



Fabiola Roxana Villanueva

*Convexidade Generalizada em Problemas de
Controle Ótimo com Tempo Livre*

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática

Fabiola Roxana Villanueva

*Convexidade Generalizada em Problemas
de Controle Ótimo com Tempo Livre*

Orientador:
Prof. Dr. Valeriano Antunes de Oliveira

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
INSTITUTO DE BIOCÊNCIAS, LETRAS E CIÊNCIAS EXATAS
CAMPUS DE SÃO JOSÉ DO RIO PRETO

São José do Rio Preto
20 de Fevereiro de 2015

Villanueva, Fabiola Roxana.

Convexidade Generalizada em Problemas de Controle Ótimo com Tempo
Livre / Fabiola Roxana Villanueva. – São José do Rio Preto, 2015
102 f.

Orientador: Valeriano Antunes de Oliveira

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita
Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Teoria do controle. 3. Otimização matemática. 4.
Otimização não diferenciável. I. Oliveira, Valeriano Antunes de. II. Universidade
Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e
Ciências Exatas. III. Título.

CDU - 517.91.01

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Fabiola Roxana Villanueva

Convergência Generalizada em Problemas de Controle Ótimo com Tempo Livre

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Valeriano Antunes de Oliveira
UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Prof^a. Dr^a. Lucelina Batista dos Santos
UFPR - Curitiba

Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 20 de Fevereiro de 2015.

A minha amada mãe, Flor.
A meus queridos anjos Gloria, Carlos e Alberto.
Dedico.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por esta oportunidade; a meus anjos Gloria, Carlos e Alberto por a força de cada dia e a minha mãe pelo apoio em minhas decisões e por me animar sempre a seguir.

Agradeço a meus professores Dr. Efraín Cruz Mullisaca e Dr. Yuri Chalco Cano por ter acreditado em minha capacidade.

Agradeço de coração a meu professor, orientador Dr. Valeriano Antunes de Oliveira por a dedicação, sugestões, correções, por a infinita paciência na elaboração desta Dissertação.

Agradeço aos amigos: Daniella, Daniel, Gino, Gislaine, Ismael, Jacqui, Jairo, John, Lizet, Marcelo, Paola, Raúl, Thiago e Willian.

Aos funcionários do IBILCE que, direta ou indiretamente, contribuíram para a elaboração deste trabalho.

Ao CNPq pelo auxílio financeiro.

Nada te turbe. Nada te espante.
Tudo passa. Deus não muda.
A paciência tudo alcança.
Quem a Deus tem, nada lhe falta.
Só Deus basta!

Neste trabalho estudamos condições necessárias e suficientes de otimalidade para problemas de controle ótimo com tempos finais livres, compreendendo o estudo do Princípio do Máximo e convexidade generalizada. Apresentamos as condições necessárias do princípio do máximo com tempos finais fixos e do princípio do máximo com tempos finais livres. Logo apresentamos as condições suficientes para problemas de controle ótimo com tempos finais fixos; introduzimos duas definições de convexidade generalizada, a primeira denominada PML-pseudoinvexidade, que envolve os multiplicadores de Lagrange e, a segunda denominada PM-pseudoinvexidade, que não envolve os multiplicadores de Lagrange. Mostramos que para um problema PML-pseudoinvexo todos os PM-processos (processos de controle que satisfazem as condições necessárias do princípio do máximo) são processos ótimos e reciprocamente os problemas tais que todos os PM-processos são ótimos, são problemas PML-pseudoinvexos; também mostramos que sob algumas condições, PML-pseudoinvexidade é equivalente a PM-pseudoinvexidade. Finalmente apresentamos as condições suficientes para problemas de controle ótimo com tempos finais livres; introduzimos uma definição de convexidade generalizada denominada PM-pseudoinvexidade livre, que não envolve os multiplicadores de Lagrange. Mostramos que sob algumas condições, se o problema é PM-pseudoinvexo livre, então todo PM-processo normal é um processo ótimo; também mostramos que sob algumas condições, se o problema é tal que todo PM-processo é um processo ótimo, então o problema é PM-pseudoinvexo livre.

Palavras-chave: Princípio do Máximo, Condições de Otimalidade, Convexidade Generalizada.

In this work we study necessary and sufficient optimality conditions for free end-time optimal control problems, comprising the study of the Maximum Principle and generalized convexity. We introduce the necessary conditions of the fixed end-time maximum principle and of the free end-time maximum principle. Next, we present sufficient conditions for fixed end-time optimal control problems; we introduce two definitions of generalized convexity, the first called LMP-pseudoinvexity, which involves the Lagrange multipliers and the second called MP-pseudoinvexity, which does not involve the Lagrange multipliers. We show that for a LMP-pseudoinvex problem all the MP-processes (control processes that satisfy the necessary conditions of the maximum principle) are optimal processes and conversely the problems such that all the MP-processes are optimal, are LMP-pseudoinvex problems; also we show that under some conditions, LMP-pseudoinvexity is equivalent to MP-pseudoinvexity. Finally, we present sufficient conditions for free end-time optimal control problem; we introduce a definition of generalized convexity called MP-free pseudoinvexity, which does not involve the Lagrange multipliers. We show that under some conditions, if the problem is MP-free pseudoinvex, then all normal MP-processes are optimal; also we show that under some conditions, if the problem is such that every MP-process is an optimal process, then the problem is MP-free pseudoinvex.

Keywords: Maximum Principle, Optimality Conditions, Generalized Convexity.

1	Introdução	p. 11
2	Preliminares	p. 15
3	O Princípio do Máximo	p. 18
3.1	O Princípio do Máximo para o Problema de Mayer	p. 19
3.2	O Princípio do Máximo para o Problema de Bolza	p. 23
4	Condições Necessárias para problemas de controle com Tempos Finais Livres	p. 29
4.1	O Princípio do Máximo para o Problema de Mayer com Tempos Finais Livres	p. 31
4.2	O Princípio do Máximo para o Problema de Bolza com Tempos Finais Livres	p. 45
5	Condições Suficientes para problemas de controle com Tempos Finais Livres	p. 51
5.1	Condições suficientes para problemas de controle com tempos finais fixos	p. 51
5.1.1	PML-pseudoinvexidade	p. 53

5.1.2	PM-pseudoinvexidade	p. 58
5.1.3	Alguns exemplos	p. 66
5.2	Condições suficientes para problemas de controle com tempos finais livres	p. 71
5.2.1	PM-pseudoinvexidade livre	p. 73
5.2.2	Alguns exemplos	p. 83
6	Conclusões e Trabalhos Futuros	p. 99
	Referências Bibliográficas	p. 101

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

É bem conhecido que uma variedade de problemas que ocorrem, por exemplo, em economia ([1]), no crescimento de plantas ([2]), na medicina ([3]), na descida de uma nave na Lua ([4]), etc., podem ser modelados como problemas de controle ótimo. O número grande de aplicações da vida real em que sistemas de controle estão envolvidos faz a teoria de controle uma ferramenta realmente útil.

Os resultados teóricos sobre condições de otimalidade são úteis não só para fins analíticos dos problemas de controle, mas também para o desenvolvimento de métodos numéricos ([5], [6] e [7]).

As condições necessárias de otimalidade para problemas de controle ótimo estão presentes no célebre Princípio do Máximo ([3], [8], [9] e [10]). Aqui vamos usar o Princípio do Máximo não-suave com tempos finais fixos e vamos desenvolver o Princípio do Máximo não-suave com tempos finais livres de [10]. O Princípio do Máximo não-suave com tempos finais livres é obtido da seguinte maneira: estuda-se problemas de controle ótimo suaves os quais derivam uma condição de Euler-Lagrange Extendida, que, por sua vez, deriva um Princípio do Máximo não-suave com tempos finais fixos. Logo, o Princípio do Máximo não-suave com tempos finais fixos é aplicado em um problema auxiliar com que obtém-se o Princípio do Máximo não-suave com tempos finais livres.

Em relação às condições suficientes de otimalidade há aquelas envolvendo hipóteses de convexidade ([11]), convexidade generalizada ([12]), condições de segunda ordem ([13], [14], [15] e [16]) e o método da função de verificação através da Teoria de Hamilton-Jacobi-Bellman ([10]). Aqui vamos considerar hipóteses de convexidade generalizada.

As necessidades da teoria da otimização têm servido para o desenvolvimento de uma classe importante de funções conhecidas como *funções invexas*. Na otimização com restrições de desigualdade, as condições necessárias clássicas de Kuhn-Tucker são também suficientes para a otimalidade se, como mencionado parágrafo anterior, as funções envolvidas do problema são convexas ou satisfazem certas propriedades de convexidade generalizada, como a pseudoconvexidade ou a quaseconvexidade estudadas em [12]. O conceito da invexidade (traduzido da palavra em inglês “invex”, de “invariant convex”) generaliza a noção da convexidade e é particularmente interessante a partir de um ponto de vista da otimização, uma vez que proporciona um ambiente mais amplo no qual as condições de Kuhn-Tucker são suficientes para a otimalidade. Em 1981, Hanson ([17]) foi o primeiro em definir o conceito da invexidade quando ele considerou uma função diferenciável $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ para a qual existe $\eta(x, \bar{x}) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq \nabla f(\bar{x}) \cdot \eta(x, \bar{x}); \quad (1.1)$$

note que se f é convexa, então $\eta(x, \bar{x}) = x - \bar{x}$ pode ser escolhida para satisfazer (1.1). A utilidade das funções satisfazendo (1.1) foi rapidamente estabelecida quando Hanson mostrou que se a função objetivo e as funções que definem as restrições de um problema de programação não-linear satisfazem (1.1) para a mesma η , então a dualidade fraca e as condições de suficiência de Kuhn-Tucker ainda satisfazem-se. As aplicações para a otimização avançaram quando as funções invexas foram mostradas a ter a propriedade seguinte: a função f é invexa se, e somente se, todo ponto estacionário é um mínimo global. Esta propriedade primeiro foi mostrada por Craven e Glover ([18]) em um ambiente de dimensão infinita (para uma prova simples em dimensão finita, ver Ben-Israel e Mond ([19])).

Em [17], Hanson introduziu uma certa generalização de convexidade para problemas de otimização com restrições da seguinte forma:

$$\begin{cases} \text{Minimizar } f(x) \text{ para } x \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \\ \text{s.a } g(x) \leq 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

onde $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$ são funções diferenciáveis num conjunto aberto $\mathcal{D}$ em $\mathbb{R}^n$. A convexidade de (1.2) está caracterizada pelas desigualdades

$$x, \bar{x} \in \mathcal{D} \Rightarrow \begin{cases} f(x) - f(\bar{x}) - f'(\bar{x})(x - \bar{x}) \geq 0, \\ g(x) - g(\bar{x}) - g'(\bar{x})(x - \bar{x}) \geq 0. \end{cases}$$

Aqui, Hanson percebeu que a forma funcional do fator $x - \bar{x}$ não desempenha nenhum papel que seja importante no estabelecimento das seguintes duas propriedades conhecidas de problemas convexos:

- (A) Todo ponto admissível de Kuhn-Tucker é um mínimo global;
- (B) A dualidade fraca satisfaz-se entre o problema (1.2) e seu dual do tipo Wolfe formal.

Portanto, Hanson considerou problemas (1.2) para os quais existe uma função $\eta : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$x, \bar{x} \in \mathcal{D} \Rightarrow \begin{cases} f(x) - f(\bar{x}) - f'(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \geq 0, \\ g(x) - g(\bar{x}) - g'(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \geq 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

e ele apontou que estes problemas também possuem as propriedades (A) e (B).

Martin em [20] mostrou que as relaxações elementares das condições definindo a invexidade levam a noções de invexidade modificadas que são ambas necessária e suficiente para a dualidade fraca e a suficiência das condições de Kuhn-Tucker. A noção de invexidade mais fraca que também é uma condição suficiente para a propriedade (A) é denominada *invexidade de Kuhn-Tucker*, isto é, o problema (1.3) foi denominado *Kuhn-Tucker invexo* (*KT-invexo*) se existe uma função $\eta : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{cases} x, \bar{x} \in \mathcal{D} \\ g(x) \leq 0 \\ g(\bar{x}) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) - f(\bar{x}) - f'(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \geq 0 \\ \text{para } i = 1, 2, \dots, m \text{ se } g_i(\bar{x}) = 0 \\ \text{então } -g'_i(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \geq 0. \end{cases}$$

Para mais detalhes da KT-invexidade veja [20]. Trazemos para o contexto de controle ótimo com tempo livre a noção da PM-pseudoinvexidade (introduzida em [21] e [22] para problemas com tempos fixos). A PM-pseudoinvexidade livre é, de fato, uma generalização da KT-invexidade para problemas de controle ótimo (por isso ela é uma condição suficiente de otimalidade) que tem também sido estudada em [21], [23] e [24].

Podemos considerar problemas de controle com restrições livres nos pontos finais e podemos supor diferenciabilidade tanto para o funcional objetivo como para as funções que definem a dinâmica do sistema, com respeito ao estado e ao controle, mas isto nem sempre acontece na vida real. Aqui vamos considerar problemas de controle com restrições nos pontos finais, Lipschitz continuidade local com respeito ao estado e mensurabilidade com respeito ao controle.

Os resultados centrais deste trabalho são: sob suposições de diferenciabilidade, se um problema é PM-pseudoinvexo livre, então cada processo de controle normal que satisfaz o Princípio do Máximo livre é um processo ótimo e, reciprocamente, se um problema é tal que cada processo que satisfaz o Princípio do Máximo livre é um processo ótimo então o problema é PM-pseudoinvexo livre. A principal característica da generalização dada aqui é que consideramos problemas onde os tempos finais são livres.

Este trabalho tem mais cinco capítulos. No que segue, apresentamos alguns preliminares. No terceiro capítulo o Princípio do Máximo é enunciado para problemas de controle ótimo do tipo Mayer, e estendido para cobrir problemas do tipo Bolza, com um termo integral na função de custo. No quarto capítulo, são desenvolvidas as condições necessárias para problemas de controle ótimo com tempo livre, e da mesma forma que no Capítulo 3 pode-se obter um Princípio do Máximo, mas agora com tempos finais livres, para problemas com termos mistos, do tipo Bolza. No quinto capítulo, são fornecidas a definição da PML-pseudoinvexidade, da PM-pseudoinvexidade e a definição da PM-pseudoinvexidade livre. A partir destas, alguns resultados e exemplos são obtidos e dados. A PM-pseudoinvexidade para tempo fixo foi estudada em [21] e a PM-pseudoinvexidade para tempo livre foi desenvolvida durante meu período de mestrado, e apesar de ser esta última uma adaptação simples dos resultados deste artigo, obtivemos resultados novos. Finalmente, no último capítulo fazemos considerações finais e sugestões de alguns trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

PRELIMINARES

Aqui nós definimos algumas notações e lembramos algumas definições da análise não-suave.

Lembremos algumas definições dadas em [10].

Dado um conjunto fechado $C \subset \mathbb{R}^k$ e um ponto $x \in C$,

1. $N_C^P(x)$ denota o *cone normal proximal* a C em x , isto é,

$$N_C^P(x) := \{p \in \mathbb{R}^k : \exists M > 0 \text{ tal que } p \cdot (y - x) \leq M|y - x|^2 \forall y \in C\}.$$

2. $N_C(x)$ denota o *cone normal limite* a C em x , isto é,

$$N_C(x) := \{p : \exists x_i \xrightarrow{C} x, p_i \rightarrow p, \text{ tal que } p_i \in N_C^P(x_i) \forall i\}.$$

Tomemos um conjunto fechado $C \subset \mathbb{R}^k$ e um ponto $x \in C$. Então:

1. $N_C^P(x)$ e $N_C(x)$ são cones em $\mathbb{R}^k$, contendo $\{0\}$ e $N_C^P(x) \subset N_C(x)$;
2. $N_C^P(x)$ é convexo (mas possivelmente não fechado);
3. $x \in \text{int}\{C\}$ implica que $N_C(x) = \{0\}$ (e assim $N_C^P(x) = \{0\}$).
4. $x \in \text{fr}\{C\}$ implica que $N_C(x)$ contém elementos diferentes de zero.

Tomemos subconjuntos fechados $C_1 \subset \mathbb{R}^m$ e $C_2 \subset \mathbb{R}^n$ e, um ponto $(x_1, x_2) \in C_1 \times C_2$.

Logo

$$\begin{aligned} N_{C_1 \times C_2}^P(x_1, x_2) &= N_{C_1}^P(x_1) \times N_{C_2}^P(x_2), \\ N_{C_1 \times C_2}(x_1, x_2) &= N_{C_1}(x_1) \times N_{C_2}(x_2). \end{aligned}$$

Tomemos um conjunto fechado e convexo $C \subset \mathbb{R}^k$ e um ponto $\bar{x} \in C$, então

$$N_C^P(\bar{x}) = N_C(\bar{x}) = \{\xi : \xi \cdot (x - \bar{x}) \leq 0 \forall x \in C\}.$$

Consideremos uma função $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ e um ponto $x \in \mathbb{R}^k$, $\text{epi } f$ denota o *epígrafe* de f , isto é,

$$\text{epi } f := \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} : \alpha \geq f(x)\}.$$

Tomemos uma função semicontínua inferiormente $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e um ponto $x \in \text{dom } f$,

1. $\partial^P f(x)$ denota o *subdiferencial proximal* de f em x , isto é,

$$\partial^P f(x) := \{\xi : (\xi, -1) \in N_{\text{epi } f}^P(x, f(x))\}.$$

2. $\partial f(x)$ denota o *subdiferencial limite* de f em x , isto é,

$$\partial f(x) := \{\xi : (\xi, -1) \in N_{\text{epi } f}(x, f(x))\}.$$

Note que, como $N_C^P(x) \subset N_C(x)$, temos que $\partial^P f(x) \subset \partial f(x)$.

Dados $v, w \in \mathbb{R}^k$, denotamos o *produto interno usual* entre v e w como $v \cdot w$. Dado um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^k$, denotamos o *cone polar* de S como S° , isto é,

$$S^\circ := \{\zeta \in \mathbb{R}^k : \zeta \cdot v \leq 0 \forall v \in S\}.$$

$\mathcal{L}$ denota os subconjuntos de Lebesgue de um intervalo dado $[S, T]$, $\mathcal{B}^k$ os conjuntos de Borel de $\mathbb{R}^k$ e $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^k$ a σ -álgebra produto.

Dada uma multifunção $F : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^k$, $Gr(F)$ denota o gráfico de F , isto é,

$$Gr(F) := \{(t, \gamma) \in [S, T] \times \mathbb{R}^k : \gamma \in F(t)\}.$$

O conjunto de todas as *funções absolutamente contínuas*¹ $f : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^k$ é denotado por $W^{1,1}([S, T]; \mathbb{R}^k)$.

¹Uma função $f : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}$ é absolutamente contínua se, satisfaz-se uma das seguintes:

Lembremos algumas definições dadas em [9].

Seja $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Lipschitz definida em uma vizinhança de $x \in \mathbb{R}^k$ e seja $v \in \mathbb{R}^k$ uma direção. Denotamos por $f^\circ(x; v)$ a *derivada direcional generalizada de Clarke de f em x na direção v* definida como

$$f^\circ(x; v) := \limsup_{y \rightarrow x; t \downarrow 0} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t}.$$

Denotamos por $\bar{\partial}f(x)$ o *gradiente generalizado de Clarke* ou *subdiferencial de Clarke de f em x* definido como

$$\bar{\partial}f(x) := \{\zeta \in \mathbb{R}^k : f^\circ(x; v) \geq \zeta \cdot v \forall v \in \mathbb{R}^k\}.$$

Sejam $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ semicontínua inferiormente e $x \in \mathbb{R}^k$. Suponha que f é Lipschitziana em uma vizinhança de x , então

$$co \partial f(x) = \bar{\partial}f(x).$$

Seja $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitziana em uma vizinhança de $x \in \mathbb{R}^k$. Então

1. Se f é diferenciável em x : $\nabla f(x) \in co \partial f(x) = \bar{\partial}f(x)$.
2. Se f é continuamente diferenciável em x : $\{\nabla f(x)\} = co \partial f(x) = \bar{\partial}f(x)$.

Para mais detalhes veja [9] e [10] e para um tratamento mais abrangente em análise não-suave com aplicações ao controle ótimo e à análise variacional ver, por exemplo, [10], [25], [26] e [27].

-
1. $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que para cada coleção $\{[S_i, T_i]\}$ de sub-intervalos disjuntos de $[S, T]$ tem-se

$$\sum_i (T_i - S_i) < \delta \Rightarrow \sum_i |f(T_i) - f(S_i)| < \epsilon.$$

2. $\exists v \in L(S, T)$ (o espaço das funções integráveis definidas em $[S, T]$) tal que

$$f(t) = f(S) + \int_S^T v(\tau) d\tau, t \in [S, T].$$

Daí $\dot{f}(t) = \frac{d}{dt}f(t) = v(t)$, para quase todo (q.t.) $t \in [S, T]$.

CAPÍTULO 3

O PRINCÍPIO DO MÁXIMO

Hoje em dia muitas condições otimais estão disponíveis, mas o Princípio do Máximo é o mais especial pois ele marcou o surgimento da Teoria de Controle como um campo novo de pesquisa. Os minimizadores locais podem ser obtidos pelas condições de primeira ordem, condições de ordem superior e a análise da geometria das trajetórias de estado. Porém, as condições necessárias de primeira ordem semelhantes às do Princípio do Máximo continuam sendo as principais para a solução de problemas de controle ótimo específicos (direta ou indiretamente por meio dos procedimentos computacionais que eles inspiram), ou pelo menos para gerar “candidatos” para suas soluções.

Muitas condições necessárias de primeira ordem são encontradas em [10]. Inicialmente, foi tentado o Princípio do Máximo não só porque foi a primeira condição necessária desenvolvida de maneira satisfatória para problemas com restrições tipicamente encontradas em otimização dinâmica, mas também pelo papel importante que ele desenvolve na derivação de todos os outros.

A versão mais geral do Princípio do Máximo aplica-se aos problemas de controle ótimo com restrições gerais nos pontos finais e restrições dinâmicas expressas em termos de uma equação diferenciável “não-suave” parametrizada por uma variável de controle.

A cadeia de argumentos usados em [10] para obter o Princípio do Máximo “não-suave” segue-se da seguinte maneira. Primeiro, o Princípio do Máximo é provado para problemas de controle ótimo com restrições “suaves” em sua dinâmica. Logo, este Princípio do Máximo “suave” é usado para derivar a condição de Euler-Lagrange Extendida. Por fim, a condição de Euler-Lagrange Extendida é então invocada na derivação que damos do

Princípio do Máximo “não-suave”.

Porém, não desenvolveremos essa cadeia de argumentos, neste capítulo vamos simplesmente enunciar esse princípio, mas vamos desenvolver uma extensão deste princípio para problemas com um termo integral na função do custo (além do funcional envolvendo os pontos finais) e, vamos tirar algumas conclusões quando as funções envolvidas são continuamente diferenciáveis.

3.1 O Princípio do Máximo para o Problema de Mayer

Nesta seção veremos um problema de controle muito conhecido, algumas definições, o Princípio do Máximo mais geral e algumas observações.

Estudaremos inicialmente um problema de controle ótimo na forma de Mayer, que é posto como:

$$(P) \begin{cases} \text{Minimizar } g(x(S), x(T)) \\ \text{s.a. } \text{arcos } x \in W^{1,1}([S, T]; \mathbb{R}^n) \text{ e funções mensuráveis } u : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ satisfazendo} \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \text{ para q.t. } t \in [S, T], \\ u(t) \in U(t) \text{ para q.t. } t \in [S, T] \text{ e,} \\ (x(S), x(T)) \in C, \end{cases}$$

onde $[S, T]$ é um intervalo, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (a qual é denominada *função de custo*) e, $f : [S, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ são funções, $U : [S, T] \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ é uma multifunção não-vazia (multifunção a valores não vazios), $C \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ é um conjunto fechado e, q.t. é uma sigla para dizer quase todo.

Definição 3.1. Uma função mensurável $u : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ que satisfaz

$$u(t) \in U(t) \text{ para q.t. } t \in [S, T]$$

é denominada uma função de controle. O conjunto de todas as funções de controle é denotado como $\mathcal{U}$.

Definição 3.2. Um processo (x, u) compreende uma função de controle u e um arco $x \in W^{1,1}([S, T]; \mathbb{R}^n)$ que é uma solução à equação diferencial

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \text{ para q.t. } t \in [S, T].$$

Definição 3.3. Uma trajetória de estado x é a primeira componente de algum processo (x, u) .

Definição 3.4. Um processo (x, u) é denominado um processo admissível ou factível para (P) se a trajetória de estado x satisfaz as restrições finais

$$(x(S), x(T)) \in C.$$

O Princípio do Máximo e as condições de otimalidade relacionadas são satisfeitas por todos os minimizadores. Estas condições são também satisfeitas por processos que são minimizadores apenas “locais” para (P) . As diferentes escolhas da topologia no conjunto de processos dão origem a diferentes noções de minimizadores locais. Uma topologia adotada neste trabalho é aquela do minimizador local $W^{1,1}$, onde $W^{1,1}$ é o espaço de Sobolev (onde as funções são absolutamente contínuas).

Definição 3.5. Um processo admissível

1. $(\bar{x}, \bar{u})$ é um minimizador global em $W^{1,1}$ se

$$g(\bar{x}(\bar{S}), \bar{x}(\bar{T})) \leq g(x(S), x(T))$$

para todo processo admissível (x, u) .

2. $(\bar{x}, \bar{u})$ é um minimizador local em $W^{1,1}$ se existe $\delta > 0$ tal que

$$g(\bar{x}(\bar{S}), \bar{x}(\bar{T})) \leq g(x(S), x(T))$$

para todo processo admissível (x, u) que satisfaz

$$|(x - \bar{x})(S)| + \int_S^T |(x - \bar{x})'(t)| dt = \|x - \bar{x}\|_{W^{1,1}} \leq \delta.$$

3. $(\bar{x}, \bar{u})$ é um minimizador local forte se existe $\delta > 0$ tal que

$$g(\bar{x}(\bar{S}), \bar{x}(\bar{T})) \leq g(x(S), x(T))$$

para todo processo admissível (x, u) que satisfaz

$$\text{ess sup}_{t \in [S, T]} |(x - \bar{x})(t)| = \|x - \bar{x}\|_{L^\infty} \leq \delta,$$

onde L^∞ é o espaço de todas as n -uplas de funções essencialmente limitadas em $[S, T]$ com norma $\|x\|_{L^\infty} = \text{ess sup}_{t \in [S, T]} |x(t)|$ e onde ess sup denota o menor número λ tal que $|x(t)| \leq \lambda$ para q.t. $t \in [S, T]$.

Uma questão a ser destacada é que as condições de otimalidade usualmente encontradas na literatura são de caráter local e, portanto, não garantem a otimalidade global, que é nosso principal interesse.

A norma $W^{1,1}$ é mais forte que a norma L^∞ e portanto a classe dos minimizadores locais $W^{1,1}$ é maior que a classe dos minimizadores L^∞ . Segue-se que, ao escolher trabalhar com os minimizadores locais $W^{1,1}$ estamos realizando uma análise mais profunda da natureza local do Princípio do Máximo do que seria o caso se escolhemos derivar condições satisfeitas pelos minimizadores locais fortes.

Notação: Denote por $\mathcal{H} : [S, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ a função Hamiltoniana não-maximizada para (P) , definida por

$$\mathcal{H}(t, x, p, u) = p \cdot f(t, x, u).$$

Teorema 3.1. (O Princípio do Máximo) *Seja $(\bar{x}, \bar{u})$ um minimizador local em $W^{1,1}$ para (P) . Suponha que para algum $\delta > 0$ as seguintes hipoteses são satisfeitas.*

(H1) *g é localmente Lipschitz contínua;*

(H2) *Para $x \in \mathbb{R}^n$ fixo, $f(\cdot, x, \cdot)$ é $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^m$ mensurável e existe uma função $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^m$ mensurável $k : [S, T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $t \rightarrow k(t, \bar{u}(t))$ é integrável e, para q.t. $t \in [S, T]$,*

$$|f(t, x, u) - f(t, x', u)| \leq k(t, u)|x - x'| \quad \forall x, x' \in \bar{x}(t) + \delta\mathbb{B} \text{ e } u \in U(t)$$

($\mathbb{B}$ denota a bola unitária em $\mathbb{R}^n$);

(H3) *Gr U é um conjunto $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^m$ mensurável.*

Então existem $p \in W^{1,1}([S, T]; \mathbb{R}^n)$ e $\lambda \geq 0$ tais que

(i) *$(p, \lambda) \neq (0, 0)$;*

(ii) *$-\dot{p}(t) \in \text{co } \partial_x \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))$ para q.t. $t \in [S, T]$*

($\partial_x \mathcal{H}$ denota o subdiferencial limite de $\mathcal{H}(t, \cdot, p, u)$ para (t, p, u) fixo);

(iii) *$(p(S), -p(T)) \in \lambda \partial g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) + N_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T))$*

($N_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T))$ denota o cone normal limite a C no ponto $(\bar{x}(S), \bar{x}(T))$);

(iv) *$\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) = \max_{u \in U(t)} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), u)$ para q.t. $t \in [S, T]$.*

Agora, se $f(t, x, u)$ e $U(t)$ são independentes de t , então, além das condições acima, existe uma constante r tal que

(v) $\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) = r$ para q.t. $t \in [S, T]$.

Os elementos (p, λ) cuja existência é afirmada no Princípio do Máximo são denominados os *multiplicadores para (P)*. As componentes p e λ são denominados *arco adjunto* ou *variável de co-estado* e *multiplicador de custo*, respectivamente. As condições (i), (ii), (iii) e (iv) são denominadas a *condição da não-trivialidade dos multiplicadores*, a *condição da inclusão adjunta*, a *condição de transversalidade* e, a *condição de Weierstrass*, respectivamente.

Observação 3.1. *Notemos os seguintes:*

1. A condição (ii) é muitas vezes expressa em termos do Jacobiano Generalizado de Clarke.

Definição 3.6. Tome um ponto $y \in \mathbb{R}^n$ e uma função $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ que é Lipschitz contínua em uma vizinhança de y . Então o Jacobiano Generalizado $DL(y)$ de L em y é o conjunto das matrizes $m \times n$:

$$DL(y) := \text{co} \{ \eta : \exists y_i \rightarrow y \text{ tais que } \nabla L(y_i) \text{ existe } \forall i \text{ e } \nabla L(y_i) \rightarrow \eta \}.$$

Uma propriedade notável do Jacobiano Generalizado $DL(y)$ de uma função $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ no ponto y é que, para cada vetor linha $r \in \mathbb{R}^m$,

$$r \cdot DL(y) = \text{co} \partial(r \cdot L)(y).$$

Aqui, $\partial(r \cdot L)(y)$ é o subdiferencial limite da função $y \mapsto r \cdot L(y)$. Segue-se imediatamente que a condição da inclusão adjunta pode ser equivalentemente escrita como

$$-\dot{p}(t) \in p(t) \cdot D_x f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)),$$

onde $D_x f(t, x(t), u(t))$ denota o Jacobiano Generalizado com respeito à variável x .

2. As condições necessárias do Teorema do Princípio do Máximo (Teorema 3.1) são homogêneas com respeito aos multiplicadores (p, λ) . Isto significa que se (p, λ) serve como um conjunto de multiplicadores então, para qualquer $\alpha > 0$, $(\alpha p, \alpha \lambda)$ também serve. Como $(p, \lambda) \neq 0$, então sempre podemos arrumá-lo escolhendo um α apropriado tal que

$$\|p\|_{L^\infty} + \lambda = 1.$$

Desta maneira, escalar os multiplicadores é frequentemente usado para auxiliar análises de convergência.

3.2 O Princípio do Máximo para o Problema de Bolza

Começamos esta seção tratando um problema de controle, que deriva um Princípio do Máximo estendido para problemas mistos, isto é, na função de custo não somente temos ponto final mas também temos um termo com integral. Logo, vamos considerar o caso continuamente diferenciável das funções envolvidas.

O Princípio do Máximo (estabelecido como acima) estende-se para cobrir problemas com um termo de integral na função de custo, isto é, problemas nos quais procuramos minimizar um funcional na forma de Bolza:

$$\int_S^T L(t, x(t), u(t))dt + g(x(S), x(T)),$$

onde $L : [S, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função dada. Isto é logrado introduzindo uma nova variável de estado $z \in \mathbb{R}$ que satisfaz as relações

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = L(t, x(t), u(t)) \\ z(S) = 0. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_S^T \dot{z}(t)dt &= \int_S^T L(t, x(t), u(t))dt \\ \Rightarrow z(T) - z(S) &= \int_S^T L(t, x(t), u(t))dt \\ \Rightarrow z(T) &= \int_S^T L(t, x(t), u(t))dt. \end{aligned}$$

O custo misto pode então ser substituído pelo custo puro no ponto final:

$$z(T) + g(x(S), x(T)).$$

Sob condições apropriadas em L , temos um problema onde o teorema do Princípio do Máximo (Teorema 3.1) pode ser aplicado. Aplicando o teorema e interpretando as conclusões em termos dos dados temos o Princípio do Máximo para problemas com termos mistos, do tipo Bolza, no qual o Hamiltoniano não-maximizado agora toma a forma

$$\mathcal{H}_\lambda(t, x, u) := \mathcal{H}(t, x, p, u, \lambda) = p \cdot f(t, x, u) - \lambda \cdot L(t, x, u).$$

Este procedimento para eliminar os termos com integrais, é denominado *aumento do estado*.

Portanto, o problema de controle ótimo a ser considerado é posto como:

$$(PB) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } \int_S^T L(t, x(t), u(t)) dt + g(x(S), x(T)) \\ \text{s.a. } \text{arcos } x \in W^{1,1}([S, T]; \mathbb{R}^n) \text{ e funções mensuráveis} \\ u : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ satisfazendo} \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \text{ para q.t. } t \in [S, T], \\ u(t) \in U(t) \text{ para q.t. } t \in [S, T] \text{ e,} \\ (x(S), x(T)) \in C. \end{array} \right.$$

Teorema 3.2. (*O Princípio do Máximo para o problema (PB)*) *Seja $(\bar{x}, \bar{u})$ um minimizador local em $W^{1,1}$ para (PB). Suponha que para algum $\delta > 0$ as seguintes hipóteses são satisfeitas.*

(H1) *g é localmente Lipschitz contínua;*

(H2) *Para $x \in \mathbb{R}^n$ fixo, $L(\cdot, x, \cdot)$ e $f(\cdot, x, \cdot)$ são $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^m$ mensuráveis e existem funções $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^m$ mensuráveis $k_L, k_f : [S, T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $t \rightarrow k_L(t, \bar{u}(t))$ e $t \rightarrow k_f(t, \bar{u}(t))$ são integráveis e, para q.t. $t \in [S, T]$,*

$$\begin{aligned} |L(t, x, u) - L(t, x', u)| &\leq k_L(t, u) |x - x'| \quad \forall x, x' \in \bar{x}(t) + \delta \mathbb{B} \text{ e } u \in U(t), \\ |f(t, x, u) - f(t, x', u)| &\leq k_f(t, u) |x - x'| \quad \forall x, x' \in \bar{x}(t) + \delta \mathbb{B} \text{ e } u \in U(t); \end{aligned}$$

(H3) *Gr U é um conjunto $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^m$ mensurável.*

Então existem $p \in W^{1,1}([S, T]; \mathbb{R}^n)$ e $\lambda \geq 0$ tais que

(i) *$(p, \lambda) \neq (0, 0)$;*

(ii) *$-\dot{p}(t) \in \text{co } \partial_x \mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))$ para q.t. $t \in [S, T]$;*

(iii) *$(p(S), -p(T)) \in \lambda \partial g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) + N_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T))$;*

(iv) *$\mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = \max_{u \in U(t)} \mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), u)$ para q.t. $t \in [S, T]$.*

Agora, se $L(t, x, u)$, $f(t, x, u)$ e $U(t)$ são independentes de t . Então, além das condições da acima, existe uma constante r tal que

(v) *$\mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = r$ para q.t. $t \in [S, T]$.*

Demonstração. Utilizando a técnica do aumento do estado descrita acima, transformamos o problema de Bolza (com custos mistos) no seguinte problema de Mayer: consideremos o seguinte problema de estado aumentado:

$$(EA) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } [\tilde{g}(x(S), x(T), z(S), z(T)) := \int_S^T L(t, x(t), u(t)) dt + g(x(S), x(T)) \\ \quad = z(T) + g(x(S), x(T))] \\ \text{s.a. } \text{arcos } x \in W^{1,1}([S, T]; \mathbb{R}^n), z \in W^{1,1}([S, T]; \mathbb{R}) \text{ e funções mensuráveis} \\ u : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ satisfazendo} \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \dot{z}(t) = L(t, x(t), u(t)) \text{ para q.t. } t \in [S, T], \\ u(t) \in U(t) \text{ para q.t. } t \in [S, T] \text{ e,} \\ (x(S), x(T), z(S), z(T)) \in \tilde{C} = C \times \{0\} \times \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

A última restrição do problema (EA) também pode ser escrita como

$$(x(S), x(T)) \in C, z(S) = 0, z(T) \text{ livre.}$$

Agora as *variáveis de estado* são duas x e z e as *variáveis de co-estado* associadas às variáveis x e z , respectivamente, também são duas, digamos p e q , assim podemos colocar:

$$\tilde{x} := \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1},$$

$$\tilde{p} := \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1},$$

e

$$\tilde{f} := \begin{pmatrix} f \\ L \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Observe que no Problema (EA), $\tilde{g}$ é localmente Lipschitz contínua pois

$$\tilde{g}(x, y, z, w) = w + g(x, y) := h(w) + g(x, y),$$

onde $h(w)$ (a qual na verdade é a identidade) e $g(x, y)$ são localmente Lipschitz contínuas.

Vamos denotar por $\mathcal{H} : [S, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ a função Hamiltoniana não-maximizada para (EA), definida por

$$\mathcal{H}(t, x, z, p, q, u) = (p, q) \cdot (f, L) = p \cdot f(t, x, u) + q \cdot L(t, x, u).$$

Pelo Teorema do Princípio do Máximo (Teorema 3.1), existem $\tilde{p} = (p, q) \in W^{1,1}([S, T]; \mathbb{R}^{n+1})$

e $\lambda \geq 0$ tais que:

1. Satisfaz-se a condição da inclusão adjunta:

$$\begin{aligned} (-\dot{p}(t), -\dot{q}(t)) &\in \text{co } \partial_{(x,z)} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), \bar{z}(t), p(t), q(t), \bar{u}(t)) \\ &= \text{co } \partial_{(x,z)} (p(t) \cdot f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + q(t) \cdot L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))) \\ &\subseteq \text{co } \partial_x (p(t) \cdot f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + q(t) \cdot L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))) \times \{0\} \end{aligned}$$

para q.t. $t \in [S, T]$.

Conclusões:

$$-\dot{p}(t) \in \text{co } \partial_x (p(t) \cdot f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + q(t) \cdot L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))) \text{ para q.t. } t \in [S, T] \quad (3.1)$$

$$-\dot{q}(t) \in \{0\} \Rightarrow -\dot{q}(t) = 0 \Rightarrow q(t) = \text{constante para q.t. } t \in [S, T] \quad (3.2)$$

2. Satisfaz-se a condição de transversalidade:

$$\begin{aligned} &(p(S), -p(T), q(S), -q(T)) \\ &\in \lambda \partial \tilde{g}(\bar{x}(S), \bar{x}(T), \bar{z}(S), \bar{z}(T)) + N_{\tilde{C}}(\bar{x}(S), \bar{x}(T), \bar{z}(S), \bar{z}(T)) \\ &\subseteq \lambda [\partial g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \times \{(0, 1)\}] + N_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \times \mathbb{R} \times \{0\} \\ &= \lambda \partial g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \times \{(0, \lambda)\} + N_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \times \mathbb{R} \times \{0\}, \end{aligned}$$

pois

$$\partial \tilde{g}(\bar{x}(S), \bar{x}(T), \bar{z}(S), \bar{z}(T)) \subseteq \partial g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \times \{(0, 1)\}$$

e,

$$\begin{aligned} N_{\tilde{C}}(\bar{x}(S), \bar{x}(T), \bar{z}(S), \bar{z}(T)) &= N_{C \times \{0\} \times \mathbb{R}}(\bar{x}(S), \bar{x}(T), \bar{z}(S), \bar{z}(T)) \\ &= N_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \times N_{\{0\}}(\bar{z}(S)) \times N_{\mathbb{R}}(\bar{z}(T)) \\ &= N_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \times \mathbb{R} \times \{0\}. \end{aligned}$$

Conclusões:

$$\begin{aligned} (p(S), -p(T)) &\in \lambda \partial g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) + N_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T)), \\ (q(S), -q(T)) &\in \{(0, \lambda)\} + \mathbb{R} \times \{0\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

De (3.3):

$$\begin{aligned} q(S) &\text{ é livre e,} \\ q(T) &= -\lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Logo temos que em (3.2):

$$q(t) = -\lambda \forall t \in [S, T] \quad (3.4)$$

e, em (3.1):

$$\begin{aligned} -\dot{p}(t) &\in \text{co } \partial_x(p(t) \cdot f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - \lambda \cdot L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))) \\ &= \text{co } \partial_x \mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \text{ para q.t. } t \in [S, T]. \end{aligned}$$

3. Satisfaz-se a condição da não-trivialidade dos multiplicadores:

$$((p, q), \lambda) \neq ((0, 0), 0) \Rightarrow (p, \lambda) \neq (0, 0),$$

pois se fosse $(p, \lambda) = (0, 0)$, então $p = 0$ e $\lambda = 0$, logo

$$\begin{aligned} ((p, q), \lambda) &= ((p, -\lambda), \lambda), \text{ (por (3.4))} \\ &= ((0, -0), 0). \end{aligned}$$

Assim $((p, q), \lambda) = ((0, 0), 0)$, absurdo!

4. Satisfaz-se a condição de Weierstrass:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), \bar{z}(t), p(t), q(t), \bar{u}(t)) &= \max_{u \in U(t)} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), \bar{z}(t), p(t), q(t), u) \\ \Leftrightarrow p(t) \cdot f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + q(t) \cdot L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) &= \max_{u \in U(t)} [p(t) \cdot f(t, \bar{x}(t), u) + q(t) \cdot L(t, \bar{x}(t), u)] \\ \Leftrightarrow p(t) \cdot f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - \lambda \cdot L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) &= \max_{u \in U(t)} [p(t) \cdot f(t, \bar{x}(t), u) - \lambda \cdot L(t, \bar{x}(t), u)] \\ \Leftrightarrow \mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) &= \max_{u \in U(t)} \mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), u) \text{ para q.t. } t \in [S, T]. \end{aligned}$$

5. Se $f(t, x, u)$, $L(t, x, u) = \dot{z}(t)$ e $U(t)$ são independentes de t , então, pelo Teorema do Princípio do Máximo (Teorema 3.1-(v)), além das condições da acima, existe uma constante r tal que $\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), \bar{z}(t), p(t), q(t), \bar{u}(t)) = r$ para q.t. $t \in [S, T]$. Logo

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) &= \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), \bar{z}(t), p(t), q(t), \bar{u}(t)) \text{ (pelo item 4)} \\ &= r \text{ para q.t. } t \in [S, T]. \end{aligned}$$

□

Observação 3.2. No Princípio do Máximo para o Problema (PB), se L e f são continuamente diferenciáveis com respeito à variável de estado (L e $f \in C^1$), notemos o seguinte:

1. Na condição da condição adjunta temos:

$$-\dot{p}(t) = \nabla_x \mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \text{ para q.t. } t \in [S, T].$$

2. Na condição de transversalidade temos:

$$(p(S), -p(T)) - \lambda \nabla g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \in N_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T)).$$

CAPÍTULO 4

CONDIÇÕES NECESSÁRIAS PARA PROBLEMAS DE
CONTROLE COM TEMPOS FINAIS LIVRES

Nossa investigação das propriedades das estratégias ótimas têm até agora, sido confinada a problemas de controle para os quais o intervalo de tempo $[S, T]$ era fixo. Agora abordaremos uma classe mais ampla de problemas nos quais os tempos finais S e T estão incluídos entre as variáveis de escolha:

$$(TL) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } g(S, x(S), T, x(T)) \\ \text{sobre intervalos } [S, T] \text{ e arcos } x \in W^{1,1}([S, T]; \mathbb{R}^n) \text{ satisfazendo} \\ \dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \text{ para q.t. } t \in [S, T], \\ u(t) \in U(t) \text{ para q.t. } t \in [S, T] \text{ e,} \\ (S, x(S), T, x(T)) \in C, \end{array} \right.$$

onde $g : \mathbb{R}^{1+n+1+n} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função dada, $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ é uma multifunção dada e, $C \subset \mathbb{R}^{1+n+1+n}$ é um conjunto dado.

Notação. Um *arco* $x \in W^{1,1}([S, T]; \mathbb{R}^n)$ que satisfaz as restrições de (TL) é denotado como $([S, T], x)$ para enfatizar o subintervalo $[S, T]$.

Casos importantes e especiais de (TL) são problemas de tempo livre, nos quais a duração do tempo de, por exemplo, um trabalho é a quantidade que pretendemos minimizar. Muitos problemas de otimização dinâmica são desta natureza. Por exemplo, uma estratégia ótima para o controle de um satélite orbitando é o controle *bang-bang*, o qual elimina o desvio da orientação do satélite de seu valor nominal em tempo livre. Os problemas de

controle ótimo associados com evadir, perseguir, escapar ou pegar o mais rápido possível, são usualmente problemas de tempo livre.

Se tomamos um minimizador $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x})$ do problema (TL) , então $\bar{x}$ é um minimizador para o problema do controle ótimo (TL) , no qual os tempos finais estão congelados em $\bar{S}$ e $\bar{T}$. Assim o minimizador certamente satisfaz as condições necessárias de tempos finais fixos, como aqueles derivados no passado Capítulo 3.

Mas uma informação adicional dos multiplicadores $p \in W([\bar{S}, \bar{T}]; \mathbb{R}^n)$ e $\lambda \geq 0$, presentes nas condições necessárias de tempos finais fixos, deve tomar em conta a liberdade que foi introduzida no problema de otimização. Esta informação adicional vem na forma das condições de fronteira no Hamiltoniano

$$\mathcal{H}(t, x, p) = \max_{v \in F(t, x)} p \cdot v$$

avaliado em $t \mapsto (\bar{x}(t), p(t))$.

Observação 4.1. *No que segue, derivaremos condições que são satisfeitas não simplesmente por minimizadores para o problema (TL) mas também por minimizadores locais $W^{1,1}$. Para entender mais o que se entende por um “minimizador local $W^{1,1}$ ”, quando o intervalo de tempo $[S, T]$ é uma variável de escolha, é útil: identificar uma função $x : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ com sua extensão a todo o intervalo $(-\infty, \infty)$ (a toda a reta), isto é, por meio de uma extrapolação constante de valores finais tanto à esquerda como à direita. Por exemplo, dado $y \in \mathbb{R}^n$ e $t > T$, então $|y - x(t)| := |y - x(T)|$. Neste espírito, dado $x \in W^{1,1}([S, T]; \mathbb{R}^n)$ e $x' \in W^{1,1}([S', T']; \mathbb{R}^n)$, definimos:*

$$\begin{aligned} \|x - x'\|_{L^\infty} &:= \|x_e - x'_e\|_{L^\infty}, \\ \|\dot{x} - \dot{x}'\|_{L^1} &:= \|\dot{x}_e - \dot{x}'_e\|_{L^1}, \end{aligned}$$

onde x_e, x'_e são as extensões definidas acima.

Definição 4.1. *Dizemos que um elemento $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x})$ é um minimizador local $W^{1,1}$ para o problema (TL) , se $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x})$ satisfaz as restrições do problema (TL) e existe algum $\delta' > 0$ tal que*

$$g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \leq g(S, x(S), T, x(T))$$

para todos os elementos $([S, T], x)$ satisfazendo as restrições do problema (TL) e também

$$d([S, T], x, [\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}) \leq \delta',$$

onde $d(\cdot)$ é a métrica:

$$d([S, T], x), ([S', T'], x') := |S - S'| + |T - T'| + |x(S) - x'(S')| + \int_{S \wedge S'}^{T \vee T'} |\dot{x}_e(s) - \dot{x}'_e(s)| ds,$$

no qual x_e e x'_e são as extensões de x e x' definidas acima e

$$\begin{aligned} S \wedge S' &= \min\{S, S'\}, \\ T \vee T' &= \max\{T, T'\}. \end{aligned}$$

Observação 4.2. Note que $d(\cdot, \cdot)$ é a métrica induzida pela norma $W^{1,1}([S, T]; \mathbb{R}^n)$,

$$\|x\|_{W^{1,1}} = |x(0)| + \|\dot{x}\|_{L^1},$$

quando é restrito a pares de arcos com domínio comum $[S, T]$ e onde $\|x\|_{L^p} = (\int |x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$. Portanto nossa terminologia é consistente com a nomenclatura de “tempo final livre”.

Observação 4.3. Pela convenção da extensão, a métrica $d(\cdot, \cdot)$ pode alternativamente ser expressa como

$$d([S, T], x), ([S', T'], x') = |S - S'| + |T - T'| + |x(S) - x'(S')| + \|\dot{x}_e - \dot{x}'_e\|_{L^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)},$$

4.1 O Princípio do Máximo para o Problema de Mayer com Tempos Finais Livres

Pode-se encontrar condições necessárias para problemas de controle ótimo para tempos finais livres quando a restrição dinâmica é expressa como uma inclusão diferenciável em [10] e, uma análise adequada fornece condições necessárias para problemas de controle ótimo com tempos finais livres, na forma de um princípio do máximo, quando as dinâmicas são modeladas, por uma equação diferenciável dependente do controle:

$$(TL)' \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } g(S, x(S), T, x(T)) \\ \text{s.a. intervalos } [S, T], \text{ arcos } x \in W^{1,1}([S, T]; \mathbb{R}^n) \text{ e funções mensuráveis } u : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^m \\ \text{satisfazendo} \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \text{ para q.t. } t \in [S, T], \\ u(t) \in U(t) \text{ para q.t. } t \in [S, T] \text{ e,} \\ (S, x(S), T, x(T)) \in C, \end{array} \right.$$

onde $g : \mathbb{R}^{1+n+1+n} \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ são funções dadas, $U : \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ é uma multifunção não-vazia e, $C \subset \mathbb{R}^{1+n+1+n}$ é um conjunto fechado, isto para enfatizar que os pontos finais do intervalo de tempo $[S, T]$ são agora variáveis de escolha.

Definição 4.2. Um processo admissível ou factível é uma tripla $([S, T], x, u)$ onde $[S, T]$ é um intervalo, x (a trajetória de estado) é um elemento em $W^{1,1}([S, T]; \mathbb{R}^n)$ e, u (a função de controle) é uma função mensurável $u : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisfazendo, para q.t. $t \in [S, T]$,

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad u(t) \in U(t) \quad \text{e} \quad (S, x(S), T, x(T)) \in C.$$

Definição 4.3. Um processo admissível $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$ do problema $(TL)'$ é denominado um minimizador local em $W^{1,1}$ para o problema $(TL)'$ se existe $\delta' > 0$ tal que

$$g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \leq g(S, x(S), T, x(T))$$

para todo processo admissível $([S, T], x, u)$ do problema $(TL)'$ e também

$$d([S, T], x), ([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}) \leq \delta'.$$

Observação 4.4. $d(\cdot, \cdot)$ é a métrica definida acima.

Teorema 4.1. (*O Princípio do Máximo com tempos finais livres*) Seja $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$ um minimizador local em $W^{1,1}$ para o problema $(TL)'$. Suponha que:

(H1) g é localmente Lipschitz contínua;

(H2) Para $x \in \mathbb{R}^n$ fixo, $f(\cdot, x, \cdot)$ é $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^m$ mensurável existem $\delta > 0$ e uma função $k : [\bar{S}, \bar{T}] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $t \rightarrow k(t, \bar{u}(t))$ é integrável e, para q.t. $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$,

$$|f(t'', x'', u) - f(t', x', u)| \leq k(t, \bar{u}(t)) |(t'', x'') - (t', x')| \quad \forall (t'', x''), (t', x') \in (t, \bar{x}) + \delta \mathbb{B},$$

para q.t. $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$

($\mathbb{B}$ denota a bola unitária em $\mathbb{R}^{1+n}$);

(H3) $U(t) = U \forall t \in \mathbb{R}$ para algum conjunto de Borel $U \subset \mathbb{R}^m$.

Então existem $p \in W^{1,1}([\bar{S}, \bar{T}]; \mathbb{R}^n)$, $r \in W^{1,1}([\bar{S}, \bar{T}]; \mathbb{R})$ e $\lambda \geq 0$ tais que

(i) $(p, \lambda) \neq (0, 0)$;

(ii) $(\dot{r}(t), -\dot{p}(t)) \in \text{co } \partial_{(t,x)} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))$ para q.t. $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$

($\partial_{(t,x)} \mathcal{H}$ denota o subdiferencial limite de $\mathcal{H}(\cdot, \cdot, p, u)$ para (p, u) fixo);

- (iii) $(-r(\bar{S}), p(\bar{S}), r(\bar{T}), -p(\bar{T})) \in \lambda \partial g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) + N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T}))$
 $(N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})))$ denota o cone normal limite a C no ponto $(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T}))$;
- (iv) $\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) = \max_{u \in U} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), u)$ para q.t. $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$;
- (v) $\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) = r(t)$ para q.t. $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$.

Demonstração. Escolha δ' tal que $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$ é um minimizador local em $W^{1,1}$ para o problema $(TL)'$ com respeito aos processos $([S, T], x, u)$ satisfazendo as restrições do problema $(TL)'$ e também

$$d([S, T], x, [\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}) < 2\delta'.$$

Tome uma função C^2 (duas vezes continuamente diferenciável)

$$a : [\bar{S}, \bar{T}] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

tal que satisfaz-se $a(\bar{S}) = \bar{x}(\bar{S})$ e também satisfaz-se

$$d([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, ([\bar{S}, \bar{T}], a)) \left(= \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} |\dot{\bar{x}}(t) - \dot{a}(t)| dt \right) < \delta'. \quad (4.1)$$

Consideremos o problema de controle ótimo com tempos finais fixos:

$$(R) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } g(\tau(\bar{S}), y(\bar{S}), \tau(\bar{T}), y(\bar{T})) \\ \text{sobre processos } ((\tau, y, z), (v, \alpha)) \text{ satisfazendo} \\ (\dot{\tau}(s), \dot{y}(s), \dot{z}(s)) = \tilde{f}(\tau(s), y(s), v(s), \alpha(s)) \text{ para q.t. } s \in [\bar{S}, \bar{T}], \\ v(s) \in U \text{ para q.t. } s \in [\bar{S}, \bar{T}], \\ \alpha(s) \in [0.5, 1.5] \text{ para q.t. } s \in [\bar{S}, \bar{T}], \\ (\tau(\bar{S}), y(\bar{S}), \tau(\bar{T}), y(\bar{T})) \in C, \\ m(\tau(\bar{S}), \tau(\bar{T}), y(\bar{S}), z(\bar{S}), z(\bar{T})) \leq \delta', \end{array} \right.$$

onde $\tilde{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ está definida por

$$\tilde{f}(\tau, y, v, \alpha) := (\alpha, \alpha f(\tau, y, v), \alpha |f(\tau, y, v) - \dot{a}(\tau)|)$$

e

$$m(\tau_0, \tau_1, y_0, z_0, z_1) := |\tau_0 - \bar{S}| + |\tau_1 - \bar{T}| + |y_0 - a(\bar{S})| + \int_{\bar{S}}^{\bar{S} \vee \tau_0} |\dot{a}(\sigma)| d\sigma + \int_{\bar{T} \wedge \tau_1}^{\bar{T}} |\dot{a}(\sigma)| d\sigma + z_1 - z_0.$$

Aqui (τ, y, z) e (α, v) são as partições dos vetores de estado e controle, respectivamente.

Por outra parte, como

$$\begin{aligned}(\dot{\tau}(s), \dot{y}(s), \dot{z}(s)) &= \tilde{f}(\tau(s), y(s), v(s), \alpha(s)) \\ &= (\alpha(s), \alpha(s) f(\tau(s), y(s), v(s)), \alpha(s) |f(\tau(s), y(s), v(s)) - \dot{a}(\tau)|),\end{aligned}$$

temos que

$$\dot{\tau}(s) = \alpha(s), \quad \dot{y}(s) = \alpha(s) f(\tau(s), y(s), v(s)), \quad \dot{z}(s) = \alpha(s) |f(\tau(s), y(s), v(s)) - \dot{a}(\tau)|.$$

Afirmção. $((\bar{\tau}(s) \equiv s, \bar{y} = \bar{x}, \bar{z}(s) \equiv \int_{\bar{S}}^s |\dot{x}(\sigma) - \dot{a}(\sigma)| d\sigma, (\bar{v} = \bar{u}, \bar{\alpha}(s) \equiv 1))$ é um minimizador para o problema (R).

Temos que mostrar que

1. $((\bar{\tau}, \bar{y}, \bar{z}), (\bar{v}, \bar{\alpha}))$ é um processo admissível para o problema (R);
2. $g(\bar{\tau}(\bar{S}), \bar{y}(\bar{S}), \bar{\tau}(\bar{T}), \bar{y}(\bar{T})) \leq g(\tau(\bar{S}), y(\bar{S}), \tau(\bar{T}), y(\bar{T}))$ para todo processo admissível $((\tau, y, z), (v, \alpha))$ do problema (R).

Primeiro vamos mostrar que $g(\bar{\tau}(\bar{S}), \bar{y}(\bar{S}), \bar{\tau}(\bar{T}), \bar{y}(\bar{T})) \leq g(\tau(\bar{S}), y(\bar{S}), \tau(\bar{T}), y(\bar{T}))$ para todo processo admissível $((\tau, y, z), (v, \alpha))$ do problema (R), de fato: tome qualquer processo $((\tau, y, z), (v, \alpha))$ admissível para o problema (R) e considere a transformação $\psi : [\bar{S}, \bar{T}] \rightarrow [S, T]$ tal que

$$S = \tau(\bar{S}), \quad T = \tau(\bar{T}), \quad \psi(s) := \tau(\bar{S}) + \int_{\bar{S}}^s \alpha(\sigma) d\sigma.$$

Logo temos que:

- ψ é estritamente crescente, pois para $s_1 < s_2$,

$$\begin{aligned}\int_{\bar{S}}^{s_1} \alpha(\sigma) d\sigma &< \int_{\bar{S}}^{s_2} \alpha(\sigma) d\sigma \\ \Rightarrow \tau(\bar{S}) + \int_{\bar{S}}^{s_1} \alpha(\sigma) d\sigma &< \tau(\bar{S}) + \int_{\bar{S}}^{s_2} \alpha(\sigma) d\sigma \\ &\Rightarrow \psi(s_1) < \psi(s_2).\end{aligned}$$

- ψ é Lipschitz contínua, pois

- Se $s_1 < s_2 \Rightarrow \psi(s_1) < \psi(s_2) \Rightarrow 0 < \psi(s_2) - \psi(s_1)$, então

$$\begin{aligned}
 |\psi(s_2) - \psi(s_1)| &= \psi(s_2) - \psi(s_1) \\
 &= \left[\tau(\bar{S}) + \int_{\bar{S}}^{s_2} \alpha(\sigma) d\sigma \right] - \left[\tau(\bar{S}) + \int_{\bar{S}}^{s_1} \alpha(\sigma) d\sigma \right] \\
 &= \int_{\bar{S}}^{s_2} \alpha(\sigma) d\sigma + \int_{s_1}^{\bar{S}} \alpha(\sigma) d\sigma \\
 &= \int_{s_1}^{s_2} \alpha(\sigma) d\sigma \\
 &\leq \int_{s_1}^{s_2} 1.5 d\sigma \\
 &= 1.5(s_2 - s_1).
 \end{aligned}$$

Logo $|\psi(s_2) - \psi(s_1)| \leq 1.5(s_2 - s_1)$.

- Se $s_2 < s_1$, procedendo analogamente obtemos que $|\psi(s_1) - \psi(s_2)| \leq 1.5(s_1 - s_2)$.

- ψ^{-1} é Lipschitz contínua, pois, como vimos, ψ é estritamente crescente e contínua.
- $x(\cdot) := y \circ \psi^{-1}(\cdot)$ é absolutamente contínua, pois ψ^{-1} é Lipschitz contínua e assim absolutamente contínua¹, logo $x(\cdot)$ é absolutamente contínua como a composta de funções absolutamente contínuas.
- $u(\cdot) := v \circ \psi^{-1}(\cdot)$ é mensurável, pois ψ^{-1} é Lipschitz contínua e assim mensurável², logo $u(\cdot)$ é mensurável como a composta de funções mensuráveis.
- $(S, x(S), T, x(T)) = (\tau(\bar{S}), y(\bar{S}), \tau(\bar{T}), y(\bar{T}))$, pois $\psi(s) = \tau(\bar{S}) + \int_{\bar{S}}^s \alpha(\sigma) d\sigma = S + \int_{\bar{S}}^s \alpha(\sigma) d\sigma$ de modo que

$$\begin{aligned}
 \psi(\bar{S}) &= S + \int_{\bar{S}}^{\bar{S}} \alpha(\sigma) d\sigma = S \\
 \Rightarrow \psi^{-1}(S) &= \psi^{-1}(\psi(\bar{S})) = \bar{S} \\
 \Rightarrow x(S) &= y(\psi^{-1}(S)) = y(\bar{S})
 \end{aligned}$$

e como $\psi(s) = \tau(\bar{S}) + \int_{\bar{S}}^s \alpha(\sigma) d\sigma$, temos que

$$\begin{aligned}
 \psi(\bar{T}) &= \tau(\bar{S}) + \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \alpha(\sigma) d\sigma = \tau(\bar{S}) + \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \dot{\tau}(\sigma) d\sigma = \tau(\bar{S}) + \tau(\bar{T}) - \tau(\bar{S}) = T \\
 \Rightarrow \psi^{-1}(T) &= \psi^{-1}(\psi(\bar{T})) = \bar{T} \\
 \Rightarrow x(T) &= y(\psi^{-1}(T)) = y(\bar{T}).
 \end{aligned}$$

¹{funções Lipschitz contínuas} $\subseteq$ {funções absolutamente contínuas} $\subseteq$ {funções diferenciáveis}.

² f contínua $\Rightarrow f$ mensurável.

- Sobre um processo admissível para (R) temos que $\psi(s) = \tau(\bar{S}) + \int_{\bar{S}}^s \alpha(\sigma) d\sigma = \tau(\bar{S}) + \int_{\bar{S}}^s \dot{\tau}(\sigma) d\sigma = \tau(\bar{S}) + \tau(s) - \tau(\bar{S}) = \tau(s)$, para todo $s \in [\bar{S}, \bar{T}]$. Logo $t = \psi(\psi^{-1}(t)) = \tau(\psi^{-1}(t))$ para todo $t \in [S, T]$ (onde $\psi^{-1}(t) \in [\bar{S}, \bar{T}]$) implica

$$\tau(\psi^{-1}(t)) = t.$$

- Temos que satisfaz $\psi(s) = t$ para $s = \psi^{-1}(t)$. Assim $\tau(s) = t$. Logo

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \psi^{-1}(t) = (\psi^{-1})'(t) = \frac{1}{\dot{\psi}(\psi^{-1}(t))} = \frac{1}{\dot{\psi}(s)} = \frac{1}{\dot{\tau}(s)} = \frac{1}{\alpha(s)} = \frac{1}{\alpha(\psi^{-1}(t))}$$

e, em particular

$$(\psi^{-1})'(t) = \frac{1}{\alpha(\psi^{-1}(t))}$$

e

$$ds = \frac{1}{\alpha(\psi^{-1}(t))} dt.$$

- Como $t = \psi(s)$:
se $s = \bar{S}$, então $t = \psi(\bar{S}) = \tau(\bar{S}) = S$ e,
se $s = \bar{T}$, então $t = \psi(\bar{T}) = \tau(\bar{T}) = T$.
- $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ para q.t. $t \in [S, T]$, pois

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (y \circ \psi^{-1})'(t) \\ &= [\dot{y}(\psi^{-1}(t))] \cdot (\psi^{-1})'(t) \\ &= [\alpha(\psi^{-1}(t)) f(\tau(\psi^{-1}(t)), y(\psi^{-1}(t)), v(\psi^{-1}(t)))] \cdot \left[\frac{1}{\alpha(\psi^{-1}(t))} \right] \\ &= f(t, x(t), u(t)). \end{aligned}$$

- $u(t) \in U$ para q.t. $t \in [S, T]$ pois

$$u(t) = v \circ \psi^{-1}(t) = v(s) \in U.$$

- $(S, x(S), T, x(T)) \in C$, pois

$$(S, x(S), T, x(T)) = (\tau(\bar{S}), y(\bar{S}), \tau(\bar{T}), y(\bar{T})) \in C.$$

•

$$d([S, T], x), ([\bar{S}, \bar{T}], a)) \leq \delta', \quad (4.2)$$

pois por uma parte, pela definição de $d(\cdot, \cdot)$,

$$\begin{aligned} & d([S, T], x), ([\bar{S}, \bar{T}], a) \\ &= |S - \bar{S}| + |T - \bar{T}| + |x(S) - a(\bar{S})| + \int_{S \wedge \bar{S}}^{T \vee \bar{T}} |\dot{x}_e(s) - \dot{a}_e(s)| ds. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} & \dot{z}(s) = \alpha(s) |f(\tau(s), y(s), v(s)) - \dot{a}(\tau)| \\ \Rightarrow & \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \dot{z}(s) ds = \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \alpha(s) |f(\tau(s), y(s), v(s)) - \dot{a}(\tau)| ds \\ \Rightarrow & z(\bar{T}) - z(\bar{S}) = \int_S^T \alpha(\psi^{-1}(t)) |f(t, x(t), u(t)) - \dot{a}(t)| \frac{1}{\alpha(\psi^{-1}(t))} dt \\ &= \int_S^T |\dot{x}(t) - \dot{a}(t)| dt. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Por outra parte, pela última condição no problema (R) e pela definição de m ,

$$\begin{aligned} \delta' &\geq m(\tau(\bar{S}), \tau(\bar{T}), y(\bar{S}), z(\bar{S}), z(\bar{T})) \\ &= |\tau(\bar{S}) - \bar{S}| + |\tau(\bar{T}) - \bar{T}| + |y(\bar{S}) - a(\bar{S})| + \int_{\bar{S}}^{\bar{S} \vee \tau(\bar{S})} |\dot{a}(\sigma)| d\sigma \\ &\quad + \int_{\bar{T} \wedge \tau(\bar{T})}^{\bar{T}} |\dot{a}(\sigma)| d\sigma + z(\bar{T}) - z(\bar{S}) \\ &= |S - \bar{S}| + |T - \bar{T}| + |x(S) - a(\bar{S})| + \int_{\bar{S}}^{\bar{S} \vee S} |\dot{a}(\sigma)| d\sigma + \int_{\bar{T} \wedge T}^{\bar{T}} |\dot{a}(\sigma)| d\sigma \\ &\quad + \int_S^T |\dot{x}(t) - \dot{a}(t)| dt \text{ (por (4.4))}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Por (4.3) e (4.5), tudo reduz-se a mostrar que

$$\begin{aligned} & \int_{\bar{S}}^{\bar{S} \vee S} |\dot{a}(\sigma)| d\sigma + \int_{\bar{T} \wedge T}^{\bar{T}} |\dot{a}(\sigma)| d\sigma + \int_S^T |\dot{x}(t) - \dot{a}(t)| dt \\ &= \int_{S \wedge \bar{S}}^{T \vee \bar{T}} |\dot{x}_e(s) - \dot{a}_e(s)| ds. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Note que temos os seguintes quatro casos e que em cada um deles satisfaz-se (4.6):

1. Se $S < \bar{S}$ e $\bar{T} < T$, então

$$\begin{aligned} & \int_{\bar{S}}^{\bar{S} \vee S} |\dot{a}(\sigma)| d\sigma + \int_{\bar{T} \wedge T}^{\bar{T}} |\dot{a}(\sigma)| d\sigma + \int_S^T |\dot{x}(t) - \dot{a}(t)| dt \\ &= \int_{\bar{S}}^{\bar{S}} |\dot{a}(\sigma)| d\sigma + \int_{\bar{T}}^{\bar{T}} |\dot{a}(\sigma)| d\sigma + \int_S^T |\dot{x}(\sigma) - \dot{a}(\sigma)| d\sigma \\ &= \int_{S=S \wedge \bar{S}}^{T=T \vee \bar{T}} |\dot{x}_e(\sigma) - \dot{a}_e(\sigma)| d\sigma. \end{aligned}$$

2. Se $S < \bar{S}$ e $T < \bar{T}$, então $x_e(\sigma)$ é constante para $\sigma \in [T, \bar{T}]$, o que implica em $\dot{x}_e(\sigma) = 0$ para $\sigma \in [T, \bar{T}]$. Daí,

$$\begin{aligned} & \int_{\bar{S}}^{\bar{S} \vee S} |\dot{a}(\sigma)| d\sigma + \int_{\bar{T} \wedge T}^{\bar{T}} |\dot{a}(\sigma)| d\sigma + \int_S^T |\dot{x}(t) - \dot{a}(t)| dt \\ &= \int_{\bar{S}}^{\bar{S}} |\dot{a}(\sigma)| d\sigma + \int_T^{\bar{T}} |\dot{a}(\sigma)| d\sigma + \int_S^T |\dot{x}(\sigma) - \dot{a}(\sigma)| d\sigma \\ &= \int_T^{\bar{T}} |\dot{x}_e(\sigma) - \dot{a}(\sigma)| d\sigma + \int_S^T |\dot{x}_e(\sigma) - \dot{a}_e(\sigma)| d\sigma \\ &= \int_{S=S \wedge \bar{S}}^{\bar{T}=T \vee \bar{T}} |\dot{x}_e(\sigma) - \dot{a}_e(\sigma)| d\sigma. \end{aligned}$$

3. Se $\bar{S} < S$ e $\bar{T} < T$, então $x_e(\sigma)$ é constante para $\sigma \in [\bar{S}, S]$, o que implica em $\dot{x}_e(\sigma) = 0$ para $\sigma \in [\bar{S}, S]$. Daí,

$$\begin{aligned} & \int_{\bar{S}}^{\bar{S} \vee S} |\dot{a}(\sigma)| d\sigma + \int_{\bar{T} \wedge T}^{\bar{T}} |\dot{a}(\sigma)| d\sigma + \int_S^T |\dot{x}(t) - \dot{a}(t)| dt \\ &= \int_{\bar{S}}^S |\dot{a}(\sigma)| d\sigma + \int_{\bar{T}}^{\bar{T}} |\dot{a}(\sigma)| d\sigma + \int_S^T |\dot{x}(\sigma) - \dot{a}(\sigma)| d\sigma \\ &= \int_{\bar{S}}^S |\dot{x}_e(\sigma) - \dot{a}(\sigma)| d\sigma + \int_S^T |\dot{x}_e(\sigma) - \dot{a}_e(\sigma)| d\sigma \\ &= \int_{\bar{S}=S \wedge \bar{S}}^{T=T \vee \bar{T}} |\dot{x}_e(\sigma) - \dot{a}_e(\sigma)| d\sigma. \end{aligned}$$

4. Se $\bar{S} < S$ e $T < \bar{T}$, então $x_e(\sigma)$ é constante para $\sigma \in [\bar{S}, S] \cup [T, \bar{T}]$, o que

implica em $\dot{x}_e(\sigma) = 0$ para $\sigma \in [\bar{S}, S] \cup [T, \bar{T}]$. Daí,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\bar{S}}^{\bar{S} \vee S} |\dot{a}(\sigma)| d\sigma + \int_{\bar{T} \wedge T}^{\bar{T}} |\dot{a}(\sigma)| d\sigma + \int_S^T |\dot{x}(t) - \dot{a}(t)| dt \\
 = & \int_{\bar{S}}^S |\dot{a}(\sigma)| d\sigma + \int_T^{\bar{T}} |\dot{a}(\sigma)| d\sigma + \int_S^T |\dot{x}(\sigma) - \dot{a}(\sigma)| d\sigma \\
 = & \int_{\bar{S}}^S |\dot{x}_e(\sigma) - \dot{a}(\sigma)| d\sigma + \int_T^{\bar{T}} |\dot{x}_e(\sigma) - \dot{a}(\sigma)| d\sigma + \int_S^T |\dot{x}_e(\sigma) - \dot{a}_e(\sigma)| d\sigma \\
 = & \int_{\bar{S}=S \wedge \bar{S}}^{\bar{T}=T \vee \bar{T}} |\dot{x}_e(\sigma) - \dot{a}_e(\sigma)| d\sigma.
 \end{aligned}$$

- $d([S, T], x), ([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}) < 2\delta'$, pois

$$\begin{aligned}
 d([S, T], x), ([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}) & \leq d([S, T], x), ([\bar{S}, \bar{T}], a) + d([[\bar{S}, \bar{T}], a), ([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x})) \\
 & < \delta' + \delta', \text{ por (4.2) e (4.1)} \\
 & = 2\delta'.
 \end{aligned}$$

Segue-se das relações anteriores que $([S, T], x, u)$ é um processo admissível para o problema de controle ótimo original $(TL)'$ que pertence à vizinhança $2\delta'$ de $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$, pois acabamos de mostrar que

- $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ para q.t. $t \in [S, T]$,
- $u(t) \in U(t)$ para q.t. $t \in [S, T]$,
- $(S, x(S), T, x(T)) \in C$,
- $d([S, T], x), ([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}) < 2\delta'$.

Como $\bar{\tau}(s) \equiv s$, então $\bar{\tau}(\bar{S}) = \bar{S}$ e $\bar{\tau}(\bar{T}) = \bar{T}$. Além disso, $\dot{\bar{\tau}}(s) \equiv \dot{s} \equiv 1$.

Como $\bar{y} = \bar{x}$, então $\bar{y}(\bar{S}) = \bar{x}(\bar{S})$ e $\bar{y}(\bar{T}) = \bar{x}(\bar{T})$. Além disso, $\dot{\bar{y}}(s) = \dot{\bar{x}}(s)$ para todo s .

Como $\bar{z}(s) = \int_{\bar{S}}^s |\dot{\bar{x}}(\sigma) - \dot{a}(\sigma)| d\sigma$ então $\dot{\bar{z}}(s) = |\dot{\bar{x}}(s) - \dot{a}(s)|$ para todo s .

Também, $\bar{v} = \bar{u}$ e $\bar{\alpha}(s) \equiv 1$.

Finalmente,

$$\begin{aligned}
 g(\bar{\tau}(\bar{S}), \bar{y}(\bar{S}), \bar{\tau}(\bar{T}), \bar{y}(\bar{T})) &= g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \\
 &\leq g(S, x(S), T, x(T)) \text{ (pois por hipótese } ([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u}) \text{ é um} \\
 &\quad \text{minimizador local em } W^{1,1} \text{ para } (TL)', \text{ isto é,} \\
 &\quad \text{existe } 2\delta' > 0 \text{ t.q. } g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \leq g(S, x(S), T, x(T)) \\
 &\quad \text{para todo processo admissível } ([S, T], x, u) \text{ de } (TL)' \text{ com} \\
 &\quad d([S, T], x), ([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}) \leq 2\delta'.) \\
 &= g(\tau(\bar{S}), y(\bar{S}), \tau(\bar{T}), y(\bar{T})).
 \end{aligned}$$

Portanto $g(\bar{\tau}(\bar{S}), \bar{y}(\bar{S}), \bar{\tau}(\bar{T}), \bar{y}(\bar{T})) \leq g(\tau(\bar{S}), y(\bar{S}), \tau(\bar{T}), y(\bar{T}))$.

Agora, mostraremos que $((\bar{\tau}, \bar{y}, \bar{z}), (\bar{v}, \bar{\alpha}))$ é um processo admissível para o problema (R) , de fato:

1. $((\dot{\bar{\tau}}(s), \dot{\bar{y}}(s), \dot{\bar{z}}(s)) = \tilde{f}(\bar{\tau}(s), \bar{y}(s), \bar{v}(s), \bar{\alpha}(s))$, para q.t. $s \in [\bar{S}, \bar{T}]$, pois

$$\begin{aligned}
 ((\dot{\bar{\tau}}(s), \dot{\bar{y}}(s), \dot{\bar{z}}(s)) &= (1, \dot{\bar{x}}(s), |\dot{\bar{x}}(s) - \dot{a}(s)|) \\
 &= (1, f(s, \bar{x}(s), \bar{u}(s)), |f(s, \bar{x}(s), \bar{u}(s)) - \dot{a}(s)|) \\
 &= \tilde{f}(s, \bar{x}(s), \bar{u}(s), 1) \\
 &= \tilde{f}(\bar{\tau}(s), \bar{y}(s), \bar{v}(s), \bar{\alpha}(s));
 \end{aligned}$$

2. $\bar{v}(s) \in U$ q.s., pois

$$\bar{v}(s) = \bar{u}(s) \in U;$$

3. $\bar{\alpha}(s) \in [0.5, 1.5]$ q.s., pois

$$\bar{\alpha}(s) = 1 \in [0.5, 1.5];$$

4. $(\bar{\tau}(\bar{S}), \bar{y}(\bar{S}), \bar{\tau}(\bar{T}), \bar{y}(\bar{T})) \in C$, pois

$$(\bar{\tau}(\bar{S}), \bar{y}(\bar{S}), \bar{\tau}(\bar{T}), \bar{y}(\bar{T})) = (\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \in C;$$

5. $m(\bar{\tau}(\bar{S}), \bar{\tau}(\bar{T}), \bar{y}(\bar{S}), \bar{z}(\bar{S}), \bar{z}(\bar{T})) \leq \delta'$, pois

$$\begin{aligned}
 & m(\bar{\tau}(\bar{S}), \bar{\tau}(\bar{T}), \bar{y}(\bar{S}), \bar{z}(\bar{S}), \bar{z}(\bar{T})) \\
 &= m\left(\bar{S}, \bar{T}, \bar{x}(\bar{S}), \int_{\bar{S}}^{\bar{S}} |\dot{x}(\sigma) - \dot{a}(\sigma)| d\sigma, \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} |\dot{x}(\sigma) - \dot{a}(\sigma)| d\sigma\right) \\
 &= |\bar{S} - \bar{S}| + |\bar{T} - \bar{T}| + |\bar{x}(\bar{S}) - a(\bar{S})| + \int_{\bar{S}}^{\bar{S} \vee \bar{S} = \bar{S}} |\dot{a}(\sigma)| d\sigma \\
 &\quad + \int_{\bar{T} \wedge \bar{T} = \bar{T}}^{\bar{T}} |\dot{a}(\sigma)| d\sigma + \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} |\dot{x}(\sigma) - \dot{a}(\sigma)| d\sigma \\
 &= \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} |\dot{x}(\sigma) - \dot{a}(\sigma)| d\sigma \\
 &< \delta' \text{ (por (4.1))}.
 \end{aligned}$$

Segue-se que o processo $((\bar{\tau}(s), \bar{x}, \bar{z}(s)), (\bar{u}, \bar{\alpha}))$ é um minimizador para o problema (R) .

Assim as hipóteses do Teorema do Princípio do Máximo (Teorema 3.1) são satisfeitas, com respeito ao problema (R) e ao minimizador $((\bar{\tau}(s), \bar{x}, \bar{z}(s)), (\bar{u}, \bar{\alpha}))$. Então existem $r \in W^{1,1}([\bar{S}, \bar{T}]; \mathbb{R})$, $p \in W^{1,1}([\bar{S}, \bar{T}]; \mathbb{R}^n)$, $q \in W^{1,1}([\bar{S}, \bar{T}]; \mathbb{R})$ e $\lambda \geq 0$ tais que:

1. Satisfaz-se a condição da inclusão adjunta:

$$\begin{aligned}
 & (-\dot{r}(s), -\dot{p}(s), -\dot{q}(s)) \\
 & \in co \partial_{(\tau, y, z)}[(r(s), p(s), q(s)) \tilde{f}(\tau(s), y(s), v(s), \alpha(s))] |_{(\bar{\tau}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{v}, \bar{\alpha})} \\
 &= co \partial_{(\tau, y, z)}[(r(s), p(s), q(s)) (\alpha(s), \alpha(s) f(\tau(s), y(s), v(s)), \\
 &\quad \alpha(s) |f(\tau(s), y(s), v(s)) - \dot{a}(\tau)|)] |_{(\bar{\tau}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{v}, \bar{\alpha})} \\
 &= co \partial_{(\tau, y, z)}[r(s) \alpha(s) + p(s) \alpha(s) f(\tau(s), y(s), v(s)) \\
 &\quad + q(s) \alpha(s) |f(\tau(s), y(s), v(s)) - \dot{a}(\tau)|] |_{(\bar{\tau}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{v}, \bar{\alpha})}.
 \end{aligned}$$

Conclusões:

$$\begin{aligned}
 (-\dot{r}(s), -\dot{p}(s)) & \in co \partial_{(\tau, y)}[r(s) \alpha(s) + p(s) \alpha(s) f(\tau(s), y(s), v(s)) \\
 & \quad + q(s) \alpha(s) |f(\tau(s), y(s), v(s)) - \dot{a}(\tau)|] |_{(\bar{\tau}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{v}, \bar{\alpha})} \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 -\dot{q}(s) & \in co \partial_z[r(s) \alpha(s) + p(s) \alpha(s) f(\tau(s), y(s), v(s)) \\
 & \quad + q(s) \alpha(s) |f(\tau(s), y(s), v(s)) - \dot{a}(\tau)|] |_{(\bar{\tau}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{v}, \bar{\alpha})} = 0.
 \end{aligned}$$

Do último temos que

$$q(s) \equiv \text{constante}.$$

Antes de passar à seguinte condição, definamos os seguintes:

$$\tilde{U} = U \times [0.5, 1.5],$$

$$\tilde{C} = \{(\tau_0, \tau_1, y_0, y_1, z_0, z_1) : (\tau_0, y_0, \tau_1, y_1) \in C, m((\tau_0, \tau_1, y_0, z_0, z_1)) \leq \delta'\}$$

e

$$\tilde{g}(\tau(\bar{S}), y(\bar{S}), \tau(\bar{T}), y(\bar{T}), z(\bar{S}), z(\bar{T})) = g(\tau(\bar{S}), y(\bar{S}), \tau(\bar{T}), y(\bar{T})).$$

Observação 4.5. Como $m(\bar{\tau}(\bar{S}), \bar{\tau}(\bar{T}), \bar{y}(\bar{S}), \bar{z}(\bar{S}), \bar{z}(\bar{T})) < \delta'$ (ver página 41), o ponto $(\bar{\tau}(\bar{S}), \bar{\tau}(\bar{T}), \bar{y}(\bar{S}), \bar{z}(\bar{S}), \bar{z}(\bar{T}))$ está no interior da região definida pela restrição $m \leq \delta'$. Neste caso, como estamos tratando de otimalidade local, a restrição $m \leq \delta'$ não desempenha nenhum papel no cálculo do cone normal limite a $\tilde{C}$ no ponto $(\bar{\tau}(\bar{S}), \bar{\tau}(\bar{T}), \bar{y}(\bar{S}), \bar{y}(\bar{T}), \bar{z}(\bar{S}), \bar{z}(\bar{T}))$. Temos, então, que

$$N_{\tilde{C}}(\bar{\tau}(\bar{S}), \bar{y}(\bar{S}), \bar{\tau}(\bar{T}), \bar{y}(\bar{T}), \bar{z}(\bar{S}), \bar{z}(\bar{T})) = N_C(\bar{\tau}(\bar{S}), \bar{y}(\bar{S}), \bar{\tau}(\bar{T}), \bar{y}(\bar{T})) \times \{(0, 0)\}.$$

2. Satisfaz-se a condição de transversalidade:

$$\begin{aligned} & (r(\bar{S}), p(\bar{S}), -r(\bar{T}), -p(\bar{T}), q(\bar{S}), -q(\bar{T})) \\ & \in \lambda \partial \tilde{g}(\bar{\tau}(\bar{S}), \bar{y}(\bar{S}), \bar{\tau}(\bar{T}), \bar{y}(\bar{T}), \bar{z}(\bar{S}), \bar{z}(\bar{T})) + N_{\tilde{C}}(\bar{\tau}(\bar{S}), \bar{y}(\bar{S}), \bar{\tau}(\bar{T}), \bar{y}(\bar{T}), \bar{z}(\bar{S}), \bar{z}(\bar{T})) \\ & = \lambda [(\partial g(\bar{\tau}(\bar{S}), \bar{y}(\bar{S}), \bar{\tau}(\bar{T}), \bar{y}(\bar{T})), 0, 0)] + N_C(\bar{\tau}(\bar{S}), \bar{y}(\bar{S}), \bar{\tau}(\bar{T}), \bar{y}(\bar{T})) \times \{(0, 0)\} \\ & = \lambda [(\partial g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})), 0, 0)] + N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \times \{(0, 0)\}. \end{aligned}$$

Conclusões:

$$(r(\bar{S}), p(\bar{S}), -r(\bar{T}), -p(\bar{T})) \in \lambda \partial g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) + N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T}))$$

e

$$(q(\bar{S}), -q(\bar{T})) \in \lambda \{(0, 0)\} + \{(0, 0)\}.$$

Da última inclusão e do fato de termos concluído acima que q é constante, segue que

$$q(t) \equiv 0. \tag{4.8}$$

Substituindo (4.8) em (4.7):

$$\begin{aligned}
 (-\dot{r}(s), -\dot{p}(s)) &\in \text{co } \partial_{(\tau, y)} [r(s) \alpha(s) + \alpha(s) p(s) f(\tau(s), y(s), v(s))] |_{(\bar{\tau}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{v}, \bar{\alpha})} \\
 &= \text{co } \partial_{(\tau, y)} [\alpha(s) p(s) f(\tau(s), y(s), v(s))] |_{(\bar{\tau}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{v}, \bar{\alpha})} \\
 &= \text{co } \partial_{(s, x)} [p(s) f(s, \bar{x}(s), \bar{u}(s))] \\
 &= \text{co } \partial_{(s, x)} \mathcal{H}(s, \bar{x}(s), p(s), \bar{u}(s)).
 \end{aligned}$$

3. Satisfaz-se a condição de Weierstrass:

$$\begin{aligned}
 &\max_{(v, \alpha) \in U \times [0.5, 1.5]} \{r(s) \alpha + \alpha p(s) f(\bar{\tau}(s), \bar{y}(s), v)\} \\
 &= r(s) \bar{\alpha}(s) + \bar{\alpha}(s) p(s) f(\bar{\tau}(s), \bar{y}(s), \bar{v}(s)) \\
 &= r(s) + p(s) f(s, \bar{x}(s), \bar{u}(s)) \text{ para q.t. } s \in [\bar{S}, \bar{T}].
 \end{aligned}$$

Logo, para q.t. $s \in [\bar{S}, \bar{T}]$, para todo $v \in U$ e todo $\alpha \in [0.5, 1.5]$,

$$\begin{aligned}
 r(s) \alpha + \alpha p(s) f(\bar{\tau}(s), \bar{y}(s), v) &\leq r(s) + p(s) f(s, \bar{x}(s), \bar{u}(s)) \\
 \Leftrightarrow r(s) \alpha + \alpha p(s) f(s, \bar{x}(s), v) &\leq r(s) + p(s) f(s, \bar{x}(s), \bar{u}(s)) \\
 \Leftrightarrow \alpha [r(s) + p(s) f(s, \bar{x}(s), v)] &\leq r(s) + p(s) f(s, \bar{x}(s), \bar{u}(s)) \\
 \Leftrightarrow \alpha [r(s) + \mathcal{H}(s, \bar{x}(s), p(s), v)] &\leq r(s) + \mathcal{H}(s, \bar{x}(s), p(s), \bar{u}(s)). \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

Em (4.9), para $\alpha = 1$ temos:

$$\begin{aligned}
 r(s) + \mathcal{H}(s, \bar{x}(s), p(s), v) &\leq r(s) + \mathcal{H}(s, \bar{x}(s), p(s), \bar{u}(s)) \quad \forall v \in U \\
 \Leftrightarrow \mathcal{H}(s, \bar{x}(s), p(s), v) &\leq \mathcal{H}(s, \bar{x}(s), p(s), \bar{u}(s)) \quad \forall v \in U.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\max_{v \in U} \mathcal{H}(s, \bar{x}(s), p(s), v) = \mathcal{H}(s, \bar{x}(s), p(s), \bar{u}(s)) \text{ para q.t. } s \in [\bar{S}, \bar{T}].$$

Em (4.9), para $v = \bar{u}(s)$ temos:

$$\begin{aligned}
 \alpha [r(s) + \mathcal{H}(s, \bar{x}(s), p(s), \bar{u}(s))] &\leq r(s) + \mathcal{H}(s, \bar{x}(s), p(s), \bar{u}(s)) \quad \forall \alpha \in [0.5, 1.5] \\
 (\alpha - 1) [r(s) + \mathcal{H}(s, \bar{x}(s), p(s), \bar{u}(s))] &\leq 0 \quad \forall \alpha \in [0.5, 1.5].
 \end{aligned}$$

Se $\alpha = 0.5$,

$$(-0.5) [r(s) + \mathcal{H}(s, \bar{x}(s), p(s), \bar{u}(s))] \leq 0 \Rightarrow r(s) + \mathcal{H}(s, \bar{x}(s), p(s), \bar{u}(s)) \geq 0 \text{ e}$$

se $\alpha = 1.5$,

$$(0.5) [r(s) + \mathcal{H}(s, \bar{x}(s), p(s), \bar{u}(s))] \leq 0 \Rightarrow r(s) + \mathcal{H}(s, \bar{x}(s), p(s), \bar{u}(s)) \leq 0.$$

Logo

$$\begin{aligned} r(s) + \mathcal{H}(s, \bar{x}(s), p(s), \bar{u}(s)) &= 0 \\ \Rightarrow \mathcal{H}(s, \bar{x}(s), p(s), \bar{u}(s)) &= -r(s) \text{ para q.t. } s \in [\bar{S}, \bar{T}]. \end{aligned}$$

4. Satisfaz-se a condição da não-trivialidade dos multiplicadores:

$$(\lambda, (r, p, q)) \neq (0, (0, 0, 0)) \Rightarrow (\lambda, p) \neq (0, 0),$$

pois se $(\lambda, p) = (0, 0)$, então $\lambda = 0$ e $p = 0$, logo

$$\begin{aligned} -r(s) &= \mathcal{H}(s, \bar{x}(s), p(s), \bar{u}(s)) \\ &= p(s)f(s, \bar{x}(s), \bar{u}(s)) \\ &= 0 \text{ para q.t. } s \in [\bar{S}, \bar{T}]. \end{aligned}$$

Portanto $r \equiv 0$ e como $q \equiv \text{constante} = 0$, teríamos:

$$(\lambda, (r, p, q)) = (0, (0, 0, 0)), \text{ absurdo!}$$

Portanto, redefinindo $r := -r$, obtemos:

- $(\lambda, p) \neq (0, 0)$;
- $(\dot{r}(s), -\dot{p}(s)) \in \text{co } \partial_{(s,x)} \mathcal{H}(s, \bar{x}(s), p(s), \bar{u}(s))$ para q.t. $s \in [\bar{S}, \bar{T}]$;
- $(-r(\bar{S}), p(\bar{S}), r(\bar{T}), -p(\bar{T})) \in \lambda \partial g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) + N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T}))$;
- $\mathcal{H}(s, \bar{x}(s), p(s), \bar{u}(s)) = \max_{u \in U} \mathcal{H}(s, \bar{x}(s), p(s), u)$ para q.t. $s \in [\bar{S}, \bar{T}]$; e
- $\mathcal{H}(s, \bar{x}(s), p(s), \bar{u}(s)) = r(s)$ para q.t. $s \in [\bar{S}, \bar{T}]$.

Observação 4.6. Note que, como $m < \delta'$ a última restrição listada no problema (R) não tem efeito na condição de transversalidade e a variável de co-estado q associada com o estado z é zero.

Todas as afirmações foram confirmadas!!!

□

4.2 O Princípio do Máximo para o Problema de Bolza com Tempos Finais Livres

Começamos esta seção tratando um problema de controle, que deriva um Princípio do Máximo com tempos finais livres estendido para problemas mistos, isto é, na função de custo não somente temos ponto final com tempos finais livres mas também temos um termo integral. Logo, vamos considerar o caso continuamente diferenciável das funções envolvidas.

O Princípio do Máximo com tempos finais livres (Teorema 4.1) estende-se para cobrir problemas com um termo integral na função de custo, isto é, problemas nos quais procuramos minimizar um funcional na forma

$$\int_S^T L(t, x(t), u(t))dt + g(S, x(S), T, x(T)),$$

onde $L : [S, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função dada. Isto é logrado introduzindo uma nova variável de estado $z \in \mathbb{R}$ que satisfaz as relações

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = L(t, x(t), u(t)), \\ z(S) = 0. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_S^T \dot{z}(t)dt &= \int_S^T L(t, x(t), u(t))dt \\ \Rightarrow z(T) - z(S) &= \int_S^T L(t, x(t), u(t))dt \\ \Rightarrow z(T) &= \int_S^T L(t, x(t), u(t))dt. \end{aligned}$$

O custo misto pode então ser substituído pelo custo puro no ponto final:

$$z(T) + g(S, x(S), T, x(T)).$$

Sob condições apropriadas em L , temos um problema onde o Teorema do Princípio do Máximo com tempos finais livres (Teorema 4.1) pode ser aplicado. Aplicando o teorema e interpretando as conclusões em termos dos dados temos o Princípio do Máximo com tempos finais livres para problemas com termos mistos, do tipo Bolza, no qual o Hamiltoniano não-Maximizado está definido da mesma forma que no Capítulo 3:

$$\mathcal{H}_\lambda(t, x, u) = \mathcal{H}(t, x, p, u, \lambda) = p \cdot f(t, x, u) - \lambda L(t, x, u).$$

Portanto, o problema de controle ótimo a ser considerado agora é posto como:

$$(PB)' \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } \int_S^T L(t, x(t), u(t))dt + g(S, x(S), T, x(T)) \\ \text{s.a. } \text{arcos } x \in W^{1,1}([S, T]; \mathbb{R}^n) \text{ e funções mensuráveis} \\ u : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ satisfazendo} \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \text{ para q.t. } t \in [S, T], \\ u(t) \in U(t) \text{ para q.t. } t \in [S, T] \text{ e,} \\ (S, x(S), T, x(T)) \in C. \end{array} \right.$$

Teorema 4.2. (O Princípio do Máximo com tempos finais livres para o problema (PB)') *Seja $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$ um minimizador local em $W^{1,1}$ para o problema (PB)'. Suponha que:*

(H1) *g é localmente Lipschitz contínua;*

(H2) *Para $x \in \mathbb{R}^n$ fixo, $L(\cdot, x, \cdot)$ e $f(\cdot, x, \cdot)$ são $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^m$ mensuráveis e existem $\delta > 0$ e funções $k_L, k_f : [\bar{S}, \bar{T}] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $t \rightarrow k_L(t, \bar{u}(t)), t \rightarrow k_L f(t, \bar{u}(t))$ são integráveis e, para q.t. $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$,*

$$\begin{aligned} |L(t'', x'', u) - L(t', x', u)| &\leq k_L(t, \bar{u}(t)) |(t'', x'') - (t', x')| \forall (t'', x''), (t', x') \in (t, \bar{x}) + \delta \mathbb{B}, \\ |f(t'', x'', u) - f(t', x', u)| &\leq k_f(t, \bar{u}(t)) |(t'', x'') - (t', x')| \forall (t'', x''), (t', x') \in (t, \bar{x}) + \delta \mathbb{B}; \end{aligned}$$

(H3) *$U(t) = U \forall t \in \mathbb{R}$ para algum conjunto de Borel $U \subset \mathbb{R}^m$.*

Então existem $p \in W^{1,1}([\bar{S}, \bar{T}]; \mathbb{R}^n)$, $r \in W^{1,1}([\bar{S}, \bar{T}]; \mathbb{R})$ e $\lambda \geq 0$ tais que

(i) *$(p, \lambda) \neq (0, 0)$;*

(ii) *$(\dot{r}(t), -\dot{p}(t)) \in \text{co } \partial_{(t,x)} \mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))$ para q.t. $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$;*

(iii) *$(-r(\bar{S}), p(\bar{S}), r(\bar{T}), -p(\bar{T})) \in \lambda \partial g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) + N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T}))$;*

(iv) *$\mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = \max_{u \in U} \mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), u)$ para q.t. $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$;*

(v) *$\mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = r(t)$ para q.t. $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$.*

Demonstração. Consideremos o seguinte problema de estado aumentado:

$$(EA)' \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } [\tilde{g}(S, x(S), T, x(T), z(S), z(T)) := \int_S^T L(t, x(t), u(t)) dt \\ + g(S, x(S), T, x(T)) = z(T) + g(S, x(S), T, x(T))] \\ \text{s.a. } \text{arcos } x \in W^{1,1}([S, T]; \mathbb{R}^n), z \in W^{1,1}([S, T]; \mathbb{R}) \text{ e funções mensuráveis} \\ u : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ satisfazendo} \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \dot{z}(t) = L(t, x(t), u(t)) \text{ para q.t. } t \in [S, T], \\ u(t) \in U(t) \text{ para q.t. } t \in [S, T] \text{ e,} \\ (S, x(S), T, x(T), z(S), z(T)) \in \tilde{C} = C \times \{0\} \times \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

A última restrição do problema $(EA)'$ também pode ser escrita como

$$(S, x(S), T, x(T)) \in C, z(S) = 0, z(T) \text{ livre.}$$

Agora as *variáveis de estado* são duas x e z e as *variáveis de co-estado* associados às variáveis x e z , respectivamente, também são duas, digamos p e q , assim podemos colocar:

$$\tilde{x} := \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

e

$$\tilde{p} := \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Além disso

$$\tilde{f} := \begin{pmatrix} f \\ L \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

No problema $(EA)'$, $\tilde{g}$ é localmente Lipschitz contínua pois

$$\tilde{g}(x, y, z, w, a, b) = b + g(x, y, z, w) := h(b) + g(x, y, z, w),$$

onde $h(b)$ (a qual na verdade é a identidade) e $g(x, y, z, w)$ são localmente Lipschitz contínuas.

Pelo Teorema do Princípio do Máximo com tempos finais livres (Teorema 4.1), existem $\tilde{p} = (p, q) \in W^{1,1}([\bar{S}, \bar{T}]; \mathbb{R}^{n+1})$, $r \in W^{1,1}([\bar{S}, \bar{T}]; \mathbb{R})$ e $\lambda \geq 0$ tais que:

1. Satisfaz-se a condição da inclusão adjunta:

$$\begin{aligned}
 (\dot{r}(t), -\dot{p}(t), -\dot{q}(t)) &\in \text{co } \partial_{(t,x,z)} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), \bar{z}(t), p(t), q(t), \bar{u}(t)) \\
 &= \text{co } \partial_{(t,x,z)} (p(t) \cdot f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + q(t)L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))) \\
 &\subseteq \text{co } \partial_{(t,x)} (p(t) \cdot f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + q(t)L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))) \\
 &\quad \times \{0\} \text{ para q.t. } t \in [S, T].
 \end{aligned}$$

Conclusões:

$$(\dot{r}(t), -\dot{p}(t)) \in \text{co } \partial_{(t,x)} (p(t) \cdot f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + q(t)L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))), \quad (4.10)$$

$$(-\dot{q}(t)) \in \{0\} \Rightarrow -\dot{q}(t) = 0 \Rightarrow q(t) \equiv \text{constante} \quad (4.11)$$

para q.t. $t \in [S, T]$.

2. Satisfaz-se a condição de transversalidade:

$$\begin{aligned}
 &(-r(\bar{S}), p(\bar{S}), r(\bar{T}), -p(\bar{T}), q(\bar{S}), -q(\bar{T})) \\
 &\in \lambda \partial \tilde{g}(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T}), \bar{z}(\bar{S}), \bar{z}(\bar{T})) + N_{\bar{C}}(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T}), \bar{z}(\bar{S}), \bar{z}(\bar{T})) \\
 &\subseteq \lambda [\partial g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \times \{(0, 1)\}] + N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \times \mathbb{R} \times \{0\} \\
 &= \lambda \partial g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \times \{(0, \lambda)\} + N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \times \mathbb{R} \times \{0\}.
 \end{aligned}$$

pois

$$\partial \tilde{g}(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T}), \bar{z}(\bar{S}), \bar{z}(\bar{T})) \subseteq \partial g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \times \{(0, 1)\}$$

e,

$$\begin{aligned}
 N_{\bar{C}}(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T}), \bar{z}(\bar{S}), \bar{z}(\bar{T})) &= N_{C \times \{0\} \times \mathbb{R}}(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T}), \bar{z}(\bar{S}), \bar{z}(\bar{T})) \\
 &= N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \times N_{\{0\}}(\bar{z}(\bar{S})) \times N_{\mathbb{R}}(\bar{z}(\bar{T})) \\
 &= N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \times \mathbb{R} \times \{0\}.
 \end{aligned}$$

Conclusões:

$$\begin{aligned}
 (-r(\bar{S}), p(\bar{S}), r(\bar{T}), -p(\bar{T})) &\in \lambda \partial g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) + N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \\
 (q(\bar{S}), -q(\bar{T})) &\in \{(0, \lambda)\} + \mathbb{R} \times \{0\}.
 \end{aligned} \quad (4.12)$$

De (4.12):

$$\begin{aligned}
 q(\bar{S}) &\text{ é livre,} \\
 q(\bar{T}) &= -\lambda \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Logo temos que em (4.11),

$$q(t) = -\lambda \forall t \in [\bar{S}, \bar{T}] \quad (4.13)$$

e, em (4.10),

$$\begin{aligned} (\dot{r}(t), -\dot{p}(t)) &\in \text{co } \partial_{(t,x)}(p(t) \cdot f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - \lambda L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))) \\ &= \text{co } \partial_{(t,x)} \mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \text{ para q.t. } t \in [S, T]. \end{aligned}$$

3. Satisfaz-se a condição da não-trivialidade dos multiplicadores:

$$((p, q), \lambda) \neq ((0, 0), 0) \Rightarrow (p, \lambda) \neq (0, 0),$$

pois se fosse $(p, \lambda) = (0, 0)$, então $p = 0$ e $\lambda = 0$, logo

$$\begin{aligned} ((p, q), \lambda) &= ((p, -\lambda), \lambda), \text{ (por (4.13))} \\ &= ((0, -0), 0). \end{aligned}$$

Assim $((p, q), \lambda) = ((0, 0), 0)$, absurdo!

4. Satisfaz-se a condição de Weierstrass:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), \bar{z}(t), p(t), q(t), \bar{u}(t)) &= \max_{u \in U} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), \bar{z}(t), p(t), q(t), u) \\ \Leftrightarrow p(t) \cdot f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + q(t)L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) &= \max_{u \in U} [p(t) \cdot f(t, \bar{x}(t), u) + q(t)L(t, \bar{x}(t), u)] \\ \Leftrightarrow p(t) \cdot f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - \lambda L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) &= \max_{u \in U} [p(t) \cdot f(t, \bar{x}(t), u) - \lambda L(t, \bar{x}(t), u)] \\ \Leftrightarrow \mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) &= \max_{u \in U} \mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), u) \text{ para q.t. } t \in [S, T]. \end{aligned}$$

5. Pelo Teorema do Princípio do Máximo com tempos finais livres (Teorema 4.1-(v)),

tem-se que $\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), \bar{z}(t), p(t), q(t), \bar{u}(t)) = r(t)$ para q.t. $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$. Logo

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) &= \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), \bar{z}(t), p(t), q(t), \bar{u}(t)) \text{ (pelo item 4)} \\ &= r(t) \text{ para q.t. } t \in [\bar{S}, \bar{T}]. \end{aligned}$$

□

Observação 4.7. No Princípio do Máximo com tempos finais livres para o problema $(PB)'$, se L e f são continuamente diferenciáveis (L e $f \in C^1$) em relação às variáveis temporal e de estado, notemos o seguinte:

1. Na condição da inclusão adjunta temos:

$$(\dot{r}(t), -\dot{p}(t)) = \nabla_{(t,x)} \mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \text{ para q.t. } t \in [S, T].$$

2. Na condição de transversalidade temos:

$$(-r(\bar{S}), p(\bar{S}), r(\bar{T}), -p(\bar{T})) - \lambda \nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \in N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})).$$

CAPÍTULO 5

CONDIÇÕES SUFICIENTES PARA PROBLEMAS DE CONTROLE COM TEMPOS FINAIS LIVRES

No Capítulo 4 obtivemos as condições necessárias para problemas de controle com tempos finais livres, agora nós queremos obter as condições suficientes. Para isso não basta o estudo do Princípio do Máximo com tempos finais livres, precisamos ter também o estudo de invexidade generalizada, que denominaremos PM-pseudoinvexidade livre. Na primeira seção vamos estudar a suficiência para problemas de controle com tempos finais fixos (de [21]) e uma suficiência nova para problemas de controle com tempos finais livres vai ser deixado para a segunda seção.

5.1 Condições suficientes para problemas de controle com tempos finais fixos

A fim de tomar em conta os problemas anormais, a definição da PML-pseudoinvexidade apresentada na primeira subseção envolve o multiplicador de custo e o arco adjunto (do Princípio do Máximo). Na segunda subseção, é dado também uma versão da PM-pseudoinvexidade sem esses multiplicadores de Lagrange e, a relação entre as duas definições é estabelecida. Se a diferenciabilidade do funcional custo e das funções do campo vetorial com respeito à variável de estado (não necessariamente com respeito à variável de controle) é assumido, então as duas definições coincidem. A última subseção é deixada para alguns exemplos.

Consideremos novamente o problema do tipo Bolza do Capítulo 3:

$$(PB) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } F(x, u) := \int_S^T L(t, x(t), u(t)) dt + g(x(S), x(T)) \\ \text{s.a. } \text{arcos } x \in W^{1,1}([S, T]; \mathbb{R}^n) \text{ e funções mensuráveis} \\ u : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ satisfazendo} \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \text{ para q.t. } t \in [S, T], \\ u(t) \in U(t) \text{ para q.t. } t \in [S, T] \text{ e,} \\ (x(S), x(T)) \in C, \end{array} \right.$$

onde $[S, T]$ é um intervalo, $L : [S, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : [S, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ são funções, $U : [S, T] \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ é uma multifunção não vazia, $C \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ é um conjunto fechado e, os tempos S, T estão fixos.

Definição 5.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Denotemos*

$$\begin{aligned} I &= \{t : (t, x) \in \Omega \text{ para algum } x \in \mathbb{R}^n\}, \\ \Omega_t &= \{x : (t, x) \in \Omega\}. \end{aligned}$$

Dizemos que Ω é um tubo quando I é um intervalo e existem uma função contínua $w(t)$ e uma função contínua positiva $\epsilon \in I$ tais que

$$\Omega_t = w(t) + \epsilon(t)\mathbb{B} \text{ para } t \in I,$$

onde $\mathbb{B}$ denota a bola aberta unitária em $\mathbb{R}^n$. Se uma função x definida em I dada é tal que $(t, x(t)) \in \Omega$ para cada $t \in I$, dizemos que $x \in \Omega$.

O Hamiltoniano não-maximizado é denotado da mesma forma que no Capítulo 3:

$$\mathcal{H}_\lambda(t, x, u) = \mathcal{H}(t, x, p, u, \lambda) = p \cdot f(t, x, u) - \lambda \cdot L(t, x, u).$$

Nesta subseção, vamos supor válidas as seguintes hipóteses:

- (H1) g é localmente Lipschitz contínua;
- (H2) As funções $L(\cdot, x, \cdot)$ e $f(\cdot, x, \cdot)$ são $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^m$ mensuráveis, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ e existem funções $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^m$ mensuráveis $k_L, k_f : [S, T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tais que para cada $(t, u) \in Gr U$, as funções $L(t, \cdot, u)$ e $f(t, \cdot, u)$ são Lipschitz em Ω_t , de posto $k_L(t, u), k_f(t, u)$ e, $t \rightarrow k_L(t, \bar{u}(t)), t \rightarrow k_f(t, \bar{u}(t))$ são integráveis.
- (H3) $Gr U$ é um conjunto $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^m$ mensurável.

Deste modo, de acordo com o Teorema 3.2, podemos enunciar:

Teorema 5.1. (O Princípio do Máximo para (PB)) *Seja $(\bar{x}, \bar{u})$ um processo ótimo para (PB). Então existem $p \in W^{1,1}([S, T]; \mathbb{R}^n)$ e, um escalar λ (igual a 0 ou 1) tais que*

$$\|p\| + \lambda > 0; \quad (5.1)$$

$$-\dot{p}(t) \in \bar{\partial}_x \mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \text{ para q.t. } t \in [S, T]; \quad (5.2)$$

$$(p(S), -p(T)) \in \lambda \bar{\partial} g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) + N_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T)); \quad (5.3)$$

$$\mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = \max_{u \in U(t)} \mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), u) \text{ para q.t. } t \in [S, T]. \quad (5.4)$$

Definição 5.2. 1. Quando existem p e λ satisfazendo (5.1)-(5.4) dizemos que $(\bar{x}, \bar{u})$ é um 1PM -processo de (PB).

2. Se $\lambda = 1$, dizemos que $(\bar{x}, \bar{u})$ é um PM -processo normal e (PB) é denominado normal em $(\bar{x}, \bar{u})$.

3. Dizemos que (PB) é normal se é normal em qualquer PM -processo $(\bar{x}, \bar{u})$ e que (PB) é anormal, caso contrário. Por exemplo, os problemas de controle ótimo com $C = C_0 \times \mathbb{R}^n$ são normais, onde $C_0 \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto fechado.

Definição 5.3. Dado $(t, x, u) \in [S, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $(t, x, p, u, \lambda) \in [S, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ e $\alpha \in (0, 1)$ definimos os “operadores diferença” $\Delta_\alpha L(t, x, u) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $\Delta_\alpha f(t, x, u) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\Delta_\alpha \mathcal{H}_\lambda(t, x, u) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, respectivamente como:

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha L(t, x, u)(\xi) &:= \frac{L(t, x, u + \alpha\xi) - L(t, x, u)}{\alpha}; \\ \Delta_\alpha f(t, x, u)(\xi) &:= \frac{f(t, x, u + \alpha\xi) - f(t, x, u)}{\alpha}; \\ \Delta_\alpha \mathcal{H}_\lambda(t, x, u)(\xi) &:= \frac{\mathcal{H}_\lambda(t, x, u + \alpha\xi) - \mathcal{H}_\lambda(t, x, u)}{\alpha} \\ &= \frac{[p \cdot f(t, x, u + \alpha\xi) - \lambda \cdot L(t, x, u + \alpha\xi)] - [p \cdot f(t, x, u) - \lambda \cdot L(t, x, u)]}{\alpha}. \end{aligned}$$

5.1.1 PML-pseudoinvexidade

Definiremos o conceito da 2PML -pseudoinvexidade e mostraremos que este conceito é uma condição suficiente da otimalidade: para um problema PML -pseudoinvexo todos os processos que satisfazem o Teorema 5.1 (os PM -processos) são processos ótimos. Em seguida mostraremos um lema técnico e finalmente este lema será usado para mostrar a

¹PM é uma sigla para Princípio do Máximo.

²PM é uma abreviação para Princípio do Máximo. L está presente para indicar que os multiplicadores de Lagrange estão envolvidos na definição.

recíproca do primeiro resultado: os problemas tais que todos os PM-processos são ótimos, são, necessariamente, problemas PML-pseudoinvexos.

Definição 5.4. Dizemos que (PB) é PML-pseudoinvexo se para cada par de processos admissíveis $(x, u), (\bar{x}, \bar{u})$ tais que $F(x, u) < F(\bar{x}, \bar{u})$ existem um vetor $(\eta_S, \eta_T) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e uma aplicação $\xi : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisfazendo

$$(\eta_S, \eta_T) \in T_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \quad (5.5)$$

(T_C denota o cone tangente de Clarke ao conjunto C no ponto $(\bar{x}(S), \bar{x}(T))$),

$$\bar{u}(t) + \alpha \xi(t) \in U(t) \text{ para q.t. } t \in [S, T] \quad (5.6)$$

e

$$(\nu_S, \nu_T) \cdot (\eta_S, \eta_T) + \int_S^T \Delta_\alpha \mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t)) dt > 0, \quad (5.7)$$

$\forall \alpha \in (0, 1)$ e $\forall (\lambda, p) \in \{0, 1\} \times W^{1,1}([S, T]; \mathbb{R}^n)$ tais que

$$\|p\| + \lambda > 0, \quad (5.8)$$

$$-\dot{p}(t) \in \bar{\partial}_x \mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)), \quad (5.9)$$

$$(p(S), -p(T)) \in \lambda \bar{\partial} g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) + N_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T)). \quad (5.10)$$

Aqui

$$(p(S), -p(T)) = \lambda(\gamma_S, \gamma_T) + (\nu_S, \nu_T), \quad (5.11)$$

onde

$$(\gamma_S, \gamma_T) \in \bar{\partial} g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \text{ e } (\nu_S, \nu_T) \in N_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T)). \quad (5.12)$$

Quando (5.7) satisfaz-se somente para $\lambda = 1$, dizemos que o problema é PML-pseudoinvexo normal.

Enfatizamos que na definição acima

$$\eta_S = \eta_S(x, u, \bar{x}, \bar{u}),$$

$$\eta_T = \eta_T(x, u, \bar{x}, \bar{u}),$$

$$\xi = \xi(x, u, \bar{x}, \bar{u})$$

e, denotamos

$$\begin{aligned}\eta(t) &:= \eta(t, x(t), u(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t)), \\ \xi(t) &:= \xi(t, x(t), u(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t)).\end{aligned}$$

Teorema 5.2. *Se (PB) é PML-pseudoinverso (normal), então todo PM-processo (normal) é um processo ótimo.*

Demonstração. Seja $(\bar{x}, \bar{u})$ um PM-processo de (PB) e procedamos por contradição; assumamos que $(\bar{x}, \bar{u})$ não é um processo ótimo, isto é, suponha que existe um processo admissível (x, u) tal que $F(x, u) < F(\bar{x}, \bar{u})$. Como $(\bar{x}, \bar{u})$ é um PM-processo, sabemos que existe um escalar $\lambda = 0$ ou $= 1$ e uma função absolutamente contínua $p : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo (5.1)-(5.4). Como (PB) é PML-pseudoinverso, existe um vetor $(\eta_S, \eta_T) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e uma aplicação $\xi : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisfazendo (5.5)-(5.7) para todo $\alpha \in (0, 1)$ e, (particularmente) para o par mencionado (λ, p) . Porém, por (5.12) temos que $(\nu_S, \nu_T) \in N_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T))$, assim $(\nu_S, \nu_T) \cdot (\eta_S, \eta_T) \leq 0$ para todo $(\eta_S, \eta_T) \in T_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T))$ (por (5.5)). Além disso, por (5.4):

$$\mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \geq \mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), u), u \in U(t) \text{ para q.t. } t \in [S, T].$$

Como por (5.6) temos que $\bar{u}(t) + \alpha \xi(t) \in U(t)$ para q.t. $t \in [S, T]$,

$$\mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \geq \mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t) + \alpha \xi(t)).$$

Assim

$$\Delta_\alpha \mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t)) \leq 0 \text{ (pois } \alpha > 0 \text{)}.$$

Logo,

$$(\nu_S, \nu_T) \cdot (\eta_S, \eta_T) + \int_S^T \Delta_\alpha \mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t)) dt \leq 0, \text{ absurdo! pois contradiz (5.7).}$$

Portanto $(\bar{x}, \bar{u})$ é um processo ótimo, isto é, $F(\bar{x}, \bar{u}) \leq F(x, u)$ para todo processo admissível (x, u) . $\square$

O seguinte lema (que será usado na prova do seguinte Teorema) pode ser visto como uma caracterização dos PM-processos de (PB) .

Lema 5.1. *Seja $(\bar{x}, \bar{u})$ um processo admissível de (PB) e $(\lambda, p) \in \{0, 1\} \times W^{1,1}([S, T]; \mathbb{R}^n)$ um par satisfazendo (5.8)-(5.10). Se existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que (5.7) não satisfaz-se para*

quaisquer vetor $(\eta_S, \eta_T) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e aplicação $\xi : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ dados satisfazendo (5.5)-(5.6), então $(\bar{x}, \bar{u})$ é um PM-processo de (PB).

Demonstração. Como satisfaz-se (5.8)-(5.10), temos que satisfaz-se (5.1)-(5.3), somente falta mostrar (5.4). Procedamos por contradição; assumamos que

$$\mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = \max_{u \in U(t)} \mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), u) \text{ para q.t. } t \in [S, T]$$

não satisfaz-se, isto é, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\sup_{u \in U(t)} \mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), u) - \epsilon > \mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \forall t \in A,$$

onde A é algum subconjunto de $[S, T]$ que tem medida positiva. Considere uma multifunção $U' : [S, T] \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ não-vazia que é dada por

$$U'(t) := \{u \in U(t) : \phi(t, u) > 0\},$$

onde $\phi : [S, T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$\phi(t, u) = \begin{cases} \mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), u) - \epsilon - \mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)), & \text{para } t \in A, \\ 1, & \text{para } t \in [S, T] \setminus A. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \text{Gr } U' &= \{(t, \gamma) \in [S, T] \times \mathbb{R}^m : \gamma \in U'(t)\} \\ &= \{(t, \gamma) \in [S, T] \times \mathbb{R}^m : \gamma \in U(t) \text{ e } \phi(t, \gamma) \in (0, +\infty)\} \\ &= \{(t, \gamma) \in [S, T] \times \mathbb{R}^m : \gamma \in U(t)\} \cap \{(t, \gamma) \in [S, T] \times \mathbb{R}^m : \phi(t, \gamma) \in (0, +\infty)\} \\ &= \text{Gr } U \cap \phi^{-1}((0, +\infty)). \end{aligned}$$

Assim $\text{Gr } U'$ é $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^m$ mensurável, pois $\text{Gr } U$ e $\phi^{-1}((0, +\infty))$ são $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^m$ mensuráveis (desde que satisfazem-se (H3) e (H2)). Pelo Teorema da Seleção Mensurável de Aumann³, U' tem uma seleção mensurável, o que significa que existe uma função mensurável $\tilde{u}$ tal que $\tilde{u}(t) \in U(t)$ para q.t. $t \in [S, T]$ e

$$\mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \tilde{u}(t)) - \epsilon > \mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \text{ para q.t. } t \in A.$$

Logo

$$\int_A [\mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \tilde{u}(t)) - \mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))] dt > 0. \quad (5.13)$$

³**Teorema da Seleção Mensurável de Aumann.** Seja $\Gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma multifunção não-vazia. Assuma que $\text{Gr } \Gamma$ é $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^m$, então Γ tem uma seleção mensurável. Para mais detalhes ver [10].

Seja $(\eta_S, \eta_T) = (0, 0) \in T_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T))$ e tome

$$\xi(t) = \begin{cases} \frac{\tilde{u}(t) - \bar{u}(t)}{\alpha}, & \text{para } t \in A, \\ 0, & \text{para } t \in [S, T] \setminus A. \end{cases}$$

Logo

$$\bar{u}(t) + \alpha\xi(t) = \begin{cases} \tilde{u}(t), & \text{para } t \in A, \\ \bar{u}(t), & \text{para } t \in [S, T] \setminus A. \end{cases}$$

Assim $\bar{u}(t) + \alpha\xi(t) \in U(t)$ para q.t. $t \in [S, T]$ e, (5.13) fica

$$\begin{aligned} \int_A \frac{[\mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t) + \alpha\xi(t)) - \mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))]}{\alpha} dt &> 0 \quad (\text{pois } \alpha > 0) \\ \Leftrightarrow \int_A \Delta_\alpha \mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t)) dt &> 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Além disso

$$\Delta_\alpha \mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t)) = \begin{cases} \frac{\mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \tilde{u}(t)) - \mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))}{\alpha}, & \text{para } t \in A, \\ 0, & \text{para } t \in [S, T] \setminus A. \end{cases}$$

Como por hipótese existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que

$$(\nu_S, \nu_T) \cdot (\eta_S, \eta_T) + \int_S^T \Delta_\alpha \mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t)) dt > 0$$

não é verificada para quaisquer $(\eta_S, \eta_T) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e $\xi : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisfazendo

$$\begin{aligned} (0, 0) = (\eta_S, \eta_T) &\in T_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T)), \\ \bar{u}(t) + \alpha\xi(t) &\in U(t) \text{ para q.t. } t \in [S, T], \end{aligned}$$

tem-se que

$$\begin{aligned} 0 &\geq (\nu_S, \nu_T) \cdot (\eta_S, \eta_T) + \int_S^T \Delta_\alpha \mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t)) dt \\ &= \int_S^T \Delta_\alpha \mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t)) dt \\ &= \int_A \Delta_\alpha \mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t)) dt. \end{aligned}$$

Assim

$$\int_A \Delta_\alpha \mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t)) dt \leq 0, \text{ o que contradiz (5.14).}$$

Portanto (5.4) satisfaz-se e assim existem λ, p satisfazendo (5.1)-(5.4), isto é, $(\bar{x}, \bar{u})$ é um

PM-processo de (PB) . □

Teorema 5.3. *Se (PB) é tal que todo PM-processo (normal) é um processo ótimo então ele é um problema PML-pseudoinvexo (normal).*

Demonstração. Procedemos por contradição; assumamos que (PB) não é um problema PML-pseudoinvexo, logo pela Definição 5.4 existem um par de processos admissíveis $(x, u), (\bar{x}, \bar{u})$ tais que $F(x, u) < F(\bar{x}, \bar{u})$, um escalar $\alpha \in (0, 1)$, um escalar $\lambda \in \{0, 1\}$ e uma função absolutamente contínua $p : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo (5.8)-(5.10) tais que (5.7) não satisfaz-se ⁴ para quaisquer vetor $(\eta_S, \eta_T) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e aplicação $\xi : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ dados satisfazendo (5.5)-(5.6). Logo, pelo Lema 5.1, $(\bar{x}, \bar{u})$ é um PM-processo e, por hipótese ele é um processo ótimo, isto é, $F(x, u) \geq F(\bar{x}, \bar{u})$ para todo processo admissível (x, u) , o que contradiz o fato de que $F(x, u) < F(\bar{x}, \bar{u})$. Portanto (PB) é um problema PML-pseudoinvexo. □

Segue-se diretamente dos Teoremas 5.2 e 5.3 o teorema abaixo:

Teorema 5.4. *(PB) é PML-pseudoinvexo (normal) se, e somente se, ele é tal que todo PM-processo (normal) é um processo ótimo.*

5.1.2 PM-pseudoinvexidade

Agora é estabelecido o que seria a generalização “natural” da ⁵PM-pseudoinvexidade apresentada em [24] para problemas de controle ótimo suaves a não suaves e, logo, vamos estudar a relação entre esta generalização “natural” da PM-pseudoinvexidade e da PML-pseudoinvexidade definida na subseção passada.

A definição abaixo dada, a qual pode ser vista como uma generalização aparente da PM-pseudoinvexidade dada em [24], não envolve o multiplicador de custo λ e o arco adjunto p .

Definição 5.5. *Dizemos que (PB) é PM-pseudoinvexo se para cada par de processos admissíveis $(x, u), (\bar{x}, \bar{u})$ de (PB) tais que $F(x, u) < F(\bar{x}, \bar{u})$ e para cada tripla $(\zeta, \gamma, \vartheta)$,*

⁴Note que (ν_S, ν_T) satisfazem (5.11) – (5.12).

⁵PM é uma abreviação para Princípio do Máximo.

onde

$$\zeta(t) \in \bar{\partial}_x L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \text{ para q.t. } t \in [S, T], \quad (5.15)$$

$$\gamma = (\gamma_S, \gamma_T) \in \bar{\partial} g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)), \quad (5.16)$$

$$\vartheta(t) \in \bar{\partial}_x f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \text{ para q.t. } t \in [S, T], \quad (5.17)$$

existem

$$\eta(t) = \eta_{\zeta, \gamma, \vartheta}(t, x(t), u(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t))$$

e

$$\xi(t) = \xi_{\zeta, \gamma, \vartheta}(t, x(t), u(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t))$$

satisfazendo

$$\dot{\eta}(t) = \vartheta(t)\eta(t) + \Delta_\alpha f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t)) \text{ para q.t. } t \in [S, T], \quad (5.18)$$

$$(\eta(S), \eta(T)) \in T_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T)), \quad (5.19)$$

$$\bar{u}(t) + \alpha \xi(t) \in U(t) \text{ para q.t. } t \in [S, T], \quad (5.20)$$

$$(\gamma_S, \gamma_T) \cdot (\eta(S), \eta(T)) + \int_S^T [\zeta(t) \cdot \eta(t) + \Delta_\alpha L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t))] dt < 0, \quad (5.21)$$

para todo $\alpha \in (0, 1)$.

Observação 5.1. Note que em (5.20), $\bar{u}(t) + \alpha \xi(t)$ pode ser visto como uma variação no controle $\bar{u}(t)$ e as soluções de (5.18)-(5.19) como as variações respectivas da trajetória $\bar{x}(t)$. Agora considerando (5.21), o par (η, ξ) de alguma maneira, desempenha o papel de uma direção de descida para o funcional objetivo F de (PB).

Teorema 5.5. Se (PB) é PM-pseudoinverso, então ele é PML-pseudoinverso normal.

Demonstração. Tome um $\alpha \in (0, 1)$ arbitrário e uma solução p de

$$\begin{cases} -\dot{p}(t) \in \bar{\partial}_x \mathcal{H}_{\lambda=1}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \text{ para q.t. } t \in [S, T], \\ (p(S), -p(T)) \in 1\bar{\partial} g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) + N_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T)), \\ \|p\| + 1 > 0. \end{cases}$$

Mas

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_x \mathcal{H}_{\lambda=1}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) &= \bar{\partial}_x [p(t) \cdot f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - 1 \cdot L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))] \\ &= p(t) \bar{\partial}_x f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - \bar{\partial}_x L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)). \end{aligned}$$

Assim temos

$$\begin{cases} -\dot{p}(t) \in p(t)\bar{\partial}_x f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - \bar{\partial}_x L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)), \\ (p(S), -p(T)) \in \bar{\partial} g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) + N_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T)), \\ \|p\| + 1 > 0. \end{cases}$$

Logo existem $\zeta(t) \in \bar{\partial}_x L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))$ para q.t. $t \in [S, T]$, $\gamma = (\gamma_S, \gamma_T) \in \bar{\partial} g(\bar{x}(S), \bar{x}(T))$, $\vartheta(t) \in \bar{\partial}_x f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))$ para q.t. $t \in [S, T]$ (assim que satisfaz-se (5.15)-(5.17)) e $(\nu_S, \nu_T) \in N_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T))$, tais que

$$-\dot{p}(t) = p(t)\vartheta(t) - \zeta(t) \quad (5.22)$$

e

$$\begin{aligned} (p(S), -p(T)) = (\gamma_S, \gamma_T) + (\nu_S, \nu_T) &\Leftrightarrow (p(S) - \gamma_S, -p(T) - \gamma_T) = (\nu_S, \nu_T) \\ &\Leftrightarrow p(S) - \gamma_S = \nu_S \quad \text{e} \quad -p(T) - \gamma_T = \nu_T. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Sejam $(x, u), (\bar{x}, \bar{u})$ processos admissíveis de (PB) tais que $F(x, u) < F(\bar{x}, \bar{u})$. Como satisfaz-se a Definição 5.5 existem

$$\eta(t) = \eta_{\zeta, \gamma, \vartheta}(t, x(t), u(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t))$$

e

$$\xi(t) = \xi_{\zeta, \gamma, \vartheta}(t, x(t), u(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t))$$

satisfazendo (5.18)-(5.21), em particular satisfazendo (5.5)-(5.6). Somente falta mostrar que $0 < (\nu_S, \nu_T) \cdot (\eta(S), \eta(T)) + \int_S^T \Delta_\alpha \mathcal{H}_{\lambda=1}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t))dt$. De fato, por (5.21),

$$(\gamma_S, \gamma_T) \cdot (\eta(S), \eta(T)) + \int_S^T [\zeta(t) \cdot \eta(t) + \Delta_\alpha L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t))] dt < 0.$$

Assim

$$\begin{aligned}
0 &< -(\gamma_S, \gamma_T) \cdot (\eta(S), \eta(T)) - \int_S^T [\zeta(t) \cdot \eta(t) + \Delta_\alpha L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t))] dt \\
&= \int_S^T p(t) \cdot \dot{\eta}(t) dt - \int_S^T p(t) \cdot \dot{\eta}(t) dt - (\gamma_S, \gamma_T) \cdot (\eta(S), \eta(T)) \\
&\quad - \int_S^T [\zeta(t) \cdot \eta(t) + \Delta_\alpha L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t))] dt \\
&= \int_S^T p(t) \cdot [\vartheta(t)\eta(t) + \Delta_\alpha f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t))] dt - \int_S^T p(t) \cdot \dot{\eta}(t) dt - (\gamma_S, \gamma_T) \\
&\quad \cdot (\eta(S), \eta(T)) - \int_S^T [\zeta(t) \cdot \eta(t) + \Delta_\alpha L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t))] dt \quad (\text{por (5.18)}) \\
&= \int_S^T [p(t)\vartheta(t) - \zeta(t)] \cdot \eta(t) dt - \int_S^T p(t) \cdot \dot{\eta}(t) dt - (\gamma_S, \gamma_T) \cdot (\eta(S), \eta(T)) \\
&\quad + \int_S^T [p(t) \cdot \Delta_\alpha f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t)) - \Delta_\alpha L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t))] dt \\
&= - \int_S^T \dot{p}(t) \cdot \eta(t) dt - \left[p(T) \cdot \eta(T) - p(S) \cdot \eta(S) - \int_S^T \dot{p}(t) \cdot \eta(t) dt \right] - (\gamma_S, \gamma_T) \\
&\quad \cdot (\eta(S), \eta(T)) + \int_S^T [p(t) \cdot \Delta_\alpha f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t)) - \Delta_\alpha L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t))] dt \\
&\quad (\text{por (5.22) e por integração por partes}) \\
&= (\nu_S, \nu_T) \cdot (\eta(S), \eta(T)) + \int_S^T \frac{\mathcal{H}_{\lambda=1}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t) + \alpha \xi(t)) - \mathcal{H}_{\lambda=1}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))}{\alpha} dt \\
&\quad (\text{por (5.23)}) \\
&= (\nu_S, \nu_T) \cdot (\eta(S), \eta(T)) + \int_S^T \Delta_\alpha \mathcal{H}_{\lambda=1}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t)) dt.
\end{aligned}$$

Assim existem $(\eta_S, \eta_T) = (\eta(S), \eta(T))$ e $\xi(t)$ satisfazendo (5.5)-(5.7), isto é, (PB) é PML-pseudoinvexo normal. $\square$

Dos Teoremas 5.5 e 5.2 temos os seguintes corolários:

Corolário 5.1. *Se (PB) é PM-pseudoinvexo, então todo PM-processo normal é um processo ótimo.*

Demonstração. Como (PB) satisfaz a Definição 5.5, pelo Teorema 5.5 (PB) é PML-pseudoinvexo normal. Portanto, pelo Teorema 5.2 todo PM-processo normal é um processo ótimo. $\square$

Corolário 5.2. *Suponha que (PB) é normal, então se (PB) é PM-pseudoinvexo, todo PM-processo é um processo ótimo.*

Demonstração. Como (PB) é normal, (PB) é normal em qualquer PM- processo $(\bar{x}, \bar{u})$. Assim, $(\bar{x}, \bar{u})$ qualquer é um PM-processo normal. Logo, pelo Corolário 5.1 $(\bar{x}, \bar{u})$ é um processo ótimo. Portanto, todo PM-processo é um processo ótimo. $\square$

No resultado seguinte vamos considerar que temos suavidade em relação à variável de estado:

(H0) As funções $L(t, \cdot, u)$ e $f(t, \cdot, u)$ são continuamente diferenciáveis ($L(t, \cdot, u)$ e $f(t, \cdot, u) \in C^1$) para cada $(t, u) \in Gr U$.

Teorema 5.6. *Suponha que vale (H0). Se (PB) é PML-pseudoinvexo normal, então ele é PM-pseudoinvexo, isto é, para cada par de processos admissíveis $(x, u), (\bar{x}, \bar{u})$ tais que $F(x, u) < F(\bar{x}, \bar{u})$ e cada tripla $(\zeta, \gamma, \vartheta)$, onde*

$$\begin{aligned} \zeta(t) \in \bar{\partial}_x L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) &= \{L_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\} \Rightarrow \zeta(t) = L_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \text{ para q.t. } t \in [S, T], \\ \gamma &= (\gamma_S, \gamma_T) \in \bar{\partial} g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) = \{\nabla g(\bar{x}(S), \bar{x}(T))\} \Rightarrow (\gamma_S, \gamma_T) = \nabla g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)), \\ \vartheta(t) \in \bar{\partial}_x f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) &= \{f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\} \Rightarrow \vartheta(t) = f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \text{ para q.t. } t \in [S, T], \end{aligned}$$

existem

$$\eta(t) = \eta_{\zeta, \gamma, \vartheta}(t, x(t), u(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t))$$

e

$$\xi(t) = \xi_{\zeta, \gamma, \vartheta}(t, x(t), u(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t))$$

satisfazendo

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= \vartheta(t)\eta(t) + \Delta_\alpha f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t)) \\ &= f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\eta(t) + \Delta_\alpha f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t)) \text{ para q.t. } t \in [S, T], \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$(\eta(S), \eta(T)) \in T_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T)), \quad (5.25)$$

$$\bar{u}(t) + \alpha \xi(t) \in U(t) \text{ para q.t. } t \in [S, T], \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} 0 &> (\gamma_S, \gamma_T) \cdot (\eta(S), \eta(T)) + \int_S^T [\zeta(t) \cdot \eta(t) + \Delta_\alpha L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t))] dt \\ &= \nabla g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \cdot (\eta(S), \eta(T)) + \int_S^T [L_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \cdot \eta(t) + \Delta_\alpha L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t))] dt, \end{aligned} \quad (5.27)$$

para todo $\alpha \in (0, 1)$.

Demonstração. Sejam $(x, u), (\bar{x}, \bar{u})$ um par de processos admissíveis tais que $F(x, u) <$

$F(\bar{x}, \bar{u})$. Tome um $\alpha \in (0, 1)$ arbitrário e considere uma solução $p(t)$ de

$$\begin{aligned} -\dot{p}(t) &= f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))^\top p(t) - L_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \\ &= (\mathcal{H}_{\lambda=1})_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \text{ para q.t. } t \in [S, T] \end{aligned} \quad (5.28)$$

satisfazendo

$$(p(S), -p(T)) \in \bar{\partial}g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) + N_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) = \nabla g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) + N_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T)).$$

Assim

$$(p(S), -p(T)) - \nabla g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \in N_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T)).$$

Como (PB) é PML-pseudoinvexo normal, em particular satisfaz-se (5.12):

$$(\nu_S, \nu_T) \in N_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T)),$$

além disso, temos a existência de $(\eta_S, \eta_T) \in T_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T))$ e $\xi : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisfazendo (5.5)-(5.7). Seja $\eta(t)$ uma solução de

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\eta(t) + \Delta_\alpha f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t)) \text{ para q.t. } t \in [S, T] \\ (\eta(S), \eta(T)) &= (\eta_S, \eta_T) \in T_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T)). \end{aligned}$$

Assim (5.24)-(5.26) são satisfeitos, somente falta mostrar que

$$\nabla g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \cdot (\eta(S), \eta(T)) + \int_S^T [L_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \cdot \eta(t) + \Delta_\alpha L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t))] dt < 0.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
& -\nabla g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \cdot (\eta(S), \eta(T)) - \int_S^T [L_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \cdot \eta(t) \\
& + \Delta_\alpha L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t))] dt \\
= & -\nabla g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \cdot (\eta(S), \eta(T)) + \int_S^T p(t) \cdot \dot{\eta}(t) dt - \int_S^T p(t) \cdot \dot{\eta}(t) dt \\
& - \int_S^T [L_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\eta(t) + \Delta_\alpha L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t))] dt \\
= & -\nabla g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \cdot (\eta(S), \eta(T)) + \int_S^T p(t) \cdot [f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\eta(t) \\
& + \Delta_\alpha f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t))] dt - \left[p(T) \cdot \eta(T) - p(S) \cdot \eta(S) - \int_S^T \dot{p}(t) \cdot \eta(t) dt \right] \\
& - \int_S^T [L_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\eta(t) + \Delta_\alpha L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t))] dt \\
= & -\nabla g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \cdot (\eta(S), \eta(T)) + \int_S^T p(t) \cdot [f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\eta(t) \\
& + \Delta_\alpha f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t))] dt + (p(S), -p(T)) \cdot (\eta(S), \eta(T)) + \int_S^T \dot{p}(t) \cdot \eta(t) dt \\
& - \int_S^T [L_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\eta(t) + \Delta_\alpha L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t))] dt \\
= & [(p(S), -p(T)) - \nabla g(\bar{x}(S), \bar{x}(T))] \cdot (\eta(S), \eta(T)) \\
& + \int_S^T [f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))^\top p(t) - L_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + \dot{p}(t)] \cdot \eta(t) dt \\
& + \int_S^T [p(t) \cdot \Delta_\alpha f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t)) - \Delta_\alpha L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t))] dt \\
= & (\nu_S, \nu_T) \cdot (\eta(S), \eta(T)) + \int_S^T [-\dot{p}(t) + \dot{p}(t)] \cdot \eta(t) dt \quad (\text{por 5.28}) \\
& + \int_S^T [p(t) \cdot \Delta_\alpha f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t)) - \Delta_\alpha L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t))] dt \\
= & (\nu_S, \nu_T) \cdot (\eta(S), \eta(T)) + \int_S^T \frac{\mathcal{H}_{\lambda=1}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t) + \alpha \xi(t)) - \mathcal{H}_{\lambda=1}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))}{\alpha} dt \\
= & (\nu_S, \nu_T) \cdot (\eta(S), \eta(T)) + \int_S^T \Delta_\alpha \mathcal{H}_{\lambda=1}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t)) dt \\
> & 0 \quad (\text{por (5.7)}),
\end{aligned}$$

onde $(\nu_S, \nu_T) = (p(S), -p(T)) - \nabla g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \in N_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T))$.

Assim existem $\eta(t)$ e $\xi(t)$ satisfazendo (5.24)-(5.27), isto é, temos que satisfaz-se a PM-pseudoinvexidade. $\square$

Segue-se diretamente dos Teoremas 5.5 e 5.6 o resultado a seguir:

Teorema 5.7. *Suponha que vale $(H0)$. (PB) é PM-pseudoinverso se, e somente se, (PB) é PML-pseudoinverso normal.*

Dos Teoremas 5.3 e 5.6 temos:

Corolário 5.3. *Suponha que vale $(H0)$. Se (PB) é tal que todo PM-processo normal é um processo ótimo, então (PB) é PM-pseudoinverso.*

Demonstração. Como (PB) é tal que todo PM-processo normal é um processo ótimo, pelo Teorema 5.3 (PB) é um problema PML-pseudoinverso normal. Portanto, pelo Teorema 5.6 (PB) é PM-pseudoinverso. $\square$

Dos Corolários 5.1 e 5.3 temos:

Corolário 5.4. *Suponha que vale $(H0)$. (PB) é PM-pseudoinverso se, e somente se, ele é tal que todo PM-processo normal é um processo ótimo.*

Demonstração. Como (PB) é PM-pseudoinverso, pelo Corolário 5.1 (PB) é tal que todo PM-processo normal é um processo ótimo. Reciprocamente, como (PB) é tal que todo PM-processo normal é um processo ótimo, pelo Corolário 5.3 (PB) é PM-pseudoinverso. $\square$

Dos Corolários 5.2 e 5.3 temos:

Corolário 5.5. *Suponha que vale $(H0)$ e que (PB) é normal. (PB) é PM-pseudoinverso se, e somente se, ele é tal que todo PM-processo é um processo ótimo.*

Demonstração. Como (PB) é PM-pseudoinverso, pelo Corolário 5.2 (PB) é tal que todo PM-processo é um processo ótimo. Reciprocamente, como (PB) é tal que todo PM-processo é um processo ótimo, pelo Corolário 5.3 (PB) é PM-pseudoinverso. $\square$

Observação 5.2. *A hipótese $(H0)$ é importante na prova do Teorema 5.6 para obter a seguinte inclusão:*

$$\vartheta(t)^\top p(t) - \zeta(t) \in \bar{\partial}_x \mathcal{H}_{\lambda=1}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)),$$

onde $\vartheta(t) \in \bar{\partial}_x f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))$ e $\zeta(t) \in \bar{\partial}_x L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))$.

Se na definição da PML-pseudoinversidade (Definição 5.4) a inclusão

$$-\dot{p}(t) \in \bar{\partial}_x \mathcal{H}_\lambda(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \text{ para q.t. } t \in [S, T] \quad (5.29)$$

é mudada para:

$$-\dot{p}(t) \in \bar{\partial}_x f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))^\top p(t) - \lambda \bar{\partial}_x L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \text{ para q.t. } t \in [S, T], \quad (5.30)$$

vemos facilmente que a equivalência entre a PML-pseudoinveridade e a PM-pseudoinveridade satisfaz-se sem a diferenciabilidade (hipótese (H0)). Porém, a prova do Lema 5.1 agora já não é mais satisfeita, a menos que nós denominemos um par (x, u) como um PM-processo se ele satisfaz (5.1), (5.30), (5.3), (5.4) em vez de (5.1), (5.2), (5.3), (5.4). Por isso, alguns resultados, como o Teorema 5.3, não são satisfeitos.

Observemos também que, tal modificação ((5.30) em vez de (5.29)) resulta em uma noção mais fraca da PML-pseudoinveridade, no sentido de que um problema dado pode ser PML-pseudoinverso conforme à definição não mudada e não ser PML-pseudoinverso conforme à definição mudada. Claro, isto ocorre pois a regra da soma não é satisfeita pela subdiferencial de Clarke.

5.1.3 Alguns exemplos

Agora apresentamos alguns exemplos simples que mostram as características das noções da invexidade generalizada.

Consideremos primeiro o exemplo dado em [23], onde um problema de controle ótimo não-invexo (e, portanto não-convexo) é estudado.

Exemplo 5.1. *Mostraremos que o seguinte problema é PML-pseudoinverso normal.*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } F(u) = \int_0^1 [1 - \exp(-u(t))] dt \\ \text{s.a. } \arcsin x \in W^{1,1}([S, T]; \mathbb{R}^n) \text{ e funções mensuráveis} \\ u : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ satisfazendo} \\ \dot{x}(t) = -x(t) + (u(t))^2, \quad t \in [0, 1], \\ u(t) \geq 0, \quad t \in [0, 1] \text{ e,} \\ x(0) = 1. \end{array} \right.$$

Solução. Neste caso temos $C = \{1\} \times \mathbb{R}$, logo

$$\begin{aligned} T_C(x(0), x(1)) &= \{0\} \times \mathbb{R} \\ N_C(x(0), x(1)) &= \mathbb{R} \times \{0\}, \end{aligned}$$

para qualquer trajetória x .

Sejam $(x, u), (\bar{x}, \bar{u})$ um par de processos admissíveis tais que

$$\begin{aligned} F(u) &< F(\bar{u}) \\ \Leftrightarrow \int_0^1 [1 - \exp(-u(t))] dt &< \int_0^1 [1 - \exp(-\bar{u}(t))] dt. \end{aligned}$$

Assim existe um subconjunto A de $[0, 1]$ de medida positiva tal que

$$\begin{aligned} 1 - \exp(-u(t)) &< 1 - \exp(-\bar{u}(t)) \\ \Leftrightarrow 0 &\leq u(t) < \bar{u}(t) \forall t \in A. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Temos que mostrar a existência de η e ξ satisfazendo (5.5)-(5.7). Sejam $\alpha \in (0, 1)$ e p uma solução de

$$-\dot{p}(t) = p(t)f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - L_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = p(t) \cdot (-1) - 0 = -p(t),$$

com $(p(0), -p(1)) \in \bar{\partial}g(\bar{x}(0), \bar{x}(1)) + N_C(\bar{x}(0), \bar{x}(1)) = N_C(\bar{x}(0), \bar{x}(1)) = \mathbb{R} \times \{0\}$. Deste modo, $p \equiv 0$.

Tomemos $(\eta_S, \eta_T) = (0, 0) \in T_C(\bar{x}(0), \bar{x}(1))$ e

$$\xi(t) = \begin{cases} u(t) - \bar{u}(t), & \text{para } t \in A \\ 0, & \text{para } t \notin A. \end{cases}$$

Temos

$$\bar{u}(t) + \alpha\xi(t) = \begin{cases} \alpha u(t) + (1 - \alpha)\bar{u}(t) \geq 0, & \text{para } t \in A, \\ \bar{u}(t) \geq 0, & \text{para } t \notin A. \end{cases}$$

Logo (5.5)-(5.6) são satisfeitos, somente falta mostrar que

$$(\nu_S, \nu_T) \cdot (\eta_S, \eta_T) + \int_S^T \Delta_\alpha \mathcal{H}_{\lambda=1}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t)) dt > 0.$$

De fato, como

$$\bar{u}(t) + \alpha\xi(t) = \alpha u(t) + (1 - \alpha)\bar{u}(t) < \bar{u}(t) \text{ (por (5.31)) } \forall t \in A,$$

tem-se que

$$[1 - \exp(-\bar{u}(t) - \alpha\xi(t))] - [1 - \exp(-\bar{u}(t))] < 0 \quad \forall t \in A. \quad (5.32)$$

Além disso como

$$(0, 0) = (p(0), -p(1)) = (\gamma_S, \gamma_T) + (\nu_S, \nu_T)$$

e,

$$(\gamma_S, \gamma_T) \in \bar{\partial}g(\bar{x}(0), \bar{x}(1)) = (0, 0),$$

temos que $(\nu_S, \nu_T) = (0, 0)$. Logo

$$\begin{aligned} & -(\nu_S, \nu_T) \cdot (\eta_S, \eta_T) - \int_S^T \Delta_\alpha \mathcal{H}_{\lambda=1}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t)) dt \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_S^T [L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t) + \alpha \xi(t)) - L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))] dt \text{ (pois } p \equiv 0) \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_S^T ([1 - \exp(-\bar{u}(t) - \alpha \xi(t))] - [1 - \exp(-\bar{u}(t))]) dt \\ &< 0 \text{ (por (5.32)).} \end{aligned}$$

Logo para cada par de processos admissíveis $(x, u), (\bar{x}, \bar{u})$ tais que $F(u) < F(\bar{u})$, existem um vetor $(\eta_S, \eta_T) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e uma aplicação $\xi : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisfazendo (5.5)-(5.7) para todo $\alpha \in (0, 1)$, isto é, nosso problema de controle ótimo é PML-pseudoinverso normal e como (H0) satisfaz-se, pelo Teorema 5.7, temos que o problema de controle ótimo é PM-pseudoinverso.

Agora consideraremos um problema de controle onde f é linear em (x, u) .

Exemplo 5.2. Mostraremos que o seguinte problema é PM-pseudoinverso.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } F(x) = \int_0^1 \min\{x(t) - \exp(-t), 2x(t) - 2\exp(-t)\} dt \\ \text{s.a. } \arcsin x \in W^{1,1}([S, T]; \mathbb{R}^n) \text{ e funções mensuráveis} \\ u : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ satisfazendo} \\ \dot{x}(t) = -x(t) + u(t), \quad t \in [0, 1], \\ u(t) \in [0, 1], \quad t \in [0, 1] \text{ e,} \\ x(0) = 1. \end{array} \right.$$

Solução. Neste caso temos $C = \{1\} \times \mathbb{R}$, logo

$$\begin{aligned} T_C(x(0), x(1)) &= \{0\} \times \mathbb{R} \\ N_C(x(0), x(1)) &= \mathbb{R} \times \{0\}, \end{aligned}$$

para qualquer trajetória x .

Assim, se (x, u) é um processo admissível então ⁶ a solução da equação linear $\dot{x}(t) = -x(t) + u(t)$ com $x(0) = 1$ está dada por:

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp(-t) \left(1 + \int_0^t \exp(\tau) u(\tau) d\tau \right) \\ &= \exp(-t) + \int_0^t \exp(\tau - t) u(\tau) d\tau \text{ para q.t. } t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Sejam (x, u) e $(\bar{x}, \bar{u})$ um par de processos admissíveis tais que $F(\bar{x}) > F(x)$. Para cada tripla $(\zeta, \gamma, \vartheta)$, onde

$$\begin{aligned} \zeta(t) \in \bar{\partial}_x L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) &\Rightarrow \zeta(t) > 0 \text{ para q.t. } t \in [0, 1], \\ \gamma = (\gamma_0, \gamma_1) \in \bar{\partial} g(\bar{x}(0), \bar{x}(1)) &= (0, 0) \Rightarrow \gamma = (\gamma_0, \gamma_1) = (0, 0), \\ \vartheta(t) \in \bar{\partial}_x f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) &= -1 \Rightarrow \vartheta(t) = -1 \text{ para q.t. } t \in [0, 1], \end{aligned}$$

temos que mostrar a existência de η e ξ satisfazendo (5.18)-(5.21).

Sejam $(\zeta(t), -1) \in \bar{\partial}_x L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \times \{f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\}$, $t \in [0, 1]$. Seja $\alpha \in (0, 1)$. Então, para qualquer solução de

$$\dot{\eta}(t) = (-1) \cdot \eta(t) + \Delta_\alpha f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t)) = -\eta(t) + \xi(t) \text{ para q.t. } t \in [0, 1],$$

pois

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t)) &= \frac{f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t) + \alpha \xi(t)) - f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))}{\alpha} \\ &= \frac{[-\bar{x}(t) + \bar{u}(t) + \alpha \xi(t)] - [-\bar{x}(t) + \bar{u}(t)]}{\alpha} \\ &= \xi(t), \end{aligned}$$

temos que:

$$\eta(t) = \exp(-t) \eta(0) + \int_0^t \exp(\tau - t) \xi(\tau) d\tau \text{ para q.t. } t \in [0, 1].$$

Tomando $(\eta(0), \eta(1)) \in T_C(\bar{x}(0), \bar{x}(1)) = \{0\} \times \mathbb{R}$ temos $\eta(0) = 0$, de modo que

$$\eta(t) = \int_0^t \exp(\tau - t) \xi(\tau) d\tau \text{ para q.t. } t \in [0, 1].$$

⁶A solução da equação linear $\dot{x} = Ax + Bu$ está dada por:

$$x(t) = \exp(At) \left(x(0) + \int_0^t \exp(-A\tau) Bu(\tau) d\tau \right).$$

Como $F(\bar{x}) > F(x)$,

$$\begin{aligned}
0 &> F(x) - F(\bar{x}) \\
&= \int_0^1 \min\{x(t) - \exp(-t), 2x(t) - 2\exp(-t)\}dt - \int_0^1 \min\{\bar{x}(t) - \exp(-t), 2\bar{x}(t) \\
&\quad - 2\exp(-t)\}dt \\
&= \int_0^1 [(x(t) - \exp(-t)) - (\bar{x}(t) - \exp(-t))]dt \\
&= \int_0^1 \left[\left(\exp(-t) + \int_0^t \exp(\tau - t)u(\tau)d\tau \right) - \left(\exp(-t) + \int_0^t \exp(\tau - t)\bar{u}(\tau)d\tau \right) \right] dt \\
&= \int_0^1 \int_0^t \exp(\tau - t)[u(\tau) - \bar{u}(\tau)]d\tau dt.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\int_0^1 \int_0^t \exp(\tau - t)[u(\tau) - \bar{u}(\tau)]d\tau dt < 0. \quad (5.33)$$

Agora, se $u(\tau) \geq \bar{u}(\tau)$ para q.t. $\tau \in [0, 1]$, temos que

$$\int_0^1 \int_0^t \exp(\tau - t)[u(\tau) - \bar{u}(\tau)]d\tau dt \geq 0,$$

o que contradiz (5.33).

Assim existe um subconjunto A de $[0, 1]$ de medida positiva tal que $u(\tau) < \bar{u}(\tau)$, $\tau \in A$.

Tomemos

$$\begin{aligned}
\xi(t) &= \begin{cases} u(t) - \bar{u}(t) < 0, & \text{para } t \in A, \\ 0, & \text{para } t \notin A, \end{cases} \\
\Rightarrow \bar{u}(t) + \alpha\xi(t) &= \begin{cases} \alpha u(t) + (1 - \alpha)\bar{u}(t), & \text{para } t \in A \\ \bar{u}(t), & \text{para } t \notin A. \end{cases}
\end{aligned}$$

Desde que $\alpha u(t) + (1 - \alpha)\bar{u}(t)$ e $\bar{u}(t) \in [0, 1]$ temos que $\bar{u}(t) + \alpha\xi(t) \in [0, 1]$.

Como $(\gamma_0, \gamma_1) = (0, 0)$ e

$$\begin{aligned}
&\Delta_\alpha L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t)) \\
&= \frac{L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t) + \alpha\xi(t)) - L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))}{\alpha} \\
&= \frac{\min\{\bar{x}(t) - \exp(-t), 2\bar{x}(t) - 2\exp(-t)\} - \min\{\bar{x}(t) - \exp(-t), 2\bar{x}(t) - 2\exp(-t)\}}{\alpha} \\
&= 0
\end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned}
& (\gamma_0, \gamma_1) \cdot (\eta(0), \eta(1)) + \int_0^1 [\zeta(t) \cdot \eta(t) + \Delta_\alpha L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t))] dt \\
&= \int_0^1 \zeta(t) \cdot \left[\int_0^t \exp(\tau - t) \xi(\tau) d\tau \right] dt \\
&= \int_0^1 \int_0^t \zeta(t) \cdot \exp(\tau - t) \xi(\tau) d\tau dt < 0,
\end{aligned}$$

pois $\zeta(t) > 0$, $\exp(\tau - t) > 0$ e $\xi(\tau) = u(\tau) - \bar{u}(\tau) < 0$. Logo para cada par de processos admissíveis (x, u) e $(\bar{x}, \bar{u})$ de nosso problema de controle ótimo tais que $F(\bar{x}) > F(x)$ e para cada tripla $(\zeta, \gamma, \vartheta)$ existem η e ξ satisfazendo (5.18)-(5.21) para todo $\alpha \in (0, 1)$, isto é, nosso problema de controle é PM-pseudoinvexo. Mais do que isto, o problema é PML-pseudoinvexo normal (pelo Teorema 5.5) e todo PM-processo normal é um processo ótimo (pelo Teorema 5.4). Claramente $(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) = (\exp(-t), 0)$, $t \in [0, 1]$, é um PM-processo e assim ele é um processo ótimo.

Observação 5.3. No exemplo anterior, se $([0, 1] \setminus A)$ tivesse medida nula teríamos $\xi(t) = u(t) - \bar{u}(t)$ e $\eta(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ para q.t. $t \in [0, 1]$. Este sempre será o caso se $f(t, x, u)$ é da forma linear $A(t)x(t) + B(t)u(t)$ e, $\xi(t) = u(t) - \bar{u}(t)$ para q.t. $t \in [S, T]$ é uma escolha apropriada, isto é, com sistemas lineares e a escolha $\xi(t) = u(t) - \bar{u}(t)$ para q.t. $t \in [S, T]$, teremos $\eta(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ para q.t. $t \in [S, T]$. Assim, neste caso, sempre que $L(t, x, u)$ seja continuamente diferenciável com relação a ambos x e u , o problema será PML-pseudoinvexo se, e somente se, F é pseudoconvexa.

Porém notemos que quando F não é pseudoconvexa o problema pode ainda ser PML-pseudoinvexo escolhendo $\xi(t)$ diferente de $\xi(t) = u(t) - \bar{u}(t)$ para q.t. $t \in [S, T]$.

5.2 Condições suficientes para problemas de controle com tempos finais livres

Nesta seção, propomos uma nova versão de PM-pseudoinvexidade, apresentada na seção anterior, mas agora, para problemas com tempos finais livres. Esta definição não utiliza explicitamente os multiplicadores de Lagrange, mas requer hipóteses de diferenciabilidade para as funções g e $f(t, \cdot, u)$. Finalmente, damos alguns exemplos de problemas PM-pseudoinvexos livres.

Consideremos novamente o problema do tipo Mayer com tempos finais livres $(TL)'$

do Capítulo 4:

$$(TL)' \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } g(S, x(S), T, x(T)) \\ \text{s.a. intervalos } [S, T], \text{ arcos } x \in W^{1,1}([S, T]; \mathbb{R}^n) \text{ e funções mensuráveis } u : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^m \\ \text{satisfazendo} \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \text{ para q.t. } t \in [S, T], \\ u(t) \in U(t) \text{ para q.t. } t \in [S, T] \text{ e,} \\ (S, x(S), T, x(T)) \in C, \end{array} \right.$$

onde $g : \mathbb{R}^{1+n+1+n} \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ são funções dadas, $U : \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ é uma multifunção não-vazia, $C \subset \mathbb{R}^{1+n+1+n}$ é um conjunto fechado e, os tempos S, T estão livres.

Nesta seção, vamos supor válidas as seguintes hipóteses:

(H1) g é continuamente diferenciável;

(H2) A função $f(t, x, \cdot)$ é $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^m$ mensurável, para cada $(t, x) \in [\bar{S}, \bar{T}] \times \mathbb{R}^n$ e existe uma função $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^m$ mensurável $k_f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada $u \in U$, a função $f(\cdot, \cdot, u)$ é continuamente diferenciável em Ω , de posto $k_f(u)$ e, $t \rightarrow k_f(\bar{u}(t))$ é integrável.

(H3) $Gr U$ é um conjunto $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^m$ mensurável.

Deste modo, de acordo com o Teorema 4.1, podemos enunciar:

Teorema 5.8. (O Princípio do Máximo para $(TL)'$) *Seja $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$ um processo ótimo para $(TL)'$. Então existem $p \in W^{1,1}([\bar{S}, \bar{T}]; \mathbb{R}^n)$, $r \in W^{1,1}([\bar{S}, \bar{T}]; \mathbb{R})$ e, um escalar λ (igual a 0 ou 1) tais que*

$$(p, \lambda) \neq (0, 0); \quad (5.34)$$

$$(\dot{r}(t), -\dot{p}(t)) \in \nabla_{(t,x)} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) \text{ para q.t. } t \in [\bar{S}, \bar{T}]; \quad (5.35)$$

$$(-r(\bar{S}), p(\bar{S}), r(\bar{T}), -p(\bar{T})) \in \lambda \nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) + N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})); \quad (5.36)$$

$$\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) = \max_{u \in U} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), u) \text{ para q.t. } t \in [\bar{S}, \bar{T}]; \quad (5.37)$$

$$\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) = r(t) \text{ para q.t. } t \in [\bar{S}, \bar{T}]. \quad (5.38)$$

Definição 5.6. 1. Quando existem p, r e λ satisfazendo (5.34)-(5.38) dizemos que $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$ é um PM-processo de $(TL)'$.

2. Se $\lambda = 1$, dizemos que $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$ é um PM-processo normal e $(TL)'$ é denominado normal em $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$.
3. Dizemos que $(TL)'$ é normal se é normal em qualquer PM-processo $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$ e que $(TL)'$ é anormal, caso contrário. Por exemplo, os problemas de controle ótimo com $C = \mathbb{R} \times C_0 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ são normais, onde $C_0 \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto fechado.

5.2.1 PM-pseudoinvexidade livre

Nesta seção, definiremos o conceito da PM-pseudoinvexidade livre e, mostraremos que este conceito é uma condição suficiente de otimalidade. Os resultados serão estabelecidos fazendo uso de hipóteses de diferenciabilidade das funções envolvidas com respeito à variável de estado (não necessariamente com respeito à variável de controle): para os problemas PM-pseudoinvexos livres todos os processos normais que satisfazem o Teorema 5.8 (os PM-processos normais) são processo ótimos. Utilizando um lema (Lema 5.2, nesta Seção), mostramos a recíproca: os problemas tais que todos os PM-processos são ótimos, são, necessariamente, problemas PM-pseudoinvexos livres.

A definição dada abaixo não envolve o multiplicador de custo λ e o arco adjunto p .

Definição 5.7. Se g e $f(t, \cdot, u)$ são continuamente diferenciáveis, dizemos que $(TL)'$ é PM-pseudoinvexo livre se para cada par de processos admissíveis $([S, T], x, u)$, $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$ de $(TL)'$ tais que

$$g(S, x(S), T, x(T)) < g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T}))$$

existem

$$\eta(t) := \eta(t, [S, T], x(t), u(t), [\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}(t), \bar{u}(t))$$

e

$$\xi(t) := \xi(t, [S, T], x(t), u(t), [\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}(t), \bar{u}(t)),$$

onde $\eta := (\eta_1, \eta_2) : [\bar{S}, \bar{T}] \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e $\xi := (\xi_1, \xi_2) : [\bar{S}, \bar{T}] \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$, satisfazendo

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1(t) &= \xi_2(t), \\ \dot{\eta}_2(t) &= f_t(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\eta_1(t) + f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\eta_2(t) \\ &\quad + \Delta_\alpha f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi_1(t)) + \xi_2(t)f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t) + \alpha\xi_1(t)) \end{cases} \quad (5.39)$$

para q.t. $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$,

$$(\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) \in T_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \quad (5.40)$$

(T_C denota o cone tangente de Clarke ao conjunto C no ponto $(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T}))$),

$$(\bar{u}(t) + \alpha \xi_1(t), 1 + \alpha \xi_2(t)) \in U(t) \times [0.5, 1.5] \text{ para q.t. } t \in [\bar{S}, \bar{T}], \quad (5.41)$$

e,

$$\nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \cdot (\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) < 0, \quad (5.42)$$

para todo $\alpha \in (0, 1)$.

Teorema 5.9. *Se g e $f(t, \cdot, u)$ são continuamente diferenciáveis e se $(TL)'$ é PM-pseudoinverso livre, então todo PM-processo normal é um processo ótimo.*

Demonstração. Seja $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$ um PM-processo normal de $(TL)'$ e procedemos por contradição. Suponhamos que ele não é um processo ótimo, isto é, suponhamos que existe um processo admissível $([S, T], x, u)$ tal que $g(S, x(S), T, x(T)) < g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T}))$. Como $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$ é um PM-processo normal, existem funções absolutamente contínuas $p : [\bar{S}, \bar{T}] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $r : [\bar{S}, \bar{T}] \rightarrow \mathbb{R}$ e um escalar λ igual a 1 satisfazendo (5.34) – (5.38) e, se fazemos a seguinte mudança de variável $\chi(t) = -r(t)$, $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$, temos que:

$$(p, 1) \neq (0, 0); \quad (5.43)$$

$$(-\dot{\chi}(t), -\dot{p}(t)) \in \nabla_{(t,x)} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) \text{ para q.t. } t \in [\bar{S}, \bar{T}]; \quad (5.44)$$

$$(\chi(\bar{S}), p(\bar{S}), -\chi(\bar{T}), -p(\bar{T})) \in \nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) + N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})); \quad (5.45)$$

$$\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) = \max_{u \in U} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), u) \text{ para q.t. } t \in [\bar{S}, \bar{T}]; \quad (5.46)$$

$$\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) = -\chi(t) \text{ para q.t. } t \in [\bar{S}, \bar{T}]. \quad (5.47)$$

De (5.44):

$$(-\dot{\chi}(t), -\dot{p}(t)) \in \{(\mathcal{H}_t(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)), \mathcal{H}_x(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)))\} \text{ para q.t. } t \in [\bar{S}, \bar{T}].$$

Logo,

$$-\dot{\chi}(t) = \mathcal{H}_t(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) = p(t) \cdot f_t(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)), \quad (5.48)$$

$$-\dot{p}(t) = \mathcal{H}_x(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) = p(t) f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)). \quad (5.49)$$

De (5.45):

$$(\chi(\bar{S}), p(\bar{S}), -\chi(\bar{T}), -p(\bar{T})) \in \nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) + N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T}))$$

$\Rightarrow \exists (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) \in N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T}))$ tal que

$$\nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) - (\chi(\bar{S}), p(\bar{S}), -\chi(\bar{T}), -p(\bar{T})) = -(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4). \quad (5.50)$$

De (5.46), $\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) \geq \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), u)$ para cada $u \in U$ e para q.t. $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$.

Como $(TL)'$ satisfaz a Definição 5.7, temos a existência de $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ e $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ satisfazendo (5.39)-(5.42).

Em particular, por (5.41) temos que $\bar{u}(t) + \alpha \xi_1(t) \in U$ e, assim da última desigualdade para $u = \bar{u}(t) + \alpha \xi_1(t)$ temos:

$$- [\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t) + \alpha \xi_1(t)) - \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))] \geq 0. \quad (5.51)$$

Por (5.39) (primeira igualdade),

$$\begin{aligned} \chi(t) \dot{\eta}_1(t) - \chi(t) \xi_2(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow \chi(t) \dot{\eta}_1(t) + \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) \xi_2(t) &= 0 \quad (\text{por (5.47)}). \end{aligned}$$

Por (5.39) (segunda igualdade),

$$\begin{aligned} p(t) \cdot \dot{\eta}_2(t) - p(t) \cdot f_t(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \eta_1(t) - p(t) \cdot f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \eta_2(t) \\ - p(t) \cdot \Delta_\alpha f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) (\xi_1(t)) - \xi_2(t) p(t) \cdot f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t) + \alpha \xi_1(t)) = 0 \end{aligned}$$

e usando (5.48), (5.49) e pela definição do Hamiltoniano,

$$\begin{aligned} p(t) \cdot \dot{\eta}_2(t) + \dot{\chi}(t) \eta_1(t) + \dot{p}(t) \eta_2(t) - \Delta_\alpha \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) (\xi_1(t)) \\ - \xi_2(t) \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t) + \alpha \xi_1(t)) = 0. \end{aligned}$$

Por um lado, (5.42) fica:

$$\begin{aligned}
0 &> \nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \cdot (\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) \\
&+ \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} [\chi(t) \dot{\eta}_1(t) + \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) \xi_2(t)] dt \\
&+ \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} [p(t) \dot{\eta}_2(t) + \dot{\chi}(t) \eta_1(t) + \dot{p}(t) \eta_2(t) - \Delta_\alpha \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) (\xi_1(t)) \\
&- \xi_2(t) \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t) + \alpha \xi_1(t))] dt \\
&= \nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \cdot (\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) + \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \chi(t) \dot{\eta}_1(t) dt \\
&+ \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) \xi_2(t) dt + \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} p(t) \cdot \dot{\eta}_2(t) dt + \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \dot{\chi}(t) \eta_1(t) dt \\
&+ \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \dot{p}(t) \cdot \eta_2(t) dt - \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \Delta_\alpha \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) (\xi_1(t)) dt \\
&- \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \xi_2(t) \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t) + \alpha \xi_1(t)) dt \\
&= \nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \cdot (\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) + \chi(t) \eta_1(t) \Big|_{\bar{S}}^{\bar{T}} - \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \dot{\chi}(t) \eta_1(t) dt \\
&+ p(t) \cdot \eta_2(t) \Big|_{\bar{S}}^{\bar{T}} - \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \dot{p}(t) \cdot \eta_2(t) dt + \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \dot{\chi}(t) \eta_1(t) dt + \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \dot{p}(t) \cdot \eta_2(t) dt \\
&- \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \Delta_\alpha \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) (\xi_1(t)) dt \\
&- \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \xi_2(t) [\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t) + \alpha \xi_1(t)) - \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))] dt \\
&= \nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \cdot (\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) + \chi(\bar{T}) \eta_1(\bar{T}) - \chi(\bar{S}) \eta_1(\bar{S}) \\
&+ p(\bar{T}) \cdot \eta_2(\bar{T}) - p(\bar{S}) \cdot \eta_2(\bar{S}) - \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \Delta_\alpha \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) (\xi_1(t)) dt \\
&- \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \xi_2(t) [\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t) + \alpha \xi_1(t)) - \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))] dt \\
&= \nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \cdot (\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) \\
&- (\chi(\bar{S}), p(\bar{S}), -\chi(\bar{T}), -p(\bar{T})) \cdot (\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) \\
&- \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \frac{1}{\alpha} [\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t) + \alpha \xi_1(t)) - \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))] dt \\
&- \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \xi_2(t) [\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t) + \alpha \xi_1(t)) - \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))] dt \\
&= [\nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) - (\chi(\bar{S}), p(\bar{S}), -\chi(\bar{T}), -p(\bar{T}))] \cdot (\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) \\
&- \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \left(\frac{1}{\alpha} + \xi_2(t) \right) [\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t) + \alpha \xi_1(t)) - \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))] dt \\
&= -(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) \cdot (\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) \\
&- \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \left(\frac{1}{\alpha} + \xi_2(t) \right) [\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t) + \alpha \xi_1(t)) - \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))] dt, \text{ (por (5.50))}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 & -(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) \cdot (\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) \\
 & - \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \left(\frac{1}{\alpha} + \xi_2(t) \right) [\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t) + \alpha \xi_1(t)) - \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))] dt < 0.
 \end{aligned} \tag{5.52}$$

Por outro lado, como $(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) \in N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T}))$ e, como por (5.40) temos que $(\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) \in T_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T}))$,

$$-(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) \cdot (\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) \geq 0. \tag{5.53}$$

Por (5.41) temos que

$$\begin{aligned}
 & 0.5 \leq 1 + \alpha \xi_2(t) \\
 \Rightarrow & 0 < 0.5 < \frac{0.5}{\alpha} \leq \frac{1}{\alpha} + \xi_2(t) \quad (\text{pois } 0 < \alpha < 1), \\
 \Rightarrow & \frac{1}{\alpha} + \xi_2(t) > 0.
 \end{aligned} \tag{5.54}$$

Por (5.53), (5.54) e (5.51) segue que

$$\begin{aligned}
 & -(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) \cdot (\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) \\
 & - \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \left(\frac{1}{\alpha} + \xi_2(t) \right) [\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t) + \alpha \xi_1(t)) - \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))] dt \geq 0,
 \end{aligned}$$

o que contradiz (5.52). Portanto $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$ é um PM-processo ótimo.

□

Agora, é natural perguntar: será que a recíproca é válida? A resposta é sim conforme veremos no teorema a seguir, cuja demonstração depende do seguinte lema.

Lema 5.2. *Sejam $(\lambda, q) \in \{0, 1\} \times W^{1,1}([\bar{S}, \bar{T}]; \mathbb{R}^n)$ e $\alpha \in (0, 1)$ quaisquer. Seja $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$ um processo admissível de $(TL)'$ satisfazendo*

$$q(t) \Delta_\alpha f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(v) \leq 0 \text{ para } q.t. t \in [\bar{S}, \bar{T}],$$

para todo $v \in \mathbb{R}^m$ tal que $\bar{u}(t) + \alpha v \in U(t)$ para q.t. $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$. Então, para q.t. $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$,

$$\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), q(t), \bar{u}(t)) = \max_{u \in U(t)} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), q(t), u).$$

Demonstração. A demonstração é bastante similar à prova do Lema 5.1.

□

Teorema 5.10. *Se g e $f(t, \cdot, u)$ são continuamente diferenciáveis e se $(TL)'$ é tal que todo PM-processo é um processo ótimo, então $(TL)'$ é PM-pseudoinverso livre.*

Demonstração. Procedemos por contradição. Suponhamos que $(TL)'$ não é PM-pseudoinverso livre, isto é, suponhamos que existem um par de processos admissíveis $([S, T], x, u)$, $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$ de $(TL)'$ satisfazendo

$$g(S, x(S), T, x(T)) < g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \quad (5.55)$$

e um escalar $\alpha \in (0, 1)$ tais que para quaisquer par (η, ξ) , onde $\eta = (\eta_1, \eta_2) : [\bar{S}, \bar{T}] \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e $\xi = (\xi_1, \xi_2) : [\bar{S}, \bar{T}] \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ que satisfazendo

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1(t) &= \xi_2(t), \\ \dot{\eta}_2(t) &= f_t(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\eta_1(t) + f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\eta_2(t) \\ &\quad + \Delta_\alpha f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi_1(t)) + \xi_2(t)f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t) + \alpha\xi_1(t)) \end{cases}$$

para q.t. $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$ e,

$$\begin{aligned} (\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) &\in T_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})), \\ (\bar{u}(t) + \alpha\xi_1(t), 1 + \alpha\xi_2(t)) &\in U(t) \times [0.5, 1.5] \text{ para q.t. } t \in [\bar{S}, \bar{T}], \end{aligned}$$

tem-se que

$$\nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \cdot (\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) \geq 0. \quad (5.56)$$

Agora consideremos o problema de controle auxiliar com tempos finais fixos:

$$(PCA) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } \phi(\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) \\ \quad = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) \cdot (\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) \\ \text{s.a.} \\ (\dot{\eta}_1(t), \dot{\eta}_2(t)) = (\xi_2(t), f_t(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\eta_1(t) + f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\eta_2(t) \\ \quad + \Delta_\alpha f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi_1(t)) + \xi_2(t)f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t) + \alpha\xi_1(t))) \\ \quad \text{para q.t. } t \in [\bar{S}, \bar{T}], \\ (\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) \in \mathcal{K} := T_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})), \\ \xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t)) \in V_1(t) \times V_2(t) = V(t), \end{array} \right.$$

onde $V_1(t) := \{\xi_1 : \bar{u}(t) + \alpha\xi_1 \in U(t)\}$, $V_2(t) := \{\xi_2 : 1 + \alpha\xi_2 \in [0.5, 1.5]\}$ e $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) =$

$\nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T}))$. Claramente $(\bar{\eta}, \bar{\xi}) = (0, 0)$ é um processo admissível de (PCA) com

$$\phi(\bar{\eta}_1(\bar{S}), \bar{\eta}_2(\bar{S}), \bar{\eta}_1(\bar{T}), \bar{\eta}_2(\bar{T})) = 0$$

e, ainda melhor temos a seguinte afirmação.

Afirmação. $(\bar{\eta}, \bar{\xi})$ é um processo ótimo para (PCA).

Procedemos por contradição. Suponhamos que $(\bar{\eta}, \bar{\xi})$ não é um processo ótimo para (PCA), isto é, existe um processo admissível (η, ξ) de (PCA) tal que

$$\begin{aligned} 0 &= \phi(\bar{\eta}_1(\bar{S}), \bar{\eta}_2(\bar{S}), \bar{\eta}_1(\bar{T}), \bar{\eta}_2(\bar{T})) \\ &> \phi(\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) \\ &= (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) \cdot (\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) \\ &= \nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \cdot (\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})), \end{aligned}$$

o que contradiz (5.56). Portanto $(\bar{\eta}, \bar{\xi})$ é um processo ótimo de (PCA).

Pelo Teorema 3.1 (Teorema do Princípio do Máximo), existem $(\lambda, p) \in \{0, 1\} \times W^{1,1}([\bar{S}, \bar{T}]; \mathbb{R}^n)$ tais que:

1. Satisfaz-se a condição de transversalidade:

$$\begin{aligned} &(p_1(\bar{S}), p_2(\bar{S}), -p_1(\bar{T}), -p_2(\bar{T})) \\ &\in \lambda \partial \phi(\bar{\eta}_1(\bar{S}), \bar{\eta}_2(\bar{S}), \bar{\eta}_1(\bar{T}), \bar{\eta}_2(\bar{T})) + N_{\mathcal{K}}(\bar{\eta}_1(\bar{S}), \bar{\eta}_2(\bar{S}), \bar{\eta}_1(\bar{T}), \bar{\eta}_2(\bar{T})) \\ &= \lambda \{ \nabla \phi(\bar{\eta}_1(\bar{S}), \bar{\eta}_2(\bar{S}), \bar{\eta}_1(\bar{T}), \bar{\eta}_2(\bar{T})) \} + N_{\mathcal{K}}(\bar{\eta}_1(\bar{S}), \bar{\eta}_2(\bar{S}), \bar{\eta}_1(\bar{T}), \bar{\eta}_2(\bar{T})). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \nabla \phi(\bar{\eta}_1(\bar{S}), \bar{\eta}_2(\bar{S}), \bar{\eta}_1(\bar{T}), \bar{\eta}_2(\bar{T})) &= (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) \\ &= \nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{\mathcal{K}}(\bar{\eta}_1(\bar{S}), \bar{\eta}_2(\bar{S}), \bar{\eta}_1(\bar{T}), \bar{\eta}_2(\bar{T})) &= N_{\mathcal{K}}(0, 0, 0, 0) \\ &= [T_{\mathcal{K}}(0, 0, 0, 0)]^\circ \\ &= \mathcal{K}^\circ \\ &= [T_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T}))]^\circ \\ &= N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \end{aligned}$$

(pois se T é o cone tangente de Clarke, C um conjunto, $a \in C, b \in T_C(a) \Rightarrow$

$$T_{T_C(a)}(b) = T_C(a),$$

temos que

$$(p_1(\bar{S}), p_2(\bar{S}), -p_1(\bar{T}), -p_2(\bar{T})) \in \lambda \nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) + N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})).$$

Antes de passar à seguinte condição, o Hamiltoniano não-maximizado para (PCA) é:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}(t, \eta(t), p(t), \xi(t)) &= \hat{\mathcal{H}}(t, \eta_1(t), \eta_2(t), p_1(t), p_2(t), \xi_1(t), \xi_2(t)) \\ &= (p_1(t), p_2(t)) \cdot (\xi_2(t), f_t(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\eta_1(t) \\ &\quad + f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\eta_2(t) + \Delta_\alpha f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi_1(t)) \\ &\quad + \xi_2(t)f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t) + \alpha\xi_1(t))) \\ &= p_1(t)\xi_2(t) + p_2(t) \cdot f_t(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\eta_1(t) \\ &\quad + p_2(t) \cdot f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\eta_2(t) \\ &\quad + p_2(t) \cdot \Delta_\alpha f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi_1(t)) \\ &\quad + p_2(t) \cdot \xi_2(t)f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t) + \alpha\xi_1(t)). \end{aligned}$$

2. Satisfaz-se a condição da inclusão adjunta:

$$-\dot{p}(t) \in co \partial_\eta \hat{\mathcal{H}}(t, \bar{\eta}(t), p(t), \bar{\xi}(t)) = \{\partial_\eta \hat{\mathcal{H}}(t, \bar{\eta}(t), p(t), \bar{\xi}(t))\} = \{\hat{\mathcal{H}}_\eta(t, \bar{\eta}(t), p(t), \bar{\xi}(t))\},$$

para q.t. $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$.

Daí,

$$\begin{aligned} -\dot{p}(t) &= \hat{\mathcal{H}}_\eta(t, \bar{\eta}(t), p(t), \bar{\xi}(t)) \\ \Rightarrow (-\dot{p}_1(t), -\dot{p}_2(t)) &= \hat{\mathcal{H}}_{(\eta_1, \eta_2)}(t, \bar{\eta}_1(t), \bar{\eta}_2(t), p_1(t), p_2(t), \bar{\xi}_1(t), \bar{\xi}_2(t)) \\ &= (\hat{\mathcal{H}}_{\eta_1}(t, \bar{\eta}_1(t), \bar{\eta}_2(t), p_1(t), p_2(t), \bar{\xi}_1(t), \bar{\xi}_2(t)), \\ &\quad \hat{\mathcal{H}}_{\eta_2}(t, \bar{\eta}_1(t), \bar{\eta}_2(t), p_1(t), p_2(t), \bar{\xi}_1(t), \bar{\xi}_2(t))) \\ &= (p_2(t) \cdot f_t(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)), p_2(t) \cdot f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))) \\ &= (\mathcal{H}_t(t, \bar{x}(t), p_2(t), \bar{u}(t)), \mathcal{H}_x(t, \bar{x}(t), p_2(t), \bar{u}(t))) \\ &= \mathcal{H}_{(t, x)}(t, \bar{x}(t), p_2(t), \bar{u}(t)) \quad \text{para q.t. } t \in [\bar{S}, \bar{T}]. \end{aligned}$$

3. Satisfaz-se a condição de Weierstrass:

$$\begin{aligned} \max_{\xi \in V(t)} \hat{\mathcal{H}}(t, \bar{\eta}(t), p(t), \xi) &= \hat{\mathcal{H}}(t, \bar{\eta}(t), p(t), \bar{\xi}(t)) \text{ para q.t. } t \in [\bar{S}, \bar{T}] \\ \Rightarrow \hat{\mathcal{H}}(t, \bar{\eta}(t), p(t), \xi) &\leq \hat{\mathcal{H}}(t, \bar{\eta}(t), p(t), \bar{\xi}(t)) \quad \forall \xi \in V(t) \text{ e para q.t. } t \in [\bar{S}, \bar{T}]. \end{aligned}$$

Mas como

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{H}}(t, \bar{\eta}(t), p(t), \xi) &= p_1(t)\xi_2 + p_2(t) \cdot f_t(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\bar{\eta}_1(t) \\
&\quad + p_2(t) \cdot f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\bar{\eta}_2(t) + p_2(t) \cdot \Delta_\alpha f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi_1) \\
&\quad + p_2(t) \cdot \xi_2 f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t) + \alpha\xi_1) \\
&= \xi_2[p_1(t) + p_2(t) \cdot f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t) + \alpha\xi_1)] \\
&\quad + p_2(t) \cdot \Delta_\alpha f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi_1) \\
&= \xi_2[p_1(t) + \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p_2(t), \bar{u}(t) + \alpha\xi_1)] \\
&\quad + \Delta_\alpha \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p_2(t), \bar{u}(t))(\xi_1)
\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{H}}(t, \bar{\eta}(t), p(t), \bar{\xi}(t)) &= p_1(t)\bar{\xi}_2(t) + p_2(t) \cdot f_t(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\bar{\eta}_1(t) \\
&\quad + p_2(t) \cdot f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\bar{\eta}_2(t) \\
&\quad + p_2(t) \cdot \Delta_\alpha f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\bar{\xi}_1(t)) \\
&\quad + p_2(t) \cdot \bar{\xi}_2(t)f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t) + \alpha\bar{\xi}_1(t)) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois $(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) = (\bar{\eta}, \bar{\xi}) = (0, 0)$, assim na última desigualdade obtemos

$$\xi_2[p_1(t) + \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p_2(t), \bar{u}(t) + \alpha\xi_1)] + \Delta_\alpha \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p_2(t), \bar{u}(t))(\xi_1) \leq 0 \quad (5.57)$$

para todo $(\xi_1, \xi_2) \in V_1(t) \times V_2(t)$ e para q.t. $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$. Em particular para $\xi_2 = 0 \in V_2(t) = \{\xi_2 : 1 + \alpha\xi_2 \in [0.5, 1.5]\}$, temos que:

$$\Delta_\alpha \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p_2(t), \bar{u}(t))(\xi_1) \leq 0$$

$\forall \xi_1 \in \mathbb{R}^m$ t.q. $\bar{u}(t) + \alpha\xi_1 \in U(t)$ e para q.t. $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$. Logo, pelo Lema 5.2:

$$\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p_2(t), \bar{u}(t)) = \max_{u \in U(t)} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p_2(t), u) \text{ para q.t. } t \in [\bar{S}, \bar{T}].$$

Agora, tomando $\xi_1 = 0 \in V_1(t) = \{\bar{u}(t) + \alpha\xi_1 \in U(t)\}$ em (5.57), temos que:

$$\xi_2[p_1(t) + \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p_2(t), \bar{u}(t))] \leq 0$$

para todo $\xi_2 \in V_2(t) = \{\xi_2 : 1 + \alpha\xi_2 \in [0.5, 1.5]\} = \{\xi_2 : \xi_2 \in [-\frac{0.5}{\alpha}, \frac{0.5}{\alpha}]\}$ e para q.t. $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$ e, em particular:

- para $\xi_2 \in [-\frac{0.5}{\alpha}, 0)$, isto é, para $\xi_2 < 0$, temos que $[p_1(t) + \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p_2(t), \bar{u}(t))] \geq 0$

para q.t. $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$ e,

- para $\xi_2 \in (0, \frac{0.5}{\alpha}]$, isto é, para $\xi_2 > 0$, temos que $[p_1(t) + \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p_2(t), \bar{u}(t))] \leq 0$

para q.t. $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$. Portanto,

$$\begin{aligned} p_1(t) + \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p_2(t), \bar{u}(t)) &= 0 \\ \Rightarrow \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p_2(t), \bar{u}(t)) &= -p_1(t) \quad \text{para q.t. } t \in [\bar{S}, \bar{T}]. \end{aligned}$$

4. Satisfaz-se a condição da não-trivialidade dos multiplicadores:

$$(p, \lambda) \neq (0, 0) \Rightarrow (p_2, \lambda) \neq (0, 0),$$

pois se $(p_2, \lambda) = (0, 0)$, então $p_2 = 0$ e $\lambda = 0$, logo

$$\begin{aligned} -p_1(t) &= \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p_2(t), \bar{u}(t)) \\ &= p_2(t) \cdot f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \\ &= 0 \quad \text{para q.t. } t \in [\bar{S}, \bar{T}]. \end{aligned}$$

Portanto $p_1 \equiv 0$ e, assim teríamos:

$$(p, \lambda) = ((p_1, p_2), \lambda) = ((0, 0), 0), \text{ isto é, } (p, \lambda) \neq (0, 0), \text{ absurdo!}$$

Portanto:

- $(p_2, \lambda) \neq (0, 0)$.

Nas conclusões a seguir vamos redefinir $-p_1 := p_1$.

- $(\dot{p}_1(t), -\dot{p}_2(t)) \in \nabla_{(t,x)} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p_2(t), \bar{u}(t))$ para q.t. $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$;
- $(-p_1(\bar{S}), p_2(\bar{S}), p_1(\bar{T}), -p_2(\bar{T})) \in \lambda \nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) + N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T}))$;
- $\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p_2(t), \bar{u}(t)) = \max_{u \in U} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p_2(t), u)$ para q.t. $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$;
- $\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p_2(t), \bar{u}(t)) = p_1(t)$ para q.t. $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$.

Como existem p_2, p_1 e λ satisfazendo as últimas propriedades, $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$ é um PM-processo e, pela hipótese (todo PM-processo é um processo ótimo) $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$ é um processo ótimo, isto é,

$$g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \leq g(S, x(S), T, x(T))$$

para cada processo admissível $([S, T], x, u)$, o que contradiz (5.55). Portanto $(TL)'$ é PM-pseudoinvexo livre. $\square$

5.2.2 Alguns exemplos

Agora apresentamos alguns exemplos simples que mostram as características da noção da invexidade generalizada livre. Cada um dos exemplos estão resolvidos de duas maneiras. Na primeira maneira para obter a PM-pseudoinvexidade livre, aplicamos o Teorema 5.10. Na segunda maneira para obter a PM-pseudoinvexidade livre, garantimos que satisfaçam-se cada uma das propriedades da Definição 5.7.

Consideremos primeiro um exemplo onde o tempo inicial é fixo, o tempo final é livre e, os estados inicial e final estão fixos.

Exemplo 5.3. *Mostraremos que o seguinte problema é PM-pseudoinvexo livre.*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } g(S, x(S), T, x(T)) = 1 - \exp(1 - T) \\ \text{s.a. intervalos } [S, T], \text{ arcos } x \in W^{1,1}([S, T]; \mathbb{R}) \text{ e funções mensuráveis} \\ u : [S, T] \rightarrow \mathbb{R} \text{ satisfazendo} \\ \dot{x}(t) = -x(t) + (u(t))^2, \quad t \in [S, T], \\ u(t) \in [0, 1], t \in [S, T], \\ S = 0, T \geq 1, \\ x(0) = 0, x(T) = 1 - \exp(-1). \end{array} \right.$$

Solução 1. *Vamos procurar os PM-processos do problema em questão. Para isso aplicaremos o Princípio do Máximo a um processo admissível de referência $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$.*

Temos que

$$\mathcal{H}(t, x, p, u) = p \cdot f(t, x, u) = p \cdot (-x + u^2) = -px + pu^2. \quad (5.58)$$

Pelo Teorema do Princípio do Máximo para $(TL)'$ (Teorema 5.8), devem existir $p \in W^{1,1}([\bar{S}, \bar{T}]; \mathbb{R})$, $r \in W^{1,1}([\bar{S}, \bar{T}]; \mathbb{R})$ e um escalar λ (igual a 0 ou 1) tais que:

1. *Satisfaz-se a não-trivialidade dos multiplicadores:*

$$(p, \lambda) \neq (0, 0).$$

2. Satisfaz-se a condição da inclusão adjunta:

$$\begin{aligned} (\dot{r}(t), -\dot{p}(t)) &\in \nabla_{(t,x)} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) = \nabla_{(t,x)} [-p(t)\bar{x}(t) + p(t)(\bar{u}(t))^2] \\ \Rightarrow (\dot{r}(t), -\dot{p}(t)) &= (\nabla_t [-p(t)\bar{x}(t) + p(t)(\bar{u}(t))^2], \nabla_x [-p(t)\bar{x}(t) + p(t)(\bar{u}(t))^2]) \\ &= (0, -p(t)) \text{ para q.t. } t \in [\bar{S}, \bar{T}]. \end{aligned}$$

Conclusões:

$$\begin{aligned} \dot{r}(t) = 0 &\Rightarrow r(t) = \text{constante}, \\ -\dot{p}(t) = -p(t) &\Rightarrow p(t) = K \exp(t), \text{ onde } K \text{ é uma constante.} \end{aligned} \quad (5.59)$$

Antes de passar à seguinte condição do princípio do máximo, notemos que como $C = \{0\} \times \{0\} \times [1, +\infty) \times \{1 - \exp(-1)\}$,

$$\begin{aligned} T_{\{0\}}(0) &= \{0\} \Rightarrow N_{\{0\}}(0) = \mathbb{R}, \\ T_{\{0\}}(0) &= \{0\} \Rightarrow N_{\{0\}}(0) = \mathbb{R}, \\ T_{[1, +\infty)}(y) &= \mathbb{R} \Rightarrow N_{[1, +\infty)}(y) = \{0\}, \quad y \in (1, +\infty), \\ T_{[1, +\infty)}(1) &= \mathbb{R}_+ \Rightarrow N_{[1, +\infty)}(1) = \mathbb{R}_-, \end{aligned}$$

e

$$T_{(1 - \exp(-1))}(1 - \exp(-1)) = \{0\} \Rightarrow N_{(1 - \exp(-1))}(1 - \exp(-1)) = \mathbb{R}.$$

Assim temos dois casos:

Caso 1. Se $\bar{T} \in (1, +\infty)$:

$$T_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\}$$

e

$$N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}.$$

Caso 2. Se $\bar{T} = 1$:

$$T_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}_+ \times \{0\}$$

e

$$N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}.$$

3. Satisfaz-se a condição de transversalidade:

$$(-r(\bar{S}), p(\bar{S}), r(\bar{T}), -p(\bar{T})) \in \lambda \nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) + N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})).$$

Como $g(S, x(S), T, x(T)) = 1 - \exp(1 - T)$,

$$\nabla g(S, x(S), T, x(T)) = (0, 0, \exp(1 - \bar{T}), 0).$$

Logo

$$\begin{aligned} & -r(\bar{S}), p(\bar{S}), -p(\bar{T}) \text{ são livres,} \\ r(\bar{T}) &= \begin{cases} \lambda \exp(1 - \bar{T}), & \text{no caso 1,} \\ \lambda \exp(1 - \bar{T}) + v = \lambda + v, v \in \mathbb{R}_-, & \text{no caso 2.} \end{cases} \end{aligned}$$

Antes de passar à seguinte condição, substituindo (5.59) em (5.58) obtemos:

$$\mathcal{H}(t, x(t), p(t), u(t)) = -p(t)x(t) + p(t)(u(t))^2 = -K \exp(t)x(t) + K \exp(t)(u(t))^2.$$

4. Satisfaz-se a condição de Weierstrass:

$$\begin{aligned} \max_{u \in [0,1]} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), u) &= \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) \\ \Leftrightarrow \max_{u \in [0,1]} [-K \exp(t)\bar{x}(t) + K \exp(t)u^2] &= -K \exp(t)\bar{x}(t) + K \exp(t)(\bar{u}(t))^2 \end{aligned}$$

para q.t. $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$.

Coloquemos

$$\varphi(u) := -K \exp(t)\bar{x}(t) + K \exp(t)u^2.$$

Então

$$\max_{u \in [0,1]} [-K \exp(t)\bar{x}(t) + K \exp(t)u^2] = \max_{u \in [0,1]} \varphi(u) = \begin{cases} \varphi(0), & \text{se } K < 0, \\ \varphi(1), & \text{se } K > 0. \end{cases}$$

Caso $K = 0$, φ é constante e todo ponto $u \in [0, 1]$ é ponto de máximo (em particular $u = 0$). Deste modo,

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } K < 0, \\ 1, & \text{se } K > 0 \end{cases}$$

para todo $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$. Logo, para $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$,

$$\dot{\bar{x}}(t) = -\bar{x}(t) + (\bar{u}(t))^2 = \begin{cases} -\bar{x}(t), & \text{se } K < 0, \\ -\bar{x}(t) + 1, & \text{se } K > 0. \end{cases}$$

Se $K < 0$: Temos que $\dot{\bar{x}}(t) = -\bar{x}(t)$, então

$$\begin{aligned}\bar{x}(t) &= C_1 \exp(-t), \text{ onde } C_1 \text{ é uma constante} \\ 0 = \bar{x}(\bar{S}) &= C_1 \exp(-\bar{S}) \Leftrightarrow C_1 = 0.\end{aligned}$$

Portanto $\bar{x}(t) = 0, t \in [\bar{S}, \bar{T}]$.

Se $K > 0$: Temos que $\dot{\bar{x}}(t) = -\bar{x}(t) + 1$, então

$$\begin{aligned}\bar{x}(t) &= 1 + C_2 \exp(-t), \text{ onde } C_2 \text{ é uma constante} \\ 0 = \bar{x}(\bar{S}) &= 1 + C_2 \exp(-\bar{S}) \Leftrightarrow C_2 = -1.\end{aligned}$$

Portanto $\bar{x}(t) = 1 - \exp(-t), t \in [\bar{S}, \bar{T}]$.

Assim

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } K < 0, \\ 1 - \exp(-t), & \text{se } K > 0, \end{cases}$$

para todo $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$.

Se $K < 0$, $x(\bar{T}) = 0$ e pela condição final temos que $x(T) = 1 - \exp(-1) = x(\bar{T})$, assim

$$0 = 1 - \exp(-1), \text{ absurdo!}$$

Portanto $K < 0$ não pode ocorrer.

Como só pode ocorrer que $K > 0$, $x(\bar{T}) = 1 - \exp(-\bar{T})$ e pela condição final temos que $x(T) = 1 - \exp(-1) = x(\bar{T})$, assim

$$1 - \exp(-\bar{T}) = 1 - \exp(-1) \Leftrightarrow \bar{T} = 1.$$

Portanto $\bar{T} \in (1, \infty)$ não pode ocorrer, implicando finalmente que

$$\begin{cases} \bar{T} = 1, \\ \bar{x}(t) = 1 - \exp(-t) \\ e \\ \bar{u}(t) = 1, \end{cases}$$

para todo $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$.

Antes de passar à seguinte condição,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) &= -K \exp(t) \bar{x}(t) + K \exp(t) (\bar{u}(t))^2 \\ &= -K \exp(t) [1 - \exp(-t)] + K \exp(t) \\ &= K,\end{aligned}$$

para q.t. $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$ e $K > 0$.

5. Satisfaz-se:

$$r(t) = \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) = K$$

para q.t. $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$ e $K > 0$.

Concluimos que o único PM-processo é: $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u}) = ([0, 1], 1 - \exp(-t), 1)$. Agora vamos mostrar que todo PM-processo é um processo ótimo. De fato, seja $([S, T], x, u)$ um processo admissível. Logo

$$\begin{aligned}T &\geq 1 = \bar{T} \\ \Leftrightarrow -\bar{T} &\geq -T \\ \Leftrightarrow 1 - \bar{T} &\geq 1 - T \\ \Leftrightarrow \exp(1 - \bar{T}) &\geq \exp(1 - T) \\ \Leftrightarrow 1 - \exp(1 - T) &\geq 1 - \exp(1 - \bar{T}) \\ \Leftrightarrow g(S, x(S), T, x(T)) &\geq g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})).\end{aligned}$$

Portanto pelo Teorema 5.10, o problema é PM-pseudoinverso livre.

Solução 2. Sejam $([S, T], x, u)$ e $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$ um par de processos admissíveis tais que

$$\begin{aligned}g(S, x(S), T, x(T)) &< g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \\ \Leftrightarrow 1 - \exp(1 - T) &< 1 - \exp(1 - \bar{T}) \\ \Leftrightarrow \exp(1 - T) &> \exp(1 - \bar{T}) \\ \Leftrightarrow T &< \bar{T}.\end{aligned}$$

Neste problema temos que $C = \{0\} \times \{0\} \times [1, +\infty) \times \{1 - \exp(-1)\}$. Logo

$$\begin{aligned} T_{\{0\}}(0) = \{0\} &\Rightarrow N_{\{0\}}(0) = \mathbb{R}, \\ T_{\{0\}}(0) = \{0\} &\Rightarrow N_{\{0\}}(0) = \mathbb{R}, \\ T_{[1, +\infty)}(y) = \mathbb{R} &\Rightarrow N_{[1, +\infty)}(y) = \{0\}, \quad y \in (1, +\infty), \\ T_{[1, +\infty)}(1) = \mathbb{R}_+ &\Rightarrow N_{[1, +\infty)}(1) = \mathbb{R}_- \text{ (mas isto não ocorre, se fosse assim} \\ &1 \leq T < \bar{T} = 1), \end{aligned}$$

e

$$T_{(1-\exp(-1))}(1 - \exp(-1)) = \{0\} \Rightarrow N_{(1-\exp(-1))}(1 - \exp(-1)) = \mathbb{R}.$$

Assim

$$T_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\}$$

e

$$N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}.$$

Temos que mostrar a existência de $\eta(t) = (\eta_1(t), \eta_2(t))$ e $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$ satisfazendo (5.39)-(5.42).

Seja $\alpha \in (0, 1)$. Como $\dot{x} = f(t, x, u) = -x + u^2$, temos que

$$\begin{aligned} f_t(t, x, u) &= 0, \\ f_x(t, x, u) &= -1, \\ \Delta_\alpha f(t, \bar{x}, \bar{u})(\xi_1) &= \frac{f(t, \bar{x}, \bar{u} + \alpha \xi_1) - f(t, \bar{x}, \bar{u})}{\alpha} = \frac{[-\bar{x} + (\bar{u} + \alpha \xi_1)^2] - [-\bar{x} + \bar{u}^2]}{\alpha} \\ &= 2\bar{u}\xi_1 + \alpha \xi_1^2 \end{aligned}$$

e

$$f(t, \bar{x}, \bar{u} + \alpha \xi_1) = -\bar{x} + (\bar{u} + \alpha \xi_1)^2 = -\bar{x} + \bar{u}^2 + 2\bar{u}\alpha \xi_1 + \alpha^2 \xi_1^2.$$

Logo

$$\dot{\eta}_1(t) = \xi_2(t) \text{ para q.t. } t \in [\bar{S}, \bar{T}] \quad (5.60)$$

e

$$\begin{aligned}
 \dot{\eta}_2(t) &= f_t(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\eta_1(t) + f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\eta_2(t) + \Delta_\alpha f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi_1(t)) \\
 &\quad + \xi_2(t)f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t) + \alpha\xi_1(t)) \\
 &= -\eta_2(t) + 2\bar{u}(t)\xi_1(t) + \alpha(\xi_1(t))^2 \\
 &\quad + \xi_2(t)[- \bar{x}(t) + (\bar{u}(t))^2 + 2\bar{u}(t)\alpha\xi_1(t) + \alpha^2(\xi_1(t))^2] \text{ para q.t. } t \in [\bar{S}, \bar{T}], \quad (5.61)
 \end{aligned}$$

com $(\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) \in T_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\}$, de onde

$$\begin{cases} \eta_1(\bar{S}) = 0, \\ \eta_2(\bar{S}) = 0, \\ \eta_1(\bar{T}) \in \mathbb{R}, \\ \eta_2(\bar{T}) = 0. \end{cases}$$

Tomemos $\xi_2(t) := -0.125$, $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$. Claramente tem-se que $1 + \alpha\xi_2(t) \in [0.5, 1.5]$ para todo $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$.

Agora tomemos $\xi_1(t) := 0$, então $\bar{u}(t) + \alpha\xi_1(t) = \bar{u}(t) \in [0, 1]$ e assim $\bar{u}(t) + \alpha\xi_1(t) \in [0, 1]$ para todo $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$

Integrando em (5.60) temos que:

$$\begin{aligned}
 \eta_1(t) &= \eta_1(\bar{S}) + \int_0^t \xi_2(\tau) d\tau \\
 &= - \int_0^t 0.125 d\tau \\
 &= -0.125t \text{ para q.t. } t \in [\bar{S}, \bar{T}].
 \end{aligned}$$

Em (5.61) temos que

$$\begin{aligned}
 \dot{\eta}_2(t) &= -\eta_2(t) + \{-0.125[-\bar{x}(t) + (\bar{u}(t))^2]\} \\
 \Rightarrow \dot{\eta}_2(t) + \eta_2(t) &= \{-0.125[-\bar{x}(t) + (\bar{u}(t))^2]\},
 \end{aligned}$$

cuja solução é dada por

$$\eta_2(t) = \frac{1}{\exp(t)} \left[\int_0^t \exp(\tau) \{-0.125[-\bar{x}(\tau) + (\bar{u}(\tau))^2]\} d\tau + K \right],$$

onde K é uma constante.

Como $g(S, x(S), T, x(T)) = 1 - \exp(1 - T)$, então

$$\nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) = (0, 0, \exp(1 - \bar{T}), 0).$$

Assim

$$\begin{aligned} & \nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \cdot (\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) \\ &= (0, 0, \exp(1 - \bar{T}), 0) \cdot (0, 0, -0.125\bar{T}, 0) \\ &= -\exp(1 - \bar{T}) \cdot 0.125\bar{T} \\ &< 0. \end{aligned}$$

Logo, para cada par de processos admissíveis $([S, T], x, u)$ e $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$ de nosso problema de controle ótimo tais que $g(S, x(S), T, x(T)) < g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T}))$ existem $\eta(t)$ e $\xi(t)$ satisfazendo (5.39)-(5.42) para todo $\alpha \in (0, 1)$, isto é, nosso problema de controle ótimo é PM-pseudoinverso livre.

Agora, consideraremos um problema de controle onde g é uma função quadrática em T , f é uma função linear em (x, u) , o tempo inicial é fixo, o tempo final está num intervalo fechado de tempo, o estado inicial é fixo, o estado final é livre e todo este problema satisfazendo uma propriedade suficiente para estabelecer a PM-pseudoinversidade livre.

Exemplo 5.4. *Mostraremos que o seguinte problema é PM-pseudoinverso livre.*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } g(S, x(S), T, x(T)) = AT^2 + BT + C, \text{ com } A < 0, B \text{ e } C \text{ constantes} \\ \text{s.a. intervalos } [S, T], \text{ arcos } x \in W^{1,1}([S, T]; \mathbb{R}) \text{ e funções mensuráveis} \\ u : [S, T] \rightarrow \mathbb{R} \text{ satisfazendo} \\ \dot{x}(t) = f_1(t)x(t) + f_2(t)u(t), \quad t \in [S, T], \\ u(t) \in [0, 1], t \in [S, T], \\ S = 0, T \in [a, b], 0 < a < b, \\ x(0) = 0, x(T) \in \mathbb{R} \text{ e,} \\ \text{satisfazendo também que } B < -2Aa < -2Ab. \end{array} \right.$$

Observemos o seguinte:

1. Se $A > 0$, a g seria convexa, consequentemente inverte e assim pseudoinverte. Neste caso, nosso exemplo seria trivial.

2. Como $g(T) = g(S, x(S), T, x(T)) = AT^2 + BT + C$ temos que $g'(T) = 2AT + B \forall T \in [a, b]$. Como por hipótese $T \in [a, b]$, $A < 0$ e $2Aa + B < 0$,

$$2AT + B \leq 2Aa + B < 0$$

Logo $g'(T) = 2AT + B < 0$ para todo $T \in [a, b]$ e, assim g é decrescente ⁷ em $[a, b]$.

3. O gráfico de uma função quadrática é uma parábola. O eixo de simetria de uma parábola é uma linha vertical que divide a parábola em duas metades congruentes. O eixo de simetria passa sempre o vértice da parábola. A coordenada x do vértice é a equação do eixo de simetria da parábola. Para uma função quadrática geral $y(x) = Ax^2 + Bx + C$, a equação do eixo de simetria está dada por

$$x = -\frac{B}{2A}.$$

Assim, neste exemplo o eixo de simetria

$$-\frac{B}{2A} < a \quad (\text{pois } -B > 2Aa),$$

o que significa que o eixo de simetria sempre está antes de a ($T \in [a, b]$ onde $0 < a < b$) o que força a nossa função objetivo g a ser realmente decrescente.

Solução 1. Vamos procurar os PM-processos do problema em questão. Para isso aplicaremos o Princípio do Máximo a um processo admissível de referência $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$.

Temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, x(t), p(t), u(t)) &= p(t) \cdot f(t, x(t), u(t)) \\ &= p(t) \cdot [f_1(t)x(t) + f_2(t)u(t)] \\ &= p(t) \cdot f_1(t)x(t) + p(t) \cdot f_2(t)u(t). \end{aligned}$$

Pelo Teorema do Princípio do Máximo para $(TL)'$ (Teorema 5.8), devem existir $p \in W^{1,1}([\bar{S}, \bar{T}]; \mathbb{R})$, $r \in W^{1,1}([\bar{S}, \bar{T}]; \mathbb{R})$ e um escalar λ (igual a 0 ou 1) tais que:

1. Satisfaz-se a não-trivialidade dos multiplicadores:

$$(p, \lambda) \neq (0, 0).$$

⁷Toda função de variável real f com $f' < 0$ é decrescente.

2. Satisfaz-se a condição da inclusão adjunta:

$$\begin{aligned} (\dot{r}(t), -\dot{p}(t)) &\in \nabla_{(t,x)} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) = \nabla_{(t,x)} [p(t)f_1(t)\bar{x}(t) + p(t)f_2(t)\bar{u}(t)] \\ \Rightarrow (\dot{r}(t), -\dot{p}(t)) &= (p(t)f'_1(t)\bar{x}(t) + p(t)f'_2(t)\bar{u}(t), p(t)f_1(t)) \text{ para q.t.t. } t \in [\bar{S}, \bar{T}]. \end{aligned}$$

Conclusões:

$$\begin{aligned} \dot{r}(t) &= p(t)f'_1(t)\bar{x}(t) + p(t)f'_2(t)\bar{u}(t), \\ -\dot{p}(t) &= f_1(t)p(t) \Rightarrow p(t) = \frac{K}{\exp\left(\int_{\bar{S}=0}^t f_1(\tau)d\tau\right)}, \text{ onde } K \text{ é uma constante.} \end{aligned}$$

Antes de passar à seguinte condição do princípio do máximo, notemos que como $C = \{0\} \times \{0\} \times [a, b] \times \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T_{\{0\}}(0) &= \{0\} \Rightarrow N_{\{0\}}(0) = \mathbb{R}, \\ T_{\{0\}}(0) &= \{0\} \Rightarrow N_{\{0\}}(0) = \mathbb{R}, \\ T_{[a,b]}(y) &= \mathbb{R} \Rightarrow N_{[a,b]}(y) = \{0\}, \ y \in (a, b), \\ T_{[a,b]}(a) &= \mathbb{R}_+ \Rightarrow N_{[a,b]}(a) = \mathbb{R}_-, \\ T_{[a,b]}(b) &= \mathbb{R}_- \Rightarrow N_{[a,b]}(b) = \mathbb{R}_+, \end{aligned}$$

e

$$T_{\mathbb{R}}(y) = \mathbb{R} \Rightarrow N_{\mathbb{R}}(y) = \{0\}, y \in \mathbb{R}.$$

Assim temos três casos:

Caso 1. Se $\bar{T} \in (a, b)$:

$$T_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

e

$$N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\}.$$

Caso 2. Se $\bar{T} = a$:

$$T_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$$

e

$$N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_- \times \{0\}.$$

Caso 3. Se $\bar{T} = b$:

$$T_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}$$

e

$$N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \{0\}.$$

3. Satisfaz-se a condição de transversalidade:

$$(-r(\bar{S}), p(\bar{S}), r(\bar{T}), -p(\bar{T})) \in \lambda \nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) + N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})).$$

Como $g(S, x(S), T, x(T)) = AT^2 + BT + C$,

$$\nabla g(S, x(S), T, x(T)) = (0, 0, 2A\bar{T} + B, 0).$$

Logo

$$\begin{aligned} & -r(\bar{S}), p(\bar{S}) \text{ são livres,} \\ & r(\bar{T}) = \begin{cases} 2\lambda A\bar{T} + \lambda B, & \text{no caso 1,} \\ 2\lambda A\bar{T} + \lambda B + v, v \in \mathbb{R}_-, & \text{no caso 2,} \\ 2\lambda A\bar{T} + \lambda B + \omega, \omega \in \mathbb{R}_+, & \text{no caso 3,} \end{cases} \\ & -p(\bar{T}) = 0 \Rightarrow -\frac{K}{\exp\left(\int_0^{\bar{T}} f_1(\tau) d\tau\right)} = 0 \Rightarrow K = 0. \end{aligned}$$

Assim $p(t) = \frac{K}{\exp\left(\int_0^t f_1(\tau) d\tau\right)} = 0$ para todo $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$. Portanto $\lambda = 1$, pois se fosse $\lambda = 0$, teríamos uma contradição com respeito à não-trivialidade dos multiplicadores. Portanto:

$$r(\bar{T}) = \begin{cases} 2A\bar{T} + B, & \text{no caso 1,} \\ 2A\bar{T} + B + v, v \in \mathbb{R}_-, & \text{no caso 2,} \\ 2A\bar{T} + B + \omega, \omega \in \mathbb{R}_+, & \text{no caso 3.} \end{cases}$$

4. Satisfaz-se a condição de Weierstrass:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) &= \max_{u \in [0,1]} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), u) \\ \Leftrightarrow p(t) \cdot f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) &= \max_{u \in [0,1]} p(t) \cdot f(t, \bar{x}(t), u) = 0 \text{ para q.t. } t \in [\bar{S}, \bar{T}]. \end{aligned}$$

5. Satisfaz-se:

$$0 = \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) = r(t) \text{ para q.t. } t \in [\bar{S}, \bar{T}].$$

Em particular, $r(\bar{T}) = 0$ e assim

$$0 = \begin{cases} 2A\bar{T} + B, & \text{no caso 1,} \\ 2A\bar{T} + B + v, v \leq 0, & \text{no caso 2,} \\ 2A\bar{T} + B + \omega, \omega \geq 0, & \text{no caso 3.} \end{cases}$$

No caso 1, temos $2A\bar{T} + B = 0$, isto é, $\bar{T} = -B/2A$. Mas no caso 1 temos que $\bar{T} \in (a, b)$. Assim, $-B/2A > a$, ou seja, $B > -2Aa$, o que contradiz a hipótese inicial.

No caso 2, temos $\bar{T} = a$ e $2Aa + B + v = 0$ com $v \leq 0$. Assim, $0 \geq v = -(2Aa + B)$, de onde $B \geq -2Aa$, o que contradiz nossa hipótese inicial.

Portanto, só pode ocorrer o

Caso 3, com $\bar{T} = b$, $2Ab + B + \omega = 0$, $\omega \geq 0$, ou seja, $2Ab + B \leq 0$.

Concluimos que os PM-processos são caracterizados apenas por $\bar{T} = b$, ou seja, todo processo admissível com $\bar{T} = b$ é um PM-processo. Agora vamos mostrar que todo PM-processo é um processo ótimo. De fato, seja $([S, T], x, u)$ um processo admissível. Como g é decrescente e como $T \leq b = \bar{T}$, temos que

$$g(T) \geq g(\bar{T}) \Leftrightarrow g(S, x(S), T, x(T)) \geq g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})).$$

Portanto pelo Teorema 5.10, o problema é PM-pseudoinverso livre.

Solução 2. Sejam $([S, T], x, u)$ e $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$ um par de processos admissíveis tais que

$$g(S, x(S), T, x(T)) < g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \Leftrightarrow g(T) < g(\bar{T}),$$

e como g é decrescente temos que $T > \bar{T}$.

Por outra parte, temos dois casos $-2A\bar{T} \leq B$ ou $B < -2A\bar{T}$.

Se $-2A\bar{T} \leq B$, então $-2A\bar{T} \leq B < -2Aa$, de onde, lembrando que $A < 0$, segue que $\bar{T} < a$, o que contradiz o fato de $\bar{T} \in [a, b]$.

Logo $-2A\bar{T} \leq B$ não ocorre. Portanto, só pode ocorrer $B < -2A\bar{T}$, isto é,

$$2A\bar{T} + B < 0. \quad (5.62)$$

Neste problema temos que $C = \{0\} \times \{0\} \times [a, b] \times \mathbb{R}$. Logo

$$T_{\{0\}}(0) = \{0\} \Rightarrow N_{\{0\}}(0) = \mathbb{R},$$

$$T_{\{0\}}(0) = \{0\} \Rightarrow N_{\{0\}}(0) = \mathbb{R},$$

$$T_{[a,b]}(y) = \mathbb{R} \Rightarrow N_{[a,b]}(y) = \{0\}, \quad y \in (a, b),$$

$$T_{[a,b]}(a) = \mathbb{R}_+ \Rightarrow N_{[a,b]}(a) = \mathbb{R}_-,$$

$$T_{[a,b]}(b) = \mathbb{R}_- \Rightarrow N_{[a,b]}(b) = \mathbb{R}_+ \text{ (mas isto não ocorre, pois se } \bar{T} = b \text{ teríamos}$$

$$b = \bar{T} < T \leq b, \text{ absurdo!.)}$$

e

$$T_{\mathbb{R}}(y) = \mathbb{R} \Rightarrow N_{\mathbb{R}}(y) = \{0\}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Assim só temos dois casos:

Caso 1.

$$T_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

e

$$N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\}.$$

Caso 2.

$$T_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$$

e

$$N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_- \times \{0\}.$$

Temos que mostrar a existência de $\eta(t) = (\eta_1(t), \eta_2(t))$ e $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$ satisfazendo (5.39)-(5.42).

Seja $\alpha \in (0, 1)$. Como $\dot{x} = f(t, x(t), u(t)) = f_1(t)x(t) + f_2(t)u(t)$, temos que

$$\begin{aligned} f_t(t, x(t), u(t)) &= f'_1(t)x(t) + f'_2(t)u(t), \\ f_x(t, x(t), u(t)) &= f_1(t), \\ \Delta_\alpha f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi_1) &= \frac{f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t) + \alpha\xi_1(t)) - f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))}{\alpha} \\ &= \frac{[f_1(t)\bar{x}(t) + f_2(t)(\bar{u}(t) + \alpha\xi_1(t))] - [f_1(t)\bar{x}(t) + f_2(t)\bar{u}(t)]}{\alpha} \\ &= \frac{f_1(t)\bar{x}(t) + f_2(t)\bar{u}(t) + f_2(t)\alpha\xi_1(t) - f_1(t)\bar{x}(t) - f_2(t)\bar{u}(t)}{\alpha} \\ &= f_2(t)\xi_1(t), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t) + \alpha \xi_1(t)) &= f_1(t) \bar{x}(t) + f_2(t) (\bar{u}(t) + \alpha \xi_1(t)) \\ &= f_1(t) \bar{x}(t) + f_2(t) \bar{u}(t) + f_2(t) \alpha \xi_1(t). \end{aligned}$$

Logo

$$\dot{\eta}_1(t) = \xi_2(t) \text{ para } q.t. t \in [\bar{S}, \bar{T}] \quad (5.63)$$

e

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_2(t) &= f_t(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \eta_1(t) + f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \eta_2(t) + \Delta_\alpha f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) (\xi_1(t)) \\ &\quad + \xi_2(t) f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t) + \alpha \xi_1(t)) \\ &= [f'_1(t) \bar{x}(t) + f'_2(t) \bar{u}(t)] \eta_1(t) + f_1(t) \eta_2(t) + f_2(t) \xi_1(t) \\ &\quad + \xi_2(t) [f_1(t) \bar{x}(t) + f_2(t) \bar{u}(t) + f_2(t) \alpha \xi_1(t)] \text{ para } q.t. t \in [\bar{S}, \bar{T}], \end{aligned} \quad (5.64)$$

com $(\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) \in T_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T}))$.

No caso 1,

$$\begin{cases} \eta_1(\bar{S}) = 0, \\ \eta_2(\bar{S}) = 0, \\ \eta_1(\bar{T}) \in \mathbb{R}, \\ \eta_2(\bar{T}) \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

No caso 2,

$$\begin{cases} \eta_1(\bar{S}) = 0, \\ \eta_2(\bar{S}) = 0, \\ \eta_1(\bar{T}) \in \mathbb{R}_+, \\ \eta_2(\bar{T}) \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Tanto para o caso 1 como para o caso 2, tomemos $\xi_2(t) := 0.1$, $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$. Claramente, $1 + \alpha \xi_2(t) \in [0.5, 1.5]$ para todo $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$.

Agora, tanto para o caso 1 como para o caso 2, tomemos $\xi_1(t) := 0$, $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$. Lembrando que $\bar{u}(t) \in [0, 1]$, para $q.t. t \in [\bar{S}, \bar{T}]$, então $\bar{u}(t) + \alpha \xi_1(t) = \bar{u}(t) \in [0, 1]$ para $q.t. t \in [\bar{S}, \bar{T}]$.

Integrando em (5.63) temos que:

$$\begin{aligned}\eta_1(t) &= \eta_1(\bar{S}) + \int_0^t \xi_2(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t 0.1 d\tau \\ &= 0.1t \text{ para } q.t. t \in [\bar{S}, \bar{T}].\end{aligned}$$

Em (5.64) temos que:

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_2(t) &= [f'_1(t)x(t) + f'_2(t)u(t)]\eta_1(t) + f_1(t)\eta_2(t) + f_2(t)\xi_1(t) \\ &\quad + \xi_2(t)[f_1(t)\bar{x}(t) + f_2(t)\bar{u}(t) + f_2(t)\alpha\xi_1(t)] \\ \dot{\eta}_2(t) &= 0.1[f'_1(t)x(t) + f'_2(t)u(t)]t + f_1(t)\eta_2(t) + 0.1\dot{x}(t) \\ &= 0.1\{[f'_1(t)x(t) + f'_2(t)u(t)]t + \dot{x}(t)\} + f_1(t)\eta_2(t) \\ \Rightarrow \dot{\eta}_2(t) + [-f_1(t)]\eta_2(t) &= 0.1\{[f'_1(t)x(t) + f'_2(t)u(t)]t + \dot{x}(t)\},\end{aligned}$$

cujas soluções são dadas por

$$\eta_2(t) = \frac{1}{\exp(-\int_0^t f_1(\tau) d\tau)} [-0.1 \int_0^t \exp\left(\int_0^\tau f_1(\tau) d\tau\right) ([f'_1(\tau)x(\tau) + f'_2(\tau)u(\tau)]t + \dot{x}(\tau)) d\tau + K],$$

onde K é uma constante.

Como $g(S, x(S), T, x(T)) = AT^2 + BT + C$, então

$$\nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) = (0, 0, 2A\bar{T} + B, 0).$$

Assim

$$\begin{aligned}&\nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \cdot (\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) \\ &= (0, 0, 2A\bar{T} + B, 0) \cdot (0, 0, 0.1\bar{T}, \eta_2(\bar{T})) \\ &= (2A\bar{T} + B) \cdot 0.1\bar{T} \\ &< 0 \text{ (por (5.62)).}\end{aligned}$$

Logo para cada par de processos admissíveis $([S, T], x, u)$ e $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$ de nosso problema de controle ótimo tais que $g(S, x(S), T, x(T)) < g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T}))$ existem $\eta(t)$ e $\xi(t)$ satisfazendo (5.39)-(5.42) para todo $\alpha \in (0, 1)$, isto é, nosso problema de controle ótimo é PM-pseudoinverso livre.

Observação 5.4. O problema linear quadrático no último exemplo claramente não é

convexo quando $A < 0$. Mas, conforme vimos, é PM-pseudoinverso livre com a condição $B < -2Aa$. Quando $A > 0$, o problema é convexo e, conseqüentemente, PM-pseudoinverso.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Como as nossas considerações finais, podemos dizer que inicialmente estudamos o Princípio do Máximo para problemas (P) (problemas tipo Mayer com tempos finais fixos) e obtivemos o Princípio do Máximo para problemas (PB) (problemas tipo Bolza com tempos finais fixos). Analogamente, depois de estudar o Princípio do Máximo para problemas (TL) (problemas com tempos finais livres, onde a restrição dinâmica é expressa como uma inclusão diferenciável), obtivemos o Princípio do Máximo para problemas $(TL)'$ (problemas com tempos finais livres, onde as dinâmicas são modeladas, por uma equação diferenciável dependente do controle) e o Princípio do Máximo para problemas $(PB)'$ (problemas tipo Bolza com tempos finais livres). Logo, generalizamos, para dados não-suaves, a classe de problemas de controle ótimo PM-pseudoinvexos, que foi introduzido em [24] para problemas suaves. Nesse trabalho, a diferenciabilidade para o termo integral na função de custo e as funções do sistema das dinâmicas com respeito às variáveis de estado e de controle foram assumidas. Aqui, a Lipschitz continuidade local com respeito à variável de estado e a não-diferenciabilidade com respeito à variável de controle são assumidas, de modo que o gradiente generalizado de Clarke é usado. Esta generalização é no sentido de que, estudamos no caso não-suave a mesma propriedade que estudamos no caso suave. Finalmente, com uma nova definição de invexidade generalizada, que denominei PM-pseudoinvexidade livre, que não envolve os multiplicadores de Lagrange, provamos que, com algumas suposições: um problema PM-pseudoinvexo livre implica que todo PM-processo normal é um processo ótimo e, se um problema que é tal que todo PM-processo é um processo ótimo implica que o problema é PM-pseudoinvexo livre. Portanto concluímos que a classe de problemas PM-pseudoinvexos livres é a classe mais

ampla de problemas livres onde é válido que todos os processos satisfazendo o Princípio do Máximo de Pontryagin com tempos finais livres são processos ótimos. Isto é, o conceito da PM-pseudoinvexidade livre é o mais geral que uma condição suficiente de invexidade generalizada pode ser.

Como trabalhos futuros, pretendemos apresentar uma definição da PM-pseudoinvexidade livre com multiplicadores, isto é, uma definição da PML-pseudoinvexidade livre, para assim aplicar a problemas com um termo integral na função de custo, problemas com termos “mistos”.

Outra questão que seria importante é relacionar as condições suficientes que consideramos nesta Dissertação, com outras já existentes na literatura, como por exemplo, as condições de segunda ordem e o método da função de verificação através da Teoria de Hamilton-Jacobi-Bellman, já mencionadas na Introdução.

Seria interessante obter condições necessárias e suficientes de segunda ordem para problemas de controle ótimo. Por exemplo, as condições necessárias poderiam ser obtidas aplicando-se a generalização do formalismo de A. Ya. Dubovitskii e A. A. Milyutin (veja em [28]) e as condições suficientes poderiam ser obtidas por meio das condições de convexidade generalizada de segunda ordem, como fez Ivanov em [29] para problemas de programação matemática em dimensão finita e de Oliveira et al. em [30] para problemas de programação não-linear infinita.

Também seria atraente e com muitas aplicações, obter condições suficientes de otimalidade para problemas de controle multiobjetivo com multiprocessos e tudo isso num contexto com tempo livre.

Finalmente, seria interessante investigar a generalização dos resultados desta Dissertação tudo no contexto não-suave, onde as funções objetivo e o campo vetorial não sejam diferenciáveis no sentido clássico, pois assim não se perderia a natureza e as características importantes dos problemas da vida real. As suposições da suavidade restringem o mundo das aplicações da teoria na ciência e na engenharia.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] MACKI, J.; STRAUSS, A. *Introduction to Optimal Control Theory*. New York: Springer-Verlag, 1982.
- [2] HOCKING, L. M. *Optimal Control. An Introduction to the Theory with Applications*. New York: United States by Oxford University Press, 1991.
- [3] PINCH, E. R. *Optimal Control and the Calculus of Variations*. New York: United States by Oxford University Press Inc., 1993.
- [4] LEITÃO, A. *The Calculus of Variations and Optimal Control*. Brazil: Mathematics Publications, 2001.
- [5] SCHWARTZ, A. L. *Theory and Implementation of Numerical Methods Based on Runge-Kutta Integration for Solving Optimal Control Problems*. Tese (Doutorado) — University of California at Berkeley, 1996.
- [6] POLAK, E. On the role of optimality functions in numerical optimal control. *Annual Reviews in Control*, v. 35, p. 247–253, 2011.
- [7] WANG, C.-L.; WANG, F.-S.; WANG, Y.-P. The optimality conditions for generalized minimax programming. *Applied Mathematics and Computation*, v. 219, p. 8881–8892, 2013.
- [8] GIRSANOV, I. *Lecture on Mathematical Theory of Extremum Problems*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1972.
- [9] CLARKE, F. H. *Optimization and Nonsmooth Analysis, ser. Classics in Applied Mathematics*. Philadelphia: SIAM, 1990.
- [10] VINTER, R. *Optimal Control*. Boston: Birkhäuser, 2000.
- [11] BERKOVITZ, L. D. *Convexity and Optimization in $\mathbb{R}^n$* . New York: John Wiley and Sons, Inc., 2002.
- [12] MISHRA, S. K.; GIORGI, G. *Nonconvex Optimization and its Applications. Inconvity and Optimization*. Berlin Heidelberg: Springer Verlag, 2008.

- [13] ARUTYUNOV, A. Smooth abnormal problems in extremum theory and analysis. *Russian Math. Surveys*, v. 67:3, p. 403–457, 2012.
- [14] KROTOV, V. Global methods in optimal control theory. *Marcel Dekker: Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*, 1996.
- [15] LEE, E.; MARKUS, L. *Foundations of Optimal Control Theory*. Melbourne: Robert E. Krieger Publishing, 1986.
- [16] G., L. *The Calculus of Variations and Optimal Control*. New York: Plenum Press, 1981.
- [17] HANSON, M. On sufficiency of the kuhn-tucker conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 80, p. 545–550, 1981.
- [18] CRAVEN, B. D.; GLOVER, B. Invex functions and duality. *J. Austral. Math. Soc.*, Series A 39, p. 1–20, 1985.
- [19] BEN-ISRAEL, A.; MOND, B. What is invexity? *J. Austral. Math. Soc.*, Ser. B 28, p. 1–9, 1986.
- [20] MARTIN, D. The essence of invexity. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 47, p. 65–76, 1985.
- [21] OLIVEIRA, V. de; SILVA, G. New optimality conditions for nonsmooth control problems. *J. Glob. Optim.*, v. 57, p. 1465–1484, 2013.
- [22] OLIVEIRA, V. de; SILVA, G. On sufficient optimality conditions for multiobjective control problems. *Technical Report*, 2014.
- [23] OLIVEIRA, V. de; SILVA, G.; ROJAS-MEDAR, M. Kt-invexity in optimal control problems. *Nonlinear Anal.-Theory Methods Appl.*, v. 71, p. 4790–4797, 2009.
- [24] OLIVEIRA, V. de; SILVA, G.; ROJAS-MEDAR, M. A class of multiobjective control problems. *Optim. Control Appl. Meth.*, v. 30, p. 77–86, 2009.
- [25] CLARKE, F. H. et al. *Nonsmooth Analysis and Control Theory, ser. Graduate Texts in Mathematics*. New York: Springer, 1998.
- [26] MORDUKHOVICH, B. *Variational Analysis and Generalized Differentiation I. Basic Theory*. Berlin: Springer, 2006.
- [27] MORDUKHOVICH, B. *Variational Analysis and Generalized Differentiation II. Applications*. Berlin: Springer, 2006.
- [28] BEN-TAL, A.; ZOWE, J. A unified theory of first and second order conditions for extremum problems in topological vector spaces. *Math. Programming Study*, v. 19, p. 39–76, 1982.
- [29] IVANOV, V. Second-order kuhn-tucker invex constrained problems. *J. Glob. Optim.*, v. 50, p. 519–529, 2011.
- [30] OLIVEIRA, V. de et al. Optimality conditions for nonlinear infinite programming problems. *Optim. Lett.*, 2014.

Autorizo a reprodução xerográfica para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 20 de Fevereiro de 2015.

Fabiola Roxana Villanueva