

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS
CAMPUS DE RIO CLARO

**MODELAGEM MATEMÁTICA NO PROCESSO ENSINO-
APRENDIZAGEM DO CÁLCULO DIFERENCIAL E
INTEGRAL PARA O ENSINO MÉDIO**

RIO CLARO (SP)

2002

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS
CAMPUS DE RIO CLARO

**MODELAGEM MATEMÁTICA NO PROCESSO ENSINO-
APRENDIZAGEM DO CÁLCULO DIFERENCIAL E
INTEGRAL PARA O ENSINO MÉDIO**

Catharina de Oliveira Corcoll Spina

Orientador: Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi

Dissertação de Mestrado elaborado junto ao Curso Pós-Graduação em Educação Matemática. Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosóficos-Científicos para a obtenção do Título de Mestre em Educação Matemática.

RIO CLARO (SP)

2002

COMISSÃO EXAMINADORA

Rodney Carlos Bassanezi

Ubiratan D´Ambrosio

Geraldo Pompeu Junior

Aluna: Catharina de Oliveira Corcoll Spina

Rio Claro, 16 de Dezembro de 2002

Resultado: Aprovada com Distinção

Dedico este trabalho

Para Clarice, minha mãe, que com seus exemplos me mostrou que é na luta diária que vencemos.

À memória de Juan, meu pai, que conquistou seu espaço trabalhando e dedicando seus dias a nós.

AGRADECIMENTOS

A minha família, que sempre me compreendeu, me auxiliou e se organizou para continuar caminhando nas minhas inúmeras ausências, o meu carinho.

À Maria Luiza, que conheci ao iniciar este percurso, pelo incentivo e à querida amiga de todas as horas, Elvira, pela recepção sempre acolhedora mas, acima de tudo, pelas valiosas sugestões e orientações que ambas ofereceram para a elaboração final deste trabalho.

Ao orientador e amigo Rodney, pelas valiosas orientações, compreensão e paciência demonstradas durante o trabalho e nos momentos difíceis por que passei.

A todos que de uma forma direta ou indireta colaboraram para o sucesso deste trabalho.

SUMÁRIO

Índice..	7
Índice de Tabelas	9
Índice de Figuras...	10
Índice de Expressões	11
Índice de Fotos	12
Lista de Siglas e Abreviaturas...	13
Resumo	14
Abstract.....	15
Introdução	16
I – Mudança de Paradigma	27
II – A Modelagem Matemática.....	36
III – Ensino do Cálculo	54
IV – Abelhas: Tema que deu origem a um trabalho de Modelagem Matemática	86
V – Outras Atividades que poderiam ter sido desenvolvidas ao longo do estudo dos Alvéolos	140
VI – Conclusões	153
VII – Referências Bibliográficas	159
VIII – Anexos	163

ÍNDICE

Introdução.....	16
Capítulo I: 1 Mudança de Paradigma.....	27
1.1. Educação, Ensino da Matemática e Novos Paradigmas.....	32
Capítulo II: 2 A Modelagem Matemática.....	36
2.1. A Matemática e os Novos Conteúdos.....	40
2.2. A Matemática e Novas Técnicas.....	42
2.3. Modelo Matemático.....	46
2.4. Processo de Modelagem Matemática.....	48
Capítulo III: 3 Ensino de Cálculo.....	54
3.1. O Cálculo.....	54
3.2. Precedentes de Ensino do Cálculo no Ensino Médio.....	57
3.2.1 Breve histórico sobre o ensino do Cálculo no Brasil.....	59
3.3 Relevância do Ensino do C.D.I. no Ensino Médio.....	80
Capítulo IV: 4 Abelhas: Tema que deu origem a um trabalho de MM.....	86
4.1 Trabalho de Pesquisa Desenvolvido.....	86
4.1.1 Construção do Alvéolo.....	89
4.1.2. Cálculo da Área do Alvéolo.....	98

4.2 Introdução ao Cálculo.....	112
4.2.1 Função.....	112
4.2.2 Estabilidade.....	113
4.2.3 Variação.....	125
4.2.4 Obtenção do valor de q que torna a área mínima.....	131
Capítulo V: Outras atividades que poderiam ter sido desenvolvidas ao longo	
Do Estudo dos Alvéolos.....	140
5.1. Mosaicos.....	140
5.2 – Por que o hexágono?.....	144
5.3 – Volume do Alvéolo.....	146
5.4 - Curiosidade envolvendo o conceito de limite.....	150
Conclusões.....	153
Bibliografia.....	159
Anexos	
Anexo 1: O Novo Ensino Médio Brasileiro	
Anexo 2: Por que a Escola não serve pra (quase) nada	
Anexo 3: Para que serve o ensino médio do logaritmo	
Anexo 4: Obtenção do Gráfico1 (figura 15) através do Programa Computacional Excel	
Anexo 5: Ajuste de Curva através do Programa Computacional Excel	

ÍNDICE DE TABELAS

TABELA 1 – Variação da área com ângulo q variando de 5 em 5°	105
TABELA 2 – Variação da área com ângulo q variando de 1 em 1°	107
TABELA 3 – Variação do número de abelhas na colméia nos primeiros 20 dias	117
TABELA 4 – Variação do número de abelhas na colméia a partir do 21° dia	123
TABELA 5 – Área dos 2-polígonos de lado n	152

INDICE DE FIGURAS

FIGURA 1 - Esquema de Modelagem Adotado (Processo de Abstração).....	51
FIGURA 2 - Justaposição das Formas triangular, quadrada, circular e hexagonal.....	87
FIGURA 3 - O alvéolo	89
FIGURA 4 - Construção do hexágono regular – Modo 1	89
FIGURA 5 - Construção do hexágono regular – Modo 2	90
FIGURA 6 - Obtenção do raio da Circunferência que Gerou o hexágono regular	91
FIGURA 7 - Geometria do Alvéolo	92
FIGURA 8 – Detalhe do Favo e do Ápice Triédrico.....	95
FIGURA 9 – Tetraedro ACEV do Ápice Triédrico	99
FIGURA 10 – Alvéolo Planificado	99
FIGURA 11 – Face Lateral do Alvéolo.....	100
FIGURA 12 – Estudo Geométrico do Ápice Triédrico	100
FIGURA 13 – Triângulo Equilátero NCB formado no Ápice Triédrico.....	101
FIGURA 14 – Triângulo Retângulo VNM formado no Ápice Triédrico	101
FIGURA 15 – Gráfico da Variação da Área do Alvéolo com θ variando de 5 em 5°.....	105
FIGURA 16 – Gráfico da Variação da Área do Alvéolo com θ variando de 1 em 1°.....	107
FIGURA 17 – Gráfico da Curva Ajustada para uma Função Quadrática	108
FIGURA 18 - Gráfico do Crescimento Populacional da Colméia nos primeiros 20 dias...	109
FIGURA 19 – Gráfico do Crescimento Populacional da Colméia a partir do 21º dia	123
FIGURA 20 – Modelo do Desenvolvimento Populacional da Colméia	123
FIGURA 21 – Representação Gráfica da Reta Tangente a uma Curva.....	132
FIGURA 22 – Representação Gráfica da Derivada em um Ponto	133

ÍNDICE DE EXPRESSÕES

EXPRESSÃO 1 – Área do Alvéolo.....	103
EXPRESSÃO 2 – Parte Variável da Expressão 1	104
EXPRESSÃO 3 – Área do Alvéolo atribuindo um valor para s e h.....	104
EXPRESSÃO 4 – Função Quadrática obtida através do ajuste polinomial.....	109
EXPRESSÃO 5 – Modelo Discreto para o Crescimento Populacional da Colméia com idade equidistribuídas (período inicial da colméia).....	116
EXPRESSÃO 6 – Modelo Discreto para o Crescimento Populacional da Colméia quando a taxa de mortalidade $r = \frac{-1}{40}$ da população do dia anterior (período inicial da colméia).....	116
EXPRESSÃO 7 – Modelo Contínuo para o Crescimento Populacional da Colméia (período inicial da colméia).....	121
EXPRESSÃO 8 – Modelo Contínuo para o Crescimento Populacional da Colméia (período de desenvolvimento).....	122
EXPRESSÃO 9 – Modelo do Desenvolvimento Populacional da Colméia.....	123
EXPRESSÃO 10 – Expressão da Derivada como coeficiente angular da reta tangente.....	133
EXPRESSÃO 11 – Equação da Reta Tangente à Parábola Ajustada.....	135

ÍNDICE DE FOTOGRAFIAS

FOTO 1 – Mostra a fase inicial de construção, pelos alunos, do prisma hexagonal.....	92
FOTO 2 – Mostra a fase inicial de construção, pelos alunos, do prisma hexagonal.....	92
FOTO 3 – Construção das faces laterais do prisma hexagonal.....	93
FOTO 4 – Construção das faces laterais do prisma hexagonal.....	93
FOTO 5 – Construção das faces laterais do prisma hexagonal.....	93
FOTO 6 – Término, pelos alunos, do prisma hexagonal (hexaedro).....	93
FOTO 7 – Término, pelos alunos, do prisma hexagonal (hexaedro).....	93
FOTO 8 – Eixo vertical do prisma hexagonal.....	94
FOTO 9 – Princípio dos pontos de fuga.....	94
FOTO 10 – Princípio dos pontos de fuga.....	94
FOTO 11 – Compasso de madeira construído pelos alunos.....	95
FOTO 12 – Reprodução do Favo.....	95
FOTO 13 – Reprodução do Favo.....	95
FOTO 14 – Equipe de Alunos participantes do trabalho.....	96
FOTO 15, 16, 17 e 18 – Volume do prisma hexagonal que deu origem ao alvéolo x volume do alvéolo.....	148

ÍNDICE DE SIGLAS E ABREVIATURAS

MM.....Modelagem Matemática

CDI.....Cálculo Diferencial e Integral

DIC.....Diferencial and Integral Calculus

PCN.....Parâmetros Curriculares Nacionais

IMUK.....Comissão Internacional para o Ensino da Matemática

RESUMO

Partindo do pressuposto de que o Cálculo Diferencial e Integral (CDI) é de vital importância para a formação cultural e intelectual do educando no Ensino Médio, o trabalho aborda as razões de não mais se ensinar o CDI neste nível, contemplando e envolvendo a descrição e análise da metodologia do ensino do CDI., procurando demonstrar, por meio de uma experiência prática com abelhas, efetuada com alunos dos 1º, 2º e 3º anos do Ensino Médio, como a Modelagem Matemática pode ser eficiente veículo de transmissão de conceitos do CDI de uma forma atraente e motivadora.

Por estas razões, elegemos como proposta central do presente trabalho a inclusão de conceitos (idéias) do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio com estratégia que contempla e atende à interdisciplinaridade e facilita a resolução de problemas significativos do mundo real.

Nosso problema consiste em apontar uma boa metodologia para transmissão integral e integrada dos conteúdos matemáticos, em sintonia com a realidade em contínua mutação, a fim de criar condições para que o educando possa ampliar sua própria cosmovisão.

Este trabalho parte da hipótese de que devemos mudar nossa abordagem, trabalhando os conteúdos vigentes de uma maneira diferente, no contexto do Cálculo Diferencial e Integral e utilizando uma estratégia de ensino interdisciplinar – a Modelagem Matemática.

ABSTRACT

Leaving of the presupposition that Differential and Integral Calculus (DIC) is of vital importance for the student's cultural and intellectual formation in the Medium Teaching, the work approaches the reasons of not more to become trained DCI in this level, by the description and analysis of the methodology of the teaching of DCI, trying to demonstrate, through a practical experience with bees, made with students of the 1st, 2nd and 3rd years of the Medium Teaching, as the Mathematical Modelling can be efficient vehicle of transmission of concepts of Differential and Integral Calculus in an attractive way.

For these reasons, we chose as proposal headquarters of the present work the inclusion of concepts of DCI in the Medium Teaching as strategy that assists to the interdisciplinarity and facilitates the resolution of significant problems of the real world.

Our problem consists of pointing a good methodology for integral and integrated transmission of the mathematical contents, in syntony with the reality in continuous mutation, in order to create conditions so that the student can enlarge your own world conception.

This work part of the hypothesis that we should change our approach, working the effective contents in a different way, in the context of Differential and Integral Calculus and using a strategy of interdisciplinary teaching - the Mathematical Modelling.

Introdução

A questão primordial não é o que sabemos, mas como sabemos. (Aristóteles)

Ao longo do tempo, vimos observando que os alunos cursam a Matemática por mera imposição do currículo, com muito pouca ou nenhuma motivação, havendo, talvez em decorrência disso, significativo número de evasões, reprovações e freqüentemente o questionamento do “onde iremos aplicar isso?”

Aliás, esta questão da aplicação prática da teoria – desde a Antigüidade - suscitou dúvidas. Hygino apud Machado (1990,p.172), relata que Euclides, em 300 a.C., numa de suas aulas no Museu de Alexandria, após demonstrar o primeiro teorema de sua geometria, foi interrompido por uma pergunta sobre a utilidade daquilo. Depois de tentar convencer aquele discípulo (ao que parece sem êxito) do valor intrínseco do conhecimento, chamou seu escravo e lhe disse: “Dê uma moeda a esse jovem, para que ele possa ter proveito com o que está aprendendo.”

Também fora da sala de aula a descrença na utilidade das teorias parece constante. Ainda segundo Hygino, Michael Faraday, em 1840, numa conferência, mostrou que um magneto introduzido no miolo de uma bobina ligada a um galvanômetro fazia a agulha deste instrumento mover-se num sentido e, quando retirado, no sentido contrário. Ao final, um dos presentes se aproximou e comentou: “Senhor Faraday, o comportamento da bobina e do magneto foi interessante, mas qual sua possível utilidade?” Faraday respondeu polidamente: “Senhor, qual a utilidade de um recém-nascido?”. Ocorre que destas experiências resultaram os geradores elétricos que, meio século depois, começariam a produzir eletricidade farta e barata.

Mas não são somente estas velhas dúvidas quanto à utilidade dos conteúdos ensinados que imobilizam a escola do nosso tempo. Muitos outros fatores para isso contribuem.

Há alguns anos, Happer et. al. (1996), analisando os males que acometem o sistema educacional brasileiro, afirmou:

A escola hoje é um mundo à parte, fechado e protegido, separado da vida. Um mundo de ritos imutáveis, de silêncio e imobilidade, onde os papéis de cada um estão previamente determinados – o aluno cala, obedece, é julgado; o professor sabe, ordena, decide, julga, anota, pune – cujo percurso é uma corrida de obstáculos. Um mundo de conteúdos estranhos, atomizados, compartimentados e rigidamente hierarquizados, que não têm qualquer significação nem qualquer utilidade imediata para os alunos .

Este é em rápidas pinceladas, o contexto com que nos deparamos quando a questão é o ensino da Matemática. Como reverter este quadro, ou seja, como tornar interessante a matemática a ponto de alimentar a curiosidade do aluno em querer estudá-la?

Através do trabalho de Bassanezi, passamos a conhecer a estratégia de ensino denominada “ Modelagem Matemática”.

Ao aprofundar nossos conhecimentos sobre o assunto constatamos que esta estratégia como ferramenta de ensino caminha em sentido contrário a tendência formalista da Matemática pura que alcança generalizações somente a partir de axiomas, definições e teoremas que se encaixam uns nos outros sem nenhuma preocupação com a utilização externa dos seus conhecimentos. Ou seja, através da MM a Matemática pode ser usada como instrumento de investigação e compreensão da realidade que nos cerca.

Como o trabalho em equipe, também a contextualização dos conteúdos e a busca de inter-relações destes com os de outras áreas do conhecimento são procedimentos inerentes ao processo de Modelagem. Estimulados por estas idéias, apesar da insegurança gerada pela aplicação em sala de aula de uma estratégia de ensino tão audaciosa e revolucionária frente às técnicas educacionais até então utilizadas, sentimos que ali se apresentava a chance de ultrapassar o mero repasse de conteúdos e de motivar

os alunos a estudar Matemática, na medida em que percebessem a influência desta em seu cotidiano, sobretudo quanto à compreensão das chamadas situações-problema.

Das experiências tratadas por Bassanezi constatamos também que a linearidade dos conteúdos na construção do conhecimento matemático não se coaduna com esta estratégia de ensino. Entendemos por linearidade a sucessão de tópicos que devem ser apresentados numa certa ordem. Pires (2000,p.8/9), ao fazer uma análise histórica dos currículos de Matemática, observa que:

Apoiados num modelo curricular cartesiano, os elaboradores de currículos parecem aceitar a necessidade de cumprir metas cartesianamente definidas, num dado espaço de tempo, em que cada unidade justifica-se em termos da sua utilidade para a unidade seguinte. *Embora possa parecer um detalhe sem importância a linearidade dos currículos conduz a uma prática educativa excessivamente fechada, em que há pouco espaço para a criatividade, para a abordagem interdisciplinar, para o estabelecimento de relações entre os diferentes campos da matemática, enfim para a consecução de metas colocadas para o ensino de Matemática pelas recentes propostas curriculares.*

Uma outra preocupação relacionada ao ensino da matemática seria romper com a abordagem que não interliga as suas diferentes áreas conduzindo a uma departamentalização do saber que consideramos danosa à compreensão mais aproximada dos fenômenos da realidade.

Esta questão, segundo alguns estudiosos do assunto poderia ser contornada com *a introdução de conteúdos modernos como o Cálculo Diferencial e Integral, dada a sua importância na unificação das diferentes partes da matemática, na valorização das aplicações e na descompartmentalização dos conteúdos ensinados.* (Beltrão,2001)

Seria oportuno lembrar que há algumas décadas, uma corrente de estudiosos entre os quais Felix Klein, Euclides Roxo, Lasaint e mais recentemente Dulcos e Geraldo Ávila, vem defendendo a idéia de que o Cálculo Diferencial e Integral seria de vital importância para a formação cultural e intelectual do educando.

A importância da ciência para o desenvolvimento sócio-econômico no início do século XIX acabou gerando a necessidade de se modernizar o currículo das Escolas Secundárias introduzindo novos conteúdos. Félix Klein, um dos idealizadores e defensores deste Movimento de Modernização da Matemática do Início do Século advogou então pela introdução do conceito de função e das noções de Cálculo Infinitesimal devido a sua importância como ferramenta necessária à compreensão dos fenômenos naturais e de outros campos do conhecimento. Porém, este componente curricular foi retirado do ensino médio por volta de 1960, sendo hoje, somente abordado no ensino superior.

Um estudo mais detido do CDI e sua trajetória no ensino médio através do trabalho de Carvalho (1996) e Miorim (1998) pôde fornecer importantes subsídios para elucidar os motivos que levaram a exclusão deste conteúdo deste nível de ensino e, ainda, fortalecer a visão de que o CDI, se bem articulado a estratégias capazes de dar sentido às idéias trabalhadas, pode se tornar valiosa ferramenta na busca de melhoria do atual ensino, sobretudo no da Matemática.

Como se verá em capítulo próprio com mais detalhes, a partir de 1961, o ensino da Matemática sofre a influência da descentralização e flexibilidade curriculares prescritas pela Lei 4.024, de 20/12/1961, Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, que preconizou que os sistemas de ensino deveriam passar a atender a variedade dos cursos, flexibilidade dos currículos e articulação dos diversos graus e ramos (artigo 12), variedade de métodos de ensino e formas de atividade escolar, tendo em vista as peculiaridades da região e de grupos sociais, com vistas a estimular experiências pedagógicas, aperfeiçoando os processos educativos (artigo 20).

Tal descentralização e flexibilidade curriculares fizeram com que fosse retirado da escola secundária (denominação adotada na época) o ensino de Cálculo, que permaneceu, entretanto, em algumas escolas isoladas.

Tempos depois os currículos foram influenciados pelo movimento denominado Matemática Moderna, que pretendia diminuir o descompasso existente entre o ensino de Matemática desenvolvido nas escolas de nível secundário e os últimos avanços científicos tecnológicos.

Este movimento – que se expandiu rapidamente – apresentava segundo Miorim (1998,p.111) uma proposta baseada de um lado, nos postulados estruturalistas de Jean Piaget, e de outro, na forma axiomática desenvolvida pelo grupo Bourbaki, privilegiando os conjuntos, as relações e as estruturas, centralizando-se na linguagem e nas justificações matemáticas rigorosas.

Desta forma os conteúdos passaram a ser aplicados de uma maneira rígida, com ênfase em definições, nomenclatura e exercícios teóricos repetitivos, nos quais se privilegia o desenvolvimento algébrico e a aplicação de regras. “A atitude de raciocinar rigorosamente sobre objetos matemáticos, dos quais o aluno poderia inclusive ignorar o sentido, foi cultivada como uma virtude”. (Pires,2000,p.14)

Havia muita dificuldade para colocar em prática os novos currículos, tanto por parte dos professores que não conseguiam transmitir os conteúdos de um modo mais didático, quanto dos alunos, que não conseguiam entender a matéria, por vezes muito abstrata e complexa. Todos estes impasses conjugados acabaram por afastar de vez o Cálculo dos currículos do ensino médio.

Voltando à questão que versa sobre a importância e relevância do CDI e seu ensino no nível médio como instrumento para compreensão e resolução de problemas significativos e formação cultural e intelectual do educando, podemos começar por dizer que, também, uma breve análise de algumas obras sobre o assunto mostra que os tópicos relativos ao ensino do Cálculo no ensino médio continuam a ser tratados de uma

maneira tradicional onde privilegia-se o ensino mecânico e memorístico constituindo-se em uma versão reduzida dos livros de Cálculo destinados ao ensino superior.

Tal deficiência, porém, não vem de agora. Por volta de 1908, um estudo detalhado, realizado em vários países, para verificar a situação em que se encontrava o ensino de matemática na escola secundária, concluiu haver *desvinculação entre o ensino da matemática neste nível e o ensino universitário, provocando certa descontinuidade entre estes dois níveis*. Desse modo, buscando contornar a situação, foi apresentada como solução, entre outras, *a introdução de conteúdos mais modernos como Cálculo Diferencial e Integral, devido a sua importância no desenvolvimento da matemática e na unificação de suas várias partes, valorização das aplicações e a descompartmentalização dos conteúdos ensinados*. (Beltrão, 2001, p.31)

Por volta de 1937, o movimento da Matemática Moderna sofre severas críticas. Estas multiplicam-se a ponto de, segundo Pires (2000,p.13) um dos promotores desta reforma afirmar:

“Estou estarecido com o que constato no ensino da escola primária e da secundária. Fui um dos promotores da reforma de ensino da Matemática, mas o que eu preconizava era simplesmente uma poda de galhos mortos, atravancadores, e a introdução de um pouco de álgebra; mas há toda uma atmosfera nociva que tem acompanhado seu desenvolvimento. O resultado é tal que, sem uma forte reação de base, eu penso que a geração atual de nossa escola receberá uma formação matemática que não a prepara para a pesquisa, nem para a utilização da Matemática em técnicas ou ciências experimentais.”

Fundamentando-nos nestas reflexões resolvemos experienciar nossa proposta:

“ *Sugerir a inclusão de conceitos (idéias) do Cálculo Diferencial e Integral (CDI) no Ensino Médio com estratégia que contempla (atende) a interdisciplinaridade e resolve problemas significativos do mundo real: Modelagem Matemática (MM)*”, trabalhando os conteúdos ministrados neste nível de ensino sob a perspectiva do CDI,

com um grupo de alunos de uma escola particular. no período compreendido entre 24 de maio a 29 de novembro de 2000.

Nas aulas regulares (períodos matutino e noturno), a escola adotava material didático que apresentava uma rígida estrutura de conteúdos distribuídos por série/aulas, tornando-se, pois, impossível desenvolver um trabalho que objetivasse aguçar a curiosidade dos alunos, desafiá-los a desenvolver sua criatividade, iniciativa e curiosidade investigatória em uma perspectiva científica.

Desse modo, tendo em vista este contexto adverso, procuramos desenvolver nossa experiência no Período da tarde, fora do horário usual das aulas, tendo os alunos sido convidados a participar do projeto, sem quaisquer promessas de recompensa em termos de nota.

A finalidade era a de sugerir um modo de desenvolver o conceito de função como ferramenta necessária à resolução de problemas que envolvessem tabelas, gráficos, obtenção de valores máximos e mínimos e a idéia de variação. Ou seja, as funções neste contexto teriam de ser trabalhadas como ferramenta para compreensão da situação em estudo. Entretanto, no processo de modelagem, isso não impediu que outros conteúdos (como trigonometria e geometria, por exemplo) também fossem abordados na medida em que se faziam necessários à resolução de problemas.

Quando trabalhamos com a Modelagem como estratégia de ensino-aprendizagem, para desencadear o processo, utilizamos um tema, algum problema significativo ou o questionamento de alguma situação da realidade, cujo objetivo é motivar os alunos para a aprendizagem, deixando-os, sempre que possível, escolher o tema com o qual trabalharão, de acordo com seus interesses e/ou afinidades. Entretanto é preciso cuidado, pois, conforme Biembengut (1999):

“a escolha do tema pelos alunos tem vantagens e desvantagens. Uma vantagem é que se sentem participantes no processo. Em contrapartida, as desvantagens podem surgir se o tema não for adequado para desenvolver o programa ou, ainda, muito complexo, exigindo do professor um tempo de que não dispõe para aprender e para ensinar”.

Como nosso objetivo não era única e exclusivamente trabalhar o processo de modelar, mas também desenvolver algumas idéias próprias do Cálculo Diferencial e Integral, optamos por trabalhar com um tema já conhecido e que contemplasse nossas necessidades.

Resolvemos, então, trabalhar com abelhas, para tanto criando um modelo adequado de alvéolo. *Adequado* aqui significa bem-sucedido, capaz de cumprir sua função de matematizar e simular a realidade. Com efeito, o sucesso de um modelo matemático resulta da capacidade de representar e manipular o conhecimento qualitativo e quantitativo das variáveis envolvidas e as formas de interação entre elas.

Escolhido o tema, por meio de algumas atividades preparatórias e a exibição do filme “Cidade das Abelhas”, visamos capturar as idéias iniciais, envolvendo e fazendo com que o grupo se familiarizasse com o tema. Após, sugerimos que trabalhássemos com a geometria dos alvéolos, o que nos permitiu, ao longo do tempo e resolvendo uma série de problemas (por exemplo: Qual a área do alvéolo? Qual o seu volume? Qual medida deve ser utilizada para o raio da circunferência? etc.), abordar grande parte dos conteúdos do currículo do Ensino médio, tais como trigonometria, progressões, geometria plana, geometria espacial e funções, além de noções de limite e derivada.

Ressalte-se ainda que, devido às limitações de tempo, outros conceitos do cálculo – importantes na resolução de certos problemas ligados ao tema “abelhas” – deixaram de ser focalizados. Reservamos, no presente estudo, um capítulo à parte para sugerir *Atividades 1, 2, 3* etc., que possam ser talvez de interesse a outros pesquisadores que pretendam trabalhar com este tema ou mesmo com modelagem.

Assim, voltando às indagações centrais do trabalho, esperamos que - o porquê não ensinar de forma atraente e motivadora – revele-se afirmativamente, na medida em que, no decorrer do trabalho, formos gradativamente descrevendo e analisando os passos e resultados da nossa experiência com Modelagem Matemática.

De antemão, achamos ter sido gratificante o resultado da nossa experiência (conjunta), porque, em vez de fornecer ao aluno a expressão na sua forma final, acabamos percorrendo – juntos – os caminhos que levaram a ela. “Neste nível do ensino, fatos concretos devem preceder as generalizações, que uma vez conseguidas, dificilmente serão esquecidas” (Dulcos,1992). Além do mais, durante o processo foi-nos possível desenvolver vários conteúdos ensinados no nível médio, agora de forma contextualizada, fornecendo aos alunos subsídios para a resolução dos problemas.

Finalmente queremos enfatizar que a finalidade da experiência foi apenas a de mostrar uma maneira de trabalhar as idéias do Cálculo nestas séries iniciais. Não é nosso desejo nem tampouco objeto deste trabalho abordar algoritmos ou desenvolver um curso de CDI nestas séries, como finalidade em si mesmo ou tópico estanque que brota em algum momento do currículo.

No mesmo sentido, também não temos a intenção de sugerir um novo currículo para estas séries com a inclusão da disciplina CDI, mas tão-somente o objetivo de usar as idéias do CDI como elemento facilitador da compreensão e unificador dos atuais conteúdos desenvolvidos nestas séries.

Em vista deste breve panorama, a problemática do presente trabalho poderia ser assim resumida: *Se ao professor cabe a responsabilidade pela transmissão integral e integrada dos conteúdos matemáticos, em sintonia com a realidade em contínua mutação, ou, em outras palavras, se esta didática deve estar em consonância com o meio, os seres e as relações (nem sempre visíveis) entre eles, como criar condições para que o educando possa melhorar sua própria cosmovisão?*

Assim, nossa proposta não consiste em “mudar” o currículo ora vigente no Ensino médio, retirando alguns pontos para contemplar outros, muito menos para reintroduzir o Cálculo para ser trabalhado da maneira tradicional (como constatamos nas obras consultadas). Não se trata de mudar O QUE abordar, mas sim COMO abordar, ou seja, propomo-nos a trabalhar os mesmos conteúdos vigentes, porém de uma maneira diferente, dentro do contexto do CDI e utilizando uma estratégia de ensino interdisciplinar – a Modelagem Matemática. Neste sentido, o Cálculo não surge aqui

como uma “nova disciplina”, mas como ferramenta auxiliar na resolução de problemas diversos conferindo-lhes significado, como o atesta nossa experiência com abelhas.

Na tentativa de dar uma visão geral do trabalho, enunciaremos o conteúdo de cada um de seus capítulos.

No Capítulo 1– MUDANÇA DE PARADIGMA – refere-se à passagem de um modelo cartesiano-positivista de interpretação do mundo e seus fenômenos a um outro modelo, que leva em conta o erro, o caos e o acaso como variáveis interagentes em sistemas longe do equilíbrio, como, por exemplo, os sistemas vivos. Abordamos o fenômeno da globalização e as novas tecnologias que imprimem velozes mutações no modo de se entender e viver no planeta, solicitando, conseqüentemente, novas estratégias na educação de um modo geral e no ensino da matemática em particular.

No Capítulo 2 – MODELAGEM MATEMÁTICA – central ao nosso trabalho, tratamos da busca de outros métodos para o ensino da matemática, mais adequados com o período e um novo paradigma educacional. A Modelagem Matemática permite ao aluno articular conhecimentos matemáticos entre si e com outras áreas do saber, facilitando o acesso às relações entre o conhecimento científico e a realidade.

O Capítulo 3 – O CÁLCULO – enfoca as raízes do cálculo na Grécia, há mais de 2000 anos, chegando a seu uso contemporâneo como indispensável ferramenta para solução de problemas da engenharia, física, biologia, química, economia, ecologia e até mesmo das ciências sociais, passando por uma análise histórica de seu ensino no Brasil durante os diversos períodos, confrontando os livros de matemática mais representativos de cada período até nossos dias, constatando que, apesar da preocupação desde início do século XX com o ensino de Matemática, as idéias reformadoras não vingaram na prática, mercê da rigidez com que os novos conteúdos foram abordados, ênfase em se trabalhar definições e excesso de exercícios teóricos e repetitivos.

No Capítulo 4 – TRABALHO DE PESQUISA DESENVOLVIDO – são descritos, narrados e analisados os passos, modelos e resultados de nossa experiência com alunos dos 1º, 2º e 3º anos do ensino médio, no período compreendido entre 24 de maio a 29 de novembro de 2000. A proposta foi a de trabalhar os conteúdos ministrados no ensino

médio sob a perspectiva do Cálculo Diferencial e Integral segundo a estratégia descrita no capítulo 2. Ressalte-se que no decorrer da descrição serão encontrados quadros que fundamentam a teoria desenvolvida com os alunos.

O Capítulo 5 – OUTRAS ATIVIDADES – focaliza atividades que poderiam ser desenvolvidas mas não o foram devido às limitações de tempo. Assim, conceitos do Cálculo – importantes na resolução de problemas ligados ao tema “abelhas”– deixaram de ser focalizados. Reservamos, então, esse capítulo para indicar *Atividades 1, 2, 3* etc., que possam ser de interesse a pesquisadores que pretendam trabalhar com o tema ou com Modelagem.

CAPÍTULO I

1 Mudança de paradigma

“Todo mito é perigoso porque induz o comportamento e inibe o pensamento.

O cientista virou um mito.” (Rubem Alves).

Nesse final de milênio, observamos grandes mutações nos mapas do mundo e da cultura, a queda do muro de Berlim, a desagregação do Leste europeu e a ocidentalização de países asiáticos.

Um processo cada vez mais intenso de globalização da economia aglutina os países, integra certas regiões do mundo e esfacela as tradições locais. Modifica-se, assim, o próprio conceito de nação e de fronteira: a soberania nacional é constantemente questionada à medida que os sistemas transnacionais - comunidades de livre comércio, TV a cabo e Internet, entre outros - invadem a esfera privada na nova sociedade de consumo.

Estas velozes transformações produziram uma crise planetária, na humanidade e em seu espaço geográfico, solapando crenças e teorias que sustentavam o modelo atual de sociedade; a verdade é que se torna cada vez mais difícil de compreender e explicar a nova ordem mundial. Fala-se em novos paradigmas que envolvem a complexidade, o caos e a incerteza.

Para Thomas Kuhn, em *Estrutura das Revoluções Científicas*, *paradigmas* são modos de ver o mundo, devendo ser capazes de atrair cientistas com idéias divergentes e suficientemente incompletos para deixarem problemas a ser solucionados. Não só fornecem uma teoria da natureza, mas permitem seleção, avaliação e crítica. Toda vez que um paradigma é rejeitado pela ciência, um outro emerge, abrindo campo para o saber. No senso comum, paradigmas são modelos pré-estabelecidos ou padrões que se perpetuam com o passar do tempo.

À nova configuração de mundo costuma-se denominar globalização. Esta acelera mudanças tecnológicas e facilita o acesso às comunicações, causando, por outro lado, problemas. O fenômeno está baseado na crença de que a economia comanda a história por meio das relações de produção e consumo.

Uma breve retrospectiva dos antecedentes à referida mudança de paradigmas mostra que antes de 1500 a ciência baseava-se na fé. Sua principal finalidade era compreender o significado das coisas e não exercer sobre elas controle ou predição. Os cientistas medievais investigavam os fenômenos naturais e consideravam do mais alto significado as questões referentes a Deus, à alma humana e à ética.

Nos séculos XVI e XVII, mudanças revolucionárias na física e na astronomia levadas a termo por Copérnico, Galileu e Newton culminaram com a substituição da noção de universo orgânico, vivo e espiritual, pela noção de um mundo mecânico, que funcionava à semelhança de uma máquina. Estas revoluções científicas baseavam-se em um novo método de investigação defendido vigorosamente por Francis Bacon, que envolvia a descrição matemática da natureza e o método analítico de raciocínio concebido por Descartes.

Sobre o método cartesiano, conforme Davis-Hersh (in Bassanezi, 2002, p.18):

A unificação e esclarecimento de toda ciência, ou de todo conhecimento foi preconizado pelo método da razão, vislumbrado no sonho de Descartes, e transmitido em seu célebre "Discurso sobre o método de bem conduzir a razão na busca da verdade" de 1637.

A busca do conhecimento científico, em qualquer campo, deve consistir, essencialmente, em:

- a) aceitar somente aquilo que seja tão claro em nossa mente, que exclua qualquer dúvida;
- b) dividir os grandes problemas em problemas menores;
- c) argumentar, partindo do simples para o complexo; e
- d) verificar o resultado final.

Simplificadamente, este método consiste em decompor pensamentos e problemas em suas partes componentes e dispô-las em sua ordem lógica, rejeitando todo conhecimento meramente provável e considerando somente que se deve acreditar nas coisas perfeitamente conhecidas, sobre as quais não pode haver dúvidas.

O método de Descartes e sua concepção de natureza influenciaram todos os ramos da ciência moderna, sendo muito útil ao seu desenvolvimento. Foi esse método que permitiu à Nasa levar o homem à Lua, de resto influenciando biólogos, médicos e psicólogos na descrição dos mecanismos que compõem os organismos vivos.

Por outro lado, a excessiva ênfase no método cartesiano levou à fragmentação característica de nosso pensamento e das nossas disciplinas acadêmicas.

Toda a elaboração da ciência mecanicista dos séculos XVII, XVIII e XIX, incluindo a grande síntese de Newton, nada mais foi do que um desenvolvimento da idéia cartesiana.

A abordagem experimental e o uso de uma descrição matemática da natureza tornaram-se as características dominantes da ciência no século XVII e subsistiram como importantes critérios das teorias científicas de hoje. Francis Bacon foi o primeiro a formular uma teoria clara do procedimento indutivo (realizar experimentos e extrair deles conclusões gerais a serem testadas por novos experimentos). A partir deste pensador, o objetivo da ciência - que desde a Antigüidade tinha sido a sabedoria, a compreensão da ordem natural e a vida em harmonia com ela - passou a conhecimento destinado a controlar a natureza.

Isaac Newton (século XVII) realizou uma síntese das obras de Copérnico, Kepler, Bacon, Galileu e Descartes. Sua física era suportada por uma consistente teoria matemática do mundo que permaneceu como sólido alicerce do pensamento científico até boa parte do século XX. O Cálculo Diferencial através do qual ele descreveu o movimento de corpos sólidos foi considerado por Einstein o maior avanço no pensamento que um indivíduo sozinho teve o privilégio de realizar.

O método de Newton para se chegar a essas leis poderia ser resumido em sua afirmação de que:

Tudo o que não é deduzido dos fenômenos será chamado de hipótese (...) as hipóteses, sejam elas metafísicas ou físicas, sejam elas dotadas de qualidade ocultas ou mecânicas, não têm lugar na filosofia experimental. Nesta filosofia, proposições particulares são inferidas dos fenômenos e depois tornadas gerais por indução. (Capra, 1997)

Foi Newton que em sua obra *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural* introduziu a combinação apropriada de ambos os métodos, sublinhando que tanto os experimentos sem interpretação sistemática quanto a dedução a partir de princípios básicos sem evidência experimental não conduziram a uma teoria confiável. Desde aí a ciência natural passou a basear-se nesta teoria.

No final do século XIX, os conceitos de eletrodinâmica e a teoria da evolução em biologia superaram o modelo newtoniano, indicando que o universo era muito mais complexo que Descartes e Newton haviam imaginado.

Mas, antes de falar sobre o novo modelo de pensamento, seria bom lembrar o impacto causado pelas bombas atômicas atiradas sobre as cidades japonesas de Hiroxima e Nagasáki, em 1945. Estes dois artefatos nucleares, na verdade, não apenas mostraram que a ciência aplicada era capaz de matar em escala industrial, mas sobretudo causaram uma enorme descrença no poder de a razão humana trazer a felicidade ao homem.

Porém, se de um lado, o uso criminoso da energia nuclear semeou a morte e o desencanto, por outro, a exploração espacial, iniciada em 1957, se encarregou de recolocar a ciência e a tecnologia em um lugar de destaque.

Com efeito, a corrida espacial galvanizou pensadores de todas as áreas do conhecimento humano, gerando um desenvolvimento sem precedentes, agregando geólogos, engenheiros astronáuticos, físicos eminentes, cientistas, filósofos, cada qual em sua área, mas trabalhando em conjunto, para, no mais breve tempo possível, atingir os objetivos a que se propunham, e, que, diga-se, foi alcançado com muito sucesso.

Alianças e objetivos em comum permitiram à humanidade aprimorar e acumular conhecimentos valiosos em todas as áreas do saber, juntando-se academia, governos, inteligências individuais, empresas, instituições não lucrativas, ONGs, todos compartilhando descobertas e inventos, unidos pelo mesmo interesse em um futuro melhor, e dessa maneira estabelecendo as bases de um produtivo campo de estudos transdisciplinares.

Mas para que a evolução acontecesse, os homens tiveram de rejeitar a visão amplamente aceita de que o futuro é predeterminado, vendo-o, agora, como um terreno indeterminado, em grande parte sujeito a contínuas escolhas humanas, uma vez que o Universo não é somente regido por regularidades, mas por sistemas ditos não lineares.

Nestes sistemas longe do equilíbrio, como a atmosfera do planeta, por exemplo, uma insignificante mudança pode gerar consequências imprevisíveis e drásticas com o passar do tempo. A metáfora usada é a do bater das asas de uma borboleta que provoca um sutil deslocamento de ar. A perturbação inicialmente imperceptível acaba, com o passar do tempo, introduzindo na atmosfera uma reação em cadeia capaz de causar uma complexa série de eventos que podem ir desde um vento leve a, no limite, um furacão.

Outro fator predominante em sistemas desse tipo é a “imprevisibilidade” de um evento, ligada muito de perto ao que se denomina caos.¹ Por essa razão, a mecânica celeste de Newton, que pode, com uma impressionante precisão, prever fenômenos em sistemas perto do equilíbrio, falece em sistemas longe do equilíbrio, nos quais predomina o acaso, isto é, um evento pode ser “dissecado” em elos causais, ou seja, uma causa leva a uma consequência e esta se torna a causa da consequência posterior até o ponto em que passa a ser observado. Neste momento, se o observador tentar entender como tudo se passou, ou como se chegou àquele resultado, poderá concluir que foi graças ao “acaso”. Eventos ao acaso não obedecem às leis da mecânica clássica,

¹ A **teoria do caos** foi formulada por Poincaré. O termo é empregado para designar sistemas com muitos graus de liberdade, mas sem simetrias suficientes. Assim, o comportamento a longo prazo do sistema após pequena perturbação inicial é imprevisível, pois são necessários muitos dados para descrever precisamente como o sistema responde à perturbação. (ATLAN, Henry. *Entre o Cristal e a Fumaça – Ensaio sobre a Organização do Ser Vivo*. Rio de Janeiro: Zahar, 1992, p. 36)

porque dependem da incerteza e do erro. Só se pode tentar predições de resultados pelo cálculos das probabilidades.

Portanto, somente sistemas perto do equilíbrio (como os sistemas planetários ou um pêndulo, por exemplo) obedecem às leis da mecânica clássica newtoniana, que é baseada na crença de um universo regido por leis científicas as quais permitem prever tudo o que acontecesse, bastando conhecer o estado completo do universo num determinado momento. O resto ou seja, a maior parte do Universo é constituída por fenômenos e sistemas complexos distantes do equilíbrio, sobre cujo comportamento é quase impossível traçar projeções futuras confiáveis, mesmo que a curto prazo.

Assim, resumidamente, mudança de paradigmas se refere à passagem de um modelo cartesiano-positivista de interpretar o mundo, a natureza e seus fenômenos a um outro modelo, que leva em conta o erro, a correção de rumos, o caos e o acaso como variáveis interagentes em sistemas longe do equilíbrio, como, por exemplo, os sistemas vivos.

1.1 Educação, Ensino da Matemática e Novos Paradigmas

Na educação de há muito se faz sentir a necessidade de uma mudança de paradigma, uma mudança de mentalidade, percepção e valores que formam a nossa atual visão da realidade e da escola.

Assim, avaliando a influência dos novos paradigmas no processo de redefinição do mundo em seus aspectos tecnológicos, econômicos e sociais mais visíveis, notamos que, apesar de vivermos hoje em um mundo globalmente interligado, no qual os fenômenos biológicos, psicológicos, sociais e ambientais são todos interdependentes, aplicamos, ainda, dentro da nossa escola conceitos de uma visão de mundo fragmentada herdada da ciência cartesiana-newtoniana para interpretar uma realidade impermeável a esses conceitos.

A educação é um sistema que engloba, em interação real, viva e permanente, milhares de variáveis. Como já referimos, em sistemas assim, não há qualquer possibilidade de previsão futura, mesmo a curto prazo.

Em poucas palavras: também na escola o antigo paradigma deveria ter sido substituído, o que significaria o fim dos "planejamentos de arquivo", das aulas preparadas e nunca mudadas, da passividade-receptividade dos alunos, numa palavra, o abandono das certezas, dos objetivos de longo prazo.

Mas não é o que vem sucedendo. Em grande parte das escolas em todo o país continua-se a aplicar métodos esclerosados de ensino, à revelia das mudanças que estão a exigir uma nova mentalidade.

Assmann (1996, p.55) afirma: “Confesso a minha perplexidade, não apenas diante de muitos aspectos da atual evolução da humanidade, mas também diante dos que persistem em não evoluir. Há muita literatura sobre a educação na qual não se registra nada acerca dos terremotos epistemológicos do século XX.”

Moraes (1997, p.50/51) diagnostica o estado de calamidade do sistema escolar brasileiro como devido ao arcaísmo do paradigma determinista:

Na área educacional, as influências do pensamento cartesiano-newtoniano parecem ainda mais graves considerando o seu significado para a formação de novas gerações, com sérias implicações para o futuro da humanidade. (...) Em vez de produzir as transformações necessárias para o desenvolvimento harmonioso do ser humano, a educação atual continua gerando padrões de comportamento preestabelecidos, com base em um sistema de referência que nos ensina a não questionar, a não expressar o pensamento divergente, a aceitar passivamente a autoridade, a ter certeza das coisas (...)

Mais à frente ela arremata:

Onde estará a origem de tudo isso? Por que nossas escolas continuam repetindo, confirmando e reafirmando o velho ensino? Apesar de todas as correntes filosóficas que continuam disputando o espaço pedagógico, o que observamos é que a escola atual continua influenciada pelo universo estável e mecanicista de Newton, pelas regras metodológicas de Descartes, pelo determinismo mensurável, pela visão fechada de um universo linearmente concebido. Conseqüentemente, é uma escola submetida a um controle rígido, a um sistema paternalista, hierárquico, autoritário, dogmático, não percebendo as mudanças ao seu redor e, na maioria das vezes, resistindo a elas.

O ensino da Matemática não foge à regra. As transformações por que passa o mundo, o ritmo alucinante da evolução solicita outra didática, mentalidade, metodologia.

Como diz Zuñiga (1991):

O reflexo disso se faz sentir na Matemática (...) a natureza da Matemática está mudando: há muitos indícios disso. Cada dia mais pessoas questionam o modelo matemático infalível, absoluto, longe da intuição empírica e da realidade terrena, que dominou até agora ... Cada vez se percebe melhor a íntima relação entre as matemáticas e a sociedade. Cada vez tem-se mais espaço para um novo paradigma sobre a natureza das matemáticas, um paradigma empírico e construtivista, um paradigma que recorre à intuição sensorial, um paradigma que integre no seu seio as influências sociais e culturais, que recorre à História das Matemáticas e das Ciências como inspiração, não só para anedotas, senão para estabelecer a lógica que sustenta a prática educativa de uma forma mais acertada.

Mas antes de propormos estratégias de ensino que nos permitam trabalhar para a formação e preparação de um novo homem segundo uma nova mentalidade, recordemos, em resumo, as idéias e os valores contemplados pelo antigo paradigma e que perduram no ensino escolar, a saber:

- a) o método científico como única abordagem válida do conhecimento;
- b) a concepção do universo como sistema mecânico composto de unidades elementares;
- c) a concepção da vida em sociedade como uma luta competitiva e existencial;
- d) a crença no progresso material ilimitado a ser alcançado via crescimento econômico.

Assim, se hoje o universo e o homem não podem mais ser vistos como uma máquina composta de sujeitos e objetos, mas um todo harmonioso e indivisível composto pelas relações dinâmicas entre ambos (o que aponta para concepção sistêmica de universo), a educação "precisa ir contra a fragmentação, precisa ajudar a humanidade a colar as partes que separou nos cinco séculos em que se submeteu à ditadura da razão". (Capra, 1997)

Mas para alcançar tais objetivos dentro das limitações que o atual sistema escolar nos impõe, precisaríamos, entre outros procedimentos:

- a) incorporar a transdisciplinaridade;
- b) relacionar educação e vida cotidiana;
- c) estimular a criatividade;
- d) trabalhar o ser humano como um todo.

No âmbito da Educação Matemática encontramos três tendências muito difundidas nos últimos tempos, quais sejam a introdução de aspectos de aplicações, resolução de problemas e a modelagem matemática. Entretanto, a nosso ver, apesar destas três tendências guardarem estreita relação com a Modelagem Matemática, esta contemplaria simultaneamente os quatro itens acima enunciados de uma forma mais abrangente e eficaz.

CAPÍTULO II

2 A Modelagem Matemática

"O cérebro é um tear encantado, tecendo perpetuamente uma imagem do mundo externo, rasgando-a e retecendo e inventando outros mundos, criando um universo em miniatura."
(Charles Sherrington).

Como dissemos anteriormente, também na educação sente-se a necessidade de uma mudança de paradigma. É necessário superar a relação linear e mecânica entre o conhecimento científico-teórico e a prática da sala de aula, uma vez que os problemas enfrentados pelo professor requerem um tratamento singular, pois se encontram fortemente determinados pelas características situacionais de um contexto complexo, vivo e mutável, definido pela interação simultânea de múltiplos fatores e condições.

Antes, porém, de trabalharmos técnicas capazes de manejar a complexidade e a integração inteligente e criativa do conhecimento, vamos situar a Matemática e o seu ensino no atual contexto histórico.

A Matemática, surgida na Antigüidade por necessidade do cotidiano, converteu-se, com o passar dos anos, em um complexo sistema de variadas disciplinas.

Como as demais ciências, reflete as leis sociais e serve de poderoso instrumento para o conhecimento do mundo e domínio da natureza, podendo ser caracterizada por traços como a abstração, precisão, rigor lógico, caráter irrefutável das conclusões e mais um extenso campo de aplicações.

Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino médio (1997), a abstração matemática revela-se no tratamento de relações quantitativas e de formas espaciais, pois esta ciência move-se quase exclusivamente no campo da abstração e de suas inter-relações.

Matemáticos também usam constantemente modelos, analogias físicas e exemplos bem concretos na descoberta de teoremas e métodos. Mas os teoremas matemáticos são rigorosamente demonstrados por raciocínio lógico.

Assim, os resultados matemáticos distinguem-se pela sua precisão e os raciocínios desenvolvem-se num alto grau de minuciosidade, que os torna incontestáveis e convincentes.

Mas a vitalidade da Matemática deve-se ao fato de seus conceitos e resultados terem origem no mundo físico e real, apesar de seu caráter abstrato, e virem sendo aplicados em inúmeros campos da vida diária, indústria, comércio e área tecnológica. Ciências como a Física, a Química, a Astronomia e mais recentemente a Biologia usam, em suas formulações e conceitos, a Matemática como ferramenta essencial (PCNs, 1997).

Embora com uso mais reduzido, outras áreas do conhecimento, como Sociologia, Psicologia, Antropologia, Medicina, Economia política, utilizam-na como subsídio importante, em função de conceitos, linguagem lógica, estatísticas etc.

Em sua origem, a Matemática constituiu-se a partir de uma coleção de regras isoladas, decorrentes da experiência e diretamente conectadas com a vida diária. Não se tratava, portanto, de um sistema logicamente unificado.

Por sua vez, a aritmética e a geometria originaram-se de conceitos que se interligavam, generalizando-se, talvez em consequência disso, a idéia de que Matemática é a ciência da quantidade e do espaço, surgida a partir da necessidade de contar, calcular, medir, organizar formas e o espaço.

O desenvolvimento da geometria e o aparecimento da álgebra marcaram uma ruptura com os aspectos puramente pragmáticos da Matemática, impulsionando-a à sistematização dos conhecimentos e gerando novos campos, como os da geometria analítica e geometria projetiva, álgebra linear etc.

O estudo das grandezas variáveis deu origem ao conceito de função e fez surgir, em decorrência, um novo ramo: a análise matemática.

Aos poucos a Matemática transformou-se na ciência que estuda todas as possíveis relações e interdependências quantitativas entre grandezas, comportando um vasto campo de teorias, modelos e procedimentos de análise, metodologias próprias de pesquisa, formas de coletar e interpretar dados. Embora as investigações se situem ora no interior da Matemática pura, ora no da Matemática aplicada, elas se influenciam mutuamente: muitas das descobertas "teóricas" mais tarde revelam-se práticas, assim como o estudo de propriedades matemáticas em fenômenos particulares podem por vezes conduzir a uma sistematização teórica (Eves,1996).

Na escola, apesar de todo o progresso e melhoria dos métodos de ensino, ainda se exige do aluno escutar e ou repetir todos os "pontos", quando seria mais vantajoso praticar os raciocínios e cálculos de modo mais simples e proveitoso.

Em muitos lugares do mundo, inclusive no Brasil, teorias truncadas e carregadas de pormenores inúteis são detalhadamente enfocadas nos currículos, em detrimento de proposições simples, que abreviariam em muito os caminhos, além de contribuir para o aperfeiçoamento do pensamento lógico.

Por ironia, a mesma coisa que estamos aqui afirmando no ano 2002, século XXI, já fora denunciada por Evaristo Galois em *A Gazeta das Escolas*, em 2 de janeiro de 1831.

Segundo Roxo (1937,p.141), Jules Tannery, famoso matemático francês, comenta que há muita coisa que se aprende só para fazer exame; são minúcias que não apresentam nenhum valor educativo, não passando de curiosidades:

“O pior é que tais bisantinices (...) sufocam as idéias gerais. Falseia-se, de tal modo, a finalidade da educação matemática por um adestramento na arte do algebrismo mais estéril e dos problemas gráficos mais intrincados e sem nenhuma importância para a compreensão geral do valor da Matemática e para o esclarecimento e a fixação das noções básicas”.

A este respeito também Ávila (1991, p.6) acrescenta:

“O exemplo mais evidente disso está no ensino das funções. Gasta-se muito tempo para introduzir uma extensa nomenclatura – contradomínio, função inversa, função composta, função injetiva, sobrejetiva – num esforço de poucos resultados práticos. É antipedagógico introduzir conceitos que não estejam sendo solicitados no desenvolvimento da disciplina. E se o professor seguir esta salutar orientação, ele não precisará, por bom tempo, de nenhum dos conceitos mencionados”.

A Matemática modernizou-se, mas seu ensino não acompanhou esta evolução. Por sua vez, a educação matemática – como prática escolar – teve um grande impulso no início do século, mais precisamente em 1908, com Felix Klein e a fundação da Comissão Internacional de Instrução Matemática, dele participando Eugênio Raja Gabaglia, o que influenciou na evolução da educação matemática em nosso país.

Apesar disso, no Brasil e no resto do mundo, a referida disciplina foi encarada apenas como ensinar bem (isto é, ter boa didática) aquilo que constava dos programas (ou seja, conhecer bem conteúdos) e verificar se o aluno aprendeu bem tais conteúdos (o que significa aplicar exames rigorosos). Lamentavelmente, essa percepção ainda encontra adeptos no Brasil e no resto do mundo (D'Ambrosio, 1999).

Nas escolas, bem como fora delas, o que se passava com o educando e com a sociedade não eram prioridades, sendo, portanto, relegado a um segundo plano.

No campo da educação matemática, a tendência para se aproximar de um enfoque sócio-cultural surgiu por ocasião do Terceiro Congresso Internacional de Educação Matemática, na Alemanha, em 1976, e tem se firmado como um dos seus pontos básicos.

Porém, o advento da alta tecnologia impulsionaria o ensino na busca de outros métodos, que além da preocupação social, pudessem integrar a Matemática com outras disciplinas e com a ciência.

Contudo, para viabilizar esta última tendência, novos conteúdos se fazem necessários.

2.1 A Matemática e os Novos Conteúdos

Muitos entendem a Matemática como consistindo apenas em cálculos, sem lugar para o espírito criativo.

Mas hoje muita coisa mudou. Com o advento de uma nova Matemática, a matéria a ser ensinada passou a ser conjuntos, intersecções, propriedades, produtos cartesianos. Esta Matemática é fruto de muitas discussões e trabalho. Embora há muito tempo matemáticos e mestres exigissem revisões no ensino, costuma-se creditar ao advento da era espacial e depois da informática o despertar da comunidade científica e educacional para o problema.²

Com efeito, o avanço da tecnologia fez com que, nunca como antes, o mundo se apoiasse na ciência e esta, por sua vez, em cálculos matemáticos.

Por conta disso e da necessidade de descrever com rigor as descobertas científicas, os cientistas têm de simular, em equações, problemas a serem resolvidos à luz de novos paradigmas (da relatividade, do caos, teoria dos sistemas etc.), que, para terem credibilidade na comunidade científica internacional e aplicação prática na vida cotidiana, precisam fundamentar-se numa linguagem lógica precisa e clara.

A despeito desta necessidade, como refere Roxo (1937,p.223), “o curioso é que vivemos na era da ciência, e a ciência fala a linguagem da Matemática, mas sobretudo, do cálculo infinitesimal, conteúdo inexistente nos currículos atuais.”

Hoje, o que é chamado de elementar e se encontra nos currículos escolares são conceitos de álgebra (teoria dos conjuntos, funções linear, quadrática, modular, exponencial e logarítmica, probabilidades), PA e PG, binômio de Newton e números complexos. Além de trigonometria que inclui a resolução de triângulos e funções trigonométricas; a geometria plana, espacial e analítica.

Mais curioso ainda é que conteúdos como funções, progressões, binômio de Newton, abordados no ensino médio, são considerados pré-requisitos para o ensino do cálculo. Porém este não é apresentado aos alunos, deixando-os, a nosso ver, com a sensação de que os conteúdos só servem mesmo para passar no vestibular.

² EDITORIA. *A Velha Matemática Moderna*. Revista Petrobrás, 243, mai/jun/1970.

Mas teria sido sempre assim?

Roxo (1937) discute a inconsistência das definições sobre Matemática elementar e cita Klein que critica as definições aceitas na época a este respeito. Segundo Klein, os matemáticos ditos puristas compreendiam como elementar todas aquelas partes da Matemática nas quais se evita a noção de limite.

Afirma também que nenhuma dessas definições se coaduna com a prática da escola secundária, pois esta jamais renunciaria a ocupar-se com os irracionais $\sqrt{2}$ ou π , ou referir-se à concepção arquimediana da superfície do círculo como limite de superfícies poligonais, do mesmo modo como não se hesita em falar, na escola moderna, da tangente a uma curva qualquer, da velocidade, da aceleração, do trabalho produzido por um ponto em movimento qualquer etc.

Outra afirmação de Klein (apud Roxo, 1937) refere-se à geometria, na qual se considera elementar tudo aquilo que está em Euclides ou, de um modo geral, na geometria antiga, o que também é inaceitável, pois como haveríamos de considerar elementar o que constituía, entre os gregos, as profundezas do conhecimento matemático?

Mais adiante Roxo (1937,p.223) escreve:

“...se é verdade que a escola secundária não tem por objetivo preparar técnicos e sim fornecer a base da cultura geral, desta não se pode excluir a aptidão para entender o que se passa em torno de nós. Logo, estamos convencidos de que as noções do CDI são noções indispensáveis não apenas a uma formação mental eficiente, mas sobretudo a quem quer que, como homem moderno, queira penetrar com espírito aberto no desenvolvimento da nossa vida cultural”.

Constatamos mais uma vez que as observações feitas no século passado continuam atuais. Podemos ler em Ávila (1991,p.7): “Descartar o cálculo no ensino é grave, porque deixa de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da Matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual.”

Mais adiante o autor completa: “A idéia de que os programas de Matemática são extensos e não comportariam a inclusão do cálculo é um equívoco. Os atuais programas estão, isto sim, mal estruturados.” (p.5)

As afirmações destes autores, mostrando a inconsistência do que é considerado Matemática elementar, apresenta aspectos importantes na elucidação de parte da nossa proposta de trabalho: incluir conceitos do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino médio.

Contudo, na nossa opinião, novas técnicas se fazem necessárias para que este conteúdo não venha a se constituir em mais um tópico a ser trabalhado de maneira estanque em algum momento do curso. Queremos que o CDI seja utilizado como articulador dos atuais conteúdos ministrados nestas séries.

2.2 A Matemática e Novas Técnicas

Uma das características mais importantes na evolução da espécie humana sempre foi o registro e, depois, a transmissão de conhecimento de geração a geração graças à qual o homem pode sempre se utilizar do trabalho dos que o precederam.

É necessário lembrar que a transmissão de conhecimentos de geração a geração não se faz, quase sempre, como algo imutável, pois cada geração acrescenta sua contribuição, que se ajusta ao já conhecido ou que o modifica.

Em nossa época - caracterizada por um crescimento extraordinariamente rápido - se o progresso científico fosse apenas um acréscimo de conhecimentos, o ensino se tornaria um problema insolúvel. Na realidade, esse progresso se realiza por seguidas reestruturações, sistematização e simplificação dos conhecimentos anteriores, e um dos sintomas desta evolução é a crescente facilidade de realizar o que nossos antecessores conseguiam com dificuldade.

É esse o objetivo que o professor de Matemática tem de procurar, visando transformar seus alunos em criaturas livres, responsáveis e criativas.

Para tanto o ensino da Matemática deve buscar:

- *acentuar as idéias simples e fecundas que a humanidade acumulou progressivamente e não se dedicar a idéias pouco exatas ou proveitosas;*
- *dar prioridade absoluta à atividade do espírito, pois, antes de aprender um resultado, é preciso compreender e desejar descobrir os caminhos que levem à solução.*

Mas para atingir estes objetivos, seria preciso utilizar, cada vez mais, métodos ativos, onde se privilegie a participação ativa do educando na construção de sua aprendizagem. Isso não significa que a memória deva ser negligenciada, mas, ao contrário, ajudada pela força da reflexão. Cálculos, também indispensáveis, não podem ser esquecidos, mas, note-se, calcular bem é consequência de raciocinar com clareza e lógica.

No nosso país, essas idéias vêm sendo discutidas e algumas delas aparecem incorporadas nas propostas curriculares das secretarias de Estado e municipais de Educação, levando a experiências bem-sucedidas.

Todavia, é importante salientar a insistência no trabalho com os conjuntos nas séries iniciais, o predomínio absoluto da álgebra nas séries finais, a formalização precoce de conceitos e a pouca ênfase nos aspectos práticos da disciplina.

Dentre as inúmeras experiências mais recentes bem-sucedidas, é preciso citar o Programa de Etnomatemática³ (literalmente: *Matemática de um povo*), que traz propostas alternativas para a ação pedagógica, contrapondo-se a orientações desvinculadas de aspectos sócio-culturais e políticos. Este programa, do ponto de vista educacional, procura entender os processos do pensamento, modos de explicar, entender e atuar na realidade, dentro do contexto cultural do próprio indivíduo, buscando partir da realidade à ação pedagógica de maneira natural, mediante um enfoque cognitivo com forte fundamentação cultural (PCN,1997). O que D'Ambrosio conceitua como

³ A expressão **Etnomatemática** foi cunhada por Ubiratam D'Ambrosio na década de 70, quando ao relatar sua trajetória rumo ao que chamava de Programa Etnomatemático, ele ressaltava que o programa nascia "de um inconformismo com a fragmentação do conhecimento", buscando "nas práticas matemáticas em diversos ambientes culturais", os elementos necessários para uma visão holística do conhecimento. (D'AMBROSIO, Ubiratam. *A educação matemática e a reincorporação da Matemática à história e à filosofia*. In: Anais do Seminário Internacional de Educação Matemática, 1, 1993. Rio de Janeiro: UFRJ, 1993, p. 91-104.)

Etnomatemática, num sentido mais geral, creditamos à Modelagem Matemática quando se atua na formalização e entendimento dos conceitos matemáticos empregados. Pode-se dizer que a modelagem descenda da resolução de problemas quando descreve, em termos matemáticos, uma situação mais ou menos complexa. Assim, esta atividade pode ser interpretada, sem nenhum desdouro, como a matematização de uma situação-problema. Alguns dos grandes feitos da ciência ocorreram na área de modelagem, como, por exemplo, os modelos da gravitação universal de Newton e da Teoria da Relatividade de Einstein. O ensino com modelagem tenta fazer com que o aluno participe, em um nível mais modesto, desta atividade de explicar matematicamente fenômenos bem contextualizados (INEP,1994).

Por outro lado, ao experienciarmos a Modelagem Matemática em sala de aula, verificamos que esta dá oportunidade ao aluno de articular os conhecimentos matemáticos, não somente entre si, mas também com as outras áreas do saber, facilitando-lhe perceber, portanto, as relações entre o conhecimento científico e a realidade.

Este caráter da modelagem é importante, pois, como salienta Moisés (1997), mantendo-se o sentido do todo e de cada operação mental, em particular, está-se mais apto a resolver adequadamente o problema, como também a transferir para novas situações o conhecimento construído na prática.

Como resultado, esta busca de contextualização e inserção da Matemática em um meio e época definidos fez crescer também o interesse pela História da Matemática como ferramenta de ensino, tendo sido criada mesmo uma associação internacional dedicada às relações entre a Pedagogia e a História da Matemática.

Apesar dessas tendências, no ensino da Matemática prevalecem ainda em grande parte das escolas “antigos” métodos, segundo os quais um problema matemático parte de alguma situação fictícia que solicita uma sequência de ações ou operações (algoritmo) exposta minutos antes para se chegar a um resultado. Ou seja, a solução está praticamente disponível, não tem de ser construída. Todavia, na maior parte dos casos, estes exercícios não podem ser considerados problemas, porque, via de regra, não constituem desafios nem necessitam de verificação para validar o processo de solução.

Além do mais, o que para um aluno é problema para outro pode não sê-lo, em função do nível de desenvolvimento intelectual de cada um (PCN, 1997).

Enquanto isso acontece, observamos, ao nosso redor e neste início de século, o crescente predomínio dos meios de comunicação audiovisuais (TV, fax, computadores, CD-ROM, DVD e outros), e o de um novo tipo de conhecimento por simulação, típico da cultura informática e de muitas áreas do saber e do fazer humanos.

Num período assim configurado, a aprendizagem da Matemática teria de enfatizar a apreensão do significado de um objeto ou acontecimento, o que pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Dessa maneira, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deveria dar lugar a uma abordagem em que as conexões fossem favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões estabelecidas entre ela e as demais disciplinas, entre ela e o cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos (PCN, 1997).

Quanto à simulação, a Matemática apresenta muitos campos de investigação e de aplicações práticas, relações, regularidades e coerências, que permitem simular situações reais, generalizar, projetar, prever e abstrair, favorecendo a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio lógico, em todas as áreas do saber humano, quantidades, cálculos de salários, confecção e leitura de gráficos etc., que vão da Física à agricultura, passando pela Arquitetura e pela Química, sendo também instrumento importante nas ciências da natureza e nas sociais, na composição musical, coreografia, artes e esportes.

Essa aplicabilidade e potencialidade do conhecimento matemático devem ser exploradas no ensino, visando a ajudar na formação da inteligência abstrata e concreta, na estruturação do pensamento e no raciocínio dedutivo do aluno, para a solução de problemas no trabalho, casa, lazer e na aquisição de conhecimentos em outras áreas do saber.

A percepção da importância de recontextualizar a Matemática levou Régine Douady à criação do conceito de dualidade *ferramenta-objeto*: os conceitos matemáticos são primeiro uma ferramenta para a resolução de situações-problema bem

especificadas, contextualizadas. Uma vez atingido este status de ferramenta, são explicados pelo professor aos alunos, e se tornam descontextualizados, adquirem o status de saber matemático, podendo ser aplicados em outras situações, o que paradoxalmente lhe dá uma grande aplicabilidade e versatilidade. Santaella (1993) também refere a idéia de instrumento, entendendo que a escola deve impor desafios ao aluno, entre os quais, o de resgatar o saber como ferramenta que os alunos trazem de casa, da rua, e transformá-lo em saber-objeto, rico e frutífero.

Para tanto, dentre as tendências comentadas há pouco, optamos pela Modelagem Matemática como estratégia de ensino a ser utilizada neste trabalho, por algumas razões: primeiramente, por uma preferência pessoal, uma vez que nos utilizamos desta estratégia em nossa sala de aula; em segundo lugar, por reconhecer que de um ponto de vista filosófico-metodológico, a Modelagem guarda semelhanças metodológicas com o Programa Etnomatemático, cuja principal finalidade é resgatar a Matemática nas diferentes formas de expressão cultural do cotidiano do aluno. Desse modo, embora a Etno-Modelagem matemática não parta da matemática acadêmica (ou ocidental), emprega a terminologia acadêmica na sua discussão, criando modelos matemáticos que tentam encontrar soluções para os questionamentos levantados pela Etnologia em uma dada realidade.

Assim, neste trabalho, seguindo a orientação de Bassanezi, da Etnomatemática tomamos princípios sócio-culturais abrangentes, enquanto que da Modelagem, os fundamentos empíricos e analíticos no que impliquem a importância da experiência e da matematização de uma dada situação do real como o fundamento pedagógico para a Educação Matemática.

2.3 Modelo Matemático

No dicionário a palavra *modelagem* refere a ação correspondente ao ato de modelar, ou seja, traçar, delinear, contornar, dar forma a um objeto que se queira reproduzir por imitação ou ainda a representação em pequena escala de um objeto que se pretenda interpretar em grande escala. A este objeto damos o nome “genérico” de modelo. Mas isso se refere a qualquer tipo de modelo. No nosso caso, estamos interessados em um modelo matemático. Mas, o que seria um *modelo matemático*?

Para Santaella (1993,p.32) a Matemática é uma ciência observativa, na medida em que constrói objetos ideais na imaginação “de acordo com preceitos abstratos, passando, então, a observar esses objetos imaginários para neles encontrar relações entre as partes que não estavam especificadas no preceito da construção”.

Mas não só a Matemática opera por observação. Em geral, a ciência o faz por intermédio de modelos, constructos abstratos que representam a realidade do fenômeno submetido a estudo, estruturando seu estado possível num recorte do tempo e do espaço.

Subjaz, portanto, à idéia de modelo, a noção de *analogia*, ou seja, uma certa correspondência formal e estrutural entre o modelo e o fenômeno como se apresenta à mente naquele momento, porém expressando equivalência parcial (há sempre uma defasagem entre a observação e a realidade), entre entidades que normalmente nos parecem distintas. Estabelecer analogia é um procedimento heurístico que busca confrontar aspectos de algum modo equivalentes. O processo envolve, pois, a procura de semelhanças formais entre o modelo e as coisas, entre os fenômenos observados no mundo e sua possível expressão matemática, seja por meio de diagramas, seja por meio de uma equação que descreve o movimento parabólico de um corpo, determinando uma correspondência entre uma situação ou estado e uma linguagem formal que tenta apreendê-los.

Bassanezi (2002), de forma bem simplificada, descreve *modelo* como um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado. Mais adiante, aprofundando o conceito, este autor diz: “Quando se procura refletir sobre uma porção da realidade, na tentativa de explicar, de entender, ou de agir sobre ela - o processo usual é selecionar, no sistema, argumentos ou parâmetros considerados essenciais e formalizá-los através de um sistema artificial: o modelo”. (p.19)

Assim, Bassanezi se refere a uma importante (talvez fundamental) característica do modelo, qual seja a de revelar - de um modo mais ou menos convencional (ou seja, conforme leis e normas da representação pictórica, geométrica, espacial etc.) – as relações (por vezes ocultas ao observador) entre as partes do objeto representado.

Concluindo, ainda segundo este autor, os modelos são formulados de acordo com os fenômenos ou situações analisadas, podendo ser classificados conforme o tipo de Matemática utilizada. Como veremos mais adiante, no trabalho desenvolvido com os alunos, utilizamos a forma geométrica de um alvéolo. Este tipo de modelo é chamado *estático*. Para estudar o crescimento populacional da colméia, utilizamo-nos de um *modelo dinâmico*, pois simula variações de estágios do fenômeno.

2.4 Processo de Modelagem Matemática

A escola de hoje tem de encontrar novos modos de agenciar o saber e cativar seus alunos. Como sabiamente disse Gustavo Iochpe, “Fora das paredes da escola, o espírito crítico, a imaginação e a vontade de fazer diferente são fatores indispensáveis ao sucesso”.⁴

Conforme a opinião de alguns autores, a Modelagem Matemática como estratégia de ensino:

- a) dá ao aluno a oportunidade de estudar situações-problema por meio de pesquisa, desenvolvendo seu interesse e aguçando seu senso crítico (Bienbengut, 1990);
- b) possibilita a espiralização do ensino-aprendizagem de Matemática, uma vez que requer conteúdos estudados anteriormente (...); desse modo, os estudantes têm a oportunidade de recontextualizar os conceitos internalizados em períodos escolares passados, ou fortalecê-los, ou mesmo corrigi-los (Borba, 1999);
- c) é um método para compreensão das ciências, pois consiste "num conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar matematicamente os fenômenos que o homem vive em seu cotidiano, ajudando-o a fazer previsões e a tomar decisões ” (Burak, 1992).

Burak afirma ainda que a Matemática escolar está marcada pelo “como fazer”, deixando de lado o “por que fazer”, apassivando o aluno e deixando-o dependente do professor. Assim, este autor entende ser necessário “através da ação do fazer, chegar ao saber”, atribuindo à Modelagem a virtude de incentivar no aluno a liberdade para

⁴ IOCHPE, Gustavo – Artigo Folha de São Paulo. Anexo 2.

raciocinar, conjecturar, estimar e dar vazão à criatividade, numa aproximação da postura científica.

Quando no início deste trabalho referimo-nos a paradigmas, constatamos que a história da Matemática vem confirmar que o avanço desta ciência se deu graças a problemas surgidos das necessidades humanas em diversas épocas, as quais não só permitiram à Matemática evoluir e se tornar complexa como ciência, mas também permitiram ao homem criar, inventar e propor soluções para o mundo social e físico que se lhe apresentava.

Também no nosso ponto de vista o ensino por meio da Modelagem Matemática permite reproduzir, *com* o educando, o caminho que a ciência matemática percorreu para se desenvolver como tal, ou seja, permite que o aluno percorra os caminhos da pesquisa científica, o que Bassanezi ratifica, afirmando que trabalhar com modelagem matemática no ensino não é apenas uma questão de ampliar os conhecimentos matemáticos, mas sobretudo de se estruturar a maneira de pensar e agir.

Visto deste ponto de vista, o método científico é, portanto, um conjunto de regras gerais que nos ajudam a resolver problemas que envolvem observações, buscando padrões nas observações, formulando hipóteses para explicar as observações e testando estas hipóteses por meio de experiências adicionais. Ao executar as experiências, podem surgir modelos que irão conduzir a explicações ou hipóteses que servirão de guias no planejamento de outras experiências.

Logo, o processo de obtenção de um modelo matemático de uma situação ou problema real denomina-se Modelagem Matemática, e sua finalidade em um contexto de ensino-aprendizagem é despertar no aluno a motivação para criar problemas, buscando para tal subsídios fora da Matemática, ou seja, formulando sempre novos problemas cada vez mais próximos da realidade, da sua realidade e de seu dia-a-dia, a partir de modelos.

Vários foram os esquemas por nós estudados, que representam graficamente o processo de obtenção do modelo, ou seja, a Modelagem Matemática, entre os quais podemos citar o esquema de Bassanezi (1988), Bittinger (1976), Biembengut (1990), Gazetta (1989), D'Ambrosio (1986) e outros.

Como professores, devemos lembrar que, afora preocupações éticas, filosóficas e metodológicas, há ainda problemas de ordem prática, restando-nos concordar com Biembengut em suas inquietações com o currículo a ser cumprido quando se aplica o processo de Modelagem em cursos regulares:

“Tendo pois como objetivo ensinar Matemática inserida num programa definido *a priori*, o processo clássico de modelagem deve ser modificado, levando-se em conta sempre o momento de sistematização do conteúdo e uma analogia constante com outras situações-problema”

No esquema de D'Ambrosio (1986), o processo de Modelagem Matemática se baseia na dinâmica “realidade-reflexão sobre a realidade”, enquanto modelo seria o ponto de ligação entre as informações captadas pelo indivíduo e sua ação sobre a realidade, e, portanto, um instrumento de auxílio à compreensão da realidade através da reflexão e análise sobre sua natureza. Este autor defende que o indivíduo cria modelos que lhe permitem elaborar estratégias de ação: “Essa recriação de modelos pelo sujeito, que pode utilizar outros modelos que já foram incorporados a sua realidade e que é a essência do processo criativo, deveria constituir o ponto focal dos sistemas educativos.”

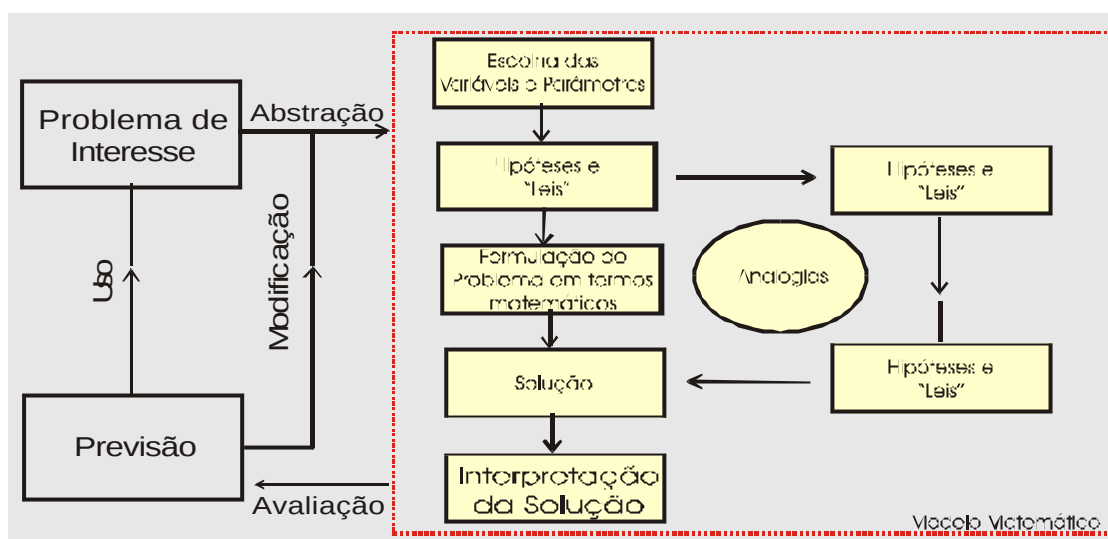
Esta é também a posição de Gazetta (1989), quando afirma que, para exercer ação no meio em que vive, o indivíduo se utiliza de algum tipo de modelo que seria o elo entre as informações e sua ação, e que lhe serve como “instrumento de auxílio para a compreensão da realidade.”

Então, Gazetta propõe uma integração das concepções de Modelagem propostas por D'Ambrosio e Bassanezi, tendo a compreensão da realidade como ponto de partida para o levantamento de problemas que se apresentam, e o início do processo a tradução da situação real em linguagem matemática, ou seja, em um processo de abstração.

Ao trabalharmos com o grupo de alunos participantes deste trabalho, notamos que os esquemas citados fornecem uma seqüência pormenorizada do processo de modelar, mas deixam obscuras relações valiosas e talvez as mais significativas em um processo de ensino-aprendizagem, como, por exemplo, as do processo de abstração.

Elegemos como esquema de modelagem central do nosso trabalho um dos esquemas de Bassanezi, no qual o caráter abstrato do modelo é evidenciado, pelo autor denominado *Esquema do Processo de Abstração*.

Esquema do Processo de Abstração



Fonte: Bassanezi (2001)

Figura 1

O esquema citado evidencia que modelos são abstrações de estados ou situações que se dão no mundo real, entendendo-se por abstração o ato de considerar separadamente coisas relacionadas e unidas, a fim de que, por meio de procedimentos matemáticos, possa ser interpretado e entendido em toda a sua complexidade o fenômeno sob estudo, recurso utilizado pelos matemáticos na construção de modelos que expliquem a realidade e sirvam para análise, previsões etc.

A fase de abstração é, a nosso ver, fundamental para o processo educacional, pois é o momento em que o aluno irá interagir com a linguagem matemática, ganhando a chance de perceber detalhes talvez imperceptíveis numa linguagem natural. Por outro lado, uma das dificuldades que se apresentam em uma situação real é a quantidade de variáveis nela envolvidas. Sendo assim, o aluno deverá eliminar algumas delas para conseguir formular a situação em linguagem matemática.

Porém, um outro impasse persiste: *Quais variáveis devem ser eliminadas?*

Para D'Ambrosio (1986,p.65):

“o jogo de dois aspectos aparentemente contraditórios na reformulação do problema, que poderíamos chamar de aspecto holístico em contraposição ao aspecto reducionista, está na essência do método científico e desde os primeiros anos de escolarização deve ser um dos principais componentes do processo educacional”.

Entretanto, ainda segundo este autor, somente a seleção de variáveis não é suficiente para resolução do problema. Devemos, ainda, formular hipóteses, outro fator essencial no processo científico, uma vez que a “formulação precisa das hipóteses será fundamental para que a solução encontrada encontre sua interpretação adequada.” (p.66)

Este processo de selecionar variáveis e formular hipóteses está diretamente ligado à capacidade de o educando interpretar a realidade e agir sobre ela. Para Piaget, o principal fator do desenvolvimento vem a ser a atividade do sujeito, suas ações e relações com objetos, fatos e outras pessoas. Todavia isso não significa apenas “agir com os sentidos” (ou ênfase no aspecto figurativo do conhecimento). O desenvolvimento ocorre quando o sujeito age sobre o ambiente e experimenta desequilíbrios. Um ambiente que apresenta desafios, contradições, conflitos, é, conseqüentemente, ideal para o aparecimento das estruturas operatórias, momento em que acontece uma íntima conexão entre o método, a teoria e a observação da realidade.

Porém, como vimos, a realidade só nos é dada a conhecer por meio de suas representações. Mas só isso não basta, temos de estar preparados teoricamente para interpretar o real. Conforme a opinião de Gustineli (1990), “representações externas são freqüentemente muito úteis na resolução de problemas difíceis. (...) Devemos notar, no entanto, que as representações externas não podem ajudar-nos a não ser que também tenhamos uma representação interna do problema”.

Entendemos que isto acontece porque, geralmente, na resolução de problemas, a realidade se apresenta de forma limitada, em um determinado enunciado colocado de forma já bem definida, onde existem dados e uma ou mais perguntas são formuladas, solicitando resposta. Não há, portanto, necessidade de se fazer uma seleção de variáveis, uma vez que estas já foram, de algum modo, selecionadas e já constam no próprio enunciado da situação-problema.

Uma situação-problema seria, grosso modo, qualquer circunstância e lugar em que o aluno, em seu cotidiano, é solicitado a interpretar variáveis e tomar decisões. Subjaz, portanto, à idéia de Modelagem, a resolução de problemas.

Polya apud Gustineli prescreve quatro fases para se chegar à solução de um dado problema:

- a) 1ª fase: compreensão do problema;
- b) 2ª fase: elaboração de um plano;
- c) 3ª fase: execução do plano; e
- d) 4ª fase: retrospecto.

Note-se aí que, segundo Polya, a resolução de um problema parte da interpretação da realidade. Ou seja, é impossível resolver um problema, se não conseguirmos ler e interpretar todas as suas variáveis, e para isso a conhecida "decoreba" não pode ser alocada. Por isso, apesar de alguns crerem que a simples repetição pode favorecer a memorização, nada é mais forte para a aprendizagem que a motivação emocional para registrar informações e conhecimentos que serão assimilados de maneira indelével.

Hoje, num tempo de velozes transformações, os mais bem-sucedidos são os que sabem selecionar as informações de que precisam para propor novas soluções a antigos problemas. Porém, achar soluções inéditas significa alocar conhecimentos já assimilados, estabelecendo entre eles relações. Para se chegar ao novo, precisamos agenciar conhecimentos anteriores, baseados, por sua vez, em noções elementares. Se desde o início do processo, o aluno entender *o que (e que)* precisa aprender, não vai mais aceitar qualquer novidade sem entendê-la. Se e quando a aceita, já a assimila, para aumentar sua sabedoria.

Para que tudo isso se faça de um modo correto, não podemos contar com conhecimentos (ou melhor, dados) “decorados”. Assim, encontrar novas soluções significa aproximar e relacionar dados esparsos, transformando conhecimento em sabedoria. Isso exige, primeiramente, assimilação dos conhecimentos e, em segundo lugar, muito treino e prática.

CAPÍTULO III

3 Ensino de Cálculo

3.1 O Cálculo

É mais fácil dizer o que o cálculo faz do que dizer o que ele é. Fora dos ambientes acadêmicos, aqueles que se preocupam com o Cálculo Infinitesimal, de uma maneira ou de outra estão interessados em suas aplicações. Em geral a derivação está relacionada com a descrição e mensuração da maneira como as coisas variam, se movem e crescem; vamos utilizá-la para calcular razões de crescimento, decrescimento, assim como para prever desenvolvimentos futuros. A integração constitui uma ferramenta básica nos processos de somas; por exemplo, ela é usada para determinar a pressão total da água contra uma represa, para determinar a quantidade total de energia que flui através de um cabo elétrico num determinado tempo ou a quantidade de terra a ser escavada de uma determinada região. (Baron)

Não precisamos fazer uma análise muito minuciosa para percebermos que a nossa volta nada é estático, os dias se sucedem e cada momento vivido é diferente do anterior. Assim também são todas as coisas e pessoas que nos cercam. Tudo está em constante movimento. Neste contexto o cálculo teria muita aplicabilidade.

No passado, homens cultos da época, filósofos e matemáticos, utilizaram o cálculo para explorar o universo físico em que vivemos através de problemas importantes e atuais como determinar:

- a) a velocidade e a aceleração de um corpo dado a sua lei de movimento;
- b) retas tangentes a curvas;
- c) máximos e mínimos de uma função;
- d) comprimento de curvas (descrita por um planeta, por exemplo), áreas, volumes e centros de gravidade.

Mas as raízes do cálculo estão fincadas na Grécia, há mais de 2000 anos. Conhecido hoje como método da exaustão, tendo sido criado provavelmente por Eudócio de Cinido (390-337 a.C.), mas usado com sucesso por Arquimedes (287-212 a.C.) para determinar a área de um círculo e de outras figuras especiais.

O método de exaustão conseguia contornar o uso de “limites”. Num de seus trabalhos, no cálculo de uma área, Arquimedes chegou ao que seria hoje a série $a + \frac{a}{4} + \frac{a}{16} + \frac{a}{64} + \dots$. Mas na Matemática grega não havia fundamento que justificasse uma soma infinita. Assim Arquimedes, depois de perceber, por meio de toda a sua argúcia matemática, que o resultado deveria ser $\frac{4}{3}a$. Provou por dupla redução ao absurdo que não poderia ser nem maior nem menor que este valor, logo teria que ser igual. Algo para gênios, sem dúvida. Ocorre que a agora bem conhecida e “democrática” fórmula $S = \frac{a}{1-q}$ da soma de uma P.G. infinita $a + a.q + a.q^2 + \dots$ ($0 \leq q < 1$) pressupõe a idéia de limite que para os gregos era inaceitável (...) Nenhum deles sonhava com os “ ε ” e “ δ ” da atual teoria dos limites. (Higino, 1990 , pg. 172)

Gradualmente, o método de exaustão foi transformado no assunto que chamamos hoje Cálculo Integral, uma nova e poderosa disciplina com larga variedade de aplicações além daquelas geométricas relacionadas com áreas e volumes.

Assim como o Cálculo Integral, o Cálculo Diferencial originou-se de um problema de geometria, só que muito mais recente. No século XVII, o matemático francês Pierre Fermat estudou o problema de determinar o valor máximo de determinadas funções e concluiu que se fazia necessário determinar os pontos da curva onde a reta tangente era “horizontal”. Isso deu origem à questão mais geral da determinação da reta tangente em um ponto qualquer da curva. Estava lançada a idéia da derivada.

À primeira vista parecia não haver conexão entre as idéias de integral e derivada. Foi no século XVII que Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716) perceberam a importância do fato de que essas idéias estão na verdade intimamente relacionadas e exploraram isso, dando origem ao Cálculo Diferencial e Integral. Seu desenvolvimento continuou com grande ímpeto durante o século XIX, quando foi colocado sob uma firme base matemática por homens como Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e Bernhard Riemann (1826-1866). Refinamentos e extensões da teoria têm sido buscados por matemáticos contemporâneos.

Juntamente com o Cálculo nasceram as Equações Diferenciais. Os dois teoremas básicos do Cálculo estão intimamente ligados à solução da equação diferencial mais simples e importante

$$x'(t)=f(t)$$

ou seja, obter a função incógnita $x(t)$, uma vez conhecida a sua derivada $f(t)$. O teorema fundamental do Cálculo Integral nos fornece uma solução: $x(t) = \int_a^t f(z)dz$ (se f for contínua) e o Teorema do Valor Médio assegura que todas as suas soluções podem ser escritas na forma $c + \int_a^t f(z)dz$, onde c é uma constante. (Bassanezi; Ferreira, 1988 p.7).

O fato é que, como diz Franchi (1973,p.14) a ciência é uma forma de conhecer e explicar o mundo. O CDI (associado a outros conhecimentos científicos) facilita a compreensão do mundo tecnologicamente desenvolvido e a sua apropriação pelo indivíduo.”

Hoje o CDI é uma ferramenta poderosa para abordar problemas de Engenharia, física, biologia, química, economia, ecologia e até mesmo problemas envolvendo as ciências sociais.

Apenas como ilustração, utilizando o conceito do Cálculo Diferencial e Integral, resolvem-se problemas do tipo:

- Qual a velocidade com que deveria um foguete ser lançado para cima de modo que ele nunca retornasse à Terra?
- Quais as dimensões ideais de uma caixa de papelão com capacidade preestabelecida, para que a quantidade de material empregado na sua fabricação seja a menor possível?
- Se uma espécie de bactéria cresce a uma taxa proporcional à população presente e se a população dobra em uma hora, quanto a população crescerá ao final de duas horas?
- Um lago é abastecido por um riacho. Um curtume é instalado à beira desse riacho, poluindo-o. Até quanto o curtume pode funcionar sem causar danos à vida aquática? Qual a concentração de poluentes no lago depois de um ano?

A diversidade de aplicações do Cálculo não justificaria plenamente sua popularização, por meio da inclusão de seus conceitos no ensino médio?

3.2 Precedentes de Ensino do Cálculo no Ensino médio

Ao mergulharmos na história a procura de subsídios que nos permitissem entender a trajetória do ensino do Cálculo no ensino médio, verificamos que desde o final do século XIX, começaram a surgir em diferentes países europeus movimentos de modernização do ensino de Matemática nas escolas secundárias. Um dos motivos destes movimentos já era, na época, o de diminuir o descompasso existente entre os estudos de Matemática desenvolvidos nas universidades e o praticado nas escolas de ensino secundário, situação que perdura até os dias atuais.

Em um momento de grandes avanços científicos e tecnológicos, de crescimento da indústria e do comércio, no qual as aplicações práticas da Matemática nas ciências já impregnavam os estudos universitários, no ensino secundário continuava a se estudar geometria pura baseada em Euclides com um pouco de álgebra e de teoria dos números. Felix Klein (1849-1925), grande matemático alemão, professor da Universidade de Goetingen e um dos maiores impulsionadores deste movimento, escreveu:

O jovem estudante se encontra ao começar seus estudos (universitários) ante problemas que não lhe recordam nada das coisas de que até então havia se ocupado e, naturalmente, esquece rápido e completamente todas elas (...) Essa (...) descontinuidade não tem trazido vantagens nem para a escola nem para a universidade: por isso, agora é feito um grande esforço para eliminá-la completamente, procurando, de um lado, embeber, por assim dizer, o ensino das escolas com as idéias ajustadas ao moderno desenvolvimento da ciência e da cultura geral, e tendo em conta, de outra parte, as necessidades dos professores do ensino universitário. (Klein, apud Miorim, 1995, p.7)

Segundo Carvalho, este seria o verdadeiro objetivo de Klein quanto ao movimento de reforma: melhorar o ensino de Matemática no 3º grau. Para isso seria necessário que desde o ensino secundário, os alunos comesçassem a lidar com as noções básicas do Cálculo:

Em uma manobra sagaz, Klein não defendeu diretamente a inclusão do cálculo no ensino secundário. Em vez disso, concentrou sua pressão na introdução do conceito de função e seu uso no ensino secundário, certo de que então os próprios professores deste nível de ensino, entusiasmados com a exploração do conceito de função se mobilizariam e apoiariam a introdução de noções de cálculo no ensino secundário. (Carvalho, 1996).

Na França, por exemplo, o movimento modernizador tomou vulto mais ou menos em 1900. A comissão encarregada de promovê-lo concluiu pela necessidade de

uma renovação no ensino secundário, no sentido de torná-lo mais simples, mais intuitivo e próximo da realidade, incluindo-se nele certos assuntos que, de há longo tempo, eram considerados como pertencendo a uma matemática superior .

O outro motivo para a modernização do ensino na escola secundária foi de ordem sócio-político-econômica, uma vez que se começava a exigir um estudo mais rigoroso do movimento, um estudo quantitativo, que permitisse medir e prever.

Esta moderna Matemática estaria, então, associada ao desenvolvimento da ciência moderna e representaria a união da matemática prática com a matemática teórica. Dessa maneira, ela seria uma ferramenta importante para a explicação, formação, comprovação e generalização dos fenômenos observados na natureza.

Assim, com relação aos conteúdos, a “*modernização*” proposta neste momento estava ligada a uma *moderna Matemática* que teria sido iniciada com Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716) e que teria como centro o conceito de lei quantitativa, ou de função, valorizaria o aspecto quantitativo, as ligações entre geometria, aritmética e álgebra, o conceito de movimento e as aplicações práticas. (Miorim,1998,p.10).

Essa Matemática seria considerada *nova ou moderna*, porque representava a superação dos limites estabelecidos pela *antiga* Matemática grega. Iniciativas com as mesmas tendências surgiram em outros círculos matemáticos e pedagógicos. Entretanto, tais idéias começaram a influenciar o ensino da Matemática brasileira apenas no final da década de 20.

Segundo João Pitombeira de Carvalho (1996) falar no ensino secundário no Brasil do século passado até 1930 é referir-se obrigatoriamente ao Colégio Pedro II, fundado em 1837, no Município da Corte, com a finalidade de ser o estabelecimento padrão para o ensino secundário, cuja estrutura e funcionamento eram até então caóticos”.

Então, tomando o Colégio Pedro II como referência, Pitombeira, em seu artigo, analisa detalhadamente os programas de Matemática ali praticados, e, em particular, o de Cálculo, desenvolvido desde sua criação até 1961.

3.2.1 Breve histórico sobre o ensino do Cálculo no Brasil

Pitombeira, resumidamente, descreve a trajetória histórica do ensino da Matemática e, em especial, do Cálculo, a partir das atividades pedagógicas desenvolvidas no Colégio Pedro II.

1837 - Período Imperial

Fundação do Colégio Pedro II. Não há menção nos programas deste Colégio ao Cálculo ou ao conceito de função até 1889.

1890 - Início do Período Republicano

A reforma conhecida como “Benjamim Constant” reestrutura o ensino secundário e cria a cadeira de Noções de Cálculo Infinitesimal num dos últimos anos do curso secundário. Porém, como afirma Roxo (1937,pg.220), tal estudo não tinha “nenhuma ligação com o resto do curso, onde não era desenvolvida a idéia de função, e feito de um ponto de vista excessivamente formalístico, tornou-se inútil e contra-producente.”

Tal postura culminaria em 1900 com a Retirada dos programas oficiais do Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica e Geometria Descritiva.

Os livros indicados para a época eram *Bourdon: Álgebra; Sonnet e Frontera: Géométrie analytique; Sonnet: Calcul infinitesimal*.

Colocamos em seguida um trecho do livro de Sonnet (1969), extraído do trabalho de Carvalho (1996,p.70/71) para que possamos perceber como abordava os conteúdos dessa disciplina.

1. O cálculo diferencial é a parte da matemática que trata das variações infinitamente pequenas das funções.
2. Sabe-se que uma variável y é chamada uma função de uma outra variável x , se y varia com x , e se y assume um ou vários valores bem determinados quando se atribui um valor determinado a x . Assim, em coordenadas retilíneas, a ordenada de uma curva é uma função da abscissa.
Se a relação que une x e y se exprime por uma equação que pode ser resolvida para se achar y , podendo ser posta na forma $y = f(x)$, diz-se que y é uma função explícita de x . Se esta relação se exprime por uma equação não resolvida, apresentando-se sob a forma $f(x, y) = 0$, diz-se que y é uma função implícita de x . Em qualquer um dos casos, x recebe o nome de variável independente; é a variável à qual damos valores particulares, a fim de deduzir os valores correspondentes da função y .

3. Analogamente, uma variável z é chamada função de duas outras variáveis x e y se ela varia simultaneamente com x e y , e se assume um ou mais valores bem determinados quando se atribuem valores bem determinados a x e a y . Assim, em coordenadas retilíneas a ordenada z de uma superfície curva é uma função das outras duas coordenadas x e y .

Temos uma função explícita se a relação que une as três variáveis se exprime por uma equação resolvida para exprimir z em função de x e y , como $z = f(x, y)$; é uma função implícita se esta relação está expressa por uma equação não resolvida, da forma $f(x, y, z) = 0$. Em ambos os casos, x e y são as variáveis independentes; atribuímos a elas pares de valores particulares, para deduzir então os valores correspondentes da função z .

4. Talvez seja necessário considerar funções de mais de duas variáveis independentes, como $z = f(x, y, t)$, ou $f(x, y, z, t) = 0$.

Sonnet continua:

Quando duas variáveis x e y estão ligadas por uma relação tal que

$$(1) y = f(x)$$

dando-se um acréscimo Δx a x , resultará um acréscimo correspondente de y , Δy , positivo ou negativo, e tem-se

$$(2) \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Os acréscimos Δx e Δy recebem o nome de diferenças.

Diz-se que a função f é contínua se pode-se escolher Δx suficientemente pequeno de maneira que Δy possa ser tornado menor do que qualquer quantidade dada. Consideraremos somente funções contínuas, as únicas que se encontram nas aplicações. Neste caso, se Δx se torna infinitamente pequeno, o mesmo em geral acontece com Δy ; as diferenças recebem então o nome de diferenciais e substituímos a característica Δ pela característica d . Escrevemos então

$$(3) dy = f(x + dx) - f(x).$$

A diferencial dy da função y é assim o acréscimo que sofreu $f(x)$ quando adicionamos a x sua diferencial dx .

A parte da análise que tem por objetivo principal o estudo das diferenciais é o cálculo diferencial; e calcular a diferencial de uma função é o que chamamos diferenciar esta função.

Trataremos primeiramente das funções de uma variável, começando pelas funções explícitas.

II- Princípios de Diferenciação

1. - Diferenciação das funções explícitas

Funções explícitas de uma variável

13. - Dividamos por Δx os dois membros da equação (2) do número precedente; obteremos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Se fizermos Δx tender para zero, Δy tenderá também para zero; mas a razão $\Delta y/\Delta x$ não se torna indeterminada; ela tende sempre, como o cálculo vai mostrar, para um limite determinado; este limite é ainda uma função de x , que foi derivada de $f(x)$, e por causa disso ele é chamado função derivada ou simplesmente derivada e que representamos pela notação $f'(x)$.

Escreve-se portanto

$$(4) f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Vemos, por esta relação, que a derivada de uma função é o limite da razão entre o acréscimo desta função e o acréscimo da variável; e, para achar esta derivada, é necessário trocar x por $x + \Delta x$ na função $f(x)$, subtrair $f(x)$ de $f(x + \Delta x)$, dividir o resultado por Δx , e calcular o limite do quociente quando Δx tende para zero.

1931 - Criação do Ministério da Educação

A Reforma Campos reintroduz no currículo regular da escola secundária o Cálculo infinitesimal.

O professor Euclides Roxo, diretor do Colégio Pedro II de 1925 a 1935, inspirado nas idéias de Klein e do Imuk (Comissão Internacional para o Ensino da Matemática) em relação ao ensino de Matemática, difundidos na Europa, e, em particular, na Alemanha, a partir do início do século, foi um dos grandes defensores da inclusão no ensino secundário das noções de função, de geometria analítica e de cálculo infinitesimal. Autor da proposta de programa de Matemática implantada a partir de 1931, cria a disciplina *Matemática*, na qual aparecem englobadas a álgebra, aritmética, geometria e trigonometria, além de estabelecer o currículo seriado.

Conforme Roxo (1937,p.133), os reformadores baseavam-se na idéia de "conduzir o ensino, na escola secundária, de tal modo, que o aluno seja, a cada instante, levado a compreender o valor que a Matemática adquire pela sua significação geral."

Um dos livros textos da época era Curso de Matemática, de Euclides Roxo; Cecil Thiré e Mello e Souza. Nele encontramos um forte apelo às representações geométricas, aos gráficos e ao uso de tabelas. Percebe-se uma tentativa de articulação entre os conteúdos e a introdução de uns poucos exemplos práticos. Observemos alguns trechos do volume 5 desta coleção: onde o autor trabalha o conceito de função e de variação.

4- Função

Vamos supor que duas variáveis x e y são ligadas de tal modo que, sendo dado o valor de uma delas, fica bem determinado o valor da outra. Dizemos, nesse caso, que uma das variáveis é função da outra. (***)

Assim, o volume da esfera é função do raio; a distância percorrida por um móvel (no caso do movimento uniforme) é função do tempo; o volume de uma certa quantidade de gás (sob temperatura constante) é função da pressão. (*)

(*) É evidente que uma expressão puramente numérica será sempre uma constante absoluta. Exemplo: $\sqrt{2} + 5$ é uma constante absoluta.

(***) Essa definição refere-se apenas às funções univalentes

Os autores continuam com a definição e a representação gráfica de funções: algébricas, transcendentais, explícita, par, ímpar, univalente e plurivalente, etc. até chegar a definição de acréscimos e de derivada. Seleccionamos abaixo mais um trecho deste livro.

Consideremos a função univalente $Y = f(x)$

Vamos supor que num intervalo (a, b) , para o qual essa função é definida, atribuímos a x um acréscimo Δx ; resulta para a função um acréscimo Δy .

Temos

assim:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

Dessa equação, tiramos o valor do acréscimo Δy , substituindo y por $f(x)$.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Determinando o quociente do acréscimo Δy da função pelo acréscimo Δx da variável, obtemos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

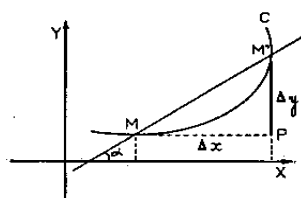
A expressão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ será denominada razão dos acréscimos ou quociente das diferenças.

O acréscimo Δx da variável independente é, em geral, suposto diferente de zero e positivo. A razão dos acréscimos pode ser um número positivo, nulo ou negativo. Convém acentuar que, em geral, o acréscimo da função, tomado de modo absoluto, nada significa. O que nos interessa é o acréscimo da função tomado em relação ao acréscimo da variável.

Se nos disserem, por exemplo, que houve uma variação de 11° na temperatura de uma certa região, isso nada nos adiantará, a não ser que nos indiquem o intervalo de tempo durante o qual se tiver dado a referida variação.

Significação geométrica da razão de acréscimo.

Consideremos uma função $y = f(x)$ representada graficamente por uma curva C.



Quando passamos do ponto M para o ponto M', a variável x sofre um acréscimo Δx , representado, na figura, pelo segmento MP; o acréscimo correspondente na função, Δy , é representada por $M'P$.

Os pontos M e M' determinam uma secante; essa secante forma com o eixo dos x um certo ângulo α . A tangente desse ângulo é igual à razão dos acréscimos, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Obs: O autor continuará com o desenvolvimento do conceito de reta tangente, limites, até chegar a definição de derivada.

Apesar desse enfoque, estes conteúdos continuavam a ser abordados somente na última série deste nível de ensino, juntamente com uma vasta quantidade de outros tópicos de geometria espacial e analítica, daí o fato de muitos educadores tacharem esta reforma de enciclopedista.

A partir do índice deste livro, fizemos um resumo dos tópicos referentes aos conteúdos de cálculo:

- 9 - Noções de Limites;
- 10 - Determinação do limite de certas expressões. Limites singulares. Formas ilusórias:...
- 11 - Variável. Função. Continuidade de uma função;
- 12 - Razão dos acréscimos. Derivada de uma função. Interpretação gráfica:...
- 13 - Derivada das funções elementares. Diferencial de uma função;
- 14 - Derivação das funções transcendentes: $\text{sen}x$, $\text{cos}x$, $\text{tg}x$ e $\text{cotg}x$;
- 15 - Derivadas sucessivas de uma função;
- 16 - Sinal da derivada, Máximo e mínimo de uma função;
- 17 - Noções elementares sobre séries. Convergências de uma série;
- 18 - Problema inverso da derivação. Primitivas imediatas;
- 19 - Desenvolvimento em séries;
- 20 - Interpretação geométrica da integração. Integral Definida. Aplicação ao cálculo de certas áreas.

1942: Reforma Capanema

Esta reforma coloca fim a uma série de discussões sobre o ensino da Matemática. Reformulou o ensino secundário, dividindo-o em dois ciclos: a) ginásial; b) clássico ou científico. No que se refere ao ensino do Cálculo, ela o mantém nos programas regulares no científico, porém de forma mais sintética, até 1961.

Transcrevemos abaixo parte do programa de Matemática do curso científico promulgado pela reforma:

Primeira Série

(…)

Álgebra

Unidade IV – Os Polinômios

2- Noção de variável e de funções; variação do trinômio do segundo grau; representação gráfica

3- Noções elementares sobre continuidade e sobre máximos e mínimos.

(…)

Segunda Série

Unidade I – A função exponencial

(…)

2- Noção de função exponencial e de sua função inversa.

(…)

Terceira Série

Álgebra

Unidade II – Funções

1 - Noção de função de variável real.

2 - Representação cartesiana.

3 - Continuidade; pontos de descontinuidade; descontinuidades de uma função racional.

Unidade III – Derivadas

1 - Definição; interpretação geométrica e cinemática.

2 - Cálculo das derivadas.

3 - Derivação das funções elementares.

4 - Aplicação à determinação dos máximos e mínimos e ao estudo da variação de algumas funções simples. (...) (Carvalho, 1996, p. 77/78).

Neste período encontramos menções ao cálculo no livro de Manuel Jairo Bezerra (1964), *Curso de Matemática*, destinado aos primeiro, segundo e terceiro anos dos cursos clássico e científico. Entretanto, só conseguimos dois exemplares, datados de 1964 e 1966. Pelo programa acima transcrito e o texto abaixo extraído da edição de 1964, podemos perceber que, apesar de todas as discussões a respeito do assunto, prevalece a abordagem rigorosa, linear e formal dos conteúdos, assim como a total desarticulação destes com os demais conteúdos.

1. Conceito elementar de função.

Diz-se que uma variável y é uma função de uma variável x , quando a cada valor de x corresponda, mediante uma certa lei, um ou mais valores de y .

E indica-se assim: $y = f(x)$.

Então a lei que estabelece a correspondência entre os valores de x e y é que chamamos de *função*

A variável x é chamada *variável independente* e a variável y *variável dependente*. Exemplo:

Sabemos do segundo ano colegial, que o desenvolvimento do binômio $(x+a)^m$ tem $m+1$ termos, então, chamando de N esse número de termos, podemos escrever: $N = m+1$.

E, $N = m+1$ ou simplesmente $m+1$ é uma função de m (função linear)

1. Definição da derivada em um ponto. Seja uma função $y = f(x)$ uniforme em um certo intervalo (a, b) , e consideremos x_0 um ponto desse intervalo e Δx_0 o acréscimo da variável.

Quando a variável sofre um acréscimo Δx_0 a função sofre um acréscimo $\Delta y_0 = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)$.

$$\text{A relação } \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0} \quad (\text{I})$$

univocamente definida para cada valor de Δx_0 , chama-se *razão dos acréscimos* ou *razão incremental*.

Chama-se *derivada* da função $y = f(x)$ no ponto x_0 , ao limite, finito, caso exista, da razão incremental (I) quando $\Delta x_0 \rightarrow 0$.

E indica-se assim:

$$\lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = f'(x_0) \quad (\text{II})$$

Se a função $y = f(x)$ admite *derivada* em um ponto, diz-se *derivável* nesse ponto.

A derivada em um ponto, quando existe, é única (Unicidade do limite).

2. Função derivada. Pode acontecer que a função $y = f(x)$ seja derivável em cada ponto de (a, b) . Nestas condições, a cada ponto do intervalo (a, b) corresponde um número que é a derivada de $f(x)$ nesse ponto. Assim sendo, podemos considerar uma outra função de x , definida em (a, b) , que se chama *função derivada* de $f(x)$, tal que, para cada x , o valor da função coincide com o valor da derivada de $f(x)$ nesse ponto.

4. Limite de uma função. Definições.

1.ª) Seja $y=f(x)$ uma função definida em um intervalo (a, b) e seja x_0 um ponto de (a, b) .

Diz-se que a função y tem um limite finito l , quando a variável x tende para x_0 , se para cada número ϵ positivo, existe em correspondência com ϵ , um número δ tal que para

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{se tenha} \quad |f(x) - l| < \epsilon$$

Indica-se essa definição com a notação

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

2.ª) Seja $y=f(x)$ uma função definida em $(-\infty, +\infty)$

Se a variável x tem um *limite infinito* (N.º 3), diz-se que y tem para *limite finito* l se para cada ϵ positivo existe em correspondência com ϵ , um número E tal que, para

$$|x| > E \quad \text{se tenha} \quad |f(x) - l| < \epsilon$$

E representamos simbolicamente assim:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$$

conforme se tenha, respectivamente, x positivo ou negativo.

Esta *função derivada* costuma-se indicar por um dos símbolos

$$y' \quad \text{ou} \quad f'(x) \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx}$$

Embora a ênfase conteudista ainda permanecesse, observava-se que muitos educadores já recebiam influências sociais e culturais quando da elaboração dos conhecimentos em sala de aula. Sobre isso afirma D'Ambrosio (1999, p.7): “O fato é que notava-se já, embora poucos tivessem a coragem de tornar isso explícito, que a matemática dos currículos escolares era desinteressante, obsoleta e inútil”.

1951: Portaria Ministerial nº 1045 de 14/12/1951

Devido a atmosfera de descontentamento que persistia no ensino, Simões Filho, então Ministro da Educação, pede a Congregação do Colégio Pedro II que elabore novos programas de modo que estes tenham “certa plasticidade a ajustar-se às diferenciações regionais” (Nobrega 1952, p.419).

Assim esta portaria oferece uma abertura para que os governos estaduais e territórios elaborem seus programas de ensino obedecendo a um programa mínimo de conteúdos e às respectivas instruções metodológicas.

Estes programas, que contém a “matéria mínima” a ser desenvolvida no ensino secundário, não diferem substancialmente do programa anterior. Com relação à matemática os conteúdos são os mesmos, apenas distribuídos de forma diferente entre as séries. O único conteúdo não incluído, de fato, é “séries” (portaria citada pg. 33/41).

1961: Lei de Diretrizes e Bases (LDB)

De acordo com esta lei, a estrutura da escola brasileira ficaria dividida em quatro graus escolares – primário, ginásio, colegial e superior. O seu objetivo principal seria a formação integral do homem como pessoa humana.

Boynard et al. (1971), opinando sobre esta norma legal, dizem: “Exceto quanto à rigidez curricular, a LDB manteve a estrutura Capanema, que conservava boa parte da Francisco Campos. E foi um Ministério de Educação e Cultura estruturado para a aplicação da reforma Campos que recebeu a incumbência de executá-la”.

Assim, a partir de 1961, o ensino de Matemática sofre modificações devidas em parte à descentralização e à flexibilidade curricular permitida pela Lei de Diretrizes e Bases.

Os artigos abaixo são referentes à lei 4024 de 20/12/1961, de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.

Art. 12. Os sistemas de ensino atenderão à variedade dos cursos, à flexibilidade dos currículos e à articulação dos diversos graus e ramos.

Art. 20. Na organização do ensino primário e médio, a lei federal ou estadual atenderá:

a) à variedade de métodos de ensino e formas de atividade escolar, tendo-se em vista as peculiaridades da região e de grupos sociais;

b) ao estímulo de experiência pedagógicas com o fim de aperfeiçoar os processos educativos.

Como lembra Carvalho (1996, p.78), com isso, “desaparece o ensino do Cálculo na escola secundária, salvo em algumas escolas isoladas, situação que perdura até hoje.

A partir daí os programas de Matemática fundamentam-se no “Movimento da Matemática Moderna”.

O único objetivo em comum deste movimento com o “Movimento Modernizador” do início do século seria diminuir o descompasso existente entre o ensino de Matemática desenvolvido nas escolas de nível secundário e os últimos avanços científicos tecnológicos, insuflado pelo Movimento Internacional de Modernização do Ensino de Matemática, deflagrado nos Estados Unidos devido ao sucesso tecnológico inesperado dos soviéticos, com o lançamento em 1957 do foguete Sputnik. Foi justamente este fato que levou o governo americano a tomar consciência de que, “para resolver o problema da clara desvantagem tecnológica existente em relação aos russos, seria necessário repensar o ensino de Matemática e o de ciências”. (Miorim, 1998, p.111)

Enquanto isso, o outro movimento a que nos reportamos, ou seja, o movimento reformador do início do século procurou na intuição e nas aplicações da Matemática a outras áreas do conhecimento os elementos fundamentais para a elaboração de sua proposta, elegendo o conceito de função como o elemento unificador.

O Movimento da Matemática Moderna, entretanto, apresentou uma proposta baseada exclusivamente na Moderna Matemática em sua forma axiomática desenvolvida pelo grupo Bourbaki⁵, na qual os elementos essenciais eram os conjuntos, as relações e as estruturas e nas propostas estruturalistas de Jean Piaget.

⁵ Nicolas Bourbaki foi um nome fictício escolhido por um grupo de matemáticos, na maioria franceses; dentre eles, Cartan, Chevalley, Dieudonné, Weil, que tinham a intenção de apresentar toda a Matemática de seu tempo em uma obra intitulada *Éléments de mathématique*. O primeiro volume dessa obra apareceu em 1939.

Ao contrário do primeiro movimento, este se expande rapidamente, agravando ainda mais o quadro do ensino de Matemática, devido ao enfoque excessivamente centralizado na linguagem e nas justificações matemáticas rigorosas. Porém, não é objetivo do nosso trabalho estudar mais profundamente estes movimentos e suas implicações no ensino.⁶

De acordo com Pavanello, (1989,p.177), em 19/01/1975 no Diário Oficial do Estado de São Paulo foram publicadas “sugestões para um roteiro de programa para a cadeira de Matemática”, elaboradas pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, de acordo com a nova política de descentralização que a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional pretendia promover”, onde esta tendência faz-se sentir.

Desde então observa-se nos textos pesquisados que um dos problemas enfrentados foi e ainda é a seleção dos conteúdos a serem desenvolvidos ao longo do Ensino médio. Assim com o objetivo de subsidiar a ação docente, estabelecendo os objetivos e conteúdos mínimos a serem alcançados pelos alunos ao final de cada ano letivo, a Secretaria de Estado de Educação publica a “Proposta Curricular para o Ensino de Matemática no 2º Grau”.

A referida proposta (p.14) publicada em 1991, sugere que os alunos trabalhem prioritariamente com os seguintes conteúdos: funções, geometria, trigonometria, análise combinatória, probabilidade, geometria analítica, matemática financeira e estatística.

Entretanto, ao fazer algumas considerações metodológicas para a operacionalização dos conteúdos, salienta:

“Outro tema bastante polêmico é cálculo no 2º grau. Consideramos que um curso de cálculo deve decorrer do estudo feito com funções, passar pelas questões que envolvem taxa de variação de grandezas e encaminhar prioritariamente para a resolução de problemas práticos que envolvem máximos e mínimos. Os conceitos de limite e de derivada, porém, serão trabalhados intuitivamente”. (p. 20).

⁶ Para os interessados em pesquisar este assunto, sugerimos a leitura da obra de Miorim, Introdução à História da Educação Matemática. São Paulo: Atual, 1998. Esta obra, minuciosamente, analisa os mencionados movimentos.

Sugere então a distribuição de conteúdo para os cursos com 4 ou 5 aulas/semana, ao longo dos três anos do 2º grau, contido no quadro a seguir:

1ª série	2ª série	3ª série
- Função (com P.A.) - Trigonometria no triângulo - Potências e Expoentes - Sistemas Lineares	- Trigonometria da 1ª volta. - Análise combinatória - Probabilidade - Geometria	- Geometria Analítica - Matemática Financeira ou Estatística - Geometria - Rudimentos de Cálculo

* O aprofundamento dos conteúdos propostos, bem como a introdução de novos conteúdos dependerá sempre da disponibilidade e necessidade da clientela.

A última proposta curricular para o Ensino da Matemática publicada foi a de 1992. Nesta proposta encontramos menção ao Projeto Educacional Escola Padrão, instituído pelo Decreto lei nº 34035 de 22 de outubro de 1991 e a distribuição de conteúdos sugerida para os cursos com 4 ou 5 aulas/semana passa a ser a seguinte:

1ª série	2ª série	3ª série
- Função (com P.A.) - Trigonometria no triângulo Retângulo - Potências e Expoentes com Exponencial e Logaritmo.	- Trigonometria da 1ª volta. - Análise combinatória - Probabilidade - Geometria Prismas - Sistemas Lineares com Matriz e Determinante.	- Geometria Analítica - Matemática Financeira ou Estatística - Geometria - Polinômios e Equações Polinomiais. - Números complexos.

* O aprofundamento dos conteúdos propostos, bem como a introdução de novos conteúdos dependerá sempre da disponibilidade e necessidade da clientela.

Note-se que o CDI desaparece da proposta curricular. Mas, apesar da não-obrigatoriedade curricular, alguns livros continuaram e continuam mantendo noções de cálculo como um capítulo destinado ao ensino no último ano.

Por exemplo, ao consultarmos o livro do professor Bezerra, para o ensino de 2º grau, publicado em 1966 (18ª edição), verificamos que a sua apresentação, no que se refere aos tópicos de cálculo, era exatamente a mesma consultada por nós anteriormente. Mas no volume editado em 1994, agora sob o título Novo Bezerra, Matemática – 2º Grau, não existe nenhuma alusão a estes conteúdos.

Luiz Mauro Rocha e Ruy Madsen Barbosa (1971) no livro: Curso colegial Moderno – Volume 3, colocam como objeto de controvérsia a questão de ser ou não oportuno o ensino desta matéria nos cursos secundários, dado que os conceitos, em forma razoavelmente correta, parecem de difícil assimilação pelos alunos.

“À guisa de motivação para os cursos subseqüentes, apresentaremos apenas as idéias gerais, em forma intuitiva, e algumas técnicas simples de cálculos. Nesse sentido, essas noções poderão ser úteis mesmo àqueles que, após o curso colegial, venham a optar por cursos superiores “que usam pouca matemática” ou pelos cursos técnicos de várias modalidades”. (Introdução)

Apesar destes dizeres, observamos no trecho abaixo, extraído deste livro, o tipo de abordagem usado pelos autores.

151. Derivadas

Seja $y = f(x)$ uma função definida num intervalo (a, b) e x_0 um ponto desse intervalo.

Se x é outro ponto do mesmo intervalo, a diferença seguinte, indicada por h ou por Δx : (*)

$$h = \Delta x = x - x_0$$

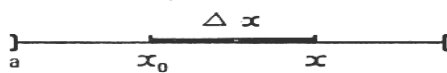
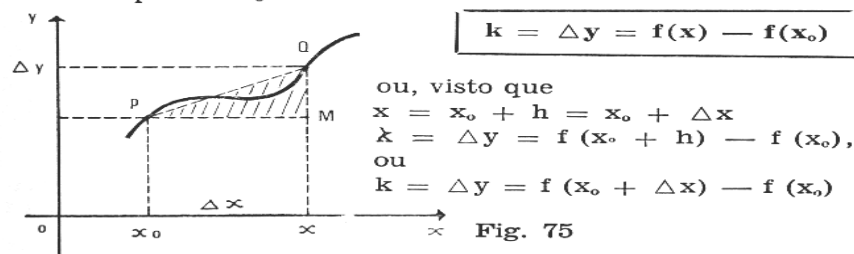


Fig. 74

se denomina *acréscimo da variável independente x* , “a partir do ponto x_0 ”;

a diferença entre os valores da função nesses dois pontos se indica por k ou Δy e se denomina *acréscimo da função*, entre os pontos x_0 e x :



$$k = \Delta y = f(x) - f(x_0)$$

ou, visto que

$$x = x_0 + h = x_0 + \Delta x$$

$$k = \Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0),$$

ou

$$k = \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Fig. 75

(*) — O símbolo Δ é a letra grega maiúscula “delta”; Δx se lê: “delta x ”.

234 Luiz Mauro — Ruy Madsen

A razão entre os acréscimos da variável independente e da função:

$$\frac{k}{h} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

se denomina *razão dos acréscimos*.

Esta razão dá a indicação aproximada da “variação relativa entre x e y no ponto x_0 ”, porém não é um valor determinado, pois depende do acréscimo h escolhido.

É claro que quanto menores sejam os acréscimos h , tomados positivos e negativos, tanto mais a inclinação da reta PQ , em geral, indica melhor a inclinação da curva, ou seja, a razão mais exata dos acréscimos.

Por este raciocínio intuitivo, você percebe que se torna conveniente considerar o *limite* da razão incremental (se tal limite existir) como o *melhor indicador* da razão de variação entre as variáveis, no ponto x_0 .

A esse limite, quando existe e tem valor finito, denominamos *derivada* da função $y = f(x)$ no ponto x_0 ; e indicamos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

$$\text{ou } f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

152. Observações

1. Gráficamente, você verifica que a razão dos acréscimos é o *coeficiente angular* da reta secante que possui os pontos $P(x_0, y_0)$ e $Q(x, y)$; isto é:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha.$$

2. Quando $\Delta x = h \rightarrow 0$, o ponto Q tende ao ponto P e a secante PQ tende à reta tangente t ; então o ângulo da secante tende a um valor limite.

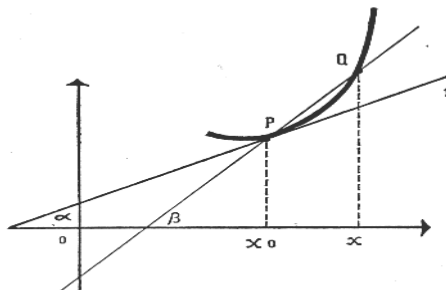


Fig. 76

Portanto, a derivada $f'(x_0)$ tem por significado geométrico o *coeficiente angular da reta tangente t* e o seu valor é $\operatorname{tg} \alpha$:

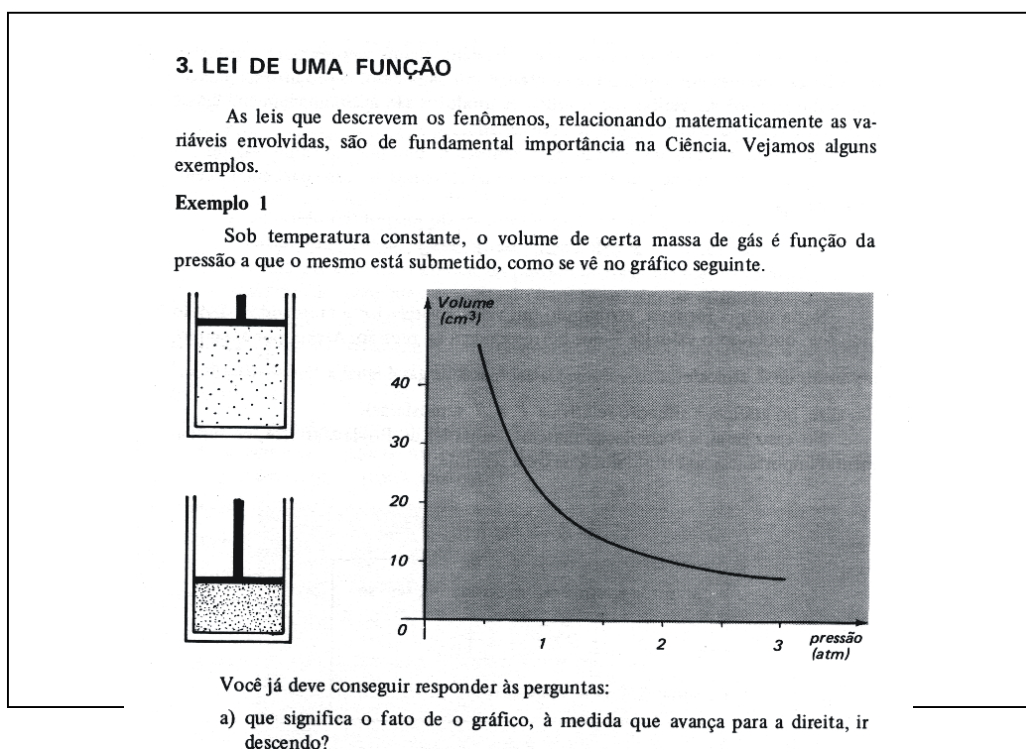
$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha \quad (152, I)$$

Convenhamos, a linguagem acima é no mínimo desmotivadora se não for acompanhada de aplicações relevantes.

Em 1979, Trotta, Imenes e Jakubovic publicam o livro *Matemática Aplicada – 2º grau*, Editora Moderna, que foi, inclusive, alvo de resenha na *Revista do Professor de Matemática* devido à maneira como estes autores tratam estes conteúdos.⁷ Muitos educadores consideram este como um dos melhores materiais publicados para este grau de ensino.

Os autores, em uma linguagem acessível, ao introduzir os conteúdos, partem do concreto (situações práticas) para o abstrato, ou seja, utilizando-se de textos da história da Matemática e de situações corriqueiras colocadas em forma de problemas, vão introduzindo as idéias, intuitivamente durante os três anos do curso, até o momento de sistematizá-las, apelando também para representações gráficas.

Como ilustração no volume 1 quando os autores introduzem o conceito de função estes também, abordam a idéia de variação e estabilidade como podemos observar no trecho abaixo extraído deste livro:



⁷ BERTONI, Nilza. Resenha sobre o livro *Matemática Aplicada*. RPM, n.1, p. 18-9.

Você já deve conseguir responder às perguntas:

- que significa o fato de o gráfico, à medida que avança para a direita, ir descendo?
- qual é a variação de volume deste gás quando alteramos a pressão a que está submetido de 0,5 para 1 atmosfera? e de 2 a 2,5 atmosferas?
- que significa o fato de o gráfico, à medida que avança para a direita, ir se

No momento não nos fixaremos a essas perguntas. O centro de nossas atenções é a lei que descreve tal situação, relacionando matematicamente o valor do volume do gás, que é uma variável, com o da pressão a que está submetido, que é outra variável. Essa lei, descoberta pelo cientista e filósofo inglês Boyle em 1662, comprovada e aprimorada pelo físico francês Mariotte em 1676, tem o seguinte enunciado:

O volume de uma massa gasosa é inversamente proporcional à pressão a que ele está submetido, isto é, o produto da pressão pelo volume é constante, quando sua temperatura permanece constante.

Uma série de experiências possibilitou a descoberta desta lei, cuja validade pode ser comprovada no gráfico anterior. Escolha alguns valores para a pressão, obtenha os volumes correspondentes e efetue, em cada caso, o produto da pressão pelo volume: você vai verificar que todos os produtos são aproximadamente iguais a 21, neste caso particular do gráfico apresentado.

Indicando o valor da pressão pela variável P , que pode assumir valores diversos, o valor do volume por V , também variável, temos, no caso particular exemplificado, que:

$$P \times V = 21 \implies V = \frac{21}{P}$$

Nesta última fórmula, atribuindo um valor à variável P e efetuando a divisão indicada, obtém-se o valor de V que corresponde a tal pressão. Assim, por exemplo, à pressão de 7 atmosferas, o volume de tal massa de gás é igual a $V = \frac{21}{7} = 3 \text{ cm}^3$ (localize, no gráfico, a situação relativa a $P = 7$ atmosferas).

No caso geral, a formulação matemática da lei de Boyle-Mariotte, de fundamental importância ao estudo dos gases, é a seguinte:

Lei de Boyle-Mariotte

Mantida a temperatura constante, tem-se:

$$P \times V = k$$

onde k é uma constante.

Observa-se também no volume 2, desta coleção, que os autores ao mencionar algumas aplicações da Trigonometria, trabalham a idéia de variação média e no volume 3, a idéia de Variação Instantânea e Derivada, como vemos a seguir:

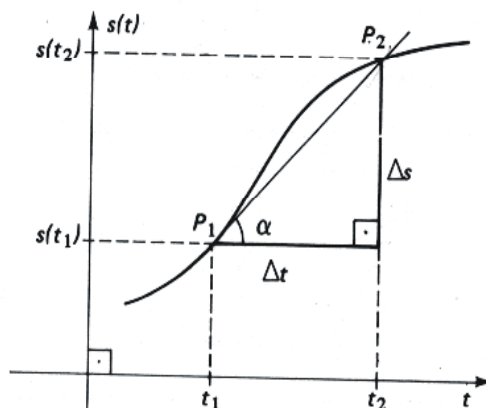
Interpretação trigonométrica da velocidade média de uma partícula

Consideremos uma partícula que se move sobre uma trajetória qualquer obedecendo à lei $s = s(t)$.

É conhecido o gráfico desta função.

A velocidade média v_m da partícula, no intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, é:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$



Ora, sendo P_1P_2 a reta secante ao gráfico da função dada e sendo α o ângulo agudo que P_1P_2 forma com o eixo das abscissas temos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

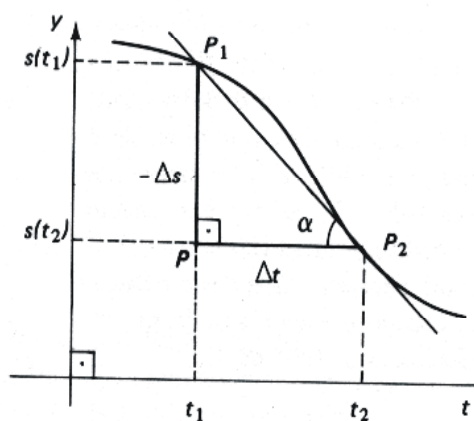
logo: $v_m = \operatorname{tg} \alpha$

No entanto, este resultado não é geral. De fato, se num certo intervalo de tempo o movimento é retrógrado, isto é, se $s(t_2) < s(t_1)$, então o cateto oposto a α , no triângulo PP_1P_2 , é $s(t_1) - s(t_2) = -\Delta s$.

logo: $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\Delta s}{\Delta t}$

e como $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

vem: $v_m = -\operatorname{tg} \alpha$



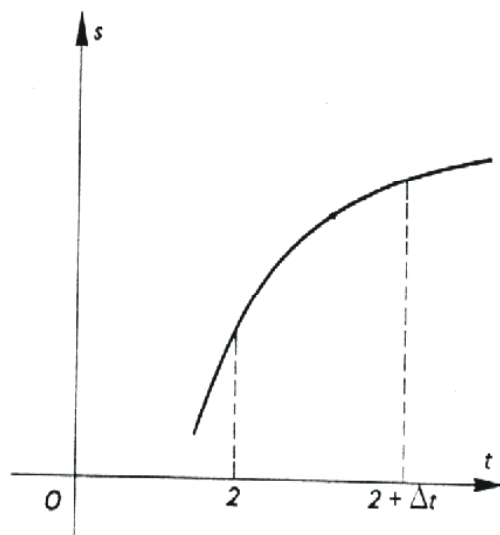
Em resumo, se num certo intervalo de tempo o movimento é:

- progressivo, temos $v_m = \operatorname{tg} \alpha$
- retrógrado, temos $v_m = -\operatorname{tg} \alpha$

onde α é o ângulo agudo que a secante P_1P_2 faz com o eixo das abscissas.

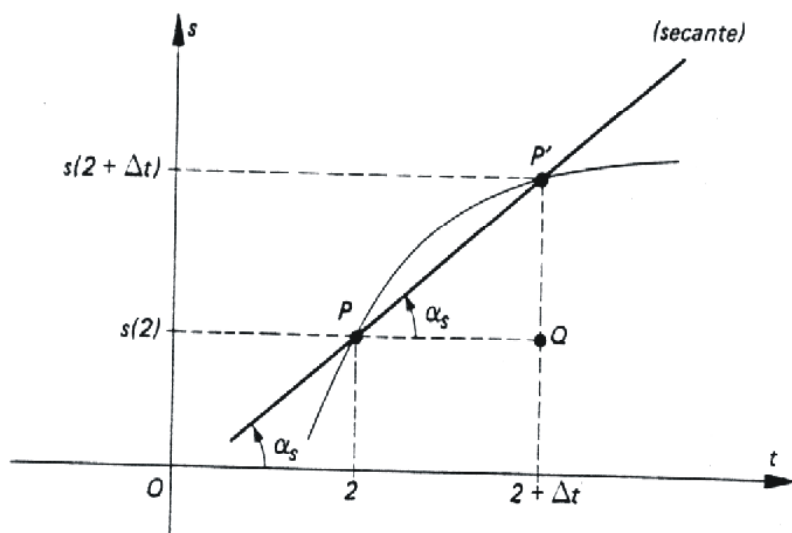
6. O movimento de uma partícula é dado pelo seu diagrama horário:

- Qual é a interpretação geométrico-trigonométrica da velocidade média da partícula no intervalo de tempo $(2, 2 + \Delta t)$?
- Qual é a interpretação geométrico-trigonométrica da velocidade instantânea da partícula no instante 2?



Resolução

- Retomemos o diagrama horário dado e chamemos de P e de P', respectivamente, os pontos do diagrama de abscissas 2 e $(2 + \Delta t)$:



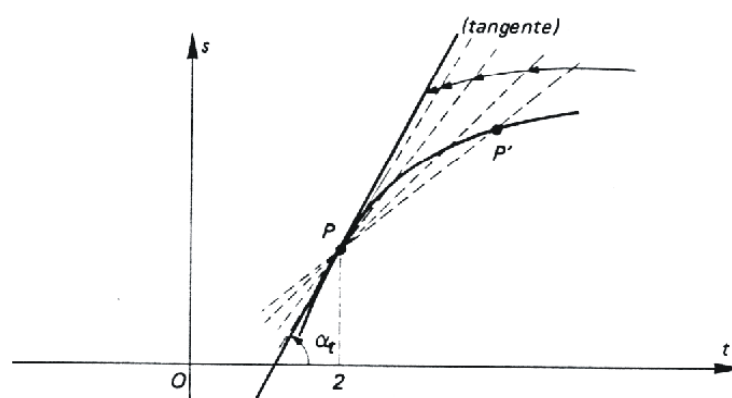
A reta determinada por P e P' será uma secante ao diagrama dado. O seu coeficiente angular, m_s será:

$$m_s = \operatorname{tg} \alpha_s = \frac{P'Q}{PQ} = \frac{s(2 + \Delta t) - s(2)}{(2 + \Delta t) - 2} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = v_m$$

* Texto extraído do volume 3 desta coleção, pg. 26

Logo, a velocidade média da partícula no intervalo de tempo $(2, 2 + \Delta t)$ é numericamente igual ao coeficiente angular da reta secante ao diagrama horário pelos pontos P e P' .

- b) Para termos a velocidade instantânea $v(2)$ devemos observar o que ocorre com v_m quando Δt tende a zero. Quando isto acontece, P permanece fixo e P' “escorrega sobre o diagrama”, se aproximando cada vez mais de P e tendendo a coincidir com P ; logo, a reta secante por P e P' tenderá à reta tangente à curva pelo ponto P :



Então α_s tenderá para α_t e m_s tenderá para m_t , coeficiente angular da reta tangente ao diagrama pelo ponto P .

Logo, a velocidade instantânea da partícula no instante 2 é numericamente igual ao coeficiente angular da reta tangente ao diagrama horário pelo ponto P :

$$v = m_t$$

* Texto extraído do volume 3 desta coleção, pg. 27.

Como várias das idéias preconizadas por estes autores quanto a abordagem dos conteúdos coaduna-se com a nossa proposta, gostaríamos de citar a observação feita por estes autores sobre como trabalhar o conceito de volume de um sólido.

“Muitas são as maneiras de se calcular os volumes dos sólidos fundamentais. O cálculo integral é uma ferramenta poderosíssima que se presta muito bem a este fim. A nível de 2º grau, no entanto, julgamos interessante o cálculo dos volumes com base no Princípio de Cavalieri. O método é didático, de fácil compreensão, dinâmico (o plano de corte movimenta-se) e contém em si mesmo o gérmen do Cálculo Integral (os “indivisíveis” de Cavalieri, herança do “método de exaustão” de Arquimedes)”.

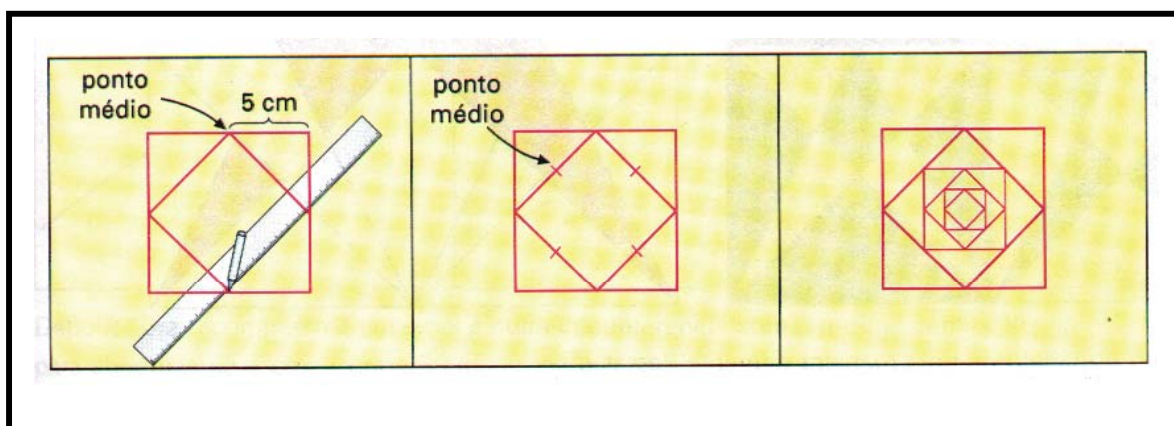
Certa ocasião, quando já estávamos desenvolvendo este trabalho, o professor Imenes esteve em Barretos dando suporte pedagógico a uma escola que adota seu material didático. Trocando idéias sobre o ensino de Matemática, ocorreu-nos perguntar porque também ele, no seu livro para o Ensino médio, colocava o CDI como um capítulo do último ano deste curso, ao que respondeu:

“Achamos que o momento de sistematizar estes conteúdos é no 3º ano. Todavia estes são conceitos muito profundos e, segundo nossa experiência, devemos começar a trabalhá-los desde o ensino fundamental.”

Ao analisarmos a coleção Matemática, Imenes & Lelis, editora Scipione (1998) para o ensino fundamental, pudemos observar que ao longo destas séries é trabalhada a capacidade de perceber a idéia de “padrões” no seu sentido mais amplo, o que a nosso ver propiciará em níveis superiores de abstração destes conceitos.

Mostramos abaixo uma atividade proposta no volume destinado à 5ª série, na qual o autor trabalha construções geométricas. Observe que isso já vai preparando o aluno para a idéia de seqüência, que, num curso mais adiantado, o auxiliará no entendimento dos conceitos básicos do cálculo.

Figura 8 Atividade proposta no livro de Imenes, 5ª série, p.105.



Bongiovanni, Vissoto e Laureano, na coleção *Matemática e Vida*, no volume 3, ano de 1993, editora Ática. No prefácio baseia-se no artigo de Ávila (1991) para justificar a inclusão destes conteúdos na coleção, segundo o qual:

O Cálculo é moderno porque traz idéias novas (...) Não apenas novas, mas idéias que têm grande relevância numa grande variedade de aplicações científicas (...) Ademais, o Cálculo, desde que apresentado convenientemente, ao contrário de ser difícil, é muito gratificante pelas idéias que traz e pelo poder e alcance de seus métodos (...) Destacar o Cálculo no ensino é grave, porque deixa de lado um componente significativo.

A nosso ver, apesar do colorido da edição, da diagramação agradável e da ênfase nas aplicações, parece-nos que a forma como estas idéias são trabalhadas ainda é bastante tradicional, ou seja, em relação às idéias fundamentais do cálculo, os autores conservam basicamente a mesma estrutura de apresentação dos conteúdos e não conseguem dar ao estudante uma idéia da verdadeira dimensão e alcance de tais idéias como instrumentos para a vida. O trecho abaixo nos mostra a tendência da coleção:

Como achar a velocidade instantânea de um móvel

Considerando a equação horária de um móvel $S(t) = t^2$, vamos descobrir a velocidade instantânea desse móvel no instante para o qual $t = 3$.

A velocidade escalar média de um móvel, num intervalo de tempo Δt , é dada por $v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(3 + \Delta t) - S(3)}{\Delta t}$.

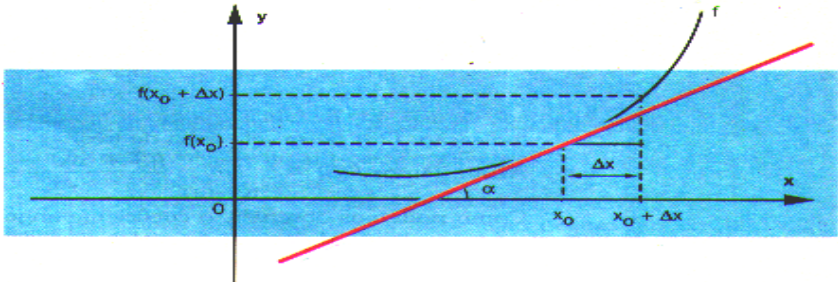
- Para $\Delta t = 1$, temos $v_m = 7$;
- Para $\Delta t = 0,5$, temos $v_m = 6,5$;
- Para $\Delta t = 0,1$, temos $v_m = 6,1$.

A velocidade instantânea (v) é definida por:

$$\begin{aligned} v(3) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_m \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(3 + \Delta t) - S(3)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(3 + \Delta t)^2 - 9}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (6 + \Delta t) = 6 \end{aligned}$$

Logo, $v(3) = 6$.

De modo geral, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função $f(x)$, no ponto da curva de abscissa x_0 , é a derivada $f'(x_0)$, na qual:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$


Sendo α a medida do ângulo indicado na figura acima, temos:

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = \text{coeficiente angular da reta}$$

Antes de falar em equação horária e de velocidade instantânea no instante $t=3$, que são idéias abstratas para um aluno desta idade, poderíamos levá-los a imaginar situações mais familiares como associar a velocidade instantânea com aquela mostrada no velocímetro do carro.

Por fim analisamos um livro básico e preparatório para o vestibular, escrito por GENTIL, Marcondes e GRECO, Sérgio, *Matemática para o 2º grau*, Volume 3, 5ª edição, 1996, Editora Ática, onde estes conteúdos são apresentados de maneira tradicional. Como os autores não justificam a inclusão deste capítulo na coleção, pensamos que talvez o motivo seria o valor que tais conteúdos representam no curso universitário, uma vez que este não é conteúdo exigido nos vestibulares.

3.3 Relevância do Ensino do CDI no Ensino médio

Apesar da preocupação desde início do século XX com o ensino de Matemática, tendência que se intensificou nas décadas de 60 e 70 com a criação de vários órgãos cuja preocupação era a Educação Matemática, percebemos que a “essência” das idéias reformadoras não se concretizaram na prática, pois apesar de se terem introduzido novos conteúdos – CDI - que se faziam necessários à educação da época, a rigidez com que foram abordados, a ênfase em se trabalhar as definições, além do excesso de exercícios teóricos e repetitivos (nos quais se privilegia o desenvolvimento algébrico e a aplicação de regras) levaram a sua exclusão dos programas.

E aqui parece-nos ter chegado ao âmago da questão: as propostas falam em “educação”, não em “treinamento”. Como afirma D'Ambrosio(1999,p.5).

“faz-se treinamento para passar em um teste, como os cursinhos, ou para desempenhar bem uma profissão, mas isso não é educação.”

Treinamento e educação são processos distintos com objetivos igualmente distintos:

A educação existe por toda parte e, muito mais do que a escola, é o resultado da ação de todo meio sócio-cultural sobre os seus participantes. É o exercício de viver e conviver que educa. A escola de qualquer tipo é apenas um lugar e um momento provisório onde isto pode acontecer. (Brandão, 1985)

Achamos interessante salientar que, ao desenvolver a análise bibliográfica, verificamos que na realidade os tópicos relativos ao ensino do cálculo no Ensino médio são uma versão reduzida dos livros de cálculo destinados ao ensino superior.

Fórmulas, exemplos e exercícios sugeridos nos livros são sempre escolhidos para que os resultados e as situações obtidas sejam exatos. Acontece que historicamente muitos resultados e expressões que temos hoje foram obtidos a partir de uma tabela de dados obtidos experimentalmente.

No nosso ponto de vista, a introdução de conceitos do CDI no Ensino médio justifica-se se atender a dois objetivos interligados: a) motivar o estudo de conteúdos “clássicos” do Ensino médio tais como: funções, geometria analítica, logaritmos, trigonometria e outros; e b) mostrar que a Matemática oferece ferramentas para solucionar problemas concretos.

Ocorre que, como foi dito, os conceitos de Cálculo para o Ensino médio que encontramos na literatura são trabalhados por meio de situações artificiais ou modelos pré-formulados sem origem e nem fim: a equação horária de um movimento é $s(t) = t^2 \dots$; o consumo de energia numa cidade obedece à equação: $c(t) = 2.700 \cdot e^{-0,8t}$ etc. Mas na prática, não se tem a equação horária de um movimento ou a equação do consumo. O que se obtém, em situações reais, são tabelas de dados advindas da análise e observação da situação em estudo.

Muitas vezes, problemas reais acabam requerendo ferramentas do CDI, que, por sua vez, requer uma boa parte, senão a totalidade, da Matemática ministrada no Ensino médio.

Para desenvolver a trigonometria, por exemplo, uma motivação usual é o cálculo da altura de uma torre, uma vez conhecido o ângulo sob o qual um observador vê o seu topo e a distância do observador à torre. Isto ocorre quando o autor do livro didático se preocupa em dar alguma motivação. Mas, na maioria vezes, já são introduzidos sen, cos, tg de um ângulo agudo de um triângulo retângulo, depois vem o círculo trigonométrico, a definição das funções trigonométricas e uma longa série de fórmulas. A motivação para o aprendizado de tais fórmulas é a resolução de exercícios do tipo:

Obter $\operatorname{tg} 2x$, sabendo que $\operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$

O objetivo desse exercício é apenas a memorização de fórmulas.

A partir da fórmula $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ obtém-se o $\cos x$ e daí a fórmula $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ fornece o valor da $\operatorname{tg} x$. Este valor, substituído na fórmula $\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$, dá o valor solicitado. A nosso ver, dificilmente alguém consegue emocionar um aluno com este exercício. Ele se interessa muito mais em resolver o exercício na calculadora.

Na calculadora, com o valor $\frac{3}{5}$ obtém-se $x = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{3}{5}$. Então x é duplicado, e a tecla tg é acionada, fornecendo $\operatorname{tg} 2x$. Assim, se as fórmulas de trigonometria só são utilizadas em exercícios deste tipo, o aluno dificilmente se convencerá de que deve aprendê-las, uma vez que ele obtém os mesmos resultados sem elas, com a calculadora.

Na verdade, não queremos dizer que estas fórmulas não sejam importantes, e que, portanto, o exercício resolvido na calculadora não é válido por não atender ao objetivo de fixá-las. Mas quanto ao aluno, é inevitável que ele encare o exercício como a finalidade da fórmula (o aluno é imediatista), ou seja, se lhe solicitamos a $\operatorname{tg} 2x$, este é o objetivo para o aluno. Se há um modo de atingir este objetivo sem as fórmulas, ele se perguntará porque deve conhecê-las.

Para fazer a ligação entre os conteúdos, preconizada nas propostas curriculares, os livros didáticos costumam fazê-la através de exercícios envolvendo dois ou mais assuntos, como no exemplo a seguir:

Calcule o determinante da matriz:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ 2 \operatorname{sen} x - \cos x & \operatorname{sen} x \end{vmatrix}$$

Num trabalho de Modelagem, os problemas são extraídos de situações naturais (cotidianas) e podemos observar que os estudantes se envolvem profundamente na resolução deles. Também a ligação entre conteúdos que normalmente são impostos de maneira estanque, só se interligando por meio de exercícios sem significado., como ilustramos anteriormente, agora pode ocorrer de maneira natural, agradável e lógico.

No capítulo seguinte descrevemos como desenvolvemos estas idéias usando de um modelo estático – o alvéolo, através do trabalho que dá suporte a esta proposta , realizado por nós em sala de aula com alunos do ensino médio.

Muitas fórmulas e conceitos de trigonometria são envolvidos na obtenção de derivadas de funções trigonométricas. Estudo de situações abordadas dentro da Modelagem Matemática conduzem freqüentemente à necessidade de obtenção de valores máximos e mínimos que envolvem derivadas.

No referido trabalho desenvolvido segundo a estratégia da Modelagem Matemática, surgiu de modo natural a necessidade de determinação do ponto de mínimo de uma função que envolvia funções trigonométricas. Seria o momento ideal para definir derivada e desenvolver boa parte da trigonometria segundo a motivação:

Obter a derivada e o ponto de mínimo da referida função.

Como podemos observar, no próximo capítulo, a construção e o estudo do alvéolo são situações complexas; entretanto, o envolvimento é tão grande que eles aceitam, mais do que isso, eles querem se apoderar de conhecimentos e técnicas para chegarem às soluções. Cria-se a necessidade e motivação de aprendizagem de conteúdos, muitas vezes áridos noutra situação

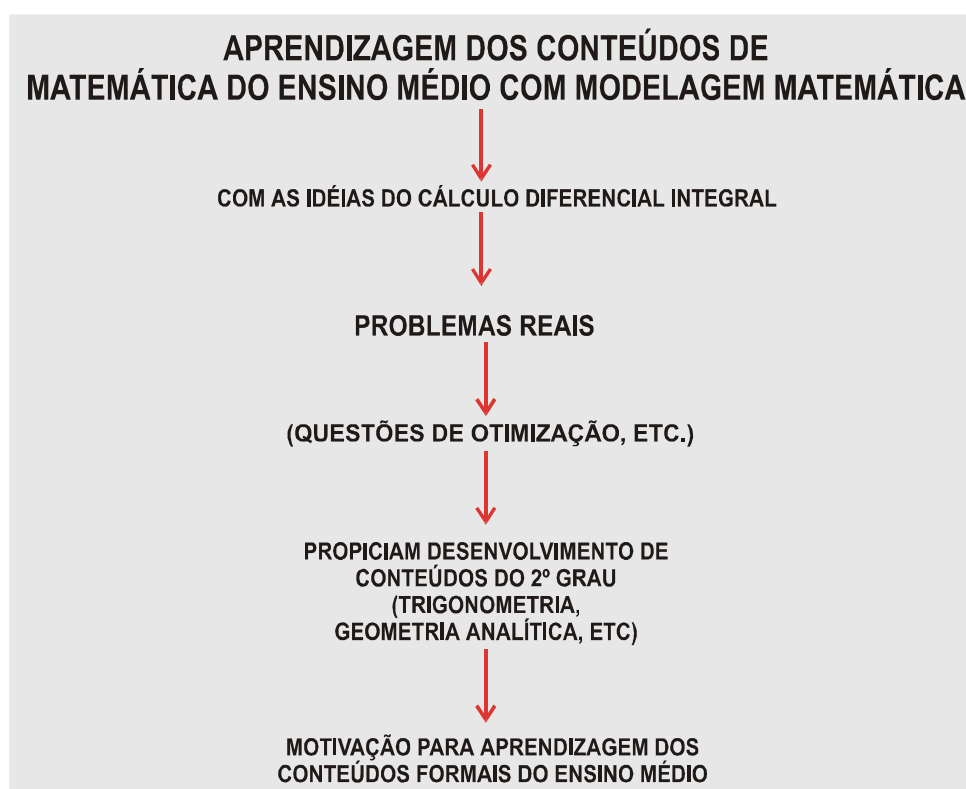
Ainda no capítulo abordamos a função exponencial e logarítmica (que fazem parte dos conteúdos do ensino médio) que aparecem naturalmente no modelo dinâmico do crescimento populacional da colméia.

Ressalte-se, mais uma vez, que a nossa proposta não é desenvolver o Cálculo Diferencial e Integral no ensino médio por si mesmo. Trata-se de lançar as idéias do Cálculo sem enfatizar algoritmos, mas desenvolvê-las como ferramenta para resolução

de problemas. Os conteúdos a serem estudados mais minuciosamente são aqueles pertinentes ao ensino médio, segundo os atuais PCN, e que surgirem durante a resolução do problema levantado. Assim esperamos, com esta estratégia, privilegiar a construção de idéias e não de algoritmos, como também conseguir um ponto de equilíbrio a respeito do quanto e do como desenvolver os conteúdos.

Acreditamos que, trabalhando dessa maneira, teríamos a oportunidade de desenvolver o raciocínio, a compreensão e estimular a criatividade, além de usar novas tecnologias e eliminar uma série de terminologias e nomenclaturas que só sobrecarregam o aluno e não têm valor formativo nenhum. E, uma vez que o aluno opte por continuar seus estudos superiores em um curso onde a Matemática seja fundamental, dar-lhe-íamos a oportunidade de conhecer e se aprofundar nas abstrações.

O quadro a seguir resume a idéia dos próximos capítulos:



Esperamos também que ao assim proceder, vencer o tabu de que estes assuntos seriam muito complicados à compreensão do estudante no Ensino Fundamental. Professores que somos, sabemos por experiência própria que o fato de a compreensão de um assunto tornar-se fácil ou difícil para os alunos depende, em um alto grau, da

maneira de expô-lo e trabalhá-lo. A este respeito, o Professor Euclides Roxo argumentou, por volta de 1930, que:

A condição essencial para que o estudo das noções de cálculo se torne proveitoso na escola secundária é que não se dê a tal estudo um caráter absolutamente sistematizado e formalístico, nem se apresente aos alunos como uma disciplina à parte, uma coisa nova nem mesmo como um capítulo acrescido à matemática elementar. Trata-se apenas de utilizar símbolo e processos que servem para simplificar e generalizar assuntos que, quase sempre, se apresentam de modo artificioso e complicado, somente com a preocupação de banir da escola secundária tudo o que se refira ao cálculo infinitesimal.

CAPÍTULO IV

4 Abelhas: Tema que deu origem a um trabalho de Modelagem Matemática

“Na MM podemos tanto adaptar conceitos, configurações ou estruturas matemáticas aos fenômenos da realidade quanto obter novos conceitos e estruturas matemáticas a partir de situações da realidade e nesse segundo sentido paradigmas da construção científica já sistematizados dão origem a novos paradigmas e assim a matemática evolui como um retrato do universo”. (Bassanezi)

4.1 Trabalho de Pesquisa Desenvolvido

Como já vimos anteriormente, quando se trabalha com a modelagem como estratégia de ensino-aprendizagem, para se iniciar o processo utiliza-se um tema, algum problema significativo ou o questionamento de alguma situação da realidade. O objetivo do tema é o de motivar o aluno para a aprendizagem. Sempre que possível é conveniente deixar que eles escolham o tema, com o qual trabalharão, de acordo com seus interesses e/ou afinidades. Entretanto segundo Biembengut (2000,p.20) "a escolha do tema pelos alunos tem vantagens e desvantagens. Uma vantagem é que se sentem participantes no processo. Em contrapartida, as desvantagens podem surgir se o tema não for adequado para desenvolver o programa ou, ainda, muito complexo, exigindo do professor um tempo de que não dispõe para aprender e para ensinar.” Como nosso objetivo não é única e exclusivamente trabalhar o processo de modelar, mas também desenvolver algumas idéias próprias do Cálculo Diferencial e Integral, optamos por trabalhar com um tema já conhecido e que contempla nossas necessidades.

Assim, depois da apresentação do tema escolhido - "Abelhas " - com o objetivo de capturar, envolver e fazer com que o grupo se inteirasse sobre o mesmo, passamos o filme "Cidade das Abelhas ".

Do filme o que mais chama a atenção dos alunos é a dança das abelhas e a geometria dos alvéolos que formam a colméia. Sugerimos, então, que trabalhássemos com os alvéolos.

O filme relata que se as abelhas construíssem um alvéolo apenas, a forma ideal seria a cilíndrica. Esta é mais “confortável” para as abelhas que utilizam os alvéolos também para o desenvolvimento populacional da colméia, possui maior espaço interno, maior volume e exige um consumo mínimo de cera para sua construção. Porém, quando os alvéolos se juntam para formação do favo as vantagens desaparecem, pois surgem espaços inúteis entre eles e o que é mais importante os lados de um alvéolo não servem de parede para o alvéolo seguinte. O pentágono também poderia abrigar as abelhas mas, é impossível colocar vários pentágonos juntos de maneira que as paredes se justaponham. Somente três formas possibilitam paredes comuns: triângulo, quadrado e hexágono.

Figura 2



Figura retiradas do filme “Maravilhoso Mundo das Abelhas”

O triângulo é o que possibilita menor espaço útil e portanto menor volume em relação à quantidade de material usado na sua construção. O quadrado é melhor, mas ainda é ineficiente. Apesar do espaço útil deste, com a mesma quantidade de cera utilizada anteriormente ser maior, ainda é menor que o obtido quando é usado o hexágono. Este, sim, é a forma ideal e naturalmente foi a usada pelas abelhas pois, ela proporciona os maiores volumes com mínimo de material gasto na sua construção. As atividades 1 e 2 situadas no capítulo V deste trabalho, ilustram as afirmações feitas acima.

Mais familiarizados com o assunto partimos para o levantamento de questões sobre o objeto em estudo: alvéolo. No processo de Modelagem esta é uma etapa importante – despertar no aluno a criatividade na formulação e resolução de problemas aplicados à situação em estudo. Tais problemas são “o norte” para dar continuidade as atividades a serem desenvolvidas em sala de aula.

Percebemos que os alunos as formulam, limitando-se a questões do tipo:

- Qual a área do alvéolo?
- Qual o seu volume?

Constatamos que estes têm dificuldade em perceber e formular problemas com clareza. Certamente, isso se deva em grande parte ao nosso sistema escolar vigente onde são poucos os alunos acostumados a questionar uma vez que o ensino atual se concentra mais na capacidade do aluno para responder do que na formulação de problemas. A este respeito em Alves (2000,p.25) encontramos:

“O que se testa nos vestibulares, e o que os cursinhos ensinam, não é simplesmente a capacidade para dar respostas? Frequentemente, fracassamos no ensino da ciência porque apresentamos soluções perfeitas para problemas que nunca chegaram a ser formulados e compreendidos pelo aluno”.

Mais adiante acrescenta:

“Todo pensamento começa com um problema. O que não é problema não é pensado”.

Procurando revelar relações que passam despercebidas aos alunos na nossa fala e nas imagens apresentadas pelo filme, incentivamos os alunos participantes do estudo a construir um alvéolo. Por meio desta atividade obtém-se um modelo geométrico. A análise do modelo pelos alunos permite obter dados importantes para elaborar com maior clareza o problema através do qual desenvolvemos os conteúdos matemáticos propostos nesse trabalho.

4.1.1 CONSTRUÇÃO DO ALVÉOLO

"Os recipientes, denominados alvéolos, têm a forma de um prisma hexagonal regular (faces laterais iguais e ângulos entre as faces iguais) aberto numa extremidade e formando um ápice triédrico na outra face." (Bassanezi, 2002, p.215)

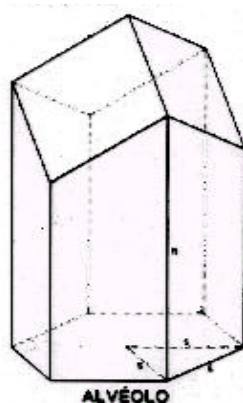


Figura 3

Para construir os alvéolos, os alunos precisaram aprofundar seus conhecimentos matemáticos. O primeiro problema detectado foi na construção do hexágono regular (base dos alvéolos). Como obter um hexágono regular ?

Seguindo nosso propósito de não fornecer fórmulas prontas incentivamos os alunos a procurar embasamentos que lhes permitissem começar o modelo do alvéolo. No livro *Vivendo a Matemática*, (p.20) os alunos encontraram:

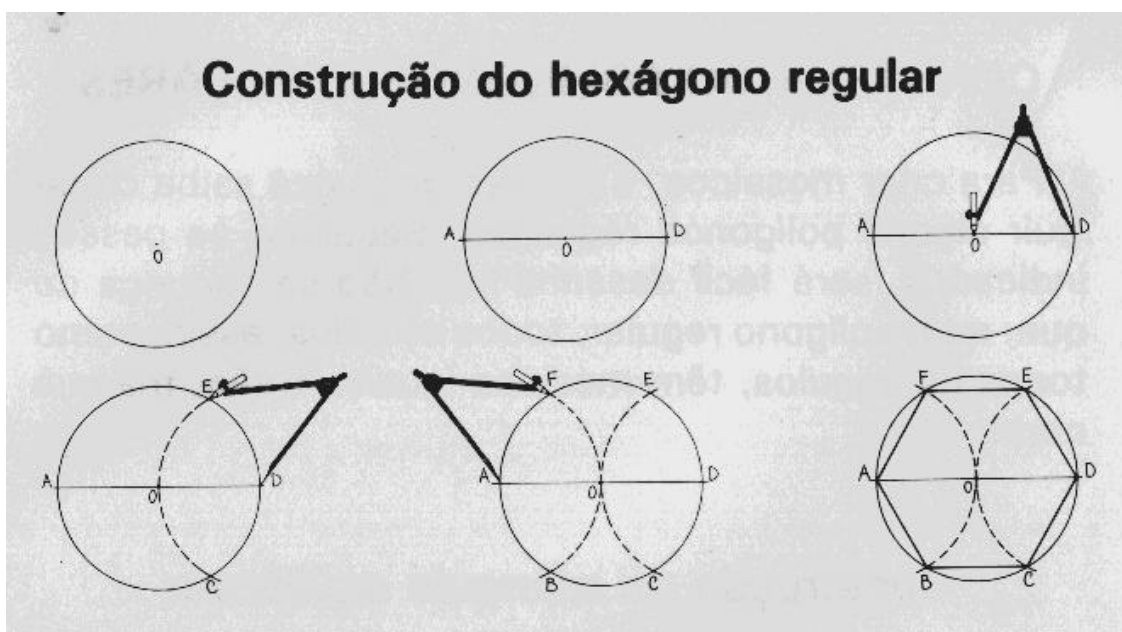


Figura 4

Assim, eles teriam que traçar uma circunferência de raio R e em seguida o seu diâmetro. Depois, mantendo o compasso aberto com o mesmo raio que deu origem a circunferência, mudar a ponta seca do compasso do centro O da circunferência, para o ponto D situado em um dos extremos do diâmetro e traçar um semi-círculo passando por O . A intersecção deste com a circunferência nos daria os pontos E e C . Analogamente determinamos os pontos E e B . Em seguida unindo-se os pontos A, B, C, D, E e F obtivemos o hexágono regular. Este processo, evidentemente, leva em consideração que $L=R$.

Outro aluno do grupo disse ter encontrado uma solução mais fácil: “Professora para construirmos um hexágono é só marcar, com o compasso, na circunferência o seu raio seis vezes e depois ligar os pontos”.

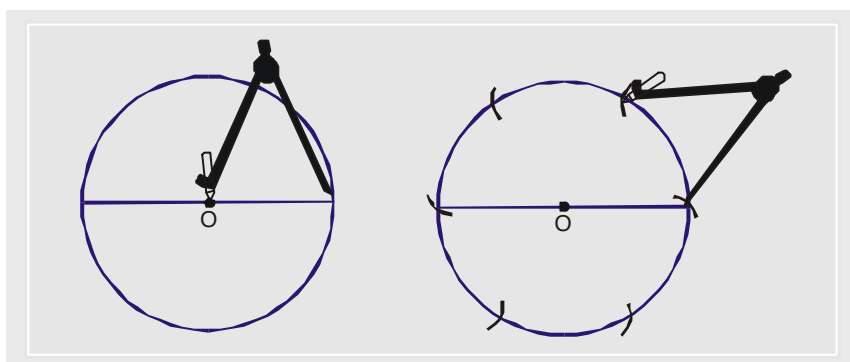


Figura 5

É importante, antes de prosseguir, levar o aluno a refletir sobre a diferença ou similaridade entre a proposta do colega com a fornecida pelo livro. Assim como as vantagens e desvantagens de um ou outro procedimento de qualquer forma, em todo processo de construção do hexágono é fundamental a propriedade $R=L$.

Tem-se aqui um momento precioso para começar a desenvolver no aluno o senso crítico, a análise, a observação e a tomada de decisões que lhes permitem formular os conceitos e assimilá-los.

A questão sobre a real dimensão dos alvéolos volta a ser colocada pelos alunos da seguinte maneira:

Qual a medida que deve ser utilizada para o raio da circunferência ?

Para obter esta resposta utilizamos da seguinte informação obtida em Bassanezi (1999/2002,p218):

"como o diâmetro do corte transversal do abdômen da abelha é aproximadamente 2 mm, elas constroem os hexágonos com apótema perto deste valor".

Através da questão levantada vislumbramos a oportunidade de trabalhar o teorema de Pitágoras de forma “contextualizada”. Assim, aplicando este teorema no triângulo equilátero com origem no centro da circunferência obtivemos o raio que será utilizado na construção do hexágono.

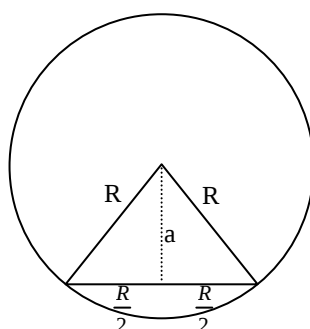


Figura 6

$$a = 2\text{mm}$$

$$R^2 = 4 + \frac{R^2}{4}$$

$$R^2 - \frac{R^2}{4} = 4$$

$$R = \frac{4}{\sqrt{3}} \cong 2,31\text{mm}$$

Como o valor obtido para o raio é muito pequeno e de difícil manuseio para os alunos sentimos a necessidade de representá-lo segundo valores mais visuais e de preferência exatos para facilitar o trabalho de construção do modelo.

Assim sendo, trabalhamos em seguida a escala em que foi construído o modelo do alvéolo definindo que usássemos a escala 1:0,231 ou seja cada centímetro corresponderá a 0,231mm.

Usando para o raio 2,31mm e altura 4,75mm teremos:

$$1\text{cm} \text{ — } 0,231\text{mm}$$

$$R \text{ — } 2,31\text{mm}$$

$$\therefore R = 10\text{cm}$$

$$1\text{cm} \text{ — } 0,231\text{mm}$$

$$h \text{ — } 4,75\text{mm}$$

$$\therefore h = 20,5\text{cm}$$

Vencido o primeiro obstáculo passamos a construir o prisma hexagonal que dará origem ao alvéolo mostrado na figura 3.

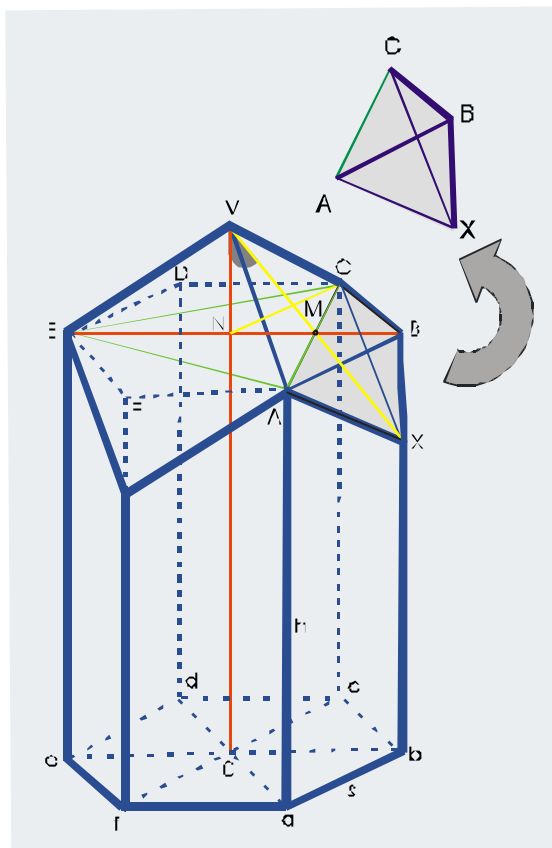


FIGURA 7

Registramos através de fotos este momento de trabalho dos alunos:



FOTO 1



FIGURA 2

As fotos 1 e 2 mostram a fase inicial de construção do prisma hexagonal.

Os alunos com auxílio de um compasso desenharam o hexágono (base do alvéolo) em uma folha de papel sulfite, utilizando as medidas determinadas por eles.



FOTO 3



FOTO 4



FOTO 5

Nas fotos 3, 4 e 5, já com as varetas de madeira cortadas, os alunos começam a dar forma ao prisma hexagonal colando-as.



FOTO 6

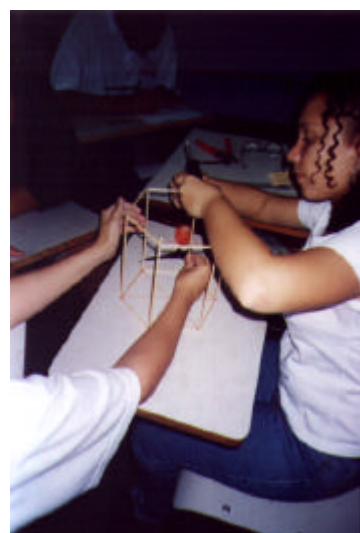


FOTO 7

Nas fotos 6 e 7 a equipe terminou o hexaedro e com o auxílio de uma linha resistente e colorida determinam as diagonais citadas no texto que se segue.

Construído o hexaedro, observa-se que uma das extremidades do alvéolo é fechada por três planos formando um vértice espacial. Para determinar este ponto usamos uma linha colorida com a qual os alunos construíram as diagonais ad , be , fc , AD , BE , e FC do prisma hexagonal. Estas diagonais se encontram no centro do hexágono nos pontos que denominamos de O e N e por onde passamos um eixo vertical.

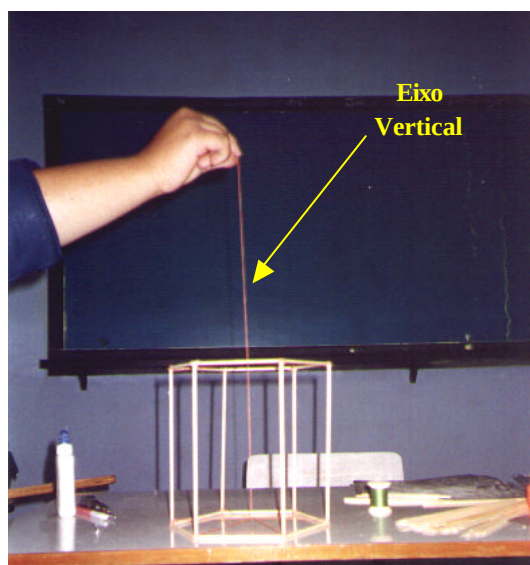


FOTO 8 – EIXO VERTICAL

Utilizando, agora, o princípio dos pontos de fuga (ponto para o qual convergem as arestas laterais de um objeto), construímos a partir dos vértices das faces do hexaedro as semi-retas que convergem para o ponto que chamamos de V , situado no eixo ON .

As fotos 9 e 10 ilustram esta fase do trabalho:

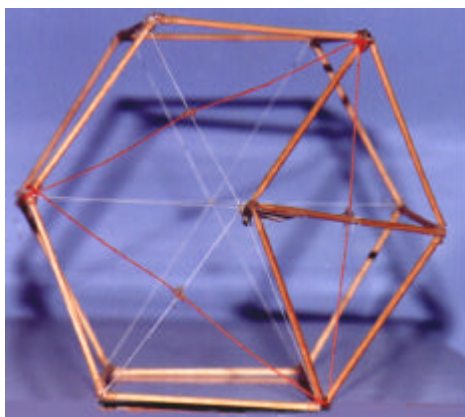


FOTO 9

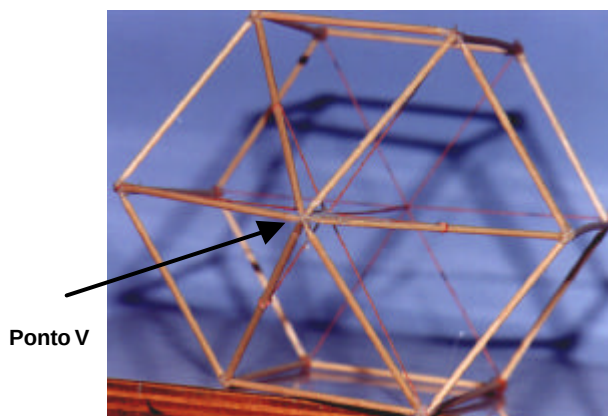


FOTO 10

Em seguida, através da análise da figura 7, construímos os losangos que fecham a parte superior do hexaedro e ao final observamos que os grupos obtiveram losangos diferentes quando consideram alturas distintas dos alvéolos.

Surge aqui um problema que é mais complexo que os anteriores. Qual será a melhor forma de encaixar os losangos no sentido de usar menor quantidade de cera e obter a maior área?

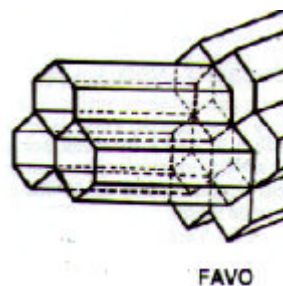


FIGURA 8

Aqui tornou-se necessário que pesquisássemos um pouco mais sobre os alvéolos e as abelhas. Usamos para este fim livros sobre o assunto encontrados na biblioteca e na casa de alguns alunos.

Desta forma descobriram que as faces que fecham o prisma hexagonal formam com o eixo vertical um ângulo aproximado de $54,7^\circ$. De posse dessa informação reproduzimos parte do favo representado na figura 8.



FOTO 11

A fotografia 11 mostra um aluno com compasso de madeira, construído por ele, para ajudar a determinar o ângulo de $54,7^\circ$ junto ao eixo vertical.



FOTO 12

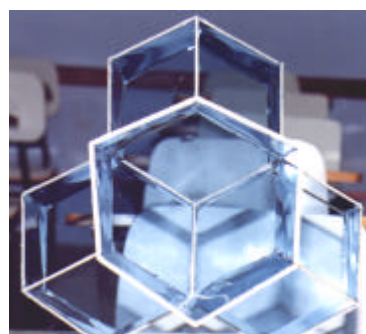


FOTO 13

As fotos 12 e 13 mostram a fase final do trabalho quando os alunos juntaram os alvéolos para reproduzir parte de um favo.

Antes de continuar desenvolvendo o trabalho queremos comentar que a construção do alvéolo foi toda feita na escola e em grupos. Observamos que os alunos que não se adaptam muito ao STV (Sistema Tradicional Vigente de Ensino) neste tipo de atividade se apresentaram participativos, criativos e abertos a inovações. De maneira geral a euforia e a emoção do grupo ao terminar os alvéolos foi grande. Segundo eles a atividade fora complexa mas gratificante.



FOTO 14

A foto 14 mostra parte da equipe de alunos apresentando o trabalho realizado na semana cultural promovida pela escola.

Nosso problema agora é justificar matematicamente este valor encontrado na literatura para o ângulo formado na parte superior da alvéolo (ápice triédrico) e que chamaremos de q .

Passamos então, a analisar mais detalhadamente o modelo obtido e a levantar questões que nos permitam aprofundar nosso conhecimento sobre o mesmo e o nosso conhecimento matemático. O importante neste momento é procurar fazer com que os alunos desenvolvam sua capacidade de análise e questionamento.

Concordamos com alguns matemáticos quando dizem que “*A chave para a análise matemática de situações geométricas ou científicas é essencialmente o reconhecimento de relações entre as variáveis que estão envolvidas no modelo*”. (Edwards et. al., 1997)

Área é uma medida de superfície, logo a área do alvéolo está relacionada com a quantidade de cera e de esforço gasto pelas abelhas na construção do mesmo.

Do filme mostrado no início do trabalho coletamos a informação de que na apicultura racional são usadas lâminas de cera também chamadas pré-favo (ápice-triédrico) que servem de guia ou alinhamento para construção do favo. Estas lâminas representam o alicerce do favo e diminui para as abelhas o trabalho cansativo de produzir cera e construir os alvéolos. Assim as abelhas podem aproveitar melhor as floradas, uma vez que perdem menos tempo na construção do favo.

Sabemos ainda, que em uma colméia os alvéolos se justapõem de tal forma que cada parede separa sempre dois alvéolos e que em cada ápice triédrico se encaixam três alvéolos. Assim suspeitamos que o ângulo θ , do ápice, deveria ter influência na área dos recipientes. Aqui surge uma nova dúvida: A área do alvéolo varia com o ângulo θ ?

E, se varia, o valor $\theta=54,7^\circ$ é realmente aquele que minimiza a área, confirmando a lei do mínimo esforço e máximo rendimento da natureza?

Para justificar o valor encontrado na literatura para o ângulo θ necessitamos também calcular a área do alvéolo, questão que já havia sido levantada anteriormente.

As questões levantadas anteriormente geram o seguinte problema matemático.

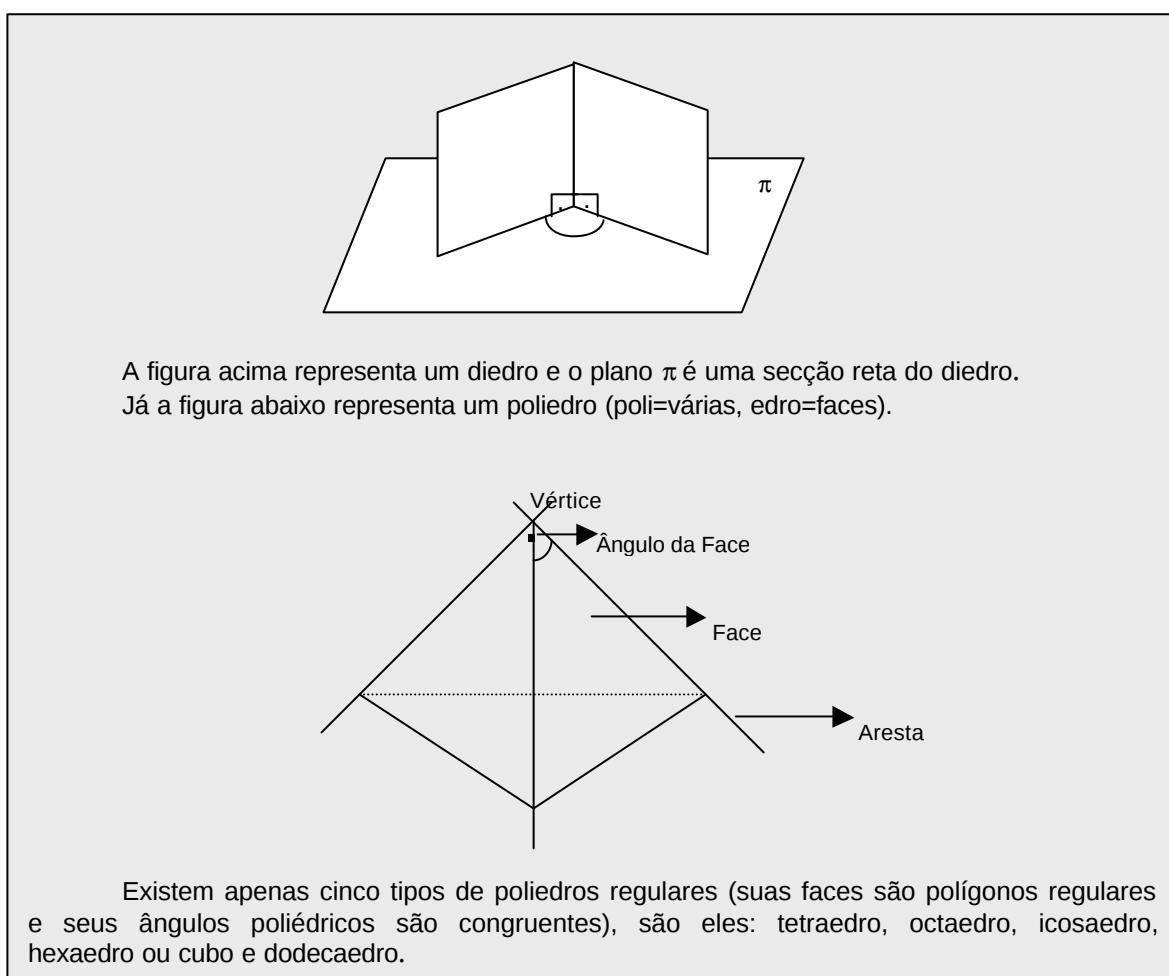
Obter uma expressão matemática que determine a área do alvéolo.

A resolução deste problema pode ser encontrada em Batschelet (1978). Entretanto ao invés de fornecer para o aluno a expressão na sua forma acabada julgamos importante percorrer os caminhos que levam a ela. Pensamos que “não se pode ensinar ao aluno os conceitos matemáticos apresentando-lhe generalizações já feitas. Um passeio sobre os fatos concretos deve preceder uma análise crítica dos mesmos”. Assim, durante esse processo foi-nos possível desenvolver vários conteúdos ensinados no ensino médio como: trigonometria, geometria plana e espacial, áreas, volume e funções, agora de forma contextualizada e para atender as necessidades dos alunos para resolução do problema. A seguir relatamos o desenvolvimento do problema para que o leitor possa ter uma maior visão de como os conteúdos matemáticos citados a pouco puderam ser desenvolvidos na obtenção da expressão que nos fornecesse a área do alvéolo.

4.1.2 Cálculo da Área do Alvéolo

As faces laterais do alvéolo possuem a forma trapezoidal e a sua parte superior é fechada por três losangos que formam o ápice triédrico.

Neste momento trabalhamos com os alunos o conceito de diedro, poliedro e tetraedro. No caso do alvéolo, para formar o ápice triédrico precisamos de três tetraedros.



Um tetraedro é uma pirâmide que tem um triângulo por base. O estudo do tetraedro é importante porque qualquer pirâmide pode ser decomposta em um certo número de tetraedros.

Considerando o tetraedro ACEV da figura 9, obtido na construção do alvéolo estabeleceu-se que:

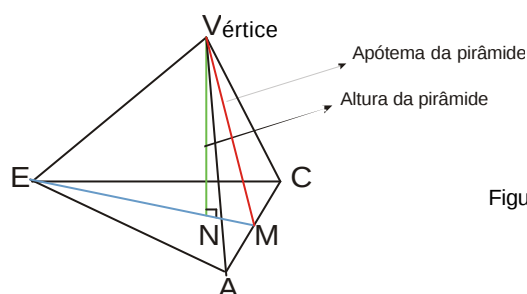


Figura 9

O ponto N é o baricentro do Triângulo Equilátero ACE, portanto $\overline{NM} = \frac{1}{3} \overline{EM}$.

O segmento $\overline{NM}$ também é chamado apótema da base.

O triângulo VNM é retângulo e, assim, vale a relação de Pitágoras.

$$\overline{VM}^2 = \overline{VN}^2 + \overline{NM}^2$$

Antes de prosseguir na análise do tetraedro trabalhamos as seis funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente cotangente, secante e cossecante) a partir de uma revisão da trigonometria no triângulo retângulo.

Trigonometria no triângulo retângulo faz parte do conteúdo programático desenvolvido no 1º ano do ensino médio portanto, durante o período de aula continuamos a trabalhá-la com o auxílio da apostila adotada pela escola.

Para que pudéssemos visualizar melhor a superfície do alvéolo, resolvemos planifica-lo (figura 10), ou seja, o seccionamos em uma de suas arestas e o abrimos.

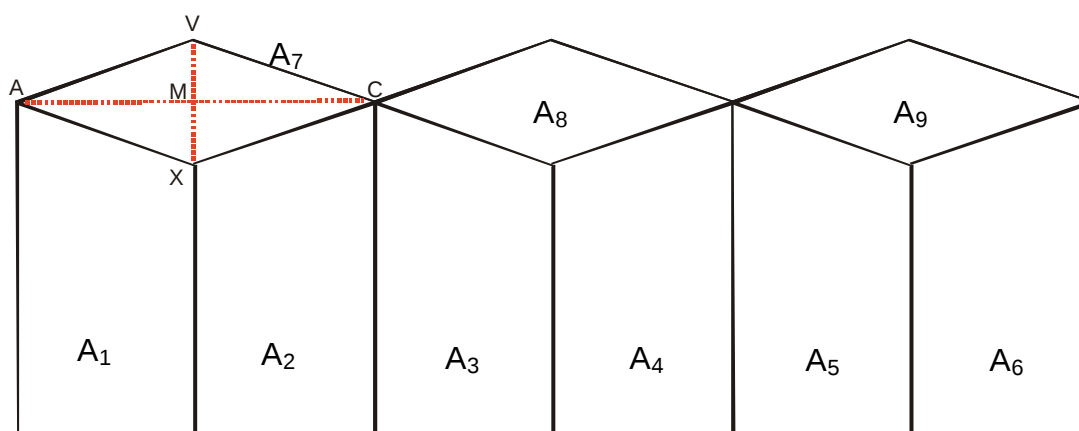


Figura 10

Logo a área total do alvéolo será dada pela soma das áreas dos seis trapézios que formam a sua face lateral e dos três losangos que fecham a sua parte superior.

$$A_{total} = 6.A_{trapézio} + 3.A_{losango}$$

Para calcular a área dos losangos precisamos determinar a medida dos segmentos $\overline{VM}$ e $\overline{CM}$ (Figura 4), pois $A_{losango} = 4.A_{triângulo}$

Para calcular a área lateral do prisma hexagonal, precisamos determinar o valor do segmento chamado por nós de $\overline{Bx}$ (Figura 11) pois:

$$A_{lateral} = 6.A_{trapézio}$$

$$A_{lateral} = 6 \cdot \left[\frac{(\overline{Aa} + \overline{bx}) \cdot s}{2} \right]$$

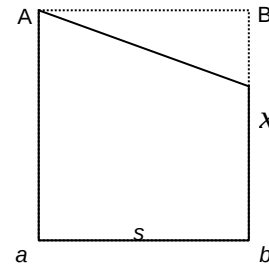


Figura 11

O segmento $\overline{Bx}$ (figura 11) possui a mesma dimensão do segmento $\overline{VN}$ (figura 12) e V é o vértice do alvéolo.

Agora, nós já temos condições de procurar relacionar através de uma expressão matemática as medidas das arestas que formam o alvéolo com ângulo θ formado entre o eixo vertical (imaginário) que passa pelo centro do alvéolo e as faces losangonais que fecham a sua parte superior.

Estudando melhor a geometria da parte superior do alvéolo, para determinar o segmento $\overline{CM}$ nos utilizamos do triângulo equilátero NCB da figura 12.

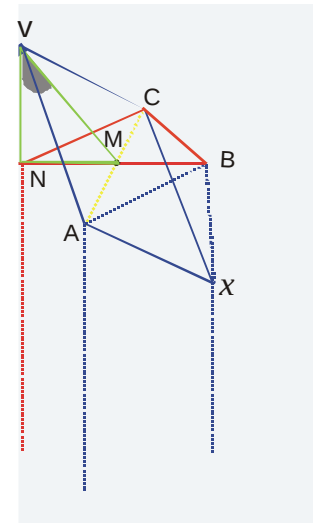


Figura 12

Redesenhando o triângulo NCB (figura 13) temos:

$$s^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \overline{CM}^2 \Rightarrow s^2 - \frac{s^2}{4} = \overline{CM}^2 \Rightarrow \overline{CM}^2 = \frac{3s^2}{4},$$

então: $\boxed{\overline{CM} = \frac{s\sqrt{3}}{2}}$

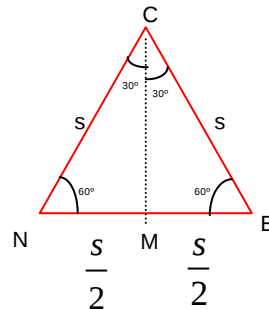


Figura 13

- todo triângulo equilátero é também equiângulo.
- a altura $\overline{CM}$ é mediana de $\overline{NB}$ e bissetriz de $\hat{C}$.
- A medida da altura $\overline{CM}$ é obtida aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo CMB.

Neste momento aproveitamos para trabalhar o triângulo equilátero e conceitos como altura, mediana e bissetriz. Como tarefa pediu-se aos alunos que usando o procedimento visto acima determinem os valores das razões trigonométricas para os ângulos de 30°, 45° e 60°.

Quando usamos a modelagem como estratégia de ensino em sala de aula nosso objetivo é o de trabalhar os conteúdos estabelecidos pelo programa de uma forma mais criativa, contextualizada e motivadora para os alunos devido a todo o envolvimento deste com o tema e com a situação problema colocada.

Trabalhando ainda na face superior do alvéolo temos o triângulo retângulo NVM (Figura 14) de onde obtivemos $\overline{VM}$.

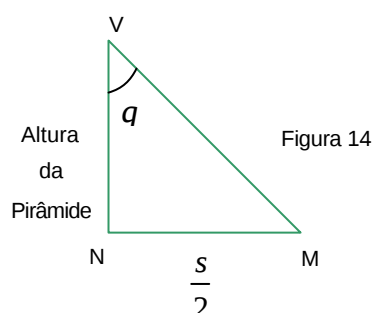


Figura 14

$$\text{sen}\theta = \frac{\frac{s}{2}}{\overline{VM}}$$

$$\overline{VM} = \frac{s}{2 \text{sen } q}$$

Utilizando pitágoras novamente:

$$\overline{VM}^2 = \overline{VN}^2 + \overline{NM}^2$$

$$\left(\frac{s}{2\operatorname{sen} q}\right)^2 = \overline{VN}^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2$$

$$\overline{VN}^2 = \frac{s^2(1 - \operatorname{sen}^2 q)}{4\operatorname{sen}^2 q}$$

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\overline{VN}^2 = \frac{s^2 \cdot \cos^2 q}{4 \cdot \operatorname{sen}^2 q}$$

$$\overline{VN} = \frac{s}{2} \cdot \cot gq$$

Relembrando que $\overline{VN} = \overline{BX}$ e $\overline{bx} = h - \overline{Bx}$ a área do trapézio será dada por:

$$A_{\text{Trapézio}} = \frac{s}{2} \cdot \left[h + \left(h - \frac{s \cot gq}{2} \right) \right]$$

$$A_{\text{Trapézio}} = \frac{s}{2} \cdot \left(2h - \frac{s \cot gq}{2} \right)$$

$A_{\text{Trapézio}} = sh - \frac{s^2 \cot gq}{4}$
--

Assim temos:

$$\text{Área total do ápice triédrico: } A_a = 3 \cdot \frac{s^2 \sqrt{3}}{2 \sin q}$$

$$\text{Área lateral do hexágono: } A_l = 6 \cdot \left(sh - \frac{s^2 \cdot \cot gq}{4} \right)$$

A Área total (A) do alvéolo será:

$$A = 6 \cdot \left(sh - \frac{s^2 \cot q}{4} \right) + 3 \cdot \left(\frac{s^2 \sqrt{3}}{2 \sin q} \right)$$

$$A = 6.l.h - \frac{3s^2 \cot gq}{2} + \frac{3s^2 \sqrt{3}}{2 \sin q}$$

$$A = 6.s.h + \frac{3}{2} \cdot s^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{\sin q} - \cot gq \right) \quad (1)$$

A expressão 1 acima nos permite calcular a área de um alvéolo. Nesta expressão s e h são constantes sendo θ a variável. Logo, devemos determinar o valor de θ para que o valor obtido pela expressão 1, seja o menor possível, isto é quando as abelhas gastam a menor quantidade de cera para obter o mesmo resultado prático para armazenar o mel (volume do alvéolo). Como já dissemos anteriormente, esta é uma Lei da Natureza: Menor Esforço e Máximo Rendimento.

Convenhamos que a expressão acima não é muito simpática principalmente para jovens que ainda estão cursando o ensino médio. Em virtude deste fato muitos professores teriam encerrado o problema neste ponto formalizando que a expressão obtida é uma função que relaciona a área do alvéolo com o ângulo θ e representa a solução para o nosso problema inicial: obter uma expressão matemática que determina a área do alvéolo.

Entretanto, nosso objetivo está centrado na "interpretação" da expressão 1 e conseqüentemente do fenômeno em estudo. Por interpretação queremos dizer, traduzir, explicar, aclarar a expressão matemática para a linguagem usual (cotidiana) do aluno.

A visualização gráfica do fenômeno é uma das maneiras mais fáceis para interpretação do mesmo. Sabemos que "s" e "h" são constantes e a parte variável da expressão 1 que nos fornece a área do alvéolo é:

$$\frac{\sqrt{3}}{\operatorname{sen} q} - \cot q = \frac{\sqrt{3} - \cos q}{\operatorname{sen} q}, \text{ onde } q \text{ pode variar entre } 0^\circ \text{ e } 90^\circ (0^\circ < \theta < 90^\circ). \quad (2)$$

Contudo, apesar de sabermos que s e h são constantes os alunos sentiram a necessidade de atribuir um valor para estes. Evidencia-se aqui a necessidade que o aluno sente de trabalhar com dados concretos. Para Piaget apud. Pires (2000,p.26), "é necessário que as crianças compreendam bem que fazendo-se abstrações de situações mais concretas, pode-se chegar a situações mais gerais". No entanto, como o problema com o qual estamos trabalhando é complexo, julgamos melhor atender a necessidade dos alunos de atribuir valores particulares para s e h.

Para que os dados fossem o mais próximo possível da realidade, através de uma pesquisa em manuais técnicos sobre apicultura consideramos para "s" o valor 2,31mm e para "h" o valor 4,75mm, usado pelas abelhas operárias da espécie "Apis Melifera Adansoni". A profundidade dos alvéolos depende da espécie da abelha e da sua função na colméia. As operárias são menores do que a rainha e estas menores que os zangões. O comprimento das abelhas operárias dessa espécie esta entre 4,6 e 4,9mm, sendo a média mais comum 4,75mm. Substituímos estes valores na expressão (1) e obtivemos:

$$A(\theta) = 65,8 + 8 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{\operatorname{sen} q} - \cot q \right) \quad (3)$$

Para representá-la graficamente construímos a tabela (1) com o auxílio da calculadora. Longe de ser uma atividade cansativa e sem graça, o grupo se entusiasmou bastante devido ao uso na calculadora das funções seno e cosseno. Segundo os alunos eles não sabiam como utilizar a maioria das funções existentes na mesma. Assim sendo

realizamos todo um trabalho de exploração da calculadora em relação as funções trigonométricas e as unidades de conversão grau e radiano. Aproveitamos a oportunidade para abordar também o significado geométrico da medida de um ângulo em radiano e a relação entre o seno, cosseno ou tangente de um número x com seno, cosseno ou tangente de um ângulo.

$\theta(\text{Graus})$	$\theta(\text{Radianos})$	Área
5	0,09	133,4141
10	0,17	100,2785
15	0,26	89,5279
20	0,35	84,3782
25	0,44	81,4741
30	0,52	79,6986
35	0,61	78,5743
40	0,70	77,8639
45	0,79	77,4369
50	0,87	77,2164
55	0,96	77,1548
60	1,05	77,2221
65	1,13	77,3994
70	1,22	77,6751
75	1,31	78,0429
80	1,40	78,5011
85	1,48	79,0513
90	1,57	79,6986

TABELA 1

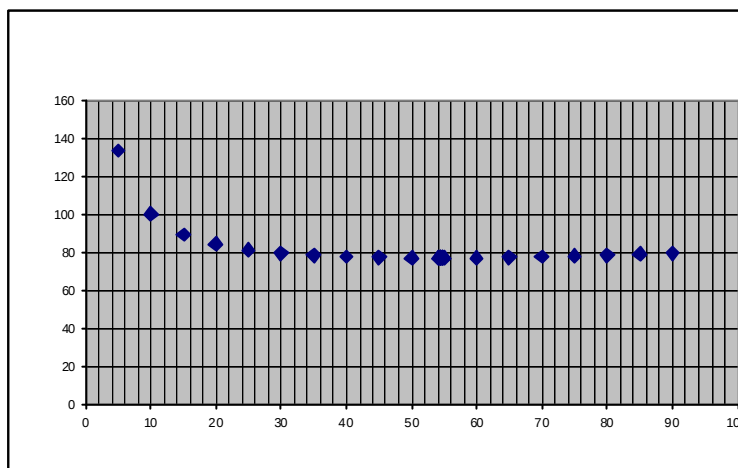
Gráfico 1 – variação da área do alvéolo com θ variando de 5 em 5°

FIGURA 15

Para construir o gráfico nos utilizamos do programa computacional EXCEL. Esta escolha possibilitou-nos obter a tabela 1 utilizando agora, como ferramenta, o computador. O desenvolvimento desta etapa do trabalho se encontra no anexo 4.

A sequência de valores decrescentes e depois crescentes da referida tabela, sugere que a área do alvéolo tem um valor mínimo para algum valor de θ entre 5° e 90°.

A palavra seqüência de números reais sugere a idéia de sub-conjunto ordenado de $\mathfrak{R}$ ou sucessão: $x_1, x_2, \dots, x_n \dots$ que é indicada por $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Cada elemento x_n da seqüência é imagem de uma função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathfrak{R}$, isto é: $x_n = f(n)$.

Dizemos que f é a lei de formação de uma seqüência.

Toda tabela (vide tabela 1) é um exemplo de uma seqüência finita pois é sempre o resultado de uma experiência.

Muitas vezes, é importante sabermos se a função realmente se estabiliza isto é, se aumentando o valor de n o valor de $f(n)$ for se aproximando de um único valor real L , temos uma seqüência convergente e dizemos que L é o valor de estabilidade da seqüência.

Uma seqüência que não converge para um número real é chamada divergente.

Exemplo: se $f(n) = \frac{1}{n}$ para $n \in \mathbb{N}$, quando n aumenta $\frac{1}{n}$ tende a 0.

se $f(n) = \frac{n^2}{n+1}$, $n \in \mathfrak{R}$ então, não existe $L \in \mathfrak{R}$ tal que $\frac{n^2}{n+1} \rightarrow L$.

O gráfico 1 (figura 15), como está, não fornece uma boa representação visual da situação em estudo. Apesar de observarmos pela tabela que o valor da área diminuiu à medida que aumentamos o valor do ângulo θ aumentando posteriormente. O gráfico não mostra nitidamente esta “variação”. A curva, no intervalo $50^\circ < \theta < 60^\circ$ parece ser constante.

Para melhor analisar nossa situação construímos a tabela 2 e o gráfico 2 (figura 16) considerando um intervalo numérico mais próximo do valor de θ que provavelmente fornece a área mínima e variamos θ de 1 em 1° .

θ (Graus)	θ (Radianos)	Área
50	0,87	77,21636
51	0,89	77,19248
52	0,91	77,17463
53	0,93	77,16254
54	0,94	77,15599
55	0,96	77,15476
56	0,98	77,15865
57	0,99	77,16749
58	1,01	77,1811
59	1,03	77,19935
60	1,05	77,2221

Tabela 2

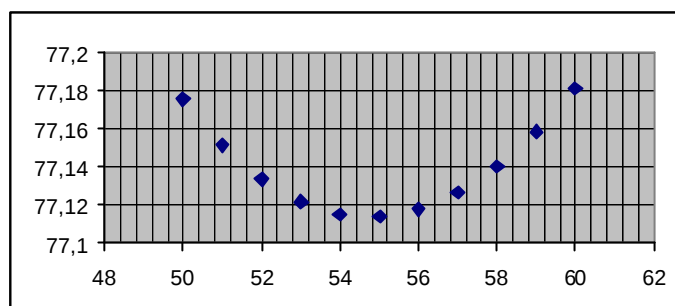
Gráfico 2 – Variação da área do alvéolo com θ variando de 1 em 1°

FIGURA 16

Agora a curva descrita pelos pontos do gráfico 2 (figura 16), confirmam que deve existir um valor de θ que dá um mínimo para a área e nos mostra *"intuitivamente"* que as abelhas podem economizar cera e tempo utilizando tal ângulo.

Conseguimos, assim, visualmente determinar o ponto aproximado onde a curva para de decrescer e começa a crescer. Como obter um valor mais exato de θ com os recursos de que dispomos?

Para darmos uma resposta algébrica, em termos dos conteúdos vistos pelos nossos alunos no ensino médio, uma alternativa para o problema de determinar a área mínima do alvéolo será considerar um “ajuste de curvas”.

Colocando de uma maneira bem simples o que chamamos de “ajuste de curvas” é o processo utilizado para a obtenção de uma fórmula, quando ainda não possuímos uma, através da trajetória descrita pelos pontos indicados no gráfico.

Estas fórmulas são normalmente chamadas de “equações de regressão” que dependendo das suas características podem ser linear, quadrática, exponencial, logarítmica, etc. Elas não nos fornecem resultados exatos, mas nos permitem “fazer previsões”.

Como já temos uma expressão para a área $A(\theta)$ do alvéolo, utilizamos o ajuste para obter uma equação mais simples e que faça parte do conteúdo ensinado no ensino médio. Na opinião de Bassanezi (1999):

“De uma maneira geral, quando um tema é escolhido para ser trabalhado via modelagem matemática, o processo fornece meios necessários para o desenvolvimento da criatividade em uma proposta de ensino-aprendizagem desde que adaptemos nossos modelos ao conteúdo programático de cada disciplina.”

Qual seria o ajuste mais adequado para o nosso problema?

Através do gráfico 2 (figura 16) pudemos observar que os pontos ali localizados nos fornecem uma idéia da forma da relação exibida entre as variáveis a qual chamamos de "linha de tendência".

Desta maneira através da linha de tendência fornecida pelos pontos e com o auxílio do programa computacional EXCEL, (não é nosso objetivo desenvolver a teoria de ajuste de curva neste nível de ensino, mas tão somente utilizá-la como ferramenta para desenvolver os conteúdos), os alunos aproximam os pontos tabelados para uma função polinomial do 2º grau.

O gráfico 3 (figura 17) nos mostra a curva ajustada para uma função quadrática.

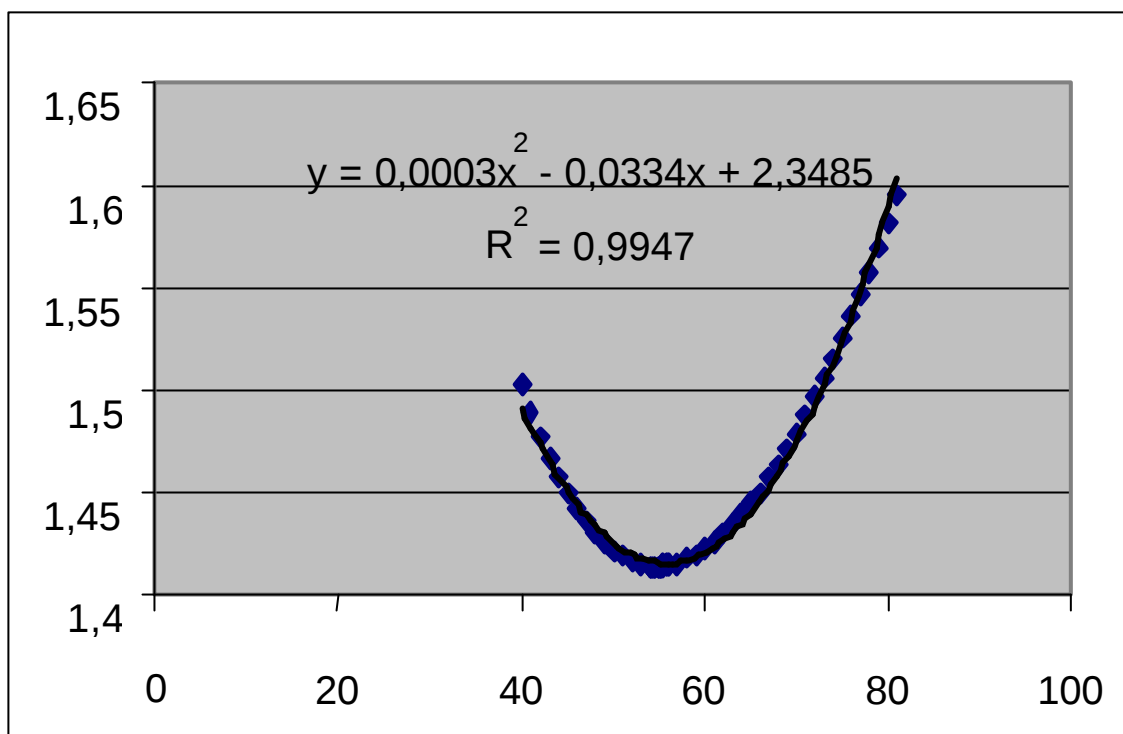


GRÁFICO 3

FIGURA 17

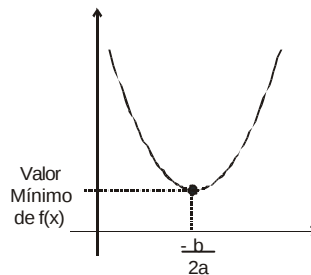
A equação (4) abaixo foi obtida através do ajuste polinomial

$$y = 0,0003x^2 - 0,0334x + 2,3485 \quad (4)$$

O procedimento utilizado para obtenção do gráfico 3 (figura 17) e da equação 4 pode ser encontrado no anexo 5.

Tendo a função do 2º grau, o que se faz normalmente em sala de aula no ensino médio para se obter o valor mínimo desta é:

Dada a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, se $a > 0$, então o valor de “x” para o qual $f(x)$ é mínimo é $x = -\frac{b}{2a}$



No caso de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, se $a > 0$, então o valor de x para o qual $f(x)$ é mínimo é dado por: $x = -\frac{b}{2a}$.

Podemos demonstrar esta afirmação da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ f(x) &= a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c \\ f(x) &= a \cdot \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} \right) + c \\ f(x) &= a \cdot \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{a \cdot b^2}{4a^2} + c \\ f(x) &= a \cdot \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{2a} \end{aligned}$$

onde:

$a \cdot \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$ é um valor variável mas nunca negativo para $a > 0$.

$c - \frac{b^2}{2a}$ é um valor fixo, independente de x . Logo, $f(x)$ tem o menor valor possível quando $a \cdot \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$

tiver o menor valor possível. Como $a \neq 0$ isso ocorrerá quando $x + \frac{b}{2a} = 0$, ou seja, $x = -\frac{b}{2a}$

Logo utilizando os valores da expressão 4 temos:

$$x = -\frac{-0,0334}{0,006} \therefore x \cong 55,6^\circ.$$

O valor obtido é aproximado, uma vez que a curva que representa a equação quadrática é uma aproximação aos pontos obtidos no gráfico. No nosso problema do alvéolo os pontos obtidos através da expressão $A = 6.s.h + \frac{3}{2}.s^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{\text{sen } q} - \cot q \right)$, não representam uma parábola.

Como proceder no ensino médio?

O Calculo Diferencial Integral é uma importante ferramenta para a resolução do problema proposto. Ele se distingue da álgebra elementar e da geometria pela introdução de uma nova operação relativamente sofisticada: a passagem ao limite. Esta nos leva a um dos conceitos essenciais do CDI: o conceito de derivada.

Talvez por isso o CDI tenha sido evitado no ensino médio. Mas, somos favoráveis a desenvolver o conceito de derivada para obter o valor exato de θ que minimiza a área do alvéolo.

Temos pelo menos duas razões para fazê - lo: a primeira delas pode ser expressa pela questão levantada pelo professor Euclides Roxo (1937):

“Não valeria a pena um maior esforço por parte dos alunos para adquirirem um processo geral e de poderoso alcance em todos os domínios da ciência, ao invés de aprender artifícios particulares engenhosamente inventados para suprir a falta dos métodos criados por Newton e Leibniz e dar lugar a métodos mais gerais, simples e fecundos, como são os do cálculo infinitesimal?”

Embora colocada na forma interrogativa a sentença é uma afirmação favorável ao uso de processos mais gerais mesmo embuídos de alguma complexidade na solução de problemas, ao invés de se utilizar artifícios só aplicáveis em situações particulares.

A segunda razão que temos para desenvolver conceitos de cálculo a serem usados na solução de problemas relaciona-se ao objetivo deste trabalho colocado por nós nos capítulos introdutórios: desenvolver conteúdos do ensino médio de forma interligada e segundo uma motivação.

Nesse caso, ao derivar a função $f(\theta) = A$, temos a oportunidade de desenvolver a trigonometria muito além do que foi feito até aqui.

Vamos, então, buscar novas ferramentas, mais fecundas e que nos forneça uma precisão maior.

Antes porém, gostaríamos de comentar que a partir do século XVI os matemáticos começaram a descobrir que uma dada função pode ser aproximada por uma função polinomial nas vizinhanças de um ponto dado.

O polinômio representativo da situação nas vizinhanças do ponto procurado tem um comportamento bastante parecido com o da função original nas vizinhanças deste mesmo ponto. Através da “Série de Taylor” podemos justificar a aproximação de uma função qualquer por outra polinomial nas vizinhanças de um valor dado, diferente de zero.

No nosso trabalho com os alunos optamos por trabalhar com o ajuste de curva uma vez que para desenvolver a expansão polinomial estes terão que conhecer regras de derivação. Temos aqui a matemática pura fundamentando nossos procedimentos.

A forma geral da Série de Taylor é:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Por exemplo, ao traçarmos uma reta tangente a uma curva podemos dizer que esta reta seria a melhor aproximação linear do gráfico no ponto de tangência. Para obtermos a equação desta reta faríamos:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)$$

No caso de queremos aproximar a curva para uma função do 2º grau faríamos:

$$f'(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

e assim sucessivamente a medida que aumentamos o grau do polinômio

4.2 Introdução ao Cálculo

Como dissemos anteriormente o significado da matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e seu cotidiano. Por outro lado a relevância desta disciplina também reside na sua capacidade de representação, através de símbolos, dos fenômenos naturais.

Normalmente estes fenômenos envolvem conceitos como: relação ou função, estabilidade, variação, área, etc podendo ser representados em linguagem matemática como segue:

fenômenos naturais		representação matemática
relação ou função	$\Leftrightarrow$	$y=f(x)$
estabilidade	$\Leftrightarrow$	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$
variação	$\Leftrightarrow$	$f'(x) = \frac{dy}{dx}$
área	$\Leftrightarrow$	$\int_a^b f(x)dx$

4.2.1 Função

Para representar o modo pelo qual uma quantidade depende de outra usamos uma função, que pode ser representada por tabelas, gráficos, fórmulas e descrições com palavras. O cálculo começa com o estudo de funções reais.

Tomemos como exemplo deste conceito a experiência realizada com o alvéolo: “A área do alvéolo é uma função do ângulo q .

$$A(q) = 6.s.h + \frac{3}{2}.s^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{\sin q} - \cot gq \right)$$

Função real

$$f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow y = f(x)$$

Gráfico de f

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$$

se $A = \mathbb{N}$ temos uma sequência discreta

$f(0), f(1), f(2), \dots$ e $f(x)$ são dados tabelados (vide tabela 1);

se $A = [0, 90]$ temos uma função de domínio contínuo e $y = f(x) \in \mathbb{R}$

4.2.2 Estabilidade

Muitas das variáveis que a natureza nos proporciona se estabilizam. É o caso por exemplo da altura de uma planta como função do tempo ou do tamanho de uma população, expressos como funções do tempo, que costumam ser funções crescentes, porém não crescem indefinidamente, tendem a um ponto de equilíbrio.

A idéia de estabilidade constitui uma boa maneira de introduzir o conceito de limites: podemos dizer que uma função $f(x)$ se estabiliza se existe um número k tal que $f(x)$ “tende” a k , quando x cresce muito. Esse fato é expresso matematicamente pela expressão

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$$

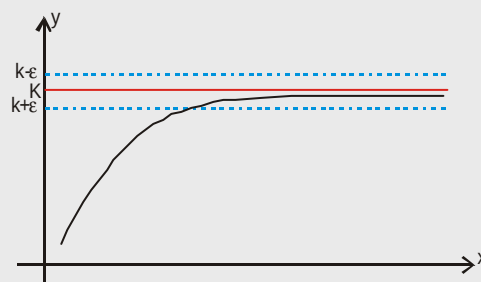
o que significa que $f(x)$ se torna tão próximo de k quanto se desejar, desde que se tome valores de x suficientemente grandes.

Mais precisamente,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$$

significa que dado um número ϵ positivo existe um número m tal que:

$$x > m \Rightarrow |f(x) - k| < \epsilon$$



Para exemplificar o conceito de estabilidade utilizamos o crescimento populacional da colméia.

Imaginemos o seguinte:

Será que o número de abelhas numa colméia cresce indefinidamente ou há um momento em que ele para de crescer?

Nosso problema agora será:

Obter uma expressão (modelo matemático) representativo do crescimento populacional de uma colméia.

Os dados empíricos e experimentais utilizados por nós para resolver o problema proposto foram colhidos pelo grupo de professores de Guarapuava (1982), em entrevistas com apicultores da região, quando desenvolveram este tema no Curso de Especialização em Modelagem Matemática sob coordenação do Prof^o. Bassanezi.

Tentamos a seguir simplificar a linguagem, usada por estes professores, e ilustrar com exemplos alguns trechos mais complexos, buscando tornar o assunto abordável no ensino médio.

Para o estudo do crescimento da população em uma nova colméia consideramos os seguinte dados e hipóteses:

- Postura da rainha é constante: 2.000 ovos/dia.
- Período entre a postura e o nascimento da abelha: 21 dias.
- Quantidade inicial de abelhas: 10.000.
- Longevidade média de uma operária: 40 dias.

Um modelo matemático da dinâmica populacional de uma nova colméia deve levar em consideração dois estágios distintos: o período de adaptação que é intermédio entre a postura inicial e o nascimento das primeiras operárias (21 dias), e o período de desenvolvimento quando nascem diariamente 2.000 abelhas.

A) Período Inicial da Colméia (Período de Adaptação)

Em relação ao período inicial podemos estabelecer duas hipóteses distintas quanto ao índice de mortalidade das operárias:

H-1) Abelhas têm idades eqüidistribuídas:

Neste caso estamos supondo que em cada grupo, distribuído por idade (dias de vida), existem exatamente a mesma quantidade de operárias, ou seja, o número de abelhas com zero dias de idade é igual ao número de abelhas com 39 dias, que por sua vez é idêntico ao número de abelhas aos 58 dias e assim periodicamente.

Desta forma, das 10.000 abelhas iniciais, em cada dia morrerão, em média, 250 abelhas o que corresponde a $\frac{1}{40}$ de 10.000.

Seja $y_n = y(n)$ a quantidade de operárias no n -ésimo dia de existência de nova colméia, $0 \leq n \leq 21$. Podemos obter a expressão de $y(n)$ recursivamente, isto é,

$$y_0 = 10.000$$

$$y_1 = y_0 - 250$$

$$y_2 = y_1 - 250 = y_0 - 2 \cdot 250$$

$$y_3 = y_2 - 250 = y_0 - 3 \cdot 250$$

Podemos generalizar, escrevendo:

$$y_n = y_0 - n \cdot 250$$

Observe que $y_0, y_1, y_2, \dots$ é uma progressão aritmética de razão -250 e y_n é a expressão geral do $(n + 1)$ ésimo termo.

Surge aqui o momento de se trabalhar o conceito de progressões com os alunos e definir progressão aritmética.

Uma progressão aritmética (a_n) de razão r possui termo geral:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

onde: $a_n = n$ - ésimo termo

$a_1 =$ primeiro termo

$n =$ número total de termos da P.A.

$r =$ razão da P.A.

Assim, obtemos um *modelo matemático* que nos dá a informação sobre a quantidade de abelhas “velhas” no n -ésimo dia de existência da colméia:

$$y_n = 10.000 - 250n, \quad 0 \leq n \leq 21. \quad (5)$$

Observação 1. O modelo (5), é dito *discreto* no sentido que a variável independente n (tempo) está tomando valores no conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$.

H-2) – A mortalidade das abelhas é “proporcional” à quantidade que se tem de abelhas em cada instante:

O que se quer dizer com isto?

Na primeira hipótese imaginamos que morreria $\frac{1}{40}$ da população inicial (10.000) por dia, ou seja, sempre morreriam 250 abelhas por dia. Mas podemos pensar noutra possibilidade: morre sempre $\frac{1}{40}$ da população do dia anterior. Assim,

$$y_0 = 10.000$$

$$y_1 = y_0 - \frac{1}{40}y_0 = \left(1 - \frac{1}{40}\right)y_0 = 0,975y_0$$

$$y_2 = 0,975y_0 - \frac{1}{40} \cdot 0,975y_0 = 0,975y_0 \left(1 - \frac{1}{40}\right) = 0,975^2 \cdot y_0$$

Continuando o processo iterativamente obtemos:

$$y_n = 0,975^n \cdot y_0 \quad 0 \leq n \leq 20 \quad (6)$$

O número $0,975 = 1 - \frac{1}{40}$ chamaremos “taxa de sobrevivência”.

A mesma expressão poderia ser obtida (deduzida) por meio de uma equação variacional, isto é por meio de uma equação de diferenças finitas. Assim,

$$y_0 = 10.000$$

$$y_1 = y_0 - \frac{1}{40}y_0 \Rightarrow y_1 - y_0 = -\frac{1}{40}y_0 \quad (\text{mortalidade de abelhas no 1º dia})$$

A variação discreta de abelhas em 2 dias consecutivos é proporcional (taxa de mortalidade) à quantidade de abelhas do dia anterior. Logo,

$$y_2 - y_1 = -\frac{1}{40}y_1 \quad \text{e assim sucessivamente:}$$

Generalizando temos:

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = -\frac{1}{40}y_n \quad (\text{a variação do número de abelhas é diretamente proporcional à população atual})$$

$$y_{n+1} = y_n \left(1 - \frac{1}{40}\right)$$

equação de diferenças finitas cuja solução veremos a seguir

$$y_{n+1} = 0,975y_n$$

Seja $y_{n+1} = a \cdot y_n$, então $y = l^n$ será uma solução se, e somente se,

$$l^{n+1} = a \cdot l^n \Leftrightarrow l = a$$

Portanto $y_n = a^n$ é a solução da equação

No nosso exemplo $y_n = 0,975^n$

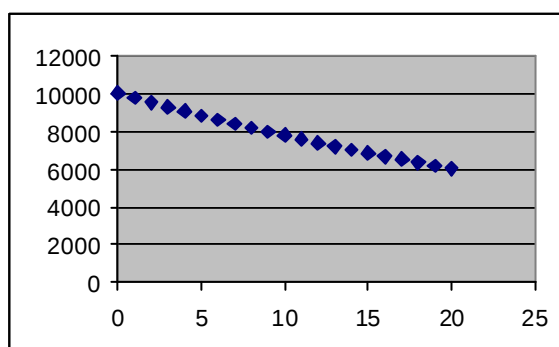
Definimos:

$\Delta y = y_{n+1} - y_n$, variação simples – modelo discreto – intervalo de tempo discreto

Graficamente temos:

n	$y_{n+1} = 0,975 \cdot y_n$ ou $y(n) = 0,975^n$
0	10000
1	9750
2	9506,25
3	9268,594
4	9036,879
5	8810,957
6	8590,683
7	8375,916
8	8166,518
9	7962,355
10	7763,296
11	7569,214
12	7379,983
13	7195,484
14	7015,597
15	6840,207
16	6669,202
17	6502,472
18	6339,91
19	6181,412
20	6026,877

Tabela 3



Variação populacional da colméia nos primeiros 20 dias

GRÁFICO 4

FIGURA 18

Função Exponencial e Logarítmica

O estudo de funções exponenciais e logarítmicas é prescrito no ensino médio.

Para Marilene Felinto em Anexo 3, o ensino dos logaritmos como vem sendo feito nos dias atuais, não serve para quase nada. Segundo ela “para o aluno pobre, cuja vida tem urgência de soluções práticas que o coloquem no mercado de trabalho cedo, o ensino médio será apenas mais um atestado de não-saber, um diploma para a “nova pobreza”. [...] O ensino médio do logaritmo é uma perda de tempo. Só serve para o filho do rico (desocupado, enfim) decorar fórmulas que lhe servindo, como a um autômato, para passar no vestibular da universidade pública”.

Entretanto o logaritmo na opinião de alguns matemáticos como Ávila (1991, p.9), continua sendo muito importante, não mais para o cálculo numérico, mas como função logarítmica. Sua inversa, a função exponencial, é talvez a função mais importante de toda a matemática, com muitas aplicações interessantes [...]. O natural, como se vê, é levar o logaritmo para o contexto do cálculo”.

Com o auxílio das funções exponenciais podemos descrever situações envolvendo: crescimento e decréscimo (populacional, bactérias, vendas, etc), como também controle de qualidade, propagação de uma epidemia, depreciação e eficiência de uma máquina.

A função $y(n)=0,975^n$, que expressa a população $y(n)$ de abelhas no n -ésimo dia ($0 \leq n \leq 20$) é uma função exponencial surgida de uma situação concreta. Cremos que este momento proporciona ao aluno motivação e significado para o estudo de funções exponenciais e logarítmicas. Acreditamos também que se deva abordar a base “ e ” uma vez que o número de Euler se presta para descrever situações onde a variação é contínua, no nosso caso discreto a população $y(t)$ de abelhas no caso contínuo.

O número de Euler

O número e é, um número irracional de valor aproximado 2,718... também chamado número de Euler devido ao matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) que escolheu a letra e para designá-lo.

Uma maneira fácil de se definir o número e é através do limite da sequência $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ quando n se torna muito grande ou seja $n \rightarrow \infty$. Tem-se também

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Vamos associar a expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ao nosso problema do crescimento populacional das abelhas.

Imaginemos uma situação bastante simplificada onde tenhamos no início da colméia uma quantidade y_0 de abelhas e que esta quantidade diminui a uma taxa constante r ao dia $\left(r = \frac{-1}{40}\right)$ levando-se sempre em consideração a quantidade de abelhas da colméia no dia anterior.

Para traduzir esta situação em linguagem matemática representamos por:

$y(t)$ = a quantidade de abelhas em cada dia

t = tempo (dias)

y_0 = quantidade inicial de abelhas

r = taxa de mortalidade das abelhas em porcentagem

Assim teremos:

$$y_1 = y_0 + y_0 \cdot r = y_0(1+r)$$

$$y_2 = y_1 + y_1 \cdot r = y_1(1+r) = y_0(1+r)(1+r) = y_0(1+r)^2$$

$$y_3 = y_2 + y_2 \cdot r = y_2(1+r) = y_0(1+r)^2(1+r) = y_0(1+r)^3$$

continuando o processo teremos:

$$y(t) = y_0(1+r)^t$$

Esta expressão nos permite saber qual o número de abelhas (população) da colméia em cada dia.

Se quisermos determinar o número de abelhas em momentos intermediários de tempo, enfim, num instante t qualquer, imaginando que se a população decresce à taxa r a cada dia, decresce a metade disso a cada doze horas, decresce $\frac{r}{4}$ a cada seis horas e assim sucessivamente.

Assim, teremos no final do primeiro dia:

$y_1 = y_0 \cdot (1 + r)$ considerando que o crescimento é computado apenas uma vez ao dia.

$y_1 = y_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{2}\right)^2$ se considerarmos que o crescimento é computado duas vezes ao dia.

$y_1 = y_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{4}\right)^4$ se considerarmos que o crescimento é computado quatro vezes ao dia.

·
·
·

$y_1 = y_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{86400}\right)^{86400}$ se considerarmos que o crescimento é computado 86400 vezes ao dia.

$y_1 = y_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$ se considerarmos que o crescimento é computado n vezes ao dia.

Usando o número e podemos obter a expressão de y_1 quando consideramos que o decrescimento é contínuo isto é, quando $n \rightarrow \infty$ na expressão:

$$y_1 = y_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

Esta expressão pode ser escrita na forma:

$$y_1 = y_0 \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{\frac{n}{r}} \right]^r \quad \text{ou} \quad y_1 = y_0 \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \right]^r \quad \text{onde } m = \frac{n}{r}$$

quando $n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty$ $e \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \rightarrow e = 2,7182 \quad (r < 0)$

assim, obtemos:

$$y_1 = y_0 \cdot e^{rt}$$

Para obter y_2 usamos o mesmo processo com a diferença que a população inicial agora é y_1 :

$$y_2 = y_1 \cdot e^r = y_0 e^r \cdot e^r = y_0 e^{2r}$$

iterativamente conclui-se que após t dias:

$$y(t) = y_0 \cdot e^{rt}$$

No caso das abelhas, abordado por nós, temos:

$$Y(t) = y_0 \cdot e^{-0,025t} \quad (\text{modelo contínuo}) \quad (\text{Expressão 7})$$

B) Período de Desenvolvimento da Colméia

O modelo contínuo foi usado para introduzirmos a função exponencial de base e . Para estabelecer um modelo matemático para o *período de desenvolvimento* da nova colméia, levando em consideração que a partir do 21-ésimo dia nascem, 2.000 abelhas voltamos ao modelo discreto:

$$y(t) = y_0 \cdot (1 + r)^t = 0,975^t \quad (0 \leq t \leq 20)$$

A quantidade remanescente de operárias velhas no 21º dia, pode ser obtida da expressão $y(t)$ fazendo $t=21$:

$$A_0 = 0,975^{21} \cdot y_0 \quad \text{teremos para o 21-ésimo dia:}$$

$$Y_1 = y_{21} = A_0 + 2000 \cong 7876$$

Considerando agora a taxa de sobrevivência igual a 0,975, através de uma relação de recorrência a partir do valor Y_1 obtivemos

$$\begin{aligned} Y_2 = y_{22} &= 0,975Y_1 + 2000 = 0,975(A_0 + 2000) + 2000 = \\ &= 0,975A_0 + 0,975 \cdot 2000 + 2000 = 0,975A_0 + 2000(0,975 + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_3 = y_{23} &= 0,975Y_2 + 2000 = 0,975(0,975A_0 + 0,975 \cdot 2000 + 2000) + 2000 = \\
&= (0,975)^2 A_0 + (0,975)^2 \cdot 2000 + 0,975 \cdot 2000 + 2000 \\
&= (0,975)^2 A_0 + 2000[(0,975)^2 + 0,975 + 1].
\end{aligned}$$

E assim sucessivamente, chegamos a

$$\begin{aligned}
Y_n &= (0,975)^{n-1} A_0 + (0,975)^{n-1} \cdot 2000 + (0,975)^{n-2} \cdot 2000 + \dots + 0,975 \cdot 2000 + 2000 \\
&= (0,975)^{n-1} A_0 + 2000[(0,975)^{n-1} + (0,975)^{n-2} + \dots + 0,975 + 1].
\end{aligned}$$

A expressão entre colchetes é a soma de uma progressão geométrica de razão igual a 0,975, o que nos permite simplificar, escrevendo:

$$Y_n = (0,975)^{n-1} A_0 + 2000 \frac{1 - (0,975)^n}{1 - 0,975} = (0,975)^{n-1} A_0 + 80000(1 - 0,975^n)$$

$$Y_n = (0,975)^{n-1} A_0 + 80000 - 80000 \cdot (0,975)^n$$

$$Y_n = (A_0 - 78000)(0,975)^n + 80000 \quad (8)$$

Notemos que, agora, este é um momento propício para o desenvolvimento do conceito de progressão geométrica.

Termo Geral de uma Progressão Geométrica ou Série Geométrica

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

onde: a_n = n -ésimo termo da P.G.

a_1 = primeiro termo da P.G.

n = número de termos da P.G.

q = razão da P.G.

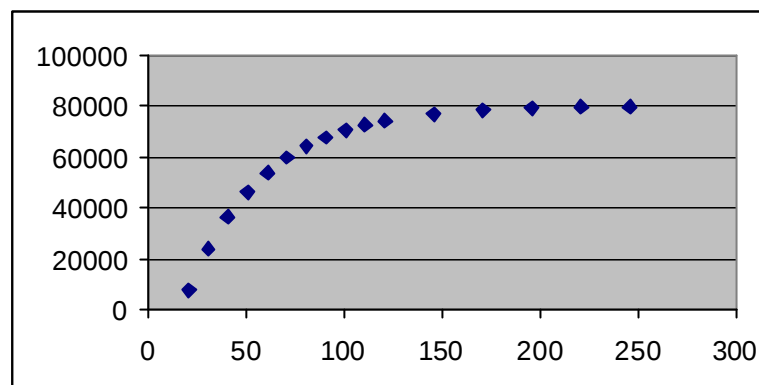
A “soma” dos n primeiros termos que estão em uma série geométrica finita é dado por:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Graficamente temos:

n	y_n
21	7876,204880
31	24008,161488
41	36531,877232
51	46254,408736
61	53802,297920
71	59,661,947840
81	64,210,967712
91	67742,506554
101	70484,144768
111	72612,559712
121	74264,911296
146	76954,521536
171	78382,773216
196	79141,211312
221	79543,961296
246	79757,831810

Tabela 4



Crescimento Populacional da Colméia a partir do 21º dia.

Gráfico 5

FIGURA 19

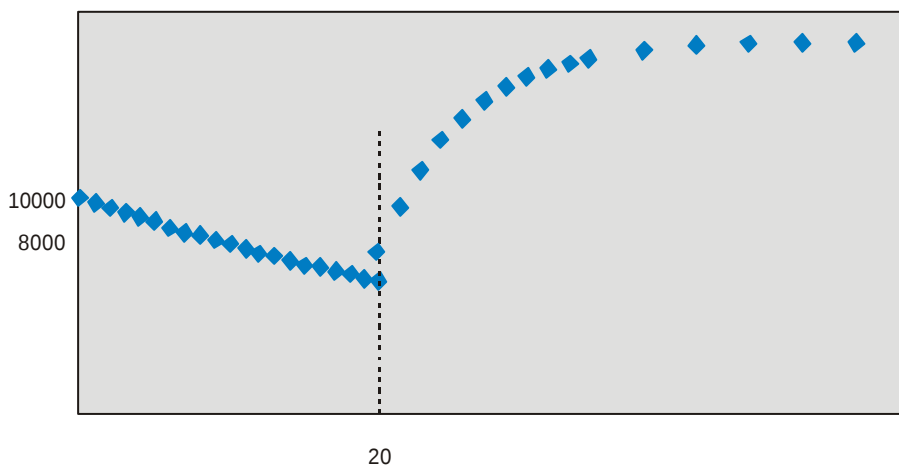
Logo através das expressões 6 e 8 podemos expressar a população y_n de abelhas da colméia no n -ésimo dia da seguinte forma:

$$y_n = \begin{cases} (0,975)^n \cdot y_0 & \text{para } 0 \leq n \leq 20 \\ (A_0 - 78000) \cdot (0,975)^{n-1} + 80000 & \text{para } n \geq 21 \end{cases}$$

(Expressão 9)

onde $A_0 = (0,975)^{21} \cdot y_0$

Graficamente temos:

Modelo do
Desenvolvimento
Populacional da
ColméiaGráfico 6
FIGURA 20

Podemos suspeitar pelo gráfico e tabela que quando n cresce o número de abelhas se aproxima de um valor fixo: 80.000. Este valor será chamado de ponto de estabilidade ou de equilíbrio, que é um valor limitante, pois representa a capacidade máxima de abelhas na colméia (população máxima).

Reforçando o conceito de estabilidade:

Seja a seqüência,

$$y = f(n) = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

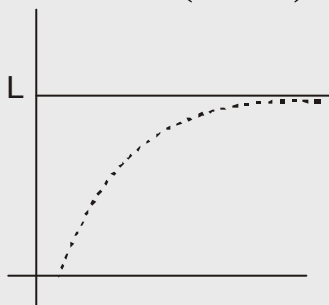
Dizemos que f é convergente para L e denotamos por $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = L$, se x_n se aproxima de L quando n cresce.

Em outras palavras:

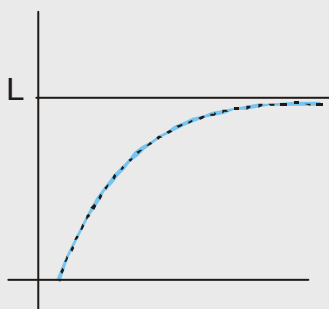
Dado $\epsilon > 0$ arbitrário, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então $|x_n - L| < \epsilon$.

O valor L é denominado limite da seqüência ou valor de estabilidade.

No gráfico $y = L$ é uma reta horizontal (assíntota).



Se considerarmos agora a função contínua $y=f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, os pontos da seqüência discreta $f(n)$ estão sobre a curva contínua.



O valor de estabilidade é definido por $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$, significando que:

Dado $\epsilon > 0$, existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que se $x > x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

No caso das abelhas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A_0 - 78000)(0,975)^n + 80000 = 80000 \text{ uma vez que } \lim_{n \rightarrow \infty} 0,975^n = 0$$

A população y_n se estabiliza e o valor de estabilidade é 80.000, no modelo considerado.

4.2.3 Variação

Ainda no modelo que vamos apresentar necessitaremos da noção de derivada como taxa de variação instantânea e equação diferencial, que são conceitos abordados somente em cursos de cálculo que normalmente acontece em cursos superiores.

Dinâmica populacional da colméia – Modelo Contínuo

Para haver o entendimento do crescimento contínuo de uma população é necessário conceituar derivada associada a uma taxa de variação instantânea.

Se $y = f(t)$ então $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ mede a taxa de variação média de y por unidade de variação de t , no intervalo $[t, t + \Delta t]$, onde $\Delta y = f(t + \Delta t) - f(t)$.

O $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(t) = y'$ é a taxa de variação instantânea de y no instante t .

Costuma-se também representar a derivada y' por $\frac{dy}{dt}$ (notação de Leibniz)

$\Delta y = y_{n+a} - y_n$, variação simples – modelo discreto – intervalo de tempo discreto

$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = \frac{\Delta y}{\Delta t}$, variação média, Δt qualquer

$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = y'$ (derivada no instante t), variação instantânea = coeficiente angular da reta tangente - Modelo Contínuo.

Trabalhemos os conceitos contidos no quadro acima através de alguns exemplos.

Exemplo 1:

Consideramos a função $y(n) = y_n$ que fornece a população da colméia para $0 \leq n \leq 20$ nas condições da hipótese H_1 (página 115 deste trabalho):

$$y_n = 10.000 - 250 \cdot n$$

A variação de y entre os dias n e $n + \Delta t$ é:

$$\Delta y = y_{n+\Delta t} - y_n = (10000 - 250(n + \Delta t)) - (10.000 - 250n) = -250\Delta t$$

A taxa de variação média nesse intervalo de tempo é:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{-250\Delta t}{\Delta t} = -250.$$

Note-se que esta taxa é constante e independente do instante inicial n e do “lapso” de tempo Δt .

Isto é reflexo do fato de supormos no caso H_1 que a mortalidade era fixa, exatamente 250 abelhas por dia, em qualquer dia. Assim, a variação diária de abelhas - 250, é o coeficiente angular da reta $y = 10000 - 250n$

Exemplo 2:

Retomando a função y_n que fornece a população da colméia $0 \leq n \leq 20$ nas condições da hipótese H_2 (página 116 deste trabalho):

$$y_n = 0,975^n \cdot 10000 \text{ temos:}$$

A variação de y entre os dias n e $n + \Delta t$ é:

$$\Delta y = y_{n+\Delta t} - y_n$$

$$\Delta y = 0,975^{n+\Delta t} \cdot 10000 - 0,975^n \cdot 10000$$

$$\Delta y = 10.000 \cdot 0,975^n (0,975^{\Delta t} - 1)$$

A taxa de variação média nesse intervalo de tempo é:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{10000 \cdot 0,975^n (0,975^{\Delta t} - 1)}{\Delta t}$$

Nesse caso a taxa depende de n e de Δt

Para $\Delta t = 1$, $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{-1}{40} \cdot y_n$ que retrata o fato de que nesse caso a taxa de redução

da população era proporcional à população presente, isto é,

$$\Delta y = y(n+1) - y(n) = \frac{-1}{40} y(n).$$

Exemplo 3:

$$y = e^t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = e^t$$

de fato:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta t} &= \frac{e^{t+\Delta t} - e^t}{\Delta t} = e^t \frac{e^{\Delta t} - 1}{\Delta t} \\ \frac{dy}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} e^t \cdot \frac{e^{\Delta t} - 1}{\Delta t} = e^t \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta t} - 1}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta t} - 1}{\Delta t} &= 1 \end{aligned}$$

Vamos tornar este fato compreensível através da tabela abaixo:

Δt	$\frac{e^{\Delta t} - 1}{\Delta t}$
0,1	1,051709181
0,01	1,005016708
0,001	1,000550016
-0,1	0,951625819
-0,01	0,995016624
-0,001	0,99950016

Portanto, $\frac{dy}{dt} = e^t$

Exemplo 4:

$$y = \ln t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t} \quad (t > 0) \text{ de fato:}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\ln t(t + \Delta t) - \ln t}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{t + \Delta t}{t} =$$

$$\ln \left(1 + \frac{\Delta t}{t} \right)^{\frac{1}{\Delta t}} = \ln \left[\left(1 + \frac{\frac{t}{\Delta t}}{t} \right)^{\frac{t}{\Delta t}} \right]^{\frac{1}{t}} =$$

$$\frac{1}{t} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad \text{onde } n = \frac{t}{\Delta t}$$

Quando $\Delta t \rightarrow 0$ temos: $\frac{t}{\Delta t} \rightarrow \infty$ ($t > 0$)

Lembrando que $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$ podemos escrever:

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \frac{1}{t} \ln e = \frac{1}{t} \cdot 1 = \frac{1}{t}.$$

Insistimos em detalhar o exemplo acima para salientar que para obter a derivada de $\ln t$ temos oportunidade de aplicar várias propriedades de logaritmos que são trabalhadas no ensino médio. Claro que se pode aplicar tais propriedades em exercícios convencionais. A diferença é, que aqui, o aluno terá como objetivo obter a população de abelhas num dia t qualquer.

Se consideramos o tempo t como uma variável contínua podemos usar a linguagem de derivadas e expressar a hipótese de que a taxa de mortalidade das abelhas é proporcional à quantidade que se tem de abelhas em cada instante como veremos a seguir.

A) Período Inicial da Colméia

Se y é a população de abelhas no instante t , $\frac{dy}{dt}$ expressa a taxa de variação da população no instante t . Nos primeiros 21 dias, quando só há mortalidade e não nascimentos, tal taxa é negativa.

Em linguagem matemática escrevemos:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = k \cdot y & 0 \leq t \leq 20 \\ y(0) = 10000 \end{cases} \quad k = \text{constante de proporcionalidade}$$

Esta expressão é uma equação diferencial.

Separando as variáveis da equação diferencial temos:

$$\frac{dy}{y} = k \cdot dt, \text{ logo:}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int k \cdot dt$$

$$\ln y = kt + c$$

$$y = e^{kt+c}$$

$$y = e^{kt} \cdot e^c$$

Considerando $e^c = y_0$ obtemos:

$$y(t) = y_0 \cdot e^{kt}$$

$$\text{logo: } \frac{dy}{dt} = k \cdot y \Leftrightarrow y = y_0 \cdot e^{kt}$$

Voltando ao nosso problema como quando $t = 0$, $y_0 = 10000$ temos:

$$y(t) = 10000e^{kt}$$

Para determinar k necessitamos de outra hipótese inicial do problema: morrem em média 250 abelhas por dia.

Portanto para $t = 1$ dia temos $y = 9750$

De $y = 10000 \cdot e^{kt}$ obtemos:

$$9750 = 10000 \cdot e^{k \cdot 1}$$

$$e^k = \frac{9750}{10000}$$

$$k = \ln \frac{9750}{10000} \therefore k \cong -0,025$$

Temos agora a expressão que fornece o número de abelhas na colméia em um instante t qualquer; $0 \leq t \leq 20$.

$$y(t) = 10000e^{-0,025t}, \quad 0 \leq t \leq 20 \quad (\text{t medido em dias})$$

É natural que o aluno questione a diferença entre as fórmulas:

$$y_n = 0,975^n \cdot y^0, \quad y_0 = 10.000 \quad e \quad y_n = 10.000 \cdot e^{-0,025n}.$$

Uma tabela poderia convence-los de que elas dão o mesmo resultado para $t = 0, 1, \dots, 20$. Mas pode-se mostrar, também, algebricamente que elas coincidem pois usando uma propriedade de logaritmo temos: $0,975^n = e^{\ln 0,975^n} = e^{n \cdot \ln 0,975} = e^{-0,025n}$, de modo que, no caso discreto a expressão da população no n -ésimo dia torna-se:

$$y_n = 10000 \cdot e^{-0,025n}$$

B) Período de Crescimento da Colméia

Para o período de crescimento da colméia ($t \geq 21$) vamos fazer uma analogia com o modelo da lei de resfriamento de Newton:

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot (L - y)$$

No caso da lei de resfriamento $y(t)$ representa a temperatura de um corpo num instante t e L é a temperatura do meio ambiente que cerca o corpo, ou seja, é a temperatura limite a ser atingida pelo corpo.

Para a colméia usaremos a seguinte notação:

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot (y^* - y)$$

Neste caso $y(t)$ representa a quantidade de abelhas na colméia em um instante t e y^* é a quantidade máxima de abelhas que a colméia suporta.

Para resolver a equação acima seria preciso ensinar para o aluno do ensino médio regras de derivação inclusive, regra de derivação em cadeia para que se pudesse concluir que $\frac{d \ln(a-t)}{dt} = -\frac{1}{a-t}$. Não é nosso objetivo neste trabalho ir tão longe com as regras do CDI, mas sim, como já dissemos anteriormente, trabalhar suas idéias.

Havíamos obtido anteriormente para a colméia a expressão:

$y_n = (A_0 - 78000)(0,975)^{n-1} + 80000$, onde y_n é a população de abelhas no n-ésimo dia ($n \geq 21$)

Quando $n \rightarrow \infty$, $0,975^{n-1} \rightarrow 0$ e portanto a população limite de abelha é 80000 ($y^* = 80.000$).

Logo escrevemos:

$$\frac{dy}{dt} = k(80000 - y)$$

$$Dy \ln(80.000 - y) = -\frac{1}{80000 - y}$$

$$\int \frac{dy}{80000 - y} = -\ln(80000 - y) + c \quad (\text{equação diferencial})$$

Resolvendo a equação diferencial com a condição $y(21) \cong 7500$

$$\text{ou seja: } y(21) = \underbrace{1000}_{\text{abelhas remanescentes}} \cdot e^{-0,025 \cdot 21} + \underbrace{2000}_{\text{recém nascidas}} \Rightarrow y(21) \cong 7500$$

Temos:

$$y(t) = (A_0 - 78000) \cdot e^{-0,025(t-21)} + 80000 \quad \text{para } t \geq 21$$

Para concluir nosso estudo salientamos que uma atividade viável nestas séries seria abordar ainda ao fazer o estudo de valores máximos e mínimos de funções, o conceito de reta tangente e derivada a partir da definição geométrica.

4.2.4- Obtenção do valor de q que torna a área mínima.

Como vimos anteriormente, suspeitamos que o valor de θ que torna a área, $A(q)$ do alvéolo, mínima é aproximadamente $54,7^\circ$, mas ainda não podemos ter certeza de que este valor para o ângulo seja correto, ou seja, não conseguimos ainda, com os recursos utilizados até o momento, determinar o ponto “exato” onde a curva para de decrescer e começa a crescer.

Como fornecer uma resposta analítica a nossa questão?

Para resolvermos o problema vamos utilizar ferramentas do Cálculo Diferencial Integral já introduzidas na seção interior.

No momento o que queremos é associar derivada com reta tangente.

Trabalhando o conceito de reta tangente

Neste momento introduzimos o conceito de reta tangente que é uma outra forma de determinarmos a derivada em um ponto.

Através do ponto do gráfico da função $A(\theta)$, escolhido por nós e com o auxílio de uma régua achamos a direção da régua tal que muito próximo deste ponto seria impossível distingui-la da curva. Com a régua nesta posição traçamos uma reta passando pelo ponto escolhido. A esta reta denominamos reta tangente.

Graficamente podemos representar a situação da seguinte maneira:

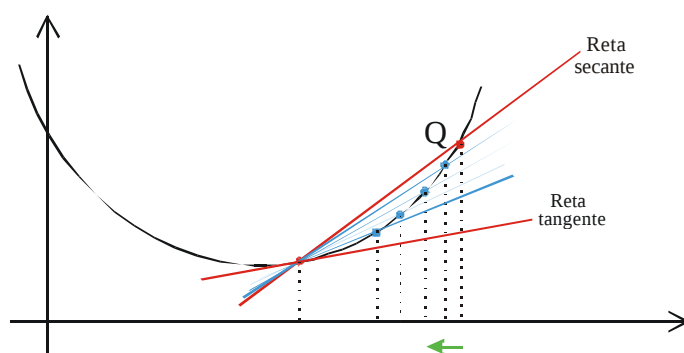
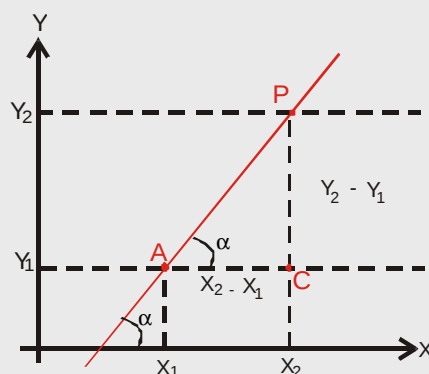


FIGURA 21

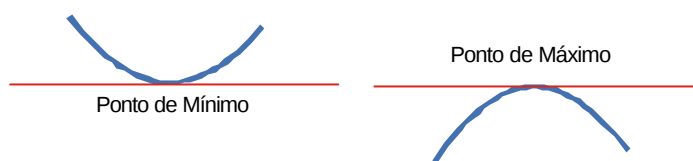
O ângulo formado entre uma reta e o eixo de $0x$ determina a sua inclinação e o coeficiente angular.

Inclinação: α (medida a partir da parte positiva do eixo x , até a reta).



$$tga = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$$

Em um determinado ponto a tangente a curva fica horizontal. Comentamos que quando a reta tangente em um determinado ponto é paralela ao eixo $0x$, a curva pode atingir nesse ponto um valor de máximo ou de mínimo e nesse caso, tais pontos podem ser chamados pontos de mínimo ou de máximo locais da função.



Como o gráfico da função que representa a variação da área do alvéolo em função do ângulo θ (figura 16) se assemelha ao de uma parábola percebemos que no ponto onde a área atinge o seu menor valor pode-se traçar uma reta tangente a este ponto que é paralela ao eixo Ox . Este ponto foi chamado anteriormente por nós de ponto de mínimo.

Quando a tangente é horizontal o seu coeficiente angular é igual a zero pois neste ponto a componente $y_2 - y_1 = 0$.

Reta horizontal têm coeficiente angular zero, ou seja, $tgx = 0$.

Reta vertical não têm coeficiente angular definido, ou seja, $tgx = \pm \text{infinito}$.

Comentamos com os alunos que, a partir do procedimento ilustrado na figura 22, podemos escrever a expressão geral do coeficiente angular da reta secante.

Fixando um ponto P , de abscissa x , na curva $y=f(x)$ acreditamos que um aluno do segundo grau possa entender que a reta tangente em P tem, como coeficiente angular $f'(x)$.

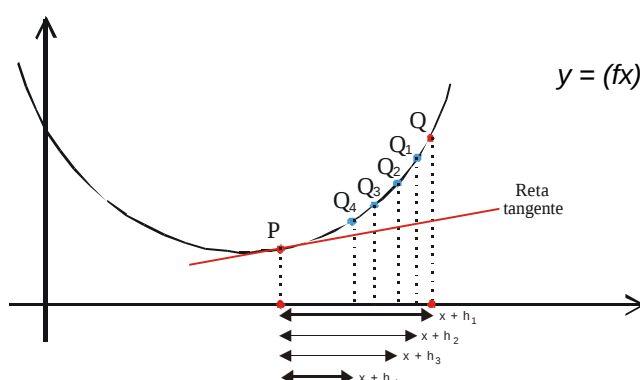
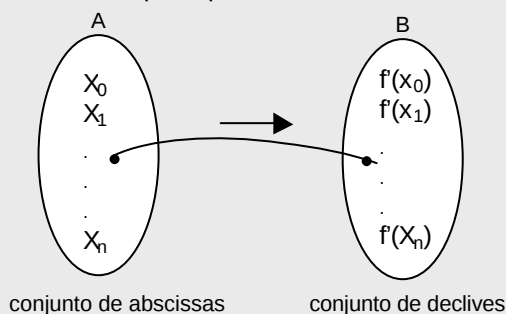


FIGURA 22

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

(expressão 10)

Tomado um conjunto de números reais que representam as abscissas dos pontos de uma curva, existe uma lei de correspondência que associa a cada abscissa um único número real, denominado derivada, que representa o declive da curva em cada ponto.



$$f' : A \rightarrow B \Rightarrow y' = f'(x)$$

A essa lei de correspondência dá-se o nome de Função Derivada.

Mat .Aplic. - Félix da Cunha - pg. 193

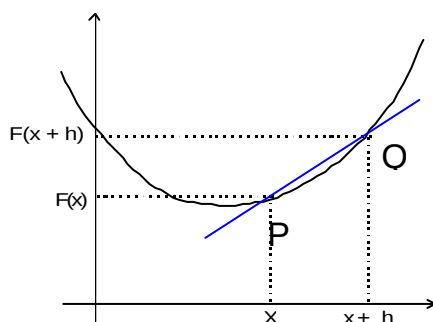
Poderíamos ainda no ensino médio calcular a derivada de funções polinomiais a partir da definição de derivadas.

A título de curiosidade vamos tentar descobrir como se obteve o valor $\frac{-b}{2a} = 55,6$ (pág. 110 deste trabalho) no caso da função quadrática $y = 0,0003x^2 - 0,0334x + 2,3485$ utilizada por nós no ajuste de curvas, agora através da definição de derivada.

Sabemos que $\frac{-b}{2a}$ é um valor de mínimo da função ou seja ele está relacionado ao ponto onde o valor de x da função é o menor possível.

Para solucionar este problema imagine que não soubéssemos que o gráfico dessa função é uma parábola e muito menos que $x = \frac{-b}{2a}$ é o ponto que estamos procurando.

Consideremos então a curva abaixo:



Vamos admitir um ponto “P” qualquer de abscissa “x” no gráfico da função e determinar o coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto “P”.

Para isso seja “Q” um outro ponto da curva distinto de “P” de abscissa “x + h”.

O coeficiente angular da reta PQ é:

$$M_{PQ} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f(x) = 0,0003x^2 - 0,0334x + 2,3485$$

$$f(x+h) = 0,0003(x+h)^2 - 0,0334(x+h) + 2,3485$$

$$f(x+h) - f(x) = h(0,0003h + 0,0006x - 0,0334)$$

$$M_{PQ} = \frac{h(0,0003h + 0,0006x - 0,0334)}{h}$$

$$M_{PQ} = 0,0003h + 0,0006x - 0,0334$$

Se h se torna muito pequeno e se aproxima de zero dizemos que $h \rightarrow 0$ (h tende a zero) e conseqüentemente M_{PQ} se aproxima de $0,0006x - 0,0334$ ou seja $M_{PQ} \rightarrow 0,0006x - 0,0334$, assim dizemos que:

$$M = \lim_{h \rightarrow 0} M_{PQ}$$

$$M = 0,0003h^c + 0,0006x - 0,0334$$

$$M = 0,0006x - 0,0334$$

(11) Equação da reta tangente a curva
ou Equação da função declividade.

A expressão acima nos fornece a inclinação da reta tangente em qualquer ponto da curva da figura 17 (página 108 deste trabalho).

Observamos, anteriormente que o menor valor da função ocorre no ponto onde o gráfico possui a reta tangente horizontal. Já sabemos que quando a reta tangente é horizontal sua inclinação é zero, ou seja $M=0$. Substituindo este valor na equação (11) pudemos obter o valor aproximado de θ onde a área do alvéolo é mínima.

$$0,0006x - 0,0334 = 0$$

$$x = \frac{0,0334}{0,0006}$$

$$x \cong 55,6^\circ$$

Mas calcular a derivada de uma função através da definição pode ser trabalhoso quando a função a ser derivada não é relativamente simples como a nossa.

Daí surgiu a necessidade de se criarem regras e técnicas de derivação que permitam obter a derivada de uma função qualquer sem recorrer à definição. Estas podem ser encontradas nos livros de cálculo.

Neste ponto se estivéssemos trabalhando no período normal de aula e a trigonometria fosse um dos conteúdos programados, ao buscar a derivada da função $A(\theta)$ o aluno perceberia a necessidade de possuir maiores conhecimentos de trigonometria.

Apenas a trigonometria do triângulo retângulo não é suficiente para se derivar a função $A(\theta) = 6.s.h + \frac{3}{2}.s^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{\sen q} - \cot g q \right)$. O aluno necessitaria das definições também das seis funções trigonométricas de um mesmo número e fórmulas de adição de arcos que poderiam ser ensinadas nesse momento.

O próximo passo seria mostrar informalmente, através de uma tabela, que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sen h}{h} = 1$. A seguir, mostraríamos que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cosh}{h} = 0$.

Com esses fatos torna-se possível mostrar através da definição de derivada que:

$$D_x \sin x = \cos x \quad e \quad D_x \cos x = -\sin x$$

Poderíamos mencionar até mesmo sem demonstração algumas regras de derivação:

$$D_x c = 0;$$

$$D_x [f(x) + g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x);$$

$$D_x C \cdot f(x) = C \cdot D_x f(x);$$

$$D_x \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)}$$

Um próximo passo seria:

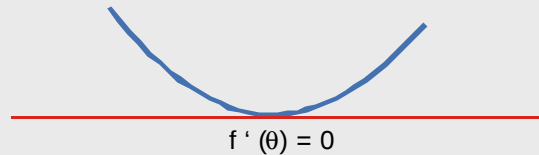
$$D_x \cot gx = D_x \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x \cdot (-\sin x) - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\cos \sec^2 x \quad e$$

$$D_x \cos \sec x = D_x \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x \cdot 0 - 1 \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\cot gx \cdot \cos \sec x$$

Observemos que para se chegar a esses resultados bastante trigonometria foi assimilada e praticada, dentro de uma motivação: obter o ângulo θ que torna $A(\theta)$ mínimo.

No quadro abaixo usamos estas regras para calcular a derivada da nossa função e determinar precisamente o valor de θ , onde a derivada da função $A(\theta)$ é nula.

Determinar o valor mínimo de $A(\theta)$ significa determinar θ , $0^\circ < \theta < 90^\circ$ tal que $A'(\theta) = 0$.



Temos:

$$\begin{aligned} A(\theta) &= 6Sh + \frac{3}{2}S^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{\operatorname{sen} q} - \cot gq \right) = \\ &= 6Sh + \frac{3}{2}S^2 \left(-\cot gq + \sqrt{3} \cos \sec q \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A'(\theta) &= \frac{3}{2}S^2 \cdot (-\cot gq + \sqrt{3} \cos \sec q)' \\ &= \frac{3}{2}S^2 \cdot [-1(\cot gq)' + \sqrt{3}(\cos \sec q)'] = \\ &= \frac{3}{2}S^2 \cdot [-1(-\cos \sec^2 q) + \sqrt{3}(-\cos \sec q \cdot \cot gq)] = \\ &= \frac{3}{2}S^2 \cdot \cos \sec \theta (\cos \sec \theta - \sqrt{3} \cot g\theta). \end{aligned}$$

Como $\cos \sec \theta$ nunca é igual a zero nem $\frac{3}{2}S^2$, $A'(\theta) = 0$ se e somente se:

$$\cos \sec q - \sqrt{3} \cot gq = 0$$

ou seja:

$$\frac{1}{\operatorname{sen} q} = \sqrt{3} \cdot \frac{\cos q}{\operatorname{sen} q}$$

isto é:

$$\sqrt{3} \cos q = 1 \text{ ou } \cos q = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Logo: $\theta = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$ e portanto $\theta \cong 54,73^\circ$.

Se prestarmos atenção ao desenvolvimento do trabalho observamos que os conteúdos abordados até o momento, não seguiram a sugestão de apresentação dos conteúdos contidos nos livros didáticos e nos programas curriculares. As idéias de coeficiente angular e equação da reta são conteúdos normalmente abordados no 3º ano do ensino médio, totalmente desvinculado de qualquer outro conteúdo visto nos anos anteriores.

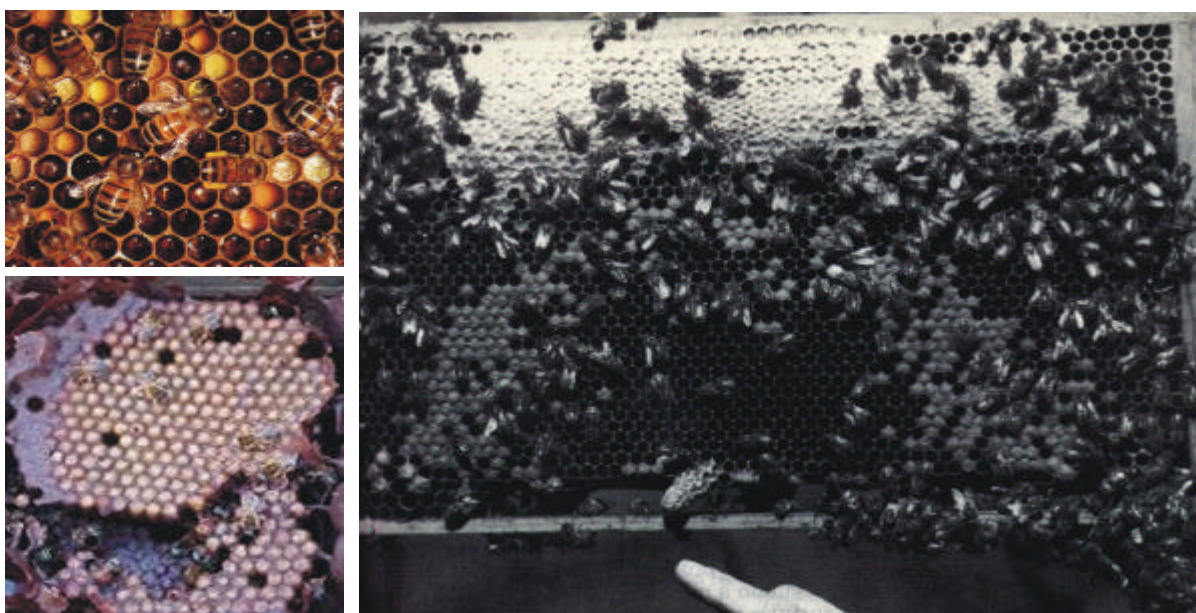
É importante observar ainda, que estes conteúdos aparecem vinculados à sua importância na interpretação e resolução do nosso problema. É claro que não vamos esgotar os assuntos ao primeiro contato com eles. Estes serão abordados novamente de forma mais abrangente, quando se fizerem necessários em um novo contexto.

Poderíamos ainda, no contexto da sala de aula, quando falamos sobre reta secante ou tangente estar estudando as equações da reta, condição de paralelismo e perpendicularidade, etc. Entretanto para nós o importante é que os conteúdos adquiram significado para os alunos.

CAPÍTULO V

Outras atividades que poderiam ter sido desenvolvidas ao longo do estudo dos alvéolos

5.1 - Mosaicos



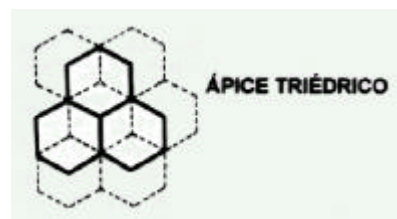
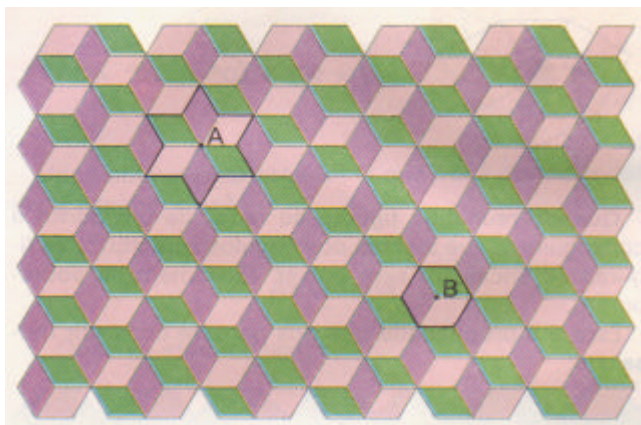
“O corte transversal de um favo apresenta a configuração de um mosaico formado pela repetição de hexágonos regulares”.

Um polígono regular é uma figura geométrica plana cujo contorno é formado por segmentos de retas. Um polígono é regular se obedecer a duas condições:
Equilátero: todos os lados são congruentes, isto é, têm medidas iguais.
Equiângulo: todos os ângulos são congruentes, ou seja, têm medidas iguais.

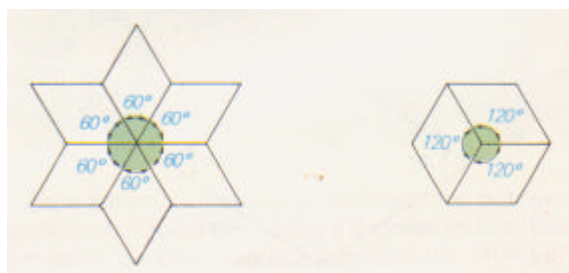
Mosaicos são desenhos formados por uma ou mais formas geométricas que se encaixam perfeitamente e cobrem uma superfície.

Um polígono regular pode se propagar formando um mosaico, se o seu ângulo interno θ for um divisor de 360° .

Observe este mosaico formado por losangos, iguais aos que fecham a parte superior dos alvéolos.



A estrela tem, ao redor do ponto A, seis ângulos de 60° . O hexágono tem, em torno do ponto B, três ângulos de 120° .



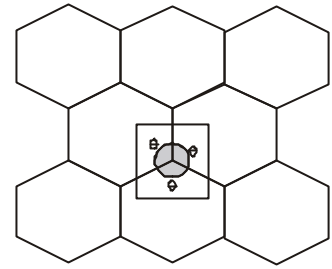
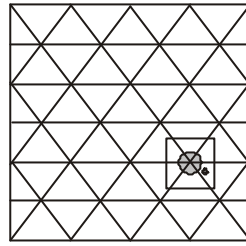
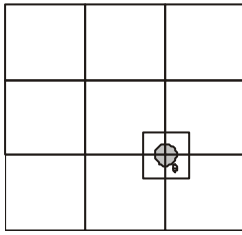
$$6 \times 60^\circ = 360^\circ$$

$$3 \times 120^\circ = 360^\circ$$

Como você pode notar, nas duas figuras a soma dos ângulos ao redor de um mesmo ponto é 360° . Quando reunimos figuras ao redor de um ponto e conseguimos que a soma dos ângulos seja 360° , as figuras se encaixam sem deixar vãos, nem se sobreporem. Esta é a propriedade que nos permite construir Mosaicos.

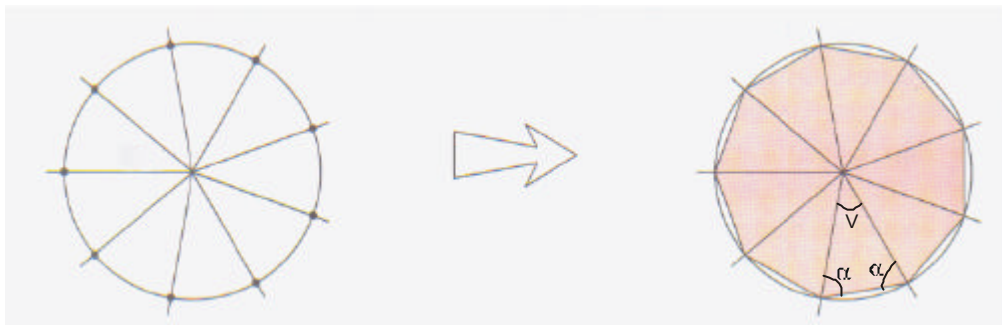
Extraído em parte do livro, Geometria dos Mosaicos - pág. 15

Entretanto se quisermos que um plano seja coberto por um único tipo de polígono regular como no caso do favo podemos utilizar somente três polígonos, regulares: triângulo equilátero, quadrado e hexágono.



Bassanezi (1990), demonstra isso da seguinte forma:

“Todo polígono regular pode ser inscrito em um círculo de modo que seus lados sejam cordas deste círculo – Assim, dado um polígono regular de n lados podemos sempre dividi-lo em n triângulos isósceles. Cada triângulo é formado considerando o lado do polígono como base e tendo vértice no centro do círculo que circunscreve o polígono.



Em cada triângulo, o ângulo v do vértice, é igual a $v = \frac{360^\circ}{n}$ e os ângulos iguais valem $a = q/2$, onde q é o ângulo interno do polígono.

A relação entre os ângulos q e v nos leva à:

$$a = \frac{q}{2} = \frac{180 - v}{2},$$

$$a = \frac{90(n-2)}{n}, \text{ com } \frac{360}{v} = n \in \mathbb{N} \quad (12)$$

Sabemos que um polígono regular pode se propagar, formando um mosaico, se $\left(\frac{360}{q}\right)$ for um número inteiro positivo. Este número nos dá a quantidade de polígonos que têm vértice comum.

Como $q = 2a$, usando a equação 12, obtemos

$$\frac{360}{q} = \frac{360n}{180(n-2)} = \frac{2n}{n-2} (n \in \mathbb{N}, \geq 3). \quad (13)$$

Assim, um polígono regular de n lados pode formar um mosaico no plano se, e somente se, $\frac{2n}{n-2}$ for um número inteiro positivo, divisor de 360, com $n \geq 3$. Os divisores de 360, são 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360. Sabemos que q deve ser menor que 180° pois q é o ângulo interno do polígono. Por outro lado, o polígono regular de menor número de lados é o triângulo equilátero, $n = 3$. Neste caso, usando 2 temos:

$$q = \frac{360(3-2)}{6}$$

Como q cresce quando n cresce, devemos ter então:

$$60 \leq q < 180$$

Desta forma, os valores possíveis que q pode assumir são 60, 72, 90 e 120. Para $q = 72^\circ$, temos

$$\frac{360}{72} = 5 = \frac{2n}{n-2} \rightarrow 2n = 5n - 10,$$

ou:

$$n = \frac{10}{3} \notin N$$

Isto significa que não podemos ter um mosaico do plano formado somente de pentágonos regulares.

Para $q = 60^\circ \Rightarrow n = 3$ (*triângulo equilátero*)

Para $q = 90^\circ \Rightarrow n = 4$ (*quadrados*);

Para $q = 120^\circ \Rightarrow n = 6$ (*hexágono*);

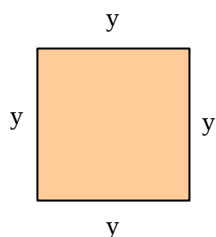
Logo, só podemos ter 3 polígonos regulares para pavimentar o plano: triângulo equilátero, quadrado e hexágono.

5.2 – Por que o hexágono?

Considerando os seguintes polígonos regulares: triângulo equilátero, quadrado e hexágono o que aconteceria com o perímetro de cada um deles se fixarmos uma área A .

Utilizando os conceitos de área e perímetro das figuras geométricas planas podemos verificar que ao fixarmos uma área A para os três polígonos o que apresenta menor perímetro entre eles é o hexágono. Para o quadrado teremos $P = 4\sqrt{A}$; para o triângulo $P \approx 4,56\sqrt{A}$ e para o hexágono $P \approx 3,72\sqrt{A}$.

Quadrado:



$$\text{Área: } A = y^2 \quad (14)$$

$$\text{Perímetro: } P = 4y \quad (15)$$

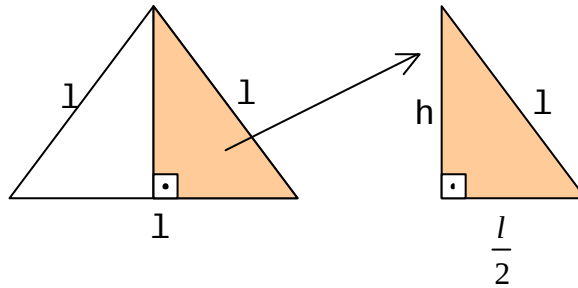
Como queremos estabelecer uma relação entre a área e o perímetro do quadrado da expressão (14) obtem-se: $y = \sqrt{A}$, que substituída em (15) resulta:

$$P = 4\sqrt{A}$$

Este é o valor do perímetro do quadrado em função da área A (fixa).

Faremos o mesmo para os outros polígonos lembrando que a área A é fixa.

Triângulo Equilátero



$$\text{Área}_{\Delta} : \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo obtemos a altura: $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$

$$\text{Logo: } A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \quad \boxed{A_{\Delta} = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}} \quad (16)$$

Perímetro: $3 \cdot l$

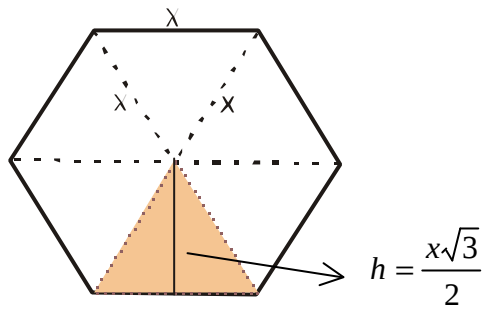
Da expressão (16) obtemos l :

$$\boxed{l = 2 \cdot \sqrt{\frac{A\sqrt{3}}{3}}}$$

Substituindo l na fórmula do perímetro obtemos:

$$P = 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{A\sqrt{3}}{3}} = 6 \cdot \frac{\sqrt{A\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2 \cdot \sqrt{3\sqrt{3}} \cdot \sqrt{A} \cong 4,56\sqrt{A}$$

$$\therefore \quad \boxed{P_{\Delta} \cong 4,56\sqrt{A}}$$

Hexágono:

$$\text{Área} = 6 \cdot A_{\Delta} \text{ equilátero}$$

$$\text{Área} = 6 \cdot \left(\frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \right) = \frac{3x^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \quad (17)$$

$$\text{Perímetro} = 6x$$

Da expressão (4) obtemos x:

$$x = \frac{\sqrt{2A\sqrt{3}}}{3}$$

$$\text{Perímetro} = 6 \cdot \left(\frac{\sqrt{2A\sqrt{3}}}{3} \right) = 2 \cdot \sqrt{2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{A}$$

$$P_{\text{hexágono}} \cong 3,72\sqrt{A}$$

O mesmo pode ser feito fixando-se em vez da área o perímetro p. Para os mesmos polígonos observaremos que o hexágono é aquele que possui maior área: Para o quadrado $A = P^2/16$, para o triângulo $A = P^2 \cdot \sqrt{3}/36$ e para o hexágono $A = P^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{24}$.

“Este resultado pode ser generalizado para qualquer polígono regular de n lados, isto é, dado um perímetro P fixado então A cresce quando n cresce”. (Bassanezi).

5.3 – Volume do Alvéolo

Ao terminarmos a execução dos alvéolos uma questão que foi colocada por um dos alunos foi quanto ao volume do mesmo.

Como fazemos para calcular o volume do alvéolo?

Após analisarmos cuidadosamente nosso modelo (alvéolo) percebemos que os 3 tetraedros retirados dos extremos do hexágono formam o ápice triédrico. Em outras palavras aquilo que é tirado das laterais do hexaedro é colocado na parte superior mesmo fechando-o em uma de suas extremidades. Conseqüentemente o volume do alvéolo tem o mesmo valor do volume do hexaedro (prisma regular hexagonal) que deu origem a ele.

Usando as fórmulas fornecidas pela geometria clássica obtivemos este volume da seguinte forma:

$$V = \text{área base} \cdot \text{altura}$$

A base é um hexágono de arestas 2,31 mm e altura 4,75 mm.

$$A_{\text{hexágono}} = 6 \cdot A_{\text{triângulo equilátero}}$$

Os triângulos equiláteros possuem base igual a 2,31 mm e apótema 2 mm

$$\text{Assim: } A_{\text{hexágono}} = 6 \cdot \frac{2,31 \cdot 2}{2} = 13,86 \text{ mm}^2$$

$$\text{e } V = 13,86 \cdot 4,75 = 65,83 \text{ mm}^3$$

Vamos comprovar na prática (experimentalmente) que o prisma hexagonal que deu origem ao alvéolo e o alvéolo possuem volumes iguais?

Usando um papel resistente nós vedamos o hexaedro e o alvéolo de “bases equivalentes”. Em seguida enchemos o alvéolo com grãos de arroz cru e despejamos o conteúdo no prisma hexagonal.

Observamos que a quantidade de arroz cru contida no alvéolo encheu o hexaedro, provando assim, que os volumes são iguais.

Registramos através de fotos este momento de trabalho dos alunos:



Foto 15



Foto 16



Foto 17



Foto 18

Poderíamos também ter usado o método da balança. Confeccionados os dois prismas com bases equivalentes e com o mesmo material e pesando-os separadamente, “dentro do limite do erro experimental” comprova-se que se ambos tem a mesma massa terão também o mesmo volume. (Mat. Aplicada – Vol. 3 – pág. 157).

Estas conclusões de que todos os prismas de bases equivalentes e alturas iguais tem o mesmo volume foram obtidas com base no “Princípio de Cavalieri”.

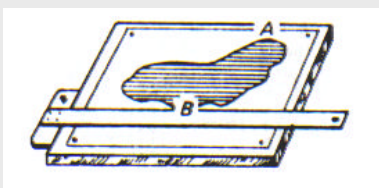
Cavalieri foi discípulo de Galileu, que viveu na Itália no início do século XVII.

Ele baseia-se na idéia de que “uma área pode ser pensada como sendo formada por segmentos ou indivisíveis e que um volume pode ser considerado como composto de áreas que são volumes indivisíveis ou quase atômicos. (Carl. B. Boyer – página 241)

Para compreender melhor as idéias de Cavalieri observemos o texto abaixo:

Que são “indivisíveis”? Diga-se que Cavalieri escreveu dois livros alentados sobre o assunto, sem contudo nos dar a resposta. Isto, a bem dizer, não é fora do comum; notável, porém, é que com o auxílio deste conceito obscuro, em parte alguma definido, ele consegue resolver uma série dos mais belos problemas. A idéia fundamental é sempre a mesma: Decomposição duma superfície ou dum sólido num conjunto de elementos “infinitamente pequenos”. Assim, uma linha é formada por pontos sem comprimento, uma superfície por número infinito de linhas sem largura, um sólido finalmente por uma soma de superfícies às quais não corresponde altura. Estes seres elementares, como que átomos geométricos, devem ser, por certo, aquilo que se considera os não divisíveis, os “indivisíveis”. Eis a comparação feita pelo próprio Cavalieri: “Ficou portanto evidente que podemos conceber as figuras planas como tecido, compostos de fios paralelos, e os sólidos como livros, que são pilhas de folhas paralelas”.

Cavalieri faz uso, ainda, duma segunda imagem, que é muito explícita e que tangencia futuros raciocínios: traçamos o esboço duma figura e perguntamos pela sua área.



Para torna-la bem visível, podemos prender a folha numa prancheta e deslizar a régua sobre a figura, sempre paralelamente. Atingimos uma posição inicial A, quando a régua toca a figura pela primeira vez, e começamos então a sombreá-la.

Traço por traço a figura surge então do nada, à medida que a régua prossegue – e finalmente aparece a segunda posição limite B, onde pela última vez a régua toca o contorno, e onde terminamos o sombreado. No conjunto destas linhas poderíamos conceber aproximadamente os “indivisíveis” de Cavalieri - aproximadamente, pois o matemático italiano frisa expressamente que ele jamais afirmara que o sólido ou a superfície sejam um conjunto de planos ou linhas. O que ele afirma, é apenas o fato de que as figuras se comportam como seus elementos constituintes, e assim, realmente, ele raciocina.

Estas observações mostram nitidamente quão árdua ainda era a luta de Cavalieri com este problema do infinitamente pequeno, e quão claras se tornaram para ele as dificuldades de conceituação que aqui se esboçam. Arquimedes tratava de evitar estas mesmas dificuldades, ao afirmar que o seu método – cuja afinidade com os raciocínios de Kepler e Cavalieri é evidente – não fornecia uma demonstração legítima, mas que esta deveria ser apresentada de acordo com o severo método geométrico. Elas só foram superadas com absoluto rigor dois séculos mais tarde, quando Cauchy logrou formular com clareza o conceito de limite, proscrevendo assim, em definitivo, o espectro do infinitamente pequeno.

Pelo menos, o caminho estava delineado! Para determinar a área de superfície ou corpos quaisquer, de contornos curvos, era mister decompô-los em camadas e, falando de maneira pouco precisa, somar uma a uma estas camadas “infinitamente pequenas”

(Imenes - Mat. Aplicada – volume 3 – página 139)

5.4 - Curiosidade envolvendo o conceito de limite (Bassanezi 1990)

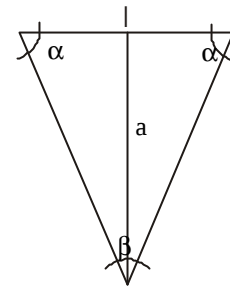
Dado qualquer polígono regular, o valor numérico do seu perímetro coincide com o da sua área se, e somente se, seu apótema vale 2”.

De fato, seja l o valor do lado do polígono regular de n lados. Podemos dividir o polígono em n triângulo isósceles de base igual a l .

O apótema a do polígono será a altura destes triângulos.

A área de cada triângulo vale $\frac{la}{2}$.

Assim a área do polígono será $A = \frac{nla}{2}$ e seu perímetro $p = nl$.

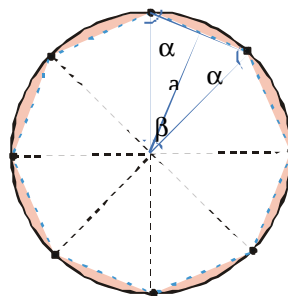


Então, respeitadas as unidades de medida, temos:

$$p = A \Leftrightarrow n \frac{la}{2} = nl \Leftrightarrow a = 2 (n \geq 3 \text{ e } l > 0)$$

Chamaremos de 2-polígonos os polígonos regulares cujo apótema vale 2 (unidade de medida dos lados).

Dado um 2-polígonos de n lados podemos determinar facilmente o valor de seu lado e portanto de sua área:



Em cada um dos n triângulos isósceles em que foi dividido o 2-polígono da figura acima temos:

$$a = 2$$

$$v = \frac{360^\circ}{n} \Leftrightarrow a = \frac{180 - v}{2}$$

$$\operatorname{tga} = \frac{a}{l/2} = \frac{4}{l},$$

logo:

$$l = \frac{4}{\operatorname{tga}} = \frac{4}{\operatorname{tg}\left(90 - \frac{180}{n}\right)} = \frac{4}{\cot g \frac{180}{n}} = 4 \operatorname{tg}\left(\frac{180}{n}\right)$$

Assim, o lado de um 2-polígono de n lados é dado, em radianos, por:

$$l = 4 \operatorname{tg} \frac{p}{n}$$

Como a área de um 2-polígono é igual ao seu perímetro, temos

$$A_n = nl = 4n \operatorname{tg} \frac{p}{n} \quad (n \geq 3)$$

A seqüência (A_n) , $n \geq 3$, das áreas de 2-polígonos de n lados é decrescente com n e limitada pela área do círculo de lado 2. (Vide tabela 5). Uma justificativa para esta fato é a seguinte:

Quando n é muito grande então o valor de $\frac{p}{n}$ é próximo de zero, logo:

$$tg \cdot \left(\frac{p}{n} \right) \cong \frac{p}{n}$$

Triângulo Equilátero	3	20,7846
Quadrado	4	16,0000
Pentágono	5	14,5308
Hexágono	6	13,9967
Decágono	10	12,9967
100-ágono	100	12,5705
1000-ágono	1000	12,56641
10000-ágono	10000	12,5663371

Tabela 5 - Área dos 2-polígonos de lado n

Assim,

$$A_n = 4n \operatorname{tg} \left(\frac{p}{n} \right) \cong 4n \cdot \frac{p}{n} = 4p \cong 12,566371 \quad (\text{quando } n \geq 10000).$$

As aproximações vistas anteriormente podem ser deduzidas analiticamente. O fato da sequência A_n ser monótona e limitada implica que é convergente.

Por outro lado, temos que

$$0 < \operatorname{sen} \frac{p}{n} < \frac{p}{n} \quad \text{para todo } n \geq 3, \text{ e portanto,}$$

$$0 < \operatorname{tg} \frac{p}{n} < \frac{p}{n} \cdot \frac{1}{\operatorname{cosp} / n}$$

$$\text{Logo, pelo "Teorema do Confronto" temos que } \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \frac{p}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\operatorname{cosp} / n}.$$

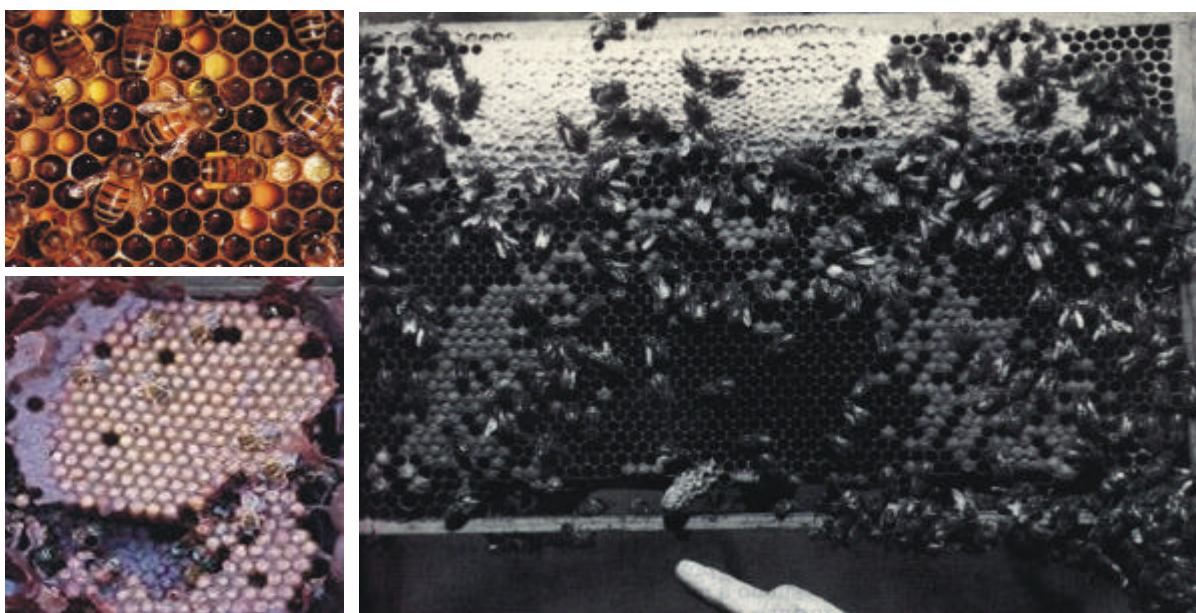
Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 4n \cdot \frac{pi}{n} = 4\pi = \text{área dos círculos de raio 2.}$$

CAPÍTULO V

Outras atividades que poderiam ter sido desenvolvidas ao longo do estudo dos alvéolos

5.1 - Mosaicos



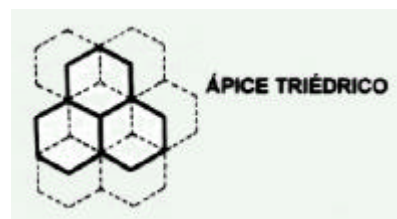
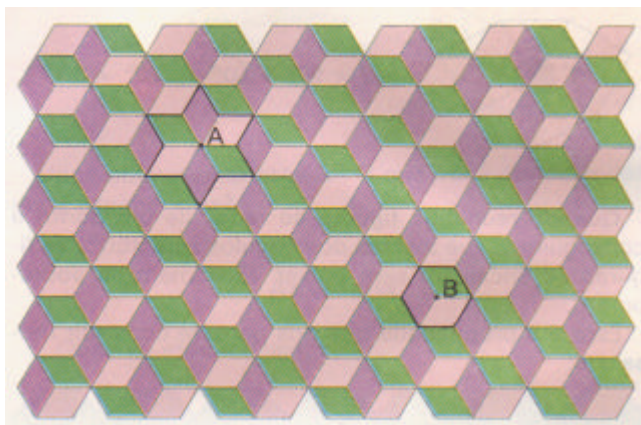
“O corte transversal de um favo apresenta a configuração de um mosaico formado pela repetição de hexágonos regulares”.

Um polígono regular é uma figura geométrica plana cujo contorno é formado por segmentos de retas. Um polígono é regular se obedecer a duas condições:
Equilátero: todos os lados são congruentes, isto é, têm medidas iguais.
Equiângulo: todos os ângulos são congruentes, ou seja, têm medidas iguais.

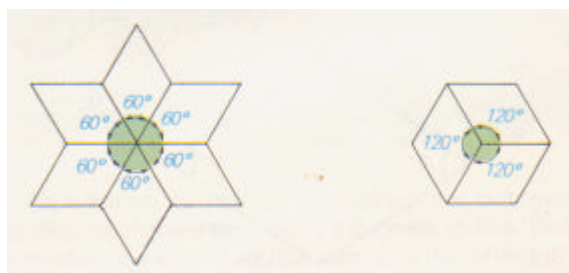
Mosaicos são desenhos formados por uma ou mais formas geométricas que se encaixam perfeitamente e cobrem uma superfície.

Um polígono regular pode se propagar formando um mosaico, se o seu ângulo interno θ for um divisor de 360° .

Observe este mosaico formado por losangos, iguais aos que fecham a parte superior dos alvéolos.



A estrela tem, ao redor do ponto A, seis ângulos de 60° . O hexágono tem, em torno do ponto B, três ângulos de 120° .



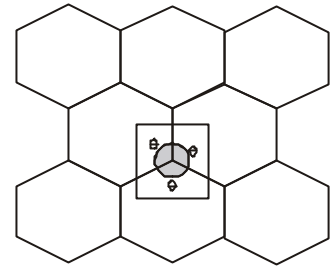
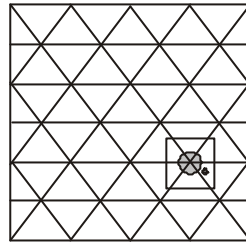
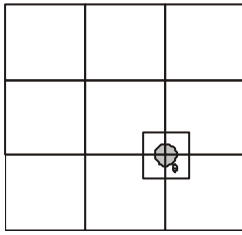
$$6 \times 60^\circ = 360^\circ$$

$$3 \times 120^\circ = 360^\circ$$

Como você pode notar, nas duas figuras a soma dos ângulos ao redor de um mesmo ponto é 360° . Quando reunimos figuras ao redor de um ponto e conseguimos que a soma dos ângulos seja 360° , as figuras se encaixam sem deixar vãos, nem se sobreporem. Esta é a propriedade que nos permite construir Mosaicos.

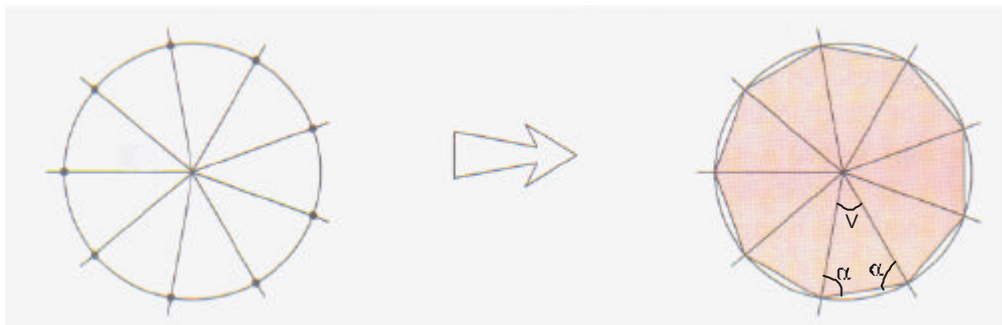
Extraído em parte do livro, Geometria dos Mosaicos - pág. 15

Entretanto se quisermos que um plano seja coberto por um único tipo de polígono regular como no caso do favo podemos utilizar somente três polígonos, regulares: triângulo equilátero, quadrado e hexágono.



Bassanezi (1990), demonstra isso da seguinte forma:

“Todo polígono regular pode ser inscrito em um círculo de modo que seus lados sejam cordas deste círculo – Assim, dado um polígono regular de n lados podemos sempre dividi-lo em n triângulos isósceles. Cada triângulo é formado considerando o lado do polígono como base e tendo vértice no centro do círculo que circunscreve o polígono.



Em cada triângulo, o ângulo v do vértice, é igual a $v = \frac{360^\circ}{n}$ e os ângulos iguais valem $a = q/2$, onde q é o ângulo interno do polígono.

A relação entre os ângulos q e v nos leva à:

$$a = \frac{q}{2} = \frac{180 - v}{2},$$

$$a = \frac{90(n-2)}{n}, \text{ com } \frac{360}{v} = n \in \mathbb{N} \quad (12)$$

Sabemos que um polígono regular pode se propagar, formando um mosaico, se $\left(\frac{360}{q}\right)$ for um número inteiro positivo. Este número nos dá a quantidade de polígonos que têm vértice comum.

Como $q = 2a$, usando a equação 12, obtemos

$$\frac{360}{q} = \frac{360n}{180(n-2)} = \frac{2n}{n-2} (n \in \mathbb{N}, \geq 3). \quad (13)$$

Assim, um polígono regular de n lados pode formar um mosaico no plano se, e somente se, $\frac{2n}{n-2}$ for um número inteiro positivo, divisor de 360, com $n \geq 3$. Os divisores de 360, são 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360. Sabemos que q deve ser menor que 180° pois q é o ângulo interno do polígono. Por outro lado, o polígono regular de menor número de lados é o triângulo equilátero, $n = 3$. Neste caso, usando 2 temos:

$$q = \frac{360(3-2)}{6}$$

Como q cresce quando n cresce, devemos ter então:

$$60 \leq q < 180$$

Desta forma, os valores possíveis que q pode assumir são 60, 72, 90 e 120. Para $q = 72^\circ$, temos

$$\frac{360}{72} = 5 = \frac{2n}{n-2} \rightarrow 2n = 5n - 10,$$

ou:

$$n = \frac{10}{3} \notin N$$

Isto significa que não podemos ter um mosaico do plano formado somente de pentágonos regulares.

Para $q = 60^\circ \Rightarrow n = 3$ (*triângulo equilátero*)

Para $q = 90^\circ \Rightarrow n = 4$ (*quadrados*);

Para $q = 120^\circ \Rightarrow n = 6$ (*hexágono*);

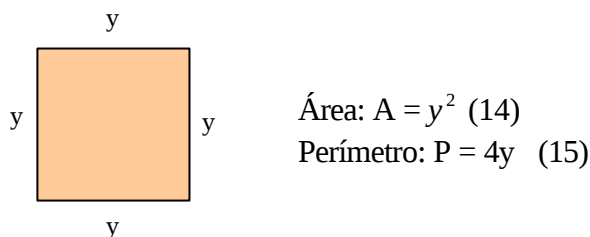
Logo, só podemos ter 3 polígonos regulares para pavimentar o plano: triângulo equilátero, quadrado e hexágono.

5.2 – Por que o hexágono?

Considerando os seguintes polígonos regulares: triângulo equilátero, quadrado e hexágono o que aconteceria com o perímetro de cada um deles se fixarmos uma área A .

Utilizando os conceitos de área e perímetro das figuras geométricas planas podemos verificar que ao fixarmos uma área A para os três polígonos o que apresenta menor perímetro entre eles é o hexágono. Para o quadrado teremos $P = 4\sqrt{A}$; para o triângulo $P \approx 4,56\sqrt{A}$ e para o hexágono $P \approx 3,72\sqrt{A}$.

Quadrado:



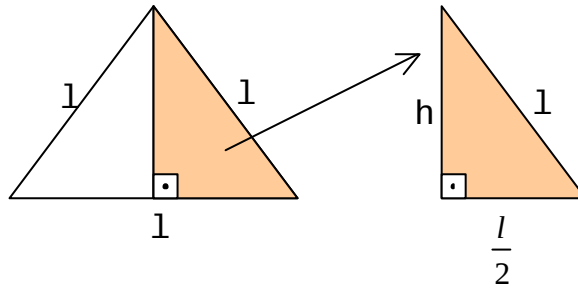
Como queremos estabelecer uma relação entre a área e o perímetro do quadrado da expressão (14) obtem-se: $y = \sqrt{A}$, que substituída em (15) resulta:

$$P = 4\sqrt{A}$$

Este é o valor do perímetro do quadrado em função da área A (fixa).

Faremos o mesmo para os outros polígonos lembrando que a área A é fixa.

Triângulo Equilátero



$$\text{Área}_{\Delta} : \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo obtemos a altura: $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$

$$\text{Logo: } A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \quad \boxed{A_{\Delta} = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}} \quad (16)$$

Perímetro: $3 \cdot l$

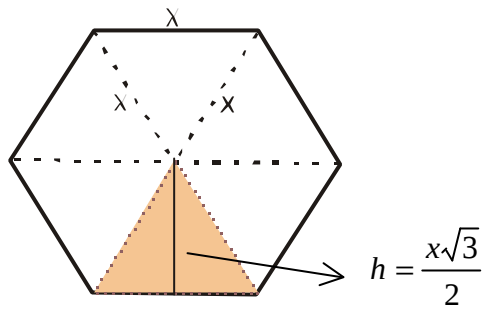
Da expressão (16) obtemos l :

$$\boxed{l = 2 \cdot \sqrt{\frac{A\sqrt{3}}{3}}}$$

Substituindo l na fórmula do perímetro obtemos:

$$P = 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{A\sqrt{3}}{3}} = 6 \cdot \frac{\sqrt{A\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2 \cdot \sqrt{3\sqrt{3}} \cdot \sqrt{A} \cong 4,56\sqrt{A}$$

$$\therefore \quad \boxed{P_{\Delta} \cong 4,56\sqrt{A}}$$

Hexágono:

$$\text{Área} = 6 \cdot A_{\Delta} \text{ equilátero}$$

$$\text{Área} = 6 \cdot \left(\frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \right) = \frac{3x^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \quad (17)$$

$$\text{Perímetro} = 6x$$

Da expressão (4) obtemos x:

$$x = \frac{\sqrt{2A\sqrt{3}}}{3}$$

$$\text{Perímetro} = 6 \cdot \left(\frac{\sqrt{2A\sqrt{3}}}{3} \right) = 2 \cdot \sqrt{2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{A}$$

$$P_{\text{hexágono}} \cong 3,72\sqrt{A}$$

O mesmo pode ser feito fixando-se em vez da área o perímetro p. Para os mesmos polígonos observaremos que o hexágono é aquele que possui maior área: Para o quadrado $A = P^2/16$, para o triângulo $A = P^2 \cdot \sqrt{3}/36$ e para o hexágono $A = P^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{24}$.

“Este resultado pode ser generalizado para qualquer polígono regular de n lados, isto é, dado um perímetro P fixado então A cresce quando n cresce”. (Bassanezi).

5.3 – Volume do Alvéolo

Ao terminarmos a execução dos alvéolos uma questão que foi colocada por um dos alunos foi quanto ao volume do mesmo.

Como fazemos para calcular o volume do alvéolo?

Após analisarmos cuidadosamente nosso modelo (alvéolo) percebemos que os 3 tetraedros retirados dos extremos do hexágono formam o ápice triédrico. Em outras palavras aquilo que é tirado das laterais do hexaedro é colocado na parte superior mesmo fechando-o em uma de suas extremidades. Conseqüentemente o volume do alvéolo tem o mesmo valor do volume do hexaedro (prisma regular hexagonal) que deu origem a ele.

Usando as fórmulas fornecidas pela geometria clássica obtivemos este volume da seguinte forma:

$$V = \text{área base} \cdot \text{altura}$$

A base é um hexágono de arestas 2,31 mm e altura 4,75 mm.

$$A_{\text{hexágono}} = 6 \cdot A_{\text{triângulo equilátero}}$$

Os triângulos equiláteros possuem base igual a 2,31 mm e apótema 2 mm

$$\text{Assim: } A_{\text{hexágono}} = 6 \cdot \frac{2,31 \cdot 2}{2} = 13,86 \text{ mm}^2$$

$$\text{e } V = 13,86 \cdot 4,75 = 65,83 \text{ mm}^3$$

Vamos comprovar na prática (experimentalmente) que o prisma hexagonal que deu origem ao alvéolo e o alvéolo possuem volumes iguais?

Usando um papel resistente nós vedamos o hexaedro e o alvéolo de “bases equivalentes”. Em seguida enchemos o alvéolo com grãos de arroz cru e despejamos o conteúdo no prisma hexagonal.

Observamos que a quantidade de arroz cru contida no alvéolo encheu o hexaedro, provando assim, que os volumes são iguais.

Registramos através de fotos este momento de trabalho dos alunos:



Foto 15



Foto 16



Foto 17



Foto 18

Poderíamos também ter usado o método da balança. Confeccionados os dois prismas com bases equivalentes e com o mesmo material e pesando-os separadamente, “dentro do limite do erro experimental” comprova-se que se ambos tem a mesma massa terão também o mesmo volume. (Mat. Aplicada – Vol. 3 – pág. 157).

Estas conclusões de que todos os prismas de bases equivalentes e alturas iguais tem o mesmo volume foram obtidas com base no “Princípio de Cavalieri”.

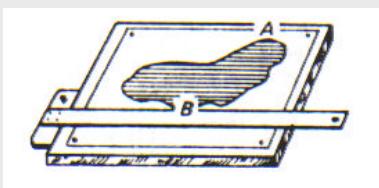
Cavalieri foi discípulo de Galileu, que viveu na Itália no início do século XVII.

Ele baseia-se na idéia de que “uma área pode ser pensada como sendo formada por segmentos ou indivisíveis e que um volume pode ser considerado como composto de áreas que são volumes indivisíveis ou quase atômicos. (Carl. B. Boyer – página 241)

Para compreender melhor as idéias de Cavalieri observemos o texto abaixo:

Que são “indivisíveis”? Diga-se que Cavalieri escreveu dois livros alentados sobre o assunto, sem contudo nos dar a resposta. Isto, a bem dizer, não é fora do comum; notável, porém, é que com o auxílio deste conceito obscuro, em parte alguma definido, ele consegue resolver uma série dos mais belos problemas. A idéia fundamental é sempre a mesma: Decomposição duma superfície ou dum sólido num conjunto de elementos “infinitamente pequenos”. Assim, uma linha é formada por pontos sem comprimento, uma superfície por número infinito de linhas sem largura, um sólido finalmente por uma soma de superfícies às quais não corresponde altura. Estes seres elementares, como que átomos geométricos, devem ser, por certo, aquilo que se considera os não divisíveis, os “indivisíveis”. Eis a comparação feita pelo próprio Cavalieri: “Ficou portanto evidente que podemos conceber as figuras planas como tecido, compostos de fios paralelos, e os sólidos como livros, que são pilhas de folhas paralelas”.

Cavalieri faz uso, ainda, duma segunda imagem, que é muito explícita e que tangencia futuros raciocínios: traçamos o esboço duma figura e perguntamos pela sua área.



Para torna-la bem visível, podemos prender a folha numa prancheta e deslizar a régua sobre a figura, sempre paralelamente. Atingimos uma posição inicial A, quando a régua toca a figura pela primeira vez, e começamos então a sombreá-la.

Traço por traço a figura surge então do nada, à medida que a régua prossegue – e finalmente aparece a segunda posição limite B, onde pela última vez a régua toca o contorno, e onde terminamos o sombreado. No conjunto destas linhas poderíamos conceber aproximadamente os “indivisíveis” de Cavalieri - aproximadamente, pois o matemático italiano frisa expressamente que ele jamais afirmara que o sólido ou a superfície sejam um conjunto de planos ou linhas. O que ele afirma, é apenas o fato de que as figuras se comportam como seus elementos constituintes, e assim, realmente, ele raciocina.

Estas observações mostram nitidamente quão árdua ainda era a luta de Cavalieri com este problema do infinitamente pequeno, e quão claras se tornaram para ele as dificuldades de conceituação que aqui se esboçam. Arquimedes tratava de evitar estas mesmas dificuldades, ao afirmar que o seu método – cuja afinidade com os raciocínios de Kepler e Cavalieri é evidente – não fornecia uma demonstração legítima, mas que esta deveria ser apresentada de acordo com o severo método geométrico. Elas só foram superadas com absoluto rigor dois séculos mais tarde, quando Cauchy logrou formular com clareza o conceito de limite, proscrevendo assim, em definitivo, o espectro do infinitamente pequeno.

Pelo menos, o caminho estava delineado! Para determinar a área de superfície ou corpos quaisquer, de contornos curvos, era mister decompô-los em camadas e, falando de maneira pouco precisa, somar uma a uma estas camadas “infinitamente pequenas”

(Imenes - Mat. Aplicada – volume 3 – página 139)

5.4 - Curiosidade envolvendo o conceito de limite (Bassanezi 1990)

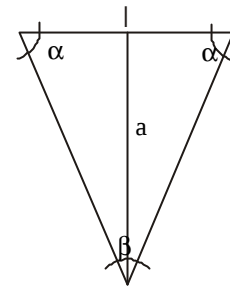
Dado qualquer polígono regular, o valor numérico do seu perímetro coincide com o da sua área se, e somente se, seu apótema vale 2”.

De fato, seja l o valor do lado do polígono regular de n lados. Podemos dividir o polígono em n triângulo isósceles de base igual a l .

O apótema a do polígono será a altura destes triângulos.

A área de cada triângulo vale $\frac{la}{2}$.

Assim a área do polígono será $A = \frac{nla}{2}$ e seu perímetro $p = nl$.

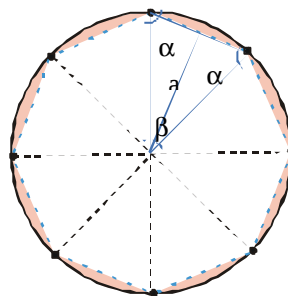


Então, respeitadas as unidades de medida, temos:

$$p = A \Leftrightarrow n \frac{la}{2} = nl \Leftrightarrow a = 2 (n \geq 3 \text{ e } l > 0)$$

Chamaremos de 2-polígonos os polígonos regulares cujo apótema vale 2 (unidade de medida dos lados).

Dado um 2-polígonos de n lados podemos determinar facilmente o valor de seu lado e portanto de sua área:



Em cada um dos n triângulos isósceles em que foi dividido o 2-polígono da figura acima temos:

$$a = 2$$

$$v = \frac{360^\circ}{n} \Leftrightarrow a = \frac{180 - v}{2}$$

$$\operatorname{tga} = \frac{a}{l/2} = \frac{4}{l},$$

logo:

$$l = \frac{4}{\operatorname{tga}} = \frac{4}{\operatorname{tg}\left(90 - \frac{180}{n}\right)} = \frac{4}{\cot g \frac{180}{n}} = 4 \operatorname{tg}\left(\frac{180}{n}\right)$$

Assim, o lado de um 2-polígono de n lados é dado, em radianos, por:

$$l = 4 \operatorname{tg} \frac{p}{n}$$

Como a área de um 2-polígono é igual ao seu perímetro, temos

$$A_n = nl = 4n \operatorname{tg} \frac{p}{n} \quad (n \geq 3)$$

A seqüência (A_n) , $n \geq 3$, das áreas de 2-polígonos de n lados é decrescente com n e limitada pela área do círculo de lado 2. (Vide tabela 5). Uma justificativa para este fato é a seguinte:

Quando n é muito grande então o valor de $\frac{p}{n}$ é próximo de zero, logo:

$$tg \cdot \left(\frac{p}{n} \right) \cong \frac{p}{n}$$

Triângulo Equilátero	3	20,7846
Quadrado	4	16,0000
Pentágono	5	14,5308
Hexágono	6	13,9967
Decágono	10	12,9967
100-ágono	100	12,5705
1000-ágono	1000	12,56641
10000-ágono	10000	12,5663371

Tabela 5 - Área dos 2-polígonos de lado n

Assim,

$$A_n = 4n \operatorname{tg} \left(\frac{p}{n} \right) \cong 4n \cdot \frac{p}{n} = 4p \cong 12,566371 \quad (\text{quando } n \geq 10000).$$

As aproximações vistas anteriormente podem ser deduzidas analiticamente. O fato da sequência A_n ser monótona e limitada implica que é convergente.

Por outro lado, temos que

$$0 < \operatorname{sen} \frac{p}{n} < \frac{p}{n} \quad \text{para todo } n \geq 3, \text{ e portanto,}$$

$$0 < \operatorname{tg} \frac{p}{n} < \frac{p}{n} \cdot \frac{1}{\operatorname{cosp} / n}$$

$$\text{Logo, pelo "Teorema do Confronto" temos que } \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \frac{p}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\operatorname{cosp} / n}.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 4n \cdot \frac{pi}{n} = 4\pi = \text{área dos círculos de raio 2.}$$

Referências Bibliográficas

- A Educação Matemática em Revista*** – SBEM. Etnomatemática. Ano 1 – Nº 1 – 2º Semestre, 1993.
- ALVES, R. **“Filosofia da Ciência”**. São Paulo, Loyola, 4ª ed., 2002.
- APOSTOL, T. M. ***Calculus***, vol 1, John Wiley & Sons, New York, London (1967).
- ASMANN, H. ***Metáforas Novas para Reencantar a Educação***. Piracicaba: UNIMEP, 1996.
- ATLAN, Henry. ***Entre o Cristal e a Fumaça – Ensaio sobre a Organização do Ser vivo***. Rio de Janeiro: Zahar, 1992.
- ÁVILA, G. ***Cálculo 1. Funções de Uma Variável***. Editora Santuário. 6ª Edição, 1994.
- _____. ***O ensino de cálculo no segundo grau*** in Revista do Professor de Matemática nº 18, Sociedade Brasileira de Matemática, 1º semestre (1991)
- BALDINO, R. ***Desenvolvimento de Essência de Cálculo Infinitesimal***. Universidade Santa Úrsula. Vol. 4. Rio de Janeiro. Editora MEM/USU, 1998.
- BARON, M. E. ***Curso de História da Matemática***. Origens e Desenvolvimento do Cálculo. Editora Universidade de Brasília, 1985.
- BASSANEZI, R. C., FERREIRA JR., W. C. ***Equações Diferenciais com Aplicações***. Editora HARBRA Ltda, 1988.
- _____. ***Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática*** – São Paulo - Editora Contexto – 2002.
- _____. ***Introdução à Modelagem Matemática*** – Curso de Especialização para Professores – Programa Pró-Ciências: CAPES – FAPESP – F. E. Barretos, 1999, (apostila).
- BATSCHLET, E. ***Introdução à Matemática para Biocientistas***. Editora Interciência, Rio de Janeiro, 1978.
- BELTRÃO, M. E. P. ***Uma visão do cálculo infinitesimal no ensino médio***. Dissertação de Mestrado. Rio Claro, 2001.

BERTONI, Nilza. **Rezenha sobre o livro Matemática Aplicada**. Revista do Professor de Matemática, n. 1.

BEZERRA, M. J., “JOTH”, J. C. P. Novo Bezerra. Matemática – 2º Grau. SP - Editora Scipione, 1994.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelação Matemática como Método de Ensino-Aprendizagem de Matemática em Cursos de 1º e 2º Graus**. Dissertação de Mestrado. Rio Claro, 1990.

_____. **Modelagem Matemática & Implicações no Ensino-Aprendizagem de Matemática** – Blumenau – Editora da Furb, 1999.

BITTINGER, M. L. **Calculus a Modeling Approach**. 1976 – Addison Wesley Pu.

BORBA, M., BIZELLI, M. H. S. S. in artigo: **O conhecimento matemático e o uso de softwares gráficos** – Educação Matemática em Revista, nº 7, ano 6, p. 45.

BOYNARD, A. P.; GARCIA, E. C., ROBERT, M. I. **Reforma do Ensino**. Série: Livros Irradiantes – São Paulo – Editora LISA S.A.

BRANDÃO, C. R. **O que é Educação**. Editora Abril Cultural/Brasiliense, São Paulo, 1985.

BURAK, D. **Modelagem Matemática: Ações e Interações no Processo de Ensino-Aprendizagem – Vol. I e II**. Tese de Doutorado em Educação na Área de Concentração – Psicologia Educacional. Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 1992.

C. H. Edwards, Jr., David E. Penney. **Calculo com Geometria Analítica**. Volume 1. Editora Prentice-Hall do Brasil, 4ª Edição, 1997 – pág. 4.

CAPRA, F. **O Ponto de Mutação** – A Ciência, a Sociedade e a Cultura Emergente. Editora Cortez, São Paulo, 20ª Edição, 1997.

CARVALHO, J. P. **O Cálculo na Escola Secundária – Algumas Considerações Históricas**. Cadernos Cedes 40, 1996.

D’AMBROSIO, U. **Da Realidade à Ação**. Reflexões sobre Educação e Matemática. 3ª Edição. Editora Summus. Campinas, 1986.

_____. **A educação matemática e a reincorporação da Matemática à história e à filosofia**. In: Anais do Seminário Internacional de Educação Matemática, 1, 1993. Rio de Janeiro: UFRJ, 1993.

_____. **Educação Matemática em Revista**, SBEM, ano 6. N. 7, jul.1999. Entrevista.

_____. **Revista de Sociedade Brasileira de Educação Matemática**. nº 7, Ano 6. Entrevista: Ubiratan D’ Ambrosio. pg. 5-10.

- DEBORAH, H. H., ANDREW, M. G., PATTI, F. L., DANIEL, E. F. **Cálculo e Aplicações**. Editora Edgard Blücher Ltda. 1999.
- DELEUZE, G. **Lógica do Sentido**. São Paulo, Editora Perspectiva, 1975.
- DULCOS, R. C. “**Cálculo no 2º grau**”. In: Revista do Professor de Matemática nº 20. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 1º quadrimestre de 1992.
- EDITORIA. **A Velha Matemática Moderna**. Revista Petrobrás. 243, mai/jun/1970.
- EDWARDS, C. H., PENNEY, D. E. **Cálculo com Geometria Analítica**. 4ª Edição. Editora Prentice-Hall do Brasil Ltda. Vol. 1. 1997.
- EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Unicamp, 1996.
- FRANCHI, R. H. O. L. **A modelagem matemática como estratégia de aprendizagem do cálculo diferencial e integral nos cursos de engenharia**. Dissertação de Mestrado – UNESP - Rio Claro, 1993.
- GAZZETA, M. **A Modelagem como estratégia de aprendizagem da matemática em cursos de Aperfeiçoamento de Professores**. Dissertação de Mestrado. UNESP, Rio Claro 1989.
- GUSTINELI, O. A. P. **Modelagem Matemática e Resolução de Problemas: Uma Visão Global em Educação Matemática**. Dissertação de Mestrado – UNESP - Rio Claro, 1990.
- HARPER, B. et. Al. **Cuidado, Escola!** Desigualdade, domesticação e algumas saídas. São Paulo, Editora Brasiliense S.A., 1996. 35 ed.
- HIGINO, H. H. in IEZZI, G. et al. **Matemática – 3ª série 2º Grau**. 8.ed. São Paulo : Atual, 1990, p. 172.
- IMENES, L. M. **Vivendo a Matemática**. Geometria dos Mosaicos. 3ª Edição. Editora Scipione.
- IMEP (Intituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais). MEC. Tema: **Tendências na Educação Matemática**, Brasília, ano 14, nº 62, abril/jun 1994.
- KUHN, T. S. **A Estrutura das Revoluções Científicas**. São Paulo, Ed. Perspectiva, 2ª Edição, 1978.
- MACHADO, N. J; TEIXEIRA, J. C; DOLCE, O. et al. **Matemática 2º Grau**. São Paulo, Atual, 1993.

- MIORIM, M. A. *Introdução à História da Educação Matemática*. São Paulo: Atual, 1998.
- MOISE, E. E. *Cálculo: um curso universitário*, Edgard Blücher Ltda, São Paulo –1972.
- MOISÉS, L. *Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática*. Magistério Formação e Trabalho Pedagógico. Ed. Papirus, 1997.
- MORAES, M. C. *O Paradigma Educacional Emergente*. Campinas, Papirus, 1997.
- NISKIER, A. *A nova educação e o pensamento complexo*. in artigo. Folha de S. Paulo, 31/08/1998.
- Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN – Ensino Médio*. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. Brasília. Ministério da Educação, 1996.
- PAVANELLO, R. M. *O abandono do ensino de geometria: Uma Visão Histórica*. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. 1989
- PIRES, C. M. C. *Currículos de Matemática: da organização linear à idéia de rede*. São Paulo: FTD, 2000.
- POLYA, G. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. Editora Interciência. Rio de Janeiro, 1995.
- PRIGOGINE, I. *“O fim das Certezas”*. São Paulo, UNESP, 1996, pag. 12.
- ROCHA, L. M. e BARBOSA, R. M. *Curso Colegial Moderno*. Volume 3. Estado : IBEP, 1971.
- ROXO, E.. *A Matemática na Educação Secundária*. São Paulo, Rio de Janeiro, Recife e Porto Alegre: Biblioteca Pedagógica Brasileira – Companhia Editora Nacional – 1937.
- ROXO E., THIRE C., MELLO e SOUZA. *Curso de Matemática – 5º ano*. Rio de Janeiro/São Paulo/Belo Horizonte : Francisco Alves, 1931.
- SANTAELLA, L. *A Assinatura das Coisas*. Rio de Janeiro: Imago, 1993.
- Tendências em Educação Matemática*. in Publicação do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais – INEP – MEC – Brasília, Ano 14, nº 62, abr/jun, 1994.
- TROTTA, F., IMENES, L.M.P., JAKUBOVIC. J. *Matemática Aplicada 3*. 2º Grau. Editora Moderna, 1979.
- ZUÑIGA, A.R. *Las Matemáticas Modernas em las Américas: filosofia de una reforma*. In: VIII CIAEM, Miami, USA, 1991.

PAULO RENATO SOUZA

O novo ensino médio brasileiro

O ensino médio que temos no Brasil, carente de identidade e desconectado das exigências do mundo moderno, está com os dias contados. O modelo burocratizou a transmissão do conhecimento. Transformou-se em mera fábrica da chamada decorência, premiando a memória, em vez do raciocínio. Seu único objetivo passou a ser "preparar" jovens para o vestibular, hoje em vias de profunda revisão, pela crescente aceitação do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) como referencial de acesso ao ensino superior. O ciclo exigia radical reforma de concepção, cuja implantação queremos agora acelerar.

A proposta abarca medidas pelas quais propiciamos ao ensino médio bem cumprir o papel que dele se exige hoje em dia: um transmissor flexível e dialético de conhecimento, que ensine a aprender, oriente em relação à vida, à carreira, prepare para o exercício da cidadania e da democracia. E que, como sugere a Lei de Diretrizes e Bases da Educação, ensine a lidar com novas tecnologias e formas de produzir bens, serviços e conhecimento.

O novo perfil deste ciclo é descrito nas Diretrizes Curri-



Acabam a imposição do saber, a fria avaliação formal e o aluno passa a ter papel ativo

culares Nacionais, elaboradas pelo Conselho Nacional de Educação a partir de proposta do ministério. Proposta esta que busca a expansão qualitativa do ensino médio, cuja matrícula cresceu 57% nos últimos cinco anos. Já são mais de 7,8 milhões de alunos hoje; serão 10 milhões em 2002.

Fizemos mudanças nos planos estrutural, didático-pedagógico e curricular. No primeiro caso, a principal novidade foi separar o ensino médio do curso técnico. Agora o profissionalizante é complementar àquele. Ganhou condições de habilitar de fato e, separado, atrairá só jovens que desejam verdadeiramente atuar como técnicos. O ensino médio, por seu turno, ganhou espaço para o papel que de fato lhe cabe e, nesse sentido, continuaremos a perseguir a meta de universalizá-lo.

Na pedagogia do novo ensino médio, a escola encontrará grande apoio nos Parâmetros Curriculares Nacionais, nos quais estão contidos dois conceitos vitais à reforma: interdisciplinaridade e contextualização. Com eles o ensino sem vida e fragmentado de hoje passa a fazer sentido para o jovem. O primeiro diz que as matérias devem per-

passar os conteúdos umas das outras, conectando o saber. Ao contextualizar, a escola se referencia na vivência do aluno, no seu meio social, associando conhecimento à vida prática. Retira-se o jovem do papel passivo, fazendo de suas experiências pessoais, sociais e culturais a maior fonte do aprendizado. Os conceitos resumem o espírito da reforma: fornecer a escola um ambiente agregador onde o aluno se sinta valorizado, encaminhado, em aperfeiçoamento e se orientando em relação ao seu futuro.

Nesse sentido destaca-se ainda a reorganização dos currículos. Na reforma, eles devem desenvolver competências e habilidades do aluno, com ênfase no significado social e cultural do conhecimento, no domínio de procedimentos e de ferramentas básicas da ciência. É uma abordagem hoje já medida pelo Enem e que constitui um antídoto contra a repetência, a evasão ou a violência gerada pela cultura do fracasso escolar, hoje em dia combatida de várias formas.

Uma porcentagem de 75% do conteúdo curricular comporá uma base nacional comum, nas áreas de Língua Portuguesa/Códigos, Ciências da Natureza/Matemática, Ciências Humanas e respectivas tecnologias. As próprias escolas definirão, com flexibilidade, matérias e temas, desde que se relacionem às áreas citadas e desenvolvam múltiplas aptidões.

Violência, saúde, ambiente

podem virar assuntos de estudo. Acabam a imposição do saber, a fria avaliação formal. O estudante é encorajado a aflorar potencialidades, a participar vivamente da vida escolar, com direito até mesmo de escolher matérias que deseja dominar. Exercerá tal liberdade em 25% das disciplinas, a serem apresentadas pelas escolas com base nas características socioeconômicas locais e regionais.

O programa da reforma, apoiado pela unanimidade das redes de ensino, está à disposição das Secretarias de Educação dos Estados, que devem, ao implantá-la, instituir métodos de avaliação e de prestação de contas. Cabe aos Estados, constitucionalmente, a responsabilidade pela administração e pelo financiamento do ensino médio, e, agora, pela implantação da reforma deste ciclo. Para realizá-la, porém, contarão com recursos e assistência técnica federal. O ministério negocia US\$ 500 milhões do BID (com contrapartida igual), para custear a formação de professores, a melhoria das escolas e a construção de prédios, entre outras ações.

É trabalho para, no mínimo, cinco anos. Especialmente para os professores, verdadeiros protagonistas da reforma. Deles, principalmente, dependerá o sucesso do novo ensino médio que o Brasil quer e merece ofertar aos seus jovens cidadãos.

■ Paulo Renato Souza é ministro da Educação

Anexo 2

freeway

Por que a escola não serve pra (quase) nada

GUSTAVO IOSCHPE
Colunista da Folha

Sempre me intrigou o fato de que os melhores alunos terminam não repetindo o sucesso escolar vida afora e, ao mesmo tempo, que as pessoas de grande êxito em suas atividades foram, frequentemente, maus alunos, ou pelo menos nada brilhantes. Não são inquietações que me surgiram agora, mas já na época de estudante.

Nessa mesma época, de estudante secundário, comecei a sentir um profundo incômodo com a vida estudantil. Quando criança, tinha muito prazer em ir ao colégio, em aprender aquelas coisas novas todo dia, em resolver mistérios. A educação é o mecanismo de inserção mais poderoso que há: com ela, penetramos no mundo e nos sentimos participantes da nossa realidade. A grande parede de ignorância que nos barra da compreensão do universo vai aos poucos sendo derrubada.

Mas, em um certo momento, lá pelo fim do primeiro grau, o encantamento se quebrou. Não sei se eu é que perdi a ingenuidade, ou se foi a escola que mudou, mas ficou tudo esquemático, mecânico e completamente broxante. A relação com o professor, que antes era de companheirismo e admiração nessa viagem de descobrimento, virou burocrática e antagônica. Pairava no ar o reconhecimento mútuo de que entrávamos em um teatro, onde mestres e pupilos eram atores secundários e o papel principal ficava a cargo da mediocridade, a se infiltrar e dominar tudo. Ela ditava que o nosso pa-

pel ali era de fingidores: o professor fingia estar ensinando e se interessando pela inteligência de seus alunos, e o aluno fingia estar aprendendo e absorvendo conhecimentos que lhe seriam úteis.

No fundo, todos sabiam que grande parte do que se ensinava ali era inútil e desinteressante, mas, enfim, caía no vestibular, então o que é que se havia de fazer, né?

Assim, passei, como todos os meus colegas, anos e anos regurgitando o que diziam os livrinhos que os professores nos indicavam. Líamos grandes livros, falávamos sobre grandes personagens históricos, mas o que ficava eram perguntas sobre o enredo, pedidos de descrição de eventos e causas. Nenhuma elucubração, nenhum desejo de ir além do texto, nenhuma tentativa, enfim, de pensar e imaginar. Qualquer tentativa de dizer algo diferente ou pensar o proibido era (e continua sendo) punida com canetações vermelhos e notas

baixas ou, em casos mais severos, conversinhas com orientadores pedagógicos e coordenadores educacionais (nomes infames para cargos que se resumem aos de carcereiros do presídio de almas que é a escola moderna).

Assim, o sistema educacional transformou-se numa máquina produtora de mediocridade e resignação, que vai aos poucos filtrando os inconformistas e deixando-os de lado, rotulando-os como "problemáticos". Matando o espírito questionador, já que qualquer pergunta desafiadora é vista como um desafio à autoridade. Por isso é que os bons alunos não raro têm vida escolar apagada, e os maus alunos se saem bem: fora das paredes da escola, o espírito crítico, a imaginação e a vontade de fazer diferente são fatores indispensáveis ao sucesso.

O que só comprova a impressão de que colégios viraram exatamente aquilo que foram criados para combater: templos da gratificação da mediocridade e da mesquinha; fortalezas que massacram aquilo que há de espontâneo nos jovens, e os "preparam para a vida", dando-lhes a garantia de sobrevivência que é, ao mesmo tempo, a garantia de uma vida sem saltos, voltas, dúvidas, explosões, entusiasmos, descobertas, angústias e fascínios. Tudo, enfim, que faz com que a vida valha a pena.

P.S. Antes que o tradicional espírito de porco pergunte se me imagino um gênio incompreendido, confesso que passei minha temporada escolar perseguindo notas altas e me empenhando em ser o melhor da classe, mesmo sabendo a falência moral que isso significava. O que só me entristece e envergonha.

Gustavo Ioschpe, 23, mora em Londres.
E-mail: desembucha@uol.com.br



C 2 terça-feira, 28 de agosto de 2001

RIBEIRÃO

FOLHA DE S. PAULO

MARILENE FELINTO

Para que serve o ensino médio do logaritmo

CERTA POBREZA brasileira já não é mais analfabeta —tem o segundo grau completo, o “ensino médio” de hoje, o antigo “colegial”. Em São Paulo, segundo levantamento da gestão Marta Suplicy feito com 11,8 mil famílias pobres cadastradas em programas sociais, essa “nova pobreza” inclui 64,7% de jovens entre 16 e 20 anos.

É fácil deduzir que a maioria formou-se na escola pública e não ingressará na universidade; que não tem emprego e que passou três anos ou mais vagando entre a já vaga (e inútil) noção de logaritmo, mol ou mitocôndria. A maioria não sabe bater um prego numa madeira, trocar uma lâmpada, descascar um pedaço de fio ou datilografar (digitar, quero dizer) com destreza. Não estão habilitados para nada, embora tenham no currículo o “ensino médio”.

É mais fácil obter de um bebê de quatro anos a resposta para a pergunta “o que é uma cadeira?” do que de um aluno do ensino médio a definição de “logaritmo”. “Uma cadeira é para sentar”, responde o bebê, sorridente e confiante de que acertou, ainda incapaz de ver a cadeira como um corpo individual separado da ação que a ela se relaciona (a ação de sentar-se).

Ainda não está preparado para processo cognitivo tão complexo quanto definir um objeto —um substantivo— separando-o dos seres ou das ações com que se relaciona. O bebê consegue, no máximo, definir o que se passa nas coisas (por isso ele usa um verbo), mas não a coisa em si (“a cadeira é um objeto, uma peça de mobiliário formado por um assento etc. etc.”).

O conceito é uma expressão



mental, isto é, abstrativo-intelectual. Como conseguir de um jovem do primeiro ano do ensino médio (ou mesmo do terceiro) que ele defina o conceito de logaritmo? Não sabe, não consegue. Duvido que até mesmo seu professor saiba ou tenha passado a

ele esse conhecimento, a elaboração verbal desse conceito para lá de complexo: “Logaritmo é o expoente a que se deve elevar um número constante para se obter outro número”.

“Expoente?”, “número constante?” O aluno pode até saber —

frequentemente sabe— resolver a equação logarítmica dada, mas não sabe para que serve aquilo na vida prática, porque não lhe foi dada a chance de elaborar o conceito (nem mesmo ao aluno da melhor escola particular será fácil explicar). Daí o caráter de circunstancial apenas de tudo o que se aprende na escola nessa época da vida: só sabemos enquanto estudamos para a prova. Depois, tudo se apaga da memória como se nunca tivesse sido necessário estar ali.

No Brasil, o ensino médio tem esse defeito de concepção que se perpetua. Para o aluno pobre, cuja vida tem urgência de soluções práticas que o coloquem no mercado de trabalho cedo, o ensino médio será apenas mais um atestado de não-saber, um diploma para a “nova pobreza”.

Nesse sentido, o Enem (Exame

Nacional do Ensino Médio), que hoje conta pontos para o vestibular e mede as “habilidades” ou “competências” que ele adquiriu nessa fase de sua formação escolar, contribui para manter as condições injustas em que os pobres disputam com os ricos o acesso à universidade.

Ao jovem pobre, só faria sentido um ensino médio de nível técnico, que lhe garantisse alguma habilidade para o trabalho depois de formado, alguma renda para custear, então, seus estudos universitários. A ele, o ensino médio do logaritmo é uma perda de tempo. Só serve para o filho do rico (desocupado, enfim) decorar fórmulas que lhe servirão, como a um automático, para passar no vestibular da universidade pública.

@ → E-mail: mrfelinto@uol.com.br

ANEXO 4 – Obtenção do Gráfico 1 através do Programa Computacional Excel.

Obtivemos a tabela 1 e o gráfico 1 (figura 15) localizados na página 105 deste trabalho da seguinte maneira:

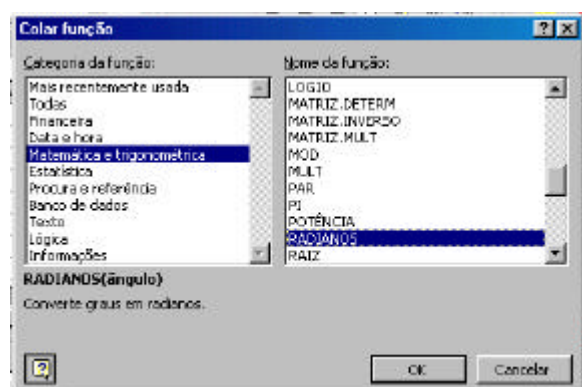
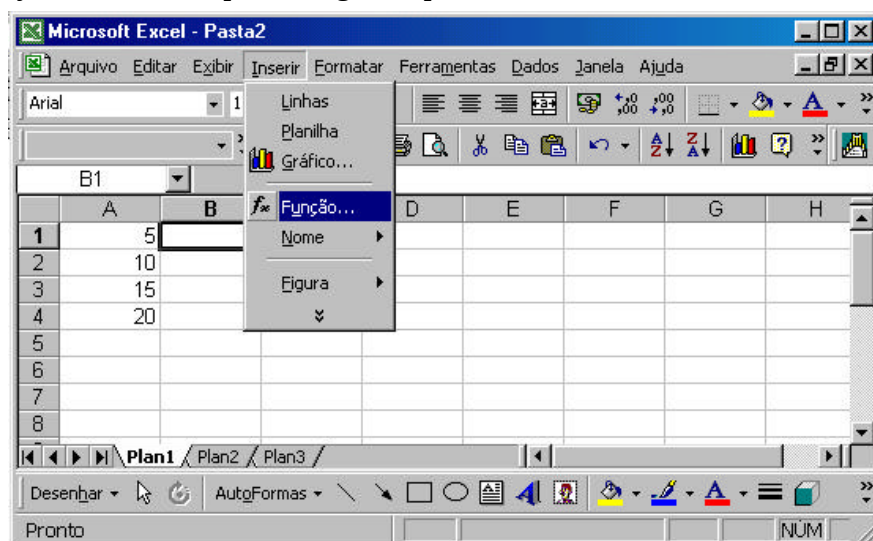
Abrimos o programa EXCEL na planilha inicial e inserimos a função

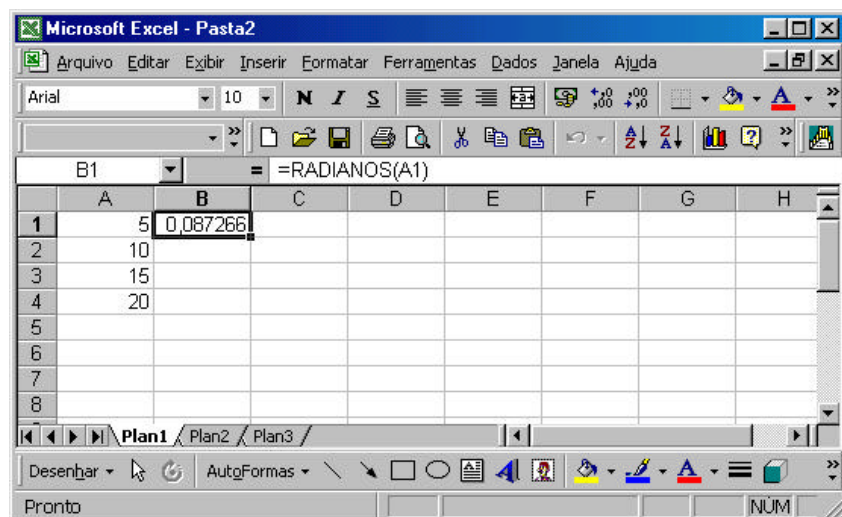
$$A(q) = 65,8 + 8 \left(\frac{\sqrt{3}}{\sin q} - \cot q \right)$$

no editar fórmula utilizando a linguagem exigida pelo programa computacional.

Na planilha inicial digitamos na coluna A os valores atribuídos para o ângulo θ , em graus. Em seguida selecionamos a célula B1 da coluna B que conterá os valores do ângulo θ em radianos. Para convertemos estes valores em radianos clicamos no menu inserir, função.

As ilustrações mostram os passos seguidos por nós:





Após ter obtido B1, basta ir com o cursor na parte inferior direita da célula B1 e pressionando o botão esquerdo do mouse arrastamos na direção das outras células. Desta forma obteremos todos os valores da coluna A convertidos na coluna B.

Repetiremos todo o procedimento para obter os valores da área que serão inseridos na coluna C.

$$A = 6 h S + 3/2 S^2 ((\sqrt{3})/\text{sen}x) - \text{cot}gx$$

$$h = \text{altura do alvéolo} \quad h = 4,75$$

$$S = \text{lado do hexágono} \quad S = 2,31$$

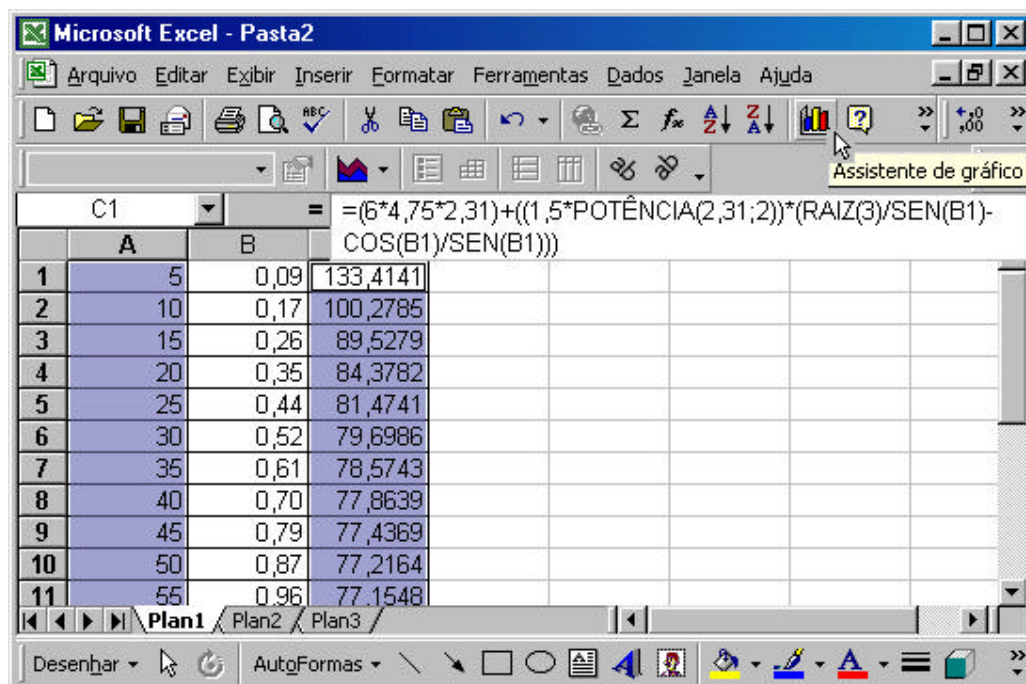
Trocando os valores:

$$\begin{aligned} A &= 6 * 4,75 * 2,31 + 3/2 * (2,31)^2 * (\sqrt{3})/\text{sen}x - \text{cot}gx \\ &= (6 * 4,75 * 2,31) + ((1,5 * \text{POTÊNCIA}(2,31;2)) * (\text{RAIZ}(3)/\text{SEN}(B13) - \text{COS}(B13)/\text{SEN}(B13))) \end{aligned}$$

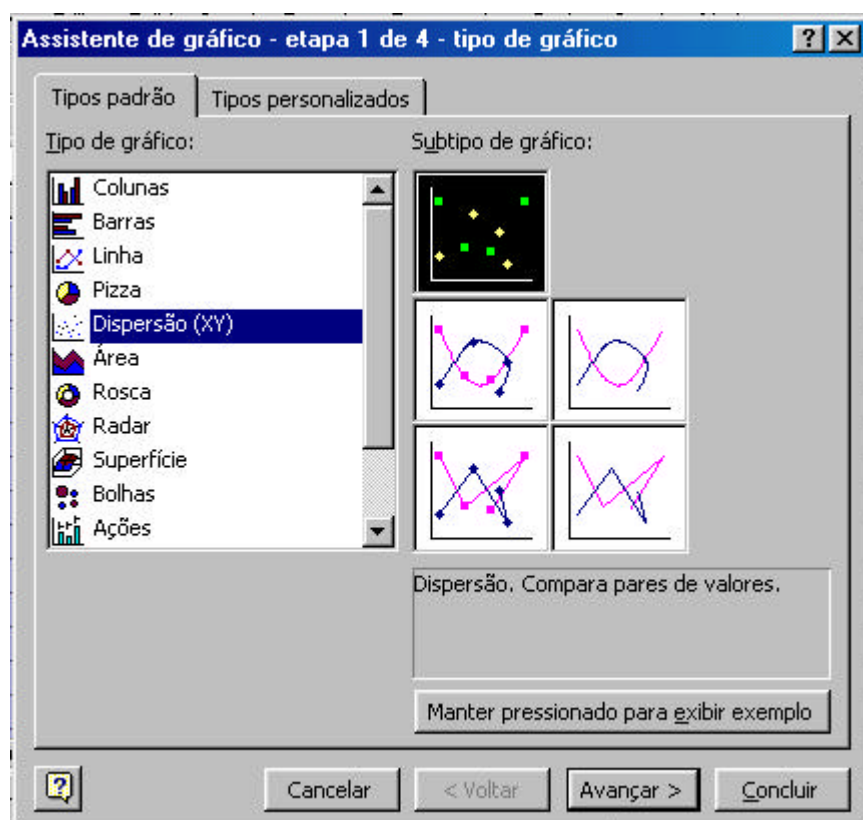
Uma vez obtidos todos os valores, passamos para a construção do gráfico.

Procedemos da seguinte maneira:

Selecionamos a Coluna A e pressionando a tecla Ctrl selecionamos a Coluna C. Em seguida clicamos no botão Assistente de Gráfico.



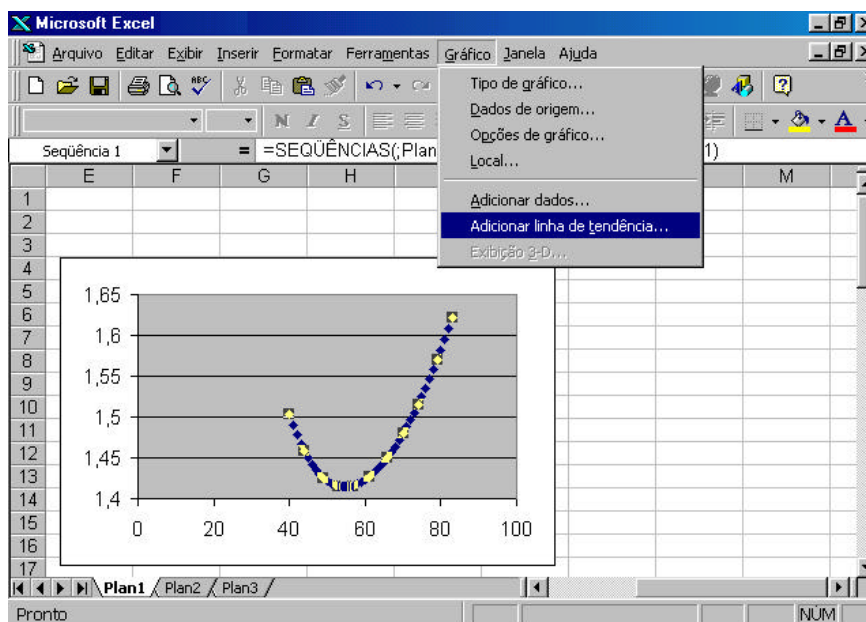
Após pressionarmos o botão assistente de gráfico aparecerá quadro contendo os tipos de gráfico, após selecionar o gráfico desejado é clicar avançar, até concluir o gráfico.



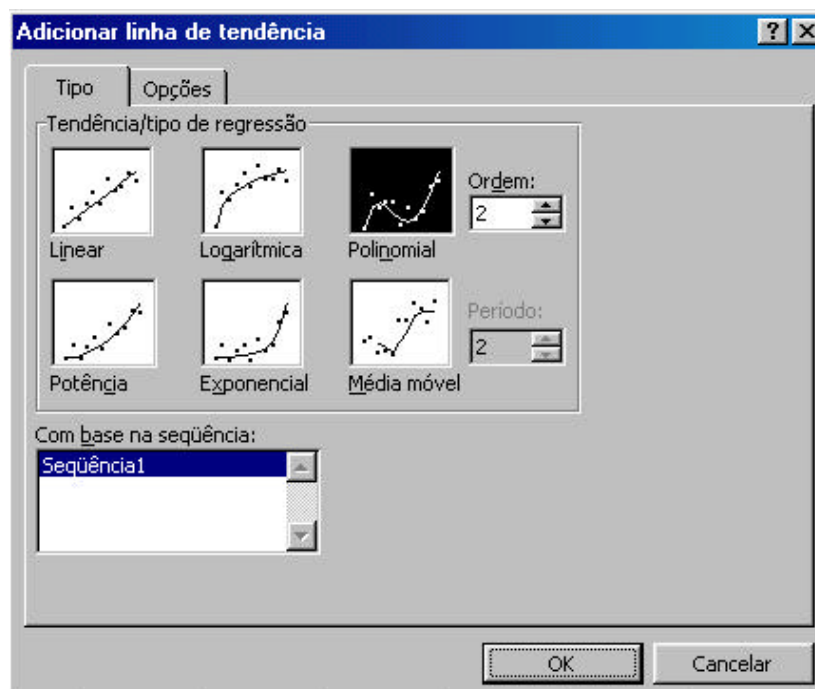
ANEXO 5 – Obtenção Gráfica da Curva Ajustada para uma Função Quadrática

Obtivemos esta curva e a sua equação procedendo da seguinte maneira:

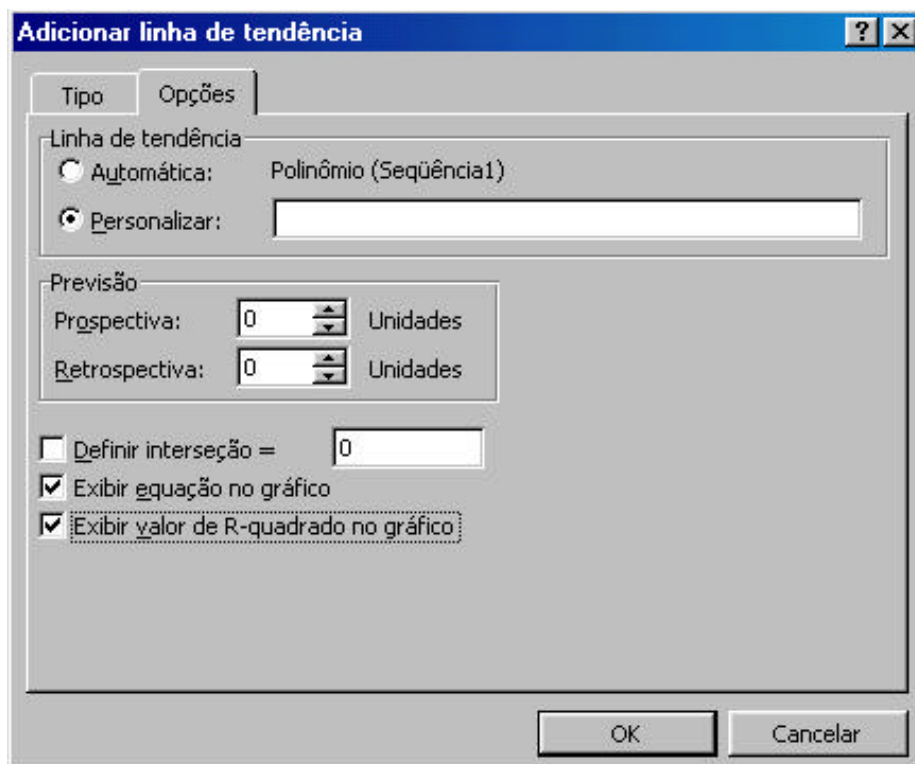
Abrimos o programa EXCEL e a pasta que já continha o gráfico da função (gráfico 3), Figura 17. Em seguida com o mouse clicamos em cima de um dos pontos do gráfico. Immediatamente os pontos mudaram de cor indicando que eles estavam acionados. Agora na Barra de Menu clicamos na opção gráfico que nos forneceu algumas opções, dentre as quais escolhemos adicionar linha de tendência.



Ao clicar na opção adicionar linha de tendência aparece o seguinte quadro:



Antes de dar OK clicamos em Opções, que nos mostrará o seguinte quadro.



Neste quadro acionamos as opções personalizar, exibir equação no gráfico e exibir valor de R-quadrado no gráfico. Agora podemos concluir o gráfico clicando na opção OK. Ao fazer isto, nós obtivemos o gráfico 3 (Figura 17) e a equação 4, que podem ser encontrados nas páginas 108 e 109 deste trabalho.