

unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO
EM
ENGENHARIA ELÉTRICA

1210001152



Nº 34

"CONTROLE DE SISTEMAS NÃO-LINEARES
BASEADOS EM LMI UTILIZANDO MODELOS
FUZZY"

ALUNO: HILTON CLEBER PIETROBOM

ORIENTADOR: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira

Te.1152



UNESP - Universidade Estadual Paulista

FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

**CONTROLE DE SISTEMAS NÃO-LINEARES
BASEADOS EM LMI UTILIZANDO
MODELOS FUZZY**

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista - UNESP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

por

Hilton Cleber Pietrobon

Engenheiro Eletricista — FEIS/UNESP

Fevereiro de 1999

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira FEIS/UNESP

BCpIS - FEIS - UNESP



"CONTROLE DE SISTEMAS NÃO-LINEARES BASEADOS EM LMI UTILIZANDO MODELOS FUZZY"

HILTON CLEBER PIETROBOM

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA – UNESP – COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA (ME).

1210001152



Prof. Dr. Carlos Roberto Minussi - Coordenador

COMISSÃO EXAMINADORA:

Doc. 017/2000 - NPD 097 - CISA

UNESP - "CARLOS PIETROBOM ILHA SOLTEIRA"	
BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO	
DATA DE CAD.	DATA DE TOMB.
13.09.00	29.09.00
RECEB.	TOMBO
Di. lga	Te. 1152
AC.	CLASSIFICAÇÃO
W. lga autb R. 11.00	P626c

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira - orientador

Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres

Prof. Dr. José Paulo Fernandes Garcia

Ilha Solteira – SP, março de 1999

3040000 ENGA. ELÉTRICA

*À minha esposa Cristina, aos meus filhos
Lucas e Lais e aos meus pais Laercio e
Dilma.*



"Bem-aventurado o homem que encontra sabedoria, e o homem que adquire conhecimento. O temor do SENHOR é o princípio da sabedoria." - Provérbios 3:13 e 9:10

BCpIS - FEIS - UNESP



Agradecimentos

Agradeço a Deus, fonte de toda a sabedoria e entendimento.

À minha esposa, pelo apoio em todos os momentos; aos meus filhos pela fonte de alegria que são e aos meus pais por tudo que eles representam para mim.

Ao Prof. Marcelo, pela orientação, pela paciência e pelos ensinamentos científicos e humanos.

Sou grato também ao Prof. Edvaldo Assunção pelo apoio e pelos conselhos muito valiosos e aos demais colegas e professores cujos nomes não citarei, pelo motivo já consagrado do possível esquecimento de alguns, e todos que direta ou indiretamente, consciente ou inconscientemente, contribuíram para a concretização deste trabalho, sintam-se contemplados pelos meus sinceros agradecimentos impregnados com a mais pura honestidade.

Finalmente, à FAPESP, pelo apoio financeiro.



Resumo

São apresentadas condições para o estudo da estabilidade de sistemas não-lineares, contínuos e discretos no tempo, descritos por modelos fuzzy. Uma análise teórica demonstra que o método proposto fornece resultados melhores ou iguais que os outros métodos descritos na literatura. Simulações digitais ilustram este fato. Estes resultados são também utilizados no projeto de reguladores fuzzy e observadores fuzzy. Para isso sistemas não-lineares são representados pelos modelos fuzzy propostos por Takagi-Sugeno. Além disso, as análises de estabilidade e problemas de projetos de sistemas de controle são descritos como a solução de Desigualdades Matriciais Lineares (em inglês, Linear Matrix Inequalities (LMI)), que podem ser resolvidos eficientemente na prática por técnicas de programação convexa. As técnicas de projeto também permitem a especificação do transitório através da taxa de decaimento e a especificação de restrições nos sinais de controle e nas saídas: O projeto e a simulação do controle de um pêndulo invertido ilustram o sistema de controle estudado.



Abstract

Conditions for the stability study of nonlinear, continuous and discrete-time systems given by fuzzy models are presented. A theoretical analysis shows that the proposed method provides better or at least the same results of the methods presented in the literature. Digital simulations exemplify this fact. These results are also used for the fuzzy regulators and fuzzy observers design. The nonlinear systems are represented by the fuzzy models proposed by Takagi and Sugeno. The stability analysis and the design of controllers and observers are described as the solution of LMIs (Linear Matrix Inequalities), that can be solved efficiently by convex programming techniques. The specification of the decay rate, constraints on control input and output are also described by LMIs. Finally, the proposed design method is applied in the control of an inverted pendulum.



Sumário

1	Introdução	13
2	Modelo Fuzzy Takagi-Sugeno	17
3	Reguladores com Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno	21
3.1	Condições para a Estabilidade de Reguladores Fuzzy	22
3.2	Condições para a Estabilidade de Reguladores Fuzzy	25
3.3	Projeto de Reguladores Fuzzy com LMIs	37
3.4	Taxa de Decaimento	38
3.5	Restrição da Entrada	40
3.6	Restrição da Saída	41
3.7	Exemplos de Aplicação	42
4	Observadores com Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno	49
4.1	Condições para a Estabilidade de Sistemas Aumentados	55
4.2	Condições para a Estabilidade de Sistemas Aumentados	57
4.3	Projeto de Observadores e Reguladores Fuzzy com LMIs	64
4.4	Exemplo de Projeto	85
5	Conclusões	91



Capítulo 1

Introdução

O primeiro passo no projeto de um sistema de controle é a construção de um “modelo verdadeiro” do sistema dinâmico que será controlado. O modelo verdadeiro será utilizado nas simulações para verificar o desempenho do regulador projetado e deve incluir todas as características relevantes do processo. Normalmente o modelo verdadeiro é muito complicado para o projeto de sistemas de controle. Assim, necessita-se de um modelo simplificado, denominado “modelo de projeto”, vide (Friedland, 1996) para maiores detalhes. O modelo de projeto deve capturar as características essenciais do processo. A técnica mais comum para a obtenção de um modelo de projeto para plantas não-lineares é sem dúvida a linearização da planta em um ponto de operação de interesse. Com este método o modelo de projeto é em geral um sistema linear invariante no tempo e o projeto de reguladores é relativamente simples em muitos casos. Entretanto, este modelo de projeto descreve bem a dinâmica do sistema somente em uma certa vizinhança em torno do ponto de operação no qual o sistema foi linearizado. Assim, nos casos onde o sistema pode operar em regiões distantes do ponto de operação, este modelo de projeto não é, em geral, adequado. Neste caso deve-se adotar um modelo de projeto mais sofisticado, que considere adicionalmente a dinâmica da planta em regiões distantes do ponto de operação mencionado. Uma possível solução para este problema é a representação da planta não-linear por modelos fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) ou Takagi-Sugeno-Kang (T-S-K) (Takagi and Sugeno, 1985), (Sugeno and Kang, 1988). A idéia destes modelos consiste da descrição aproximada de um sistema não-linear como a combinação de um certo número de modelos lineares invariantes no tempo locais, que descrevem aproximadamente o comportamento deste sistema em diferentes pontos do seu espaço de estados. Desta forma, pode-se interpretar a técnica tradicional de linearização em apenas um ponto de operação como um caso particular dos modelos fuzzy T-S-K, consistindo apenas de um modelo local. Esta classe de modelos de projeto permite que o engenheiro utilize o seu conhecimento sobre o sistema que vai ser controlado, na definição do número dos modelos locais e dos pontos ou regiões nas quais estes modelos locais serão definidos.

O modelo global do sistema é obtido através da combinação fuzzy destes modelos lineares locais. A idéia é que para cada modelo linear local seja projetado um controle de realimentação



linear. O regulador global resultante, que é não-linear em geral, é uma combinação fuzzy de cada regulador linear individual.

Mais significativamente, problemas como as análises de estabilidade e o projeto de controle são reduzidos a problemas descritos por LMIs (Boyd et al., 1994). Numericamente, os problemas de LMIs podem ser resolvidos muito eficientemente por meio de algumas ferramentas poderosas disponíveis na literatura de programação matemática (Boyd et al., 1994). Desta forma, a solução encontrada para tais problemas descritos por LMIs é equivalente a encontrar soluções para o problema original.

Durante a última década o controle fuzzy tem atraído grande atenção e muitas aplicações têm sido feitas, por exemplo, na análise de novos sistemas de controle para automóveis (Will et al., 1997) e controle de elevadores de alta velocidade (Tanaka, Nishimura and Wang, 1998). É uma das mais úteis aproximações para se utilizar o conhecimento qualitativo de um sistema para projetar um regulador, mas muitas questões permanecem para discussões adicionais.

A análise da estabilidade de sistemas de controle fuzzy é um dos conceitos mais importantes em sistemas de controle fuzzy. É possível projetar teoricamente um regulador fuzzy se for disponível um bom critério para a análise da estabilidade adequado a estes sistemas. Recentemente muitos esforços têm sido feitos nesta área (Tanaka and Sugeno, 1992), (Tanaka and Sano, 1994), (Cao et al., 1997b), (Cao et al., 1997a), (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998).

Este trabalho trata das questões de estabilidade e projeto de reguladores fuzzy e observadores fuzzy. São apresentados estudos e condições suficientes sobre a estabilidade de sistemas fuzzy utilizando o método direto de Lyapunov, mais relaxadas que aquelas existentes até o momento.

Métodos de projeto baseados em LMIs para reguladores fuzzy e observadores fuzzy são construídos usando a Compensação Distribuída Paralela (CDP) (Tanaka and Sugeno, 1992), (Wang et al., 1996) e as condições para estabilidade. Exemplos de projeto para sistemas não-lineares demonstram a utilidade das condições de estabilidade e os métodos de projeto baseados em LMIs.

O Seção 2 apresenta o modelo fuzzy proposto por Takagi-Sugeno. A Seção 3 introduz o regulador fuzzy e suas questões de estabilidade utilizando o modelo fuzzy Takagi-Sugeno. São apresentados também resultados para a estabilidade e projetos descritos por LMIs para reguladores fuzzy, enfocando a estabilidade do sistema, a taxa de decaimento e restrições na entrada e saída de controle. É apresentado um exemplo de aplicação utilizando o modelo do pêndulo invertido na forma contínua. A Seção 4 introduz o sistema aumentado, ou seja, o regulador fuzzy e o observador fuzzy, e suas questões de estabilidade utilizando o modelo fuzzy Takagi-Sugeno. São apresentados também resultados para a estabilidade e projetos descritos por LMIs para o sistema aumentado e um exemplo de aplicação no controle discreto de um pêndulo invertido. Na Seção 5 são discutidos os resultados apresentados.

Neste trabalho, M^T é a transposta da matriz M , $S > 0$ ($S \geq 0$) significa que S é uma matriz positiva definida (semidefinida), $S > T$ ($S \geq T$) significa que $S - T > 0$ ($S - T \geq 0$), e $W = 0$ significa que W é uma matriz zero, isto é, seus elementos são todos iguais a zero. É utilizada a seguinte notação: $\sum_{i < j}^r$, que significa, para $r = 3$,

$$\sum_{i < j}^3 a_{ij} \Leftrightarrow a_{12} + a_{13} + a_{23}.$$

Capítulo 2

Modelo Fuzzy Takagi-Sugeno

No método de projeto proposto, uma dada planta não-linear é representada pelo modelo fuzzy Takagi-Sugeno (Takagi and Sugeno, 1985). Este método de modelagem fuzzy é simples. As dinâmicas do sistema são capturadas por um conjunto de implicações fuzzy que caracterizam relações locais no espaço de estados. A principal característica de um modelo Takagi-Sugeno é a descrição das dinâmicas locais de cada implicação fuzzy (regra) por um modelo de sistema linear. O modelo fuzzy global do sistema é obtido pela combinação fuzzy dos modelos do sistema linear.

Especificamente, o sistema fuzzy Takagi-Sugeno é descrito pelas regras fuzzy SE-ENTÃO, que representam localmente relações lineares entre a entrada e a saída de um sistema.

A descrição local da planta dinâmica a ser controlada está disponível nos termos dos modelos lineares locais, sendo conveniente mencionar que na descrição do Sistema Fuzzy Discreto a notação $\mathbf{x}(t+1)$ e $\mathbf{x}(t)$ representa respectivamente os sinais amostrados $\mathbf{x}(KT+T)$ e $\mathbf{x}(KT)$, sendo T o período de amostragem. Esta notação foi empregada em (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998) por motivo de simplicidade. Portanto tem-se os seguintes modelos lineares locais:

Sistema Fuzzy Contínuo (SFC):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t);\end{aligned}$$

Sistema Fuzzy Discreto (SFD):

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t),\end{aligned}$$

sendo $i = 1, 2, \dots, r$ (r é o número de modelos lineares), o vetor estado $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, o vetor entrada $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, o vetor saída $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^q$, $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $\mathbf{C}_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$. A informação acima é então fundida com as regras SE-ENTÃO disponíveis, onde a i -ésima regra pode ter a forma:



Sistema Fuzzy Contínuo (SFC):

$$\begin{aligned} \text{Regra } i : & \text{ SE } z_1(t) \text{ é } \mathcal{M}_1^i \text{ E } \dots \text{ E } z_p(t) \text{ é } \mathcal{M}_p^i, \\ & \text{ ENTÃO } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t); \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Sistema Fuzzy Discreto (SFD):

$$\begin{aligned} \text{Regra } i : & \text{ SE } z_1(t) \text{ é } \mathcal{M}_1^i \text{ E } \dots \text{ E } z_p(t) \text{ é } \mathcal{M}_p^i, \\ & \text{ ENTÃO } \begin{cases} \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t). \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Tem-se que $\mathcal{M}_j^i$, $j=1,2,\dots,p$ é o conjunto fuzzy j da regra i e $z_1(t), \dots, z_p(t)$ são as variáveis premissas. Seja $\mu_j^i(z_j(t))$ a função de pertinência do conjunto fuzzy $\mathcal{M}_j^i$, e seja

$$w^i(\mathbf{z}(t)) = \prod_{j=1}^p \mu_j^i(z_j(t)), \quad \mathbf{z}(t) = [z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_p(t)].$$

Como $\mu_j^i(z_j(t)) \geq 0$ tem-se, para $i = 1, 2, \dots, r$,

$$w^i(\mathbf{z}(t)) \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{z}(t)) > 0.$$

Uma escolha para a obtenção de um modelo fuzzy Takagi-Sugeno para sistemas não-lineares é adotar $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t)$, sendo $\mathbf{x}(t)$ o vetor de estado do sistema não-linear. Um exemplo na Seção 3.7 ilustra esta idéia.

Desta forma, dado um par $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$, o sistema fuzzy resultante é tido como a média ponderada dos modelos locais, e tem a forma:

Sistema Fuzzy Contínuo (SFC):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{z}(t))(\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t))}{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{z}(t))} \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t))(\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t)) \\ &= \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{A}_i \right) \mathbf{x}(t) + \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{B}_i \right) \mathbf{u}(t) \\ &= \mathbf{A}(\alpha) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\alpha) \mathbf{u}(t). \end{aligned} \quad (2.3)$$

O sistema não forçado ($\mathbf{u}(t) = 0$) é definido como segue:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t)}{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{z}(t))} \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (2.4)$$

A saída para ambos os casos, forçado e não forçado, é dada por

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w^i(z(t)) C_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w^i(z(t))} \\
 &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) C_i x(t) \\
 &= C(\alpha) x(t).
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Sistema Fuzzy Discreto (SFD):

$$\begin{aligned}
 x(t+1) &= \frac{\sum_{i=1}^r w^i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum_{i=1}^r w^i(z(t))} \\
 &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\
 &= \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) A_i \right) x(t) + \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) B_i \right) u(t) \\
 &= A(\alpha) x(t) + B(\alpha) u(t).
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

O sistema não forçado é definido como segue:

$$\begin{aligned}
 x(t+1) &= \frac{\sum_{i=1}^r w^i(z(t)) A_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w^i(z(t))} \\
 &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) A_i x(t).
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

A saída para ambos os casos, forçado e não forçado, é dada por

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w^i(z(t)) C_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w^i(z(t))} \\
 &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) C_i x(t) \\
 &= C(\alpha) x(t).
 \end{aligned}$$

Para $i = 1, 2, \dots, r$,

$$\alpha_i(z(t)) = \frac{w^i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w^i(z(t))}.$$

Note que, para $i = 1, 2, \dots, r$,

$$\alpha_i(z(t)) \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) = 1. \tag{2.8}$$

Os modelos fuzzy Takagi-Sugeno têm sido úteis na descrição aproximada de sistemas não-lineares. Na Seção 3.7 este fato é ilustrado no controle de um pêndulo invertido. É bem conhecido

que sistemas fuzzy aditivos $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, como o modelo fuzzy TSK, podem aproximar uniformemente qualquer função contínua $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ em um domínio compacto (fechado limitado) U (Kosko, 1997). No caso do modelo fuzzy TSK, quanto maior o número de modelos locais, melhor será a aderência do modelo à equação diferencial não-linear da planta.



Capítulo 3

Reguladores com Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno

Utilizou-se o conceito de Compensação Distribuída Paralela (CDP) para projetar reguladores fuzzy para estabilizar sistemas não-lineares descritos por modelos fuzzy. A idéia é projetar um compensador para cada regra do modelo fuzzy. Para cada regra, são utilizadas técnicas de projeto de controle linear. O regulador fuzzy global resultante, que é não-linear em geral, é uma combinação fuzzy de cada regulador linear individual. A CDP oferece um procedimento para projetar um regulador para o modelo fuzzy Takagi-Sugeno, onde cada regra de controle é projetada a partir da correspondente regra de um modelo Takagi-Sugeno da planta. O regulador fuzzy projetado compartilha os mesmos conjuntos de regras com o modelo fuzzy nas partes premissas. Para os modelos fuzzy (2.1) e (2.2), sendo $i = 1, 2, \dots, r$, os reguladores fuzzy via CDP possuem a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} \text{Regra } i : \quad & \text{SE } z_1(t) \text{ é } \mathcal{M}_1^i \text{ E } \dots \text{ E } z_p(t) \text{ é } \mathcal{M}_p^i, \\ & \text{ENTÃO } u(t) = -F_i x(t). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Portanto, de forma análoga à efetuada na obtenção de (2.3), o regulador fuzzy é dado por

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{\sum_{i=1}^r w^i(z(t)) F_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w^i(z(t))} \\ &= -\sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) F_i x(t) \\ &= -F(\alpha) x(t). \end{aligned} \quad (3.2)$$

O objetivo do projeto do regulador fuzzy é determinar os ganhos de realimentação locais F_i nas partes conseqüentes. Para a lei de controle (3.2), as equações (2.3) e (2.6) são dadas por (3.3) e (3.4) respectivamente (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998), tendo em vista (2.8):



Sistema Fuzzy Contínuo (SFC):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\mathbf{z}(t)) \{ \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j \} \mathbf{x}(t) \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(\mathbf{z}(t)) \mathbf{G}_{ii} \mathbf{x}(t) + 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\mathbf{z}(t)) \left\{ \frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right\} \mathbf{x}(t); \quad (3.3)\end{aligned}$$

Sistema Fuzzy Discreto (SFD):

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t+1) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\mathbf{z}(t)) \{ \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j \} \mathbf{x}(t) \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(\mathbf{z}(t)) \mathbf{G}_{ii} \mathbf{x}(t) + 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\mathbf{z}(t)) \left\{ \frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right\} \mathbf{x}(t), \quad (3.4)\end{aligned}$$

sendo

$$\mathbf{G}_{ij} = \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j.$$

3.1 Condições para a Estabilidade de Reguladores Fuzzy

As condições suficientes para a estabilidade de sistemas fuzzy contínuos e discretos no tempo são derivadas usando funções Lyapunov quadráticas do tipo $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{x}(t)$ (Tanaka and Sugeno, 1992). Os principais resultados estão descritos abaixo.

Lema 1 *O ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = 0$ do sistema fuzzy contínuo descrito por (2.4) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum $\mathbf{P}$ tal que*

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_i < 0$$

para $i = 1, 2, \dots, r$; isto é, para todos os subsistemas.

Prova: Segue diretamente da aplicação da função de Lyapunov $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{x}(t)$.

Lema 2 *O ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = 0$ do sistema fuzzy discreto descrito por (2.7) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum $\mathbf{P}$ tal que*

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{P} \mathbf{A}_i - \mathbf{P} < 0$$

para $i = 1, 2, \dots, r$; isto é, para todos os subsistemas.

Prova: Vide (Tanaka and Sugeno, 1992).

Para a apresentação dos resultados para a estabilidade do sistema forçado, será utilizada a definição de número de regras ativas: os sistemas fuzzy (3.3) e (3.4) possuem r regras e para um certo $z(t) = z_0$ o número de regras ativas é igual ao número de termos $\alpha_1(z_0), \dots, \alpha_r(z_0)$ não nulos. Por exemplo, na Figura 3.1 as regras ativas para $z_1(t) \leq a$, $z_1(t) \in (a, b)$, $z_1(t) = b$, $z_1(t) \in (b, c)$, $z_1(t) = c$, $z_1(t) \in (c, d)$, $z_1(t) \geq d$ são respectivamente as regras 1; 1 e 2; 2; 2 e 3; 3; 3 e 4; 4. Assim o número de regras ativas é menor ou igual a dois.

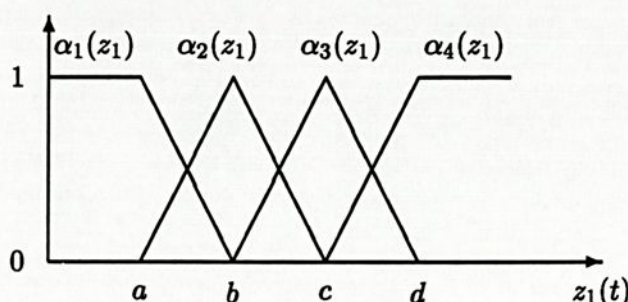


Figura 3.1: Exemplo de um conjunto de 4 regras fuzzy: $\alpha_1(z_1(t))$, $\alpha_2(z_1(t))$, $\alpha_3(z_1(t))$, $\alpha_4(z_1(t)) \in [0, 1]$ e $\alpha_1(z_1(t)) + \alpha_2(z_1(t)) + \alpha_3(z_1(t)) + \alpha_4(z_1(t)) = 1$.

Observe que na Figura 3.1, $\alpha_1(z_1(t))\alpha_3(z_1(t)) = \alpha_1(z_1(t))\alpha_4(z_1(t)) = \alpha_2(z_1(t))\alpha_4(z_1(t)) = 0$, $\forall z_1(t) \in \mathbb{R}$. A existência deste fato também foi explorada no estudo da estabilidade, como será visto nos Lemas 3-6.

Lema 3 O ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema de controle fuzzy contínuo descrito por (3.3) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum P tal que

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} < 0$$

para todo $i = 1, \dots, r$ e

$$\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) \leq 0, \quad i < j$$

para todo $i, j = 1, \dots, r$ excetuando-se os pares (i, j) tais que $\alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t)) = 0, \forall z(t)$.

Prova: Segue diretamente do Lema 1.

Lema 4 O ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema de controle fuzzy discreto descrito por (3.4) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum P tal que

$$G_{ii}^T P G_{ii} - P < 0$$

para todo $i = 1, \dots, r$ e

$$\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) - P \leq 0, \quad i < j$$

para todo $i, j = 1, \dots, r$ excetuando-se os pares (i, j) tais que $\alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t)) = 0, \forall z(t)$.

Prova: Segue diretamente do Lema 2.

Essas condições para estabilidade, em geral, são conservativas. Foram propostas em (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998) condições mais relaxadas que as condições descritas anteriormente.

Lema 5 *Assuma que o número de regras que estão ativas para todo t é menor ou igual a s , sendo $1 < s \leq r$. O ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema de controle fuzzy contínuo descrito por (3.3) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum P e uma matriz simétrica semipositiva definida comum Q tais que*

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} + (s - 1)Q < 0 \quad (3.5)$$

para todo $i = 1, \dots, r$ e

$$\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) - Q \leq 0, \quad i < j \quad (3.6)$$

para todo $i, j = 1, \dots, r$ excetuando-se os pares (i, j) tais que $\alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t)) = 0, \forall z(t)$.

Prova: Vide (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998).

Lema 6 *Assuma que o número de regras que estão ativas para todo t é menor ou igual a s , sendo $1 < s \leq r$. O ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema de controle fuzzy discreto descrito por (3.4) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum P e uma matriz simétrica semipositiva definida comum Q tais que*

$$G_{ii}^T P G_{ii} - P + (s - 1)Q < 0 \quad (3.7)$$

para todo $i = 1, \dots, r$ e

$$\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) - P - Q \leq 0, \quad i < j \quad (3.8)$$

para todo $i, j = 1, \dots, r$ excetuando-se os pares (i, j) tais que $\alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t)) = 0, \forall z(t)$.

Prova: Vide (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998).

3.2 Condições para a Estabilidade de Reguladores Fuzzy

Para analisar a estabilidade do sistema de controle fuzzy é preciso encontrar uma matriz simétrica positiva definida comum P que satisfaça as condições de um dos Lemas 1-6. Portanto, quanto mais conservativas forem as condições de estabilidade, mais difícil será encontrar a matriz P , se não impossível. Nesta seção são obtidas condições de estabilidade, mais relaxadas que as descritas na Seção 3.1. Os Teoremas 1 e 3 apresentam novas condições para os sistemas contínuos e discretos no tempo, respectivamente.

Sistema Fuzzy Contínuo (SFC):

Teorema 1 *Assuma que o número de regras que estão ativas para todo t é menor ou igual a s , sendo $1 < s \leq r$. Considere $i, j = 1, \dots, r$, sendo $i < j$ e defina*

$$Q_i = G_{ii}^T P + P G_{ii}, \quad (3.9)$$

$$Q_{ij} = \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right), \quad (3.10)$$

$$Q_{t_{ij}} = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t)) = 0, \forall z(t), \\ Q_{ij} - Q + P_{ij}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.11)$$

Então, o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema de controle fuzzy contínuo descrito por (3.3) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum P , uma matriz simétrica positiva semidefinida comum Q e matrizes semidefinidas positivas P_{ij} tais que

$$Q_t = \begin{bmatrix} Q_1 + (s-1)Q & Q_{t_{12}} & \dots & Q_{t_{1r}} \\ Q_{t_{12}} & Q_2 + (s-1)Q & \dots & Q_{t_{2r}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{t_{1r}} & Q_{t_{2r}} & \dots & Q_r + (s-1)Q \end{bmatrix} < 0. \quad (3.12)$$

Prova: Considere uma candidata da função Lyapunov $V(x(t)) = x^T(t)Px(t)$, onde $P = P^T > 0$. Então, com a equação (3.3) obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t))x^T(t)[(A_i - B_i F_j)^T P + P(A_i - B_i F_j)]x(t) \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(z(t))x^T(t)[G_{ii}^T P + P G_{ii}]x(t) \\ &\quad + \sum_{i < j}^r 2\alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t))x^T(t) \left[\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) \right] x(t). \end{aligned}$$

Das condições (3.9) e (3.10) tem-se

$$\dot{V}(x(t)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(z(t))x^T(t)Q_i x(t) + \sum_{i < j}^r 2\alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t))x^T(t)Q_{ij} x(t) \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(z(t)) \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}(t) + 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) \mathbf{x}^T(t) (\mathbf{Q}_{ij} - \mathbf{Q}) \mathbf{x}(t) \\
&\quad + 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t).
\end{aligned}$$

No Corolário 4 de (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998) foi demonstrado que

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i^2(z(t)) - \frac{1}{s-1} \sum_{i < j}^r 2\alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) \geq 0.$$

Desta forma, tendo em vista a equação (3.11),

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{x}(t)) &\leq \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(z(t)) \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}(t) + 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) \mathbf{x}^T(t) (\mathbf{Q}_{ij} - \mathbf{Q}) \mathbf{x}(t) \\
&\quad + (s-1) \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(z(t)) \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) \\
&= \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(z(t)) \mathbf{x}^T(t) (\mathbf{Q}_i + (s-1)\mathbf{Q}) \mathbf{x}(t) + 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) \mathbf{x}^T(t) (\mathbf{Q}_{ij} - \mathbf{Q}) \mathbf{x}(t) \\
&\leq \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(z(t)) \mathbf{x}^T(t) (\mathbf{Q}_i + (s-1)\mathbf{Q}) \mathbf{x}(t) \\
&\quad + 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) \mathbf{x}^T(t) (\mathbf{Q}_{ij} - \mathbf{Q} + \mathbf{P}_{ij}) \mathbf{x}(t) \\
&= \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(z(t)) \mathbf{x}^T(t) (\mathbf{Q}_i + (s-1)\mathbf{Q}) \mathbf{x}(t) \\
&\quad + 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{t}_{ij} \mathbf{x}(t) \\
&= \mathbf{x}^T(t) [\alpha_1 \mathbf{I} \quad \alpha_2 \mathbf{I} \quad \dots \quad \alpha_r \mathbf{I}] \\
&\quad \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 + (s-1)\mathbf{Q} & \mathbf{Q} \mathbf{t}_{12} & \dots & \mathbf{Q} \mathbf{t}_{1r} \\ \mathbf{Q} \mathbf{t}_{12} & \mathbf{Q}_2 + (s-1)\mathbf{Q} & \dots & \mathbf{Q} \mathbf{t}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Q} \mathbf{t}_{1r} & \mathbf{Q} \mathbf{t}_{2r} & \dots & \mathbf{Q}_r + (s-1)\mathbf{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \mathbf{I} \\ \alpha_2 \mathbf{I} \\ \vdots \\ \alpha_r \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).
\end{aligned}$$

sendo $\mathbf{I}$ a matriz identidade, $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Então, da equação (3.12), $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) < 0$ para $\mathbf{x}(t) \neq 0$.

Corolário 1 Se $r = s$, então pode-se adotar $\mathbf{Q} = 0$ nas condições do Teorema 1.

Prova: Como $s=r$, então existe $z(t)$ tal que todas as r regras estão ativas, ou seja,

$$\alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) \neq 0,$$

para $i, j = 1, 2, \dots, r$.

Nesta situação, de (3.11) e (3.12) tem-se

$$Qt = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_{12} + P_{12} & \dots & Q_{1r} + P_{1r} \\ Q_{12} + P_{12} & Q_2 & \dots & Q_{2r} + P_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{1r} + P_{1r} & Q_{2r} + P_{2r} & \dots & Q_r \end{bmatrix} + Qt', \quad (3.14)$$

sendo

$$Qt' = \begin{bmatrix} (s-1)Q & -Q & \dots & -Q \\ -Q & (s-1)Q & \dots & -Q \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -Q & -Q & \dots & (s-1)Q \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Agora será demonstrado que, se $r=s$, então $Qt' \geq 0$ e desta forma Qt' pode ser removida para a obtenção da condição $Qt < 0$. Assim, sem perda de generalidade, será adotado no Teorema 1 $Qt' = 0$, o que equivale a $Q = 0$.

De (3.15),

$$\begin{aligned} Qt' &= Qt'_1 + Qt'_2 + \dots + Qt'_{(r-1)} \\ &= \begin{bmatrix} Q & -Q & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -Q & Q & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q & 0 & -Q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -Q & 0 & Q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + \dots \\ &\quad + \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & 0 & \dots & -Q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -Q & 0 & 0 & 0 & \dots & Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q & -Q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -Q & Q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q & 0 & -Q & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -Q & 0 & Q & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q & 0 & 0 & \dots & -Q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -Q & 0 & 0 & \dots & Q \end{bmatrix} + \dots \\ &\quad \dots + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & Q & -Q \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -Q & Q \end{bmatrix}. \quad (3.16) \end{aligned}$$

tal que a matriz $Q_{t'}^i$ possui $(s - i)$ termos, para $i = 1, 2, \dots, (r - 1)$.

Como $Q = Q^T \geq 0$, então existe L tal que $Q = L^T L$. Assim, $Q_{t'}$ dada pela equação (3.16) pode ser representada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 Q_{t'} = & \begin{bmatrix} L^T \\ -L^T \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^T \\ -L^T \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} L^T \\ 0 \\ -L^T \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^T \\ 0 \\ -L^T \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^T + \dots + \begin{bmatrix} L^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -L^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -L^T \end{bmatrix}^T \\
 & + \begin{bmatrix} 0 \\ L^T \\ -L^T \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ L^T \\ -L^T \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 \\ L^T \\ 0 \\ -L^T \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ L^T \\ 0 \\ -L^T \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^T + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ L^T \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -L^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ L^T \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -L^T \end{bmatrix}^T + \dots \\
 & \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ L^T \\ -L^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ L^T \\ -L^T \end{bmatrix}^T \geq 0.
 \end{aligned}$$

Então cada matriz do lado direito de (3.16) é semi-definida positiva e assim, $Q_{t'} \geq 0$, o que conclui a prova.

Observação 1 É conveniente registrar que o caso $r = s = 2$ é o mais abordado nos exemplos de aplicação de sistemas de controle com modelos TSK, por exemplo (Teixeira and Žak, 1999), (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998), (Ma et al., 1998), (Cao et al., 1997b), (Cao et al., 1997a).

O teorema a seguir mostra que os resultados apresentados neste trabalho são no mínimo iguais aos disponíveis na literatura.

Teorema 2 Se as condições do Lema 5 são satisfeitas, então as condições do Teorema 1 também serão.

Prova: De (3.6) e (3.10),

$$Q_{ij} - Q \leq 0,$$

para $i, j = 1, \dots, r$, sendo $i < j$.

Assim, de (3.11), para $i, j = 1, \dots, r$, sendo $i < j$,

$$Q_{t_{ij}} = 0$$

ou

$$Q_{t_{ij}} = Q_{ij} - Q + P_{ij} \text{ e } P_{ij} \geq 0. \quad (3.17)$$

Assim, quando $Q_{t_{ij}}$ é dada por (3.17) e $P_{ij} = -Q_{ij} + Q \geq 0$, obtém-se

$$Q_{t_{ij}} = 0, \quad (3.18)$$

para $i, j = 1, \dots, r$, sendo $i < j$.

Agora, de (3.5) e (3.9),

$$Q_i + (s-1)Q < 0, \quad (3.19)$$

para $i = 1, \dots, r$.

Logo, de (3.12), (3.18) e (3.19),

$$Q_t = \begin{bmatrix} Q_1 + (s-1)Q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q_2 + (s-1)Q & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Q_r + (s-1)Q \end{bmatrix} < 0$$

e a prova está concluída.

Sistema Fuzzy Discreto (SFD):

Para resolver o problema de estabilidade para o caso discreto utiliza-se o complemento de Schur (Boyd et al., 1994) da seguinte forma: o sistema forçado para esse caso é estável se

$$(A - BF)^T P (A - BF) - P < 0.$$

Multiplicando-se a desigualdade à esquerda e à direita por P^{-1} , como descrito em (Wang et al., 1996), e definindo-se uma nova variável $X = X^T = P^{-1}$, pode-se reescrever a equação anterior como

$$X(A - BF)^T X^{-1}(A - BF)X - X < 0.$$

Aplicando o complemento de Schur (Boyd et al., 1994), tendo em vista que $X > 0$, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} X & X(A - BF)^T \\ (A - BF)X & X \end{bmatrix} > 0.$$

Teorema 3 Assuma que o número de regras que estão ativas para todo t é menor ou igual a s , sendo $1 < s \leq r$. Considere $i, j = 1, \dots, r$, sendo $i < j$ e defina

$$M_{ii} = G_{ii} = A_i - B_i F_i, \quad (3.20)$$

$$M_{ij} = \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} = \frac{A_i - B_i F_j + A_j - B_j F_i}{2}, \quad (3.21)$$

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} R_{ij} & W_{ij}^T \\ W_{ij} & S_{ij} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (3.22)$$

$$N_{ii} = \begin{bmatrix} X - (s-1)Y & XM_{ii}^T \\ M_{ii}X & X \end{bmatrix} e \quad (3.23)$$

$$N_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t)) = 0, \forall z(t), \\ \begin{bmatrix} X + Y - R_{ij} & XM_{ij}^T - W_{ij}^T \\ M_{ij}X - W_{ij} & X - S_{ij} \end{bmatrix}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.24)$$

Então, o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema de controle fuzzy discreto descrito por (3.4) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum $X = P^{-1}$, uma matriz simétrica positiva semidefinida comum Y e matrizes semidefinidas positivas T_{ij} tais que

$$N_t = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & \dots & N_{1r} \\ N_{12} & N_{22} & \dots & N_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{1r} & N_{2r} & \dots & N_{rr} \end{bmatrix} > 0. \quad (3.25)$$

Prova: Considere uma candidata da função Lyapunov $V(x(t)) = x^T(t)Px(t)$, onde $P > 0$. Tem-se que

$$\begin{aligned} \Delta V(x(t)) &= V(x(t+1)) - V(x(t)) \\ &= x^T(t) \left[[A(\alpha) - B(\alpha)F(\alpha)]^T P [A(\alpha) - B(\alpha)F(\alpha)] - P \right] x(t). \end{aligned}$$

Para obter $\Delta V(x(t)) < 0$, é necessário que

$$[A(\alpha) - B(\alpha)F(\alpha)]^T P [A(\alpha) - B(\alpha)F(\alpha)] - P < 0.$$

Aplicando Schur, da expressão acima obtém-se:

$$T(\alpha) = \begin{bmatrix} X & X[A(\alpha) - B(\alpha)F(\alpha)]^T \\ [A(\alpha) - B(\alpha)F(\alpha)]X & X \end{bmatrix} > 0,$$

sendo

$$X = P^{-1}, \quad A(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t))A_i, \quad B(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t))B_i \quad \text{e} \quad F(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t))F_i.$$

Desenvolvendo-se a expressão de $T(\alpha)$ acima tem-se:

$$T(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(z(t)) \begin{bmatrix} X & XM_{ii}^T \\ M_{ii}X & X \end{bmatrix} + 2 \sum_{i<j}^r \alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t)) \begin{bmatrix} X & XM_{ij}^T \\ M_{ij}X & X \end{bmatrix} > 0.$$

Agora,

$$T(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(z(t)) \begin{bmatrix} X & XM_{ii}^T \\ M_{ii}X & X \end{bmatrix} + 2 \sum_{i<j}^r \alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t)) \begin{bmatrix} X+Y & XM_{ij}^T \\ M_{ij}X & X \end{bmatrix} - 2 \sum_{i<j}^r \alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t)) \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

sendo $Y \geq 0$. Então, pelo Corolário 4 de (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998), tem-se

$$\begin{aligned} T(\alpha) &\geq \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(z(t)) \begin{bmatrix} X & XM_{ii}^T \\ M_{ii}X & X \end{bmatrix} + 2 \sum_{i<j}^r \alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t)) \begin{bmatrix} X+Y & XM_{ij}^T \\ M_{ij}X & X \end{bmatrix} \\ &\quad - (s-1) \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(z(t)) \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(z(t)) \begin{bmatrix} X - (s-1)Y & XM_{ii}^T \\ M_{ii}X & X \end{bmatrix} + 2 \sum_{i<j}^r \alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t)) \begin{bmatrix} X+Y & XM_{ij}^T \\ M_{ij}X & X \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Da expressão (3.22) tem-se

$$\begin{aligned} T(\alpha) &\geq \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(z(t)) \begin{bmatrix} X - (s-1)Y & XM_{ii}^T \\ M_{ii}X & X \end{bmatrix} + 2 \sum_{i<j}^r \alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t)) \begin{bmatrix} X+Y & XM_{ij}^T \\ M_{ij}X & X \end{bmatrix} \\ &\quad - 2 \sum_{i<j}^r \alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t)) \begin{bmatrix} R_{ij} & W_{ij}^T \\ W_{ij} & S_{ij} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(z(t)) \begin{bmatrix} X - (s-1)Y & XM_{ii}^T \\ M_{ii}X & X \end{bmatrix} \\ &\quad + 2 \sum_{i<j}^r \alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t)) \begin{bmatrix} X+Y-R_{ij} & XM_{ij}^T - W_{ij}^T \\ M_{ij}X - W_{ij} & X - S_{ij} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Substituindo-se as equações (3.23) e (3.24) na equação (3.26) tem-se

$$T(\alpha) = [\alpha_1 I \ \alpha_2 I \ \dots \ \alpha_r I] \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & \dots & N_{1r} \\ N_{12} & N_{22} & \dots & N_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{1r} & N_{2r} & \dots & N_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 I \\ \alpha_2 I \\ \vdots \\ \alpha_r I \end{bmatrix}.$$

Portanto, se a condição (3.25) se mantém, $\Delta V(x(t)) < 0$ para $x(t) \neq 0$, o que conclui a prova.

Corolário 2 Se $r = s$, então pode-se adotar $Y = 0$ nas condições do Teorema 3.

Prova: Como $s=r$, então existe $z(t)$ tal que todas as r regras estão ativas, ou seja,

$$\alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t)) \neq 0,$$

para $i, j = 1, 2, \dots, r$.

Nesta situação, de (3.23), (3.24) e (3.25) tem-se

$$Nt = \begin{bmatrix} X & XM_{11}^T & X - R_{12} & XM_{12}^T - W_{12}^T & \dots \\ M_{11}X & X & M_{12}X - W_{12} & X - S_{12} & \dots \\ X - R_{12} & XM_{12}^T - W_{12}^T & X & XM_{22}^T & \dots \\ M_{12}X - W_{12} & X - S_{12} & M_{22}X & X & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ X - R_{1r} & XM_{1r}^T - W_{1r}^T & X - R_{2r} & XM_{2r}^T - W_{2r}^T & \dots \\ M_{1r}X - W_{1r} & X - S_{1r} & M_{2r}X - W_{2r} & X - S_{2r} & \dots \\ X - R_{1r} & XM_{1r}^T - W_{1r}^T & & & \\ M_{1r}X - W_{1r} & X - S_{1r} & & & \\ X - R_{2r} & XM_{2r}^T - W_{2r}^T & & & \\ M_{2r}X - W_{2r} & X - S_{2r} & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ X & XM_{rr}^T & & & \\ M_{rr}X & X & & & \end{bmatrix} - Nt',$$

sendo

$$Nt' = \begin{bmatrix} (s-1)Y & 0 & -Y & 0 & \dots & -Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -Y & 0 & (s-1)Y & 0 & \dots & -Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -Y & 0 & -Y & 0 & \dots & (s-1)Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Agora será demonstrado que, se $r=s$, então $Nt' \geq 0$ e desta forma Nt' não contribuirá para a obtenção da condição $Nt > 0$. Assim, sem perda de generalidade, será adotado no Teorema 3 $Nt' = 0$, o que equivale a $Y = 0$.

Como $Y = Y^T \geq 0$, então existe L tal que $Y = L^T L$. Assim, de modo análogo ao que foi feito com Qt' para o caso contínuo na prova do Corolário 1, (3.27) pode ser representado da

seguinte forma:

$$\begin{aligned} Nt' = & \begin{bmatrix} L^T \\ 0 \\ -L^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^T \\ 0 \\ -L^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} L^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -L^T \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -L^T \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T + \dots + \begin{bmatrix} L^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -L^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -L^T \\ 0 \end{bmatrix}^T \\ & + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L^T \\ 0 \\ -L^T \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L^T \\ 0 \\ -L^T \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -L^T \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -L^T \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -L^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -L^T \\ 0 \end{bmatrix}^T + \dots \\ & \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ L^T \\ 0 \\ -L^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ L^T \\ 0 \\ -L^T \\ 0 \end{bmatrix}^T \geq 0. \end{aligned}$$

Desta forma, $Nt' \geq 0$, o que conclui a prova.

Teorema 4 Se as condições do Lema 6 são satisfeitas, então as condições do Teorema 3 também serão.

Prova: Considere que existem $P = P^T > 0$ e $Q = Q^T \geq 0$ tais que as condições (3.7) e (3.8) do Lema 6 são satisfeitas. Então, multiplicando-se (3.7) e (3.8), pela esquerda e pela direita, por $X = P^{-1}$, obtém-se:

$$XG_{ii}^T X^{-1} G_{ii} X - X + (s-1)XQX < 0 \tag{3.28}$$



para todo $i = 1, \dots, r$ e

$$\mathbf{X} \left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right)^T \mathbf{X}^{-1} \left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right) \mathbf{X} - \mathbf{X} - \mathbf{X} \mathbf{Q} \mathbf{X} \leq 0, \quad i < j \quad (3.29)$$

para todo $i, j = 1, \dots, r$ excetuando-se os pares (i, j) tais que $\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t)) = 0, \forall \mathbf{z}(t)$.

Aplicando-se o complemento de Schur nas equações acima, tendo-se em vista as equações (3.20) e (3.21), então (3.28) e (3.29) podem ser reescritas respectivamente como:

$$\mathbf{N}_{ii} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} - (s-1)\mathbf{Y} & \mathbf{X}\mathbf{M}_{ii}^T \\ \mathbf{M}_{ii}\mathbf{X} & \mathbf{X} \end{bmatrix} > 0 \quad \text{e} \quad (3.30)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} + \mathbf{Y} & \mathbf{X}\mathbf{M}_{ij}^T \\ \mathbf{M}_{ij}\mathbf{X} & \mathbf{X} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (3.31)$$

sendo $\mathbf{Y} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{P}^{-1} \geq 0$.

Agora, de (3.24),

$$\mathbf{N}_{ij} = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbf{N}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} + \mathbf{Y} & \mathbf{X}\mathbf{M}_{ij}^T \\ \mathbf{M}_{ij}\mathbf{X} & \mathbf{X} \end{bmatrix} - \mathbf{T}_{ij}, \quad (3.32)$$

sendo que $\mathbf{T}_{ij} \geq 0$ foi definida em (3.22). Quando $\mathbf{N}_{ij}$ é dada por (3.32), então, pela equação (3.31), existe $\mathbf{T}_{ij} \geq 0$ tal que $\mathbf{N}_{ij} = 0$, para $i, j = 1, \dots, r$, sendo $i < j$.

Assim, de (3.30) e $\mathbf{N}_{ij} = 0$, então

$$\mathbf{N}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{N}_{rr} \end{bmatrix} > 0,$$

o que conclui a prova.

Observação 2 O resultado descrito no Corolário 1 resulta em simplificação das LMIs propostas no Teorema 1. Estas simplificações não produzem um ganho significativo no procedimento numérico da solução das LMIs consideradas. As justificativas para a apresentação deste Corolário, foi a demonstração que para $r = s$ o método proposto não necessita da variável $\mathbf{Q}$, sendo que esta variável foi acrescentada seguindo as idéias expostas em (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998). Assim, para $r = s$, o método proposto é totalmente independente dos resultados expostos em (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998). Estas observações são válidas para o resultado descrito no Corolário 2, trocando-se $\mathbf{Q}$ por $\mathbf{Y}$.

Os exemplos a seguir comparam o critério de estabilidade proposto neste trabalho com o proposto em (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998). Para os dois exemplos abaixo, os ganhos de

realimentação F_1 e F_2 , para cada valor de a e b , são determinados seleccionando-se $[-2 \ -2]$ como autovalores para os dois modelos locais na CDP no caso contínuo e $[1/2 \ 1/2]$ no caso discreto. As expressões para F_1 e F_2 são:

Caso Contínuo:

$$\begin{aligned} F_1 &= \begin{bmatrix} 6 & -6 \end{bmatrix} \\ F_2 &= \begin{bmatrix} \frac{7+a}{b} & \frac{15}{b} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Caso Discreto:

$$\begin{aligned} F_1 &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{-39}{4} \end{bmatrix} \\ F_2 &= \begin{bmatrix} \frac{-0.35+a}{b} & \frac{-9.98}{b} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

As Figuras 3.2 e 3.3 mostram as áreas factíveis para o caso contínuo e discreto, respectivamente.

Exemplo 1: Caso Contínuo

Considere o SFC onde $r=s=2$. Neste caso utilizaram-se os resultados do Corolário 1.

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} a & -10 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A Fig. 3.2 mostra a área factível para os dois métodos, variando-se a e b na região coberta pela figura.

Exemplo 2: Caso Discreto

Considere o SFD onde $r=s=2$. Neste caso utilizou-se os resultados do Corolário 2.

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} a & -10 \\ 1 & 0.65 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A Fig. 3.3 mostra a área factível para os dois métodos, variando-se a e b na região coberta pela figura.

É observado nestas figuras que as condições apresentadas por (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998) levam a resultados mais conservativos para ambos os casos contínuo e discreto pois sua área factível é menor. Estes resultados, aliados aos Teoremas 2 e 4, mostram que os critérios de estabilidade propostos neste trabalho são mais gerais do que os apresentados em (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998).

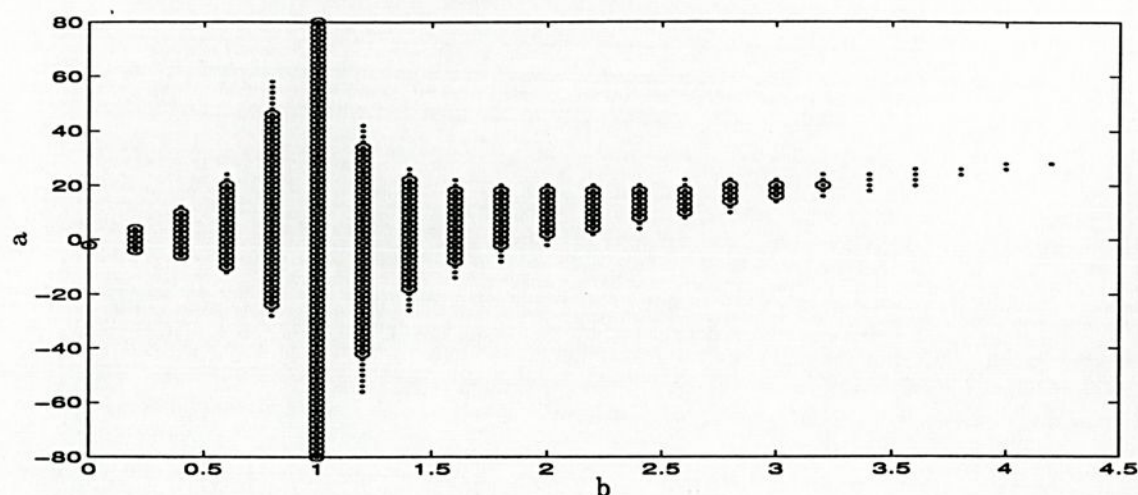


Figura 3.2: Caso contínuo: Área factível do método proposto em (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998) indicada por ("o") e área factível do método proposto neste trabalho indicada por (".").

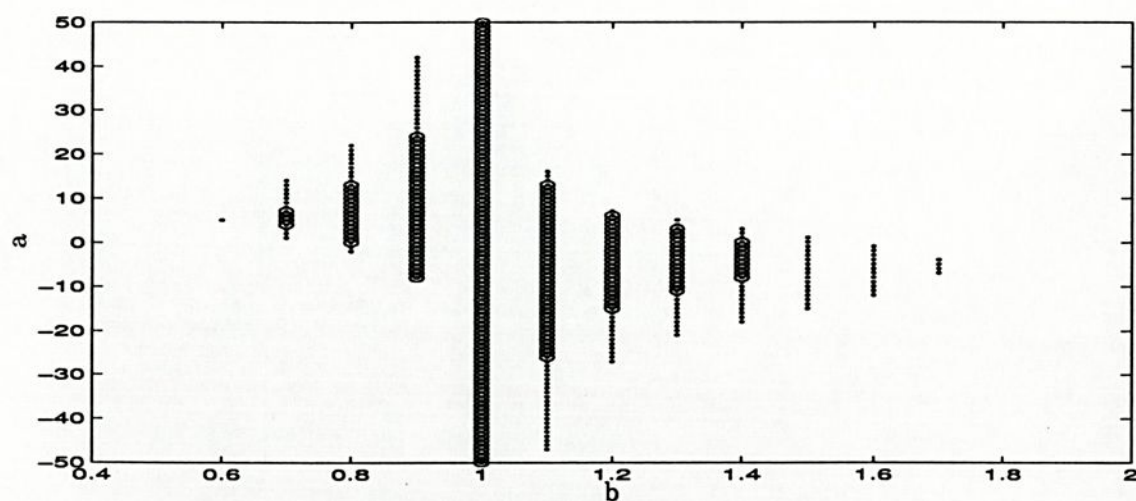


Figura 3.3: Caso Discreto: Área factível do método proposto em (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998) indicada por ("o") e área factível do método proposto neste trabalho indicada por (".").

3.3 Projeto de Reguladores Fuzzy com LMIs

Para as novas condições de estabilidade propostas neste trabalho, o problema de projeto para determinar os ganhos de realimentação F_i , para $i = 1, \dots, r$, pode ser definido por meio de LMIs como segue:

Sistema Fuzzy Contínuo (SFC):

Encontre X , Y , P_{ij} e M_i para $i, j = 1, 2, \dots, r$, sendo $i < j$, satisfazendo $X > 0$, $Y \geq 0$, $P_{ij} \geq 0$ e

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1r} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1r} & C_{2r} & \dots & C_{rr} \end{bmatrix} < 0, \quad (3.33)$$

sendo

$$C_{ii} = A_i X - B_i M_i + X A_i^T - M_i^T B_i^T + (s-1)Y,$$

$$C_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t)) = 0, \forall z(t), \\ \frac{1}{2} (A_i X - B_i M_j + A_j X - B_j M_i + X A_i^T - M_j^T B_i^T + X A_j^T - M_i^T B_j^T) + \\ \quad -Y + P_{ij}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

As condições acima são LMIs com respeito às variáveis X , Y , P_{ij} e M_i e são obtidas diretamente do Teorema 1. Pode-se encontrar uma matriz positiva definida X , uma matriz semidefinida positiva Y , matrizes semidefinidas positivas P_{ij} e M_i satisfazendo as LMIs ou determinar que X , Y , P_{ij} e M_i não existem. Este é um problema de factibilidade. Se existe solução, os ganhos de realimentação F_i , uma P comum e uma Q comum podem ser obtidas da seguinte forma:

$$P = X^{-1}, \quad F_i = M_i X^{-1} \quad \text{e} \quad Q = PYP,$$

a partir das soluções X , Y e M_i .

As condições acima são LMIs que devem ser aplicadas quando $r \neq s$. Quando $r = s$, levando-se em conta os resultados do Corolário 1, pode-se por simplicidade utilizar as mesmas condições descritas acima, considerando-se agora $Y = 0$.

Sistema Fuzzy Discreto (SFD):

Encontre X , Y , R_{ij} , S_{ij} , W_{ij} e M_i para $i, j = 1, 2, \dots, r$, sendo $i < j$, satisfazendo $X > 0$, $Y \geq 0$,

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1r} \\ D_{12} & D_{22} & \dots & D_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{1r} & D_{2r} & \dots & D_{rr} \end{bmatrix} > 0 \quad \text{e} \quad (3.34)$$

$$\mathbf{T}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ij} & \mathbf{W}_{ij}^T \\ \mathbf{W}_{ij} & \mathbf{S}_{ij} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (3.35)$$

sendo

$$\mathbf{D}_{ii} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} - (s-1)\mathbf{Y} & \mathbf{X}\mathbf{A}_i^T - \mathbf{M}_i^T\mathbf{B}_i^T \\ \mathbf{A}_i\mathbf{X} - \mathbf{B}_i\mathbf{M}_i & \mathbf{X} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t)) = 0, \forall \mathbf{z}(t), \\ \begin{bmatrix} \mathbf{X} + \mathbf{Y} - \mathbf{R}_{ij} \\ \frac{1}{2}(\mathbf{A}_i\mathbf{X} - \mathbf{B}_i\mathbf{M}_j + \mathbf{A}_j\mathbf{X} - \mathbf{B}_j\mathbf{M}_i) - \mathbf{W}_{ij} \\ \frac{1}{2}(\mathbf{X}\mathbf{A}_i^T - \mathbf{M}_j^T\mathbf{B}_i^T + \mathbf{X}\mathbf{A}_j^T - \mathbf{M}_i^T\mathbf{B}_j^T) - \mathbf{W}_{ij}^T \\ \mathbf{X} - \mathbf{S}_{ij} \end{bmatrix}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

As condições acima seguem diretamente do Teorema 3.

Se existe solução, os ganhos de realimentação $\mathbf{F}_i$ e uma $\mathbf{P}$ comum podem ser obtidos da seguinte forma:

$$\mathbf{P} = \mathbf{X}^{-1}, \text{ e } \mathbf{F}_i = \mathbf{M}_i\mathbf{X}^{-1},$$

a partir das soluções $\mathbf{X}$ e $\mathbf{M}_i$.

As condições acima são LMIs que devem ser aplicadas quando $r \neq s$. Quando $r = s$, levando-se em conta os resultados do Corolário 2, pode-se por simplicidade utilizar as mesmas condições descritas acima, considerando-se $\mathbf{Y} = 0$.

3.4 Taxa de Decaimento

É importante considerar não somente a estabilidade, mas também outros índices de desempenho do sistema controlado tais como velocidade de resposta, restrições da entrada e da saída. A velocidade de resposta está relacionada com a taxa de decaimento, isto é, o maior expoente Lyapunov.

Sistema Fuzzy Contínuo (SFC):

Do Teorema 1, para uma candidata da função Lyapunov $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t)$ então $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) < 0$ se $\mathbf{Q}t < 0$, sendo $\mathbf{Q}t$ dado em (3.12). Agora, utilizando-se o resultado da equação (2.8) tem-se que

$$\mathbf{P} = [\alpha_1\mathbf{I} \quad \alpha_2\mathbf{I} \quad \dots \quad \alpha_r\mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{P} & \dots & \mathbf{P} \\ \mathbf{P} & \mathbf{P} & \dots & \mathbf{P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{P} & \mathbf{P} & \dots & \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1\mathbf{I} \\ \alpha_2\mathbf{I} \\ \vdots \\ \alpha_r\mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

Logo, a condição que $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq -2\gamma V(\mathbf{x}(t))$ (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998) para toda

trajetória é satisfeita para

$$Q_t + 2\gamma \begin{bmatrix} P & P & \dots & P \\ P & P & \dots & P \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P & P & \dots & P \end{bmatrix} < 0,$$

ou seja

$$\begin{bmatrix} Q_1 + (s-1)Q + 2\gamma P & Qt_{12}^* & \dots & Qt_{1r}^* \\ Qt_{12}^* & Q_2 + (s-1)Q + 2\gamma P & \dots & Qt_{2r}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Qt_{1r}^* & Qt_{2r}^* & \dots & Q_r + (s-1)Q + 2\gamma P \end{bmatrix} < 0,$$

sendo

$$Qt_{ij}^* = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t)) = 0, \forall z(t), \\ Q_{ij} - Q + P_{ij} + 2\gamma P, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e $\gamma > 0$. Portanto, o maior limite inferior para a taxa de decaimento que pode ser encontrado usando uma função Lyapunov quadrática é obtido resolvendo-se o seguinte problema de minimização dos autovalores generalizado (GEVP) (Boyd et al., 1994) em P e γ :

Maximize γ e encontre $X, Y, P_{ij}, M_1, \dots, M_r$ sujeito a $X > 0, Y \geq 0, P_{ij} \geq 0$ e

$$\begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & \dots & C'_{1r} \\ C'_{12} & C'_{22} & \dots & C'_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C'_{1r} & C'_{2r} & \dots & C'_{rr} \end{bmatrix} < 0, \quad (3.36)$$

sendo

$$C'_{ii} = A_i X - B_i M_i + X A_i^T - M_i^T B_i^T + (s-1)Y + 2\gamma X,$$

$$C'_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t)) = 0, \forall z(t), \\ \frac{1}{2} (A_i X - B_i M_j + A_j X - B_j M_i + X A_i^T - M_j^T B_i^T + X A_j^T - M_i^T B_j^T) + \\ \quad -Y + 2\gamma X + P_{ij}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Novamente, os ganhos de realimentação F_i , uma P comum e uma Q comum podem ser obtidos da seguinte forma:

$$P = X^{-1}, F_i = M_i X^{-1} \text{ e } Q = PYP,$$

a partir das soluções X, Y e M_i .

Sistema Fuzzy Discreto (SFD):

A condição que $\Delta V(x(t)) \leq (\gamma^2 - 1)V(x(t))$ (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998) para toda trajetória é equivalente a

$$\begin{bmatrix} N''_{11} & N''_{12} & \dots & N''_{1r} \\ N''_{12} & N''_{22} & \dots & N''_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N''_{1r} & N''_{2r} & \dots & N''_{rr} \end{bmatrix} > 0,$$

sendo

$$N''_{ii} = \begin{bmatrix} \gamma^2 X - (s-1)Y & XM_{ii}^T \\ M_{ii}X & X \end{bmatrix} e$$

$$N''_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t)) = 0, \forall z(t), \\ \begin{bmatrix} \gamma^2 X + Y - R_{ij} & XM_{ij}^T - W_{ij}^T \\ M_{ij}X - W_{ij} & X - S_{ij} \end{bmatrix}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

sendo $\gamma < 1$. Portanto, obtém-se o seguinte problema de minimização dos autovalores generalizado (GEVP) (Boyd et al., 1994) em P e β sendo $\beta = \gamma^2$:

Minimize β e encontre $X, Y, R_{ij}, S_{ij}, W_{ij}, M_1, \dots, M_r$ sujeito a $X > 0, Y \geq 0$,

$$\begin{bmatrix} D'_{11} & D'_{12} & \dots & D'_{1r} \\ D'_{12} & D'_{22} & \dots & D'_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D'_{1r} & D'_{2r} & \dots & D'_{rr} \end{bmatrix} > 0 e$$

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} R_{ij} & W_{ij}^T \\ W_{ij} & S_{ij} \end{bmatrix} \geq 0,$$

sendo

$$D'_{ii} = \begin{bmatrix} \beta X - (s-1)Y & XA_i^T - M_i^T B_i^T \\ A_i X - B_i M_i & X \end{bmatrix},$$

$$D'_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t)) = 0, \forall z(t), \\ \begin{bmatrix} \beta X + Y - R_{ij} \\ \frac{1}{2} (A_i X - B_i M_j + A_j X - B_j M_i) - W_{ij} \\ \frac{1}{2} (XA_i^T - M_j^T B_i^T + XA_j^T - M_i^T B_j^T) - W_{ij}^T \\ X - S_{ij} \end{bmatrix}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como no caso anterior, os ganhos de realimentação F_i e uma P comum podem ser obtidos da seguinte forma:

$$P = X^{-1}, \text{ e } F_i = M_i X^{-1},$$

a partir das soluções X e M_i .

Deve ser notado que $0 \leq \beta < 1$.

3.5 Restrição da Entrada

Assuma que a condição inicial $x(0)$ é conhecida. A restrição $\|u(t)\|_2 \leq \mu$ é imposta para todo tempo $t \geq 0$ se as LMIs

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & X \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.37)$$

e

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{M}_i^T \\ \mathbf{M}_i & \mu^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.38)$$

se mantém (vide (Boyd et al., 1994) e (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998)), sendo $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$ e $\mathbf{M}_i = \mathbf{F}_i \mathbf{X}$.

Um problema de projeto de reguladores fuzzy estáveis satisfazendo a restrição da entrada pode ser definido como segue:

Sistema Fuzzy Contínuo (SFC):

Encontre $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{P}_{ij}$ e $\mathbf{M}_i$ para $i, j = 1, 2, \dots, r$, sendo $i < j$, satisfazendo $\mathbf{X} > 0$, $\mathbf{Y} \geq 0$ (se $r \neq s$), $\mathbf{P}_{ij} \geq 0$, (3.33), (3.37) e (3.38).

Sistema Fuzzy Discreto (SFD):

Encontre $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{R}_{ij}$, $\mathbf{S}_{ij}$, $\mathbf{W}_{ij}$ e $\mathbf{M}_i$ para $i, j = 1, 2, \dots, r$, sendo $i < j$, satisfazendo $\mathbf{X} > 0$, $\mathbf{Y} \geq 0$ (se $r \neq s$), (3.34), (3.35), (3.37) e (3.38).

Para ambos os casos contínuo e discreto, se $r = s$, pelos Corolários 1 e 2, pode-se adotar $\mathbf{Y} = 0$.

3.6 Restrição da Saída

Assuma que a condição inicial $\mathbf{x}(0)$ é conhecida. A restrição $\|y(t)\|_2 \leq \lambda$ é imposta para todo tempo $t \geq 0$ se as LMIs

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}(0)^T \\ \mathbf{x}(0) & \mathbf{X} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.39)$$

e

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X} \mathbf{C}_i^T \\ \mathbf{C}_i \mathbf{X} & \lambda^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.40)$$

se mantém (vide (Boyd et al., 1994) e (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998)), sendo $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$.

Um problema de projeto de reguladores fuzzy estáveis satisfazendo a restrição da saída pode ser definido como segue:

Sistema Fuzzy Contínuo (SFC):

Encontre $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{P}_{ij}$ e $\mathbf{M}_i$ para $i, j = 1, 2, \dots, r$, sendo $i < j$, satisfazendo $\mathbf{X} > 0$, $\mathbf{Y} \geq 0$ (se $r \neq s$), $\mathbf{P}_{ij} \geq 0$, (3.33), (3.39) e (3.40).

Sistema Fuzzy Discreto (SFD):

Encontre $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{R}_{ij}$, $\mathbf{S}_{ij}$, $\mathbf{W}_{ij}$ e $\mathbf{M}_i$ para $i, j = 1, 2, \dots, r$, sendo $i < j$, satisfazendo $\mathbf{X} > 0$, $\mathbf{Y} \geq 0$ (se $r \neq s$), (3.34), (3.35), (3.39) e (3.40).

Para ambos os casos contínuo e discreto, se $r = s$, pelos Corolários 1 e 2, pode-se adotar $\mathbf{Y} = 0$.

3.7 Exemplos de Aplicação

Considere o problema do equilíbrio e balanço de um pêndulo invertido sobre um carro, conforme ilustrado na Fig. 3.4. As equações de movimento para o pêndulo invertido, conforme descrito em (Ma et al., 1998), são

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1.0}{[(M+m)(J+ml^2) - m^2l^2 \cos^2 x_1]} [-f_1(M+m)x_2 - m^2l^2 x_2^2 (\sin x_1) \cos x_1 \\ &\quad + f_0 ml x_4 \cos x_1 + (M+m)mgl \sin x_1 - ml(\cos x_1)u] \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{1.0}{[(M+m)(J+ml^2) - m^2l^2 \cos^2 x_1]} [f_1 ml x_2 \cos x_1 + (J+ml^2)ml x_2^2 \sin x_1 \\ &\quad - f_0(J+ml^2)x_4 - m^2gl^2 (\sin x_1) \cos x_1 + (J+ml^2)u]\end{aligned}\quad (3.41)$$

sendo que x_1 é o ângulo (rad) do pêndulo com relação ao eixo vertical, x_2 é a velocidade angular (rad/s), x_3 é o deslocamento (m) do carro, e x_4 é a velocidade (m/s) do carro, $g=9.8 \text{ m/s}^2$ é a aceleração da gravidade, m é a massa (kg) do pêndulo, M é a massa (kg) do carro, f_0 é o coeficiente de atrito (N/m/s) do carro, f_1 é o coeficiente de atrito (N/rad/s) do pêndulo, l é o comprimento (m) do centro de massa da haste até a sua base, J é o momento de inércia (kgm^2) do pêndulo em torno do seu centro de massa, e u é a força (N) aplicada no carro. Tem-se que, conforme descrito em (Ma et al., 1998), $M=1.3282 \text{ kg}$, $m=0.22 \text{ kg}$, $f_0=22.915 \text{ N/m/s}$, $f_1=0.007056 \text{ N/rad/s}$, $l=0.304 \text{ m}$, $J=0.004963 \text{ kgm}^2$.

Para projetar o regulador fuzzy deve-se ter um modelo fuzzy que represente as dinâmicas da planta não-linear. Portanto, primeiro representa-se o sistema pelo modelo fuzzy Takagi-Sugeno. Aqui o modelo global do sistema foi obtido através da combinação fuzzy de dois modelos lineares locais. Desta forma aproximou-se o sistema através das seguintes duas regras do modelo fuzzy, como efetuado em (Ma et al., 1998):

$$\begin{aligned}\text{Regra 1 da Planta} &: \text{SE } x_1(t) \text{ está em torno de } 0, \\ &\quad \text{ENTÃO } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_1 \mathbf{x}(t). \end{cases} \\ \text{Regra 2 da Planta} &: \text{SE } x_1(t) \text{ está em torno de } \pm \pi/3, \\ &\quad \text{ENTÃO } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_2 \mathbf{x}(t). \end{cases}\end{aligned}$$

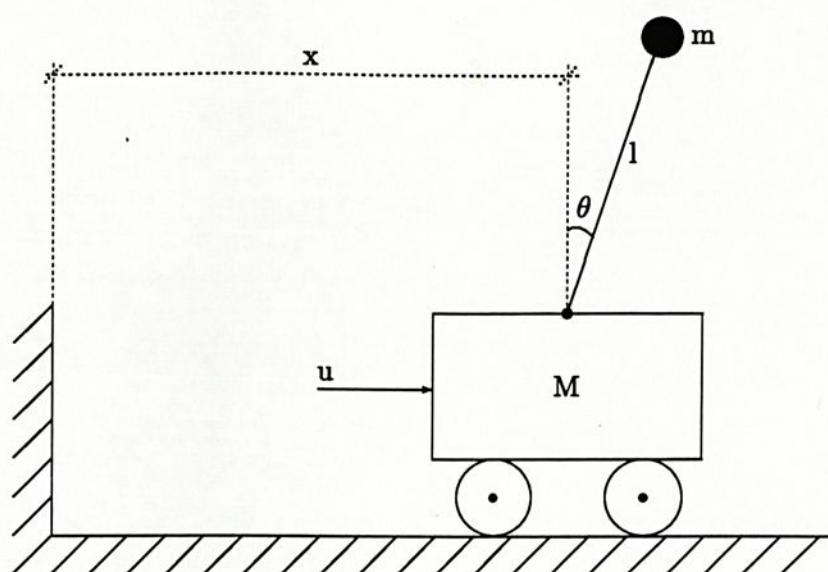


Figura 3.4: Pêndulo invertido sobre um carro.

A lei de controle resultante é

Regra 1 do regulador : SE $x_1(t)$ está em torno de 0,

ENTÃO $u(t) = -F_1 x(t)$.

Regra 2 do regulador : SE $x_1(t)$ está em torno de $\pm \pi/3$,

ENTÃO $u(t) = -F_2 x(t)$.

sendo

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ a_{21} & a_{22} & 0.0 & a_{24} \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ a_{41} & a_{42} & 0.0 & a_{44} \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ b_2 \\ 0.0 \\ b_4 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \end{bmatrix},$$

$$a_{21} = \frac{(M+m)mg l}{a}, \quad a_{22} = \frac{-f_1(M+m)}{a}, \quad a_{24} = \frac{f_0 m l}{a},$$

$$a_{41} = \frac{-m^2 g l^2}{a}, \quad a_{42} = \frac{f_1 m l}{a}, \quad a_{44} = \frac{-f_0(J + m l^2)}{a},$$

$$b_2 = \frac{-m l}{a}, \quad b_4 = \frac{J + m l^2}{a},$$

$$a = (M+m)(J + m l^2) - m^2 l^2,$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ a'_{21} & a'_{22} & 0.0 & a'_{24} \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ a'_{41} & a'_{42} & 0.0 & a'_{44} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ b'_2 \\ 0.0 \\ b'_4 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 a'_{21} &= \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \frac{(M+m)mgl}{a'}, & a'_{22} &= \frac{-f_1(M+m)}{a'}, & a'_{24} &= \frac{f_0 ml \cos 60^\circ}{a'}, \\
 a'_{41} &= -\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \frac{m^2 gl^2 \cos 60^\circ}{a'}, & a'_{42} &= \frac{f_1 ml \cos 60^\circ}{a'}, & a'_{44} &= \frac{-f_0(J+ml^2)}{a'}, \\
 b'_2 &= \frac{-ml \cos 60^\circ}{a'}, & b'_4 &= \frac{J+ml^2}{a'}, \\
 a' &= (M+m)(J+ml^2) - m^2 l^2 (\cos 60^\circ)^2.
 \end{aligned}$$

Um procedimento metódico para a determinação dos modelos lineares locais é apresentado em (Teixeira and Žak, 1999).

As funções de pertinência para as regras 1 e 2 da planta são:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1(x_1(t)) &= \left\{ 1.0 - \frac{1.0}{1.0 + e^{-7.0[x_1(t) - \pi/6]}} \right\} \left\{ \frac{1.0}{1.0 + e^{-7.0[x_1(t) + \pi/6]}} \right\} \\
 &\text{e} \\
 \alpha_2(x_1(t)) &= 1 - \alpha_1(x_1(t))
 \end{aligned}$$

e suas respectivas curvas estão ilustradas na Fig. 3.5.

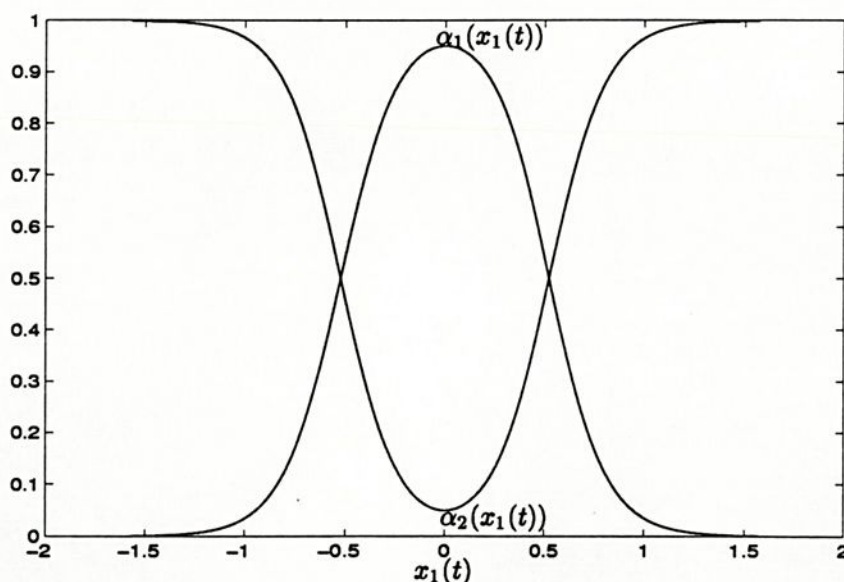


Figura 3.5: Funções de pertinência para as regras 1 e 2 da planta.

Como $r = s = 2$, os projetos descritos a seguir consideram os resultados do Corolário 1. Estes projetos foram realizados utilizando o software LMISol (Oliveira et al., 1997). Todas simulações apresentadas nos próximos exemplos empregaram o modelo não-linear do pêndulo descrito em (3.41) e foram feitas com o MATLAB.

Exemplo 3 - Estabilidade: Primeiro projetou-se um regulador fuzzy estável considerando-se a taxa de decaimento nula, utilizando-se os resultados descritos na Seção 3.3. O problema de projeto do sistema fuzzy contínuo é definido como segue:

Encontre $\mathbf{X}$, $\mathbf{P}_{12}$, $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$ sujeito a $\mathbf{X} > 0$, $\mathbf{P}_{12} \geq 0$ e (3.33), sendo $\mathbf{Y} = 0$.

O software LMISol forneceu as matrizes $\mathbf{X}$, $\mathbf{P}_{12}$, $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$ que solucionam as LMIs acima. A solução obtida foi:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \mathbf{M}_1 \mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} -96.4207 & -16.0122 & -4.8356 & -32.6352 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{F}_2 &= \mathbf{M}_2 \mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} -153.5370 & -25.9934 & -7.8314 & -38.5572 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{P} &= \begin{bmatrix} 131.9837 & 26.8515 & 8.6039 & 17.1465 \\ 26.8515 & 6.7121 & 1.8408 & 4.2475 \\ 8.6039 & 1.8408 & 1.1127 & 1.3198 \\ 17.1465 & 4.2475 & 1.3198 & 3.3138 \end{bmatrix} > 0 \text{ e} \\ \mathbf{P}_{12} &= \begin{bmatrix} 0.3559 & 0.0436 & -0.1574 & -0.2040 \\ 0.0436 & 0.8975 & -0.1975 & -0.0232 \\ -0.1574 & -0.1975 & 0.9587 & -0.0087 \\ -0.2040 & -0.0232 & -0.0087 & 1.1316 \end{bmatrix} \geq 0. \end{aligned}$$

Para ilustrar a validade da lei de controle projetada, que visou apenas a estabilidade, foi feita a simulação digital do sistema original (3.41) com a lei de controle (3.2) para $r = 2$, empregando $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ projetados acima. A Fig. 3.6 apresenta os resultados obtidos. Para efeito de comparação a Fig. 3.6 apresenta também outros resultados de simulações referentes aos próximos exemplos.

Exemplo 4 - Taxa de Decaimento: Pode ser visto no Exemplo 3 que o tempo de estabilização do sistema é $t \cong 6\text{seg}$. Na prática, é importante considerar o tempo da resposta transitória. O problema de projeto que considera a taxa de decaimento é definido como segue:

Maximize γ e encontre $\mathbf{X}$, $\mathbf{P}_{12}$, $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$ sujeito a $\mathbf{X} > 0$, $\mathbf{P}_{12} \geq 0$ e (3.36), sendo $\mathbf{Y} = 0$.

Quando $\gamma = 1.5 < \gamma_{\max}$, obtém-se pelo LMISol as matrizes $\mathbf{X}$, $\mathbf{P}_{12}$, $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$ que solucionam as LMIs acima. Foram obtidos os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \mathbf{M}_1 \mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} -1587.4244 & -315.4873 & -466.1611 & -413.3526 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{F}_2 &= \mathbf{M}_2 \mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} -2874.8561 & -572.7537 & -846.8954 & -732.0994 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{P} &= \begin{bmatrix} 4871.2449 & 976.0819 & 1459.1957 & 1217.8839 \\ 976.0819 & 196.0875 & 292.5022 & 244.2353 \\ 1459.1957 & 292.5022 & 444.7780 & 367.3122 \\ 1217.8839 & 244.2353 & 367.3122 & 306.0708 \end{bmatrix} > 0 \text{ e} \\ \mathbf{P}_{12} &= \begin{bmatrix} 0.3917 & -0.1176 & -0.0144 & -0.7514 \\ -0.1176 & 1.0871 & -0.0363 & -0.0134 \\ -0.0144 & -0.0363 & 0.0900 & -0.0612 \\ -0.7514 & -0.0134 & -0.0612 & 1.9719 \end{bmatrix} \geq 0. \end{aligned}$$

As linhas contínuas na Fig. 3.6 mostram as respostas de $x_1(t)$ e $u(t)$, sendo que o tempo de estabilização é $t \cong 2.7\text{seg}$. O regulador projetado diminuiu o tempo de estabilização do sistema, mas exigiu uma alta amplitude da entrada de controle.

Neste exemplo não foi utilizado $\gamma_{max} = 2.03$ pois os ganhos de realimentação obtidos neste caso praticamente não são implementáveis.

Exemplo 5 - Taxa de Decaimento+Restrição na Entrada de Controle: Pode ser visto no Exemplo 4 que $\max_t \|u(t)\|_2 = 2704.01$. Na prática existe uma limitação da entrada. É importante considerar não somente a taxa de decaimento mas também a restrição na entrada de controle. O problema de projeto que considera a taxa de decaimento e a restrição na entrada de controle é definido como segue:

Maximize γ e encontre X , P_{12} , M_1 e M_2 sujeito a $X > 0$, $P_{12} \geq 0$, (3.36), (3.37) e (3.38), sendo $Y = 0$, $\mu = 200$ e $x(0) = [0.96 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

Note que 0.96 rad corresponde a 55° .

Quando $\gamma = \gamma_{max} = 0.85$, a solução obtida foi:

$$F_1 = M_1 X^{-1} = \begin{bmatrix} -100.4075 & -19.4875 & -12.0272 & -36.3688 \end{bmatrix},$$

$$F_2 = M_2 X^{-1} = \begin{bmatrix} -191.6522 & -38.7406 & -23.0668 & -49.0006 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 2.0030 & 0.4128 & 0.3602 & 0.4194 \\ 0.4128 & 0.0854 & 0.0730 & 0.0854 \\ 0.3602 & 0.0730 & 0.1061 & 0.0891 \\ 0.4194 & 0.0854 & 0.0891 & 0.1012 \end{bmatrix} > 0 \text{ e}$$

$$P_{12} = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 0.2080 & -0.8032 & 0.0057 & -0.1572 \\ -0.8032 & 3.2590 & -0.0124 & 0.5138 \\ 0.0057 & -0.0124 & 0.0008 & -0.0098 \\ -0.1572 & 0.5138 & -0.0098 & 0.1743 \end{bmatrix} \geq 0.$$

A linha pontilhada na Fig. 3.6 mostra a resposta $x_1(t)$ e $u(t)$, onde o tempo para estabilizar o sistema é $t \cong 4.3\text{seg}$. O regulador projetado também realizou a restrição da entrada pois $\max_t \|u(t)\|_2 = 180.03 < \mu$.

Exemplo 6 - Estabilidade+Restrição na Entrada de Controle: Também é possível projetar um regulador fuzzy estável satisfazendo a restrição da entrada, para a restrição da entrada $\mu = 200$ e $x(0) = [0.96 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

Encontre X , P_{12} , M_1 e M_2 sujeito a $X > 0$, $P_{12} \geq 0$, (3.33), (3.37) e (3.38), sendo $Y = 0$, $\mu = 200$ e $x(0) = [0.96 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

A solução é obtida quando

$$F_1 = M_1 X^{-1} = \begin{bmatrix} -68.3823 & -13.2795 & -9.0490 \times 10^{-6} & -25.5947 \end{bmatrix},$$

$$F_2 = M_2 X^{-1} = \begin{bmatrix} -106.1515 & -21.5707 & -1.3709 \times 10^{-5} & -27.0206 \end{bmatrix},$$

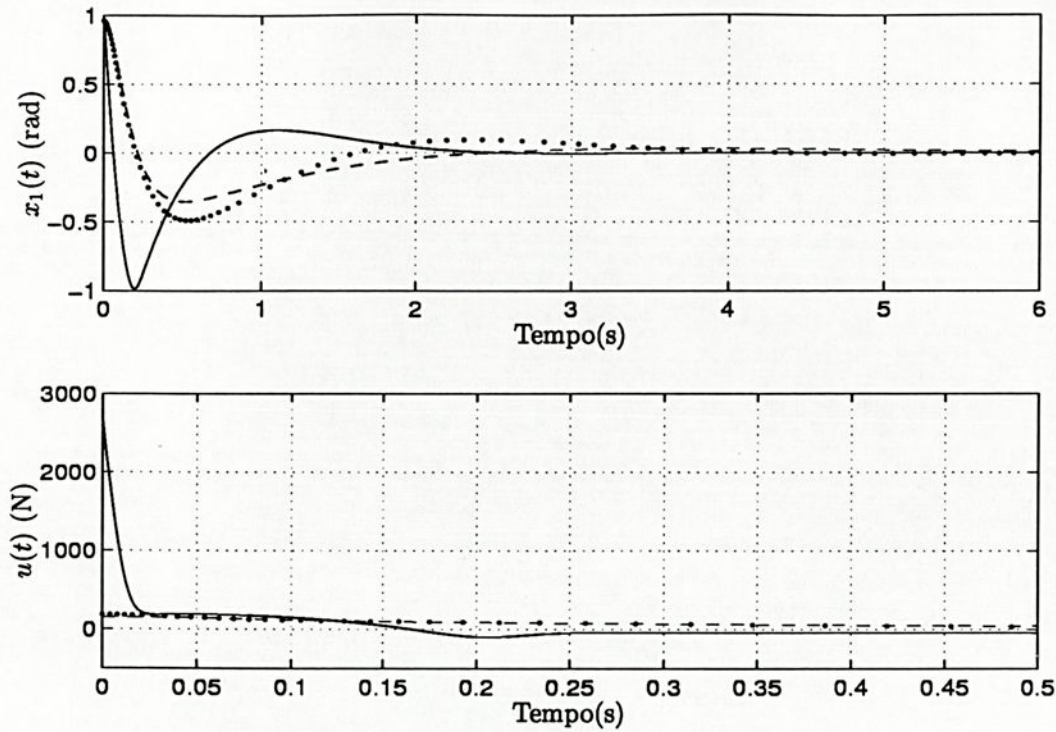


Figura 3.6: Respostas de $x_1(t)$ e $u(t)$ para condição inicial $\mathbf{x}(0) = [0.96 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ e considerando-se os casos: apenas estabilidade (linha tracejada); apenas taxa de decaimento (linha contínua); taxa de decaimento e restrição na entrada (linha pontilhada).

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.5107 & 0.1073 & 2.5515 \times 10^{-7} & 0.0873 \\ 0.1073 & 0.0226 & 0.5210 \times 10^{-7} & 0.0178 \\ 2.5515 \times 10^{-7} & 0.5210 \times 10^{-7} & 0.0695 \times 10^{-7} & 0.6347 \times 10^{-7} \\ 0.0873 & 0.0178 & 0.6347 \times 10^{-7} & 0.0218 \end{bmatrix} > 0 \text{ e}$$
$$\mathbf{P}_{12} = 10^2 \cdot \begin{bmatrix} 113.6072 & -452.7603 & 3.8481 & -78.7145 \\ -452.7603 & 1824.6033 & -14.2441 & 301.9384 \\ 3.8481 & -14.2441 & 10.8879 & -3.3622 \\ -78.7145 & 301.9384 & -3.3622 & 61.6110 \end{bmatrix} \geq 0.$$

A linha tracejada na Fig. 3.7 mostra a resposta de $x_3(t)$ e $u(t)$. Pode ser determinado que $\max_t \|u(t)\|_2 = 101.47 < \mu$.

A variável $x_3(t)$ possui um tempo de estabilização muito superior a 15 seg. Esse tempo não é mostrado na Fig. 3.7, sendo mostrado na figura apenas o valor máximo que $x_3(t)$ atinge.

Exemplo 7 - Estabilidade+Restrição na Entrada de Controle+Restrição na Saída de Controle: A resposta do sistema de controle no exemplo 6 tem um grande valor de saída ($\max_t \|x_3(t)\|_2 = 7.65$) visto que a restrição na saída não é considerada no projeto de regulador fuzzy. Para melhorar a resposta, pode-se projetar um regulador fuzzy adicionando-se a restrição na saída.

Encontre $\mathbf{X}$, $\mathbf{P}_{12}$, $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$ sujeito a $\mathbf{X} > 0$, $\mathbf{P}_{12} \geq 0$, (3.33), (3.37), (3.38) e (3.40), sendo

$Y = 0$, $\mu = 200$, $\lambda = 3.6$ e $x(0) = [0.96 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

A solução é obtida quando

$$F_1 = M_1 X^{-1} = \begin{bmatrix} -107.5916 & -21.3158 & -22.7633 & -36.7818 \end{bmatrix},$$

$$F_2 = M_2 X^{-1} = \begin{bmatrix} -178.0852 & -36.1143 & -40.4190 & -45.9869 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 1.0554 & 0.2181 & 0.2480 & 0.2230 \\ 0.2181 & 0.0453 & 0.0505 & 0.0455 \\ 0.2480 & 0.0505 & 0.1436 & 0.0605 \\ 0.2230 & 0.0455 & 0.0605 & 0.0557 \end{bmatrix} > 0 \text{ e}$$

$$P_{12} = 10^2 \cdot \begin{bmatrix} 107.8741 & -471.9367 & 0.1726 & -44.7636 \\ -471.9367 & 2106.5348 & 2.2412 & 169.1742 \\ 0.1726 & 2.2412 & 0.2463 & -2.0568 \\ -44.7636 & 169.1742 & -2.0568 & 36.1378 \end{bmatrix} \geq 0.$$

A linha contínua na Fig. 3.7 mostra a resposta de $x_3(t)$ e $u(t)$. A resposta do sistema de controle satisfaz as restrições $\max_t \|u(t)\|_2 = 167.90 < \mu$ e $\max_t \|x_3(t)\|_2 = 1.88 < \lambda$.

Os resultados das simulações dos exemplos acima atestam o bom desempenho dos sistemas de controle projetados.

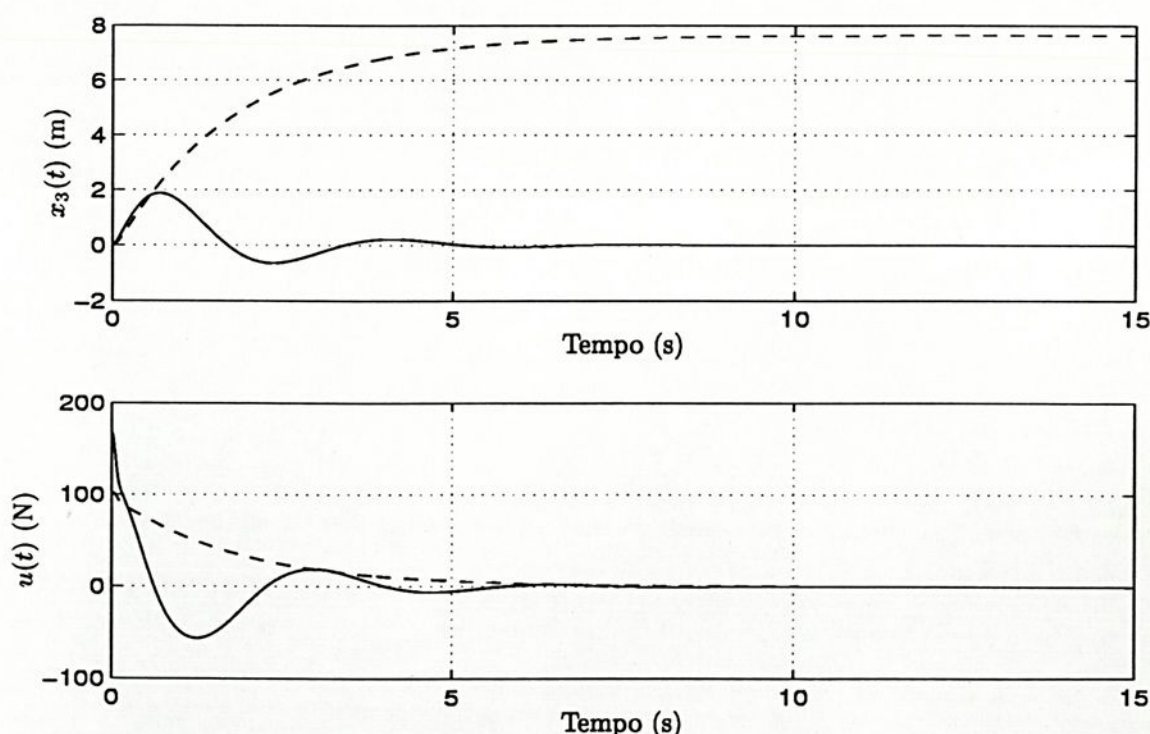


Figura 3.7: Respostas de $x_3(t)$ e $u(t)$ para condição inicial $x(0) = [0.96 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ e considerando-se os casos: estabilidade e restrição na entrada (linha tracejada); estabilidade, restrição na entrada e restrição na saída (linha contínua).

Capítulo 4

Observadores com Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno

Foi proposto na Seção 3.3 projetos baseados em LMIs para reguladores fuzzy. O regulador fuzzy tem as leis de realimentação de estados lineares locais nas partes consequentes. Entretanto, em problemas de controle reais, nem sempre pode-se medir todos os estados de um sistema. Nesta seção propõe-se um observador fuzzy para estimar as variáveis de estado do modelo fuzzy Takagi-Sugeno.

Os observadores fuzzy devem satisfazer

$$\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty \text{ e } \|\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)\| < \infty, \forall t \geq 0,$$

sendo que $\hat{\mathbf{x}}(t)$ denota o vetor de estado estimado por um observador fuzzy. Esta condição garante que o erro entre o vetor de estado $\mathbf{x}(t)$ da planta dinâmica fuzzy e o vetor de estado estimado $\hat{\mathbf{x}}(t)$ pelo observador fuzzy converge para 0. Os observadores fuzzy são projetados por meio da CDP.

Para o projeto de observadores fuzzy, considere dois casos com respeito às variáveis premissas $\mathbf{z}_1(t) \sim \mathbf{z}_p(t)$:

- *Caso A*: $\mathbf{z}_1(t) \sim \mathbf{z}_p(t)$ dependem apenas das variáveis de estado disponíveis;
- *Caso B*: $\mathbf{z}_1(t) \sim \mathbf{z}_p(t)$ dependem das variáveis de estado não disponíveis;

A - Caso A

Para $i = 1, 2, \dots, r$, os observadores para estimar as variáveis de estado dos modelos dinâmicos fuzzy (2.3) e (2.6) são projetados como segue.

Sistema Fuzzy Contínuo (SFC):

Regra i do Observador : SE $z_1(t)$ é $\mathcal{M}_1^i$ E ... E $z_p(t)$ é $\mathcal{M}_p^i$,



$$\text{ENTÃO } \dot{\hat{x}}(t) = A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + H_i \{y(t) - \hat{y}(t)\}.$$

Sistema Fuzzy Discreto (SFD):

Regra i do Observador : SE $z_1(t)$ é $\mathcal{M}_1^i$ E ... E $z_p(t)$ é $\mathcal{M}_p^i$,

$$\text{ENTÃO } \hat{x}(t+1) = A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + H_i \{y(t) - \hat{y}(t)\}.$$

A saída final do observador fuzzy para ambos os sistemas, contínuo e discreto, é dada pela equação:

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^r w^i(z(t)) C_i \hat{x}(t). \quad (4.1)$$

O observador fuzzy possui as leis do observador de estado linear nas suas partes consequentes. Desta forma, o estado estimado final do observador fuzzy é:

Sistema Fuzzy Contínuo (SFC):

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w^i(z(t)) \{A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + H_i (y(t) - \hat{y}(t))\}}{\sum_{i=1}^r w^i(z(t))} \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) \{A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + H_i (y(t) - \hat{y}(t))\}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Sistema Fuzzy Discreto (SFD):

$$\begin{aligned} \hat{x}(t+1) &= \frac{\sum_{i=1}^r w^i(z(t)) \{A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + H_i (y(t) - \hat{y}(t))\}}{\sum_{i=1}^r w^i(z(t))} \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) \{A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + H_i (y(t) - \hat{y}(t))\}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

sendo utilizado o mesmo peso $w^i(z(t))$ da i -ésima regra fuzzy do sistema fuzzy contínuo (2.3) e discreto (2.6). Os parâmetros do observador são H_i , para $i = 1, 2, \dots, r$. O projeto dos observadores fuzzy é a determinação dos ganhos locais H_i nas partes consequentes.

Substituindo-se (2.5) e (4.1) em (4.2) e (4.3) tem-se:

Sistema Fuzzy Contínuo (SFC):

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) A_i \hat{x}(t) + \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) B_i u(t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) H_i C_j \{x(t) - \hat{x}(t)\}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Sistema Fuzzy Discreto (SFD):

$$\begin{aligned} \hat{x}(t+1) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) A_i \hat{x}(t) + \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) B_i u(t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) H_i C_j \{x(t) - \hat{x}(t)\}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Utilizando-se o estado estimado final $\hat{x}(t)$, (3.1) e (3.2), obtém-se o seguinte regulador fuzzy:

$$\begin{aligned} \text{Regra } i : \quad & \text{SE } z_1(t) \text{ é } \mathcal{M}_1^i \text{ E } \dots \text{ E } z_p(t) \text{ é } \mathcal{M}_p^i, \\ & \text{ENTÃO } u(t) = -F_i \hat{x}(t). \end{aligned}$$

Portanto, a saída final do regulador fuzzy é dada por

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) F_i \hat{x}(t). \quad (4.6)$$

Substituindo-se (4.6) em (2.3), (2.6), (4.4) e (4.5), obtém-se:

Sistema Fuzzy Contínuo (SFC):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) A_i x(t) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) B_i F_j \hat{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) \{A_i - B_i F_j\} \hat{x}(t) \\ \quad + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) H_i C_j \{x(t) - \hat{x}(t)\}. \end{cases}$$

Sistema Fuzzy Discreto (SFD):

$$\begin{cases} x(t+1) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) A_i x(t) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) B_i F_j \hat{x}(t) \\ \hat{x}(t+1) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) \{A_i - B_i F_j\} \hat{x}(t) \\ \quad + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) H_i C_j \{x(t) - \hat{x}(t)\}. \end{cases}$$

Seja $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$. Então

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) \{A_i - H_i C_j\} e(t).$$

Portanto, o sistema de controle que contém o regulador fuzzy e o observador fuzzy (sistema de controle aumentado) é dado por:

Sistema Fuzzy Contínuo (SFC):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) \{A_i - B_i F_j\} x(t) \\ \quad + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) B_i F_j e(t) \\ \dot{e}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) \{A_i - H_i C_j\} e(t). \end{cases}$$

Sistema Fuzzy Discreto (SFD):

$$\begin{cases} x(t+1) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) \{A_i - B_i F_j\} x(t) \\ \quad + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) B_i F_j e(t) \\ e(t+1) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) \{A_i - H_i C_j\} e(t). \end{cases}$$

Portanto, o sistema aumentado é representado da seguinte forma:

Sistema Fuzzy Contínuo (SFC):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_a(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\mathbf{z}(t)) \mathbf{G}_{ij}^a \mathbf{x}_a(t) \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(\mathbf{z}(t)) \mathbf{G}_{ii}^a \mathbf{x}_a(t) + 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\mathbf{z}(t)) \left\{ \frac{\mathbf{G}_{ij}^a + \mathbf{G}_{ji}^a}{2} \right\} \mathbf{x}_a(t).\end{aligned}\quad (4.7)$$

Sistema Fuzzy Discreto (SFD):

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_a(t+1) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\mathbf{z}(t)) \mathbf{G}_{ij}^a \mathbf{x}_a(t) \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(\mathbf{z}(t)) \mathbf{G}_{ii}^a \mathbf{x}_a(t) + 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\mathbf{z}(t)) \left\{ \frac{\mathbf{G}_{ij}^a + \mathbf{G}_{ji}^a}{2} \right\} \mathbf{x}_a(t).\end{aligned}\quad (4.8)$$

Em (4.7) e (4.8)

$$\mathbf{x}_a(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{G}_{ij}^a = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j & \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j \\ 0 & \mathbf{A}_i - \mathbf{H}_i \mathbf{C}_j \end{bmatrix}.$$

As representações do sistema aumentado nas formas (4.7) e (4.8) foram obtidas em (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998).

B - Caso B

Neste caso, as variáveis premissas $\mathbf{z}(t)$ são desconhecidas visto que elas dependem de variáveis de estado da planta, não disponíveis. Desta forma utiliza-se $\hat{\mathbf{z}}(t)$, que depende das variáveis de estado estimadas, no lugar de $\mathbf{z}(t)$. Portanto, será utilizado $w^i(\hat{\mathbf{z}}(t))$ ao invés de $w^i(\mathbf{z}(t))$ no controlador fuzzy (4.6). Em outras palavras, neste caso $\alpha_i(\mathbf{z}(t)) \neq \alpha_i(\hat{\mathbf{z}}(t))$ porque $\mathbf{z}(t) \neq \hat{\mathbf{z}}(t)$, em geral. Portanto, o regulador fuzzy para o caso B é dado abaixo:

$$\mathbf{u}(t) = - \sum_{i=1}^r \alpha_i(\hat{\mathbf{z}}(t)) \mathbf{F}_i \hat{\mathbf{x}}(t). \quad (4.9)$$

Para o observador fuzzy contínuo (ou discreto), será utilizada a equação (4.10) (ou (4.11)) ao invés de (4.2) (ou (4.3)).

Sistema Fuzzy Contínuo (SFC):

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(\hat{\mathbf{z}}(t)) \{ \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) + \mathbf{H}_i (\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)) \}. \quad (4.10)$$

Sistema Fuzzy Discreto (SFD):

$$\hat{\mathbf{x}}(t+1) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(\hat{\mathbf{z}}(t)) \{ \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) + \mathbf{H}_i (\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)) \}. \quad (4.11)$$

A saída final do observador fuzzy para ambos os sistemas, contínuo e discreto, é

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(\hat{z}(t)) C_i \hat{x}(t), \quad (4.12)$$

ao invés da equação (4.1).

Para a obtenção das equações do sistema aumentado tem-se:

Sistema Fuzzy Contínuo (SFC):

Substituindo-se na equação (2.3) e (4.10), a equação (2.5), o regulador fuzzy (4.9) e a equação (4.12) tem-se:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(\hat{z}(t)) A_i \hat{x}(t) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\hat{z}(t)) \alpha_j(\hat{z}(t)) B_i F_j \hat{x}(t) \\ \quad + \sum_{i=1}^r \alpha_i(\hat{z}(t)) H_i \left\{ \sum_{j=1}^r \alpha_j(z(t)) C_j x(t) - \sum_{s=1}^r \alpha_s(\hat{z}(t)) C_s \hat{x}(t) \right\} \\ \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) A_i x(t) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(\hat{z}(t)) B_i F_j \hat{x}(t). \end{cases} \quad (4.13)$$

Sistema Fuzzy Discreto (SFD):

Substituindo-se na equação (2.6) e (4.11), a equação (2.5), o regulador fuzzy (4.9) e a equação (4.12) tem-se:

$$\begin{cases} \hat{x}(t+1) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(\hat{z}(t)) A_i \hat{x}(t) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\hat{z}(t)) \alpha_j(\hat{z}(t)) B_i F_j \hat{x}(t) \\ \quad + \sum_{i=1}^r \alpha_i(\hat{z}(t)) H_i \left\{ \sum_{j=1}^r \alpha_j(z(t)) C_j x(t) - \sum_{s=1}^r \alpha_s(\hat{z}(t)) C_s \hat{x}(t) \right\} \\ x(t+1) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) A_i x(t) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(\hat{z}(t)) B_i F_j \hat{x}(t). \end{cases} \quad (4.14)$$

A equações (4.13) e (4.14) são equivalentes a:

Sistema Fuzzy Contínuo (SFC):

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(\hat{z}(t)) A_i \hat{x}(t) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\hat{z}(t)) \alpha_j(\hat{z}(t)) B_i F_j \hat{x}(t) \\ \quad + \sum_{i=1}^r \alpha_i(\hat{z}(t)) H_i \left\{ \sum_{j=1}^r \alpha_j(z(t)) C_j x(t) - \sum_{s=1}^r \alpha_s(\hat{z}(t)) C_s \hat{x}(t) \right\} \\ \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) A_i x(t) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(\hat{z}(t)) B_i F_j \hat{x}(t) \\ \quad + \sum_{i=1}^r \alpha_i(\hat{z}(t)) A_i x(t) - \sum_{i=1}^r \alpha_i(\hat{z}(t)) A_i x(t) \\ \quad + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\hat{z}(t)) \alpha_j(\hat{z}(t)) H_i C_j x(t) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\hat{z}(t)) \alpha_j(\hat{z}(t)) H_i C_j x(t). \end{cases}$$

Sistema Fuzzy Discreto (SFD):

$$\begin{cases} \hat{x}(t+1) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(\hat{z}(t)) A_i \hat{x}(t) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\hat{z}(t)) \alpha_j(\hat{z}(t)) B_i F_j \hat{x}(t) \\ \quad + \sum_{i=1}^r \alpha_i(\hat{z}(t)) H_i \left\{ \sum_{j=1}^r \alpha_j(z(t)) C_j x(t) - \sum_{s=1}^r \alpha_s(\hat{z}(t)) C_s \hat{x}(t) \right\} \\ x(t+1) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) A_i x(t) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(\hat{z}(t)) B_i F_j \hat{x}(t) \\ \quad + \sum_{i=1}^r \alpha_i(\hat{z}(t)) A_i x(t) - \sum_{i=1}^r \alpha_i(\hat{z}(t)) A_i x(t) \\ \quad + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\hat{z}(t)) \alpha_j(\hat{z}(t)) H_i C_j x(t) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\hat{z}(t)) \alpha_j(\hat{z}(t)) H_i C_j x(t). \end{cases}$$

Seja $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$. Então

Sistema Fuzzy Contínuo (SFC):

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(\hat{z}(t)) \alpha_s(\hat{z}(t)) \{A_i - A_j + H_j(C_s - C_j) - (B_i - B_j)F_s\} x(t) \\ & + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(\hat{z}(t)) \alpha_s(\hat{z}(t)) \{A_j - H_j C_s + (B_i - B_j)F_s\} e(t). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Sistema Fuzzy Discreto (SFD):

$$\begin{aligned} e(t+1) = & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(\hat{z}(t)) \alpha_s(\hat{z}(t)) \{A_i - A_j + H_j(C_s - C_j) - (B_i - B_j)F_s\} x(t) \\ & + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(\hat{z}(t)) \alpha_s(\hat{z}(t)) \{A_j - H_j C_s + (B_i - B_j)F_s\} e(t). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Portanto, de $\dot{x}(t)$ e $\dot{e}(t)$ dados pelas equações (4.13) e (4.15), e de $x(t+1)$ e $e(t+1)$ dados pelas equações (4.14) e (4.16), respectivamente, tem-se que o sistema de controle que contém o regulador fuzzy e o observador fuzzy (sistema de controle aumentado) é representado da seguinte forma:

Sistema Fuzzy Contínuo (SFC):

$$\begin{aligned} \dot{x}_a(t) = & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(\hat{z}(t)) \alpha_s(\hat{z}(t)) G_{ijs} x_a(t) \\ = & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j^2(\hat{z}(t)) G_{ijj} x_a(t) \\ & + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j < s}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(\hat{z}(t)) \alpha_s(\hat{z}(t)) \left\{ \frac{G_{ijs} + G_{isj}}{2} \right\} x_a(t). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Sistema Fuzzy Discreto (SFD):

$$\begin{aligned} x_a(t+1) = & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(\hat{z}(t)) \alpha_s(\hat{z}(t)) G_{ijs} x_a(t) \\ = & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j^2(\hat{z}(t)) G_{ijj} x_a(t) \\ & + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j < s}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(\hat{z}(t)) \alpha_s(\hat{z}(t)) \left\{ \frac{G_{ijs} + G_{isj}}{2} \right\} x_a(t). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Em (4.17) e (4.18),

$$x_a(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} e$$

$$G_{ijs} = \begin{bmatrix} A_i - B_i F_s & B_i F_s \\ (A_i - A_j) - (B_i - B_j) F_s + H_j (C_s - C_j) & A_j - H_j C_s + (B_i - B_j) F_s \end{bmatrix}$$

As representações do sistema aumentado nas formas (4.17) e (4.18) foram obtidas em (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998).

4.1 Condições para a Estabilidade de Sistemas Aumentados

Considere, para isto, os casos A e B vistos anteriormente

A - Caso A

Observe que o sistema aumentado dado em (4.7) (e (4.8)) tem a mesma forma da equação da planta com regulador dada em (3.3) (e (3.4)). Assim, os resultados descritos nos Lemas 3, 4, 5 e 6 podem ser aplicados diretamente para o estudo da estabilidade do sistema aumentado. Portanto, as condições suficientes para a estabilidade dos sistemas aumentados (4.7) e (4.8) estão descritas nos Lemas 7, 8, 9 e 10, derivados dos Lemas 3-6, respectivamente.

Lema 7 O ponto de equilíbrio $x_a = 0$ do sistema aumentado contínuo descrito por (4.7) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum P tal que

$$(G_{ii}^a)^T P + P G_{ii}^a < 0$$

para todo $i = 1, \dots, r$ e

$$\left(\frac{G_{ij}^a + G_{ji}^a}{2} \right)^T P + P \left(\frac{G_{ij}^a + G_{ji}^a}{2} \right) \leq 0, \quad i < j$$

para todo $i, j = 1, \dots, r$ excetuando-se os pares (i, j) tais que $\alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t)) = 0, \forall z(t)$.

Prova: Segue diretamente do Lema 3.

Lema 8 O ponto de equilíbrio $x_a = 0$ do sistema aumentado discreto descrito por (4.8) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum P tal que

$$(G_{ii}^a)^T P G_{ii}^a - P < 0$$

para todo $i = 1, \dots, r$ e

$$\left(\frac{G_{ij}^a + G_{ji}^a}{2} \right)^T P \left(\frac{G_{ij}^a + G_{ji}^a}{2} \right) - P \leq 0, \quad i < j$$

para todo $i, j = 1, \dots, r$ excetuando-se os pares (i, j) tais que $\alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t)) = 0, \forall z(t)$.

Prova: Segue diretamente do Lema 4.

Lema 9 *Assuma que o número de regras que estão ativas para todo t é menor ou igual a s , sendo $1 < s \leq r$. O ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_a = 0$ do sistema aumentado contínuo descrito por (4.7) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum $\mathbf{P}$ e uma matriz simétrica semipositiva definida comum $\mathbf{Q}$ tais que*

$$(\mathbf{G}_{ii}^a)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{G}_{ii}^a + (s-1)\mathbf{Q} < 0$$

para todo $i = 1, \dots, r$ e

$$\left(\frac{\mathbf{G}_{ij}^a + \mathbf{G}_{ji}^a}{2} \right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{G}_{ij}^a + \mathbf{G}_{ji}^a}{2} \right) - \mathbf{Q} \leq 0, \quad i < j$$

para todo $i, j = 1, \dots, r$ excetuando-se os pares (i, j) tais que $\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t)) = 0, \forall \mathbf{z}(t)$.

Prova: Segue diretamente do Lema 5.

Lema 10 *Assuma que o número de regras que estão ativas para todo t é menor ou igual a s , sendo $1 < s \leq r$. O ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_a = 0$ do sistema aumentado discreto descrito por (4.8) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum $\mathbf{P}$ e uma matriz simétrica semipositiva definida comum $\mathbf{Q}$ tais que*

$$(\mathbf{G}_{ii}^a)^T \mathbf{P} \mathbf{G}_{ii}^a - \mathbf{P} + (s-1)\mathbf{Q} < 0$$

para todo $i = 1, \dots, r$ e

$$\left(\frac{\mathbf{G}_{ij}^a + \mathbf{G}_{ji}^a}{2} \right)^T \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{G}_{ij}^a + \mathbf{G}_{ji}^a}{2} \right) - \mathbf{P} - \mathbf{Q} \leq 0, \quad i < j$$

para todo $i, j = 1, \dots, r$ excetuando-se os pares (i, j) tais que $\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t)) = 0, \forall \mathbf{z}(t)$.

Prova: Segue diretamente do Lema 6.

B - Caso B

Observe que o sistema aumentado dado em (4.17) (e (4.18)) tem uma forma similar à equação da planta com regulador dada em (3.3) (e (3.4)). Assim, os resultados descritos nos Lemas 3 e 4 podem ser aplicados diretamente para o estudo da estabilidade do sistema aumentado. Portanto, as condições suficientes para a estabilidade dos sistemas aumentados (4.17) e (4.18) estão descritas nos Lemas 11 e 12, derivados dos Lemas 3 e 4, respectivamente.

Lema 11 O ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_a = 0$ do sistema aumentado contínuo descrito por (4.17) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum $\mathbf{P}$ tal que

$$\mathbf{G}_{ijj}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{G}_{ijj} < 0 \text{ e}$$

$$\left(\frac{\mathbf{G}_{ijs} + \mathbf{G}_{isj}}{2} \right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{G}_{ijs} + \mathbf{G}_{isj}}{2} \right) \leq 0, \quad j < s,$$

para todo $i, j, s = 1, \dots, r$, excetuando-se os casos em que $\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\hat{\mathbf{z}}(t))\alpha_s(\hat{\mathbf{z}}(t)) = 0, \forall t$.

Prova: Segue diretamente do Lema 3.

Lema 12 O ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_a = 0$ do sistema aumentado discreto descrito por (4.18) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum $\mathbf{P}$ tal que

$$\mathbf{G}_{ijj}^T \mathbf{P} \mathbf{G}_{ijj} - \mathbf{P} < 0 \text{ e}$$

$$\left(\frac{\mathbf{G}_{ijs} + \mathbf{G}_{isj}}{2} \right)^T \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{G}_{ijs} + \mathbf{G}_{isj}}{2} \right) - \mathbf{P} \leq 0, \quad j < s,$$

para todo $i, j, s = 1, \dots, r$, excetuando-se os casos em que $\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\hat{\mathbf{z}}(t))\alpha_s(\hat{\mathbf{z}}(t)) = 0, \forall t$.

Prova: Segue diretamente do Lema 4.

Observação 3 Deve-se notar que na literatura disponível não foram obtidas condições mais relaxadas para os Lemas 11 e 12, como foram feitas nos Lemas 3 e 4.

4.2 Condições para a Estabilidade de Sistemas Aumentados

A - Caso A

Os Teoremas 2 e 4 mostram que os resultados apresentados nos Teoremas 1 e 3 são mais gerais que os descritos nos Lemas 5 e 6, respectivamente. Portanto, pode-se derivar condições mais relaxadas para os Lemas 9 e 10 aplicando-se os Teoremas 1 e 3 em (4.7) e (4.8). Esses resultados estão descritos nos Teoremas 5 e 6.

Teorema 5 Assuma que o número de regras que estão ativas para todo t é menor ou igual a s , sendo $1 < s \leq r$. Considere $i, j = 1, \dots, r$, sendo $i < j$ e defina

$$\mathbf{Q}_i^a = (\mathbf{G}_{ii}^a)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{G}_{ii}^a,$$

$$\mathbf{Q}_{ij}^a = \left(\frac{\mathbf{G}_{ij}^a + \mathbf{G}_{ji}^a}{2} \right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{G}_{ij}^a + \mathbf{G}_{ji}^a}{2} \right),$$

$$Q_{ij}^a = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t)) = 0, \forall z(t), \\ Q_{ij}^a - Q + P_{ij}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, o ponto de equilíbrio $x_a = 0$ do sistema aumentado contínuo descrito por (4.7) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum P , uma matriz simétrica positiva semidefinida comum Q e matrizes semidefinidas positivas P_{ij} tais que

$$Q_{t^a} = \begin{bmatrix} Q_1^a + (s-1)Q & Q_{12}^a & \dots & Q_{1r}^a \\ Q_{12}^a & Q_2^a + (s-1)Q & \dots & Q_{2r}^a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{1r}^a & Q_{2r}^a & \dots & Q_r^a + (s-1)Q \end{bmatrix} < 0.$$

Prova: Segue diretamente do Teorema 1.

Teorema 6 Assuma que o número de regras que estão ativas para todo t é menor ou igual a s , sendo $1 < s \leq r$. Considere $i, j = 1, \dots, r$, sendo $i < j$ e defina

$$\begin{aligned} M_{ii}^a &= G_{ii}^a, \\ M_{ij}^a &= \frac{G_{ij}^a + G_{ji}^a}{2}, \\ T_{ij} &= \begin{bmatrix} R_{ij} & W_{ij}^T \\ W_{ij} & S_{ij} \end{bmatrix} \geq 0, \\ N_{ii}^a &= \begin{bmatrix} X - (s-1)Y & X(M_{ii}^a)^T \\ M_{ii}^a X & X \end{bmatrix} e \\ N_{ij}^a &= \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t)) = 0, \forall z(t), \\ \begin{bmatrix} X + Y - R_{ij} & X(M_{ij}^a)^T - W_{ij}^T \\ M_{ij}^a X - W_{ij} & X - S_{ij} \end{bmatrix}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Então, o ponto de equilíbrio $x_a = 0$ do sistema aumentado discreto descrito por (4.8) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum $X = P^{-1}$, uma matriz simétrica positiva semidefinida comum Y e matrizes semidefinidas positivas T_{ij} tais que

$$N_{t^a} = \begin{bmatrix} N_{11}^a & N_{12}^a & \dots & N_{1r}^a \\ N_{12}^a & N_{22}^a & \dots & N_{2r}^a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{1r}^a & N_{2r}^a & \dots & N_{rr}^a \end{bmatrix} > 0.$$

Prova: Segue diretamente do Teorema 3.

Da mesma forma, se $r = s$, aplicando-se os resultados dos Corolários 1 e 2 tem-se, respectivamente, os Corolários 3 e 4.

Corolário 3 Se $r = s$, então pode-se adotar $Q = 0$ nas condições do Teorema 5.

Prova: Segue diretamente do Corolário 1.

Corolário 4 Se $r = s$, então pode-se adotar $Y = 0$ nas condições do Teorema 6.

Prova: Segue diretamente do Corolário 2.

B - Caso B

Para os sistemas aumentados descritos por (4.17) e (4.18), novas condições de estabilidade mais relaxadas que as descritas nos Lemas 11 e 12 são apresentadas. Os Teoremas 7 e 8 estabelecem essas novas condições para os sistemas contínuos e discretos no tempo, respectivamente.

Sistema Fuzzy Contínuo (SFC):

Teorema 7 Assuma que o número de regras que estão ativas para todo t é menor ou igual a v , sendo $1 < v \leq r$. Considere $i, j, s = 1, \dots, r$, sendo $j < s$ e defina

$$Q_{ijj} = G_{ijj}^T P + P G_{ijj}, \quad (4.19)$$

$$Q_{ijs} = \left(\frac{G_{ijs} + G_{isj}}{2} \right)^T P + P \left(\frac{G_{ijs} + G_{isj}}{2} \right), \quad (4.20)$$

$$Q_{t_{ijs}} = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha_i(z(t))\alpha_j(\hat{z}(t))\alpha_s(\hat{z}(t)) = 0, \quad \forall z(t) \text{ e } \hat{z}(t), \\ Q_{ijs} - Q_i + P_{ijs}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.21)$$

Então, o ponto de equilíbrio $x_a = 0$ do sistema aumentado contínuo descrito por (4.17) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum P , matrizes simétricas positivas semidefinidas Q_i e matrizes semidefinidas positivas P_{ijs} tais que

$$\begin{bmatrix} Q_{i11} + (v-1)Q_i & Q_{t_{i12}} & \dots & Q_{t_{i1r}} \\ Q_{t_{i12}} & Q_{i22} + (v-1)Q_i & \dots & Q_{t_{i2r}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{t_{i1r}} & Q_{t_{i2r}} & \dots & Q_{irr} + (v-1)Q_i \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (4.22)$$

Prova: Considere uma candidata da função Lyapunov $V(x_a(t)) = x_a^T(t)P x_a(t)$, onde $P > 0$ e $P = P^T$. Então, com a equação (4.17) obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_a(t)) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^r \alpha_i(z(t))\alpha_j(\hat{z}(t))\alpha_s(\hat{z}(t))x_a^T(t)[G_{ijs}^T P + P G_{ijs}]x_a(t) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t))\alpha_j^2(\hat{z}(t))x_a^T(t)[G_{ijj}^T P + P G_{ijj}]x_a(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j < s}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\hat{\mathbf{z}}(t)) \alpha_s(\hat{\mathbf{z}}(t)) \mathbf{x}_a^T(t) \left[\left(\frac{\mathbf{G}_{ijs} + \mathbf{G}_{isj}}{2} \right)^T \mathbf{P} \right. \\
& \left. + \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{G}_{ijs} + \mathbf{G}_{isj}}{2} \right) \right] \mathbf{x}_a(t).
\end{aligned}$$

Das condições (4.19) e (4.20) tem-se

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{x}_a(t)) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j^2(\hat{\mathbf{z}}(t)) \mathbf{x}_a^T(t) \mathbf{Q}_{ijj} \mathbf{x}_a(t) \\
&+ 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j < s}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\hat{\mathbf{z}}(t)) \alpha_s(\hat{\mathbf{z}}(t)) \mathbf{x}_a^T(t) \mathbf{Q}_{ijs} \mathbf{x}_a(t) \\
&= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j^2(\hat{\mathbf{z}}(t)) \mathbf{x}_a^T(t) \mathbf{Q}_{ijj} \mathbf{x}_a(t) \\
&+ 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j < s}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\hat{\mathbf{z}}(t)) \alpha_s(\hat{\mathbf{z}}(t)) \mathbf{x}_a^T(t) (\mathbf{Q}_{ijs} - \mathbf{Q}_i) \mathbf{x}_a(t) \\
&+ 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j < s}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\hat{\mathbf{z}}(t)) \alpha_s(\hat{\mathbf{z}}(t)) \mathbf{x}_a^T(t) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}_a(t).
\end{aligned}$$

No Corolário 4 de (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998) foi demonstrado que, para $\mathbf{Q}_i \geq 0$, tem-se

$$\sum_{j=1}^r \alpha_j^2(\hat{\mathbf{z}}(t)) \mathbf{Q}_i - \frac{1}{v-1} \sum_{j < s}^r 2 \alpha_j(\hat{\mathbf{z}}(t)) \alpha_s(\hat{\mathbf{z}}(t)) \mathbf{Q}_i \geq 0.$$

Desta forma, tendo em vista a equação (4.21),

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{x}_a(t)) &\leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j^2(\hat{\mathbf{z}}(t)) \mathbf{x}_a^T(t) \mathbf{Q}_{ijj} \mathbf{x}_a(t) \\
&+ 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j < s}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\hat{\mathbf{z}}(t)) \alpha_s(\hat{\mathbf{z}}(t)) \mathbf{x}_a^T(t) (\mathbf{Q}_{ijs} - \mathbf{Q}_i) \mathbf{x}_a(t) \\
&+ (v-1) \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j^2(\hat{\mathbf{z}}(t)) \mathbf{x}_a^T(t) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}_a(t) \\
&= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j^2(\hat{\mathbf{z}}(t)) \mathbf{x}_a^T(t) (\mathbf{Q}_{ijj} + (v-1) \mathbf{Q}_i) \mathbf{x}_a(t) \\
&+ 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j < s}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\hat{\mathbf{z}}(t)) \alpha_s(\hat{\mathbf{z}}(t)) \mathbf{x}_a^T(t) (\mathbf{Q}_{ijs} - \mathbf{Q}_i) \mathbf{x}_a(t) \\
&\leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j^2(\hat{\mathbf{z}}(t)) \mathbf{x}_a^T(t) (\mathbf{Q}_{ijj} + (v-1) \mathbf{Q}_i) \mathbf{x}_a(t) \\
&+ 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j < s}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\hat{\mathbf{z}}(t)) \alpha_s(\hat{\mathbf{z}}(t)) \mathbf{x}_a^T(t) (\mathbf{Q}_{ijs} - \mathbf{Q}_i + \mathbf{P}_{ijs}) \mathbf{x}_a(t) \\
&= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j^2(\hat{\mathbf{z}}(t)) \mathbf{x}_a^T(t) (\mathbf{Q}_{ijj} + (v-1) \mathbf{Q}_i) \mathbf{x}_a(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j < s}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\hat{\mathbf{z}}(t)) \alpha_s(\hat{\mathbf{z}}(t)) \mathbf{x}_a^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{t}_{ijs} \mathbf{x}_a(t) \\
& = \mathbf{x}_a^T(t) \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \begin{bmatrix} \alpha_1(\hat{\mathbf{z}}(t)) \mathbf{I} & \alpha_2(\hat{\mathbf{z}}(t)) \mathbf{I} & \dots & \alpha_r(\hat{\mathbf{z}}(t)) \mathbf{I} \end{bmatrix} \\
& \quad \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{i11} + (v-1)\mathbf{Q}_i & \mathbf{Q} \mathbf{t}_{i12} & \dots & \mathbf{Q} \mathbf{t}_{i1r} \\ \mathbf{Q} \mathbf{t}_{i12} & \mathbf{Q}_{i22} + (v-1)\mathbf{Q}_i & \dots & \mathbf{Q} \mathbf{t}_{i2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Q} \mathbf{t}_{i1r} & \mathbf{Q} \mathbf{t}_{i2r} & \dots & \mathbf{Q}_{irr} + (v-1)\mathbf{Q}_i \end{bmatrix} \\
& \quad \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1(\hat{\mathbf{z}}(t)) \mathbf{I} \\ \alpha_2(\hat{\mathbf{z}}(t)) \mathbf{I} \\ \vdots \\ \alpha_r(\hat{\mathbf{z}}(t)) \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}_a(t).
\end{aligned}$$

Então, da equação (4.22), $\dot{V}(\mathbf{x}_a(t)) < 0$ para $\mathbf{x}_a(t) \neq 0$.

Corolário 5 Se $r = v$, então pode-se adotar $\mathbf{Q}_i = 0$ nas condições do Teorema 7.

Prova: Segue diretamente do Corolário 1.

Sistema Fuzzy Discreto (SFD):

Teorema 8 Assuma que o número de regras que estão ativas para todo t é menor ou igual a v , sendo $1 < v \leq r$. Considere $i, j, s = 1, \dots, r$, sendo $j < s$ e defina

$$\mathbf{M}_{ijj} = \mathbf{G}_{ijj},$$

$$\mathbf{M}_{ijs} = \frac{\mathbf{G}_{ijs} + \mathbf{G}_{isj}}{2},$$

$$\mathbf{T}_{ijs} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ijs} & \mathbf{W}_{ijs}^T \\ \mathbf{W}_{ijs} & \mathbf{S}_{ijs} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (4.23)$$

$$\mathbf{N}_{ijj} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} - (v-1)\mathbf{Y}_i & \mathbf{X} \mathbf{M}_{ijj}^T \\ \mathbf{M}_{ijj} \mathbf{X} & \mathbf{X} \end{bmatrix} \quad e \quad (4.24)$$

$$\mathbf{N}_{ijs} = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\hat{\mathbf{z}}(t)) \alpha_s(\hat{\mathbf{z}}(t)) = 0, \forall \mathbf{z}(t) \text{ e } \hat{\mathbf{z}}(t), \\ \begin{bmatrix} \mathbf{X} + \mathbf{Y}_i - \mathbf{R}_{ijs} & \mathbf{X} \mathbf{M}_{ijs}^T - \mathbf{W}_{ijs}^T \\ \mathbf{M}_{ijs} \mathbf{X} - \mathbf{W}_{ijs} & \mathbf{X} - \mathbf{S}_{ijs} \end{bmatrix}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.25)$$

Então, o ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_a = 0$ do sistema aumentado discreto descrito por (4.18) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum

$\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$, matrizes simétricas positivas semidefinidas comuns $\mathbf{Y}_i$ e matrizes semidefinidas positivas $\mathbf{T}_{ijs}$ tais que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_{i11} & \mathbf{N}_{i12} & \dots & \mathbf{N}_{i1r} \\ \mathbf{N}_{i12} & \mathbf{N}_{i22} & \dots & \mathbf{N}_{i2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{N}_{i1r} & \mathbf{N}_{i2r} & \dots & \mathbf{N}_{irr} \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (4.26)$$

Prova: Considere uma candidata da função Lyapunov $V(\mathbf{x}_a(t)) = \mathbf{x}_a^T(t) \mathbf{P} \mathbf{x}_a(t)$, sendo $\mathbf{P} > 0$ e $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$. Tem-se que

$$\Delta V(\mathbf{x}_a(t)) = V(\mathbf{x}_a(t+1)) - V(\mathbf{x}_a(t)).$$

Utilizando-se a equação (4.18), tem-se

$$\Delta V(\mathbf{x}_a(t)) = \mathbf{x}_a^T(t) \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\hat{\mathbf{z}}(t)) \alpha_s(\hat{\mathbf{z}}(t)) [\mathbf{G}_{ijs}^T \mathbf{P} \mathbf{G}_{ijs} - \mathbf{P}] \right) \mathbf{x}_a(t)$$

Para que $\Delta V(\mathbf{x}_a(t)) < 0$, $\forall \mathbf{x}_a(t) \neq 0$, é necessário ter

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\hat{\mathbf{z}}(t)) \alpha_s(\hat{\mathbf{z}}(t)) [\mathbf{G}_{ijs}^T \mathbf{P} \mathbf{G}_{ijs} - \mathbf{P}] < 0.$$

Multiplicando-se a equação acima por $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$ pela direita e pela esquerda, tem-se

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\hat{\mathbf{z}}(t)) \alpha_s(\hat{\mathbf{z}}(t)) [\mathbf{X} \mathbf{G}_{ijs}^T \mathbf{X}^{-1} \mathbf{G}_{ijs} \mathbf{X} - \mathbf{X}] < 0.$$

Tem-se que $\sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) = 1$. Com este resultado, manipulando-se a equação acima e aplicando-se o Complemento de Schur, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\alpha) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\hat{\mathbf{z}}(t)) \alpha_s(\hat{\mathbf{z}}(t)) \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X} \mathbf{G}_{ijs}^T \\ \mathbf{G}_{ijs} \mathbf{X} & \mathbf{X} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j^2(\hat{\mathbf{z}}(t)) \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X} \mathbf{M}_{ijj}^T \\ \mathbf{M}_{ijj} \mathbf{X} & \mathbf{X} \end{bmatrix} \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j < s} \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\hat{\mathbf{z}}(t)) \alpha_s(\hat{\mathbf{z}}(t)) \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X} \mathbf{M}_{ijs}^T \\ \mathbf{M}_{ijs} \mathbf{X} & \mathbf{X} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j^2(\hat{\mathbf{z}}(t)) \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X} \mathbf{M}_{ijj}^T \\ \mathbf{M}_{ijj} \mathbf{X} & \mathbf{X} \end{bmatrix} \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j < s} \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\hat{\mathbf{z}}(t)) \alpha_s(\hat{\mathbf{z}}(t)) \begin{bmatrix} \mathbf{X} + \mathbf{Y}_i & \mathbf{X} \mathbf{M}_{ijs}^T \\ \mathbf{M}_{ijs} \mathbf{X} & \mathbf{X} \end{bmatrix} \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j < s} \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\hat{\mathbf{z}}(t)) \alpha_s(\hat{\mathbf{z}}(t)) \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} > 0, \end{aligned}$$

sendo $Y_i \geq 0$, para $i = 1, 2, \dots, r$. Então, pelo Corolário 4 de (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998), tem-se:

$$\begin{aligned} T(\alpha) &\geq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j^2(\hat{z}(t)) \begin{bmatrix} X & XM_{ijj}^T \\ M_{ijj}X & X \end{bmatrix} \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j < s}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(\hat{z}(t)) \alpha_s(\hat{z}(t)) \begin{bmatrix} X + Y_i & XM_{ijs}^T \\ M_{ijs}X & X \end{bmatrix} \\ &\quad - (v-1) \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j^2(\hat{z}(t)) \begin{bmatrix} Y_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j^2(\hat{z}(t)) \begin{bmatrix} X - (v-1)Y_i & XM_{ijj}^T \\ M_{ijj}X & X \end{bmatrix} \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j < s}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(\hat{z}(t)) \alpha_s(\hat{z}(t)) \begin{bmatrix} X + Y_i & XM_{ijs}^T \\ M_{ijs}X & X \end{bmatrix} > 0. \end{aligned}$$

Da expressão (4.23) tem-se:

$$\begin{aligned} T(\alpha) &\geq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j^2(\hat{z}(t)) \begin{bmatrix} X - (v-1)Y_i & XM_{ijj}^T \\ M_{ijj}X & X \end{bmatrix} \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j < s}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(\hat{z}(t)) \alpha_s(\hat{z}(t)) \begin{bmatrix} X + Y_i & XM_{ijs}^T \\ M_{ijs}X & X \end{bmatrix} \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j < s}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(\hat{z}(t)) \alpha_s(\hat{z}(t)) \begin{bmatrix} R_{ijs} & W_{ijs}^T \\ W_{ijs} & S_{ijs} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j^2(\hat{z}(t)) \begin{bmatrix} X - (v-1)Y_i & XM_{ijj}^T \\ M_{ijj}X & X \end{bmatrix} \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j < s}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(\hat{z}(t)) \alpha_s(\hat{z}(t)) \begin{bmatrix} X + Y_i - R_{ijs} & XM_{ijs}^T - W_{ijs}^T \\ M_{ijs}X - W_{ijs} & X - S_{ijs} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.27) \end{aligned}$$

Substituindo-se as equações (4.24) e (4.25) na equação (4.27) tem-se

$$\begin{aligned} T(\alpha) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) \begin{bmatrix} \alpha_1(\hat{z}(t))I & \alpha_2(\hat{z}(t))I & \dots & \alpha_r(\hat{z}(t))I \end{bmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} N_{i11} & N_{i12} & \dots & N_{i1r} \\ N_{i12} & N_{i22} & \dots & N_{i2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{i1r} & N_{i2r} & \dots & N_{irr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1(\hat{z}(t))I \\ \alpha_2(\hat{z}(t))I \\ \vdots \\ \alpha_r(\hat{z}(t))I \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, se a condição (4.26) se mantém, $\Delta V(x_a(t)) < 0$ para $x_a(t) \neq 0$, o que conclui a prova.

Corolário 6 Se $r = v$, então pode-se adotar $Y_i = 0$ nas condições do Teorema 8.

Prova: Segue diretamente do Corolário 2.



4.3 Projeto de Observadores e Reguladores Fuzzy com LMIs

Considere, para isto, os casos A e B vistos anteriormente.

A - *Caso A*

Para este caso, são apresentados três métodos de projeto baseados em LMIs para se determinar os ganhos do observador e os ganhos do controlador. Estes três métodos são apresentados a seguir.

Método 1 - Caso A

Foi demonstrado em (Ma et al., 1998) que o projeto dos ganhos do observador H_i e do regulador F_i , para $i = 1, 2, \dots, r$, pode ser feito separadamente. Este resultado é uma generalização do “Princípio da Separação”, bem conhecido na teoria de sistemas lineares, e facilita o projeto de reguladores com observadores. Tendo em vista este fato, os projetos dos ganhos H_i e F_i para que o sistema aumentado (4.7) seja assintoticamente estável globalmente é equivalente a:

Sistema Fuzzy Contínuo (SFC):

Determine H_i e F_i , para $i = 1, 2, \dots, r$, tais que os sistemas

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\mathbf{z}(t)) \{ \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j \} \mathbf{x}(t) \quad (4.28)$$

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\mathbf{z}(t)) \{ \mathbf{A}_i - \mathbf{H}_i \mathbf{C}_j \} \mathbf{e}(t). \quad (4.29)$$

sejam assintoticamente estáveis globalmente.

Claramente, (4.28) representa a parte do regulador e (4.29) a do observador.

De forma análoga, a estabilização do sistema aumentado discreto (4.8) pode ser descrita da seguinte forma:

Sistema Fuzzy Discreto (SFD):

Determine H_i e F_i , para $i = 1, 2, \dots, r$, tais que os sistemas

$$\mathbf{x}(t+1) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\mathbf{z}(t)) \{ \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j \} \mathbf{x}(t) \quad (4.30)$$

$$\mathbf{e}(t+1) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\mathbf{z}(t)) \{ \mathbf{A}_i - \mathbf{H}_i \mathbf{C}_j \} \mathbf{e}(t). \quad (4.31)$$

sejam assintoticamente estáveis globalmente.

Claramente, (4.30) representa a parte do regulador e (4.31) a do observador.

Portanto, para as novas condições de estabilidade de sistemas aumentados, tendo em vista que a Propriedade da Separação é válida (vide (Ma et al., 1998)), ou seja, os ganhos do regulador podem ser projetados separadamente dos ganhos do observador, o problema de projeto para determinar os ganhos do observador H_i e os ganhos do regulador F_i , levando-se em conta a taxa de decaimento, para $i = 1, \dots, r$, pode ser definido por meio de LMIs, sendo que para determinar a estabilidade do regulador utilizou-se uma função Lyapunov quadrática do tipo $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t)P_c\mathbf{x}(t)$ e para o observador $V(\mathbf{e}(t)) = \mathbf{e}^T(t)P_o\mathbf{e}(t)$.

Sistema Fuzzy Contínuo (SFC):

As LMIs para o projeto dos reguladores nesta seção são iguais àsquelas LMIs realizadas na Seção 3.3. As LMIs para o projeto dos observadores neste caso são determinadas da seguinte forma: para se verificar a estabilidade de um único modelo do observador deve-se encontrar uma matriz $\mathbf{P}_o = \mathbf{P}_o^T > 0$ tal que

$$\mathbf{P}_\theta(\mathbf{A} - \mathbf{HC}) + (\mathbf{A} - \mathbf{HC})^T \mathbf{P}_\theta < 0,$$

ou seja,

$$P_0 A - P_0 H C + A^T P_0 - C^T H^T P_0 < 0.$$

Portanto, fazendo $\mathbf{M} = \mathbf{P}_o \mathbf{H}$ tem-se a seguinte equação na forma de uma LMI:

$$\mathbf{P}_0\mathbf{A} - \mathbf{M}\mathbf{C} + \mathbf{A}^T\mathbf{P}_0 - \mathbf{C}^T\mathbf{M}^T < 0,$$

com as variáveis $\mathbf{P}_o$ e $\mathbf{M}$. O ganho do observador é dado por $\mathbf{H} = \mathbf{P}_o^{-1} \mathbf{M}$.

Esta idéia será utilizada na obtenção das LMIs dadas abaixo.

Utilizando os resultados do Lema 9, em (Tanaka and Wang, 1997), (Tanaka, Nishimura and Wang, 1998) e (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998) são apresentadas as seguintes LMIs para este caso:

Maximize γ sujeito a $\delta > 0, \gamma > 0,$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{P}_c^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_o \end{bmatrix} > 0, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{21} \\ \mathbf{Q}_{12} & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix} \geq 0,$$

[illegible]

$$\begin{cases} \mathbf{P}_o \mathbf{A}_i - \mathbf{M}_{oi} \mathbf{C}_i + \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_o - \mathbf{C}_i^T \mathbf{M}_{oi}^T + (s-1) \mathbf{Q}_{22} + 2\gamma \mathbf{P}_o < 0 \\ \mathbf{P}_o \mathbf{A}_i - \mathbf{M}_{oi} \mathbf{C}_j + \mathbf{P}_o \mathbf{A}_j - \mathbf{M}_{oj} \mathbf{C}_i + \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_o - \mathbf{C}_j^T \mathbf{M}_{oi}^T + \mathbf{A}_j^T \mathbf{P}_o - \mathbf{C}_i^T \mathbf{M}_{oj}^T - 2\mathbf{Q}_{22} + 4\gamma \mathbf{P}_o \leq 0, \end{cases} \quad (4.33)$$

para todo i e j , sendo $i < j$, excetuando-se os pares (i, j) tais que $\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t)) = 0, \forall \mathbf{z}(t)$, e $s > 1$, onde $\mathbf{M}_{ci} = \mathbf{F}_i \mathbf{P}_c$, $\mathbf{M}_{oi} = \mathbf{P}_o \mathbf{H}_i$ e $\mathbf{Y} = \mathbf{P}_c \mathbf{Q}_{11} \mathbf{P}_c$.

Os ganhos do regulador e os ganhos do observador são dados por

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{M}_{ci} \mathbf{P}_c^{-1} \text{ e } \mathbf{H}_i = \mathbf{P}_o^{-1} \mathbf{M}_{oi}$$

das soluções $\mathbf{P}_c$, $\mathbf{P}_o$, $\mathbf{M}_{ci}$ e $\mathbf{M}_{oi}$ obtidas.

Observe que os autores aplicaram o Princípio da Separação, ou seja, as LMIs (4.32) especificam os ganhos do controlador e as LMIs (4.33) os ganhos do observador. Assim, como não foi obtida uma função de Lyapunov do tipo $V(\mathbf{x}_a(t)) = \mathbf{x}_a^T(t) \mathbf{P}_t \mathbf{x}_a(t)$ para o sistema aumentado, não é possível o uso direto das condições descritas em 3.5 e 3.6 para a especificação adicional das restrições nas entradas e saídas do sistema aumentado, respectivamente, pois elas necessitam da matriz $\mathbf{P}_t$.

Utilizando-se os resultados do Teorema 5, que possuem condições mais relaxadas que as apresentadas no Lema 9, obtém-se as seguintes LMIs para este caso:

Maximize γ_o e encontre $\mathbf{P}_o$, $\mathbf{Q}_o$, $\mathbf{P}_{ij}^o$ e $\mathbf{M}_{oi}$ para $i, j = 1, 2, \dots, r$, sendo $i < j$, satisfazendo $\mathbf{P}_o > 0$, $\mathbf{Q}_o \geq 0$, $\mathbf{P}_{ij}^o \geq 0$,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11}^o & \mathbf{C}_{12}^o & \dots & \mathbf{C}_{1r}^o \\ \mathbf{C}_{12}^o & \mathbf{C}_{22}^o & \dots & \mathbf{C}_{2r}^o \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{1r}^o & \mathbf{C}_{2r}^o & \dots & \mathbf{C}_{rr}^o \end{bmatrix} < 0,$$

sendo

$$\mathbf{C}_{ii}^o = \mathbf{P}_o \mathbf{A}_i - \mathbf{M}_{oi} \mathbf{C}_i + \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_o - \mathbf{C}_i^T \mathbf{M}_{oi}^T + (s-1) \mathbf{Q}_o + 2\gamma_o \mathbf{P}_o,$$

$$\mathbf{C}_{ij}^o = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t)) = 0, \forall \mathbf{z}(t), \\ \frac{1}{2} \left(\mathbf{P}_o \mathbf{A}_i - \mathbf{M}_{oi} \mathbf{C}_j + \mathbf{P}_o \mathbf{A}_j - \mathbf{M}_{oj} \mathbf{C}_i + \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_o - \mathbf{C}_j^T \mathbf{M}_{oi}^T + \mathbf{A}_j^T \mathbf{P}_o - \mathbf{C}_i^T \mathbf{M}_{oj}^T \right) + \\ \quad - \mathbf{Q}_o + \mathbf{P}_{ij}^o + 2\gamma_o \mathbf{P}_o, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Maximize γ_c e encontre $\mathbf{X}_c$, $\mathbf{Y}_c$, $\mathbf{P}_{ij}^c$, $\mathbf{P}_{ij}^o$ e $\mathbf{M}_{ci}$ para $i, j = 1, 2, \dots, r$, sendo $i < j$, satisfazendo $\mathbf{X}_c > 0$, $\mathbf{Y}_c \geq 0$, $\mathbf{P}_{ij}^c \geq 0$,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11}^c & \mathbf{C}_{12}^c & \dots & \mathbf{C}_{1r}^c \\ \mathbf{C}_{12}^c & \mathbf{C}_{22}^c & \dots & \mathbf{C}_{2r}^c \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{1r}^c & \mathbf{C}_{2r}^c & \dots & \mathbf{C}_{rr}^c \end{bmatrix} < 0,$$

sendo

$$\mathbf{C}_{ii}^c = \mathbf{A}_i \mathbf{X}_c - \mathbf{B}_i \mathbf{M}_{ci} + \mathbf{X}_c \mathbf{A}_i^T - \mathbf{M}_{ci}^T \mathbf{B}_i^T + (s-1) \mathbf{Y}_c + 2\gamma_c \mathbf{X}_c,$$

$$\mathbf{C}_{ij}^c = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t)) = 0, \forall \mathbf{z}(t), \\ \frac{1}{2} \left(\mathbf{A}_i \mathbf{X}_c - \mathbf{B}_i \mathbf{M}_{cj} + \mathbf{A}_j \mathbf{X}_c - \mathbf{B}_j \mathbf{M}_{ci} + \mathbf{X}_c \mathbf{A}_i^T - \mathbf{M}_{cj}^T \mathbf{B}_i^T + \mathbf{X}_c \mathbf{A}_j^T - \mathbf{M}_{ci}^T \mathbf{B}_j^T \right) + \\ \quad - \mathbf{Y}_c + \mathbf{P}_{ij}^c + 2\gamma_c \mathbf{X}_c, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

As condições acima são LMIs com respeito às variáveis $\mathbf{X}_c$, $\mathbf{P}_o$, $\mathbf{Y}_c$, $\mathbf{Q}_o$, $\mathbf{P}_{ij}^c$, $\mathbf{P}_{ij}^o$, $\mathbf{M}_{ci}$ e $\mathbf{M}_{oi}$. Se existe solução, uma $\mathbf{P}_c$ comum, os ganhos $\mathbf{H}_i$ e $\mathbf{F}_i$ e uma $\mathbf{Q}_c$ comum podem ser obtidas da

seguinte forma:

$$\mathbf{P}_c = \mathbf{X}_c^{-1}, \quad \mathbf{H}_i = \mathbf{P}_o^{-1} \mathbf{M}_{oi}, \quad \mathbf{F}_i = \mathbf{M}_{ci} \mathbf{X}_c^{-1} \quad \text{e} \quad \mathbf{Q}_c = \mathbf{P}_c \mathbf{Y}_c \mathbf{P}_c,$$

a partir das soluções $\mathbf{X}_c$, $\mathbf{P}_o$, $\mathbf{Y}_c$, $\mathbf{M}_{ci}$ e $\mathbf{M}_{oi}$.

O problema de projeto acima é reduzido à estabilização de um sistema aumentado, sem taxa de decaimento, se for resolvido com $\gamma_o = \gamma_c = 0$.

De modo análogo ao efetuado no projeto de reguladores e observadores para sistemas lineares, pode-se especificar o tempo de estabilização do observador bem menor que o tempo de estabilização do controlador. Uma regra de projeto é especificar γ_c de acordo com o desejado para o sistema aumentado e γ_o duas a cinco vezes o valor de γ_c , como descrito em (Ogata, 1997).

As condições acima são LMIs que devem ser aplicadas quando $r \neq s$. Quando $r = s$, levando-se em conta os resultados do Corolário 3, pode-se por simplicidade utilizar as mesmas condições descritas acima, considerando-se agora $\mathbf{Q}_o = \mathbf{Y}_c = 0$.

Sistema Fuzzy Discreto (SFD):

As LMIs para o projeto dos reguladores nesta seção são iguais àsquelas LMIs realizadas na Seção 3.3. As LMIs para o projeto dos observadores neste caso são determinadas da seguinte forma: para se verificar a estabilidade de um único modelo do observador deve-se encontrar uma matriz $\mathbf{P}_o = \mathbf{P}_o^T > 0$ tal que

$$(\mathbf{A} - \mathbf{HC})^T \mathbf{P}_o (\mathbf{A} - \mathbf{HC}) - \mathbf{P}_o < 0.$$

Multiplicando-se a equação acima pela direita e pela esquerda por $\mathbf{X}_o = \mathbf{P}_o^{-1}$, obtém-se:

$$\mathbf{X}_o - \mathbf{X}_o (\mathbf{A} - \mathbf{HC})^T \mathbf{X}_o^{-1} (\mathbf{A} - \mathbf{HC}) \mathbf{X}_o > 0.$$

Aplicando o Complemento de Schur na equação acima tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_o & \mathbf{X}_o (\mathbf{A} - \mathbf{HC})^T \\ (\mathbf{A} - \mathbf{HC}) \mathbf{X}_o & \mathbf{X}_o \end{bmatrix} > 0.$$

Multiplicando-se a equação acima pela direita e pela esquerda por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_o^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{X}_o^{-1} \end{bmatrix},$$

tendo em vista que $\mathbf{P}_o = \mathbf{X}_o^{-1}$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_o & (\mathbf{A} - \mathbf{HC})^T \mathbf{P}_o \\ \mathbf{P}_o (\mathbf{A} - \mathbf{HC}) & \mathbf{P}_o \end{bmatrix} > 0,$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} P_o & A^T P_o - C^T H^T P_o \\ P_o A - P_o H C & P_o \end{bmatrix} > 0.$$

Portanto, fazendo $M = P_o H$ tem-se a seguinte equação na forma de uma LMI:

$$\begin{bmatrix} P_o & A^T P_o - C^T M^T \\ P_o A - M C & P_o \end{bmatrix} > 0,$$

com as variáveis P_o e M . O ganho do observador é dado por $H = P_o^{-1} M$.

Esta idéia será utilizada na obtenção das LMIs dadas abaixo.

Observação 4 Na literatura disponível, em particular (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998), não são apresentadas as condições na forma de LMIs para que se encontre diretamente os ganhos do regulador F_i e os ganhos do observador H_i para o caso discreto. A seguir são mostradas essas condições na forma de LMIs utilizando-se os resultados do Lema 10.

Minimize β sujeito a $X_c > 0$, $P_o > 0$, $Y_c \geq 0$ e $Q_o \geq 0$,

$$\begin{bmatrix} \beta X_c - (s-1)Y_c & X_c A_i^T - M_{ci}^T B_i^T \\ A_i X_c - B_i M_{ci} & X_c \end{bmatrix} > 0,$$

$$\begin{bmatrix} \beta X_c + Y_c & \frac{1}{2} (X_c A_i^T - M_{cj}^T B_i^T + X_c A_j^T - M_{ci}^T B_j^T) \\ \frac{1}{2} (A_i X_c - B_i M_{cj} + A_j X_c - B_j M_{ci}) & X_c \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$\begin{bmatrix} \beta P_o - (s-1)Q_o & A_i^T P_o - C_i^T M_{oi}^T \\ P_o A_i - M_{oi} C_i & P_o \end{bmatrix} > 0,$$

$$\begin{bmatrix} \beta P_o + Q_o & \frac{1}{2} (A_i^T P_o - C_j^T M_{oi}^T + A_j^T P_o - C_i^T M_{oj}^T) \\ \frac{1}{2} (P_o A_i - M_{oi} C_j + P_o A_j - M_{oj} C_i) & P_o \end{bmatrix} \geq 0.$$

para todo i e j , para $i < j$, exceto os pares (i, j) tais que $\alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t)) = 0, \forall t$, sendo $s > 1$. Tem-se que $M_{ci} = F_i X_c$ e $M_{oi} = P_o H_i$. O problema de projeto acima é reduzido a um problema de projeto de um sistema aumentado estável, sem taxa de decaimento, se for resolvido com $\beta = 1$. Se existe solução, os ganhos do observador e do regulador são obtidos da seguinte forma:

$$H_i = P_o^{-1} M_{oi} \text{ e } F_i = M_{ci} X_c^{-1}$$

a partir das soluções $X_c = P_c^{-1}$, P_o , M_{oi} e M_{ci} .

Utilizando-se os resultados do Teorema 6, que possuem condições mais relaxadas que as apresentadas no Lema 10, obtém-se as seguintes LMIs para este caso:

Minimize β_o e encontre P_o , Q_o , R_{ij}^o , S_{ij}^o , W_{ij}^o e M_{oi} , para $i, j = 1, 2, \dots, r$, sendo $i < j$, satisfazendo $P_o > 0$, $Q_o \geq 0$,

$$\begin{bmatrix} D_{11}^o & D_{12}^o & \dots & D_{1r}^o \\ D_{12}^o & D_{22}^o & \dots & D_{2r}^o \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{1r}^o & D_{2r}^o & \dots & D_{rr}^o \end{bmatrix} > 0, \quad (4.34)$$

$$T_{ij}^o = \begin{bmatrix} R_{ij}^o & (W_{ij}^o)^T \\ W_{ij}^o & S_{ij}^o \end{bmatrix} \geq 0, \quad (4.35)$$

sendo

$$D_{ii}^o = \begin{bmatrix} \beta_o P_o - (s-1)Q_o & A_i^T P_o - C_i^T M_{oi}^T \\ P_o A_i - M_{oi} C_i & P_o \end{bmatrix},$$

$$D_{ij}^o = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t)) = 0, \forall z(t), \\ \begin{bmatrix} \beta_o P_o + Q_o - R_{ij}^o \\ \frac{1}{2} (P_o A_i - M_{oi} C_j + P_o A_j - M_{oj} C_i) - W_{ij}^o \\ \frac{1}{2} (A_i^T P_o - C_j^T M_{oi}^T + A_j^T P_o - C_i^T M_{oj}^T) - (W_{ij}^o)^T \\ P_o - S_{ij}^o \end{bmatrix}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Minimize β_c e encontre X_c , Y_c , R_{ij}^c , S_{ij}^c , W_{ij}^c e M_{ci} , para $i, j = 1, 2, \dots, r$, sendo $i < j$, satisfazendo $X_c > 0$, $Y_c \geq 0$,

$$\begin{bmatrix} D_{11}^c & D_{12}^c & \dots & D_{1r}^c \\ D_{12}^c & D_{22}^c & \dots & D_{2r}^c \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{1r}^c & D_{2r}^c & \dots & D_{rr}^c \end{bmatrix} > 0, \quad (4.36)$$

$$T_{ij}^c = \begin{bmatrix} R_{ij}^c & (W_{ij}^c)^T \\ W_{ij}^c & S_{ij}^c \end{bmatrix} \geq 0, \quad (4.37)$$

sendo

$$D_{ii}^c = \begin{bmatrix} \beta_c X_c - (s-1)Y_c & X_c A_i^T - M_{ci}^T B_i^T \\ A_i X_c - B_i M_{ci} & X_c \end{bmatrix},$$

$$D_{ij}^c = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t)) = 0, \forall z(t), \\ \begin{bmatrix} \beta_c X_c + Y_c - R_{ij}^c \\ \frac{1}{2} (A_i X_c - B_i M_{cj} + A_j X_c - B_j M_{ci}) - W_{ij}^c \\ \frac{1}{2} (X_c A_i^T - M_{cj}^T B_i^T + X_c A_j^T - M_{ci}^T B_j^T) - (W_{ij}^c)^T \\ X_c - S_{ij}^c \end{bmatrix}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

As condições acima são LMIs com respeito às variáveis X_c , P_o , Y_c , Q_o , R_{ij}^c , R_{ij}^o , S_{ij}^c , S_{ij}^o , W_{ij}^c , W_{ij}^o , M_{ci} e M_{oi} . Se existe solução, uma P_c comum, os ganhos H_i e F_i e uma Q_c comum podem ser obtidas da seguinte forma:

$$P_c = X_c^{-1}, \quad H_i = P_o^{-1} M_{oi}, \quad F_i = M_{ci} X_c^{-1} \quad \text{e} \quad Q_c = P_c Y_c P_c,$$

a partir das soluções X_c , P_o , Y_c , M_{ci} e M_{oi} .

Para este caso tem-se que $\beta_o = \gamma_o^2$, $\beta_c = \gamma_c^2$, $0 \leq \beta_o < 1$ e $0 \leq \beta_c < 1$. O problema de projeto acima é reduzido à estabilização do sistema aumentado, sem taxa de decaimento, se for resolvido com $\beta_o = \beta_c = 1$.

As condições acima são LMIs que devem ser aplicadas quando $r \neq s$. Quando $r = s$, levando-se em conta os resultados do Corolário 4, pode-se por simplicidade utilizar as mesmas condições descritas acima, considerando-se agora $Q_o = Y_c = 0$.

Método 2 - Caso A

Este método foi desenvolvido para que os resultados das seções 3.5 (restrições na entrada) e 3.6 (restrições na saída) pudessem ser impostas no sistema aumentado. Para isto, utiliza-se uma matriz P do tipo

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{bmatrix}.$$

Sistema Fuzzy Contínuo (SFC):

Para que o sistema dado pela equação (4.7) seja estável deve-se ter:

$$(G_{ij}^a)^T P + P G_{ij}^a < 0.$$

Multiplicando-se a equação acima por $X = P^{-1}$ pela direita e pela esquerda, tem-se:

$$E^c = X(G_{ij}^a)^T + G_{ij}^a X < 0, \quad (4.38)$$

sendo

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_1 \end{bmatrix}.$$

Manipulando-se a equação (4.38), obtém-se o seguinte resultado:

$$E^c = \begin{bmatrix} E_{11}^c & E_{12}^c \\ E_{21}^c & E_{22}^c \end{bmatrix},$$

sendo

$$E_{11}^c = X_1 A_i^T - X_1 F_j^T B_i^T + A_i X_1 - B_i F_j X_1,$$

$$E_{21}^c = (E_{12}^c)^T = X_1 F_j^T B_i^T$$

$$E_{22}^c = X_1 A_i^T - X_1 C_j^T H_i^T + A_i X_1 - H_i C_j X_1$$

Para que as componentes da matriz E^c sejam LMIs, faz-se $M_{Fi} = F_i X_1$. Um outro artifício que será utilizado para que as componentes da matriz E^c sejam LMIs, como descrito em (Crusius

and Trofino, 1996), é fazer $C_i X_1 = M C_i$. Desta forma, os termos do tipo $H_i C_j X_1$ serão iguais a $H_i M C_j$. Assim, pode-se fazer $H_i M = L_i$.

Desta forma, tem-se as seguintes equações na forma de LMIs para os elementos da matriz E^c :

$$\begin{aligned} E_{11}^c &= X_1 A_i^T - M_{Fj}^T B_i^T + A_i X_1 - B_i M_{Fj}, \\ E_{21}^c &= (E_{12}^c)^T = M_{Fj}^T B_i^T \text{ e} \\ E_{22}^c &= X_1 A_i^T - C_j^T L_i^T + A_i X_1 - L_i C_j \end{aligned}$$

Os ganhos do regulador e os ganhos do observador são dados da seguinte forma:

$$F_i = M_{Fi} X_1^{-1} \text{ e } H_i = L_i M^{-1},$$

das soluções M_{Fi} , X_1 , L_i e M .

De posse dos resultados acima e com base no Teorema 5, tem-se as seguintes LMIs com taxa de decaimento:

Maximize γ e encontre X_1 , Y_1 , Y_2 , Y_3 , P_{ij}^1 , P_{ij}^2 , P_{ij}^3 , M_{Fi} , L_i e M , para $i, j = 1, 2, \dots, r$, sendo $i < j$, sujeito a $X_1 > 0$,

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1r} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1r} & C_{2r} & \dots & C_{rr} \end{bmatrix} < 0,$$

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} P_{ij}^1 & (P_{ij}^3)^T \\ P_{ij}^3 & P_{ij}^2 \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_3^T \\ Y_3 & Y_2 \end{bmatrix} \geq 0 \text{ e}$$

$$C_i X_1 - M C_i = 0,$$

tal que:

$$C_{ii} = \begin{bmatrix} N_{ii}^{11} & (N_{ii}^{12})^T \\ N_{ii}^{21} & N_{ii}^{22} \end{bmatrix} \text{ e } C_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } \alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t)) = 0, \forall z(t), \\ \begin{bmatrix} N_{ij}^{11} & (N_{ij}^{12})^T \\ N_{ij}^{21} & N_{ij}^{22} \end{bmatrix}, \text{ caso contrário,} \end{cases}$$

sendo

$$N_{ii}^{11} = X_1 A_i^T - M_{Fi}^T B_i^T + A_i X_1 - B_i M_{Fi} + (s-1)Y_1 + 2\gamma X_1,$$

$$N_{ii}^{21} = (N_{ii}^{12})^T = M_{Fi}^T B_i^T + (s-1)Y_3,$$

$$N_{ii}^{22} = X_1 A_i^T - C_i^T L_i^T + A_i X_1 - L_i C_i + (s-1)Y_2 + 2\gamma X_1,$$

$$\begin{aligned}
N_{ij}^{11} &= \frac{1}{2} \left\{ X_1 A_i^T - M_{Fj}^T B_i^T + A_i X_1 - B_i M_{Fj} + X_1 A_j^T - M_{Fi}^T B_j^T \right. \\
&\quad \left. + A_j X_1 - B_j M_{Fi} \right\} - Y_1 + P_{ij}^1 + 2\gamma X_1, \\
N_{ij}^{21} &= (N_{ij}^{12})^T = \frac{1}{2} \left\{ M_{Fj}^T B_i^T + M_{Fi}^T B_j^T \right\} - Y_3 + P_{ij}^3 \text{ e} \\
N_{ij}^{22} &= \frac{1}{2} \left\{ X_1 A_i^T - C_j^T L_i^T + A_i X_1 - L_i C_j + X_1 A_j^T - C_i^T L_j^T \right. \\
&\quad \left. + A_j X_1 - L_j C_i \right\} - Y_2 + P_{ij}^2 + 2\gamma X_1.
\end{aligned}$$

O problema de projeto acima é reduzido à estabilização do sistema aumentado, sem taxa de decaimento, se for resolvido com $\gamma = 0$.

Os ganhos do regulador e os ganhos do observador são dados da seguinte forma:

$$F_i = M_{Fi} X_1^{-1} \text{ e } H_i = L_i M^{-1},$$

das soluções M_{Fi} , X_1 , L_i e M .

Projetos mais práticos podem ser realizados adicionando nas LMIs acima as restrições da entrada e da saída, como descrito nas seções 3.5 e 3.6, respectivamente.

As condições acima são LMIs que devem ser aplicadas quando $r \neq s$. Quando $r = s$, levando-se em conta os resultados do Corolário 1, pode-se por simplicidade utilizar as mesmas condições descritas acima, considerando-se agora $Y = 0$.

Sistema Fuzzy Discreto (SFD):

Para que o sistema dado pela equação (4.8) seja estável deve-se ter:

$$(G_{ij}^a)^T P G_{ij}^a - P < 0.$$

Multiplicando-se a equação acima por $X = P^{-1}$ pela direita e pela esquerda, tem-se:

$$X - X(G_{ij}^a)^T X^{-1} G_{ij}^a X > 0, \quad (4.39)$$

sendo

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o Complemento de Schur na equação (4.39), obtém-se o seguinte resultado:

$$E^d = \begin{bmatrix} E_{11}^d & E_{12}^d \\ E_{21}^d & E_{22}^d \end{bmatrix},$$

sendo

$$\begin{aligned}
E_{11}^d &= E_{22}^d = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_1 \end{bmatrix} \text{ e} \\
E_{21}^d &= (E_{12}^d)^T = \begin{bmatrix} A_i X_1 - B_i F_j X_1 & B_i F_j X_1 \\ 0 & A_i X_1 - H_i C_j X_1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Utilizando-se os mesmos artifícios do caso contínuo, tem-se as seguintes equações na forma de LMIs para os elementos da matriz E^d :

$$\begin{aligned} E_{11}^d &= E_{22}^d = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_1 \end{bmatrix} e \\ E_{21}^d &= (E_{12}^d)^T = \begin{bmatrix} A_i X_1 - B_i M_{Fi} & B_i M_{Fj} \\ 0 & A_i X_1 - L_i C_j \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Os ganhos do regulador e os ganhos do observador são dados da seguinte forma:

$$F_i = M_{Fi} X_1^{-1} \text{ e } H_i = L_i M^{-1},$$

das soluções M_{Fi} , X_1 , L_i e M .

De posse dos resultados acima e com base no Teorema 6, tem-se as seguintes LMIs, levando-se em conta a taxa de decaimento:

Minimize β e encontre X_1 , Y_1 , Y_2 , Y_3 , R_{ij}^1 , R_{ij}^2 , R_{ij}^3 , S_{ij}^1 , S_{ij}^2 , S_{ij}^3 , W_{ij}^1 , W_{ij}^2 , W_{ij}^3 , M_{Fi} , L_i e M , para $i, j = 1, 2, \dots, r$, sendo $i < j$, sujeito a $X_1 > 0$,

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1r} \\ D_{12} & D_{22} & \dots & D_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{1r} & D_{2r} & \dots & D_{rr} \end{bmatrix} > 0, \\ T_{ij} &= \begin{bmatrix} R_{ij}^1 & (R_{ij}^3)^T & (W_{ij}^1)^T & (W_{ij}^3)^T \\ R_{ij}^3 & R_{ij}^2 & W_{ij}^3 & (W_{ij}^2)^T \\ W_{ij}^1 & (W_{ij}^3)^T & S_{ij}^1 & (S_{ij}^3)^T \\ W_{ij}^3 & W_{ij}^2 & S_{ij}^3 & S_{ij}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \\ Y &= \begin{bmatrix} Y_1 & Y_3^T \\ Y_3 & Y_2 \end{bmatrix} \geq 0 \text{ e} \\ C_i X_1 - M C_i &= 0, \end{aligned}$$

tal que:

$$\begin{aligned} D_{ii} &= \begin{bmatrix} D_{ii}^{11} & D_{ii}^{12} & D_{ii}^{13} & D_{ii}^{14} \\ D_{ii}^{21} & D_{ii}^{22} & D_{ii}^{23} & D_{ii}^{24} \\ D_{ii}^{31} & D_{ii}^{32} & D_{ii}^{33} & D_{ii}^{34} \\ D_{ii}^{41} & D_{ii}^{42} & D_{ii}^{43} & D_{ii}^{44} \end{bmatrix} e \\ D_{ij} &= \begin{cases} 0, \text{ se } \alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t)) = 0, \forall z(t), \\ \begin{bmatrix} D_{ij}^{11} & D_{ij}^{12} & D_{ij}^{13} & D_{ij}^{14} \\ D_{ij}^{21} & D_{ij}^{22} & D_{ij}^{23} & D_{ij}^{24} \\ D_{ij}^{31} & D_{ij}^{32} & D_{ij}^{33} & D_{ij}^{34} \\ D_{ij}^{41} & D_{ij}^{42} & D_{ij}^{43} & D_{ij}^{44} \end{bmatrix}, \text{ caso contrário,} \end{cases} \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned}
 D_{ii}^{11} &= \beta X_1 - (s-1)Y_1, \\
 D_{ii}^{21} &= (D_{ii}^{12})^T = -(s-1)Y_3, \\
 D_{ii}^{22} &= \beta X_1 - (s-1)Y_2, \\
 D_{ii}^{31} &= (D_{ii}^{13})^T = A_i X_1 - B_i M_{Fi}, \\
 D_{ii}^{32} &= (D_{ii}^{23})^T = B_i M_{Fi}, \\
 D_{ii}^{33} &= X_1, \\
 D_{ii}^{41} &= (D_{ii}^{14})^T = 0, \\
 D_{ii}^{42} &= (D_{ii}^{24})^T = A_i X_1 - L_i C_i, \\
 D_{ii}^{43} &= (D_{ii}^{34})^T = 0, \\
 D_{ii}^{44} &= X_1 \\
 D_{ij}^{11} &= \beta X_1 + Y_1 - R_{ij}^1, \\
 D_{ij}^{21} &= (D_{ij}^{12})^T = Y_3 - R_{ij}^3, \\
 D_{ij}^{22} &= \beta X_1 + Y_2 - R_{ij}^2, \\
 D_{ij}^{31} &= (D_{ij}^{13})^T = \frac{1}{2} \{A_i X_1 - B_i M_{Fj} + A_j X_1 - B_j M_{Fi}\} - W_{ij}^1, \\
 D_{ij}^{32} &= (D_{ij}^{23})^T = \frac{1}{2} \{B_i M_{Fj} + B_j M_{Fi}\} - (W_{ij}^3)^T, \\
 D_{ij}^{33} &= X_1 - S_{ij}^1, \\
 D_{ij}^{41} &= (D_{ij}^{14})^T = -W_{ij}^3, \\
 D_{ij}^{42} &= (D_{ij}^{24})^T = \frac{1}{2} \{A_i X_1 - L_i C_j + A_j X_1 - L_j C_i\} - W_{ij}^2, \\
 D_{ij}^{43} &= (D_{ij}^{34})^T = -S_{ij}^3, \text{ e} \\
 D_{ij}^{44} &= X_1 - S_{ij}^2.
 \end{aligned}$$

Os ganhos do regulador e os ganhos do observador são dados da seguinte forma:

$$F_i = M_{Fi} X_1^{-1} \text{ e } H_i = L_i M^{-1},$$

das soluções M_{Fi} , X_1 , L_i e M .

O problema de projeto acima é reduzido à estabilização do sistema aumentado, sem taxa de decaimento, se for resolvido com $\beta = 1$.

Projetos mais práticos podem ser realizados adicionando nas LMIs acima as restrições da entrada e da saída, como descrito nas seções 3.5 e 3.6, respectivamente.

As condições acima são LMIs que devem ser aplicadas quando $r \neq s$. Quando $r = s$, levando-se em conta os resultados do Corolário 2, pode-se por simplicidade utilizar as mesmas condições descritas acima, considerando-se agora $Y = 0$.



Método 3 - Caso A

Este método também foi desenvolvido para que os resultados das seções 3.5 e 3.6 pudessem ser aplicados no sistema aumentado. Sua idéia básica está descrita abaixo.

Sistema Fuzzy Contínuo (SFC):

Para que o sistema dado pela equação (4.7) seja estável deve-se ter:

$$E_p = (G_{ij}^a)^T P + P G_{ij}^a < 0.$$

Multiplicando-se a equação acima por $X = P^{-1}$ pela direita e pela esquerda, tem-se:

$$E_x = X(G_{ij}^a)^T + G_{ij}^a X < 0. \quad (4.40)$$

Manipulando-se a equação (4.40), obtém-se o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} E_x = & \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & A_i \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix} F_j \begin{bmatrix} -I & I \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} H_i \begin{bmatrix} 0 & -C_j \end{bmatrix} X \\ & + X \begin{bmatrix} A_i^T & 0 \\ 0 & A_i^T \end{bmatrix} + X \begin{bmatrix} -I \\ I \end{bmatrix} F_j^T \begin{bmatrix} B_i^T & 0 \end{bmatrix} + X \begin{bmatrix} 0 \\ -C_j^T \end{bmatrix} H_i^T \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} < 0. \end{aligned}$$

Fazendo

$$A_i^a = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & A_i \end{bmatrix}, \quad B_i^a = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_i^a = \begin{bmatrix} 0 & -C_i \end{bmatrix}, \quad I_1 = \begin{bmatrix} -I & I \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix},$$

tem-se

$$E_x = A_i^a X + B_i^a F_j I_1 X + I_2 H_i C_j^a X + X(A_i^a)^T + X I_1^T F_j^T (B_i^a)^T + X(C_j^a)^T H_i^T I_2^T < 0.$$

Para que a matriz E_x fique na forma de uma LMI, utilizando-se os resultados descritos em (Crusius and Trofino, 1996), faz-se $I_1 X = M_F I_1$ e $C_j^a X = M_H C_j^a$. Assim os termos $B_i^a F_j I_1 X$ e $I_2 H_i C_j^a X$ serão iguais a $B_i^a F_j M_F I_1$ e $I_2 H_i M_H C_j^a$, respectivamente. Assim, pode-se fazer $F_j M_F = L_{Fj}$ e $H_i M_H = L_{Hi}$. Desta forma, tem-se a matriz E_x na forma de uma LMI, como descrito abaixo:

$$E_x = A_i^a X + B_i^a L_{Fj} I_1 + I_2 L_{Hi} C_j^a + X(A_i^a)^T + I_1^T L_{Fj}^T (B_i^a)^T + (C_j^a)^T L_{Hi}^T I_2^T < 0.$$

Os ganhos do regulador e os ganhos do observador são dados da seguinte forma:

$$F_i = L_{Fi} M_F^{-1} \quad \text{e} \quad H_i = L_{Hi} M_H^{-1},$$

das soluções L_{Fi} , M_F , L_{Hi} e M_H .

De posse dos resultados acima e com base no Teorema 5, tem-se as seguintes LMIs com taxa de decaimento:

Maximize γ e encontre $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{P}_{ij}$, $\mathbf{L}_{Fi}$, $\mathbf{L}_{Hi}$, $\mathbf{M}_F$ e $\mathbf{M}_H$, para $i, j = 1, 2, \dots, r$, sendo $i < j$, sujeito a $\mathbf{X} > 0$, $\mathbf{Y} \geq 0$, $\mathbf{P}_{ij} \geq 0$,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \dots & \mathbf{C}_{1r} \\ \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{22} & \dots & \mathbf{C}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{1r} & \mathbf{C}_{2r} & \dots & \mathbf{C}_{rr} \end{bmatrix} < 0,$$

$$\mathbf{I}_1 \mathbf{X} - \mathbf{M}_F \mathbf{I}_1 = 0 \text{ e}$$

$$\mathbf{C}_i^a \mathbf{X} - \mathbf{M}_H \mathbf{C}_i^a = 0,$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{ii} = & \mathbf{A}_i^a \mathbf{X} + \mathbf{B}_i^a \mathbf{L}_{Fi} \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 \mathbf{L}_{Hi} \mathbf{C}_i^a + \mathbf{X} (\mathbf{A}_i^a)^T + \mathbf{I}_1^T \mathbf{L}_{Fi}^T (\mathbf{B}_i^a)^T + (\mathbf{C}_i^a)^T \mathbf{L}_{Hi}^T \mathbf{I}_2^T \\ & + (s-1) \mathbf{Y} + 2\gamma \mathbf{X}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{C}_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t)) = 0, \forall \mathbf{z}(t), \\ \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{A}_i^a \mathbf{X} + \mathbf{B}_i^a \mathbf{L}_{Fj} \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 \mathbf{L}_{Hi} \mathbf{C}_j^a + \mathbf{X} (\mathbf{A}_i^a)^T + \mathbf{I}_1^T \mathbf{L}_{Fj}^T (\mathbf{B}_i^a)^T + (\mathbf{C}_j^a)^T \mathbf{L}_{Hi}^T \mathbf{I}_2^T \right. \\ \quad \left. + \mathbf{A}_j^a \mathbf{X} + \mathbf{B}_j^a \mathbf{L}_{Fi} \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 \mathbf{L}_{Hj} \mathbf{C}_i^a + \mathbf{X} (\mathbf{A}_j^a)^T + \mathbf{I}_1^T \mathbf{L}_{Fi}^T (\mathbf{B}_j^a)^T + (\mathbf{C}_i^a)^T \mathbf{L}_{Hj}^T \mathbf{I}_2^T \right\} \\ \quad - \mathbf{Y} + \mathbf{P}_{ij} + 2\gamma \mathbf{X}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O problema de projeto acima é reduzido à estabilização do sistema aumentado, sem taxa de decaimento, se for resolvido com $\gamma = 0$.

Os ganhos do regulador e os ganhos do observador são dados da seguinte forma:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{L}_{Fi} \mathbf{M}_F^{-1} \text{ e } \mathbf{H}_i = \mathbf{L}_{Hi} \mathbf{M}_H^{-1},$$

das soluções $\mathbf{L}_{Fi}$, $\mathbf{M}_F$, $\mathbf{L}_{Hi}$ e $\mathbf{M}_H$.

Projetos mais práticos podem ser realizados adicionando nas LMIs acima as restrições da entrada e da saída, como descrito nas seções 3.5 e 3.6, respectivamente.

As condições acima são LMIs que devem ser aplicadas quando $r \neq s$. Quando $r = s$, levando-se em conta os resultados do Corolário 1, pode-se por simplicidade utilizar as mesmas condições descritas acima, considerando-se agora $\mathbf{Y} = 0$.

Sistema Fuzzy Discreto (SFD):

Para que o sistema dado pela equação (4.8) seja estável deve-se ter:

$$(\mathbf{G}_{ij}^a)^T \mathbf{P} \mathbf{G}_{ij}^a - \mathbf{P} < 0.$$

Multiplicando-se a equação acima por $X = P^{-1}$ pela direita e pela esquerda, tem-se:

$$X - X(G_{ij}^a)^T X^{-1} G_{ij}^a X > 0. \quad (4.41)$$

Aplicando o Complemento de Schur na equação (4.41), obtém-se o seguinte resultado:

$$E^d = \begin{bmatrix} E_{11}^d & E_{12}^d \\ E_{21}^d & E_{22}^d \end{bmatrix},$$

sendo

$$E_{11}^d = E_{22}^d = X \text{ e}$$

$$E_{21}^d = (E_{12}^d)^T = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & A_i \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix} F_j \begin{bmatrix} -I & I \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} H_i \begin{bmatrix} 0 & -C_j \end{bmatrix} X.$$

Utilizando-se os mesmos artifícios do caso contínuo, tem-se as seguintes equações na forma de LMIs para os elementos da matriz E^d :

$$E_{11}^d = E_{22}^d = X \text{ e}$$

$$E_{21}^d = (E_{12}^d)^T = A_i^a X + B_i^a L_{Fj} I_1 + I_2 L_{Hi} C_j^a.$$

Os ganhos do regulador e os ganhos do observador são dados da seguinte forma:

$$F_i = L_{Fi} M_F^{-1} \text{ e } H_i = L_{Hi} M_H^{-1},$$

das soluções L_{Fi} , M_F , L_{Hi} e M_H .

De posse dos resultados acima e com base no Teorema 6, tem-se as seguintes LMIs, levando-se em conta a taxa de decaimento:

Minimize β e encontre X , Y , R_{ij} , S_{ij} , W_{ij} , L_{Fi} , L_{Hi} , M_F e M_H , para $i, j = 1, 2, \dots, r$, sendo $i < j$, sujeito a $X > 0$, $Y \geq 0$,

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1r} \\ D_{12} & D_{22} & \dots & D_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{1r} & D_{2r} & \dots & D_{rr} \end{bmatrix} > 0,$$

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} R_{ij} & W_{ij}^T \\ W_{ij} & S_{ij} \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$I_1 X - M_F I_1 = 0 \text{ e}$$

$$C_i^a X - M_H C_i^a = 0,$$

tal que

$$D_{ii} = \begin{bmatrix} D_{ii}^{11} & D_{ii}^{12} \\ D_{ii}^{21} & D_{ii}^{22} \end{bmatrix} \text{ e } D_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t)) = 0, \forall z(t), \\ \begin{bmatrix} D_{ij}^{11} & D_{ij}^{12} \\ D_{ij}^{21} & D_{ij}^{22} \end{bmatrix}, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

sendo

$$D_{ii}^{11} = \beta X - (s - 1)Y,$$

$$D_{ii}^{21} = (D_{ii}^{12})^T = A_i^a X + B_i^a L_{Fi} I_1 + I_2 L_{Hi} C_i^a,$$

$$D_{ii}^{22} = X,$$

$$D_{ij}^{11} = \beta X + Y - R_{ij},$$

$$D_{ij}^{21} = (D_{ij}^{12})^T = \frac{1}{2} \left\{ A_i^a X + B_i^a L_{Fj} I_1 + I_2 L_{Hi} C_j^a + A_j^a X + B_j^a L_{Fi} I_1 + I_2 L_{Hj} C_i^a \right\} - W_{ij} \text{ e}$$

$$D_{ij}^{22} = X - S_{ij}.$$

Os ganhos do regulador e os ganhos do observador são dados da seguinte forma:

$$F_i = L_{Fi} M_F^{-1} \text{ e } H_i = L_{Hi} M_H^{-1},$$

das soluções L_{Fi} , M_F , L_{Hi} e M_H .

O problema de projeto acima é reduzido à estabilização do sistema aumentado, sem taxa de decaimento, se for resolvido com $\beta = 1$.

Projetos mais práticos podem ser realizados adicionando nas LMIs acima as restrições da entrada e da saída, como descrito nas seções 3.5 e 3.6, respectivamente.

As condições acima são LMIs que devem ser aplicadas quando $r \neq s$. Quando $r = s$, levando-se em conta os resultados do Corolário 2, pode-se por simplicidade utilizar as mesmas condições descritas acima, considerando-se agora $Y = 0$.

B - Caso B

Para o caso B, não são apresentadas LMIs na literatura disponível. No entanto, isto é realizado neste trabalho. Para este caso, são apresentados dois métodos de projeto baseados em LMIs para se determinar os ganhos do observador e os ganhos do controlador. Estes dois métodos são apresentados a seguir.

Método 1 - Caso B

Sistema Fuzzy Contínuo (SFC):

É mencionado em (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998) que é difícil transformar as condições deste caso B em LMIs. Em (Tanaka and Wang, 1997), são apresentadas algumas condições que não são LMIs, como mostrado abaixo.

O ponto de equilíbrio $x_a = 0$ do sistema aumentado descrito por (4.17) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum P tal que

Maximize γ sujeito a $\delta > 0$, $\alpha > 0$,

$$P = \begin{bmatrix} \delta P_c^{-1} & 0 \\ 0 & P_o^{-1} \end{bmatrix} > 0,$$

$$A_i P_c - B_i M_{cj} + P_c A_i^T - M_{cj}^T B_i^T + 2\gamma P_c < 0,$$

$$P_o A_j^T - P_o C_j^T H_j^T + M_{oj}^T (B_i - B_j)^T + A_j P_o - H_j C_j P_o + (B_i - B_j) M_{oj} + 2\gamma P_o < 0,$$

$$P_c A_i^T - M_{cs}^T B_i^T + A_i P_c - B_i M_{cs} + 4\gamma P_c + P_c A_i^T - M_{cj}^T B_i^T + A_i P_c - B_i M_{cj} < 0, \quad j < s,$$

$$P_o A_j^T - P_o C_s^T H_j^T + M_{os}^T (B_i - B_j)^T + A_j P_o - H_j C_s P_o + (B_i - B_j) M_{os} + 4\gamma P_o \\ + P_o A_s^T - P_o C_j^T H_s^T + M_{oj}^T (B_i - B_j)^T + A_s P_o - H_s C_j P_o + (B_i - B_j) M_{oj} < 0, \quad j < s,$$

para todo i, j e s , excetuando-se os casos em que $\alpha_i(z(t))\alpha_j(\hat{z}(t))\alpha_s(\hat{z}(t)) = 0, \forall t$, sendo $M_{ci} = F_i P_c$ e $M_{oi} = F_i P_o$.

Note que as condições acima não são LMIs com respeito a F_i , H_i , P_c , P_o , M_{ci} e M_{oi} . Para que o problema tenha solução, deve-se primeiro determinar os ganhos H_i . Desta forma, as variáveis M_{ci} e P_c podem ser obtidas pelas equações acima e os ganhos do regulador são obtidos pela expressão $F_i = M_{ci} P_c^{-1}$.

Isto não é prático pois o ideal é que se tenha equações na forma de LMIs que determinem os ganhos do regulador e do observador. Abaixo estão descritas LMIs que encontram diretamente os ganhos F_i do regulador e os ganhos H_i do observador.

Para que o sistema dado pela equação (4.17) seja estável deve-se ter:

$$G_{ijs}^T P + P G_{ijs} < 0.$$

Multiplicando-se a equação acima por $X = P^{-1}$ pela direita e pela esquerda, tem-se:

$$E^c = X G_{ijs}^T + G_{ijs} X < 0, \quad (4.42)$$

sendo

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{bmatrix} \text{ e } X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_1 \end{bmatrix}$$

Manipulando-se a equação (4.42), obtém-se o seguinte resultado:

$$E^c = \begin{bmatrix} E_{11}^c & E_{12}^c \\ E_{21}^c & E_{22}^c \end{bmatrix},$$

sendo

$$E_{11}^c = X_1 A_i^T - X_1 F_s^T B_i^T + A_i X_1 - B_i F_s X_1,$$

$$E_{21}^c = (E_{12}^c)^T = X_1 F_s^T B_i^T + A_i X_1 - A_j X_1 - B_i F_s X_1 + B_j F_s X_1 + H_j C_s X_1 - H_j C_i X_1 \text{ e}$$

$$E_{22}^c = X_1 A_j^T - X_1 C_s^T H_j^T + X_1 F_s^T B_i^T - X_1 F_s^T B_j^T \\ + A_j X_1 - H_j C_s X_1 + B_i F_s X_1 - B_j F_s X_1.$$

Utilizando-se os mesmos artifícios que foram utilizados no Método 2-Caso A, tem-se as seguintes LMIs para os elementos da matriz E^c :

$$\begin{aligned} E_{11}^c &= X_1 A_i^T - M_{F_s}^T B_i^T + A_i X_1 - B_i M_{F_s}, \\ E_{21}^c &= (E_{12}^c)^T = M_{F_s}^T B_i^T + A_i X_1 - A_j X_1 - B_i M_{F_s} + B_j M_{F_s} + L_j C_s - L_j C_i \text{ e} \\ E_{22}^c &= X_1 A_j^T - C_s^T L_j^T + M_{F_s}^T B_i^T - M_{F_s}^T B_j^T + A_j X_1 - L_j C_s + B_i M_{F_s} - B_j M_{F_s}. \end{aligned}$$

sendo que os ganhos do regulador F_i e os ganhos do observador H_i são obtidos da seguinte forma:

$$F_i = M_{F_i} X_1^{-1} \text{ e } H_i = L_i M^{-1},$$

das soluções M_{F_i} , X_1 , L_i e M .

Utilizando-se os resultados descritos acima e aqueles do Teorema 7, tem-se as seguintes LMIs para este caso, levando-se em conta a taxa de decaimento:

Maximize γ e encontre, para $i, j, s = 1, 2, \dots, r$, sendo $j < s$, X_1 , Y_{i1} , Y_{i2} , Y_{i3} , P_{ijs}^1 , P_{ijs}^2 , P_{ijs}^3 , M_{F_i} e L_i , sujeito a $X_1 > 0$,

$$\begin{bmatrix} C_{i11} & C_{i12} & \dots & C_{i1r} \\ C_{i12} & C_{i22} & \dots & C_{i2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{i1r} & C_{i2r} & \dots & C_{irr} \end{bmatrix} < 0,$$

$$Y_i = \begin{bmatrix} Y_{i1} & (Y_{i3})^T \\ Y_{i3} & Y_{i2} \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$P_{ijs} = \begin{bmatrix} P_{ijs}^1 & (P_{ijs}^3)^T \\ P_{ijs}^3 & P_{ijs}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \text{ e}$$

$$C_i X_1 - M C_i = 0,$$

tal que

$$C_{ijj} = \begin{bmatrix} N_{ijj}^{11} & N_{ijj}^{12} \\ N_{ijj}^{21} & N_{ijj}^{22} \end{bmatrix} \text{ e } C_{ijs} = \begin{cases} 0, \text{ se } \alpha_i(z(t))\alpha_j(\hat{z}(t))\alpha_s(\hat{z}(t)) = 0, \forall z(t) \text{ e } \hat{z}(t), \\ \begin{bmatrix} N_{ijs}^{11} & N_{ijs}^{12} \\ N_{ijs}^{21} & N_{ijs}^{22} \end{bmatrix}, \text{ caso contrário,} \end{cases}$$

sendo

$$\begin{aligned} N_{ijj}^{11} &= X_1 A_i^T - M_{F_j}^T B_i^T + A_i X_1 - B_i M_{F_j} + (v-1)Y_{i1} + 2\gamma X_1, \\ N_{ijj}^{21} &= (N_{ijj}^{12})^T = M_{F_j}^T B_i^T + A_i X_1 - A_j X_1 - B_i M_{F_j} + B_j M_{F_j} + L_j C_j - L_j C_i \\ &\quad + (v-1)Y_{i3}, \\ N_{ijj}^{22} &= X_1 A_j^T - C_j^T L_j^T + M_{F_j}^T B_i^T - M_{F_j}^T B_j^T + A_j X_1 - L_j C_j + B_i M_{F_j} - B_j M_{F_j} \\ &\quad + (v-1)Y_{i2} + 2\gamma X_1, \\ N_{ijs}^{11} &= \frac{1}{2} \{ 2X_1 A_i^T - M_{F_s}^T B_i^T + 2A_i X_1 - B_i M_{F_s} - M_{F_j}^T B_i^T - B_i M_{F_j} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -Y_{i1} + P_{ijs}^1 + 2\gamma X_1, \\
N_{ijs}^{21} &= (N_{ijs}^{12})^T = \frac{1}{2} \left\{ M_{Fs}^T B_i^T + 2A_i X_1 - A_j X_1 - B_i M_{Fs} + B_j M_{Fs} + L_j C_s - L_j C_i \right. \\
& \quad \left. + M_{Fj}^T B_i^T - A_s X_1 - B_i M_{Fj} + B_s M_{Fj} + L_s C_j - L_s C_i \right\} \\
& \quad -Y_{i3} + P_{ijs}^3 \text{ e} \\
N_{ijs}^{22} &= \frac{1}{2} \left\{ X_1 A_j^T - C_s^T L_j^T + M_{Fs}^T B_i^T - M_{Fs}^T B_j^T + A_j X_1 - L_j C_s + B_i M_{Fs} - B_j M_{Fs} \right. \\
& \quad \left. + X_1 A_s^T - C_j^T L_s^T + M_{Fj}^T B_i^T - M_{Fj}^T B_s^T + A_s X_1 - L_s C_j + B_i M_{Fj} - B_s M_{Fj} \right\} \\
& \quad -Y_{i2} + P_{ijs}^2 + 2\gamma X_1.
\end{aligned}$$

Os ganhos do regulador F_i e os ganhos do observador H_i são dados da seguinte forma:

$$F_i = M_{Fi} X_1^{-1} \text{ e } H_i = L_i M^{-1},$$

das soluções M_{Fi} , X_1 , L_i e M .

O problema de projeto acima é reduzido à estabilização do sistema aumentado, sem taxa de decaimento, se for resolvido com $\gamma = 0$.

Projetos mais práticos podem ser realizados adicionando nas LMIs acima as restrições da entrada e da saída, como descrito nas seções 3.5 e 3.6, respectivamente.

As condições acima são LMIs que devem ser aplicadas quando $r \neq v$. Quando $r = v$, levando-se em conta os resultados do Corolário 1, pode-se por simplicidade utilizar as mesmas condições descritas acima, considerando-se agora $Y = 0$.

Sistema Fuzzy Discreto (SFD):

Utilizando-se os mesmos artifícios que foram utilizados no Método 2-Caso A e os resultados do Teorema 8, tem-se as seguintes equações na forma de LMIs, levando-se em conta a taxa de decaimento:

Minimize β e encontre, para $i, j, s = 1, 2, \dots, r$, sendo $j < s$, X_1 , Y_{i1} , Y_{i2} , Y_{i3} , R_{ijs}^1 , R_{ijs}^2 , R_{ijs}^3 , S_{ijs}^1 , S_{ijs}^2 , S_{ijs}^3 , W_{ijs}^1 , W_{ijs}^2 , W_{ijs}^3 , M_{Fi} , L_i e M sujeito a $X_1 > 0$,

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} D_{i11} & D_{i12} & \dots & D_{i1r} \\ D_{i12} & D_{i22} & \dots & D_{i2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{i1r} & D_{i2r} & \dots & D_{irr} \end{bmatrix} > 0, \\
& T_{ijs} = \begin{bmatrix} R_{ijs}^1 & (R_{ijs}^3)^T & (W_{ijs}^1)^T & (W_{ijs}^3)^T \\ R_{ijs}^3 & R_{ijs}^2 & W_{ijs}^3 & (W_{ijs}^2)^T \\ W_{ijs}^1 & (W_{ijs}^3)^T & S_{ijs}^1 & (S_{ijs}^3)^T \\ W_{ijs}^3 & W_{ijs}^2 & S_{ijs}^3 & S_{ijs}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \\
& Y_i = \begin{bmatrix} Y_{i1} & Y_{i3} \\ Y_{i3} & Y_{i2} \end{bmatrix} \geq 0 \text{ e}
\end{aligned}$$

$$C_i X_1 - M C_i = 0,$$

tal que

$$D_{ijj} = \begin{bmatrix} D_{ijj}^{11} & D_{ijj}^{12} & D_{ijj}^{13} & D_{ijj}^{14} \\ D_{ijj}^{21} & D_{ijj}^{22} & D_{ijj}^{23} & D_{ijj}^{24} \\ D_{ijj}^{31} & D_{ijj}^{32} & D_{ijj}^{33} & D_{ijj}^{34} \\ D_{ijj}^{41} & D_{ijj}^{42} & D_{ijj}^{43} & D_{ijj}^{44} \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$D_{ijs} = \begin{cases} 0, \text{ se } \alpha_i(z(t))\alpha_j(\hat{z}(t))\alpha_s(\hat{z}(t)) = 0, \forall z(t) \text{ e } \hat{z}(t), \\ \begin{bmatrix} D_{ijs}^{11} & D_{ijs}^{12} & D_{ijs}^{13} & D_{ijs}^{14} \\ D_{ijs}^{21} & D_{ijs}^{22} & D_{ijs}^{23} & D_{ijs}^{24} \\ D_{ijs}^{31} & D_{ijs}^{32} & D_{ijs}^{33} & D_{ijs}^{34} \\ D_{ijs}^{41} & D_{ijs}^{42} & D_{ijs}^{43} & D_{ijs}^{44} \end{bmatrix}, \text{ caso contrário,} \end{cases}$$

sendo que

$$\begin{aligned} D_{ijj}^{11} &= \beta X_1 - (v-1)Y_{i1}, \\ D_{ijj}^{21} &= (D_{ijj}^{12})^T = -(v-1)Y_{i3}, \\ D_{ijj}^{22} &= \beta X_1 - (v-1)Y_{i2}, \\ D_{ijj}^{31} &= (D_{ijj}^{13})^T = A_i X_1 - B_i M_{Fj}, \\ D_{ijj}^{32} &= (D_{ijj}^{23})^T = B_i M_{Fj}, \\ D_{ijj}^{33} &= X_1, \\ D_{ijj}^{41} &= (D_{ijj}^{14})^T = A_i X_1 - A_j X_1 - B_i M_{Fj} + B_j M_{Fj} + L_j C_j - L_j C_i, \\ D_{ijj}^{42} &= (D_{ijj}^{24})^T = A_j X_1 - L_j C_j + B_i M_{Fj} - B_j M_{Fj}, \\ D_{ijj}^{43} &= (D_{ijj}^{34})^T = 0, \\ D_{ijj}^{44} &= X_1, \\ D_{ijs}^{11} &= \beta X_1 + Y_{i1} - R_{ijs}^1, \\ D_{ijs}^{21} &= (D_{ijs}^{12})^T = Y_{i3} - R_{ijs}^3, \\ D_{ijs}^{22} &= \beta X_1 + Y_{i2} - R_{ijs}^2, \\ D_{ijs}^{31} &= (D_{ijs}^{13})^T = \frac{1}{2} \{2A_i X_1 - B_i M_{Fs} - B_i M_{Fj}\} - W_{ijs}^1, \\ D_{ijs}^{32} &= (D_{ijs}^{23})^T = \frac{1}{2} \{B_i M_{Fs} + B_i M_{Fj}\} - (W_{ijs}^3)^T, \\ D_{ijs}^{33} &= X_1 - S_{ijs}^1, \\ D_{ijs}^{41} &= (D_{ijs}^{14})^T = \frac{1}{2} \{2A_i X_1 - A_j X_1 - B_i M_{Fs} + B_j M_{Fs} + L_j C_s - L_j C_i - A_s X_1 \\ &\quad - B_i M_{Fj} + B_s M_{Fj} + L_s C_j - L_s C_i\} - W_{ijs}^3, \\ D_{ijs}^{42} &= (D_{ijs}^{24})^T = \frac{1}{2} \{A_j X_1 - L_j C_s + B_i M_{Fs} - B_j M_{Fs} + A_s X_1 - L_s C_j + B_i M_{Fj} \\ &\quad - B_s M_{Fj}\} - W_{ijs}^2, \\ D_{ijs}^{43} &= (D_{ijs}^{34})^T = -S_{ijs}^3 \text{ e} \\ D_{ijs}^{44} &= X_1 - S_{ijs}^2. \end{aligned}$$

Os ganhos do regulador e os ganhos do observador são dados da seguinte forma:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{M}_{Fi} \mathbf{X}_1^{-1} \text{ e } \mathbf{H}_i = \mathbf{L}_i \mathbf{M}^{-1},$$

das soluções $\mathbf{M}_{Fi}$, $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{L}_i$ e $\mathbf{M}$.

O problema de projeto acima é reduzido a um problema de projeto de um sistema aumentado estável, sem taxa de decaimento, se for resolvido com $\beta = 1$.

Projetos mais práticos podem ser realizados adicionando nas LMIs acima as restrições da entrada e da saída, como descrito nas seções 3.5 e 3.6, respectivamente.

As condições acima são LMIs que devem ser aplicadas quando $r \neq v$. Quando $r = v$, levando-se em conta os resultados do Corolário 2, pode-se por simplicidade utilizar as mesmas condições descritas acima, considerando-se agora $\mathbf{Y} = 0$.

Método 2 - Caso B

Utilizando-se os resultados obtidos no Método 3-Caso A, utilizou-se para este caso

$$\mathbf{A}_{ij}^a = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & 0 \\ (\mathbf{A}_i - \mathbf{A}_j) & \mathbf{A}_j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{ij}^a = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_i \\ (\mathbf{B}_i - \mathbf{B}_j) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{ij}^a = \begin{bmatrix} (\mathbf{C}_s - \mathbf{C}_i) & -\mathbf{C}_s \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

Sistema Fuzzy Contínuo (SFC):

Utilizando-se as definições acima e os resultados do Teorema 7, tem-se as seguintes LMIs para este caso, levando-se em conta a taxa de decaimento:

Maximize γ e encontre, para $i, j, s = 1, 2, \dots, r$, sendo $j < s$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}_i$, $\mathbf{P}_{ijs}$, $\mathbf{L}_{Fi}$, $\mathbf{L}_{Hi}$, $\mathbf{M}_F$ e $\mathbf{M}_H$ sujeito a $\mathbf{X} > 0$, $\mathbf{Y}_i \geq 0$, $\mathbf{P}_{ijs} \geq 0$,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{i11} & \mathbf{C}_{i12} & \dots & \mathbf{C}_{i1r} \\ \mathbf{C}_{i12} & \mathbf{C}_{i22} & \dots & \mathbf{C}_{i2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{i1r} & \mathbf{C}_{i2r} & \dots & \mathbf{C}_{irr} \end{bmatrix} < 0,$$

$$\mathbf{I}_1 \mathbf{X} - \mathbf{M}_F \mathbf{I}_1 = 0 \text{ e}$$

$$\mathbf{C}_{is}^a \mathbf{X} - \mathbf{M}_H \mathbf{C}_{is}^a = 0,$$

sendo

$$\mathbf{C}_{ijj} = \mathbf{A}_{ij}^a \mathbf{X} + \mathbf{B}_{ij}^a \mathbf{L}_{Fj} \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 \mathbf{L}_{Hj} \mathbf{C}_{ij}^a + \mathbf{X} (\mathbf{A}_{ij}^a)^T + \mathbf{I}_1^T \mathbf{L}_{Fj}^T (\mathbf{B}_{ij}^a)^T + (\mathbf{C}_{ij}^a)^T \mathbf{L}_{Hj}^T \mathbf{I}_2^T + (v-1) \mathbf{Y}_i + 2\gamma \mathbf{X} \text{ e}$$

$$C_{ijs} = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\hat{\mathbf{z}}(t))\alpha_s(\hat{\mathbf{z}}(t)) = 0, \forall \mathbf{z}(t) \text{ e } \hat{\mathbf{z}}(t), \\ \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{A}_{ij}^a \mathbf{X} + \mathbf{B}_{ij}^a \mathbf{L}_{Fs} \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 \mathbf{L}_{Hj} \mathbf{C}_{is}^a + \mathbf{X} (\mathbf{A}_{ij}^a)^T + \mathbf{I}_1^T \mathbf{L}_{Fs}^T (\mathbf{B}_{ij}^a)^T + (\mathbf{C}_{is}^a)^T \mathbf{L}_{Hj}^T \mathbf{I}_2^T \right. \\ \quad \left. + \mathbf{A}_{is}^a \mathbf{X} + \mathbf{B}_{is}^a \mathbf{L}_{Fj} \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 \mathbf{L}_{Hs} \mathbf{C}_{ij}^a + \mathbf{X} (\mathbf{A}_{is}^a)^T + \mathbf{I}_1^T \mathbf{L}_{Fj}^T (\mathbf{B}_{is}^a)^T + (\mathbf{C}_{ij}^a)^T \mathbf{L}_{Hs}^T \mathbf{I}_2^T \right\} \\ \quad - \mathbf{Y}_i + \mathbf{P}_{ijs} + 2\gamma \mathbf{X}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Os ganhos do regulador e os ganhos do observador são dados da seguinte forma:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{L}_{Fi} \mathbf{M}_F^{-1} \text{ e } \mathbf{H}_i = \mathbf{L}_{Hi} \mathbf{M}_H^{-1},$$

das soluções $\mathbf{L}_{Fi}$, $\mathbf{M}_F$, $\mathbf{L}_{Hi}$ e $\mathbf{M}_H$.

O problema de projeto acima é reduzido à estabilização do sistema aumentado, sem taxa de decaimento, se for resolvido com $\gamma = 0$.

Projetos mais práticos podem ser realizados adicionando nas LMIs acima as restrições da entrada e da saída, como descrito nas seções 3.5 e 3.6, respectivamente.

As condições acima são LMIs que devem ser aplicadas quando $r \neq v$. Quando $r = v$, levando-se em conta os resultados do Corolário 1, pode-se por simplicidade utilizar as mesmas condições descritas acima, considerando-se agora $\mathbf{Y} = 0$.

Sistema Fuzzy Discreto (SFD):

Utilizando-se os resultados do Teorema 8, tem-se as seguintes LMIs para este caso, levando-se em conta a taxa de decaimento:

Minimize β e encontre, para $i, j, s = 1, 2, \dots, r$, sendo $j < s$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{R}_{ijs}$, $\mathbf{S}_{ijs}$, $\mathbf{W}_{ijs}$, $\mathbf{L}_{Fi}$, $\mathbf{L}_{Hi}$, $\mathbf{M}_F$ e $\mathbf{M}_H$ sujeito a $\mathbf{X} > 0$, $\mathbf{Y} \geq 0$,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{i11} & \mathbf{D}_{i12} & \dots & \mathbf{D}_{i1r} \\ \mathbf{D}_{i12} & \mathbf{D}_{i22} & \dots & \mathbf{D}_{i2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{D}_{i1r} & \mathbf{D}_{i2r} & \dots & \mathbf{D}_{irr} \end{bmatrix} > 0,$$

$$\mathbf{T}_{ijs} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ijs} & \mathbf{W}_{ijs}^T \\ \mathbf{W}_{ijs} & \mathbf{S}_{ijs} \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$\mathbf{I}_1 \mathbf{X} - \mathbf{M}_F \mathbf{I}_1 = 0 \text{ e}$$

$$\mathbf{C}_{is}^a \mathbf{X} - \mathbf{M}_H \mathbf{C}_{is}^a = 0,$$

tal que

$$\mathbf{D}_{ijj} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{ijj}^{11} & \mathbf{D}_{ijj}^{12} \\ \mathbf{D}_{ijj}^{21} & \mathbf{D}_{ijj}^{22} \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{D}_{ijs} = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t)) = 0, \forall \mathbf{z}(t), \\ \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{ijs}^{11} & \mathbf{D}_{ijs}^{12} \\ \mathbf{D}_{ijs}^{21} & \mathbf{D}_{ijs}^{22} \end{bmatrix}, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

sendo

$$D_{ijj}^{11} = \beta X - (s-1)Y_i,$$

$$D_{ijj}^{21} = (D_{ij}^{12})^T = A_{ij}^a X + B_{ij}^a L_{Fj} I_1 + I_2 L_{Hj} C_{is}^a,$$

$$D_{ijj}^{22} = X,$$

$$D_{ijj}^{11} = \beta X + Y_i - R_{ijs},$$

$$D_{ijj}^{21} = (D_{ij}^{12})^T = \frac{1}{2} \left\{ A_{ij}^a X + B_{ij}^a L_{Fj} I_1 + I_2 L_{Hj} C_{is}^a + A_{is}^a X + B_{is}^a L_{Fj} I_1 + I_2 L_{Hs} C_{ij}^a \right\} - W_{ijs} \text{ e}$$

$$D_{ijj}^{22} = X - S_{ijs}.$$

Os ganhos do regulador e os ganhos do observador são dados da seguinte forma:

$$F_i = L_{Fi} M_F^{-1} \text{ e } H_i = L_{Hi} M_H^{-1},$$

das soluções L_{Fi} , M_F , L_{Hi} e M_H .

O problema de projeto acima é reduzido à estabilização do sistema aumentado, sem taxa de decaimento, se for resolvido com $\beta = 1$.

Projetos mais práticos podem ser realizados adicionando nas LMIs acima as restrições da entrada e da saída, como descrito nas seções 3.5 e 3.6, respectivamente.

As condições acima são LMIs que devem ser aplicadas quando $r \neq v$. Quando $r = v$, levando-se em conta os resultados do Corolário 2, pode-se por simplicidade utilizar as mesmas condições descritas acima, considerando-se agora $Y = 0$.

4.4 Exemplo de Projeto

Projeto de um regulador fuzzy e um observador fuzzy: Para este exemplo, utilizou-se o modelo do pêndulo invertido dado pela equação (3.41) na forma discretizada utilizando-se um período de amostragem $T = 0.005s$, como descrito em (Ma et al., 1998).

Para projetar o regulador fuzzy e o observador fuzzy deve-se ter um modelo fuzzy que represente as dinâmicas da planta não-linear. Portanto, primeiro representa-se o sistema pelo modelo fuzzy Takagi-Sugeno. Aqui o modelo global do sistema foi obtido através da combinação fuzzy de dois modelos lineares locais. Desta forma aproximou-se o sistema através das seguintes duas regras do modelo fuzzy, como efetuado em (Ma et al., 1998):

Regra 1 da Planta : SE $x_1(t)$ está em torno de 0,

$$\text{ENTÃO } \begin{cases} \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}_1^d \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1^d \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_1^d \mathbf{x}(t). \end{cases}$$

Regra 2 da Planta : SE $x_1(t)$ está em torno de $\pm \pi/3$,

$$\text{ENTÃO } \begin{cases} \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}_2^d \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2^d \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_2^d \mathbf{x}(t), \end{cases}$$

sendo

$$\mathbf{A}_1^d = \begin{bmatrix} 1.00036435382220 & 0.00499668532032 & 0.0 & 0.00053694917482 \\ 0.14548923599960 & 0.99879808214278 & 0.0 & 0.21178674758507 \\ -0.00001535803517 & 0.00000013956098 & 1.0 & 0.00479683778240 \\ -0.00605760930610 & 0.00004985546214 & 0.0 & 0.91985283848186 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1^d = \begin{bmatrix} -0.00002343221361 \\ -0.00924227569649 \\ 0.00000886590520 \\ 0.00349758505425 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_1^d = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2^d = \begin{bmatrix} 1.00027541825024 & 0.00499687384590 & 0.0 & 0.00024540136153 \\ 0.11010754204057 & 0.99884207145830 & 0.0 & 0.09691078779658 \\ -0.00000580472257 & 0.00000006582749 & 1.0 & 0.00481429623406 \\ -0.00229232728470 & 0.00002403610304 & 0.0 & 0.92665011300373 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_2^d = \begin{bmatrix} -0.00001070920190 \\ -0.00422914195054 \\ 0.00000810402644 \\ 0.00320095513839 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{C}_2^d = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \end{bmatrix}.$$

As funções de pertinência para as regras da planta 1 e 2 são:

$$\alpha_1(x_1(t)) = \left\{ 1.0 - \frac{1.0}{1.0 + e^{-7.0[x_1(t) - \pi/6]}} \right\} \left\{ \frac{1.0}{1.0 + e^{-7.0[x_1(t) + \pi/6]}} \right\}$$

e

$$\alpha_2(x_1(t)) = 1 - \alpha_1(x_1(t)).$$

Para solucionar o problema de projeto do sistema fuzzy discreto, utilizou-se o Método 1-Caso A para o sistema fuzzy discreto (considerando-se a taxa de decaimento nula), pois $\mathbf{z}_1(t) \sim \mathbf{z}_p(t)$ dependem apenas das variáveis de estado disponíveis. O observador é descrito por (4.1) e (4.3) e o controlador por (4.6).

O problema de projeto do sistema fuzzy discreto é definido como segue:

Encontre $\mathbf{P}_o$, $\mathbf{R}_{ij}^o$, $\mathbf{S}_{ij}^o$, $\mathbf{W}_{ij}^o$ e $\mathbf{M}_{oi}$ e para $i, j = 1, 2, \dots, r$, sendo $i < j$, sujeito a $\mathbf{P}_o > 0$, (4.34) e (4.35), sendo $\mathbf{Q}_o = 0$, pois $r = s = 2$.

Encontre $\mathbf{X}_c$, $\mathbf{R}_{ij}^c$, $\mathbf{S}_{ij}^c$, $\mathbf{W}_{ij}^c$ e $\mathbf{M}_{ci}$, para $i, j = 1, 2, \dots, r$, sendo $i < j$, sujeito a $\mathbf{X}_c > 0$, (4.36) e (4.37), sendo $\mathbf{Y}_c = 0$, pois $r = s = 2$.

A solução obtida, sendo $\mathbf{F}_i = \mathbf{M}_{ci}\mathbf{X}_c^{-1}$ e $\mathbf{H}_i = \mathbf{P}_o^{-1}\mathbf{M}_{oi}$, foi:

$$\mathbf{P}_o = \begin{bmatrix} 1.2093 & -0.1745 & 0.0182 & -0.3572 \\ -0.1745 & 0.1538 & -0.0133 & 0.2018 \\ 0.0182 & -0.0133 & 1.0016 & -0.0429 \\ -0.3572 & 0.2018 & -0.0429 & 1.6649 \end{bmatrix} > 0,$$

$$\mathbf{R}_{12}^o = \begin{bmatrix} 1.0787 & -0.1184 & 0.0055 & -0.0832 \\ -0.1184 & 0.1589 & -0.0075 & 0.0736 \\ 0.0055 & -0.0075 & 1.0004 & -0.0116 \\ -0.0832 & 0.0736 & -0.0116 & 0.8814 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S}_{12}^o = \begin{bmatrix} 1.0785 & -0.1166 & 0.0057 & -0.0813 \\ -0.1166 & 0.1567 & -0.0076 & 0.0696 \\ 0.0057 & -0.0076 & 1.0004 & -0.0128 \\ -0.0813 & 0.0696 & -0.0128 & 0.8674 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{W}_{12}^o = \begin{bmatrix} 0.0798 & -0.1122 & 0.0056 & -0.0800 \\ -0.1168 & 0.1563 & -0.0075 & 0.0811 \\ 0.0058 & -0.0076 & 3.9465 \cdot 10^{-4} & -0.0071 \\ -0.0781 & 0.0710 & -0.0102 & 0.7506 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_c = \begin{bmatrix} 0.0883 & -0.2110 & -0.0524 & -0.1616 \\ -0.2110 & 1.1998 & 0.1091 & -0.3063 \\ -0.0524 & 0.1091 & 1.0759 & -0.4376 \\ -0.1616 & -0.3063 & -0.4377 & 1.6560 \end{bmatrix} > 0,$$

$$\mathbf{R}_{12}^c = \begin{bmatrix} 0.0731 & -0.1555 & -0.0549 & -0.1084 \\ -0.1555 & 0.9041 & 0.0089 & -0.1506 \\ -0.0549 & 0.0089 & 0.7198 & -0.0761 \\ -0.1084 & -0.1506 & -0.0761 & 0.8291 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S}_{12}^c = \begin{bmatrix} 0.0747 & -0.1480 & -0.0550 & -0.1151 \\ -0.1480 & 0.8246 & 0.0006 & -0.1055 \\ -0.0550 & 0.0006 & 0.7214 & -0.0736 \\ -0.1151 & -0.1055 & -0.0736 & 0.8089 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{W}_{12}^c = \begin{bmatrix} 0.0725 & -0.1500 & -0.0551 & -0.1100 \\ -0.1411 & 0.5719 & -0.0020 & 0.0107 \\ -0.0552 & 0.0072 & 0.7177 & -0.0704 \\ -0.1105 & 0.0049 & -0.0714 & 0.7370 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 1.0014 & -0.0012 \\ 1.1726 & 0.0637 \\ -0.0011 & 1.0000 \\ 0.0802 & 0.0171 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 0.9957 & -0.0011 \\ 1.1204 & 0.0624 \\ -0.0010 & 1.0000 \\ 0.0866 & 0.0171 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} -348.4109 & -96.6946 & -26.2414 & -71.4663 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} -313.7987 & -90.6055 & -21.3581 & -62.2254 \end{bmatrix}.$$

A Fig. 4.1 mostra o resultado da simulação com período de amostragem $T = 0.005s$, sendo que as linhas contínuas denotam as variáveis de estado medidas e as linhas tracejadas denotam as variáveis de estado estimadas pelo observador fuzzy. As simulações empregaram o modelo não-linear do pêndulo descrito por (3.41).

A simulação digital foi feita considerando-se que o sinal de controle $u(t)$ aplicado à planta é a saída de um conversor D/A de ordem zero, cuja entrada é $u(kT)$, ou seja, $u(t) = u(kT)$, para $kT \leq t < (k+1)T$. O sinal $y(kT)$ foi obtido na saída de um conversor A/D, cuja entrada foi o sinal $y(t)$.

Toda simulação foi feita no MATLAB utilizando a função ODE23, que emprega o método de Runge-Kutta-Fehlberg, cujo passo de integração é ajustado automaticamente.

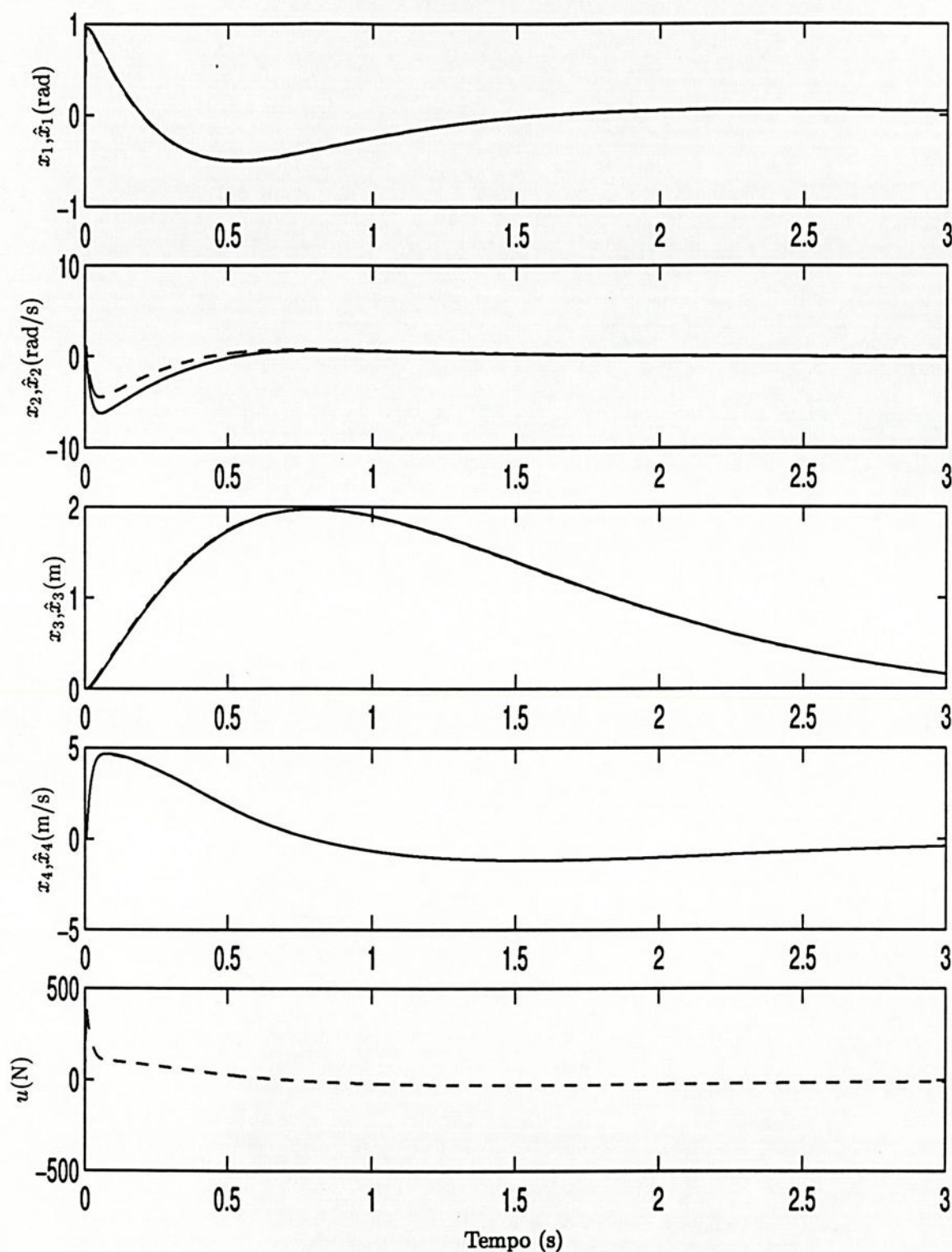


Figura 4.1: Resultado da simulação para o projeto do controlador fuzzy discreto e do observador fuzzy discreto considerando-se $x_1(0)=55^\circ$, $x_2(0)=x_3(0)=x_4(0)=0$, $\hat{x}_1(0)=\hat{x}_2(0)=\hat{x}_3(0)=\hat{x}_4(0)=0$, e $u(0)=0$: $x_i(t)$ -(linhas contínuas) e $\hat{x}_i(t)$ -(linhas tracejadas), para $i = 1, 2, 3, 4$.

Capítulo 5

Conclusões

Este trabalho apresentou novas condições para o estudo da estabilidade e projeto de reguladores fuzzy e observadores fuzzy, adequadas a sistemas não-lineares descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno. Os resultados concebidos permitem uma descrição direta em termos de LMIs e desta forma, podem ser facilmente resolvidas com softwares que solucionam problemas de programação semi-definida, que apresentam característica polinomial de convergência (Boyd et al., 1994). Para o projeto de reguladores e observadores fuzzy foram obtidas condições não registradas na literatura disponível em termos de LMIs, para sistemas discretos (caso A), e para os sistemas contínuos e discretos (caso B). No projeto de reguladores fuzzy e observadores fuzzy abordado, é possível especificar além da estabilidade, a taxa de decaimento, restrições na entrada e na saída. São apresentadas provas teóricas e simulações digitais para validar os métodos propostos e finalmente, o controle completo de um pêndulo invertido na forma contínua e discreta. Trabalhos futuros possíveis são a inclusão de outras restrições no projeto, como por exemplo a rejeição de distúrbios e robustez (Tanaka, Nishimura and Wang, 1998), a obtenção de condições mais relaxadas em termos de LMIs e a aplicação dos resultados obtidos em situações práticas.



Referências Bibliográficas

- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, USA.
- Cao, S. G., Rees, N. W. and Feng, G. (1997a). Further Results About Quadratic Stability of Continuous-Time Fuzzy Control Systems , *International Journal of Systems Science* 28(4): 397-404.
- Cao, S. G., Rees, N. W. and Feng, G. (1997b). Lyapunov-Like Stability Theorems for Discrete-Time Fuzzy Control Systems , *International Journal of Systems Science* 28(3): 297-308.
- Crusius, C. A. R. and Trofino, A. (1996). Output Feedback Stabilization and the Constrained Lyapunov Problem: A Convex Approach, *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, Kobe-Japan, pp. 4528-4532.
- Friedland, B. (1996). *Advanced Control Systems Design*, Prentice-Hall, New Jersey 07632.
- Kosko, B. (1997). *Fuzzy Engineering*, Upper Saddle River, New Jersey 07458: Prentice-Hall, USA.
- Ma, X. J., Sun, Z. Q. and He, Y. Y. (1998). Analysis and Design of Fuzzy Controller and Fuzzy Observer, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 6(1): 41-51.
- Ogata, K. (1997). *Modern Control Engineering*, Prentice Hall, New Jersey-USA.
- Oliveira, M. C., Farias, D. P. and Geromel, J. C. (1997). *LMISol, User's guide*, UNICAMP, Campinas-SP, Brasil.
- Sugeno, M. and Kang, G. T. (1988). Structure Identification of Fuzzy Model , *Fuzzy Sets and Systems* 28: 15-33.
- Takagi, T. and Sugeno, M. (1985). Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* 15(1): 116-132.
- Tanaka, K., Ikeda, T. and Wang, H. O. (1998). Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers: Relaxed Stability Conditions and LMI-Based Designs, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 6(2): 250-265.



- Tanaka, K., Nishimura, M. and Wang, H. O. (1998). Multi-Objective Fuzzy Control of High Rise/High Speed Elevators Using LMIs, *Proceedings of the American Control Conference*, Philadelphia, PA, pp. 3450-3454.
- Tanaka, K. and Sano, M. (1994). A Robust Stabilization Problem of Fuzzy Control Systems and Its Application to Backing up Control of a Truck-Trailer, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 2(2): 119-134.
- Tanaka, K. and Sugeno, M. (1992). Stability Analysis and Design of Fuzzy Control Systems, *Fuzzy Sets and Systems* 45(2): 135-156.
- Tanaka, K. and Wang, H. O. (1997). Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers: A Linear Matrix Inequality Approach, *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, San Diego, pp. 1315-1320.
- Teixeira, M. C. M. and Žak, S. H. (1999). Stabilizing Controller Design for Uncertain Nonlinear Systems Using Fuzzy Models, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 7(2): 133-142.
- Wang, H. O., Tanaka, K. and Griffin, M. F. (1996). An Approach to Fuzzy Control of Nonlinear Systems: Stability and Design Issues, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 4(1): 14-23.
- Will, A. B., Teixeira, M. C. M. and Žak, S. H. (1997). Four Wheel Steering Control Systems Design Using Fuzzy Models, *Sixth IEEE Conference on Control Applications*, Hartford CT USA, pp. 73-78.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA
AV. BRASIL, 56 - CAIXA POSTAL 31
15385-000 - ILHA SOLTEIRA - SP**

