UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ÁREA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA
MATEMÁTICA E SEUS FUNDAMENTOS FILOSÓFICO-CIENTÍFICOS

RACIOCÍNIO PROPORCIONAL: INTEGRANDO ARITMÉTICA, GEOMETRIA E ÁLGEBRA COM O GEOGEBRA

Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho Faria

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO

2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

REJANE WAIANDT SCHUWARTZ DE CARVALHO FARIA

RACIOCÍNIO PROPORCIONAL: INTEGRANDO ARITMÉTICA, GEOMETRIA E ÁLGEBRA COM O GEOGEBRA

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do *Câmpus* de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Vinicius Maltempi

Rio Claro – SP
2016

510.07 Faria, Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho
F224r Raciocínio proporcional: integrando aritmética, geometria e álgebra com o GeoGebra / Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho Faria. - Rio Claro, 2016
278 f. : il., figs., quadros

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Marcus Vinicius Maltempi

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Intradisciplinaridade matemática. 3. Olhar profissional docente. 4. Tecnologias digitais. 5. Ensino fundamental. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

REJANE WAIANDT SCHUWARTZ DE CARVALHO FARIA

RACIOCÍNIO PROPORCIONAL: INTEGRANDO ARITMÉTICA, GEOMETRIA E ÁLGEBRA COM O GEOGEBRA

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do *Câmpus* de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Marcus Vinicius Maltempi - Orientador
IGCE / UNESP/ Rio Claro (SP)

Prof. Dr. Gerson Pastre de Oliveira
FCET/PUC/São Paulo (SP)

Profa. Dra. Sueli Liberati Javaroni
FC / UNESP / Bauru (SP)

Profa. Dra. Telma Aparecida de Souza Gracias
Autônoma/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrosio
IGCE / UNESP / Rio Claro (SP)

Rio Claro, 07 de dezembro de 2016.

Resultado: Aprovada

Este trabalho é dedicado ao meu marido, Luiz Carlos Junior, pela plenitude do amor, companheirismo e paciência cultivados ao longo da nossa caminhada. Também dedico à minha avó Dyla, inspiração da minha vida; aos meus pais, Raul Antônio e Regina Célia, meu porto seguro; e aos meus irmãos, Renata e Raphael, pelo constante estímulo.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela vida, provisão e saúde. Neste trabalho, em especial, agradeço a Ele por me conceder a graça de realizar o doutorado. "Cantarei ao Senhor enquanto eu viver; cantarei louvores ao meu Deus, enquanto eu tiver existência" (Bíblia Sagrada - Salmos 104:33).

Ao meu orientador, Professor Doutor Marcus Vinicius Maltempi, pela orientação e parceria que se iniciou no mestrado e se estende ao longo de sete anos. Serei sempre grata pela confiança, dedicação e amizade.

Aos Professores Doutores, que compuseram minha banca de qualificação e de defesa, Gerson Pastre de Oliveira, Sueli Liberati Javaroni, Telma Aparecida de Souza Gracias e Ubiratan D'Ambrosio, que com atencioso olhar, apontaram sugestões pertinentes e enriquecedoras a este trabalho.

Aos Professores Doutores Beatriz D'Ambrosio (em memória), Rômulo Lins e Marcus Vinicius Maltempi, com os quais cursei disciplinas durante o processo de doutoramento. E aos professores Arlete Brito e, mais uma vez, Marcus Vinicius Maltempi, com os quais acompanhei disciplinas no cumprimento do estágio de docência.

À minha amiga e professora Laís Leite, pela cuidadosa revisão gramatical do texto desta tese.

À Diretoria Estadual de Ensino da Região de Limeira, pela parceria; bem como aos professores de Matemática dessa diretoria, que participaram do curso que compôs o cenário de produção dos dados desta tese, pelas oportunidades de troca e reflexão durante o curso. Sem a dedicação de vocês a realização desse trabalho não seria possível.

Aos meus grandes amigos membros do Projeto Mapeamento e do grupo de pesquisa GPIMEM, com os quais aprendi a importância do trabalho colaborativo e a preciosidade da aprendizagem mútua. Obrigada, Alex, Ana Paula Barros, Ana Paula Malheiros, Anderson, Anna Luisa, Beatriz, Bruno, Carla, Carlos Eduardo, Cida, Daiane, Daise, Debbie, Egídio, Fabian, Fábio, Fernando, Gabriel, Hannah, Helber, Idalise, Jeannette, Jonson, Juliana, Lahís, Laís, Liliane, Luana, Luiz Paulo, Marcelo Borba, Márcio, Marcus Maltempi, Maria Deusa, Maria Francisca, Maria Tereza, Mazzi, Meiriele, Nilton, Patrícia Fasseira, Patrícia Peralta, Régis, Renata, Ricardo Mendes, Ricardo Scucuglia, Rita, Rúbia, Sandro, Silvana, Sueli, Tiago, Vanessa, Vinícius, e a tantos outros que convivi e troquei experiências.

Aos alunos do PPGEM, pela companhia nas disciplinas, nas lutas políticas, nas reuniões discentes e nas comemorações.

Aos funcionários do Departamento de Educação Matemática da Unesp – Rio Claro, Ana, Alessandra, Clotilde, Elisa, Inajara e José Ricardo e ao técnico do GPIMEM, Geraldo Lima, pela atenção e apoio que contribuíram para o desenvolvimento desta pesquisa.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo financiamento da pesquisa, que permitiu minha dedicação exclusiva ao curso durante a maior parte de meu doutorado (julho de 2014 a dezembro de 2016).

Às minhas amigas do coração Cida, Fernanda, Hannah e Marinéia, com as quais dividi o mesmo teto, alegrias e tristezas na fase solteira dessa jornada.

Aos meus amigos, primos e tios de Italva, com os quais dou muitas risadas sempre que posso, e recarrego as baterias para prosseguir.

Aos muitos amigos que fiz em Rio Claro ao longo desses sete anos que aqui resido, Aline e Filipe, Álvaro, Ana e Timóteo, Anieli, Camila e Leonardo, Davi, Fernanda e Silas, Gabi, Guga, Laís, Marcelinho, Mariana, Mateus, Priscila e Robson, Raabe e Lucas, Raquel e Juliano, Ronaldo, Marlete, Samanta e Mateus, vocês são presentes de Deus na minha vida.

Aos meus sogros Luiz Carlos e Maria Aparecida, meus cunhados, Leonardo, Camila, e Danielle, e a toda Família Carvalho e Barbosa, que me acolheram com tanto carinho.

À minha irmã Renata e meu cunhado Alan, e ao meu irmão Raphael, com os quais sempre posso contar, pelo amor e compreensão que sempre demonstraram, mesmo em momentos difíceis.

Aos meus pais, Raul Antônio e Regina Célia. Amo tanto vocês! Jamais conseguiria expressar a gratidão que sinto pelo esforço que fizeram para me ensinar o respeito, o amor e a determinação.

Ao meu amor, Luiz Carlos Junior. Nem mesmo nos meus melhores sonhos imaginava que você iria aparecer na minha vida nessa trajetória e mudá-la com tal intensidade que não consigo mais pensar em nenhum sonho sem você. Nossa união foi a melhor dádiva que Deus já me concedeu. Para sempre estaremos juntos.

Não sou nada.
Nunca serei nada.
Não posso querer ser nada.
À parte isso, tenho em mim todos os sonhos do mundo.

Fernando Pessoa
(Tabacaria, pseudônimo Álvaro de Campos, 1928)

RESUMO

Nesta pesquisa investiguei possibilidades de desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional que emergem em atividades com o GeoGebra, integrando aritmética, geometria e álgebra, a partir do olhar profissional de professores de Matemática e pesquisadores em Educação Matemática. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, cujos dados foram produzidos durante o curso “Raciocínio Proporcional: atividades com o GeoGebra integrando aritmética, geometria e álgebra”, realizado com professores de Matemática que atuam do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental. Tais dados foram obtidos a partir da interação com os professores participantes, questionários de avaliação, e registros em vídeo e no caderno de campo. A análise foi realizada à luz das perspectivas teóricas apresentadas sobre Raciocínio Proporcional, Intradisciplinaridade Matemática, Tecnologias Digitais e GeoGebra, e Olhar Profissional e Formação Continuada do Professor de Matemática. Ao longo do curso, buscou-se aprimorar as atividades de desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional com o GeoGebra, em uma perspectiva intradisciplinar, por meio do olhar profissional que os professores exerciam sobre elas. Assim, a formação do grupo de professores nas temáticas abordadas ao longo do curso é um resultado deste trabalho, bem como as atividades produzidas, que estão disponíveis nesta tese para qualquer interessado. Concluo que a abordagem Matemática Intradisciplinar com o GeoGebra, para o desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional, possibilita uma visão abrangente de diversos conceitos considerados fundamentais na literatura para a formação dos alunos, visando a superação de dificuldades em sua vida escolar no que se refere à disciplina de Matemática.

Palavras-chave: Intradisciplinaridade Matemática. Olhar Profissional Docente. Tecnologias Digitais. Ensino Fundamental. Ensino de Matemática.

ABSTRACT

In this research I investigated possibilities of development and exploration of Proportional Reasoning that emerges in activities with GeoGebra, integrating arithmetic, geometry and algebra, from mathematics teachers and researchers in Mathematical Education professional look. This is a qualitative research, whose data were produced during the course “Proportional Reasoning: activities with GeoGebra integrating arithmetic, geometry and algebra”, carried out with mathematics teachers who work from the sixth to the ninth year of Elementary School. Those data were obtained from the interaction with the participating teachers, evaluation questionnaires, and video and field notebook records. The analysis was carried out in the light of the theoretical perspectives presented on Proportional Reasoning, Mathematical Intradisciplinarity, Digital Technologies and GeoGebra, and Professional Look and Mathematics Teacher Education. Throughout the course, we sought to improve the activities of development and exploration of Proportional Reasoning with GeoGebra, in an intradisciplinary perspective, through the professional look that teachers exercised over them. Thus, the education of the group of teachers in the topics covered throughout the course is a result of this work, as well as the activities produced, which are available in this thesis to anyone. I conclude that the Mathematical Intradisciplinary approach with GeoGebra, for the development and exploration of Proportional Reasoning, allows a comprehensive view of several concepts considered fundamental in the literature for of students’ education, aiming at overcoming difficulties in their school life in what concern to Mathematics discipline.

Keywords: Mathematical Intradisciplinarity. Teacher Professional Look. Digital Technologies. Elementary School. Mathematics Teaching.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Neste capítulo descrevo a pesquisa desde a origem, relatando as ideias iniciais e o formato que o trabalho foi adquirindo no decorrer da sua realização. Primeiramente, relato parte da minha trajetória acadêmica e docente, devido a sua relevância no delineamento do projeto que precedeu a realização desta pesquisa. Na sequência, discorro sobre os caminhos trilhados desde as inquietações iniciais até a consolidação desta tese, explicitando a pergunta que norteou o andamento do trabalho. Em seguida, apresento os objetivos traçados para a pesquisa. Por fim, descrevo a estrutura da tese com a finalidade de situar o leitor sobre o que será tratado em cada capítulo que compõe esta investigação.

1.1 Origem da Pesquisa

Esta pesquisa discute possibilidades de desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional que emergem por meio de atividades que abordam concomitante aspectos aritméticos, geométricos e algébricos no software dinâmico de matemática GeoGebra. Tais possibilidades são consideradas a partir de uma compreensão de apontamentos feitos por professores de Matemática atuantes do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental e de pesquisadores em Educação Matemática, analisadas à luz das perspectivas teóricas apresentadas sobre Raciocínio Proporcional, Intradisciplinaridade Matemática, Tecnologias Digitais e GeoGebra, Olhar Profissional e Formação Continuada do Professor de Matemática.

Desse modo, apresento os argumentos que me conduziram a desenvolver uma pesquisa envolvendo o Raciocínio Proporcional, o software dinâmico de matemática GeoGebra, a exploração concomitante de aspectos aritméticos, geométricos e algébricos, o envolvimento de professores por meio de um curso de formação continuada em que os professores cursistas puderam, ao mesmo tempo, exercer e aprimorar seu olhar profissional docente, bem como o empenho de professores e pesquisadores da Educação Matemática na revisão da versão inicial das atividades.

Considerando isso, relato minhas vivências acadêmicas como professora de Matemática e como pesquisadora em Educação Matemática. O relato dessas vivências irá expor minha curiosidade e meus anseios em compreender os processos de ensino e de aprendizagem de conteúdos matemáticos em alunos que cursam do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental.

Registro minha curiosidade por entender que ela foi de suma importância para o movimento de pesquisar ao longo de todo o processo de doutoramento. Dewey (1959) atribui à curiosidade o valor de fator fundamental para a ampliação da experiência, como ingrediente essencial para o pensar reflexivo. Segundo o autor, no momento em que se manifesta, a curiosidade mobiliza nossos órgãos sensitivos e motores em cada novo contato, o que produz um “deslumbramento ardentemente procurado” (DEWEY, 1959, p. 45) no objeto.

Freire (1996) diz que a curiosidade ingênua, desarmada, espontânea, aquela que nos faz observar as nuvens e nos perder na imensidão do azul é importante, pois alimenta o nosso desejo de saber mais. No entanto, existe outra, essencial ao pesquisador: a curiosidade metódica, exigente, epistemológica, que nos faz distanciar do nosso objeto de pesquisa, no sentido de se afastar do pensamento em geral, para se aproximar dele com pensamento científico, para conhecê-lo e dele falar com sensatez. Uma curiosidade que causa inquietação, que origina insatisfação que desencadeia a busca pelo conhecimento (SANTOS, 2013). Nas palavras de Freire:

> Não é a curiosidade espontânea que viabiliza a tomada de distância epistemológica. Essa tarefa cabe à curiosidade epistemológica – superando a curiosidade ingênua, ela se faz mais metodicamente rigorosa. Essa rigorosidade metódica é que faz a passagem do conhecimento ao nível do senso comum para o conhecimento científico (FREIRE, 1995, p.78).

E foi isso que decidi fazer. Mover minha curiosidade espontânea, relativa ao ensino e à aprendizagem de Razão e Proporção, para uma curiosidade epistemológica. Então, essa curiosidade metódica passou a conduzir minha investigação ao propor atividades não restritas a alguma ramificação da Matemática, mas sim voltadas ao desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional com o GeoGebra integrando geometria, aritmética e álgebra[1].

[1] A opção por apresentar a aritmética, a álgebra e a geometria como ramificações da Matemática se deu, pois, é dessa forma que a Matemática da Educação Básica é composta atualmente no Brasil (como pode ser visto no quarto capítulo). Esclareço ainda que não nego a existência de outras ramificações, como a trigonometria, a topologia, a combinatória, dentre outras. Apenas centro os estudos neste trabalho nas três ramificações citadas, por entender que dessas que as demais se originam, como outras ramificações da Matemática na Educação Básica.

Essa curiosidade não surgiu de uma vontade repentina, sem fundamento, mas foi sendo gerada aos poucos, com a minha vivência acadêmica e docente. De 2010 a 2012 desenvolvi uma pesquisa que resultou na dissertação de mestrado “Padrões Fractais: Contribuições ao processo de Generalização de Conteúdos Matemáticos” (FARIA, 2012). Nessa investigação, realizei um curso com alunos do Ensino Médio que explorava as características aritméticas, algébricas e geométricas dos Padrões Fractais no GeoGebra. Por meio desse trabalho, pude observar a relevância desse software para que haja uma abordagem simultânea dessas vertentes da Matemática, bem como sua ótima aceitação por parte dos alunos. O uso do GeoGebra forneceu diversas possibilidades de se fazer análises, as quais permitem que surjam descobertas de caráter matemático, que podem ser representadas de forma aritmética, algébrica e geométrica nas janelas de álgebra e de visualização, planilhas e calculadoras (FARIA, 2012).

Nos Seminários (SMEM – Seminários de Matemática e Educação Matemática - realizados por palestrantes convidados) e Jornadas (Jornadas de Avaliação Continuada - realizadas com a apresentação das pesquisas, ou assuntos afins, de mestrandos e doutorandos do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP - Rio Claro) tenho delineado minha identidade como pesquisadora, por meio de debates que discorrem sobre o sentido da Educação Matemática como campo científico e sobre temáticas que mobilizam meus conhecimentos e incentivam minha curiosidade espontânea a se tornar epistemológica. Ademais, destaco que as discussões e aprendizagens que obtive com as disciplinas cursadas, com minha participação como membro do Grupo de Pesquisa em Informática, outras mídias e Educação Matemática (GPIMEM) e com as conferências, encontros e congressos que participei, foram muito importantes para traçar um perfil de Educadora Matemática preocupada com questões principalmente ligadas aos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática na Educação Básica.

A perspectiva profissional docente também tem me mobilizado em vários aspectos. Por quatro anos, atuei como professora de Matemática do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental, em diferentes escolas, sendo elas pertencentes às redes pública e privada nos estados de São Paulo e Rio de Janeiro. No magistério, as vivências que ocorrem a todo tempo na sala de aula, no decorrer dos processos mútuos entre professores e alunos relativos ao ensino e à aprendizagem, suscitaram em mim inquietações com relação a alguns temas matemáticos, mas principalmente em relação à razão e proporção.

Com base nas pesquisas que vem sendo realizadas (BEN-CHAIM; KERET; ILANY, 2006; BOTTA, 1997; CORDEL; MASON, 2000; PAULA, 2012) e na minha experiência como professora, afirmo que razão e proporção constituem alguns dos principais temas que compõem o currículo atual do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental, tomando parte em todos os seus anos. Estes temas são necessários à compreensão de ideias que não pertencem apenas a Matemática, mas também influenciam várias outras disciplinas. Embora tenha um papel tão relevante, minha vivência docente e as obras citadas apontam que a aprendizagem não tem sido satisfatória. Uma parte considerável do que tenho visto se deve a abordagem utilizada, restrita somente a explanações teóricas e exemplos utilizando lousa e giz, seguidos de exercícios que priorizam regras e técnicas. Notavelmente, tal abordagem dificulta a compreensão de conceitos matemáticos.

Digo isso, pois ensinava e igualmente observava o empenho dos meus colegas de trabalho para ensinar seguindo explicações, conceitos, exemplos e atividades que abordavam a vertente geométrica, ou a aritmética, ou, ainda, a algébrica, e que por vezes eram pautadas em regras e técnicas. Os alunos, por sua vez, memorizavam formas de operar matematicamente e muitos até obtinham bons resultados nas avaliações. Mas ao caminhar para outros assuntos matemáticos em que era necessário pensar nos conteúdos que foram anteriormente ensinados, ocorria uma quebra, ou seja, algo acontecia e parecia que pouco ou nada tinham aprendido sobre tais conteúdos. Essas experiências obtidas com a minha prática docente, confirmadas pela literatura, despertaram o meu interesse em descobrir formas de mediação e estratégias didáticas que favorecessem a aprendizagem.

Com a curiosidade que me instigava a descobrir alternativas para tratar essas questões, busquei aprofundar leituras sobre razão e proporção, e percebi que fazia mais sentido tratar do Raciocínio Proporcional que, segundo Van de Walle (2009), envolve pensar sobre relações e comparações de quantidades e valores, pois se trata do desenvolvimento da capacidade de pensar e comparar as relações multiplicativas entre quantidades. Era isso que queria propor, aulas com foco no pensar sobre, no entender as relações pertinentes aos temas matemáticos relacionados com o Raciocínio Proporcional, com atividades pautadas na compreensão mútua das três vertentes da Matemática.

Investigar as orientações sobre o ensino e a aprendizagem do Raciocínio Proporcional, me remete a um dos objetivos da Educação Matemática como campo científico, que consiste em apresentar subsídios para relacionar as práticas de pesquisa com a ação pedagógica. Em outras palavras, fazer com que as discussões acadêmicas cheguem às salas de aula faz parte dos desafios da Educação Matemática. Para tanto, é necessário que se valorize mais o processo de aprendizagem e seus vários caminhos percorridos, do que o produto final propriamente dito. É nesse sentido que a Educação Matemática é um:

> [...] campo propício para o estabelecimento de uma postura crítica em relação à Matemática e a seu estilo, contrapondo-se à esfera da produção científica de Matemática, campo de uma postura técnica tendencialmente conservadora quanto ao ensino e à aprendizagem. Vislumbra-se o destino crítico da Educação Matemática por um dinamismo que lhe é próprio, quer na aceitação de metodologias alternativas, quer seja por não poder desvincular sua prática de pesquisa da ação pedagógica, pela tendência em valorizar o processo em detrimento do produto ou por suas várias tentativas de estabelecer, para si própria, parâmetros próprios para qualificar suas ações (BICUDO; GARNICA, 2011, p. 90–91).

Assim sendo, esta pesquisa admite o caráter de buscar os interesses pedagógicos relativos ao processo de construção e exploração do Raciocínio Proporcional que competem à Educação Matemática como campo científico, afinal, tais processos que envolvem o aluno, o professor e o saber matemático são vistos como um dos principais projetos de investigação em Educação Matemática (PEREZ, 2009).

Além disso, percebi que abordar um tema matemático da perspectiva intradisciplinar poderia contribuir para que associações de conceitos e conteúdos diferentes dentro da própria Matemática ocorressem. Na busca por leituras sobre esse tema, encontrei Lorenzato (2006), que fala da importância da Intradisciplinaridade Matemática, que pode ser entendida como a relação da Matemática com a própria Matemática, por meio do ensino integrado de aritmética, geometria e álgebra.

A interferência desse caminho trilhado na definição do tema da pesquisa é discutido em Goldenberg (1999), que afirma "[...] que a escolha de um assunto não surge espontaneamente, mas decorre de interesses e circunstâncias socialmente condicionadas. Essa escolha é fruto de determinada inserção do pesquisador na sociedade" (GOLDENBERG, 1999, p. 79). Foi dessa forma, influenciada principalmente por minha prática acadêmica e docente, que a pesquisa foi se consolidando e novos rumos foram tomados, os quais são apresentados na próxima seção.

1.2 Rumos da Investigação

Desde a idealização do projeto inicial desta pesquisa, o intuito era propor uma abordagem que permitisse que razão e proporção fosse estudado de forma a explorar no GeoGebra as três vertentes matemáticas. Tendo isso como estrutura para a configuração da investigação, desenvolvi minha pergunta de pesquisa, em um processo que passou por diversas modificações (LINCOLN; GUBA, 1985).

Inicialmente iria analisar de que forma a exploração de Padrões Áureos, com o apoio do GeoGebra, pode contribuir para o ensino de razão e proporção. Pensei em trabalhar com a Razão Áurea, por saber que essa razão tem relação com outras áreas do conhecimento, e por ter investigado em Faria e Ribeiro (2009) o interesse dos alunos em explorar as similaridades e padrões que fazem com que os polígonos áureos tenham a mesma estrutura de alguns ícones da arte, como as relações no Homem Vitruviano, na Monalisa e em outras obras de Leonardo da Vinci.

Contudo, quando decidi ouvir os professores e discutir com eles o material a ser elaborado, optei por apresentar atividades mais próximas do que eles seguem como professores da rede estadual de São Paulo, e elaborar atividades investigativas a partir de uma releitura do que é proposto no Currículo (SÃO PAULO, 2011) e no Caderno do Aluno do estado de São Paulo[2] (SÃO PAULO, 2014).

Por consequência, a pergunta de pesquisa também teve o foco modificado, cedendo o destaque dado à razão e proporção, para o Raciocínio Proporcional, pois como já foi dito, as leituras que fiz sobre a temática me fizeram perceber que tratar do desenvolvimento da capacidade de pensar e comparar as relações que permeiam o Raciocínio Proporcional seria mais relevante. Por fim, embora já pensasse desde o início em trabalhar com o GeoGebra, decidi deixar isso explícito na pergunta de pesquisa, por entender que esse seria um aspecto de destaque. Após passar por todos esses refinamentos, delineei a seguinte pergunta norteadora desta investigação:

Quais possibilidades de desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional emergem em atividades com o GeoGebra, integrando aritmética, geometria e álgebra, a partir do olhar profissional de professores de Matemática e pesquisadores em Educação Matemática?

Esse olhar profissional foi exercido ao longo dos encontros presenciais e virtuais com membros do projeto Mapeamento e durante o curso de formação continuada "Raciocínio Proporcional: atividades com o GeoGebra integrando aritmética, geometria e álgebra", com professores de Matemática da Diretoria de Ensino de Limeira, atuantes na Educação Básica

[2] O Caderno do Aluno (vigente de 2014 a 2017) é destinado aos estudantes do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental da rede estadual de São Paulo, e seu conteúdo foi produzido dentro das especificações do Currículo Oficial Estadual. Seu objetivo é viabilizar o acesso ao conhecimento, auxiliando os alunos na apropriação de novas competências e habilidades (SÃO PAULO, 2009).

da rede pública estadual de São Paulo. Esse curso foi uma das ações relacionadas ao projeto "Mapeamento do uso de tecnologias da informação nas aulas de Matemática no Estado de São Paulo"[3], vinculado ao Programa Observatório da Educação (OBEDUC), da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), aprovado sob número 16429 no EDITAL CAPES Nº 049/2012 (início em março de 2013 e término previsto para novembro de 2017), do qual sou colaboradora.

Durante o curso de formação continuada realizado, os professores cursistas mobilizaram e apuraram seu olhar profissional docente, com a finalidade de aprimorar as atividades discutidas ao longo dos encontros. A temática do curso seguiu as ideias de que o trabalho com tópicos matemáticos do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental está centrado no desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional (VAN DE WALLE, 2009). Segue ainda o destaque dado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998), que recomendam que o raciocínio que envolve a proporcionalidade seja explorado em situações de aprendizagem que privilegiem a construção de estratégias de solução na resolução.

Nas recomendações dos PCN encontra-se que o ensino de Matemática deve ser mais do que memorizar resultados, de modo que a produção de conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber pensar matemático. Este documento esclarece que tal domínio é adquirido num processo lento, trabalhoso, que deve envolver a generalização de padrões, que por sua vez, faz parte de um conjunto de elementos essenciais para o processo de formalização do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de aptidões fundamentais à leitura e à interpretação de dados referentes à realidade do aluno e à diversas áreas do conhecimento (BRASIL, 2002). Entendo que tal recomendação perpassa a ideia de explorar e desenvolver o Raciocínio Proporcional, ao invés de trabalhar regras e técnicas relativas à razão e proporção.

No que tange a abordagem simultânea das vertentes da Matemática, esta pesquisa está respaldada em Lorenzato (2006). Para o autor, assim como alguém que escutou isoladamente um ou diversos instrumentos musicais não pode afirmar que conhece uma orquestra por não os ter ouvido juntos, assim alguém que estudou álgebra, ou aritmética ou geometria separadamente, não pode dizer que conhece a Matemática e possui a impressão de que esses não se inter-relacionam e que aprenderam assuntos distintos.

[3] Por vezes irei me referir a este projeto somente como Mapeamento, evitando assim repetições.

Na busca por intervir nesse aspecto, optei por utilizar o GeoGebra, pois ele apresenta diversas alternativas para que haja a exploração simultânea de aspectos algébricos, geométricos e aritméticos. Ademais, fatores técnicos, como: ser um software de fácil manipulação, disponível para diversos sistemas operacionais, presente no Programa Acessa Escola e no Blue Lab (questões que serão melhor expostas no capítulo seguinte) contribuíram efetivamente para a escolha do GeoGebra.

A análise das atividades elaboradas nesta tese será feita com o intuito de identificar as possibilidades de desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional que emergem quando o GeoGebra integra concomitantemente aspectos aritméticos, geométricos e algébricos. Essa análise será realizada por meio do exame das quatro atividades elaboradas (Razão e Proporção; Grandezas Proporcionais; Teorema de Tales; e Frações Equivalentes e Porcentagem), à luz das perspectivas teóricas apresentadas sobre Raciocínio Proporcional; Intradisciplinaridade Matemática; Tecnologias Digitais e GeoGebra; e sobre o Olhar Profissional e Formação Continuada do Professor de Matemática.

E foi esse o caminho trilhado até que a pesquisa tomasse o formato revelado ao longo desta tese e que permitiu que o seguinte objetivo fosse traçado: **Investigar possibilidades de desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional que emergem em atividades com o GeoGebra, integrando aritmética, geometria e álgebra, a partir do olhar profissional de professores de Matemática e pesquisadores em Educação Matemática.**

Esclarecido o objetivo, apresento na seção seguinte a estrutura e o conteúdo dos capítulos que compõem esta tese.

1.3 Composição do Trabalho

Esta tese é composta por seis capítulos, além das conclusões, referências e apêndices. Neste primeiro capítulo, apresentei a origem deste estudo, os rumos tomados ao longo de sua realização, incluindo sua questão norteadora e seu objetivo. Especificamente nesta seção, descrevo a estrutura da tese.

O capítulo 2 trata da metodologia de pesquisa e dos procedimentos metodológicos. Para tanto, a escolha pela metodologia qualitativa é justificada. Em seguida, os procedimentos e os instrumentos utilizados durante a produção dos dados são expostos. Relato ainda o cenário da pesquisa, descrevendo o curso de formação continuada, os professores cursistas, as atividades e o software dinâmico de matemática GeoGebra. Finalizo o capítulo descrevendo os materiais que subsidiaram a realização do curso.

No terceiro capítulo apresento o significado do termo Raciocínio Proporcional, a partir de uma discussão com os autores que tratam desse assunto. Noções históricas sobre a proporcionalidade são apresentadas com o intuito de revelar como a proporcionalidade tem sido importante para a humanidade. O capítulo é dedicado, ainda, à importância do Raciocínio Proporcional na Educação Matemática, ao diálogo sobre o ensino e a aprendizagem matemática de conteúdos inerentes ao Raciocínio Proporcional, e à relação do Raciocínio Proporcional com a minha prática docente. Finalizando o mesmo, discorro sobre as perspectivas dessa temática na pesquisa.

O capítulo 4 é dedicado à discussão da abordagem matemática intradisciplinar, das Tecnologias Digitais e do GeoGebra. Inicialmente, discorro sobre o trabalho concomitante da geometria, da aritmética e da álgebra. Aspectos históricos do ensino das ramificações da Matemática são tratados na sequência. A seguir abordo a influência, relevância e atuação das Tecnologias Digitais. Por fim, é discutido o papel do GeoGebra na exploração Matemática Intradisciplinar.

O quinto capítulo debate o olhar profissional e a formação continuada do professor de Matemática. Inicialmente exponho o termo olhar profissional. Na sequência aponto os motivos que levaram à discussão das atividades com pesquisadores do projeto Mapeamento e com professores de Matemática atuantes do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental. A seção seguinte aborda questões relativas à reflexão na docência atrelada com a discussão sobre a relevância da formação continuada de professores. Finalizando o capítulo, são apresentadas particularidades do curso de formação continuada realizado.

O capítulo 6 é dedicado à apresentação e à análise dos dados. Para tanto, serão analisadas possibilidades de desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional que emergem por meio de atividades que integram concomitante aspectos matemáticos intradisciplinares com o GeoGebra. Tais possibilidades são consideradas a partir de uma compreensão de apontamentos feitos por pesquisadores do projeto Mapeamento e professores de Matemática atuantes do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental, analisadas à luz das perspectivas teóricas apresentadas sobre Raciocínio Proporcional, Intradisciplinaridade Matemática, Tecnologias Digitais e GeoGebra, e sobre o Olhar Profissional e Formação Continuada do Professor de Matemática.

Nas conclusões, realizo uma discussão dos resultados da pesquisa. Visando sintetizar as ideias relatadas nesta tese, confronto a questão norteadora e os objetivos com as implicações da pesquisa observadas na produção e na análise dos dados, esclarecendo assim as contribuições dessa pesquisa para o campo da Educação Matemática. Apresento ainda novas perspectivas como pesquisadora e discorro sobre os limites desta investigação e outras possibilidades de pesquisa, tecendo uma reflexão final.

As obras utilizadas e citadas nesta tese estão descritas nas Referências.

As atividades de desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional e de Reconhecimento do GeoGebra, os roteiros das construções feitas no GeoGebra e utilizadas nas atividades, o programa do curso, os questionários de avaliação do curso, o termo de consentimento para utilização dos dados obtidos durante o curso, o roteiro para relato dos encontros semanais, e algumas postagens da página do grupo de discussão do curso no facebook estão nos apêndices desta tese.

CAPÍTULO 2

METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS

Este capítulo é dedicado a expor a metodologia e os procedimentos adotados na pesquisa. Inicialmente, discorro sobre a metodologia de pesquisa qualitativa. Os procedimentos metodológicos e os instrumentos utilizados na produção dos dados são descritos na sequência. Em seguida, apresento o contexto em que os dados foram produzidos. Na seção seguinte, encerro o capítulo descrevendo as formas e os materiais que foram usados para dar suporte aos professores cursistas.

2.1 Uma Investigação Pautada na Metodologia de Pesquisa Qualitativa

Desde o início da pesquisa, refleti sobre a metodologia mais adequada para subsidiar o seu andamento. Percebi que, sem dúvida, esta investigação é de cunho qualitativo, assim como investigações que já realizei anteriormente (FARIA, 2012; FARIA; RIBEIRO, 2009). Afirmo isso, pois ao confrontar o objetivo com os ideais que perpassam a metodologia qualitativa, identifiquei a sinergia existente entre elas, afinal estava em busca de uma metodologia que subsidiasse as minhas investigações quanto às possiblidades de desenvolver e explorar o Raciocínio Proporcional, numa perspectiva que melhor se aproximasse da realidade escolar. Buscava subsídios que permitissem um exame crítico dos dados e que, ao mesmo tempo, fossem coerentes com a questão que norteia o trabalho, com os objetivos e com os procedimentos metodológicos utilizados.

Cabe retomar que essa pesquisa está sendo norteada pela seguinte questão: "Quais possibilidades de desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional emergem em atividades com o GeoGebra, integrando aritmética, geometria e álgebra, a partir do olhar profissional de professores de Matemática e pesquisadores em Educação Matemática?". Por buscar entender essas possibilidades, essa pesquisa foi subsidiada pela abordagem qualitativa, pois ela é caracterizada por "tentar dar sentido ou interpretar os fenômenos em termos dos significados que as pessoas trazem para eles" (DENZIN; LINCOLN, 1994, p. 2).

Nesta pesquisa, a atenção está centrada no objetivo de investigar possibilidades de desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional, do sexto ao nono ano do Ensino

Fundamental, por meio do ensino integrado de aritmética, geometria e álgebra com o GeoGebra. Com o intuito de alcançar esse objetivo, percorri um caminho a partir de uma compreensão de apontamentos feitos por professores de Matemática atuantes do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental e de pesquisadores em Educação Matemática. Segundo Lüdke e André (1986), há décadas tem sido reconhecido que os fenômenos ligados à educação estão imersos em um contexto social, que por sua vez está inserido em uma realidade histórica. E essa é mais uma justificativa de ter optado pela metodologia qualitativa, afinal, as pesquisas educacionais têm por desafio tentar captar essa realidade complexa, dinâmica e em constante transformação.

Vale ressaltar que o GPIMEM tem dado suporte a esta pesquisa no que tange à metodologia, pois o grupo vem realizando pesquisas de cunho qualitativo que se preocupam com questões relacionadas às Tecnologias Digitais na Educação Matemática. Esse grupo entende a pesquisa qualitativa como "uma forma de se fazer pesquisa, onde o foco, o olhar da pesquisa encontra-se nas relações que têm significado para o pesquisador" (JAVARONI; SANTOS; BORBA, 2011, p. 198). E nessas relações que ocorrem na pesquisa qualitativa, que envolvem os dados produzidos em contato direto do pesquisador com a situação estudada, o processo importa mais do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

Nesse sentido, Borba (2004) ao falar da pesquisa qualitativa, se refere a "uma forma de conhecer o mundo que se materializa fundamentalmente através dos procedimentos conhecidos como qualitativos" (BORBA, 2004, p. 3). Nessa direção, Alves-Mazzotti (2001), afirma que as pesquisas qualitativas têm seguido a tradição de buscar compreender e interpretar os fenômenos. Portanto, ao realizar uma pesquisa com esse cunho, o pesquisador deve buscar compreender as formas com que as pessoas pensam e agem. Mais especificamente, essa pesquisa busca refletir sobre os pensamentos e atitudes referentes ao desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional, por meio de atividades com a utilização do GeoGebra no ensino concomitante da aritmética, geometria e álgebra.

E para identificar aspectos relevantes em meio à complexidade que permeia o contexto em que os dados emergem:

> É necessário interpretar o outro, conhecer o seu modo de pensar e sentir, mas é igualmente necessário estudar formas de trabalho conjunto que levem a novos horizontes. Em Educação, o investigador não é apenas um espectador do que se passa no terreno da prática educativa, mas também um actor, ao lado de outros actores, na transformação desse terreno e dos próprios participantes. Para isso, torna-se necessária uma relação de outro tipo, baseada no diálogo e na colaboração (PONTE, 2005, p. 112).

E foi nesse formato que ocorreu o curso “Raciocínio Proporcional: atividades com o GeoGebra integrando aritmética, geometria e álgebra” que compõe o cenário dessa pesquisa. Os sujeitos foram 17 professores que atuam do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental, e ao longo dos encontros buscou-se interpretar o olhar profissional que eles exerciam sobre as atividades. O curso oportunizou a discussão entre professores que trabalham na mesma rede estadual de ensino, em uma mesma região, que conhecem a realidade de suas escolas e o contexto em que vivem seus alunos, sobre a relevância, eficácia, e condições de aplicação das atividades.

O processo de elaboração das atividades que antecedeu a realização do curso contou com o apoio dos membros do projeto Mapeamento. Em diversas reuniões, presenciais e a distância, os professores e pesquisadores vinculados ao projeto estudaram atividades que estavam relacionadas com o Raciocínio Proporcional no caderno do aluno do estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2014), realizaram as diversas versões das atividades, discutiram as temáticas envolvidas e sugeriram revisões. E é sobre as questões pertinentes à realização da produção dos dados que trato nas próximas seções. Assim, diante da discussão realizada nesta seção acerca da metodologia que subsidiou o desenvolvimento desta tese, passo a descrever os procedimentos e instrumentos utilizados, o cenário em que ocorreu a produção dos dados, e o material de apoio fornecido aos professores cursistas.

2.2 Procedimentos e Instrumentos de Produção dos Dados

Para a realização desta pesquisa foram utilizados diversos procedimentos e instrumentos para produzir os dados, pois dispor deles colabora para a confiabilidade dos resultados na pesquisa qualitativa (ALVES-MAZZOTTI, 2001).

Ademais, concordo com Goldenberg (1999) que afirma que a pesquisa qualitativa não deve seguir uma direção linear na análise, pois trata de fenômenos complexos que possuem muitas particularidades. É nesse sentido que entendo que são necessárias diversas idas e vindas aos dados durante a análise e esse processo é favorecido quando se dispõe de múltiplos instrumentos e procedimentos de produção dos dados. Com o intuito de explicitar esses procedimentos e intrumentos, apresento as subseções a seguir.

2.2.1 Registros de Vídeo

Os seis encontros presenciais do curso foram registrados por vídeos gerados por filmadoras digitais. Com a finalidade de tornar as imagens e o som mais nítidos, uma filmadora foi posicionada no fundo e outra na frente da sala em que os encontros ocorreram.

Essas filmadoras eram manuseadas principalmente pelo bolsista de iniciação científica, vinculado ao projeto Mapeamento, Fábio da Silva (aluno do curso de Matemática da UNESP de Rio Claro), que monitorou todos os encontros e estava sempre atento para registrar quando um professor cursista manifestava sua opinião.

Sem dúvida, as filmagens foram muito importantes para o registro dos encontros. Powell *et al.* (2004) afirmam que a disponibilidade de filmar "[...] momento-a-momento de sons e imagens de um fenômeno tem se transformado numa ampla e poderosa ferramenta da comunidade de pesquisa em Educação Matemática" (POWELL; FRANCISCO; MAHER, 2004, p. 84). Segundo os autores, dispor de registros de vídeo como dados "[...] têm produzido descrições fascinantes de professores e estudantes em cenários clínicos e de sala de aula envolvidos numa matriz de tarefas matemáticas" (POWELL; FRANCISCO; MAHER, 2004, p. 84).

Nesta investigação, as filmagens contribuíram para que os dados produzidos fossem melhor analisados. Ao final da realização das questões que compõem uma atividade, houve momentos ricos de debate e discussão, que ficaram registrados nas filmagens. Assim, as atividades elaboradas puderam ser aprimoradas segundo os apontamentos feitos pelos professores cursistas, e ficaram registradas nas filmagens. Ademais, outras questões emergiram na análise das filmagens, como a opinião dos professores sobre o uso das tecnologias em sala de aula e o perfil das escolas em que atuam.

2.2.2 Registros no Caderno de Campo

Ao longo dos encontros, registrei diversas informações no meu caderno de campo, que na verdade era um documento de texto que ficava aberto no notebook que utilizei no decorrer dos encontros do curso. Nesse arquivo eram registradas as ideias centrais de uma discussão, apontamentos feitos pelos professores cursistas sobre as atividades realizadas, além de outros pontos que se destacavam, como recomendado por Bogdan e Biklen (1994).

Antes que completasse um dia que o encontro do curso foi realizado, essas anotações eram lidas e complementadas, de modo que esses registros se tornavam mais detalhados. Assim, palavras-chave eram transformadas em frases, e passagens sobre ideias específicas eram reescritas em parágrafos que compunham um texto sobre as observações de um dia de curso.

Esses registros, notas, observações e explicações de diversas naturezas, me auxiliaram na análise dos dados obtidos e contribuíram para otimizar o tempo dedicado a identificar fragmentos relevantes nas gravações registradas pelas filmadoras.

2.2.3 Relatos dos Professores Participantes do Curso

Outra forma de produzir os dados se deu por meio dos relatos (Apêndice XIII) que os professores fizeram, cujo objetivo era registrar por escrito as reflexões que surgiram em cada encontro. Além disso, o relato era um espaço para que os professores manifestassem sua opinião sobre o andamento do curso e sobre a coerência ou não entre o objetivo das atividades e o que tinha sido realizado.

Esses relatos eram enviados por facebook[4], e-mail ou whatsapp[5] até a sexta-feira que antecedia o próximo encontro. Era um registro simples, em que cada professor escrevia, em cerca de 10 linhas, seus comentários sobre as atividades desenvolvidas, como pontos fortes e fracos da abordagem realizada, considerando sua aplicação com alunos do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental, levando em conta a Intradisciplinaridade Matemática com o GeoGebra e as temáticas envolvidas.

2.2.4 Questionários de Avaliação do Curso

Em todos os encontros o curso estava sendo avaliado pelos professores cursistas, na forma de abordagem, na metodologia empregada e na estrutura. Essa avaliação, embora informal, foi natural e ocorreu de maneira involuntária. Mas ao final do curso, os professores foram convidados a registrar uma avaliação por meio de dois questionários (Apêndice XI), com o intuito de fornecer subsídios para a posterior reflexão sobre questões referentes às atividades realizadas e sobre os melhores caminhos para os próximos cursos oferecidos pelo projeto Mapeamento. Ambos os questionários foram realizados no último encontro, sendo um deles no começo e outro no final.

O primeiro desses questionários abordava questões relativas ao tema do curso, como a importância, ou não, de explorar o Raciocínio Proporcional do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental; a avaliação que faziam do GeoGebra para o trabalho simultâneo da geometria, aritmética e álgebra; a abordagem com que o Raciocínio Proporcional foi trabalhado nas atividades do curso, pensando nas tecnologias e na exploração do raciocínio que permeiam os tópicos matemáticos inerentes à proporcionalidade; a viabilidade da abordagem proposta no curso, que perpassa as dificuldades que precisariam ser enfrentadas para adotá-la na sala de aula; além de oferecer um espaço para sugestões de alterações ou de outra abordagem para o ensino intradisciplinar dos conteúdos que perpassam o Raciocínio Proporcional.

[4] Facebook [www.facebook.com] é um site e serviço de rede social que possui o maior número de usuários ativos atualmente e, por isso, é a maior rede social em todo o mundo.
[5] WhatsApp Messenger é um aplicativo de mensagens multiplataforma para smartphones que permite trocar mensagens via internet.

O segundo questionário abordava o andamento do curso, por meio de indagações sobre o que os professores cursistas mais gostaram ou o que não gostaram ao longo de todo o curso; a avaliação que faziam sobre os encontros presenciais e as atividades realizadas a distância; se o curso atendeu às expectativas, pensando na realidade dos alunos e da escola em que lecionam; sobre o conhecimento que tinham do GeoGebra antes e depois do curso; e o que achavam do uso das Tecnologias Digitais e do GeoGebra nas aulas de Matemática, afunilando a questão sobre aderir ou não ao uso do GeoGebra na prática deles. Por fim, tinham um espaço para registrar quaisquer outras sugestões, críticas ou observações.

2.2.5 Análise de Dados segundo a Pesquisa Qualitativa

Os dados brutos desta pesquisa são constituídos por atividades, questionários, caderno de campo, relatos e filmagens. Devido à diversidade e volume desses dados, os organizei, tendo em vista a questão norteadora desta pesquisa.

A organização dos dados foi iniciada na produção dos mesmos e foi reorganizada durante todo o processo de análise. Na pesquisa qualitativa a análise de dados se dá em um processo de busca e de organização sistemática, objetivando aumentar a compreensão do próprio pesquisador sobre esses materiais e possibilitar a apresentação das experiências que ocorreram no campo de pesquisa para os leitores (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

Nesse processo de compreender e apresentar os dados analisados, a triangulação foi feita, o que segundo Goldenberg (1999), é um ponto crucial, pois nela são reunidas as metodologias diversas que foram mobilizadas com vistas a estudar um mesmo fenômeno, com o objetivo de "abranger a máxima amplitude na descrição, explicação e compreensão do objeto de estudo" (GOLDENBERG, 1999, p.63). Assim, a análise feita com a disposição de vários dados, atrelados ao meu olhar como pesquisadora e às perspectivas teóricas que compõem o processo de triangulação, ampliam as possibilidades de compreensão deste estudo (LINCOLN; GUBA, 1985). Destarte, a riqueza da triangulação dos dados está na capacidade de estabelecer a concordância entre diferentes fontes de dados e diferentes interpretações (LAPERRIÈRE, 2008). Ademais, a análise realizada foi de caráter indutivo, por entender que a triangulação realizada não partiu de teorias ou hipóteses, mas dos dados que emergiram no curso realizado (LINCOLN; GUBA, 1985).

Nesta seção apresentei os instrumentos utilizados para a realização da pesquisa (filmagens, registros no caderno de campo, relatos e questionários). Relatei também os procedimentos de triangulação e análise dos dados que foram realizadas, pautadas na metodologia qualitativa de pesquisa. Na seção seguinte passo a tratar do cenário em que os dados foram produzidos.

2.3 Panorama da Produção dos Dados

Nesta seção, discorro sobre o curso em que foi realizada a produção dos dados, que compôs o cenário de investigação dessa pesquisa, as atividades desenvolvidas e particularidades do software GeoGebra, que atuou na realização das atividades.

2.3.1 O Curso

Como já citado no capítulo anterior, com o intuito de buscar respostas para a pergunta que norteia este trabalho, foram elaboradas atividades de desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional voltadas para alunos que cursam do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental. Essas atividades foram discutidas ao longo do curso "Raciocínio Proporcional: atividades com o GeoGebra integrando aritmética, geometria e álgebra", realizado nos meses de maio e junho de 2015, com professores de Matemática da Diretoria de Ensino da região de Limeira, atuantes na Educação Básica da rede pública do estado de São Paulo.

Cabe destacar que o curso foi desenvolvido no âmbito de um projeto maior, o Mapeamento. Esse projeto possui dois grandes objetivos, que são: mapear o uso de tecnologias presentes nas aulas de Matemática do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental no Estado de São Paulo, e fornecer subsídios, por meio de cursos de formação continuada, para que os professores de Matemática da rede pública possam pensar na inclusão dos recursos das tecnologias em suas aulas (JAVARONI *et al.*, 2013).

O curso proposto (o programa do curso está no Apêndice X) está associado ao segundo objetivo do projeto Mapeamento, sendo constituído como o cenário de pesquisa desta tese, e simultaneamente, das pesquisas que estão constituindo o projeto Mapeamento. A demanda por oferecimento desse curso surgiu de resultados da dissertação de Chinellato (2014), vinculada ao Mapeamento, que investigou 29 professores que ensinam Matemática da Diretoria de Ensino de Limeira, que participaram respondendo a um questionário. Resultados dessa pesquisa mostram que o uso dos computadores é bastante modesto entre eles. E um dos motivos que favorece tal situação encontra-se na deficiência de formação inicial e continuada do professor, dentre outros problemas de ordem de infraestrutura dos laboratórios de informática das escolas analisadas. Diante desse entendimento, considerou-se que realizar um curso com tais professores poderia intervir na formação continuada dos mesmos e, ao mesmo tempo, proporcionaria o olhar profissional docente às atividades elaboradas na nossa pesquisa.

Para dar andamento ao oferecimento do curso, foi realizada uma reunião com a diretora do núcleo pedagógico da Diretoria de Ensino de Limeira e com dois Professores Coordenadores de Núcleo Pedagógico, apresentando a proposta do curso. Nesta reunião, a diretora se prontificou a realizar uma pesquisa de demanda com os professores de Matemática atuantes, com o intuito de encontrar o melhor dia da semana e horário para realização do curso. Quando as datas dos encontros estavam definidas, a Diretoria realizou a divulgação do curso e agendou o espaço físico de uma escola para sua realização. Além disso, o curso foi aprovado pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, que certificou os professores participantes, contribuindo, dessa forma, para progressão funcional dos cursistas.

O curso foi desenvolvido aos sábados, ao longo de seis encontros presenciais de quatro horas e meia, e por meio de atividades e encontros virtuais semanais pela rede social facebook, compondo uma carga horária total de 32 horas. Com relação ao lugar de realização do curso, tivemos uma sala de aula comum, de uma escola estadual na cidade de Limeira que pertence ao programa Escola da Família[6], que abre as portas aos sábados para a população. Por termos acesso apenas a uma sala de aula, e não a um laboratório de informática, foi pedido aos professores que levassem seus notebooks para trabalhar em duplas. Além disso, um dos professores realizou a maior parte do curso com um tablet, ao invés de um notebook, e utilizou a versão do GeoGebra para essa tecnologia.

Também foram levados aos encontros equipamentos eletrônicos e de informática de fácil mobilidade que pertencem ao Laboratório de Informática e Educação Matemática (LIEM), sede do GPIMEM. Exemplos desses equipamentos são projetor multimídia, notebooks, filmadoras e réguas de extensão de energia.

Para a realização do curso, contei com a colaboração do professor Ms. Tiago Chinellato (professor de Matemática do estado de São Paulo e bolsista do projeto Mapeamento). Atuamos em todos os encontros do curso como professores e também nos encontros a distância, tirando dúvidas, como tutores. Contei também com a colaboração do aluno de iniciação científica Fábio da Silva, que participou de todos os encontros do curso, dando suporte técnico nas filmagens e montagem dos equipamentos, e também auxiliando os professores cursistas como monitor na realização das atividades.

[6] O programa Escola da Família proporciona a abertura de escolas da Rede Estadual Paulista de Ensino, aos finais de semana, para desenvolver atividades voltadas ao esporte, à cultura, à saúde e ao trabalho, objetivando criar uma cultura de paz, despertar potencialidades e ampliar horizontes culturais de seus participantes. Para tanto, reúne profissionais da Educação, voluntários e universitários.

O curso foi realizado com 17 participantes e todos assinaram um termo de consentimento (Apêndice XII), autorizando a utilização pública os dados obtidos durante o curso. Dos seis encontros, os professores participantes podiam faltar apenas um para cumprir a frequência, sendo que o curso foi finalizado com todos que iniciaram, pois não houve desistência e nenhum deles faltou mais de um encontro. A participação ativa dos professores cursistas foi fundamental para o aprimoramento das atividades, pois desde o início da elaboração destas, foi planejado que passassem por um refinamento, por uma leitura crítica acompanhada de uma discussão minuciosa que fosse capaz de aprimorá-las, com a perspectiva do olhar profissional docente. Com este objetivo, as atividades propostas foram discutidas com membros do projeto Mapeamento (pesquisadores da UNESP e professores de Matemática da Educação Básica da rede estadual paulista vinculados ao projeto).

Ainda assim, faltava um olhar de quem está mais próximo dos alunos. Um olhar profissional, que de acordo com Llinares (2015) pode ser entendido como a capacidade de identificar as situações de ensino e de aprendizagem de Matemática que exigem mobilizar diferentes domínios do conhecimento (matemáticos e pedagógicos) em situações didáticas. O olhar profissional do professor de Matemática permite que ele observe as situações de ensino e de aprendizagem de um modo que o diferencia da forma como alguém que não possui a sua formação e experiência o faz. Portanto, entendo o professor de Matemática como aquele que possui a capacidade de identificar o que é importante para o aprendizado dos alunos e com a aptidão de interpretar as questões identificadas de maneira que fundamente a tomada de decisões de acordo com os objetivos previamente traçados (LLINARES, 2015).

Por concordar que aquele que pode ter o olhar mais apurado para sala de aula de Matemática é o professor de Matemática que está lecionando nas séries investigadas, é que foram propostos encontros com esses professores. Assim, foi realizado um curso de extensão universitária, em um formato que valorizou o diálogo entre os professores e a discussão do material produzido.

2.3.2 Os Professores

Os professores que participaram do curso são todos lotados na Diretoria de Ensino de Limeira, que atualmente é responsável por 69 escolas distribuídas entre nove cidades da região: Artur Nogueira, Cordeirópolis, Cosmópolis, Engenheiro Coelho, Ipeúna, Iracemápolis, Limeira, Rio Claro e Santa Gertrudes. Embora o curso tenha sido divulgado em todas as escolas dessa Diretoria de Ensino, dos 17 professores que participaram do curso, 15 lecionam em Limeira, um em Rio Claro e outro em Cordeirópolis. Não houve inscritos das demais cidades, sendo que Limeira foi escolhida para a realização do curso por possuir a maior quantidade de escolas e de professores.

Todos os professores participantes lecionam em séries compreendidas do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental. Inclusive, essa foi uma exigência para participar do curso. A idade desses professores variava de 22 a 62 anos, o que permitiu que o ânimo dos professores que estão iniciando e a experiência daqueles que já exercem a profissão há décadas fossem compartilhados de modo que houvesse aprendizagem mútua. Dos 17 participantes, havia seis homens e 11 mulheres. Sobre o tempo de atuação como professor de Matemática do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental, seis professores possuem até cinco anos lecionando, quatro professores lecionam entre seis e dez anos, dois professores de 11 a 15 anos, dois professores de 16 a 20 anos, um professor de 21 a 25 anos e, por fim, dois já lecionam há mais de 25 anos.

A maior parte desses professores é formada em licenciatura em Matemática. Apenas um dos professores é formado em licenciatura em Ciências Físicas e Biológicas. Contudo, dois desses 16 docentes licenciados em Matemática, possuem a primeira formação em Ciências Contábeis, e licenciatura como formação complementar superior, o que também os intitula como licenciados em Matemática.

A carga horária semanal de aulas desses professores também varia. Um desses professores tem carga horária inferior a 20 horas/aula semanais, quatro deles lecionam de 21 a 30 horas/aula semanais, a maioria, dez mais precisamente, leciona de 31 a 40 horas/aula semanais. Além disso, um professor tem carga horária compreendida entre 41 a 50 horas/aula semanais, e outro leciona mais de 50 horas/aula por semana. Essa informação foi destacada com o intuito de argumentar que, ainda que a jornada de trabalho de mais de 70% dos professores esteja provavelmente distribuída em mais de um turno, o interesse em realizar cursos de formação continuada desses profissionais se manteve.

2.3.3 As Atividades

As atividades propostas nesta tese, que foram aprimoradas no curso de extensão universitária, possuem um caráter investigativo, envolvendo tópicos matemáticos inerentes ao Raciocínio Proporcional, e foram elaboradas com base no que é proposto no currículo do estado de São Paulo de Matemática do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental (SÃO PAULO, 2011). Neste documento são destacados alguns conceitos nomeados como essenciais. Dentre eles ressalto a proporcionalidade, pois:

> Ela se encontra presente tanto no raciocínio analógico, em comparações tais como “O Sol está para o dia assim como a Lua está para a noite”, quanto no estudo das frações, nas razões e proporções, no estudo da semelhança de figuras, nas grandezas diretamente proporcionais, no estudo das funções de 1º grau, e assim por diante (SÃO PAULO, 2011, p. 37).

Nesse currículo está previsto, ainda, que por meio da ideia fundamental de proporcionalidade (e de outros temas matemáticos), é possível explorar as capacidades de expressão, de compreensão, de argumentação, de ir além dos diagnósticos, de contextualizar e de abstrair. Concordo com essa visão das possibilidades que a proporcionalidade apresenta, mas entendo que para que isso ocorra é preciso abordar mais do que as regras e técnicas necessárias aos conteúdos matemáticos inerentes à proporcionalidade. São necessárias questões amplas, que contribuam para o desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional, de uma perspectiva que explore aspectos aritméticos, algébricos e geométricos de forma concomitante.

Nesse sentido, atividades foram elaboradas por mim, com a colaboração de professores e bolsistas vinculados ao projeto Mapeamento. Na fase inicial, o trabalho foi feito em conjunto com o aluno de iniciação científica André do Amaral (aluno do curso de Matemática da UNESP de Bauru, bolsista do projeto Mapeamento). Além disso, o professor Tiago Chinelatto e o aluno de iniciação científica Fábio da Silva atuaram na revisão das atividades antes de avançarmos para o período de produção dos dados. Todo o processo de elaboração e aprimoramento das atividades estava sob a orientação e supervisão do professor Dr. Marcus Vinicius Maltempi, orientador deste trabalho, e da professora Dra. Sueli Liberatti Javaroni, coordenadora do projeto Mapeamento. Contei, ainda, com o apoio, por meio de discussões e revisões, do grupo de pesquisadores colaboradores do projeto Mapeamento, que é composto por professores pesquisadores da UNESP, e por professores de Matemática da rede estadual de São Paulo.

No currículo vigente no estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2011) é evidenciada a importância do desenvolvimento e exploração da proporcionalidade. As quatro atividades elaboradas estão focadas no desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional, e foram pensadas para que, por meio do GeoGebra, as propriedades aritméticas, geométricas e algébricas fossem exploradas de forma concomitante.

Essas atividades foram elaboradas de modo que os recursos do software dinâmico de matemática GeoGebra fossem utilizados de forma intradisciplinar, com base em algumas questões que abarcam assuntos que são inerentes ao Raciocínio Proporcional. Algumas questões foram feitas a partir de uma releitura de exercícios que já são propostos no Caderno do Aluno do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2014), outras foram elaboradas a partir do que identifiquei como necessário para realização da atividade[7]. Cada uma das questões propunha uma exploração no GeoGebra, e a maior parte delas solicitava que fosse aberta uma construção que já estava pronta para ser explorada, de acordo com o objetivo de cada atividade.

A primeira atividade (Apêndice I) aborda razão e proporção, e tem por objetivo explorar o Raciocínio Proporcional que permeia razão e proporção e suas representações aritmética, geométrica e algébrica. Nessa atividade, são trabalhados os conceitos de frações equivalentes, frações irredutíveis, proporcionalidade, razão, proporção, escalas métricas, e representação geométrica da razão e da proporção.

A segunda atividade (Apêndice II) trata das grandezas proporcionais, e tem por objetivo relacionar grandezas proporcionais e não proporcionais com suas representações aritmética, geométrica e algébrica. Essa atividade é dedicada aos gráficos das grandezas proporcionais e não proporcionais e, para tanto, aborda a relação entre duas grandezas, função afim, constante de proporcionalidade, razão, proporção, aplicações das grandezas proporcionais (velocidade média, massa e volume), características da representação gráfica das grandezas direta e inversamente proporcionais, bem como das não proporcionais. Especificamente sobre essa atividade, ressalto que ela passou por mais um refinamento em 2016, após ser discutida e receber sugestões durante o minicurso "Grandezas Proporcionais com GeoGebra: Possibilidades para o ensino integrado de geometria, aritmética e álgebra" ministrado no XII Encontro Nacional de Educação Matemática (FARIA *et al.*, 2016).

Na terceira atividade (Apêndice III) a temática desenvolvida foi o teorema de Tales, cujo objetivo consiste em explorar os conceitos de proporcionalidade que serve de base a esse teorema com suas representações aritmética, geométrica e algébrica. Nessa atividade, ao explorar o teorema proposto, diversos assuntos matemáticos foram trabalhados, como construção de triângulos, exploração de elementos geométricos (como ponto médio, paralelas e ponto de interseção), razão, relações proporcionais, constante de proporcionalidade e aplicações do Teorema de Tales.

A última atividade (Apêndice IV) trata das frações equivalentes e porcentagem. Seu objetivo é relacionar porcentagem com proporcionalidade, explorando concomitantemente as representações aritmética, geométrica e algébrica. Essa atividade aborda temas como

[7] As questões que compõem cada atividade e que são uma releitura do que é proposto no Caderno do Aluno do Estado de São Paulo, são indicadas no capítulo 6 na descrição de cada atividade, bem como em notas de rodapé das atividades na íntegra, disponíveis nos apêndices I, II, III e IV.

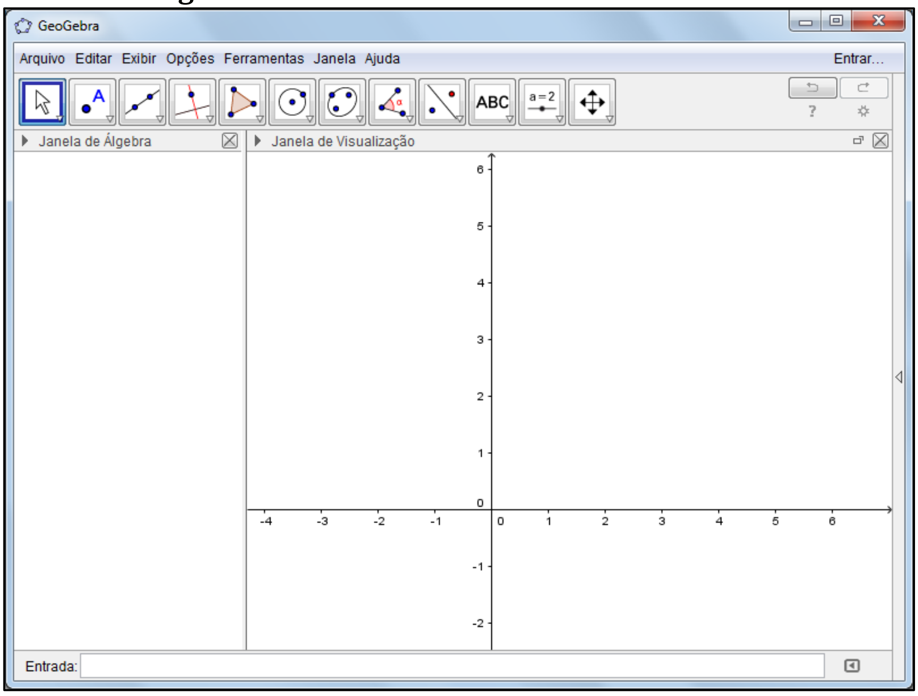
aproximação e arredondamento de casas decimais, frações equivalentes a uma fração com denominador igual a 100, porcentagem em relação a um valor dado, valor que uma determinada porcentagem representa, aplicações da porcentagem, aumento e desconto.

2.3.4 O GeoGebra

Das investigações que integram o mosaico de pesquisas já realizadas por membros do GPIMEM, diversas recorrem aos softwares matemáticos, principalmente no trabalho com assuntos matemáticos específicos. O GeoGebra, em particular, foi utilizado ao longo dessa pesquisa, além de já ter sido usado por outras investigações já concluídas (BARROS, 2013; FARIA, 2012; MAZZI, 2014; SOUTO, 2013).

O GeoGebra é um software que tem sofrido diversas e profundas mudanças, pois possui código aberto. Por isso, todos podem sugerir modificações para o seu desenvolvedor. Destaco que a versão utilizada neste trabalho foi a 5.0, cuja interface está representada na figura 1.

Figura 1 – Interface da versão 5.0 do GeoGebra



Fonte: software GeoGebra.

O GeoGebra é um software gratuito que foi criado em 2001, como resultado da pesquisa de doutorado feita pelo professor e pesquisador da Johannes Kepler Universität (JKU) de Linz, na Áustria, Markus Hohenwarter. De quando foi elaborado até os dias atuais, o GeoGebra vem alcançando um público cada vez maior, o que pode ser exemplificado com sua abrangência, pois já está presente em 190 países e possui tradução para 55 idiomas. Certamente a eficiência desse software tem contribuído para sua popularidade, afinal, com ele é possível trabalhar Matemática do Ensino Fundamental aos mais altos níveis, pois nele são dispostos diversos recursos em um único ambiente[8].

Alguns aspectos favoreceram a escolha do GeoGebra para realização das atividades. Um deles é que se trata de um software de fácil acesso e manuseio, visto que está disponível de forma gratuita para diversos sistemas operacionais, e possui uma interface amigável. Além disso, o GeoGebra está presente no Programa Acessa Escola[9], o que faz com que esteja disponível nas escolas que estão contempladas com esse Programa do governo estadual, favorecendo o posterior uso pelos professores que participaram do curso com suas turmas, já que dessa maneira não precisam baixar ou instalar os softwares nas máquinas.

O GeoGebra também está disponível no Blue Lab[10] (Figura 2), que é um software que foi criado com o objetivo de gerenciar a sala de informática das escolas participantes do Programa Acessa Escola. Esse software consiste em uma ferramenta que conecta o computador ou tablet do professor ao do aluno, permitindo que as atividades realizadas sejam acompanhadas, aumentando a interação e facilitando o compartilhamento de arquivos, programas e sites. Desta forma, o GeoGebra faz parte de um ambiente que está disponível para os professores que dispõem do Blue Lab.

Figura 2 – Interface da plataforma blueLab

Fonte: http://blueonline.fde.sp.gov.br/.

---

[8] Informações oriundas da página oficial do instituto de GeoGebra em São Paulo - http://www.pucsp.br/geogebrasp/geogebra.html. Acesso em 20 de setembro de 2015.

[9] O Programa Acessa Escola foi instituído pela Resolução SE – 37 (25/04/2008), como iniciativa do Governo do Estado de São Paulo, conduzida pelas Secretarias da Educação e de Gestão Pública, que tem por objetivo promover a inclusão digital e social e estimular o uso da internet para enriquecimento da formação cultural, intelectual e social dos usuários das escolas da rede estadual de ensino.

[10] Disponível em: http://blueonline.fde.sp.gov.br/. Acesso em 07 de outubro de 2015.

Outro motivo que me levou a optar por realizar essa pesquisa com o GeoGebra está relacionado às possibilidades de exploração concomitante de aspectos algébricos, geométricos e aritméticos de determinado conceito, que por ele é favorecida. Com ele é possível visualizar e alterar, na mesma tela de trabalho, as representações aritmética, algébrica e geométrica. Deste modo, as explorações e análises não são limitadas a uma única forma de representação. Ademais, por meio do GeoGebra é possível fazer análises matemáticas, as quais permitem que surjam descobertas de caráter matemático que podem ser representadas nas janelas de álgebra e de visualização, planilhas e calculadoras (FARIA; MALTEMPI, 2012).

Com essa apresentação do GeoGebra encerro essa seção que foi dedicada a situar o leitor no contexto em que a pesquisa foi realizada. Durante a produção dos dados, dispôs-se de alguns materiais de apoio, os quais serão apresentados na próxima seção.

2.4 Materiais de Apoio

Além dos instrumentos utilizados para produzir os dados, já explicitados na seção anterior, houve outros, que não eram especificamente voltados para a produção dos dados, mas que serão registrados aqui devido à relevância que tiveram para subsidiar os professores no andamento do curso. São eles: a atividade de reconhecimento do software GeoGebra, os roteiros das construções para as atividades com esse software, e o grupo de discussão do curso no facebook.

2.4.1 Atividade de Reconhecimento do Software GeoGebra

Antecedendo a realização das atividades de desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional, foi realizada uma atividade de reconhecimento das funções do GeoGebra necessárias à sua utilização durante as atividades (Apêndice V). O principal objetivo era familiarizar os cursistas com o software GeoGebra, colaborando para um melhor andamento do trabalho ao longo do curso.

Essa atividade apresentou a interface do software (barra de menu, janelas de álgebra, de construção e de comando) e a disposição das ferramentas em ícones. Além disso, trouxe cinco questões de construção, com a finalidade de os cursistas explorarem algumas ferramentas e utilizarem funções necessárias às construções propostas no curso.

Por fim, foram descritas informações gerais que informavam ao cursista como atualizar o software, onde buscar informações sobre ele, dicas para instalação, e sites recomendados sobre o GeoGebra.

2.4.2 Roteiros de Construção no GeoGebra

Em várias questões que compõem as atividades de desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional, é solicitado abrir um arquivo que contém uma construção já elaborada, para explorar um determinado conceito. Essas construções foram elaboradas previamente com o intuito de que, na realização das atividades, haja concentração nas questões relevantes à construção do conhecimento dos assuntos matemáticos abordados.

Essas construções foram todas disponibilizadas. Contudo, entendo que para o professor seria necessário mais do que saber manipular a construção, ele precisaria entender como elas foram feitas, para que se familiarizasse com o software e percebesse particularidades e ferramentas que se destacavam nessas construções. Considero que realizar os roteiros de construção foi muito importante para que o professor desenvolvesse fluência em relação ao GeoGebra, tanto para explorar os recursos disponíveis, quanto para compreender a lógica do programa para criação das construções geométricas e suas representações aritméticas e algébricas. Por esse motivo, foram elaborados quatro roteiros, relativos às construções necessárias para cada atividade (Apêndices VI, VII, VIII e IX).

Cabe esclarecer a diferença entre os roteiros de construção no GeoGebra e as atividades que abordam o Raciocínio Proporcional. As atividades têm uma função ligada ao objetivo desta tese. Já os roteiros são um material de apoio, cujo objetivo consistiu em fornecer subsídios para que os professores cursistas elaborassem as construções necessárias para a realização das atividades de desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional.

A maior parte dessas construções não era feita pelos professores cursistas durante os encontros. Os professores as realizavam ao longo da semana e as enviavam para que fossem conferidas antes dos encontros das semanas seguintes. Como forma de auxiliar os professores nessa tarefa a distância, era disponibilizado um horário fixo por semana (quartas-feiras, das 19h às 20h), no qual era realizado atendimento síncrono online via facebook, além de esclarecer outras dúvidas que ocorressem em outros momentos da semana, de forma assíncrona, por meio do chat do facebook, por e-mail ou por whatsapp. As construções eram realizadas durante os encontros somente quando eram muito complexas e exigiam o domínio de diversas ferramentas. Além disso, as construções necessárias para o primeiro encontro tiveram seus roteiros entregues, mas como não houve tempo para realizá-las nesse dia, essas foram disponibilizadas em vídeos e os links para visualização estavam disponíveis no roteiro e na página do grupo no facebook.

Enfim, considero que esses roteiros foram muito importantes, tanto para que os professores conseguissem fazer construções, quanto para que adquirissem desenvoltura para manipular o software.

2.4.3 Grupo de Discussão do Curso no facebook

O grupo de discussão no facebook do curso foi elaborado com o objetivo de criar um canal de interação entre os professores do curso (proponentes e cursistas). Essa página (figura 3) foi um espaço para aprofundar questões oriundas das discussões presenciais e para troca de ideias e sugestões sobre as tarefas a distância (relatos e roteiros).

Figura 3 – Interface do grupo de discussão no facebook

Fonte: dados da pesquisa.

O facebook é uma rede social com uma estrutura composta por pessoas e organizações que se conectam quando compartilham objetivos comuns. Tem sido cada vez mais frequente participantes de uma disciplina ou de um curso se reunirem em um grupo no facebook com o intuito de compartilhar um espaço para enviar e receber mensagens temáticas uns para os outros. Nesses grupos, o papel de cada membro é definido entre os participantes, que se dividem para prover suporte aos colegas, motivá-los, organizar os encontros e dar assistência acadêmica. Além disso, os grupos de discussão online no facebook permitem o acesso instantâneo a mensagens, arquivos anexados, fotos e links compartilhados (BAIRRAL, 2005).

No nosso grupo tinha uma lista de membros, o que facilitava o contato entre os cursistas e entre os professores proponentes do curso. Nessa página era postado semanalmente um relato de cada encontro feito por mim (Apêndice XIV) e avisos, como a chamada para o encontro seguinte e um lembrete do horário de plantão de dúvidas online. Além disso, quando alguém faltava e deixava de receber os roteiros de construção para a semana seguinte, eu os postava no grupo.Nesse espaço, também foram postados pelos cursistas reportagens que foram temas de discussão que surgiram nos encontros, dúvidas e comentários sobre as atividades. Além disso, após encerrar o curso, o grupo se manteve e por meio dele o contato ainda é mantido.

Neste capítulo apresentei as características da pesquisa relativas à metodologia de pesquisa adotada. No próximo capítulo, discuto questões relativas ao Raciocínio Proporcional.

CAPÍTULO 3

RACIOCÍNIO PROPORCIONAL

Este capítulo é iniciado com a discussão sobre o significado do termo Raciocínio Proporcional. Na segunda seção, discorro acerca de algumas noções históricas sobre a proporcionalidade. Na sequência, a relevância deste tema na Educação Matemática como campo científico é abordada. A seguir, apresento algumas questões concernentes ao ensino e à aprendizagem de tópicos matemáticos inerentes ao Raciocínio Proporcional, discutidas em pesquisas e outras literaturas. Na quinta seção, discorro sobre os caminhos trilhados na minha prática docente que contribuíram para emergir o Raciocínio Proporcional nesta pesquisa, a partir de questões matemáticas que permeiam o tema. Finalizando o capítulo, apresento considerações sobre o encaminhamento do trabalho no que tange ao Raciocínio Proporcional.

3.1 O Termo Raciocínio Proporcional

O Raciocínio Proporcional está relacionado com formas de raciocínio, reações diante de situações proporcionais ou não proporcionais, desenvolvimento e aprimoramento de habilidades e aptidões concernentes à lógica necessária ao raciocínio matemático (BEN-CHAIM; KERET; ILANY, 2006; FERNÁNDEZ; LLINARES, 2012; LAMON, 2005; VAN DE WALLE, 2009). Assim como Lamon (2005), Post, Behr e Lesh (1988) e vários outros autores, utilizo o termo Raciocínio Proporcional, por entender que a ideia de raciocinar está relacionada às operações lógicas, nas quais diversas ideias e proposições são utilizadas para gerar afirmações com soluções plausíveis, por meio de relações. Alguns autores utilizam Pensamento Proporcional (MARANHÃO; MACHADO, 2011) por entenderem que esta expressão abarca o processo de compreensão de elementos conceituais concernentes ao conhecimento matemático operacional, até que se atinja o conhecimento matemático estrutural. Contudo, considero que o termo Raciocínio Proporcional também conduz, pelos mesmos meios, ao conhecimento matemático estrutural.

Cabe esclarecer que o conceito de Raciocínio Proporcional não é o mesmo de proporcionalidade. Lamon (2005) discute a ideia de que as questões matemáticas que abarcam proporcionalidade podem ser solucionadas com processos resolutivos que envolvem apenas a realização de cálculos que têm por base a expressão $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. O Raciocínio Proporcional vai além. Ele é condição necessária para que argumentos e explicações sejam elaborados diante de contextos e aplicações baseadas na proporcionalidade.

É óbvio que a proporcionalidade se aproxima do Raciocínio Proporcional, principalmente pelo fato de que para raciocinar proporcionalmente é importante que noções de cálculo proporcional sejam mobilizadas. Contudo, o Raciocínio Proporcional e a proporcionalidade se distanciam devido às relações que estes estabelecem com a noção de interpretação quantitativa e qualitativa. De forma geral, a proporcionalidade envolve dados quantitativos, para os quais resultados puramente numéricos já satisfazem. O Raciocínio Proporcional exige mais, é necessário que interpretações qualitativas emerjam na compreensão de aplicações e contextos baseados na proporcionalidade, sejam na Matemática, em outras ciências ou em situações do cotidiano (LAMON, 1996, 2005).

Segundo Van de Walle (2009), raciocinar proporcionalmente envolve pensar sobre relações e comparações de quantidades e valores, pois se trata do desenvolvimento da capacidade de raciocinar e comparar as relações multiplicativas entre quantidades ao longo do tempo por meio do raciocínio. Cordel e Mason (2000) também discorrem sobre o tema ao afirmar que a capacidade de raciocinar usando relações proporcionais é um processo complexo que é desenvolvido durante um longo período, pois são necessárias muitas experiências de naturezas variadas para desenvolver uma compreensão do que é uma relação proporcional.

Assim como Cordel e Mason (2000), outros autores enfatizam que o Raciocínio Proporcional é uma forma complexa de pensar (LAMON, 2005; POST; BEHR; LESH, 1988; VAN DE WALLE, 2009). Sendo assim, é preciso vivenciar inúmeras situações para desenvolver a capacidade de raciocinar de forma proporcional. Para tanto, é importante oferecer aos alunos uma variedade de experiências de natureza proporcional e estimulá-los a conjecturar, elaborar normas e pensar de forma geral para o que foi aprendido.

Lamon (2005) afirma que o conceito do Raciocínio Proporcional implica em muito mais do que o emprego de algoritmos ou cálculos mecânicos; está ligado à capacidade de pensar, analisar e explorar relações entre quantidades, o que é exposto por meio de comentários, explicações e argumentos sobre as relações proporcionais. Por essas questões, para que haja o entendimento de situações e aplicações embasadas na proporcionalidade o Raciocínio Proporcional é fundamental.

Segundo Van de Walle (2009), a essência do Raciocínio Proporcional é a consideração do número em termos relativos, em vez de termos absolutos. Raciocinar em termos absolutos está relacionado às estruturas aditivas, enquanto raciocinar em termos relativos está relacionado às estruturas multiplicativas, pois considera valores proporcionais. Um exemplo dessa relação entre os termos relativos e absolutos e as estruturas aditivas e multiplicativas pode ser dado ao pensar em quem ganhou mais peso ao final de um ano, uma criança que tinha 5 Kg e passou a ter 8 Kg, ou uma que tinha 3 Kg e passou a ter 6 Kg? Quando um aluno está pensando em termos absolutos, com uma estrutura aditiva, a resposta seria que ambas engordaram 3 Kg, ou seja, a mesma quantidade. Contudo, se um aluno está pensando em termos relativos, com uma estrutura multiplicativa, ele é capaz de observar que a segunda criança dobrou seu peso, enquanto que a primeira teria que estar pesando 10 Kg para ter engordado na mesma proporção do ganho de peso da outra criança, em termos relativos.

O Raciocínio Proporcional envolve relações matemáticas multiplicativas, que envolvem a comparação de medidas de dois valores diferentes, como o peso das duas crianças do exemplo anterior, por meio de palpite seguido de verificação com medição, sucessivas divisões de uma unidade e cálculo de diferenças (HAREL; CONFREY, 1994).

Situações como a descrita anteriormente são capazes de ajudar os alunos a fazerem a transição do pensamento aditivo para o pensamento multiplicativo (LAMON, 1996). Llinares (2003) também destaca essa importância ao afirmar que uma das habilidades necessárias para o Raciocínio Proporcional é a capacidade de analisar termos relativos e absolutos e a relação que possuem com a realização de comparações aditivas ou multiplicativas. O autor complementa a ideia dizendo que o aluno deve ser capaz de compreender a diferença entre a comparação absoluta, quando se observa o termo absoluto, e a comparação relativa, quando se usa a noção de razão como um índice comparativo entre duas quantidades.

O Raciocínio Proporcional também é necessário para pensar em situações proporcionalmente equivalentes, como perceber que percorrer 80 quilômetros em uma hora, significa que se estava na mesma velocidade de quem percorreu 40 quilômetros em 30 minutos. Conforme Lins e Gimenez (2006), essa situação compara grandezas baseadas em estruturas multiplicativas, por isso trata-se de uma situação proporcional. O Raciocínio Proporcional, nessa e em outras situações proporcionais, implica também na compreensão de invariância, em que as relações entre as quantidades ou entre duas grandezas permanecem constantes, ou seja, há uma razão, um valor se mantém proporcional ao outro. Mas também envolvem a percepção de covariância, ou seja, a compreensão de que se duas ou mais grandezas estão relacionadas, elas estão ligadas de forma que uma varia proporcionalmente à outra, variam em conjunto (LAMON, 2005).

Llinares (2003) afirma que o Raciocínio Proporcional é acionado ao resolver situações, envolvendo proporcionalidade, em que é preciso refletir nas explicações relativas às relações estruturais destas situações. Isso implica que resolver expressões do tipo $\frac{a}{b}=\frac{x}{d}$, utilizando a propriedade fundamental da proporção, conhecida como "multiplicação em cruz", não seja uma manifestação de Raciocínio Proporcional, e sim o uso da técnica da regra de três. Isto não quer dizer que os alunos não podem usar este tipo de técnica, mas que o uso desse algoritmo está mais relacionado ao procedimento do que aos conceitos necessários à compreensão da situação (FERNÁNDEZ; LLINARES; VALLS, 2011).

É nesse sentido que Hiebert e Lefevre (1986) afirmam que quando conceitos e procedimentos não estão conectados, os alunos não conseguem estabelecer relações e, com isso, não pensam em alternativas para resolver questões relativas ao Raciocínio Proporcional. Assim, respostas podem até ser geradas, mas não caracterizam o entendimento conceitual dos conteúdos abordados.

Em Llinares (2003) é dada a seguinte situação: "Pedro comprou 12 Kg de laranja por 18 euros. Quanto haveria pagado por 9 Kg?" (LLINARES, 2003, p. 209). Segundo o autor, esta situação reflete características de relações de proporcionalidade e constitui um contexto propício à manifestação de processos necessários ao Raciocínio Proporcional. Um raciocínio possível é "se Pedro pagou 18 euros por 12 Kg de laranjas, então a metade dos quilos valerá a metade do dinheiro. Assim, 6 Kg valem 9 euros, e 3 Kg valem 4,5 euros. Logo, como 9 Kg são 6 mais 3, então valerá 9 mais 4,5 euros, que é 13,5 euros" (LLINARES, 2003, p. 209). Esse tipo de resolução estabece uma relação funcional que vincula grandezas diferentes (como preço por quilo), e que reflete o sentido da unidade da razão (18/12 é o preço de 1Kg de laranjas). Outro raciocínio possível seria "se 12 Kg de laranja valem 18 euros, então 1Kg valerá 1,5 euros. Logo, 9 quilos valerão 9 x 1,5 que são 13,5 euros" (LLINARES, 2003, p. 209). Este tipo de raciocínio estabelece uma relação entre quantidades da mesma grandeza, gerando uma razão escalar (por exemplo 18/12).

Relações deste tipo caracterizam o Raciocínio Proporcional. As sucessões numéricas, que mantêm os padrões estruturais em uma situação proporcional, ajudam os alunos a gerarem tais características. Além disso, a sucessão de números proporcionais permite explicitar duas características das relações estruturais: a estabilidade das razões escalares e a constante de proporcionalidade (LLINARES, 2003), sendo o conceito de razão como uma função de um conjunto ordenado de números ou valores em uma magnitude, e o conceito de proporção como uma igualdade entre dois pares de razões (FERNÁNDEZ; LLINARES, 2012).

Durante anos, tem sido demonstrado que o Raciocínio Proporcional é extremamente útil na interpretação dos fenômenos reais, pelo fato de que muitos aspectos de nossas vidas operam sob essa estrutura (FERNÁNDEZ; LLINARES, 2012). Por isso, desenvolver a capacidade de pensar proporcionalmente é fundamental e influencia outras áreas do conhecimento, como nas escalas dos mapas proporcionais à realidade estudada em Geografia; na interpretação do crescimento dos seres vivos, por vezes proporcionais ao tempo de vida, trabalhada nas aulas de Ciências; e na escala musical e nos quadros de Leonardo da Vinci, estudados em Artes. Além das disciplinas escolares, pensar proporcionalmente é fundamental em situações do cotidiano fora da escola, ao calcular as compras, identificar investimentos mais lucrativos, explorar desenhos e mapas, executar medições, converter moedas ou ajustar uma simples receita de bolo ao número de convidados da festa (LESH; POST; BEHR, 1988).

O exemplo dado, sobre a execução da receita de um bolo, remete-me a outra questão que esta tarefa envolve, o tempo de preparo da receita. Trata-se do entendimento da situação: se uma hora é o tempo necessário para o preparo de uma receita de bolo, ao dobrar tal receita, quanto tempo deve ser destinado ao preparo? O dobro? O fato é que ao dobrar a receita, a quantidade de cada ingrediente é também dobrada, pois se trata de uma operação proporcional, mas o tempo de preparo não, pois embora seja necessário ter mais tempo, isso não significa ser preciso duas vezes mais. Um pouco mais de tempo é necessário, pois a quantidade de ovos a serem quebrados aumenta, assim como dos ingredientes que precisam ser medidos, no entanto, o tempo de cozimento do bolo de receita dobrada é pouco maior que o destinado a uma receita, além de outros detalhes, como o tempo para lavar a louça suja durante o preparo, que também não dobra, afinal sujaria uma vasilha para preparar uma receita ou duas. Por não dobrar o tempo ao dobrar a receita, o tempo de preparo não pode ser considerado proporcional à quantidade de receitas preparadas. Portanto, a ideia de considerar essa situação proporcional deve ser recusada por alguém que raciocina proporcionalmente.

Diversos trabalhos como Post, Behr e Lesh (1988), Lamon (2005) e Van de Walle (2009), afirmam que situações como a descrita acima não são proporcionais, e que distinguir estas situações das proporcionais deve ser natural para quem raciocina proporcionalmente. A pesquisa apresentada em Fernández, Llinares e Valls (2011) mostrou situações como essa, e revelou que alguns alunos usam proporcionalidade em situações inadequadas, o que indica que não discriminam situações proporcionais das não-proporcionais. É nesse sentido que

Kastberg, D'Ambrosio e Lynch-Davis (2012) afirmam que o Raciocínio Proporcional é um pilar importante no desenvolvimento matemático das crianças, afinal, a abrangência da capacidade de raciocinar proporcionalmente é essencial para o desenvolvimento de uma pessoa capaz de compreender e aplicar a Matemática.

Para Van de Walle (2009), desenvolver o Raciocínio Proporcional é um dos objetivos principais do currículo do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental, pois esse tipo de raciocínio representa a habilidade de compreensão das relações multiplicativas. Afinal, o Raciocínio Proporcional é desenvolvido por meio de atividades que exploram comparação e determinação da igualdade de razões e resolução de problemas de natureza proporcional em contextos múltiplos e variados, sem que para isso seja preciso recorrer a regras e fórmulas matemáticas.

Post, Behr e Lesh (1988), também incentivam a exploração do Raciocínio Proporcional e destacam que essa exploração estimula a capacidade de armazenar e processar mentalmente várias informações e, concomitantemente, interpretar o significado de taxas, e comparar as interpretações realizadas por meio de critérios preestabelecidos.

Com base nos estudos e leituras que fiz de artigos, livros e pesquisas sobre Raciocínio Proporcional, e que são expostas neste capítulo, posso afirmar que não há um consenso sobre o conceito deste termo. Assim, com base na pesquisa desenvolvida ao logo do processo de doutoramento, explicito um entendimento particular, que atende às expectativas deste trabalho: Raciocínio Proporcional é a capacidade de raciocinar, estabelecendo uma relação entre duas ou mais grandezas em termos relativos, mobilizando para tal raciocínio a habilidade de analisar qualitativamente situações, estabelecer relações, julgar com equidade e distinguir circunstâncias proporcionais das não proporcionais.

Nesta seção o significado do Raciocínio Proporcional foi discutido com base na literatura da área. Na seção seguinte abordo algumas questões históricas relativas à proporcionalidade, que revelam que este tema tem sido desenvolvido pela humanidade desde as primeiras civilizações.

3.2 Noções Históricas de Proporcionalidade

Para tratar de um tema matemático tão rico e abrangente como o Raciocínio Proporcional, ressalto questões históricas relativas às descobertas e aos estudos que tangem a proporcionalidade. Não busco expor uma revisão aprofundada sobre essa vasta temática. O intuito desta seção é apresentar alguns dados históricos que ressaltam a importância da proporcionalidade para a humanidade.

Registros históricos revelam que raciocinar proporcionalmente é fundamental não somente para nossa sociedade atual, tampouco para uma região específica do nosso planeta, mas sim para todas as civilizações ao longo dos tempos (BERNAL, 2004; BOYER, 1996; EVES, 1997). Desde os nossos ancestrais, a proporcionalidade está vinculada ao desenvolvimento humano, tanto na Matemática, quanto na Arte, na Música, na Arquitetura, na Astronomia e em tantas outras áreas de estudo. E da perspectiva de D'Ambrosio (2008), "o que chamamos Matemática é uma resposta à busca de sobrevivência e de transcendência, acumulada e transmitida ao longo de gerações, desde a pré-história" (D'AMBROSIO, 2008, p. 22). E nessa busca de sobreviver e transcender, diversas descobertas matemáticas emergem, como técnicas de contar, calcular e medir, nas quais a proporcionalidade toma parte. Nessa perspectiva corroboramos a ideia de que:

> [...] todos os afazeres e saberes são respostas do homem a informações recebidas da realidade, que é o complexo de tudo que é material, ampliado por experiências vividas e acumuladas, na forma de memórias. Essas respostas, em permanente transformação, são as estratégias desenvolvidas pela espécie para responder aos pulsões de sobrevivência e de transcendência (D'AMBROSIO, 2008, p. 22).

Para sobreviver, o homem desenvolve técnicas e regras de comportamento que lhes permite ter acesso à água, aos alimentos, e a tudo o que é necessário para sobrevivência. Para transcender, desenvolve "[...] meios de explicar fatos e fenômenos, a percepção e o encadeamento do passado, presente e futuro" (D'AMBROSIO, 2008, p. 22). E assim surgiram e continuam a surgir descobertas matemáticas, para as quais estratégias são criadas, organizadas intelectualmente, compartilhadas com o próximo pelos mais diversos meios de comunicação e organizadas socialmente de acordo com a necessidade e interesse dos povos.

Vista da ótica da criação humana, não se pode datar o início das descobertas e dos estudos matemáticos, já que as necessidades de sobreviver e transcender são inerentes aos humanos desde a pré-história. Contudo, vista no formato de Ciência, com uma metodologia própria que valida as suas proposições por um processo dedutivo que resulta na axiomatização, a Matemática começou a ter destaque entre os primeiros pitagóricos (FOSSA, 2011).

No mundo antigo, principalmente na Escola Pitagórica (século V a.C.) e na Academia de Platão (século IV a.C.), os conceitos de razão e proporção foram instrumentais no desenvolvimento prático e teórico da própria Matemática, e atuaram de duas formas. Uma dessas formas foi que a proporcionalidade era o principal recurso para elaborar equações, pois até o século XVIII não havia o conceito de "função" na Matemática. A outra forma é que a noção de razão compõe o próprio conceito grego de número (arithmós), que nessa visão é concebido como uma coleção de unidades. Essa característica fez com que o conceito de razão fosse concretizado pelos sistemas de mensuração, pois assim não haveria problema com os submúltiplos, nem com a escolha de unidades menores (FOSSA, 2011).

Outra forma de exploração dos conceitos de razão e proporção se deu na estruturação da compreensão de outras áreas de conhecimento. De acordo com Eves (1997), a filosofia da Escola Pitagórica era sustentada por duas grandes áreas, nomeadas de quadrivium - composto pela Aritmética, Geometria, Música e Astronomia; e de trivium - formado pela Gramática, Lógica e Retórica. Especificamente sobre o quadrivium, os Pitagóricos viam-no como base necessária para a ampliação de estudos e desenvolvimento de novos conhecimentos, pois para eles, embora a Matemática fosse algo abstrato, poderia ser encontrada por toda a parte (EVES, 1997).

No quadrivium, a Aritmética representava os números como quantidades discretas e a Música representava os números em quantidades relativas. A Geometria expressava as quantidades contínuas, corpos, que se percebiam em repouso, enquanto que a Astronomia cuidava das quantidades contínuas em movimento - tanto no céu como na Terra (D'AMBROSIO, 2011).

Vale destacar que o termo quantidades relativas, dito sobre a Música, trata dos estudos relativos a esta área, que eram centrados nas razões e proporções (FOSSA, 2011). Os pitagóricos observavam relações matemáticas a partir de sons emitidos por partes de tamanhos diferentes, de cordas vibrantes, estabelecendo por meio dessas partes uma escala musical e relacionando matematicamente os intervalos musicais obtidos pelas notas definidas (BARNABÉ, 2011).

De acordo com os princípios pitagóricos, por meio dos números inteiros era possível compreender o mundo. Com base nessa ideia, Pitágoras descobriu e estudou relações entre comprimentos de corda e os sons por eles produzidos, que nada mais eram que razões entre números inteiros que simbolizavam a relação entre o comprimento de uma corda vibrante e o tom musical produzido pela mesma (ABDOUNUR, 2002).

O conceito de razão também é amplamente registrado em "Os Elementos" (cerca de 300 a.C) de Euclides. Diversos historiadores afirmam que Euclides não é o autor de tudo o que está registrado nos treze livros que compõem tal obra, mas mesmo que "Os Elementos" não seja exclusivamente de autoria de Euclides, seu valor não pode ser diminuído, visto que se trata de uma obra que reuniu a maior parte dos conhecimentos e trabalhos matemáticos produzidos até então pela civilização grega (BARNABÉ, 2011).

O quinto livro de “Os Elementos”, é dedicado às Proporções. Trata-se da única teoria matemática da antiguidade que apresentava ‘magnitudes’ (que nessa obra foi exemplificada com segmentos de reta de diferentes tamanhos). Como veremos a seguir, Euclides apresentou formas de compor razões entre magnitudes e definiu proporção como semelhança entre duas razões. Vejamos:

> Livro V
> Definições
> 1. Uma magnitude é uma parte de uma magnitude, a menor da maior, quando meça exatamente a maior.
> 2. E a maior é um múltiplo da menor, quando seja medida exatamente pela menor.
> 3. Uma razão é a relação de certo tipo concernente ao tamanho de duas magnitudes de mesmo gênero.
> 4. Magnitudes são ditas ter uma razão entre si, aquelas que multiplicadas podem exceder uma a outra.
> 5. Magnitudes são ditas estar na mesma razão, uma primeira para uma segunda e uma terceira para uma quarta, quando os mesmos múltiplos da primeira e da terceira ou, ao mesmo tempo, excedam ou, ao mesmo tempo, sejam iguais ou, ao mesmo tempo, sejam inferiores aos mesmos múltiplos da segunda e da quarta, relativamente a qualquer tipo que seja de multiplicação, cada um de cada um, tendo sido tomados correspondentes.
> 6. E as magnitudes, tendo a mesma razão, sejam ditas em proporção.
> 7. E quando, dos mesmos múltiplos por um lado, o múltiplo da primeira exceda o múltiplo da segunda, e, por outro lado, o múltiplo da terceira não exceda o múltiplo da quarta, então a primeira é dita ter para a segunda uma razão maior do que a terceira para a quarta.
> 8. E uma proporção em três termos é a menor.
> 9. E, quando três magnitudes estejam em proporção, a primeira é dita ter para a terceira uma razão dupla da que para a segunda.
> 10. E, quando quatro magnitudes estiverem em proporção, a primeira é dita ter para a quarta uma tripla razão da que para a segunda, e sempre continuadamente do mesmo modo, quando a proporção existir realmente.
> 11. São ditas magnitudes homólogas, por um lado, os antecedentes, aos antecedentes, e, por um lado, os consequentes, aos consequentes.
> 12. Razão alternada é uma tomada do antecedente para o antecedente e do consequente para o consequente.
> 13. Razão inversa é uma tomada do consequente como um antecedente para o antecedente como um consequente.
> 14. Composição de uma razão é uma tomada do antecedente com o consequente, como um, para o próprio consequente.
> 15. Separação de uma razão é uma tomada do excesso, pelo qual o antecedente excede o consequente, para o próprio consequente.
> 16. Conversão de uma razão é uma tomada do antecedente para o excesso pelo qual o antecedente excede o consequente.
> 17. Razão por igual posto é, existindo numerosas magnitudes e outras iguais a elas em quantidade, tomadas duas a duas e na mesma razão, quando, nas primeiras magnitudes, como a primeira esteja para última, assim, nas segundas magnitudes, a primeira para a última; ou de um outro modo: uma tomada dos extremos de acordo com uma remoção dos meios.
> 18. E uma proporção perturbada é quando, existindo três magnitudes e outras iguais a elas em quantidade, tem lugar, por um lado, como um antecedente para um consequente, nas primeiras magnitudes, assim um antecedente para

> um consequente, nas segundas magnitudes, e, por outro lado, como um consequente para alguma outra, nas primeiras magnitudes, assim alguma outra para um antecedente, nas segundas (EUCLIDES, 2010, p. 205–206).

Essas são as definições que compõem o livro V de “Os Elementos” e que tratam das Proporções. Elas revelam que, até então, a noção de razão estava estritamente ligada à comparação entre duas grandezas geométricas, o que pode ser confirmado ao longo do livro V que abre cada definição por meio do trabalho com segmentos de reta.

Segundo Mol (2013), Eudoxo (408-355 a.C.) constituiu a Teoria de Proporções, que veio a ser tratada no livro V de “Os Elementos”. A Teoria das Proporções foi um marco para o trabalho com grandezas comensuráveis ou incomensuráveis, que solucionou o dilema pitagórico sobre grandezas incomensuráveis, por permitir a comparação de comprimentos de qualquer natureza (BARNABÉ, 2011). Mas existem diversos registros que revelam que bem antes da Escola Pitágorica, da Academia de Platão e da publicação de Euclides, já existiam registros da noção de proporcionalidade. Tales de Mileto (623 a. C. – 558 a. C.), por exemplo, antecedeu tais estudos. Tales teria trazido para a Grécia a Geometria do Egito. Seu teorema sugere o uso de proporções, e teria sido obtido por meio de um experimento em que ele efetuou a medição da altura de uma pirâmide do Egito, e de um bastão, observando os comprimentos das sombras no momento em que a sombra de tal bastão vertical era igual à sua altura (EVES, 1997).

O Papiro de Rhind (cerca de 1650 a.C.) revela que no Egito haviam trabalhos envolvendo problemas matemáticos sobre diversas questões, como a interpolação por partes proporcionais para obter valores intermediários aproximados, usando proporção como ferramenta para suprir as lacunas existentes em suas tabelas sobre exponenciais. Nas palavras de Boyer (1996) “a interpolação linear parece ter sido comumente usada na Mesopotâmia antiga, e a notação posicional é conveniente para a regra de três” (BOYER, 1996, p.22).

Há ainda registros de que os indianos, os árabes, os chineses e outros povos já exploravam a proporcionalidade (BERNAL, 2004). Eves (1997) aponta que o mais importante dos antigos textos chineses de Matemática “Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática”, atribuído ao extenso período compreendido entre 206 a.C. e 221 d.C, apresenta uma síntese do conhecimento matemático chinês que já vinha sendo realizado por muito tempo antes do início da escrita de tal obra, o que faz com que Eves (1997) afirme que provavelmente a China tenha sido o primeiro país a desenvolver a regra de três, além de outras realizações ligadas a proporcionalidade.

Enfim, a presença da proporcionalidade desde a antiguidade em tantas culturas diferentes, apontadas por fatos históricos ligados à Matemática registrados nesta seção, revela que a proporcionalidade é fundamental à humanidade e vem sendo estudada há muitos séculos. Na seção seguinte, será abordada a relevância do tema no âmbito da Educação Matemática.

3.3 Relevância do Raciocínio Proporcional na Educação Matemática

A capacidade de raciocinar proporcionalmente nos faz pensar na Matemática como criação humana, como uma ciência em contínua construção, oriunda das necessidades do ser humano e construída por ele em diferentes culturas e em diferentes momentos. Post, Behr e Lesh (1988) ressaltam que muitos aspectos do nosso mundo operam de acordo com as regras proporcionais, o que faz com que a capacidade do Raciocínio Proporcional seja extremamente útil na interpretação de fenômenos do mundo real.

Segundo os PCN, no Ensino Fundamental deve ser valorizado:

> O raciocínio que envolva a proporcionalidade, por meio da exploração de situações de aprendizagem que leve o aluno a observar a variação entre grandezas, estabelecendo relação entre elas e construir estratégias de solução para resolver situações que envolvam a proporcionalidade (BRASIL, 1998, p. 65).

Os PCN enfatizam, ainda, que o desenvolvimento do Raciocínio Proporcional é necessário na interpretação de fenômenos do cotidiano. Para tanto, sugerem a exploração de situações de aprendizagem que permitam que os alunos: representem um sistema de coordenadas cartesianas com variação de grandezas, para que possam analisar e classificar o comportamento dessa variação como diretamente proporcional, inversamente proporcional ou, ainda, não-proporcional; resolvam situações envolvendo variação de grandezas direta ou inversamente proporcionais, utilizando, além das estratégias formais, as informais, que explorem saberes inerentes ao Raciocínio Proporcional (BRASIL, 1998).

As recomendações dos PCN vão ao encontro do que é discutido no *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1989), pois destacam a relevância dos alunos desenvolverem a capacidade de raciocinar proporcionalmente ao longo dos quatro anos correspondentes as séries do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental no Brasil. Segundo o NCTM, o desenvolvimento de tal capacidade é merecedor de todo tempo e esforço investido para garantir o seu cuidadoso desenvolvimento. Para tanto, indicam que os alunos precisam se deparar com muitas situações problemáticas que possam ser resolvidas por meio do Raciocínio Proporcional.

No currículo do estado de São Paulo de Matemática do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental e Ensino Médio (SÃO PAULO, 2011) é indicado que ter clareza quanto à proporcionalidade fornece ao aluno capacidades de se expressar, de compreender, de argumentar, além de outras que ultrapassam a sala de aula, pois o auxilia a ter desenvoltura na vida cotidiana. Ademais, para Maranhão e Machado (2011), a proporcionalidade é um tema indiscutivelmente essencial em Matemática e outras Ciências, tanto na escola, quanto em diversas outras situações da atividade humana, o que justifica que o Raciocínio Proporcional seja objeto de estudo em Educação Matemática.

Nesta seção apresentei a relevância do Raciocínio Proporcional na Educação Matemática como elemento para o desenvolvimento cognitivo em Matemática. Na seção seguinte apresento questões levantadas por diversos autores relativas ao ensino e à aprendizagem de tópicos matemáticos que são essenciais ao desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional.

3.4 Questões Relativas ao Ensino e à Aprendizagem de Tópicos Matemáticos Inerentes ao Raciocínio Proporcional

Diversas pesquisas em Educação Matemática têm discutido questões acerca do Raciocínio Proporcional em alunos da Educação Básica (BOTTA, 1997; COSTA, 2007; FERNÁNDEZ; LLINARES; VALLS, 2011; KASTBERG; DÁMBROSIO; LYNCH-DAVIS, 2012; LAMON, 2005; MIRANDA, 2009; VAN DE WALLE, 2009). Tais pesquisas abrem portas para realização de outras investigações e reflexões sobre os conhecimentos necessários à aprendizagem dos conteúdos inerentes ao Raciocínio Proporcional. Para ser capaz de raciocinar proporcionalmente é preciso ter um entendimento dos conceitos relacionados a assuntos matemáticos que permeiam o desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional, como números decimais, frações, razões, proporções, porcentagens, unidades de medida, funções, relações multiplicativas, grandezas proporcionais, escalas, teorema de Tales, etc.

Trabalhos como Obando, Vasco e Arboleda (2014), Fernández, Llinares e Valls (2011), e Lesh, Post e Behr (1988), revelam que apesar desses temas matemáticos já integrarem os currículos das escolas de Educação Básica, os alunos não têm alcançado níveis adequados de aprendizagem nesses assuntos durante seu ano letivo. Além disso, estudos comparativos de diferentes séries mostram que não tem ocorrido uma melhora significativa de ano para ano (HODGEN *et al.*, 2010; OBANDO; VASCO; ARBOLEDA, 2014).

Diante disso, nesta seção abordarei questões que têm sido levantadas sobre dificuldades tanto no ensino, por parte dos professores, quanto na aprendizagem, por parte dos alunos, sobre os conteúdos citados e sobre questões concernentes ao desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional. As dificuldades para desenvolver a capacidade de raciocinar proporcionalmente têm sido apontadas por Nunes (2003). Para a autora, a escola falha ao ensinar a noção de proporção, uma vez que, para compreendê-la, fazemos uma relação com a multiplicação, enquanto que no início da escolarização muitos professores ensinam essa operação básica apenas como uma "adição repetida" de parcelas, ao invés de ensinar as primeiras noções de proporção junto com os conceitos de multiplicação. Nesse sentido, Hoffer (1988), diz que as habilidades necessárias para o Raciocínio Proporcional na população em geral têm sido insatisfatórias, e o mais preocupante: evidências indicam que um grande segmento de nossa sociedade nunca adquire a compreensão do Raciocínio Proporcional de forma suficiente para resolver questões do cotidiano.

Llinares (2003) aponta que também é importante considerar que os alunos necessitam entender a noção de razão como o índice comparativo que proporciona informações sobre determinada situação e, por esse motivo, é necessário distinguir as situações em que é possível aplicar este índice comparativo das que não são possíveis. Para isso, é preciso identificar que em uma situação de proporcionalidade as trocas de grandeza implicam trocas mútuas, mas que o índice comparativo entre quantidades correspondentes é constante. Este mesmo autor destaca, ainda, que para desenvolver e explorar o Raciocínio Proporcional, os alunos devem desenvolver uma linguagem apropriada para pensar sobre, comunicar e se expressar nestes tipos de situações. O desenvolvimento do vocabulário apropriado é, portanto, um aspecto chave vinculado ao desenvolvimento da Matemática (LLINARES, 2003).

Tratando-se dos processos de ensino e de aprendizagem no Raciocínio Proporcional, outra questão relevante é a necessidade de transição do pensamento aditivo para o multiplicativo. Segundo Fernández e Llinares (2012), há uma dificuldade dos alunos de diferentes idades, em diferenciar situações proporcionais (estrutura multiplicativa) de situações com estrutura aditiva, apresentando uso abusivo de métodos aditivos errados para resolver as situações proporcionais e, ao mesmo tempo, o abuso de métodos multiplicativos errôneos para resolver situações com estrutura aditiva.

Além disso, outras questões pertinentes são levantadas, como a de Post *et al*. (1998): é comum, no ensino de razão e proporção, a resolução de atividades nas quais se têm três valores e se busca encontrar um quarto valor que, junto com um dos anteriores, forma uma proporção com os dois demais (como por exemplo $\frac{3}{4}=\frac{x}{12}$ onde x = 9), o que ele denomina “resolução de problemas de valor em falta”. Os autores argumentam que, embora a resposta correta destes tipos de questões vem sendo associada a sua capacidade de pensar de forma proporcional, elas limitam o Raciocínio Proporcional dos alunos, fazendo com que haja uma associação falsa de que frações não são números quando outros tipos de questões são apresentadas. Um exemplo destes outros tipos de questões é a igualdade $\frac{3}{4}=\frac{x}{9}$. Embora a solução de $\frac{3}{4}=\frac{x}{9}$ seja 6,75 ou $\frac{27}{4}$, é comum a reposta de que não pode ser encontrado um valor para satisfazer a igualdade, justamente por existir a crença nos alunos de que frações não são números, a qual é reforçada pelos problemas de valor em falta.

Embora existam dificuldades para resolver situações como essa, Llinares (2003) destaca a importância de abordá-las nas aulas de Matemática, pois ao analisar situações em que ocorrem relações de proporcionalidade e situações em que não cabem essas relações, os alunos podem desenvolver uma intuição para embasar o sentido de razão e dotar de significado os símbolos utlizados para expressar proporções.

Ainda sobre o ensino, Cramer, Post e Currier (1993) discutem que usar métodos para resolução de exercícios de razão e proporção não garante a compreensão do tema. Estes autores afirmam que é preciso que o aluno se torne capaz de raciocinar proporcionalmente, que seja um indivíduo que consiga perceber, em diferentes situações, na escola ou na vida, alternativas para resolver questões de cunho proporcional. Afinal, ser capaz de realizar operações mecânicas com proporções não significa, necessariamente, que as ideias subjacentes ao Raciocínio Proporcional foram compreendidas (HOFFER, 1988).

Para Cramer, Post e Currier (1993), não se deve enfatizar o desenvolvimento de habilidades processuais relacionadas ao ensino de razão e proporção e deixar em segundo plano entendimentos conceituais que convergem para o desenvolvimento do Raciocínio Proporcional. Esta prática na abordagem dos conteúdos muitas vezes incentiva a aprendizagem do processo, mas inibe a compreensão significativa que colabora para o desenvolvimento do indivíduo para raciocinar proporcionalmente. Os alunos precisam ver exemplos de situações proporcionais e não proporcionais para conseguirem determinar o que é apropriado para se usar como estratégia de solução.

Por esses motivos, os professores devem oferecer experiências práticas com relação a situações proporcionais. As atividades iniciais devem estar concentradas no desenvolvimento do significado, não temendo por adiar procedimentos mais avançados até que todos os pormenores, considerados essenciais no desenvolvimento do raciocínio, sejam internalizados pelos alunos (CRAMER; POST; CURRIER, 1993).

Por tratar-se de um assunto tão relevante na Matemática, precisamos, como professores de Matemática e como Educadores Matemáticos, ter claro que os entendimentos subjacentes ao Raciocínio Proporcional são complexos e, portanto, deve-se esperar que talvez este tipo de raciocínio se desenvolva lentamente, ao longo de vários anos (TOURNIAIRE; PULOS, 1985). Neste sentido, Post *et al*. (1998) afirmam que notar as dificuldades das crianças em relação aos números racionais não deveria ser surpreendente, considerando a complexidade das ideias que compõe os conteúdos de razão e proporção.

Paula (2012) levanta outra questão relevante, relativa ao ensino. Segundo a autora, muitas vezes os professores observam em suas classes os obstáculos entre os alunos e os conteúdos razão e proporção, mas não sabem lidar com essa situação. Nesse sentido, Ben-Chaim, Ilany e Keret (2002, 2008) relatam que há, por parte dos professores em atuação e dos professores em formação, muitas lacunas quanto a temas matemáticos ensinados nos níveis elementar e médio, incluindo os tópicos razão e proporção. Talvez, essas lacunas que os professores possuem em sua formação, relativos aos assuntos matemáticos que perpassam a temática do Raciocínio Proporcional, façam com que eles não saibam lidar com a situação das dificuldades dos alunos, descrita por Paula (2012).

Uma alternativa para lidar com essas questões está nos cursos de formação continuada, que no formato que foi realizado durante a produção dos dados desta tese, formam um ambiente em que questões concernentes às salas de aula podem ser expostas, dúvidas sobre como explorar um conteúdo matemático podem ser discutidas e atividades podem ser aprimoradas por meio do olhar profissional do professor de Matemática que está atuando na Educação Básica.

Antecedendo a realização de tal curso, atividades foram elaboradas com o intuito de promover a Intradisciplinaridade Matemática dos conteúdos relativos ao desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional com o GeoGebra. Destaco que a escolha de explorar o Raciocínio Proporcional evidenciando e explorando simultaneamente aspectos aritméticos, algébricos e geométricos se deu por entender que tal abordagem possibilita a visão do todo, ou seja, o trabalho concomitante das particularidades que cada conteúdo relativo ao Raciocínio Proporcional possui, viabilizando assim a percepção simultânea das ramificações da Matemática presentes em tais conteúdos. Ademais, ao longo do curso, as atividades foram aprimoradas por meio do olhar profissional e da interpretação dos apontamentos dos professores cursistas e dos pesquisadores em Educação Matemática membros do projeto Mapeamento.

Encerro esta seção com a afirmação de Llinares (2003) de que o Raciocínio Proporcional consolida o conhecimento matemático escolar das frações, dos números decimais e das razões e se constitui uma pedra angular nos estudos posteriores em Matemática e Ciências. Tal afirmação nos leva a refletir sobre o quanto é importante pensarmos em alternativas para ensinar os tópicos matemáticos necessários ao Raciocínio Proporcional na Educação Básica e nos incentiva a dedicar atenção à esta temática.

Por isso, além das questões apresentadas nesta seção sobre o ensino e aprendizagem por meio do que é apontado por autores que discutem a temática do Raciocínio Proporcional, compartilho na seção seguinte outras questões que motivaram a realização de uma pesquisa neste tema, que surgiram de inquietações vividas na minha atuação como professora de Matemática. Tais questões são relativas à todos os anos que compõem esta modalidade de ensino, afinal, do sexto ao nono ano são trabalhados temas matemáticos inerentes ao Raciocínio Proporcional, que nos currículos se apresentam relacionados à razão e proporção.

3.5 Raciocínio Proporcional na minha Prática Docente

Como professora, atuei do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental nas redes pública e privada nos estados de São Paulo e Rio de Janeiro. Ao longo dos anos de 2012, 2013 e 2014 lecionei na rede pública municipal e na particular em duas cidades do interior paulista. Das minhas experiências como professora e como estudiosa das pesquisas que vêm sendo realizadas sobre o ensino de razão e proporção (BEN-CHAIM; KERET; ILANY, 2006; BOTTA, 1997; CORDEL; MASON, 2000), posso afirmar que essa temática constitui um dos principais conteúdos que compõem o currículo atual do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental.

As coleções de livros didáticos que utilizei para lecionar (nos anos de 2012, 2013 e 2014) também destacam a relevância dos temas que perpassam o ensino de razão e proporção (BIGODE, 2000; CENTURIÓN; JAKUBOVIC; LELLIS, 2003; DANTE, 2003; MAZZIEIRO; MACHADO, 2012; MORI; ONAGA, 2012). Nestes livros, que estão em consonância com os PCN, o enfoque nos conteúdos razão e proporção tem sido diferente para cada série compreendida do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental.

No sexto ano, as operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão) com frações e decimais são propostas, seguidas da introdução aos conceitos de razão e proporção. Em geral, as atividades são de aritmética e têm foco numa parte introdutória ao tema com explicações e situações do cotidiano, seguidas de exercícios de fixação.

No sétimo ano, as operações básicas com frações são retomadas e a esses conteúdos são incorporadas as ideias de frações equivalentes, proporção direta, grandezas proporcionais e ampliação e redução de figuras. A partir deste ano, além da aritmética, atividades geométricas são trabalhadas, mas não necessariamente relacionadas entre si.

No ano seguinte, o conteúdo passa a ser abordado com a presença das frações algébricas, seguidas das razões e proporções também com abordagem algébrica. Portanto, o foco das atividades de razão e proporção no 8º ano é algébrico.

No último ano, além de serem trabalhados razão e proporção revendo o que foi feito ao longo dos anos anteriores, um enfoque geométrico maior é dado para os conteúdos. Ademais, é neste ano que as abordagens numérica, algébrica e geométrica de razão e proporção são apresentadas de forma um pouco mais relacionada.

Vale ressaltar que temas como decimal, fração, razão, proporção e porcentagem, estão ligados ao Raciocínio Proporcional, mas esta forma de raciocinar permeia diversos outros conteúdos fundamentais à Matemática, como, por exemplo, as unidades de medida, funções, relações multiplicativas e dimensões de área e volume. Destaco ainda que, embora os alunos desenvolvam uma compreensão de razão e proporção fora da escola, o Raciocínio Proporcional envolve conhecimentos que devem ser desenvolvidos no âmbito escolar (SCHLIEMANN; CARRAHER, 1997).

Os problemas relativos ao ensino e à aprendizagem dos assuntos matemáticos que tangem a temática razão e proporção já foram atestados neste capítulo por outros autores, conforme visto nas seções anteriores. Ademais, nesta seção indico, por meio da minha prática docente, que embora razão e proporção sejam questões significativas na Matemática escolar, grande parte dos alunos apresenta dificuldades relacionadas a esses conteúdos que acabam se estendendo ao longo dos anos de estudo. Nesse sentido, na seção seguinte explicito a perspectiva de exploração do Raciocínio Proporcional proposta nesta pesquisa.

3.6 Perspectivas do Raciocínio Proporcional na Pesquisa

Neste capítulo, foi exposto um diálogo com autores que tratam do Raciocínio Proporcional. Já discutimos que alguém capaz de raciocinar proporcionalmente não é aquele que é apenas capaz de aplicar algoritmos. Então, o que é preciso para se tornar hábil diante de situações proporcionais? Segundo Cramer e Post (1993) é necessário conhecer as características matemáticas de situações proporcionais, o que implica na capacidade de distinguir situações proporcionais e não proporcionais. Para tanto é preciso ter a compreensão de situações, tanto no contexto real quanto no contexto matemático; além disso, é preciso ter a aptidão de articular métodos matemáticos, formais ou não, na resolução de tarefas proporcionais.

Para tanto, Van de Walle (2009) sugere que independentemente de como está expresso no currículo de Matemática local, as séries compreendidas do sexto ao nono ano do Ensino

Fundamental devem estar centradas no desenvolvimento do Raciocínio Proporcional. Por este motivo o autor alerta aos professores sobre a necessidade de ter clareza do que constitui razão e proporção e o contexto em que tais conteúdos emergem.

Por entender que o Raciocínio Proporcional é tão relevante nos processos de ensino e de aprendizagem do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental, e entrelaçando essas problemáticas às minhas inquietações ora apresentadas, investigo "Quais possibilidades de desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional emergem em atividades com o GeoGebra, integrando aritmética, geometria e álgebra, a partir do olhar profissional de professores de Matemática e pesquisadores em Educação Matemática?".

Assim, as questões expostas neste capítulo me fizeram pensar em atividades para desenvolver e explorar o Raciocínio Proporcional do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental, por meio do GeoGebra no ensino integrado de aritmética, geometria e álgebra. Mas antes de tratar especificamente sobre estas atividades, abordarei nos capítulos seguintes o ensino integrado de geometria, aritmética e álgebra com o GeoGebra; e o olhar profissional do professor de Matemática, que foi tão relevante para o aprimoramento das atividades elaboradas.

CAPÍTULO 4

INTRADISCIPLINARIDADE MATEMÁTICA, TECNOLOGIAS DIGITAIS E GEOGEBRA

Este capítulo é dedicado à discussão da importância da abordagem concomitante da geometria, da aritmética e da álgebra[11], e o papel das Tecnologias Digitais, mais especificamente do GeoGebra, na exploração Matemática Intradisciplinar. Para tanto, primeiramente será percorrido um caminho iniciado no termo disciplina, perpassando os conceitos de interdisciplinaridade, transdisciplinaridade e intradisciplinaridade. Na sequência será exposto o movimento realizado no Brasil para unificar as ramificações da Matemática em uma única disciplina. Dando continuidade, a interação seres humanos com tecnologias é tratada, ressaltando a influência das Tecnologias Digitais na sociedade e na escola. Por fim, serão abordadas questões relativas ao papel do GeoGebra na exploração simultânea da geometria, da aritmética e da álgebra.

4.1 Trabalho Concomitante da Geometria, da Aritmética e da Álgebra

O ensino de Matemática escolar, em geral, é iniciado com a aritmética e a geometria. Somos apresentados às formas, como o quadrado, o triângulo e o círculo. Ensinam-nos a contar, a escrever os números e, posteriormente, a realizar as quatro operações básicas: somar, subtrair, multiplicar e dividir.

Segundo Lorenzato (2006), em uma perspectiva de Matemática elementar voltada para a educação básica, os conhecimentos relativos aos números fazem parte da aritmética, a qual se ocupa do estudo das propriedades elementares dos números naturais e das quatro operações fundamentais, além de operar com frações, potências e raízes. Já a geometria (euclidiana) é responsável por estudar as figuras planas e espaciais. A geometria é a área dedicada aos assuntos relacionados com tamanho, forma, posição relativa entre figuras ou propriedades do espaço. Mais à frente, na Matemática escolar, aprendemos álgebra, que estuda as estruturas,

[11] Ao usar geometria, aritmética e álgebra (com iniciais minúsculas), faço referência aos ramos da disciplina Matemática. Quando tais palavras estão com iniciais maiúsculas, refiro-me às disciplinas.

as relações e as quantidades. Nela representamos números por letras e trabalhamos com expressões em que as letras representam números. De certo modo, a álgebra emprega generalizações baseadas na compreensão de relações matemáticas que começam a ser estudadas por meio da aritmética e da geometria, introduzindo variáveis que representam os números e resolvem questões em que as grandezas são representadas por símbolos.

De forma resumida, Lorenzato (2006) afirma que “[...] a aritmética é pontual e numérica, enquanto a álgebra é generalista e literal. [...] A geometria constitui-se no estudo de curvas e de figuras planas e espaciais, isso é, das formas” (LORENZATO, 2006, p. 57). Basicamente, são estas ramificações que configuram a Matemática como disciplina escolar na Educação Básica. E no sentido aqui proposto, disciplina é

> [...] um tipo de saber específico e possui um objeto determinado e reconhecido, bem como conhecimentos e saberes relativos a este objeto e métodos próprios. A noção de disciplina científica está ligada, pois, ao conhecimento científico. Constitui-se a partir de uma determinada subdivisão de um domínio específico do conhecimento (D’ÁVILA, 2012, p. 5).

Os processos de ensino e de aprendizagem de uma disciplina de forma isolada, sem relação com o que acontece nas outras disciplinas e no mundo, podem esconder uma armadilha, nomeada por D’Ambrosio (2011) como “Gaiolas Epistemológicas”. Trata-se de uma metáfora criada para criticar o conhecimento aprisionado em uma disciplina assim como um pássaro preso em uma gaiola. As gaiolas epistemológicas são como disciplinas que possuem um conhecimento preso à sua fundamentação, às suas regras de verdade e rigor, aos seus métodos particulares para lidar com questões fechadas e com uma linguagem própria, inacessível aos que não pertencem à determinada área do conhecimento. Deste modo, os que conhecem as particularidades da Matemática, por exemplo, detém o conhecimento, como pássaros na gaiola, e

> [...] alimentam-se do que lá encontram, voam só no espaço da gaiola, comunicam-se numa linguagem só conhecida por eles, procriam e repetem-se, só vendo e sentindo o que as grades permitem, como é comum no mundo acadêmico. O que é mais grave, são mantidos pelos que possuem as gaiolas para seu entretenimento, como é o caso das artes, ou para seu benefício, como é o caso das ciências e da tecnologia (D’AMBROSIO, 2011, p. 7).

Essa metáfora revela questões sérias e que necessitam de discussão, afinal, quando se está dentro da gaiola, não se sabe nem mesmo a cor dela por fora. Isso também ocorre quando se está aprisionado a uma disciplina, de modo que a capacidade de observação e interpretação fica limitada e dependente de práticas e metodologias definidas. Por isso, transitar e estabelecer relações entre duas ou mais disciplinas escolares, fenômeno chamado de interdisciplinaridade, é necessário, mas não é a solução. É preciso ir além das disciplinas, fazendo com que os alunos caminhem nas realidades que vão para fora dos muros da escola (D'AMBROSIO, 2011).

É nesse sentido que D'Ambrosio (2011) propõe a transdisciplinaridade, pois essa sim "leva o indivíduo a tomar consciência da essencialidade do outro e da sua inserção na realidade" (D'AMBROSIO, 2011, p. 10), e é capaz de conceder uma consequência imediata, "o despertar da consciência na aquisição do conhecimento" (D'AMBROSIO, 2011, p. 10). Assim, a transdisciplinaridade pode ser entendida como a relação de uma ou mais disciplinas com o contexto social, cultural, histórico e político de uma comunidade, relação essa que procura estimular uma nova compreensão da realidade articulando elementos que passam entre, além e através (ideia de trans) das disciplinas, em uma busca de compreensão da complexidade que envolve o ser humano, o conhecimento e a consciência.

A transdisciplinaridade contribui para o desenvolvimento de uma visão de mundo que é muito mais eficaz, se comparada ao ensino na perspectiva das gaiolas epistemológicas. As atividades produzidas nesta tese mostram isso, pois estão relacionadas a várias outras disciplinas, em uma perspectiva interdisciplinar, mas vão além, transitam por territórios não restritos às disciplinas escolares, e contribuem para a formação epistemológica e para o desenvolvimento da capacidade de raciocinar proporcionalmente em situações relativas ao cotidiano em uma perspectiva transdisciplinar.

Mas além dos termos inter e transdisciplinar, outro, muito pouco citado na Educação Matemática, levou-me a pensar sobre a perspectiva que seria adotada para abordar o Raciocínio Proporcional. Trata-se da intradisciplinaridade. De forma geral, a intradisciplinaridade corresponde às estritas relações das ramificações de uma mesma disciplina. Nesse sentido, a Matemática pode ser entendida como disciplina matriz, e a aritmética, geometria e álgebra como disciplinas derivadas, ou ainda como ramificações da disciplina matriz. A ideia de intradisciplinaridade é defendida por Lorenzato (2006). Nas palavras do autor,

> [...] se concordarmos com as vantagens do ensino interdisciplinar, com mais forte razão devemos professar o ensino intradisciplinar, o qual pode ser reduzido, sinteticamente, ao ensino de aritmética, geometria e álgebra. Assim fazendo, os alunos irão perceber a harmonia, coerência e beleza que a matemática encena, apesar de suas várias partes possuírem diferentes características (LORENZATO, 2006, p. 60).

E sobre as diferentes características, corroboro a ideia de que, a geometria, a álgebra e a aritmética possuem o seu espaço dentro da Matemática, de modo que cada uma delas possui propriedades particulares, como vocabulário, simbologia, regras, conceitos e definições. Contudo, defendo que tais propriedades não devem impedir que estas ramificações estejam vinculadas uma à outra. Segundo Lorenzato (2006), a Intradisciplinaridade Matemática pode ser um apoio para a aprendizagem, pois essa conexão é capaz de facilitar a percepção dos significados dos conceitos, valorizar as semelhanças e eliminar a fragmentação das ideias, contribuindo assim para a ampliação da compreensão que permeia o entendimento dos assuntos matemáticos.

Cabe ainda destacar que defender a intradisciplinaridade não significa incentivar a abordagem da disciplina Matemática como uma gaiola epistemológica, que se preocupa apenas com sua linguagem, regras e técnicas. O que a intradisciplinaridade propõe é que as ramificações da Matemática não estejam dissociadas, como se houvessem subdisciplinas isoladas. Nesse sentido, embora a intradisciplinaridade proponha o trabalho simultâneo entre os ramos da Matemática, isso não significa que ela negue a relação que deve haver entre essa disciplina e as outras que compõem o cenário escolar (interdisciplinaridade). Tão pouco consiste em uma negação da abordagem que valoriza a Matemática e o contexto que ultrapassa os muros da escola (transdisciplinaridade).

Considero que a falta de relação e consistência intradisciplinar origina inúmeras dificuldades nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática. É nesse sentido que argumento sobre a necessidade de uma abordagem concomitante de aspectos algébricos, aritméticos e geométricos, pois quando o conteúdo matemático é apresentado em compartimentos, sem propiciar formas de visualizar a coerência da totalidade, a aprendizagem fica comprometida. Por isso, o ensino de Matemática deve estar relacionado com as ligações entre técnicas, procedimentos, fenômenos, conceitos e processos referentes às ramificações da Matemática.

Concordo com Lorenzato (2006), que ressalta a importância do ensino intradisciplinar, argumentando que o ensino de Matemática sem conexão entre suas ramificações é como conhecer apenas parte de um todo. O autor exemplifica afirmando que quem já escutou isoladamente um ou diversos instrumentos musicais, mas que se não os escutou juntos, em sintonia, não pode afirmar que conhece uma orquestra. O mesmo ocorre com alguém que estudou uma ou mais ramificações da Matemática separadamente, essa pessoa também não pode dizer que conhece a Matemática. Assim, após estudar desta forma, os alunos certamente ficam com a sensação de que aprenderam assuntos distintos, e que a geometria, a aritmética e a álgebra não se inter-relacionam. O autor complementa afirmando que pensar em conhecer partes de um todo o remete a seguinte história (Figura 4):

> Cinco cegos costumavam diariamente pedir esmolas no portal de entrada da cidade e nenhum deles, até então, havia conhecido um elefante. Por isto, ao

> saberem que logo chegaria um elefante à cidade, decidiram pedir ao dono que parasse o animal diante do portal para que eles pudessem “ver com as mãos” o tal de elefante. E assim acontece: o primeiro cego apalpou a lateral do elefante e disse: ele parece um muro; o segundo apalpou uma orelha do elefante e disse: ele é como uma grande ventarola; o terceiro apalpou uma das pernas do elefante e disse: é como as colunas do templo; o quarto, depois de apalpar uma das presas de marfim, concluiu: é igual a uma lança; o quinto apalpou a tromba e disse: é uma grande cobra.
> Então o elefante prosseguiu em sua viagem, enquanto os cegos, em meio a grande falatório, não conseguiram concordar sobre o que seria o elefante, uma vez que cada um teve uma percepção parcial do animal (LORENZATO, 2006, p. 60).

Figura 4: Jardim dos Cegos, Freizeitpark Rheinaue, Bona, Alemanha

Fonte: https://nobudgettravel.wordpress.com/2008/11/

Essa história nos faz pensar no quanto está enganado aquele que, por conhecer partes do todo, se julga conhecedor do todo. Ademais, como professora de Matemática e pesquisadora em Educação Matemática, penso ser muito importante levar aos alunos a visualização do todo, ou seja, a Matemática relacionada com a própria Matemática em uma perspectiva intradisciplinar.

Esse ensino compartimentalizado que temos nas escolas de Educação Básica atualmente já sofreu uma tentativa de ser unificado. Na verdade, até o início do século XX o ensino de Matemática era ainda mais segregado, pois não havia a disciplina de Matemática, e sim as disciplinas Geometria, Aritmética e Álgebra. É desta tentativa de unificar os ramos da Matemática que trato na seção seguinte.

4.2 Aspectos Históricos do Ensino Integrado de Geometria, Aritmética e Álgebra

Atualmente no Brasil temos assegurado pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB - nº 9.394 de 1996) que os currículos do Ensino Fundamental e Médio devem ter uma base nacional comum. Nessa lei está previsto que os currículos precisam abranger, obrigatoriamente, o estudo da Matemática.

Entretanto, nem sempre foi assim. Segundo Miorim (1998), os padres jesuítas chegaram ao Brasil e fundaram a Companhia de Jesus por volta do ano de 1550. Desde o período que a Companhia de Jesus foi formada, os padres se tornaram responsáveis pelo ensino brasileiro, e essa responsabilidade perdurou por mais de duzentos anos.

Nesse período, no ensino primário, havia o ensino de Matemática, mas este era restrito a contagem e as operações fundamentais (GOMES, 2012). Na parte que equivalia ao Ensino Médio, a educação era baseada em humanidades clássicas, mais especificamente na retórica, humanidades e gramática, não havendo lugar para as Ciências e para a Matemática. Nesse período, nas várias gerações de estudantes brasileiros, só houve pessoas que se destacaram como cronistas, historiadores, poetas, dentre outras atividades relativas às humanidades, mas nenhum destaque de algum estudioso de Ciências e Matemática.

Em 1759 os jesuítas foram expulsos do Brasil, e o sistema educacional enfrentou uma crise. O país passou a contar apenas com poucos centros educacionais. Com a reforma Pombalina, em 1772, as aulas passaram a ser lecionadas em disciplinas isoladas, avulsas, que eram realizadas em locais diferentes sem articulação entre elas (MIORIM, 1998).

Na década de 1820 mudanças começaram a ser feitas no primário. O ensino de Matemática de meninos e meninas, que já era feito de forma diferente, foi regulamentado pela lei geral de 15 de outubro de 1827. Nessa lei foi registrado que os meninos deveriam aprender as quatro operações aritméticas, prática de quebrados (termo relacionado ao uso dos números não inteiros), noções gerais de geometria, decimais e proporções. As meninas, por sua vez, deveriam aprender apenas geometria e a prática de quebrados, incluindo-se o ensino de práticas importantes para a economia doméstica, e suas escolas deveriam existir apenas nas localidades mais populosas (GOMES, 2012).

Anos depois, no final da década de 1830, Liceus[12] começaram a ser formados, como escolas que reuniriam o ensino de todas as disciplinas. No entanto, foi no Colégio Pedro II que as principais mudanças ocorreram. Fundado no Rio de Janeiro como a primeira escola

[12] Segundo Balassiano (2012), os Liceus no Brasil foram instituições escolares constituídas ainda no Império e no início do século XX. Essas instituições foram criadas em formato semelhante aos Liceus franceses, e eram símbolos de prestígio em um momento da história que a escola ainda era para os ricos no nosso país.

secundária pública, foi o primeiro colégio brasileiro que apresentou um plano gradual (que propunha aprofundar as temáticas de cada disciplina com o passar dos anos) e integral (que reunia as diversas disciplinas em uma mesma instituição) de ensino seriado. O Colégio Pedro II passou a ser referência nacional e, no que tange a Matemática, os alunos tinham acesso às disciplinas de Geometria, Aritmética e Álgebra (MIORIM, 1998; SOUZA, 2010; WERNECK, 2003).

No entanto, o ensino dissociado desses ramos da Matemática incomodava Euclides Roxo (que viveu de 1890 a 1950), então Diretor do Externato do Colégio Pedro II. Roxo estava mobilizado com as ideias difundidas no início do século XX, por Félix Klein na Alemanha. Klein iniciou uma reforma propondo mudanças no ensino da Matemática por meio da interação entre as diferentes áreas da Matemática (geometria, aritmética e álgebra) e entre a Matemática e outras áreas do conhecimento (DASSIE, 2001; ROCHA, 2001; TAVARES, 2002; VALENTE, 2004).

Segundo Miranda (2003), sobre a unificação de aritmética, geometria e álgebra, Klein alegava: "Não quero dizer que essas partes devam ser completamente fundidas, mas não devem ser tão separadas como sucede hoje nas escolas, contra que é natural" (MIRANDA, 2003, p. 74). Para Klein era natural que os ramos da Matemática estivessem relacionados, de modo que a geometria, a aritmética e a álgebra não podiam ser vistas como áreas dissociadas.

Com base nessas ideias, Euclides Roxo elaborou uma proposta de integrar as disciplinas Aritmética, Álgebra e Geometria em uma única, a de Matemática. Assim, estas disciplinas que seguiram separadas até 1929 foram unificadas, inicialmente no Colégio Pedro II, e a partir de 1931, com a reforma Francisco Campos (1931), em todos os colégios de nível secundário do país (MIORIM, 1998). A reforma Francisco Campos foi oficializada em 1931 pelo Decreto 19890 que, sobre unificar as vertentes da Matemática, declarava:

> A Matemática será sempre considerada como um conjunto harmônico cujas partes estão em viva e íntima correlação. A acentuação clara dos três pontos de vista – aritmético, algébrico e geométrico – não deve, por isso, estabelecer barreiras intransponíveis, que impeçam o estudante de perceber as conexões entre aquelas disciplinas (INSTRUÇÕES PEDAGÓGICAS, REFORMA FRANCISCO CAMPOS, 1931, *apud* BRAGA, 2003, p. 15).

Assim, a junção das vertentes da Matemática em uma disciplina única passou a vigorar e perdura até os dias atuais. Contudo, isso não tem acontecido no formato intradisciplinar, como argumento nesta tese e como sugere Lorenzato (2006). De fato, os PCN do Ensino Fundamental recomendam que seja ensinado geometria, aritmética e álgebra e afirmam haver

> [...] consenso a fim de que os currículos de Matemática para o ensino fundamental devam contemplar o estudo dos números e das operações (no campo da Aritmética e da Álgebra), o estudo do espaço e das formas (no

> campo da Geometria) e o estudo das grandezas e das medidas (que permite interligações entre os campos da Aritmética, da Álgebra, e da Geometria e de outros campos do conhecimento) (BRASIL, 1998, p. 49).

Esse trecho esclarece que os professores são instruídos a ensinar questões relativas ao estudo dos números na perspectiva aritmética e algébrica, que perpassa as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, bem como estudos geométricos das formas. Mas o ensino matemático intradisciplinar é sugerido apenas para os conteúdos relativos às grandezas e medidas. Nesse sentido, a proposta desta tese está apoiada em Lorenzato (2006) que argumenta que todos os temas matemáticos previstos no currículo da Educação Básica do Brasil deveriam ser ensinados de forma a integrar as perspectivas algébrica, aritmética e geométrica. Nesse sentido, concordo que a integração dessas áreas da Matemática "é necessária para criar um campo de visão amplo para o aluno" (OLIVEIRA, 2014, p. 38).

De acordo com Pereira, Ribeiro e Cavalcanti (2010) o currículo da disciplina Matemática contempla o ensino de aritmética, álgebra e geometria, contudo, de forma compartimentada. Estes autores afirmam isso com base em suas próprias experiências, lecionando na Educação Básica e na Formação inicial de Professores de Matemática. Eles denunciam que alguns obstáculos, que contribuem para que a intradisciplinaridade não ocorra, são "a organização linear do currículo, a veiculação de livros didáticos nessa perspectiva e a formação do professor continuada e inicial por vezes deficiente" (PEREIRA; RIBEIRO; CAVALCANTI, 2010, p. 5). Segundo eles, esses elementos contribuem para disseminação da ideia que é mais simples e até mais eficiente ensinar separadamente álgebra, aritmética e geometria. E mais, apontam que o ensino dissociado tem contribuído para que algumas escolas deixem a geometria à margem das demais áreas da Matemática. Segundo os autores, algumas dessas escolas chegam a criar uma disciplina específica com os conteúdos que classificam como geométricos.

Como possível alternativa para desenvolver de forma integrada o ensino matemático intradisciplinar, Pereira, Ribeiro e Cavalcanti (2010) apontam a intervenção docente, pois o professor é o responsável pela gestão do currículo.

Diante do exposto, esta seção teve por objetivo retomar a memória uma tentativa de unificar o ensino das ramificações, o que de fato ocorreu e se tornou lei após a reforma Francisco Campos. Contudo, essa reforma não implicou no ensino efetivo da Matemática na perspectiva intradisciplinar.

Por pensar nas questões relatadas nesta seção é que optei por elaborar atividades que, além de apresentar questões de caráter inter e transdisciplinar, estivessem centradas em promover a Intradisciplinaridade Matemática, viabilizando assim a percepção concomitante dos aspectos algébricos, aritméticos e geométricos dos conteúdos inerentes ao Raciocínio Proporcional. Para tanto, desenvolver e explorar o Raciocínio Proporcional em uma perspectiva intradisciplinar por meio da interação simultânea entre a aritmética, geometria e álgebra por meio do software dinâmico de matemática GeoGebra foi o caminho encontrado. Mas antes de tratar especificamente do papel do GeoGebra na exploração matemática intradisciplinar, julgo necessário discorrer na próxima seção sobre a interação dos seres humanos com as tecnologias e a importância das Tecnologias Digitais na nossa sociedade, na escola, no ensino e na aprendizagem de Matemática.

4.3 Influência e Relevância das Tecnologias Digitais

A sociedade brasileira, e certamente a mundial, vem passando por mudanças notáveis ao longo das últimas quatro décadas para a reorganização social que está relacionada às Tecnologias Digitais[13] (BORBA, 2014; BORBA; PENTEADO, 2001; LABORDE; STRÄßER, 2010; STOER; MAGALHÃES, 2003; VALENTE, 1993).

Se entendermos tecnologias como "[...] o conjunto de conhecimentos e princípios científicos que se aplicam ao planejamento, à construção e à utilização de um equipamento em um determinado tipo de atividade" (KENSKI, 2013, p. 24), podemos concluir que, certamente, os primeiros humanos já interagiam com as tecnologias; afinal, essa ampla definição dá conta de diversos artefatos e ferramentas utilizados desde os nossos mais antigos ancestrais. É nesse mesmo sentido que Borba e Villarreal (2005), empregam a palavra mídia, referindo-se inclusive a interação humana com a oralidade e a escrita, muito antes da existência de Tecnologias Digitais.

Dos vários cenários possíveis de interação entre os humanos e as mídias abordo, nesta tese, atividades matemáticas de desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional que visam à relação dos alunos com as Tecnologias Digitais e a Matemática, tomando por base a noção de que o conhecimento é produzido por um coletivo composto de seres-humanos-com-mídias, conforme Borba e Villarreal (2005). De acordo com esse construto teórico, a produção do conhecimento se dá com a reorganização do pensamento com a presença das mídias, como softwares, papel-e-lápis, oralidade, dentre outros.

Assim, é fomentada a ideia de que as tecnologias não substituem, não complementam e tampouco podem ser reduzidas a meras extensões da ação humana, mas sim que realizam uma mudança na forma de pensar e de agir, fazendo com que o conhecimento seja produto de

[13] Ao longo desta tese o termo tecnologias também será utilizado referindo-se a Tecnologias Digitais, evitando assim possíveis repetições.

uma ação coletiva de conhecimento, de forma que as mídias, digitais ou não, embora não determinem o pensamento humano, o condicionam. Nessa perspectiva o conhecimento é produzido por meio da interação entre humanos e mídias.

Na perspectiva de interação com as mídias, a informação e seus compartilhamentos integram o ser humano e lhe conferem habilidade para administrar as informações recebidas e, por meio delas, gerar novas que serão usadas no seu cotidiano. Torquato (2008) afirma que estamos marcados pelo volume virtualmente infinito de informações, fruto do processo de democratização das mídias, que populariza as Tecnologias Digitais, que revoluciona a história da informação e da própria humanidade. É interessante pensar que por nossa sociedade estar em constante transformação, a utilização diária da informática, do computador, do celular e da internet está cada vez mais frequente e, em geral, quanto mais jovem se é, maior o contato com as tecnologias (OZAKI; VASCONCELOS, 2008, p. 115).

Confirmando essa ideia, Oliveira e Marcelino (2015) nos alertam que a reorganização do meio em que vivemos, de alguma forma, atua na sociedade na qual convivem os estudantes, e que "[...] a maneira de pensar destes mesmos alunos sofre influência decisiva das mídias" (OLIVEIRA; MARCELINO, 2015, p. 819). Embora seja inegável a influência das Tecnologias Digitais em nossas vidas, Maltempi e Mendes (2016) discutem que "[...] estranhamente, a sala de aula pouco mudou nas últimas décadas" (MALTEMPI; MENDES, 2016, p.2), referindo-se à pouca influência das Tecnologias Digitais na configuração da sala de aula (dos móveis aos recursos disponíveis), no papel do professor e dos alunos, e no andamento de uma aula tradicional. Essa realidade nos coloca em uma dicotomia. A abrangência das Tecnologias Digitais na nossa sociedade não é negada, mas sua entrada na sala de aula vem sendo adiada há décadas. Não podemos mais postergar o uso dessas tecnologias que são relevantes para os processos de ensino e de aprendizagem.

Destarte, defendo que no contexto que estamos inseridos, em que as tecnologias tomam parte e reformulam a sociedade, a escola precisa rever seu formato, mobilizando as Tecnologias Digitais em prol de uma educação que tenha por finalidade formar cidadãos críticos e criativos, que vislumbrem nas tecnologias formas mais abrangentes de raciocinar, testar hipóteses e tomar decisões. É nesse sentido que Maltempi e Mendes (2016) afirmam que "utilizar as Tecnologias Digitais em sala de aula é ser coerente com o tempo em que vivemos" (MALTEMPI; MENDES, 2016, p.10). D'Ambrosio (1996) há cerca de vinte anos afirmou:

> A escola não se justifica pela apresentação de conhecimento obsoleto e ultrapassado e muitas vezes morto. Sobretudo ao se falar em ciências e

> tecnologia. Será essencial para a escola estimular a aquisição, a organização, a geração e a difusão do conhecimento vivo, integrado nos valores e expectativas da sociedade. Isso será impossível de se atingir sem a ampla utilização de tecnologia na educação. Informática e comunicações dominarão a tecnologia do futuro (D'AMBROSIO, 1996, p. 80).

E o futuro citado no trecho acima está ocorrendo no tempo presente. Hoje é essencial "estimular a aquisição, a organização, a geração e a difusão do conhecimento vivo, integrado nos valores e expectativas da sociedade" (D'AMBROSIO, 1996, p. 80). Embora seja evidente a presença das tecnologias na sociedade atual, incorporá-las à educação é considerado por Kenski (2013) um desafio de grande porte, pois envolve adaptação aos avanços das tecnologias, de modo a propiciar o domínio e a apropriação crítica desses novos meios. Mas é um desafio necessário. Temos que enfrentá-lo! É preciso utilizar o que temos à nossa disposição, pois no ensino e na aprendizagem de Matemática, as Tecnologias Digitais são ferramentas valiosas e dispõem de recursos e características próprias que permitem que alunos com dificuldades no sistema tradicional fiquem mais motivados com a oportunidade de fazer explorações matemáticas a favor de sua aprendizagem (SILVA; PESTANA, 2006).

Este assunto foi discutido em Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014), que argumentam que mesmo estando na fase dos tablets, smartphones e internet, ainda existem dificuldades em introduzir as Tecnologias Digitais nos ambientes educacionais, pois os professores temem sair da zona de conforto, onde dominam e preveem o andamento das aulas, para entrar na zona de risco, onde imprevistos e questões conflitantes podem emergir. Pensando em ações para estes casos, os autores recomendam o trabalho com as Tecnologias Digitais, concernentes ao ensino e a aprendizagem, com professores, tanto na formação inicial quanto na continuada. Oliveira e Marcelino (2015) também enaltecem a influência do professor, ao afirmar que "aproximar a lógica de *pensar com* e *fazer com* as tecnologias na escola pode auxiliar o professor, no âmbito de uma estratégia pedagógica, a compreender melhor seus estudantes" (OLIVEIRA; MARCELINO, 2015, p. 819), o que possibilita "explorar ambientes dinâmicos, visualizações e experimentações diversificadas" (OLIVEIRA; MARCELINO, 2015, p. 819).

Além da formação do professor, as discussões e investigações sobre as Tecnologias Digitais no ensino de Matemática revelam a importância de modificar as formas de resolver problemas, apresentar conceitos, formular e formatar atividades a ser realizadas com alunos nas salas de aula, dentre outras questões consideradas relevantes no que tange o desenvolvimento e a exploração matemática com Tecnologias Digitais pela comunidade acadêmica e por professores (LABORDE; STRÄßER, 2010).

É nesse contexto que os PCN, escritos há quase vinte anos, mas ainda vigentes, destacam o uso consciente das tecnologias com a finalidade de desenvolver no aluno a autonomia com a utilização de softwares que favoreçam pensar, refletir e criar soluções na realização de atividades. Que as tecnologias sejam parceiras no desenvolvimento cognitivo do aluno (BRASIL, 2002). Em particular sobre o uso de computadores na aprendizagem de Matemática:

> Ele é apontado como um instrumento que traz versáteis possibilidades ao processo de ensino e aprendizagem de matemática, seja pela sua destacada presença na sociedade moderna, seja pelas possibilidades de sua aplicação nesse processo (BRASIL, 1998, p. 34).

As orientações dos PCN destacam dois pontos abordados nesta seção quanto à relevância do uso do computador na sala de aula. O primeiro é por tratar-se de uma ferramenta a qual podemos explorar buscando favorecer tanto o ensino quanto à aprendizagem específica de conteúdos matemáticos. Outro destaque é dado quanto à presença dos computadores na nossa sociedade. Este fato é destacado com o intuito de que as aulas de Matemática não sejam planejadas num contexto distante da sociedade atual, que utiliza computadores nos mais diversos segmentos.

Em Matemática, é cada vez mais comum o uso do software dinâmico de matemática (SDM). Segundo Maltempi (2008), os softwares matemáticos podem facilitar a aprendizagem e a generalização de conteúdos que estão sendo estudados, favorecendo a descoberta de um método para reproduzir e expressar um conceito matemático. Nesse sentido, podem ir além da comparação de figuras geométricas, pois permitem criar, mover, distorcer, analisar e testar propriedades de figuras em um processo de investigação. Ademais, o uso pedagógico apropriado dos softwares pode estimular o raciocínio lógico e a autonomia dos alunos, à medida que são incentivados a levantar hipóteses, fazer inferências e tirar conclusões, a partir das representações (ALMEIDA, 2015; BONA, 2009).

Enfim, existem diversas possibilidades de exploração matemática com SDM e com outras Tecnologias Digitais (com recursos da internet, tablets, smartphones, calculadoras, vídeos, dentre outros). Por isso, defendo a ideia de que as Tecnologias Digitais devem ser empregadas, de forma a subsidiar a realização de uma pedagogia que proporcione a formação do aluno como cidadão. E para contribuir para tal formação, é preciso estar ciente de que lutamos por:

> [...] uma educação matemática em que o diálogo professor(a) – estudantes, a experimentação por parte dos(as) alunos(as), a surpresa e a beleza da descoberta e invenção desempenham um papel crucial. Uma educação matemática em que os mais diversos meios podem ser explorados, desde estacas e cordas, papel quadriculado, ..., até computadores. Uma educação

> matemática que promove a cooperação e a amizade entre as pessoas e os povos (GERDES, 2010, p. 157).

Com foco no ensino e aprendizagem de Matemática, é preciso usar as Tecnologias Digitais a nosso favor, buscando otimizar esta utilização, o que perpassa a integração de universidades, escolas e planejamentos governamentais, com o intuito de somar forças para que surjam novos e melhores resultados nos processos de ensino e de aprendizagem.

Nessa seção tratamos da relevância da interação dos seres humanos com Tecnologias Digitais. Na seção seguinte encerro o capítulo apresentando as questões que me levaram a escolher o GeoGebra, dentre tantas tecnologias, para desenvolver e explorar o Raciocínio Proporcional em uma perspectiva matemática intradisciplinar.

4.4 Papel do GeoGebra na Exploração Matemática Intradisciplinar

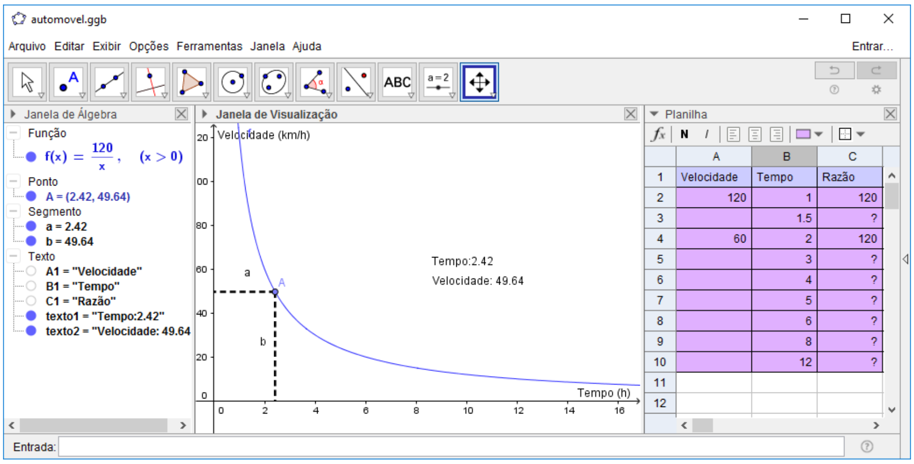
A partir das minhas experiências e da literatura exposta neste capítulo, noto que trabalhar simultaneamente com aspectos algébricos, geométricos e aritméticos exige mais de um tipo de representação. Friendland e Tabach (2001) afirmam que as diferentes formas de representação são necessárias, pois cada uma tem características específicas. As representações são formas como concebemos nossas ideias e conhecimentos e, na Matemática, assumem um papel importante na aprendizagem, pois são fundamentais à compreensão de conceitos e relações matemáticas, sejam baseadas em abordagens e argumentos de conhecimentos matemáticos, sejam na explicitação de raciocínios, na identificação de conexões entre conceitos matemáticos ou ainda na aplicação da Matemática (NCTM, 2007). Gafanhoto e Canavarro (2011) ressaltam que:

> É importante que os alunos compreendam que existe uma variedade de representações para as ideias matemáticas e que adquiram a capacidade de passar informação de uma forma de representação para outra, estabelecendo desta forma relações entre diferentes ideias matemáticas sobre um tema (GAFANHOTO; CANAVARRO, 2011, p. 2).

Dentre as formas de representação matemática, a representação aritmética é a que, em geral, precede qualquer outro tipo de representação. É essencial à compreensão inicial de uma situação particular, mas isoladamente não é eficiente para solucionar casos gerais, que valem para todos da mesma natureza, o que a torna por vezes limitada. A representação geométrica tem muita relação com a representação intuitiva e até mesmo apelativa. No entanto, ela guarda perigos como a influência de fatores externos, como as escalas e imprecisão de medições. A representação algébrica, por sua vez, é concisa, geral e efetiva na formalização e análise de padrões e modelos matemáticos. Por outro lado, dispõe de vários símbolos algébricos que podem dificultar a interpretação de resultados (FRIENDLAND; TABACH, 2001).

Um dos motivos que fizeram com que eu apostasse no GeoGebra, é que ele fornece os três tipos de representação matemática (Figura 5). Segundo Gafanhoto e Canavarro (2011), as Tecnologias Digitais criaram oportunidades de enfatizar o uso de múltiplas representações no ensino da Matemática.

Figura 5 – Tela do GeoGebra com suas janelas de visualização e de álgebra e planilha



Fonte: a pesquisa.

As diferentes janelas e recursos do GeoGebra, permitem mostrar os objetos matemáticos nas representações algébrica, aritmética e geométrica, de modo que todas estão dinamicamente conectadas e respondem de forma simultânea e instantânea às alterações realizadas em qualquer delas. Na janela de visualização é possível realizar variadas construções geométricas. Cada objeto criado na janela de visualização tem também uma representação na janela de álgebra, assim, ao mover objetos na janela de visualização, é possível perceber que, ao mesmo tempo, as suas representações algébricas são atualizadas na janela de álgebra. Também é possível inserir diretamente expressões aritméticas e algébricas na janela de álgebra, usando para isso o campo de entrada, e ver a representação geométrica na janela de visualização. Na planilha é possível inserir nas células não somente expressões aritméticas, mas também todo o tipo de expressões algébricas, de modo que a edição das células das planilhas permitem a visualização de eventuais representações geométricas e algébricas (REZENDE; PESCO; BORTOLOSSI, 2012). A Figura 5, por exemplo, mostra como era possível desenvolver e explorar o Raciocínio Proporcional necessário para o entendimento da velocidade média de um automóvel, trabalhando simultaneamente os aspectos aritméticos na planilha; aritméticos, geométricos e algébricos na janela de visualização; e aritméticos e algébricos na janela de álgebra, usando para tanto o campo de entrada.

Por reconhecer tais potencialidades do GeoGebra, Gafanhoto e Canavarro (2011) ressaltaram que a particularidade do software de permitir as três representações de modo concomitante, faz com que as desvantagens de cada forma de representação sejam compensadas com as vantagens das outras. É nesse sentido que considero que a abordagem que busca desenvolver e explorar o Raciocínio Proporcional em uma perspectiva intradisciplinar é favorecida pelo software GeoGebra. Enfim, os argumentos favoráveis ao uso do GeoGebra englobam ainda seu potencial que oportuniza experimentar, criar estratégias, fazer conjecturas, explorar, argumentar e deduzir propriedades matemáticas. Reunindo tal potencial com a capacidade de explorar temas matemáticos de forma intradisciplinar, justifico a escolha por este software.

Assim, destaco que, como recomenda Oliveira (2013), a escolha do GeoGebra para as atividades foi feita a partir da necessidade observada ao longo da elaboração e aprimoramento das próprias atividades de desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional, ou seja, o conteúdo das atividades, com suas propostas e estratégias mostrou a necessidade de interação com o GeoGebra. Nesse sentido, Bezerra e Assis (2011) ressaltam que a escolha de um software não deve ser aleatória, pois "deve estar vinculada à uma filosofia educacional, à uma metodologia e ainda aos objetivos que se quer alcançar no desenvolvimento de conteúdos e conceitos relacionados ao conhecimento matemático" (BEZERRA; ASSIS, 2011, p. 2).

Por corroborar esta afirmação, é que se optou por usar o GeoGebra, afinal, a filosofia educacional desta pesquisa é a filosofia da Educação Matemática "entendida como um pensar reflexivo, crítico e sistemático concernente à prática pedagógica da Matemática e ao contexto sociocultural no qual ocorrem situações de ensino-aprendizagem da Matemática" (PORTELA-FILHO; PORTELA, 2003).

A perspectiva metodológica adotada é a qualitativa e o objetivo da pesquisa consiste em investigar possibilidades de desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional que emergem em atividades com o GeoGebra, integrando aritmética, geometria e álgebra, a partir do olhar profissional de professores de Matemática e pesquisadores em Educação Matemática. Assim, destaco que o GeoGebra é um software que vai ao encontro das perspectivas filosóficas, metodológicas e que é compatível com o objetivo desta pesquisa. Experiências anteriores, de cunho acadêmico e docente, fizeram-me perceber a potencialidade ímpar do GeoGebra para realizar explorações, de forma concomitante, de propriedades de natureza algébrica, geométrica e aritmética. Para realizar esta forma de investigação, o

GeoGebra é um software apropriado, pois nele há a possibilidade de fazer análises matemáticas, as quais permitem que surjam descobertas de caráter matemático e que elas sejam representadas em suas janelas de álgebra e de visualização, planilhas e calculadoras (FARIA, 2012).

O fato de o GeoGebra não ser um software restrito a representações geométricas, mas que abarca em seu âmbito uma gama de propriedades que o caracterizam como matematicamente intradisciplinar, é que me leva a deixar de usar para ele o termo software de geometria dinâmica, para usar software dinâmico de matemática. Embora em outros trabalhos (FARIA, 2012; FARIA; RIBEIRO, 2009) já tenha usado o termo software de geometria dinâmica, percebi que este não abarca todas as possibilidades do software, na verdade, o limita ao campo geométrico, visto que ele tem sido igualmente rico nas vertentes algébrica e aritmética.

Além da perspectiva intradisciplinar apresentada neste capítulo, a discussão das atividades com os professores de Matemática e pesquisadores em Educação Matemática também foi essencial nesta pesquisa, pois acredito que são os docentes atuantes na Educação Básica que possuem um olhar profissional que nenhum outro especialista consegue ter. E é esta temática que será abordada no capítulo seguinte.

CAPÍTULO 5

OLHAR PROFISSIONAL E FORMAÇÃO CONTINUADA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Este capítulo é iniciado com a discussão do olhar profissional do professor de Matemática, para tanto, destaco um entendimento do termo original *"mirada profesional"*. Na sequência, exponho os motivos pelos quais as atividades foram discutidas e aprimoradas com professores de Matemática que atuam do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental e com pesquisadores em Educação Matemática. Dando continuidade, discuto sobre a relevância de cursos de formação continuada para professores. Finalizando o capítulo, afunilo a discussão da seção anterior para um debate acerca do curso de extensão universitária realizado, que atuou na formação continuada dos Professores de Matemática participantes.

5.1 Olhar Profissional

Tem sido cada vez mais comum lermos frases sobre a escola de Educação Básica com palpites de críticos da Educação, e de pessoas da população, que em geral não conhecem a sala de aula como professor. Vivemos na Educação uma situação próxima ao que ocorre quando estamos assistindo a um jogo de futebol, em que quase todos querem ser árbitros. Desempenhando a função do popularmente conhecido como "juiz de futebol", as pessoas julgam ter uma sentença melhor do que a do profissional habilitado para apitar o jogo, quase sempre favorecendo o time para o qual se está torcendo.

De igual modo, na Educação Básica é comum serem apontadas soluções para problemas e desordens, como o tipo de punição que deve ser dada a um aluno "indisciplinado". Outras vezes, dando destaque positivo para questões que são lamentáveis de ocorrer na sala de aula, como uma briga entre alunos ou entre alunos e professores, em que é colocado que um dos envolvidos mereceu apanhar. E as opiniões que recebemos não param por aí. Muita gente se manifesta sobre o que e como ensinar na escola, seja em Matemática ou nas outras disciplinas.

Provavelmente todas as pessoas que levantam tais questões frequentaram a escola, mas como alunos, o que lhes fornece um olhar bem diferente de um professor. Outros frequentaram a escola como professores, mas não possuem qualquer formação didática ou pedagógica que lhes dê respaldo teórico para as afirmações que fazem. Em entrevista ao jornal "Gazeta do Povo"[14], a professora Tânia Zagury, da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), afirmou que "Professor é a profissão que mais recebe palpites". Segundo Zagury, nenhuma outra profissão recebe tanta interferência, o que, de certa forma, mostra a falta de confiança por parte da sociedade na capacidade de o professor desempenhar sua função adequadamente.

Entendo que embora haja tantos palpites, o professor de Matemática é o profissional mais indicado para identificar o que é importante para o aprendizado de Matemática dos alunos, e para interpretar o que é relevante, de modo a fundamentar a tomada de decisões de acordo com os objetivos previamente traçados. Isso porque, em geral, o professor identifica os aspectos relevantes para sua sala de aula, por ter o olhar profissional.

De acordo com Llinares (2013) o termo *"mirada profesional"*, por mim traduzido como "olhar profissional", é entendido como a capacidade de identificar as situações de maneira pertinente ao desenvolvimento dos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, o que exige mobilizar diferentes domínios do conhecimento. Assim, o olhar profissional do professor de Matemática permite que ele veja situações didáticas de um modo que o diferencia da forma como alguém que não possui a formação e a experiência de um professor de Matemática o faz.

Trabalhos como Mason (2002) e Van Es e Sherin (2002), apontam que, quando o professor de Matemática tem o olhar profissional, ele é apto a "observar com sentido", identificando assim situações dos processos de ensino e de aprendizagem de maneira mais profissional, o que o distingue do modo de observar de alguém que não é professor de Matemática, ou ainda de um professor que não tem esse olhar.

Não nego que, assim como em outras profissões, existem professores que não possuem esse olhar. Não se sabe ao certo os motivos, mas talvez um professor não desenvolva seu olhar profissional por não se sentir um profissional da Educação, e estar desempenhando uma profissão que não lhe traz prazer e realização. Moreira (2005) trata da insatisfação no trabalho do professor, e denuncia fatores que contribuem para que o professor se sinta desmotivado, e

[14] Entrevista disponível em: http://www.gazetadopovo.com.br/vida-e-cidadania/professor-e-a-profissao-que-mais-recebe-palpites-f4e3sgrk8w3i36tn3al78apfy. Último acesso: 22 de outubro de 2015.

que considero causar interferência negativa no desenvolvimento do seu olhar profissional, como: falta de interesse e indisciplina dos alunos; falta de união e companheirismo entre os professores; considerável aumento de trabalho administrativo; status da profissão (que envolve o respeito e o reconhecimento pelo trabalho desenvolvido no ambiente escolar); atendimento aos alunos em grandes grupos; e o salário, que embora tenha conseguido avanços em alguns estados brasileiros na última década, se comparado com a mesma profissão em outros países e com outras profissões no Brasil que exigem o mesmo nível de formação, ainda é muito baixo. Ao tratar do olhar profissional do professor de Matemática, levo essas questões em consideração, por concordar que

> [...] o desenvolvimento profissional do professor não se estrutura só no domínio de conhecimentos sobre o ato de ensinar, mas também em atitudes do professor e nas relações interpessoais na sala de aula e na escola. [...] um professor que está insatisfeito, desencantado, ou frustrado com as perspectivas estabelecidas pela escola ou as perspectivas da sua carreira pode encontrar maior dificuldade em produzir um tipo de esforço contínuo que é exigido para estimular os alunos para aprender continuamente, quando comparado a um professor que se sente mais realizado ou satisfeito (MOREIRA, 2005, p. 210).

Embora existam fatores desmotivantes na docência, muitos professores persistem em apurar seu olhar profissional, aquele que perpassa a aprendizagem de observar com sentido o pensamento matemático dos estudantes, observação esta que envolve as ações de identificar, interpretar e tomar decisões de ação no ensino (LLINARES, 2012). Por isso, observar com sentido é particularmente relevante para o desenvolvimento dos processos de ensino e de aprendizagem (FERNÁNDEZ; LLINARES; VALLS, 2011).

Nesse sentido, Mason (2002) afirma que uma característica do olhar profissional é a capacidade do professor de Matemática mobilizar seus conhecimentos para interpretar as situações de ensino e de aprendizagem a procura de uma forma estruturada que pode ser relevante para o entendimento desses processos. Uma característica desta perspectiva interpretativa é a relação de interdependência da compreensão de aspectos matemáticos e pedagógicos, por isso, a análise dos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática está relacionada com a formação acadêmica e a prática pedagógica ao longo da vida do professor. Esta ideia corrobora a relação dialética entre o conhecimento teórico e prático de quem desempenha o olhar profissional.

Considerando a perspectiva do olhar profissional tratada nesta seção é que debatemos com professores de Matemática e pesquisadores em Educação Matemática as atividades que foram elaboradas. Assim, dedico a seção seguinte a essa discussão.

5.2 Discussão das Atividades com Professores de Matemática e Pesquisadores em Educação Matemática

Se por um lado considero dispensáveis palpites não fundamentados e distantes da realidade da sala de aula e das perspectivas teóricas relevantes para o ensino e a aprendizagem de Matemática, por outro valorizo as interferências, opiniões e sugestões dos professores de Matemática que estão na sala de aula, e dos pesquisadores que atuam de perto dessa frente. Por ter essa perspectiva do olhar profissional, foi planejado aprimorar e discutir com professores de Matemática atuantes do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental e com pesquisadores em Educação Matemática, as atividades que foram elaboradas. Tal discussão teve por intuito refinar o conteúdo das atividades de modo a adequá-las aos alunos que estão nessas séries visando o desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional com o GeoGebra integrando geometria, aritmética e álgebra.

Entendo que o professor de Matemática é aquele que, em geral, possui o olhar profissional. Ele conhece seus alunos e entende o contexto em que eles estão inseridos, o que carregam em suas bagagens escolares e não escolares. O professor, que relaciona as questões acadêmicas e práticas, consegue identificar as situações relevantes ao ensino e à aprendizagem de Matemática, mobilizando para tanto os diferentes domínios do conhecimento específico em situações didáticas. Ademais, pesquisadores em Educação Matemática que se mantêm próximos à realidade das salas de aula de Matemática, também podem ter esse olhar, um olhar profissional atento às particularidades relativas ao ensino e à aprendizagem matemática, capaz de identificar formas eficientes de explorar questões que circundam o ambiente escolar.

É importante destacar, contudo, que o olhar profissional está em constante construção, é uma competência que pode ser adquirida com a docência e com o aprimoramento dos saberes necessários para ensinar, mas que se torna obsoleto se nos afastamos da sala de aula ou, ainda, se deixamos de estudar, de refletir sobre a própria prática, de pesquisar, de aprimorar esse olhar (LLINARES, 2013). Esse aprimoramento pode ser obtido de diversas formas, uma delas é por meio do compartilhar experiências com outros professores.

No Brasil, temos orientações nos PCN (BRASIL, 1998) para que as atividades escolares estejam centradas na construção de significados e na preparação de estratégias para que o aluno desenvolva seu raciocínio, intuição, analogia, indução e dedução. Para tanto, devemos ir além das regras e técnicas, das atividades que privilegiem a memorização, em detrimento da compreensão de conceitos e do exercício do raciocínio. Mas isso tende a ser cada vez mais natural ao professor que busca aguçar seu olhar profissional. Aos poucos, ele percebe o quanto é importante mobilizar as diferentes áreas do seu conhecimento, tanto de domínio específico da Matemática, quanto de questões didáticas e pedagógicas com vistas a identificar os aspectos relevantes da compreensão matemática dos alunos.

De acordo com Fernandez, Llinares e Valls (2011), é necessário selecionar um foco particular de observação do pensamento matemático dos alunos para que a análise, segundo o olhar profissional, seja mais bem aproveitada. Na nossa pesquisa, por exemplo, o foco estava nas possibilidades de desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional com o GeoGebra integrando aritmética, geometria e álgebra. Com essa perspectiva, o olhar profissional dos professores cursistas esteve centrado na discussão sobre os processos de ensino e de aprendizagem dos assuntos matemáticos inerentes ao desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional.

Características específicas também foram evidenciadas, pois foi adotada uma abordagem que explorava de forma concomitante os aspectos matemáticos intradisciplinares no software GeoGebra. Embora os alunos não estivessem presentes durante o curso, questionamentos acerca das dificuldades de ensino e de aprendizagem emergiam nas discussões, afinal, os professores cursistas exercem a profissão de professor de Matemática e lecionam para esses alunos. Assim, entendo que o olhar profissional era exercido e aprimorado nos encontros do curso, com o respaldo da vivência docente dos professores cursistas.

A nossa experiência com o curso realizado é mais uma a integrar às pesquisas que atuaram na realização de cursos de formação continuada, que principalmente na docência, são fundamentais. Por isso, dedico a próxima seção à discussão da importância da reflexão na docência e da formação continuada de professores.

5.3 O Professor Reflexivo e a Relevância da Formação Continuada de Professores

Freire (1996) defende que a reflexão é um dos caminhos para tomar uma postura crítica, o que permitirá mudanças efetivas na prática docente. A reflexão é um desafio ao docente, devido aos conhecimentos e posturas que tendem a se cristalizar ao longo dos anos de regência em sala de aula. Por esse motivo, para que o professor passe a ter uma postura crítica diante da sua própria prática, é necessário que se disponha a refletir sobre suas ações.

Dentre as várias discussões sobre a reflexão docente, destaco a obra “Como Pensamos”, de John Dewey, originalmente publicada em 1910. Nessa obra, o autor afirmou que o pensamento reflexivo é constituído de “consideração ativa, persistente e cuidadosa de qualquer crença ou suposta forma de conhecimento à luz dos fundamentos que os sustentam, e às novas conclusões a que tendam" (DEWEY, 1910, p. 6, tradução nossa[15]).

Em suas obras, Dewey disseminou a ideia de que, embora existam outras formas de pensar, a melhor forma "[...] é o chamado pensamento reflexivo: a espécie de pensamento que consiste em examinar mentalmente o assunto e dar-lhe consideração séria e consecutiva" (DEWEY, 1959, p. 13). Com essa noção, Dewey nos leva a entender a reflexão como um processo que envolve um pensar constante, que envolve atenção aos detalhes, por meio do exame mental minucioso do assunto em questão, que precisa ser analisado com seriedade. Nas palavras do autor, o pensar reflexivo abrange:

> (1) Um estado de dúvida, hesitação, perplexidade, dificuldade mental, o qual origina o ato de pensar; e (2) um ato de pesquisa, procura, inquirição, para encontrar material que resolva a dúvida, assente e esclareça a perplexidade (DEWEY, 1959, p. 22).

Vejo esses elementos listados por Dewey (1959) em consonância com as formas de curiosidade tratadas por Freire (1996) e discutidas no primeiro capítulo desta tese. Entendo que, em um primeiro momento, o pensar reflexivo envolve aspectos relacionados à curiosidade ingênua, discutida por Freire como desarmada e espontânea, pois claramente nos provoca "dúvida, hesitação, perplexidade, dificuldade mental" (DEWEY, 1959, p. 22). E é o fomentar da curiosidade ingênua que origina o ato de pensar, transformando-a em curiosidade epistemológica, que nos conduz a pesquisar, procurar, questionar, na busca de esclarecer a perplexidade. Do diálogo com esses autores, infiro que a curiosidade é fundamental para o professor reflexivo, pois é por meio dela que associações mentais podem ser feitas de forma a contribuir para a transformação do conhecimento ingênuo, atrelado ao senso comum, para o conhecimento epistemológico.

Da perspectiva educacional, Dewey (1959) defende que o ato de pensar possui três finalidades principais. A primeira delas está relacionada à possibilidade do pensar se tornar uma ação com finalidade explícita, consciente, adequada para fazer o sujeito capaz de prever suas melhores ações futuras, de forma a transformar "uma ação puramente apetitiva, cega e impulsiva, em ação inteligente" (DEWEY, 1959, p. 26). A segunda compreende que pensar possibilita que a invenção seja sistematizada, pois, "é por meio do pensamento, igualmente, que o homem aperfeiçoa, combina sinais artificiais para indicar-lhe, antecipadamente, consequências e, ao mesmo tempo, modos de consegui-las ou evitá-las" (DEWEY, 1959, p. 27). Por fim, o ato de pensar dá sentido ao que se está pensando, por isso o autor afirma que

[15] "Active, persistent, and careful consideration of any belief or supposed form of knowledge in the light of the grounds that support it, and the further conclusions to which it tends".

"o pensamento confere aos objetos e fenômenos físicos um estado, um valor mui diverso dos que possuem para um ser que não reflete" (DEWEY, 1959, p. 28).

Com base nessas finalidades, Giovanni (2005) conclui que a reflexão implica que haja um esforço para que o pensamento seja coerente e lúcido e que provoque ações de investigação que surtam melhoria na própria prática docente. É essa expectativa "que move o profissional no sentido de escolher mudar ou superar um estado de coisas que não lhe satisfaz" (GIOVANNI, 2005, p. 51).

Para Pacheco e Flores (1999), o docente pode ser considerado um professor reflexivo se é apto a ouvir e respeitar diferentes opiniões, e está atento às diversas alternativas possíveis. Além disso, é preciso ser responsável intelectual e moralmente com o ensino. Segundo Schön (2000), o professor reflexivo é capaz de refletir sobre o porquê, o como e o para quê da forma como age em sua prática. Assim, durante suas aulas, o professor deve estar refletindo no momento em que está lecionando, e também sobre suas ações já realizadas. Desse modo estará aberto a reformular o que está sendo ensinado no momento de sua execução, mas também estará sempre refletindo sobre como agiu durante uma aula.

O professor que busca desenvolver seu olhar profissional precisa ser reflexivo. Pensar nos assuntos inerentes às suas salas de aula, refletir sobre a realidade dos seus alunos e sobre a melhor forma de abordar um conteúdo, contribui para que ele desenvolva seu olhar profissional. É nesse sentido que entendo a colocação de Llinares (2015), de que o professor que possui a competência de olhar profissionalmente é capaz de analisar, diagnosticar e dotar de significado as produções matemáticas de seus alunos, assim como identificar se os objetivos previamente traçados foram alcançados com o que os alunos produziram. Unindo a reflexão à sua prática, o professor contribui para o seu aperfeiçoamento docente e, consequentemente, para a aprendizagem dos alunos. Desse modo, ao elaborar atividades com suas turmas, o professor deve pensar em questões matemáticas e sociais, e ao realizar tais atividades, deve gerenciar a comunicação em sala de aula, formulando perguntas, relacionando conhecimentos prévios, e valorizando as participações dos alunos.

Compartilhar experiências com outros professores também contribui para a reflexão e para o desenvolvimento do olhar profissional. E essas ações são favorecidas pelos cursos de formação continuada, pois nesses espaços ocorrem as interações entre os professores. Essas interações provocam o contraste de ideias, o que permite que essas sejam sistematicamente reorganizadas e reelaboradas. Zampieri e Javaroni (2014) realçam a relevância da formação continuada de professores de Matemática. As autoras destacam o fato de que a falta de formação do professor, no que tange a conexão das tecnologias e da prática pedagógica, é um dos entraves que tornam inexequível o uso pedagógico das tecnologias nas aulas de Matemática. E esse não é um problema novo. Há mais de quinze anos, Borba e Penteado (2001) já apontavam que

> [...] uma questão central para entrada das novas mídias na escola está relacionada com o professor. Já há sinais evidentes, tanto na Educação básica quanto na Educação em nível universitário, que, se o professor não tiver espaço para refletir sobre as mudanças que acarretam a presença da informática nos coletivos pensantes, eles tenderão a não utilizar essas mídias, ou a utilizá-las de forma superficial, domesticando, portanto, essa nova mídia. Para que o professor, em todos os níveis, aprenda a conviver com as incertezas trazidas por uma mídia que tem características quantitativas e qualitativas novas em relação à memória, um amplo trabalho de reflexão coletiva tem que ser desenvolvido (BORBA; PENTEADO, 2001, p. 88–89).

Nesse sentido, Giovanni (2003) afirma que “ações de formação continuada no ambiente escolar, com professores em exercício, constitui um exemplo dessas aprendizagens” (GIOVANNI, 2003, p. 222), referindo-se às diversas formas de aprendizagem mútua. Assim, o curso proposto seguiu as recomendações dos PCN, que apontam que “a formação profissional contínua ou permanente do professor deve se dar enquanto ele exerce sua profissão, ou seja, na escola, paralelamente a seu trabalho escolar” (BRASIL, 1998, p. 139).

Mas vale ressaltar que a possibilidade de reflexão não é favorecida por todos os cursos de formação continuada, mas sim por aqueles em que o professor fala e se escuta e escuta o outro, um ambiente em que o diálogo é favorecido, e que há reflexão sobre sua prática. Gregio e Bittar (2011) tratam desse assunto e afirmam que

> [...] o paradigma da formação continuada pode efetivamente trazer contribuições para a formação dos professores se os envolvidos tiverem a oportunidade de discutir e refletir sobre os problemas enfrentados no seu cotidiano, bem como, estudar formas de solução e aplicação, tendo a chance de avaliar tais resultados e mudar a prática (GREGIO; BITTAR, 2011, p. 5).

Segundo Lorenzato (2003) a formação continuada de professores é necessária, pois embora a graduação seja essencial para a formação inicial do docente, ela não ensina efetivamente a ser professor. Isso geralmente ocorre na prática docente e por meio das experiências com seus professores. Nesse sentido, o autor aponta que os cursos de formação continuada podem ser espaços para compartilhar experiências sobre a prática de ensinar, conhecendo assim concepções, crenças e percepções. Além disso, pode ser um espaço para repensar atitudes e para propor modificações na sala de aula.

Um dos fatores que tornam essencial a formação continuada de professores envolvendo a temática tecnologia é apontado por Maltempi (2008). Segundo o autor, os professores ainda estão sendo formados de acordo com uma estrutura de prática pedagógica em que a tecnologia não toma parte. Essa afirmação nos permite aventar que a formação inicial do professor de Matemática não é satisfatória no que tange aos subsídios para que as tecnologias façam parte de sua prática docente, afinal:

> [...] é crescente a quantidade de informações, de todas as ordens, que chegam até nós, quer em termos tecnológicos, quer em novas descobertas em diversas áreas do conhecimento, bem como surgimento de novos instrumentos que podem ser utilizados no processo de ensino para além do quadro, giz e livro didático. O professor enfrenta novas realidades a cada dia e ano e tem o desafio de descobrir de que forma essas informações e descobertas chegam à Educação de seus alunos. É desafiado a ampliar os horizontes das atuais metodologias de ensino, com vistas a melhorar o aproveitamento dos alunos no processo de ensino e aprendizagem (LEIVAS; CURY; VIANNA, 2012, p. 190).

E uma das formas de ampliar os horizontes é participando de cursos de formação continuada que possibilitem a discussão de temas de interesse do professor. Reconheço que:

> [..] as novas características do ambiente e das relações que se configuram pela presença dos computadores em situações de ensino, imprimem algumas dificuldades que são motivo de insegurança e constituem obstáculo para sua efetiva inserção.
> [...] Em virtude dessas dificuldades, muitos professores preferem conservar uma prática mais tradicional e previsível porque não sabem como trabalhar utilizando computadores com seus alunos. Parece, então, ser bastante apropriado que os professores que se iniciam com o trabalho docente com computadores sejam apoiados por colegas mais experientes, que tenham ajuda na preparação das aulas e que investiguem e reflitam sobre as situações de ensino e as dificuldades encontradas (ALLEVATO, 2007, p. 92–93).

Assim como Alevatto (2007) entendo que a dificuldade de trabalhar na escola com computadores pode ser minimizada se os professores inexperientes nesse aspecto, tiverem o respaldo de professores que possuem habilidade com as tecnologias na perspectiva pedagógica. E uma forma de realizar essa troca de experiências é por meio dos cursos de formação continuada.

E foi essa a ação realizada. Um curso de formação continuada que contribuiu para aperfeiçoamento de todos os envolvidos. De um lado, os professores participantes vivenciaram experiências por meio das discussões sobre as relações das tecnologias, no desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional na perspectiva intradisciplinar na sala de aula de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental. Por outro lado, o olhar profissional dos professores cursistas contribuiu para o aprimoramento das atividades elaboradas pelos proponentes do curso.

Destaco, ainda, a troca de experiências nas diversas revisões das atividades, realizadas por membros do projeto Mapeamento em nossas reuniões presenciais e virtuais, que resultaram em versões das atividades com maior coerência matemática e mais próximas da realidade escolar.

Desse modo, esta pesquisa recebeu muitas contribuições nas discussões das atividades pelos professores que realizaram o curso e pelos pesquisadores membros do projeto Mapeamento. Mas entendo que também foi dado retorno, pois atuamos na formação continuada dos professores e abordamos temáticas relevantes, em um trabalho colaborativo com os pesquisadores em Educação Matemática, membros do projeto Mapeamento. Sendo assim, dedico a próxima seção à temática da influência do curso realizado na formação continuada dos Professores de Matemática.

5.4 O Curso de Formação Continuada de Professores de Matemática

Como exposto ao longo deste capítulo, o curso realizado atuou na formação continuada dos professores participantes e, como retorno, recebeu o aprimoramento das atividades discutidas ao longo dos encontros do curso. De forma análoga a experiência relatada por Bairral (2005), podemos afirmar que:

> Apesar de propor um curso limitado temporalmente e com uma sequência curricular previamente determinada, percebemos que as interações no ambiente foram importantes para que os professores reavaliassem seu trabalho [...] e se sentissem motivados e desafiados a investir em seu desenvolvimento profissional. A disponibilização de uma variedade de informações contidas na rede (atividades, webs, eventos, artigos, e outras publicações, recursos, softwares, etc.), sem dúvida alguma, teve grande influência no interesse contínuo dos professores para estudos e aprofundamentos de caráter pessoal (BAIRRAL, 2005, p. 63).

O curso realizado teve um formato aberto ao debate, com contínuas interações entre os professores cursistas e os proponentes, que assim como na experiência de Bairral (2005), contribuiu para incentivar os cursistas à pensar sobre sua prática profissional, e nos meios de aprimorá-la. Outra forma de promover a reflexão foram os relatos dos encontros.

Esses relatos eram escritos pelos cursistas descrevendo e apontado aspectos positivos e negativos referentes às atividades realizadas no encontro anterior. Essa dinâmica foi implementada por entender que juntos, ao final do curso, os relatos iriam compor um memorial, um tipo de narrativa que "favorece a reflexão em relação às situações vividas pelos professores que possam ter marcado suas escolhas, seus questionamentos ao longo de sua trajetória, as influências sofridas [...] que possam estar presentes na formação" (ROSA; BARALDI, 2015, p. 942). Essa narrativa se mostrou muito rica no curso realizado, confirmando a expectativa que se tinha sobre o memorial composto pelos relatos. Parte do que foi descrito pelos professores está neste capítulo, outras serão descritas nos capítulos seguintes. De acordo com Prado e Soligo (2007), a escrita dos professores tem ganhado destaque, pois, para o docente, é necessário refletir, e escrever favorece o pensamento reflexivo. Por isso, produzir textos escritos é considerado uma ferramenta valiosa para a formação do professor cursista, e também para o pesquisador, que ganha bons registros de sua experiência com professores.

Segundo Larrosa (2006), a produção de narrativas ou relatos de formação podem ser utilizadas na formação inicial ou continuada para que histórias sejam registradas, as quais, com o auxílio de instrumentos metodológicos, posteriormente passem por interpretações que podem ser registradas em pesquisas para cunhos teóricos e práticos. A narrativa nos permite observar os relatos dos professores com o intuito de "entender suas buscas, suas opiniões, seus sentimentos, suas participações neste processo" (ROSA; BARALDI, 2015, p. 942).

Outras tarefas feitas a distância antes de cada encontro são os roteiros de construção. Trata-se das construções necessárias à realização das atividades no GeoGebra no encontro presencial seguinte. Essas atividades foram entregues via internet, e-mail, facebook ou whatsapp, formas de comunicação a distância que foram planejadas antes mesmo do início do curso, por entender que entre um encontro semanal e outro seria necessário haver formas de comunicação entre os professores proponentes e cursistas. E ocorreu como planejado, pois, por esses canais, postagens de atividades, avisos e publicações foram feitos, experiências foram trocadas, dúvidas sobre construções no GeoGebra foram esclarecidas e os relatos de experiências semanais foram recebidos. Diante dessa experiência, concordamos que:

> [...] para o desenvolvimento de relações sociais progressistas na formação continuada à distância e no ensino de matemática, torna-se crucial a abertura de canais de comunicação nos quais todos os envolvidos no processo formativo tenham a oportunidade de utilizar seu capital linguístico e cultural (BAIRRAL, 2005, p. 62).

Outros aspectos de criar canais de comunicação a distância são destacados por Kenski (2003). Segundo a autora, as comunidades e grupos, como o que foi criado no facebook, "reforçam os vínculos emocionais e a motivação entre seus membros para que se mantenham 'em aprendizagem" (KENSKI, 2003, p. 129). Além disso, ultrapassam as fronteiras dos encontros presenciais de um curso e contribuem para que o estudo de temáticas de interesse comum progrida. As discussões e aprendizagens por meio desses canais despertam a responsabilidade de cada participante "em não apenas usufruir as informações disponibilizadas pelos demais, mas também buscar novas informações, aprofundar os questionamentos e comunicar os resultados de seus estudos para todos" (KENSKI, 2003, p. 129).

Da experiência desse curso posso afirmar, ainda, que a aprendizagem é mútua no formato que tivemos. Foi notável que as questões abertas, ainda em construção, foram um motivo a mais para que os professores cursistas se envolvessem e se sentissem parte do processo de construção de questões que tinham como foco suas escolas, seus alunos e suas salas de aula. A oportunidade de discussão ao final de cada questão também foi essencial para criar um ambiente em que todos pudessem ser ouvidos, e, a partir do olhar profissional de cada professor, as atividades pudessem ser aprimoradas. Ao longo do curso, houve também a oportunidade de disseminar a ideia de que:

> A Tecnologia não consiste apenas em um recurso a mais para os professores motivarem suas aulas; consiste, sobretudo, em um meio poderoso que pode propiciar aos alunos novas formas de gerar e disseminar o conhecimento, e, conseqüentemente, propiciar uma formação condizente com os anseios da sociedade. Assim sendo, os professores de matemática devem refletir sobre a sua utilização, trabalhando em pesquisas que implementem projetos nas escolas – design de ambientes interativos de aprendizagem colaborativa – que possam oferecer oportunidades para que seus alunos aprendam matemática e, ao mesmo tempo, utilizem a Tecnologia de forma que a matemática, no contexto tecnológico, torne-se um caminho para a superação das desigualdades sociais e para a formação e a inserção adequada do sujeito a uma sociedade permeada pela tecnologia (MISKULIN, 2003, p. 222).

Esse foi um de nossos enfoques: apresentar ao professor cursista uma alternativa para trabalhar Matemática com tecnologias, de uma perspectiva intradisciplinar que contribua para o desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional, uma perspectiva que privilegia o pensar sobre, o trabalho em conjunto e a aprendizagem mútua. Assim, buscou-se expor possibilidades que vão além do lúdico, da novidade, que embora tenham seu valor, passam rapidamente, principalmente quando se pensa em alunos que possuem acesso a tantos tipos de Tecnologias Digitais no cotidiano (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014).

E o curso de formação continuada aqui relatado não foi uma ação isolada. Este curso foi um dos sete dessa natureza, oriundos de pesquisas vinculadas ao projeto Mapeamento, realizados em diferentes diretorias regionais de ensino do estado de São Paulo. Ressalto que o Projeto Mapeamento tem dois objetivos principais, que são: mapear o uso de tecnologias presentes nas aulas de Matemática do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental no Estado de São Paulo; e fornecer subsídios, por meio de cursos de extensão universitária, para que os professores de Matemática da rede pública estadual possam pensar na inclusão dos recursos das tecnologias informáticas em suas aulas (JAVARONI *et al.*, 2013).

Portanto, os sete cursos realizados atuaram no segundo objetivo do Projeto Mapeamento. O primeiro destes cursos, intitulado “Currículo no Ensino Fundamental II e atividades matemáticas com softwares: articulações possíveis” configurou o cenário de investigação da pesquisa de doutorado de Maria Teresa Zampieri, do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEM), Unesp, Rio Claro. Esse curso foi realizado em 2014 com professores de Matemática vinculados à diretoria de ensino da região de Bauru e a professora coordenadora de núcleo pedagógico de Matemática dessa diretoria colaborou na execução do curso, além de duas alunas de iniciação científica, bolsistas do Mapeamento que atuaram como monitoras, e da supervisão da Profa. Dra. Sueli Javaroni (ZAMPIERI; JAVARONI, 2015).

Em 2015 foi realizado o curso “Algumas possibilidades das Tecnologias Digitais em Geometria no Ensino Fundamental II”, que fez parte dos dados da pesquisa de mestrado de Lahís Braga, do PPGEM da Unesp Rio Claro. Tal pesquisa foi realizada com professores de Matemática que pertencem a diretoria de ensino da região de São José do Rio Preto. Também foram responsáveis pelo curso a Profa. Dra. Ana Paula dos Santos Malheiros (docente da UNESP - Rio Preto e colaboradora do projeto Mapeamento) e a Profa. Dra. Sueli Javaroni, além de dois professores coordenadores de núcleo pedagógico de Matemática dessa diretoria, e duas alunas de graduação, bolsistas de iniciação científica do Mapeamento (BRAGA, 2015).

Nesse mesmo ano ocorreu na diretoria de ensino da região de Registro o curso “GeoGebra, Matemática e Professores: um currículo em movimento”, em que a doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciência da Faculdade de Ciências da Unesp de Bauru, Anna Luísa de Castro, colaboradora do Mapeamento, liderou a execução do curso com a colaboração da professora coordenadora de núcleo pedagógico de Matemática dessa diretoria e a supervisão da Profa. Ivete Maria Baraldi (docente da UNESP - Bauru e colaboradora do projeto Mapeamento) e da Profa. Dra. Sueli Javaroni (CASTRO; JAVARONI; BARALDI, 2015).

No primeiro semestre de 2016, ocorreu o curso intitulado "As potencialidades das Tecnologias Digitais em atividades investigativas de conteúdos matemáticos do currículo estadual paulista", que configurou o cenário de investigação da pesquisa de doutoramento de Tiago Giorgetti Chinellato, do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Unesp - Rio Claro. Esse curso foi realizado com professores de Matemática vinculados à Diretoria de Ensino da região de Guaratinguetá e a professora coordenadora de núcleo pedagógico de Matemática dessa diretoria de ensino colaborou na execução do curso, além de uma aluna de iniciação científica, bolsista do Mapeamento que atuou como monitora no curso e da supervisão da Profa. Dra. Sueli Javaroni (CHINELLATO, 2016).

Ainda no primeiro semestre de 2016, ocorreu mais um curso relacionado à produção de dados da pesquisa de doutoramento de Maria Teresa Zampieri, intitulado “Atividades com

GeoGebra nas aulas de Matemática”. Esse curso, realizado em parceria com o prof. Dr. Jaime Carvalho e Silva (Universidade de Coimbra) e supervisionado pela da Profa. Dra. Sueli Javaroni, ocorreu na cidade de Coimbra, em Portugal. A parceria, que resultou na realização do curso, contribuiu para a internacionalização das ações do projeto Mapeamento e para reflexões que foram compartilhadas entre os colaboradores desse projeto e professores e alunos do PPGEM. Os cursistas foram professores de Matemática de uma Escola Secundária de Coimbra, e esse curso foi o único vinculado ao projeto Mapeamento que foi realizado no exterior.

Por fim, no segundo semestre de 2016, foi realizado o curso intitulado "GeoGebra no Ensino de Matemática”. Esse curso, em particular, não esteve ligado a nenhuma pesquisa de pós-graduação, foi uma iniciativa da profa. Dra. Maria Raquel Miotto Morelatti, da UNESP de Presidente Prudente. Esse curso contou também com a participação voluntária de três alunos de iniciação científica, de uma professora da rede estadual de ensino, que é bolsista do projeto mapeamento e da supervisão da Profa. Dra. Sueli Javaroni. Outro fator que distingue esse curso dos demais é que ele não esteve voltado apenas para a formação continuada de professores de Matemática, mas também com a formação inicial. Com este formato, teve a participação de professores de Matemática lotados na Diretoria de Ensino da Região de Presidente Prudente e de licenciandos em Matemática da UNESP de Presidente Prudente.

Com essa seção encerro este capítulo que tratou da discussão do olhar profissional do professor de Matemática; dos motivos que levaram a discussão das atividades com os docentes atuantes na sala de aula de Matemática das turmas compreendidas do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental; da relevância de cursos de formação continuada para professores; e do debate acerca do curso de extensão universitária realizado. Com respaldo nas bases teóricas apresentadas neste capítulo sobre o olhar profissional do professor de Matemática, bem como das discussões realizadas nos capítulos anteriores acerca do Raciocínio Proporcional e da utilização do GeoGebra na perspectiva da Intradisciplinaridade Matemática, dedico o próximo capítulo a apresentação e análise dos dados produzidos ao longo desta pesquisa.

CAPÍTULO 6

APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo, os dados produzidos ao longo do curso "Raciocínio Proporcional: atividades com o GeoGebra integrando aritmética, geometria e álgebra", são apresentados e analisados, com o intuito de buscar possíveis respostas para a questão que norteou essa pesquisa. Primeiramente, serão expostas considerações iniciais sobre a elaboração das atividades e realização do curso. As quatro seções seguintes estão estruturadas com a análise de dados por atividade, seguindo a sequência: Atividade "Razão e Proporção", Atividade "Grandezas Proporcionais", Atividade "Teorema de Tales" e Atividade "Frações Equivalentes e Porcentagem".

6.1 Exposição Inicial

Após discorrer nos capítulos anteriores sobre as temáticas principais desta investigação, finalmente chega o capítulo que transforma as filmagens, os registros no caderno de campo, os relatos e questionários realizados com os professores e as atividades elaboradas, discutidas e aprimoradas em um enredo. Este enredo é construído por meio da análise e triangulação dos dados, buscando respostas para a questão norteadora: quais possibilidades de desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional emergem em atividades com o GeoGebra, integrando aritmética, geometria e álgebra, a partir do olhar profissional de professores de Matemática e pesquisadores em Educação Matemática?

Reitero que a versão preliminar das atividades de desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional foi elaborada por mim, com a participação de professores, bolsistas e colaboradores vinculados ao projeto Mapeamento. As atividades apresentadas nesta tese, e que estão disponíveis na íntegra nos apêndices I a IV, são as versões finais, que foram aprimoradas por meio da realização e discussão no curso de extensão universitária realizado com professores atuantes do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental. Assim, neste capítulo, apenas nos momentos em que as alterações nas atividades forem muito significativas (no sentido de suscitarem mais discussões e resultarem em abordagens mais aprimoradas das atividades), irei retomar à trechos das versões iniciais das atividades. Embora as atividades tenham sido realizadas e discutidas com esses professores, elas foram elaboradas tendo em mente o desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional dos alunos que cursam do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental. Assim como foi feito durante o curso, por vezes irei referir-me aos alunos neste capítulo. Cabe esclarecer que esses alunos não são os professores cursistas, mas sim os alunos para as quais as atividades foram idealizadas, elaboradas e aprimoradas. São os alunos que lecionei e ainda lecionarei durante minha carreira docente, e também os alunos dos professores cursistas e dos professores leitores desta tese que lecionam nestas séries.

Tais atividades foram preparadas com base no que é proposto no currículo de Matemática do estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2011). Algumas questões foram feitas a partir de uma releitura de exercícios que já são propostos no Caderno do Aluno do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2014), outras foram elaboradas a partir do que identifiquei como necessário para realização da atividade. Além disso, as atividades foram pensadas de modo que seu desenvolvimento integre aspectos aritméticos, algébricos e geométricos do software dinâmico de matemática GeoGebra.

Após o processo de elaboração dessas atividades, elas passaram por um refinamento que contou com o olhar profissional de professores de Matemática atuantes e de pesquisadores de Educação Matemática, membros do projeto Mapeamento. Assim, com base nas perspectivas teóricas apresentadas sobre Olhar Profissional do Professor de Matemática; Raciocínio Proporcional; Intradisciplinaridade Matemática; e Tecnologias Digitais e GeoGebra, passo a analisar as atividades elaboradas nas seções seguintes.

Quanto ao tempo verbal utilizado neste capítulo de análise, exponho que, quando descrevo as atividades, uso o tempo presente. Quando me refiro às vivências do curso, opto por utilizar o pretérito. Essa escolha foi feita por entender que a descrição das atividades está sendo feitas no tempo presente, enquanto que o curso já foi realizado.

Em tempo, esclareço que neste capítulo e no seguinte serão usados nomes fictícios para os professores que participaram do curso, de modo a preservar suas identidades[16]. Serão utilizados os nomes reais apenas do Tiago, do Fábio e o meu, pois estávamos na posição de proponentes do curso. As falas dos professores estão dispostas com recuo e em itálico, para

---

[16] Todos os professores cursistas autorizaram para fins da pesquisa de doutoramento e de outras produções científicas, por meio de uma declaração, o uso de suas imagens e produção intelectual, geradas ao longo da participação no curso "Raciocínio Proporcional: atividades com o GeoGebra integrando aritmética, geometria e álgebra".

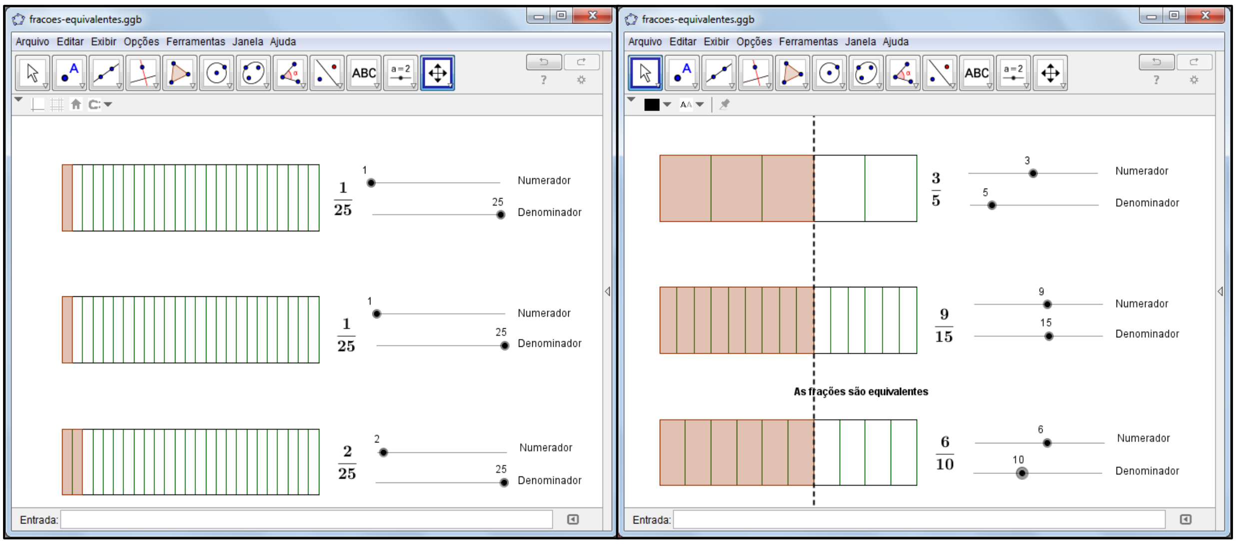
facilitar a identificação ao longo do texto, salvo em algumas pequenas partes que estão no parágrafo em curso, entre aspas e em itálico, com a finalidade de não interromper a leitura. Esses trechos foram extraídos das gravações em áudio e vídeo do curso, dos relatos e dos questionários, contudo, existem interferências minhas nas falas, que são acrescentadas entre colchetes [ ], com o intuito de dar sentido ao trecho para o leitor.

6.2 Atividade "Razão e Proporção"

A atividade "Razão e Proporção[17]" foi elaborada com o objetivo de explorar o Raciocínio Proporcional que permeia Razão e Proporção e suas representações aritmética, geométrica e algébrica.

Na primeira questão desta atividade, é solicitado que o arquivo fracoes-equivalentes.ggb (Figura 6) seja aberto. Nesse arquivo estão representadas três barras, sendo que ao movimentar os controles deslizantes dos numeradores e denominadores, é possível representar frações geometricamente em cada barra correspondente. Quando as três frações representadas ficam equivalentes, a mensagem "As frações são equivalentes" aparece na tela.

Figura 6 – Tela do GeoGebra com construção fracoes-equivalentes.ggb



Fonte: a pesquisa.

Com base nessa construção é proposto na questão 1 (Quadro 1) que a primeira fração seja representada. No item *a*, por exemplo, representa-se o 3 no numerador da primeira barra e o 5 no denominador dessa mesma barra. A barra, então, é dividida em 5 partes, e dessas, 3

[17] Algumas questões que compõem esta atividade foram elaboradas com base no volume II do 7º ano do caderno do aluno do Estado de São Paulo (2014-2017). A saber: questão 3, exercício 4 e questão 4, exercícios 7 e 8 da Situação de Aprendizagem "A noção de Proporcionalidade". A questão 6 com base no exercício 6, e a questão 7 no exercício 13, da Situação de Aprendizagem "Razão e Proporção". Ademais, a Questão 5, foi retirada da Avaliação de Aprendizagem em Processo – I semestre de 2015 - Estado de São Paulo.

são destacadas. Em seguida, é solicitado que o procedimento seja repetido nas barras seguintes, ou seja, representa-se o 9 no numerador da segunda barra e procura-se o denominador dessa fração, de modo que esta seja equivalente a anterior. De igual modo, é solicitado que seja encontrado o numerador da fração que tem denominador 10, de modo que na tela apareça o pontilhado e a mensagem “As frações são equivalentes”. E assim se deve proceder nos itens *b, c* e *d*.

Por fim, é pedido que os alunos calculem, sem o auxílio do computador, as frações equivalentes nos itens *e* e *f*. É solicitado que o computador não seja usado para que os alunos possam expressar se entenderam que frações equivalentes são frações que representam a mesma parte do todo, e qual estratégia usaram para encontrar essas frações equivalentes.

Quadro 1 – Questão 1 da atividade “Razão e Proporção”

1. Abra o arquivo fracoes-equivalentes.ggb:

-> Usando os controles deslizantes, represente a primeira fração no primeiro retângulo. Repita nos dois retângulos seguintes de modo a completar as equivalências.

a) $\frac{3}{5} = \frac{9}{} = \frac{}{10}$

b) $\frac{1}{4} = \frac{6}{} = \frac{}{8}$

c) $\frac{5}{25} = \frac{1}{} = \frac{}{10}$

d) $\frac{2}{5} = \frac{8}{} = \frac{}{10}$

-> Agora calcule as seguintes sem o auxílio do computador, depois use o arquivo do GeoGebra para conferir seus resultados:

e) $\frac{2}{6} = \frac{}{18} = \frac{8}{}$

f) $\frac{4}{8} = \frac{}{24} = \frac{1}{}$

Fonte: a pesquisa.

Destaco um aspecto de aprimoramento nesta questão, que foi realizado a partir de indicações dos membros do projeto Mapeamento em uma de nossas reuniões, cuja pauta foi a discussão desta atividade. Na versão levada para a reunião, os itens *e* e *f* não existiam. Eles foram acrescentados, pois chegou-se à conclusão, na discussão sobre a questão, que os alunos deveriam ter um espaço para respostas, sem utilizar para isso o arquivo frações equivalentes, pois o software já indicava quando isso ocorria. Embora esse entendimento também possa ser expresso usando o GeoGebra, os participantes da discussão apontaram a importância de utilizar, nesse caso, um meio a mais de registrar as respostas, e que pode ser usado para perceber como eles entenderam o conceito relacionado a frações equivalentes. Dentre os diálogos que tivemos durante a realização desta questão, indaguei os professores:

> *Rejane: Geralmente, o que é que a gente faz em sala de aula quando vai introduzir Razão e Proporção?*
> *Miriam: Revisão de conteúdos e pré-requisitos.*

Vários professores acenaram concordando com a afirmação. Confirmei o que Miriam afirmou e disse que é muito comum usar exemplos do tipo: "$\frac{1}{5} = \frac{5}{x}$ então qual é o valor de x?" Explicando que na análise de numeradores, de 1 para 5 foi multiplicado por 5, então no denominador deve ser usado o mesmo procedimento e, desta forma, x = 25. Mas, ressaltei que na atividade proposta, o foco na questão inicial não está somente na parte aritmética e algébrica, de encontrar o valor em falta, pois possui representação em barras, que é uma forma inicial de representação geométrica. Também foi destacado que uma mensagem é apresentada quando as três frações se tornam equivalentes, com o objetivo de fornecer ao aluno a certeza de que encontrou o que estava procurando, os valores em falta que tornam as frações equivalentes visualmente e numericamente.

Após ler o enunciado dos itens *e* e *f*, é dito que nos itens anteriores, o aluno tem a oportunidade de procurar no GeoGebra as frações equivalentes. Já nessa questão, ele deve olhar para o que foi feito na anterior e pensar em qual procedimento deve usar para encontrar o valor em falta. Ao refletir sobre a realização dessa questão, uma cursista questionou:

> *Liliane: Em qual momento entrar com essas atividades? No momento em que ele [o aluno] já sabe frações equivalentes? Em algum momento passou [foi ensinado] sobre multiplicar numerador e denominador pelo mesmo número? Ele está explorando para conhecer o método ou apenas para conferir o que ele sabe?*
> *Rejane: Eu posso responder, mas eu queria ver se alguém responderia. Como professores, o que é que vocês acham? Em qual momento entrariam essas primeiras [questões]?*
> *Karolina: Nos dois momentos são válidos. Dá pra abordar nos dois.*
> *Rejane: Quais dois?*
> *Karolina: Antes de o aluno saber o assunto, para ele explorar e conhecer, ou depois para ele fixar, como exercício, e ver de uma forma diferente as frações.*
> *Miriam: Dá pra usar como uma introdução da aula e depois falar pra ele: a gente vai aprender como faz, e depois a gente vai usar o software, pois alguém na sala já viu isso em algum momento. Ele pode falar: Ah, eu sei como é, eu me lembro disso!*
> *Liliane: Eu acredito, pela diversidade [dos alunos], até por conhecimento de outras coisas, vão querer completar isso aqui antes mesmo de fazer no software.*
> *Rejane: Pode acontecer as duas coisas: Ele usar o software para investigar, procurar qual é a resposta, e ele usar para confirmar uma conta que ele fez. E o que vocês acham dessas duas formas?*
> *Karolina, Moisés e Miriam: As duas são válidas!*
> *Miriam: O que vale é ele chegar naquele ponto que a gente espera, né?!*

> *Liliane: Então, na verdade, é um complemento das ações para chegar na aprendizagem.*

Esse diálogo indica que os professores cursistas estavam pensando nas possibilidades de realização desta questão com foco na aprendizagem e na importância de o aluno raciocinar, e não apenas de registrar uma resposta. O diálogo prossegue:

> *Liliane: Eu falo, porque até nós [professores], quando estamos fazendo, falamos assim: procura o 24, um pouquinho pra cá ele vai lá pra frente, um pouquinho pra lá vai muito para trás, ajustando o material, o mouse, vai chegar no 24 [referindo-se a movimentação dos controles deslizantes], porque nós já sabíamos isso [que a resposta é 24]. Daí eu fiquei pensando em como seria o aluno trabalhando essa atividade. Em qual momento. Será que ele também ficará fazendo: Aí, procura o 24?*
> *Rejane: É por isso que não escrevi em nenhuma atividade assim: essa atividade é para o sexto ano ou essa atividade é para outro ano, porque as nossas turmas são muito diferentes. O objetivo primeiro é a investigação. Mas se o aluno já sabe e fizer as contas, o objetivo passa a ser a confirmação, eu não tenho como prever isso, pois nossas turmas não são homogêneas, elas são heterogêneas. São muito diferentes e cada aluno tem particularidades.*
> *Izadora: Eu já cheguei a dar aula no ano passado em uma oitava série [nono ano] sobre frações, e tinha aluno que falava: professora, posso fazer o desenho? Eu dizia que pode. Daí ele fazia o desenho e pintava.*
> *Rejane: Sim. De forma geral, elas são investigativas, mas em qual momento elas devem ser realizadas? A resposta é que você, como professor da sala, veja o momento certo. Talvez um professor de quinto ano possa usar para introduzir frações equivalentes. Tivemos o intuito de fazer para introduzir razão e proporção, pois se pensarmos bem, o que são frações equivalentes? São proporções. Muitas vezes abordamos na Matemática um conteúdo com nome diferente, mas eles estão muito juntos. Então o momento de trabalhar é de cada sala de aula. E tudo bem que surja a ideia de que o que se faz no de cima [numerador] se faz no de baixo [denominador], mas só que o importante é que isso surja das discussões.*

A discussão foi encaminhada para a conclusão de que não há problema em estabelecer relações, como perceber que a operação multiplicativa que se faz no numerador, deve-se fazer também no denominador, para que o resultado seja proporcional. O que está sendo defendido é o Raciocínio Proporcional. Que seja um processo de descoberta e constatações, e não a exemplificação de regras e técnicas. Como destaca Lamon (2005):

> Raciocínio Proporcional se refere a detectar, expressar, analisar, explicar, e fornecer evidências em suporte às afirmações sobre relações proporcionais. A palavra raciocínio sugere ainda que usemos senso comum, bom julgamento e uma abordagem ponderada para resolver problemas, ao invés de arrancar números das palavras do problema e aplicar de forma cega regras e operações. Tipicamente, não associamos raciocínio com regras conduzidas ou procedimentos mecanizados, mas sim com processo mental de fluxo

> livre, que exige análise consciente das relações entre quantidades (LAMON, 2005, p. 4)[18].

Ao analisar essa atividade, lembro-me de um comentário de uma das professoras no relato entregue ao final de um dos encontros do curso que compôs o cenário da produção dos dados.

> *Lívia: Fração é um conteúdo que os alunos abominam. Eles chegam ao Ensino Fundamental II com muitas dúvidas e conceitos errados, principalmente na transformação de fração em decimal e vice-versa; erros do tipo* $\frac{1}{2} = 1{,}2$*. Tenho muito trabalho para reverter esse conceito, acho que treinaram muito dessa forma, e sempre fica um resquício por mais que se trabalhe, e com a atividade que trabalhamos no curso sobre frações equivalentes acho que dá para explorar mais esses conceitos, podendo até sanar esses erros absurdos.*

Esse registro explicita que essa professora conhece seus alunos e suas dificuldades, o que dá indícios de que possui o olhar profissional. Ela destacou que, embora se trate de uma questão básica, explorá-la pode contribuir para que erros relativos às questões que julgo elementares sejam minimizados, o que é fundamental. Como aponta Lamon (2005):

> Claramente, muitas pessoas que não desenvolveram sua habilidade de raciocinar proporcionalmente têm sido capazes de compensar usando regras em cursos de álgebra, geometria e trigonometria, mas, no final, as regras são uma substituta pobre para a tomada de sentido. Eles estão despreparados para aplicações reais em estatística, biologia, geografia ou física, nas quais princípios importantes e fundamentais dependem da proporcionalidade. Isto é lamentável em um momento em que um número sempre crescente de profissões depende diretamente de matemática ou usa modelagem matemática para aumentar a eficiência, para salvar vidas, para poupar dinheiro, ou para tomar decisões importantes. (LAMON, 2005, p. 3)[19].

Assim, foi retomado que diminuir e sanar dificuldades relativas ao Raciocínio Proporcional vão muito além de tratar questões matemáticas. Sua abrangência é mais ampla, é primordial para escolher o melhor caminho em várias áreas. E esse foi o intuito ao elaborar essa questão e as próximas.

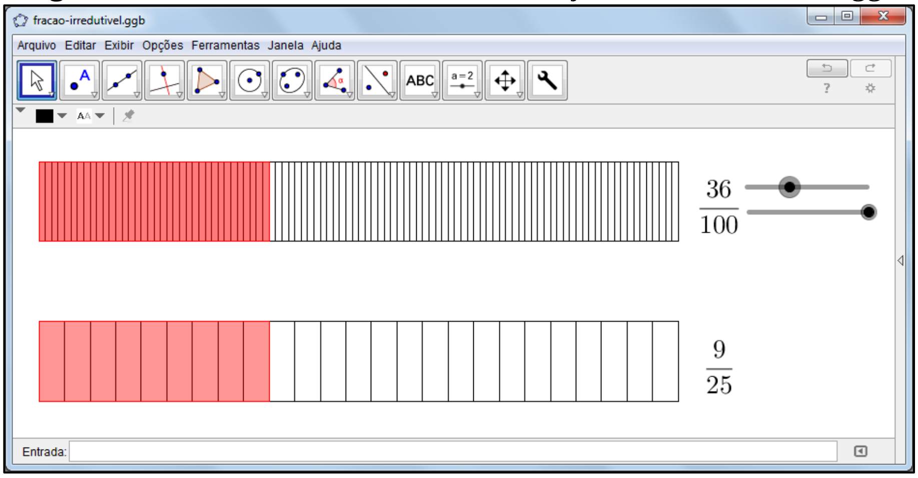
---

[18] Proportional reasoning refers to detecting, expressing, analyzing, explaining, and providing evidence in support of assertions about proportional relationships. The word reasoning further suggests that we use common sense, good judgment, and a thoughtful approach to problem-solving, rather than plucking numbers from word problems and blindly applying rules and operations. We typically do not associate reasoning with rule-driven or mechanized procedures, but rather, with mental, freeflowing processes that require conscious analysis of the relationships among quantities.

[19] Clearly, many people who have not developed their proportional reasoning ability have been able to compensate by using rules in algebra, geometry, and trigonometry courses, but, in the end, the rules are a poor substitute for sense-making. They are unprepared for real applications in statistics, biology, geography, or physics, where important, foundational principles rely on proportionality. This is unfortunate at a time when an ever-increasing number of professions rely on mathematics directly or use mathematical modeling toincrease efficiency, to save lives, to save money, or to make important decisions.

Na questão seguinte é pedido que o arquivo fracao-irredutivel.ggb (Figura 7) seja aberto. Nesse arquivo estão representadas duas barras. Ao movimentar os controles deslizantes do numerador e do denominador da barra superior, é possível representar uma fração e sua fração irredutível é simultaneamente representada na barra de baixo.

Figura 7 - Tela do GeoGebra com construção fracao-irredutivel.ggb



Fonte: a pesquisa.

Para essa construção é proposta a questão 2 (Quadro 2). Nela o aluno pode explorar a forma irredutível de uma fração, que é um tipo específico de fração equivalente. Também deve ser indicado qual número precisa ser usado como divisor para que tal fração seja encontrada.

Quadro 2 – Questão 2 da atividade "Razão e Proporção"

2. Com o arquivo fracao-irredutivel.ggb, verifique quais são as frações equivalentes, e ao mesmo tempo irredutíveis correspondentes aos itens abaixo. Para obtermos as frações equivalentes em cada item abaixo, o numerador e o denominador foram divididos por um mesmo número. Diga em cada caso qual é esse divisor.
a) $\frac{36}{100} = \frac{\quad}{\quad}$ Divisor: ____________
b) $\frac{15}{100} = \frac{\quad}{\quad}$ Divisor: ____________
c) $\frac{25}{100} = \frac{\quad}{\quad}$ Divisor: ____________
d) $\frac{52}{100} = \frac{\quad}{\quad}$ Divisor: ____________

Fonte: a pesquisa.

No curso, quando acabamos de resolver esta questão (quando ainda não estava na versão final do Quadro 2), as professoras Miriam, Alana, Diana e Lívia, que estavam sentadas próximas, chamaram-me para fazer uma sugestão. Elas disseram que a resposta estava sendo dada de uma forma muito direta, e que o aluno deveria refletir mais sobre a resposta encontrada. Ao compartilhar com os demais cursistas a sensação que as professoras tiveram ao realizar a questão, Karolina deu a sugestão de solicitar que o aluno registre o valor no numerador e no denominador, e para que ele registre algo que indique o raciocínio, o processo, e o divisor de cada item, com a finalidade de que o professor tenha mais um meio de perceber como o aluno entendeu o conceito relacionado às frações irredutíveis. Por isso o espaço "Divisor:_________", que não existia anteriormente, foi adicionado.

Vale destacar que nas questões 1 e 2, ao trabalhar com frações com numeradores e denominadores naturais, aborda-se a vertente aritmética. Quando se procura o valor em falta, noções algébricas são mobilizadas. Ademais, a visualização e a manipulação na janela geométrica contribuem para o entendimento geométrico das frações equivalentes. Retomo a ideia de que a intradisciplinaridade pode facilitar a percepção dos significados dos conceitos, valorizar as semelhanças de cada ramificação da Matemática e agrupar ideias que contribuem para a compreensão de temas matemáticos (LORENZATO, 2006).

Justamente no que diz respeito à intradisciplinaridade, o professor Davi relata como o Geogebra colabora para a integração entre a geometria, aritmética e álgebra, de modo a contextualizar as situações de aprendizagem, presentes nos materiais didáticos do estado de São Paulo. Para ele, esse próprio tipo de trabalho foi um dos fatos que enriqueceu o curso.

> *Davi: A integração entre a Geometria, Aritmética e Álgebra que o Geogebra proporciona, facilita a contextualização das situações de aprendizagens que utilizamos no caderno do aluno, para o cumprimento do currículo. As atividades propostas, retiradas do caderno do aluno, enriquecem o curso, pois fica mais próximo à realidade dos professores cursistas.*

A próxima questão propõe investigar a proporcionalidade em duas situações. A primeira delas (Quadro 3), apresenta uma situação de aumento de igual valor, em reais, para dois funcionários que possuem salários diferentes.

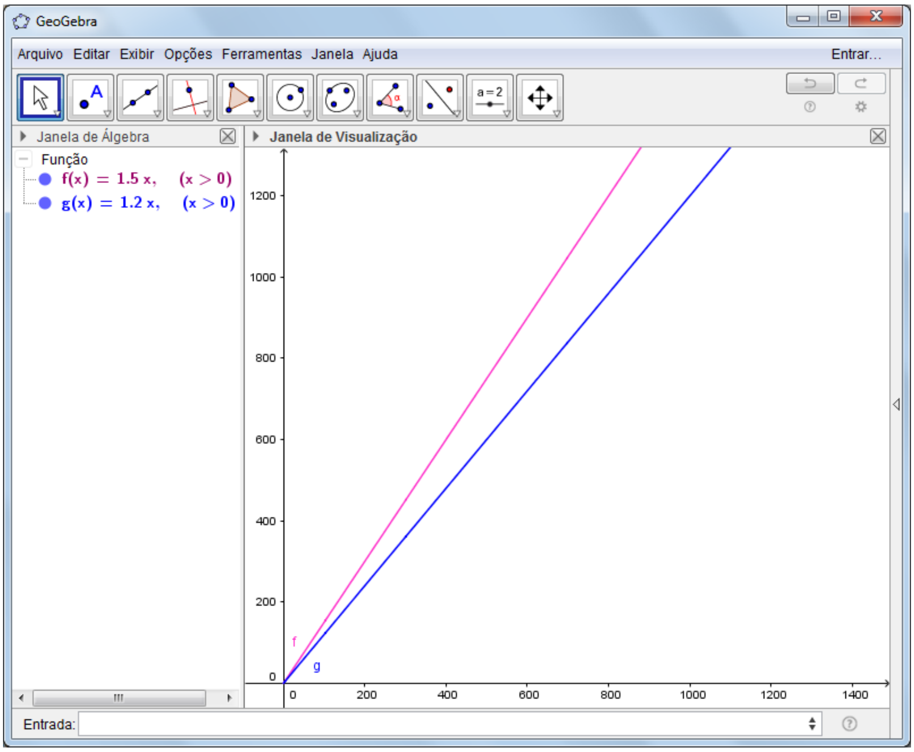
Quadro 3 – Situação I da questão 3 da atividade "Razão e Proporção"

3. Vamos investigar a proporcionalidade nas seguintes situações.
-> Situação I: Uma empresa resolveu dar um aumento de R$200,00 para os funcionários. O salário de João passou de R$400,00 para R$600,00, enquanto o salário de Antônio passou de R$1 000,00 para R$1 200,00.
a. Houve proporcionalidade no aumento salarial dado aos dois funcionários? Justifique sua resposta.
-> Para os itens abaixo, utilize a caixa de entrada em um arquivo novo no GeoGebra, e verifique os resultados que aparecem na janela de álgebra.
b. Quando dividimos o valor do salário final pelo inicial de João, obtemos a razão entre esses valores. Qual é essa razão?
c. Qual é a razão do valor do salário final pelo inicial de Antônio?
d. Ao multiplicar a razão encontrada no item b pelo salário inicial de Antônio, encontramos outro valor para o salário de Antônio. Qual é esse valor? Qual é a relação deste valor do salário de Antônio com o salário de João?
e. Se pensarmos o contrário, ou seja, multiplicar a razão encontrada no item c pelo salário inicial de João, encontramos outro valor para o salário de João. Qual é esse valor? Qual é a relação deste valor do salário de João com o salário de Antônio?
f. Após esses cálculos, você diria que houve ou não proporcionalidade no aumento salarial dado aos dois funcionários?
Observe que ao multiplicar o salário inicial de João por 1,5 (razão encontrada no item b), obtemos o salário final de João. Analogamente, ao multiplicar o salário inicial de Antônio por 1,2 (razão encontrada no item c), obtemos o salário final de Antônio. Então, $\frac{y}{x} =$ *razão, onde x representa o salário inicial e y o salário final.*
Generalizando... A relação entre os salários final e inicial de alguém que tiver a mesma taxa de aumento que foi aplicada ao salário de João pode ser descrito pela equação da reta y=1,5x, x>0. Do mesmo modo, o que tiver a mesma taxa de aumento que foi aplicada ao salário de Antônio pode ser descrito pela equação da reta y=1,2x, x>0.
g. Portanto, na caixa de entrada, crie as retas y=1.5*x, (x>0) e y=1.2*x, (x>0). Observe os gráficos gerados na janela de visualização e responda: Se você trabalhasse com João e Antônio e seu salário fosse de 800 reais, você iria preferir ganhar um aumento com a taxa concedida ao salário de João ou de Antônio? Justifique.

Fonte: a pesquisa.

Nessa questão, inicialmente é questionado se houve proporcionalidade nesse aumento salarial. Espera-se que a resposta do aluno seja dada de forma intuitiva. Nos itens seguintes, a razão do aumento salarial de João e o de Antônio devem ser calculados e, então, é proposto que seja feito o cálculo do salário de Antônio com a mesma razão aplicada ao aumento dado ao salário de João, e o de João sofra um aumento com a mesma razão aplicada ao de Antônio. Finalmente, com base nos cálculos realizados, é questionado se houve ou não proporcionalidade no aumento salarial dado aos dois funcionários. Por fim, no item g o gráfico das retas que representam a relação entre os salários final e inicial de alguém que tiver a mesma taxa de aumento que foi aplicada ao salário de João e a relação entre os salários final e inicial de alguém que tiver a mesma taxa de aumento que foi aplicada ao salário de Antônio são plotados no GeoGebra, com a finalidade de que o aluno decida se iria preferir ganhar um aumento com a taxa concedida a João ou a Antônio (Figura 8).

Figura 8 – Tela do GeoGebra com retas representando a relação entre os salários final e inicial de alguém que tiver a mesma taxa de aumento aplicada aos salários de João e de Antônio



Fonte: a pesquisa.

Ao explorar com os professores cursistas essa primeira situação, fizemos item por item, e no *f*, explico:

> *Rejane: Porque coloquei essa pergunta se ela é praticamente igual a letra a? Qual a diferença? Na letra a [a resposta] é o primeiro insight, a primeira resposta. Na letra f, eu acho que os alunos irão pensar um pouco mais. Porque ele já pensou: Se o de João fosse proporcional ao de Antônio? E se o contrário acontecesse? Então, talvez a resposta mude. Talvez, se ele respondeu na primeira [item a] que sim, ele possa responder aqui [no item f] que não.*
> *Liliane: Mas você acha que ele não vai mudar, apagar lá em cima?[sobre a resposta dada no item a]*
> *Rejane: Mas aí eu acho que o que importa mais é que ele pensou sobre isso.*
> *Liliane: Eu acho que ele não vai escrever uma coisa lá [item a] e escrever outra aqui [item f].*
> *Davi: Eu acredito que na primeira pergunta a intervenção do professor na resposta do aluno deve ser mínima.*
> *Rejane: Deixar ele escrever.*
> *Davi: E nas outras perguntas [...] os exercícios vão comprovar aquilo que a situação propõe. Daí se ele voltar, perceber seu erro e apagar e alterar eu acho até válido. Porque ele voltou, percebeu o erro. Porque temos que focar na aprendizagem, não no acerto e erro, no que ele registrou ou não, não é uma avaliação. Então o que ele registrou, ele pode voltar a todo momento, apagar, fazer de novo. É até bom, porque ele percebeu com os outros exercícios, que aquela situação que ele havia pensado estava incorreta.*

A situação exposta nesse diálogo levou-me a refletir sobre a multiplicidade de formas de testar respostas que o GeoGebra proporciona. Dúvidas quanto a um conteúdo não são indícios de que não está havendo aprendizagem. É importante que os alunos testem, e os professores reconheceram que o software colabora com isso, embora haja a possibilidade de que a resposta, o registro no papel, mude. É nesse sentido que

> As possibilidades experimentais dessas mídias podem ser exploradas, podendo-se chegar a elaboração de conjecturas bem como a sua verificação. Desse modo, é possível estabelecer uma importante discussão acerca das possibilidades da inclusão de softwares no contexto educacional em seus diferentes níveis (BORBA, 2010, p. 3).

E essas discussões sempre estiveram presentes no curso. Este momento, especificamente, foi um dos que senti a importância da formação continuada para o professor. Ouvir os diferentes posicionamentos e poder compartilhar com eles a ideia de que o processo importa mais que o produto, do que a resposta certa propriamente dita, foi uma experiência marcante. Afinal, se o foco for a resposta certa, não é necessário raciocinar proporcionalmente, regras e técnicas dão conta disso. O Professor Henrique relata como considerou importante as discussões propiciadas durante o curso.

> *Henrique: Posso citar que achei muito interessante as discussões, sempre construtivas, que as atividades nos permitem fazer, como cada integrante do curso pode expressar suas ideias, pois isso é permitido pelos coordenadores do curso.*

É nesse sentido que trabalhos como Gregio e Bittar (2011) defendem que se a formação continuada for pautada nas discussões e reflexões sobre as questões enfrentadas na rotina do professor, ela pode trazer profundas e relevantes mudanças de postura docente que surtirão efeito na sala de aula. Os autores sugerem que, em conjunto, se discuta e pense em formas de solucionar problemas, avaliar resultados e mudar a prática.

Na situação seguinte da mesma questão, outro caso é dado (Quadro 4). Uma empresa concede um desconto de 25% em todos os seus produtos. Diante dessa informação é dito que um computador teve o preço reduzido de R$1000,00 para R$750,00, e que o de uma impressora passou de R$400,00 para R$300,00.

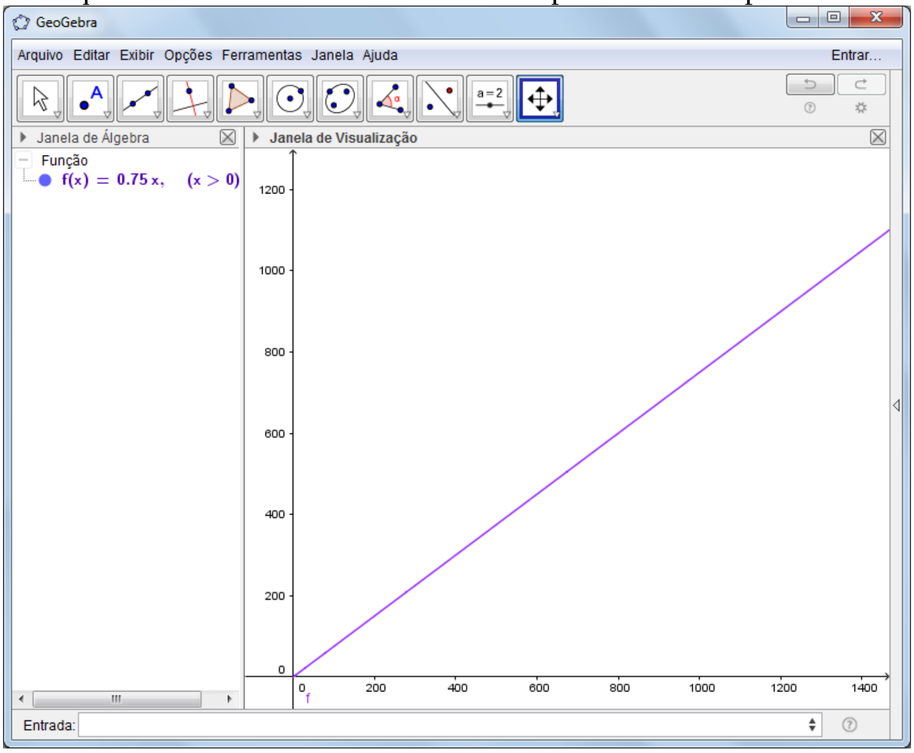
Quadro 4 – Situação II da questão 3 da atividade “Razão e Proporção”

-> Situação II: Uma empresa de informática resolveu dar um desconto de 25% no preço de toda a sua linha de produtos. O preço de um computador passou de R$1000,00 para R$750,00, e o de uma impressora passou de R$400,00 para R$300,00.
a. Houve proporcionalidade no desconto dado nos dois produtos? Justifique sua resposta.
-> Para os itens abaixo, utilize a caixa de entrada em um arquivo novo no GeoGebra, e verifique os resultados que aparecem na janela de álgebra.
b. Quando dividimos o valor final pelo inicial do computador, obtemos a razão entre esses valores. Qual é essa razão?
c. Qual é a razão do valor final pelo inicial da impressora?
d. Ao multiplicar a razão encontrada no item b pelo valor inicial da impressora, encontramos um valor com desconto para a impressora. Qual é esse valor? Qual é a relação deste valor final da impressora e do valor final do computador?
e. Se pensarmos o contrário, ou seja, multiplicar a razão encontrada no item c pelo valor inicial do computador, encontramos um valor com desconto para o computador. Qual é esse valor? Qual é a relação deste valor final do computador e do valor final da impressora?
f. Após esses cálculos, você diria que houve ou não proporcionalidade no desconto dado nos dois produtos?
Observe que ao multiplicar o preço inicial do computador *por 0,75 (razão encontrada no item b), obtemos o preço final do computador. Analogamente, ao multiplicar o preço inicial da impressora por 0,75 (razão encontrada no item c), obtemos o preço final da impressora. Então,* $\frac{y}{x} = razão$, *onde x representa o preço inicial e y o final.*
Generalizando... A relação entre os preços final e inicial de um produto que tiver a mesma taxa de desconto que foi concedida ao computador e à impressora, pode ser descrito pela equação da reta y=0,75x, x>0.
g. Portanto, na caixa de entrada, crie a reta y=0.75*x, (x>0). Observe o gráfico gerado na janela de visualização e responda: Se você comprasse uma câmera digital nessa loja, que antes custava 100 reais e que agora está com a mesma taxa de desconto concedida ao computador e à impressora, quanto você pagaria? Justifique.

Fonte: a pesquisa.

Primeiramente é questionado se houve proporcionalidade nesse desconto e espera-se que a resposta do aluno seja dada de forma intuitiva. Nos itens seguintes, a razão do desconto dado à impressora e ao computador devem ser calculadas e, então, é proposto que a razão do desconto dado à impressora seja dada ao computador. Com base nos cálculos realizados, é questionado se houve ou não proporcionalidade no desconto dado aos dois produtos. Por fim, no item *g* o gráfico das retas que representam a relação entre os preços final e inicial de algum produto que tiver a mesma taxa de desconto que foi concedido ao computador e à impressora são plotados no GeoGebra, com a finalidade de que o aluno calcule quanto pagaria por uma câmera digital que tivesse o mesmo desconto concedido ao computador e à impressora (Figura 9).

Figura 9 – Tela do GeoGebra com reta representando a relação entre os preços final e inicial de um produto que tiver a mesma taxa de desconto aplicada ao computador e à impressora



Fonte: a pesquisa.

Ao concluir a realização dos itens *a* a *f* da situação II (Quadro 4), conversamos sobre a realização da atividade. Questionei se os enunciados estavam claros, e discutimos:

> *Liliane: Está claro, mas está induzindo a falar: sim há, agora houve, deu o mesmo valor. Está mostrando, induzindo a isso. Mas não sei se isso quer dizer que ele entendeu ou não a ideia. Acho que está induzindo de acordo com a sequência de exercícios. Agora não sei se isso é entender o conceito. Vai depender se ele já sabe o que é proporcionalidade.*

Diante deste posicionamento, falei sobre as dificuldades em elaborar uma atividade que não seja pautada no ensino de regras e técnicas, mas no desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional, e compartilhei a vontade que tinha de aprimorar as formas de exploração naquela questão. Nesse sentido, uma professora sugeriu:

> *Karolina: Antes dessa pergunta f, poderia não afirmar, mas perguntar para o aluno se a porcentagem é um tipo de proporção, através do desconto, do 0,75 que ele observou nas perguntas anteriores.*
> *Liliane: Vai depender do que ele sabe de proporção.*
> *Miriam: Mas nesse caso está fazendo ele refletir sobre isso. Mesmo aquele aluno que não percebeu que a porcentagem é uma proporcionalidade, da maneira que a colega [Karolina] sugeriu, a questão faz o aluno pensar nesse ponto. Pois ali não estava perguntando se é proporção. A partir do momento que você pergunta, o aluno vai ter que pensar sobre isso. Daí dá pra interferir, como professor, voltando em porcentagem, fazendo-os refletir. Achei legal a sua ideia [fala para Karolina].*

Vários professores apontaram que a sugestão de Karolina deixaria a questão mais reflexiva e menos indutiva, como apontado por Liliane. Assim, foram feitas alterações nos enunciados dos itens *d* e *e* das situações I e II desta questão, e o olhar profissional desses professores foi mais uma vez levado em consideração. Os quadros 3 e 4 já estão com enunciados reelaborados após as sugestões dos professores, mas com o intuito de expor como estavam e como ficaram após reelaboração, trago os quadros a seguir (Quadros 5 e 6).

Quadro 5 – Comparação dos enunciados dos itens *d* e *e* da situação I da questão 3 da atividade "Razão e Proporção"

Enunciado inicial
d. Ao multiplicar a razão encontrada no item b pelo salário inicial de Antônio, encontramos o salário de Antônio proporcional ao de João. Quanto deve ser o salário de Antônio para que seja proporcional ao de João?
e. Se pensarmos o contrário, ou seja, multiplicar a razão encontrada no item c pelo salário inicial de João, encontramos o salário de João proporcional ao de Antônio. Quanto deve ser o salário de João para que seja proporcional ao de Antônio?
Enunciado reelaborado
d. Ao multiplicar a razão encontrada no item b pelo salário inicial de Antônio, encontramos outro valor para o salário de Antônio. Qual é esse valor? Qual é a relação deste valor do salário de Antônio com o salário de João?
e. Se pensarmos o contrário, ou seja, multiplicar a razão encontrada no item c pelo salário inicial de João, encontramos outro valor para o salário de João. Qual é esse valor? Qual é a relação deste valor do salário de João com o salário de Antônio?

Fonte: a pesquisa.

Quadro 6 – Comparação dos enunciados dos itens *d* e *e* da situação II da questão 3 da atividade "Razão e Proporção"

Enunciado inicial
d. Ao multiplicar a razão encontrada no item b pelo valor inicial da impressora, encontramos seu valor final proporcional ao valor final do computador. Quanto deve ser o valor final da impressora para que seja proporcional ao valor final do computador?
e. Se pensarmos o contrário, ou seja, multiplicar a razão encontrada no item c pelo valor inicial do computador, encontramos seu valor final proporcional ao valor final da impressora. Quanto deve ser o valor final do computador para que seja proporcional ao valor final da impressora?
Enunciado reelaborado
d. Ao multiplicar a razão encontrada no item b pelo valor inicial da impressora, encontramos um valor com desconto para a impressora. Qual é esse valor? Qual é a relação deste valor final da impressora e do valor final do computador?
e. Se pensarmos o contrário, ou seja, multiplicar a razão encontrada no item c pelo valor inicial do computador, encontramos um valor com desconto para o computador. Qual é esse valor? Qual é a relação deste valor final do computador e do valor final da impressora?

Fonte: a pesquisa.

Complementando esses comentários, Tiago retoma a importância da intervenção do professor, não dando as respostas, ou classificando como certo ou errado, mas proporcionando a oportunidade de pensar em outras situações. Para tanto, sugere:

> *Tiago: É interessante o professor seguir o roteiro [sequência das questões], mas pensar com o aluno: Ah, e se não fosse 25% o desconto do computador,*

se fosse 30% e o da impressora fosse 40%? E trabalhar essas modificações lá com eles [os alunos].

A questão 4, também aborda duas situações. Na primeira delas (Quadro 7) foi dada uma tabela em que a quantidade vendida e o valor recebido pela venda são registrados.

Quadro 7 – Situação I da questão 4 da atividade "Razão e Proporção"

4. Vejamos as situações abaixo.

-> Situação I: Na tabela "Produto" registraram-se a quantidade vendida e o valor recebido pela venda de um mesmo produto. Contudo, alguns valores não foram preenchidos.

Quantidade vendida	Valor recebido
10	R$ 30,00
5	
	R$ 3,00
	R$ 21,00
14	
	R$ 420,00

a. Complete a tabela, mantendo a proporcionalidade direta entre a quantidade vendida e o valor recebido.

b. Qual foi o raciocínio usado para completar a tabela manualmente?

-> Após completar a tabela acima, abra o arquivo proporcao.ggb. Nele existem duas planilhas, uma de cada situação. Vamos completá-la usando recursos da planilha do GeoGebra.

c. Digite na célula C3: B3/A3. O Valor encontrado é a razão que deve ser usada para que os demais valores da tabela sejam proporcionais à quantidade vendida do produto e o valor recebido para tal quantidade. Qual foi o valor encontrado? O que representa esse valor?

d. Para encontrar qual deve ser a quantidade vendida das células A5, A6 e A8, para que sejam proporcionais a da célula A3, deve-se digitar nessas células B5/C3, B6/C3 e B8/C3, respectivamente.

e. Para encontrar qual deve ser o preço das células B4 e B7, para que sejam proporcionais a da célula B3, deve-se digitar digite nessas células A4*C3, e A7*C3, respectivamente.

f. Qual foi o raciocínio usado para completar a planilha do GeoGebra?

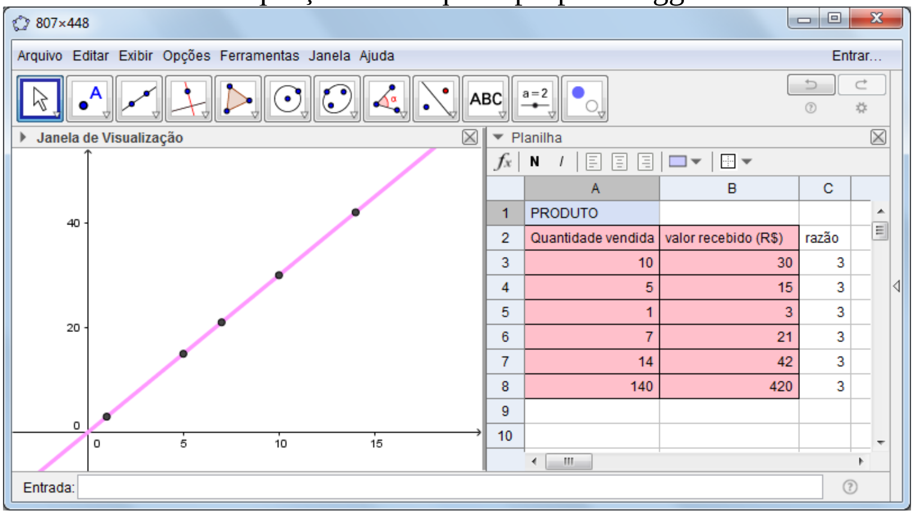
g. Vamos criar o gráfico dessa planilha: Selecione as colunas A e B das linhas 3 à 8 e clique com o botão direito, vá em criar -> lista de pontos. Por quaisquer dois dos cinco pontos representados na janela de visualização, crie uma reta.

Observação: Nesta situação, representamos x como sendo a quantidade de produtos. Portanto, x é um número natural. Deste modo, o conjunto dos pontos plotados atende ao conjunto dos pontos pertencentes à reta criada, mas nem todos os pontos pertencentes à reta representam um número de produtos (não existe, por exemplo, meio produto).

Fonte: a pesquisa.

Algumas células da tabela estão em branco. Então, foi solicitado que os espaços em branco da tabela fossem completados, mas que a proporcionalidade direta entre a quantidade vendida e o valor recebido fosse mantida. Após completar a tabela manualmente, foi solicitado que o raciocínio usado para completá-la fosse explicitado. Dando continuidade, é solicitado que o arquivo proporcao.ggb (Figura 10) seja aberto, e que, seguindo orientações, a razão seja calculada e o significado desse valor seja exposto. Finalizando, o gráfico dessa planilha é plotado.

Figura 10 – Tela do GeoGebra com solução da situação I da questão 4 da atividade "Razão e Proporção" no arquivo proporcao.ggb



Fonte: a pesquisa.

Na segunda situação (Quadro 8) a tabela é preenchida com o preço unitário de uma bola e com a respectiva quantidade de bolas que podem ser adquiridas, com a ressalva de que a proporcionalidade seja mantida.

Quadro 8 – Situação II da questão 4 da atividade "Razão e Proporção"

-> Situação II: Um clube dispõe de uma quantia fixa de dinheiro para comprar bolas de futebol para os treinamentos. Com o dinheiro disponível, é possível comprar, de um fornecedor, 24 bolas a R$6,00 cada. O gerente pesquisou os preços de outros fabricantes e anotou as informações na tabela a seguir.

a. Complete-a obedecendo ao princípio de proporcionalidade e descubra qual foi o menor preço pesquisado pelo gerente.

Preço de uma bola	Número de bolas
R$ 6,00	24
R$ 12,00	
R$ 4,00	
	72
R$ 24,00	
	144
R$ 72,00	

b. Qual foi o raciocínio usado para completar a tabela manualmente?

-> Após completar a tabela acima, vamos voltar para o arquivo proporção.ggb. Vamos completá-la usando recursos da planilha do GeoGebra.

c. Digite na célula C13: B13*A13. O Valor encontrado é a razão que deve ser usada para que os demais números de bolas da tabela sejam proporcionais ao preço unitário. Qual foi o valor encontrado? O que representa esse valor?

d. Para encontrar qual deve ser o preço de uma bola nas células A16 e A18, para que sejam proporcionais a da célula A13, deve-se digitar nessas células C13/B16, e C13/B18, respectivamente.

e. Para encontrar qual deve ser o número de bolas das células B14, B15, B17, e B19, para que sejam proporcionais a da célula B13, deve-se digitar digite nessas células C13/A14, C13/A15, C13/A17, e C13/A19, respectivamente.

f. Qual foi o raciocínio usado para completar a planilha do GeoGebra?

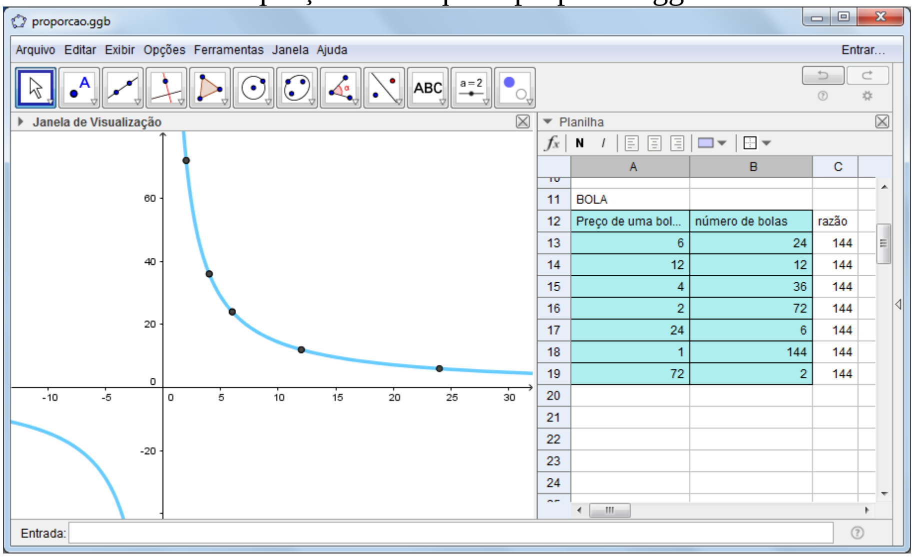
g. Vamos criar o gráfico dessa planilha: Selecione as colunas A e B das linhas 13 à 19 e clique com o botão direito, vá em criar -> lista de pontos. Crie uma cônica passando por cinco dos sete pontos criados.

Observação: Nesta situação, representamos a quantidade de bolas por x. Portanto, x é um número natural. Deste modo, o conjunto dos pontos tabelados, pertencem ao ramo positivo da curva criada, mas nem todos os pontos pertencentes à curva representam um número de bolas (não existe, por exemplo, 2,5 bolas).

Fonte: a pesquisa.

Novamente, após completar a tabela manualmente, é solicitado que o raciocínio usado para completá-la seja explicitado. Dando continuidade, é solicitado que retorne ao arquivo proporcao.ggb (Figura 11), e que, seguindo orientações, a razão seja calculada e, de igual forma, o significado desse valor seja exposto. Finalizando, o gráfico dessa planilha é plotado.

Figura 11 – Tela do GeoGebra com solução da situação II da questão 4 da atividade “Razão e Proporção” no arquivo proporcao.ggb



Fonte: a pesquisa.

Destaco que o item *g*, tanto da situação I quanto da II das questões 3 e 4 foram acrescentadas após uma discussão com os membros do projeto Mapeamento. Eles apontaram ser necessário, ainda que introdutoriamente, o contato dos alunos com o gráfico das grandezas proporcionais. Por isso, tais itens foram inseridos.

Esclareço ainda que as duas situações da terceira e da quarta questão, receberam um aprimoramento depois do curso. Ao discutir essa seção do capítulo de análise no GPIMEM, grupo de pesquisa que faço parte, foi apontado por alguns membros que ambas as questões precisavam de esclarecimento quanto à representação geométrica, pois as grandezas envolvidas são representadas pelo conjunto dos números naturais. Portanto, sua representação gráfica deve ser discreta, ou seja, uma coleção de pares ordenados no plano. Por isso, a representação geométrica sofreu alterações, e observações foram acrescentadas no texto, as quais estão em itálico nos quadros 3, 4, 7 e 8.

Ainda sobre as questões 3 e 4, ao trabalhar cálculos numéricos que permitem verificar as situações mais vantajosas, como o melhor aumento salarial, o melhor desconto, além da quantidade vendida de um produto, ou quantas bolas comprar com o dinheiro que se tem, são exploradas vertentes aritméticas das situações. Ao pensar em casos gerais, por meio de novas situações, como qual salário o aluno prefere ganhar, ou qual desconto é melhor para ele, ou ainda pensar em qual o valor unitário da bola que o time deve comprar, aspectos algébricos são trabalhados. Além disso, aspectos geométricos são explorados, quando os gráficos são plotados.

Com essas questões é possível trabalhar a geometria, ao ver que o gráfico das grandezas diretamente proporcionais tem comportamento de uma reta que passa pela origem e por todos os pontos, e que o gráfico das grandezas inversamente proporcionais tem comportamento de hipérboles, além de notar que, nos casos não proporcionais, a reta é qualquer uma que não passa pela origem. Contudo, esclareço que os itens dessas questões que trabalharam geometria, apenas introduziram aspectos geométricos que serão abordados na atividade seguinte "Grandezas Proporcionais", que aborda o gráfico das grandezas diretamente, inversamente e não proporcionais.

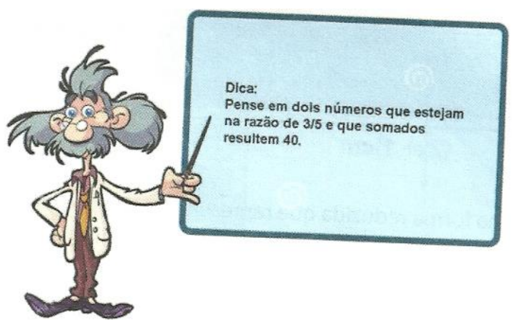
Considerando isso, durante os relatos sobre o curso, alguns professores expõem sobre o papel enriquecedor que o GeoGebra pode proporcionar às aulas de Matemática, de maneira a levar os estudantes a construírem seus próprios conhecimentos e ainda olhar uma mesma situação de perspectivas distintas ou confirmar seus pensamentos.

> *Davi: A utilização do GeoGebra em sala de aula, em si, enriquece qualquer abordagem feita perante os alunos, pois cria um clima de descontração, e interação da tecnologia com a aprendizagem rotineira em sala de aula. Acredito que na aula prática, o aluno tem a oportunidade de interagir com o conhecimento, de uma forma diferente da realizada na sala de aula, assim, melhorando e ampliando a capacidade de memorização e aprendizagem do conteúdo.*
> *Denise: O uso do Geogebra é interessante para uma confirmação do pensamento ou um olhar diferente para a mesma situação.*

Na questão 5 (Quadro 9) uma situação é dada para ser resolvida com o intuito de que uma relação seja estabelecida para que a quantidade de mulheres em uma determinada festa seja encontrada, partindo da afirmação de que a razão entre o número de mulheres e o número de homens é $\frac{3}{5}$.

Quadro 9 – Questão 5 da atividade "Razão e Proporção"

5. Resolva a situação a seguir, fazendo as contas na caixa de entrada do GeoGebra, e visualizando os resultados na janela de álgebra. Em uma festa há 40 pessoas e sabe-se que a razão entre o número de mulheres e o número de homens é $\frac{3}{5}$. Qual é o número de mulheres na festa?



Fonte: a pesquisa.

Essa questão aborda diretamente aspectos aritméticos e algébricos, ao propor que a razão seja utilizada para que o número de mulheres na festa seja encontrado. Mas, como nas situações anteriores, essas relações devem ser feitas também geometricamente. Para tanto, espera-se que mesmo sem ser solicitado, alguns alunos pensem nessa perspectiva e, instigados pelo professor, compartilhem com a turma.

Ao realizar esta questão com os professores, Tiago enfatizou a relevância da intervenção do professor na sua realização, argumentando sobre o significado do que está sendo feito. Para tanto, deu como exemplo a forma como realizou esta questão com seus alunos quando abordava o tema em uma de suas aulas na rede estadual, ao afirmar:

> *Tiago: Quando eu fui resolver essa questão na lousa eu explicava: Pense na fileira de vocês. O que significa a razão de 3 para 5? Significa que a cada 5 [homens] tem 3 mulheres. É isso? Os questionava trabalhando a razão e a proporção.*

Em discussão, os professores indicaram que é muito comum que os alunos se equivoquem com o resultado nesse tipo de questão, pois acabam calculando $\frac{3}{5}$ de 40 que resulta em 24, ao invés de pensar que a cada 3 mulheres na festa, existem 5 homens, o que em uma festa com 40 pessoas, implica que tenham 15 mulheres presentes. Contudo, os professores concluíram que essa questão deve ser mantida, pois é justamente abordando essas situações que eles serão capazes de resolver situações análogas.

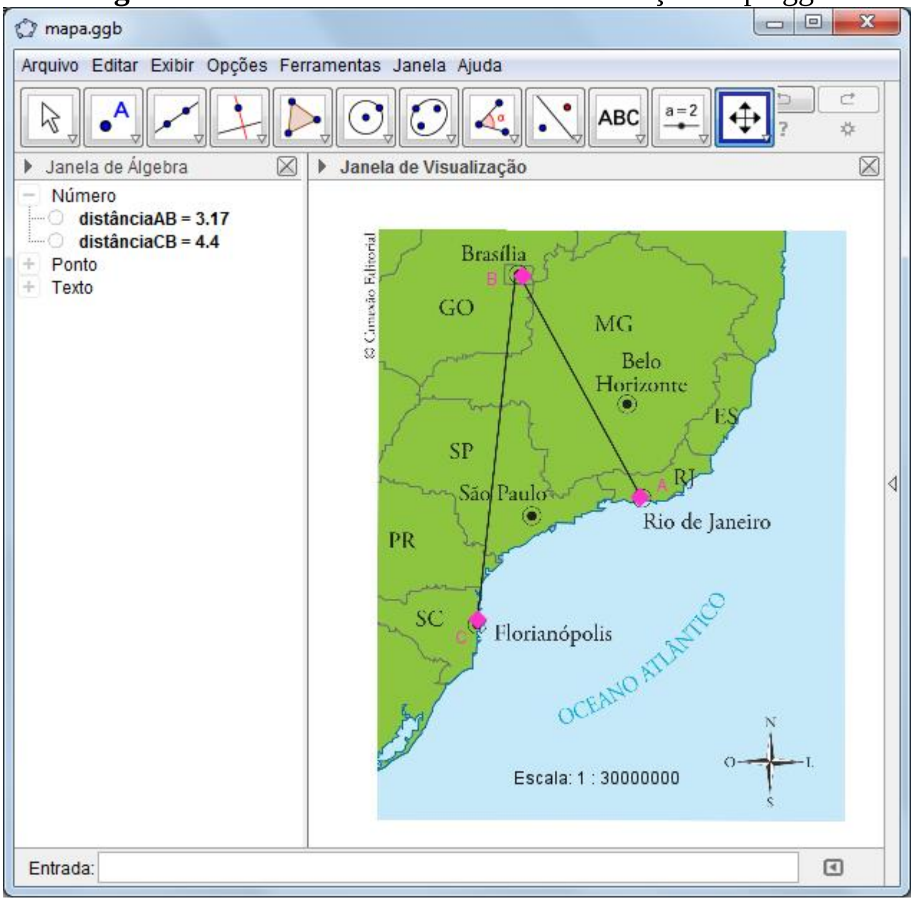
Na sexta questão (Quadro 10), primeiramente é solicitado que o arquivo mapa.ggb seja aberto (Figura 12). Nesse arquivo é pedido que seja medida a distância entre Brasília e Rio de Janeiro e entre Brasília e Florianópolis. Feitas as medições, é trabalhada a noção de escala, pedindo, então, que a distância real entre as cidades seja calculada no GeoGebra.

Quadro 10 – Questão 6 da atividade "Razão e Proporção"

6. O mapa do arquivo mapa.ggb foi feito na escala 1:30000000 (lê-se "um para trinta milhões", e isso significa que a cada 1 cm no mapa, temos 30.000.000 cm reais). Essa notação representa a razão de proporcionalidade entre o desenho e o real, ou seja, cada unidade no desenho é, na realidade, 30 milhões de vezes maior. *(Obs.: No GeoGebra, a representação é em unidades de comprimento (u.c.) em geral, e não em centímetros. Assim, destacamos que se trata de uma representação que não corresponde às reais unidades de medida tratadas nos itens a seguir, por exemplo, quando falamos que 1cm no mapa equivale a 30.000.000 cm reais, estamos considerando que cada 1u.c. no GeoGebra, representa 30.000.000 cm reais).* a. Utilizando a ferramenta distância, comprimento ou perímetro, meça a distância entre Brasília e Rio de Janeiro (pontos B e A). A distância no mapa é de cm. b. Utilizando a ferramenta distância, comprimento ou perímetro, meça a distância entre Brasília e Florianópolis (pontos B e C). A distância no mapa é de cm. -> Para os itens abaixo, utilize a caixa de entrada para fazer as contas, e visualize os resultados na janela de álgebra. c. Qual é a distância real entre Brasília e Rio de Janeiro em cm? E em Km? d. E a distância real entre Florianópolis e Brasília em cm? E em Km?

Fonte: a pesquisa.

Figura 12 – Tela do GeoGebra com construção mapa.ggb



Fonte: a pesquisa.

Em conversa com os professores, foi destacado que existem várias formas de transformar as medidas encontradas no mapa [registradas nos itens *a* e *b*] em medidas reais [itens *c* e *d*], mas que é preciso estar atento para não realizar apenas cálculos, aproveitando as respostas para explorar o Raciocínio Proporcional. Fazendo os cálculos sobre quais eram as distâncias no mapa, foi comentado sobre os erros comuns entre os alunos no momento de converter distâncias para outras unidades de medidas. Pensamos na possibilidade de aparecer um valor muito alto, como nove mil quilômetros.

Nesse sentido, Tiago afirmou: *"Eles ainda não têm muita noção, pois não há 9.000 quilômetros de distância territorial no Brasil"*. E com essa afirmação, foi retomada a importância de destacar as distâncias reais entre cidades, com a finalidade de, aos poucos, explorar escalas e medidas que façam sentido para o aluno. Outro apontamento foi feito por Elias, que sugeriu: *"Podemos usar escala [métrica] para fazer as transformações"*, destacando que essa questão abre espaço para explorar a escala métrica, retomando conceitos já abordados em aulas anteriores. Além desses comentários, uma observação foi dada sobre abordar escalas com o GeoGebra que levamos em consideração:

> *Davi: Esse exercício no GeoGebra fica complicado por um motivo. A escala tem que ser visual. E se você olhar nesse exercício, por exemplo: 3,17cm, você tem que mostrar na realidade. Precisa ter um método porque quando você amplia a imagem, a escala teria que mudar, senão perde o sentido da escala.*
> *Rejane: Na verdade, o GeoGebra não trabalha com um centímetro, é uma unidade de medida.*
> *Davi: Mas tem que mostrar ao aluno, pois talvez isso possa causar confusão. E teoricamente, na realidade, cada 1cm correto no mapa, quando você dá zoom, a escala perde sentido.*
> *Rejane: É. Porque aqui 3,17 não estão em centímetros. Se colocar a régua, pode dar diferente. É verdade, não havia pesado nisso.*

A fala do Davi buscou ressaltar que quando a tela é ampliada ou reduzida, a medida deixa de ser a medida real em centímetros, e que assim, a escala perde o sentido, se não for alterada simultaneamente. Por isso, acrescentamos a observação no enunciado: "No GeoGebra, a representação é em unidades de comprimento (u.c.) em geral, e não em centímetros. Assim, destacamos que se trata de uma representação que não corresponde às reais unidades de medida tratadas nos itens a seguir, por exemplo, quando falamos que 1cm no mapa equivale a 30.000.000 cm reais, estamos considerando que cada 1u.c. no GeoGebra, representa 30.000.000 cm reais". Mas todos concordaram que com essa questão é possível explorar conexões entre escala, razão e proporção, o que é de fundamental importância para que alunos possam ler mapas. Essa ideia é enfatizada por Silvestre (2013), que relata sua experiência com alunos do sexto ano em Portugal, com explorações que permitiram averiguar a existência de regularidades e de fator escalar em variáveis. A autora destaca que "a capacidade de raciocínio proporcional é importante não só na resolução de problemas do quotidiano, mas também na aprendizagem de outras noções matemáticas e de outras áreas do saber" (SILVESTRE, 2013, p. 11).

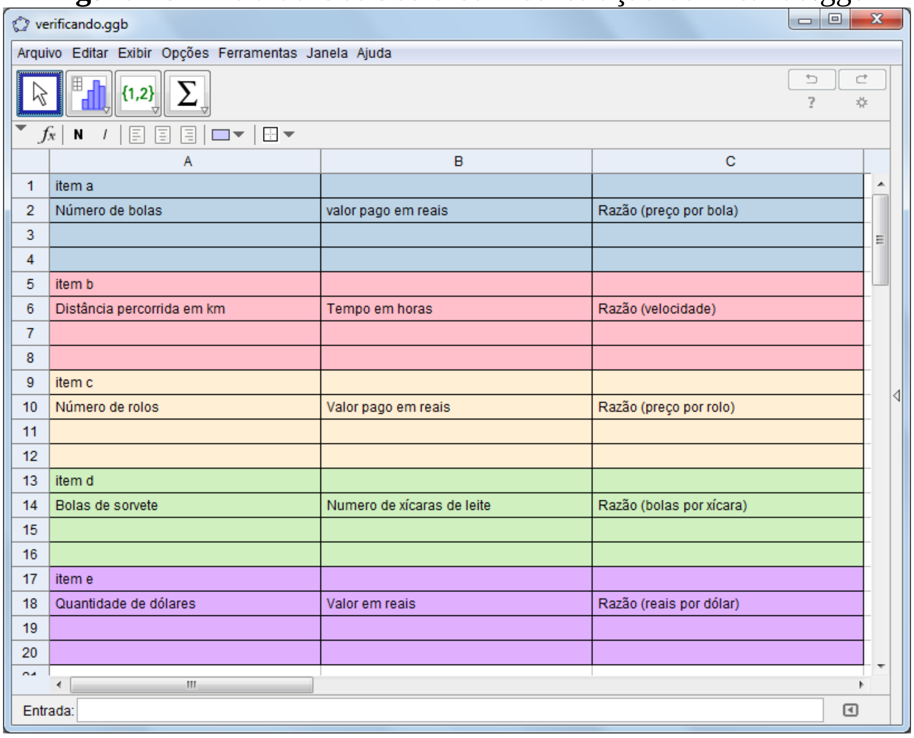
Na última questão dessa atividade (Quadro 11), primeiramente é solicitado que o arquivo verificando.ggb seja aberto (Figura 13). Nesse arquivo é pedido que a planilha seja preenchida de acordo com as informações que constam do item *a* ao *e*, e que a razão entre as grandezas envolvidas seja calculada. Por fim, é questionado se as situações descritas nos itens eram proporcionais, e nas situações não proporcionais, era preciso indicar qual das situações era mais vantajosa para o consumidor ou usuário.

Quadro 11– Questão 7 da atividade "Razão e Proporção

7. Para cada situação, preencha a planilha do arquivo verificando.ggb e calcule a razão entre as grandezas envolvidas na coluna C.
a. Se 5 bolas de futebol custam R$100,00, então 7 bolas custarão 140,00.
b. Um automóvel percorreu 120 km em 1 hora e meia. Em 2 horas, ele terá percorrido 160 Km.
c. Um supermercado vende 4 rolos de papel higiênico por R$3,00 e 12 rolos por R$8,00.
d. Em uma receita de *milk-shake*, recomenda-se colocar 3 bolas de sorvete de chocolate para 2 xícaras e meia de leite (1 xícara equivale a 250 ml). Para 1 litro de leite, devemos colocar 7 bolas de sorvete.
e. Em determinado dia, US$20,00 eram vendidos por R$36,00 e US$50,00 por R$90,00.
-> Agora responda se as situações descritas nos itens são proporcionais. Caso não sejam proporcionais, descreva qual das situações é mais vantajosa para o consumidor/usuário?
a. (   )SIM (   ) NÃO. ____
b. (   )SIM (   ) NÃO. ____
c. (   )SIM (   ) NÃO. ____
d. (   )SIM (   ) NÃO. ____
e. (   )SIM (   ) NÃO. ____

Fonte: a pesquisa.

Figura 13 – Tela do GeoGebra com construção verificando.ggb



Fonte: a pesquisa.

Em discussão dessa questão com os membros do Mapeamento, foi sugerido que, além de responder se as situações descritas nos itens eram proporcionais, é necessário solicitar a indicação da situação mais vantajosa para o consumidor/usuário, com a finalidade de que o aluno faça conexões com situações do seu cotidiano, o que foi acatado.

A atividade "Razão e Proporção" é concluída com essa questão. Nela a noção de situação mais vantajosa, ligada à proporcionalidade, é explorada. Assim, chegou-se ao consenso, naquela ocasião, que não basta calcular, é preciso refletir sobre as variáveis envolvidas na tomada de decisão e suas respectivas consequências.

Finalizando a atividade, questionei se eles queriam apontar algo sobre as possibilidades de exploração no GeoGebra das vertentes aritmética, geométrica e algébrica, o que suscitou os apontamentos:

> *Davi: Eu acredito que talvez, usar o GeoGebra traz uma visualização, ele pode visualizar o que está fazendo na sala de aula, e a fixação acho que entra aí.*
> *Diana: Acho que pode ajudar porque a gente tem, dentro da sala, vários meios, e acho que para aqueles alunos mais atrasados, pode facilitar.*
> *Henrique: Eu acho que um fator também é o de trabalhar de outra maneira, sair da sala de aula, ir para outro ambiente, contribui pra uma aprendizagem significativa, que acho que é possível por meio dos gráficos, das tabelas... é muito importante.*
> *Moisés: A gente tem que usar este instrumento [GeoGebra] porque ele é muito interessante.*

Esses trechos apontam interesse, ainda no começo do curso, pelo GeoGebra. Todos sempre apontavam o quanto esse software é interessante. Ao fim do curso, mesmo reconhecendo sua falta de experiência com o GeoGebra, a Professora Diana destaca como esse software é instigante.

> *Diana: Eu me considero leiga com relação às novas ferramentas tecnológicas, porém não me assustei com este programa, pois o mesmo é instigante. A meu ver este serve como complemento educacional no processo ensino-aprendizagem.*

O reconhecimento do potencial intradisciplinar do software ainda é discreto, apontado apenas por seus recursos, como a janela de visualização, gráficos e tabelas. Mas desde o primeiro encontro foi possível perceber a dedicação dos professores em realizar as atividades e colaborar para o aprimoramento de cada questão. Eles, inclusive, notaram que o GeoGebra pode proporcionar essa atuação intradisciplinar, ajudando na compreensão e na aplicação dos conteúdos matemáticos, assim como podemos ver no relato:

> *Miriam: O software GeoGebra proporciona ao aluno a visualização imediata da integração da aritmética, geometria e álgebra facilitando a compreensão e aplicação do conteúdo.*

E assim seguiu o curso. Ao longo dos encontros, com a realização de cada atividade, tínhamos a oportunidade de aprender mutuamente, sempre com foco no desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional no GeoGebra de modo intradisciplinar.

6.3 Atividade "Grandezas Proporcionais"

Essa atividade tem por objetivo relacionar grandezas proporcionais e não proporcionais com suas representações aritmética, geométrica e algébrica. Para tanto, são propostas questões (de 1 a 6) que exploram características entre as variáveis x e y, da perspectiva dessas três vertentes matemáticas, que permitem afirmar se as grandezas são diretamente proporcionais, inversamente proporcionais, ou não proporcionais. Nas questões finais (7 e 8) são exploradas aplicações da temática desenvolvida.

Destaco, como relatado no capítulo 2, que essa atividade foi também explorada no minicurso "Grandezas Proporcionais com GeoGebra: Possibilidades para o ensino integrado de geometria, aritmética e álgebra" ministrado no XII Encontro Nacional de Educação Matemática (FARIA *et al.*, 2016). Neste evento, explicitamos que sugestões eram bem-vindas, afinal, estávamos reunidos com professores de Matemática de diversos lugares do Brasil, e que queríamos, por meio daquela manhã de trabalho, contribuir para formação deles, mas também receber contribuições, aproveitando assim a oportunidade de, por meio do olhar profissional dos cursistas ali presentes, aprimorar a atividade, como pode ser visto ao longo desta seção.

As questões de 1 a 5[20] possuem a mesma estrutura. Inicialmente é solicitado que se faça o procedimento inicial (Quadro 12), que indica que os valores da tabela (Figura 14) devem ser digitados na planilha do GeoGebra. Em seguida, uma lista de pontos deve ser criada na janela geométrica, correspondente aos valores da planilha.

Quadro 12 – Enunciado da questão 1 da atividade "Grandezas Proporcionais"

1. Procedimento inicial: no GeoGebra, exiba os eixos e a planilha; digite na planilha os valores indicados na tabela, correspondentes aos de x na coluna A, e aos de y na coluna B. Selecione os campos que você digitou na tabela, clique com botão direito e vá em: *criar -> lista de pontos*. Ajuste o zoom da janela geométrica para visualizar os pontos marcados. Em seguida, observe o comportamento de y.

Fonte: a pesquisa.

[20] As questões de 1 a 4 desta atividade foram elaboradas com base na questão 2 da situação de aprendizagem 7 "Grandezas Proporcionais: Estudo Funcional, Significados e Contextos" do volume I do 9º ano do caderno do aluno do Estado de São Paulo (2014-2017). Já as questões 7 e 8 foram elaboradas com base nas questões 2 e 3 da situação de aprendizagem 8 "Representação Gráfica de Grandezas Proporcionais e de Algumas Não Proporcionais" do mesmo caderno. Apenas a tabela da questão 5 não foi retirada do referido caderno. Ela foi acrescentada com o intuito de explorar o comportamento do gráfico quando os valores dados não são todos positivos.

Figura 14 – Tabela de valores da questão 1 da atividade “Grandezas Proporcionais”

x	1	2	3	4	5	6	7
y	10	20	30	40	50	60	70

Fonte: a pesquisa.

Criada a lista de pontos, se iniciam alguns questionamentos (Quadro 13) na busca de identificar regularidades. No item *a*, é questionado se algum padrão é perceptível na variação de cada valor de x e de seu respectivo valor y.

O item *a* passou por um aprimoramento após o minicurso realizado no XII Encontro Nacional de Educação Matemática. Mesmo depois de passar por diversas revisões feitas por mim, por membros do Mapeamento, e pelos professores no curso onde os dados foram produzidos, este item tinha o seguinte enunciado: “Conforme o valor de x aumenta, o valor de y aumenta ou diminui?”. Com este enunciado, associávamos o aumento mútuo de valores das variáveis x e y com grandezas diretamente proporcionais. Enquanto que, quando o valor de x aumentava e o valor de y diminuía, associávamos as grandezas inversamente proporcionais. Contudo, fomos alertados por alguns participantes do minicurso deste evento que essa associação não vale para todos os casos. Exemplo disso pode ser dado pela equação y = - 3x, em que, enquanto os valores de x aumentam, os de y diminuem, embora se trate de grandezas diretamente proporcionais. Por conta desse importante alerta, mudamos o enunciado do item *a*, que, como consta no quadro 13, passou a ser: “Você consegue observar algum padrão (uma regularidade) na variação dos valores de x e de seu respectivo valor y?”.

Quadro 13 – Itens *a* a *d* da questão 1 da atividade “Grandezas Proporcionais”

a. Você consegue observar algum padrão (uma regularidade) na variação dos valores de x e de seu respectivo valor y? b. Sem fazer cálculos, você diria que x e y são diretamente ou inversamente proporcionais, ou não são proporcionais? c. Observe os valores em cada linha da planilha. O produto ou o quociente entre eles é constante? Para verificar o que foi perguntado, digite na célula C1 *A1*B1* e tecle enter, depois selecione C1 e usando o quadradinho no canto inferior direito da célula copie a fórmula até a linha 7. Repita na célula D1, mas agora digitando *A1/B1*, e copie a fórmula até a linha 7. Resposta: ( ) Sim ( ) Não d. Baseado nos cálculos realizados, você diria que x e y são diretamente ou inversamente proporcionais, ou não são proporcionais?

Fonte: a pesquisa.

Prosseguindo, diante da observação das regularidades, é questionado se já é possível afirmar se x e y são diretamente ou inversamente proporcionais, ou não são proporcionais. Após ser dada uma resposta intuitiva, alguns testes passam a ser feitos com a intenção de identificar características, como se o produto ou o quociente entre x e y é constante. Após os cálculos serem realizados, a pergunta do item *b* é repetida, mas com a intencionalidade de que a ela seja atribuída uma resposta com base nos cálculos realizados.

Finalizando cada uma das cinco questões iniciais, são propostos dois encaminhamentos diferentes, dentre os quais um deve ser escolhido, atendendo-se o critério de que no item *c* foi respondido que há uma constante, deve ser respondido os itens *e* e *f* do primeiro retângulo do quadro 14. Caso contrário, ou seja, se no item *c* foi respondido que não há uma constante, os itens *e* e *f* do segundo retângulo do quadro 14 devem ser realizados.

Especificamente no primeiro retângulo (quadro 14), o item *e* questiona sobre qual é a expressão que representa y em função de x. Encontrada essa expressão, é pedido no item *f* para que o gráfico que passa por estes pontos seja construído. Para tanto, a expressão do item *e* deve ser digitada na janela de entrada. A partir de então, deve ser observado qual foi a figura gerada, se ela passa por todos os pontos e pela origem.

Já no segundo retângulo (quadro 14), o caminho a ser seguido no item *e* consiste em fazer uma reta passando por dois pontos quaisquer, e observar se ela passa por todos os pontos e pela origem. Se passar por todos os pontos, o item *f* não deve ser feito, mas se não passar em algum ponto, o item seguinte deve ser realizado. O Item *f* solicitou que uma cônica passando por cinco dos pontos marcados seja construída e, em seguida, seja clicado com o botão direito sobre a expressão da cônica na janela de álgebra para que se observasse o nome da curva que foi formada, se ela passa por todos os pontos e pela origem.

Finalizando, algumas considerações devem ser registradas para que fique evidenciada a expressão que gerou o gráfico, a razão (caso exista) e o tipo de equação que levou a encontrá-la, além de uma breve descrição do gráfico criado (Quadro 14), conforme indicado em: "-> Nessa questão, como foi a expressão que gerou o gráfico? Caso tenha existido razão, com qual equação (colunas C e D da planilha) a encontramos? Como podemos descrever o gráfico criado?". Este item não existia quando realizamos a atividade com os professores. Ele foi acrescentado por ter sido atendida a sugestão da professora cursista Miriam que opinou que esse registro deveria estar ao final de cada questão, embora já fosse solicitado na sexta questão que as particularidades das questões de 1 a 5 fossem registradas nos itens *a, b* e *c* da questão 6. Nas palavras dela:

> *Miriam: Eu tinha pensado nessa questão [sexta] nas atividades [em cada questão de 1 a 5]. Ter perguntado onde a gente visualiza a razão no final das atividades.[...] Eu acho que deve estar em cada uma para eles visualizarem e já identificarem as particularidades de cada uma. E no concluindo [questão 6] pode manter.*

Quadro 14 – Finalização da questão 1 da atividade "Grandezas Proporcionais"

Se você respondeu sim na letra c, ou seja, que há uma constante, responda:
e. Qual a expressão que representa y em função de x?________________________
f. Agora, vamos construir o gráfico por estes pontos. Digite a relação encontrada na pergunta anterior na janela de Entrada do GeoGebra. Qual foi a figura gerada? Ela passa por todos os pontos? E pela origem?__________________________________

Se você respondeu na letra c que não há uma constante, vamos construir o gráfico:
e. Faça uma reta passando por dois pontos quaisquer dos sete que foram criados na janela de visualização. A reta passa por todos os pontos? E pela origem?__________
Se a reta elaborada no item anterior não passar por todos os pontos, faça o item a seguir:
f. Construa uma cônica passando por cinco desses pontos. Clique sobre a expressão da cônica com o botão direito na janela de álgebra, e diga: qual o nome da curva que foi formada? A Curva passa por todos os pontos? E pela origem?_____________

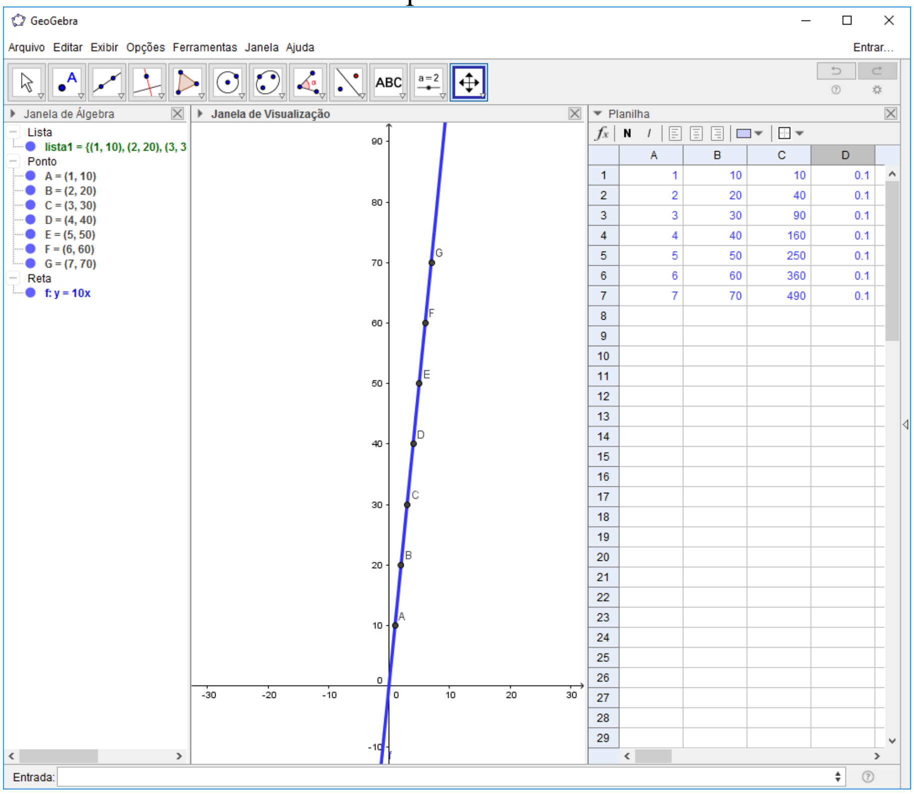
-> Nessa questão, como foi a expressão que gerou o gráfico? Caso tenha existido razão, com qual equação (colunas C e D da planilha) a encontramos? Como podemos descrever o gráfico criado?
-> Salve este arquivo.

Fonte: a pesquisa.

Especificamente na questão 1, os valores da tabela (Figura 14) são preenchidos, e a lista de pontos criada. Regularidades como quando x aumenta y também aumenta, e que o valor de y é dez vezes o de x podem ser observações a serem registradas no item *a*. No item *b*, quando questionado sobre a proporcionalidade entre x e y, a resposta deve ser intuitiva, o que pode resultar na resposta exata, ou seja, que são diretamente proporcionais, ou em outras respostas, que não devem ser caracterizadas como certas ou erradas, mas sim discutidas com a classe.

No item *c*, as colunas C e D da planilha do GeoGebra devem ser preenchidas, o que deve resultar na observação de que o produto não é constante, mas o quociente é sempre 0,1 (Figura 15). Por haver uma constante, um valor que é resultado do quociente entre todos os valores de x e de seus respectivos valores em y, a pergunta do item *b* é refeita, e uma resposta um pouco mais consistente é esperada a respeito da proporcionalidade entre as grandezas observadas.

Figura 15 – Tela do GeoGebra com construção da questão 1 da atividade "Grandezas Proporcionais"



Fonte: a pesquisa.

Como há uma constante na questão 1, a primeira parte da finalização deve ser respondida (Quadro 14), no item *e*, afirmando que a expressão que representa y em função de x é y = 10x, e no item *f*, por meio da observação do gráfico, que se trata de uma reta que passa por todos os pontos e pela origem. Por fim, as observações devem ser sintetizadas, a fim de que sejam ainda mais evidenciadas. Deve ser registrado que se trata de grandezas diretamente proporcionais, cuja expressão que gerou o gráfico é y = 10x, que existe razão e que foi encontrada com a coluna D da planilha, ou seja, com o quociente obtido pelo valor de x dividido por seu correspondente em y, e que o gráfico criado pode ser descrito como uma reta que passa por todos os pontos e pela origem. Ao final da realização dessa questão, foi realizada a seguinte discussão:

> *Rejane: Essa pergunta aqui está mostrando que o gráfico de uma grandeza diretamente proporcional é uma reta, e tem que passar por todos os pontos, senão, naquele ponto que não passou, não é proporcional. E também tem que passar pela origem. Isso aí foi uma coisa que eu fiquei martelando: Porque é que tem que passar pela origem? Se não passar pela origem é proporcional ou não é? O que vocês acham disso? Alguém já pensou sobre isso? Vamos tentar pensar em uma situação para aplicar isso, da vida. O que quer dizer passar no zero/zero [No ponto (0,0)]? [...] Vamos pensar: Uma corrida de táxi, é proporcional?*

A turma se divide entre as respostas, mas a maioria diz que é proporcional, e a discussão continua.

> *Miriam: O que a gente paga é.*
> *Henrique: Não.*
> *Rejane: Quem acha que é, nos diga porque é.*
> *Miriam: Se você andar 20 km é um valor, se andar 40km, será outro, proporcional.*
> *Henrique: Mas tem a bandeirada.*
> *Lívia: Mas tem a bandeirada, a taxa fixa, não tem?*
> *Moisés: Tem também qual bandeira, bandeira 2 é outro valor.*
> *Monalisa: Cada cidade é um valor...*
> *Rejane: Mas e na mesma cidade? No mesmo taxi, é proporcional? Vamos supor que você andou um quilômetro e ela andou 20 km, o que vocês vão pagar é proporcional à distância?*

Novamente os professores cursistas se dividem nas respostas. Alguns afirmam que o valor a ser pago é proporcional, outros dizem que não é proporcional.

> *Liliane: Se você andar muito ou andar pouquinho tem aquela taxa fixa. Vamos pensar na ideia da bandeirada, seria somar um b [pensando na equação da reta que é y = ax + b]. Só que se você não andar nada, você não pode falar que você vai pagar aquela taxa.*
> *Rejane: Mas se andou 10km ou andou 100km, a bandeirada é a mesma. O que a gente começou a pensar? O que eu pago no táxi é proporcional, ou não é? Não. Por quê? Porque não passa no (0,0). Como assim? Quando eu entro no táxi, ele [o taxista] ligou [o carro] e andou um metro, cobrou a bandeirada. A bandeirada é independente da distância que eu ando. Geralmente a bandeirada está em torno de quatro reais. Eu andei um metro, já tenho que pagar. E daí? Por que é que é proporcional ou não? O que é proporcional é o valor pago de acordo com os quilômetros. Isso é proporcional. Agora o valor total que se paga no final [da corrida], não é proporcional, porque não inicia no (0,0). Já existe um valor que é independente da distância. O que faz com que o valor final pago não seja proporcional. E quando eu pensei nisso fez todo sentido pra mim a reta passar no (0,0). Essa reta poderia ser, por exemplo, o valor pago, proporcional à distância percorrida, sem a bandeirada. Mas quando eu adiciono a bandeirada [deixa de ser proporcional].*
> *Liliane: Lembrando que pra x maior que zero.*
> *Rejane: Sim, com o táxi andando, porque se o taxi não andar?*
> *Liliane: Aí você não vai pagar.*
> *Rejane: Sim.*
> *Liliane: Para pensar na ideia do limite, para x maior que zero, no x igual a zero não. Mas pra x maior que zero é proporcional.*
> *Henrique: Assim, se você pensar na função do gráfico, y igual a quatro mais vinte centavos por quilômetro [y = 4 + 0,20x]*
> *Liliane: y = ax+b, onde b é a bandeirada.*
> *Henrique: Se o fixo é quatro, e você não andou nada, vinte centavos por quilômetro vezes zero vai dar nada, mas quatro você vai pagar, [afinal] você entrou no táxi. Entrou no táxi tem que pagar quatro reais.*
> *Liliane: Não. Se você não andou, você não paga.*
> *Henrique: Mas matematicamente é isso.*
> *Liliane: Tem que pensar na realidade. Você não andou, você não vai pagar.*
> *Henrique: Sim, mas matematicamente falando, na função, o valor pra x igual a zero é quatro.*

Liliane: Para x maior que zero é proporcional.
Rejane: Isso aí que temos que entender!
Henrique: Não, não é proporcional. Se andar um quilometro, você vai pagar quatro reais, mais um real, dá cinco reais [pensando em uma função do tipo y = 4 + 1x, ou seja, a bandeirada sendo quatro reais e um real por quilometro rodado]. Se eu andar dois quilômetros, eu não vou pagar dez reais, vou pagar seis reais. Então não é proporcional.
Rejane: Isso.
Liliane: Mas é proporcional ao valor do que vai andar, mais a taxa, a bandeirada.
Rejane: Então, mas o valor final que eu pago, sempre tem a bandeirada. Porque a bandeirada é fixa, faz com que o valor final pago não seja proporcional, independente da distância.
Liliane: Tirando a bandeirada, ele [o valor pago] vai depender de quanto você vai andar.
Henrique: Aí sim, seria proporcional.
Liliane: Então é proporcional ao que vai andar, mais a taxa fixa.
Rejane. Isso, mas estamos falando do valor final.
Liliane: Já com a taxa fixa.
Rejane: Se a pergunta for: O valor que eu pago em uma corrida de taxi é proporcional à distância que eu ando? Não é proporcional.
Liliane: Por causa da bandeirada.
Rejane: Sim, porque se eu andar 10 km, eu pago quatro [reais] de bandeirada, e se eu andar 100 km, eu pago quatro reais de bandeirada, e não 40 [reais]. É isso que faz com que o resultado não seja proporcional. Vocês conseguiram perceber a relação disso com o (0,0)? É o ponto de partida. Se existe uma constante, se o b for diferente de zero, não há proporcionalidade. [...] E o que se pode concluir disso tudo? Como é a função de um gráfico de uma grandeza proporcional?
Liliane: y = ax
Rejane: Ou y = ax + b, com b=0. Ou seja, o b tem que ser zero, não é zero, não é proporcional.
Tiago: Outro exemplo que pensei é quando a gente vai a um restaurante e tem couvert para pagar. Vamos supor que é dois reais. Você entra lá, independente se você come um quilo de comida ou cem gramas, você vai pagar [o mesmo valor].
Rejane: Sim, já incluem na comanda. Ninguém diz: Ah, eu quero consumir um couvert. Já está ali. Então é proporcional? Esse movimento de pensar sobre o gráfico é fundamental para o entendimento. Para existir essa relação entre álgebra, que seria a função, a aritmética, que são os valores que estou aplicando, e a geometria, que nesse caso é a reta. Então o gráfico pode ser uma reta em casos que não são proporcionais? Claro, só que o b é diferente de zero. Porque se o b é igual a zero, é proporcional. Ficou claro isso?

Muitos acenam concordando.

Rejane: Vocês têm algum outro exemplo?
Izadora: Ah, um estacionamento, onde a primeira hora custa três reais, e as seguintes custam um real e cinquenta centavos. Então o valor pago não é proporcional.
Rejane: Sim, pensamos em três exemplos [o do táxi, do couvert, e do estacionamento].

Outros exemplos foram dados ainda, como os custos mensais de uma empresa e o valor de uma viagem de carro, que inclui pedágios e combustível.

Esta foi a discussão com mais detalhes nesta atividade. Talvez por não haver unanimidade na resposta inicial sobre a proporcionalidade do valor pago em uma corrida de táxi. Muitos participaram desta discussão buscando explicar o seu entendimento da situação. Alguns, mais tímidos, não se manifestavam para toda a classe, mas ao analisar o vídeo, é muito notável que conversavam entre si, e embora não tenha sido possível captar nas gravações o áudio dos que falavam apenas com os colegas ao lado, é possível perceber que expunham o seu ponto de vista, falando sobre o assunto e gesticulando.

A análise dessa discussão remete às pesquisas que evidenciam as dificuldades que os alunos possuem de raciocinar proporcionalmente (BEN-CHAIM; KERET; ILANY, 2006; FERNÁNDEZ; LLINARES, 2012; LAMON, 2005; VAN DE WALLE, 2009). Mais especificamente, no que tange a dificuldade de associar o gráfico das grandezas proporcionais (vertente geométrica), com a função que a define (vertente algébrica), bem como com os valores a ela atribuídos (vertente aritmética). Como aponta Silva (2011):

> Os alunos não estão habituados a relacionar diferentes representações de função, sobretudo as representações gráficas e algébricas, confundindo-se em identificar se uma grandeza é direta ou inversamente proporcional, e também na elaboração de gráficos (SILVA, 2011, p. 16).

E as dificuldades dos alunos, enquanto crianças, por vezes se prolongam até se tornarem adultos. Como vemos na discussão, nem mesmo para os professores de Matemática é uma tarefa simples identificar se uma situação é ou não proporcional. Como apontam Cordel e Mason (2000), a capacidade de raciocinar proporcionalmente é resultado de um longo e complexo processo, que depende de diversas experiências para que haja compreensão do significado de uma relação proporcional.

Portanto, se não há experiências, ou se pouco tem sido refletido sobre questões que tangem o Raciocínio Proporcional, dificilmente haverá um entendimento das relações proporcionais, bem como do desenvolvimento da capacidade de classificar uma determinada situação como proporcional ou não proporcional. Como apontado por Ben-Chaim, Ilany e Keret (2002, 2008), os professores possuem lacunas relativas à tópicos matemáticos da Educação Básica, que perpassa os conteúdos relativos à proporcionalidade. Essas lacunas são uma forma de explicar que, por vezes, ocorrem situações nas salas de aula de Matemática, relativos à proporcionalidade, que os próprios professores não sabem lidar, como indicado por Paula (2012). E para saberem lidar com tais situações é importante ter clareza dos conteúdos, afinal, “ninguém promove o desenvolvimento daquilo que não teve oportunidade de desenvolver em si mesmo” (PIRES, 2002, p. 48). Exemplo disso pode ser visto no relato de uma professora referente ao encontro em que esta atividade foi discutida:

> *Denise: Com relação às atividades, fiquei muito impressionada com a relação entre proporcionalidade e a origem no plano cartesiano, nunca tinha me dado conta disso e vou aplicar essa novidade em minhas aulas nos nonos anos, a partir de junho eles começarão este assunto, de acordo com o caderno do aluno do Estado de São Paulo.*

A fala da professora indica que, após essa oportunidade que teve de discutir sobre o assunto, pretende explorar esse novo conhecimento com seus alunos.

Após a discussão desta questão, foi dada continuidade na realização da atividade. Na questão seguinte, novamente os valores da tabela são preenchidos (Figura 16), e a lista de pontos criada. Regularidades podem ser observadas e compartilhadas com a classe, mas nesta questão, elas não estão tão evidentes como na anterior. Uma comparação interessante pode ser feita ao observar um valor de x e seu respectivo valor y, e o valor de 2x e seu respectivo valor y, como, para x = 1, temos y = 48 e para x = 2, temos y = 24. Ou seja, quando x dobra, o valor de y é reduzido à metade, o que pode ser igualmente testado para os casos dos valores de x = 2 e x = 4, x = 3 e x = 6, e x = 5 e x = 10. Mas, talvez, nada seja observado inicialmente pelos alunos, o que não deve ser encarado como um problema.

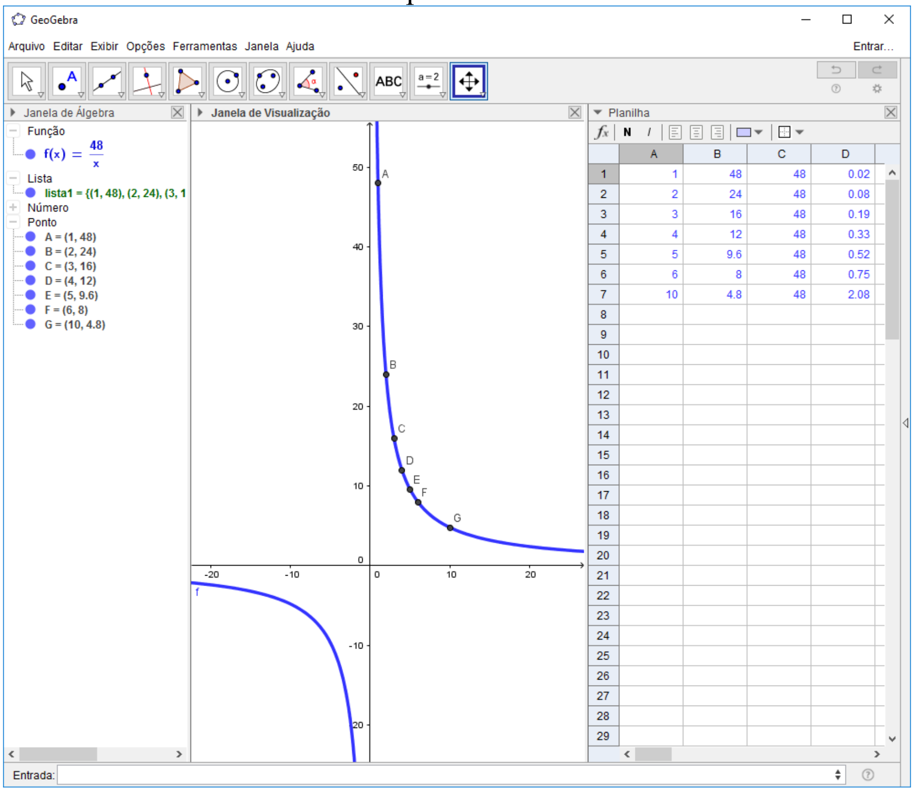
Figura 16 – Tabela de valores da questão 2 da atividade “Grandezas Proporcionais”

x	1	2	3	4	5	6	10
y	48	24	16	12	9,6	8	4,8

Fonte: a pesquisa.

No item *b* novamente serão questionados sobre a proporcionalidade entre x e y. Como a resposta deve ser resultado de um *insight*, várias respostas podem ser dadas, mas o mais importante é ficar atento para a resposta dada pelo aluno, com o intuito de entender e compartilhar os motivos que o levaram a certo entendimento. Ao preencher as colunas C e D da planilha do GeoGebra no item *c*, ficará mais claro que o produto é constante e resulta em 48 (Figura 17). Por haver uma constante, um valor que é resultado do produto entre todos os valores de x e de seus respectivos valores em y, a pergunta do item *b* é refeita, e uma nova resposta deve ser registrada no item *d*.

Figura 17 – Tela do GeoGebra com construção da questão 2 da atividade “Grandezas Proporcionais”



Fonte: a pesquisa.

Por haver constante, a finalização deve ser feita na primeira parte (Quadro 14). No item *e* deve ser apontado que a expressão que representa y em função de x é $y = \frac{48}{x}$, e no item *f*, que o gráfico é uma hipérbole, cujo ramo positivo passa por todos os pontos e não passa pela origem. Por fim, resumindo as observações, deve ser registrado que se trata de grandezas inversamente proporcionais, cuja expressão que gerou o gráfico é $y = \frac{48}{x}$, que existe razão e que foi encontrada com a coluna C da planilha, por meio do produto entre x e y, e que o gráfico criado pode ser descrito como uma hipérbole que passa por todos os pontos e não passa pela origem.

Nessa atividade um diálogo foi realizado sobre o gráfico desta questão, que é uma hipérbole, como pode ser visto a seguir.

> *Rejane: O que é este gráfico aqui?*
> *Roberta: É uma cônica*
> *Rejane: É uma cônica, mas é uma cônica específica. Qual é? [...] Ela passa por todos os pontos?*
> *Elias: Sim.*
> *Rejane: Passa pela origem?*
> *Elias: Não.*
> *Rejane. A figura formada foi uma cônica, mas eu queria falar um pouco mais sobre isso. Alguém sabe o nome dela?*
> *Elias: Hipérbole.*

> *Rejane: Bom, e daí vocês me dizem assim: Rejane, mas eu não vou trabalhar hipérbole com meus alunos do Ensino Fundamental. E aí? Essa foi uma discussão que a gente [os membros do Mapeamento] teve antes de trazer essa atividade para cá. A gente quis pensar sobre. A gente nunca tinha parado para pensar sobre qual é o gráfico de uma grandeza proporcional e qual é o gráfico de uma grandeza não proporcional. A gente descobriu, investigando, embora é claro, não fomos nós que fizemos essa descoberta matemática, mas a gente não tinha se atentado a isso. A gente percebeu que o gráfico das grandezas diretamente proporcionais é uma reta que passa pela origem, e que [o gráfico] da inversamente proporcional é uma hipérbole, só que estamos trabalhando isso com o Ensino Fundamental II. E aí? O que eu faço?*
>
> *Miriam: Você pode construir com eles [os alunos] e simplesmente nomear, dizer que se chama hipérbole. Não precisa aprofundar. E dizer que eles verão isso com mais detalhes no Ensino Médio. Eu faço isso quando acontece de entrar em conteúdos que não são da série. A gente mostra, fala, comenta e explica que eles vão aprender mais detalhes no Ensino Médio.*
>
> *Rejane: Porque assim, eu tenho a sensação que o que acontece na nossa sala de aula é o contrário, por conta que a gente tem um currículo a seguir. Por exemplo, a parábola. Geralmente ela não emerge de um conteúdo anterior. E é isso que me incomoda. Eu me lembro do Lorenzato [em Lorenzato* (2006)*] falando que se você ouviu vários instrumentos, mas nunca os ouviu tocando juntos, você nunca vai saber o que é uma orquestra. Se eu já ouvi todos os instrumentos separados, já escutei um violino, já escutei um violoncelo, já escutei um piano, mas se não os escutei juntos em uma orquestra, isso me soa diferente. E aquela história do elefante também, em que vários cegos passaram a mão no elefante, e cada um ficou com uma versão do elefante. O que é que isso tem a ver com a Matemática? Eu acho que as coisas estão muito relacionadas. Só que a gente aprendeu a ensinar tudo muito separado. Eu aprendi separado e acho que nunca vi hipérbole na escola quando estudei [na Educação Básica]. E também nunca ensinei hipérbole, pois também eu só lecionei até o primeiro ano do Ensino Médio, nunca lecionei nas outras séries [do Ensino Médio]. Mas eu acho que, apesar de esse conteúdo ser do Ensino Médio, a minha opinião é que a gente pode fazer isso no Ensino Fundamental, e mostrar: Olhem, o gráfico emergiu! E explicar: é uma curva específica, é uma hipérbole, e a dica da Miriam foi dizer que vamos estudar isso mais para frente. Mas queria saber: Alguém tem alguma outra sugestão? Pensa o contrário? Acham que a gente não deve fazer isso no Ensino Fundamental por conta que eles não vão estudar hipérbole?*
>
> *Elias: Eu concordo com a colega. Acho que a gente pode fazer e dar essa orientação, que depois vai ser aprofundado. Pelo menos eles [os alunos] já tem uma ideia, conhecem o nome da cônica.*

Em uma das minhas falas do diálogo acima, retomei com os professores as histórias da orquestra e dos sábios cegos contadas por Lorenzato (2006), com a finalidade de ilustrar a relevância da Intradisciplinaridade Matemática. Essas histórias foram contadas para os professores cursistas no primeiro encontro, quando apresentamos o curso e falamos um pouco sobre as principais temáticas. Esse diálogo aqui relatado ocorreu no terceiro encontro, onde tive a oportunidade de repetir a ideia central das duas histórias, que estão relatadas na primeira seção do quarto capítulo desta tese. Tanto a ilustração da orquestra, quanto dos sábios cegos e o elefante nos ajudam a compreender melhor que conhecer algumas ou até mesmo todas as partes isoladas de um todo, não significa que se conhece o todo. Na perspectiva matemática, implica que conhecer aritmética, ou geometria, ou álgebra separadamente, ou ainda duas delas ou todas elas de forma isolada, não é suficiente para construir um entendimento matemático geral, capaz de integrar, ordenar e indicar conexões da Matemática com a própria Matemática (LORENZATO, 2006). Com essa discussão encerramos a questão 2 e prosseguimos na atividade.

Na questão 3, a parte inicial deve ser realizada, com os valores da tabela preenchidos (Figura 18), e a lista de pontos criada. As regularidades podem ser compartilhadas no item *a*, e no item *b* poderão registrar se a tabela parece apresentar grandezas diretamente, inversamente ou não proporcionais.

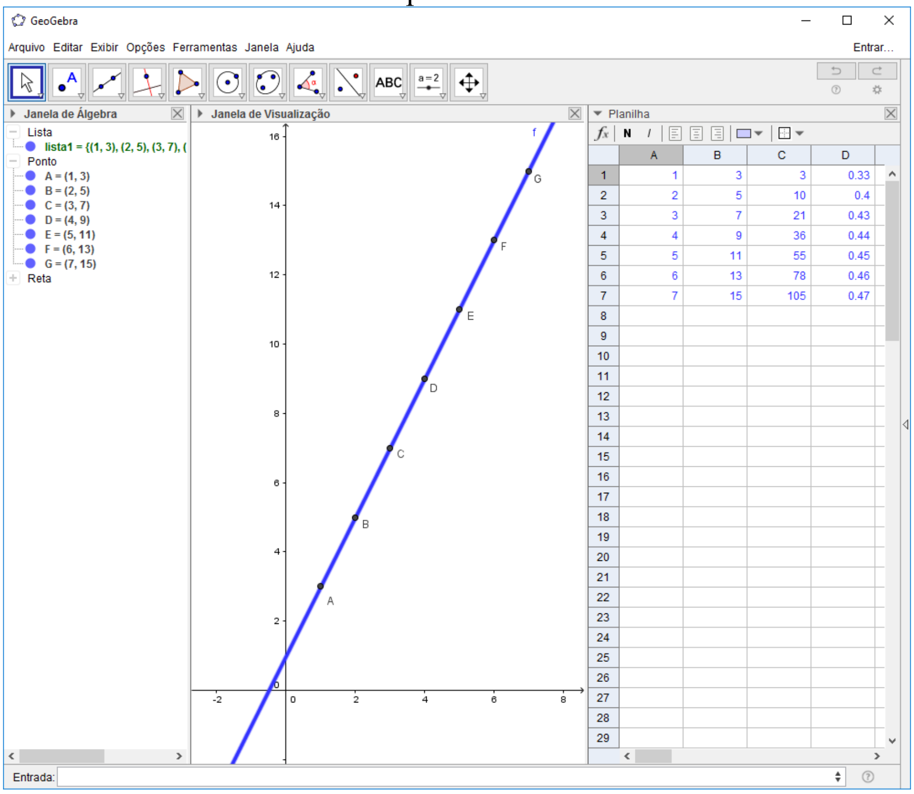
Figura 18 – Tabela de valores da questão 3 da atividade "Grandezas Proporcionais"

x	1	2	3	4	5	6	7
y	3	5	7	9	11	13	15

Fonte: a pesquisa.

Ao completar as colunas C e D da planilha do GeoGebra no item *c*, poderá ser observado que não há razão, ou seja, nem o produto, nem o quociente resultam em uma constante (Figura 19). Por não haver constante, espera-se que quando a pergunta do item *b* é refeita no item *d*, a resposta dos alunos seja de que não há proporcionalidade entre as grandezas observadas.

Figura 19 – Tela do GeoGebra com construção da questão 3 da atividade “Grandezas Proporcionais”



Fonte: a pesquisa.

Por não haver constante, a finalização deve ser feita na segunda parte (Quadro 14). Ao fazer uma reta que passa por dois pontos, é possível notar que ela passa por todos os pontos, mas não passa pela origem. Sintetizando a questão, deve ser registrado que se trata de grandezas não proporcionais, cuja expressão que gerou o gráfico é y = 2x+1, que não existe razão, e que o gráfico criado pode ser descrito como uma reta que passa por todos os pontos, mas não passa pela origem.

Nesta questão destaquei apenas que passar por todos os pontos é uma condição necessária para ser o gráfico de uma grandeza diretamente proporcional, mas não é suficiente, pois existe a outra condição, que é a reta passar pela origem, como foi tão discutido na primeira questão. O que significa que não é proporcional.

Na questão seguinte, novamente os valores da tabela devem ser preenchidos (Figura 20), e a lista de pontos criada na planilha do GeoGebra. Ainda em uma observação inicial, deve-se procurar algum padrão de variação para os valores de x e y, que poderão ser expostas no item *a*. Dotado das impressões iniciais, é possível responder se os valores apresentados estão ligados às grandezas diretamente, inversamente ou não proporcionais.

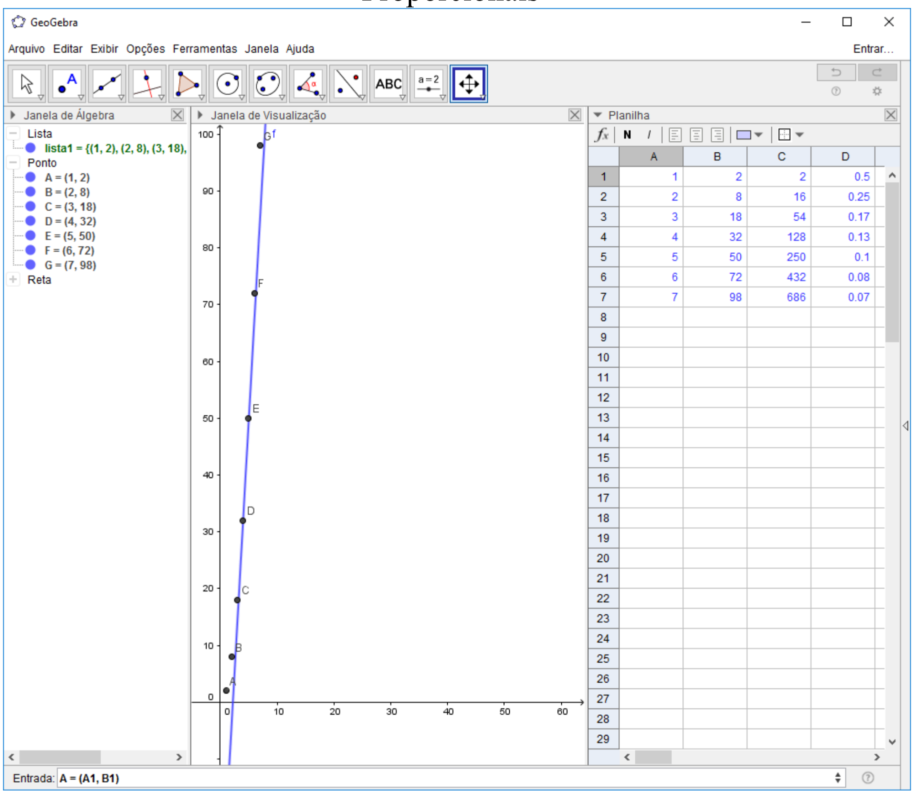
Figura 20 – Tabela de valores da questão 4 da atividade “Grandezas Proporcionais”

x	1	2	3	4	5	6	7
y	2	8	18	32	50	72	98

Fonte: a pesquisa.

Preenchendo as colunas C e D da planilha do GeoGebra no item *c*, poderá ser observado, novamente, que não há razão, ou seja, nem o produto, nem o quociente resultam em uma constante (Figura 21). Por não haver constante, espera-se que ao perguntar novamente no item *d*, a resposta dos alunos seja de que não há proporcionalidade entre as grandezas observadas.

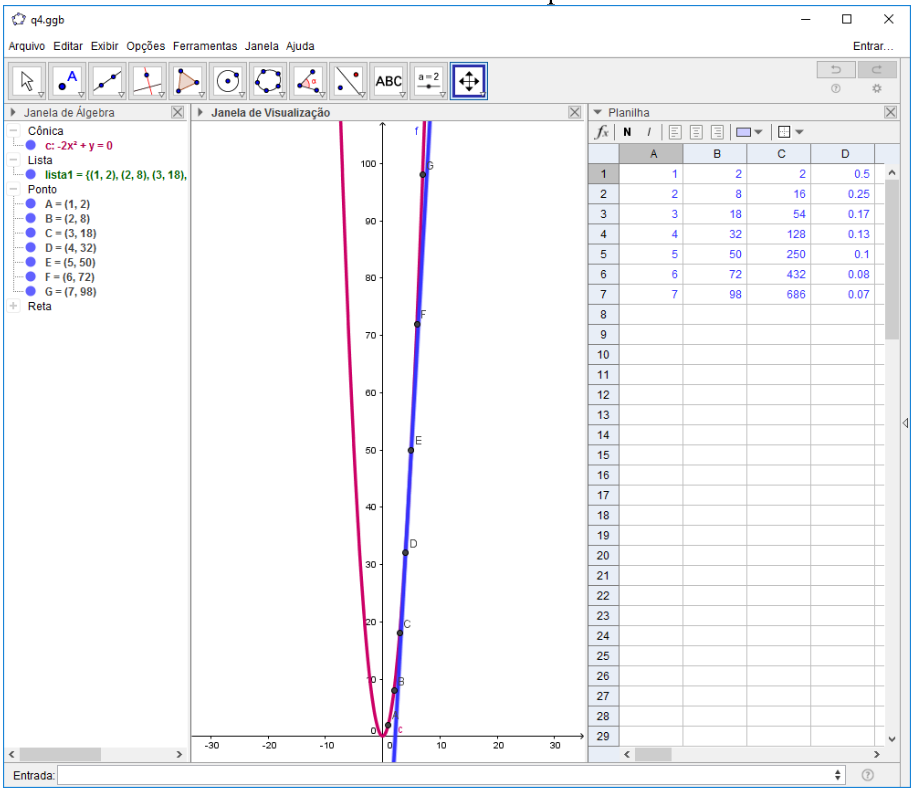
Figura 21 – Tela do GeoGebra com construção da questão 4 da atividade “Grandezas Proporcionais”



Fonte: a pesquisa.

Por não haver constante, a finalização deve ser feita na segunda parte (Quadro 14). Ao fazer uma reta que passa por dois pontos, é possível notar que ela não passa por todos os pontos nem pela origem. Mas é preciso estar atento, aproximar a tela de cada ponto, para que fique nítido que a reta não passa por todos os pontos. Na figura 21, por exemplo, escolhi a reta passando pelos pontos D e E, e embora a reta se aproxime dos demais pontos, não passa por nenhum deles. De igual modo, a reta se aproxima da origem, mas não passa no ponto (0,0). Como a reta elaborada não passa por todos os pontos, é pedido, ainda, que uma cônica, passando por cinco pontos, seja criada. Ao realizar essa etapa, uma parábola é formada, que passa por todos os pontos e pela origem (Figura 22).

Figura 22 – Tela do GeoGebra com construção da parábola no item *f* da questão 4 da atividade "Grandezas Proporcionais"



Fonte: a pesquisa.

Sintetizando a questão, deve ser registrado que se trata de grandezas não proporcionais, pois não há razão, que a expressão que gerou o gráfico da parábola é $y = 2x^2$, e que ela passa por todos os pontos e pela origem. Ao encerrar esta questão foi apontado apenas que, caso a turma em que for realizada a atividade não tenha ainda estudado parábola, seja feito o mesmo que foi sugerido na discussão da segunda questão, onde o gráfico é uma hipérbole. Ou seja, que seja explicitado que o gráfico é uma parábola, e sejam exploradas as questões mais evidentes da questão. Sobre os demais detalhes pode ser indicado que se trata de um conteúdo que será explorado mais adiante. Contudo, é muito importante estar atento em como fazer essa ressalva de que o aprofundamento do conteúdo será em outro momento. Discutimos sobre isso, como pode ser lido no diálogo a seguir:

> *Rejane: Se o aluno for muito curioso, a gente pode dar uma indicação de leitura, ou trazer uma atividade para ele, estimular para ele investigar.*
> *Liliane: Porque podar não, a gente deve estimular!*
> *Rejane: Sim, não é falar no sentido de: "Olha, esquece isso! Você vai estudar só no primeiro ano!". Não é nesse sentido. E se talvez você achar que o aluno está muito interessado, você pode dar exemplos iniciais com a parábola. Tudo depende do ritmo da turma. Porque se a turma também for muito curiosa, é ruim ficar só falando para esperarem outra série. Talvez*

> *não seja possível aprofundar, mas já dá para ele [o aluno] ter noção. O que vocês acham?*
> *Liliane: Isso. Depende. Dá para dar alguns exemplos, e vai do nível de curiosidade da turma, o que dá para perceber. Às vezes também pode ter um ou outro [aluno] que quer saber mais. De repente, com aquele [aluno que quer saber mais], você pode dar algumas indicações, mostrar alguma coisa e falar que existem outras coisas, que existe literatura, mostrar um livro, se ele tem condições de explorar mais.*
> *Rejane: Concordo com isso.*

Com essa ressalva, foi destacada a importância de não podar a curiosidade do aluno. Contudo, foi apontado que não se deve também deixar de abordar um assunto que venha a emergir, como a parábola nesse caso, somente pelo fato de o currículo oficial indicar que se trata de um conteúdo destinado a outra série.

Após esses comentários, seguimos na realização da atividade. Na quinta questão, ao preencher os valores da tabela (Figura 23) na planilha do GeoGebra e ao criar a lista de pontos, é possível ficar atento aos padrões e notar que os valores de y são três vezes o valor de x, com sinal oposto.

Figura 23 – Tabela de valores da questão 5 da atividade "Grandezas Proporcionais"

x	-5	-3	-1	1	3	5	7
y	15	9	3	-3	-9	-15	-21

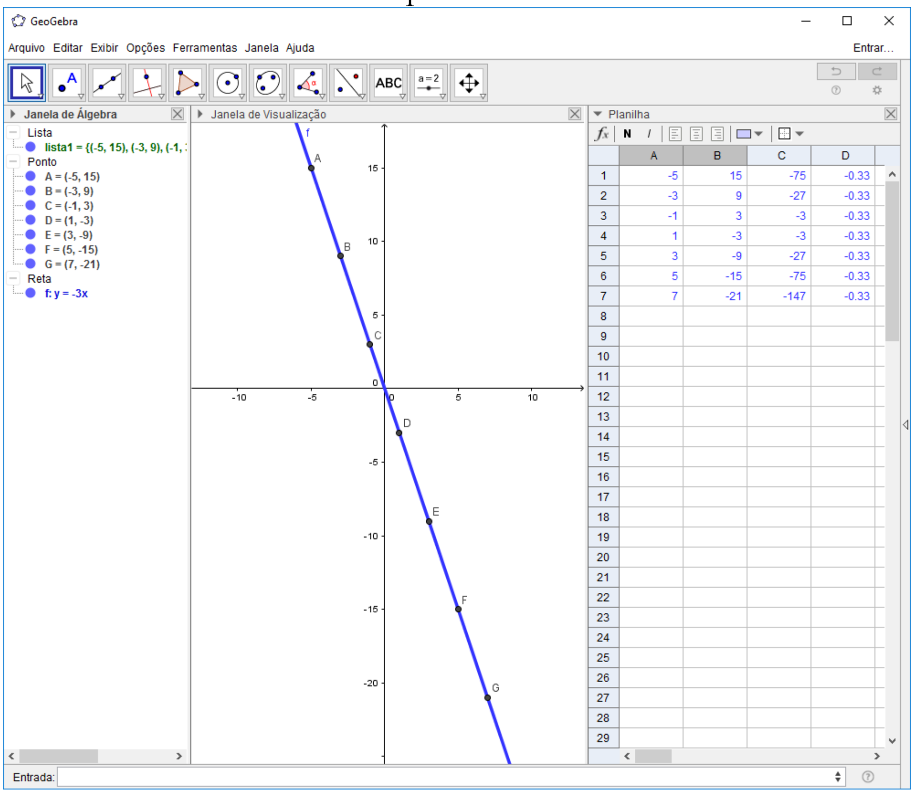
Fonte: a pesquisa.

Portanto, é notável uma regularidade que indica que os valores de y são diretamente proporcionais aos seus correspondentes em x. Reitero que a tabela deste item não foi retirada do caderno do estado, como as anteriores, mas foi acrescentada com o intuito de explorar o comportamento do gráfico quando os valores dados não são todos positivos. A sugestão de acrescentar essa tabela foi feita pelos membros do Mapeamento em uma das revisões da atividade. Os professores e pesquisadores enfatizaram que não devemos trabalhar apenas com valores positivos, e que por isso deveríamos introduzir valores negativos na exploração desta questão.

Esclareço que os valores das variáveis x e y desta tabela podem ser definidos pela função $y = -3x$. Contudo, durante o curso realizado, a função que definia os valores da tabela era $y = 3x$, e que, portanto, os valores da tabela também eram outros. Esta alteração foi feita atendendo sugestões dos professores que participaram do minicurso realizado no XII Encontro Nacional de Educação Matemática, que apontaram a importância de um exemplo que não siga a lógica de que, quando o valor de x aumenta e o valor de y também aumenta, se trata de grandezas diretamente proporcionais. Assim, a atividade foi aprimorada e passou-se a apresentar um exemplo de grandezas diretamente proporcionais em que, enquanto os valores de x aumentam, os de y diminuem.

Ao completar as colunas C e D da planilha do GeoGebra no item *c*, poderá ser observado que existe razão, e que esta é obtida por meio do quociente entre os valores de x e y (Figura 24). Portanto, ao repetir no item *d* a pergunta feita no item *b*, espera-se que a resposta dos alunos seja que os valores são diretamente proporcionais.

Figura 24 – Tela do GeoGebra com construção da questão 5 da atividade "Grandezas Proporcionais"



Fonte: a pesquisa.

Por haver constante, a finalização deve ser feita com a primeira parte (Quadro 14), apresentando que y = -3x é a expressão que representa y em função de x. Ao digitar essa função na caixa de entrada, é gerada uma reta que passa por todos os pontos e pela origem. Sintetizando a questão, deve ser registrado que se trata de grandezas diretamente proporcionais, cuja expressão que gerou o gráfico é y = -3x, que a razão pode ser obtida por meio do quociente entre os valores de x e y, e que o gráfico criado é uma reta que passa por todos os pontos e pela origem. Essa questão foi finalizada com os professores sem novas sugestões. Foi dito apenas que é possível, com esta questão, trabalhar os mesmos exemplos já citados na primeira questão, como o exemplo do táxi e do couvert artístico.

A questão cinco finaliza os exemplos a serem explorados nesta atividade sobre as grandezas diretamente e inversamente proporcionais, bem como não proporcionais. Então, com o intuito de relacionar as respostas anteriores, agrupando as características em comum dos gráficos, expressões e valores que caracterizam as grandezas, é apresentada a questão 6 (Quadro 15).

Quadro 15 – Questão 6 da atividade "Grandezas Proporcionais"

6. Concluindo as questões de 1 a 5... a. Com base nas questões *1* e *5*, o que você conclui sobre a expressão de grandezas diretamente proporcionais? Com qual equação, colunas C e D da planilha, encontramos a constante em grandezas desse tipo? Como é o gráfico das grandezas diretamente proporcionais? b. Com base na questão 2, o que você conclui sobre a expressão de grandezas inversamente proporcionais? Com qual equação, colunas C e D da planilha, encontramos a constante em grandezas desse tipo? Como é o gráfico das grandezas inversamente proporcionais? c. Nos casos que vimos, as grandezas não proporcionais possuem uma constante? Como foram os gráficos nestes casos?

Fonte: a pesquisa.

Nesta questão, é retomado no item *a* que a expressão de grandezas diretamente proporcionais é do tipo y = ax + b, com b = 0, e a $\neq$ 0. Nas expressões deste tipo, a constante é encontrada por meio do quociente entre os valores de x e y (coluna D, onde a constante c é obtida por c $= \frac{x}{y}$), e o gráfico criado é uma reta que passa por todos os pontos e pela origem. No item *b* deve ser registrado que a expressão de grandezas inversamente proporcionais é do tipo $y = \frac{a}{x}$, com a $\neq$ 0 e x $\neq$ 0. Nas expressões deste tipo, a constante é encontrada por meio do produto (coluna C, onde a constante c é obtida por c = x.y) entre os valores de x e y, e o gráfico criado é uma hipérbole que passa por todos os pontos, mas não passa pela origem. Por fim, no item *c*, deve ser apontado que nos casos vistos, as grandezas não proporcionais não possuem uma constante, e que os gráficos foram retas que não passam pela origem ou por todos os pontos, e uma parábola. Ao concluir a realização dessa questão com os professores, a professora Miriam fez um comentário.

> *Miriam: Eu acho que esse concluindo é uma revisão de tudo que ele fez, dos pontos principais. Um excelente meio de gravar. Se ele gravar isso daqui [respostas dos itens da questão 6], ele pode ver uma lista de gráficos e identificar qual é de proporção e qual não é. Passou pela origem ou não passou pela origem? Ele será capaz de identificar. Achei que essa conclusão foi maravilhosa. Fez toda a diferença.*

Esta questão também foi acrescentada após sugestões de membros do Mapeamento, que destacaram a importância de uma questão que evidenciasse as características em comum das grandezas diretamente e inversamente proporcionais, de forma a retomar o que foi feito em cada questão anterior.

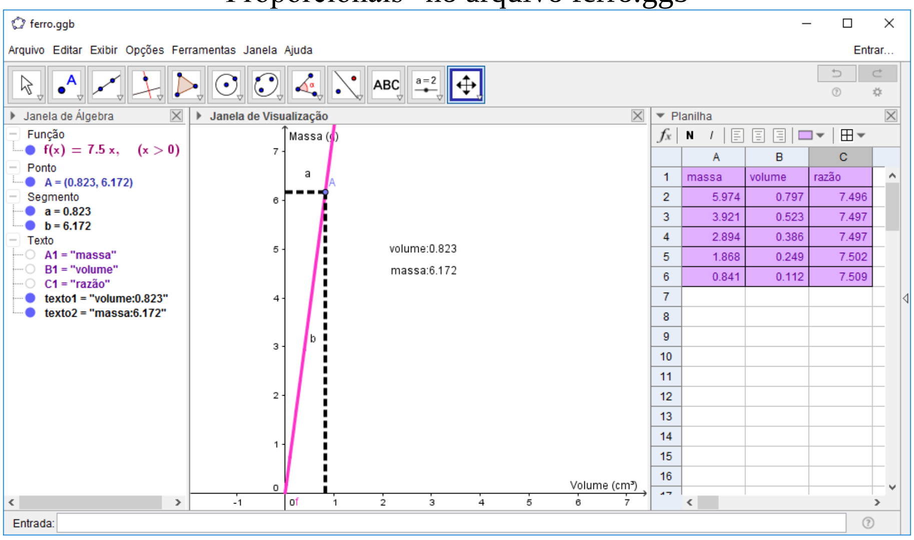
Após essas questões, foram feitas duas com aplicações das grandezas proporcionais. Na questão 7 (Quadro 16), inicialmente é solicitado que se abra o arquivo ferro.ggb, representado na Figura 25.

Quadro 16 – Questão 7 da atividade "Grandezas Proporcionais"

7. Abra o arquivo *ferro.ggb*. O gráfico representado na janela geométrica apresenta a relação entre a massa e o volume do ferro. Vamos explorar esse gráfico. -> Movimente o ponto A sobre a reta e observe os valores mostrados. a. Qual é a massa de uma amostra de ferro cujo volume é $4cm^3$? b. Qual é o volume de uma amostra de ferro de 15g de massa? c. Mova o ponto A, de modo a escolher 5 novas coordenadas aleatórias para ele e digite a massa e volume correspondente na planilha (caso tenham números decimais, substitua a vírgula por ponto). d. Agora, use a coluna C da planilha para calcular a razão entre estes valores (Digite na célula C2 *A2/B2* depois copie esta fórmula para as outras células). Qual é esse valor? e. Baseado nessa informação e no gráfico, você diria que a massa e o volume de uma amostra de ferro não são proporcionais, são diretamente ou são inversamente proporcionais? Por quê? f. Caso sejam proporcionais, qual a constante de proporcionalidade? g. Escreva a relação entre a massa, *m*, e o volume, *v*, por meio de uma expressão: h. Por fim, exiba a janela de álgebra (exibir -> janela de álgebra) e observe a equação da reta apresentada. Como ela está relacionada com a expressão do item anterior?

Fonte: a pesquisa.

Figura 25 – Tela do GeoGebra com solução da questão 7 da atividade "Grandezas Proporcionais" no arquivo ferro.ggb



Fonte: a pesquisa.

Na construção aberta, o ponto A era movimentado sobre a reta, com o intuito de que os valores fossem mostrados nas caixas de texto *volume* e *massa*, exibidas na janela de visualização. Depois dessa movimentação aleatória inicial, é pedido que alguns pontos específicos sejam observados, como a massa de uma amostra de ferro cujo volume é $4cm^3$ (item *a*) e o volume de uma amostra de ferro de 15g de massa (item *b*).

Dando continuidade, é pedido que o ponto A seja movimentado novamente e que 5 novas coordenadas aleatórias sejam escolhidas (item *c*). Essas coordenadas devem ser digitadas para a massa e o volume correspondente na planilha. Além disso, a coluna C da planilha deve ser utilizada para calcular a razão entre estes valores (item *d*). Encontrada a razão, e também com base no gráfico e nas movimentações realizadas, é questionado no item *e* se a massa e o volume de uma amostra de ferro não são proporcionais, são diretamente ou são inversamente proporcionais. Caso sejam proporcionais, a constante de proporcionalidade deve ser indicada no item *f*. Na sequência, a massa m, e o volume v, deve ser exposta por meio de uma expressão (item *g*). Por fim, é solicitado, no item h, que a janela de álgebra seja exibida e a equação da reta apresentada seja observada, para que seja respondido como tal equação está relacionada com a expressão do item *f*.

Na discussão final desta questão, foi ressaltado que, no item *g*, é importante que ao escrever a relação entre a massa e o volume, por meio de uma expressão, não podemos esquecer de destacar que os valores de x precisam ser maiores que zero.

> *Rejane: Por que o x tem que ser maior que zero?*
> *Henrique: Porque não existe um volume negativo.*
> *Rejane: Isso aí! A gente precisa explicar isso nesse momento.*
> *Karolina: Se o volume for igual a zero, também não existe massa.*
> *Rejane: Sim, podemos destacar.*

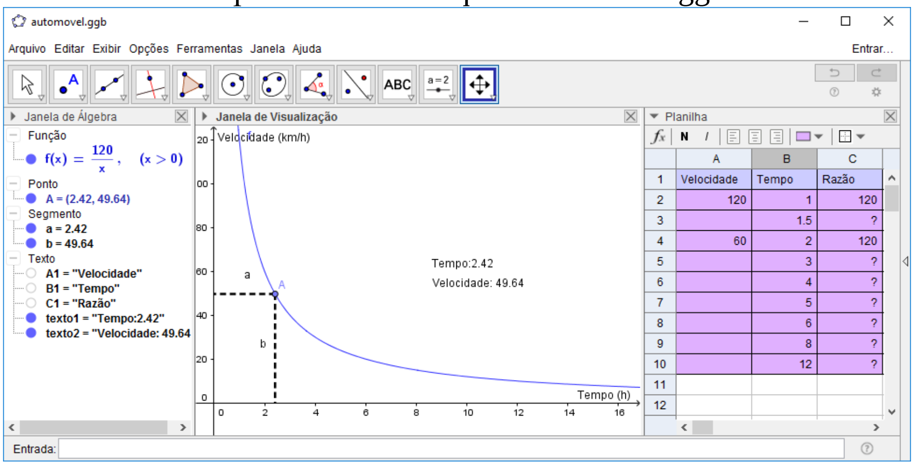
E assim encerramos esta questão. Na seguinte, a última questão desta atividade, outro exemplo de aplicação das grandezas proporcionais é apresentado (Quadro 17). Para tanto, é solicitado que o arquivo automovel.ggb seja aberto (Figura 26).

Quadro 17 – Questão 8 da atividade "Grandezas Proporcionais"

8. Abra o arquivo automovel.ggb. O gráfico representado na janela geométrica apresenta a relação entre a velocidade e o tempo de um automóvel que precisa percorrer 120 Km. Vamos explorar esse gráfico.
-> Movimente o ponto A sobre a curva e observe os valores mostrados.
a. Para que o veículo percorra 120Km em 2h, em qual velocidade média ele deve fazer o caminho?
b. Quanto tempo o veículo levará para percorrer os 120Km, se ele estiver a uma velocidade de 40Km/h?
c. Mova o ponto A, investigando suas coordenadas, de modo a completar na planilha a velocidade correspondente a cada tempo dado.
d. Agora, use a coluna C da planilha para calcular a multiplicação entre estes valores (Digite na célula C2 *A2*B2* depois copie esta fórmula para as outras células.
e. Baseado nessa informação e no gráfico, você diria que a velocidade e o tempo de um automóvel não são proporcionais, são diretamente ou são inversamente proporcionais? Por quê?
f. Caso sejam proporcionais, qual a constante de proporcionalidade?
g. Escreva a relação entre a velocidade *v*, e o tempo *t*, por meio de uma expressão:
h. Por fim, exiba a janela de álgebra (exibir -> janela de álgebra) e observe a equação da curva apresentada. Como ela está relacionada com a expressão do item anterior?

Fonte: a pesquisa.

Figura 26 – Tela do GeoGebra com solução da questão 8 da atividade "Grandezas Proporcionais" no arquivo automovel.ggb



Fonte: a pesquisa.

Nessa construção aberta, o ponto A deve ser movimentado sobre a curva, com o intuito de que os valores sejam mostrados nas caixas de texto *tempo* e *velocidade*, exibidas na janela de visualização. Depois dessa movimentação aleatória inicial, é questionado qual deve ser a velocidade média para que o veículo percorra 120Km em 2h (item *a*), e o tempo necessário para que o veículo possa percorrer os 120Km, se ele estiver a uma velocidade de 40Km/h (item *b*).

Dando continuidade, é pedido que o ponto A seja movimentado novamente e que a planilha no GeoGebra seja completada com a velocidade correspondente a cada tempo dado (item *c*). Na sequência, a coluna C da planilha deve ser usada para calcular o produto entre estes valores da velocidade e do seu respectivo tempo.

Com esse valor calculado e com o gráfico analisado, no item *e* é questionado se a velocidade e o tempo de um automóvel não são proporcionais, são diretamente ou são inversamente proporcionais. No caso de serem proporcionais, a constante de proporcionalidade deve ser indicada no item *f*. Se a velocidade v, e o tempo t, estão relacionados, a expressão que define tal relação deve ser indicada no item *g*. Por fim, no item *h* a janela de álgebra deve ser exibida, a equação da curva apresentada, e apontado como a equação da curva está relacionada com a expressão encontrada do item *g*. No final da discussão desta questão, dialogamos:

> *Tiago: A gente estava conversando aqui sobre a questão de desacelerar, e chegamos aqui que a desaceleração seria uma aceleração negativa?*
> *Karolina: Acho que em física o termo é aceleração negativa. A velocidade é até zero, mas a aceleração pode ser negativa.*
> *Rejane: Em física eu acho que é aceleração negativa.*
> *Alana: Mas aí entra em física.*
> *Miriam: No Fundamental II eles não têm nada de física.*
> *Alana: Se eles questionarem alguma coisa então...*

Nesse momento várias risadas foram dadas pelos professores, insinuando que se é assunto da disciplina Física, não há necessidade de explicar. Mas entendo ter sido em tom de brincadeira, talvez lembrando da discussão de momentos atrás sobre dizer ao aluno que um determinado assunto será exposto adiante, em outra série. Mas aproveitei a oportunidade para destacar, mais uma vez, a tendência que temos em dividir os conteúdos em disciplinas, como pode ser lido a seguir:

> *Rejane: Olha como a nossa cabeça já está com gavetas disciplinares. Específicas. A gaveta da Matemática, a gaveta da Física. E também, o mesmo acontece: a gaveta da geometria, da aritmética e da álgebra. Estão em três gavetas separadas a maioria das vezes. Eu penso sempre na intradisciplinaridade, nessa associação das três vertentes da Matemática. E os alunos tem muito isso também. Eles já estão assim. Você começa a falar de um texto, eles já dizem: a aula é de que? De Português ou Matemática, não é assim? [...] Eles [os alunos] são fogo!*
> *Karolina: É só levar um texto e eles falam: a aula é de Português ou de Matemática?*
> *Tiago: Diga assim, é uma interdisciplinaridade! E o duro é que precisa. Porque a interpretação no exercício da Matemática é tudo, né?!*
> *Josué: Sem interpretar enunciado não dá.*

Com estes comentários encerramos a discussão desta atividade que, embora tenha recebido sugestões de aprimoramento, foram muito bem recebidas pelos professores que, com foco em seus alunos, realizaram item por item, mobilizando assim seu olhar profissional. E como relatado, esta atividade também passou por aprimoramento por meio das contribuições dos membros do projeto Mapeamento e dos cursistas participantes do minicurso realizado no XII Encontro Nacional de Educação Matemática, todos professores de Matemática atuantes ou em formação, ou ainda pesquisadores em Educação Matemática, que se empenharam em apresentar sugestões ao longo da realização da atividade.

Assim como defende Gafanhoto e Canavarro (2011), a análise desta atividade também evidenciou a importância das representações aritmética, geométrica e algébrica, por meio de questões que abordam, de modo concomitante, estas formas de representação. Embora não abordem diretamente o termo intradisciplinaridade, estas autoras defendem que, ao trabalhar com esses três tipos de representação matemática, é possível adquirir a capacidade de passar de uma forma de representação para outra, o que consideram tão importante quanto reconhecer as particularidades de cada tipo de representação e de ser apto a interpretar as informações apresentadas.

E nessa abordagem intradisciplinar, o software dinâmico de matemática GeoGebra, com suas propriedades e ferramentas que potencializam a exploração de diferentes representações, mostrou-se capaz de contribuir para o desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional, afinal:

> Este tipo de software permite trabalhar e compreender a Matemática de uma forma que não é possível com as tradicionais ferramentas como o papel e o lápis, proporcionando aos alunos acrescidas oportunidades, destacando-se: a exploração de problemas e conceitos matemáticos complexos, a execução de procedimentos rotineiros de forma mais rápida e precisa (GAFANHOTO; CANAVARRO, 2011, p. 5–6).

Ademais, trabalhar com o GeoGebra foi muito importante para a formação dos professores. Como relatou uma Professora:

> *Marta: No meu processo de formação, não tive a oportunidade de acesso ao conhecimento necessário, para o uso desta ferramenta [GeoGebra]. Assim, este aprendizado é fundamental para o meu desenvolvimento profissional.*

Essa fala retoma o que já foi exposto anteriormente, apontando que ainda não faz parte da formação inicial de professores às Tecnologias Digitais (MALTEMPI, 2008).

Essa atividade foi bastante marcante para os professores, a professora Miriam, por exemplo, destacou que o GeoGebra traz:

> *Miriam:[...] possibilidade de construir atividades integrando aritmética, geometria e álgebra, pois dessa forma a visualização é rápida, e facilita o entendimento para os alunos, como por exemplo, a demonstração gráfica de grandezas diretamente e inversamente proporcionais.*

Podemos compreender na fala dessa docente, que na sua concepção, trabalhar essas vertentes concomitantemente favorece a aprendizagem, e por citar a visualização, entendemos que para Miriam o GeoGebra é uma alternativa relevante, no sentido de que:

> [...] as mídias digitais se tornam realmente interessantes quando elas nos ajudam a mudar a dinâmica da sala de aula na direção de valorizar o desenvolvimento de habilidades cognitivas com a concomitante aprendizagem da Matemática (GRAVINA; BASSO, 2012, p. 34).

A realização desta atividade com os professores também permitiu, mais uma vez, lembrar que o Raciocínio Proporcional "não é algo que você quer, pode ou não pode fazer, mas é desenvolvido ao longo do tempo através do raciocínio" (VAN DE WALLE, 2009, p. 154), e que até mesmo os professores possuem dúvidas relativas à proporcionalidade.

6.4 Atividade "Teorema de Tales"

Esta atividade[21] tem por objetivo explorar a proporcionalidade no Teorema de Tales com suas representações aritmética, geométrica e algébrica. Para tanto, inicialmente são propostas duas questões investigativas, com a realização de testes, para que conclusões possam ser tiradas a respeito da proporcionalidade.

A primeira questão (Quadro 18) solicita que um arquivo novo seja aberto no GeoGebra, os eixos escondidos, e um triângulo seja construído.

Quadro 18 – Primeira parte da questão 1 da atividade "Teorema de Tales"

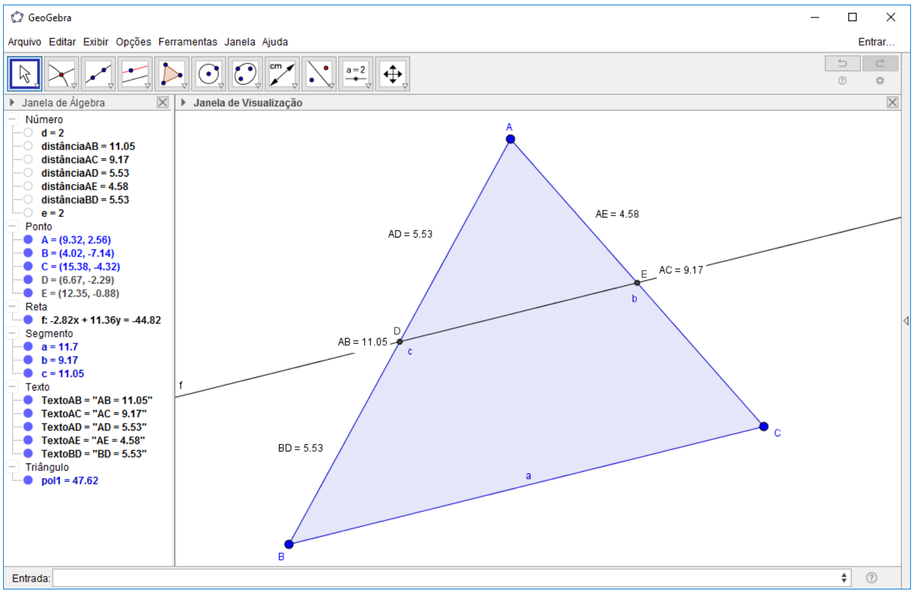
1. Abra um novo arquivo no GeoGebra. Esconda os eixos. Com a ferramenta polígono, construa um triângulo ABC. Nesse triângulo, • Usando a ferramenta ponto médio, determine o ponto médio D do lado AB; • Trace uma reta paralela ao lado BC, passando por D; • Agora marque o ponto E na interseção dos lados AC com a reta criada; • Use a ferramenta distância e meça os segmentos AD, BD e AE; a. Qual você acha que deve ser a medida do segmento CE? b. Agora, meça os segmentos AB e AC. Qual a razão entre a medida do lado AB e AD (digite no campo de entrada AB/AD, o resultado aparecerá na janela de álgebra)? E entre os lados AC e AE (digite no campo de entrada AC/AE)? c. Movimente os vértices do triângulo e observe: Os valores das medidas dos segmentos mudaram? E a razão entre eles? O que ocorre tem alguma relação com proporcionalidade? Escreva sobre isso: d. Com a ferramenta exibir/esconder objeto, oculte as distâncias dos segmentos AD, BD e AE.

Fonte: a pesquisa.

[21] Esta atividade foi elaborada com base nas questões 1, 2, 3, 4 e 5 da situação de aprendizagem 6 "Teorema de Tales: A Proporcionalidade na Geometria" do volume II do 8º ano do caderno do aluno do Estado de São Paulo (2014-2017).

No triângulo deve-se marcar o ponto médio D do lado AB. Por D, deve ser traçada uma reta paralela ao lado BC e o ponto E, na interseção dos lados AC com a reta criada, deve ser marcado. Feito isso, a distância do comprimento dos segmentos AD, BD e AE deve ser medida. Na construção feita (Figura 27), deve ser iniciada uma manipulação seguindo a sequência de itens. Analisando a medida dos segmentos AD, BD e AE, é questionado qual deve ser a medida do segmento CE, no item *a*. No item *b*, os segmentos AB e AC devem ser medidos, e a razão entre a medida do lado AB e AD e entre os lados AC e AE, calculada no campo de entrada. Com o intuito de evidenciar o que acontece com a razão quando as medidas mudam, as medidas dos segmentos do triângulo devem ser alteradas, por meio da movimentação dos vértices, no item *c*. Ainda nesse item, deve ser registrado se o que ocorre tem alguma relação com proporcionalidade. Apenas para limpar os detalhes da construção, é pedido, no item *d*, que os comprimentos dos segmentos AD, BD e AE sejam ocultados.

Figura 27 – Tela do GeoGebra com construção da primeira parte da questão 1 da atividade "Teorema de Tales"



Fonte: a pesquisa.

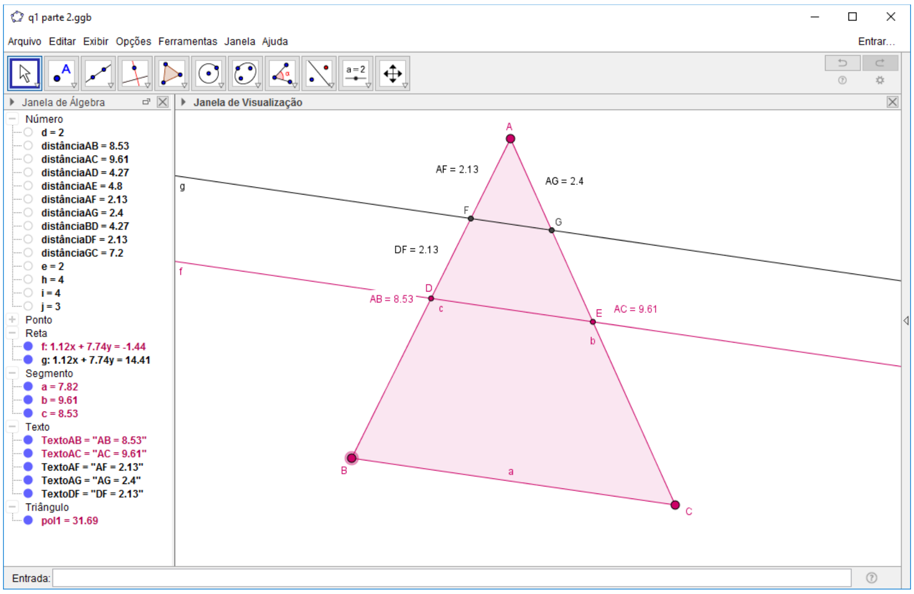
Na segunda parte dessa questão (Quadro 19), é pedido para que, no mesmo triângulo, seja marcado F, o ponto médio de AD; e uma nova reta paralela à BC, passando por F, seja criada; G, o ponto de interseção da nova reta com AC, seja marcado; e os segmentos AF, DF e AG sejam medidos (Figura 28).

Quadro 19 – Segunda parte da questão 1 da atividade "Teorema de Tales"

-> No mesmo triângulo: • Determine F, o ponto médio de AD. • Faça uma nova reta paralela a BC, passando por F. • Determine G na interseção da nova reta com AC. • Com a ferramenta distância, meça os segmentos AF, DF e AG. e. Qual você acha que deve ser a medida do segmento EG? f. Qual razão entre AB e AF (digite no campo de entrada AB/AF)? E entre AC e AG (digite no campo de entrada AC/AG)? g. Qual a razão entre BF e AF (digite no campo de entrada BF/AF)? h. Se for mantida a razão entre BF e AF para os segmentos CG e AG, qual deve ser a medida de CG? i. Verifique a resposta do item anterior com a ferramenta distância para medir o segmento CG. j. Movimente os vértices do triângulo e observe: Os valores das medidas dos segmentos mudaram? E a razão entre eles? O que ocorre tem alguma relação com proporcionalidade? Escreva sobre isso: Salve este arquivo como triangulotales1.ggb

Fonte: a pesquisa.

Figura 28 – Tela do GeoGebra com construção da segunda parte da questão 1 da atividade "Teorema de Tales"



Fonte: a pesquisa.

Expostas as medidas de AF, DF e AG, é questionado, no item *e*, qual deve ser a medida do segmento EG. No item *f*, a razão entre AB e AF e entre AC e AG deve ser encontrada, bem como a razão entre BF e AF no item *g*. Com estes valores é possível responder no item *h* a medida de CG, se for mantida a razão entre BF e AF para os segmentos CG e AG, e o valor encontrado no item *h* pode ser verificado no software no item *i*. Por fim, deve-se movimentar os vértices com o intuito de observar se os valores das medidas dos segmentos e a razão entre eles se alteram e se isso tem relação com proporcionalidade.

Durante a realização desta primeira questão com os professores, decidimos fazer os comentários sobre ela juntamente com os comentários da questão seguinte, por entendermos que ambas possuem pontos em comum e que faria mais sentido discuti-las ao mesmo tempo. Assim, foi dado continuidade.

Na questão seguinte (Quadro 20), é pedido que uma nova construção de um triângulo ABC seja feita. Nele, um ponto D qualquer sobre o lado AB deve ser marcado. Passando por D, uma reta paralela a BC; e na interseção da nova reta com AC, marcado E.

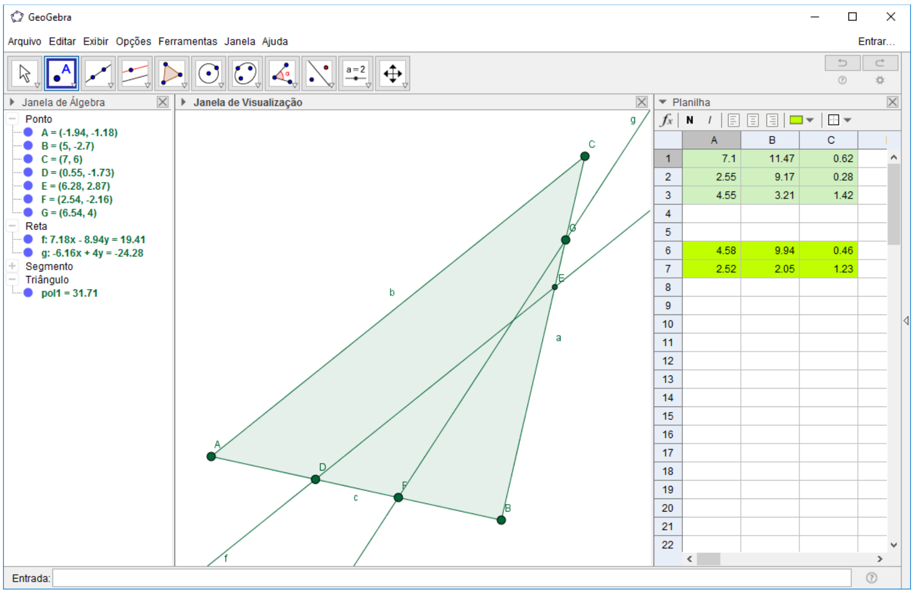
Quadro 20 – Questão 2 da atividade "Teorema de Tales"

2. Abra um novo arquivo do GeoGebra e construa um novo triângulo ABC. Com a ferramenta ponto em objeto, crie um ponto D qualquer sobre o lado AB. Depois uma reta paralela a BC passando por D. Com a ferramenta interseção de dois objetos, crie também o ponto E na interseção da reta com AC. a. Agora exiba a planilha, e a preencha conforme abaixo, para obter as medidas dos segmentos: coluna A coluna B A1: AB; B1: AC; A2: AD; B2: AE; A3: BD; B3: CE; b. Agora use a coluna C e verifique o valor da razão entre os segmentos (digite A1/B1 e arraste essa fórmula até a células C3). O que você nota no valor das razões? c. Arraste o ponto D sobre o lado AB. Os valores das medidas dos segmentos mudaram? E a razão entre eles? d. O que ocorre com as razões nos itens b e c tem alguma relação com proporcionalidade? Escreva sobre isso: e. Com a ferramenta ponto em objeto, marque um ponto F (com F diferente de D) sobre o lado AB, e o ponto G (com G diferente de E) sobre o lado AC. Construa a reta FG. f. Preencha a planilha conforme abaixo, para obter as medidas dos segmentos: coluna A: coluna B: A6: AF; B6: AG; A7: BF; B7: CG; g. Agora use a coluna C e verifique o valor da razão entre eles (digite em C6 A6/B6 e arraste essa fórmula para C7. O que você nota no valor das razões? h. Arraste os pontos F e G. Os valores das medidas dos segmentos mudaram? E a razão entre eles? i. O que ocorre com as razões nos itens g e h tem alguma relação com proporcionalidade?Escreva sobre isso: j. Com a ferramenta mover, movimente o ponto F até que as medidas da coluna C fiquem iguais as das linhas 2 e 3 da planilha. Qual a posição relativa dessas retas (DE e FG)? k. Concluindo... Com base na movimentação dos pontos D e F, e observando o que ocorre com a coluna C da planilha (razão), qual conclusão se pode tirar acerca das retas paralelas e os lados do triângulo que intersectam essas paralelas? Salve este arquivo como triangulotales2.ggb

Fonte: a pesquisa.

Gerado o triângulo da Figura 29, novas investigações passam a ser realizadas. No item *a*, a planilha do software deve ser exibida e, nela, as medidas dos segmentos AB, AD e BD devem ser preenchidas na coluna A; e de AC, AE e CE devem ser preenchidas na coluna B. Na coluna C, o valor da razão entre os segmentos das colunas A e B deve ser calculado, e o que for possível notar no valor das razões registrado no item *b*.

Figura 29 – Tela do GeoGebra com construção da questão 2 da atividade "Teorema de Tales"



	A	B	C
1	7.1	11.47	0.62
2	2.55	9.17	0.28
3	4.55	3.21	1.42
6	4.58	9.94	0.46
7	2.52	2.05	1.23

Fonte: a pesquisa.

Com a finalidade de analisar o que ocorre com as medidas dos segmentos e com a razão, é pedido, no item *c*, que o ponto D seja movimentado sobre o lado AB. Com o item *d*, essa parte é finalizada, onde deve ser anotado se o que ocorre com as razões nos itens *b* e *c* tem alguma relação com proporcionalidade. Sobre essa parte alguns comentários são feitos:

> *Rejane: No triângulo anterior [da questão 1], um [segmento] era metade [de um lado], o outro era um quarto [do lado]. A gente não quis tirar as conclusões [sobre a relação entre paralelas cortadas por transversal] só a partir daqueles [exemplos], porque parece que são casos muito específicos. Esse aqui, quando a gente movimenta, vê que fica para qualquer um, então existe relação com a proporcionalidade. Só que no outro fica assim, é proporcional por conta do ponto médio, ou porque era um quarto. E aqui porque é proporcional?*
> *Elias: Por causa da constante.*
> *Miriam: Agora é por causa do Teorema de Tales mesmo. Se a gente tiver uma reta transversal, e uma paralela a qualquer um dos lados do triângulo...*
> *Rejane: Então o que pode sair aí [uma conclusão com os alunos], com a nossa intervenção, é a questão da paralela. Porque na outra foi a questão do ponto médio. Para o caso do ponto médio, isso é verdade? É, mas para aquele caso! E vale para qualquer caso? [Basta ter ponto médio?] O ponto médio não, porque aqui foi sem ponto médio. O que é que aconteceu? Existe uma paralela. E o que a gente vai fazer agora? Na mesma questão uma que não é paralela para ver o que acontece, para sair essa [conclusão sobre a] paralela.*

Dando continuidade, no item *e* um ponto F diferente de D deve ser marcado em AB, e um ponto G diferente de E sobre o lado AC, com a finalidade de que a reta FG seja construída. No item *f* a planilha do GeoGebra deve ser preenchida com as medidas dos segmentos AF e BF na coluna A; e AG e CG na coluna B.

Na coluna C deve ser verificado o valor da razão entre os valores preenchidos nas colunas A e B, bem como registrado o que é possível notar no valor das razões. No item *h*, os pontos F e G devem ser movimentados com o objetivo de observar se os valores das medidas dos segmentos e a razão entre eles mudam com tal movimentação. Para concluir essa ideia, é perguntado se o que ocorre com as razões nos itens *g* e *h* têm alguma relação com proporcionalidade.

No item *j* o ponto F deve ser movimentado até que as medidas da coluna C fiquem iguais as das linhas 2 e 3 da planilha. Feito isso, deve ser respondido qual a posição relativa dessas retas. Concluindo a questão, é perguntado qual conclusão se pode tirar acerca das retas paralelas e dos lados do triângulo que intersectam essas paralelas, com base na movimentação feita nos pontos D e F, e o que se pode observar na coluna C da planilha (razão).

Como no item anterior, a conclusão que se deve chegar é a mesma apresentada por Tales. Ao término desta questão, indaguei:

> *Rejane: Qual deve ser a posição relativa dessas duas retas [DE e FG] para a razão ser a mesma? Ser paralelas. Então aqui é o ponto em que a gente chega na questão de condição necessária. [...] O que é que foi necessário?*
> *Denise: Que as retas fossem paralelas.*

A conversa continua, e vários professores destacam a importância de ressaltar que o paralelismo é essencial para que, ao ser interceptado por uma transversal, os segmentos determinados pelas paralelas sejam proporcionais. Prosseguindo, Elias destaca que a resposta que devemos esperar no item *k* é:

> *Elias: Que a proporcionalidade está associada ao paralelismo. Se as retas estão paralelas [ao ser cortada por uma transversal haverá proporcionalidade].*

Ao final dessas duas questões, começamos a pensar em como seria realizá-las em sala de aula.

> *Tiago: Para um aluno que nunca viu Teorema de Tales, será que fica legal essa atividade [questões 1 e 2], começar o conteúdo com ela no GeoGebra, ou não?*
> *Liliane: Eu acho que às vezes a gente está tão preocupado com o comando que está aqui [nas questões 1 e 2], que a gente perde a noção do que está representando AF, o que é esse AB. A gente está preocupado em acertar no comando da ferramenta, digitar o segmento certo, e o sentido do que ele representa, do que significa, que eu acho que essa parte da generalização fica um pouco falha. Mas isso é uma introdução, depois vai ter outras*

> *atividades para fixar. Mas é uma boa atividade para introdução. Não que isso vai fixar. Eu falo para essa parte da máquina mesmo: qual é o EF? Qual é o segmento? O sentido? A gente não está preocupada com isso na hora da construção. Depois, nesse tempo da reflexão, a gente vai tendo uma ideia melhor. Mas acho que não cai a ficha de cara do que é o conceito do Teorema de Tales.*
> *Tiago: E se usar ela como uma [atividade] complementar?*
> *Monalisa: Ah, sim, quando ele tiver uma ideia, né, tiver uma noção, depois que já tiver resolvido...*
> *Liliane: Mas é uma coisa a mais. Uma coisa adicional. Não que com isso [vai amarrar a ideia, ou vai entender o teorema].*
> *Rejane: E o momento de realizar essa atividade a gente pode definir, ser sempre [de uma forma], ou a gente pode definir de turma para turma?*

Vários respondem que o momento em que se deve realizar essas questões, se para introdução ou para complementação da ideia do Teorema de Tales, varia de turma para turma. Diante disso, comento:

> *Rejane: Eu acho que têm turmas que dá para introduzir com uma atividade dessas. Já existem outras turmas, que a gente precisa primeiro dar uma introduzida, talvez ir até para o tradicional e fazer conta, e depois pensar num exemplo assim. A gente não pode perder no Teorema de Tales, principalmente a questão da relação da geometria com a aritmética. Porque às vezes, têm os dois casos. Quando a gente aborda só a questão geométrica, e o que mais acontece, é trabalhar só a questão aritmética. É ficar fazendo conta, conta e conta. Pego o Teorema de Tales e digo que com ele faço a conta assim, e para o aluno não faz sentido.*
> *Miriam: É muito mecânico, né.*
> *Liliane: Elas se complementam. A geometria com a aritmética, para formar a ideia do elefante, uma ideia mais concreta.*

Com esta conversa, retomamos mais uma vez a importância da visualização do todo. Ao mencionar a "ideia do elefante" a professora Liliane se referia a história dos cinco sábios cegos que apalparam apenas uma parte do elefante e ficaram com impressões diferentes do animal, de forma que suas verdades não correspondiam a descrição de um elefante em sua totalidade (LORENZATO, 2006). De igual modo, procuramos destacar nesse momento e ao longo de todo curso, a importância da abordagem de um tema matemático da perspectiva intradisciplinar, uma perspectiva capaz de fornecer ao aluno uma compreensão da totalidade. Um entendimento matemático mais abrangente. Após esses comentários, a discussão voltou para a questão do momento mais apropriado para realização da atividade.

> *Izadora: Se tiver a introdução, quando for passar no computador, ele vai enxergar melhor o que ele está fazendo.*
> *Liliane: Ou antes mesmo, pois nós já sabíamos que era a ideia da reta paralela. Daí a gente já vai escrevendo lá, faz os comandos, mas já sabe a divisão. Se o quociente já deu diferente, claro, se a reta é bem diferente [não é paralela]. [...] Só que a gente já teve essa ideia. Pensando para quem já teve essa introdução. De repente, uma ideia seja até a introdução mesmo, para depois complementar.*

Rejane: Josué disse também que acha que não dá para introduzir com essas questões.
Josué: Para nós [professores], o pensamento nosso é matemático. Os alunos não têm essa...
Rejane: Não pensam matematicamente?
Josué: Não é como nós trabalhamos. Eu concordo com a professora [Izadora]. Eles não têm uma base.

A discussão foi abrangendo outros assuntos. O primeiro deles era sobre o momento apropriado para realização da atividade. Uma discussão que já havia ocorrido em outros momentos do curso. Contudo, Josué trouxe outro assunto, com respeito ao raciocínio matemático dos alunos, que segundo ele, sofrem de uma falta de embasamento, que na sua colocação, soou como um obstáculo para realização da atividade. As questões um e dois têm caráter investigativo. É necessário haver questionamentos do professor para a classe, e motivação dos alunos para realizá-las. Talvez por não haver estímulo, o Raciocínio Proporcional dos alunos não tem sido desenvolvido. Mas entendo que este não deve ser impedimento para realização de questões com este caráter. Nesse sentido, afirmei:

Rejane: Isso é uma questão que eu sempre penso. Por isso que eu optei, no doutorado, em vez de trabalhar com razão e proporção, trabalhar com o Raciocínio Proporcional. Porque eu acho que a gente precisa, de alguma forma, pensar em como explorar esse raciocínio. Não dá também para sempre afirmar que o aluno não dá conta porque ele não tem o Raciocínio Proporcional, o raciocínio matemático. Senão eu vou sempre fazer assim: Tem esse valor e esse, daqui para cá eu multipliquei por cinco. O que eu faço aqui? Multiplico por cinco [fazendo alusão a um exemplo clássico de problema de valor em falta, em que se tem três valores, e se quer encontrar um quarto valor proporcional]. Daí o aluno acerta na avaliação, ou não também, e aí que sentido aquilo fez na vida dele? Não estou falando também que não é para ter esse tipo de questão, eu só acho que esse tipo de questão sozinha não vale de nada, ou de quase nada. Eu acho que é muito mecânico. Porque qual relação ele estabelece? Por outro lado, a gente também corre o risco de ser mecânico com questões desse tipo. Tanto é que a Liliane e outros colegas falaram de ficar muito atento ao comando, e não ao significado. Mas é um risco que a gente corre e que elaborando as atividades do curso a gente está tentando se arriscar.

A dificuldade para desenvolver a capacidade de raciocinar proporcionalmente, como apontada pelo Josué, está longe de ser exclusividade dos alunos das escolas em que os professores cursistas lecionam. Ela tem sido tão significativa que Nunes (2003) chega a afirmar que a principal falha do ensino da Matemática atualmente é a proporcionalidade, pois envolve comparação entre grandezas, está presente em todas as ciências e faz parte do cotidiano de todas as pessoas. Tais questões, descritas por Nunes (2003), culminam na afirmação de Hoffer (1988), que diz que as habilidades necessárias para o Raciocínio Proporcional na população em geral têm sido insatisfatórias. O autor afirma, ainda, que essas habilidades emergem de forma mais lenta do que vem sendo sugerido e esperado por pesquisadores da Educação Matemática.

Ainda nessa discussão, é apontado por Tiago alternativas de trazer experiências que façam sentido para o aluno e lhe apresente o que é necessário para ter embasamento e entender o Teorema de Tales.

> *Tiago: Eu acho que a principal coisa que tem que trabalhar com os alunos, nesse caso, é o conceito de retas paralelas. Se ele não souber o que são retas paralelas... É a mesma coisa quando o aluno fala: "Passa pra lá, passa pra cá, passa o x de lado". Não é passar o x de lado para mudar o sinal, é fazer operação inversa com o conceito de igualdade. Se você acrescenta dois de um lado, necessariamente você tem que acrescentar dois do outro lado para não alterar a igualdade. É a mesma coisa do paralelismo aí. Se ele não souber o conceito de retas paralelas, ele não vai entender. Então ele tem que entender o conceito também. Eu quando passei o Teorema de Tales ano passado, no 9º ano, eu os levei na quadra, pois na quadra tem várias retas paralelas do desenho da quadra de vôlei. Daí eu peguei uns pedaços de barbante grande e fui fazendo transversais com eles, e eu levei uma trena e comecei a pedir para eles medirem com a trena. E fui questionando: O que está acontecendo aqui? As medidas são iguais? São diferentes? E aí você começa a trabalhar o conceito de paralela. Se é paralela e tem a transversal ali cortando... é bem legal assim. Depois a gente mediu a altura deles através da sombra e do sol explicando o porquê que a gente consegue fazer isso, porque os raios são todos paralelos, e daí você consegue medir essa altura. Isso é legal. E o software é mais uma coisa para ajudar nessa questão.*

Como pode ser observado, Tiago apontou para a importância de se ter claro o conceito de paralelismo para realização desta atividade, e por meio de suas experiências, apontou formas de fazê-lo. Durante suas colocações, vários professores se mostraram interessados, e nas filmagens foi possível perceber que acenavam concordando com a importância de explorar o paralelismo, para que outros conceitos que dependem do seu entendimento possam ser abordados. Como afirma Marin (2005), "a formação continuada consiste em propostas que visem à qualificação, à capacitação docente para uma melhoria de sua prática, por meio do domínio de conhecimentos e métodos do campo de trabalho em que atua" (MARIN, 2005, p. 6). E foi nesse sentido que essas intervenções foram feitas. Buscou-se contribuir para a formação dos professores por meio das discussões e reflexões sobre o cotidiano escolar (GREGIO; BITTAR, 2011).

Concluída essa parte, é exposta uma breve história deste teorema (Quadro 21), com a finalidade de que o professor faça a leitura com a turma e compartilhe, em diálogo, a relevância da descoberta de Tales para a Matemática, e por consequência, para a humanidade.

Conversando com os professores cursistas sobre a importância de apresentar aos alunos o contexto histórico, principalmente em um conteúdo como o Teorema de Tales, uma professora relatou que quando traz essa abordagem, também ocorre em suas aulas perguntas do tipo: a aula é de história ou de matemática? E compartilhou uma experiência:

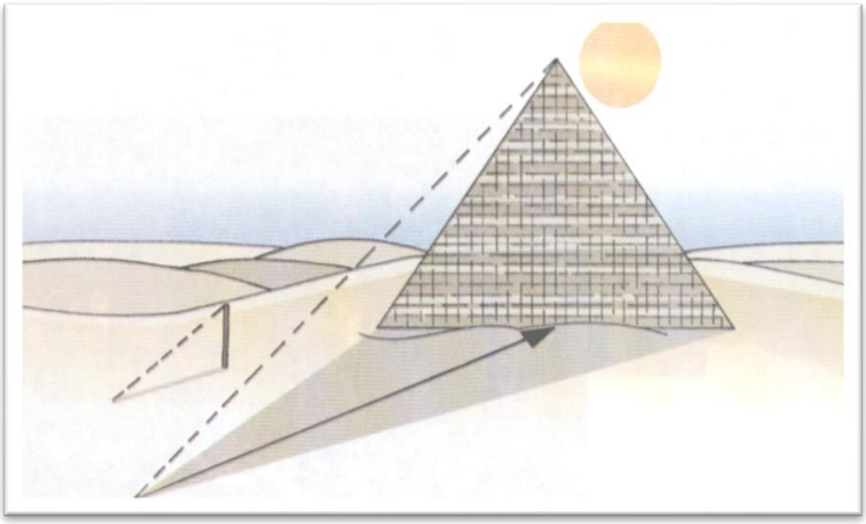
> *Izadora: Outro dia eu estava passando um textinho e a menina falou assim: "Ah, é História, mas é da Matemática!". Há necessidade de contar um pouquinho da história, do Pitágoras, do Tales, de alguns matemáticos.*

Quadro 21 – Breve história do Teorema de Tales

Teorema de Tales

As particularidades que observamos nas questões anteriores que relacionam a proporcionalidade que existe quando duas ou mais retas paralelas entre si, são cortadas por duas transversais foi descoberto por Tales. Formalmente, o Teorema de Tales enuncia que "Se um feixe de retas paralelas é interceptado por duas retas transversais então os segmentos determinados pelas paralelas sobre as transversais são proporcionais" (BONGIOVANNI, 2007).

Tales era um rico comerciante da cidade grega de Mileto, cerca de 600 a.C. Ele observou que, num mesmo instante, a razão entre a altura de um objeto e o comprimento da sombra que esse objeto projeta no chão era sempre a mesma para quaisquer objetos. Por ser comerciante, Tales teve a oportunidade de entrar em contato com outros povos. Conta-se que numa de suas viagens ao Egito, Tales foi desafiado a medir a altura da grande pirâmide Quéops, que foi construída por volta de 2500 a.C. e é uma das grandes maravilhas do mundo antigo.



Fonte: http://www.brasilescola.com/matematica/teorema-tales.htm

Tales aplicou seus conhecimentos sobre segmentos proporcionais e achou a altura da pirâmide usando apenas um bastão e as medidas das sombras da pirâmide e do bastão no mesmo instante em que o sol projetava totalmente a sombra da pirâmide e do bastão. Resumidamente, ele descobriu que:

$$\frac{altura\ da\ pirâmide}{sombra\ da\ pirâmide} = \frac{altura\ da\ estaca}{sombra\ da\ estaca}$$

Esta descoberta levou Tales a ser muito prestigiado pelo faraó Amásis, que governava o Egito nessa época. Além disso, o prestígio da descoberta de Tales vem se estendendo ao longo das gerações e é usada até os dias atuais.

Referência: BONGIOVANNI. V. O Teorema de Tales: uma ligação entre o geométrico e o numérico. REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática. V 2.5, p.94-106, UFSC: 2007.

Fonte: a pesquisa – adaptado de Bongiovanni (2007).

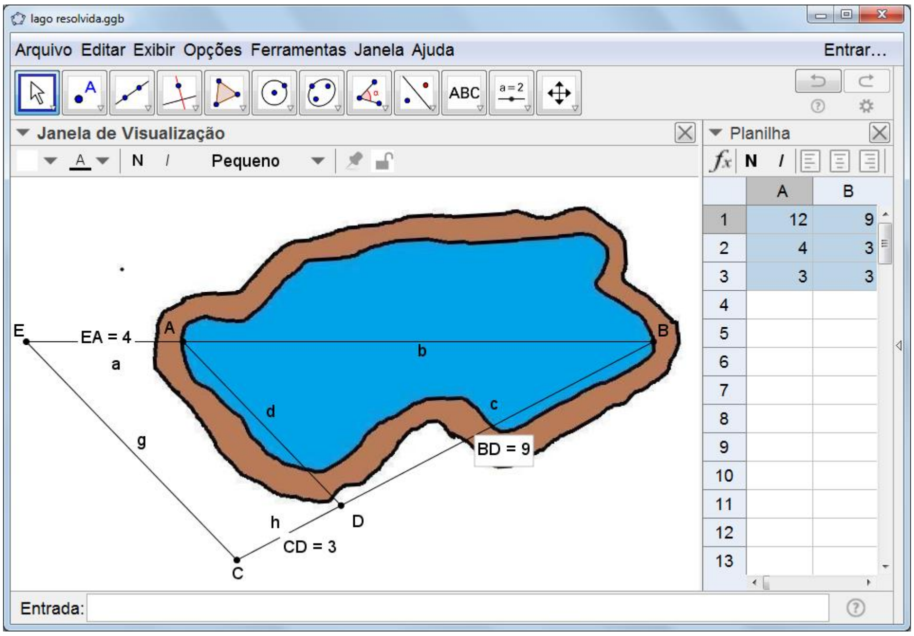
Exposto o contexto histórico do Teorema de Tales, a atividade segue com a terceira questão (Quadro 22), que é iniciada solicitando que o arquivo lago.ggb seja aberto. Esta questão narra uma história vivenciada por Lucas, um menino que queria estimar a medida mais extensa do pequeno lago que havia perto de sua casa. Para tanto, ele inicialmente criou um esquema da situação, indicando essa extensão por AB e imaginando dois triângulos ABD e BCE, sendo as bases AD e EC paralelas, como representado na Figura 30. Lucas fincou 5 estacas, uma em cada um dos vértices dos triângulos ABD e BCE e marcou as medidas correspondentes aos lados AE, BD e DC. Apresentado esse esquema, são iniciados os questionamentos.

Quadro 22 – Questão 3 da atividade "Teorema de Tales"

3. No arquivo lago.ggb você pode explorar a situação criada por Lucas. Lucas queria estimar a medida mais extensa do pequeno lago que havia perto de sua casa. Pensando sobre o problema, ele inicialmente fez um esquema da situação, indicando essa extensão por AB e imaginando dois triângulos ABD e BCE, sendo as bases AD e EC paralelas. Depois, foi ao local e fincou 5 estacas, cada uma correspondente a um vértice dos triângulos de seu esquema. Contou com passos as medidas correspondentes aos lados AE, BD e DC, e completou seu esquema. a. Analise o esquema no GeoGebra e responda: o procedimento criado por Lucas permite a resolução do problema? Se sua resposta foi afirmativa, expresse abaixo os cálculos efetuados e o valor, em passos, encontrado por ele para a extensão AB (faça essa questão manualmente): b. Exiba a planilha, digite AB na célula A1, e EA em A2. Na célula A3 digite AB/EA para encontrar a razão entre a largura do lago $\overline{AB}$, pelo segmento $\overline{EA}$. c. Digite BD na célula B1, e DC em B2. Na célula B3 digite BD/DC para encontrar a razão do segmento $\overline{BD}$, pelo segmento $\overline{DC}$. d. Observando os resultados nas células A3 e B3, você pode afirmar que a razão entre os segmentos AB e AE são proporcionais a razão entre BD e DC? e. Em caso afirmativo, qual é a constante de proporcionalidade? Usando os recursos da planilha, explore os segmentos do esquema e responda: existem outras relações proporcionais no esquema de Lucas? Se sim, cite quais são esses casos. f. O esquema criado por Lucas, foi baseado no Teorema de Tales. Você conseguiu perceber essa relação no esquema explorado? Explique sua resposta.

Fonte: a pesquisa.

Figura 30 – Tela do GeoGebra com construção lago.ggb



Fonte: a pesquisa.

No item *a*, é pedido que o esquema de Lucas seja analisado e respondido se o procedimento por ele criado permite a resolução do problema. Em caso afirmativo, os cálculos devem ser efetuados manualmente e o valor, em passos, para a extensão AB, deve ser registrado.

A partir do item *b*, alguns cálculos são feitos na planilha do GeoGebra. Primeiramente é encontrada a razão entre a largura do lago AB e o segmento EA (item *b*). O próximo passo é encontrar a razão entre os segmentos BD e DC (item *c*).

No item seguinte, os resultados nas células A3 e B3 devem ser observados, e respondido se é possível afirmar que a razão entre os segmentos AB e AE são proporcionais a razão entre BD e DC. Em caso afirmativo, no item *e* deve ser registrado o valor da constante de proporcionalidade, além de outras relações proporcionais entre os segmentos do esquema de Lucas, caso existam.

Por fim, o item *f* elucida que o esquema criado por Lucas foi baseado no Teorema de Tales. Com base nisso, o item questiona se o aluno conseguiu perceber essa relação no esquema explorado, e solicita que ele esclareça essa resposta.

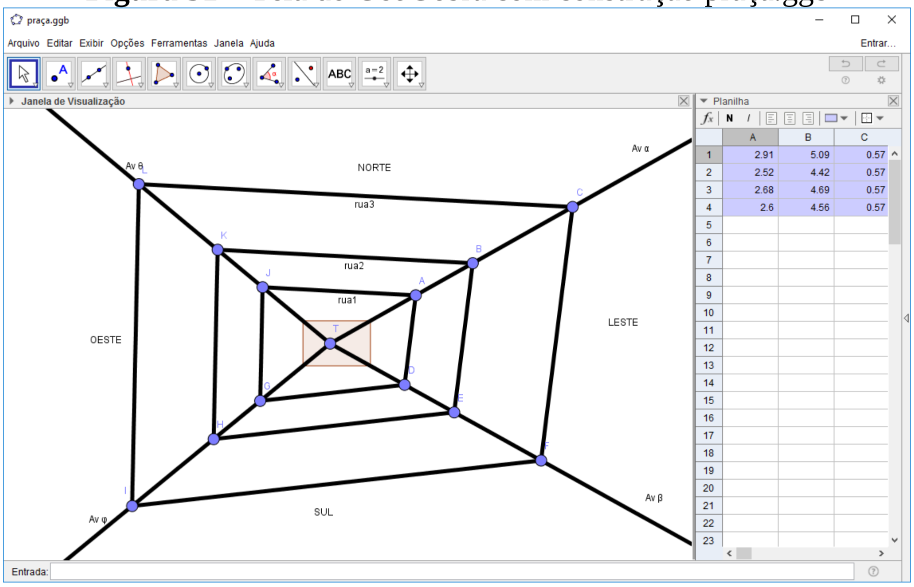
Na questão 4 outra situação é trabalhada (Quadro 23). É solicitado que o arquivo praça.ggb seja aberto (Figura 31) e, então, é exposto que de uma praça em formato retangular saem quatro avenidas, e cada uma tem origem em um vértice do retângulo. Existem ainda três ruas paralelas que conectam cada par de avenidas.

Quadro 23 – Questão 4 da atividade "Teorema de Tales"

4. No arquivo praça.ggb você pode explorar a situação:
De uma praça em formato retangular saem 4 avenidas, α, ß, ϴ e φ, uma de cada vértice do retângulo. Ligando cada par de avenidas há três ruas, 1, 2 e 3, sempre paralelas em cada caso. Os pontos de encontro entre as ruas de mesmo número são nomeados pelas letras do alfabeto, A, B, C, D etc.
a. exiba a planilha, e a preencha da seguinte forma:
coluna A: coluna B:
A1: AB; B1: BC;
A2: DE; B2: EF;
A3: GH; B3: HI;
A4: JK B4: KL
b. Agora use a coluna C e verifique o valor da razão entre eles (digite A1/B1 e arraste essa fórmula até a célula C4)
c. O que você nota no valor das razões?
d. Arraste livremente os pontos A, D, G e J . Os valores das medidas dos segmentos mudaram? E a razão entre eles?
e. A proporção verificada no item anterior é a expressão matemática do teorema de Tales, que também pode ser enunciada da seguinte forma: se uma reta paralela a um lado de um triângulo intersecta os outros dois lados em pontos distintos, então ela determina segmentos que são proporcionais a esses lados. Por exemplo, TA está para TC assim como AJ está para CL. Portanto, meça TA, TC e CL no GeoGebra e calcule AJ.
f. Com o mesmo raciocínio do Teorema de Tales usado no item anterior, encontre o comprimento de outra rua que preferir.

Fonte: a pesquisa.

Figura 31 – Tela do GeoGebra com construção praça.ggb



Fonte: a pesquisa.

Após observar a situação, a planilha deve ser preenchida com a medida de vários segmentos, como exposto no item *a*. No item *b*, a razão entre as medidas dos segmentos listados deve ser calculada. O que é possível notar no valor das razões deve ser registrado no item *c*. Com a finalidade de observar o que ocorre com os valores das medidas dos segmentos e a razão entre eles, é pedido que alguns pontos sejam movimentados (item *d*).

O item *e* esclarece que a proporção verificada é a expressão matemática do Teorema de Tales, que pode ser assim enunciada: se uma reta paralela a um lado de um triângulo intersecta os outros dois lados em pontos distintos, então ela determina segmentos que são proporcionais a esses lados. Um exemplo deve ser verificado: TA está para TC assim como AJ está para CL, para tanto, deve-se medir TA, TC e CL no GeoGebra e calcular AJ.

Com a finalidade de identificar se o raciocínio foi entendido pelo aluno, a questão é finalizada solicitando que, com o mesmo raciocínio do Teorema de Tales usado no item anterior, seja encontrado o comprimento de outra rua qualquer. Destaco que esse item, de procura do comprimento de outra rua, foi sugestão da professora Karolina durante o curso, e que, portanto, o item *f* não existia no momento do curso. A professora sugeriu que houvesse um item em que um caso qualquer pudesse ser pensado, e destacou ainda a importância da intervenção do professor para que essas respostas sejam compartilhadas com todos os alunos de uma turma, com a finalidade de evidenciar as várias possibilidades de descoberta, afinal, provavelmente, vários alunos terão respostas diferentes, cada um apontando a medida do comprimento de uma rua do esquema dado, encontrada por meio do Teorema de Tales. Ainda sobre esta questão, foi comentado sobre suas possíveis variações.

> *Liliane: Uma variação desse exercício seria não partir do retângulo, montando um polígono, algum ponto, não necessariamente um retângulo. Seria uma variação do exercício que vai continuar valendo. Montando o polígono, a partir daí montando a reta. As retas passando pelos vértices do polígono, poderiam não ser quatro vértices, poderia ser cinco, seis... montando as paralelas, e vai continuar tendo a proporção, desde que sejam paralelas. Mas não precisa partir do retângulo.*
> *Rejane: Por que eu criei um retângulo? Porque eu queria criar uma figura como está no caderno do aluno. Mas não necessariamente tem que ser.*
> *Liliane: Certo. Mas para o exercício dá para fazer variações. E vai continuar sendo válida, porque é o que a gente quer mostrar.*
> *Miriam: A gente usa aquele comando dilatar os lados, vai ser sempre proporcional. Paralelo e proporcional.*
> *Liliane: Vai continuar sendo paralelo, né?*

Quando a professora Miriam aponta um comando como alternativa para realização da atividade, e também ao observar sua desenvoltura ao longo dos encontros do curso com a realização das atividades, me impressiona o domínio que, em pouco tempo, foi adquirindo com a manipulação do software. Considero essa destreza muito importante, se pensarmos na formação continuada de professores que desejo que sejam capazes de planejar aulas com Tecnologias Digitais, afinal:

> Planejar uma aula com recursos de multimeios exige preparo do ambiente tecnológico, dos materiais que serão utilizados, dos conhecimentos prévios dos alunos para manusear estes recursos, do domínio da tecnologia por parte do professor, além de seleção e adequação dos recursos à clientela e aos objetivos propostos pela disciplina (FARIA, 2004, p. 3).

Os comentários mostram ainda o interesse dos professores em aprimorar a atividade. Pensando em diversos exemplos e possibilidades de variação, as opiniões foram compartilhadas. É nesse sentido que Llinares (2013) aponta que o professor que possui o olhar profissional desenvolve a capacidade de identificar formas conexas para desenvolver o ensino e a aprendizagem da Matemática. Nessa situação, por exemplo, foi possível perceber que o professor que possui o olhar profissional é capaz de ver situações educacionais de um modo que o diferencia da forma como alguém que não possui a formação e a experiência de um professor de Matemática o faz. Nesse sentido, destaquei:

> *Rejane: Por isso que temos que ter este espaço de discussão. Com outros professores, com pessoas que também tem experiência [escolar], pra gente ver se descobre formas de melhorar, ver se descobre falhas, ver se a gente pensa nisso [em formas de explorar o Teorema de Tales, nesse caso].*

Tendo em vista essa importância de promover espaços de discussão, nos quais se possam compartilhar experiências e dialogar sobre questões do ensino e da aprendizagem da Matemática, os próprios professores evidenciaram em seus relatos como o curso colaborou e foi importante para suas formações e os fez repensar sobre o trabalho com Tecnologias Digitais em sala de aula, como ressaltaram alguns docentes:

> *Elias: A cada encontro a troca de experiências e relatos está fazendo com que todos participem de forma colaborativa, muito boa, a meu ver, pois todos aprendem com as experiências.*
> *Davi: Gostei muito de estar participando desse curso, e começando pelo tema do curso, "Raciocínio Proporcional", integrando aritmética, geometria e álgebra com o uso do software Geogebra, nos dá a oportunidade de repensar nossa disposição em trabalhar levando as atuais ferramentas tecnológicas para sala de aula, acho realmente muito bem estruturado o trabalho apresentado bem como os objetivos propostos com os conteúdos matemáticos envolvidos.*

Corroborando essas ideias, no decorrer dos relatos, os docentes realçaram como as Tecnologias Digitais acabam sendo bem aceitas pelos alunos e que, por isso, as aulas podem se tornar atrativas e interessantes aos estudantes. Com isso, o GeoGebra, por exemplo, pode ser mais facilmente utilizado.

> *Marta: Os nossos alunos, possuem uma facilidade de aceitação e uso destas tecnologias, pois já nasceram na era digital e isso torna a aula diferenciada, atrativa e interessante aos olhos deles. A partir desse despertar da curiosidade do aluno, torna-se mais fácil e positivo o uso do Geogebra, pois é uma ferramenta de fácil utilização e poderá ajudar a compreensão dos conceitos em aritmética, geometria e álgebra.*

Após meu comentário, destacado anteriormente, encerramos essa atividade, que foi a menor das quatro que foram propostas. Nela foi abordada a proporcionalidade do Teorema de Tales de uma perspectiva intradisciplinar, o que foi algo novo para os professores. Também foi destacado por uma professora o quão interessante lhe pareceu abordar o Teorema de Tales no GeoGebra.

> *Lívia: Gostei muito da última aula, não havia pensado em utilizar o GeoGebra na explanação do Teorema de Tales e nem saberia também como desenvolvê-lo. É interessante apresentar aos alunos essa construção, pois sempre que falamos do Teorema de Tales, é através de teoria com base nos desenhos "feixes de paralelas cortadas por transversais". Só que, para que os alunos entendam realmente, eles têm que estar familiarizados com o software.*

Com a colocação acima, a professora destacou que no GeoGebra é possível abordar o Teorema de Tales além do que geralmente é feito: o desenho na lousa de paralelas intersectadas por transversais, seguido de exemplos numéricos. Discutimos a importância de abordar o Teorema de Tales de uma perspectiva que faça sentido para o aluno, de modo que ele perceba a proporcionalidade e explore seu Raciocínio Proporcional para identificar as relações entre as retas e segmentos das construções.

6.5 Atividade "Frações Equivalentes e Porcentagem"

Esta atividade[22] é a quarta e última elaborada e discutida no âmbito da produção dos dados desta tese. Seu objetivo consiste em relacionar Porcentagem com Proporcionalidade, explorando concomitantemente as representações aritmética, geométrica e algébrica.

Na questão inicial (Quadro 24) é explicitado que para calcular "a porcentagem de y que x representa" deve ser encontrada a fração com denominador 100 que é equivalente a x/y.

[22] A questão 9 desta atividade foi elaborada com base na seção "Leitura e análise de texto" da Situação de Aprendizagem 2 "Razão e Proporção" do volume II do 7º ano do caderno do aluno do Estado de São Paulo (2014-2017).

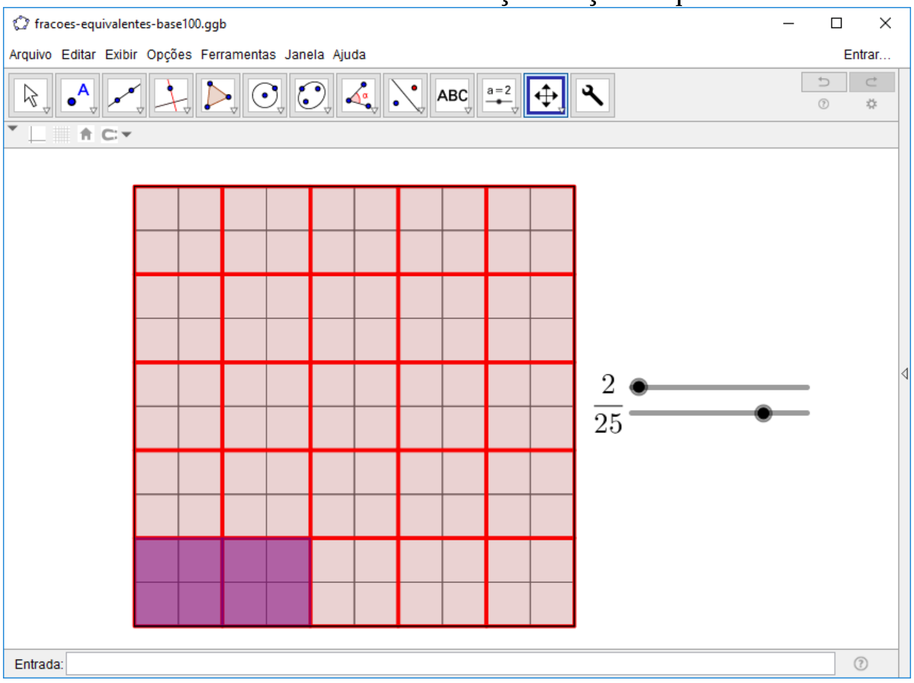
Quadro 24 – Questão 1 da atividade "Frações Equivalentes e Porcentagem"

1. Uma das formas de calcular "qual a porcentagem de y que x representa" é encontrando a fração com denominador 100 que é equivalente a $\frac{x}{y}$. Então abra o arquivo frações-equivalentes-base100.ggb. Repare que temos uma fração representada e no quadro maior duas grades: uma cinza com cem quadradinhos menores e outra vermelha com a quantidade de quadros igual ao denominador da fração. Além disso, o numerador da fração representa a quantidade de quadros vermelhos que estão pintados de lilás. -> Vamos explorar esse arquivo. a) Mude a fração representada no GeoGebra para $\frac{6}{25}$. Qual a fração de base 100 equivalente a esta? b) Então 6 representa qual porcentagem de 25? c) Mude a fração representada no GeoGebra para $\frac{18}{50}$. Então 18 é quantos porcento de 50? d) E 12 equivale a quantos porcento de 20 (mude a fração para $\frac{12}{20}$)? Note que no arquivo do GeoGebra, todos os valores disponíveis para o denominador da fração são divisores de 100. Isso ocorre para que os quadradinhos menores possam ser agrupados em quantidades inteiras e para podermos representar a fração de denominador 100. Mas então, como fazemos para calcular quantos porcento 12 é de 30, uma vez que 30 não pode ser representado na nossa malha do GeoGebra? Vamos fazer alguns cálculos, você pode usar o campo de Entrada do GeoGebra como auxílio. Exiba a janela de álgebra para visualizar os resultados. e) Calcule 6/25. O valor encontrado foi o mesmo que você encontrou no item a? f) Faça agora 18/50 e também 12/20. Os valores correspondem ao que você encontrou nos itens c e d? g) Como você faria então para descobrir qual a porcentagem que 12 é de 30?

Fonte: a pesquisa.

Ao abrir o arquivo frações-equivalentes-base100.ggb (Figura 32), é possível notar uma fração representada e no quadro maior duas grades: uma cinza com cem quadradinhos menores e outra vermelha com a quantidade de quadros igual ao denominador da fração. Ao movimentar os controles deslizantes é possível notar que o numerador da fração é representado pela quantidade de quadros vermelhos que estão pintados de lilás.

Figura 32 – Tela do GeoGebra com construção frações-equivalentes-base100.ggb



Fonte: a pesquisa.

Com o intuito de conduzir uma exploração inicial, é solicitado, no item *a*, que a fração representada no GeoGebra seja alterada para $\frac{6}{25}$ e, então, seja descrita a fração de base 100, equivalente a essa, que pode ser observada geometricamente. Com o registro da fração de base 100, é questionado, então, qual porcentagem de 25 o 6 representa. Durante a realização destes itens, conversamos:

> *Rejane: Então qual é a fração de base 100 correspondente a essa* $\left(\frac{6}{25}\right)$*? Vinte e quatro sobre cem* $\left(\frac{24}{100}\right)$.
> *Tiago: Se ele [o aluno] conseguir desenvolver a questão da proporcionalidade, ele pode pensar, se a base é [ou mudou de] 25 para 100, [multiplicando] por 4, então 6 [será 24, multiplicando também por 4]. É o meio algébrico [pensando no valor em falta].*
> *Rejane: [...] Então 6 representa qual porcentagem de 25? Em fração é* $\frac{24}{100}$ *ou seja, a cada 100 temos 24. Não é isso? Então 6 representa qual porcentagem de 25? Eu acho que aqui a porcentagem sai fácil, o 24%, o que vocês acham?*
> *Miriam: Pela base [denominador] ser 100, fica fácil.*
> *Rejane: Pela base ser 100, né? Por isso que essa é só a primeira atividade de porcentagem, porque nem sempre a base é 100 e nessa [questão] mesmo a gente irá falar disso.*

Outros valores são testados. No item *c*, é pedido que $\frac{18}{50}$ seja representado no arquivo do GeoGebra, e então, seja indicado quantos porcento 18 é de 50. De igual modo, no item *d*, quantos porcento 12 é de 20. Feitos estes exemplos, é esclarecido que no arquivo do GeoGebra todos os valores disponíveis para o denominador da fração são divisores de 100, mas que é possível, por exemplo, calcular quantos porcento 12 é de 30, mesmo 30 não sendo divisor de 100. Para pensar em como fazer este cálculo, é proposto encontrar de outra forma as porcentagens já calculadas nos itens anteriores.

Assim, com o campo de Entrada do GeoGebra, deve ser calculado 6/25 no item *e*, e 18/50 e 12/20 no item *f*. Os resultados encontrados devem ser comparados com os encontrados nas mesmas frações nos itens anteriores. Com base nesse novo cálculo e na comparação dos valores já encontrados, deve ser indicado, no item *g*, como deve ser feito para descobrir a porcentagem que 12 é de 30.

Ao realizar essa parte, conversei com os professores sobre as dificuldades dos alunos quanto às diversas formas de representação dos racionais e de identificar algumas porcentagens.

> *Rejane: [Em casos como]* $\frac{12}{20}$ *, eu acho que os nossos alunos ainda tem muita dificuldade de ver que 0,6 é 60% e não 6%. Não é verdade, pessoal?*

Muitos acenam que sim, concordando que os alunos possuem esse tipo de dificuldade.

> *Rejane: Se fosse 0,60 eu acho que seria mais fácil para ele entender isso. Não sei se só eu que percebi isso?*
> *Tiago: Mas isso [esse tipo de dificuldade] de porcentagem, não é só no Ensino Fundamental, essa semana eu estava trabalhando porcentagem no caderno do aluno, e tinha um exercício lá falando mais ou menos o que a gente discutiu de gráfico diretamente e inversamente [proporcional – sobre a segunda atividade]. Tem um exercício lá que é assim: Você vai a um restaurante. O x e o y é o que você consumiu de comida e bebida. Daí você tem que pagar 10% do valor total e mais R$10,00 de couvert. Na hora que eu ia transformar 10% em número decimal, o que seria [a relação entre] x e y, eu substituí por z, e aí lá [o valor a ser pago tem] mais 10% de z. Para você fazer o processo inverso, sair da porcentagem e chegar no decimal, eles [mostraram que] têm muita dificuldade também. De ver 10% como 0,1. Daí eu ia somar um do z com 0,1 de z.*

A fala do professor Tiago destaca dificuldades dos alunos do Ensino Médio com relação a porcentagem e proporcionalidade. Em diversos momentos discutimos nesta tese que as dificuldades dos alunos, em geral, se estendem ao longo de seus anos de vida escolar e os acompanham na idade adulta (LAMON, 2005; VAN DE WALLE, 2009). Reconhecer e identificar as dificuldades dos alunos é muito importante para que os professores apurem seu olhar profissional (FERNÁNDEZ; LLINARES; VALLS, 2011) e fazer apontamentos sobre as dificuldades dos alunos foi uma oportunidade que tivemos com o curso de formação continuada. Assim como apontado por Schliemann e Carraher (1997), o professor Tiago citou uma situação que mostra que, embora exista certa compreensão de proporcionalidade dos alunos, oriunda de suas experiências do cotidiano, é na escola que mecanismos mais eficientes de aprendizagem se consolidam por meio do desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional.

Nessa conversa, também foi destacada a importância de o professor perguntar, instigar as respostas dos alunos, contribuindo assim para que reflitam sobre os questionamentos que lhes estão sendo feitos, e deste modo, consigam desenvolver e explorar o Raciocínio Proporcional.

> *Rejane: Às vezes está meio óbvio, [e o aluno responde] mas ele não pensou nisso [no que a resposta significa].*
> *Liliane: Sim, ele falando de novo, repetindo [contribui para o entendimento].*
> *Rejane: Porque, na verdade, ele está repetindo. Pois quando a gente faz a fração, a divisão e a porcentagem são três representações da mesma coisa.*
> *Liliane: É verdade.*
> *Rejane:* $\frac{12}{100}$ *é o mesmo que 12%. E quantos adultos não conseguem entender que* $\frac{12}{100}$ *é o mesmo que 12%? Não estou nem colocando outro denominador. Estou colocando o mesmo denominador. Ainda mais assim:* $\frac{6}{50}$ *é o mesmo que 12%. Para nós [professores de matemática] isso é muito claro. Ah, se de 50 eu tenho 6, então de 100 eu vou ter 12. Mas para muita gente isso não é claro. Por isso é que eu acho que a gente tem que trabalhar essas várias frentes.*

Destaco, então, a necessidade de que várias formas de representação sejam utilizadas, com o intuito de mostrar aos alunos que existem várias formas de indicar uma comparação entre grandezas, como fracionária, decimal e em porcentagem.

Na questão seguinte (Quadro 25) outra investigação no GeoGebra é iniciada, na qual deve ser indicado o número de alunos que corresponde a uma dada porcentagem.

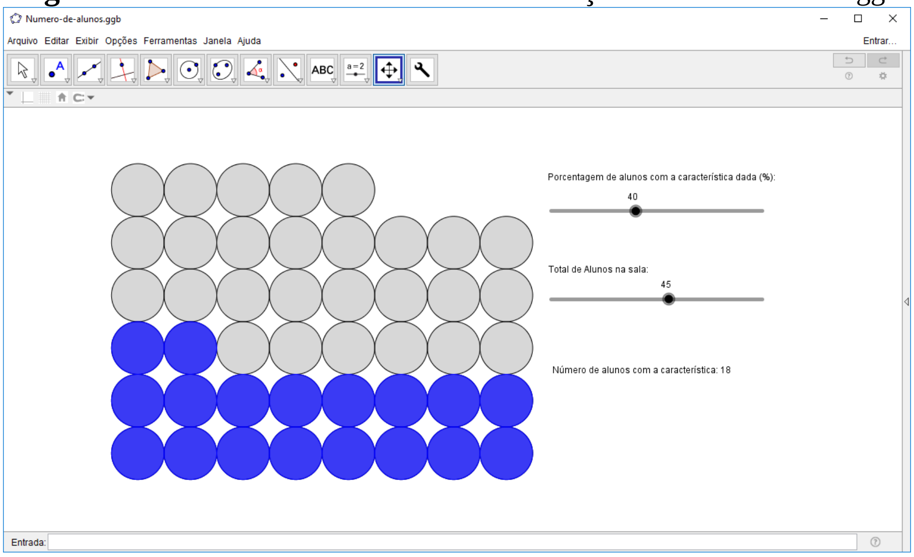
Quadro 25 – Questão 2 da atividade “Frações Equivalentes e Porcentagem”

2. No arquivo numero-de-alunos.ggb, vamos investigar as seguintes situações que ocorrem em uma escola de Ensino Fundamental II. a. A sala do 6º ano A tem 45 alunos, e 40% são meninos. Quantos meninos tem na turma? b. Na sala do 7º ano A que tem 40 alunos, 70% vão para escola de ônibus. Quantos alunos dessa sala não vão para escola de ônibus? c. Na sala do 8º ano A houve uma reunião de pais e responsáveis para compartilhar os bons resultados da turma na Olimpíada Brasileira de Matemática. Mas dos 38 alunos da turma, os pais e responsáveis de apenas 42% (aproximadamente) deles compareceu. Quantos alunos estavam acompanhados dos pais na reunião? d. Na sala do 9º ano A, uma professora fez uma votação para saber a posição dos alunos sobre a maioridade penal, e constatou que aproximadamente 53% dos alunos são contra o projeto de lei que considera réu os adolescentes infratores com idade igual ou superior a 16 anos, e que aproximadamente 6% se absteve. Sabendo que a turma tem 34 alunos, quantos alunos se posicionaram a favor do projeto de lei?

Fonte: a pesquisa.

O arquivo numero-de-alunos.ggb (Figura 33) deve ser aberto, e nele as situações listadas devem ser investigadas. A primeira delas (item *a*) quer saber a quantidade de meninos em uma turma de 45 alunos, em que 40% são meninos. O item *b* questiona quantos alunos de uma sala de 40 alunos vão para escola de ônibus, sabendo que esse número equivale a 70% da classe. O item *c* quer saber quantos alunos estavam acompanhados dos pais ou responsáveis na reunião de uma turma de 38 alunos, sendo que somente 42% (aproximadamente) desses compareceu. Por fim, no item *d*, é perguntado quantos alunos de uma classe de 34 alunos se posicionam a favor de um certo projeto de lei, sabendo que aproximadamente 53% dos alunos são contra e 6% decidiram se abster.

Figura 33 – Tela do GeoGebra com construção numero-de-alunos.ggb



Fonte: a pesquisa.

De forma similar, uma exploração no GeoGebra é realizada na questão 3 (Quadro 26), mas, dessa vez, não deve mais ser indicado o número de alunos que corresponde a uma dada porcentagem, e sim qual a porcentagem que corresponde a um determinado número de alunos.

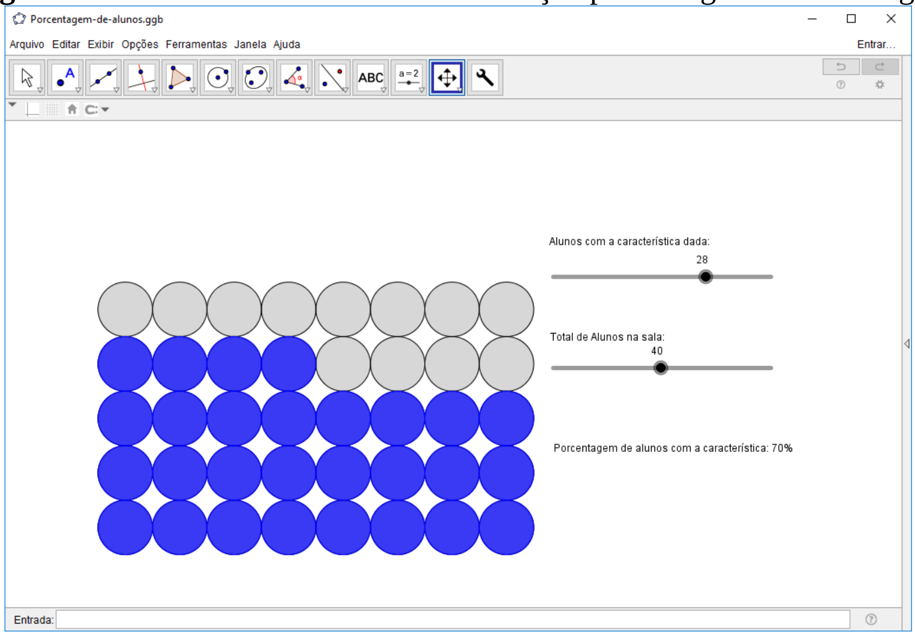
Quadro 26 – Questão 3 da atividade “Frações Equivalentes e Porcentagem”

3. No arquivo porcentagem-de-alunos.ggb, vamos investigar as situações contrárias que ocorrem nas salas da mesma escola que falamos na questão 2. a. Na sala do 6º ano A que tem 45 alunos, 27 são meninas. Qual a porcentagem de meninas da turma? b. Na sala do 7º ano A que tem 40 alunos, 28 vão para escola de ônibus. Qual a porcentagem de alunos que não vão de ônibus para escola? c. Na reunião de pais que ocorreu no 8º ano A, dos 38 pais e responsáveis, 22 não foram. Qual a porcentagem aproximada de alunos que não foram representados na reunião? d. Na sala do 9º ano A que tem 34 alunos, 16 são contra o projeto de lei da maioridade penal, e 2 não se posicionaram nem contra nem a favor, optando por se abster da votação. Qual a porcentagem aproximada de alunos que são contra esse projeto?

Fonte: a pesquisa.

O arquivo porcentagem-de-alunos.ggb (Figura 34) deve ser aberto e nele as situações podem ser investigadas. A primeira delas (item *a*) quer saber qual a porcentagem que as 27 meninas representam em uma turma de 45 alunos. O item *b* questiona a porcentagem que os 28 alunos que não vão de ônibus para escola, de uma turma de 40, representa. O item *c* quer saber a porcentagem aproximada de alunos que não foram representados na reunião por seus responsáveis, sabendo que dos 38 pais e responsáveis esperados, 22 não foram. Por fim, no item *d* é perguntado a porcentagem aproximada de alunos que são contra um projeto de lei que, em uma turma de 34 alunos, 16 são contra e 2 não se posicionaram nem contra nem a favor, optando pela abstenção.

Figura 34 – Tela do GeoGebra com construção porcentagem-de-alunos.ggb



Fonte: a pesquisa.

Dando continuidade ao formato de exploração já realizada nas questões 2 e 3, a questão 4 (Quadro 27) é proposta.

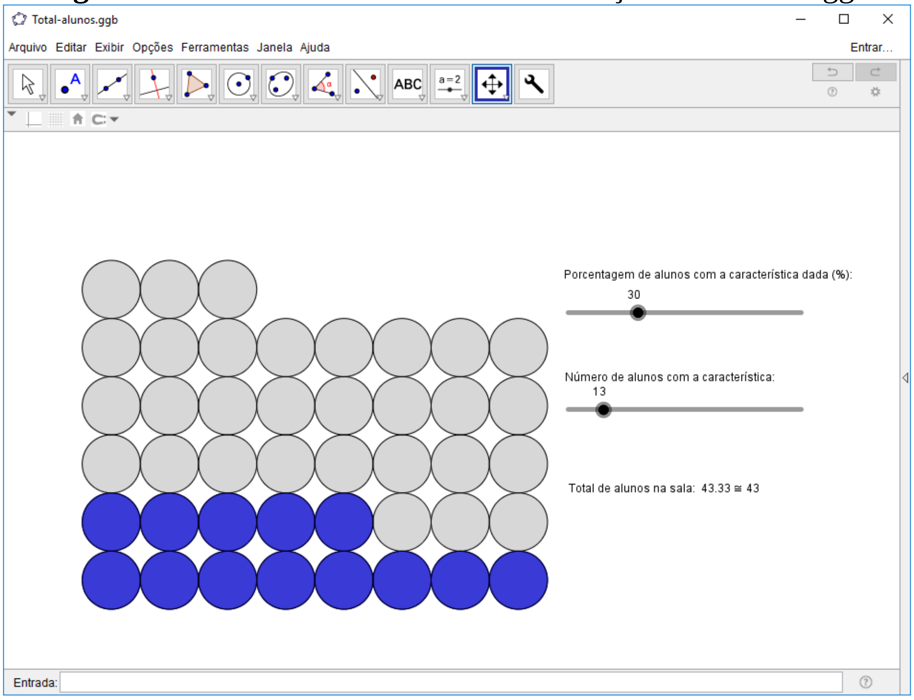
Quadro 27 – Questão 4 da atividade "Frações Equivalentes e Porcentagem"

4. Usando o arquivo total-alunos.ggb, indique o número de alunos nas situações a seguir: a. Na turma do 6º A em uma escola, foi feito um levantamento e notou-se que 13 alunos eram filhos únicos e esse número corresponde a cerca de 30% da turma. Quantos alunos existem nessa turma? b. Na mesma escola, na sala do 7º B apenas 8 eram filhos únicos e a porcentagem de alunos que possuem irmãos é de cerca de 81%. Qual o número de alunos dessa turma?

Fonte: a pesquisa.

Nela, o arquivo total-alunos.ggb (Figura 35) deve ser aberto e o número de alunos que corresponde a cada uma das situações, indicado. No item *a*, é questionado quantos alunos existem em uma turma em que 13 alunos são filhos únicos, sabendo que este número corresponde a cerca de 30% da turma. No item *b*, o que se pede é o número de alunos de uma classe, sabido que nela 8 alunos são filhos únicos e a porcentagem de alunos que possuem irmãos é de cerca de 81%.

Figura 35 – Tela do GeoGebra com construção total-alunos.ggb



Fonte: a pesquisa.

Os comentários sobre as questões 2, 3 e 4 foram feitas em uma única discussão, por estarem abordando uma mesma ideia. Essas questões, aqui descritas nos quadros 25, 26 e 27 respectivamente, já estão em uma versão final. Inicialmente elas contavam com mais itens, que depois da discussão que será exposta a seguir, passaram a compor uma nova questão.

> *Liliane: Deveria fazer essas três questões em um arquivo só. Para compreender o entendimento do que é cada item que estamos trabalhando. Manipular o próprio olhar. Pois são três itens: a porcentagem, o número de alunos com a característica ou não, e daí tem aquele total. Nesses três itens [três questões: 2, 3 e 4] só mudou o lugar do que está sendo pedido. Então juntou três situações diferentes. Os [tipos de pergunta nos] itens utilizados nos três arquivos são os mesmos. Então, dava para pensar, para não ficar muito mecânico, pode estar utilizando estes três arquivos diferentes, porque na resposta final está pedindo respostas diferentes. Mas com um arquivo desses já está manipulando os três itens.*
> *Fábio: O problema que o total você não manipula.*
> *Liliane: Não manipula, mas você consegue chegar. Mecânico está aqui. Agora, para trabalhar o raciocínio, com um arquivo só você investiga, não importa qual [dos três arquivos do GeoGebra] [...]. Como na regra de três, não importa o que você tem, se você tiver três informações, você manipula até chegar ao valor que você quer. Daí você consegue trabalhar o que você quer. Se quer porcentagem, você faz uma série [de perguntas] pedindo porcentagem, faz uma série pedindo o total, faz uma série pedindo a característica.*
> *Rejane: O que vocês acham pessoal? Que é melhor a gente trabalhar assim com os três arquivos? Porque pensando nisso que a Liliane falou, talvez seja mais interessante mesmo [um só arquivo] para ele pensar.*

> *Liliane: Porque também pode fazer assim [como estava, com três arquivos separados], depois trabalhar as diversas situações [em outra questão].*
> *Rejane: Talvez seja isso que está faltando. Ter mais uma questão com tudo misturado.*
> *Karolina: Ou usar essas mesmas questões com uma em seguida da outra.*
> *Liliane: Porque senão fica mecânico, estar pedindo porcentagem, e ver direto lá [a resposta no arquivo do GeoGebra]. Porque é o que eles fazem... A gente vê que é assim quando [os alunos] estão fazendo atividades.*
> *Alana: Porque [como está] o aluno que não sabe porcentagem, ele pode ir lá no software [manipular] e dar a resposta, mas eu acho que ele não entende assim.*
> *Rejane: Bom, pessoal, vou pensar nisso que vocês falaram... Talvez, por estar com muitos itens em cada, uns oito itens [nas questões 2 e 3], eu possa tirar uns de cada e montar a quinta questão com tudo misturado, para que ele pense mais, de forma geral.*

E assim foi feito, uma nova questão foi elaborada, a quinta questão (Quadro 28), que complementa a ideia que vem sendo trabalhada nas questões 2, 3 e 4.

Quadro 28 – Questão 5 da atividade "Frações Equivalentes e Porcentagem"

5. Vamos investigar outras situações que ocorrem nas turmas B da mesma escola das questões anteriores. Para isso, use o arquivo que achar mais adequado para cada questão (numero-de-alunos.ggb, porcentagem-de-alunos.ggb ou total-alunos.ggb). a. A sala do 6º ano B organizou um campeonato de futsal. Dos 44 alunos da turma, 50% decidiu jogar. Quantos alunos do 6º B participaram do campeonato jogando? b. Já na sala do 9º B, foi feito um levantamento sobre preferência de animais de estimação. Chegou-se aos seguintes valores aproximados: 44% dos alunos preferem cães, 32% dizem gostar mais de gatos e 9 alunos preferem outros ou não gostam de animais. Quantos alunos participaram do levantamento? c. Na sala do 7º ano B que tem 42 alunos, aproximadamente 74% vão para escola de ônibus. Quantos alunos dessa sala vão para escola de ônibus? d. Na sala do 8º ano B, foi feita uma eleição para representante de classe. Do total de alunos, 25% votaram no Caio, que foi eleito com 9 votos, pois haviam muitos candidatos. Quantos alunos têm na turma de Caio? e. Na sala do 9º ano B o professor de Matemática fechou as notas do 1º bimestre. Dos 33 alunos, aproximadamente 67% foram super bem, e tiveram um rendimento de, ao menos, 80%. Quantos alunos foram super bem? f. Na sala do 6º ano B que tem 44 alunos e organizou um campeonato de futsal, 22 alunos da turma decidiram apenas assistir aos jogos. Qual a porcentagem de alunos da turma que não jogou? g. Na sala do 7º ano B que tem 42 alunos, 11 alunos não vão para escola de ônibus. Qual é, aproximadamente, a porcentagem de alunos dessa sala que vão para escola de ônibus? h. Na sala do 8º ano B, foi feita uma eleição para representante de classe. Dos 36 alunos da turma, 27 não votaram no Caio. Qual a porcentagem de alunos que não votaram no Caio? i. Na sala do 9º ano B, 11 dos 33 alunos tiveram desempenho abaixo de 80% no 1º bimestre. Qual a porcentagem aproximada de alunos que tiveram esse rendimento?

Fonte: a pesquisa.

Nessa questão, prováveis situações que ocorrem na mesma escola das situações já apresentadas são propostas. Contudo, para realização de tal questão, o arquivo do GeoGebra mais adequado deve ser escolhido pelo aluno, dentre as três possibilidades: numero-de-alunos.ggb, porcentagem-de-alunos.ggb ou total-alunos.ggb. O item *a* solicita que o aluno identifique o número de alunos que decidiu jogar em um campeonato em que, dos 44 alunos da turma, 50% decidiu jogar. No item *b*, deve ser indicado quantos alunos participaram de um levantamento em que 44% dos alunos preferem cães, 32% dizem gostar mais de gatos e 9 alunos preferem outros ou não gostam de animais.

Já o item *c* questiona qual é o número de alunos de uma sala de 42 alunos que vão para escola de ônibus, dado que aproximadamente 74% vão para escola com esse meio de transporte. A pergunta seguinte (item *d*) pede que seja indicado o número de alunos de uma turma, sabendo que nela houve uma eleição para representante de classe, em que, do total de alunos, 25% votaram no Caio, que foi eleito com 9 votos. No item *e*, buscou-se descobrir quantos alunos foram super bem no 1º bimestre, se da turma de 33 alunos, aproximadamente 67% foram super bem, e tiveram um rendimento de, ao menos, 80%.

Na sequência (item *f*), deve ser indicada a porcentagem de alunos que, de uma turma com 44 alunos, não jogou em um campeonato de futsal, dado que 22 alunos da turma decidiram apenas assistir aos jogos. No item *g*, é pedido a porcentagem aproximada, novamente de alunos de uma sala que vão para escola de ônibus, dado que a sala tem 42 alunos, e destes, 11 alunos não vão para escola de ônibus.

No item *h* é solicitado a porcentagem de alunos que não votaram no Caio na eleição para representante de classe, se dos 36 alunos da turma, 27 não votaram nele. Por fim, o item *i* solicita a porcentagem aproximada de alunos que tiveram rendimento abaixo de 80% no 1º bimestre, se 11 dos 33 alunos tiveram esse desempenho.

Ao criar a questão 5, mais uma vez levamos em conta o olhar profissional do Professor de Matemática, que nesta situação, apontou para o uso adequado da tecnologia. Foi destacado que o uso das tecnologias perde sua real função quando depende apenas de ações mecânicas. Neste sentido, adequações foram feitas na atividade, por acreditar que para que o conhecimento seja produzido por meio de um coletivo de seres-humanos-com-mídias, nesse caso esperado por meio do desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional, a relevância da escolha das mídias corretas é fundamental, o que destaca o papel da interação do ser humano com as mídias nesta concepção (BORBA; VILLARREAL, 2005).

A sexta questão (Quadro 29), relaciona porcentagem com descontos. Ela apresenta uma situação comum após a realização de grandes eventos. Trata-se dos descontos concedidos aos produtos criados para comercialização durante grandes eventos, como a Copa do Mundo de Futebol e as Olimpíadas, ficando muito mais acessíveis para o consumidor.

Quadro 29 – Parte Inicial da questão 6 da atividade "Frações Equivalentes e Porcentagem"

6. Logo após a Copa do Mundo de 2014, os preços dos produtos criados para esta ocasião despencaram. Veja:

Para os itens de *a* a *d*, use a caixa de entrada do GeoGebra para fazer os cálculos que precisar.

a. Observando estes valores, qual produto está com maior porcentagem de desconto?

b. E qual está com a menor porcentagem de desconto?

c. Qual produto está com o maior desconto em reais? De quanto é esse desconto em porcentagem?

d. Qual está com o menor desconto em reais? De quanto é esse desconto em porcentagem?

-> Abra o arquivo descontos.ggb e veja a representação da relação entre o preço desses três produtos e seus descontos. Os retângulos representam o preço sem desconto. A parte azul o valor que se paga na promoção, e o rosa, o que se tem desconto. Observe estes retângulos e responda:

e. Qual produto está com maior porcentagem de desconto?

f. Qual está com a menor porcentagem de desconto?

Fonte: a pesquisa.

Para iniciar a resolução desta questão, dos itens *a* a *d*, a caixa de entrada do GeoGebra deve ser utilizada para cálculos. É questionado qual dos produtos apresentados está com maior porcentagem de desconto (item *a*) e qual está com a menor porcentagem de desconto (item *b*). Além disso, é perguntado qual produto está com o maior desconto em reais e de quanto é esse desconto em porcentagem (item *c*), bem como qual está com o menor desconto em reais e de quanto é esse desconto em porcentagem (item *d*).

Sobre esta parte, questionei os professores se o enunciado "Para os itens de *a* a *d*, use a caixa de entrada do GeoGebra para fazer os cálculos que precisar" deveria estar mais direcionado, indicando os passos necessários para sua utilização.

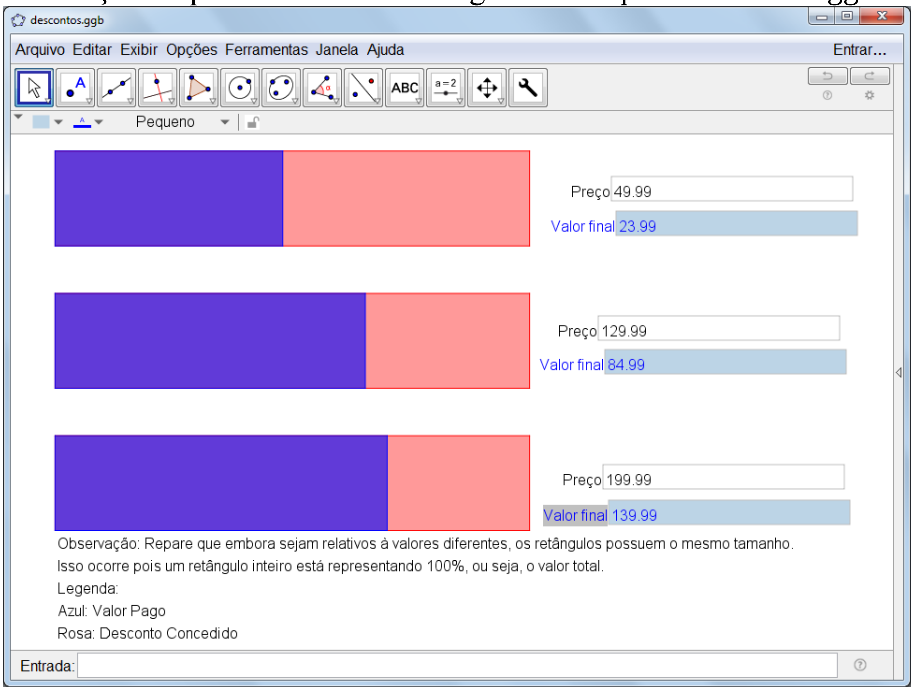
> *Rejane: Vocês acham que a gente deve escrever assim: "Faça, no GeoGebra, o valor do desconto dividido pelo valor inicial do produto" ou deixa ele [o aluno] pensar [em como proceder para encontrar as respostas]?*

Karolina: Deixa ele errar, como eu. [risos]
Rejane: Mas você não pensou errado. Você pensou assim: 48% é a parte que ele pagou, ele teria que pensar que a parte do desconto foi 52%.
Karolina: Mas eu acho melhor deixar [como está], pra daí, se ele errar, ele perceber que ele errou, entendeu?
Miriam: Eu acho que é importante.
Rejane: Como professora, a gente quer que o aluno dê a resposta certa. Então, talvez, se eu perguntasse assim: "Digite, no GeoGebra, o valor do desconto dividido pelo valor inicial do produto". Talvez ele me dê a resposta certa, mas ele não consiga entender isso. Então, talvez, errar seja preciso. Por isso deixei nesse formato. O que vocês acham?
Karolina: Melhor deixar assim.
Alana: Sim, é melhor.

Como os professores sugeriram, o enunciado foi mantido, solicitando apenas que o aluno usasse a caixa de entrada do GeoGebra para fazer os cálculos que precisasse.

Dando continuidade, o arquivo descontos.ggb (Figura 36) deve ser aberto e, nele, analisada a representação da relação entre o preço desses três produtos e seus descontos. Ao analisar as representações no arquivo do GeoGebra, deve ser novamente respondido qual produto está com maior e qual está com menor porcentagem de desconto (itens *e* e *f*).

Figura 36 – Tela do GeoGebra com representação da parte inicial da questão 6 da atividade "Frações Equivalentes e Porcentagem" no arquivo descontos.ggb



Fonte: a pesquisa.

Para o arquivo descontos.ggb foram sugeridas alterações.

Rejane: Eu acho que está faltando mais itens nesta questão. Outras coisas que não estão na imagem.
Diana: E se colocar o eixo embaixo para o aluno poder movimentar e relacionar com porcentagem?
Rejane: O eixo?
Diana: Entre uma barra e outra.

Rejane: Estou pensando em colocar não o eixo, mas um segmento de dez em dez.
Diana: Pode também.
Rejane: Ou em quatro partes: 0, 25, 50, 75 e 100 porcento.
Miriam: Uma referência, né?
Karolina: Mas ele não poderá confundir com valores?
Rejane: É, eu tenho medo de ele fazer isso.
Karolina: Porque pode acontecer de um [produto] de R$49,00 ficar do mesmo tamanho de [um produto] de R$200, né?
Rejane: Sim, por causa da porcentagem.
Karolina: Eu acho que já deveria ir direto para porcentagem.
Rejane: Ah, estou pensando.
Tiago: Mas você [Karolina] acha que deveria diminuir, fazer retângulos proporcionais [aos valores]?
Karolina: Não diminuir, acho que deve trabalhar no 100%, entendeu? Para ele perceber, dentro do retângulo, porque 52% é maior que o 30%. Esquecendo um pouco o valor [absoluto], trabalhando um pouco com a porcentagem [valor relativo].
Elias: E se colocar uma legenda só, ali do lado [apontando para a projeção de multimídia na parede]. A legenda das cores.
Moisés: Eu ia falar isso.
Rejane: Deixar escrito aqui [mostro o local na projeção]?
Elias: Colocar a legendinha das cores. [afirma acenando que sim]
Tiago: Cor de rosa é a porcentagem [de desconto], e o azul o preço a ser pago. É, consegui visualizar.
Miriam: O rosa é o desconto, na verdade, né? E o azul o valor a ser pago.
Rejane: Está certo. Anotei. Acho que está faltando escrever que os três estão representados no mesmo tamanho de retângulo porque é uma porcentagem. Alguma coisa falando disso.
Miriam: Para o aluno relacionar os valores, que são diferentes.
Rejane: O que a Karolina falou é importante. Porque ele pode pensar assim, por que R$49,90 está com a barra do mesmo tamanho [de outro valor que equivalha a mesma porcentagem]? Porque é proporcional. Estamos fazendo proporcionalmente.

Com estas colocações, acrescentamos no arquivo descontos.ggb uma caixa de texto com a seguinte observação: “Repare que embora sejam relativos à valores diferentes, os retângulos possuem o mesmo tamanho. Isso ocorre pois um retângulo inteiro está representando 100%, ou seja, o valor total. Legenda: Azul - Valor Pago e Rosa - Desconto Concedido” como pode ser visto na Figura 36, que já é uma versão aprimorada após o curso.

Durante o curso, essa questão só contava com essa primeira parte (itens de *a* a *f*). Contudo, após revisar a atividade, percebi que é possível explorar outras situações de comparação entre descontos, pois considero que essa é uma das formas mais rotineiras de aplicação da porcentagem no cotidiano, e que, portanto, merecia um pouco mais de espaço na questão. Por esse motivo, após o curso foi acrescentada uma segunda parte (Quadro 30). Nesses novos itens (*g* a *j*), primeiramente é pedido que, novamente no arquivo descontos.ggb (Figura 37), outros produtos e seus preços com desconto sejam representados.

Quadro 30 – Parte final da questão 6 da atividade "Frações Equivalentes e Porcentagem"

Além dos produtos citados, a loja está vendendo outros produtos criados para a Copa com descontos:

-> Novamente no arquivo descontos.ggb, represente a relação entre o preço desses três produtos e seus descontos.

g. Qual produto está com o maior desconto em reais? De quanto é esse desconto em porcentagem?

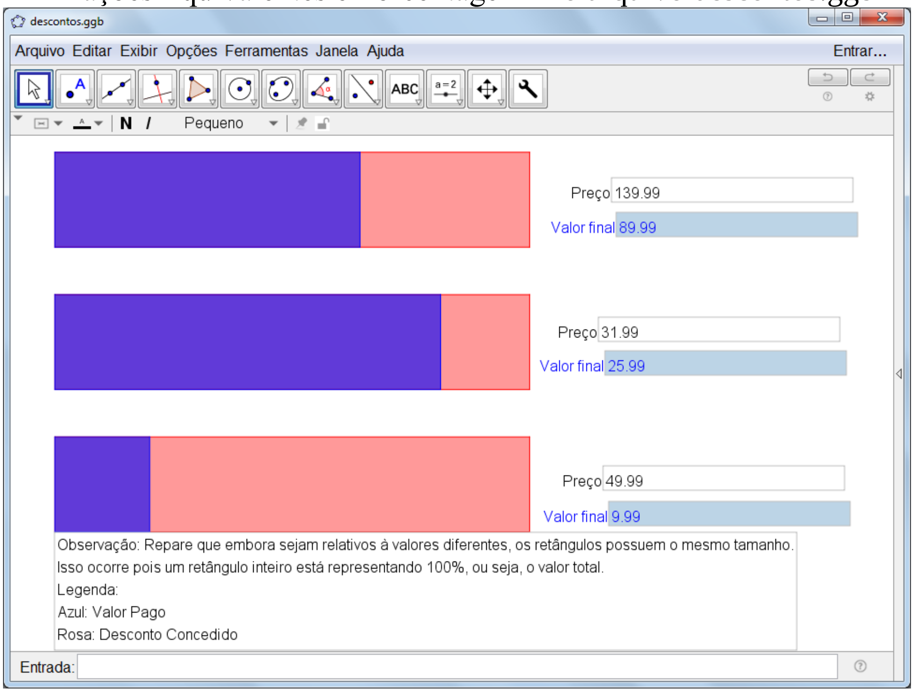
h. Qual está com o menor desconto em reais? De quanto é esse desconto em porcentagem?

i. Qual produto está com maior porcentagem de desconto?

j. Qual está com a menor porcentagem de desconto?

Fonte: a pesquisa.

Figura 37 – Tela do GeoGebra com representação da parte final da questão 6 da atividade "Frações Equivalentes e Porcentagem" no arquivo descontos.ggb



Fonte: a pesquisa.

Observando as representações no arquivo do GeoGebra, deve ser respondido qual produto está com o maior desconto em reais e de quanto é esse desconto em porcentagem (item *g*) e qual está com o menor desconto em reais e de quanto é esse desconto em porcentagem (item *h*). Por fim, é questionado qual dos três produtos está com maior e qual está com menor porcentagem de desconto (itens *i* e *j*).

A questão seguinte (Quadro 31), explora situações diferentes da anterior, por abordar duas operações consecutivas, uma de aumento e outra de desconto (não, necessariamente, nessa ordem), que devem ser exploradas no arquivo duas-operações-consecutivas.ggb.

Quadro 31 – Questão 7 da atividade "Frações Equivalentes e Porcentagem"

7. Para a questão a seguir, use o arquivo duas-operações-consecutivas.ggb.

Situação I

Uma loja estava com vendas baixas e decidiu fazer uma liquidação de final de ano. Ela anunciou que todos os eletrodomésticos estavam com 40% de desconto, mas alguns dias antes de anunciar a liquidação, os preços desses produtos aumentaram em 30%.

a) Um dos produtos dessa loja é um microondas que durante todo o ano custava R$249,90. Qual é o valor que ele está sendo anunciado na liquidação?

b) Qual foi o desconto (em R$) realmente dado nesse microondas?

c) Qual a porcentagem de desconto real nesse produto?

d) Outro produto também anunciado na liquidação foi um fogão, que custava R$998,00. Qual foi o valor deste fogão após o aumento? E por quanto ele foi anunciado na liquidação?

e) Qual foi a porcentagem de desconto real nesse fogão?

Situação II

Nos produtos eletrônicos os descontos foram diferentes. No dia da liquidação, foi dado um desconto de 10% em todos os produtos. Mas ainda assim, nenhum deles foi vendido durante a liquidação. Na semana seguinte, a liquidação acabou e o dono da loja decidiu aumentar os produtos em 10%. Depois que acabou a liquidação, quanto passou a custar os produtos a seguir, sabendo que antes de passar por qualquer desconto ou aumento eles custavam...

f) HD externo – R$100?

g) Smartphone - R$599?

h) Câmera digital - R$799?

i) Quando um produto sofre um desconto de x% e um consecutivo aumento de x% ele volta a ter o mesmo valor inicial? Por que isso (não)ocorre?

Situação III

O dono da loja planejou fazer uma liquidação de móveis no final do mês. Para isso, ele adotou a seguinte estratégia: Primeiro aumentou todos os móveis em 20%, e na semana da liquidação de móveis, deu um desconto de 20%, anunciando nos folhetos da loja que todos os móveis estavam com 20% de desconto. Durante essa liquidação, quanto estava custando os produtos a seguir, sabendo que antes de passar por qualquer aumento ou desconto eles custavam...

j) Conjunto de Rack e Painel – R$699,90?

k) Cabeceira estofada casal– R$299,90?

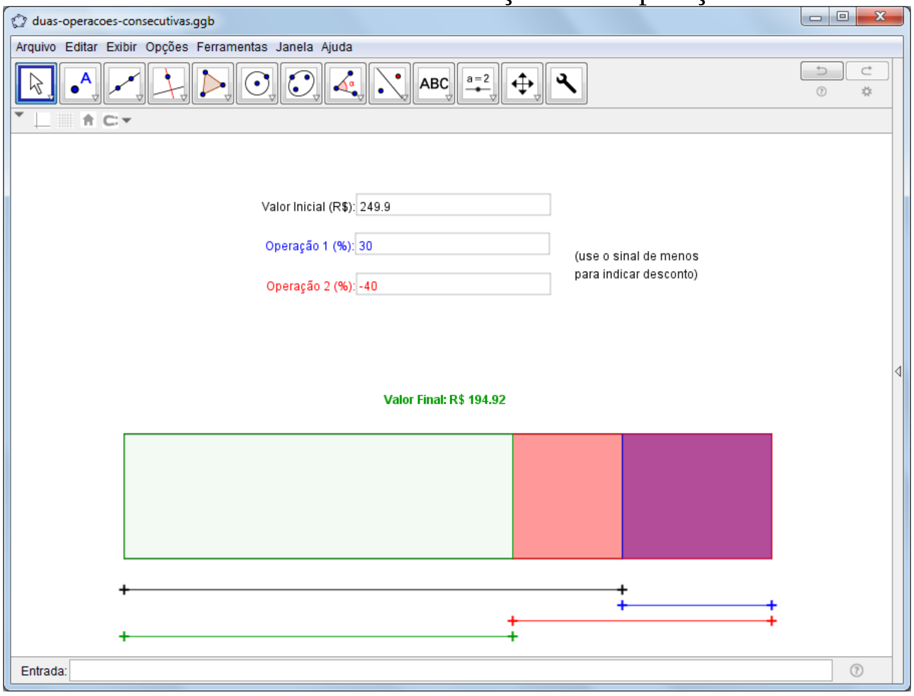
l) Conjunto de sofá de dois e três lugares - R$1299?

m) Quando um produto sofre um aumento de x% e um consecutivo desconto de x% ele volta a ter o mesmo valor inicial? Por que isso (não)ocorre?

Fonte: a pesquisa.

A primeira situação aborda um caso de uma liquidação em uma loja, em que foi anunciado que todos os eletrodomésticos estavam com 40% de desconto. Contudo, alguns dias antes da liquidação, os produtos sofreram um aumento de 30%. Com base nessas informações, deve ser explorado o caso do microondas (Figura 38).

Figura 38 – Tela do GeoGebra com construção duas-operações-consecutivas.ggb



Fonte: a pesquisa.

A primeira informação sobre ele é que o preço inicial era de R$249,90, sabendo disso, o valor que foi anunciado na liquidação deve ser calculado (item *a*). No item *b*, deve ser informado o valor do desconto em reais realmente concedido. Por fim, a real porcentagem de desconto dada a esse produto deve ser informada. Ainda nesta situação deve ser explorado o caso do fogão. No item *d* é informado que o preço inicial era de R$998,00, assim sendo, deve ser indicado qual foi o valor deste fogão após o aumento e por quanto ele foi anunciado na liquidação. No item seguinte deve ser registrada a real porcentagem de desconto dada a esse fogão.

Na realização desta questão, comentamos:

> *Rejane: O aluno pode fazer conta, mas ele também pode pensar que, se teve a mesma porcentagem de aumento e porcentagem de desconto, como a porcentagem é a cada cem, é proporcional, também é 22%, embora eu acho que todo mundo faz conta. Se alguém não fizer a gente ressalta isso, e se todo mundo fizer a gente pode falar: Pessoal, quanto teve de aumento? 30%. E depois, teve 40% de desconto. A porcentagem não é proporcional? O que aumenta em um não vai aumentar no outro proporcionalmente, a cada cem? Então se aumentei 30% e diminui 40%, vai ser 22% [de desconto] em qualquer produto [da situação I]. Eu acho que dá para explorar isso aí.*

> *Karolina: É também importante que ele perceba [o resultado] que aumentou 30% e tirou 40%. Eu acho que alguns irão falar que tirou só 10% [pensando em 40-30=10].*
> *Rejane: Sim, talvez até explorar isso antes de começar as questões. Importante isso, pois se aumentou 30% e tirou 40% o desconto foi de 10%? Daí eu acho que pode sair isso sim, Karolina.*

Assim como apontado pela professora Karolina, os PCN (BRASIL, 1998) indicam que a proporcionalidade e o Raciocínio Proporcional estão presentes, dentre outros meios, nos estudos de porcentagem, que é importante conceito para o cotidiano de um cidadão. Nesse sentido, sua relevância ultrapassa o contexto escolar, pois considera vários aspectos do dia-a-dia que operam proporcionalmente. Esse entendimento aumenta a nossa responsabilidade, como professores e pesquisadores da Educação Matemática, quanto à dedicação para elaborar e aprimorar meios de desenvolver e explorar o Raciocínio Proporcional.

Na situação II, os produtos eletrônicos passam por um desconto de 10% em todos os produtos no dia da liquidação. Contudo, nenhum deles foi vendido, nem mesmo na liquidação, e por isso, o dono da loja decidiu aumentar os produtos em 10%. Com base nessas informações deve ser respondido quanto passou a custar os produtos depois que acabou a liquidação, sabendo que antes de passar por qualquer alteração no valor, o HD externo custava R$100 (item *f*), o Smartphone custava R$599 (item *g*), e a Câmera digital custava R$799 (item *h*). Com base nas operações realizadas, deve-se então responder se quando um produto sofre um desconto de x% e um consecutivo aumento de x% ele volta a ter o valor inicial, e os motivos que fazem com que isso (não) ocorra (item *i*). Com base nessa situação, fiz o apontamento:

> *Rejane: Se um produto custa R$100,00 e teve 10% de desconto, ele vai para R$90,00. Aí eu dou um aumento consecutivo de 10%. Ele volta a custar R$100,00? Não, ele vai custar R$99,00. Isso também é outra coisa que é difícil de entender se você não pensar que o valor mudou. [Geralmente se pensa que] se tirei 10% e aumentei 10%, voltei para o mesmo valor.*

Ao repensar essa questão após o curso, acrescentei a terceira situação, que não existia no curso. Uma questão em que é abordado que, quando um produto sofre um aumento e um consecutivo desconto de uma mesma porcentagem, ele não volta a ter o valor inicial. Assim, embora seja um caso contrário à situação II, em que um produto sofria um desconto e um consecutivo aumento de uma mesma porcentagem, também foi possível observar que o produto não retornou ao seu valor inicial.

A situação III que foi acrescentada consiste em uma liquidação de móveis, em que o dono adotou a estratégia de, primeiramente aumentar todos os móveis em 20% e, na semana da liquidação, conceder um desconto de 20%. Assim, deve ser informado o valor, durante a liquidação, de um Conjunto de Rack e Painel que antes de qualquer alteração custava R$699,90 (item *j*), de uma cabeceira estofada casal, que inicialmente custava R$299,90 (item *k*), e de um conjunto de sofá cujo preço inicial era de R$1299,00 (item *l*). Com a realização destes itens, espera-se que seja possível informar no item *m*, se, quando um produto sofre um aumento de x% e um consecutivo desconto de x%, ele volta a ter o valor inicial e os motivos para que isso (não) ocorra.

A oitava questão (Quadro 32), apresenta duas situações de proporcionalidade de água e tinta em uma mistura a serem exploradas no arquivo mistura-agua-e-tinta.ggb (Figura 39).

Quadro 32 – Questão 8 da atividade "Frações Equivalentes e Porcentagem"

8. Abra o arquivo mistura-agua-e-tinta.ggb. Repare que temos dois seletores para a quantidade de tinta e água colocadas na mistura.

Situação I

O fabricante de uma determinada marca de tinta do tipo látex PVA, indicada para área interna da casa, recomenda que o produto seja diluído na proporção de 20% a 30% de água. O pintor misturou o conteúdo de uma lata de tinta de 900 ml, com 300 ml de água.

a) Com relação ao recomendado pelo fabricante, a quantidade de água colocada pelo pintor está correta? Por quê?

b) Qual o máximo de água que o pintor poderia ter acrescentado à mistura?

c) E o mínimo?

d) Quantos ml de tinta o pintor precisa acrescentar à essa mistura agora, para arrumar a proporção de água?

e) Para pintar toda a área interna da casa, o pintor usou uma quantidade dessa tinta bem maior do que as 900ml que inicialmente usou. Ao todo, foram 30 litros de tinta. Para essa quantidade, quanto de água deve ser misturada?

f) Supondo que nos 30l de tinta, ele tenha insistido em manter a proporção de 300ml de água para cada 900ml de tinta, qual foi a quantidade de água que ele usou nessa mistura?

Situação II

Para pintar a área externa, foi comprada uma tinta do tipo acrílica, por ser impermeável. O fabricante dessa tinta determina que o produto seja diluído na proporção de 10% a 15% de água. O pintor misturou o conteúdo de uma lata de tinta de 500 ml, com 100 ml de água.

g) Com relação ao recomendado pelo fabricante, a quantidade de água colocada pelo pintor está correta? Por quê?

h) Qual o máximo de água que o pintor poderia ter acrescentado à mistura?

i) E o mínimo?

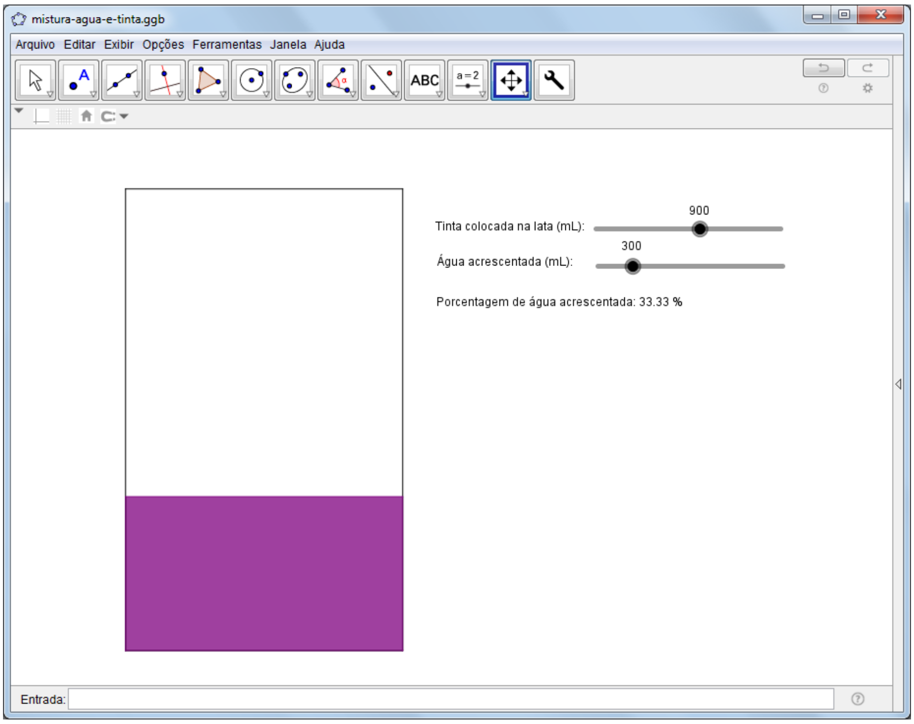
j) Quantos ml de tinta o pintor precisa acrescentar à essa mistura agora, para arrumar a proporção de água?

k) Para pintar toda a área externa da casa, o pintor usou 12 litros de tinta. Para essa quantidade, quanto de água deve ser misturada?

l) Supondo que nos 12l de tinta, ele tenha insistido em manter a proporção de 100ml de água para cada 500ml de tinta, qual foi a quantidade de água que ele usou nessa mistura?

Fonte: a pesquisa.

Figura 39 – Tela do GeoGebra com construção mistura-agua-e-tinta.ggb



Fonte: a pesquisa.

Na primeira situação, indica que o fabricante de um tipo de tinta recomenda que o produto seja diluído na proporção de 20% a 30% de água. Outra informação importante é a de que o pintor misturou o conteúdo de uma lata de tinta de 900ml, com 300ml de água. Embasado nessas informações, deve ser respondido se a quantidade de água colocada pelo pintor está correta, com relação ao recomendado pelo fabricante (item *a*), quais seriam o máximo e o mínimo de água que o pintor poderia ter acrescentado à mistura (itens *b* e *c*), e qual quantidade de tinta, em ml, o pintor precisaria acrescentar à mistura que ele fez para arrumar a proporção de água (item *d*).

Além disso, essa questão afirma, no item *e*, que ao todo, o pintor usou 30 litros de tinta e, então, questiona quanto de água deve ser misturada a essa quantidade de tinta. Finalizando essa situação, o item *f* supõem que nos 30 litros de tinta, o pintor tenha insistido em manter a proporção de 300ml de água para cada 900ml de tinta. Assim sendo, deve ser indicado qual seria a quantidade de água nessa mistura.

Ao concluir estes itens, questiono os cursistas:

> *Rejane: Tem mais alguma pergunta que dá para tirar dessa questão? Se [o enunciado] está adequado ou não, e se tem mais alguma pergunta, pois as que eu consegui pensar foram essas.*

Essa questão só contava, inicialmente, com uma situação. A segunda situação foi acrescentada por conta das sugestões dos professores Tiago e Karolina:

Tiago: Eu acho que na hora da aula poderia mudar. Por exemplo, o fabricante agora falaria que é de 15 a 20% de água.
Rejane: Só se fosse em uma outra lata. Tipo assim: Uma lata para pintar o portão, com outro tipo de tinta.
Tiago: Isso, mais diluída ou mais concentrada. Você pode diminuir ou aumentar a taxa de porcentagem.
Rejane: Sim, porque é uma construção rica, fica muito pouco explorada, pois em cinco minutos faz uma questão dessas. Então vou criar uma outra parte com outra tinta, senão fica assim: era 20% agora é 30%?
Karolina: Eu estava vendo ali e o cursor [do controle deslizante] só vai até 1600[ml], poderia pedir ao aluno uma quantidade, tipo dois litros. Fica uma coisa um pouco mais difícil.
Tiago: Aumentar o intervalo?
Rejane: Não. Não mexer no intervalo. Perguntar para que ele pense [em outras possibilidades].
Karolina: Daí ou ele vai fazer a conta, ou ele vai fazer quanto dá para um litro [e multiplicar por outras quantidades].
Tiago: Sim, ele pode fazer a proporção.
Rejane: Muito bom! Legal isso!

Com essas considerações, elaborei a segunda situação desta questão, que não foi discutida no curso. Nela é explorada a mistura de água e tinta para pintar a área externa da casa, na qual é recomendado que o produto seja diluído na proporção de 10% a 15% de água. É dada ainda a informação de que o pintor misturou o conteúdo de uma lata de tinta de 500ml com 100ml de água. Com isso, deve ser respondido se a quantidade de água colocada pelo pintor está correta, com relação ao recomendado pelo fabricante (item *g*), quais seriam o máximo e o mínimo de água que o pintor poderia ter acrescentado à mistura (itens *h* e *i*) para manter o padrão indicado pelo fabricante, e qual quantidade de tinta, em ml, o pintor precisa acrescentar à mistura que ele fez para arrumar a proporção de água (item *j*).

Além disso, essa questão afirma, no item *k*, que ao todo o pintor usou 12 litros de tinta e, então, questiona quanto de água deve ser misturada a essa quantidade de tinta. Finalizando essa situação, o item *l* supõe que nos 12 litros de tinta, o pintor tenha insistido em manter a proporção de 100ml de água para cada 500ml de tinta. Assim sendo, deve ser indicado qual seria a quantidade de água nessa mistura.

No que se refere a essa atividade, mais especificamente a essa questão, os professores, em seus relatos, destacam como ela se mostrou interessante e como o Geogebra se configurou como uma possibilidade pertinente para o desenvolvimento do tema escolhido.

Marta: A atividade desta aula, foi bem interessante, apesar de trabalhosa e com muitos detalhes nos comandos, achei o resultado final bem produtivo. No caderno do aluno, 6ª Série / 7º Ano, 1º bimestre, é "apresentada uma proposta geométrica para o trabalho com multiplicações de frações, mas é importante que fique claro que inúmeras outras abordagens podem ampliar de forma significativa as possibilidades de compreensão do tema", a meu ver o GeoGebra é uma dessas possibilidades. A construção "mistura-agua-e-tinta", nos demonstra muito bem a relação de proporção e de

> *porcentagem e, com certeza, essa explanação será muito útil para os alunos perceberem esta relação. Nesta atividade ele poderá refletir e analisar por diversos pontos de partida.“Por fim, é importante que se diga que, na medida do possível, o professor deverá trabalhar os conteúdos de maneira aplicada e desafiadora, e um bom caminho metodológico para isso é explorar situações-problema com significado e que exijam reflexão crítica por parte do aluno”. OBS: Os trechos entre aspas foram extraídos do caderno do aluno citado no relato.*
> *Denise: Achei a atividade da mistura tinta/água muito interessante, imagino os alunos interagindo com ela.*

Depois da realização da questão 8, deve ser realizada a última questão que compõe esta atividade, (Quadro 33). Primeiramente é explorada uma parte introdutória, em um texto que apresenta Leonardo da Vinci e uma de suas principais obras, o Homem Vitruviano, bem como trechos do texto do artista, que acompanha a gravura dessa obra, explorando a proporcionalidade entre as medidas de vários de seus membros.

Quadro 33 – Introdução da questão 9 da atividade “Frações Equivalentes e Porcentagem”

9. Vamos ler o texto abaixo:

O *HOMEM VITRUVIANO* E AS RAZÕES NO CORPO HUMANO

Leonardo da Vinci foi uma das figuras mais criativas de seu tempo. Ele viveu na Itália, no século XV, e criou algumas das obras mais famosas de todos os tempos, como a *Mona Lisa, A última ceia* e *A virgem das rochas*. Leonardo realizou estudos nas mais diversas áreas: pintura, arquitetura, engenharia, anatomia, entre outras. Ele conseguiu, como ninguém, aproximar a ciência da arte. Leonardo também produziu um estudo sobre as proporções do corpo humano, baseado no tratado feito pelo arquiteto romano Marcus Vitruvius, que, no século I a C., havia descrito as proporções ideais do corpo humano, segundo um padrão de harmonia matemática.

Assim como muitos outros artistas, Leonardo interessou-se pelo trabalho de Vitruvius e registrou-o em um de seus cadernos de anotação. No meio dessas anotações, desenhou a figura de um homem dentro de um círculo e de um quadrado. Essa figura, chamada de *Homem vitruviano*, acabou se tornando um de seus trabalhos mais conhecidos, simbolizando o espírito renascentista. O desenho de Da Vinci evidenciou a retomada e a valorização de princípios da tradição greco-latina, tais como beleza, harmonia, equilíbrio e proporção. Essa obra atualmente faz parte da coleção das *Gallerie dell'Accademia* (Galerias da Academia), em Veneza, na Itália.

Reproduzimos, a seguir, alguns trechos do texto de Da Vinci que acompanham a gravura do Homem vitruviano.

“[...] O comprimento dos braços abertos de um homem é igual à sua altura [...]; desde o fundo do queixo até ao topo da cabeça é um oitavo da altura do homem [...]; a maior largura dos ombros contém em si própria a quarta parte do homem. [...] Desde o cotovelo até o ângulo da axila é um oitavo da altura do homem. A mão inteira será um décimo da altura do homem. [...] O pé é um sétimo do homem [...]; a distância entre o fundo do queixo e o nariz, e entre as raízes dos cabelos e as sobrancelhas é a mesma, e é, como a orelha, um terço da cara.” Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/davinci/matematico.htm>. Acesso em: 20 nov. 2013.

Fonte: a pesquisa.

Feita essa introdução, são iniciados os itens dessa questão (Quadro 34), com o registro na tabela, das medidas descritas no texto, e as letras que correspondem às extremidades do segmento na imagem no arquivo homem-vitruviano.ggb (Figura 40). Além disso, com a ferramenta distância no GeoGebra, os segmentos anotados devem ser medidos e registrados na planilha.

Quadro 34 – Itens da questão 9 da atividade "Frações Equivalentes e Porcentagem"

-> Anote na tabela todas as medidas descritas no texto de Leonardo da Vinci, e as letras que correspondem às extremidades do segmento na imagem(abra o arquivo homem-vitruviano.ggb). Além disso, com a ferramenta distância, comprimento ou perímetro, meça esses segmentos.

Parte medida	segmento	tamanho
Longitude dos braços	EF	11.17

As relações existentes no Homem Vitruviano podem ser representadas em frações, decimais e também em porcentagem. Por exemplo, na construção homem-vitruviano.ggb, podemos calcular na caixa de entrada que a razão entre a altura da cabeça (DN) e a altura do homem (CD) é 0.125, que é a resposta decimal. Podemos conferir se essa resposta é igual a descrição de da Vinci "desde o fundo do queixo até ao topo da cabeça é um oitavo da altura do homem [...]", ou seja, que está na razão 1/8 (e esta é a resposta que está em formato de fração). Se dividimos 1 por 8, conferimos que é 0.125 e que da Vinci estava certo. Se multiplicamos o valor encontrado em decimal por 100, temos 12,5%, que é a resposta em porcentagem.

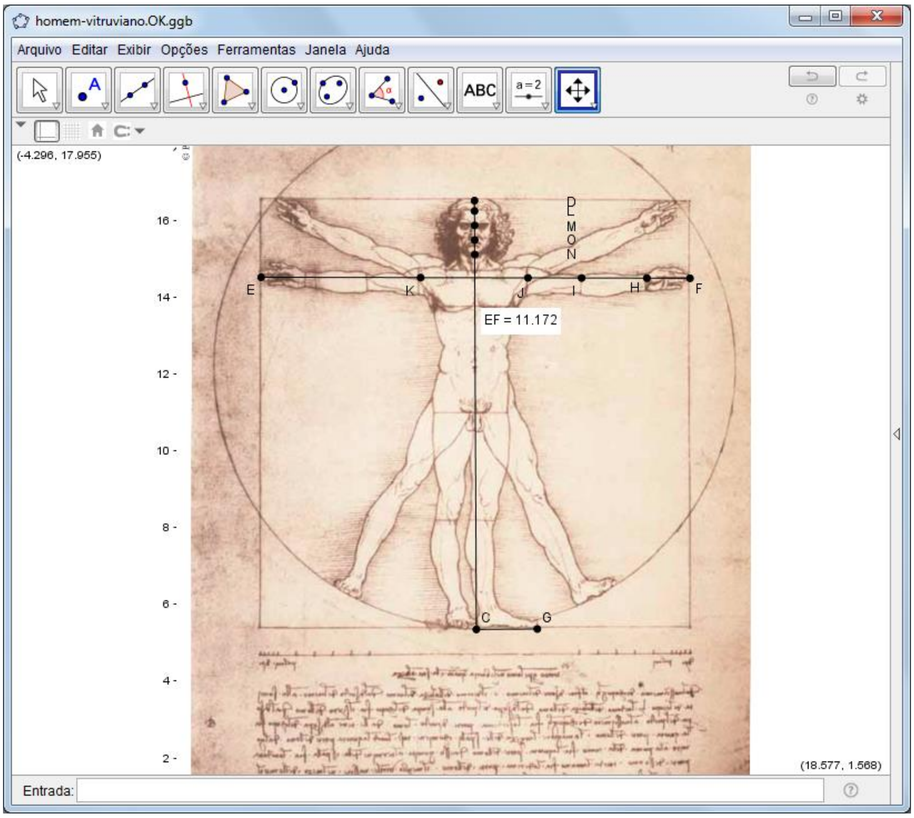
Utilizando a caixa de entrada do GeoGebra e as medidas registradas por você na tabela acima, encontre as representações fracionária, decimal e em porcentagem para os trechos:

I. "O comprimento dos braços abertos de um homem é igual à sua altura"
II. "A maior largura dos ombros contém em si própria a quarta parte do homem"
III. "Desde o cotovelo até o ângulo da axila é um oitavo da altura do homem"
IV. "A mão inteira será um décimo da altura do homem"
V. "O pé é um sétimo do homem"

-> É possível que alguns dos seus valores tenham se diferenciado em algumas casas decimais. Por que você acha que isso ocorreu?

Fonte: a pesquisa.

Figura 40 – Tela do GeoGebra com construção homem-vitruviano.ggb



Fonte: a pesquisa.

Depois de preencher a tabela, é dito e exemplificado que as relações existentes no Homem Vitruviano podem ser representadas em frações, decimais e também em porcentagem. Após as exemplificações, é pedido que, utilizando a caixa de entrada do GeoGebra e as medidas registradas na tabela, sejam encontradas as representações fracionária, decimal e em porcentagem para os trechos: I. “O comprimento dos braços abertos de um homem é igual à sua altura”; II. “A maior largura dos ombros contém em si própria a quarta parte do homem”; III. “Desde o cotovelo até o ângulo da axila é um oitavo da altura do homem”; IV. “A mão inteira será um décimo da altura do homem”, e V. “O pé é um sétimo do homem”. Finalizando, é feita uma observação de que é possível que alguns valores tenham se diferenciado em algumas casas decimais e, então, é questionado sobre quais motivos teriam levado isso a ocorrer.

Com essa questão encerramos a atividade, que foi a última do curso. Esta certamente foi a que mais recebeu contribuições. Colocações foram feitas sobre várias questões, o que permitiu que elas fossem aprimoradas e chegassem a uma versão que considero bem melhor do que a que foi discutida no curso. Nitidamente percebi que o olhar profissional do professor de Matemática lhe permite identificar situações relativas ao ensino e à aprendizagem de Matemática que o distingue de alguém que não tem esse olhar (LLINARES, 2013).

Sobre a experiência de realizar esta atividade, uma professora indicou:

> *Marta: A atividade desta aula foi bem interessante. Apesar de trabalhosa e com muitos detalhes nos comandos, achei o resultado final bem produtivo. No caderno do aluno do 7º ano, 1º bimestre, é apresentada uma proposta geométrica para o trabalho com multiplicações de frações, mas é importante que fique claro que inúmeras outras abordagens podem ampliar de forma significativa as possibilidades de compreensão do tema, a meu ver o GeoGebra é uma dessas possibilidades. A construção "mistura-agua-e-tinta", nos demonstra muito bem a relação de proporção e de porcentagem e com certeza essa explanação será muito útil para os alunos perceberem esta relação. Nesta atividade ele poderá refletir e analisar por diversos pontos de partida.*

Com essa fala, Marta enfatizou que com o GeoGebra é possível abordar a relação entre proporção e porcentagem. Como tanto buscamos, com essa atividade o aluno poderá desenvolver e explorar seu Raciocínio Proporcional "*por diversos pontos de partida",* que entendemos estar relacionado com as possibilidades de representação concomitante aritmética, geométrica e algébrica. Vindo ao encontro dessas ideias, o Prof. Ricardo relata como passou a visualizar suas aulas a partir do momento que conheceu o Geogebra e como ele poderia contribuir para que os conteúdos matemáticos fossem mais práticos e convincentes.

> *Ricardo: Durante muitas aulas, fiquei imaginando alunos com réguas, compassos e transferidores. Nesse momento que fui apresentado ao ``GeoGebra´´, vejo uma possibilidade mais convincente e prática, visto que essa garotada está sempre conectada e empolgada por conhecimentos online. Pude notar que é um programa, de certa maneira fácil e simples com inúmeras possibilidades de trabalho.*

Reconhecer as potencialidades do GeoGebra neste sentido, vai ao encontro da "[...] lógica de "pensar com" e "fazer com" as tecnologias na escola" (OLIVEIRA; MARCELINO, 2015, p. 819), o que pode contribuir para que o professor possa "compreender melhor seus estudantes, permitindo, entre outras possibilidades, explorar ambientes dinâmicos, visualizações e experimentações diversificadas" (OLIVEIRA; MARCELINO, 2015, p. 819).

Assim como na experiência vivenciada por Oliveira e Marcelino (2015), foi possível perceber que:

> [...] várias vezes os professores indicaram a intenção de usar atividades semelhantes com seus estudantes, alterando alguma coisa, adaptando a um tópico corrente do currículo a atividade que acabavam de realizar. Assim, foi possível obter a indicação de que, em contato com sequências que estimulam o desenvolvimento de fluência em Tecnologias Digitais e que subsidiam o processo de pensar com estas mesmas tecnologias, os professores passam a entender que a construção do conhecimento matemático pode se dar a partir de um trabalho protagonizado por um coletivo de seres-humanos-com-mídias (OLIVEIRA; MARCELINO, 2015, p. 841).

Por fim, retomo a iniciativa de destacar que:

> O raciocínio proporcional desempenha um papel tão importante no desenvolvimento matemático do estudante que foi descrito como um conceito limítrofe, a pedra fundamental dos níveis mais altos da matemática e o arremate dos conceitos elementares (LAMON, 1994, p. 90).

Deste modo espero, com esta análise e o desenvolvimento desta tese, ter apresentado possibilidades de desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional, que emergiram com o GeoGebra, integrando aritmética, geometria e álgebra, ressaltadas por meio da interação com professores de Matemática atuantes do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental e pesquisadores em Educação Matemática. Nesse sentido, serão apresentadas conclusões, finalizando assim esta tese.

CONCLUSÕES

Esta pesquisa investigou possibilidades de desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional que emergem em discussões efetuadas por professores ao desenvolver atividades com o GeoGebra, integrando aritmética, geometria e álgebra, a partir do olhar profissional de professores de Matemática e pesquisadores em Educação Matemática. Para tanto, foram elaboradas atividades que perpassam diversos conteúdos matemáticos inerentes ao Raciocínio Proporcional, em uma perspectiva matemática intradisciplinar com o GeoGebra. Durante todo o período de elaboração das atividades, o apoio dos membros do projeto Mapeamento foi crucial, pois, por meio do olhar profissional destes professores de Matemática e pesquisadores da Educação Matemática, foi possível levar para o curso versões mais refinadas das atividades, que passaram por diversas revisões.

Ao realizar o curso de formação continuada com os professores que atuam do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental na rede estadual de ensino de São Paulo, novos refinamentos foram feitos nas atividades, por meio da interpretação e análise realizada quanto ao olhar profissional que eles exerceram sobre as atividades. Esses refinamentos certamente resultaram em aprimoramento nas atividades, pois era nítido que os professores participantes conhecem a realidade de suas escolas e o contexto em que vivem seus alunos, o que permitiu que eles interviessem com mais propriedade sobre a relevância, eficácia, e condições de aplicação das atividades, com foco no Raciocínio Proporcional, na Intradisciplinaridade Matemática e no GeoGebra.

A investigação apresentou caráter qualitativo, sendo que os dados foram obtidos ao longo do curso realizado, por meio de relatos dos professores participantes, questionários de avaliação, registros em vídeo e no caderno de campo. Os dados produzidos foram analisados à luz das perspectivas teóricas apresentadas sobre Raciocínio Proporcional (BEN-CHAIM; KERET; ILANY, 2006; LAMON, 2005; VAN DE WALLE, 2009), Intradisciplinaridade Matemática (LORENZATO, 2006), Tecnologias Digitais e GeoGebra (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014; BORBA; VILLARREAL, 2005; MALTEMPI, 2008; OLIVEIRA; MARCELINO, 2015), Olhar Profissional e Formação Continuada do Professor de Matemática (LLINARES, 2012, 2015).

A abordagem Matemática Intradisciplinar com o GeoGebra para o desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional que foi apresentada nas atividades, possibilita que se tenha uma visão concomitante de aspectos aritméticos, geométricos e algébricos, fundamental ao desenvolvimento abrangente dos conceitos explorados, dando a atenção necessária às particularidades de cada vertente matemática. Nesse sentido, o GeoGebra foi importante para otimizar e viabilizar a abordagem matemática intradisciplinar do Raciocínio Proporcional. Com as atividades elaboradas e o curso realizado, ficou claro que trabalhar simultaneamente com aspectos algébricos, geométricos e aritméticos evidencia características específicas de cada uma dessas vertentes, o que contribui para o entendimento do todo, para uma compreensão de conceitos e relações que ocorrem de forma concomitante.

Por isso, afirmo que neste trabalho o GeoGebra oportunizou a exploração de múltiplas representações que exaltam particularidades das vertentes da Matemática, por meio de seus diversos recursos e janelas que apresentam os objetos matemáticos nas representações algébrica, aritmética e geométrica, de modo dinamicamente conectados. A possibilidade de exploração simultânea contribuiu, ainda, para que as desvantagens de cada representação fossem supridas pelas vantagens das outras, no que se refere ao ensino e à aprendizagem de Matemática.

Ademais, as atividades com o GeoGebra contribuíram para a experimentação, a criação de estratégias, a produção de conjecturas, a exploração de construções, a argumentação qualitativa e a dedução de propriedades matemáticas relativas à conteúdos matemáticos do Ensino Fundamental, inerentes ao Raciocínio Proporcional. Assim, a abordagem matemática no GeoGebra ressaltou a relevância da intradisciplinaridade e ofereceu ao professor atividades que permitem que este tipo de exploração seja realizada.

As obras indicadas no capítulo que aborda o Raciocínio Proporcional e ao longo desta tese, embora apontem entendimentos diversos sobre este conceito, são unanimes em afirmar que se trata de uma forma complexa de pensar, que precisa de mais do que o emprego de algoritmos, pois está relacionado à capacidade de pensar qualitativamente, observando e estabelecendo relações entre grandezas, o que deve ser evidenciado não apenas numericamente, mas principalmente por meio de argumentações e comentários que tangem as relações proporcionais. Neste sentido, explicitei que entendo Raciocínio Proporcional como a capacidade de raciocinar, estabelecendo uma relação entre duas ou mais grandezas em termos relativos, mobilizando para tal raciocínio a habilidade de analisar qualitativamente situações, estabelecer relações, julgar com equidade e distinguir circunstâncias proporcionais das não proporcionais.

Com esse entendimento, foram elaboradas atividades que possibilitam desenvolver a habilidade de raciocinar proporcionalmente e explorar situações que possam ser julgadas como diretamente, inversamente ou não proporcionais. Atividades que não envolvem apenas cálculos, mas que estimulam a relação entre grandezas, a noção de covariação, a diferença entre valores absolutos e relativos, a relevância das relações multiplicativas, a análise qualitativa e a decisão por situações vantajosas.

Também é possível afirmar, a partir dos dados, sobre o caráter das atividades para que o Raciocínio Proporcional seja desenvolvido. Estas devem ser investigativas, em que o processo de aprendizagem importe mais do que a resposta em si, em que regras e técnicas dão lugar ao raciocínio. Nesse sentido, este trabalho coloca em evidência o Raciocínio Proporcional e oferece ao professor a possibilidade de explorar conceitos relacionados a esta temática, por meio das atividades propostas.

Assim como a pesquisa aqui desenvolvida, trabalhos como Lamon (2005), Van de Walle (2009), Cordel e Mason (2000) e Bem-Chaim, Keret e Ilany (2006), já haviam apontado para a relevância do Raciocínio Proporcional em alunos com idade correspondente à Educação Básica. Contudo, esta pesquisa apresentou uma abordagem distinta das demais, ao perseguir este foco com a exploração simultânea de aspectos aritméticos, geométricos e algébricos no GeoGebra. Ou seja, produzimos atividades para o desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional que favorecem a emergência da harmonia existente entre a aritmética, a geometria e a álgebra. Além disso, esta pesquisa deu voz aos professores cursistas para que, com o olhar profissional, pudessem contribuir para o refinamento das atividades.

As atividades são um produto final deste trabalho. Quatro atividades, nas quais são exploradas diversas temáticas relacionadas ao Raciocínio Proporcional, foram produzidas e estão disponibilizadas nesta tese (Apêndices I a IV), com o intuito de que professores de Matemática tenham a oportunidade de desenvolver e explorar o Raciocínio Proporcional com seus alunos.

Representam, portanto, uma contribuição à Educação Matemática ao colocar em evidência temas relevantes à área, a saber: conceitos de frações equivalentes, frações irredutíveis, proporcionalidade, razão, proporção, escalas métricas, representação geométrica da razão e da proporção, gráficos das grandezas proporcionais e não proporcionais, relação entre duas grandezas, função afim, aplicações das grandezas proporcionais, características do gráfico das grandezas proporcionais e não proporcionais, construção de triângulos, exploração de elementos geométricos, relações proporcionais, constante de proporcionalidade, aplicações do Teorema de Tales, aproximação e arredondamento de casas decimais, frações equivalentes à uma fração com denominador igual a 100, porcentagem em relação a um valor dado, valor que uma determinada porcentagem representa, aplicações da porcentagem, aumento e desconto.

Também contribuiu para a Educação Matemática o curso realizado, pois, participar de cursos de formação de professores de Matemática é uma das formas de apurar o olhar profissional docente. Ao pensar que o olhar profissional não pode ser concluído, mas consiste em uma competência que pode ser refinada por meio da reflexão sobre a própria prática, foi possível colaborar para a formação dos professores cursistas, pois realizamos um curso pautado na discussão e no trabalho em conjunto, em que o professor teve a oportunidade de compartilhar experiências com outros professores, de se posicionar e refletir sobre o posicionamento de outros docentes, a partir de sua prática cotidiana.

No curso, os professores mobilizaram seus conhecimentos com a finalidade de aprimorar as atividades discutidas ao longo dos encontros. Por se tratar de atividades no software dinâmico de matemática GeoGebra, desconhecido para vários professores cursistas e pouco explorado por todos eles, foi possível contribuir para a formação desses educadores em vários sentidos, especialmente no âmbito do uso das tecnologias no ensino de Matemática.

Desse modo, foi atingido um dos objetivos da Educação Matemática como campo científico, que consiste em apresentar subsídios para relacionar as práticas de pesquisa com a ação pedagógica (BICUDO; GARNICA, 2011). Foi alcançado, ainda, um dos objetivos do projeto Mapeamento, o qual busca fornecer subsídios, por meio de cursos de formação continuada, para que os professores de Matemática da rede pública possam pensar na inclusão dos recursos das tecnologias em suas aulas (JAVARONI *et al.*, 2013).

Refletindo sobre possibilidades de pesquisa acerca do Raciocínio Proporcional, considero relevante a elaboração de materiais voltados para os anos iniciais do Ensino Fundamental. Quando o Raciocínio Proporcional é explorado desde o início da escolarização, é possível evitar que diversos problemas de aprendizagem se estendam para as séries seguintes e, até mesmo, para a idade adulta. Como apontado por Kastberg, D'Ambrosio e Lynch-Davis (2012) o Raciocínio Proporcional é um pilar importante no desenvolvimento matemático das crianças, pois abrange capacidades essenciais para o desenvolvimento de uma pessoa com habilidades para compreender e aplicar a Matemática.

De igual modo, é necessário que, no Ensino Médio, sejam exploradas questões relativas ao Raciocínio Proporcional, principalmente devido a abrangência do tema. Desenvolver a capacidade de pensar proporcionalmente influencia outras áreas do conhecimento e ultrapassa as disciplinas escolares, abrangendo situações do cotidiano, como fazer compras, identificar situações lucrativas, explorar escalas, executar medições, converter moedas e mais uma infinidade de situações (LESH; POST; BEHR, 1988). Vejo essa possibilidade, pois, realizando pesquisas sobre obras dedicadas à temática do Raciocínio Proporcional, foi possível identificar que há carência de pesquisas com este objetivo.

Pensando na Intradisciplinaridade Matemática, vejo possibilidades de pesquisas em várias frentes. De acordo com Lorenzato (2006), toda a Matemática pode ser apresentada nessa perspectiva. Como já abordado, há menos de 100 anos não havia nem mesmo a disciplina Matemática no Brasil. Até 1929, o ensino de Matemática era compartimentalizado em três disciplinas: Aritmética, Geometria e Álgebra. Embora a Matemática, concebida como uma construção humana seja composta de descobertas que não foram feitas de forma dissociada, o processo de disciplinarização escolar a separou, de modo que retornar a uma Matemática que tenha coerência, conexão e harmonia entre suas vertentes não é uma tarefa simples, evidenciando um campo fértil para pesquisas, abrangendo a abordagem intradisciplinar dos mais diversos conceitos matemáticos.

O trabalho com Tecnologias Digitais também sugere a realização de diversas outras pesquisas. Inicialmente, adaptações nas atividades podem ser feitas com o intuito de torná-las compatíveis com versões para tablets e smartphones do GeoGebra. Também podem ser pensadas atividades que explorem a janela tridimensional deste software, além de outras ferramentas que não foram exploradas nesta investigação.

Penso, ainda, no futuro da relação Tecnologias Digitais e ensino e aprendizagem de Matemática. Assim como a Matemática, as tecnologias são uma criação humana. Contudo, enquanto a Matemática tem sido conhecida como ciência exata, o que dá uma ideia de rigidez e de ciência concluída, as tecnologias são reinventadas com frequência. Nossos celulares se tornaram smartphones e passamos a ter sempre a mão nossas redes sociais, correio eletrônico, bancos, e tantos outros recursos. Penso no trabalho com estes celulares como uma relevante alternativa para o ensino de Matemática. Usar esses equipamentos para fins educacionais tem sido cada vez mais viável, pois a utilização de tecnologias móveis tem se popularizado de forma considerável em todos os setores da sociedade.

Muitos de nossos estudantes, por exemplo, utilizam a internet em sala de aula a partir de seus telefones para acessar plataformas como o Google. Eles também utilizam as câmeras fotográficas ou de vídeo para registrar momentos das aulas. Os usos dessas tecnologias já moldam a sala de aula, criando novas dinâmicas, e transformam a inteligência coletiva, as relações de poder (de matemática) e as normas a serem seguidas nesta mesma sala de aula (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014).

Sobre o olhar profissional docente, trabalhos que considerem as oportunidades de discussão entre professores e pesquisadores, com o intuito de aprimorar este olhar e de, ao mesmo tempo, contribuir para o aprimoramento de materiais voltados para a sala de aula de Matemática podem ser realizados. Devido à limitação de tempo, não foi possível que os professores cursistas realizassem as atividades com seus alunos e retornassem ao curso com suas experiências para que pudéssemos compartilhá-las e analisá-las. Contudo, entendo que essa seria uma experiência interessante. Portanto, incentivo que sejam realizadas ações em cursos e grupos colaborativos, em que o professor discuta questões relativas ao ensino e à aprendizagem de Matemática, realize experiências com seus alunos, e retorne ao curso ou ao grupo, com o relato de suas experiências para que sejam realizadas análises em conjunto sobre as produções de seus alunos.

Além disso, pondero, a partir da experiência desta pesquisa, que as indicações dos pesquisadores em Educação Matemática, que se preocupam com a Educação Básica, são bastante relevantes, e por isso, deve-se levar em consideração o olhar profissional destes profissionais. Embora não conste na literatura a indicação do olhar profissional dos pesquisadores em Educação Matemática, infiro que os que se mantêm próximos à realidade Matemática escolar, também podem exercer um olhar profissional cauteloso quanto às peculiaridades relativas às situações didáticas, sendo assim, capazes de identificar formas eficientes de explorar questões que circundam o ambiente escolar, como ocorreu ao longo das revisões das atividades pelos membros do projeto Mapeamento.

Também incentivo que investigações, que tenham como cenário de produção dos dados cursos de formação continuada, sejam desenvolvidos. Enfim, as temáticas aqui exploradas, associadas ou não, abrem um leque de possibilidades de pesquisas.

Ao refletir sobre minhas perspectivas profissionais, o que fica em evidência é o meu anseio por trilhar novos caminhos que me conduzam a continuar contribuindo para a Educação Matemática. Alternativas para a sala de aula da Educação Básica de Matemática tem sido minha principal preocupação, no aspecto profissional, desde a minha formação inicial como professora de Matemática. Tal preocupação me motiva e me move, por isso, prossegui como Educadora Matemática ao longo de minha trajetória, que perpassou minha pesquisa de mestrado e, agora, a de doutorado.

Dados produzidos nesta pesquisa não foram aqui explorados, por não estarem associados ao foco do trabalho. Tais dados apontam para o interesse que os professores têm na realização de cursos de formação continuada, para meios de interação docente a distância, para o reconhecimento da relevância das Tecnologias Digitais nas aulas de Matemática, e também para a precariedade da estrutura dos laboratórios de informática nas escolas e outras dificuldades de cunho estrutural quanto ao uso dessas tecnologias. Tenho explorado e pretendo continuar a analisar estes dados em outras oportunidades, em trabalhos a serem submetidos a eventos e periódicos.

Ademais, a elaboração desta pesquisa me fez refletir sobre minha prática docente, na importância de explorar mais o raciocínio e de estar mais atenta aos processos de ensino e de aprendizagem matemática dos alunos. Tenho como ideal atuar na formação de professores, sem me distanciar das preocupações com a Educação Básica. Muito pelo contrário, desejo buscar formas de debater e colaborar para que as pesquisas geradas no meio acadêmico surtam efeitos na Matemática escolar.

Destaco, ainda, que elaborar e aprimorar atividades de desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional em parceria com professores de Matemática e de pesquisadores em Educação Matemática foi, certamente, o fator mais relevante deste trabalho, pois, deste modo, foi produzido um material que permitirá que professores realizem com seus alunos atividades de desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional na perspectiva matemática intradisciplinar com o GeoGebra. Mas para chegar ao formato que aqui publicamos, muitas dificuldades foram superadas. Pensar na estrutura do trabalho, nas versões iniciais das atividades, na estrutura do curso, e em tantos outros detalhes, foi um trabalho minucioso que exigiu dedicação de muitos envolvidos. Realizar o curso sem um laboratório de informática também foi um obstáculo ultrapassado.

Concluo afirmando que foi possível identificar possibilidades de desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional que emergiram em atividades com o GeoGebra, integrando aritmética, geometria e álgebra, a partir do olhar profissional de professores de Matemática e pesquisadores em Educação Matemática. Diante do exposto, defendo que o olhar profissional docente, o Raciocínio Proporcional, e a possibilidade de exploração matemática intradisciplinar, por meio das Tecnologias Digitais, merecem mais atenção no contexto escolar e na Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

ABDOUNUR, J. *Matemática e Música. O pensamento analógico na construção de significados*. São Paulo: Escrituras Editora, 2002.

ALLEVATO, N. S. G. Aspectos emergentes da utilização do computador na educação matemática. In: FRANZONI, M; ALLEVATO, N. S. G. (Org.). Reflexões sobre a formação de professores e o ensino de ciências e matemática. Campinas: Alínea, 2007. p. 75–96.

ALMEIDA, H. R. F. L. Das Tecnologias às Tecnologias Digitais e seu uso na Educação Matemática. *Nuances: estudos sobre Educação*, v. 26, n. 2, p. 222–239, 2015.

ALVES-MAZZOTTI, A. J. O método nas Ciências Sociais. In: ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. *O método nas Ciências Naturais e Sociais: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa*. Parte I. 2ª. ed. São Paulo: Editora Pioneira, 2001. p. 107–188.

BAIRRAL, M. A. Desenvolvendo-se criticamente em matemática: a formação continuada em ambientes virtualizados. In: FIORENTINI, D.; NACARATO, A. M. (Org.). Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática: investigando e teorizando a partir da prática. São Paulo: Musa Editora, 2005. p. 49–67.

BALASSIANO, A. L. G. *O Liceu Francês do Rio de Janeiro (1915-1965): Instituições Escolares e difusão da cultura francesa no exterior*. 2012. 240 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo – Faculdade de Educação, São Paulo, 2012.

BARNABÉ, F. M. *A Melodia das Razões e Proporções: A Música sob o olhar Interdisciplinar do Professor de Matemática*. 2011. Dissertação - Mestrado em Educação – Área temática de Ensino de Ciências e Matemática – USP, São Paulo, 2011.

BARROS, A. P. R. M. D. *Contribuições de um Micromundo composto por recursos do Geogebra e da Coleção M3 para a aprendizagem do conceito de volume da pirâmide*. 2013. Dissertação – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2013.

BEN-CHAIM, D.; ILANY, B.; KERET, Y. Atividades Investigativas Autênticas para o Ensino de razão e proporção na Formação de Professores de Matemática para os Níveis Elementar e Médio. Bolema. Boletim de Educação Matemática, v. 21, n. 31, p. 125–159, 2008. Tradução A. V. M. Garnica.

BEN-CHAIM, D.; ILANY, B.; KERET, Y. Mathematical and pedagogical knowledge of pre- and in- service elementary teachers, before and after experience in proportional reasoning activities. *PME 26, Norwich, United Kingdom*, v. 2, p. 81–88, 2002.

BEN-CHAIM, D.; KERET, Y.; ILANY, B. Ratio and Proportion – Research and Teaching in Mathematics Teacher Training. *Mofet and Ach Publication*, 2006.

BERNAL, M. M. *Estudo do objeto proporção: Elementos de sua organização matemática como objeto a ensinar e como objeto ensinado*. 2004. Mestrado em Educação Científica e Tecnológica – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2004.

BEZERRA, M. C. A.; ASSIS, C. C. Atividades com o GeoGebra: possibilidades para o ensino e aprendizagem da Geometria no Fundamental. In: CONFERÊNCIA

INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XIII, 2011, Recife. *Anais*... Recife: Anais do XIII CIAEM, 2011.

BICUDO, M. A. V.; GARNICA, A. V. M. *Filosofia da Educação Matemática*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

BIGODE, A. J. L. *Matemática hoje é feita assim: 7ª série*. São Paulo: FTD, 2000.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. *Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto, Portugal: Porto Editora, 1994.

BONA, B. O. Análise de softwares educativos para o ensino de matemática nos anos iniciais do ensino fundamental. *Experiências em Ensino de Ciências, Cuiabá*, v. 4, n. 1, p. 35–55, 2009.

BONGIOVANNI, V. O Teorema de Tales: uma ligação entre o geométrico e o numérico. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v. 25, n. UFSC, p. 94–106, 2007.

BORBA, M. C. A pesquisa qualitativa em Educação Matemática. In: 27ª REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 2004, Caxambu-MG. *Anais*... Caxambu-MG: [s.n.], 2004. p. 1–18.

BORBA, M. C. Nota do coordenador. In: BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R. R. S.; GADANIDIS, G. Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

BORBA, M. C. Softwares e internet na sala de aula de matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2010, Salvador. *Anais*... Salvador: [s.n.], 2010.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R. R. S.; GADANIDIS, G. *Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento*. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. *Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. New York: Springer, 2005. v. 39.

BOTTA, L. S. *Números racionais e Raciocínio Proporcional: considerações sobre o ensino aprendizagem*. 1997. 185 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro - SP, 1997.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. Tradução Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 1996.

BRAGA, C. *O processo inicial de disciplinarização de função na Matemática no Ensino Secundário Brasileiro*. 2003. 176 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

BRAGA, L. S. Perspectivas Teóricas sobre o uso de Tecnologias Digitais e a Formação Continuada de Professores de Matemática. In: EBRAPEM, XIX, 2015, Juiz de Fora. *Anais*... Juiz de Fora: [s.n.], 2015.

BRASIL. *Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília-DF: Ministério da Educação e do Desporto, 2002. v. 1. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 20 fev. 2016.

BRASIL, S. DE E. F. *Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental - Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 8 set. 2015.

CASTRO, A. L.; JAVARONI, S. L.; BARALDI, I. M. GeoGebra, Matemática e Professores: Um Currículo em Movimento. In: CONGRESSO DE EXTENSÃO UNIVERSITÁRIA DA UNESP, 8°, 2015, Bauru. *Anais*... Bauru: [s.n.], 2015. p. 1–8.

CENTURIÓN, M.; JAKUBOVIC, J.; LELLIS, M. *Matemática na medida certa: 7ª série*. São Paulo: Scipione, 2003.

CHINELLATO, T. G. Formação continuada de professores de Matemática e Tecnologias Digitais: um trabalho com atividades do Caderno do Aluno. In: XX ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2016, Curitiba. *Anais*... Curitiba: [s.n.], 2016.

CHINELLATO, T. G. *O uso do computador em escolas públicas estaduais da cidade de Limeira/SP*. 2014. 104 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2014.

CORDEL, B.; MASON, R. *Proportional reasoning (Algebraic thinking series)*. FRESNO - CA: Aims Education Foundation, 2000.

COSTA, S. C. C. *O Raciocínio Proporcional dos alunos do 2.º Ciclo do Ensino Básico*. 2007. 149 f. Dissertação. Faculdade de Ciências. Departamento de Educação – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2007.

CRAMER, K.; POST, T.; CURRIER, S. Learning and teaching ratio and proportions: Research implications. In: OWENS, D. T. (Org.). Research Ideas for the Classroom, Middle Grades Mathematics. Nova York: MacMillan Publishing Company, 1993. p. 159–178.

D'AMBROSIO, U. A Transdisciplinaridade como uma resposta à sustentabilidade. *Revista Terceiro Incluído: Transdisciplinaridade e Educação Ambiental*, v. 1, n. 1, p. 1–13, jun. 2011.

D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática: Da teoria à prática*. Campinas: Papirus, 1996.

D'AMBROSIO, U. *Uma história concisa da matemática no Brasil*. Petrópolis: Vozes, 2008.

DANTE, L. R. *Tudo é Matemática: 7ª série*. São Paulo: Ática, 2003.

DASSIE, B. A. *A matemática do curso secundário na reforma Gustavo Capanema*. 2001. 170 f. Dissertação - (Mestrado em Matemática) – Departamento de Matemática – Pontífica Universidade Católica, Rio de Janeiro, 2001.

D'ÁVILA, C. Didática e Interdisciplinaridade: Contribuições para Práticas Curriculares no Ensino Médio. In: XVI ENDIPE - ENCONTRO NACIONAL DE DIDÁTICA E PRÁTICAS DE ENSINO, 2012, UNICAMP - Campinas. *Anais*... UNICAMP - Campinas: [s.n.], 2012.

DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. *Handbook of qualitative research*. London: Sage Publication, 1994.

DEWEY, J. *Como Pensamos – Como se relaciona o pensamento reflexivo com o processo educativo: uma reexposição*. Tradução Haydée de Camargo Campos. 3. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1959.

DEWEY, J. *How we think*. Boston: Heath and Company, 1910. Disponível em: <https://archive.org/details/howwethink000838mbp>. Acesso em: 10 nov. 2016.

EUCLIDES. *Os Elementos*. Tradução I. Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2010.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 1997.

FARIA, E. T. Ser Professor. In: ENRICONE, D. (Org.). IV ed. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004. p. 57–72. Disponível em: <http://clickeaprenda.uol.com.br/sg/uploads/UserFiles/File/O_professor_e_as_novas_tecnologias.pdf>. Acesso em: 10 nov. 2016.

FARIA, R. W. S. C.; CHINELLATO, T. G.; SILVA, F. F.; MALTEMPI, M. V.; JAVARONI, S. L. Grandezas Proporcionais com GeoGebra: Possibilidades para o ensino integrado de geometria, aritmética e álgebra. In: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NA CONTEMPORANEIDADE: DESAFIOS E POSSIBILIDADES, 12, jul. 2016, São Paulo - SP. Anais... São Paulo - SP: SBEM, jul. 2016. p. 1–8.

FARIA, R. W. S. *Padrões Fractais: Contribuições ao Processo de Generalização de Conteúdos Matemáticos*. 2012. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro - SP, 2012.

FARIA, R. W. S.; MALTEMPI, M. V. Manipulação e Análise de Padrões Fractais no Processo de Generalização de Conteúdos Matemáticos por meio do Software GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, v. 1, p. I–XV, 2012.

FARIA, R. W. S.; RIBEIRO, D. S. O. *Razão Áurea: Um elemento motivador para o estudo de razões e sequências na Educação Básica*. 2009. Monografia (curso superior de licenciatura em Matemática) – Instituto Federal Fluminense, Campos dos Goytacazes, 2009.

FERNÁNDEZ, C.; LLINARES, S. Relaciones implicativas entre las estrategias empleadas en la resolución de situaciones lineales y no lineales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime)*, v. 15, p. 277–310, 2012.

FERNÁNDEZ, C.; LLINARES, S.; VALLS, J. Características del desarrollo de una mirada profesional en estudiantes para profesor de matemáticas en un contexto b-learning. *Acta Scientiae (ULBRA)*, n. 13 (1), p. 9–30, 2011.

FOSSA, J. Razão e Proporção: A Herança Antiga. *Revista Brasileira de História da Matemática (RBHM) - Anais IX SNHM*, 2. v. 11, p. 1–6, 2011.

FREIRE, P. *À sombra desta mangueira*. São Paulo: Olho d'Agua, 1995.

FREIRE, P. *Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa*. 1. ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

FRIENDLAND, A.; TABACH, M. Promoting multiple representation in algebra. In: CUOCO (Org.). *The roles of representation in school mathematics*. Reston, VA: NCTM, 2001. p. 173–285.

GAFANHOTO, A. P.; CANAVARRO, A. P. Representações múltiplas de funções em ambiente com GeoGebra: Um estudo sobre o seu uso com alunos do 9º ano. In: ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2011, Povoa de Varzim. *Anais*... Povoa de Varzim: [s.n.], 2011.

GERDES, P. *Da etnomatemática a arte-design e matrizes cíclicas*. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

GIOVANNI, L. M. Indagação e reflexão como marcas da profissão docente. In: GUARNIERI, M. R. (Org.). Aprendendo a ensinar: o caminho nada suave da docência. 2. ed. Campinas: Autores Associados, 2005. p. 45–59.

GIOVANNI, L. M. O ambiente escolar e ações de formação continuada. In: TIBALLI, E. A.; CHAVES, S. M. (Org.). Concepções e práticas de formação de professores: diferentes olhares. Rio de Janeiro: DP&A, 2003. p. 207–224.

GOLDENBERG, M. *A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais*. 3a. ed. Rio de Janeiro: Record, 1999.

GOMES, M. L. M. *História do Ensino da Matemática: uma introdução*. Belo Horizonte: CAED - UFMG, 2012.

GRAVINA, M. A.; BASSO, M. V. A. Mídias digitais na Educação Matemática. In: GRAVINA, M. A. ET AL. (Org.). Matemática, Mídias Digitais e Didática - tripé para formação de professores de Matemática. Porto Alegre: UFRGS, 2012.

GREGIO, B. M. A.; BITTAR, M. As tecnologias no ensino da Matemática nos anos iniciais. In: XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2011, Recife. *Anais*... Recife: Anais do XIII CIAEM, 2011.

HAREL, G.; CONFREY, J. *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics*. Albany, NY: State University of New York: SUNY Press, 1994.

HIEBERT, J.; LEFEVRE, P. Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1986. p. 1–27.

HODGEN, J. KUCHEMANN, D.; BROWN, M. COE, R. Multiplicative reasoning, ratio and decimals: a 30-year comparison of lower secondary students' understandings. In: PROCEEDINGS OF THE 34TH CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 2010, Belo Horizonte. Anais... Belo Horizonte: [s.n.], 2010. p. 89–96.

HOFFER, A. Ratios and proportional thinking. In: POST, T. (Org.). Teaching mathematics in grades K-8: Research based methods. Boston: Allyn and Bacon: [s.n.], 1988. p. 285–313.

JAVARONI, L. J.; SANTOS, S. C.; BORBA, M. C. Tecnologias digitais na produção e análise de dados qualitativos. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 13, n. 1, p. 197–218, 2011.

JAVARONI, S. L.; CHINELLATO, T. G.; OLIVEIRA, F. T.; ZAMPIERI, M. T. Pesquisando sobre tecnologias nas aulas de Matemática. In: CONGRESSO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 2013, Montevidéu-URU. Anais... Montevidéu-URU: [s.n.], 2013.

KASTBERG, S.; DÁMBROSIO, B.; LYNCH-DAVIS, K. Understanding proportional reasoning for teaching. In: AUSTRALIAN MATHEMATICS TEACHER, 3, 2012, [S.l: s.n.], 2012.

KENSKI, V. M. *Tecnologias e ensino presencial e a distância*. Campinas: Papirus, 2003.

KENSKI, V. M. *Tecnologias e tempo docente*. Campinas: Papirus, 2013.

LABORDE, C.; STRÄßER, R. Place and use of new technology in the teaching of mathematics: ICMI activities in the past 25 years. *ZDM Mathematics Education*, n. 42, p. 121–133, 2010.

LAMON, S. *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. 2. ed. Mahwah, NJ: Erlbaum, 2005.

LAMON, S. The development of unitizing: Its role in children's partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education*, n. 27 (2), p. 170–193, 1996.

LAMON, S. J. Ratio and proportion: cognitive foundations in unitizing and norming. In: HAREL, G.; CONFREY, J. (Org.). . *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. Albany, NY: SUNY Press, 1994. p. 89–117.

LAPERRIÈRE, A. A teorização enraizada (grounded theory): procedimento analítico e comparação com outras abordagens similares. *A pesquisa qualitativa: enfoques epistemológicos e metodológicos*. 1. ed. Petrópolis: Vozes, 2008. p. 353–387.

LARROSA, J. Ensaio, diário e poema como variantes da autobiografia: a propósito de um "poema de formação" de Andrés Sánchez Robayna. In: SOUZA, E. C.; ABRAHÃO (Org.). . *Tempos, narrativas e ficções: a invenção de si*. Porto Alegre: ediPUCRS, 2006. p. 183–202.

LEIVAS, J. C. P.; CURY, H. N.; VIANNA, C. R. Geometria com tecnologia na formação inicial e continuada do professor de Matemática. *Formação do Professor de Matemática: reflexões e propostas*. Santa Cruz: IPR, 2012. p. 185–212.

LESH, R.; POST, T.; BEHR, M. Proportinal reasoning. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. (Org.). Number Concepts and Operations in the Middle Grades. Reston, A: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics, 1988. p. 93–118.

LINCOLN, Y. S.; GUBA, E. G. *Naturalistic Inquiry*. London: Sage Publications, 1985.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. 7. ed. Campinas: Papirus, 2006.

LLINARES, S. ¿cómo dar sentido a las situaciones de enseñanza –aprendizaje de las matemáticas? Algunos aspectos de la competencia docente del profesor". In: CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA–CIAEM, 2015, Tuxtla Gutiérrez, México. *Anais*... Tuxtla Gutiérrez, México: [s.n.], 2015.

LLINARES, S. Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñanza matemáticas en entornos en línea. *AIEM. Avances de Investigación en educación Matemática*, p. 53–70, 2012.

LLINARES, S. Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. In: CHAMORRO, C. (Org.). Didáctica de las Matemáticas. [S.l.]: Pearson-Prentice Hall, 2003. p. 187–220.

LLINARES, S. Professional Noticing: a component of the Mathematics teachers' professional practice. *SISYPHUS. Journal of Education*, n. 1 (3), p. 76–93, 2013.

LORENZATO, S. *Para aprender matemática*. Campinas: Autores Associados, 2006. (Coleção Formação de Professores).

LORENZATO, Sergio. Formação inicial e continuada do professor de matemática. *Jornal Folha de S.Paulo*, 25 mar. 2003. Disponível em: <http://www.google.com.br/search?hl=ptR&q=sergio+lorenzato&start=10&sa=N>. Acesso em: 20 jun. 2008.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. *Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas*. São Paulo: E.P.U., 1986.

MALTEMPI, M. V.; MENDES, R. O. TECNOLOGIAS DIGITAIS NA SALA DE AULA: Por que não? In: IV CONGRESSO INTERNACIONAL DE TIC NA EDUCAÇÃO, 2016, Lisboa/Portugal. *Anais*... Lisboa/Portugal: [s.n.], 2016.

MALTEMPI, M. V. Educação matemática e tecnologias digitais: reflexões sobre a prática e formação docente. *Acta Scientiae*, v. 10, n. 1, p. 59–67, 2008.

MARANHÃO, C.; MACHADO, S. Uma meta-análise de pesquisas sobre o pensamento proporcional, Educar em Revista, Curitiba, Brasil, n. Especial 1/2011, p. 141-156, 2011. Editora UFPR. 2011. *Educar em Revista*, n. n. especial, p. 141–156, 2011.

MARIN, A. J. *Didática e trabalho docente*. Araraquara: Junqueira e Marin, 2005.

MASON, J. *Researching your own practice. The discipline of noticing. Routledge Falmer*. Londres: Routledge Falmer, 2002.

MAZZIEIRO, A. DOS S.; MACHADO, P. A. F. *Descobrindo e aplicando a matemática - nono ano (manual do professor)*. Belo Horizonte: Dimensão, 2012.

MAZZI, L. C. *Experimentação-com-GeoGebra: revisitando alguns conceitos da Análise Real*. 2014. 137 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2014.

MIORIM, M. A. *Introdução à história da educação matemática*. São Paulo - SP: Atual, 1998.

MIRANDA. *A experiência norte-americana de fusão da Aritmética, Álgebra e Geometria e sua apropriação pela educação matemática brasileira*. 2003. 98 f. Dissertação - Mestrado em Educação Matemática – PUC, São Paulo - SP, 2003.

MIRANDA, M. R. *Pensamento proporcional: uma metanálise qualitativa de dissertações*. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUC, São Paulo - SP, 2009.

MISKULIN, R. G. S. As possibilidades didático-pedagógicas de ambientes computacionais na formação colaborativa de professores de matemática. In: FIORENTINI, D. (Org.). Formação de professores de Matemática: Explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas: Mercado de Letras, 2003. p. 217–248.

MOL, R. S. *Introdução à História da Matemática*. Belo Horizonte: CAED - UFMG, 2013.

MOREIRA, H. A motivação e o comprometimento do professor na perspectiva do trabalhador docente. *Série-Estudos - Periódico do Mestrado em Educação da UCDB*, n. 19, p. 209–232, jun. 2005.

MORI, I.; ONAGA, D. S. *Matemática: ideias e desafios - sétimo ano (manual do professor)*. 17. ed. São Paulo: Saraiva, 2012.

NCTM. Princípios e Normas para a Matemática Escolar. [S.l.]: Lisboa, APM, 2007

NUNES, T. Fala, mestre! Entrevista – É hora de Ensinar Proporção. *Nova Escola*, Abril de 2003. Disponível em: <http://revistaescola.abril.com.br/matematica/fundamentos/hora-ensinar-proporcao-fala-mestre-terezinha-nunes-428131.shtmll>.

OBANDO, G.; VASCO, C. E.; ARBOLEDA, L. C. Enseñanza y Aprendizaje de la Razón, la Proporción y la Proporcionalidad: Um Estado del Arte. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, v. 17, p. 59–81, 2014.

OLIVEIRA, A. T. M. *Importância do ensino integrado de Geometria, Aritmética e Álgebra no 7º ano do Ensino Fundamental*. 2014. Monografia (curso superior de licenciatura em Matemática) – Universidade Estadual de Goiás, Morrinho - GO, 2014.

OLIVEIRA, G. P. Tecnologias digitais na formação docente: estratégias didáticas com uso do superlogo e do geogebra. In: CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 7, 2013, Montevidéu. *Anais*... Montevidéu: Semur, 2013.

OLIVEIRA, G. P.; MARCELINO, S. B. Adquirir Fluência e Pensar com Tecnologias em Educação Matemática: Uma proposta com o software superlogo. *Educação Matemática e Pesquisa, São Paulo*, v. 17, n. 4, p. 816–842, 2015.

OZAKI, A. M.; VASCONCELOS, E. Revolução Digital. In: POLIZELLI, D. L.; OZAKI, A. M. (Org.). sociedade da informação: os desafios da era da colaboração e da gestão do conhecimento. São Paulo: [s.n.], 2008. p. 115–150.

PACHECO, J. A.; FLORES, M. A. *Formação e Avaliação de Professores*. Porto, Portugal: Porto Editora, 1999.

PAULA, M. R. *Razão como taxa: Uma proposta de ensino para a sala de aula de matemática*. 2012. Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2012.

PEREIRA, C. S.; RIBEIRO, D. J.; CAVALCANTI, J. L. Matemática ou Matemáticas? Reflexões Sobre o Ensino Integrado entre Aritmética, Álgebra e Geometria. In: X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2010, Salvador - Bahia. *Anais*... Salvador - Bahia: [s.n.], 2010.

PEREZ, G. Prática reflexiva do professor de Matemática. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). Educação Matemática: Pesquisa em Movimento. São Paulo: Cortez, 2009. p. 250–263.

PIRES, C. M. C. Reflexões sobre os cursos de Licenciatura em Matemática, tomando como referência as orientações propostas nas Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores da Educação Básica. *Educação matemática em revista. Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática*, n. 11a, p. 44–56, Abril de 2002.

PONTE, J. P. O interaccionismo simbólico e a pesquisa sobre nossa própria prática. *Revista Pesquisa Qualitativa*, v. 1, p. 107–134, 2005.

PORTELA-FILHO, R. P.; PORTELA, C. A. A. Filosofia da Educação Matemática: Sua relevância no contexto da educação matemática e Aspectos históricos. *Caderno Pesquisa*, v. 14, n. 1, p. 46–68, 2003.

POST, T.; CRAMER, K.; HAREL, G.; KIERNEN, T.; LESH, R. Research on rational number, ratio and proportionality. In: PROCEEDINGS OF THE 20TH ANNUAL MEETING OF THE NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 1998, Raleigh, NC. Anais... Raleigh, NC: PME, 1998. p. 89–93.

POST, T.; BEHR, M. J.; LESH, R. Proportionality and the development of prealgebra understanding. In: COXFORD, A.; SCHUTE, (Org.). The Ideas of Algebra, K-12 - Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA: The Council, 1988. p. 78–90.

POWELL, A. B.; FRANCISCO, J. M.; MAHER, C. A. Uma abordagem à Análise de Dados de Vídeo para Investigar o Desenvolvimento das Ideias Matemáticas e do Raciocínio de Estudantes. *Bolema. Boletim de Educação Matemática*, v. 17, n. 21, p. 81–140, 2004.

PRADO, G. V. T.; SOLIGO, R. Memorial de Formação: quando as memórias narram a história de formação... *Porque escrever é fazer história: revelações, subversões e superações*. Campinas, SP: Editora Alínea, 2007. p. 45–59.

REZENDE, W. M.; PESCO, D. U.; BORTOLOSSI, H. J. Explorando aspectos dinâmicos no ensino de funções reais com recursos do GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, v. 1, p. 74–89, 2012.

ROCHA, J. L. *A matemática do curso secundário na reforma Francisco Campos*. 2001. 228 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – pontifícia universidade católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2001.

ROSA, F. M. C.; BARALDI, I. M. O uso de narrativas (auto)biográficas como uma possibilidade de pesquisa da prática de professores acerca da Educação (Matemática) Inclusiva. *Boletim de Educação Matemática*, v. 29, n. 53, p. 936–954, dez 2015.

SANTOS, S. C. *Um retrato de uma Licenciatura em Matemática a distância sob a ótica de seus alunos iniciantes*. 2013. 208 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2013.

SÃO PAULO. *Secretaria Estadual de Educação. Caderno do Aluno - Matemática -Ensino Fundamental - Anos Finais (Coleção - Edição 2014/2017)*. São Paulo: SEE, 2014.

SÃO PAULO, S. E. *Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias*. 1. ed. São Paulo: SE, 2011. (Coordenação geral, Maria Inês Fini; Coordenação de área, Nilson José Machado).

SÃO PAULO, S. E. Normas Gerais de Conduta Escolar: sistema de proteção escolar. [S.l.]: Governo do Estado de São Paulo. 2009. Disponível em: <http://www.educacao.sp.gov.br/spec/wp-content/uploads/2013/09/normas_gerais_conduta_web1.pdf>. Acesso em: 24 jul. 2014.

SCHLIEMANN, A. L. D.; CARRAHER, D. Razões e proporções na vida diária e na escola. In: SCHLIEMANN, A.; ET. AL (Org.). Estudos em Psicologia da Educação Matemática. Recife: UFPE, 1997. p. 13–39.

SCHÖN, D. *Educando o profissional reflexivo: um novo design para o ensino e a aprendizagem*. Porto Alegre (RS): ARTMED, 2000.

SILVA, C. F.; PESTANA, I. C. A. Sociedade da informação, a Criança com Deficiência e as Novas Tecnologias. *Educação, Ciência e Tecnologia - Instituto Politécnico de Viseu*, n. 32, p. 211–225, 2006.

SILVA, . F. *A Função Afim e suas aplicações*. 2011. Monografia (Matemática, Mídias Digitais e Didática ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Jaguarão, 2011.

SILVESTRE, A. I. Desenvolver o Raciocínio Proporcional – Contributo de uma abordagem de ensino exploratória. 2013, Braga. *Anais*... Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho, 2013.

SOUTO, D. P. L. *Transformações expansivas em um curso de Educação Matemática a distância online*. 2013. 279 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2013.

SOUZA, G. M. *Felix Klein e Euclides Roxo: debates sobre o ensino da matemática no começo do século XX*. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas (SP), 2010.

STOER, S. R.; MAGALHÃES, A. M. Educação, Conhecimento e a Sociedade em Rede. *Educação e Sociedade*, v. 24, n. 85, p. 1179–1202, dez 2003.

TAVARES, J. C. *A Congregação do Colégio Pedro II e os debates sobre o ensino de matemática*. 2002. Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo - SP, 2002.

TORQUATO, C. Prefácio. In: POLIZELLI, D. L.; OZAKI, A. M. (Org.). . *sociedade da informação: os desafios da era da colaboração e da gestão do conhecimento*. São Paulo: [s.n.], 2008. p. IX – XIII.

TOURNIAIRE, F.; PULOS, S. ‘Proportional reasoning: a review of the literature. *Educational Studies in Mathematic*. 16. [S.l: s.n.], 1985. p. 181–204.

VALENTE, J. A. *Computadores e conhecimento: repensando a educação*. Campinas: Gráfica Central da UNICAMP, 1993.

VALENTE, W. R. (Org.). *Euclides Roxo e a modernização do ensino de matemática no Brasil*. Brasília-DF: Editora da UnB, 2004.

VAN DE WALLE, J. *Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula*. 6. ed. Porto Alegre (RS): ARTMED, 2009.

VAN ES, E. A.; SHERIN, M. G. Learning to Notice: Scaffolding New Teachers’ Interpretations of Classroom Interacts. *Journal of Technology and Teacher Education*, v. 10, n. 4, p. 571–596, 2002.

WERNECK, A. P. T. *Euclides Roxo e a reforma Francisco Campos: A gênese do primeiro programa de ensino de matemática brasileiro*. 2003. 122 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo - SP, 2003.

ZAMPIERI, M. T.; JAVARONI, S. L. Formação Continuada de Professores de Matemática: Possibilidade de um curso semipresencial. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA, II, 2014, São Carlos. *Anais*... São Carlos: UFSCar, 2014. p. 1–6.

ZAMPIERI, M. T.; JAVARONI, S. L. O uso das TIC nas práticas dos Professores de Matemática da Rede Básica de Ensino: o projeto Mapeamento e seus desdobramentos. *Bolema. Boletim de Educação Matemática*, v. 29, n. 53, p. 998–1022, 2015.

APÊNDICES

APÊNDICE I

ATIVIDADE “RAZÃO E PROPORÇÃO”

Tema da atividade: Razão e Proporção

Objetivo: Explorar o Raciocínio Proporcional que permeia Razão e Proporção e suas representações Aritmética, Geométrica e Algébrica

Aluno(a):______________________________ Turma:______ Data: ____/____/____

1.[23] Abra o arquivo fracoes-equivalentes.ggb:

-> Usando os controles deslizantes, represente a primeira fração no primeiro retângulo. Repita nos dois retângulos seguintes de modo a completar as equivalências.

a) $\frac{3}{5} = \frac{9}{\quad} = \frac{\quad}{10}$

b) $\frac{1}{4} = \frac{6}{\quad} = \frac{\quad}{8}$

c) $\frac{5}{25} = \frac{1}{\quad} = \frac{\quad}{10}$

d) $\frac{2}{5} = \frac{8}{\quad} = \frac{\quad}{10}$

-> Agora calcule as seguintes sem o auxílio do computador, depois use o arquivo do GeoGebra para conferir seus resultados:

e) $\frac{2}{6} = \frac{\quad}{18} = \frac{8}{\quad}$

f) $\frac{4}{8} = \frac{\quad}{24} = \frac{1}{\quad}$

2. Com o arquivo fracao-irredutivel.ggb, verifique quais são as frações equivalentes, e ao mesmo tempo irredutíveis correspondentes aos itens abaixo. Para obtermos as frações equivalentes em cada item abaixo, o numerador e o denominador foram divididos por um mesmo número. Diga em cada caso qual é esse divisor.

a) $\frac{36}{100} = \frac{\quad}{\quad}$ Divisor: ___________

b) $\frac{15}{100} = \frac{\quad}{\quad}$ Divisor: ___________

c) $\frac{25}{100} = \frac{\quad}{\quad}$ Divisor: ___________

d) $\frac{52}{100} = \frac{\quad}{\quad}$ Divisor: ___________

3. Vamos investigar a proporcionalidade nas seguintes situações.

-> Situação I: Uma empresa resolveu dar um aumento de R$200,00 para os funcionários. O salário de João passou de R$400,00 para R$600,00, enquanto o salário de Antônio passou de R$1 000,00 para R$1 200,00.

a. Houve proporcionalidade no aumento salarial dado aos dois funcionários? Justifique sua resposta. ____

[23] Algumas questões que compõem esta atividade foram elaboradas com base no volume II do 7º ano do caderno do aluno do Estado de São Paulo (2014-2017). A saber: questão 3, exercício 4 e questão 4, exercícios 7 e 8 da Situação de Aprendizagem "A noção de Proporcionalidade". A questão 6 com base no exercício 6, e a questão 7 no exercício 13, da Situação de Aprendizagem "Razão e Proporção". Ademais, a Questão 5, foi retirada da Avaliação de Aprendizagem em Processo – I semestre de 2015 - Estado de São Paulo.

-> Para os itens abaixo, utilize a caixa de entrada em um arquivo novo no GeoGebra, e verifique os resultados que aparecem na janela de álgebra.
b. Quando dividimos o valor do salário final pelo inicial de João, obtemos a razão entre esses valores. Qual é essa razão? ____
c. Qual é a razão do valor do salário final pelo inicial de Antônio?________________ ___
d. Ao multiplicar a razão encontrada no item b pelo salário inicial de Antônio, encontramos outro valor para o salário de Antônio. Qual é esse valor? Qual é a relação deste valor do salário de Antônio com o salário de João? ________________________
e. Se pensarmos o contrário, ou seja, multiplicar a razão encontrada no item c pelo salário inicial de João, encontramos outro valor para o salário de João. Qual é esse valor? Qual é a relação deste valor do salário de João com o salário de Antônio?_____________
____
f. Após esses cálculos, você diria que houve ou não proporcionalidade no aumento salarial dado aos dois funcionários?_______________________________________

Observe que ao multiplicar o salário inicial de João por 1,5 (razão encontrada no item b), obtemos o salário final de João. Analogamente, ao multiplicar o salário inicial de Antônio por 1,2 (razão encontrada no item c), obtemos o salário final de Antônio. Então, $\frac{y}{x} =$ *razão, onde x representa o salário inicial e y o salário final.*
Generalizando... A relação entre os salários final e inicial de alguém que tiver a mesma taxa de aumento que foi aplicada ao salário de João pode ser descrito pela equação da reta y=1,5x, x>0. Do mesmo modo, o que tiver a mesma taxa de aumento que foi aplicada ao salário de Antônio pode ser descrito pela equação da reta y=1,2x, x>0.

g. Portanto, na caixa de entrada, crie as retas y=1.5*x, (x>0) e y=1.2*x, (x>0). Observe os gráficos gerados na janela de visualização e responda: Se você trabalhasse com João e Antônio e seu salário fosse de 800 reais, você iria preferir ganhar um aumento com a taxa concedida ao salário de João ou de Antônio? Justifique.
____
____

-> Situação II: Uma empresa de informática resolveu dar um desconto de 25% no preço de toda a sua linha de produtos. O preço de um computador passou de R$1000,00 para R$750,00, e o de uma impressora passou de R$400,00 para R$300,00.

a. Houve proporcionalidade no desconto dado nos dois produtos? Justifique sua resposta.
____
-> Para os itens abaixo, utilize a caixa de entrada em um arquivo novo no GeoGebra, e verifique os resultados que aparecem na janela de álgebra.
b. Quando dividimos o valor final pelo inicial do computador, obtemos a razão entre esses valores. Qual é essa razão? ____
c. Qual é a razão do valor final pelo inicial da impressora? _______________________
d. Ao multiplicar a razão encontrada no item b pelo valor inicial da impressora, encontramos um valor com desconto para a impressora. Qual é esse valor? Qual é a relação deste valor final da impressora e do valor final do computador?_____________
e. Se pensarmos o contrário, ou seja, multiplicar a razão encontrada no item c pelo valor inicial do computador, encontramos um valor com desconto para o computador. Qual é

esse valor? Qual é a relação deste valor final do computador e do valor final da impressora? ____
____

f. Após esses cálculos, você diria que houve ou não proporcionalidade no desconto dado nos dois produtos? ____

Observe que ao multiplicar o preço inicial do computador *por 0,75 (razão encontrada no item b), obtemos o preço final do computador. Analogamente, ao multiplicar o preço inicial da impressora por 0,75 (razão encontrada no item c), obtemos o preço final da impressora. Então,* $\frac{y}{x} = razão$*, onde x representa o preço inicial e y o preço final.*
Generalizando... A relação entre os preços final e inicial de um produto que tiver a mesma taxa de desconto que foi concedida ao computador e à impressora, pode ser descrito pela equação da reta y=0,75x, x>0.

g. Portanto, na caixa de entrada, crie a reta y=0.75*x, (x>0). Observe o gráfico gerado na janela de visualização e responda: Se você comprasse uma câmera digital nessa loja, que antes custava 100 reais e que agora está com a mesma taxa de desconto concedida ao computador e à impressora, quanto você pagaria? Justifique.
____
____

4. Vejamos as situações abaixo.

-> Situação I: Na tabela "Produto" registraram-se a quantidade vendida e o valor recebido pela venda de um mesmo produto. Contudo, alguns valores não foram preenchidos.
a. Complete a tabela, mantendo a proporcionalidade direta entre a quantidade vendida e o valor recebido.

Quantidade vendida	Valor recebido
10	R$ 30,00
5	
	R$ 3,00
	R$ 21,00
14	
	R$ 420,00

b. Qual foi o raciocínio usado para completar a tabela manualmente?
____
____

-> Após completar a tabela acima, abra o arquivo proporcao.ggb. Nele existem duas planilhas, uma de cada situação. Vamos completá-la usando recursos da planilha do GeoGebra.
c. Digite na célula C3: B3/A3. O Valor encontrado é a razão que deve ser usada para que os demais valores da tabela sejam proporcionais à quantidade vendida do produto e o valor recebido para tal quantidade. Qual foi o valor encontrado? O que representa esse valor?____
____

d. Para encontrar qual deve ser a quantidade vendida das células A5, A6 e A8, para que sejam proporcionais a da célula A3, deve-se digitar nessas células B5/C3, B6/C3 e B8/C3, respectivamente.
e. Para encontrar qual deve ser o preço das células B4 e B7, para que sejam proporcionais a da célula B3, deve-se digitar digite nessas células A4*C3, e A7*C3, respectivamente.
f. Qual foi o raciocínio usado para completar a planilha do GeoGebra?

____

____

____

g. Vamos criar o gráfico dessa planilha: Selecione as colunas A e B das linhas 3 à 8 e clique com o botão direito, vá em criar -> lista de pontos. Por quaisquer dois dos cinco pontos representados na janela de visualização, crie uma reta.

Observação: Nesta situação, representamos x como sendo a quantidade de produtos. Portanto, x é um número natural. Deste modo, o conjunto dos pontos plotados atende ao conjunto dos pontos pertencentes à reta criada, mas nem todos os pontos pertencentes à reta representam um número de produtos (não existe, por exemplo, meio produto).

-> Situação II: Um clube dispõe de uma quantia fixa de dinheiro para comprar bolas de futebol para os treinamentos. Com o dinheiro disponível, é possível comprar, de um fornecedor, 24 bolas a R$6,00 cada. O gerente pesquisou os preços de outros fabricantes e anotou as informações na tabela a seguir.
a. Complete-a obedecendo ao princípio de proporcionalidade e descubra qual foi o menor preço pesquisado pelo gerente.

Preço de uma bola	Número de bolas
R$ 6,00	24
R$ 12,00	
R$ 4,00	
	72
R$ 24,00	
	144
R$ 72,00	

b. Qual foi o raciocínio usado para completar a tabela manualmente?

____

____

-> Após completar a tabela acima, vamos voltar para o arquivo proporcao.ggb. Vamos completá-la usando recursos da planilha do GeoGebra.
c. Digite na célula C13: B13*A13. O Valor encontrado é a razão que deve ser usada para que os demais números de bolas da tabela sejam proporcionais ao preço unitário. Qual foi o valor encontrado? O que representa esse valor?

____

____

d. Para encontrar qual deve ser o preço de uma bola nas células A16 e A18, para que sejam proporcionais a da célula A13, deve-se digitar nessas células C13/B16, e C13/B18, respectivamente.
e. Para encontrar qual deve ser o número de bolas das células B14, B15, B17, e B19, para que sejam proporcionais a da célula B13, deve-se digitar digite nessas células C13/A14, C13/A15, C13/A17, e C13/A19, respectivamente.
f. Qual foi o raciocínio usado para completar a planilha do GeoGebra?

____

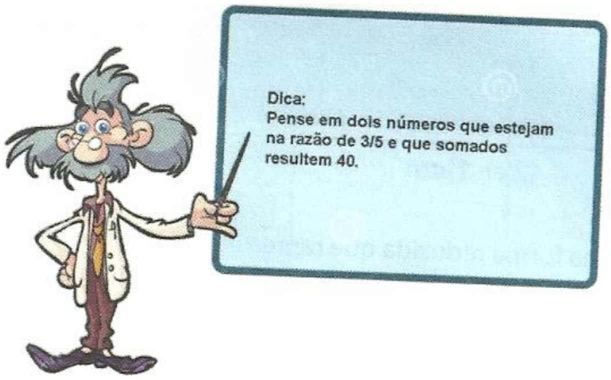
____

____

g. Vamos criar o gráfico dessa planilha: Selecione as colunas A e B das linhas 13 à 19 e clique com o botão direito, vá em criar -> lista de pontos. Crie uma cônica passando por cinco dos sete pontos criados.

Observação: Nesta situação, representamos a quantidade de bolas por x. Portanto, x é um número natural. Deste modo, o conjunto dos pontos tabelados, pertencem ao ramo positivo da curva criada, mas nem todos os pontos pertencentes à curva representam um número de bolas (não existe, por exemplo, 2,5 bolas).

5. Resolva a situação a seguir, fazendo as contas na caixa de entrada do GeoGebra, e visualizando os resultados na janela de álgebra. Em uma festa há 40 pessoas e sabe-se que a razão entre o número de mulheres e o número de homens é $\frac{3}{5}$. Qual é o número de mulheres na festa?



6. O mapa do arquivo mapa.ggb foi feito na escala 1:30000000 (lê-se "um para trinta milhões", e isso significa que a cada 1 cm no mapa, temos 30.000.000 cm reais). Essa notação representa a razão de proporcionalidade entre o desenho e o real, ou seja, cada unidade no desenho é, na realidade, 30 milhões de vezes maior. *(Obs.: No GeoGebra, a representação é em unidades de comprimento (u.c.) em geral, e não em centímetros. Assim, destacamos que se trata de uma representação que não corresponde às reais unidades de medida tratadas nos itens a seguir, por exemplo, quando falamos que 1cm no mapa equivale a 30.000.000 cm reais, estamos considerando que cada 1u.c. no GeoGebra, representa 30.000.000 cm reais).*

a. Utilizando a ferramenta distância, comprimento ou perímetro, meça a distância entre Brasília e Rio de Janeiro (pontos B e A). A distância no mapa é de _______ cm.
b. Utilizando a ferramenta distância, comprimento ou perímetro, meça a distância entre Brasília e Florianópolis (pontos B e C). A distância no mapa é de _______ cm.
-> Para os itens abaixo, utilize a caixa de entrada para fazer as contas, e visualize os resultados na janela de álgebra.
c. Qual é a distância real entre Brasília e Rio de Janeiro em cm? E em Km?____________
d. E a distância real entre Florianópolis e Brasília em cm? E em Km?________________

7. Para cada situação, preencha a planilha do arquivo verificando.ggb e calcule a razão entre as grandezas envolvidas na coluna C.

a. Se 5 bolas de futebol custam R$100,00, então 7 bolas custarão 140,00.
b. Um automóvel percorreu 120 km em 1 hora e meia. Em 2 horas, ele terá percorrido 160 Km.
c. Um supermercado vende 4 rolos de papel higiênico por R$3,00 e 12 rolos por R$8,00.
d. Em uma receita de *milk-shake*, recomenda-se colocar 3 bolas de sorvete de chocolate para 2 xícaras e meia de leite (1 xícara equivale a 250 ml). Para 1 litro de leite, devemos colocar 7 bolas de sorvete.
e. Em determinado dia, US$20,00 eram vendidos por R$36,00 e US$50,00 por R$90,00.

-> Agora responda se as situações descritas nos itens são proporcionais. Caso não sejam proporcionais, descreva qual das situações é mais vantajosa para o consumidor/usuário?
a. (   )SIM (   ) NÃO. ____
b. (   )SIM (   ) NÃO. ____
c. (   )SIM (   ) NÃO. ____
d. (   )SIM (   ) NÃO. ____
e. (   )SIM (   ) NÃO. ____

APÊNDICE II

ATIVIDADE “GRANDEZAS PROPORCIONAIS”

Tema da atividade: Grandezas Proporcionais

Objetivo: Relacionar grandezas proporcionais e não proporcionais com suas representações Aritmética, Geométrica e Algébrica

Aluno(a):_______________________________ Turma:______ Data: ____/____/____

1.[24] Procedimento inicial: no GeoGebra, exiba os eixos e a planilha; digite na planilha os valores indicados na tabela, correspondentes aos de x na coluna A, e aos de y na coluna B. Selecione os campos que você digitou na tabela, clique com botão direito e vá em: *criar -> lista de pontos*. Ajuste o zoom da janela geométrica para visualizar os pontos marcados. Em seguida, observe o comportamento de y.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	10	20	30	40	50	60	70

a. Você consegue observar algum padrão (uma regularidade) na variação dos valores de x e de seu respectivo valor y? ____

____

b. Sem fazer cálculos, você diria que x e y são diretamente ou inversamente proporcionais, ou não são proporcionais?______________________________________

c. Observe os valores em cada linha da planilha. O produto ou o quociente entre eles é constante? Para verificar o que foi perguntado, digite na célula C1 *A1*B1* e tecle enter, depois selecione C1 e usando o quadradinho no canto inferior direito da célula copie a fórmula até a linha 7. Repita na célula D1, mas agora digitando *A1/B1*, e copie a fórmula até a linha 7. Resposta: (   ) Sim (   ) Não

d. Baseado nos cálculos realizados, você diria que x e y são diretamente ou inversamente proporcionais, ou não são proporcionais?______________________________________

Se você respondeu sim na letra c, ou seja, que há uma constante, responda:

e. Qual a expressão que representa y em função de x?_________________________

f. Agora, vamos construir o gráfico por estes pontos. Digite a relação encontrada na pergunta anterior na janela de entrada do GeoGebra. Qual foi a figura gerada? Ela passa por todos os pontos? E pela origem?__________________________________

Se você respondeu na letra c que não há uma constante, vamos construir o gráfico:

e. Faça uma reta passando por dois pontos quaisquer dos sete que foram criados na janela de visualização. A reta passa por todos os pontos? E pela origem?____________

Se a reta elaborada no item anterior não passar por todos os pontos, faça o item a seguir:

f. Construa uma cônica passando por cinco desses pontos. Clique sobre a expressão da cônica com o botão direito na janela de álgebra, e diga: qual o nome da curva que foi formada? A Curva passa por todos os pontos? E pela origem?__________________

-> Nessa questão, como foi a expressão que gerou o gráfico? Caso tenha existido razão, com qual equação (colunas C e D da planilha) a encontramos? Como podemos descrever o gráfico criado?____

____

[24] As questões de 1 à 4 desta atividade foram elaboradas com base na questão 2 da situação de aprendizagem 7 “Grandezas Proporcionais: Estudo Funcional, Significados e Contextos” do volume I do 9º ano do caderno do aluno do Estado de São Paulo (2014-2017).

___

-> Salve este arquivo.

2. Abra um novo arquivo no GeoGebra e repita o “Procedimento Inicial”.

x	1	2	3	4	5	6	10
y	48	24	16	12	9,6	8	4,8

a. Você consegue observar algum padrão (uma regularidade) na variação dos valores de x e de seu respectivo valor y? ___

___

b. Sem fazer cálculos, você diria que x e y são diretamente ou inversamente proporcionais, ou não são proporcionais?___

c. Observe os valores em cada linha da planilha. O produto ou o quociente entre eles é constante? Para verificar o que foi perguntado, digite na célula C1 *A1*B1* e tecle enter, depois selecione C1 e usando o quadradinho no canto inferior direito da célula copie a fórmula até a linha 7. Repita na célula D1, mas agora digitando *A1/B1*, e copie a fórmula até a linha 7. Resposta: (   ) Sim (   ) Não

d. Baseado nos cálculos realizados, você diria que x e y são diretamente ou inversamente proporcionais, ou não são proporcionais?

___

Se você respondeu sim na letra c, ou seja, que há uma constante, responda:

e. Qual a expressão que representa y em função de x?___

f. Agora, vamos construir o gráfico por estes pontos. Digite a relação encontrada na pergunta anterior na janela de entrada do GeoGebra. Qual foi a figura gerada? Ela passa por todos os pontos? E pela origem?___

Se você respondeu na letra c que não há uma constante, vamos construir o gráfico:

e. Faça uma reta passando por dois pontos quaisquer dos sete que foram criados na janela de visualização. A reta passa por todos os pontos? E pela origem?___

Se a reta elaborada no item anterior não passar por todos os pontos, faça o item a seguir:

f. Construa uma cônica passando por cinco desses pontos. Clique sobre a expressão da cônica com o botão direito na janela de álgebra, e diga: qual o nome da curva que foi formada? A Curva passa por todos os pontos? E pela origem?___

-> Nessa questão, como foi a expressão que gerou o gráfico? Caso tenha existido razão, com qual equação (colunas C e D da planilha) a encontramos? Como podemos descrever o gráfico criado?___

___

___

-> Salve este arquivo.

3. Abra um novo arquivo no GeoGebra e repita o “Procedimento Inicial”.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	3	5	7	9	11	13	15

a. Você consegue observar algum padrão (uma regularidade) na variação dos valores de x e de seu respectivo valor y? ____

____

b. Sem fazer cálculos, você diria que x e y são diretamente ou inversamente proporcionais, ou não são proporcionais?_____________________________________

c. Observe os valores em cada linha da planilha. O produto ou o quociente entre eles é constante? Para verificar o que foi perguntado, digite na célula C1 *A1*B1* e tecle enter, depois selecione C1 e usando o quadradinho no canto inferior direito da célula copie a fórmula até a linha 7. Repita na célula D1, mas agora digitando *A1/B1*, e copie a fórmula até a linha 7. Resposta: (   ) Sim (   ) Não

d. Baseado nos cálculos realizados, você diria que x e y são diretamente ou inversamente proporcionais, ou não são proporcionais?

____

Se você respondeu sim na letra c, ou seja, que há uma constante, responda:

e. Qual a expressão que representa y em função de x?________________________

f. Agora, vamos construir o gráfico por estes pontos. Digite a relação encontrada na pergunta anterior na janela de entrada do GeoGebra. Qual foi a figura gerada? Ela passa por todos os pontos? E pela origem?__________________________________

Se você respondeu na letra c que não há uma constante, vamos construir o gráfico:

e. Faça uma reta passando por dois pontos quaisquer dos sete que foram criados na janela de visualização. A reta passa por todos os pontos? E pela origem?___________

Se a reta elaborada no item anterior não passar por todos os pontos, faça o item a seguir:

f. Construa uma cônica passando por cinco desses pontos. Clique sobre a expressão da cônica com o botão direito na janela de álgebra, e diga: qual o nome da curva que foi formada? A Curva passa por todos os pontos? E pela origem?_________________

-> Nessa questão, como foi a expressão que gerou o gráfico? Caso tenha existido razão, com qual equação (colunas C e D da planilha) a encontramos? Como podemos descrever o gráfico criado?____

____

____

-> Salve este arquivo.

4. Abra um novo arquivo no GeoGebra e repita o “Procedimento Inicial”.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	2	8	18	32	50	72	98

a. Você consegue observar algum padrão (uma regularidade) na variação dos valores de x e de seu respectivo valor y? ____

____

b. Sem fazer cálculos, você diria que x e y são diretamente ou inversamente proporcionais, ou não são proporcionais?____
c. Observe os valores em cada linha da planilha. O produto ou o quociente entre eles é constante? Para verificar o que foi perguntado, digite na célula C1 *A1*B1* e tecle enter, depois selecione C1 e usando o quadradinho no canto inferior direito da célula copie a fórmula até a linha 7. Repita na célula D1, mas agora digitando *A1/B1*, e copie a fórmula até a linha 7. Resposta: ( ) Sim ( ) Não
d. Baseado nos cálculos realizados, você diria que x e y são diretamente ou inversamente proporcionais, ou não são proporcionais?
____

Se você respondeu sim na letra c, ou seja, que há uma constante, responda:
e. Qual a expressão que representa y em função de x?__________________________
f. Agora, vamos construir o gráfico por estes pontos. Digite a relação encontrada na pergunta anterior na janela de entrada do GeoGebra. Qual foi a figura gerada? Ela passa por todos os pontos? E pela origem?____________________________________

Se você respondeu na letra c que não há uma constante, vamos construir o gráfico:
e. Faça uma reta passando por dois pontos quaisquer dos sete que foram criados na janela de visualização. A reta passa por todos os pontos? E pela origem?____________
Se a reta elaborada no item anterior não passar por todos os pontos, faça o item a seguir:
f. Construa uma cônica passando por cinco desses pontos. Clique sobre a expressão da cônica com o botão direito na janela de álgebra, e diga: qual o nome da curva que foi formada? A Curva passa por todos os pontos? E pela origem?_________________

-> Nessa questão, como foi a expressão que gerou o gráfico? Caso tenha existido razão, com qual equação (colunas C e D da planilha) a encontramos? Como podemos descrever o gráfico criado?____
____
____
-> Salve este arquivo.
5.[25] Abra um novo arquivo no GeoGebra e repita o "Procedimento Inicial".

x	-5	-3	-1	1	3	5	7
y	15	9	3	-3	-9	-15	-21

a. Você consegue observar algum padrão (uma regularidade) na variação dos valores de x e de seu respectivo valor y? ____
____
b. Sem fazer cálculos, você diria que x e y são diretamente ou inversamente proporcionais, ou não são proporcionais?____
c. Observe os valores em cada linha da planilha. O produto ou o quociente entre eles é constante? Para verificar o que foi perguntado, digite na célula C1 *A1*B1* e tecle enter, depois selecione C1 e usando o quadradinho no canto inferior direito da célula copie a fórmula até a linha 7. Repita na célula D1, mas agora digitando *A1/B1*, e copie a fórmula até a linha 7. Resposta: ( ) Sim ( ) Não

[25] A tabela deste item não foi retirada do caderno do estado, como as anteriores. Acrescentamos esta para que pudéssemos explorar o comportamento do gráfico quando os valores dados não são todos positivos.

d. Baseado nos cálculos realizados, você diria que x e y são diretamente ou inversamente proporcionais, ou não são proporcionais?

____

Se você respondeu sim na letra c, ou seja, que há uma constante, responda:
e. Qual a expressão que representa y em função de x?_________________________
f. Agora, vamos construir o gráfico por estes pontos. Digite a relação encontrada na pergunta anterior na janela de entrada do GeoGebra. Qual foi a figura gerada? Ela passa por todos os pontos? E pela origem?__________________________________

Se você respondeu na letra c que não há uma constante, vamos construir o gráfico:
e. Faça uma reta passando por dois pontos quaisquer dos sete que foram criados na janela de visualização. A reta passa por todos os pontos? E pela origem?___________
Se a reta elaborada no item anterior não passar por todos os pontos, faça o item a seguir:
f. Construa uma cônica passando por cinco desses pontos. Clique sobre a expressão da cônica com o botão direito na janela de álgebra, e diga: qual o nome da curva que foi formada? A Curva passa por todos os pontos? E pela origem?_________________

-> Nessa questão, como foi a expressão que gerou o gráfico? Caso tenha existido razão, com qual equação (colunas C e D da planilha) a encontramos? Como podemos descrever o gráfico criado?____
____
____

-> Salve este arquivo.

6. Concluindo as questões de 1 a 5...
a. Com base nas questões *1* e *5*, o que você conclui sobre a expressão de grandezas diretamente proporcionais? Com qual equação, colunas C e D da planilha, encontramos a constante em grandezas desse tipo? Como é o gráfico das grandezas diretamente proporcionais?
____
____
____
____

b. Com base na questão 2, o que você conclui sobre a expressão de grandezas inversamente proporcionais? Com qual equação, colunas C e D da planilha, encontramos a constante em grandezas desse tipo? Como é o gráfico das grandezas inversamente proporcionais?
____
____
____
____

c. Nos casos que vimos, as grandezas não proporcionais possuem uma constante? Como foram os gráficos nestes casos?
____
____
____
____

7.[26] Abra o arquivo *ferro.ggb*. O gráfico representado na janela geométrica apresenta a relação entre a massa e o volume do ferro. Vamos explorar esse gráfico.
-> Movimente o ponto A sobre a reta e observe os valores mostrados.
a. Qual é a massa de uma amostra de ferro cujo volume é $4cm^3$? ___________________
b. Qual é o volume de uma amostra de ferro de 15g de massa?_____________________
c. Mova o ponto A, de modo a escolher 5 novas coordenadas aleatórias para ele e digite a massa e volume correspondente na planilha (caso tenham números decimais, substitua a vírgula por ponto).
d. Agora, use a coluna C da planilha para calcular a razão entre estes valores (Digite na célula C2 *A2/B2* depois copie esta fórmula para as outras células). Qual é esse valor?___
e. Baseado nessa informação e no gráfico, você diria que a massa e o volume de uma amostra de ferro não são proporcionais, são diretamente ou são inversamente proporcionais? Por quê?
____
____
f. Caso sejam proporcionais, qual a constante de proporcionalidade?
____
g. Escreva a relação entre a massa, *m*, e o volume, *v*, por meio de uma expressão:
____
h. Por fim, exiba a janela de álgebra (exibir -> janela de álgebra) e observe a equação da reta apresentada. Como ela está relacionada com a expressão do item anterior?
____

8. Abra o arquivo automovel.ggb. O gráfico representado na janela geométrica apresenta a relação entre a velocidade e o tempo de um automóvel que precisa percorrer 120 Km. Vamos explorar esse gráfico.
-> Movimente o ponto A sobre a curva e observe os valores mostrados.
a. Para que o veículo percorra 120Km em 2h, em qual velocidade média ele deve fazer o caminho? ____
b. Quanto tempo o veículo levará para percorrer os 120Km, se ele estiver a uma velocidade de 40Km/h?____
c. Mova o ponto A, investigando suas coordenadas, de modo a completar na planilha a velocidade correspondente a cada tempo dado.
d. Agora, use a coluna C da planilha para calcular a multiplicação entre estes valores (Digite na célula C2 *A2*B2* depois copie esta fórmula para as outras células.
e. Baseado nessa informação e no gráfico, você diria que a velocidade e o tempo de um automóvel não são proporcionais, são diretamente ou são inversamente proporcionais? Por quê?____
____
f. Caso sejam proporcionais, qual a constante de proporcionalidade?_______________
g. Escreva a relação entre a velocidade *v*, e o tempo *t*, por meio de uma expressão:
____
h. Por fim, exiba a janela de álgebra (exibir -> janela de álgebra) e observe a equação da curva apresentada. Como ela está relacionada com a expressão do item anterior?
____
____

[26] As questões 7 e 8 desta atividade foram elaboradas com base nas questões 2 e 3 da situação de aprendizagem 8 "Representação Gráfica de Grandezas Proporcionais e de Algumas Não Proporcionais" do volume I do 9º ano do caderno do aluno do Estado de São Paulo (2014-2017).

APÊNDICE III

ATIVIDADE "TEOREMA DE TALES"

Tema da atividade: Teorema de Tales

Objetivo: Explorar a Proporcionalidade do Teorema de Tales com suas representações Aritmética, Geométrica e Algébrica

Aluno(a):______________________________ Turma:______ Data: ____/____/____

1[27]. Abra um novo arquivo no GeoGebra. Esconda os eixos. Com a ferramenta polígono, construa um triângulo ABC. Nesse triângulo,

- Usando a ferramenta ponto médio, determine o ponto médio D do lado AB;
- Trace uma reta paralela ao lado BC, passando por D;
- Agora marque o ponto E na interseção dos lados AC com a reta criada;
- Use a ferramenta distância e meça os segmentos AD, BD e AE;

a. Qual você acha que deve ser a medida do segmento CE? ________________________

b. Agora, meça os segmentos AB e AC. Qual a razão entre a medida do lado AB e AD (digite no campo de entrada AB/AD, o resultado aparecerá na janela de álgebra)? E entre os lados AC e AE (digite no campo de entrada AC/AE)? ____________________________

c. Movimente os vértices do triângulo e observe: Os valores das medidas dos segmentos mudaram? E a razão entre eles? O que ocorre tem alguma relação com proporcionalidade? Escreva sobre isso: ____

____

____

d. Com a ferramenta exibir/esconder objeto, oculte as distâncias dos segmentos AD, BD e AE.

-> No mesmo triângulo:

- Determine F, o ponto médio de AD.
- Faça uma nova reta paralela a BC, passando por F.
- Determine G na interseção da nova reta com AC.
- Com a ferramenta distância, meça os segmentos AF, DF e AG.

e. Qual você acha que deve ser a medida do segmento EG? ________________________

f. Qual razão entre AB e AF (digite no campo de entrada AB/AF)? E entre AC e AG (digite no campo de entrada AC/AG ____

g. Qual a razão entre BF e AF (digite no campo de entrada BF/AF)? __________________

h. Se for mantida a razão entre BF e AF para os segmentos CG e AG, qual deve ser a medida de CG? ____

i. Verifique a resposta do item anterior com a ferramenta distância para medir o segmento CG.

j. Movimente os vértices do triângulo e observe: Os valores das medidas dos segmentos mudaram? E a razão entre eles? O que ocorre tem alguma relação com proporcionalidade? Escreva sobre isso: ____

____

____

Salve este arquivo como triangulotales1.ggb

2. Abra um novo arquivo do GeoGebra e construa um novo triângulo ABC. Com a ferramenta ponto em objeto, crie um ponto D qualquer sobre o lado AB. Depois uma reta

[27] Esta atividade foi elaborada com base nas questões 1, 2, 3, 4 e 5 da situação de aprendizagem 6 "Teorema de Tales: A Proporcionalidade na Geometria" do volume II do 8º ano do caderno do aluno do Estado de São Paulo (2014-2017).

paralela a BC passando por D. Com a ferramenta interseção de dois objetos, crie também o ponto E na interseção da reta com AC.
a. Agora exiba a planilha, e a preencha conforme abaixo, para obter as medidas dos segmentos:

coluna A	coluna B
A1: AB;	B1: AC;
A2: AD;	B2: AE;
A3: BD;	B3: CE;

b. Agora use a coluna C e verifique o valor da razão entre os segmentos (digite A1/B1 e arraste essa fórmula até a células C3). O que você nota no valor das razões? _________
c. Arraste o ponto D sobre o lado AB. Os valores das medidas dos segmentos mudaram? E a razão entre eles? ____
d. O que ocorre com as razões nos itens b e c tem alguma relação com proporcionalidade?
Escreva sobre isso: ____

____

____

e. Com a ferramenta ponto em objeto, marque um ponto F (com F diferente de D) sobre o lado AB, e o ponto G (com G diferente de E) sobre o lado AC. Construa a reta FG.
f. Preencha a planilha conforme abaixo, para obter as medidas dos segmentos:

coluna A:	coluna B:
A6: AF;	B6: AG;
A7: BF;	B7: CG;

g. Agora use a coluna C e verifique o valor da razão entre eles (digite em C6 A6/B6 e arraste essa fórmula para C7. O que você nota no valor das razões? ________________
h. Arraste os pontos F e G. Os valores das medidas dos segmentos mudaram? E a razão entre eles? ____
i. O que ocorre com as razões nos itens g e h tem alguma relação com proporcionalidade?
Escreva sobre isso: ____

____

____

j. Com a ferramenta mover, movimente o ponto F até que as medidas da coluna C fiquem iguais as das linhas 2 e 3 da planilha. Qual a posição relativa dessas retas (DE e FG)?

____

k. Concluindo... Com base na movimentação dos pontos D e F, e observando o que ocorre com a coluna C da planilha (razão), qual conclusão se pode tirar acerca das retas paralelas e os lados do triângulo que intersectam essas paralelas? __________________

____

____

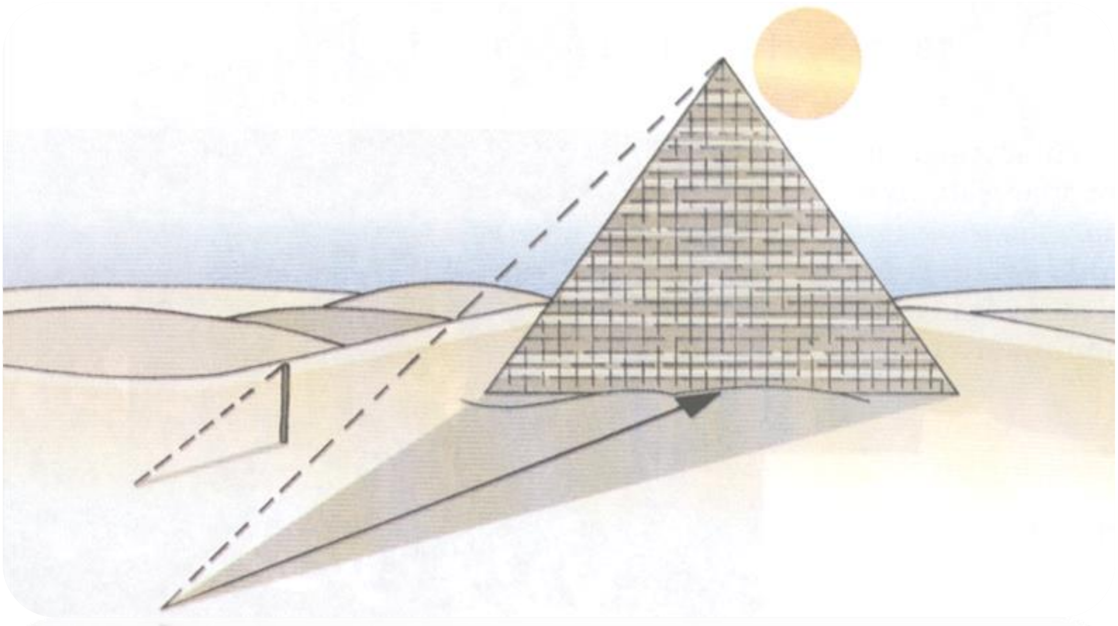
____

____

Salve este arquivo como triangulotales2.ggb

TEOREMA DE TALES

As particularidades que observamos nas questões anteriores que relacionam a proporcionalidade que existe quando duas ou mais retas paralelas entre si, são cortadas por duas transversais foi descoberto por Tales. Formalmente, o Teorema de Tales enuncia que "Se um feixe de retas paralelas é interceptado por duas retas transversais então os segmentos determinados pelas paralelas sobre as transversais são proporcionais" (BONGIOVANNI, 2007).
Tales era um rico comerciante da cidade grega de Mileto, cerca de 600 a.C. Ele observou que, num mesmo instante, a razão entre a altura de um objeto e o comprimento da sombra que esse objeto projeta no chão era sempre a mesma para quaisquer objetos. Por ser comerciante, Tales teve a oportunidade de entrar em contato com outros povos. Conta-se que numa de suas viagens ao Egito, Tales foi desafiado a medir a altura da grande pirâmide Quéops, que foi construída por volta de 2500 a.C. e é uma das grandes maravilhas do mundo antigo.



Fonte: http://www.brasilescola.com/matematica/teorema-tales.htm

Tales aplicou seus conhecimentos sobre segmentos proporcionais e achou a altura da pirâmide usando apenas um bastão e as medidas das sombras da pirâmide e do bastão no mesmo instante em que o sol projetava totalmente a sombra da pirâmide e do bastão. Resumidamente, ele descobriu que:
(altura da pirâmide)/(sombra da pirâmide)=(altura da estaca)/(sombra da estaca)
Esta descoberta levou Tales a ser muito prestigiado pelo faraó Amásis, que governava o Egito nessa época. Além disso, o prestígio da descoberta de Tales vem se estendendo ao longo das gerações e é usada até os dias atuais.

Referência: BONGIOVANNI. V. O Teorema de Tales: uma ligação entre o geométrico e o numérico. REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática. V 2.5, p.94-106, UFSC: 2007.

3. No arquivo lago.ggb você pode explorar a situação criada por Lucas. Lucas queria estimar a medida mais extensa do pequeno lago que havia perto de sua casa. Pensando sobre o problema, ele inicialmente fez um esquema da situação, indicando essa extensão por AB e imaginando dois triângulos ABD e BCE, sendo as bases AD e EC paralelas. Depois, foi ao local e fincou 5 estacas, cada uma correspondente a um vértice dos triângulos de seu esquema. Contou com passos as medidas correspondentes aos lados AE, BD e DC, e completou seu esquema.
a. Analise o esquema no GeoGebra e responda: o procedimento criado por Lucas permite a resolução do problema? Se sua resposta foi afirmativa, expresse abaixo os cálculos efetuados e o valor, em passos, encontrado por ele para a extensão AB (faça essa questão manualmente):

b. Exiba a planilha, digite AB na célula A1, e EA em A2. Na célula A3 digite AB/EA para encontrar a razão entre a largura do lago AB, pelo segmento EA.
c. Digite BD na célula B1, e DC em B2. Na célula B3 digite BD/DC para encontrar a razão do segmento BD, pelo segmento DC.
d. Observando os resultados nas células A3 e B3, você pode afirmar que a razão entre os segmentos AB e AE são proporcionais a razão entre BD e DC? ____________________
e. Em caso afirmativo, qual é a constante de proporcionalidade? Usando os recursos da planilha, explore os segmentos do esquema e responda: existem outras relações proporcionais no esquema de Lucas? Se sim, cite quais são esses casos.
____
____
____
f. O esquema criado por Lucas, foi baseado no Teorema de Tales. Você conseguiu perceber essa relação no esquema explorado? Explique sua resposta.
____
____
____
____
____
4. No arquivo praça.ggb você pode explorar a situação:
De uma praça em formato retangular saem 4 avenidas, α, β, θ e φ, uma de cada vértice do retângulo. Ligando cada par de avenidas há três ruas, 1, 2 e 3, sempre paralelas em cada caso. Os pontos de encontro entre as ruas de mesmo número são nomeados pelas letras do alfabeto, A, B, C, D etc.
a. exiba a planilha, e a preencha da seguinte forma:

coluna A:	coluna B:
A1: AB;	B1: BC;
A2: DE;	B2: EF;
A3: GH;	B3: HI;
A4: JK	B4: KL

b. Agora use a coluna C e verifique o valor da razão entre eles (digite A1/B1 e arraste essa fórmula até a célula C4)
c. O que você nota no valor das razões? ______________________________________
____

d. Arraste livremente os pontos A, D, G e J . Os valores das medidas dos segmentos mudaram? E a razão entre eles? ____
____

e. A proporção verificada no item anterior é a expressão matemática do teorema de Tales, que também pode ser enunciada da seguinte forma: se uma reta paralela a um lado de um triângulo intersecta os outros dois lados em pontos distintos, então ela determina segmentos que são proporcionais a esses lados. Por exemplo, TA está para TC assim como AJ está para CL. Portanto, meça TA, TC e CL no GeoGebra e calcule AJ.

f. Com o mesmo raciocínio do Teorema de Tales usado no item anterior, encontre o comprimento de outra rua que preferir.

APÊNDICE IV

ATIVIDADE “PORCENTAGEM”

Tema da atividade: Frações Equivalentes e Porcentagem

Objetivo: Relacionar Porcentagem com Proporcionalidade, explorando concomitantemente as representações Aritmética, Geométrica e Algébrica

Aluno(a):______________________________ Turma:______ Data: ____/____/____

1[28]. Uma das formas de calcular "qual a porcentagem de y que x representa" é encontrando a fração com denominador 100 que é equivalente a $\frac{x}{y}$.

Então abra o arquivo frações-equivalentes-base100.ggb. Repare que temos uma fração representada e no quadro maior duas grades: uma cinza com cem quadradinhos menores e outra vermelha com a quantidade de quadros igual ao denominador da fração. Além disso, o numerador da fração representa a quantidade de quadros vermelhos que estão pintados de lilás.

-> Vamos explorar esse arquivo.

a) Mude a fração representada no GeoGebra para $\frac{6}{25}$. Qual a fração de base 100 equivalente a esta?

b) Então 6 representa qual porcentagem de 25?

c) Mude a fração representada para $\frac{18}{50}$. Então 18 é quantos porcento de 50?

d) E 12 equivale a quantos porcento de 20 (mude a fração para $\frac{12}{20}$)?

Note que no arquivo do GeoGebra, todos os valores disponíveis para o denominador da fração são divisores de 100. Isso ocorre para que os quadradinhos menores possam ser agrupados em quantidades inteiras e para podermos representar a fração de denominador 100. Mas então, como fazemos para calcular quantos porcento 12 é de 30, uma vez que 30 não pode ser representado na nossa malha do GeoGebra? Vamos fazer alguns cálculos, você pode usar o campo de Entrada do GeoGebra como auxílio. Exiba a janela de álgebra para visualizar os resultados.

e) Calcule 6/25. O valor encontrado foi o mesmo que você encontrou no item a?

f) Faça agora 18/50 e também 12/20. Os valores correspondem ao que você encontrou nos itens c e d?

g) Como você faria então para descobrir qual a porcentagem que 12 é de 30?

2. No arquivo numero-de-alunos.ggb, vamos investigar as seguintes situações que ocorrem em uma escola de Ensino Fundamental II.

a. A sala do 6º ano A tem 45 alunos, e 40% são meninos. Quantos meninos tem na turma?

b. Na sala do 7º ano A que tem 40 alunos, 70% vão para escola de ônibus. Quantos alunos dessa sala não vão para escola de ônibus?

---

[28] A questão 9 foi elaborada com base na seção "Leitura e análise de texto" da Situação de Aprendizagem 2 "Razão e Proporção" do volume II do 7º ano do caderno do aluno do Estado de São Paulo (2014-2017).

c. Na sala do 8º ano A houve uma reunião de pais e responsáveis para compartilhar os bons resultados da turma na Olimpíada Brasileira de Matemática. Mas dos 38 alunos da turma, os pais e responsáveis de apenas 42% (aproximadamente) deles compareceu. Quantos alunos estavam acompanhados dos pais na reunião?

d. Na sala do 9º ano A, uma professora fez uma votação para saber a posição dos alunos sobre a maioridade penal, e constatou que aproximadamente 53% dos alunos são contra o projeto de lei que considera réu os adolescentes infratores com idade igual ou superior a 16 anos, e que aproximadamente 6% se absteve. Sabendo que a turma tem 34 alunos, quantos alunos se posicionaram a favor do projeto de lei?

3. No arquivo porcentagem-de-alunos.ggb, vamos investigar as situações contrárias que ocorrem nas salas da mesma escola que falamos na questão 2.

a. Na sala do 6º ano A que tem 45 alunos, 27 são meninas. Qual a porcentagem de meninas da turma?

b. Na sala do 7º ano A que tem 40 alunos, 28 vão para escola de ônibus. Qual a porcentagem de alunos que não vão de ônibus para escola?

c. Na reunião de pais que ocorreu no 8º ano A, dos 38 pais e responsáveis, 22 não foram. Qual a porcentagem aproximada de alunos que não foram representados na reunião?

d. Na sala do 9º ano A que tem 34 alunos, 16 são contra o projeto de lei da maioridade penal, e 2 não se posicionaram nem contra nem a favor, optando por se abster da votação. Qual a porcentagem aproximada de alunos que são contra esse projeto?

4. Usando o arquivo total-alunos.ggb, indique o número de alunos nas situações a seguir:

a. Na turma do 6º A em uma escola, foi feito um levantamento e notou-se que 13 alunos eram filhos únicos e esse número corresponde a cerca de 30% da turma. Quantos alunos existem nessa turma?

b. Na mesma escola, na sala do 7º B apenas 8 eram filhos únicos e a porcentagem de alunos que possuem irmãos é de cerca de 81%. Qual o número de alunos dessa turma?

5. Vamos investigar outras situações que ocorrem nas turmas B da mesma escola das questões anteriores. Para isso, use o arquivo que achar mais adequado para cada questão (numero-de-alunos.ggb, porcentagem-de-alunos.ggb ou total-alunos.ggb).

a. A sala do 6º ano B organizou um campeonato de futsal. Dos 44 alunos da turma, 50% decidiu jogar. Quantos alunos do 6º B participaram do campeonato jogando?

b. Já na sala do 9º B, foi feito um levantamento sobre preferência de animais de estimação. Chegou-se aos seguintes valores aproximados: 44% dos alunos preferem cães, 32% dizem gostar mais de gatos e 9 alunos preferem outros ou não gostam de animais. Quantos alunos participaram do levantamento?

c. Na sala do 7º ano B que tem 42 alunos, aproximadamente 74% vão para escola de ônibus. Quantos alunos dessa sala vão para escola de ônibus?

d. Na sala do 8º ano B, foi feita uma eleição para representante de classe. Do total de alunos, 25% votaram no Caio, que foi eleito com 9 votos, pois haviam muitos candidatos. Quantos alunos têm na turma de Caio?

e. Na sala do 9º ano B o professor de Matemática fechou as notas do 1º bimestre. Dos 33 alunos, aproximadamente 67% foram super bem, e tiveram um rendimento de, ao menos, 80%. Quantos alunos foram super bem?

f. Na sala do 6º ano B que tem 44 alunos e organizou um campeonato de futsal, 22 alunos da turma decidiram apenas assistir aos jogos. Qual a porcentagem de alunos da turma que não jogou?

g. Na sala do 7º ano B que tem 42 alunos, 11 alunos não vão para escola de ônibus. Qual é, aproximadamente, a porcentagem de alunos dessa sala que vão para escola de ônibus?

h. Na sala do 8º ano B, foi feita uma eleição para representante de classe. Dos 36 alunos da turma, 27 não votaram no Caio. Qual a porcentagem de alunos que não votaram no Caio?

i. Na sala do 9º ano B, 11 dos 33 alunos tiveram desempenho abaixo de 80% no 1º bimestre. Qual a porcentagem aproximada de alunos que tiveram esse rendimento?

6. Logo após a Copa do Mundo de 2014, os preços dos produtos criados para esta ocasião despencaram. Veja:

Para os itens de *a* a *d*, use a caixa de entrada do GeoGebra para fazer os cálculos que precisar.

a. Observando estes valores, qual produto está com maior porcentagem de desconto?

b. E qual está com a menor porcentagem de desconto?___________________________

c. Qual produto está com o maior desconto em reais? De quanto é esse desconto em porcentagem?____

d. Qual está com o menor desconto em reais? De quanto é esse desconto em porcentagem?

____

-> Abra o arquivo descontos.ggb e veja a representação da relação entre o preço desses três produtos e seus descontos. Os retângulos representam o preço sem desconto. A parte azul o valor que se paga na promoção, e o rosa, o que se tem desconto. Observe estes retângulos e responda:

e. Qual produto está com maior porcentagem de desconto? _______________________

f. Qual está com a menor porcentagem de desconto?_____________________________

Além dos produtos citados, a loja está vendendo outros produtos criados para a Copa com descontos:

-> Novamente no arquivo descontos.ggb, represente a relação entre o preço desses três produtos e seus descontos.

g. Qual produto está com o maior desconto em reais? De quanto é esse desconto em porcentagem?____

h. Qual está com o menor desconto em reais? De quanto é esse desconto em porcentagem?____

i. Qual produto está com maior porcentagem de desconto? ________________________

j. Qual está com a menor porcentagem de desconto?_____________________________

7. Para a questão a seguir, use o arquivo duas-operações-consecutivas.ggb.

Situação I

Uma loja estava com vendas baixas e decidiu fazer uma liquidação de final de ano. Ela anunciou que todos os eletrodomésticos estavam com 40% de desconto, mas alguns dias antes de anunciar a liquidação, os preços desses produtos aumentaram em 30%.

a) Um dos produtos dessa loja é um microondas que durante todo o ano custava R$249,90. Qual é o valor que ele está sendo anunciado na liquidação?

b) Qual foi o desconto (em R$) realmente dado nesse microondas?

c) Qual a porcentagem de desconto real nesse produto?

d) Outro produto também anunciado na liquidação foi um fogão, que custava R$998,00. Qual foi o valor deste fogão após o aumento? E por quanto ele foi anunciado na liquidação?

e) Qual foi a porcentagem de desconto real nesse fogão?

Situação II
Nos produtos eletrônicos os descontos foram diferentes. No dia da liquidação, foi dado um desconto de 10% em todos os produtos. Mas ainda assim, nenhum deles foi vendido durante a liquidação. Na semana seguinte, a liquidação acabou e o dono da loja decidiu aumentar os produtos em 10%. Depois que acabou a liquidação, quanto passou a custar os produtos a seguir, sabendo que antes de passar por qualquer desconto ou aumento eles custavam...

f) HD externo – R$100?

g) Smartphone - R$599?

h) Câmera digital - R$799?

i) Quando um produto sofre um desconto de x% e um consecutivo aumento de x% ele volta a ter o mesmo valor inicial? Por que isso (não)ocorre?________________________
____

Situação III
O dono da loja planejou fazer uma liquidação de móveis no final do mês. Para isso, ele adotou a seguinte estratégia: Primeiro aumentou todos os móveis em 20%, e na semana da liquidação de móveis, deu um desconto de 20%, anunciando nos folhetos da loja que todos os móveis estavam com 20% de desconto. Durante essa liquidação, quanto estava custando os produtos a seguir, sabendo que antes de passar por qualquer aumento ou desconto eles custavam...
j) Conjunto de Rack e Painel – R$699,90?

k) Cabeceira estofada casal– R$299,90?

l) Conjunto de sofá de dois e três lugares - R$1299?

m) Quando um produto sofre um aumento de x% e um consecutivo desconto de x% ele volta a ter o mesmo valor inicial? Por que isso (não) ocorre?_______________________
____

8. Abra o arquivo mistura-agua-e-tinta.ggb. Repare que temos dois seletores para a quantidade de tinta e água colocadas na mistura.

Situação I
O fabricante de uma determinada marca de tinta do tipo látex PVA, indicada para área interna da casa, recomenda que o produto seja diluído na proporção de 20% a 30% de

água. O pintor misturou o conteúdo de uma lata de tinta de 900 ml, com 300 ml de água.

a) Com relação ao recomendado pelo fabricante, a quantidade de água colocada pelo pintor está correta? Por quê? ____

b) Qual o máximo de água que o pintor poderia ter acrescentado à mistura? __________

c) E o mínimo? ____

d) Quantos ml de tinta o pintor precisa acrescentar à essa mistura agora, para arrumar a proporção de água?____

____

e) Para pintar toda a área interna da casa, o pintor usou uma quantidade dessa tinta bem maior do que as 900ml que inicialmente usou. Ao todo, foram 30 litros de tinta. Para essa quantidade, quanto de água deve ser misturada?________________________

f) Supondo que nos 30l de tinta, ele tenha insistido em manter a proporção de 300ml de água para cada 900ml de tinta, qual foi a quantidade de água que ele usou nessa mistura?

____

Situação II

Para pintar a área externa, foi comprada uma tinta do tipo acrílica, por ser impermeável. O fabricante dessa tinta determina que o produto seja diluído na proporção de 10% a 15% de água. O pintor misturou o conteúdo de uma lata de tinta de 500 ml, com 100 ml de água.

g) Com relação ao recomendado pelo fabricante, a quantidade de água colocada pelo pintor está correta? Por quê? ____

h) Qual o máximo de água que o pintor poderia ter acrescentado à mistura? __________

i) E o mínimo? ____

j) Quantos ml de tinta o pintor precisa acrescentar à essa mistura agora, para arrumar a proporção de água?____

____

k) Para pintar toda a área externa da casa, o pintor usou 12 litros de tinta. Para essa quantidade, quanto de água deve ser misturada?________________________________

l) Supondo que nos 12l de tinta, ele tenha insistido em manter a proporção de 100ml de água para cada 500ml de tinta, qual foi a quantidade de água que ele usou nessa mistura?

____

9. Vamos ler o texto abaixo:

O *HOMEM VITRUVIANO* E AS RAZÕES NO CORPO HUMANO

Leonardo da Vinci foi uma das figuras mais criativas de seu tempo. Ele viveu na Itália, no século XV, e criou algumas das obras mais famosas de todos os tempos, como a *Mona Lisa, A última ceia* e *A virgem das rochas*. Leonardo realizou estudos nas mais diversas áreas: pintura, arquitetura, engenharia, anatomia, entre outras. Ele conseguiu, como ninguém, aproximar a ciência da arte. Leonardo também produziu um estudo sobre as proporções do corpo humano, baseado no tratado feito pelo arquiteto romano Marcus Vitruvius, que, no século I a C., havia descrito as proporções ideais do corpo humano, segundo um padrão de harmonia matemática.

Assim como muitos outros artistas, Leonardo interessou-se pelo trabalho de Vitruvius e registrou-o em um de seus cadernos de anotação. No meio dessas anotações, desenhou a figura de um homem dentro de um círculo e de um quadrado. Essa figura, chamada de *Homem vitruviano*, acabou se tornando um de seus trabalhos mais conhecidos, simbolizando o espírito renascentista. O desenho de Da Vinci evidenciou a retomada e a valorização de princípios da tradição greco-latina, tais como beleza, harmonia, equilíbrio e proporção. Essa obra atualmente faz parte da coleção das *Gallerie dell'Accademia* (Galerias da Academia), em Veneza, na Itália.

Reproduzimos, a seguir, alguns trechos do texto de Da Vinci que acompanham a gravura do Homem vitruviano.
"[...] O comprimento dos braços abertos de um homem é igual à sua altura [...]; desde o fundo do queixo até ao topo da cabeça é um oitavo da altura do homem [...]; a maior largura dos ombros contém em si própria a quarta parte do homem. [...] Desde o cotovelo até o ângulo da axila é um oitavo da altura do homem. A mão inteira será um décimo da altura do homem. [...] O pé é um sétimo do homem [...]; a distância entre o fundo do queixo e o nariz, e entre as raízes dos cabelos e as sobrancelhas é a mesma, e é, como a orelha, um terço da cara." Disponível em: http://webpages.fc.ul.pt/~ommartins/seminario/davinci/matematico.htm. Acesso em: 31 de outubro de 2016.

-> Anote na tabela todas as medidas descritas no texto de Leonardo da Vinci, e as letras que correspondem às extremidades do segmento na imagem (abra o arquivo homem-vitruviano.ggb). Além disso, com a ferramenta distância, comprimento ou perímetro, meça esses segmentos.

Parte medida	segmento	tamanho
Longitude dos braços	EF	11.17

As relações existentes no Homem Vitruviano podem ser representadas em frações, decimais e também em porcentagem. Por exemplo, na construção homem-vitruviano.ggb, podemos calcular na caixa de entrada que a razão entre a altura da cabeça (DN) e a altura do homem (CD) é 0.125, que é a resposta decimal. Podemos conferir se essa resposta é igual a descrição de da Vinci "desde o fundo do queixo até ao topo da cabeça é um oitavo da altura do homem [...]", ou seja, que está na razão 1/8 (e esta é a resposta que está em formato de fração). Se dividimos 1 por 8, conferimos que

é 0.125 e que da Vinci estava certo. Se multiplicamos o valor encontrado em decimal por 100, temos 12,5%, que é a resposta em porcentagem.
Utilizando a caixa de entrada do GeoGebra e as medidas registradas por você na tabela acima, encontre as representações fracionária, decimal e em porcentagem para os trechos:
I. "O comprimento dos braços abertos de um homem é igual à sua altura"

II. "A maior largura dos ombros contém em si própria a quarta parte do homem"

III. "Desde o cotovelo até o ângulo da axila é um oitavo da altura do homem"

IV. "A mão inteira será um décimo da altura do homem"

V. "O pé é um sétimo do homem"

-> É possível que alguns dos seus valores tenham se diferenciado em algumas casas decimais. Por que você acha que isso ocorreu?___________________________________
____

APÊNDICE V

ATIVIDADE DE RECONHECIMENTO DO SOFTWARE “GEOGEBRA”

Tema da atividade: Atividades Introdutórias com GeoGebra

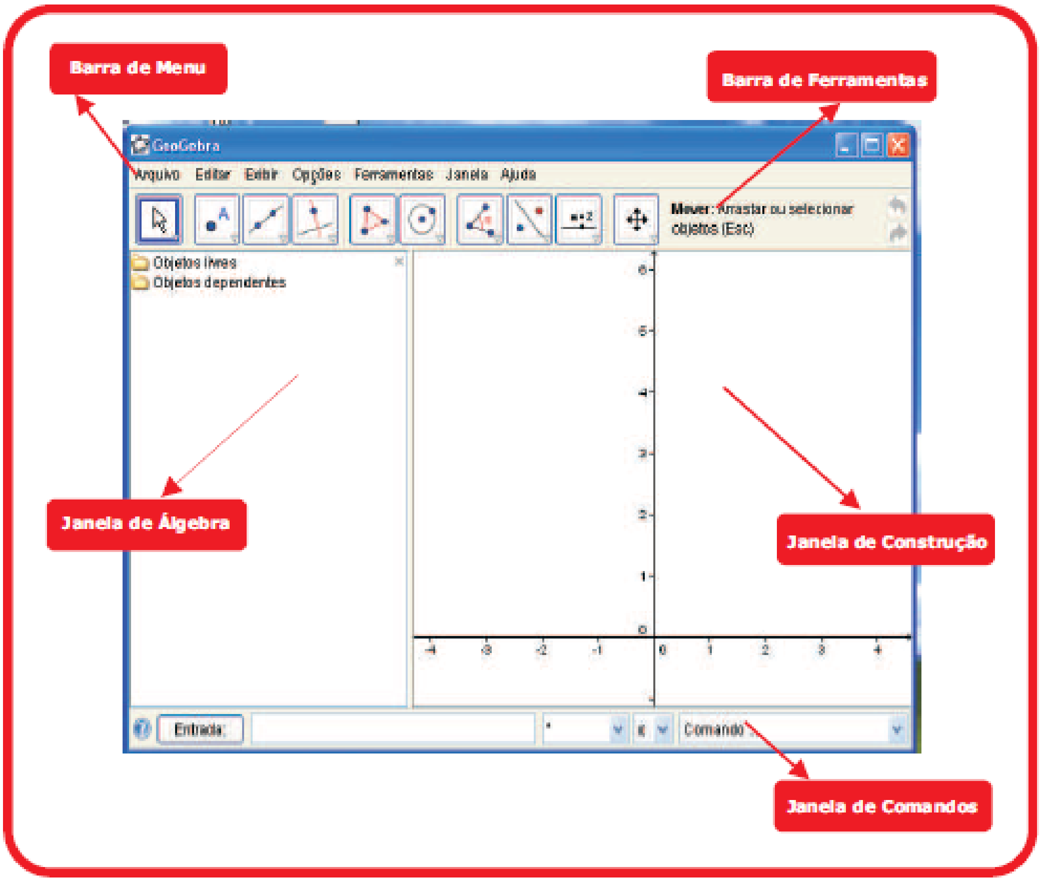
Objetivo: Dar suporte para fazer construções e manipular o software

Aluno(a):______________________________ Turma:______ Data: ____/____/____

1. INTRODUÇÃO[29]- SOBRE O SOFTWARE

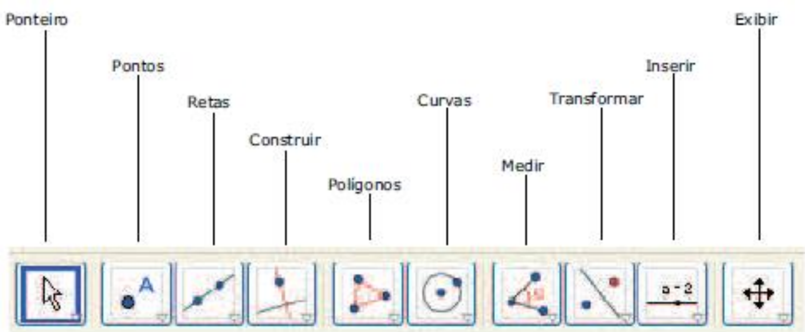
A tela do GeoGebra

A figura abaixo representa a tela do GeoGebra.



A Barra de Ferramentas do Geogebra

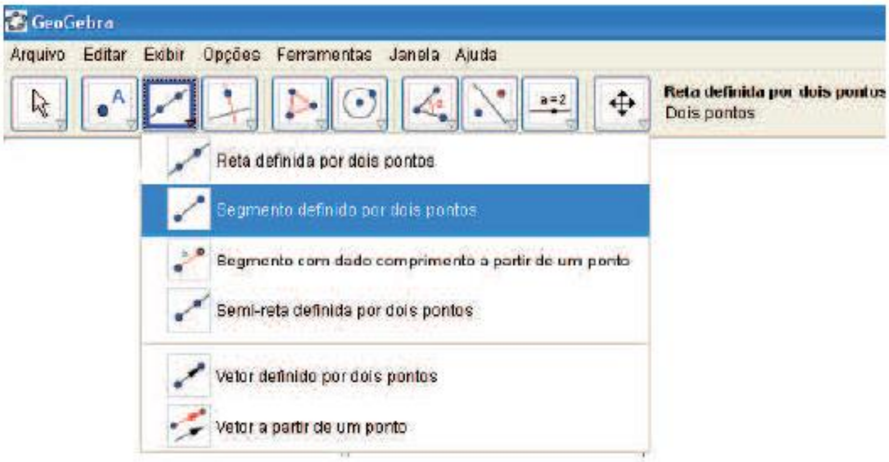
A barra de ferramentas do Geogebra está dividida em 10 janelas da seguinte maneira:



Esta Introdução foi retirada na íntegra das p. 17 e 18 do livro: BENTO, H. A.; LAUDARES, J. B. Possibilidades de construção de figuras geométricas planas com o software: GEOGEBRA. Volume único - Brasília: Edição do autor, 2010. 160 p.

Cada janela contém várias ferramentas. Para selecionar uma função da barra de ferramentas do GeoGebra, devemos direcionar o cursor sobre um "triângulo pequeno" que fica no lado direito de cada janela, até que ele fique "vermelho", logo em seguida dê um clique para abrir selecionar a ferramenta dentro da janela.

Para selecionar a opção **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS (Janela 3)**. Nesse caso, você deverá direcionar o cursor sobre a terceira janela (da esquerda para direita), até o triângulo ficar vermelho, clique para que a janela abra mostrando as funções e selecione a função desejada.



2. CONSTRUÇÕES BÁSICAS E FERRAMENTAS

Primeira Construção

➔ Faremos essa construção, descrevendo as ferramentas que devem ser utilizadas. Seus nomes estão entre aspas.

a. Com "segmento", crie um segmento de reta AB.
b. Meça o segmento AB de duas formas. Na "caixa de entrada", digite distância ["PONTO", "OBJETO"] e no lugar de ponto digite A, e no de objeto digite B, dê enter. Meça também através da ferramenta "Distância, comprimento ou perímetro", selecione esta ferramenta e clique em A e B.
c. Com a ferramenta "ponto médio", obtenha o ponto médio de AB.
d. Renomeie o ponto médio, clicando com o botão direito sobre ele, vá em renomear e o renomeie de M.
e. Com "segmento", crie o segmento AM.
f. Meça-o como fizemos com AB no item b.
g. Com "segmento", crie o segmento MB.
h. Meça-o como fizemos com AB no item b.
i. Com "mover", movimente A ou B e observe as medidas dos segmentos AM e MB.
j. Clique com botão direito sobre M, vá em apagar, e elimine o ponto M.
k. Com "segmento", crie um segmento CD concorrente ao segmento AB.
l. Com "interseção de dois objetos", marque o ponto onde CD corta AB.
m. O renomeie como P, procedendo como fizemos com M no item d.

n. Com "ponto em objeto", crie um ponto Q sobre o segmento AB. Com "mover", movimente A ou B e veja se o ponto Q permanece sobre o segmento AB. Novamente com "mover", movimente o ponto Q e observe o que acontece.

Faremos as próximas construções, sem descrever todas as ferramentas a serem utilizadas.

Segunda Construção

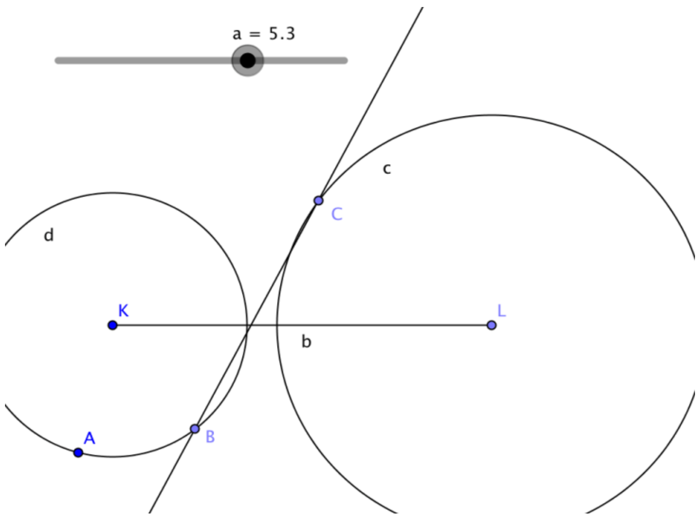
a. Construir quatro pontos: A, B, C e D.
b. Construir o quadrilátero ABCD usando a ferramenta "Polígono".
c. Deslocar o ponto A e observar as modificações da figura. Idem para B, C, e D.
d. Obter o perímetro do quadrilátero ABCD. Na caixa de entrada, digite perímetro[polígono](o nome do polígono encontra-se na janela de álgebra e normalmente recebe o nome de pol1).
e. Marcar o ângulo ABC e os demais.
f. Deslocar os pontos e observar: Existe alguma medida que se mantém?

Terceira Construção

a. Construir um triângulo qualquer ABC.
b. Obter o ponto notável, circuncentro O (encontro das mediatrizes – construa as mediatrizes dos lados usando o comando *Mediatriz*).
c. Modifique a posição dos vértices A, B e C.
d. Verifique a posição do ponto notável em relação ao triângulo ABC. Ele pode estar fora do triângulo? Sobre um dos lados? Coincidindo com algum vértice?

Quarta Construção

a. Em um arquivo novo, crie um controle deslizante *a* com intervalo de 0 a 8.
b. Posicione o controle no 8
c. Agora crie um segmento usando esse seletor como comprimento do segmento. (ferramenta segmento com comprimento fixo dê um clique na Janela Gráfica e indique *a* para o comprimento)
d. Clicar sobre o segmento com o botão direito do mouse, a seguir clicar em Propriedades para mudar sua cor e sua "espessura".
e. Renomear as extremidades do segmento AB para KL.
f. Fazer um círculo com centro em uma das extremidades do segmento passando por um ponto qualquer.
g. Fazer outro círculo de raio 3 e centro na outra extremidade do segmento.
h. Fazer um ponto sobre cada um dos círculos e uma reta passando por esses pontos.
i. Movimente o seletor e verifique o que acontece com o segmento e os círculos.



Quinta Construção

a. Exiba a planilha (menu Exibir -> Planilha).
b. Preencha como a figura a seguir:

	A	B
1	1	1
2	1.5	2
3	2	5
4	0	−3

(Para digitar números com casas decimais, devemos utilizar o PONTO, ao invés de VÍRGULA).
c. Selecione da célula A1 até B4, clique com o botão direito do mouse, vá em: criar -> lista de pontos. Observe que os pontos foram marcados na janela de visualização, e a lista descrita na janela de álgebra
d. Vamos criar uma curva que passe pelos pontos da *lista1.* Na Caixa de Entrada digite: *Polinômio[lista1]* e tecle Enter;
e. Observe que a equação da curva está na Janela de Álgebra.
f. Altere o valor da célula A3 para -1 e observe o resultado.

CONCLUINDO...

O GeoGebra é um software dinâmico de matemática que está em constante atualização, sempre recebendo novos recursos. Por isso, é importante que você busque sempre novas informações sobre o software. Existem diversos sites e fóruns online sobre o GeoGebra, com tutoriais, vídeo-aulas, dicas e outros conteúdos. Duas dicas para instalar o software no seu computador são: baixar o software do site oficial, para evitar que vírus sejam instalados; e procurar sempre a última versão disponível no site, para mantê-lo sempre atualizado.

SITES RECOMENDADOS:

- www.geogebra.org (site oficial do GeoGebra, em inglês).
- wiki.geogebra.org/pt/ (página de ajuda oficial, contém o manual do software com explicação de todos os comandos disponíveis e exemplos).
- www.ogeogebra.com.br (site totalmente em português, com vídeo-aulas e apostilas).

APÊNDICE VI

ROTEIRO DE CONSTRUÇÃO NO GEOGEBRA DE QUESTÕES REFERENTES À ATIVIDADE “RAZÃO E PROPORÇÃO”

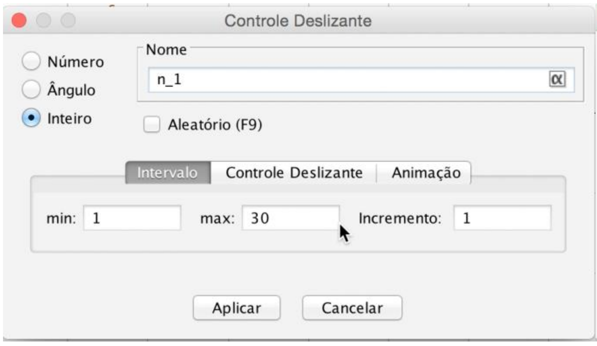
Material do Professor

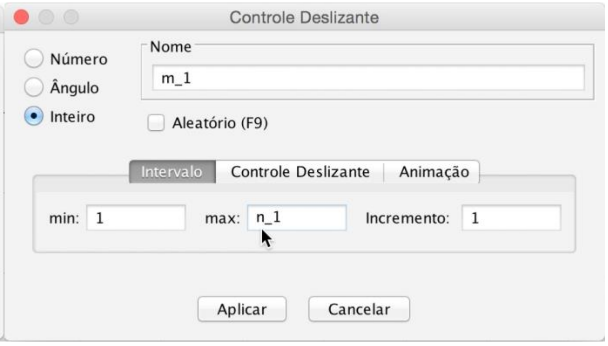
Tema: Roteiro de construção para a atividade Razão e Proporção

Objetivo: Dar suporte ao professor para fazer as construções para a atividade Razão e Proporção

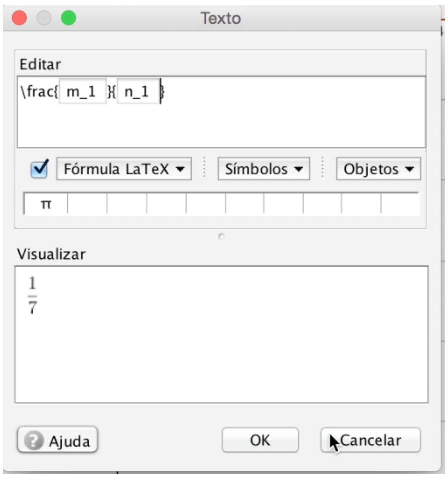
ATIVIDADE 1: Construção do arquivo fracoes-equivalentes.ggb (questão 1)

1) Exiba a malha na janela de visualização;
2) Crie um retângulo usando os pontos (0,0), (7,0), (7,1) e (0,1);
3) Crie dois controles deslizantes configurados da seguinte maneira:

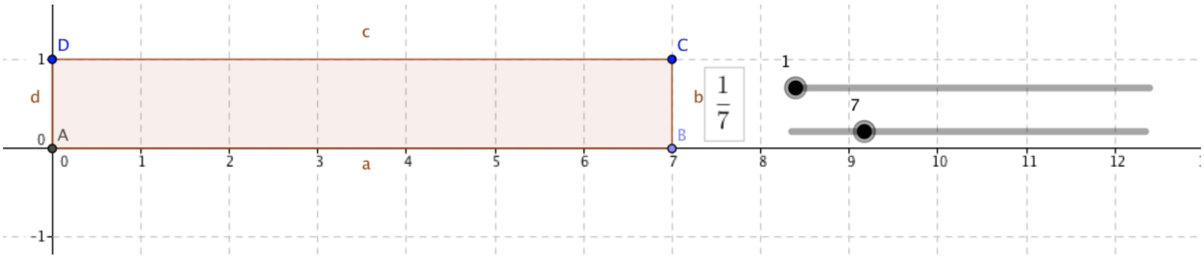




4) Caso o controle m_1 não apareça, altere o valor no controle n_1 e repare que m_1 aparecerá.
5) Clique com o botão direito sobre os controles deslizantes e desmarque a opção Posição Absoluta na Tela;
6) Agora abra as propriedades do controle deslizante. Na aba Básico, em Exibir Rótulo, configure para aparecer apenas o Valor;
7) Selecione o comando texto, dê um clique na tela, no painel que aparecer selecione a opção Fórmula LaTeX e no primeiro campo digite \frac{ dê um clique sobre m_1 na Janela de Álgebra do lado esquerdo (para referenciar essa variável no texto), deve aparecer um campo de texto com o escrito m_1 dentro. Depois desse campo de texto digite }{ e clique sobre n_1 do lado esquerdo e depois do campo de texto que surgir digite }. O resultado deve ser:



8) Clique em OK;
9) Organize os elementos na tela, para que eles fiquem como na figura a seguir:



10) Agora no campo de entrada digite o seguinte comando para criar as divisões do retângulo:

Sequência[Segmento[(k*x(B)/n_1,0), (k*x(B)/n_1, 1)], k, 1, n_1]

11) Agora crie um ponto na tela e renomeie para P_1 (esse ponto pode ser criado em qualquer lugar da tela, pois iremos alterar as coordenadas depois);

12) Dê dois cliques sobre esse ponto e no painel redefinir digite:

(m_1 x(B) / n_1, 0)

E clique em Ok;

13) Agora no campo de Entrada digite:

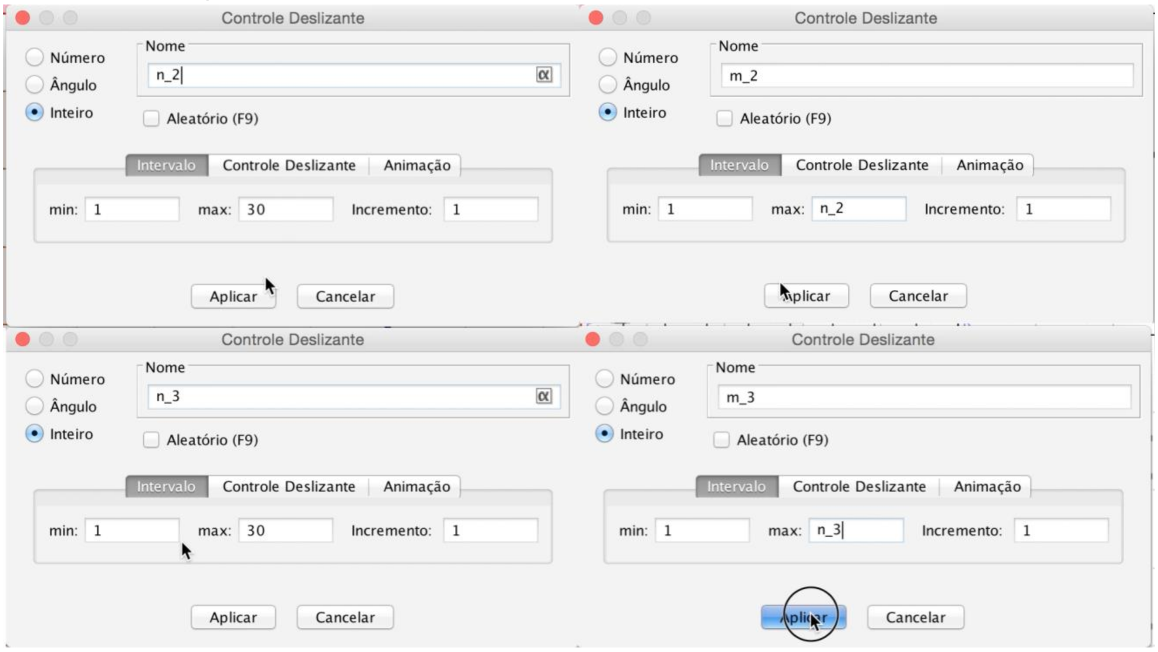
Polígono[D, A, P_1, (x(P_1), 1)]

E tecle Enter;

14) Agora crie outros dois retângulos: um com os pontos:

(0,-1), (0,-2) , (7,-2) e (7,-1) e o outro: (0,-3), (0,-4) , (7,-4) e (7,-3);

15) Crie os seguintes controles deslizantes:

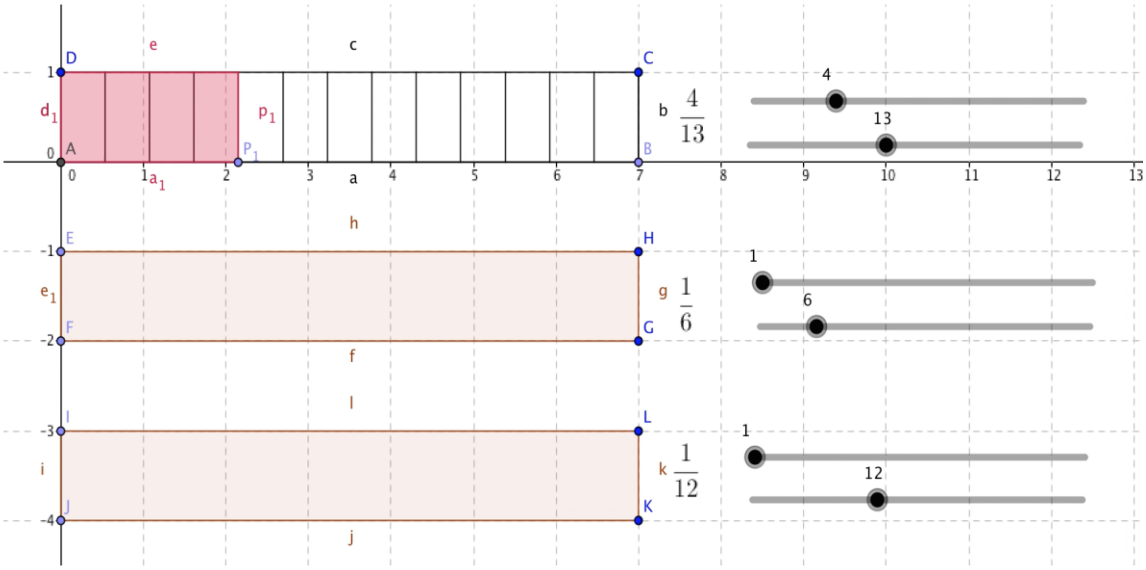


16) Caso o controle m_2 e m_3 não apareçam, altere os valores nos controle n_2 e n_3.

17) Repita os passos 4 e 5 para os novos Controles Deslizantes;

18) Crie as caixas de texto para as frações m_2/n_2 e m_3/n_3 como foi criado no item 6;

19) Organize os elementos da seguinte forma:



20) Digite no campo de Entrada o seguinte comando:

Sequência[Segmento[(k*x(G)/n_2,-2), (k*x(G)/n_2, -1)], k, 1, n_2]

21) E agora:

Sequência[Segmento[(k*x(K)/n_3,-4), (k*x(K)/n_3, -3)], k, 1, n_3]

22) Crie dois pontos na Janela de Visualização. Renomeie-os para P_2 e P_3;

23) Altere suas coordenadas para:

(m_2 x(G) / n_2, -2) e (m_3 x(K) / n_3, -4)

respectivamente;

24) Agora no campo de Entrada digite:

Polígono[E, F, P_2, (x(P_2), -1)]

Tecle Enter e digite

Polígono[I, J, P_3, (x(P_3), -3)]

Tecle Enter novamente;

25) Agora vamos formatar o estilo desses objetos: selecione as listas na Janela de Álgebra e altere a cor para preto; selecione os polígonos: pol1, pol3 e pol4, altere a cor para preto e a transparência para zero, e os polígonos pol2, pol5 e pol6 altere a cor para vermelho e altere a transparência para 25;

26) Agora no campo de Entrada digite:

Segmento[(x(P_1), -5), (x(P_1), 2)]

E tecle Enter;

27) Altere o estilo desse segmento para tracejado e aumente a espessura dele;

28) Altere as frações para 1/3, 2/6 e 3/9;

29) Abra o painel de propriedades desse segmento criado, na aba Avançado no primeiro campo rotulado como Condição para Exibir Objeto(s) digite o seguinte:

x(P_1)==x(P_2) && x(P_1)==x(P_2)

30) Tecle Enter e feche o painel de propriedades;

31) Altere uma das frações exibidas e veja o que ocorre;

32) Agora crie um campo de texto com a seguinte mensagem:

As frações são equivalentes

E posicione-o onde preferir;

33) Abra o painel de propriedades dessa caixa de texto e repita o passo 27. Dessa forma o texto e o segmento só aparecerão quando as frações forem equivalentes;

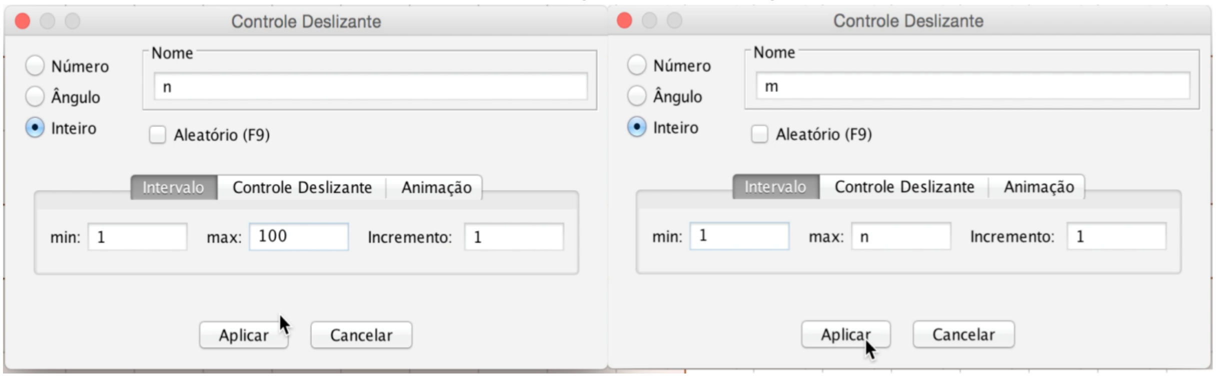
34) Agora oculte os eixos e a malha da Janela de Visualização;

35) Selecione todos os pontos usando a Janela de Álgebra, clique com o botão direito e clique em Exibir Objeto, para ocultar todos os pontos;

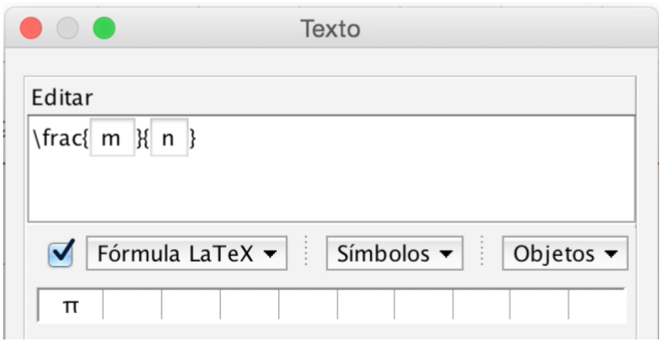
36) Selecione todos os segmentos usando a Janela de Álgebra, clique com o botão direito e clique em Exibir Rótulo para ocultar os rótulos;
37) Salve este arquivo com o nome fracoes-equivalentes.ggb.

ATIVIDADE 2: Construção do arquivo fracao-irredutivel.ggb (questão 2)

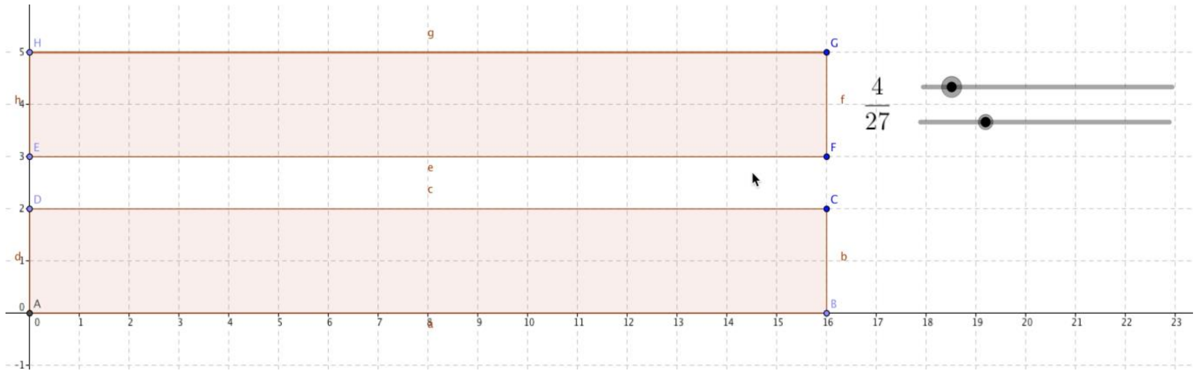
1) Exiba a malha na janela de visualização;
2) Crie dois retângulos: o primeiro usando os pontos (0,0), (16,0), (16,2) e (0,2) e o outro (0,3), (16,3), (16, 5) e (0,5)
3) Crie dois controles deslizantes configurados da seguinte maneira:



4) Caso o controle m não apareça, altere o valor no controle n e repare que m aparecerá.
5) Clique com o botão direito sobre os controles deslizantes e desmarque as opções Posição Absoluta na Tela, Fixar Objeto e Exibir Rótulo;
6) Selecione o comando texto, dê um clique na tela, no painel que aparecer selecione a opção Fórmula LaTeX e no primeiro campo digite \frac{ dê um clique sobre m na Janela de Álgebra do lado esquerdo (para referenciar essa variável no texto), deve aparecer um campo de texto com o escrito m dentro. Depois desse campo de texto digite }{ e clique sobre n do lado esquerdo e depois do campo de texto que surgir digite }. O resultado deve ser:



7) Clique em OK;
8) Organize os elementos na tela, para que eles fiquem como na figura a seguir:



9) Agora no campo de entrada digite o seguinte comando para criar as divisões do retângulo:

Sequência[Segmento[(k*x(F)/n, 3), (k*x(F)/n, 5)], k, 1, n]

10) Agora crie o ponto I na tela (esse ponto pode ser criado em qualquer lugar da tela, pois iremos alterar as coordenadas depois);

11) Dê dois cliques sobre esse ponto e no painel Redefinir que surge digite:

(m x(F) / n, 3)

E clique em Ok;

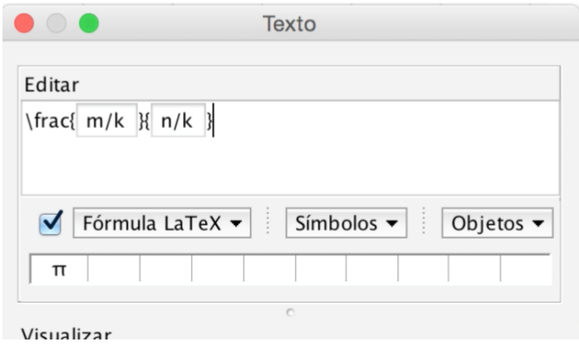
12) Agora no campo de Entrada digite:

Polígono[H, E, I, (x(I), 5)]

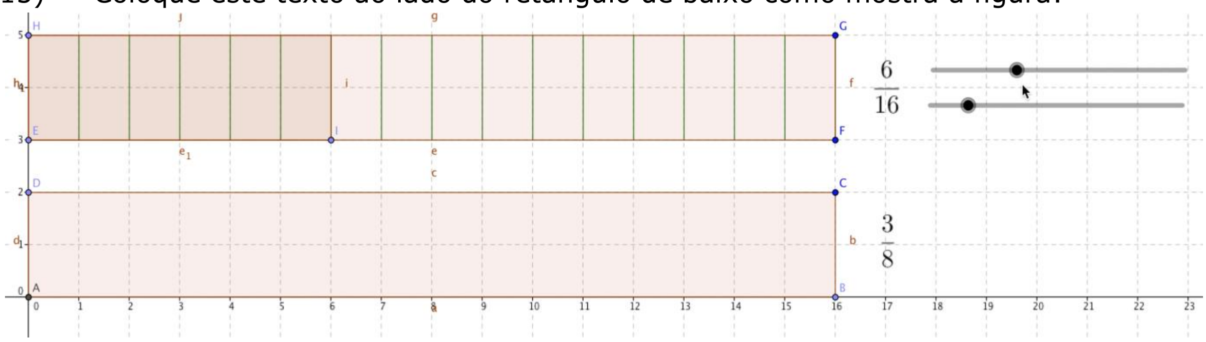
E tecle Enter;

13) No campo de Entrada digite k =MDC[m, n] e tecle Enter;

14) Clique no comando texto e clique na tela. Na janela Texto habilite a opção Fórmula LaTeX e no campo Editar digite: \frac{ depois clique em Objetos e área vazia, nesse campo que surgir, digite m/k, fora desse campo digite }{ e insira novamente outra área vazia. Dentro desse novo campo digite n/k e após este campo digite }. O resultado no campo Editar deve ser o seguinte:



15) Coloque este texto ao lado do retângulo de baixo como mostra a figura:



16) Digite no campo de Entrada o seguinte comando:

Sequência[Segmento[(p x(B) / (n / k), 0), (p x(B) / (n / k), 2)], p, 1, n / k]

E tecle Enter;

17) Ainda no campo de Entrada digite:

Polígono[D, A, (x(I),0), (x(I), 2)]

Tecle Enter novamente;

18) Agora vamos formatar o estilo desses objetos: selecione as listas na Janela de Álgebra e altere a cor para preto; selecione os polígonos: pol1 e pol2, altere a cor para preto e a transparência para zero, e os polígonos pol3 e pol4 altere a cor para vermelho e altere a transparência para 25;

19) Agora oculte os eixos e a malha da Janela de Visualização;

20) Selecione todos os pontos usando a Janela de Álgebra, clique com o botão direito e clique em Exibir Objeto, para ocultar todos os pontos;

21) Selecione todos os segmentos usando a Janela de Álgebra, clique com o botão direito e clique em Exibir Rótulo para ocultar os rótulos;

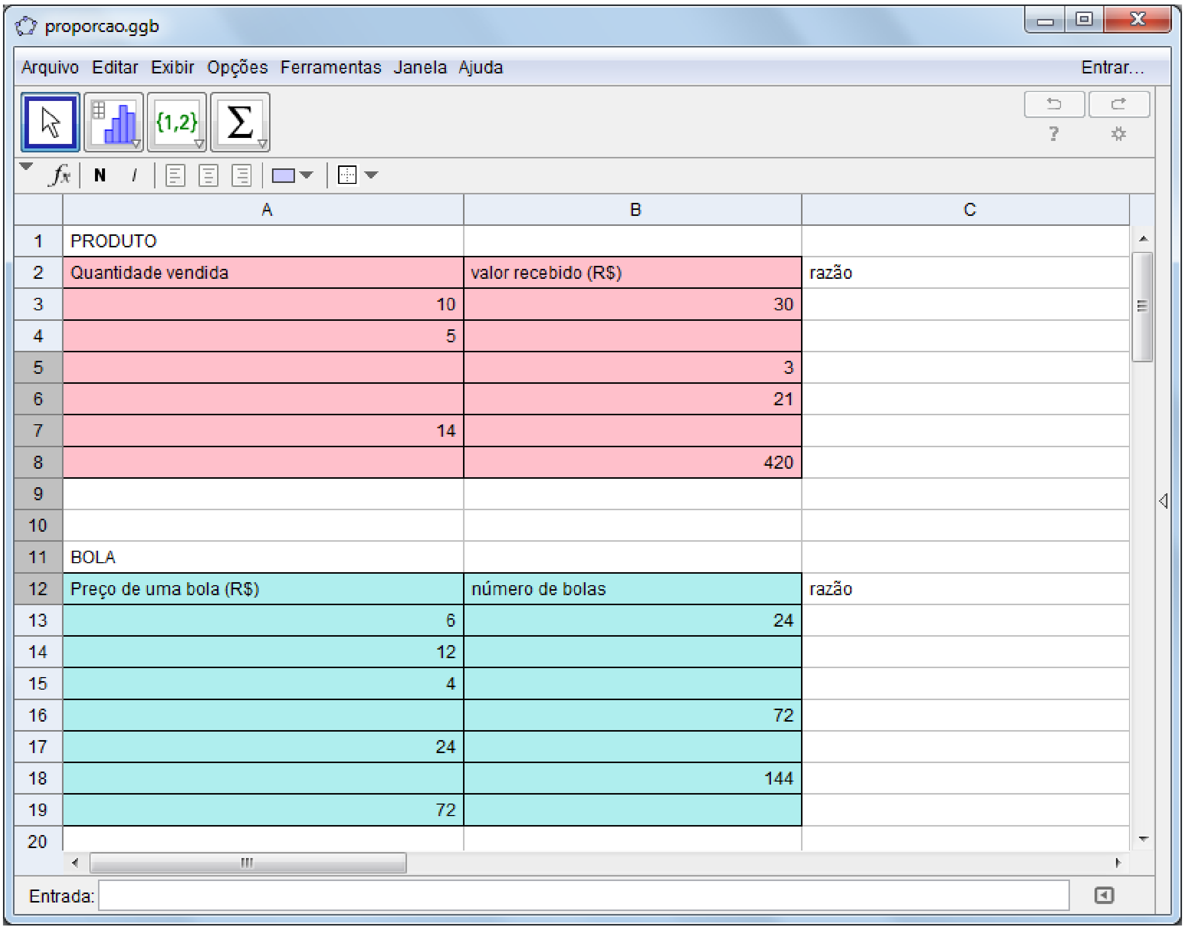
22) Feche a Janela de Álgebra;

23) Salve este arquivo com o nome fracao-irredutivel.ggb.

ATIVIDADE 3: Construção do arquivo proporcao.ggb (questão 4)

1) Abra um novo arquivo no GeoGebra e exiba somente a planilha;

2) Formate a planilha conforme a que segue:



	A	B	C
1	PRODUTO		
2	Quantidade vendida	valor recebido (R$)	razão
3	10	30	
4	5		
5		3	
6		21	
7	14		
8		420	
9			
10			
11	BOLA		
12	Preço de uma bola (R$)	número de bolas	razão
13	6	24	
14	12		
15	4		
16		72	
17	24		
18		144	
19	72		
20			

3) Salve este arquivo com o nome mapa.ggb.

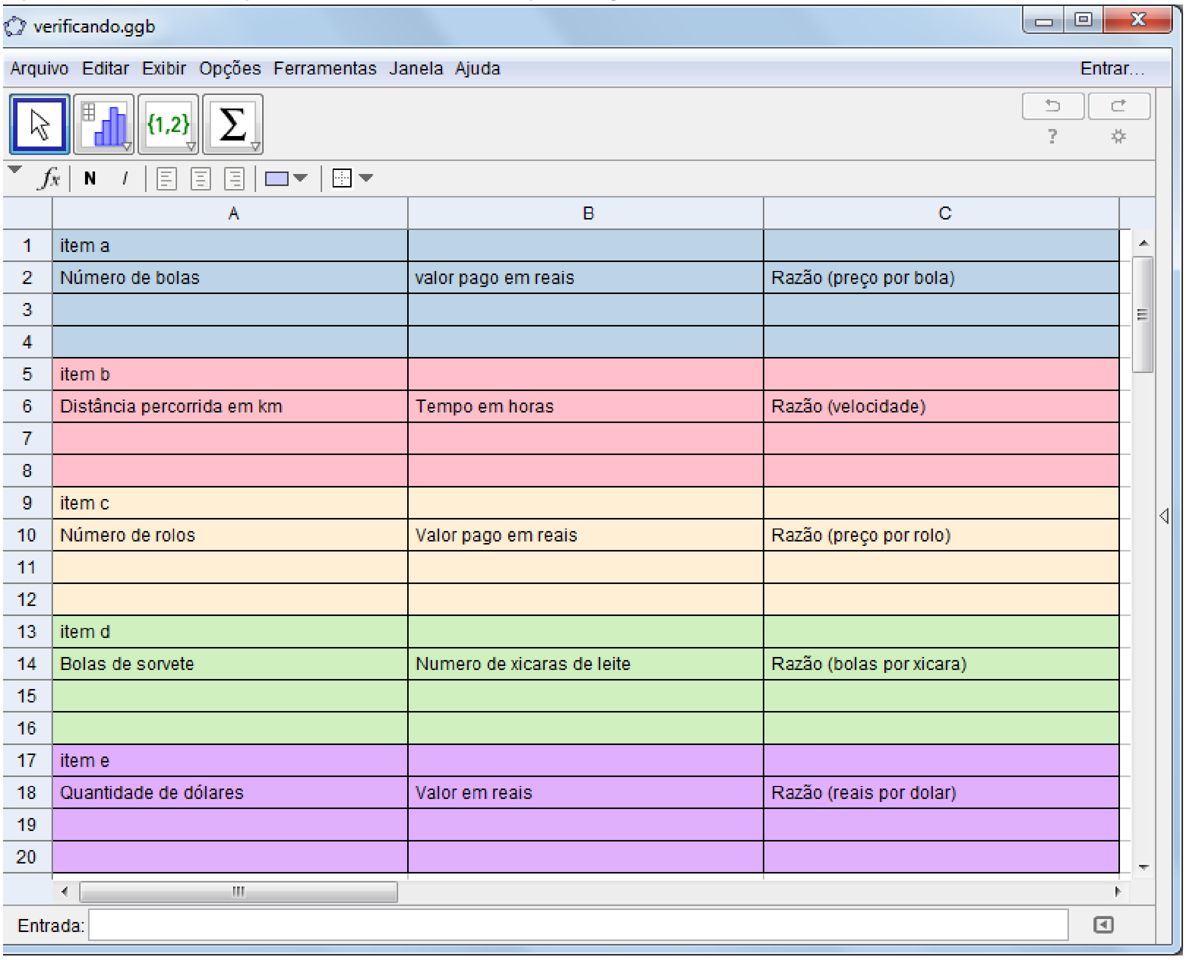
ATIVIDADE 4: Construção do arquivo mapa.ggb (questão 6)

1) Selecione o comando Inserir Imagem (esta ferramenta encontra-se no mesmo grupo da ferramenta Texto);

2) Dê um clique na Janela de Visualização e na janela que surgir navegue pelas pastas de seu computador para selecionar a imagem mapa.png e clique em Abrir;
3) Arraste os pontos A e B, localizados nos cantos inferiores da imagem para que eles correspondam aos pontos (0,0) e (6,0) (esse ajuste é necessário para que a distância encontrada pela escala fique o mais próximo da realidade);
4) Selecione o comando texto, dê um clique na tela, no campo Editar do painel Texto, digite: Escala 1:30 000 000 e clique em Ok;
5) Posicione este texto na base do mapa;
6) Agora com o comando Ponto selecionado, crie três pontos sobre as cidades de Rio de Janeiro, Brasília e Florianópolis, e renomeie estes pontos para A, B e C, respectivamente;
7) Altere o Estilo e Cor destes pontos na tela de propriedades do objeto, para deixá-los mais visíveis sobre o mapa;
8) Oculte os dois pontos na base da imagem;
9) Oculte os eixos x e y;
10) Em propriedades, selecione todos os pontos, e em básico, marque a opção fixar objeto;
11) Salve este arquivo com o nome mapa.ggb.

ATIVIDADE 5: Construção do arquivo verificando.ggb (questão 7)

1) Abra um novo arquivo no GeoGebra e exiba somente a planilha;
2) Formate a planilha conforme a que segue:



	A	B	C
1	item a		
2	Número de bolas	valor pago em reais	Razão (preço por bola)
3			
4			
5	item b		
6	Distância percorrida em km	Tempo em horas	Razão (velocidade)
7			
8			
9	item c		
10	Número de rolos	Valor pago em reais	Razão (preço por rolo)
11			
12			
13	item d		
14	Bolas de sorvete	Numero de xicaras de leite	Razão (bolas por xicara)
15			
16			
17	item e		
18	Quantidade de dólares	Valor em reais	Razão (reais por dolar)
19			
20			

3) Salve este arquivo com o nome verificando.ggb.

APÊNDICE VII

ROTEIRO DE CONSTRUÇÃO NO GEOGEBRA DE QUESTÕES REFERENTES À ATIVIDADE "GRANDEZAS PROPORCIONAIS"

Material do Professor

Tema: Roteiro de construção para a atividade Grandezas Diretamente Proporcionais

Objetivo: Dar suporte ao professor para construir os gráficos para atividade Aplicação de Grandezas Diretamente Proporcionais

ATIVIDADE 1: Construção do arquivo ferro.ggb (Questão 7)

1) Na caixa de entrada digite y=If[x>0, 7.5x] e tecle Enter;
2) Crie um ponto A sobre a reta criada;
3) Ajuste a visualização na janela gráfica, como preferir;
4) Para melhor contraste na visualização, altere a cor da reta;
5) Agora digite na caixa de entrada os seguintes comandos para criar os segmentos vertical e horizontal: segmento[A, (0, y(A))] e segmento[A, (x(A), 0)] ;
6) Altere o estilo destes segmentos para que fiquem pontilhados;
7) Agora selecione o comando texto (ícone  disponível na barra de menu) e dê um clique em qualquer lugar da área da janela geométrica. Na janela que foi aberta, digite "volume:" depois clique em objetos e em "área vazia", aparecerá uma caixa de texto, dentro dela, digite "x(A)". Finalizando, dê OK;
8) Do mesmo modo, selecione o comando texto, digite "massa:" depois clique em objetos e em "área vazia", aparecerá uma caixa de texto, dentro dela, digite "y(A)". Finalizando, dê OK;
9) Exiba a planilha, digite "massa" na célula A1 e "volume" em B1;
10) Oculte a janela de Álgebra;
11) Vá em editar, propriedades. Clique no segundo ícone da janela que foi aberta ( preferências – janela de visualização). Selecione Eixo X, e digite no rótulo "Volume (cm3)";
12) Da mesma forma, rotule o Eixo Y de "Massa (g)". Feche a janela;
13) Salve este arquivo com o nome: ferro.ggb.

ATIVIDADE 2: Construção do arquivo automovel.ggb (Questão 8)

1) Na caixa de entrada digite y=If[x>0, 120/x] e tecle Enter;
2) Para melhor visualização altere a cor da curva;
3) Vá em Editar -> Propriedades. Clique no segundo ícone da janela que foi aberta ( preferencias – janela de visualização). Em Básico, altere as dimensões do Eixo X de -2 a 20, e do Eixo Y de -10 a 130;
4) Na mesma janela, selecione Eixo X, e o rotule de "Tempo (h)". Depois, selecione o Eixo Y e rotule-o de "Velocidade (Km/h)". Feche a Janela;
5) Crie um ponto A sobre a curva;
6) Agora digite na caixa de entrada os seguintes comandos para criar os segmentos vertical e horizontal: segmento[A, (0, y(A))] e segmento[A, (x(A), 0)] ;
7) Altere o estilo destes segmentos para que fiquem pontilhados;
8) Agora selecione o comando texto  e dê um clique em qualquer lugar da área da janela geométrica. Na janela que foi aberta, digite "Tempo:" depois clique em objetos e

em “área vazia”, aparecerá uma caixa de texto, dentro dela, digite “x(A)”. Finalizando, dê OK;

9) Do mesmo modo, selecione o comando texto, digite "Velocidade:" depois clique em objetos e em “área vazia”, aparecerá uma caixa de texto, dentro dela, digite “y(A)”. Finalizando, dê OK;

10) Exiba a planilha, digite “Velocidade” na célula A1 e “Tempo” em B1;

11) Preencha a planilha com os seguintes valores:

Velocidade	Tempo
120	1
	1.5
60	2
	3
	4
	5
	6
	8
	12

12) Oculte a janela de Álgebra;

13) Salve este arquivo com o nome: automovel.ggb.

APÊNDICE VIII

ROTEIRO DE CONSTRUÇÃO NO GEOGEBRA DE QUESTÕES REFERENTES À ATIVIDADE “TEOREMA DE TALES”

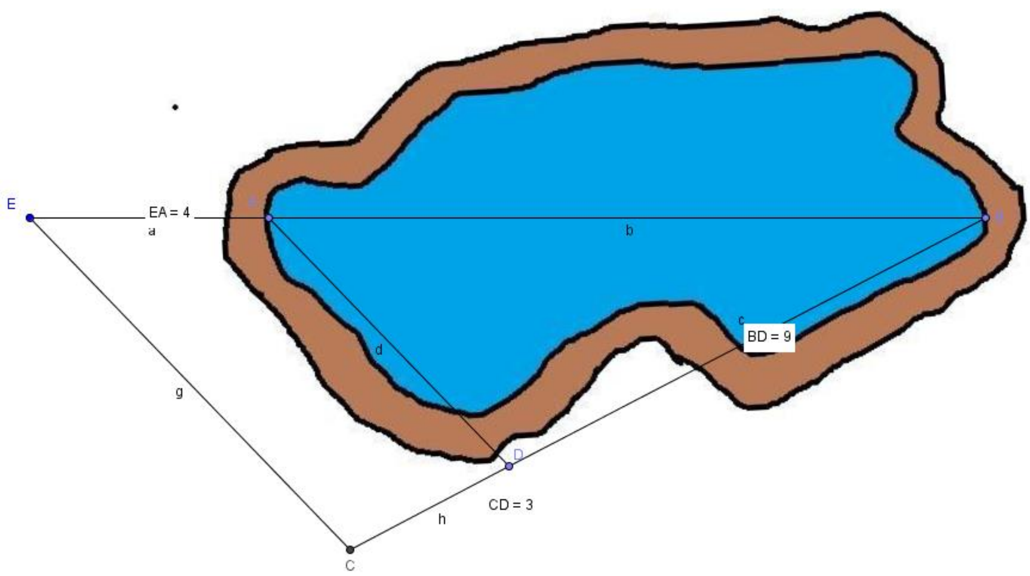
Material do Professor

Tema: Roteiro de construção para a atividade Teorema de Tales

Objetivo: Dar suporte ao professor para fazer as construções para a atividade Teorema de Tales

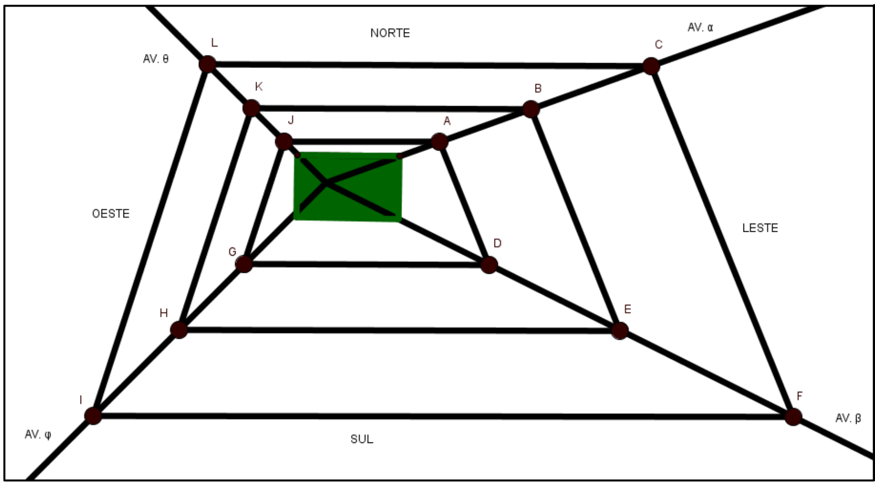
ATIVIDADE 1: Construção do arquivo lago.ggb (Questão 3)

1) Abra um arquivo no GeoGebra e oculte os eixos clicando com o botão direito do mouse e clicando no ícone eixo;
2) Usando a caixa de entrada crie o ponto E=(-4,5);
3) Selecione o comando Segmento com comprimento fixo, clique no ponto E e digite 4 para o comprimento;
4) Selecione o comando Segmento com comprimento fixo novamente, clique em A e digite 12 para o comprimento;
5) Selecione o comando Editar-> Inserir imagem de -> Arquivo e insira a imagem lago.jpg;
6) Ajuste o tamanho da imagem, posição e rotação, para que o segmento AB corresponda a maior distancia entre as margens (como podemos ver na figura no fim desse roteiro);
7) Agora com o comando Segmento com comprimento fixo, clique em B, digite 9 para o comprimento e renomeie o ponto criado para D;
8) Movimente o ponto D, de modo que este fique abaixo do lago, e o angulo ABD seja agudo;
9) Crie agora o segmento entre A e D;
10) Crie uma reta passando pelos pontos B e D;
11) Crie uma reta paralela a AD, passando por E;
12) Na intersecção destas duas retas marque o ponto C;
13) Oculte as duas retas e crie os segmentos CD e CE;
14) Use o comando distância para exibir o tamanho dos segmentos: BD, CD, e AE;
15) Ajuste as cores e formatação do segmento para melhorar a visualização;
16) Oculte a janela de álgebra;
17) Salve este arquivo como lago.ggb.

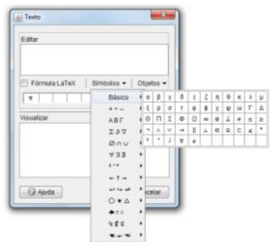


ATIVIDADE 2: Construção do arquivo praça.ggb (Questão 4)

1) Abra um arquivo no GeoGebra e oculte os eixos x e y;
2) Na caixa de entrada crie os seguintes pontos: P=(-1,1), Q=(-1,-1), R=(2,-1) e S=(2,1);
3) Com a ferramenta polígono crie o retângulo PQRS;
4) Agora com a ferramenta Ponto em objeto, crie um ponto dentro do retângulo. Renomeie o ponto de T;
5) Crie 4 semirretas com origem em T, cada uma passando por um dos pontos P, Q, R e S;
6) Crie um ponto sobre cada uma das semirretas, do lado de fora do retângulo e crie um polígono com vértices nesses pontos;
7) Vá em Editar -> propriedades:
   a. Selecione o quadrilátero do item 6: em básico, altere seu nome para ruas; em Cor, altere a cor para preto e a transparência para 0; em estilo, altere para 10 a espessura da linha;
   b. Selecione as quatro semirretas: Altere para 10 a espessura da linha;
   c. Selecione todos os pontos: altere o tamanho dos pontos para 7 (em estilo->tamanho do ponto). Feche a janela.
8) Digite no campo de Entrada: Dilate[ruas, 5/3, T] e será criado um quadrilátero.
9) Digite no campo de Entrada: Dilate[ruas, 17/6, T] e será criado um quadrilátero.
10) Oculte os pontos P, Q, R e S, e esconda os rótulos em exibição, de modo que somente os pontos tenham seus rótulos exibidos.
11) Clicando com o botão direito sobre cada ponto, vá em renomear e mude o nome dos pontos de modo que correspondam ao da figura abaixo, e crie as seguintes caixas de texto: Av α, Av β, Av θ, Av φ, NORTE, LESTE, SUL, OESTE (posicionando-as também como na figura abaixo).



Lembrete: Para inserir texto selecione a ferramenta texto e dê um clique na área em branco da janela gráfica; Para colocar as letras gregas selecione Símbolos -> Básico e escolha-as no painel que se abre:



12) Nomeie AJ de rua1, BK de rua2 e CL de rua3;
13) Salve a construção com o nome praça.ggb.

APÊNDICE IX

ROTEIRO DE CONSTRUÇÃO NO GEOGEBRA DE QUESTÕES REFERENTES À ATIVIDADE “PORCENTAGEM”

Material do Professor

Tema: Roteiro de construção para a atividade Porcentagem

Objetivo: Dar suporte ao professor para fazer as construções necessárias à atividade Porcentagem

ATIVIDADE 1: Construção do arquivo fracoes-equivalentes-base100.ggb (Questão 1)

1) Oculte os eixos na Janela Gráfica;
2) Digite o seguinte comando na janela de Entrada:

ListaH= Sequência[Sequência[Polígono[(i, j), (i + 1, j), (i + 1, j + 1), (i, j + 1)], i, 0, 9], j, 0, 9]

3) Aparecerá uma grade quadriculada 10 por 10. Selecione este objeto, altere sua cor para preto e a transparência para 5;
4) Agora criaremos listas auxiliares. Digite os seguintes comandos e tecle Enter após cada um deles:

listaD=ListaDosDivisores[100]

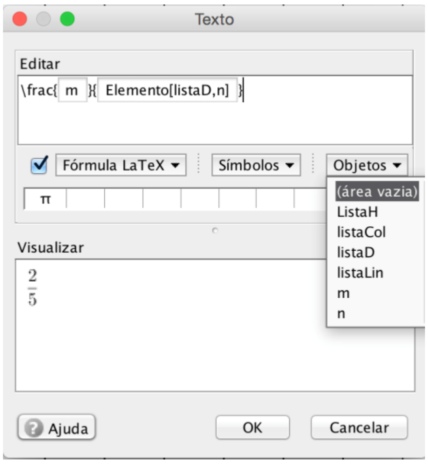
listaCol={1, 2, 2, 5, 5, 10, 5, 10, 10}

listaLin={1, 1, 2, 1, 2, 2, 5, 5, 10}

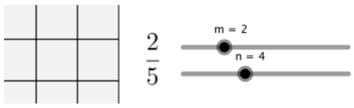
5) Crie os seguintes controles deslizantes:

6) Caso m, não apareça após clicar em Aplicar, altere o valor de n para um número maior que 1 e ele aparecerá;
7) Selecione os dois controles deslizantes e desmarque as opções: Fixar Objeto e Posição Absoluta na Tela;
8) Selecione o comando texto, dê um clique na tela. Marque a opção Fórmula LaTeX e, em Editar digite: \frac{. Clique em Objetos e escolha área vazia. Dentro do campo digite m. Em seguida, coloque }{ e insira outra área vazia, onde você deve digitar

Elemento[listaD, n]. Agora insira o símbolo }.Clique em OK. O resultado deve ser como segue:



9) Abra o painel de Propriedades, selecione o texto criado e na aba Texto altere o tamanho para grande. Posicione-o do lado da grade quadriculada e coloque os controles m e n ao lado do numerador e denominador respectivamente, como indicado:



10) Oculte os rótulos dos controles deslizantes;
11) Agora na janela de Entrada digite:

col = Elemento[listaCol, n]

lin = Elemento[listaLin, n]

12) Agora crie a lista Grade com o seguinte comando:

Grade=Sequência[Sequência[Polígono[(i*10/col,j*10/lin),((i+1)(10/col),j*10/lin),((i+1)(10/col),(j+1)(10/lin)),(i*10/col,(j+1)(10/lin))],i,0,col-1],j,0,lin-1]

13) Abra as propriedades, selecione Grade altere sua cor para vermelho e altere a Transparência para 25 na aba Cor. Agora na aba Estilo, aumente a Espessura da Linha para 6;
14) Altere o valor do denominador e observe o resultado na Grade vermelha;
15) Agora, na janela de Entrada, digite os dois comandos a seguir:

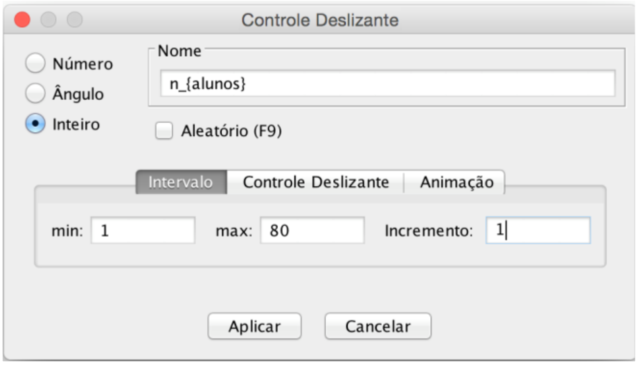
listaAuxiliar = Concatenar[Grade]

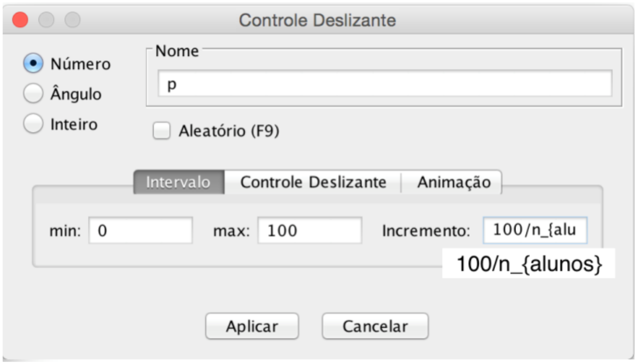
Preenchido = Sequência[Elemento[listaAuxiliar, i], i, 1, m]

16) Na Janela de Álgebra, oculte o objeto listaAuxiliar;
17) Em propriedades, selecione Preenchido e altere sua cor para Azul e altere transparência para 25;
18) Salve este arquivo como fracoes-equivalentes-base100.ggb.

ATIVIDADE 2: Construção do arquivo numero-de-alunos.ggb (Questão 2)

1) Oculte os eixos na Janela de visualização;
2) *Crie dois controles deslizantes configurados como segue:





3) *Na Janela de Entrada digite:

n = p*n_{alunos}/100

4) Clique com o botão direito sobre esses controles e desmarque as opções: Posição Absoluta na Tela e Fixar Objeto;
5) Abra as propriedades dos controles deslizantes e em Básico -> Exibir Rótulo, ajuste para a exibição apenas do valor;

Agora usaremos uma sequência de comandos de criação de listas na Janela de Entrada.

6) Para criar a primeira grade de círculos, digite:

= Sequência[Sequência[Círculo[(i, j), 0.5], i, 0, 7], j, 0, 10]

7) Agora digite o seguinte comando:

listAuxiliar=Concatenar[lista1]

8) Agora digite o comando:

listAlunos=Sequência[Elemento[listAuxiliar,i],i,1,round(n_{alunos})]

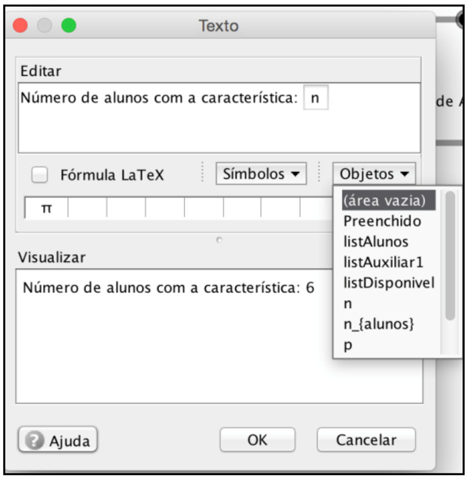
9) Por fim, digite o seguinte comando:

listPreenchido=Sequência[Elemento[listAuxiliar,i],i,1,round(n)]

10) Na janela de Álgebra, oculte a lista1 e a listAuxiliar. Elas vão servir apenas como objetos de apoio para a criação das próximas;
11) Em editar -> propriedades:

- Selecione a listAlunos, e ajuste a cor desse objeto para preto e transparência 25.
- Selecione a listPreenchido, e altere a cor para azul, com transparência 100;
- Feche a Janela de Álgebra e ajuste os elementos na tela nesse momento. Altere o zoom para que todos os círculos sejam exibidos e os controles deslizantes também;
- Altere o valor n_{alunos} e observe o aparecimento de mais círculos;

12) Crie uma caixa de texto: Total de Alunos na sala: e ajuste-o sobre o controle deslizante n_{alunos}. E outra caixa de texto com o rótulo: Porcentagem de alunos com a característica dada (%): e ajuste-o sobre o controle p;
13) Agora vamos criar uma caixa de texto para exibir o valor n. Selecione o comando texto, de um clique em uma área em branco da Janela de Visualização e, em Editar, digite: Número de alunos com a característica: Clique agora em Objetos e escolha (área vazia) (Como mostrado na imagem abaixo). Dentro do campo criado digite: n. O resultado deve ser o exibido na imagem a seguir:

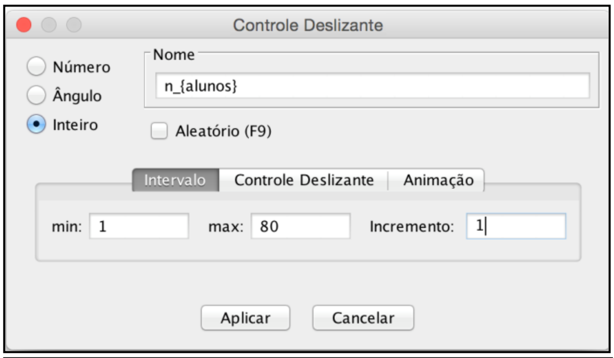


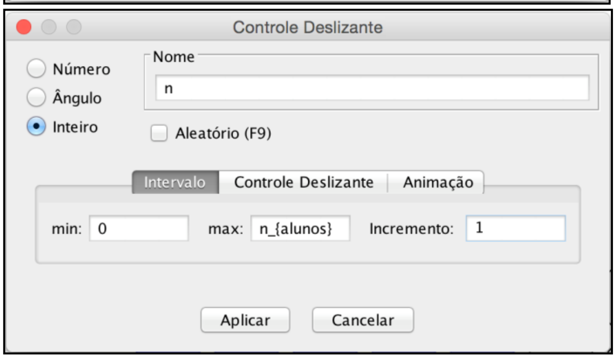
14) Clique em OK;
15) Clique com o botão direito sobre os controles e marque a opção Fixar Objeto
16) *Salve o arquivo como numero-de-alunos.ggb

ATIVIDADE 3: Construção do arquivo porcentagem-de-alunos.ggb (Questão 3)

Para criação deste arquivo, siga os passos da atividade 2, trocando os itens que estão com * pelos passos indicados abaixo:

1) Crie dois controles deslizantes configurados como segue:



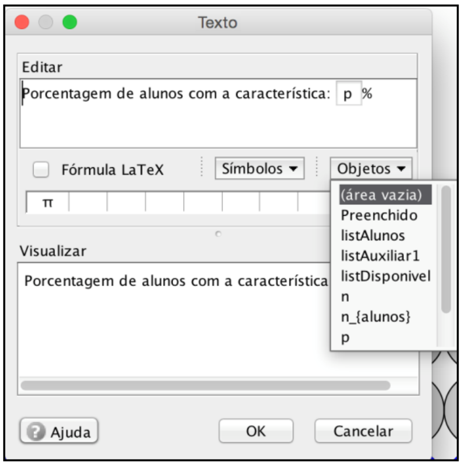


2) Na Janela de Entrada digite:

p = n*100/n_{alunos}

3) Crie uma caixa de texto: Total de Alunos na sala: e ajuste-o sobre o controle deslizante n_{alunos}. E outra caixa de texto com o rótulo: Alunos com a característica dada: e ajuste-o sobre o controle n;

4) Agora vamos criar uma caixa de texto para exibir o valor p. Selecione o comando texto, de um clique em uma área em branco da Janela de Visualização e, em Editar, digite: Porcentagem de alunos com a característica: Clique agora em Objetos e escolha (área vazia), como mostrado na imagem abaixo. Dentro do campo criado digite: p. Mude o cursor para fora deste campo e digite %. O resultado deve ser o exibido na imagem a seguir:



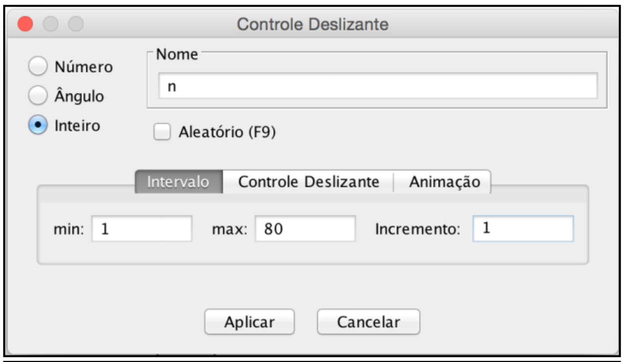
5) Clique em OK;

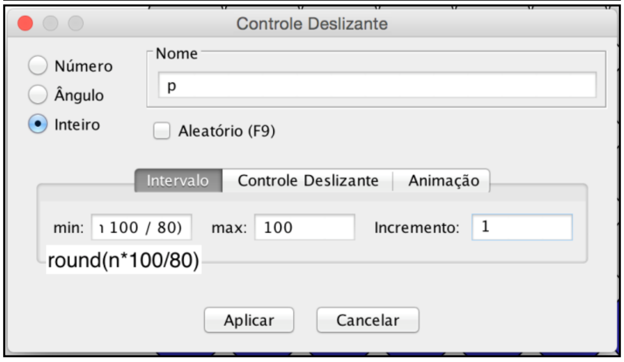
6) *Salve o arquivo como porcentagem-de-alunos.ggb

ATIVIDADE 4: Construção do arquivo total-alunos.ggb (Questão 4)

Para criação deste arquivo, siga os passos da atividade 2, trocando os itens que estão com * pelos passos indicados abaixo:

1) Crie dois controles deslizantes configurados como segue:





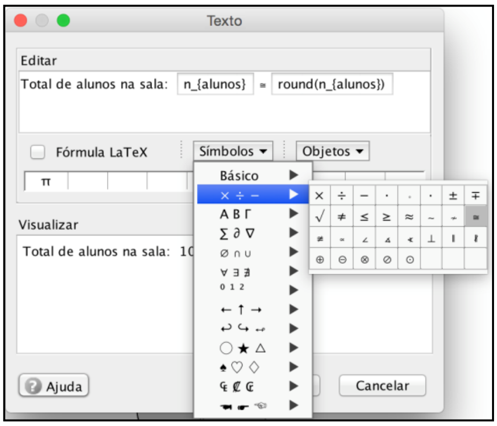
2) (Observação: O mínimo do controle p foi ajustado de forma que o total de alunos não ultrapasse 80, que é a quantidade de círculos que o arquivo pode exibir);

3) Na Janela de Entrada digite:

n_{alunos} = n*100/p

4) Crie uma caixa de texto com o rótulo: Porcentagem de alunos com a característica dada (%): e ajuste-o sobre o controle p. E crie outra caixa de texto com o rótulo: Alunos com a característica dada: e ajuste-o sobre o controle n;

5) Agora vamos criar uma caixa de texto para exibir o valor n_{alunos}. Selecione o comando texto, de um clique em uma área em branco da Janela de Visualização e, em Editar, digite: Total de alunos na sala:. Clique agora em Objetos e escolha (área vazia) (Como mostrado na imagem abaixo). Dentro do campo criado digite: n_{alunos}. Mude o cursor para fora deste campo e insira o símbolo de aproximadamente utilizando o botão Símbolo e selecionando-o no sub-menu indicado na figura. Insira outra área vazia e dentro desse novo campo digite round(n_{alunos}) O resultado deve ser o exibido como na imagem a seguir:



6) Clique em OK;

7) *Salve o arquivo como

ATIVIDADE 5: Construção do arquivo descontos.ggb (Questão 6)

1) Exiba os eixos e a malha na Janela de Visualização;

2) Crie três retângulos, usando a ferramenta polígono, de vértices:

(0,2), (10,2), (10,0) e (0,0)

(0,5), (10,5), (10,3) e (0,3)

(0,8), (10,8), (10,6) e (0,6);

3) Altere a cor destes retângulos para vermelho e a transparência para 50;

4) Na Janela de Entrada crie três variáveis número, para os preços, digitando os comandos a seguir e pressionando Enter após cada linha:

P_1=100

P_2=100

P_3=100

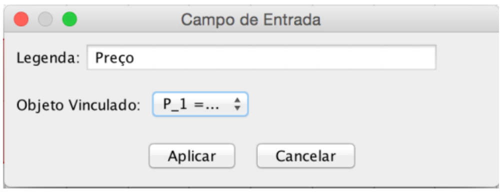
5) Do mesmo modo crie as três variáveis para o valor final:

V_1=10

V_2=10

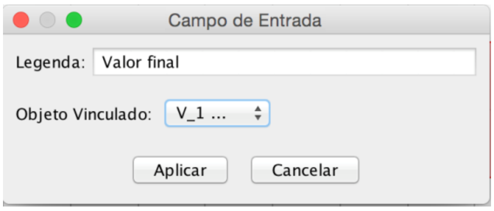
V_3=10

6) Agora selecione o comando Campo de Entrada na barra de controles (no mesmo grupo que se encontra Controle Deslizante). Dê um clique na área em branco ao lado do retângulo no topo e configure a Janela que aparece como segue:

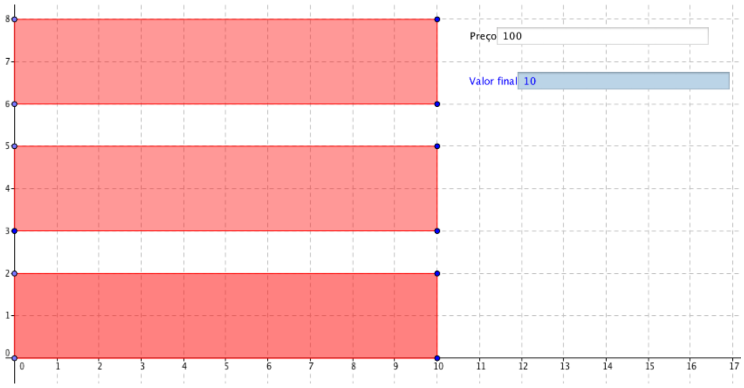


7) Clique em Aplicar;

8) Repita o processo para criar outro Campo de Entrada, mas agora preencha como segue:



9) Altere a cor deste Campo para Azul e posicione-o ao lado do retângulo no topo (caso queira movimentar alguma das caixas criadas em campo de entrada, e este esteja fixo, clique sobre ele com botão direito e desmarque a opção fixar objeto).



10) Repita esses passos, criando Campos de Entrada para P_2 e V_2 ao lado do segundo retângulo e P_3 e V_3 ao lado do terceiro retângulo;

11) Agora vamos criar alguns pontos usando a Caixa de Entrada. Digite os seguintes comandos e tecle Enter para confirmar a criação de cada ponto:

M_1=(V_1*10/P_1,6)

M_2=(V_2*10/P_1,3)

M_3=(V_3*10/P_1,0)

N_1=(x(M_1),8)

N_2=(x(M_2),5)

N_3=(x(M_3),2)

12) Agora utilize a ferramenta polígono para criar os retângulos usando os pontos a seguir:

(0,8), (0,6), M_1, N_1

(0,5), (0,3), M_2, N_2

(0,2), (0,0), M_3, N_3

13) Altere a cor destes novos retângulos para Azul e a configure a transparência para 50;

14) Oculte todos os pontos e os rótulos de segmentos se estiverem aparecendo;

15) Oculte também a malha e os eixos;

16) Insira uma caixa de texto com a seguinte mensagem:

Observação: Repare que embora sejam relativos à valores diferentes, os retângulos possuem o mesmo tamanho.
Isso ocorre pois um retângulo inteiro está representando 100%, ou seja, o valor total.
Legenda:
Azul: Valor Pago
Rosa: Desconto Concedido

17) Posicione a caixa de texto em baixo do último retângulo, como abaixo:

18) Salve este arquivo como descontos.ggb.

ATIVIDADE 6: Construção do arquivo duas-operacoes-consecutivas.ggb (Questão 7)

1) Exiba os eixos e a malha na Janela de Visualização;
2) Crie um retângulo, usando a ferramenta polígono, de vértices:

(0,2), (8,2), (8,0) e (0,0)

3) Em propriedades, altere a cor deste retângulo para preto e a transparência para 0;
4) Na Caixa de Entrada crie as seguintes variáveis, digitando os comandos a seguir e pressionando Enter após cada linha:

operacao1=10

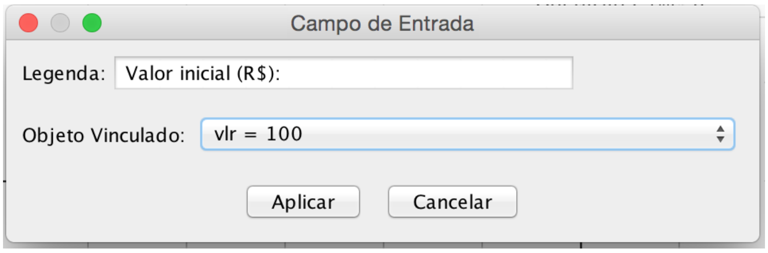
operacao2=10

vlr=100

vlrOperacao1 = vlr*(1 + operacao1 / 100)

vlrOperacao2 = vlrOperacao1*(1 + operacao2 / 100)

5) Agora selecione o comando Campo de Entrada na barra de controles (no mesmo grupo que se encontra Controle Deslizante):
6) Dê um clique na área em branco acima do retângulo e configure a Janela que aparece como segue:



7) Clique em Aplicar;

8) Repita o processo para criar outros dois Campos de Entrada, mas agora preencha conforme indicado:

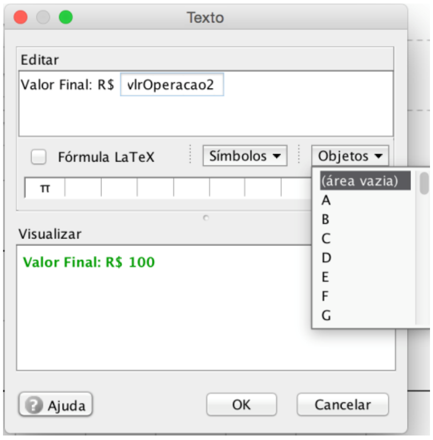
Legenda: Operação 1 (%): e Objeto Vinculado: operacao1=0

Legenda: Operação 2 (%): e Objeto Vinculado: operacao2=0

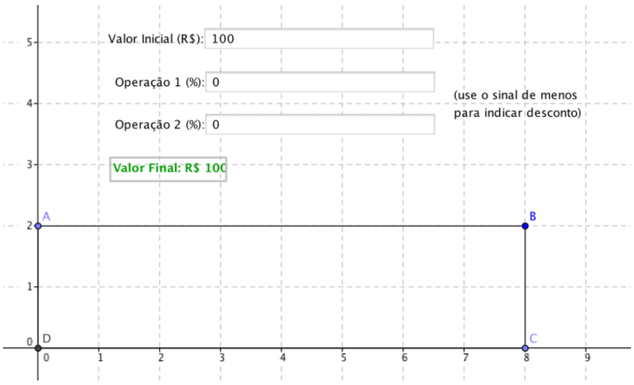
9) Agora insira uma caixa de texto com o seguinte escrito:

Utilize o sinal de menos para indicar desconto

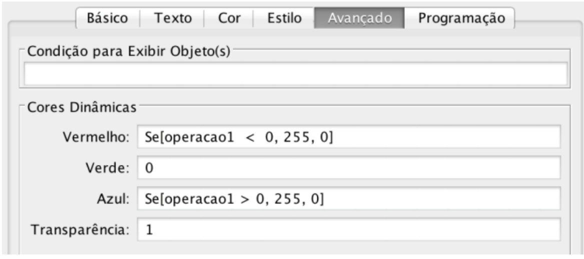
10) Vamos criar agora uma caixa de texto para exibir o valor final do produto em questão. Selecione o comando Texto, dê um clique na área vazia da tela e em Editar digite Valor final: R$. Clique agora em Objetos e escolha (área vazia). Dentro do campo criado digite vlrOperacao2 (conforme a figura abaixo):



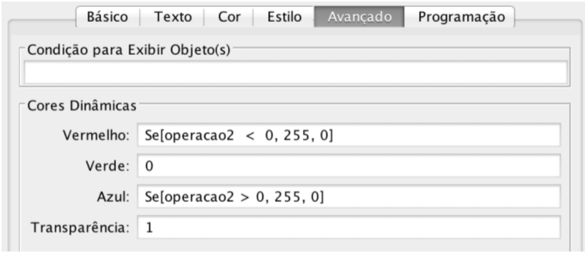
11) Altere a cor desse último texto criado para Verde e posicione esses elementos como segue (caso queira movimentar alguma das caixas criadas, e esta esteja fixa, clique sobre ele com botão direito e desmarque a opção fixar objeto, posicione-a como preferir, e fixe-a novamente clicando com o botão direito e ativando a opção fixar objeto):



12) Selecione o campo Operação 1, abra as propriedades e configure a aba Avançado como segue:



13) Agora selecione Operação 2 e configure como segue:



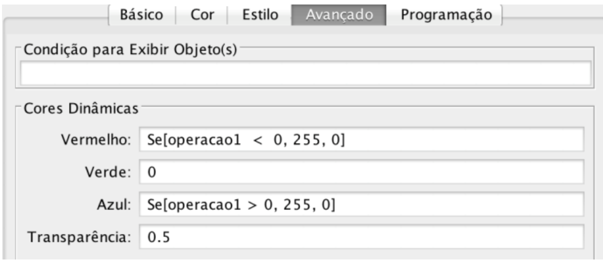
14) Na Janela de Entrada digite os seguintes comandos teclando Enter após cada um deles:

E = ((1 + operacao1 / 100)*8, 0)

F= (x(E),2)

15) Crie o retângulo BCEF;

16) Selecione esse polígono, abra as propriedades, clique na aba Avançado e preencha como segue:



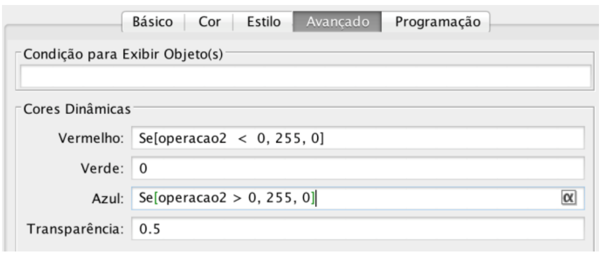
17) Na Janela de Entrada digite os seguintes comandos teclando Enter após cada um deles:

G = ((1 + operacao2 / 100)*x(E), 0)

H = (x(G), 2)

18) Crie o retângulo FEGH

19) Selecione esse polígono, abra as propriedades, clique na aba Avançado e preencha como segue:



20) Por fim crie o retângulo ADGH, altere sua cor para verde e transparência para 25;

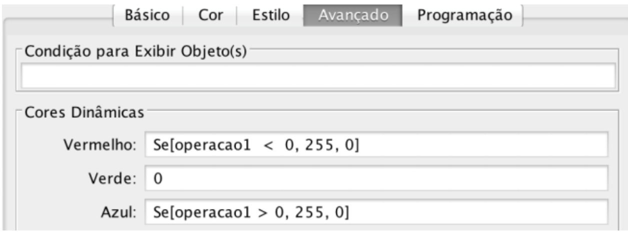
21) Oculte todos os pontos até aqui criados;

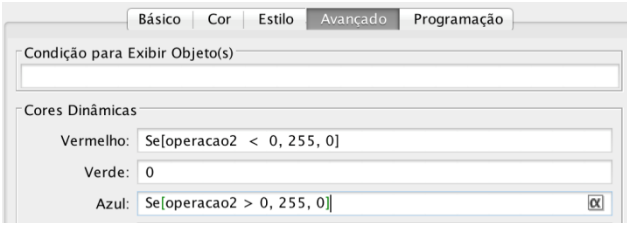
22) Agora crie os seguintes pontos na janela de entrada:

I=(0,-0.5) J=(8,-0.5) K=(8,-0.75) L=(x(E),-0.75)

M=(x(E),-1) N=(x(G),-1) P=(0,-1.25) Q=(x(G),-1.25)

23) Selecione todos esses pontos, abra o painel propriedades, em Estilo altere o Estilo do Ponto para o símbolo +;
24) Crie os segmentos: IJ, KL, MN, PQ;
25) Altere a cor do segmento PQ e dos pontos P e Q para verde
26) Para os segmentos KL e MN (e respectivos pontos K e L; M e N) faremos a mesma formatação de cor que usamos nos retângulos. Abra propriedades->Avançado e preencha da seguinte forma:

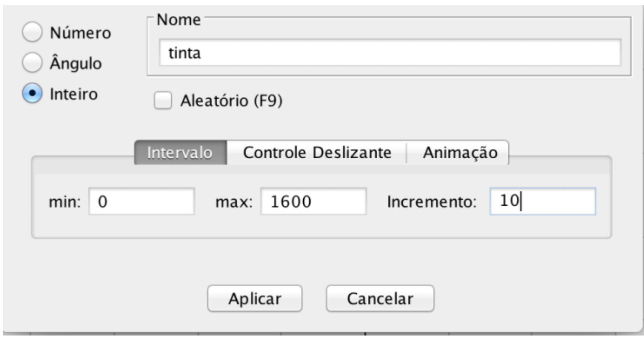
KL: 

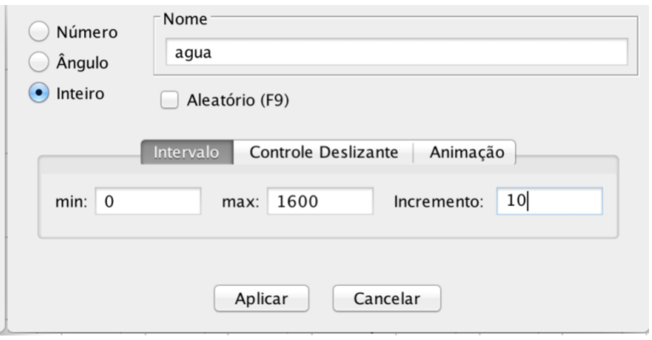
MN: 

27) Oculte os rótulos dos pontos visíveis e de todos os segmentos;
28) Oculte também a malha e os eixos;
29) Salve este arquivo como duas-operacoes-consecutivas.ggb.

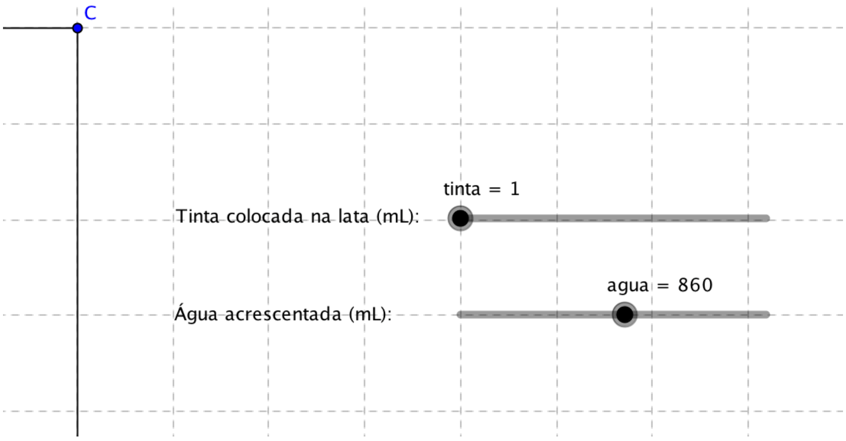
ATIVIDADE 7: Construção do arquivo mistura-agua-e-tinta.ggb (Questão 8)

1) Com a malha e os eixos exibidos na Janela de Visualização, crie um retângulo, usando a ferramenta polígono, de vértices (0,0), (6,0), (6,10) e (0,10);
2) Altere a cor deste retângulo para preto e a transparência para zero;
3) Crie dois controles deslizantes ao lado deste retângulo, com as seguintes configurações:





4) Clique com o botão direito sobre ambos os controles e desmarque as opções: Posição Absoluta na Tela e Fixar Objeto;
5) Crie duas caixas de texto como as que seguem e posicione-as como a figura abaixo:



6) Abra as Propriedades destes controles deslizantes e no painel Básico, altere a opção Rótulo para que seja exibido apenas o Valor;
7) Agora, no campo de entrada digite o seguinte para criar o ponto E:

E = (0, (agua+tinta)*9/3200)

8) E o ponto F:

F = (6, y(E))

9) Certifique-se que os pontos A, B, E e F estejam rotulados, caso não estejam, vá em propriedades, selecione esses pontos, e em básico, acione Exibir Objetos.
10) Agora crie o retângulo ABFE, usando a ferramenta polígono;
11) Movimente os controles de água e tinta e verifique se o retângulo sobe dentro do outro conforme esses valores aumentam, caso não esteja funcionando, verifique os itens 8 e 9;
12) Altere a cor deste novo retângulo para alguma de sua preferência;
13) Abra as propriedades deste polígono. Na aba Avançado, em Transparência, digite:

tinta/(tinta+agua)

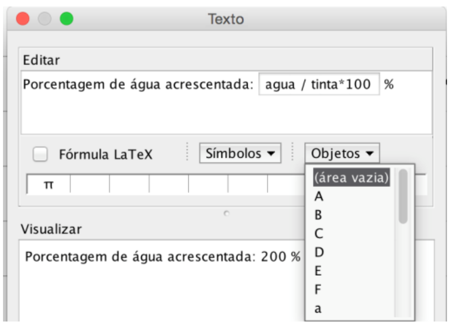
14) Aperte Enter e feche o painel Propriedades;
15) Movimente os controles e observe o preenchimento do polígono se alterar conforme aumentamos a quantidade de água na mistura;
16) Agora vamos criar uma caixa de texto para exibir (em porcentagem) a quantidade de água contida na mistura. Selecione o comando texto, de um clique em uma área em branco da Janela Gráfica e, em Editar, digite:

Porcentagem de água acrescentada:

17) Clique agora em Objetos e escolha (área vazia) (Como mostrado na imagem abaixo). Dentro do campo criado digite:

agua/tinta*100

18) Mude o cursor para fora deste campo e digite %. O resultado deve ser o exibido na imagem a seguir:

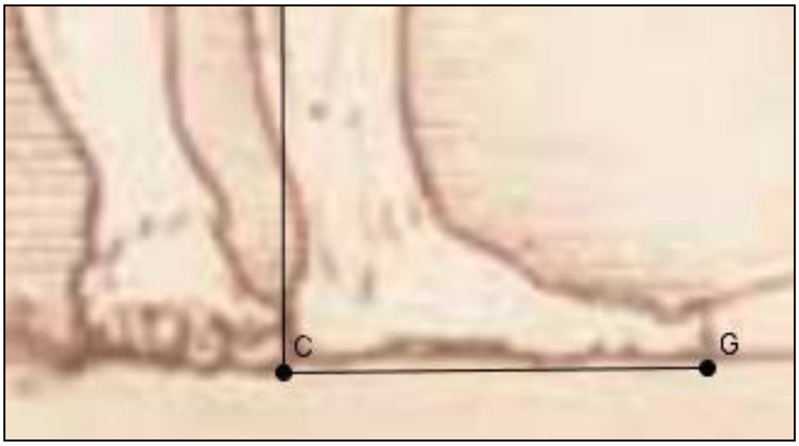


19) Por fim, oculte todos os pontos e os rótulos dos segmentos;

20) Oculte os eixos e a malha da Janela de Visualização e feche a Janela de Álgebra;
21) Movimente os retângulos criados, os controles deslizantes e as caixas de texto para deixar a visualização o mais arrumada possível.
22) Clique com o botão direito sobre ambos os controles e marque a opção Fixar Objeto;
23) Salve este arquivo como mistura-agua-e-tinta.ggb.

ATIVIDADE 8: Construção do arquivo homem-vitruviano.ggb (Questão 9)

1) Importe a imagem homem-vitruviano.png;
2) Ajuste os pontos da base da imagem em (0,0) e (15,0);
3) Agora selecione a ferramenta segmento e crie um segmento CD vertical desde o calcanhar até o topo da cabeça (Dica: após criar o primeiro ponto do segmento, mantenha pressionada a tecla Alt no teclado para o segmento ficar totalmente vertical);
4) Crie outro segmento agora, horizontal, que corresponda a longitude dos braços (Dica: após criar o primeiro ponto do segmento, mantenha pressionada a tecla Alt no teclado para o segmento ficar totalmente horizontal);
5) Por fim, crie outro segmento horizontal que corresponda à medida do pé;
6) Agora selecione o comando Ponto e crie os pontos sobre esses segmentos que serão usados para medir as partes do corpo pedidas. Incialmente: crie os pontos sobre o segmento horizontal no pulso, cotovelo (basta fazer de um lado) e os pontos sobre os dois ombros. Repare que a própria figura já traz divisões sobre essas partes. Se algum dos pontos ficar fora do lugar no momento da criação basta movê-lo para que ele fique no lugar correto;
7) Agora criaremos os pontos sobre a face, então recomendamos que aproxime esta área com um Zoom. Os pontos a serem criados são: queixo, nariz, sobrancelha e raiz dos cabelos (novamente temos algumas divisões no próprio desenho);
8) Renomeie os pontos criados, como nas figuras:



9) Abra as propriedades, selecione todos os pontos, e em básico, selecione Fixar Objeto.

10) Salve o arquivo com o nome homem-vitruviano.ggb;

APÊNDICE X

PROGRAMA DO CURSO "RACIOCÍNIO PROPORCIONAL: ATIVIDADES COM O GEOGEBRA INTEGRANDO ARITMÉTICA, GEOMETRIA E ÁLGEBRA"

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP

Projeto: Mapeamento do uso de tecnologias da informação nas aulas de Matemática no Estado de São Paulo

Curso "Raciocínio Proporcional: atividades com o GeoGebra integrando aritmética, geometria e álgebra"

APRESENTAÇÃO

Objetivo: Esclarecer a Proposta do Curso

Curso de Extensão Universitária

Título: Raciocínio Proporcional: atividades com o GeoGebra integrando aritmética, geometria e álgebra

Professores responsáveis: Profª Drª Sueli Liberatti Javaroni, Prof. Dr. Marcus Vinicius Maltempi, Profa. Ms. Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho Faria e Prof. Ms. Tiago Giorgetti Chinellato.

Monitores: Fábio Ferreira da Silva e André do Amaral Antunes

Objetivo: Explorar o conceito de Raciocínio Proporcional, com o software GeoGebra, atuando no ensino integrado de aritmética, geometria e álgebra.

Datas dos encontros: 16/05, 23/05, 30/05, 13/06, 20/06 e 27/06.

Carga horária: 32 horas.

Conteúdos Matemáticos: Decimal, Fração, Razão, Proporção, Teorema de Tales, Grandezas Proporcionais, Figuras Geométricas e Proporcionalidade, e Porcentagem.

Frequência mínima para certificação: 80%.

Horário: Aos sábados, das 8h as 12h30.

Metodologia: O curso será desenvolvido em encontros semanais de quatro horas e meia, em uma Escola Estadual na cidade de Limeira. Serão realizados seis encontros presenciais (totalizando 27 horas), e atividades e encontros virtuais semanais (que irão totalizar 5 horas). Os professores trabalharão em duplas, analisando e explorando atividades investigativas acerca do conceito de Raciocínio Proporcional, por meio do software GeoGebra, orientadas pela Profa. Ms. Rejane Faria. As atividades contemplarão os conteúdos do caderno do Professor do estado de São Paulo, com a perspectiva que integra concomitantemente três áreas da Matemática: a aritmética, a geometria e a álgebra. Também será explorada a plataforma BlueLab.

Atividades semanais a distância: Entre os encontros presenciais, algumas tarefas serão feitas à distância. Tais tarefas irão corresponder à 5h de atividades virtuais. Após cada encontro será necessário enviar inbox pelo facebook, ou por e-mail, um relato contendo comentários gerais sobre o encontro e sobre as atividades desenvolvidas, e construções no GeoGebra, que devem ser feitas de acordo com um roteiro entregue ao final de cada encontro do curso. Estas atividades devem ser enviadas, impreterivelmente, até às 20h da sexta-feira anterior ao próximo encontro. Caso o professor cursista tenha dificuldades para realizar a construção do GeoGebra a distância, ou queira tirar dúvidas, haverá um "plantão" via facebook às quartas-feiras, das 19h às 20h.

APÊNDICE XI

QUESTIONÁRIOS DE AVALIAÇÃO DO CURSO

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP

Projeto: Mapeamento do uso de tecnologias da informação nas aulas de Matemática no Estado de São Paulo

Curso "Raciocínio Proporcional: atividades com o GeoGebra integrando aritmética, geometria e álgebra"

Questionário de Reflexão sobre o curso

Professor Cursista: ______________________________

1. O que você mais gostou ao longo de todo curso? O que você menos gostou no curso? Qual sua sugestão para mudar isso? Comente.

2. Como você avalia os encontros presenciais do curso? E as atividades à distância (relatos e roteiros)? Sugestões são bem-vindas.

3. Pensando na realidade de sua escola, de seus alunos, o curso atendeu suas expectativas? Por quê?

4. Qual era seu conhecimento do software antes do curso? E agora como está? Como você avalia seu contato com o GeoGebra?

5. O que você acha do uso das Tecnologias Digitais nas aulas de Matemática? E do GeoGebra? Você pretende aderir o uso do GeoGebra na sua prática?

6. Têm outras sugestões, críticas ou observações a fazer?

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP

Projeto: Mapeamento do uso de tecnologias da informação nas aulas de Matemática no Estado de São Paulo

Curso "Raciocínio Proporcional: atividades com o GeoGebra integrando aritmética, geometria e álgebra"

Questionário de Reflexão sobre o curso

Professor Cursista: ____

SOBRE O TEMA DO CURSO

1. Comente sobre a importância, ou não, de se explorar o Raciocínio Proporcional do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental?

____
____
____
____

2. Como você avalia o uso do GeoGebra para trabalhar Geometria, Aritmética e Álgebra? Comente.

____
____
____
____

3. Como você avalia a abordagem com que o Raciocínio Proporcional foi trabalhado nas atividades do curso, pensando nas tecnologias e na exploração do raciocínio que permeia os conteúdos matemáticos inerentes à proporcionalidade?

____
____
____
____

4. Esta abordagem é viável de ser realizada na sala de aula? Quais as maiores dificuldades a serem enfrentadas para usar essa abordagem na sala de aula?

____
____
____
____

5. Você sugeriria alterações ou outra abordagem para o ensino integrado de Geometria, Aritmética e Álgebra nos conteúdos que perpassam o Raciocínio Proporcional?

____
____
____
____

APÊNDICE XII

TERMO DE CONSENTIMENTO PARA UTILIZAÇÃO DOS DADOS

TERMO DE CONSENTIMENTO PARA PESQUISA

Eu,____, nacionalidade_____________, estado civil____________, portador da Cédula de identidade RG nº.______________________________________, inscrito no CPF sob nº ______________________________, residente à Av/Rua ______________________________________, nº._____________, município de __________________________/São Paulo, **AUTORIZO** o uso de minha imagem e produção intelectual, geradas na participação do curso de extensão **"Raciocínio Proporcional: atividades com o GeoGebra integrando aritmética, geometria e álgebra"**, a serem utilizadas para fins da pesquisa de doutoramento de Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho Faria, aluna do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (Unesp-Rio Claro), sob orientação do Prof. Dr Marcus Vinicius Maltempi. Tal pesquisa de doutorado está vinculada ao projeto ***Mapeamento do Uso de Tecnologias da Informação nas Aulas de Matemática no estado de São Paulo***, que é coordenado pela Prof.ª Drª Sueli Liberatti Javaroni. Também **AUTORIZO** a utilização desse material para produção de trabalhos científicos. Por esta ser a expressão da minha vontade declaro que autorizo o uso acima descrito sem que nada haja a ser reclamado a título de direitos conexos à minha imagem ou a qualquer outro, e assino a presente autorização em 02 vias de igual teor e forma.

Limeira, ___ de maio de 2015.

____

(assinatura)

Nome:

Telefone para contato:

APÊNDICE XIII

ROTEIRO PARA RELATO DOS ENCONTROS SEMANAIS

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP

Projeto: Mapeamento do uso de tecnologias da informação nas aulas de Matemática no Estado de São Paulo

Curso "Raciocínio Proporcional: atividades com o GeoGebra integrando aritmética, geometria e álgebra"

Relato dos encontros

Objetivo: Registrar nossa reflexão sobre o encontro realizado

RELATO DO ENCONTRO REALIZADO NO DIA: ___/___/2015

Professor Cursista: ____

Esse relato deve ser postado até as 20h da sexta-feira que antecede nosso próximo encontro.

Nesse espaço você deve registrar, em pelo menos 10 linhas, seus comentários sobre as atividades desenvolvidas no nosso último encontro. Sugestões do que escrever: pontos fortes e pontos fracos da abordagem realizada considerando sua aplicação com alunos do Ensino Fundamental II (considerar a integração entre Geometria, Aritmética e Álgebra com o GeoGebra e os conteúdos matemáticos envolvidos); coerência entre o objetivo da atividade e o que foi realizado.

APÊNDICE XIV

POSTAGENS DA PÁGINA DO GRUPO DE DISCUSSÃO DO CURSO NO FACEBOOK

Rejane Faria carregou um arquivo.

18 de maio

Boa noite!!! Nessa postagem vou relembrar como foi nosso primeiro encontro, e anexar alguns arquivos (estão todos na pasta zip anexada aqui). Tivemos a participação de 17 professores, além do Prof. Carlos Eduardo representando a Diretoria de Ensino, do Prof. Tiago GC que está elaborando o curso comigo, e do Fábio Ferreira da Silva que é nosso monitor. Começamos com uma apresentação de cada um, seguida da programação e dinâmica do curso (anexo 1). Falamos um pouco do significado dos temas que compõem o título do curso, e continuamos com uma atividade para explorar as funções do software GeoGebra (anexo 2). Fizemos um intervalo e, ao retornar, exploramos e discutimos a atividade de Razão e Proporção, que foi até a questão 3 (anexo 3). Finalizando, discutimos o objetivo e as questões centrais da atividade de Razão e Proporção, e retomamos as tarefas da semana, que são: Fazer um relato do primeiro encontro (como sugerido no anexo 4) e duas construções do GeoGebra as quais precisaremos para o nosso próximo encontro (seguir roteiro do anexo 5). Lembrando que as tarefas da semana devem ser enviadas por mensagem (inbox) por aqui no meu face, ou ainda para o e-mail: rejanefaria1@hotmail.com. Para aqueles que não puderam ir ao primeiro encontro, mas que irão participar do curso: se tiverem dúvidas, podem dar uma olhada no anexo 1, onde temos mais detalhes da nossa dinâmica semanal a distância ou postar perguntas aqui, ok? Esqueci de alguma coisa, pessoal?

resumo 1o encontro.zip

Arquivo

Baixar | **Carregar revisão**

Curtir   Comentar

Marcos Massari, Margarete Bergantin Balthazar e outras 2 pessoas curtiram isso.

✔ Visualizado por 21

Rejane Faria
25 de maio · Rio Claro (São Paulo)

Bom dia!!! Vou falar um pouco do nosso encontro do sábado 23.05... Tivemos 16 presentes + o trio Rejane Faria, Tiago GC e Fábio Ferreira da Silva... Quase todos que estavam no primeiro encontro foram no segundo (só faltou a Aline Miranda 🙁 , que me avisou que faltaria apenas esse encontro). Discutimos a outra metade da atividade de Razão e Proporção. As discussões foram muito produtivas e revelaram o quanto estamos atentos às nossas salas de aula, pois elas permeiam todas as nossas conversas, não é mesmo? Alguns destaques: na situação 2 da questão 3, destacamos que se o aluno, ao ler o enunciado, conseguir perceber que 25% significa que a cada 100, o preço foi diminuído em 25 reais, ele já entende que houve proporcionalidade no desconto dado, ou seja, que também é uma questão de interpretação. Na quarta, ressaltamos a importância de destacar o significado de razão.A quinta foi a do número de mulheres e a razão 3/5, e foi levantado que como está não faz muito sentido, a sugestão é fazermos um arquivo ggb mostrando que a cada 5 homens, existiam 3 mulheres e agrupar de 8 em 8. A questão seguinte foi a do mapa, e foi dito que precisamos ver como lidar com a escala, já que foi dito que está em 1cm para cada 30000000cm reais, mas quando alteramos o zoom no software, a medida não é dada em cm... estamos pensando numa solução. Depois dessas atividades fizemos um intervalo. Ao retornarmos, fizemos a questão 1 da atividade Grandezas Proporcionais, e discutimos bastante o significado da reta ter que passar no (0,0), discutimos o exemplo da proporcionalidade no valor pago numa corrida de taxi, e analogamente, pensamos num barzinho que cobra "couvert artístico", o que também faz com que a conta final não seja proporcional ao que foi consumido, e ainda numa empresa que tem suas despesas fixas no mês. Encaminhamos para uma conversa final, e combinamos as tarefas pra semana seguinte... Faltou algo, pessoal? Boa semana!!!

Curtir   Comentar

Sueli Liberatti Javaroni, Aline Miranda, Leandra Leoncini e outras 4 pessoas curtiram isso.

✔ Visualizado por 18

Rejane Faria

1 de junho · Rio Claro (São Paulo)

Olá, Pessoal! Esta semana realizamos nosso terceiro encontro! Fizemos a atividade de Grandezas Proporcionais. Eu gostei muito desta atividade e do seu andamento... Iniciamos retomando a questão 1 que realizamos na semana anterior. As cinco primeiras questões tinham um mesmo formato, embora resultavam em diferentes informações. Fizemos as tabelas na planilha e criamos a lista dos pontos na janela de visualização, cujas coordenadas preenchemos na planilha. A partir daí analisamos a relação entre x e y e seu gráfico. Na questão 6, que finalizava a atividade, concluímos que quando as grandezas são diretamente proporcionais, existe razão e ela é obtida pela divisão de x por y, e que o gráfico é uma reta que passa por todos os pontos e pela origem. Também concluímos que quando as grandezas são inversamente proporcionais, existe razão e ela é obtida pela multiplicação de x por y, e que o gráfico é uma hipérbole que passa por todos os pontos e pela origem. também comentamos que quando não são proporcionais, não há razão, e que nos casos que analisamos, os gráficos eram parábolas ou retas que não passavam pela origem ou por todos os pontos (e retomamos o exemplo do táxi, que por conta da bandeirada, o que se paga ao final da corrida não é proporcional à distância percorrida). Nos comentários finais, foi sugerido que além da finalização na questão 6, em todas as questões anteriores deve haver um item para falar de como foi obtida a razão e como foi o gráfico, de modo que em todas os alunos já possam ir estabelecendo relações entre a geometria a aritmética e a álgebra que estavam presente nessa atividade (respectivamente) por meio de seu gráfico, as razões e pontos correspondentes, bem como com as equações que formavam os gráficos e determinavam as razões. Depois desta atividade, fizemos um intervalo. Ao retornar, exploramos as atividades de aplicação das grandezas proporcionais e observamos que a relação entre a massa e o volume do ferro são diretamente proporcionais, e que a relação entre a velocidade média e o tempo gasto para percorrer uma distância fixa de um automóvel é uma grandeza inversamente proporcional. Ainda ressaltamos a importância de trabalhar com os alunos o fato dos gráficos só estarem no primeiro quadrante e a relação que, nesses casos, não pode existir com valores negativos. Registro ainda que, por conta de um aluno que me deu uma resposta desagradável no corredor da escola, discutimos a relação "motivação do professor e indisciplina dos alunos". Esta discussão foi muito proveitosa, pois tivemos a oportunidade de compartilhar experiência e pensar em como agir nesses casos. Acho que foi isso, pessoal! Muito bom aprender com vocês! Esqueci algo?

Curtir   Comentar

Marcos Massari, Tiago GC, Aline Miranda e outras 2 pessoas curtiram isso.   ✓ Visualizado por 18

Rejane Faria

15 de junho · Rio Claro (São Paulo)

Boa tarde!!! Vamos relembrar nosso encontro do último sábado? Bom... iniciamos falando das tarefas da semana, que são o relato, e mais duas construções... Como nas próximas semanas precisaremos de 8 construções, já começamos a fazer algumas no GeoGebra. No sábado fizemos a "número de alunos", que tem uma estrutura que explora os controles deslizantes e que é bem diferente das demais que havíamos construído até agora. Penso que esse momento de construção do roteiro no próprio encontro foi muito importante para que tenhamos êxito nas duas que ficaram pra fazemos em casa. Quando terminamos este roteiro fizemos um intervalo. No retorno, passamos para a atividade Teorema de Tales, que é repleto de Raciocínio Proporcional desde as observações até as definições. As duas questões iniciais tratavam da introdução deste teorema. Elas focavam em vários casos que iam afunilando de forma a enfatizar que a condição necessária para que exista proporcionalidade é que as retas que são cortadas por transversais sejam paralelas. Na discussão sobre isso, os cursistas fizeram vários apontamentos, como a relevância da atividade, a possibilidade de não introduzir o Teorema de Tales, mas sim de reafirmá-lo com tais questões, e ainda com a possibilidade de que os alunos deem maior foco às construções e aos passos necessários, ao invés de focar nos conceitos que estão sendo trabalhados. Em todos estes casos, foi ressaltado a importância da intervenção do professor para que haja compreensão dos conceitos pelos alunos. Após estas questões lemos e discutimos a relevância de um texto que explique a definição e o motivo deste ser o Teorema de Tales, destacando assim a história da Matemática que perpassa este teorema. Finalizando a atividade, tínhamos duas questões de aplicação, mas tivemos tempo de fazer apenas uma delas... Então fizemos a questão do lago que explorava uma forma de encontrar a maior extensão de um lago por meio do Teorema de Tales. Finalizando, fizemos os combinados da semana e falamos sobre o que ainda faremos ao longo do curso... Foi isso pessoal? Algo a retificar? Algo a acrescentar? Abraço!

Curtir Comentar

Margarete Bergantin Balthazar, Leandra Leoncini, Danilo Silvestre e outras 4 pessoas curtiram isso.

✔ Visualizado por 17

Rejane Faria carregou um arquivo.
23 de junho

Olá, pessoal! tivemos no sábado nosso quinto encontro! Iniciamos com a questão praça (última da atividade do Teorema de Tales), e embora tenha sido discutida e proveitosa, achamos que ficou "meio quebrada" pois a fizemos de forma isolada, visto que as demais já tinham sido discutidas no encontro anterior. Em seguida, entregamos um roteiro de construção do arquivo duas-operações-consecutivas (esta construção nós não faremos juntos, mas montamos um vídeo tutorial mostrando o passo a passo da construção, e o link está na folha). Falamos das tarefas da semana, que são: O último relato e duas construções (as atividades 2 e 3 desse word em anexo). Em seguida fizemos a atividade 1 deste mesmo roteiro. Construir alguns roteiros nos encontros tem sido muito proveitoso, pois tiramos dúvidas de funcionalidades e ferramentas do software estando todos juntos. Tenho percebido uma desenvoltura em explorar as ferramentas cada vez maior. Depois dessa construção fizemos um intervalo. No retorno, exploramos a atividade de Porcentagem. Sobre a primeira questão foi colocado que ela pode ser ainda mais proveitosa se apresentar outros exemplos e se trouxer algo que mostre, por exemplo, que 12/30=0,4=40%. Estamos pensando em como fazer essa finalização. Como as questões 2, 3 e 4 são uma sequência que deve ser feita num mesmo momento, optamos por ir pra questão 5 e voltar nas anteriores no próximo encontro. Então, na questão 5 foi comentado que podemos explorar outros exemplos após os três já feitos, explorando-os direto no GeoGebra. Também foi recomendado colocar uma legenda no arquivo (azul-> valor pago, rosa -> desconto dado), e ainda a importância de esclarecer que embora os retângulos no GeoGebra estejam do mesmo tamanho eles são relativos a valores diferentes, e que o tamanho dos retângulos é referente a porcentagem total, ao 100%. Com essa discussão encerramos o quinto encontro. Já estou ansiosa para o próximo, que também será o último... Até lá, pessoal!

Roteiros Porcentagem.docx
Documento

Baixar | Visualizar | Carregar revisão

Curtir   Comentar

Aline Miranda, Sueli Liberatti Javaroni, Marcos Massari e outras 2 pessoas curtiram isso.   ✔ Visualizado por 16

Rejane Faria

1 de julho · Rio Claro (São Paulo)

Olá, pessoal... No sábado dia 27, realizamos o último encontro do nosso curso... Como disse estou feliz e triste... Afinal foi muito bom, deu tudo certo e aprendemos muito juntos, por outro lado não vamos nos ver com a mesma frequência... Mas tenho certeza de que foi um bom tempo para nós!

Bom... Vamos recordar esse último encontro? Nele preenchemos dois questionários, um avaliando o andamento e o formato do curso, e outro avaliando o tema do curso. Além disso, exploramos as questões 2,3,4,6, 7 e 8 da atividade de Porcentagem. As questões 2, 3 e 4 estavam muito relacionadas e exploravam a relação entre uma quantidade total, uma porcentagem dessa quantidade, e o número que essa porcentagem representa. Pensamos juntos sobe essas questões e resolvemos explorar todas num único arquivo, ou ainda diminuir a quantidade de questões de cada uma das três, e criar outra questão usando um dos arquivos do GeoGebra que já temos para misturar as questões, com a finalidade de que o aluno escolha o melhor caminho para responder as perguntas. Na questão 6, exploramos situações em que duas operações consecutivas são realizadas (de desconto ou aumento), com a finalidade de pesar sobre os descontos dados em lojas nas liquidações, e ainda para relacionar que um aumento e um desconto consecutivo de uma mesma porcentagem, não quer dizer que um produto volta a ter seu valor inicial. Como sugestão para esta questão, foi dito que deve trazer mais uma situação apresentando primeiramente um desconto de x %, e em seguida um aumento de x%, explorando assim o que ocorre nesses casos. A questão seguinte abordava a quantidade de água ideal para utilizar uma tinta. Nela o aluno pode avaliar o que o pintor fez para usar a tinta, verificando que não estava adequada a quantidade misturada, e pensando no que fazer para consertar o que o pintor fez com a tinta. Como opção de aprimoramento da atividade, foi sugerido que outra situação seja criada com outro tipo de tinta na mesma questão, afim de pensar em outras possibilidades com o mesmo arquivo do GeoGebra. Na questão final, Homem Vitruviano, exploramos a construção de da Vinci no software, e para essa questão, muitas coisas foram sugeridas, como não dar a tabela para os alunos, pedir que eles mesmos meçam os segmentos no software, pedir que eles procurem as medidas que são descritas no texto. Além disso, foi falado sobre a importância de acrescentar no roteiro de construção deste arquivo a importância de fixar todos os pontos, para que ao manipular a figura, nenhum ponto saia do lugar. No final deste encontro, eu, Fábio Ferreira da Silva e Tiago GC falamos das nossas sensações diante dessa experiência de curso, e o Carlos Eduardo, da Diretoria de Ensino, agradeceu o empenho dos professores cursistas e também da nossa parceria, e falou sobre perspectivas futuras e possibilidades de outros cursos. De forma breve, esse foi nosso último encontro! Um abraço, pessoal! Até o dia 13 de julho, posto todas as atividades, roteiros e construções já alteradas... Forte abraço!

Curtir Comentar

Fábio Ferreira da Silva, Aline Miranda, Margarete Bergantin Balthazar e outras 4 pessoas curtiram isso. ✔ Visualizado por 16