



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Um estudo da localização das últimas curvas invariantes e de tempos característicos em mapeamentos Hamiltonianos bidimensionais

Joelson Dayvison Veloso Hermes

Rio Claro
2022



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Um estudo da localização das últimas curvas invariantes e de tempos característicos em mapeamentos Hamiltonianos bidimensionais

Joelson Dayvison Veloso Hermes

Tese apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, câmpus de Rio Claro como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Edson Denis Leonel

Coorientador: Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas

**Rio Claro
2022**

H553e

Hermes, Joelson Dayvison Veloso

Um estudo da localização das últimas curvas invariantes e de tempos característicos em mapeamentos Hamiltonianos bidimensionais / Joelson Dayvison Veloso Hermes. -- Rio Claro, 2022
92 p. : il., tabs.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro

Orientador: Edson Denis Leonel

Coorientador: Iberê Luiz Caldas

1. Sistemas não lineares. 2. Sistemas dinâmicos. 3. Mapeamentos Bidimensionais. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Joelson Dayvison Veloso Hermes

Um estudo da localização das últimas curvas
invariantes e de tempos característicos em
mapeamentos Hamiltonianos bidimensionais

Tese apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, câmpus de Rio Claro como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Edson Denis Leonel
Prof. Dr. Diego Fregolent M. de Oliveira
Prof. Dr. José Danilo Szezech Junior
Prof. Dr. Rene Orlando Medrano Torricos
Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana

Conceito: Aprovado

Rio Claro, 18 de Novembro de 2022.

Dedico esta tese de doutoramento à minha família.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me permitir chegar até aqui.

A minha esposa Carina, a meus filhos Júlia Maria e João Lucas que com carinho e paciência foram essenciais para o sucesso desta etapa. Obrigado pelo incentivo e compreensão nos momentos de ausência.

Aos meus pais, José e Derly, pois deram a vida para que eu pudesse estudar.

Ao meu irmão, Kennedy, pelas conversas e sonhos que planejamos juntos.

A minha sogra, Dona Hélia (*in memoriam*), cuja força, coragem e bondade me inspiraram. Obrigado por sempre se orgulhar de mim.

Ao meu orientador e amigo, o professor Edson Denis Leonel, pela enorme ajuda e também por acreditar e confiar no meu potencial. Com o senhor aprendi muito mais que física e sistemas dinâmicos.

Ao meu coorientador professor Iberê Luiz Caldas, com o qual tive o prazer de conviver e aprender muito nesses últimos anos.

Aos amigos Cadu, Flávio e Valdir por todo apoio e amizade de sempre. Além de muitas risadas!

Aos amigos do Grupo de Investigação em Sistemas Complexos e Dinâmica Não Linear da UNESP de Rio Claro por todas as contribuições. Em especial a Célia, Yoná e Diogo por todas as discussões e parcerias nesses últimos anos.

A todos os professores que fizeram parte da minha formação desde a educação básica, em especial o amigo e professor Góis e a inesquecível Dona Diana, que me inspiraram e sempre me incentivaram a estudar.

A todos os professores do Programa de Pós-graduação em Física da UNESP por todos os ensinamentos e suporte.

Agradeço ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas Gerais - IFSULDEMINAS, campus Inconfidentes, por possibilitar que eu me dedicasse integralmente ao doutorado.

Por fim, agradeço a todos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho e peço desculpas àqueles que não foram citados neste momento por mera limitação da minha memória, mas estarão sempre guardados no meu coração.

Resumo

O tempo de recorrência de Poincaré e o tempo de Lyapunov fornecem informações importantes sobre a complexidade do sistema e estão relacionados a medidas interessantes como a dimensão fractal e o expoente de difusão. Dessa forma, esses tempos característicos foram medidos para o mapa padrão e também para o modelo Fermi-Ulam e com isso confirmamos que o tempo de recorrência médio depende do tamanho do intervalo de recorrência escolhido e também da região onde foram tomadas as condições iniciais. Além disso, a dimensão fractal da região foi determinada através da inclinação da curva no gráfico do tempo de recorrência de Poincaré médio em função do tamanho do intervalo de recorrência, para diferentes regiões do espaço de fases. Uma vez que a dimensão fractal está relacionada ao expoente de difusão μ , encontramos para ambos mapeamentos $\mu = 1$ para as regiões caóticas e longe das ilhas de estabilidade, condizendo com a difusão normal. O tempo de Lyapunov também foi medido para os diferentes domínios dos espaços de fases através de uma determinação direta do expoente de Lyapunov, já que ele é definido como seu inverso. Estudamos o teorema de Slater, o qual está relacionado aos tempos de recorrência. Através dele foi possível localizar a última curva invariante *spanning* do Mapa Padrão com alta precisão e também determinar o parâmetro crítico responsável pela destruição dessa curva. Investigamos, para o modelo Fermi-Ulam, a localização de curvas invariantes que separam áreas caóticas no espaço de fase. Aplicando o teorema de Slater verificamos que o mapeamento apresenta uma família de curvas invariantes *spanning* com número de rotação cuja expansão em frações contínuas possui uma cauda infinita de 1's, atuando como barreiras locais de transporte. Determinamos a destruição de tais curvas e encontramos os parâmetros críticos para isso. A determinação do número de rotação na vizinhança de uma das curvas invariantes permitiu compreender a dinâmica nas proximidades da curva considerada, tanto antes como depois da criticidade. O perfil do número de rotação nos mostrou o caráter fractal da região próximo à curva, pois este perfil possui uma estrutura semelhante a uma “Escadaria do Diabo”.

Palavras-chave: Caos; Teorema de Slater; Difusão; Recorrência de Poincaré.

Abstract

Poincaré's recurrence time and Lyapunov's time give important information about the complexity of the system and are related to interesting measures such as the fractal dimension and the diffusion coefficient. Thus, these characteristic times were measured for the standard map and also for the Fermi-Ulam model and we confirm that thus the mean recurrence time depends on the size of the chosen recurrence interval and also on the region where the initial conditions were taken. In addition, the fractal dimension of the region was determined by the slope of the curve in the graph of the mean Poincaré recurrence time as a function of the size of the recurrence interval, for different regions of the phase space. Since the fractal dimension is related to the diffusion coefficient μ , we find for both mappings $\mu = 1$ for the chaotic regions and far from the islands of stability matching the normal diffusion. Lyapunov time was also measured for the different domains of the phase space through a direct determination of the Lyapunov exponent, since it is defined as its inverse. We studied Slater's theorem, which is related to recurrence times. Through it, it was possible to locate the last invariant spanning curve of the Standard Map with high precision and also to determine the critical parameter responsible for the destruction of this curve. We investigate, for the Fermi-Ulam model, the location of invariant curves that separate chaotic areas in phase space. Applying Slater's theorem, we verify that the mapping presents a family of invariant spanning curves with rotation number whose expansion in continued fractions has an infinite tail of 1's, acting as local transport barriers. We determined the destruction of such curves and found the critical parameters for it. The determination of the rotation number in the vicinity of one of the invariant curves made it possible to understand the dynamics in the vicinity of the considered curve, both before and after criticality. The rotation number profile showed us the fractal character of the region close to the curve, as this profile has a structure similar to a "Devil's Staircase".

Keywords: Chaos; Slater's Theorem; Diffusion; Poincaré Recurrence.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Trajетórias no espaço de fases.	10
1.2	Representação esquemática da seção de Poincaré. (a) Trajetória “furando” a seção de Poincaré. (b) Primeiras interseções da trajetória com a seção. .	12
1.3	Interseção de uma trajetória situada na superfície de energia com a superfície de seção S definida por $\theta_1 = \text{constante}$. (a) Curva invariante gerada por sucessivas interseções da trajetória com S . (b) Ressonância primária mostrando as 7 primeiras interseções da trajetória com S . (c) Ilhas primárias em torno dos pontos fixos. (d) Ressonância secundária com três etapas em torno da ressonância primária. (e) Camada caótica situada entre duas curvas invariantes. (f) Camada caótica limitada pelas curvas invariantes primária e secundária.	19
1.4	Movimento de um ponto no espaço de fases para um sistema integrável com dois graus de liberdade (a) O movimento está em um toro com $J_1 = \text{const.}$, $J_2 = \text{const.}$ (b) Desenho esquemático das interseções da trajetória com a superfície de seção $\theta_2 = \text{const.}$ depois de um grande número de interseções. Figura adaptada de Lichtenberg e Lieberman 1992.	22
2.1	Representação esquemática da recorrência de uma órbita ao intervalo I do espaço de fases. Figura adaptada de Altmann 2004.	29

2.2	Espaço de fases para o mapa padrão com $k = 0,8$. São destacadas quatro regiões para as quais serão analisadas os tempos característicos definidos nas seções 2.2 e 2.1.	31
2.3	Evolução temporal do Expoente de Lyapunov positivo para as regiões indicadas no espaço de fases da Figura 2.2. O parâmetro de controle usado foi $k = 0,8$. Cada condição inicial foi evoluída até $n = 10^8$	32
2.4	Gráfico do valor numérico de t_L em função de k medido para uma região caótica do espaço de fase.	33
2.5	Tempo de recorrência de Poincaré médio em função do intervalo de recorrência δ para as diferentes regiões indicadas no espaço de fases apresentado na Figura 2.2.	34
2.6	(a) Espaço de fases para o mapa padrão com $k = 0,8$. (b) Gráfico da mesma região de (a) com a escala de cores representando em escala logarítmica o tempo de recorrência de Poincaré médio $\langle t_r \rangle$	34
2.7	Representação esquemática do Modelo Fermi-Ulam. O movimento da parede móvel é dado por $x_w(t) = \epsilon \cos(\omega t)$. A parede fixa está localizada em $x = L$	35
2.8	Representação gráfica do espaço de fase para o modelo Fermi-Ulam com a aproximação de paredes fixas. O parâmetro de controle usado foi $\epsilon = 10^{-3}$	37
2.9	O gráfico ilustra a evolução temporal do expoente Lyapunov positivo para as regiões marcadas no espaço de fase da Figura 2.8. O parâmetro de controle usado foi $\epsilon = 10^{-3}$. Cada condição inicial foi evoluída até $n = 10^8$ colisões com as paredes.	39
2.10	Gráfico do valor numérico de t_L em função de ϵ medido para uma região caótica do espaço de fase.	40
2.11	(a) Gráfico de uma região ampliada do espaço de fases mostrado na Figura 2.8 onde duas grandes ilhas são observadas, uma acima e outra abaixo da primeira curva invariante. (b) Gráfico da mesma região de (a) com a escala de cores representando em escala logarítmica o tempo de recorrência de Poincaré médio $\langle t_r \rangle$	41

2.12	Gráfico do tempo de recorrência de Poincaré médio $\langle t_r \rangle$ em função do tamanho do intervalo de recorrência δ , para as diferentes regiões indicadas na Figura 2.8.	42
3.1	Esboço do espaço de fases para o mapa padrão mostrando a transição de caos local para caos global, considerando os seguinte parâmetros: (a) $k = 0,50$; (b) $k = 0,75$; (c) $k = 0,97$; e (d) $k = 2,00$	47
3.2	(a) Espaço de fases para o Mapa Padrão dado pela equação 3.5 com $k = 0,97$. A curva invariante <i>spanning</i> encontrada pelo teorema de Slater está destacada em vermelho. (b) Ampliação do espaço de fases de (a), nas proximidades da curva invariante.	50
3.3	Espaço de fases para o Modelo Fermi-Ulam dado pela equação (3.7) com a curva invariante encontrada pelo teorema de Slater destacada em vermelho (curva 1).	53
3.4	Ampliação do espaço de fases na vizinhança da curva 1 (curva vermelha). As curvas em azul satisfazem ao Teorema de Slater. (a) $\epsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ e (b) $\epsilon = \epsilon_c = 5,652 \cdot 10^{-4}$	55
3.5	(a) Espaço de fase para o Modelo de Fermi-Ulam com $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$. Todas as curvas invariantes encontradas pelo Teorema de Slater são destacadas. (b) Ampliação da região abaixo da primeira curva invariante <i>spanning</i> (curva vermelha).	56
3.6	Gráfico de V vs. ε_c . Um ajuste em lei de potência nos dá $\alpha = 0,4987(1)$. . .	57
3.7	Gráfico de ω vs. V . Um ajuste em lei de potência nos dá $\omega = 0,31879 \cdot V^{-0,99909}$. . .	59
3.8	Detalhe do espaço de fases na vizinhança da curva 1 (curva vermelha), (a) $\epsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ e (b) $\epsilon = \epsilon_c = 5,652 \cdot 10^{-4}$. (c,d) A mesma região de (a) e (b) onde a escala de cor corresponde a parte decimal do número de rotação. . .	60
3.9	(a) Detalhe do espaço de fase nas proximidades da curva 1 (curva vermelha). (b) Perfil do número de rotação calculado ao longo da linha azul destacada em (a), alguns valores do número de rotação são indicados na figura e uma ampliação é feita na região próxima à curva invariante.	61

LISTA DE TABELAS

2.1	Valores numéricos para λ e t_L para as regiões indicadas no espaço de fases da Figura 2.2.	32
2.2	Valores numéricos para λ e t_L para as regiões indicadas no espaço de fases da Figura 2.8.	40
3.1	Representação em frações contínuas do irracional $1/\gamma$ assim como algumas de suas convergentes obtidas pelo truncamento da expansão.	46
3.2	Representação em frações contínuas do irracional $(1 - 1/\gamma)$ assim como algumas de suas convergentes obtidas pelo truncamento da expansão. . . .	49
3.3	Valor de ε crítico para cada uma das curvas da Figura 3.4.	56
3.4	Números de rotação encontrados para cada uma das curvas da Figura 3.5. A coluna 1 identifica a curva. A coluna 2 fornece o número de rotação obtido da equação (3.10), cujo valor numérico está muito próximo do resultado analítico mostrado na coluna 3 e previsto da expansão apresentada na coluna 4.	58
A.1	Representação em frações contínuas do número π assim como algumas de suas convergentes obtidas por truncamentos das expansões por frações contínuas.	69

SUMÁRIO

Introdução	1
1 Conceitos Fundamentais	5
1.1 Sistemas Hamiltonianos	5
1.1.1 Transformações Canônicas	5
1.1.2 Movimento no espaço de fases	9
1.1.3 Seção de Poincaré	11
1.1.4 Variáveis Ângulo Ação	12
1.2 Sistemas Integráveis	15
1.3 Sistemas Quase Integráveis	16
1.4 Sistemas Hamiltonianos como mapeamentos canônicos	20
2 Tempos Característicos	26
2.1 O Tempo de Lyapunov	26
2.2 O Tempo de Recorrência de Poincaré	29
2.3 Tempos Característicos para o Mapa Padrão	30
2.4 Tempos Característicos para o Modelo Fermi-Ulam	35
3 Localização de Curvas Invariantes do tipo <i>Spanning</i>	43
3.1 O Teorema de Slater	43

3.2	A última curva invariante do mapa padrão	46
3.3	Curvas invariantes no Modelo Fermi-Ulam	51
3.3.1	Uma análise dos números de rotação	58
Considerações Finais e Perspectivas		63
A Aproximações por frações contínuas		66
Referências Bibliográficas		70

INTRODUÇÃO

Tradicionalmente os estudos em sistemas dinâmicos remetem-se a uma grande variedade de pesquisadores, um deles é Henri-Poincaré, que, através de problemas de Mecânica Celeste [1] conseguiu perceber a utilidade nos estudos de estruturas topológicas no espaço de fases de trajetórias dinâmicas, que posteriormente viriam receber contribuições de G. P. Birkhoff [2], principalmente no que se refere à teoria ergódica e fundamentos de Mecânica Estatística, fortalecendo as bases teóricas iniciadas por Poincaré.

Enquanto isso, na Rússia, Alexander Lyapunov estudava a transição de estabilidade de um conjunto compacto. Ele tentava encontrar números que representassem essa transição de ordem para o caos. Mais tarde, mesmo com um certo ceticismo na época, com relação à teoria do caos, entre os anos 1960 e 1970 o estudo sobre o movimento caótico foi impulsionado pelo início das simulações computacionais e a partir de então começou a ser desvendado. Nesse contexto, Lorenz [3], com a finalidade de estudar problemas relacionados à previsão meteorológica para tempos longos, analisou as equações associadas a processos físicos envolvendo convecção térmica bidimensional e percebeu a impraticabilidade de tal previsão devido às imprecisões na determinação das condições iniciais. Surge então a introdução dos conceitos de atrator estranho e de sensibilidade às condições iniciais [4, 5].

Porém, levou algum tempo para que essa área de estudos se estabelecesse, seu desenvolvimento se deu em várias frentes. Uma delas se refere à classe de sistemas integráveis. Outra vertente estava relacionada com sistemas quase integráveis, a qual está associada ao

chamado teorema KAM (enunciado por Kolmogorov, demonstrado para fluxos por Arnold e para mapas por Moser) [6, 7, 8, 9]. Tal teorema estabelece que sistemas obtidos por perturbações suficientemente pequenas de um sistema integrável, terão trajetórias sobre os toros invariantes dos respectivos sistemas integráveis. Assim, esses toros invariantes são destruídos por perturbações suficientemente grandes. Complementarmente, Chirikov em [10] apresentou um método para se estimar a amplitude perturbativa necessária para a destruição dessas superfícies invariantes.

Atualmente o estudo de sistemas que apresentam comportamento caótico vem ocorrendo em várias vertentes. Uma parte importante no estudo de sistemas caóticos está relacionada ao fenômeno de difusão. A difusão de partículas tem intrigado cientistas de diferentes áreas ao longo dos anos. As aplicações são as mais amplas possíveis, desde medicinal [11], onde uma droga médica ou química específica se difunde no sangue para alcançar seu destino, infiltração de água [12] na superfície do planeta, difusão de pólen de plantas [13], poluição do ar [14] ou da água [15] e muitas outras. Em sistemas dinâmicos a difusão pode ser tratada pela solução da equação da difusão [16] levando a resultados comprovando invariância de escala em sistemas caóticos [17]. Em sistemas Hamiltonianos, entretanto, o fenômeno de difusão está relacionado também à recorrência de Poincaré [18], definida como o tempo que uma partícula gasta se movendo ao longo do espaço de fase para retornar a uma região específica de onde ela partiu. Sabe-se que esse tempo obedece a leis específicas [19, 20, 21, 22] que confirmam a existência de *stickiness*, ou seja, aprisionamento de trajetórias [23, 24, 25, 26, 27, 28, 29], portanto, difusão anômala¹ [30, 31, 32, 33] e difusão normal [34, 35, 36].

Além disso, o estudo de sistemas Hamiltonianos bidimensionais conecta várias áreas, isso se deve a capacidade do formalismo Hamiltoniano em descrever uma grande variedade de modelos. Esse formalismo é aplicado em fluxos [37, 38], propriedades de transporte [39, 40, 41], linhas de campos magnéticos [42, 43], guias de ondas [44, 45], aceleração de Fermi [46, 47] entre outros [48, 49]. Para esse tipo de sistemas, o teorema KAM garante que

¹Difusão anômala é um termo usado para descrever um processo de difusão com uma relação não linear ao tempo, em contraste ao típico processo de difusão (difusão normal), no qual o deslocamento quadrático médio de uma partícula é uma função linear do tempo.

para perturbações suficientemente pequenas alguns toros invariantes (curvas invariantes) ainda persistem, os quais atuam como barreira de transporte, limitando o tamanho do mar de caos. Esta propriedade é válida apenas no espaço de fase bidimensional porque a dimensão da superfície invariante difere em uma unidade do espaço. Caso contrário, superfícies invariantes em sistemas de alta dimensão não dividem o espaço de fase e, portanto, não representam barreiras para as trajetórias caóticas. Nessas circunstâncias, essas curvas exercem um papel crucial no estudo das propriedades de transporte, difusão e escalas no mar de caos, entre outras aplicações.

Em física, é importante prever a quebra de curvas invariantes porque, em dois graus de liberdade, tais curvas representam barreiras no espaço de fase, desempenhando um papel crucial para o confinamento e transporte de partículas. Isto posto, nosso objetivo principal é investigar as condições que levam à destruição dessas curvas em mapeamentos Hamiltonianos bidimensionais, particularmente aplicando o teorema de Slater [50]. Assim como investigar algumas propriedades dos tempos característicos, sendo eles o tempo de recorrência t_r e o tempo de Lyapunov t_L .

Sobre esta tese

Esta presente tese de doutoramento é resultado de estudos realizados no Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP) durante o período de fevereiro de 2019 a novembro de 2022 sob orientação do Prof. Dr. Edson Denis Leonel e coorientação do Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas. Parte dos resultados obtidos estão publicados nos seguintes artigos:

- Characteristic Times for the Fermi–Ulam Model. Joelson D. V. Hermes and Edson D. Leonel. International Journal of Bifurcation and Chaos - World Scientific Publishing Company, Vol. 31:2130004, No. 2 (2021).
- Break-up of invariant curves in the Fermi-Ulam model. Joelson D.V. Hermes, Marcelo A. dos Reis, Iberê L. Caldas, Edson D. Leonel. Chaos, Solitons and Fractals, Vol. 162:112410 (2022).
- Application of the Slater criteria to localize invariant tori in Hamiltonian mappings.

Yoná H. Huggler, Joelson D. V. Hermes, Edson D. Leonel. Chaos 32:093125, (2022).

A organização desta tese ocorre da seguinte forma. No capítulo 1, apresentamos um resumo de alguns conceitos básicos de mecânica Hamiltoniana. O capítulo 2 apresenta uma análise sobre os tempos característicos, sendo eles o tempo de Lyapunov t_L e o tempo de recorrência de Poincaré t_r . Primeiramente analisamos esses tempos para o Mapa Padrão recuperando alguns resultados presentes na literatura e na sequência repetimos o estudo para o modelo Fermi-Ulam, o que possibilitou uma comparação com os resultados já conhecidos para outros mapeamentos, principalmente com o Mapa Padrão. Tal estudo nos permitiu relacionar o tempo de recorrência de Poincaré ao conceito de dimensão fractal, assim como, ao fenômeno de difusão, sendo possível classificar as diferentes regiões do espaço de fases desses mapeamentos com relação a estes conceitos. No capítulo 3, exploramos o teorema de Slater para estudar o comportamento de curvas invariantes e com isso prever o valor da perturbação para o qual essas curvas são destruídas. Tal estudo nos possibilitou recuperar o bem conhecido parâmetro crítico, $k_c = 0,971635\dots$, para o Mapa Padrão, além de encontrarmos uma família de curvas invariantes bastante robustas no Modelo Fermi-Ulam. No último capítulo trazemos nossas considerações finais e perspectivas de trabalhos futuros. Um estudo mais detalhado sobre frações contínuas onde apresentamos uma definição formal e algumas propriedades para esse tipo de frações estão no apêndice A.

CAPÍTULO 1

CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Neste capítulo revisaremos brevemente alguns conceitos da mecânica Hamiltoniana, os quais são mais pertinentes ao tratamento de problemas de dinâmica no espaço de fases.

1.1 Sistemas Hamiltonianos

1.1.1 Transformações Canônicas

As equações de movimento podem ser obtidas de várias formas [51], uma delas é através da introdução de uma função Lagrangiana L

$$L(\dot{q}, q, t) = T(\dot{q}, q) - U(q, t), \quad (1.1)$$

onde q e $\dot{q}$ são respectivamente vetores coordenada generalizada e velocidade generalizada, T é a energia cinética, U é a energia potencial e quaisquer restrições são consideradas independentes do tempo. Em termos de L as equações de movimento são

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (1.2)$$

isso para cada variável q_i . A equação (1.2) pode ser derivada do princípio variacional ou então simplesmente por uma comparação direta com as leis do movimento de Newton.

Dessa forma, a Hamiltoniana H pode ser definida como:

$$H(p, q, t) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - L(\dot{q}, q, t), \quad (1.3)$$

onde $\dot{q}$ é considerado uma função de q e p , assim, se tomarmos a diferencial de H temos

$$\begin{aligned} dH &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \\ &= \sum_{i=1}^n p_i d\dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right] - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned} \quad (1.4)$$

A equação (1.4) pode ser satisfeita se p_i for definido da seguinte forma

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (1.5)$$

com isso o primeiro somatório se anula e as equações do movimento são obtidas envolvendo apenas as primeiras derivadas

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (1.6)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}, \quad (1.8)$$

o conjunto de p e q é conhecido como *momentum* e coordenadas generalizadas e as equações (1.6), (1.7) e (1.8) são as equações de Hamilton. Um conjunto de variáveis p e q que satisfazem (1.6) e (1.7) é dito canônico e as variáveis p e q são conjugadas [52].

Se desejarmos transformar o conjunto de variáveis canônicas p e q em um novo conjunto $\bar{p}$ e $\bar{q}$, podemos relacioná-las por uma função F , assim teríamos a nova Hamiltoniana

$$\bar{H}(\bar{p}, \bar{q}, t) = H(p, q, t) + \frac{\partial}{\partial t} F(q, \bar{q}, t). \quad (1.9)$$

Existem dois casos de interesse, um com uma Hamiltoniana como uma função explícita do tempo, e outro com a Hamiltoniana não explícita do tempo, chamado de autônomo. No primeiro caso, $\bar{H} \equiv 0$, isto é equivalente a obter novas coordenadas generalizadas cujas derivadas no tempo são zero, a partir das equações canônicas de movimento. As novas coordenadas são constantes que podem ser interpretadas como valores iniciais das coordenadas não transformadas. Assim, as equações de transformação são as soluções que fornecem a posição e o *momentum* a qualquer instante em termos dos valores iniciais, como se segue

$$H\left(\frac{\partial F}{\partial q}, q, t\right) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \quad (1.10)$$

Para o segundo caso no qual H é independente do tempo, precisamos apenas definir $\bar{H}$ igual a uma constante e com isso

$$H\left(\frac{\partial F}{\partial q}, q\right) = E, \quad (1.11)$$

a qual é conhecida como equação de Hamilton-Jacobi.

Aliado a esses conceitos, surge uma importante quantidade dinâmica, o parênteses de Poisson, definido da seguinte forma

$$[u, v] = \sum_k^n \left(\frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial v}{\partial p_k} - \frac{\partial v}{\partial q_k} \frac{\partial u}{\partial p_k} \right), \quad (1.12)$$

onde u e v são funções arbitrárias de coordenadas generalizadas. As equações de movimento podem ser escritas no formato de parênteses de Poisson, escolhendo u como coordenada e v como Hamiltoniana,

$$[q_i, H] = \sum_k^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \right) = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \quad (1.13)$$

Comparando com as equações de Hamilton, temos

$$\dot{q}_i = [q_i, H], \quad (1.14)$$

e, de forma análoga

$$\dot{p}_i = [p_i, H]. \quad (1.15)$$

Usando as equações de Hamilton para $\dot{p}$ e $\dot{q}$ a derivada total de uma função arbitrária $G = G(p, q, t)$ pode ser escrita da seguinte forma

$$\frac{dG}{dt} = \sum_i^n \left(\frac{\partial G}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial G}{\partial t} = [G, H] + \frac{\partial G}{\partial t}. \quad (1.16)$$

Para G sendo uma função que não depende explicitamente do tempo, $\partial G / \partial t = 0$, e se os parênteses de Poisson $[G, H]$ se cancelam, dizemos que G comuta com H e G é uma constante do movimento. Temos ainda que, se a Hamiltoniana não é uma função explícita do tempo, então ela é uma constante, assim, se escolhermos a função G como uma das variáveis de *momentum* da coordenada conjugada, isto é $\partial H / \partial q_i = 0$, obtemos de (1.16) que $dp_i / dt = 0$, e assim p_i é uma constante de movimento

$$p_i = \alpha_i = \text{constante}, \quad (1.17)$$

$$q_i = \frac{\partial H}{\partial \alpha_i} = \omega_i. \quad (1.18)$$

Se $\partial H / \partial \alpha_i$ é uma função apenas de α_i , então $\omega_i = \text{constante}$ e, integrando (1.18) temos

$$q_i = \omega_i t + \beta_i, \quad (1.19)$$

a qual fornece uma solução para as variáveis dependentes do tempo. Logo, se for possível encontrar uma transformação canônica que transforme todo *momentum* em constante, (1.19) e (1.17) são soluções do sistema de coordenadas transformadas e a transformação inversa nos dá a solução nas coordenadas originais, logo para determinarmos a solução da equação de Hamilton-Jacobi precisamos fornecer a função geradora necessária para a transformação.

É importante notar que a utilidade de uma transformação de variáveis está em escolher bem a transformação: ela pode facilitar tanto a resolução do sistema quanto a análise e

interpretação física. Devemos lembrar que a transformação canônica não introduz nova física ao problema, ou seja, as propriedades inerentes ao problema permanecem as mesmas tanto nas variáveis antigas quanto nas novas.

1.1.2 Movimento no espaço de fases

Se considerarmos que conseguimos resolver as equações de movimento de Hamilton apresentadas na seção anterior, teríamos N graus de liberdade, dado que i vai de 1 até N . Além disso, com estas equações temos $2N$ equações de movimento que são as coordenadas e *momenta* iniciais nos N graus de liberdade. Essas constantes determinam univocamente o movimento subsequente, o qual também pode ser pensado como o movimento de um ponto através de um espaço $2N$ -dimensional. Assumindo que resolvemos as equações de Hamilton para p e q como função do tempo, no espaço $2N$ -dimensional com coordenadas p e q , nós poderíamos seguir as trajetórias a partir de um ponto t_1 , correspondente às coordenadas iniciais p_1 e q_1 , até um tempo t_2 . Este espaço $p - q$ é chamado de espaço de fases do sistema [18]. A Figura 1.1 mostra a trajetória de algumas condições iniciais, onde representamos o espaço de fases em duas dimensões com o *momentum* p ao longo da ordenada e as posições q ao longo da abscissa.

Lichtenberg e Lieberman em [18] destacam que existem três importantes propriedades desse espaço de fases, que são as seguintes:

- i. Em nenhum instante de tempo as trajetórias do espaço de fases se cruzam, uma vez que as condições iniciais determinam univocamente o estado subsequente. Caso esse cruzamento ocorresse, essas trajetórias teriam, nesse instante, os mesmos valores de p e q e logicamente o movimento subsequente seria idêntico ou indeterminado. Para o caso em que a Hamiltoniana é independente do tempo, as trajetórias no espaço de fases também são, e com isso não podem se cruzar no espaço de fases.
- ii. Uma fronteira C_1 no espaço de fases, a qual limita um grupo de condições iniciais em t_1 , se transformará em uma fronteira C_2 em t_2 , que limita o mesmo número de condições iniciais. Essa segunda propriedade segue diretamente da primeira, uma vez

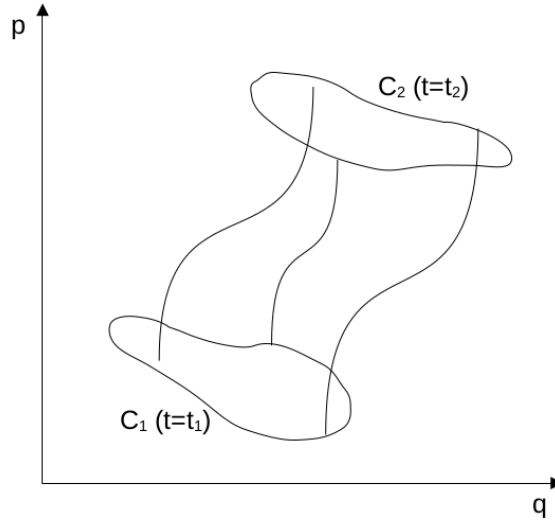


Figura 1.1: Trajetórias no espaço de fases.

que qualquer movimento no interior da fronteira, ao se aproximar dela, deve então ter as mesmas condições iniciais para o movimento subsequente que a fronteira e, assim, mover-se de forma idêntica a ela. Tal propriedade é dita de longo alcance, pois uma quantidade grande de condições iniciais, no interior, segue um número bem menor de condições iniciais da fronteira.

- iii. Considere um ensemble de condições iniciais, cada uma delas representando um possível estado do sistema. Nós expressamos a probabilidade de um dado ensemble ou distribuição de densidade de pontos do sistema no espaço de fases como

$$\tau = \tau(p, q, t). \quad (1.20)$$

Se normalizarmos τ de forma que

$$\int \tau \prod_i dp_i dq_i = 1, \quad (1.21)$$

então $d\mathcal{N} = \tau \prod_i dp_i dq_i$ é a probabilidade de que, no momento t , o conjunto tenha uma condição inicial associada a i -ésima coordenada com posição entre q_i e $q_i + dq_i$ e momento entre p_i e $p_i + dp_i$. A taxa de variação do número de pontos de fase $d\mathcal{N}$,

dentro do volume infinitesimal do espaço de fases

$$\prod_i dp_i dq_i, \quad (1.22)$$

é obtida pela equação de continuidade

$$\frac{\partial}{\partial t} d\mathcal{N} + \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial p_i} (d\mathcal{N} \dot{p}_i) + \frac{\partial}{\partial q_i} (d\mathcal{N} \dot{q}_i) \right) = 0. \quad (1.23)$$

Se dividirmos a equação anterior pelo volume, nós obtemos a taxa de variação de densidade para uma posição fixa no espaço de fases:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \sum_i \left(\dot{p}_i \frac{\partial \tau}{\partial p_i} + \tau \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} + \dot{q}_i \frac{\partial \tau}{\partial q_i} + \tau \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} \right) = 0. \quad (1.24)$$

Das equações de Hamilton para $\dot{p}_i$ e $\dot{q}_i$, o segundo e quarto termos de (1.24) se cancelam e obtemos

$$\sum_i \left(\dot{p}_i \frac{\partial \tau}{\partial p_i} + \dot{q}_i \frac{\partial \tau}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0, \quad (1.25)$$

que é a comprovação da incompressibilidade do fluxo no espaço de fases. Este resultado é conhecido como teorema de Liouville e é uma poderosa ferramenta para examinar a dinâmica de um sistema.

1.1.3 Seção de Poincaré

Sistemas com muitos graus de liberdade podem ser bastante difíceis de se tratar devido à dimensão do espaço de fases, haja vista que um sistema autônomo com N graus de liberdade teria um espaço de fases $2N$ -dimensional. No entanto, esses sistemas são de grande interesse físico, além da possibilidade de apresentar um comportamento caótico. Dentre os sistemas autônomos, os mais simples que teriam a possibilidade de apresentar caos, são aqueles de dois graus de liberdade, cujo correspondente espaço de fases tem 4 dimensões, e a visualização do movimento é muito complicada. Porém, como a energia total permanece constante durante o movimento, tem-se de fato 3 variáveis independentes, limitando o movimento a uma superfície tridimensional chamada de superfície de energia.

Se fixarmos um plano transversal a essa superfície e marcarmos a posição de uma dada órbita toda vez que ela “furar” esse plano, podemos observar as características do movimento olhando “a dinâmica desses furos” nesta seção transversal, a qual é conhecida como Seção de Poincaré [18, 53]. O conceito de uma seção de Poincaré está no cerne do tratamento dos sistemas Hamiltonianos. A Figura (1.2) ilustra este conceito, onde tomamos o plano (X_1, P_1) definido por $X_2 = 0$ e $P_1 > 0$, então toda vez que uma órbita passa por X_1 e tiver, por exemplo, $P_1 > 0$ coletamos os valores de X_1 e P_1 . Este procedimento gera o “mapa de Poincaré” na seção de Poincaré [53].

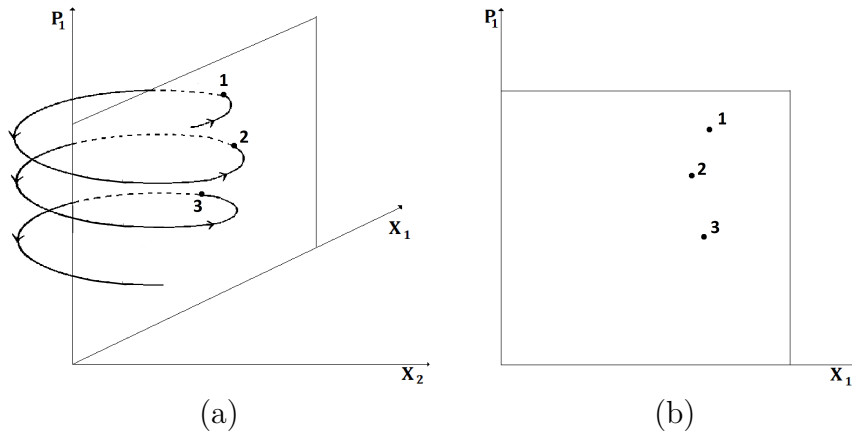


Figura 1.2: Representação esquemática da seção de Poincaré. (a) Trajetória “furando” a seção de Poincaré. (b) Primeiras interseções da trajetória com a seção.

Dessa forma, passamos de uma dinâmica contínua no espaço de fases para uma dinâmica discreta na seção de Poincaré, e caso seja possível relacionar os pontos $Y_0, Y_1, Y_2, \dots$ formalmente por equações para p_k e q_k , definimos então um “Mapa” ou “Aplicação”. Assim, o movimento pode ser observado na seção de Poincaré através de sucessivas iterações do mapa, o que geralmente é mais simples do que integrar numericamente as equações do movimento.

1.1.4 Variáveis Ângulo Ação

Vimos até agora que para Hamiltonianas independentes do tempo, com um grau de liberdade existe uma constante de movimento. Para Hamiltonianas independentes do tempo, com N graus de liberdade, é possível encontrar N constantes do movimento

que desacoplam os N graus de liberdade desde que a equação de Hamilton-Jacobi seja completamente separável em algum sistema de coordenadas [18]. Substituindo a função geradora F pela notação comum S , nós assumimos uma solução separada

$$S = \sum_i S_i(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad (1.26)$$

onde os α 's são os novos *momenta* associados com as N constantes do movimento. Se agora a Hamiltoniana pode ser escrita na forma separada

$$H = \sum_i H_i \left(\frac{\partial S_i}{\partial q_i}, q_i \right), \quad (1.27)$$

então a equação de Hamilton-Jacobi divide em N equações:

$$H_i \left(\frac{\partial S_i}{\partial q_i}, q_i \right) = \alpha_i, \quad (1.28)$$

já que as q_i são coordenadas independentes. Nós podemos então resolver para S_i em termos de q_i . Os novos *momenta* α_i são, portanto as constantes de separação da equação de Hamilton-Jacobi que satisfazem

$$\sum_i \alpha_i = H_0. \quad (1.29)$$

A relação entre as antigas e as novas coordenadas já foi vista anteriormente e a nova Hamiltoniana H é uma função apenas dos *momenta* α_i , com isso as equações de Hamilton podem ser resolvidas. A escolha das constantes de separação α_i como o novo *momentum* é arbitrária. Pode-se também escolher como novos *momenta* qualquer N quantidades J_i , as quais são funções independentes de α_i :

$$J_i = J_i(\alpha). \quad (1.30)$$

Se essas N equações são invertidas

$$\alpha_i = \alpha_i(J), \quad (1.31)$$

e inserindo em (1.26), então a função geradora para o novo *momentum* J_i é encontrada como

$$\bar{S}(q, J) = S(q, \alpha(J)), \quad (1.32)$$

com a nova Hamiltoniana

$$\bar{H} = \sum_i \alpha_i(J), \quad (1.33)$$

e novamente as equações de Hamilton podem ser resolvidas trivialmente.

Para sistemas periódicos completamente separáveis, uma escolha especial dos J 's como funções dos α 's é muito útil. Por sistemas periódicos queremos dizer aqueles para os quais, em cada grau de liberdade, P_i e q_i são funções periódicas do tempo com o mesmo período, ou então, P_i é uma função periódica de q_i [18]. O primeiro caso é geralmente conhecido como libração e o segundo como rotação. A variável ação (J) é definida como

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i, \quad (1.34)$$

onde os $J_1 \dots J_n$ são os novos *momenta*. A variável θ_i conjugada é dada por

$$\theta_i = \omega_i t + \beta_i, \quad (1.35)$$

onde ω_i e β_i são constantes. Integrando θ_i durante um período de oscilação completa T , temos

$$\theta_i = \int_t^{t+T} d\theta_i = \omega_i T, \quad (1.36)$$

mas

$$d\theta_i = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial \bar{S}}{\partial J_i} dq_i, \quad (1.37)$$

e substituindo em (1.36) e integrando sobre o ciclo completo,

$$\Delta\theta_i = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint \frac{\partial \bar{S}}{\partial q_i} dq_i = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint p_i dq_i = 2\pi. \quad (1.38)$$

Comparando (1.36) com (1.38), nós vemos que

$$\omega_i T = 2\pi, \quad (1.39)$$

isto é, a constante ω_i é a frequência de oscilação. Essa formulação é conhecida como ângulo-ação e fornece uma maneira conveniente de obter as frequências de oscilação sem resolver os detalhes do movimento. Ao descrever o movimento de sistemas quase integráveis, quase sempre se faz uma transformação preparatória em variáveis ângulo-ação da parte integrável do sistema em questão.

1.2 Sistemas Integráveis

Considerando um sistema Hamiltoniano com N graus de liberdade, se a equação de Hamilton-Jacobi é separável em N equações independentes, uma para cada grau de liberdade, então dizemos que a Hamiltoniana e o movimento resultante dela são integráveis. As constantes de separação α_i são conhecidas como integrais isolantes ou integrais globais do movimento, uma vez que cada invariante isola um grau de liberdade pela propriedade $\partial H / \partial p_i = f(q_i)$ em alguns sistemas de coordenadas canônicas. Um Hamiltoniano com N graus de liberdade é integrável se e somente se existirem N integrais de isolamento independentes. Por outro lado, é suficiente que as N integrais independentes estejam em involução, ou seja, seus colchetes de Poisson $[\alpha_i, \alpha_j] = 0$. Isso garante que os α 's sejam um conjunto completo de novos *momenta* em algum sistema de coordenadas transformado [18].

Em sistemas com um grau de liberdade com H explicitamente independente do tempo, nós vimos que

$$H(p, q) = E, \quad (1.40)$$

é uma constante do movimento. Assim, todas essas Hamiltonianas são integráveis, com o *momentum* p determinado com uma função apenas de q , independente do tempo, isto é,

$$p = p(q, E). \quad (1.41)$$

A solução completa para p e q como uma função do tempo pode ser obtida da segunda equação de Hamilton, logo

$$dt = \frac{dq}{\partial H / \partial p}, \quad (1.42)$$

e integrando temos

$$t = \int_{q_0}^q \frac{dq}{\partial H / \partial p}. \quad (1.43)$$

Como $\partial H / \partial p$ é uma função apenas das variáveis p e q , e elas estão relacionadas através da equação (1.41), reduzimos a equação de movimento a quadraturas. No entanto, a integral geralmente só pode ser resolvida numericamente. Para sistemas com mais de um grau de liberdade, a equação (1.42) pode ser generalizada da seguinte forma

$$dt = \frac{dq_1}{\partial H / \partial p_1} = \frac{dq_2}{\partial H / \partial p_2} = \cdots = \frac{dq_N}{\partial H / \partial p_N}. \quad (1.44)$$

Em geral, devemos resolver todo o conjunto de equações diferenciais simultaneamente para obter uma solução completa. Porém, se outras constantes do movimento existirem além da Hamiltoniana, o número de equações simultâneas poderá ser reduzido.

1.3 Sistemas Quase Integráveis

Sistemas quase integráveis são sistemas Hamiltonianos genéricos que podem ser tratados como perturbações de sistemas integráveis. A característica principal dos sistemas quase integráveis é a presença simultânea de regiões caóticas, intimamente misturadas, com regiões regulares separando estas regiões. As trajetórias caóticas são uma consequência autogeradas do movimento induzido pelas equações de Hamilton, que são determinísticas e não contém forças caóticas adicionais. Um exemplo que ilustra bem esse comportamento

é a aceleração de Fermi [54]. No entanto, para sistemas autônomos com mais de dois graus de liberdade, trajetórias regulares não separam mais as regiões caóticas, as quais se unem em uma “rede” de estocasticidade, o que leva ao fenômeno de difusão de Arnold¹ [55].

Consideremos um sistema autônomo periódico quase integrável com dois graus de liberdade, o qual pode ser aproximado com uma Hamiltoniana da forma

$$H(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2) = H_0(J_1, J_2) + \epsilon H_1(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2), \quad (1.45)$$

onde J e θ são variáveis ângulo-ação do movimento não perturbado, a perturbação ϵ é pequena, H_0 é uma função apenas das ações e H_1 é uma função periódica dos θ 's. Tais sistemas são agora bastante compreendidos, no que diz respeito ao caráter genérico do movimento, onde as trajetórias estão na superfície tridimensional constante H do espaço de fases quadrimensional. Tal região apresenta uma fração finita de trajetórias regulares, isto é, associadas as primeiras integrais do movimento.

As trajetórias regulares dependem descontinuamente da escolha das condições iniciais. Sua presença não implica na existência de uma integral isolante global ou na simetria do sistema. No entanto, quando essas trajetórias regulares existem, representam invariantes exatos do movimento. Tais trajetórias são condicionalmente periódicas nas variáveis angulares, cobrindo densamente uma superfície toroidal de ação constante, na qual as variáveis angulares percorrem as duas direções da superfície com frequências incomensuráveis, ou são curvas fechadas periódicas percorrendo em torno do toro um número inteiro de voltas.

Vários tipos de trajetórias regulares e suas interseções com uma superfície de seção $\theta_1 = \text{const.}$ são ilustradas na Figura 1.3, a qual mostra em coordenadas polares a superfície J_2, θ_2 para uma Hamiltoniana com dois graus de liberdade. O caso (a) é uma trajetória genérica que cobre a superfície do toro, o movimento ao redor do eixo principal do toro é periódico em θ_1 com período 2π . As sucessivas interseções da trajetória com a superfície de seção com valores de $\theta_2 = \theta_{21}, \theta_{22}, \theta_{23} \dots$ localizam-se sobre uma curva invariante fechada e cobre densamente a curva após um longo intervalo de tempo. O caso (b) é um exemplo

¹A difusão de Arnold tem sido usada para descrever a difusão lenta que ocorre no espaço das ações em sistemas dinâmicos não lineares hamiltonianos com três ou mais graus de liberdade.

de ressonância

$$k\omega_1(J) + l\omega_2(J) = 0, \quad (1.46)$$

com $\omega_1 = \dot{\theta}_1$, $\omega_2 = \dot{\theta}_2$, k e l inteiros. A trajetória ressonante é fechada e periódica em θ_1 e θ_2 . Para $k = 5$, $l = 2$, mostrada no caso (b), as interseções sucessivas dessa trajetória com a superfície de seção situam-se em cinco pontos distintos chamados pontos fixos ou pontos periódicos do movimento, conhecidos como ressonâncias primárias: eles tem uma trajetória fechada da Hamiltoniana como H_0 sem perturbação. A ressonância é um caso especial de uma curva invariante, para a qual o número de “enrolamento” k/l é racional. As ressonâncias e suas interações desempenham um papel crucial na aparência do movimento caótico em sistemas quase integráveis.

O caso (c) mostra a superfície de seção de uma trajetória genérica na vizinhança de uma ressonância primária da figura (b). As sucessivas interseções de uma trajetória com a superfície de seção estão sobre um conjunto de cinco curvas suaves e fechadas, denominadas ilhas primárias, circundando os pontos fixos do caso (b). A figura (d) mostra a complexidade dos possíveis movimentos na superfície de seção para uma trajetória periódica fechada que percorre três vezes a ressonância primária $k = 5$, $l = 2$ em 15 circuitos de θ_1 . Este é um exemplo de ressonância secundária, acoplando o movimento periódico sem perturbação. As ressonâncias secundárias são produzidas pela perturbação Hamiltoniana H_1 e, no que lhe concerne, são cercadas por ilhas secundárias. Percebe-se então que, as ressonâncias primárias dão origem a ilhas primárias, que dão origem a ressonâncias secundárias e suas ilhas e assim por diante.

Com relação às regiões caóticas, elas preenchem uma porção finita da superfície de energia no espaço de fases. As sucessivas interseções de uma única trajetória caótica com a superfície de seção preenchem uma área finita. Na figura ilustramos duas trajetórias caóticas, o caso (e) mostra uma camada anular de estocasticidade preenchida por uma única trajetória situada ente duas invariantes. Existem trajetórias periódicas nessa região, mas as trajetórias próximas a elas não se movem em ilhas estáveis em torno de um ponto fixo, ou as ilhas são pequenas demais para serem visíveis. O caso (f) mostra uma camada caótica preenchida por uma única trajetória perto das ilhas no caso (c).

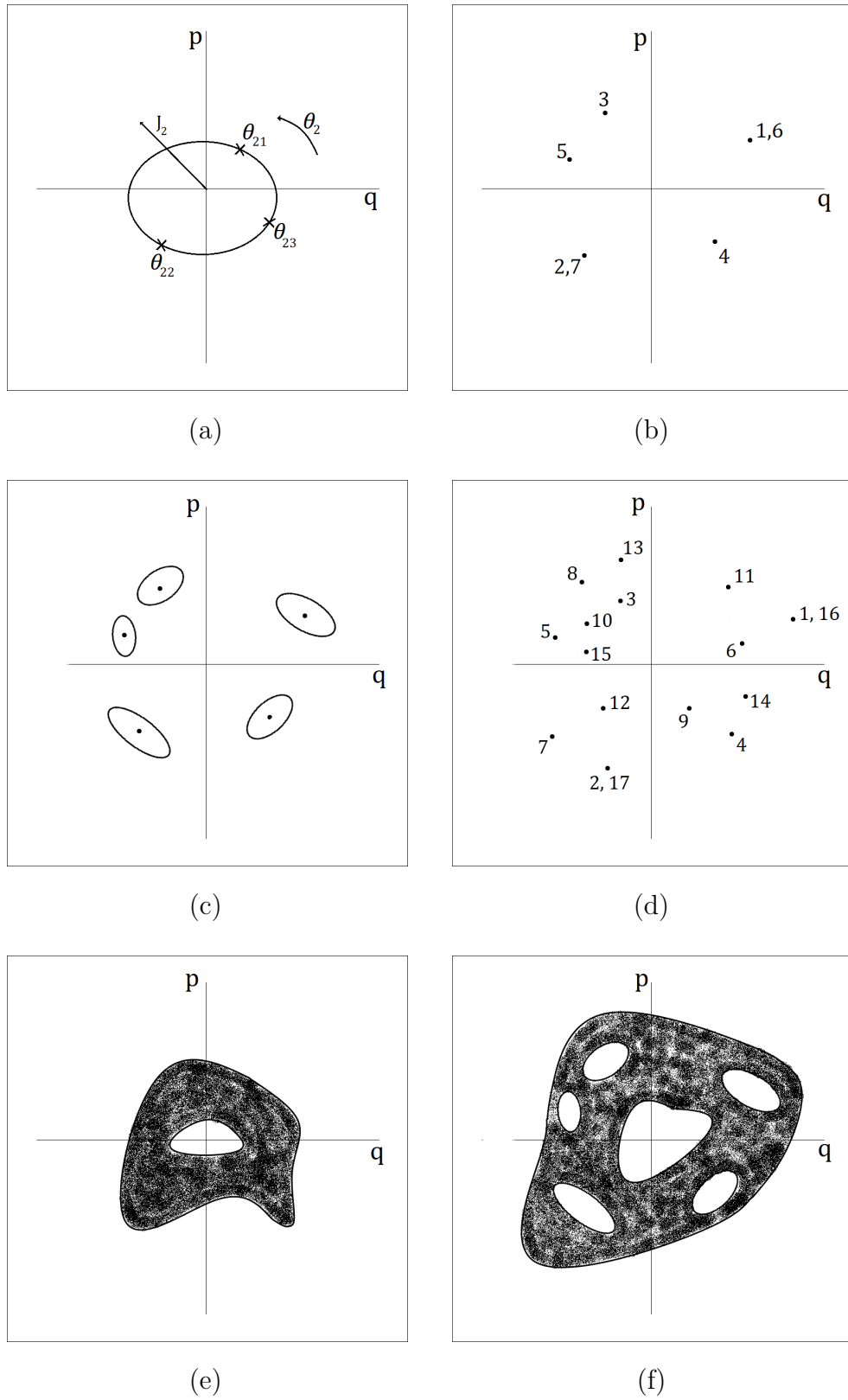


Figura 1.3: Interseção de uma trajetória situada na superfície de energia com a superfície de seção S definida por $\theta_1 = \text{constante}$. (a) Curva invariante gerada por sucessivas interseções da trajetória com S . (b) Ressonância primária mostrando as 7 primeiras interseções da trajetória com S . (c) Ilhas primárias em torno dos pontos fixos. (d) Ressonância secundária com três etapas em torno da ressonância primária. (e) Camada caótica situada entre duas curvas invariantes. (f) Camada caótica limitada pelas curvas invariantes primária e secundária.

O movimento caótico sempre ocorre próximo a separatrizes que separam curvas invariantes de ilhas. Perto de uma separatriz, a frequência de oscilação da ilha ω , se aproxima de zero. A condição de ressonância com a oscilação sem perturbação na frequência ω_0

$$k\omega - \omega_0 = 0, \quad (1.47)$$

leva então a uma separação entre as ações das ressonâncias vizinhas, que tendem a zero quando a separatriz é abordada. A região caótica que se forma perto de uma separatriz é a camada de ressonância. Para uma pequena perturbação ϵ , com dois graus de liberdade, essas camadas são finas separadas por curvas invariantes. As camadas são isoladas uma da outra, sendo proibido o movimento de uma para outra. À medida que ϵ aumenta, as curvas invariantes que separam as cadeias vizinhas de ilhas com suas camadas de ressonância são fortemente perturbadas e finalmente destruídas. Quando a última curva invariante que separa as camadas que circundam as cadeias de ilhas adjacentes é destruída, faz com que as camadas se fundem. A fusão das camadas de ressonância primária leva ao aparecimento de estocasticidade global, ou forte, no movimento [56].

1.4 Sistemas Hamiltonianos como mapeamentos canônicos

Consideremos um oscilador com 2 graus de liberdade com uma Hamiltoniana independente no tempo. Assumindo que H é integrável, ele pode ser expresso em variáveis ângulo-ação como

$$H(J_1, J_2) = E, \quad (1.48)$$

onde E é a energia do sistema, a qual é constante, e J_1 e J_2 são constantes do movimento. O fato de a energia ser constante permite que o movimento no espaço de fases seja reduzido de quatro para três dimensões. Caso uma ação qualquer seja constante, o espaço de energia constante tridimensional pode ser reduzido para uma superfície bidimensional. Nessa superfície o movimento angular é parametrizado pelas frequências associadas a cada

grau de liberdade:

$$\theta_1 = \omega_1 t + \theta_{10}, \quad \theta_2 = \omega_2 t + \theta_{20},$$

onde cada variável ângulo é periódica com período 2π .

Uma maneira de descrever o movimento, o qual pode ser generalizado para mais de dois graus de liberdade, é o movimento em um toro no espaço de fases [18]. Assumindo uma dada energia E e examinando um dos dois graus de liberdade, então J_1 parametriza a superfície como raios de centros concêntricos com o ângulo θ_1 em torno de cada ciclo. A superfície completa é especificada pela adição de θ_2 , perpendicularmente a θ_1 , formando o toro, como mostrado na Figura 1.4 (a).

Escolhendo um dado E e fixando J_1 também fixa J_2 . Como $\omega_1 = \omega_1(J)$ e $\omega_2 = \omega_2(J)$, a razão

$$\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad (1.49)$$

é fixa também. Para $\alpha = r/s$ com r e s inteiros e primos entre si, as duas frequências são comensuráveis e o movimento resulta na trajetória periódica de uma curva unidimensional no toro, que se fecha após r revoluções em θ_1 e s revoluções em θ_2 . Geralmente α será irracional e, nesse caso, uma trajetória é mapeada para toda a superfície. Tal comportamento é ilustrado na Figura 1.4 (b). Como r e s podem ser ambos muito grandes, as órbitas periódicas são arbitrariamente próximas uma da outra no espaço de ação.

O conceito de movimento em um toro é particularmente útil, pois pode ser generalizado para sistemas com mais de dois graus de liberdade [53]. Cada ação constante reduz a dimensionalidade do espaço de fases da trajetória em uma unidade, tal que para um sistema com N graus de liberdade com N ações constantes o movimento é reduzido a uma superfície N -dimensional, ou variedade, na qual as N variáveis de ângulo são executadas. As propriedades topológicas da superfície são aquelas de um toro N -dimensional que é análogo ao da Figura 1.4, as N variáveis de fase são ortogonais uma a outra e com período 2π , e a superfície é parametrizada pelas variáveis de ação.

Uma importante consequência da discussão anterior é que o movimento integrável em

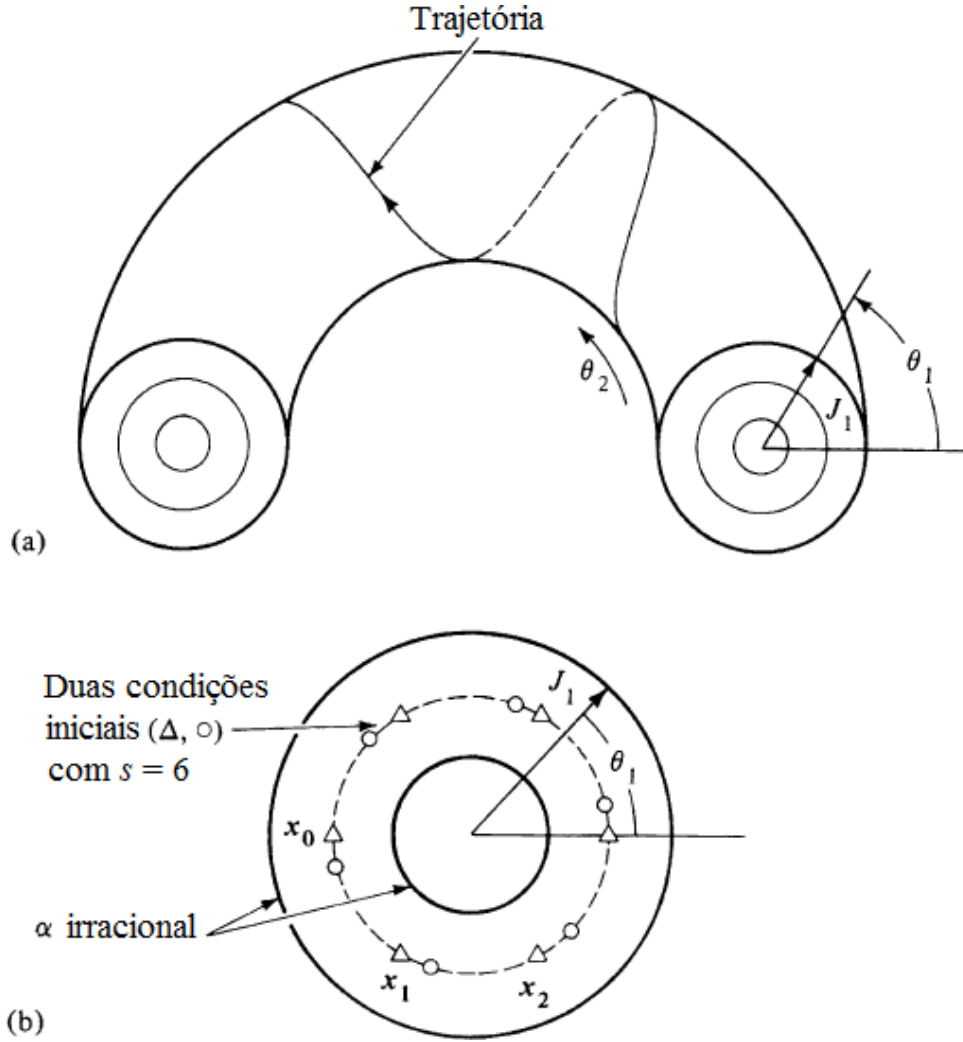


Figura 1.4: Movimento de um ponto no espaço de fases para um sistema integrável com dois graus de liberdade (a) O movimento está em um toro com $J_1 = \text{const.}$, $J_2 = \text{const.}$ (b) Desenho esquemático das interseções da trajetória com a superfície de seção $\theta_2 = \text{const.}$ depois de um grande número de interseções. Figura adaptada de Lichtenberg e Lieberman 1992.

algum espaço canônico $p = p(J, \theta)$ e $q = q(J, \theta)$ terá período

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi n_i}{\omega_i}, \quad (1.50)$$

onde n é o número de circuitos requeridos para o i -ésimo grau de liberdade com frequência angular ω_i .

Um caminho conveniente para estudar trajetórias no espaço de fases, particularmente em problemas com dois graus de liberdade, é por meio de uma superfície de seção [18]. Para a Hamiltoniana (1.48) existem duas escolhas usuais para uma superfície de seção:

o plano $J_1 - \theta_1$ ($\theta_2 = \text{const.}$) e o plano $J_2 - \theta_2$ ($\theta_1 = \text{const.}$). Escolhendo o primeiro, por exemplo, examinamos as interseções da trajetória com a superfície de seção $J_1 - \theta_1$. Sucessivas interseções tem $J = \text{const.}$ e separadas por um tempo $\Delta t = 2\pi/\omega_2$. Durante este intervalo, θ_1 avança $\omega_1 \Delta t = 2\pi\alpha(J_1)$, onde α é o número de rotação. Sendo assim, desde que $J_2 = J_2(J_1, E)$, para um dado E , α pode ser considerado uma função de J_1 apenas. Eliminado o subscrito 1 por razões notacionais, temos equações que descrevem o movimento da n -ésima para $(n+1)$ -ésima interseção:

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= J_n, \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + 2\pi\alpha(J_{n+1}), \end{aligned} \tag{1.51}$$

onde, por conveniência, nós escrevemos α como uma função de J_{n+1} . O mapa dado por (1.51) é chamado de Mapa *Twist* em que os círculos são mapeados em círculos, mas com número de rotação geralmente dependente do raio do círculo. Para α irracional, qualquer condição inicial em um círculo preenche uniformemente o círculo quando $n \rightarrow \infty$. Para $\alpha = r/s$ racional, s e r primos entre si, temos os pontos fixos do mapeamento, para o qual qualquer condição inicial se repete após exatamente s interseções [18].

Por outro lado, para sistemas quase-integráveis vamos considerar um sistema integrável ligeiramente perturbado, de modo que o Hamiltoniano é uma função dos ângulos

$$H(J, \theta) = H_0(J) + \epsilon H_1(J, \theta). \tag{1.52}$$

Na superfície de seção $J_1 - \theta_1$ com $\theta_2 = \text{const.} \pmod{2\pi}$, esperamos que o mapeamento *twist* mude para o mapeamento *twist* perturbado

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= J_n + \epsilon f(J_{n+1}, \theta_n), \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + 2\pi\alpha(J_{n+1}) + \epsilon g(J_{n+1}, \theta_n), \end{aligned} \tag{1.53}$$

onde f e g são periódicas em θ .

Para muitos mapeamentos f é independente de J e $g \equiv 0$, então temos a forma de um

mapeamento *twist* radial

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= J_n + \epsilon f(\theta_n), \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + 2\pi\alpha(J_{n+1}). \end{aligned} \quad (1.54)$$

Se linearizarmos θ_{n+1} próximo a um ponto fixo, $J_{n+1} = J_n = J_0$, para o qual $\alpha(J_0)$ é um inteiro, então para uma ação próxima

$$J_n = J_0 + \Delta J_n, \quad (1.55)$$

a substituição de uma nova ação

$$I_n = 2\pi\alpha'\Delta J_n, \quad (1.56)$$

converte (1.54) no mapa padrão generalizado

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_n + kf^*(\theta_n), \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + I_{n+1}, \quad \text{mod}(2\pi) \end{aligned} \quad (1.57)$$

aqui

$$k = 2\pi\alpha'\epsilon f_{max}, \quad (1.58)$$

e $f^* = f/f_{max}$ é o salto na ação, normalizado para um valor máximo de unidade. Assim, o mapeamento generalizado é localmente equivalente (em J) a qualquer mapeamento *twist* radial. Para $f^* = \sin\theta_n$, (1.54) se torna o mapa padrão também conhecido por mapa de Chirikov-Taylor [57]

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_n + k\sin\theta_n, \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + I_{n+1}, \quad \text{mod}(2\pi) \end{aligned} \quad (1.59)$$

o qual foi usado por Chirikov e Greene para estimar a transição de movimento regular

para caótico [\[58\]](#).

CAPÍTULO 2

TEMPOS CARACTERÍSTICOS

Nesse capítulo apresentaremos alguns resultados para os tempos característicos, sendo eles o tempo de Lyapunov e o tempo de recorrência de Poincaré, primeiramente para o mapa padrão e na sequência para o modelo Fermi-Ulam. Parte dos resultados encontrados estão publicados em [59].

2.1 O Tempo de Lyapunov

Para medir a taxa de divergência de trajetórias e, portanto, quantificar a dependência sensível às condições iniciais utilizam-se os expoentes de Lyapunov λ [56, 60, 61, 62, 63], uma vez que o expoente de Lyapunov é uma medida comum para estimar quão caótico é uma órbita do sistema (a definição rigorosa para os expoentes de Lyapunov pode ser encontrada em [64]). O tempo característico de Lyapunov é definido como o inverso do expoente de Lyapunov positivo, $t_L = 1/\lambda$. Tal tempo representa o quão rápido se dá o afastamento exponencial entre duas condições iniciais próximas, nesse sentido, tempos de Lyapunov pequenos representam que o afastamento exponencial ocorre rapidamente, ao passo que tempos de Lyapunov grandes indicam que o afastamento exponencial é mais demorado. É possível encontrar algumas aplicações interessantes na

literatura para esse tempo característico em mapeamentos e sistemas Hamiltonianos. Podemos destacar suas aplicações em Mecânica Celeste, tanto no estudo do problema de três corpos [65], como órbitas de asteroides [66]. Um expoente Lyapunov positivo reflete um afastamento exponencial de duas condições iniciais muito próximas no espaço de fase. Para mapeamentos bidimensionais nós podemos obtê-lo usando a expressão

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\Lambda_n^{(j)}|, \quad (2.1)$$

com $j = 1, 2$ onde $\Lambda_n^{(j)}$ corresponde aos autovalores da matriz M , com $M = \Pi_{i=1}^n J_i(V_i, \phi_i) = J_n J_{n-1} J_{n-2} \dots J_2 J_1$, sendo J_i a matriz Jacobiana do mapeamento na i -ésima iteração. Como a convergência do expoente de Lyapunov é observada em grande escala de n , o acúmulo do produto das matrizes J_i pode levar ao crescimento muito rápido de seus coeficientes, dificultando a estimativa de λ . O algoritmo de triangularização evita esse problema [4]. Tal algoritmo consiste em reescrever J com $J = \Theta T$ com Θ sendo uma matriz ortogonal que obedece à propriedade de $\Theta^{-1} = \Theta^T$ e T é uma matriz triangular. Portanto, isso leva a

$$\Theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

com

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}.$$

Notamos que a matriz M pode ser escrita como

$$\begin{aligned} M &= J_n J_{n-1} J_{n-2} \dots J_2 J_1, \\ &= J_n J_{n-1} J_{n-2} \dots J_2 \Theta_1 \Theta_1^{-1} J_1. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Definindo $T_1 = \Theta_1^{-1} J_1$ e $\tilde{J}_2 = J_2 \Theta_1$ os coeficientes de T_1 são

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix}.$$

De $T_{21} = 0$ acabamos com $0 = -j_{11}\text{sen}(\theta) + j_{21}\cos(\theta)$ levando a

$$\frac{j_{21}}{j_{11}} = \frac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}. \quad (2.3)$$

em vez de usar $\theta = \arctg(j_{21}/j_{11})$, que é uma função numérica bastante cara computacionalmente, usamos as expressões de $\text{sen}(\theta)$ e $\cos(\theta)$ diretamente de J , daí

$$\cos(\theta) = \frac{j_{11}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}, \quad (2.4)$$

$$\text{sen}(\theta) = \frac{j_{21}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}. \quad (2.5)$$

As expressões de T_{11} e T_{22} podem ser escritas como $T_{11} = j_{11}\cos(\theta) + j_{21}\text{sen}(\theta)$ e também $T_{22} = -j_{12}\text{sen}(\theta) + j_{22}\cos(\theta)$ produzindo a seguinte expressão

$$T_{11} = \frac{j_{11}^2 + j_{21}^2}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}, \quad (2.6)$$

$$T_{22} = \frac{j_{11}j_{22} - j_{12}j_{21}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}. \quad (2.7)$$

Depois que T_{11} e T_{22} são conhecidos, a matriz $\tilde{J}_2$ é dada por $\tilde{J}_2 = J_2\Theta_1$

$$\begin{pmatrix} \tilde{j}_{11} & \tilde{j}_{12} \\ \tilde{j}_{21} & \tilde{j}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

O procedimento é então repetido para a segunda iteração e a terceira e qualquer iteração adicional do mapeamento até que a série completa de matrizes esteja esgotada. Os expoentes de Lyapunov são então dados por

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |T_{jj}^{(i)}|, \quad j = 1, 2. \quad (2.8)$$

Nas próximas seções aplicaremos esse método em dois mapeamentos, ilustrando assim tanto o método apresentado quanto os conceitos referentes ao tempo de Lyapunov.

2.2 O Tempo de Recorrência de Poincaré

Nos diversos ramos da física, matemática e filosofia da ciência, a ideia de estudar as recorrências de um sistema dinâmico deve-se ao francês Henri Poincaré [67]. O intuito de Poincaré foi observar as recorrências (retornos) das órbitas a uma mesma configuração, isto é, a uma mesma região I no espaço de fases. O sentido estrito de recorrência é satisfeito dentre sistemas determinísticos somente no caso de trajetórias periódicas, uma vez que, sendo a regra de evolução fixa e unívoca, um mesmo ponto evolui sempre da mesma forma. Entretanto, o sentido da recorrência de Poincaré consiste em verificar se uma órbita retorna a um ponto δ -próximo à condição inicial [19, 20, 21, 22], conforme ilustrado na Figura 2.1.

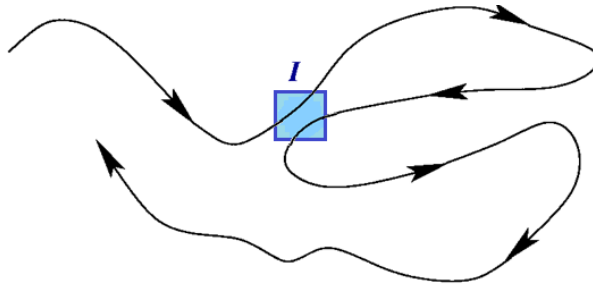


Figura 2.1: Representação esquemática da recorrência de uma órbita ao intervalo I do espaço de fases. Figura adaptada de Altmann 2004.

Uma órbita no espaço de fases é dita recorrente a um intervalo I_δ se, uma vez iniciada no ponto $\vec{x}_0 \in I_\delta$, $\forall \delta$ existir um tempo t^* tal que, após t^* , a trajetória encontra-se a uma distância $|\vec{x}_{t^*} - \vec{x}_0| \leq \delta$, ou seja, $\vec{x}_{t^*} \in I_\delta$ [68]. Com isso, Poincaré demonstrou que a recorrência não se restringe aos casos triviais de sistemas periódicos e quasi-periódicos, pois tal recorrência está associada ao retorno a um intervalo infinitesimal no espaço de fases.

Medir o tempo de recorrência de Poincaré pode nos dar informações sobre a dimensão da região analisada, uma vez que um ajuste em lei de potência do gráfico do tempo de recorrência médio $\langle t_r \rangle$ em função do tamanho da caixa selecionada δ nos dá o expoente τ , o qual em valor absoluto converge para a dimensão d_w quando $\delta \rightarrow 0$ [69]. Em geral, a

relação entre $\langle t_r \rangle$ e a região escolhida é dada da seguinte forma:

$$\langle t_r \rangle = \frac{1}{\delta^{d_w}}, \quad (2.9)$$

onde d_w é a dimensão da interseção da trajetória com o plano de Poincaré e δ o lado da caixa. Além disso, a dimensão d_w está relacionada com o expoente de difusão¹ μ por meio da seguinte equação

$$d_w = \frac{2}{\mu}, \quad (2.10)$$

a qual foi introduzida inicialmente em [70, 69]. No caso em que a dimensão d_w é inteira, recupera-se o conceito euclidiano de dimensão dos casos usuais. Por outro lado, as dimensões fracionárias permitem a generalização desse conceito para conjuntos mais complexos, sendo conhecidas como dimensões fractais, denominação dada por Mandelbrot [71].

É importante ressaltar que esses tempos característicos apresentam dependência às condições iniciais. Veremos que, se escolhermos um conjunto de condições iniciais situadas na região de *stickiness* extremo, em torno das ilhas de estabilidade, as órbitas apresentarão o mesmo comportamento de outra órbita dentro da ilha, isso por um certo intervalo de tempo. Após um tempo suficientemente longo essas condições iniciais se comportarão como órbitas caóticas exibindo difusão normal. Dessa forma, os tempos característicos podem nos ajudar a compreender essa complexidade estrutural da órbita.

Nas próximas seções estudaremos esses tempos característicos para dois mapeamentos bastante conhecidos na literatura, os quais possuem um papel importante na área de sistemas dinâmicos. O primeiro deles será o Mapa Padrão, também conhecido como Mapa de Chirikov-Taylor, e na sequência o Modelo Fermi-Ulam.

2.3 Tempos Característicos para o Mapa Padrão

O mapa padrão foi introduzido na seção 1.4, de onde vimos que o mesmo é um mapeamento não linear escrito em termos de duas variáveis dinâmicas cuja não linearidade

¹O expoente de difusão μ está relacionado com o desvio quadrático médio $\langle (y - y_0)^2 \rangle$ e o coeficiente de difusão D , através da seguinte expressão, $\langle (y - y_0)^2 \rangle = Dn^\mu$, onde n é o número de iterações.

é dada pela função seno da seguinte forma

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_n + k \sin \theta_n \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + I_{n+1}, \quad \text{mod}(2\pi) \end{aligned} \quad (2.11)$$

em que k é o parâmetro que controla a transição de integrável para não integrável, uma vez que para $k = 0$ a variável I se preserva, pois $I_{n+1} = I_n$ e dessa forma o mapeamento é integrável. Por outro lado, se $k \neq 0$ a variável I se relaciona diretamente à não linearidade do mapeamento e com isso o mapeamento é não integrável.

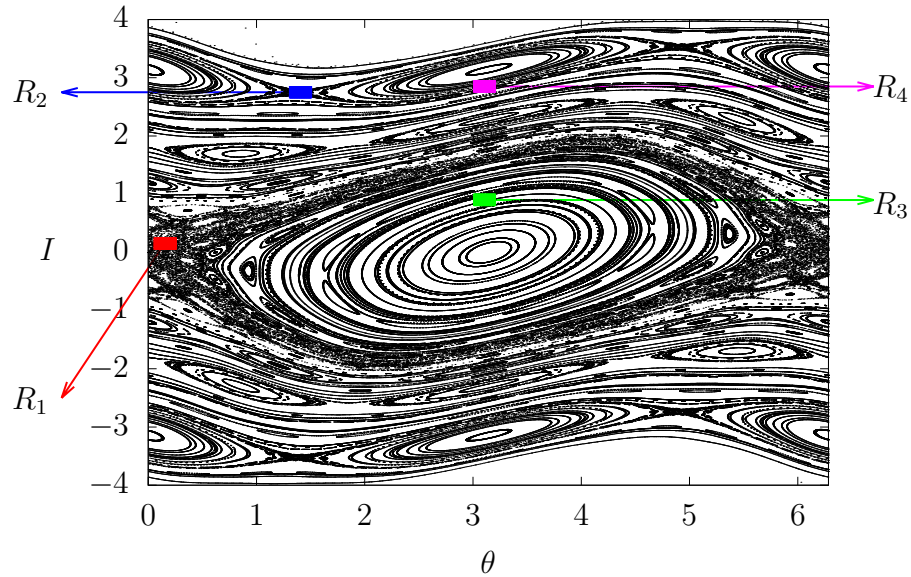


Figura 2.2: Espaço de fases para o mapa padrão com $k = 0,8$. São destacadas quatro regiões para as quais serão analisadas os tempos característicos definidos nas seções 2.2 e 2.1.

A fim de estudarmos os tempos característicos definidos na seção anterior, esboçamos na Figura 2.2 o espaço de fases para o Mapa padrão. Nessa figura destacamos quatro regiões para as quais calcularemos o tempo de recorrência de Poincaré médio $\langle t_r \rangle$ e o tempo de Lyapunov t_L . As regiões vermelha (R_1) e azul (R_2) estão imersas no caos, já as regiões verde (R_3) e rosa (R_4) foram escolhidas dentro das ilhas de estabilidade e ao longo das curvas invariantes *spanning*.

Primeiramente calculamos o expoente de Lyapunov para as diferentes regiões indicadas

na Figura 2.2 usando o algoritmo discutido na seção 2.1. A Figura 2.3 mostra a convergência do expoente positivo de Lyapunov e os resultados encontrados são apresentados na Tabela 2.1, tanto o expoente de Lyapunov λ quanto o tempo de Lyapunov $t_L = 1/\lambda$.

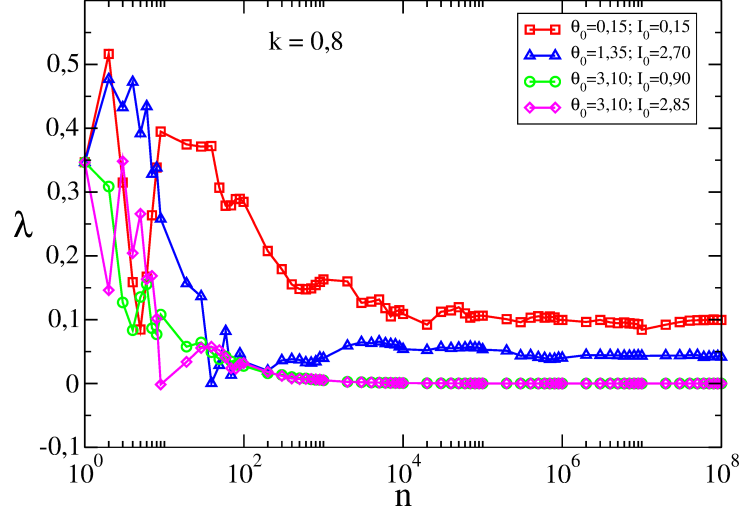


Figura 2.3: Evolução temporal do Expoente de Lyapunov positivo para as regiões indicadas no espaço de fases da Figura 2.2. O parâmetro de controle usado foi $k = 0,8$. Cada condição inicial foi evoluída até $n = 10^8$.

Tabela 2.1: Valores numéricos para λ e t_L para as regiões indicadas no espaço de fases da Figura 2.2.

Regiões	λ	$t_L = 1/\lambda$
R_1	0,101(7)	10,4(5)
R_2	0,042(2)	23,2(4)
R_3	$1,231(2) \times 10^{-5}$	$8,12(2) \times 10^4$
R_4	$1,576(3) \times 10^{-6}$	$6,35(3) \times 10^5$

Percebe-se que em R_3 e R_4 $\lambda \rightarrow 0$ e consequentemente $t_L \rightarrow \infty$, indicando a ausência de caos. Por outro lado, para R_1 e R_2 o tempo de Lyapunov t_L é relativamente pequeno, indicando que a trajetória de duas condições iniciais tomadas muito próximas divergem exponencialmente após poucas iterações.

Trazemos na Figura 2.4 o gráfico de t_L em função de k , é fácil perceber que o valor de t_L decresce a medida que aumentamos o valor do parâmetro de não linearidade k . Isso se deve ao fato de que no mapa padrão, à medida que aumentamos o valor de k , as estruturas periódicas e curvas invariantes vão sendo destruídas e o caos domina todo o sistema.

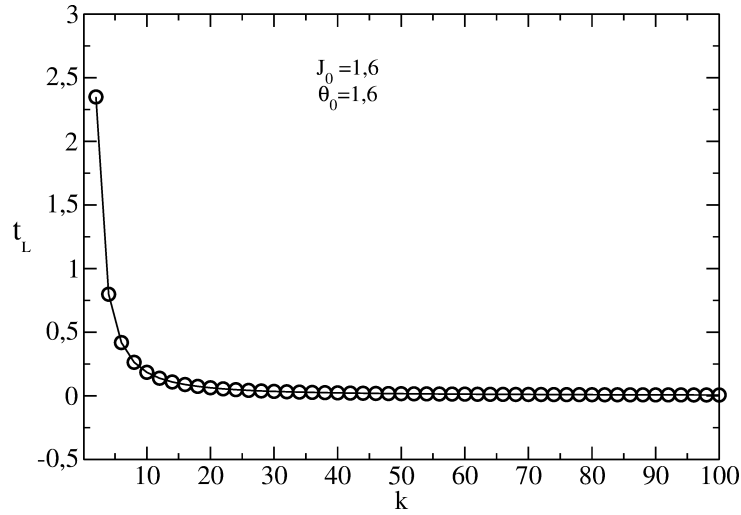


Figura 2.4: Gráfico do valor numérico de t_L em função de k medido para uma região caótica do espaço de fase.

Com relação ao tempo de recorrência de Poincaré médio $\langle t_r \rangle$, a Figura 2.5 mostra o gráfico de $\langle t_r \rangle$ em função do tamanho da caixa δ para as diferentes regiões destacadas no espaço de fases da Figura 2.2 para um número de aproximadamente 10^5 condições iniciais. As curvas verde e rosa correspondem ao movimento regular, ou seja, com condições iniciais tomadas dentro das ilhas de estabilidade. As outras curvas, azul e vermelha, correspondem às regiões caóticas, percebe-se que elas têm a mesma inclinação, porém, com valores de tempo de recorrência médios diferentes, tais valores estão relacionados com a área caótica disponível [69]. Como vimos na seção 2.2, os valores absolutos das inclinações do gráfico de $\langle t_r \rangle$ em funções de δ convergem para a dimensão fractal d_w a medida que $\delta \rightarrow 0$. Dessa forma, a inclinação para as regiões caóticas resulta em $d_w = 2$, igual a dimensão do mapeamento, enquanto para as condições iniciais tomadas dentro das ilhas de estabilidade nos leva à $d_w = 1$, assim como as curvas KAM dentro das ilhas de estabilidade que são objetos de dimensão 1.

Lembrando que a dimensão fractal d_w se relaciona com o expoente de difusão μ através da expressão $\mu = 2/d_w$, temos que para as condições iniciais tomadas no domínio caótico e longe das ilhas de estabilidade $\mu = 1$, que corresponde a difusão normal. Por outro lado, a dinâmica próxima às ilhas de estabilidade é bastante complicada, isso se deve ao fenômeno de *stickiness*, além disso, ele afeta a difusão das órbitas, pois as órbitas ficam

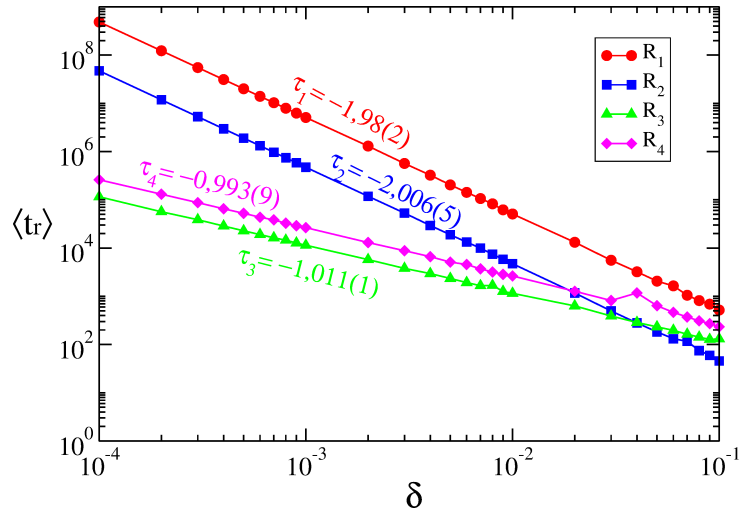


Figura 2.5: Tempo de recorrência de Poincaré médio em função do intervalo de recorrência δ para as diferentes regiões indicadas no espaço de fases apresentado na Figura 2.2.

presas próxima às ilhas por longos períodos de tempo até escaparem. Na Figura 2.6 (a) apresentamos novamente o espaço de fases para $k = 0,8$ e na Figura 2.6 (b) a mesma região, porém a escala de cores dada pelo tempo de recorrência de Poincaré médio em escala logarítmica. É possível notar que o fenômeno de *stickiness* também afeta o tempo de recorrência como pode ser confirmado pela Figura 2.6 (b) onde vemos que perto das ilhas o tempo de recorrência é maior comparado com outras regiões, claramente distinguível pela escala de cores.

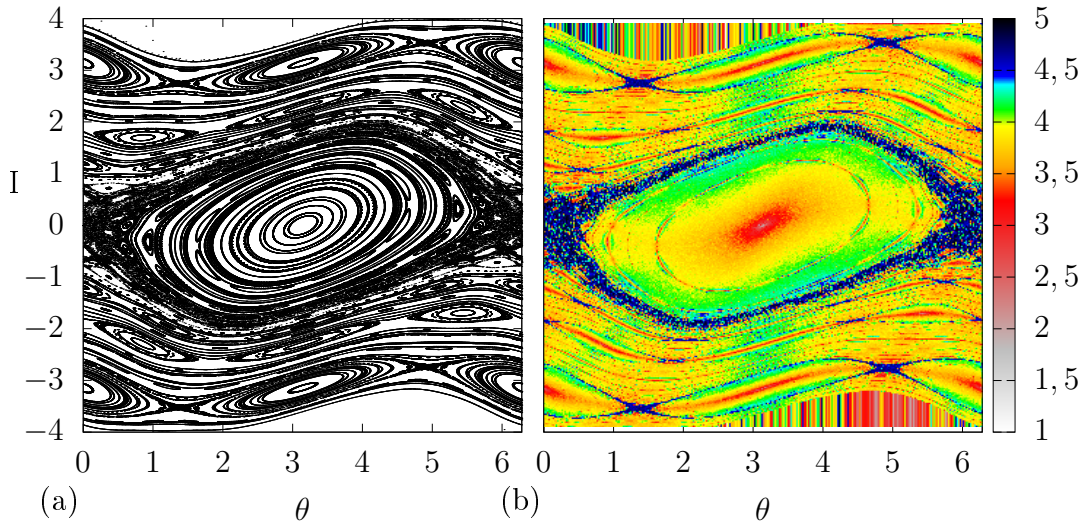


Figura 2.6: (a) Espaço de fases para o mapa padrão com $k = 0,8$. (b) Gráfico da mesma região de (a) com a escala de cores representando em escala logarítmica o tempo de recorrência de Poincaré médio $\langle t_r \rangle$.

2.4 Tempos Característicos para o Modelo Fermi-Ulam

O modelo Fermi-Ulam é composto de uma partícula clássica confinada, que move entre duas paredes rígidas como ilustrado na Figura 2.7. Uma é considerada fixa em $x = L$ enquanto a outra move periodicamente no tempo e sua posição é dada por $x_w(t) = X_0 \cos(\omega t)$ onde X_0 é a amplitude de movimento e ω é a frequência de oscilação. A partícula experimenta apenas colisões elásticas com a parede. A dinâmica da partícula é dada por um mapeamento bidimensional, não linear e preserva a área no espaço de fases, descrevendo como a velocidade da partícula e a fase da parede móvel se transformam do impacto n para o impacto $n + 1$.

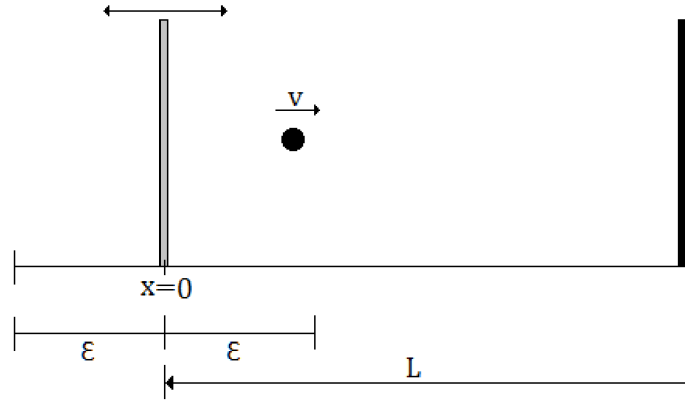


Figura 2.7: Representação esquemática do Modelo Fermi-Ulam. O movimento da parede móvel é dado por $x_w(t) = \epsilon \cos(\omega t)$. A parede fixa está localizada em $x = L$.

A versão do modelo que consideramos aqui é chamada de simplificada ou de paredes fixas [18]. Essa versão assume que, devido ao pequeno intervalo de valores considerados para o parâmetro de controle X_0 , ambas as paredes são consideradas fixas. Entretanto, quando a partícula colide com a parede da esquerda ela sofre uma troca de energia e momentum, como se a parede estivesse movendo. Esta versão do modelo retrata a maioria das propriedades da versão completa onde a parede móvel é considerada, incluindo a localização das regiões periódicas, determinação da posição de curvas invariantes *spanning* e escalas produzidas por ela [72]. No entanto, há a enorme vantagem de acelerar as simulações numéricas que a aproximação da parede estática possui em comparação com o

modelo completo, onde as equações transcendentais são obrigatórias para serem resolvidas.

Considerando um conjunto de variáveis adimensionais como $\varepsilon = X_0/L$, $V_n = v_n/(\omega L)$ com v_n representando a velocidade da partícula e $\phi = \omega t$, o mapeamento que descreve a dinâmica do modelo é escrito como

$$T : \begin{cases} \phi_{n+1} = \left[\phi_n + \frac{2}{V_n} \right] \bmod 2\pi \\ V_{n+1} = |V_n - 2\varepsilon \sin(\phi_{n+1})| \end{cases}, \quad (2.12)$$

onde o valor absoluto na segunda equação foi introduzido como uma forma de evitar que, após a colisão, a partícula tenha velocidade negativa [73].

O espaço de fases do modelo é mostrado na Figura 2.8 para o parâmetro de controle $\varepsilon = 10^{-3}$. É fácil notar uma estrutura mista, incluindo a presença de uma grande região caótica coexistindo com estruturas periódicas como ilhas elípticas e também curvas invariantes. Existem quatro regiões no espaço de fases identificadas na Figura 2.8, as quais correspondem aos domínios os quais investigaremos nas próximas seções, ou seja, R_1 e R_4 nas regiões caóticas e R_2 e R_3 ao longo das curvas invariantes e ilhas de estabilidade. O tamanho do mar caótico é marcado pela região mínima como a menor velocidade da parede, enquanto o limite superior é determinado pela curva invariante de menor energia da velocidade. Acima dessa curva, observa-se o caos local, enquanto abaixo dela existe o caos global.

Uma estimativa da posição da curva invariante de menor energia (primeira curva invariante *spanning*) para o modelo Fermi-Ulam pode ser obtida através de uma comparação com o mapa padrão. Assim, nas proximidades da curva invariante a segunda equação do mapeamento referente ao modelo Fermi-Ulam é escrita como $V_{n+1} = \tilde{V} + \Delta V_{n+1}$, onde $\tilde{V}$ nos dá um valor típico ao longo da curva invariante *spanning* e ΔV é a perturbação de $\tilde{V}$ que satisfaz a condição $\Delta V/\tilde{V} \ll 1$. Agora, a segunda equação do mapa (2.12) pode ser reescrita como $\Delta V_{n+1} = \Delta V_n - 2\varepsilon \sin(\phi_{n+1})$. Usando então a primeira equação do mapa

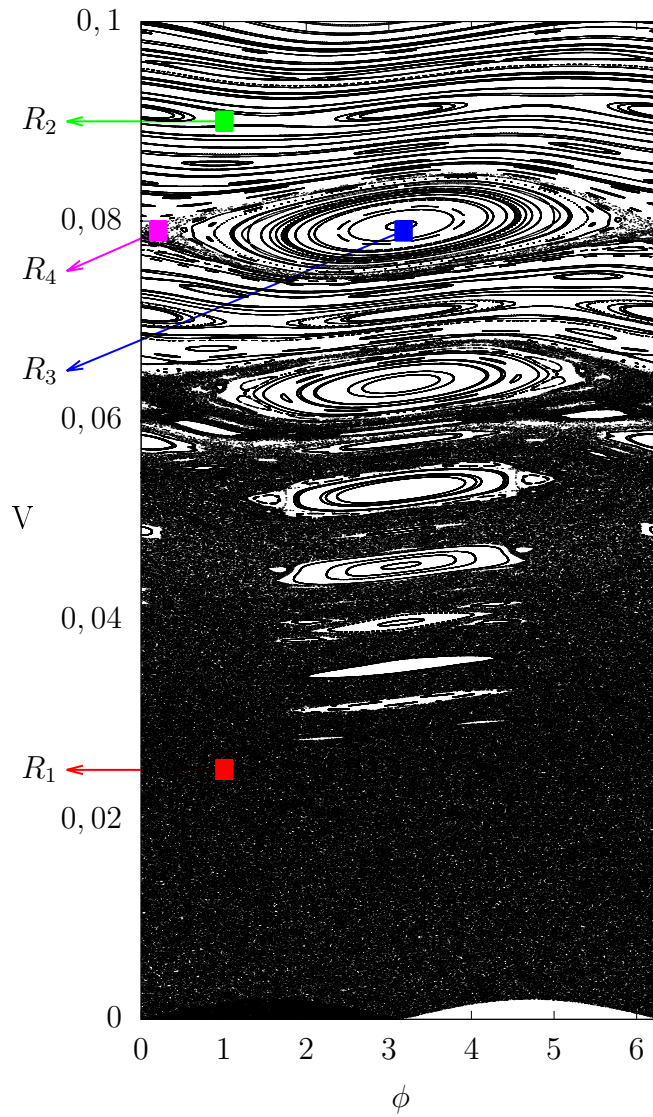


Figura 2.8: Representação gráfica do espaço de fase para o modelo Fermi-Ulam com a aproximação de paredes fixas. O parâmetro de controle usado foi $\varepsilon = 10^{-3}$.

(2.12), temos

$$\begin{aligned}\phi_{n+1} &= \phi_n + \frac{2}{\tilde{V} \left(1 + \frac{\Delta V_n}{\tilde{V}}\right)}, \\ &= \phi_n + \frac{2}{\tilde{V}} \left(1 + \frac{\Delta V_n}{\tilde{V}}\right)^{-1}.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Uma vez que $\Delta V/\tilde{V} \ll 1$, uma expansão em Taylor da Eq. (2.13) nos dá

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \frac{2}{\tilde{V}} - 2\frac{\Delta V_n}{\tilde{V}^2}.\tag{2.14}$$

Definindo

$$J_n = \frac{2}{\tilde{V}} \left[1 - \frac{\Delta V_n}{\tilde{V}} \right], \quad (2.15)$$

encontramos que $\phi_{n+1} = \phi_n + J_n$. Fazendo a álgebra apropriada, acabamos com

$$\begin{aligned} -\frac{2}{\tilde{V}^2} \Delta V_{n+1} + \frac{2}{\tilde{V}} &= -\frac{2}{\tilde{V}^2} \Delta V_n + \frac{2}{\tilde{V}} + \frac{4\varepsilon}{\tilde{V}^2} \sin(\phi_{n+1}), \\ J_{n+1} &= J_n + K_{ef} \sin(\phi_{n+1}). \end{aligned} \quad (2.16)$$

A equação (2.16) é dependente de um parâmetro efetivo K_{ef} e uma conexão com o mapa padrão é feita quando $\theta_{n+1} = \phi_n$ levando a

$$T_{fisc} : \begin{cases} \theta_{n+1} = [\theta_n + J_n] \bmod 2\pi \\ J_{n+1} = J_n + K_{ef} \sin(\theta_{n+1}) \end{cases}. \quad (2.17)$$

Como o mapeamento padrão fornece uma transição do caos local para o global em $K_c \cong 0,9716\dots$, uma estimativa da localização da primeira curva invariante *spanning* é dada por

$$\begin{aligned} \tilde{V} &= 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{K_{ef}}}, \\ \tilde{V} &= \frac{2}{\sqrt{0,9716\dots}} \sqrt{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\tilde{V} \sim \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon^{1/2}. \quad (2.19)$$

O expoente com ε desempenha um papel importante no regime de crescimento e saturação das curvas para a velocidade média. Conforme discutido em [72], o expoente da curva de $\bar{V}_{sat} \propto \varepsilon^\alpha$ com $\alpha = 1/2$ é um dos três expoentes críticos. O expoente que marca a difusão para baixa velocidade é $V \propto (n\varepsilon^2)^\beta$ com $\beta = 1/2$. O último expoente é obtido pela lei de escala $z = \alpha/\beta - 2$, logo $z = -1$.

A Figura 2.9 mostra a convergência do expoente de Lyapunov positivo, usando o algoritmo apresentado anteriormente, para regiões específicas definidas no espaço de fases. A região R_1 está marcada na cor vermelha na figura e evoluída a partir da condição inicial $(\phi_0 = 1,000, V_0 = 0,025)$, enquanto a região R_2 em verde é para $(\phi_0 = 1,000, V_0 = 0,090)$,

azul é para a região R_3 com $(\phi_0 = 3,170, V_0 = 0,080)$ e finalmente rosa é a região R_4 obtida para $(\phi_0 = 0,200, V_0 = 0,080)$. Um domínio caótico leva a uma convergência de $\bar{\lambda} = 1,665(3)$, enquanto regiões periódicas levam o expoente Lyapunov a convergir para o valor nulo.

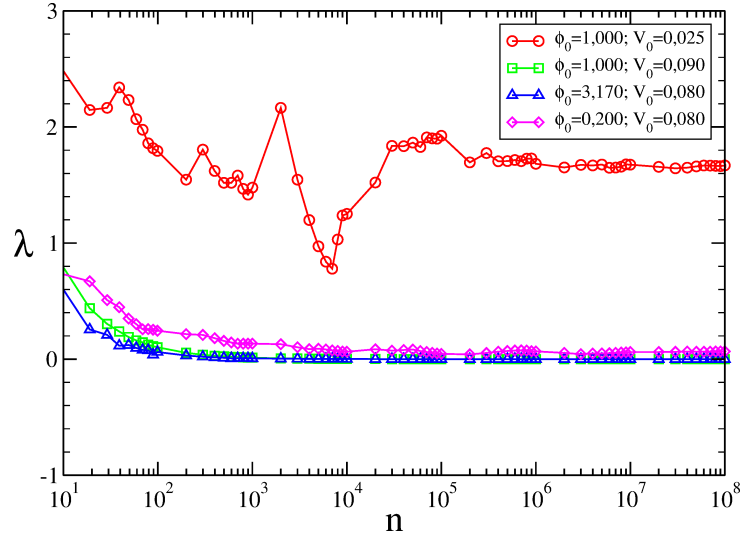


Figura 2.9: O gráfico ilustra a evolução temporal do expoente Lyapunov positivo para as regiões marcadas no espaço de fase da Figura 2.8. O parâmetro de controle usado foi $\varepsilon = 10^{-3}$. Cada condição inicial foi evoluída até $n = 10^8$ colisões com as paredes.

A tabela 2.2 resume o expoente Lyapunov e o tempo Lyapunov, definido como o inverso do expoente Lyapunov $t_L = 1/\lambda$. É importante notar que para as regiões caóticas (R_1 e R_4) o tempo de Lyapunov é relativamente curto, portanto, voltando ao conceito de tempo de Lyapunov, fica claro que para essas regiões o mapa mostra rapidamente um comportamento caótico. No entanto, para as regiões dentro das ilhas de estabilidade e ao longo das curvas invariantes (R_2 e R_3), o tempo de Lyapunov é significativamente grande, indicando ausência de caos. Ressaltamos que λ e t_L foram calculados para um número finito de iterações de 10^8 .

A Figura 2.10 mostra um gráfico de t_L vs. ε . Cada ponto da curva foi obtido após uma longa simulação de iterações de 10^8 para o cálculo de λ . Vê-se que t_L aumenta em média com o aumento de ε . O regime de crescimento para t_L é lento no início e acelera para $\varepsilon > 10^{-1}$. Na última janela do parâmetro de controle, entre 10^{-1} e 10^0 , a aproximação da parede estática, tem sérias limitações, já que o movimento da parede dependente do

Tabela 2.2: Valores numéricos para λ e t_L para as regiões indicadas no espaço de fases da Figura 2.8.

Regiões	λ	$t_L = 1/\lambda$
R_1	1,665(3)	0,600(1)
R_2	$1,598(1) \times 10^{-6}$	$62(5) \times 10^5$
R_3	$4,258(3) \times 10^{-7}$	$2348(4) \times 10^3$
R_4	$6,627(4) \times 10^{-2}$	15,089(9)

tempo afetaria, de fato, o formato do espaço de fase, levando a frequentes situações não físicas.

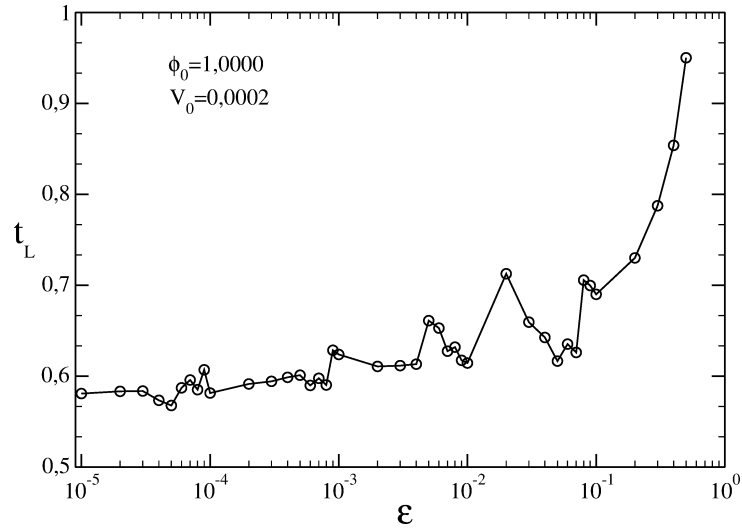


Figura 2.10: Gráfico do valor numérico de t_L em função de ε medido para uma região caótica do espaço de fase.

Diferentemente do que acontece no mapa padrão, onde o tempo de Lyapunov t_L é decrescente em relação ao parâmetro de não linearidade [69], para o modelo Fermi-Ulam t_L cresce a medida que aumentamos o parâmetro de não linearidade. Isso se deve ao fato de que, no mapa padrão, o aumento no parâmetro não linearidade faz com que as curvas invariantes e as estruturas estáveis sejam destruídas e o caos domine o sistema, enquanto no modelo Fermi-Ulam, mesmo com o aumento da não linearidade, curvas invariantes continuarão existindo. O limite superior do mar de caos está escalando com a localização da primeira curva invariante *spanning*, portanto, do tipo $V \propto \sqrt{\varepsilon}$.

Discutiremos agora o tempo de recorrência de Poincaré definido na seção 2.2, mas agora para o modelo Fermi-Ulam também definido anteriormente. A Figura 2.11 (a) mostra

uma ampliação do espaço de fases representado na Figura 2.8, onde duas ilhas de período 1 estão presentes, sendo uma acima e outra abaixo da primeira curva invariante *spanning*. Notamos também que entre as ilhas existe uma cadeia de ilhas menores e algumas regiões caóticas ao redor de cada uma delas, uma característica de um espaço de fases misto. Na Figura 2.11 (b) mostramos a mesma região da Figura 2.11 (a) mas com o esquema de cores representando o tempo de recorrência de Poincaré médio $\langle t_r \rangle$ plotado em escala logarítmica. Pela Figura 2.11 (b) é possível notar a separação de duas regiões do espaço de fases, uma em azul indicando que $\langle t_r \rangle$ está entre 10^5 e 10^6 enquanto na segunda, em laranja, indicando que $\langle t_r \rangle$ está entre 10^3 e 10^4 iterações. Vale ressaltar que o fenômeno de *stickiness* pode afetar o tempo de recorrência. Isso ocorre porque a órbita fica presa em determinada região do espaço de fases até escapar desse domínio e, eventualmente, retorna a uma posição próxima à condição inicial. Isso pode ser confirmado observando a Figura 2.11 (b) e observando que perto das ilhas, onde o *stickiness* ocorre, o tempo de recorrência é maior em comparação com outras regiões e claramente identificado na escala de cores.

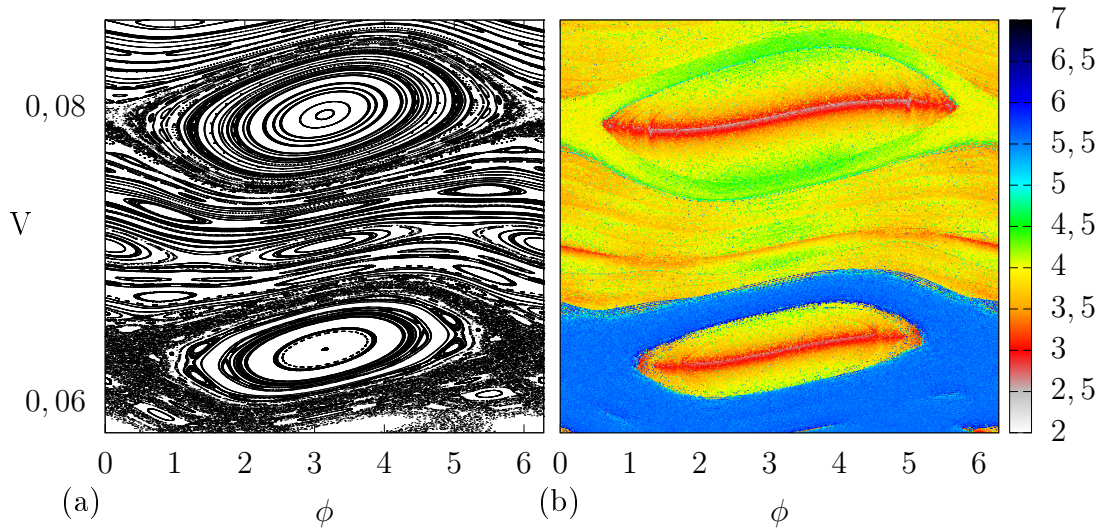


Figura 2.11: (a) Gráfico de uma região ampliada do espaço de fases mostrado na Figura 2.8 onde duas grandes ilhas são observadas, uma acima e outra abaixo da primeira curva invariante. (b) Gráfico da mesma região de (a) com a escala de cores representando em escala logarítmica o tempo de recorrência de Poincaré médio $\langle t_r \rangle$.

Assim como foi feito para o mapa padrão, podemos determinar a dimensão fractal através do tempo de recorrência de Poincaré médio. A Figura 2.12 mostra o gráfico

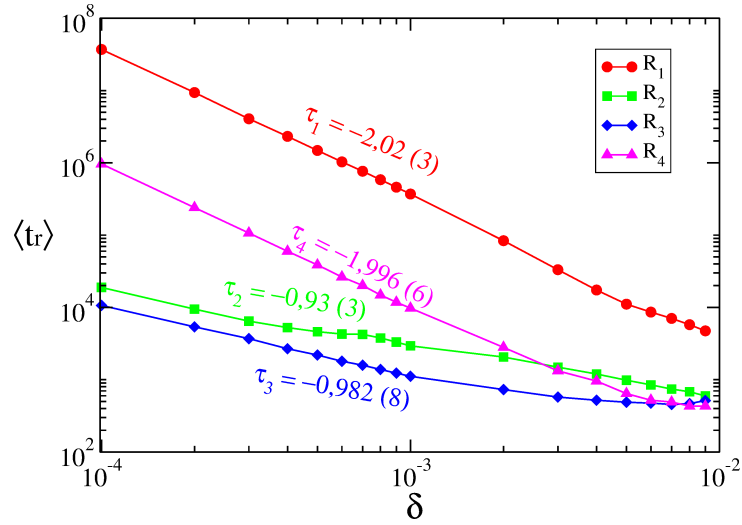


Figura 2.12: Gráfico do tempo de recorrência de Poincaré médio $\langle t_r \rangle$ em função do tamanho do intervalo de recorrência δ , para as diferentes regiões indicadas na Figura 2.8.

de $\langle t_r \rangle$ em função de ϵ onde dois comportamentos distintos são observados. Para as curvas relacionadas às condições iniciais tomadas nas regiões caóticas um ajuste em lei de potência nos revelou $\tau \approx -2$, enquanto para as condições iniciais tomadas dentro das ilhas de estabilidade e ao longo das curvas invariantes o ajuste nos forneceu $\tau \approx -1$. Vimos também que a dimensão fractal d_w está relacionada com o expoente de difusão μ através da equação 2.10, logo, para condições iniciais tomadas nas regiões caóticas, $d_w = 2$ levando a $\mu = 1$, que se refere a uma difusão normal [34, 35, 36].

CAPÍTULO 3

LOCALIZAÇÃO DE CURVAS INVARIANTES DO TIPO *SPANNING*

Nesse capítulo utilizaremos o critério de Slater para determinarmos a localização de curvas invariantes *Spanning*, assim como o parâmetro crítico a partir do qual tais curvas são destruídas. Parte dos resultados encontrados estão publicados em [74] e [75].

3.1 O Teorema de Slater

Várias técnicas têm sido propostas para investigar o comportamento de curvas invariantes, algumas analíticas [76] e outras numéricas [77, 78, 58]. Dentre elas, uma que vale a pena destacar é o método proposto por Greene [58] dado a sua alta precisão. No entanto, os métodos citados apresentam uma matemática complexa ou possuem uma implementação numérica difícil e cara do ponto de vista computacional. Assim, nossa proposta é usar um método alternativo baseado no Teorema de Slater, como em [79] e [80]. Sua implementação é relativamente simples e o custo computacional é baixo, se comparado aos outros métodos. E mesmo assim, esse método permite localizar essas curvas no espaço de fases com alta precisão. Além disso, é possível determinar o valor do parâmetro crítico

relacionado à destruição dessas curvas.

Para isso, considere um círculo unitário e um irracional ω (onde $\{x\}$ representa a parte fracionária de x) de tal forma que $\{N\omega\}$, com N inteiro, particiona o círculo em segmentos. Surpreendentemente, não importa qual ω e o número de passos N que se escolha, existirão apenas três tamanhos distintos desses segmentos. De acordo com Slater [81, 50], como consequência dos três segmentos, se considerarmos o tempo (iterações) entre a saída e o primeiro retorno ao intervalo conectado $\delta < 1$, isto é, $\{N\omega\} < \delta$, no máximo três diferentes tempos de retorno são esperados e fazem parte da expansão por frações contínuas do irracional ω ,

$$\omega = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots] \equiv a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots}}}}. \quad (3.1)$$

Nesse caso, $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_s] = \frac{P_s}{Q_s}$ representa uma aproximação de ordem s para esse irracional sendo chamada de convergente (Para mais detalhes veja o Apêndice A).

Para resolver o problema de distribuição da sequência $\{N\omega\} < \delta$, Slater começou mostrando que um número δ entre 0 e 1 pode ser escrito unicamente da seguinte forma,

$$\delta = (n+1)\eta_s + \eta_{s+1} + \psi \quad (0 < \psi \leq \eta_s), \quad (3.2)$$

onde n é inteiro e η_s é a sequência decrescente

$$\eta_s = (-1)^{s-1} (\omega Q_{s-1} - P_{s-1}), \quad (3.3)$$

com $\eta_s > 0$, $\eta_1 = \omega$ e $\eta_0 = 1$. Além disso, dado um irracional ω e o intervalo δ , existe um único par (n, s) que satisfaz a equação (3.2).

De acordo com Slater, as três recorrências, tal que $\{N\omega\} < \delta$, onde ω é irracional, são

dadas por

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= Q_{s-1}, \\ \Gamma_2 &= Q_s - (n+1)Q_{s-1}, \\ \Gamma_3 &= Q_s - nQ_{s-1},\end{aligned}\tag{3.4}$$

onde n e s são encontrados resolvendo a equação (3.2).

Assim, a distribuição da sequência $\{N\omega\} < \delta$ apresenta no máximo três tempos de recorrência, os quais são expressos pelos denominadores Q_s da expansão em frações contínuas do número ω . É possível perceber que um dos tempos de recorrência é sempre igual a soma dos outros dois, ou seja, $\Gamma_3 = \Gamma_1 + \Gamma_2$ e ainda que tais tempos vão sempre depender do valor de δ , que no caso equivale ao intervalo de recorrência. Dessa forma, o teorema de Slater pode ser enunciado como se segue.

Teorema 1 *Para qualquer intervalo de tamanho δ de uma trajetória quase-periódica, existem no máximo três diferentes tempos de recorrência: Γ_1 , Γ_2 e $\Gamma_3 = \Gamma_1 + \Gamma_2$.*

Como um exemplo, considere o irracional $\frac{1}{\gamma} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,618033988\dots$ (inverso do número de ouro $\gamma = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$) o qual tem expansão em frações contínuas mostrada na Tabela 3.1. Tomando $\delta = 0,01$, encontramos que a única solução da equação (3.2) é dada por $n = 0$ e $s = 11$. Dessa forma, de acordo com (3.4), para $\{N(1/\gamma)\} < 0,01$ temos $(Q_{10}, Q_{11}, Q_{11} - Q_{10}) = (89, 144, 55)$ não importando quão grande seja o valor de N . No entanto, tais tempos dependem do valor de δ , ou seja, se tomarmos agora $\delta = 0,001$ a solução de (3.2) ocorre para $n = 0$ e $s = 16$ levando a $(Q_{15}, Q_{16}, Q_{16} - Q_{15}) = (987, 1597, 610)$. Isso significa que a constante de translação de $1/\gamma$ em um círculo unitário retorna para um intervalo conectado de tamanho 0,001 apenas depois de, 987, 1597 ou 610 iterações e quanto menor o valor de δ maior serão os tempos de retorno relacionados a esse irracional.

Os resultados apresentados até aqui possuem uma conexão direta com sistemas dinâmicos pois, a parte regular do espaço de fases de mapas que preservam área são um conjunto de órbitas quase periódicas, as chamadas curvas invariantes. Além disso, tais curvas têm

Tabela 3.1: Representação em frações contínuas do irracional $1/\gamma$ assim como algumas de suas convergentes obtidas pelo truncamento da expansão.

s	a_s	Fração Contínua	Convergente $\frac{P_s}{Q_s}$
1	1	$[0;1]$	$1/1$
2	1	$[0;1,1]$	$1/2$
3	1	$[0;1,1,1]$	$2/3$
4	1	$[0;1,1,1,1]$	$3/5$
5	1	$[0;1,1,1,1,1]$	$5/8$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10	1	$[0;1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]$	$55/89$
11	1	$[0;1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]$	$89/144$
12	1	$[0;1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]$	$144/233$
13	1	$[0;1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]$	$233/377$
14	1	$[0;1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]$	$377/610$
15	1	$[0;1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]$	$610/987$
16	1	$[0;1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]$	$987/1597$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

rotação irracional no espaço de fases, podendo ser relacionadas com uma simples rotação de um círculo. A diferença é que a rotação dos pontos que compõem as curvas invariantes no espaço de fase não são uniformemente distribuídas como a rotação sobre o círculo descrito anteriormente. Sendo assim, buscaremos nas próximas seções aplicar o teorema de Slater no estudo de curvas invariantes para diferentes mapeamentos que preservam área.

3.2 A última curva invariante do mapa padrão

Consideremos novamente o mapa padrão dado pela equação,

$$\begin{aligned}
 I_{n+1} &= I_n + k \sin \theta_n \\
 \theta_{n+1} &= \theta_n + I_{n+1}, \quad \text{mod}(2\pi)
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

como pode ser observado na Figura 3.1, para $k = 0,5$ o espaço de fases é basicamente composto por curvas invariantes, onde algumas são ilhas periódicas e outras curvas invariantes *spanning*. À medida que aumentamos o valor de k algumas dessas estruturas vão sendo destruídas dando lugar ao caos, por exemplo, para $k = 0,75$ e $k = 0,97$. Para $k = 2,0$ o

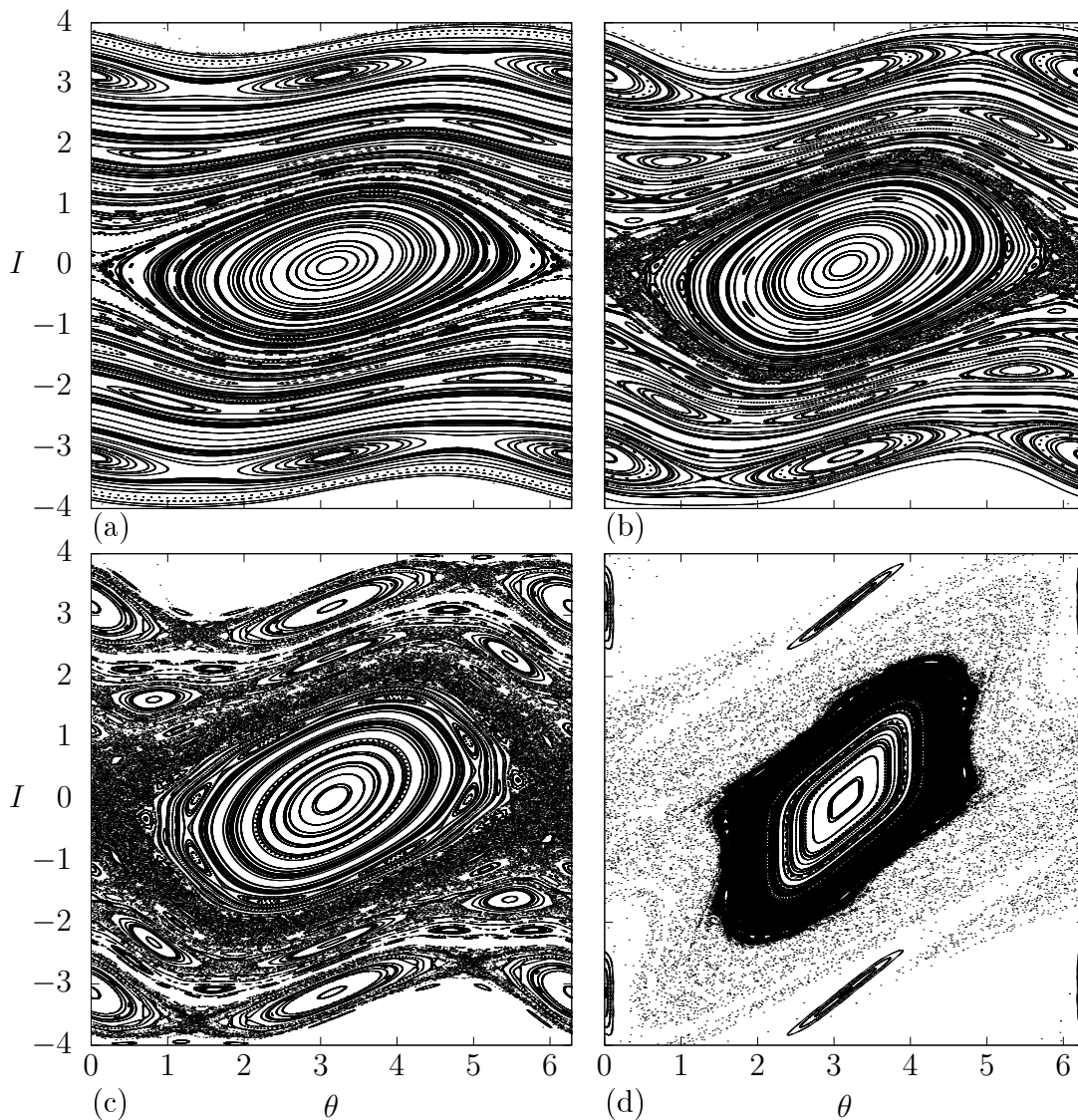


Figura 3.1: Esboço do espaço de fases para o mapa padrão mostrando a transição de caos local para caos global, considerando os seguintes parâmetros: (a) $k = 0,50$; (b) $k = 0,75$; (c) $k = 0,97$; e (d) $k = 2,00$.

espaço de fases mostra a completa ausência de curvas invariantes *spanning* e o caos deixa de ser local e passa a ser global [18]. Diante disso, fica claro que deve existir um valor crítico de k que marca essa passagem de caos local para caos global.

Ao longo dos anos diversos pesquisadores têm se dedicado a estudar esse valor crítico de k , dentre eles podemos destacar Herman [82] que determinou o limite inferior necessário para a existência de curvas invariantes *spanning* de $k = 1/34$, embora esse resultado seja muito melhor que as estimativas anteriores a ele, ainda está claramente abaixo do valor crítico de k mais preciso. Destacamos ainda Liberman e Lichtenberg [83], eles mostraram

que para $k = 2$ nenhuma curva invariante é observada. Mais tarde Mather [84] conseguiu melhorar esse resultado chegando a $k = 4/3$. Mackay e Percival [76] usando a técnica de Mather obtiveram $k = 63/64 \approx 0,9844$. Este resultado é bem próximo da estimativa mais precisa para o valor de k , que é de $k = 0,971635...$ obtida por Greene [85, 58].

Mais recentemente, a fim de estudar o rompimento da última curva invariante *spanning* com alta precisão, os autores em [80] utilizaram os três tempos de recorrência de Slater para determinar o valor crítico de k . Nossa proposta é utilizar a mesma técnica, primeiramente para o mapa padrão, recuperando alguns resultados presentes na literatura e posteriormente para outros modelos.

Consoante a teoria KAM, curvas invariantes com número de rotação suficientemente irracional persistem quando a perturbação é suficientemente pequena. Alternativamente, quando a perturbação é grande o suficiente, todas as curvas invariantes são destruídas. Greene [58] conjecturou que a última curva invariante para o Mapa Padrão tem número de rotação o mais irracional possível, ou seja, aquele que possui a convergência mais lenta em sua expansão em frações contínuas. Isso ocorre quando os elementos a_i da expansão são iguais a 1, como ocorre para $1/\gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = [0; 1, 1, 1, \dots]$. Porém, a formulação que estamos usando para o mapa padrão é modulada em 2π , e nesse caso o mapa padrão não apresenta curvas invariantes com número de rotação igual a $1/\gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ como acontece quando as equações do modelo estão moduladas em 1. No entanto, $(1 - 1/\gamma) = [0; 2, 1, 1, 1, \dots]$ tem a mesma cauda de fração contínua que $1/\gamma$ e esse número de rotação aparece no mapa padrão [86]. Na Tabela 3.2 mostramos a expansão em frações contínuas de $(1 - 1/\gamma)$, assim como suas convergentes $\frac{P_s}{Q_s}$. Note que Q_s satisfaz a seguinte equação de recorrência

$$Q_s = Q_{s-2} + Q_{s-1}, \quad (3.6)$$

para $s = 3, 4, \dots$ com $Q_1 = 2$ e $Q_2 = 3$, gerando a tão conhecida sequência de Fibonacci, da mesma que forma que ocorria para a expansão de $1/\gamma$. Então, baseado no Teorema de Slater, os tempos de retorno para uma curva com número de rotação $\omega = (1 - 1/\gamma)$ são números consecutivos da sequência de Fibonacci.

Conforme definimos na seção 2.2, o tempo de recorrência é definido pelo tempo que

Tabela 3.2: Representação em frações contínuas do irracional $(1 - 1/\gamma)$ assim como algumas de suas convergentes obtidas pelo truncamento da expansão.

s	a_s	Fração Contínua	Convergente $\frac{P_s}{Q_s}$
1	2	$[0;2]$	$1/2$
2	1	$[0;2,1]$	$1/3$
3	1	$[0;2,1,1]$	$2/5$
4	1	$[0;2,1,1,1]$	$3/8$
5	1	$[0;2,1,1,1,1]$	$5/13$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10	1	$[0;2,1,1,1,1,1,1,1,1,1]$	$55/144$
11	1	$[0;2,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]$	$89/233$
12	1	$[0;2,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]$	$144/377$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

uma trajetória leva entre a saída do intervalo δ e o primeiro retorno. Dessa forma, conforme o teorema de Slater [50], para qualquer intervalo δ de uma curva invariante, temos no máximo três diferentes tempos de recorrência, sendo o maior deles a soma dos outros dois. Sendo assim, o método consiste em procurar a curva que apresente apenas três tempos de recorrência e que esses três tempos sejam números consecutivos na sequência de Fibonacci.

Para iniciar nosso procedimento e determinar a localização da curva com número de rotação $\omega = (1 - 1/\gamma)$ no espaço de fases, tomamos condições iniciais ao longo da linha $\theta = 3,0$ (Figura 3.2). Cada condição inicial é considerada o centro de um quadrado de lado δ , as quais iteramos um número grande de vezes até encontrarmos os tempos de recorrência. A condição inicial que possuir tempos que sejam iguais a três denominadores consecutivos da expansão em frações contínuas do irracional ω , ou seja, que apresente apenas três tempos de recorrência e que esses tempos sejam números consecutivos da sequência de Fibonacci, pertence à curva invariante procurada. Nosso procedimento começa para $k = 0,97$ com intervalo de recorrência $\delta = 10^{-3}$ iterando cada condição inicial 10^5 vezes. Nesse caso, a primeira condição inicial que satisfaz as condições do teorema é $(\theta = 3,0; I = 2,476126567)$ e com tempos de recorrência $\Gamma_1 = 6765$, $\Gamma_2 = 10946$ e $\Gamma_3 = 17711$. Para esses parâmetros, $\frac{P_s}{Q_s} = \frac{6765}{17711} = 0,38196600982$, que corresponde a uma aproximação do número de rotação $\omega = (1 - 1/\gamma) = 0,3819660112501051\dots$. A fim de melhor nossa estimativa, diminuimos o tamanho do intervalo de recorrência para

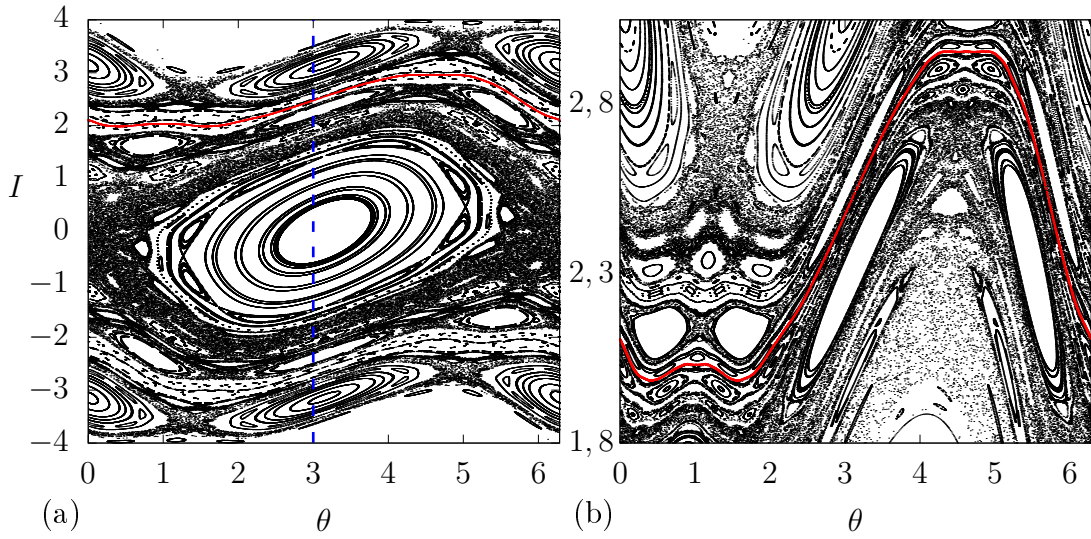


Figura 3.2: (a) Espaço de fases para o Mapa Padrão dado pela equação 3.5 com $k = 0,97$. A curva invariante *spanning* encontrada pelo teorema de Slater está destacada em vermelho. (b) Ampliação do espaço de fases de (a), nas proximidades da curva invariante.

$\delta = 10^{-4}$ com 10^6 iterações, onde obtemos $(\theta = 3,0; I = 2,47612656927)$, $\Gamma_1 = 121393$, $\Gamma_2 = 196418$, $\Gamma_3 = 317811$ e $\frac{P_s}{Q_s} = \frac{121393}{317811} = 0,38196601124$ que é ainda mais próximo do valor exato de ω . Note que quanto menor o valor de δ maiores são os tempos de recorrência e consequentemente mais próximos do valor exato de ω nos encontramos, porém, deve-se ter cuidado na escolha de δ , pois quanto maiores os tempos de recorrência maior deve ser o número de iterações para conseguirmos observar tais tempos e isso pode ficar caro do ponto de vista computacional.

Agora para determinar o parâmetro crítico k_c para a curva encontrada, repetimos o processo discutido anteriormente mudando sutilmente o valor do parâmetro k até que os três tempos não sejam mais observados. Lembrando que não são quaisquer tempos, pois como afirma o teorema de Slater, tais tempos devem fazer parte da expansão em frações contínuas do número de rotação ω , mais precisamente que eles sejam denominadores consecutivos das convergentes de ω . Além disso, segundo o teorema, não pode ocorrer a quarta recorrência. Seguindo esse procedimento encontramos como parâmetro crítico $k_c = 0,97163506$, o qual é muito próximo do resultado $k_c = 0,971635\dots$ encontrado por Greene [58].

3.3 Curvas invariantes no Modelo Fermi-Ulam

Retomemos agora o modelo Fermi-Ulam visto na seção (2.4) e dado pelo mapeamento

$$T : \begin{cases} \phi_{n+1} = \left[\phi_n + \frac{2}{V_n} \right] \bmod 2\pi \\ V_{n+1} = |V_n - 2\epsilon \sin(\phi_{n+1})| \end{cases} . \quad (3.7)$$

Vimos que esse modelo também apresenta um espaço de fases do tipo misto, através do qual é possível notar a presença de um grande mar de caos coexistindo com ilhas de estabilidade e curvas invariantes do tipo *spanning*, além disso, a posição dessas curvas variam de acordo com o parâmetro ϵ . A diferença é que o modelo Fermi-Ulam sempre apresenta curvas invariantes *spanning* independente do valor do parâmetro de não linearidade.

Ao longo dos anos há uma grande variedade de trabalhos envolvendo tal modelo, nos quais cientistas procuram compreender e explorar suas propriedades. Isso se deve a relevância que ele tem na área de sistemas dinâmicos e dinâmica não linear. Entre esses trabalhos, é importante destacar a pesquisa de Lieberman e Lichtenberg em [83], onde os autores reduziram o problema de Fermi a forma Hamiltoniana e usando essa técnica eles estimaram a localização de barreiras no espaço de fases do sistema. No entanto, a determinação dessas barreiras com alta precisão ainda é pouco explorada para esse modelo. Trabalhos como [87] e [88] apenas confirmam a existência dessas curvas, mas não mostram suas posições no espaço de fases, nem preveem o parâmetro a partir do qual essas curvas são destruídas. Dessa forma, nossa proposta é fazer um estudo dessas curvas com a utilização do teorema de Slater, assim como foi feito para o Mapa Padrão.

O primeiro passo para iniciarmos o estudo das curvas invariantes para o modelo Fermi-Ulam, utilizando o teorema de Slater, é definir o número de rotação a ser investigado. John Greene em [58] conjecturou que curvas invariantes com número de rotação nobre são localmente robustas. Um número irracional ω é dito nobre se sua expansão em frações contínuas possui uma sequência infinita de 1's a partir de algum ponto, isto é, $\omega \equiv [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \bar{1}]$. Complementarmente a teoria de Greene, Fox em [89] mostrou que curvas invariantes com números nobres são localmente mais robustas mesmo para modelos diferentes do Mapa Padrão. MacKay e Stark em [90] apresentaram fortes evidências

numéricas a respeito da robustez de curvas com número de rotação nobre, onde eles evidenciaram a robustez de curvas com números de rotação nobre em vários modelos padrões generalizados. Assim, nossa proposta é analisar uma família de curvas invariantes com número de rotação do tipo $\omega = [a_0; \bar{1}]$. Números nobres desse tipo são considerados os mais irracionais, no sentido de que eles são menos facilmente aproximados por racionais e, portanto, têm uma convergência mais lenta em suas expansões em frações contínuas. Em vista disso, acreditamos que curvas com números de rotação desse tipo são mais robustas, pelo menos, localmente. Assim, determinaremos com alta precisão a posição de algumas dessas curvas e estudaremos a destruição delas encontrando o parâmetro crítico ϵ_c a partir do qual tais curvas são destruídas.

Começamos nossa investigação com o número de rotação igual à média dourada $\gamma = [1; \bar{1}]$ ou algum deslocamento inteiro desse valor $\omega = [a_0; \bar{1}]$, dessa forma, a sequência gerada pelos denominadores das convergentes (Q_n) será sempre a mesma e gerará a sequência de Fibonacci. Então fixamos o valor da variável angular em $\phi = 3,0$ e variamos o valor da ação V . Para cada par (ϕ_0, V_0) aplicamos o teorema de Slater, ou seja, calculamos o número de iterações que uma órbita leva para retornar a um intervalo δ próximo de onde ela partiu (ϕ_0, V_0) . Uma vez calculado esses tempos, se existem apenas três tempos distintos, pelo teorema de Slater é possível concluir que o ponto (ϕ_0, V_0) pertence a uma curva invariante. Se, além disso, esses três tempos são números consecutivos na sequência de Fibonacci, isso significa que essa curva invariante é robusta. Se não, nós damos um passo ΔV na variável ação e repetimos o procedimento indicado acima até que o teorema seja obedecido e o par (ϕ_c, V_c) para o qual a condição foi satisfeita pertence a uma curva invariante *spanning* procurada.

Na Figura 3.3 a curva destacada em vermelho obedece ao teorema de Slater e foi obtida usando o método descrito anteriormente. Para essa curva os tempos de retorno encontrados foram $\Gamma_1 = 75025$, $\Gamma_2 = 121393$ e $\Gamma_3 = 196418$, com intervalo de recorrência $\delta = 1 \cdot 10^{-4}$, passo $\Delta V = 1 \cdot 10^{-13}$ e $(\phi_c = 3,0, V_c = 0,0481812264816)$. Curvas desse tipo desempenham um papel importante no confinamento e transporte de órbitas, uma vez elas atuam como barreiras e separam áreas caóticas no espaço de fases.

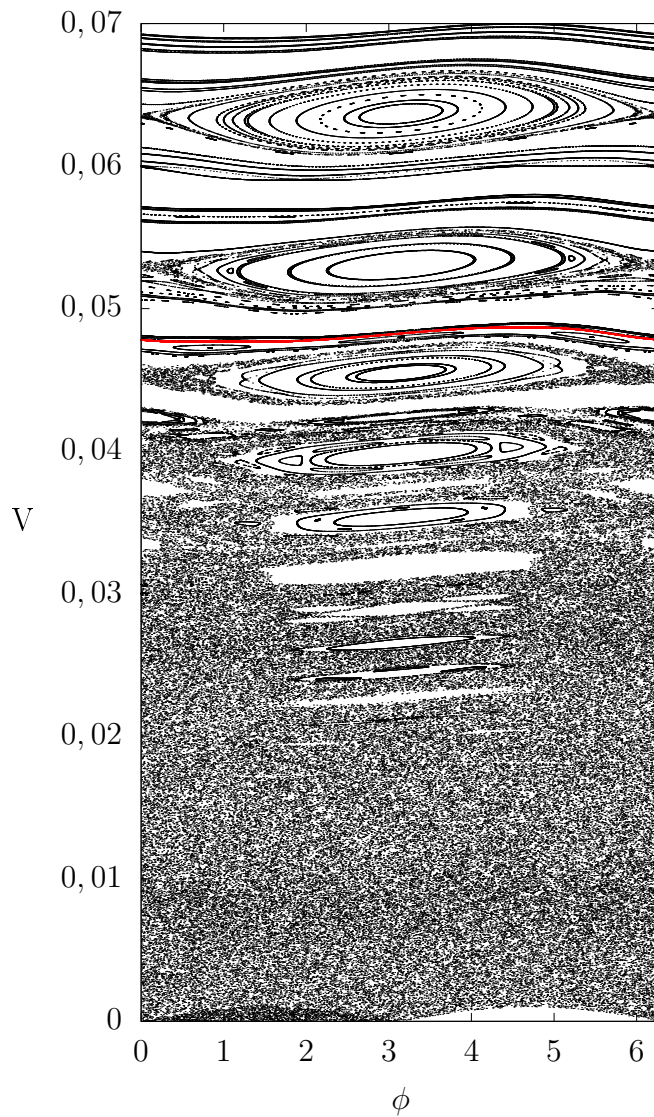


Figura 3.3: Espaço de fases para o Modelo Fermi-Ulam dado pela equação (3.7) com a curva invariante encontrada pelo teorema de Slater destacada em vermelho (curva 1).

Agora usaremos esse método para determinar o parâmetro ϵ_c a partir do qual a curva é destruída. No entanto, é importante ressaltar que, novamente, a posição da curva varia sutilmente a medida que variamos o valor de ϵ , dessa forma, a determinação de ϵ_c requer sucessivas aplicações do método usado para encontrar a curva. Sendo assim, uma vez que um ponto (ϕ_0, V_0) da curva é determinado pelo procedimento indicado anteriormente, aumentamos sutilmente o valor de ϵ e repetimos o procedimento para encontrar a nova posição da curva. Esse procedimento é repetido até que a previsão do teorema de Slater não seja mais observada. E o último valor de ϵ para o qual a condição foi satisfeita é o parâmetro crítico ϵ_c para a curva estudada. Isso significa que na vizinhança dessa curva,

as outras curvas invariantes já foram destruídas, sobrando apenas ela ou uma fina camada que a contém.

Aplicando essa técnica para a curva destacada na Figura 3.3 (curva 1), encontramos que o parâmetro crítico para essa curva é $\epsilon_c = 0,0005652$, isso significa que a partir desse valor essa curva é destruída. Ou seja, para $\epsilon < \epsilon_c$ existem outras curvas invariantes *spanning* perto da curva 1. Para $\epsilon = \epsilon_c$ a curva 1 ainda existe, levando a crer que tal curva é realmente bastante robusta. Porém, para $\epsilon > \epsilon_c$ essa curva e também outras estruturas são destruídas dando lugar ao caos.

A fim de investigar com mais detalhes a vizinhança da curva 1, aplicamos novamente o teorema de Slater, agora para uma região perto dessa curva como mostrado na Figura 3.4. Nesta parte da análise não escolhemos o valor do número de rotação, mas sim fizemos uma varredura ao longo da linha $\phi = 3,0$, correspondendo a linha tracejada na cor magenta nas Figuras 3.4 (a,b), e com um passo na variável V na ordem de 10^{-6} . Para cada par (ϕ_0, V_0) checamos se o teorema de Slater foi satisfeito, ou seja, possui apenas três tempos de retorno sendo o maior deles a soma dos outros dois. Em caso afirmativo, conforme o teorema, o par (ϕ_0, V_0) pertence a uma órbita quase periódica, que pode ser, por exemplo, uma curva *spanning* ou uma ilha. Na Figura 3.4 (a), onde $\epsilon < \epsilon_c$, o teorema foi satisfeito algumas vezes, nesses casos destacamos em azul algumas dessas curvas. Fazendo o mesmo procedimento para $\epsilon = \epsilon_c$ (Figura 3.4 (b)) encontramos algumas ilhas que apresentaram os tempos de recorrência segundo o teorema de Slater, as quais destacamos novamente em azul. No entanto, não encontramos outras curvas *spanning* nessa região que obedecem ao teorema, apenas a curva 1. Isso indica que a curva estudada está em uma camada fina e robusta e que ela é a curva invariante *spanning* mais robusta na região analisada ou está muito perto dela. Para $\epsilon > \epsilon_c$ a curva 1 também é destruída permitindo que o caos avance.

Estendendo o teorema de Slater para outras regiões do espaço de fases, mais precisamente para regiões de alta energia, foi possível encontrar outras curvas que também satisfazem ao teorema. Todas as curvas destacadas na Figura 3.5 obedecem ao teorema. Essas curvas têm número de rotação igual a média dourada γ , ou um deslocamento inteiro desse valor. Portanto, os tempos de recorrência são números consecutivos da sequência de

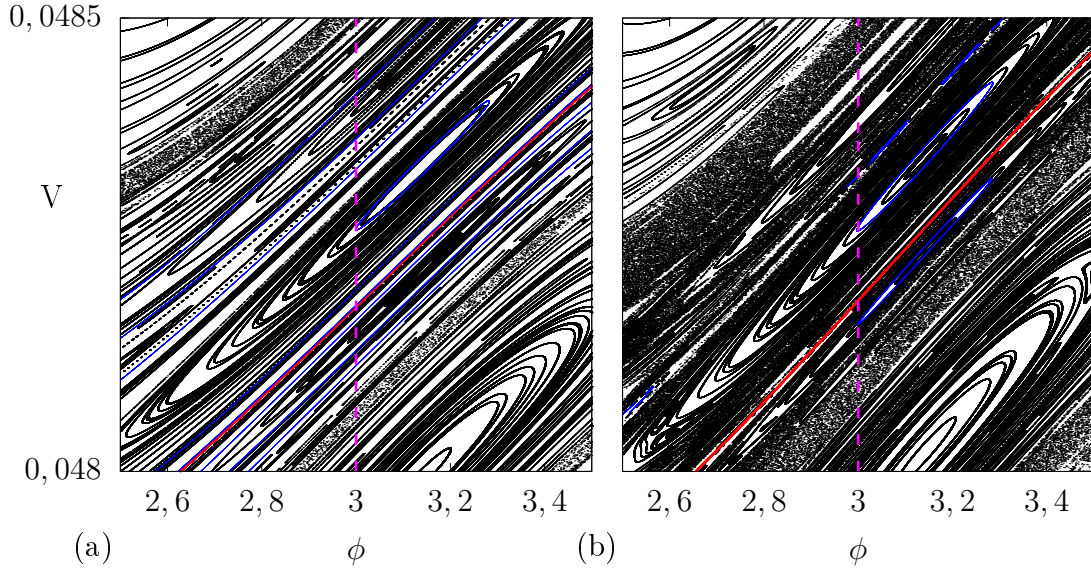


Figura 3.4: Ampliação do espaço de fases na vizinhança da curva 1 (curva vermelha). As curvas em azul satisfazem ao Teorema de Slater. (a) $\epsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ e (b) $\epsilon = \epsilon_c = 5,652 \cdot 10^{-4}$.

Fibonacci. Na Tabela 3.3 resumimos a posição de cada uma dessas curvas assim como o parâmetro crítico encontrado para cada uma delas. Esses resultados nos permitem verificar que as curvas são consecutivamente destruídas, começando pela de menor energia (curva 1) até a de maior energia (curva 6). Tais resultados são mostrados no gráfico da Figura 3.6 e com uma lei de potência recuperamos o expoente de saturação $\alpha = 1/2$.

Com o teorema é possível analisar outras curvas com números de rotação diferentes de $\omega = [a_0; \bar{1}]$, tal como as curvas com número de rotação $\omega = [a_0; 2, \bar{1}]$. Curvas com esses números de rotação têm convergentes $\left(\frac{P_s}{Q_s}\right)$ tal que a sequência gerada por Q_s continua satisfazendo a equação de recorrência (3.6), agora com $q_1 = 1$ e $q_2 = 2$. Assim, os tempos de retorno para essas curvas são números consecutivos dessa nova sequência. Por exemplo, a curva com número de rotação $\omega = [6; 2, \bar{1}]$ está localizada na vizinhança da curva 1 e tem tempos de retorno $\Gamma_1 = 121393$, $\Gamma_2 = 196418$ e $\Gamma_3 = 317811$, com $\delta = 10^{-4}$ e passo $\Delta V = 10^{-13}$ e $(\phi = 3.0, V_0 = 0,0496539561477)$. Com relação ao parâmetro crítico encontramos para essa curva $\epsilon_c = 0,00051$, o que significa que essa curva é destruída antes da curva 1 com $\omega = [6; \bar{1}]$.

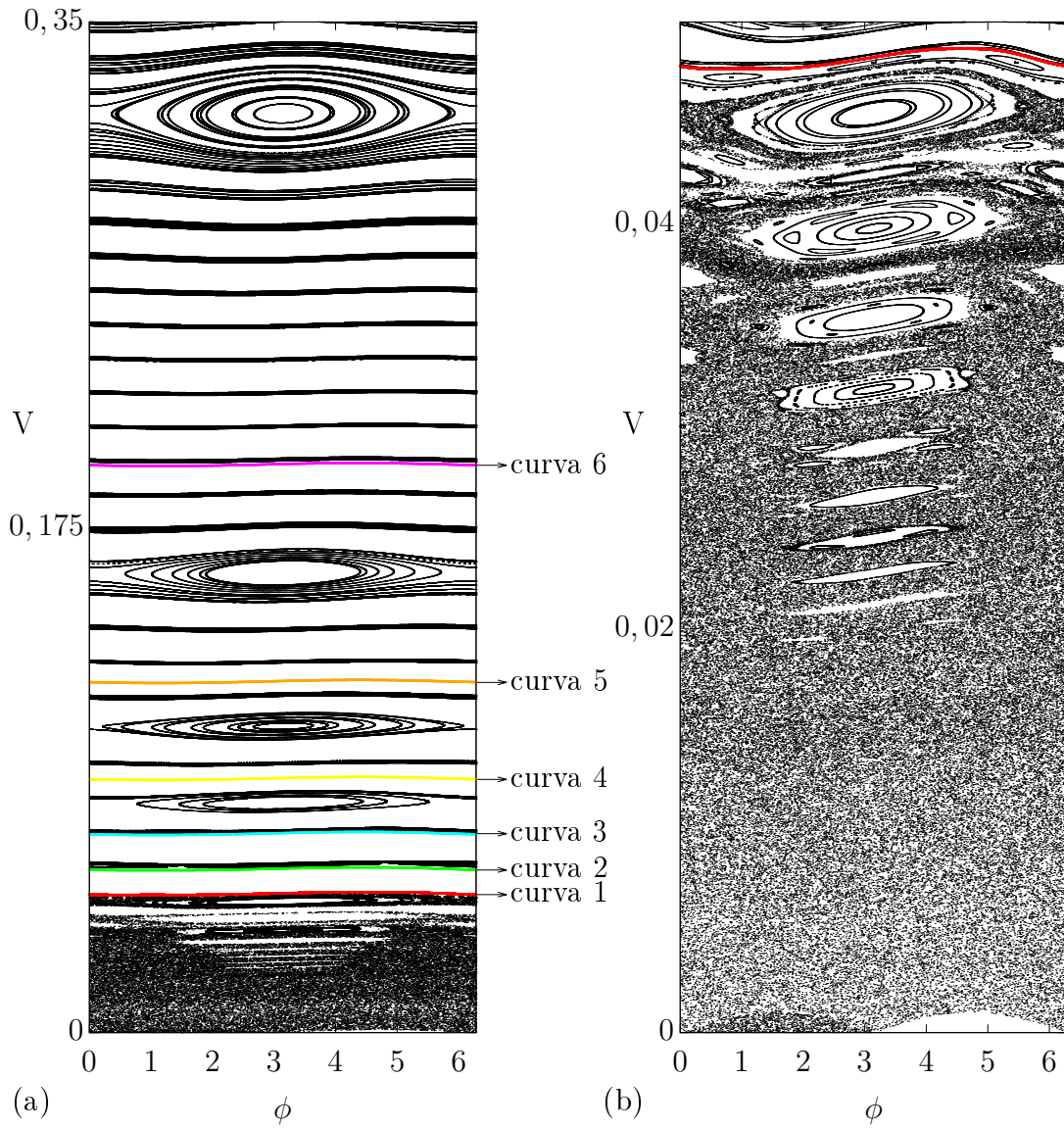


Figura 3.5: (a) Espaço de fase para o Modelo de Fermi-Ulam com $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$. Todas as curvas invariantes encontradas pelo Teorema de Slater são destacadas. (b) Ampliação da região abaixo da primeira curva invariante *spanning* (curva vermelha).

Tabela 3.3: Valor de ε crítico para cada uma das curvas da Figura 3.4.

	ε_c	V
Curva 1	0,0005652	0,04818861506
Curva 2	0,0007850	0,05678598945
Curva 3	0,0011640	0,06911780565
Curva 4	0,0019000	0,08829265188
Curva 5	0,0036478	0,12219771899
Curva 6	0,0096495	0,19841892983

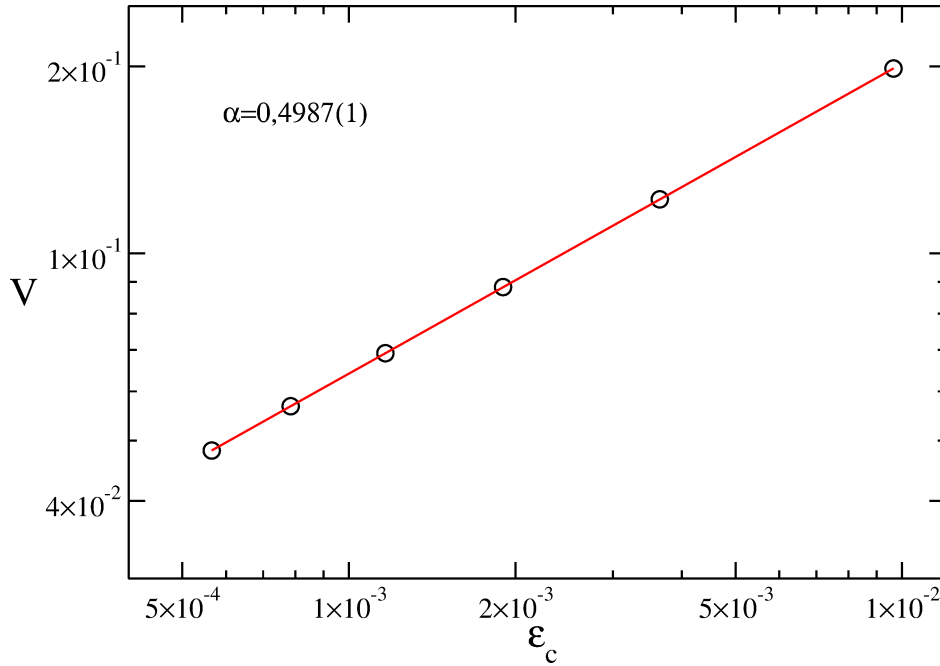


Figura 3.6: Gráfico de V vs. ε_c . Um ajuste em lei de potência nos dá $\alpha = 0,4987(1)$.

Em geral, as sequências de P_s e Q_s satisfazem a recorrência

$$P_{s+2} = a_{s+2}P_{s+1} + P_s, \quad (3.8)$$

$$Q_{s+2} = a_{s+2}Q_{s+1} + Q_s, \quad (3.9)$$

para todo $s \geq 0$, com $P_0 = a_0$, $P_1 = a_0a_1 + 1$, $Q_0 = 1$ e $Q_1 = a_1$. Além disso, $P_{s+1}Q_s - P_sQ_{s+1} = (-1)^s$, para todo $s \geq 0$. Com esses resultados é possível estudar outras curvas no espaço, as quais possuem número de rotação ω que gera em suas convergentes sequências de Q_s diferentes da sequência de Fibonacci. Uma vez que o número de rotação ω é conhecido e conseqüentemente a sua expansão em frações contínuas, os tempos de retorno para essas curvas são números consecutivos para essa nova sequência de Q_s dada pela equação (3.9). Com isso, o parâmetro crítico para essas curvas também pode ser calculado e é possível prever a ruptura de cada uma delas. Nesse trabalho, focamos nossos estudos apenas nas curvas com números de rotação nobres por se tratarem de curvas mais robustas.

3.3.1 Uma análise dos números de rotação

O estudo de curvas invariantes em mapa bidimensionais que preservam a área no espaço de fases é intimamente ligado ao conceito do número de rotação. Uma órbita $\{(\phi_t, V_t) : t \in \mathbb{Z}\}$ do mapa (3.7), tem número de rotação ω se o limite

$$\omega = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} \Omega(V_t), \quad (3.10)$$

existe. Na equação (3.10), $\sum_{t=0}^N \Omega(V_t) = \phi_N - \phi_0$ e N corresponde ao número de iterações.

Tabela 3.4: Números de rotação encontrados para cada uma das curvas da Figura 3.5. A coluna 1 identifica a curva. A coluna 2 fornece o número de rotação obtido da equação (3.10), cujo valor numérico está muito próximo do resultado analítico mostrado na coluna 3 e previsto da expansão apresentada na coluna 4.

Curva 1	6,6180339815	$\frac{11 + \sqrt{5}}{2}$	[6; 1,1,1,1,1,1,...]
Curva 2	5,6180339845	$\frac{9 + \sqrt{5}}{2}$	[5; 1,1,1,1,1,1,...]
Curva 3	4,6180339989	$\frac{7 + \sqrt{5}}{2}$	[4; 1,1,1,1,1,1,...]
Curva 4	3,6180339829	$\frac{5 + \sqrt{5}}{2}$	[3; 1,1,1,1,1,1,...]
Curva 5	2,6180339686	$\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$	[2; 1,1,1,1,1,1,...]
Curva 6	1,6180339660	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	[1; 1,1,1,1,1,1,...]

A Tabela 3.4 apresenta os valores dos números de rotação calculados a partir da equação (3.10) para cada uma das curvas destacadas na Figura 3.4. É importante notar que para cada uma dessas curvas o número de rotação difere apenas na sua parte inteira, com a parte decimal sendo igual a do número de ouro γ , como pode ser visto na expansão em frações contínuas na última coluna da tabela. Além disso, o número de rotação encontrado para cada uma das curvas são números nobres, como proposto por Fox [89]. Particularmente, os números nobres formam um conjunto de irracionais quadráticos, ou seja, eles podem ser escritos na forma: $(P \pm \sqrt{M})/S$, onde $P, M, S \in \mathbb{Z}$, como aqueles mostrados na terceira coluna da Tabela 3.4. Ademais, as curvas invariantes localizadas na região de baixa energia

têm números de rotação maiores do que aquelas situadas na região de energia mais alta, ou seja, para altos valores de V . Mais precisamente, para as curvas encontradas através do teorema de Slater, seus números de rotação decrescem em uma unidade a medida que pegamos uma curva mais acima. Até chegar a última curva (curva 6) com número de rotação $\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618033\dots$.

Estendendo nossa análise para curvas invariantes com número de rotação do tipo $\omega = [a_0; 2, \bar{1}]$, continuamos a encontrar tempos de recorrência que pertencem à sequência de Fibonacci. Na Figura 3.7 mostramos o comportamento de ω em função de V para os valores mostrados na Tabela 3.4 e também para as curvas do tipo $\omega = [a_0; 2, \bar{1}]$, encontradas numericamente através do critério de Slater. Um ajuste em lei de potência nos forneceu

$$\omega = 0,31879 \cdot V^{-0,99909}. \quad (3.11)$$

Note que o expoente do termo V na equação (3.11) é equivalente ao expoente do termo V_n na primeira equação do mapeamento (3.7). Tal resultado também foi encontrado para outros modelos como mostrado na Ref. [75]. Além disso, através da equação (3.11) é possível encontrar a posição V no espaço de fases de uma dada curva invariante com

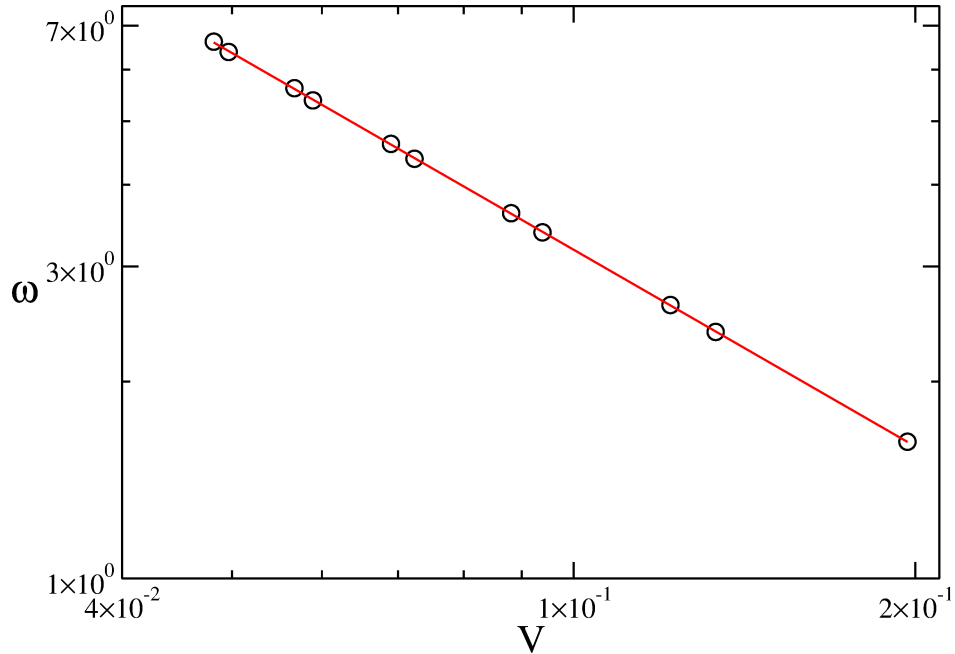


Figura 3.7: Gráfico de ω vs. V . Um ajuste em lei de potência nos dá $\omega = 0,31879 \cdot V^{-0,99909}$.

número de rotação ω conhecido. Na Figura 3.8 mostramos a dinâmica na vizinhança da curva 1 (curva vermelha) com o espaço de fases construído para um valor de parâmetro antes da criticalidade $\varepsilon < \varepsilon_c$ (Figura 3.8(a)) e para $\varepsilon = \varepsilon_c$ (Figura 3.8(b)). Nas Figuras 3.8(c,d) temos a mesma região do espaço de fases, mas a escala de cores é dada pela parte decimal do número de rotação, calculado pela equação (3.10). Na Figura 3.8(c), $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$, é possível notar duas regiões distintas, uma em tons de verde com $\omega < 0,6180339\dots$ e a outra em tons de amarelo com $\omega > 0,6180339\dots$. Por outro lado, a dinâmica caótica não leva à convergência do número de rotação. O limite entre essas duas regiões corresponde à curva invariante *spanning*. Portanto, as órbitas acima da curva têm um número de rotação

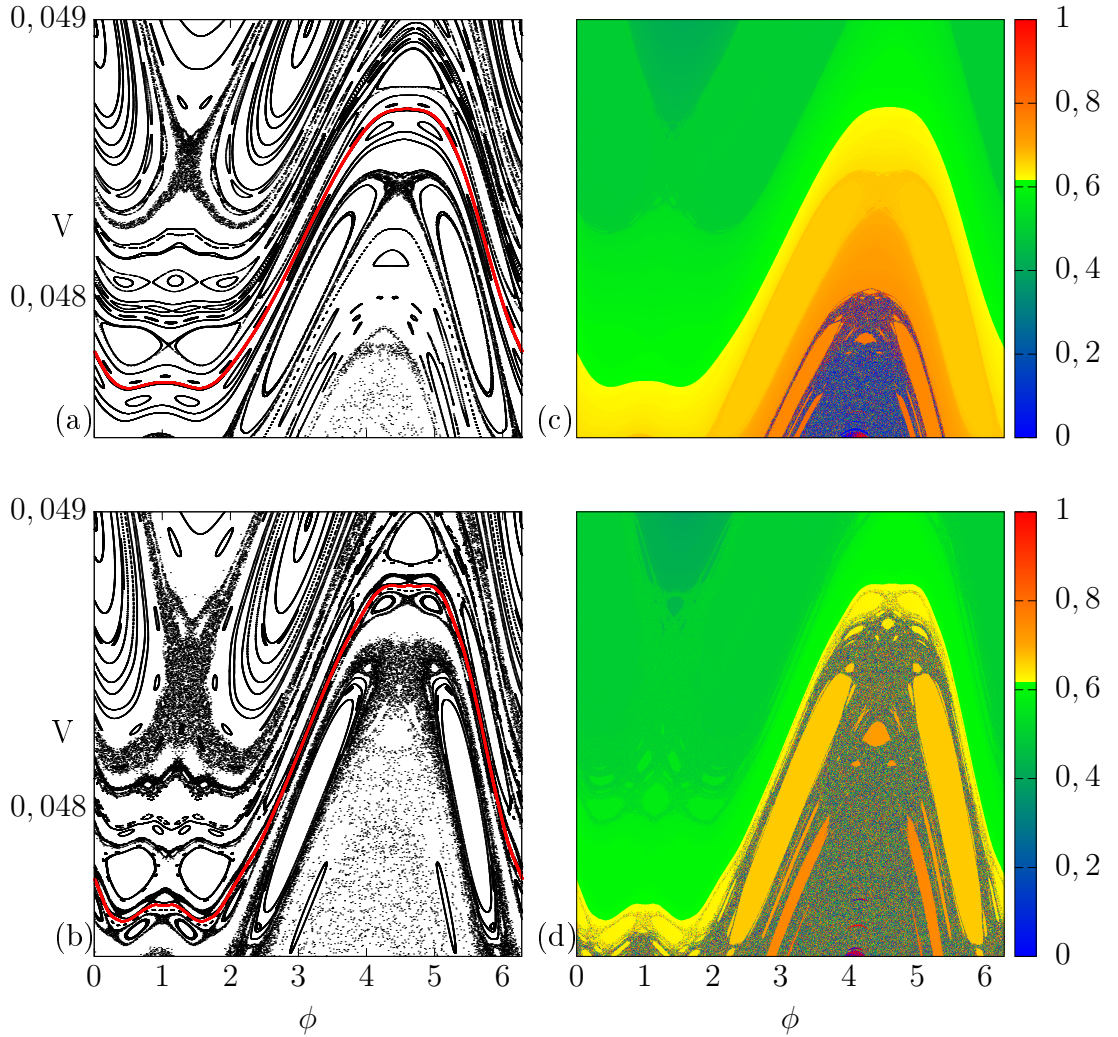


Figura 3.8: Detalhe do espaço de fases na vizinhança da curva 1 (curva vermelha), (a) $\epsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ e (b) $\epsilon = \epsilon_c = 5,652 \cdot 10^{-4}$. (c,d) A mesma região de (a) e (b) onde a escala de cor corresponde a parte decimal do número de rotação.

menor do que as que estão abaixo da curva. Na Figura 3.8(d), com $\varepsilon = 5,652 \cdot 10^{-4}$, podemos observar um avanço nas regiões caóticas causado pelo aumento do parâmetro ε . No entanto, a curva ainda existe para este valor de parâmetro e atua como uma barreira impedindo que o caos adentre a região acima da curva. Este efeito também foi observado para as outras cinco curvas da Figura 3.5 encontradas usando o teorema de Slater. Essa evidência reforça a ideia de que curvas invariantes *spanning* com número de rotação $\omega = [a_0; \bar{1}]$ são bastante robustas, pelo menos na camada onde cada uma delas persiste.

Para entender a dinâmica próxima às curvas invariantes *spanning*, calculamos o perfil do número de rotação nas proximidades da curva 1. Na Figura 3.9(a) destacamos a região próxima a ela (curva vermelha), o número de rotação foi calculado ao longo da linha azul tracejada e sua parte fracionária representada na Figura 3.9(b). O perfil do número de rotação tem uma característica fractal conhecida como “Escada do Diabo” [91]. Sabe-se que em mapas de preservação de área, a área sob um conjunto invariante em função da frequência é uma escada do diabo [92]. Nosso resultado é análogo ao apresentado em [92], porém, em nosso caso a ação V em função do número de rotação ω que gerou essa estrutura.

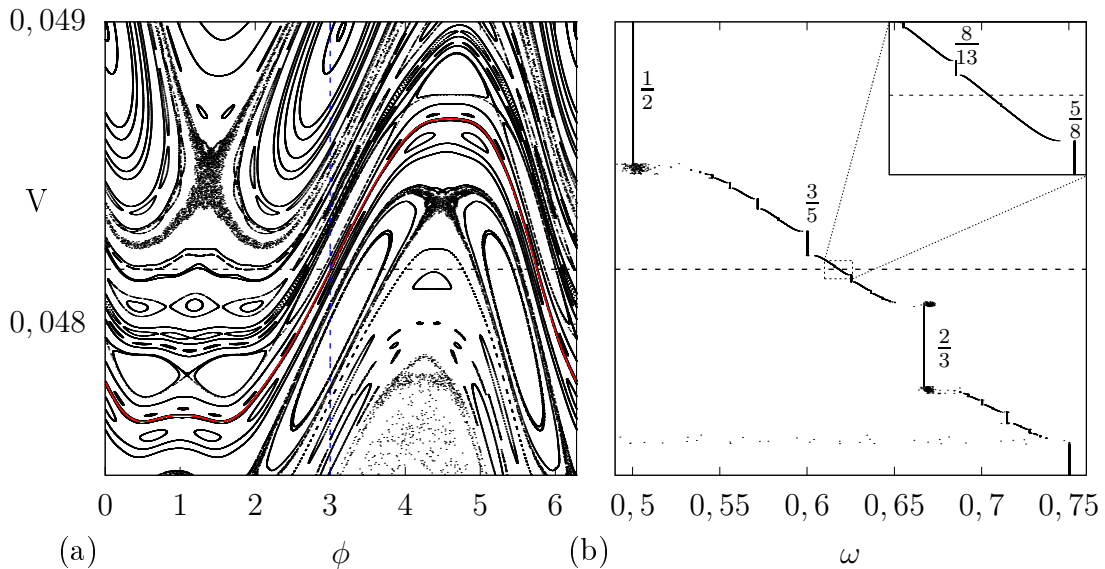


Figura 3.9: (a) Detalhe do espaço de fase nas proximidades da curva 1 (curva vermelha). (b) Perfil do número de rotação calculado ao longo da linha azul destacada em (a), alguns valores do número de rotação são indicados na figura e uma ampliação é feita na região próxima à curva invariante.

A primeira teoria analítica para a escada do diabo foi descrita por Aubry [93, 94] em um modelo estendido de Frenkel-Kontorova como consequência da transição de quebra de analiticidade. Essa teoria não envolvia nenhum cálculo numérico. Aubry em [95] descreveu dois modelos exatos que exibem uma escada do diabo. O primeiro foi um modelo discreto de Frenkel-Kontorova e o segundo foi uma cadeia de Ising sobre um campo magnético externo. Aliás, a estrutura da escada do diabo pode ser encontrada em uma variedade de situações físicas.

Ainda na Figura 3.9(b), indicamos alguns valores do número de rotação que formam a sequência de Farey [96], ou seja, se $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são vizinhos, então o próximo termo que aparece entre eles consoante a ordem de Farey é $\frac{a+c}{b+d}$, então, o termo entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$ é $\frac{3}{5}$. Além disso, os termos desta sequência são números da sequência de Fibonacci, bem como os termos da expansão da fração contínua no número de rotação ω da curva.

CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS

Mostramos para o mapa padrão que o expoente de Lyapunov é crescente em relação ao parâmetro de não linearidade como proposto por [19]. No entanto, para o modelo Fermi-Ulam o expoente de Lyapunov decresce e, conseqüentemente, o tempo de Lyapunov t_L cresce com o parâmetro de não linearidade. Isso se deve ao fato de que no mapa padrão o aumento do parâmetro de não linearidade causa a destruição das curvas invariantes e das estruturas estáveis, e o caos domina todo o sistema. Por outro lado, no modelo Fermi-Ulam, o aumento do parâmetro de não linearidade não destrói todas as curvas invariantes *spanning*, ou seja, sempre existirão curvas invariantes *spanning*, independente do valor do parâmetro de não linearidade. E nesse caso o caos não domina todo o sistema.

Com relação ao tempo de recorrência de Poincaré t_r os resultados encontrados para o mapa padrão também foram observados para o modelo Fermi-Ulam e por um ajuste em lei potência na curva do gráfico de $\langle t_r \rangle$ em função de δ encontramos a inclinação $\tau = -2$ para as condições iniciais tomadas nas regiões caóticas, enquanto para as condições iniciais localizadas nos domínios regulares produziram $\tau = -1$. Como a dimensão fractal $d_w = |\tau|$ temos para as regiões caóticas que $d_w = 2$, igual à dimensão do mapeamento e para os domínios regulares $d_w = 1$, dimensão igual a de uma curva. Além disso, usando a relação $d_w = 2/\mu$ mostramos que o expoente de difusão $\mu = 1$ no domínio caótico, correspondendo

a difusão normal.

O estudo dos tempos de recorrência ainda nos possibilitou usar o teorema de Slater para determinar a destruição de curvas invariantes. Tal teorema relaciona os tempos de recorrência e a expansão em frações contínuas do número de rotação relacionado a curva. Esses tempos de recorrência dependem do tamanho do intervalo de recorrência δ , que ficam cada vez maiores à medida que diminuimos o valor de δ . Tempos mais longos representam uma melhor aproximação do número de rotação irracional por frações contínuas, pois esses tempos são denominadores na expansão. No entanto, é necessário ter cuidado ao escolher δ , evitando a necessidade de um número muito grande de iterações e, conseqüentemente, alto custo computacional.

Inicialmente aplicamos o teorema ao Mapa Padrão e com isso recuperamos um resultado bastante conhecido na literatura, o qual se refere ao parâmetro crítico k_c a partir do qual o modelo não apresenta mais curvas invariantes do tipo *spanning*. No nosso estudo encontramos $k_c = 0,97163506$, que está muito próximo do valor encontrado por Greene que é $k_c = 0,971635\dots$. Para o modelo Fermi-Ulam, conseguimos encontrar a posição de uma família de curvas invariantes localmente robustas. O uso do teorema nos permitiu estudar a criticidade para cada uma dessas curvas. Determinamos o parâmetro ε_c relacionado a cada uma delas e assim conseguimos prever sua quebra. Essas curvas são destruídas consecutivamente de baixo para cima no espaço de fase, à medida que aumentamos o valor do parâmetro ε . Sendo a curva 1 a primeira a ser destruída, para $\varepsilon_c = 0,0005652$ e a curva 6 a última, com $\varepsilon_c = 0,0096495$.

Uma análise nas proximidades da curva 1 revelou que à medida que aumentamos o valor do parâmetro ε , as estruturas periódicas e as curvas invariantes próximas à curva são destruídas, conforme previsto pela teoria KAM. Finalmente, para $\varepsilon_c = 0,0005652$, nesta região, a única curva invariante *spanning* que ainda sobrevive é a curva 1. Tal comportamento foi observado para todas as outras curvas da Figura 3.5 encontradas a partir do teorema de Slater. Embora ainda não tenhamos um procedimento matemático para provar que as curvas invariantes destacadas são as mais robustas localmente, encontramos fortes evidências numéricas de que elas pertencem a uma camada fina robusta e que tais curvas

são mais robustas na região analisada.

Além disso, o número de rotação para essas curvas diminui à medida que a curva está localizada mais acima no espaço de fase. O perfil do número de rotações nas proximidades das curvas apresentou uma estrutura semelhante a uma “Escada do Diabo”. A organização dos números de rotação nesta estrutura segue uma árvore de Farey e os termos que pertencem à sequência de Fibonacci convergem para a posição da curva invariante na região.

Perspectivas

Com relação aos tempos característicos, pretendemos fazer uma análise do tempo de *stickiness*. Acreditamos que seja possível encontrar uma relação entre esse tempo e os outros tempos estudados nessa tese. Além disso, é possível fazer um estudo mais detalhado do tempo de recorrência na região de *stickiness* e com isso verificar os efeitos do *stickiness* no cálculo da dimensão fractal d_w e do expoente de difusão μ .

Sobre o teorema de Slater, esperamos poder aplicá-lo a outros sistemas, como, por exemplo, o bilhar ovoide. O espaço de fases de um bilhar ovoide é do tipo misto, onde se observa a coexistência de ilhas de estabilidade imersas em meio a um mar de caos, que no que lhe concerne está sendo confinado por um conjunto de curvas invariantes do tipo *spanning*, que no contexto dos bilhares também são conhecidas como *whispering gallery orbits*. É importante ressaltar que a variação do parâmetro de deformação da fronteira do bilhar pode acarretar mudanças significativas no espaço de fases do sistema, como a mudança no tamanho das ilhas de estabilidade e a ausência de trajetórias do tipo *whispering gallery orbits*. O que sugere uma dependência entre a observação dessas órbitas e o tipo de deformação aplicada sobre o bilhar. Dessa forma, é possível definir um parâmetro crítico, tal que ele indique o valor máximo a partir do qual essas curvas deixam de existir. Acreditamos que através do teorema de Slater conseguiremos determinar numericamente esse valor crítico.

APÊNDICE A

APROXIMAÇÕES POR FRAÇÕES CONTÍNUAS

Uma propriedade essencial dos números reais é que todo número real pode ser bem aproximado por números racionais [97]. Dado $x \in \mathbb{R}$, existe $K = \lfloor x \rfloor$ (parte inteira de x), tal que $0 \leq x - K < 1$. A aproximação decimal do número $x - K$ pode ser dada da seguinte forma

$$x - K = 0,a_1a_2\dots a_n, \quad a_i \in \{0,1,\dots,9\}, \quad (\text{A.1})$$

o que significa que se $r_n = a_n + 10.a_{n-1} + 100.a_{n-2} + \dots + 10^{n-1}.a_1$, então $\frac{r_n}{10^n} \leq x - K < \frac{r_n+1}{10^n}$, e portanto $K + \frac{r_n}{10^n}$ é uma boa aproximação racional de x , no sentido de que o erro $\left| x - \left(K + \frac{r_n}{10^n} \right) \right|$ é menor do que $\frac{1}{10^n}$, que é um erro bem pequeno se n for grande.

A representação decimal de um número real fornece uma sequência de aproximações por racionais cujos denominadores são potências de 10. Tal representação tem méritos como praticidade para efetuar cálculos que a fazem a mais popular das representações dos números reais. Porém, envolve a escolha arbitrária da base 10, e oculta frequentemente aproximações racionais de x muito mais eficientes. Por exemplo, se tomarmos o número,

$$\pi = 3,14159265358979328462643383279502884\dots,$$

uma aproximação bem conhecida para esse número por um número racional é $\frac{22}{7} = 3,142857142857\dots$, uma outra aproximação ainda melhor é $\frac{355}{113} = 3,1415929203539823\dots$, note que

$$\left| \pi - \frac{22}{7} \right| < \frac{1}{700} < \left| \pi - \frac{314}{100} \right| \quad e \quad \left| \pi - \frac{355}{113} \right| < \left| \frac{1}{3000000} \right| < \left| \pi - \frac{3141592}{1000000} \right|$$

e portanto $\frac{22}{7}$ e $\frac{355}{113}$ são melhores aproximações de π que aproximações decimais com denominadores muito maiores. De fato são aproximações incrivelmente boas, muito mais do que se poderia esperar pelo tamanho dos denominadores envolvidos.

Essa outra forma de representação de números reais é conhecida como representação por frações contínuas ou expansão em frações contínuas, que sempre fornece aproximações racionais incrivelmente boas. Tal expansão é ilustrada a seguir.

De acordo com [98], definimos

$$\alpha_0 = x, a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor$$

$$e, \text{ se } \alpha_n \notin \mathbb{Z} \quad \alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n} = \frac{1}{\{\alpha_n\}}, \forall n \in \mathbb{N},$$

onde $\lfloor \alpha_n \rfloor$ é a parte inteira de α_n e $\{\alpha_n\}$ é a parte fracionária de α_n .

Se, para algum n , $\alpha_n = a_n$ temos

$$x = \alpha_0 = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] \equiv a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots \frac{1}{a_n}}}}. \quad (\text{A.2})$$

Se não, denotamos

$$x = [a_0; a_1, a_2, \dots] \equiv a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}}. \quad (\text{A.3})$$

Note que, se a representação por frações contínuas de x for finita, então x é racional, reciprocamente, se $x \in \mathbb{Q}$, sua representação será finita e seus coeficientes a_n vêm do algoritmo de Euclides [99]:

Se $x = p/q$ (com $q > 0$) temos

$$\begin{aligned} p &= a_0q + r_1, & 0 \leq r_1 < q \\ q &= a_1r_1 + r_2 \\ r_1 &= a_2r_2 + r_3 \\ \vdots &= \vdots \\ r_{n-1} &= a_nr_n, & r_{n+1} = 0, \end{aligned}$$

logo,

$$x = \frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_1}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}} = \dots = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}. \quad (\text{A.4})$$

Seja $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ e sejam $p_n \in \mathbb{Z}, q_n \in \mathbb{N}_+^*$ primos entre si tais que $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$, $n > 0$, esta fração é chamada de n -ésima reduzida ou convergente da fração contínua de x .

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = +\infty$ (pois q_n é estritamente crescente), segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = x, \quad (\text{A.5})$$

o que permite recuperar x a partir de $a_0, a_1, a_2, \dots$, e dá sentido à igualdade $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ quando a fração contínua de x é infinita, isto é, quando x é irracional.

Corolário 2 *As sequências p_n e q_n satisfazem as recorrências*

$$p_{n+2} = a_{n+2}p_{n+1} + p_n \quad e \quad q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n,$$

para todo $n \geq 0$, com $p_0 = a_0, p_1 = a_0a_1 + 1, q_0 = 1$ e $q_1 = a_1$, além disso,

$$p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n,$$

para todo $n \geq 0$.

Além disso, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}, \quad (\text{A.6})$$

ou ainda,

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{2q_n^2} \quad \text{ou} \quad \left| x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| < \frac{1}{2q_{n+1}^2}. \quad (\text{A.7})$$

Esse resultado garante que as aproximações por frações contínuas sejam incrivelmente boas, pois tal aproximação possui convergência quadrática.

A Tabela A.1 mostra a expansão em frações contínuas para o número π sendo que a última coluna traz as convergentes p_n/q_n , que representam uma aproximação racional para o número π . É importante lembrar que quanto maior o valor de n melhor é a aproximação, note que $103993/33102 = 3,141592653$ e que as nove casas após a vírgula correspondem as primeiras nove casas do valor de π .

Tabela A.1: Representação em frações contínuas do número π assim como algumas de suas convergentes obtidas por truncamentos das expansões por frações contínuas.

n	a_n	Fração contínua	Convergente $\frac{p_n}{q_n}$
0	3	[3]	3
1	7	[3; 7]	22/7
2	15	[3; 7, 15]	333/106
3	1	[3; 7, 15, 1]	355/113
4	292	[3; 7, 15, 1, 292]	103993/33102
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] H. Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, volume 3. Paris: Gauthier-Villars, 1899.
- [2] E. T. Whittaker. GD Birkhoff's Collected Papers. *Nature*, 167(4242):250–251, 1951.
- [3] E. N. Lorenz. Deterministic non-periodic flow. *J. Atmos. Sci.*, 20(1):130–141, 1963.
- [4] J. P. Eckmann and D. Ruelle. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Review of Modern Physics*, 57:617–656, 1985.
- [5] D. Ruelle and F. Takens. On the nature of turbulence. *Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg-RCP25*, 12:1–44, 1971.
- [6] B. V. Chirikov and G. M. Zaslavsky. Stochastic instability of nonlinear oscillations. *Sov. Phys. Usp.*, 14(5):549–672, 1972.
- [7] A. N. Kolmogorov. On conservation of conditionally periodic motions for a small change in Hamilton's function. In *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, volume 98, pages 527–530, 1954.
- [8] V. I. Arnold. Proof of a theorem of A. N. Kolmogorov on the preservation of conditionally periodic motions under a small perturbation of the Hamiltonian. *Nauk*, 18(5):113, 1963.

-
- [9] J. Möser. On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, II*, pages 1–20, 1962.
- [10] B. V. Chirikov. Energy part c: Plasma phys. *Accel. Thermonucl*, 1:253, 1960.
- [11] K. Murase, S. Tanada, H. Mogami, M. Kawamura, M. Miyagawa, M. Yamada, H. Higashino, A. Iio, and K. Hamamoto. Validity of microsphere model in cerebral blood flow measurement using N-isopropyl-p-(I-123) iodoamphetamine. *Medical Physics*, 17(1):79–83, 1990.
- [12] C. Hagedorn, E. L. McCoy, and T. M. Rahe. The potential for ground water contamination from septic effluents 1. *Journal of Environmental Quality*, 10(1):1–8, 1981.
- [13] W. F. Morris. Predicting the consequence of plant spacing and biased movement for pollen dispersal by honey bees. *Ecology*, 74(2):493–500, 1993.
- [14] D. Popp. International innovation and diffusion of air pollution control technologies: the effects of NOX and SO2 regulation in the US, Japan, and Germany. *Journal of Environmental Economics and Management*, 51(1):46–71, 2006.
- [15] R. V. Ozmidov. Diffusion of contaminants in the ocean. *Oceanographic Sciences Library*, 1990.
- [16] V. Balakrishnan. *Elements of nonequilibrium statistical mechanics*, volume 3. New York: Springer, 2008.
- [17] E. D. Leonel and C. M. Kuwana. An investigation of chaotic diffusion in a family of Hamiltonian mappings whose angles diverge in the limit of vanishingly action. *Journal of Statistical Physics*, 170(1):69–78, 2018.
- [18] A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman. *Regular and chaotic dynamics*. Applied mathematical sciences. New York: Springer, 1992.
- [19] M. Harsoula and G. Contopoulos. Global and local diffusion in the standard map. *Physical Review E*, 97(2):022215, 2018.

-
- [20] S. Benkadda, S. Kassibrakis, R. B. White, and G. M. Zaslavsky. Self-similarity and transport in the standard map. *Physical Review E*, 55(5):4909, 1997.
- [21] G. Contopoulos and C. Polymilis. Recurrence time in the homoclinic tangle. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 63(2):189–197, 1995.
- [22] G. Contopoulos and K. Efsthathiou. Escapes and recurrence in a simple hamiltonian system. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 88(2):163–183, 2004.
- [23] E. G. Altmann, A. E. Motter, and H. Kantz. Stickiness in mushroom billiards. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 15(3):033105, 2005.
- [24] R. B. Shirts and W. P. Reinhardt. Approximate constants of motion for classically chaotic vibrational dynamics: Vague tori, semiclassical quantization, and classical intramolecular energy flow. *The Journal of Chemical Physics*, 77(10):5204–5217, 1982.
- [25] C. F. F. Karney. Long-time correlations in the stochastic regime. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 8(3):360–380, 1983.
- [26] C. R. Menyuk. Effect of a transition between regular and stochastic electron motion on the evolution of an obliquely propagating langmuir wave. *The Physics of Fluids*, 26(3):705–723, 1983.
- [27] C. R. Menyuk. Particle motion in the field of a modulated wave. *Physical Review A*, 31(5):3282, 1985.
- [28] G. Contopoulos and M. Harsoula. Stickiness in chaos. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 18(10):2929–2949, 2008.
- [29] G. Contopoulos and M. Harsoula. Stickiness effects in chaos. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 107(1-2):77–92, 2010.
- [30] L. A. Bunimovich. Fine structure of sticky sets in mushroom billiards. *Journal of Statistical Physics*, 154(1-2):421–431, 2014.

-
- [31] R. Ishizaki, T. Horita, T. Kobayashi, and H. Mori. Anomalous diffusion due to accelerator modes in the standard map. *Progress of Theoretical Physics*, 85(5):1013–1022, 1991.
- [32] T. Manos and M. Robnik. Survey on the role of accelerator modes for anomalous diffusion: The case of the standard map. *Physical Review E*, 89(2):022905, 2014.
- [33] G. M. Zaslavsky. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport. *Physics Reports*, 371(6):461–580, 2002.
- [34] G. M. Zaslavsky. *The physics of chaos in Hamiltonian systems*. Singapore: World Scientific, 2007.
- [35] G. M. Zaslavsky, M. Edelman, and B. A. Niyazov. Self-similarity, renormalization, and phase space nonuniformity of hamiltonian chaotic dynamics. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 7(1):159–181, 1997.
- [36] R. Venegeroles. Universality of algebraic laws in hamiltonian systems. *Physical Review Letters*, 102(6):064101, 2009.
- [37] G. A. Luna-Acosta, J. A. Méndez-Bermúdez, P. Šeba, and K. N. Pichugin. Classical versus quantum structure of the scattering probability matrix: Chaotic waveguides. *Physical Review E*, 65(4):046605, 2002.
- [38] G. M. Zaslavsky. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport. *Physics reports*, 371(6):461–580, 2002.
- [39] J. D. Szezech Jr, I. L. Caldas, S. R. Lopes, R. L. Viana, and P. J. Morrison. Transport properties in nontwist area-preserving maps. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 19(4):043108, 2009.
- [40] S. M. Soskin, R. Mannella, and O. M. Yevtushenko. Matching of separatrix map and resonant dynamics, with application to global chaos onset between separatrices. *Physical Review E*, 77(3):036221, 2008.

- [41] D. del Castillo-Negrete. Chaotic transport in zonal flows in analogous geophysical and plasma systems. *Physics of Plasmas*, 7(5):1702–1711, 2000.
- [42] J. S. E. Portela, I. L. Caldas, and R. L. Viana. Tokamak magnetic field lines described by simple maps. *The European Physical Journal Special Topics*, 165(1):195–210, 2008.
- [43] P. J. Morrison. Magnetic field lines, Hamiltonian dynamics, and nontwist systems. *Physics of Plasmas*, 7(6):2279–2289, 2000.
- [44] H. J. Stöckmann, E. Persson, Y. H. Kim, M. Barth, U. Kuhl, and I. Rotter. Effective Hamiltonian for a microwave billiard with attached waveguide. *Physical Review E*, 65(6):066211, 2002.
- [45] E. D. Leonel. Corrugated waveguide under scaling investigation. *Physical Review Letters*, 98(11):114102, 2007.
- [46] A. K. Karlis, F. K. Diakonov, and V. Constantoudis. A consistent approach for the treatment of fermi acceleration in time-dependent billiards. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 22(2):026120, 2012.
- [47] E. D. Leonel, D. F. M. Oliveira, and A. Loskutov. Fermi acceleration and scaling properties of a time dependent oval billiard. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 19(3):033142, 2009.
- [48] S. Mei, T. Shen, W. Hu, Q. Lu, and L. Sun. Robust H_∞ -control of a hamiltonian system with uncertainty and its application to a multi-machine power system. *IEEE Proceedings-Control Theory and Applications*, 152(2):202–210, 2005.
- [49] F. Mei and H. Wu. Generalized Hamilton system and gradient system. *SCIENTIA SINICA Physica, Mechanica & Astronomica*, 43(4):538–540, 2013.
- [50] N. B. Slater. Gaps and steps for the sequence $n\theta \bmod 1$. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 63, pages 1115–1123. Cambridge University Press, 1967.
- [51] N. A. Lemos. *Mecânica analítica*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

-
- [52] H. Fleming. Mecânica analítica: um livro-texto moderno para cursos de graduação em física. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 26(2):193–194, 2004.
- [53] S. H. Strogatz. Nonlinear dynamics and chaos. *Reading: Perseus Books*, 1996.
- [54] E. Fermi. On the origin of the cosmic radiation. *Physical review*, 75(8):1169, 1949.
- [55] P. J. Holmes and J. E. Marsden. Melnikov’s method and Arnold diffusion for perturbations of integrable hamiltonian systems. *Journal of Mathematical Physics*, 23(4):669–675, 1982.
- [56] N. Fiedler-Ferrara and C. P. C. do Prado. *Caos: uma introdução*. São Paulo: Editora Blucher, 1994.
- [57] B. V. Chirikov. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Physics Reports*, 52(5):263–379, 1979.
- [58] J. M. Greene. A method for determining a stochastic transition. *Journal of Mathematical Physics*, 20(6):1183–1201, 1979.
- [59] J. D. V. Hermes and E. D. Leonel. Characteristic times for the fermi–ulam model. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 31(02):2130004, 2021.
- [60] A. Pikovsky and A. Politi. *Lyapunov exponents: a tool to explore complex dynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2016.
- [61] Y. B. Pesin. Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory. *Russ. Math. Surveys*, 32:55–114, 1977.
- [62] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, and J. Strelcyn. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. part 1: Theory. *Meccanica*, 15(1):9–20, 1980.
- [63] H. D. I. Abarbanel, R. Brown, and Matthew B. Kennel. Local Lyapunov exponents computed from observed data. *Journal of Nonlinear Science*, 2(3):343–365, 1992.

-
- [64] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, volume 42. Berlin: Springer Science + Business Media, 2013.
- [65] I. I. Shevchenko. Hamiltonian intermittency and lévy flights in the three-body problem. *Physical Review E*, 81(6):066216, 2010.
- [66] H. F. Levison and M. J. Duncan. The gravitational sculpting of the kuiper belt. *The Astrophysical Journal*, 406:L35–L38, 1993.
- [67] I. Prigogine and R. L. Ferreira. *As leis do caos*. São Paulo: UNESP, 2002.
- [68] E. G. Altmann, E. C. da Silva, and I. L. Caldas. Recurrence time statistics for finite size intervals. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 14(4):975–981, 2004.
- [69] M. Harsoula, K. Karamanos, and G. Contopoulos. Characteristic times in the standard map. *Physical Review E*, 99(3):032203, 2019.
- [70] D. Ben-Avraham and S. Havlin. *Diffusion and reactions in fractals and disordered systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- [71] B. Mandelbrot. How long is the coast of britain? statistical self-similarity and fractional dimension. *science*, 156(3775):636–638, 1967.
- [72] E. D. Leonel and P. V. E. Mc Clintock. Chaotic properties of a time-modulated barrier. *Physical Review E*, 70:016214, 2004.
- [73] E. D. Leonel. *Invariância de Escala em Sistemas Dinâmicos Não Lineares*. São Paulo: Blucher, 1 edition, 2019.
- [74] J. D. V. Hermes, M. A. dos Reis, I. L. Caldas, and E. D. Leonel. Break-up of invariant curves in the fermi-ulam model. *Chaos, Solitons & Fractals*, 162:112410, 2022.
- [75] Y. H. Huggler, J. D. V. Hermes, and E. D. Leonel. Application of the slater criteria to localize invariant tori in hamiltonian mappings. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 32(9):093125, 2022.

-
- [76] R. S. MacKay and I. C. Percival. Converse kam: theory and practice. *Communications in mathematical physics*, 98(4):469–512, 1985.
- [77] J. Laskar, C. Froeschlé, and A. Celletti. The measure of chaos by the numerical analysis of the fundamental frequencies. application to the standard mapping. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 56(2-3):253–269, 1992.
- [78] Y. Lan, C. Chandre, and P. Cvitanović. Newton’s descent method for the determination of invariant tori. *Physical Review E*, 74(4):046206, 2006.
- [79] E. G. Altmann, G. Cristadoro, and D. Pazó. Nontwist non-hamiltonian systems. *Physical Review E*, 73(5):056201, 2006.
- [80] C. V. Abud and I. L. Caldas. On slater’s criterion for the breakup of invariant curves. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 308:34–39, 2015.
- [81] N. B. Slater. The distribution of the integers n for which $\{\theta n\} < \varphi$. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 46, pages 525–534. Cambridge University Press, 1950.
- [82] M. R. Herman and A. Fathi. Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l’anneau. 1983.
- [83] M. A. Lieberman and A. J. Lichtenberg. Stochastic and adiabatic behavior of particles accelerated by periodic forces. *Physical Review A*, 5(4):1852, 1972.
- [84] J. N. Mather. Non-existence of invariant circles. *Ergodic theory and dynamical systems*, 4(2):301–309, 1984.
- [85] J. M. Greene. Two-dimensional measure-preserving mappings. *Journal of Mathematical Physics*, 9(5):760–768, 1968.
- [86] G. J. Sussman and J. Wisdom. *Structure and interpretation of classical mechanics*. Cambridge: The MIT Press, 2015.

-
- [87] L. D. Pustyl'nikov. Existence of invariant curves for maps close to degenerate maps, and a solution of the fermi-ulam problem. *Sbornik: Mathematics*, 82(1):231, 1995.
- [88] L. D. Pustyl'nikov. On the fermi-ulam model. In *Doklady Akademii Nauk*, volume 292, pages 549–553. Russian Academy of Sciences, 1987.
- [89] A. M. Fox and J. D. Meiss. Critical invariant circles in asymmetric and multiharmonic generalized standard maps. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19(4):1004–1026, 2014.
- [90] R. S. MacKay and J. Stark. Locally most robust circles and boundary circles for area-preserving maps. *Nonlinearity*, 5(4):867, 1992.
- [91] H. G. Schuster and W. Just. *Deterministic chaos: an introduction*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2006.
- [92] Q. Chen. Area as a devil's staircase in twist maps. *Physics Letters A*, 123(9):444–450, 1987.
- [93] S. Aubry. Defectibility and frustration in incommensurate structures: The devil's stair case transformation. *Ferroelectrics*, 24(1):53–60, 1980.
- [94] S. Aubry. The riemann problem, complete integrability and arithmetic applications. *Lecture notes in Mathematics*, 925, 1980.
- [95] S. Aubry. Exact models with a complete devil's staircase. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, 16(13):2497, 1983.
- [96] R. L. Devaney. The mandelbrot set, the farey tree, and the Fibonacci sequence. *The American Mathematical Monthly*, 106(4):289–302, 1999.
- [97] A. Y. Khinchin. Continued fractions. *Phoenix science series, Chicago*, 1997.
- [98] H. S. Wall. *Analytic theory of continued fractions*. New York: Dover Publications, 2018.

- [99] J. P. de O. Santos. *Introdução à teoria dos números*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1998.