

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

MATHIAS ALEXANDRE CAMPOS LUCCI

Introdução à Teoria Quântica de Campos: Estados de uma partícula, matriz-S e campos quânticos de spin inteiro

Guaratinguetá

2021

Mathias Alexandre Campos Lucci

Introdução à Teoria Quântica de Campos: Estados de uma partícula, matriz-S e campos quânticos de spin inteiro

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Bacharelado em Física da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Bacharelado em Física.

Orientador: Prof^o Dr. Julio M. Hoff da Silva

Guaratinguetá
2021

L934i	Lucci, Mathias Alexandre Campos Introdução à teoria quântica de campos: estados de uma partícula, matriz-S e campos quânticos de spin inteiro / Mathias Alexandre Campos Lucci – Guaratinguetá, 2021. 172 f.: il. Bibliografia: f. 170 Trabalho de Graduação – Bacharelado em Física – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2021. Orientador: Prof. Dr. Julio Marny Hoff da Silva 1. Teoria de campos (Física). 2. Séries de Poincaré. 3. Teoria quântica de campos. I. Título. CDU 530.145
-------	--

Luciana Máximo

Bibliotecária CRB-8/3595

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

MATHIAS ALEXANDRE CAMPOS LUCCI

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO PARTE DO
REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE "GRADUADO EM
BACHARELADO EM FÍSICA"

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE GRADUAÇÃO EM
BACHARELADO EM FÍSICA

Profº Dr. JULIO M. HOFF DA SILVA
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:



Profº Dr. Julio M. Hoff da Silva
Orientador/UNESP-FEG



Profº Dr. Elias Leite Mendonça
UNESP-FEG



Profº Dr. Álvaro de Souza Dutra
UNESP-FEG

Março, 2021

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) e aos contribuintes do estado de São Paulo pelo financiamento do projeto de pesquisa¹ que culminou na produção deste trabalho. Agradeço também aos professores e funcionários da FEG-Unesp por possibilitarem minha formação.

¹ Processo 2019/23237-2.

Este trabalho contou com o apoio da seguinte entidade:

FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (Processo 2019/23237-2)

“Todas las hojas son del viento, ya que él las mueve hasta en la muerte.”
(Luis Alberto Spinetta)

RESUMO

Neste trabalho buscamos construir de forma detalhada as bases da Teoria Quântica de Campos, procurando explicitar seu caráter como resultado natural da junção da Relatividade Restrita com a Mecânica Quântica. Iniciamos com uma revisão dos conceitos relevantes dessas duas áreas e passamos para uma breve introdução à teoria de grupos. Depois, buscamos a representação do grupo de Poincaré sobre estados de uma partícula, obtendo-a mediante a utilização de grupos de isotropia. Essa análise nos fornece regras de transformação do spin e da helicidade de partículas. Após uma extensa introdução à matriz-S e os geradores de transformações sobre estados interagentes, buscamos uma forma explicitamente invariante da interação, que nos leva a introduzir a densidade de interação, um operador escalar. Para respeitar o Princípio da Decomposição em Cluster, chegamos também à necessidade da construção dessa interação com operadores de criação e aniquilação. Ambas as condições nos levam à necessidade de se introduzir campos quânticos. Finalizamos o trabalho mostrando a construção explícita dos campos escalar e quadrvetorial e explicitando a necessidade de antipartículas.

PALAVRAS-CHAVE: Matriz S. Representações do Grupo de Poincaré. Teoria Quântica de Campos.

ABSTRACT

In this work we intend to build in detail the basis of Quantum Field Theory, in an attempt to explicitly show its underlying aspect as a natural result of Special Relativity and Quantum Mechanics combination. We begin by revising the concepts that will be needed in both theories and proceed with a short introduction to group theory. Afterwards, we seek the representation of the Poincaré group over one-particle states by using little groups. This analysis rewards us with the transformation rules of the spin and helicities of particles. After an extense introduction to the S matrix and the Poincaré transformation generators over interacting states, we seek an explicitly invariant form of the interaction, which leads us to introduce the interaction density, a scalar operator. So as to respect the Cluster Decomposition Principle, we also arrive at the need to build such interaction with creation and annihilation operators. These two conditions together lead us into introducing quantum fields. We finish this work by explicitly building scalar and vector fields and showing why antiparticles are necessary to the theory.

KEYWORDS: S-matrix. Representations of the Poincaré group. Quantum Field Theory.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	CONCEITOS NECESSÁRIOS EM RELATIVIDADE RESTRITA E MECÂNICA QUÂNTICA	12
2.1	RELATIVIDADE RESTRITA: QUADRIVETORES, TENSORES E TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ	12
2.2	Mecânica Quântica: ESPAÇO DE HILBERT	17
2.2.1	Operadores Hermitianos e Teoria das Medições	17
2.2.2	Operações de simetria e operadores unitários	20
2.3	GRUPOS	21
2.3.1	Transformações de Lorentz como grupos	26
3	MECÂNICA QUÂNTICA RELATIVÍSTICA E ESTADOS DE UMA PARTÍCULA	29
3.1	GERADORES DO GRUPO DE POINCARÉ	29
3.1.1	A álgebra dos geradores do grupo de Poincaré	31
3.2	TRANSFORMAÇÕES DE POINCARÉ SOBRE ESTADOS DE UMA PARTÍCULA	34
3.2.1	Obtenção do fator de normalização	38
3.2.2	Grupos de isotropia	42
3.2.3	A álgebra da Paridade e da Reversão Temporal	47
3.2.4	Paridade e Reversão Temporal sobre estados de uma partícula	50
3.2.4.1	Massa não nula	50
3.2.4.2	Massa nula	54
4	ESTADOS DE VÁRIAS PARTÍCULAS E CONSTRUÇÃO DA INTERAÇÃO	61
4.1	ESTADOS DE VÁRIAS PARTÍCULAS LIVRES	61
4.1.1	Estados in e out	63
4.1.2	As equações de Lipmann-Schwinger	65
4.2	A MATRIZ-S	69
4.2.1	Aproximação de Born	70
4.2.2	Simetria de Poincaré da matriz-S	73
4.2.2.1	Obtenção dos geradores das transformações de Poincaré sobre estados interagentes	77
4.2.3	Simetrias internas da matriz-S	84
4.2.4	Paridade e Reversão Temporal	87
4.3	TAXAS DE TRANSIÇÃO E SEÇÕES DE CHOQUE	89
4.3.1	Dois casos especiais	94
4.3.2	Somas sobre polarização	95
4.4	TEORIA DE PERTURBAÇÕES COVARIANTE	98

4.4.1	Condições sobre o termo de interação para que a matriz-S seja invariante de Poincaré	102
5	PRINCÍPIO DA DECOMPOSIÇÃO EM CLUSTER	107
5.1	OPERADORES DE CRIAÇÃO E ANIQUILAÇÃO DE BÓSONS E FÉRMIONS	107
5.1.1	Normalização de estados de bósons e férmions	107
5.1.2	Ação dos operadores de criação e aniquilação sobre estados físicos	109
5.1.3	Relações de comutação dos operadores de criação e aniquilação	111
5.1.4	Construção de operadores a partir de operadores de criação e aniquilação	113
5.1.5	Propriedades de transformação dos operadores de criação e aniquilação	116
5.2	DECOMPOSIÇÃO EM CLUSTERS DA MATRIZ-S	120
5.2.1	O PDC no espaço de momentos	121
5.2.2	Estrutura da interação	123
6	CAMPOS QUÂNTICOS	129
6.1	CAMPOS LIVRES	129
6.1.1	Transformação dos campos de criação e aniquilação	131
6.1.1.1	Transformação dos coeficientes	134
6.1.2	Verificação do Princípio da Decomposição em Cluster	138
6.1.3	Condição de causalidade, simetrias internas e antipartículas	139
6.2	CAMPOS ESCALARES CAUSAIS	142
6.2.1	Campo escalar para partícula de carga não-nula	147
6.2.2	Simetrias do campo escalar	149
6.3	CAMPOS VETORIAIS CAUSAIS	151
6.3.1	Campo vetorial de spin-0	155
6.3.2	Campo vetorial de spin-1	156
6.3.2.1	Campo vetorial de spin-1 com carga não-nula	162
6.3.2.2	Campo vetorial e Eletrodinâmica	163
6.3.2.3	Simetrias do campo vetorial de spin-1	164
7	CONCLUSÃO	168
	REFERÊNCIAS	170

1 INTRODUÇÃO

A Teoria Quântica de Campos (TQC) é uma área de extrema importância dentro da física teórica, e constitui a base de grande parte da física de altas energias. Dentre as várias maneiras de introduzir a TQC, existe uma que retrata a teoria como uma consequência natural e inevitável da junção da Mecânica Quântica com a Relatividade Restrita. Essa abordagem é encontrada na referência (WEINBERG, 1995), e nela esse aspecto orienta toda a construção da teoria, levando à própria necessidade do conceito de campo. Neste trabalho buscamos demonstrar explicitamente os principais resultados dispostos nessa referência.

Iniciamos o Capítulo 2 com uma necessária abordagem dos fundamentos da Mecânica Quântica e da Relatividade Restrita, através das referências (GRIFFITHS, 1999), (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOË, 2005), (WEINBERG, 2013) e (SAKURAI, 1985). Estudamos as propriedades de transformação de quadrivetores e tensores e como as transformações de Lorentz agem sobre esses elementos matemáticos, e também introduzimos o espaço de Hilbert e a maneira pela qual medições são feitas sobre vetores de estado, com operadores Hermitianos, atentando para a existência de observáveis incompatíveis. Prosseguimos então a uma breve introdução à teoria de grupos, explicitando os resultados que são necessários para o Capítulo 3, onde, iniciando o trabalho de abordar a referência (WEINBERG, 1995), encontramos representações do grupo de Poincaré — das rotações, boosts e translações da Relatividade Restrita — sobre vetores de estados de uma partícula. Esse trabalho nos leva à obtenção dos chamados grupos de isotopia e também nos revela naturalmente propriedades importantes das transformações do spin de partículas massivas e da helicidade de partículas de massa nula.

Não podemos, contudo, descrever a riqueza da realidade física apenas dotados de regras de transformações de estados de uma única partícula, assim iniciamos o Capítulo 4 estendendo a representação dos grupos de Poincaré à estados de várias partículas. Uma extensão imediata, contudo, apenas nos fornece uma representação de estados compostos de várias partículas livres, sem possibilidade de interação. Precisamos, portanto, aplicar alterações à teoria de modo a introduzir termos referentes à interação entre as partículas. Também introduzimos a matriz-S e seu operador associado, os quais são responsáveis por realizar a transição entre estados antes e após a interação e dar a probabilidade dos resultados possíveis, e buscamos obter as condições que garantem que essa matriz seja invariante por transformações de Poincaré, para que os experimentos e interações não tenham resultados distintos em diferentes referenciais. Após analisarmos dois exemplos de aplicação da matriz-S, encontramos por fim as condições sobre o termo de interação — análogo, de certo modo, à energia potencial da mecânica clássica — que garantem que obtenhamos a matriz-S numa forma invariante. Essas condições envolvem a introdução de uma densidade de interação escalar. Deve ser mencionado que nos Capítulos 3 e 4 usamos a referência (DIAS, 2015) para auxílio em diversas demonstrações e como exemplo de exibição clara e bem organizada dos resultados e procedimentos.

Após uma detalhada introdução a operadores de criação e aniquilação de partículas e suas regras de transformação, no Capítulo 5 vemos que qualquer operador pode ser descrito como uma soma

de produtos desses operadores. Formulamos então o Princípio da Decomposição em Cluster, que é a formulação matemática, sobre a matriz-S, da necessidade de que experimentos distantes tenham resultados não-correlacionados. Vemos que essa necessidade é condizente com a conservação de momento, e que esse requisito é cumprido se a densidade de interação for escrita explicitamente como uma soma de produtos dos operadores de criação e aniquilação que introduzimos.

O Capítulo 4 nos informa que a densidade de interação deve ser um escalar sob transformações de Poincaré, e o Capítulo 5 nos diz que essa densidade deve ser construída com operadores de criação e aniquilação. Para que esses operadores possam ser inseridos no termo de interação de forma invariante, contudo, precisamos introduzir, finalmente, os campos quânticos, que são efetivamente transformadas de Fourier desses operadores multiplicados por elementos matemáticos de classes distintas, cada qual se transformando sob uma representação do grupo de Poincaré, que naturalmente dita condições sobre seu spin e suas transformações. Também somos levados, nesse processo, a explicitar matematicamente a necessidade de antipartículas, as quais correspondem à mesma massa que as partículas a que são relacionadas mas possuem carga com sinal oposto. Terminamos o estudo mostrando que campos escalares estão associados a partículas de spin-0, e depois trabalhamos os campos quadrivetoriais, correspondentes a spin-1 e que no limite de massa nula correspondem à quantização do campo elétrico no contexto da Eletrodinâmica.

Em todo esse processo buscamos demonstrar de forma clara os cálculos que são necessários para a construção da teoria. Com isso, esse trabalho visa auxiliar o estudo e compreensão da TQC com uma linguagem acessível a alunos nos anos finais de graduação em Física, de modo a fornecer uma base bem estruturada à teoria que não apenas introduza o conceito de campo quântico mas também deixe clara sua necessidade. Após a leitura desse trabalho, o aluno pode buscar estudar os campos de spin-1/2, importantes para a descrição de elétrons e outros férmions, pela referência (WEINBERG, 1995), ou buscar uma referência em TQC que possua uma abordagem mais tradicional, como (TONG, 2006), que se inicia com a quantização do campo e depois passa ao formalismo Lagrangiano no contexto dessa teoria.

2 CONCEITOS NECESSÁRIOS EM RELATIVIDADE RESTRITA E MECÂNICA QUÂNTICA

Neste capítulo introduzimos o ferramental matemático referente à Relatividade Restrita e à Mecânica Quântica que é necessário para o desenvolvimento deste trabalho. É o objetivo de unir essas duas teorias que guia esse trabalho até a obtenção dos campos quânticos no Capítulo 6. Depois de termos tratado sobre as regras de transformação de quadrivetores e tensores, vamos introduzir o espaço de Hilbert, onde ocorre a matemática da Mecânica Quântica, e faremos uma introdução à teoria das medições. Por fim, veremos que em ambas as teorias chegamos no conceito de grupos. É a introdução à teoria de grupos que fecha esse capítulo e nos permite partir ao problema de representar as transformações de Poincaré sobre estados de uma partícula no Capítulo 3.

2.1 RELATIVIDADE RESTRITA: QUADRIVETORES, TENSORES E TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

As transformações de Lorentz são as transformações de referencial no espaço-tempo que garantem, dentro do contexto da Relatividade Restrita, que a velocidade da luz seja a mesma em todo referencial inercial (GRIFFITHS, 1999, p. 481). Essa exigência se traduz na existência da forma quadrática invariante (GRIFFITHS, 1999, p. 501):

$$c^2(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2 = c^2(t' - t'_0)^2 - (x' - x'_0)^2 - (y' - y'_0)^2 - (z' - z'_0)^2; \quad (2.1)$$

onde c é a velocidade da luz. Definimos:¹

$$x^0 \equiv ct, \quad x^1 \equiv x, \quad x^2 \equiv y, \quad x^3 \equiv z \quad (2.2)$$

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (x^0, \vec{x}). \quad (2.3)$$

Definido dessa forma, x^μ é um quadrivetor: x^0 é chamado de sua componente temporal enquanto x^1 , x^2 e x^3 são suas componentes espaciais. Usamos nesse trabalho as unidades naturais, definidas com $c = 1$ e $\hbar = 1$, sendo $\hbar$ a constante de Plank reduzida, que aparece em várias equações da física quântica. Nessas unidades segue que:

$$x^0 \equiv t \quad (2.4)$$

e desse modo omitimos c daqui em diante.

¹ A referência (WEINBERG, 1995) usa uma definição distinta, que não altera nenhum dos resultados a não ser em nível estético, mas pode causar confusão: $x \equiv (\vec{x}, x^0)$.

Definimos também a seguinte matriz, ou tensor:

$$\eta = (\eta)_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

a qual é chamada de tensor métrico.² Com isso podemos escrever (2.1) como:

$$\eta_{\mu\nu}(x^\mu - x_0^\mu)(x^\nu - x_0^\nu) = \eta_{\alpha\beta}(x'^\alpha - x_0'^\alpha)(x'^\beta - x_0'^\beta); \quad (2.6)$$

onde usamos a notação de Einstein, em que a repetição de índices em cima e embaixo indica a presença de um somatório, ou seja:

$$\eta_{\mu\nu}(x^\mu - x_0^\mu)(x^\nu - x_0^\nu) \equiv \sum_{\mu\nu} \eta_{\mu\nu}(x^\mu - x_0^\mu)(x^\nu - x_0^\nu). \quad (2.7)$$

O tensor η definido em (2.5) tem o poder de abaixar e levantar índices (TONG, 2006, p. 3–4):

$$x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu, \quad x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu. \quad (2.8)$$

O resultado disso, com o tensor na forma conveniente que o definimos, é $x^0 = x_0$ e $x^i = -x_i$.³ Outra consequência é que:

$$x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu = \eta^{\mu\nu} \eta_{\nu\rho} x^\rho; \quad (2.9)$$

de onde segue:

$$\eta^{\mu\nu} \eta_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu. \quad (2.10)$$

Com isso, também podemos escrever a forma quadrática invariante em (2.1) como:

$$x_\mu x^\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu x^\mu. \quad (2.11)$$

Não é apenas essa forma que é invariante por transformações de referencial. Dados dois vetores a^μ e

² Há outras formas de definir esse tensor métrico que também respeitam as importantes condições expostas nas equações (2.6) e (2.13). Uma delas é

$$\eta = (\eta)_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

que é a forma utilizada na referência (WEINBERG, 1995).

³ Quando escrevemos o índice com uma letra grega, como μ , ν ou ρ , queremos que a relação escrita valha para todas as componentes ou o somatório implícito corra de 0 a 3. Quando usamos uma letra minúscula do alfabeto latino, usualmente i ou j , queremos nos referir apenas às componentes espaciais, ou seja, as componentes de 1 a 3.

b^μ quaisquer, o valor do produto interno:

$$a \cdot b = a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu \quad (2.12)$$

também será o mesmo em qualquer referencial.

Uma transformação de Lorentz é uma transformação $x \rightarrow x'$ que respeita a invariância do produto interno em (2.12). Elas são representadas usualmente por Λ (GRIFFITHS, 1999, p. 501):

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad (2.13)$$

de onde também obtemos:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}. \quad (2.14)$$

Para compreender o significado mais fundamental do abaixamento e levantamento de índices vamos ver como os vetores se transformam sobre transformações de Lorentz. Os vetores que se transformam como x^μ em (2.13) são chamados de contravariantes. Já os vetores chamados covariantes se transformam da seguinte forma:

$$\nu'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \nu_\nu. \quad (2.15)$$

As operações de abaixamento e levantamento de índices que introduzimos em (2.8) levam, portanto, um vetor contravariante para seu vetor covariante associado ou vice-versa. O quadrigradiente, o equivalente quadridimensional do gradiente, se transforma de forma covariante, como podemos demonstrar usando (2.14):⁴

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'^\mu} &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}; \\ \partial'_\mu &= (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Tensores são elementos matemáticos com um ou mais índices que se transformam índice a índice segundo a covariância ou contravariância de cada um. Por exemplo:

$$T'^{\alpha_1 \alpha_2}{}_{\beta_1 \beta_2} = \Lambda^{\alpha_1}{}_{\mu_1} \Lambda^{\alpha_2}{}_{\mu_2} (\Lambda^{-1})^{\eta_1}{}_{\beta_1} (\Lambda^{-1})^{\eta_2}{}_{\beta_2} T^{\mu_1 \mu_2}{}_{\nu_1 \nu_2}. \quad (2.17)$$

Na prática, um tensor é dito de rank- n se possui n índices. Ele é dito n vezes covariante e p vezes contravariante se possui n índices covariantes e p índices contravariantes. Podemos construir um tensor de rank- $(a+b)$ fazendo o produto externo, ou produto tensorial, de um tensor de rank- a e um de rank- b .

⁴ $\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu$. Também lembramos que, em um espaço tridimensional cartesiano, o gradiente tridimensional é dado por $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$.

Por exemplo:

$$A_{\gamma}^{\alpha\beta} B_{\epsilon\zeta}^{\delta} = C_{\gamma\epsilon\zeta}^{\alpha\beta\delta}, \quad (2.18)$$

essa operação, quando transcrita dos coeficientes para um tensor matemático de fato, é indicada por:

$$A \otimes B = C. \quad (2.19)$$

Um tensor misto, isso é, que possui pelo menos um índice de cada tipo, pode sofrer uma contração. Por exemplo, vamos contrair um tensor misto T_j^i :

$$T_j^i \rightarrow \sum_i T_i^i = T. \quad (2.20)$$

Aqui obtivemos um escalar T através da contração do tensor T_j^i . Podemos realizar um produto externo seguido de uma contração. Essa operação é chamada de produto interno. Vamos observar, como exemplo, um produto interno entre dois tensores A_{β}^{α} e B_{δ}^{γ} :

$$A_{\beta}^{\alpha} B_{\delta}^{\gamma} \rightarrow \sum_{\beta} A_{\beta}^{\alpha} B_{\delta}^{\beta} = C_{\delta}^{\alpha}. \quad (2.21)$$

Usualmente deixamos o somatório implícito pela repetição de índices.

Para finalizar nossa análise sobre tensores, um tensor é dito simétrico se:

$$T^{ij} = T^{ji}, \quad (2.22)$$

e antissimétrico se:

$$T^{ij} = -T^{ji}. \quad (2.23)$$

Tensores com mais índices podem ser ditos simétricos ou antissimétricos em relação a índices específicos. Qualquer tensor pode ser separado em uma soma de um tensor simétrico e um antissimétrico:

$$T^{ij} = \frac{1}{2}(T^{ij} + T^{ji}) + \frac{1}{2}(T^{ij} - T^{ji}), \quad (2.24)$$

onde a parte $(T^{ij} + T^{ji})$ é simétrica e, $(T^{ij} - T^{ji})$, antissimétrico.

Voltando agora às transformações de Lorentz, a equação (2.13) nos mostra que sobre o espaço de quadrivetores elas se comportam como tensores que realizam produto interno com esses vetores. As transformações que ocorrem exclusivamente entre coordenadas espaciais são chamadas de rotações, enquanto transformações entre as coordenadas espaciais e a temporal são chamadas de boosts. Caso adicionemos uma translação α^{μ} à transformação de Lorentz, obtemos uma transformação de Poincaré, que podemos escrever como $U = U(\Lambda, \alpha)$:

$$\begin{aligned}x' &= U(\Lambda, \alpha)x; \\x'^\mu &= \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + \alpha^\mu.\end{aligned}\tag{2.25}$$

Podemos obter uma condição respeitada pelas transformações de Lorentz reescrevendo a equação (2.6) com uso de duas transformações como da equação (2.13) no lado direito e trocando os índices no lado esquerdo (DIAS, 2015, p. 6):

$$\eta_{\alpha\beta}(x^\alpha - x_0^\alpha)(x^\beta - x_0^\beta) = \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta(x'^\mu - x_0'^\mu)(x'^\nu - x_0'^\nu).\tag{2.26}$$

Para que a igualdade acima seja verdade — e é necessário que ela seja pois não podemos abrir mão nem de (2.6) nem de (2.13) — segue:

$$\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta,\tag{2.27}$$

o que pode ser reescrito numa equação matricial:

$$\Lambda^t \eta \Lambda = \eta.\tag{2.28}$$

Essa equação implica as transformações de Lorentz formarem um grupo. Voltaremos à isso na Subseção 2.3.1.

Antes de prosseguirmos, vale a pena introduzir as classificações do intervalo entre dois eventos. Suponha dois quadrivetores, x^μ e y^μ . Chamamos de intervalo entre x^μ e y^μ a quantidade invariante $(x - y) \cdot (x - y) = (x - y)^2$. Esse intervalo pode ser classificado de três formas (GRIFFITHS, 1999, p. 503):

- se $(x - y)^2 \geq 0$ temos um intervalo do tipo tempo, e um sinal luminoso saindo da posição no espaço-tempo x^μ consegue chegar em y^μ , ou vice-versa;
- se $(x - y)^2 = 0$ temos um intervalo do tipo luz, e x^μ e y^μ são conectados por um sinal luminoso;
- se $(x - y)^2 \leq 0$ temos um intervalo do tipo espaço, e um sinal luminoso saindo de x^μ não pode chegar em y^μ , nem vice-versa.

Retornaremos aos intervalos do tipo espaço nos capítulos 4 e 6, em que a necessidade de que partículas separadas por intervalos desse tipo não afetem uma à outra será um fator contribuinte para a necessidade de introduzirmos campos quânticos para descrever as interações entre partículas.

2.2 MECÂNICA QUÂNTICA: ESPAÇO DE HILBERT

A Teoria Quântica de Campos, assim como a Mecânica Quântica não-relativística, é construída sobre o espaço de Hilbert, simbolizado matematicamente por $\mathcal{H}$. Esse espaço é composto pelos chamados vetores de estado, usualmente representados por Ψ ou Φ , os quais compõem classes de equivalência ou raios, que são utilizados para representar estados físicos. Isso significa, a grosso modo, que um estado físico descrito por um vetor de estado $\Psi \in \mathcal{H}$ é tão bem descrito por Ψ quanto por $\xi\Psi$, sendo ξ uma fase.⁵

Com isso em mente, vamos iniciar este trabalho com uma introdução matemática ao espaço de Hilbert. Nele a operação produto escalar entre dois vetores de estado é definida de modo que (WEINBERG, 2013, p. 57):

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad & (\Phi, \Psi) = (\Psi, \Phi)^*; \\ \text{ii.} \quad & (\Phi, \alpha_1\Psi_1 + \alpha_2\Psi_2) = \alpha_1(\Phi, \Psi_1) + \alpha_2(\Phi, \Psi_2); \\ \text{iii.} \quad & (\alpha_1\Phi_1 + \alpha_2\Phi_2, \Psi) = \alpha_1^*(\Phi_1, \Psi) + \alpha_2^*(\Phi_2, \Psi); \\ \text{iv.} \quad & (\Phi, \Phi) \geq 0, \quad (\Phi, \Phi) \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad (\Phi, \Phi) = 0 \Leftrightarrow \Phi = 0; \end{aligned} \tag{2.29}$$

onde $\Phi, \Psi \in \mathcal{H}$ e α_1, α_2 são constantes complexas. A partir da última relação acima, definimos a norma de um vetor de estado como:

$$\|\Phi\| = \sqrt{(\Phi, \Phi)}. \tag{2.30}$$

A norma, por sua vez, permite que seja definida a distância entre dois vetores desse espaço:

$$d(\Psi, \Phi) = \|\Psi - \Phi\|. \tag{2.31}$$

O espaço de Hilbert é completo em relação a essa norma. Isso significa que qualquer sequência de Cauchy⁶ de vetores pertencentes ao espaço $\mathcal{H}$ possui um limite também pertencente a $\mathcal{H}$.

2.2.1 Operadores Hermitianos e Teoria das Medições

Dentre os operadores que agem sobre vetores de $\mathcal{H}$, temos duas classes importantes. Essas classes são (SAKURAI, 1985, p. 37, 269):

⁵ Quando dizemos que ξ é uma fase, isso significa que ξ é uma constante complexa tal que $|\xi|^2 = \xi^*\xi = 1$, onde $*$ denota o complexo conjugado, ou seja, a troca do sinal da componente imaginária da constante ou escalar conjugado. Fases podem ser escritas como $\xi = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, onde θ é uma constante real, já que $\xi^*\xi = e^{-i\theta}e^{i\theta} = e^0 = 1$.

⁶ Uma sequência de Cauchy é uma sequência de vetores em que a distância entre dois vetores consecutivos da sequência se torna cada vez menor, tendendo a zero. Matematicamente isso significa que, dado qualquer valor real $\epsilon > 0$, se for possível encontrar um natural N tal que para todo $m, p > N$, os elementos de uma sequência $\{\Phi_n\}$ respeitam $d(\Phi_m, \Phi_p) < \epsilon$, então a sequência $\{\Phi_n\}$ é uma sequência de Cauchy.

$$\begin{aligned}
\text{Operadores lineares: } & A(\alpha_1\Phi_1 + \alpha_2\Phi_2) = \alpha_1A\Phi_1 + \alpha_2A\Phi_2, & (\Phi, A^\dagger\Psi) &= (A\Phi, \Psi); \\
\text{Operadores anti-lineares: } & A(\alpha_1\Phi_1 + \alpha_2\Phi_2) = \alpha_1^*A\Phi_1 + \alpha_2^*A\Phi_2, & (\Phi, A^\dagger\Psi) &= (A\Phi, \Psi)^*,
\end{aligned}
\tag{2.32}$$

onde $A^\dagger$ o adjunto do operador⁷ A :

$$A = A^\dagger. \tag{2.33}$$

Para apreciar a importância desses operadores precisamos conhecer as equações de autovalor e autovetor — que também pode ser chamado de autoestado no espaço de Hilbert — que tomam a forma (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOË, 2005, p. 132):

$$A\Psi_n = \lambda_n\Psi_n, \tag{2.34}$$

onde A é o operador e Ψ_n e $\lambda_n \in \mathbb{C}$ são respectivamente autovetor e autovalor de A . A particularidade desse tipo de equação é que à esquerda da igualdade temos um operador e à direita uma constante multiplicativa. Todo operador tem um conjunto de autovetores⁸ Ψ_n para os quais sua ação tem um efeito como em (2.34). A importância dos operadores hermitianos para a física quântica é que seus autovalores são sempre reais (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOË, 2005, p. 136). Sendo A um operador hermitiano e Ψ um autoestado qualquer com autovalor genérico λ :

$$\begin{aligned}
(\Psi, A\Psi) &= (A^\dagger\Psi, \Psi) \\
(\Psi, A\Psi) &= (A\Psi, \Psi) \\
(\Psi, \lambda\Psi) &= (\lambda\Psi, \Psi) \\
\lambda(\Psi, \Psi) &= \lambda^*(\Psi, \Psi) \\
\implies \lambda &= \lambda^*,
\end{aligned}
\tag{2.35}$$

e λ só pode ser igual a seu complexo conjugado caso $\lambda \in \mathbb{R}$. Desse modo, os autovalores de operadores hermitianos podem corresponder a resultados de medições de grandezas observáveis. Todos os observáveis físicos — como energia, carga ou momento angular — que podem ser representados por operadores são representados por operadores hermitianos. A condição $A = A^\dagger$ pode então ser chamada de condição de realidade.

Os autoestados Ψ_n de um operador hermitiano que equivalem a autovalores distintos são ortogonais, portanto podemos usá-los para construir uma base ortogonal em $\mathcal{H}$. Vemos isso definindo dois

⁷ No caso de um operador matricial, o adjunto é sua transposta conjugada, $(A^\dagger)_{ij} = A_{ji}^*$.

⁸ Esse conjunto pode ser discreto ou contínuo.

autoestados Ψ_1 e Ψ_2 de um operador hermitiano A , com autovalores respectivos λ_1 e λ_2 e $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$\begin{aligned}
 (\Psi_1, A\Psi_2) &= (A\Psi_1, \Psi_2) \\
 (\Psi_1, \lambda_2\Psi_2) &= (\lambda_1\Psi_1, \Psi_2) \\
 \lambda_2(\Psi_1, \Psi_2) &= \lambda_1(\Psi_1, \Psi_2) \\
 0 &= (\lambda_1 - \lambda_2)(\Psi_1, \Psi_2) \\
 &\Rightarrow (\Psi_1, \Psi_2) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.36}$$

Desse modo qualquer vetor $\Phi \in \mathcal{H}$ pode ser escrito como:

$$\Phi = \sum_n \Psi_n(\Psi_n, \Phi), \tag{2.37}$$

caso o conjunto de autoestados de A seja discreto, ou:

$$\Phi = \int dn \Psi_n(\Psi_n, \Phi), \tag{2.38}$$

caso esse conjunto seja contínuo (WEINBERG, 2013, p. 61).

Dizemos que, antes de ser efetuada uma medição de uma grandeza — equivalente a um operador hermitiano A — sobre um estado qualquer Ψ , este existe como uma sobreposição de autoestados de A . A probabilidade de que uma medição dessa quantidade observável A forneça um valor λ_n é definida como (WEINBERG, 2013, p. 60):

$$P(\lambda_n) = |(\Psi, \Psi_n)|^2, \tag{2.39}$$

onde Ψ_n é autovetor do operador A associado ao autovalor λ_n . Também podemos escrever o valor esperado de A para esse estado Ψ como:

$$\langle A \rangle = (\Psi, A\Psi) = \sum_n |(\Psi, \Psi_n)|^2. \tag{2.40}$$

Para que as probabilidades de todos os valores possíveis para A , ou para qualquer outro observável, somem 1 é necessário que o vetor Ψ seja normalizado:

$$(\Psi, \Psi) = 1. \tag{2.41}$$

Com essa condição de normalização, podemos definir o raio como um conjunto de vetores normalizados que são iguais a menos de uma constante complexa multiplicativa de módulo 1, complementando a definição dada no início desta seção. A probabilidade na equação (2.39) também pode ser interpretada como a probabilidade $P(\Psi \rightarrow \Psi_n)$ de que um estado Ψ decaia em um estado Ψ_n . Isso significa

que, após a medição ser realizada, a sobreposição de autoestados Ψ é substituída pelo autoestado Ψ_n equivalente ao valor λ_n medido. Devido a esse fato, a medição de duas grandezas distintas sobre um estado nem sempre pode ser realizada simultaneamente, pois uma medição afeta o resultado da outra.

Vamos a seguir definir as condições para que duas medições distintas não afetem o resultado mútuo. Definimos agora o **comutador** de dois operadores como:

$$[A, B] \equiv AB - BA, \quad (2.42)$$

e caso $[A, B] = 0$, dizemos que os operadores comutam, ou seja, $AB = BA$. Definimos o **anticomutador** como:

$$\{A, B\} \equiv AB + BA, \quad (2.43)$$

e, de modo similar, se $\{A, B\} = 0$ dizemos que os operadores anticomutam, o que em outros termos significa que $AB = -BA$. Consideremos agora dois operadores A e B que comutam, e seja Ψ_a um autoestado de A . Esse autoestado será autoestado simultâneo de A e B (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOË, 2005, p. 139), ou seja, podemos realizar uma medição de A e uma medição subsequente de B e obtermos os mesmos resultados de caso tivéssemos feito o caminho contrário, já que a comutação de ambos implica em:

$$AB\Psi_a = BA\Psi_a. \quad (2.44)$$

Muitas vezes é conveniente chamar tal autoestado simultâneo de $\Psi_{a,b}$, sendo a seu autovalor mediante a ação de A e, b , o de B .

O momento linear e a posição em uma mesma direção são duas grandezas incompatíveis, ou seja, não podemos conhecer simultaneamente a posição e o estado de uma partícula. Desse modo, podemos construir estados físicos sobre autoestados da posição ou do momento, mas não de ambos. Nesse trabalho, trabalharemos na maior parte do tempo sobre uma base de autoestados do momento, que escreveremos como Ψ_p . Podemos, contudo, relacionar as duas bases por uma transformada de Fourier (WEINBERG, 2013, p. 56):

$$\Psi_x = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^3p \, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \Psi_p. \quad (2.45)$$

2.2.2 Operações de simetria e operadores unitários

Chamamos de operações de simetria as transformações $\Psi \mapsto \Psi'$ sobre o espaço de Hilbert que preservam as probabilidades (SAKURAI, 1985, p; 40–41):

$$P(\Psi \rightarrow \Psi_n) = P(\Psi' \rightarrow \Psi'_n). \quad (2.46)$$

Há um teorema de Wigner (WEINBERG, 1995, p. 51) que diz que esse mapeamento $\Psi \rightarrow \Psi'$ só pode ser representado por dois tipos de operadores: os **operadores unitários e lineares**, que obedecem às condições:

$$\begin{aligned} (U\Phi, U\Psi) &= (\Phi, \Psi); \\ U(\alpha_1\Phi_1 + \alpha_2\Phi_2) &= \alpha_1U\Phi_1 + \alpha_2U\Phi_2; \end{aligned} \tag{2.47}$$

e os **anti-unitários e anti-lineares**, que respeitam:

$$\begin{aligned} (U\Phi, U\Psi) &= (\Phi, \Psi)^*; \\ U(\alpha_1\Phi_1 + \alpha_2\Phi_2) &= \alpha_1^*U\Phi_1 + \alpha_2^*U\Phi_2; \end{aligned} \tag{2.48}$$

e ambas as categorias também obedecem, por consequência:

$$U^\dagger = U^{-1}. \tag{2.49}$$

Notamos aqui que os autovalores de operadores unitários são fases: sendo U unitário e Ψ um autoestado qualquer desse operador com autovalor genérico λ , usamos (2.47):

$$\begin{aligned} (\Psi, \Psi) &= (U\Psi, U\Psi) \\ &= (\lambda\Psi, \lambda\Psi) \\ &= \lambda^*\lambda(\Psi, \Psi) \\ &= |\lambda|^2(\Psi, \Psi), \end{aligned} \tag{2.50}$$

portanto, $|\lambda|^2 = 1$.

As chamadas simetrias contínuas devem estar ligadas ao operador identidade, que é linear e unitário, e portanto todas as simetrias contínuas são também associadas a operadores unitários e lineares. Como consequência, simetrias contínuas podem ser tomadas em forma infinitesimal (WEINBERG, 1995, p. 52):

$$U = 1 + i\epsilon t; \tag{2.51}$$

onde ϵ é um infinitesimal real e t é hermitiano e linear, por consequência podendo representar algum observável real. Os momentos linear e angular, por exemplo, podem ser expandidos dessa forma.

2.3 GRUPOS

O conjunto das operações de simetria constitui um grupo (WEINBERG, 1995, p. 52). O conjunto das transformações de Lorentz e Poincaré também, como veremos em detalhe na subseção seguinte. Um grupo, por sua vez, é definido como um conjunto de elementos com uma regra de composição bem

definida entre seus elementos que satisfaz quatro condições específicas. Sendo o grupo G , o conjunto de elementos g e a regra de composição $\circ$, as quatro condições são⁹ (GILMORE, 1974, p. 1):

$$\begin{aligned}
 &\text{i. } \exists i \in G \mid \forall g \in G, \quad g \circ i = i \circ g = g; \\
 &\text{ii. } \forall g, h \in G, \quad g \circ h \in G; \\
 &\text{iii. } \forall g \in G, \exists g^{-1} \in G \mid g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = i; \\
 &\text{iv. } (g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f).
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

A primeira condição introduz à necessidade de um elemento que diga respeito à unidade para que o conjunto dotado da regra de composição constitua um grupo. A segunda diz que a operação entre dois elementos do grupo retorna sempre um elemento também pertencente ao grupo. A terceira define que todo elemento possui um elemento inverso tal que a operação entre ambos retorna a identidade. Já a quarta condição nos diz que a regra de composição é associativa.

Grupos não equivalem diretamente a elementos de espaços vetoriais, embora possuam regras similares. Enquanto, em geral, dado conjunto de vetores equivale a objetos matemáticos específicos, um dado grupo pode possuir várias representações distintas, desde que a representação seja feita através de uma relação biunívoca entre os elementos do grupo e o conjunto de objetos matemáticos que forma as representações. Essa biunivocidade implica a regra de composição do grupo ser bem realizada por meio de operações entre os objetos que fazem a representação dada. Deparamo-nos com uma importante consideração: as transformações T do grupo de simetria agem levando de um estado físico a outro, portanto sendo transformações entre raios. Contudo, os operadores $U(T)$ que podemos construir sobre o espaço de Hilbert agem, não sobre raios, mas sobre vetores de estado. Nisso, a ação desses operadores pode induzir o surgimento de fases multiplicando os estados, sem que isso viole a biunivocidade das representações (WEINBERG, 1995, p. 52). O fato de trabalharmos com estados mas os grupos serem representados por raios é uma das fontes de dificuldades na representação do grupo de Poincaré sobre o estado de Hilbert.

Terminamos essa seção com algumas definições. Seja H um subconjunto de elementos de um grupo F . Se os elementos de H respeitarem entre si as quatro condições expostas nas equações 2.52, H é **subgrupo** de F . Além disso, H é um **subgrupo invariante** de F se (GILMORE, 1974, p. 72):

$$\forall f \in F; \quad \forall h \in H, \quad f \circ h \circ f^{-1} \in H. \tag{2.53}$$

Uma **representação irredutível** é aquela em que pelo menos um operador não deixar nenhum subespaço invariante no espaço de atuação. No caso de representações na forma de operadores matriciais agindo sobre um espaço vetorial, ao menos um dos operadores não deve estar na forma de diagonal de blocos (DIAS, 2015, p. 15).

Um **grupo paramétrico** é aquele em que os elementos podem ser parametrizados com n parâmetros

⁹ Os desenvolvimentos dessa seção podem ser encontrados em (DIAS, 2015, p. 14–19). Outras referências são também citadas para indicar outras referências onde esses resultados podem ser encontrados.

reais, e as operações de produto e inversa são funções contínuas desses parâmetros. O **grupo de Lie** é o grupo paramétrico em que a função que define a regra de composição do grupo é real e analítica, e portanto o grupo pode ser expandido em série de Taylor (GILMORE, 1974, p. 77). O **grupo de Lie conexo** é o grupo de Lie em que os parâmetros estão continuamente ligados à identidade e os elementos do grupo dependem dos mesmos de forma suave. Nesse caso, há uma lei de composição tal que:

$$U(a)U(b) = U(c) \Leftrightarrow c^i = \Phi^i(a, b), \quad (2.54)$$

onde os Φ^i são funções suaves dos parâmetros a e b . Essa função respeita às propriedades (GILMORE, 1974, p. 65):

$$\begin{aligned} \text{i. Associativa:} \quad & \Phi^i(a, \Phi(b, c)) = \Phi^i(\Phi(a, b), c); \\ \text{ii. Identidade:} \quad & \Phi^i(a_0, a) = \Phi^i(a, a_0) = a^i, \quad a_0 = (0, 0, 0, \dots); \\ \text{iii. Inversa:} \quad & \Phi^i(a, \bar{a}) = \Phi^i(\bar{a}, a) = a_0^i = 0; \end{aligned} \quad (2.55)$$

e na última propriedade destacamos que a inversa de $U(a)$ será $U(-a)$.

Uma consequência é que para grupos de Lie conexos, as matrizes de representação também serão funções de a^i e cada elemento de matriz pode ser escrito como uma série de Taylor em torno em torno de $a^i = 0$ (DIAS, 2015, p. 16):

$$\begin{aligned} A(a) &= 1 + a^i \left(\frac{\partial A}{\partial a^i} \right)_{a=0} + \frac{1}{2!} a^i a^j \left(\frac{\partial^2 A}{\partial a^i \partial a^j} \right)_{a=0} + \dots, \\ A(a) &= 1 + i a^i X_i + \frac{1}{2} a^i a^j X_{ij} + \dots, \end{aligned} \quad (2.56)$$

onde as matrizes $X_i = (-i \frac{\partial A}{\partial a^i})$ são os geradores do grupo (GILMORE, 1974, p. 89). Expandimos agora $\Phi^k(a, b)$:

$$\begin{aligned} \Phi^k(a, b) &= \Phi^k(0, 0) + a^i \left. \frac{\partial \Phi^k}{\partial a^i} \right|_{a=b=0} + b^i \left. \frac{\partial \Phi^k}{\partial b^i} \right|_{a=b=0} + \frac{1}{2!} a^i a^j \left. \frac{\partial^2 \Phi^k}{\partial a^i \partial a^j} \right|_{a=b=0} \\ &+ \frac{1}{2!} b^i b^j \left. \frac{\partial^2 \Phi^k}{\partial b^i \partial b^j} \right|_{a=b=0} + \frac{1}{2!} a^i b^j \left. \frac{\partial^2 \Phi^k}{\partial a^i \partial b^j} \right|_{a=b=0} + \dots \end{aligned} \quad (2.57)$$

e, como sabemos das equações (2.55) que $\Phi^k(0, 0) = 0$, $\Phi^k(a, 0) = a^k$ e $\Phi^k(0, b) = b^k$, notamos que:¹⁰

¹⁰ O símbolo δ_i^k é um delta de Kronecker, definido tal que: $\delta_i^k = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq k; \\ 1 & \text{se } i = k. \end{cases}$

$$\left. \frac{\partial \Phi^k}{\partial a^i} \right|_{a=b=0} = \left. \frac{\partial \Phi^k}{\partial b^i} \right|_{a=b=0} = \delta_i^k; \quad (2.58)$$

e a partir disso obtemos que:

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi^k}{\partial a^i \partial a^j} \right|_{a=b=0} = \left. \frac{\partial^2 \Phi^k}{\partial b^i \partial b^j} \right|_{a=b=0} = 0. \quad (2.59)$$

Com isso, a equação (2.57) se torna:

$$\begin{aligned} \Phi^k(a, b) &= \delta_i^k (a^i + b^i) + \frac{1}{2!} a^i b^j \left. \frac{\partial^2 \Phi^k}{\partial a^i \partial b^j} \right|_{a=b=0} + \dots \\ &= a^k + b^k - \frac{1}{2} C_{ij}^k a^i b^j + \dots \end{aligned} \quad (2.60)$$

onde introduzimos (DIAS, 2015, p. 17):

$$C_{ij}^k = - \left. \frac{\partial^2 \Phi^k}{\partial a^i \partial b^j} \right|_{a=b=0}. \quad (2.61)$$

Também de (2.55) sabemos que $\Phi^k(a, -a) = 0$, e aplicamos esse resultado em (2.60):

$$\begin{aligned} 0 &= a^k - a^k + \frac{1}{2} C_{ij}^k a^i a^j \\ 0 &= C_{ij}^k a^i a^k. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Podemos separar C_{ij}^k em uma parte simétrica e outra antissimétrica

$$\begin{aligned} C_{ij}^k &= \frac{1}{2} (C_{ij}^k + C_{ji}^k) + \frac{1}{2} (C_{ij}^k - C_{ji}^k), \\ C_{ij}^k &= e_{ij}^k + f_{ij}^k, \end{aligned} \quad (2.63)$$

onde e_{ij}^k é a parte simétrica e f_{ij}^k é a parte antissimétrica de C_{ij}^k . Contudo, $C_{ij}^k a^i a^j = 0$, e $a^i a^j$ é simétrico. Um tensor simétrico multiplicado por um antissimétrico é igual a zero. Assim, nada afirmamos sobre f_{ij}^k , mas precisamos que $e_{ij}^k = 0$. Ficamos então com:

$$C_{ij}^k = f_{ij}^k = -f_{ji}^k. \quad (2.64)$$

Com este resultado em mente, vamos agora expandir o produto $A(a)A(b) = A(\Phi(a, b))$ (DIAS, 2015, p. 18):

$$\left(1 + ia^i X_i + \frac{1}{2}a^i a^j X_{ij} + \dots\right) \left(1 + ib^i X_i + \frac{1}{2}b^i b^j X_{ij} + \dots\right) = \left(1 + i\Phi^i(a, b)X_i + \frac{1}{2}\Phi^i(a, b)\Phi^j(a, b)X_{ij}\right). \quad (2.65)$$

Desenvolvemos primeiro o lado direito (LD) da equação:

$$\begin{aligned} LD &= 1 + i \left(a^i + b^i - \frac{1}{2}C_{jk}^i a^j b^k \right) X_i \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(a^i + b^i - \frac{1}{2}C_{lk}^i a^l b^k \right) \left(a^j + b^j - \frac{1}{2}C_{mn}^j a^m b^n \right) X_{ij} + \dots \\ &= 1 + i \left(a^i + b^i - \frac{1}{2}C_{jk}^i a^j b^k \right) X_i + \frac{1}{2} (a^i a^j + a^i b^j + b^i b^j + b^i b^j + g(C)) X_{ij} + \dots, \end{aligned} \quad (2.66)$$

onde $g(C)$ é um termo que depende dos coeficientes C . Expandindo o lado esquerdo (LE) temos:

$$LE = 1 + i(a^i + b^i)X_i + \frac{1}{2}(a^i a^j + b^i b^j)X_{ij} + -a^i b^j X_i X_j + \dots \quad (2.67)$$

Comparando os coeficientes de $a^i b^j$ em (2.66) e (2.67) obtemos:

$$-a^i b^j X_i X_j = -\frac{i}{2}C_{jk}^i X_i a^j b^k + \frac{1}{2}(a^i b^j + b^i a^j)X_{ij}. \quad (2.68)$$

Os objetos X_{ij} são simétricos, enquanto C_{jk}^i é, como vimos no raciocínio que culminou na equação (2.64), antissimétrico. Podemos simetrizar e antissimetrizar a equação (2.68):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}[(a^i b^j + b^i a^j) + (a^i b^j - b^i a^j)]([X_i, X_j] + \{X_i, X_j\}) = \\ -\frac{i}{4}C_{ij}^k X_k (a^i b^j - b^i a^j) + \frac{1}{2}(a^i b^j + b^i a^j)[X_i, X_j]. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Comparando os coeficientes chegamos em (GILMORE, 1974, p. 100):

$$[X_i, X_j] = iC_{ij}^k X_k = i f_{ij}^k X_k, \quad (2.70)$$

$$\{X_i, X_j\} = -2X_{ij}, \quad (2.71)$$

onde os f_{ij}^k são as chamadas constantes de estrutura do grupo. Para observar seu papel, aplicamos a equação (2.71) na expansão de $A(\Phi(a, b))$:

$$\begin{aligned}
A(\Phi(a, b)) &= 1 + i\Phi^i(a, b)X_i + \frac{1}{2}\Phi^i(a, b)\Phi^j(a, b)X_{ij} + \dots \\
&= 1 + i\Phi^i X_i + \frac{1}{2}\Phi^i\Phi^j(-\frac{1}{2}\{X_i, X_j\}) + \dots \\
&= 1 + i\Phi^i X_i + \frac{1}{2}\Phi^i\Phi^j X_i X_j + \dots
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Se seguirmos até a terceira ordem obtemos:

$$A(\Phi(a, b)) = 1 + i\Phi^i(a, b)X_i - \frac{1}{2}\Phi^i(a, b)\Phi^j(a, b)X_i X_j - \frac{1}{3!}\Phi^i(a, b)\Phi^j(a, b)\Phi^k(a, b)X_i X_j X_k + \dots \tag{2.73}$$

e também

$$\Phi^i(a, b) = a^i + b^i - \frac{1}{2}f_{jk}^i a^j b^k - \frac{1}{3!}g_{jkl}^i a^j a^k a^l + \frac{1}{3!}h_{jkl}^i a^j b^k b^l + \dots, \tag{2.74}$$

onde os coeficientes g_{jkl}^i e h_{jkl}^i são funções em termos de f_{kl}^i . Seguindo este processo, a estrutura geral da transformação é:¹¹

$$A(\Phi(a, b)) = \exp(i\Phi^i(a, b)X_i); \tag{2.75}$$

o que leva, com $b = 0$, a:

$$A(a) = \exp(ia^i X_i). \tag{2.76}$$

2.3.1 Transformações de Lorentz como grupos

Voltemos às transformações de Lorentz e notemos que as matrizes Λ respeitam as condições expressas nas equações (2.52):

$$\begin{aligned}
\text{i. } &\exists \mathbf{1} \in L \mid \forall \Lambda \in L, \quad \Lambda \mathbf{1} = \mathbf{1} \Lambda = \Lambda; \\
\text{ii. } &\forall \Lambda_1, \Lambda_2 \in L, \quad \Lambda_1 \Lambda_2 \in L; \\
\text{iii. } &\forall \Lambda \in L, \exists \Lambda^{-1} \in L \mid \Lambda \Lambda^{-1} = \Lambda^{-1} \Lambda = \mathbf{1}; \\
\text{iv. } &(\Lambda_1 \Lambda_2) \Lambda_3 = \Lambda_1 (\Lambda_2 \Lambda_3).
\end{aligned} \tag{2.77}$$

¹¹ A notação $\exp(\alpha)$ é equivalente a e^α . Caso o leitor não esteja familiarizado com operadores ou matrizes no expoente de uma função, recordamos a expansão de Taylor da exponencial:

$$e^\alpha = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}.$$

A prova da condição **ii** se faz com o uso da equação (2.28):

$$\begin{aligned} \text{sendo: } \Lambda_1, \Lambda_2 \in L \therefore \boldsymbol{\eta} &= \Lambda_1^t \boldsymbol{\eta} \Lambda_1 = \Lambda_2^t \boldsymbol{\eta} \Lambda_2; \\ \Rightarrow (\Lambda_1 \Lambda_2)^t \boldsymbol{\eta} (\Lambda_1 \Lambda_2) &= \Lambda_2^t \Lambda_1^t \boldsymbol{\eta} \Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_2^t \boldsymbol{\eta} \Lambda_2 = \boldsymbol{\eta}; \\ &\therefore \Lambda_1 \Lambda_2 \in L. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Portanto, essas matrizes, que operam sobre vetores no espaço-tempo, são representações de um grupo de Lorentz mais geral que pode ser representado de formas que atuam sobre espaços distintos, inclusive, como é o foco de grande parte deste trabalho, sobre o espaço de Hilbert. Adicionando o grupo das translações ao grupo de Lorentz, como na representação exposta em (2.25), temos o grupo de Poincaré.¹²

As transformações de Lorentz formam um grupo paramétrico, mas não formam um grupo de Lie conexo: não é possível chegar de qualquer elemento do grupo a qualquer outro por meio de transformações contínuas. Analisamos essa situação, num primeiro momento, tomando o determinante da equação (2.28):

$$\begin{aligned} \det(\Lambda^t \boldsymbol{\eta} \Lambda) &= \det(\boldsymbol{\eta}) \\ \det(\Lambda)^2 \det(\boldsymbol{\eta}) &= \det(\boldsymbol{\eta}) \\ \det(\Lambda)^2 &= +1 \\ \det(\Lambda) &= \pm 1. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Obtemos assim uma condição que explicita uma descontinuidade entre transformações de Lorentz: transformações contínuas não podem levar uma matriz de determinante +1 a outra de -1 já que não podemos ter determinantes entre esses dois valores. Voltando à equação (2.28), tomando-a em uma forma que explicita os índices das matrizes e escolhendo o caso relacionado à η_{00} , que é igual a +1 conforme (2.5), temos

$$\Lambda^\mu{}_{0} \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_{0} = \eta_{00} = +1. \quad (2.80)$$

Efetuada a soma nos índices μ e ν obtemos diretamente:

$$\begin{aligned} (\Lambda^0{}_{0})^2 - \sum_i (\Lambda^i{}_{0})^2 &= 1 \\ (\Lambda^0{}_{0})^2 &= 1 + \sum_i (\Lambda^i{}_{0})^2 \end{aligned} \quad (2.81)$$

¹² Alguns textos, como a referência (WEINBERG, 1995), chamam o grupo de Poincaré de grupo de Lorentz não-homogêneo.

e, como $\sum_i (\Lambda^i_0)^2$ é sempre positivo, observamos que:

$$(\Lambda^0_0)^2 \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} \Lambda^0_0 \geq +1 \\ \Lambda^0_0 \leq -1 \end{cases}. \quad (2.82)$$

Por consequência disso, não é possível levar continuamente de uma matriz de $\Lambda^0_0 \geq +1$ para uma de $\Lambda^0_0 \leq -1$ pois não podemos passar por matrizes em que Λ^0_0 esteja no intervalo $] -1; +1[$. Essas duas condições, sobre o determinante e sobre Λ^0_0 , dividem os elementos do grupo de Lorentz em quatro subconjuntos:

Quadro 1 – Categorização dos elementos do grupo de Lorentz

Nome	Símbolo	Características
Ortócrono próprio	$L_+^\uparrow$	$\Lambda^0_0 \geq +1; \det \mathbf{\Lambda} = +1$
Ortócrono impróprio	$L_-^\uparrow$	$\Lambda^0_0 \geq +1; \det \mathbf{\Lambda} = -1$
Não-ortócrono próprio	$L_+^\downarrow$	$\Lambda^0_0 \leq -1; \det \mathbf{\Lambda} = +1$
Não-ortócrono impróprio	$L_-^\downarrow$	$\Lambda^0_0 \leq -1; \det \mathbf{\Lambda} = -1$

Notamos primeiro que apenas $L_+^\uparrow$ é um subgrupo, pois é o único que contém a identidade. Esse subgrupo é, na verdade, o grupo $SO(1, 3)$. Como mencionado, não podemos ir de um desses quatro subconjuntos a outro por meio de transformações contínuas. Contudo, precisamos apenas de dois elementos do grupo de Lorentz para fazer essa transição, a paridade $\mathcal{P} \in L_-^\uparrow$ e a reversão temporal $\mathcal{T} \in L_-^\downarrow$, cuja forma na representação matricial usual é:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.83)$$

Podemos escrever qualquer transformação de Lorentz como um produto entre $\mathcal{P}$, $\mathcal{T}$ e as transformações do grupo $SO(1, 3)$.

3 MECÂNICA QUÂNTICA RELATIVÍSTICA E ESTADOS DE UMA PARTÍCULA

Tendo feito uma breve introdução às transformações de Poincaré, à matemática e interpretação do espaço de Hilbert e à teoria de grupos, podemos iniciar o trabalho de buscar representar as transformações da Relatividade Restrita sobre o espaço da Mecânica Quântica. Começamos este capítulo buscando os geradores do grupo de Poincaré para podermos estudar suas representações sobre o espaço dos vetores de estado. Embora possamos obter os geradores sem muita dificuldade, a tarefa de representá-los se mostra impossível num primeiro momento pois os operadores que podemos construir violam a necessidade de que as representações tenham uma relação biunívoca com os elementos do grupo. Resolvemos esse problema, contudo, definindo classes de momento sob as quais podemos representar subgrupos, os chamados grupos de isotropia, do grupo ortócrono-próprio de Lorentz que nos permitem obter representações distintas das transformações para cada classe. Essas classes equivalem a partículas massivas, de massa nula e estados de vácuo, e os subgrupos que são representados sobre eles nos permitem obter diretamente as regras de transformação de projeção de spin ($m \neq 0$) e de helicidade ($m = 0$). Terminamos o capítulo estudando as transformações de paridade e reversão temporal e as simetrias a que eles correspondem na ação sobre estados de uma partícula.

3.1 GERADORES DO GRUPO DE POINCARÉ

Como discutido na Seção 2.3, simetrias contínuas devem estar ligadas à identidade, que é um operador unitário, e portanto também devem ser representadas por operadores unitários. Procuramos, então, representar o grupo de Poincaré no espaço de Hilbert por meio de operadores unitários. O primeiro passo na busca pela forma dessa representação é expandir uma transformação infinitesimal de Poincaré (WEINBERG, 1995, p. 59):

$$U(1 + \omega, \epsilon) \approx 1 + \frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} J^{\rho\sigma} - i \epsilon_\rho P^\rho; \quad (3.1)$$

onde

$$(J^{\rho\sigma})^\dagger = J^{\rho\sigma}; \quad (P^\rho)^\dagger = P^\rho; \quad J^{\rho\sigma} = -J^{\sigma\rho}. \quad (3.2)$$

Os elementos $J^{\rho\sigma}$ e P^ρ são os geradores da transformação, os quais descrevem de forma matemática como a transformação ocorre. Os geradores também contém significado físico à medida que correspondem a simetrias dos sistemas estudados. Por sua vez, $\omega_{\rho\sigma}$ e ϵ_ρ são os parâmetros da transformação: pode-se dizer que eles ditam a intensidade da mesma.¹

Analisamos os geradores na equação (3.1), num primeiro momento, fazendo $\omega_{\rho\sigma} = 0$ e $\epsilon_\rho \neq 0$. Obtemos:

¹ Podemos exemplificar a relação entre geradores e parâmetros com o caso da rotação no $\mathbb{R}^2$: nessa situação, o gerador da transformação é a matriz de rotação, que é função de um ângulo, o qual é o parâmetro.

$$U(1 + \omega, \epsilon) \approx 1 - i\epsilon_\rho P^\rho; \quad (3.3)$$

o que é, simplesmente, uma translação no espaço-tempo. Interpretamos os geradores de translação P^ρ como (WEINBERG, 1995, p. 61):

$$P^0 = H; \quad P^i = \vec{p}; \quad (3.4)$$

onde H é o operador de energia e $\vec{p}$ é o momento espacial.²

Com $\omega_{0\sigma} = 0$ (note que a condição é apenas sobre $\omega_{0\sigma}$, e não todos os $\omega_{\rho\sigma}$) e $\epsilon_\rho = 0$ temos:

$$\begin{aligned} x'^0 &= x^0; \\ x'^i &= x^i + \omega^i_j x^j. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Como $x'^0 = x^0$ e as transformações de Lorentz com o tensor métrico estabelecido em (2.5) preservam a quantidade invariante $(x^0)^2 - \sum_i (x^i)^2$, temos que para o caso em análise:

$$\sum_i (x'^i)^2 = \sum_i (x^i)^2. \quad (3.6)$$

Interpretamos o resultado como uma rotação nas coordenadas espaciais, e os geradores:

$$J_i = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} J^{jk} \quad (3.7)$$

são os geradores de momento angular.³

Por fim, com $\omega_{0i} \neq 0$, temos:

$$\begin{aligned} x'^0 &= x^0 + \omega^0_i x^i; \\ x'^i &= x^i + \omega^i_0 x^0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

² Podemos fazer essa equivalência pois estamos lidando com unidades naturais, de outro modo os geradores de translação espaciais seriam iguais aos operadores de momento divididos pela constante de Plank reduzida, $\hbar$ (SAKURAI, 1985, p. 46–47).

³ Na equação (3.7), ϵ_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita, definido por:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{se } ijk \text{ for uma permutação par de } 1, 2 \text{ e } 3, \\ -1 & \text{se } ijk \text{ for uma permutação ímpar de } 1, 2 \text{ e } 3, \\ 0 & \text{em qualquer outro caso.} \end{cases}$$

Esses são os boosts, seus geradores são:

$$K_i = J^{i0}. \quad (3.9)$$

3.1.1 A álgebra dos geradores do grupo de Poincaré

Precisamos obter a álgebra dos geradores que obtivemos na seção anterior. Isso significa que queremos conhecer as relações de comutação entre esses geradores. O comutador $[A, B]$ entre dois operadores A e B é definido como:

$$[A, B] = AB - BA; \quad (3.10)$$

e é conhecendo o valor dos comutadores que podemos trabalhar matematicamente com os operadores.

Vamos considerar a conjugação⁴ de uma transformação de Poincaré unitária infinitesimal por uma transformação, também de Poincaré, finita (DIAS, 2015, p. 35):

$$\begin{aligned} U(\Lambda, a)U(1 + \omega, \epsilon)U^{-1}(\Lambda, a) &= U(\Lambda, a)U(1 + \omega, \epsilon)U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) \\ &= U(\Lambda, a)U((1 + \omega)\Lambda^{-1}, -(1 + \omega)\Lambda^{-1}a + \epsilon) \\ &= U(\Lambda(1 + \omega)\Lambda^{-1}, -\Lambda(1 + \omega)\Lambda^{-1}a + \Lambda\epsilon + a) \\ &= U(1 + \Lambda\omega\Lambda^{-1}, \Lambda\epsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Vamos expandir o primeiro e o último termos usando $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \Lambda_\nu{}^\mu$:⁵

$$\begin{aligned} U(\Lambda, a)(1 + \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - i\epsilon_\rho P^\rho)U^{-1}(\Lambda, a) &= 1 + \frac{i}{2}[\Lambda\omega\Lambda^{-1}]_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - i[\Lambda\epsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a]_\mu P^\mu \\ &= 1 + \frac{i}{2}(\Lambda_\mu{}^\rho\omega_{\rho\sigma}\Lambda_\nu{}^\sigma)J^{\mu\nu} - i(\Lambda_\mu{}^\rho\epsilon_\rho - \Lambda_\mu{}^\rho\Lambda_\nu{}^\sigma\omega_{\rho\sigma}a^\nu)P^\mu \\ &= 1 + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}(\Lambda_\mu{}^\rho\Lambda_\nu{}^\sigma[J^{\mu\nu} + 2a^\nu P^\mu]) - i\epsilon_\rho\Lambda_\mu{}^\rho P^\mu. \end{aligned} \quad (3.13)$$

⁴ A conjugação de um operador A por uma transformação é dada por $U(\Lambda, a)AU^{-1}(\Lambda, a)$. Note que $U^{-1}(\Lambda, a) = U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$, pois:

$$U(\Lambda, a)U^{-1}(\Lambda, a) = U(\Lambda, a)U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) = U(\Lambda\Lambda^{-1}, -\Lambda\Lambda^{-1}a + a) = U(1, 0) = 1. \quad (3.11)$$

⁵ Da equação (2.28), $\Lambda^t\eta\Lambda = \eta$. Multiplicando essa igualdade por η^{-1} pela esquerda e Λ^{-1} pela direita temos:

$$\begin{aligned} \eta^{-1}\Lambda^t\eta\Lambda = \eta &\Rightarrow (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \eta^{\mu\alpha}(\Lambda^t)_\alpha{}^\beta\eta_{\beta\mu} = \eta^{\mu\alpha}\Lambda_\alpha{}^\beta\eta_{\beta\mu} \\ (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu &= \Lambda_\nu{}^\mu. \end{aligned}$$

Como $\omega_{\rho\sigma}$ é antissimétrico:

$$\begin{aligned}\omega_{\rho\sigma}\Lambda_\mu{}^\rho\Lambda_\nu{}^\sigma a^\nu P^\mu &= \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}(\Lambda_\mu{}^\rho\Lambda_\nu{}^\sigma - \Lambda_\nu{}^\sigma\Lambda_\mu{}^\rho)a^\nu P^\mu \\ &= \frac{1}{4}\omega_{\rho\sigma}(\Lambda_\mu{}^\rho\Lambda_\nu{}^\sigma - \Lambda_\nu{}^\sigma\Lambda_\mu{}^\rho)(a^\nu P^\mu - a^\mu P^\nu).\end{aligned}\quad (3.14)$$

Comparando agora os termos proporcionais a ω e ϵ em (3.13), obtemos:

$$U(\Lambda, a)J^{\rho\sigma}U^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_\mu{}^\rho\Lambda_\nu{}^\sigma[J^{\mu\nu} + a^\nu P^\mu - a^\mu P^\nu]; \quad (3.15)$$

$$U(\Lambda, a)P^\rho U^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_\mu{}^\rho P^\mu. \quad (3.16)$$

Em particular, notamos que o termo $J^{\mu\nu} + a^\nu P^\mu - a^\mu P^\nu$ em (3.15) corresponde à transformação do momento angular por uma translação que leva de r a $r + a$. Tomando $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, a transformação resulta em:

$$\begin{aligned}\vec{L}' &= (\vec{r} + \vec{a}) \times \vec{p} \\ &= \vec{r} \times \vec{p} + \vec{a} \times \vec{p} \\ &= \vec{L} + \vec{a} \times \vec{p}.\end{aligned}\quad (3.17)$$

Vamos tomar as igualdades (3.15) e (3.16) na forma infinitesimal, o que indicamos substituindo $\Lambda \rightarrow 1 + \omega$ e $a^\mu \rightarrow \epsilon^\mu$:⁶

$$U(1 + \omega, \epsilon)J^{\rho\sigma}U^{-1}(1 + \omega, \epsilon) = (\delta_\mu{}^\rho + \omega_\mu{}'^\rho)(\delta_\nu{}^\sigma + \omega_\nu{}'^\sigma)[J^{\mu\nu} + a^\nu P^\mu - a^\mu P^\nu]; \quad (3.18)$$

$$U(1 + \omega, \epsilon)P^\rho U^{-1}(1 + \omega, \epsilon) = (\delta_\mu{}^\rho + \omega_\mu{}'^\rho)P^\mu. \quad (3.19)$$

Vamos agora expandir as duas equações acima com o objetivo de levá-las a uma forma que explicita relações de comutadores envolvendo $J^{\mu\nu}$, P^ρ e $J^{\mu\nu}$ e P^ρ . Feito isso, poderemos utilizar as equações (3.4), (3.7) e (3.9) para levar esses comutadores para uma forma envolvendo os geradores do grupo de Poincaré.

1. UJU^{-1} . Abordamos primeiro a equação (3.18), expandindo o lado esquerdo da equação:

$$\begin{aligned}U(1 + \omega, \epsilon)J^{\rho\sigma}U^{-1}(1 + \omega, \epsilon) &= \left(1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - i\epsilon_\mu P^\mu\right)J^{\rho\sigma}\left(1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - i\epsilon_\mu P^\mu\right) \\ &= J^{\rho\sigma}\left(1 - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} + i\epsilon_\mu P^\mu + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - i\epsilon_\mu P^\mu\right) \\ &= J^{\rho\sigma} + i\left[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - \epsilon_\mu P^\mu, J^{\rho\sigma}\right];\end{aligned}\quad (3.20)$$

⁶ Observe que a matriz identidade 1, ao ser escrita de forma que explicita os índices, é o delta de Kronecker $\delta_\mu{}^\rho$. Também observamos que $\omega_\mu{}'^\rho$ é gerador e parâmetro infinitesimal de transformação.

onde ignoramos termos quadráticos. Expandimos agora o lado direito da equação (3.18):

$$\begin{aligned} (\delta_\mu^\rho + \omega_\mu'^\rho)(\delta_\nu^\sigma + \omega_\nu'^\sigma)[J^{\mu\nu} + a^\nu P^\mu - a^\mu P^\nu] &= (\delta_\mu^\rho + \omega_\mu'^\rho)(J^{\mu\sigma} + \epsilon^\sigma P^\mu - \epsilon^\mu P^\sigma + \omega_\nu'^\sigma J^{\mu\nu}) \\ &= J^{\rho\sigma} + \epsilon^\sigma P^\rho - \epsilon^\rho P^\sigma + \omega_\nu'^\sigma J^{\rho\nu} + \omega_\mu'^\rho J^{\mu\rho}; \end{aligned} \quad (3.21)$$

Substituímos os desenvolvimentos feitos em (3.20) e (3.21) na equação original (3.18), e obtemos:

$$i \left[\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - \epsilon_\mu P^\mu, J^{\rho\sigma} \right] = \omega_\nu'^\sigma J^{\rho\nu} + \omega_\mu'^\rho J^{\mu\rho} + \epsilon^\sigma P^\rho - \epsilon^\rho P^\sigma. \quad (3.22)$$

Usamos agora as seguintes substituições:

$$\begin{aligned} \omega_\mu'^\rho &= \frac{1}{2} \omega'^{\alpha\beta} (\delta_\beta^\rho \eta_{\alpha\mu} - \delta_\alpha^\rho \eta_{\beta\mu}) \\ \omega_\mu'^\sigma &= \frac{1}{2} \omega'^{\alpha\beta} (\delta_\beta^\sigma \eta_{\alpha\mu} - \delta_\alpha^\sigma \eta_{\beta\mu}) \end{aligned} \quad (3.23)$$

e as aplicamos para desenvolver o termo $\omega_\mu'^\rho J^{\mu\sigma} + \omega_\mu'^\sigma J^{\rho\mu}$ em (3.22), obtendo (DIAS, 2015, p. 37):

$$\begin{aligned} \omega_\mu'^\rho J^{\mu\sigma} + \omega_\mu'^\sigma J^{\rho\mu} &= \frac{1}{2} \omega'^{\alpha\beta} (\delta_\beta^\rho \eta_{\alpha\mu} J^{\mu\sigma} - \delta_\alpha^\rho \eta_{\beta\mu} J^{\mu\sigma} + \delta_\beta^\sigma \eta_{\alpha\mu} J^{\rho\mu} - \delta_\alpha^\sigma \eta_{\beta\mu} J^{\rho\mu}) \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\lambda\beta} \omega'_{\gamma\lambda} (\delta_\beta^\rho \eta_{\alpha\mu} J^{\mu\sigma} - \delta_\alpha^\rho \eta_{\beta\mu} J^{\mu\sigma} + \delta_\beta^\sigma \eta_{\alpha\mu} J^{\rho\mu} - \delta_\alpha^\sigma \eta_{\beta\mu} J^{\rho\mu}) \\ &= \frac{1}{2} \omega'_{\gamma\lambda} (\eta^{\lambda\rho} J^{\gamma\sigma} - \eta^{\rho\gamma} J^{\lambda\sigma} + \eta^{\lambda\sigma} J^{\rho\gamma} - \eta^{\alpha\gamma} J^{\rho\lambda}). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Voltemos agora em (3.22). Por questão de elegância fazemos troca das variáveis mudas: $\gamma \rightarrow \mu, \lambda \rightarrow \nu$, e por questão de conveniência posterior separamos o comutador:

$$\begin{aligned} i \left[\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - \epsilon_\mu P^\mu, J^{\rho\sigma} \right] &= \frac{1}{2} \omega'_{\mu\nu} (\eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\rho\mu} J^{\nu\sigma} + \eta^{\nu\sigma} J^{\rho\mu} - \eta^{\alpha\mu} J^{\rho\nu}) + \epsilon^\sigma P^\rho - \epsilon^\rho P^\sigma; \\ i \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} [J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] - i \epsilon_\mu [P^\mu, J^{\rho\sigma}] &= \frac{1}{2} \omega'_{\mu\nu} (\eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\rho\mu} J^{\nu\sigma} + \eta^{\nu\sigma} J^{\rho\mu} - \eta^{\alpha\mu} J^{\rho\nu}) + \epsilon^\sigma P^\rho - \epsilon^\rho P^\sigma. \end{aligned} \quad (3.25)$$

2. UPU^{-1} . Passamos agora ao desenvolvimento do lado esquerdo da equação (3.19):

$$\begin{aligned} U(\Lambda, a) P^\rho U^{-1}(\Lambda, a) &= \left(1 + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - i \epsilon_\mu P^\mu \right) P^\rho \left(1 + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - i \epsilon_\mu P^\mu \right) \\ &= \left(1 + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - i \epsilon_\mu P^\mu \right) \left(P^\rho - \frac{i}{2} P^\rho \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} + i P^\rho \epsilon_\mu P^\mu \right) \\ &= P^\rho - \frac{i}{2} P^\rho \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} + i P^\rho \epsilon_\mu P^\mu + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} P^\rho - i \epsilon_\mu P^\mu P^\rho \\ &= P^\rho + i \left[\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - \epsilon_\mu P^\mu, P^\rho \right]; \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde encontramos um comutador. A expansão do lado direito da equação (3.19) é direta:

$$(\delta_\mu^\rho + \omega_\mu'^\rho)P^\mu = P^\rho + \omega_\mu'^\rho P^\mu. \quad (3.27)$$

Com (3.26) e (3.27), a equação (3.19) se torna:

$$i \left[\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - \epsilon_\mu P^\mu, P^\rho \right] = \omega_\mu'^\rho P^\mu. \quad (3.28)$$

Por fim aplicamos (3.23) em (3.28) e separamos o comutador em dois outros:

$$\begin{aligned} i \left[\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - \epsilon_\mu P^\mu, P^\rho \right] &= \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu}' [\eta^{\eta\rho} P^\mu - \eta^{\mu\rho} P^\nu] \\ i \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} [J^{\mu\nu}, P^\rho] - i \epsilon_\mu [P^\mu, P^\rho] &= \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu}' [\eta^{\eta\rho} P^\mu - \eta^{\mu\rho} P^\nu]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Comparamos os coeficientes em (3.25) e (3.29) para escrever:

$$i[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\rho\mu} J^{\nu\sigma} + \eta^{\nu\sigma} J^{\rho\mu} - \eta^{\sigma\mu} J^{\rho\nu}; \quad (3.30)$$

$$i[J^{\mu\nu}, P^\rho] = \eta^{\nu\rho} P^\mu - \eta^{\mu\rho} P^\nu; \quad (3.31)$$

$$[P^\mu, P^\nu] = 0. \quad (3.32)$$

O trabalho de aplicar as equações (3.4), (3.7) e (3.9) nas três equações acima é direto, e nos rende a elusiva álgebra dos geradores das transformações de Poincaré:⁷

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= -i\epsilon_{ijk} J_k; \\ [J_i, K_j] &= -i\epsilon_{ijk} K_k; \\ [K_i, K_j] &= +i\epsilon_{ijk} J_k; \\ [J_i, P_j] &= -i\epsilon_{ijk} P_k; \\ [K_i, P_j] &= +i\delta_{ij} H; \\ [K_i, H] &= +iP_i; \\ [J_i, H] &= [P_i, H] = [H, H] = [P_i, P_j] = 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

3.2 TRANSFORMAÇÕES DE POINCARÉ SOBRE ESTADOS DE UMA PARTÍCULA

Obtida a álgebra de Poincaré, o próximo passo no nosso trabalho é obter a forma específica em que ocorre a ação das transformações de Poincaré sobre os vetores de estado do espaço de Hilbert. Para

⁷ O leitor pode observar que alguns dos sinais dos comutadores em (3.33) estão diferentes daqueles encontrados em (WEINBERG, 1995, p. 61) o que ocorre porque a referência usa outro tensor métrico, diferente do que descolhemos em (2.5).

isso, trabalharemos sobre uma base de autoestados do operador de quadrimomento P^μ :

$$P^\mu = (H, \vec{P}), \quad (3.34)$$

onde H é o operador Hamiltoniano, cujos autovalores são energias, e $\vec{P}$ é o operador do momento tridimensional. Os estados satisfazem a seguinte relação:

$$P^\mu \Psi_{p,\sigma} = p^\mu \Psi_{p,\sigma}, \quad (3.35)$$

onde o rótulo σ engloba as possíveis degenerescências, e o quadrimomento p^μ é:

$$p^\mu = (E, \vec{p}), \quad (3.36)$$

onde E é a energia, que equivale à componente temporal do quadrimomento, e $\vec{p}$ é o momento tridimensional, que compõe as coordenadas espaciais do quadrimomento⁸ (GRIFFITHS, 1999, p. 511). Podemos também escrever $E = p^0$ e é importante notar que:

$$p^2 = p_\mu p^\mu = E^2 - \vec{p}^2 = m^2, \quad (3.37)$$

ou seja, em qualquer referencial em que estivermos trabalhando, a quantidade invariante $p_\mu p^\mu$ será igual ao quadrado da massa da partícula a que o quadrimomento p^μ se refere.

Uma transformação de Poincaré pode ser escrita como o produto de uma transformação de Lorentz por uma translação.⁹ As translações são representadas, como é conhecido da Mecânica Quântica não-relativística e do estudo de ondas planas, por:

$$U(1, a) \Psi_{p,\sigma} = \exp(-ia_\mu P^\mu) \Psi_{p,\sigma}. \quad (3.38)$$

Para representarmos o grupo de Poincaré faltam as representações de $\mathcal{P}$, $\mathcal{T}$ e $L_+^\uparrow$, sendo este último equivalente ao grupo $SO(1, 3)$.

Começamos pelo $L_+^\uparrow$. Vemos que:¹⁰

$$\begin{aligned} P^\mu (U(\Lambda) \Psi_{p,\sigma}) &= U(\Lambda) [U^{-1} P^\mu U(\Lambda)] \Psi_{p,\sigma} \\ &= U(\Lambda) ((\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu P^\nu) \Psi_{p,\sigma} \\ &= \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu (U(\Lambda) \Psi_{p,\sigma}). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Isso significa que $U(\Lambda) \Psi_{p,\sigma}$ é autoestado de P^μ com autovalor $\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu$. Assim, somos tentados inicialmente a escrever (WEINBERG, 1995, p. 63):

⁸ Aqui temos um detalhe: a definição de p^μ em unidades diferentes das naturais é $p^\mu = (E/c, \vec{p})$.

⁹ $U(\Lambda, a) = U(\Lambda, 0)U(1, \Lambda^{-1}a)$.

¹⁰ Por questão de conveniência e velocidade de leitura usamos $U(\Lambda) \equiv U(\Lambda, 0)$.

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p)\Psi_{\Lambda p, \sigma'}. \quad (3.40)$$

Somos assim levados a crer que os C' s formam uma representação do subgrupo $L_+^\uparrow$. A análise de duas transformações sucessivas Λ_1 e Λ_2 escritas dessa forma, contudo, nos dá:

$$\begin{aligned} U(\Lambda_1)U(\Lambda_2)\Psi_{p,\sigma} &= U(\Lambda_1) \left(\sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda_2, p)\Psi_{\Lambda_2 p, \sigma'} \right) \\ &= \sum_{\sigma''} C_{\sigma''\sigma'}(\Lambda_1, \Lambda_2 p) C_{\sigma'\sigma}(\Lambda_2, p) \Psi_{\Lambda_1 \Lambda_2 p, \sigma''}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Aplicando uma única transformação $U(\Lambda_1 \Lambda_2)$ obtemos:

$$U(\Lambda_1)U(\Lambda_2)\Psi_{p,\sigma} = \sum_{\sigma''} C_{\sigma''\sigma}(\Lambda_1 \Lambda_2, p) \Psi_{\Lambda_1 \Lambda_2 p, \sigma''}. \quad (3.42)$$

Para que os C' s sejam uma representação de grupo eles devem respeitar $U(\Lambda_1)U(\Lambda_2) = U(\Lambda_1 \Lambda_2)$, o que se traduz em as equações (3.41) e (3.42) serem equivalentes. Para isso, precisamos que:

$$\sum_{\sigma'} C_{\sigma''\sigma'}(\Lambda_1, \Lambda_2 p) C_{\sigma'\sigma}(\Lambda_2, p) = C_{\sigma''\sigma}(\Lambda_1 \Lambda_2, p). \quad (3.43)$$

Contudo, esse resultado é inaceitável: a igualdade acima envolve C' s associados a Λ_1 e Λ_2 simultaneamente, quebrando o requisito essencial de que as matrizes de representação estejam associadas de forma biunívoca às transformações do grupo.

Desse modo, precisamos buscar uma alternativa. Podemos notar que as transformações do subgrupo $L_+^\uparrow$ não alteram a norma ou o sinal da componente 0 do vetor sob o qual operam, sendo assim possível representar o grupo de Lorentz dentro de espaços em que p^2 e p^0 tenham sinais fixos. Com isso, podemos escrever todos os vetores de uma mesma norma como o resultado de uma transformação de $L_+^\uparrow$ sobre um vetor fixo k^μ de mesma norma e sinal da componente 0 do vetor desejado:¹¹

$$p^\mu = L^\mu{}_\nu(p)k^\nu, \quad p^2 = k^2 = m^2. \quad (3.44)$$

Tendo isso em mente, vamos reconstruir o espaço de Hilbert sobre uma nova base de autovetores de P^μ , $\bar{\Psi}_{p,\sigma}$, definida por:

$$U(L(p))\Psi_{k,\sigma} = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(L(p), p)\Psi_{p,\sigma'} \equiv \frac{1}{N(p)}\bar{\Psi}_{p,\sigma}, \quad (3.45)$$

¹¹ Note que $p^2 = p^\mu p_\mu = (p^0)^2 - \sum_i (p^i)^2$. Não nos referimos, na equação (3.44), à segunda componente espacial dos vetores p^μ e k^μ .

onde $N(p)$ é um fator de normalização. Também definimos:

$$\bar{\Psi}_{k,\sigma} \equiv \Psi_{k,\sigma}, \quad (3.46)$$

o que leva a:

$$N(k) = 1. \quad (3.47)$$

Aplicando uma transformação $U(\Lambda)$ sobre um dos vetores da nova base que definimos em (3.45), obtemos:

$$\begin{aligned} U(\Lambda)\bar{\Psi}_{p,\sigma} &= U(\Lambda)[N(p)U(L(p))\Psi_{k,\sigma}] \\ &= N(p)U(\Lambda L(p))\Psi_{k,\sigma} \\ &= N(p)U(L(\Lambda p))U(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p))\Psi_{k,\sigma}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Da equação acima, chamamos atenção a um elemento:

$$L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p) \equiv W(\Lambda, p). \quad (3.49)$$

Esse elemento tem a propriedade de manter k invariante:

$$\begin{aligned} W(\Lambda, p)k &= L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)k \\ &= L^{-1}(\Lambda p)\Lambda p \\ &= k. \end{aligned} \quad (3.50)$$

O conjunto de todas as transformações W que mantém um dado k^μ invariante é um subgrupo de $L_+^\uparrow$ chamado **grupo de isotropia** – ou *little group* – de k^μ (WEINBERG, 1995, p. 64). Conforme a equação (3.40), W age sobre o espaço de Hilbert da seguinte forma:

$$U(W(\Lambda, p))\Psi_{k,\sigma} = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p), k)\Psi_{Wk,\sigma'} \equiv \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p), k)\Psi_{k,\sigma'}. \quad (3.51)$$

Os D 's assim definidos correspondem a uma representação do grupo de isotropia. Vemos isso tomando o resultado disposto em (3.40) e fazendo as devidas substituições $C \rightarrow D$, $\Lambda \rightarrow W$, $p \rightarrow k$:

$$\sum_{\sigma'} D_{\sigma''\sigma'}(W_1, k)D_{\sigma'\sigma}(W_2, k) = D_{\sigma''\sigma}(W_1 W_2, k), \quad (3.52)$$

onde usamos o fato de que $W_1 k = k$, o que resolve a quebra de biunivocidade que tínhamos encontrado. A dependência em k já está incluída nas transformações de Lorentz presentes em W , por isso o omitimos da notação dos D 's daqui em diante.

Se sabemos expressar o grupo de isotropia, podemos enfim representar o grupo de Lorentz sobre a

base $\bar{\Psi}_{p,\sigma}$:

$$\begin{aligned}
 U(\Lambda)\bar{\Psi}_{p,\sigma} &= N(p)U(L(\Lambda p))U(W(\Lambda, p))\Psi_{k,\sigma} \\
 &= N(p)\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p))U(L(\Lambda p))\Psi_{k,\sigma'} \\
 &= \frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}W(\Lambda, p)\bar{\Psi}_{\Lambda p,\sigma'} \quad .
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

3.2.1 Obtenção do fator de normalização

Vamos obter os fatores de normalização $N(p)$. Primeiro, impomos a seguinte condição sobre os $\Psi_{k,\sigma}$:¹²

$$(\Psi_{k',\sigma'}, \Psi_{k,\sigma}) = \delta^{(3)}(\vec{k}' - \vec{k})\delta_{\sigma'\sigma}, \quad \text{com} \quad k^2 = k'^2 = m^2. \tag{3.54}$$

A justificativa dessa equação é que queremos que estados equivalentes a k' s distintos sejam ortogonais¹³, já que pertencem a classes distintas. A condição $k'^2 = k^2$ nos exime da necessidade de um delta quadridimensional para garantir $k'^\mu = k^\mu$.

Como os diferentes $\Psi_{k,\sigma}$ são ortonormais — o que decorre imediatamente de (3.54) — a representação do grupo de isotropia é unitária. Demonstramos isso aplicando uma transformação sobre o produto escalar em (3.54):

$$\begin{aligned}
 \delta^{(3)}(\vec{k}' - \vec{k})\delta_{\sigma'\sigma} &= (\Psi_{k',\sigma'}, \Psi_{k,\sigma}) = (U(W)\Psi_{k',\sigma'}, U(W)\Psi_{k,\sigma}) \\
 &= \left(\sum_{\sigma''} D_{\sigma''\sigma'}(W, k')\Psi_{k',\sigma''}, \sum_{\sigma'''} D_{\sigma'''\sigma}(W, k)\Psi_{k,\sigma'''} \right) \\
 &= \sum_{\sigma''} \sum_{\sigma'''} D_{\sigma''\sigma'}^*(W, k') D_{\sigma'''\sigma}(W, k) (\Psi_{k',\sigma''}, \Psi_{k,\sigma'''}) \\
 &= \sum_{\sigma''} \sum_{\sigma'''} D_{\sigma''\sigma'}^*(W, k') D_{\sigma'''\sigma}(W, k) \delta^{(3)}(\vec{k}' - \vec{k})\delta_{\sigma''\sigma'''} \\
 &= \sum_{\sigma''} D_{\sigma''\sigma'}^*(W, k') D_{\sigma''\sigma}(W, k) \delta^{(3)}(\vec{k}' - \vec{k}) \\
 &= \delta^{(3)}(\vec{k}' - \vec{k}) \left(\sum_{\sigma''} D_{\sigma''\sigma'}^*(W, k') D_{\sigma''\sigma}(W, k) \right).
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

Para que a integral valha sempre, em especial no suporte do delta:

¹² A função $\delta^{(3)}$ é o delta de Dirac, o equivalente tridimensional e de domínio contínuo do delta de Kronecker:

$$\delta^{(3)}(\vec{a}) = \begin{cases} 1 & \vec{a} = \vec{0}; \\ 0 & \vec{a} \neq \vec{0}. \end{cases}$$

¹³ A condição de ortogonalidade $(\alpha, \beta) = 0$, onde α e β são vetores de um mesmo espaço, é válida para qualquer tipo de espaço vetorial, mesmo aqueles em que sua interpretação geométrica não seja aparente como no $\mathbb{R}^3$.

$$\left(\sum_{\sigma''} D_{\sigma''\sigma'}^*(W, k') D_{\sigma''\sigma}(W, k) \right) = \delta_{\sigma'\sigma}. \quad (3.56)$$

Todo esse desenvolvimento nos levou, portanto, à uma valiosa expressão:

$$D^\dagger D = DD^\dagger = 1, \quad (3.57)$$

o que significa que os D 's são matrizes unitárias.

Tomemos dois momentos p' e p dentro de uma mesma classe ($p'^2 = p^2 = m^2$). O produto escalar entre $\bar{\Psi}_{p,\sigma}$ e $\bar{\Psi}_{p',\sigma'}$ deve ser proporcional a $\delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p})$. Usando (3.53), fazemos:

$$\begin{aligned} (\bar{\Psi}_{p',\sigma'}, \bar{\Psi}_{p,\sigma}) &= (\bar{\Psi}_{p',\sigma'}, N(p)U(L(p))\bar{\Psi}_{k,\sigma}) \\ &= N(p)(\bar{\Psi}_{p',\sigma'}, U(L(p))\bar{\Psi}_{k,\sigma}) \\ &= N(p)(U(L^{-1}(p))\bar{\Psi}_{p',\sigma'}, \bar{\Psi}_{k,\sigma}) \\ &= N(p) \left(\frac{N(p')}{N(L^{-1}(p)p')} \sum_{\sigma'} D_{\sigma''\sigma'}(W(L^{-1}(p), p')) \bar{\Psi}_{L^{-1}(p)p',\sigma''}, \bar{\Psi}_{k,\sigma} \right). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Podemos chamar $L^{-1}(p)p' = k'$, de modo que $k' \rightarrow k$ quando $p' \rightarrow p$. Usamos então três substituições, todas elas válidas nesse mesmo limite, que é, efetivamente, o limite de interesse pois o produto escalar será nulo em qualquer outra situação:

- a. $(\bar{\Psi}_{k',\sigma'}, \bar{\Psi}_{k,\sigma}) \rightarrow (\bar{\Psi}_{k',\sigma'}, \bar{\Psi}_{k,\sigma}) = \delta^{(3)}(\vec{k}' - \vec{k})\delta_{\sigma'\sigma};$
- b. $N(L^{-1}(p)p') = N(k') \rightarrow 1;$
- c. $W(L^{-1}(p), p') \rightarrow W(L^{-1}(p), p) = L^{-1}(L^{-1}(p)p)L^{-1}(p)L(p) = L^{-1}(k) = 1.$

Com isso chegamos em:

$$(\bar{\Psi}_{p',\sigma'}, \bar{\Psi}_{p,\sigma}) = |N(p)|^2 \delta^{(3)}(\vec{k}' - \vec{k})\delta_{\sigma'\sigma}. \quad (3.59)$$

Vamos agora procurar a relação entre $\delta^{(3)}(\vec{k}' - \vec{k})$ e $\delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p})$. Para que essa relação seja sempre válida, precisamos obter uma integral invariante de Lorentz de uma função escalar arbitrária sobre os momentos $f(p)$. Podemos impor duas condições sobre p : $p^2 = m^2$, pois não estamos considerando a possibilidade de as partículas possuírem massa variável, e $p^0 > 0$, pois consideramos apenas casos de energia positiva. Uma maneira de escrevermos uma integral que respeita essas condições é:

$$\int d^4p \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) f(p), \quad (3.60)$$

onde o delta $\delta(p^2 - m^2)$ limita o espaço de integração à região em que $p^2 = m^2$. É uma propriedade

do delta de Dirac que

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} (\delta(x + a) + \delta(x - a)). \quad (3.61)$$

Por sua vez, a função de Heaviside, $\theta(x)$, é definida por:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (3.62)$$

Retornamos com esses resultados em (3.60), reescrevendo $\delta(p^2 - m^2)$ como $\delta((p^0)^2 - |\vec{p}|^2 - m^2)$ para explicitar a dependência em p^0 , e obtemos:

$$\begin{aligned} \int d^4p \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) f(p) &= \int d^4p \delta((p^0)^2 - |\vec{p}|^2 - m^2) \theta(p^0) f(p) \\ &= \int d^4p \frac{1}{2\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}} \left(\delta(p^0 + \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}) + \delta(p^0 - \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}) \right) \\ &\quad \times \theta(p^0) f(p) \\ &= \int d^4p \frac{1}{2\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}} \delta(p^0 - \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}) f(p), \end{aligned} \quad (3.63)$$

onde na última linha a função de Heaviside selecionou apenas o delta de Dirac que permitia $p^0 > 0$. O diferencial d^4p é invariante de Lorentz, e pode ser escrito como $d^3p dp^0$. Fazemos isso e efetuamos a integração¹⁴ em dp^0 :

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4p}{2\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}} \delta(p^0 - \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}) f(p) &= \int \frac{d^3p dp^0}{2\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}} \delta(p^0 - \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}) f(p^0, \vec{p}) \\ &= \int \frac{d^3p}{2\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}} f(\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}, \vec{p}). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Essa integral é, também, invariante. Disso observamos que

$$\frac{d^3p}{\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}}$$

é o elemento de integração invariante de Lorentz.

¹⁴ O delta de Dirac possui a seguinte propriedade de integração: $\int dx \delta(x - a) f(x) = f(a)$.

Se $F(\vec{p})$ é uma função escalar, podemos fazer uma substituição de variável com:

$$\begin{aligned} F(\vec{p}) &= \int F(\vec{p}') \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) d^3 p' \\ &= \int F(\vec{p}') \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2} \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) \frac{d^3 p'}{\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Nisso identificamos uma função delta invariante de Lorentz:

$$\delta_L^{(3)}(\vec{p}', \vec{p}) \equiv \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2} \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) = p^0 \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}). \quad (3.66)$$

Se temos momentos k e p relacionados por uma transformação de Lorentz tal que

$$k' - k = L^{-1}(p' - p), \quad (3.67)$$

é válido afirmar que

$$p^0 \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) = k^0 p^0 \delta^{(3)}(\vec{k}' - \vec{k}). \quad (3.68)$$

Retornando com isso ao produto escalar que expandimos em (3.58):

$$\begin{aligned} (\bar{\Psi}_{p'\sigma'}, \bar{\Psi}_{p\sigma}) &= |N(p)|^2 \delta^{(3)}(\vec{k}' - \vec{k}) \delta_{\sigma'\sigma} \\ &= |N(p)|^2 \frac{p^0}{k^0} \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) \delta_{\sigma'\sigma}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Como queremos que os estados sejam ortonormalizados, o produto interno só pode ter resultado 0 ou 1. Portanto fazemos a escolha (WEINBERG, 1995, p. 67):

$$N(p) = \sqrt{\frac{k^0}{p^0}}. \quad (3.70)$$

Com essa escolha, podemos finalmente escrever:

$$(\bar{\Psi}_{p'\sigma'}, \bar{\Psi}_{p\sigma}) = \delta^{(3)}(\vec{k}' - \vec{k}) \delta_{\sigma'\sigma}. \quad (3.71)$$

Agora, depois dessa análise trabalhosa, substituímos finalmente a equação (3.70) em (3.53), obtendo a forma de $U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}$:

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma} W(\Lambda, p) U(\Lambda)\Psi_{\Lambda p, \sigma'}, \quad (3.72)$$

onde abandonamos a barra sobre $\Psi_{p,\sigma}$ pois daqui em diante sempre trabalharemos com a base definida em (3.45).

Percebe-se que na equação acima não há dependência explícita de k^μ ; também não há, na verdade, dependência implícita. Ele é um vetor arbitrário e sem sentido físico, e pode-se escolher aquele que torne mais fácil a identificação do grupo de isotropia para uma dada classe. Demonstramos isso fazendo uma substituição $k \rightarrow k' = Vk$, onde V é uma transformação de Lorentz, na equação (3.44):

$$p = L(p)k = L(p)Vk' = L'(p)k', \quad (3.73)$$

e também em 3.50, onde fazemos $W' \rightarrow W$:

$$\begin{aligned} W'(\Lambda, p) &= L'^{-1}(\Lambda p)\Lambda'(p) \\ &= V^{-1}L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)V \\ &= V^{-1}WV. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Multiplicando essa expressão pela esquerda por V e pela direita por V^{-1} obtemos:

$$VW'V^{-1} = W. \quad (3.75)$$

Isso significa que W e W' são representações equivalentes por transformação de similaridade de um mesmo grupo, e consequentemente $D(W)$ e $D(W')$ também são equivalentes, e o mapeamento $W \rightarrow D(W)$ independe de k^μ .

3.2.2 Grupos de isotropia

O próximo passo para a representação do subgrupo $L_+^\uparrow$ envolve a obtenção de diferentes subgrupos W relativos a diferentes classes de vetores k^μ . Essa análise se inicia com a expansão infinitesimal da ação de W sobre k^μ :

$$\begin{aligned} W^\mu{}_\nu k^\nu &= k^\mu \\ (\delta^\mu{}_\nu + \alpha^\mu{}_\nu)k^\nu &= k^\mu \\ k^\mu + \alpha^\mu{}_\nu k^\nu &= k^\mu. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Logo obtemos a condição que nos permite analisar os diferentes grupos de isotropia e obter suas representações:

$$\alpha^\mu{}_\nu k^\nu = 0 \Leftrightarrow \alpha_{\mu\nu} k^\nu = 0. \quad (3.77)$$

A partir dessa equação vamos descobrir quais os geradores que ditam a forma específica da transformação dos estados físicos a partir da forma de seu momento. Vamos analisar três classes distintas de estados que são levados a eles mesmos por transformações de $L_+^\uparrow$.¹⁵

1. $k^\mu = (\pm m, 0, 0, 0); k^2 = m^2$. Essa classe equivale a momentos do tipo-tempo, associado a energias positivas ou negativas. Substituímos este k^μ em (3.77), o que nos fornece:¹⁶

¹⁵ A maneira que a análise desses casos é dividida é baseada na referência (DIAS, 2015, p. 44–51).

¹⁶ Note que $\alpha_{\mu\nu} = -\alpha_{\nu\mu}$, o que também resulta em $\alpha_{00} = \alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 0$. Isso é esperado pois não podemos

$$\begin{aligned}\alpha_{0\nu}k^\nu &= 0 \quad \Rightarrow \quad \text{identicamente satisfeito pois } \alpha_{00} = 0 \text{ e } k^i = 0; \\ \alpha_{i\nu}k^\nu &= 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{i0} = 0.\end{aligned}$$

Esse grupo de isotropia será então caracterizado por α_{ij} com $i < j$. Observando a equação (3.1), a transformação correspondente será:¹⁷

$$U(W) = 1 + \frac{i}{2}\alpha_{ij}J^{ij}. \quad (3.78)$$

De (3.7) sabemos que $J_1 = J^{23}$, $J_2 = J^{31}$ e $J_3 = J^{12}$. Podemos então definir, de modo semelhante, $\theta^1 = \alpha_{23}$, $\theta^2 = \alpha_{31}$ e $\theta^3 = \alpha_{12}$ e escrevemos:

$$U(W) = 1 + i\theta^i J_i. \quad (3.79)$$

Com isso identificamos que o grupo de isotropia para $k^\mu = (\pm m, 0, 0, 0)$ correspondente ao grupo das rotações tridimensionais, $SO(3)$, importante para a construção do momento angular. Os parâmetros θ^i podem ser obtidos explicitamente a partir de $W(\Lambda, p) = L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$. Com eles, podemos encontrar os D' s usando a equação (2.76):

$$D_{\sigma'\sigma}^{(j)}(W(\Lambda, p)) = [\exp(i\vec{\theta}(\Lambda, p) \cdot \vec{J})]_{\sigma'\sigma}. \quad (3.80)$$

O grupo $SO(3)$ é o que contém as matrizes de spin j da Mecânica Quântica. Elas são definidas por:

$$\begin{aligned}(J_\pm^{(j)})_{\sigma'\sigma} &= \sqrt{j(j+1) - \sigma(\sigma \pm 1)}\delta_{\sigma', \sigma \pm 1}; & (J_3^{(j)})_{\sigma'\sigma} &= \sigma\delta_{\sigma', \sigma}; \\ \text{onde } \sigma &= -j, -j+1, \dots, j-1, j, & J_\pm &= J_1 \pm iJ_2.\end{aligned} \quad (3.81)$$

Com isso, interpretamos o índice σ como a projeção de um momento angular intrínseco, chamado de spin. O estado $\Psi_{p,\sigma}$ representa então a situação física de uma partícula de momento p e spin j com projeção σ , por isso escrevemos $D^{(j)}$ na equação (3.80). Essa equação ainda nos mostra que uma transformação de Lorentz de um estado σ resulta em uma combinação linear de estados σ' distintos ou não de σ . Desse modo, **a mudança de referencial quebra a determinação do spin**. Logo, temos que supor que os diferentes rótulos σ se referem a estados distintos de uma mesma partícula, e não a partículas distintas, pois não podemos supor que a transformação no referencial resulta na alteração do sistema físico em si.

efetuar uma rotação ou boost de uma coordenada por ela mesma.

¹⁷ Ignoramos o termo $\epsilon_\rho P^\rho$ pois ele se refere às translações de Poincaré, que já obtivemos separadamente sem nenhum problema de biunivocidade.

2. $k^\mu = (\pm\kappa, 0, 0, \kappa); k^2 = 0$. Equivale a momentos do tipo-luz, e o grupo de isotropia correspondente é o $ISO(2)$, o grupo euclidiano de rotações e translações em duas dimensões. Substituímos este k^μ em (3.77), obtendo:

$$\begin{aligned}\alpha_{0\nu}k^\nu &\Rightarrow \alpha_{03} = 0; \\ \alpha_{1\nu}k^\nu &\Rightarrow \alpha_{10} = \mp\alpha_{13}; \\ \alpha_{2\nu}k^\nu &\Rightarrow \alpha_{20} = \mp\alpha_{23}.\end{aligned}\tag{3.82}$$

Agora, escolhemos α_{20} , α_{10} e α_{12} como parâmetros independentes para o grupo de isotropia deste k^μ . Substituímos esses resultados em (3.77), e obtemos:

$$\begin{aligned}U(W) &= 1 + i\alpha_{10}J^{10} + i\alpha_{20}J^{20} + i\alpha_{13}J^{13} + i\alpha_{23}J^{23} + i\alpha_{12}J^{12} \\ &= 1 + i\alpha_{10}(J^{10} - J^{13}) + i\alpha_{20}(J^{20} - J^{23}) + i\alpha_{12}J^{12}.\end{aligned}\tag{3.83}$$

Definimos $\alpha_{10} \equiv \alpha$, $\alpha_{20} \equiv \beta$ e $\alpha_{12} \equiv \theta$, e reescrevemos os geradores:

$$\begin{aligned}A &= J^{10} - J^{13} = K_1 + J_2; \\ B &= J^{20} - J^{23} = K_2 - J_1; \\ J_3 &= J^{12}.\end{aligned}\tag{3.84}$$

A obtenção da álgebra de Lie desses geradores é obtida facilmente com as relações que obtivemos em (3.33):¹⁸

$$\begin{aligned}[J_3, A] &= -iB; \\ [J_3, B] &= +iA; \\ [A, B] &= 0.\end{aligned}\tag{3.85}$$

Notemos, de (3.33), que:

$$[J_3, P_1] = -iP_2; \quad [J_3, P_2] = +iP_1; \quad [P_1, P_2] = 0.\tag{3.86}$$

e podemos tratar o grupo de isotropia com os geradores escritos como em (3.84) como o grupo das rotações e translações em duas dimensões, o $ISO(2)$, levando aos geradores A e B a serem interpretados como as componentes do momento linear, sob rotações finitas dadas pelo operador $R(\theta) = \exp(i\theta J_3)$:

$$\begin{aligned}R(\theta)AR^{-1}(\theta) &= A \cos \theta - B \sin \theta; \\ R(\theta)BR^{-1}(\theta) &= B \cos \theta + A \sin \theta.\end{aligned}\tag{3.87}$$

¹⁸ Aqui fazemos uso de duas propriedades facilmente verificáveis: $[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$ e $[A + B, C] = [A, C] + [B, C]$.

Temos, contudo, um problema. O grupo $ISO(2)$ nos leva a um conjunto contínuo de autoestados. Vejamos isso consideremos autoestados simultâneos de A e B , o que é possível dado que $[A, B] = 0$:

$$\begin{aligned} A\Psi_{k,a,b,\sigma} &= a\Psi_{k,a,b,\sigma}; \\ B\Psi_{k,a,b,\sigma} &= b\Psi_{k,a,b,\sigma}. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Vamos agora aplicar uma rotação sobre esse $\Psi_{k,a,b,\sigma}$:

$$\Psi_{k,a,b}^\theta = U^{-1}(R(\theta))\Psi_{k,a,b}; \quad (3.89)$$

e vamos obter o autovalor de A para esse estado rotacionado:

$$\begin{aligned} A\Psi_{k,a,b,\sigma}^\theta &= AU^{-1}(R(\theta))\Psi_{k,a,b,\sigma} \\ &= U^{-1}(R(\theta))U(R(\theta))AU^{-1}(R(\theta))\Psi_{k,a,b,\sigma} \\ &= U^{-1}(R(\theta))(A \cos \theta - B \sin \theta)\Psi_{k,a,b,\sigma} \\ &= (a \cos \theta - b \sin \theta)\Psi_{k,a,b,\sigma}^\theta; \end{aligned} \quad (3.90)$$

e de modo semelhante, para B obtemos $B\Psi_{k,a,b,\sigma}^\theta = (b \cos \theta + a \sin \theta)\Psi_{k,a,b,\sigma}^\theta$. Isso significa que cada par de autovalores (a, b) pode ser rotacionado gerando um conjunto contínuo de infinitos valores possíveis para os autovalores simultâneos de A e B . Esse resultado é inadequado, pois autovalores contínuos devem corresponder a graus de liberdade contínuos da natureza, e o único grau de liberdade contínuo conhecido para partículas sem massa é o momento. Portanto, forçamos a escolha de $(a, b) = (0, 0)$ escolhendo a representação trivial de A e B . Agora temos:

$$J_3\Psi_{k,0,0,\sigma} = \sigma\Psi_{k,0,0,\sigma}, \quad (3.91)$$

e daqui em diante escrevemos o autoestado apenas como $\Psi_{k,\sigma}$.

Uma observação importante é que ficamos com o gerador J_3 pois deixamos a terceira componente espacial de k^μ ser diferente de zero. Caso a parte espacial esteja na direção de um versor $\hat{p}$, teríamos:

$$J_{\hat{p}} = \vec{J} \cdot \hat{p}. \quad (3.92)$$

Os autovalores desse operador são chamados de helicidade.

Posto esse adendo, vamos calcular o efeito de $U(W)$ sobre $\Psi_{k,\sigma}$:

$$U(W)\Psi_{k,\sigma} = \exp(i[\alpha A + \beta B + \theta J_3])\Psi_{k,\sigma} \quad (3.93)$$

$$= \exp(i\theta J_3)\Psi_{k,\sigma}, \quad (3.94)$$

comparamos isso com (3.72) e chegamos em:

$$D_{\sigma'\sigma}(W) = \exp(i\sigma\theta)\delta_{\sigma'\sigma}, \quad (3.95)$$

onde resolvemos o aparente problema da falta de somatório em (3.93) com o delta de Kronecker que seleciona $\sigma' = \sigma$. A ação de $U(\Lambda)$ sobre esses estados é, por fim:

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \exp(i\sigma\theta(\Lambda, p)) \Psi_{\Lambda p, \sigma}. \quad (3.96)$$

Diferente do que ocorreu com o spin no caso anterior, observamos aqui que a helicidade não é alterada por transformações de Lorentz do subgrupo $L_+^\uparrow$. Portanto, somos inicialmente levados a querer associar valores distintos de helicidade à partículas diferentes, mas considerações vindas da análise da paridade e da reversão temporal, que exporemos ao fim deste capítulo, mostram-nos que estados de σ e $-\sigma$ correspondem a uma mesma partícula.

Vamos explorar a helicidade um pouco mais antes de darmos por acabada nossa busca pelas representações sobre classes de $k^\mu = (\pm\kappa, 0, 0, \kappa)$. Partículas sem massa são geralmente encontradas na natureza em superposição de autoestados da helicidade. Um estado dado por uma sobreposição de estados de helicidades opostas é dado por:

$$\Psi_{p;\alpha} \equiv \alpha_+ \Psi_{p,+\sigma} + \alpha_- \Psi_{p,-\sigma}, \quad (3.97)$$

normalizado com $|\alpha_+|^2 + |\alpha_-|^2 = 1$. Aplicando uma transformação de Lorentz ortócrona própria sobre esse vetor de estado obtemos:

$$\begin{aligned} \Psi'_{p;\alpha} &= U(\Lambda)\Psi'_{p;\alpha} = \alpha_+ U(\Lambda)\Psi_{p,+\sigma} + \alpha_- U(\Lambda)\Psi_{p,-\sigma} \\ &= \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \{ \alpha_+ e^{i\sigma\theta(\Lambda, p)} \Psi_{p,+\sigma} + \alpha_- e^{-i\sigma\theta(\Lambda, p)} \Psi_{p,-\sigma} \}. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Dizemos que uma partícula está (WEINBERG, 1995, p. 74):

- elipticamente polarizada se α_+ e α_- são complexos quaisquer;
- circularmente polarizada se α_+ ou α_- é nulo;
- linearmente polarizada se $|\alpha_+| = |\alpha_-| = \frac{1}{2}$.

No caso de uma polarização linear podemos reescrever as constantes como:

$$\alpha_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\delta_+}, \quad \alpha_- = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\delta_-}, \quad (3.99)$$

e os δ'_s , que são constantes reais quaisquer, por sua vez são possíveis de se escrever como:

$$\delta_\pm = \gamma \pm \beta. \quad (3.100)$$

Assim escrevemos:

$$\begin{aligned}\Psi_{p;\alpha} &= \frac{e^{i\gamma}}{\sqrt{2}}(e^{+i\beta}\Psi_{p,+\sigma} + e^{-i\beta}\Psi_{p,-\sigma}) \\ \longrightarrow \Psi_{p;\alpha} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{+i\beta}\Psi_{p,+\sigma} + e^{-i\beta}\Psi_{p,-\sigma}),\end{aligned}\quad (3.101)$$

onde fazemos uma redefinição ignorando $e^{i\gamma}$ pois é uma fase inobservável. Quanto à fase $e^{i\beta}$, podemos compreender β como o ângulo entre o plano de polarização da partícula e uma direção de referência, perpendicular à direção de propagação dada pelo momento $\vec{p}$. Comparando (3.101) com (3.98) vemos que esse ângulo β se transforma como:

$$\beta \rightarrow \beta + |\sigma|\theta(\Lambda, p), \quad (3.102)$$

e vemos portanto que transformações de Lorentz sobre partículas linearmente polarizadas produzem rotações no plano de polarização.

3. $k^\mu = (0, 0, 0, 0)$; $k^2 = 0$. Esse estado corresponde ao vácuo, e todo o subgrupo ortócrono próprio de Lorentz, $SO(1, 3)$, o deixa invariante. Escolhemos a representação trivial:¹⁹

$$U(\Lambda)\Psi_0 = \Psi_0. \quad (3.103)$$

Também estabelecemos a regra de normalização:

$$(\Psi_0, \Psi_0) = 1. \quad (3.104)$$

4. $k^\mu = (0, 0, 0, m)$; $k^2 = -m^2$. O grupo de isotropia é o $SO(2,1)$ (WEINBERG, 1995, p. 66), das rotações em torno de $\hat{z}$ e dos boosts nas direções $\hat{x}$ e $\hat{y}$. Esses momentos equivalem a partículas teóricas nunca observadas experimentalmente, táquions, e portanto não serão desenvolvidas nesse trabalho.

3.2.3 A álgebra da Paridade e da Reversão Temporal

Para a paridade $\mathcal{P}$ e para a reversão temporal $\mathcal{T}$, cujas formas matriciais, dadas em (2.83), são:

$$\mathcal{P}^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{T}^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (3.105)$$

podemos buscar representações unitárias ou antiunitárias. Observamos que $\mathcal{P}^2 = \mathcal{T}^2 = 1$. Isso não significa necessariamente que a ação de $\mathcal{P}^2$ ou $\mathcal{T}^2$ sobre um estado $\Psi_{p,\sigma}$ retorne o próprio estado $\Psi_{p,\sigma}$,

¹⁹ Note que o vácuo não carrega nenhum momento não-nulo, e portanto segue de (3.38) que ele também é invariante sob translações. Desse modo, todo o grupo de Poincaré deixa o vácuo invariante.

mas significa que ele deve retornar um estado no mesmo raio.

Podemos obter diretamente a forma pela qual os operadores $P = U(\mathcal{P})$ e $T = U(\mathcal{T})$ conjugam transformações de Poincaré $U(\Lambda, a)$:

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P})U(\Lambda, a)U^{-1}(\mathcal{P}) &= U(\mathcal{P})U(\Lambda, a)U(\mathcal{P}^{-1}) \\ &= U(\mathcal{P})U(\Lambda\mathcal{P}^{-1}, a) \\ &= U(\mathcal{P}\Lambda\mathcal{P}^{-1}, \mathcal{P}a). \end{aligned} \quad (3.106)$$

De modo similar:

$$U(\mathcal{T})U(\Lambda, a)U^{-1}(\mathcal{T}) = U(\mathcal{T}\Lambda\mathcal{T}^{-1}, \mathcal{T}a). \quad (3.107)$$

Escrevemos esses resultados como:

$$PU(\Lambda, a)P^{-1} = U(\mathcal{P}\Lambda\mathcal{P}^{-1}, \mathcal{P}a); \quad (3.108)$$

$$TU(\Lambda, a)T^{-1} = U(\mathcal{T}\Lambda\mathcal{T}^{-1}, \mathcal{T}a). \quad (3.109)$$

Vamos aqui tomar a mesma ferramenta que tem nos ajudado em toda essa seção: a expansão infinitesimal de $U(1 + \omega, a)$. Vamos aplicá-la em (3.108):

$$\begin{aligned} P \left(1 + \frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} J^{\rho\sigma} - i \epsilon_{\rho} P^{\rho} \right) P^{-1} &= U(1 + \mathcal{P}\omega\mathcal{P}^{-1}, \mathcal{P}a) \\ 1 + \frac{1}{2} P(i\omega_{\rho\sigma} J^{\rho\sigma}) P^{-1} - P(i\epsilon_{\rho} P^{\rho}) P^{-1} &= 1 + \frac{1}{2} (i\mathcal{P}\omega\mathcal{P}^{-1})_{\rho\sigma} J^{\rho\sigma} - i(\mathcal{P}\epsilon)_{\rho} P^{\rho} \\ 1 + \frac{1}{2} P(i\omega_{\rho\sigma} J^{\mu\nu}) P^{-1} - P(i\epsilon_{\rho} P^{\rho}) P^{-1} &= 1 + \frac{1}{2} i\mathcal{P}_{\mu}{}^{\rho} \mathcal{P}_{\nu}{}^{\sigma} \omega_{\rho\sigma} J^{\mu\nu} - i\mathcal{P}_{\mu}{}^{\rho} \epsilon_{\rho} P^{\mu}. \end{aligned} \quad (3.110)$$

Não passamos a unidade imaginária para a esquerda de P pois ainda não sabemos se esse operador será unitário ou antiunitário. Comparando os coeficientes de ambos os lados dessa expansão temos:

$$P(iJ^{\rho\sigma})P^{-1} = i\mathcal{P}_{\mu}{}^{\rho} \mathcal{P}_{\nu}{}^{\sigma} J^{\mu\nu}; \quad (3.111)$$

$$P(iP^{\rho})P^{-1} = i\mathcal{P}_{\mu}{}^{\rho} P^{\mu}. \quad (3.112)$$

A equação (3.109) segue uma estrutura similar à de (3.108), e sua expansão infinitesimal rende:

$$T(iJ^{\rho\sigma})T^{-1} = i\mathcal{T}_{\mu}{}^{\rho} \mathcal{T}_{\nu}{}^{\sigma} J^{\mu\nu}; \quad (3.113)$$

$$T(iP^{\rho})T^{-1} = i\mathcal{T}_{\mu}{}^{\rho} P^{\mu}. \quad (3.114)$$

Vamos usar a conjugação do momento para descobrir se os operadores P e T são unitários ou

antiunitários. Observemos a componente 0 de (3.112):

$$\begin{aligned}
 P(iP^0)P^{-1} &= i\mathcal{P}_\mu{}^0 P^\mu \\
 P(iP^0)P^{-1} &= iP^0 \\
 P(iH)P^{-1} &= iH \\
 P(iH) &= iHP.
 \end{aligned}
 \tag{3.115}$$

Agora precisamos enfim fazer a escolha da unitariedade ou antiunitariedade de P . Caso P seja antiunitário, ao passarmos a unidade imaginária para a esquerda do operador, ela acompanhará um sinal negativo; caso P seja unitário, não. Ou seja, após realizarmos essa operação e dividirmos ambos os lados da igualdade por i teremos:²⁰

$$\begin{aligned}
 \text{se } P \text{ for unitário:} \quad & PH = HP; \\
 \text{se } P \text{ for antiunitário:} \quad & -PH = HP.
 \end{aligned}$$

Vamos supor um autoestado Ψ de H com autovalor de energia E . Sob ação de P , teremos:

$$H(P\Psi) = -PH\Psi = -EP\Psi.$$

Ou seja, a atuação da paridade sobre esse autoestado de H resultaria em um estado de energia negativa. Isso nos traria um grande problema, pois aí todo autoestado de H poderia ter valores de energia ilimitadamente positivos e negativos, ou os autoestados de H não teriam um limite inferior. Estados de menor energia são fundamentais para qualquer sistema físico, como sabemos da física quântica não-relativística, onde esse fato decorre de os operadores de posição e momento não comutarem. É por isso, enfim, que escolhemos a **representação unitária da paridade** P .

A análise de T através da componente 0 de (3.114) nos oferece um resultado distinto:

$$\begin{aligned}
 T(iP^0)T^{-1} &= iT_\mu{}^0 P^\mu \\
 T(iP^0)T^{-1} &= -iP^0 \\
 T(iH)T^{-1} &= -iH \\
 T(iH) &= -iHT.
 \end{aligned}
 \tag{3.116}$$

Assim como no caso da paridade, para que um autoestado Ψ de H se comporte da forma adequada sob a reversão temporal precisamos de $H(T\Psi) = E(T\Psi)$. Então escolhemos a **representação antiunitária da reversão temporal** T .

Sabendo agora da unitariedade de P e da antiunitariedade de T , podemos remover a unidade imaginária das equações (3.111) a (3.114):

²⁰ As equações abaixo são deixadas sem numeração como uma forma de não destacá-las, pois uma das duas corresponderá a uma hipótese que descartaremos.

$$\begin{aligned}
P J^{\rho\sigma} P^{-1} &= \mathcal{P}_\mu{}^\rho \mathcal{P}_\nu{}^\sigma J^{\mu\nu}; \\
P P^\rho P^{-1} &= \mathcal{P}_\mu{}^\rho P^\mu; \\
T J^{\rho\sigma} T^{-1} &= -\mathcal{T}_\mu{}^\rho \mathcal{T}_\nu{}^\sigma J^{\mu\nu}; \\
T P^\rho T^{-1} &= -\mathcal{T}_\mu{}^\rho P^\mu.
\end{aligned} \tag{3.117}$$

Assim, podemos usar as relações em (3.4), (3.7) e (3.9) para obter (WEINBERG, 1995, p. 76):

$$\begin{aligned}
P \vec{J} P^{-1} &= +\vec{J}; & P \vec{K} P^{-1} &= -\vec{K}; & P \vec{P} P^{-1} &= -\vec{P}; & P H P^{-1} &= +H; \\
T \vec{J} T^{-1} &= -\vec{J}; & T \vec{K} T^{-1} &= +\vec{K}; & T \vec{P} T^{-1} &= -\vec{P}; & T H T^{-1} &= +H.
\end{aligned} \tag{3.118}$$

3.2.4 Paridade e Reversão Temporal sobre estados de uma partícula

Podemos passar, agora, à busca do efeito dos operadores P e T sobre estados de uma partícula. Separamos essa busca em dois casos distintos: $m \neq 0$ e $m = 0$, e começamos pelo primeiro.

3.2.4.1 Massa não nula

Paridade. Das relações em (3.118) vemos que P comuta com H e J_3 e anticomuta com $\vec{P}$.²¹ Isso significa que os estados $\Psi_{k,\sigma}$ são autoestados simultâneos de P , H , J_3 e $\vec{P}$,²² desde que não haja degenerescências adicionais. Além disso, P é um operador unitário, então seus autovalores são fases, como vimos em (2.50). Escrevemos, portanto:

$$P \Psi_{k,\sigma} = \eta \Psi_{k,\sigma}. \tag{3.119}$$

onde a fase η é chamada de **paridade intrínseca da partícula** e não pode ter dependência do rótulo de projeção de spin σ . Podemos ver isso utilizando as matrizes de spin $J_\pm = (J_1 \pm iJ_2)$ em (3.81), que comutam com P já que são formadas de uma combinação linear de matrizes J e P é unitário.²³

²¹ Descobrimos as relações de comutação e anticomutação em (3.118) multiplicando ambos os lados das relações por P ou T , conforme apropriado, e passando ambas para um único lado da igualdade. Tomemos a primeira por exemplo:

$$\begin{aligned}
P \vec{J} P^{-1} &= \vec{J} \\
P \vec{J} &= \vec{J} P \\
P \vec{J} - \vec{J} P &= 0 \Rightarrow [P, \vec{J}] = 0.
\end{aligned}$$

²² $\Psi_{k,\sigma}$ é autoestado simultâneo de $\vec{P}$ pois, como estamos no caso em que $p^i = 0$, $[P, P^i] = 0$.

²³ Se P fosse antiunitário, não comutaria com as matrizes de spin devido ao i multiplicando J_2 .

Escrevendo $\eta = \eta(\sigma)$ para indicar a hipótese de que η dependa de σ e fazemos:

$$\begin{aligned}
 J_{\pm} P \Psi_{k,\sigma} &= P J_{\pm} \Psi_{k,\sigma}; \\
 J_{\pm} \eta(\sigma) \Psi_{k,\sigma} &= P \sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)} \Psi_{k,\sigma \pm 1} \\
 \eta(\sigma) J_{\pm} \Psi_{k,\sigma \pm 1} &= \sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)} P \Psi_{k,\sigma \pm 1} \\
 \eta(\sigma) \sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)} \Psi_{k,\sigma \pm 1} &= \sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)} \eta(\sigma \pm 1) \Psi_{k,\sigma \pm 1} \\
 &\Rightarrow \eta(\sigma) = \eta(\sigma \pm 1).
 \end{aligned} \tag{3.120}$$

Portanto η não depende da projeção de spin σ (WEINBERG, 1995, p. 77).

É fácil ver que $\mathcal{P}^2 = \mathbb{1}$. Isso se traduz, no espaço de Hilbert, como $P^2 = \xi$, onde ξ é uma fase, o que não é inconsistente já que a representação do grupo é sobre raios e não sobre os vetores de estados que o compõe, e Ψ e $\xi\Psi$ representam o mesmo estado físico. Duas atuações sucessivas de P sobre um estado Ψ nos revelam que:

$$\begin{aligned}
 P^2 \Psi &= P(P\Psi) \\
 \xi \Psi &= \eta P \Psi \\
 \xi \Psi &= \eta^2 \Psi \\
 &\Rightarrow \xi = \eta^2.
 \end{aligned} \tag{3.121}$$

Vamos agora ver a ação de P sobre autoestados de p^μ :

$$\begin{aligned}
 P \Psi_{p,\sigma} &= \sqrt{\frac{m}{p^0}} P U(L(p)) \Psi_{k,\sigma} \\
 &= \sqrt{\frac{m}{p^0}} U(\mathcal{P} L(p) \mathcal{P}^{-1}) \Psi_{k,\sigma} \\
 &= \sqrt{\frac{m}{p^0}} U(\mathcal{P} L(p) \mathcal{P}^{-1}) P \Psi_{k,\sigma} \\
 &= \eta \sqrt{\frac{m}{p^0}} U(\mathcal{P} L(p) \mathcal{P}^{-1}) \Psi_{k,\sigma},
 \end{aligned} \tag{3.122}$$

onde na última linha usamos o fato de que $\mathcal{P}k = k$ já que k^μ possui componentes espaciais nulas. Guardamos esse resultado por um momento e analisamos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P} L(p) \mathcal{P}^{-1} k &= \mathcal{P} L(p) k \\
 &= \mathcal{P} p \\
 &= L(\mathcal{P} p) k,
 \end{aligned} \tag{3.123}$$

e agora voltamos em (3.122):

$$\begin{aligned}
 P\Psi_{p,\sigma} &= \eta\sqrt{\frac{m}{p^0}}U(\mathcal{P}L(p)\mathcal{P}^{-1})\Psi_{k,\sigma} \\
 &= \eta\sqrt{\frac{m}{p^0}}U(L(\mathcal{P}p))\Psi_{k,\sigma} \\
 &= \eta\sqrt{\frac{m}{p^0}}\sqrt{\frac{(\mathcal{P}p)^0}{m}}\Psi_{\mathcal{P}p,\sigma} \\
 &= \eta\Psi_{\mathcal{P}p,\sigma}.
 \end{aligned} \tag{3.124}$$

Reversão Temporal. Vamos agora à análise da ação de T sobre autoestados do momento com massa não nula. Vemos a partir de (3.118) que T comuta com H e anticomuta com J_3 e $\vec{P}$. Os autovalores de $\vec{P}$ são nulos para o estado $\Psi_{k,\sigma}$, e desse modo podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 \vec{P}(T\Psi_{k,\sigma}) &= -T\vec{P}\Psi_{k,\sigma} = 0 \\
 H(T\Psi_{k,\sigma}) &= mT\Psi_{k,\sigma} \\
 J_3(T\Psi_{k,\sigma}) &= -\sigma T\Psi_{k,\sigma}.
 \end{aligned} \tag{3.125}$$

Isso nos permite concluir que:

$$T\Psi_{p,\sigma} = \zeta_\sigma\Psi_{\mathcal{P}p,-\sigma}. \tag{3.126}$$

com ζ_σ sendo uma fase que depende de σ . Mais uma vez, $\mathcal{T}^2 = \mathbb{1} \Rightarrow T^2 = \xi$, sendo ξ uma fase. Obtemos então:

$$\begin{aligned}
 T^2\Psi_{k,\sigma} &= T(T\Psi_{k,\sigma}) \\
 \xi\Psi_{k,\sigma} &= T(\zeta_\sigma\Psi_{k,-\sigma}) \\
 \xi\Psi_{k,\sigma} &= \zeta_\sigma^*T\Psi_{k,-\sigma} \\
 \xi\Psi_{k,\sigma} &= \zeta_\sigma^*\zeta_{-\sigma}\Psi_{k,\sigma},
 \end{aligned} \tag{3.127}$$

e portanto chegamos em:

$$\xi = \zeta_\sigma^*\zeta_{-\sigma}. \tag{3.128}$$

Usamos novamente as matrizes de spin definidas em (3.81) para auxiliar nossa análise:

$$\begin{aligned}
\mathsf{T}(J_1 \pm iJ_2)\Psi_{k,\sigma} &= [-J_1\mathsf{T} \mp i\mathsf{T}J_2]\Psi_{k,\sigma} \\
\mathsf{T}(J_1 \pm iJ_2)\Psi_{k,\sigma} &= (-J_1\mathsf{T} \pm iJ_2\mathsf{T})\Psi_{k,\sigma} \\
\mathsf{T}(J_1 \pm iJ_2)\Psi_{k,\sigma} &= (-J_1 \pm iJ_2)\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma} \\
\mathsf{T}\sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)}\Psi_{k,\sigma \pm 1} &= (-J_1 \pm iJ_2)\zeta_\sigma\Psi_{k,-\sigma} \\
\sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)}\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma \pm 1} &= \zeta_\sigma(-1)(J_1 \mp iJ_2)\Psi_{k,-\sigma} \\
\sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)}\zeta_{-\sigma \pm 1}\Psi_{k,-\sigma \mp 1} &= \zeta_\sigma(-1)\sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)}\Psi_{k,-\sigma \mp 1} \\
&\Rightarrow \zeta_{\sigma \pm 1} = -\zeta_\sigma.
\end{aligned} \tag{3.129}$$

Nossa regra para determinação de ζ_σ é, então, $\zeta_{\sigma \pm 1} = -\zeta_\sigma$. Fixamos um $\zeta_j = \zeta$ e analisamos alguns exemplos:

$$\begin{aligned}
j = 1 &\Rightarrow \zeta_1 = \zeta, \quad \zeta_0 = -\zeta, \quad \zeta_{-1} = \zeta; \\
j = 2 &\Rightarrow \zeta_2 = \zeta, \quad \zeta_1 = -\zeta, \quad \zeta_0 = \zeta, \quad \zeta_{-1} = -\zeta, \quad \zeta_{-2} = \zeta; \\
j = \frac{1}{2} &\Rightarrow \zeta_{\frac{1}{2}} = \zeta, \quad \zeta_{-\frac{1}{2}} = -\zeta.
\end{aligned} \tag{3.130}$$

Assim, para j inteiro os ζ_σ são uma função par em σ , e para j semi-inteiro os ζ_σ são função ímpar σ . Para j inteiro, j ser par ou ímpar também altera o sinal de ζ_0 . Resumimos isso em:

$$\zeta_\sigma = \zeta(-1)^{j-\sigma}. \tag{3.131}$$

A constante ζ é, na verdade, irrelevante fisicamente, o que vemos fazendo (WEINBERG, 1995, p. 78):

$$\begin{aligned}
T(\eta^{\frac{1}{2}}\Psi_{k,\sigma}) &= \zeta^{*\frac{1}{2}}\zeta_\sigma\Psi_{k,-\sigma} \\
&= \zeta^{*\frac{1}{2}}\zeta_\sigma(-1)^{j-\sigma}\Psi_{k,-\sigma} \\
&= (-1)^{j-\sigma}[\zeta^{\frac{1}{2}}\Psi_{k,-\sigma}].
\end{aligned} \tag{3.132}$$

Vamos, finalmente, analisar a ação de T sobre estados de momento p^μ arbitrário:

$$\begin{aligned}
\mathsf{T}\Psi_{p,\sigma} &= \sqrt{\frac{m}{p^0}}\mathsf{T}U(L(p))\Psi_{k,\sigma} \\
&= \sqrt{\frac{m}{p^0}}U(\mathcal{T}L(p)\mathcal{T}^{-1})\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma} \\
&= (-1)^{j-\sigma}\sqrt{\frac{m}{p^0}}U(\mathcal{T}L(p)\mathcal{T}^{-1})\Psi_{k,-\sigma}.
\end{aligned} \tag{3.133}$$

Notemos entretanto que:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}L(p)\mathcal{T}^{-1}k &= \mathcal{T}L(p)(-k) \\
 &= \mathcal{T}(-p) \\
 &= -(\mathcal{T}p) \\
 &= \mathcal{P}p \\
 &= L(\mathcal{P}p)k.
 \end{aligned} \tag{3.134}$$

Substituímos esse resultado em (3.133), ficando com:

$$\begin{aligned}
 \mathsf{T}\Psi_{p,\sigma} &= (-1)^{j-\sigma} \sqrt{\frac{m}{p^0}} U(L(\mathcal{P}p)) \Psi_{k,-\sigma} \\
 &= (-1)^{j-\sigma} \sqrt{\frac{m}{p^0}} U(L(\mathcal{P}p)) \Psi_{k,-\sigma} \\
 &= (-1)^{j-\sigma} \sqrt{\frac{m}{p^0}} \sqrt{\frac{(\mathcal{P}p)^0}{m}} \Psi_{\mathcal{P}p,-\sigma} \\
 &= (-1)^{j-\sigma} \Psi_{\mathcal{P}p,-\sigma}.
 \end{aligned} \tag{3.135}$$

Com esses desenvolvimentos, podemos complementar (3.128):

$$\xi = \zeta_\sigma^* \zeta_{-\sigma} = (-1)^{2j}. \tag{3.136}$$

Por fim, escrevemos as transformações de paridade e reversão temporal sobre autoestados do momento:

$$\mathsf{P}\Psi_{p,\sigma} = \eta \Psi_{\mathcal{P}p,\sigma}; \tag{3.137}$$

$$\mathsf{T}\Psi_{p,\sigma} = (-1)^{j-\sigma} \Psi_{\mathcal{P}p,-\sigma}. \tag{3.138}$$

3.2.4.2 Massa nula

Paridade. Para o caso de massa nula, lembramos que havíamos escolhido o vetor $k^\mu = (\pm\kappa, 0, 0\kappa)$. Podemos, a partir disso, obter qualquer vetor p^μ com $p^2 = m^2 = 0$ fazendo um boost $B(|\vec{p}|/\kappa)$ — para levar k^μ a um vetor com módulo da parte espacial igual ao de p^μ — seguido de uma rotação $R(\hat{p})$ ²⁴ — para levar a parte espacial desse vetor para a direção de $\vec{p}$. Logo, podemos escrever:

$$L(p) = R(\hat{p})B\left(\frac{|\vec{p}|}{\kappa}\right). \tag{3.139}$$

²⁴ A notação $\hat{p}$ indica um versor, isso é, um vetor de módulo 1 cujo propósito é expressar apenas uma direção, no caso, a direção do vetor $\vec{p}$.

Usamos (3.139) em (3.96) e analisamos a ação da paridade sobre um estado de uma partícula de $m = 0$:

$$\begin{aligned} P\Psi_{p,\sigma} &= \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} P U \left(R(\hat{p}) B \left(\frac{|\vec{p}|}{\kappa} \right) \right) \Psi_{k,\sigma} \\ &= \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} U \left(\mathcal{P} R(\hat{p}) B \left(\frac{|\vec{p}|}{\kappa} \right) \right) \Psi_{k,\sigma} \\ &= \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} U \left(R(\hat{p}) \mathcal{P} B \left(\frac{|\vec{p}|}{\kappa} \right) \right) \Psi_{k,\sigma}. \end{aligned} \quad (3.140)$$

Comutamos a rotação $R(\hat{p})$ e a paridade $\mathcal{P}$ pois as matrizes de momento angular J — que são os geradores de rotação — comutam com $\mathcal{P}$ como vimos em (3.118). Também podemos ver isso, contudo, pelo fato de que $B(|\vec{p}|/\kappa)k$ terá apenas a componente espacial k^3 , na direção $\hat{z}$:

$$\begin{aligned} R(\vec{p})\mathcal{P}\hat{z} &= R(\vec{p})(-\hat{z}) = -\vec{p}; \\ \mathcal{P}R(\vec{p})\hat{z} &= \mathcal{P}\vec{p} = -\vec{p}. \end{aligned} \quad (3.141)$$

A paridade não comuta com o boost $B(|\vec{p}|/\kappa)k$, mas podemos encontrar uma operação que comute. Consideremos uma rotação de 180° em torno de $\hat{y}$, que chamaremos de R_2 . No espaço de Hilbert, sendo V_3 a terceira componente espacial de um vetor:

$$U(R_2^{-1})V_3U(R_2) = -V_3. \quad (3.142)$$

De modo semelhante:

$$U(R_2^{-1})J_3U(R_2) = -J_3 \quad \Rightarrow \quad U(R_2^{-1})J_3 = -J_3U(R_2^{-1}). \quad (3.143)$$

Assim:

$$\begin{aligned} J_3(U(R_2^{-1})P\Psi_{k,\sigma}) &= -U(R_2^{-1})J_3P\Psi_{k,\sigma} \\ &= -U(R_2^{-1})P J_3\Psi_{k,\sigma} \\ &= -\sigma(U(R_2^{-1})P\Psi_{k,\sigma}), \end{aligned} \quad (3.144)$$

e, de modo análogo:

$$\begin{aligned} P_3(U(R_2^{-1})P\Psi_{k,\sigma}) &= -U(R_2^{-1})P_3P\Psi_{k,\sigma} \\ &= -U(R_2^{-1})(-P P_3)\Psi_{k,\sigma} \\ &= +\kappa(U(R_2^{-1})P\Psi_{k,\sigma}). \end{aligned} \quad (3.145)$$

O operador $H = P^0$ permanece inalterado por rotações, portanto:

$$H(U(R_2^{-1})P\Psi_{k,\sigma}) = \kappa(U(R_2^{-1})P\Psi_{k,\sigma}). \quad (3.146)$$

Supomos que não há mais degenerescências e escrevemos:

$$U(R_2^{-1})P\Psi_{k,\sigma} = \eta_\sigma\Psi_{k,-\sigma}. \quad (3.147)$$

O efeito de $U(R_2^{-1})P$ sobre um quadrvetor p^μ é:

$$p^0 \rightarrow p^0, \quad p^1 \rightarrow p^1, \quad p^2 \rightarrow -p^2, \quad p^3 \rightarrow p^3. \quad (3.148)$$

Ou seja, no subespaço de p^0 e p^3 o operador $U(R_2^{-1})P$ é a identidade, e por isso ele comuta com o boost $B(|\vec{p}|/\kappa)k$, que opera nesse subespaço. Voltamos então a (3.140):

$$\begin{aligned} P\Psi_{p,\sigma} &= \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} U \left(R(\hat{p}) R_2 R_2^{-1} \mathcal{P} B \left(\frac{|\vec{p}|}{\kappa} \right) \right) \Psi_{k,\sigma} \\ &= \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} U \left(R(\hat{p}) R_2 B \left(\frac{|\vec{p}|}{\kappa} \right) R_2^{-1} \mathcal{P} \right) \Psi_{k,\sigma} \\ &= \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} U \left(R(\hat{p}) R_2 B \left(\frac{|\vec{p}|}{\kappa} \right) \right) U(R_2^{-1}) P \Psi_{k,\sigma} \\ &= \eta_\sigma \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} U \left(R(\hat{p}) R_2 B \left(\frac{|\vec{p}|}{\kappa} \right) \right) \Psi_{k,-\sigma}. \end{aligned} \quad (3.149)$$

A rotação $R(\hat{p})R_2$ leva $\hat{z} \rightarrow -\hat{p}$. Vamos verificar se ela é a rotação $R(-\hat{p})$ multiplicando-a por $R(-\hat{p})^{-1}$ e vendo se obtemos a identidade. No espaço de Hilbert, a rotação $R(\hat{p})|\hat{z} \rightarrow \hat{p}$ é:

$$U(R(\hat{p})) = \exp(i\phi J_3) \exp(i\theta J_2). \quad (3.150)$$

Como queremos $R(-\hat{p})$ fazemos as substituições:

$$\begin{aligned} \theta &\rightarrow \theta' = \pi - \theta, \\ \phi &\rightarrow \phi' = \phi \pm \pi, \end{aligned} \quad (3.151)$$

onde escolhemos o sinal $\pm$ de modo que o novo ângulo ϕ' não ultrapasse 2π . Assim:

$$U(R(-\hat{p})) = \exp(i(\phi \pm \pi)J_3) \exp(i(\pi - \theta)J_2). \quad (3.152)$$

Agora podemos verificar se $R(\hat{p})R_2$ é a rotação $R(-\hat{p})$:

$$\begin{aligned} U^{-1}(R(-\hat{p}))U(R(\hat{p})R_2) &= \exp(-i(\pi - \theta)J_2) \exp(-i(\phi \pm \pi)J_3) \exp(i\phi J_3) \exp(i\theta J_2) \exp(-i\pi J_2) \\ &= \exp(-i(\pi - \theta)J_2) \exp(\mp i\pi J_3) \exp(-i(\pi - \theta)J_2). \end{aligned} \quad (3.153)$$

Observamos que:

$$\exp(\mp i\pi J_3) J_2 \exp(\pm i\pi J_3) = -J_2 \quad (3.154)$$

e assim obtemos:

$$\begin{aligned} U^{-1}(R(-\hat{p}))U(R(\hat{p})R_2) &= \exp(-i(\pi - \theta)J_2)\exp(\mp i\pi J_3)\exp(-i(\pi - \theta)J_2)\exp(\pm i\pi J_3)\exp(\mp i\pi J_3) \\ &= \exp(-i(\pi - \theta)J_2)\exp(i(\pi - \theta)J_2)\exp(\mp i\pi J_3) \\ &= \exp(\mp i\pi J_3). \end{aligned} \quad (3.155)$$

Temos finalmente:

$$U(R(\hat{p})R_2) = U(R(-\hat{p}))\exp(\mp i\pi J_3), \quad (3.156)$$

o que nos permite dar mais um passo em (3.149):²⁵

$$\begin{aligned} P\Psi_{p,\sigma} &= \eta_\sigma \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} U \left(R(\hat{p})R_2 B \left(\frac{|\vec{p}|}{\kappa} \right) \right) \Psi_{k,-\sigma} \\ &= \eta_\sigma \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} U \left(R(-\hat{p})\exp(\mp i\pi J_3) B \left(\frac{|\vec{p}|}{\kappa} \right) \right) \Psi_{k,-\sigma} \\ &= \eta_\sigma \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} U \left(R(-\hat{p}) B \left(\frac{|\vec{p}|}{\kappa} \right) \exp(\mp i\pi J_3) \right) \Psi_{k,-\sigma}. \end{aligned} \quad (3.157)$$

Percebemos que:

$$R(-\hat{p}) B \left(\frac{|\vec{p}|}{\kappa} \right) = L(\mathcal{P}p), \quad (3.158)$$

o que nos permite chegar em:²⁶

$$\begin{aligned} P\Psi_{p,\sigma} &= \eta_\sigma \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} U \left(R(-\hat{p}) B \left(\frac{|\vec{p}|}{\kappa} \right) \right) \exp(\mp i\pi J_3) \Psi_{k,-\sigma} \\ &= \eta_\sigma \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} U (L(\mathcal{P}p)) \exp(\pm i\pi \sigma) \Psi_{k,-\sigma} \\ &= \eta_\sigma \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} \exp(\pm i\pi \sigma) U (L(\mathcal{P}p)) \Psi_{k,-\sigma} \\ &= \eta_\sigma \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} \exp(\pm i\pi \sigma) \sqrt{\frac{(\mathcal{P}p)^0}{\kappa}} \Psi_{\mathcal{P}p,-\sigma} \\ &= \eta_\sigma \exp(\pm i\pi \sigma) \Psi_{\mathcal{P}p,-\sigma}, \end{aligned} \quad (3.159)$$

onde o sinal + é utilizado se a segunda componente espacial de p^μ for positiva, e - se for negativa.

²⁵ Comutamos $B(|\vec{p}|/\kappa)$ e $\exp(\mp i\pi J_3)$ pois este é um boost gerado por K_3 e a álgebra em (3.33) mostra que $[J_3, K_3] = 0$.

²⁶ Observe que na obtenção do autovalor de J_3 lidamos com um autoestado de rótulo $-\sigma$. Também observe que $(\mathcal{P}p)^0 = p^0$.

Observamos de (3.159) que a ação da paridade altera a helicidade da partícula sem massa de σ para $-\sigma$, portanto devemos tomar estados correspondentes a $+\sigma$ e $-\sigma$ como estados distintos de um mesmo tipo de partícula.

Aplicamos P duas vezes sobre um estado $\Psi_{p,\sigma}$.²⁷

$$\begin{aligned} P^2 \Psi_{p,\sigma} &= \eta_\sigma \exp(\pm i\pi\sigma) P \Psi_{p,-\sigma} \\ &= \eta_\sigma \eta_{-\sigma} \exp(\pm 2i\pi\sigma) P \Psi_{p,\sigma} \\ &= \xi \Psi_{p,\sigma}. \end{aligned} \quad (3.160)$$

e vemos que $\eta_\sigma \eta_{-\sigma} = \pm \xi$, com o sinal positivo sendo escolhido no caso de σ inteiro e, o negativo, no caso de σ semi-inteiro. Esse resultado nos oferece uma condição sobre η mas não dá a forma de sua dependência de σ .

Reversão temporal. Vamos agora à ação de T sobre estados de $m = 0$. Observamos que a ação de um operador $U(R_2^{-1})T$ sobre um quadrivetor p^μ é

$$p^0 \rightarrow -p^0, \quad p^1 \rightarrow -p^1, \quad p^2 \rightarrow +p^2, \quad p^3 \rightarrow -p^3, \quad (3.161)$$

ou seja, $U(R_2^{-1})T$ age como -1 sobre o espaço de p^0 e p^3 , e portanto comuta com $B(|\vec{p}|/\kappa)$. Notamos que:

$$\begin{aligned} J_3(U(R_2^{-1})T\Psi_{k,\sigma}) &= -U(R_2^{-1})J_3T\Psi_{k,\sigma} \\ &= -U(R_2^{-1})(-TJ_3)\Psi_{k,\sigma} \\ &= \sigma U(R_2^{-1})T\Psi_{k,\sigma} \end{aligned} \quad (3.162)$$

e de modo similar:

$$\begin{aligned} P_3(U(R_2^{-1})T\Psi_{k,\sigma}) &= \kappa U(R_2^{-1})T\Psi_{k,\sigma}, \\ H(U(R_2^{-1})T\Psi_{k,\sigma}) &= \kappa U(R_2^{-1})T\Psi_{k,\sigma}. \end{aligned} \quad (3.163)$$

Com esses resultados chegamos em:

$$U(R_2^{-1})T\Psi_{k,\sigma} = \zeta_\sigma \Psi_{k,\sigma}. \quad (3.164)$$

²⁷ Aqui fazemos novamente o lembrete de que P é unitário e portanto $Pi = iP$.

Utilizando esses resultados em (3.96), ficamos com:²⁸

$$\begin{aligned}
\mathsf{T}\Psi_{p,\sigma} &= \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} \mathsf{T}U \left(R(\hat{p})B \left(\frac{|\vec{p}|}{\kappa} \right) \right) \Psi_{k,\sigma} \\
&= \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} U \left(\mathcal{T}R(\hat{p})B \left(\frac{|\vec{p}|}{\kappa} \right) \right) \Psi_{k,\sigma} \\
&= \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} U \left(-R(\hat{p})\mathcal{T}B \left(\frac{|\vec{p}|}{\kappa} \right) \right) \Psi_{k,\sigma} \\
&= \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} (-1)U \left(R(\hat{p})R_2R_2^{-1}\mathcal{T}B \left(\frac{|\vec{p}|}{\kappa} \right) \right) \Psi_{k,\sigma} \\
&= -\sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} U \left(R(\hat{p})R_2B \left(\frac{|\vec{p}|}{\kappa} \right) R_2^{-1}\mathcal{T} \right) \Psi_{k,\sigma} \\
&= -\sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} U \left(R(\hat{p})R_2B \left(\frac{|\vec{p}|}{\kappa} \right) \right) U(R_2^{-1})\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma} \\
&= -\zeta_\sigma \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} U \left(R(\hat{p})R_2B \left(\frac{|\vec{p}|}{\kappa} \right) \right) \Psi_{k,\sigma}.
\end{aligned} \tag{3.165}$$

Usamos agora os mesmos desenvolvimentos feitos em (3.150) até (3.158) para escrevermos:

$$\begin{aligned}
\mathsf{T}\Psi_{p,\sigma} &= -\zeta_\sigma \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} U \left(R(-\hat{p})\exp(\mp i\pi J_3)B \left(\frac{|\vec{p}|}{\kappa} \right) \right) \Psi_{k,\sigma} \\
&= -\zeta_\sigma \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} U \left(R(-\hat{p})B \left(\frac{|\vec{p}|}{\kappa} \right) \exp(\mp i\pi J_3) \right) \Psi_{k,\sigma} \\
&= -\zeta_\sigma \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} U \left(R(-\hat{p})B \left(\frac{|\vec{p}|}{\kappa} \right) \right) \exp(\mp i\pi J_3) \Psi_{k,\sigma} \\
&= -\zeta_\sigma \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} U(L(\mathcal{P}p)) \exp(\mp i\pi\sigma) \Psi_{k,\sigma} \\
&= -\zeta_\sigma \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} \exp(\mp i\pi\sigma) U(L(\mathcal{P}p)) \Psi_{k,\sigma} \\
&= \zeta_\sigma \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} \exp(\pm i\pi\sigma) \sqrt{\frac{(\mathcal{P}p)^0}{\kappa}} \Psi_{\mathcal{P}p,\sigma} \\
&= \zeta_\sigma \exp(\pm i\pi\sigma) \Psi_{\mathcal{P}p,\sigma},
\end{aligned} \tag{3.166}$$

onde mais uma vez usamos o sinal positivo se a segunda componente espacial de p^μ for positiva e o sinal negativo para o caso em que tal componente seja negativa.

Tendo em mente que $\mathcal{T}^2 = 1 \Rightarrow \mathsf{T}^2 = \xi 1$, vamos aplicar duas reversões temporais seguidas em um estado $\Psi_{p,\sigma}$.²⁹

²⁸ Note que T anticomuta com a rotação $R(\hat{p})$, como é visto pela álgebra entre T e $\vec{J}$ em (3.118).

²⁹ Aqui a antiunitariedade de T traz consequências novamente. Note também que o sinal das componentes espaciais de p e $\mathcal{P}p$ são opostos.

$$\begin{aligned}
T^2\Psi_{p,\sigma} &= T(T\Psi_{p,\sigma}) \\
\xi\Psi_{p,\sigma} &= T(\zeta_\sigma\exp(\pm i\pi\sigma)\Psi_{p,\sigma}) \\
\xi\Psi_{p,\sigma} &= \zeta_\sigma^*\exp(\mp i\pi\sigma)T\Psi_{p,\sigma} \\
\xi\Psi_{p,\sigma} &= \zeta_\sigma^*\exp(\mp i\pi\sigma)\zeta_\sigma\exp(\mp i\pi\sigma)\Psi_{p,\sigma} \\
\xi\Psi_{p,\sigma} &= \zeta_\sigma^*\zeta_\sigma\exp(\mp 2i\pi\sigma)\Psi_{p,\sigma}.
\end{aligned} \tag{3.167}$$

Assim $\xi = \zeta_\sigma^*\zeta_\sigma\exp(\mp 2i\pi\sigma)$. Como ξ e $\exp(\mp 2i\pi\sigma)$ são fases, ζ_σ também precisa ser. Escrevemos:

$$T^2\Psi_{p,\sigma} = (-1)^{2|\sigma|}\Psi_{p,\sigma}, \tag{3.168}$$

de onde vemos que o comportamento de $T^2\Psi_{p,\sigma}$ é diferente para σ inteiro ou semi-inteiro.

Deixamos registrados abaixo os resultados encontrados para as transformações de paridade e reversão temporal sobre estados de massa nula:

$$P\Psi_{p,\sigma} = \eta_\sigma\exp(\pm i\pi\sigma)\Psi_{p,\sigma}, \tag{3.169}$$

$$T\Psi_{p,\sigma} = \zeta_\sigma\exp(\pm i\pi\sigma)\Psi_{p,-\sigma}, \tag{3.170}$$

onde usamos o sinal positivo caso a segunda componente espacial de p^μ seja positiva e o negativo caso seja negativa.

4 ESTADOS DE VÁRIAS PARTÍCULAS E CONSTRUÇÃO DA INTERAÇÃO

Desenvolvemos, no capítulo anterior, a forma das transformações de Poincaré de partículas massivas e não-massivas. Esse resultado nos permitiu obter regras de transformação de spin, helicidade e possibilitou a discussão sobre algumas simetrias discretas. Contudo, não incluímos ainda na teoria a possibilidade de interação entre essas partículas. Construiremos neste capítulo estados de múltiplas partículas para possibilitar o estudo das interações. Não iremos nos atentar, contudo, à uma descrição física de como as partículas interagem entre si para trocar momento e energia, ou criar e destruir fótons e outras partículas mediadoras. Podemos extrair resultados muito interessantes da suposição de que as partículas muito antes e muito depois da interação se comportam efetivamente como partículas livres, e faremos a transição entre esses estados pré e pós-interação através da chamada matriz-S, que contém as probabilidades de transição entre os estados físicos acessíveis ao sistema. Essa matriz será imprescindível para a análise de como descrever a interação entre partículas de forma invariante sob transformações de Poincaré, objetivo que nos levará, no Capítulo 6 a introduzir o conceito de campo quântico.

4.1 ESTADOS DE VÁRIAS PARTÍCULAS LIVRES

Como dito, os estados discutidos no capítulo anterior descrevem apenas partículas livres. Nesse capítulo e no seguinte buscaremos levar a notação que estamos desenvolvendo a um nível de maior aplicabilidade teórica e experimental, já que a realidade física é constituída de várias partículas em diversas situações de interação. Além disso, mesmo em estudos que envolvem, por exemplo, o decaimento de uma única partícula, precisamos ter a capacidade de descrever a evolução desse sistema físico em outro estado de uma ou mais partículas.

Podemos descrever uma situação de várias partículas por um produto tensorial¹ de vários estados referentes à partículas distintas. Assim, se $\mathcal{H}_n^1$ é o espaço de Hilbert que descreve uma partícula de um certo tipo n , podemos definir um estado multiparticular $\mathcal{H}_{n_1, \dots, n_k}^k$ como (DIAS, 2015, p. 64):

$$\mathcal{H}_{n_1, \dots, n_k}^k \equiv \mathcal{H}_{n_1}^1 \otimes \mathcal{H}_{n_2}^1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{n_k}^1 = \bigotimes_{i=1}^k \mathcal{H}_{n_i}^1. \quad (4.1)$$

Um espaço definido dessa forma, contudo, não abre a possibilidade de criação ou destruição de partículas. Estes fenômenos são observados experimentalmente: é possível que, num experimento, comecemos com k partículas de um tipo e acabemos com k' partículas de outros tipos. Vamos portanto criar um novo espaço usando aquele definido em (4.1):

¹ Isto é, uma multiplicação externa, como introduzimos em (2.18), dos espaços onde existem cada tipo de partícula.

$$\mathcal{H} \equiv \bigoplus_{k=1}^{\infty} \left(\bigoplus_{\text{todos os conjuntos possíveis de } k \text{ partículas}} \mathcal{H}_{n_1, \dots, n_k}^k \right). \quad (4.2)$$

Podemos descrever um estado genérico desse espaço como:

$$\Phi_{p_1 \sigma_1 n_1, p_2 \sigma_2 n_2 \dots p_k \sigma'_k n_k} \equiv \Phi_{p_1 \sigma_1 n_1} \otimes \Phi_{p_2 \sigma_2 n_2} \otimes \dots \otimes \Phi_{p_k \sigma'_k n_k}, \quad (4.3)$$

e construímos imediatamente uma transformação de Poincaré sobre esse espaço como:

$$U(\Lambda, a) \Phi_{p_1 \sigma_1 n_1, p_2 \sigma_2 n_2 \dots p_k \sigma'_k n_k} \equiv (U_1(\Lambda, a) \Phi_{p_1 \sigma_1 n_1}) \otimes (U_2(\Lambda, a) \Phi_{p_2 \sigma_2 n_2}) \otimes \dots \otimes (U_k(\Lambda, a) \Phi_{p_k \sigma'_k n_k}), \quad (4.4)$$

o que, usando (3.38) e (3.72), expandimos para:

$$\begin{aligned} U(\Lambda, a) \Phi_{p_1 \sigma_1 n_1, p_2 \sigma_2 n_2 \dots p_k \sigma'_k n_k} &= e^{-i(\Lambda^{-1}a)_\mu (p_1^\mu + p_2^\mu + \dots + p_k^\mu)} \sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0 (\Lambda p_2)^0 \dots (\Lambda p_k)^0}{p_1^0 p_2^0 \dots p_k^0}} \\ &\times \left[\sum_{\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_k} D_{\sigma'_1 \sigma}^{(j_1)}(W(\Lambda, p_1)) D_{\sigma'_2 \sigma}^{(j_2)}(W(\Lambda, p_2)) \dots D_{\sigma'_k \sigma}^{(j_k)}(W(\Lambda, p_k)) \right. \\ &\quad \left. \times \Phi_{\Lambda p_1 \sigma'_1 n_1; \Lambda p_2 \sigma'_2 n_2; \dots \Lambda p_k \sigma'_k n_k} \right]. \quad (4.5) \end{aligned}$$

Recordamos que caso uma das partículas acima tenha massa nula trocamos o respectivo $D_{\sigma' \sigma}$ por $\delta_{\sigma' \sigma} \exp(i\sigma\theta(\Lambda, p))$, conforme (3.96). As condições de normalização por sua vez são:

$$(\Phi_{p'_1 \sigma'_1 n'_1 \dots p'_k \sigma'_k n'_k}, \Phi_{p_1 \sigma_1 n_1 \dots p_k \sigma'_k n_k}) = \delta^{(3)}(\vec{p}'_1 - \vec{p}_1) \delta_{\sigma'_1 \sigma_1} \delta_{n'_1 n_1} \dots \delta^{(3)}(\vec{p}'_k - \vec{p}_k) \delta_{\sigma'_k \sigma_k} \delta_{n'_k n_k}. \quad (4.6)$$

Para simplificar as notações e facilitar a leitura, vamos introduzir o multi-índice:

$$\alpha \longmapsto p_1, \sigma_1, n_1; \dots; p_k, \sigma_k, n_k. \quad (4.7)$$

Se qualquer um desses rótulos mudar, teremos um α distinto. Assim escrevemos as definições:

$$\begin{aligned}
\text{i. } & (\Phi_{\alpha'}, \Phi_{\alpha}) \equiv \delta(\alpha' - \alpha); \\
\text{ii. } & \int d\alpha(\dots) = \sum_{n_1 \sigma_1}^{n_k \sigma_k} \int d^3 p_1 \dots d^3 p_k(\dots); \\
\text{iii. } & \Psi = \int d\alpha \Phi_{\alpha}(\Phi_{\alpha}, \Psi).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

O estado Φ_{α} , contudo, descreve um conjunto de partículas não-interagentes. Vamos ver isso aplicando sobre ele uma translação $a = (\tau, 0, 0, 0)$:

$$U(1, a)\Phi_{\alpha} = \exp(-i\tau((p_1^0 + p_2^0 + \dots + p_k^0)))\Phi_{\alpha}. \tag{4.9}$$

Sabemos que para essa translação a :

$$U(1, a) \equiv \exp(-i\tau P^0) \equiv \exp(-i\tau H), \tag{4.10}$$

e portanto identificamos:

$$H\Phi_{\alpha} = E_{\alpha}\Phi_{\alpha}, \quad E_{\alpha} = \sum_{i=1}^k p_i^0. \tag{4.11}$$

Esse resultado nos mostra que a energia total é simplesmente a soma das energias de cada partícula, sem fator algum que expresse a possibilidade de interação ou troca de energia entre elas. Sabemos disso pois um fator de interação precisaria depender de mais de uma partícula simultaneamente (WEINBERG, 1995, p. 109). Desse modo, vamos definir o estado Φ_{α} como um estado de partículas livres, e escrevemos um subscrito 0 em nossos operadores, como $H \rightarrow H_0$, $U(\Lambda, a) \rightarrow U_0(\Lambda, a)$ e P_0^0 , para indicar que eles atuam sobre esses estados.

4.1.1 Estados in e out

Apesar de ainda precisarmos buscar a descrição da situação de interação, não vamos descartar os resultados obtidos até aqui, pois esses estados de partículas livres são úteis para descrever uma situação física muito antes ou muito depois de uma interação. Vamos usar a regra (4.5) para transformar estados nos limites $t \rightarrow \pm\infty$. Cada um desses sinais corresponde a um conjunto de estados que se transformam como descrito nessa regra, e chamaremos eles de:

estados in, Ψ_{α}^{+} , que, se observados em $t \rightarrow +\infty$, contém as partículas α ;
 estados out, Ψ_{α}^{-} , que, se observados em $t \rightarrow -\infty$, contém as partículas α .

Note que focamos nossa definição no ato de observar os estados $\Psi_{\alpha}^{\pm}$. Consideramos que um vetor de estado Ψ_{α} não evolui com o tempo: ele contém em si toda descrição do sistema de partículas em

qualquer ponto do espaço-tempo.² Isso é conveniente pois assim não tratamos o tempo como um parâmetro de fundo, desatrelado do espaço. A atitude de observar o estado em um momento muito antes ou muito depois da interação consiste, portanto, em aplicar sobre ele uma translação temporal dada por $\exp(-i\tau H)$, com $\tau \rightarrow -\infty$ ou $\tau \rightarrow +\infty$, respectivamente.

Ainda assim temos um problema, pois se esses estados são autoestados da energia, eles não podem ser definidos no tempo, pois tempo e energia não são observáveis compatíveis. Precisamos portanto construir os estados físicos in e out como sobreposições de autoestados do Hamiltoniano completo, e os estados livres como sobreposições de autoestados do Hamiltoniano livre.³

$$\Psi_g^\pm = \int d\alpha g(\alpha) \Psi_\alpha^\pm, \quad (4.12)$$

$$\Phi_g = \int d\alpha g(\alpha) \Phi_\alpha, \quad (4.13)$$

onde $g(\alpha)$ é uma função suave, diferente de zero em algum intervalo $\Delta\alpha$ (WEINBERG, 1995, p. 109). Vamos definir também, para uso posterior, uma notação conveniente para essas superposições com uma translação temporal:

$$\begin{aligned} \Psi_g^\pm(t) &\equiv \int d\alpha e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) \Psi_\alpha^\pm \\ \Phi_g(t) &\equiv \int d\alpha e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) \Phi_\alpha. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Vamos supor que na situação de interação temos outra representação do grupo de Poincaré, cujos operadores e geradores distinguimos daqueles do caso não-interagentes pela ausência do subscrito 0. Vamos também supor a relação entre H — o Hamiltoniano completo — e H_0 — o Hamiltoniano livre — como:

$$H = H_0 + V, \quad (4.15)$$

e vamos considerar os estados in e out $\Psi_\alpha^\pm$ como autoestados da Hamiltoniana completa associados à mesma energia E_α que os autoestados Φ_α livres:

$$H\Psi_\alpha^\pm = E_\alpha\Psi_\alpha^\pm, \quad H_0\Phi_\alpha = E_\alpha\Phi_\alpha. \quad (4.16)$$

Quando assumimos que ambos operadores têm o mesmo espectro de energia, fazemos a requisição de que as massas medidas ao final de experimentos sejam as massas em H_0 , que não são necessariamente

² Essa escolha chamamos de descrição de Heisenberg. A descrição de Schrödinger consiste na afirmação de que os estados variam com o tempo e os operadores são constantes (SAKURAI, 1985, p. 80)

³ O equivalente da Mecânica Quântica não-relativística são os pacotes de onda que são introduzidos no contexto equivalente de respeitar o princípio da incerteza de Heisenberg.

as mesmas massas em H , e a diferença precisa ser absorvida pelo termo de interação V .

Como estabelecemos que H e H_0 têm o mesmo espectro de autovalores, podemos definir:

$$\int d\alpha e^{-iE_\alpha\tau} g(\alpha) \Psi_\alpha^\pm \xrightarrow{\tau \rightarrow \mp\infty} \int d\alpha e^{-iE_\alpha\tau} g(\alpha) \Phi_\alpha, \quad (4.17)$$

o que pode ser reescrito como:

$$\exp(-iH\tau) \int d\alpha g(\alpha) \Psi_\alpha^\pm \xrightarrow{\tau \rightarrow \mp\infty} \exp(-iH_0\tau) \int d\alpha g(\alpha) \Phi_\alpha, \quad (4.18)$$

ou ainda (WEINBERG, 1995, p. 110–111):

$$\Psi_\alpha^\pm = \Omega(\mp\infty) \Phi_\alpha, \quad (4.19)$$

com o operador unitário $\Omega(\tau)$ definido como:

$$\Omega(\tau) \equiv \exp(+iH\tau) \exp(-H_0\tau). \quad (4.20)$$

Como consequência de (4.19), notamos que os estados in e out já são ortonormalizados:

$$\begin{aligned} (\Psi_\beta^\pm, \Psi_\alpha^\pm) &= (\Omega(\mp\infty) \Phi_\beta, \Omega(\mp\infty) \Phi_\alpha) \\ &= (\Omega^\dagger(\mp\infty) \Omega(\mp\infty) \Phi_\beta, \Phi_\alpha) \\ &= (\Phi_\beta, \Phi_\alpha) \\ &= \delta(\beta - \alpha). \end{aligned} \quad (4.21)$$

4.1.2 As equações de Lipmann-Schwinger

Podemos chegar a uma equação que determina $\Psi_\alpha^\pm$ a partir das equações de autovalor de H e da equação (4.15). Escrevemos:

$$\begin{aligned} (H_0 + V) \Psi_\alpha^\pm &= E_\alpha \Psi_\alpha^\pm \\ (E_\alpha - H_0) \Psi_\alpha^\pm &= V \Psi_\alpha^\pm. \end{aligned} \quad (4.22)$$

O operador $(E_\alpha - H_0)$ não tem inversa pois seu autovalor é zero. Vamos tentar uma solução com um termo igual à Φ_α e outro proporcional a V , tentativa que se justifica à medida que sabemos que $\Psi_\alpha^\pm \rightarrow \Phi_\alpha$ se $V \rightarrow 0$ (WEINBERG, 1995, p. 111):

$$\Psi_\alpha^\pm = \Phi_\alpha + (E_\alpha - H_0 \pm i\epsilon)^{-1} V \Psi_\alpha^\pm. \quad (4.23)$$

Justificamos a forma do operador que atua sobre V pois, aplicando $(E_\alpha - H_0 \pm i\epsilon)$ na equação acima:

$$(E_\alpha - H_0 \pm i\epsilon)\Psi_\alpha^\pm = \pm i\epsilon\Phi_\alpha + V\Psi_\alpha^\pm, \quad (4.24)$$

o que equivale à (4.22) no limite em que $\epsilon \rightarrow 0$. Isso não é suficiente contudo para dizer que podemos definir os estados in e out por meio de (4.23). Para provar isso precisamos provar que o estado $\Psi_\alpha^\pm$ assim definido se comporta como esperado.

Vamos iniciar nossa análise expandindo o termo $V\Psi_\alpha^\pm$ em (4.23) com um conjunto de autoestados Φ_β da energia:⁴

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha^\pm &= \Phi_\alpha + (E_\alpha - H_0 \pm i\epsilon)^{-1} \int d\beta \Phi_\beta (\Phi_\beta, V\Psi_\alpha^\pm) \\ &= \Phi_\alpha + \int d\beta \frac{\Phi_\beta (\Phi_\beta, V\Psi_\alpha^\pm)}{E_\alpha - E_\beta \pm i\epsilon} \\ &\equiv \Phi_\alpha + \int d\beta \frac{\Phi_\beta T_{\beta\alpha}^\pm}{E_\alpha - E_\beta \pm i\epsilon}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

onde

$$T_{\beta\alpha}^\pm \equiv (\Phi_\beta, V\Psi_\alpha^\pm). \quad (4.26)$$

Da equação (4.14) temos:

$$\begin{aligned} \Psi_g^\pm(t) &= \Phi_g(t) + \int d\alpha d\beta \frac{e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) T_{\beta\alpha}^\pm}{E_\alpha - E_\beta \pm i\epsilon} \Phi_\beta \\ &\equiv \Phi_g(t) + \int d\beta I_\beta^\pm(t) \Psi_\beta, \end{aligned} \quad (4.27)$$

resultado que se justifica por:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} I_\beta^\pm(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left(\int d\alpha \frac{e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) T_{\beta\alpha}^\pm}{E_\alpha - E_\beta \pm i\epsilon} \right) = 0. \quad (4.28)$$

Vamos provar esse resultado. Podemos fazer uma mudança de variável em α usando:

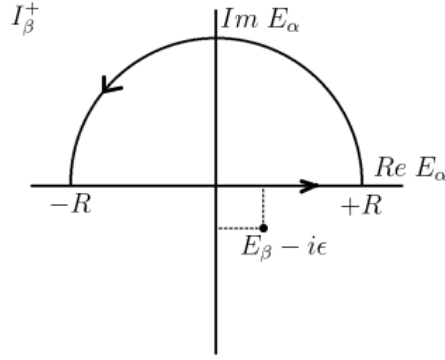
$$E_\alpha = \sqrt{|\vec{p}_1|^2 + m_1^2} + \sqrt{|\vec{p}_2|^2 + m_2^2} + \dots \quad (4.29)$$

e assim escrevemos:

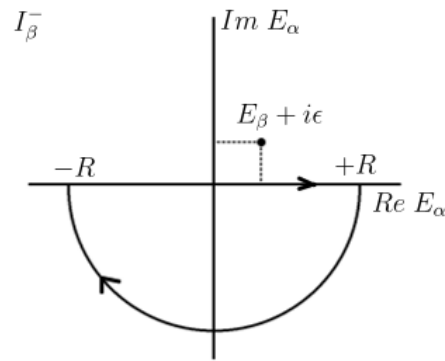
$$d\alpha = dE_\alpha d\alpha'. \quad (4.30)$$

A integral em (4.28) é de $-\infty$ até ∞ . Contudo, estabelecemos que $g(\alpha) = g(E_\alpha, \alpha')$ só é consideravelmente diferente de zero num certo intervalo de largura ΔE_α . Por isso, estendemos a

⁴ Fazemos aqui o equivalente para um conjunto contínuo de autovalores daquilo que foi feito na equação (2.37).

Figura 1 – Caminho de integração de I_β^+ 

fonte: Produção do próprio autor.

Figura 2 – Caminho de integração de I_β^- 

fonte: Produção do próprio autor.

integração ao plano E_α complexo (DIAS, 2015, p. 70), percorrendo o caminho fechado C mostrado nas Figuras 1 e 2. Esse caminho pode ser separado em uma parte sobre a reta real C_R e uma parte semi-circular C_C . Temos assim:

$$\oint_C dE_\alpha \int d\alpha' \frac{e^{-iE_\alpha t} g(E_\alpha, \alpha') T_{\beta\alpha}^\pm}{E_\alpha - E_\beta \pm i\epsilon} = \int_{C_R} dE_\alpha \int d\alpha' \frac{e^{-iE_\alpha t} g(E_\alpha, \alpha') T_{\beta\alpha}^\pm}{E_\alpha - E_\beta \pm i\epsilon} + \int_{C_C} dE_\alpha \int d\alpha' \frac{e^{-iE_\alpha t} g(E_\alpha, \alpha') T_{\beta\alpha}^\pm}{E_\alpha - E_\beta \pm i\epsilon}. \quad (4.31)$$

Observamos que na hipótese em que $g(\alpha)$ e $T_{\beta\alpha}^\pm$ sejam funções suaves de E_α , os integrandos de $I_\beta^\pm$ tendem a zero sobre os semicírculos de $R \rightarrow \infty$, que equivale à $E_\alpha \rightarrow \pm\infty$, pois o denominador tende a infinito. Sobre a reta imaginária, nesse limite a exponencial $e^{-iE_\alpha t}$ no numerador também leva a

expressão a zero. Assim, restam apenas as contribuições da integração sobre o eixo real:

$$\begin{aligned}
\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C dE_\alpha \int d\alpha' \frac{e^{-iE_\alpha t} g(E_\alpha, \alpha') T_{\beta\alpha}^\pm}{E_\alpha - E_\beta \pm i\epsilon} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} dE_\alpha \int d\alpha' \frac{e^{-iE_\alpha t} g(E_\alpha, \alpha') T_{\beta\alpha}^\pm}{E_\alpha - E_\beta \pm i\epsilon} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dE_\alpha \int d\alpha' \frac{e^{-iE_\alpha t} g(E_\alpha, \alpha') T_{\beta\alpha}^\pm}{E_\alpha - E_\beta \pm i\epsilon} \\
&= I_\beta^\pm(t).
\end{aligned} \tag{4.32}$$

O teorema dos resíduos (BUTKOV, 2011, p. 84) nos diz que a integral sobre os complexos de uma função analítica em um caminho fechado percorrido numa orientação positiva⁵ é igual à $2\pi i$ multiplicado pela soma dos resíduos da função sobre singularidades — pontos em que a função vai à infinito — dentro do caminho fechado. Por exemplo, para uma função analítica $f = f(z)$ integrada em um caminho fechado C que envolve n singularidades que ocorrem em um conjunto de pontos $z = a_k$, ou seja, $\lim_{z \rightarrow a_k} f(z) \rightarrow \pm\infty$, temos:

$$\oint_C dz f(z) = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, a_k), \tag{4.33}$$

onde os resíduos são calculados por:

$$\text{Res}(f, a_k) = \lim_{z \rightarrow a_k} |z - a_k| f(z). \tag{4.34}$$

Os caminhos fechados escolhidos para a integração de I_β^+ e I_β^- não envolvem singularidades e portanto o teorema dos resíduos nos diz que a integral sobre esses caminhos resulta em zero.⁶ Chegamos então, com (4.32), em:

$$I_\beta^\pm = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C dE_\alpha \int d\alpha' \frac{e^{-iE_\alpha t} g(E_\alpha, \alpha') T_{\beta\alpha}^\pm}{E_\alpha - E_\beta \pm i\epsilon} = 0. \tag{4.35}$$

Ou seja:

$$I_\beta^\pm(t) \xrightarrow{t \rightarrow \mp\infty} 0. \tag{4.36}$$

Voltamos com esse resultado em (4.27) e provamos que:

$$\Psi_g^\pm(t) \xrightarrow{t \rightarrow \mp\infty} \Phi_g(t). \tag{4.37}$$

Contudo, estendemos nossa integração aos complexos e admitimos que não havia singularidades englobadas pelo percurso de integração. Para que isso seja válido precisamos testar valores complexos

⁵ i.e., no sentido em que a região englobada pela curva esteja sempre à esquerda da direção em que estamos integrando.

⁶ Exploramos um caso em que há uma singularidade dentro do caminho de integração na Seção 4.2.1.

de E_α em $g(\alpha)$ e $T_{\beta\alpha}^\pm$. Uma forma comum para a dependência de $g(\alpha)$ em E_α é (DIAS, 2015, p. 71):

$$g(E_\alpha) \approx \exp\left(-\frac{E_\alpha^2}{(\Delta E)^2}\right). \quad (4.38)$$

Supondo uma parte real positiva para E_α temos:

$$g(E_\alpha) \approx \exp\left(-\frac{(Re E_\alpha)^2}{(\Delta E)^2}\right) \exp\left(-\frac{(Im E_\alpha)^2}{(\Delta E)^2}\right) \exp\left(2i\frac{(Re E_\alpha)(Im E_\alpha)}{(\Delta E)^2}\right), \quad (4.39)$$

e assim $g(E_\alpha)$ diverge para grandes valores de $Im E_\alpha$. Apesar disso, sempre podemos garantir:

$$(Im E_\alpha)t \gg \frac{(Im E_\alpha)^2}{(\Delta E)^2}, \quad (4.40)$$

o que podemos reescrever como:

$$t \gg \frac{Im E_\alpha}{(\Delta E)^2} \approx (Im E_\alpha)(\Delta t)^2, \quad (4.41)$$

sendo Δt a incerteza na tempo de observação do pacote de ondas. Se esta condição é satisfeita: (DIAS, 2015, p. 72)

$$e^{i(Re E_\alpha)t} e^{(Im E_\alpha)t} g(E_\alpha, \alpha') \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} 0, \quad (4.42)$$

e assim não temos singularidades em $g(\alpha)$.

O resultado de todos esses desenvolvimentos é que mostramos que a expressão em (4.25):

$$\Psi_\alpha^\pm = \Phi_\alpha + \int d\beta \frac{\Phi_\beta T_{\beta\alpha}^\pm}{E_\alpha - E_\beta \pm i\epsilon}, \quad T_{\beta\alpha}^\pm \equiv (\Phi_\beta, V\Psi_\alpha^\pm). \quad (4.43)$$

é equivalente ao problema de autovalor $H\Psi_\alpha^\pm = E_\alpha\Psi_\alpha^\pm$ com as condições de contorno apropriadas para o pacote de ondas $\Psi_g^\pm$ nos limites $t \rightarrow \pm\infty$. São as equações em (4.43) que chamamos de equações de Lippmann-Schwinger.⁷ Apesar de termos as obtido utilizando estados multiparticulares que se transformam segundo a ação de representações do grupo de Poincaré, essas mesmas equações também podem ser obtidas no contexto da Mecânica Quântica não-relativística (SAKURAI, 1985, p. 380), e teremos que introduzir a necessidade de que a interação seja invariante de Poincaré posteriormente.

4.2 A MATRIZ-S

Em um experimento, o experimentador prepara um estado de partículas em $t \rightarrow -\infty$, ou seja, muito antes da interação, em relação aos tempos de interação característicos do experimento a ser

⁷ Note que nos referimos às duas equações obtidas na escolha do sinal + ou -, e não às equações de $\Psi_\alpha^\pm$ e $T_\alpha^\pm$, já que esta é só um complemento para aquela.

conduzido, e mede o estado obtido após o experimento, em $t \rightarrow \infty$. Chamando o estado inicial de α e o final de β , a probabilidade de transição entre um e outro é dada por:

$$S_{\beta\alpha} = (\Psi_{\beta}^{-}, \Psi_{\alpha}^{+}), \quad (4.44)$$

onde os elementos $S_{\beta\alpha}$ formam a chamada matriz-S. Se não houver interação queremos que a matriz-S seja simplesmente:

$$S_{\alpha\beta} = \delta(\beta - \alpha). \quad (4.45)$$

Os estados in e out são parte do mesmo espaço de Hilbert. Como a matriz-S conecta esses estados:

$$\Psi_{\beta}^{-} = \int d\alpha S_{\beta\alpha}^{*} \Psi_{\alpha}^{+}, \quad (4.46)$$

ela precisa ser unitária. Isso provamos vendo que:⁸

$$\begin{aligned} \int d\beta S_{\beta\gamma}^{*} S_{\beta\alpha} &= \int d\beta (\Psi_{\gamma}^{+}, \Psi_{\beta}^{-})(\Psi_{\beta}^{-}, \Psi_{\alpha}^{+}) \\ &= \left(\Psi_{\gamma}^{+}, \int d\beta \Psi_{\beta}^{-} (\Psi_{\beta}^{-}, \Psi_{\alpha}^{+}) \right) \\ &= (\Psi_{\gamma}^{+}, \Psi_{\alpha}^{+}) \\ &= \delta(\gamma - \alpha). \end{aligned} \quad (4.47)$$

De modo similar:

$$\int d\beta S_{\beta\gamma} S_{\beta\alpha}^{*} = \int d\beta (\Psi_{\gamma}^{-}, \Psi_{\beta}^{+})(\Psi_{\beta}^{+}, \Psi_{\alpha}^{-}) = (\Psi_{\gamma}^{-}, \Psi_{\alpha}^{-}) = \delta(\gamma - \alpha). \quad (4.48)$$

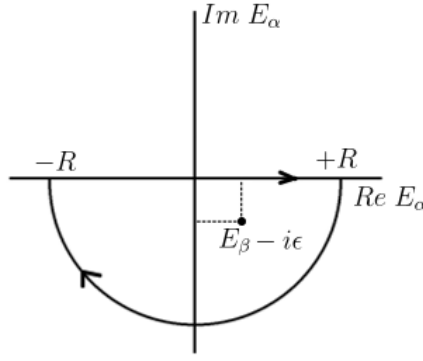
Por fim, é conveniente se introduzir um operador S , definido através de sua atuação sobre estados livres:

$$(\Phi_{\beta}, S\Phi_{\alpha}) \equiv S_{\beta\alpha}. \quad (4.49)$$

4.2.1 Aproximação de Born

Podemos obter uma expressão explícita para a matriz-S com a equação de Lippman-Schwinger em (4.19) — que relaciona estados in e out com estados livres — aplicada na equação (4.44) — que dá o elemento $S_{\beta\alpha}$ da matriz-S. Obtemos:

⁸ Aqui usamos que $\lambda(\Phi, \Psi) = (\Phi, \lambda\Psi)$ e o equivalente para espectros de autovalores contínuos de (2.37).

Figura 3 – Caminho de integração de I_β^+ 

fonte: Produção do próprio autor.

$$\begin{aligned}
 S_{\beta\alpha} &= (\Psi_\beta^-, \Psi_\alpha^+) \\
 &= (\Omega(+\infty)\Phi_\beta, \Omega(-\infty)\Phi_\alpha) \\
 &= (\Phi_\beta, \Omega^\dagger(+\infty)\Omega(-\infty)\Phi_\alpha) \\
 &\Rightarrow S \equiv \Omega^\dagger(+\infty)\Omega(-\infty) \equiv U(+\infty, -\infty),
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

onde definimos (WEINBERG, 1995, p. 114):

$$U(\tau, \tau_0) \equiv \Omega^\dagger(\tau)\Omega(\tau_0) = \exp(iH_0\tau)\exp(-iH(\tau - \tau_0))\exp(-iH_0\tau_0), \tag{4.51}$$

com o auxílio da definição de $\Omega(\tau)$ em (4.20).

Tomamos novamente as equações de Lippmann-Schwinger em (4.43). Com elas é possível calcular perturbativamente qualquer elemento da matriz-S a partir das configurações inicial e final e da forma da interação V . Tomamos (4.43) aplicada ao pacote de ondas Ψ_g^+ :

$$\begin{aligned}
 \Psi_g^+(t) &= \Phi_g(t) + \int d\beta \, d\alpha \frac{e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) T_{\beta\alpha}^+}{E_\alpha - E_\beta + i\epsilon} \Phi_\beta \\
 &\equiv \Phi_g(t) + \int d\beta \, I_\beta^+(t) \Phi_\beta.
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

Mais uma vez levamos essa integral aos complexos, no limite com $t \rightarrow \infty$. Fechamos a integral por baixo, como mostra a Figura 3. Com esse caminho, mais uma vez temos que o integrando de $I_\beta^\pm$ tende a zero sobre os semicírculos de $R \rightarrow \infty$, que equivale à $E_\alpha \rightarrow \pm\infty$, e restam apenas as contribuições da integração sobre o eixo real:

$$I_\beta^+(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C dE_\alpha \int d\alpha' \frac{e^{-iE_\alpha t} g(E_\alpha, \alpha') T_{\beta\alpha}^+}{E_\alpha - E_\beta + i\epsilon} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dE_\alpha \int d\alpha' c e^{-iE_\alpha t} g(E_\alpha, \alpha') T_{\beta\alpha}^+. \tag{4.53}$$

Temos um resíduo em $E_\alpha = E_\beta - i\epsilon$. A integração em dE_α , pelo teorema dos resíduos, nos dá:⁹

$$\begin{aligned} \oint_C dE_\alpha \frac{e^{-iE_\alpha t} g(E_\alpha, \alpha') T_{\beta\alpha}^+}{E_\alpha - E_\beta + i\epsilon} &= -2\pi i \text{Res} \left(\frac{e^{-iE_\alpha t} g(E_\alpha, \alpha') T_{\beta\alpha}^+}{E_\alpha - E_\beta + i\epsilon}, E_\beta - i\epsilon \right) \\ &= -2\pi i \lim_{E_\alpha \rightarrow E_\beta - i\epsilon} \left(|E_\alpha - E_\beta + i\epsilon| \frac{e^{-iE_\alpha t} g(E_\alpha, \alpha') T_{\beta\alpha}^+}{E_\alpha - E_\beta + i\epsilon} \right) \end{aligned} \quad (4.54)$$

Aplicamos agora o limite $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \oint_C dE_\alpha \frac{e^{-iE_\alpha t} g(E_\alpha, \alpha') T_{\beta\alpha}^+}{E_\alpha - E_\beta} &= -2\pi i \lim_{E_\alpha \rightarrow E_\beta} \left(|E_\alpha - E_\beta| \frac{e^{-iE_\alpha t} g(E_\alpha, \alpha') T_{\beta\alpha}^+}{E_\alpha - E_\beta} \right) \\ &= -2\pi i e^{-iE_\beta t} g(E_\beta, \alpha') T_{\beta\alpha}^+ \\ &= -2\pi i e^{-iE_\beta t} g(E_\beta, \alpha') T_{\beta\alpha}^+. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Voltando com esse resultado em (4.53):

$$I_\beta^+(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -2\pi i \int d\alpha' e^{-iE_\beta t} g(E_\beta, \alpha') T_{\beta\alpha}^+. \quad (4.56)$$

Reescrevemos isso como:

$$\begin{aligned} I_\beta^+(t) &\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -2\pi i e^{-iE_\beta t} \int dE_\alpha \int d\alpha' \delta(E_\alpha - E_\beta) g(E_\beta, \alpha') T_{\beta\alpha}^+ \\ I_\beta^+(t) &\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -2\pi i e^{-iE_\beta t} \int d\alpha g(\alpha) T_{\beta\alpha}^+ \end{aligned} \quad (4.57)$$

para restaurar a integral em $dE_\alpha d\alpha = d\alpha$. Voltamos finalmente com esse resultado em (4.52)

$$\Psi_g^+(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \int d\alpha d\beta e^{-iE_\beta t} g(\alpha) \Phi_\beta [\delta(\beta - \alpha) - 2\pi i \delta(E_\alpha - E_\beta) T_{\beta\alpha}^+]. \quad (4.58)$$

Guardamos esse resultado por um momento e vamos expressar $\Psi_g^+(t)$ em termos da base de estados out:

$$\begin{aligned} \Psi_g^+(t) &= \int d\alpha d\beta e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) \Psi_\beta^-(\Psi_\beta^-, \Psi_\alpha^+) \\ &= \int d\alpha d\beta e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) \Psi_\beta^- S_{\beta\alpha}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Na Seção 4.2.2 vamos provar que a matriz-S é proporcional a um delta de conservação de energia, por hora vamos aplicar esse resultado para trocar E_α por E_β na expressão acima:

$$\Psi_g^+(t) = \int d\beta e^{-iE_\beta t} \int (d\alpha g(\alpha) S_{\beta\alpha}) \Psi_\beta^-. \quad (4.60)$$

⁹ O sinal negativo surge nas equações, diferente do que estava em (4.33), pois a integração foi feita no sentido negativo do percurso definido no espaço dos complexos.

Essa equação, uma superposição de estados out, tenderá, no limite $t \rightarrow +\infty$, a uma superposição de estados livres:

$$\Psi_g^+(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \int d\beta e^{-iE_\beta t} \int (d\alpha g(\alpha) S_{\beta\alpha}) \Phi_\beta. \quad (4.61)$$

Comparamos, por fim, os resultados em (4.58) e (4.61), chegando em:

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha} &= \delta(\beta - \alpha) - 2\pi i \delta(E_\beta - E_\alpha) T_{\beta\alpha}^+ \\ &= \delta(\beta - \alpha) - 2\pi i \delta(E_\beta - E_\alpha) (\Phi_\beta, V \Psi_\alpha^+), \end{aligned} \quad (4.62)$$

onde fazemos uso de (4.26). No limite em que V é uma interação pouco intensa, podemos substituir $\Psi_\alpha^+ \rightarrow \Phi_\alpha$, e obtemos:

$$S_{\beta\alpha} \approx \delta(\beta - \alpha) - 2\pi i \delta(E_\beta - E_\alpha) (\Phi_\beta, V \Phi_\alpha), \quad (4.63)$$

essa expressão é conhecida como aproximação de Born.

4.2.2 Simetria de Poincaré da matriz-S

Vimos no início do capítulo, na equação (4.15), que na passagem de estados livres para estados interagentes precisamos substituir o Hamiltoniano livre H_0 por um Hamiltoniano completo, ou interagente, definido como $H = H_0 + V$, onde V descreve a interação. É de se esperar, como é o caso, que precisemos também de geradores interagentes de P , J e K diferentes dos geradores livres P_0 , J_0 e K_0 (DIAS, 2015, p. 75).

Começamos definindo operadores unitários $U(\Lambda, a)$ que atuam sobre os estados in Ψ_α^+ da mesma forma que $U_0(\Lambda, a)$ atua sobre os estados livres Φ_α , como descrito em (4.5). Temos portanto:

$$\begin{aligned} U(\Lambda, a) \Psi_\alpha^+ &= e^{-i(\Lambda^{-1}a)_\mu (p_1^\mu + p_2^\mu + \dots + p_k^\mu)} \sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0 (\Lambda p_2)^0 \dots (\Lambda p_k)^0}{p_1^0 p_2^0 \dots p_k^0}} \\ &\times \left[\sum_{\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_k} D_{\sigma'_1 \sigma_1}^{(j_1)}(W(\Lambda, p_1)) D_{\sigma'_2 \sigma_2}^{(j_2)}(W(\Lambda, p_2)) \dots D_{\sigma'_k \sigma_k}^{(j_k)}(W(\Lambda, p_k)) \right. \\ &\quad \left. \times \Psi_{\Lambda p_1 \sigma'_1 n_1; \Lambda p_2 \sigma'_2 n_2; \dots \Lambda p_k \sigma'_k n_k}^+ \right]. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Simplificamos essa notação escrevendo:

$$U(\Lambda, a) \Psi_\alpha^+ \equiv e^{-i(\Lambda^{-1}a) \cdot p_\alpha} \prod_{i=1}^{n_\alpha} \sqrt{\frac{(\Lambda p_i)^0}{p_i^0}} \sum_{\bar{\sigma}_i} D_{\bar{\sigma}_i \sigma_i}^{(j_i)}(W(\Lambda, p_i)) \Psi_{\Lambda a}^+, \quad (4.65)$$

onde p_α representa o quadrimomento total do estado α . Essa é uma transformação sobre os estados in,

que podemos estender para os estados out com:

$$\begin{aligned} U(\Lambda, a)\Psi_{\alpha}^{-} &= \int d\beta U(\Lambda, a)\Psi_{\beta}^{+}(\Psi_{\beta}^{+}, \Psi_{\alpha}^{-}) \\ &= \int d\beta S_{\alpha\beta}^{*}U(\Lambda, a)\Psi_{\beta}^{+}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Podemos tentar usar essa equação para encontrar uma relação entre $S_{\beta\alpha}$ em referenciais distintos, partindo de (4.44), contudo:

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha} &= (\Psi_{\beta}^{-}, \Psi_{\alpha}^{+}) = (U(\Lambda, a)\Psi_{\beta}^{-}, U(\Lambda, a)\Psi_{\alpha}^{+}) \\ &= \int d\gamma S_{\beta\gamma}(U(\Lambda, a)\Psi_{\gamma}^{+}, U(\Lambda, a)\Psi_{\alpha}^{+}) \\ &= \int d\gamma S_{\beta\gamma}(\Psi_{\gamma}^{+}, \Psi_{\alpha}^{+}) \\ &= \int d\gamma S_{\beta\gamma}\delta(\gamma - \alpha) \\ &= S_{\beta\alpha}, \end{aligned} \quad (4.67)$$

ou seja, chegamos de volta aonde partimos, o que mostra que não é possível associar $S_{\alpha\beta}$ e $S_{\Lambda\alpha, \Lambda\beta}$ somente com uma representação das transformações sobre os estados in e a lei que relaciona estados in e out (DIAS, 2015, p. 77). Precisamos de alguma hipótese adicional.¹⁰

Podemos, contudo, buscar outra forma de estabelecer a invariância da matriz-S. Sabemos que ela é formada por produtos escalares, os quais devem ser mantidos invariantes pela ação de operadores unitários. Como queremos que a descrição física de um sistema seja invariante por transformações do grupo de Poincaré, precisamos que ele seja representado por operadores unitários e para que os produtos escalares sejam invariantes precisamos que esses operadores ajam da mesma forma sobre estados in e out, pois (DIAS, 2015, p. 77):

$$\begin{aligned} (\Psi_{\beta}^{-}, \Psi_{\alpha}^{+}) &= (U^{-}(\Lambda, a)\Psi_{\beta}^{-}, U^{+}(\Lambda, a)\Psi_{\alpha}^{+}) \\ &= (U^{+\dagger}(\Lambda, a)U^{-}(\Lambda, a)\Psi_{\beta}^{-}, \Psi_{\alpha}^{+}) \\ &\Rightarrow U^{+\dagger}(\Lambda, a)U^{-}(\Lambda, a) = 1, \end{aligned} \quad (4.68)$$

o que significa que:

$$U^{+}(\Lambda, a) = U^{-}(\Lambda, a). \quad (4.69)$$

Essa condição guiará nossa busca pela invariância da matriz-S. Usando (4.65) podemos escrever a matriz como:

$$S_{\beta\alpha} = (\Psi_{\beta}^{-}, \Psi_{\alpha}^{+}) = (U(\Lambda, a)\Psi_{\beta}^{-}, U(\Lambda, a)\Psi_{\alpha}^{+}). \quad (4.70)$$

¹⁰ Poderíamos ter definido operadores $U'(\Lambda, a)$ atuando sobre estados out da mesma maneira que $U_0(\Lambda, a)$ age sobre os estados livres Φ_{α} e encontrado uma maneira de representar esses operadores agindo sobre estados in.

Expandindo as transformações segundo (4.64) e os multi-índices α e β conforme (4.7), temos:

$$\begin{aligned}
 S_{p'_1, \sigma'_1, n'_1; p'_2, \sigma'_2, n'_2; \dots, p_1, \sigma_1, n_1; p_2, \sigma_2, n_2; \dots} &= e^{i(\Lambda a) \cdot (p'_1 + p'_2 + \dots - p_1 - p_2 - \dots)} \sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0 (\Lambda p_2)^0 \dots (\Lambda p'_1)^0 (\Lambda p'_2)^0 \dots}{p_1^0 p_2^0 \dots p'_1{}^0 p'_2{}^0 \dots}} \\
 &\times \sum_{\bar{\sigma}'_1 \bar{\sigma}'_2 \dots} D_{\bar{\sigma}'_1 \sigma'_1}^{*(j'_1)}(W(\Lambda, p'_1)) D_{\bar{\sigma}'_2 \sigma'_2}^{*(j'_2)}(W(\Lambda, p'_2)) \dots \sum_{\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 \dots} D_{\bar{\sigma}_1 \sigma_1}^{(j_1)}(W(\Lambda, p_1)) D_{\bar{\sigma}_2 \sigma_2}^{(j_2)}(W(\Lambda, p_2)) \dots \\
 &\times S_{\Lambda p'_1, \bar{\sigma}'_1, n'_1; \Lambda p'_2, \bar{\sigma}'_2, n'_2; \dots, \Lambda p_1, \bar{\sigma}_1, n_1; \Lambda p_2, \bar{\sigma}_2, n_2; \dots} \quad (4.71)
 \end{aligned}$$

Também podemos usar (4.65) para reescrever a expressão acima como:

$$\begin{aligned}
 S_{\beta, \alpha} &= e^{i(\Lambda a) \cdot (p_\alpha - p'_\beta)} \prod_{k=1}^{n_\beta} \sqrt{\frac{(\Lambda p'_k)^0}{p_k'^0}} \sum_{\bar{\sigma}_k} D_{\bar{\sigma}_k \sigma'_k}^{*(j'_k)}(W(\Lambda, p'_k)) \\
 &\times \prod_{i=1}^{n_\alpha} \sqrt{\frac{(\Lambda p_i)^0}{p_i^0}} \sum_{\bar{\sigma}_i} D_{\bar{\sigma}_i \sigma_i}^{(j_i)}(W(\Lambda, p_i)) S_{\Lambda \beta, \Lambda \alpha}. \quad (4.72)
 \end{aligned}$$

A equação (4.71) e sua forma reescrita (4.72) têm uma consequência importante: percebemos que o lado direito dessas equações tem uma dependência explícita dos momentos, mas o lado esquerdo não. A única forma de resolver essa aparente inconsistência é fazer a dependência do lado direito desaparecer, ou seja, exigir que o termo $e^{i(\Lambda a) \cdot (p'_1 + p'_2 + \dots - p_1 - p_2 - \dots)}$ seja sempre igual a 1, o que fazemos exigindo:

$$p_1^\mu + p_2^\mu + \dots - p_1'^\mu - p_2'^\mu - \dots \equiv p_\alpha^\mu - p'_\beta{}^\mu = 0. \quad (4.73)$$

Essa exigência se traduz como:¹¹

$$S_{\beta \alpha} \propto \delta^{(4)}(p'_\beta - p_\alpha). \quad (4.74)$$

Os elementos da matriz-S são proporcionais um delta que anula qualquer termo em que entre os estados iniciais e finais não haja preservação do quadrimomento. Notamos, contudo, que essa exigência não limita cada partícula a conservar o próprio quadrimomento, mas sim que o quadrimomento total de todos os elementos que compõem o sistema sejam conservados.¹²

Vamos analisar por fim as condições que devem ser satisfeitas pelo operador S , cuja definição é dada sobre estados livres em (4.49):

¹¹ Embora o lado esquerdo de (4.72) também não dependa explicitamente de nenhum outro fator, a única outra dependência do lado direito é em relação ao parâmetro de transação, que também é eliminada pelo delta em (4.74).

¹² Na Seção 4.2.3 veremos que essa proporcionalidade significa também que a matriz S conserva cargas relacionadas a simetrias internas que comutam com o momento.

$$\begin{aligned}
S_{\beta\alpha} &= (\Phi_\beta, S\Phi_\alpha) \\
&= (U_0(\Lambda, a)\Phi_\beta, U_0(\Lambda, a)SU_0^\dagger(\Lambda, a)U_0(\Lambda, a)\Phi_\alpha) \\
&= (U_0(\Lambda, a)\Phi_\beta, S'U_0(\Lambda, a)\Phi_\alpha),
\end{aligned} \tag{4.75}$$

onde $S' = U_0(\Lambda, a)SU_0^\dagger(\Lambda, a)$. Expandindo as transformações $U_0(\Lambda, a)$ temos

$$\begin{aligned}
S_{\beta\alpha} &= e^{i(\Lambda a) \cdot (p'_\beta - p_\alpha)} \prod_{i=1}^{n_\beta} \sqrt{\frac{(\Lambda p'_i)^0}{p_i^0}} \sum_{\vec{\sigma}'_i} D_{\vec{\sigma}'_i \sigma'_i}^{*(j'_i)}(W(\Lambda, p'_i)) \\
&\quad \times \prod_{k=1}^{n_\alpha} \sqrt{\frac{(\Lambda p_k)^0}{p_k^0}} \sum_{\vec{\sigma}_k} D_{\vec{\sigma}_k \sigma_k}^{(j_k)}(W(\Lambda, p_k)) (\Phi_{\Lambda\beta}, S'\Phi_{\Lambda\alpha}).
\end{aligned} \tag{4.76}$$

Para que esse resultado seja compatível com (4.72) é necessário que:

$$S' = U_0 S U_0^\dagger = S \Rightarrow [S, U_0] = 0, \tag{4.77}$$

ou seja, precisamos que S commute com U_0 .

Vamos tomar o comutador em (4.77) e estudá-lo com a expansão infinitesimal (3.1):

$$\begin{aligned}
[S, U_0] &= 0, \\
\left[S, 1 + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J_0^{\mu\nu} + \epsilon_\rho P_0^\rho \right] &= 0, \\
[S, 1] + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} [S, J_0^{\mu\nu}] + [S, \epsilon_\rho P_0^\rho] &= 0, \\
\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} [S, J_0^{\mu\nu}] + [S, \epsilon_\rho P_0^\rho] &= 0.
\end{aligned} \tag{4.78}$$

Para que a expressão acima seja nula independentemente dos parâmetros $\omega_{\mu\nu}$ e ϵ_ρ precisamos que:

$$[S, J_0^{\mu\nu}] = 0, \quad [S, P_0^\rho] = 0. \tag{4.79}$$

Em termos dos geradores de translações, boosts e rotações ficamos com

$$[S, H_0] = [S, J_{0i}] = [S, K_{0i}] = [S, P_{0i}] = 0. \tag{4.80}$$

Temos então a álgebra entre o operador S , que está relacionado à representação sobre estados interagentes¹³, e os geradores do grupo de Poincaré sobre estados livres.

¹³ A equação (4.50) nos mostra que S possui uma dependência explícita de $H = H_0 + V$.

4.2.2.1 Obtenção dos geradores das transformações de Poincaré sobre estados interagentes

Nossa tarefa seguinte é representar o grupo de Poincaré — que respeita a álgebra em (3.33) — sobre estados interagentes e garantir que essa representação é igual tanto sobre estados in quanto sobre estados out. Além disso, precisamos respeitar as condições impostas em (4.80).

Já conhecemos a forma dos geradores sobre estados livres. Vamos obter os geradores interagentes em relação a eles mediante a proposta e teste de algumas hipóteses.¹⁴ Para referência rápida, escrevemos abaixo a álgebra de Poincaré, obtida em (3.33):

$$[J_i, J_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k; \quad (4.81)$$

$$[J_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}K_k; \quad (4.82)$$

$$[K_i, K_j] = +i\epsilon_{ijk}J_k; \quad (4.83)$$

$$[J_i, P_j] = -i\epsilon_{ijk}P_k; \quad (4.84)$$

$$[K_i, P_j] = +i\delta_{ij}H; \quad (4.85)$$

$$[K_i, H] = +iP_i; \quad (4.86)$$

$$[J_i, H] = [P_i, H] = [H, H] = [P_i, P_j] = 0. \quad (4.87)$$

Hipótese 1:

$$H = H_0 + V, \quad P_i = P_{0i}, \quad J_i = J_{0i}. \quad (4.88)$$

Justificamos essa hipótese pois em quase todas as teorias de campos conhecidas o efeito da interação é adicionar o termo V em H e deixar os momentos linear e angular sem alteração (WEINBERG, 1995, p. 119). Essa hipótese instantaneamente satisfaz (4.81) e (4.84). Para satisfazer (4.87), introduzimos outra hipótese:

Hipótese 2:

$$[P_{0i}, V] = [J_{0j}, V] = 0. \quad (4.89)$$

Não podemos impor $[H_0, V] = 0$ pois isso levaria a $[H_0, H] = [H_0, H_0 + V] = 0$ já que as Hamiltonianas livre e interagente seriam compatíveis e os autoestados livres Φ_α , de H_0 , seriam também autoestados de H , resultando em $H = H_0$ — já que ambos devem ter por autovalor a mesma energia E_α — e teríamos assim $V = 0$, eliminando o fator de interação.

Essas duas hipóteses já garantem $[S, H_0] = [S, J_{0i}] = [S, P_{0i}] = 0$. Lembramos de (4.50) e (4.51) que:

$$\begin{aligned} S &= U(\infty, -\infty) = \Omega^\dagger(\infty)\Omega(-\infty) \\ &= \lim_{\substack{\tau \rightarrow \infty \\ \tau_0 \rightarrow -\infty}} [e^{iH_0\tau} e^{-iH(\tau-\tau_0)} e^{-iH_0\tau_0}], \end{aligned} \quad (4.90)$$

¹⁴ A estrutura dessa subseção, dividida em hipóteses, é baseada na estrutura da referência (DIAS, 2015, p. 79-84).

e vemos primeiro que, devido à nossa hipótese 1:

$$\begin{aligned} [P_{0i}, H_0] = 0, [J_{0i}, H_0] = 0 &\Rightarrow [P_i, H_0] = 0, [J_i, H_0] = 0; \\ [P_i, H] = 0, [J_i, H] = 0 &\Rightarrow [P_{0i}, H] = 0, [J_{0i}, H] = 0. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Mais uma vez usamos (4.50) e essas comutações para provar que:

$$\begin{aligned} [\Omega(\tau), P_{0i}] &= [e^{iH\tau} e^{-iH_0\tau}, P_{0i}] \\ &= e^{iH\tau} e^{-iH_0\tau} P_{0i} - P_{0i} e^{iH\tau} e^{-iH_0\tau} \\ &= e^{iH\tau} P_{0i} e^{-iH_0\tau} - P_{0i} e^{iH\tau} e^{-iH_0\tau} \\ &= P_{0i} e^{iH\tau} e^{-iH_0\tau} - P_{0i} e^{iH\tau} e^{-iH_0\tau} \\ &= 0 \\ \therefore [S, P_{0i}] &= 0. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Podemos também provar que $[S, J_{0i}] = 0$ simplesmente substituindo P_{0i} por J_{0i} nos desenvolvimentos acima. E assim:

$$[S, J_{0i}] = [S, P_{0i}] = 0. \quad (4.93)$$

Podemos relacionar P_i e P_{0i} por uma transformação unitária usando (4.19) e nossa hipótese $P_i = P_{0i}$:

$$\begin{aligned} P_i \Psi_\alpha^\pm &= P_i \Omega(\mp\infty) \Phi_\alpha \\ &= P_{0i} \Omega(\mp\infty) \Phi_\alpha \\ &= \Omega(\mp\infty) P_{0i} \Phi_\alpha \\ &\Rightarrow P_i \Omega(\mp\infty) = \Omega(\mp\infty) P_{0i}, \end{aligned} \quad (4.94)$$

o que podemos escrever como:

$$P_i = \Omega(\mp\infty) P_{0i} \Omega^\dagger(\mp\infty) = \Omega(\mp\infty) \Omega^\dagger(\mp\infty) P_{0i} = P_{0i}. \quad (4.95)$$

O resultado que obtivemos independe do sinal escolhido em (4.94), portanto o gerador de momento linear é o mesmo se estamos trabalhando com estados in ou out. Um raciocínio similar — obtido simplesmente substituindo P_i por J_i no desenvolvimento acima — leva à mesma conclusão quanto aos geradores de momento angular J_i :

$$J_i = \Omega(\mp\infty) J_{0i} \Omega^\dagger(\mp\infty) = \Omega(\mp\infty) \Omega^\dagger(\mp\infty) J_{0i} = J_{0i}. \quad (4.96)$$

De (4.74), sabemos que $S_{\beta\alpha} \propto \delta(E_\beta - E_\alpha)$. O resultado desse delta é que o operador S não muda o autovalor de energia E_α de um autoestado Φ_α de H_0 e o subespaço associado ao autovalor E_α é invariante sob ação de S . Isso traz como consequência:

$$\begin{aligned}
H_0(S\Phi_\alpha) &= E_\alpha(S\Phi_\alpha) \\
&= SE_\alpha\Phi_\alpha \\
&= SH_0\Phi_\alpha,
\end{aligned} \tag{4.97}$$

o que nos leva a

$$[S, H_0] = 0. \tag{4.98}$$

Sabemos que os estados interagentes $\Psi_\alpha^\pm$ e os estados livres Φ_α são autoestados respectivamente da Hamiltoniana completa H e da Hamiltoniana livre H_0 , ambos com energia E_α . Disso usamos novamente (4.19):

$$\begin{aligned}
H\Psi_\alpha^\pm &= E_\alpha\Psi_\alpha^\pm \\
H\Omega(\mp\infty)\Phi_\alpha &= E_\alpha\Omega(\mp\infty)\Phi_\alpha \\
H\Omega(\mp\infty)\Phi_\alpha &= \Omega(\mp\infty)E_\alpha\Phi_\alpha \\
H\Omega(\mp\infty)\Phi_\alpha &= \Omega(\mp\infty)H_0\Phi_\alpha,
\end{aligned} \tag{4.99}$$

e desse desenvolvimento tiramos:

$$H = \Omega(\mp\infty)H_0\Omega^\dagger(\mp\infty) = H_0 + V. \tag{4.100}$$

Mais uma vez, o resultado final não depende da escolha do sinal em (4.99), e portanto o Hamiltoniano interagente é o mesmo sobre estados in e sobre estados out.

Com isso, já encontramos as relações de P_i , J_i e H com os respectivos geradores livres que garantem $[S, P_{0i}] = [S, J_{0i}] = [S, H] = 0$. Ainda precisamos, contudo, encontrar a relação de K_i e K_{0i} . Poderíamos de início pensar em propor $K_i = K_{0i}$, de modo análogo ao que fizemos com P_i e J_i , mas (4.85) nos mostra que devemos cumprir a seguinte relação:

$$[K_i, P_j] = +i\delta_{ij}H. \tag{4.101}$$

Contudo, se $K_i = K_{0i}$ e $P_i = P_{0i}$ isso nos dá:¹⁵

$$[K_i, P_j] = [K_{0i}, P_{0j}] = +i\delta_{ij}H_0,$$

o que nos leva à errônea conclusão que $H = H_0$, e portanto a hipótese $K_i = K_{0i}$ é inadequada.

¹⁵ A equação seguinte não está numerada como forma de não destacá-la, pois ela equivale a uma hipótese inadequada que descartamos.

Hipótese 3:

$$K_i = K_{0i} + W_i. \quad (4.102)$$

A relação (4.86) nos dá:

$$\begin{aligned} [K_i, H] &= +iP_i \\ [K_{0i} + W_i, H_0 + V] &= +iP_i \\ [K_{0i}, H_0] + [K_{0i}, V] + [W_i, H_0 + V] &= +iP_i \\ iP_{0i} + [K_{0i}, V] + [W_i, H_0 + V] &= +iP_i \\ [K_{0i}, V] + [W_i, H_0 + V] &= 0. \end{aligned} \quad (4.103)$$

Disso somos levados a:

$$[K_{0i}, V] = -[W_i, H], \quad (4.104)$$

e podemos definir um W_i através dos elementos de matriz de sua ação entre estados:

$$\begin{aligned} (\Psi_\beta, [W_i, H]\Psi_\alpha) &= (\Psi_\beta, W_i H \Psi_\alpha) - (\Psi_\beta, H W_i \Psi_\alpha) \\ &= (\Psi_\beta, W_i E_\alpha \Psi_\alpha) - (H \Psi_\beta, W_i \Psi_\alpha) \\ &= (\Psi_\beta, W_i E_\alpha \Psi_\alpha) - (E_\beta \Psi_\beta, W_i \Psi_\alpha) \\ &= (E_\alpha - E_\beta)(\Psi_\beta, W_i \Psi_\alpha). \end{aligned} \quad (4.105)$$

Aplicamos (4.104) do lado esquerdo dessa equação:

$$\begin{aligned} -(\Psi_\beta, [K_{0i}, V]\Psi_\alpha) &= (E_\alpha - E_\beta)(\Psi_\beta, W_i \Psi_\alpha) \\ \Rightarrow (\Psi_\beta, W_i \Psi_\alpha) &= -\frac{(\Psi_\beta, [K_{0i}, V]\Psi_\alpha)}{E_\alpha - E_\beta}. \end{aligned} \quad (4.106)$$

Vamos verificar se esse K_i satisfaz $[K_i, S] = 0$. Sabemos de (4.50) que:

$$S = \lim_{\substack{\tau \rightarrow \infty \\ \tau_0 \rightarrow -\infty}} e^{iH_0\tau} e^{-iH(\tau-\tau_0)} e^{-iH_0\tau_0}. \quad (4.107)$$

Vamos verificar primeiro:

$$\begin{aligned} [K_{0i}, \exp(iH_0\tau)] &= [K_{0i}, 1] + [K_{0i}, iH_0\tau] + \frac{1}{2!}[K_{0i}, (iH_0\tau)^2] + \frac{1}{3!}[K_{0i}, (iH_0\tau)^3] + \dots \\ &= -P_{0i}\tau - P_{0i}\tau(iH_0\tau) - P_{0i}\tau\frac{1}{2!}(iH_0\tau)^2 - P_{0i}\tau\frac{1}{3!}(iH_0\tau)^3 - \dots \\ &= -P_{0i}\tau \exp(iH_0\tau). \end{aligned} \quad (4.108)$$

De modo similar:

$$[K_i, \exp(iH\tau)] = -\tau P_i \exp(iH\tau). \quad (4.109)$$

Vamos usar esses resultados para calcular $[K_{0i}, U(\tau, \tau_0)]$ explicitamente:

$$\begin{aligned} K_{0i}U(\tau, \tau_0) &= K_{0i}e^{iH_0\tau}e^{-iH(\tau-\tau_0)}e^{-iH_0\tau_0} \\ &= (e^{iH_0\tau}K_{0i} - P_{0i}\tau e^{iH_0\tau})e^{-iH(\tau-\tau_0)}e^{-iH_0\tau_0} \\ &= e^{iH_0\tau}K_{0i}e^{-iH(\tau-\tau_0)}e^{-iH_0\tau_0} - P_{0i}\tau e^{iH_0\tau}e^{-iH(\tau-\tau_0)}e^{-iH_0\tau_0} \\ &= e^{iH_0\tau}(K_i - W_i)e^{-iH(\tau-\tau_0)}e^{-iH_0\tau_0} - P_{0i}\tau U(\tau, \tau_0), \end{aligned} \quad (4.110)$$

onde na última linha usamos nossa hipótese para K em (4.102) e a definição de $U(\tau, \tau_0)$ em (4.51).

Definimos agora (DIAS, 2015, p. 82):

$$W(\tau) = e^{iH_0\tau}W e^{-iH_0\tau}, \quad (4.111)$$

e voltamos com isso em (4.110), onde nos aproveitamos do fato de que $e^{-iH_0\tau}e^{iH_0\tau} = 1$:

$$\begin{aligned} K_{0i}U(\tau, \tau_0) &= e^{iH_0\tau}K_i e^{-iH(\tau-\tau_0)}e^{-iH_0\tau_0} - e^{iH_0\tau}W_i e^{-iH(\tau-\tau_0)}e^{-iH_0\tau_0} - P_{0i}\tau U(\tau, \tau_0) \\ &= e^{iH_0\tau}K_i e^{-iH(\tau-\tau_0)}e^{-iH_0\tau_0} - e^{iH_0\tau}W_i [e^{-iH_0\tau}e^{iH_0\tau}] e^{-iH(\tau-\tau_0)}e^{-iH_0\tau_0} - P_{0i}\tau U(\tau, \tau_0) \\ &= e^{iH_0\tau}K_i e^{-iH(\tau-\tau_0)}e^{-iH_0\tau_0} - W_i(\tau)U(\tau, \tau_0) - P_{0i}\tau U(\tau, \tau_0). \end{aligned} \quad (4.112)$$

Desenvolvemos o primeiro termo do lado direito da equação acima usando o comutador em (4.109):

$$\begin{aligned} e^{iH_0\tau}K_i e^{-iH(\tau-\tau_0)}e^{-iH_0\tau_0} &= e^{iH_0\tau} [e^{-iH(\tau-\tau_0)}K_i + (\tau - \tau_0)P e^{-iH(\tau-\tau_0)}] e^{-iH_0\tau_0} \\ &= e^{iH_0\tau}e^{-iH(\tau-\tau_0)}K_i e^{-iH_0\tau_0} + e^{iH_0\tau}(\tau - \tau_0)P e^{-iH(\tau-\tau_0)}e^{-iH_0\tau_0} \\ &= e^{iH_0\tau}e^{-iH(\tau-\tau_0)}K_i e^{-iH_0\tau_0} + (\tau - \tau_0)e^{iH_0\tau}P_0 e^{-iH(\tau-\tau_0)}e^{-iH_0\tau_0} \\ &= e^{iH_0\tau}e^{-iH(\tau-\tau_0)}K_i e^{-iH_0\tau_0} + (\tau - \tau_0)P_0 e^{iH_0\tau}e^{-iH(\tau-\tau_0)}e^{-iH_0\tau_0} \\ &= e^{iH_0\tau}e^{-iH(\tau-\tau_0)}K_i e^{-iH_0\tau_0} + (\tau - \tau_0)P_0 U(\tau, \tau_0). \end{aligned} \quad (4.113)$$

Voltamos a (4.112) com esse resultado para escrevermos:

$$K_{0i}U(\tau, \tau_0) = e^{iH_0\tau}e^{-iH(\tau-\tau_0)}K_i e^{-iH_0\tau_0} - W_i(\tau)U(\tau, \tau_0) + (\tau - \tau_0)P_0 U(\tau, \tau_0) - P_{0i}\tau U(\tau, \tau_0), \quad (4.114)$$

onde novamente vemos a possibilidade de expandir o primeiro termo do lado direito:

$$\begin{aligned} e^{iH_0\tau}e^{-iH(\tau-\tau_0)}K_i e^{-iH_0\tau_0} &= e^{iH_0\tau}e^{-iH(\tau-\tau_0)}[K_{0i} + W_i]e^{-iH_0\tau_0} \\ &= e^{iH_0\tau}e^{-iH(\tau-\tau_0)}K_{0i}e^{-iH_0\tau_0} + e^{iH_0\tau}e^{-iH(\tau-\tau_0)}W_i e^{-iH_0\tau_0}. \end{aligned} \quad (4.115)$$

Inserindo $e^{-iH_0\tau_0}e^{iH_0\tau_0} = 1$:

$$\begin{aligned} e^{iH_0\tau}e^{-iH(\tau-\tau_0)}K_ie^{-iH_0\tau_0} &= e^{iH_0\tau}e^{-iH(\tau-\tau_0)}K_{0i}e^{-iH_0\tau_0} + e^{iH_0\tau}e^{-iH(\tau-\tau_0)}e^{-iH_0\tau}e^{iH_0\tau}W_ie^{-iH_0\tau_0}, \\ &= e^{iH_0\tau}e^{-iH(\tau-\tau_0)}K_{0i}e^{-iH_0\tau_0} + U(\tau, \tau_0)W_i(\tau_0), \end{aligned} \quad (4.116)$$

e aplicamos agora o comutador em (4.109):

$$\begin{aligned} e^{iH_0\tau}e^{-iH(\tau-\tau_0)}K_ie^{-iH_0\tau_0} &= e^{iH_0\tau}e^{-iH(\tau-\tau_0)}[e^{-iH_0\tau_0}K_{0i} + P_{0i}\tau_0e^{-iH_0\tau_0}] + U(\tau, \tau_0)W_i(\tau_0) \\ &= e^{iH_0\tau}e^{-iH(\tau-\tau_0)}e^{-iH_0\tau_0}K_{0i} + e^{iH_0\tau}e^{-iH(\tau-\tau_0)}P_{0i}\tau_0e^{-iH_0\tau_0} + U(\tau, \tau_0)W_i(\tau_0) \\ &= U(\tau, \tau_0)K_{0i} + e^{iH_0\tau}e^{-iH(\tau-\tau_0)}P_{0i}\tau_0e^{-iH_0\tau_0} + U(\tau, \tau_0)W_i(\tau_0) \\ &= U(\tau, \tau_0)K_{0i} + P_{0i}\tau_0e^{iH_0\tau}e^{-iH(\tau-\tau_0)}e^{-iH_0\tau_0} + U(\tau, \tau_0)W_i(\tau_0) \\ &= U(\tau, \tau_0)K_{0i} + P_{0i}\tau_0U(\tau, \tau_0) + U(\tau, \tau_0)W_i(\tau_0). \end{aligned} \quad (4.117)$$

Retornamos com esse desenvolvimento em (4.114) e os termos associados a P_0 se cancelam:

$$\begin{aligned} K_{0i}U(\tau, \tau_0) &= U(\tau, \tau_0)K_{0i} + U(\tau, \tau_0)W_i(\tau_0) - W_i(\tau)U(\tau, \tau_0) \\ K_{0i}U(\tau, \tau_0) - U(\tau, \tau_0)K_{0i} &= U(\tau, \tau_0)W_i(\tau_0) - W_i(\tau)U(\tau, \tau_0), \end{aligned} \quad (4.118)$$

onde reconhecemos a relação de comutação:

$$[K_{0i}, U(\tau, \tau_0)] = U(\tau, \tau_0)W_i(\tau_0) - W_i(\tau)U(\tau, \tau_0). \quad (4.119)$$

Se aplicarmos os limites $\tau \rightarrow \infty, \tau_0 \rightarrow -\infty$ em (4.119) podemos obter $[K_{0i}, S]$, mas para isso precisamos analisar o comportamento de W sobre estados físicos. Tomemos duas superposições de estados livres, definidos como em (4.13), que correspondem aos limites onde queremos obter K_0 :

$$\begin{aligned} \phi &= \int d\alpha \, g(\alpha)\Phi_\alpha, \\ \psi &= \int d\beta \, h(\beta)\Phi_\beta. \end{aligned} \quad (4.120)$$

Com eles podemos obter:

$$\begin{aligned}
(\phi, W(\tau)\psi) &= \int d\alpha d\beta g^*(\alpha)h(\beta) (\Phi_\alpha, e^{iH_0\tau} W e^{-iH_0\tau} \Phi_\beta) \\
&= \int d\alpha d\beta g^*(\alpha)h(\beta) (e^{-iH_0\tau} \Phi_\alpha, W e^{-iH_0\tau} \Phi_\beta) \\
&= \int d\alpha d\beta g^*(\alpha)h(\beta) (e^{-iE_\alpha\tau} \Phi_\alpha, W e^{-iE_\beta\tau} \Phi_\beta) \\
&= \int d\alpha d\beta g^*(\alpha)h(\beta) e^{-i(E_\beta - E_\alpha)\tau} (\Phi_\alpha, W \Phi_\beta).
\end{aligned} \tag{4.121}$$

Impomos aqui nossa última hipótese:

Hipótese 4: Os elementos $(\Phi_\alpha, W\Phi_\beta)$, sendo Φ_α e Φ_β autoestados do Hamiltoniano livre H_0 , formam uma função suave das energias E_α e E_β , e $E_\alpha = E_\beta \Rightarrow (\Phi_\alpha, W\Phi_\beta) = 0$.

Com essas condições, no limite em que $\tau \rightarrow \pm\infty$ a exponencial $e^{-i(E_\beta - E_\alpha)\tau}$ oscilará selvagememente e a integral será nula, dando por fim:

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} (\phi, W(\tau)\psi) = 0 \Rightarrow W(\pm\infty) = 0, \tag{4.122}$$

e com isto podemos finalmente obter:

$$[K_i, U(\infty, -\infty)] = [K_i, S] = 0. \tag{4.123}$$

O que nos falta agora é mostrar que — assim como fizemos para P_i , J_i e H — os geradores de boosts agem da mesma forma sob estados in e out. Para essa demonstração, tomamos (4.119) com $\tau = 0$ e $\tau_0 \rightarrow \pm\infty$:

$$[K_{0i}, U(0, \pm\infty)] = U(0, \pm\infty)W_i(\pm\infty) - W_i(0)U(0, \pm\infty), \tag{4.124}$$

mas vemos de (4.111) que:

$$W(0) = W, \quad W(\pm\infty) = 0, \tag{4.125}$$

e de (4.51) que:

$$U(0, \pm\infty) = \Omega(\pm\infty). \tag{4.126}$$

Aplicando esses dois resultados em (4.124) obtemos:

$$\begin{aligned}
[K_{0i}, \Omega(\pm\infty)] &= -W_i \Omega(\pm\infty) \\
K_{0i} \Omega(\pm\infty) - \Omega(\pm\infty) K_{0i} &= -W_i \Omega(\pm\infty) \\
[K_{0i} + W_i] \Omega(\pm\infty) &= \Omega(\pm\infty) K_{0i} \\
K_i \Omega(\pm\infty) &= \Omega(\pm\infty) K_{0i} \\
K_i &= \Omega(\pm\infty) K_{0i} \Omega^\dagger(\pm\infty).
\end{aligned} \tag{4.127}$$

É este o resultado que queríamos para provar que K_i age da mesma forma sobre estados in e out.

Recapitulando, as relações entre os geradores interagentes e livres que obtivemos são:

$$\begin{aligned}
H &= H_0 + V, & P &= P_0, \\
J &= J_0, & K &= K_0 + W.
\end{aligned} \tag{4.128}$$

4.2.3 Simetrias internas da matriz-S

Além das simetrias de Poincaré, existem outros tipos de simetrias — como a conjugação de carga, que troca partícula e antipartícula — que se mostram da mesma forma sob todos os referenciais inerciais. Essas simetrias são chamadas de simetrias internas.¹⁶

Uma transformação de simetria interna T age sobre os estados físicos como um operador unitário $U(T)$, induzindo transformações nos rótulos dos tipos de partículas (WEINBERG, 1995, p. 121):

$$U(T) \Phi_{p_1 \sigma_1 n_1; p_2 \sigma_2 n_2; \dots} = \sum_{\bar{n}_1 \bar{n}_2} \mathcal{D}_{\bar{n}_1 n_1}(T) \mathcal{D}_{\bar{n}_2 n_2}(T) \dots \Phi_{p_1 \sigma_1 \bar{n}_1; p_2 \sigma_2 \bar{n}_2; \dots} \tag{4.129}$$

Como essas transformações são representações de um grupo, precisamos que elas respeitem as regras dadas em (2.52):

$$U(\bar{T})U(T) = U(\bar{T}T). \tag{4.130}$$

Isso se traduz em:

$$\mathcal{D}(\bar{T})\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(\bar{T}T). \tag{4.131}$$

Precisamos representar as simetrias internas por operadores $U(T)$ que atuem de forma idêntica

¹⁶ Como notamos na Seção 3.2, a projeção de spin — para partículas massivas — e helicidade — para partículas sem massa — não são invariantes sob transformações de Lorentz, e portanto não constituem simetrias internas.

sobre estados in e out, de modo que a matriz S se transforme como (DIAS, 2015, p. 86):

$$\begin{aligned}
 S_{\beta\alpha} &= (\Psi_{\beta}^{-}, \Psi_{\alpha}^{+}) \\
 &= (U(T)\Psi_{\beta}^{-}, U(T)\Psi_{\alpha}^{+}) \\
 &= \prod_{k=1}^{n_{\beta}} D^{*}(T) \prod_{i=1}^{n_{\alpha}} D(T) (\Psi_{\beta}^{-}, \Psi_{\alpha}^{+}),
 \end{aligned} \tag{4.132}$$

ou, de forma explícita:

$$\begin{aligned}
 S_{p'_1\sigma'_1n'_1, p'_2\sigma'_2n'_2, \dots; p_1\sigma_1n_1, p_2\sigma_2n_2, \dots} &= \sum_{\bar{N}'_1\bar{N}'_2\dots} \mathcal{D}_{\bar{N}'_1n'_1}^{*}(T) \mathcal{D}_{\bar{N}'_2n'_2}^{*}(T) \dots \\
 &\times \sum_{\bar{N}_1\bar{N}_2\dots} \mathcal{D}_{\bar{N}_1n_1}(T) \mathcal{D}_{\bar{N}_2n_2}(T) \dots (\Psi_{p'_1\sigma'_1\bar{N}'_1, p'_2\sigma'_2\bar{N}'_2, \dots}^{-}, \Psi_{p_1\sigma_1\bar{N}_1, p_2\sigma_2\bar{N}_2, \dots}^{+}).
 \end{aligned} \tag{4.133}$$

A condição sobre o operador S é, como no caso das simetrias de Poincaré:

$$[S, U_0(T)] = 0, \tag{4.134}$$

portanto, lembrando da definição do operador S^{17} , vamos analisar:

$$\begin{aligned}
 [U(\tau, \tau_0), U_0(T)] &= [\Omega^{\dagger}(\tau)\Omega(\tau_0), U_0(T)] \\
 &= [e^{iH_0\tau_0}e^{-iH(\tau-\tau_0)}e^{-iH_0\tau_0}, U_0(T)] \\
 &= e^{iH_0\tau_0}e^{-iH(\tau-\tau_0)}[e^{-iH_0\tau_0}, U_0(T)] + e^{iH_0\tau_0}[e^{-iH(\tau-\tau_0)}, U_0(T)]e^{-iH_0\tau_0} \\
 &\quad + [e^{iH_0\tau_0}, U_0(T)]e^{-iH(\tau-\tau_0)}e^{-iH_0\tau_0}.
 \end{aligned} \tag{4.135}$$

Para que a expressão acima seja nula, é suficiente que:

$$\begin{aligned}
 [H_0, U_0(T)] &= 0, \\
 [V, U_0(T)] &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.136}$$

o que significa que o Hamiltoniano sobre estados livres H_0 e o termo de interação V são invariantes por transformações de simetria interna. Como a relação entre estados livres e reagentes é¹⁸:

$$\begin{aligned}
 \Psi_{\alpha}^{\pm} &= \Omega(\mp\infty)\Phi_{\alpha}, \\
 &= \lim_{\tau \rightarrow \mp\infty} e^{iH_0\tau}e^{-iH\tau}\Phi_{\alpha},
 \end{aligned} \tag{4.137}$$

o operador $U_0(T)$, que comuta com H_0 e com V , e portanto também com $H = H_0 + V$, é igual sobre

¹⁷ Equação (4.49).

¹⁸ Equação (4.19).

estados livres e sobre estados interagentes:

$$U(T) = U_0(T), \quad (4.138)$$

e portanto também é igual sobre estados in e out.

Consideremos um caso especial: um conjunto de transformações de simetria que constituem um grupo de Lie com um parâmetro:

$$T(\theta)T(\bar{\theta}) = T(\theta + \bar{\theta}). \quad (4.139)$$

O operador associado a essa transformação pode ser escrito como:

$$U_0(T(\theta)) = \exp(i\theta Q), \quad (4.140)$$

onde Q é o gerador da transformação. Vamos escrever, para o gerador agindo no subespaço de uma única partícula, $Q^{(1)}$. $Q^{(1)}$ comuta com P_i , pois os $\mathcal{D}'$ s em (4.129) não alteram os rótulos de momento $p_1, p_2, \dots$ no estado Φ , e portanto podemos escolher autoestados de Q para construir a base do espaço (DIAS, 2015, p. 88):

$$Q^{(1)}\Psi_{p\sigma n} = q_n \Psi_{p\sigma n}. \quad (4.141)$$

Como esses autoestados são simultâneos de Q e P , a atuação de Q não muda o rótulo n . Podemos criar o operador Q agindo sobre estados de múltiplas partículas fazendo:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}^{(1)} &= Q^{(1)} \otimes 1^{(2)} \otimes 1^{(3)} \otimes \dots \\ \tilde{Q}^{(2)} &= 1^{(1)} \otimes Q^{(2)} \otimes 1^{(3)} \otimes \dots \\ &\dots \\ Q &= \tilde{Q}^{(1)} + \tilde{Q}^{(2)} + \tilde{Q}^{(3)} + \dots \end{aligned} \quad (4.142)$$

Com essa construção, este operador também comuta com P_i , pois cada um de seus termos comuta com P_i . Com essa construção, escrevemos os $\mathcal{D}'$ s como:

$$\mathcal{D}'_{n'n}(T(\theta)) = \delta_{n'n} \exp(i\theta q_n), \quad (4.143)$$

e é fácil ver que a ação de Q sobre a matriz-S resulta em:¹⁹

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha} &= (\Psi_{\beta}^-, \Psi_{\alpha}^+) = (\Psi_{\beta}^-, U^{\dagger}(T(\theta))U(T(\theta))\Psi_{\alpha}^+) \\ &= (U(T(\theta))\Psi_{\beta}^-, U(T(\theta))\Psi_{\alpha}^+) = (e^{i\theta Q}\Psi_{\beta}^-, e^{i\theta Q}\Psi_{\alpha}^+) \\ &= (e^{i\theta q_{\beta}}\Psi_{\beta}^-, e^{i\theta q_{\alpha}}\Psi_{\alpha}^+) \\ &= e^{i\theta(q_{\alpha}-q_{\beta})}(\Psi_{\beta}^-, \Psi_{\alpha}^+) \\ &= e^{i\theta(q_{\alpha}-q_{\beta})}S_{\beta\alpha}, \end{aligned} \quad (4.144)$$

¹⁹ Note que aqui usamos a unitariedade de $U(T(\theta))$: $U^{\dagger}(T(\theta))U(T(\theta)) = 1$.

onde q_α é a soma dos autovalores $q_1, q_2, \dots$ de todas as partículas que compõem o estado Φ_α , e, de modo similar, q_β é a soma dos autovalores das partículas de Φ_β . A consequência dessa demonstração é que precisamos que

$$e^{i\theta(q_\alpha - q_\beta)} = 1 \quad \Rightarrow \quad q_\alpha - q_\beta = 0, \quad (4.145)$$

ou seja, a soma dos autovalores q deve ser conservada. Desse modo, simetrias internas — por comutarem com as transformações de Poincaré — são conservadas pela dinâmica contida em S .

4.2.4 Paridade e Reversão Temporal

Vamos agora obter os operadores de paridade e reversão temporal sobre estados interagentes.

1. Paridade. Vamos iniciar supondo um operador de paridade P_0 que atue sobre estados não interagentes da forma:²⁰

$$P_0 \Phi_{p_1 \sigma_1 n_1, p_2 \sigma_2 n_2, \dots} = \eta_{n_1} \eta_{n_2} \dots \Phi_{\mathcal{P} p_1 \sigma_1 n_1, \mathcal{P} p_2 \sigma_2 n_2, \dots}, \quad (4.146)$$

onde, conforme (3.137), η_{n_i} é a paridade intrínseca da partícula n_i . Vamos usar daqui pra frente uma nova notação de multi-índice:

$$\mathcal{P}_\alpha \longmapsto \mathcal{P} p_1 \sigma_1 n_1, \mathcal{P} p_2 \sigma_2 n_2, \dots, \quad (4.147)$$

para escrevermos (4.146) como:

$$P_0 \Phi_\alpha = \eta_{n_1} \eta_{n_2} \dots \Phi_{\mathcal{P}_\alpha}. \quad (4.148)$$

Como vimos na Subseção 4.2.3, se P_0 corresponder a uma simetria interna, teremos:

$$[H_0, P_0] = [V, P_0] = 0, \quad (4.149)$$

e portanto:

$$\begin{aligned} [P_0, H] &= 0, \\ P_0 H &= H P_0, \\ P_0 H P_0^{-1} &= H. \end{aligned} \quad (4.150)$$

Como $P^{-1} = P$, isso significa que o Hamiltoniano total H deve ser invariante por transformações de paridade:

$$P_0 H P_0 = H, \quad (4.151)$$

²⁰ Essa forma supõe que todas as partículas têm massa. Para partículas de massa nula, a substituição, como na equação (3.169), é $\eta_n \rightarrow \eta_n \exp(\pm i\pi\sigma)$.

e disso supomos $P_0 = P$. A transformação da matriz-S pela ação da paridade seria portanto:

$$\begin{aligned}
 S_{\beta\alpha} &= (\Phi_\beta, \Phi_\alpha) \\
 &= (P\Phi_\beta, P\Phi_\alpha) \\
 &= (\eta_{n'_1}\eta_{n'_2}\dots\Phi_{\mathcal{P}\beta}, \eta_{n_1}\eta_{n_2}\dots\Phi_{\mathcal{P}\alpha}) \\
 &= \eta_{n'_1}^*\eta_{n'_2}^*\dots\eta_{n_1}\eta_{n_2}\dots(\Phi_{\mathcal{P}\beta}, \Phi_{\mathcal{P}\alpha}).
 \end{aligned} \tag{4.152}$$

Podemos sempre redefinir o operador paridade com alguma multiplicação por alguns operadores de simetria interna de forma que todas as paridades intrínsecas tenham valor $+1$ ou -1 (WEINBERG, 1995, p. 124–125). Temos portanto:

$$S_{\beta\alpha} = \pm S_{\mathcal{P}\beta\mathcal{P}\alpha}. \tag{4.153}$$

A probabilidade de transição de estados físicos é depende de $|S_{\beta\alpha}|^2$, portanto diferenças de fase não alteram o resultado de estados físicos, e assim poderíamos prever que as probabilidades de transição de $\alpha \rightarrow \beta$ e de $\mathcal{P}\alpha \rightarrow \mathcal{P}\beta$ são iguais, e que a paridade é uma simetria interna do sistema. Na verdade, contudo, a paridade é conservada apenas em interações eletromagnéticas e fortes²¹, e não é conservada em interações fracas.

2. Reversão Temporal. O operador de reversão temporal é antiunitário e sua ação transforma $t \rightarrow -t$, o que resulta na alteração das condições de contorno sobre estados os estados in e out. Esperamos portanto:

$$\mathbb{T}\Psi_{p_1\sigma_1n_1,p_2\sigma_2n_2,\dots}^\pm = (-1)^{j_1-\sigma_1}(-1)^{j_2-\sigma_2}\dots\Psi_{\mathcal{P}p_1,-\sigma_1,n_1;\mathcal{P}p_2,-\sigma_2,n_2;\dots}^\mp \tag{4.154}$$

onde usamos (3.137).²² Para uso posterior, vamos definir o multi-índice:

$$\mathcal{T}\alpha \mapsto \mathcal{P}p_1, -\sigma_1, n_1; \mathcal{P}p_2, -\sigma_2, n_2; \dots, \tag{4.155}$$

Mais uma vez, se $\mathbb{T}$ corresponder a uma simetria interna, temos que:

$$[H_0, \mathbb{T}_0] = [V, \mathbb{T}_0] = 0, \tag{4.156}$$

onde $\mathbb{T}_0$ é o operador de reversão temporal sobre estados livres.

Vamos tomar $\mathbb{T} = \mathbb{T}_0$ e analisar.²³

²¹ i.e., relacionadas à força forte.

²² Mais uma vez, esse resultado presume que todas as partículas envolvidas sejam massivas. Para o caso de massa nula, fazemos uma substituição segundo (3.169): $(-1)^{j_i-\sigma_i} \rightarrow \zeta_{\sigma_i} e^{\pm i\pi\sigma_i}$.

²³ Note que aqui usamos a antiunitariedade de $\mathbb{T}$.

$$\begin{aligned}
T\Psi_{\alpha}^{\pm} &= T\Omega(\mp\infty)\Phi_{\alpha} \\
&= T\lim_{\tau\rightarrow\mp\infty} e^{iH_0\tau}e^{-iH\tau}\Phi_{\alpha} \\
&= \lim_{\tau\rightarrow\mp\infty} e^{-iH_0\tau}e^{+iH\tau}T\Phi_{\alpha} \\
&= \prod_{i=1}^{n_{\alpha}}(-1)^{j_i-\sigma_i}\lim_{\tau\rightarrow\mp\infty} e^{-iH_0\tau}e^{+iH\tau}\Phi_{\mathcal{T}\alpha}.
\end{aligned} \tag{4.157}$$

Vamos fazer uma troca no índice mudo $\tau \rightarrow -\tau$:

$$\begin{aligned}
T\Psi_{\alpha}^{\pm} &= \prod_{i=1}^{n_{\alpha}}(-1)^{j_i-\sigma_i}\lim_{\tau\rightarrow\pm\infty} e^{+iH_0\tau}e^{-iH\tau}\Phi_{\mathcal{T}\alpha} \\
&= \prod_{i=1}^{n_{\alpha}}(-1)^{j_i-\sigma_i}\Omega(\pm\infty)\Phi_{\mathcal{T}\alpha} \\
&= \prod_{i=1}^{n_{\alpha}}(-1)^{j_i-\sigma_i}\Psi_{\mathcal{T}\alpha}^{\mp}.
\end{aligned} \tag{4.158}$$

É verificado experimentalmente que as probabilidades dos processos $\alpha \rightarrow \beta$ não são conservadas por processos de reversão temporal, portanto $\mathcal{T}$ não corresponde a uma simetria interna, mas ela pode ser tomada como uma simetria aproximada em interações fortes, fracas e eletromagnéticas (WEINBERG, 1995, p. 130).

4.3 TAXAS DE TRANSIÇÃO E SEÇÕES DE CHOQUE

A dinâmica de uma interação está contida na matriz-S. Como vimos em (4.74), os elementos $S_{\alpha\beta}$ da matriz são proporcionais a um delta:

$$S_{\alpha\beta} \propto \delta(p_{\alpha} - p_{\beta}), \tag{4.159}$$

onde p_{α} é a soma dos quadrimomentos das partículas presentes no estado inicial α , e p_{β} é a soma dos presentes no estado final β . Essa delta garante que o quadrimomento total seja conservado durante o processo, mas também permite que ele seja trocado entre as partículas envolvidas.

Esse delta, contudo, nos traz um problema: a probabilidade de que uma transição $\alpha \rightarrow \beta$ ocorra é dada, não por $S_{\alpha\beta}$, mas por $|S_{\alpha\beta}|^2$. De (4.159), temos diretamente que:

$$|S_{\alpha\beta}|^2 \propto (\delta(p_{\alpha} - p_{\beta}))^2, \tag{4.160}$$

mas o quadrado de funções delta com argumentos contínuos não possui definição matemática. Vamos eliminar esse problema estudando como efetivamente queremos que $|S_{\alpha\beta}|$ se comporte para a análise de experimentos. Os procedimentos a seguir não constituem uma demonstração rigorosa, mas servem como exemplo de como se resolve o problema do delta ao quadrado (WEINBERG, 1995, p. 134).

Consideremos todo nosso sistema físico dentro de uma caixa de volume V e arestas de comprimento L . Tal situação física requer que o momento seja discretizado:

$$\vec{p} = \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3), \quad (4.161)$$

onde os n_i são números inteiros. Esse é um resultado conhecido da Física Quântica,²⁴ mas podemos obtê-lo usando o operador de translação que obtivemos em (3.38) e algumas condições de contorno. Tomamos o gerador de translação nas dimensões espaciais:

$$U(1, a) = \exp(-i\vec{P} \cdot \vec{a}), \quad (4.162)$$

e atuamos com esse operador sobre um estado Ψ de autovalor do momento $\vec{p}$ para obtermos um estado transladado Ψ' :

$$\Psi'_{p\sigma n}(\vec{a}) = \exp(-i\vec{P} \cdot \vec{a})\Psi_{p\sigma n} = \exp(-i\vec{p} \cdot \vec{a})\Psi_{p\sigma n}. \quad (4.163)$$

Usando $\vec{L} = (L, L, L)$, a condição para que a partícula esteja confinada é:

$$\begin{aligned} \Psi'_{p\sigma n}(\vec{L}) &= \Psi_{p\sigma n} \\ \exp(-i\vec{p} \cdot \vec{L})\Psi_{p\sigma n} &= \Psi_{p\sigma n} \\ \Rightarrow \exp(-i\vec{p} \cdot \vec{L}) &= 1, \end{aligned} \quad (4.164)$$

e dessa última condição tiramos (4.161). Com isso, os deltas tridimensionais se tornam:

$$\delta_V^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V d^3x e^{i(\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \vec{x}} \equiv \frac{V}{(2\pi)^3} \delta_{p'p}. \quad (4.165)$$

Esse resultado contudo nos traz um problema de normalização. Queremos que os estados normalizados nos dêem:

$$(\Psi_{p'\sigma'n'}, \Psi_{p\sigma n}) = \delta(\vec{p}' - \vec{p})\delta_{\sigma'\sigma}\delta_{n'n}, \quad (4.166)$$

mas ao mesmo tempo queremos usar a função δ_V definida em (4.165). Usando ela temos:

$$\begin{aligned} (\Psi_{p'\sigma'n'}, \Psi_{p\sigma n}) &= \delta_V(\vec{p}' - \vec{p}) \\ &= \frac{V}{(2\pi)^3} \delta_{p'p} \delta_{\sigma'\sigma} \delta_{n'n}, \end{aligned} \quad (4.167)$$

o que não é sempre igual a zero ou 1. Solucionamos esse problema definindo novos estados confinados

²⁴ Ele pode ser obtido mesmo através da equação de Schrödinger (EISBERG; RESNICK, 1986, p. 281).

na caixa tais que:

$$\Psi_{p\sigma n}^{\text{caixa}} = \left(\frac{(2\pi)^3}{V} \right)^{\frac{1}{2}} \Psi_{p\sigma n}, \quad (4.168)$$

de modo que:

$$\begin{aligned} (\Psi_{p'\sigma'n'}^{\text{caixa}}, \Psi_{p\sigma n}^{\text{caixa}}) &= \left(\left(\frac{(2\pi)^3}{V} \right)^{\frac{1}{2}} \Psi_{p'\sigma'n'}, \left(\frac{(2\pi)^3}{V} \right)^{\frac{1}{2}} \Psi_{p\sigma n} \right) \\ &= \frac{(2\pi)^3}{V} (\Psi_{p'\sigma'n'}, \Psi_{p\sigma n}) \\ &= \delta_{p'p} \delta_{\sigma'\sigma} \delta_{n'n}. \end{aligned} \quad (4.169)$$

De modo similar à (4.168), um estado de N_α partículas confinadas será descrito como:

$$\Psi_\alpha^{\text{caixa}} = \left(\frac{(2\pi)^3}{V} \right)^{\frac{N_\alpha}{2}} \Psi_\alpha. \quad (4.170)$$

A matriz-S sofre alterações semelhantes:

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha}^{\text{caixa}} &= (\Psi_\beta^{-\text{caixa}}, \Psi_\alpha^{+\text{caixa}}) \\ &= \left(\left(\frac{(2\pi)^3}{V} \right)^{\frac{N_\beta}{2}} \Psi_\beta^-, \left(\frac{(2\pi)^3}{V} \right)^{\frac{N_\alpha}{2}} \Psi_\alpha^+ \right) \\ &= \left(\frac{(2\pi)^3}{V} \right)^{\frac{N_\beta + N_\alpha}{2}} (\Psi_\beta^-, \Psi_\alpha^+) \\ &= \left(\frac{(2\pi)^3}{V} \right)^{\frac{N_\beta + N_\alpha}{2}} S_{\beta\alpha}. \end{aligned} \quad (4.171)$$

Se deixarmos as partículas na caixa para sempre, todas as transições irão ocorrer repetidamente. Para calcularmos uma transição significativa, precisamos que nosso sistema esteja também limitado temporalmente numa "caixa temporal" (WEINBERG, 1995, p. 135). Vamos supor que apenas nos interessamos por transições em um período de tempo T . O delta de energia sofre consequências:

$$\delta_T(E_\alpha - E_\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{+T/2} dt \exp(i(E_\alpha - E_\beta)t). \quad (4.172)$$

Obtemos com esses desenvolvimentos que a probabilidade de transição de um conjunto de partículas confinadas em uma caixa de um estado α para um estado β depois de um período T , é:

$$P(\alpha \rightarrow \beta) = |S_{\beta\alpha}^{\text{caixa}}|^2 = \left(\frac{(2\pi)^3}{V} \right)^{N_\beta + N_\alpha} |S_{\beta\alpha}|^2. \quad (4.173)$$

Este P é uma densidade de probabilidade. Normalmente obteríamos a probabilidade desejada integrando uma quantidade $Pd\beta$, com $d\beta \equiv d^3p_1 d^3p_2 \dots d^3p_{N_\beta}$, no intervalo dos estados desejados. Contudo, havíamos tomado momentos discretos para efetuar esse cálculo, e assim (DIAS, 2015, p. 93):

$$dP(\alpha \rightarrow \beta) = P(\alpha \rightarrow \beta)d\beta \rightarrow P(\alpha \rightarrow \beta)\Delta N_\beta, \quad (4.174)$$

onde N_β é o número de estados finais no volume $d\beta$. Podemos calcular ΔN_β facilmente. Vamos analisar o caso em que temos apenas uma partícula, de momento como em (4.161). No intervalo dp_x em torno de p_x temos:

$$\Delta n_x = \frac{L}{2\pi} dp_x, \quad (4.175)$$

e estendendo esse valor para d^3p :

$$\begin{aligned} \Delta n &\equiv \Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z \\ &= \frac{L^3}{(2\pi)^3} dp_x^3 \\ &= \frac{V}{(2\pi)^3} dp_x^3. \end{aligned} \quad (4.176)$$

Para as N_β partículas no estado β :

$$\begin{aligned} \Delta N_\beta &= \Delta n_1 \Delta n_2 \dots \Delta n_{N_\beta} \\ &= \left(\frac{V}{(2\pi)^3} \right)^{N_\beta} d^3p_1 d^3p_2 \dots d^3p_{N_\beta} \\ &= \left(\frac{V}{(2\pi)^3} \right)^{N_\beta} d\beta. \end{aligned} \quad (4.177)$$

Usamos isso em (4.174) para obter nossa nova probabilidade de densidade:

$$\begin{aligned} dP(\alpha \rightarrow \beta) &= \left(\frac{V}{(2\pi)^3} \right)^{N_\beta} |S_{\beta\alpha}^{\text{caixa}}|^2 d\beta \\ &= \left(\frac{V}{(2\pi)^3} \right)^{N_\beta} \left(\frac{(2\pi)^3}{V} \right)^{N_\beta + N_\alpha} |S_{\beta\alpha}|^2 d\beta \\ &= \left(\frac{(2\pi)^3}{V} \right)^{N_\alpha} |S_{\beta\alpha}|^2 d\beta. \end{aligned} \quad (4.178)$$

Antes de prosseguirmos com o cálculo, precisamos de duas hipóteses:

- todas as partículas são afetadas pela interação;

- não há nenhum subconjunto de partículas que interage exclusivamente entre si.

A segunda hipótese é necessária para impedir que tenhamos mais deltas de conservação de momento em $S_{\beta\alpha}$. Com essas condições podemos escrever $S_{\beta\alpha}$ como:

$$S_{\beta\alpha} = -2\pi i \delta_V(\vec{p}_\beta - \vec{p}_\alpha) \delta_T(E_\beta - E_\alpha) M_{\beta\alpha}, \quad (4.179)$$

onde o termo $M_{\beta\alpha}$ não possui outros deltas de conservação de energia, que estariam relacionados à subconjuntos de partículas interagindo entre si de forma exclusiva. Por fim escrevemos:

$$\begin{aligned} (\delta_V^{(3)}(\vec{p}_\beta - \vec{p}_\alpha))^2 &= \delta_V(\vec{p}_\beta - \vec{p}_\alpha) \delta_V(0) = \delta_V(\vec{p}_\beta - \vec{p}_\alpha) \frac{V}{(2\pi)^3} \\ (\delta_T(E_\beta - E_\alpha))^2 &= \delta_T(E_\beta - E_\alpha) \delta_T(0) = \delta_T(E_\beta - E_\alpha) \frac{T}{2\pi}. \end{aligned} \quad (4.180)$$

Entramos com esses desenvolvimentos em (4.179) para obter $|S_{\beta\alpha}|$:

$$|S_{\beta\alpha}|^2 = (2\pi)^2 \delta_V(\vec{p}_\beta - \vec{p}_\alpha) \frac{V}{(2\pi)^3} \delta_T(E_\beta - E_\alpha) \frac{T}{2\pi} |M_{\beta\alpha}|^2, \quad (4.181)$$

e entramos com isso em (4.178) para finalmente obtermos:

$$dP(\alpha \rightarrow \beta) = (2\pi)^{3N_\alpha-2} V^{1-N_\alpha} T \delta_V(\vec{p}_\beta - \vec{p}_\alpha) \delta_T(E_\beta - E_\alpha) |M_{\beta\alpha}|^2 d\beta. \quad (4.182)$$

Podemos definir uma nova quantidade para não termos que lidar com a dependência de T em (4.182). A taxa de transição por unidade de tempo, dada por:

$$\begin{aligned} d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta) &\equiv \frac{dP(\alpha \rightarrow \beta)}{T} \\ &= (2\pi)^{3N_\alpha-2} V^{1-N_\alpha} \delta_V(\vec{p}_\beta - \vec{p}_\alpha) \delta_T(E_\beta - E_\alpha) |M_{\beta\alpha}|^2 d\beta. \end{aligned} \quad (4.183)$$

No limite em que V e T forem muito grandes, podemos unir os deltas e obter finalmente:

$$d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta) = (2\pi)^{3N_\alpha-2} V^{1-N_\alpha} \delta(p_\beta - p_\alpha) |M_{\beta\alpha}|^2 d\beta. \quad (4.184)$$

Nesse limite, (4.179) também se torna:

$$S_{\beta\alpha} = -2\pi i \delta(p_\beta - p_\alpha) M_{\beta\alpha}. \quad (4.185)$$

4.3.1 Dois casos especiais

O uso da taxa de transição em (4.184) traz dificuldades devido ao termo V , que deve ser analisado caso a caso. Há dois casos particularmente importantes, que vamos analisar nessa subseção: $N_\alpha = 1$ e $N_\alpha = 2$.

1. $N_\alpha = 1$. Nesse caso, o termo de V em (4.184) desaparece, e não temos divergência tomando $V \rightarrow \infty$:

$$d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta) = 2\pi\delta(p_\beta - p_\alpha)|M_{\beta\alpha}|^2 d\beta. \quad (4.186)$$

Essa expressão é uma espécie de regra de ouro de Fermi. Como temos, de início, uma única partícula, interpretamos a taxa de transição como a taxa de decaimento da partícula inicial. Devido a isso, contudo, não podemos tomar $T \rightarrow \infty$ em $\delta_T(E_\beta - E_\alpha)$, afinal essa taxa de transição só tem sentido se $T \ll \tau_\alpha$, sendo τ_α o tempo de meia-vida da partícula α . A função $\delta_T(E_\beta - E_\alpha)$ terá assim uma largura intrínseca:

$$\Delta E \approx \frac{1}{T} > \frac{1}{\tau_\alpha}. \quad (4.187)$$

Desse modo, a equação (4.186) só é útil se a taxa total de decaimento $1/\tau_\alpha$ for muito menor que as energias características do processo.

2. $N_\alpha = 2$. Esse caso corresponde ao choque de duas partículas. De (4.184) obtemos:

$$d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta) = (2\pi)^4 \frac{1}{V} \delta(p_\beta - p_\alpha) |M_{\beta\alpha}|^2 d\beta. \quad (4.188)$$

Vamos adotar o referencial de laboratório, em que uma partícula está em repouso, e com isso definir o fluxo de partícula incidente sobre a partícula em repouso como:²⁵

$$\Theta_\alpha = \frac{u_\alpha}{V}, \quad (4.189)$$

onde u_α é a velocidade relativa entre as partículas. A seção de choque diferencial é definida como:

$$\begin{aligned} d\sigma(\alpha \rightarrow \beta) &\equiv \frac{d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta)}{\Theta_\alpha} \\ &= (2\pi)^4 \frac{1}{u_\alpha} \delta(p_\beta - p_\alpha) |M_{\beta\alpha}|^2 d\beta. \end{aligned} \quad (4.190)$$

Essa é a quantidade efetivamente medida em experiências, para a qual não temos divergências para $V \rightarrow \infty$.

Embora estejamos nos limitando a analisar apenas os casos em que temos uma ou duas partículas iniciais, podemos também obter taxas de transição para casos em que $N_\alpha \geq 3$. Eles têm importância, por exemplo, na astrofísica: em uma das principais reações que ocorrem no Sol dois prótons e um

²⁵ Para o caso em que temos mais partículas, esse fluxo é dado por $\Theta_\alpha = \rho u_\alpha$, onde ρ é a densidade incidente de partículas e u_α é a velocidade relativa das partículas incidentes em relação à em repouso.

elétron se transformam em um deutério e um neutrino (WEINBERG, 1995, p. 137). Na próxima seção, retornaremos aos resultados aqui descritos e os complementaremos.

4.3.2 Somas sobre polarização

A transformação da matriz-S em diferentes referenciais se dá de forma complicada, devido às diferentes matrizes, os D' s, relacionadas aos grupos de isotopia de cada partícula envolvida nos estados inicial e final da interação. Contudo, a quantidade de que precisamos para analisar a evolução de um sistema é $|S_{\beta\alpha}|^2$, e podemos somar sobre spins e helicidades, o que nos leva a termos como:

$$\sum_{\bar{\sigma}} D_{\sigma\bar{\sigma}}^{(j)} D_{\sigma'\bar{\sigma}}^{(j)*}.$$

Sabemos de (3.57), contudo, que os D' s são unitários, ou seja:

$$D^\dagger D = 1 \iff \sum_{\bar{\sigma}} D_{\sigma\bar{\sigma}}^{(j)} D_{\sigma'\bar{\sigma}}^{(j)*} = \delta_{\sigma'\sigma}. \quad (4.191)$$

Estamos portanto lidando com a seção de choque não-polarizada, pois somamos sobre os spins e helicidades das partículas, suas polarizações.

Tomemos por exemplo a soma sobre as polarizações de um elemento $S_{\beta\alpha}$ da matriz-S em que $\alpha \mapsto p_1\sigma_1n_1, p_2\sigma_2n_2$ e $\beta \mapsto p'_1\sigma'_1n'_1, p'_2\sigma'_2n'_2$ (DIAS, 2015, p. 96):

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\sigma_1, \sigma_2 \\ \sigma'_1, \sigma'_2}} |S_{\beta\alpha}|^2 &= \frac{(\Lambda p_1)^0 (\Lambda p_2)^0 (\Lambda p'_1)^0 (\Lambda p'_2)^0}{p_1^0 p_2^0 p'_1{}^0 p'_2{}^0} \\ &\times \sum_{\substack{\sigma_1, \sigma_2 \\ \sigma'_1, \sigma'_2}} \left[\sum_{\substack{\bar{\sigma}'_1, \bar{\sigma}'_2 \\ \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2}} D_{\bar{\sigma}'_1\sigma'_1}^{(j'_1)*}(W(\Lambda, p'_1)) D_{\bar{\sigma}'_2\sigma'_2}^{(j'_2)*}(W(\Lambda, p'_2)) D_{\bar{\sigma}_1\sigma_1}^{(j_1)}(W(\Lambda, p_1)) D_{\bar{\sigma}_2\sigma_2}^{(j_2)}(W(\Lambda, p_2)) \right. \\ &\times \left. \sum_{\substack{\bar{\sigma}''_1, \bar{\sigma}''_2 \\ \bar{\sigma}'''_1, \bar{\sigma}'''_2}} D_{\bar{\sigma}''_1\sigma''_1}^{(j''_1)}(W(\Lambda, p'_1)) D_{\bar{\sigma}''_2\sigma''_2}^{(j''_2)}(W(\Lambda, p'_2)) D_{\bar{\sigma}'''_1\sigma'_1}^{(j'_1)*}(W(\Lambda, p_1)) D_{\bar{\sigma}'''_2\sigma'_2}^{(j'_2)*}(W(\Lambda, p_2)) \right] |S_{\Lambda\bar{\beta}\Lambda\bar{\alpha}}|^2, \quad (4.192) \end{aligned}$$

onde usamos:

$$\begin{aligned} \Lambda\bar{\alpha} &\mapsto \Lambda p_1\bar{\sigma}_1n_1, \Lambda p_2\bar{\sigma}_2n_2, \\ \Lambda\bar{\beta} &\mapsto \Lambda p'_1\bar{\sigma}'_1n'_1, \Lambda p'_2\bar{\sigma}'_2n'_2. \end{aligned} \quad (4.193)$$

Observamos que a condição de unitariedade em (4.191) nos dá:

$$\sum_{\sigma'_1} D_{\bar{\sigma}_1\sigma'_1}^{(j_1)}(W(\Lambda, p'_1)) D_{\bar{\sigma}''_1\sigma'_1}^{(j'_1)*}(W(\Lambda, p'_1)) = \delta_{\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}''_1}. \quad (4.194)$$

Com isso, (4.192) se torna:

$$\sum_{\substack{\sigma_1, \sigma_2 \\ \sigma'_1, \sigma'_2}} |S_{\beta\alpha}|^2 = \frac{(\Lambda p_1)^0 (\Lambda p_2)^0 (\Lambda p'_1)^0 (\Lambda p'_2)^0}{p_1^0 p_2^0 p_1'^0 p_2'^0} \sum_{\substack{\sigma_1, \sigma_2 \\ \sigma'_1, \sigma'_2}} |S_{\Lambda\bar{\beta}\Lambda\bar{\alpha}}|^2. \quad (4.195)$$

Vamos agora definir uma matriz $R_{\beta\alpha}$:

$$R_{\beta\alpha} \equiv p_1^0 p_2^0 p_1'^0 p_2'^0 \sum_{\substack{\sigma_1, \sigma_2 \\ \sigma'_1, \sigma'_2}} |S_{\beta\alpha}|^2, \quad (4.196)$$

e vamos aplicar (4.195) nessa definição:

$$\begin{aligned} R_{\beta\alpha} &= p_1^0 p_2^0 p_1'^0 p_2'^0 \frac{(\Lambda p_1)^0 (\Lambda p_2)^0 (\Lambda p'_1)^0 (\Lambda p'_2)^0}{p_1^0 p_2^0 p_1'^0 p_2'^0} \sum_{\substack{\sigma_1, \sigma_2 \\ \sigma'_1, \sigma'_2}} |S_{\Lambda\bar{\beta}\Lambda\bar{\alpha}}|^2 \\ &= (\Lambda p_1)^0 (\Lambda p_2)^0 (\Lambda p'_1)^0 (\Lambda p'_2)^0 \sum_{\substack{\sigma_1, \sigma_2 \\ \sigma'_1, \sigma'_2}} |S_{\Lambda\bar{\beta}\Lambda\bar{\alpha}}|^2 \\ &= R_{\Lambda\bar{\beta}\Lambda\bar{\alpha}}. \end{aligned} \quad (4.197)$$

A conclusão é que $R_{\beta\alpha}$ é escalar por transformações de Poincaré. Reescrevendo-o portanto como:

$$\begin{aligned} R_{\beta\alpha} &\equiv \prod_{i \in \beta} E'_i \prod_{j \in \alpha} E_j \sum_{\substack{\sigma_1, \sigma_2 \\ \sigma'_1, \sigma'_2}} |S_{\beta\alpha}|^2 \\ &= -2\pi i \delta(p_\beta - p_\alpha) \tilde{R}_{\beta\alpha}, \end{aligned} \quad (4.198)$$

nos baseamos em (4.185) para definir:

$$\tilde{R}_{\beta\alpha} \equiv \prod_{i \in \beta} E'_i \prod_{j \in \alpha} E_j \sum_{\substack{\sigma_1, \sigma_2 \\ \sigma'_1, \sigma'_2}} |M_{\beta\alpha}|^2. \quad (4.199)$$

Vamos assim somar sobre polarizações para usar (4.199) e complementar os casos da Subseção 4.3.1:

1. $N_\alpha = 1$. Somamos sobre polarizações em (4.186):

$$\sum_{\text{polarizações}} d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta) = 2\pi \delta(p_\beta - p_\alpha) \sum_{\text{polarizações}} |M_{\beta\alpha}|^2 d\beta, \quad (4.200)$$

e substituímos (4.199):²⁶

$$\begin{aligned} \sum_{\text{polarizações}} d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta) &= 2\pi\delta(p_\beta - p_\alpha) \frac{\tilde{R}_{\beta\alpha}}{E_\alpha \prod_{i \in \beta} E'_i} d\beta \\ &= 2\pi \frac{1}{E_\alpha} \delta(p_\beta - p_\alpha) \tilde{R}_{\beta\alpha} \frac{d\beta}{\prod_{i \in \beta} E'_i}. \end{aligned} \quad (4.201)$$

Tanto o delta²⁷ quanto $\tilde{R}_{\beta\alpha}$ são escalares de Poincaré, e o termo de integração $d\beta/\prod_{i \in \beta} E'_i$ também. Portanto, a taxa de decaimento Γ se transforma como o termo $1/E_\alpha$. Assim, quanto maior a energia potencial inicial da partícula, e em decorrência disso sua velocidade, menor a taxa de transição e maior o tempo de decaimento. Isso está de acordo com a dilatação temporal da Relatividade Restrita (WEINBERG, 1995, p. 138).

2. $N_\alpha = 2$. Vamos novamente iniciar com uma soma sobre as polarizações, agora na seção de choque diferencial em (4.190) (DIAS, 2015, p. 97):

$$\sum_{\text{polarizações}} d\sigma(\alpha \rightarrow \beta) = (2\pi)^4 \frac{1}{u_\alpha} \delta(p_\beta - p_\alpha) \sum_{\text{polarizações}} |M_{\beta\alpha}|^2 d\beta, \quad (4.202)$$

e substituímos (4.199) nessa expressão:²⁸

$$\begin{aligned} \sum_{\text{polarizações}} d\sigma(\alpha \rightarrow \beta) &= (2\pi)^4 \frac{1}{u_\alpha} \delta(p_\beta - p_\alpha) \frac{\tilde{R}_{\beta\alpha}}{E_1 E_2 \prod_{i \in \beta} E'_i} d\beta \\ &= (2\pi)^4 \frac{1}{u_\alpha E_1 E_2} \delta(p_\beta - p_\alpha) \tilde{R}_{\beta\alpha} \frac{d\beta}{\prod_{i \in \beta} E'_i}. \end{aligned} \quad (4.203)$$

Essa expressão se refere ao choque de duas partículas no referencial de laboratório, como discutimos na Subseção 4.3.1, contudo para analisarmos as propriedades de transformação da seção de choque diferencial precisamos generalizá-la para um referencial qualquer.

Para isso, vamos generalizar a velocidade relativa como:

$$u_\alpha = \frac{\sqrt{(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{E_1 E_2}, \quad (4.204)$$

pois com ela assim definida, $u_\alpha E_1 E_2$ é um escalar. Com isso temos:

$$\sum_{\text{polarizações}} d\sigma(\alpha \rightarrow \beta) = \frac{(2\pi)^4 \tilde{R}_{\beta\alpha} \delta(p_\beta - p_\alpha)}{\sqrt{(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \frac{d\beta}{\prod_{i \in \beta} E'_i}. \quad (4.205)$$

²⁶ Aqui já abrimos $\prod_{j \in \alpha} E_j = E_\alpha$, pois temos apenas uma partícula no estado inicial α .

²⁷ O delta quadrimensional $\delta(p_\beta - p_\alpha)$ é invariante pois ele é não-nulo apenas se $p_\beta = p_\alpha$, e se essa igualdade for verdadeira, ela o será em qualquer referencial a que transformarmos o sistema.

²⁸ Aqui temos $\prod_{j \in \alpha} E_j = E_1 E_2$, pois temos duas partícula no estado inicial α .

Todos os termos nessa expressão são escalares sob transformações de Poincaré. Portanto, a seção diferencial de choque em (4.205) é um escalar sobre transformações de Poincaré.

4.4 TEORIA DE PERTURBAÇÕES COVARIANTE

Nessa seção iremos buscar obter uma forma perturbativa da matriz-S em termos de uma expansão em V . Essa é uma ferramenta muito útil para o cálculo dos elementos da matriz-S (WEINBERG, 1995, p. 141). A expressão que obtivemos para a matriz-S logo antes de tomar a aproximação de Born foi²⁹:

$$S_{\beta\alpha} = \delta(\beta - \alpha) - 2\pi i \delta(E_\beta - E_\alpha) (\Phi_\beta, V \Psi_\alpha^+), \quad (4.206)$$

e ela permite uma solução perturbativa através do uso das equações de Lippmann-Schwinger, em (4.43). Iniciamos tomando o termo $T_{\beta\alpha}^+$:

$$T_{\beta\alpha}^+ = (\Phi_\beta, V \Psi_\alpha^+), \quad (4.207)$$

e expandindo-o (4.43) com:

$$\begin{aligned} T_{\beta\alpha}^+ &= \left(\Phi_\beta, V \left(\Phi_\alpha + \int d\gamma \frac{\Phi_\gamma T_{\gamma\alpha}^\pm}{E_\alpha - E_\gamma + i\epsilon} \right) \right) \\ &= (\Phi_\beta, V \Phi_\alpha) + \int d\gamma \frac{(\Phi_\beta, V \Phi_\gamma) T_{\gamma\alpha}^\pm}{E_\alpha - E_\gamma + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (4.208)$$

Definimos a matriz:

$$V_{\beta\alpha} = (\Phi_\beta, V \Phi_\alpha) \quad (4.209)$$

e voltamos com ela em (4.208):

$$T_{\beta\alpha}^+ = V_{\beta\alpha} + \int d\gamma \frac{V_{\beta\gamma} T_{\gamma\alpha}^\pm}{E_\alpha - E_\gamma + i\epsilon}. \quad (4.210)$$

Podemos realizar um processo de iteração, aplicando a própria equação (4.210) em si mesma diversas vezes, para obtermos:

$$\begin{aligned} T_{\beta\alpha}^+ &= V_{\beta\alpha} + \int d\gamma \frac{V_{\beta\gamma} V_{\gamma\alpha}}{E_\alpha - E_\gamma \pm i\epsilon} + \int d\gamma d\gamma' \frac{V_{\beta\gamma} V_{\gamma\gamma'} V_{\gamma'\alpha}}{(E_\alpha - E_\gamma \pm i\epsilon)(E_\alpha - E_{\gamma'} \pm i\epsilon)} \\ &\quad + \int d\gamma d\gamma' d\gamma'' \frac{V_{\beta\gamma} V_{\gamma\gamma'} V_{\gamma'\gamma''} V_{\gamma''\alpha}}{(E_\alpha - E_\gamma \pm i\epsilon)(E_\alpha - E_{\gamma'} \pm i\epsilon)(E_\alpha - E_{\gamma''} \pm i\epsilon)} + \dots, \end{aligned} \quad (4.211)$$

²⁹ Equação (4.62).

e com essa expressão, conhecendo a forma do operador V , podemos obter $T_{\beta\alpha}^+$. Essa forma perturbativa de $T_{\beta\alpha}^+$ nos mostra que podemos ter singularidades em $S_{\beta\alpha}$ através de estados intermediários, mas ela tem uma grande desvantagem à medida que as energias nos denominadores não deixa explícita a invariância de Lorentz da matriz-S. Portanto, buscaremos obter uma **teoria das perturbações dependente do tempo**. Iniciamos observando que o operador S , dado em (4.50), é:

$$S = U(+\infty, -\infty) \quad (4.212)$$

e de (4.51) sabemos que:

$$U(\tau, \tau_0) = e^{iH_0\tau} e^{-iH(\tau-\tau_0)} e^{-iH_0\tau_0}. \quad (4.213)$$

Derivando a expressão anterior obtemos uma expressão conveniente:³⁰

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} U(\tau, \tau_0) &= iH_0 e^{iH_0\tau} e^{-iH(\tau-\tau_0)} e^{-iH_0\tau_0} + e^{iH_0\tau} [-iH e^{-iH(\tau-\tau_0)}] e^{-iH_0\tau_0} \\ &= ie^{iH_0\tau} H_0 e^{-iH(\tau-\tau_0)} e^{-iH_0\tau_0} + ie^{iH_0\tau} [-H e^{-iH(\tau-\tau_0)}] e^{-iH_0\tau_0} \\ &= ie^{iH_0\tau} [H_0 - H] e^{-iH(\tau-\tau_0)} e^{-iH_0\tau_0} \\ &= ie^{iH_0\tau} [-V] e^{-iH(\tau-\tau_0)} e^{-iH_0\tau_0} \\ &= -ie^{iH_0\tau} V e^{-iH_0\tau} U(\tau, \tau_0). \end{aligned} \quad (4.214)$$

Podemos definir:

$$V(\tau) = e^{iH_0\tau} V e^{-iH_0\tau} \quad (4.215)$$

e multiplicar ambos os lados de (4.214) por i , obtendo assim:

$$i \frac{d}{d\tau} U(\tau, \tau_0) = V(\tau) U(\tau, \tau_0). \quad (4.216)$$

Integramos essa equação em $d\tau$:

$$\int i \frac{d}{d\tau} U(\tau, \tau_0) d\tau = \int V(\tau) U(\tau, \tau_0) d\tau. \quad (4.217)$$

³⁰ Aqui usamos a substituição $V = H - H_0$, de (4.15). Também usamos $e^{-iH_0\tau} e^{+iH_0\tau} = 1$.

Vamos agora substituir a variável muda $\tau \rightarrow \tau'$ e escolher os limites de integração de τ_0 a τ :

$$\begin{aligned} \int_{\tau_0}^{\tau} i \frac{d}{d\tau'} U(\tau', \tau_0) d\tau' &= \int_{\tau_0}^{\tau} V(\tau') U(\tau', \tau_0) d\tau' \\ i[U(\tau, \tau_0) - U(\tau_0, \tau_0)] &= \int_{\tau_0}^{\tau} V(\tau') U(\tau', \tau_0) d\tau' \\ U(\tau, \tau_0) &= U(\tau_0, \tau_0) - i \int_{\tau_0}^{\tau} V(\tau') U(\tau', \tau_0) d\tau'. \end{aligned} \quad (4.218)$$

Vemos da definição de $U(\tau, \tau_0)$ que $U(\tau_0, \tau_0) = 1$, e chegamos assim em:

$$U(\tau, \tau_0) = 1 - i \int_{\tau_0}^{\tau} V(\tau') U(\tau', \tau_0) d\tau'. \quad (4.219)$$

Esta equação também pode ser iterada, isso é, podemos aplicá-la nela mesma repetidas vezes, obtendo:

$$\begin{aligned} U(\tau, \tau_0) &= 1 - i \int_{\tau_0}^{\tau} V(\tau') d\tau' + (-i)^2 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \int_{\tau_0}^{\tau'} d\tau'' V(\tau') V(\tau'') \\ &\quad + (-i)^3 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \int_{\tau_0}^{\tau'} d\tau'' \int_{\tau_0}^{\tau''} d\tau''' V(\tau') V(\tau'') V(\tau''') + \dots \end{aligned} \quad (4.220)$$

e tomando os limites $\tau \rightarrow \infty$ e $\tau_0 \rightarrow -\infty$ obtemos:

$$\begin{aligned} U(\infty, -\infty) = S &= 1 - i \int_{-\infty}^{\infty} V(\tau') d\tau' + (-i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int_{-\infty}^{\tau'} d\tau'' V(\tau') V(\tau'') \\ &\quad + (-i)^3 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int_{-\infty}^{\tau'} d\tau'' \int_{-\infty}^{\tau''} d\tau''' V(\tau') V(\tau'') V(\tau''') + \dots \end{aligned} \quad (4.221)$$

mas essa expressão ainda não é explicitamente invariante de Lorentz. Para carregar a análise dessa invariância, vamos definir o produto temporalmente ordenado de operadores dependentes do tempo como o produto com os operadores ordenados tais que aquele com o tempo mais recente seja colocado mais à esquerda, o segundo mais recente na segunda posição mais à esquerda, e assim por diante, ou seja (WEINBERG, 1995, p. 143):

$$\begin{aligned} T\{V(t)\} &= V(t), \\ T\{V(t_1)V(t_2)\} &= \theta(t_1 - t_2)V(t_1)V(t_2) + \theta(t_2 - t_1)V(t_2)V(t_1), \\ T\{V(t_1)V(t_2)V(t_3)\} &= \theta(t_1 - t_2)\theta(t_2 - t_3)V(t_1)V(t_2)V(t_3) + \theta(t_1 - t_3)\theta(t_3 - t_2)V(t_1)V(t_3)V(t_2) \\ &\quad + \theta(t_2 - t_1)\theta(t_1 - t_3)V(t_2)V(t_1)V(t_3) + \theta(t_2 - t_3)\theta(t_3 - t_1)V(t_2)V(t_3)V(t_1) \\ &\quad + \theta(t_3 - t_1)\theta(t_1 - t_2)V(t_3)V(t_1)V(t_2) + \theta(t_3 - t_2)\theta(t_2 - t_1)V(t_3)V(t_2)V(t_1), \end{aligned} \quad (4.222)$$

e assim por diante, onde $\theta(\alpha)$ é a função degrau, igual a 1 se seu argumento for positivo e igual 0 se seu argumento for negativo. Vamos integrar $TV(t_1)V(t_2)$ e observar seu comportamento:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 T\{V(t_1)V(t_2)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \theta(t_1 - t_2) V(t_1)V(t_2) \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \theta(t_2 - t_1) V(t_2)V(t_1) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 V(t_1)V(t_2) \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \theta(t_2 - t_1) V(t_2)V(t_1),
 \end{aligned} \tag{4.223}$$

podemos renomear as variáveis mudas no segundo termo do lado direito, portanto substituimos $t_1 \rightarrow t_2$ e $t_2 \rightarrow t_1$:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 T\{V(t_1)V(t_2)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 V(t_1)V(t_2) \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \theta(t_1 - t_2) V(t_1)V(t_2) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 V(t_1)V(t_2) + \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \int_{-\infty}^{t_1} dt_1 V(t_1)V(t_2) \\
 &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 V(t_1)V(t_2).
 \end{aligned} \tag{4.224}$$

Esse processo pode sempre ser realizado de modo que possamos somar as integrais dos $n!$ termos do produto temporalmente ordenado de n operadores $V(t_i)$. Portanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T\{V(t_1) \dots V(t_n)\} = n! \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n V(t_1) \dots V(t_n), \tag{4.225}$$

e portanto voltamos à (4.221) escrevendo:

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots dt_n T\{V(t_1) \dots V(t_n)\}. \tag{4.226}$$

Esse resultado é conhecido como série de Dyson. Se os V 's comutarem para qualquer tempo, podemos escrever essa série como:

$$S = \exp \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} dt V(t) \right), \tag{4.227}$$

mas essa não é uma situação comum. Por vezes também se escreve (WEINBERG, 1995, p. 144):

$$S = T \exp \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} dt V(t) \right), \quad (4.228)$$

onde o T indica que há ordenamento temporal de cada termo da expansão da exponencial.

4.4.1 Condições sobre o termo de interação para que a matriz-S seja invariante de Poincaré

Podemos usar a expressão (4.227) para procurar as condições que tornam a matriz-S invariante de Poincaré. Os elementos dessa matriz são construídos pela atuação do operador S sobre estados multiparticulares como descrito em (4.49). Queremos que este operador comute com transformações de Poincaré:

$$U_0(\Lambda, a) S U_0^\dagger(\Lambda, a) = S. \quad (4.229)$$

Substituindo (4.227) nessa equação temos:

$$U_0(\Lambda, a) \left(\exp \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} dt V(t) \right) \right) U_0^\dagger(\Lambda, a) = \exp \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} dt V(t) \right). \quad (4.230)$$

Podemos estender essa análise diretamente para o argumento da exponencial, já que a relação deve ser satisfeita termo a termo por cada elemento de sua expansão:³¹

$$U_0(\Lambda, a) \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} dt V(t) \right) U_0^\dagger(\Lambda, a) = -i \int_{-\infty}^{\infty} dt V(t) \quad (4.231)$$

$$U_0(\Lambda, a) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dt V(t) \right) U_0^\dagger(\Lambda, a) = \int_{-\infty}^{\infty} dt V(t). \quad (4.232)$$

Podemos supor que $V(t)$ é uma integral no espaço de um escalar (WEINBERG, 1995, p. 144)

$$V(t) = \int d^3x \mathcal{H}(t, \vec{x}), \quad (4.233)$$

onde $\mathcal{H}(t, \vec{x})$ é escalar se respeita:

$$U_0(\Lambda, a) \mathcal{H}(x) U_0^{-1}(\Lambda, a) = \mathcal{H}(\Lambda x + a). \quad (4.234)$$

³¹ $U_0(\Lambda, a)$ é o produto de uma transformação do subgrupo ortócrono-próprio de Lorentz com uma translação, pois a paridade e a reversão temporal devem ser consideradas separadamente já que não estão continuamente ligadas à identidade. Portanto, U_0 é sempre unitário, e podemos passar a unidade imaginária à sua esquerda sem troca de sinal.

Essa forma garante que (4.231) seja satisfeita, o que verificamos substituindo (4.233):

$$\begin{aligned}
U_0(\Lambda, a) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3x \mathcal{H}(t, \vec{x}) \right) U_0^\dagger(\Lambda, a) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3x \mathcal{H}(t, \vec{x}) \\
U_0(\Lambda, a) \left(\int_{-\infty}^{\infty} d^4x \mathcal{H}(t, \vec{x}) \right) U_0^\dagger(\Lambda, a) &= \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \mathcal{H}(t, \vec{x}) \\
\int_{-\infty}^{\infty} d^4x U_0(\Lambda, a) \mathcal{H}(t, \vec{x}) U_0^\dagger(\Lambda, a) &= \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \mathcal{H}(t, \vec{x}) \\
\int_{-\infty}^{\infty} d^4x \mathcal{H}(\Lambda x, a) &= \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \mathcal{H}(t, \vec{x}).
\end{aligned} \tag{4.235}$$

Como os limites de integração são de $-\infty$ a $+\infty$, a integral do lado esquerdo será igual se trocarmos a variável de integração para $x \rightarrow x' = \Lambda x + a$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^4x' \mathcal{H}(x') = \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \mathcal{H}(t, \vec{x}), \tag{4.236}$$

contudo, x' é uma variável muda, e portanto podemos trocá-la por x , tornando os dois lados da igualdade explicitamente idênticos e provando que $V(t)$ definido como em (4.233) e (4.234) satisfaz a condição de invariância de Lorentz em (4.231).

Voltamos portanto com (4.233) em (4.226) e chegamos em:

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \dots d^4x_n T \{ \mathcal{H}(x_1) \dots \mathcal{H}(x_n) \}. \tag{4.237}$$

Nessa expressão, contudo, o símbolo de ordenação temporal T ainda não é necessariamente invariante de Lorentz (WEINBERG, 1995, p. 144). Para garantir sua invariância, temos que impor restrições a mais sobre $\mathcal{H}(x)$. Para ordenamentos do tipo tempo e do tipo luz³² é garantido que $x_1^0 > x_2^0 \Rightarrow (\Lambda x_1)^0 > (\Lambda x_2)^0$ e portanto o ordenamento temporal dos operadores é invariante. Contudo, para separações do tipo espaço³³, precisamos impor a comutação:³⁴

$$[\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(x')] = 0 \text{ se } (x - x')^2 < 0, \tag{4.238}$$

o que é chamada de condição de microcausalidade.

Vamos exemplificar a importância de (4.238). Consideremos um boost

$$U_0(\Lambda, 0) = 1 + i\omega_{0i} K_0^i. \tag{4.239}$$

³² i.e., $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$.

³³ i.e., $(x_1 - x_2)^2 < 0$.

³⁴ A referência (WEINBERG, 1995, p. 145) traz essa condição como $(x - x')^2 \leq 0$, onde a igualdade é também incluída por motivos além do escopo desse trabalho.

A equação (4.234) nos dá:

$$U_0(\Lambda, 0)\mathcal{H}(x)U_0^\dagger(\Lambda, 0) = \mathcal{H}(x) + i\omega_{0i}[K_0^i, \mathcal{H}(x)] \quad (4.240)$$

e também:

$$\begin{aligned} U_0(\Lambda, 0)\mathcal{H}(x)U_0^\dagger(\Lambda, 0) &= \mathcal{H}(t + \omega_{0j}x^j, x^i + \omega_{0i}t) \\ &= \mathcal{H}(x) + \omega_{0i}(t\partial_i\mathcal{H}(x) + x^i\partial_0\mathcal{H}(x)). \end{aligned} \quad (4.241)$$

Comparando os termos em ω_{0i} em (4.240) e (4.241) chegamos em:

$$i[K_0^i, \mathcal{H}(x)] = t\vec{\nabla}\mathcal{H}(x) + \vec{x}\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{H}(x). \quad (4.242)$$

Integramos essa expressão em $\vec{x}$ para obter:

$$\begin{aligned} i \int d^3x [K_0^i, \mathcal{H}(x)] &= t \int d^3x \vec{\nabla}\mathcal{H}(x) + \int d^3x \vec{x} \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{H}(x) \\ i[K_0^i, V(t)] &= t \int d^3x \vec{\nabla}\mathcal{H}(x) + \int d^3x \vec{x} \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{H}(x). \end{aligned} \quad (4.243)$$

Vamos guardar esse resultado e tomar um momento para encontrar a derivada parcial em relação ao tempo de $\mathcal{H}$ usando (4.234) com $U(\Lambda, a)$ sendo uma translação temporal em t :³⁵

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{H}(x+a) &= \frac{\partial}{\partial t} [e^{iH_0t}\mathcal{H}(x)e^{-iH_0t}] \\ &= iH_0e^{iH_0t}\mathcal{H}(x)e^{-iH_0t} + e^{iH_0t}\mathcal{H}(x)(-iH_0)e^{-iH_0t} \\ &= iH_0e^{iH_0t}\mathcal{H}(x)e^{-iH_0t} - ie^{iH_0t}\mathcal{H}(x)e^{-iH_0t}H_0 \\ &= iH_0\mathcal{H}(x+a) - i\mathcal{H}(x+a)H_0 \\ &= i[H_0, \mathcal{H}(x+a)], \end{aligned} \quad (4.244)$$

o que podemos reescrever como:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{H}(x) = i[H_0, \mathcal{H}(x)]. \quad (4.245)$$

Vamos retornar com isso em (4.243):

$$\begin{aligned} i[K_0^i, V(t)] &= t \int d^3x \vec{\nabla}\mathcal{H}(x) + \int d^3x \vec{x} i[H_0, \mathcal{H}(x)] \\ &= t \int d^3x \vec{\nabla}\mathcal{H}(x) + i \left[H_0, \int d^3x \vec{x} \mathcal{H}(x) \right]. \end{aligned} \quad (4.246)$$

³⁵ i.e., $a = (t, 0, 0, 0)$.

Tomamos $t = 0$ nessa expressão, lembrando de (4.215) que $V(0) = V$:

$$\begin{aligned} i[K_0^i, V] &= i \left[H_0, \int d^3x \vec{x} \mathcal{H}(0, \vec{x}) \right] \\ [K_0^i, V] &= \left[H_0, \int d^3x \vec{x} \mathcal{H}(0, \vec{x}) \right]. \end{aligned} \quad (4.247)$$

Resgatamos agora a relação $[K_0, V] = [H, W]$ em (4.104), e também substituímos, de (4.15), $H_0 = H - V$. Disso tiramos:

$$\begin{aligned} [H, \vec{W}] &= \left[H - V, \int d^3x \vec{x} \mathcal{H}(0, \vec{x}) \right] \\ [H, \vec{W}] &= \left[H, \int d^3x \vec{x} \mathcal{H}(0, \vec{x}) \right] - \left[V, \int d^3x \vec{x} \mathcal{H}(0, \vec{x}) \right]. \end{aligned} \quad (4.248)$$

Podemos assim finalmente supor:

$$\vec{W} = \int d^3x \vec{x} \mathcal{H}(0, \vec{x}) \quad (4.249)$$

com a relação de comutação:

$$\left[V, \int d^3x \vec{x} \mathcal{H}(0, \vec{x}) \right] = 0, \quad (4.250)$$

a qual é verificada pela relação de microcausalidade em (4.238), junto da forma de V em termos de $\mathcal{H}$ dada em (4.233):

$$\begin{aligned} \left[V, \int d^3x \vec{x} \mathcal{H}(0, \vec{x}) \right] &= \left[\int d^3x' \mathcal{H}(0, \vec{x}'), \int d^3x \vec{x} \mathcal{H}(0, \vec{x}) \right] \\ &= \int d^3x' d^3x \vec{x} \left[\mathcal{H}(0, \vec{x}'), \mathcal{H}(0, \vec{x}) \right] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.251)$$

Como associamos W e $\mathcal{H}$, nos recordamos agora da hipótese 4 na Seção 4.2.2.1, que foi necessária para obter geradores de Poincaré agindo da mesma forma sobre estados in e out:

$$(\Phi_\alpha, W \Phi_\beta) = 0 \text{ se } E_\alpha = E_\beta, \quad (4.252)$$

o que se torna:

$$\left(\Phi_\alpha, \int d^3x \vec{x} \mathcal{H}(0, \vec{x}) \Phi_\beta \right) = 0 \text{ se } E_\alpha = E_\beta. \quad (4.253)$$

Integramos essa expressão nas coordenadas espaciais para obtermos também:

$$(\Phi_\alpha, V\Phi_\beta) = 0 \text{ se } E_\alpha \neq E_\beta. \quad (4.254)$$

Isso nos mostra que uma matriz $V_{\alpha\beta} = (\Phi_\alpha, V\Phi_\beta)$ não pode ser diagonal³⁶ na base de autoestados de H_0 , o que reforça que V e H_0 não comutam, condição imprescindível para que os autoestados de H e H_0 sejam distintos.

Recapitulando, nessa seção descobrimos quatro condições que o termo de interação V deve satisfazer para que a matriz-S com ele construída seja invariante de Lorentz. Essas condições são:

- i. $V(t) = e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t} = \int d^3x \mathcal{H}(t, \vec{x});$
- ii. $U_0(\Lambda, a) \mathcal{H}(x) U_0^\dagger(\Lambda, a) = \mathcal{H}(\Lambda x + a);$
- iii. $[\mathcal{H}(x'), \mathcal{H}(x)] = 0, \text{ se } (x' - x)^2 \leq 0;$
- iv. os elementos $(\Phi_\beta, \mathcal{H}(0, \vec{x}) \Phi_\alpha)$ devem formar uma matriz cujos elementos são funções suaves das energias E_β e E_α .

Retornaremos frequentemente a essas condições nos próximos capítulos. É a necessidade de respeitá-las, junto ao Princípio da Decomposição em Cluster, que nos levará por fim a introduzir os campos quânticos no Capítulo 6.

³⁶ Uma matriz diagonal é aquela em que todos os elementos fora da diagonal principal são nulos.

5 PRINCÍPIO DA DECOMPOSIÇÃO EM CLUSTER

Neste capítulo iremos mostrar que qualquer operador pode ser construído como uma soma de produtos de operadores que criam e destroem partículas. Essa construção é vantajosa na descrição de teorias sobre processos que envolvem criação e destruição de partículas, massivas ou não, mas para nosso estudo ela apresenta outra vantagem: o Hamiltoniano construído com esses operadores satisfaz naturalmente o Princípio da Decomposição em Cluster (PDC), que equivale à necessidade física de que experimentos que ocorrem à grande distância apresentem resultados não correlacionados. Iniciaremos o capítulo com uma introdução a bósons e férmions e depois prosseguiremos com os operadores de criação e aniquilação para chegarmos por fim ao estudo das implicações do PDC sobre a matriz-S e sobre H .

5.1 OPERADORES DE CRIAÇÃO E ANIQUILAÇÃO DE BÓSONS E FÉRMIONS

5.1.1 Normalização de estados de bósons e férmions

Como vimos no capítulo anterior,¹ um estado físico de uma ou mais partículas pode ser representado por

$$\Phi_{p_1\sigma_1n_1,\dots,p_m\sigma_mn_m}, \quad (5.1)$$

onde os rótulos p , σ e n dizem respeito ao momento, ao spin e ao tipo de cada partícula, respectivamente. A ordem dos rótulos não muda o estado físico a que eles correspondem, portanto:

$$\Phi_{p\sigma n,\dots,p'\sigma'n',\dots} = \alpha \Phi_{p'\sigma'n',\dots,p\sigma n,\dots} \quad (5.2)$$

onde α é uma fase que depende apenas das duas partículas trocadas. Mais uma vez, incluímos a possibilidade de que surja uma fase pois no espaço de Hilbert as simetrias devem manter invariantes as classes de raios de vetores de estado que equivalem a um estado físico real, e não o estado em si. Um estado qualquer é tão bem representado por Ψ quanto por $\alpha\Psi$, como discutimos na Seção 2.2.

Façamos duas trocas seguidas de rótulos de partículas, usando (5.2):

$$\begin{aligned} \Phi_{p\sigma n,\dots,p'\sigma'n',\dots} &= \alpha \Phi_{p'\sigma'n',\dots,p\sigma n,\dots} \\ &= \alpha^2 \Phi_{p\sigma n,\dots,p'\sigma'n',\dots}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

e portanto:

$$\alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \pm 1. \quad (5.4)$$

¹ Equação (4.3).

Temos assim:

$$\Phi_{p\sigma n, \dots, p'\sigma' n', \dots} = \pm \Phi_{p'\sigma' n', \dots, p\sigma n, \dots} \quad (5.5)$$

Todas as partículas são classificadas como bósons ou como férmions. A convenção é que o vetor de estado é simétrico ($\alpha = 1$) para a permutação de dois bósons ou de um bóson por um férmion, e antissimétrico ($\alpha = -1$) pela permutação de dois férmions.² Essa convenção, contudo, parte do pressuposto de que α depende apenas do tipo de partícula permutada, ou seja, depende apenas dos rótulos n e n' . Isso se justifica, contudo, pois se α dependesse dos rótulos de projeção de spin ou helicidade,³ σ , ela precisaria se transformar como uma representação do grupo de rotação $SO(3)$, e não há representações unidimensionais não-triviais do grupo de rotação na forma de fases (WEINBERG, 1995, p. 171); caso α dependesse dos momentos p e p' , devido à invariância de Lorentz ela apenas poderia depender do fator invariante $p^\mu p'_\mu$, que é simétrico em relação a p e p' e portanto não altera a linha de raciocínio que nos levou a $\alpha = \pm 1$.

Vamos escrever os rótulos p , σ e n de uma partícula com um único multi-índice q :

$$q \longmapsto p\sigma n, \quad (5.6)$$

e vamos revisitar a condição de normalização que havíamos definido em (4.8). Para um estado composto de nenhuma partícula — ou seja, um estado de vácuo — definimos em (3.104) que a normalização é:

$$(\Phi_0, \Phi_0) = 1. \quad (5.7)$$

Vamos definir:

$$\delta(q - q') \equiv \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{\sigma'\sigma} \delta_{n'n} \quad (5.8)$$

e usar esse delta para escrevermos, para o caso da normalização entre dois estados de uma partícula:

$$(\Phi_q, \Phi_{q'}) = \delta(q - q'). \quad (5.9)$$

Para estados de duas partículas, contudo, temos que tomar uma precaução a mais pois os estados $\Phi_{q_1 q_2}$ e $\Phi_{q_2 q_1}$ são idênticos fisicamente. Portanto escrevemos:

$$(\Phi_{q_1 q_2}, \Phi_{q'_1 q'_2}) = \delta(q_1 - q'_1) \delta(q_2 - q'_2) \pm \delta(q_1 - q'_2) \delta(q_2 - q'_1), \quad (5.10)$$

onde o sinal $\pm$ abriga a possibilidade de que as partículas permutadas no segundo delta sejam dois férmions, em cujo caso devemos escolher o sinal negativo. Notamos que, caso estivéssemos lidando

² Partículas de spin inteiro são bósons, e partículas de spin semi-inteiro, como elétrons, são férmions (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOË, 2005, p. 362). Vamos demonstrar no Capítulo 6 que as partículas de spin-0 e spin-1 precisam ser bósons, e uma demonstração geral desta afirmação pode ser encontrada na referência (WEINBERG, 1995, p. 233–240).

³ Projeção de spin no caso de partículas massivas e helicidade no caso de partículas de massa nula.

com estados de mais partículas, o sinal dependeria também de se estamos fazendo uma quantidade par ou ímpar de permutações de férmions, pois numa permutação par de férmions os sinais negativos se anulariam.

Com esses resultados em mente, generalizamos a normalização de dois estados de M e N partículas como:

$$(\Phi_{q_1, \dots, q_M}, \Phi_{q'_1, \dots, q'_N}) = \delta_{MN} \sum_{\mathcal{P}} \delta_{\mathcal{P}} \prod_i \delta(q_i - q'_{\mathcal{P}_i}), \quad (5.11)$$

onde a soma em $\mathcal{P}$ indica uma soma sobre todas as permutações possíveis das partículas de 1 a N no estado $\Phi_{q_1, \dots, q_N}$, e essa permutação resulta na troca dos q'_i pelos q'_s permutados $q'_{\mathcal{P}_i}$. O $\delta_{\mathcal{P}}$ é igual a -1 se a permutação $\mathcal{P}$ envolve uma permutação ímpar de férmions, e $+1$ em qualquer outro caso. O delta δ_{MN} , por sua vez, traduz a necessidade de que os dois estados tenham o mesmo número de partículas para que o produto interno não seja nulo, já que estados com quantidades distintas de partículas não podem ser equivalentes.

5.1.2 Ação dos operadores de criação e aniquilação sobre estados físicos

Definimos os operadores de criação e aniquilação a partir de sua ação sobre estados multipartículas. Um operador de criação $a^\dagger(q) = a^\dagger(p, \sigma, n)$ adiciona os rótulos q dos números quânticos de uma partícula à esquerda da lista de partículas de um dado estado:⁴

$$a^\dagger(q)\Phi_{q_1 q_2 \dots q_N} \equiv \Phi_{q q_1 q_2 \dots q_N}. \quad (5.12)$$

Com esses operadores, qualquer estado de uma ou mais partículas pode ser escrito através da ação de operadores de criação agindo sobre o vácuo:

$$a^\dagger(q_1)a^\dagger(q_2)\dots a^\dagger(q_N)\Phi_0 = \Phi_{q_1 q_2 \dots q_N}. \quad (5.13)$$

O operador de aniquilação $a(q) = a(p, \sigma, n)$, que remove uma partícula de números quânticos q de um estado, é definido de forma um pouco mais complicada. Em uma forma geral, a partícula q pode estar em qualquer posição dentre os rótulos do estado $\Phi_{q_1, \dots, q_N}$ sobre o qual operarmos com $a(q)$, e portanto precisamos verificar se alguma r -ésima partícula é tal que $q_r = q$ para a eliminarmos. Vamos supor que $\Phi_{q_1, \dots, q_N}$ seja um estado só de bósons ou só de férmions. Podemos escrever uma soma de

⁴ Há um aspecto técnico que deve ser mencionado aqui. A quantidade $p_\mu p^\mu = m^2$ tem seu valor fixado pelo rótulo n , que se refere à espécie de partícula com a qual estamos lidando, já que a massa é uma característica dessa espécie. Desse modo, como $p^0 = \sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2}$, é correto dizer que $a^\dagger$ é uma função de σ , n e do momento tridimensional $\vec{p}$, já que p^0 pode simplesmente ser tratado como uma função de $\vec{p}$ e de n . A única exceção que poderíamos ter seria se aplicássemos alguma transformação que muda o sinal de p^0 , mas não temos nenhum operador que faça essa transformação sobre o quadrimomento carregado por estados físicos. Esse aspecto trará consequências relevantes no Capítulo 6, onde integraremos $a^\dagger(q)$ em d^3p .

permutações dos rótulos desse estado como

$$\sum_{r=1}^N (\pm)^{r+1} \Phi_{q_r q_1 \dots q_{r-1} q_{r+1} \dots q_N}, \quad (5.14)$$

onde adotamos o sinal negativo no termo $(\pm)^{r+1}$ caso todas as partículas sejam férmions.⁵ Vamos remover a partícula q_r do estado permutado caso ela seja tal que $q = q_r$ e vamos usar um delta $\delta(q - q_r)$ para descartar o estado permutado caso $q \neq q_r$, de modo que definimos a forma geral da atuação de $a(q)$ como:

$$a(q) \Phi_{q_1, \dots, q_N} = \sum_{r=1}^N (\pm)^{r+1} \delta(q - q_r) \Phi_{q_1, \dots, q_{r-1}, q_{r+1}, \dots, q_N}. \quad (5.15)$$

Uma consequência dessa definição é que:

$$a(q) \Psi_0 = 0, \quad (5.16)$$

ou seja, o operador de aniquilação aniquila o vácuo. Na verdade, ele também aniquila qualquer estado que não possua uma partícula com os mesmos números quânticos do rótulo q que carrega.

Os operadores de criação e de aniquilação são adjuntos um do outro. Vemos isso tomando:

$$\begin{aligned} (\Phi_{q'_1, \dots, q'_M}, a(q) \Phi_{q_1, \dots, q_N}) &= (a^\dagger(q) \Phi_{q'_1, \dots, q'_M}, \Phi_{q_1, \dots, q_N}) \\ &= (\Phi_{qq'_1, \dots, q'_M}, \Phi_{q_1, \dots, q_N}). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Aplicamos agora a equação de normalização em (5.11):

$$(\Phi_{qq'_1, \dots, q'_M}, \Phi_{q_1, \dots, q_N}) = \delta_{M+1, N} \sum_{\mathcal{P}} \delta_{\mathcal{P}} \prod_i \delta(q_i - q'_{\mathcal{P}_i}). \quad (5.18)$$

Podemos realizar a permutação $\mathcal{P}$ de $1, 2, \dots, N$ como duas permutações:

- i. a permutação da r -ésima partícula até a primeira posição,
- ii. a permutação $\bar{\mathcal{P}}$ das $N - 1$ partículas restantes.

⁵ Por exemplo, tomemos um estado $\Phi_{q_1 q_2 q_3 q_4}$, cujas partículas são férmions. As quatro permutações que teríamos em (5.14) são:

$$\begin{aligned} \Phi_{q_1 q_2 q_3 q_4} &= \Phi_{q_1 q_2 q_3 q_4}, & \Phi_{q_1 q_2 q_3 q_4} &= -\Phi_{q_2 q_1 q_3 q_4}, \\ \Phi_{q_1 q_2 q_3 q_4} &= -\Phi_{q_1 q_3 q_2 q_4} = \Phi_{q_3 q_1 q_2 q_4}, & \Phi_{q_1 q_2 q_3 q_4} &= -\Phi_{q_1 q_2 q_4 q_3} = \Phi_{q_1 q_4 q_2 q_3} = -\Phi_{q_4 q_1 q_2 q_3}. \end{aligned}$$

Com isso, temos:

$$\partial_{\mathcal{P}} = (\pm)^{r-1} \partial_{\bar{\mathcal{P}}}, \quad (5.19)$$

onde o termo $(\pm)^{r-1}$ vem da possível permutação de férmions no passo **i**. Podemos voltar à (5.18) e escrever:

$$(\Phi_{qq'_1, \dots, q'_M}, \Phi_{q_1, \dots, q_N}) = \delta_{M+1, N} \sum_{r=1}^N \sum_{\bar{\mathcal{P}}} (\pm)^{r-1} \delta_{\bar{\mathcal{P}}} \delta(q - q_r) \prod_i \delta(q_i - q'_{\bar{\mathcal{P}}_i}). \quad (5.20)$$

Note que $\delta(q - q_r)$ é o primeiro delta do produtório $\prod_i \delta(q_i - q'_{\bar{\mathcal{P}}_i})$ em (5.18). Podemos, usando mais uma vez a equação de normalização (5.11), observar que:

$$\delta_{M, N-1} \sum_{\bar{\mathcal{P}}} \delta_{\bar{\mathcal{P}}} \prod_i \delta(q_i - q'_{\bar{\mathcal{P}}_i}) = (\Phi_{q'_1, \dots, q'_M}, \Phi_{q_1, \dots, q_{r-1}, q_{r+1}, \dots, q'_N}), \quad (5.21)$$

e com isso retornamos à (5.20) para chegarmos em:⁶

$$(\Phi_{q'_1, \dots, q'_M}, a(q) \Phi_{q_1, \dots, q_N}) = \delta_{M+1, N} \sum_{r=1}^N (\pm)^{r-1} \delta(q - q_r) (\Phi_{q'_1, \dots, q'_M}, \Phi_{q_1, \dots, q_{r-1}, q_{r+1}, \dots, q'_N}). \quad (5.22)$$

Este é o resultado que se obtém simplesmente aplicando (5.15) em $(\Phi_{q'_1, \dots, q'_M}, a(q) \Phi_{q_1, \dots, q_N})$. Como chegamos nele supondo que o operador de criação e aniquilação são adjuntos⁷, provamos que eles, de fato, o são.

5.1.3 Relações de comutação dos operadores de criação e aniquilação

Tendo encontrado suas respectivas definições, vamos agora buscar as relações de comutação e anticomutação respeitadas pelos operadores de criação e aniquilação. Primeiro, multiplicamos um operador de aniquilação $a(q')$ pela esquerda na definição do operador de criação em (5.12) e depois aplicamos a definição do operador de aniquilação em (5.15):

$$\begin{aligned} a(q') a^\dagger(q) \Phi_{q_1 q_2 \dots q_N} &= a(q') \Phi_{q q_1 q_2 \dots q_N} \\ a(q') a^\dagger(q) \Phi_{q_1 q_2 \dots q_N} &= \delta(q' - q) \Phi_{q_1, \dots, q_N} + \sum_{r=1}^N (\pm)^{r+2} \delta(q' - q_r) \Phi_{q q_1, \dots, q_{r-1}, q_{r+1}, \dots, q_N}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

onde temos $(\pm)^{r+2}$ em vez de $(\pm)^{r+1}$ devido ao rótulo q que foi criado por $a^\dagger(q)$, e $\delta(q' - q) \Phi_{q_1, \dots, q_N}$ ser apenas o primeiro termo do somatório de permutações, que foi explicitado para evitar confusão na notação do somatório devido à sua ausência de numeração.

Guardamos este resultado e operamos com $a^\dagger(q)$ na equação do operador de aniquilação em (5.15):

⁶ Ignoramos o delta $\delta_{M, N-1}$ pois $\delta_{M, N-1} = \delta_{M+1, N}$.

⁷ Essa suposição está por trás da primeira passagem em (5.17).

$$\begin{aligned}
a^\dagger(q)a(q')\Phi_{q_1,\dots,q_N} &= a^\dagger(q)\sum_{r=1}^N(\pm)^{r+1}\delta(q'-q_r)\Phi_{q_1,\dots,q_{r-1},q_{r+1},q_N} \\
&= \sum_{r=1}^N(\pm)^{r+1}\delta(q'-q_r)\Phi_{qq_1,\dots,q_{r-1},q_{r+1},\dots,q_N}.
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Somando (5.23) e (5.24) obtemos:

$$\begin{aligned}
[a(q')a^\dagger(q) + a^\dagger(q)a(q')]\Phi_{q_1,q_2,\dots,q_N} &= \delta(q'-q)\Phi_{q_1,\dots,q_N} \\
&+ \sum_{r=1}^N(\pm)^{r+1}[(\pm) + 1]\delta(q'-q_r)\Phi_{qq_1,\dots,q_{r-1},q_{r+1},\dots,q_N},
\end{aligned} \tag{5.25}$$

enquanto a subtração de (5.24) de (5.23) fornece:

$$\begin{aligned}
[a(q')a^\dagger(q) - a^\dagger(q)a(q')]\Phi_{q_1,q_2,\dots,q_N} &= \delta(q'-q)\Phi_{q_1,\dots,q_N} \\
&+ \sum_{r=1}^N(\pm)^{r+1}[(\pm) - 1]\delta(q'-q_r)\Phi_{qq_1,\dots,q_{r-1},q_{r+1},\dots,q_N}.
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Assim, identificamos:

$$a(q')a^\dagger(q) \mp a^\dagger(q)a(q') = \delta(q'-q), \tag{5.27}$$

onde o sinal superior é usado para bósons, e o inferior para férmions. Essa é a convenção que usaremos daqui em diante.

Aplicamos agora um operador $a^\dagger(q')$ em (5.12):

$$\begin{aligned}
a^\dagger(q')a^\dagger(q)\Phi_{q_1,q_2,\dots,q_N} &= a^\dagger(q')\Phi_{q,q_1,q_2,\dots,q_N} \\
&= \Phi_{q',q,q_1,q_2,\dots,q_N}.
\end{aligned} \tag{5.28}$$

De modo similar temos:

$$\begin{aligned}
a^\dagger(q)a^\dagger(q')\Phi_{q_1,q_2,\dots,q_N} &= a^\dagger(q)\Phi_{q',q_1,q_2,\dots,q_N} \\
&= \Phi_{q,q',q_1,q_2,\dots,q_N} \\
&= (\pm)\Phi_{q',q,q_1,q_2,\dots,q_N}.
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Somando ou subtraindo essas duas igualdades dependendo se, respectivamente, q e q' são ou não

ambos férmions, obtemos:

$$a^\dagger(q')a^\dagger(q) \mp a^\dagger(q)a^\dagger(q') = 0. \quad (5.30)$$

Tomando o adjunto desse resultado chegamos em:

$$a(q')a(q) \mp a(q)a(q') = 0. \quad (5.31)$$

Recapitulando os resultados dessa seção, as relações de comutação e anticomutação que obtivemos em (5.27), (5.30) e (5.31) são:

$$\begin{aligned} a(q')a^\dagger(q) \mp a^\dagger(q)a(q') &= \delta(q' - q); \\ a^\dagger(q')a^\dagger(q) \mp a^\dagger(q)a^\dagger(q') &= 0; \\ a(q')a(q) \mp a(q)a(q') &= 0; \end{aligned} \quad (5.32)$$

onde, em todos os casos, usamos o sinal superior quando pelo menos uma das partículas é um bóson e o inferior quando ambas são férmions.

5.1.4 Construção de operadores a partir de operadores de criação e aniquilação

Chegamos a um importante teorema: qualquer operador $\mathcal{O}$ pode ser expresso como uma soma de produtos de operadores de criação e aniquilação (WEINBERG, 1995, p. 175):

$$\mathcal{O} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \int dq'_1 \dots dq'_N dq_1 \dots dq_M \, a^\dagger(q'_1) \dots a^\dagger(q'_N) a(q_M) \dots a(q_1) C_{NM}(q'_1 \dots q'_N q_1 \dots q_M). \quad (5.33)$$

Para provar esse teorema, precisamos mostrar que os coeficientes C_{NM} podem ser escolhidos de modo a ser possível obter qualquer valor desejado para $(\Phi_\beta, \mathcal{O}\Phi_\alpha)$. Iniciamos com $M = N = 0$ e mostramos que:

$$\begin{aligned} (\Psi_0, \mathcal{O}\Psi_0) &= (\Psi_0, C_{00}\Psi_0) \\ &= C_{00}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

ou seja, podemos usar o estado de vácuo para obter o valor do coeficiente C_{00} . Vamos agora desenvolver o elemento de matriz de $\mathcal{O}$ entre dois estados de L e K partículas:⁸

⁸ Vamos omitir a notação do argumento dos coeficientes C_{NM} nas passagens a seguir.

$$\begin{aligned}
(\Phi_{\bar{q}'_1, \dots, \bar{q}'_L}, \mathcal{O}\Phi_{\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_K}) &= \left(\Phi_{\bar{q}'_1, \dots, \bar{q}'_L}, \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \int dq'_1 \dots dq'_N dq_1 \dots dq_M \right. \\
&\quad \times a^\dagger(q'_1) \dots a^\dagger(q'_N) a(q_M) \dots a(q_1) C_{NM} \Phi_{\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_K} \Big) \\
&= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \int (dq'_1 \dots dq'_N a(q'_N) \dots a(q'_1) \Phi_{\bar{q}'_1, \dots, \bar{q}'_L}, \\
&\quad \times dq_1 \dots dq_M a(q_M) \dots a(q_1) C_{NM} \Phi_{\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_K}).
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Temos, portanto, uma soma de integrais de produtos internos da ação de operadores de aniquilação sobre os dois estados. Podemos limitar o somatório em N até L , e o somatório em M até K , visto que se tentarmos aniquilar mais partículas do que o estado possui, acabaremos por aniquilar o vácuo e o produto interno irá a zero. Com essa consideração continuamos o desenvolvimento:

$$\begin{aligned}
(\Phi_{\bar{q}'_1, \dots, \bar{q}'_L}, \mathcal{O}\Phi_{\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_K}) &= \sum_{N=0}^L \sum_{M=0}^K \int (dq'_1 \dots dq'_N a(q'_N) \dots a(q'_1) \Phi_{\bar{q}'_1, \dots, \bar{q}'_L}, \\
&\quad dq_1 \dots dq_M a(q_M) \dots a(q_1) C_{NM} \Phi_{\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_K}) \tag{5.36}
\end{aligned}$$

e explicitamos o termo de $N = L$ e de $M = K$ do somatório:

$$\begin{aligned}
(\Phi_{\bar{q}'_1, \dots, \bar{q}'_L}, \mathcal{O}\Phi_{\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_K}) &= \int (dq'_1 \dots dq'_L a(q'_L) \dots a(q'_1) \Phi_{\bar{q}'_1, \dots, \bar{q}'_L}, dq_1 \dots dq_K a(q_K) \dots a(q_1) C_{LK} \Phi_{\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_K}) \\
&\quad + \sum_{M=0}^{K-1} \int (dq'_1 \dots dq'_L a(q'_L) \dots a(q'_1) \Phi_{\bar{q}'_1, \dots, \bar{q}'_L}, dq_1 \dots dq_M a(q_M) \dots a(q_1) C_{LM} \Phi_{\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_K}) \\
&\quad + \sum_{N=0}^{L-1} \sum_{M=0}^K \int (dq'_1 \dots dq'_N a(q'_N) \dots a(q'_1) \Phi_{\bar{q}'_1, \dots, \bar{q}'_L}, dq_1 \dots dq_M a(q_M) \dots a(q_1) C_{NM} \Phi_{\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_K}). \tag{5.37}
\end{aligned}$$

Para desenvolver o primeiro termo, usamos (5.15) para notar que:

$$\begin{aligned}
\int dq_1 \dots dq_s a(q_1) \dots a(q_s) \Phi_{\bar{q}_1 \dots \bar{q}_s} &= \int dq_1 \dots dq_s a(q_1) \dots a(q_{s-1}) \sum_{r_1=1}^s (\pm)^{r+1} \\
&\quad \times \delta(q_s - \bar{q}_{r_1}) \Phi_{\bar{q}_1 \dots \bar{q}_{r_1-1} \bar{q}_{r_1+1} \dots \bar{q}_s} \\
&= \int dq_1 \dots dq_s a(q_1) \dots a(q_{s-2}) \sum_{r_1=1}^s \sum_{\substack{r_2=1 \\ r_2 \neq r_1}}^s (\pm)^{r_1+r_2+1} \\
&\quad \times \delta(q_{s-1} - \bar{q}_{r_2}) \delta(q_s - \bar{q}_{r_1}) \Phi_{\bar{q}_1 \dots \bar{q}_{r_1-1} \bar{q}_{r_1+1} \dots \bar{q}_{r_2-1} \bar{q}_{r_2+1} \dots \bar{q}_s} \tag{5.38}
\end{aligned}$$

onde o somatório em r_1 é constituído de s elementos, e o somatório em r_2 é constituído de $s - 1$ elementos pois ele age sobre um estado de $s - 1$ partículas. Seguindo até à ação de $a(q_1)$ temos:

$$\begin{aligned} \int dq_1 \dots dq_s a(q_1) \dots a(q_s) \Phi_{\bar{q}_1 \dots \bar{q}_s} &= \int dq_1 \dots dq_s \sum_{r_1=1}^s \sum_{\substack{r_2=1 \\ r_2 \neq r_1}}^s \dots \sum_{\substack{r_{s-1}=1 \\ r_{s-1} \neq r_1 \dots r_{s-2}}}^s \sum_{\substack{r_s=1 \\ r_s \neq r_1 \dots r_{s-1}}}^s (\pm)^{r_1 + \dots + r_s + 1} \\ &\times \delta(q_s - \bar{q}_{r_1}) \delta(q_{s-1} - \bar{q}_{r_2}) \dots \delta(q_2 - \bar{q}_{r_{s-1}}) \delta(q_1 - \bar{q}_{r_s}) \Phi_0. \end{aligned} \quad (5.39)$$

O termo $(\pm)^{r_1 + \dots + r_s + 1}$ será sempre $(\pm)^{(1 + \dots + s) + 1}$, independente do estágio da soma em cada somatório. Efetuando todas as integrais na expressão acima temos:⁹

$$\begin{aligned} \int dq_1 \dots dq_s a(q_1) \dots a(q_s) \Phi_{\bar{q}_1 \dots \bar{q}_s} &= (\pm)^{(1 + \dots + s) + 1} \sum_{r_1=1}^s \sum_{\substack{r_2=1 \\ r_2 \neq r_1}}^s \dots \sum_{\substack{r_{s-1}=1 \\ r_{s-1} \neq r_1 \dots r_{s-2}}}^s \sum_{\substack{r_s=1 \\ r_s \neq r_1 \dots r_{s-1}}}^s \Phi_0 \\ &= (\pm)^{(1 + \dots + s) + 1} (s)(s-1) \dots 2 \cdot 1 \Phi_0 \\ &= (\pm)^{(1 + \dots + s) + 1} s! \Phi_0. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Voltamos com esse resultado em (5.37), indicando os dois últimos termos dessa equação como $f(C_{NM})$:¹⁰

$$\begin{aligned} (\Phi_{\bar{q}'_1, \dots, \bar{q}'_L}, \mathcal{O} \Phi_{\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_K}) &= (L! (\pm)^{(1 + \dots + L) + 1} \Phi_0, C_{LK}(\bar{q}'_1 \dots \bar{q}'_L \bar{q}_1 \dots \bar{q}_K) K! (\pm)^{(1 + \dots + K) + 1} \Phi_0) + f(C_{NM}) \\ &= (\pm)^{(1 + \dots + L) + 1} (\pm)^{(1 + \dots + K) + 1} L! K! C_{LK}(\bar{q}'_1 \dots \bar{q}'_L \bar{q}_1 \dots \bar{q}_K) (\Phi_0, \Phi_0) + f(C_{NM}) \\ &= (\pm)^{(1 + \dots + L) + (1 + \dots + K) + 1} L! K! C_{LK}(\bar{q}'_1 \dots \bar{q}'_L \bar{q}_1 \dots \bar{q}_K) (\Phi_0, \Phi_0) + f(C_{NM}). \end{aligned} \quad (5.41)$$

Podemos absorver o sinal $(\pm)^{(1 + \dots + L) + (1 + \dots + K) + 1}$ em C_{LK} , já que ele é uma função de L e K . Como resultado dessa expressão, se tivermos os valores de C_{NM} definidos para todos os valores tais que $N < L$ e $M \leq K$ ou $N \leq L$ e $M < K$, temos¹¹

$$(\Phi_{q'_1, \dots, q'_L}, \mathcal{O} \Phi_{q_1, \dots, q_K}) = L! K! C_{LK}(q'_1 \dots q'_L q_1 \dots q_K) + f(C_{NM}) \quad (5.42)$$

e a partir dessa expressão podemos escolher o valor de C_{LK} que for necessário para garantir o valor desejado de $(\Phi_{q'_1, \dots, q'_L}, \mathcal{O} \Phi_{q_1, \dots, q_K})$. O único valor que não poderia ser obtido dessa forma seria C_{00} , mas já mostramos que ele pode ser obtido facilmente através do valor esperado de $\mathcal{O}$ para o estado de vácuo. Assim, todas as funções-coeficiente C podem ser obtidas para qualquer operador que estivermos buscando representar por uma soma de produtos de operadores de criação e aniquilação.

Antes de prosseguirmos, vamos observar um exemplo de operador escrito como em (5.33). O

⁹ Aqui usamos $\int dx \delta(x - a) = 1$.

¹⁰ Vale ressaltar que, quando efetuamos as integrais em (5.37), C_{LK} , que era função dos rótulos de integração $q'_1, \dots, q'_L$ e $q_1, \dots, q_K$ se torna função dos rótulos de estado $\bar{q}'_1, \dots, \bar{q}'_L$ e $\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_K$, devido ao fato de que $\int dx \delta(x - a) f(x) = f(a)$.

¹¹ Notamos que $f(C_{NM})$ são os termos relacionados aos C_{NM} com $N < L$ e $M \leq K$ ou $N \leq L$ e $M < K$.

Hamiltoniano livre se torna:

$$H_0 = \int dq \ a^\dagger(q)a(q)E(q), \quad (5.43)$$

onde a energia $E(q)$ é $E(\vec{p}, \sigma, n) = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_n^2}$. Podemos verificar a validade dessa expressão aplicando-a sobre um estado multiparticular $\Phi_{q_1, \dots, q_N}$:¹²

$$\begin{aligned} H_0 \Phi_{q_1, \dots, q_N} &= \int dq \ a^\dagger(q)a(q)E(q)\Phi_{q_1, \dots, q_N} \\ &= \int dq \ E(q)a^\dagger(q) \sum_{r=1}^N (\pm)^{r+1} \delta(q - q_r) \Phi_{q_1, \dots, q_{r-1}, q_{r+1}, \dots, q_N} \\ &= \int dq \ E(q) \sum_{r=1}^N (\pm)^{r+1} \delta(q - q_r) \Phi_{q_1, \dots, q_{r-1}, q, q_{r+1}, \dots, q_N} \\ &= \sum_{r=1}^N \int dq \ E(q) \delta(q - q_r) \Phi_{q_1, \dots, q_{r-1}, q, q_{r+1}, \dots, q_N}, \end{aligned} \quad (5.44)$$

onde, na última linha, permutamos a partícula criada por $a^\dagger(q)$ até a r -ésima posição, de modo que o sinal $(\pm)^{r+1}$ foi compensado pelo sinal dessa última permutação. Efetuando agora a integral obtemos:¹³

$$\begin{aligned} H_0 \Phi_{q_1, \dots, q_N} &= \sum_{r=1}^N E(q_r) \Phi_{q_1, \dots, q_{r-1}, q_r, q_{r+1}, \dots, q_N} \\ H_0 \Phi_{q_1, \dots, q_N} &= \left[\sum_{r=1}^N E(q_r) \right] \Phi_{q_1, \dots, q_N} \\ H_0 \Phi_{q_1, \dots, q_N} &= [E(q_1) + \dots + E(q_N)] \Phi_{q_1, \dots, q_N}, \end{aligned} \quad (5.45)$$

que é o resultado desejado para a atuação do Hamiltoniano livre sobre um estado multiparticular: o autovalor desse operador é simplesmente a soma das energias das partículas que constituem o estado.

5.1.5 Propriedades de transformação dos operadores de criação e aniquilação

É importante sabermos as propriedades de transformação dos operadores de criação e aniquilação. Sabemos de (4.5) que um estado multiparticular se transforma como:¹⁴

¹² Usamos aqui as expressões de atuação de operadores de criação e aniquilação, respectivamente em (5.12) e (5.15).

¹³ Aqui usamos uma propriedade do delta de Dirac: $\int dx \delta(x - a)f(x) = f(a)$.

¹⁴ Daqui em diante frequentemente escreveremos uma transformação genérica de Poincaré como $U_0(\Lambda, b)$ em vez de $U_0(\Lambda, a)$ para evitar confusão com os operadores de aniquilação.

$$\begin{aligned}
U(\Lambda, b)\Phi_{p_1\sigma_1n_1,p_2\sigma_2n_2\dots p_k\sigma'_kn_k} &= e^{-i(\Lambda^{-1}b)_\mu(p_1^\mu+p_2^\mu+\dots+p_k^\mu)} \sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0(\Lambda p_2)^0\dots(\Lambda p_k)^0}{p_1^0p_2^0\dots p_k^0}} \\
&\times \left[\sum_{\sigma'_1,\sigma'_2,\dots,\sigma'_k} D_{\sigma'_1\sigma}^{(j_1)}(W(\Lambda, p_1)) D_{\sigma'_2\sigma}^{(j_2)}(W(\Lambda, p_2)) \dots D_{\sigma'_k\sigma}^{(j_k)}(W(\Lambda, p_k)) \right. \\
&\quad \left. \times \Phi_{\Lambda p_1\sigma'_1n_1;\Lambda p_2\sigma'_2n_2;\dots\Lambda p_k\sigma'_kn_k} \right],
\end{aligned}$$

mas também vimos em (5.13) que tal estado pode ser construído pela ação de operadores de criação sobre o vácuo:

$$\Phi_{\Lambda p_1\sigma'_1n_1,\Lambda p_2\sigma'_2n_2,\dots,\Lambda p_k\sigma'_kn_k} = a^\dagger(\Lambda p_1\sigma'_1n_1)a^\dagger(\Lambda p_2\sigma'_2n_2)\dots a^\dagger(\Lambda p_k\sigma'_kn_k)\Phi_0.$$

Para satisfazer ambas essas equações necessárias para a nossa teoria, é suficiente que os operadores de criação se transformem como:

$$U_0(\Lambda, b)a^\dagger(p\sigma n)U_0^{-1}(\Lambda, b) = e^{-i(\Lambda b)_\mu p^\mu} \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \sum_{\bar{\sigma}} D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j)}(W(\Lambda, p))a^\dagger(\Lambda p\bar{\sigma}n). \quad (5.46)$$

Podemos mostrar a validade dessa equação considerando, por exemplo, a ação de $U_0(\Lambda, b)$ sobre um estado Φ_q de uma partícula, e aplicando (5.13):¹⁵

$$\begin{aligned}
U_0(\Lambda, b)\Phi_q &= U_0(\Lambda, b) [a^\dagger(q)\Phi_0] \\
&= U_0(\Lambda, b)a^\dagger(q)U_0^{-1}(\Lambda, b)U_0(\Lambda, b)\Phi_0 \\
&= U_0(\Lambda, b)a^\dagger(q)U_0^{-1}(\Lambda, b)\Phi_0 \\
&= e^{-i(\Lambda b)_\mu p^\mu} \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \sum_{\bar{\sigma}} D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j)}(W(\Lambda, p))a^\dagger(\Lambda p\bar{\sigma}n)\Phi_0 \\
&= e^{-i(\Lambda b)_\mu p^\mu} \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \sum_{\bar{\sigma}} D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j)}(W(\Lambda, p))\Phi_{\Lambda p\bar{\sigma}n},
\end{aligned} \quad (5.47)$$

que é o resultado esperado por (4.5).

Vamos obter agora, usando (3.137), a atuação da paridade sobre operadores de criação de partículas de massa não-nula:¹⁶

¹⁵ Aqui usamos $U_0^{-1}(\Lambda, b)U_0(\Lambda, b) = 1$ e a invariância do vácuo, $U_0(\Lambda, b)\Phi_0 = \Phi_0$, da equação (3.103).

¹⁶ Usamos aqui novamente a invariância do vácuo.

$$\begin{aligned}
P\Phi_{p,\sigma,n} &= \eta\Phi_{\mathcal{P}p,\sigma,n} \\
Pa^\dagger(p, \sigma, n)\Phi_0 &= \eta a^\dagger(\mathcal{P}p, \sigma, n)\Phi_0 \\
Pa^\dagger(p, \sigma, n)P^{-1}P\Phi_0 &= \eta a^\dagger(\mathcal{P}p, \sigma, n)\Phi_0 \\
Pa^\dagger(p, \sigma, n)P^{-1}\Phi_0 &= \eta a^\dagger(\mathcal{P}p, \sigma, n)\Phi_0.
\end{aligned} \tag{5.48}$$

Disso segue que:

$$Pa^\dagger(p, \sigma)P^{-1} = \eta a^\dagger(\mathcal{P}p, \sigma). \tag{5.49}$$

Por um processo análogo obtemos, para a reversão temporal em operadores de criação equivalentes à partículas de massa não-nula:

$$\begin{aligned}
T\Phi_{p,\sigma,n} &= (-1)^{j-\sigma}\Phi_{\mathcal{P}p,-\sigma,n} \\
Ta^\dagger(p, \sigma, n)\Phi_0 &= (-1)^{j-\sigma}a^\dagger(\mathcal{P}p, -\sigma, n)\Phi_0 \\
Ta^\dagger(p, \sigma, n)T^{-1}T\Phi_0 &= (-1)^{j-\sigma}a^\dagger(\mathcal{P}p, -\sigma, n)\Phi_0 \\
Ta^\dagger(p, \sigma, n)T^{-1} &= (-1)^{j-\sigma}a^\dagger(\mathcal{P}p, -\sigma, n).
\end{aligned} \tag{5.50}$$

Por sua vez, de (3.169) seguem, também pelo processo análogo, as seguintes propriedades de transformação para operadores de criação equivalentes a partículas de $m = 0$:

$$\begin{aligned}
Pa^\dagger(p, \sigma, n)P^{-1} &= \eta_{\sigma n} e^{\pm i\pi\sigma} a^\dagger(\mathcal{P}p, \sigma, n), \\
Ta^\dagger(p, \sigma, n)T^{-1} &= \zeta_{\sigma n} e^{\pm i\pi\sigma} a^\dagger(\mathcal{P}p, -\sigma, n).
\end{aligned} \tag{5.51}$$

É útil agora introduzirmos o operador de conjugação de carga, C . A carga é uma simetria interna, portanto, como vimos na Seção 4.2.3, ela comuta com as transformações de Poincaré. Seu efeito sobre um estado é trocar as partículas pelas suas antipartículas, as quais têm carga com sinal oposto. Indicamos esse feito por:

$$C\Phi_{p,\sigma,n} = \xi_n \Phi_{p,\sigma,n^c}, \tag{5.52}$$

onde ξ_n é a simetria de conjugação de carga, que é uma fase, e o rótulo n^c indica a antipartícula de n . A ação de C sobre um estado de várias partículas é:

$$C\Phi_{q_1, q_2, \dots, q_n} = \xi_1 \xi_2 \dots \xi_n \Phi_{q_1^c, q_2^c, \dots, q_n^c}, \tag{5.53}$$

onde indicamos a notação:

$$q_i^c \longmapsto p_i, \sigma_i, n_i^c. \tag{5.54}$$

A transformação do operador de criação sob conjugação de carga é obtida também pelo processo que foi usado ao longo dessa subseção:¹⁷

$$\begin{aligned}
C\Phi_{p,\sigma,n} &= \xi_n \Phi_{p,\sigma,n^c} \\
Ca^\dagger(p, \sigma, n)\Phi_0 &= \xi_n a^\dagger(p, \sigma, n^c)\Phi_0 \\
Ca^\dagger(p, \sigma, n)C^{-1}C\Phi_0 &= \xi_n a^\dagger(p, \sigma, n^c)\Phi_0 \\
Ca^\dagger(p, \sigma, n)C^{-1}\Phi_0 &= \xi_n a^\dagger(p, \sigma, n^c)\Phi_0,
\end{aligned} \tag{5.55}$$

de onde segue:

$$Ca^\dagger(p, \sigma, n)C^{-1} = \xi_n a^\dagger(p, \sigma, n^c). \tag{5.56}$$

Encontramos as transformações dos operadores de aniquilação tomando o adjunto das transformações dos operadores de criação. Para transformações de Poincaré, tomamos o adjunto de (5.46) e obtemos:

$$\begin{aligned}
U_0(\Lambda, b)a(p\sigma n)U_0^\dagger(\Lambda, b) &= \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \sum_{\bar{\sigma}} a(\Lambda p \bar{\sigma} n) D_{\sigma \bar{\sigma}}^{*(j)}(W(\Lambda, p)) e^{+i(\Lambda^{-1}b)_\mu p^\mu} \\
U_0(\Lambda, b)a(p\sigma n)U_0^{-1}(\Lambda, b) &= e^{+i(\Lambda^{-1}b)_\mu p^\mu} \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} \sum_{\bar{\sigma}} D_{\sigma \bar{\sigma}}^{*(j)}(W(\Lambda, p)) a(\Lambda p \bar{\sigma} n),
\end{aligned} \tag{5.57}$$

onde identificamos que o termo $D^{*(j)}$ é a inversa de $D^{(j)}$, já que D é unitário.

Quanto à paridade, reversão temporal e conjugação de carga, tomamos o adjunto de (5.49) e (5.50), que se referem à partículas de $m \neq 0$:

$$Pa(p, \sigma, n)P^{-1} = \eta_n^* a(\mathcal{P}p, \sigma, n), \tag{5.58}$$

$$Ta(p, \sigma, n)T^{-1} = (-1)^{j-\sigma} a(\mathcal{P}p, -\sigma, n). \tag{5.59}$$

Para partículas de massa nula, o adjunto das equações em (5.51) fornece:

$$Pa(p, \sigma, n)P^{-1} = \eta_{\sigma n}^* e^{\mp i\pi\sigma} a(\mathcal{P}p, \sigma, n), \tag{5.60}$$

$$Ta(p, \sigma, n)T^{-1} = \zeta_{\sigma n}^* e^{\mp i\pi\sigma} a(\mathcal{P}p, -\sigma, n). \tag{5.61}$$

Por fim, o adjunto de (5.56) dá:

$$Ca(p, \sigma, n)C^{-1} = \xi_n^* a(p, \sigma, n^c). \tag{5.62}$$

¹⁷ Notemos que o vácuo também é invariante sob a ação da conjugação de carga já que ele não carrega nenhuma carga não-nula.

5.2 DECOMPOSIÇÃO EM CLUSTERS DA MATRIZ-S

É um princípio fundamental da Física que experimentos suficientemente distantes devem apresentar resultados independentes. Se isso não fosse verdade, não poderíamos construir qualquer teoria ou analisar qualquer sistema de partículas sem conhecer detalhadamente todas as características de todo o universo simultaneamente (WEINBERG, 1995, p. 177).

No contexto da matriz-S, essa necessidade física se traduz no Princípio da Decomposição em Cluster (PDC), que diz que se $\mathcal{N}$ processos físicos $\alpha_1 \rightarrow \beta_1, \alpha_2 \rightarrow \beta_2, \dots, \alpha_{\mathcal{N}} \rightarrow \beta_{\mathcal{N}}$ envolvendo uma ou mais partículas ocorrem em $\mathcal{N}$ locais muito distantes, então a matriz-S é fatorizável. Matematicamente escrevemos que, se, para todo $i \neq j$, todas as partículas nos estados α_i e β_i estão muito afastadas de todas as partículas em todos os outros estados α_j e β_j , então:

$$S_{\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_{\mathcal{N}}, \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{\mathcal{N}}} \longrightarrow S_{\beta_1\alpha_1} \times S_{\beta_2\alpha_2} \times \dots \times S_{\beta_{\mathcal{N}}\alpha_{\mathcal{N}}}. \quad (5.63)$$

Como probabilidades de eventos não correlacionadas se multiplicam, isso significa que a fatoração é suficiente para descrever a ocorrência de um conjunto de processos à grande distância espacial entre si.

Podemos também escrever

$$S_{\beta\alpha} = \sum_{\text{PARTES}} (\pm) S_{\beta_1\alpha_1}^C S_{\beta_2\alpha_2}^C \dots, \quad (5.64)$$

onde a soma é sobre todas as formas de separarmos as partículas nos estados α e β em clusters $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ e $\beta_1, \beta_2, \dots$, respectivamente,¹⁸ enquanto o sinal $(\pm)$ é responsável pelas mudanças de sinais que podem surgir da permutação de férmions.

Vamos reescrever (5.64) como:

$$S_{\beta\alpha} = S_{\beta\alpha}^C + \sum_{\text{PARTES}'} (\pm) S_{\beta_1\alpha_1}^C S_{\beta_2\alpha_2}^C \dots, \quad (5.65)$$

onde agora o somatório é sobre produtos de dois ou mais elementos, ou seja, explicitamos o termo $S_{\beta\alpha}^C$, que envolve simultaneamente todas as partículas em α e β . Se supomos que os elementos $S_{\beta_i\alpha_i}^C$ em (5.65) foram escolhidos de modo que eles satisfazem (5.64) para qualquer número de partículas menor do que uma certa quantidade N , podemos escolher o elemento conectado $S_{\beta\alpha}^C$ em (5.64) de modo a obtermos qualquer valor desejado de $S_{\beta\alpha}$ para estados de N partículas. Assim, podemos escrever qualquer matriz-S na forma dada em (5.64).¹⁹ Dizemos portanto que a definição de S^C é recursiva.

Vamos expandir a explicação do parágrafo anterior com um exemplo explícito. Se os estados α e β forem ambos estados de uma partícula, de rótulo q e q' respectivamente, queremos que o elemento de

¹⁸ A mudança de ordem dos clusters ou das partículas dentro de um cluster não são contados como formas distintas para efetuação do somatório.

¹⁹ Observe, contudo, que para isso precisamos também do elemento $S_{0,0}^C$. O elemento de matriz vácuo-vácuo é $S_{0,0} = 1$, e sua parte conectada é dada por $S_{0,0}^C = 0$. Pode parecer haver uma inconsistência aqui, mas isso ocorre porque a equação (5.64) não pode ser utilizada para a matriz $S_{0,0}$ (WEINBERG, 1995, p. 179).

matriz-S que os conecte seja:²⁰

$$S_{q'q}^C \equiv S_{q'q} = \delta(q' - q), \quad (5.66)$$

pois não teremos parte conectada além da que envolve todas as partículas dos estados inicial e final simultaneamente. Agora, se α e β forem estados de duas partículas, respectivamente q_1, q_2 e q'_1, q'_2 , temos, de (5.65) e (5.66):

$$\begin{aligned} S_{q'_1 q'_2, q_1 q_2} &= S_{q'_1 q'_2, q_1 q_2}^C + \sum_{\text{PARTES}'} (\pm) S_{\beta_1 \alpha_1}^C S_{\beta_2 \alpha_2}^C \dots \\ &= S_{q'_1 q'_2, q_1 q_2}^C + S_{q'_1, q_1}^C S_{q'_2, q_2}^C \pm S_{q'_2, q_1}^C S_{q'_1, q_2}^C \\ &= S_{q'_1 q'_2, q_1 q_2}^C + \delta(q'_1, q_1) \delta(q'_2, q_2) \pm \delta(q'_2, q_1) \delta(q'_1, q_2), \end{aligned} \quad (5.67)$$

onde tomamos o sinal negativo em $\pm$ caso ambas as partículas sejam férmions, já que no último termo permutamos q'_1 e q'_2 . Essa expressão mostra que conseguimos construir a transição entre estados de duas partículas usando o resultado para estados de uma partícula. Usando (5.65) novamente obtemos, para estados de três partículas:

$$\begin{aligned} S_{q'_1 q'_2 q'_3, q_1 q_2 q_3} &= S_{q'_1 q'_2 q'_3, q_1 q_2 q_3}^C + \delta(q'_1 - q_1) S_{q'_2 q'_3, q_2 q_3}^C \pm \text{permutações} \\ &\quad + \delta(q'_1 - q_1) \delta(q'_2 - q_2) \delta(q'_3 - q_3) \pm \text{permutações}, \end{aligned} \quad (5.68)$$

onde as permutações são sobre os rótulos de partícula conforme o modelo do termo precedente. Percebemos que, de modo similar ao caso anterior, podemos usar os resultados de $S_{q'q}^C$ e $S_{q'_1 q'_2, q_1 q_2}$ que obtivemos respectivamente em (5.66) e (5.67) para que a determinação de $S_{q'_1 q'_2 q'_3, q_1 q_2 q_3}$ dependa apenas da escolha de $S_{q'_1 q'_2 q'_3, q_1 q_2 q_3}^C$. Podemos repetir esse processo para grupos de quatro, cinco, seis... partículas, reforçando o argumento de que a matriz-S pode ser escrita como em (5.64).

Da maneira recursiva que definimos a parte conectada $S_{\alpha_j \beta_j}^C$ da matriz-S, ela será nula caso não haja interação envolvendo todas as partículas nos estados α_j e β_j simultaneamente. Isso pode ocorrer, por exemplo, se algum subconjunto não-vazio dessas partículas estiver muito distante de todas as outras. É a matriz-S escrita como em (5.64), portanto, que respeita ao PDC, já que ela explicita todos os subgrupos de partículas que podem interagir entre si e nos permite zerar os termos em que as partículas estiverem muito distantes e não interajam de forma conjunta.

5.2.1 O PDC no espaço de momentos

Formulamos o PDC como a necessidade de que $S_{\beta\alpha}^C$ desapareça se qualquer partícula nos estados α ou β estiver muito distante de qualquer outra. Essa é, contudo, uma condição espacial, e temos desenvolvido nosso trabalho até agora sobre o espaço dos momentos. Momento e posição não

²⁰ Estamos considerando que esses estados de uma partícula não interagem com o vácuo.

comutam, mas podemos transitar entre os autoestados da posição e do momento com uma transformada de Fourier.²¹

$$S_{x'_1 x'_2, \dots, x_1 x_2, \dots}^C \equiv \int d^3 p'_1 d^3 p'_2 \dots d^3 p_1 d^3 p_2 \dots S_{p'_1 p'_2, \dots, p_1 p_2, \dots}^C e^{i \vec{p}'_1 \cdot \vec{x}'_1} e^{i \vec{p}'_2 \cdot \vec{x}'_2} \dots e^{-i \vec{p}_1 \cdot \vec{x}_1} e^{-i \vec{p}_2 \cdot \vec{x}_2} \dots \quad (5.69)$$

A invariância translacional exige que os elementos $S_{\beta\alpha}^C$, assim como a matriz-S, dependam apenas da diferença das posições entre as partículas, e portanto ela não muda caso os diferentes x_i variarem mas mantiverem sua diferença constante. Aplicando uma translação $U(1, a)$ em (5.69) obtemos:

$$\begin{aligned} U(1, a) S_{x_\beta x_\alpha}^C &= U(1, a) \int d^3 p_\beta d^3 p_\alpha S_{p_\beta p_\alpha}^C e^{i \vec{p}_\beta \cdot \vec{x}_\beta} e^{-i \vec{p}_\alpha \cdot \vec{x}_\alpha} \\ S_{x_\beta + a, x_\alpha + a}^C &= \int d^3 p_\beta d^3 p_\alpha e^{-i a_\mu (p_\alpha^\mu - p_\beta^\mu)} S_{p_\beta p_\alpha}^C e^{i \vec{p}_\beta \cdot \vec{x}_\beta} e^{-i \vec{p}_\alpha \cdot \vec{x}_\alpha}. \end{aligned} \quad (5.70)$$

A invariância da ação de translações sobre estados de várias partículas também levam, como vimos no capítulo anterior,²² a uma consequência no espaço de momentos: $S_{\beta\alpha}$ deve ser proporcional a um delta tridimensional de conservação de momento, e portanto impomos também essa condição sobre $S_{\beta\alpha}^C$. Como a translação em (5.70) é aplicada de forma igual a todas as partículas, a invariância translacional é mantida. Também precisamos que $S_{\beta\alpha}^C$ seja proporcional a um delta de conservação de energias, como requeremos para $S_{\beta\alpha}$ em (4.179) devido à construção da teoria de espalhamento. Essas observações culminam em:

$$S_{p'_1, p'_2, \dots, p_1, p_2, \dots}^C = \delta^3(\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 + \dots - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \dots) \delta(E'_1 + E'_2 + \dots - E_1 - E_2 - \dots) C_{p'_1, p'_2, \dots, p_1, p_2, \dots} \quad (5.71)$$

A conservação do momento é, portanto, o equivalente sobre o espaço dos momentos da necessidade de que haja invariância translacional da interação (WEINBERG, 1995, p. 181–182). Para preservá-la, contudo, precisamos impor sobre os coeficientes $C_{p'_1, p'_2, \dots, p_1, p_2, \dots}$ a condição de que eles não contenham deltas adicionais de conservação de momento. Caso não impuséssemos essa hipótese, os C 's poderiam manter invariante o momento de algum subconjunto de partículas, o que, no espaço de configuração,²³ significa que esse subconjunto de partículas poderia ser transladado para longe das outras, mantendo a distância das partículas do subconjunto fixas entre si, sem que a parte conectada $S_{\beta\alpha}^C$ fosse a zero, o que violaria o PDC. **Podemos portanto afirmar que o PDC equivale à necessidade de que os elementos conexos da matriz-S sejam proporcionais a apenas um delta de conservação de momento.**

²¹ Os rótulos σ e n são omitidos pois eles não têm importância nessa subseção. Notemos também que as exponenciais relacionadas aos estados out têm sinal positivo pela sesquilinearidade do produto interno: $(\lambda\phi, \psi) = \lambda^*(\phi, \psi)$.

²² Mais especificamente, nos desenvolvimentos que culminaram na equação (4.74).

²³ Isso é, o espaço de x^μ .

5.2.2 Estrutura da interação

Sabemos, dos desenvolvimentos da subseção anterior, que a forma da matriz-S que satisfaz o PDC é aquela descrita em (5.64). Precisamos saber, portanto, quais as condições sobre o Hamiltoniano completo H para que ele leve à matriz-S com essa forma. Como H atua sobre o espaço de Hilbert e vimos que qualquer operador nesse domínio pode ser escrito como uma combinação de operadores de criação e aniquilação, escrevemos:

$$H = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \int dq'_1 \dots dq'_N dq_1 \dots dq_M a^\dagger(q'_1) \dots a^\dagger(q'_N) a(q_M) \dots a(q_1) h_{NM}(q'_1, \dots, q'_N, q_1, \dots, q_M). \quad (5.72)$$

Esse hamiltoniano irá satisfazer o PDC se os coeficientes h_{NM} forem funções que contém apenas um delta de conservação de momento, ou seja:

$$h_{NM}(p'_1 \sigma'_1 n'_1, \dots, p'_N \sigma'_N n'_N, p_1 \sigma_1 n_1, \dots, p_M \sigma_M n_M) = \delta^{(3)}(\vec{p}'_1 + \dots + \vec{p}'_N - \vec{p}_1 - \dots - \vec{p}_M) \tilde{h}_{NM}(p'_1 \sigma'_1 n'_1, \dots, p'_N \sigma'_N n'_N, p_1 \sigma_1 n_1, \dots, p_M \sigma_M n_M), \quad (5.73)$$

onde os $\tilde{h}_{NM}$ não possuem nenhum delta. No restante dessa seção iremos provar essa afirmação.

Partimos da forma perturbativa dependente do tempo do operador S — a série de Dyson — como obtivemos na equação (4.226):

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots dt_n T\{V(t_1) \dots V(t_n)\}. \quad (5.74)$$

Vamos aplicá-la em (4.49):

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha} &= (\Phi_\beta, S\Phi_\alpha) \\ &= \left(\Phi_\beta, \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots dt_n T\{V(t_1) \dots V(t_n)\} \right] \Phi_\alpha \right) \\ &= (\Phi_\beta, \Phi_\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots dt_n (\Phi_\beta, T\{V(t_1) \dots V(t_n)\} \Phi_\alpha) \\ &= \delta(\beta - \alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots dt_n (\Phi_\beta, T\{V(t_1) \dots V(t_n)\} \Phi_\alpha) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots dt_n (\Phi_\beta, T\{V(t_1) \dots V(t_n)\} \Phi_\alpha), \end{aligned} \quad (5.75)$$

onde na última linha simplificamos a notação considerando que o termo de $n = 0$ no somatório será $\delta(\beta - \alpha)$. Sabemos de (4.15) que o Hamiltoniano completo H é dividido em uma parte livre H_0 e um

termo de interação V , e que, de (4.215):

$$V(\tau) \equiv e^{iH_0\tau} V e^{-iH_0\tau}. \quad (5.76)$$

Sabemos de (5.13) que os estados Φ_α e Φ_β em (5.75) podem ser escritos pela atuação de operadores de criação sobre o vácuo. Com isso podemos escrever:

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots dt_n (a^\dagger(\beta)\Phi_0, T\{V(t_1)\dots V(t_n)\}a^\dagger(\alpha)\Phi_0) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots dt_n (\Phi_0, a(\beta)T\{V(t_1)\dots V(t_n)\}a^\dagger(\alpha)\Phi_0), \end{aligned} \quad (5.77)$$

onde os operadores $a^\dagger(\alpha)$ e $a^\dagger(\beta)$ indicam o produto dos operadores de criação de todas as partículas dos estados α e β , respectivamente.²⁴ Sabemos também que o operador V , assim como qualquer outro operador, pode ser escrito como uma soma de produtos de operadores de criação e aniquilação, como em (5.33). O resultado disso é que temos, nos integrandos de $S_{\beta\alpha}$, valores esperados de um produto de operadores criação e aniquilação sobre o vácuo.²⁵ Para ilustrar esse fato, escrevemos, de forma não muito prática:²⁶

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha} &= \delta(\beta - \alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots dt_n \left(\Phi_0, a(\beta)T \left\{ \left[e^{it_1 \int dq a^\dagger(q)a(q)E(q)} \right. \right. \right. \\ &\quad \times \left(\sum_{N=0} \sum_{M=0} \int dq'_1 \dots dq'_N dq_1 \dots dq_M a^\dagger(q'_1) \dots a^\dagger(q'_N) a(q_M) \dots a(q_1) \mathcal{V}_{NM} \right) e^{-it_1 \int dq a^\dagger(q)a(q)E(q)} \left. \right. \\ &\quad \left. \dots \left[e^{it_n \int dq a^\dagger(q)a(q)E(q)} \left(\sum_{N=0} \sum_{M=0} \int dq'_1 \dots dq'_N dq_1 \dots dq_M a^\dagger(q'_1) \dots a^\dagger(q'_N) a(q_M) \dots a(q_1) \mathcal{V}_{NM} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times e^{-it_n \int dq a^\dagger(q)a(q)E(q)} \right] \right\} a^\dagger(\alpha)\Phi_0 \right). \end{aligned} \quad (5.78)$$

Podemos tomar o termo $a(\beta)T\{V(t_1)\dots V(t_n)\}a^\dagger(\alpha)$ em (5.77) e passar todos os operadores de criação para a esquerda dos de aniquilação. Sabemos de (5.27) que:

$$a(q')a^\dagger(q) = \delta(q' - q) \pm a^\dagger(q)a(q'), \quad (5.79)$$

portanto os termos $a^\dagger(q)a(q')$ serão anulados, pois depois de termos passado todos os operadores de

²⁴ Note que se $\Phi_\beta \equiv \Phi_{q'_1 q'_2 \dots q'_{N_\beta}}$, $a^\dagger(\beta) \equiv a^\dagger(q'_1) a^\dagger(q'_2) \dots a^\dagger(q'_{N_\beta})$, mas quando tomamos o adjunto a ordem dos operadores é invertida e portanto: $a(\beta) = a(q'_{N_\beta}) \dots a(q'_2) a(q'_1)$.

²⁵ Lembramos que o valor esperado de um observável A em um estado Ψ é dado por $(\Psi, A\Psi)$, como vimos em (2.40).

²⁶ Aqui usamos a forma de H_0 definida em (5.43) e escrevemos V numa forma como o operador genérico (5.33), com coeficientes V_{NM} .

aniquilação para a direita eles estarão operando diretamente sobre o vácuo, e sabemos de (5.16) que:

$$a(q)\Psi_0 = 0. \quad (5.80)$$

Assim, ao fim do processo em vez de $a(\beta)T\{V(t_1)...V(t_n)\}a^\dagger(\alpha)$ teremos uma soma de produtos de deltas, possíveis sinais $\pm$ que decorrem da permutação de férmions e coeficientes decorrentes de $V(t)$ e $(-i)^n/(n!)$.

Para prosseguir a análise, vamos visualizar a construção de um diagrama para simbolizar os deltas que são produzidos, em cada termo, no processo de reorganização dos operadores e obtenção dos deltas. Esse diagrama é construído de forma que: (WEINBERG, 1995, p. 184)

- primeiro desenhemos n vértices para cada operador $V(t)$;
- para cada delta produzido quando um operador de aniquilação em um $V(t)$ passa por um de criação em $a^\dagger(\alpha)$, desenhemos uma linha debaixo do diagrama até o vértice;
- para cada delta produzido quando um operador de aniquilação em $a(\beta)$ passa por um de criação em $V(t)$, desenhemos uma linha do vértice até acima do diagrama;
- para cada delta produzido quando um operador de aniquilação em um $V(t)$ passa por um de criação em outro $V(t)$, desenhemos uma linha unindo os dois vértices;
- para cada delta produzido quando um operador de aniquilação em $a(\beta)$ passa por um de criação em $a^\dagger(q)$, desenhemos uma linha de baixo a cima, cortando o diagrama.

Cada linha nesse diagrama reforça a conservação de momento durante o processo de interação. O diagrama assim construído é dito **conectado** se todos os pontos estão ligados por uma sequência de linhas. Um diagrama não conectado se divide em partes conectadas, e o operador $V(t)$ de uma parte conectada comuta com os $V(t)$ de todas as outras partes, pois se não comutassem teríamos a criação de um delta e eles estariam numa mesma parte conectada. Essas partes conectadas equivalem, efetivamente, aos clusters. Com isso em mente, podemos escrever:

$$(\Phi_\beta, T\{V(t_1)...V(t_n)\}\Phi_\alpha) = \sum_{\text{PARTES}} \sum_{\substack{n_1...n_\nu \\ n_1+...+n_\nu=n}} (\pm) \prod_{j=1}^{\nu} (\Phi_{\beta_j}, T\{V(t_{j_1})...V(t_{j_{n_j}})\}\Phi_{\alpha_j})_C, \quad (5.81)$$

onde o somatório é sobre todas as formas de separar as partículas em α e β e os operadores $V(t)$ em ν clusters, sendo o j -ésimo cluster composto pelas partículas iniciais α_j , finais β_j e pelos n_j operadores $V(t_{j_1}), ..., V(t_{j_{n_j}})$. Isso significa que os n operadores $V(t_1), ..., V(t_n)$ se dividem pelos j clusters e assim, no caso $j = \nu$:

$$n = n_1 + ... + n_\nu, \quad (5.82)$$

e também que os conjuntos de partículas α e β são tais que:

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_\nu, \\ \beta &= \beta_1 \cup \dots \cup \beta_\nu.\end{aligned}\tag{5.83}$$

Alguns termos em (5.81) podem equivaler a $n_j = 0$, caso em que não temos nenhum operador e portanto nenhum vértice. Isso equivale ao caso em que desenhamos uma linha conectando o diagrama de baixo a cima, o que equivale a $\delta(\beta_j - \alpha_j)$, o que é consistente com a noção de que um produto vazio é igual a 1. O subscrito C em (5.81) reforça que os operadores $V(t_j)$ e as partículas em α_j e β_j estão todos conectados por linhas no diagrama.

Queremos aplicar (5.81) em (5.77). Observamos que todas as integrais em t são de $-\infty$ a ∞ , então os t 's não têm interdependência e não importa quais são movidos a cada cluster. Além disso, o somatório sobre os clusters nos rende um fator $n!/(n_1!n_2!\dots n_\nu!)$ igual ao número de formas de se distribuir n vértices por ν clusters, onde os números $n_1, n_2, \dots, n_\nu$ são o número de vértices nos primeiro, segundo... até ν -ésimo clusters. Com isso, podemos escrever:

$$S_{\beta\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \left[\sum_{\text{PARTES}} (\pm) \sum_{\substack{n_1 \dots n_\nu \\ n_1 + \dots + n_\nu = n}} \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_\nu!} \prod_{j=1}^{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} dt_{j_1} \dots dt_{j_{n_j}} \right. \\ \left. \times \left(\Phi_{\beta_j}, T\{V(t_{j_1}) \dots V(t_{j_{n_j}})\} \Phi_{\alpha_j} \right)_C \right]. \tag{5.84}$$

Podemos escrever $(-i)^n$ como $(-i)^{n_1} \dots (-i)^{n_\nu}$ e passá-lo para dentro do somatório, e em vez de somarmos sobre n e depois somarmos sobre n_1 até n_ν com a restrição $n_1 + \dots + n_\nu = n$ podemos somar sobre cada $n_1, \dots, n_\nu$. Com isso escrevemos:

$$\begin{aligned}S_{\beta\alpha} &= \sum_{\text{PARTES}} (\pm) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{n_1 \dots n_\nu \\ n_1 + \dots + n_\nu = n}} \prod_{j=1}^{\nu} \frac{(-i)^n}{n!} \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_\nu!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_{j_1} \dots dt_{j_{n_j}} \\ &\quad \times \left(\Phi_{\beta_j}, T\{V(t_{j_1}) \dots V(t_{j_{n_j}})\} \Phi_{\alpha_j} \right)_C \\ &= \sum_{\text{PARTES}} (\pm) \prod_{j=1}^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{n_1 \dots n_\nu \\ n_1 + \dots + n_\nu = n}} \frac{(-i)^{n_1} \dots (-i)^{n_\nu}}{n_1!n_2!\dots n_\nu!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_{j_1} \dots dt_{j_{n_j}} \\ &\quad \times \left(\Phi_{\beta_j}, T\{V(t_{j_1}) \dots V(t_{j_{n_j}})\} \Phi_{\alpha_j} \right)_C \\ &= \sum_{\text{PARTES}} (\pm) \prod_{j=1}^{\nu} \sum_{n_j=0}^{\infty} \frac{(-i)^{n_j}}{n_j!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_{j_1} \dots dt_{j_{n_j}} \left(\Phi_{\beta_j}, T\{V(t_{j_1}) \dots V(t_{j_{n_j}})\} \Phi_{\alpha_j} \right)_C.\end{aligned}\tag{5.85}$$

Sabemos de (5.64) que:

$$S_{\beta\alpha} = \sum_{\text{PARTES}} (\pm) S_{\beta_1\alpha_1}^C S_{\beta_2\alpha_2}^C \dots, \quad (5.86)$$

e comparando essa equação com o desenvolvimento recém obtido em (5.85) podemos reconhecer o elemento conectado $S_{\beta_j\alpha_j}^C$:

$$S_{\beta_j\alpha_j}^C = \sum_{n_j=0}^{\infty} \frac{(-i)^{n_j}}{n_j!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_{j_1} \dots dt_{j_{n_j}} \left(\Phi_{\beta_j}, T\{V(t_{j_1}) \dots V(t_{j_{n_j}})\} \Phi_{\alpha_j} \right)_C. \quad (5.87)$$

Isso nos dá outra interpretação para $S_{\beta\alpha}^C$: esse termo é a soma das contribuições da matriz-S em que cada operador $V(t)$ está conectado a todos os outros e a todas as partículas nos estados α e β por sequências sucessivas de criação e aniquilação.

Voltando à representação de $(\Phi_{\beta}, T\{V(t_1) \dots V(t_n)\} \Phi_{\alpha})$ na forma de diagrama, vimos que cada vértice e cada linha equivale a um delta de conservação de momento, mas também discutimos, na Seção 5.2.1 que $S_{\beta\alpha}^C$ deve ser proporcional a apenas um delta de conservação de momento, na forma $\delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p})$.

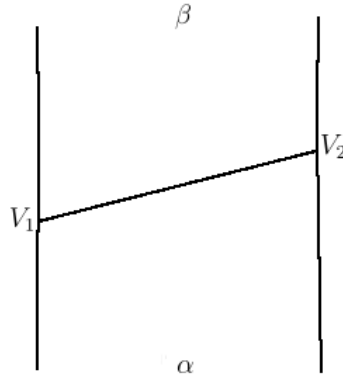
Vamos analisar essa questão usando, finalmente, a forma do Hamiltoniano completo H que foi proposta no começo dessa seção, nas equações (5.72) e (5.73). Cada coeficiente h_{NM} da expansão de H é proporcional a um único delta tridimensional de conservação de momento. Como estabelecemos em (4.15), $H = H_0 + V$, e o Hamiltoniano livre H_0 também deve ser proporcional a um delta de conservação de momento, já que ele o conserva por ser um termo que não pode abranger interações. Desse modo, se essa condição vale para H , V também pode ser expandido com coeficientes proporcionais a um único delta de conservação de momento. Isso significa, no diagrama, que cada vértice corresponde a um delta de conservação de momento. A maioria dos deltas que temos no diagrama, contudo, fixam o momento de partículas intermediárias da interação. Os momentos que não são fixados são aqueles que correm em loops, ou círculos, de linhas internas da parte conectada. Um loop é composto por linhas que, se cortadas, não tornam desconectada a parte conectada à que pertencem. Definimos o número L de loops como o número de linhas que podem ser cortadas simultaneamente sem tornar a parte em questão desconectada.

Há uma identidade topológica que diz que qualquer gráfico constituído de C partes conectadas, L loops, I linhas internas e V vértices respeita (WEINBERG, 1995, p. 187):

$$V - I + L = C. \quad (5.88)$$

Um elemento conectado $S_{\beta\alpha}^C$ equivale a apenas uma parte conectada, $C = 1$. Temos então V funções delta, das quais $I - L$ fixam momentos intermediários, restando então $V - (I - L)$ deltas para fixar os momentos inicial e final. $V - (I - L) = V - I + L = C = 1$, portanto temos apenas um delta de fixação de momentos inicial e final em $S_{\beta\alpha}^C$, como queríamos provar. Para ilustrar e exemplificar esse raciocínio, a Figura 4 representa um diagrama constituído de dois vértices, uma linha interna, nenhum

Figura 4 – Diagrama constituído de $V = 2$, $I = 1$, $L = 0$ e $C = 1$.



fonte: Produção do próprio autor.

loop e uma única parte conectada.

Assim mostramos, nessa seção, que a necessidade de que experimentos muito distantes tenham resultados não relacionados se satisfaz com o Hamiltoniano completo na forma:

$$H = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \int dq'_1 \dots dq'_N dq_1 \dots dq_M a^\dagger(q'_1) \dots a^\dagger(q'_N) a(q_M) \dots a(q_1) h_{NM}(q'_1, \dots, q'_N, q_1, \dots, q_M),$$

onde os coeficientes h_{NM} contém apenas um delta de conservação do momento. Observe que os desenvolvimentos que fizemos com o fator de interação V construído de operadores de criação e destruição implicam a interação ser mediada pela ação de partículas intermediárias, as quais não podem ser observadas devido à própria natureza da interação: só podemos observar os estados inicial e final de uma interação. Se a interação ocorre mediante a ação de partículas intermediárias, estamos fazendo uma afirmação contra o princípio da ação à distância, e é interessante ter em mente que o desenvolvimento que estamos fazendo em direção à introdução do campo quântico traz essa implicação.

6 CAMPOS QUÂNTICOS

O Capítulo 4 nos forneceu a estrutura da matriz-S que torna as interações escalares de Poincaré. Essa é uma necessidade de caráter físico pois o estado físico final de uma interação não pode ser composto de partículas diferentes dependendo do referencial, embora, como observamos no Capítulo 3, possa haver quebra na determinação da projeção de spin ou helicidade dependendo da mudança feita. No Capítulo 5, por sua vez, analisamos as condições que o Hamiltoniano completo H deve satisfazer para que a matriz-S respeite o Princípio da Decomposição em Cluster (PDC), que corresponde à necessidade de que experimentos distantes apresentam resultados independentes. Nesse capítulo, iremos usar os operadores de criação e aniquilação para construir campos de criação e aniquilação, e esses campos serão usados para construir finalmente a interação de modo que respeite à invariância de Poincaré e ao PDC. Com esses campos construímos outros campos, os quais equivalem, efetivamente, à propagação das partículas no espaço-tempo. Construiremos por fim, campos que descrevem partículas massivas de spin-0 e spin-1.

6.1 CAMPOS LIVRES

Na Seção 4.4.1¹ vimos que a matriz-S será invariante de Poincaré se o termo de interação $V(t)$ ² puder ser escrito como:

$$V(t) = \int d^3x \mathcal{H}(t, \vec{x}), \quad (6.1)$$

onde $\mathcal{H}(t, \vec{x})$ é um escalar de Poincaré, no sentido que ele se transforma como:³

$$U_0(\Lambda, a) \mathcal{H}(x) U_0^{-1}(\Lambda, a) = \mathcal{H}(\Lambda x + a), \quad (6.2)$$

e está sujeito à condição de microcausalidade:⁴

$$[\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(x')] = 0 \text{ se } (x - x')^2 \leq 0. \quad (6.3)$$

Para que a matriz-S respeite ao PDC, também queremos que o Hamiltoniano completo H seja construído como uma soma de produtos de operadores de criação e aniquilação e coeficientes que contenham apenas um delta de conservação de momento, conforme a equação (5.72). Essa condição sobre H se estende a V ,⁵ e portanto também a $V(t)$ e a $\mathcal{H}(t, \vec{x})$.

Precisamos portanto construir o termo $\mathcal{H}(t, \vec{x})$, um escalar, de operadores de criação e aniquilação, mas esses operadores se transformam a partir de matrizes D que são funções de seus momentos, como

¹ Equação (4.233).

² $V(t) = \exp(-iH_0 t) V \exp(iH_0 t)$, da equação (4.215).

³ Equação (4.234).

⁴ Equação (4.238).

⁵ $H = H_0 + V$, da equação (4.15).

vimos na Seção 5.1.5 e portanto é difícil construir quantidades explicitamente escalares a partir deles. Para facilitar esse problema, vamos introduzir os campos de aniquilação $\psi_l^+(x)$ e criação $\psi_l^-(x)$:

$$\begin{aligned}\Psi_l^+(x) &= \sum_{\sigma n} \int d^3p \ u_l(x; p, \sigma, n) a(p, \sigma, n), \\ \Psi_l^-(x) &= \sum_{\sigma n} \int d^3p \ v_l(x; p, \sigma, n) a^\dagger(p, \sigma, n),\end{aligned}\tag{6.4}$$

onde u_l e v_l são coeficientes escolhidos de modo que os campos se transformem pela multiplicação por uma matriz:

$$\begin{aligned}U_0(\Lambda, a)\Psi_l^+(x)U_0^{-1}(\Lambda, a) &= \sum_{\bar{l}} D_{\bar{l}l}(\Lambda^{-1})\Psi_{\bar{l}}^+(\Lambda x + a), \\ U_0(\Lambda, a)\Psi_l^-(x)U_0^{-1}(\Lambda, a) &= \sum_{\bar{l}} D_{\bar{l}l}(\Lambda^{-1})\Psi_{\bar{l}}^-(\Lambda x + a),\end{aligned}\tag{6.5}$$

para que possamos respeitar (6.2). Vamos tomar a equação para $U_0(\Lambda, a)\Psi_l^+(x)U_0^{-1}(\Lambda, a)$ e aplicar uma segunda transformação, por $U_0(\bar{\Lambda}, \bar{a})$:

$$\begin{aligned}U_0(\bar{\Lambda}, \bar{a}) [U_0(\Lambda, a)\Psi_l^+(x)U_0^{-1}(\Lambda, a)] U_0^{-1}(\bar{\Lambda}, \bar{a}) &= U_0(\bar{\Lambda}, \bar{a}) \left[\sum_{\bar{l}} D_{\bar{l}l}(\Lambda^{-1})\Psi_{\bar{l}}^+(\Lambda x + a) \right] U_0^{-1}(\bar{\Lambda}, \bar{a}) \\ &= \sum_{\bar{l}} D_{\bar{l}l}(\bar{\Lambda}^{-1}) \sum_{\bar{l}'} D_{\bar{l}'l}(\Lambda^{-1})\Psi_{\bar{l}'}^+(\bar{\Lambda}\Lambda x + \bar{\Lambda}a + \bar{a}) \\ &= \sum_{\bar{l}} \left[\sum_{\bar{l}'} D_{\bar{l}\bar{l}'}(\bar{\Lambda}^{-1})D_{\bar{l}'l}(\Lambda^{-1}) \right] \Psi_{\bar{l}}^+(\bar{\Lambda}\Lambda x + \bar{\Lambda}a + \bar{a}).\end{aligned}\tag{6.6}$$

De (6.5) a transformação de $\Psi_l^+(x)$ por $U_0(\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{a} + \bar{\Lambda}a)$ é:

$$U_0(\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{a} + \bar{\Lambda}a)\Psi_l^+(x)U_0^{-1}(\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{a} + \bar{\Lambda}a) = \sum_{\bar{l}} D_{\bar{l}l}((\bar{\Lambda}\Lambda)^{-1})\Psi_{\bar{l}}^+(\bar{\Lambda}\Lambda x + \bar{\Lambda}a + \bar{a}),\tag{6.7}$$

onde trocamos a variável muda $\bar{l}$ por $\bar{l}'$. Essa transformação nos permite facilmente comparar (6.6) e (6.7) e obter:

$$\begin{aligned}\left[\sum_{\bar{l}} D_{\bar{l}l}(\bar{\Lambda}^{-1})D_{\bar{l}l}(\Lambda^{-1}) \right] &= D_{\bar{l}l}((\bar{\Lambda}\Lambda)^{-1}), \\ D(\Lambda^{-1})D(\bar{\Lambda}^{-1}) &= D((\bar{\Lambda}\Lambda)^{-1}),\end{aligned}\tag{6.8}$$

o que prova que os D 's são representações do grupo de Lorentz. Podemos tornar isso mais claro

substituindo $\Lambda^{-1} \rightarrow \Lambda_1$ e $\bar{\Lambda}^{-1} \rightarrow \Lambda_2$:

$$D(\Lambda_1)D(\Lambda_2) = D(\Lambda_1\Lambda_2). \quad (6.9)$$

Existem várias representações que respeitam essa forma, incluindo a representação trivial sobre escalares $D(\Lambda) = 1$ e a representação sobre vetores $D(\Lambda)^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu$. Aqui não precisamos, necessariamente, que os D 's sejam representações irredutíveis, e eles podem ser um produto externo de representações irredutíveis formando uma diagonal de blocos.

Com esses campos, poderemos escrever a densidade de interação $\mathcal{H}(x)$ como:

$$\mathcal{H}(x) = \sum_{NM} \sum_{l'_1 \dots l'_N} \sum_{l_1 \dots l_M} g_{l'_1 \dots l'_N, l_1 \dots l_M} \Psi_{l'_1}^-(x) \dots \Psi_{l'_N}^-(x) \Psi_{l_1}^+(x) \dots \Psi_{l_M}^+(x) \quad (6.10)$$

e isso será um escalar se as constantes g forem covariantes por transformações de Lorentz:

$$\sum_{l'_1, \dots, l'_N} \sum_{l_1, \dots, l_M} D_{l'_1 \bar{l}_1}(\Lambda^{-1}) \dots D_{l'_N \bar{l}_N}(\Lambda^{-1}) D_{l_1 \bar{l}_1}(\Lambda^{-1}) \dots D_{l_M \bar{l}_M}(\Lambda^{-1}) g_{l'_1 \dots l'_N, l_1 \dots l_M} = g_{\bar{l}_1 \dots \bar{l}_N, \bar{l}_1 \dots \bar{l}_M}. \quad (6.11)$$

6.1.1 Transformação dos campos de criação e aniquilação

Para estudarmos os $D_{\bar{l}l}$ precisamos obter outra expressão para uma transformação de Poincaré sobre os campos Ψ_l^+ e Ψ_l^- . Sabemos de (5.46) e (5.57) que os operadores de criação $a^\dagger(q)$ e aniquilação $a(q)$ se transformam como:

$$\begin{aligned} U_0(\Lambda, b) a(p\sigma n) U_0^{-1}(\Lambda, b) &= e^{+i(\Lambda p)_\mu b^\mu} \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \sum_{\bar{\sigma}} D_{\bar{\sigma}\sigma}^{*(j_n)}(W(\Lambda, p)) a(\Lambda p \bar{\sigma} n), \\ U_0(\Lambda, b) a^\dagger(p\sigma n) U_0^{-1}(\Lambda, b) &= e^{-i(\Lambda p)_\mu b^\mu} \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \sum_{\bar{\sigma}} D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)}(W(\Lambda, p)) a^\dagger(\Lambda p \bar{\sigma} n). \end{aligned} \quad (6.12)$$

As matrizes $D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)}$ são unitárias, e portanto:

$$D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)}(W(\Lambda, p)) = D_{\sigma\bar{\sigma}}^{*(j_n)}(W^{-1}(\Lambda, p)), \quad (6.13)$$

e escrevemos:

$$\begin{aligned} U_0(\Lambda, b) a(p\sigma n) U_0^{-1}(\Lambda, b) &= e^{+i(\Lambda p)_\mu b^\mu} \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \sum_{\bar{\sigma}} D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)}(W^{-1}(\Lambda, p)) a(\Lambda p \bar{\sigma} n), \\ U_0(\Lambda, b) a^\dagger(p\sigma n) U_0^{-1}(\Lambda, b) &= e^{-i(\Lambda p)_\mu b^\mu} \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \sum_{\bar{\sigma}} D_{\bar{\sigma}\sigma}^{*(j_n)}(W^{-1}(\Lambda, p)) a^\dagger(\Lambda p \bar{\sigma} n). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Sabemos que o elemento d^3p/p^0 é invariante de Poincaré.⁶ Isso significa que:

⁶ Equação (3.64).

$$d^3p = \frac{d^3p}{p^0} p^0 = \frac{d^3(\Lambda p)}{(\Lambda p)^0} p^0. \quad (6.15)$$

Vamos aplicar esses resultados. Seja uma transformação de Poincaré $U_0(\Lambda, b)$ sobre o campo de aniquilação em (6.4). Usamos o termo de integração em (6.15) para escrever:⁷

$$\begin{aligned} U_0(\Lambda, b)\Psi_l^+(x)U_0^{-1}(\Lambda, b) &= U_0(\Lambda, b) \sum_{\sigma n} \left[\int d^3p \ u_l(x; p, \sigma, n) \ a(p, \sigma, n) \right] U_0^{-1}(\Lambda, b) \\ &= U_0(\Lambda, b) \sum_{\sigma n} \left[\int \frac{d^3(\Lambda p)}{(\Lambda p)^0} p^0 \ u_l(x; p, \sigma, n) \ a(p, \sigma, n) \right] U_0^{-1}(\Lambda, b) \quad (6.16) \\ &= \sum_{\sigma n} \int \frac{d^3(\Lambda p)}{(\Lambda p)^0} p^0 \ u_l(x; p, \sigma, n) \ U_0(\Lambda, b)a(p, \sigma, n)U_0^{-1}(\Lambda, b), \end{aligned}$$

e aplicamos a transformação de $a(p\sigma n)$ em (6.14) para obter:

$$\begin{aligned} U_0(\Lambda, b)\Psi_l^+(x)U_0^{-1}(\Lambda, b) &= \sum_{\sigma n} \int \frac{d^3(\Lambda p)}{(\Lambda p)^0} p^0 \ u_l(x; p, \sigma, n) \ e^{+i(\Lambda p)_\mu b^\mu} \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \\ &\quad \times \sum_{\bar{\sigma}} D_{\sigma\bar{\sigma}}^{(j_n)}(W^{-1}(\Lambda, p))a(\Lambda p\bar{\sigma}n) \\ &= \sum_{\sigma\bar{\sigma}n} \int d^3(\Lambda p) \ u_l(x; p, \sigma, n) \ e^{+i(\Lambda p)_\mu b^\mu} \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} \\ &\quad \times D_{\sigma\bar{\sigma}}^{(j_n)}(W^{-1}(\Lambda, p))a(\Lambda p\bar{\sigma}n). \quad (6.17) \end{aligned}$$

Os mesmos passos em $U_0(\Lambda, b)\Psi_l^-(x)U_0^{-1}(\Lambda, b)$ nos rendem:

$$\begin{aligned} U_0(\Lambda, b)\Psi_l^-(x)U_0^{-1}(\Lambda, b) &= \sum_{\sigma\bar{\sigma}n} \int d^3(\Lambda p) \ v_l(x; p, \sigma, n) \ e^{-i(\Lambda b)_\mu p^\mu} \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} \\ &\quad \times D_{\sigma\bar{\sigma}}^{*(j_n)}(W^{-1}(\Lambda, p))a(\Lambda p\bar{\sigma}n). \quad (6.18) \end{aligned}$$

Vamos agora abrir (6.5):

$$\begin{aligned} U_0(\Lambda, b)\Psi_l^-(x)U_0^{-1}(\Lambda, b) &= \sum_{\bar{l}} D_{\bar{l}l}(\Lambda^{-1})\Psi_{\bar{l}}^+(\Lambda x + b) \\ &= \sum_{\bar{l}} D_{\bar{l}l}(\Lambda^{-1}) \sum_{\bar{\sigma}n} \int d^3(\Lambda p) \ u_{\bar{l}}(\Lambda x + b; \Lambda p, \bar{\sigma}, n) \ a(\Lambda p\bar{\sigma}n) \quad (6.19) \\ &= \sum_{\bar{l}\bar{\sigma}n} \int d^3(\Lambda p) \ D_{\bar{l}l}(\Lambda^{-1})u_{\bar{l}}(\Lambda x + b; \Lambda p, \bar{\sigma}, n) \ a(\Lambda p\bar{\sigma}n). \end{aligned}$$

⁷ Observe que U_0 é um operador de transformação sobre estados físicos, portanto agindo sobre estados e outros operadores, como os de criação e aniquilação, e não transformam coeficientes como u_l . Contudo, lembramos que se os operadores U_0 fossem antiunitários eles trocariam o sinal da parte complexa desses coeficientes.

Se compararmos esse resultado com o desenvolvimento que fizemos em (6.17), reconhecemos:

$$\sum_{\bar{l}\bar{\sigma}n} \int d^3(\Lambda p) D_{\bar{l}\bar{l}}(\Lambda^{-1}) u_{\bar{l}}(\Lambda x + b; \Lambda p, \bar{\sigma}, n) a(\Lambda p \bar{\sigma} n) = \sum_{\sigma\bar{\sigma}n} \int d^3(\Lambda p) u_l(x; p, \sigma, n) e^{+i(\Lambda p)_\mu b^\mu} \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} D_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}}^{(j_n)}(W^{-1}(\Lambda, p)) a(\Lambda p \bar{\sigma} n), \quad (6.20)$$

de onde tiramos:

$$\sum_{\bar{l}} D_{\bar{l}\bar{l}}(\Lambda^{-1}) u_{\bar{l}}(\Lambda x + b; \Lambda p, \bar{\sigma}, n) = \sum_{\sigma} u_l(x; p, \sigma, n) e^{+i(\Lambda p)_\mu b^\mu} \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} D_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}}^{(j_n)}(W^{-1}(\Lambda, p)). \quad (6.21)$$

Podemos trocar os índices σ e $\bar{\sigma}$, e também l e $\bar{l}$:

$$\sum_l D_{\bar{l}\bar{l}}(\Lambda^{-1}) u_{\bar{l}}(\Lambda x + b; \Lambda p, \sigma, n) = \sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{l}}(x; p, \bar{\sigma}, n) e^{+i(\Lambda p)_\mu b^\mu} \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} D_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}}^{(j_n)}(W^{-1}(\Lambda, p)). \quad (6.22)$$

Observamos agora que:⁸

$$\begin{aligned} W^{-1}(\Lambda, p) &= (L^{-1}(\Lambda p) \Lambda L(p))^{-1} \\ &= L^{-1}(p) \Lambda^{-1} L(\Lambda p) \\ &= L^{-1}(\Lambda^{-1} \Lambda p) \Lambda^{-1} L(\Lambda p) \\ &= W(\Lambda^{-1}, \Lambda p). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Portanto:

$$\sum_l D_{\bar{l}\bar{l}}(\Lambda^{-1}) u_{\bar{l}}(\Lambda x + b; \Lambda p, \sigma, n) = \sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{l}}(x; p, \bar{\sigma}, n) e^{+i(\Lambda p)_\mu b^\mu} \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} D_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}}^{(j_n)}(W(\Lambda^{-1}, \Lambda p)). \quad (6.24)$$

Agora trocamos $\Lambda \rightarrow \Lambda^{-1}$:

$$\sum_l D_{\bar{l}\bar{l}}(\Lambda) u_{\bar{l}}(\Lambda^{-1} x + b; \Lambda^{-1} p, \sigma, n) = \sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{l}}(x; p, \bar{\sigma}, n) e^{+i(\Lambda^{-1} p)_\mu b^\mu} \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda^{-1} p)^0}} D_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}}^{(j_n)}(W(\Lambda, \Lambda^{-1} p)). \quad (6.25)$$

Isso nos permite por fim trocar $x \rightarrow \Lambda x - \Lambda b$ e $p \rightarrow \Lambda p$:

$$\sum_l D_{\bar{l}\bar{l}}(\Lambda) u_{\bar{l}}(x; p, \sigma, n) = \sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{l}}(\Lambda x - \Lambda b; \Lambda p, \bar{\sigma}, n) e^{+i p_\mu b^\mu} \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} D_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}}^{(j_n)}(W(\Lambda, p)). \quad (6.26)$$

⁸ Usamos aqui a definição de $W(\Lambda, p)$ em (3.50).

Agora substituímos b por $-\Lambda^{-1}b$:

$$\begin{aligned}
\sum_l D_{\bar{l}l}(\Lambda) u_l(x; p, \sigma, n) &= \sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{l}}(\Lambda x + b; \Lambda p, \bar{\sigma}, n) e^{-ip_\mu(\Lambda^{-1}b)^\mu} \\
&\quad \times \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)}(W(\Lambda, p)) \\
\sum_l D_{\bar{l}l}(\Lambda) u_l(x; p, \sigma, n) &= \sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{l}}(\Lambda x + b; \Lambda p, \bar{\sigma}, n) e^{-i(\Lambda p)_\mu b^\mu} \\
&\quad \times \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)}(W(\Lambda, p)) \\
\sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} e^{+i(\Lambda p)_\mu b^\mu} \sum_l D_{\bar{l}l}(\Lambda) u_l(x; p, \sigma, n) &= \sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{l}}(\Lambda x + b; \Lambda p, \bar{\sigma}, n) D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)}(W(\Lambda, p)).
\end{aligned} \tag{6.27}$$

Que é uma forma que torna a análise do problema mais fácil. Fazendo o mesmo processo para o campo de criação Ψ_l^+ , obtemos o par de equações:

$$\sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} e^{+i(\Lambda p)_\mu b^\mu} \sum_l D_{\bar{l}l}(\Lambda) u_l(x; p, \sigma, n) = \sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{l}}(\Lambda x + b; \Lambda p, \bar{\sigma}, n) D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)}(W(\Lambda, p)), \tag{6.28}$$

$$\sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} e^{-i(\Lambda p)_\mu b^\mu} \sum_l D_{\bar{l}l}(\Lambda) v_l(x; p, \sigma, n) = \sum_{\bar{\sigma}} v_{\bar{l}}(\Lambda x + b; \Lambda p, \bar{\sigma}, n) D_{\bar{\sigma}\sigma}^{*(j_n)}(W(\Lambda, p)). \tag{6.29}$$

São essas duas equações que iremos utilizar para analisar as condições que devem ser respeitadas pelos coeficientes u_l e v_l na subseção seguinte.

6.1.1.1 Transformação dos coeficientes

Vamos analisar o efeito de translações, boosts e rotações sobre as equações (6.28) e (6.29), que dizem respeito aos coeficientes u_l e v_l .

Translações. Tomemos $\Lambda = 1$ e b arbitrário em (6.28):

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{p^0}{(p)^0}} e^{+i p_\mu b^\mu} \sum_l D_{\bar{l}l}(1) u_l(x; p, \sigma, n) &= \sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{l}}(x + b; p, \bar{\sigma}, n) D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)}(W(1, p)) \\
e^{+i p_\mu b^\mu} \sum_l \delta_{\bar{l}l} u_l(x; p, \sigma, n) &= \sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{l}}(x + b; p, \bar{\sigma}, n) \delta_{\bar{\sigma}\sigma} \\
e^{+i p_\mu b^\mu} u_{\bar{l}}(x; p, \sigma, n) &= u_{\bar{l}}(x + b; p, \sigma, n).
\end{aligned} \tag{6.30}$$

Podemos satisfazer essa equação tomando

$$u_l(x; p, \sigma, n) = e^{ip \cdot x} u_l(p, \sigma, n),$$

mas, por convenção (WEINBERG, 1995, p. 195), vamos optar por:

$$u_l(x; p, \sigma, n) = (2\pi)^{-3/2} e^{+p \cdot x} u_l(p, \sigma, n). \quad (6.31)$$

De modo análogo para v_l temos:

$$v_l(x; p, \sigma, n) = (2\pi)^{-3/2} e^{-p \cdot x} v_l(p, \sigma, n), \quad (6.32)$$

e portanto nessa situação os campos são transformadas de Fourier:

$$\begin{aligned} \Psi_l^+(x) &= \sum_{\sigma n} (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \, u_l(p, \sigma, n) e^{+ip \cdot x} a(p, \sigma, n), \\ \Psi_l^-(x) &= \sum_{\sigma n} (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \, v_l(p, \sigma, n) e^{-ip \cdot x} a^\dagger(p, \sigma, n). \end{aligned} \quad (6.33)$$

Voltando com (6.31) na equação de transformação de u_l em (6.28) temos:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} e^{+i(\Lambda p)_\mu b^\mu} \sum_l D_{\bar{l}l}(\Lambda) (2\pi)^{-3/2} e^{+p \cdot x} u_l(p, \sigma, n) &= \sum_{\bar{\sigma}} (2\pi)^{-3/2} e^{+(\Lambda p) \cdot (\Lambda x + b)} u_{\bar{l}}(\Lambda p, \bar{\sigma}, n) \\ &\quad \times D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)}(W(\Lambda, p)) \\ \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} e^{+i(\Lambda p)_\mu b^\mu} \sum_l D_{\bar{l}l}(\Lambda) e^{+p \cdot x} u_l(p, \sigma, n) &= \sum_{\bar{\sigma}} e^{+(\Lambda p) \cdot (\Lambda x)} e^{+i(\Lambda p) \cdot b} u_{\bar{l}}(\Lambda p, \bar{\sigma}, n) \\ &\quad \times D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)}(W(\Lambda, p)) \\ \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} \sum_l D_{\bar{l}l}(\Lambda) u_l(p, \sigma, n) &= \sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{l}}(\Lambda p, \bar{\sigma}, n) D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)}(W(\Lambda, p)). \end{aligned} \quad (6.34)$$

Fazendo também o mesmo processo para v_l obtemos o par de equações:

$$\sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} \sum_l D_{\bar{l}l}(\Lambda) u_l(p, \sigma, n) = \sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{l}}(\Lambda p, \bar{\sigma}, n) D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)}(W(\Lambda, p)), \quad (6.35)$$

$$\sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} \sum_l D_{\bar{l}l}(\Lambda) v_l(p, \sigma, n) = \sum_{\bar{\sigma}} v_{\bar{l}}(\Lambda p, \bar{\sigma}, n) D_{\bar{\sigma}\sigma}^{*(j_n)}(W(\Lambda, p)). \quad (6.36)$$

Boosts. Vamos analisar um caso em que $\vec{p} = \vec{0}$, com um boost $\Lambda = L(q)$ que toma uma partícula de massa m do repouso e a leva até um quadrimomento q^μ , na equação recém-obtida (6.35):

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{p^0}{(L(q)p)^0}} \sum_l D_{\bar{l}}(L(q)) u_l(p, \sigma, n) &= \sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{l}}(L(q)p, \bar{\sigma}, n) D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)}(W(L(q), p)) \\
\sqrt{\frac{p^0}{q^0}} \sum_l D_{\bar{l}}(L(q)) u_l(p, \sigma, n) &= \sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{l}}(q, \bar{\sigma}, n) D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)}(W(L(q), p)).
\end{aligned} \tag{6.37}$$

Fazemos agora duas considerações. Primeiro, vemos que $L(p) = 1$, usando a definição de W em (3.50):

$$\begin{aligned}
W(L(q), p) &= L^{-1}(L(q)p)L(q)L(p) = L^{-1}(q)L(q) = 1 \\
\implies D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)}(W(L(q), p)) &= \delta_{\bar{\sigma}\sigma}.
\end{aligned} \tag{6.38}$$

Também temos um detalhe. Os momentos de que dependem os coeficientes $u_l(p, \sigma, n)$ estão sempre condicionados à restrição $p_\mu p^\mu = m^2$. Essa massa depende do tipo de partícula que o campo propaga, e portanto já está subentendida no rótulo n . Essa restrição sobre p^μ é, na verdade, necessária para que possamos usar o elemento de integração invariante d^3p/p^0 . Deste modo, vamos escrever $u_l(p, \sigma, n)$ como $u_l(\vec{p}, \sigma, n)$, o que, no nosso caso, é $u_l(\vec{0}, \sigma, n)$. Com isso, e também com (6.38), temos:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{p^0}{q^0}} \sum_l D_{\bar{l}}(L(q)) u_l(\vec{0}, \sigma, n) &= \sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{l}}(\vec{q}, \bar{\sigma}, n) \delta_{\bar{\sigma}\sigma} \\
\sqrt{\frac{p^0}{q^0}} \sum_l D_{\bar{l}}(L(q)) u_l(\vec{0}, \sigma, n) &= u_{\bar{l}}(\vec{q}, \sigma, n).
\end{aligned} \tag{6.39}$$

Explorando analogamente o resultado para v_l , chegamos ao par de equações:

$$u_{\bar{l}}(\vec{q}, \sigma, n) = \sqrt{\frac{p^0}{q^0}} \sum_l D_{\bar{l}}(L(q)) u_l(\vec{0}, \sigma, n), \tag{6.40}$$

$$v_{\bar{l}}(\vec{q}, \sigma, n) = \sqrt{\frac{p^0}{q^0}} \sum_l D_{\bar{l}}(L(q)) v_l(\vec{0}, \sigma, n). \tag{6.41}$$

Como $p^0 = m$, podemos fazer essa substituição e, tendo eliminado as dependências explícitas de $\vec{p}$, reescrever $\vec{q}$ como $\vec{p}$ para levar as equações a uma forma mais usual:

$$u_{\bar{l}}(\vec{p}, \sigma, n) = \sqrt{\frac{m}{p^0}} \sum_l D_{\bar{l}}(L(p)) u_l(\vec{0}, \sigma, n), \tag{6.42}$$

$$v_{\bar{l}}(\vec{p}, \sigma, n) = \sqrt{\frac{m}{p^0}} \sum_l D_{\bar{l}}(L(p)) v_l(\vec{0}, \sigma, n). \tag{6.43}$$

Essas equações são muito importantes. Por meio delas, conhecendo os coeficientes u_l e v_l em situações de repouso, podemos obter os coeficientes para qualquer momento tridimensional $\vec{p}$.

Rotações. Vamos voltar às equações (6.35) e (6.36) com $\vec{p} = \vec{0}$ e com Λ tal que $\vec{p}_\Lambda = \vec{0}$, sendo $\vec{p}_\Lambda$ a parte espacial de Λp . Nesse caso, Λ é uma rotação R , e também podemos adotar $W(\Lambda, p) = R$. Desse modo, (6.35) nos dá:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{p^0}{(Rp)^0}} \sum_l D_{\bar{l}}(R) u_l(\vec{p}, \sigma, n) &= \sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{l}}(\vec{p}_\Lambda, \bar{\sigma}, n) D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)}(W(R)) \\ \sum_l D_{\bar{l}}(R) u_l(\vec{0}, \sigma, n) &= \sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{l}}(\vec{0}, \bar{\sigma}, n) D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)}(W(R)). \end{aligned} \quad (6.44)$$

Tomando $D(R)$ como uma rotação infinitesimal, obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_l i \mathcal{J}_{\bar{l}} u_l(\vec{0}, \sigma, n) &= \sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{l}}(\vec{0}, \bar{\sigma}, n) i J_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)} \\ \sum_l \mathcal{J}_{\bar{l}} u_l(\vec{0}, \sigma, n) &= \sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{l}}(\vec{0}, \bar{\sigma}, n) J_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)}, \end{aligned} \quad (6.45)$$

onde $J_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)}$ são as matrizes de momento angular na representação $D^{(j_n)}(R)$ e $\mathcal{J}_{\bar{l}}$ são as matrizes de momento angular em $D(R)$. Para v_l , usamos (6.36) e obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_l D_{\bar{l}}(R) v_l(\vec{0}, \sigma, n) &= \sum_{\bar{\sigma}} v_{\bar{l}}(\vec{0}, \bar{\sigma}, n) D_{\bar{\sigma}\sigma}^{*(j_n)}(R) \\ \sum_l i \mathcal{J}_{\bar{l}}(R) v_l(\vec{0}, \sigma, n) &= \sum_{\bar{\sigma}} v_{\bar{l}}(\vec{0}, \bar{\sigma}, n) (i J_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)})^* \\ \sum_l i \mathcal{J}_{\bar{l}}(R) v_l(\vec{0}, \sigma, n) &= \sum_{\bar{\sigma}} v_{\bar{l}}(\vec{0}, \bar{\sigma}, n) - i J_{\bar{\sigma}\sigma}^{*(j_n)} \\ \sum_l \mathcal{J}_{\bar{l}}(R) v_l(\vec{0}, \sigma, n) &= - \sum_{\bar{\sigma}} v_{\bar{l}}(\vec{0}, \bar{\sigma}, n) J_{\bar{\sigma}\sigma}^{*(j_n)}. \end{aligned} \quad (6.46)$$

O que obtivemos portanto foi o par de equações:

$$\sum_l \mathcal{J}_{\bar{l}} u_l(\vec{0}, \sigma, n) = \sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{l}}(\vec{0}, \bar{\sigma}, n) J_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)}, \quad (6.47)$$

$$\sum_l \mathcal{J}_{\bar{l}}(R) v_l(\vec{0}, \sigma, n) = - \sum_{\bar{\sigma}} v_{\bar{l}}(\vec{0}, \bar{\sigma}, n) J_{\bar{\sigma}\sigma}^{*(j_n)}. \quad (6.48)$$

Esses resultados nos mostram que as representações $D(R)$ do grupo de rotações — por sua vez contidas nas representações $D(\Lambda)$ do grupo de Lorentz — deve conter as transformações de spin- j do grupo de rotações $D^{(j_n)}(R)$ necessárias para a descrição das partículas a que equivalem os campos $\Psi_l^\pm(x)$. Os coeficientes $u_l(0, \sigma, n)$ e $v_l(0, \sigma, n)$ contêm as informações sobre como a representação de $D^{(j_n)}(R)$ se encontra dentro de $D(R)$.

6.1.2 Verificação do Princípio da Decomposição em Cluster

Vamos voltar ao PDC. Tomemos a densidade de interação em (6.10)⁹ e substituimos nela as transformadas de Fourier em (6.33):

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x) = & \sum_{NM} \int d^3 p'_1 \dots d^3 p'_N d^3 p_1 \dots d^3 p_M (2\pi)^{-\frac{3}{2}(N+M)} \sum_{l'_1 \dots l'_N} \sum_{l_1 \dots l_M} g_{l'_1 \dots l'_N, l_1 \dots l_M} \\ & \times \sum_{\sigma'_1 n'_1} v_{l'_1}(p'_1, \sigma'_1, n'_1) e^{-ip'_1 \cdot x} a^\dagger(p'_1, \sigma'_1, n'_1) \dots \sum_{\sigma'_N n'_N} v_{l'_N}(p'_N, \sigma'_N, n'_N) e^{-ip'_N \cdot x} a^\dagger(p'_N, \sigma'_N, n'_N) \\ & \times \sum_{\sigma_1 n_1} u_{l_1}(p_1, \sigma_1, n_1) e^{+ip_1 \cdot x} a(p_1, \sigma_1, n_1) \dots \sum_{\sigma_M n_M} u_{l_M}(p_M, \sigma_M, n_M) e^{+ip_M \cdot x} a(p_M, \sigma_M, n_M). \end{aligned} \quad (6.49)$$

Se integrarmos essa expressão em x obtemos V :

$$\begin{aligned} V = & \int d^3 x \mathcal{H}(x) = \sum_{NM} \int d^3 p'_1 \dots d^3 p'_N d^3 p_1 \dots d^3 p_M (2\pi)^{-\frac{3}{2}(N+M)} \left[\int d^3 x e^{i(p_1 + \dots + p_M - p'_1 - \dots - p'_N) \cdot x} \right] \\ & \times \sum_{l'_1 \dots l'_N} \sum_{l_1 \dots l_M} g_{l'_1 \dots l'_N, l_1 \dots l_M} \sum_{\sigma'_1 n'_1} v_{l'_1}(p'_1, \sigma'_1, n'_1) a^\dagger(p'_1, \sigma'_1, n'_1) \dots \sum_{\sigma'_N n'_N} v_{l'_N}(p'_N, \sigma'_N, n'_N) a^\dagger(p'_N, \sigma'_N, n'_N) \\ & \times \sum_{\sigma_1 n_1} u_{l_1}(p_1, \sigma_1, n_1) a(p_1, \sigma_1, n_1) \dots \sum_{\sigma_M n_M} u_{l_M}(p_M, \sigma_M, n_M) a(p_M, \sigma_M, n_M). \end{aligned} \quad (6.50)$$

Identificamos a integral:

$$\int d^3 x e^{i(p_1 + \dots + p_M - p'_1 - \dots - p'_N) \cdot x} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(p_1 + \dots + p_M - p'_1 - \dots - p'_N), \quad (6.51)$$

e voltamos com esse resultado em (6.50) para escrevermos:

$$\begin{aligned} V = & \sum_{NM} \int d^3 p'_1 \dots d^3 p'_N d^3 p_1 \dots d^3 p_M \sum_{\sigma'_1 \dots \sigma'_N} \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_M} \sum_{n'_1 \dots n'_N} \sum_{n_1 \dots n_M} \\ & \times a^\dagger(p'_1, \sigma'_1, n'_1) \dots a^\dagger(p'_N, \sigma'_N, n'_N) a(p_1, \sigma_1, n_1) \dots a(p_M, \sigma_M, n_M) \mathcal{V}_{NM}, \end{aligned} \quad (6.52)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{NM} = & \delta^{(3)}(p_1 + \dots + p_M - p'_1 - \dots - p'_N) (2\pi)^{3-\frac{3}{2}(N+M)} \sum_{l'_1 \dots l'_N} \sum_{l_1 \dots l_M} g_{l'_1 \dots l'_N, l_1 \dots l_M} \\ & \times v_{l'_1}(p'_1, \sigma'_1, n'_1) \dots v_{l'_N}(p'_N, \sigma'_N, n'_N) u_{l_1}(p_1, \sigma_1, n_1) \dots u_{l_M}(p_M, \sigma_M, n_M) \end{aligned} \quad (6.53)$$

e $\mathcal{V}_{NM}$ não contém deltas além do que está explícito e é função de todos os $p's$, $\sigma's$ e $n's$.

Conforme as discussões da Seção 5.2.2, a forma do termo de interação V em (6.52) é aquela que

⁹ $\mathcal{H}(x) = \sum_{NM} \sum_{l'_1 \dots l'_N} \sum_{l_1 \dots l_M} g_{l'_1 \dots l'_N, l_1 \dots l_M} \Psi_{l'_1}^-(x) \dots \Psi_{l'_N}^-(x) \Psi_{l_1}^+(x) \dots \Psi_{l_M}^+(x).$

satisfaz explicitamente o Princípio da Decomposição em Cluster: uma soma de produtos de operadores de criação e aniquilação com coeficientes que são funções suaves dos rótulos de momento. Foi, portanto, a necessidade de satisfazer simultaneamente o PDC e a invariância de Poincaré que nos levou a construir a densidade de interação a partir de campos de criação e aniquilação. Ainda precisamos, contudo, mostrar que podemos respeitar a condição de microcausalidade com esses campos.¹⁰

6.1.3 Condição de causalidade, simetrias internas e antipartículas

Vamos definir:

$$[\Psi_l^+(x), \Psi_{\bar{l}}^-(y)]_{\mp} \equiv \Psi_l^+(x)\Psi_{\bar{l}}^-(y) \mp \Psi_{\bar{l}}^-(y)\Psi_l^+(x), \quad (6.54)$$

onde os sinais $+$ e $-$ são usados caso as partículas criadas e aniquiladas por $\Psi_l^+(x)$ e $\Psi_{\bar{l}}^-(y)$ sejam bósons ou férmions, respectivamente, e vamos usar as relações de comutação e anticomutação dos operadores de criação com os de aniquilação¹¹ e a transformada de Fourier em (6.33) para obter:

$$\begin{aligned} [\Psi_l^+(x), \Psi_{\bar{l}}^-(y)]_{\mp} &= \sum_{\sigma n} \sum_{\bar{\sigma} \bar{n}} (2\pi)^{-3} \int d^3p d^3\bar{p} u_l(p, \sigma, n) v_{\bar{l}}(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{n}) e^{+ip \cdot x} e^{-i\bar{p} \cdot y} \\ &\quad \times \{a(p, \sigma, n) a^\dagger(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{n}) \mp a(p, \sigma, n) a^\dagger(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{n})\} \\ &= \sum_{\sigma n} \sum_{\bar{\sigma} \bar{n}} (2\pi)^{-3} \int d^3p d^3\bar{p} u_l(p, \sigma, n) v_{\bar{l}}(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{n}) e^{+ip \cdot x} e^{-i\bar{p} \cdot y} [a(p, \sigma, n), a^\dagger(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{n})]_{\mp} \\ &= \sum_{\sigma n} \sum_{\bar{\sigma} \bar{n}} (2\pi)^{-3} \int d^3p d^3\bar{p} u_l(p, \sigma, n) v_{\bar{l}}(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{n}) e^{+ip \cdot x} e^{-i\bar{p} \cdot y} \delta^{(3)}(p - \bar{p}) \delta_{\sigma \bar{\sigma}} \delta_{n \bar{n}} \\ &= \sum_{\sigma n} (2\pi)^{-3} \int d^3p u_l(p, \sigma, n) v_{\bar{l}}(p, \sigma, n) e^{ip \cdot (x - y)}. \end{aligned} \quad (6.55)$$

Essa expressão não é nula para x e y em separações do tipo espaço¹², e não podemos resolver esse problema nos limitando a usar apenas operadores de criação ou de aniquilação pois senão não poderemos construir uma densidade de interação Hermitiana. Nossa solução será utilizar campos do tipo:

$$\Psi_l(x) \equiv \kappa_l \Psi_l^+(x) + \lambda_l \Psi_{\bar{l}}^-(x), \quad (6.56)$$

com κ_l e λ_l ajustados para que:

$$[\Psi_l(x), \Psi_{l'}(y)]_{\mp} = [\Psi_l(x), \Psi_{\bar{l}'}^\dagger(y)]_{\mp} = 0. \quad (6.57)$$

¹⁰ Equação (4.238): $[\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(x')] = 0$ se $(x - x')^2 \leq 0$.

¹¹ Equação (5.31): $a(q') a^\dagger(q) \mp a^\dagger(q) a(q') = \delta(q' - q)$.

¹² i.e., $(x - y)^2 \leq 0$.

Essa equação é chamada de **condição de causalidade**. Podemos que ela se justifica pois em separações do tipo espaço os campos em x e y devem comutar pois eles estão a uma distância espacial que nenhum sinal, mesmo viajando à velocidade da luz, pode percorrer na diferença temporal $|x^0 - y^0|$, de modo que uma medição do campo $\Psi_l(x)$ não pode afetar uma medição de $\Psi_{l'}(y)$ ou $\Psi_{l'}^\dagger(y)$. Contudo, nem todos os campos podem ser medidos de alguma forma, portanto a única interpretação sempre coerente é que (6.57) é necessária para a invariância de Poincaré da matriz-S (WEINBERG, 1995, p. 198).

Há ainda outro obstáculo na construção de campos como em (6.56): as partículas criadas e aniquiladas podem carregar uma quantidade não-nula de algum número quântico correspondente a alguma simetria interna conservada. Tomemos por exemplo a carga elétrica, com operador Q e autovalor $q(n)$ dependente da espécie n da partícula. Temos:

$$\begin{aligned} [Q, a(p\sigma n)] &= -q(n)a(p, \sigma, n), \\ [Q, a^\dagger(p\sigma n)] &= +q(n)a^\dagger(p, \sigma, n). \end{aligned} \quad (6.58)$$

Precisamos que a densidade de interação $\mathcal{H}(x)$ comute com o operador Q para que a carga a que ele corresponde seja conservada. Para isso, é necessário que $\mathcal{H}(x)$ seja formada de campos que comutam com Q de formas simples, do tipo:

$$[Q, \Psi_l(x)] = -q_l \Psi_l(x), \quad (6.59)$$

pois com isso podemos construir $\mathcal{H}(x)$ com campos $\Psi_{l_1}, \Psi_{l_2} \dots$ e $\Psi_{m_1}^\dagger, \Psi_{m_2}^\dagger \dots$ que correspondem a cargas de modo que:

$$q_{l_1} + q_{l_2} + \dots - q_{m_1} - q_{m_2} - \dots = 0. \quad (6.60)$$

Para que um campo $\Psi_l(x)$ comute com Q , contudo, é necessário que os campos de criação e aniquilação carreguem a mesma carga. Ou seja, precisamos que o campo crie uma partícula de $q(n) = q_l$ e aniquile uma partícula de $q(n^c) = -q_l$, para que os campos de criação e aniquilação comutem ambos com q_l . Desse modo, para que nossa teoria conserve a carga elétrica ou outras simetrias internas, precisamos que todas as espécies de partículas que correspondem a quantidades não negativas dessas simetrias possuam uma antipartícula que carrega a mesma carga com sinal oposto, de modo que nossa teoria possa conservar as cargas.

Dada essa necessidade de conservação de cargas, daqui em diante, em vez de nos focarmos em campos que criam ou aniquilam várias espécies de partículas de rótulo n_i , vamos nos focar em campos que criam um único tipo de partícula n e aniquilam sua antipartícula n^c . Por isso, as representações $D(\Lambda)$ pelas quais nossos campos se transformam não precisam ser irredutíveis, pois caso elas sejam na forma de diagonal de blocos podemos separá-las em dois blocos que não levam um ao outro, um correspondendo à partícula e o outro à antipartícula, pois não queremos que uma transformação de Poincaré mude a espécie de partícula.

Antes de prosseguirmos à análise de campos escalares e vetoriais, podemos perceber que o campo

$\Psi_l(x)$ definido em (6.56) respeita à equação de Klein-Gordon, isso é:

$$(\square - m^2)\Psi_l(x) = 0, \quad (6.61)$$

onde $\square$ é o operador d'Alambertiano, definido por:

$$\square \equiv \partial^\mu \partial_\mu. \quad (6.62)$$

Verificamos (6.61) usando (6.56) e as transformadas de Fourier em (6.33). Analisamos separadamente:

$$\begin{aligned} (\square - m^2)\lambda_l\Psi_l^+(x) &= (\square - m^2)\lambda_l \sum_{\sigma n} (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \ u_l(p, \sigma, n) e^{+ip \cdot x} a(p, \sigma, n) \\ &= \lambda_l \sum_{\sigma n} (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \ u_l(p, \sigma, n) (\square - m^2) e^{+ip \cdot x} a(p, \sigma, n) \\ &= \lambda_l \sum_{\sigma n} (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \ u_l(p, \sigma, n) (\square e^{+ip \cdot x} - m^2 e^{+ip \cdot x}) a(p, \sigma, n) \\ &= \lambda_l \sum_{\sigma n} (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \ u_l(p, \sigma, n) (\partial^\mu \partial_\mu e^{+ip \cdot x} - m^2 e^{+ip \cdot x}) a(p, \sigma, n) \\ &= \lambda_l \sum_{\sigma n} (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \ u_l(p, \sigma, n) ((ip)^\mu (ip)_\mu e^{+ip \cdot x} - m^2 e^{+ip \cdot x}) a(p, \sigma, n) \\ &= \lambda_l \sum_{\sigma n} (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \ u_l(p, \sigma, n) (-p^\mu p_\mu e^{+ip \cdot x} - m^2 e^{+ip \cdot x}) a(p, \sigma, n) \\ &= \lambda_l \sum_{\sigma n} (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \ u_l(p, \sigma, n) (m^2 e^{+ip \cdot x} - m^2 e^{+ip \cdot x}) a(p, \sigma, n) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (6.63)$$

e:

$$\begin{aligned} (\square - m^2)\kappa_l\Psi_l^-(x) &= (\square - m^2)\kappa_l \sum_{\sigma n} (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \ v_l(p, \sigma, n) e^{-ip \cdot x} a^\dagger(p, \sigma, n) \\ &= \kappa_l \sum_{\sigma n} (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \ v_l(p, \sigma, n) (\partial^\mu \partial_\mu e^{-ip \cdot x} - m^2 e^{-ip \cdot x}) a^\dagger(p, \sigma, n) \\ &= \kappa_l \sum_{\sigma n} (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \ v_l(p, \sigma, n) ((-ip)^\mu (-ip)_\mu e^{-ip \cdot x} - m^2 e^{-ip \cdot x}) a^\dagger(p, \sigma, n) \\ &= \kappa_l \sum_{\sigma n} (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \ v_l(p, \sigma, n) (m^2 e^{-ip \cdot x} - m^2 e^{-ip \cdot x}) a^\dagger(p, \sigma, n) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (6.64)$$

e com esses resultados a equação (6.61) fica evidente. Notemos que todo o campo, portanto, respeita a equação de Klein-Gordon, o que inviabiliza o fato de certos campos respeitarem outras equações.

6.2 CAMPOS ESCALARES CAUSAIS

O campo mais simples que podemos estudar é o campo escalar, de uma componente, que se transforma de acordo com a representação mais simples do grupo de Lorentz: $D(\Lambda) = 1$. Se tentarmos tomar uma expansão infinitesimal dessa representação, obtemos apenas:

$$D(1 + \omega) = 1, \quad (6.65)$$

e portanto os geradores são nulos. As rotações, por exemplo, se dão com $\mathcal{J} = 0$: não há como rotacionar um elemento de uma componente. Vamos levar isso às equações que associam $\mathcal{J}_{\bar{l}l}$ e $J_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)}$, tomando primeiro (6.47):

$$\begin{aligned} \sum_l \mathcal{J}_{\bar{l}l} u_l(\vec{0}, \sigma, n) &= \sum_{\bar{\sigma}} u_l(\vec{0}, \bar{\sigma}, n) J_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)} \\ 0 &= \sum_{\bar{\sigma}} u_l(\vec{0}, \bar{\sigma}, n) J_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)}. \end{aligned} \quad (6.66)$$

Note que uma vez que uma única componente não pode ter rótulos distintos, devemos impor $\sigma = 0 = \bar{\sigma}$, além de tomar $J_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)} = 0$, o que nos leva a concluir que essa é uma representação de spin $j = 0$.

Vamos tomar um campo $\phi(x)$ que descreve uma única espécie de partícula sem antipartícula distinta¹³. Ignoramos, portanto, o rótulo de espécie n , de campo l e também o de projeção de spin σ , pois vimos que $\sigma = 0$. Desse modo, os coeficientes $u_l(\vec{0}, \sigma, n)$ e $v_l(\vec{0}, \sigma, n)$ são apenas $u_l(\vec{0})$ e $v_l(\vec{0})$. Colocando esses resultados em (6.42) e (6.43) obtemos:

$$u(\vec{p}) = \sqrt{\frac{m}{p^0}} u(\vec{0}), \quad v(\vec{p}) = \sqrt{\frac{m}{p^0}} v(\vec{0}). \quad (6.67)$$

É conveniente escolher $u(\vec{0}) = v(\vec{0}) = (2m)^{-1/2}$, e com isso temos:

$$u(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2p^0}}, \quad v(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2p^0}}. \quad (6.68)$$

Aplicando esses coeficientes na transformada de Fourier em (6.33) obtemos a equação dos campos escalares:

$$\phi^+(x) = \int d^3p \ (2\pi)^{-\frac{3}{2}} (2p^0)^{-1/2} a(p) e^{ip \cdot x}; \quad (6.69)$$

$$\phi^-(x) = \int d^3p \ (2\pi)^{-\frac{3}{2}} (2p^0)^{-1/2} a^\dagger(p) e^{-ip \cdot x}. \quad (6.70)$$

Percebemos que, nesse caso, $\phi^-(x) = \phi^{+\dagger}(x)$.

¹³ Ou seja, que carrega um valor nulo para simetrias internas como a carga elétrica.

Uma densidade de interação $\mathcal{H}(x)$ construída como polinômios dos campos escalares $\phi^+(x)$ e $\phi^-(x)$ automaticamente satisfaz a necessidade de que $\mathcal{H}(x)$ se transforme como um escalar¹⁴. Ainda precisamos, contudo, analisar o cumprimento da condição de microcausalidade¹⁵, que $\mathcal{H}(x)$ e $\mathcal{H}(y)$ comutam em separações do tipo espaço. Se $\mathcal{H}$ for um polinômio apenas dos campos escalares de criação ou de aniquilação, a microcausalidade não seria um problema, pois:

$$\begin{aligned}
[\phi^+(x), \phi^+(y)]_{\mp} &= \phi^+(x)\phi^+(y) \mp \phi^+(y)\phi^+(x) \\
&= \int d^3p_x (2\pi)^{-\frac{3}{2}}(2p_x^0)^{-1/2} a(p_x)e^{ip_x \cdot x} \int d^3p_y (2\pi)^{-\frac{3}{2}}(2p_y^0)^{-1/2} a(p_y)e^{+ip_y \cdot y} \\
&\quad \mp \int d^3p_y (2\pi)^{-\frac{3}{2}}(2p_y^0)^{-1/2} a(p_y)e^{+ip_y \cdot y} \int d^3p_x (2\pi)^{-\frac{3}{2}}(2p_x^0)^{-1/2} a(p_x)e^{ip_x \cdot x} \\
&= \int d^3p_x d^3p_y (2\pi)^{-3}(2p_x^0)^{-1/2}(2p_y^0)^{-1/2} e^{ip_x \cdot x + ip_y \cdot y} [a(p_x)a(p_y) \mp a(p_y)a(p_x)] \\
&= \int d^3p_x d^3p_y (2\pi)^{-3}(2p_x^0)^{-1/2}(2p_y^0)^{-1/2} e^{ip_x \cdot x + ip_y \cdot y} [a(p_x), a(p_y)]_{\mp},
\end{aligned} \tag{6.71}$$

onde o sinal superior é caso ambos os campos propaguem bósons, e o inferior caso ambos propaguem férmions¹⁶. Sabemos de (5.31) que $[a(p_x), a(p_y)]_{\mp} = 0$, portanto:

$$[\phi^+(x), \phi^+(y)]_{\mp} = 0, \tag{6.72}$$

e assim a comutação de dois campos de criação ou dois de aniquilação — como podemos verificar tomando o adjunto do comutador acima — é sempre verificada. Para que a densidade de interação $\mathcal{H}$ seja Hermitiana, contudo, precisamos que ela seja construída de campos de criação e de aniquilação, já que $\phi^{+\dagger} = \phi^-$. Precisamos portanto analisar a comutação do operador de criação com o de aniquilação:

$$\begin{aligned}
[\phi^+(x), \phi^-(y)]_{\mp} &= \phi^+(x)\phi^-(y) \mp \phi^-(y)\phi^+(x) \\
&= \int d^3p_x (2\pi)^{-\frac{3}{2}}(2p_x^0)^{-1/2} a(p_x)e^{ip_x \cdot x} \int d^3p_y (2\pi)^{-\frac{3}{2}}(2p_y^0)^{-1/2} a^\dagger(p_y)e^{-ip_y \cdot y} \\
&\quad \mp \int d^3p_y (2\pi)^{-\frac{3}{2}}(2p_y^0)^{-1/2} a^\dagger(p_y)e^{-ip_y \cdot y} \int d^3p_x (2\pi)^{-\frac{3}{2}}(2p_x^0)^{-1/2} a(p_x)e^{ip_x \cdot x} \\
&= \int \frac{d^3p_x d^3p_y}{(2\pi)^3 \sqrt{2p_x^0 2p_y^0}} e^{ip_x \cdot x} e^{-ip_y \cdot y} [a(p_x), a^\dagger(p_y)]_{\mp}.
\end{aligned} \tag{6.73}$$

¹⁴ Condição que vimos pela primeira vez em (4.234).

¹⁵ Equação (4.238).

¹⁶ Partículas de spin inteiro são sempre bósons, mas vamos realizar esses cálculos como se não soubéssemos disso.

Usamos agora $[a(q'), a^\dagger(q)]_\mp = \delta(q' - q)^{17}$ e com isso obtemos:

$$\begin{aligned} [\phi^+(x), \phi^-(y)]_\mp &= \int \frac{d^3p_x d^3p_y}{(2\pi)^3 \sqrt{2p_x^0 2p_y^0}} e^{ip_x \cdot x} e^{-ip_y \cdot y} \delta(p_y - p_x) \\ &= \int \frac{d^3p_x}{(2\pi)^3 \sqrt{2p_x^0 2p_x^0}} e^{ip_x \cdot x} e^{-ip_x \cdot y} \\ &= \int \frac{d^3p_x}{(2\pi)^3 2p_x^0} e^{ip_x \cdot (x-y)}. \end{aligned} \quad (6.74)$$

Reescrevemos isso como:

$$[\phi^+(x), \phi^-(y)]_\mp = \Delta_+(x - y), \quad (6.75)$$

onde:

$$\Delta_+(x) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2p^0} e^{ip \cdot x}, \quad (6.76)$$

e reescrevemos a variável muda p_x como p . Primeiro, sabemos que essa integral deve ser invariante de Lorentz¹⁸. Vamos substituir a variável de integração $\vec{p}$ para $-\vec{p}$, sem trocar o sinal de p^0 :

$$\begin{aligned} \Delta_+(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3p}{2p^0} e^{ip^0 x_0 - i\vec{p} \cdot \vec{x}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\infty}^{-\infty} \frac{-d^3p}{2p^0} e^{ip^0 x_0 + i\vec{p} \cdot \vec{x}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3p}{2p^0} e^{ip^0 x_0 + i\vec{p} \cdot \vec{x}} \\ &= \Delta_+(\mathcal{P}x), \end{aligned} \quad (6.77)$$

onde $\mathcal{P}x = (x^0, -\vec{x})$, e portanto $\Delta_+(x)$ é uma função par nas componentes espaciais de x^μ . Como em qualquer x do tipo espaço é possível se aplicar um boost que leve a $x^0 = 0$, podemos tratar $\Delta_+(x)$ como uma função par para qualquer argumento do tipo espaço, já que é uma função invariante e portanto só pode depender de x^2 (TONG, 2006, p. 37). Isso, contudo, ainda não é suficiente para respeitarmos a condição de microcausalidade para $\phi^+(x)$ ou $\phi^-(x)$. Vamos portanto construir, para o campo escalar, um campo de criação e aniquilação como em (6.56):

$$\phi(x) \equiv \kappa \phi^+(x) + \lambda \phi^-(x), \quad (6.78)$$

¹⁷ Equação (5.27).

¹⁸ O termo d^3p/p^0 é o diferencial invariante que obtivemos em (3.64).

e com isso a condição de microcausalidade se torna:

$$\begin{aligned}
 [\phi(x), \phi^\dagger(y)]_\mp &= [\kappa\phi^+(x) + \lambda\phi^-(x), \kappa^*\phi^-(y) + \lambda^*\phi^+(y)]_\mp \\
 &= [\kappa\phi^+(x), \kappa^*\phi^-(y)]_\mp + [\kappa\phi^+(x), \lambda^*\phi^+(y)]_\mp \\
 &\quad + [\lambda\phi^-(x), \kappa^*\phi^-(y)]_\mp + [\lambda\phi^-(x), \lambda^*\phi^+(y)]_\mp.
 \end{aligned} \tag{6.79}$$

Sabemos que os campos de criação comutam entre si, assim como os de aniquilação, portanto:¹⁹

$$\begin{aligned}
 [\phi(x), \phi^\dagger(y)]_\mp &= [\kappa\phi^+(x), \kappa^*\phi^-(y)]_\mp + [\kappa\phi^+(x), \lambda^*\phi^+(y)]_\mp \\
 &\quad + [\lambda\phi^-(x), \kappa^*\phi^-(y)]_\mp + [\lambda\phi^-(x), \lambda^*\phi^+(y)]_\mp \\
 &= |\kappa|^2[\phi^+(x), \phi^-(y)]_\mp + |\lambda|^2[\phi^-(x), \phi^+(y)]_\mp \\
 &= |\kappa|^2[\phi^+(x), \phi^-(y)]_\mp \mp |\lambda|^2[\phi^+(y), \phi^-(x)]_\mp \\
 &= |\kappa|^2\Delta_+(x-y) \mp |\lambda|^2\Delta_+(y-x).
 \end{aligned} \tag{6.80}$$

Como $x - y$ é uma separação do tipo espaço, podemos tratar $\Delta(x - y)$ como uma função par:

$$[\phi(x), \phi^\dagger(y)]_\mp = (|\kappa|^2 \mp |\lambda|^2) \Delta_+(x - y). \tag{6.81}$$

Portanto, podemos respeitar a condição de microcausalidade para bósons — pois precisamos do sinal de cima — com os campos definidos em (6.78) desde que $|\kappa| = |\lambda|$.²⁰ Desse modo, a condição de microcausalidade para campos escalares se torna necessariamente:

$$[\phi(x), \phi(y)] = [\phi(x), \phi^\dagger(y)] = 0 \text{ se } (x - y)^2 \leq 0, \tag{6.82}$$

ou seja, fazemos a escolha explícita do comutador no elemento $[\phi(x), \phi(y)]_\pm$.

Podemos manipular a diferença de fase entre κ e λ mudando a fase dos estados criados e destruídos pelos operadores $a^\dagger(p)$ e $a(p)$ tal que:

$$a(p) \rightarrow e^{i\alpha}a(p) \iff a^\dagger(p) \rightarrow e^{-i\alpha}a^\dagger(p), \tag{6.83}$$

e assim:

$$\kappa \rightarrow e^{i\alpha}\kappa \iff \lambda \rightarrow e^{-i\alpha}\lambda. \tag{6.84}$$

¹⁹ Note que $[a, b]_\mp = ab \mp ba = \mp(ba \mp ab) = \mp[b, a]_\mp$.

²⁰ A necessidade de que $\phi(x)$ descreva um bóson também pode ser vista por $[\phi(x), \phi(y)]_\mp = \kappa\lambda(1 \mp 1)\Delta_+(x - y)$, mas essa análise por si só não nos diria nada sobre κ e λ .

Podemos então escolher um α tal que $\lambda = \kappa$ fazendo:²¹

$$\begin{aligned}
 \frac{\lambda e^{-i\alpha}}{\kappa e^{+i\alpha}} &= 1 \\
 \frac{\lambda}{\kappa} &= e^{+i2\alpha} \\
 \left| \frac{\lambda}{\kappa} \right| e^{i \text{Arg} \frac{\lambda}{\kappa}} &= e^{+i2\alpha} \\
 e^{i \text{Arg} \frac{\lambda}{\kappa}} &= e^{+i2\alpha} \\
 \implies \alpha &= \frac{1}{2} \text{Arg} \frac{\lambda}{\kappa}.
 \end{aligned} \tag{6.85}$$

Com $\kappa = \lambda$, podemos absorver esse fator redefinindo $\phi(x)$:

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x). \tag{6.86}$$

Esse campo escalar é autoadjunto, $\phi(x) = \phi^\dagger(x)$, e a densidade de interação $\mathcal{H}(x)$ formada de polinômios desse campo comuta consigo mesma em separações do tipo espaço. Embora a nossa escolha de fixar as fases tal que $\kappa = \lambda$ seja apenas uma convenção, precisamos nos manter sempre consistentes com ela daqui em diante, pois se definirmos outro campo escalar autoadjunto como:

$$\tilde{\phi}(x) = e^{+i\alpha} \phi^+(x) + e^{-i\alpha} \phi^{+\dagger}(x), \tag{6.87}$$

sendo α uma fase qualquer, esse campo $\tilde{\phi}(x)$ comutará com $\tilde{\phi}(y)$ em separações do tipo espaço — pois $|e^{+i\alpha}| = |e^{-i\alpha}| = 1$ — mas não com $\phi(y)$.²²

$$\begin{aligned}
 [\phi(x), \tilde{\phi}(y)] &= [\phi^+(x), e^{-i\alpha} \phi^-(y)] + [\phi^-(x), e^{+i\alpha} \phi^+(y)] \\
 &= e^{-i\alpha} [\phi^+(x), \phi^-(y)] + e^{+i\alpha} [\phi^-(x), \phi^+(y)] \\
 &= e^{-i\alpha} [\phi^+(x), \phi^-(y)] - e^{+i\alpha} [\phi^+(y), \phi^-(x)] \\
 &= (e^{-i\alpha} - e^{+i\alpha}) \Delta_+(x - y),
 \end{aligned} \tag{6.88}$$

o que só será nulo se $\alpha = 0$, mas nesse caso $\tilde{\phi}(x) = \phi(x)$.

Por questão de conveniência, fizemos todos os cálculos até agora tomando um campo escalar $\phi(x)$ que cria e destrói uma partícula que não carrega nenhum número quântico conservado, como carga elétrica. Nesse caso, aplicando (6.69) e (6.70) em (6.86), obtemos:

$$\phi(x) = \int d^3p \ (2\pi)^{-\frac{3}{2}} (2p^0)^{-1/2} \{a(p)e^{ip \cdot x} + a^\dagger(p)e^{-ip \cdot x}\}, \tag{6.89}$$

que é a equação explícita do campo escalar para partícula de carga nula.

²¹ O argumento de um número complexo, $\text{Arg}(z)$, é definido pela expressão $z = |z|e^{i\text{Arg}(z)}$.

²² Na última linha fizemos novamente $\Delta_+(x - y) = \Delta_+(y - x)$, o que, vale reforçar, é válido apenas para $x - y$ do tipo espaço.

6.2.1 Campo escalar para partícula de carga não-nula

Vamos agora construir o campo escalar para a partícula que carrega um número quântico não-nulo para alguma quantidade conservada, como a carga elétrica. Supondo que $\phi^+(x)$ aniquila uma partícula que carrega uma carga q , associada a um operadores hermitiano Q , segue diretamente de (6.58) que:

$$\begin{aligned} [Q, \phi^+(x)] &= -q\phi^+(x), \\ [Q, \phi^-(x)] &= +q\phi^-(x). \end{aligned} \quad (6.90)$$

Como resultado, $\mathcal{H}(x)$ formado dos campo²³ $\tilde{\phi}(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x)$ não comuta com Q de forma simples pois esses campos também não comutam:²⁴

$$\begin{aligned} [Q, \tilde{\phi}(x)] &= [Q, \phi^+(x) + \phi^-(x)] \\ &= [Q, \phi^+(x)] + [Q, \phi^-(x)] \\ &= -q\phi^+(x) + q\phi^-(x) \\ &= q \{ -\phi^+(x) + \phi^-(x) \} \not\propto \tilde{\phi}(x). \end{aligned} \quad (6.91)$$

Precisamos portanto supor dois bósons de spin-0, de mesma massa m , com cargas opostas $+q$ e $-q$. Vamos escrever os campos de aniquilação desses bósons como $\phi^+(x)$ e $\phi^{+c}(x)$, e os de criação como $\phi^{+\dagger}(x) = \phi^-(x)$ e $\phi^{+c\dagger}(x) = \phi^{-c}(x)$, de modo que:

$$\begin{aligned} [Q, \phi^+(x)] &= -q\phi^+(x), & [Q, \phi^-(x)] &= +q\phi^-(x), \\ [Q, \phi^{+c}(x)] &= +q\phi^{+c}(x), & [Q, \phi^{-c}(x)] &= +q\phi^{-c}(x). \end{aligned} \quad (6.92)$$

Vamos definir o campo escalar que aniquila a partícula de carga q e destrói a de carga $-q$ como:

$$\phi(x) = \kappa\phi^+(x) + \lambda\phi^{-c}(x), \quad (6.93)$$

cuja comutação com Q fornece:

$$\begin{aligned} [Q, \phi(x)] &= [Q, \kappa\phi^+(x) + \lambda\phi^{-c}(x)] \\ &= [Q, \kappa\phi^+(x)] + [Q, \lambda\phi^{-c}(x)] \\ &= -q\kappa\phi^+(x) - q\lambda\phi^{-c}(x) \\ &= -q\phi(x). \end{aligned} \quad (6.94)$$

Para que esse campo comute com seu adjunto em separações do tipo espaço precisamos novamente que $|\lambda| = |\kappa|$ e que $\phi(x)$ corresponda a um bóson, pois, de modo similar ao que foi feito na seção

²³ Campo que definimos em (6.86). Mudamos a notação para $\tilde{\phi}(x)$ pois nessa seção reservamos $\phi(x)$ para o campo em (6.93).

²⁴ O símbolo $\not\propto$ indica não-proporcionalidade.

anterior²⁵:

$$\begin{aligned}
[\phi(x), \phi^\dagger(y)]_\mp &= [\kappa\phi^+(x) + \lambda\phi^{-c}(x), \kappa\phi^-(y) + \lambda\phi^{+c}(y)]_\mp \\
&= [\kappa\phi^+(x), \kappa^*\phi^-(y)]_\mp + [\kappa\phi^+(x), \lambda^*\phi^{+c}(y)]_\mp \\
&\quad + [\lambda\phi^{-c}(x), \kappa^*\phi^-(y)]_\mp + [\lambda\phi^{-c}(x), \lambda^*\phi^{+c}(y)]_\mp \\
&= [\kappa\phi^+(x), \kappa\phi^-(y)]_\mp + [\lambda\phi^{-c}(x), \lambda\phi^{+c}(y)]_\mp \\
&= |\kappa|^2[\phi^+(x), \phi^-(y)]_\mp \mp |\lambda|^2[\phi^{+c}(y), \phi^{-c}(x)]_\mp \\
&= |\kappa|^2\Delta_+(x-y) \mp |\lambda|^2\Delta_+(y-x) \\
&= (|\kappa|^2 \mp |\lambda|^2) \Delta_+(y-x),
\end{aligned} \tag{6.95}$$

onde usamos (6.76) e pudemos igualar as funções Δ_+ dos dois comutadores já que supusemos que a partícula e antipartícula possuem a mesma massa m . Os campos $\phi(x)$ e $\phi(y)$ por sua vez automaticamente comutam pois:

$$\begin{aligned}
[\phi(x), \phi(y)]_\mp &= [\kappa\phi^+(x) + \lambda\phi^{-c}(x), \kappa\phi^+(y) + \lambda\phi^{-c}(y)]_\mp \\
&= [\kappa\phi^+(x), \kappa\phi^+(y)]_\mp + [\kappa\phi^+(x), \lambda\phi^{-c}(y)]_\mp \\
&\quad + [\lambda\phi^{-c}(x), \kappa\phi^+(y)]_\mp + [\lambda\phi^{-c}(x), \lambda\phi^{-c}(y)]_\mp \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{6.96}$$

já que os operadores que criam e aniquilam partículas distintas sempre comutam e, caso q fosse nulo e não houvesse distinção entre partícula e antipartícula, teríamos simplesmente o caso já discutido na seção anterior.

Podemos, de forma similar ao que foi feito na seção anterior, redefinir os estados de partícula e antipartícula com uma fase de modo que possamos escolher $\kappa = \lambda$ e por fim escrever o campo de aniquilação da partícula e criação da antipartícula como:

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^{-c}(x), \tag{6.97}$$

o que se expande com (6.69) e (6.70) para:

$$\phi(x) = \int d^3p \ (2\pi)^{-\frac{3}{2}} (2p^0)^{-1/2} \{a(p)e^{ip \cdot x} + a^{c\dagger}(p)e^{-ip \cdot x}\}, \tag{6.98}$$

onde, explicitamente:

$$a^{c\dagger}(p) = a^\dagger p, n^c, \tag{6.99}$$

e n^c denota a antipartícula da espécie de rótulo n . Essa é a equação mais geral do campo escalar, pois

²⁵ Nos desenvolvimentos de (6.79) até (6.82).

se aplica tanto a partículas que carregam quanto às que não carregam algum valor não-nula para algum número quântico conservado.

6.2.2 Simetrias do campo escalar

Vamos discutir as simetrias do campo escalar em relação à paridade, à inversão temporal e à conjugação de carga. Para isso usaremos as relações que obtivemos na Seção (5.1.5)²⁶.

Paridade. Usando a definição do campo escalar de aniquilação, em (6.69), fazemos:

$$\begin{aligned}
 P\phi^+(x)P^{-1} &= P \int_{-\infty}^{\infty} d^3p (2\pi)^{-\frac{3}{2}} (2p^0)^{-1/2} a(p) e^{ip \cdot x} P^{-1} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} d^3p (2\pi)^{-\frac{3}{2}} (2p^0)^{-1/2} Pa(p)P^{-1} e^{ip \cdot x} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} d^3p (2\pi)^{-\frac{3}{2}} (2p^0)^{-1/2} \eta_n^* a(\mathcal{P}p, \sigma, n) e^{ip \cdot x} \\
 &= \eta_n^* \int_{-\infty}^{\infty} d^3p (2\pi)^{-\frac{3}{2}} (2p^0)^{-1/2} a(\mathcal{P}p, \sigma, n) e^{ip \cdot x}.
 \end{aligned} \tag{6.100}$$

Vamos mudar a variável de integração $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$, sem alterar o sinal de p^0 . Isso significa que o quadrimomento p será transformado de $p \rightarrow \mathcal{P}p$:

$$\begin{aligned}
 P\phi^+(x)P^{-1} &= \eta_n^* \int_{-\infty}^{\infty} d^3(-p) (2\pi)^{-\frac{3}{2}} (2p^0)^{-1/2} a(p, \sigma, n) e^{i(\mathcal{P}p) \cdot x} \\
 &= \eta_n^* \int_{-\infty}^{\infty} d^3p (2\pi)^{-\frac{3}{2}} (2p^0)^{-1/2} a(p, \sigma, n) e^{ip \cdot (\mathcal{P}x)} \\
 &= \eta_n^* \phi^+(\mathcal{P}x),
 \end{aligned} \tag{6.101}$$

e, para $\phi^{-c}(x)$ obtemos, pelo mesmo processo:

$$P\phi^{-c}(x)P^{-1} = \eta_{n^c} \phi^{-c}(\mathcal{P}x). \tag{6.102}$$

Vamos usar $\eta_n \rightarrow \eta$ e $\eta_{n^c} \rightarrow \eta^c$ para reescrever esses resultados como:

$$\begin{aligned}
 P\phi^+(x)P^{-1} &= \eta^* \phi^+(\mathcal{P}x), \\
 P\phi^{-c}(x)P^{-1} &= \eta^c \phi^{-c}(\mathcal{P}x).
 \end{aligned} \tag{6.103}$$

Os campos que usamos para construir a densidade de interação $\mathcal{H}(x)$, contudo, são dados por $\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^{-c}(x)$. Obtemos a ação da paridade sobre esse campo por uma simples substituição

²⁶ Mais especificamente, as relações para o caso $m \neq 0$:

$$\begin{aligned}
 Pa(p, \sigma, n)P^{-1} &= \eta_n^* a(\mathcal{P}p, \sigma, n), & Pa^\dagger(\vec{p}, \sigma, n)P^{-1} &= \eta_n a^\dagger(\mathcal{P}p, \sigma, n), \\
 Ta(p, \sigma, n)T^{-1} &= (-1)^{j-\sigma} a(\mathcal{P}p, -\sigma, n), & Ta^\dagger(p, \sigma, n)T^{-1} &= (-1)^{j-\sigma} a^\dagger(\mathcal{P}p, -\sigma, n), \\
 Ca(p, \sigma, n)C^{-1} &= \xi_n^* a(p, \sigma, n^c), & Ca^\dagger(p, \sigma, n)C^{-1} &= \xi_n a^\dagger(p, \sigma, n^c).
 \end{aligned}$$

dos resultados recém-obtidos:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\phi(x)\mathcal{P}^{-1} &= \mathcal{P}\phi^+(x)\mathcal{P}^{-1} + \mathcal{P}\phi^{-c}(x)\mathcal{P}^{-1} \\ &= \eta^*\phi^+(\mathcal{P}x) + \eta^c\phi^{-c}(\mathcal{P}x).\end{aligned}\tag{6.104}$$

Para que o campo escalar não se transforme em um campo distinto por transformações de paridade, já que isso traria quebras da condição de microcausalidade para densidades de interação que contém tanto $\phi(x)$ quando $(\mathcal{P}\phi(x)\mathcal{P}^{-1})^\dagger$, exigimos que:

$$\eta^* = \eta^c,\tag{6.105}$$

e assim:

$$\mathcal{P}\phi(x)\mathcal{P}^{-1} = \eta^*\phi(\mathcal{P}x).\tag{6.106}$$

Esse resultado também vale para quando a partícula é sua própria antipartícula, e então temos $\eta^* = \eta$, o que implica η ser um número real. Como η é também uma fase, concluímos que partículas que são suas próprias antipartículas têm paridade intrínseca $\eta = \pm 1$.

Reversão temporal. Tomando novamente o campo de aniquilação, fazemos um processo semelhante ao anterior, mas notamos que $e^{ip\cdot x}\mathbb{T}^{-1} = \mathbb{T}^{-1}e^{-ip\cdot x}$ devido à antiunitariedade de $\mathbb{T}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{T}\phi^+(x)\mathbb{T}^{-1} &= \mathbb{T} \int_{-\infty}^{\infty} d^3p \ (2\pi)^{-\frac{3}{2}}(2p^0)^{-1/2} a(p)e^{ip\cdot x}\mathbb{T}^{-1} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d^3p \ (2\pi)^{-\frac{3}{2}}(2p^0)^{-1/2} \mathbb{T}a(p)\mathbb{T}^{-1}e^{-ip\cdot x} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d^3p \ (2\pi)^{-\frac{3}{2}}(2p^0)^{-1/2} (-1)^{j-\sigma}a(\mathcal{P}p, \sigma, n)e^{-ip\cdot x} \\ &= (-1)^{j-\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} d^3p \ (2\pi)^{-\frac{3}{2}}(2p^0)^{-1/2} a(\mathcal{P}p, \sigma, n)e^{-ip\cdot x} \\ &= (-1)^{j-\sigma} \int_{+\infty}^{-\infty} d^3(-p) \ (2\pi)^{-\frac{3}{2}}(2p^0)^{-1/2} a(p, \sigma, n)e^{-i(\mathcal{P}p)\cdot x} \\ &= (-1)^{j-\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3(-p) \ (2\pi)^{-\frac{3}{2}}(2p^0)^{-1/2} a(p, \sigma, n)e^{iP\cdot(-\mathcal{P}x)} \\ &= (-1)^{j-\sigma}\phi^+(-\mathcal{P}x) \\ &= (-1)^{j-\sigma}\phi^+(\mathcal{T}x).\end{aligned}\tag{6.107}$$

Como vimos no início da Seção 6.2, campos escalares só podem descrever partículas de $j = \sigma = 0$. Portanto, já estendo esse mesmo processo para $\phi^{-c}(x)$, escrevemos:

$$\begin{aligned}\mathbb{T}\phi^+(x)\mathbb{T}^{-1} &= \phi^+(\mathcal{T}x), \\ \mathbb{T}\phi^{-c}(x)\mathbb{T}^{-1} &= \phi^{-c}(\mathcal{T}x).\end{aligned}\tag{6.108}$$

De tais expressões segue que:

$$\mathbb{T}\phi(x)\mathbb{T}^{-1} = \phi(\mathcal{T}x). \quad (6.109)$$

Recordamos agora que na Seção 3.2.4 a aplicação de $\mathbb{T}$ sobre um estado físico fazia surgir uma fase ζ , que verificamos que era irrelevante fisicamente pois sempre poderia ser redefinida para $\zeta = 1$. Caso não tivéssemos feito essa redefinição, aqui teríamos:

$$\begin{aligned} \mathbb{T}\phi^+(x)\mathbb{T}^{-1} &= \zeta^\dagger \phi^+(\mathcal{T}x), \\ \mathbb{T}\phi^{-c}(x)\mathbb{T}^{-1} &= \zeta^c \phi^{-c}(\mathcal{T}x), \end{aligned} \quad (6.110)$$

o que nos levaria a tomar $\zeta^c = \zeta^*$ para que $\mathbb{T}\phi(x)\mathbb{T}^{-1} = \zeta^*\phi(x)$.

Conjugação de carga. A extensão da conjugação de carga para o campo de aniquilação é:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\phi^+(x)\mathbb{C}^{-1} &= \mathbb{C} \int_{-\infty}^{\infty} d^3p \ (2\pi)^{-\frac{3}{2}} (2p^0)^{-1/2} a(p) e^{ip \cdot x} \mathbb{C}^{-1} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d^3p \ (2\pi)^{-\frac{3}{2}} (2p^0)^{-1/2} \mathbb{C} a(p) \mathbb{C}^{-1} e^{ip \cdot x} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d^3p \ (2\pi)^{-\frac{3}{2}} (2p^0)^{-1/2} \xi^* a^c(p) e^{ip \cdot x} \\ &= \xi^* \phi^{+c}(x). \end{aligned} \quad (6.111)$$

De modo semelhante:

$$\mathbb{C}\phi^{-c}(x)\mathbb{C}^{-1} = \xi^c \phi^-(x). \quad (6.112)$$

Mais uma vez, para que $\mathbb{C}\phi(x)\mathbb{C}^{-1}$ comute com $\phi(x)$ e $\phi^\dagger(x)$, exigimos que:

$$\xi^* = \xi^c. \quad (6.113)$$

Com isso:

$$\mathbb{C}\phi(x)\mathbb{C}^{-1} = \xi^* \phi(x), \quad (6.114)$$

e, mais uma vez, a condição $\xi^* = \xi^c$ resulta em, para partículas que são suas próprias antipartículas, $\xi^* = \xi$, e a fase de conjugação de carga deve ser $\xi = \pm 1$.

6.3 CAMPOS VETORIAIS CAUSAIS

Depois do campo escalar, o tipo mais simples de campo é o que se comporta como um quadrivetor. Campos vetoriais são utilizados para descrever bósons $W^\pm$ e Z^0 em limites de baixa energia e, apesar de o fóton ser uma partícula sem massa, há teorias no contexto da Eletrodinâmica Quântica que tratam o fóton como um campo quadrivetorial no limite $m \rightarrow 0$.

A representação quadrivetorial do grupo de Lorentz é aquela dada por matrizes 4×4 :

$$D(\Lambda)^\mu{}_\nu \equiv \Lambda^\mu{}_\nu. \quad (6.115)$$

Vamos deixar de lado o rótulo n de espécie de partícula — pois queremos que esses campos aniquilem e criem apenas um tipo de partícula por vez e deixaremos as considerações de conservação carga para depois — e vamos escrever os campos de criação e aniquilação, segundo (6.33), como:

$$\phi^{+\mu}(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_{\sigma} \int d^3p \, u^\mu(p, \sigma) a(p, \sigma) e^{+ip \cdot x}, \quad (6.116)$$

$$\phi^{-\mu}(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_{\sigma} \int d^3p \, v^\mu(p, \sigma) a^\dagger(p, \sigma) e^{-ip \cdot x}. \quad (6.117)$$

Com (6.42) e (6.43) podemos adaptar diretamente:

$$u^\mu(\vec{p}, \sigma) = \sqrt{\frac{m}{p^0}} L(p)^\mu{}_\nu u^\nu(\vec{0}, \sigma), \quad (6.118)$$

$$v^\mu(\vec{p}, \sigma) = \sqrt{\frac{m}{p^0}} L(p)^\mu{}_\nu v^\nu(\vec{0}, \sigma), \quad (6.119)$$

onde não precisamos mais de um somatório explícito pois estamos agora lidando com índices espaço-temporais que trazem de volta a notação de somatório implícito. As equações de rotação em (6.47) e (6.48) se tornam:

$$\mathcal{J}^\mu{}_\nu u^\nu(\vec{0}, \sigma) = \sum_{\bar{\sigma}} u^\mu(\vec{0}, \bar{\sigma}) J_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j)}, \quad (6.120)$$

$$\mathcal{J}^\mu{}_\nu v^\nu(\vec{0}, \sigma) = - \sum_{\bar{\sigma}} v^\mu(\vec{0}, \bar{\sigma}) J_{\bar{\sigma}\sigma}^{*(j)}, \quad (6.121)$$

onde agora $\mathcal{J}^\mu{}_\nu$ são simplesmente os geradores de rotação agindo sobre quadrivetores do espaço-tempo. Eles são dados por:

$$\begin{aligned} (\mathcal{J}_k)^0{}_0 &= (\mathcal{J}_k)^0{}_i = (\mathcal{J}_k)^i{}_0 = 0, \\ (\mathcal{J}_k)^i{}_j &= -i\epsilon_{ijk}. \end{aligned} \quad (6.122)$$

Explicitamente:

$$\mathcal{J}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & +i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & +i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.123)$$

Podemos usar essas matrizes para construir o operador $\mathcal{J}^2 \equiv (\mathcal{J}_1)^2 + (\mathcal{J}_2)^2 + (\mathcal{J}_3)^2$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}^2 &= (\mathcal{J}_1)^2 + (\mathcal{J}_2)^2 + (\mathcal{J}_3)^2 \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{6.124}$$

Esse resultado pode ser expresso por:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{J}^2)^0{}_0 &= (\mathcal{J}^2)^0{}_i = (\mathcal{J}^2)^i{}_0 = 0, \\
(\mathcal{J}^2)^i{}_j &= +2\delta^i{}_j.
\end{aligned} \tag{6.125}$$

Queremos usar esses resultados para analisar u^μ e v^μ . Vamos primeiro tomar a expressão (6.120) com $(\mathcal{J}_k)$ e trabalhá-la multiplicando a pela mesma rotação $(\mathcal{J}_k)$ pela esquerda:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{J}_k)^\mu{}_\nu u^\nu(\vec{0}, \sigma) &= \sum_{\bar{\sigma}} u^\mu(\vec{0}, \bar{\sigma}) (J_k^{(j)})_{\bar{\sigma}\sigma} \\
(\mathcal{J}_k)^\rho{}_\mu (\mathcal{J}_k)^\mu{}_\nu u^\nu(\vec{0}, \sigma) &= \sum_{\bar{\sigma}} (\mathcal{J}_k)^\rho{}_\mu u^\mu(\vec{0}, \bar{\sigma}) (J_k^{(j)})_{\bar{\sigma}\sigma} \\
(\mathcal{J}_k^2)^\rho{}_\nu u^\nu(\vec{0}, \sigma) &= \sum_{\bar{\sigma}} \sum_{\bar{\bar{\sigma}}} u^\rho(\vec{0}, \bar{\bar{\sigma}}) (J_k^{(j)})_{\bar{\bar{\sigma}}\bar{\sigma}} (J_k^{(j)})_{\bar{\sigma}\sigma} \\
(\mathcal{J}_k^2)^\rho{}_\nu u^\nu(\vec{0}, \sigma) &= \sum_{\bar{\bar{\sigma}}} u^\rho(\vec{0}, \bar{\bar{\sigma}}) (J_k^{(j)})_{\bar{\bar{\sigma}}\sigma}^2.
\end{aligned} \tag{6.126}$$

Para v^μ , usamos (6.121) e obtemos, de modo similar:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{J}_k)^\rho{}_\mu (\mathcal{J}_k)^\mu{}_\nu v^\nu(\vec{0}, \sigma) &= - \sum_{\bar{\sigma}} (\mathcal{J}_k)^\rho{}_\mu v^\mu(\vec{0}, \bar{\sigma}) (J_k^{(j)})_{\bar{\sigma}\sigma} \\
(\mathcal{J}_k^2)^\rho{}_\nu v^\nu(\vec{0}, \sigma) &= - \sum_{\bar{\sigma}} \left(- \sum_{\bar{\bar{\sigma}}} v^\rho(\vec{0}, \bar{\bar{\sigma}}) (J_k^{(j)})_{\bar{\bar{\sigma}}\bar{\sigma}} \right) (J_k^{(j)})_{\bar{\sigma}\sigma} \\
(\mathcal{J}_k^2)^\rho{}_\nu v^\nu(\vec{0}, \sigma) &= \sum_{\bar{\bar{\sigma}}} v^\rho(\vec{0}, \bar{\bar{\sigma}}) (J_k^{(j)})_{\bar{\bar{\sigma}}\sigma}^2.
\end{aligned} \tag{6.127}$$

Já que em ambos os casos removemos a dependência explícita de $\bar{\sigma}$, vamos reescrever $\bar{\bar{\sigma}} \rightarrow \bar{\sigma}$ para

apresentar esses resultados de forma mais concisa:

$$(\mathcal{J}_k^2)^\rho{}_\nu u^\nu(\vec{0}, \sigma) = \sum_{\vec{\sigma}} u^\rho(\vec{0}, \vec{\sigma}) (J_k^{(j)})_{\vec{\sigma}\sigma}^2, \quad (6.128)$$

$$(\mathcal{J}_k^2)^\rho{}_\nu v^\nu(\vec{0}, \sigma) = \sum_{\vec{\sigma}} v^\rho(\vec{0}, \vec{\sigma}) (J_k^{(j)})_{\vec{\sigma}\sigma}^2. \quad (6.129)$$

Podemos aplicar as equações de $\mathcal{J}^2$ em (6.125) diretamente nas equações acima, e obtemos:

$$\sum_{\vec{\sigma}} u^0(\vec{0}, \vec{\sigma}) (J^{(j)})_{\vec{\sigma}\sigma}^2 = 0, \quad (6.130)$$

$$\sum_{\vec{\sigma}} u^i(\vec{0}, \vec{\sigma}) (J^{(j)})_{\vec{\sigma}\sigma}^2 = 2u^i(\vec{0}, \sigma), \quad (6.131)$$

$$\sum_{\vec{\sigma}} v^0(\vec{0}, \vec{\sigma}) (J^{*(j)})_{\vec{\sigma}\sigma}^2 = 0, \quad (6.132)$$

$$\sum_{\vec{\sigma}} v^i(\vec{0}, \vec{\sigma}) (J^{*(j)})_{\vec{\sigma}\sigma}^2 = 2u^i(\vec{0}, \sigma). \quad (6.133)$$

É um resultado conhecido que, para uma representação de spin- j :

$$(J^j)_{\vec{\sigma}\sigma}^2 = j(j+1)\delta_{\vec{\sigma}\sigma}. \quad (6.134)$$

As equações que obtivemos para u^μ e v^μ são similares, portanto basta tomar as de u^μ para prosseguir com a análise. Tomamos (6.130):

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{\sigma}} u^0(\vec{0}, \vec{\sigma}) j(j+1)\delta_{\vec{\sigma}\sigma} &= 0 \\ u^0(\vec{0}, \sigma) j(j+1) &= 0, \end{aligned} \quad (6.135)$$

e de (6.131):

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{\sigma}} u^i(\vec{0}, \vec{\sigma}) j(j+1)\delta_{\vec{\sigma}\sigma} &= 2u^i(\vec{0}, \sigma) \\ u^i(\vec{0}, \sigma) j(j+1) &= 2u^i(\vec{0}, \sigma). \end{aligned} \quad (6.136)$$

As únicas maneiras de satisfazer essas duas condições são:

- i. $j = 0$, $u^i(\vec{0}, \sigma) = v^i(\vec{0}, \sigma) = 0$, ou,
- ii. $j = 1$, $u^0(\vec{0}, \sigma) = v^0(\vec{0}, \sigma) = 0$.

Vamos analisar esses casos separadamente nas subseções seguintes.

6.3.1 Campo vetorial de spin-0

Para spin-0, vimos que apenas as componentes temporais de $u^\mu(\vec{0}, \sigma)$ e de $v^\mu(\vec{0}, \sigma)$ serão não-nulas. Deixamos de lado o rótulo σ , que será sempre zero, e escolhemos:

$$\begin{aligned} u^0(\vec{0}) &= i\sqrt{\frac{m}{2}}, \\ v^0(\vec{0}) &= -i\sqrt{\frac{m}{2}}. \end{aligned} \quad (6.137)$$

Aplicando esses valores em (6.118) e (6.119), obtemos diretamente que:²⁷

$$\begin{aligned} u^\mu(\vec{p}, \sigma) &= \sqrt{\frac{m}{p^0}} L(p)^\mu{}_\nu u^\nu(\vec{0}, \sigma) \\ u^\mu(\vec{p}, \sigma) &= \sqrt{\frac{m}{p^0}} L(p)^\mu{}_0 u^0(\vec{0}, \sigma) \\ u^\mu(\vec{p}, \sigma) &= i \frac{m}{\sqrt{2p^0}} L(p)^\mu{}_0 \\ u^\mu(\vec{p}, \sigma) &= i \frac{m}{\sqrt{2p^0}} \frac{p^\mu}{m} \\ u^\mu(\vec{p}, \sigma) &= i \frac{p^\mu}{\sqrt{2p^0}}. \end{aligned} \quad (6.138)$$

Fazendo o mesmo processo para v^μ obtemos:

$$v^\mu(\vec{p}, \sigma) = -i \frac{p^\mu}{\sqrt{2p^0}}. \quad (6.139)$$

Com esses vetores em (6.116) e (6.117) obtemos:

$$\phi^{+\mu}(x) = +i(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_\sigma \int d^3p \frac{p^\mu}{\sqrt{2p^0}} a(p, \sigma) e^{+ip \cdot x}, \quad (6.140)$$

$$\phi^{-\mu}(x) = -i(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_\sigma \int d^3p \frac{p^\mu}{\sqrt{2p^0}} a^\dagger(p, \sigma) e^{-ip \cdot x}, \quad (6.141)$$

²⁷ O boost $L(p)$ leva de $\vec{p}' = (m, \vec{0})$ para $\vec{p} = (p^0, \vec{p})$. Logo:

$$\begin{aligned} L(p)^\mu{}_\nu p'^\nu &= p^\mu \\ L(p)^\mu{}_0 p'^0 &= p^\mu \\ L(p)^\mu{}_0 m &= p^\mu \implies L(p)^\mu{}_0 = p^\mu / m. \end{aligned}$$

contudo, retomando os campos escalares de aniquilação e criação em (6.70) e (6.69) vemos que os campos vetoriais de spin-0 são apenas derivadas dos campos escalares:

$$\phi^{+\mu}(x) = \partial^\mu \phi^+(x), \quad (6.142)$$

$$\phi^{-\mu}(x) = \partial^\mu \phi^-(x), \quad (6.143)$$

e não precisamos analisar novamente esses campos.

6.3.2 Campo vetorial de spin-1

Para o caso de spin $j = 1$, sabemos que $u^0(\vec{0}, \sigma) = v^0(\vec{0}, \sigma) = 0$, e portanto $u^\mu(\vec{0}, \sigma)$ e $v^\mu(\vec{0}, \sigma)$ estão em alguma direção espacial. Podemos escolher essa direção tal que:

$$u^\mu(\vec{0}, 0) = v^\mu(\vec{0}, 0) = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.144)$$

Podemos usar em (6.120) os operadores de levantamento e abaixamento de projeção de spin, $H_\pm = (J_1 \pm iJ_2)/\sqrt{2}$, para obter, com uma substituição explícita de (6.123):

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{\sigma}} u^\mu(\vec{0}, \vec{\sigma}) \frac{1}{\sqrt{2}} (J_1^{(1)} \pm iJ_2^{(1)})_{\vec{\sigma}0} &= \frac{1}{\sqrt{2}} ((\mathcal{J}_1)^\mu{}_\nu \pm i(\mathcal{J}_2)^\mu{}_\nu) u^\nu(\vec{0}, 0) \\ u^\mu(\vec{0}, \pm 1) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2m}} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & +i & 0 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ u^\mu(\vec{0}, \pm 1) &= \frac{1}{\sqrt{4m}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mp 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & \pm 1 & +i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ u^\mu(\vec{0}, \pm 1) &= \frac{1}{\sqrt{4m}} \begin{pmatrix} 0 \\ \mp 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.145)$$

Para v^μ obtemos:

$$\sum_{\vec{\sigma}} v^\mu(\vec{0}, \vec{\sigma}) \frac{1}{\sqrt{2}} (J_1^{(1)} \pm i J_2^{(1)})_{\vec{\sigma}0} = -\frac{1}{\sqrt{2}} ((\mathcal{J}_1)^\mu{}_\nu \pm i(\mathcal{J}_2)^\mu{}_\nu) v^\nu(\vec{0}, 0)$$

$$v^\mu(\vec{0}, \pm 1) = -\frac{1}{\sqrt{4m}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mp 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & \pm 1 & +i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v^\mu(\vec{0}, \pm 1) = -\frac{1}{\sqrt{4m}} \begin{pmatrix} 0 \\ \mp 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.146)$$

$$v^\mu(\vec{0}, \pm 1) = \frac{1}{\sqrt{4m}} \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ +i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vamos agora usar (6.118):

$$u^\mu(\vec{p}, \sigma) = \sqrt{\frac{m}{p^0}} L(p)^\mu{}_\nu u^\nu(\vec{0}, \sigma). \quad (6.147)$$

Com $\sigma = 0$, temos:

$$u^\mu(\vec{p}, 0) = \sqrt{\frac{m}{p^0}} \frac{1}{\sqrt{2m}} L(p)^\mu{}_\nu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2p^0}} L(p)^\mu{}_\nu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (6.148)$$

já com $\sigma = \pm 1$ chegamos em:

$$u^\mu(\vec{p}, \pm 1) = \frac{1}{\sqrt{4p^0}} L(p)^\mu{}_\nu \begin{pmatrix} 0 \\ \mp 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.149)$$

e podemos generalizar esses resultados para:

$$u^\mu(\vec{p}, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2p^0}} e^\mu(\vec{p}, \sigma), \quad (6.150)$$

onde:

$$e^\mu(p, \sigma) \equiv L(p)^\mu{}_\nu e^\nu(\vec{0}, \sigma), \quad (6.151)$$

$$e^\mu(\vec{0}, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e^\mu(\vec{0}, \pm 1) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.152)$$

Com (6.119) obtemos para $v^\mu(\vec{p}, \sigma)$:

$$v^\mu(\vec{p}, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2p^0}} e^{*\mu}(\vec{p}, \sigma). \quad (6.153)$$

Com as equações (6.116) e (6.117) podemos construir os campos vetoriais de criação e aniquilação como:

$$\phi^{+\mu}(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_{\sigma} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} e^\mu(\vec{p}, \sigma) a(p, \sigma) e^{+ip \cdot x}, \quad (6.154)$$

$$\phi^{-\mu}(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_{\sigma} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} e^{*\mu}(\vec{p}, \sigma) a^\dagger(p, \sigma) e^{-ip \cdot x}. \quad (6.155)$$

Para preservar a microcausalidade, precisamos mais uma vez que, para x e y em separações do tipo espaço:

$$[\phi^{+\mu}(x), \phi^{-\nu}(y)]_{\mp} = 0. \quad (6.156)$$

Vamos desenvolver esse comutador ou anticomutador usando a forma explícita dos campos em (6.154) e (6.155):

$$\begin{aligned} [\phi^{+\mu}(x), \phi^{-\nu}(y)]_{\mp} &= (2\pi)^{-3} \left[\sum_{\sigma' \sigma} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} e^\mu(\vec{p}, \sigma) a(p, \sigma) e^{+ip \cdot x} \int \frac{d^3p'}{\sqrt{2p'^0}} e^{*\nu}(\vec{p}', \sigma') a^\dagger(\vec{p}', \sigma') e^{-ip' \cdot y} \right. \\ &\quad \mp \sum_{\sigma' \sigma} \int \frac{d^3p'}{\sqrt{2p'^0}} e^\mu(\vec{p}', \sigma') a^\dagger(\vec{p}', \sigma') e^{-ip' \cdot y} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} e^{*\nu}(\vec{p}, \sigma) a(p, \sigma) e^{+ip \cdot x} \left. \right] \\ &= (2\pi)^{-3} \sum_{\sigma' \sigma} \int \frac{d^3p}{2\sqrt{p^0 p'^0}} e^\mu(\vec{p}, \sigma) e^{*\nu}(\vec{p}', \sigma') e^{i(p \cdot x - p' \cdot y)} \\ &\quad \times \{a(\vec{p}, \sigma) a^\dagger(\vec{p}', \sigma') \mp a^\dagger(\vec{p}', \sigma') a(\vec{p}, \sigma)\}. \end{aligned} \quad (6.157)$$

Sabemos, da equação (5.32), que:

$$a(p', \sigma') a^\dagger(p, \sigma) \mp a^\dagger(p, \sigma) a(p', \sigma') = \delta(p' - p) \delta_{\sigma' \sigma}, \quad (6.158)$$

e com isso:

$$\begin{aligned} [\phi^{+\mu}(x), \phi^{-\nu}(y)]_{\mp} &= \sum_{\sigma' \sigma} \int \frac{d^3 p}{2\sqrt{p^0 p'^0}} e^\mu(\vec{p}, \sigma) e^{*\nu}(\vec{p}', \sigma') e^{i(p \cdot x - p' \cdot y)} \delta(p' - p) \delta_{\sigma' \sigma} \\ &= \sum_{\sigma} \int \frac{d^3 p}{2p^0} e^\mu(\vec{p}, \sigma) e^{*\nu}(\vec{p}, \sigma) e^{ip \cdot (x-y)} \\ &= \int \frac{d^3 p}{2p^0} e^{ip \cdot (x-y)} \Pi^{\mu\nu}(\vec{p}), \end{aligned} \quad (6.159)$$

onde:

$$\Pi^{\mu\nu}(\vec{p}) \equiv \sum_{\sigma} e^\mu(\vec{p}, \sigma) e^{*\nu}(\vec{p}, \sigma). \quad (6.160)$$

Vamos usar (6.152) para calcular $\Pi^{\mu\nu}(\vec{0})$:

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(\vec{0}) &= \sum_{\sigma} e^\mu(\vec{0}, \sigma) e^{*\nu}(\vec{0}, \sigma) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ +i \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -i & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & +i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & +i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & +i & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6.161)$$

que é a matriz de projeção ortogonal ao tempo, a qual, operando sobre um quadrivetor, retorna apenas sua parte espacial. Essa matriz não é uma transformação de Lorentz, o que pode ser visto imediatamente pois seu determinante é nulo. Substituindo (6.151) na definição de $\Pi^{\mu\nu}(\vec{p})$ em (6.160) podemos ver que:

$$\begin{aligned}
\Pi^{\mu\nu}(\vec{p}) &= \sum_{\sigma} L(\vec{p})^{\mu}{}_{\rho} e^{\rho}(\vec{p}, \sigma) L(\vec{p})^{*\nu}{}_{\lambda} e^{*\lambda}(\vec{p}, \sigma) \\
&= L(\vec{p})^{\mu}{}_{\rho} L(\vec{p})^{*\nu}{}_{\lambda} \sum_{\sigma} e^{\rho}(\vec{p}, \sigma) e^{*\lambda}(\vec{p}, \sigma) \\
&= L(\vec{p})^{\mu}{}_{\rho} L(\vec{p})^{*\nu}{}_{\lambda} \Pi^{\rho\lambda}(\vec{0}).
\end{aligned} \tag{6.162}$$

A transformação $L(\vec{p})$ age sobre um vetor $p'^{\mu} = (m, \vec{0})$ levando-o à p^{μ} . Uma matriz como essa pode ser escrita na forma (WEINBERG, 1995, p. 68):

$$L(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \gamma & \frac{p^1}{m} & \frac{p^2}{m} & \frac{p^3}{m} \\ \frac{p^1}{m} & 1 + (\gamma - 1) \frac{(p^1)^2}{|\vec{p}|^2} & (\gamma - 1) \frac{p^1 p^2}{|\vec{p}|^2} & (\gamma - 1) \frac{p^1 p^3}{|\vec{p}|^2} \\ \frac{p^2}{m} & (\gamma - 1) \frac{p^1 p^2}{|\vec{p}|^2} & 1 + (\gamma - 1) \frac{(p^2)^2}{|\vec{p}|^2} & (\gamma - 1) \frac{p^2 p^3}{|\vec{p}|^2} \\ \frac{p^3}{m} & (\gamma - 1) \frac{p^1 p^3}{|\vec{p}|^2} & (\gamma - 1) \frac{p^2 p^3}{|\vec{p}|^2} & 1 + (\gamma - 1) \frac{(p^3)^2}{|\vec{p}|^2} \end{pmatrix}, \tag{6.163}$$

onde:

$$\gamma \equiv \frac{\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}}{m} = \frac{p^0}{m}. \tag{6.164}$$

Podemos identificar que os termos de $L(p)$ são:²⁸

$$\begin{aligned}
L(\vec{p})^i{}_j &= \delta_j^i + (\gamma - 1) \frac{p^i p^j}{|\vec{p}|^2}, \\
L(\vec{p})^i{}_0 &= L(\vec{p})^0{}_i = \frac{p^i}{m^2}, \\
L(\vec{p})^0{}_0 &= \gamma.
\end{aligned} \tag{6.165}$$

Se aplicarmos essas equações em (6.162), lembrando do cálculo explícito de $\Pi^{\mu\nu}(\vec{0})$ em (6.161) que apenas as componentes $\Pi^{ii}(\vec{0}) = 1$ são não-nulas, obtemos:

$$\begin{aligned}
\Pi^{\mu\nu}(\vec{p}) &= \sum_{i=1}^3 L(\vec{p})^{\mu}{}_i L(\vec{p})^{*\nu}{}_i \Pi^{ii}(\vec{0}) \\
&= \sum_{i=1}^3 L(\vec{p})^{\mu}{}_i L(\vec{p})^{*\nu}{}_i.
\end{aligned} \tag{6.166}$$

Dessa relação vamos obter os termos de $\Pi^{\mu\nu}(\vec{p})$. Primeiro, $\Pi^{00}(\vec{p})$:

²⁸ Essa forma torna mais fácil verificar que a forma dada em (6.163) é válida: $p^{\mu} = L(p)^{\mu}{}_{\nu} p'^{\nu} = L(p)^{\mu}{}_0 p'^0 = L(p)^{\mu}{}_0 m$. O que resta é verificar que $L(p)$ pertence ao grupo de Lorentz, o que fazemos observando que ela respeita a condição imposta na equação (2.28), $L(p)^t \eta L(p) = \eta$.

$$\Pi^{00}(\vec{p}) = \sum_{i=1}^3 L(\vec{p})^0{}_i L(\vec{p})^{*0}{}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{(p^i)^2}{m^2} = \frac{|\vec{p}|^2}{m^2}, \quad (6.167)$$

depois, $\Pi^{j0}(\vec{p})$:

$$\begin{aligned} \Pi^{j0}(\vec{p}) &= \sum_{i=1}^3 L(\vec{p})^j{}_i L(\vec{p})^{*0}{}_i = \sum_{i=1}^3 \left(\delta_i^j + (\gamma - 1) \frac{p^i p^j}{|\vec{p}|^2} \right) \frac{p^i}{m} \\ &= \frac{p^j}{m} + \gamma \frac{|\vec{p}|^2 p^j}{|\vec{p}|^2 m} - |\vec{p}|^2 p^j |\vec{p}|^2 m = \gamma \frac{p^j}{m}, \end{aligned} \quad (6.168)$$

e, por fim, $\Pi^{ij}(\vec{p})$:

$$\begin{aligned} \Pi^{ij}(\vec{p}) &= \sum_{k=1}^3 \left(\delta_k^i + (\gamma - 1) \frac{p^i p^k}{|\vec{p}|^2} \right) \left(\delta_k^j + (\gamma - 1) \frac{p^j p^k}{|\vec{p}|^2} \right) \\ &= \sum_{k=1}^3 \left(\delta_k^i \delta_k^j + \delta_k^j (\gamma - 1) \frac{p^i p^k}{|\vec{p}|^2} + \delta_k^i (\gamma - 1) \frac{p^j p^k}{|\vec{p}|^2} + (\gamma - 1)^2 \frac{p^i p^j (p^k)^2}{|\vec{p}|^4} \right) \\ &= \delta^{ij} + 2(\gamma - 1) \frac{p^i p^j}{|\vec{p}|^2} + (\gamma - 1)^2 \frac{p^i p^j |\vec{p}|^2}{|\vec{p}|^4} \\ &= \delta^{ij} + \frac{p^i p^j}{|\vec{p}|^2} (2(\gamma - 1) + (\gamma - 1)^2) \\ &= \delta^{ij} + \frac{p^i p^j}{|\vec{p}|^2} (\gamma^2 - 1) \\ &= \delta^{ij} + \frac{p^i p^j}{m^2}. \end{aligned} \quad (6.169)$$

Esses resultados podem ser escritos como:

$$\Pi^{\mu\nu}(\vec{p}) = -\eta^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{m^2}. \quad (6.170)$$

Com isso, podemos finalmente voltar à nossa análise da microcausalidade do campo vetorial de spin-1. Aplicamos a expressão obtida para $\Pi^{\mu\nu}(\vec{p})$ em (6.159) e escrevemos:

$$\begin{aligned} [\phi^{+\mu}(x), \phi^{-\nu}(y)]_{\mp} &= \int \frac{d^3 p}{2p^0} e^{ip \cdot (x-y)} \left(-\eta^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{m^2} \right) \\ &= \left(-\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{m^2} \right) \int \frac{d^3 p}{2p^0} e^{ip \cdot (x-y)} \\ &= \left(-\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{m^2} \right) \Delta_+(x-y), \end{aligned} \quad (6.171)$$

onde retomamos a função Δ_+ que definimos em (6.76). Como essa função que obtivemos também é par para $x - y$ do tipo espaço, podemos repetir a análise da Seção (6.2) e concluir que, para formarmos um campo vetorial que comute consigo mesmo e com seu adjunto em separações do tipo espaço,

precisamos construir um campo tal que:

$$\phi^\mu(x) \equiv \kappa \phi^{+\mu}(x) + \lambda \phi^{-\mu}(x), \quad (6.172)$$

com $|\kappa| = |\lambda|$, e podemos redefinir a fase dos estados criados e aniquilados por esse campo para podermos escrevê-lo como:

$$\phi^\mu(x) \equiv \phi^{+\mu}(x) + \phi^{-\mu}(x). \quad (6.173)$$

Uma observação interessante é que esse campo é real, pois:

$$\phi^\mu(x) = \phi^{\mu\dagger}(x). \quad (6.174)$$

Lembramos, contudo, que esse campo foi construído para partículas que não carregam nenhum número quântico referente a alguma simetria interna conservada, como a carga elétrica, e portanto só podemos afirmar que são reais os campos que não carregam tais números quânticos e se referem a partículas que são, portanto, suas próprias antipartículas.

6.3.2.1 Campo vetorial de spin-1 com carga não-nula

Vamos estender nossa análise agora para campos que descrevem partículas que carregam alguma simetria conservada, como a carga elétrica. De modo semelhante ao que fizemos na Seção 6.2.1 vamos construir o campo vetorial $\phi^\mu(x)$ com a soma do campo $\phi^{-\mu}(x)$ que aniquila uma partícula correspondente a uma carga q e do campo de criação $\phi^{-c\mu}(x)$ que cria sua antipartícula, de carga $-q$:

$$\phi^\mu(x) = \phi^{-\mu}(x) + \phi^{-c\mu}(x). \quad (6.175)$$

Temos:

$$\begin{aligned} [Q, \phi^{+\mu}(x)] &= -q\phi^{+\mu}(x), \\ [Q, \phi^{-c\mu}(x)] &= -q\phi^{-c\mu}(x), \end{aligned} \quad (6.176)$$

e portanto:

$$[Q, \phi^\mu(x)] = -q\phi^\mu(x). \quad (6.177)$$

Desse modo, a densidade de interação $\mathcal{H}(x)$ construída com $\phi^\mu(x)$ e seu adjunto $\phi^{\mu\dagger}(x)$ irá comutar com o operador Q e conservar a simetria interna a que ele equivale. Podemos escrever esse campo em detalhe usando (6.154) e (6.155):

$$\phi^\mu(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_{\sigma} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \{e^\mu(\vec{p}, \sigma) a(\vec{p}, \sigma) e^{+ip \cdot x} + e^{*\mu}(\vec{p}, \sigma) a^{c\dagger}(\vec{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x}\}. \quad (6.178)$$

Se a partícula e a antipartícula forem distintas, esse campo não é mais real.

6.3.2.2 Campo vetorial e Eletrodinâmica

O campo vetorial descrito em (6.178) respeita, como já era esperado pela discussão da Seção 6.1.3, a equação de Klein-Gordon:

$$(\square - m^2)\phi_\mu(x) = 0. \quad (6.179)$$

Também podemos perceber, usando (6.151), (6.165) e o fato de que $e^0(\vec{0}, \sigma) = 0$, que:

$$\begin{aligned} e^\mu(p, \sigma) p_\mu &= L(p)^\mu{}_\nu e^\nu(\vec{0}, \sigma) p_\mu = L(p)^0{}_j e^j(\vec{0}, \sigma) p_0 + L(p)^i{}_j e^j(\vec{0}, \sigma) p_i \\ &= \frac{p^j}{m} e^j(\vec{0}, \sigma) p_0 + \left(\delta_j^i + (\gamma - 1) \frac{p^i p^j}{|\vec{p}|^2} \right) e^j(\vec{0}, \sigma) p_i \\ &= \frac{p_0}{m} e^j(\vec{0}, \sigma) p^j + \left(\delta_j^i p_i - (\gamma - 1) \frac{|\vec{p}|^2 p^j}{|\vec{p}|^2} \right) e^j(\vec{0}, \sigma) \\ &= \frac{p^0}{m} e^j(\vec{0}, \sigma) p^j + p_j e^j(\vec{0}, \sigma) - (\gamma - 1) p^j e^j(\vec{0}, \sigma) \\ &= \gamma e^j(\vec{0}, \sigma) p^j - p^j e^j(\vec{0}, \sigma) - (\gamma - 1) p^j e^j(\vec{0}, \sigma) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (6.180)$$

Observamos de (6.178) contudo que:

$$\partial_\mu \phi^\mu(x) = p_\mu \phi^\mu(x), \quad (6.181)$$

e $\phi^\mu(x) \propto e^\mu(p, \sigma)$, portanto obtemos outra equação de campo que é respeitada pelo campo vetorial de spin-1:

$$\partial_\mu \phi^\mu(x) = 0. \quad (6.182)$$

No limite em que $m \rightarrow 0$, essa equação e a de Klein-Gordon equivalem às equações do potencial quadritador da Eletrodinâmica, no vácuo. O potencial quadritador é tal que $A^\mu = (V, \vec{A})$, onde, aqui, V é o potencial elétrico e $\vec{A}$ é o potencial magnético, um potencial vetor. Vamos tomar primeiro a equação (6.182) com $m \rightarrow 0$, tomando o potencial quadritador como o campo vetorial:

$$\partial_\mu A^\mu(x) = 0 \quad (6.183)$$

$$\partial_t V(x) + \partial_i A^i(x) = 0, \quad (6.184)$$

o que é igual à equação do gauge de Lorentz (GRIFFITHS, 1999, p. 421):

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}, \quad (6.185)$$

quando estamos usando unidades naturais.²⁹ Já a equação de Klein-Gordon no limite $m \rightarrow 0$ representa uma situação em que a densidade de corrente $\vec{J}$ e a densidade de carga ρ são nulas:

$$\square A^\mu(x) = 0. \quad (6.186)$$

Apenas por completeza, a versão mais geral dessa equação é (GRIFFITHS, 1999, p. 542):

$$\square A^\mu(x) = -\mu_0 J^\mu, \quad (6.187)$$

onde $J^\mu = (\rho, \vec{J})$ é a densidade de corrente quadrivetorial,³⁰ que obedece à equação de continuidade:

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (6.188)$$

6.3.2.3 Simetrias do campo vetorial de spin-1

Paridade. Vamos tomar a equação (6.151) e aplicar uma transformação $L(\mathcal{P}p) \equiv L(-\vec{p})$ sobre $e^\mu(\vec{p}, \sigma)$, observando que $L(-\vec{p})^\mu{}_\nu = \mathcal{P}^\mu{}_\rho L(p)^\rho{}_\lambda \mathcal{P}^\lambda{}_\nu$:

$$L(-\vec{p})^\mu{}_\nu e^\nu(\vec{0}) = \mathcal{P}^\mu{}_\rho L(p)^\rho{}_\lambda \mathcal{P}^\lambda{}_\nu e^\nu(\vec{0}). \quad (6.189)$$

Observamos que, como todas as componentes de $e^\epsilon(\vec{0}, \sigma)$ são espaciais, $\mathcal{P}^\lambda{}_\nu e^\nu(\vec{0}, \sigma) = -e^\lambda(\vec{0}, \sigma)$:

$$\begin{aligned} L(-\vec{p})^\mu{}_\nu e^\nu(\vec{0}) &= -\mathcal{P}^\mu{}_\rho L(p)^\rho{}_\lambda e^\lambda(\vec{0}) \\ &= -\mathcal{P}^\mu{}_\rho e^\rho(\vec{p}). \end{aligned} \quad (6.190)$$

²⁹ As constantes μ_0 e ϵ_0 são respectivamente a permissividade magnética do vácuo e a permeabilidade elétrica do vácuo. Nas unidades naturais fixamos $c = 1$. Contudo, $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ (GRIFFITHS, 1999, p. 376), portanto em unidades naturais $\mu_0 \epsilon_0 = 1$.

³⁰ $J^\mu = (c\rho, \vec{J})$ em unidades em que $c \neq 1$.

Usando isso na equação explícita do campo em (6.178):

$$\begin{aligned}
P\phi^\mu(x)P^{-1} &= P(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_{\sigma} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \{e^\mu(\vec{p}, \sigma)a(\vec{p}, \sigma)e^{+ip \cdot x} + e^{*\mu}(\vec{p}, \sigma)a^{c\dagger}(\vec{p}, \sigma)e^{-ip \cdot x}\}P^{-1} \\
&= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_{\sigma} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \{e^\mu(\vec{p}, \sigma)Pa(\vec{p}, \sigma)P^{-1}e^{+ip \cdot x} + e^{*\mu}(\vec{p}, \sigma)Pa^{c\dagger}(\vec{p}, \sigma)P^{-1}e^{-ip \cdot x}\} \\
&= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_{\sigma} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \{e^\mu(\vec{p}, \sigma)\eta^*a(-\vec{p}, \sigma)e^{+ip \cdot x} + e^{*\mu}(\vec{p}, \sigma)\eta^c a^{c\dagger}(-\vec{p}, \sigma)e^{-ip \cdot x}\} \\
&= -(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_{\sigma} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \{\mathcal{P}^\mu{}_\nu e^\nu(-p, \sigma)\eta^*a(-\vec{p}, \sigma)e^{+ip \cdot x} \\
&\quad + \mathcal{P}^\mu{}_\nu e^{*\nu}(-p, \sigma)\eta^c a^{c\dagger}(-\vec{p}, \sigma)e^{-ip \cdot x}\}.
\end{aligned} \tag{6.191}$$

O produto escalar é invariante de Lorentz, portanto $p \cdot x = (\mathcal{P}p \cdot \mathcal{P}x)$ e podemos escrever:

$$\begin{aligned}
P\phi^\mu(x)P^{-1} &= -(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_{\sigma} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \{\mathcal{P}^\mu{}_\nu e^\nu(-p, \sigma)\eta^*a(-\vec{p}, \sigma)e^{+i\mathcal{P}p \cdot \mathcal{P}x} \\
&\quad + \mathcal{P}^\mu{}_\nu e^{*\nu}(-p, \sigma)\eta^c a^{c\dagger}(-\vec{p}, \sigma)e^{-i\mathcal{P}p \cdot \mathcal{P}x}\}.
\end{aligned} \tag{6.192}$$

Lembramos que essa integral é tomada de $-\infty$ a $+\infty$ e trocamos as variáveis de integração de $\vec{p}$ para $-\vec{p}$ temos:

$$\begin{aligned}
P\phi^\mu(x)P^{-1} &= -(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_{\sigma} \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{d^3(-p)}{\sqrt{2p^0}} \{\mathcal{P}^\mu{}_\nu e^\nu(p, \sigma)\eta^*a(\vec{p}, \sigma)e^{+ip \cdot \mathcal{P}x} \\
&\quad + \mathcal{P}^\mu{}_\nu e^{*\nu}(p, \sigma)\eta^c a^{c\dagger}(\vec{p}, \sigma)e^{-ip \cdot \mathcal{P}x}\} \\
&= -(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_{\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \{\mathcal{P}^\mu{}_\nu e^\nu(p, \sigma)\eta^*a(\vec{p}, \sigma)e^{+ip \cdot \mathcal{P}x} \\
&\quad + \mathcal{P}^\mu{}_\nu e^{*\nu}(p, \sigma)\eta^c a^{c\dagger}(\vec{p}, \sigma)e^{-ip \cdot \mathcal{P}x}\}.
\end{aligned} \tag{6.193}$$

Esse campo ainda não é proporcional a $\phi_\mu(x)$ ou seu adjunto $\phi_{\mu^\dagger}(x)$. Portanto, fazemos novamente a escolha:

$$\eta^c = \eta^*, \tag{6.194}$$

o que nos permite chegar em:

$$\begin{aligned}
P\phi^\mu(x)P^{-1} &= -\mathcal{P}^\mu{}_\nu (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_{\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \{e^\nu(p, \sigma)\eta^*a(\vec{p}, \sigma)e^{+ip \cdot \mathcal{P}x} + e^{*\nu}(p, \sigma)\eta^*a^{c\dagger}(\vec{p}, \sigma)e^{-ip \cdot \mathcal{P}x}\} \\
&= -\eta^* \mathcal{P}^\mu{}_\nu \phi_\mu(\mathcal{P}x).
\end{aligned} \tag{6.195}$$

Reversão temporal. Primeiro vamos observar, de (6.152), que:

$$e^\mu(\vec{0}, \sigma) = (-1)^{1+\sigma} e^{*\mu}(\vec{0}, -\sigma), \quad (6.196)$$

e assim fazemos

$$\begin{aligned} e^{*\mu}(-\vec{p}, -\sigma) &= L(-p)^\mu{}_\nu e^{*\nu}(\vec{0}, -\sigma) \\ &= \mathcal{P}^\mu{}_\rho L(p)^\rho{}_\lambda \mathcal{P}^\lambda{}_\nu e^{*\nu}(\vec{0}, -\sigma) \\ &= \mathcal{P}^\mu{}_\rho L(p)^\rho{}_\lambda e^{*\lambda}(\vec{0}, -\sigma) \\ &= \mathcal{P}^\mu{}_\rho L(p)^\rho{}_\lambda (-1)^{1+\sigma} e^\lambda(\vec{0}, \sigma) \\ &= (-1)^{1+\sigma} \mathcal{P}^\mu{}_\rho e^\rho(\vec{p}, \sigma). \end{aligned} \quad (6.197)$$

Com isso temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{T}\phi^\mu(x)\mathbb{T}^{-1} &= \mathbb{T}(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_\sigma \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \{e^\mu(\vec{p}, \sigma)a(\vec{p}, \sigma)e^{+ip \cdot x} + e^{*\mu}(\vec{p}, \sigma)a^{c\dagger}(\vec{p}, \sigma)e^{-ip \cdot x}\} \mathbb{T}^{-1} \\ &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_\sigma \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \{e^{*\mu}(\vec{p}, \sigma)\mathbb{T}a(\vec{p}, \sigma)\mathbb{T}^{-1}e^{-ip \cdot x} + e^\mu(\vec{p}, \sigma)\mathbb{T}a^{c\dagger}(\vec{p}, \sigma)\mathbb{T}^{-1}e^{+ip \cdot x}\} \\ &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_\sigma \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \{e^{*\mu}(\vec{p}, \sigma)(-1)^{j-\sigma}a(-\vec{p}, -\sigma)e^{-ip \cdot x} \\ &\quad + e^\mu(\vec{p}, \sigma)(-1)^{j-\sigma}a^{c\dagger}(-\vec{p}, -\sigma)e^{+ip \cdot x}\} \\ &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_\sigma \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \{(-1)^{1+\sigma}\mathcal{P}^\mu{}_\nu e^\nu(-\vec{p}, -\sigma)(-1)^{j-\sigma}a(-\vec{p}, -\sigma)e^{-ip \cdot x} \\ &\quad + (-1)^{1+\sigma}\mathcal{P}^\mu{}_\nu e^{*\nu}(-\vec{p}, -\sigma)(-1)^{j-\sigma}a^{c\dagger}(-\vec{p}, -\sigma)e^{+ip \cdot x}\} \\ &= \mathcal{P}^\mu{}_\nu (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_\sigma \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \{(-1)^{1+j}e^\nu(-\vec{p}, -\sigma)a(-\vec{p}, -\sigma)e^{-ip \cdot x} \\ &\quad + (-1)^{1+j}e^{*\nu}(-\vec{p}, -\sigma)a^{c\dagger}(-\vec{p}, -\sigma)e^{+ip \cdot x}\} \\ &= \mathcal{P}^\mu{}_\nu (-1)^{1+j}(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_\sigma \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \{e^\nu(-\vec{p}, -\sigma)a(-\vec{p}, -\sigma)e^{-i\mathcal{P}p \cdot \mathcal{P}x} \\ &\quad + e^{*\nu}(-\vec{p}, -\sigma)a^{c\dagger}(-\vec{p}, -\sigma)e^{+i\mathcal{P}p \cdot \mathcal{P}x}\}. \end{aligned} \quad (6.198)$$

Vamos agora fazer as substituições $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$, $\sigma \rightarrow -\sigma$ e $j = 1$, esta última substituição se devendo ao

fato de que estamos lidando com partículas de spin-1:

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}\phi^\mu(x)\mathbb{T}^{-1} &= \mathcal{P}^\mu{}_\nu (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_{-\sigma} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \{e^\nu(\vec{p}, \sigma) a(\vec{p}, \sigma) e^{-ip \cdot \mathcal{P}x} + e^{*\nu}(\vec{p}, \sigma) a^{c\dagger}(\vec{p}, \sigma) e^{+ip \cdot \mathcal{P}x}\} \\
&= \mathcal{P}^\mu{}_\nu (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_{-\sigma} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \{e^\nu(\vec{p}, \sigma) a(\vec{p}, \sigma) e^{+ip \cdot (-\mathcal{P}x)} + e^{*\nu}(\vec{p}, \sigma) a^{c\dagger}(\vec{p}, \sigma) e^{-ip \cdot (-\mathcal{P}x)}\} \\
&= \mathcal{P}^\mu{}_\nu \phi^\nu(-\mathcal{P}x) \\
&= \mathcal{P}^\mu{}_\nu \phi^\nu(\mathcal{T}x).
\end{aligned} \tag{6.199}$$

Conjugação de carga. A ação do operador de conjugação de carga é direta:

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}\phi^\mu(x)\mathbb{C}^{-1} &= \mathbb{C}(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_{\sigma} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \{e^\mu(\vec{p}, \sigma) a(\vec{p}, \sigma) e^{+ip \cdot x} + e^{*\mu}(\vec{p}, \sigma) a^{c\dagger}(\vec{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x}\} \mathbb{C}^{-1} \\
&= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_{\sigma} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \{e^\mu(\vec{p}, \sigma) \mathbb{C} a(\vec{p}, \sigma) \mathbb{C}^{-1} e^{+ip \cdot x} + e^{*\mu}(\vec{p}, \sigma) \mathbb{C} a^{c\dagger}(\vec{p}, \sigma) \mathbb{C}^{-1} e^{-ip \cdot x}\} \\
&= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_{\sigma} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \{e^\mu(\vec{p}, \sigma) \zeta^* a^c(\vec{p}, \sigma) e^{+ip \cdot x} + e^{*\mu}(\vec{p}, \sigma) \zeta^c a^\dagger(\vec{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x}\},
\end{aligned} \tag{6.200}$$

para que $\mathbb{C}\phi^\mu(x)\mathbb{C}^{-1}$ comute com $\phi^\mu(x)$, escolhemos:

$$\zeta^c = \zeta^*, \tag{6.201}$$

e com isso:

$$\mathbb{C}\phi^\mu(x)\mathbb{C}^{-1} = \zeta^* \phi^{\mu\dagger}(x). \tag{6.202}$$

7 CONCLUSÃO

Na introdução expusemos o objetivo de fornecer, neste trabalho, uma base sólida à Teoria Quântica de Campos, baseada na abordagem e na sequência da referência (WEINBERG, 1995), com passagens matemáticas desenvolvidas de forma clara de modo a serem acessíveis a alunos em nível de graduação. Iniciamos o trabalho com uma rápida introdução a conceitos da Relatividade Restrita e seus aspectos matemáticos, de forma a recordar o aluno dos resultados com os quais deve estar familiarizado da Física Geral ou fornecer uma base sucinta para que o aluno que ainda não encontrou a teoria em detalhe possa compreender a invariância de uma quantidade por transformações de Lorentz e as manipulações matemáticas de quadrvetores e tensores. Seguimos com uma breve introdução à Mecânica Quântica de um modo que busca fornecer o aspecto matemático dos operadores e vetores do espaço de Hilbert de forma que seja familiar ao aluno que já estudou a Física Quântica não-relativística. Reconhecemos, contudo, que nesse aspecto o trabalho pode oferecer dificuldade aos alunos, nos anos iniciais de graduação, que ainda não conhecerem a equação de Schrödinger ou as ondas de de Broglie. A esses alunos recomendamos a leitura de uma referência em nível introdutório em Física Quântica, como os primeiros capítulos da referência (EISBERG; RESNICK, 1986), que fornecem o panorama histórico dos primeiros anos da física de partículas.

Terminamos o Capítulo 2 — primeiro capítulo de desenvolvimento do trabalho — com uma introdução a grupos e representações, e passamos ao Capítulo 3 iniciando o processo de conciliar a Física Quântica com a Relatividade Restrita. Neste capítulo encontramos resultados importantes: vemos, na Seção 3.2.2, que simplesmente definindo se as partículas são massivas ou não as transformações de Poincaré nos permitem chegar nas regras de transformação de spin e helicidades, incluindo a discretização dessas grandezas. Passamos em seguida à representação da paridade e da reversão temporal sobre esses estados, e a necessidade de conservar o sinal da energia explicita a diferença entre aplicar transformações sobre estados físicos e sobre quadrvetores.

No Capítulo 3 se evidencia um aspecto interessante da teoria. A tarefa de representar transformações sobre estados físicos não inclui em si a possibilidade de interação, e a inclusão dessas interações não se faz de forma direta como, na Física Clássica, onde usamos forças e potenciais que agem sobre o sistema fornecendo uma maneira — mesmo que perturbativa — de determinar as posições e velocidades características em qualquer ponto do tempo. Aqui, limitamos nossa discussão a conhecer os estados inicial e final de um sistema e buscar uma ferramenta matemática que faça essa transição. Esse formalismo se justifica, contudo, à medida que não podemos, na Mecânica Quântica, conhecer os estados intermediários de uma interação interparticular, apenas os estados antes e depois do experimento, já que qualquer tentativa de observar o processo de interação iria naturalmente interferir com o mesmo. O formalismo da matriz-S é, portanto, apropriado para a Mecânica Quântica. Nossa busca por uma forma invariante da mesma, contudo, leva-nos a introduzir um termo de densidade de interação que, associado ao Princípio da Decomposição em Cluster, leva à formulação (e visualização) da interação entre partículas como uma sequência de criações e aniquilações de partículas, carregando momentos e energias conservados de forma que não só não precisamos supor a existência de ação

à distância, mas também podemos buscar algum entendimento da forma inobservável pela qual as interações se efetuam. Somos levados assim a questionar se essas sequências de criação e destruição de partículas são apenas uma ferramenta matemática ou uma realidade física. Elas se constituem, de qualquer modo, em um ferramental robusto para o estudo dos processos em Teoria Quântica de Campos.

Notamos aqui que, no Capítulo 4, omitimos uma extensa discussão, disponível na referência (WEINBERG, 1995, p. 124–134), sobre as simetrias da paridade, da reversão temporal, da conjugação de carga e de seus produtos PT , CP , CT e CPT . Apenas CPT é conservada em todos os processos, como demonstrado na referência principal deste trabalho (WEINBERG, 1995, p. 244–246).

Aproximamo-nos do fim do trabalho no Capítulo 6, introduzindo finalmente o conceito de campo quântico como decorrência da necessidade de construirmos uma teoria que explicita que as interações respeitam a invariância de Poincaré e o PDC. Mais uma vez, obtivemos um resultado fisicamente relevante: para que os processos físicos não interfiram com outros processos em distâncias maiores do que pode ser percorrido pela luz e para que a carga elétrica seja conservada, precisamos introduzir antipartículas. Esse resultado não é trivial. À época de seu descobrimento por Dirac em 1928, nenhuma antipartícula não havia ainda sido observada experimentalmente. Dirac descobriu a existência do pósitron por meios teóricos enquanto buscava uma teoria relativística para o elétron (DYSON, 1951, p. 1). Além desse resultado, pudemos fornecer dois exemplos do fato de que partículas de spin inteiro são bósons. Também construímos o campo quadritorial e terminamos o trabalho mostrando de forma sucinta como ele respeita as mesmas regras do potencial quadritorial da Eletrodinâmica, buscando mostrar de forma sucinta uma aplicação desses campos.

Ao fim desse desenvolvimento, esperamos que o leitor tenha adquirido uma boa familiarização com a TQC que o permita continuar os estudos e se aprofundar na área. O estudante pode, por exemplo, passar à teoria de campos de partículas de spin-1/2 (WEINBERG, 1995, p. 213–229), e prosseguir ao formalismo Lagrangiano da TQC. Também esperamos, por fim, que as passagens abertas explicitamente ao longo desse trabalho sirvam de auxílio para estudantes da TQC que precisarem de alguma referência quanto ao desenvolvimento explícito das passagens e demonstrações matemáticas que compõem esse trabalho de construção da teoria.

REFERÊNCIAS

- BUTKOV, E. **Física matemática**. Rio de Janeiro: LTC, 2011.
- COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOË, F. **Quantum Mechanics, Volume 1**. Singapura: John Wiley & Sons Pte. Ltd., 2005.
- DIAS, S. A. **A relação entre Campos Quânticos e Partículas Relativísticas**. 2015. Notas de aula.
- DYSON, F. J. **Lecture Course 491 – Advanced Quantum Theory – Fall Semester 1951**. 1951. University of Cambridge. Acesso em: 13 de janeiro de 2021. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/quant-ph/0608140.pdf>>.
- EISBERG, R.; RESNICK, R. **Física Quântica**. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1986.
- GILMORE. **Lie groups, Lie algebras, and some of their applications**. Estados Unidos: John Wiley & Sons Pte. Ltd., 1974.
- GRIFFITHS, D. J. **Introduction to electrodynamics**. Upper Saddle River: Prentice-Hall, Inc, 1999.
- SAKURAI, J. J. **Modern Quantum Mechanics**. Boston: Addison-Wesley Publishing Company, 1985.
- TONG, D. **Lectures on Quantum Field Theory**. 2006. University of Cambridge. Acesso em: 22 de janeiro de 2021. Disponível em: <<http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qft.html>>.
- WEINBERG, S. **The Quantum Theory of Fields, Volume 1**. New York: Cambridge University Press, 1995.
- WEINBERG, S. **Lectures on Quantum Mechanics**. New York: Cambridge University Press, 2013.