

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

Leis de escala e transientes no mapa *logistic-like* perturbado

Anderson Antônio Aparecido da Silva

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

Rio Claro

2020

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA JÚLIO DE MESQUITA
FILHO

Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus Rio Claro

Leis de escala e transientes no mapa
logistic-like perturbado

ANDERSON ANTÔNIO APARECIDO DA SILVA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, câmpus Rio Claro, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Juliano Antonio de Oliveira

Rio Claro - SP

2020

S5861

Silva, Anderson Antônio Aparecido da

Leis de escala e transientes no mapa logistic-like perturbado /
Anderson Antônio Aparecido da Silva. -- Rio Claro, 2020
65 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro

Orientador: Juliano Antonio de Oliveira

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. 2. mapa logistic-like
perturbado. 3. Transientes. 4. Leis de escala. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de
Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA JÚLIO DE MESQUITA
FILHO

Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus Rio Claro

Leis de escala e transientes no mapa
logistic-like perturbado

ANDERSON ANTÔNIO APARECIDO DA SILVA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, câmpus Rio Claro, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Juliano Antonio de Oliveira

Prof. Dr. José Antônio Mendez Bermúdez

Prof. Dr. Edson Denis Leonel

Resultado: Aprovado

Rio Claro - SP, 29 Julho de 2020

*Onde você vê um obstáculo,
alguém vê o término da viagem
e o outro vê uma chance de crescer.*

*Onde você vê um motivo pra se irritar,
alguém vê a tragédia total
e o outro vê uma prova para sua paciência.*

*Onde você vê a morte,
alguém vê o fim
e o outro vê o começo de uma nova etapa...*

*Onde você vê a fortuna,
alguém vê a riqueza material,
e o outro pode encontrar por trás de tudo, a dor e a miséria total.*

*Onde você vê a teimosia,
alguém vê a ignorância,
um outro compreende as limitações do companheiro,
percebendo que cada qual caminha em seu próprio passo.
E que é inútil querer apressar o passo do outro,
a não ser que ele deseje isso.*

*Cada qual vê o que quer, pode ou consegue enxergar.
Porque eu sou do tamanho do que vejo.
E não do tamanho da minha altura.*

Fernando Pessoa.

Agradecimentos

Com enorme carinho e gratidão que agradeço:

- Primeiramente quero agradecer à Deus por ter me dado força para conseguir chegar até aqui.
- A minha família, em especial aos meus pais José Henrique e Roseimar e minha avó Maria por todo apoio e confiança que sempre depositam em mim.
- A minha namorada Tiene pela compreensão que sempre teve comigo, pelos conselhos dados e por todo apoio que sempre me concede.
- Ao meu Orientador prof. Dr. Juliano Antonio de Oliveira, com grande carinho que digo que tive mais que um orientador, tive um amigo. Agradeço não somente pela grande ajuda nesta dissertação mas também pelas conversas e conselhos que o senhor me deu, com certeza irão contribuir para minha vida e para minha carreira acadêmica. Obrigado por confiar em mim.
- A todos os professores do departamento, em especial aqueles com quem tive a oportunidade de ter aulas. Obrigado por toda ajuda!
- Aos pesquisadores do grupo de Estudos de Sistemas Complexos e Dinâmica não Linear, gostaria de enfatizar o meu carinho por todos do grupo e em especial ao nosso chefe e líder do grupo prof. Dr. Edson D. Leonel, Dr. André L. P. Livorati, Dr. Diogo R. da Costa por sempre estarem disponíveis a ajudar. Não poderia deixar de agradecer as pessoas com que passo maior parte do tempo no laboratório Célia Mayumi Kuwana e Laura pelas conversas compartilhadas.
- Aos meus professores da graduação Joelson, Flávio e Valdir por todas as conversas e conselhos dados durante a Pós graduação.
- A todos os funcionários do departamento em Física de modo especial aos técnicos André e Leandro por todo suporte quando necessitei.

- Aos amigos que fiz durante este tempo em Rio Claro em especial aos meus colegas de Pós, José, Pedro, Rodrigo, Laura, Adriano. Queria dizer que levarei nossa amizade para vida toda.
- Ao meu colega de Pós Adriano com quem divíduo casa em Rio Claro, queria te agradecer por toda ajuda, pelas conversas e discussões diariamente. Sempre serei grato.
- À UNESP-Câmpus de Rio Claro, pela oportunidade de poder estudar nesta instituição.
- O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (Capes) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Nesta dissertação consideramos o mapa *logistic-like* com parâmetro de controle perturbado por uma pequena função periódica. Fazendo uma escolha apropriada de alguns parâmetros podemos recuperar mapeamentos diferentes conhecidos na literatura. Propomos construir numericamente o diagrama de órbitas para analisar o comportamento dinâmico do sistema. Mostramos que considerando pequenas perturbações novos atratores podem aparecer no diagrama de órbitas de acordo com a escolha das condições iniciais, de modo que o comportamento do sistema passou a apresentar descontinuidade associadas a mudança de bacia de atração. Notamos que essas mudanças ocorrem quando as condições iniciais são atraídas para um novo atrator a medida que o parâmetro R se aproxima de um valor crítico R_c . Assim caracterizamos o transiente por uma lei de potência definida como $\tau = |R_c - R|^{-\delta}$, onde δ é o expoente do transiente. Determinamos o expoente de transiente para valores diferentes dos parâmetros de controle. Avançamos nossos estudos na investigação da convergência de órbitas para os pontos de equilíbrio próximo a bifurcação transcítica. Utilizamos o formalismo de leis de escala descrito por uma função homogênea generalizada. Encontramos os expoentes críticos analítica e numericamente para determinar a classe de universalidade da bifurcação.

Palavras Chave: Mapa *logistic-like* perturbado, Transientes, Leis de escala.

Abstract

In this dissertation we consider the logistic-like map with control parameter perturbed by a small periodic function. Making the appropriate choice of some of the parameters we can recover different mappings well known in the literature. We built to numerically construct the orbits diagram to analyse the dynamical behavior of the system. We show that considering small perturbations a new attractor may surge in the orbits diagram according to the choice of the initial conditions, so that the behavior of the system shows a discontinuity associated with the change of basins of attraction. We note that these changes occur when the initial conditions are attracted to a new attractor as the parameter R approaches a critical value R_c . We characterize the transient by a power law defined as $\tau = |R_c - R|^{-\delta}$, where δ is the transient exponent. We determine the transient exponent for different values of the control parameter. We advance our studies to the investigation of the convergence of the orbits to the equilibria points close to a transcritical bifurcation. We use the scaling laws formalism described by a generalized homogeneous function. We find the critical exponents analytically and numerically to determine the universality of the bifurcation.

Key Words: *Logistic-like* map perturbed, Transients, Scaling laws.

Sumário

Lista de Figuras	8
Lista de Tabelas	10
1 Introdução	14
Introdução	14
2 Propriedades dinâmicas de mapas unidimensionais	18
2.1 Pontos fixos	18
2.2 Análise de estabilidade para mapas unidimensionais	19
2.3 Expoentes de Lyapunov para mapas unidimensionais	21
3 Estudo do mapa logístico	24
3.1 O mapa Logístico	24
3.2 Análise de estabilidade	30
3.3 Expoentes de Lyapunov	32
3.4 Convergência das órbitas para o ponto fixo $x^* = 0$	33
4 Mapa <i>logistic-like</i>	35
4.1 O modelo	35
5 Estudo do mapa <i>logistic-like</i> perturbado	39
5.1 O mapa <i>logistic-like</i> perturbado e suas propriedades	39
5.2 Convergência para o ponto fixo x^* para o caso em que $\mu = 0$	49
5.3 Convergência para o ponto fixo $x^* = 0$ considerando o caso em que $\mu \neq 0$	58
6 Considerações Finais	61

Lista de Figuras

2.1	Esquema da estabilidade do ponto fixo.	20
3.1	Diagrama de bifurcações para os pontos fixos x_1^* , x_2^* , x_3^* e x_4^* .	29
3.2	Diagrama de órbitas utilizando a condição inicial $x_0 = 0,5$.	29
3.3	(a)Diagrama de bifurcações. (b)Diagrama de bifurcações sobreposto ao diagrama de órbitas.	31
3.4	(a)Diagrama de órbita, (b)Expoentes de Lyapunov para o mapa logístico.	32
3.5	Diagrama de órbitas, considerando diferentes iterações.	33
4.1	Diagrama de órbitas para o mapa <i>logistic-like</i> : (a)Para $\gamma = 0,5$, (b)Para $\gamma = 2$.	36
5.1	Diagramas de órbita para o mapa <i>logistic-like</i> perturbado considerando a condição inicial sendo $x_0 = 0,5$ e valores diferentes dos parâmetros γ e ϵ conforme mostra legenda nas figuras.	42
5.2	Diagrama de órbitas considerando diferentes iterações e a condição inicial $x_0 = 0,5$.	44
5.3	Diagrama de órbita juntamente com seus respectivos expoentes de Lyapunov.	45
5.4	Convergências das órbitas para o novo atrator onde consideremos valores cada vez mais próximos de $R_c = 2,09112$. Em (a) consideramos $\gamma = 0,5$, $\epsilon = 0,01$ e $x_0 = 0,5$. Em (b) $\gamma = 2$, $\epsilon = 0,02$ e $x_0 = 0,5$.	46
5.5	Diagrama das convergências das órbitas para o novo atrator onde consideremos valores diferentes cada vez mais próximos de $R_c = 2,09112$.	46
5.6	Valores do expoente de transiente δ para diferentes valores de γ e ϵ , considerando $x_0 = 0,5$.	48
5.7	Convergência para o ponto fixo $x^* = 0$ para $\gamma = 0,5$ considerando $\epsilon = 0,01$.	49

5.8	Convergência para o ponto fixo $x^* = 0$ considerando $\gamma = 1$ considerando $\epsilon = 0,01$.	50
5.9	Convergência para o ponto fixo $x^* = 0$ para $\gamma = 2$ considerando $\epsilon = 0,01$.	50
5.10	Convergência para o ponto fixo $x^* = 0$, considerando a mesma distância x e variando o parâmetro γ considerando $\epsilon = 0,01$.	54
5.11	Condição inicial x_0 como função do número <i>crossover</i> n_x para $\gamma = 0,5$ considerando $\epsilon = 0,01$.	55
5.12	Condição inicial x_0 como função do número <i>crossover</i> n_x para $\gamma = 1$ considerando $\epsilon = 0,01$.	55
5.13	Condição inicial x_0 como função do número <i>crossover</i> n_x para $\gamma = 2$ considerando $\epsilon = 0,01$.	56
5.14	Colapso das curvas para $\gamma = 0,5$ considerando $\epsilon = 0,01$.	56
5.15	Colapso das curvas para $\gamma = 1$ considerando $\epsilon = 0,01$.	57
5.16	Colapso das curvas para $\gamma = 2$ considerando $\epsilon = 0,01$.	57
5.17	Tempo de relaxação δ para $\gamma = 0,5$ considerando $\epsilon = 0,01$.	58
5.18	Tempo de relaxação δ para $\gamma = 1$ considerando $\epsilon = 0,01$.	59
5.19	Tempo de relaxação δ para $\gamma = 2$ considerando $\epsilon = 0,01$.	59

Lista de Tabelas

5.1	Oscilação de $\cos(n\pi)$.	40
5.2	Oscilação da perturbação ϵ .	40
5.3	Valores encontrados para R_c para diferentes valores de γ e considerando o mesmo	
	valor de $\epsilon = 0,01$.	43
5.4	Valores encontrados para R_c para diferentes valores de γ e considerando o mesmo	
	valor de $\epsilon = 0,038$.	43
5.5	Expoente de transiente δ relacionados a figura 5.6(a).	47
5.6	Expoente de transiente δ relacionados a figura 5.6(b).	48
5.7	Expoentes críticos α , β e z para valores diferentes de γ .	54

Introdução

O objetivo da ciência é encontrar leis deterministas e imutáveis que possam governar a realidade. Fazendo uso destas leis, torna-se possível prever a evolução de um determinado sistema real, extrapolando as funções e as regras matemáticas das mesmas a partir de valores iniciais [1, 2]. Assim, temos os chamados sistemas dinâmicos, os quais podem ser caracterizados pela previsibilidade do comportamento do sistema [3, 4].

Nas últimas décadas o estudo sobre sistemas dinâmicos não lineares tem se tornado um tema de grande repercussão no meio científico [5, 6, 7, 8]. Muitas pesquisas estão sendo desenvolvidas para tratar de sistemas dinâmicos regidos por modelos matemáticos simples. Embora simples estes modelos podem apresentar um comportamento complexo e muito interessante. De acordo com Savi [9] existem, matematicamente, dois tipos de modelos dinâmicos: equações diferenciais, que são contínuos no tempo e no espaço, e mapas, que descrevem a evolução no tempo de um sistema em passos discretos expressando seu estado como uma função do instante anterior. Desta forma, um mapa é um sistema dinâmico discreto e uma de suas principais características é auxiliar na análise de sistemas descritos por equações diferenciais.

Um dos motivos que impulsionou o estudo sobre sistemas dinâmicos, é o fato de que esses modelos podem ser usados para modelar e fazer previsões de modelos físicos, biológicos, financeiros, dentre tantas outras áreas da ciência [10, 11]. Estes sistemas são descritos por leis matemáticas, de modo que muitos desses sistemas podem apresentar comportamento caótico,

ou seja, irregular, caracterizada pela imprevisibilidade e por possuir sensibilidade às condições iniciais, o que pode provocar no sistema alterações devidas a pequenas perturbações também chamado de parâmetro do sistema [9, 12, 13].

Mesmo sendo um tema que vem se lapidando nas últimas décadas, este comportamento no qual chamamos caótico já tinha sido identificado no fim do século *XIX* pelo matemático francês *Poincaré*, onde ele estudava o famoso problema de três corpos [14, 15]. *Poincaré* mostrou que a evolução do sistema apresentava sensibilidade às condições iniciais, de modo que uma pequena mudança na posição inicial do corpo levaria a uma mudança radical em seu estado final. Apesar de que as ideias sobre sensibilidade às condições iniciais tenham sido apresentadas por *Poincaré* naquela época, somente com a criação e o avanço dos computadores voltou a ser observado em 1963 pelo meteorologista americano *Edward Lorenz* [9, 16, 17]. Em seus estudos sobre problemas atmosféricos, *Lorenz* deparou com a sensível dependência nas condições iniciais. Utilizando equações diferenciais com o intuito de modelar a evolução do tempo, *Lorenz* percebeu, ao fazer simulações, que pequenas perturbações nas condições iniciais afetaria a evolução do sistema. Este fenômeno da sensibilidade às condições iniciais fez com que surgisse a seguinte frase: “*O bater das asas de uma borboleta no Brasil pode causar um tornado no Texas*”, esta frase tornou-se famosa e ficou conhecido como efeito borboleta [18, 19].

A partir da década de 60, tendo como pioneiro o americano *Lorenz* a teoria do caos, na qual buscamos estudar sistemas dinâmicos não lineares, ou seja, sistemas que apresentam sensibilidades às condições iniciais, vem cada vez mais sendo objeto de inúmeras pesquisas. Um dos grandes motivos que impulsionou pesquisadores a estudarem estes sistemas, é o fato de que modelos descritos por leis matemáticas, aparentemente bastante simples, podem apresentar comportamentos totalmente complexos [18].

Geralmente os mapas são mais simples de serem analisados do que as equações diferenciais. Nomeamos mapa um sistema dinâmico que evolui no tempo de maneira discreta. Um mapa pode ser descrito da seguinte maneira

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (1.1)$$

de modo que f é uma função não linear de x e n representa os passos discretos no tempo. Uma órbita pode ser interpretada como sendo uma sequência de pontos gerada pelas sucessivas iterações da equação de um mapa a partir de uma dada condição inicial x_0 , ou seja, essa sequência

pode ser formada pelos pontos do mapa (1.1) da seguinte forma $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots$. Assim podemos denotar uma órbita como sendo a sequência cronológica de valores:

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n. \quad (1.2)$$

Os primeiros pontos de uma órbita caracterizam o seu comportamento. Este comportamento inicial é chamado de transiente. Uma órbita geralmente necessita de uma quantidade grande de iterações para que possa ser atraída para o atrator. Como normalmente estamos interessados no comportamento assintótico da dinâmica do mapa, este transiente é descartado para uma posterior análise da órbita [20]. Denomina-se atrator, um conjunto de pontos para o qual, quando evoluímos o sistema as órbitas convergem para ele. Se a órbita não diverge, ela é atraída por um atrator A , de tal modo que o atrator possa ser periódico ou caótico, de acordo com Monteiro [16]. Sendo assim, o que chamamos de bacia de atração, é um conjunto de condições iniciais que ao longo do tempo convergem para o atrator.

Uma mapa normalmente depende de um ou mais coeficientes, chamado de parâmetro de controle. A medida que os parâmetros de controle são variados, eles descrevem o que chamamos de diagrama de órbitas. Toda vez que há uma mudança qualitativa no diagrama de órbitas têm-se uma bifurcação [21]. O termo Bifurcação foi introduzido no ano de 1885 por *Poincaré* [16]. Um exemplo de um modelo descrito por uma equação simples, mas que apresenta grande complexidade é o mapa logístico, que está relacionado com o crescimento populacional de insetos, peixes, dentre outros. O mapa logístico, foi introduzido pelo biólogo *Robert May* no ano de 1976. Este modelo avalia a população em um ano x_{n+1} a partir do ano anterior x_n [4, 5, 9, 11, 16]. A ideia deste modelo consiste em imaginarmos que, a cada primavera, os insetos botam ovos. Assim os insetos nascem, comem, crescem, amadurecem, botam ovos e depois morrem. A não linearidade apresentada no estudo de Robert May prevê que, conforme a população se torna muito grande, os insetos irão exaurir seus alimentos fazendo com que provocasse a morte de alguns deles antes de atingir a maturidade necessária para colocar ovos. Desta maneira, o número de ovos iria se reduzir, de modo que o crescimento da espécie seria reduzido [16]. Este é um modelo para nos depararmos com características caóticas, dentre os quais podemos citar, regularidade e rotas para o caos.

Para melhor compreender o que será tratado nesta dissertação, será apresentada uma descrição de como foi dado a estruturação da mesma.

No segundo Capítulo serão abordadas algumas propriedades dinâmicas de mapas unidimensionais tais como: conceito de ponto fixo, análise de estabilidade e as classificações dos pontos fixos, o conceito de Expoente de Lyapunov, o qual é amplamente utilizado para indicar quais as regiões periódicas e quais as regiões caóticas apresentadas no sistema.

No terceiro Capítulo vamos aplicar tais conceitos no mapeamento logístico, a equação que descreve este modelo é: $x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n)$, onde R é o parâmetro de controle.

No quarto Capítulo apresentaremos o mapa *logistic-like*, que é uma generalização do mapa logístico convencional. A expressão que rege este mapa é dado por: $x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n^\gamma)$, onde R e γ são parâmetros de controle.

No quinto Capítulo vamos trabalhar com o mapa *logistic-like* perturbado dado pela seguinte equação: $x_{n+1} = R(1 + \epsilon \cos n\pi)x_n(1 - x_n^\gamma)$, de modo que R e γ são parâmetros de controle e ϵ é o parâmetro que controla a amplitude da perturbação no sistema. Conseguimos perceber que a perturbação inserida afetou a dinâmica do sistema, apresentando descontinuidades associadas a mudança de bacia de atração. Estas mudanças ocorrem quando as condições iniciais são atraídas para um novo atrator a medida que o parâmetro de controle R se aproxima de um valor crítico R_c^* , com isso podemos supor que o tempo de transiente na qual está relacionada com o número de iterações gasto até haver a mudança de uma bacia para a outra pode ser caracterizado por uma lei de potência definida como: $\tau = \mu^{-\delta}$, onde δ é o expoente de transiente [22]. O nosso objetivo é investigar se para valores diferentes dos parâmetros γ e ϵ se os valores de δ permanecerão os mesmos ou serão afetado conforme variamos os parâmetros de controle. Neste Capítulo faremos também uso do formalismo de escala para estudar o decaimento de órbitas para o ponto fixo $x^* = 0$ considerando a bifurcação transcítica.

No sexto Capítulo apresentamos os comentários finais sobre a realização da dissertação e as perspectivas para um trabalho futuro.

*O termo R_c esta relacionado ao parâmetro crítico onde acontece a mudança entre uma bacia de atração e bacia, o índice c é para identificar o parâmetro como sendo um parâmetro crítico.

Propriedades dinâmicas de mapas unidimensionais

Neste Capítulo será feita uma abordagem sobre algumas propriedades dinâmicas de mapas unidimensionais, dentre os quais, o conceito de ponto fixo, análise de estabilidade e os expoentes de Lyapunov.

2.1 Pontos fixos

Considere o mapa unidimensional definido na equação (1.1) escrito da seguinte forma,

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

tal que $f(x_n)$ é uma função não linear de sua variável.

Para obtermos os pontos fixos podemos utilizar o seguinte método [23]. Dado x_0 iteramos $f(x_0)$ e encontramos um novo valor $x_1 = f(x_0)$, tendo x_1 , basta iterar novamente $f(x_1)$

e encontrar $x_2 = f(x_1)$ e assim sucessivamente. Esquemáticamente este método é descrito como:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= f(x_0), \\
 x_2 &= f(x_1), \\
 x_3 &= f(x_2), \\
 x_4 &= f(x_3), \\
 &\vdots \\
 x_{n+1} &= f(x_n).
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dizemos que x^* é um ponto fixo da equação $x_{n+1} = f(x_n)$ se

$$x^* = f(x^*). \tag{2.2}$$

2.2 Análise de estabilidade para mapas unidimensionais

Na seção 2.1 mostramos a definição de pontos fixos. No entanto os pontos fixos podem apresentar características distintas. Para tal estudo faremos uma análise de estabilidade. Para investigar a estabilidade de x^* deve-se verificar o que ocorre com as sucessivas iterações a partir de um ponto x_n próximo de x^* [16, 21, 24].

Dependendo do comportamento da sequência de iterações perto do ponto fixo x^* , podemos classificá-los da seguinte maneira, assintoticamente estável, estável ou instável conforme mostra a figura 2.1. A figura 2.1(a) mostra que dada uma condição inicial x_0 , ao iterarmos o mapa e se sua sequência aproximar de x^* o ponto fixo é classificado como ponto fixo *assintoticamente estável*, se a sequência se afasta de x^* , o ponto fixo é dito *instável* ver na figura 2.1(b), mas se acontecer de iterarmos o mapa e a sequência não se aproxima e não se afasta de x^* , dizemos que o ponto fixo é *estável* [21] ver na figura 2.1(c).

Como pode ser visto nas referências [9, 21, 24], se nosso objetivo é analisar a estabilidade do ponto fixo x^* , devemos considerar um ponto x_n na vizinhança de x^* , ou seja,

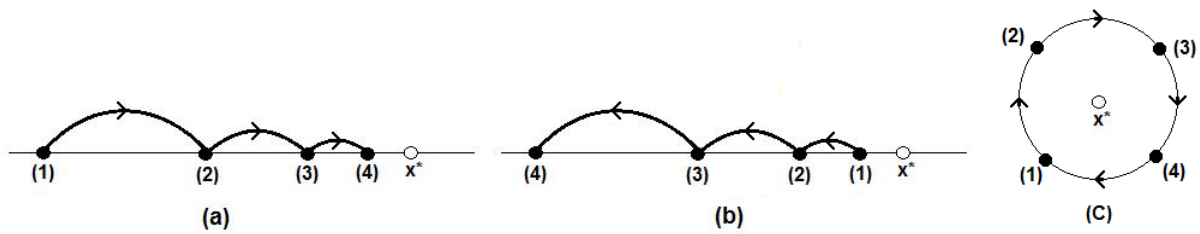


Figura 2.1: Esquema da estabilidade do ponto fixo.

$$x_n = x^* + \epsilon_n, \quad (2.3)$$

tal que ϵ_n é pequeno. Se estamos interessados em analisar precisamos saber se

$$x_{n+1} = F(x_n) = F(x^* + \epsilon_n) = x^* + \epsilon_{n+1}, \quad (2.4)$$

se afasta ou se aproxima de x^* , portanto temos de verificar se ϵ_{n+1} é maior ou menor que ϵ_n (em módulo). Para tal análise podemos expandir a equação (2.4) em série de Taylor em torno de x^* . Expandindo temos:

$$x^* + \epsilon_{n+1} = F(x^* + \epsilon_n) = F(x^*) + \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=x^*} \epsilon_n + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2F}{dx^2} \right|_{x=x^*} \epsilon_n^2 \dots \quad (2.5)$$

Sabendo que $F(x^*) = x^*$ e considerando a expansão até o termo de primeira ordem, obtemos

$$x^* + \epsilon_{n+1} = x^* + \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=x^*} \epsilon_n,$$

$$\epsilon_{n+1} = \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=x^*} \epsilon_n, \quad (2.6)$$

considerando

$$\left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=x^*} = C, \quad (2.7)$$

ficamos com

$$\epsilon_{n+1} = C\epsilon_n. \quad (2.8)$$

Portanto, $|\epsilon_{n+1}| < |\epsilon_n|$ se $-1 < C < 1$ ou ainda $|C| < 1$.

Com isso podemos concluir que:

- a) $|C| < 1$ - Ponto fixo do tipo *assitoticamente estável*;
- b) $|C| > 1$ - Ponto fixo do tipo *instável*;
- c) $C = 1$ - Comportamento *neutro*. Se o mapa é linear o ponto fixo é um centro, porém se o mapa não é linear deve-se considerar termos de ordem superior.

2.3 Expoentes de Lyapunov para mapas unidimensionais

A principal característica de sistemas caóticos é a sensibilidade às condições iniciais. Existem métodos para se caracterizar um sistema como caótico ou regular, entre estes métodos o que se destaca é o expoente de Lyapunov ou número de Lyapunov [5, 7]. Tais números são utilizados como indicadores de caos e são obtidos a partir da distância das trajetórias de duas condições iniciais distintas. Segundo [21] a definição dos expoentes de Lyapunov para mapas unidimensionais, é dada da seguinte forma:

Seja um mapa unidimensional (1.1) dada por:

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

consideremos dois pontos iniciais x_0 e y_0 e a distância entre eles é dada por:

$$\delta_0 = y_0 - x_0. \quad (2.9)$$

Após uma iteração a nova distância é:

$$\delta_1 = y_1 - x_1, \quad (2.10)$$

tal que $\delta_1 = e^L \delta_0$, onde L mede a taxa de divergência da expansão δ_0 até a distância δ_1 como resultado de apenas uma iteração. Temos que $y_1 = f(y_0)$ e $x_1 = f(x_0)$, então a equação (2.10) pode ser reescrita como:

$$\delta_1 = f(y_0) - f(x_0) \quad (2.11)$$

usando a equação (2.9) reescrevemos a equação (2.11) da seguinte maneira:

$$|\delta_1| = |f(x_0 + \delta_0) - f(x_0)|, \quad (2.12)$$

após iterar o mapa N vezes tem-se:

$$\delta_N = |f^N(x_0 + \delta_0) - f^N(x_0)|, \quad (2.13)$$

que podemos reescrever da seguinte forma:

$$L = \frac{1}{N} \ln \left| \frac{f^N(x_0 + \delta_0) - f^N(x_0)}{\delta_0} \right|. \quad (2.14)$$

Podemos notar que na expressão acima L depende de N e δ_0 , considerando uma distância infinitesimal onde $\delta_0 \rightarrow 0$, depois de um número infinito de iterações, ou seja, ($N \rightarrow \infty$) chegamos à:

$$\lambda(x_0) \equiv L(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\delta_0 \rightarrow 0} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{f^N(x_0 + \delta_0) - f^N(x_0)}{\delta_0} \right|, \quad (2.15)$$

que ainda pode ser reescrita como:

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{df^N(x_0)}{dx_0} \right|. \quad (2.16)$$

A equação (2.16) pode ainda ser escrita fazendo uso da regra da cadeia, de tal modo que:

$$\frac{d}{dx_0} f^N(x_0) = \frac{d}{dx_0} f(x_{n-1}) \frac{d}{dx_0} f(x_{n-2}) \cdots \frac{d}{dx_0} f(x_0), \quad (2.17)$$

onde $x_i = f^i(x_0)$ é o resultado da i -ésima iteração do mapa. Substituindo a equação (2.16) na equação (2.17) obtemos:

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \prod_{i=0}^{N-1} \frac{d}{dx_0} f(x_i) \right|, \quad (2.18)$$

de modo que pode ser reescrita como:

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |f'(x_i)|. \quad (2.19)$$

A equação (2.19) é o expoente de Lyapunov para mapas unidimensionais e constitui uma medida de divergência exponencial ($\lambda > 0$) da órbita ou da contração ($\lambda < 0$). Podemos ressaltar que para ($\lambda = 0$) temos um ponto de bifurcação.

Estudo do mapa logístico

Neste Capítulo serão apresentadas algumas propriedades do mapa logístico, tais como a essência do mapa, ponto fixo, estabilidade, diagrama de órbita e o expoente de Lyapunov.

3.1 O mapa Logístico

Com o objetivo de conseguir prever a dinâmica de uma determinada população, o economista e demógrafo Thomas Robert Malthus (1766 – 1834) apresentou um modelo linear que dependia exclusivamente das taxas de natalidade (A), da mortalidade (B) e do número de indivíduos. Tal modelo é descrito pela seguinte expressão:

$$\frac{dN}{dt} = (A - B)N. \quad (3.1)$$

Este modelo foi retomado pelo matemático belga, François Verhulst (1804 – 1849) no ano de 1845, onde ele propôs uma equação não-linear em que a mortalidade seria proporcional ao quadrado do número de indivíduos. Podemos expressar este modelo na forma de uma equação diferencial descrita por:

$$\frac{dN}{dt} = AN - BN^2, \quad (3.2)$$

de forma que N é o número de indivíduos, A é a taxa de natalidade e B a taxa de mortalidade.

No ano de 1976 o pesquisador e biólogo Robert May retomou o modelo não-linear proposto anteriormente por Verhulst. O objetivo do pesquisador até então era simplesmente uma tentativa de criar um modelo, que, pudesse descrever o crescimento populacional de insetos, porém não na forma diferencial mas em forma de mapa. Este modelo avalia a população em uma geração x_n a partir do ano x_{n+1} . Considerando a forma discreta do modelo de Verhulst, temos:

$$N_1 = AN_0 - BN_0^2, \quad (3.3)$$

$$N_2 = AN_1 - BN_1^2, \quad (3.4)$$

.

.

.

$$N_{n+1} = AN_n - BN_n^2. \quad (3.5)$$

O maior valor positivo de N será no limite onde a população será extinta, portanto podemos reescrever a equação (3.5) da seguinte forma:

$$AN_{max} - BN_{max}^2 = 0, \quad (3.6)$$

de modo que se resolvemos a expressão (3.6), obtemos:

$$N_{max} = 0, \quad (3.7)$$

ou

$$N_{max} = \frac{A}{B}. \quad (3.8)$$

Dividindo a equação (3.6) por N_{max} , temos:

$$\frac{N_{n+1}}{N_{max}} = \frac{AN_n}{N_{max}} - \frac{BN_n^2}{N_{max}} \frac{N_{max}}{N_{max}}, \quad (3.9)$$

adotando $\frac{N_n}{N_{max}} = x_n$ e lembrando que $N_{max} = \frac{A}{B}$, obtemos que:

$$x_{n+1} = Ax_n - Bx_n^2 \frac{A}{B}, \quad (3.10)$$

assumindo $A = R$, ficamos com a equação do mapa logístico dada por:

$$x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n), \quad (3.11)$$

onde x_n é o número de indivíduos na n ésima geração e R é o parâmetro de controle de modo que $R \in [0, 4]$. Um dos fatos que fazem este modelo aparecer com destaque quando estudamos sistemas dinâmicos é o fato de tal sistema, extremamente simples, apresentar um comportamento complexo [16]. O mapa logístico é uma equação determinística, ou seja, sua situação futura será determinada a partir das condições presentes. Um dos motivos que chamou a atenção de Robert May foi o fato de que o comportamento do mapa oscila bruscamente para diferentes valores de R . De fato, esse sistema passa de periódico a caótico devido a mínimas variações do parâmetro de controle R [11, 12].

Os pontos fixos da equação (3.11), podem ser encontradas a partir da seguinte condição $x_{n+1} = x_n = x^*$. Assim obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} x^* &= Rx^*(1 - x^*), \\ x^* - Rx^* + Rx^{*2} &= 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

então os pontos fixos são:

$$x_1^* = 0, \quad (3.13)$$

e

$$x_2^* = 1 - \frac{1}{R}. \quad (3.14)$$

Para encontrar os pontos fixos de período 2, ou seja, da segunda iteração do mapa (3.11),

podemos prosseguir da seguinte maneira:

$$x_{n+2} = Rx_{n+1}(1 - x_{n+1}), \quad (3.15)$$

substituindo (3.11) em (3.15), ficamos com:

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= R[Rx_n(1 - x_n)]\{1 - [Rx_n(1 - x_n)]\}, \\ &= R^2x_n - R^2x_n^2 - R^3x_n^2 + 2R^3x_n^3 - R^3x_n^4. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Análogo ao feito para o caso anterior, devemos considerar que, $x_{n+2} = x_n = x^*$, portanto obtemos que:

$$\begin{aligned} x^* &= R^2x^* - R^2x^{*2} - R^3x^{*2} + 2R^3x^{*3} - R^3x^{*4} \\ R^3x^{*4} - 2R^3x^{*3} + (R^3 + R^2)x^{*2} - R^2x^* + x^* &= 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Colocando o termo x em evidência, temos:

$$x^*[R^3x^{*3} - 2R^3x^{*2} + (R^3 + R^2)x^* - R^2 + 1] = 0. \quad (3.18)$$

Para encontrarmos os pontos fixos, o que fazemos é que achar a raiz da função, desse modo podemos aplicar o teorema de D'alembert para divisão de polinômio, o qual afirma que dado um polinômio $p(x)$ de grau ≥ 1 , se $p(u_1) = 0$, ou seja, u_1 é raiz de $p(x)$, então $p(x)$ é divisível por $(x - u_1)$, resultando em um quociente $q_1(x)$, que é um polinômio de grau $(n - 1)$. Desse modo temos que:

$$\begin{aligned} &\frac{R^3x^3 - 2R^3x^2 + [R^3 + R^2]x - R^2 + 1}{x - 1 + \frac{1}{R}}, \\ &= R^3x^2 + (-R^3 - R^2)x + (R^2 + R). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Logo para encontrar os pontos fixos basta resolver,

$$R^3x^2 + (-R^3 - R^2)x + R^2 + R = 0. \quad (3.20)$$

Dividindo a equação (3.21) por R temos:

$$R^2x^2 - (R^2 + R)x + R + 1 = 0. \quad (3.21)$$

Resolvendo a expressão (3.22) obtemos os pontos fixos do período 2. Assim os pontos fixos são descritos por:

$$x_3^* = \frac{R + 1 + \sqrt{R^2 - 2R - 3}}{2R}, \quad (3.22)$$

e

$$x_4^* = \frac{R + 1 - \sqrt{R^2 - 2R - 3}}{2R}. \quad (3.23)$$

Após calcular os pontos fixos, vamos representá-los graficamente. Na figura 3.1 apresentamos o diagrama de bifurcações para os pontos fixos x_1^* , x_2^* , x_3^* e para x_4^* , e na figura 3.2 mostramos o diagrama de órbitas para a condição inicial $x_0 = 0, 5$. Podemos notar na figura 3.2 que para valores de $R \in (0, 1)$ um comportamento periódico de período 1, sendo atraídas para o ponto fixo $x_1^*=0$. Quando olhamos para o intervalo em que $R \in (1, 3)$, também podemos observar uma órbita periódica de período 1, que é o ponto fixo $x_2^* = 1 - \frac{1}{R}$. Observando no intervalo em que $R \in (3; 3, 5)$, notamos que existe uma órbita de período 2, onde há uma alternância entre os dois valores fixos, que são os pontos fixos x_3^* e x_4^* . Vale a pena também ressaltar que para valores de R onde estes pontos fixos perderam a estabilidade as curvas continuam a aparecer, porém são instáveis. Para períodos maiores que dois a abordagem analítica se torna muito complicada, uma vez que o grau do polinômio tende a crescer muito, portanto usaremos o método numérico.

Fazendo agora uma analogia do diagrama de órbitas mostrado na figura 3.2 com o modelo criado por Robert May para descrever uma determinada população, podemos imaginar que para o intervalo de $R \in (0, 1)$ a população seria nula, já para $R \in (1, 3)$ a população tenderia para um valor estável, agora se pegarmos $R \in (3; 1 + \sqrt{6})$, temos que a população oscilará entre dois determinados valores, pois a taxa de crescimento deve diminuir quando a população aumenta. Se considerarmos no parâmetro R como sendo como sendo por exemplo o “alimento” disponível, conforme a população tende a crescer a comida tenderá a diminuir

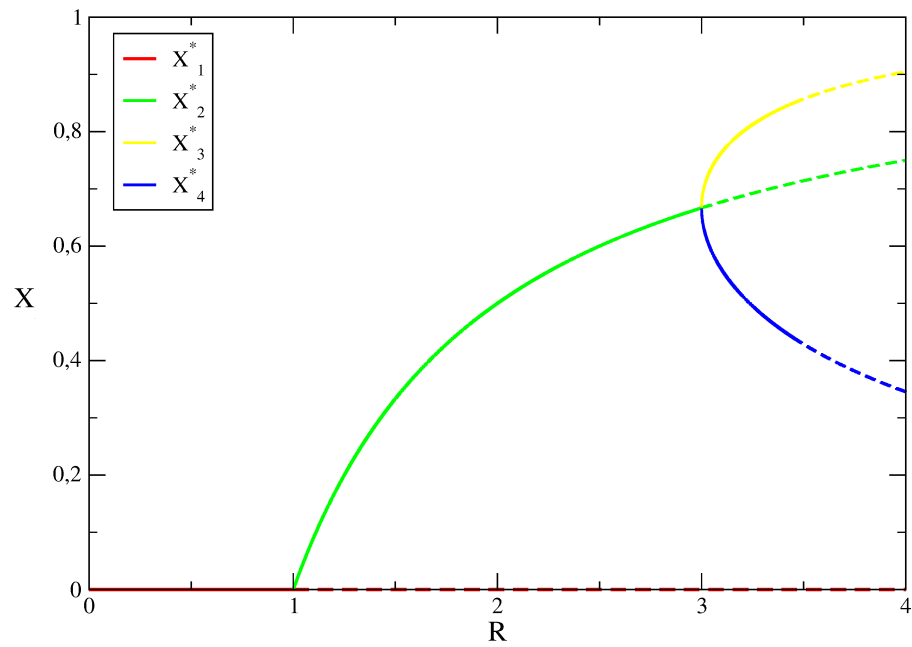


Figura 3.1: Diagrama de bifurcações para os pontos fixos x_1^* , x_2^* , x_3^* e x_4^* .

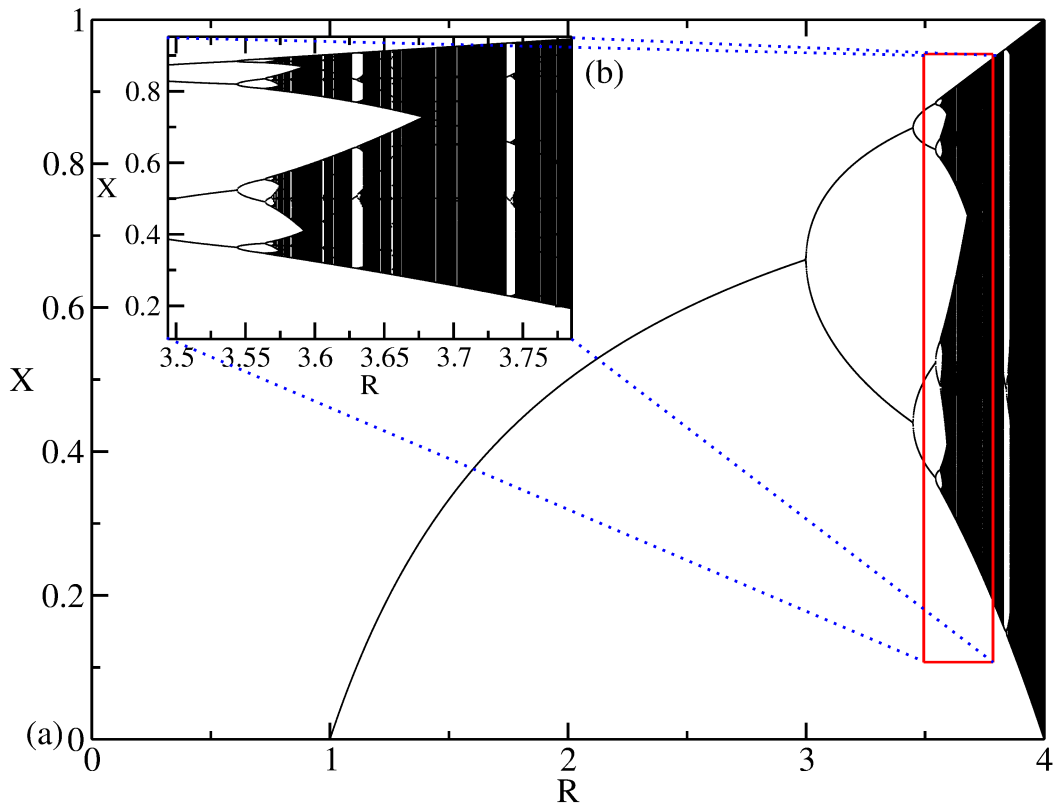


Figura 3.2: Diagrama de órbitas utilizando a condição inicial $x_0 = 0,5$.

cada vez mais, fazendo com que oscile o número de pessoas. Conforme a “fecundidade” vai aumentando o comportamento vai se tornando cada vez mais complexo ainda, pois podemos

observar que após $R = 1 + \sqrt{6}$ a população passa a oscilar entre quatro valores, depois oito até que para valores maiores que $R \simeq 3,57$, o comportamento do sistema começa a preencher densamente as regiões, fazendo com que o comportamento seja caótico, isto é, já não se torna possível algum tipo de previsão. Embora apresente um comportamento caótico no intervalo de $R \in (3,57; 4)$, existem algumas regiões que apresentam previsibilidade conforme pode ser visto em uma ampliação na figura 3.2.

3.2 Análise de estabilidade

Agora que encontramos os pontos fixos para a primeira e a segunda iterações do mapa, podemos fazer uma análise de estabilidade para os pontos fixos encontrados.

O primeiro ponto fixo encontrado foi $x_1^* = 0$. Como foi visto na seção 2.1 temos que se $|F'(x^*)| < 1$, dizemos que o ponto fixo é assintoticamente estável e se $|F'(x^*)| > 1$ o ponto fixo é instável.

Considere uma função de x dada por:

$$F(x^*) = Rx^* - Rx^{*2}. \quad (3.24)$$

Derivando a equação (3.25), temos:

$$F'(x) = R - 2Rx^*. \quad (3.25)$$

Aplicando o ponto fixo $x_1^* = 0$, obtemos,

$$F'(x_1^*) = R. \quad (3.26)$$

Analisando temos:

$$\begin{aligned} |R| &< 1, \\ -1 &< R < 1. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Considerando o mapa logístico, temos que $R \in [0, 4]$, concluímos que o ponto fixo $x_1^* = 0$ é estável no intervalo de $0 < R < 1$ e para $R > 1$ o ponto fixo $x_1^* = 0$ torna-se instável.

De maneira análoga faremos a análise para o segundo ponto fixo $x_2^* = 1 - \frac{1}{R}$.

Fazendo uso da expressão (3.26), que nos fornece a derivada de $F(x)$, podemos aplicar o ponto fixo $x_2^* = 1 - \frac{1}{R}$, logo:

$$\begin{aligned} F'(x^*) &= R - 2Rx^*, \\ F'(x_2^*) &= R - 2R \left[1 - \frac{1}{R} \right], \\ F'(x_2^*) &= 2 - R. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Sendo assim temos que:

$$\begin{aligned} | -R + 2 | &< 1, \\ 1 &< R < 3. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Desse modo para valores de $1 < R < 3$ o ponto fixo $x_2^* = 1 - \frac{1}{R}$ é dito assintoticamente estável, e para valores de $R > 3$ o ponto fixo $x_2^* = 1 - \frac{1}{R}$ é classificado como instável.

A figura 3.3(a) ilustra o diagrama de bifurcações já a figura 3.3(b) mostra o diagrama de bifurcações sobreposto ao diagrama de órbitas, assim é possível notar que os resultados numéricos confirmam bem os resultados encontrados analiticamente.

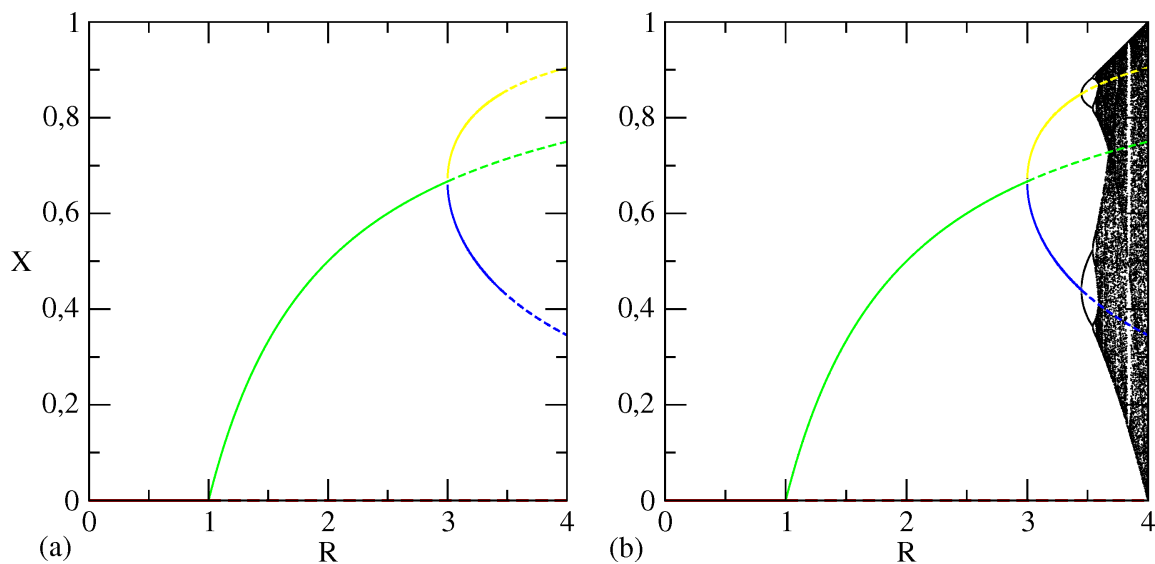


Figura 3.3: (a)Diagrama de bifurcações. (b)Diagrama de bifurcações sobreposto ao diagrama de órbitas.

3.3 Expoentes de Lyapunov

O princípio básico de obtenção dos expoentes de Lyapunov consiste em verificar se duas órbitas se aproximam ou afastam-se uma da outra com o decorrer do tempo. Como destacamos na seção 2.3 os expoentes de Lyapunov são uma forma de caracterizar um sistema como caótico ou não. Construímos o gráfico do expoente de Lyapunov para o mapa logístico a fim de verificar onde o comportamento é caótico e também as regiões onde o sistema é regular.

A figura 3.4 mostra o diagrama de bifurcações juntamente com o expoente de Lyapunov associado ao respectivo mapa. Analisando a figura 3.4 é possível observar que nos intervalos em que o expoente de Lyapunov é negativo o comportamento do sistema apresenta regularidade e onde o mesmo é positivo o comportamento do sistema se torna caótico, ou seja, perdemos a previsibilidade do sistema. Vale ressaltar que onde o expoente de Lyapunov é zero o sistema apresenta uma bifurcação.

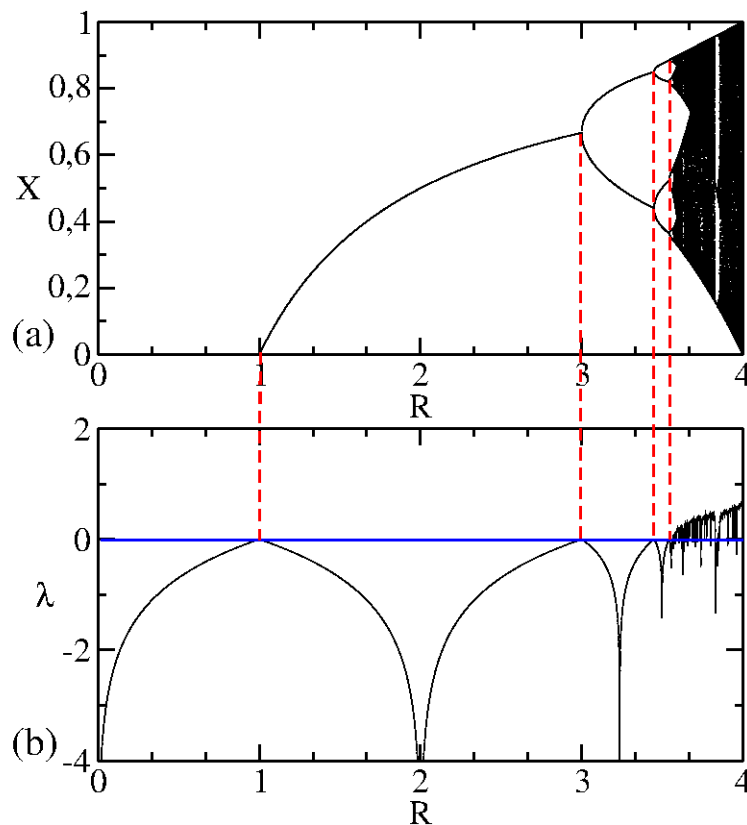


Figura 3.4: (a)Diagrama de órbita, (b)Expoentes de Lyapunov para o mapa logístico.

3.4 Convergência das órbitas para o ponto fixo $x^* = 0$

Temos que a convergência das órbitas para o ponto fixo é descrita pela variável $x_{(n)}$, tal variável representa a distância que se está do ponto fixo. Deste modo devemos investigar o comportamento de x na vizinhança da bifurcação de interesse. A convergência para o ponto fixo está relacionada ao número de iterações n de uma dada condição inicial x_0 e de μ , onde tal parâmetro está relacionado com a distância na qual se está do ponto de bifurcação. Para explicar um pouco mais de como se dá a convergência do ponto fixo para a bifurcação, mostramos na figura 3.5 o diagrama de órbita para o mapa logístico onde consideremos o transiente pequeno. Em nossos estudos realizamos as simulações numéricas considerando um transiente igual a 50 e aumentamos o número de iterações n conforme mostrado a legenda da figura. Podemos notar que para $n = 10$ a um aglomerado de pontos mais afastados da bifurcação. Uma explicação é que considerando um transiente pequeno não houve tempo suficiente para que os pontos convergissem para o atrator. Notamos que conforme aumentando o número de iterações esses pontos aglomerados convergiram para o ponto de bifurcação, conforme mostramos nas ampliações na figuras 3.5. Assim, podemos dizer que quanto maior o número de iterações mais próximo estaremos da bifurcação.

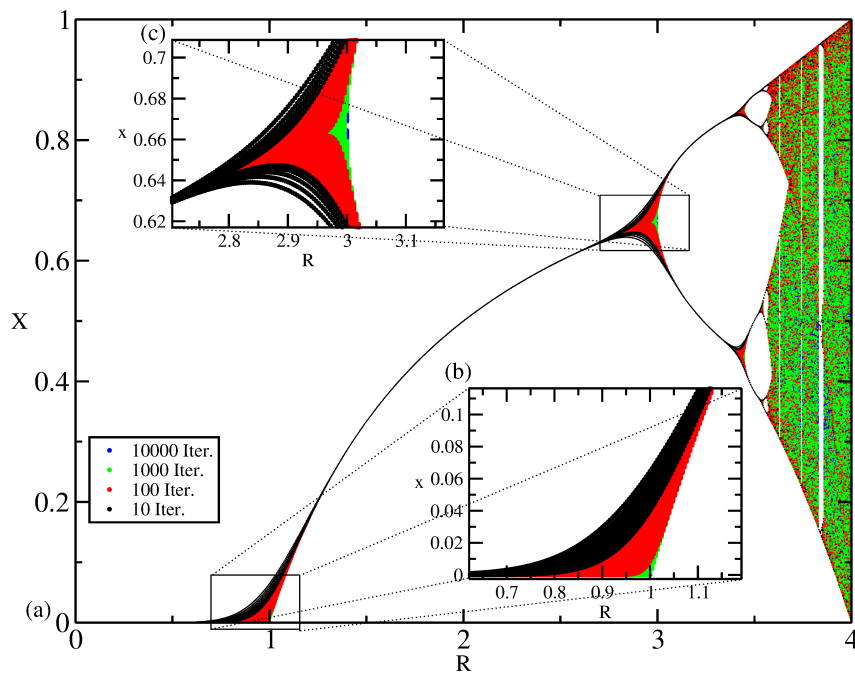


Figura 3.5: Diagrama de órbitas, considerando diferentes iterações.

Um estudo mais aprofundado sobre a convergência das órbitas para o ponto fixo $x^* = 0$, está apresentada em [\[25\]](#).

Mapa *logistic-like*

Neste Capítulo apresentaremos o mapa *logistic-like*. Tal mapa é uma generalização do mapa logístico analisado no Capítulo 3. Construímos os diagramas de órbitas para parâmetros diferentes e analisaremos a estabilidade dos pontos fixos.

4.1 O modelo

O mapa *logistic-like* é uma generalização do mapa logístico, escrito como [25]:

$$x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n^\gamma), \quad (4.1)$$

de modo que $\gamma \geq 0$ e o parâmetro de controle $R \geq 0$. Se considerarmos $\gamma = 1$, retomamos o mapa logístico convencional. Para a escolha de $\gamma = 0,5$ recuperamos modelos não lineares com aplicações em economia [26]. Considerando $\gamma = 1$ temos os mapas quadrático e logístico convencional [27] e [28] respectivamente, enquanto que para $\gamma = 2$ retomamos o mapa cúbico [28]

Os pontos fixos da equação (4.1) podem ser encontrados realizando o mesmo procedimento usado para encontrar os pontos fixos do mapa logístico, ou seja, considerando a condição:

$$x_{n+1} = x_n = x^*, \quad (4.2)$$

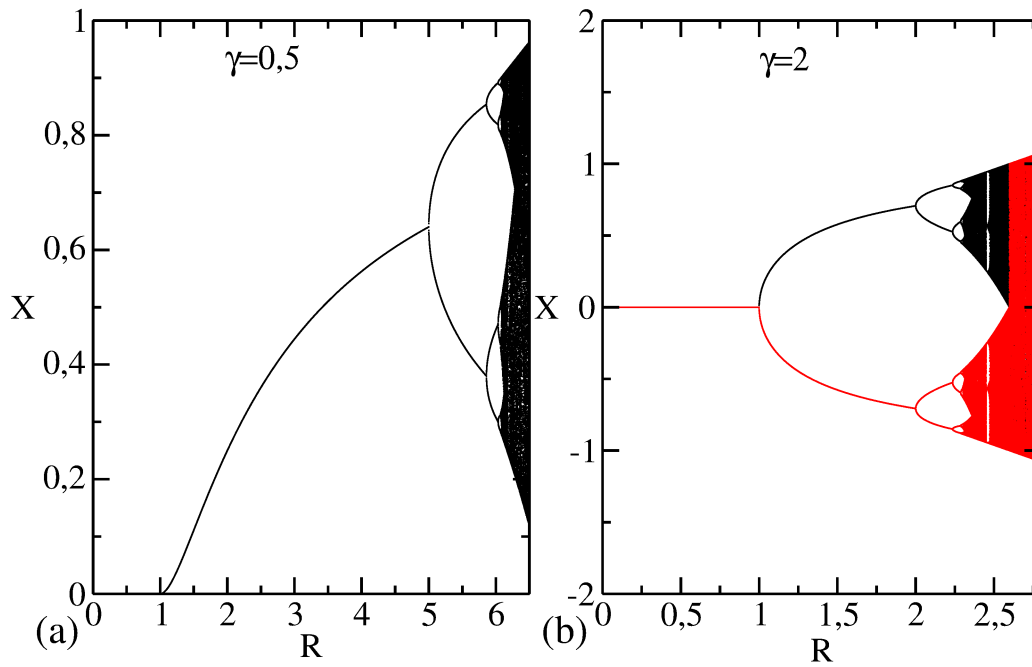


Figura 4.1: Diagrama de órbitas para o mapa *logistic-like*: (a) Para $\gamma = 0,5$, (b) Para $\gamma = 2$.

e realizando algumas manipulações algébricas determinamos

$$x_1^* = 0, \quad (4.3)$$

e

$$x_2^* = \left[1 - \frac{1}{R}\right]^{\frac{1}{\gamma}} \quad (4.4)$$

para γ par e

$$x_3^* = \pm \left[1 - \frac{1}{R}\right]^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (4.5)$$

para qualquer outro valor de γ . Conhecidos x_1^*, x_2^* e x_3^* , podemos realizar a análise da

estabilidade dos pontos fixos. Logo temos que:

$$f'(x^*) = R(1 - (\gamma + 1)x^{*\gamma}). \quad (4.6)$$

Aplicando o ponto fixo $x_1^* = 0$, temos

$$f'(x_1^*) = R. \quad (4.7)$$

No entanto, para o ponto fixo x_1^* ser assintoticamente estável devemos ter que:

$$\begin{aligned} |R| &< 1 \\ -1 &< R < 1. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Como $R \geq 0$, concluímos que o ponto fixo é estável para $R \in (0, 1]$. Considerando agora o caso em que γ é ímpar, racional ou irracional, vamos analisar o ponto fixo $x_2^* = (1 - \frac{1}{R})^{\frac{1}{\gamma}}$, assim

$$f'(x_2^*) = \gamma - R\gamma + 1. \quad (4.9)$$

Como visto anteriormente para que x_2^* seja classificado como assintoticamente estável, deve-se ter que:

$$|\gamma - R\gamma + 1| < 1, \quad (4.10)$$

ou seja,

$$\frac{2 + \gamma}{\gamma} > R > 1. \quad (4.11)$$

Assim, podemos concluir que o ponto fixo x_2^* é assintoticamente estável para $R \in (1, \frac{2 + \gamma}{\gamma})$. Vale a pena ressaltar que em $R = 1$ ocorre uma troca de estabilidade entre os pontos fixos x_1^* e x_2^* , o que é uma característica de uma bifurcação transcítica. Agora vamos analisar a

estabilidade para o caso em que γ é par, ou seja, para os pontos fixos

$$x_{2,3}^* = \pm \left(1 - \frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{\gamma}}. \quad (4.12)$$

Sabemos pela equação (4.6) que a derivada de f é dada por:

$$f'(x^*) = R(1 - (\gamma + 1)x^{*\gamma}). \quad (4.13)$$

Aplicando os pontos fixos $x_{2,3}^*$ em f' , temos:

$$\begin{aligned} f'(x_{2,3}^*) &= R\left\{1 - (\gamma + 1)\left[\left(1 - \frac{1}{R}\right)^\gamma\right]^{\frac{1}{\gamma}}\right\}, \\ f'(x_{2,3}^*) &= \gamma - R\gamma + 1 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Assim, para que o ponto fixo $x_{2,3}^*$ seja assintoticamente estável, devemos considerar que:

$$f'(x_{2,3}^*) < 1. \quad (4.15)$$

Portanto, podemos escrever a seguinte inequação

$$\begin{aligned} |\gamma - R\gamma + 1| &< 1, \\ -1 &< \gamma - R\gamma + 1 < 1, \\ -1 - (\gamma + 1) &< -R\gamma < 1 - (\gamma + 1), \\ \frac{2 + \gamma}{\gamma} &> R > 1. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Deste modo concluímos que o ponto fixo $x_{2,3}^*$ é assintoticamente estável para $R \in \left(1, \frac{2 + \gamma}{\gamma}\right)$. Portanto, o ponto fixo $x_{2,3}^*$ sendo ele positivo ou negativo, será visitado conforme a escolha das condições inicial.

Um estudo detalhado sobre o decaimento de órbitas para os pontos fixos nas bifurcações transcítica e de forquilha utilizando leis de escala é discutido na referência [29, 30].

Estudo do mapa *logistic-like* perturbado

Neste Capítulo introduziremos o mapa *logistic-like* perturbado. Inserimos perturbação paramétrica no mapa, com o intuito de analisar os efeitos causados na dinâmica. Foi possível perceber que houve uma mudança nos diagramas de órbitas, tal como descontinuidades associadas a mudança de bacia de atração. O nosso principal objetivo será investigar a transição entre as duas bacias de atração e encontrar numericamente o expoente do transiente para os valores diferentes dos parâmetros de controle.

5.1 O mapa *logistic-like* perturbado e suas propriedades

O mapa unidimensional que será investigado neste Capítulo é o mapa *logistic-like* perturbado onde consideramos a perturbação definida por uma pequena função periódica. O objetivo é inserir uma perturbação ao mapa *logistic-like* apresentado no capítulo 5 e analisar qual será o efeito desta perturbação. Tal mapa é descrito pela seguinte expressão:

$$x_{n+1} = R_n x_n (1 - x_n^\gamma), \quad (5.1)$$

onde R_n é uma função periódica dada por $R_n = R(1 + \epsilon \cos(n\pi))$, de modo que R e γ são parâmetros de controle e ϵ é um parâmetro que controla a intensidade de perturbação. Para valores apropriados do parâmetro γ podemos recuperar alguns modelos que já são conhecidos na

literatura. Por exemplo se escolhermos $\gamma = 1$ retomamos o mapa logístico dependente do tempo [31, 22]. Se considerarmos $\epsilon = 0$ obtemos o mapa *logistic-like* [29, 30]. Para a escolha de $\gamma = 0, 5$ recuperamos modelos não lineares com aplicações em economia [26]. Considerando $\epsilon = 0$ e $\gamma = 1$ temos os mapas quadrático e logístico convencional [27] e [28] respectivamente, enquanto que para $\epsilon = 0$ e $\gamma = 2$ retomamos o mapa cúbico [28]. Em nossos estudos consideraremos os parâmetros $\gamma = 0, 5$, $\gamma = 1$ e $\gamma = 2$.

Como foi visto na seção 2.1 para que possamos encontrar um ponto fixo do mapa (5.1) devemos obedecer a seguinte condição $f(x^*) = x^*$. No entanto, mostramos na tabela 5.1 que a oscilação do termo $\cos(n\pi)$ ocorre a cada duas iteradas da equação (5.1).

Tabela 5.1: Oscilação de $\cos(n\pi)$.

n	$x_n + 1$	$\cos(n\pi) = (-1)^n$
$n = 0$	x_1	1
$n = 1$	x_2	-1
$n = 2$	x_3	1
$n = 3$	x_4	-1
\vdots	\vdots	\vdots

Como $\cos(n\pi) = (-1)^n$, o termo $\cos(n\pi)$ assume valores 1 e -1 dependendo da iteração a qual estamos considerando. Assim analisamos qual é o efeito da perturbação no ponto fixo. Observando a equação (5.1) podemos notar que a amplitude de perturbação ϵ multiplica o termo $\cos(n\pi)$. Portanto, o parâmetro ϵ também irá oscilar. A tabela 5.2 mostra o comportamento da oscilação.

Tabela 5.2: Oscilação da perturbação ϵ .

n	$f(x_n^*) = x_n^* + 1$
$n = 0$	$(r + \epsilon)x_1^*$
$n = 1$	$(r - \epsilon)(r + \epsilon)x_2^*$
$n = 2$	$(r + \epsilon)(r - \epsilon)(r + \epsilon)x_3^*$
$n = 3$	$(r - \epsilon)(r + \epsilon)(r - \epsilon)(r + \epsilon)x_4^*$
\vdots	\vdots

Dessa forma a equação (5.1) vai se repetir a cada dois períodos de acordo com as oscilações mostradas nas tabelas (5.1) e (5.2). Com isso, mostramos a seguir a maneira analítica de calcular o ponto fixo x^* da equação (5.1). Sendo assim, consideremos:

$$F(F(x^*)) = x^*, \quad (5.2)$$

que é a segunda iterada do mapa. Fazendo uma manipulação algébrica com o mapa (5.1) encontramos

$$F(F(x^*)) = R^2(1 - \epsilon^2)x^*(1 - x^{*\gamma})[1 - (1 + \epsilon)x^*(1 - x^{*\gamma})] = x^*. \quad (5.3)$$

Portanto,

$$x^*\{R^2(1 - \epsilon^2)(1 - x^{*\gamma})[1 - (1 + \epsilon)x^*(1 - x^{*\gamma})] - 1\} = 0. \quad (5.4)$$

A partir da equação (5.4) podemos observar que $x^* = 0$ é um ponto fixo da equação (5.1). Uma vez encontrado o ponto fixo vamos fazer o análogo ao que foi feito na seção 3.1 e analisar a estabilidade para o ponto fixo encontrado. Para tal estudo considere o seguinte:

$$\left| \left(\frac{d(F \circ F)}{dx} \right)_{x=x^*} \right| < 1, \quad (5.5)$$

de modo que $F \circ F$ é uma função composta de F em F dada pela equação (5.3). Seguindo nossos estudos vamos aplicar o ponto fixo $x^* = 0$ na inequação (5.4). Fazendo isso obtemos:

$$\left(\frac{d(F \circ F)}{dx} \right)_{x=x^*} = R^2(1 - \epsilon^2). \quad (5.6)$$

Analisando a expressão (5.6) com base na equação (5.5) temos que esse ponto fixo será assintoticamente estável se:

$$-1 < R^2(1 - \epsilon^2) < 1. \quad (5.7)$$

Logo o ponto fixo $x^* = 0$ será assintoticamente estável se $R^2(1 - \epsilon^2) \in [0, 1)$. Quando $R = \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}$ temos uma bifurcação transcítica. A seguir mostraremos na figura 5.1 os diagramas de órbita para valores diferentes dos parâmetros γ e ϵ , conforme mostra a legenda nas figuras.

Os diagramas mostrados na figura 5.1(a), (b), (c), correspondem respectivamente a $\gamma = 0, 5$, $\gamma = 1$ e $\gamma = 2$, onde mantivemos o valor do parâmetro $\epsilon = 0,01$ e $x_0 = 0,5$ fixos. Já os diagramas mostrados na figura 5.1(d), (e), (f), correspondem aos mesmos valores de γ e o mesmo valor para a condição inicial $x_0 = 0,5$, porém nas figuras 5.1(d), (e) usamos $\epsilon = 0,038$

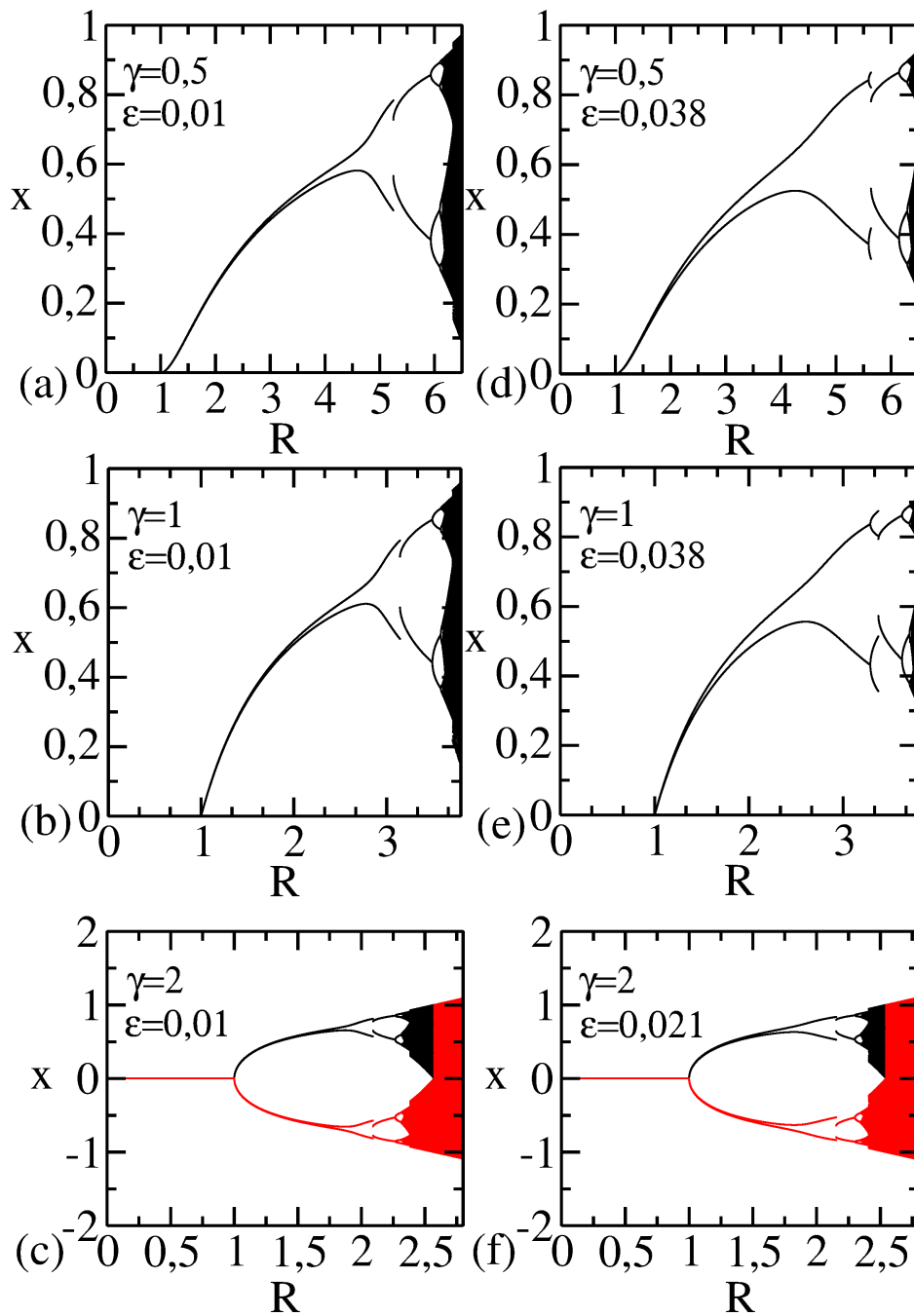


Figura 5.1: Diagramas de órbita para o mapa *logistic-like* perturbado considerando a condição inicial sendo $x_0 = 0,5$ e valores diferentes dos parâmetros γ e ϵ conforme mostra legenda nas figuras.

e na figura 5.1(f) escolhemos $\epsilon = 0,021$. Na figura 5.1 podemos notar que uma pequena

perturbação interfere no comportamento da dinâmica do sistema, já que descontinuidades

podem ser observadas. As descontinuidades estão associadas a mudanças de bacia de atração. Tais mudanças acontecem a medida que as condições iniciais passam a serem atraídas para um novo atrator a medida que o parâmetro R se aproxima de um valor crítico denotado por R_c . Observando as figuras construídas para $\gamma = 0,5$ e $\gamma = 1$ percebemos, que, os diagramas de órbitas ficaram semelhantes. No entanto, para $\gamma = 1$ a descontinuidade demorou um número maior de iterações até acontecer a transição de uma bacia para a outra. Podemos observar também na figura 6.1 que a mudança no comportamento do sistema não implicou no desaparecimento das regiões caóticas.

Através do método de Newton Raphson foi possível encontrar os valores de R_c para cada diagrama da figura 5.1. As tabelas 5.3 e 5.4 mostram os valores de R_c para valores diferentes dos parâmetros de controle.

Tabela 5.3: Valores encontrados para R_c para diferentes valores de γ e considerando o mesmo valor de $\epsilon = 0,01$.

γ	ϵ	R_c
0,5	0,01	5,2467315
1	0,01	3,14439
2	0,01	2,09112

Tabela 5.4: Valores encontrados para R_c para diferentes valores de γ e considerando o mesmo valor de $\epsilon = 0,038$.

γ	ϵ	R_c
0,5	0,038	5,6357044
1	0,038	3,372405
2	0,038	2,1533515

Com o intuito de compreender a descontinuidade apresentada nos diagramas de órbita visto na figura 5.1, mostramos na figura 5.2 o diagrama de órbita considerando $\gamma = 0,5$, $\epsilon = 0,01$ e a condição inicial $x_0 = 0,5$, na cor preta foi plotado o diagrama de órbitas para o *logistic-like* perturbado convencional, onde consideramos um transiente alto*, já para as cores em vermelho, verde e azul, consideremos um transiente baixo. Podemos observar na figura 5.2 que há uma mudança na bacia de atração. Esse efeito fica evidente no diagrama em cor vermelha. Notamos que próximo a $R = 5$ acontece a mudança na bacia de atração.

*Para o diagrama em preto consideramos o transiente igual a 1000 e iteramos 1000 vezes, já para os diagramas em vermelho, verde e azul adotamos o transiente sendo 15 e fomos variando a número de iterações conforme legenda da figura 5.2

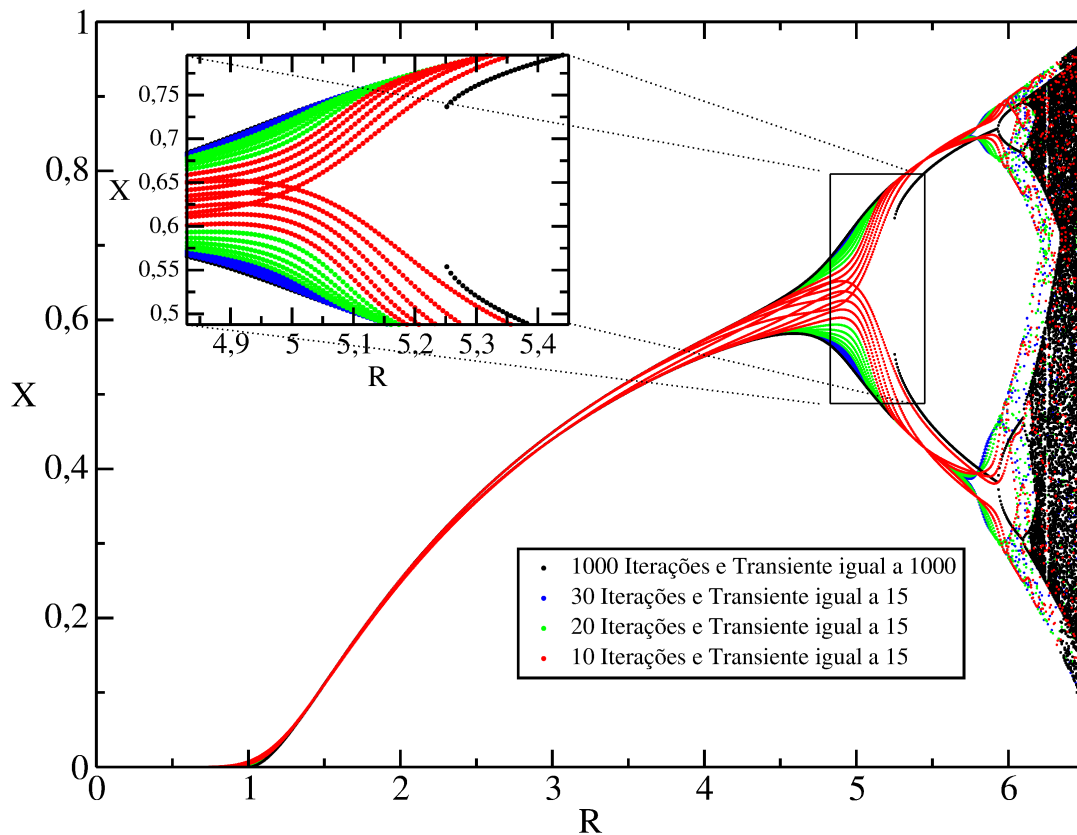


Figura 5.2: Diagrama de órbitas considerando diferentes iterações e a condição inicial $x_0 = 0.5$.

Na seção 2.3 foi discutido que o expoente de Lyapunov permite verificar as regiões onde o sistema apresenta comportamentos caóticos e regulares. Com o intuito de analisar o efeito da perturbação inserida no sistema, construímos o diagrama de órbita juntamente com o respectivo expoente de Lyapunov. Os diagramas de órbitas mostrados nas figuras 5.3(a) e 5.3(b) foram construídos para $\gamma = 1$ e $\epsilon = 0,01$, de modo que consideramos condições iniciais $x_0 = 0.1$ e $x_0 = 0.6$ respectivamente. As figuras (c) e (d) mostram os respectivos expoentes de Lyapunov.

Uma vez observado que a perturbação inserida afeta o comportamento do sistema, o nosso objetivo agora será considerar um valor de R e a partir de uma determinada condição inicial, investigar o número de iterações que a órbita gasta em torno do novo atrator oriundo da transição entre as duas bacias de atração. Fizemos também uma análise para valores de R próximo a descontinuidade, ou seja, próximo do valor crítico R_c conforme apresenta a figura 5.4. Com isso, conseguimos verificar que a órbita fica “presa” por um determinado tempo até que possa decair para o novo atrator. A figura 5.4 mostra a evolução da órbita para valores

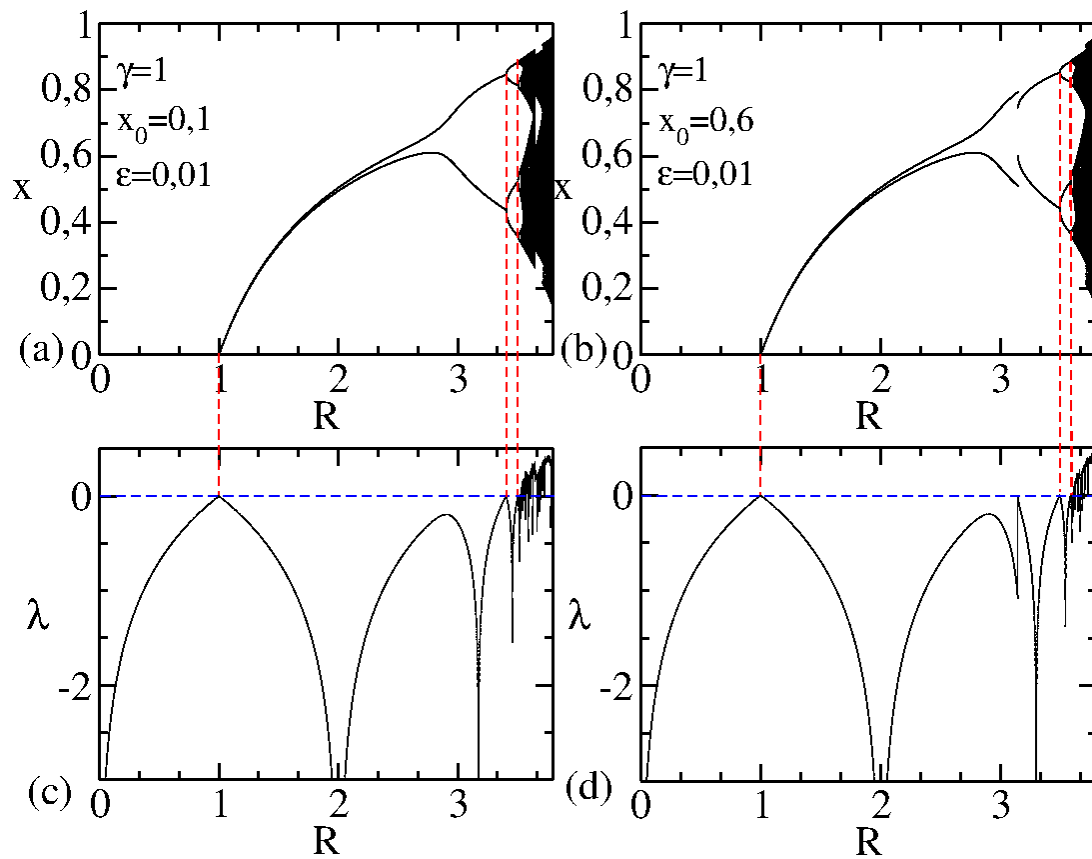


Figura 5.3: Diagrama de órbita juntamente com seus respectivos expoentes de Lyapunov.

do parâmetro R próximo da descontinuidade em $R_c = 2,09112$. Na figura 5.4(a) usamos $\gamma = 0,5$, $\epsilon = 0,01$ e $x_0 = 0,5$ já na figura 5.4(b) escolhemos $\gamma = 2$, $\epsilon = 0,021$ e $x_0 = 0,5$. Analisando a figura 5.4 podemos observar que as órbitas ficam presas por um número suficientemente grande de iterações até haver um escape e as órbitas decaírem para o ponto fixo. Algo interessante e que vale ressaltar é que o número de iterações que a órbita fica “presa” até acontecer a transição depende da distância que estamos do valor crítico R_c . Para ilustrar este acontecimento, realizamos simulações numéricas com os mesmos valores dos parâmetros de controle γ , ϵ , mesma condição inicial x_0 e consideramos valores diferentes R , porém valores próximos de $R_c = 2,09112$, como podemos observar na figura 5.5.

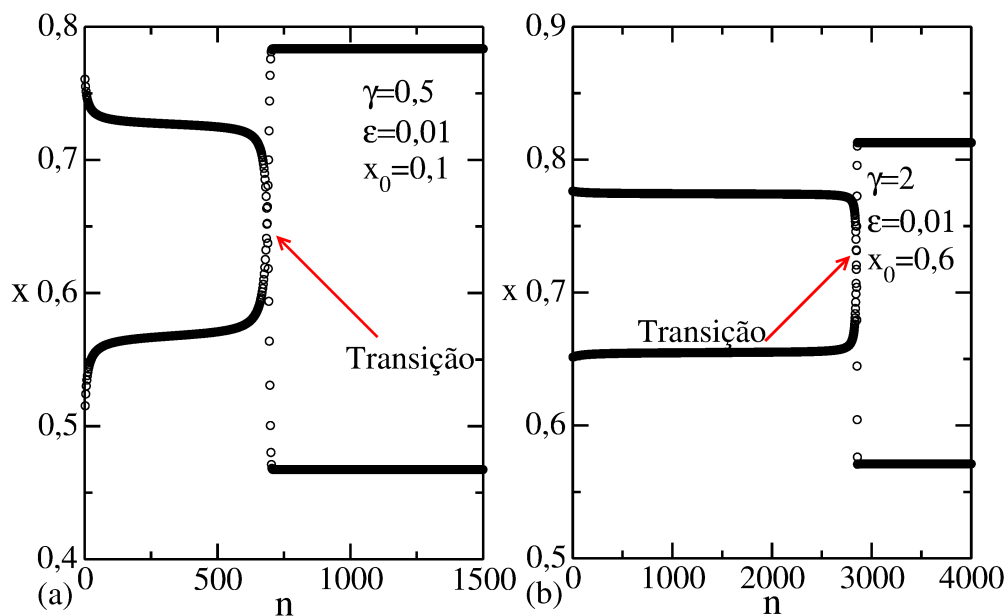


Figura 5.4: Convergências das órbitas para o novo atrator onde consideremos valores cada vez mais próximos de $R_c = 2,09112$. Em (a) consideramos $\gamma = 0,5$, $\epsilon = 0,01$ e $x_0 = 0,5$. Em (b) $\gamma = 2$, $\epsilon = 0,02$ e $x_0 = 0,5$.

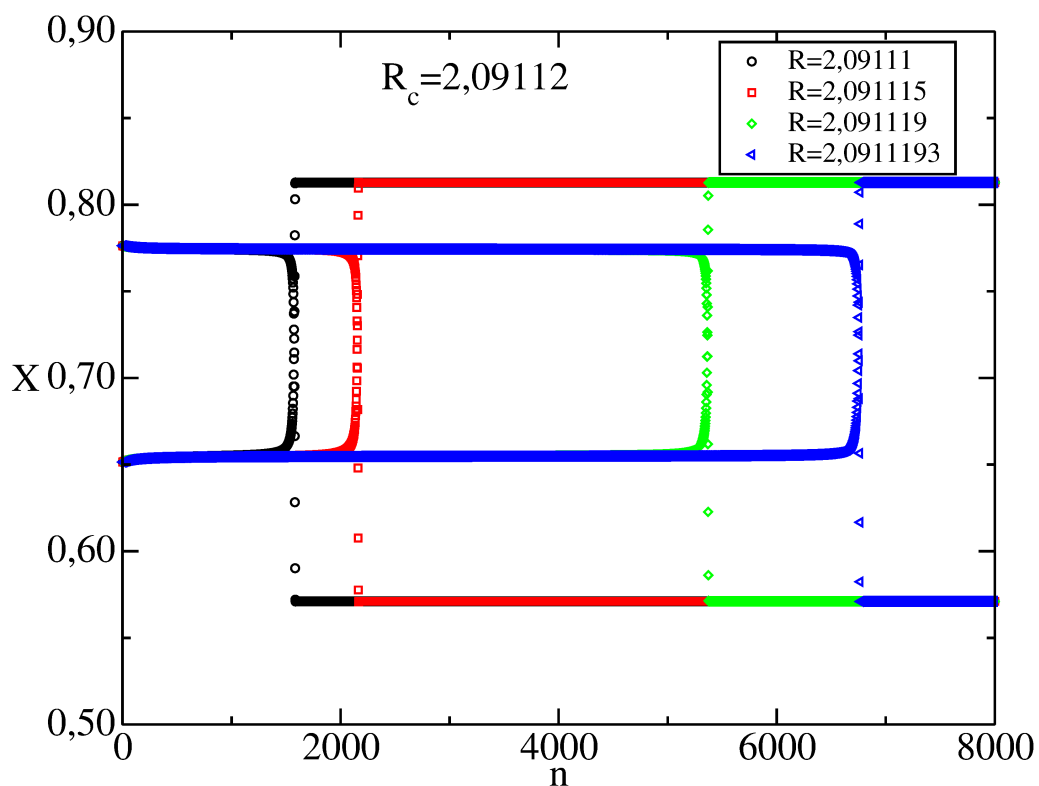


Figura 5.5: Diagrama das convergências das órbitas para o novo atrator, onde consideremos valores diferentes cada vez mais próximos de $R_c = 2,09112$.

A partir do comportamento mostrado na figura 5.5 podemos observar que para valores cada vez mais próximos da descontinuidade, ou seja, valores de $R < R_c = 2,09112$ a órbita fica mais tempo confinada, de modo que há um número maior de iterações até acontecer a transição. Podemos perceber que para $R = 2,09111$, preciso de um número menor de iterações até que aconteça a transição. Já para $R = 2,0911193$ que é um valor mais próximo de $R_c = 2,09112$ a órbita leva um tempo maior até haver a transição.

Com as análises feitas até agora percebemos que a perturbação paramétrica fez com que a dinâmica do sistema se alterasse como pode ser visto na figura 5.1. Foi possível perceber uma descontinuidade que está relacionada com o aparecimento de uma nova bacia de atração, a medida que as condições iniciais passam a ser atraídas para um novo atrator quando o parâmetro R se aproxima do valor crítico R_c .

Podemos caracterizar a transição de uma bacia de atração para outra por um tempo de transiente τ . Assim podemos supor que o transiente pode ser caracterizado por uma lei de potência que é descrita da seguinte maneira:

$$\tau = \frac{1}{\mu^\delta} \quad (5.8)$$

onde $\mu = |R_c - R|$ e o expoente δ é o expoente do transiente. Com o objetivo de encontrarmos o expoente δ , consideramos um valor do parâmetro R e a partir de uma condição inicial x_0 . Investigamos o número de iterações que a órbita gasta em torno do novo atrator resultante da transição entre as duas bacias de atração. Realizamos simulações numéricas para obtermos o expoente de transiente δ , para diferentes valores do parâmetro ϵ e γ como mostrado nas legendas das figuras 5.6 (a) e (b).

As tabelas 5.5 e 5.6 mostram os expoentes de transiente δ obtidos para valores diferentes dos parâmetros de controle γ e ϵ .

Tabela 5.5: Expoente de transiente δ relacionados a figura 5.6(a).

γ	ϵ	δ
0,5	0,01	0,500(1)
1	0,01	0,500(1)
2	0,01	0,5000(6)

Assim podemos concluir que para valores diferentes dos parâmetros γ e ϵ , os expoentes de transiente δ são os mesmos, ou seja a perturbação paramétrica inserida no mapa

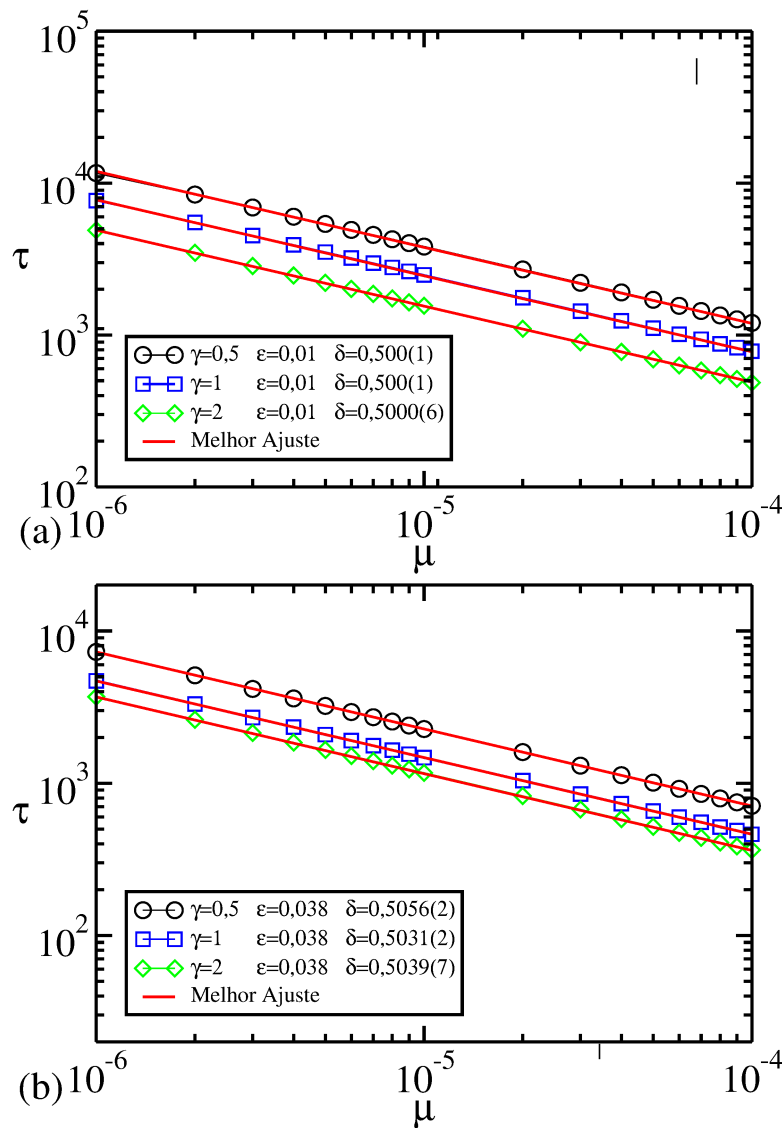


Figura 5.6: Valores do expoente de transiente δ para diferentes valores de γ e ϵ , considerando $x_0 = 0,5$.

Tabela 5.6: Expoente de transiente δ relacionados a figura 5.6(b).

γ	ϵ	δ
0,5	0,038	0,5056(2)
1	0,038	0,5031(2)
2	0,038	0,5039(7)

logistic-like, apresenta uma mudança no comportamento do sistema, como podemos observar na figura 5.1. Porém independente dos valores escolhidos para γ e ϵ o expoente permanecerá sendo $\delta \approx 0,5$ conforme determinado para o mapa logístico perturbado [22, 32].

5.2 Convergência para o ponto fixo x^* para o caso em que $\mu = 0$

Nesta seção investigamos a convergência de órbitas para o mapa *logistic-like* perturbado descrito pela equação (5.1). Considerando valores diferentes de γ , sendo eles $\gamma = 0,5$, $\gamma = 1$ e $\gamma = 2$. Ressaltamos que devido a perturbação paramétrica inserida no mapa *logistic-like*, consideraremos a segunda iteração do mapa (5.1).

Para podermos investigar o comportamento do decaimento das órbitas para o ponto fixo x^* , devemos analisar o comportamento de x próximo do ponto fixo. A convergência para o ponto fixo está relacionada ao número de iterações n de uma dada condição inicial x_0 e de μ , onde tal parâmetro nos mostra a distância do ponto de bifurcação. Para nossa análise consideraremos $\mu = 0$, ou seja estamos no ponto de bifurcação já que $R = R_c$, uma vez que $\mu = R - R_c$.

As figuras 5.7, 5.8 e 5.9 mostram os decaimentos de órbitas para o ponto fixo em $x^* = 0$ próximo as bifurcações transcritical e forquilha. Consideramos valores diferentes do parâmetro γ e considerando condições iniciais diferentes conforme legenda na figura.

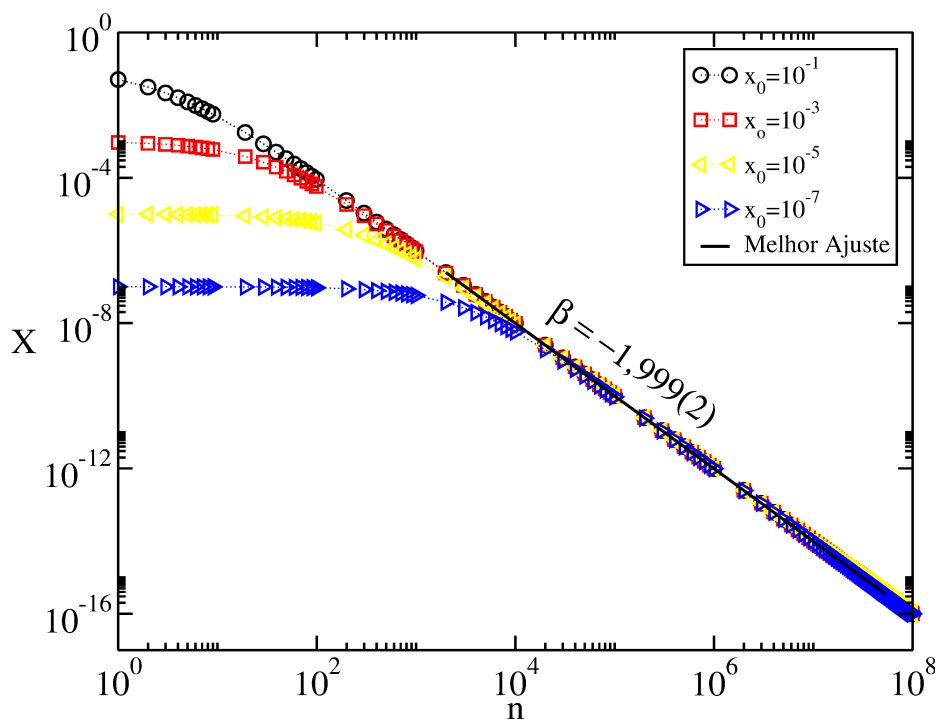


Figura 5.7: Convergência para o ponto fixo $x^* = 0$ para $\gamma = 0,5$ considerando $\epsilon = 0,01$.

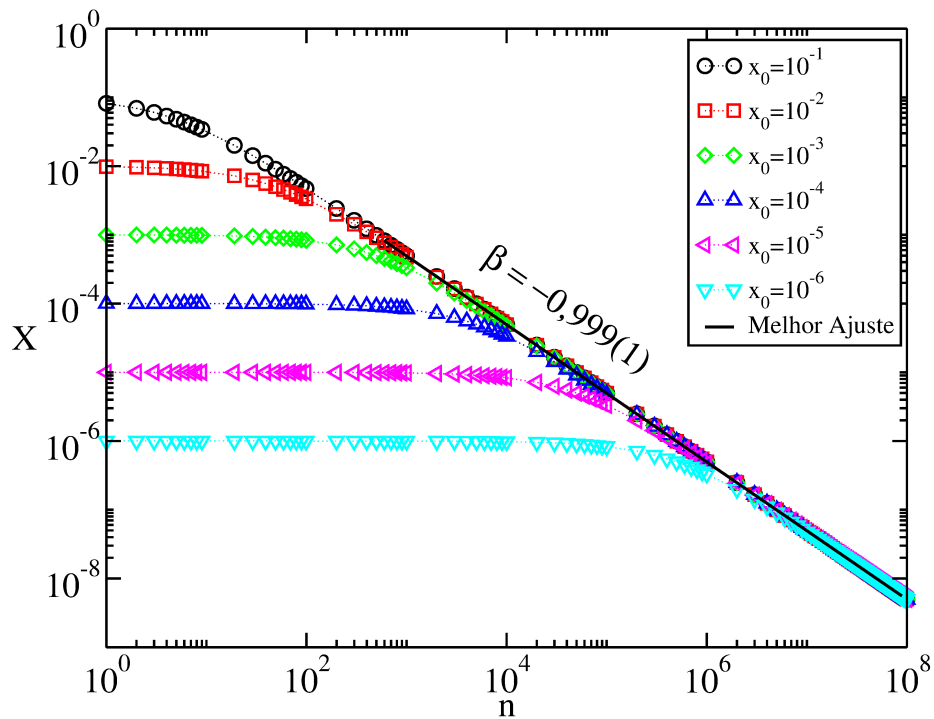


Figura 5.8: Convergência para o ponto fixo $x^* = 0$ considerando $\gamma = 1$ considerando $\epsilon = 0,01$.

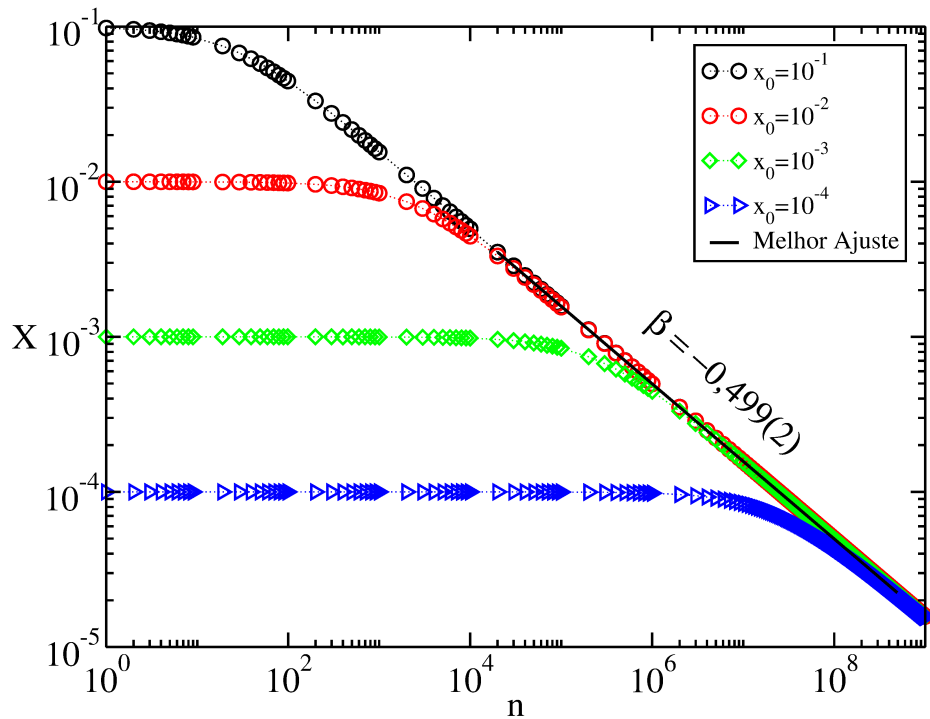


Figura 5.9: Convergência para o ponto fixo $x^* = 0$ para $\gamma = 2$ considerando $\epsilon = 0,01$.

A partir das figuras 5.7, 5.8 e 5.9 podemos notar que mesmo para condições iniciais x_0 diferentes as curvas apresentam comportamentos semelhantes. Dado um valor de x_0 as permanecem em regime constante até atingirem um número de iterações que denotamos por n_x , chamado de número de *crossover*. Depois as órbitas decaem em uma lei de potência. A partir do comportamento observado podemos supor três hipóteses de escala, sendo elas:

1. Para n suficientemente curto, ou seja, $n \ll n_x$, temos

$$x(n) \propto x_0^\alpha. \quad (5.9)$$

onde α é um expoente crítico. Como temos que $x(n) \propto x_0^\alpha$ podemos concluir que $\alpha = 1$.

2. Para n suficientemente longo, ou seja, $n \gg n_x$, temos

$$x(n) \propto n^\beta. \quad (5.10)$$

onde β é um expoente crítico.

3. O número de crossover $n(x)$ é obtido através de

$$n(x) \propto x_0^z, \quad (5.11)$$

onde denominamos z como sendo o expoente dinâmico.

Fazendo uso das 3 hipóteses de escalas e observando o comportamento das figuras 5.7, 5.8 e 5.9, podemos supor uma função homogênea generalizada do tipo:

$$x(x_0, n) = lx(l^a x_0, l^b n), \quad (5.12)$$

de modo que l é um fator de escala, a e b são expoentes característicos

Como sabe-se l é um fator de escala, podemos escolher $l^a x_0 = 1$, o que nos leva a

obter $l = x_0^{-\frac{1}{a}}$, assim

$$x(x_0, n) = x_0^{-\frac{1}{a}} X(1, x_0^{-\frac{b}{a}} n), \quad (5.13)$$

escolhendo $x(1, x_0^{-\frac{b}{a}} n)$ como sendo um valor constante para $n \ll n_x$ e comparando com a hipótese de escala 1, ficamos com o seguinte:

$$x_0^{-\frac{1}{a}} = x_0^\alpha, \quad (5.14)$$

logo temos que

$$\alpha = -\frac{1}{a}. \quad (5.15)$$

De maneira análoga, porém assumindo agora $l_n^b = 1$, temos que $l = n^{-\frac{1}{b}}$, portanto

$$x(x_0, n) = n^{-\frac{1}{b}} x(n^{-\frac{a}{b}} x_0, 1), \quad (5.16)$$

Adotando que $x(n^{-\frac{a}{b}} x_0, 1)$ como sendo uma contante para $n \gg n_x$, e comparando com a hipótese de escala 2, temos que:

$$n^{-\frac{1}{b}} = n^\beta, \quad (5.17)$$

que nos conduz a concluir que:

$$\beta = -\frac{1}{b}. \quad (5.18)$$

Por fim faremos uso das expressões de l , dada por $n^\beta = x_0^\alpha$, temos:

$$n_x = x_0^{\frac{\alpha}{\beta}}, \quad (5.19)$$

comparando com a hipótese de escala 3, obtemos a lei de escala

$$z = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (5.20)$$

Olhando para a equação (5.20) podemos perceber uma relação entre os expoentes críticos e conseqüentemente é estabelecida uma lei de escala. Assim podemos concluir que uma vez conhecido os valores de dois dos três expoentes críticos α , β e z o terceiro é facilmente obtido através da relação descrita pela expressão (5.20).

Realizamos simulações numéricas para analisar o decaimento das órbitas para o ponto fixo considerando $\mu = 0$, de modo que um ajuste em lei de potência fornece numericamente o valor do expoente β para cada um dos valores estabelecidos para o parâmetro γ . Para $\gamma = 0,5$ o valor de $\beta = -1,999(2)$, para $\gamma = 1$ encontramos $\beta = -0,999(1)$ e finalmente para $\gamma = 2$ obtemos $\beta = 0,499(2)$. Analisando os valores de β encontrados, podemos afirmar que tal expoente depende do valor de γ . De acordo com Leonel [25] temos que o expoente β é um expoente crítico no qual o mesmo define a velocidade com que se dá a convergência para o estado de equilíbrio. Com o objetivo de tentar compreender como o parâmetro γ influencia no quão rápido ocorre a convergência mostraremos na figura 5.10 o decaimento das órbitas considerando a mesma distância x do ponto de bifurcação para ambos os valores de γ conforme legenda figura. Podemos observar que a convergência ocorre mais rápido para $\gamma = 0,5$ correspondendo ao expoente $\beta = -1,999(2)$ quando comparado com os valores de $\gamma = 1$ e $\gamma = 2$. Com isso concluímos que quanto menor o valor do expoente β mais rápido ocorre a convergência.

Encontramos também numericamente o valor do expoente z conforme mostrado nas figuras 5.11, 5.12 e 5.13, o comportamento de n_x versus x_0 . Para $\gamma = 0,5$ obtemos que $z = -0,499(2)$, para a escolha de $\gamma = 1$ encontramos o valor de $z = -0,9979(5)$, e para o expoente sendo $\gamma = 2$ determinamos $z = -1,995(2)$.

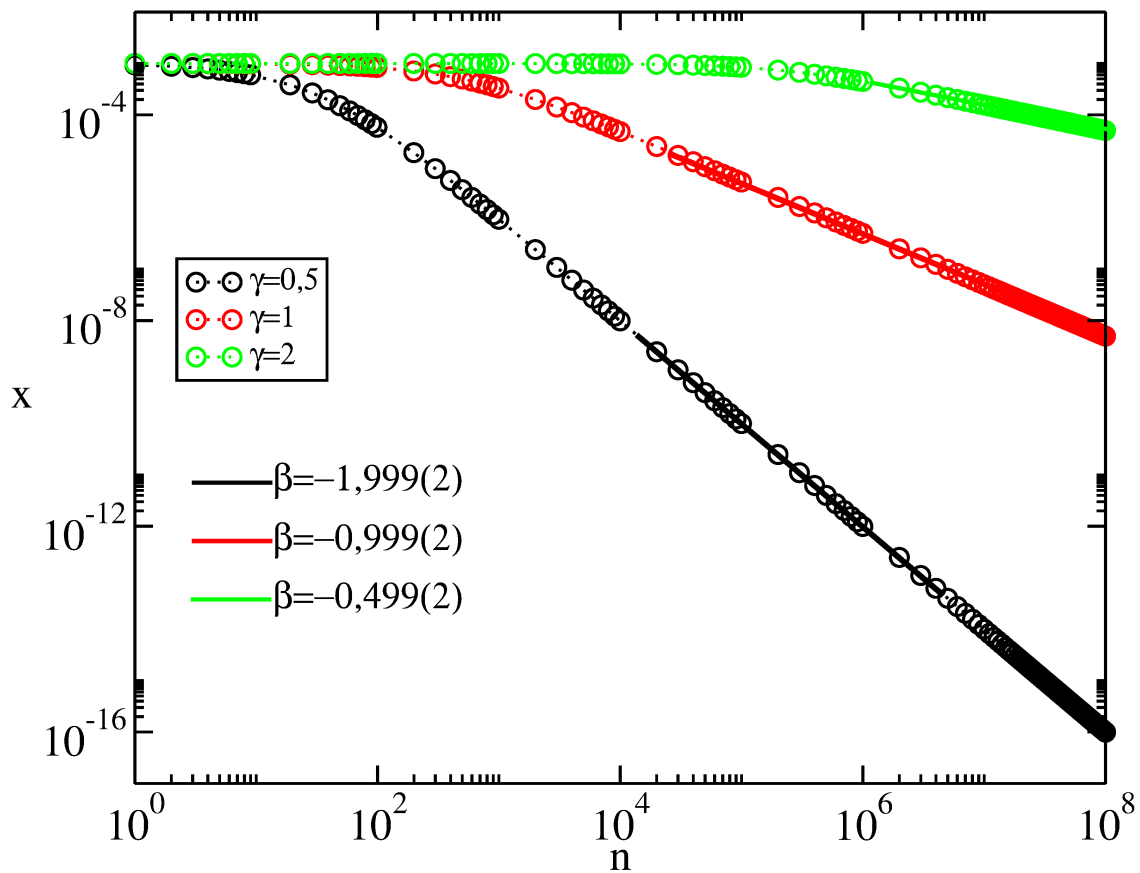


Figura 5.10: Convergência para o ponto fixo $x^* = 0$, considerando a mesma distância x e variando o parâmetro γ considerando $\epsilon = 0,01$.

A tabela 5.7 mostra os valores dos expoentes críticos α , β e z para os respectivos valores de γ .

Tabela 5.7: Expoentes críticos α , β e z para valores diferentes de γ .

γ	α	β	z
0,5	1	-1,999(2)	-0,499(2)
1	1	-0,999(1)	-0,9979(5)
2	1	-0,499(2)	-1,995(2)

Uma vez determinado os expoentes críticos, podemos usá-los para fazer uma mudança nos eixos coordenados das figuras 5.7, 5.8 e 5.9 do tipo $x \rightarrow x/x_0^\alpha$ e $n \rightarrow n/x_0^z$ como mostrado nas figuras 5.14, 5.15 e 5.16. Assim podemos observar um colapso universal de todas curvas mostradas nas figuras 5.7, 5.8 e 5.9.

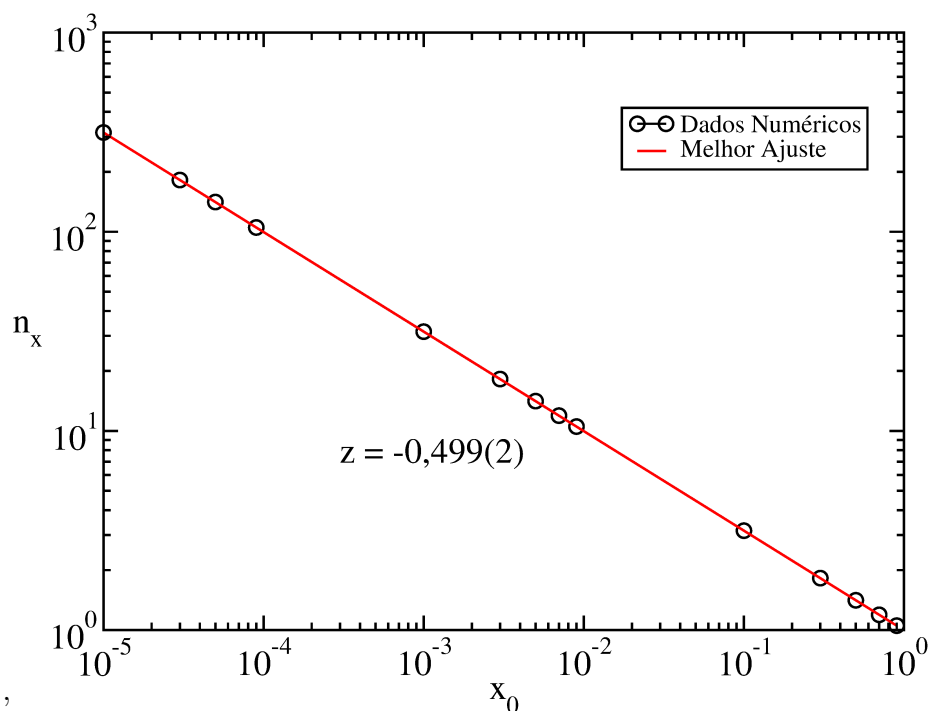


Figura 5.11: Condição inicial x_0 como função do número *crossover* n_x para $\gamma = 0.5$ considerando $\epsilon = 0,01$.

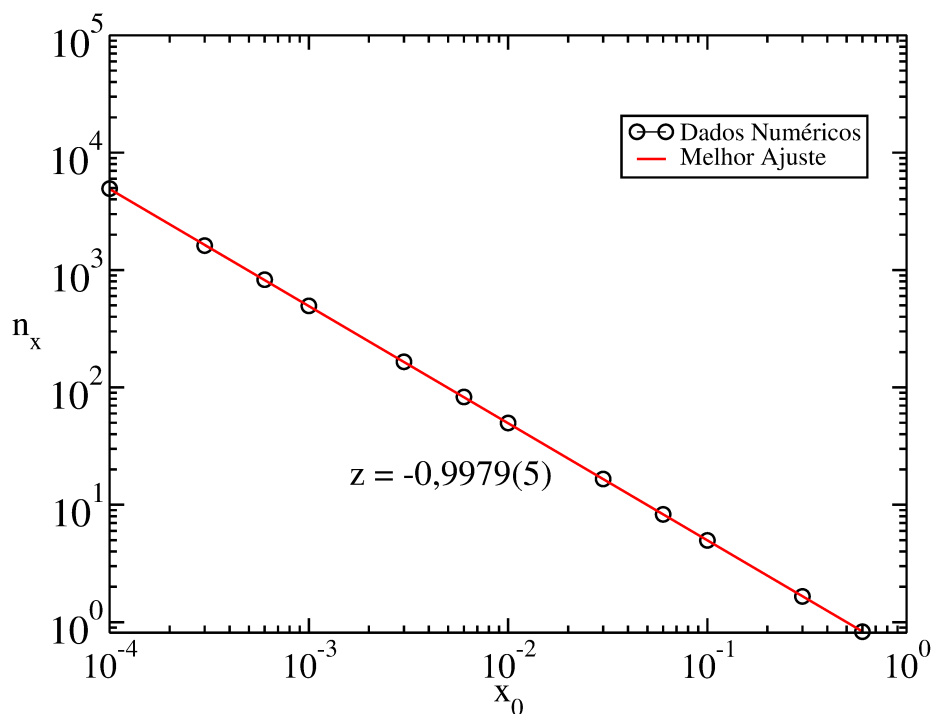


Figura 5.12: Condição inicial x_0 como função do número *crossover* n_x para $\gamma = 1$ considerando $\epsilon = 0,01$.

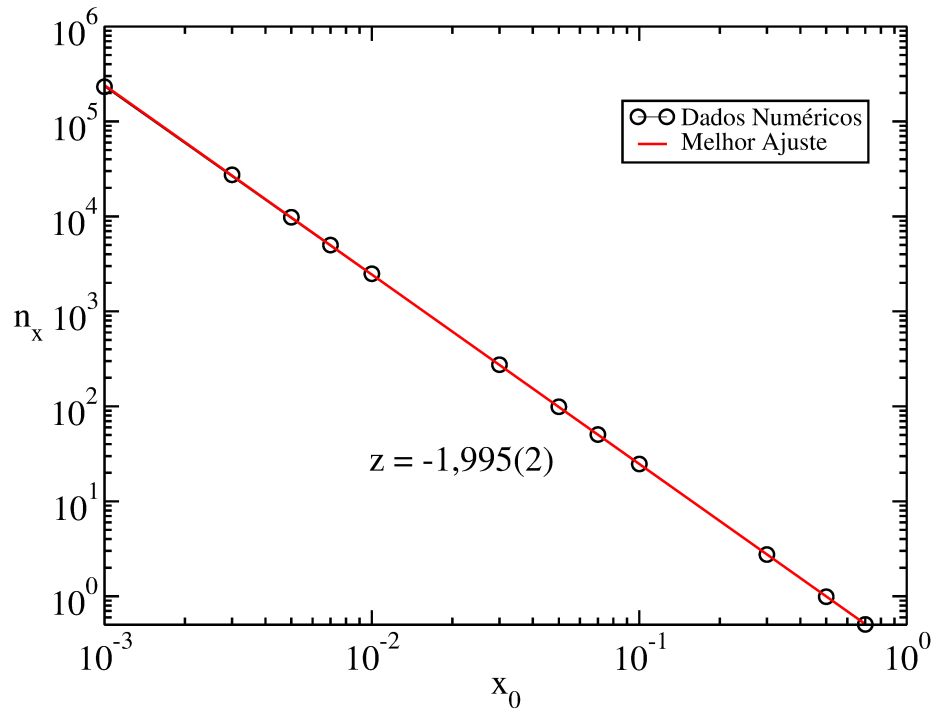


Figura 5.13: Condição inicial x_0 como função do número *crossover* n_x para $\gamma = 2$ considerando $\epsilon = 0,01$.

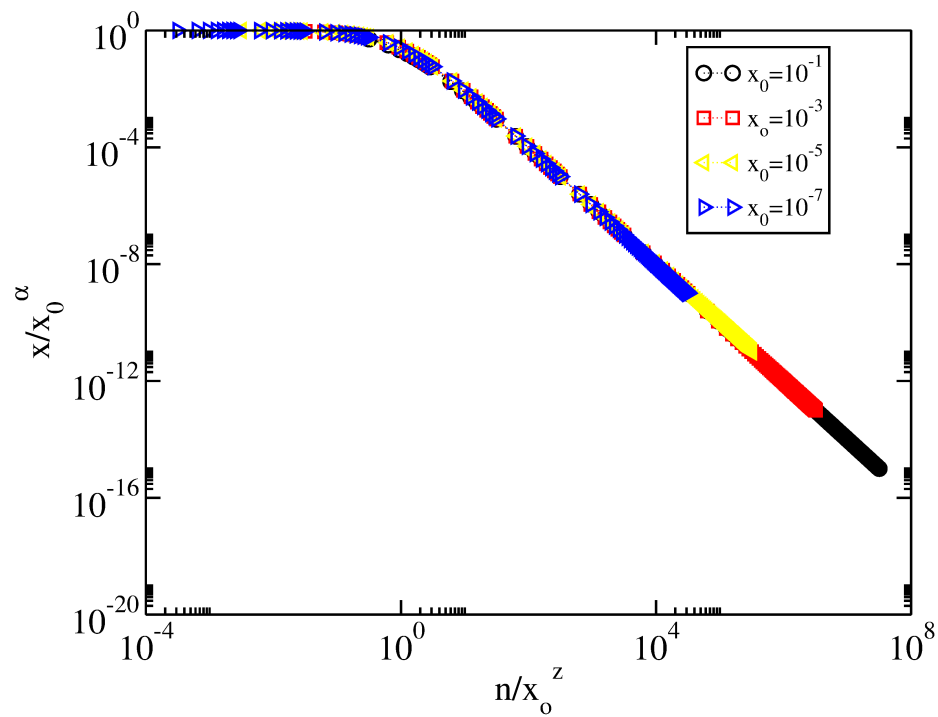


Figura 5.14: Colapso das curvas para $\gamma = 0,5$ considerando $\epsilon = 0,01$.

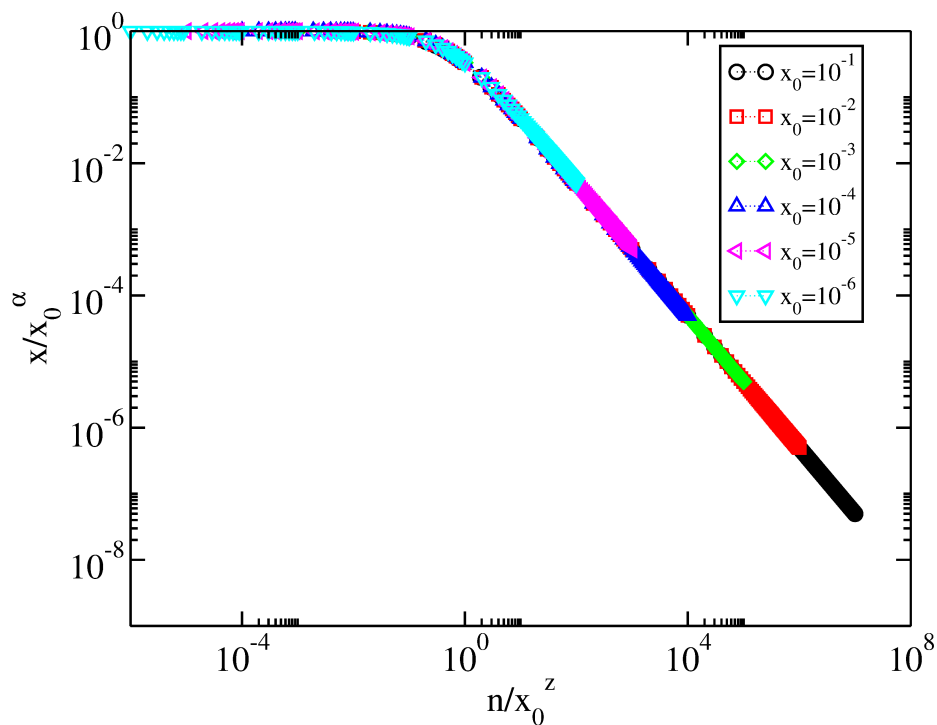


Figura 5.15: Colapso das curvas para $\gamma = 1$ considerando $\epsilon = 0,01$.

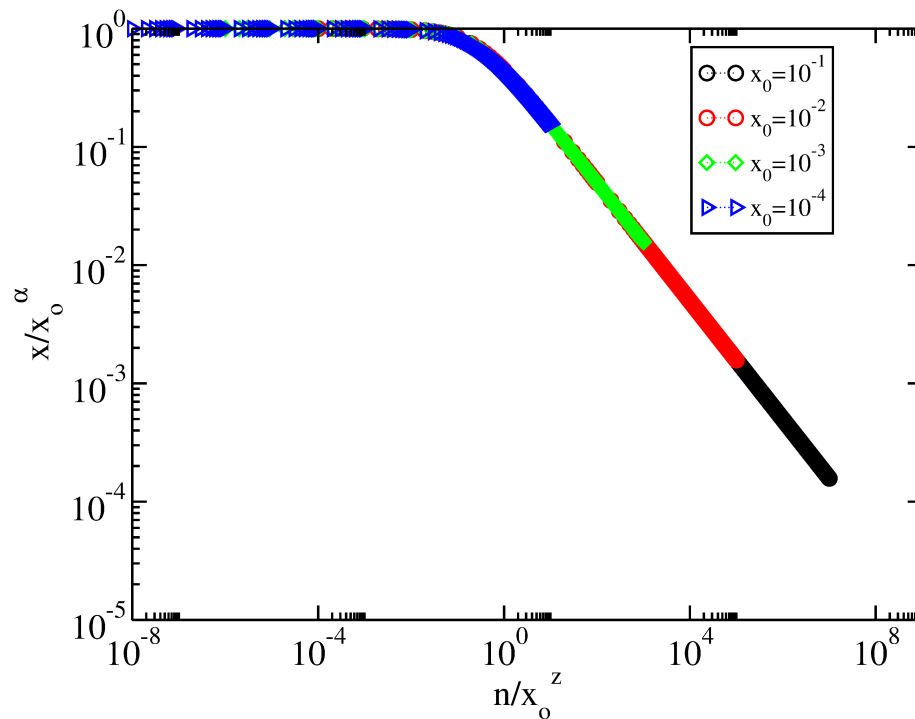


Figura 5.16: Colapso das curvas para $\gamma = 2$ considerando $\epsilon = 0,01$.

Assim podemos concluir que a lei de escala encontrada é válida e que as curvas são

invariantes as condições iniciais permitindo definir a universalidade das bifurcações.

5.3 Convergência para o ponto fixo $x^* = 0$ considerando o caso em que $\mu \neq 0$

Investigaremos nesta seção a convergência para o ponto fixo considerando a vizinhança de $R = \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$ definido no estudo da análise da estabilidade na seção 5.1. A convergência na vizinhança da bifurcação é dado por um decaimento exponencial descrito por:

$$X(x, \mu) \sim e^{-\frac{n}{\tau}}, \quad (5.21)$$

de modo que $\tau \sim \mu^\delta$, o termo τ é o tempo de relaxação e δ é um expoente de transiente.

Em nossas investigações consideramos $\gamma = 0,5$, $\gamma = 1$ e $\gamma = 2$ e $\epsilon = 0,01$, conforme mostrado nas figuras 5.17, 5.18 e 5.19.

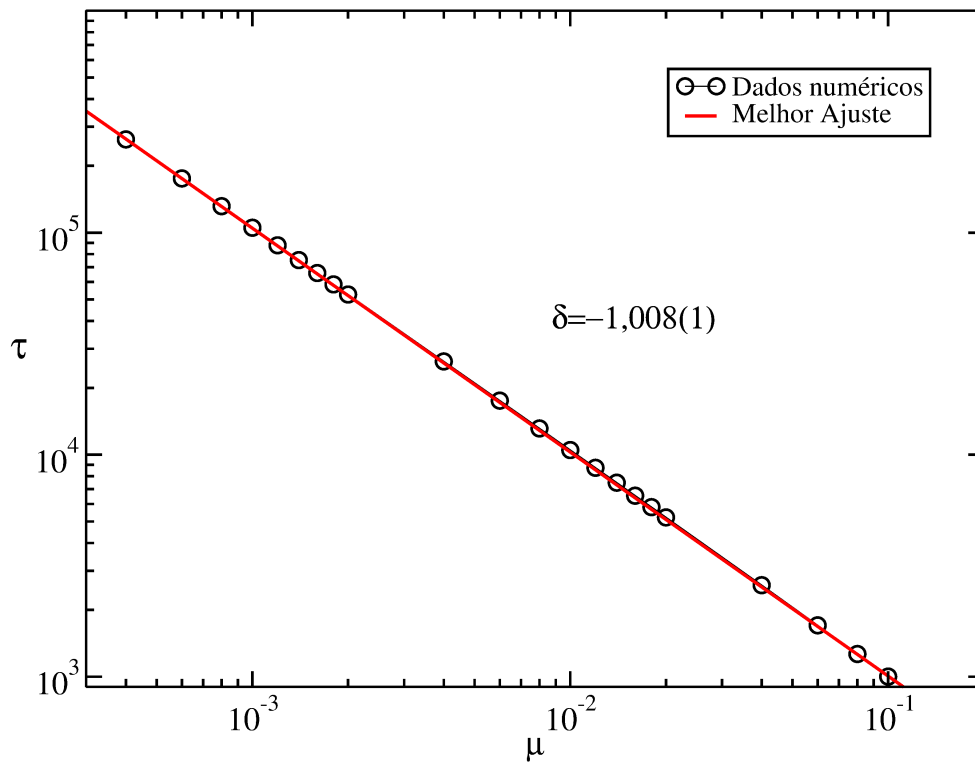
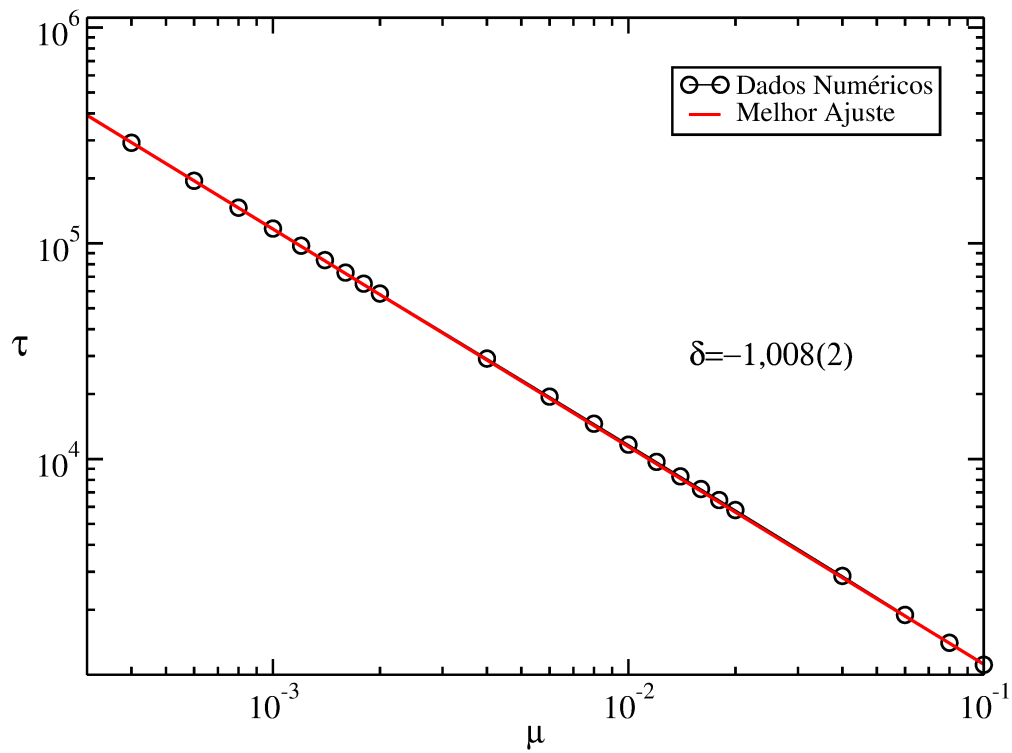
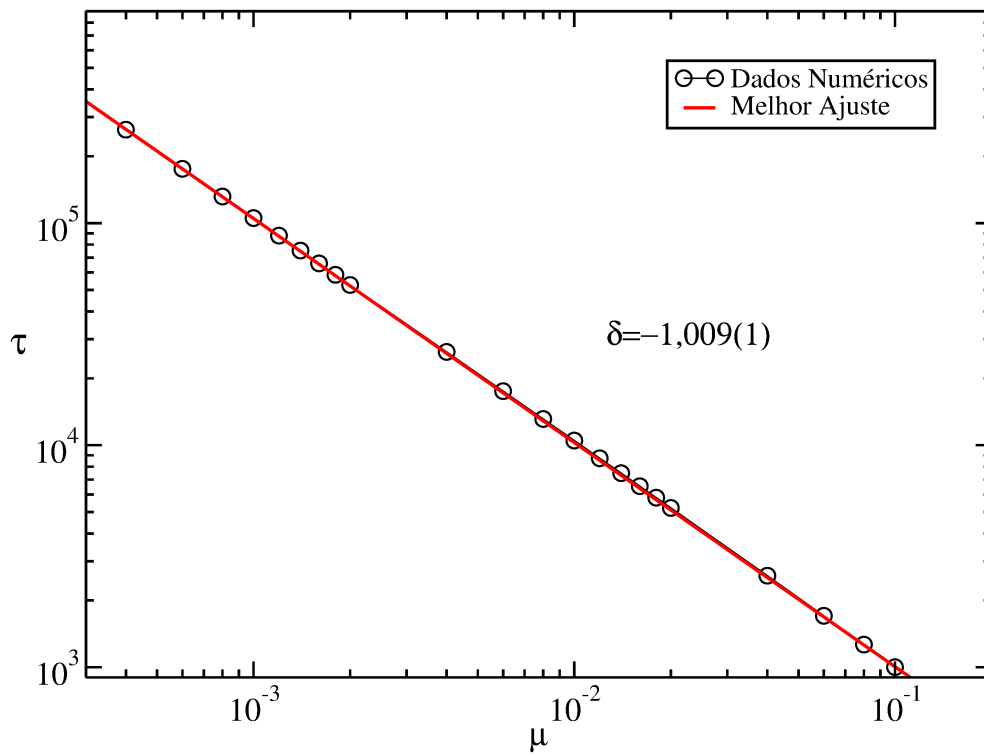


Figura 5.17: Tempo de relaxação δ para $\gamma = 0,5$ considerando $\epsilon = 0,01$.

Figura 5.18: Tempo de relaxação δ para $\gamma = 1$ considerando $\epsilon = 0,01$.Figura 5.19: Tempo de relaxação δ para $\gamma = 2$ considerando $\epsilon = 0,01$.

Para que possamos determinar numericamente o valor do expoente δ devemos prosseguir da seguinte forma, conforme discutido em [25]. Primeiramente devemos considerar um conjunto de condições iniciais próximas de x_0 e evoluir a dinâmica no tempo, feito isso verificamos o número de iterações que a trajetória gastou até que fosse atingido uma tolerância, usualmente considerada menor que 10^{-8} do ponto fixo. Quando este processo é atingido guardamos o valor obtido e refazemos todo o processo considerando um outro valor do parâmetro de controle. Nossos resultados mostram que para valores diferentes de γ o expoente $\delta \simeq -1$, conforme encontrado para o mapa logístico [25, 32]. Com isso percebemos que o valor obtido para o expoente δ não depende do valor de γ .

Considerações Finais

Neste trabalho fizemos uma breve revisão sobre algumas propriedades dinâmicas para mapas unidimensionais. Revisamos os pontos fixos, análise de estabilidade e os expoentes de Lyapunov ou número de Lyapunov. Uma vez descrita tais propriedades, apresentamos o mapa logístico e investigamos as propriedades dinâmicas que ele apresenta. Encontramos os pontos fixos e analisamos a estabilidade de tais pontos. Construimos o diagrama de órbitas e para caracterizar o comportamento de determinadas regiões como sendo periódicas ou caóticas usamos o expoente de Lyapunov.

Avançamos os nossos estudos considerando o mapa *logistic-like* e introduzimos uma perturbação periódica com o intuito de investigar as consequências causadas na dinâmica do sistema.

O nosso principal objetivo de estudar nessa dissertação, foi investigar o efeito de transiente e leis de escala no mapa *logistic-like* perturbado. Para isso construimos os diagramas de órbitas para valores diferentes dos parâmetros γ e ϵ . Assim foi possível observar uma descontinuidade relacionada a transição de uma bacia de atração para outra, esta mudança ocorre à medida que as condições iniciais passam a ser atraídas para um novo atrator quando o parâmetro R se aproxima de um valor crítico R_c . Deste modo notamos que a transição gasta para que uma condição inicial seja atraída de uma bacia para outra pode ser descrita por uma

lei de potência do tipo: $\tau = \mu^{-\delta}$, onde τ é o tempo de transiente. Realizamos simulações considerando para valores diferentes de γ e também para valores diferentes de ϵ , com o intuito de investigar se a perturbação afetaria o valor do expoente de transiente δ . Mostramos que independente dos parâmetros de controle $\delta \approx 0,5$.

Estendemos nossos estudos na investigação da convergência para o ponto fixo $x^* = 0$ considerando as bifurcações transcítica e forquilha em $R = \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$. Para o caso em que $\mu = 0$ encontramos os mesmos expoentes críticos, α , β e z encontrados para o mapa *logistic-like* [29, 30]. Para valores diferentes do parâmetro de controle γ , observamos que os expoentes β e z não são os mesmos e que dependem do valor escolhido para γ . Para o caso em que $\mu \neq 0$, encontramos os valores para o expoente $\delta \approx -1$. Observamos que os valores de δ encontrados não dependem dos parâmetros de controle e são os mesmos encontrados na literatura para o mapa logístico [31].

Como perspectiva de continuidade pretendemos construir os espaços de parâmetros utilizando os expoentes de Lyapunov. A construção dos espaços de parâmetros consiste em relacionar os parâmetros do sistemas e investigar a organização das janelas de periodicidade ilustradas pelas estruturas conhecidas como *shrimps* (camarões) [33].

Referências Bibliográficas

- [1] GLEICK, J. *Caos - A criação de uma nova ciência*. 18 ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 1989.
- [2] FEY, F.; Rosa, J. *Teoria do caos: a ordem na não-linearidade*. Universo Acadêmico, **5**, 1, 217, 2012.
- [3] STEWART, I. *Será que Deus joga dados?: a nova matemática do caos*. 2 ed. Rio de Janeiro: ZAHAR, 1991.
- [4] ZANG, W. B. *Discrete Dynamical Systems, Bifurcations and Chaos in Economics*. New York: Elsevier Science, 2007.
- [5] HOLMES, P. *Nonlinear dynamics, chaos and mechanics*. Applied Mechanics Review, **43**, 23, 1989.
- [6] PALACIOS, A. *Cycling Chaos in One-Dimensional Coupled Iterated Maps*. Inter. J. Bifur. and Chaos, **12**, 1859, 2002.
- [7] HILBORN, R. *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*. 2 ed. New York: Oxford University Press, 2004.
- [8] DEVANEY, R. L. *A first Course In Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment (studies in Nonlinearity)*. Computers in Physics, **7**, 416, 1993.
- [9] SAVI, M. A. *Dinâmica não-linear e caos*. 1 ed. Rio de Janeiro: E-papers, 2006.
- [10] PRIGOGINE, I.; FERREIRA, R. L. *As leis do caos*. 1 ed. São Paulo: Unesp, 2002.
- [11] MAY, M. *Simple Mathematical models with very complicated dynamics*. Nature, **261**, 459, 1976.

-
- [12] SILVEIRA, F. *Determinismo, previsibilidade e caos*. Caderno Catarinense de Ensino de Física, **10**, 137, 1993.
- [13] KATHELLEN, T.; ALLIGOOD, TIM, D. S. and JAMES, A. Y. *CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems*. New York: Springer, 1996.
- [14] CLIFFORD, A. P. *The Mathematical Intelligencer*. The MIT Press, **25**, 394, 1992.
- [15] NUSSENZVEIG, H. M. *Complexidade e caos*. Revista Brasileira de Ensino de física, **22**, 148, 2000.
- [16] MONTEIRO, L. *Sistemas Dinâmicos*. 2 ed. São Paulo: Livraria da Física, 2006.
- [17] POINCARÉ, P. *Les Methodes Nouvelles de la Mécanique Celeste*. Gauthier-Villas, **8**, 206, 1899.
- [18] LORENZ, E. *Deterministic nonperiodic flow*. Journal of the Atmospheric Sciences, **20**, 130, 1963.
- [19] BOEING, G., *Chaos Theory and the Logistic Map*. 2015. URL: <http://geoffboeing.com/2015/03/chaos-theory-logistic-map>, 2016.
- [20] DELLAJUSTINA, F. J. *Estudo do mapa logístico*. Trabalho de Conclusão de Curso, Joinville, UDESC, 2012.
- [21] FIELDLER, F. N.; PRADO, C. P. C. *Caos: Uma introdução*. 1 ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher LTDA, 1995.
- [22] LEONEL, E. D.; da SILVA, J. K. L.; KAMPHORST, S. O. *Transients in a time-dependent logistic map*. International Journal of Bifurcation and Chaos, **295**, 208, 2001.
- [23] MARTINS, A. C. N. *Uma abordagem sobre caos e sistemas não-lineares para graduação*. Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2016.
- [24] STROGATZ, S. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. 1 ed. Boulder: Westview Press, 2001.
- [25] LEONEL, E. D. *Invariância de Escalas em Sistemas Dinâmicos não Lineares*. 1 ed. São Paulo: Blucher, 2019.

-
- [26] STUTZER, M. J. *Chaotic dynamics and bifurcation in a macro model*. Econ. Dyn. Control, **2**, 353, 1980.
- [27] MAY, R. M. *Biological populations with nonoverlapping generations: Stable points, stable cycles, and chaos*. Science, **186**, 645, 1974.
- [28] de OLIVEIRA, J. A.; PAPESSO, E. R. and LEONEL, E. D. *Relaxation to fixed points in the logistic and cubis maps: Analytical and numerical investigation*. Entropy, **15**, 4310, 2013.
- [29] TEIXEIRA, R. M. N.; GERALDO, F. C.; COSTA FILHO, R. N.; de OLIVEIRA, J. A. and LEONEL, E. D. “*Convergence towards asymptotic state in 1-d mappings: A scaling investigation*”. Physics Letters A, **379**, 1246, 2015.
- [30] LEONEL, E. D.; TEIXEIRA, R. M. N.; COSTA FILHO, R. N.; de OLIVEIRA, J. A. and LEONEL, E. D. “*Convergence towards asymptotic state in 1-d mappings: A scaling investigation*”. Physics Letters A, **379**, 1796, 2015.
- [31] LEONEL, E. D.; da SILVA, J. K. L.; KAMPHORST, S. O. *Relaxation and transients in a time-dependent logistic map*. Physica A, **12**, 1667, 2002.
- [32] GREBOGI, C.; OTT, E.; JAMES, A. Y.. *Chaotic attractors in Crisis*. Physical Review Letters, **48**, 1507, 1982.
- [33] GALLAS, J. A. C. *Structure of the parameter space of the h enon map*. Physical Review Letters, **70** (18), 1993.