

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ÁREA DE FÍSICA APLICADA

**Dualidade AdS/CFT em sistemas de líquidos
Não-Fermiônicos**

Vitor Neves da Silva

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO

2025

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

VITOR NEVES DA SILVA

DUALIDADE AdS/CFT EM SISTEMAS DE LÍQUIDOS NÃO-FERMIÔNICOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
do Câmpus de Rio Claro, da Universidade
Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”,
como parte dos requisitos para obtenção do
título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Barreiro

Rio Claro - SP
2025

S586d Silva, Vitor Neves da
Dualidade AdS/CFT em sistemas de líquidos Não-Fermiônicos /
Vitor Neves da Silva. -- Rio Claro, 2025
56 f.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP),
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientador: Luiz Antonio Barreiro

1. Física. 2. Matéria condensada. 3. Teoria das supercordas. 4.
Supercondutores. I. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

VITOR NEVES DA SILVA

DUALIDADE AdS/CFT EM SISTEMAS DE LÍQUIDOS NÃO-FERMIÔNICOS

Dissertação de Mestrado apresentada
ao Instituto de Geociências e Ciências
Exatas do Câmpus de Rio Claro, da
Universidade Estadual Paulista “Júlio de
Mesquita Filho”, como parte dos
requisitos para obtenção do título de
Mestre em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. LUIZ ANTONIO BARREIRO
IGCE / UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. ANDRÉ LUIS PRANDO LIVORATI
IGCE / UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. ANTONIO CARLOS ROVEDA JUNIOR
UTFPR / Guarapuava (PR)

Conceito: Aprovado.

Rio Claro (SP), 24 de Janeiro de 2025

Para a minha mãe e meu pai,cujo amor tornou esse sonho possível. .

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à toda a minha família, em especial a minha mãe e meu pai, cujo todo apoio tornou possível mais um passo nesse sonho que é trabalhar com ciência. Agradeço a todos os meus amigos que me acompanharam e ajudaram com ideias, livros e conversas. Gostaria de agradecer aos membros da banca pela participação nessa etapa, em especial ao meu orientador Profº Luiz Antonio Barreiro pela paciência e as conversas que tivemos nesse período que foram muito produtivas. Finalmente, gostaria de agradecer à Anne Kétri, cujo amor foi essencial em todos esses anos juntos.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Este trabalho contou com o apoio da(s) seguinte(s) entidade(s):

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoa de Nível Superior

“Scientific innovation belongs on the frontier of the impossible.”

(Geordi La Forge)

“As far as I see, all a priori statements in Physics have their origins in symmetry.”

(Hermann Weyl)

RESUMO

A dualidade AdS/CFT propõe uma relação entre uma teoria de cordas em um espaço-tempo do tipo Anti-De Sitter (AdS) em dimensões $d + 1$ no volume (*bulk*) fracamente interagente com uma teoria de campos com simetria conforme na borda do sistema de dimensões d fortemente interagente: este resultado pode então ser aplicado em diversos problemas físicos fortemente acoplados, como encontrados em Gravidade quântica, Cromodinâmica Quântica e Física da Matéria Condensada. Neste trabalho, o foco foi o estudo de Líquidos Não-Fermiônicos a partir deste resultado: Líquidos Não-Fermiônicos são estados da matéria que podem ser encontrados em diversos metais exóticos, que possuem uma superfície de Fermi mas não possuem picos de quasipartículas; Analisamos diferentes modelos encontrados na literatura, como contribuições fermiônicas na ação de Einstein-Hilbert, além de modelos duais a teorias de Campos Efetivos. Ainda, é proposto um modelo original para literatura, ao introduzirmos perturbações no campo de Gauge ao considerarmos termos supersimétricos no buraco negro Ads Reissner-Nordstrom, modelo dual a uma teoria de campos quânticos com densidade carga não-nula.

PALAVRAS-CHAVE: Dualidade Gauge/Gravidade. Física da Matéria Condensada. Teoria de Supercordas. Líquidos Não-Fermiônicos.

ABSTRACT

The AdS/CFT correspondence proposes a relation between a weakly coupled interacting string theory in Anti-De Sitter (AdS) spacetime in the bulk with a strongly coupled quantum field theory at the boundary: this result is found to be applicable in many strongly coupled systems such as Quantum Gravity, Quantum Chromodynamics and Condensed Matter Physics. Our study focus in the description of Non-Fermi Liquids by the duality: Non-fermi liquids are states of matter which can be found in many exotic metals that shows Fermi surfaces but do not contain quasiparticle peaks. In this work, we analyze different models that can be found in literature, such as fermionic contributions to Einstein-Hilbert Action and models that are dual to a Effective Field Theory. We also propose an original model, by inducing a perturbation on the gauge field by considering supersymmetric terms on the AdS- Nordstrom black hole action dual to quantum field theory at the border with non-zero charge density.

KEYWORDS: Gauge/Gravity Duality. Condensed Matter Physics. Superstring Theory. Non-Fermi Liquids.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	representação das operações necessárias para obtenção de um hipertorus; (CARROLL, 1997)	22
Figura 2	mapeamento φ entre dois conjuntos; (CARROLL, 1997)	23
Figura 3	Esquema de transporte paralelo a curvas A e B; (AMMON; ERDMENGER, 2015)	25
Figura 4	Transformações conformes que mantem o ângulo entre linhas de mesma cor; (BLUMENHAGEN; PLAUSCHINN, 2009)	32
Figura 5	Duas cordas abertas na D-brana colidindo e formando uma corda fechada, que é emitida pela brana; (NASTASE, 2017)	35
Figura 6	Representação visual da origem da dualidade AdS/CFT; (ZAANEN et al., 2015)	36
Figura 7	Gráfico de $Re G_{22}$ (em azul) e $Im G_{22}$ (em laranja) para $k = 0,9 < k_F$; para $\omega < 0$ temos um pico similar a um pico de quasipartícula, enquanto para $\omega > 0$, temos um pequeno relevo; fonte: (LIU; MCGREEVY; VEGH, 2011)	42
Figura 8	Gráfico da condutividade em função da frequência para diferentes valores de k e μ .(Fonte: Produção do próprio autor)	50
Figura 9	Gráfico da condutividade em função da frequência em escala logaritmica, para diferentes valores de k e μ . É possível observar tanto a transição de fase contínua para supercondutor como a transição descontínua de isolante para metal estranho (Produção do próprio autor)	51

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Geradores do grupo das transformações conformes (Produção do autor) . . .	33
Tabela 2 – Dicionário AdS/CFT, que associa objetos físicos das diferentes teorias (Produção do autor)	37

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AdS	Anti-de Sitter
CFT	<i>Conformal Field Theory</i> (Teoria de Campos Conformes)
EFL	<i>Ersartz Fermi Liquid</i> (Líquido de Fermi Ersartz)
EFT	<i>Effective Field Theory</i> (Teoria de Campos Efetivos)
NFL	<i>Non-Fermi Liquid</i> (Líquido não-Fermiônico)
SYM	Teoria de Yang-Mills Supersimétrica
	$\mu, \nu, \eta, \dots$ índices de espaço-tempo

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	FÍSICA DA MATÉRIA CONDENSADA	14
2.1	Coefficientes de transporte	14
2.2	Líquidos de Fermi	16
2.3	Líquidos não-fermiônicos	20
3	ELEMENTOS DA DUALIDADE ADS/CFT	22
3.1	Noções de Geometria diferencial	22
3.2	Relatividade Geral e espaço AdS	25
3.3	Buracos Negros	27
3.4	Teoria de Campos Quânticos	30
3.5	Campos Conformes	32
3.6	Dualidade AdS/CFT	34
4	DUALIDADE ADS/CFT E LÍQUIDOS NÃO-FERMIÔNICOS	39
4.1	Contribuições fermiônicas na ação gravitacional	39
4.2	Campos efetivos	43
4.3	Correções supersimétricas na ação Einstein-Maxwell	47
5	CONCLUSÃO	52
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	54

1 INTRODUÇÃO

A dualidade AdS/CFT (ou de forma mais geral, dualidade Gauge/Gravidade ou princípio holográfico) propõe a equivalência entre duas teorias físicas completamente diferentes, onde as informações de uma teoria estão contidas na outra: uma teoria de campos quânticos conformes (CFT) em dimensões d e uma teoria de supercordas em um espaço-tempo Anti-De Sitter (AdS) em $d+1$ dimensões (MALDACENA, 1999). Além disso, tal dualidade ainda é do tipo forte/fraca: caso uma das teorias seja fortemente interagente, seu dual será necessariamente fracamente interagente e vice-versa. Essa característica permite o cálculo de propriedades físicas do sistema de maneira analítica ao invés de métodos perturbativos e se transforma em uma importante ferramenta para entender teorias fortemente interagentes, incluindo problemas em Gravidade Quântica (SILVA, 2024), Cromodinâmica Quântica (BRODSKY; TÉRAMOND, 2006) e Física da Matéria Condensada (ZAANEN et al., 2015).

Neste trabalho, voltamos a nossa atenção para os estados metálicos conhecidos como "Líquidos Não-Fermiônicos": estados metálicos que não podem ser explicados pela teoria usual ou por métodos perturbativos. Utilizando a dualidade, buscamos obter as propriedades de transporte desses sistemas a partir de diferentes abordagens, seja pela inserção de operadores fermiônicos na ação gravitacional (LIU; MCGREEVY; VEGH, 2011), a descrição da dinâmica dos campos efetivos (ELSE, 2024) e por fim, correções superssimétricas não-lineares.

Este trabalho foi organizado da seguinte forma: no capítulo 2 busca introduzir os conceitos necessários da Física da Matéria Condensada, como Líquidos de Fermi e suas limitações e a obtenção dos coeficientes de transporte, além da fenomenologia dos Líquidos Não-Fermiônicos. No capítulo 3 é introduzida a dualidade AdS/CFT: ao estudarmos aspectos introdutórios de geometria diferencial, busca-se introduzir as equações de Einstein e em especial, o espaço-tempo de Anti-De Sitter. É introduzido também os buracos negros, importantes objetos para obtenção de propriedades associadas a escala na dualidade holográfica.

Ainda, introduzimos os aspectos teóricos básicos de teorias de campos quânticos e as simetrias conformes de forma sucinta. Finalmente, demonstrando-a de modo heurístico, introduz-se a dualidade em si.

No capítulo 4 apresentamos duas abordagens diferentes para o estudo desses estados metálicos pela dualidade, como contribuições fermiônicas na ação de Einstein-Hilbert e modelos duais a teorias de Campos Efetivos. Além disso, apresentamos um modelo inédito na literatura para explicar o comportamento anômalo desses sistemas, a partir de perturbações não-lineares nos campos eletromagnéticos do sistema.

2 FÍSICA DA MATÉRIA CONDENSADA

Entende-se a Física da Matéria Condensada como a descrição da dinâmica coletiva de partículas que compõem um sistema e a obtenção de suas propriedades (condutividade, susceptibilidade, etc...). Neste capítulo, buscamos introduzir os conhecidos coeficientes de transporte, que descrevem o comportamento desses sistemas quando introduzida uma perturbação. Além disso, introduzimos o modelo de Landau-Fermi, que descreve boa parte dos estados metálicos conhecidos, além de suas limitações. Por fim, apresentamos os líquidos não-fermiônicos e os seus comportamentos físicos observados experimentalmente.

2.1 COEFICIENTES DE TRANSPORTE

Ao estudar sistemas de muitos corpos, é interessante conhecer o comportamento do transporte de partículas e energia em relação a alguma perturbação feita no mesmo: chamamos tal fenômeno de **transporte linear**. Para conhecermos esse comportamento, é necessário conhecer os **coeficientes de transporte**, associados às funções de Green retardadas como veremos a seguir.

Sejam O_A e O_B operadores quaisquer associados a um sistema; as funções de Green retardadas (no espaço de Fourier) associadas aos operadores são da forma:

$$G_{O_A O_B}^R(\omega, \mathbf{k}) = -i \int d^{d-1}x \, dt \, e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \Theta(t) \langle [O_A(t, \mathbf{x}), O_B(0, 0)] \rangle, \quad (2.1)$$

onde $\Theta(t)$ é a função de Heaviside e $(\omega, \mathbf{k})$ variáveis no espaço dos *momenta*. Perceba que a introdução de uma dependência temporal nesta função introduz uma dependência temporal nas funções de Green, i.e., tornando-a causal. Caso ignoremos termos não-lineares, é possível mostrar que uma perturbação no valor esperado $\langle O_A \rangle$ obedece a relação (NASTASE, 2017):

$$\delta \langle O_A \rangle = G_{O_A O_B}^R \delta \phi_{B(0)}(\omega, \mathbf{k}), \quad (2.2)$$

$\delta \phi_{B(0)}$ sendo a fonte da perturbação. Para estudarmos algumas propriedades dessas funções de Green, é interessante transformarmos a função do espaço das frequências ω para o tempo usual t :

$$G_{O_A O_B}^R(t, \mathbf{k}) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} G_{O_A O_B}^R(\omega, \mathbf{k}). \quad (2.3)$$

Como as funções de Green devem ser causais, elas devem se anular para $t < 0$; Para realizarmos a integral (2.3), devemos tomar o ω como uma variável complexa e integrar sob um contorno fechado. Para isso, as seguintes propriedades devem ser satisfeitas:

1. $G_{O_A O_B}^R(\omega, \mathbf{k})$ deve ser analítica na metade superior do plano $Im \, \omega > 0$;
2. $G_{O_A O_B}^R(\omega, \mathbf{k}) \longrightarrow 0$ com $|\omega| \longrightarrow \infty$

Assim, é possível reescrever a equação (2.3) como uma integral de contorno sob a curva Γ no plano complexo ω , da forma:

$$G^R(z) = \oint_{\Gamma} \frac{d\zeta}{2\pi i} \frac{G^R}{\zeta - z}. \quad (2.4)$$

Podemos perceber que a integração é de fato válida pois a propriedade (2) nos garante a integração com limites tendendo a infinito se anula e a única região na qual a integração possui um valor não nulo é no polo $z = \zeta$. Tomando as partes reais e imaginárias da função de Green, obtemos as **relações de Kramers-Kronig** (NASTASE, 2017):

$$\text{Re } G^R(\omega) = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\text{Im } G^R(\omega')}{\omega' - \omega}, \quad (2.5)$$

$$\text{Im } G^R(\omega) = -P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\text{Re } G^R(\omega')}{\omega' - \omega}. \quad (2.6)$$

Onde P apresenta o valor principal das integrais. Tomando o limite $\omega \rightarrow 0$ e $P = 1$, podemos definir uma **susceptibilidade**:

$$\chi \equiv \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Re } G_{O_A O_B}^R(\omega, \mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\text{Im } G^R(\omega')}{\omega'}. \quad (2.7)$$

Perceba que a equação (2.7) possui a forma de uma soma termodinâmica e portanto, χ realmente é uma grandeza termodinâmica da forma:

$$\chi_{AB} = \frac{\partial \langle O_A \rangle}{\partial \phi_{B(0)}}. \quad (2.8)$$

A partir dessas relações, é possível calcular observáveis associados a fenômenos de transporte. Um exemplo é a *condutividade elétrica*, associada ao transportes de cargas devido uma perturbação em um campo de calibre.

Considere uma perturbação no potencial da forma δA_i , escolhendo um calibre de forma que $A_0 = 0$, de forma que o campo elétrico E_j possa ser escrito como:

$$E_j = F_{0j} = \partial_t \delta A_j,$$

Sendo $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ o tensor eletromagnético. Ao levar para o espaço das frequências a partir de uma transformada de Fourier, ficamos com:

$$E_j = -i\omega \delta A_{j(0)}.$$

A resposta linear do valor esperado da corrente elétrica é da forma:

$$\langle J_x \rangle = \sigma E_x = -i\omega \delta A_{x(0)}. \quad (2.9)$$

Porém, é conhecido da teoria de resposta linear que o valor esperado para corrente é igual a $G_{J_x J_x}^R \delta A_{x(0)}$. Então, tomando a parte imaginária das funções de Green, temos a **fórmula de Kubo** para condutividade elétrica (NASTASE, 2017):

$$\sigma(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\text{Im } G_{J_x J_x}^R}{\omega}. \quad (2.10)$$

Ao introduzirmos um potencial químico $\mu \neq 0$, i.e., introduzir uma densidade de carga finita, é possível observar uma corrente elétrica produzida por um gradiente de temperatura:

$$J_x = -\alpha \nabla_x T,$$

e mutuamente, a corrente elétrica produzirá calor:

$$Q_x = \alpha T E_x.$$

Podemos então escrever o sistema de equações da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \langle J_x \rangle \\ \langle Q_x \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & \alpha T \\ \alpha T & \bar{\kappa} T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ -\frac{\nabla_x T}{T} \end{pmatrix}.$$

Analisando a formula de Kubo, podemos obter de forma análoga as seguintes relações para os coeficientes de transporte:

$$\alpha(\omega) T = -\frac{\text{Im } G_{Q_x J_x}^R}{\omega}, \quad (2.11)$$

$$\bar{\kappa}(\omega) T = -\frac{\text{Im } G_{Q_x Q_x}^R}{\omega}. \quad (2.12)$$

Uma das vantagens do formalismo AdS/CFT para problemas de física da matéria condensada esta associado no cálculo dos coeficientes de transporte para as teorias fortemente correlacionadas: ao tomar o dual gravitacional, é possível obter as funções de Green associadas ao problema e consequentemente, calcular tais coeficientes de transporte, utilizando as relações de Kubo.

2.2 LÍQUIDOS DE FERMI

Os líquidos de Fermi são sistemas de férmions fortemente correlacionados descritos pela teoria de Landau-Fermi, cujos seus estados de muitos corpos são mapeados para estados de um gás de Fermi, sistemas de férmions não interagentes descritos pela geometria da denominada superfície de Fermi. As excitações energéticas do sistema fortemente correlacionadas estão associadas no sistema livre ao que chamamos de **quasipartículas**, como fônons, magnons, skyrmions, etc.

Considere um sistema de N férmions não interagentes: a hamiltoniana do sistema H_0 para

os estados ϕ_n obedecem a equação de autovalores:

$$H_0 \phi_n = E_n \phi_n, \quad (2.13)$$

onde os estados ϕ_n são construídos a partir dos **determinantes de Slater**:

$$\phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{bmatrix} \chi_1(x_1) & \chi_2(x_1) & \dots & \chi_n(x_1) \\ \chi_1(x_2) & \chi_2(x_2) & \dots & \chi_n(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \chi_1(x_n) & \chi_2(x_n) & \dots & \chi_n(x_n) \end{bmatrix}.$$

Ao estudarmos a interação entre férmion-férmion, podemos utilizar teoria de perturbações e reescrever a hamiltoniana do sistema como:

$$H = H_0 + \lambda H_1, \quad (2.14)$$

sendo H_0 a Hamiltoniana não perturbada, H_1 o termo de interação e λ ($0 \leq \lambda \leq 1$) determina a magnitude da interação. É possível construir um estado de muitas-partículas Φ_n para $\lambda = 1$ no espaço de Fock a partir de estados ϕ_n no espaço de Hilbert, isto é, a partir de uma mudança *adiabática*¹ nos autoestados do sistema; Consequentemente também é possível mapear as autoenergias do estado de muitas partículas $\tilde{E}_n$ para E_n como uma função de λ (KURAMOTO, 2020).

Em sistemas em baixas escalas de comprimento, devido a diferença de magnitudes de E_n e a perturbação λH_1 , é esperado que os estados livres e acoplados não sejam mapeados uns aos outros com o aumento de λ . Ainda, temos também que boa parte dos metais não possuem superfícies de Fermi esferossimétricas e que sua geometria depende da magnitude da interação entre seus componentes, assim havendo um homeomorfismo entre superfícies de Fermi a partir da variação de λ (KURAMOTO, 2020)).

Landau, porém, supôs que mesmo que a diferença entre os níveis E_n seja muito maior que λH_1 , o processo adiabático ainda mapeia autoestados (e as autoenergias) dos sistemas. Consideremos uma superfície de Fermi esferossimétrica: caso a hipótese de Landau seja correta, a matriz de densidade ρ pode ser determinada de forma única caso conhecemos a distribuição $n_{p,\sigma}$ do gás de Fermi. Os estados excitados de um sistema são mapeados para um pico na distribuição $n_{p,\sigma}$, conhecidos como **quasipartículas**. Considerando essas excitações, a variação $\delta n_{p\sigma}$ resulta em uma variação na energia δE , dada pela expansão:

$$\delta E = \sum_{p,\sigma} \epsilon_{p,\sigma} \delta n_{p\sigma} + \frac{1}{2} \sum_{p,\sigma} \sum_{p',\sigma'} f(p\sigma, p'\sigma') \delta n_{p\sigma} \delta n_{p'\sigma'} + \dots, \quad (2.15)$$

¹ Na mecânica quântica, uma mudança é dita adiabática se ao mudarmos lentamente os graus de liberdade externos do sistema, a Hamiltoniana e os autoestados do sistema se adaptam, isto é $|\psi(x, t)|^2 \neq |\psi(x, t_0)|^2$.

onde p é o *momentum* da quasipartícula, σ o spin, $\epsilon_{p,\sigma}$ é a energia da quasipartícula medida em relação ao nível de Fermi e $f(p\sigma, p'\sigma')$ descreve a interação entre os férmions. A energia $\epsilon_{p,\sigma}$ possui dependência em T e das variáveis que descrevem a natureza da interação.

Perceba que, como a superfície de Fermi dos férmions não-interagentes é esférica, a topologia do sistema não é modificada pela interação entre as partículas. É importante salientar que o mapeamento entre estados só é válido para excitações de baixas energias: as quantidades apresentadas na expansão são de segunda ordem em relação a $\sum_{p\sigma} \delta n_{p\sigma}$, já que a energia $\epsilon_{p\sigma}$ é pequena em relação ao nível de Fermi e portanto é possível descartar termos de ordem superior (KURAMOTO, 2020). Caso consideremos excitações de altas energias, é necessário considerar termos de ordens superiores e o tratamento de quasipartículas apresentado por Landau não é mais aplicável.

O máximo da entropia para determinados E e N equivale a encontrar o mínimo do potencial termodinâmico Ω ($\mu = 0$ por simplicidade):

$$\Omega = E - TS. \quad (2.16)$$

Sabendo que a entropia S é uma função de $n_{p,\sigma}$ e tomando a condição de mínimo, encontramos que:

$$\frac{\delta \Omega}{\delta n_{p,\sigma}} = 0 \longrightarrow n_{p\sigma} = (\exp(\beta \epsilon_{p\sigma}) + 1)^{-1}. \quad (2.17)$$

É possível ainda parametrizar a equação em termos de harmônicos esféricos (KURAMOTO, 2020): considerando duas quasipartículas com *momentum* p e p' , ambas com magnitude p_F ; Podemos então escrever a seguinte decomposição de $f(p\sigma, p'\sigma')$:

$$\chi(\mu) f(p\sigma, p'\sigma') = \sum_{l=0}^{\infty} (F_l + \sigma\sigma' Z_l), \quad (2.18)$$

onde $\chi(\mu)$ é a matriz de densidade de estados em relação ao nível de Fermi, dada por:

$$\rho(\mu) = \sum_{p,\sigma} \delta(\epsilon_p) = \frac{V}{\pi^2} m^* p_f, \quad (2.19)$$

com m^* a massa efetiva, V o volume do sistema e os termos F_l e Z_l são os parâmetros de Landau. Podemos também realizar uma expansão de $\delta n_{p\sigma}$ em termos de harmônicos esféricos:

$$\delta n_{p\sigma} = \frac{4\pi}{\rho(\mu)} \delta(\epsilon_p) \sum_{l,m} \delta n_{l m \sigma} Y_{l m}(\hat{p}), \quad (2.20)$$

$\hat{p}$ sendo o ângulo sólido compreendido por p ; Aproximando somatório por uma integral da forma:

$$\sum_{p,\sigma} \sim \rho_\mu \int d\epsilon_p \int \frac{d\rho}{4\pi},$$

onde ρ denota o ângulo sólido compreendido pelo volume; ainda, usando o teorema da adição dos *polinômios de Legendre*:

$$P_l(\cos\theta_{pp'}) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_m Y_{lm}(\hat{p}) Y_{lm}(\hat{p}'),$$

e introduzindo as variáveis de componentes anti/simétricas:

$$\delta n_{ml+} = \sum_{\sigma} \delta n_{ml\sigma} ; \delta n_{ml-} = \sum_{\sigma} \sigma \delta n_{ml\sigma}.$$

Podemos reescrever o segundo termo da expansão, que nos dá a energia de interação como:

$$\delta E_{int} = \frac{4\pi}{2\rho(\mu)} \sum_{lm} \frac{1}{2l+1} (F_l \delta n_{lm+}^2 + Z_l \delta n_{lm-}^2). \quad (2.21)$$

Para verificar a validade do formalismo proposto por Landau, ele investigou a possibilidade de que a medição das autoenergias do sistema possa mudar a distribuição de partículas δn_{σ} , de forma que autoestados sejam "espalhados" entre si (SCHOFIELD, 1999). Lembremos que a ação do operador Hamiltoniana em autoestado o deixa invariante (por uma constante multiplicativa): é possível então, usando a regra de ouro de Fermi (ZHANG; LIU, 2016), calcular o tempo de vida de um autoestado com energia ε acima da superfície de Fermi:

$$\frac{1}{\tau_{\varepsilon}} = \frac{2\pi}{f} \sum_f |V_{if}|^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon_f),$$

sendo a soma feita em todos os estados finais possíveis f . Assumindo que os elementos da matriz de espalhamento $|V_{ij}|$ sejam constantes e que a exclusão de Pauli se aplica as quasipartículas, é possível perceber que o único espalhamento permitido no zero absoluto é aquele reduz a energia da quasipartícula por ω : como a quasipartícula deve ser espalhada para um estado desocupado, se faz necessário a condição $\omega < \varepsilon$.

Ainda, sabemos que apenas estados perto da superfície de Fermi podem absorver a energia ω , fazendo com que o estado se encontre acima da superfície. Tendo isso em mente, a soma sob os estados f pode ser escrita como (COLEMAN, 1999):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_{\varepsilon}} &\approx \frac{2\pi}{\hbar} |V|^2 \int_0^{\varepsilon} g_F d\omega \int_0^{\omega} g_F d\varepsilon' \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\varepsilon - \omega - \varepsilon' - \varepsilon'') g_F d\varepsilon'', \\ \frac{1}{\tau_{\varepsilon}} &\approx \frac{\pi}{\hbar} |V|^2 g_F^3 \varepsilon^2, \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde g_F é a densidade de estados na superfície de Fermi. Perto da superfície de Fermi onde a energia ε é pequena, podemos perceber então que o tempo de vida desses estados de quasipartículas é muito grande, tornando os estados estáveis. Caso tomemos o sistema fora do zero

absoluto, temos que :

$$\tau_{\varepsilon} \propto \frac{1}{T^2}. \quad (2.23)$$

Então considerando o limite de baixas temperaturas e energias, o formalismo proposto por Landau se mostrava conciso para lidar com a modelagem de sistemas metálicos sabendo que os materiais descritos por tal formalismo possuíam tempo de decaimento e resistividade proporcionais a T^2 (SCHOFIELD, 1999).

Porém, ao longo dos anos foram descobertos uma gama de materiais com propriedades que não se encaixavam com o formalismo proposto por Landau, i.e., materiais cujos estados de baixas energias não podiam ser mapeados às quasipartículas fermiônicas.

2.3 LÍQUIDOS NÃO-FERMIÔNICOS

Definimos como **Líquidos Não-Fermiônicos** (SCHOFIELD, 1999) todos os materiais que o formalismo de Landau-Fermi se mostra ineficaz: esses sistemas apesar de não apresentarem o comportamento de quasipartícula, possuem superfícies de Fermi.

Uma classe de materiais que são considerados Líquidos Não-Fermiônicos são os *cupratos supercondutores*, um grupo de 30 materiais diferentes que possuem na sua estrutura cristalina mais que 3 elementos diferentes (SCHOFIELD, 1999): para esses materiais, o tempo de decaimento no limite de baixas energias e temperaturas finitas é da ordem:

$$\frac{1}{\tau_{\varepsilon}} \propto T. \quad (2.24)$$

Apesar de ser comum esses sistemas possuírem espalhamentos proporcionais a T em espalhamentos elétron-fônon, os espalhamentos encontrados nesses sistemas são puramente eletrônicos (COLEMAN, 1999). Temos então dois comportamentos anômalos não explicados pela teoria convencional: a ausência de espalhamentos elétron-fônon e o espalhamento proporcional a T .

Um outro exemplo de fenômeno onde a continuidade adiabática, princípio básico para construção da teoria de Landau-Fermi, não funciona são as transições de fase: quando os sistemas se aproximam de uma transição de fase de segunda ordem, é conhecido que as flutuações dos parâmetros de ordem do sistema passam a ocorrer em grandes distâncias e aumentam simultaneamente. A propagação de uma quasipartícula pode então gerar perturbações em grandes distâncias e consequentemente, modificando o tempo de espalhamento dos estados. O comportamento de líquido de Fermi é mantido em temperaturas e parâmetros abaixo dos *pontos críticos* e sendo destruídos após as transições de fase (COLEMAN, 1999).

Um outro exemplo interessante a ser citado são os *líquidos de Luttinger*: em suma, nesses sistemas unidimensionais, é possível observar a separação do spin e da carga elétrica dos férmions a partir da existência de duas quasipartículas, o *spinon* e *holon* e ao invés de verificarmos a existência de apenas um pico de quasipartícula, o sistema passa a possuir dois picos bem definidos associados a esses estados (VOIT, 1993) (SCHOFIELD, 1999). Perto da superfície

de Fermi todas as excitações partícula-buraco possuem mesma energia e *momentum*, sendo determinadas pela direção em relação a superfície de Fermi e a magnitude k . Portanto, em sistemas unidimensionais ao conhecermos a magnitude do *momentum*, conhecemos a energia do sistema.

Isto é interessante pois ao conhecermos q , podemos então definir uma função de onda para densidade eletrônica com comprimento de onda de $\frac{2\pi}{k}$. Além de uma energia cinética bem definida, o sistema possui uma energia potencial bem definida tendo em vista que a mesma depende da densidade eletrônica em um determinado comprimento de onda. É possível concluir que este potencial gera novos autoestados para o sistema e, sabendo que podemos escrever o potencial em função da carga e spin das partículas, esses autoestados dependem dos autovalores desses observáveis.

De forma geral, podemos esperar dessa classe de sistemas um tempo de decaimento e resistividade ρ da ordem:

$$\rho \propto T.$$

Como mencionado em (KHVESHCHENKO, 2012), os propagadores fermiônicos desses sistemas possuem uma dependência não-analítica da frequência ω enquanto possui vários polos em diversos *momentum* k_F :

$$G(\omega, k) = \frac{1}{A(k) + B(k) \omega^{\nu_k}}, \quad (2.25)$$

com $A(k)$ anulando-se nesses valores k_F enquanto $B(k)$ assume valores finitos. De maneira geral, apesar do conhecimento teórico desses sistemas ter avançado (LEE, 2018), muitos empasses são encontrados devido a ausência de ferramentas efetivas para o estudo de sistemas quânticos fortemente correlacionados.

3 ELEMENTOS DA DUALIDADE ADS/CFT

A dualidade AdS/CFT correlaciona uma teoria de supercordas em um espaço-tempo AdS e uma teoria de campos conformes. Neste capítulo, é feita uma introdução em ambos os aspectos da dualidade, isto é, um estudo sobre geometria diferencial, equação de Einstein e o espaço-tempo AdS_{d+1} , aspectos da teoria quântica de campos e suas simetrias conformes CFT_d . Por fim, a partir de uma dedução heurística, apresentamos a dualidade em si e suas propriedades além de um breve comentário sobre suas aplicações na Física da Matéria Condensada.

3.1 NOÇÕES DE GEOMETRIA DIFERENCIAL

Ao tentar descrever a gravidade a partir da relatividade, Einstein e seus colegas perceberam que se fazia necessário a substituição da *métrica de Minkowski*, métrica plana cuja dinâmica da relatividade restrita ocorre, para uma métrica associada a um espaço tempo curvo (CARROLL, 1997): para entendermos então a relatividade geral, é necessário ter um conhecimento sobre geometria diferencial.

Chamamos de **variedade diferenciável** qualquer espaço topológico diferenciável que localmente se assemelha a um espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, isto é, o conjunto de enúplos $(x^1, x^2, \dots, x^n)$. Podemos citar como exemplos de variedades diferenciáveis o próprio espaço $\mathbb{R}^n$ que se assemelha não apenas localmente, mas globalmente à $\mathbb{R}^n$; a hipersfera S^n , o lugar geométrico cujo todos os pontos estão a uma distância fixa da origem em $\mathbb{R}^{n+1}$ (CARROLL, 1997).

Outro exemplo importante é o hipertorus T^n , gerado ao tomarmos as superfícies opostas de um hipercubo, conforme mostra a figura (1) (CARROLL, 1997).

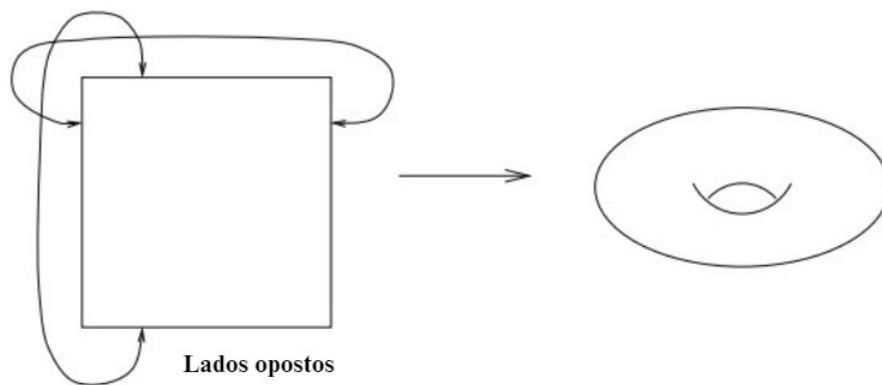


Figura 1 – representação das operações necessárias para obtenção de um hipertorus; (CARROLL, 1997)

Outro conceito importante para o estudo da relatividade geral é o objeto matemático conhecido como **mapeamento**. Sejam M e N dois conjuntos: um mapeamento $\varphi : M \rightarrow N$ é a relação que associa para cada elemento de M um elemento de N , sendo unívoca:

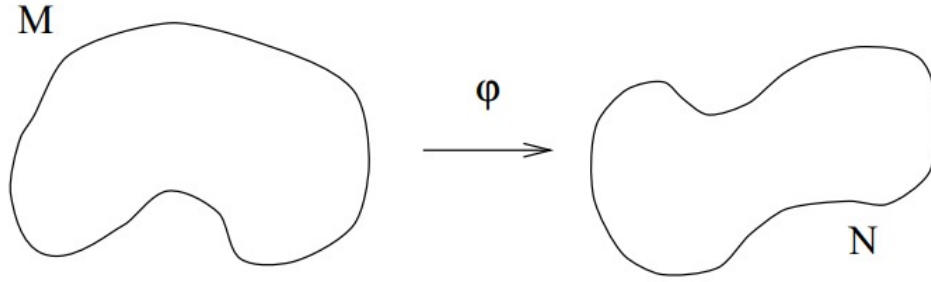


Figura 2 – mapeamento φ entre dois conjuntos; (CARROLL, 1997)

Por fim, dizemos que um mapeamento é **difeomórfo** se caso ocorrer que o $\varphi : M \longrightarrow N$ tiver um mapeamento inverso φ^{-1} tal que $\varphi^{-1} : N \longrightarrow M$, sendo φ chamado de **difeomorfismo**. Um fator importante associado a teoria da Relatividade Geral é a sua **covariância difeomorfa**, isto é, a teoria é invariante sob difeomorfismos (CASARIEGO, 2024): isto é, caso consideremos um difeomorfismos entre sistemas de coordenadas, as equações que descrevem a dinâmica do sistema devem manter sua forma.

Consideremos uma variedade diferenciável M : em cada ponto $p \in M$ um espaço de **vetores tangentes** $T_p(M)$ àquele ponto. Tal espaço possui dimensão d e possui um conjunto de vetores da base dados por $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$, sendo x^μ o sistema de coordenadas e os índices gregos indicando as coordenadas $(\mu, \nu, \dots) = 0, 1, 2, 3, \dots$ de modo que $x^0 = t, x^1 = x, \dots$. É possível então escrever qualquer vetor $V \in T_p(M)$ como (AMMON; ERDMENGER, 2015):

$$V = V^\mu \partial_\mu. \quad (3.1)$$

Tendo em vista a invariância difeomorfa das leis da física, toda nossa descrição deve ser independente da escolha do sistema de coordenadas. Uma mudança de coordenadas $x \mapsto x'$ introduz uma mudança de base no espaço tangente, obedecendo a relação:

$$\partial_{\mu'} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^{\mu}} \partial_\nu. \quad (3.2)$$

Sob a mesma transformação de coordenadas, qualquer vetor $V \in T_p(M)$ é invariante, isto é:

$$V = V^\nu = V'^{\mu} \partial'_{\mu}, \quad (3.3)$$

porém, obedecendo a regra de transformação:

$$V'^{\mu} = V^\nu \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^\nu} dx^\nu. \quad (3.4)$$

Ainda, associado a um espaço tangente $T_p(M)$, podemos associar um *espaço cotangente* $T_p^*(M)$, consistindo de todos os mapeamentos lineares de $T_p(M)$ para $\mathbb{R}$. Então, associado a base ∂_μ no

espaço tangente, existe uma base dual dx^ν no espaço cotangente de modo que:

$$dx^\nu(\partial_\mu) = \delta_\mu^\nu. \quad (3.5)$$

Portanto, todo vetor no espaço cotangente $W \in T_p^*(M)$ pode ser escrito em termos de sua base:

$$W = W_\nu dx^\nu. \quad (3.6)$$

É possível ainda generalizar as regras de transformação para tensores arbitrários. Consideremos um produto tensorial dos espaços tangentes: um tensor $T^{(r,s)}$ com dimensões (r,s) pode ser escrito como um mapeamento linear da forma:

$$T^{(r,s)} : \underbrace{T_p^*(M) \times \dots \times T_p^*(M)}_{r \text{ vezes}} \times \underbrace{T_p(M) \times \dots \times T_p(M)}_{s \text{ vezes}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (3.7)$$

e portanto, para um tensor com r e s genéricos, podemos escrever $T^{(r,s)}$ em termos das base:

$$T^{(r,s)} = T_{\nu_1, \dots, \nu_s}^{\mu_1, \dots, \mu_r} \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_r} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_s}. \quad (3.8)$$

Um tensor de grande importância para descrição da geometria do espaço-tempo é a **métrica**, tensor de dimensões (0, 2) que em cada ponto $p \in M$ é um mapeamento simétrico bilinear (AMMON; ERDMENGER, 2015):

$$g : \begin{cases} T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) \mapsto g(u, v), \end{cases} \quad (3.9)$$

onde $g(u, v) = g(v, u)$. A métrica ainda pode ser descrita pelos vetores de base do produto de espaço tangente $T_p(M) \times T_p(M)$ usando suas componentes $g_{\mu\nu}$:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (3.10)$$

Ainda, para entender o conceito de curvatura associado as variedades, é necessário estudarmos o transporte paralelo de um vetor V por uma trajetória $x^\mu(\lambda)$, conhecida como **geodésica**. Ela é definida como uma curva cujo vetor tangente é transportado de forma paralela e obedece a equação da geodésica (AMMON; ERDMENGER, 2015):

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0, \quad (3.11)$$

onde $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ o *símbolo de Christoffel*:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (3.12)$$

No transporte paralelo em uma geodésica contida em um espaço-tempo curvo, é esperado que a direção do vetor no fim do transporte seja diferente do que sua direção inicial. Consideremos um vetor transportado primeiramente pela curva A e depois em B e comparemos um vetor transportado pela curva B primeiramente e depois por A, conforme mostra a figura (3).

. A diferença δV entre esses dois vetores transportados é dada por :

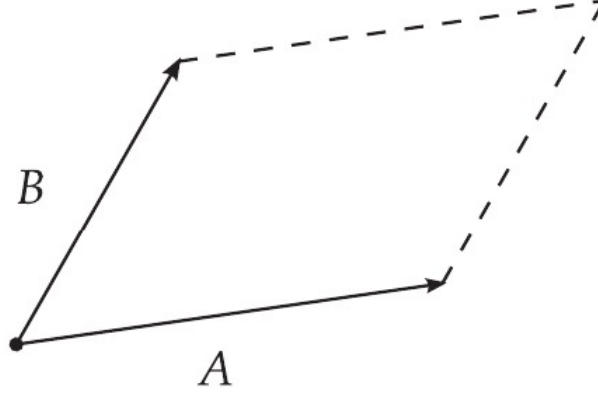


Figura 3 – Esquema de transporte paralelo a curvas A e B; (AMMON; ERDMENGER, 2015)

$$\delta V^\rho = R_{\mu\alpha\beta}^\rho V^\mu A^\alpha B^\beta, \quad (3.13)$$

sendo $R_{\mu\alpha\beta}^\rho$ o **tensor de curvatura de Riemann**:

$$R_{\mu\alpha\beta}^\rho = \partial_\alpha \Gamma_{\beta\mu}^\rho + \partial_\beta \Gamma_{\alpha\mu}^\rho + \Gamma_{\alpha\sigma}^\rho \Gamma_{\beta\mu}^\sigma - \Gamma_{\beta\sigma}^\rho \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma. \quad (3.14)$$

Ainda, tomando os traço das matrizes, é possível construir o **tensor de Ricci** $R_{\mu\nu}$ e o **escalar de Ricci** R :

$$R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\lambda\nu}^\lambda, \quad R \equiv R_\mu^\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (3.15)$$

Em especial, o escalar de Ricci possibilita o estudo da curvatura da variedade (no caso, o espaço-tempo) independente do sistemas de coordenadas tomado, visto que o mesmo é invariante sob tais transformações.

3.2 RELATIVIDADE GERAL E ESPAÇO ADS

A ação que descreve a dinâmica da gravidade sem presença de partículas é dada pela *ação de Einstein- Hilbert*:

$$I_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int d^d x \sqrt{-g} (R + 2\Lambda). \quad (3.16)$$

Minimizando a ação, encontramos as **equações de Einstein**:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0, \quad (3.17)$$

sendo Λ a constante cosmológica, $R_{\mu\nu}$ e R são, respectivamente, o *tensor* e *escalar de Ricci*:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda}, \quad (3.18)$$

$$R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}. \quad (3.19)$$

Caso consideremos a presença de matéria no espaço-tempo, a ação mais geral que descreve a dinâmica desses sistemas é da forma:

$$I = \frac{1}{16\pi G} \int d^d x \sqrt{-g} (R + 2\Lambda) + I_M \quad (3.20)$$

sendo I_M a ação que descreve a dinâmica do campo de matéria. Minimizando a ação, encontramos:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (3.21)$$

$T_{\mu\nu}$ sendo o **tensor energia-momentum**, dado por:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (3.22)$$

Voltemos a nossa atenção para soluções das equações de Einstein com $T_{\mu\nu} = 0$, i.e., soluções de vácuo: uma das possíveis soluções com constante cosmológica negativa é o **espaço Anti- De Sitter** (ou **espaço AdS**). Sua métrica de dimensões $d+1$ pode ser incorporada por uma métrica de Minkowski de dimensões $d+2$ da forma $\bar{\eta} = (-, +, +, \dots, +, -)$ (AMMON; ERDMENGER, 2015):

$$ds^2 = -(dX^0)^2 + (dX^1)^2 + \dots (dX^d)^2 - (dX^{d+1})^2 \equiv \eta_{MN} dX^M dX^N, \quad (3.23)$$

sendo $M, N = [0, 1, \dots, d+1]$. Em especial, a métrica AdS_{d+1} pode ser escrita em termos de uma hipersuperfície (AMMON; ERDMENGER, 2015):

$$\bar{\eta}_{MN} X^M X^N = -(X^0)^2 + \sum_i^d (X^i)^2 = L^2, \quad (3.24)$$

sendo L^2 o raio de curvatura do espaço AdS . Uma parametrização útil do hiperboloíde dado pela equação (3.9) usando as coordenadas $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} = (x^0, x^1, \dots, x^{d-1}) \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{R}$ é dada por:

$$\begin{cases} X^0 = \frac{L}{2r} \left(1 + \frac{r^2}{L^4} (\vec{x} - t^2 + L^2) \right) \\ X^i = \frac{rx^i}{L} \\ X^d = \frac{L^2}{2r} \left(1 + \frac{r^2}{L^4} (\vec{x} - t^2 - L^2) \right) \\ X^{d+1} = \frac{rt}{L}. \end{cases} \quad (3.25)$$

Perceba que, por definição, só cobrimos a metade positiva do espaço-tempo AdS_{d+1} . Essas coordenadas locais são conhecidas como coordenadas da região de Poincaré (*Poincaré patch coordinates*) (AMMON; ERDMENGER, 2015); Levando essa parametrização na métrica, ficamos com:

$$ds^2 = \frac{L^2}{r^2} dr^2 + \frac{L^2}{r^2} (-dt^2 + d\mathbf{x}^2). \quad (3.26)$$

A partir de um cálculo direto usando a métrica AdS_{d+1} é possível obter o escalar de Ricci, da forma:

$$R = -\frac{d(d-1)}{L^2}. \quad (3.27)$$

Ainda, para satisfazer as equações de Einstein no vácuo, a constante cosmológica do espaço-tempo Anti De Sitter deve ser:

$$\Lambda = -\frac{d(d-1)}{2L^2}. \quad (3.28)$$

3.3 BURACOS NEGROS

Uma classe de soluções para as equações de Einstein no vácuo são os conhecidos **buracos negros**: essas soluções são caracterizadas pela existência de pelo menos um *horizonte de eventos*, fronteira no espaço-tempo na qual eventos não podem influenciar observadores fora da região caso contidos nelas. A solução esferossimétrica mais simples com $\Lambda = 0$ em $d+1$ dimensões é dada pela métrica

$$\begin{cases} ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{d-2}^2, \\ f(r) = 1 - \frac{2\mu}{r^{d-3}}, \end{cases} \quad (3.29)$$

onde μ é um parâmetro associado a massa do buraco negro:

$$\mu = \frac{8\pi G M}{(d-2)Vol(S^{d-2})}, \quad (3.30)$$

sendo $Vol(S^{d-2})$ o volume da esfera S^{d-2} . Essa solução é conhecida como **métrica de Schwarzschild** (NASTASE, 2017).

Perceba a existência de dois pontos onde a métrica diverge: O ponto $r = 0$ denominado **singularidade** do buraco negro. O segundo ponto $r = r_H$, definido por $f(r_H) = 0$ é conhecido como raio de Schwarzschild, que consiste no horizonte de eventos da solução encontrada. Para métrica de Schwarzschild, temos que r_H é dado por:

$$r_H = (2\mu)^{-\frac{1}{d-3}}.$$

Como supracitado, eventos que ocorrem dentro do horizonte de eventos não podem afetar observadores que se encontram fora deles: então, classicamente é esperado que buracos negros não emitam luz. Porém em 1975, Stephen Hawking publicou um artigo demonstrando um mecanismo quântico no qual se torna possível a emissão de energia por buracos negros, conhecido

como *radiação Hawking* (NASTASE, 2017).

Para estudarmos uma teoria de campos quânticos em temperatura finita e calcular os observáveis associados, é necessário aplicar uma rotação de Wick para o espaço euclidiano, isto é, tomar um tempo imaginário $\tau = it$ e considerar uma trajetória periódica neste tempo imaginário, com período $\beta = 1/T$ sendo T a temperatura.

Deste modo, é possível obter uma função de partição em termos de uma integral de caminho com uma trajetória periódica:

$$Z_E[\beta] = \int_{\phi(t_E+\beta, x)=\phi(t_E, x)} D\phi \exp(-S_E[\phi]) = \text{Tr} [\exp(\beta \hat{H})]. \quad (3.31)$$

Ainda, a métrica de Schwarzschild $d = 4$ após uma rotação de Wick é dada por:

$$ds^2 = + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) d\tau^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{r}} + r^2 d\Omega_2^2. \quad (3.32)$$

Definindo $\tilde{r} = r - 2M$ ($G = 1$), é possível reescrever a métrica na forma:

$$ds^2 \approx \frac{\tilde{r}}{2M} d\tau^2 + \frac{2M}{\tilde{r}} d\tilde{r}^2 + (2M)^2 d\Omega_2^2. \quad (3.33)$$

Definindo $\rho = \sqrt{\tilde{r}}$, obtemos:

$$ds^2 \approx 8M \left[d\rho^2 + \rho^2 \left(\frac{d\tau}{4M} \right)^2 + (2M)^2 \right]. \quad (3.34)$$

É possível perceber que a métrica acima tem a forma:

$$ds^2 \approx d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2.$$

Se θ possui uma periodicidade δ , temos a métrica de um cone definido por um corte de comprimento angular δ centrada em $\rho = 0$. Portanto para $\delta \neq 2\pi$, temos um cone com singularidade em $\rho = 0$ e caso $\delta = 2\pi$, temos um espaço-tempo plano (NASTASE, 2017).

Para evitar tal singularidade se faz necessário que θ (e consequentemente $\frac{\tau}{4M}$) tenha uma periodicidade em 2π , de modo que a métrica perto do horizonte euclidiano pareça plana (NASTASE, 2017). Como τ possui uma periodicidade β , encontramos que a temperatura de um campo quântico no horizonte de eventos é dada por:

$$T = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{8\pi M}. \quad (3.35)$$

Perceba que por definição, a capacidade térmica do buraco negro é dada por (NASTASE, 2017):

$$C = \frac{\partial M}{\partial T} = -\frac{1}{8\pi T^2} < 0, \quad (3.36)$$

e portanto o buraco negro não se encontra em equilíbrio térmico, emitindo energia em forma de radiação conhecida como *radiação Hawking*, associada a temperatura:

$$T_H = \frac{1}{8\pi M}, \quad (3.37)$$

e a partir da função de partição do sistema, a entropia do buraco negro pode ser calculada em termos de sua área A ($G = 1$) (AMMON; ERDMENGER, 2015):

$$S = \frac{A}{4}. \quad (3.38)$$

Perceba então que a entropia do buraco negro depende apenas da área do horizonte de eventos: temos uma relação holográfica para informação dos estados disponíveis do para esses objetos.

Podemos ainda generalizar a solução de Schwarzschild para buracos negros carregados com campos A_μ ; A ação para esse sistema é dada por:

$$I = I_{EH} + \int d^d x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right). \quad (3.39)$$

Minimizando a ação, encontramos as equações de Einstein com o tensor energia-momentum da forma:

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho} F_{\nu}^{\rho} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}. \quad (3.40)$$

A solução dessas equações é dada pela **métrica de Reissner-Nordstrom**, dada por (NASTASE, 2017):

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{Q^2 G}{8\pi\epsilon_0^2 r^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{r} + \frac{Q^2 G}{8\pi\epsilon_0^2 r^2}} + r^2 d\Omega_2^2, \quad (3.41)$$

sendo Q a carga elétrica do buraco negro. Tomando $g_{00} = 0$, é possível encontrar dois horizontes de eventos na solução, dadas por ($G = 1$):

$$r = r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0^2}}. \quad (3.42)$$

A condição para que $r_{\pm}$ seja real é conhecida como *condição de Bogomolnyi-Prasad-Sommerfeld (BPS)* (NASTASE, 2017):

$$M \geq \frac{Q}{\epsilon_0 \sqrt{8\pi}} = \tilde{Q}. \quad (3.43)$$

Tal condição é importante pois caso as soluções $r_{\pm}$ não fossem reais, teríamos singularidades sem horizonte de eventos, podendo interagir com observadores externos.

Para generalizarmos uma métrica de buraco negro para um espaço assintoticamente AdS, basta que adicionemos o termo r^2/L^2 na função $f(r)$. Ao tomar o limite $r \rightarrow \infty$. Temos então

que a métrica de buraco negro em um espaço AdS de dimensões $d + 1$ pode ser escrita como:

$$\begin{cases} ds^2 = \frac{r^2}{L^2}(-f(r)dt + dx^2 + dy^2) + \frac{L^2}{r^2 f(r)} dr^2, \\ f(r) = 1 - (1 + q^2) \frac{r_h^3}{r^3} + q^2 \frac{r_h^4}{r^4}, \\ M = 1 + q^2. \end{cases} \quad (3.44)$$

Com a sua temperatura dada por:

$$T = \frac{dr_h + (d-2)L^2}{4\pi L^2 r_h}, \quad (3.45)$$

com r_h definido por $f(r_h) = 0$. Podemos ainda generalizar a métrica AdS acima para horizontes de eventos não esféricos, conhecidos como **branas escuras**:

$$\begin{cases} ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 dk_{d-1}^2 \\ f(r) = k - \frac{2\mu}{r^{d-2}} + \frac{r^2}{L^2}, \end{cases} \quad (3.46)$$

com $k = -1, 0, 1$. Buracos negros são objetos importantes para dualidade AdS/CFT pois todos os parâmetros e propriedades dependentes de escala são obtidos a partir do estudo das propriedades desses objetos.

3.4 TEORIA DE CAMPOS QUÂNTICOS

Esta seção tem como objetivo introduzir os aspectos básicos da teoria quântica de campos, baseada na discussão encontrada em (NăSTASE, 2015). Consideremos então um campo escalar, isto é, um campo que sob as transformações de Lorentz:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad (3.47)$$

se transforma obedecendo a regra:

$$\phi'(x'^\mu) = \phi(x^\mu).$$

Ao estudarmos campos relativísticos, a ação geralmente é uma integral sobre funções definidas em um sistema de coordenadas, da forma:

$$I = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi),$$

sendo $\mathcal{L}$ a *densidade Lagrangiana* ou simplesmente a Lagrangiana do sistema, definida em termos dos campos $\phi(x)$ e suas derivadas $\partial_\mu \phi$. Ainda, ao variarmos o funcional S em relação

aos campos $\phi(x)$, obtêm-se as equações de movimento para $\phi(x)$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)}.$$

Ao quantizarmos a teoria, o campo $\phi(x)$ deixa de ser um observável e devemos então tomar o seu valor esperado no vácuo do operador escalar, dado por uma integral de caminho no espaço-tempo plano:

$$\langle 0 | \phi(\hat{x}_1) | 0 \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]} \phi(x_1),$$

onde $\int \mathcal{D}\phi$ representa a discretização do caminho no espaço-tempo seguida de uma integração do valor do campo em cada ponto:

$$\int \mathcal{D}\phi(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N \int d\phi(x_i).$$

Uma generalização do VEV de campos quânticos, é a **função de correlação** ou as funções de Green:

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | \hat{T} \{ \phi(x_1) \dots \phi(\hat{x}_n) \} | 0 \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]} \phi(x_1) \dots \phi(x_n),$$

sendo $\hat{T}$ o operador de ordenamento, que garante a casualidade entre os operadores de campo. Devido ao caráter oscilatório da exponencial, as funções de correlação de n-pontos no espaço de Minkowski são difíceis de serem calculadas (Năstase, 2015): para contornar tal problema, podemos efetuar uma **rotação de Wick** $t = it_E$, onde t_E é o tempo Euclideo.

Ao efetuarmos a rotação, passamos a calcular as funções de correlação em um espaço Euclideo de assinatura positiva e posteriormente, rotacionamos o resultado de volta para o espaço de Minkowski. Devido o tempo euclideo ter periodicidade $\beta = 1/T$, T a temperatura da teoria, a integral de caminho calculada nos dá a função de partição da mecânica estatística:

$$Z_E[J] = \int \mathcal{D}_q e^{-S_E[q] + \int d^d x J(x) \phi(x)},$$

onde J é o termo de corrente associada a uma perturbação e podemos definir a ação euclidea I_E como:

$$I_E = -iI_M,$$

I_M é a ação no espaço-tempo de Minkowski. Voltando para o espaço-tempo plano, podemos ainda definir a função de partição:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi] + i \int d^d x J(x) \phi(x)},$$

sendo $J(x)$ um termo de corrente associado a interações dos campos. A função de partição ainda

pode ser tida como o funcional gerador das funções de correlação:

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta}{i\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{i\delta J(x_n)} Z[J]|_{J=0}.$$

3.5 CAMPOS CONFORMES

Um campo quântico é dito **conforme** se obedecer uma **simetria conforme**. Consideremos um espaço-tempo plano, podendo ter assinatura euclideana ou de Minkowski: chamamos de **transformações conformes** a classe de transformações que preservam o ângulo entre duas linhas, como mostra a figura (1).

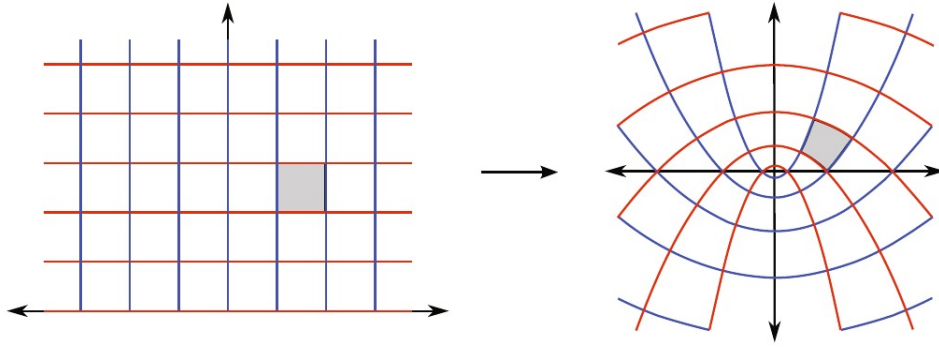


Figura 4 – Transformações conformes que mantem o ângulo entre linhas de mesma cor; (BLUMENHAGEN; PLAUSCHINN, 2009)

Formalmente, uma transformação conforme consiste de um mapeamento $\varphi : U \rightarrow V$, onde $U \subset M$, $V \subset M'$ são subconjuntos abertos, de forma que o tensor métrico satisfaça a relação:

$$\varphi^* g' = \Lambda g.$$

Tomando $\varphi = x'$ com $x \in U$, podemos reescrever a condição da seguinte forma:

$$g'_{\rho\sigma} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} = \Lambda(x) g_{\mu\nu}(x), \quad (3.48)$$

sendo $\Lambda(x)$ um fator de escala. Consideremos que $g = g'$ e que o espaço-tempo seja plano com métrica $\eta_{\nu\mu} = \text{diag}(-1, \dots, +1, \dots)$; as transformações conformes podem ser escritas como:

$$\eta_{\rho\sigma} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} = \Lambda(x) \eta_{\mu\nu}. \quad (3.49)$$

Perceba que se $\Lambda(x) = 1$, recuperamos as transformações de translação e rotação do *Grupo de Poincaré*. É importante salientar que as transformações conformes podem ser vistas como transformações de escala locais e que boa parte das teorias quânticas que possuem invariância de escala, possuem também invariância conforme (NASTASE, 2017).

Consideremos as transformações de coordenadas infinitesimais ($\varepsilon \ll 1$), que em primeira ordem são dadas por (BLUMENHAGEN; PLAUSCHINN, 2009):

$$x'^{\rho} = x^{\rho} + \varepsilon^{\rho}(x) + O(\varepsilon^2), \quad (3.50)$$

onde é válido $\varepsilon_{\mu} = \eta_{\mu\nu} \varepsilon^{\nu}$. Levando na equação (3.49), obtemos:

$$\eta_{\rho\sigma} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} = \eta_{\mu\nu} + (\partial_{\nu} \varepsilon_{\mu} + \partial_{\mu} \varepsilon_{\nu}) + O(\varepsilon^2), \quad (3.51)$$

com $\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$; Para que a transformação seja conforme, é necessário que:

$$\partial_{\nu} \varepsilon_{\mu} + \partial_{\mu} \varepsilon_{\nu} = K(x) \eta_{\mu\nu}. \quad (3.52)$$

Tomando o traço da equação (21), obtemos:

$$K(x) = \frac{2}{d} (\partial^{\mu} \varepsilon_{\mu}) \eta_{\mu\nu}, \quad (3.53)$$

e a partir disso, podemos escrever o coeficiente de escala como:

$$\Lambda(x) = 1 + \frac{2}{d} (\partial^{\mu} \varepsilon_{\mu}) \eta_{\mu\nu} + O(\varepsilon^2). \quad (3.54)$$

Para entendermos as simetrias das transformações conformes, é necessário conhecer os seus geradores; Os geradores das transformações conformes estão listado na Tabela (1):

Geradores das transformações conformes		
Transformação	Operação	Gerador
Translação	$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}$	$P_{\mu} = -i\partial_{\mu}$
Rotação	$x'^{\mu} = M^{\nu}_{\mu} x^{\nu}$	$L_{\mu\nu} = i(x_{\mu} \partial_{\nu} - x_{\nu} \partial_{\mu})$
Dilatação	$x'^{\mu} = \alpha x^{\mu}$	$D = -i x^{\nu} \partial_{\nu}$
Transformações especiais conformes	$x'^{\mu} = \frac{x^{\mu} - (x^{\mu} x_{\mu}) b^{\nu}}{1 - 2(b^{\nu} x_{\nu}) + (b^{\mu} b_{\mu})(x^{\mu} x_{\mu})}$	$K_{\mu} = i(2x_{\mu} x^{\nu} \partial_{\nu} - (x^{\mu} x_{\mu} \partial_{\mu}))$

Tabela 1 – Geradores do grupo das transformações conformes (Produção do autor)

Conhecendo os geradores das operações conformes, é possível definir o **grupo conforme**. Este grupo é composto por operações conformes definidas globalmente, inversíveis e finitas, i.e., difeomorfismos globais. Definindo para o caso da dimensão $d \geq 3$ (BLUMENHAGEN; PLAUSCHINN, 2009):

$$\begin{cases} J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu}, & J_{-1\mu} = \frac{1}{2} (P_{\mu} - K_{\mu}) \\ J_{-1,0} = D, & J_{0\mu} = \frac{1}{2} (P_{\mu} + K_{\mu}) \end{cases} \quad (3.55)$$

e podemos verificar as seguintes relações de comutação ($m, n = -1, 0, 1, \dots, d-1$):

$$[J_{mn}, J_{rs}] = i (\eta_{ms} J_{nr} + \eta_{nr} J_{ms} - \eta_{mr} J_{ns} - \eta_{ns} J_{mr}). \quad (3.56)$$

Para $d = p + q \geq 3$, o grupo conforme $\mathbb{R}^{p,q}$ é $SO(p+1, q+1)$ (BLUMENHAGEN; PLAUSCHINN, 2009). Campos conformes são usados para descrição de diversos fenômenos físicos, mas estamos especialmente interessados na teoria $\mathcal{N} = 4$ Yang-Mills superssimétrica em $3+1$ dimensões, tendo em vista que ela é conforme e a partir dela que foi proposta a dualidade AdS/CFT (NASTASE, 2017).

3.6 DUALIDADE ADS/CFT

Proposta por Juan Maldacena em 1997 (MALDACENA, 1999), a dualidade *AdS/CFT* relaciona uma teoria de campos quânticos conformes em d dimensões com uma teoria de supercordas em $d+1$ dimensões em uma métrica Anti-De Sitter, de modo que ambas as teorias são equivalentes (AMMON; ERDMENGER, 2015).

A dualidade ainda pode ser vista como uma relação entre teorias fortemente/fracamente correlacionadas: Se temos uma CFT fortemente interagente, temos que a teoria gravitacional dual ao sistema será fracamente interagente e em especial, poderá ser compreendida a partir de uma teoria de campos clássica (HARTNOLL; LUCAS; SACHDEV, 2018).

Foi observado por Polchinski em 1995 que as D-Branas, definidas como objetos onde as cordas abertas terminam, e as soluções extremas ($M = Q$) P-branas, definidas como soluções da teoria de cordas que curvam o espaço-tempo, possuem as mesmas massas e cargas e, consequentemente, são o mesmo objeto (NASTASE, 2017). As D-branas curvam o espaço-tempo e, em especial, as D3-branas possuem soluções da forma (NASTASE, 2017):

$$\begin{cases} ds^2 = H(r)^{-\frac{1}{2}} d\vec{x}_{||}^2 + H(r)^{\frac{1}{2}} (dr^2 + d\Omega_5^2) \\ F_5 = (1 + *) (dt \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge (dH^{-1})) \\ H(r) = 1 + \frac{R^4}{r^4} \\ R = 4\pi g_s N \alpha'^2 ; Q = g_s N. \end{cases} \quad (3.57)$$

Perceba que a solução tem um horizonte de eventos em $r = r_H = 0$ e portanto, é uma solução sem temperatura. Ao adicionar uma perturbação δM a solução extremal, o horizonte de eventos passa ser encontrado em $r = r_H > 0$ e a teoria passa a ter temperatura e emitir radiação: tal processo ainda pode ser entendido como a colisão de duas cordas abertas contidas na D3-brana formando uma corda fechada que é emitida pelo objeto (NASTASE, 2017).

Este processo então nos indica uma relação entre a teoria das cordas abertas na D3-brana descrita por uma *teoria de Yang-Mills Superssimétrica* $\mathcal{N} = 4$ (SYM) com correções, e a teoria

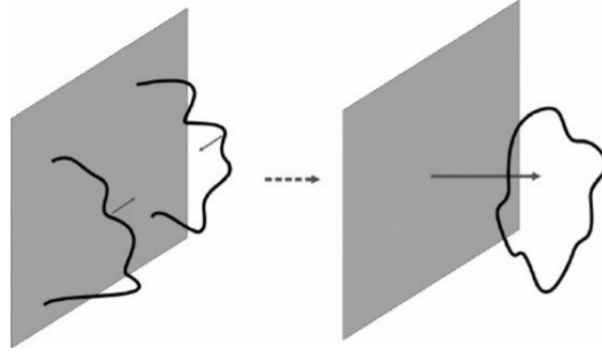


Figura 5 – Duas cordas abertas na D-brana colidindo e formando uma corda fechada, que é emitida pela brana; (NASTASE, 2017)

das cordas fechadas no espaço-tempo curvo gerado pela D3-brana descrita por uma teoria de gravidade supersimétrica mais termos de correção. Na D3-brana, a ação pode ser escrita na forma:

$$I = I_{bulk} + I_{brana} + I_{int}, \quad (3.58)$$

com $I_{int} \propto \alpha'^2 \rightarrow 0$ no limite de baixas energias $\alpha' \rightarrow 0$. Nesse mesmo limite, a ação no volume I_{bulk} se torna a ação de uma gravidade supersimétrica não interagente I_{sugra} (a ação que descreve a supergravidade) e a D3-brana passa a ser uma $\mathcal{N} = 4$ uma teoria Super Yang-Mills.(NASTASE, 2017).

Já a P-brana ao analisarmos sua energia E_p em um ponto p com raio r em relação a energia E medida pelo o observador no infinito é dada por:

$$E_p \approx \frac{d}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \frac{d}{dt} \approx \frac{E}{\sqrt{g_{00}}} \rightarrow E \approx H^{-\frac{1}{4}} E_p \approx r E_p. \quad (3.59)$$

Perceba então que no limite $r \rightarrow 0$, $E \rightarrow 0$ com $H(r) \approx r^{-4}$ e a energia medida no volume E_p fixa.

Portanto para $r \rightarrow 0$, temos o limite de baixas energias para energia E para um observador no infinito, enquanto para $r \rightarrow \infty$ temos que a teoria contida no volume passa ser uma gravidade supersimétrica. Portanto, é possível estabelecer a seguinte relação:

Teoria $\mathcal{N} = 4$ Yang-Mills supersimétrica com grupo de Gauge SU(N) com N grande = Teoria Gravitacional em $r \rightarrow 0$ na D3-brana para $\alpha' \rightarrow 0$

Sabendo que no limite $r \rightarrow 0$, $H(r) = \frac{R^4}{r^4}$ e realizando a mudança de variáveis $\frac{r}{R} = \frac{R}{x_0}$, é possível reescrever a métrica descrita pela equação (44) como:

$$ds^2 = \frac{R^2}{x_0^2} (-dt^2 + d\vec{x}_3^2) + R^2 d\Omega_5^2, \quad (3.60)$$

que corresponde a métrica $AdS_5 \times S^5$ em coordenadas de Poincaré. Tomando o limite $r \rightarrow \infty$ nos leva a borda do espaço, onde o campo de Gauge se encontra definido em uma métrica $\mathbb{R}^4$: Temos então que uma teoria contida em dimensões $d + 1$ pode ser representada por uma teoria de dimensões d sem a perda de informação, estabelecendo uma relação holográfica entre as duas (NASTASE, 2017) (AMMON; ERDMENGER, 2015) (HARTNOLL; LUCAS; SACHDEV, 2018).

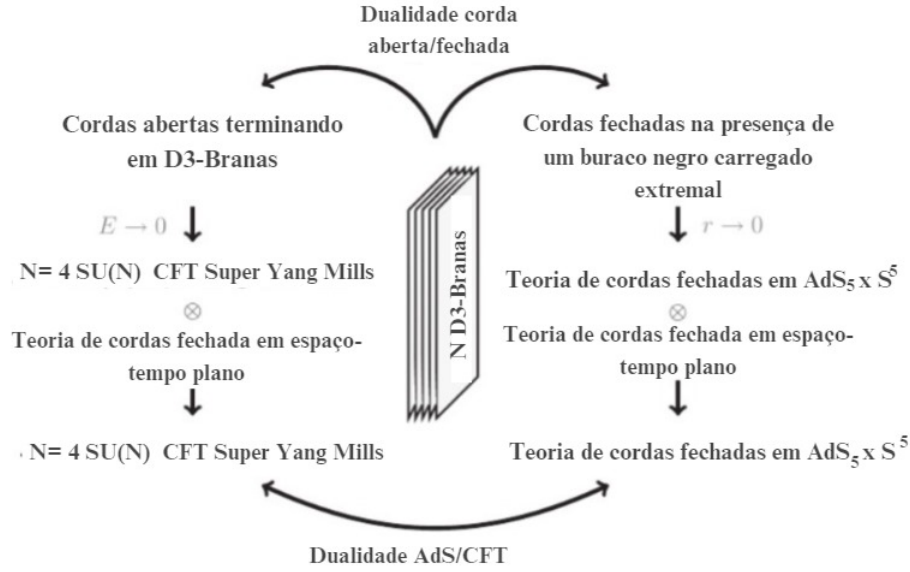


Figura 6 – Representação visual da origem da dualidade AdS/CFT; (ZAANEN et al., 2015)

Podemos estabelecer uma relação entre os acoplamentos g_s e g_{YM}^2 , associadas as interações das respectivas teorias. A relação entre os acoplamentos é da forma:

$$4\pi g_s = g_{YM}^2. \quad (3.61)$$

Considerando as correções quânticas na folha de mundo provenientes da teoria de cordas, temos que (AMMON; ERDMENGER, 2015) (NASTASE, 2017):

$$g_s N \gg 1, \quad (3.62)$$

que na teoria de Gauge corresponde ao *acoplamento de 't Hooft* no regime não-perturbativo:

$$\lambda \equiv g_{YM}^2 N \gg 1 \quad (3.63)$$

Além das correções na folha de mundo temos ainda correções quânticas muito pequenas associadas às cordas, proporcionais ao acoplamento g_s , resultando em $g_s \ll 1$. Temos ainda que $N \rightarrow \infty$: como definido por 't Hooft, esse limite implica em $g_{YM} \rightarrow 0$ com λ fixo (muito grande, mas finito).

A relação entre os acoplamentos pode ser escrita a partir das correções, sendo da forma (AMMON; ERDMENGER, 2015) (NASTASE, 2017):

$$\frac{\alpha'}{R^2} = \frac{1}{\sqrt{g_{YM}^2 N}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}. \quad (3.64)$$

Então a dualidade AdS/CFT resulta em uma dualidade forte/fraca: quando a teoria de Yang-Mills supersimétrica com $\mathcal{N} = 4$ for fortemente interagente, temos que a teoria de cordas dual será fracamente interagente e vice-versa. Podemos então, a partir de uma teoria, obter informações sobre o seu dual no regime não perturbativo, tendo em vista que os métodos convencionais não são aplicáveis (NASTASE, 2017). Ainda, a coordenada espacial adicional r está associada a energia do sistema em diferentes escalas: podemos estabelecer uma relação da forma:

$$E \approx \frac{r}{\alpha'} \quad (3.65)$$

e estabelece-se então uma dualidade UV-IR: quando $r \rightarrow 0$, que corresponde ao limite IR da CFT, temos um o limite UV da teoria AdS. Ainda, a dinâmica na direção r indica, na teoria de campos na borda, o fluxo do grupo renormalização.

É possível estabelecer uma relação entre os observáveis das duas teorias, conforme demonstrado por Witten : consideremos um campo quântico escalar $\phi(\vec{x}, x_0)$, que assume valor $\phi_0(\vec{x})$ constante na borda. As funções de partição associados as teorias obedecem a relação:

$$Z_{\mathcal{O}}^{CFT}[\phi_0] = Z_{classsugra}^{AdS}[\phi[\phi_0]] = \exp(-S_{class,Sugra}[\phi[\phi_0]]), \quad (3.66)$$

com ϕ_0 na teoria quântica associado a fonte do operador $\mathcal{O}$, enquanto na teoria clássica está associado ao valor de ϕ na borda.

De forma geral, podemos relacionar objetos de uma teoria e seu dual como mostra a Tabela (2):

Dicionário AdS/CFT	
CFT_d	AdS_{d+1}
Dinâmica de muitos corpos fortemente correlacionada	Física descrita pela geometria do espaço-tempo
$N \rightarrow \infty$ e acoplamento forte	Gravidade Clássica
Operador escalar $\mathcal{O}$	Campo escalar dinâmico ϕ
Corrente Conservada sobre simetria global ($J^\mu, T^{\mu\nu}, \dots$)	Campo de gauge dinâmico ($A_\mu, g_{ab}, \dots$)

Tabela 2 – Dicionário AdS/CFT, que associa objetos físicos das diferentes teorias (Produção do autor)

A dualidade pode ser generalizada para diversos casos, mas em específico, em casos onde a teoria de campos quânticos não é conforme. Nesses casos mais gerais temos a dualidade Gauge/Gravidade (ZAANEN et al., 2015): considerando o caso da física da matéria condensada,

geralmente se faz necessário uma metodologia fenomenológica, onde ao conhecer as propriedades gerais sobre a teoria quântica fortemente correlacionada (simetrias obedecidas, propriedades de transporte, etc...), constrói-se uma teoria gravitacional fracamente interagente que contém tais informações e a partir dela se calcula os observáveis da teoria da quântica. Este é o caso de diversos modelos duais que propõem explicar líquidos não-fermiônicos (ELSE, 2024) (LIU; MCGREEVY; VEGH, 2011) (CHAGNET et al., 2022) (KACHRU; SHYANI, 2023) (IIZUKA et al., 2012) (HOYOS-BADAJOS; JENSEN; KARCH, 2010) (LARSEN; ANDERS, 2010) (LEE, 2009) .

4 DUALIDADE ADS/CFT E LÍQUIDOS NÃO-FERMIÔNICOS

A descrição usual para férmions fracamente correlacionados é dada pela teoria de Landau-Fermi, que associa os estados de muitas-partículas à estados de uma partícula. Porém, diversos sistemas físicos não apresentam o comportamento previsto pela teoria, como verificado experimentalmente, apesar de apresentarem superfícies de Fermi (SCHOFIELD, 1999) (COLEMAN, 1999). É possível então utilizar a dualidade AdS/CFT para esses sistemas, tornando possível o calculo das funções de Green que contém as informações físicas importantes para esses sistemas.

Neste capítulo analisaremos três métodos diferentes para analisar férmions fortemente relacionados, considerando contribuições fermiônicas para ação gravitacional, campos efetivos que descrevem a dinâmica IR do sistema e correções supersimétricas na ação de Einstein-Maxwell, sendo a ultima uma contribuição original na literatura.

4.1 CONTRIBUIÇÕES FERMIÔNICAS NA AÇÃO GRAVITACIONAL

Podemos estudar férmions fortemente correlacionados ao inserirmos termos fermiônicos na ação gravitacional: consideremos a ação de Einstein-Maxwell dada pela equação (27), cuja solução é dada pela métrica AdS-Nordstrom, com contribuições fermiônicas da forma:

$$I_{fermion} = \int d^{d+1} x \sqrt{-g} (i\bar{\Psi}\Upsilon^n D_n \Psi - m\bar{\Psi}\Psi), \quad (4.1)$$

com

$$\begin{cases} \bar{\Psi} = \Psi^\dagger \Upsilon^t \\ D_n = \partial_n + \frac{1}{4}\omega_{nab}\Upsilon^{ab} + iqA_n, \end{cases} \quad (4.2)$$

onde $\Psi^\dagger$ é o adjunto de Ψ , as matrizes Υ^n são as matrizes gama em dimensões generalizadas, Υ^{ab} o comutador entre as matrizes gama, D_n é a derivada covariante e ω_{nab} é *conexão de spin*, definida por:

$$\begin{cases} \omega_\mu^{ab} = e_\nu^a \Gamma_{\sigma\mu}^\nu e^\mu b + e_\nu^a \partial_\mu e^{\nu b} \\ g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Onde $\Gamma_{\sigma\mu}^\nu$ são as conexões de Levi-Cevita, que definem o transporte de tensores em uma variedade; ao tormarmos um sistema de coordenadas em particular, essas conexões se tornam os símbolos de Christoffel. Ao considerarmos uma teoria na fronteira de $d = 2 + 1$ dimensões, as conexões de spin em $3 + 1$ dimensões são dadas por (LIU; MCGREEVY; VEGH, 2011) :

$$\omega_{ttz} = -\frac{\partial_z g_{tt}}{2\sqrt{g_{zz}g_{tt}}}, \quad \omega_{xxz} = -\frac{\partial_z g_{xx}}{2\sqrt{g_{xx}g_{zz}}}, \quad \omega_{yyz} = -\frac{\partial_z g_{yy}}{2\sqrt{g_{yy}g_{zz}}}. \quad (4.4)$$

Em uma base $3 + 1$ dimensões podemos escrever as matrizes como (LIU; MCGREEVY; VEGH, 2011) (AMMON; ERDMENGER, 2015):

$$\Upsilon^t = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \Upsilon^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^\mu \\ \gamma^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

onde γ^μ são as matrizes gama na fronteira e $\psi_\pm$ são espinores de duas componentes. Ao escrevermos os espinores como:

$$\psi_\pm = (-gg^{zz})^{-\frac{1}{4}} e^{-i(wt - ik^i x_i)} \chi_\pm, \quad (4.6)$$

obtemos a seguinte equação de movimento para $\chi_\pm$:

$$\sqrt{\frac{g_{ii}}{g_{zz}}} (\partial_z \pm im\sqrt{g_{zz}}) \chi_\pm = \mp i K_\mu \gamma^\mu \chi_\mp, \quad (4.7)$$

onde:

$$K_\mu = (-E(z), k_i), \quad E(z) = \sqrt{\frac{g_{ii}}{-g_{tt}}} (\omega - \mu_q(1 - z)), \quad (4.8)$$

sendo μ_q o nível de Fermi dado por $\mu_q = q\mu$, μ o potencial químico efetivo para uma carga q . Podemos perceber que o parâmetro ω introduz uma correção ao nível de Fermi, visto que para $z \rightarrow 0$, $E(z) \rightarrow \omega + \mu_q$.

Queremos obter as funções de Green retardadas duais à $\psi_\pm$ para mostrar que as mesmas contém superfícies de Fermi: para isso, é necessário que resolvamos a equação (4.6) com suas condições de contorno de queda, além de identificarmos o seu comportamento assintótico.

Um possível método para que os campos tenham um comportamento regular no horizonte de eventos é considerarmos ψ_+ como uma fonte em função da coordenadas radial, enquanto ψ_- como o valor esperado. Na teoria na borda, a função de Green corresponde a $G_R \propto \langle \{O, O^\dagger\} \rangle$, com o termo associado a fonte dado por:

$$I_{bdy} = -i \int d^3 x (\bar{\chi}_+^{(0)} O + \bar{O} \chi_+^{(0)}), \quad (4.9)$$

com $\chi_+^{(0)}$ sendo o valor χ_+ na borda. Ainda, escrevendo o comportamento assintótico de $\chi_\pm$ como:

$$\chi_+ = Az^{-m} + Bz^{m+1}, \quad \chi_- = Cz^{1-m} + Dz^m, \quad (4.10)$$

com:

$$C = \frac{i\gamma^\mu k_\mu}{2m-1} A, \quad B = \frac{i\gamma^\mu k_\mu}{2m+1} D, \quad k_\mu = (-(\omega + \mu), k_i). \quad (4.11)$$

Identificando D como o valor esperado e A como a fonte, temos que as funções de Green podem ser escritas na forma:

$$G_R = i \frac{D}{A} \gamma^0. \quad (4.12)$$

Tomando a seguinte base para matrizes gama:

$$\gamma^0 = \sigma_2, \gamma^1 = i\sigma_1, \gamma^2 = i\sigma_3. \quad (4.13)$$

Tomando que $k_2 = 0$ e $k_1 = k$ e os espinores como:

$$\chi_{\pm} = \begin{pmatrix} y_{\pm} \\ w_{\pm} \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

é possível desacoplar a equação de Dirac, que passa ser escrita como:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{g_{ii}}{g_{zz}}} (\partial_z \pm i m \sqrt{g_{zz}}) y_{\pm} = \pm i (k + E(z)) w_{\mp} \\ \sqrt{\frac{g_{ii}}{g_{zz}}} (\partial_z \pm i m \sqrt{g_{zz}}) w_{\mp} = \pm i (k + E(z)) y_{\pm}. \end{cases} \quad (4.15)$$

Ainda, tomando as funções auxiliares:

$$\xi_+ = i \frac{y_-}{w_+}, \xi_- = -i \frac{w_-}{y_+}, \quad (4.16)$$

é possível reescrever as equações da seguinte forma:

$$\sqrt{\frac{g_{ii}}{g_{zz}}} \partial_z \xi_{\pm} = 2 i m \sqrt{g_{ii}} \xi_{\pm} \pm (ik + E(z)) \mp (ik + iE(z)) \xi_{\pm}^2, \quad (4.17)$$

com condição de contorno:

$$\xi_{\pm}|_{z=z_H} = i, \quad (4.18)$$

o que nos permite encontrar as funções de correlação na borda; ainda, as funções de Green encontradas devem obedecer as relações (LIU; MCGREEVY; VEGH, 2011):

$$G_{22}(\omega, k) = G_{11}(\omega, -k), G_{22}(\omega, k) = -G_{11}(\omega, k)^{-1}. \quad (4.19)$$

Com as funções de Green sendo encontradas numericamente. Para $m = 0$, temos os gráficos das partes real e imaginária das funções de Green, que apesar de apresentarem uma superfície de Fermi, não é a encontrada nos líquidos de Landau-Fermi usuais (LIU; MCGREEVY; VEGH, 2011):

Consideremos ainda um operador fermiônico $\mathcal{O}$ associado a um campo de massa m e carga q , ambas dependentes do momentum $\vec{k}$ em uma teoria de $2 + 1$ dimensões: a função de Green desse operador é determinada pela função de Green de um operador $\mathcal{O}^{IR}$ em uma CFT_{0+1} , com dimensão :

$$\delta_k = \nu_k + \frac{1}{2}, \nu_k = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{m^2 L^2 + \frac{3k^2}{\mu^2} - \frac{g^2 q^2}{2}}.$$

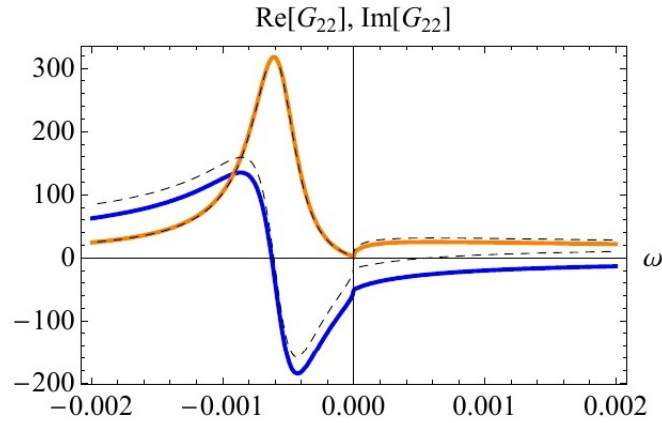


Figura 7 – Gráfico de $Re G_{22}$ (em azul) e $Im G_{22}$ (em laranja) para $k = 0, 9 < k_F$; para $\omega < 0$ temos um pico similar a um pico de quasipartícula, enquanto para $\omega > 0$, temos um pequeno relevo; fonte: (LIU; MCGREEVY; VEGH, 2011)

Para $2m^2L^2 < g^2q^2$, a equação de Dirac para o férmion no lado gravitacional dual ao operador $\mathcal{O}$ possui uma solução normalizável em uma casca discreta no espaço dos *momenta*, este sendo identificado como o *momentum de Fermi* k_F : perto desse valor, a função de Green se comporta como :

$$G_R(\omega, k) \approx \frac{Z}{\omega - \nu_F(k - k_F) + \Sigma(\omega)}, \quad \Sigma(\omega) = ac(k_F)(-i\omega)^{2\nu_{k_F}}, \quad (4.20)$$

onde $c(k)$ uma função complexa, ν_F a velocidade de Fermi e $\Sigma(\omega)$ a parte imaginária da função de Green. Visto que, para líquidos de Landau-Fermi, a parte imaginária da função de Green tem um comportamento de escala dado por:

$$Im G(a^z\omega, a(k - k_F)) = a^\alpha Im G(\omega, k - k_F), \text{ onde } z = \alpha = 1. \quad (4.21)$$

Podemos perceber que $\Sigma(\omega)$ não possui esse comportamento e portanto, tem um comportamento de líquido não-fermiônico. Ainda, para o caso de temperaturas não nulas, a condutividade obedece a seguinte relação:

$$\sigma_{DC} \propto T^{-2\nu_{k_F}}. \quad (4.22)$$

Perceba para $\nu_{k_F} = \frac{1}{2}$ temos que a resistência que é linear em função da temperatura, comportamento observado experimentalmente em supercondutores de altas T_c . Porém, a métrica AdS-Nordstrom possui uma entropia não nula mesmo para $T = 0$ ($G_N = 1$):

$$S = \frac{A_H}{4}. \quad (4.23)$$

Tal contratempo pode ser contornado caso seja considerados outras formulações (LEE, 2009), porém trazendo outras dificuldades como singularidades que não possuem horizonte de eventos.

4.2 CAMPOS EFETIVOS

Esse modelo busca analisar a dinâmica infravermelho (baixas frequências, altos comprimentos de onda e baixas temperaturas) a partir de um dual gravitacional de uma teoria efetiva, isto é, descrever um dual holográfico para uma teoria de campos efetivas infravermelho (IR) do metal (ELSE, 2024).

Ao estudarmos líquidos não-fermiônicos, é possível descrevê-lo como um *líquido de Fermi ersartz* (LEF): um LEF pode ser definido como um sistema que possui o mesmo estado fundamental e excitações de baixas energias que um líquido de Fermi, mas sua dinâmica (isto é, a Hamiltoniana e sua ação no espaço de Hilbert) diferem. Isso ocorre devido aos vínculos associados ao sistema, geralmente relacionados a topologia e simetria obedecidas pelo sistema (ELSE; THORNGREN; SENTHIL, 2021).

Líquidos de Fermi (e consequentemente EFL's) possuem uma simetria emergente em dimensões $d = 2$ descrita por *grupo de Loop* $LU(1)$, grupo que leva todas as funções da superfície de Fermi S^1 para em $U(1)$: essa simetria implica a conservação de carga em toda superfície de Fermi, parametrizada por θ . Esses campos devido a simetria emergente possui uma anomalia de 't Hooft, descrita pela equação (ELSE; THORNGREN; SENTHIL, 2021):

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{m}{8\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} [\partial_\mu A_\nu] [\partial_\lambda A_\sigma], \quad (4.24)$$

onde m é o coeficiente de anomalia e os símbolos gregos variam em todas coordenadas de espaço-tempo e na coordenada da superfície de Fermi θ , porém, devido a simetria do sistema temos que $j^\theta = 0$.

Ainda temos uma correspondência entre a dinâmica Ultravioleta-Infravermelho (UV/IR), dada pelo *Teorema de Luttinger*: esse vínculo que relaciona a densidade de partículas na superfície de Fermi e o seu volume. No caso de um EFL com simetria de translação contínua, temos que o teorema de Luttinger é dado por (ELSE; THORNGREN; SENTHIL, 2021):

$$\rho = \frac{m\mathcal{V}_F}{(2\pi)^2}, \quad (4.25)$$

com ρ sendo a densidade de carga microscópica e $\mathcal{V}_F$ o volume da superfície de Fermi. Já No caso de uma simetria de translação discreta nas células unitárias, o teorema assume a forma:

$$\nu = \frac{m\mathcal{V}_F V_{unit}}{(2\pi)^2}, \quad (4.26)$$

onde V_{unit} é o volume da célula unitária e ν é razão entre a carga e o número de células unitárias, conhecida como "preenchimento" (filling).

O dual gravitacional, para obedecer tais propriedades, deve conter um campo dinâmico $LU(1)$ em uma variedade $M \times S^1$, M sendo o espaço-tempo usual quadridimensional e S^1 associado a esfera de Fermi. O campo dinâmico $LU(1)$ tem a ação na forma:

$$\begin{cases} I_{Maxwell} = \int_{M \times S^1} d^4x d\theta \sqrt{-g} \sqrt{\alpha(\theta)} f^{\mu\nu} f_{\mu\nu}, \\ f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu, \end{cases} \quad (4.27)$$

onde a_μ são campos $LU(1)$, $\alpha(\theta)$ parâmetro associado a geometria da superfície de Fermi. Os índices gregos podem abranger as componentes espaço-temporais (x_i, t) e não na direção θ .

Ainda, para incluirmos a anomalia de 't Hooft no modelo dual, associamos um termo de Chern-Simons associado ao campo a_μ da forma:

$$I_{CS} = \kappa \int_{M \times S^1} a \wedge da \wedge da = \kappa \int d^4x d\theta \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda\sigma} a_\mu \partial_\nu a_\rho \partial_\sigma a_\lambda. \quad (4.28)$$

Ainda, a ação de Einstein-Hilbert para o sistema é dada por:

$$I_{EH} = \frac{1}{2k^2} \int_M d^4x \sqrt{-g} \left(R + \frac{6}{L^2} \right). \quad (4.29)$$

Então a ação que descreve o sistema, dual ao campo efetivo na borda, é dada por:

$$I = I_{EH} + I_{Maxwell} + I_{CS} \quad (4.30)$$

Resolvendo as equações de Euler-Lagrange em função do campo a_μ , encontramos:

$$\partial_\beta [\sqrt{-g} f^{\mu\nu}] = \frac{1}{\alpha(\theta)} \frac{m}{(2\pi)^2} \varepsilon^{\nu\rho\sigma\lambda} [\partial_\theta a_\rho] [\partial_\sigma a_\lambda].$$

Considerando o comportamento assintótico dos campos ($r \rightarrow \infty$):

$$a_\mu = a_\mu^{(0)} + a_\mu^{(1)} r + \dots, \quad (4.31)$$

sendo possível interpretar $a_\mu^{(0)}$ como o campo de fundo e $a_\mu^{(1)}$ como o valor esperado da corrente j^μ . Tomando que os campos possuam comportamento:

$$a_i^{(0)} = k_i(\theta), \quad (4.32)$$

com o calibre $a_r = 0$ e que variem como $\approx e^{-i\omega t + K_i x^i}$ nas direções t, x, y , com $\nu = t, x, y, r$, é possível obter as seguintes equações de movimento:

$$\partial_r^2 \mathcal{A} + \mathcal{M} \partial_r \mathcal{A} + \Gamma \mathcal{A} = 0, \quad (4.33)$$

$$ik_i F^{ri} - i\omega F^{rt} = -u^i e_i, \quad (4.34)$$

onde $e_i = -i\omega a_i - ik_i a_t$ são as componentes do campo elétrico nas direções x, y e u^i dado por:

$$u^i = \frac{m}{\alpha(\theta)(2\pi)^2} \varepsilon^{ij} \frac{d}{d\theta} k_j(\theta). \quad (4.35)$$

Definindo ainda:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_t \\ a_x \\ a_y \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & -u^x & -u^y \\ -u^x & 0 & 0 \\ -u^y & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.36)$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} -(k_x^2 + k_y^2) & -\omega k_x & -\omega k_y \\ \omega k_x & \omega^2 + k_y^2 & k_x k_y \\ \omega k_y & k_x k_y & \omega^2 - k_x^2 \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

Sem perda de generalidade, tomemos $u^x = u$ e $u^y = 0$, u sendo uma escala característica do modelo: temos então que os campos obedecem uma equação diferencial de segunda ordem. Considerando que $\mathcal{A} \propto e^{\lambda r}$, encontramos a equação de autovalores da seguinte forma:

$$\det(\lambda^2 I + \lambda \mathcal{M} + \Gamma) = 0. \quad (4.38)$$

Resolvendo a equação de autovalores, encontramos duas raízes $\lambda = 0$ e outras quatro soluções da forma:

$$\lambda = \sigma_1 \sqrt{-\omega^2 + k_x^2 + k_y^2 + \frac{u}{2} \left(u + \sigma_2 \sqrt{4k_y^2 + u^2} \right)}, \quad (4.39)$$

com $\sigma_1, \sigma_2 = \pm 1$. Ao considerarmos o comportamento assintótico dos campos devemos descartar a solução com $\sigma_1 = 1$ e considerarmos apenas a solução $\sigma_1 = -1$.

Devido a raiz dupla $\lambda = 0$, temos soluções da forma:

$$\begin{cases} \mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \\ \mathcal{A} = \mathcal{A}_0 r + \mathcal{A}_1, \end{cases}$$

que obedecem respectivamente $\Gamma \mathcal{A}_0 = 0$ e $\mathcal{M} \mathcal{A}_0 + \Gamma \mathcal{A}_1 = 0$. Podemos perceber então que (ELSE, 2024):

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} -\omega \\ k_x \\ k_y \end{pmatrix}; \quad \mathcal{A}_1 = \frac{u}{\omega^2 - (k_x^2 + k_y^2)} \begin{pmatrix} k_x \\ -\omega \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.40)$$

e a solução geral para o campo $\mathcal{A}$ é dada por:

$$\mathcal{A} = c_0 \mathcal{A}_0 + c_1 (\mathcal{A}_0 r + \mathcal{A}_1) + c_2 \mathcal{A}_2 e^{\lambda_2 r} + c_3 \mathcal{A}_3 e^{\lambda_3 r}, \quad (4.41)$$

onde c_0, c_1, c_2 e c_3 constantes. Devido ao comportamento assintótico do campo, é necessário que $c_1 = 0$.

Considerando $|\omega|, |k| \ll u$, é possível obter as correntes associadas a teoria na borda (ELSE, 2024):

$$\begin{cases} \langle j^t \rangle = \langle j^\perp \rangle = \frac{m|\partial_\theta k(\theta)|}{(2\pi)^2} \frac{iE_\perp}{\omega - k_\perp} - \alpha(\theta)^{-1} \frac{(\omega + k_\perp)k_\parallel}{(\omega - k_\perp)\sqrt{-\omega^2 + k_\perp^2}} (E_\parallel + B), \\ \langle j^\parallel \rangle = -i\alpha(\theta)^{-1} \frac{\omega + k_\perp}{\sqrt{-\omega^2 + k_\perp^2}} (E_\parallel + B), \end{cases} \quad (4.42)$$

onde as componentes paralelas e perpendiculares de k são dadas:

$$k_\parallel = \frac{k_i \omega^i(\theta)}{\sqrt{\omega^j(\theta) w_j(\theta)}}, \quad (4.43)$$

com $i = (x, y)$ e definindo $\omega^i(\theta) = \varepsilon^{ij} \partial_\theta k_j(\theta)$. Analisando o limite de $B \rightarrow 0$, $k \rightarrow 0$ com ω fixo, isto é, o limite da condutividade ótica, as expressões (4.41) e (4.42) passam a ser:

$$\begin{cases} \langle j^t \rangle = \langle j^\perp \rangle = \frac{m|\partial_\theta k(\theta)|}{(2\pi)^2} \frac{i}{\omega} E_\perp, \\ \langle j^\parallel \rangle = \alpha(\theta)^{-1} E_\parallel. \end{cases} \quad (4.44)$$

Devemos salientar que essas correntes são as contribuições da superfície de Fermi e que, para obtermos a corrente total devemos integrar em toda superfície de Fermi. Ao fazer isso, obtemos uma densidade de carga nula e o valor esperado da corrente é dado por:

$$\langle j^i \rangle = \sigma^{ij}(\omega) E_j, \quad (4.45)$$

onde σ^{ij} é o tensor de condutividade, dado por:

$$\sigma^{ij} = \frac{i}{\omega} \mathcal{D}^{ij} + \sigma_{inc}^{ij}, \quad (4.46)$$

com $\mathcal{D}^{ij}$ definido como *peso de Drude*:

$$\mathcal{D}^{ij} = \frac{m}{(2\pi)^2} \int \frac{\omega^i(\theta) \omega^j(\theta)}{|w(\theta)|} d\theta, \quad (4.47)$$

e σ_{inc}^{ij} a *condutividade incoerente*, que independe da frequência:

$$\sigma_{inc}^{ij} = \int \frac{v^i(\theta) v^j(\theta)}{|w(\theta)|} d\theta, \quad (4.48)$$

onde $v_i = \partial_\theta k_i(\theta)$. A partir das relações (4.44), (4.45) e da condutividade (4.47) é possível perceber que existem duas contribuições para o transporte de cargas no sistema, uma delas paralela à superfície de Fermi encontrada na teoria usual, e a outra perpendicular a superfície de Fermi, termo anômalo associado ao comportamento de líquido não-fermiônico do modelo.

Ao tomarmos o nível de Chern-Simons m (e consequentemente o coeficiente de anomalia da teoria de campos quânticos dual) igual a um, podemos estabelecer a qual sistema físico

o dual gravitacional descreve: temos uma correspondência com um líquido de Fermi sem spin de componente única acoplado com um campo conforme fortemente interagente com número N de componentes suficientemente grande. As flutuações da teoria conforme destroem as quasipartículas do líquido de Fermi, o que resulta em um comportamento de líquido não fermiônico, mas que conserva a simetria $LU(1)$ e portanto, a conservação de carga na superfície de Fermi.

Como tomamos $m \approx 1$ e $N \gg 1$, o líquido de Fermi não possui graus de liberdade suficientes para opor os campos conformes, o que faz com que o campo $LU(1)$ não modifique a métrica do sistema. Temos então um modelo dual que satisfaz as propriedades de possuir uma superfície de Fermi obedecendo o teorema de Luttinger, mas apresentando um comportamento não usual ao compararmos com a teoria de Landau-Fermi.

4.3 CORREÇÕES SUPERSIMÉTRICAS NA AÇÃO EINSTEIN-MAXWELL

Neste seção, propomos correções não-lineares aos modelos duais a uma CFT_{2+1} na borda, que apresenta uma corrente J^μ conservada simétrica sob o grupo $U(1)$ e com campo de fundo μ associado a densidade de carga não-nula, sendo esta contribuição original na literatura.

Consideremos a ação do sistema dual à teoria da borda é dada por:

$$I = I_{EH} + I_{Maxwell}, \quad (4.49)$$

sendo S_{EH} é a ação de Einstein-Hilbert dada pela equação (3.1) e $S_{Maxwell}$ a ação eletromagnética dada por:

$$I_{Maxwell} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right), \quad (4.50)$$

sendo $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, onde A_μ é o tensor eletromagnético. Minimizando a ação, obtemos as equações de movimento para $g_{\mu\nu}$ e $F_{\mu\nu}$:

$$\begin{cases} R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} + \frac{d(d-1)}{2L^2} g_{\mu\nu} = \kappa^2 \left(F_{\mu\alpha} F_\nu^\alpha - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right), \\ \nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0, \end{cases} \quad (4.51)$$

Cuja solução é dada pela métrica de um *buraco negro diônico*. No espaço espaço AdS_4 , sua métrica é dada por ($L = 1$) (HARTNOLL; KOVTUN, 2007):

$$ds^2 = \frac{\beta^2}{z^2} (-f(r)dt^2 + dx^2 + dy^2) + \frac{1}{z^2 f(z)} dz^2, \quad (4.52)$$

com β sendo um coeficiente de massa e $f(z)$ reescrita como:

$$f(z) = 1 + (h^2 + q^2)z^4 - (1 + h^2 + q^2)z^3, \quad (4.53)$$

onde h é a carga magnética do buraco negro, responsável pelo campo não nulo na teoria da borda.

Além disso, espera-se que os campos tenham um comportamento assintótico na borda $z \rightarrow 0$:

$$A_\mu(z) = A_\mu^{(0)} + A_\mu^{(1)}z + \dots, \quad (4.54)$$

onde r é a coordenada espacial extra do modelo no *bulk* associada ao fluxo do grupo de renormalização, que descreve o comportamento dos campos na teoria da borda em diferentes escalas quando renormalizados. $A_\mu^{(0)}$ e $A_\mu^{(1)}$ são, respectivamente, o valor esperado no vácuo do campo de Calibre e o valor esperado da corrente $U(1)$, sendo determinados pela solução completa na borda. É esperado que o campo A_0 , associado ao potencial elétrico, tenha um comportamento assintótico $A_0 \rightarrow \mu$ na borda.

Consideremos uma perturbação no campo de calibre $U(1)$ A_μ , associada a correções supersimétricas de baixas energias para o caso não-abeliano de um campo de calibre em uma teoria de cordas abertas, dada por (BARREIRO; MEDINA, 2012):

$$I_{pert} = \int d^4x \sqrt{-g} ((2\alpha') a_1 F_\mu^\lambda F_\lambda^\nu F_\nu^\mu + (2\alpha')^2 (a_3 F^{\mu\lambda} F_\lambda^\nu F_\mu^\rho F_{\nu\rho} + a_4 F_\lambda^\mu F_\nu^\lambda F^{\nu\rho} F_{\mu\rho} + (4.55) \\ + a_5 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} F^{\lambda\rho} F_{\lambda\rho} + a_6 F^{\mu\nu} F^{\lambda\rho} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho})),$$

sendo $\alpha' \ll 1$ o coeficiente de perturbação, associado ao comprimento da supercorda:

$$\alpha' = l_s^2,$$

sendo l_s o comprimento da corda e os coeficientes a_1, a_3, a_4, a_5, a_6 são impostos por supersimetria e tomam os valores (BARREIRO; MEDINA, 2012):

$$a_1 = 0, a_3 = \frac{\pi^2}{12}, a_4 = \frac{\pi^2}{24}, a_5 = -\frac{\pi^2}{48}, a_6 = -\frac{\pi^2}{96}. \quad (4.56)$$

A ação eletromagnética então é dada por:

$$I_{EM} = I_{Maxwell} + I_{pert}. \quad (4.57)$$

A equação de movimento para métrica $g_{\mu\nu}$ ainda é dada pela equação (4.52), tendo em vista que as contribuições dos termos α' não são significativas e não deformam a geometria do sistema: consequentemente, a métrica considerada para esse sistema ainda é AdS_4 Reissner-Nordstrom (3.32).

Já a equação de movimento para A_μ considerando perturbações de primeira ordem é dada pela equação (4.52), visto que a contribuição desse termo não possui contraparte fermiônica. Considerando agora termos de segunda ordem, a equação de movimento é dada por:

$$\begin{aligned}
& \nabla_\alpha \nabla_\nu A^\alpha - \nabla_\alpha \nabla^\alpha A_\mu + 8(-(a_5 + a_6) \nabla_\beta A^\gamma \nabla^\beta A^\alpha (-\nabla_\gamma \nabla_\alpha A_\nu + \nabla_\gamma \nabla_\nu A_\alpha) + \nabla_\beta A^\alpha (2a_4 \\
& (\nabla_\alpha A_\beta - \nabla_\beta A_\alpha) (\nabla_\gamma \nabla^\gamma A_\nu - \nabla_\gamma \nabla_\nu A^\gamma) - (a_5 + a_6) (-\nabla_\gamma \nabla_\beta A_\nu + \nabla_\gamma \nabla_\nu A_\beta) \nabla^\gamma A_\alpha \\
& a_5 (\nabla_\alpha \nabla_\gamma A_\nu - \nabla_\alpha \nabla_\nu A_\gamma + \nabla_\gamma \nabla_\alpha A_\nu - \nabla_\gamma \nabla_\nu A_\alpha) \nabla^\gamma A_\beta) + a_5 (\nabla_\alpha A^\beta - \nabla_\beta A_\alpha) * \\
& * (-\nabla_\gamma \nabla_\beta A^\gamma + \nabla_\gamma \nabla^\gamma A_\beta) (-\nabla^\alpha A_\nu + \nabla_\nu A^\alpha) - (4a_4 (\nabla_\alpha \nabla_\beta A_\gamma) - (a_5 + a_6) (\nabla_\beta \nabla_\alpha A_\gamma - \nabla_\beta \nabla_\gamma A_\alpha - \\
& - \nabla_\gamma \nabla_\alpha A_\beta + \nabla_\gamma \nabla_\beta A_\alpha) \nabla^\gamma A^\beta (-\nabla^\alpha A_\nu + \nabla_\nu A^\alpha)) = 0
\end{aligned}$$

com os índices $\mu, \nu, \dots = (t, x, y, z)$. Assumindo que os campos comportem-se como:

$$A_i(z) = \exp(i(kx - \omega t)) a_i(z), \quad i = x, y, \quad (4.58)$$

$$A_t(z) = \mu(1 - qz)$$

Podemos reescrever a equação para componentes perpendiculares e paralelas do campo com $z \rightarrow 0$ ao tomarmos as seguintes transformações (HARTNOLL; LUCAS; SACHDEV, 2018):

$$\begin{cases} a_{||}(z) = \omega a_x(z) + k a_t(z) \\ , a_{\perp}(z) = a_y(z) = 0, \end{cases} \quad (4.59)$$

de forma que a componente espacial da equação de movimento é dada por:

$$ik\beta^3\omega^2 a'_{||}(z) + \beta^2\omega^4 a_{||}(z) + \beta^2\omega^2(\beta - k\mu\omega^2) a''_{||}(z) = 0. \quad (4.60)$$

Ao resolver a equação diferencial de segunda ordem homogênea, é possível obter autovalores da forma:

$$\lambda_{1,2} = \frac{ik\beta \pm \sqrt{-(k^2\beta^2 + 4\omega^2(\beta - k\mu\omega^2))}}{2(\beta - k\mu\omega^2)}, \quad (4.61)$$

e portanto a solução da equação diferencial pode ser escrita na forma:

$$a_{||}(z) = c_1 \exp(\lambda_1 z) + c_2 \exp(\lambda_2 z). \quad (4.62)$$

Ao expandirmos a solução em torno de $z \rightarrow 0$ e compararmos com a expansão dos campos na borda dada pela equação (4.54), é possível obter:

$$a_{||}(z) = d_1 + id_1 \frac{k\beta}{2(k\mu\omega^2 - \beta)} + d_2 \frac{\sqrt{-(k^2\beta^2 + 4\omega^2(\beta - k\mu\omega^2))}}{2(k\mu\omega^2 - \beta)} z + \mathcal{O}(2), \quad (4.63)$$

e ao compararmos com a expansão na borda dada pela equação (4.54) temos que:

$$\begin{cases} a_{||}^{(0)} = d_1(1 + i \frac{k\beta}{2(k\mu\omega^2 - \beta)}) \\ a_{||}^{(1)} = d_2 \frac{\sqrt{-(k^2\beta^2 + 4\omega^2(\beta - k\mu\omega^2))}}{2(k\mu\omega^2 - \beta)}. \end{cases} \quad (4.64)$$

A partir da formula de Kubo, é possível calcular a condutividade elétrica associada a componente paralela do campo, dada por:

$$\sigma(\omega, k) = \frac{\langle J_{||} \rangle}{E_{||}} = \frac{\langle J_x \rangle}{i\omega a_{||}^{(0)}} = \frac{d_2 \sqrt{k^2\beta^2 + 4\omega^2(\beta - k\mu\omega^2)}}{\omega(d_1 + k\beta)}, \quad (4.65)$$

com $k\mu \ll 1$. Podemos perceber que no limite de baixas frequências $\omega \rightarrow 0$, a condutividade para k constante é $\sigma(\omega) \propto \omega^{-1}$: para efeitos de comparação, tomemos que $\omega \propto T$; Portanto a condutividade no limite de baixas temperaturas obedece:

$$\sigma(T) \propto T^{-1} \rightarrow \rho(T) \propto T. \quad (4.66)$$

O modelo então, no limite de baixas temperaturas, descreve o comportamento de líquido não-fermiônico. Ainda, no limite de altas frequências $\omega \rightarrow \infty$ (altas temperaturas), temos ainda que:

$$\sigma(\omega \rightarrow \infty) \propto \text{constante}, \quad (4.67)$$

e portanto passa a descrever, nesse limite, um isolante convencional. Tal comportamento da condutividade nos indica que, para uma frequência crítica ω_{crit} , o sistema passa por uma transição de fase. Isso ainda pode ser verificado no gráfico da função, conforme mostra a figura (8): É

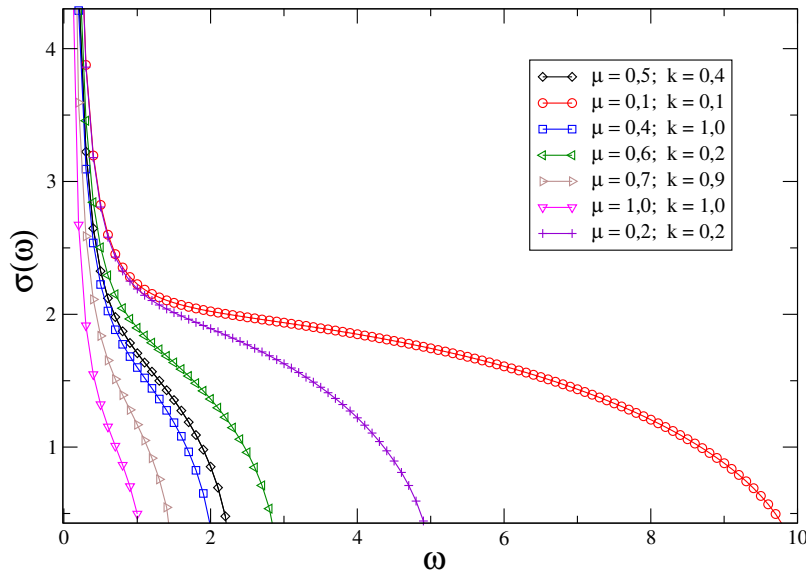


Figura 8 – Gráfico da condutividade em função da frequência para diferentes valores de k e μ . (Fonte: Produção do próprio autor)

possível ainda averiguar tal argumento ao considerarmos a condutividade, em primeira instância, como um parâmetro de ordem e perceber que sua derivada (SETHNA, 2006):

$$\chi = \lim_{\omega \rightarrow 0} \sigma(\omega) \propto \frac{1}{\omega} \rightarrow \infty, \quad (4.68)$$

diverge no ponto crítico $\omega = 0$. Ainda, é possível perceber que há uma segunda transição de fase para $\omega \rightarrow \omega_{crit} \neq 0$, caracterizada por uma mudança súbita no valor da condutividade caracterizando uma transição de fase de primeira ordem, como pode ser averiguado na figura (9): é possível observar que o ponto crítico onde ocorre a transição de primeira ordem é modificado ao variar os parâmetros (k, μ) , porém a transição de segunda ordem ainda ocorre para $\omega \rightarrow 0$.

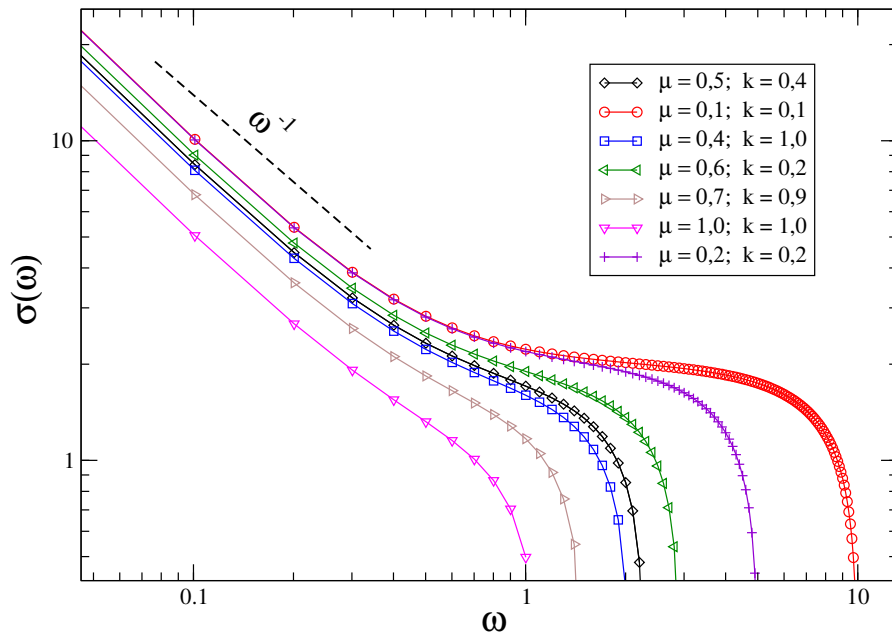


Figura 9 – Gráfico da condutividade em função da frequência em escala logarítmica, para diferentes valores de k e μ . É possível observar tanto a transição de fase contínua para supercondutor como a transição descontínua de isolante para metal estranho (Produção do próprio autor)

É possível interpretar as perturbações como interações entre os férmions que compõem a corrente que são relevantes no regime de baixas frequências, destrói as quasipartículas do sistema tornando-se um líquido não-fermiônico (um supercondutor). No limite de altas frequências, as perturbações se tornam irrelevantes e o sistema volta a ser descrito pela teoria usual. É possível observar também que a presença das perturbações introduz uma invariância de escala ao sistema, associado ao comportamento não-linear do sistema (LEONEL, 2023).

Ainda, é interessante observar que ao tomarmos o limite de $z \rightarrow 0$, as contribuições superssimétricas na ação são descartadas, pois as mesmas adicionam um termo proporcional à z^4 . Portanto, se faz necessário utilizar diferentes métodos para resolução da equação diferencial sem tomar o limite da borda, considerando o caráter não linear das correções.

5 CONCLUSÃO

Esta dissertação teve como objetivo o entendimento dos líquidos não-fermiônicos, fenômeno pouco compreendido na Física da Matéria Condensada, a partir da Dualidade AdS/CFT: esse resultado postula a equivalência entre duas teorias físicas sendo elas uma teoria de supercordas em um espaço-tempo do tipo AdS_{d+1} e uma teoria de campos quânticos com simetria conforme CFT_d . Vimos que esta correspondência é um tipo de correspondência forte/fraca, isto é, quando uma teoria é fortemente interagente seu dual é consequentemente fracamente interagente, tornando-se útil na obtenção e análise de sistemas físicos fortemente acoplados como os encontrados na Física da Matéria Condensada.

Para o *Líquidos não-fermiônicos*, estados da matéria que não podem ser descritos pela teoria usual proposta por Landau possuindo propriedades interessantes como tempos de espalhamentos proporcionais ao inverso da temperatura e propagadores com diversos polos no espaço dos *momentum* $\vec{k}$, com a teoria usual a obtenção das grandezas associadas ao fenômeno de transporte torna-se extremamente complicada ou imprecisa quando comparados aos resultados verificados experimentalmente, tendo em mente que tais divergências estão associadas à natureza do acoplamento.

Utilizando da dualidade, analisamos dois modelos que buscam compreender a natureza dessas interações além de obter coeficientes de transporte que estejam de acordo com a fenomenologia de tais estados: o modelo apresentado por (LIU; MCGREEVY; VEGH, 2011) adiciona termos spinoriais associados aos campos fermiônicos da borda na ação de Einstein-Maxwell, conhecida por ser dual a uma teoria de campos com uma corrente conservada J^μ sob o grupo de simetria $U(1)$ e que possui uma densidade de carga não nula. Resolvendo as equações de movimento para os campos fermiônicos e aplicando métodos numéricos, é possível obter os propagadores da teoria em função das frequências ω e dos *momentum* k , associados a condutividade elétrica do sistema.

Ainda vimos que para caso de temperaturas não nulas, obtêm-se um comportamento geral para as condutividades capaz recuperar desde estados metálicos usuais da teoria de Landau até os de metais estranhos. Tal modelo, porém, possui entropia não nula mesmo em $T = 0$, violando a Terceira lei da termodinâmica e que, ao serem feitas as modificações necessárias, passa a apresentar singularidades sem horizontes de eventos, fenômeno que não possui interpretação física.

O segundo modelo analisado, proposto por (ELSE, 2024) descreve um dual gravitacional a uma teoria de campos quânticos efetiva que descrevem a dinâmica IR do sistema, obedecendo ainda o teorema de Luttinger associado a conservação de carga na superfície de Fermi. Para isso, consideramos um campo eletromagnético $f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu$ simétrico sob o grupo topológico $LU(1)$, além de termos Chern-Simons associados à anomalia de 't Hooft do campo quântico.

Ao obtermos os coeficientes de transporte, é possível observar que o transporte de cargas

na superfície de Fermi pode ser decomposto em duas componentes: uma paralela a superfície, comumente vista na teoria de Landau e outra associada ao transporte perpendicular a superfície de Fermi, apresentando comportamento de líquido não-fermiônico. A origem desse comportamento pode ser associada a um líquido de Fermi sem spin de componente única interagindo com um campo conforme fortemente interagente de muitas componentes, com a interação entre os campos destruindo as excitações da quasipartículas mas mantendo a superfície de Fermi.

Por fim propusemos um modelo que introduz à ação de Einstein-Maxwell termos de correção supersimétricos no campo de gauge A_μ : ao resolvermos as equações de movimento para um observador na borda, obtivemos a condutividade para o sistema que demonstra o caráter anômalo dos líquidos não-fermiônicos, dotado de duas transições de fase: uma transição de fase contínua em supercondutor para $\omega \rightarrow 0$ e uma transição de fase de primeira ordem que ocorre em $\omega \rightarrow \omega_{crit}$. É possível perceber que a variação dos parâmetros (k, μ) controla o ponto onde a transição de fase de primeira ordem ocorre. Porém, ao tomarmos o limite $z \rightarrow 0$, as correções superssimétricas tem suas contribuições descartadas, visto que são proporcionais à z^4 . Portanto, uma das perspectivas futuras para o trabalho é a resolução da equação diferencial com os termos não-lineares a partir de métodos já conhecidos pela literatura (métodos das séries, Frobenius, etc.).

Têm-se como perspectivas futuras um aprofundamento das propriedades não-lineares do sistema e suas consequências nos fenômenos de transporte de energia, a partir da retroação do campo ao modificar ao perturbar a métrica AdS_4 . São perspectivas futuras a obtenção de parâmetros de ordem mais adequados para obtenção do ponto crítico na transição de primeira ordem, além de uma melhor caracterização dos fenômenos físicos associados ao sistema.

Ainda, temos como perspectivas futuras o estudo do p comportamento caótico do modelo, visto que teorias holográficas com temperaturas não nulas possuem tal comportamento (BLAKE et al., 2018; JAHNKE, 2019), além da possível invariância de escala associada a sistemas dinâmicos caóticos clássicos (LEONEL, 2023). A partir desse estudo, é possível descrever a dinâmica de transporte do sistema, associada ao coeficiente de difusão associado ao coeficiente de Lyapunov. Além disso, há possibilidade de desenvolver uma metodologia para caracterização desse comportamento para outros sistemas encontrados na literatura .

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AMMON, M.; ERDMENGER, J. **Gauge/Gravity Duality: Foundations and Applications**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2015.
- BARREIRO, L. A.; MEDINA, R. Revisiting the S-matrix approach to the open superstring low energy effective lagrangian. **JHEP**, v. 10, p. 108, 2012.
- BLAKE, M. et al. Many-body chaos and energy dynamics in holography. **JHEP**, v. 10, p. 035, 2018.
- BLUMENHAGEN, R.; PLAUSCHINN, E. **Introduction to conformal field theory: with applications to String theory**. [S.l.: s.n.], 2009. v. 779.
- BRODSKY, S. J.; TÉRAMOND, G. F. de. Applications of ads/cft duality to qcd. **International Journal of Modern Physics A**, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 21, n. 04, p. 762–768, fev. 2006. ISSN 1793-656X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1142/S0217751X06032009>>.
- CARROLL, S. M. **Lecture Notes on General Relativity**. 1997. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/gr-qc/9712019>>.
- CASARIEGO, M. Diffeomorphism invariance and general covariance: a pedagogical introduction. 2024. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2405.09703>>.
- CHAGNET, N. et al. Emerging fermi liquids from regulated quantum electron stars. **Journal of High Energy Physics**, Springer Science and Business Media LLC, v. 2022, n. 8, ago. 2022. ISSN 1029-8479. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1007/JHEP08\(2022\)222](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP08(2022)222)>.
- COLEMAN, P. Theories of non-fermi liquid behavior in heavy fermions. **Physica B: Condensed Matter**, Elsevier BV, v. 259–261, p. 353–358, jan. 1999. ISSN 0921-4526. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/S0921-4526\(98\)00795-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0921-4526(98)00795-9)>.
- ELSE, D. V. Holographic models of non-Fermi liquid metals revisited: An effective field theory approach. **Phys. Rev. B**, v. 109, n. 3, p. 035163, 2024.
- ELSE, D. V.; THORNGREN, R.; SENTHIL, T. Non-fermi liquids as ersatz fermi liquids: General constraints on compressible metals. **Phys. Rev. X**, American Physical Society, v. 11, p. 021005, Apr 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.11.021005>>.
- HARTNOLL, S. A.; KOVTUN, P. Hall conductivity from dyonic black holes. **Phys. Rev. D**, v. 76, p. 066001, 2007.
- HARTNOLL, S. A.; LUCAS, A.; SACHDEV, S. **Holographic Quantum Matter**. [S.l.]: MIT Press, 2018. ISBN 978-0-262-03843-0.
- HOYOS-BADAJÓZ, C.; JENSEN, K.; KARCH, A. A Holographic Fractional Topological Insulator. **Phys. Rev. D**, v. 82, p. 086001, 2010.
- IIZUKA, N. et al. Holographic fermi and non-fermi liquids with transitions in dilaton gravity. **Journal of High Energy Physics**, Springer Science and Business Media LLC, v. 2012, n. 1, jan. 2012. ISSN 1029-8479. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1007/JHEP01\(2012\)094](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP01(2012)094)>.

JAHNKE, V. **Recent developments in the holographic description of quantum chaos**. 2019. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1811.06949>>.

KACHRU, S.; SHYANI, M. Holographic non-Fermi liquids at large d. **JHEP**, v. 01, p. 057, 2023.

KHVESHCHENKO, D. V. Searching for non-fermi liquids under holographic light. **Physical Review B**, American Physical Society (APS), v. 86, n. 11, set. 2012. ISSN 1550-235X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.86.115115>>.

KURAMOTO, Y. **Quantum Many-Body Physics: A Perspective on Strong Correlations**. Springer Japan, 2020. (Lecture Notes in Physics). ISBN 9784431553922. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=VBILkAEACAAJ>>.

LARSEN, F.; ANDERS, G. van. Holographic Non-Fermi Liquids and the Luttinger Theorem. 6 2010.

LEE, S.-S. A Non-Fermi Liquid from a Charged Black Hole: A Critical Fermi Ball. **Phys. Rev. D**, v. 79, p. 086006, 2009.

LEE, S.-S. Recent developments in non-fermi liquid theory. **Annual Review of Condensed Matter Physics**, Annual Reviews, v. 9, n. 1, p. 227–244, mar. 2018. ISSN 1947-5462. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031016-025531>>.

LEONEL, E. **Dynamical Phase Transitions in Chaotic Systems**. Springer Nature, 2023. (Nonlinear physical science). ISBN 9789819922451. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=dJwz0AEACAAJ>>.

LIU, H.; MCGREEVY, J.; VEGH, D. Non-Fermi liquids from holography. **Phys. Rev. D**, v. 83, p. 065029, 2011.

MALDACENA, J. M. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity. **AIP Conf. Proc.**, v. 484, n. 1, p. 51, 1999.

NASTASE, H. **String Theory Methods for Condensed Matter Physics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2017. ISBN 978-1-316-85304-7, 978-1-107-18038-3.

NăSTASE, H. **Introduction to the AdS/CFT Correspondence**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2015.

SCHOFIELD, A. J. Non-fermi liquids. **Contemporary Physics**, Taylor & Francis, v. 40, n. 2, p. 95–115, 1999. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/001075199181602>>.

SETHNA, J. P. **Statistical mechanics: Entropy, Order parameters and complexity**. illustrated edition. Oxford University Press, USA, 2006. (Oxford Master Series in Physics). ISBN 9780198566779, 0198566778. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=755024b1bdc891a3fc8039824fd64055>>.

SILVA, C. A note on the ads/cft correspondence and the nature of spacetime in quantum gravity. **Nuclear Physics B**, Elsevier BV, v. 998, p. 116402, jan. 2024. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2023.116402>>.

VOIT, J. Charge-spin separation and the spectral properties of luttinger liquids. **Phys. Rev. B**, American Physical Society, v. 47, p. 6740–6743, Mar 1993. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.47.6740>>.

ZAANEN, J. et al. **Holographic Duality in Condensed Matter Physics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2015.

ZHANG, J. M.; LIU, Y. Fermi's golden rule: its derivation and breakdown by an ideal model. **European Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 37, n. 6, p. 065406, out. 2016. ISSN 1361-6404. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/0143-0807/37/6/065406>>.