análise são mostrados nas Figuras 41 e 42 e nas Tabelas 22 e 23.

**Figura 41 - Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 40% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 1.**



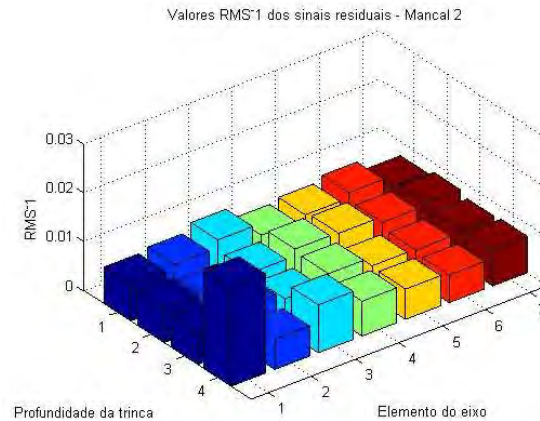
Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Tabela 22 – Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 40% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 1.**

|                        |        | Elemento do Eixo |       |       |       |       |       |       |
|------------------------|--------|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                        |        | 1                | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     |
| Profundidade da Trinca | 1(10%) | 0,007            | 0,009 | 0,009 | 0,007 | 0,008 | 0,009 | 0,007 |
|                        | 2(20%) | 0,008            | 0,007 | 0,008 | 0,009 | 0,009 | 0,007 | 0,008 |
|                        | 3(30%) | 0,009            | 0,008 | 0,007 | 0,010 | 0,008 | 0,008 | 0,008 |
|                        | 4(40%) | 0,017            | 0,009 | 0,010 | 0,009 | 0,010 | 0,007 | 0,008 |

Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Figura 42 - Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 40% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 2.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Tabela 23 – Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o modelo do sistema rotativo com trinca com profundidade de 40% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 2.**

|                               |               | Elemento do Eixo |       |       |       |       |       |       |
|-------------------------------|---------------|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                               |               | 1                | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     |
| <b>Profundidade da Trinca</b> | <b>1(10%)</b> | 0,007            | 0,008 | 0,010 | 0,007 | 0,008 | 0,009 | 0,007 |
|                               | <b>2(20%)</b> | 0,007            | 0,006 | 0,007 | 0,009 | 0,009 | 0,007 | 0,008 |
|                               | <b>3(30%)</b> | 0,007            | 0,008 | 0,007 | 0,008 | 0,006 | 0,006 | 0,007 |
|                               | <b>4(40%)</b> | 0,020            | 0,006 | 0,010 | 0,007 | 0,006 | 0,006 | 0,007 |

Fonte: Elaboração do próprio autor.

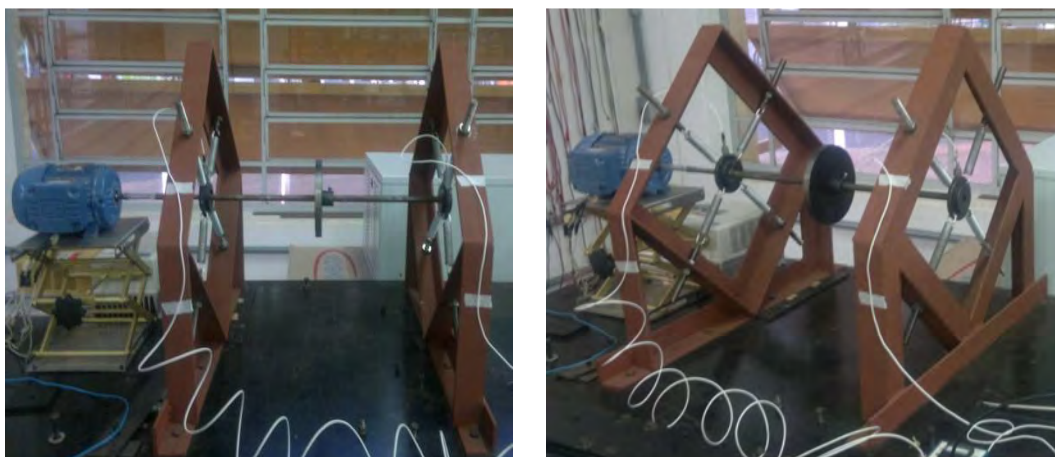
Os resultados fornecidos pelos observadores robustos mostram que a propagação da trinca foi corretamente identificada, utilizando tanto a resposta do mancal 1 como a resposta do mancal 2. Esta análise representa que a técnica de detecção e identificação de falhas utilizando o observador com entradas desconhecidas tem desempenho bastante próximo ao observador de Luenberger e ao Filtro de Kalman, salientando o fato de que nesta simulação não foi necessário utilizar das forças de excitação do sistema, o que representa uma grande vantagem com relação aos observadores de estados tradicionais.

## 4 VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL

---

Este capítulo trata da validação experimental da técnica de detecção e identificação de falhas via observadores de estados. Muitos trabalhos já demonstraram a eficácia experimental desta metodologia utilizando observadores ditos tradicionais, aplicados em sistemas contínuos (KOROISHI, 2009; LEMOS, 2004; MARANO, 2002; MELO E ARAÚJO, 2007; WATANABE, 2010). No presente trabalho, verifica-se a eficácia experimental da metodologia de diagnose de falhas via observadores de estados utilizando o observador com entradas desconhecidas, visto que as forças de excitação atuantes no sistema não são disponíveis para medição. Este experimento é feito utilizando o sistema rotativo experimental mostrado na Figura 43, construído no Laboratório de Vibrações do DEM/FEIS.

**Figura 43 – Sistema rotativo experimental.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

O sistema rotativo experimental é composto pelos seguintes componentes:

- 01 disco de aço AISI 1045;
- 01 barra de aço AISI 1040;
- 02 mancais de rolamento de esferas autocompensadores;
- 01 mesa inercial;
- 02 suportes fixos na mesa inercial;
- 08 molas helicoidais;
- 01 motor de acionamento de indução trifásico Weg® de 0.12 cv / 3380 rpm;

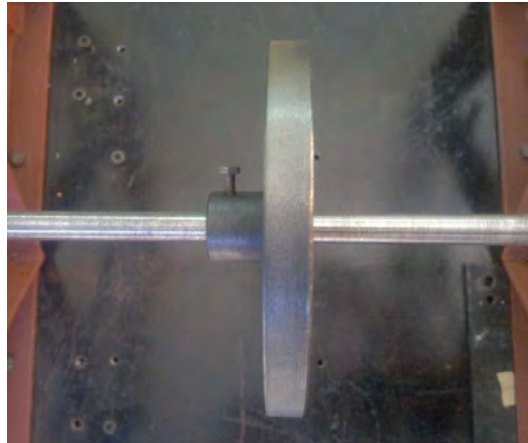
A aquisição dos dados é feita pelos seguintes instrumentos:

- 02 acelerômetros Dytran® 3056B2;
- 02 condicionadores de sinais PCB Piezotronics® 480E09;
- Software de aquisição de sinais dSpace® Control Desk;

- Placa de aquisição de sinais dSpace® DS1103 Control Board;

O projeto dos observadores de estados é baseado no mesmo modelo, ajustado e reduzido, utilizado nas simulações computacionais. O procedimento de diagnose de falhas utiliza dados obtidos do sistema rotativo em operação, autoexcitado pela presença de uma massa desbalanceada acoplada no disco, como mostra a Figura 44.

**Figura 44 – Massa desbalanceada acoplada no disco, representada pelo parafuso de fixação do disco no eixo.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A validação experimental consiste na detecção e identificação de duas falhas simples, localizadas em posições diferentes ao longo do eixo. O primeiro caso considera uma falha localizada próximo do mancal 1. O segundo caso considera uma falha localizada entre o disco e o mancal 2. Em ambos os casos, assim como nas simulações computacionais, utiliza-se das respostas de aceleração vertical obtida dos dois mancais, utilizando-se acelerômetros acoplados como mostra a Figura 45.

**Figura 45 – Acelerômetros acoplados nos mancais 1 (a) e 2 (b).**



(a)



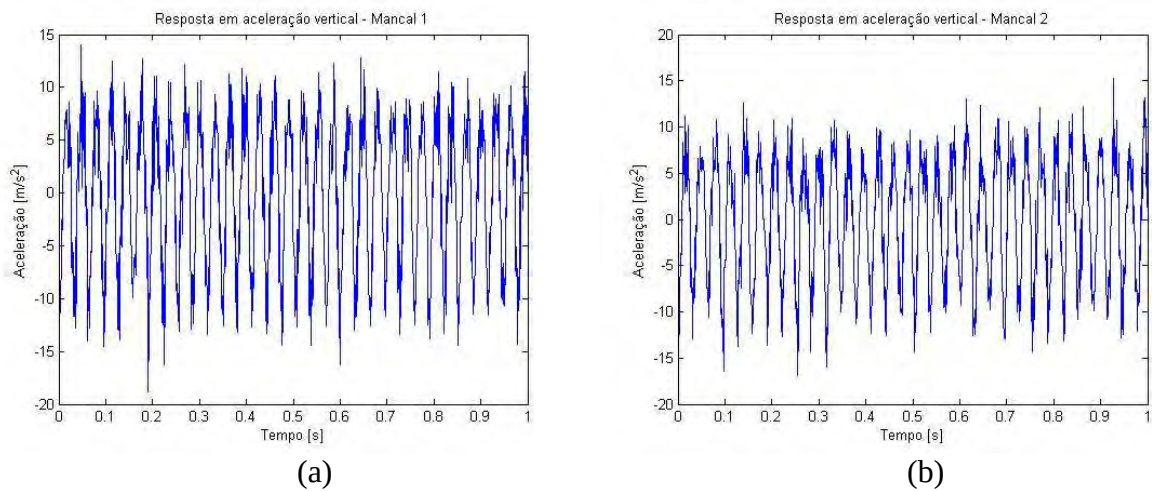
(b)

Fonte: Elaboração do próprio autor.

## 4.1 Primeiro Caso

O primeiro caso da validação experimental considera uma falha na forma de um entalhe inserido no local correspondente ao elemento 1 do modelo discretizado. Os parâmetros considerados na modelagem do sistema são dados pelas Tabelas 34 e 36 do Anexo A. O sistema opera com rotação de 1700 rpm e, inicialmente, obtém-se uma amostra da resposta de aceleração dos mancais com o sistema íntegro, com duração de 1s e amostragem de 0.001s, como mostra a Figura 46.

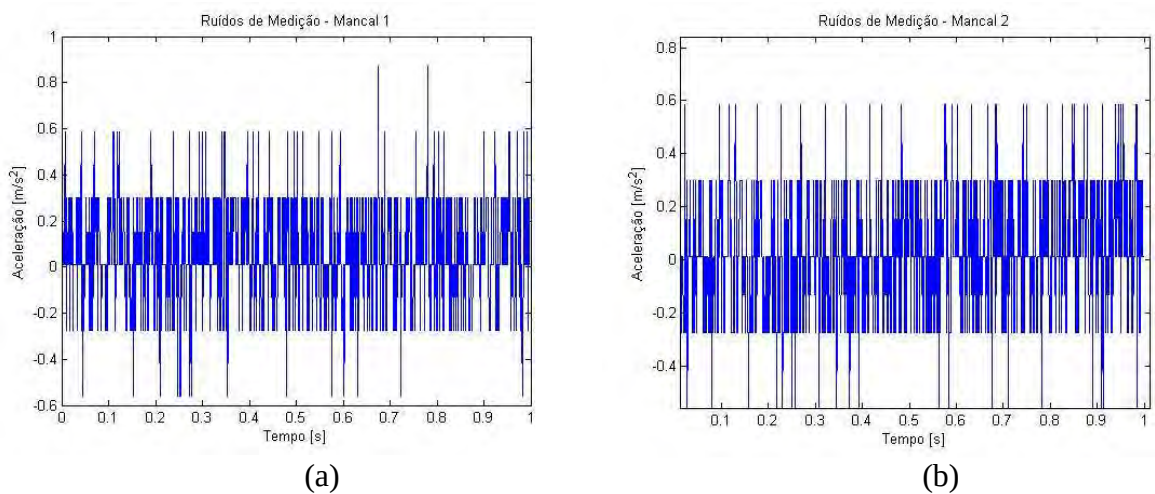
**Figura 46 – Respostas da aceleração vertical dos mancais 1 (a) e 2 (b), obtidas do sistema íntegro em operação.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A obtenção dos ruídos de medição é feita com o sistema estático, onde os sinais obtidos representam apenas as interferências que interferem na medição, como mostra a Figura 47.

**Figura 47 – Ruídos de medição obtidos dos acelerômetros acoplados nos mancais 1 (a) e 2 (b).**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A matriz de covariâncias dos ruídos de medição obtidos é dada por:

$$R_k = \begin{bmatrix} 0.057 & 0.057 \\ 0.057 & 0.057 \end{bmatrix} \quad (288)$$

Inicialmente, uma falha de profundidade de 30% em relação ao diâmetro do eixo é provocada no sistema. Esta falha é representada por uma descontinuidade inserida no eixo, como mostra a Figura 48. Considera-se que o efeito do referido entalhe na rigidez local do eixo seja equivalente ao provocado por uma trinca real.

**Figura 48 –Entalhe com profundidade de 30% do diâmetro do eixo, na região correspondente ao elemento 1 do modelo.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

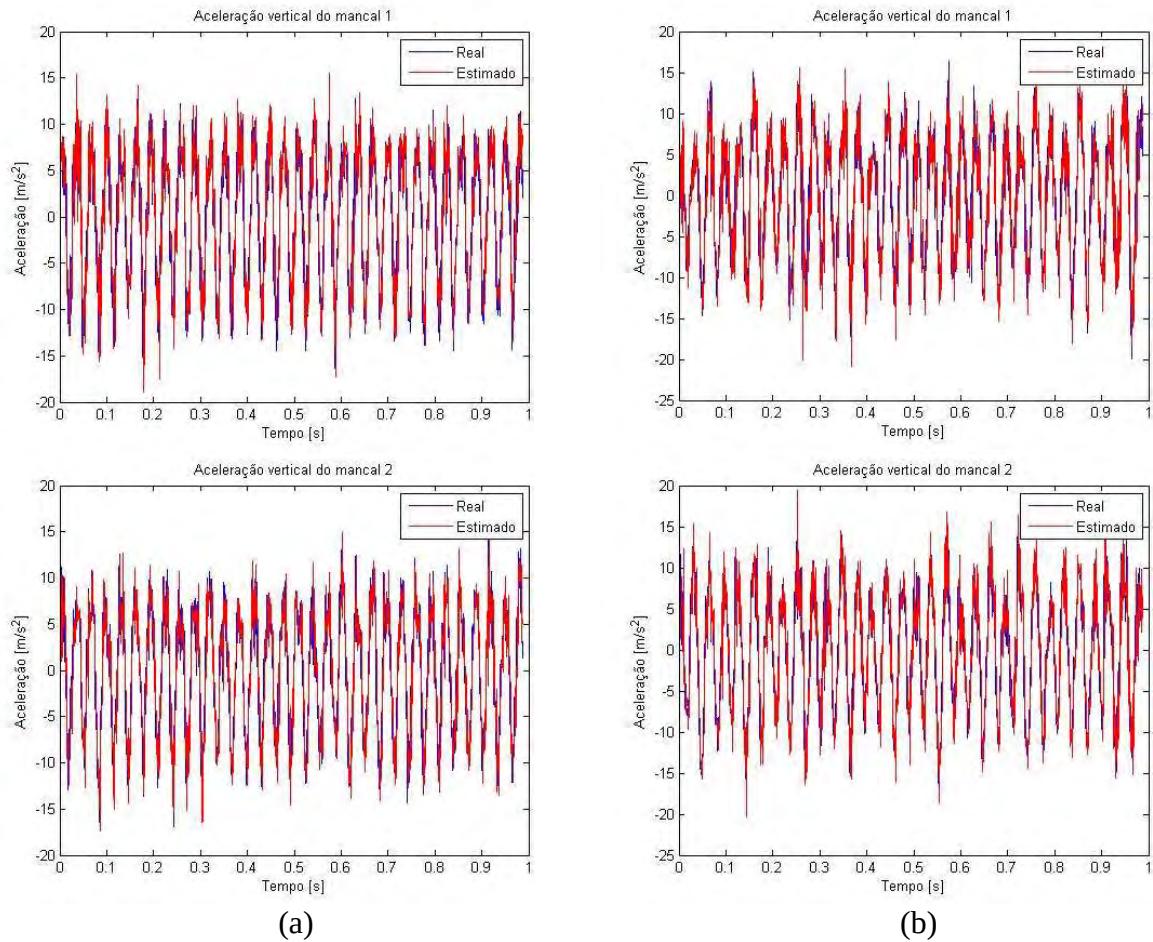
A detecção da presença da falha no sistema é feita através da análise dos valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo observador global, antes e depois da inserção da falha no sistema. Os resultados são mostrados na Figura 49 e na Tabela 24.

**Tabela 24 – Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo observador global antes e depois da inserção da falha no sistema rotativo experimental, no primeiro caso, utilizando o observador com entradas desconhecidas.**

|                 | $RMS^{-1}$<br>(sistema sem falha) | $RMS^{-1}$<br>(sistema com<br>trinca com<br>profundidade<br>de 30% do<br>diâmetro no<br>elemento 1) |
|-----------------|-----------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Mancal 1</b> | 0,0084                            | 0,0073                                                                                              |
| <b>Mancal 2</b> | 0,0078                            | 0,0074                                                                                              |

Fonte: Elaboração do próprio autor.

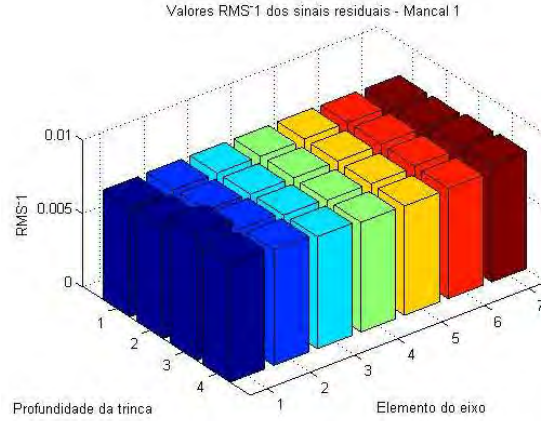
**Figura 49 - Respostas temporais reais e estimadas pelo observador global obtidas antes (a) e depois (b) da inserção da falha no sistema rotativo experimental, no primeiro caso, utilizando o observador com entradas desconhecidas.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Através da análise dos resultados obtidos do observador global, verifica-se que a presença da falha foi detectada pelo mesmo, utilizando tanto a resposta do mancal 1 como a resposta do mancal 2. As Figuras 50 e 51 e as Tabelas 25 e 26 mostram os resultados obtidos dos observadores robustos, correspondentes à análise de identificação de falha.

**Figura 50 - Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o sistema rotativo experimental com trinca com profundidade de 30% do diâmetro no elemento 1, utilizando a leitura do mancal 1.**



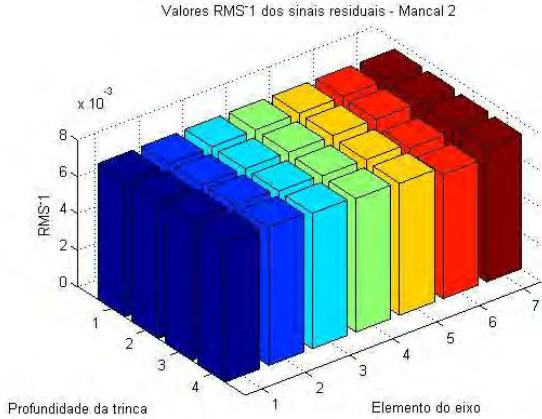
Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Tabela 25 – Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o sistema rotativo experimental com trinca com profundidade de 30% do diâmetro na região correspondente ao elemento 1 no modelo, utilizando a leitura do mancal 1.**

|                               |               | Elemento do Eixo |        |        |        |        |        |        |
|-------------------------------|---------------|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|                               |               | 1                | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      |
| <b>Profundidade da Trinca</b> | <b>1(10%)</b> | 0,0074           | 0,0075 | 0,0075 | 0,0075 | 0,0075 | 0,0075 | 0,0075 |
|                               | <b>2(20%)</b> | 0,0077           | 0,0076 | 0,0075 | 0,0075 | 0,0075 | 0,0075 | 0,0076 |
|                               | <b>3(30%)</b> | 0,0085           | 0,0078 | 0,0076 | 0,0075 | 0,0075 | 0,0075 | 0,0078 |
|                               | <b>4(40%)</b> | 0,0081           | 0,0079 | 0,0076 | 0,0075 | 0,0074 | 0,0075 | 0,0079 |

Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Figura 51 - Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o sistema rotativo experimental com trinca com profundidade de 30% do diâmetro na região correspondente ao elemento 1 no modelo, utilizando a leitura do mancal 2.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Tabela 26 – Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o sistema rotativo experimental com trinca com profundidade de 30% do diâmetro na região correspondente ao elemento 1 no modelo, utilizando a leitura do mancal 2.**

|                               |               | Elemento do Eixo |        |        |        |        |        |        |
|-------------------------------|---------------|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|                               |               | 1                | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      |
| <b>Profundidade da Trinca</b> | <b>1(10%)</b> | 0,0074           | 0,0074 | 0,0074 | 0,0074 | 0,0074 | 0,0074 | 0,0074 |
|                               | <b>2(20%)</b> | 0,0075           | 0,0074 | 0,0074 | 0,0074 | 0,0074 | 0,0074 | 0,0074 |
|                               | <b>3(30%)</b> | 0,0076           | 0,0075 | 0,0074 | 0,0073 | 0,0073 | 0,0070 | 0,0073 |
|                               | <b>4(40%)</b> | 0,0076           | 0,0075 | 0,0074 | 0,0073 | 0,0072 | 0,0067 | 0,0073 |

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Analisando agora os resultados obtidos dos observadores robustos, verifica-se que a falha provocada no sistema foi corretamente identificada pelos mesmos, utilizando o sinal do mancal 1. Utilizando o sinal do mancal 2, foi identificado que a falha pode representar a trinca de 30% ou de 40%, demonstrando uma certa imprecisão do resultado, provavelmente causado pelo distanciamento entre a falha e o ponto de medição.

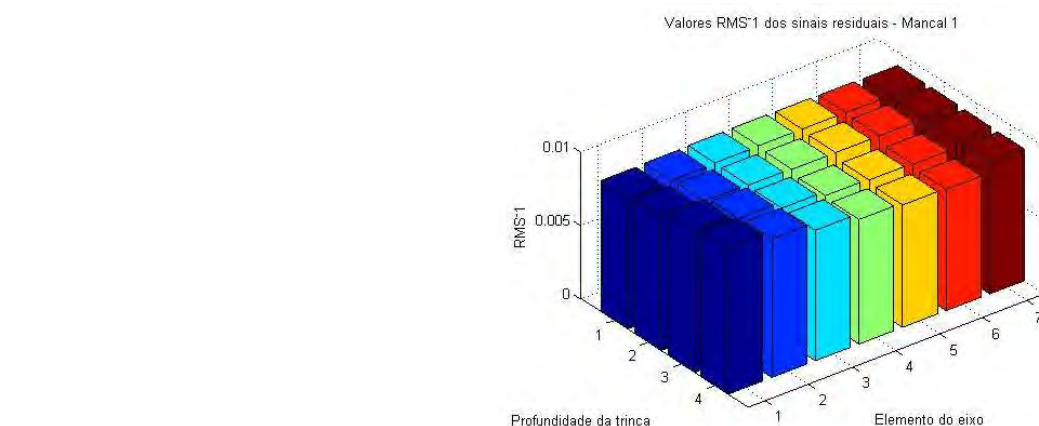
Agora, um aumento da profundidade do entalhe no eixo é provocado, como mostra a Figura 52. Este aprofundamento do entalhe busca representar um caso de propagação de trinca. O procedimento de identificação é realizado novamente, obtendo-se as novas respostas dos dois mancais e alimentando estas informações no banco de observadores robustos, fornecendo os resultados mostrados nas Figuras 53 e 54 e nas Tabelas 27 e 28.

**Figura 52 - Entalhe com profundidade de 40% do diâmetro do eixo, na região correspondente ao elemento 1 do modelo.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Figura 53 - Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o sistema rotativo experimental com trinca com profundidade de 40% do diâmetro, utilizando a leitura do mancal 1.**



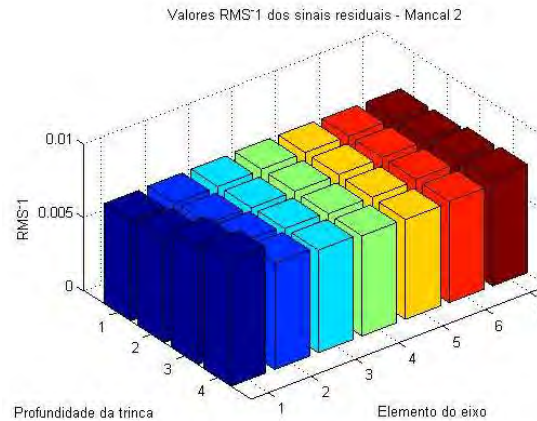
Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Tabela 27 – Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o sistema rotativo experimental com trinca com profundidade de 40% do diâmetro na região correspondente ao elemento 1 no modelo, utilizando a leitura do mancal 1.**

|                        |        | Elemento do Eixo |        |        |        |        |        |        |
|------------------------|--------|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|                        |        | 1                | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      |
| Profundidade da Trinca | 1(10%) | 0,0089           | 0,0089 | 0,0090 | 0,0090 | 0,0090 | 0,0090 | 0,0090 |
|                        | 2(20%) | 0,0091           | 0,0091 | 0,0090 | 0,0089 | 0,0089 | 0,0089 | 0,0090 |
|                        | 3(30%) | 0,0097           | 0,0093 | 0,0089 | 0,0086 | 0,0085 | 0,0085 | 0,0089 |
|                        | 4(40%) | 0,0100           | 0,0094 | 0,0089 | 0,0085 | 0,0083 | 0,0082 | 0,0089 |

Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Figura 54 - Valores  $\text{RMS}^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o sistema rotativo experimental com trinca com profundidade de 40% do diâmetro na região correspondente ao elemento 1 no modelo, utilizando a leitura do mancal 2.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Tabela 28 – Valores  $\text{RMS}^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o sistema rotativo experimental com trinca com profundidade de 40% do diâmetro, utilizando a leitura do mancal 2.**

|                        |        | Elemento do Eixo |        |        |        |        |        |        |
|------------------------|--------|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|                        |        | 1                | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      |
| Profundidade da Trinca | 1(10%) | 0,0068           | 0,0068 | 0,0068 | 0,0069 | 0,0069 | 0,0069 | 0,0069 |
|                        | 2(20%) | 0,0070           | 0,0069 | 0,0069 | 0,0069 | 0,0069 | 0,0069 | 0,0069 |
|                        | 3(30%) | 0,0080           | 0,0072 | 0,0070 | 0,0068 | 0,0068 | 0,0069 | 0,0072 |
|                        | 4(40%) | 0,0085           | 0,0072 | 0,0070 | 0,0068 | 0,0068 | 0,0069 | 0,0073 |

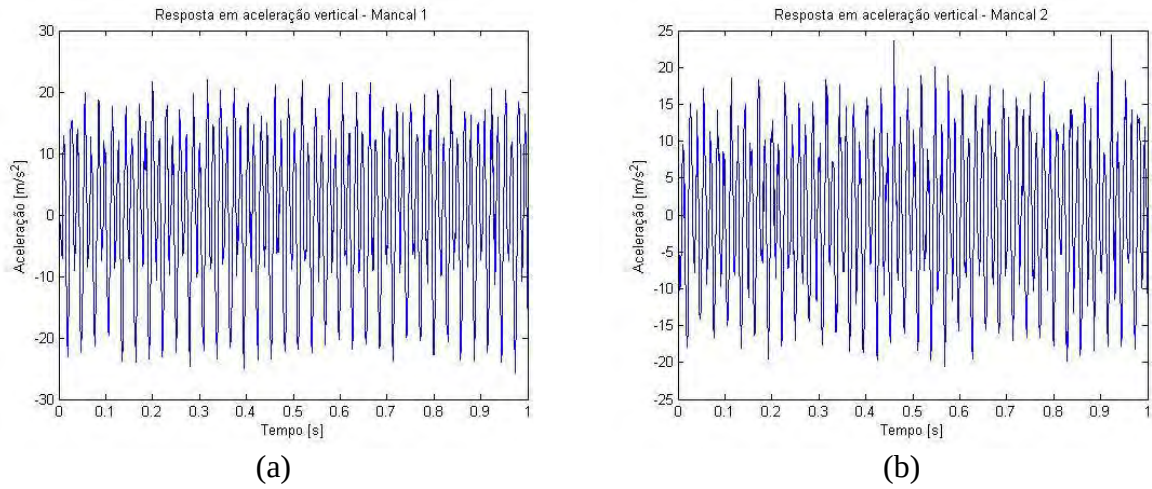
Fonte: Elaboração do próprio autor.

A análise dos resultados obtidos pelos observadores robustos mostra que o aumento do entalhe foi corretamente identificado pelos mesmos, utilizando tanto a análise do mancal 1 como a análise do mancal 2. Isto representa que uma falha pode ser identificada estando próxima ou distante do local de medição.

## 4.2 Segundo Caso

O segundo caso da validação experimental considera a inserção de uma falha no local correspondente ao elemento 5 do modelo discretizado. Os parâmetros do sistema são dados pelas Tabelas 34 e 37 do Anexo A. Neste caso, o sistema opera com 1970 rpm. Inicialmente, obtém-se uma amostra da resposta de aceleração dos mancais com o sistema íntegro, com duração de 1s e tempo de amostragem de 0.001s. Estes sinais são mostrados na Figura 55.

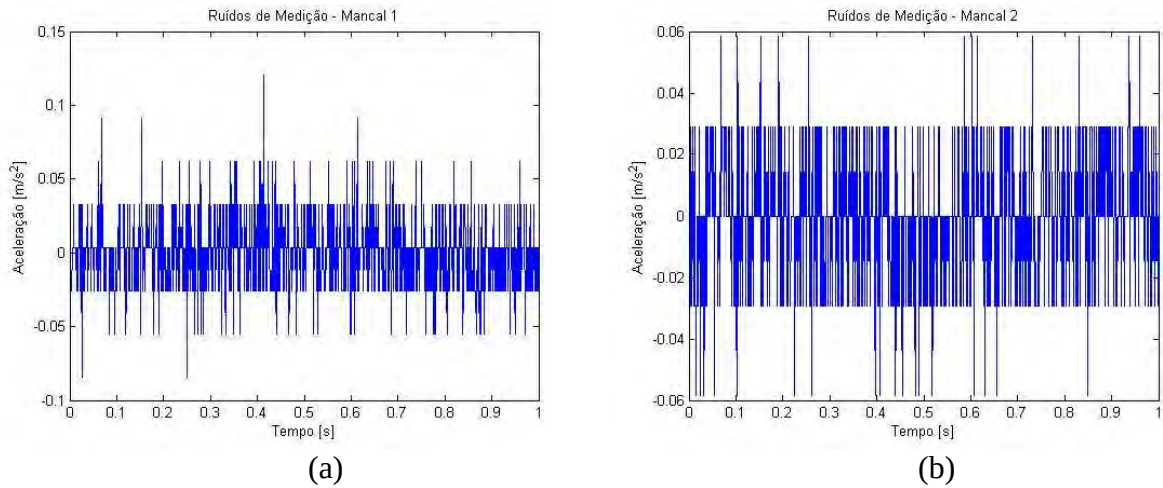
**Figura 55 – Respostas da aceleração vertical dos mancais 1 (a) e 2 (b), obtidas do sistema íntegro em operação.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A medição dos ruídos de medição é feita da mesma forma como no primeiro caso. Os sinais de interferência obtidos dos acelerômetros acoplados nos mancais 1 e 2 são mostrados na Figura 56.

**Figura 56 – Ruídos de medição obtidos dos acelerômetros acoplados nos mancais 1 (a) e 2 (b).**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A matriz de covariâncias dos ruídos de medição obtidos é dada por:

$$R_k = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.15 \\ 0.15 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \quad (289)$$

Inicialmente, uma falha de profundidade de 30% em relação ao diâmetro do eixo é provocada. Esta falha é representada por uma descontinuidade na forma de um entalhe feito no eixo, como mostra a Figura 57.

**Figura 57 –Entalhe com profundidade de 30% do diâmetro do eixo, na região correspondente ao elemento 5 do modelo.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

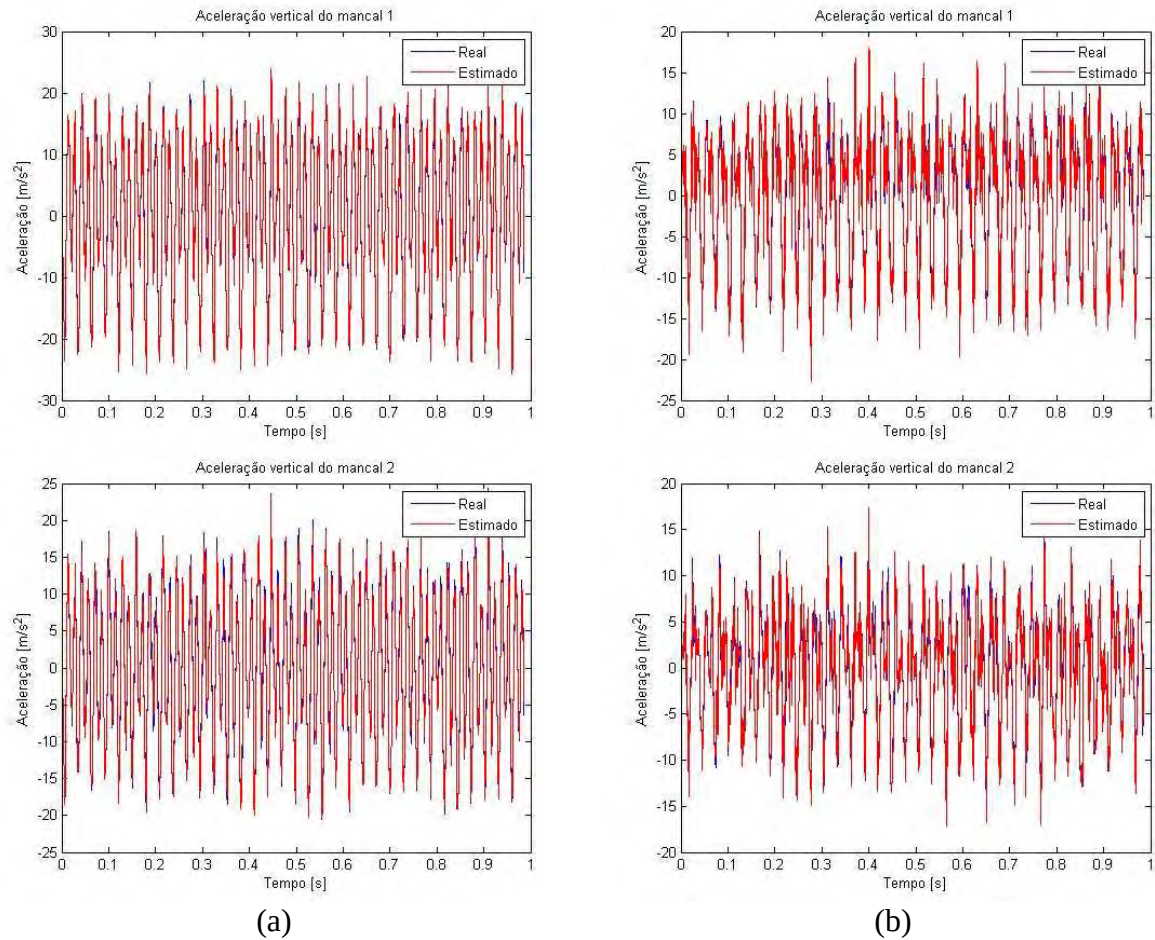
A detecção da presença da falha no sistema é feita através da análise dos valores  $\text{RMS}^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo observador global, antes e depois da inserção da falha no sistema. Os resultados são mostrados na Figura 58 e na Tabela 29.

**Tabela 29 – Valores  $\text{RMS}^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo observador global antes e depois da inserção da falha no sistema rotativo experimental, no segundo caso, utilizando o observador com entradas desconhecidas.**

|                 | $\text{RMS}^{-1}$<br>(sistema sem falha) | $\text{RMS}^{-1}$<br>(sistema com trinca com profundidade de 30% do diâmetro no elemento 5) |
|-----------------|------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Mancal 1</b> | 0,0076                                   | 0,0068                                                                                      |
| <b>Mancal 2</b> | 0,0078                                   | 0,0064                                                                                      |

Fonte: Elaboração do próprio autor.

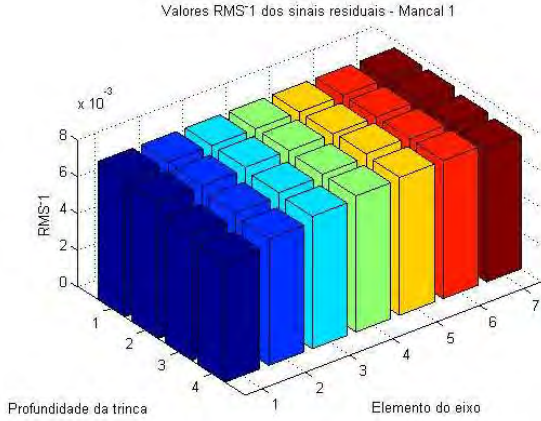
**Figura 58 - Respostas temporais reais e estimadas pelo observador global obtidas antes (a) e depois (b) da inserção da falha no sistema rotativo experimental, no segundo caso, utilizando o observador com entradas desconhecidas.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Os resultados obtidos do observador global revelam que a presença da falha foi detectada pelo mesmo, utilizando tanto a resposta do mancal 1 como a resposta do mancal 2. As Figuras 59 e 60 e as Tabelas 30 e 31 mostram os resultados obtidos dos observadores robustos, correspondentes à análise de identificação de falha.

**Figura 59 - Valores  $\text{RMS}^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o sistema rotativo experimental com trinca com profundidade de 30% do diâmetro na região correspondente ao elemento 5 no modelo, utilizando a leitura do mancal 1.**



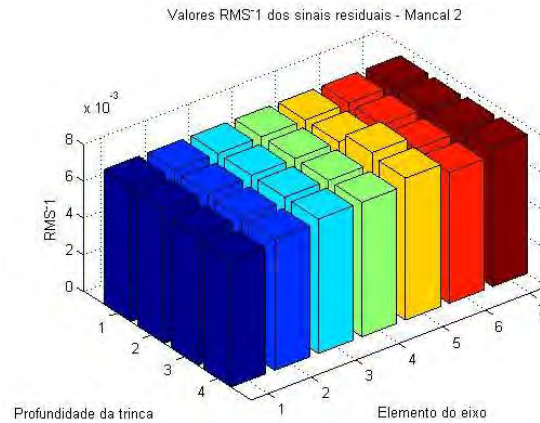
Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Tabela 30 – Valores  $\text{RMS}^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o sistema rotativo experimental com trinca com profundidade de 30% do diâmetro na região correspondente ao elemento 5 no modelo, utilizando a leitura do mancal 1.**

|                        |        | Elemento do Eixo |        |        |        |        |        |        |
|------------------------|--------|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|                        |        | 1                | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      |
| Profundidade da Trinca | 1(10%) | 0,0075           | 0,0075 | 0,0075 | 0,0075 | 0,0075 | 0,0075 | 0,0075 |
|                        | 2(20%) | 0,0074           | 0,0074 | 0,0075 | 0,0075 | 0,0075 | 0,0075 | 0,0075 |
|                        | 3(30%) | 0,0068           | 0,0071 | 0,0073 | 0,0074 | 0,0076 | 0,0075 | 0,0073 |
|                        | 4(40%) | 0,0065           | 0,0069 | 0,0072 | 0,0074 | 0,0075 | 0,0075 | 0,0072 |

Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Figura 60 - Valores  $\text{RMS}^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o sistema rotativo experimental com trinca com profundidade de 30% do diâmetro na região correspondente ao elemento 5 no modelo, utilizando a leitura do mancal 2.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

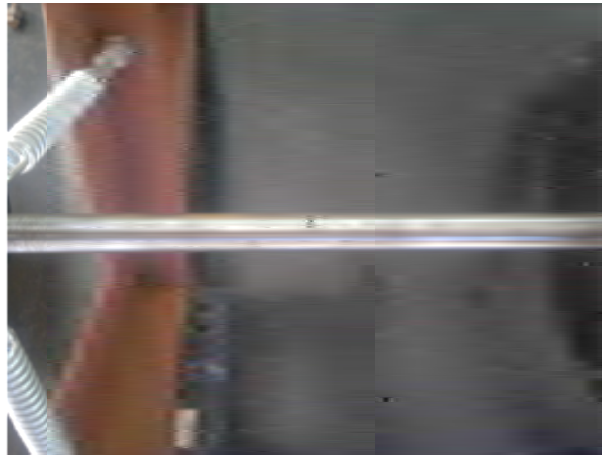
**Tabela 31 – Valores  $\text{RMS}^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o sistema rotativo experimental com trinca com profundidade de 30% do diâmetro na região correspondente ao elemento 5 no modelo, utilizando a leitura do mancal 2.**

|                               |               | Elemento do Eixo |        |        |        |        |        |        |
|-------------------------------|---------------|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|                               |               | 1                | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      |
| <b>Profundidade da Trinca</b> | <b>1(10%)</b> | 0,0073           | 0,0073 | 0,0073 | 0,0073 | 0,0073 | 0,0073 | 0,0073 |
|                               | <b>2(20%)</b> | 0,0072           | 0,0072 | 0,0073 | 0,0073 | 0,0073 | 0,0073 | 0,0073 |
|                               | <b>3(30%)</b> | 0,0070           | 0,0071 | 0,0073 | 0,0073 | 0,0079 | 0,0072 | 0,0074 |
|                               | <b>4(40%)</b> | 0,0068           | 0,0071 | 0,0073 | 0,0073 | 0,0077 | 0,0071 | 0,0075 |

Fonte: Elaboração do próprio autor.

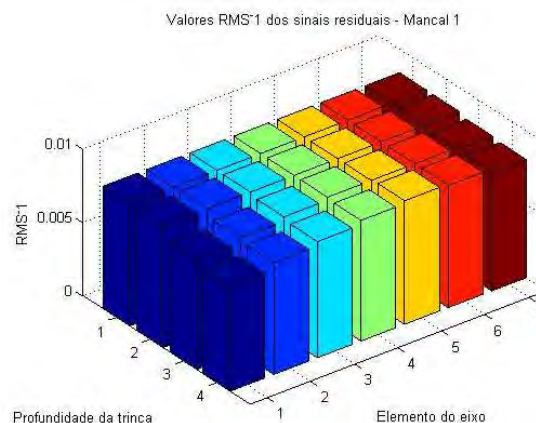
Analisando os resultados obtidos dos observadores robustos, verifica-se que a falha provocada no sistema foi corretamente identificada pelos mesmos, utilizando tanto o sinal do mancal 1 como o sinal do mancal 2. Assim como no caso anterior, um aumento da profundidade do entalhe no eixo é realizado, como mostra a Figura 61, simulando um caso de propagação de trinca. O procedimento de identificação é realizado novamente, obtendo-se novamente os resultados provenientes do banco de observadores robustos, mostrados nas Figuras 62 e 63 e nas Tabelas 32 e 33.

**Figura 61 - Entalhe com profundidade de 40% do diâmetro do eixo, na região correspondente ao elemento 5 do modelo.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Figura 62 - Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o sistema rotativo experimental com trinca com profundidade de 40% do diâmetro na região correspondente ao elemento 5 no modelo, utilizando a leitura do mancal 1.**



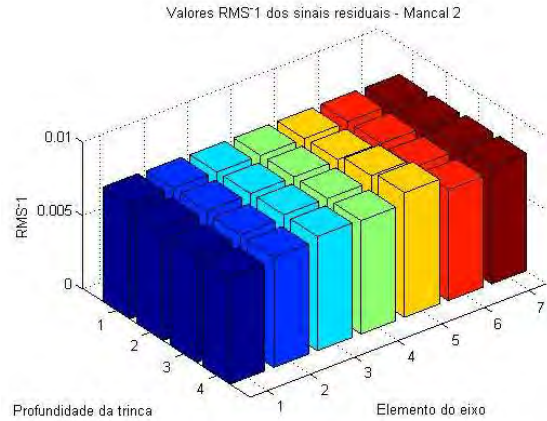
Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Tabela 32 – Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o sistema rotativo experimental com trinca com profundidade de 40% do diâmetro na região correspondente ao elemento 5 no modelo, utilizando a leitura do mancal 1.**

|                        |        | Elemento do Eixo |        |        |        |        |        |        |
|------------------------|--------|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|                        |        | 1                | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      |
| Profundidade da Trinca | 1(10%) | 0,0083           | 0,0083 | 0,0083 | 0,0083 | 0,0083 | 0,0083 | 0,0083 |
|                        | 2(20%) | 0,0082           | 0,0083 | 0,0083 | 0,0083 | 0,0083 | 0,0083 | 0,0083 |
|                        | 3(30%) | 0,0074           | 0,0078 | 0,0081 | 0,0083 | 0,0083 | 0,0083 | 0,0081 |
|                        | 4(40%) | 0,0071           | 0,0076 | 0,0079 | 0,0082 | 0,0084 | 0,0083 | 0,0080 |

Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Figura 63 - Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o sistema rotativo experimental com trinca com profundidade de 40% do diâmetro na região correspondente ao elemento 5 no modelo, utilizando a leitura do mancal 2.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Tabela 33 – Valores  $RMS^{-1}$  dos sinais residuais produzidos pelo banco de observadores robustos utilizando o observador com entradas desconhecidas, para o sistema rotativo experimental com trinca com profundidade de 40% do diâmetro na região correspondente ao elemento 5 no modelo, utilizando a leitura do mancal 2.**

|                        |        | Elemento do Eixo |        |        |        |        |        |        |
|------------------------|--------|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|                        |        | 1                | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      |
| Profundidade da Trinca | 1(10%) | 0,0078           | 0,0077 | 0,0077 | 0,0077 | 0,0077 | 0,0077 | 0,0077 |
|                        | 2(20%) | 0,0076           | 0,0077 | 0,0077 | 0,0077 | 0,0078 | 0,0077 | 0,0077 |
|                        | 3(30%) | 0,0074           | 0,0075 | 0,0078 | 0,0077 | 0,0082 | 0,0076 | 0,0079 |
|                        | 4(40%) | 0,0072           | 0,0075 | 0,0078 | 0,0077 | 0,0085 | 0,0075 | 0,0079 |

Fonte: Elaboração do próprio autor.

A análise dos resultados obtidos pelos observadores robustos revela que o aumento do entalhe foi corretamente identificado pelos mesmos, utilizando tanto a análise do mancal 1 como a análise do mancal 2. Assim como no caso anterior, a identificação da falha surtiu resultados satisfatórios. É notável que uma falha de poucas proporções possa causar imprecisão dos resultados fornecidos pelos observadores robustos quando esta ocorre em locais distantes dos pontos de medição. No entanto, este problema pode ser contornado através da escolha de pontos estratégicos distribuídos pelo sistema, que podem ser determinados pela análise das matrizes grammianas de observabilidade (BUENO et al, 2006). No caso do sistema rotativo em questão, os únicos locais possíveis para medição são os mancais, restringindo a análise apenas aos pontos nodais correspondentes.

## 5 CONCLUSÃO

---

O presente trabalho teve o propósito de tornar a utilização da metodologia de diagnose de falhas utilizando observadores de estados mais prática e com maior aplicabilidade, eliminando a necessidade de se conhecer as entradas do sistema. A eficácia numérica das técnicas utilizando o observador de Luenberger, o Filtro de Kalman e o observador com entradas desconhecidas no projeto dos observadores de estados globais e robustos às falhas do sistema foi verificada e, juntamente com a validação experimental da técnica baseada neste último tipo de observador, obteve-se a comprovação de sua eficiência na prática utilizando-se de um sistema autoexcitado real. A modelagem do sistema, a análise e a redução modal foram feitas no domínio temporal contínuo. A solução das equações que regem a dinâmica dos observadores de estados foi feita iterativamente no domínio temporal discreto, visando o menor custo computacional.

O estudo partiu do levantamento bibliográfico das técnicas de diagnose de falhas baseadas em modelos e aprofundou-se nas técnicas baseadas nos observadores de estados, buscando técnicas mais complexas para o projeto de observadores de estados, chegando à classe dos observadores de estado com entradas desconhecidas. Utilizando-se do ambiente computacional do Matlab<sup>®</sup>, as implementações utilizadas neste trabalho buscaram contornar adversidades comumente encontradas na diagnose de falhas utilizando observadores de estado; a presença de ruídos no sistema e a ausência de sinais de forças de excitação. Inicialmente, a eficácia do observador de Luenberger para sistemas determinísticos foi demonstrada. Posteriormente, o Filtro de Kalman, utilizando uma estrutura análoga, porém muito mais robusta por se tratar de um filtro *online*, para sistemas estocásticos, foi apresentada. Finalmente, a utilização de um estimador *offline* do tipo *smoother*, no sentido de obter uma estimativa do estado atenuando os efeitos dos ruídos do sistema, foi proposta.

Os resultados numéricos e experimentais mostram que a diagnose de falhas via observadores de estados utilizando observadores com entradas desconhecidas apresenta robustez aos ruídos do sistema e aplicabilidade para sistemas autoexcitados ou excitados por fontes desconhecidas. Esta metodologia requer uma implementação mais complexa e computacionalmente cara, porém a comodidade para o usuário e os resultados satisfatórios que foram apresentados neste trabalho mostra que se trata de uma importante alternativa para a detecção e identificação de falhas via observadores de estado.

A qualidade da modelagem do sistema teve influência direta no desempenho das técnicas de detecção e identificação de falhas baseadas em modelos, motivo pelo qual foi utilizado o ajuste de respostas no domínio da frequência obtidas de pontos fisicamente próximos dos parâmetros incertos no sentido de determinar tais incertezas, fornecendo resultados bastante aceitáveis.

Os resultados obtidos neste trabalho mostram que a redução modal dos sistemas numéricos não prejudica a eficácia das técnicas propostas, permitindo uma considerável redução de custo computacional no projeto dos observadores de estados baseados em modelos de alta ordem. A

redução da ordem do modelo numérico teve papel ainda mais efetivo na implementação do observador de estados com entradas desconhecidas, visto que este utiliza de um sistema em espaço de estados expandido.

A validação experimental considerou trincas com profundidade iguais ou maiores que 30% do diâmetro, em função da pouca influência estrutural que as trincas menores proporcionam. É verificado que a distância física entre a ocorrência da falha e o ponto de medição é importante na precisão dos resultados, visto que é justamente a influência desta na resposta do sistema que possibilita a sua diagnose. As técnicas propostas podem perfeitamente ser aplicadas outros sistemas estruturais. No entanto, o presente trabalho motivou-se da necessidade e da importância do monitoramento estrutural de sistemas rotativos, visto que este desempenha importante papel no meio industrial e nos sistemas mecânicos mais modernos.

Dadas às circunstâncias que se acercaram neste trabalho, dois pontos surgem como sugestão para estudos futuros;

- Aplicação da metodologia proposta em outros tipos de sistemas autoexcitados ou excitados por fontes desconhecidas.
- Resolução das equações iterativas da dinâmica dos observadores de estados utilizando Desigualdades Matriciais Lineares Politrópicas, buscando a robustez da metodologia com relação às incertezas do modelo numérico.

## Referências

---

ANDERSON, B. D. O.; MOORE, J. B. **Optimal filtering**. New South Wales: Thomas Kailath, 1979. 367 f.

BACHSCHMID, N. et al. Identification of transverse crack position and depth in rotor systems. **Meccanica**, Dordrecht, v. 35, n. 6, p. 563-582, 2000.

BUENO, D. D.; MARQUI, C. R.; SANTOS, R. B. Verificação experimental do posicionamento ótimo de sensores utilizando matrizes grammianas. In: SIMPÓSIO DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA – POSMEC, 2006, Uberlândia. **Anais...** Uberlândia: Universidade Federal de Uberlândia, 2006. 10 p.

CAMPOS, N. B. F. **Ajuste de modelos numéricos usando funções de resposta em frequência**. 2002. 114 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002.

CACCIOLA, P.; MUSCOLINO, G. Dynamic response of a rectangular beam with a known non-propagating crack of certain or uncertain depth. **Computers and Structures**, Kidlington, v. 80, p. 2387-2396, 2002.

DAROUACH, M.; ZASADZINSKI, M.; BOUTAYEB, M. Extension of minimum variance estimation for systems with unknown inputs. **Automatica**, Kidlington, v. 39, p. 867-876, 2003.

EDWARDS, S.; LEES, A. W.; FRISWELL, M. I., Fault diagnosis of rotating machinery. **The Shock and Vibration Digest**, Thousand Oaks, v. 3, n. 1, p. 4-13, 1998.

FRANK, P. M. Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based redundancy: A survey and some new results. **Automatica**, Kidlington, v. 3, p. 459-474, 1990.

GARCÍA, E. A.; FRANK, P. M., Deterministic nonlinear observer-based approaches to fault diagnosis: A survey. **Control Engineering Practice**, Kidlington, v. 5, n. 5, p. 663-670, 1997.

GAWRONSKI, W. K. **Advanced structural dynamics and active control of structures**. New York: Springer, 2003. 419 f.

GERTLER, J. J. Survey of model-based failure detection and isolation in complex plants. **IEEE Control Systems Magazine**, Piscataway, v. 8, p. 3-11, 1988.

GLOVER, K. Optimal hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their  $H_\infty$ - Error Bounds. **International Journal of Control**, Colchester, v. 39, p. 1115-1193, 1984.

HOU, M.; PATTON, R. J. Optimal filtering for systems with unknown inputs. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Piscataway, v. 43, p. 445-449, 1998.

ISERMANN, R. Process fault detection based on modeling and estimation methods - A survey. **Newsletter of International Federation of Automatic Control**, Laxenburg, v. 20, n. 4, p. 387-404, 1984.

JIN, J.; TAHK, M. J. Time - delayed state estimator for linear systems with unknown inputs. **International Journal of Control, Automation, and Systems**, Heidelberg, v. 3, n. 1, p. 117-121, 2005.

KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. **Journal of Basic Engineering**, Fairfield, v. 82, p. 35-45, 1960.

KALMAN, R. E. On the general theory of control systems. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON AUTOMATIC CONTROL, 1., 1960, Moscow. **Proceedings...** London: Butterwoths, 1960. p. 481-492.

KITANIDIS, P. K. Unbiased minimum-variance linear state estimation. **Automatica**, Kidlington, v. 23, p. 775-778, 1987.

KOROISHI, E. H. **Diagnose de falhas em sistemas rotativos com excitações desconhecidas, através da metodologia dos observadores de estado**. 2009. 156 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2009.

LALANNE, M.; FERRARIS, G. **Rotordynamics prediction in engineering**. New York: John Wiley & Sons, 1990. 198 p.

LEMO, G. F. **Detecção de falhas via observadores de estado em sistemas rotativos, considerando-se suas fundações**. 2004. 126 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2004.

LUENBERGER, D. G. Observing the state of a linear system. **IEEE Transactions on Military Electronics**, Piscataway, v. 8, p. 74-80, 1964.

LUENBERGER, D. G. Observers for multivariable systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Piscataway, v. 11, n. 2, p. 190-197, 1966.

MARANO, J. H. **Localização de falhas via observadores de estado em sistemas com variação de parâmetros**. 2002. 130 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2002.

MELO, G. P.; STEFFEN JUNIOR, V. Mechanical systems identification through fourier series time-domain technique. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences**, Rio de Janeiro, v. 15, n. 2, p. 124-135, 1994.

MELO, G. P. **Detecção e localização de falhas via observadores de estado de ordem reduzida**. 1998. 125 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998.

MELO, G. P.; ARAUJO, M. A. C. Using fault models in state observers methodology for crack detection in continuous systems. In: ALVES, M.; COSTA MATTOS, H. S. (Eds.) **Mechanics of Solids in Brazil**. Rio de Janeiro: ABCM, 2007. v. 1, p. 341-356.

MORAIS, T. S. **Diagnose de falhas via observador de estado com excitações desconhecidas, identificadas por funções ortogonais**. 2006. 116 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2006.

MUSCOLINO, G.; CACCIOLA, P.; MPOLLONIA, N. Crack detection and location in a damage beam vibrating under white noise. **Computers and Structures**, Kidlington, v. 81, n. 18-19, p. 1773-1782, 2003.

NATKE, H. G.; CEMPEL, C. Fault detection and localisation in structures: a discussion. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 5, p. 345-356, 1991.

NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. **Numerical optimization**. New York: Springer, 1999. 651 p.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 2002.

PACHECO, R. P. **Identificação de sistemas mecânicos através de métodos no domínio do tempo**. 2001. 127f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2001.

PACHECO, R. P.; STEFFEN JUNIOR, V. On the identification of non-linear mechanical systems using orthogonal functions. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, Kidlington, v. 39, p. 1147-1159, 2003.

ROWELL, D. State-space representation of LTI systems. In: \_\_\_\_\_. **Analysis and design of feedback control systems**. MIT, 2002. 18 p. (MIT Course, n. 2.14/2.140). Disponível em: <<http://web.mit.edu/2.14/www/Handouts/StateSpace.pdf>>. Acesso em: 20 set. 2011.

SABNAVIS, G. et al. Cracked shaft detection and diagnostics: A literature review. **The Shock and Vibration Digest**, Thousand Oaks, v. 36, n. 4, p. 287-296, 2004.

SABERI, A.; STOORVOGEL, A. A.; SANNUTI, P. Exact, almost and optimal input decoupled (delayed) observers. **International Journal of Control**, Colchester, v. 73, p. 552-581, 2000.

SEKHAR, A. S. Identification of a crack in a rotor system using a model-based wavelet approach. **Structural Health Monitoring**, London, v. 2, p. 293 - 308, 2003.

SUNDARAM, S.; HADJICOSTIS, C. N. On delayed observers for linear systems with unknown inputs. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, AND THE EUROPEAN CONTROL CONFERENCE, 44., 2005, Seville. **Proceedings...** Piscataway: IEEE, 2005. p. 7210-7215.

SUNDARAM, S.; HADJICOSTIS, C. N. Optimal state estimators for linear systems with unknown inputs. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 45., 2005, San Diego. **Proceedings...** Piscataway: IEEE, 2006. p. 4763-4768.

VAN DER HEIJDEN, F.; DUIN, R. P. W.; DE RIDDER, D.; TAX, D. M. J.; **Classification, parameter estimation and state estimation**. West Sussex: John Wiley & Sons Ltd, 2004.

WATANABE, L. **Utilização de modelos de falhas e observadores de estado em estruturas reticuladas**. 2010. 131 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2010.

WAUER, J. Modelling and formulation of equations of motion for cracked rotating shafts. **International Journal of Solids and Structures**, Kidlington, v. 26, p. 901-914, 1990.

WILLSKY, A. S. A survey of design methods for failure detection in dynamic systems. **Automatica**, Kidlington, v. 12, p. 601-611, 1976.

## ANEXO A

### Ajuste de Parâmetros Utilizando o Método dos Mínimos Quadrados

A função que representa os desvios entre os dados de referência e os dados a serem ajustados, chamada de função objetivo, tem a seguinte forma especial (NOCEDAL E WRIGHT, 1999):

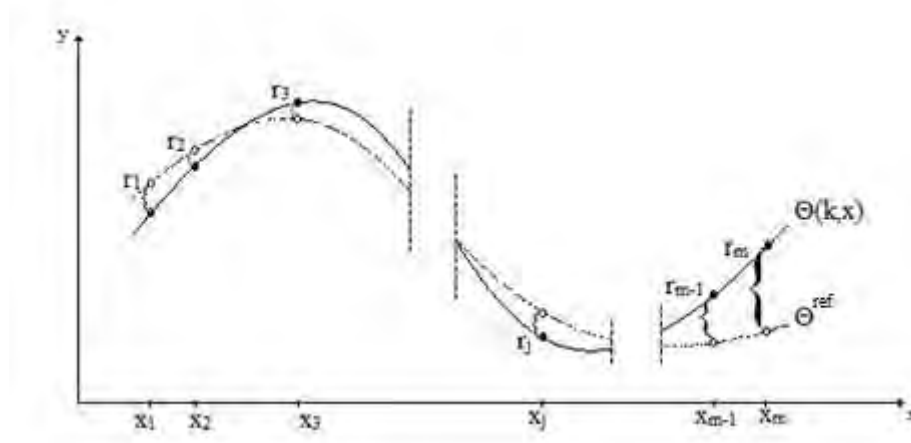
$$f(k) = \frac{1}{2} \|r(k)\|_2^2 \quad (290)$$

onde  $k \in R^n$  e  $r : R^n \rightarrow R^m$ , na forma:

$$r(k) = [r_1(k) \quad r_2(k) \quad \cdots \quad r_m(k)]^T \quad (291)$$

sendo  $n$  o número de variáveis da função objetivo e  $m$  o número de pontos da curva de ajuste, como mostra a Figura 64. A busca da melhor aproximação entre os pontos da curva de ajuste e os respectivos valores na curva de referência representa a busca do ponto de mínimo local da função objetivo.

**Figura 64 - Desvios entre pontos da curva a ser ajustada (curva contínua) e da curva de referência (curva pontilhada).**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A equação (291), que representa o desvio vertical entre os pontos da curva de ajuste e os respectivos pontos na curva de referência, pode ser representada na forma:

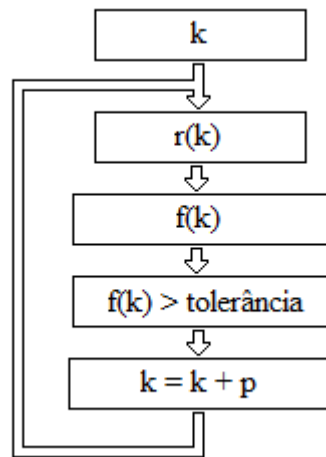
$$r(k) = \Theta(x, k) - \Theta^{ref} \quad (292)$$

sendo  $\Theta$  uma função linear que representa a curva de ajuste. Diversos algoritmos de minimização de funções podem ser utilizados em busca da melhor aproximação entre ambas

as curvas. Neste trabalho, foi utilizado o método iterativo de Levenberg-Marquardt, através da função *lsqcurvefit* do MATLAB®.

Cada passo deste processo iterativo representa o cálculo de um incremento  $p \in R^n$  no vetor  $k$  na direção do ponto de mínimo local da função objetivo, como mostra a Figura 65. Uma desvantagem deste método está relacionada com a necessidade de se definir um ponto de partida para o processo iterativo. A má escolha deste ponto pode conduzir a convergência para um ponto de mínimo local que não corresponde à realidade do sistema. Desta forma, é necessário ter certo domínio com relação às faixas de valores que as variáveis contidas no vetor  $k$  possam representar.

**Figura 65 - Fluxograma do processo iterativo de busca do ponto de mínimo local da função objetivo.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

O ajuste de curvas pode ser utilizado na determinação de parâmetros desconhecidos de sistemas mecânicos, desde que se obtenha um modelo numérico preciso que contenha a maior parte das informações deste sistema. Isto implica que quanto menor a quantidade de parâmetros incertos, mais precisa será a determinação de tais informações. Os parâmetros desconhecidos do modelo numérico podem ser representados pelo vetor  $k$ , que representa as variáveis da função de ajuste  $\Theta(x, k)$  que fornece uma FRF deste modelo. Desta forma, a curva de referência de ajuste pode ser a respectiva FRF obtida do sistema real.

A FRF é uma forma alternativa de representação de um sistema linear. Considerando um sistema SISO, esta representação fornece a razão entre as amplitudes dos sinais de entrada e de saída deste sistema. A mesma representação pode ser feita para um sistema MIMO, descrito em espaço de estados, por uma matriz contendo as  $n_o \times n_i$  funções de transferência. Esta matriz é invariante com relação às transformações de coordenadas do sistema. Considerando o sistema contínuo em coordenadas modais de (I.2.18), aplicando a transformada de Laplace e fazendo os devidos rearranjos, obtêm-se:

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (293)$$

onde

$$G(s) = [C_{mbd}(sI - A_{mbd})^{-1}B_{mbd} + D_m] \quad (294)$$

A equação (294) produz uma matriz que contém as  $n_o \times n_i$  funções de transferência do modelo numérico, podendo ser representada na forma:

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{1,1}(s) & \cdots & g_{1,n_i}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n_o,1}(s) & \cdots & g_{n_o,n_i}(s) \end{bmatrix} \quad (295)$$

Assim, a razão entre as amplitudes dos sinais da  $j$ -ésima entrada e da  $i$ -ésima saída do sistema pode ser representada por:

$$y_j(s) = g_{j,i}(s)u_i(s) \quad (296)$$

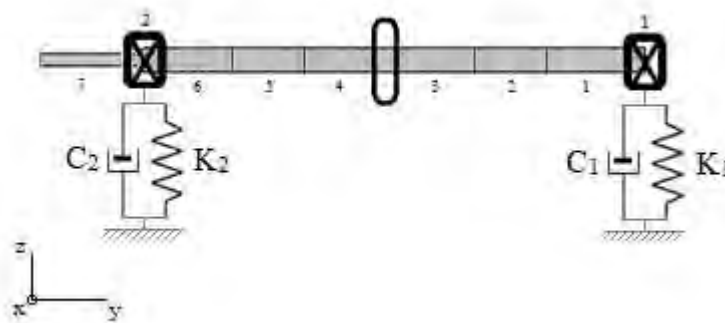
O desvio vertical entre os valores da  $i,j$ -ésima FRF do modelo numérico e os valores da respectiva FRF obtida do sistema real, pode ser escrito na forma:

$$r(k) = \Theta(f, k) - g_{j,i}^{\text{exp}}(s) \quad (297)$$

onde a função  $\Theta(f, k)$  fornece a FRF do modelo numérico em função da faixa de frequências e dos parâmetros variáveis, representados pelo vetor  $f$  e  $k$ , respectivamente.

Neste trabalho, foi construído um sistema rotativo composto por um eixo apoiado em mancais suspensos por molas cujas propriedades de rigidez e amortecimento são desconhecidas. Estes parâmetros estruturais são determinados por meio do ajuste da FRF do modelo numérico em relação aos dados obtidos do sistema real. A Figura 66 mostra um modelo simplificado deste sistema, onde o eixo é discretizado utilizando sete elementos finitos.

**Figura 66 - Modelo simplificado do sistema rotativo experimental.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

As propriedades de rigidez e amortecimento das suspensões dos mancais do modelo simplificado no plano horizontal x-y são consideradas como sendo as mesmas do plano vertical z-y. As Tabelas 34 e 35 contêm os valores dos parâmetros conhecidos e desconhecidos, respectivamente, do sistema rotativo representado pelo modelo da Figura 67.

**Tabela 34 – Parâmetros conhecidos do sistema rotativo experimental.**

|                                                                    |                                                                          |
|--------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| <b>Densidade do material do eixo</b>                               | $\rho = 7800 \text{ Kg/m}^3$                                             |
| <b>Módulo de elasticidade</b>                                      | $E = 210 \text{ GPa}$                                                    |
| <b>Coefficiente de Poisson</b>                                     | $\nu = 0.3$                                                              |
| <b>Diâmetro dos elementos 1,2,3,4,5 e 6</b>                        | $d_{1,2,3,4,5,6} = 0.0127 \text{ m}$                                     |
| <b>Diâmetro do elemento 7</b>                                      | $d_7 = 0.01 \text{ m}$                                                   |
| <b>Comprimento dos elementos 1,2,3,4,5 e 6</b>                     | $L_{1,2,3,4,5,6} = 0.0817 \text{ m}$                                     |
| <b>Comprimento do elemento 7</b>                                   | $L_7 = 0.116 \text{ m}$                                                  |
| <b>Massa do mancal 1</b>                                           | $M_{m1} = 0.43 \text{ Kg}$                                               |
| <b>Massa do mancal 2</b>                                           | $M_{m2} = 0.4 \text{ Kg.m}^2$                                            |
| <b>Massa do disco</b>                                              | $M_d = 1.9 \text{ Kg.m}^2$                                               |
| <b>Momentos de inércia do disco</b>                                | $I_y = 0.004843 \text{ Kg.m}^2$<br>$I_x = I_z = 0.002495 \text{ Kg.m}^2$ |
| <b>Constantes de proporcionalidade de amortecimento estrutural</b> | $\alpha = 10^{-2}, \beta = 10^{-7}$                                      |

Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Tabela 35 – Parâmetros desconhecidos do sistema rotativo experimental.**

|                                              |       |
|----------------------------------------------|-------|
| <b>Rigidez equivalente do mancal 1</b>       | $K_1$ |
| <b>Rigidez equivalente do mancal 2</b>       | $K_2$ |
| <b>Amortecimento equivalente do mancal 1</b> | $C_1$ |
| <b>Amortecimento equivalente do mancal 2</b> | $C_2$ |

Fonte: Elaboração do próprio autor.

As respostas no domínio da frequência do sistema real são obtidas através da aplicação de uma entrada impulsiva em um dado ponto do sistema e da leitura da resposta temporal de dois pontos do sistema rotativo parado, como mostra a Figura 67. A análise do sinal de excitação e dos sinais das respostas transientes do sistema permite a obtenção das funções de transferência entre a entrada impulsiva no disco e as saídas em cada mancal. Isto é motivado pelo fato de que quanto mais próximo os parâmetros em ajuste estiverem dos graus de liberdade analisados, mais precisa será a determinação de tais valores.

**Figura 67 - Entrada e saídas do sistema em análise transiente para obtenção das respostas no domínio da frequência, no plano z-y.**



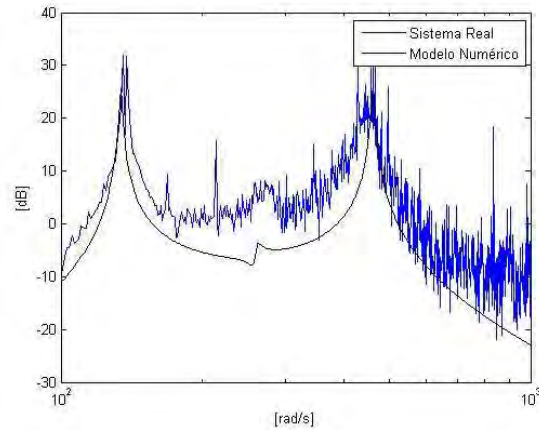
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Desta forma, a determinação dos parâmetros desconhecidos do sistema é feita através do ajuste simultâneo das duas FRF's obtidas experimentalmente, de modo a favorecer o melhor ajuste dos parâmetros das suspensões de ambos os mancais. Esta análise é feita apenas no plano z-y, visto que as propriedades obtidas para este plano são atribuídas para o plano x-y.

A validação experimental das técnicas de detecção de falhas propostas neste trabalho utiliza um eixo onde é provocado um entalhe, que impõe os mesmos efeitos de uma trinca não visível. Após os devidos testes, o eixo do sistema rotativo é substituído por um novo eixo íntegro.

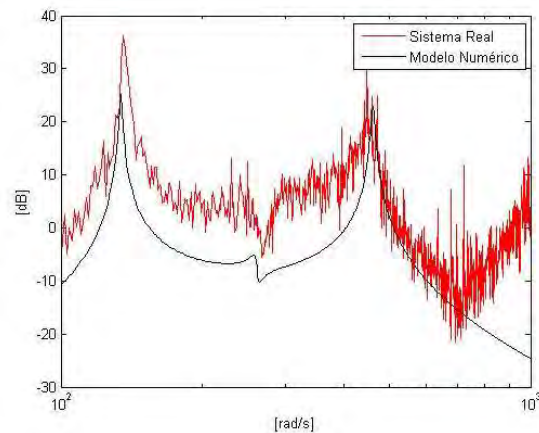
Quando esta troca ocorre, as suspensões necessitam ser desmontadas e montadas novamente, ocasionando na modificação das suas propriedades estruturais. Desta forma, um novo ajuste deve ser feito para a determinação dos parâmetros desconhecidos do novo sistema. As Figuras 68 e 69 representam os resultados dos ajustes das respostas no domínio da frequência obtidos para o primeiro sistema rotativo experimental.

**Figura 68 - Respostas no domínio da frequência do sistema real e do modelo numérico ajustado, obtidas da aceleração vertical do mancal 1 do primeiro sistema rotativo ajustado, experimental.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Figura 69 – Respostas no domínio da frequência do sistema real e do modelo numérico ajustado, obtidas da aceleração vertical do mancal 2 do primeiro sistema rotativo experimental.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

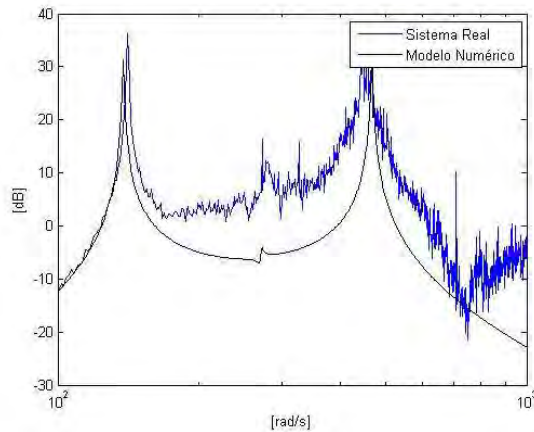
A Tabela 36 mostra os valores iniciais e os valores ajustados dos parâmetros desconhecidos do primeiro sistema rotativo experimental, obtidos pelo ajuste das respostas no domínio da frequência real e numérica. As Figuras 70 e 71 representam os resultados dos ajustes das respostas no domínio da frequência obtidos para o segundo sistema rotativo experimental.

**Tabela 36 – Valores iniciais e valores ajustados dos parâmetros desconhecidos, obtidos na primeira análise do sistema.**

|                                       |              | Valores iniciais | Valores ajustados |
|---------------------------------------|--------------|------------------|-------------------|
| Rigidez equivalente do mancal 1       | $K_1$ [N/m]  | 100              | 39161.7           |
| Rigidez equivalente do mancal 2       | $K_2$ [N/m]  | 100              | 41540.6           |
| Amortecimento equivalente do mancal 1 | $C_1$ [Ns/m] | 0.1              | 4.5               |
| Amortecimento equivalente do mancal 2 | $C_2$ [Ns/m] | 0.1              | 5.4               |

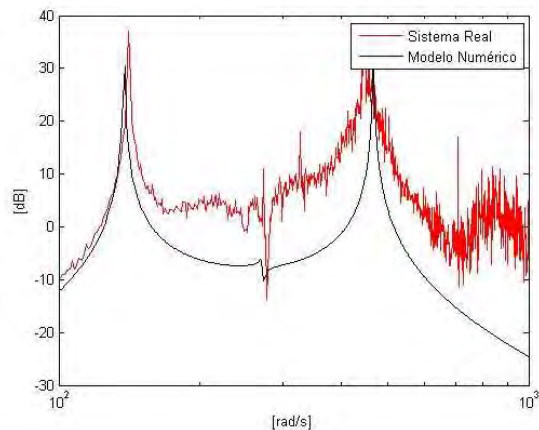
Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Figura 70 – Respostas no domínio da frequência do sistema real e do modelo numérico ajustado, obtidas da aceleração vertical do mancal 1 do segundo sistema rotativo experimental.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Figura 71 – Respostas no domínio da frequência do sistema real e do modelo numérico ajustado, obtidas da aceleração vertical do mancal 2 do segundo sistema rotativo experimental.**



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A Tabela 37 mostra os valores iniciais e os valores ajustados dos parâmetros desconhecidos do segundo sistema rotativo experimental, obtidos pelo ajuste das respostas no domínio da frequência real e numérica.

**Tabela 37 – Valores iniciais e valores ajustados dos parâmetros desconhecidos, obtidos na segunda análise do sistema.**

|                                              |              | Valores iniciais | Valores ajustados |
|----------------------------------------------|--------------|------------------|-------------------|
| <b>Rigidez equivalente do mancal 1</b>       | $K_1$ [N/m]  | 100              | 41949.0           |
| <b>Rigidez equivalente do mancal 2</b>       | $K_2$ [N/m]  | 100              | 45605.0           |
| <b>Amortecimento equivalente do mancal 1</b> | $C_1$ [Ns/m] | 0.1              | 1.7               |
| <b>Amortecimento equivalente do mancal 2</b> | $C_2$ [Ns/m] | 0.1              | 2.4               |

Fonte: Elaboração do próprio autor.