



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Fórmulas probabilísticas para problemas de Dirichlet e simulações

Pietra Strazzeri Kodama

Orientador: Prof. Dr. Fabiano Borges da Silva

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, janeiro de 2024

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Fórmulas probabilísticas para problemas de Dirichlet e simulações

Pietra Strazzeri Kodama

Orientador: Prof. Dr. Fabiano Borges da Silva

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, janeiro de 2024

K76f

Kodama, Pietra Strazzeri

Fórmulas probabilísticas para problemas de Dirichlet e simulações /
Pietra Strazzeri Kodama. -- Bauru, 2024

78 p. : tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),
Faculdade de Ciências, Bauru

Orientador: Fabiano Borges da Silva

1. Movimento Browniano. 2. Integral de Itô. 3. Equação diferencial
parcial. 4. Problema de Dirichlet. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de
Ciências, Bauru. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Fórmulas probabilísticas para problemas de Dirichlet e simulações

AUTORA: PIETRA STRAZZERI KODAMA

ORIENTADOR: FABIANO BORGES DA SILVA

Aprovada como parte das exigências para obtenção do Título de Mestra em Matemática Aplicada e Computacional, pela Comissão Examinadora:

A handwritten signature in blue ink, likely belonging to Prof. Dr. Fabiano Borges da Silva, is positioned above his name and affiliation.

Prof. Dr. FABIANO BORGES DA SILVA (Participação Virtual)
Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências de Bauru UNESP

Prof. Dr. AUGUSTO CÉSAR DOS REIS COSTA (Participação Virtual)
Faculdade de Matemática / Universidade Federal do Pará

Prof. Dr. RINALDO VIEIRA DA SILVA JUNIOR (Participação Virtual)
Departamento de Matemática / Universidade Federal de Alagoas

Presidente Prudente, 30 de outubro de 2023

A meu amigo Vinicius.

*Uma das inúmeras vítimas da pandemia,
foi o primeiro a compartilhar comigo a jornada pelo mestrado.*

Agradecimentos

Este trabalho não seria possível sem uma série de contribuições de pessoas que me apoiaram de maneira acadêmica e pessoal. Então, aqui seguem meus sinceros agradecimentos à todas elas.

A meu orientador, pelas imensas contribuições, além de toda a paciência e cuidado, todo o tempo que disponibilizou para me ensinar, explicar, orientar e discutir quaisquer pormenores que fossem, sempre com muita empolgação.

A meus colegas de mestrado que tive a honra de poder chamar de amigos e que me apoiaram, ouviram, discutiram e assim, transformaram toda a experiência da pesquisa em algo mais leve e único.

A meus professores, que me mostraram as boas experiências que podemos ter na pesquisa e docência, que tiveram paciência para me ensinar coisas além do conteúdo e que me abrilhantaram, de todas as formas possíveis.

À minha família e amigos, que acreditaram em mim, me ouviram reclamar e aceitaram discutir comigo todos os aspectos menos técnicos deste trabalho, sempre me fazendo sentir especial.

À minha mãe por enxergar valor na educação e nos estudos, e a meu pai por concordar com ela, mesmo que sem grandes convicções. Os esforços e sacrifícios dos dois possibilitaram toda a jornada construída até aqui.

Um agradecimento adicional à equipe de gestão do PosMAC por toda dedicação e eficiência nos atendimentos solicitados.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

*“A matemática, senhora que ensina o homem a ser simples e modesto,
é a base de todas as ciências e de todas as artes”.*

Malba Tahan

Resumo

Neste trabalho, a análise das soluções de equações diferenciais parciais elípticas através de processos estocásticos é explorada, um tópico clássico e fascinante na área da Análise Estocástica. Apresentamos conceitos do Cálculo Estocástico, como movimento Browniano, integral de Itô e tempo de parada, entre outros, oferecendo uma abordagem probabilística para soluções das equações diferenciais. Nosso enfoque principal reside na aplicação do movimento Browniano na resolução de problemas Dirichlet com condições de contorno, investigando a teoria subjacente a esses resultados, analisando as fórmulas probabilísticas obtidas e suas propriedades. Além disso, buscamos validar esses resultados por meio de simulações computacionais.

Palavras-Chave: *Movimento Browniano, integral de Itô, equação diferencial parcial, problema de Dirichlet.*

Abstract

In this work, the analysis of solutions to elliptic partial differential equations through stochastic processes is explored, a classic and fascinating topic in the field of Stochastic Analysis. We present concepts from Stochastic Calculus, such as Brownian motion, Itô's integral, and stopping time, among others, offering a probabilistic approach to solutions of differential equations. Our primary focus lies in applying Brownian motion to solve Dirichlet problems with boundary conditions, investigating the theory underlying these results, analyzing the obtained probabilistic formulas and their properties. Additionally, we aim to validate these results through computational simulations.

Keywords: *Brownian Motion, Itô integral, partial differential equation, Dirichlet problem.*

Lista de Figuras

1.1	Diagrama de uma variável aleatória.	17
4.1	Geometria do problema de Dirichlet em um retângulo.	62
4.2	Solução analítica aproximada para o problema de Dirichlet em um qua-	
	drado de lado 1.	63
4.3	Simulação da trajetória de saída do movimento Browniano bidimensional	
	de um quadrado de lado 1.	64
4.4	Comparação entre solução analítica e aproximada via movimento Brow-	
	niano para o problema de Dirichlet no quadrado de lado 1.	65

Conteúdo

Resumo	5
Abstract	7
Lista de Figuras	8
Introdução	13
1 Uma introdução a Teoria de Probabilidade	15
1.1 Espaço de Probabilidade	15
1.2 Variável Aleatória	17
1.3 Esperança de uma Variável Aleatória	19
1.3.1 Esperança Condicional	21
2 Processos Estocásticos	23
2.1 Filtração e tempo de parada	24
2.2 Movimento Browniano	27
2.2.1 Variação Quadrática do Movimento Browniano	30
3 Cálculo Estocástico	33
3.1 Integral de Itô	33
3.2 Fórmula de Itô	40
3.2.1 Fórmula de Itô multidimensional	44
3.3 Difusão de Itô	46
3.3.1 Gerador Infinitesimal de uma Difusão de Itô	49

4	Fórmulas probabilísticas para alguns problemas de Dirichlet	55
4.1	Aplicação em um problema de Dirichlet e fórmula de Feynman-Kac . . .	57
4.2	Simulação de uma fórmula probabilística para um problema de Dirichlet	60
4.2.1	O problema de Dirichlet em um retângulo	61
4.2.2	Simulação para uma fronteira retangular	62
	Considerações finais	67
	A O código	69
	B Resultados da simulação	73
	Bibliografia	78

Introdução

Os processos estocásticos são famílias de variáveis aleatórias que compõem ferramenta importante e versátil para diversas áreas da modelagem matemática, tendo aplicações substanciais na biologia e finanças (ver material em [Calin \(2012\)](#)), por conseguirem modelar fenômenos de natureza aleatória. Para seu estudo, usamos o cálculo estocástico que visa analisar os mais diversos aspectos das variações obtidas em tais modelagens e, dentre suas ferramentas, precisamos ressaltar a fórmula de Itô, baseada na teoria de integração estocástica com respeito ao movimento Browniano, idealizada pelo matemático japonês Kiyoshi Itô, que resgata a ideia de derivada de funções compostas para funções não diferenciáveis do tipo $f(X_t)$, onde X_t é um processo estocástico e f é uma função suficientemente bem comportada.

Dentre diversas aplicações, o cálculo estocástico pode ser empregado às equações diferenciais parciais elípticas que possibilitam o estudo de problemas físicos, como na equação do calor, biológicos, através da equação que modela o crescimento populacional ou ainda, em aplicações da engenharia. Situações aplicadas como estas, no entanto, exigem condições de contorno que se adéquem à realidade, sejam elas condições de fronteira que delimitam o comportamento da equação diferencial parcial em determinada região ou de valor inicial (ou final), que predeterminam o valor assumido por ela no início (ou término) da simulação.

Neste trabalho, usaremos a fórmula de Itô para solucionar alguns dos problemas clássicos de Dirichlet que envolvem o estudo de funções harmônicas em uma região suave

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } U \\ u = g & \text{em } \partial U \end{cases},$$

e são nomeados em homenagem ao matemático alemão Lejeune Dirichlet (1805 - 1859) que, em seus trabalhos baseados em uma situação ilustrada inicialmente por Laplace, estudou as funções harmônicas com condições de contorno aplicadas (O'Connor e Robertson (2000)).

Tais problemas, nem sempre possuem solução e quando existem, geralmente não possuem representação analítica, sendo rotineira a utilização de métodos numéricos que a aproximam em determinado ponto do domínio. Segundo Buchmann e Petersen (2003), no entanto, estes métodos deixam de ser praticáveis a medida aumentamos a dimensão do problema tornando o estudo das soluções via processos estocásticos atrativo por não contar com esse empecilho.

No geral, os principais resultados deste trabalho expressam a solução para o problema de Dirichlet através da média dos valores de uma função de contorno específica, calculada em pontos da fronteira atingidos pelo movimento Browniano ou em relação ao tempo médio que o movimento leva para atingir a fronteira. Para validar um desses resultados, optamos por um problema de Dirichlet com fronteira em forma de quadrado, cuja solução é amplamente reconhecida na literatura. Realizamos simulações computacionais em Python para obter uma estimativa aproximada dessa solução, usando a média dos valores da função (fornecida no problema) nos pontos da fronteira atingidos pelo movimento Browniano.

No Capítulo 1, estudamos os conceitos probabilísticos fundamentais como espaço de probabilidade, variáveis aleatórias e média. No Capítulo 2, apresentamos os processos estocásticos e conceitos importantes como filtração e tempo de parada, além do movimento Browniano e algumas de suas propriedades mais marcantes. No Capítulo 3, discutimos o cálculo de Itô através de algumas construções primordiais, onde as fórmulas de Itô e os processos de difusão foram devidamente explorados. Além disso, realizamos um estudo considerável da integral de Itô, suas particularidades e o tipo de processos que garantem boas propriedades na integração. Por fim, no Capítulo 4, as teorias apresentadas foram aplicadas em alguns dos problemas clássicos de Dirichlet, juntamente com a simulação computacional que valida os resultados obtidos.

Uma introdução a Teoria de Probabilidade

A probabilidade embasa todo o estudo desenvolvido neste trabalho, sendo importante compreender o mínimo de seus conceitos visando sua usabilidade. Embora não seja o assunto principal, este capítulo foi desenvolvido com muito cuidado e atenção especial aos tópicos que talvez exijam complementações, podendo estas serem realizadas mediante referências devidamente indicadas.

Para o conteúdo probabilístico, utilizamos principalmente (Klebaner (2005); Calin (2015)), com ajustes de notação ou clareza feitos segundo (Grimmett e Welsh (2014); Ruffino (2009)) e, para os itens envolvendo especificamente teoria da medida, consultamos também (Cabral (2016); Folland (1984)).

1.1 Espaço de Probabilidade

O *espaço de probabilidade* é onde os cálculos deste trabalho foram desenvolvidos, sendo ele definido por uma tripla $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, onde Ω é um conjunto abstrato chamado comumente de espaço amostral, $\mathcal{F}$ é o conjunto de todos os eventos possíveis e P as probabilidades de cada evento ocorrer.

Os eventos possíveis do espaço são definidos pela σ -álgebra $\mathcal{F}$, uma coleção de subconjuntos do espaço amostral fechada para união enumerável e complementos.

Definição 1.1.1. Seja Ω um conjunto, uma classe $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω chama-se uma σ -álgebra se:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$;
2. Para todo $A \in \mathcal{F}$, seu complementar A^c também está em $\mathcal{F}$;
3. Para toda sequência $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}$, a união $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$.

Uma consequência dos itens (1) e (2) é que $\Omega \in \mathcal{F}$. Ademais, os conjuntos de $\mathcal{F}$ são mensuráveis e na teoria de probabilidade são comumente chamados de eventos. Exemplos de σ -álgebras podem ser vistos em [Cabral \(2016\)](#) e [Folland \(1984\)](#) bem como algumas propriedades elementares enunciadas abaixo como consequências imediatas da definição:

Lema 1.1.1. *Seja $\mathcal{F}$ uma σ -álgebra de conjuntos de Ω . Para todos $A, B \in \mathcal{F}$:*

- a. $A \cup B \in \mathcal{F}$;
- b. $A \cap B \in \mathcal{F}$;
- c. $A \setminus B \in \mathcal{F}$;
- d. Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ então, a interseção enumerável $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.

O par ordenado $(\Omega, \mathcal{F})$ definido até agora é um espaço mensurável, admitindo medida – função que atribui valores reais não-negativos para subconjuntos de Ω (mais detalhes em [Ruffino \(2009\)](#) e [Folland \(1984\)](#)).

Definição 1.1.2. Uma função $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ é uma *medida* sobre o espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$ se:

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. Se $(A_n)_{n \geq 1}$ são eventos disjuntos em $\mathcal{F}$, ou seja, $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$ então,

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Note que $\mu(A) \geq 0$, $\forall A \in \mathcal{F}$. Além disso, a condição (2) é chamada σ -aditiva e caso sejam considerados eventos disjuntos A_i , $i \in \mathbb{N}$, com $A_i = \emptyset$, quando $i > m$, infere-se que a propriedade é válida também para o caso finito $\mu(\bigcup_{i=1}^m A_i) = \sum_{i=1}^m \mu(A_i)$. Para este trabalho, porém, os casos interessantes são aquelas onde a medida do todo vale um, i.e. $\mu(\Omega) = 1$. Desta forma, μ é chamada de *medida de probabilidade* (ou simplesmente *probabilidade*) sobre o espaço $(\Omega, \mathcal{F})$ denotada por P .

Materiais como [Grimmett e Welsh \(2014\)](#) e [Cabral \(2016\)](#) fornecem mais detalhes, propriedades e exemplos a respeito do espaço de probabilidade.

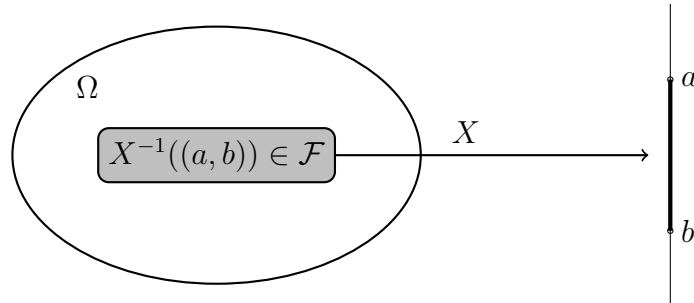
1.2 Variável Aleatória

Uma *variável aleatória* X definida no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é uma função $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\{\omega \in \Omega ; a < X(\omega) < b\} \in \mathcal{F}, \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

Essa definição é equivalente a dizer que X é uma função $\mathcal{F}$ -mensurável, ou seja, dados quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, a imagem inversa associada por X ao intervalo (a, b) forma um conjunto que é um evento (elemento de $\mathcal{F}$), conforme a Figura 1.1. Se, para o espaço amostral Ω , tivermos a σ -álgebra associada à ele $\mathcal{F} = 2^\Omega$, i.e. o conjunto das partes de Ω , qualquer função no espaço amostral é uma variável aleatória ([Calin \(2015\)](#)).

Figura 1.1: Diagrama de uma variável aleatória.



Fonte: próprio autor.

O estudo de uma variável aleatória pode ser feito através de sua função de distribuição, que definiremos a seguir.

Definição 1.2.1. Seja X uma variável aleatória no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, a *função distribuição* de X é a função $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$F_X(x) = P(\omega; X(\omega) \leq x).$$

Também podendo ser escrita simplesmente como $F_X(x) = P(X \leq x)$.

Tal função, mapeia as probabilidades de ocorrência de cada evento $\{\omega, X(\omega) \leq x\}$ $\mathcal{F}$ -mensurável. Com ela, podemos compreender o comportamento de uma variável aleatória sem conhecê-la explicitamente.

A função distribuição é não decrescente e satisfaz os limites

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1,$$

pois quando $x \rightarrow -\infty$ a probabilidade de X assumir valores menores que x torna-se cada vez menor, ao contrário do que acontece quando $x \rightarrow \infty$, a probabilidade se torna cada vez mais certa. Quando a função distribuição é diferenciável, o que acontece ao lidarmos com variáveis aleatórias contínuas, obtemos a função densidade de probabilidade (utilizada no estudo da esperança ou média).

Definição 1.2.2. A variável aleatória X é contínua se sua função distribuição F_X puder ser escrita como

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{\{X \leq x\}} dP(\omega) = \int_{-\infty}^x p(u) du,$$

com $x \in \mathbb{R}$, para uma função não-negativa $p(x)$, conhecida como *função densidade de probabilidade* de X .

Sendo assim, a função densidade de probabilidade resulta da derivada da função distribuição, quando esta existir, e satisfaz:

$$\text{i. } p(x) \geq 0 \quad \text{e} \quad \text{ii. } \int_{-\infty}^{\infty} p(u) du = 1.$$

1.3 Esperança de uma Variável Aleatória

A *esperança* ou *média* de uma variável aleatória, como o próprio nome diz, visa representar o valor médio esperado pela repetição de um experimento. É um conceito importante que será utilizado em demasia nos enunciados de propriedades da integral de Itô e no estudo subsequente do gerador infinitesimal de um processo estocástico.

Definição 1.3.1. Se X é uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade $p(x)$, a *esperança* de X é denotada por $\mathbb{E}[X]$ e definida por

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} xp(x) dx,$$

sempre que essa integral convergir absolutamente, ou seja, $\int_{\mathbb{R}} |x|p(x) dx < \infty$.

Sejam $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e X uma variável aleatória no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Tem-se que $Y(\omega) = h[X(\omega)]$, ou simplesmente $Y = h(X)$, é uma função composta $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Em geral, Y não é variável aleatória por não satisfazer a condição (1.1) exceto quando h é uma função suficientemente bem comportada, então se $h(x)$ for uma função mensurável (que permite uma teoria de integração – ver [Ruffino \(2009\)](#) e [Folland \(1984\)](#)), vale que

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_{\Omega} h(X(\omega)) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} h(x)p(x) dx, \quad (1.2)$$

onde $p(x)$ é a função densidade de probabilidade da variável aleatória X .

A esperança conserva a linearidade da integração, preservando as operações. Então ao considerar uma constante qualquer $c \in \mathbb{R}$ e variáveis aleatórias X e Y :

1. $\mathbb{E}[c] = c$;
2. $\mathbb{E}[cX] = c\mathbb{E}[X]$;
3. $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$.

Outra propriedade diz respeito à independência das variáveis aleatórias que, a grosso modo, pode ser explicada quando as ocorrências de duas variáveis aleatórias X e Y não interferem na probabilidade de ocorrência uma da outra.

Definição 1.3.2. Dado um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dois eventos $A, B \in \mathcal{F}$ são independentes em relação à medida P se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Tomando os eventos como $A = \{\omega; X(\omega) \in I_1\}$ e $B = \{\omega; Y(\omega) \in I_2\}$ para intervalos abertos $I_1, I_2 \in \mathbb{R}$ e $\omega \in \Omega$, as variáveis aleatórias X e Y serão independentes se os eventos também o forem. Donde segue a proposição:

Proposição 1.3.1. *Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com funções densidade de probabilidade $p_X(x)$ e $p_Y(y)$, então $p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$.*

E desta, segue uma variação do Teorema de Fubini aplicado sobre variáveis aleatórias, enunciada na proposição a seguir.

Proposição 1.3.2. *Sejam X e Y variáveis aleatórias integráveis e independentes. Então $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.*

Demonstração. Sejam p_X, p_Y e $p_{X,Y}$ as funções densidade de probabilidade das variáveis aleatórias X, Y e (X, Y) , respectivamente. Já que X e Y são independentes, pela Proposição 1.3.1 tem-se

$$\mathbb{E}[XY] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} xy p_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} x p_X(x) dx \int_{\mathbb{R}} y p_Y(y) dy = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

□

Como a média busca “aproximar” o valor esperado de uma variável aleatória, a *variância* visa analisar a confiabilidade dessa aproximação, pois, conforme a variância cresce, maior é a probabilidade de X estar se afastando da média.

Definição 1.3.3. A *variância* de uma variável aleatória X em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é dada por

$$\begin{aligned} Var[X] &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \\ &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]. \end{aligned}$$

A média e a variância também são utilizadas na definição da *função de distribuição de probabilidade* de uma variável aleatória. O movimento Browniano, processo estocástico principal deste trabalho, possui *distribuição normal* que será definida a seguir.

Definição 1.3.4. Uma variável aleatória X em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é dita ter uma *distribuição normal* se sua função densidade de probabilidade for dada por

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)},$$

com μ e $\sigma > 0$ sendo parâmetros constantes definidos como

$$\mathbb{E}[X] = \mu \quad \text{e} \quad \text{Var}[X] = \sigma^2.$$

Se X satisfizer as condições acima, denota-se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

1.3.1 Esperança Condicional

A *esperança condicional* de uma variável aleatória X em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é uma forma de aproximar o valor esperado por X dada a informação armazenada na σ -álgebra $\mathcal{G}$ contida em $\mathcal{F}$. Em outras palavras, se a informação contida em $\mathcal{G}$ não for suficiente para determinar X completamente, a melhor aproximação que se pode fazer é através da variável aleatória $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ chamada esperança condicional de X dado $\mathcal{G}$. Em contrapartida, se toda a informação $\mathcal{F}$ é conhecida, como X é $\mathcal{F}$ -mensurável, a esperança condicional de X dada $\mathcal{F}$ deve ser o próprio valor assumido por X , i.e. $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] = X$.

Definição 1.3.5. Em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, com a variável aleatória $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. Se $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ é uma σ -álgebra, a *esperança condicional* de X dado $\mathcal{G}$ é uma função $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ (quase sempre única) de Ω para $\mathbb{R}$ satisfazendo:

1. $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ é $\mathcal{G}$ -mensurável;
2. $\int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] dP = \int_A X dP$, para todo $A \in \mathcal{G}$.

Proposição 1.3.3. *Sejam X e Y variáveis aleatórias no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tais que $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ e $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$, com $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ e $a, b \in \mathbb{R}$ constantes. Tem-se:*

1. $\mathbb{E}[aX + bY|\mathcal{G}] = a\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + b\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$;
2. $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$;

3. $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$ se X é $\mathcal{G}$ -mensurável;
4. $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$ se X for independente de $\mathcal{G}$;
5. $\mathbb{E}[YX|\mathcal{G}] = Y\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ se Y é $\mathcal{G}$ -mensurável.

As três primeiras propriedades resultam diretamente da definição de esperança condicional e as últimas podem ser vistas em detalhes em [Oksendal \(2003\)](#) p.300. Note que tais itens apenas reforçam a ideia de que a esperança condicional aproximará o valor de uma variável aleatória dada certa informação.

Processos Estocásticos

Um *processo estocástico* é uma família de variáveis aleatórias no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ costumeiramente parametrizadas por um índice temporal t denotada por

$$\{X_t\}_{t \in T},$$

onde as notações X_t e $X(t)$ são utilizadas equivalentemente e representam, por um abuso de notação, um processo estocástico agindo sobre uma “partícula” ω em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. O processo pode ocorrer em tempo discreto ou contínuo a depender do intervalo $T \subset \mathbb{R}$. Para os fins deste trabalho, considere intervalos de tempo contínuos, $T = [0, \infty)$. Além disso, um processo n -dimensional, diz respeito à variável aleatória definida como $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ de forma que as propriedades e tópicos percorridos para o caso $n = 1$ valem, de modo geral, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $t \in T$ fixo, uma variável aleatória $\omega \rightarrow X_t(\omega)$ é obtida, com $\omega \in \Omega$, de modo que, se ω é considerada uma partícula (ou experimento), então $X_t(\omega)$ representa a posição da partícula no tempo t (ou o resultado do experimento no instante t). Por outro lado, ao fixar $\omega \in \Omega$, a função $t \rightarrow X_t(\omega)$, $t \in T$, é chamada de “caminho” ou “realização” de X_t . A continuidade de um processo estocástico depende de seus caminhos serem quase sempre contínuos.

Tópicos como filtração e tempo de parada, serão detalhados nas próximas seções, além de um processo estocástico específico chamado *movimento Browniano*. As definições,

exemplos e teoremas apresentados neste capítulo seguem principalmente as referências: (Klebaner (2005); Calin (2015); Ruffino (2009)) para a construção geral dos tópicos; (Schilling e Partzsch (2012); Mörters e Peres (2010); Gall (2016)) para observações mais direcionadas ao movimento Browniano e tempo de parada, além de eventuais consultas em materiais de apoio devidamente indicados.

2.1 Filtração e tempo de parada

Um conceito importante para os processos estocásticos contínuos é a *filtração* $\mathbb{F}$ que se refere a uma família $\{\mathcal{F}_t\}$ de σ -álgebras crescentes no espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$, tal que, para qualquer $0 \leq s < t$, tem-se

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}.$$

A quádrupla $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ é chamada *espaço filtrado de probabilidade*.

A filtração funciona como o histórico de $\{X_t\}$ até o instante t e, como é crescente, as informações ou o conhecimento sobre realizações e não-realizações de X_t se acumulam. Em geral, usa-se a σ -álgebra trivial para representar a falta de informações sobre o processo no instante $t = 0$, i.e. $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

O processo estocástico $\{X_t\}$ se diz adaptado à filtração $\mathbb{F}$ se para todo $t \in T$, X_t for uma variável aleatória $\mathcal{F}_t$ -mensurável e todo processo é adaptado à sua filtração natural $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s; s \leq t)$ definida pela σ -álgebra gerada por ele próprio. Uma filtração ainda pode ser chamada contínua a direita se $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$, onde

$$\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{F}_{t+\frac{1}{n}}.$$

Neste caso, entende-se que todo conhecimento obtido imediatamente após t também diz respeito à t .

O *tempo de parada* (ou tempo de Markov em algumas bibliografias) é uma variável aleatória que permite o estudo de fenômenos ocorridos em intervalos de tempo aleatórios.

Definição 2.1.1. Uma variável aleatória $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ é chamada *tempo de parada* com respeito à filtração $\{\mathcal{F}_t\}$ se

$$\{\omega \in \Omega; \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \forall t \geq 0.$$

Sendo assim, é possível dizer se o evento $\{\tau \leq t\}$ ocorreu ou não dada apenas a informação armazenada em $\mathcal{F}_t$, ou seja, não é preciso nenhum dado futuro para determinar se a variável aleatória τ assumiu valores menores ou iguais a t . Com isso, também é possível dizer se o evento $\{\tau > t\}$ ocorreu, pois $\{\tau > t\} \in \mathcal{F}_t$ pela definição de σ -álgebra. Note que é plausível que τ assuma $+\infty$, desta forma o processo continuará indefinidamente, ou seja, o tempo de parada não é necessariamente o “tempo de parada” literal de um processo estocástico, essa variável aleatória recebe tal nome por uma de suas aplicabilidades que determinará o primeiro momento em que um processo atinge uma fronteira ou entra em determinado conjunto, ao passo de que há inúmeros exemplos onde o processo não para em τ . Alguns exemplos, baseados no material disponível em [Sigman \(2006\)](#), que podem ajudar a entender o conceito de tempo de parada estão enunciados abaixo:

- a) (*Constante*) Quando $\tau(\omega) = c$, com $c \in \mathbb{R}$, o evento $\{\omega \in \Omega; \tau(\omega) = c \leq t\}$ é vazio ou ocorre para todo ω sendo o próprio Ω , ou seja, ele é mensurável pela σ -álgebra trivial mencionada anteriormente e, como $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0$, τ é tempo de parada com respeito à qualquer filtração. Um exemplo simples que ilustra esse caso é o de um jogador que decide parar suas apostas em um tempo t fixo. Desta forma, a decisão de parar o jogo não depende de nenhum acontecimento futuro ou passado, apenas da evolução natural do mesmo.
- b) (*Evolução de um estoque*) Considere que o processo X_t representa o preço de um estoque com o passar do tempo t . A variável aleatória τ , que controla a decisão de vender ou não o estoque após um intervalo de tempo, é um tempo de parada. Ou ainda, se τ determina um valor específico que ao ser atingido culminará na venda do estoque, ela também é tempo de parada. Entretanto, caso a decisão de venda do estoque aconteça apenas quando este atingir seu preço máximo, tal variável aleatória não será tempo de parada, pois dependerá de informações futuras.

- c) (*Primeira passagem*) A variável aleatória $\tau(\omega) = \inf\{t \geq 0; X_t(\omega) = a\}$ é tempo de parada e determina quando um processo X_t atinge o estado a pela primeira vez. Entretanto, uma variável aleatória que indica a última passagem de um processo por determinado estado, i.e. $\tau(\omega) = \sup\{t \geq 0; X_t(\omega) = a\}$, não é tempo de parada.
- d) (*Entrada em um conjunto*) A variável aleatória $\tau(\omega) := \inf\{t \geq 0; X_t(\omega) \in A\}$ é tempo de parada e representa a primeira vez em que o processo atinge um subconjunto denso $A \subset \mathbb{R}^n$, onde se convencionou que $\inf\{\emptyset\} = \infty$ e neste caso, pode-se dizer que o processo nunca atinge o conjunto. Esse é um uso clássico de tempo de parada que será devidamente enunciado a seguir.

Proposição 2.1.1. *Seja A um subconjunto não vazio e denso de $\mathbb{R}^n$ e X_t um processo estocástico contínuo n -dimensional adaptado a sua filtração natural $\mathcal{F}_t$. Defina a variável aleatória*

$$\tau := \inf\{t \geq 0; X_t \in A\}.$$

- i. *Se A for fechado, então τ é um $\mathcal{F}_t$ tempo de parada.*
- ii. *Se A for aberto, então τ é um $\mathcal{F}_{t+}$ tempo de parada.*

Um esboço da prova desta proposição pode ser visto em [Ruffino \(2009\)](#), p.41 e a demonstração feita em mais detalhes pode ser consultada em [Schilling e Partzsch \(2012\)](#) p.53.

A próxima proposição fornece resultados utilizados posteriormente e a prova pode ser vista em [Calin \(2015\)](#), p.75:

Proposição 2.1.2. *Sejam τ_1 e τ_2 tempos de parada com respeito à filtração $\mathcal{F}_t$. Então, $\tau_1 \vee \tau_2 = \max\{\tau_1, \tau_2\}$, $\tau_1 \wedge \tau_2 = \min\{\tau_1, \tau_2\}$ e $\tau_1 + \tau_2$ são tempos de parada.*

Observe que os exemplos (c) e (d) acima, representam situações em que τ não é o tempo de parada literal de um processo, e sim um marco de algum acontecimento, mas podem ser utilizadas para parar o processo se este for definido como $X_{t \wedge \tau}(\omega)$. Desta forma, o processo X_t continua em $t \in T$ até que atinja a condição estabelecida em τ .

2.2 Movimento Browniano

O movimento Browniano é um processo estocástico que recebe seu nome em homenagem ao botânico escocês Robert Brown (1773 - 1858) que, em seus estudos, observou o movimento aleatório e ininterrupto de grãos de pólen na água. Ao repetir o experimento em outros fluidos, notou que o movimento era incessante e não tinha causa aparente, pois as partículas eram inanimadas. Suas descobertas, publicadas em 1828 e 1829, foram as primeiras investigações científicas a respeito do processo agora referenciado em seu nome. Tais trabalhos foram citados posteriormente por Einstein, em 1905, como sendo a possível comprovação para a teoria atômica, pois desta forma o movimento observado por Brown aconteceria devido à influência dos átomos do fluido na partícula de pólen. Adiante, será definida a integral para processos estocásticos baseada no movimento Browniano, ferramenta útil no estudo dos processos de difusão que apresentarão uma importante conexão com as equações diferenciais parciais, tema principal deste trabalho.

Na matemática, o movimento Browniano é mais comumente conhecido como processo de Wiener em homenagem à Norbert Wiener¹, responsável por dar um tratamento matemático mais rigoroso à teoria que antes encontrava seus principais nomes na Física, sendo creditado por generalizá-la para processos mais gerais motivado por problemas da Engenharia. Wiener é citado por compreender o movimento Browniano como um martingale e foi Paul Lévy² quem, posteriormente, provou que ambos os processos eram equivalentes.

Sendo assim, neste trabalho será adotada W_t como notação para o movimento Browniano, em homenagem à Wiener, mas é possível encontrar B_t em outras bibliografias de maneira equivalente. A estrutura deste processo tem construções clássicas por Wiener, Andrei Kolmogorov e Lévy e a depender do seu objetivo cada uma delas oferece um meio mais viável de estudo, mas tais construções vão bem além do objetivo deste trabalho, portanto fica a critério do leitor consultá-las em Schilling e Partzsch (2012). Aqui, basta a definição:

¹Norbert Wiener (1894 - 1964) foi um matemático americano que contribuiu para diversas áreas além da Probabilidade, incluindo os problemas de Dirichlet (O'Connor e Robertson (2003)).

²Paul Pierre Lévy (1886 - 1971) foi um matemático francês responsável por importantes avanços na Probabilidade, tendo trabalhado também com equação diferencial parcial (O'Connor e Robertson (2020)).

Definição 2.2.1. Um processo estocástico contínuo W_t , $t \geq 0$, é chamado *movimento Browniano* ou *processo de Wiener* se

1. quase sempre se inicia na origem, i.e. $W_0 = 0$ q.s.;
2. possui incrementos independentes, ou seja, para todos $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ as variáveis aleatórias $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ são independentes;
3. os incrementos $W_t - W_s$ têm distribuição normal com média 0 e variância $t - s$, para quaisquer $0 \leq s \leq t$. Escreve-se $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$.

É útil saber que apesar de o movimento Browniano quase sempre se iniciar em zero pelo item (1), o processo $X_t = W_t + x$ preserva todas as propriedades listadas acima sendo tido como o movimento Browniano iniciado em x .

Note que a independência de seus incrementos sugere que o movimento Browniano é também um processo sem memória, por indicar que os acontecimentos futuros não dependem do passado e de fato, podemos provar que ele possui a propriedade *markoviana* (ver mais detalhes no capítulo 6 de [Schilling e Partzsch \(2012\)](#)). Outro ponto que vale ressaltar é que, dos itens (1) e (3) temos,

$$\mathbb{E}[W_t] = \mathbb{E}[W_t - W_0] = 0 \quad \text{e}$$

$$Var[W_t] = Var[W_t - W_0] = t, \quad \forall t \geq 0.$$

Ou seja, $W_t \sim N(0, t)$ o que infere que embora a média do movimento Browniano seja constante igual a zero, a confiabilidade de que a partícula esteja de fato próxima de zero diminui à medida que t aumenta, pois a variância cresce com o tempo. Devido à distribuição normal, também podemos enunciar a função densidade de probabilidade do movimento Browniano como na Definição [1.3.4](#)

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}. \quad (2.1)$$

Da Definição de variância [1.3.3](#) e sabendo que $\mathbb{E}[W_t] = 0$, temos

$$\mathbb{E}[W_t^2] - (\mathbb{E}[W_t])^2 = Var[W_t] \Rightarrow \mathbb{E}[W_t^2] = t.$$

Assim, verificamos que, embora os incrementos sejam independentes, W_t e W_s , com $0 < s < t$, não o são, pois

$$\mathbb{E}[W_t W_s] = \mathbb{E}[(W_s - W_0)(W_t - W_s) + W_s^2] = \mathbb{E}[(W_s - W_0)]\mathbb{E}[W_t - W_s] + \mathbb{E}[W_s^2] = s.$$

Proposição 2.2.1. *Seja W_t um movimento Browniano. Se $0 < s < t$, então*

1. $\mathbb{E}[(W_t - W_s)^2] = t - s$;
2. $\text{Var}[(W_t - W_s)^2] = 2(t - s)^2$.

A demonstração pode ser vista em [Calin \(2015\)](#) p.118.

Embora o movimento Browniano seja contínuo, ele não é diferenciável em nenhum ponto, isto porque, por menor que seja o intervalo de tempo, seu comportamento é de variação infinita. Uma prova simples pode ser vista em [Klebaner \(2005\)](#) e mais detalhes em [Mörters e Peres \(2010\)](#) p.18. Nas próximas seções estudaremos a respeito da variação da média quadrática do movimento Browniano, mas antes disso, apresentamos um pouco mais sobre tempo de parada, agora de forma mais direcionada ao movimento Browniano, como faz [Klebaner \(2005\)](#).

Definição 2.2.2. A variável aleatória τ é tempo de parada para W_t , $t \geq 0$, se para todo t o conjunto $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, onde consideramos a filtração natural $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s; s \leq t)$.

Isso quer dizer que para qualquer t é possível decidir se $\{\tau \leq t\}$ ocorreu ou não, observando apenas o próprio movimento Browniano em instantes anteriores a t . Isso possibilita ressignificar alguns exemplos da seção anterior direcionando-os ao movimento Browniano.

- a) Seja τ a primeira vez que W_t assume 1. Formalmente, $\tau(\omega) = \inf\{t \geq 0; W_t(\omega) = 1\}$.

Se $W_s(\omega)$ para todo $s \leq t$ é conhecido, então é viável dizer se o movimento Browniano assumiu ou não 1 até o instante t . Por essa razão, τ é tempo de parada, i.e. $\{\tau(\omega) \leq t\} = \{W_s(\omega) < 1, \text{ para todo } s \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. De maneira análoga, generaliza-se que $\tau(\omega) = \inf\{t \geq 0; W_t(\omega) = a\}$ é tempo de parada.

- b) Tomando τ como o instante em que o movimento Browniano atinge seu valor máximo no intervalo $[0, 1]$, fica mais uma vez evidente que para decidir se $\{\tau \leq t\}$ ocorreu

ou não, não é suficiente saber o que acontece até t , pois seria necessário toda a informação sobre o processo no intervalo todo. Então τ não é tempo de parada.

- c) Se τ for o último zero do movimento Browniano até o instante $t = 1$, ele não é tempo de parada, pois se $\tau \leq t$, então não existem zeros no intervalo $(t, 1]$ e tal informação não é contida apenas em $\mathcal{F}_t$.

Os exemplos acima, reforçam o conceito de tempo de parada e preparam para a aplicação que será vista adiante. Agora, discutiremos de forma mais elaborada os incrementos do movimento Browniano e a importância da variação quadrática.

2.2.1 Variação Quadrática do Movimento Browniano

Apesar de sua variação infinita, o movimento Browniano, na média quadrática, converge para um número finito a medida que a “distância” entre seus incrementos tende a zero. Para entender isso, a próxima definição constrói o limite da média quadrática.

Definição 2.2.3. Dado o processo estocástico $\{X_t\}_{t \geq 0}$, X_t converge para X na média quadrática se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(X_t - X)^2] = 0.$$

Denotamos $mq\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = X$.

Escrevendo a esperança como uma integral, podemos interpretar a definição como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (X_t - X)^2 dP = 0,$$

indicando que a distância (na métrica do espaço de probabilidade) entre X_t e X tende a zero quando elevada ao quadrado. Este limite será útil na elaboração do cálculo de Itô no próximo capítulo.

A variação quadrática do movimento Browniano pode ser estendida para funções contínuas no geral em um intervalo de tempo finito. No caso do movimento Browniano, a variação quadrática difere de zero, significando sua variação infinita.

Proposição 2.2.2. *Seja $T > 0$ e dada uma partição equidistante $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T$. Então*

$$mq\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 = T.$$

A prova está em [Calin \(2015\)](#) p.109, onde se usa a independência dos incrementos e os resultados da Proposição [2.2.1](#). É comum definir a integral estocástica a partir do limite descrito acima, i.e.

$$\int_0^T (dW_t)^2 := mq\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2,$$

onde, dW_t representa, de maneira simbólica, os infinitesimais incrementos do movimento Browniano. Como $T = \int_0^T dt$, temos que

$$\int_0^T (dW_t)^2 = \int_0^T dt, \quad \forall T > 0.$$

E com isso, estabelecemos uma relação fundamental para o cálculo estocástico baseado no movimento Browniano:

$$dW_t^2 = dt.$$

Grosseiramente falando, isso quer dizer que na média quadrática, o comportamento do movimento Browniano é previsível e determinístico, não podendo ser ignorado. Este resultado é tido como a representação infinitesimal da análise feita anteriormente que mostrou que $\mathbb{E}[W_t^2] = t$. Seguindo a mesma proposta,

$$mq\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(t_{i+1} - t_i) = 0,$$

que pode ser representado usualmente como

$$dW_t dt = 0.$$

Tais relações são essenciais para o estudo do cálculo estocástico baseado no movimento Browniano, conhecido por Cálculo de Itô.

Cálculo Estocástico

A irregularidade de processos estocásticos contínuos que não são de variação finita, como no movimento Browniano, impossibilita o uso de ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral para o seu estudo infinitesimal, e por conta disso se faz necessário o Cálculo Estocástico. Em especial, as integrais estocásticas com respeito ao movimento Browniano, idealizadas pelo matemático japonês Kiyoshi Itô (1915 - 2018) em 1944 com seu revolucionário Cálculo de Itô, trabalho pioneiro na teoria de integração estocástica e equações diferenciais estocásticas cuja motivação foram os processos de difusão que serão mostrados ainda neste capítulo. Além destes, também será enunciada a fórmula de Itô, seguindo principalmente (Klebaner (2005); Kuo (2006); Evans (2013)), com consultas também em (Calin (2015); Ruffino (2009); Oksendal (2003); Karatzas e Shreve (1991)).

3.1 Integral de Itô

A principal diferença entre a integração de Itô e a de Riemann reside no fato de que a primeira se baseia nos infinitesimais incrementos do movimento Browniano, já mencionadas anteriormente como dW_t , resultando em uma variável aleatória, enquanto a segunda considera as infinitesimais variações dt e resultam em um número real. Entretanto, mesmo com essa diferença estrutural, as duas carregam semelhanças em seus comportamentos e resultados. A construção da teoria de integração de Itô se inicia

com a busca por uma integral $\int_0^T X(t)dW_t$, com $T \in \mathbb{R}$, que permite a integração para processos contínuos baseados no movimento Browniano e que, em especial, assume o próximo resultado para aqueles com comportamento constante:

i. Se $X(t) = c$, com $c \in \mathbb{R}$ então,

$$\int_0^T c dW_t = c(W_T - W_0). \quad (3.1)$$

Em particular, se $X(t) = 1$ então,

$$\int_0^T dW_t = W_T - W_0.$$

Antes da integral de Itô para processos estocásticos mais gerais ser definida, é necessário construí-la para processos simples, como faz [Klebaner \(2005\)](#), isto porque, podemos entender processos adaptados como o limite de uma sequência de processos simples adaptados.

Processos simples são aqueles cujo comportamento é constante em intervalos de tempo finitos, sendo assim, é possível escrevê-los como um processo não aleatório que dependa apenas de t e constantes $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ tal que

$$X(t) = c_0 I_0(t) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i I_{(t_i, t_{i+1}]}(t), \quad (3.2)$$

com $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$.

Usando o resultado [\(3.1\)](#), a integral de Itô para um processo simples não aleatório é dada então por

$$\int_0^T X(t)dW_t = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

Uma dúvida pertinente agora é para quais processos a integral de Itô será definida e quais condições são necessárias para garantir um bom arranjo de propriedades. Além da continuidade já mencionada, o processo deve ser adaptado e, como já visto no capítulo anterior, todo processo é adaptado à sua filtração natural. Por isso considere, em geral, um espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ cuja filtração é aquela gerada pelo próprio processo. Sendo ele adaptado, algumas bibliografias podem chamá-lo de

não *antecipativo*, nome dado em referência ao fato de que não se pode fazer previsões a seu respeito.

A próxima condição é consideravelmente mais complexa e será útil para garantir propriedades desejáveis para cálculos futuros. Os processos *progressivos* ou *progressivamente mensuráveis* são aqueles mensuráveis nas variáveis t e ω , simultaneamente. Eles formam uma classe desejável de processos estocásticos que satisfazem, em especial,

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T X^2(t) dt \right] < \infty, \quad (3.3)$$

propriedade que permite a utilização do teorema de Fubini, ou seja, podemos escrever $\int_0^T \mathbb{E}[X^2(t)] dt < \infty$. Perceba que esta não é uma condição simples de ser garantida, pois consiste na média de uma integral determinística calculada sobre um processo estocástico. Aqui, basta a intuição de que as duas condições, embora diferentes, são uteis para descrever processos que não dependem de informações futuras e que possuem um bom comportamento quando analisados na média ao quadrado. Por simplicidade, indicamos o espaço dos processos estocásticos reais positivos, adaptados e progressivamente mensuráveis que satisfazem a condição (3.3) por $\mathbb{L}_{ad}^2[(0, T) \times \Omega]$.

Com o espaço bem definido, é válido expandir a construção associada a processos simples como na equação (3.2) para os chamados *processos simples adaptados* que contam com variáveis aleatórias ξ_i no lugar das constantes c_i , como abaixo:

$$X(t) = \xi_0 I_0(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i I_{(t_i, t_{i+1}]}(t), \quad (3.4)$$

onde $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ de forma que ξ_0 é constante e ξ_i é $\mathcal{F}_{t_i}$ -mensurável, e $\mathbb{E}[\xi_i^2] < \infty$, $\forall i \in (0, n-1)$.

De maneira análoga, a integral de Itô para tais processos é definida como a soma

$$\int_0^T X(t) dW_t = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}), \quad (3.5)$$

e já fornece propriedades interessantes como a linearidade e as definidas no próximo lema.

Lema 3.1.1. *Seja a integral definida como na equação (3.5). Então,*

- (*Média zero*)

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T X(t) dW_t \right] = 0;$$

- (*Isometria*)

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T X(t) dW_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T X^2(t) dt \right].$$

A prova pode ser vista em [Kuo \(2006\)](#) p.44 e parte da integral definida na equação [\(3.5\)](#).

De modo geral, é razoável entender processos estocásticos em $\mathbb{L}_{ad}^2[(0, T) \times \Omega]$ como o limite de uma sequência de processos simples adaptados $X^n(t)$, por isso foi feita a construção da integral de Itô para estes últimos – fato enunciado e provado em um lema de [Kuo \(2006\)](#) p.45. Nestes casos, a integral do processo é dada pelo limite em média quadrática da integral da sequência $X^n(t)$.

Exemplo 3.1.1 (Integral de Itô no movimento Browniano). Assuma $X(t) = W(t)$ e, para tal, da equação [\(3.4\)](#), tome $\xi_i^n = W(t_i^n)$. Assim, dada uma partição $0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_n^n = T$, obtemos, para cada n , um processo simples adaptado da forma

$$X^n(t) = \sum_{i=0}^{n-1} W(t_i^n) I_{(t_i^n, t_{i+1}^n]}(t).$$

Devido à continuidade do movimento Browniano, $X^n(t) \rightarrow W(t)$ quando $n \rightarrow \infty$ q.s. tomando $\max_i(t_{i+1}^n - t_i^n) \rightarrow 0$. Com isso, por [\(3.5\)](#), temos

$$\int_0^T X^n(t) dW_t = \sum_{i=0}^{n-1} W(t_i^n) (W(t_{i+1}^n) - W(t_i^n)).$$

Resta mostrar que essa sequência de integrais converge em média quadrática para a integral do movimento Browniano. Como $xy = ((x + y)^2 - x^2 - y^2)/2$, se $x = W(t_i^n)$ e $y = W(t_{i+1}^n) - W(t_i^n)$, temos que

$$W(t_i^n) (W(t_{i+1}^n) - W(t_i^n)) = \frac{1}{2} \left(W^2(t_{i+1}^n) - W^2(t_i^n) - (W(t_{i+1}^n) - W(t_i^n))^2 \right).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_0^T X^n(t) dW_t &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (W^2(t_{i+1}^n) - W^2(t_i^n)) - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} ((W(t_{i+1}^n) - W(t_i^n))^2) \\ &= \frac{1}{2} W^2(T) - \frac{1}{2} W^2(0) - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} ((W(t_{i+1}^n) - W(t_i^n))^2),\end{aligned}$$

já que a primeira soma é telescópica. Pela Proposição [2.2.2](#), a segunda soma converge em média quadrática para T e, pela definição do movimento Browniano, $W(0) = W^2(0) = 0$. Portanto,

$$\int_0^T W(t) dW_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T X^n(t) dW_t = \frac{1}{2} W^2(T) - \frac{1}{2} T.$$

Com isso, concluímos que, embora o movimento Browniano não seja diferenciável em nenhum ponto, ele admite uma teoria de integração quando analisado no limite da média quadrática, devido à sua variação quadrática finita.

Por fim, resta enunciar as propriedades tanto almejadas para uma integral estocástica.

Teorema 3.1.2. *Sejam $X(t)$ e $Y(t)$ processos estocásticos em $\mathbb{L}_{ad}^2([0, T] \times \Omega)$. A integral de Itô é definida e possui as seguintes propriedades:*

1. (Linearidade) *Sejam α e β constantes, então*

$$\int_0^T (\alpha X(t) + \beta Y(t)) dW_t = \alpha \int_0^T X(t) dW_t + \beta \int_0^T Y(t) dW_t.$$

2. (Partição) *Seja $0 < u < T$, então*

$$\int_0^T X(t) dW_t = \int_0^u X(t) dW_t + \int_u^T X(t) dW_t.$$

3. (Média zero)

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T X(t) dW_t \right] = 0.$$

4. (Isometria)

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T X(t) dW_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T X^2(t) dt \right].$$

5. (Covariância)

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T X(t) dW_t \int_0^T Y(t) dW_t \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T X(t) Y(t) dt \right].$$

A prova para os itens acima pode ser vista em [Klebaner \(2005\)](#) e [Evans \(2013\)](#). Um ponto digno de nota é que a integral de Itô não preserva a monotonicidade da integral de Riemann, i.e. $X(t) \leq Y(t)$ não implica em $\int_0^T X(t) dW_t \leq \int_0^T Y(t) dW_t$. Tome, por exemplo, $X(t) = 1$, ou seja, $X(t) > 0$. Como visto anteriormente, $\int_0^T dW_t = W(t)$ que pode ou não assumir valores positivos.

Corolário 3.1.2.1. *Seja $F_t = f(W_t, t)$, onde f é uma função contínua em $\mathbb{R}$, a integral $\int_0^T F_t dW_t$ está bem definida.*

A demonstração do corolário acima se deve à continuidade do movimento Browniano e, com este resultado, é possível construir a integral de Itô que satisfaça as condições do Teorema [3.1.2](#) para funções contínuas aplicadas sobre o movimento Browniano.

No entanto, existem classes ainda maiores de processos estocásticos integráveis, mas que não necessariamente dispõem de uma gama de propriedades tão interessantes quanto às enunciadas no Teorema [3.1.2](#) ([Kuo \(2006\)](#)).

Exemplo 3.1.2. Tome o processo $F_t = e^{W_t^2}$ contínuo. Utilizando a função densidade de probabilidade do movimento Browniano [\(2.1\)](#) e a esperança de uma função [\(1.2\)](#), temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[F_t^2] = \mathbb{E}[e^{2W_t^2}] &= \int_{\mathbb{R}} e^{2x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{x^2 \frac{4t-1}{2t}} dx. \end{aligned}$$

Realizando um estudo do sinal da função, é possível ver que a integral é finita apenas no intervalo $0 \leq t < 1/4$. Assim como enunciado por [Kuo \(2006\)](#) p. 62, a média deste processo é dada por

$$\mathbb{E}[F_t^2] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-4t}}, & \text{se } 0 \leq t < 1/4; \\ \infty, & \text{se } t \geq 1/4. \end{cases}$$

Desta forma, $\int_0^1 \mathbb{E}[F_t^2]dt = \infty$, ou seja, esta integral não satisfaz a condição (3.3) e com isso, não há garantia das propriedades listadas no Teorema 3.1.2. No entanto, já que $\int_0^1 F_t^2 dt < \infty$ quase sempre, pela continuidade de F_t , a integral de Itô é sim definida, mas agora em um novo espaço de funções mais abrangentes que pode ser encontrado em Kuo (2006).

Para o objetivo deste trabalho, a construção feita até aqui é mais que suficiente e outros detalhes a respeito da integral de Itô, bem como proposições e resultados ainda mais gerais, podem ser vistos nas bibliografias supracitadas. Por fim, assim como faz Evans (2013), a integral de Itô será enunciada para um intervalo de tempo aleatório, considerando um tempo de parada.

Definição 3.1.1. Sejam $X(t) \in \mathbb{L}_{ad}^2[(0, T) \times \Omega]$ e τ um tempo de parada com $0 \leq \tau \leq T$, define-se a variável aleatória

$$\int_0^\tau X(t)dW := \int_0^T \chi_{\{t \leq \tau\}} X(t)dW_t,$$

onde $\chi_{\{t \leq \tau\}}$ é a função característica que assume 1 quando a condição $\{t \leq \tau\}$ é satisfeita e 0 para os outros valores de t .

A função característica é mensurável, por isso, a integral de Itô continua bem definida com as seguintes propriedades garantidas:

Lema 3.1.3. Se $X(t) \in \mathbb{L}_{ad}^2[(0, T) \times \Omega]$ e τ um tempo de parada com $0 \leq \tau \leq T$, então

1. (Média zero)

$$\mathbb{E} \left[\int_0^\tau X(t)dW_t \right] = 0.$$

2. (Isometria)

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^\tau X(t)dW_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^\tau X^2(t)dt \right].$$

A demonstração pode ser vista em Evans (2013) p.104 e mais detalhes em Kuo (2006) p.70.

3.2 Fórmula de Itô

Como sugerimos anteriormente, uma das facilidades do cálculo de Itô é resgatar ferramentas e propriedades úteis do Cálculo Diferencial e Integral para serem utilizadas em funções que são agora variáveis aleatórias de variação infinita. Uma dessas ferramentas é a *fórmula de Itô*, análoga à regra da cadeia para funções diferenciáveis.

No cálculo de Newton-Leibniz, a regra da cadeia fornece a derivada de uma função composta $f(g(t))$ de forma que, se f e g forem diferenciáveis, então a composta também é e sua derivada é da forma

$$\frac{d}{dt}f(g(t)) = f'(g(t))g'(t),$$

que, em sua forma integral, pode ser escrita como

$$f(g(t)) - f(g(a)) = \int_a^t f'(g(s))g'(s)ds.$$

É claro que a fórmula acima não suporta uma função composta do tipo $f(W(t))$, pois o termo $W'(t)$ não carrega nenhum significado, visto o que já foi discutido acerca da não diferenciabilidade do movimento Browniano. Sendo assim, o estudo possível envolve a substituição de $W'(t)$ por dW_t e o acréscimo de um fator de correção que pode ser ilustrado pela fórmula de Taylor de segunda ordem

$$df(x) = f'(x)dx + \frac{1}{2}f''(x)(dx)^2 + O(dx)^3$$

dada f ao menos classe C^2 em $\mathbb{R}$, e tomando dx como um acréscimo infinitesimal na variável x . No Cálculo Diferencial e Integral, é possível ignorar os termos maiores ou iguais a dx^2 devido à variação finita das funções diferenciáveis, o que não é o caso do movimento Browniano, pois o comportamento quadrático de dW_t está longe de ser desprezível (Kuo (2006)).

Com isso, em uma função aplicada sobre o movimento Browniano em um intervalo $[0, T]$, obtemos

$$df(W_t) = f'(W_t)dW_t + \frac{1}{2}f''(W_t)dt, \tag{3.6}$$

visto que, $dW_t^2 = dt$, pela Seção 2.2.1. A fórmula acima é um meio conveniente de representar a variação de uma função que obviamente não será diferenciável. Para maior precisão, a equação (3.6) deve ser escrita em sua forma integral, onde a semelhança com a regra da cadeia fica mais evidente.

Teorema 3.2.1. *Seja $f(x)$ uma função classe C^2 , então*

$$f(W_t) - f(W_0) = \int_0^t f'(W_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_s) ds, \quad (3.7)$$

onde a primeira integral é uma integral de Itô e a segunda é uma integral de Riemann para cada caminho de W_s .

Tal fórmula permite o estudo das infinitesimais variações de uma função suficientemente bem comportada sobre o movimento Browniano e sua prova pode ser encontrada em detalhes em Kuo (2006) p.96.

A fórmula de Itô também será apresentada para processos mais gerais chamados *processos de Itô* que são construídos a partir da ideia apresentada acima, onde seu “deslocamento” depende de uma integral de Riemann e uma de Itô.

Definição 3.2.1 (Processos de Itô). Um processo estocástico adaptado é um processo de Itô se satisfaz

$$X_t - X_0 = \int_0^t \sigma(s) dW_s + \int_0^t \mu(s) ds \quad (3.8)$$

onde $\sigma(t)$ e $\mu(t)$ são processos adaptados tais que $\int_0^t \sigma^2(t) dt < \infty$ e $\int_0^t |\mu(t)| dt < \infty$ q.s..

Novamente, existe uma representação diferencial que facilitará os cálculos posteriores

$$dX_t = \sigma(t) dW_t + \mu(t) dt. \quad (3.9)$$

Observação 3.2.1. As condições enunciadas para os processos $\sigma(t)$ e $\mu(t)$ na Definição 3.2.1 servem para garantir a existência e o bom comportamento das integrais de Itô e Riemann, respectivamente. A primeira condição foi apresentada na seção anterior quando introduzimos o espaço de processos estocásticos $\mathbb{L}_{ad}^2[(0, T) \times \Omega]$ e a segunda pode ser utilizada para descrever um espaço mais amplo de funções cuja integral de Itô está definida (dada a continuidade do processo), mas que não necessariamente satisfaz as propriedades do Teorema 3.1.2 (Kuo (2006)).

Teorema 3.2.2 (Fórmula de Itô). *Seja X_t um processo de Itô. Se $f(x)$ é uma função ao menos classe C^2 , então $f(X_t)$ também é um processo de Itô e satisfaz*

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \sigma^2(s) ds. \quad (3.10)$$

A seguir, fica clara a importância da representação diferencial para os cálculos quando tratarmos da ideia por trás do resultado enunciado no teorema acima.

Pela fórmula de Taylor até segunda ordem, temos

$$df(X_t) = f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) (dX_t)^2.$$

Como X_t é um processo de Itô, é verdade que $dX_t = \sigma(t) dW_t + \mu(t) dt$. Com isso,

$$\begin{aligned} (dX_t)^2 &= (\sigma(t) dW_t + \mu(t) dt)^2 \\ &= \sigma^2(t) (dW_t)^2 + 2\sigma(t)\mu(t) dW_t dt + \mu^2(t) (dt)^2 \\ &= \sigma^2(t) dt \end{aligned} \quad (3.11)$$

já que $(dW_t)^2 = dt$ e $dW_t dt = 0$, pela Seção 2.2.1, e que $(dt)^2$ é desprezível.

Portanto,

$$\begin{aligned} df(X_t) &= f'(X_t) (\sigma(t) dW_t + \mu(t) dt) + \frac{1}{2} f''(X_t) \sigma^2(t) dt \\ &= f'(X_t) \sigma(t) dW_t + \left(f'(X_t) \mu(t) + \frac{1}{2} f''(X_t) \sigma^2(t) \right) dt. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Tal fórmula é a representação diferencial da fórmula de Itô para processos definidos como em 3.2.1 e, com uma dose extra de trabalho, é possível evidenciar que a equação (3.12) só é possível dada a forma integral (3.10).

Outro caso importante para a fórmula de Itô considera funções de duas variáveis onde uma delas é o tempo, i.e. funções do tipo $f(t, x)$. Em materiais como Klebaner (2005) e Kuo (2006) é possível encontrar uma construção um tanto mais detalhada do que a apresentada neste trabalho.

Teorema 3.2.3. *Seja $f(t, x)$ uma função ao menos classe C^2 e X_t um processo de Itô, então*

$$f(t, X_t) - f(0, X_0) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) dX_s + \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) \right) ds. \quad (3.13)$$

Note que, em comparação com a fórmula (3.10), a equação acima apresenta um acréscimo referente à variação temporal da função. Tal fato pode ser justificado pela forma diferencial a partir da expansão de Taylor de segunda ordem para funções de duas variáveis. Para tal, seja $f(t, x)$ uma função de classe C^2 . A fórmula de Taylor fornece

$$df(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} (dt)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} dt dx \right),$$

onde os termos (t, x) das derivadas parciais foram omitidos para uma maior clareza de notação. Fazendo $x = X_t$ onde X_t é um processo de Itô, i.e. satisfaz a equação (3.9), temos

$$\begin{aligned} df(t, X_t) &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} (\sigma(t, X_t) dW_t + \mu(t, X_t) dt) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sigma^2(t, X_t) dt + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} dt dX_t \right), \end{aligned} \quad (3.14)$$

pois, $(dX_t)^2 = \sigma^2(t, X_t) dt$ e $(dt)^2 = 0$.

Seguindo a ideia por trás da construção que resultou na relação (3.11) podemos analisar o comportamento de $dt dX_t$:

$$\begin{aligned} dt dX_t &= dt(\sigma(t, X_t) dW_t + \mu(t, X_t) dt) \\ &= \sigma(t, X_t) dt dW_t + \mu(t, X_t) (dt)^2 = 0, \end{aligned}$$

pois $dt dW_t = 0 = (dt)^2$.

Desta forma, para funções do tipo $f(t, x)$ onde $x = X_t$ é um processo de Itô, a forma diferencial do processo estocástico é

$$df(t, X_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \mu(t, X_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sigma^2(t, X_t) \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} \sigma(t, X_t) dW_t. \quad (3.15)$$

Vale reforçar que para todos os cálculos, os processos $\sigma(t, X_t)$ e $\mu(t, X_t)$ foram considerados como na Definição 3.2.1. Note que, caso a variação dX_t não seja substituída na equação (3.14), a forma diferencial resulta em

$$df(t, X_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sigma^2(t, X_t) \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} dX_t.$$

que traduz exatamente a forma integral enunciada no Teorema 3.2.3, tendo o desenvolvimento sido feito dessa forma para facilitar seu uso na aplicação enunciada adiante.

3.2.1 Fórmula de Itô multidimensional

Durante a definição dos processos estocásticos no capítulo anterior, os processos n -dimensionais foram brevemente enunciados e aqui, eles serão utilizados. Considere o movimento Browniano 1-dimensional $W(t) = (W_1(t), \dots, W_m(t))$ onde cada $W_j(t)$, $j \in [0, m]$, é um movimento Browniano independente um-dimensional adaptado.

Definimos o processo n -dimensional $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^n)$ onde cada X_t^i , é um processo de Itô de forma que

$$dX_t^i = \mu_i(t)dt + \sum_{j=1}^m \sigma_{ij}(t)dW_j(t), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (3.16)$$

onde $\sigma_{ij}(t)$ é uma matriz $n \times m$ de processos estocásticos e $\mu_i(t)$ é um vetor com n processos estocásticos que satisfazem

- $\int_0^t \sigma_{ij}^2(t)dt < \infty$ q.s. para todo $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$;
- $\int_0^t |\mu_i(t)|dt < \infty$ q.s. para todo $i = 1, \dots, n$,

como na Definição 3.2.1 proposta anteriormente. Desta forma, $X(t)$ também é um processo de Itô, ou *processo de Itô n -dimensional* e ao escrever

$$\mu(t) = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}, \quad \sigma(t) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nm} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad W(t) = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_m \end{bmatrix},$$

a equação (3.16) pode ser escrita em sua forma vetorial como

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t).$$

Assim, podemos adaptar a fórmula (3.15) para o caso multidimensional. Aplicando uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ao menos classe C^2 do tipo $f(x_1, \dots, x_n)$ sobre um processo de Itô $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^n)$, obtemos um processo de Itô $f(X_t^1, \dots, X_t^n)$ cuja forma diferencial é dada por

$$df(X_t^1, \dots, X_t^n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dX_t^i dX_t^j, \quad (3.17)$$

onde os termos $(X_t^1, \dots, X_t^n)$ foram omissos das derivadas parciais por simplificação. Ao ser utilizada, devemos considerar que o produto $dX_t^i dX_t^j$ é desenvolvido a partir das identidades $(dt)^2 = 0 = dW_k(t)dt$ e $dW_k(t)dW_r(t) = \delta_{kr}dt$. Em Oksendal (2003) é possível encontrar o caso multidimensional da fórmula de Itô para funções que dependem também do tempo. Nestes casos, há de existir o acréscimo da variação temporal na forma diferencial proposta acima de maneira similar ao que foi realizado para a equação (3.15).

A fórmula de Itô multidimensional pode ser utilizada, por exemplo, para a análise do produto de dois processos estocásticos como feito em Kuo (2006).

Exemplo 3.2.1 (Fórmula de Itô para o Produto). Considere a função $f(x, y) = xy$ contínua e diferenciável. Tem-se que $\frac{\partial f}{\partial x} = y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Ao aplicar a fórmula (3.17) nesta função sobre dois processos de Itô X_t e Y_t , obtém-se

$$\begin{aligned} d(X_t Y_t) &= Y_t dX_t + X_t dY_t + \frac{1}{2} dX_t dY_t + \frac{1}{2} dY_t dX_t \\ &= Y_t dX_t + X_t dY_t + dX_t dY_t. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Que, em sua forma integral, é dada por

$$X_t Y_t - X_0 Y_0 = \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t dX_s dY_s.$$

Note que, mais uma vez, a semelhança entre a forma diferencial e a fórmula para a regra do produto do cálculo de Newton-Leibniz fica evidente tendo o acréscimo de um único termo.

Na próxima seção, serão definidos os processos que serviram de motivação para as fórmulas de Itô e que apresentam uma importante relação com a teoria de equações diferenciais.

3.3 Difusão de Itô

Foi Paul Lévy quem primeiro sugeriu as equações diferenciais estocásticas como uma abordagem possível para os processos de difusão que acabaram sendo motivação para as construções propostas por Kiyoshi Itô (Karatzas e Shreve (1991)). Na Física, a difusão trata-se de um processo que visa analisar o deslocamento de partículas em um fluido, sendo que este movimento, ao contrário dos movimentos balísticos (como a de um projétil que descreve uma trajetória regular), está sujeito à interferência das partículas do fluido em que está imersa. Para nós, os processos de difusão são processos estocásticos $X_t \in \mathbb{R}^n$ que comumente representam o deslocamento da partícula no tempo t o qual é medido como a combinação de uma trajetória determinística e de outra estocástica acompanhada pelo ruído $dW(t)$. Desta forma, eles são aqueles que satisfazem a equação diferencial estocástica

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW(t), \quad (3.19)$$

onde $\mu : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$, são funções mensuráveis, e $W(t)$ é um movimento Browniano m -dimensional.

Para a aplicação almejada neste trabalho, no entanto, é necessário definir os processos de difusão homogêneos no tempo, comumente chamados apenas de homogêneos, i.e. aqueles que não variam com o tempo.

Definição 3.3.1 (Difusão de Itô Homogênea). Um processo estocástico $X_t : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma difusão de Itô homogênea se satisfaz a equação diferencial estocástica

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t,$$

onde $W(t)$ é um movimento Browniano m -dimensional e $\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ são funções tais que

$$|\mu(x) - \mu(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq C|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n \quad (3.20)$$

para alguma constante $C \in \mathbb{R}$.

Observação 3.3.1. A equação (3.20) garante que as funções $\mu(x)$ e $\sigma(x)$ sejam localmente Lipschitz contínuas. Esta é uma forma simplificada de assegurar as condições do teorema da existência e unicidade da solução X_t para a equação diferencial estocástica da difusão de Itô que pode ser utilizada no caso homogêneo. A forma mais geral do teorema considera funções não homogêneas no tempo e ainda exige um crescimento linear das funções, i.e. $|\mu(t, x)| \leq C|1 + |x||$ e $|\sigma(t, x)| \leq C|1 + |x||$, para alguma constante C e para todo $x \in \mathbb{R}^n$ (Kuo (2006) p.191). O teorema pode ser encontrado em detalhes e com algumas justificativas que o tornam plausível em Oksendal (2003) p. 66 e Karatzas e Shreve (1991) p.289.

O caso geral da difusão de Itô pode ser reduzido ao caso estacionário aumentando a dimensão do espaço (das funções e do processo) para que, de certa forma, a variável temporal seja trabalhada como uma variável espacial. Desta forma, as propriedades e cálculos para o caso homogêneo, são válidos também para o caso geral. Um exemplo dessa troca pode ser encontrado em Oksendal (2003) p. 208.

Uma aplicação que ilustra o uso das fórmulas abordadas até aqui, constrói a solução para um problema de equação diferencial parcial parabólica via um processo de difusão. Considere, um processo de difusão como na equação (3.19) dada uma condição sobre o processo no instante t :

$$\begin{aligned} dX_s &= \mu(s, X_s)ds + \sigma(s, X_s)dW_s, \quad t \leq s \leq T \\ X_t &= x. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Defina também uma função estocástica nomeada *custo cumulativo* entre t e T dada por

$$u(t, X_t) := \int_t^T c(s, X_s)ds, \quad (3.22)$$

cujas esperanças condicionais são dadas considerando $X_t = x$, ou seja,

$$u(t, x) = \mathbb{E}[u(t, X_t) | X_t = x] = \mathbb{E} \left[\int_t^T c(s, X_s) ds | X_t = x \right]. \quad (3.23)$$

A forma diferencial da função (3.22), fornece

$$du(t, X_t) = d \int_t^T c(s, X_s) ds,$$

onde o primeiro termo pode ser analisado pela fórmula de Itô para duas variáveis (3.15) e o segundo pelo Teorema Fundamental do Cálculo, de forma que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \mu(t, X_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sigma^2(t, X_t) \right) dt + \frac{\partial u}{\partial x} \sigma(t, X_t) dW_t = -c(t, X_t) dt.$$

Note que o termo do lado direito da equação é agora negativo por conta do intervalo de integração da função custo.

Tomando a média condicional dado que $X_t = x$ em ambos os lados da equação, obtém-se

$$\left(\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \mu(t, x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} \sigma^2(t, x) \right) dt = -c(t, x) dt,$$

pois o termo que acompanha a variação do movimento Browniano dW_t se anula pela propriedade de média zero da integral de Itô. Com isso, dada a forma integral da equação acima, a média da função custo aproxima probabilisticamente um problema envolvendo equações diferenciais parciais, como enunciado no resultado abaixo.

Proposição 3.3.1. *O custo esperado $u(t, x)$ como na equação (3.23) é uma representação probabilística da solução do problema de equação parabólica de segunda ordem com condição de valor final:*

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \mu(t, x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} \sigma^2(t, x) = -c(t, x) \\ u(T, x) = 0 \end{cases}, \quad (3.24)$$

dado um processo X_t que é uma difusão de Itô como na equação (3.21).

A prova completa e comentários adicionais estão em Calin (2015), p.180.

3.3.1 Gerador Infinitesimal de uma Difusão de Itô

Devido a não diferenciabilidade de processos estocásticos contínuos que não são de variação finita se faz necessário a construção de novas fórmulas que possibilitem o estudo da variação de tais processos. Uma das ferramentas empregadas para esse fim, é o gerador infinitesimal que objetiva estudar as infinitesimais variações da média de um processo estocástico através do operador A definido a seguir.

Definição 3.3.2 (Gerador infinitesimal). Considere o processo estocástico multidimensional $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^n)$ iniciado em $x \in \mathbb{R}^n$, i.e. $X_0 = x$. Dada uma função suave $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ com suporte compacto ($f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$), define-se o gerador de X_t como o operador

$$Af(x) = \lim_{t \searrow 0} \frac{\mathbb{E}^x[f(X_t)] - f(x)}{t}, \quad (3.25)$$

onde $\mathbb{E}^x$ representa a média dada a condição inicial $X_0 = x$.

Este operador relaciona a difusão de Itô e as equações diferenciais parciais no próximo capítulo, por isso, parte deste trabalho será reservado para a análise do gerador infinitesimal associado especificamente à difusão de Itô.

Considere o processo estocástico n -dimensional X_t uma difusão de Itô homogênea no tempo, i.e. que satisfaz a equação

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad (3.26)$$

como na Definição 3.3.1. Já que o objetivo é estudar a variação de tais processos, faz sentido utilizar-se a fórmula de Itô, neste caso, a multidimensional (3.17)

$$df(X_t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dX_t^i dX_t^j, \quad (3.27)$$

onde $f(X_t) = f(X_t^1, \dots, X_t^n)$ por simplificação.

Perceba que, como X_t é uma difusão, os componentes dX_t^i da fórmula (3.27) satisfazem a equação (3.26) para todo $i = 1, \dots, n$, ou seja,

$$\begin{aligned} dX_t^i &= \mu_i(X_t)dt + [\sigma(X_t)dW_t]_i \\ &= \mu_i(X_t)dt + \sum_{k=1}^m \sigma_{ik}dW_t^k, \end{aligned} \quad (3.28)$$

já que a expressão $[\sigma(X_t)dW_t]_i$ toma a i -ésima coordenada de um vetor $n \times 1$ obtido do produto matricial entre $\sigma(X_t)$ e dW_t .

De posse das relações estocásticas $dt^2 = dt dW_t^k = 0$ e $dW_t^k dW_t^r = \delta_{kr} dt$, temos que

$$\begin{aligned} dX_t^i dX_t^j &= \left(\mu_i(X_t)dt + \sum_{k=1}^m \sigma_{ik} dW_t^k \right) \left(\mu_j(X_t)dt + \sum_{k=1}^m \sigma_{jk} dW_t^k \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^m \sigma_{ik} dW_t^k \right) \left(\sum_{k=1}^m \sigma_{jk} dW_t^k \right) \\ &= \sum_{k=1}^m \sigma_{ik} \sigma_{jk} dt = (\sigma \sigma^T)_{ij} dt, \end{aligned} \quad (3.29)$$

para todos $1 \leq i, j \leq n$. A matriz σ , chamada *matriz de dispersão*, e o produto $\sigma \sigma^T$, chamado *matriz de difusão*, carregam significados importantes para o estudo dos processos de difusão na Física (Calin (2015)).

Ao substituir os resultados (3.28) e (3.29) em (3.27), obtemos

$$\begin{aligned} df(X_t) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_t) \left(\mu_i dt + \sum_{k=1}^m \sigma_{ik} dW_t^k \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_t) (\sigma \sigma^T)_{ij} dt, \end{aligned}$$

que pode ser rearranjado como

$$df(X_t) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \mu_i(X_t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\sigma \sigma^T)_{ij}(X_t) \right) dt + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_t) \sigma_{ik} dW_t^k, \quad (3.30)$$

de forma que $f(X_t)$ seja ela própria uma difusão de Itô, pois sua variação é entendida como uma combinação entre uma variação determinística e outra estocástica. A partir desta equação, o processo X_t pode ser escrito em sua forma integral, como nas seções anteriores:

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \mu_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\sigma \sigma^T)_{ij} \right) (X_s) ds \\ &\quad + \int_0^t \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s) \sigma_{ik} dW_s^k. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Agora, vamos examinar como a média deste processo se comporta. Já que $f(X_0) = f(x)$ é determinístico, então $\mathbb{E}^x[f(x)] = f(x)$ e, como f possui suporte compacto, $f(X_t)$ é por si só um processo estocástico. Portanto, pela propriedade da média zero enunciada no Teorema 3.1.2,

$$\mathbb{E}^x \left[\int_0^t \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_{ik}(X_s) dW_s^k \right] = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \mathbb{E}^x \left[\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_{ik}(X_s) dW_s^k \right] = 0.$$

Com isso, pela linearidade da média, a relação (3.31) pode ser reescrita como

$$\mathbb{E}^x[f(X_t)] = f(x) + \mathbb{E}^x \left[\int_0^t \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \mu_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\sigma \sigma^T)_{ij} \right) (X_s) ds \right],$$

logo,

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{\mathbb{E}^x[f(X_t)] - f(x)}{t} = \lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{E}^x \left[\int_0^t \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \mu_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\sigma \sigma^T)_{ij} \right) (X_s) ds \right].$$

Pelo Teorema de Fubini,

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{\mathbb{E}^x[f(X_t)] - f(x)}{t} = \lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}^x \left[\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \mu_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\sigma \sigma^T)_{ij} \right) (X_s) \right] ds.$$

Note que o numerador do lado direito passa a ser a integral de uma função determinística. Logo, quando $t \searrow 0$, há uma indeterminação nesse limite do tipo 0/0, permitindo a aplicação da regra de l'Hospital. Assim, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{\mathbb{E}^x[f(X_t)] - f(x)}{t} = \lim_{t \searrow 0} \mathbb{E}^x \left[\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \mu_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\sigma \sigma^T)_{ij} \right) (X_t) \right].$$

A respeito do limite, quando $t \searrow 0$, X_t tende a x devido à condição inicial do processo estocástico. Logo,

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{\mathbb{E}^x[f(X_t)] - f(x)}{t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \mu_i(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\sigma \sigma^T)_{ij}(x).$$

Este resultado serve como demonstração para o próximo teorema.

Teorema 3.3.1 (Gerador Infinitesimal de uma Difusão de Itô). *Seja X_t uma difusão de Itô*

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t.$$

Se f é uma função suave ao menos classe C^2 com suporte compacto, então seu gerador infinitesimal é da forma

$$Af(X_t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \mu_i(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\sigma \sigma^T)_{ij}(x). \quad (3.32)$$

Observe que a equação (3.32) estabelece uma relação entre as derivadas de uma função suficientemente bem comportada com o processo que é solução de uma equação diferencial estocástica.

Um caso particular é quando μ é a função nula e σ é a identidade, em termos matriciais

$$\mu(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

de forma que a equação diferencial estocástica (3.26) passa a ser simplesmente

$$dX_t = Id \cdot dW_t, \quad (3.34)$$

onde $W(t) = (W_1(t), \dots, W_m(t))$, ou seja, entende-se que o processo em questão é o próprio movimento Browniano $X_t = x + W_t$. Neste caso, segue de (3.32) que o gerador infinitesimal do movimento Browniano é

$$Af(X_t) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{2} \Delta f(x), \quad (3.35)$$

onde Δ é o operador de Laplace ou *Laplaciano* e a função f é dada conforme o que é proposto na Definição 3.3.2.

Observação 3.3.2. O gerador infinitesimal apresenta uma forte relação com a derivada para funções determinísticas diferenciáveis. Para estas funções, a equação (3.26) não varia com o ruído aleatório, i.e. $dX_t = \mu(X_t)dt$ passa a ser uma equação diferencial

ordinária, comumente descrita como $dX_t/dt = \mu(X_t)$. Para processos que satisfazem esta EDO, o gerador enunciado no Teorema 3.3.1 deixa de depender da matriz $\sigma\sigma^T$, ou seja,

$$Af(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \mu_i(x),$$

equivalente à derivada de f ao longo da curva X_t , ou ainda, à derivada de f na direção do vetor $\mu(x)$ e no ponto x .

Uma das aplicações do gerador infinitesimal, é conhecida como *Fórmula de Dynkin*¹ que dá o valor esperado (média) de uma função suave aplicada sobre uma difusão de Itô em um determinado tempo de parada.

Teorema 3.3.2 (Fórmula de Dynkin). *Seja $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ e X_t uma difusão de Itô iniciada em x . Se τ é o tempo de parada com $\mathbb{E}[\tau] < \infty$, então*

$$\mathbb{E}^x[f(X_\tau)] = f(x) + \mathbb{E}^x \left[\int_0^\tau Af(X_s) ds \right], \quad (3.36)$$

onde A é o gerador infinitesimal do processo X_t .

A demonstração e algumas preliminares para o teorema acima podem ser vistos em Calin (2015) p.204 e Klebaner (2005) p.152. Juntas, essas ferramentas permitirão a análise de equações diferenciais parciais de forma probabilística, como constatado no próximo capítulo.

¹Homenagem ao matemático russo-americano Eugene Borisovich Dynkin (1924 - 2014) que desenvolveu trabalhos em Probabilidade e Álgebra, em especial em álgebras de Lie e processos de Markov (O'Connor e Robertson (2009)).

Fórmulas probabilísticas para alguns problemas de Dirichlet

O gerador infinitesimal apresentado no capítulo anterior estabelece uma relação importante entre os processos de difusão e as derivadas de uma função determinística, possibilitando uma associação entre as equações diferenciais parciais e os processos estocásticos. Podendo-se destacar a relação entre o movimento Browniano e o Laplaciano, visto que diversos problemas determinísticos são modelados considerando o operador de Laplace, sendo, inclusive, o responsável por relacionar a teoria estocástica com as funções harmônicas. É através desse tipo de associação que a solução para diversos problemas de equações diferenciais parciais podem ser representadas como a média de processos estocásticos (Karatzas e Shreve (1991)). Krot (2007) ainda comenta que a estimativa via movimento Browniano constitui um dos métodos mais intrigantes e rápidos de se trabalhar quando o assunto é determinar soluções para problemas de valor de fronteira.

Os problemas de Dirichlet são bem conhecidos na modelagem matemática e consistem em encontrar uma função que satisfaça uma equação diferencial parcial no interior de uma região suficientemente bem definida e que assuma valores predefinidos na fronteira desta. É de conhecimento prático que problemas como esse nem sempre apresentam solução analítica viável e, na maioria das aplicações, exigem métodos

numéricos que aproximam a solução a depender das condições enunciadas. Neste capítulo, além de analisar os teoremas a respeito da solução para alguns destes problemas de forma probabilística, deduzindo soluções para problemas de Dirichlet através da teoria estocástica já apresentada, sendo majoritariamente guiados por [Evans \(2013\)](#), também ilustraremos os resultados obtidos por meio de uma simulação computacional.

Mais precisamente, considere o problema de Dirichlet na forma

$$\begin{cases} \mu(x) \cdot u_x + \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\sigma(x)\sigma^T(x)u_{xx}) = h(x), & x \in U \\ u(x) = g(x), & x \in \partial U \end{cases},$$

sendo $U \subset \mathbb{R}^n$ com fronteira suave ∂U , e u_x e u_{xx} representando o gradiente e a matriz Hessiana da função u no ponto x , respectivamente. A ideia principal neste trabalho consiste em escolher algumas funções h e g e uma difusão de Itô da forma

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad X_0 = x,$$

para expressar a solução do problema como uma média, isto é, $u(x) = \mathbb{E}[g(X_\tau)]$, onde τ é tempo de parada.

Como explica [Gard \(1988\)](#) (subseção 3.5 - p. 103), tal classe de equações diferenciais parciais mencionada acima possui solução única quando:

- (a) seu operador é uniformemente elíptico, isto é, a matriz dos coeficientes $\sigma\sigma^T = \{a_{i,j}\}$ é positiva definida, ou seja, existe um $\theta > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2$$

se $x \in U$ e $\xi = \{\xi_i\} \in \mathbb{R}^n$;

- (b) e as funções μ , $\sigma\sigma^T$ e h são uniformemente Lipschitz contínuas no fecho do conjunto U , e g é contínua no bordo de U (∂U).

Em resumo, exploramos alguns casos particulares do problema de Dirichlet e explicitamos suas soluções através de uma média, que em nossas principais referências são mencionados como fórmula probabilística para solução u da EDP em questão. Um caso particular e interessante, que será discutido na próxima seção, é quando

consideramos o operador laplaciano sendo o gerador infinitesimal, ou seja, μ é o vetor nulo e $\sigma\sigma^T = Id$ (ver (3.33)), e no problema escolhemos h, g de tal forma que satisfazem as condições (a) e (b).

4.1 Aplicação em um problema de Dirichlet e fórmula de Feynman-Kac

O primeiro resultado objetiva modelar o tempo médio de saída do movimento Browniano de uma região predefinida.

Teorema 4.1.1. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto limitado com fronteira suave ∂U . Considere o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\Delta u = 1 & \text{em } U \\ u = 0 & \text{em } \partial U \end{cases}. \quad (4.1)$$

Sejam $X_t = x + W_t$ o movimento Browniano n -dimensional iniciado em um ponto $x \in U$ fixo e o tempo de parada τ_x definido como o primeiro instante t em que o processo X_t iniciado em x atinge a fronteira ∂U , i.e.

$$\tau_x(\omega) := \inf\{t \geq 0; X_t(\omega) \in \partial U\}. \quad (4.2)$$

A solução para o problema (4.1) pode ser estimada por

$$u(x) = \mathbb{E}^x[\tau_x], \quad (4.3)$$

para todo $x \in U$. Em particular, $u > 0$ em U .

Demonstração. Como a função buscada é limitada no conjunto, é seguro dizer que o movimento Browniano iniciado em qualquer ponto de U eventualmente atingirá ∂U com probabilidade 1, isto significa dizer que $\mathbb{E}(\tau_x) < \infty$ para todo $x \in U$ (Evans (2013)). Com isso, as condições para a fórmula de Dynkin são satisfeitas. Assim, para

$Au(X_t) = \frac{1}{2}\Delta u(X_t)$, a fórmula (3.36) fornece

$$\mathbb{E}^x[u(X_{\tau_x})] = u(x) + \mathbb{E}^x \left[\int_0^{\tau_x} \frac{1}{2} \Delta u(X_s) ds \right]. \quad (4.4)$$

Das condições estabelecidas em (4.1), $\frac{1}{2}\Delta u(X_t) = -1$ e $\mathbb{E}^x[u(X_{\tau_x})] \equiv 0$, pois a função deverá se anular no tempo de parada τ_x . Logo, a equação (4.4) é simplesmente

$$u(x) = \mathbb{E}^x[\tau_x],$$

para todo $x \in U$. Ou seja, o valor da função u no ponto $x \in U$ pode ser obtido pela média do tempo que o movimento Browniano iniciado em x leva para atingir a fronteira ∂U . $\square$

A *Fórmula de Feynman-Kac*, expõe de maneira mais geral o problema visto acima. O teorema exprime a solução única de um problema de Dirichlet por meio da média de um processo estocástico.

Teorema 4.1.2 (Fórmula de Feynman-Kac). *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado e conexo com fronteira suave ∂U . A solução única para o problema*

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\Delta u + cu = f & \text{em } U \\ u = 0 & \text{em } \partial U \end{cases}, \quad (4.5)$$

com funções suaves $c \geq 0$ e f em U , pode ser escrita, em termos probabilísticos, como

$$u(x) = \mathbb{E}^x \left[\int_0^{\tau_x} f(X_t) e^{-\int_0^t c(X_s) ds} dt \right] \quad (4.6)$$

onde, novamente, $X_t = x + W_t$ é o movimento Browniano iniciado em x e τ_x definido como (4.2).

Demonstração. Note primeiro que, como $c \geq 0$ no interior de U , sendo uma região limitada (fazendo com que as funções c e f também o sejam), a integral de fora não explode mesmo com o comportamento exponencial e, como enunciado anteriormente, $\mathbb{E}[\tau_x] < \infty$ logo, a integral converge.

Para a demonstração, tome o processo

$$Y_t := e^{Z_t},$$

onde $Z_t := -\int_0^t c(X_s)ds$ de forma que, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$dZ_t = -c(X_t)dt.$$

Note que a variação do processo Z_t depende apenas de sua variação em t , ou seja, podemos escrever $dZ_t = -c(X_t)dt + 0 \cdot dW_t$. Desta forma, para entender a forma diferencial de Y_t , alguns termos da fórmula de Itô multidimensional desenvolvidos como na equação (3.30) se anulam e, como a derivada da função exponencial mantém seu comportamento, temos

$$dY_t = d(e^{Z_t}) = e^{Z_t}dZ_t = -c(X_t)Y_tdt.$$

Outro ponto importante é que, como X_t representa o movimento Browniano iniciado em x , o processo satisfaz a equação diferencial estocástica (3.34), tendo sua variação dependendo apenas do “deslocamento” estocástico (representado por dW_t em sua forma diferencial). Assim, a equação (3.30) aplicada sobre a variação de $u(X_t)$ é dada por

$$du(X_t) = \frac{1}{2}\Delta u(X_t)dt + \sum_{i,k} \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_t)dW_t^k.$$

Desta forma, pela regra do produto de Itô (3.18),

$$\begin{aligned} d(u(X_t) \cdot Y_t) &= du(X_t) \cdot Y_t + u(X_t) \cdot dY_t + du(X_t) \cdot dY_t \\ &= \left(\frac{1}{2}\Delta u(X_t)dt + \sum_{i,k} \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_t)dW_t^k \right) Y_t + u(X_t) (-c(X_t)Y_tdt), \end{aligned}$$

pois $du(X_t) \cdot dY_t = 0$ devido às relações $dt^2 = dt dW_t^k = 0$. Na forma integral, a expressão acima pode ser reescrita como

$$u(X_t) \cdot Y_t - u(X_0) = \int_0^t \left(\frac{1}{2}\Delta u(X_s) - c(X_s)u(X_s) \right) Y_s ds + \int_0^t \sum_{i,k} \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_s)dW_s,$$

uma vez que $Y_0 = e^{Z_0} = 1$.

Tomando o valor esperado no tempo de parada τ_x , temos

$$\mathbb{E}^x[u(X_{\tau_x}) \cdot Y_{\tau_x}] - \mathbb{E}^x[u(X_0)] = \mathbb{E}^x \left[\int_0^{\tau_x} \left(\frac{1}{2} \Delta u(X_t) - c(X_t)u(X_t) \right) Y_t dt \right]$$

devido à propriedade de média zero da integral de Itô enunciada no Teorema 3.1.2.

Como $\mathbb{E}^x[u(X_0)] = u(x)$ e, pelas condições do problema (4.5), $-\frac{1}{2}\Delta u + cu = f$ em U e $u = 0$ na fronteira, ou seja, no tempo de parada, substituindo Y_t , a fórmula acima pode ser resumida em

$$u(x) = \mathbb{E}^x \left[\int_0^{\tau_x} f(X_t) e^{-\int_0^t c(X_s) ds} dt \right],$$

concluindo a demonstração. □

4.2 Simulação de uma fórmula probabilística para um problema de Dirichlet

Como estudado até aqui, podemos exprimir a solução para um problema de Dirichlet como a média de um processo estocástico dadas certas condições. Isso permite que seja feita uma estimativa probabilística que pode tornar-se mais vantajosa do ponto de vista teórico e computacional do que as já conhecidas técnicas de aproximação numérica. Para explorar essa aplicação, apresentamos o problema clássico de Dirichlet que envolve as funções harmônicas, e a solução analítica para tal, bem como algumas especificações a respeito do problema em si, serão enunciadas conforme Figueiredo (2018).

Teorema 4.2.1. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, limitado e conexo com fronteira suave por partes ∂U e $g : \partial U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua sobre a fronteira de U . A função u , contínua no fecho de U , é chamada harmônica se é solução para o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } U \\ u = g & \text{em } \partial U \end{cases}. \quad (4.7)$$

Dado $X_t = x + W_t$, $x \in U$, e o tempo de parada τ_x definido como (4.2), a solução para o problema pode ser aproximada por

$$u(x) = \mathbb{E}^x[g(X_{\tau_x})]. \quad (4.8)$$

Demonstração. Como feito anteriormente, a fórmula de Dynkin desenvolvida na equação (4.4) agora com as condições enunciadas em (4.7), i.e. $\Delta u = 0 \in U$ e $u = g \in \partial U$, prova o resultado

$$u(x) = \mathbb{E}^x[g(X_{\tau_x})].$$

□

Neste problema, a solução é expressa como a média da função contínua g definida no bordo do domínio e aplicada sobre o movimento Browniano iniciado em $x \in U$ no primeiro momento em que o processo X_t atinge a fronteira, ou seja, quando a condição para o tempo de parada é satisfeita.

4.2.1 O problema de Dirichlet em um retângulo

Definindo o conjunto U como um retângulo $0 < x < a$ e $0 < y < b$, com condições de fronteira

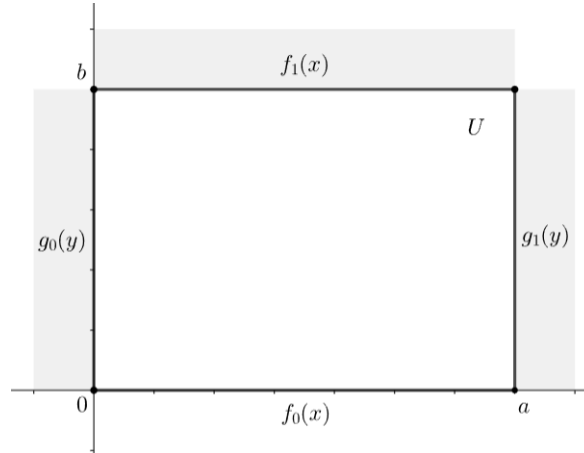
$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f_0(x), & u(x, b) &= f_1(x), \\ u(0, y) &= g_0(y), & u(a, y) &= g_1(y), \end{aligned}$$

dadas, tais que $f_0(0) = g_0(0)$, $f_0(a) = g_1(0)$, $g_1(b) = f_1(a)$ e $f_1(0) = g_0(b)$, garantindo a continuidade da fronteira, Figueiredo (2018) explica que a solução pode determinada por séries de Fourier decompondo o problema em quatro problemas de Dirichlet de forma que em cada um deles, três das funções acima se anulem, mantendo apenas uma. Desta forma, a solução para o problema em questão seria a soma das soluções dos quatro problemas parciais. Nesse sentido, para simplificar, ele analisa e deduz a solução para o problema de Dirichlet no retângulo com condições de fronteira

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{e} \quad u(x, b) = u(0, y) = u(a, y) = 0, \quad (4.9)$$

onde $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3 , com $f(0) = f(a) = 0$, para simplificar a continuidade do domínio, como mostra a Figura 4.1.

Figura 4.1: Geometria do problema de Dirichlet em um retângulo.



Fonte: próprio autor.

Neste cenário, a solução geral é dada por

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \frac{\sinh\left(\frac{n\pi(y-b)}{a}\right)}{\sinh\left(-\frac{n\pi b}{a}\right)}, \quad (4.10)$$

onde

$$f_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx.$$

4.2.2 Simulação para uma fronteira retangular

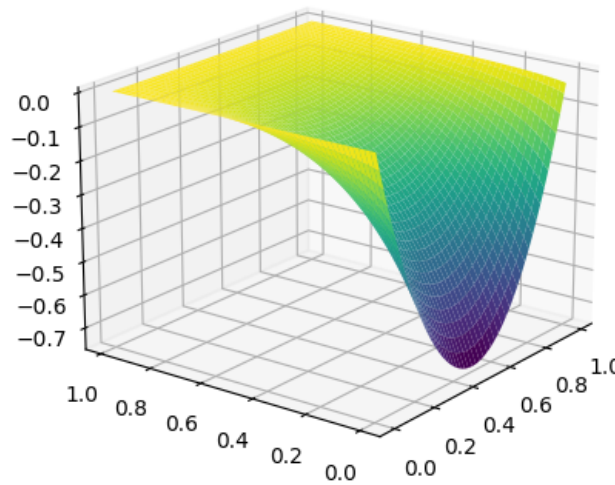
Para a simulação, foram escolhidos os seguintes dados: $a = b = 1$ e $u(x, 0) = f(x) = 3(x^2 - x)$. Assim, a solução analítica (4.10) pode ser expressa como:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6(\pi n \sin(\pi n) + 2 \cos(\pi n) - 2) \sin(n\pi x) \sinh(n\pi(y-1))}{\pi^3 n^3 \sinh(-n\pi)}. \quad (4.11)$$

Por se tratar de uma série infinita, podemos aproximar a solução e, em Python, o comportamento gráfico de $u(x, y)$ é mostrado na Figura 4.2.

Para a solução aproximada via probabilidade, o primeiro passo foi simular o movimento Browniano de duas dimensões. É preciso ter em mente que não é possível

Figura 4.2: Solução analítica aproximada para o problema de Dirichlet em um quadrado de lado 1.



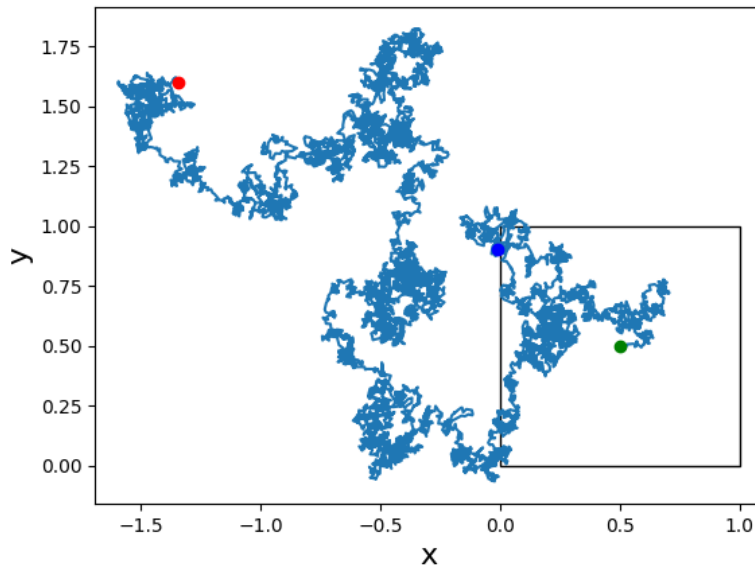
Fonte: próprio autor.

simular um processo contínuo no computador, sendo necessária alguma escala de discretização que permita uma aproximação suficientemente boa do processo em questão. No site *SciPy Cookbook* ([WECKESSER](#), Acessado em 13 de julho de 2023), um domínio colaborativo que reúne materiais referentes à biblioteca SciPy em Python, a função proposta para simular o movimento Browniano se mostrou suficiente para os propósitos deste trabalho e apenas poucas modificações foram necessárias para que os parâmetros utilizados fossem os mesmos da teoria e definição estudadas aqui quanto às propriedades do movimento Browniano, sempre levando em consideração a construção de um caminho aleatório com média zero, distribuição normal e variância dt com a independência dos incrementos.

Importando as devidas bibliotecas e utilizando um laço que verifica as condições de fronteira, como no apêndice [A](#), foi possível construir a simulação da Figura [4.3](#), onde o ponto verde marca o início do processo, neste exemplo $(0.5, 0.5)$, o ponto vermelho marca o último ponto calculado e o ponto azul é a primeira coordenada do movimento Browniano quando ele ultrapassa o quadrado de lado 1 representado na plotagem.

Com a plotagem feita e a possibilidade de descrever um domínio e salvar as coordenadas do movimento Browniano em um ponto específico, a próxima etapa do código objetiva plotar o processo uma quantidade suficientemente grande de vezes a fim de calcular a média da função do bordo sobre essas coordenadas. Esta etapa também

Figura 4.3: Simulação da trajetória de saída do movimento Browniano bidimensional de um quadrado de lado 1.



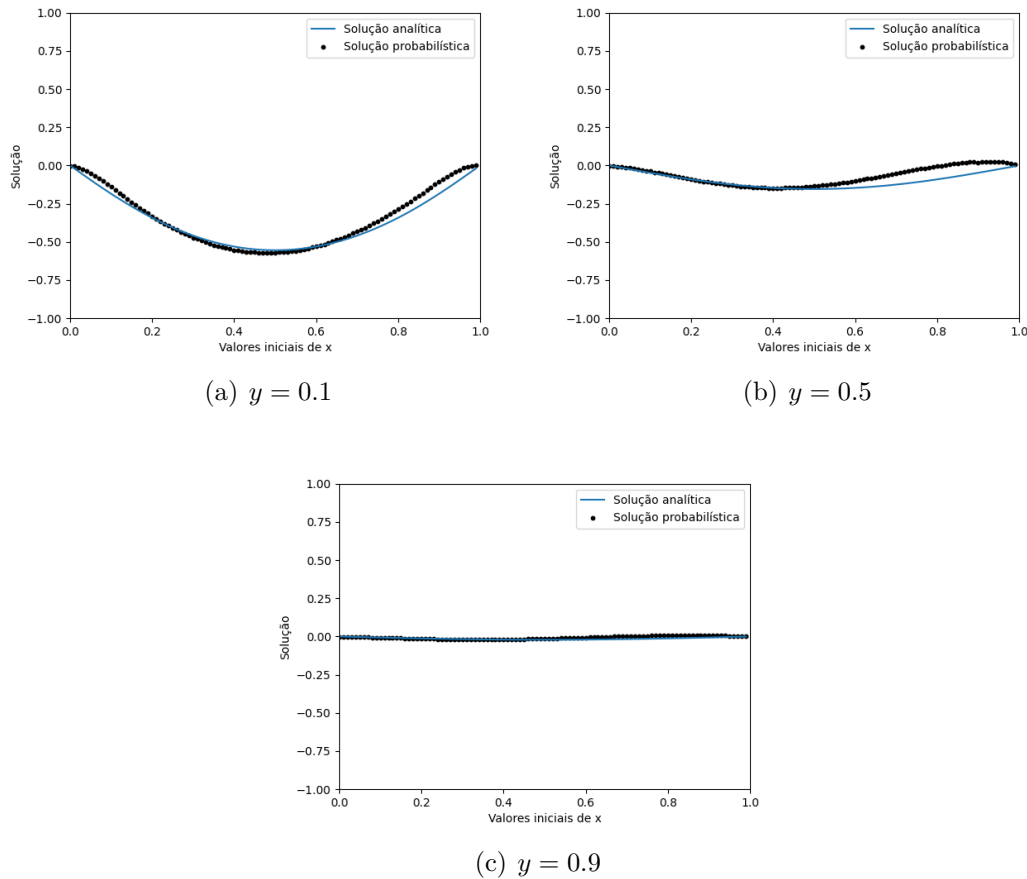
Fonte: próprio autor.

foi descrita no apêndice [A](#), mas algumas considerações e dificuldades encontradas serão descritas aqui. Para a função que salva o movimento browniano no bordo, foi necessário levar em consideração o lado do quadrado em que o processo atingiu o tempo de parada, pois, como mostrado na Figura [4.1](#), três lados são regidos por uma função nula, tendo a função $f(x)$ agindo na borda inferior.

Fora isso, como descrito no capítulo anterior, o movimento Browniano atingirá a fronteira de um domínio suave com probabilidade 1 devido à sua continuidade. Entretanto, a simulação lida com um processo discretizado e limitado na quantidade de passos, podendo ocorrer casos em que o movimento Browniano não atinja a fronteira nos parâmetros utilizados. Alguns testes foram feitos no sentido de reformular a função que calcula o movimento Browniano de forma que ele fosse construído até que a fronteira fosse atingida, mas isso resultou em um código consideravelmente mais lento. A alternativa para contornar este problema, que acabou interferindo no cálculo da média (devido à quantidade de entradas de cada variável), foi acrescentar uma condição que preenche a matriz de coordenadas (x, y) do movimento Browniano com entradas “vazias” (‘NaN’ em Python) de forma que estes valores fossem ignorados. [Guilhoto \(2019\)](#) faz diferente e constrói o código garantindo que a função continue até que a fronteira seja atingida,

mas neste trabalho a alternativa exposta não interferiu no resultado, então optou-se por mantê-la.

Figura 4.4: Comparação entre solução analítica e aproximada via movimento Browniano para o problema de Dirichlet no quadrado de lado 1.



Fonte: próprio autor.

Para melhor visualização dos resultados, fixamos a coordenada y do movimento Browniano, variando x no intervalo $0 < x < 1$. É importante ressaltar que, devido à aleatoriedade, a cada plotagem o resultado obtido é ligeiramente diferente, mas todos os testes mantiveram certa constância. Nos gráficos da Figura 4.4, a curva azul representa a solução exata para o ponto fixado, e os pontos pretos representam as aproximações probabilísticas para cada valor inicial de x . Os testes foram feitos para diferentes valores de y , considerando que as chances de o movimento Browniano sair pela borda inferior são maiores a medida que y se aproxima de 0, sendo calculadas a partir de 10000 simulações para cada média calculada.

Mesmo com alguns pontos destoantes, vale ressaltar que a escala do gráfico está bem reduzida, tornando o erro de aproximação tolerável para nossos objetivos. No apêndice [B](#), os resultados para $y = 0.1$ foram tabelados para fins de comparação. [Guilhoto \(2019\)](#) discute fatos interessantes a respeito dos erros que se justificam pela própria construção do movimento Browniano. Note que ele parece maior nos extremos do intervalo $0 < x < a$, isso porque quando o início do processo é mais próximo da fronteira, aumentam as chances de que o movimento Browniano saia pela mesma região.

Os resultados são realmente notáveis e, feita uma primeira implementação, a adaptação para diferentes problemas seguirá os mesmos princípios, sendo necessário apenas descrever a solução exata como foi feita pelo gerador infinitesimal, diferentemente de métodos numéricos que exigem muito mais a medida que a dimensão do problema aumenta, por exemplo. É importante salientar que, embora a teoria forneça uma solução exata para os problemas expostos, quando se trata de simulações, estamos lidando com resultados aproximados, sendo necessário algum estudo a respeito dos erros obtidos a fim de se estabelecer parâmetros de controle. Para isso, o artigo de [Guilhoto \(2019\)](#) propõe soluções que generalizam a construção e estudam o erro derivado das aproximações estatísticas realizadas, então a leitura é recomendada para aqueles que desejam se aprofundar.

Considerações Finais

Levando em conta o que foi estudado até aqui, o capítulo anterior consegue, por meio das simulações computacionais, evidenciar de forma prática a teoria apresentada a respeito do gerador infinitesimal de um processo estocástico e sua relação com problemas de equações diferenciais parciais. O problema clássico de Dirichlet apresentado na Seção 4.2, introduz as funções harmônicas e oferece um meio probabilístico viável de resolver problemas que as envolvam. Mas para chegar até a simulação, muito precisou ser estudado a respeito das características e construção do movimento Browniano, bem como das integrais de Itô que permitiram a construção das fórmulas probabilísticas verificadas.

A implementação não exigiu conhecimentos complexos de programação, mostrando-se uma alternativa viável para aqueles que desejam se aprofundar no tópico ou estudar a construção de códigos que envolvam o movimento Browniano ou até mesmo um estudo prático de sua natureza. Os códigos foram disponibilizados justamente para este fim, para ser utilizado e melhorado, visto que o tempo de simulação ainda é alto, principalmente a medida que aumentamos o número de lançamentos do movimento Browniano para melhorar a precisão. Algum estudo mais aprofundado a respeito da convergência e erros do método também são bem vindos, mas fogem um pouco do escopo principal deste trabalho que visava principalmente um estudo teórico e puro das aplicabilidades de processos estocásticos.

Com isto em mente, esperamos que novos estudos surjam a partir do apresentado que reúne desde o básico da teoria probabilística até as mais diversas aplicações da teoria que envolve os processos de difusão de Itô. Os livros utilizados apresentam toda a teoria estudada, porém a lista de trabalhos recentes visando aplicações é rasa, mesmo que conte com trabalhos muito relevantes, como o de Guilhoto (2019), então contamos

que as aplicações gerem curiosidade e que esta se transforme em saber científico que
abrilhantará novos caminhos neste campo de estudo tão vasto.

O código

Para a simulação, foram importadas as seguintes bibliotecas:

```
1 import numpy as np
   from math import sqrt
3 from scipy.stats import norm
   from pylab import plot, show, grid, axis, xlabel, ylabel
5 import matplotlib.pyplot as plt
   from matplotlib.patches import Rectangle
```

A função que calcula o movimento Browniano foi retirada de [Weckesser](#) ([Acessado em 13 de julho de 2023](#)) e modificada conforme explicado anteriormente, utilizando como parâmetros o valor inicial do processo, o número de passos e o tamanho do passo.

```
def brownian(x0, n, dt, out=None):
2     x0 = np.asarray(x0)
     r = norm.rvs(size=x0.shape + (n,), scale=sqrt(dt), loc=0)
4     if out is None:
         out = np.empty(r.shape)
6     np.cumsum(r, axis=-1, out=out)
     out += np.expand_dims(x0, axis=-1)
8     return out
```

Para a plotagem da figura [4.3](#) foram usados os parâmetros indicados abaixo, incluindo uma ‘semente’ (*np.random.seed(0)*) que permite a replicação do código com

os mesmos resultados. A variável ‘tempo’ marca a posição (ou o instante) em que uma das condições de fronteira for atingida.

```

np.random.seed(0)
2 N, dt = 10000, 0.0001
# valores iniciais
4 x = np.empty((2,N+1))
  x[0, 0], x[1, 0] = 0.5, 0.5
6 # trajetoria do movimento Browniano
  brownian(x[:,0], N, dt, out=x[:,1:])
8 # fronteira
  a, b = 1, 1
10 tempo = 0
  for i in range(N+1):
12     if x[0,i] < 0 or x[0,i] > a or x[1,i] < 0 or x[1,i] > b:
        tempo = i
14     break

```

O gráfico foi construído com as seguintes linhas:

```

# retangulo
2 figure, axes = plt.subplots()
  axes.add_patch(Rectangle((0,0), a, b, fill = False))
4 # trajetoria do movimento Browniano
  plot(x[0],x[1])
6 # ponto inicial, final e a primeira coordenada fora da fronteira
  plot(x[0,0],x[1,0], 'go')
8 plot(x[0,-1], x[1,-1], 'ro')
  plot(x[0,tempo], x[1,tempo], 'bo')
10 # eixos
  xlabel('x', fontsize=16)
12 ylabel('y', fontsize=16)
  axis('equal')
14 grid(False)
  show()

```

Na trajetória do movimento Browniano, as saídas $x[0]$ e $x[1]$ representam, respectivamente, as coordenadas x e y do processo ao longo de todo o tempo e são calculas pela função ‘brownian’. Conforme a teoria, cada uma representa um movimento Browniano

um-dimensional independente. A função abaixo salva as coordenadas do movimento Browniano em todas as m primeiras vezes em que a fronteira é atingida e retorna um vetor com todas as coordenadas (x, y) obtidas.

```
1 def mb_frenteira(m, x, N, dt, a, b):
    mb_bordo = []
3     for k in range(m):
        np.random.seed(k)
5         brownian(x[:,0], N, dt, out=x[:,1:])
        for i in range(N+1):
7             if x[1,i] < 0:
                mb_bordo.append(x[:,i])
9                 break
                elif x[0,i] < 0 or x[0,i] > a or x[1,i] > b:
11                    mb_bordo.append([0,0])
                    break
13     while len(mb_bordo) < m:
        mb_bordo.append(np.array([np.nan, np.nan]))
15     return mb_bordo
```

Como explicado anteriormente, quando o processo sai da fronteira por três dos quatro lados do quadrado, o valor salvo é nulo e, em último caso, se em alguma plotagem o processo não atingir o bordo, entradas vazias são acrescentadas à matriz. A média então é calculada ignorando as entradas do tipo ‘NaN’ e aplicando a função ‘f’ escolhida às entradas não vazias da matriz.

```
1 def media(m, f, mb_bordo):
    fc_bordo = []
3     for j in range(m):
        if not np.isnan(mb_bordo[j][0]):
5         fc_bordo.append(f(mb_bordo[j][0]))
        media = np.mean(fc_bordo)
7     return media
```


Resultados da simulação

Abaixo estão descritos os dados que produziram o gráfico dos resultados para $y = 0.1$ com 100 valores iniciais de x calculados com espaçamento constante no intervalo $0 < x < 1$.

Média	Solução	Erro	Média	Solução	Erro
-0.005868	-0.019064	0.013196	-0.277996	-0.298864	0.020868
-0.012739	-0.038091	0.025351	-0.296599	-0.313683	0.017084
-0.023257	-0.057043	0.033786	-0.314303	-0.328108	0.013804
-0.035775	-0.075887	0.040111	-0.332228	-0.342130	0.009902
-0.050101	-0.094588	0.044487	-0.348951	-0.355743	0.006792
-0.065540	-0.113116	0.047575	-0.365848	-0.368940	0.003092
-0.083381	-0.131441	0.048059	-0.379993	-0.381716	0.001722
-0.101893	-0.149538	0.047644	-0.394847	-0.394063	0.000783
-0.121059	-0.167382	0.046323	-0.408859	-0.405979	0.002880
-0.140703	-0.184952	0.044249	-0.422260	-0.417456	0.004803
-0.160565	-0.202230	0.041664	-0.434958	-0.428493	0.006465
-0.180505	-0.219196	0.038691	-0.448531	-0.439083	0.009447
-0.200195	-0.235836	0.035641	-0.460392	-0.449225	0.011166
-0.219833	-0.252135	0.032302	-0.471337	-0.458914	0.012423
-0.239373	-0.268080	0.028707	-0.481820	-0.468147	0.013673
-0.258724	-0.283660	0.024936	-0.492611	-0.476922	0.015689

Média	Solução	Erro	Média	Solução	Erro
-0.502659	-0.485236	0.017423	-0.506608	-0.513835	0.007227
-0.512261	-0.493086	0.019175	-0.497981	-0.507387	0.009406
-0.520101	-0.500471	0.019630	-0.487040	-0.500471	0.013430
-0.527612	-0.507387	0.020224	-0.476876	-0.493086	0.016209
-0.534777	-0.513835	0.020942	-0.466996	-0.485236	0.018240
-0.540865	-0.519811	0.021053	-0.455829	-0.476922	0.021092
-0.546694	-0.525314	0.021380	-0.443761	-0.468147	0.024386
-0.552601	-0.530343	0.022257	-0.432097	-0.458914	0.026816
-0.557590	-0.534897	0.022692	-0.420064	-0.449225	0.029160
-0.560427	-0.538974	0.021452	-0.407271	-0.439083	0.031812
-0.563520	-0.542574	0.020945	-0.394081	-0.428493	0.034411
-0.566043	-0.545696	0.020347	-0.378702	-0.417456	0.038754
-0.567776	-0.548338	0.019437	-0.364667	-0.405979	0.041311
-0.569186	-0.550501	0.018684	-0.351053	-0.394063	0.043010
-0.570702	-0.552184	0.018518	-0.335589	-0.394063	0.046126
-0.571100	-0.553386	0.017713	-0.319216	-0.368940	0.049724
-0.571021	-0.554108	0.016913	-0.302732	-0.355743	0.053010
-0.569482	-0.554348	0.015133	-0.285459	-0.342130	0.056671
-0.568393	-0.554108	0.014285	-0.269153	-0.328108	0.058954
-0.567167	-0.553386	0.013780	-0.252702	-0.313683	0.060981
-0.564675	-0.552184	0.012490	-0.233977	-0.298864	0.064887
-0.561615	-0.550501	0.011113	-0.215405	-0.283660	0.068255
-0.558002	-0.548338	0.009664	-0.197938	-0.268080	0.070142
-0.553426	-0.545696	0.007730	-0.179787	-0.252135	0.072348
-0.548483	-0.542574	0.005908	-0.160438	-0.235836	0.075397
-0.542644	-0.538974	0.003669	-0.142314	-0.219196	0.076881
-0.536175	-0.534897	0.001278	-0.124671	-0.202230	0.077558
-0.530530	-0.530343	0.000186	-0.107008	-0.184952	0.077944
-0.523090	-0.525314	0.002224	-0.089586	-0.167382	0.077795
-0.515441	-0.519811	0.004369	-0.072866	-0.149538	0.076671

Média	Solução	Erro
-0.057127	-0.131441	0.074313
-0.041929	-0.113116	0.071186
-0.027653	-0.094588	0.066935
-0.016234	-0.075887	0.059653
-0.007802	-0.057043	0.049241
-0.000907	-0.038091	0.037183
0.001815	-0.019064	0.020879

Como pode ser visto, o erro absoluto, calculado pela diferença em módulo das duas soluções, é maior a medida que x se aproxima das fronteiras, comportamento justificado pela própria natureza do movimento Browniano.

Bibliografia

- BUCHMANN, F. M.; PETERSEN, W. P. Solving dirichlet problems numerically using the feynman–kac representation. *BIT Numerical Mathematics*, Springer, v. 43, n. 3, p. 519–540, 2003.
- CABRAL, M. A. P. *Introdução à Teoria da Medida e Integral de Lebesgue*. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.
- CALIN, O. An introduction to stochastic calculus with applications to finance. *Ann Arbor*, 2012.
- CALIN, O. *An Informal Introduction to Stochastic Calculus with Applications*. 1. ed. Singapore: World Scientific, 2015. ISBN 978-9-8146-7893-3.
- EVANS, L. *An introduction to stochastic differential equations*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2013. ISBN 9781470416126.
- FIGUEIREDO, D. G. de. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. [S.l.]: IMPA, 2018.
- FOLLAND, G. B. *Real analysis : modern techniques and their applications*. New York: Wiley, 1984. ISBN 9780471809586.
- GALL, J. F. L. *Brownian motion, martingales, and stochastic calculus*. Switzerland: Springer, 2016. ISBN 978-3-319-31088-6.
- GARD, T. C. *Introduction to stochastic differential equations*. [S.l.]: Marcel Dekker New York, 1988.
- GRIMMETT, G.; WELSH, D. *Probability : an introduction*. Oxford: Oxford University Press, 2014. ISBN 9780198709961.
- GUILHOTO, L. F. Numerically solving the dirichlet problem using stochastic calculus. 2019.
- KARATZAS, I.; SHREVE, S. E. *Brownian motion and stochastic calculus*. 2a. ed.. ed. New York: Springer-Verlag, 1991. ISBN 0387976558.
- KLEBANER, F. C. *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*. 2. ed. London: Imperial College Press, 2005. ISBN 1-86094-555-4.
- KROT, T. Solving the dirichlet problem via brownian motion. University of Hawaii at Manoa, 2007.

KUO, H.-H. *Introduction to stochastic integration*. [S.l.]: Springer Science+Business Media, 2006. (Universitext).

MÖRTERS, P.; PERES, Y. *Brownian Motion*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2010.

O'CONNOR, J.; ROBERTSON, E. F. Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet. *MacTutor History of Mathematics Archive*, 2000. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Dirichlet/>. Acesso em: 10 out. 2022.

O'CONNOR, J.; ROBERTSON, E. F. Norbert Wiener. *MacTutor History of Mathematics Archive*, 2003. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Wiener_Norbert/. Acesso em: 28 set. 2022.

O'CONNOR, J.; ROBERTSON, E. F. Eugene Borisovich Dynkin. *MacTutor History of Mathematics Archive*, 2009. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Dynkin/>. Acesso em: 26 set. 2022.

O'CONNOR, J.; ROBERTSON, E. F. Paul Pierre Lévy. *MacTutor History of Mathematics Archive*, 2020. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lévy_Paul/. Acesso em: 28 set. 2022.

OKSENDAL, B. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. 6. ed. New York: Springer Science & Business Media, 2003. ISBN 3-540-04758-1.

RUFFINO, P. R. C. *Uma iniciacao aos sistemas dinamicos estocasticos*. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. ISBN 9788524403040.

SCHILLING, R. L.; PARTZSCH, L. *Brownian motion*. Berlin, Germany: De Gruyter, 2012. (De Gruyter Textbook).

SIGMAN, K. Stopping times. 2006. Disponível em: <http://www.columbia.edu/~ww2040/4701Sum07/4701-06-Notes-ST.pdf>. Acesso em: 26 set. 2022.

WECKESSER, W. *Brownian Motion in Python*. Acessado em 13 de julho de 2023. <https://scipy-cookbook.readthedocs.io/items/BrownianMotion.html>.