UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de Ilha Solteira - SP

HADAMEZ KUZMINSKAS

Projetos de controladores robustos, modelo reduzido e identificação com condições iniciais não nulas para sistemas dinâmicos de ordem fracionária

Ilha Solteira - SP
2023

HADAMEZ KUZMINSKAS

Projetos de controladores robustos, modelo reduzido e identificação com condições iniciais não nulas para sistemas dinâmicos de ordem fracionária

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual Paulista - UNESP - Campus de Ilha Solteira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.
Área de Concentração: Automação.

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
Orientador

Ilha Solteira - SP
2023

FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

Kuzminskas, Hadamez.
K97p Projetos de controladores robustos, modelo reduzido e identificação com condições iniciais não nulas para sistemas dinâmicos de ordem fracionária / Hadamez Kuzminskas. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2023
98 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2023

Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira

Inclui bibliografia

1. Sistemas de ordem fracionária. 2. Desigualdades matriciais lineares. 3. Controle robusto. 4. Realimentação de saída. 5. Modelo reduzido de ordem fracionária. 6. Identificação com condições iniciais não nulas.

Amanda Sertori dos Santos
Bibliotecária - CRB/8-9061
Seção Técnica de Referência, Atendimento ao Usuário e Documentação
Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Ilha Solteira

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA TESE: Projetos de controladores robustos, modelo reduzido e identificação com condições iniciais não nulas para sistemas dinâmicos de ordem fracionária

AUTOR: HADAMEZ KUZMINSKAS
ORIENTADOR: MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Doutor em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: Automação pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA (Participaçao Presencial)
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO (Participaçao Presencial)
Departamento de Engenharia Eletrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof. Dr. UILIAM NELSON LENDZION TOMAZ ALVES (Participaçao Presencial)
Departamento de Eixo de Controle e Processos Industriais / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná - IFPR

Prof. Dr. DIOGO RAMALHO DE OLIVEIRA (Participaçao Presencial)
Departamento de Elétrica/Automação / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso do Sul - IFMS

Prof. Dr. LEONARDO ATAIDE CARNIATO (Participaçao Virtual)
Departamento de Indústria / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - IFSP

Ilha Solteira, 28 de abril de 2023

AGRADECIMENTOS

Gratidão:

• A Deus, a minha família e aos meus amigos, pelo cuidado, atenção e compreensão;

• Ao meu orientador Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, ao Prof. Dr. Roberto Kawakami Harrop Galvão e ao Prof. Dr. Edvaldo Assunção pela confiança e incentivo;

• Aos colaboradores do Laboratório de Pesquisa em Controle da UNESP de Ilha Solteira, pelo respeito, cooperação e união;

• A todos os colaboradores da pós-graduação da UNESP de Ilha Solteira, solícitos em ajudar;

• A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela oportunidade de crescimento e apoio financeiro.

RESUMO

Esse trabalho aborda os seguintes tópicos em sistemas lineares de ordem fracionária: análise de estabilidade, projetos de controladores robustos, modelo reduzido e identificação com condições iniciais não nulas. Os objetivos do primeiro tópico foram: 01) Apresentar quatro critérios de análise de estabilidade para sistemas de ordem $\alpha \in (0,1)$ via LMIs (*Linear Matrix Inequalities*), levando-se em conta que a região de estabilidade desses sistemas contém setores no semiplano complexo direito. Um dos critérios é baseado em GLMIs (*Generalized Linear Matrix Inequalities*) e fornece uma condição necessária e suficiente em LMIs para atestar a estabilidade assintótica. Esse critério fundamenta parte das pesquisas existentes em síntese de controle para sistemas fracionários; 02) Apresentar um critério de análise de estabilidade para sistemas de ordem $\alpha \in (1,2)$ via LMIs, observando que sua região de estabilidade é um setor no semiplano complexo esquerdo. Os objetivos do segundo tópico foram: 01) Apresentar resultados de síntese de controle robusto por realimentação de pseudo-estados via LMIs para sistemas de ordem $\alpha \in (0,1)$, bem como uma proposta de controle robusto por realimentação α-derivativa via LMIs, utilizando o critério das GLMIs; 02) O mesmo para os sistemas de ordem $\alpha \in (1,2)$, utilizando o critério pertinente. As propostas deste tópico são corroboradas por exemplos numéricos. O objetivo do próximo tópico foi propor um método de controle com realimentação de saída para sistemas de ordem $\alpha \in (0,2)$ via LMIs, lançando-se mão das equações do sistema, de um observador de pseudo-estados do tipo *Luenberger*, de uma malha externa e de dois *leaky integrators*, a fim de fornecer uma descrição aumentada em espaço de pseudo-estados e uma equação adequada para a saída controlada do sistema. As LMIs calculam ganhos tais que os autovalores dos blocos da matriz do sistema aumentado estejam localizados na região de estabilidade, incluindo alocação regional dos autovalores. A análise de robustez proposta contém as matrizes incertas consideradas diretamente na matriz do sistema aumentado. O análogo elétrico de ordem fracionária de um modelo vigente para o sistema respiratório humano é utilizado como aplicação, fornecendo adequadamente uma pressão de ar de entrada capaz de gerar um fluxo de ar de entrada em um perfil de tempo desejado, o que pode ser integrado, portanto, ao projeto de um respirador mecânico. O próximo tópico propõe um método para a obtenção de um modelo com número reduzido de variáveis de pseudo-estados. A motivação elementar é reduzir o tempo computacional. Em exemplos numéricos, a comparação das funções de transferência e respostas no tempo mostram a efetividade da proposta. O último tópico propõe um método de identificação de funções de transferência fracionárias com condições iniciais não nulas, descritas pela derivada de Caputo, com base em resultados estabelecidos para o caso de condições iniciais nulas, generalizando-os. A efetividade é demonstrada em exemplos numéricos.

Palavras-chave: sistemas de ordem fracionária; desigualdades matriciais lineares; controle robusto; realimentação de saída; modelo reduzido de ordem fracionária; identificação com condições iniciais não nulas.

ABSTRACT

This work addresses the following topics in linear systems of fractional order: stability analysis, robust controller designs, reduced model and identification with non-zero initial conditions. The objectives of the first topic were: 01) Present four stability analysis criteria for systems of order $\alpha \in (0,1)$ via LMIs (Linear Matrix Inequalities), taking into account that the stability region of these systems contains sectors in the right complex half-plane. One of the criteria is based on GLMIs (*Generalized Linear Matrix Inequalities*) and provides a necessary and sufficient condition on LMIs to attest the asymptotic stability. This criterion underpins part of the existing research on control synthesis for fractional systems; 02) Present a stability analysis criterion for systems of order $\alpha \in (1,2)$ via LMIs, noting that the stability region is a sector in the left complex half-plane. The objectives of the second topic were: 01) Present synthesis results of robust pseudo-state feedback control via LMIs for systems of order $\alpha \in (0,1)$, as well as a proposal for robust α-derivative feedback control via LMIs, using the GLMIs criteria; 02) The same for systems with order $\alpha \in (1,2)$, using the presented criteria. The proposals in this topic are corroborated by numerical examples. The objective of the next topic was to propose a control method with output feedback for systems of order $\alpha \in (0,2)$ via LMIs, based on the system equations, a Luenberger type pseudo-state observer, an outer loop and two leaky integrators, in order to provide an augmented description in pseudo-state space and a suitable equation for the controlled output of the system. LMIs calculate gains such that the eigenvalues of the blocks of the augmented system matrix are located in the stability region, including regional allocation of the eigenvalues. The proposed robustness analysis contains the uncertain matrices synthesized directly into the augmented system matrix. The fractional order electrical analogue of a current model for the human respiratory system is used as an application, adequately providing an inlet air pressure capable of generating an inlet airflow at a desired time profile, which can be integrated, therefore, for the design of a mechanical respirator. The next topic proposes a method for obtaining a model with a reduced number of pseudo-state variables. The elementary motivation is to reduce computational time. In numerical examples, the comparison of transfer functions and responses over time shows the effectiveness of the proposal. The last topic proposes a method for identifying fractional transfer functions with non-zero initial conditions, described by the Caputo derivative, based on results established for the case of zero initial conditions, generalizing them. The effectiveness was demonstrated in numerical examples.

Keywords: fractional order systems; linear matrix inequalities; robust control; output feedback; reduced fractional order model; identification with nonzero initial conditions.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Regiões de estabilidade no plano complexo, destacadas em azul 20
Figura 2 Gráfico das regiões de estabilidade, destacadas em azul 20
Figura 3 Decomposição da região de estabilidade 26
Figura 4 Pêndulo invertido 41
Figura 5 Resultados do pêndulo invertido de ordem $\alpha = 0,5$ 44
Figura 6 Exemplo numérico, sistema de ordem $\alpha = 0,5$ 45
Figura 7 Exemplo numérico, sistema de ordem $\alpha = 1,5$ 46
Figura 8 Diagrama de blocos, controle de saída 50
Figura 9 Árvore respiratória 56
Figura 10 Linha de transmissão 57
Figura 11 Análogo elétrico recursivo para a árvore respiratória, com $Z_i = R_{e_i} + jL_{e_i}$, $i = 1, \cdots, 24$ 61
Figura 12 Análogo elétrico recursivo para a árvore respiratória no formato de uma rede do tipo *ladder* 61
Figura 13 Rede RC do tipo *ladder* 62
Figura 14 Resultados introdutórios 63
Figura 15 Resultados sem a malha externa: $K_r = 0$ 64
Figura 16 Resultados com a malha externa, ganho $K_r = 100$ 65
Figura 17 $K_r = 100$ na malha externa, com variações de até $\pm 5\%$ nos parâmetros R_{UA} e C_{UA} 66
Figura 18 $K_r = 100$ na malha externa, com variações de até $\pm 15\%$ nos parâmetros R_{UA} e C_{UA} 66
Figura 19 Métrica de erro E_H 73
Figura 20 Respostas $\hat{H}_1(j\omega)$ a $\hat{H}_4(j\omega)$ e $H_1(j\omega)$ a $H_4(j\omega)$ 74
Figura 21 Correntes $i_0(t)$ a $i_3(t)$ 74
Figura 22 Métrica de erro E_H 75
Figura 23 Respostas $\hat{H}(j\omega)$ e $H(j\omega)$ 75
Figura 24 Correntes $i(t)$ 76
Figura 25 Métrica de erro E_H 76
Figura 26 Respostas $\hat{H}_1(j\omega)$ a $\hat{H}_4(j\omega)$ e $H_1(j\omega)$ a $H_4(j\omega)$ 77
Figura 27 Correntes $i_0(t)$ a $i_3(t)$ 77
Figura 28 Métrica de erro E_H 78
Figura 29 Respostas $\hat{H}(j\omega)$ e $H(j\omega)$ 78
Figura 30 Correntes $i(t)$ 79

Figura 31 Geração dos sinais utilizados no método proposto. As funções de transferência dos blocos 'Sistema a ser identificado', 'Filtro 1' e 'Filtro 2' são, respectivamente, $G(s)$, $(\sigma+s)/s$ e σ/s. Os círculos com os sinais $+$ e $\times$ indicam pontos de multiplicação e adição no domínio do tempo, respectivamente. $\mathscr{L}^{-1}\{H(s)\}$ representa a transformada inversa de *Laplace* de $H(s)$ 81

Figura 32 Exemplo 6.1 (a) Sinal de entrada $u(t)$ (b) Sinal de saída $y(t)$, o gráfico menor mostra a condição inicial $y(0^-)$ (c) Erro E empregado na escolha de α_1 85

Figura 33 Exemplo 6.2 (a) Sinal de entrada $u(t)$ (b) Sinal de saída $y(t)$, o gráfico menor mostra a condição inicial $y(0^-)$ (c) Erro E empregado na escolha de α_1 e β_1, o gráfico menor mostra que a função de transferência foi mantida estritamente própria 86

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 Parâmetros do pêndulo invertido 42

Tabela 2 Exemplo 6.1. Parâmetros estimados (média $\pm$ desvio padrão sobre 1000 realizações) pelo método proposto e pelo método em Galvão et al. (2020) 85

Tabela 3 Exemplo 6.2. Parâmetros estimados (média $\pm$ desvio padrão sobre 1000 realizações) pelo método proposto e pelo método em Galvão et al. (2020) 87

LISTA DE SIGLAS

MATLAB	Laboratório matricial (*MATrix LABoratory*)
FOMCON	Modelagem de ordem fracionária (*Fractional Order Modeling Control*)
SISO	Entrada-única, saída-única (*Single-Input, Single-Output*)
BIBO	Entrada-limitada, saída-limitada (*Bounded-Input, Bounded-Output*)
PVINI	Problema de Valor Inicial de ordem Não Inteira
LMIs	Desigualdades matriciais lineares (*Linear Matrix Inequalities*)
GLMI	Desigualdade matricial linear generalizada (*Generalized Linear Matrix Inequalities*)
CPE	Elemento de fase constante (*Constant Phase Element*)
FOTF	Função de transferência de ordem fracionária (*Fractional-Order Transfer Function*)

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais;
$\mathbb{R}^n$	Conjunto dos vetores $n \times 1$ com elementos reais;
$\mathbb{R}^{n\times p}$	Conjunto das matrizes $n \times p$ com elementos reais;
$\mathbb{R}_+$	Conjunto dos números reais não negativos;
$\mathbb{R}_+^*$	Conjunto dos números reais positivos;
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos;
$\mathbb{C}^n$	Conjunto dos vetores $n \times 1$ com elementos complexos;
$\mathbb{C}^{n\times p}$	Conjunto das matrizes $n \times p$ com elementos complexos;
$\mathbb{N}$	Conjunto dos elementos naturais;
$\Gamma(.)$	Função Gama de Euler;
M^T	Transposta da matriz real M;
M^{-1}	Inversa da matriz M;
$M \succ (\succeq) 0$	M é uma matriz simétrica e definida (semidefinida) positiva;
$M \prec (\preceq) 0$	M é uma matriz simétrica e definida (semidefinida) negativa;
$I_{n\times n}$	Matriz identidade de ordem $n \times n$;
$0_{n\times p}$	Matriz nula de ordem $n \times p$;
$\|z\|$	Módulo do número complexo z;
$arg(z)$	Argumento do número complexo z;
$\|arg(z)\|$	Módulo do argumento do número complexo z;
$Re\{z\}$,	Parte real do número complexo z;
$Im\{z\}$,	Parte imaginária do número complexo z;
$\overline{z}$	Conjugado do número complexo z;
$\overline{Z}$	Conjugado da matriz complexa Z;
Z^*	Conjugado transposto da matriz complexa Z;
$Sym\{M\}$	É a soma $M + M^*$;
min	Mínimo de um conjunto;
max	Máximo de um conjunto;
sup	Supremo de um conjunto;
$\lambda(M)$	Conjunto formado pelos autovalores da matriz M;
$Re(\lambda(M))$	Conjunto formado pela parte real dos autovalores da matriz M;
$Im(\lambda(M))$	Conjunto formado pela parte imaginária dos autovalores da matriz M;
$\|arg(\lambda(M))\|$	Conjunto formado pelo módulo dos argumentos dos autovalores da matriz M;
$min\|arg(\lambda(M))\|$	Mínimo do conjunto formado pelo módulo dos argumentos dos autovalores da matriz M;
$\mathscr{D}^\alpha$	Operador linear derivada temporal de ordem α;

I^{α}	Operador linear integral de Riemann-Liouville de ordem α;
${}^{c}D^{\alpha}$	Operador linear derivada temporal de Caputo de ordem α;
$f^{(k)}(t)$	Derivada de ordem inteira k da função $f(t)$;
$\exists$	Sentença matemática 'existe';
$\nexists$	Sentença matemática 'não existe';
$\neq$	Sentença matemática 'diferente de';
$\Rightarrow$	Sentença matemática 'implica em';
$>, <$	Sentença matemática 'maior' e 'menor', respectivamente;
$\geq, \leq$	Sentença matemática 'maior ou igual' e 'menor ou igual', respectivamente;
$\cup$	União de conjuntos;
$\cap$	Intersecção de conjuntos;
$^{\circ}$	Grau trigonométrico;
%	Porcentagem;
$\sum$	Somatório;
$\prod$	Produtório;
$\mathscr{R}$, $\mathscr{P}$, $\mathfrak{D}$	Denotam regiões ou conjuntos oportunamente definidos;
$tr(M)$	Traço da matriz M;
$rank(M)$	Posto da matriz M;
$L_1[a,b]$	Espaço das funções módulo integráveis no intervalo $[a,b]$;
$\mathscr{L}\{f(t)\}$	Transformada de *Laplace* da função $f(t)$

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 14
1.1 OBJETIVOS 16
1.2 ESTRUTURA DO TEXTO 16

2 ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES DE ORDEM FRACIONÁRIA $\alpha \in (0,2)$ 18
2.1 ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS DE ORDEM $\alpha \in (0,\ 1)$ 20
2.1.1 Critério de estabilidade baseado na análise da região de instabilidade, condição necessária e suficiente 20
2.1.2 Critério de estabilidade baseado em um sistema de ordem inteira equivalente, condição suficiente 22
2.1.3 Critério de estabilidade baseado em análise geométrica, condição necessária e suficiente 24
2.1.4 Critério de estabilidade baseado em GLMIs ('*Generalized Linear Matrix Inequalities*'), condição necessária e suficiente 25
2.2 ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS DE ORDEM $\alpha \in (1,\ 2)$ 30
2.3 CONCLUSÕES DO CAPÍTULO 31

3 SÍNTESE DE CONTROLE ROBUSTO DE SISTEMAS LINEARES DE ORDEM FRACIONÁRIA $\alpha \in (0,2)$ 32
3.1 CONTROLE ROBUSTO DE SISTEMAS DE ORDEM $\alpha \in (0,1)$ 33
3.1.1 Realimentação de pseudo-estados 33
3.1.2 Realimentação α-derivativa 36
3.2 CONTROLE ROBUSTO DE SISTEMAS DE ORDEM $\alpha \in (1,2)$ 38
3.2.1 Realimentação de pseudo-estados 38
3.2.2 Realimentação α-derivativa 39
3.3 EXEMPLOS NUMÉRICOS 40
3.4 CONCLUSÕES DO CAPÍTULO 47

4 CONTROLE DE SAÍDA DE SISTEMAS DE ORDEM $\alpha \in (0,2)$ EMPREGANDO UM OBSERVADOR DE PSEUDO-ESTADOS 48
4.1 CONDIÇÃO EM LMI PARA $\mathfrak{D}$-ESTABILIDADE DE SISTEMAS DE ORDEM $\nu \in (0,2)$ 51
4.2 USO DE UMA MALHA EXTERNA 53
4.3 ANÁLISE ROBUSTA 54
4.4 MODELO DO SISTEMA RESPIRATÓRIO HUMANO PARA APLICAÇÃO DA METODOLOGIA 56
4.4.1 Análogo elétrico da rede pulmonar 57

4.4.1.1 Análogo elétrico segundo o modelo viscoelástico *58*
4.4.1.2 Análogo elétrico segundo o modelo elástico *60*
4.4.2 Análogo elétrico com o CPE **61**
4.4.3 Análogo elétrico com o CPE, representação em espaço de pseudo-estados **62**
4.5 RESULTADOS: CONTROLE DE SAÍDA COM OBSERVADOR DE PSEUDO-ESTADOS APLICADO À REDE PULMONAR 63
4.6 CONCLUSÕES DO CAPÍTULO 67
5 MODELO REDUZIDO PARA SISTEMAS DE ORDEM $\alpha \in (0,2)$ **68**
5.1 CONCEITOS PRELIMINARES 68
5.1.1 Sistemas de ordem fracionária comensuráveis **68**
5.1.2 Ferramentas matemáticas **68**
5.2 MODELO REDUZIDO PARA SISTEMAS FRACIONÁRIOS COMENSURÁVEIS 70
5.3 APLICAÇÃO AO MODELO DO SISTEMA RESPIRATÓRIO HUMANO 73
5.3.1 Sistema original de ordem $\alpha \in (0,1)$ **73**
5.3.1.1 Redução com os quatro primeiros pseudo-estados do modelo pulmonar *73*
5.3.1.2 Redução com o primeiro pseudo-estado do modelo pulmonar *75*
5.3.2 Sistema original de ordem $\alpha \in (1,2)$ **76**
5.3.2.1 Redução com os quatro primeiros pseudo-estados do modelo pulmonar *76*
5.3.2.2 Redução com o primeiro pseudo-estado do modelo pulmonar *78*
5.4 CONCLUSÕES DO CAPÍTULO 79
6 IDENTIFICAÇÃO DE FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA DE ORDEM FRACIONÁRIA E CONDIÇÕES INICIAIS NÃO NULAS UTILIZANDO SINAIS MODULADOS EXPONENCIALMENTE **80**
6.1 CONCEITOS PRELIMINARES 80
6.2 MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO PROPOSTO 82
6.3 RESULTADOS 84
6.4 CONCLUSÕES DO CAPÍTULO 87
7 CONCLUSÕES **88**
7.1 CONTRIBUIÇÕES 88
REFERÊNCIAS **89**
APÊNDICE A: SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO INTEGRAL DE *VOLTERRA* - MÉTODO DE *ADAMS-BASHFORTH* FRACIONÁRIO **97**

1 INTRODUÇÃO

Desde as últimas décadas, a comunidade científica constatou que o comportamento dinâmico de muitos sistemas físicos é precisamente descrito por equações diferenciais de ordem fracionária, de modo que a modelagem com os operadores do cálculo fracionário se torna frequente nas pesquisas em diversas áreas das ciências e engenharias, como, por exemplo, em condução de calor (POVSTENKO, 2004, 2009; ABRO; GOMEZ-AGUILAR, 2021), ondas eletromagnéticas (ENGHEIA, 1997; TARASOV, 2009; ROSALES et al., 2011; GÓMEZ-AGUILAR et al., 2016b; KACHHIA; ATANGANA, 2021), mecânica dos fluidos (KULISH; LAGE, 2002; JENA; CHAKRAVERTY, 2021), viscoelasticidade (BAGLEY; CALICO, 1991; ESPINDOLA; NETO; LOPES, 2005; LORENZO et al., 2017), propagação de ondas sonoras em materiais porosos e rígidos (FELLAH; DEPOLLIER; FELLAH, 2002; ZHU et al., 2021), biomedicina (IONESCU; KEYSER, 2009), circuitos RLC (RADWAN; SALAMA, 2012; RADWAN; FOUDA, 2013; GÓMEZ-AGUILAR et al., 2016a, 2017; ACAY; INC, 2021), osciladores (SAID et al., 2017; ELWY et al., 2021), baterias (MU et al., 2017; LIU et al., 2022) e neurônios (SHARMA et al., 2020; MAO; HU, 2021). O cálculo fracionário, ferramental matemático presente nessas áreas, pode ser estudado, por exemplo, em Oldham e Spanier (1974), Podlubny (1998), Kilbas, Srivastava e Trujillo (2006), West (2016), Yang (2019), Anastassiou (2020) e Anastassiou (2021).

O controle de sistemas de ordem fracionária é extensivamente considerado na literatura, desde os conceitos elementares de análise de estabilidade (MATIGNON, 1996, 1998; LI; CHEN; PODLUBNY, 2009; SABATIER; MOZE; FARGES, 2010; YU et al., 2013; GUO; MA, 2016; DUARTE-MERMOUD et al., 2015; DAI; CHEN, 2017), observabilidade e controlabilidade (MATIGNON; D'ANDRÉA-NOVEL, 1996, 1997; BETTAYEB; DJENNOUNE, 2008; BALACHANDRAN et al., 2013; AL-ZHOUR, 2022) até os conceitos mais elaborados, como controle: proporcional - integral - derivativo (PODLUBNY; DORCAK; KOSTIAL, 1997; PODLUBNY, 1999; PADULA; VISIOLI, 2011; DUMLU; ERENTURK, 2013; SHAH; AGASHE, 2016; SHENG; BAI; XIE, 2021), por modos deslizantes (EFE, 2008; YIN et al., 2017; RABAH; LADACI, 2020), adaptativo (SHI et al., 2020) e *backstepping* (LIU et al., 2017, 2020).

Parte do controle moderno se estabelece com os problemas de otimização convexa caracterizados por LMIs. A literatura contém condições em LMIs para a estabilidade e estabilização robusta de sistemas de ordem $\alpha \in (0,1)$ com incertezas politópicas (KUZMINSKAS, 2018; FARGES; SABATIER; MOZE, 2011), intervalares e politópicas (ADELIPOUR; ABOOEE; HAERI, 2015) e limitadas em norma (N'DOYE et al., 2013; ZHANG; LI, 2016), bem como de sistemas de ordem $\alpha \in (1,2)$ com incertezas politópicas (FARGES; SABATIER; MOZE, 2011), intervalares (LU; CHEN, 2009) e limitadas em norma (N'DOYE et al., 2013).

O critério mais difundido para atestar a estabilidade de sistemas fracionários lineares e invariantes no tempo foi introduzido por *Matignon* e consiste em uma condição necessária e

suficiente, com base nas localizações dos autovalores da matriz dinâmica do sistema (MATIGNON, 1996). Conforme este critério, a região de estabilidade é especificada através da ordem α do sistema e é convexa para $\alpha \in (1,2)$ e não convexa para $\alpha \in (0,1)$. A partir desse resultado, são obtidas em Sabatier, Moze e Farges (2010) condições em LMIs baseadas em 4 critérios distintos, a fim de atestar a estabilidade de sistemas fracionários lineares invariantes no tempo de ordem $\alpha \in (0,1)$ (apesar da não convexidade da região) e de ordem $\alpha \in (1,2)$. O estudo da estabilidade e estabilização se desenvolve também através da extensão do método direto de *Lyapunov* para sistemas de ordem $\alpha \in (0,1)$, estabelecida em Li, Chen e Podlubny (2009, 2010), segundo a qual a estabilidade assintótica é verificada através da existência de uma função de *Lyapunov* $V(x(t)) > 0$, $\forall x(t) \neq 0$, com $x(t)$ o vetor de pseudo-estados do sistema em questão, tal que ${}^{c}D^{\alpha}V(x(t)) < 0$, $\forall x(t) \neq 0$. Esta metodologia, juntamente com o limitante superior de ${}^{c}D^{\alpha}V(x(t))$, para $V(x(t)) = x(t)^{T}Px(t)$, $P = P^{T} > 0$, (DUARTE-MERMOUD et al., 2015), é utilizada, por exemplo, em Kuzminskas (2018) na dedução de condições em LMIs para a estabilização de sistemas lineares e não lineares descritos por modelos *fuzzy Takagi-Sugeno*. Ademais, a extensão do método direto de *Lyapunov* para sistemas de ordem $\alpha \in (1,2)$ é mais recente e se encontra estabelecida em Guo e Ma (2016).

Na área de identificação de sistemas fracionários, os seguintes resultados são destacados: identificação dos parâmetros e expoentes fracionários da função de transferência através de sinais modulados exponencialmente obtidos de uma entrada ao degrau (JACYNTHO et al., 2015) ou de uma entrada arbitrária (GALVÃO et al., 2020) com condições iniciais nulas, e identificação dos parâmetros da equação diferencial fracionária, com condições iniciais não nulas, através do uso de funções *block pulse* (LU et al., 2020).

No ínterim, foi estabelecido na literatura o chamado modelo difusivo para descrever a natureza fracionária de sistemas dinâmicos (TRIGEASSOU et al., 2012b; TRIGEASSOU; MAAMRI; OUSTALOUP, 2013). Nessa abordagem, o sistema fracionário é convertido em um sistema inteiro de dimensão infinita. Essa conversão não decorre de uma aproximação do sistema fracionário por um sistema inteiro, mas da natureza inteira de dimensão distribuída e infinita do integrador fracionário (TRIGEASSOU et al., 2012a). Considerações acerca desse modelo e como ele se relaciona com o ferramental aqui utilizado estão fora do escopo desse trabalho.

Os resultados propostos nesse trabalho são assim chamados: 'Controle robusto de sistemas de ordem $\alpha \in (0,1)$ (ou de sistemas de ordem $\alpha \in (1,2)$), realimentação α-derivativa', 'Controle de saída de sistemas de ordem $\nu \in (0,2)$ empregando um observador de pseudo-estados', 'Modelo reduzido para sistemas de ordem $\alpha \in (0,2)$' e 'Identificação de funções de transferência de ordem fracionária e condições iniciais não nulas usando sinais modulados exponencialmente', contemplados nos Capítulos 3, 4, 5 e 6, respectivamente. O sistema físico utilizado para exemplificar as metodologias dos Capítulos 4 e 5 é o sistema respiratório humano, através do análogo elétrico de um modelo vigente (IONESCU; MACHADO; KEYSER,

2011). A natureza fracionária das vias aéreas respiratórias e do pulmão decorre da presença de propriedades dicotômicas e recursivas, que caracterizam uma estrutura fractal e conduzem naturalmente ao modelo com operadores fracionários (IONESCU et al., 2009). Esse modelo utiliza o CPE ('*Constant Phase Element*'), também conhecido como capacitor de ordem fracionária (ELWAKIL, 2010). A impedância do CPE é $Z_{CPE} = 1/(s^{\alpha}C)$, com C a pseudo-capacitância (WESTERLUND; EKSTAM, 1994). A fase entre corrente e tensão do elemento capacitivo convencional de impedância $Z = 1/(sC)$, com C a capacitância em $[F]$, é constante e igual a $-\pi/2$. A fase do CPE é $-\alpha\pi/2$, a qual também é constante para um determinado valor de α, sem introdução de dependência com a frequência. Por esse motivo, o capacitor fracionário é chamado de '*Constant Phase Element*'.

1.1 OBJETIVOS

Os objetivos desta tese foram propor:

- LMIs para a estabilização de sistemas de ordem $\alpha \in (0,1)$ ou de ordem $\alpha \in (1,2)$, via realimentação α-derivativa;
- Uma metodologia original de controle de saída para sistemas de ordem $\alpha \in (0,2)$ via LMIs, que inclui observador de pseudo-estados (MATIGNON; D'ANDRÉA-NOVEL, 1997; N'DOYE et al., 2009; LAN; HUANG; ZHOU, 2012; QIU; JI, 2017), ganho adicional de malha externa e *leaky integrators* (WEITENBERG et al., 2018). Como aplicação é utilizado um modelo vigente para o sistema respiratório humano;
- Um modelo com quantidade reduzida de variáveis de pseudo-estados para sistemas de ordem $\alpha \in (0,2)$, utilizando a função de transferência e propriedades do traço matricial. Como aplicação é utilizado um modelo vigente para o sistema respiratório humano;
- Uma metodologia de identificação dos coeficientes e expoentes de funções de transferência de ordem fracionária, segundo a derivada de *Caputo*, baseada na metodologia aplicada a condições iniciais nulas estabelecida em Galvão et al. (2020).

A contextualização inicial envolve principalmente:

- Apresentação dos principais critérios traduzidos em LMIs vigentes na literatura para a estabilidade e estabilização de sistemas de ordem $\alpha \in (0,2)$;
- Apresentação do modelo vigente para o sistema respiratório humano.

1.2 ESTRUTURA DO TEXTO

O Capítulo 2 apresenta as principais condições em LMIs para a análise de estabilidade de sistemas de ordem $\alpha \in (0,2)$. O Capítulo 3 apresenta resultados em LMIs para a estabilização de sistemas de ordem $\alpha \in (0,2)$ via realimentação de pseudo-estados e propõe resultados via

realimentação α-derivativa. O Capítulo 4 propõe um método de controle de saída para sistemas de ordem $\alpha \in (0,2)$. O Capítulo 5 propõe a identificação de um modelo com quantidade reduzida de variáveis de pseudo-estados e o Capítulo 6 a identificação de funções de transferência fracionárias com condições iniciais não nulas. Em sequência as conclusões da tese e um apêndice sobre a simulação de sistemas de ordem fracionária $\alpha > 0$.

2 ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES DE ORDEM FRACIONÁRIA $\alpha \in (0,2)$

Considere as definições:

Definição 2.1. (FARGES; MOZE; SABATIER, 2009) Um sistema de ordem fracionária multivariável linear e invariante no tempo com entrada $u(t) \in \mathbb{R}^p$ e saída $y(t) \in \mathbb{R}^q$ pode ser modelado pela equação diferencial da forma:

$$\sum_i S_{y_i} \mathscr{D}^{\alpha_{y_i}} y(t) = \sum_i S_{u_i} \mathscr{D}^{\alpha_{u_i}} u(t), \tag{2.1}$$

com $S_{y_i} \in \mathbb{R}^{q\times q}$ e $S_{u_i} \in \mathbb{R}^{q\times p}$ matrizes constantes e $\mathscr{D}^{\alpha_{y_i}}$, $\mathscr{D}^{\alpha_{u_i}}$ os operadores de derivação fracionária de ordem α_{y_i}, $\alpha_{u_i} \in (0,2)$, respectivamente. Entre os operadores de derivação fracionária vigentes estão a derivada fracionária segundo *Riemann-Liouville* (MILLER; ROSS, 1993) e a derivada fracionária segundo *Caputo* (CAPUTO, 1967).

Definição 2.2. (FARGES; MOZE; SABATIER, 2009) Um sistema de ordem fracionária multivariável linear e invariante no tempo é dito comensurável se todas as ordens de derivação envolvidas nas equações diferenciais (2.1) são múltiplas de uma mesma ordem α. Nesse caso, as equações (2.1) são escritas como:

$$\sum_i S_{y_i} (\mathscr{D}^{\alpha})^{k_{y_i}} y(t) = \sum_i S_{u_i} (\mathscr{D}^{\alpha})^{k_{u_i}} u(t), \tag{2.2}$$

em que α é a ordem fracionária do sistema e $k_{y_i},\ k_{u_i} \in \mathbb{N}$ são as ordens de comensurabilidade.

Observação 2.1. A derivada fracionária utilizada nesse trabalho é a derivada de *Caputo*, cuja definição está no Apêndice A, o qual apresenta também métodos numéricos para a simulação de sistemas fracionários segundo a derivada de *Caputo*.

Definição 2.3. É considerado que o sistema fracionário comensurável descrito pela equação diferencial em (2.2) admite essa representação em espaço de pseudo-estados (para $u(t) = 0$):

$$\mathscr{D}^{\alpha} x(t) = Ax(t), \tag{2.3}$$

$$y(t) = Cx(t), \tag{2.4}$$

com $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de pseudo-estados, $\alpha \in (0,2)$ a ordem fracionária do sistema e $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $C \in \mathbb{R}^{q\times n}$ matrizes constantes.

Observação 2.2. O vetor $x(t)$ não representa estritamente o verdadeiro vetor de estados do sistema (2.3) e (2.4) e é referido na literatura como vetor de pseudo-estados. O verdadeiro vetor de estados de um sistema fracionário tem dimensão infinita e suas componentes são internas aos integradores. Assim, o conhecimento de $x(t_0)$ (vetor de pseudo-estados no instante inicial t_0), não é suficiente para determinar o comportamento futuro do verdadeiro vetor de estado do sistema (2.3) e (2.4) (LORENZO; HARTLEY, 2001; TRIGEASSOU et al., 2012a; TRIGEASSOU; MAAMRI; OUSTALOUP, 2013).

Observação 2.3. As condições iniciais de (2.3) e (2.4), quando considerada a derivada de *Caputo* (vide a definição da derivada fracionária segundo *Caputo* no Apêndice A, em (7.2)), são $x^{(k)}(0), k = 0, \cdots, \lceil\alpha\rceil - 1$, com $\lceil\alpha\rceil$ o menor inteiro maior do que α: $\lceil\alpha\rceil = min\{m \in \mathbb{N}/m > \alpha\}$. Logo, as condições iniciais são $x(0) \in \mathbb{R}^n$ para $\alpha \in (0,1)$ e $x(0), \dot{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ para $\alpha \in (1,2)$.

Conforme o teorema a seguir, a estabilidade de sistemas de ordem $\alpha \in (0,1)$ é verificada através das localizações dos autovalores da matriz dinâmica A no plano complexo:

Teorema 2.1. (MATIGNON, 1996) O sistema (2.3) e (2.4), para $\alpha \in (0,1)$, é assintoticamente estável se e somente se $|arg(\lambda(A))| > \alpha\pi/2$, em que $\lambda(A)$ é o conjunto dos autovalores de A. Além disso, o vetor $x(t)$ decai para 0 conforme a condição: $\|x(t)\| < N_d t^{-\alpha}$, $N_d > 0$.

Demonstração. É encontrada em Matignon (1996). □

Este resultado é estendido para sistemas fracionários comensuráveis de ordem $\alpha \in (1,2)$:

Teorema 2.2. (MOZE; SABATIER; OUSTALOUP, 2005) O Teorema 2.1 é válido se $\alpha \in (1,2)$.

Demonstração. Qualquer função de transferência:

$$F(s) = T(s^\alpha)/R(s^\alpha), \tag{2.5}$$

que descreva o sistema de ordem $\alpha \in (1,2)$ pode ser reescrita como $F(s) = \hat{T}(s^{\hat{\alpha}})/\hat{R}(s^{\hat{\alpha}})$, com $\hat{\alpha} = \alpha/2$ e $1/2 < \hat{\alpha} < 1$. O denominador $R(s^\alpha) = \prod_{i=1}^{M}(s^\alpha - s_{\alpha_i})$ pode ser reescrito como: $\hat{R}(s^{\hat{\alpha}}) = \prod_{i=1}^{M}(s^{\hat{\alpha}} - s_{\hat{\alpha}_i})(s^{\hat{\alpha}} + s_{\hat{\alpha}_i}) = \prod_{i=1}^{M}(s^{\alpha/2} - s_{\alpha_i}^{1/2})(s^{\alpha/2} - e^{j\pi} s_{\alpha_i}^{1/2})$. Assim, para todo autovalor s_{α_i} que torna $R(s^\alpha) = 0$, existem dois autovalores $s_{\hat{\alpha}_i}$ que tornam $\hat{R}(s^{\hat{\alpha}}) = 0$:

- um tal que $arg(s_{\hat{\alpha}}) = arg(s_\alpha)/2$ e
- outro tal que $arg(s_{\hat{\alpha}}) = \pi + arg(s_\alpha)/2$.

Como $\hat{\alpha} \in (0,1)$, o Teorema 2.1 é aplicável:

$$\begin{cases} |arg(s_\alpha)/2| < \hat{\alpha}\pi/2, \\ |\pi + arg(s_\alpha)/2| < \hat{\alpha}\pi/2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |arg(s_\alpha)| < \alpha\pi/2, \\ |2\pi + arg(s_\alpha)| < \alpha\pi/2, \end{cases} \Leftrightarrow |arg(s_\alpha)| < \alpha\pi/2. \tag{2.6}$$

Logo, o sistema de ordem $\alpha \in (1,2)$, descrito pela função de transferência (2.5), é assintoticamente estável se e somente se $|arg(\lambda(A))| > \alpha\pi/2$, com A a matriz de sistema. □

Diante dos Teoremas 2.1 e 2.2, tem-se o seguinte resultado aplicado a sistemas de ordem $\alpha \in (0,2)$:

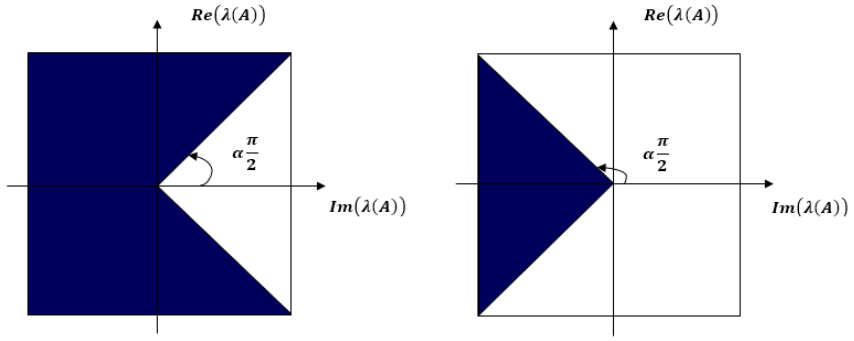
Proposição 2.1. (MATIGNON, 1996; MOZE; SABATIER; OUSTALOUP, 2005) A estabilidade assintótica de um sistema fracionário linear de ordem comensurável $\alpha \in (0,2)$ é obtida se

e somente se todos os autovalores λ da matriz A de pseudo-estados estão localizados na região:

$$\mathscr{R} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda(A))| > \alpha\pi/2\}. \tag{2.7}$$

As Figuras 1a e 1b mostram as regiões de estabilidade no plano complexo dos sistemas de ordens $\alpha \in (0,1)$ (conforme o Teorema 2.1) e $\alpha \in (1,2)$ (Teorema 2.2), respectivamente. Essas regiões são também mostradas na Figura 2 em um gráfico de $min\,|arg(\lambda(A))| \times \alpha$.

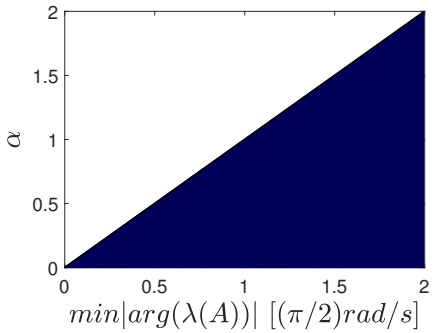
Figura 1 - Regiões de estabilidade no plano complexo, destacadas em azul



(a) $\alpha \in (0,1)$ (b) $\alpha \in (1,2)$

Fonte: adaptado de Moze, Sabatier e Oustaloup (2005).

Figura 2 - Gráfico das regiões de estabilidade, destacadas em azul



Fonte: adaptado de Moze, Sabatier e Oustaloup (2005).

2.1 ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS DE ORDEM $\alpha \in (0,\ 1)$

Essa seção apresenta 4 critérios traduzidos em LMIs para atestar a estabilidade de sistemas de ordem $\alpha \in (0,\ 1)$:

2.1.1 CRITÉRIO DE ESTABILIDADE BASEADO NA ANÁLISE DA REGIÃO DE INSTABILIDADE, CONDIÇÃO NECESSÁRIA E SUFICIENTE

Esse critério baseia-se no fato de que o sistema fracionário de ordem $\alpha \in (0,1)$ é estável se e somente se é não instável: os autovalores da matriz A pertencem ao domínio de estabilidade se e

somente se não pertencem ao domínio de instabilidade. Utilizar o domínio de instabilidade traz a vantagem da convexidade. O lema a seguir será utilizado na prova do teorema concernente:

Lema 2.1. (WOLKOWICZ; SAIGAL; VANDENBERGHE, 2012) Existe um vetor coluna $p = \xi q \neq 0$ para algum $\xi + \xi^* \geq 0$ se e somente se $pq^* + qp^* \succeq 0$.

Teorema 2.3. (MOZE; SABATIER; OUSTALOUP, 2005; SABATIER; MOZE; FARGES, 2010) O sistema (2.3) e (2.4) de ordem $\alpha \in (0,1)$ é assintoticamente estável se e somente se não existe qualquer matriz não negativa $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$, tal que:

$$rAQ + QA^T r^* \succeq 0, \quad r = e^{j(1-\alpha)\frac{\pi}{2}}. \tag{2.8}$$

Demonstração. Seja L para denotar o domínio de instabilidade, verificado na Figura 1a. Esse domínio pode ser definido como $L = L_1 \cap L_2$, com: $L_1 = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : Re(\lambda e^{(j(-\alpha\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}))}) \geq 0\right\}$ e $L_2 = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : Re(\lambda e^{(j(\alpha\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}))}) \geq 0\right\}$. Um autovalor λ da matriz A do sistema (2.3) e (2.4) pertence a L se e somente se:

$$\begin{cases} Re(\lambda e^{j(-\alpha\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})}) \geq 0, \\ Re(\lambda e^{j(\alpha\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2})}) \geq 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Para um $c \in \mathbb{C}$, tem-se $Re(c) = (c + c^*)/2$, logo:

$$\begin{cases} \lambda e^{j(-\alpha\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})} + \lambda^* e^{-j(-\alpha\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})} \geq 0, \\ \lambda e^{j(\alpha\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2})} + \lambda^* e^{-j(\alpha\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2})} \geq 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Assim, o sistema (2.3) e (2.4) é assintoticamente estável se e somente se:

$$\nexists \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{tal que} \quad \begin{cases} \lambda r + \lambda^* r^* \geq 0, \\ \lambda r^* + \lambda^* r \geq 0, \end{cases} \quad \text{com} \quad (\lambda I - A)q = 0, \quad q \in \mathbb{C}^n, \quad q \neq 0, \tag{2.11}$$

com $r = e^{j(-\alpha\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})} = cos(-\alpha\pi/2 + \pi/2) + jsen(-\alpha\pi/2 + \pi/2) = sen(\alpha\pi/2) + jcos(\alpha\pi/2)$. Como $\nexists \lambda_1 \in \lambda(A)$, $\lambda_1 \in L_1 \Leftrightarrow \nexists \lambda_2 = \lambda_1^* \in \lambda(A)$, $\lambda_2 \in L_2$ (os autovalores são simétricos em relação ao eixo real), a condição (2.11) é simplificada como:

$$\nexists \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{tal que} \quad \lambda r + \lambda^* r^* \geq 0, \quad \text{com} \quad (\lambda I - A)q = 0, \quad q \in \mathbb{C}^n, \quad q \neq 0. \tag{2.12}$$

Aplicando o Lema 2.1, com $\xi = \lambda r$ e $p = \lambda rq \neq 0$, o sistema (2.3) e (2.4) é assintoticamente estável se e somente se:

$$\nexists p = \lambda rq \neq 0, \quad \text{para algum} \quad \lambda r + (\lambda r)^* \geq 0 \quad \text{tal que} \quad \lambda rqq^* + qq^* r^* \lambda^* \succeq 0. \tag{2.13}$$

Ou se e somente se:

$$\nexists q \neq 0 \quad \text{tal que} \quad r(\lambda q)q^* + q(\lambda q)^* r^* \succeq 0, \quad \text{com} \quad (\lambda I - A)q = 0, \quad q \in \mathbb{C}^n. \tag{2.14}$$

Como $\lambda q = Aq$ e $(\lambda q)^* = q^* A^T$, a condição torna-se:

$$\nexists q \neq 0 \quad \text{tal que} \quad rAqq^* + qq^* A^T r^* \succeq 0, \quad q \in \mathbb{C}^n. \tag{2.15}$$

Denotando $Q = qq^*$, obtém-se a LMI em (2.8). □

Esse teorema baseia-se na não existência de uma matriz: não é possível estabelecer um teorema correspondente para síntese do ganho de um controlador, sob determinada lei de controle.

2.1.2 CRITÉRIO DE ESTABILIDADE BASEADO EM UM SISTEMA DE ORDEM INTEIRA EQUIVALENTE, CONDIÇÃO SUFICIENTE

Um sistema de ordem inteira equivalente é derivado do sistema fracionário (2.3) e (2.4):

Teorema 2.4. (MOZE; SABATIER; OUSTALOUP, 2005; SABATIER; MOZE; FARGES, 2010) O sistema (2.3) e (2.4) de ordem racional $\alpha \in (0,1)$ é assintoticamente estável se existe uma matriz $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que as LMIs são factíveis:

$$P \succ 0, \tag{2.16}$$

$$(A^{1/\alpha})^T P + P(A^{1/\alpha}) \prec 0. \tag{2.17}$$

Demonstração. Aplicando a transformada de *Laplace* em (2.3), para uma ordem $\alpha \in (0,1)$, obtém-se (MILLER; ROSS, 1993):

$$s^\alpha X(s) = AX(s) + I^{1-\alpha} x_0, \tag{2.18}$$

com $X(s)$ a transformada de *Laplace* de $x(t)$ e x_0 a condição inicial. Considere:

$$s^m X(s) = s^{m-\alpha} \left[s^\alpha X(s) \right]. \tag{2.19}$$

com $\alpha = m/q$, $m,\ q \in \mathbb{N}$. Substituindo (2.18) em (2.19), para $s^\alpha X(s)$, obtém-se:

$$s^m X(s) = s^{m-\alpha} \left[AX(s) + I^{1-\alpha} x_0 \right], \tag{2.20}$$

$$s^m X(s) = s^{m-2\alpha} A \left[s^\alpha X(s) \right] + s^{m-\alpha} I^{1-\alpha} x_0. \tag{2.21}$$

Substituindo $s^\alpha X(s)$ pela segunda vez (supondo $q > 2$):

$$s^m X(s) = s^{m-2\alpha} A \left[AX(s) + I^{1-\alpha} x_0 \right] + s^{m-\alpha} I^{1-\alpha} x_0, \tag{2.22}$$

$$s^m X(s) = s^{m-3\alpha} A^2 \left[s^\alpha X(s) \right] + s^{m-2\alpha} A I^{1-\alpha} x_0 + s^{m-\alpha} I^{1-\alpha} x_0. \tag{2.23}$$

Substituindo $s^{\alpha}X(s)$ pela terceira vez:

$$s^{m}X(s) = s^{m-3\alpha}A^{2}\left[AX(s) + I^{1-\alpha}x_{0}\right] + s^{m-2\alpha}AI^{1-\alpha}x_{0} + s^{m-\alpha}I^{1-\alpha}x_{0}. \tag{2.24}$$

Suponha que $q = 3$. Como $\alpha = m/q$, tem-se:

$$s^{m}X(s) = A^{3}X(s) + s^{m-3\alpha}A^{2}I^{1-\alpha}x_{0} + s^{m-2\alpha}AI^{1-\alpha}x_{0} + s^{m-\alpha}I^{1-\alpha}x_{0}. \tag{2.25}$$

Nota-se que substituindo $s^{\alpha}X(s)$ por q vezes, obtém-se:

$$s^{m}X(s) = A^{q}X(s) + \sum_{i=1}^{q} A^{i-1}I^{1-\alpha}x_{0}s^{m-i\alpha}, \tag{2.26}$$

cuja transformada de *Laplace* inversa é:

$$x^{(m)}(t) = A^{q}x(t) + \sum_{i=1}^{q} A^{i-1}I^{1-\alpha}x_{0}\delta^{m-i\alpha}. \tag{2.27}$$

Para esse sistema inteiro, a descrição em espaço de estados é adotada:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = A_{f}z(t) + B_{f}\Delta(t), \\ x(t) = C_{f}z(t), \end{cases} \tag{2.28}$$

$$A_{f} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & A^{1/\alpha} \\ A^{1/\alpha} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & A^{1/\alpha} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{f} = \begin{bmatrix} 1 & A^{1/\alpha} & \cdots & A^{(q-1)/\alpha} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad C_{f} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Delta^{T}(t) = \left[I^{1-\alpha}x(t)\right]_{t=0}\begin{pmatrix} \delta^{m-\alpha} & \delta^{m-2\alpha} & \cdots & \delta \end{pmatrix}.$$

A análise de estabilidade quadrática é realizada sobre (2.28), verificando a existência de uma matriz simétrica $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ que satisfaz as condições de *Lyapunov* (BOYD et al., 1994):

$$P \succ 0, \tag{2.29}$$

$$A_{f}^{T}P + PA_{f} \prec 0. \tag{2.30}$$

Dada a estrutura de blocos da matriz A_f, note que $A_f \prec 0$ se e somente se $A^{1/\alpha} \prec 0$. Disso, segue a LMI em (2.17). □

Observação 2.4. As LMIs (2.16) e (2.17) são obtidas também em El-Khazali e Momani (2003), a partir de uma abordagem semelhante.

Observação 2.5. Note que as LMIs (2.16) e (2.17) atestam a estabilidade do sistema inteiro:

$$\dot{x}(t) = A^{1/\alpha}x(t). \tag{2.31}$$

Seja λ um autovalor da matriz A. Então o autovalor correspondente da matriz $A^{1/\alpha}$ é $\lambda^{1/\alpha}$. Seja θ_{min} o mínimo do conjunto formado pelos argumentos dos autovalores da matriz A. Então o mínimo do conjunto formado pelos argumentos dos autovalores da matriz $A^{1/\alpha}$ é $\phi_{min} = \theta_{min}/\alpha$. Para uma ordem $\alpha \in (0,1)$, suponha que $\theta_{min} = (3+\delta)\alpha\pi/2$, $\delta \to 0$, então o sistema (2.3) e (2.4) é estável, mas $\phi_{min} = (3+\delta)\pi/2$ está fora do semi-plano complexo esquerdo (região de estabilidade do sistema (2.31)). Esse exemplo demonstra que o Teorema 2.4 não é capaz de atestar a estabilidade para a totalidade do domínio de estabilidade dos sistemas de ordem $\alpha \in (0,1)$. Diante disso, a solução P das LMIs (2.16) e (2.17) decorre de uma condição suficiente: a inexistência de uma solução P dessas LMIs não significa que o sistema seja instável.

Observação 2.6. Suponha que o sistema (2.3) e (2.4) seja estável e que o Teorema 2.4 não seja capaz de exibir essa estabilidade: mesmo nesse caso, o sistema fracionário (2.3) e (2.4) e o sistema inteiro correspondente (2.28) tem estritamente o mesmo comportamento. Ocorre, pois, que as transformações introduzidas pelas equações em (2.19)-(2.27) produzem uma matriz A_f com autovalores fora da região de estabilidade: a informação do comportamento do sistema não está contida apenas na matriz A_f, mas se compõe com $B_f\Delta(t)$. Assim, o Teorema 2.4 fornece uma condição suficiente mas não necessária para a estabilidade. Nessa suposição, os modos instáveis são compensados por zeros introduzidos pelo vetor $B_f\Delta(t)$ de modo que a resposta resultante do sistema inteiro correspondente seja estável. Por conseguinte, o método baseado na análise dos autovalores da matriz A_f pode ser pessimista na exibição da estabilidade. Um método que conduza a condições necessárias e suficientes é requerido.

2.1.3 CRITÉRIO DE ESTABILIDADE BASEADO EM ANÁLISE GEOMÉTRICA, CONDIÇÃO NECESSÁRIA E SUFICIENTE

Esse método relaciona o argumento dos autovalores contidos na região de estabilidade do sistema de ordem $\alpha \in (0,1)$ com o argumento dos autovalores contidos no semi-plano complexo esquerdo. É possível, então, relacionar os autovalores em si e as matrizes dinâmicas que possuem estes autovalores.

Teorema 2.5. (MOZE; SABATIER; OUSTALOUP, 2005; SABATIER; MOZE; FARGES, 2010) O sistema (2.3) e (2.4) de ordem $\alpha \in (0,1)$ é assintoticamente estável se e somente se existe uma matriz $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, tal que as LMIs:

$$P \succ 0, \tag{2.32}$$

$$(-(-A)^{\frac{1}{2-\alpha}})^T P + P(-(-A)^{\frac{1}{2-\alpha}}) \prec 0, \tag{2.33}$$

são factíveis, com $(-A)^{\frac{1}{2-\alpha}}$ definida como $e^{\frac{1}{2-\alpha}log(-A)}$.

Demonstração. É aqui encontrada uma condição necessária e suficiente para atestar a estabilidade da matriz A, caso seus autovalores estejam contidos na região de estabilidade. Seja $S_\theta = \{\theta \in [\alpha\pi/2, \pi]\}$ o conjunto de argumentos do domínio de estabilidade do sistema fracionário de ordem $0 < \alpha < 1$ e $S_\phi = \{\phi \in [\pi/2, \pi]\}$ o conjunto de argumentos do semi-plano complexo esquerdo, o qual pode ser caracterizado através de LMI. Com os pontos $P_1 = (\theta_1, \phi_1) = (\alpha\pi/2, \pi/2)$ e $P_2 = (\theta_2, \phi_2) = (\pi, \pi)$, obtém-se a relação linear entre $\theta \in S_\theta$ e $\phi \in S_\phi$:

$$\phi = \frac{1}{2-\alpha}\theta + \frac{(1-\alpha)\pi}{2-\alpha}. \tag{2.34}$$

Seja o complexo $a = e^{j\theta}$ pertencente ao domínio de estabilidade do sistema de ordem $\alpha \in (0,1)$ e o complexo $b = e^{j\phi}$ pertencente ao semi-plano complexo esquerdo. De (2.34):

$$b = e^{j\phi} = e^{j(\frac{1}{2-\alpha}\theta + \frac{(1-\alpha)\pi}{2-\alpha})} = e^{j(\frac{1}{2-\alpha}\theta + \frac{\pi}{2-\alpha} - \frac{\alpha\pi}{2-\alpha})} = e^{j(\frac{1}{2-\alpha}\theta - \frac{\pi}{2-\alpha} + \frac{2\pi}{2-\alpha} - \frac{\alpha\pi}{2-\alpha})} = e^{j(\frac{\theta-\pi}{2-\alpha}+\pi)},$$

$$b = e^{j\pi}e^{j(\frac{\theta-\pi}{2-\alpha})} = e^{j\pi}(e^{j(\theta-\pi)})^{\frac{1}{2-\alpha}} = e^{j\pi}(e^{-j\pi}e^{j\theta})^{\frac{1}{2-\alpha}},$$

$$b = -(-a)^{\frac{1}{2-\alpha}}. \tag{2.35}$$

Seja λ um autovalor da matriz A. Conforme (2.35), se λ pertence a região $[\alpha\pi/2, \pi]$ então $-(-\lambda)^{\frac{1}{2-\alpha}}$ pertence ao semi-plano complexo esquerdo. Além disso, $-(-\lambda)^{\frac{1}{2-\alpha}}$ é um autovalor da matriz $-(-A)^{\frac{1}{2-\alpha}}$. O sistema inteiro artificial $\dot{x}(t) = -(-A)^{\frac{1}{2-\alpha}}x(t)$ é estável se e somente se existe uma $P = P^T$ que satisfaz as condições de *Lyapunov* em (2.32) e (2.33) (BOYD et al., 1994). □

Observação 2.7. Pela simetria dos autovalores em relação ao eixo real: $\lambda \in \lambda(A)$, com $arg(\lambda) \in [\alpha\pi/2, \pi]$ se e somente se $\lambda^* \in \lambda(A)$, com $arg(\lambda) \in [-\alpha\pi/2, -\pi]$. Logo, o resultado pode ser obtido tanto da relação linear entre os domínios $[\alpha\pi/2, \pi]$ e $[\pi/2, \pi]$ quanto da relação linear entre os domínios $[-\alpha\pi/2, -\pi]$ e $[-\pi/2, -\pi]$.

Observação 2.8. A matriz $-(-A)^{\frac{1}{2-\alpha}}$ é complexa. Logo, a LMI (2.33) envolve termos complexos e precisa ser modificada a fim de ser implementada em um *solver*. A LMI equivalente, contendo apenas termos reais, é apresentada (GAHINET et al., 1995):

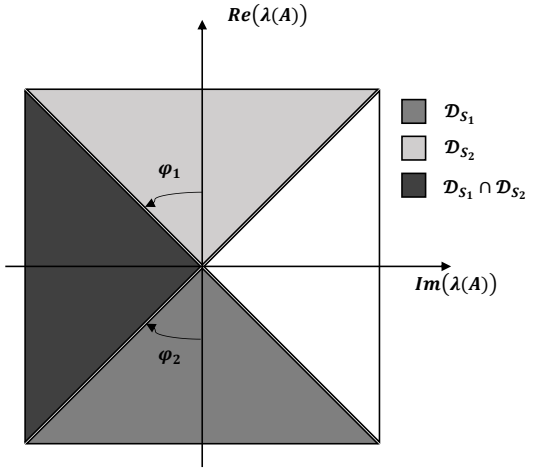
$$\begin{bmatrix} Re(-(-A)^{\frac{1}{2-\alpha}})^T P + P\,Re(-(-A)^{\frac{1}{2-\alpha}}) & Im(-(-A)^{\frac{1}{2-\alpha}})^T P + P\,Im(-(-A)^{\frac{1}{2-\alpha}}) \\ Im(-(-A)^{\frac{1}{2-\alpha}})^T P + P\,Im(-(-A)^{\frac{1}{2-\alpha}}) & Re(-(-A)^{\frac{1}{2-\alpha}})^T P + P\,Re(-(-A)^{\frac{1}{2-\alpha}}) \end{bmatrix} \prec 0. \tag{2.36}$$

2.1.4 CRITÉRIO DE ESTABILIDADE BASEADO EM GLMIS (‘*GENERALIZED LINEAR MATRIX INEQUALITIES*’), CONDIÇÃO NECESSÁRIA E SUFICIENTE

Um critério baseado na decomposição do domínio de estabilidade é apresentado. Tal critério decorre do fato de que o domínio de estabilidade $\mathfrak{D}_s$ do sistema de ordem $\alpha \in (0,1)$ é a união de dois semi-planos complexos, denotados por $\mathfrak{D}_{s_1}$ e $\mathfrak{D}_{s_2}$, resultantes da rotação do

semi-plano complexo esquerdo nos ângulos $\varphi_1 = (1-\alpha)\pi/2$ e $\varphi_2 = -\varphi_1 = -(1-\alpha)\pi/2$, respectivamente. Esse fato é ilustrado a seguir:

Figura 3 - Decomposição da região de estabilidade



Fonte: adaptado de Farges, Moze e Sabatier (2009).

Pode-se escrever a região de estabilidade como $\mathfrak{D}_s = \mathfrak{D}_{s_1} \cup \mathfrak{D}_{s_2}$, com:

$$\mathfrak{D}_{s_1} = \{z \in \mathbb{C} : Re\{ze^{j\varphi_1}\} = Re\{ze^{j(1-\alpha)\frac{\pi}{2}}\} < 0\}, \tag{2.37}$$

$$\mathfrak{D}_{s_2} = \{z \in \mathbb{C} : Re\{ze^{j\varphi_2}\} = Re\{ze^{-j(1-\alpha)\frac{\pi}{2}}\} < 0\}. \tag{2.38}$$

Os domínios $\mathfrak{D}_{s_1}$ e $\mathfrak{D}_{s_2}$ não são simétricos em relação ao eixo x e portanto não são regiões do tipo LMIs definidas em Chilali, Gahinet e Apkarian (1999). Contudo, o formalismo introduzido em Chilali (1996) e desenvolvido por Bachelier (1998) permite lidar com esse caso através do conceito de regiões LMIs generalizadas (GLMIs), assim definidas:

Definição 2.4. (CHILALI, 1996) Uma região $\mathfrak{D}_s$ do plano complexo é uma região GLMI de ordem h se existem matrizes complexas ζ_k, ψ_k, H_k, $J_k \in \mathbb{C}^{h\times h}$, $k = 1, \cdots, m$, tais que:

$$\mathfrak{D}_s = \{z \in \mathbb{C},\ \exists \omega = [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \cdots \quad \omega_m]^T \in \mathbb{C}^m \ /\ f_{\mathfrak{D}_s}(z,\omega) < 0,\ g_{\mathfrak{D}_s}(\omega) = 0\}, \tag{2.39}$$

$$f_{\mathfrak{D}_s}(z,\omega) = \sum_{k=1}^{m} (\zeta_k \omega_k + \zeta_k^* \overline{\omega}_k + \psi_k z \omega_k + \psi_k^* \overline{\omega}_k \overline{z}), \tag{2.40}$$

$$g_{\mathfrak{D}_s}(\omega) = \sum_{k=1}^{m} (H_k \omega_k + J_k \overline{\omega}_k). \tag{2.41}$$

A região $\mathfrak{D}_{s_1}$ é uma região GLMIs da forma (2.39), com $m = 1$, $\omega_1 = 1$, $\zeta_1 = 0$, $\psi_1 = e^{j\varphi_1} = e^{j(1-\alpha)\frac{\pi}{2}}$, $H_1 = 0$ e $J_1 = 0$. De fato, $f_{\mathfrak{D}_{s_1}}(z,\omega_1) = \psi_1 z\omega_1 + \psi_1^* \overline{\omega}_1 \overline{z} < 0 \Rightarrow ze^{j(1-\alpha)\frac{\pi}{2}} + e^{-j(1-\alpha)\frac{\pi}{2}}\overline{z} = 2Re\{ze^{j(1-\alpha)\frac{\pi}{2}}\} < 0 \Rightarrow Re\{ze^{j(1-\alpha)\frac{\pi}{2}}\} < 0$ e $g_{\mathfrak{D}_{s_1}}(\omega_1) = H_1\omega_1 + J_1\overline{\omega}_1 = 0$. O mesmo ocorre com a região $\mathfrak{D}_{s_2}$, com $m = 1$, $\omega_1 = 1$, $\zeta_1 = 0$, $\psi_1 = e^{j\varphi_2} = e^{-j(1-\alpha)\frac{\pi}{2}}$, $H_1 = 0$ e $J_1 = 0$.

Corolário 2.1. (BACHELIER, 1998) Cada região:

$$\mathfrak{D}_{s_k} = \{z \in \mathbb{C} : f_k(z) = \sigma_k + \beta_k z + \beta_k^* \bar{z} < 0\},\ k \in \{1,\ \cdots,\ m\}, \tag{2.42}$$

é uma região GLMI do formato (2.39).

Demonstração. É encontrada em Bachelier (1998). □

Corolário 2.2. (BACHELIER, 1998) A união de m regiões GLMIs da forma (2.42) resulta em uma região GLMI da forma (2.39) de ordem $h = m+1$.

Demonstração. É encontrada em Bachelier (1998). □

Note que a região $\mathfrak{D}_{s_1}$ têm a forma (2.42), com $\sigma_1 = 0$, $\beta_1 = e^{j\varphi_1} = e^{j(1-\alpha)\frac{\pi}{2}}$. De fato, $f_1(z) = \beta_1 z + \beta_1^* \bar{z} < 0 \Rightarrow e^{j(1-\alpha)\frac{\pi}{2}} z + e^{-j(1-\alpha)\frac{\pi}{2}} \bar{z} = 2Re\{z e^{j(1-\alpha)\frac{\pi}{2}}\} < 0 \Rightarrow Re\{z e^{j(1-\alpha)\frac{\pi}{2}}\} < 0$. O mesmo ocorre com a região $\mathfrak{D}_{s_2}$, com $\sigma_1 = 0$, $\beta_1 = e^{j\varphi_2} = e^{-j(1-\alpha)\frac{\pi}{2}}$. Logo, pelo Corolário 2.2, a região de estabilidade $\mathfrak{D}_s = \mathfrak{D}_{s_1} \cup \mathfrak{D}_{s_2}$ é uma região GLMI da forma (2.39).

No caso em que $\mathfrak{D}$ é uma região GLMI na forma (2.39), o lema subsequente apresenta uma condição em LMI necessária e suficiente para que a matriz A seja $\mathfrak{D}$-estável. Antes, a definição de $\mathfrak{D}$-estabilidade:

Definição 2.5. (CHILALI; GAHINET, 1996) A matriz A do sistema (2.3) e (2.4) é $\mathfrak{D}$-estável se e somente se todos os seus autovalores estão localizados na região arbitrária $\mathfrak{D}$.

Lema 2.2. (BACHELIER, 1998) Seja $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e $\mathfrak{D}$ uma região GLMI. A matriz A é $\mathfrak{D}$-estável se e somente se existem m matrizes $X_k \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $k = 1, \cdots, m$, tais que:

$$\sum_{k=1}^{m} (\zeta_k \otimes X_k + \zeta_k^* \otimes X_k^* + \psi_k \otimes (AX_k) + \psi_k^* \otimes (AX_k)^*) \prec 0, \tag{2.43}$$

$$\sum_{i=1}^{m} (H_k \otimes X_k + J_k \otimes X_k^*) = 0_{hn\times hn}, \tag{2.44}$$

com as matrizes complexas ζ_k, ψ_k, H_k, $J_k \in \mathbb{C}^{h\times h}$, $k = 1, \cdots, m$.

Demonstração. É encontrada em Bachelier (1998). □

Esse lema é utilizado no teorema abaixo, o qual fornece uma condição em LMI necessária e suficiente para análise de estabilidade do sistema de ordem $\alpha \in (0,1)$.

Teorema 2.6. (FARGES; MOZE; SABATIER, 2009) O sistema (2.3) e (2.4) de ordem $\alpha \in (0,1)$ é assintoticamente estável se e somente se existe uma matriz $X = X^* \in \mathbb{C}^{n\times n}$, tal que as LMIs são factíveis:

$$X \succ 0, \tag{2.45}$$

$$(rX + \bar{r}\overline{X})^T A^T + A(rX + \bar{r}\overline{X}) \prec 0, \quad r = e^{j(1-\alpha)\frac{\pi}{2}}. \tag{2.46}$$

Demonstração. O domínio de estabilidade do sistema de ordem $\alpha \in (0,1)$ consiste na união das regiões GLMIs $\mathfrak{D}_{s_1}$ em (2.37) e $\mathfrak{D}_{s_2}$ em (2.38). Do Lema 2.2: $m = 2$, $\psi_1 = e^{j(1-\alpha)\pi/2} = r$, $\psi_2 = e^{-j(1-\alpha)\pi/2} = \bar{r}$, $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$, $J_1 = J_2 = 0$, $H_1 = H_2 = 0$, $X_1, X_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e:

$$r \otimes (AX_1) + \bar{r} \otimes (AX_1)^* + \bar{r} \otimes (AX_2) + r \otimes (AX_2)^* \prec 0. \tag{2.47}$$

Considerando X_1 e X_2 matrizes hermitianas positivas definidas ($X_1 = X_1^* \succ 0$ e $X_2 = X_2^* \succ 0$):

$$rAX_1 + \bar{r}X_1A^T + \bar{r}AX_2 + rX_2A^T \prec 0, \tag{2.48}$$

se e somente se $rAX_1 + \bar{r}X_1A^T + \bar{r}AX_2 + rX_2A^T + \overline{rAX_1 + \bar{r}X_1A^T + \bar{r}AX_2 + rX_2A^T} \prec 0$,

$$rAX_1 + \bar{r}X_1A^T + \bar{r}AX_2 + rX_2A^T + \bar{r}A\overline{X}_1 + r\overline{X}_1A^T + rA\overline{X}_2 + \bar{r}\overline{X}_2A^T \prec 0, \tag{2.49}$$

$$\bar{r}(X_1 + \overline{X}_2)A^T + rA(X_1 + \overline{X}_2) + r(\overline{X}_1 + X_2)A^T + \bar{r}A(\overline{X}_1 + X_2) \prec 0. \tag{2.50}$$

Para $X = X_1 + \overline{X}_2$, tem-se:

$$\bar{r}XA^T + rAX + r\overline{X}A^T + \bar{r}A\overline{X} \prec 0. \tag{2.51}$$

Como $\overline{X} = X^T$ e $X = X^* = \overline{X}^T$, pode-se escrever $\bar{r}\overline{X}^TA^T + rAX + rX^TA^T + \bar{r}A\overline{X} \prec 0$,

$$(rX + \bar{r}\overline{X})^TA^T + A(rX + \bar{r}\overline{X}) \prec 0. \tag{2.52}$$

Note que (2.51) pode também ser obtida de (2.48) considerando $X_1 = X$ e $X_2 = \overline{X}$, sem perda de generalidade. □

O teorema apresentado a seguir reescreve em outro formato o teorema anterior e é utilizado em inúmeros trabalhos citados posteriormente:

Teorema 2.7. (LU; CHEN, 2010) O sistema (2.3) e (2.4) de ordem $\alpha \in (0,1)$ é assintoticamente estável se e somente se existem duas matrizes simétricas definidas positivas $P_{k1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $k \in 1,2$, e duas matrizes anti-simétricas $P_{k2} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $k \in 1,2$, tais que as LMIs são factíveis:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} Sym\left\{\Theta_{ij} \otimes (AP_{ij})\right\} \prec 0, \tag{2.53}$$

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ -P_{12} & P_{11} \end{bmatrix} \succ 0, \quad \begin{bmatrix} P_{21} & P_{22} \\ -P_{22} & P_{21} \end{bmatrix} \succ 0, \tag{2.54}$$

$$\begin{aligned} \Theta_{11} &= \begin{bmatrix} sen(\alpha\pi/2) & -cos(\alpha\pi/2) \\ cos(\alpha\pi/2) & sen(\alpha\pi/2) \end{bmatrix}, \quad \Theta_{12} = \begin{bmatrix} cos(\alpha\pi/2) & sen(\alpha\pi/2) \\ -sen(\alpha\pi/2) & cos(\alpha\pi/2) \end{bmatrix}, \\ \Theta_{21} &= \begin{bmatrix} sen(\alpha\pi/2) & cos(\alpha\pi/2) \\ -cos(\alpha\pi/2) & sen(\alpha\pi/2) \end{bmatrix}, \quad \Theta_{22} = \begin{bmatrix} -cos(\alpha\pi/2) & sen(\alpha\pi/2) \\ -sen(\alpha\pi/2) & -cos(\alpha\pi/2) \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Demonstração. Conforme a demonstração do Teorema 2.6, o sistema (2.3) e (2.4) de ordem $\alpha \in (0,1)$ é assintoticamente estável se e somente se existem matrizes $X_1^* = X_1 \succ 0 \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $X_2^* = X_2 \succ 0 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que satisfazem a LMI (2.48). Aqui, os autores adotaram a seguinte versão de (2.48) ($\bar{r}X_1A^T + rAX_1 + rX_2A^T + \bar{r}AX_2 \prec 0$):

$$rX_1A^T + \bar{r}AX_1 + \bar{r}X_2A^T + rAX_2 \prec 0, \quad r = e^{j\theta}, \quad \theta = (1-\alpha)\pi/2, \tag{2.56}$$

que equivale a considerar, do Lema 2.2, $m = 2$, $\psi_1 = e^{-j(1-\alpha)\pi/2} = r$, $\psi_2 = e^{j(1-\alpha)\pi/2} = \bar{r}$, $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$, $J_1 = J_2 = 0$ e $H_1 = H_2 = 0$ (chamando $\mathfrak{D}_1$ de $\mathfrak{D}_2$ e $\mathfrak{D}_2$ de $\mathfrak{D}_1$). Sabe-se que uma matriz complexa hermitiana H é positiva definida se e somente se:

$$\begin{bmatrix} Re(H) & Im(H) \\ -Im(H) & Re(H) \end{bmatrix} \succ 0. \tag{2.57}$$

Seja $X_1 = P_{11} + jP_{12}$ e $X_2 = P_{21} + jP_{22}$, aplicando a desigualdade (2.57) em X_1 e X_2, obtém-se as LMIs em (2.54). As matrizes P_{11} e P_{21} são simétricas positivas definidas e as matrizes P_{12} e P_{22} são anti-simétricas, logo:

$$X_1 = P_{11} + jP_{12} = P_{11} - jP_{12}^T \succ 0, \tag{2.58}$$

$$X_2 = P_{21} + jP_{22} = P_{21} - jP_{22}^T \succ 0. \tag{2.59}$$

Substituindo (2.58) e (2.59) em (2.56), tem-se:

$$\begin{aligned} &(cos(\theta) + i\, sen(\theta))(P_{11} - i\, P_{12}^T)A^T + (cos(\theta) - i\, sen(\theta))A(P_{11} + i\, P_{12}) \\ &+(cos(\theta) - i\, sen(\theta))(P_{21} - i\, P_{22}^T)A^T + (cos(\theta) + i\, sen(\theta))A(P_{21} + i\, P_{22}) \prec 0, \end{aligned} \tag{2.60}$$

$$\begin{aligned} &\text{Sym}\{AP_{11}cos(\theta) + AP_{12}sen(\theta) + AP_{21}cos(\theta) - AP_{22}sen(\theta)\} \\ &+i\,(P_{11}A^T - AP_{11})sen(\theta) + i\,(-P_{12}^TA^T + AP_{12})cos(\theta) \\ &+i\,(-P_{21}A^T + AP_{21})sen(\theta) + i\,(-P_{22}^TA^T + AP_{22})cos(\theta) \prec 0, \end{aligned} \tag{2.61}$$

$$\begin{aligned} &\text{Sym}\{AP_{11}sen(\alpha\pi/2) + AP_{12}cos(\alpha\pi/2)\} + \text{Sym}\{AP_{21}sen(\alpha\pi/2) - AP_{22}cos(\alpha\pi/2)\} \\ &+i\,(P_{11}A^T - AP_{11})cos(\alpha\pi/2) + i\,(-P_{12}^TA^T + AP_{12})sen(\alpha\pi/2) \\ &+i\,(-P_{21}A^T + AP_{21})cos(\alpha\pi/2) + i\,(-P_{22}^TA^T + AP_{22})sen(\alpha\pi/2) \prec 0. \end{aligned} \tag{2.62}$$

De (2.57), tem-se que (2.62) é equivalente a (2.53), com Θ_{ij}, $i, j \in \{1,\ 2\}$, dado por (2.55). □

Conforme verificado na literatura, esse teorema (ou diretamente o Teorema 2.6) está presente na dedução de condições em LMIs para a estabilização de sistemas de ordem $\alpha \in (0,1)$ sujeitos a incertezas politópicas e incertezas intervalares (ADELIPOUR; ABOOEE; HAERI, 2015), incertezas limitadas em norma (LAN; ZHOU, 2011; N'DOYE et al., 2013), incertezas reais positivas (MA; LU; CHEN, 2014), incertezas não lineares (N'DOYE et al., 2015).

2.2 ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS DE ORDEM $\alpha \in (1,\ 2)$

Da Figura 1b verifica-se que a região de estabilidade no plano complexo do sistema de ordem $\alpha \in (1,2)$ é um conjunto convexo. Diante disso, a informação do Teorema 2.2 pode ser expressa em termos de LMIs:

Teorema 2.8. (BUSŁOWICZ, 2011) O sistema (2.3) e (2.4) de ordem $\alpha \in (1,2)$ é assintoticamente estável se e somente se existe uma matriz simétrica $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, tal que as LMIs são factíveis:

$$P \succ 0, \tag{2.63}$$

$$\begin{bmatrix} (AP+PA^T)sen(\theta) & (AP-PA^T)cos(\theta) \\ (-AP+PA^T)cos(\theta) & (AP+PA^T)sen(\theta) \end{bmatrix} \prec 0, \quad \theta = \pi - \alpha\pi/2. \tag{2.64}$$

Demonstração. A região mostrada na Figura 1b é uma região LMI do tipo setor cônico com vértice na origem e ângulo interno 2θ, $\theta = \pi - \alpha\pi/2$. Conforme Chilali, Gahinet e Apkarian (1999), os autovalores da matriz A pertencem a este setor se e somente se existe uma matriz simétrica $P \succ 0$, tal que a LMI (2.64) é verificada. Além disso, dado que $cos(\theta) = cos(\pi - \alpha\pi/2) = -cos(\alpha\pi/2)$ e $sen(\theta) = sen(\pi - \alpha\pi/2) = sen(\alpha\pi/2)$, a LMI (2.64) pode ser rescrita como:

$$\begin{bmatrix} (AP+PA^T)sen(\alpha\pi/2) & (-AP+PA^T)cos(\alpha\pi/2) \\ (AP-PA^T)cos(\alpha\pi/2) & (AP+PA^T)sen(\alpha\pi/2) \end{bmatrix} \prec 0. \tag{2.65}$$

□

Com efeito didático, é apresentado um critério equivalente, encontrado na literatura:

Teorema 2.9. (MOZE; SABATIER; OUSTALOUP, 2005) O sistema (2.3) e (2.4) de ordem $\alpha \in (1,2)$ é assintoticamente estável se e somente se existe uma matriz $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, tal que as LMIs são factíveis:

$$P \succ 0, \tag{2.66}$$

$$\begin{bmatrix} (A^TP+PA)sen(\alpha\pi/2) & (A^TP-PA)cos(\alpha\pi/2) \\ (-A^TP+PA)cos(\alpha\pi/2) & (A^TP+PA)sen(\alpha\pi/2) \end{bmatrix} \prec 0. \tag{2.67}$$

Demonstração. Conforme o Teorema 2.2, o sistema (2.3) e (2.4), de ordem $\alpha \in (1,2)$ é assintoticamente estável se e somente se, para todo autovalor λ de A, $|arg(\lambda)| > \alpha\pi/2$. Isso equivale a dizer que $\lambda \in S = S_1 \cap S_2$, com S_1 e S_2 definidas:

$$S_1 = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : Re(\lambda e^{j(\alpha-1)\pi/2}) < 0 \right\}, \tag{2.68}$$

$$S_2 = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : Re(\lambda e^{-j(\alpha-1)\pi/2}) < 0 \right\}. \tag{2.69}$$

Como as regiões S_1 e S_2 são simétricas com relação ao eixo real $\exists\lambda_1 \in \lambda(A)$, $\lambda_1 \in S_1 \Leftrightarrow \exists\lambda_2 = \lambda_1^* \in \lambda(A)$, $\lambda_2 \in S_2$. Assim, apenas a desigualdade (2.68) (ou (2.69)) é suficiente para a

prova. Para um $c \in \mathbb{C}$ tem-se $Re(c) = (c + c^*)/2$, logo, de (2.69):

$$\lambda e^{j(1-\alpha)\pi/2} + \lambda^* e^{-j(1-\alpha)\pi/2} < 0,$$

$$\lambda\,[cos((1-\alpha)\pi/2) + jsen((1-\alpha)\pi/2)] + \lambda^*\,[cos((\alpha-1)\pi/2) + jsen((\alpha-1)\pi/2)] < 0. \quad (2.70)$$

De Boyd et al. (1994), a desigualdade (2.70) é verificada se e somente se o seguinte problema de factibilidade é verificado:

$$\exists P \succ 0,\ P \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ (A^T P + PA)sen(\alpha\pi/2) + j(A^T P - PA)cos(\alpha\pi/2) \preceq 0. \quad (2.71)$$

Essas LMIs envolvem termos complexos. As LMIs (2.66), (2.67) são equivalentes às LMIs dadas em (2.71) e contêm apenas termos reais. □

Observação 2.9. As LMIs (2.67) e (2.65) são equivalentes. Para obter (2.65) a partir de (2.67), basta realizar uma transformação de congruência, com $P^{-1} = (P^{-1})^T$.

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A^T P + PA)sen(\alpha\pi/2) & (A^T P - PA)cos(\alpha\pi/2) \\ (-A^T P + PA)cos(\alpha\pi/2) & (A^T P + PA)sen(\alpha\pi/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (P^{-1})^T & 0 \\ 0 & (P^{-1})^T \end{bmatrix} \prec 0, \quad (2.72)$$

$$\begin{bmatrix} (AX + XA^T)sen(\alpha\pi/2) & (-AX + XA^T)cos(\alpha\pi/2) \\ (AX - XA^T)cos(\alpha\pi/2) & (AX + XA^T)sen(\alpha\pi/2) \end{bmatrix} \prec 0. \quad (2.73)$$

O próximo capítulo considera a síntese de controladores para sistemas de ordem $\alpha \in (0,1)$, através do critério das regiões GLMIs, bem como para sistemas de ordem $\alpha \in (1,2)$, através do Teorema 2.8.

2.3 CONCLUSÕES DO CAPÍTULO

Esse capítulo é um compilado de resultados vigentes na literatura para atestar a estabilidade de sistemas fracionários via LMIs: são apresentados quatro critérios para atestar a estabilidade de sistemas de ordem $\alpha \in (0,1)$ e um critério para atestar a estabilidade de sistemas de ordem $\alpha \in (1,2)$.

3 SÍNTESE DE CONTROLE ROBUSTO DE SISTEMAS LINEARES DE ORDEM FRACIONÁRIA $\alpha \in (0,2)$

O capítulo começa com a apresentação dos resultados vigentes para a síntese de controle de sistemas de ordem $\alpha \in (0,1)$. Esses resultados são condições suficientes em LMIs baseadas no critério apresentado na Seção 2.1.4 sobre regiões LMIs generalizadas (Teorema 2.6). Os teoremas apresentados utilizam a lei de controle de realimentação de pseudo-estados, com a planta contendo incertezas politópicas. Posteriormente, é proposto um teorema para a estabilização robusta via realimentação α-derivativa de pseudo-estados para sistemas de ordem $\alpha \in (0,1)$, que também utiliza o resultado fundamental apresentado no Teorema 2.6. O capítulo continua com a apresentação de um resultado vigente para a síntese de controle de sistemas de ordem $\alpha \in (1,2)$, via realimentação de pseudo-estados, com a planta contendo incertezas politópicas. Por fim, é proposto um teorema para a estabilização robusta via realimentação α-derivativa de sistemas de ordem $\alpha \in (1,2)$. Considere a definição:

Definição 3.1. Seja o sistema linear incerto e invariante no tempo de ordem $\alpha \in (0,2)$:

$$\mathscr{D}^{\alpha}x(t) = A(\lambda)x(t) + B(\lambda)u(t), \tag{3.1}$$

com $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de pseudo-estados, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle e $A(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ matrizes que pertencem ao seguinte conjunto convexo de natureza politópica:

$$\mathscr{P} \triangleq \{(A,B)(\lambda) : (A,B)(\lambda) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (A,B)_i, \lambda \in \wedge_p\}, \tag{3.2}$$

com $\wedge_p$ o *simplex* unitário, definido como:

$$\wedge_p = \{\lambda \in \mathbb{R}^p : \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i \in \{1,2,\cdots,p\}\}, \tag{3.3}$$

cujos vértices são denotados por (A_i,B_i), $i \in \{1,2,\cdots,p\}$. O número de vértices é $p = 2^s$, com s o número de parâmetros incertos distintos da planta.

Ao longo dessa seção são consideradas as leis de controle:

- Realimentação positiva de pseudo-estados:

$$u(t) = Kx(t), \tag{3.4}$$

  a qual é substituída nas equações do sistema (3.1), obtendo-se o sistema realimentado:

$$\mathscr{D}^{\alpha}x(t) = A(\lambda)x(t) + B(\lambda)Kx(t) = (A(\lambda) + B(\lambda)K)x(t). \tag{3.5}$$

- Hipótese de realimentação positiva α-derivativa de pseudo-estados:

$$u(t) = K\ \mathscr{D}^{\alpha}x(t), \tag{3.6}$$

  a qual é substituída nas equações do sistema (3.1), obtendo-se o sistema realimentado:

$$\mathscr{D}^{\alpha}x(t) = A(\lambda)x(t) + B(\lambda)K\mathscr{D}^{\alpha}x(t) = (I_{n\times n} - B(\lambda)K)^{-1}A(\lambda)x(t), \tag{3.7}$$

  com a hipótese de que $(I_{n\times n} - B(\lambda)K)$ possua posto completo.

3.1 CONTROLE ROBUSTO DE SISTEMAS DE ORDEM $\alpha \in (0,1)$

Essa seção considera o controle robusto via LMI de sistemas de ordem $\alpha \in (0,1)$ para realimentação de pseudo-estados (resultados vigentes na literatura) e para realimentação α-derivativa (resultados propostos).

3.1.1 REALIMENTAÇÃO DE PSEUDO-ESTADOS

Seguem os resultados para a lei de controle por realimentação de pseudo-estados (3.4):

Teorema 3.1. (FARGES; MOZE; SABATIER, 2009) O sistema em (3.5) de ordem $\alpha \in (0,1)$ é assintoticamente estabilizável se existe uma matriz $X = X^* \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e uma matriz real $Y \in \mathbb{R}^{m\times n}$, tais que as LMIs são factíveis:

$$X \succ 0, \tag{3.8}$$

$$(rX + \bar{r}\overline{X})^T A_i^T + A_i(rX + \bar{r}\overline{X}) + Y^T B_i^T + B_i Y \prec 0, \tag{3.9}$$

com $i = 1, \cdots, p$ e $r = e^{j(1-\alpha)\frac{\pi}{2}}$. Nesse caso, um ganho do controlador que estabiliza (3.5) é:

$$K = Y(rX + \bar{r}\bar{X})^{-1}. \tag{3.10}$$

Demonstração. Suponha factíveis as LMIs (3.8) e (3.9): existem soluções $X = X^* \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e $Y \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Multiplicando ambos os lados de (3.9) por $\lambda_i \geq 0$ e somando em i, de $i = 1$ até $i = p$:

$$(rX + \bar{r}\overline{X})^T (\sum_{i=1}^{p} \lambda_i A_i^T) + (\sum_{i=1}^{p} \lambda_i A_i)(rX + \bar{r}\overline{X}) + Y^T (\sum_{i=1}^{p} \lambda_i B_i^T) + (\sum_{i=1}^{p} \lambda_i B_i) Y \prec 0. \tag{3.11}$$

De (3.2):

$$(rX + \bar{r}\overline{X})^T A(\lambda)^T + A(\lambda)(rX + \bar{r}\overline{X}) + Y^T B(\lambda)^T + B(\lambda) Y \prec 0. \tag{3.12}$$

Dado que $Y = K(rX + \bar{r}\bar{X})$:

$$(rX + \bar{r}\overline{X})^T A(\lambda)^T + A(\lambda)(rX + \bar{r}\overline{X}) + (rX + \bar{r}\bar{X})^T K^T B(\lambda)^T + B(\lambda) K(rX + \bar{r}\bar{X}) \prec 0,$$

$$(rX + \bar{r}\overline{X})^T (A(\lambda) + B(\lambda)K)^T + (A(\lambda) + B(\lambda)K)(rX + \bar{r}\overline{X}) \prec 0. \tag{3.13}$$

Logo, as LMIs (3.8) e (3.13) são as LMIs do Teorema 2.6 aplicadas ao sistema (3.5). □

O próximo resultado utiliza o lema de *Finsler*, o que possibilita o desacoplamento entre uma matriz de estabilidade dependente de parâmetro $X(\lambda)$ e a matriz dinâmica $A(\lambda)$, além de um maior grau de liberdade, com a seleção de uma determinada matriz estável A_0. Entretanto, não há garantia de menor conservadorismo na síntese do controlador. O lema de *Finsler* e o teorema são apresentados:

Lema 3.1. (SKELTON; IWASAKI; GRIGORIADIS, 1997) Considere $w \in \mathbb{R}^n$, $\mathscr{L} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\mathscr{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, com $rank(\mathscr{B}) < n$ e $\mathscr{B}^{\perp}$ uma base para o espaço nulo de $\mathscr{B}$ ($\mathscr{B}\mathscr{B}^{\perp} = 0$). Então, as condições são equivalentes:

- $w^T \mathscr{L} w \prec 0, \forall w \neq 0 : \mathscr{B} w = 0;$ (3.14)
- $\mathscr{B}^{\perp T} \mathscr{L} \mathscr{B}^{\perp} \prec 0;$ (3.15)
- $\exists \mu \in \mathbb{R} : \mathscr{L} - \mu \mathscr{B}^T \mathscr{B} \prec 0;$ (3.16)
- $\exists \mathscr{G} \in \mathbb{R}^{n\times m} : \mathscr{L} + \mathscr{G}\mathscr{B} + \mathscr{B}^T \mathscr{G}^T \prec 0.$ (3.17)

Teorema 3.2. (FARGES; SABATIER; MOZE, 2011) O sistema de ordem $\alpha \in (0,1)$ com incertezas politópicas em (3.5) é assintoticamente estabilizável se existem matrizes $X_i \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $X_i \succ 0$, $i = 1, \cdots, p$, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $Z \in \mathbb{R}^{m\times n}$, tais que as LMIs são factíveis:

$$X_i \succ 0, \tag{3.18}$$

$$\begin{bmatrix} 0_{n\times n} & (rX_i + \overline{r}\overline{X}_i)^T \\ (rX_i + \overline{r}\overline{X}_i) & 0_{n\times n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_iF + B_iZ \\ -F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0^T & -I_{n\times n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_0 \\ -I_{n\times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A_iF + B_iZ)^T - F^T \end{bmatrix} \prec 0, \tag{3.19}$$

com $r = e^{j(1-\alpha)\pi/2}$ e $A_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz constante e estável. Nesse caso, um ganho do controlador que estabiliza (3.5) é:

$$K = ZF^{-1}. \tag{3.20}$$

Demonstração. Suponha que as LMIs (3.18) e (3.19) sejam factíveis: existem soluções $X_i \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $i = 1, \cdots, p$, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $Z \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Multiplicando ambos os lados de (3.18) e (3.19) por $\lambda_i \geq 0$ e somando em i, de $i = 1$ até $i = p$:

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i X_i \succ 0, \tag{3.21}$$

$$\begin{bmatrix} 0_{n\times n} & (r\sum_{i=1}^{p} \lambda_i X_i + \overline{r}\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overline{X}_i)^T \\ r\sum_{i=1}^{p} \lambda_i X_i + \overline{r}\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overline{X}_i & 0_{n\times n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i A_i F + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i B_i Z \\ -F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0^T & -I_{n\times n} \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} A_0 \\ -I_{n\times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\sum_{i=1}^{p} \lambda_i A_i F + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i B_i Z)^T - F^T \end{bmatrix} \prec 0. \tag{3.22}$$

De (3.2):

$$X(\lambda) \succ 0, \tag{3.23}$$

$$\begin{bmatrix} 0_{n\times n} & (rX(\lambda) + \overline{r}\overline{X}(\lambda))^T \\ rX(\lambda) + \overline{r}\overline{X}(\lambda) & 0_{n\times n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A(\lambda)F + B(\lambda)Z \\ -F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0^T & -I_{n\times n} \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} A_0 \\ -I_{n\times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A(\lambda)F + B(\lambda)Z)^T - F^T \end{bmatrix} \prec 0. \tag{3.24}$$

Dado que $Z = KF$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0_{n\times n} & (rX(\lambda)+\bar{r}\overline{X}(\lambda))^T \\ rX(\lambda)+\bar{r}\overline{X}(\lambda) & 0_{n\times n} \end{bmatrix}}_{(2n\times 2n)} + \underbrace{\begin{bmatrix} A(\lambda)+B(\lambda)K \\ -I_{n\times n} \end{bmatrix}}_{(2n\times n)} \underbrace{F}_{(n\times n)} \underbrace{\begin{bmatrix} A_0^T & -I_{n\times n} \end{bmatrix}}_{(n\times 2n)}$$
$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} A_0 \\ -I_{n\times n} \end{bmatrix}}_{(2n\times n)} \underbrace{F^T}_{(n\times n)} \underbrace{\begin{bmatrix} (A(\lambda)+B(\lambda)K)^T - I_{n\times n} \end{bmatrix}}_{(n\times 2n)} \prec 0. \tag{3.25}$$

Mediante (3.15) e (3.17), tem-se as condições equivalentes:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0_{n\times n} & (rX(\lambda)+\bar{r}\overline{X}(\lambda))^T \\ rX(\lambda)+\bar{r}\overline{X}(\lambda) & 0_{n\times n} \end{bmatrix}}_{\mathscr{L}} + \underbrace{\begin{bmatrix} A(\lambda)-B(\lambda)K \\ -I_{n\times n} \end{bmatrix}}_{\mathscr{G}} F \underbrace{\begin{bmatrix} A_0^T & -I_{n\times n} \end{bmatrix}}_{\mathscr{B}}$$
$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} A_0 \\ -I_{n\times n} \end{bmatrix}}_{\mathscr{B}^T} F^T \underbrace{\begin{bmatrix} (A(\lambda)-B(\lambda)K)^T & -I_{n\times n} \end{bmatrix}}_{\mathscr{G}^T} \prec 0, \tag{3.26}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_{n\times n} & A_0 \end{bmatrix}}_{\mathscr{B}^{\perp T}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0_{n\times n} & (rX(\lambda)+\bar{r}\overline{X}(\lambda))^T \\ (rX(\lambda)+\bar{r}\overline{X}(\lambda)) & 0_{n\times n} \end{bmatrix}}_{\mathscr{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} I_{n\times n} \\ A_0^T \end{bmatrix}}_{\mathscr{B}^{\perp}} \prec 0, \tag{3.27}$$

com $\mathscr{B}\mathscr{B}^{\perp} = \begin{bmatrix} A_0^T & -I_{n\times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n\times n} \\ A_0^T \end{bmatrix} = 0_{n\times n}$. Dessa última, obtém-se:

$$A_0(rX(\lambda)+\bar{r}\overline{X}(\lambda)) + (rX(\lambda)+\bar{r}\overline{X}(\lambda))^T A_0^T \prec 0, \tag{3.28}$$

que é a LMI do Teorema 2.6 aplicada à matriz A_0. Assim, a matriz A_0 deve ser estável, caso contrário não existirão soluções $X_i \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $i = 1, \cdots, p$. Mediante (3.17) e (3.15), as seguintes condições também são equivalentes:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0_{n\times n} & (rX(\lambda)+\bar{r}\overline{X}(\lambda))^T \\ rX(\lambda)+\bar{r}\overline{X}(\lambda) & 0_{n\times n} \end{bmatrix}}_{\mathscr{L}} + \underbrace{\begin{bmatrix} A(\lambda)-B(\lambda)K \\ -I_{n\times n} \end{bmatrix}}_{\mathscr{B}^T} F \underbrace{\begin{bmatrix} A_0^T & -I_{n\times n} \end{bmatrix}}_{\mathscr{G}^T}$$
$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} A_0 \\ -I_{n\times n} \end{bmatrix}}_{\mathscr{G}} F^T \underbrace{\begin{bmatrix} (A(\lambda)-B(\lambda)K)^T & -I_{n\times n} \end{bmatrix}}_{\mathscr{B}} \prec 0, \tag{3.29}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_{n\times n} & A(\lambda)-B(\lambda)K \end{bmatrix}}_{\mathscr{B}^{\perp T}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0_{n\times n} & (rX(\lambda)+\bar{r}\overline{X}(\lambda))^T \\ (rX(\lambda)+\bar{r}\overline{X}(\lambda)) & 0_{n\times n} \end{bmatrix}}_{\mathscr{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} I_{n\times n} \\ (A(\lambda)-B(\lambda)K)^T \end{bmatrix}}_{\mathscr{B}^{\perp}} \prec 0, \tag{3.30}$$

com $\mathscr{B}\mathscr{B}^{\perp} = \begin{bmatrix} (A(\lambda)-B(\lambda)K)^T & -I_{n\times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n\times n} \\ (A(\lambda)-B(\lambda)K)^T \end{bmatrix} = 0_{n\times n}$. Dessa última, obtém-se:

$$(A(\lambda)-B(\lambda)K)(rX(\lambda)+\bar{r}\overline{X}(\lambda)) + (rX(\lambda)+\bar{r}\overline{X}(\lambda))^T (A(\lambda)-B(\lambda)K)^T \prec 0, \tag{3.31}$$

que é a LMI do Teorema 2.6 aplicada ao sistema (3.5). □

Os Teoremas 3.1 e 3.2 estão fundamentados no critério apresentado na Seção 2.1.4 concernente às regiões LMIs generalizadas. Ademais, é possível investigar a estabilização robusta utilizando o critério de estabilidade baseado em análise geométrica da Seção 2.1.3. Entretanto, é ainda necessário encontrar uma mudança de variáveis para expressar o resultado em termos de LMIs, possibilitando encontrar um ganho K:

Proposição 3.1. O sistema (3.5) de ordem $\alpha \in (0,1)$ é assintoticamente estabilizável se existe uma matriz $K \in \mathbb{R}^{n\times m}$, com $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, tal que:

$$P \succ 0, \tag{3.32}$$

$$(-(-(A(\lambda)-B(\lambda)K))^{\frac{1}{2-\alpha}})^T P + P(-(-(A(\lambda)-B(\lambda)K))^{\frac{1}{2-\alpha}}) \prec 0. \tag{3.33}$$

Demonstração. Decorre diretamente das LMIs em (2.32) e (2.33) aplicadas ao sistema (3.5). □

3.1.2 REALIMENTAÇÃO α-DERIVATIVA

Segue o resultado proposto para a lei de controle por realimentação α-derivativa (3.6):

Teorema 3.3. O sistema (3.7) de ordem $\alpha \in (0,1)$ é assintoticamente estabilizável se existem matrizes $X = X^* \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e $Y \in \mathbb{R}^{m\times n}$, tais que as LMIs são factíveis:

$$X \succ 0, \tag{3.34}$$

$$(rX + \overline{r}\overline{X})^T A_i^T + A_i(rX + \overline{r}\overline{X}) - B_j Y A_i^T - A_i Y^T B_j^T \prec 0, \tag{3.35}$$

com $i, j = 1, \cdots, p$ e $r = e^{j(1-\alpha)\pi/2}$. Nesse caso, um ganho do controlador que estabiliza (3.7) é:

$$K = Y((rX + \overline{r}\overline{X})^{-1})^T. \tag{3.36}$$

Demonstração. Suponha factíveis as LMIs (3.34) e (3.35): existem soluções $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $Y \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Multiplicando ambos os lados de (3.35) por $\lambda_i\lambda_j$, com $\lambda_i, \lambda_j \geq 0$ e somando em i, j, de $i, j = 1$ até $i, j = p$:

$$(rX + \overline{r}\overline{X})^T \sum_{i=1}^{p} \lambda_i A_i^T + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i A_i (rX + \overline{r}\overline{X}) - (\sum_{j=1}^{p} \lambda_j B_j) Y (\sum_{i=1}^{p} \lambda_i A_i^T) - (\sum_{i=1}^{p} \lambda_i A_i) Y^T (\sum_{j=1}^{p} \lambda_j B_j^T) \prec 0. \tag{3.37}$$

De (3.2):

$$(rX + \overline{r}\overline{X})^T A(\lambda)^T + A(\lambda)(rX + \overline{r}\overline{X}) - B(\lambda) Y A(\lambda)^T - A(\lambda) Y^T B(\lambda)^T \prec 0. \tag{3.38}$$

Dado que $Y = K(rX + \overline{r}\overline{X})^T$:

$$(rX + \overline{r}\overline{X})^T A(\lambda)^T + A(\lambda)(rX + \overline{r}\overline{X}) - B(\lambda)K(rX + \overline{r}\overline{X})^T A(\lambda)^T - A(\lambda)(rX + \overline{r}\overline{X})K^T B(\lambda)^T \prec 0, \tag{3.39}$$

$$(I_{n\times n} - B(\lambda)K)(rX + \overline{r}\overline{X})^T A(\lambda)^T + A(\lambda)(rX + \overline{r}\overline{X})(I_{n\times n} - B(\lambda)K)^T \prec 0. \tag{3.40}$$

Seja a matriz não simétrica $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, se $M^T + M \prec 0$ então M tem posto completo. Logo, $(I_{n\times n} - B(\lambda)K)(rX + \overline{r}\overline{X})^T A(\lambda)^T$ e $(I_{n\times n} - B(\lambda)K)$ têm posto completo, o que é requerido nas equações do sistema realimentado (3.7). Multiplicando (3.40) à esquerda por $(I_{n\times n} - B(\lambda)K)^{-1}$ e à direita por $[(I_{n\times n} - B(\lambda)K)^{-1}]^T$, obtém-se:

$$(rX + \overline{r}\overline{X})^T A(\lambda)^T ((I_{n\times n} - B(\lambda)K)^{-1})^T + (I_{n\times n} - B(\lambda)K)^{-1} A(\lambda)(rX + \overline{r}\overline{X}) \prec 0,$$

$$(rX + \overline{r}\overline{X})^T \left[(I_{n\times n} - B(\lambda)K)^{-1} A(\lambda)\right]^T + \left[(I_{n\times n} - B(\lambda)K)^{-1} A(\lambda)\right](rX + \overline{r}\overline{X}) \prec 0. \quad (3.41)$$

Logo, as LMIs em (3.34) e (3.41) são as LMIs do Teorema 2.6 aplicado ao sistema (3.7). □

A motivação para a síntese de controle via realimentação α-derivativa enunciada a seguir decorre do critério de estabilidade baseado em análise geométrica da Seção 2.1.3. Novamente, é ainda necessário encontrar uma mudança de variáveis para expressar o resultado em termos de LMIs, possibilitando encontrar o ganho K:

Proposição 3.2. O sistema (3.7) de ordem $\alpha \in (0,1)$ é assintoticamente estabilizável se existe uma matriz $K \in \mathbb{R}^{n\times m}$, com $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, tal que:

$$P \succ 0, \quad (3.42)$$

$$(-(-((I_{n\times n} - B(\lambda)K)^{-1} A(\lambda)))^{\frac{1}{2-\alpha}})^T P + P(-(-((I_{n\times n} - B(\lambda)K)^{-1} A(\lambda)))^{\frac{1}{2-\alpha}}) \prec 0, \quad (3.43)$$

dado que $(I_{n\times n} - B(\lambda)K)$ possua posto completo.

Demonstração. Decorre diretamente das LMIs em (2.32) e (2.33) aplicadas ao sistema (3.7). □

Nesse momento é pertinente a observação:

Observação 3.1. Para a derivada fracionária segundo *Caputo*, considere os tópicos analisados em Kuzminskas (2018):

- Da extensão do método direto de *Lyapunov* para sistemas *Caputo* de ordem $\alpha \in (0,1)$, o ponto de equilíbrio do sistema (3.1) (com ou sem incertezas) é assintoticamente estável se (LI; CHEN; PODLUBNY, 2009):
  - A função de *Lyapunov* escolhida é $V(x(t),t) > 0$ para todo $x \neq 0$, com $V(0,t) = 0$;
  - ${}^cD^\alpha V(x(t),t) < 0$, para $x \neq 0$;
- Para a função de *Lyapunov* do tipo quadrática $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$, $P = P^T \succ 0$, tem-se (DUARTE-MERMOUD et al., 2015):

$${}^cD^\alpha (x(t)^T P x(t)) \leq 2x(t)^T P\, {}^cD^\alpha x(t) = (x(t)^T P\, {}^cD^\alpha x(t))^T + x(t)^T P\, {}^cD^\alpha x(t), \quad (3.44)$$

$${}^cD^\alpha (x(t)^T P x(t)) \leq {}^cD^\alpha x(t)^T P x(t) + x(t)^T P\, {}^cD^\alpha x(t); \quad (3.45)$$

- Substituindo as equações do sistema (3.1) em (3.45):

$$ {}^{c}D^{\alpha}V(x(t)) \leq x(t)^{T}(A_{cl}^{T}P + PA_{cl})x(t), \tag{3.46} $$

com A_{cl} a matriz de malha fechada;

- Diante de (3.46), a condição suficiente, adotada em Kuzminskas (2018), para a estabilização do sistema (3.1) é:

$$ P \succ 0, \tag{3.47} $$

$$ A_{cl}^{T}P + PA_{cl} \prec 0. \tag{3.48} $$

Essas LMIs alocam os autovalores no semi-plano complexo esquerdo (região contida no domínio de estabilidade dos sistemas de ordem $\alpha \in (0,1)$). Em Farges, Moze e Sabatier (2009) os autores destacam que uma solução imediata do problema de estabilização do sistema de ordem $\alpha \in (0,1)$ seria alocar os autovalores no semi-plano complexo esquerdo. No entanto, tal redução no domínio de estabilidade pode comprometer o desempenho da estabilização, como leis de controle com alto consumo de energia e/ou respostas lentas.

3.2 CONTROLE ROBUSTO DE SISTEMAS DE ORDEM $\alpha \in (1,2)$

Essa seção considera o controle robusto via LMI de sistemas de ordem $\alpha \in (1,2)$ para realimentação de pseudo-estados (resultados vigentes na literatura) e para realimentação α-derivativa (resultados propostos).

3.2.1 REALIMENTAÇÃO DE PSEUDO-ESTADOS

Em Farges, Moze e Sabatier (2009) os autores apenas sugerem a síntese do controlador a partir do Teorema 2.9, adotando a variável $Y = KX$ (não consta a demonstração). Como os Teoremas 2.9 e 2.8 são equivalentes, segue o teorema de síntese a partir do Teorema 2.8:

Teorema 3.4. (FARGES; MOZE; SABATIER, 2009; BUSŁOWICZ, 2011) O sistema em (3.5) de ordem $\alpha \in (1,2)$ é assintoticamente estabilizável se existem matrizes $X = X^{T} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $Y \in \mathbb{R}^{m\times n}$, tais que as LMIs são factíveis:

$$ X \succ 0, \tag{3.49} $$

$$ \begin{bmatrix} (A_iX + XA_i^{T} + B_iY + Y^{T}B_i^{T})sen(\alpha\pi/2) & (-A_iX + XA_i^{T} - B_iY + Y^{T}B_i^{T})cos(\alpha\pi/2) \\ (A_iX - XA_i^{T} + B_iY - Y^{T}B_i^{T})cos(\alpha\pi/2) & (A_iX + XA_i^{T} + B_iY + Y^{T}B_i^{T})sen(\alpha\pi/2) \end{bmatrix} \prec 0, \tag{3.50} $$

com $i = 1, \cdots, p$. Nesse caso, um ganho do controlador é:

$$ K = YX^{-1}. \tag{3.51} $$

Demonstração. Suponha factíveis as LMIs (3.49) e (3.50): existem soluções $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $Y \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Multiplicando ambos os lados de (3.50) por $\lambda_i \geq 0$ e somando em i, de $i = 1$ até $i = p$:

$$\begin{bmatrix} (\sum_{i=1}^{p}\lambda_i A_i X + X\sum_{i=1}^{p}\lambda_i A_i^T + \sum_{i=1}^{p}\lambda_i B_i Y + Y^T\sum_{i=1}^{p}\lambda_i B_i^T)sen(\alpha\pi/2) \\ (\sum_{i=1}^{p}\lambda_i A_i X - X\sum_{i=1}^{p}\lambda_i A_i^T + \sum_{i=1}^{p}\lambda_i B_i Y - Y^T\sum_{i=1}^{p}\lambda_i B_i^T)cos(\alpha\pi/2) \\ (-\sum_{i=1}^{p}\lambda_i A_i X + X\sum_{i=1}^{p}\lambda_i A_i^T - \sum_{i=1}^{p}\lambda_i B_i Y + Y^T\sum_{i=1}^{p}\lambda_i B_i^T)cos(\alpha\pi/2) \\ (\sum_{i=1}^{p}\lambda_i A_i X + X\sum_{i=1}^{p}\lambda_i A_i^T + \sum_{i=1}^{p}\lambda_i B_i Y + Y^T\sum_{i=1}^{p}\lambda_i B_i^T)sen(\alpha\pi/2) \end{bmatrix} \prec 0. \tag{3.52}$$

De (3.2):

$$\begin{bmatrix} (A(\lambda)X + XA(\lambda)^T + B(\lambda)Y + Y^T B(\lambda)^T)sen(\alpha\pi/2) \\ (A(\lambda)X - XA(\lambda)^T + B(\lambda)Y - Y^T B(\lambda)^T)cos(\alpha\pi/2) \\ (-A(\lambda)X + XA(\lambda)^T - B(\lambda)Y + Y^T B(\lambda)^T)cos(\alpha\pi/2) \\ (A(\lambda)X + XA(\lambda)^T + B(\lambda)Y + Y^T B(\lambda)^T)sen(\alpha\pi/2) \end{bmatrix} \prec 0. \tag{3.53}$$

Dado que $Y = KX$ e $X = X^T$:

$$\begin{bmatrix} ((A(\lambda) + B(\lambda)K)X + X(A(\lambda) + B(\lambda)K)^T)sen(\alpha\pi/2) \\ ((A(\lambda) + B(\lambda)K)X - X(A(\lambda) + B(\lambda)K)^T)cos(\alpha\pi/2) \\ (-(A(\lambda) + B(\lambda)K)X + X(A(\lambda) + B(\lambda)K)^T)cos(\alpha\pi/2) \\ ((A(\lambda) + B(\lambda)K)X + X(A(\lambda) + B(\lambda)K)^T)sen(\alpha\pi/2) \end{bmatrix} \prec 0. \tag{3.54}$$

Logo, as LMIs (3.49) e (3.54) são as LMIs do Teorema 2.8 aplicadas ao sistema (3.5). □

3.2.2 REALIMENTAÇÃO α-DERIVATIVA

Segue o resultado proposto para a lei de controle por realimentação α-derivativa (3.6):

Teorema 3.5. O sistema (3.7) de ordem $\alpha \in (1,2)$ é assintoticamente estabilizável se existem matrizes $X = X^T \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $Y \in \mathbb{R}^{m\times n}$, tais que as LMIs são factíveis:

$$X \succ 0, \tag{3.55}$$

$$\begin{bmatrix} (A_i X + XA_i^T - B_j YA_i^T - A_i Y^T B_j^T)sen(\theta) & (A_i X - XA_i^T + B_j YA_i^T - A_i Y^T B_j^T)cos(\theta) \\ (-A_i X + XA_i^T - B_j YA_i^T + A_i Y^T B_j^T)cos(\theta) & (A_i X + XA_i^T - B_j YA_i^T - A_i Y^T B_j^T)sen(\theta) \end{bmatrix} \prec 0, \tag{3.56}$$

com $i, j = 1, \cdots, p$ e $\theta = \pi - \alpha\pi/2$. Nesse caso, um ganho do controlador é:

$$K = YX^{-1}. \tag{3.57}$$

Demonstração. Suponha factíveis as LMIs (3.55) e (3.56): existem soluções $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $Y \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Multiplicando ambos os lados de (3.56) por $\lambda_i\lambda_j$, com $\lambda_i, \lambda_j \geq 0$ e somando em i, j, de $i, j = 1$ até $i, j = p$:

$$\begin{bmatrix} (\sum_{i=1}^{p}\lambda_i A_i X + X\sum_{i=1}^{p}\lambda_i A_i^T - (\sum_{j=1}^{p}\lambda_j B_j)Y(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i A_i^T) - (\sum_{i=1}^{p}\lambda_i A_i)Y^T(\sum_{j=1}^{p}\lambda_j B_j^T))sen(\theta) \\ (-\sum_{i=1}^{p}\lambda_i A_i X + X\sum_{i=1}^{p}\lambda_i A_i^T - (\sum_{j=1}^{p}\lambda_j B_j)Y(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i A_i^T) + (\sum_{i=1}^{p}\lambda_i A_i)Y^T(\sum_{j=1}^{p}\lambda_j B_j^T))cos(\theta) \\ c(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i A_i X - X\sum_{i=1}^{p}\lambda_i A_i^T + (\sum_{j=1}^{p}\lambda_j B_j)Y(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i A_i)^T - (\sum_{i=1}^{p}\lambda_i A_i)Y^T(\sum_{j=1}^{p}\lambda_j B_j^T))cos(\theta) \\ (\sum_{i=1}^{p}\lambda_i A_i X + X\sum_{i=1}^{p}\lambda_i A_i^T - (\sum_{j=1}^{p}\lambda_j B_j)Y(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i A_i^T) - (\sum_{i=1}^{p}\lambda_i A_i)Y^T(\sum_{j=1}^{p}\lambda_j B_j^T))sen(\theta) \end{bmatrix} \prec 0. \tag{3.58}$$

De (3.2):

$$\begin{bmatrix} (A(\lambda)X + XA(\lambda)^T - B(\lambda)YA(\lambda)^T - A(\lambda)Y^T B(\lambda)^T)sen(\theta) \\ (-A(\lambda)X + XA(\lambda)^T - B(\lambda)YA(\lambda)^T + A(\lambda)Y^T B(\lambda)^T)cos(\theta) \\ (A(\lambda)X - XA(\lambda)^T + B(\lambda)YA(\lambda)^T - A(\lambda)Y^T B(\lambda)^T)cos(\theta) \\ (A(\lambda)X + XA(\lambda)^T - B(\lambda)YA(\lambda)^T - A(\lambda)Y^T B(\lambda)^T)sen(\theta) \end{bmatrix} \prec 0. \tag{3.59}$$

Dado que $Y = KX$ e $X = X^T$:

$$\begin{bmatrix} (A(\lambda)X(I_{n\times n} - B(\lambda)K)^T + (I_{n\times n} - B(\lambda)K)XA(\lambda)^T)sen(\theta) \\ (-A(\lambda)X(I_{n\times n} - B(\lambda)K)^T + (I_{n\times n} - B(\lambda)K)XA(\lambda)^T)cos(\theta) \\ (A(\lambda)X(I_{n\times n} - B(\lambda)K)^T - (I_{n\times n} - B(\lambda)K)XA(\lambda)^T)cos(\theta) \\ (A(\lambda)X(I_{n\times n} - B(\lambda)K)^T + (I_{n\times n} - B(\lambda)K)XA(\lambda)^T)sen(\theta) \end{bmatrix} \prec 0. \tag{3.60}$$

Seja a matriz não simétrica $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$: se $M + M^T \prec 0$ então M tem posto completo. Logo, $(I_{n\times n} - B(\lambda)K)XA(\lambda)^T$ e $(I_{n\times n} - B(\lambda)K)$ tem posto completo, o que é requerido nas equações do sistema realimentado (3.7). Multiplicando (3.60) à esquerda por $\begin{bmatrix} (I_{n\times n} - B(\lambda)K)^{-1} & 0_{n\times n} \\ 0_{n\times n} & (I_{n\times n} - B(\lambda)K)^{-1} \end{bmatrix}$ e à direita por $\begin{bmatrix} \left[(I_{n\times n} - B(\lambda)K)^{-1}\right]^T & 0_{n\times n} \\ 0_{n\times n} & \left[(I_{n\times n} - B(\lambda)K)^{-1}\right]^T \end{bmatrix}$, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} (\left[(I_{n\times n} - B(\lambda)K)^{-1}A(\lambda)\right]X + X\left[(I_{n\times n} - B(\lambda)K)^{-1}A(\lambda)\right]^T)sen(\theta) \\ (-\left[(I_{n\times n} - B(\lambda)K)^{-1}A(\lambda)\right]X + X\left[(I_{n\times n} - B(\lambda)K)^{-1}A(\lambda)\right]^T)cos(\theta) \\ (\left[(I_{n\times n} - B(\lambda)K)^{-1}A(\lambda)\right]X - X\left[(I_{n\times n} - B(\lambda)K)^{-1}A(\lambda)\right]^T)cos(\theta) \\ (\left[(I_{n\times n} - B(\lambda)K)^{-1}A(\lambda)\right]X + X\left[(I_{n\times n} - B(\lambda)K)^{-1}A(\lambda)\right]^T)sen(\theta) \end{bmatrix} \prec 0. \tag{3.61}$$

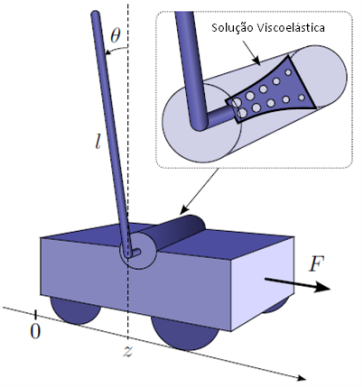
Logo, as LMIs em (3.55) e (3.61) são as LMIs do Teorema 2.8 aplicadas ao sistema (3.7). □

3.3 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Para a solução das restrições em LMIs é utilizado o *solver* LMILab no ambiente do *software* MATLAB. O Exemplo 3.1 busca replicar, para fins contextuais e didáticos, a aplicação ao pêndulo invertido em Farges, Moze e Sabatier (2009). Os Exemplos Numéricos 3.2 e 3.3 se referem às propostas com a realimentação α-derivativa.

Exemplo 3.1. (FARGES; MOZE; SABATIER, 2009) A Figura 4 apresenta o pêndulo invertido de massa m_p articulado em um carrinho de massa m_c. O coeficiente de atrito entre o chão e o carrinho é f. O carrinho e o pêndulo se movem em um plano $\mathscr{P}$. A entrada de controle é a força $F(t)$ aplicada sobre o carrinho, a qual é paralela ao plano $\mathscr{P}$. O sistema é completamente descrito pela posição $z(t)$ e pelo ângulo de deflexão axial $\theta(t)$. O pêndulo é preso a uma placa que possui perfurações padronizadas, a qual rotaciona dentro de uma solução viscoelástica: essa é a diferença em relação ao modelo clássico do pêndulo invertido.

Figura 4 - Pêndulo invertido



Fonte: adaptado de Farges, Moze e Sabatier (2009).

O *design* particular de perfurações da placa equivale a uma rede recursiva de resistores e capacitores na analogia com os circuitos elétricos (OUSTALOUP, 1995). Em Galvão et al. (2013) e Jacyntho et al. (2015) é mostrado que o comportamento de uma rede recursiva de resistores e capacitores possui natureza fracionária. Mediante o padrão de perfuração da placa, a natureza fracionária desse modelo de pêndulo invertido está no tipo de amortecimento: seja α a ordem fracionária e k o coeficiente de amortecimento, a equação para o torque do pêndulo, no âmbito da dinâmica rotacional, é:

$$\Gamma(t) = -k\, \mathscr{D}^{\alpha}\theta(t). \tag{3.62}$$

A derivada fracionária em (3.62), em todo o espectro de frequência, modela uma distribuição recursiva infinita das perfurações. A fim de construir um modelo realista, a banda de frequência da derivada fracionária é limitada em $\omega \in [\omega_l, \omega_h]$ e sua função de transferência é:

$$\mathscr{L}\{\mathscr{D}^{\alpha}\}\,|_{\omega_l}^{\omega_h} = s^{\alpha}|_{\omega_l}^{\omega_h} = s\left(\frac{1+\left(\frac{s}{\omega_h}\right)^{\alpha}}{1+\left(\frac{s}{\omega_l}\right)^{\alpha}}\right) = \left(\frac{\omega_l^{\alpha}s^{\alpha+1}+(\omega_h\omega_l)^{\alpha}s}{\omega_h^{\alpha}s^{\alpha}+(\omega_h\omega_l)^{\alpha}}\right). \tag{3.63}$$

A função de transferência da equação (3.62) é:

$$G(s) = \frac{\Gamma(s)}{\Theta(s)} = -k\, s^{\alpha}. \tag{3.64}$$

Assim, para a banda de frequência $\omega \in [\omega_l, \omega_h]$:

$$G(s) = \frac{\Gamma(s)}{\Theta(s)} = -k\left(\frac{\omega_l^{\alpha} s^{\alpha+1} + (\omega_h\omega_l)^{\alpha} s}{\omega_h^{\alpha} s^{\alpha} + (\omega_h\omega_l)^{\alpha}}\right). \tag{3.65}$$

A fim de encontrar a equação diferencial que origina essa função de transferência, tem-se:

$$\Gamma(s) = -k\left[\frac{\omega_l^{\alpha} s^{\alpha+1} + (\omega_h\omega_l)^{\alpha} s}{\omega_h^{\alpha} s^{\alpha} + (\omega_h\omega_l)^{\alpha}}\right]\Theta(s), \tag{3.66}$$

$$\omega_h^{\alpha} s^{\alpha}\Gamma(s) + (\omega_h\omega_l)^{\alpha}\Gamma(s) = -k\omega_l^{\alpha} s^{\alpha+1}\Theta(s) - k(\omega_h\omega_l)^{\alpha} s\Theta(s). \tag{3.67}$$

Da transformada de *Laplace* inversa:

$$\omega_h^{\alpha}\mathscr{D}^{\alpha}\Gamma(t) + (\omega_h\omega_l)^{\alpha}\Gamma(t) = -k\omega_l^{\alpha}\mathscr{D}^{\alpha+1}\theta(t) - k(\omega_h\omega_l)^{\alpha}\dot{\theta}(t), \tag{3.68}$$

$$\mathscr{D}^{\alpha}\Gamma(t) = -\omega_l^{\alpha}\Gamma(t) - k\omega_l^{\alpha}\dot{\theta}(t) - k\left(\frac{\omega_l}{\omega_h}\right)^{\alpha}\mathscr{D}^{\alpha+1}\theta(t). \tag{3.69}$$

Aplicando as equações de *Lagrange* com respeito as coordenadas $z(t)$ e $\theta(t)$, obtém-se as equações diferenciais não lineares que governam o movimento do pêndulo:

$$\begin{cases} \ddot{z}(t) = \dfrac{1}{m_c + m_p}\left(\dfrac{1}{2}m_p l(\ddot{\theta}(t)cos(\theta(t)) - \dot{\theta}(t)^2 sen(\theta(t))) - f\dot{z}(t) + F(t)\right), \\ \ddot{\theta}(t) = \dfrac{1}{J + \frac{1}{4}m_p l^2}\left(\dfrac{1}{2}m_p l(\ddot{z}(t)cos(\theta(t)) + gsen(\theta(t))) + \Gamma(t)\right), \\ \mathscr{D}^{\alpha}\Gamma(t) = -\omega_l^{\alpha}\Gamma(t) - k\omega_l^{\alpha}\dot{\theta}(t) - k\left(\dfrac{\omega_l}{\omega_h}\right)^{\alpha}\mathscr{D}^{\alpha+1}\theta(t). \end{cases} \tag{3.70}$$

Os autores adotam os seguintes valores para os parâmetros:

Tabela 1 - Parâmetros do pêndulo invertido

Parâmetro	m_p	m_c	l	f	J	k	ω_l	ω_h	g
Valor	0,535	3,2	0,365	6,2	0,062	0,1	0,1	10	9,81
Unidade	kg	kg	m	kg/s	kg.m^2	N.m.s$^{\alpha}$/rad	rad/s	rad/s	m/s^2

Fonte: retirado de Farges, Moze e Sabatier (2009).

Em Farges, Moze e Sabatier (2009), os autores adotaram a ordem $\alpha = 0.5$, possivelmente identificada. O modelo (3.70) pode então ser reescrito como um sistema não linear de ordem comensurável $\alpha = 0,5$, da forma:

$$\mathscr{D}^{0,5}x(t) = f(x(t), F(t)). \tag{3.71}$$

Uma possível escolha do vetor $x(t)$ é:

$$x(t) = [z(t)\ \ \mathscr{D}^{0,5}z(t)\ \ \dot{z}(t)\ \ \mathscr{D}^{1,5}z(t)\ \ \theta(t)\ \ \mathscr{D}^{0,5}\theta(t)\ \ \dot{\theta}(t)\ \ \mathscr{D}^{1,5}\theta(t)\ \ \Gamma(t)]^T. \tag{3.72}$$

O modelo admite infinitos pontos de equilíbrio em $x_{eq_1} = [z_{eq_1}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^T$, que correspondem a posição superior do pêndulo e uma posição arbitrária z_{eq_1} do carrinho e outros infinitos pontos de equilíbrio em $x_{eq_2} = [z_{eq_2}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ \pi\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^T$ que correspondem à posição

inferior do pêndulo e uma posição arbitrária z_{eq_2} do carrinho. A linearização do modelo ao redor de um ponto de equilíbrio do tipo x_{eq_1} resulta na representação em espaço de pseudo-estados:

$$\mathscr{D}^{0,5}x(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{3.73}$$

$$A = a\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 & a_{45} & 0 & 0 & 0 & a_{49} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_{83} & 0 & a_{85} & 0 & 0 & 0 & a_{89} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{97} & a_{98} & a_{99} \end{bmatrix}, \quad B = a\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_8 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{gathered} a = \frac{1}{4J(m_c+m_p)+m_c m_p l^2}, \\ a_{43} = -4fJ - fm_p l^2, \\ a_{45} = m_p^2 l^2 g, \\ a_{49} = 2m_p l, \;\; a_{83} = -2fm_p l, \\ a_{85} = 2m_p gl(m_c+m_p), \\ a_{89} = 4(m_c+m_p), \\ a_{97} = -k\alpha\sqrt{\omega_l}, \;\; a_{98} = -k\alpha\sqrt{\frac{\omega_l}{\omega_h}}, \\ a_{99} = -\alpha\sqrt{\omega_l}, \;\; b_4 = J + m_p l^2, \\ b_8 = 2m_p l^2. \end{gathered}$$

É aplicado o Teorema 3.1 para calcular um ganho estabilizante K da realimentação de pseudo-estados sobre o modelo linearizado (3.73). Conforme este teorema, a variável X é declarada como uma matriz hermitiana complexa e a variável Y como uma matriz real, no *solver* LMILab. Da solução das LMIs (3.8) e (3.9), aplicadas ao modelo isento de incertezas politópicas, as variáveis X, Y e o ganho K são:

$$X = \begin{bmatrix} 2,1099+0,0000i & -0,0804-0,4546i & -0,3976-0,4708i & -0,3116+0,0969i \\ -0,0804+0,4546i & 1,2879+0,0000i & -0,1449-0,3683i & -0,4539-0,4421i \\ -0,3976+0,4708i & -0,1449+0,3683i & 1,3365+0,0000i & -0,0841-0,4610i \\ -0,3116-0,0969i & -0,4539+0,4421i & -0,0841+0,4610i & 2,1163+0,0000i \\ 0,0995-0,0260i & 0,1021-0,0513i & -0,0400-0,1095i & 0,0001-0,1167i \\ -0,0038+0,0692i & 0,1076+0,0749i & 0,1236+0,0395i & 0,3612-0,3947i \\ -0,0624+0,1059i & -0,0089+0,0843i & 0,0673+0,0436i & 0,0778+0,1182i \\ -0,0745+0,0082i & -0,0741+0,0564i & -0,0591+0,1094i & 0,0753+0,2744i \\ 0,0561-0,0276i & 0,0454-0,0241i & -0,0454-0,0628i & -0,0435+0,0573i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0,0995+0,0260i & -0,0038-0,0692i & -0,0624-0,1059i & -0,0745-0,0082i & 0,0561+0,0276i \\ 0,1021+0,0513i & 0,1076-0,0749i & -0,0089-0,0843i & -0,0741-0,0564i & 0,0454+0,0241i \\ -0,0400+0,1095i & 0,1236-0,0395i & 0,0673-0,0436i & -0,0591-0,1094i & -0,0454+0,0628i \\ 0,0001+0,1167i & 0,3612+0,3947i & 0,0778-0,1182i & 0,0753-0,2744i & -0,0435-0,0573i \\ 1,1713+0,0000i & -0,2271-0,1732i & -0,2933-0,1300i & -0,1602+0,2055i & -0,8980+0,0931i \\ -0,2271+0,1732i & 0,9854+0,0000i & -0,3044-0,2813i & -0,5603-0,2838i & -0,0758-0,0318i \\ -0,2933+0,1300i & -0,3044+0,2813i & 1,2626+0,0000i & -0,0137-0,5113i & 0,0382-0,1176i \\ -0,1602-0,2055i & -0,5603+0,2838i & -0,0137+0,5113i & 2,3733+0,0000i & 0,0536+0,0145i \\ -0,8980-0,0931i & -0,0758+0,0318i & 0,0382+0,1176i & 0,0536-0,0145i & 1,0597+0,0000i \end{bmatrix}, \tag{3.74}$$

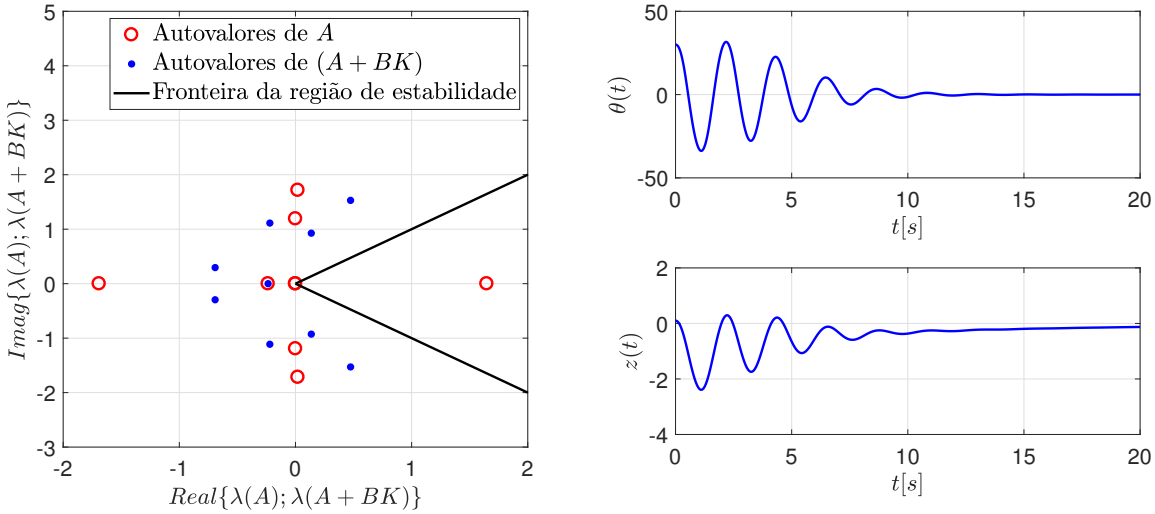
$$Y = \begin{bmatrix} -18,6243 & -16,3144 & 5,8428 & -0,7092 & -16,9382 & 7,8481 & 5,1633 & 13,2179 & -6,3475 \end{bmatrix}, \tag{3.75}$$

$$K = \begin{bmatrix} 2,9077 & 5,3846 & 8,1944 & 4,3339 & -56,2033 & -15,3493 & -11,2888 & -3,2574 & -55,0626 \end{bmatrix}. \tag{3.76}$$

A Figura 5a mostra os autovalores das matrizes A e $(A+BK)$. A matriz A possui um autovalor duplo na origem e um fora da região de estabilidade. Contudo, através da realimentação, todos os autovalores são alocados na região de estabilidade. A Figura 5b mostra as respostas $z(t)$ e $\theta(t)$ da estabilização, para uma condição inicial $x_0 = [1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; \pi/6 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0]^T$. A simulação implementa as equações não lineares do modelo (3.70), com a realimentação $F(t) = Kx(t)$, e é realizada no ambiente SIMULINK do *software* MATLAB, com passo de integração $h = 0,001$. A integração fracionária é realizada com o bloco *fractional integrator* do pacote computacio-

nal FONCOM (*Fractional Order Modeling Control*) (TEPLJAKOV; PETLENKOV; BELIKOV, 2013), para a frequência $\omega \in [\omega_l, \omega_h] = [0,1\ rad/s, 10\ rad/s]$. Note que $z(0)$ e $\theta(0)$, do vetor da condições iniciais, não incidem sobre os integradores fracionários na simulação do sistema não linear. As derivadas fracionárias para a realimentação com o vetor $x(t)$ são obtidas através dos integradores de ordem $\alpha = 0.5$, da seguinte forma: ${}^cD^{0,5}z(t) = I^{0,5}\dot{z}(t)$, ${}^cD^{1,5}z(t) = I^{0,5}\ddot{z}(t)$, ${}^cD^{0,5}\theta(t) = I^{0,5}\dot{\theta}(t)$ e ${}^cD^{1,5}\theta(t) = I^{0,5}\ddot{\theta}(t)$, em que é necessária a disponibilidade de $\dot{\theta}(t)$ e $\ddot{\theta}(t)$. Note que o controlador projetado a partir do modelo linearizado em torno do ponto de equilíbrio $x_{eq} = [0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^T$ foi eficaz mesmo para um $\theta(0) = 30^o$ afastado do ponto de equilíbrio.

Figura 5 - Resultados do pêndulo invertido de ordem $\alpha = 0,5$



(a) Autovalores das matrizes dinâmicas

(b) Evolução das coordenadas $\theta(t)$ e $z(t)$ sob a lei de controle (3.4)

Fonte: próprio autor.

Exemplo 3.2. Considere o sistema linear incerto invariante no tempo de ordem $\alpha = 0,5$:

$$ {}^cD^{0,5}x(t) = A(\lambda)x(t) + B(\lambda)u(t), \tag{3.77}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -5 \\ -5 & a & 1 \\ b & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x(t) = [x_1(t)\ \ x_2(t)\ \ x_3(t)]^T,$$

com matrizes $(A,B)(\lambda)$ conforme (3.2) e os parâmetros $-1 < a < 1$ e $-1 < b < 1$.

A matriz incerta $A(\lambda)$ pertence ao politopo de vértices:

$$\Big[A_1|\,A_2|\,A_3|\,A_4\Big] = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 3 & 3 & -5 & 3 & 3 & -5 & 3 & 3 & -5 & 3 & 3 & -5 \\ -5 & -1 & 1 & -5 & -1 & 1 & -5 & 1 & 1 & -5 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right].$$

É aplicada a metodologia proposta no Teorema 3.3 para calcular um ganho estabilizante K da realimentação α-derivativa. Da solução das LMIs em (3.34) e (3.35), as variáveis X e Y, bem como o ganho K, são:

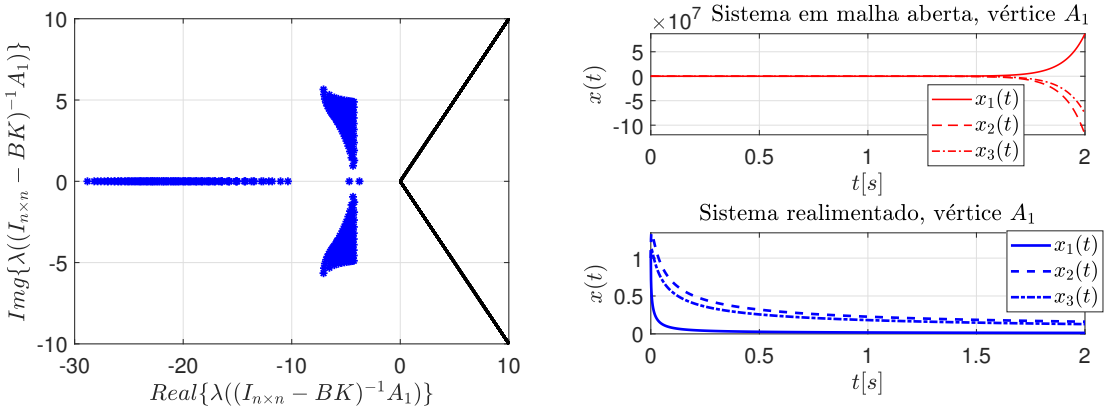
$$X = \begin{bmatrix} 0,7348+0,0000i & -0,2680+0,0229i & 0,3610+0,0701i \\ -0,2680-0,0229i & 0,7806+0,0000i & 0,3381+0,0930i \\ 0,3610-0,0701i & 0,3381-0,0930i & 0,5946+0,0000i \end{bmatrix}, \tag{3.78}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0,9094 & -0,4465 & 0,3737 \\ -0,5012 & 1,0794 & 0,6383 \end{bmatrix}, \tag{3.79}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0,9328 & -0,0501 & -0,1956 \\ -0,5514 & 0,5706 & 0,7451 \end{bmatrix}. \tag{3.80}$$

A Figura 6a mostra as localizações dos autovalores do sistema realimentado para todas as combinações de valores de a e b, em seus respectivos intervalos, em um *grid* de $0,2$. Note que esse *cluster* de autovalores está alocado na região de estabilidade do sistema de ordem $\alpha = 0,5$. A Figura 6b apresenta a simulação das respostas obtidas via algoritmo de *Adams-Bashforth* (Apêndice A), para um passo de integração $h = 0,001$ e vértice A_1 do politopo: note que o sistema em malha aberta evolui de forma instável a partir de uma condição inicial $x_0 = [1 \;\; 1 \;\; 1]^T$ e é estabilizado sob o ganho K em (3.80).

Figura 6 - Exemplo numérico, sistema de ordem $\alpha = 0,5$



(a) Autovalores do sistema linear de ordem $\alpha = 0,5$ submetido à lei de controle (3.6)

(b) Comportamento do sistema linear de ordem $\alpha = 0,5$ submetido à lei de controle em (3.6)

Fonte: próprio autor.

Exemplo 3.3. Considere o sistema linear incerto invariante no tempo de ordem $\alpha = 1,5$:

$$^cD^{1,5}x(t) = A(\lambda)x(t) + B(\lambda)u(t), \tag{3.81}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 10 & a & -1 \\ b & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x(t) = [x_1(t) \;\; x_2(t) \;\; x_3(t)]^T,$$

com os parâmetros $0 < a < 1$ e $0 < b < 1$.

A matriz incerta $A(\lambda)$ pertence ao politopo de vértices:

$$\Big[A_1|\,A_2|\,A_3|\,A_4\Big] = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 10 & 0 & -1 & 10 & 0 & -1 & 10 & 1 & -1 & 10 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right].$$

É aplicada a metodologia proposta no Teorema 3.5 para calcular um ganho estabilizante K da realimentação α-derivativa. Da solução das LMIs em (3.55) e (3.56), as variáveis X e Y, bem como o ganho K, são:

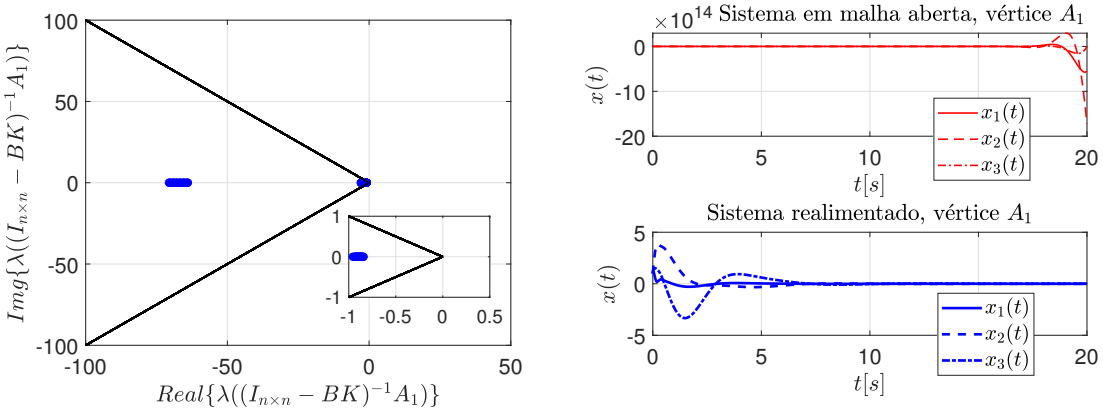
$$X = \begin{bmatrix} 0,5158 & -0,4835 & 0,2177 \\ -0,4835 & 0,7776 & 0,0868 \\ 0,2177 & 0,0868 & 1,3092 \end{bmatrix}, \tag{3.82}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0,5609 & -0,8226 & 0,5564 \\ -0,4134 & 0,8435 & 0,0202 \end{bmatrix}, \tag{3.83}$$

$$K = \begin{bmatrix} -0,5438 & -1,4644 & 0,6126 \\ 0,7995 & 1,6069 & -0,2241 \end{bmatrix}. \tag{3.84}$$

A Figura 7a mostra as localizações dos autovalores do sistema realimentado para todas as combinações de valores de a e b, em seus respectivos intervalos, em um *grid* de $0,2$. Note que esse *cluster* de autovalores está alocado na região de estabilidade do sistema de ordem $\alpha = 1,5$. A Figura 7b apresenta a simulação das respostas obtidas via algoritmo de *Adams-Bashforth* (Apêndice A), para um passo de integração $h = 0,01$ e vértice A_1 do politopo: note que o sistema em malha aberta evolui de forma instável a partir das condições iniciais $x_0 = [1 \;\; 1 \;\; 1]^T$, $\dot{x}_0 = [0 \;\; 0 \;\; 0]^T$ e é estabilizado sob o ganho K em (3.84).

Figura 7 - Exemplo numérico, sistema de ordem $\alpha = 1,5$



(a) Autovalores do sistema linear de ordem $\alpha = 1,5$ submetido à lei de controle em (3.6)

(b) Comportamento do sistema linear de ordem $\alpha = 1,5$ submetido à lei de controle em (3.6)

Fonte: próprio autor.

3.4 CONCLUSÕES DO CAPÍTULO

Esse capítulo apresentou resultados de estabilização vigentes na literatura para sistemas fracionários via LMIs, com base nos critérios de estabilidade apresentado no capítulo 2. Além disso, são propostos resultados de estabilização por realimentação α-derivativa via LMIs: exemplos numéricos ilustram a efetividade da proposta.

4 CONTROLE DE SAÍDA DE SISTEMAS DE ORDEM $\alpha \in (0,2)$ EMPREGANDO UM OBSERVADOR DE PSEUDO-ESTADOS

O objetivo desse capítulo é fornecer uma metodologia de contr ole de saída, a qual é posteriormente aplicada a um análogo elétrico do modelo vigente para o sistema respiratório humano. Nesse sentido, a metodologia poderá ser utilizada no projeto de um respirador mecânico, pois fornece uma pressão de ar adequada para a geração de um fluxo de ar em um perfil de tempo desejado, representando um elo entre o controle moderno e a bioengenharia. O método começa com uma descrição em espaço de pseudo-estados, usando a derivada de *Caputo*, do referido análogo elétrico. O projeto de controle subsequente inclui um observador de pseudo-estado, *leaky integrators* (WEITENBERG et al., 2018) e uma malha externa. Os ganhos envolvidos são projetados através de condições em *linear matrix inequality* (LMI) para a alocação regional de autovalores. A robustez da malha de controle é analisada com as matrizes incertas previstas diretamente no modelo, as quais incluem variações nos parâmetros dentro de faixas porcentuais.

Uma propriedade desejável para os sistemas de malha fechada é a alocação dos autovalores em uma região específica do plano complexo, a fim de garantir certos índices de desempenho do sistema. A condição em LMI para a $\mathfrak{D}$-estabilidade (alocação regional de autovalores) remonta ao trabalho de Chilali, Gahinet e Apkarian (1999), cujas ideias fundamentais foram depois aplicadas a sistemas fracionários (ZHANG; CHEN, 2015; ZHANG; ZHANG, 2019). Em paralelo aos trabalhos sobre $\mathfrak{D}$-estabilidade, vale ressaltar, como já abordado no Capítulo 2, a variedade de trabalhos que fornecem condições em LMIs no escopo geral de estabilidade e controle de sistemas fracionários (MATIGNON, 1996; FARGES; MOZE; SABATIER, 2009; SABATIER; MOZE; FARGES, 2010; LU; CHEN, 2010; ZHANG; YU; YU, 2016). Em aplicações práticas, os pseudo-estados podem não estar completamente acessíveis, são conhecidas apenas as entradas e saídas da planta fracionária. Nesse caso, a estimação dos pseudo-estados e o controle da planta pode ser realizado através de um observador de pseudo-estados. Vários trabalhos fundamentados no observador de *Luenberger* fracionário são reportados na literatura, com diferentes escopos (MATIGNON; D'ANDRÉA-NOVEL, 1997; N'DOYE et al., 2009; LAN; HUANG; ZHOU, 2012; QIU; JI, 2017).

Assume-se que o sistema sob consideração é descrito pelo modelo da forma:

$$\mathscr{D}^{\alpha} x(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{4.1}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \tag{4.2}$$

com $\alpha \in (0,2)$ a ordem fracionária, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de pseudo-estados, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ a entrada, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ o vetor de saída e $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $C \in \mathbb{R}^{q\times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{q\times p}$ matrizes constantes. Dado $u(t)$, obtém-se a medição $y(t)$. O vetor $x(t)$ é desconhecido. Um controlador de saída com dupla ação integral é proposto, no qual a estimação dos pseudo-estados é realizada através

de um observador fracionário linear do tipo *Luenberger*:

$$\mathscr{D}^{\alpha}\hat{x}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)), \tag{4.3}$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + Du(t), \tag{4.4}$$

$$\mathscr{D}^{\alpha}w_1(t) = r(t) - y(t) - \varepsilon w_1(t), \tag{4.5}$$

$$\mathscr{D}^{\alpha}w_2(t) = w_1(t) - \varepsilon w_2(t), \tag{4.6}$$

$$u(t) = -K_x\hat{x}(t) - K_{w_1}w_1(t) - K_{w_2}w_2(t), \tag{4.7}$$

com $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de pseudo-estados do observador, $\hat{y}(t) \in \mathbb{R}^q$ a saída do observador, $w_1(t), w_2(t) \in \mathbb{R}^q$ as ações integrais, $r(t) \in \mathbb{R}^q$ a referência de controle, $L \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $K_x \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $K_{w_1}, K_{w_2} \in \mathbb{R}^{p\times q}$ matrizes de ganho e ε uma constante positivo de valor pequeno.

Observação 4.1. O observador linear de ordem fracionária do tipo *Luenberger* proposto em (4.3)-(4.6) considera que a especificação ideal dos erros estacionários para entradas em degrau e rampa é igual a zero. Da teoria clássica de controle (OGATA, 2010), dada uma função de transferência $Y(s)/U(s) = G(s)$, então as condições para erros de estado estacionário nulos ($e(\infty) = r(\infty) - y(\infty)$) para os sinais de entrada degrau e rampa $r(t)$ são:

1. A função de transferência em malha aberta $G(s)G_c(s)$ deve ter dois polos em $s = 0$;

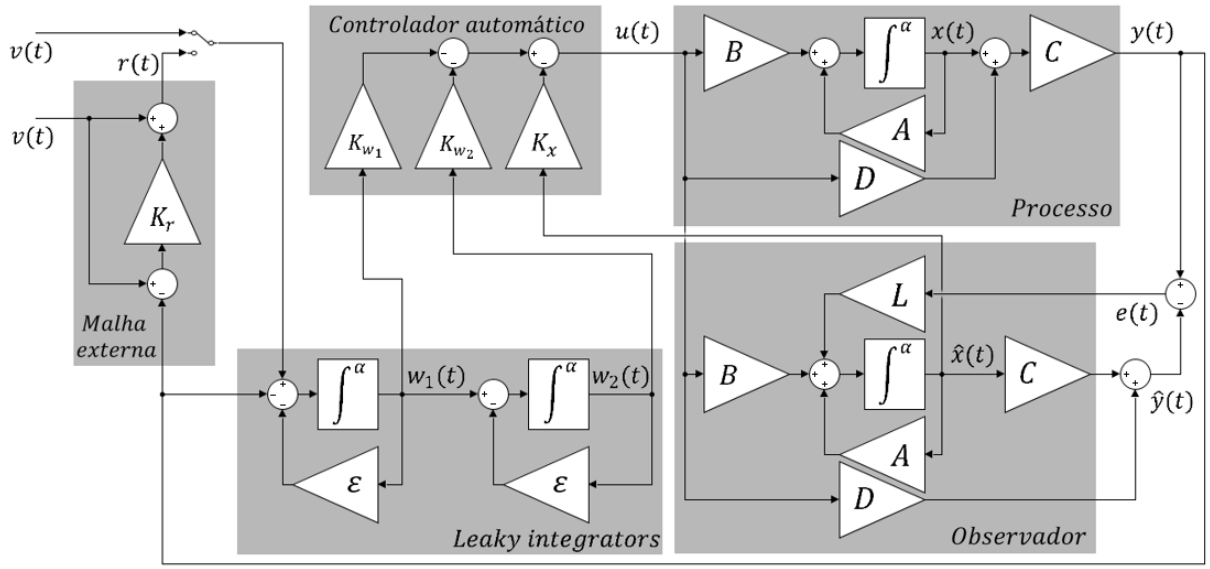
2. O ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema em malha fechada deve ser assintoticamente estável.

Quando a planta não possui dois polos em $s = 0$, então a condição 1. é válida quando o controlador $G_c(s)$ possui dois polos em $s = 0$. Neste caso, se existir pelo menos um zero da planta em $s = 0$, note que ocorre um cancelamento deste zero com um polo $s = 0$ do controlador na função de transferência em malha aberta $G(s)G_c(s)$ e o sistema em malha fechada seria instável. Para evitar este problema e com base nos resultados anteriores, quando a planta possui zeros em $s = 0$ pode-se utilizar dois *leaky integrators* de ordem fracionária descritos por (4.5) e (4.6), cujos polos são diferentes de zero e iguais à solução da equação $s^{\alpha} = \varepsilon$, com ε um pequeno parâmetro positivo. A ordem fracionária da impedância pulmonar estudada neste capítulo pode ser representada por (4.1) e (4.2), com $\alpha = 1,5$. Para calcular os zeros deste sistema, primeiro considere que $\alpha = 1$ em (4.1) e (4.2) e depois obtenha os zeros e polos. Nesta etapa encontrou-se apenas um zero em $s = 0$ e todos os pólos são reais e negativos. Então, para um $\alpha > 0$ arbitrário, substituindo s por s^{α}, segue que o numerador da função de transferência de (4.1) e (4.2) tem a forma $N_{\alpha}(s) = s^{\alpha}N_{\alpha_0}(s)$, onde $N_{\alpha_0}(0) \neq 0$ tal que $N_{\alpha_0}(s)$ não tem zeros em $s = 0$. Assim, a planta também possui zeros em $s = 0$, e o observador proposto em (4.5)-(4.7), com *leaky integrators*, é uma opção para controlar este sistema.

A Figura 8 apresenta o diagrama de blocos do controle, inicialmente com a chave na posição indicada, em que $\int^{\alpha}$ denota o integrador fracionário de ordem α. A entrada $v(t)$ é referente a

uma malha externa adicionada posteriormente e $v(t) = r(t)$ na ausência dessa malha externa ($K_r = 0$).

Figura 8 - Diagrama de blocos, controle de saída



Fonte: próprio autor.

Seja o erro da estimação de pseudo-estado:

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t). \tag{4.8}$$

De (4.8) e (4.7), a lei de controle é expressa como:

$$u(t) = -K_x(x(t) - \tilde{x}(t)) - K_{w_1} w_1(t) - K_{w_2} w_2(t). \tag{4.9}$$

Substituindo (4.9) em (4.1), obtém-se:

$$\mathscr{D}^{\alpha} x(t) = (A - BK_x)x(t) + BK_x\tilde{x}(t) - BK_{w_1} w_1(t) - BK_{w_2} w_2(t). \tag{4.10}$$

Aplicando o operador $\mathscr{D}^{\alpha}$ em (4.8), de (4.1), (4.2), (4.3) e (4.4):

$$\mathscr{D}^{\alpha}\tilde{x}(t) = \mathscr{D}^{\alpha}x(t) - \mathscr{D}^{\alpha}\hat{x}(t) = A(x(t) - \hat{x}(t)) - LC(x(t) - \hat{x}(t)) = (A - LC)\tilde{x}(t). \tag{4.11}$$

Substituindo (4.2) e (4.9) em (4.5) resulta em:

$$\mathscr{D}^{\alpha} w_1(t) = r(t) - Cx(t) + DK_x(x(t) - \tilde{x}(t)) + DK_{w_1} w_1(t) + DK_{w_2} w_2(t) - \varepsilon w_1(t), \tag{4.12}$$

$$= r(t) + (DK_x - C)x(t) - DK_x\tilde{x}(t) + (DK_{w_1} - \varepsilon I_{q\times q})w_1(t) + DK_{w_2} w_2(t). \tag{4.13}$$

De (4.6), (4.10), (4.11) e (4.13), uma equação em espaço de pseudo-estados para o sistema

de malha fechada pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \mathscr{D}^{\alpha}x(t) \\ \mathscr{D}^{\alpha}w_1(t) \\ \mathscr{D}^{\alpha}w_2(t) \\ \mathscr{D}^{\alpha}\tilde{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A-BK_x) & -BK_{w_1} & -BK_{w_2} & BK_x \\ (DK_x-C) & DK_{w_1}-\varepsilon I_{q\times q} & DK_{w_2} & -DK_x \\ 0_{q\times n} & I_{q\times q} & -\varepsilon I_{q\times q} & 0_{q\times n} \\ 0_{n\times n} & 0_{n\times q} & 0_{n\times q} & (A-LC) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w_1(t) \\ w_2(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n\times q} \\ I_{q\times q} \\ 0_{q\times q} \\ 0_{n\times q} \end{bmatrix} r(t). \tag{4.14}$$

Os autovalores da malha fechada são os autovalores de $(A-LC)$ e $(A_{xw}-B_{xw}K_{xw})$, em que:

$$A_{xw} = \begin{bmatrix} A & 0_{n\times q} & 0_{n\times q} \\ -C & -\varepsilon I_{q\times q} & 0_{q\times q} \\ 0_{q\times n} & I_{q\times q} & -\varepsilon I_{q\times q} \end{bmatrix}, \quad B_{xw} = \begin{bmatrix} B \\ -D \\ 0_{q\times p} \end{bmatrix}, \quad K_{xw} = \begin{bmatrix} K_x & K_{w_1} & K_{w_2} \end{bmatrix}. \tag{4.15}$$

Uma malha de controle estável é obtida escolhendo K_{xw} e L tais que os autovalores de $(A_{xw}-B_{xw}K_{xw})$ e $(A-LC)$ estejam localizado na região $\mathscr{R}$ em (2.7). O Teorema 4.2, apresentado na próxima subseção, é empregado para essa proposta, o qual inclui alocação regional de autovalores. De (4.2) e (4.9), a equação de saída é:

$$y(t) = Cx(t) - DK_x(x(t)-\tilde{x}(t)) - DK_{w_1}w_1(t) - DK_{w_2}w_2(t), \tag{4.16}$$

$$= (C-DK_x)x(t) + DK_x\tilde{x}(t) - DK_{w_1}w_1(t) - DK_{w_2}w_2(t). \tag{4.17}$$

4.1 CONDIÇÃO EM LMI PARA $\mathfrak{D}$-ESTABILIDADE DE SISTEMAS DE ORDEM $\nu \in (0,2)$

Inicialmente considere a definição e teorema pertinentes:

Definição 4.1. (CHILALI; GAHINET, 1996) Uma região $\mathfrak{D}$ do plano complexo é chamado região LMI se existe uma matriz simétrica $L \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e uma matriz $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$ tal que $\mathfrak{D} = \{z \in \mathbb{C} : f_{\mathfrak{D}}(z) \prec 0\}$, com $f_{\mathfrak{D}}(z) = L + zM + \bar{z}M^T$.

Observação 4.2. Note que $f_{\mathfrak{D}}(z) \prec 0$ é uma LMI em z e $\bar{z}$. Logo, as chamadas regiões LMIs são convexas e, além disso, são simétricas com relação ao eixo real para qualquer $z \in \mathfrak{D}$, pois $f_{\mathfrak{D}}(\bar{z}) = \overline{f_{\mathfrak{D}}(z)} \prec 0$ (CHILALI; GAHINET, 1996).

Teorema 4.1. (CHILALI; GAHINET, 1996) A matriz A é $\mathfrak{D}$-estável se e somente se existe uma matriz simétrica $X \succ 0$, tal que $\mathscr{M}_{\mathfrak{D}}(A,X) \prec 0$, com $\mathscr{M}_{\mathfrak{D}}(A,X) = L\otimes X + M\otimes(AX) + M^T \otimes (AX)^T$.

Demonstração. É encontrada em Chilali e Gahinet (1996). □

Seja $\{\, z = (x+jy) \in \mathbb{C},\ z \in S(\gamma,r,\theta) = \cap\big(f_{\mathfrak{D}_1}(z) < 0, f_{\mathfrak{D}_2}(z) \prec 0, f_{\mathfrak{D}_3}(z) \prec 0\big)\}$ a região de interesse para a alocação dos autovalores, com $f_{\mathfrak{D}_1}(z) < 0$, $f_{\mathfrak{D}_2}(z) \prec 0$ e $f_{\mathfrak{D}_3}(z) \prec 0$ a região delimitada, respectivamente, por um semi-plano à esquerda de $-\gamma$, $\gamma > 0$, um disco centrado na origem de raio r e um setor cônico no semi-plano esquerdo com vértice na origem e ângulo

interno 2θ, $\theta = \pi - \alpha\pi/2$ (CHILALI; GAHINET, 1996). Essas regiões LMIs são descritas, respectivamente, por:

$$f_{\mathfrak{D}_1}(z) = z + \bar{z} + 2\gamma < 0, \tag{4.18}$$

$$f_{\mathfrak{D}_2}(z) = \begin{bmatrix} -r & 0 \\ 0 & -r \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \bar{z}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -r & z \\ \bar{z} & -r \end{bmatrix} \prec 0, \tag{4.19}$$

$$f_{\mathfrak{D}_3}(z) = z\begin{bmatrix} sen(\theta) & cos(\theta) \\ -cos(\theta) & sen(\theta) \end{bmatrix} + \bar{z}\begin{bmatrix} sen(\theta) & cos(\theta) \\ -cos(\theta) & sen(\theta) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} (z+\bar{z})\,sen(\theta) & (z-\bar{z})\,cos(\theta) \\ -(z-\bar{z})\,cos(\theta) & (z+\bar{z})\,sen(\theta) \end{bmatrix} \prec 0. \tag{4.20}$$

O lema e teorema apresentados abaixo se referem à região específica $S(\gamma, r, \theta)$ e são escritos para a ordem $\alpha \in (0,2)$, fundamentados nos resultados de Chilali e Gahinet (1996) e Busłowicz (2011). Nesse contexto, o Teorema 4.1 é encontrado em Zhang e Chen (2015), para $\alpha \in (0,1)$.

Lema 4.1. (CHILALI; GAHINET, 1996; BUSŁOWICZ, 2011) Seja $\mathscr{D}^\alpha x(t) = Ax(t)$ um sistema linear e de ordem comensurável $\alpha \in (0,2)$, com $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de pseudo-estados e matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Seja $S(\gamma, r, \theta)$ a região $\mathfrak{D}$ da Definição 2.5. Esse sistema é $\mathfrak{D}$-estável se existe uma matriz simétrica $X \succ 0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que as LMIs são factíveis:

$$AX + XA^T + 2\gamma X \prec 0, \tag{4.21}$$

$$\begin{bmatrix} -rX & AX \\ XA^T & -rX \end{bmatrix} \prec 0, \tag{4.22}$$

$$\begin{bmatrix} \left(AX + XA^T\right) sen(\theta) & \left(AX - XA^T\right) cos(\theta) \\ \left(-AX + XA^T\right) cos(\theta) & \left(AX + XA^T\right) sen(\theta) \end{bmatrix} \prec 0, \tag{4.23}$$

$$0 < \theta \leq \pi - \alpha\pi/2 \ \text{ se } \ 1 < \alpha < 2, \tag{4.24}$$

$$0 < \theta \leq \pi/2 \ \text{ se } \ 0 < \alpha < 1. \tag{4.25}$$

Demonstração. A função $f_{\mathfrak{D}}(z) = L + zM + \bar{z}M^T$ (Definição 4.1) e $\mathscr{M}_{\mathfrak{D}}(A,X) = L \otimes X + M \otimes (AX) + M^T \otimes (AX)^T$ (Teorema 4.1) possuem a equivalência $(1, z, \bar{z}) \equiv (X, AX, XA^T)$ (CHILALI; GAHINET, 1996). Utilizando essa equivalência em (4.18), (4.19) e (4.20) obtém-se, respectivamente, (4.21), (4.22) e (4.23). A região de estabilidade para $\alpha \in (0,1)$ é não convexa (não é uma região LMI), pois inclui setores conjugados no semi-plano complexo direito, conforme o Teorema 2.1. Assim, a desigualdade (4.25) limita θ ao semi-plano complexo esquerdo, que é uma região convexa. A região de estabilidade para $\alpha \in (1,2)$ é um setor convexo contido no semi-plano complexo esquerdo, conforme o Teorema 2.1. Assim, a desigualdade (4.24) limita θ a essa região. □

Proposição 4.1. Considere a lei de controle por realimentação negativa do vetor de pseudo-estados $u(t) = -Kx(t)$ atuando no sistema (4.1) . A equação do sistema realimentado é:

$$\mathscr{D}^\alpha x(t) = (A - BK)\,x(t). \tag{4.26}$$

Teorema 4.2. (CHILALI; GAHINET, 1996; BUSŁOWICZ, 2011) O sistema (4.26) é assintoticamente estabilizável em $S(\gamma, r, \theta)$ se existem matrizes $X = X^T \succ 0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $M \in \mathbb{R}^{p\times n}$, tais que as LMIs são factíveis:

$$AX + XA^T - BM - M^T B^T + 2\gamma X \prec 0, \tag{4.27}$$

$$\begin{bmatrix} -rX & AX - BM \\ XA^T - M^T B^T & -rX \end{bmatrix} \prec 0, \tag{4.28}$$

$$\begin{bmatrix} \left(AX + XA^T - BM - M^T B^T\right) sen(\theta) & \left(AX - XA^T - BM + M^T B^T\right) cos(\theta) \\ \left(-AX + XA^T + BM - M^T B^T\right) cos(\theta) & \left(AX + XA^T - BM - M^T B^T\right) sen(\theta) \end{bmatrix} \prec 0, \tag{4.29}$$

$$0 < \theta \leq \pi/2 \text{ se } 0 < \alpha < 1, \tag{4.30}$$

$$0 < \theta \leq \pi - \alpha\pi/2 \text{ se } 1 < \alpha < 2. \tag{4.31}$$

Nesse caso, um ganho do controlador para o sistema (4.26) é:

$$K = MX^{-1}. \tag{4.32}$$

Demonstração. Suponha a existência das soluções $X = X^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $M \in \mathbb{R}^{p\times n}$. Dado que $M = KX$ e $X = X^T$, de (4.27):

$$AX + XA^T - BKX - XK^T B^T + 2\gamma X \prec 0, \tag{4.33}$$

$$(A - BK)X + X(A - BK)^T + 2\gamma X \prec 0, \tag{4.34}$$

que é a LMI (4.21) do Lema 4.1 aplicada ao sistema realimentado (4.26). De (4.28):

$$\begin{bmatrix} -rX & AX - BKX \\ XA^T - XK^T B^T & -rX \end{bmatrix} \prec 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -rX & (A - BK)X \\ X(A - BK)^T & -rX \end{bmatrix} \prec 0, \tag{4.35}$$

que é a LMI (4.22) aplicada ao sistema realimentado (4.26). De (4.29):

$$\begin{bmatrix} (AX + XA^T - BKX - XK^T B^T)sen(\theta) & (AX - XA^T - BKX + XK^T B^T)cos(\theta) \\ (-AX + XA^T + BKX - XK^T B^T)cos(\theta) & (AX + XA^T - BKX - XK^T B^T)sen(\theta) \end{bmatrix} \prec 0, \tag{4.36}$$

$$\begin{bmatrix} ((A - BK)X + X(A - BK)^T)sen(\theta) & ((A - BK)X - X(A - BK)^T)cos(\theta) \\ (-(A - BK)X + X(A - BK)^T)cos(\theta) & ((A - BK)X + X(A - BK)^T)sen(\theta) \end{bmatrix} \prec 0, \tag{4.37}$$

que é a LMI (4.23) aplicada ao sistema realimentado (4.26). □

4.2 USO DE UMA MALHA EXTERNA

Um grau de liberdade adicional para o projeto é introduzido com o uso de uma malha externa:

$$r(t) = v(t) + K_r(v(t) - y(t)) = (I_{q\times q} + K_r)v(t) - K_r y(t), \tag{4.38}$$

com $v(t) \in \mathbb{R}^q$ a referência para o controlador e $K_r \in \mathbb{R}^{q\times q}$ uma matriz de ganho a ser ajustada. De (4.2) e (4.38) e substituindo (4.9) para $u(t)$:

$$r(t) = (I_{q\times q} + K_r)v(t) - K_r(Cx(t) + Du(t)) = (I_{q\times q} + K_r)v(t) - K_rCx(t) - K_rDu(t), \quad (4.39)$$

$$= (I_{q\times q} + K_r)v(t) - K_rCx(t) - K_rD(-K_x x(t) + K_x\tilde{x}(t) - K_{w_1}w_1(t) - K_{w_2}w_2(t)), \quad (4.40)$$

$$r(t) = (I_{q\times q} + K_r)v(t) + K_r(DK_x - C)x(t) - K_rDK_x\tilde{x}(t) + K_rDK_{w_1}w_1(t) + K_rDK_{w_2}w_2(t). \quad (4.41)$$

A introdução do ganho K_r produz um deslocamento nas localizações originais dos autovalores de malha fechada. Quanto maior o valor de K_r maior é esse deslocamento. Logo, o valor de K_r a ser praticado depende do tipo de *cluster* de autovalores do sistema, visando manter a estabilidade. De (4.14) e (4.41):

$$\begin{bmatrix} \mathscr{D}^\alpha x \\ \mathscr{D}^\alpha w_1 \\ \mathscr{D}^\alpha w_2 \\ \mathscr{D}^\alpha \tilde{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A - BK_x) & -BK_{w_1} & -BK_{w_2} & BK_x \\ (DK_x - C) & DK_{w_1} - \varepsilon I_{q\times q} & DK_{w_2} & -DK_x \\ 0_{q\times n} & I_{q\times q} & -\varepsilon I_{q\times q} & 0_{q\times n} \\ 0_{n\times n} & 0_{n\times q} & 0_{n\times q} & (A - LC) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w_1 \\ w_2 \\ \tilde{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n\times q} \\ (I_{q\times q} + K_r)v + K_r(DK_x - C)x \\ -K_rDK_x\tilde{x} + K_rDK_{w_1}w_1 + K_rDK_{w_2}w_2 \\ 0_{q\times q} \\ 0_{n\times q} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (A - BK_x) & -BK_{w_1} & -BK_{w_2} & BK_x \\ (DK_x - C) + K_r(DK_x - C) & DK_{w_1} - \varepsilon I_{q\times q} + K_rDK_{w_1} & DK_{w_2} + K_rDK_{w_2} & -DK_x - K_rDK_x \\ 0_{q\times n} & I_{q\times q} & -\varepsilon I_{q\times q} & 0_{q\times n} \\ 0_{n\times n} & 0_{n\times q} & 0_{n\times q} & (A - LC) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w_1 \\ w_2 \\ \tilde{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n\times q} \\ I_{q\times q} + K_r \\ 0_{q\times q} \\ 0_{n\times q} \end{bmatrix} v. \quad (4.42)$$

Os autovalores da malha fechada são os autovalores de $(A - LC)$ e $(A_{xw} - B_{xw}K_{xw})$, em que:

$$A_{xw} = \begin{bmatrix} A & 0_{n\times q} & 0_{n\times q} \\ -C(I_{q\times q} + K_r) & -\varepsilon I_{q\times q} & 0_{q\times q} \\ 0_{q\times n} & I_{q\times q} & -\varepsilon I_{q\times q} \end{bmatrix}, \quad B_{xw} = \begin{bmatrix} B \\ -D(I_{q\times q} + K_r) \\ 0_{q\times p} \end{bmatrix}, \quad K_{xw} = \begin{bmatrix} K_x & K_{w_1} & K_{w_2} \end{bmatrix}. \quad (4.43)$$

Novamente, de (4.2) e (4.9), a equação de saída é:

$$y(t) = (C - DK_x)x(t) + DK_x\tilde{x}(t) - DK_{w_1}w_1(t) - DK_{w_2}w_2(t). \quad (4.44)$$

4.3 ANÁLISE ROBUSTA

A robustez do projeto é avaliada por meio de simulações numéricas. Alterações paramétricas são emuladas, resultando em novas matrizes $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ e $\bar{D}$, com as mesmas dimensões, respectivamente, de A, B, C e D:

$$\mathscr{D}^\alpha x(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t), \quad (4.45)$$

$$y(t) = \bar{C}x(t) + \bar{D}u(t). \quad (4.46)$$

Substituindo (4.9) para $u(t)$ em (4.45):

$$\mathscr{D}^\alpha x(t) = (\bar{A} - \bar{B}K_x)x(t) + \bar{B}K_x\tilde{x}(t) - \bar{B}K_{w_1}w_1(t) - \bar{B}K_{w_2}w_2(t). \quad (4.47)$$

Substituindo (4.4) para $\hat{y}(t)$ e (4.46) para $y(t)$ em (4.3):

$$\mathscr{D}^\alpha \hat{x}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(\bar{C}x(t) + \bar{D}u(t) - C\hat{x}(t) - Du(t)), \quad (4.48)$$

$$= (A - LC)\hat{x}(t) + L\bar{C}x(t) + [B + L(\bar{D} - D)]u(t). \quad (4.49)$$

Novamente, considere o erro da estimação de pseudo-estado:

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t). \tag{4.50}$$

Aplicando $\mathscr{D}^\alpha$ em (4.50) e definindo $\Gamma = B + L(\bar{D} - D)$, de (4.45), (4.49), (4.50) e substituindo (4.9) para $u(t)$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}^\alpha \tilde{x}(t) &= \mathscr{D}^\alpha x(t) - \mathscr{D}^\alpha \hat{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t) - (A - LC)\hat{x}(t) - L\bar{C}x(t) - \Gamma u(t), \\
&= (\bar{A} - L\bar{C})x(t) - (A - LC)\hat{x}(t) + (\bar{B} - \Gamma)u(t), \\
&= (\bar{A} - L\bar{C})x(t) - (A - LC)(x(t) - \tilde{x}(t)) + (\bar{B} - \Gamma)u(t), \\
&= [(\bar{A} - L\bar{C}) - (A - LC)]x(t) + (A - LC)\tilde{x}(t) + (\bar{B} - \Gamma)u(t), \\
&= [(\bar{A} - L\bar{C}) - (A - LC)]x(t) + (A - LC)\tilde{x}(t) \\
&+ (\bar{B} - \Gamma)[-K_x(x(t) - \tilde{x}(t)) - K_{w_1}w_1(t) - K_{w_2}w_2(t)], \qquad (4.51) \\
&= [(\bar{A} - L\bar{C}) - (A - LC) - (\bar{B} - \Gamma)K_x]x(t) + [(A - LC) + (\bar{B} - \Gamma)K_x]\tilde{x}(t) \\
&- (\bar{B} - \Gamma)K_{w_1}w_1(t) - (\bar{B} - \Gamma)K_{w_2}w_2(t). \qquad (4.52)
\end{aligned}$$

Substituindo (4.9) e (4.46) em (4.5):

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}^\alpha w_1(t) &= r(t) - \bar{C}x(t) - \bar{D}u(t) - \varepsilon w_1(t), \\
&= r(t) - \bar{C}x(t) + \bar{D}K_x(x(t) - \tilde{x}(t)) + \bar{D}K_{w_1}w_1(t) + \bar{D}K_{w_2}w_2(t) - \varepsilon w_1(t), \\
&= r(t) + (\bar{D}K_x - \bar{C})x(t) - \bar{D}K_x\tilde{x}(t) + (\bar{D}K_{w_1} - \varepsilon I_{q\times q})w_1(t) + \bar{D}K_{w_2}w_2(t). \qquad (4.53)
\end{aligned}$$

Finalmente, em vista de (4.6), (4.47), (4.52) e (4.53), a equação aumentada de pseudo-estados torna-se:

$$\begin{bmatrix} \mathscr{D}^\alpha x \\ \mathscr{D}^\alpha w_1 \\ \mathscr{D}^\alpha w_2 \\ \mathscr{D}^\alpha \tilde{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\bar{A} - \bar{B}K_x) & -\bar{B}K_{w_1} & -\bar{B}K_{w_2} & \bar{B}K_x \\ (\bar{D}K_x - \bar{C}) & (\bar{D}K_{w_1} - \varepsilon I_{q\times q}) & \bar{D}K_{w_2} & -\bar{D}K_x \\ 0_{q\times n} & I_{q\times q} & -\varepsilon I_{q\times q} & 0_{q\times n} \\ \phi & -(\bar{B} - \Gamma)K_{w_1} & -(\bar{B} - \Gamma)K_{w_2} & (A - LC) + (\bar{B} - \Gamma)K_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w_1 \\ w_2 \\ \tilde{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n\times q} \\ I_{q\times q} \\ 0_{q\times q} \\ 0_{n\times q} \end{bmatrix} r, \tag{4.54}$$

com $\phi = (\bar{A} - L\bar{C}) - (A - LC) - (\bar{B} - \Gamma)K_x$. De (4.9) e (4.46), obtém-se a equação de saída:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \bar{C}x(t) - \bar{D}K_x(x(t) - \tilde{x}(t)) - \bar{D}K_{w_1}w_1(t) - \bar{D}K_{w_2}w_2(t), \\
&= (\bar{C} - \bar{D}K_x)x(t) + \bar{D}K_x\tilde{x}(t) - \bar{D}K_{w_1}w_1(t) - \bar{D}K_{w_2}w_2(t). \qquad (4.55)
\end{aligned}$$

De (4.38), (4.46) e substituindo (4.9) para $u(t)$, obtém-se a equação da malha externa:

$$\begin{aligned}
r(t) &= (I_{q\times q} + K_r)v(t) - K_r(\bar{C}x(t) + \bar{D}u(t)) = (I_{q\times q} + K_r)v(t) - K_r\bar{C}x(t) - K_r\bar{D}u(t), \\
&= (I_{q\times q} + K_r)v(t) - K_r\bar{C}x(t) - K_r\bar{D}[-K_x(x(t) - \tilde{x}(t)) - K_{w_1}w_1(t) - K_{w_2}w_2(t)],
\end{aligned}$$

$$r(t) = (I_{q\times q} + K_r)v(t) + K_r(\bar{D}K_x - \bar{C})x(t) - K_r\bar{D}K_x\tilde{x}(t) + K_r\bar{D}K_{w_1}w_1(t) + K_r\bar{D}K_{w_2}w_2(t). \tag{4.56}$$

De (4.54) e (4.56), a equação aumentada de pseudo-estados, incluindo a malha externa, é:

$$\begin{bmatrix} \mathscr{D}^{\alpha}x \\ \mathscr{D}^{\alpha}w_1 \\ \mathscr{D}^{\alpha}w_2 \\ \mathscr{D}^{\alpha}\tilde{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\bar{A}-\bar{B}K_x) & -\bar{B}K_{w_1} & -\bar{B}K_{w_2} & \bar{B}K_x \\ (\bar{D}K_x-\bar{C})+ & \bar{D}K_{w_1}-\varepsilon I_{q\times q}+ & \bar{D}K_{w_2}+K_r\bar{D}K_{w_2} & -\bar{D}K_x-K_r\bar{D}K_x \\ K_r(\bar{D}K_x-\bar{C}) & K_r\bar{D}K_{w_1} & & \\ 0_{q\times n} & I_{q\times q} & -\varepsilon I_{q\times q} & 0_{q\times n} \\ \phi & -(\bar{B}-\Gamma)K_{w_1} & -(\bar{B}-\Gamma)K_{w_2} & (A-LC)+(\bar{B}-\Gamma)K_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w_1 \\ w_2 \\ \tilde{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n\times q} \\ I_{q\times q}+K_r \\ 0_{q\times q} \\ 0_{n\times q} \end{bmatrix} v(t), \tag{4.57}$$

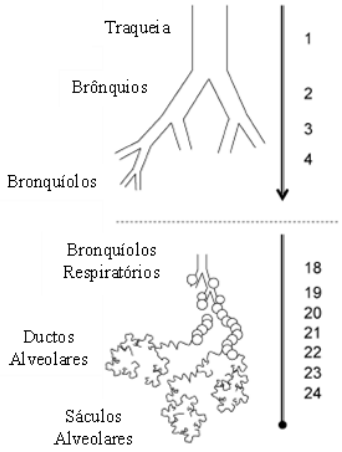
com $\phi = (\bar{A}-L\bar{C})-(A-LC)-(\bar{B}-\Gamma)K_x$. De (4.9) e (4.46), a equação da nova saída é:

$$y(t) = (\bar{C}-\bar{D}K_x)x(t)+\bar{D}K_x\tilde{x}(t)-\bar{D}K_{w_1}w_1(t)-\bar{D}K_{w_2}w_2(t). \tag{4.58}$$

4.4 MODELO DO SISTEMA RESPIRATÓRIO HUMANO PARA APLICAÇÃO DA METODOLOGIA

Como aplicação da metodologia proposta de controle de saída com observador de pseudo-estado, é utilizado o análogo elétrico do modelo vigente para o sistema respiratório humano, sistema este que pode ser aproximado por uma estrutura simétrica e recursiva de 24 níveis ou gerações, da traquéia aos alvéolos. Considera-se que o fluxo de ar é igualmente dividido em todas as bifurcações. Seja o esquemático:

Figura 9 - Árvore respiratória



Fonte: adaptado de Ionescu et al. (2009).

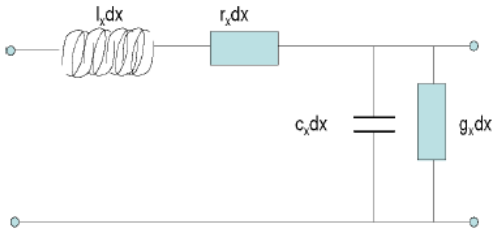
As gerações pulmonares 1 a 16 realizam o transporte gasoso e as gerações 17 a 24 (abaixo do pontilhado) realizam as trocas gasosas (WEIBEL, 2005). Nas subseções abaixo são apresentadas alguns passos para a obtenção do referido análogo elétrico, considerando tanto a natureza elástica (IONESCU; SEGERS; KEYSER, 2008) quanto viscoelástica (IONESCU; KOSIŃSKI; KEYSER, 2010) para a parede dos dutos respiratórios. Em Ionescu, Machado e Keyser (2011) é realizada uma alteração nesse análogo: é utilizado o CPE (ELWAKIL, 2010; WESTERLUND; EKSTAM, 1994), também conhecido como capacitor fracionário, ao invés do capacitor convencional. Essa último análogo é aqui utilizado para a obtenção de um modelo de ordem fracionária em espaço de pseudo-estados. A utilização do CPE na modelagem é apropriada porquanto a natureza fracionária do sistema respiratório humano decorre de sua estrutura recursiva e dicotô-

mica do tipo fractal (IONESCU et al., 2009; IONESCU; KEYSER, 2008; IONESCU; SEGERS; KEYSER, 2008).

4.4.1 ANÁLOGO ELÉTRICO DA REDE PULMONAR

Conforme Ionescu, Kosiński e Keyser (2010), o análogo elétrico do sistema respiratório humano é uma linha de transmissão monofásica. A analogia entre os parâmetros mecânicos e elétricos são : tensão elétrica $v(x,t)$ e pressão respiratória $p(x,t)$, corrente elétrica $i(x,t)$ e fluxo de ar $q(x,t)$, com x uma posição arbitrária no duto respiratório (linha de transmissão) e t o instante de tempo. As dinâmicas tensão/corrente e pressão/fluxo são, pois, equivalentes. A Figura 10 mostra o modelo de um comprimento infinitesimal dx de linha de transmissão monofásica, em que os parâmetros, por unidade de comprimento, são: resistência r_x, que modela a dissipação do fluxo de ar nas vias aéreas; capacitância c_x, que modela a conformidade de volume das vias aéreas (capacidade de inflação/deflexão); indutância longitudinal l_x, que modela a inércia do ar e a condutância transversal g_x, que modela as perdas viscosas.

Figura 10 - Linha de transmissão



Fonte: retirado de Ionescu, Kosiński e Keyser (2010).

Das leis de *Kirchhoff*, obtém-se as equações diferenciais parciais de primeira ordem que descrevem o comportamento das pressões $p(x,t)$ (tensões) e fluxos $q(x,t)$ (correntes):

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = -r_x q(x,t) - l_x \frac{\partial q(x,t)}{\partial t}, \tag{4.59}$$

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = -g_x p(x,t) - c_x \frac{\partial p(x,t)}{\partial t}. \tag{4.60}$$

Considerando $s = j\omega$, essas equações são a transformada inversa das seguintes equações no domínio da frequência ω:

$$\frac{\partial P(x,\omega)}{\partial x} = -Z(\omega)Q(x,\omega), \quad Z(\omega) = (r_x + j\omega l_x), \tag{4.61}$$

$$\frac{\partial Q(x,\omega)}{\partial x} = -Y(\omega)P(x,\omega), \quad Y(\omega) = (g_x + j\omega c_x). \tag{4.62}$$

Impedâncias longitudinal e transversal são definidas, respectivamente:

$$Z_l(\omega) = Z(\omega) = (r_x + j\omega l_x), \tag{4.63}$$

$$Z_t(\omega) = \frac{1}{Y(\omega)} = \frac{1}{(g_x + j\omega c_x)}. \tag{4.64}$$

A impedância característica e a constante de propagação são também definidas:

$$Z_0 = \sqrt{Z_l Z_t}, \tag{4.65}$$

$$\gamma = \sqrt{Z_l / Z_t}. \tag{4.66}$$

As seguintes relações são depreendidas: $Z_l = \gamma Z_0$ e $Z_t = Z_0/\gamma$. Segue um resumo dos passos para a obtenção dos parâmetros r_x, c_x, l_x e g_x do análogo elétrico representado pela linha de transmissão (duto respiratório), nos casos de modelos viscoelástico e elástico. Posteriormente é apresentado o análogo elétrico que utiliza o CPE.

4.4.1.1 ANÁLOGO ELÉTRICO SEGUNDO O MODELO VISCOELÁSTICO

Ainda da teoria apresentada em Ionescu, Kosiński e Keyser (2010), as impedâncias transversal Z_t, longitudinal Z_l e característica Z_0 da linha de transmissão monofásica apresentada na Figura 10, por unidade de comprimento e em função dos parâmetros aerodinâmicos característicos, são:

$$Z_l = \frac{j\omega\rho}{\pi R^2 \acute{M}_{10}} e^{-j\acute{\varepsilon}_{10}} = \frac{\omega\rho}{\pi R^2 \acute{M}_{10}} e^{-j(\acute{\varepsilon}_{10} - \frac{\pi}{2})} = \frac{\omega\rho}{\pi R^2 \acute{M}_{10}} (sen(\acute{\varepsilon}_{10}) + jcos(\acute{\varepsilon}_{10})), \tag{4.67}$$

$$Z_t = \frac{1}{\frac{2\pi R^3 \omega (1-\nu_P^2)^2}{|E^*|h} e^{j(-\varphi_{E^*} + \frac{\pi}{2})}}, \tag{4.68}$$

$$Z_0 = \frac{\rho}{\pi R^2} \frac{1}{1-\nu_P^2} \sqrt{\frac{|E^*|h}{2\rho R}} \frac{1}{\sqrt{\acute{M}_{10}}} e^{-j(\frac{\acute{\varepsilon}_{10}}{2} + \frac{\varphi_{E^*}}{2})}, \tag{4.69}$$

em que ω é a frequência de um sinal de excitação senoidal aplicado ao sistema respiratório a fim de analisar o fluxo de ar, $\rho = 1,075[Kg/m^3]$ é a densidade do ar de insuflação (considerado Newtoniano), $\mu = 1,8 \times 10^{-5}[Kg/m.s]$ a constante de viscosidade do ar, $\nu_P = 0,45$ é o coeficiente de *Poisson*, R é o raio interno do duto respiratório e h é a espessura da parede do duto; $\acute{M}_{10}$ é o módulo e $\acute{\varepsilon}_{10}$ a fase de:

$$1 - 2\frac{J_1(\lambda)}{\lambda J_0(\lambda)}, \tag{4.70}$$

com $\lambda = j^{3/2}\delta$ (com $\delta = R\sqrt{\omega\rho/\mu}$ o parâmetro de *Womersley*), $J_0(.)$ e $J_1(.)$ as funções de *Bessel* do tipo 1, de grau 0 e 1, respectivamente. Além disso, $|E^*|$ é tal que:

$$E^* = E_{re} + jE_{imag} = |E^*|e^{j\varphi_{E^*}}, \tag{4.71}$$

$$E_{re} = E + \eta cos(\frac{\alpha\pi}{2})\omega^\alpha + Hcos(\frac{-\beta\pi}{2})\omega^{-\beta}, \tag{4.72}$$

$$E_{imag} = \eta sen(\frac{\alpha\pi}{2})\omega^\alpha + Hsen(\frac{-\beta\pi}{2})\omega^{-\beta}, \tag{4.73}$$

com E^* o módulo de viscoelasticidade complexo, η o coeficiente de amortecimento, $H < 0$ o parâmetro introduzido para modelar a relaxação com variação da tensão sob deformação constante, $0 < \alpha, \beta < 1$ as ordens fracionárias do modelo de viscoelasticidade adotado e E o módulo de elasticidade efetivo do tecido:

$$E = \kappa E_c + (1-\kappa)E_s, \tag{4.74}$$

com κ a fração de cartilagem, $E_c = 400[kPa]$ o módulo de elasticidade do tecido catilaginoso (colágeno) e $E_s = 60[kPa]$ o módulo de elasticidade do tecido macio (elastina). Os parâmetros R, h e κ de cada nível dúctil são encontrados na Tabela 1 de Ionescu, Kosiński e Keyser (2010), bem como seu comprimento L. Do parâmetro de *Womersley* tem-se $\delta = R\sqrt{\omega\rho/\mu} \Rightarrow \omega\rho = \mu\delta^2/R^2$ e a expressão (4.67) é reescrita como:

$$Z_l = \frac{\mu\delta^2}{\pi R^4 \acute{M}_{10}}(sen(\acute{\varepsilon}_{10}) + jcos(\acute{\varepsilon}_{10})). \tag{4.75}$$

De (4.63) e (4.75) a resistência da linha (duto) de comprimento L é estimada:

$$R_e = Lr_x = L\frac{\mu\delta^2}{\pi R^4 \acute{M}_{10}} sen(\acute{\varepsilon}_{10}). \tag{4.76}$$

De (4.63) e (4.67), a indutância da linha (duto) de comprimento L é estimada:

$$L_e = Ll_x = L\frac{\rho}{\pi R^2 \acute{M}_{10}} cos(\acute{\varepsilon}_{10}). \tag{4.77}$$

De (4.64) e (4.68), a condutância e capacitância da linha (duto) de comprimento L são estimadas, respectivamente:

$$G_e = Lg_x = L\frac{2\pi R^3 \omega(1-\nu_P^2)^2}{|E^*|h} sen(\varphi_E), \tag{4.78}$$

$$C_e = Lc_x = L\frac{2\pi R^3 (1-\nu_P^2)^2}{|E^*|h} cos(\varphi_E). \tag{4.79}$$

Observação 4.3. O comportamento entre a tensão $\sigma(t)$ e a deformação $\varepsilon(t)$ de natureza viscoelástica da parede das vias aéreas é governado pela equação inteira:

$$\frac{\partial\sigma(t)}{\partial t} = E\frac{\partial\varepsilon(t)}{\partial t} + \eta\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varepsilon(t) + H\varepsilon(t), \tag{4.80}$$

que corresponde a uma combinação dos modelos de *Maxwell* e *Voigt* aplicados à viscoelasticidade linear. Aplicando a transformada de *Fourrier* nessa equação, obém-se:

$$E^*_{int} = \frac{\hat{\sigma}(\omega)}{\hat{\varepsilon}(\omega)} = E + j(\eta\omega - \frac{H}{\omega}), \tag{4.81}$$

com $\hat{\sigma}(\omega)$ e $\hat{\varepsilon}(\omega)$ a tensão e deformação, respectivamente, no domínio da frequência ω. Essa equação implica numa dependência não linear do módulo complexo de viscoelasticidade E^*_{int} com a frequência ω. Segundo Ionescu, Kosiński e Keyser (2010), devido aos complexos fenômenos não lineares exibidos no parênquima pulmonar e sua natureza viscoelástica intrínseca,

é difícil relacionar as propriedades mecânicas dos pulmões ao sistema diferencial de ordem inteira, como o modelo misto de *Maxwell-Voigt* em (4.80). Em vista disso, é considerada a seguinte versão de ordem fracionária de (4.80):

$$\frac{\partial^{\beta}\sigma(t)}{\partial t^{\beta}} = E\frac{\partial^{\beta}\varepsilon(t)}{\partial t^{\beta}} + \eta\frac{\partial^{\alpha+\beta}\varepsilon(t)}{\partial t^{\alpha+\beta}} + H\varepsilon(t). \tag{4.82}$$

Aplicando a integral de ordem β em ambos os lados:

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta\frac{\partial^{\alpha}\varepsilon(t)}{\partial t^{\alpha}} + H\frac{\partial^{-\beta}\varepsilon(t)}{\partial t^{-\beta}}. \tag{4.83}$$

Da transformada de *Fourrier*, obtém-se o módulo de viscoelasticidade complexa já apresentado em (4.71):

$$E^{*} = \frac{\hat{\sigma}(\omega)}{\hat{\varepsilon}(\omega)} = (E + (j\omega)^{\alpha}\eta + (j\omega)^{-\beta}H), \tag{4.84}$$

com $\hat{\sigma}(\omega)$ e $\hat{\varepsilon}(\omega)$ a tensão e deformação no domínio da frequência ω, respectivamente.

4.4.1.2 ANÁLOGO ELÉTRICO SEGUNDO O MODELO ELÁSTICO

Em Ionescu, Segers e Keyser (2008) os autores não consideram as propriedades viscoelásticas das paredes das vias aéreas: é empregado o modelo puramente elástico, em que a tensão e a deformação estão relacionadas pela lei de *Hooke* $\sigma(t) = E\varepsilon(t)$, com E o modulo de elasticidade efetivo já apresentado em (4.74). Nesse caso, as impedâncias transversal Z_t, longitudinal Z_l e característica Z_0 da linha de transmissão da Figura 10, por unidade de comprimento e em função dos parâmetros aerodinâmicos característicos, são:

$$Z_l = \frac{j\omega\rho}{\pi R^2 \acute{M}_{10}} e^{-j\acute{\varepsilon}_{10}} = \frac{\omega\rho}{\pi R^2 \acute{M}_{10}} e^{-j(\acute{\varepsilon}_{10}-\frac{\pi}{2})} = \frac{\omega\rho}{\pi R^2 \acute{M}_{10}}(sen(\acute{\varepsilon}_{10}) + jcos(\acute{\varepsilon}_{10})), \tag{4.85}$$

$$Z_t = \frac{1}{\frac{2\pi R^3\omega(1-\nu_P^2)}{Eh} e^{j\frac{\pi}{2}}}, \tag{4.86}$$

$$Z_0 = \frac{\rho}{\pi R^2}\frac{1}{1-\nu_P^2}\sqrt{\frac{Eh}{2\rho R}}\frac{1}{\sqrt{\acute{M}_{10}}} e^{-j\frac{\acute{\varepsilon}_{10}}{2}}. \tag{4.87}$$

A nomeação dos parâmetros é a mesma em relação ao caso viscoelástico. Do parâmetro de *Womersley* $\delta = R\sqrt{\omega\rho/\mu} \Rightarrow \omega\rho = \delta^2\mu/R^2$ e a expressão (4.85) é reescrita como:

$$Z_l = \frac{\mu\delta^2}{\pi R^4 \acute{M}_{10}}(sen(\acute{\varepsilon}_{10}) + jcos(\acute{\varepsilon}_{10})). \tag{4.88}$$

De (4.63) e (4.88), a resistência da linha (duto) de comprimento L é estimada:

$$R_e = Lr_x = L\frac{\mu\delta^2}{\pi R^4 \acute{M}_{10}} sen(\acute{\varepsilon}_{10}). \tag{4.89}$$

De (4.63) e (4.85), a indutância da linha (duto) de comprimento L é estimada:

$$L_e = Ll_x = \frac{\mu\delta^2}{\pi R^4 \omega \acute{M}_{10}} cos(\acute{\varepsilon}_{10}) = L\frac{\rho}{\pi R^2 \acute{M}_{10}} cos(\acute{\varepsilon}_{10}). \tag{4.90}$$

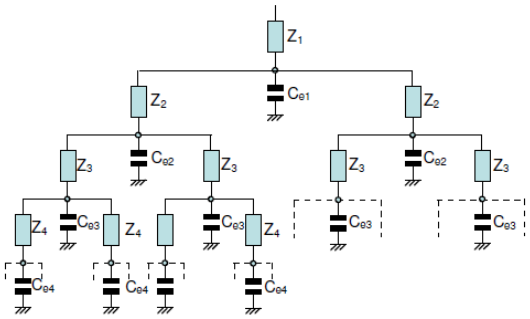
De (4.64) e (4.86), a condutância e capacitância da linha são estimadas, respectivamente:

$$G_e = Lg_x = 0, \tag{4.91}$$

$$C_e = Lc_x = L\frac{2\pi R^3(1-\nu_P^2)}{Eh}. \tag{4.92}$$

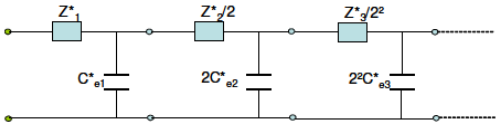
A Figura 11 é uma representação do modelo elástico, em que $G_e = 0$. Para um experimento em baixas frequências, a indutância L_e pode ser desprezada. Conforme a Figura 12, do cálculo da impedância longitudinal e capacitância equivalentes de cada nível da árvore respiratória, obtém-se, respectivamente: $Z_m = Z_m^*/2^{m-1}$ e $C_m = 2^{m-1}C_m^*$, $m = 1,2,\cdots,24$, em que * denota o elemento elétrico de uma via aérea individual.

Figura 11 - Análogo elétrico recursivo para a árvore respiratória, com $Z_i = R_{e_i} + jL_{e_i}$, $i = 1,\cdots,24$



Fonte: retirado de Ionescu et al. (2009).

Figura 12 - Análogo elétrico recursivo para a árvore respiratória no formato de uma rede do tipo *ladder*

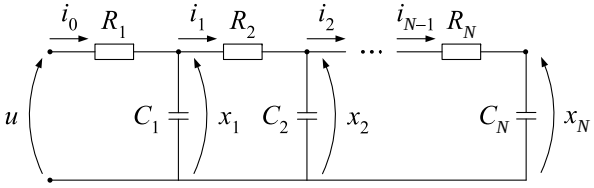


Fonte: retirado de Ionescu et al. (2009).

4.4.2 ANÁLOGO ELÉTRICO COM O CPE

Em Ionescu, Machado e Keyser (2011), cada nível m do análogo elétrico de $N = 24$ níveis é caracterizado por uma resistência como impedância longitudinal, $Z_{l_m} = R_m$, $m = 1,2,\cdots,N$ (a indutância foi negligenciada no experimento que envolve baixas frequências, sem introdução de erros significativos) e por um CPE (ELWAKIL, 2010) como impedância transversal, $Z_{t_m} = Z_{CPE_m} = 1/(C_m s^\alpha)$, $m = 1,2,\cdots,N$, com $\alpha \in (0,2)$ e C_m a pseudo-capacitância do CPE. Segue a representação da rede *ladder*, agora com as tensões (pressões de ar) e correntes (fluxos de ar) indicadas para cada nível:

Figura 13 - Rede RC do tipo *ladder*



Fonte: próprio autor.

Novamente, a impedância longitudinal e capacitância equivalentes de cada nível da árvore respiratória é, respectivamente:

$$R_m = \frac{R_m^*}{2^{m-1}}, \tag{4.93}$$

$$C_m = 2^{m-1}C_m^*, \quad m = 1,2,\ldots,24, \tag{4.94}$$

em que * denota o elemento elétrico de uma via aérea individual. Em Ionescu, Machado e Keyser (2011), os valores de R_m^* e C_m^* seguem as expressões recursivas:

$$\begin{cases} R_1^* = R_{UA}, \\ C_1^* = C_{UA}, \end{cases} \tag{4.95}$$

$$\begin{cases} R_{m+1}^* = 2,476R_m^*, \\ C_{m+1}^* = 0,577C_m^*, \end{cases} \quad m = 1,2,\ldots,13, \tag{4.96}$$

$$\begin{cases} R_{m+1}^* = 2,334R_m^*, \\ C_{m+1}^* = 0,613C_m^*, \end{cases} \quad m = 14,15,\ldots,23, \tag{4.97}$$

com R_{UA} e C_{UA} a resistência e capacitância, respectivamente, desde as vias aéreas superiores (*upper airway*) até o nível da traqueia.

4.4.3 ANÁLOGO ELÉTRICO COM O CPE, REPRESENTAÇÃO EM ESPAÇO DE PSEUDO-ESTADOS

Aplicando as leis de *Kirchhoff* nas variáveis indicadas na Figura 13, obtém-se as relações tensão-corrente subsequentes, em que $\mathscr{D}^\alpha$ denota a derivada de order $\alpha \in (0,2)$:

$$\mathscr{D}^\alpha x_1 = \frac{i_0 - i_1}{C_1}, \quad \mathscr{D}^\alpha x_2 = \frac{i_1 - i_2}{C_2}, \quad \cdots, \quad \mathscr{D}^\alpha x_{N-1} = \frac{i_{N-2} - i_{N-1}}{C_{N-1}}, \quad \mathscr{D}^\alpha x_N(t) = \frac{i_{N-1}}{C_N}, \tag{4.98}$$

$$i_0 = \frac{(u - x_1)}{R_1}, \quad i_1 = \frac{(x_1 - x_2)}{R_2}, \quad \cdots, \quad i_{N-2} = \frac{(x_{N-2} - x_{N-1})}{R_{N-1}}, \quad i_{N-1} = \frac{(x_{N-1} - x_N)}{R_N}. \tag{4.99}$$

Essas relações resultam no seguinte modelo em espaço de pseudo-estados:

$$\mathscr{D}^\alpha x = Ax + Bu, \tag{4.100}$$

com $x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \cdots \quad x_{N-1} \quad x_N]^T$ o vetor de psedo-estados e as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1C_1} - \frac{1}{R_2C_1} & \frac{1}{R_2C_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_2C_2} & -\frac{1}{R_2C_2} - \frac{1}{R_3C_2} & \frac{1}{R_3C_2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_3C_3} & -\frac{1}{R_3C_3} - \frac{1}{R_4C_3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{R_{N-1}C_{N-1}} - \frac{1}{R_NC_{N-1}} & \frac{1}{R_NC_{N-1}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{R_NC_N} & -\frac{1}{R_NC_N} \end{bmatrix}, \tag{4.101}$$

$$B = [1/(R_1C_1) \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0]^T. \tag{4.102}$$

A equação da saída para a variável medida é:

$$y = i_0 = (u - x_1)/R_1 = Cx + Du, \tag{4.103}$$

$$C = [-1/R_1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0], \tag{4.104}$$

$$D = [1/R_1]. \tag{4.105}$$

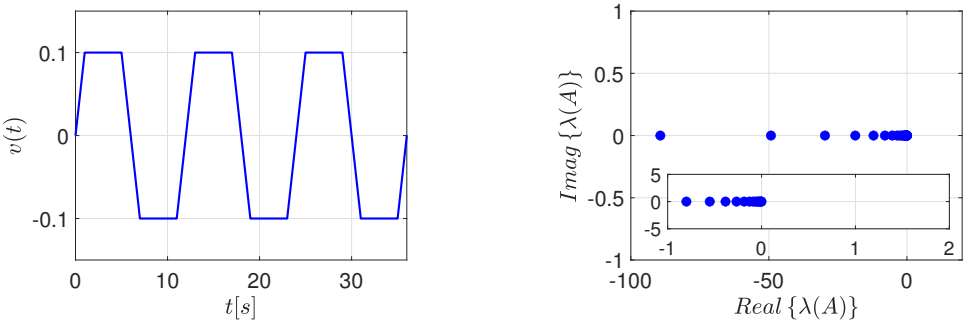
A entrada $u(t)$ equivale à pressão de entrada (em $[kPa]$) e a saída $y(t)$ equivale ao fluxo do ar de insuflação (em $[L/s]$). Os seguintes valores serão empregados nos exemplos apresentados nesse capítulo (linha 1 da Tabela 1 de Ionescu, Machado e Keyser (2011):

$$R_{UA} = 0,2834 \text{ [kPa-s/l]}, \quad C_{UA} = 0,0950, \quad \alpha = 1,55. \tag{4.106}$$

4.5 RESULTADOS: CONTROLE DE SAÍDA COM OBSERVADOR DE PSEUDO-ESTADOS APLICADO À REDE PULMONAR

A derivada de *Caputo* (Apêndice A) é utilizada na simulação das respostas no tempo. A referência adotada para o fluxo de ar da respiração humana é uma onda trapezoidal de altura igual a $0,1$, base menor igual a 4 e inclinações iguais a $0,1$, delineando ciclos de insuflação de $0,5[L]$ em $6[s]$, como mostra a Figura 14a. Dos dados em (4.106), obtém-se as localizações dos autovalores de malha aberta (matriz A), como mostra a Figura 14b.

Figura 14 - Resultados introdutórios



(a) Entrada trapezoidal

(b) Autovalores da matriz A

Fonte: próprio autor.

Ganhos K_{xw} e L são projetados a partir das LMIs do Teorema 4.2 com o *toolbox* YALMIP (LÖFBERG, 2004) e *solver* SeDuMi (STURM, 1999), usando os dados em (4.106), $\gamma = 0$, $r = 50$, $\theta = 15^\circ$, $\varepsilon = 0,01$ e $K_r = 0$:

$$K_{xw} = \begin{bmatrix} -1,5792 & 1,2219 & -0,6368 & 0,1906 & -0,0818 & -0,0319 & -0,0369 & -0,0295 & -0,0188 & -0,0064 \\ 0,0050 & 0,0126 & 0,0142 & 0,0113 & 0,0083 & 0,0075 & 0,0097 & 0,0128 & 0,0157 & 0,0188 \\ 0,0222 & 0,0255 & 0,0286 & 0,0326 & -0,7605 & -0,0864 \end{bmatrix}, \tag{4.107}$$

$$L = \begin{bmatrix} 15,5769 & -11,7978 & 4,5293 & -1,9672 & -0,0389 & -0,3570 & -0,2837 & -0,2566 & -0,2354 \\ -0,2204 & -0,2016 & -0,1813 & -0,1651 & -0,1494 & -0,1314 & -0,1153 & -0,1044 & -0,0935 \\ -0,0800 & -0,0700 & -0,0664 & -0,0646 & -0,0608 & -0,0569 \end{bmatrix}. \tag{4.108}$$

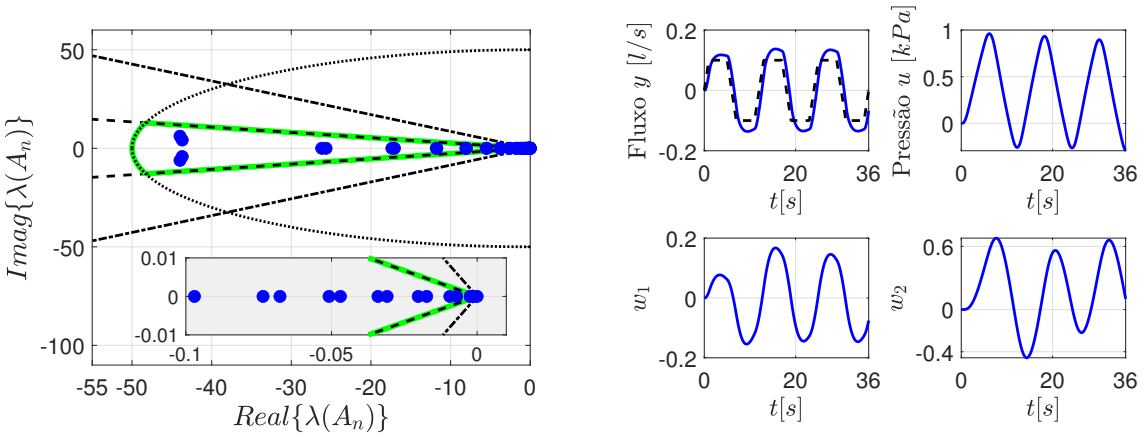
A Figura 15a mostra os autovalores da matriz de malha fechada (a matriz A_n no eixo do gráfico denota a matriz de sistema de (4.42)). A Figura 15b mostra os resultados da simulação.

Ganhos K_{xw} e L são projetados a partir do Teorema 4.2 para $K_r = 100$ (os demais dados são os mesmos):

$$K_{xw} = \begin{bmatrix} -1,5601 & 0,9638 & -0,5349 & 0,1574 & -0,0283 & 0,0033 & -0,0001 & 0,0003 & 0,0004 & 0,0005 \\ 0,0005 & 0,0006 & 0,0006 & 0,0008 & 0,0010 & 0,0012 & 0,0015 & 0,0019 & 0,0024 & 0,0030 \\ 0,0036 & 0,0041 & 0,0045 & 0,0047 & -0,0329 & -0,0142 \end{bmatrix}. \tag{4.109}$$

Note que a matriz L não depende de K_r e seu valor está em (4.108). A Figura 16a mostra os autovalores de malha fechada. Uma comparação com a Figura 15a revela que alguns autovalores foram ligeiramente deslocados para a esquerda. A Figura 16b mostra os resultados da simulação. Com o novo valor de K_r um rastreamento satisfatório de $v(t)$ é obtido.

Figura 15 - Resultados sem a malha externa: $K_r = 0$

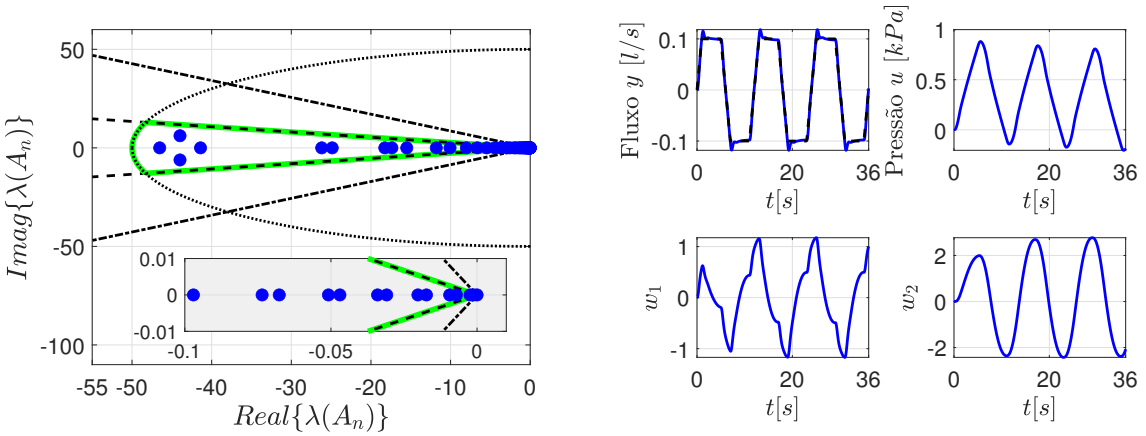


(a) "•" são os autovalores; "-" (em verde) é o limite de $\mathfrak{D}$; "- -" é o limite de θ; ".." é o limite de r e "-." é o limite de estabilidade

(b) "-" são as respostas e "- -" é a referência $v(t)$

Fonte: próprio autor.

Figura 16 - Resultados com a malha externa, ganho $K_r = 100$



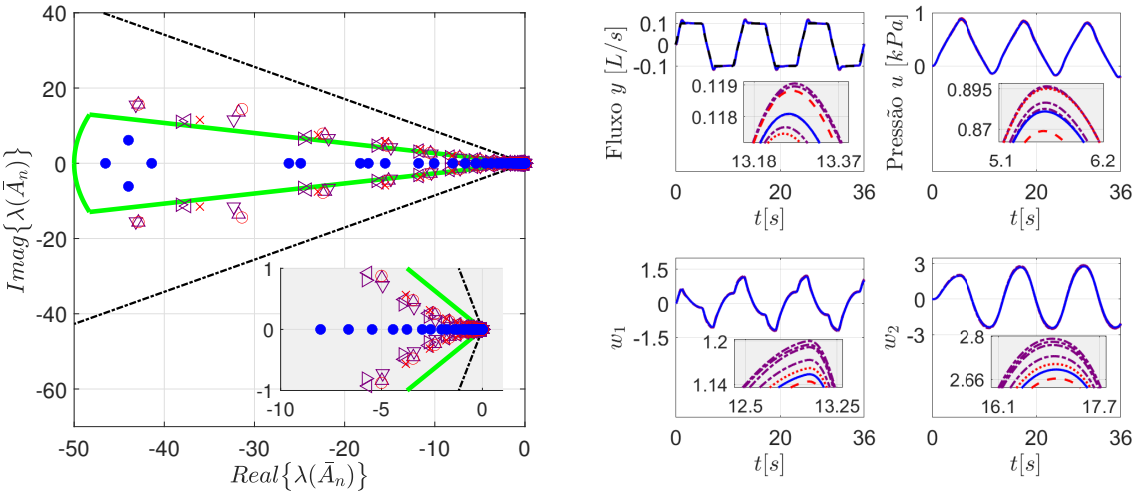
(a) "•" são os autovalores; "-" (em verde) é o limite de $\mathfrak{D}$; "- -" é o limite de θ; ".." é o limite de r e "-." é o limite de estabilidade

(b) "-" são as respostas e "- -" é a referência $v(t)$

Fonte: próprio autor.

A robustez do sistema de malha fechada é avaliada através de uma variação aleatória de R_{UA} e C_{UA}, utilizando uma distribuição probabilística uniforme, a fim de emular incertezas no procedimento de identificação ou mudanças nos parâmetros fisiológicos reais. Essa variação é realizada sobre a simulação anterior (que utiliza $K_r = 100$). O controlador é mantido o mesmo (com os ganhos K_{xw} e L em (4.109) e (4.108), respectivamente). Os autovalores de malha fechada obtidos para variações entre $\pm 5\%$ e entre $\pm 15\%$ são mostrados nas Figuras 17a e 18a, respectivamente (a matriz A_n no eixo do gráfico denota a matriz de sistema de (4.57): a matriz de malha fechada que inclui as incertezas). Para este controlador com ganhos em (4.109) e (4.108), note que alguns pares conjugados de autovalores saíram da região de alocação, mas todos permaneceram contidos na região de estabilidade (delimitada por -.). A simulação com esses dados contempla um caso limite de funcionamento. Com a utilização de outros valores (maiores valores do raio r e do ganho K_r, por exemplo) obtém-se uma alocação regional melhorada. Os resultados de simulação para essas variações entre $\pm 5\%$ e entre $\pm 15\%$ são mostrados nas Figuras 17b e 18b, respectivamente. Como pode ser visto, as mudanças paramétricas tem algum efeito na resposta de malha fechada, mas o tempo de subida e o *overshoot* não são desviados significativamente daqueles obtidos no caso nominal. O ganho $K_r = 100$ resulta, pois, em um rastreamento satisfatório também no caso de incertezas nos parâmetros.

Figura 17 - $K_r = 100$ na malha externa, com variações de até $\pm 5\%$ nos parâmetros R_{UA} e C_{UA}

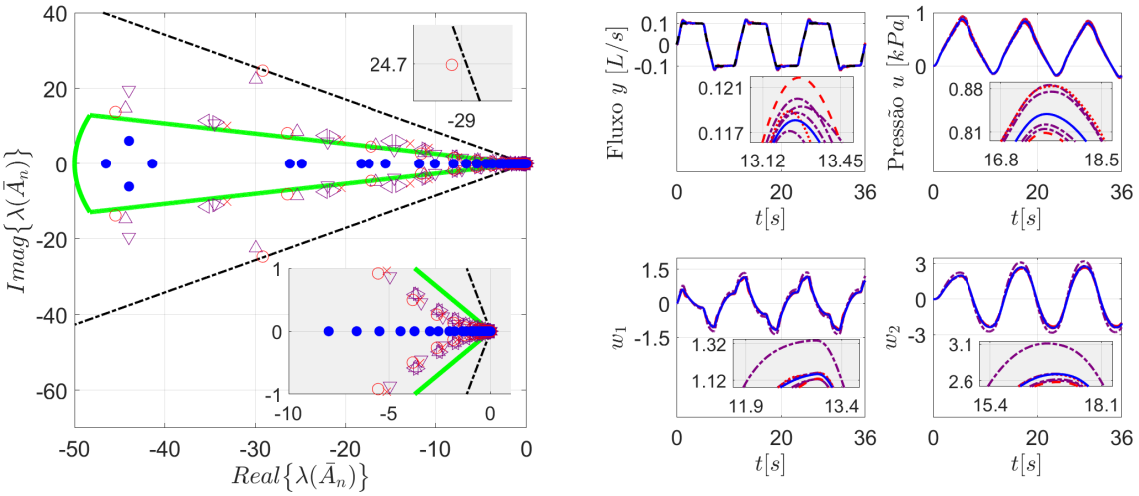


(a) Autovalores: "•" para os valores nominais, "◁", "▷", "△", "▽" para quatro variações randômicas entre $\pm 5\%$, "○" para variação de -5% e "×" para variação de $+5\%$; "-" (em verde) é o limite de $\mathfrak{D}$ e "- -" é o limite de estabilidade

(b) "-" para valores nominais,"-." para quatro variações randômicas entre $\pm 5\%$, ".." para variação de -5% e "- -" para variação de $+5\%$; "- -" é também a referência no quadro (1,1)

Fonte: próprio autor.

Figura 18 - $K_r = 100$ na malha externa, com variações de até $\pm 15\%$ nos parâmetros R_{UA} e C_{UA}



(a) Autovalores:"•" para os valores nominais, "◁", "▷", "△", "▽" para quatro variações randômicas entre $\pm 15\%$, "○" para variação de -15% e "×" para variação de $+15\%$; "-" (em verde) é o limite de $\mathfrak{D}$ e "- -" é o limite de estabilidade

(b) "-" para valores nominais,"-." para quatro variações randômicas entre $\pm 15\%$, ".." para variação de -15% e "- -" para variação de $+15\%$; "- -" é também a referência no quadro (1,1)

Fonte: próprio autor.

4.6 CONCLUSÕES DO CAPÍTULO

Essa metodologia original desse capítulo consiste de um controlador cuja malha de realimentação está implícita em um modelo de pseudo-estado, incorporando as ações conjuntas das seguintes estruturas: observador de pseudo-estados fracionário linear do tipo *Luenberger*, *leaky integrator* e malha externa. Dada a estrutura aumentada da matriz de sistema obtida (resultante de (4.14), (4.42), (4.54) e (4.57)), o projeto das matrizes de ganho é realizado em blocos diagonais, obtendo-se uma estabilização adequada dos autovalores no domínio de estabilidade definido para os sistemas fracionários. A alocação regional de autovalores em uma região específica $\mathfrak{D}$ torna possível inserir especificações sobre as respostas do sistema e é aqui realizada através de condições em LMIs. A metodologia foi aplicada ao análogo elétrico de um modelo vigente em rede recursiva para o sistema respiratório humano e forneceu uma entrada de pressão capaz de gerar um fluxo de ar em uma perfil de tempo desejado, o que pode ser incluído no projeto de um respirador mecânico. Além disso, é proposta uma síntese das incertezas do modelo diretamente na estrutura aumentada, através da qual foi possível concluir que o controlador projetado na ausência de incertezas provou ser robusto para variações consideráveis nos parâmetros (respostas foram obtidas para variações de/entre $\pm 5\%$ e de/entre $\pm 15\%$), mesmo para um caso limite de análise (valores restritivos $r = 50$ e $\theta = 15^o$).

5 MODELO REDUZIDO PARA SISTEMAS DE ORDEM $\alpha \in (0,2)$

Esse capítulo propõe um método de redução da quantidade de pseudo-estados para sistemas de ordem comensurável $\alpha \in (0,2)$. A dimensão da matriz de pseudo-estados do novo sistema e a quantidade de saídas do sistema original são iguais. O método é fundamentado na solução de um sistema linear obtido através da minimização de um erro adequado entre as funções de transferência dos modelos original e reduzido.

5.1 CONCEITOS PRELIMINARES

Essa seção apresenta e organiza os conceitos utilizados no desenvolvimento da proposta.

5.1.1 SISTEMAS DE ORDEM FRACIONÁRIA COMENSURÁVEIS

Considere a definição:

Definição 5.1. É admitida a representação em espaço de pseudo-estados para um sistema de ordem comensurável $\alpha \in (0,2)$, linear e invariante no tempo:

$$\mathscr{D}^{\alpha} x(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{5.1}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \tag{5.2}$$

com $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de pseudo-estados, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ a entrada de controle, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ a saída e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$, $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ matrizes constantes. A matriz de transferência entre $u(t)$ e $y(t)$, com $s = j\omega$, é:

$$H(j\omega)_{(n_y \times n_u)} = C((j\omega)^{\alpha} I_{(n \times n)} - A)^{-1} B + D. \tag{5.3}$$

5.1.2 FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

A proposta utiliza as seguintes propriedades relacionadas ao traço de uma matriz:

Propriedades 5.1. (PETERSEN; PEDERSEN, 2008) Para as matrizes A, B, C e X, de dimensões apropriadas, tem-se:

- $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$; (5.4)
- $tr(A) = tr(A^T)$; (5.5)
- $tr(ABC) = tr(BCA)$; (5.6)
- $\dfrac{d}{dX} tr(XB) = B^T$; (5.7)
- $\dfrac{d}{dX} tr(XBX^T) = X(B^T + B)$. (5.8)

Os conceitos fundamentais apresentados em sequência visam elucidar a ideia de minimização de custo via mínimos quadrados:

Proposição 5.1 (Regressão linear múltipla). Seja um registro de dados com N valores observados das variáveis x e y dado por: $\{x_i = [x_{1_i}\ x_{2_i}\ \cdots\ x_{k_i}] \in \mathbb{R}^k, y_i \in \mathbb{R}\}$, $i = 1, \cdots, N$. A regressão linear múltipla consiste na estimação dos parâmetros σ_0, σ_1, $\cdots$, $\sigma_k \in \mathbb{R}$, tal que:

$$\begin{array}{l} y_1 = \sigma_0 + x_{1_1}\sigma_1 + \cdots + x_{k_1}\sigma_k, \\ y_2 = \sigma_0 + x_{1_2}\sigma_1 + \cdots + x_{k_2}\sigma_k, \\ \vdots \\ y_N = \sigma_0 + x_{1_N}\sigma_1 + \cdots + x_{k_N}\sigma_k, \end{array} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}}_{y \in \mathbb{R}^{N\times 1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_{1_1} & \cdots & x_{k_1} \\ 1 & x_{1_2} & \cdots & x_{k_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1_N} & \cdots & x_{k_N} \end{bmatrix}}_{X \in \mathbb{R}^{N\times(k+1)}} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_k \end{bmatrix}}_{\sigma \in \mathbb{R}^{(k+1)\times 1}}. \tag{5.9}$$

que proporcionam o ajuste ótimo dos dados. Os parâmetros σ_0, $\cdots$, σ_k são obtidos com a minimização da soma dos quadrados dos erros, $S = e_i^2 \in \mathbb{R}$, com erro $e_i = y_i - \sigma_0 - x_{1_i}\sigma_1 - \cdots - x_{k_i}\sigma_k \in \mathbb{R}$. Assim, os parâmetros σ_0, $\cdots$, σ_k resolvem o seguinte problema de otimização:

$$min\{S(\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_k)\} = min\{\sum_{i=1}^{N} e_i^2\} = min\{\sum_{i=1}^{N} (y_i - \sigma_0 - x_{1_i}\sigma_1 - \cdots - x_{k_i}\sigma_k)^2\}. \tag{5.10}$$

Com a notação matricial, pode-se reescrever:

$$min\{S(\sigma)\} = min\{e^T e\} = min\{(y - X\sigma)^T (y - X\sigma)\}. \tag{5.11}$$

O verdadeiro valor de σ é desconhecido. Seja b o valor estimado de σ segundo a regressão linear múltipla. O valor de b para o qual $S(b)$ é mínimo é obtido de $\frac{d}{db}S(b) = 0$:

$$\frac{d}{db}\{(y - Xb)^T (y - Xb)\} = 0 \Rightarrow \frac{d}{db}(y^T y - y^T Xb - b^T X^T y + b^T X^T Xb) = 0. \tag{5.12}$$

De Petersen e Pedersen (2008): $\frac{d}{dx}m^T x = \frac{d}{dx}x^T m = m$ e $\frac{d}{dx}x^T Mx = (M + M^T)x$, logo:

$$-2X^T y + 2X^T Xb = 0 \Rightarrow X^T y = X^T Xb, \tag{5.13}$$

$$b = (X^T X)^{-1} X^T y. \tag{5.14}$$

Esse resultado pode ser generalizado. Antes, considere a seguinte propriedade relacionada ao traço matricial:

Propriedade 5.1. (LIANG, 2015) Para as matrizes B, Y e variável X de dimensões apropriadas:

$$\frac{d}{dB}tr((Y - XB)^T (Y - XB)) = -2X^T Y + 2X^T XB. \tag{5.15}$$

Proposição 5.2 (Regressão linear múltipla, generalização). Seja um registro de dados com N valores observados das variáveis x e y: $\{x_i = [x_{1_i}\ x_{2_i}\ \cdots\ x_{k_i}] \in \mathbb{R}^k, y_i = [y_{1_i}\ y_{2_i}\ \cdots\ y_{N_i}] \in \mathbb{R}^N\}$, $i = 1, \cdots, N$. A generalização da regressão linear múltipla consiste na estimação da matriz

$\sigma \in \mathbb{R}^{(k+1)\times N}$, tal que:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_{1_1} & y_{2_1} & \cdots & y_{N_1} \\ y_{1_2} & y_{2_2} & \cdots & y_{N_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1_N} & y_{2_N} & \cdots & y_{N_N} \end{bmatrix}}_{Y\in\mathbb{R}^{N\times N}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_{1_1} & x_{2_1} & \cdots & x_{k_1} \\ 1 & x_{1_2} & x_{2_2} & \cdots & x_{k_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1_N} & x_{2_N} & \cdots & x_{k_N} \end{bmatrix}}_{X\in\mathbb{R}^{N\times(k+1)}} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{0_1} & \sigma_{0_2} & \sigma_{0_3} & \cdots & \sigma_{0_N} \\ \sigma_{1_1} & \sigma_{1_2} & \sigma_{1_3} & \cdots & \sigma_{1_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{k_1} & \sigma_{k_2} & \sigma_{k_3} & \cdots & \sigma_{k_N} \end{bmatrix}}_{\sigma\in\mathbb{R}^{(k+1)\times N}}, \tag{5.16}$$

que proporciona o ajuste ótimo dos dados. A matriz σ é obtida com a minimização da soma dos traços dos quadrados dos erros, $S = tr(e_i^T e_i) \in \mathbb{R}$, com erro $e_i = y_i - [1 \quad x_i]\sigma \in \mathbb{R}^{1\times N}$, $i = 1, \cdots, N$. Assim, a matriz σ resolve o seguinte problema de otimização:

$$min\{S(\sigma)\} = min\{\sum_{i=1}^{N} tr(e_i^T e_i)\} = min\{\sum_{i=1}^{N} tr((y_i - [1 \;\; x_i]\sigma)^T (y_i - [1 \;\; x_i]\sigma))\}. \tag{5.17}$$

Com a notação matricial pode-se reescrever:

$$min\{S(\sigma)\} = min\{tr((Y - X\sigma)^T (Y - X\sigma))\}. \tag{5.18}$$

O valor verdadeiro de σ é desconhecido. Seja B o valor estimado de σ segundo a regressão linear múltipla. O valor de B para o qual $S(B)$ é mínimo é obtido de $\frac{d}{dB}S(B) = 0$:

$$\frac{d}{dB} tr((Y - XB)^T (Y - XB)) = 0. \tag{5.19}$$

Da Propriedade 5.1:

$$-2X^T Y + 2X^T XB = 0 \Rightarrow B = (X^T X)^{-1} X^T Y, \tag{5.20}$$

que é apenas a generalização de $y \in \mathbb{R}^N$ para $Y \in \mathbb{R}^{N\times N}$.

Feitas essas considerações, segue o desenvolvimento do método de redução de modelos fracionários lineares em espaço de pseudo-estados com base em registros de dados.

5.2 MODELO REDUZIDO PARA SISTEMAS FRACIONÁRIOS COMENSURÁVEIS

Considere a definição:

Definição 5.2 (Modelo reduzido). Tendo em vista (5.1) e (5.2), considere o novo sistema de ordem comensurável $\beta \in (0,2)$:

$$\mathscr{D}^{\beta} x(t) = \hat{A}x(t) + \hat{B}u(t), \tag{5.21}$$

$$y(t) = x(t), \tag{5.22}$$

com $x(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ o vetor de pseudo-estados, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ a entrada de controle, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ a saída e as matrizes $\hat{A} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ e $\hat{B} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$. A matriz de transferência entre $u(t)$ e $y(t)$, com $s = j\omega$, é:

$$\hat{H}(j\omega)_{(n_y \times n_u)} = ((j\omega)^{\beta} I_{(n_y \times n_y)} - \hat{A})^{-1} \hat{B}. \tag{5.23}$$

A metodologia é estabelecida com os seguintes teoremas:

Teorema 5.1. Seja o sistema de equações lineares, com $W \in \mathbb{C}^{a \times b}$, $Z \in \mathbb{C}^{c \times b}$ e solução $\Theta \in \mathbb{R}^{c \times a}$:

$$\Theta W = Z. \tag{5.24}$$

O seguinte custo de mínimos quadrados, associado ao sistema (5.24):

$$E = tr\left[(Z - \Theta W)^*(Z - \Theta W)\right], \tag{5.25}$$

é minimizado por:

$$\Theta = \left[(WZ^*)^T + (\overline{W}Z^T)^T\right]((WW^*)^T + WW^*)^{-1}. \tag{5.26}$$

Demonstração. Aplicando a propriedade (5.4) em (5.25):

$$E = tr(Z^*Z) - tr(Z^*\Theta W) - tr(W^*\Theta^T Z) + tr(W^*\Theta^T \Theta W). \tag{5.27}$$

Da propriedade em (5.5):

$$E = tr(Z^*Z) - tr(Z^*\Theta W) - tr(Z^T\Theta\overline{W}) + tr(W^*\Theta^T \Theta W). \tag{5.28}$$

Da propriedade em (5.6):

$$E = tr(Z^*Z) - tr(\Theta W Z^*) - tr(\Theta\overline{W}Z^T) + tr(\Theta W W^*\Theta^T). \tag{5.29}$$

Aplicando o operador $\dfrac{d}{d\Theta}$:

$$\frac{d}{d\Theta}E = -\frac{d}{d\Theta}tr(\Theta W Z^*) - \frac{d}{d\Theta}tr(\Theta\overline{W}Z^T) + \frac{d}{d\Theta}tr(\Theta W W^*\Theta^T). \tag{5.30}$$

Das propriedades em (5.7) e (5.8):

$$\frac{d}{d\Theta}E = -(WZ^*)^T - (\overline{W}Z^T)^T + \Theta((WW^*)^T + WW^*). \tag{5.31}$$

A equação (5.25) é minimizada quando $\dfrac{d}{d\Theta}E = 0_{(c \times a)}$:

$$-(WZ^*)^T - (\overline{W}Z^T)^T + \Theta((WW^*)^T + WW^*) = 0_{(c \times a)}. \tag{5.32}$$

Logo, a solução Θ que minimiza (5.25) é:

$$\Theta = \left[(WZ^*)^T + (\overline{W}Z^T)^T\right]((WW^*)^T + WW^*)^{-1}. \tag{5.33}$$

Note que $E \in \mathbb{R}$ enquanto $\dfrac{d}{d\Theta}E \in \mathbb{R}^{(c\times a)}$. □

Teorema 5.2. Uma redução do sistema (5.1) e (5.2) ao formato (5.21) e (5.22) é obtida através da solução Θ do sistema de equações lineares:

$$\Theta W = Z, \tag{5.34}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix}\hat{A} & \hat{B}\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_y\times(n_y+n_u)}, \tag{5.35}$$

$$W = \begin{bmatrix}H(j\omega_l) & \cdots & H(j\omega_h)\\ I_{(n_u\times n_u)} & \cdots & I_{(n_u\times n_u)}\end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(n_y+n_u)\times(n_uN)}, \tag{5.36}$$

$$Z = \begin{bmatrix}(j\omega_l)^\beta H(j\omega_l) & \cdots & (j\omega_h)^\beta H(j\omega_h)\end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_y\times(n_uN)}, \tag{5.37}$$

com ω_l e ω_h os pontos de menor e maior frequência da redução, respectivamente, e N o número de pontos de frequência $\omega \in [\omega_l, \omega_h]$.

Demonstração. O sistema (5.1) e (5.2) se reduz ao formato (5.21) e (5.22) na banda de frequência $[\omega_l, \omega_h]$ se:

$$\hat{H}(j\omega) = H(j\omega), \quad \omega \in [\omega_l, \omega_h]. \tag{5.38}$$

Como $H(j\omega)$ é conhecido:

$$\left[(j\omega)^\beta I_{(n_y\times n_y)} - \hat{A}\right]^{-1}\hat{B} = H(j\omega), \tag{5.39}$$

$$\left[(j\omega)^\beta I_{(n_y\times n_y)} - \hat{A}\right]H(j\omega) = \hat{B}, \tag{5.40}$$

$$\hat{A}H(j\omega) + \hat{B} = (j\omega)^\beta H(j\omega), \tag{5.41}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{A} & \hat{B}\end{bmatrix}}_{n_y\times(n_y+n_u)}\underbrace{\begin{bmatrix}H(j\omega)\\ I_{(n_u\times n_u)}\end{bmatrix}}_{(n_y+n_u)\times n_u} = \underbrace{(j\omega)^\beta H(j\omega)}_{n_y\times n_u}. \tag{5.42}$$

Para N registros de $H(j\omega)$, correspondentes a N valores de frequência $\omega \in [\omega_l, \omega_h]$ (em escala linear ou logarítmica), obtém-se (5.34):

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{A} & \hat{B}\end{bmatrix}}_{\Theta\in\mathbb{R}^{n_y\times(n_y+n_u)}}\underbrace{\begin{bmatrix}H(j\omega_l) & \cdots & H(j\omega_h)\\ I_{(n_u\times n_u)} & \cdots & I_{(n_u\times n_u)}\end{bmatrix}}_{W\in\mathbb{C}^{(n_y+n_u)\times(n_uN)}} = \underbrace{\begin{bmatrix}(j\omega_l)^\beta H(j\omega_l) & \cdots & (j\omega_h)^\beta H(j\omega_h)\end{bmatrix}}_{Z\in\mathbb{C}^{n_y\times(n_uN)}}. \tag{5.43}$$

□

5.3 APLICAÇÃO AO MODELO DO SISTEMA RESPIRATÓRIO HUMANO

Como aplicação da metodologia proposta de redução da quantidade de variáveis de pseudo-estado, é utilizado o análogo elétrico do modelo vigente para o sistema respiratório humano, já considerado nas Subseções 4.4.2 e 4.4.3. Essa redução utiliza o Teorema 5.2, com a solução ótima fornecida pelo Teorema 5.1. A ordem do modelo reduzido é o valor de $\beta \in (0,2)$ que minimiza o seguinte erro, no intervalo de frequência $\omega \in [\omega_l, \omega_h]$:

$$E_H = tr([\hat{H}(j\omega) - H(j\omega)]^*[\hat{H}(j\omega) - H(j\omega)]). \tag{5.44}$$

Observação 5.1. As simulações utilizam a derivada de *Caputo*, através do algoritmo de *Adams-Bashforth*, descrito no Apêndice A, com passo $h = 0,005$. Quando o contrário não for mencionado, $\omega_l = 10^{-10}[rad/s]$ e $\omega_h = 10[rad/s]$, com 100 pontos igualmente espaçados em escala logarítmica. As saídas adotadas para o modelo original são tensões, de modo que a matriz D em (5.2) é nula. Para plotar as correntes, são utilizadas as relações (4.98)-(4.99).

5.3.1 SISTEMA ORIGINAL DE ORDEM $\alpha \in (0,1)$

Em Ionescu, Machado e Keyser (2011) há uma tabela com os dados experimentais de α, R_{UA} e C_{UA}. Desta tabela, é empregado o conjunto de dados:

$$\alpha = 0,50, \quad R_{UA} = 0,28, \quad C_{UA} = 1,15. \tag{5.45}$$

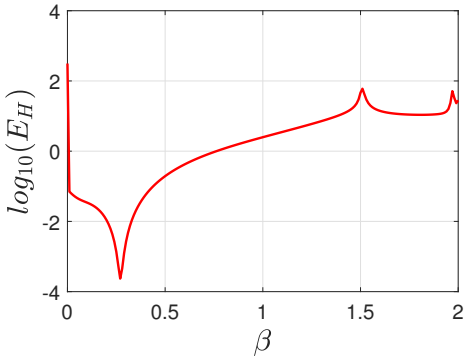
5.3.1.1 REDUÇÃO COM OS QUATRO PRIMEIROS PSEUDO-ESTADOS DO MODELO PULMONAR

Para essa finalidade, a matriz C em (5.2) é:

$$C_{(i,j)_{(4\times 24)}} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j = 1,2,3,4. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{5.46}$$

A Figura 19 mostra $log_{10}(E_H)$ em função de β:

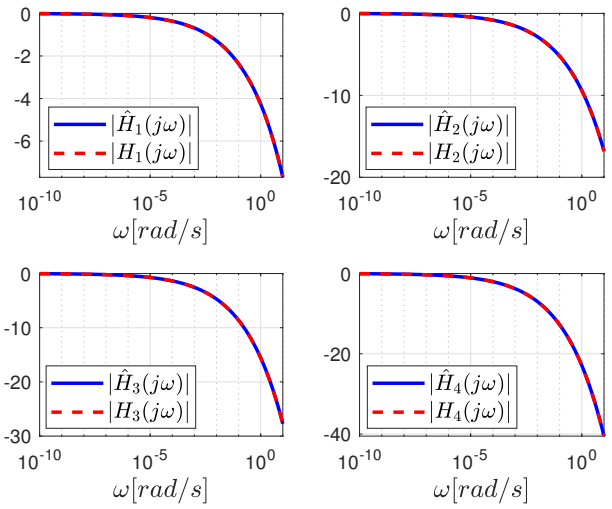
Figura 19 - Métrica de erro E_H



Fonte: próprio autor.

Logo, a ordem do modelo reduzido é $\beta = 0,27$, obtida para um erro mínimo $E_H = 2,3483 \times 10^{-4}$ (visto a partir do vale, como nos casos subsequentes). As respostas $\hat{H}(j\omega)$ e $H(j\omega)$ são:

Figura 20 - Respostas $\hat{H}_1(j\omega)$ a $\hat{H}_4(j\omega)$ e $H_1(j\omega)$ a $H_4(j\omega)$



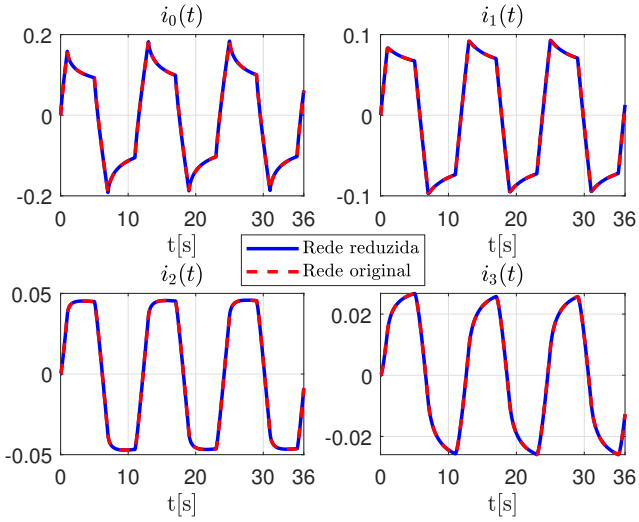
Fonte: próprio autor.

As matrizes $\hat{A}$ e $\hat{B}$ do modelo reduzido são:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1,1399 & -2,6301 & 1,1395 & -0,2323 \\ 0,8822 & 0,0202 & -1,0472 & 0,2201 \\ -0,4017 & 1,5285 & -0,9880 & -0,2006 \\ 0,3810 & -1,0957 & 2,2046 & -1,4286 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0,5835 \\ -0,0746 \\ 0,0620 \\ -0,0611 \end{bmatrix}.$$

Seguem as respostas no tempo, para condição inicial nula, dos modelos original e reduzido, com a entrada na Figura 14a:

Figura 21 - Correntes $i_0(t)$ a $i_3(t)$



Fonte: próprio autor.

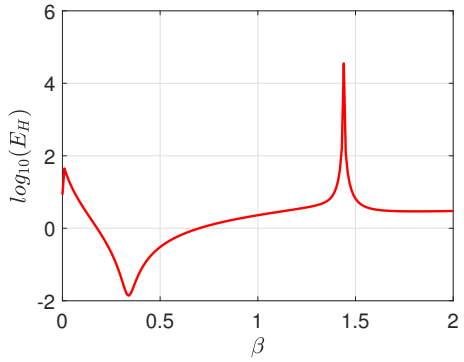
5.3.1.2 REDUÇÃO COM O PRIMEIRO PSEUDO-ESTADO DO MODELO PULMONAR

Para essa finalidade, a matriz C em (5.2) é:

$$C_{(i,j)_{(1\times 24)}} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j = 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{5.47}$$

A simulação utiliza $\omega_l = 10^{-10}[rad/s]$, $\omega_h = 100[rad/s]$ e 100 igualmente espaçados em escala logarítmica. A Figura 22 mostra $log_{10}(E_H)$ em função de β:

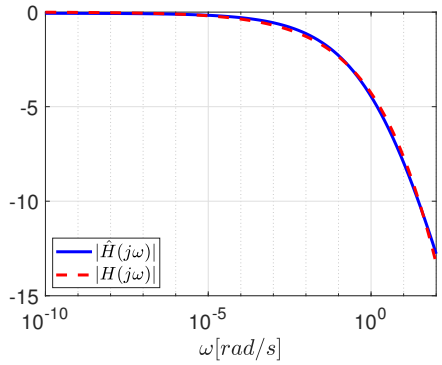
Figura 22 - Métrica de erro E_H



Fonte: próprio autor.

Logo, a ordem do modelo reduzido é $\beta = 0,34$, obtida para um erro mínimo $E_H = 0,0138$. As respostas $\hat{H}(j\omega)$ e $H(j\omega)$ são:

Figura 23 - Respostas $\hat{H}(j\omega)$ e $H(j\omega)$



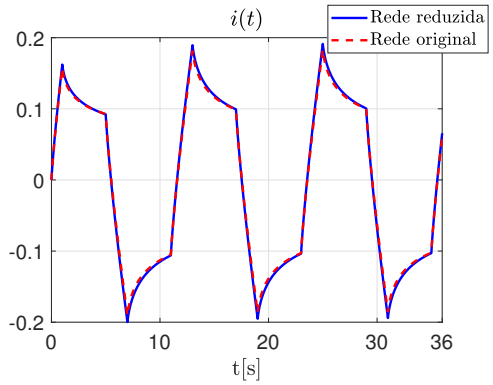
Fonte: próprio autor.

As matrizes $\hat{A}$ e $\hat{B}$ do modelo reduzido são:

$$\hat{A} = [-1,3941], \quad \hat{B} = [1,3844].$$

Segue a resposta no tempo, para condição inicial nula, dos modelos original e reduzido, com a entrada na Figura 14a:

Figura 24 - Correntes $i(t)$



Fonte: próprio autor.

5.3.2 SISTEMA ORIGINAL DE ORDEM $\alpha \in (1,2)$

O conjunto de dados de Ionescu, Machado e Keyser (2011) é empregado:

$$\alpha = 1,28, \quad R_{UA} = 0,3080, \quad C_{UA} = 0,0915. \tag{5.48}$$

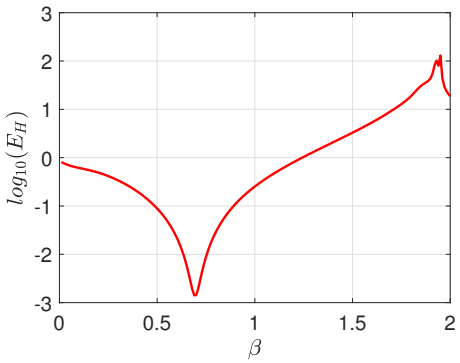
5.3.2.1 REDUÇÃO COM OS QUATRO PRIMEIROS PSEUDO-ESTADOS DO MODELO PULMONAR

Para essa finalidade, a matriz C em (5.2) é:

$$C_{(i,j)_{(4\times 24)}} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j = 1,2,3,4, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{5.49}$$

A Figura 25 mostra $log_{10}(E_H)$ em função de β:

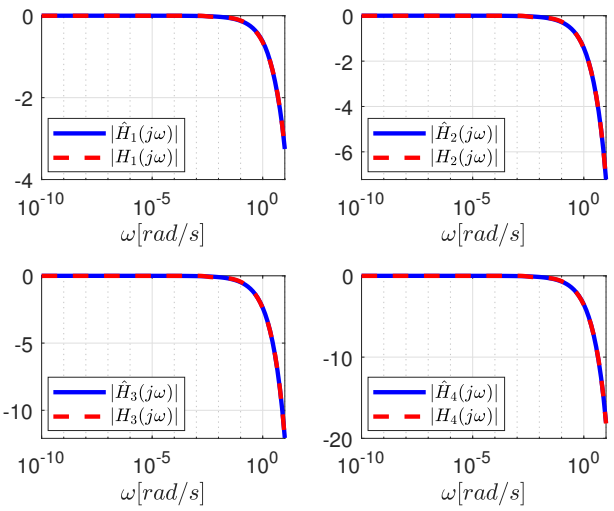
Figura 25 - Métrica de erro E_H



Fonte: próprio autor.

Logo, a ordem do modelo reduzido é $\beta = 0,69$, obtida para um erro mínimo $E_H = 0.0014$. As respostas $\hat{H}(j\omega)$ e $H(j\omega)$ são:

Figura 26 - Respostas $\hat{H}_1(j\omega)$ a $\hat{H}_4(j\omega)$ e $H_1(j\omega)$ a $H_4(j\omega)$



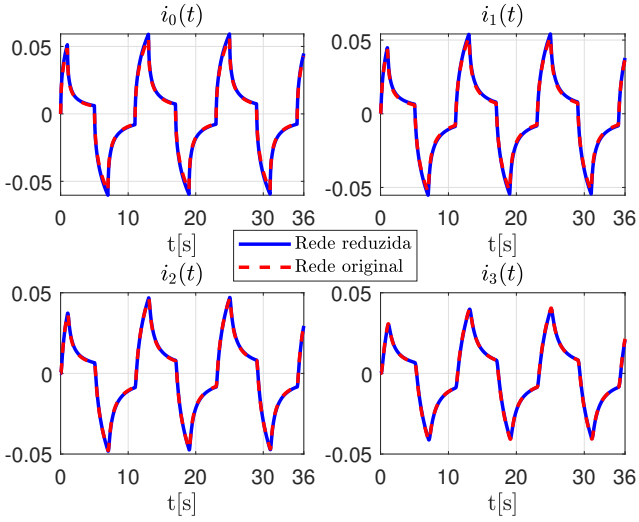
Fonte: próprio autor.

As matrizes $\hat{A}$ e $\hat{B}$ do modelo reduzido são:

$$A = \begin{bmatrix} 2,4598 & -6,9948 & 2,2100 & -0,2919 \\ 3,7758 & -0,6050 & -3,4598 & 0,7080 \\ -3,1240 & 7,8716 & -4,9935 & -0,4527 \\ 3,4030 & -6,9949 & 10,2234 & -5,8684 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2,6183 \\ -0,4177 \\ 0,6991 \\ -0,7625 \end{bmatrix}. \tag{5.50}$$

Seguem as respostas no tempo, para condições iniciais nulas, dos modelos original e reduzido, com a entrada na Figura 14a:

Figura 27 - Correntes $i_0(t)$ a $i_3(t)$



Fonte: próprio autor.

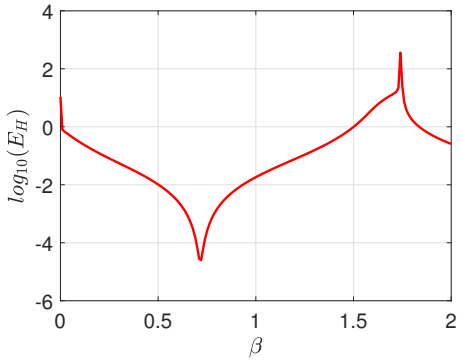
5.3.2.2 REDUÇÃO COM O PRIMEIRO PSEUDO-ESTADO DO MODELO PULMONAR

Para essa finalidade, a matriz C em (5.2) é:

$$C_{(i,j)_{(1\times 24)}} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j = 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{5.51}$$

A simulação utiliza $\omega_l = 10^{-10}[rad/s]$, $\omega_h = 1[rad/s]$ e 100 pontos equidistantes. A Figura 28 mostra $log_{10}(E_H)$ em função de β:

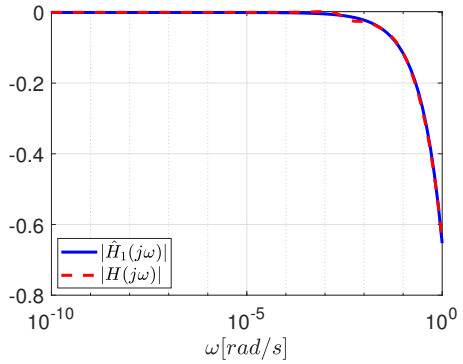
Figura 28 - Métrica de erro E_H



Fonte: próprio autor.

Logo, a ordem do modelo reduzido é $\beta = 0,72$, obtida para um erro mínimo $E_H = 2.4946 \times 10^{-5}$. As respostas $\hat{H}(j\omega)$ e $H(j\omega)$ são:

Figura 29 - Respostas $\hat{H}(j\omega)$ e $H(j\omega)$



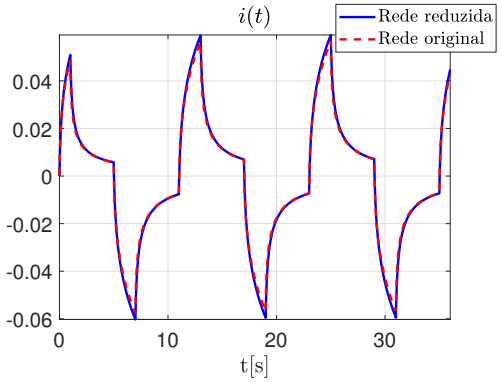
Fonte: próprio autor.

As matrizes $\hat{A}$ e $\hat{B}$ do modelo reduzido são:

$$A = [-6,2401], \quad B = [6,2399]. \tag{5.52}$$

Segue a resposta no tempo, para condições iniciais nulas, dos modelos original e reduzido, com a entrada na Figura 14a:

Figura 30 - Correntes $i(t)$



Fonte: próprio autor.

5.4 CONCLUSÕES DO CAPÍTULO

O método proposto é eficaz na obtenção de modelos reduzidos de ordem $\beta \in (0,2)$. No exemplo considerado do modelo pulmonar, o método foi eficaz até mesmo quando a saída do sistema original é única.

6 IDENTIFICAÇÃO DE FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA DE ORDEM FRACIONÁRIA E CONDIÇÕES INICIAIS NÃO NULAS UTILIZANDO SINAIS MODULADOS EXPONENCIALMENTE

A literatura contém trabalhos que documentam o amplo domínio de aplicações de sistemas de ordem fracionária (SUN et al., 2018). A identificação é uma ferramenta fundamental para essas aplicações. O presente capítulo está relacionado à identificação de modelos de ordem fracionária através da utilização de sinais de entrada/saída modulados exponencialmente (JACYNTHO et al., 2015; GALVÃO et al., 2020). Esse conceito foi originalmente proposto em Jacyntho et al. (2015), com o objetivo de identificar os parâmetros e expoentes fracionários de funções de transferência através de medidas de resposta ao degrau. Uma generalização que permitiu a utilização de formas de onda de entradas arbitrárias foi mais tarde proposta em Galvão et al. (2020). Ambos os trabalhos assumiam que o sistema estava inicialmente em repouso, o que não pode ser o caso em experimentos de identificação reais. Esse capítulo estende, pois, os resultados em Galvão et al. (2020) para o caso em que o sistema possui condições iniciais não nulas. Esse caso foi também tratado em Lu et al. (2020), com uma metodologia baseada em funções do tipo *block pulse*. No entanto, a abordagem aqui proposta tem um escopo mais amplo de aplicações em relação à abordagem em Lu et al. (2020), pois lida com modelos que apresentam derivadas na entrada e também permite a identificação dos expoentes fracionários.

6.1 CONCEITOS PRELIMINARES

Considere as definições:

Definição 6.1. (SALGADO, 2015; PODLUBNY, 1998) Sejam $\alpha > 0$, $n_\alpha < \alpha < n_\alpha - 1$ e $y(t)$ uma função em definida em $\mathbb{R}_+$ e diferenciável até ordem $n-1$ em $t = 0^+$. Se a transformada de *Laplace* de $y(t)$, denotada por $L\{y(t)\} = Y(s)$, existe para $s \geq c \in \mathbb{R}$, então, dado $s > max\{0, c\}$, a transformada de *Laplace* da derivada de *Caputo* de $y(t)$ (PODLUBNY, 1998) (Apêndice A), denotada por $\mathscr{L}\{{}^cD^\alpha y(t)\}$, é expressa por:

$$\mathscr{L}\{{}^cD^\alpha y(t)\} = s^\alpha Y(s) - \sum_{k=0}^{n_\alpha - 1} s^{\alpha-k-1} y^{(k)}(0^-). \tag{6.1}$$

Definição 6.2. O sistema considerado nesse capítulo é governado pela seguinte equação diferencial fracionária, segundo a derivada de *Caputo*, com um dado número de coeficientes reais $a_1, \cdots, a_n, b_0, b_1, \cdots, b_m$ e expoentes reais $0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n$, $0 < \beta_1 < \cdots < \beta_m$, com $\beta_m < \alpha_n$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i {}^cD^{\alpha_i} y(t) + y(t) = \sum_{j=1}^{m} b_j {}^cD^{\beta_j} u(t) + b_0 u(t). \tag{6.2}$$

Aplicando a transformada de *Laplace* em (6.2), com $U(s) = \mathscr{L}\{u(t)\}$ e $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}$ a transformada de *Laplace* dos sinais de entrada e saída, respectivamente, e condições iniciais $y^{(k)}(0^-)$, k=0, 1, $\cdots$, $n_{\alpha_n} - 1$ e $u^{(l)}(0^-) = 0$, $l = 0, 1, \cdots, n_{\beta_m} - 1$, obtém-se:

$$Y(s) = G(s)U(s) + H(s), \tag{6.3}$$

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{(b_0 + b_1 s^{\beta_1} + \cdots + b_m s^{\beta_m})}{(1 + a_1 s^{\alpha_1} + \cdots + a_n s^{\alpha_n})}, \tag{6.4}$$

$$H(s) = \frac{F(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{k=0}^{n_{\alpha_i}-1} s^{\alpha_i-k-1} y^{(k)}(0^-)}{(1 + a_1 s^{\alpha_1} + \cdots + a_n s^{\alpha_n})}. \tag{6.5}$$

com $Y(s)$ e $U(s)$ as transformadas de *Laplace* de $y(t)$ e $u(t)$, respectivamente. Considere uma nova parametrização para $H(s)$, da forma:

$$\hat{H}(s) = \frac{\hat{F}(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{n_{\alpha_i}-1} s^{\alpha_i-k-1} f_{i_k}}{(1 + a_1 s^{\alpha_1} + \cdots + a_n s^{\alpha_n})}, \tag{6.6}$$

com $f_{i_k} = a_i y^{(k)}(0^-)$. Segue que:

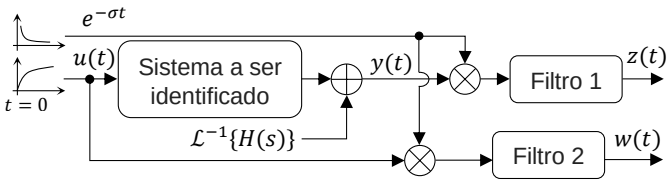
$$Y(s) = \hat{G}(s)U(s), \tag{6.7}$$

$$\hat{G}(s) = \frac{(N(s) + U(s)^{-1}\hat{F}(s))}{D(s)}, \tag{6.8}$$

$$\hat{G}(s) = G(s) + U(s)^{-1}\hat{H}(s). \tag{6.9}$$

Desse modo, o problema foi reformulado ao constituir-se na identificação de um sistema artificial com função de transferência $\hat{G}(s)$ e condições iniciais nulas. O método de identificação proposto utiliza sinais auxiliares $z(t)$ e $w(t)$ (dependentes de um parâmetro positivo $\sigma \in \mathbb{R}$), os quais são obtidos pelo procedimento de modulação exponencial mostrado na Fig. 31, de maneira similar à abordagem em Galvão et al. (2020).

Figura 31 - Geração dos sinais utilizados no método proposto. As funções de transferência dos blocos 'Sistema a ser identificado', 'Filtro 1' e 'Filtro 2' são, respectivamente, $G(s)$, $(\sigma + s)/s$ e σ/s. Os círculos com os sinais $+$ e $\times$ indicam pontos de multiplicação e adição no domínio do tempo, respectivamente. $\mathscr{L}^{-1}\{H(s)\}$ representa a transformada inversa de *Laplace* de $H(s)$



Fonte: próprio autor.

O seguinte teorema fornece uma relação entre os valores finais $\lim_{t\to\infty} z(t) = z_\infty$, $\lim_{t\to\infty} w(t) = w_\infty$ e os parâmetros de (6.4) e (6.6):

Teorema 6.1. Se $\sigma > 0$ é tal que os limites:

$$z_\infty = \lim_{t\to\infty} z(t), \quad w_\infty = \lim_{t\to\infty} w(t), \tag{6.10}$$

existem, então a seguinte identidade vale:

$$z_\infty = w_\infty G(\sigma) + \sigma\hat{H}(\sigma). \tag{6.11}$$

Demonstração. O sinal auxiliar $z(t)$ na Figura 31 resulta da passagem do sinal $y(t)e^{-\sigma t}$ através do filtro de função de transferência $(s + \sigma)/s$:

$$Z(s) = \frac{s+\sigma}{s}\mathscr{L}\{y(t)e^{-\sigma t}\} = \frac{s+\sigma}{s}Y(s+\sigma). \tag{6.12}$$

Como $Y(s) = \hat{G}(s)U(s)$, segue que:

$$Z(s) = \frac{s+\sigma}{s}\hat{G}(s+\sigma)U(s+\sigma). \tag{6.13}$$

Do Teorema do Valor Final:

$$z_\infty = \lim_{s\to 0} sZ(s) = \sigma\hat{G}(\sigma)U(\sigma). \tag{6.14}$$

Já o sinal auxiliar $w(t)$ resulta da passagem do sinal $u(t)e^{-\sigma t}$ através do filtro de função de transferência σ/s:

$$W(s) = \frac{\sigma}{s}\mathscr{L}\{u(t)e^{-\sigma t}\} = \frac{\sigma}{s}U(s+\sigma). \tag{6.15}$$

Do Teorema do Valor Final:

$$w_\infty = \lim_{s\to 0} sW(s) = \sigma U(\sigma). \tag{6.16}$$

Das expressões (6.14) e (6.16):

$$z_\infty = w_\infty\hat{G}(\sigma). \tag{6.17}$$

De (6.9):

$$z_\infty = w_\infty(G(\sigma) + U^{-1}(\sigma)\hat{H}(\sigma)). \tag{6.18}$$

De (6.16), substituindo $U(\sigma)^{-1} = \sigma/w_\infty$:

$$z_\infty = w_\infty G(\sigma) + \sigma\hat{H}(\sigma). \tag{6.19}$$

□

6.2 MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO PROPOSTO

De (6.4), (6.6), Teorema 6.1:

$$z_\infty(a_1\sigma^{\alpha_1} + \cdots + a_n\sigma^{\alpha_n}) - w_\infty(b_0 + b_1\sigma^{\beta_1} + \cdots + b_m\sigma^{\beta_m}) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{n_{\alpha_i}-1} f_{i_k}\sigma^{\alpha_i-k} = -z_\infty. \tag{6.20}$$

Adotando $q = 2(n+m+1+\sum_{i=1}^{n} n_{\alpha_i})$ diferentes valores do parâmetro $\sigma = \sigma_i$ na Figura 31, obtém-se z_{i_∞}, w_{i_∞}, $i = 1,2,\cdots,q$, como em Galvão et al. (2020). Assim, o problema de identificação pode ser reportado através da resolução do seguinte sistema de equações lineares:

$$A\theta = c + e, \tag{6.21}$$

$$A = \begin{pmatrix} z_{1_\infty}\sigma_1^{\alpha_1} & \cdots & z_{1_\infty}\sigma_1^{\alpha_n} & -w_{1_\infty} & -w_{1_\infty}\sigma_1^{\beta_1} & \cdots & -w_{1_\infty}\sigma_1^{\beta_m} \\ z_{2_\infty}\sigma_2^{\alpha_1} & \cdots & z_{2_\infty}\sigma_2^{\alpha_n} & -w_{2_\infty} & -w_{2_\infty}\sigma_2^{\beta_1} & \cdots & -w_{2_\infty}\sigma_2^{\beta_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{q_\infty}\sigma_q^{\alpha_1} & \cdots & z_{q_\infty}\sigma_q^{\alpha_n} & -w_{q_\infty} & -w_{q_\infty}\sigma_q^{\beta_1} & \cdots & -w_{q_\infty}\sigma_q^{\beta_m} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\sigma_1^{\alpha_1} & \cdots & -\sigma_1^{\alpha_1-n_{\alpha_1}+1} & \cdots & -\sigma_1^{\alpha_n} & \cdots & -\sigma_1^{\alpha_n-n_{\alpha_n}+1} \\ -\sigma_2^{\alpha_1} & \cdots & -\sigma_2^{\alpha_1-n_{\alpha_1}+1} & \cdots & -\sigma_2^{\alpha_n} & \cdots & -\sigma_2^{\alpha_n-n_{\alpha_n}+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\sigma_q^{\alpha_1} & \cdots & -\sigma_q^{\alpha_1-n_{\alpha_1}+1} & \cdots & -\sigma_q^{\alpha_n} & \cdots & -\sigma_q^{\alpha_n-n_{\alpha_n}+1} \end{pmatrix}, \tag{6.22}$$

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 & \ldots & a_n & b_0 & \ldots & b_m & f_{1_0} & \ldots & f_{1_{n_{\alpha_1}-1}} & \ldots & f_{n_0} & \ldots & f_{n_{n_{\alpha_n}-1}} \end{bmatrix}^T, \tag{6.23}$$

$$c = -\begin{bmatrix} z_1(\infty) & z_2(\infty) & \cdots & z_q(\infty) \end{bmatrix}^T, \tag{6.24}$$

com $A \in \mathbb{R}^{q\times\frac{q}{2}}$ e e o vetor de resíduos associados à presença de ruído nas medições. É adotada a estimativa de mínimos quadrados para o vetor paramétrico:

$$\hat{\theta} = (A^TA)^{-1}A^Tc. \tag{6.25}$$

Seja $\hat{e} = A\hat{\theta} - c$, de (6.25) obtém-se $\hat{e} = [A(A^TA)^{-1}A^T - I_{q\times q}]c$. A soma dos quadrados dos resíduos $E = \hat{e}^T\hat{e}$ resulta em:

$$E = c^T[A(A^TA)^{-1}\underline{A^TA(A^TA)^{-1}}A^T - 2A(A^TA)^{-1}A^T + I_{q\times q}]c. \tag{6.26}$$

O termo destacado é $I_{q\times q}$, logo (GALVÃO et al., 2020):

$$E = c^T[I_{q\times q} - A(A^TA)^{-1}A^T]c. \tag{6.27}$$

Observação 6.1. Na ausência de ruído (nesse caso $e = 0$, teoricamente), segue de (6.21) que $A^TA\theta = A^Tc$. Se A tem *rank* completo, então A^TA é invertível, o que conduz a $\theta = (A^TA)^{-1}A^Tc$. Na presença de ruído, essa é a solução para (6.21) no sentido dos mínimos quadrados.

Com uma sequência de passos similares aos empregados em Galvão et al. (2020), segue o procedimento adotado:

1) Encontrar o valor mínimo de $E \times (\alpha_i, \beta_j)$, através de um procedimento de *gridding* ou busca guiada, para o qual são identificado os expoentes α_i, $i = 1,2,\cdots,n$, e β_j, $j = 1,2,\cdots,m$. É assumido que $\alpha_i \in (p_i - 1, p_i)$, em que $p_i \in \{1,2,\cdots,p_{i_{max}}\}$ são desconhecidos e $p_{i_{max}}$, $i = 1,2,\cdots,n$, são conhecidos. Note que $p_{1_{max}} \leq p_{2_{max}} \leq p_{n_{max}}$, já que $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$. Então, para cada possível combinação de todos os intervalos acima mencionados, quando utilizado um procedimento de *gridding*, tem-se os parâmetros f_{i_k}, $i = 1,2,\cdots,n$, $k = 0,1,\cdots,p_i - 1$ e então A pode ser obtida de (6.20) e (6.22) e c de (6.24), com $n_{\alpha_i} = p_i$, $i = 1,2,\cdots,n$. Além disso, para cada uma das referidas combinações, calcula-se o mínimo E e seja E_{min} o mínimo desses mínimos E. O valor E_{min} pode ser não único, pois alguns desses testes sugeridos podem corresponder a uma mesma identificação. Ademais, o *gridding* deve ser restrito a $\beta_m < \alpha_n$, a fim de manter $G(s)$ estritamente própria;

2) Calcular o vetor $\hat{\theta}$ em (6.25), com a matriz A e o vetor c correspondentes aos expoentes identificados, relacionados a E_{min}, a fim de identificar os coeficientes da planta a_i, b_j, e os parâmetros f_{i_k}, com $k = 1,2,\cdots,n_{\alpha_i} - 1$, $i = 1,2,\cdots,n$ e $j = 1,2,\cdots,m$;

3) Identificar as condições iniciais. Da Observação 6.1, (6.5) e (6.6), obtém-se a equação:

$$f_{i_k} = a_i y^{(k)}(0^-) + \tilde{e}_{i_k}, \tag{6.28}$$

com $\tilde{e}_{i_k}$ o resíduo associado ao erro da estimação de f_{i_k} e a_i devido à presença de ruídos de medição, para $k = 0, 1, \cdots, n_{\alpha_i - 1}$, $i = 1, 2, \cdots, n$. Para estimar as condições iniciais $y^{(k)}(0^-)$, $k = 0, 1, \cdots, n_{\alpha_n} - 1$, defina o conjunto:

$$S_k = \{s_k \in \{1, 2, \cdots, n\} / n_{\alpha_{s_k}} - 1 \geq k\}. \tag{6.29}$$

Seja $\{s_{k_1}, s_{k_2}, \cdots, n\}$ o conjunto de todos os elementos distintos de S_k. Então observe que, da expressão (6.28), obtém-se o seguinte sistema linear:

$$A_{a_k} y^{(k)}(0^-) = f_k + \tilde{e}_k, \tag{6.30}$$

$$A_{a_k} = [a_{s_{k_1}} \; a_{s_{k_2}} \; \cdots \; a_n]^T, \tag{6.31}$$

$$f_k = [f_{s_{k_{1_k}}} \; f_{s_{k_{2_k}}} \; \cdots \; f_{n_k}]^T, \tag{6.32}$$

$$\tilde{e}_k = [\tilde{e}_{s_{k_{1_k}}} \; \tilde{e}_{s_{k_{2_k}}} \; \cdots \; \tilde{e}_{n_k}]^T. \tag{6.33}$$

Uma estimativa de mínimos quadrados das condições iniciais, para $k = 0, 1, \cdots, n_{\alpha_n} - 1$, é:

$$\hat{y}^{(k)}(0^-) = (A_{a_k}^T A_{a_k})^{-1} A_{a_k}^T f_k. \tag{6.34}$$

Observação 6.2. Quando é assumido que as condições iniciais são nulas, o método proposto nesse capítulo recai no método estabelecido em Galvão et al. (2020).

6.3 RESULTADOS

Os resultados apresentados são obtidos com o *software* MATLAB e o pacote computacional FOTF, projetado para lidar com sistemas de ordem fracionária (XUE, 2017, 2019). As funções do pacote FOTF utilizadas para a simulação de uma entrada geral $u_g(t) = b_m {}^c D^{\beta_m} u(t) + \cdots + b_1 {}^c D^{\beta_1} u(t) + b_0 u(t)$ e da equação diferencial com condições iniciais não nulas (6.2) são *caputo*9(.) e *fode_caputo*9(.), respectivamente. Foi adotado o valor $p = 4$ para o parâmetro de precisão das funções mencionadas e o valor $h = 0,005$ para o passo das simulações.

Exemplo 6.1. A metodologia é aplicada para a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{b_0}{1 + a_1 s^{\alpha_1}}, \tag{6.35}$$

com $a_1 = 5$, $b_0 = 2$, $\alpha_1 = 1,5$, $y(0^-) = 1$ e $\dot{y}(0^-) = -1$.

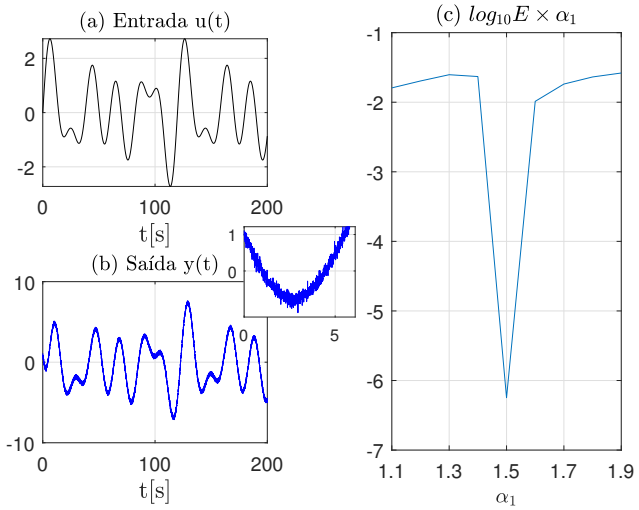
A entrada adotada é:

$$u(t) = \sum_{i=1}^{3} sin\left(\pi t / (5(i+1))\right). \tag{6.36}$$

A saída $y(t)$ gerada é corrompida por ruído Gaussiano com media nula e desvio padrão de $0,1$. As Figuras 6.2*a* e 6.2*b* mostram os gráficos de $u(t)$ e $y(t)$, respectivamente, para um tempo

de simulação $T = 200$s. A escolha dos valores de σ foi: $\sigma_1 = 2ln(100)/200$ e $\sigma_i = \sigma_1^{2^{(i-1)}}$, $i = 2,3,\cdots,q$, como recomendado em Galvão et al. (2020). Adotando $n_{\alpha_n} = 2$ e seguindo a Etapa 1) do procedimento geral, com um passo de $0,1$ nas buscas bidimensionais, o valores mínimos de E nos intervalos $\alpha_1 \in (0,1)$ e $\alpha_1 \in (1,2)$ foram $0,0018$ and $5,6549 \times 10^{-7}$, respectivamente. O mínimo $E = E_{min} = 5,6549 \times 10^{-7}$ foi obtido para $\alpha_1 = 1,5$, que corresponde ao valor real do expoente da planta. A Figura 6.2*c* mostra o gráfico de $log_{10}E \times \alpha_1$, no intervalo correspondente $\alpha_1 \in (1,2)$, no qual E_m foi encontrado.

Figura 32 - Exemplo 6.1 (a) Sinal de entrada $u(t)$ (b) Sinal de saída $y(t)$, o gráfico menor mostra a condição inicial $y(0^-)$ (c) Erro E empregado na escolha de α_1



Fonte: próprio autor.

De (6.25), o vetor $\hat{\theta}$ é estimado, conduzindo a seguinte função de transferência identificada:

$$G_{id}(s) = \frac{1,9988}{1+4,9986s^{1,5}}, \tag{6.37}$$

com condições iniciais estimadas $y(0^-) = 0,9965$ e $\dot{y}(0^-) = -0,9992$, conforme a Etapa 3) do procedimento geral. A reprodutibilidade dos resultados é investigada repetindo a identificação 1000 vezes, cada uma dessas realizações com um ruído diferente, sob as mesmas condições e *gridding* da simulação prévia. A Tabela 2 apresenta os resultados de identificação para $\alpha_1 \in (1,2)$, bem como os resultados obtidos, sob as mesmas condições, ignorando a existência das condições iniciais, usando o método descrito em Galvão et al. (2020). Note que a não observância das condições iniciais conduz a resultados de identificação incorretos.

Tabela 2 - Exemplo 6.1. Parâmetros estimados (média $\pm$ desvio padrão sobre 1000 realizações) pelo método proposto e pelo método em Galvão et al. (2020)

Parâmetros	Método Proposto	Método em Galvão et al. (2020)	Valores reais
α_1	$1,5 \pm 0$	$1,9 \pm 0$	$1,5$
a_1	$4,9997 \pm 0,0148$	$6,3052 \pm 0,2614$	5
b_0	$1,9998 \pm 0,0045$	$0,5335 \pm 0,0031$	2
$y(0^-)$	$1,0002 \pm 0,0080$	–	1
$\dot{y}(0^-)$	$-0,9998 \pm 0,0042$	–	-1

Fonte: próprio autor.

Exemplo 6.2. A metodologia é aplicada para a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s^{\beta_1}}{1 + a_1 s^{\alpha_1}}, \tag{6.38}$$

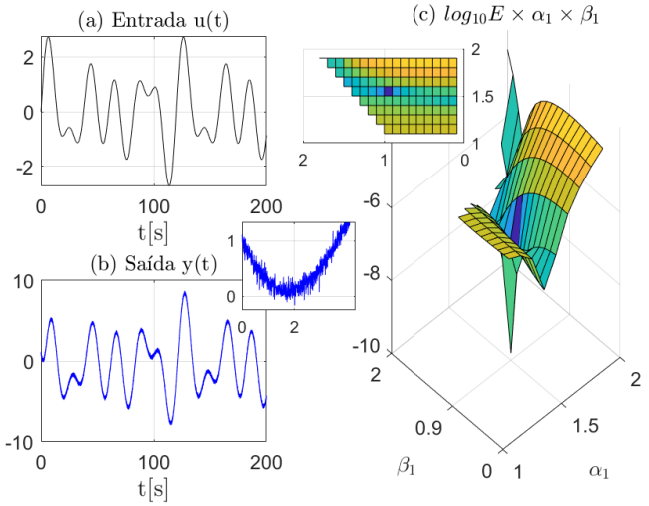
com $a_1 = 5$, $b_0 = 2$, $b_1 = 3$, $\alpha_1 = 1{,}5$, $\beta_1 = 0{,}9$, $y(0^-) = 1$ e $\dot{y}(0^-) = -1$.

A entrada adotada é:

$$u(t) = \sum_{i=1}^{3} sin\left(\pi t/(5(i+1))\right). \tag{6.39}$$

A saída $y(t)$ gerada é corrompida por ruído Gaussiano com media nula e desvio padrão de $0{,}1$. As Figuras 6.3*a* e 6.3*b* mostram os gráficos de $u(t)$ e $y(t)$, respectivamente, para um tempo de simulação $T = 200$s. A escolha dos valores de σ foi: $\sigma_1 = 2ln(100)/200$ e $\sigma_i = \sigma_1^{2^{(i-1)}}$, $i = 2, 3, \cdots, q$, como recomendado em Galvão et al. (2020). Adotando $n_{\alpha_n} = 2$ e seguindo a Etapa 1) do procedimento geral, com um passo de $0{,}1$ nas buscas bidimensionais, o valores mínimos E nos intervalos $\alpha_1 \in (0,1)$ e $\alpha_1 \in (1,2)$ foram $3{,}4435 \times 10^{-4}$ and $1{,}5530 \times 10^{-10}$, respectivamente. O mínimo $E = E_{min} = 1{,}5530 \times 10^{-10}$ foi obtido para $\alpha_1 = 1{,}5$ e $\beta_1 = 0{,}9$, que correspondem aos valores reais dos expoentes da planta. A Figura 6.2*c* mostra o gráfico de $log_{10}E \times (\alpha_1, \beta_1)$, no intervalo correspondente $\alpha_1 \in (1,2)$, no qual E_m foi encontrado.

Figura 33 - Exemplo 6.2 (a) Sinal de entrada $u(t)$ (b) Sinal de saída $y(t)$, o gráfico menor mostra a condição inicial $y(0^-)$ (c) Erro E empregado na escolha de α_1 e β_1, o gráfico menor mostra que a função de transferência foi mantida estritamente própria



Fonte: próprio autor.

De (6.25), o vetor $\hat{\theta}$ é estimado, conduzindo a seguinte função de transferência identificada:

$$G_{id}(s) = \frac{2{,}0013 + 3{,}0144 s^{0{,}9}}{1 + 5{,}0175 s^{1{,}5}}, \tag{6.40}$$

com condições iniciais estimadas $y(0^-) = 0{,}9956$ e $\dot{y}(0^-) = -0{,}9987$, conforme a Etapa 3) do procedimento geral. A reprodutibilidade dos resultados é investigada repetindo a identificação 1000 vezes, cada uma dessas realizações com um ruído diferente, sob as mesmas condi-

ções e *gridding* da simulação prévia. A Tabela 3 apresenta os resultados de identificação para $\alpha_1 \in (1,2)$, bem como os resultados obtidos, sob as mesmas condições, ignorando a existência das condições iniciais, usando o método descrito em Galvão et al. (2020). Note que a não observância das condições iniciais conduz a resultados de identificação incorretos.

Tabela 3 - Exemplo 6.2. Parâmetros estimados (média $\pm$ desvio padrão sobre 1000 realizações) pelo método proposto e pelo método em Galvão et al. (2020)

	Método Proposto	Método em Galvão et al. (2020)	Valores reais
α_1	$1,5 \pm 0$	$1,1000 \pm 0$	1,5
β_1	$0,9017 \pm 0,0468$	$1,0000 \pm 0$	0,9
a_1	$4,9972 \pm 0,0751$	$-3,8818 \pm 0,0993$	5
b_0	$2,0008 \pm 0,0576$	$0,8603 \pm 0,0065$	2
b_1	$3,0130 \pm 0,1055$	$-2,9306 \pm 0,0500$	3
$y(0^-)$	$1,0001 \pm 0,0118$	–	1
$\dot{y}(0^-)$	$-1,0024 \pm 0,0361$	–	-1

Fonte: próprio autor.

Exemplo 6.3. A metodologia é aplicada a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{b_0}{1 + a_1 s^{\alpha_1} + a_2 s^{\alpha_2}}, \tag{6.41}$$

com $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $b_0 = 2$, $b_1 = 3$, $\alpha_1 = 0,5$, $\alpha_2 = 1,9$, $y(0^-) = 1$ e $\dot{y}(0^-) = -1$.

Sob as mesmas condições do Exemplo 6.2 e agora considerando que as ordens $\alpha_1 = 0,5$ e $\alpha_2 = 1,9$ são conhecidas, a seguinte função de transferência é identificada:

$$G_{id}(s) = \frac{2,0073}{1 + 1,0075 s^{0,5} + 5,0077 s^{1,9}}, \tag{6.42}$$

com condições iniciais estimadas $y(0^-) = 0,9942$ e $\dot{y}(0^-) = -0,9939$.

6.4 CONCLUSÕES DO CAPÍTULO

Esse capítulo estende a metodologia de Galvão et al. (2020) para sistemas de ordem fracionária com condições inciais não nulas, descritos pela derivada de *Caputo*. A generalização foi realizada através de uma representação equivalente para a planta com condições iniciais não nulas, que consiste de um sistema artificial com condições iniciais nulas. Novas ideias estão sob investigação a fim de obter um tratamento mais sistemático das potências em 'σ' que aparecem no contexto do método. O resultado de 1000 realizações mostrou valores satisfatórios de média e desvio padrão. As vantagens desse método em relação ao apresentado em Lu et al. (2020) são as seguintes: a aplicação estruturada ao caso em que o modelo matemático da planta apresenta derivadas na entrada e a identificação dos expoentes fracionários da função de transferência.

7 CONCLUSÕES

Essa tese compila quatro critérios para análise de estabilidade por realimentação de pseudo-estados de sistemas de ordem $\alpha \in (0,2)$, via LMIs. Um dos critérios mais utilizados na literatura para as propostas de síntese de controle é aquele que se baseia no conceito de regiões LMIs generalizadas, aplicado a sistemas de ordem $\alpha \in (0,1)$. Utilizando esse critério, uma proposta para o controle via realimentação α-derivativa de sistemas de ordem $\alpha \in (0,1)$ encontra-se no Teorema 3.3. Além disso, o Teorema 3.5 traz a proposta para o controle via realimentação α-derivativa agora aplicada a sistemas de ordem $\alpha \in (1,2)$. No Capítulo 4 é proposta uma metodologia de controle de saída que inclui um observador de pseudo-estados do tipo *Luenberger*, *leaky integrators* e uma malha externa, cuja eficácia é demonstrada através da aplicação ao modelo do sistema respiratório humano, em que é fornecida uma pressão de ar capaz de gerar um perfil desejado de vazão de ar, o que pode pode ser integrado ao projeto de um respirador mecânico. Além disso, através de uma abordagem em que as matrizes incertas são consideradas diretamente em uma matriz aumentada, o ganho do controlador demonstrou ser robusto diante de variações consideráveis nos parâmetros. O modelo do sistema respiratório humano também demonstra, no Capítulo 5, a eficácia da metodologia proposta de redução da quantidade de variáveis de pseudo-estados de sistemas de ordem $\alpha \in (0,2)$. Por fim, o Capítulo 6 propõe um método de identificação de funções de transferência de ordens fracionárias $0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_n$, com condições iniciais não nulas, utilizando sinais modulados exponencialmente e formas de onda de entrada arbitrárias, como extensão dos resultados aplicados ao caso em que o sistema está inicialmente em repouso, estabelecidos em Galvão et al. (2020). A eficácia da identificação é demonstrada com exemplos numéricos de funções de transferência.

7.1 CONTRIBUIÇÕES

- Apresentação e contextualização dos resultados fundamentais no âmbito da análise e síntese de sistemas de ordem fracionária através de LMIs;
- Teoremas 3.3 e 3.5 para a estabilização α-derivativa de sistemas de ordem $\alpha \in (0,1)$ e $\alpha \in (1,2)$, respectivamente;
- Capítulo 4: metodologia de controle de saída, com análise de robustez;
- Capítulo 5: metodologia de redução da quantidade de variáveis de pseudo-estados;
- Capítulo 6: identificação de funções de transferência de ordens fracionárias, com condições iniciais não nulas.

REFERÊNCIAS

ABRO, K. A.; GOMEZ-AGUILAR, J. F. Fractional modeling of fin on non-Fourier heat conduction via modern fractional differential operators. *Arabian Journal for Science and Engineering*, Springer, Heidelberg, v. 46, n. 3, p. 2901–2910, 2021.

ACAY, B.; INC, M. Electrical circuits RC, LC, and RLC under generalized type non-local singular fractional operator. *Fractal and Fractional*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, Basel, v. 5, n. 1, p. 9, 2021.

ADELIPOUR, S.; ABOOEE, A.; HAERI, M. LMI-based sufficient conditions for robust stability and stabilization of LTI-fractional-order systems subjected to interval and polytopic uncertainties. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, Sage Publications Ltd., London, v. 37, n. 10, p. 1207–1216, 2015.

AL-ZHOUR, Z. Controllability and observability behaviors of a non-homogeneous conformable fractional dynamical system compatible with some electrical applications. *Alexandria Engineering Journal*, Elsevier, Alexandria, v. 61, n. 2, p. 1055–1067, 2022.

ANASTASSIOU, G. A. *Generalized fractional calculus: new advancements and applications*. [S.l.]: Springer Nature, 2020.

ANASTASSIOU, G. A. *Unification of Fractional Calculi with Applications*. [S.l.]: Springer Nature, 2021.

BACHELIER, O. *Commande des systemes linéaires incertains: placement de pôles robuste en D-stabilité*. Tese (Doutorado) — Toulouse, INSA, 1998.

BAGLEY, R. L.; CALICO, R. Fractional order state equations for the control of viscoelastically damped structures. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, v. 14, n. 2, p. 304–311, 1991.

BALACHANDRAN, K.; GOVINDARAJ, V.; ORTIGUEIRA, M. D.; RIVERO, M.; TRUJILLO, J. J. Observability and controllability of fractional linear dynamical systems. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier, Kidlington, v. 46, n. 1, p. 893–898, 2013.

BETTAYEB, M.; DJENNOUNE, S. New results on the controllability and observability of fractional dynamical systems. *Journal of Vibration and Control*, Sage Publications Ltd., London, v. 14, n. 9-10, p. 1531–1541, 2008.

BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Book: Linear matrix inequalities in system and control theory*. [S.l.]: SIAM, 1994. 205 p.

BUSŁOWICZ, M. Stability of state-space models of linear continuous-time fractional order systems. *Acta Mechanica et Automatica*, Politechnika Białostocka. Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, Bialystok, v. 5, n. 2, p. 15–22, 2011.

CAPUTO, M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent-II. *Geophysical Journal International*, Oxford University Press, Oxford, v. 13, n. 5, p. 529–539, 1967.

CHILALI, M. *Methodes LMI pour l'analyse et la synthèse multicritère*. Tese (Doutorado) — Paris 9, 1996.

CHILALI, M.; GAHINET, P. H_∞ design with pole placement constraints: an LMI approach. *IEEE Transactions on automatic control*, IEEE, Piscataway, v. 41, n. 3, p. 358–367, 1996.

CHILALI, M.; GAHINET, P.; APKARIAN, P. Robust pole placement in LMI regions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, Piscataway, v. 44, n. 12, p. 2257–2270, 1999.

DAI, H.; CHEN, W. New power law inequalities for fractional derivative and stability analysis of fractional order systems. *Nonlinear Dynamics*, Springer, Dordrecht, v. 87, n. 3, p. 1531–1542, 2017.

DIETHELM, K.; FORD, N. J.; FREED, A. D. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations. *Nonlinear Dynamics*, Springer, Dordrecht, v. 29, n. 1-4, p. 3–22, 2002.

DIETHELM, K.; FORD, N. J.; FREED, A. D. Detailed error analysis for a fractional Adams method. *Numerical algorithms*, Springer, New York, v. 36, n. 1, p. 31–52, 2004.

DUARTE-MERMOUD, M. A.; AGUILA-CAMACHO, N.; GALLEGOS, J. A.; CASTRO-LINARES, R. Using general quadratic Lyapunov functions to prove Lyapunov uniform stability for fractional order systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, Amsterdam, v. 22, n. 1-3, p. 650–659, 2015.

DUMLU, A.; ERENTURK, K. Trajectory tracking control for a 3-DOF parallel manipulator using fractional-order $PI^\lambda D^\mu$ control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, IEEE, Piscataway, v. 61, n. 7, p. 3417–3426, 2013.

EFE, M. Ö. Fractional fuzzy adaptive sliding-mode control of a 2-DOF direct-drive robot arm. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, IEEE, Piscataway, v. 38, n. 6, p. 1561–1570, 2008.

EL-KHAZALI, R.; MOMANI, S. Stability analysis of composite fractional systems. *International Journal of Applied Mathematics*, Academic Publications, Sofia, v. 12, n. 1, p. 73–86, 2003.

ELWAKIL, A. S. Fractional-order circuits and systems: an emerging interdisciplinary research area. *IEEE Circuits and Systems Magazine*, IEEE, Piscataway, v. 10, n. 4, p. 40–50, 2010.

ELWY, O.; ABDELATY, A. M.; SAID, L. A.; MADIAN, A. H.; RADWAN, A. G. Two implementations of fractional-order relaxation oscillators. *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*, Springer, New York, v. 106, n. 2, p. 421–432, 2021.

ENGHEIA, N. On the role of fractional calculus in electromagnetic theory. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, IEEE, Piscataway, v. 39, n. 4, p. 35–46, 1997.

ESPINDOLA, J. J. D.; NETO, J. M. da S.; LOPES, E. M. O. A generalised fractional derivative approach to viscoelastic material properties measurement. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, Philadelphia, v. 164, n. 2, p. 493–506, 2005.

FARGES, C.; MOZE, M.; SABATIER, J. Pseudo state feedback stabilization of commensurate fractional order systems. In: IEEE. *2009 European Control Conference (ECC)*. [S.l.], 2009. p. 3395–3400.

FARGES, C.; SABATIER, J.; MOZE, M. Fractional order polytopic systems: robust stability and stabilisation. *Advances in Difference Equations*, Springer, Heidelberg, v. 2011, n. 1, p. 1–10, 2011.

FELLAH, Z.; DEPOLLIER, C.; FELLAH, M. Application of fractional calculus to the sound waves propagation in rigid porous materials: validation via ultrasonic measurements. *Acta Acustica United with Acustica*, S. Hirzel Verlag, Stuttgart, v. 88, n. 1, p. 34–39, 2002.

GAHINET, P.; NEMIROVSKI, A.; LAUB, A.; CHILALI, M. *LMI control toolbox user's guide*. [S.l.: s.n.], 1995.

GALVÃO, R. K. H.; HADJILOUCAS, S.; KIENITZ, K. H.; PAIVA, H. M.; AFONSO, R. J. M. Fractional order modeling of large three-dimensional RC networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, IEEE, Piscataway, v. 60, n. 3, p. 624–637, 2013.

GALVÃO, R. K. H.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; PAIVA, H. M.; HADJILOUCAS, S. Identification of fractional-order transfer functions using exponentially modulated signals with arbitrary excitation waveforms. *ISA Transactions*, Elsevier, New York, v. 103, p. 10–18, 2020.

GÓMEZ-AGUILAR, J.; CÓRDOVA-FRAGA, T.; ESCALANTE-MARTÍNEZ, J.; CALDERÓN-RAMÓN, C.; ESCOBAR-JIMÉNEZ, R. Electrical circuits described by a fractional derivative with regular Kernel. *Revista Mexicana de Física*, Sociedad Mexicana de Física, Mexico City, v. 62, n. 2, p. 144–154, 2016.

GÓMEZ-AGUILAR, J.; ESCOBAR-JIMÉNEZ, R.; LÓPEZ-LÓPEZ, M.; ALVARADO-MARTÍNEZ, V. Atangana-Baleanu fractional derivative applied to electromagnetic waves in dielectric media. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, Taylor & Francis, Abingdon, v. 30, n. 15, p. 1937–1952, 2016.

GÓMEZ-AGUILAR, J. F.; ESCOBAR-JIMÉNEZ, R. F.; OLIVARES-PEREGRINO, V. H.; TANECO-HERNÁNDEZ, M. A.; GUERRERO-RAMÍREZ, G. V. Electrical circuits RC and RL involving fractional operators with bi-order. *Advances in Mechanical Engineering*, Sage Publications Ltd., London, v. 9, n. 6, p. 1–10, 2017.

GUO, Y.; MA, B. Extension of Lyapunov direct method about the fractional nonautonomous systems with order lying in $(1,2)$. *Nonlinear Dynamics*, Springer, Dordrecht, v. 84, n. 3, p. 1353–1361, 2016.

IONESCU, C.; KEYSER, R. D. Parametric models for characterizing respiratory input impedance. *Journal of Medical Engineering & Technology*, Taylor & Francis, Abingdon, v. 32, n. 4, p. 315–324, 2008.

IONESCU, C.; OUSTALOUP, A.; LEVRON, F.; MELCHIOR, P.; SABATIER, J.; KEYSER, R. D. A model of the lungs based on fractal geometrical and structural properties. In: *15th IFAC Symposium on System Identification (SYSID 2009)*. [S.l.: s.n.], 2009. p. 994–999.

IONESCU, C. M.; KEYSER, R. D. Relations between fractional-order model parameters and lung pathology in chronic obstructive pulmonary disease. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, IEEE, Piscataway, v. 56, n. 4, p. 978–987, 2009.

IONESCU, C.-M.; KOSIŃSKI, W.; KEYSER, R. D. Viscoelasticity and fractal structure in a model of human lungs. *Archives of Mechanics*, Polska Akademia Nauk * Instytut Podstawowych Problemow, Warsaw, v. 62, n. 1, p. 21–48, 2010.

IONESCU, C. M.; MACHADO, J. A. T.; KEYSER, R. D. Modelling of the lung impedance using a fractional-order ladder network with constant phase elements. *IEEE Transactions on Biomedical Circuits and Systems*, IEEE, Piscataway, v. 5, n. 1, p. 83–89, 2011.

IONESCU, C. M.; SEGERS, P.; KEYSER, R. D. Mechanical properties of the respiratory system

derived from morphologic insight. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, IEEE, Piscataway, v. 56, n. 4, p. 949–959, 2008.

JACYNTHO, L. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R.; GALVÃO, R. K. H.; HADJILOUCAS, S. Identification of fractional-order transfer functions using a step excitation. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, IEEE, Piscataway, v. 62, n. 9, p. 896–900, 2015.

JENA, R. M.; CHAKRAVERTY, S. Fractional fluid mechanics systems. In: *New Paradigms in Computational Modeling and Its Applications*. [S.l.]: Elsevier, 2021. p. 71–83.

KACHHIA, K. B.; ATANGANA, A. Electromagnetic waves described by a fractional derivative of variable and constant order with non singular kernel. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-S*, American Institute of Mathematical Sciences, Springfield, v. 14, n. 7, p. 2357–2371, 2021.

KILBAS, A. A.; SRIVASTAVA, H. M.; TRUJILLO, J. J. *Theory and applications of fractional differential equations*. [S.l.]: Elsevier, 2006.

KULISH, V. V.; LAGE, J. L. Application of fractional calculus to fluid mechanics. *Journal of Fluids Engineering*, ASME International, New York, v. 124, n. 3, p. 803–806, 2002.

KUZMINSKAS, H. Controle robusto chaveado de sistemas lineares e não lineares de ordem fracionária. 2018. 109 f. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - UNESP, Ilha Solteira, SP, Brasil, 2018.

LAN, Y.-H.; HUANG, H.-X.; ZHOU, Y. Observer-based robust control of a $(1 \leq a < 2)$ fractional-order uncertain systems: a linear matrix inequality approach. *IET control theory & applications*, IET, Stevenage, v. 6, n. 2, p. 229–234, 2012.

LAN, Y.-H.; ZHOU, Y. LMI-based robust control of fractional-order uncertain linear systems. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, Oxford, v. 62, n. 3, p. 1460–1471, 2011.

LI, C.; TAO, C. On the fractional Adams method. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, Oxford, v. 58, n. 8, p. 1573–1588, 2009.

LI, Y.; CHEN, Y.; PODLUBNY, I. Mittag-Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems. *Automatica*, Elsevier, Oxford, v. 45, n. 8, p. 1965–1969, 2009.

LI, Y.; CHEN, Y.; PODLUBNY, I. Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, Oxford, v. 59, n. 5, p. 1810–1821, 2010.

LIANG, D. *Some important properties for matrix calculus*. Carnegie Mellon University, 2015.

LIU, H.; PAN, Y.; CAO, J.; WANG, H.; ZHOU, Y. Adaptive neural network backstepping control of fractional-order nonlinear systems with actuator faults. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, IEEE, Piscataway, v. 31, n. 12, p. 5166–5177, 2020.

LIU, H.; PAN, Y.; LI, S.; CHEN, Y. Adaptive fuzzy backstepping control of fractional-order nonlinear systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, IEEE, Piscataway, v. 47, n. 8, p. 2209–2217, 2017.

LIU, Z.; QIU, Y.; FENG, J.; CHEN, S.; YANG, C. A simplified fractional order modeling and parameter identification for lithium-ion batteries. *Journal of Electrochemical Energy Conversion and Storage*, The American Society of Mechanical Engineers, New York, v. 19, n. 2, p. 021001, 2022.

LÖFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: IEEE. *2004 IEEE international conference on robotics and automation (IEEE Cat. No. 04CH37508)*. [S.l.], 2004. p. 284–289.

LORENZO, C. F.; HARTLEY, T. T. Initialization in fractional order systems. In: IEEE. *2001 European Control Conference (ECC)*. [S.l.], 2001. p. 1471–1476.

LORENZO, S. D.; PAOLA, M. D.; MANTIA, F. P. L.; PIRROTTA, A. Non-linear viscoelastic behavior of polymer melts interpreted by fractional viscoelastic model. *Meccanica*, Springer, Dordrecht, v. 52, n. 8, p. 1843–1850, 2017.

LU, J.-G.; CHEN, G. Robust stability and stabilization of fractional-order interval systems: an LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, Piscataway, v. 54, n. 6, p. 1294–1299, 2009.

LU, J.-G.; CHEN, Y.-Q. Robust stability and stabilization of fractional-order interval systems with the fractional order α: The $0 < \alpha < 1$ case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, Piscataway, v. 55, n. 1, p. 152–158, 2010.

LU, Y.; TANG, Y.; ZHANG, X.; WANG, S. Parameter identification of fractional order systems with nonzero initial conditions based on block pulse functions. *Measurement*, Elsevier, Amsterdam, v. 158, p. 107684, 2020.

MA, Y.; LU, J.; CHEN, W. Robust stability and stabilization of fractional order linear systems with positive real uncertainty. *ISA Transactions*, Elsevier, New York, v. 53, n. 2, p. 199–209, 2014.

MAO, J.-W.; HU, D.-L. Vibrational resonance and electrical activity behavior of a fractional-order FitzHugh–Nagumo neuron system. *Mathematics*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, Basel, v. 10, n. 1, p. 87, 2021.

MATIGNON, D. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. In: CITESEER. *Computational engineering in systems applications*. [S.l.], 1996. v. 2, n. 1, p. 963–968.

MATIGNON, D. Stability properties for generalized fractional differential systems. In: EDP SCIENCES. *ESAIM: proceedings*. [S.l.], 1998. v. 5, p. 145–158.

MATIGNON, D.; D'ANDRÉA-NOVEL, B. Some results on controllability and observability of finite-dimensional fractional differential systems. In: CITESEER. *Computational engineering in systems applications*. [S.l.], 1996. v. 2, p. 952–956.

MATIGNON, D.; D'ANDRÉA-NOVEL, B. Observer-based controllers for fractional differential systems. In: IEEE. *Decision and Control, 1997., Proceedings of the 36th IEEE Conference on*. [S.l.], 1997. v. 5, p. 4967–4972.

MILLER, K. S.; ROSS, B. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. [S.l.]: Wiley-Interscience, 1993.

MOZE, M.; SABATIER, J.; OUSTALOUP, A. LMI tools for stability analysis of fractional systems. In: AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS. *ASME 2005 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. [S.l.], 2005. v. 47438, p. 1611–1619.

MU, H.; XIONG, R.; ZHENG, H.; CHANG, Y.; CHEN, Z. A novel fractional order model based state-of-charge estimation method for lithium-ion battery. *Applied Energy*, Elsevier, Oxford, v. 207, p. 384–393, 2017.

N'DOYE, I.; DAROUACH, M.; VOOS, H.; ZASADZINSKI, M. On the robustness of linear and non-linear fractional-order systems with non-linear uncertain parameters. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, Oxford University Press, Oxford, v. 33, n. 4, p. 997–1014, 2015.

N'DOYE, I.; DAROUACH, M.; ZASADZINSKI, M.; RADHY, N.-E. Robust stabilization of uncertain descriptor fractional-order systems. *Automatica*, Elsevier, Oxford, v. 49, n. 6, p. 1907–1913, 2013.

N'DOYE, I.; ZASADZINSKI, M.; DAROUACH, M.; RADHY, N.-E. Observer-based control for fractional-order continuous-time systems. In: IEEE. *Proceedings of the 48h IEEE Conference on Decision and Control (CDC) held jointly with 2009 28th Chinese Control Conference*. [S.l.], 2009. p. 1932–1937.

OGATA, K. *Modern control engineering*. [S.l.]: Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 2010.

OLDHAM, K.; SPANIER, J. *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*. [S.l.]: Elsevier, 1974.

OUSTALOUP, A. *La dérivation non entière*. [S.l.]: Hermes, 1995.

PADULA, F.; VISIOLI, A. Tuning rules for optimal PID and fractional-order PID controllers. *Journal of process control*, Elsevier, London, v. 21, n. 1, p. 69–81, 2011.

PETERSEN, K. B.; PEDERSEN, M. S. The matrix cookbook. *Technical University of Denmark*, Danmarks Tekniske Universitet, Kgs. Lyngby, v. 7, n. 15, p. 510, 2008.

PODLUBNY, I. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. [S.l.]: Elsevier, 1998.

PODLUBNY, I. Fractional-order systems and PI$^{\lambda}D^{\mu}$ - controllers. *IEEE Transactions on automatic control*, IEEE, Piscataway, v. 44, n. 1, p. 208–214, 1999.

PODLUBNY, I.; DORCAK, L.; KOSTIAL, I. On fractional derivatives, fractional-order dynamic systems and PI$^{\lambda}D^{\mu}$ - controllers. In: IEEE. *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.], 1997. v. 5, p. 4985–4990.

POVSTENKO, Y. Thermoelasticity that uses fractional heat conduction equation. *Journal of Mathematical Sciences*, Springer, New York, v. 162, n. 2, p. 296–305, 2009.

POVSTENKO, Y. Z. Fractional heat conduction equation and associated thermal stress. *Journal of Thermal Stresses*, Taylor & Francis, New York, v. 28, n. 1, p. 83–102, 2004.

QIU, J.; JI, Y. Observer-based robust controller design for nonlinear fractional-order uncertain systems via LMI. *Mathematical Problems in Engineering*, Hindawi, London, v. 2017, p. 1–15, 2017.

RABAH, K.; LADACI, S. A fractional adaptive sliding mode control configuration for synchronizing disturbed fractional-order chaotic systems. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, Springer, Cham, v. 39, n. 3, p. 1244–1264, 2020.

RADWAN, A. G.; FOUDA, M. E. Optimization of fractional-order RLC filters. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, Birkhaeuser Science, Cham, v. 32, n. 5, p. 2097–2118, 2013.

RADWAN, A. G.; SALAMA, K. N. Fractional-order RC and RL circuits. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, Springer, Cham, v. 31, n. 6, p. 1901–1915, 2012.

ROSALES, J.; GÓMEZ, J.; GUÍA, M.; TKACH, V. Fractional electromagnetic waves. In: IEEE. *2011 11th International Conference on Laser and Fiber-Optical Networks Modeling (LFNM)*. [S.l.], 2011.

p. 1–3.

SABATIER, J.; MOZE, M.; FARGES, C. LMI stability conditions for fractional order systems. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, Oxford, v. 59, n. 5, p. 1594–1609, 2010.

SAID, L. A.; RADWAN, A. G.; MADIAN, A. H.; SOLIMAN, A. M. Three fractional-order-capacitors-based oscillators with controllable phase and frequency. *Journal of Circuits, Systems and Computers*, World Scientific, Singapore, v. 26, n. 10, p. 1750160, 2017.

SALGADO, G. H. O. Métodos numéricos para solução de equações diferenciais segundo a derivada de Caputo. 2015. 175 p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG, Belo Horizonte, 2015.

SHAH, P.; AGASHE, S. Review of fractional PID controller. *Mechatronics*, Elsevier, Oxford, v. 38, p. 29–41, 2016.

SHARMA, S. K.; MONDAL, A.; MONDAL, A.; UPADHYAY, R. K.; HENS, C. Emergence of bursting in a network of memory dependent excitable and spiking leech-heart neurons. *Journal of the Royal Society Interface*, The Royal Society, London, v. 17, n. 167, p. 20190859, 2020.

SHENG, Y.; BAI, W.; XIE, Y. Fractional-order PI^{λ}D sliding mode control for hypersonic vehicles with neural network disturbance compensator. *Nonlinear Dynamics*, Springer, Dordrecht, v. 103, n. 1, p. 849–863, 2021.

SHI, X.; CHENG, Y.; YIN, C.; ZHONG, S.; HUANG, X.; CHEN, K.; QIU, G. Adaptive fractional-order SMC controller design for unmanned quadrotor helicopter under actuator fault and disturbances. *IEEE Access*, IEEE, Piscataway, v. 8, p. 103792–103802, 2020.

SKELTON, R. E.; IWASAKI, T.; GRIGORIADIS, D. E. *A unified algebraic approach to control design*. [S.l.]: CRC Press, 1997.

STURM, J. F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization methods and software*, Taylor & Francis, Abingdon, v. 11, n. 1-4, p. 625–653, 1999.

SUN, H.; ZHANG, Y.; BALEANU, D.; CHEN, W.; CHEN, Y. A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, Amsterdam, v. 64, p. 213–231, 2018.

TARASOV, V. E. Fractional integro-differential equations for electromagnetic waves in dielectric media. *Theoretical and Mathematical Physics*, Springer, Cham, v. 158, n. 3, p. 355–359, 2009.

TEPLJAKOV, A.; PETLENKOV, E.; BELIKOV, J. FOMCON: Fractional-order modeling and control. In: *Toolbox for MATLAB. 18th International Conf. Mixed Design of Integrated Circuits and Systems*. [S.l.: s.n.], 2013. p. 16–18.

TRIGEASSOU, J.-C.; MAAMRI, N.; OUSTALOUP, A. The infinite state approach: origin and necessity. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, Oxford, v. 66, n. 5, p. 892–907, 2013.

TRIGEASSOU, J.-C.; MAAMRI, N.; SABATIER, J.; OUSTALOUP, A. State variables and transients of fractional order differential systems. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, Oxford, v. 64, n. 10, p. 3117–3140, 2012.

TRIGEASSOU, J.-C.; MAAMRI, N.; SABATIER, J.; OUSTALOUP, A. Transients of fractional-order integrator and derivatives. *Signal, Image and Video Processing*, Springer, London, v. 6, n. 3, p. 359–372, 2012.

WEIBEL, E. R. Mandelbrot's fractals and the geometry of life: a tribute to Benoît Mandelbrot on his 80 th birthday. In: *Fractals in Biology and Medicine*. [S.l.]: Springer, 2005. p. 3–16.

WEITENBERG, E.; JIANG, Y.; ZHAO, C.; MALLADA, E.; PERSIS, C. D.; DÖRFLER, F. Robust decentralized secondary frequency control in power systems: merits and tradeoffs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, Piscataway, v. 64, n. 10, p. 3967–3982, 2018.

WEST, B. J. *Fractional calculus view of complexity: tomorrow's science*. [S.l.]: CRC Press, 2016.

WESTERLUND, S.; EKSTAM, L. Capacitor theory. *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, IEEE, Piscataway, v. 1, n. 5, p. 826–839, 1994.

WOLKOWICZ, H.; SAIGAL, R.; VANDENBERGHE, L. *Handbook of semidefinite programming: theory, algorithms and applications*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.

XUE, D. 4. Solutions of linear fractional-order differential equations. In: *Fractional-Order Control Systems: Fundamentals and Numerical Implementations*. Berlin, Boston: De Gruyter, 2017. p. 99–140. ISBN 9783110497977. Disponível em: <https://doi.org/10.1515/9783110497977-004>.

XUE, D. FOTF toolbox for fractional-order control systems. In: *Applications in control*. [S.l.]: De Gruyter Berlin, Germany, 2019. p. 237–266.

YANG, X.-J. *General fractional derivatives: theory, methods and applications*. [S.l.]: CRC Press, 2019.

YIN, C.; HUANG, X.; CHEN, Y.; DADRAS, S.; ZHONG, S.-m.; CHENG, Y. Fractional-order exponential switching technique to enhance sliding mode control. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier, New York, v. 44, p. 705–726, 2017.

YU, J.; HU, H.; ZHOU, S.; LIN, X. Generalized Mittag-Leffler stability of multi-variables fractional order nonlinear systems. *Automatica*, Elsevier, Oxford, v. 49, n. 6, p. 1798–1803, 2013.

ZHANG, S.; YU, Y.; YU, J. LMI conditions for global stability of fractional-order neural networks. *IEEE Transactions on neural networks and learning systems*, IEEE, Piscataway, v. 28, n. 10, p. 2423–2433, 2016.

ZHANG, X.; CHEN, Y. D-stability based LMI criteria of stability and stabilization for fractional order systems. In: AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS. *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. [S.l.], 2015. v. 57199, p. V009T07A029.

ZHANG, X.; LI, B. Robust stabilization of uncertain descriptor fractional-order systems with the fractional order α $(0 < \alpha < 1)$. In: IEEE. *2016 Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*. [S.l.], 2016. p. 560–563.

ZHANG, X.; ZHANG, Y. D-admissibility criteria of singular fractional order systems. In: IEEE. *2019 Chinese Control Conference (CCC)*. [S.l.], 2019. p. 1253–1257.

ZHU, G.; XIONG, Y.; LI, Z.; XIAO, L.; LI, M.; BAI, X. F. A nonlinear dynamic model of magnetorheological elastomers in magnetic fields based on fractional viscoelasticity. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Sage Publications Ltd., London, v. 32, n. 2, p. 228–239, 2021.

APÊNDICE A: SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO INTEGRAL DE *VOLTERRA* - MÉTODO DE *ADAMS-BASHFORTH* FRACIONÁRIO

Considere as definições:

Definição 7.1. (PODLUBNY, 1998; SALGADO, 2015) Sejam $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ e $x(t)$ uma função definida em $[a,b]$. O operador definido por:

$$I^{\alpha}x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}x(\tau)d\tau. \tag{7.1}$$

para $a \leq t \leq b$ é chamado operador integral de ordem α de *Riemann-Liouville*, nos casos em que a integral converge, com $\Gamma(.)$ a função Gama de *Euler*. Para $\alpha = 0$ é definido $I^0x(t) = x(t)$.

Definição 7.2. (PODLUBNY, 1998; SALGADO, 2015) Sejam $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $n-1 < \alpha < n$ e $x(t)$ tal que $\dfrac{d^n}{dt^n}x(t) \in L_1[a,b]$. O operador definido por:

$${}^cD^{\alpha}x(t) = I^{n-\alpha}\left(\frac{d^n}{dt^n}x(t)\right). \tag{7.2}$$

é chamado operador derivada de ordem α de *Caputo*, com $I^{n-\alpha}$ a integral de *Riemann-Liouville* de ordem $n-\alpha$.

Considere o problema de valor inicial de ordem não inteira (PVINI), segundo a derivada de *Caputo*:

$$\begin{cases} {}^cD^{\alpha}x(t) = F(t,x(t)), \\ \left.\dfrac{d^{(k)}x(t)}{dt^{(k)}}\right|_{t=0} = x_0^{(k)},\ k = 0,\ \cdots,\ n-1, \end{cases} \tag{7.3}$$

com $\alpha > 0$, $n = \lceil \alpha \rceil$ e $x_0^{(k)}$ os vetores das condições iniciais, $k = 0,1,\cdots,n-1$. Se $F(t,x(t))$ é contínua em t e *Lipschitz* com respeito a $x(t)$, com uma constante *Lipschitz* L num conjunto adequado G, então o problema de valor inicial determina uma solução única em um intervalo $[0,b]$. Da integral de ordem α sobre o sistema (7.3), obtém-se a conhecida equação integral de *Volterra*:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x_0^{(k)}}{k!}t^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}F(\tau,x(\tau))d\tau, \tag{7.4}$$

utilizada na implementação numérica da solução do sistema *Caputo*, através do algoritmo de *Adams-Bashforth*. O método de *Adams-Bashforth* fracionário foi primeiramente formulado por Diethelm, Ford e Freed (2002, 2004) e é uma discretização do tipo uniforme da equação de *Volterra* com número de pontos igual a $N+1$, tempo de simulação T, passo de integração

$h = T/N$, malha uniforme $t_n = nh$, $(n = 0,1,\ \cdots,\ N)$ e estimativa da resposta sob o passo de integração h denotada por $x_h(t_{n+1})$. O método calcula $x_h(t_{n+1})$ através de uma quadratura trapezoidal, gerando uma discretização implícita em $x_h(t_{n+1})$. Uma estimativa inicial, o preditor $x_h^p(t_{n+1})$, é calculada através de uma quadratura retangular. Com o valor de $x_h^p(t_{n+1})$ é então estimada a resposta $x_h(t_{n+1})$ na equação implícita, a cada passo de integração. O algoritmo consiste na implementação das equações:

$$\begin{cases} x_h(t_{n+1}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lceil\alpha\rceil-1} \frac{t_{n+1}^k}{k!} x_0^{(k)} + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} F(t_{n+1}, x_h^p(t_{n+1})) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^{n} a_{j,n+1} F(t_j, x_h(t_j)), \\ x_h^p(t_{n+1}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lceil\alpha\rceil-1} \frac{t_{n+1}^k}{k!} x_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{n} b_{j,n+1} F(t_j, x_h(t_j)), \end{cases} \tag{7.5}$$

$$a_{j,n+1} = \begin{cases} n^{\alpha+1} - (n-\alpha)(n+1)^\alpha & \text{se} \quad j = 0, \\ (n-j+2)^{\alpha+1} + (n-j)^{\alpha+1} - 2(n-j+1)^{\alpha+1} & \text{se} \quad 1 \le j \le n, \\ 1 & \text{se} \quad j = n+1, \end{cases}$$

$$b_{j,n+1} = (h^\alpha/\alpha)\left[(n+1-j)^\alpha - (n-j)^\alpha\right].$$

Um estudo detalhado acerca deste método é encontrado em (DIETHELM; FORD; FREED, 2002; LI; TAO, 2009).