UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
unesp
FACULDADE DE ENGENHARIA
CAMPUS DE BAURU

ESTUDO DO COMPORTAMENTO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS INTERAGINDO COM OBSTÁCULOS DIELÉTRICOS CILÍNDRICOS, UTILIZANDO O MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS NO DOMÍNIO DO TEMPO

CLAUDIO YARA DE AQUINO

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia da UNESP - Campus de Bauru, para obtenção do título de Mestre em Engenharia Industrial.

BAURU - SP
Dezembro - 2001

Capes 3.04.03.04.9- Circuitos magnéticos, magnetismos, Eletromagnetismo

Número de chamada
Clas. T/UNESP
PHA A669e
Tombo n.º 988

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Faculdade de Engenharia
Campus de Bauru

ESTUDO DO COMPORTAMENTO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS INTERAGINDO COM OBSTÁCULOS DIELÉTRICOS CILÍNDRICOS, UTILIZANDO O MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS NO DOMÍNIO DO TEMPO

BIBLIOTECA - UNESP - CAMPUS BAURU

CLAUDIO VARA DE AQUINO

Orientador: Prof. Dr. Naasson Pereira de Alcantara Junior

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia da UNESP - Campus de Bauru, para obtenção do título de Mestre em Engenharia Industrial.

BAURU – SP
Dezembro – 2001

Ficha catalográfica elaborada por
DIVISÃO TÉCNICA DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO
UNESP - Bauru

Aquino, Claudio Vara de
Estudo do comportamento de ondas eletromagnéticas interagindo com obstáculos dielétricos cilíndricos, utilizando o método das diferenças finitas no domínio do tempo / Claudio Vara de Aquino - - Bauru : [s.n.], 2001.
96 f.

Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia. Universidade Estadual Paulista.

Orientador: Prof. Dr. Naasson Pereira de Alcantara Junior

1. Eletromagnetismo. 2. Equações de Maxwell. 3. Simulação de ondas planas eletromagnéticas. 4. Diferenças finitas do domínio do tempo I – Título. II – Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia.

PÓS-GRADUAÇÃO
ENGENHARIA INDUSTRIAL

ATA Nº 020/2001.

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE *CLAUDIO VARA DE AQUINO*, ALUNO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA INDUSTRIAL, DA FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNESP – CAMPUS DE BAURU.

No dia seis de dezembro de dois mil e um, às quatorze horas, no anfiteatro do laboratório de informática da Faculdade de Engenharia da UNESP, Campus de Bauru, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos Professores Doutores: Naasson Pereira de Alcantara Junior do Departamento de Engenharia Elétrica da Faculdade de Engenharia - UNESP – Campus de Bauru, Presidente da Banca, Pedro da Costa Junior do Departamento de Engenharia Elétrica da Faculdade de Engenharia – UNESP – Campus de Bauru e Ruy Alberto Corrêa Altafim do Departamento de Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia de São Carlos – EESC - USP, a fim de proceder a argüição pública da Dissertação de Mestrado do candidato ***Claudio Vara de Aquino***, intitulada "ESTUDO DO COMPORTAMENTO DE ONDAS PLANAS ELETROMAGNÉTICAS INTERAGINDO COM OBSTÁCULOS DIELÉTRICOS CILÍNDRICOS, UTILIZANDO O MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS NO DOMÍNIO DO TEMPO". O Professor Doutor Naasson Pereira de Alcantara Junior, Presidente da Banca, apresentou o candidato, que dissertou sobre seu trabalho, em quarenta minutos, após, a candidato foi argüido oralmente pelos membros componentes da Comissão Examinadora no tempo regulamentar exigido. Logo após, reuniu-se a Comissão Examinadora, tendo apresentado o conceito final: **APROVADO**, atribuindo a menção ***com distinção***. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após, lida e aprovada, será assinada pelos Senhores Membros da Comissão Examinadora. Bauru, seis de dezembro de dois mil e um. / . / . / . / . / . / . / . /

Prof. Dr. Naasson Pereira de Alcantara Junior – Presidente _____

Prof. Dr. Pedro da Costa Junior - Membro _____

Prof. Dr. Ruy Alberto Corrêa Altafim - Membro _____

unesp
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Faculdade de Engenharia - Bauru
Av.Engº Luiz Edmundo Carrijo Coube s/nº • Caixa Postal 473 • CEP 17 033-360 • Bauru • SP • Fone: 14 221 6000 e 14 221 6108 • Fax: 14 221 6104
E-mail: spg-fe@bauru.unesp.br • home page: www.bauru.unesp.br/pos/fe.htm

AGRADECIMENTOS

A Deus que tudo torna possível.

Ao Prof. Dr. Naasson Pereira de Alcantara Junior pela dedicação e pela orientação na realização deste trabalho, recebida de modo competente, paciente e persistente, sempre me apontando qual o melhor caminho a seguir na busca do êxito.

Ao Prof. M.Sc. Luiz Gonçalves Junior pelas sugestões competentes, pela dedicação, pelo apoio recebido e sobretudo pelo entusiasmo em todas as etapas durante a realização deste trabalho.

Ao Sr. Ademir Padilha, da Faculdade de Odontologia da Universidade de São Paulo – Campus de Bauru, pelo empenho demonstrado, emprestando livros das bibliotecas da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo – USP e da Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Campinas – Unicamp, bastante pertinentes ao contexto deste trabalho.

O que sabemos é uma gota.

O que ignoramos é um oceano.

Isaac Newton

(1643-1727)

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS vi
LISTA DE SIGLAS E ABREVIAÇÕES viii
LISTA DE SÍMBOLOS ix
Resumo x
Abstract xi

1 Introdução 1
2 Motivação e Relevância 4
3 Métodos Numéricos em Cálculo de Campos e Ondas 7
3.1 Método dos Elementos Finitos 9
3.2 Método dos Momentos 12
3.3 Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo 14
3.4 Método das Diferenças Finitas no Domínio da Freqüência 18
3.5 TLM – Método da Matriz de Linhas de Transmissão 19
3.6 Técnica do Multipolo Generalizado 20
3.7 Método do Gradiente Conjugado 21
4 Revisão de Equações de Ondas 23
4.1 Descrição Matemática da Propagação 24
4.2 Equação Diferencial do Movimento Ondulatório 27
4.3 Onda Plana no Espaço 29
4.4 Ondas Eletromagnéticas Planas 30
5 Metodologia 36
5.1 Equações de Maxwell na Forma Diferencial 36
5.2 Hipóteses Simplificadoras 38
5.3 Normalização dos Vetores de Grandeza Elétrica 40
5.4 Equações Normalizadas para Uma Direção 42
5.5 Equações Normalizadas para Duas Direções 42
5.6 Diferenças Finitas no Domínio do Tempo 43
5.6.1 Diferenças Finitas - modo TEM 44

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

5.6.2 Diferenças Finitas - modo TM 45
5.7 Critérios para Estabilidade Numérica 46
5.8 Determinação Algébrica dos Campos Eletromagnéticos 47
5.9 Condições de Fronteiras Absorventes 49
5.10 Simulação de uma Onda Plana em Duas Dimensões 52
6 Implementação Computacional 55
6.1 Algoritmo Básico 55
6.2 Códigos Numéricos 57
6.2.1 Códigos em Uma Direção – modo TEM 57
6.2.2 Códigos em Duas Direções – modo TM 58
6.2.3 Códigos para a Onda Plana em Duas Dimensões 59
6.3 Estudo de Casos e Verificações 62
6.3.1 Simulação Unidimensional – Pulso Gaussiano em E_z 63
6.3.2 Simulação Unidimensional – Senóide em E_z 69
6.3.3 Simulação Unidirecional – Meio Dielétrico Dissipativo 71
6.3.4 Simulação Bidirecional – Modo TM 74
7 Onda Eletromagnética interagindo com cilindros dielétricos 79
7.1 Especificação do Material Dielétrico 79
7.2 Comparações entre o programa desenvolvido e um programa TLM 80
7.3 Exemplo de Aplicação 84
7.4 Análise dos Resultados 84
8 Conclusões e Proposições 92
9 Referências Bibliográficas 94

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplo de modelagem por elementos finitos 10
Figura 2 – Célula ou elemento básico do espaço reticulado em *FDTD* 15
Figura 3 – Objeto sob teste no espaço reticulado em *FDTD* 17
Figura 4 – O nó condensado simétrico 19
Figura 5 – Translação da função f(z) ou F(t) sem distorção 25
Figura 6 – Campos eletromagnéticos e uma onda eletromagnética plana 32
Figura 7 – Campos elétrico e magnético intercalados no espaço e no tempo 44
Figura 8 – Componentes do modo *TM* (H_x, H_y e E_z) intercalados no espaço 45
Figura 9 – Condições de fronteiras absorventes no plano 51
Figura 10 – Campos incidente, espalhado e total e a geração da onda plana 52
Figura 11 – Fluxograma básico para o Método *FDTD*, modo *TEM* 56
Figura 12 – Fluxograma para cálculo do campo total em *FDTD* 61
Figura 13 – Pulso gaussiano propagando-se em uma direção no vácuo 64
Figura 14 – Pulso gaussiano no vácuo, após reflexão nas fronteiras 64
Figura 15 – Interferências dos campos eletromagnéticos refletidos na fronteira 64
Figura 16 – Influência do passo de tempo sobre a velocidade da onda 65
Figura 17 – Pulso propagando-se no vácuo com absorção nas fronteiras 66
Figura 18 – Pulso incidente absorvido pela fronteira no vácuo 67
Figura 19 – Incidência, reflexão e transmissão na interface vácuo-dielétrico 67
Figura 20 – Onda eletromagnética absorvida nas fronteiras 68
Figura 21 – Ondas senoidais de 1 GHz e 3 GHz incidindo num dielétrico 70
Figura 22 – Onda senoidal de 5 GHz comprometendo o condicionamento 70
Figura 23 – Onda senoidal de 5 GHz, região de interesse 71
Figura 24 – Onda num meio pouco dissipativo para D_z 72
Figura 25 – Onda num meio dissipativo – campo elétrico implícito em D_z 73
Figura 26 – Onda num meio dissipativo – campo elétrico explícito em D_z 74
Figura 27 – Onda pontual com frentes de onda concêntricas 75
Figura 28 – Incidência da onda na fronteira do problema e a reflexão residual 75
Figura 29 – Absorção com camadas casadas de 4 células e 16 células 76

Figura 30 – Absorção da onda incidente na fronteira 77
Figura 31 – Onda plana de campo elétrico em duas dimensões 78
Figura 32 – Campos incidente, espalhado e total com o cilindro dielétrico 79
Figura 33 – Resultados comparativos após 0,83 ns 81
Figura 34 – Resultados comparativos após 1,25 ns 81
Figura 35 – Resultados comparativos após 1,67 ns 81
Figura 36 – Resultados comparativos após 2,08 ns 82
Figura 37 – Resultados comparativos após 2,50 ns 82
Figura 38 – Resultados comparativos após2,92 ns 82
Figura 39 – Resultados comparativos após 3,33 ns 83
Figura 40 – Resultados comparativos após 3,75 ns 83
Figura 41 – Resultados comparativos após 4,17 ns 83
Figura 42 – Exemplo de aplicação, após 80 passos de tempo 85
Figura 43 – Exemplo de aplicação, após 100 passos de tempo 85
Figura 44 – Exemplo de aplicação, após 140 passos de tempo 86
Figura 45 – Exemplo de aplicação, após 190 passos de tempo 86
Figura 46 – Exemplo de aplicação após 200 passos de tempo 87
Figura 47 – Exemplo de aplicação, após 250 passos de tempo 88
Figura 48 – Exemplo de aplicação, após 280 passos de tempo 89
Figura 49 – Exemplo de aplicação, após 320 passos de tempo 90

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

LISTA DE SIGLAS E ABREVIAÇÕES

FDTD – Finite Difference Time Domain
FDFD – Finite Difference Frequence Domain
TLM – Transmission Line Matrix
TEM – Transverso Elétrico Magnético
TM – Transverso Magnético
TE – Transverso Elétrico

LISTA DE SÍMBOLOS

μ – permeabilidade magnética absoluta em henry (H) / m

μ_0 – permeabilidade magnética do vácuo em henry (H) / m

μ_r – permeabilidade magnética relativa ao vácuo

ε – permissividade elétrica absoluta em farad (F) / m

ε_0 – permissividade elétrica do vácuo em farad (F) / m

ε_r – permissividade elétrica relativa ao vácuo

B – densidade de fluxo magnético em tesla (T) ou webber (Wb) / m^2

H – intensidade de cmpo magnético em ampère (A) / m

D – densidade de fluxo elétrico em coulombs (C) / m^2

E – intensidade de campo elétrico em volt (V) / m

ρ_v – densidade volumétrica de carga elétrica em couloms (C) / m^3

J – densidade superficial de corrente elétrica em A / m^2

ω – freqüência angular ou pulsação em rad / s

j – unidade imaginária $\sqrt{-1}$

∇ - operador "nabla" ou gradiente

∇^2 - operador laplaciano

σ – condutividade elétrica em siemens (S) / m

$\partial/\partial x$ - derivada parcial em relação a uma grandeza "x"

β – constante de fase da onda em rad / m

λ - comprimento de onda em metros (m)

f – freqüência em hertz (Hz)

c_0 – velocidade de qualquer onda eletromagnética no vácuo $\cong 3.10^8$ m/s

c – velocidade da onda eletromagnética num meio material ($< c_0$)

ρ_m – resistividade magnética em Wb / (A .m.s) ou Ω / m

RESUMO

Muitos estudos e desenvolvimentos em dielétricos que melhor suportem, a um custo mínimo, as ações dos campos eletromagnéticos em equipamentos de redes elétricas são realizados, bem como análises sobre o desempenho de sistemas e aparelhos de telecomunicações, para manter a continuidade de operação. As simulações computacionais tornam possíveis estudos e verificações de eventuais modificações nas características elétricas, magnéticas e geométricas dos equipamentos e aparelhos, numa "realidade" virtual, otimizando e definindo aplicações aos melhores usos, reduzindo o número de ensaios reais, onerosos e muitas vezes destrutivos sobre os protótipos. Os objetivos deste trabalho consistem na simulação de ondas planas eletromagnéticas atingindo obstáculos dielétricos cilíndricos, empregando o Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo (FDTD), observando o fenômeno ondulatório tanto sob o ponto de vista físico como numérico. As equações de Maxwell, empregadas no FDTD, constituem a base da simulação dos fenômenos em estudo. A intensidade de campo elétrico e a sua densidade de fluxo são normalizadas para simplificar as formulações eletromagnéticas, auxiliando no desenvolvimento das expressões numéricas. Um pulso unidirecional que distribui seus efeitos pelo espaço do problema, modela a onda plana incidente.

Este trabalho constitui-se em um ponto de partida ao desenvolvimento de estudos mais avançados em análises no domínio do tempo, observando ondas eletromagnéticas interagindo com objetos dielétricos, bem como contribui com o desenvolvimento de ferramentas computacionais versáteis e eficientes, úteis aos profissionais do meio acadêmico e do setor elétrico, em aplicações as mais variadas.

Palavras-chave: *Eletromagnetismo; Equações de Maxwell; Diferenças Finitas no Domínio do Tempo; FDTD; Simulação de Ondas Planas Eletromagnéticas.*

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

ABSTRACT

A lot of studies and developments on the dielectrics that best withstand, at a minimum cost the actions of the electromagnetic fields on electric networks' equipments are carried out, as well the analysis on the performance of the telecommunications and apparatus systems, to maintain the operation continuity. The simulations lead to studies and modifications of the electric, magnetic and geometric attributes of the equipments and apparatus, optimizing and defining the applications to the best uses, reducing the number of highly onerous and many times destructive, tests on prototypes. This work simulates a propagation of electromagnetic plane waves impinging on a dielectric obstacle with cylindrical symmetry, by the Finite Differences Time Domain Method (FDTD), emphasizing both aspects, physical and numerical. The Maxwell's equations leads to the expressions employed in the FDTD method, and simulate the phenomena under study. The electric field intensity and its flux density are normalized in order to simplify the electromagnetic formulations, aiding the development of the numerical expressions. A unidirectional pulse that distributes its effect in the problem space models the incident plane wave.

This work constitutes a start point for more advanced studies development in the time domain analysis observing electromagnetic waves interacting with dielectric objects, as it contributes to the development of efficient computational tools, useful to both the academicals and electrical professionals, in the applications, the most variable.

Keywords: *Electromagnetism; Maxwell's equations; Finite Differences Time Domain; FDTD; Plane wave electromagnetic simulations.*

1. INTRODUÇÃO

Os objetivos deste trabalho estão voltados a simulações que verificam o comportamento de ondas planas eletromagnéticas que se propagando no vácuo, atingem um objeto dielétrico de forma cilíndrica, verificando-se os efeitos de reflexão e transmissão da onda incidente, bem como o espalhamento da onda refletida após a colisão com o objeto dielétrico em estudo, pelo emprego direto do *Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo*, internacionalmente conhecido por *Finite Differences Time Domain Method* (*FDTD*). Este trabalho tem também a intenção de deixar a porta aberta, despertando o interesse dos meios acadêmico e industrial em dar seqüência no desenvolvimento de um produto computacional que simule de maneira mais completa e eficiente, o comportamento de ondas eletromagnéticas colidindo com objetos de quaisquer características geométricas, elétricas e magnéticas, podendo ser utilizado como uma ferramenta de projeto ou como um instrumento complementar aos ensaios realizados em laboratório e que possam avaliar conjuntamente os comportamentos eletromagnéticos de equipamentos elétricos e de telecomunicações.

Uma recordação histórica leva ao físico escocês James Clerk Maxwell (1831-1879) que, a partir de estudos desenvolvidos por cientistas antecessores (Faraday, Gauss, Ampère, etc), formulou um conjunto de equações demonstrando a inter-relação entre campos elétricos e magnéticos. Tais equações, tanto na forma integral como na forma diferencial, mais algumas relações constitutivas, formam o cerne da teoria eletromagnética.

Oliver Heaviside (1850-1925), publicando dois trabalhos sobre eletricidade em 1872 e em 1873, despertou em Maxwell um interesse na melhoria de sua teoria, culminando na segunda edição do seu *Treatise on Electricity and Magnetism*, resultando na dualidade conceitual dos campos elétrico e magnético. Fascinado, Heaviside acabou abandonando sua profissão de telegrafista para dedicar-se integralmente aos estudos da eletricidade [1].

Em primeira análise, as equações de Maxwell constituem o ponto de partida para a obtenção das equações de campos e ondas eletromagnéticas. Historicamente a solução de problemas de campos e ondas eletromagnéticas por métodos numéricos desenvolveu-se no século XX, em meados da década de 60, inicialmente com o método das *Diferenças Finitas*, conforme Erdelyi *et al.*[2], cujos primeiros trabalhos consistiram no mapeamento de campos magnéticos estáticos em dispositivos eletromagnéticos. No início da década de 70, com o trabalho de Silvester & Chari [3], se começou a utilizar o método dos *Elementos Finitos* aplicados ao mapeamento de campos eletromagnéticos, tornando-se o mais empregado para esse tipo de análise.

Com o interesse crescente na modelagem de campos eletromagnéticos em altas freqüências, as atenções da comunidade de modelagem numérica voltaram-se novamente para o método das *Diferenças Finitas no Domínio do Tempo* ou *Finite Difference Time Domain*, com uma formulação conhecida internacionalmente pela sigla *FDTD*. Atualmente, este é o método mais utilizado na modelagem numérica de problemas de ondas eletromagnéticas envolvendo altas freqüências. O método *FDTD* ganhou forte impulso motivado pelo desenvolvimento tecnológico de computadores com uma maior capacidade de armazenamento, tratando as informações num menor tempo de processamento, viabilizando simulações com uma enorme quantidade de nós ou células.

Uma outra técnica numérica, especialmente proposta para a solução de problemas de campos eletromagnéticos em altas freqüências é a da *Matriz das Linhas de Transmissão* ou *Transmission Line Matrix* (*TLM*), conforme Johns [4]. Trata-se de um método de desempenho semelhante ao *FDTD*, porém com uma formulação calcada em conceitos de linhas de transmissão, mais familiar aos engenheiros eletricistas. Em um trabalho apresentando uma simulação numérica de ondas eletromagnéticas baseado em uma formulação bidimensional do TLM, Bulho *et al.* [5] reiteram que muitas vezes, as equações do modelo são de difícil solução analítica, sendo em alguns casos até mesmo impossível.

A utilização do *FDTD* oferece algumas vantagens que podem ser condensadas em sua habilidade de trabalhar com um espectro largo de

freqüências, abordando estímulos, objetos, ambientes e posições de resposta diversas, empregando vários tipos de computadores, conforme enumera Kunz & Luebbers [6], além de poupar esforços computacionais, não utilizando processos de fatoração de grandes matrizes esparsas na resolução de sistemas de equações que modelem um problema a ser resolvido.

A visualização de uma simulação numérica de ondas eletromagnéticas, baseado no *FDTD* torna-se também uma ferramenta amigável para a aprendizagem do eletromagnetismo, numa melhor compreensão do comportamento físico das ondas eletromagnéticas, no tocante aos fenômenos de propagação, reflexão e transmissão (refração), conforme artigo apresentado por Gonçalves Jr. *et al.* [7]. Acrescente-se a isto que tal ferramenta pode propiciar tanto ao meio acadêmico como ao profissional, meios economicamente viáveis de recursos baratos para pesquisa e desenvolvimento de materiais isolantes e equipamentos utilizados nas indústrias do setor elétrico como um todo.

2. MOTIVAÇÃO E RELEVÂNCIA

Para garantir a continuidade assegurada da operação dos sistemas elétricos de potência, e por conseguinte o fornecimento da energia elétrica a toda classe de consumidor, desde o mais simples residencial até o mais complexo industrial, toda confiança é depositada na qualidade e no papel que os materiais isolantes desempenham, permitindo que a potência fornecida pelas usinas geradoras seja transmitida com maior rendimento, num mínimo de interrupções. Da mesma forma, os equipamentos e componentes destinados às telecomunicações, sejam estes de uso civil ou militar, devem demonstrar um desempenho confiável e seguro, levando e trazendo informações, por sistemas de telefonia ou de radar, aos usuários destes tipos de serviços.

As indústrias fornecedoras de materiais e equipamentos para o setor elétrico e de telecomunicações, buscando qualidade e competitividade, investem em novos produtos que atendam seus clientes dentro de critérios balizados por melhorias vinculadas a um custo mínimo. No entanto, para que tais equipamentos sejam utilizados, eles precisam passar por ensaios que atestem a sua confiabilidade e segurança.

Ensaios elétricos em baixa e alta tensão são realizados em protótipos de equipamentos, para que se verifique o desempenho frente aos gradientes de potencial a que são submetidos, observando-se o comportamento às ações dos campos elétrico e magnético, assegurando o compromisso para com a utilização de energia eletromagnética dentro de critérios esperados e desejados de qualidade e continuidade. É importante ressaltar que tais ensaios em protótipos empregam instrumentos caros e precisos, geram custos adicionais e são realizados por instituições credenciadas para que possam ser considerados aprovados para o uso. Muitas vezes, os resultados destes ensaios determinam uma correção na geometria ou no material dos equipamentos, revendo posições e realizando novos ensaios até que os protótipos atendam aos requisitos desejados. A realização destes ensaios em institutos oficiais, por não existirem em grande maioria, encontra-se condicionada a uma disponibilidade a ser previamente agendada.



Trabalhando dentro de um ambiente virtual, consegue-se por meios de simulações, verificar o resultado esperado frente a uma situação real, desde que o equipamento a ser ensaiado e as condições exigidas para os testes estejam modelados em conformidade com os requisitos estabelecidos para a aprovação do uso do equipamento ou componente. Com isto, baixa-se o custo na quantidade de ensaios realizados em protótipos, algumas vezes destrutivos, substituindo o laboratório de ensaios na maioria das vezes por ambientes computacionais de simulações digitais, atuando como verdadeiras ferramentas de complementação na avaliação do comportamento dos equipamentos elétricos, permitindo que se façam testes virtuais e sejam feitas correções necessárias à aprovação nos testes exigidos e realizados no ambiente real.

Ressalte-se ainda que, mesmo na realização de ensaios, alguns fenômenos não são observáveis dentro do campo prático, sendo somente possível avalia-lo num ambiente de simulação. Um exemplo bastante relevante consiste na propagação de uma onda eletromagnética que deixa efeitos residuais no interior de um material isolante, mesmo depois que seus efeitos já deixaram de ser verificados no campo prático dos ensaios de laboratório.

Este trabalho, de caráter dissertativo, realiza simulações computacionais de comportamentos de ondas planas eletromagnéticas interagindo com objetos dielétricos de geometria simplificada, permitindo a utilização do *Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo* (*FDTD*) de uma forma menos complexa, porém, sem perda de generalidades, contribuindo na promoção da abertura de um caminho ao desenvolvimento de um produto de simulação completa das ondas eletromagnéticas que processe informações reais sobre objetos de características geométricas, elétricas e magnéticas diversas em ambientes os mais variados.

Em outras palavras, deixa uma porta aberta àqueles que queiram desenvolver uma ferramenta completa de simulação, que permita observar o comportamento dos equipamentos elétricos e de telecomunicações com geometrias, as mais variadas, realizar modificações nas formas e características submetidas aos mais variados tipos de fontes de excitação de campos elétricos e

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

magnéticos, abordando inclusive o estudo daqueles fenômenos existentes e de difícil observação na prática.

Com isto, o número de ensaios realizados em protótipos pode ser reduzido, outros fenômenos não visíveis podem ser considerados e mesmo o custo destes equipamentos pode ser baixado, implicando num menor repasse aos clientes usuários do setor elétrico em todas as escalas de consumo. Espera-se com isto, não uma substituição dos ensaios reais pelas simulações virtuais, mas sim, uma complementação ao conjunto de testes, auxiliando na tomada de decisões normalmente baseadas em resultados obtidos pelos ensaios práticos tradicionais.

3. *MÉTODOS NUMÉRICOS EM CÁLCULO DE CAMPOS E ONDAS*

A análise dos problemas eletromagnéticos sofreu uma verdadeira revolução a partir da implementação dos métodos numéricos na solução de problemas de campos empregados pelos engenheiros eletricistas para analisar e avaliar projetos ou mesmo modificar aqueles já existentes. Embora a maioria dos problemas de eletromagnetismo seja resolvida empregando-se uma ou duas equações diferenciais parciais sujeitas às condições de fronteira, somente uma minoria pode ser resolvida analiticamente sem o auxílio de um computador.

Os métodos computacionais destinados à análise de problemas eletromagnéticos recaem em uma das três categorias: técnicas analíticas, técnicas numéricas e sistemas especialistas. As técnicas analíticas tratam o problema real frente a hipóteses simplificadoras que o adaptam a um modelo teórico de solução conhecida e comprovada. As técnicas numéricas, por outro lado, resolvem diretamente as equações fundamentais dos campos sujeitos às condições de contorno impostas pela geometria do problema que se quer analisar. Já os sistemas especialistas, não fornecem o cálculo direto dos campos, mas sim, estimam valores para os parâmetros de interesse baseados em informações previamente armazenadas numa base de dados.

Uma grande quantidade de programas computacionais baseados em técnicas analíticas encontra-se disponível, alguns muito simples, podendo-se lançar mão até de computadores pessoais de pequeno porte. As técnicas analíticas são uma ferramenta usual, quando as interações eletromagnéticas importantes na configuração do problema podem ser antecipadas. No entanto, a grande maioria dos problemas de interesse na prática, não possui solução analítica simplificada.

Os sistemas especialistas por sua vez, fornecem uma resposta rápida, aproximando o problema real, da mesma forma que um engenheiro experiente em eletromagnetismo o aproximaria tendo à mão uma simples calculadora. À medida que os projetos dos sistemas e seus procedimentos tornam-se mais automatizados, os softwares eletromagnéticos de sistemas especialistas são de grande utilidade e desempenham um papel significativo. Todavia, os

sistemas especialistas não fornecem resultados melhores do que aqueles já conhecidos e armazenados numa base de dados, nem se prestam a modelagens ou entendimentos de interações complexas eletromagnéticas, objeto de muitos estudos.

As técnicas numéricas requerem mais esforço computacional do que as empregadas pelos métodos analíticos ou pelos sistemas especialistas, porém constituem ferramentas das mais poderosas para análises no âmbito do eletromagnetismo. Sem hipóteses a priori sobre quais interações de campos são mais significativas, as técnicas numéricas consideram a geometria completa fornecida como elemento de entrada aos programas que estabelecerão a solução completa do problema.

A cada tipo particular de problema, corresponde uma técnica numérica mais adequada à sua análise. Uma determinada técnica empregada por um programa de análises eletromagnéticas, desempenha o seu papel vinculado aos tipos de problemas capazes de serem resolvidos pelo programa em questão. No entanto, qualquer técnica deve ser capaz de considerar todos os aspectos que possam afetar os fenômenos de interesse presentes nos estudos, representando detalhes geométricos de configurações contendo superfícies metálicas, ligações e dielétricos, não tendo uma simetria particular, constituindo-se num desafio para a modelagem numérica.

O estado da arte em modelagem numérica eletromagnética avança a passos rápidos, onde a cada ano, centenas de artigos são publicados abordando novas técnicas, melhorias e novas implementações àquelas já existentes, bem como novas aplicações modeladas por computador digital. A escolha de uma melhor técnica computacional conciliada às informações disponíveis para uma dada aplicação pode ter um caráter decisivo quanto à opção adequada de programa a ser empregado na resolução de um determinado problema.

A seguir, uma breve apresentação das técnicas de modelagens numéricas mais utilizadas na análise de configurações eletromagnéticas. Cada técnica resolve diferentes tipos de análise de configuração; nenhuma técnica pode

unesp

ser utilizada para modelar todos os problemas. Duas ou três destas técnicas, coletivamente, formam um conjunto potencialmente poderoso de ferramentas àqueles que se dedicam aos estudos de problemas abordados por fenômenos de eletromagnetismo.

3.1. Método dos Elementos Finitos

Os *Métodos dos Elementos Finitos* numa formulação escalar são largamente empregados nas áreas de engenharia civil e mecânica em análises de problemas envolvendo materiais e estruturas. Já os engenheiros eletricistas, por sua vez empregam os elementos finitos na resolução de problemas vetoriais altamente complexos e não lineares nas áreas do magnetismo e da eletrostática. Inicialmente os problemas práticos de engenharia elétrica requeriam significativamente mais esforço computacional do que os problemas de engenharia civil ou mecânica. Além do que, algumas soluções espúrias conhecidas como vetores parasitas, contribuíam com erros imprevisíveis aos resultados obtidos. O refinamento dos métodos e os conseqüentes desenvolvimentos neste campo ilustrados por Lynch & Paulsen [8.9], contornaram os problemas apresentados pelos vetores parasitas e o aumento da disponibilidade dos recursos computacionais veio de encontro aos anseios de se modelar problemas eletromagnéticos mais complexos, resultando na retomada motivadora do método dos elementos finitos para analisar situações envolvendo propagações eletromagnéticas.

O primeiro passo na análise por elementos finitos consiste na divisão da configuração em estudo em pequenas partes ou elementos. Um exemplo bastante simples de modelagem em elementos finitos é o mostrado na Fig. 1. O modelo contém informações a respeito da geometria do dispositivo, das constantes do material, das excitações e das restrições de fronteira. Os elementos podem ser menores onde existam detalhes geométricos de interesse ao problema. Em cada elemento finito, uma simples variação (muitas vezes linear) da intensidade de campo é posta em questão. A interconexão entre esses elementos é

unesp

designada pelo nome de nó. O objetivo da análise por elementos finitos consiste em se determinar as intensidades de campo em cada nó.

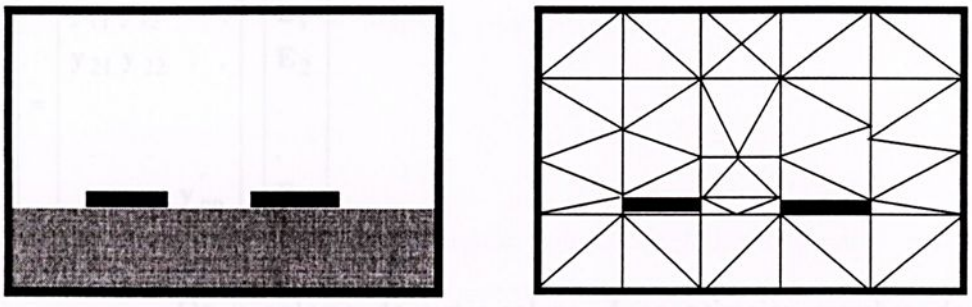


Figura 1 – Exemplo de modelagem por elementos finitos

A maioria dos métodos por elementos finitos é baseada em técnicas *variacionais*, minimizando ou maximizando uma expressão conhecida e estacionária em relação à solução verdadeira. Em geral, as técnicas de análises por elementos finitos resolvem intensidades de campo desconhecidas, minimizando um funcional de energia.

O funcional de energia é uma expressão que descreve toda a energia associada com a configuração a ser analisada. Para problemas harmônicos no tempo, este funcional de energia pode ser representado como,

$$F = \int_v \left(\frac{\mu |\mathbf{H}|^2}{2} + \frac{\varepsilon |\mathbf{E}|^2}{2} - \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}}{2j\omega} \right) dv \qquad (1)$$

Os primeiros dois termos no integrando representam a energia armazenada nos campos magnético e elétrico respectivamente enquanto o terceiro termo é a energia dissipada (ou fornecida) pelas correntes de condução.

Expressando o vetor intensidade de campo magnético $\boldsymbol{H}$ em termos do vetor intensidade de campo elétrico $\boldsymbol{E}$, fazendo a derivada desta função em relação a $\boldsymbol{E}$ igual a zero, obtém-se uma equação da forma $f(\boldsymbol{J},\boldsymbol{E}) = 0$. Uma

aproximação de ordem k da função f é então aplicada a cada um dos N nós e as condições de fronteira são impostas, resultando no sistema de equações,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 \\ \mathbf{J}_2 \\ . \\ . \\ \mathbf{J}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11}\,\mathbf{y}_{12} & . & . \\ \mathbf{y}_{21}\,\mathbf{y}_{22} & . & . \\ . & . & \\ . & . & \\ . & . & \mathbf{y}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ . \\ . \\ \mathbf{E}_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

Os n valores do vetor-coluna $\boldsymbol{J}$ no primeiro membro desta equação referem-se aos termos das fontes, representando as excitações conhecidas pelo problema. Os elementos da matriz Y, de ordem n, são funções da geometria do problema e das restrições de fronteira (contorno). Uma vez que a interação de cada elemento só se dá com os elementos de sua própria vizinhança, a matriz Y em geral resultará esparsa. Os n termos do vetor-coluna no segundo membro representam o campo elétrico desconhecido em cada nó, obtidos na resolução deste sistema de equações. Outros parâmetros, tais como campo magnético, correntes induzidas e potências dissipadas, podem ser obtidos a partir dos valores do campo elétrico determinado.

Para uma solução única, torna-se necessário restringir os valores do campo em todos os nós da fronteira. Por exemplo, a caixa metálica do modelo na Fig. 1 restringe o campo elétrico tangencial a zero em todos os nós de fronteira. A maior desvantagem no método dos elementos finitos é a dificuldade em se modelar configurações abertas (isto é, configurações onde os campos não são conhecidos em todos os pontos delimitados pela fronteira). Várias técnicas, tais como *"encapsulamento"* e fronteiras absorventes são empregadas na prática para contornar esta deficiência.

A maior vantagem que o método dos elementos finitos tem sobre as demais técnicas de modelagem eletromagnética, reside no fato de que as propriedades elétricas e geométricas de cada elemento podem ser definidas independentemente, fazendo com que o problema seja ajustado com um grande

número de elementos pequenos em regiões de geometria complexa e com elementos um pouco maiores nas demais regiões do problema. Assim, é possível modelar configurações com geometrias complicadas e regiões dielétricas com formas arbitrárias de maneira relativamente eficiente.

3.2. Método dos Momentos

O *Método dos Momentos*, analogamente à análise dos elementos finitos, constitui-se numa técnica de resolução de equações integrais complexas, reduzindo-se a um sistema de equações algébricas lineares mais simplificadas. Ao contrário da aplicação variacional empregada no método dos elementos finitos, o método dos momentos emprega uma técnica conhecida como o *método dos resíduos ponderados*, admitido como sinônimo ao método dos momentos. Atribui-se a Harrington [10] a popularização do termo *método dos momentos* no campo da engenharia elétrica, onde seus esforços pioneiros demonstraram a potência e a flexibilidade desta técnica resolvendo problemas dentro do eletromagnetismo.

Todas as técnicas baseadas em resíduos ponderados começam por estabelecer um conjunto de funções de solução inicial com um ou mais parâmetros. Os resíduos indicam a medida da diferença que existe entre a solução inicial e a real. Os parâmetros são determinados de modo a garantir um melhor ajuste das funções experimentais baseadas na minimização dos resíduos.

A equação resolvida pelas técnicas do método dos momentos é geralmente uma forma de equação integral de campo elétrico (EICE) ou uma equação integral de campo magnético (EICM). Ambas equações podem ser derivadas das equações de Maxwell, considerando o problema como o de um campo espalhado por um condutor perfeito (ou um dielétrico sem perdas). Tais equações são da forma,

$$\text{EICE:} \quad \mathbf{E} = f_e(\mathbf{J}) \tag{3}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

EICM: $\mathbf{H} = f_m(\mathbf{J})$ (4)

Os termos do lado esquerdo são as intensidades dos campos incidentes. Do lado direito o vetor ***J*** representa a corrente induzida.

A forma de equação integral empregada determina que tipos de problemas uma técnica do método dos momentos é melhor indicada para resolvê-los. Por exemplo, uma forma de EICE pode ser bem indicada para a modelagem de estruturas aramadas, enquanto uma outra forma pode ser sugerida na análise de placas metálicas. Embora estas equações sejam em geral expressas no domínio da freqüência, o método dos momentos também pode ser aplicado no domínio do tempo.

O primeiro passo no processo de solução no método dos momentos é o de expandir **J** como uma soma finita de funções (ou expansões) de base,

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^{M} J_i \mathbf{b}_i \tag{5}$$

onde $\boldsymbol{b_i}$ é a i-*ésima* função de base e J_i um coeficiente desconhecido. Em seguida, é definido um conjunto com M funções w_j de ponderação (ou teste) linearmente independentes. Um produto interno de cada função de ponderação é formado em ambos os lados da equação a ser resolvida. No caso da EICM, conforme Eq. (4), esta resulta num conjunto de M equações independentes da forma,

$$< w_j , \mathbf{H} > = < w_j , f_m(\mathbf{J}) > \qquad j = 1, 2, ..., M \tag{6}$$

Expandindo ***J*** pela Eq. (5), obtém-se um conjunto de M equações com M incógnitas,

$$< w_j , \mathbf{H} > = \sum_{i=1}^{M} < w_j , f_m(J_i \boldsymbol{b_i}) > \qquad j = 1, 2, ..., M \tag{7}$$

unesp

A Eq. (7), escrita na forma matricial resulta,

$$[\boldsymbol{H}]=[Z]\,[\boldsymbol{J}] \tag{8}$$

onde: $Z_{ij} = < w_j \,,\, f_m(b_i) >$

$\boldsymbol{J_i} = J_i$

$\boldsymbol{H_j} = < w_j \,,\, \boldsymbol{H_{inc}} >$

O vetor $\boldsymbol{H}$ contém as intensidades conhecidas de campo incidente e os termos da matriz Z são funções da geometria. Os coeficientes desconhecidos da corrente induzida são os termos do vetor $\boldsymbol{J}$, obtidos pela resolução do sistema de equações em questão. Outros parâmetros, tais como, os campos elétrico e magnético espalhado, podem ser calculados diretamente das correntes induzidas.

Dependendo da equação integral de campo utilizada, o método dos momentos pode ser aplicado a configurações geométricas somente de condutores, somente de dielétricos homogêneos, ou mesmo de condutores com dielétricos muito específicos. O método dos momentos não apresenta muita efetividade quando aplicado a equações integrais envolvendo configurações arbitrárias com geometrias complexas ou com dielétricos não homogêneos.

3.3. Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo

Conhecido internacionalmente por **F**inite **D**ifference **T**ime **D**omain ou pela sigla *FDTD*, o *Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo* é uma solução direta das equações em rotacional de Maxwell em função do tempo:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{9}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{10}$$

empregando aproximações simples de diferenças centradas para calcular as derivadas parciais no espaço e no tempo.

O método *FDTD* consiste num procedimento onde as entradas são sinais amostrados em pequenos intervalos (passos) de tempo. As regiões a serem modeladas são representadas por duas grades imbricadas (intercaladas) de pontos discretos; uma grade contém os pontos em que o campo elétrico é determinado e a outra os pontos para o cálculo do campo magnético.

Um elemento básico, também conhecido por célula do espaço reticulado em *FDTD*, está ilustrado na Fig. 2. Cada vetor de campo magnético é envolvido por quatro componentes do vetor campo elétrico. Uma aproximação de primeira ordem em diferenças centradas pode ser expressa como:

$$\frac{1}{A}\left[E_{z1}(t) + E_{y2}(t) - E_{z3}(t) - E_{y4}(t)\right] = -\frac{\mu_0}{2\Delta t}\left[H_{x0}(t+\Delta t) - H_{x0}(t-\Delta t)\right] \tag{11}$$

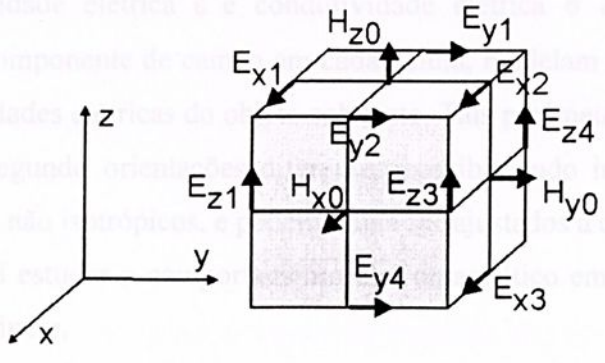


Figura 2 – Célula ou elemento básico do espaço reticulado em *FDTD*

onde A é a área da face sombreada da célula na Fig. 2. $H_{x0}\ (t+\Delta t)$ é a única incógnita nesta equação, visto que os outros valores foram obtidos em um passo de tempo anterior. Desta forma, os valores de campo elétrico num instante t serão usados para que se encontrem os valores de campo magnético no instante $t+\Delta t$.

Uma aproximação similar das diferenças centradas na Eq. (9) pode então ser aplicada para se obter os valores do campo elétrico no instante $t + 2\Delta t$ a partir dos valores do campo magnético no instante $t+\Delta t$. Calculando-se alternadamente os campos elétrico e magnético a cada passo de tempo, observa-se a propagação por todo o espaço reticulado imposto pelo problema.

O processo segue por vários passos de tempo até que uma solução ou uma resposta desejada seja obtida. Nenhum sistema de equações precisa ser estabelecido e resolvido, bastando que se faça explicitamente uma atualização de cada componente dos campos eletromagnéticos a cada intervalo de tempo, isto é, dentro de um mesmo laço no programa. O armazenamento computacional e o tempo de processamento são proporcionais à dimensão elétrica do espaço a ser modelado e da resolução (tamanho) de cada célula ou grade.

Um objeto sob teste envolvido num espaço reticulado em *FDTD* é ilustrado na Fig. 3. Elementos artificiais absorventes são adicionados externamente à fronteira a fim de evitar, senão minimizar, reflexões indesejadas e conseqüentes dos sinais que retornariam, gerando interferências, após atingir os limites físicos do espaço do problema. Valores distintos de permeabilidade magnética μ, permissividade elétrica ε e condutividade elétrica σ associados separadamente a cada componente de campo em cada célula, modelam e definem as posições e as propriedades elétricas do objeto sob teste. Tais parâmetros podem ter valores diferentes segundo orientações diferentes possibilitando inclusive a modelagem de materiais não isotrópicos, e podem ainda ser ajustados a cada passo de tempo sendo possível estudar o comportamento eletromagnético em materiais de comportamento não-linear.

As regiões curvas devem ser aproximadas e modeladas por elementos básicos constituídos de pequenos cubos ou superfícies retangulares, segundo a dimensão do espaço do problema, não representando uma séria dificuldade à maioria das configurações geométricas. No entanto, regiões pontiagudas ou com quinas vivas requerem uma aproximação através de muito mais células e de tamanhos menores, acarretando um aumento na carga

computacional da simulação, visto que as determinações das células seriam dadas em função da resolução geométrica.

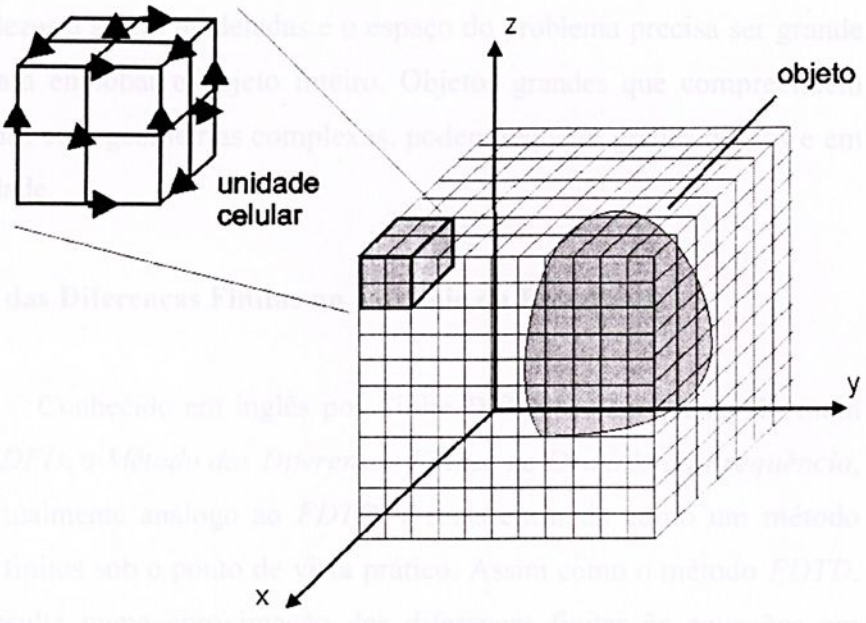


Figura 3 – Objeto sob teste no espaço reticulado em *FDTD*

Resultados no domínio da freqüência podem ser obtidos pela aplicação discreta das transformadas de Fourier às respostas no domínio do tempo. Por cálculos adicionais, pode-se fazer uma análise no domínio da freqüência pela transformação da resposta impulsiva do sistema.

Os métodos *FDTD*, muito usados na análise das secções atravessadas por ondas de radar, possuem também grandes aplicações a muitos outros problemas dentro da categoria eletromagnética. A maior vantagem é a sua grande flexibilidade, permitindo a modelagem de formas de ondas, as mais arbitrárias, por configurações complexas em materiais condutores, dielétricos ou mesmo dissipativos não-lineares e não-isotrópicos. Outra vantagem reside na possibilidade de poder-se implantar tais técnicas em computadores paralelos, particularmente em máquinas de processamento vetorial.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

A única desvantagem significativa desta técnica é que a dimensão do problema pode sair do controle para algumas configurações mais complicadas. O ajuste da grade é geralmente definido pelas dimensões das menores grandezas a serem modeladas e o espaço do problema precisa ser grande o suficiente para englobar o objeto inteiro. Objetos grandes que compreendem regiões pequenas com geometrias complexas, podem requerer grades densas e em grande quantidade.

3.4. Método das Diferenças Finitas no Domínio da Freqüência

Conhecido em inglês por **F**inite **D**ifference **F**requency **D**omain ou pela sigla *FDFD*, o *Método das Diferenças Finitas no Domínio da Freqüência*, embora conceitualmente análogo ao *FDTD*, é mais encarado como um método dos elementos finitos sob o ponto de vista prático. Assim como o método *FDTD*, esta técnica resulta numa aproximação das diferenças finitas às equações em rotacional de Maxwell, porém no escopo harmônico, empregando.

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\mathbf{E} \tag{12}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \tag{13}$$

Uma vez que não há tratamentos em intervalos de tempo, não é necessário manter-se uma malha com espaçamentos uniformes. Assim sendo, malhas otimizadas em *FDFD* parecem-se com as estruturas utilizadas pelos elementos finitos. Assim como o método dos momentos e as técnicas de elementos finitos, a técnica de *FDFD* gera um sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes, também esparsa, será fatorada para a resolução do referido sistema.

unesp

3.5. TLM - Método da Matriz de Linhas de Transmissão

Conhecido internacionalmente por **T**ransmission **L**ine **M**atrix ou pela sigla *TLM*, o *Método da Matriz de Linhas de Transmissão* é bastante similar ao método *FDTD* em termos de suas possibilidades. Como no *FDTD*, a análise é desenvolvida dentro do domínio do tempo e o espaço é dividido de maneira reticular em regiões. Ao invés de se intercalarem, o campo elétrico e campo magnético são estabelecidos numa única grade e os nós ou células são interligadas por *linhas virtuais de transmissão*. As excitações nas células da fonte se propagam aos nós adjacentes através destas linhas a cada passo de tempo. A formulação do nó condensado simétrico introduzido por Johns [4] com efetivas contribuições de Hoefer [11] tornou-se o padrão para análises tridimensionais em *TLM*. A estrutura básica do nó condensado simétrico é ilustrada na Fig. 4 onde cada nó é ligado ao seu vizinho por um par de linhas de transmissão ortogonalmente polarizadas.

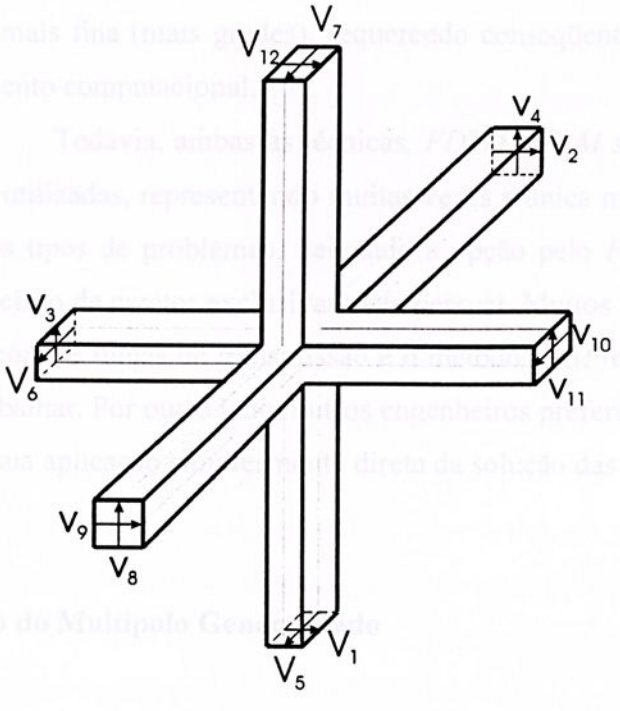


Figura 4 – O nó condensado simétrico

Geralmente, um carregamento dielétrico é realizado por nós de carga com *tocos* (terminações) reativos. Estes tocos são usualmente a metade do comprimento do espaçamento da malha e têm uma impedância característica apropriada para a quantidade de carga desejada. Os meios dissipativos podem ser modelados introduzindo-se perdas nas equações da linha de transmissão ou carregando-se os nós com tocos com perdas. As *fronteiras absorventes* são construídas terminando-se cada nó de fronteira da linha de transmissão com sua impedância característica, impedindo reflexões espúrias da onda eletromagnética.

As vantagens em se utilizar o método *TLM* são similares àquelas do método *FDTD*. Materiais complexos, não-lineares são prontamente modelados. Respostas impulsivas e o comportamento do sistema no domínio do tempo são determinados explicitamente e assim como o *FDTD*, esta técnica também é adequada para ser implantada em máquinas de processamento paralelo.

Assim como o *FDTD*, o *TLM* também apresenta algumas desvantagens; a maior delas é que problemas extensos precisam ser modelados numa malha mais fina (mais grades), requerendo conseqüentemente mais tempo de processamento computacional.

Todavia, ambas as técnicas, *FDTD* e *TLM* são muito poderosas e largamente utilizadas, representando muitas vezes a única maneira prática de se analisar certos tipos de problemas, deixando a opção pelo *FDTD* ou pelo *TLM* como uma decisão de caráter exclusivamente pessoal. Muitos profissionais acham as analogias com as linhas de transmissão e o método *TLM* mais intuitivo e mais fácil de se trabalhar. Por outro lado, outros engenheiros preferem o método *FDTD* por causa da sua aplicação simplesmente direta da solução das equações de campo de Maxwell.

3.6. Método do Multipolo Generalizado

O *Método do Multipolo Generalizado* destinado a análises eletromagnéticas, constitui-se numa aplicação no domínio da freqüência que

(como o método dos momentos) baseia-se no princípio dos resíduos ponderados. Este método é exclusivo no que as funções de expansão são soluções analíticas dos campos gerados pelas fontes localizadas a uma certa distância além de onde a condição de fronteira está sendo enfatizada.

O método dos momentos geralmente emprega funções de expansão representando quantidades tais como, carga ou corrente que possa existir numa superfície fronteiriça. As funções de expansão da técnica do multipolo generalizado são soluções de campos com ondas esféricas correspondendo às fontes do multipolo. Locando estas fontes além da fronteira, as soluções de campo formam um conjunto estável de funções de expansão onde as particularidades na fronteira serão evitadas.

Assim como no método dos momentos, um sistema de equações lineares é resolvido para se determinar os coeficientes das funções de expansão que produzem uma melhor solução. Uma vez que as funções de expansão já são soluções de campo, não é necessário qualquer cálculo adicional para determiná-los. O método convencional dos momentos determina primeiro as correntes e/ou cargas às quais são integradas sobre o espaço do problema para a determinação dos campos de interesse; o que não se faz necessário em qualquer estágio da solução pelo método do multipolo generalizado.

3.7. Método do Gradiente Conjugado

O *Método do Gradiente Conjugado* é outra técnica baseada no método dos resíduos ponderados, conceitualmente muito similar às técnicas convencionais do método dos momentos. No entanto, há duas características que distinguem esta técnica de outros métodos dos momentos: utilizar funções de ponderação e envolver o método na resolução de um sistema de equações lineares.

O método convencional dos momentos define o produto interno das funções de ponderação, w_j, com outra função g como,

unesp

$$< w_j, g > = \int_s (w_j \cdot g) ds \tag{14}$$

Isto é referido como *produto simétrico*. O método do gradiente conjugado utiliza uma forma diferente de produto interno designado por *produto interno de Hilbert*, definido como,

$$< w_j, g > = \int_s (w_j \cdot \bar{g}) ds \tag{15}$$

onde $\bar{g}$ denota a conjugação complexa. Se ambas as funções são reais, as duas definições tornam-se equivalentes. No entanto quando se empregam funções de ponderação complexa, o produto simétrico é um valor complexo e não é uma *norma* válida, sendo preferível o produto interno de Hilbert segundo Sarkar [12].

Uma maior diferença entre o método dos momentos e o do gradiente conjugado envolve a técnica utilizada para a resolução de um grande sistema de equações geradas por estes métodos. O método convencional dos momentos geralmente emprega o método de Gauss-Jordan ou qualquer outro procedimento de solução direta. Técnicas de solução direta resolvem o sistema de equações com um número predeterminado de cálculos geralmente da ordem de N^3, onde N é a ordem da matriz).

Os métodos de gradiente conjugado utilizam procedimentos de soluções iterativas. Este processo, chamado *método dos gradientes conjugados*, pode tanto ser aplicado a um sistema de equações como pode ser aplicado diretamente à equação operadora conforme Sarkar [13]. Procedimentos de solução iterativa, tais como os métodos dos gradientes conjugados tornam-se mais vantajosos quando aplicados a grandes matrizes esparsas.

4. *REVISÃO DE EQUAÇÕES DE ONDAS*

Tanto os conceitos primitivos de partícula como de onda, podem à primeira vista ser compreendidos de maneira intuitiva por qualquer pessoa, não importando o seu nível cultural. Para o leigo, uma partícula é apenas uma "pequena" porção de matéria em relação à vizinhança onde ela se encontra. Da mesma forma, a idéia primitiva de uma onda decorre das observações das perturbações na superfície da água, das vibrações de uma corda em um instrumento musical, ou das deformações elásticas em uma mola. Tais conceitos intuitivos de partícula e de onda, foram ampliados num sentido mais abstrato e fundamental, tornando-os capazes de tratar adequadamente uma grande variedade de situações físicas, permitindo o estudo de um grande número de fenômenos mesmo não se assemelhando ao comportamento visível e mecânico de um pequeno grão de areia ou à imagem objetiva de uma onda sobre a superfície da água, mas que têm a mesma descrição matemática deles.

Quando um sino é tocado ou um rádio é ligado, o som é ouvido em pontos distantes, sendo transmitido através do ar circundante. Numa praia, um barco veloz produz sulcos na água do mar, perturbando a sua superfície. Um simples interruptor de luz, faz com que esta preencha o ambiente. As relações físicas existentes entre os campos elétrico e magnético possibilitam que um sinal elétrico, seja ele de grande ou de pequena potência, seja transmitido de um lugar a outro. Embora o mecanismo físico possa ser diferente para cada um dos processos mencionados acima, todos eles têm um aspecto comum: são situações físicas produzidas em um ponto do espaço, propagando-se através dele, sendo percebidas depois em um outro ponto.

Os aspectos mais importantes das ondas são a velocidade de sua propagação e as modificações que sofrem quando variam as propriedades físicas do meio (reflexão, refração, polarização), quando são interpostos em seus percursos diferentes tipos de obstáculos (difração, espraiamento), ou quando várias ondas coincidem na mesma região do espaço (interferência).

Uma exposição mais geral do assunto admite a existência de campos associados à descrição da propriedade física, podendo ser um campo eletromagnético, a deformação de uma mola, a pressão em um gás, a deformação em um sólido, o deslocamento transversal de uma corda, ou mesmo o campo gravitacional. As condições em um certo lugar são dependentes do tempo ou dinâmicas, de maneira que haja uma perturbação do estado físico naquele lugar. Na superfície livre de um líquido, o campo é responsável pelo deslocamento de cada ponto da superfície em relação à situação inicial de equilíbrio.

Nas condições de equilíbrio, ou estáticas, a superfície livre de um líquido é plana e horizontal. Uma pedra jogada neste líquido, perturba um ponto que se propaga em todas as direções da sua superfície. O mecanismo de propagação e a sua velocidade, são analisados pelo modo como o deslocamento de um ponto na superfície do líquido pode modificar a condição de repouso em outras partes da mesma. Em outras palavras, observa-se a propagação da energia sem o transporte consecutivo da matéria. Dessa análise, são estabelecidas as equações dinâmicas do processo, permitindo obter uma informação quantitativa sobre a variação da perturbação no espaço e no tempo.

As propriedades físicas do sistema, descritas pelas equações de campos dependentes do tempo, tais como as equações de Maxwell para os campos eletromagnéticos, resultam na propagação de uma perturbação pelo espaço, acarretando na modificação das condições estáticas em outros lugares. Fala-se, portanto de uma onda associada aos campos particulares considerados.

4.1. Descrição Matemática da Propagação

Seja a função $h = f(z)$, representada graficamente no centro da Fig. 5. Quando a função $f(z)$ é deslocada de uma quantidade $a = vt$ para a direita, obtém-se uma função $h = f(z - vt)$, correspondente ao deslocamento da curva $f(z)$ da quantidade a para a direita sem deformação. De maneira análoga a função $h = f(z + vt)$ corresponde ao deslocamento rígido da mesma curva $f(z)$, só que para a esquerda, e da mesma quantidade vt de unidades de comprimento.

unesp

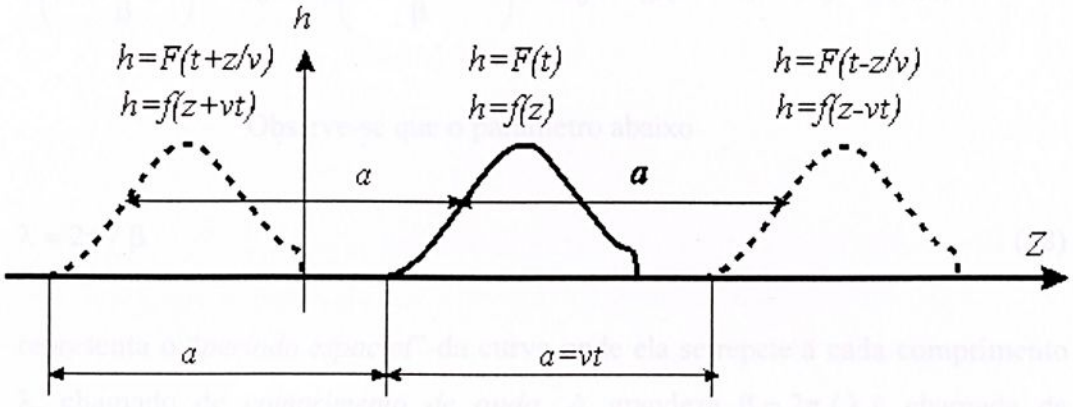


Figura 5 – Translação da função f(z) ou F(t) sem distorção.

Num instante *t* considerado, obtém-se uma curva "viajante", onde $h = f(z - vt)$ move-se para a direita e $h = f(z + vt)$ move-se para a esquerda, com uma velocidade *v* denominada *velocidade de fase*. A expressão da Eq. (16) descreve uma função que se "propaga", *sem deformação* ao longo do eixo positivo ou negativo dos *X*; isto é um *movimento ondulatório*.

$$h(z,t) = f(z \pm vt) \tag{16}$$

A quantidade $h(z,t)$ pode vir a representar uma diversidade de quantidades físicas, tais como a deformação em um sólido, a pressão em um gás, um campo elétrico ou magnético, etc. Um caso de particular interesse é aquele onde $h(z,t)$ é uma função senoidal ou harmônica assim descrita

$$h(z,t) = H_0 \operatorname{sen} \beta(z - vt) \tag{17}$$

O parâmetro β merece uma atenção pelo seu significado físico especial. Substituindo o valor de *z* por $z + 2\pi/\beta$, obtém-se para $h(z,t)$ o mesmo valor da expressão acima, isto é,

$$h\left(z+\frac{2\pi}{\beta},\, t\right) = H_0 \operatorname{sen}\beta\left(z+\frac{2\pi}{\beta} - vt\right) = H_0 \operatorname{sen}[\beta(z-vt)+2\pi] = h(z,t)$$

Observe-se que o parâmetro abaixo

$$\lambda = 2\pi / \beta \tag{18}$$

representa o "*período espacial*" da curva onde ela se repete a cada comprimento λ., chamado de *comprimento de onda*. A grandeza $\beta = 2\pi / \lambda$ é chamada de *número de onda* equivalendo ao número de comprimentos de onda na distância 2π.. A substituição do valor de β obtido em função de λ na Eq. (17) permite outra forma de apresentação ao movimento ondulatório harmônico fornecendo

$$h(z,t) = H_0 \operatorname{sen}\beta(z-vt) = H_0 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{\lambda}(z-vt) \tag{19}$$

A Eq. (19) representa uma onda senoidal ou harmônica de comprimento de onda λ propagando-se para a direita ao longo do eixo dos *X* com velocidade *v*. Esta expressão também pode ser escrita na forma

$$h(z,t) = H_0 \operatorname{sen}(\beta z - \omega t) \tag{20}$$

onde

$$\omega = 2\pi f = \beta v = \frac{2\pi v}{\lambda} \tag{21}$$

fornece a *freqüência angular* ou a *pulsação* da onda, sendo f a freqüência com que o evento físico varia em cada ponto *x*. Pode-se definir ainda o comprimento de onda λ como a distância percorrida pelo movimento ondulatório com velocidade *v* durante um período *T*, satisfazendo $\lambda = vT$. Estabelece-se uma

relação fundamental entre a velocidade de propagação, o comprimento de onda e a sua freqüência dada por:

$$v = \lambda f \tag{22}$$

O movimento ondulatório senoidal tem duas periodicidades: uma no tempo dada pelo período $T = 1/f$, e uma no espaço, dada pelo comprimento de onda λ, ambas relacionadas pela velocidade de propagação $v = \lambda / T$.

A expressão geral da Eq. (16) para uma onda viajante ilustrada pela Fig. 5 pode ser também colocada na forma

$$h(z,t) = F\left(t \pm \frac{z}{v}\right)$$

A Eq. (20) dá lugar à seguinte expressão para uma onda harmônica, também muito conhecida na literatura sobre fenômenos ondulatórios

$$h(z,t) = H_0 \operatorname{sen}\omega\left(t \pm \frac{z}{v}\right) = H_0 \operatorname{sen}(\omega t \pm \beta z) \tag{23}$$

4.2. Equação Diferencial do Movimento Ondulatório

Os campos associados a cada processo físico são governados por leis dinâmicas (característica de cada processo) expressas na forma de equações diferenciais aplicáveis a todos os tipos de movimentos ondulatórios. Sempre que um campo particular satisfaça a tais equações, pode-se afirmar que este campo propaga-se no espaço *sem distorção* e com uma *velocidade definida*. Assim sendo, a equação que descreve um movimento ondulatório que se propaga sem distorção com velocidade v definida tanto no sentido de $+X$ como de $-X$ é da forma

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \tag{24}$$

A Eq. (24) acima é a *equação diferencial do movimento ondulatório* e apresenta uma solução geral da forma da Eq. (16) apresentada, expressando matematicamente a superposição de dois movimentos ondulatórios propagando-se em sentidos opostos, ou seja:

$$h(z,t) = f(z - vt) + g(z + vt) \tag{25}$$

Derivando a Eq. (25) em relação ao espaço z e ao tempo t, lembrando que $h = f(u) + g(w)$ onde $u = z - vt$ e $w = z + vt$, tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} = 1 \tag{26}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial w}{\partial t} = -v \tag{27}$$

Derivando a Eq. (25), aplicando-se a regra da cadeia, tem-se:

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial w} \tag{28}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t} = -v\frac{\partial f}{\partial u} + v\frac{\partial g}{\partial w} \tag{29}$$

As Eqs. (28) e (29) derivadas novamente em relação a z e a t respectivamente resultam

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 g}{\partial w^2}\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial w^2} \tag{30}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = -v\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial^2 g}{\partial w^2}\frac{\partial w}{\partial t} = -v\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(-v) + v\frac{\partial^2 g}{\partial w^2}(v) = v^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial w^2}\right) \tag{31}$$

A resolução das Eqs. (30) e (31) para o termo comum $\left(\partial^2 f/\partial u^2 + \partial^2 g/\partial w^2\right)$, verifica que qualquer movimento ondulatório unidirecional é descrito por uma equação diferencial do tipo descrito pela Eq. (24). A superposição dos movimentos pode ocorrer com funções distintas *f* e *g* para cada sentido de propagação no eixo dos *Z*, isto é, com formas de ondas diferentes, conforme o proposto pela Eq. (25).

Interessante comentar que no caso da propagação ocorrer num espaço tridimensional, a equação diferencial que rege o movimento ondulatório, deve ser adequadamente modificada. Para um sistema de coordenadas cartesianas tridimensionais a Eq. (24), diferencial geral do movimento ondulatório, toma a seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \nabla^2 h = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \tag{32}$$

4.3. Onda Plana no Espaço

Embora $h(z,t) = f(z - vt)$, represente um movimento ondulatório que se propaga ao longo do eixo *Z* no tempo *t*, esta equação não significa necessariamente uma onda concentrada em uma dimensão, sobre o eixo *Z*. A perturbação descrita por $h(z,t)$ estendida por todo o espaço, num dado instante *t*, significa que a função *h* assume o mesmo valor em todos os pontos contidos no plano $z = constante$. Neste caso, por exemplo, $h = f(z - vt)$ descreve em três dimensões, uma *onda plana* que se propaga paralelamente ao eixo *Z*. Ondas

planas, mesmo contendo as três coordenadas x, y e z, são na realidade tratadas como problemas unidimensionais onde a propagação se dá numa certa direção e a situação física é a mesma para todos os pontos de um plano perpendicular à sua direção de propagação.

4.4. Ondas Eletromagnéticas Planas

A existência de ondas eletromagnéticas foi prevista por Maxwell em conseqüência de uma análise cuidadosa das equações do campo elétrico e do campo magnético, bem como da relação existente entre eles, inclusive quando estes são variáveis no tempo. Tais previsões foram comprovadas experimentalmente pelo físico alemão Heinrich Hertz (1857-1894) comprovando que o campo eletromagnético se propaga no vácuo com velocidade c_0 bem próxima de 3×10^8 m/s.

Considere-se inicialmente uma onda eletromagnética que se propaga no vácuo, com permissividade elétrica ε_0 e permeabilidade magnética μ_0, onde no Sistema Internacional de Unidades é dado por

$$\varepsilon_0 = 10^{-9} / (36\,\pi) \text{ F/m} \tag{33}$$

$$\mu_0 = 4\,\pi \,.\, 10^{-7} \text{ H/m} \tag{34}$$

Numa análise vetorial, sendo o vácuo isotrópico, o campo elétrico $\boldsymbol{E}$ e o campo magnético $\boldsymbol{H}$ relacionam-se de uma maneira simplificada com os correspondentes vetores de densidade de campo elétrico $\boldsymbol{D}$ e densidade de campo magnético $\boldsymbol{B}$ respectivamente onde,

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \tag{35}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \tag{36}$$

Admitindo no vácuo, a ausência de cargas elétricas e correntes, a densidade volumétrica de cargas elétricas $\rho_v = 0$ e a densidade superficial de corrente $\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} = 0$. Considerando as relações dadas pelas Eqs. (35) e (36), no vácuo, as equações de Maxwell para os campos variáveis no tempo, num sistema de coordenadas cartesianas, são expressas por:

$$\text{div}(\mathbf{D}) = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_v = 0 \tag{37}$$

$$\text{div}(\mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \tag{38}$$

$$\text{rot}(\mathbf{E}) = \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{39}$$

$$\text{rot}(\mathbf{H}) = \nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{40}$$

A Eq. (39) decorre da aplicação geral mostrada pela Eq. (10), da mesma forma que a Eq. (40) procede pela expressão da Eq. (9).

Conforme o conceito esclarecido sobre Ondas Eletromagnéticas Planas, as equações de Maxwell para o campo eletromagnético admitem, como solução particular, um campo elétrico $\boldsymbol{E}$ e um campo magnético $\boldsymbol{B}$ perpendiculares um ao outro, que se propagam também numa direção perpendicular a eles dois. Admitindo-se que o campo elétrico seja dado na direção X e campo magnético na direção Y, a *onda plana eletromagnética* caminhará na direção do eixo Z conforme a Fig. 6.

O conjunto vetorial de Eqs. (37), (38), (39) e (40) de Maxwell, conforme as leis que regem os fenômenos do eletromagnetismo, podem ser expressas por um conjunto de equações escalares descrevendo o comportamento de uma onda plana eletromagnética originada por campos elétrico e magnético transversais, propagando-se numa direção também transversal a eles..

unesp

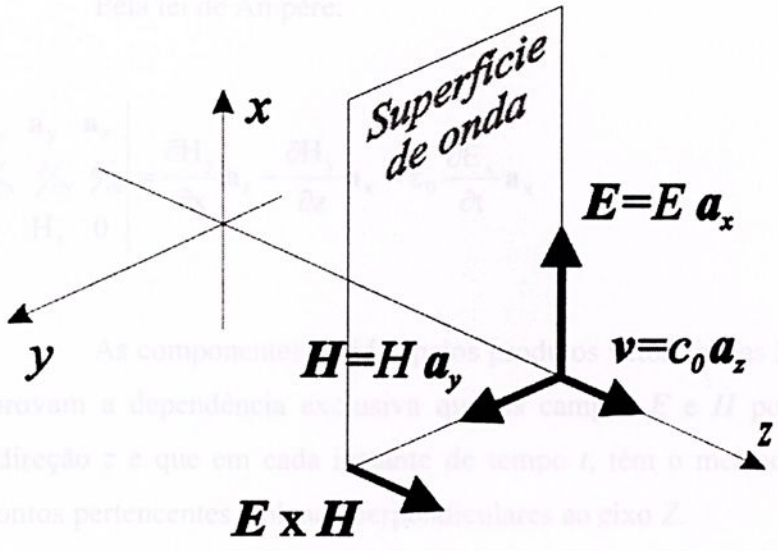


Figura 6 – Campos eletromagnéticos e uma onda eletromagnética plana.

A inexistência de cargas e correntes no vácuo é evidenciada pela lei de Gauss para o campo elétrico:

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x} = \rho = 0 \tag{41}$$

A lei de Gauss para o campo magnético comprova a inexistência de cargas magnéticas, como era de se esperar:

$$\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{H} = \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0 \tag{42}$$

Pela lei de Faraday-Henry:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial E_x}{\partial z}\mathbf{a}_y - \frac{\partial E_x}{\partial y}\mathbf{a}_z = -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}\mathbf{a}_y \tag{43}$$

Pela lei de Ampère:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & H_y & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial H_y}{\partial x}\mathbf{a}_z - \frac{\partial H_y}{\partial z}\mathbf{a}_x = \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}\mathbf{a}_x \tag{44}$$

As componentes obtidas pelos produtos vetoriais das Eqs. (43) e (44) comprovam a dependência exclusiva que os campos ***E*** e ***H*** possuem em relação à direção *z* e que em cada instante de tempo *t*, têm o mesmo valor em todos os pontos pertencentes a planos perpendiculares ao eixo *Z*.

Pela igualdade vetorial nas Eqs. (43) e (44), obtém-se duas expressões particulares onde

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \tag{45}$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \tag{46}$$

As derivadas parciais das Eqs. (45) e (46) em relação a *z* fornecem

$$\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 H_y}{\partial z \partial t} \tag{47}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial t} \tag{48}$$

Da mesma forma, derivando as Eqs. (45) e (46) mas em relação a *t* obtém-se

$$-\frac{\partial^2 E_x}{\partial t \partial z} = -\frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial t} = \mu_0 \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} \tag{49}$$

$$-\frac{\partial^2 H_y}{\partial t \partial z} = -\frac{\partial^2 H_y}{\partial z \partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \tag{50}$$

As identidades estabelecidas entre as Eqs. (47) e (50) assim como entre as Eqs. (48) e (49) fornecem

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{1}{v_2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \tag{51}$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} \tag{52}$$

As equações (51) e (52) têm a forma genérica das equações diferenciais que descrevem qualquer movimento ondulatório seguindo a forma diferencial geral das Eqs. (31) ou (32). As equações de Maxwell permitem que se interprete a propagação dos campos elétrico e magnético sob a forma de ondas. Descrevem portanto a existência de uma onda transversal que no vácuo se propaga a uma velocidade c_0 onde

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \approx 3 \times 10^8 \, \text{m/s} \tag{53}$$

A Eq. (53) acima vem a comprovar o valor da velocidade de propagação de uma onda eletromagnética no vácuo obtido experimentalmente por Hertz.

A velocidade c_0 de propagação eletromagnética no vácuo foi baseada na ausência de cargas e correntes. Contudo, quando uma onda eletromagnética propaga-se na matéria, ela induz cargas e correntes na substância como resultado da polarização e magnetização da matéria. Se a substância é homogênea e isotrópica, o efeito da polarização e da magnetização do meio pela onda eletromagnética implica na substituição das constantes ε_0 e μ_0, nas equações de Maxwell, Eqs. (37), (38), (39) e (40), pela permissividade elétrica ε e pela permeabilidade magnética μ, características do material, recaindo numa forma mais geral segundo as Eqs. (9) e (10). A velocidade c de propagação da onda eletromagnética na matéria, menor do que a velocidade de propagação no vácuo, torna-se agora função das características do meio sendo indicada por:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} < 3\text{x}10^8 \, {}^{m}\!/_{s} \tag{54}$$

As constantes ε_r e μ_r indicam respectivamente a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética do meio de propagação relativas ao vácuo ou espaço livre.

Pela expressão acima, é fácil ver que a onda eletromagnética magnética se propaga mais rapidamente no espaço livre (vácuo).

5. METODOLOGIA

As Equações de Maxwell podem ser formuladas tanto na forma integral como na forma diferencial, considerando-se uma propagação eletromagnética num meio genérico. As leis de Ampère e de Faraday originam as duas equações em rotacional de Maxwell. O Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo para simular as ondas eletromagnéticas, baseia-se nas duas equações diferenciais em rotacional de Maxwell, que transformam as diferenciais em diferenças finitas tratando-as algebricamente pelo método numérico.

5.1. Equações de Maxwell na Forma Diferencial

As equações diferenciais de Maxwell em rotacional podem ser obtidas diretamente, calculadas sobre a mesma superfície de domínio S, fazendo com que:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \tag{55}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{J}_m \tag{56}$$

O vetor densidade de corrente $\boldsymbol{J}$ é diretamente proporcional ao vetor campo elétrico $\boldsymbol{E}$ segundo a condutividade σ do meio e a Eq. (57) abaixo descreve a própria lei de Ohm na forma diferencial resultando:

$$\mathbf{J} = \sigma \, . \, \mathbf{E} \tag{57}$$

Analogamente, um vetor densidade de corrente magnética $\boldsymbol{J_m}$ diretamente proporcional ao vetor campo magnético $\boldsymbol{H}$ segundo uma resistividade

magnética ρ_m do meio, representa as perdas pelo campo magnético conforme abaixo:

$$\mathbf{J_m} = \rho_m \,.\mathbf{H} \tag{58}$$

Com os valores de **J** e $\mathbf{J_m}$ substituídos em função de ***E*** e de ***H***, conforme as Eqs. (57) e (58), as equações de Maxwell tomam a forma conveniente abaixo, relacionando grandezas elétricas com magnéticas e vice-versa, constituindo os primeiros passos para o desenvolvimento das expressões utilizadas pelo método *FDTD*.

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} \tag{59}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \rho_m \mathbf{H} \tag{60}$$

No método *FDTD*, as derivadas parciais temporais e espaciais são substituídas por suas correspondentes diferenças finitas centradas no tempo e no espaço, onde apenas as interações entre os pontos vizinhos mais próximos são consideradas quando os campos, dispostos sobre células discretas, avançam em passos também discretos no domínio do tempo. Interessante ressaltar mais uma vez que as Eqs. (59) e (60) já foram apresentadas respectivamente também aos pares pelas Eqs. (9) e (10) considerando um meio não magnético e pelas Eqs. (40) e (39) no caso da propagação de uma onda eletromagnética no espaço livre (vácuo).

5.2. Hipóteses Simplificadoras

Para um meio isotrópico o vetor densidade de fluxo elétrico ***D*** relaciona-se com o vetor campo elétrico ***E*** pela permissividade elétrica ε sendo possível estabelecer:

$$\mathbf{D} = \varepsilon\,\mathbf{E} = \varepsilon_r\,\varepsilon_0\,\mathbf{E} \tag{61}$$

Da mesma forma, num meio isotrópico o vetor densidade de fluxo magnético ***B*** relaciona-se com o vetor campo magnético ***H*** pela permeabilidade magnética μ onde:

$$\mathbf{B} = \mu\,\mathbf{H} = \mu_r\,\mu_0\,\mathbf{H} \tag{62}$$

Tanto a permissividade elétrica ε_r como a permeabilidade magnética μ_r de um meio relativas ao vácuo, encontram-se disponíveis em tabelas de constantes físicas e são mais utilizadas que as correspondentes constantes absolutas.

Para materiais isolantes e de características não magnéticas, segundo as proposições deste trabalho,

- $\sigma \approx 0$
- $\rho_m = 0$
- $\mu = \mu_0$

Em função de tais hipóteses, as Eqs. (59) e (60) de Maxwell para um meio isolante, isotrópico e não magnético passam a ser assim escritas:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} \tag{63}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{64}$$

unesp

Lembrando ainda que $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$, tais equações para uma onda plana eletromagnética, podem ser expressas na forma escalar e no domínio da freqüência onde as derivadas temporais são substituídas por $j\omega$. Desta forma, as Eqs. (64) e (63) considerando $\mu = \mu_0$ e $\rho_m = 0$ transformam-se em:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -j\omega\mu_0 H_y \tag{65}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -(\sigma + j\omega\varepsilon) E_x \tag{66}$$

A resolução destas equações diferenciais estabelece uma relação entre o campo elétrico E_x e o campo magnético H_y, conhecida como *impedância intrínseca* do meio η medida em *ohms* no Sistema Internacional. Daí

$$\eta = \frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{\sigma + j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon + \dfrac{\sigma}{j\omega}}} \tag{67}$$

Conclui-se pela Eq. (67) que no domínio da freqüência, a permissividade elétrica complexa (ε^*) é dada pela expressão:

$$\varepsilon^*(\omega) = \varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega} \tag{68}$$

Analogamente à Eq. (61), os vetores $\boldsymbol{D}$ e $\boldsymbol{E}$ se relacionam no domínio da freqüência, como era de se esperar por

$$\mathbf{D}(\omega) = \varepsilon^*(\omega)\, \mathbf{E}(\omega) \tag{69}$$



5.3. Normalização dos Vetores de Grandeza Elétrica

Para que as equações diferenciais de Maxwell descrevam os fenômenos ondulatórios eletromagnéticos em função da velocidade de propagação, recorre-se a uma formulação matemática, segundo Sullivan [14], onde os vetores $\boldsymbol{D}$ e $\boldsymbol{E}$ são tratados sob uma forma normalizada de modo tal que a velocidade de propagação no vácuo c_0, apareça como um multiplicador no lado direito das Eqs. (63) e (64) permitindo que se trate o campo elétrico e o magnético dentro de uma mesma ordem de grandeza, facilitando a visualização e o estudo comparativo entre eles. Assim, multiplicando ambos os lados da Eq. (63) por $1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ tem-se:

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\nabla\times\mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\mathbf{D}\right) \tag{70}$$

Fazendo $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$ na Eq. (64) e multiplicando e dividindo o lado esquerdo por $\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ vem que

$$\frac{\sqrt{\mu_0}}{\mu_0\sqrt{\varepsilon_0}}\nabla\times\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\mu_0}}\mathbf{E}\right) = -\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} \tag{71}$$

As Eqs. (63) e (64) são colocadas numa forma normalizada descrevendo uma onda eletromagnética em função da velocidade de propagação no vácuo, onde os vetores $\boldsymbol{D}$ e $\boldsymbol{E}$ são substituídos por

$$\widetilde{\mathbf{D}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\mathbf{D} \tag{72}$$

$$\widetilde{\mathbf{E}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\mathbf{E} \tag{73}$$

Nesta forma normalizada pelas Eqs. (72) e (73) acima, as Eqs. (70), (69) e (71), tomam respectivamente a forma:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{D}}}{\partial t} = c_0 \nabla \mathbf{x} \mathbf{H} \tag{74}$$

$$\tilde{\mathbf{D}}(\omega) = \varepsilon_r^* (\omega).\tilde{\mathbf{E}}(\omega) \tag{75}$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -c_0 \nabla \mathbf{x} \tilde{\mathbf{E}} \tag{76}$$

A normalização de ***D*** e ***E***, faz com que a Eq. (75), diferentemente da Eq. (69), empregue a permissividade relativa complexa do meio onde,

$$\varepsilon_r^*(\omega) = \varepsilon_r + \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon_0} \tag{77}$$

Quando a propagação dá-se em uma única direção, considera-se o meio como isotrópico e neste caso, a Eq. (63) pode ser posta em função apenas do campo elétrico normalizado $\tilde{\mathbf{E}}$ resultando

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \nabla \times \mathbf{H} = \frac{c_0}{\varepsilon_r} \nabla \times \mathbf{H} \tag{78}$$

A expressão acima em conjunto com a Eq. (76) também satisfaz aos preceitos básicos das equações de Maxwell e torna possível uma simulação unidimensional de ondas eletromagnéticas num meio isotrópico.

Por uma questão de conveniência, o restante do texto tratará as grandezas de campo e densidade de fluxo elétricos sob a forma normalizada, referindo-se aos vetores normalizados simplesmente por ***D*** e ***E***.

5.4. Equações Normalizadas para Uma Direção

Para uma propagação eletromagnética unidirecional na direção do eixo *Y*, num meio isotrópico, considerando o campo elétrico polarizado no sentido positivo do eixo *Z* e o campo magnético no sentido positivo de *X*, as Eqs. (78) e (76) se reduzem à forma escalar abaixo, segundo um modo Transverso Eletromagnético (TEM):

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = -\frac{c_0}{\varepsilon_r}\frac{\partial H_x}{\partial y} \tag{79}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = -c_0\frac{\partial E_z}{\partial y} \tag{80}$$

5.5. Equações Normalizadas para Duas Direções

De acordo com Kunz & Luebbers [6], Sullivan [14] e Taflove [15], as ondas eletromagnéticas também podem ser representadas por uma das duas maneiras a seguir:

- no modo Transverso Elétrico (TE) com duas coordenadas E_x e E_y para o campo elétrico e uma coordenada H_z para o campo magnético;
- no modo Transverso Magnético (TM) com duas coordenadas H_x e H_y para o campo magnético e uma coordenada E_z para o campo elétrico.

Adotando-se o modo Transverso Magnético (TM), pode-se observar a propagação do campo elétrico ortogonalmente ao plano *xy* de grande interesse neste estudo. O problema no modo TM, considerando os valores normalizados para D_z e E_z, após simplificações das Eqs. (74), (75) e (76), passa a ser equacionado na forma escalar que segue:



$$\frac{\partial D_z}{\partial t} c_0 \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \tag{81}$$

$$D_z(\omega) = \varepsilon_r^*(\omega).E_z(\omega) \tag{82}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = -c_0 \frac{\partial E_z}{\partial y} \tag{83}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = c_0 \frac{\partial E_z}{\partial x} \tag{84}$$

5.6. Diferenças Finitas no Domínio do Tempo

Na aplicação do FDTD, as derivadas temporais e espaciais são transformadas em diferenças algébricas onde os campos elétricos e magnéticos são obtidos de uma maneira intercalada tanto no espaço como no tempo. Faz-se necessário utilizar uma notação conveniente, que identifique cada variável simultaneamente no tempo e no espaço.

Os campos serão representados por vetores indexados para cada célula e identificados simultaneamente no tempo e no espaço por uma notação conveniente com dois índices; um superior exprimindo o tempo e outro inferior indicando a componente vetorial. Na Fig. 7, a componente E_z no instante $t = n.\Delta t$ na célula $z = k.\Delta z$ é denotada por

- $E_z^n(k)$

5.6.1. Diferenças Finitas – modo TEM

Na Fig. 7, os campos elétrico e magnético são exibidos conjuntamente intercalados no espaço e no tempo, onde a interação entre eles faz com que o valor de um determinado campo (elétrico ou magnético) seja obtido com o auxílio dos valores vizinhos do outro campo (magnético ou elétrico) e vice-versa, de acordo com Kunz & Luebbers [6], Gonçalves Jr. *et al.* [7], Sullivan [14] e Taflove [15], em coerência com as equações diferenciais de Maxwell.

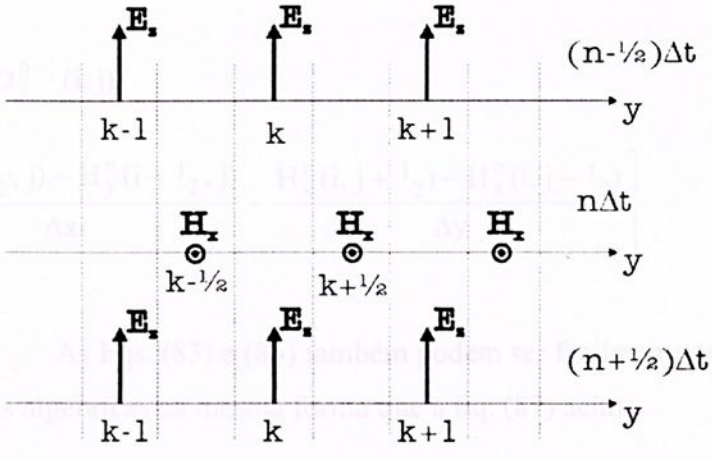


Figura 7 – Campos elétrico e magnético intercalados no espaço e no tempo.

Pela Fig. 7 e pela teoria de Maxwell, segundo as Eqs. (79) e (80), por diferenças finitas tem-se:

$$\frac{E_z^{n+\frac{1}{2}}(k) - E_z^{n-\frac{1}{2}}(k)}{\Delta t} = -\frac{c_0}{\varepsilon_r}\frac{H_x^n(k+\frac{1}{2}) - H_x^n(k-\frac{1}{2})}{\Delta y} \tag{85}$$

$$\frac{H_x^{n+1}(k+\frac{1}{2}) - H_x^{n-1}(k+\frac{1}{2})}{\Delta t} = -c_0\frac{E_z^{n+\frac{1}{2}}(k+1) - E_z^{n+\frac{1}{2}}(k)}{\Delta y}. \tag{86}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

5.6.2. Diferenças finitas – modo TM

Analogamente, para uma propagação eletromagnética num plano, os campos são armazenados em matrizes indexadas para cada célula e com uma notação conveniente identificando as variáveis simultaneamente no tempo e no plano conforme mostra a Fig. 8, considerando-se o modo TM (H_x, H_y e E_z).

As Eqs. (81), (83) e (84), representam as equações diferenciais e escalares de Maxwell para o caso de duas dimensões no modo TM. A derivada temporal de D_z que se relaciona com as derivadas espaciais de H_x e H_y na Eq. (81), dá lugar à Eq. (87) abaixo, como segue:

$$\frac{D_z^{n+\frac{1}{2}}(i,j) - D_z^{n-\frac{1}{2}}(i,j)}{\Delta t} = c_0\left[\frac{H_y^n(i+\frac{1}{2},j) - H_y^n(i-\frac{1}{2},j)}{\Delta x} - \frac{H_x^n(i,j+\frac{1}{2}) - H_x^n(i,j-\frac{1}{2})}{\Delta y}\right] \quad (87)$$

As Eqs. (83) e (84) também podem ser facilmente transformadas em expressões algébricas na mesma forma que a Eq. (87) acima.

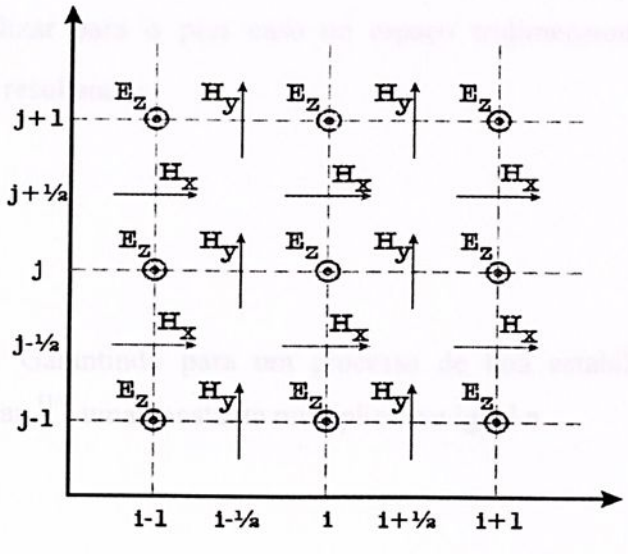


Figura 8 – Componentes do modo *TM* (H_x, H_y e E_z) intercalados no espaço.

5.7. Critérios para Estabilidade Numérica

Não se pode deixar de considerar situações de instabilidades devido ao passo de tempo Δt e às dimensões Δx, Δy e Δz de uma célula, segundo o problema a ser estudado. Para uma célula cúbica, a dimensão igual das três arestas, Δx é a única a ser considerada.

Quanto à dimensão a ser adotada em uma das direções, experiências apontam um valor de *10* pontos ou células por comprimento de onda ou ainda, $\Delta x = \lambda/10$, conforme considerações de Sullivan [14] e Taflove [15].

O passo de tempo constitui-se num requisito de suma importância, uma vez que uma onda eletromagnética no vácuo não se propaga mais rápido que a luz e pode viajar diagonalmente às células no plano ou no espaço. A aplicação do critério de estabilidade de Courant, segundo Kunz & Luebbers [6], Taflove [15] e Remis[16] , estabelece que segundo uma dimensão n:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x / \sqrt{n}}{c_0} \tag{88}$$

Sendo $n = 2$ para o plano e $n = 3$ para o espaço tridimensional, pode-se generalizar para o pior caso no espaço tridimensional $n = 3$, onde $\sqrt{3} \cong 1{,}732 \cong 2$, resultando:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{2c_0} \tag{89}$$

Garantindo para um processo de boa estabilidade numérica, conforme Sullivan [14] uma constante multiplicativa igual a

$$\frac{c_0 \Delta t}{\Delta x} = \frac{1}{2} \tag{90}$$

5.8. Determinação Algébrica dos Campos Eletromagnéticos

Aplicando-se os critérios de estabilidade explanados acima, o modo TEM fundamentado nas Eqs. (79) e (80) produz as expressões

$$E_z^{n+\frac{1}{2}}(k) = E_z^{n-\frac{1}{2}}(k) - \frac{1}{2\varepsilon_r}\left[H_x^n(k+\tfrac{1}{2}) - H_x^n(k-\tfrac{1}{2})\right] \tag{91}$$

$$H_x^{n+1}(k+\tfrac{1}{2}) = H_x^{n-1}(k+\tfrac{1}{2}) - \frac{1}{2}\left[E_z^{n+1/2}(k+1) - E_z^{n+1/2}(k)\right]. \tag{92}$$

As expressões para o modo TM, aplicando-se as Eqs. (81), (82) e (84) aliadas aos critérios de estabilidade, tornam-se:

$$D_z^{n+\frac{1}{2}}(i,j) = D_z^{n-\frac{1}{2}}(i,j) + \frac{1}{2}\left[H_y^n(i+\tfrac{1}{2},j) - H_y^n(i-\tfrac{1}{2},j) - H_x^n(i,j+\tfrac{1}{2}) + H_x^n(i,j-\tfrac{1}{2})\right] \tag{93}$$

$$H_x^{n+1}(i,j+\tfrac{1}{2}) = H_x^n(i,j+\tfrac{1}{2}) - \frac{1}{2}\left[E_z^{n+\frac{1}{2}}(i,j+1) - E_z^{n+\frac{1}{2}}(i,j)\right] \tag{94}$$

$$H_y^{n+1}(i+\tfrac{1}{2},j) = H_y^n(i+\tfrac{1}{2},j) + \frac{1}{2}\left[E_z^{n+\frac{1}{2}}(i+1,j) - E_z^{n+\frac{1}{2}}(i,j)\right] \tag{95}$$

Também no domínio da freqüência a Eq. (82) produz

$$D_z(\omega) = \varepsilon_r E_z(\omega) + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{1}{j\omega}E_z(\omega) \tag{96}$$

O termo $1/j\omega$ corresponde à integração no domínio do tempo e $D_z(\omega)$ é substituído por $D_z(t)$ podendo-se escrever:

$$D_z(t) = \varepsilon_r E_z(t) + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_0^t E_z(u).du \tag{97}$$

No domínio discreto do tempo, isto é, em *n* unidades amostradas de tempo Δt tem-se:

$$D_z^n = \varepsilon_r E_z^n + \frac{\sigma \Delta t}{\varepsilon_0}\sum_{i=0}^{n} E_z^i \tag{98}$$

Desmembrando a somatória acima, separando-se o termo que contem E_z^n, a integral amostral torna-se:

$$I_z^n = \frac{\sigma \Delta t}{\varepsilon_0}\sum_{i=0}^{n-1} E_z^i + \frac{\sigma \Delta t}{\varepsilon_0} E_z^n = I_z^{n-1} + \frac{\sigma \Delta t}{\varepsilon_0} E_z^n \tag{99}$$

A componente E_z^n pode ser resolvida em função de D_z^n e dos E_z^i (i=0 , 1 , 2 , ... , n-1) anteriormente obtidos e acumulados. Pelas Eqs. (81) e (87), foi possível obter a expressão recursiva da Eq. (93), que por sua vez aplicada à Eq. (98) permite que:

$$D_z^n = \varepsilon_r E_z^n + I_z^{n-1} + \frac{\sigma \Delta t}{\varepsilon_0} E_z^n \tag{100}$$

O campo elétrico é obtido pela Eq. (100) acima, resultando:

$$E_z^n = \frac{D_z^n - I_z^{n-1}}{\varepsilon_r + \sigma \Delta t / \varepsilon_0} \tag{101}$$

5.9. Condições de Fronteiras Absorventes

A imposição de que os campos elétrico e magnético estejam intercalados, faz com que em algumas fronteiras o valor do campo elétrico permaneça igual a zero, equivalendo fisicamente a uma parede metálica, sendo, portanto objeto de reflexão da onda eletromagnética. Assim sendo, as limitações computacionais e a própria estrutura do método numérico fazem com que a propagação das ondas eletromagnéticas sofra reflexões quando atingirem as fronteiras no espaço do problema. Para impedir que as ondas sejam refletidas de volta ao local de origem, são admitidas Condições de Fronteiras Absorventes, fazendo com que as ondas sejam absorvidas ao ultrapassarem os limites estabelecidos.

Um método bastante conhecido consiste na imposição de uma Camada Perfeitamente Casada ou *Perfectly Matched Layer* (PML) conforme Berenger [17,18]. Abarbanel & Gottlieb [19] e Collino & Monk [20], que promove uma condutividade gradativamente crescente fazendo com que a onda seja absorvida por esta camada antes de alcançar os limites das fronteiras reflexivas. A determinação matemática das condutividades fictícias que propiciam a absorção da onda por esta camada, encontra-se baseada no cálculo do coeficiente de reflexão de uma onda eletromagnética quando esta atinge uma interface entre dois meios. O desenvolvimento matemático conduz no entanto a uma solução de variáveis dependentes umas das outras, pautadas também em processos empíricos.

Outra forma de contornar as reflexões nas fronteiras, consiste em se fazer matematicamente estes limites ficarem estendidos ao infinito. Por um artifício matemático, conforme Sullivan [14] e Mur [21], o campo incidente pode ser considerado como absorvido nas fronteiras do problema quando os seus valores nas fronteiras forem substituídos pelos valores correspondentes às células vizinhas, obtidos em instante anterior no momento em que a frente de onda inicia a travessia destas células limítrofes. Assim sendo, os valores das células adjacentes às fronteiras são armazenados nas células da fronteira, fazendo

propagar a onda como se os limites do problema deixassem de existir, estendendo os limites das fronteiras ao infinito.

O princípio destas condições, baseia-se no fato de que, por exemplo, no vácuo, uma onda eletromagnética propaga-se a uma velocidade c_0 e dentro de uma célula, a onda percorre uma distância $c_0\,\Delta t$ onde $\Delta t = \Delta x / (2\,c_0)$ obtido na Eq. (89), permitindo estabelecer que

$$c_0 \Delta t = c_0 \frac{\Delta x / 2}{c_0} \Rightarrow \Delta x = c_0 (2\Delta t) \tag{102}$$

Conclui-se que no vácuo, a onda eletromagnética leva dois passos de tempo para cruzar uma célula em uma direção. Analisando a propagação numa direção Z, em KE células, conclui-se que o valor do campo em cada célula da fronteira no instante atual (n) é igual ao valor do campo na célula vizinha obtido 2 passos de tempo anteriores (n–2), ou seja:

$$E_z^n(1) = E_z^{n-2}(2) \tag{103}$$

$$E_z^n(KE) = E_z^{n-2}(KE-1) \tag{104}$$

Para a implementação das condições de fronteiras absorventes no vácuo, evitando reflexões, basta que se armazene por duas vezes consecutivas o valor das variáveis das células vizinhas das fronteiras através de variáveis auxiliares.

Para o caso bidirecional, considerando um plano matricial de ordem IE colunas x JE linhas, os valores de fronteira são tratados por vetores-linha superior (*ez_s*) e inferior (*ez_i*) de ordem 1 x IE e vetores-coluna à esquerda (*ez_e*) e à direita (*ez_d*) de ordem JE x 1, que superpostos à vizinhança da fronteira matricial, armazenam os valores dos campos vizinhos, 2 passos de tempo anteriores. Em outras palavras, os valores não nulos contidos nas células vizinhas

das fronteiras são armazenados em vetores linha e coluna que dois passos de tempo posteriores, serão atribuídos às células das fronteiras, impedindo as reflexões não desejadas pela simulação, fazendo com que tudo se passe como se os limites impostos pelos recursos computacionais não existissem. As ilustrações da Fig. 9 a seguir, dão uma visão de como este artifício pode ser computacionalmente implementado.

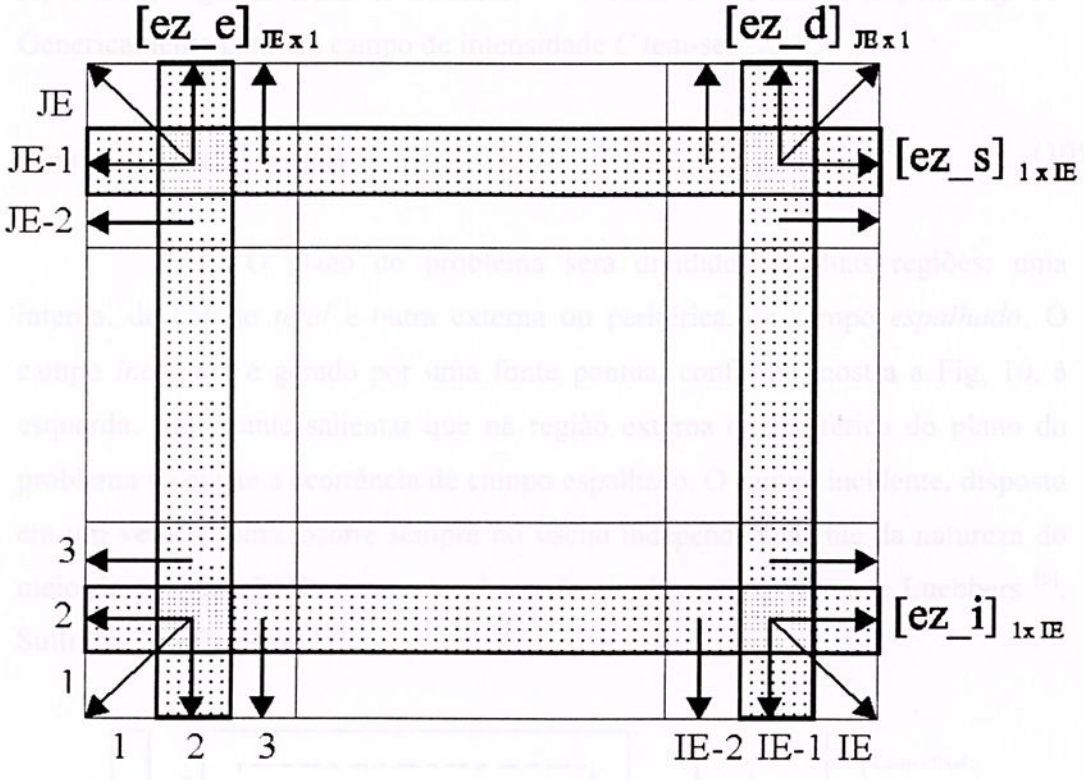


Figura 9 – Condições de fronteiras absorventes no plano.

A forma geral que determina a velocidade de propagação de uma onda eletromagnética num meio qualquer, conforme a Eq. (54), pode ser aplicada arredondando-se o termo ($2\sqrt{\varepsilon_r}$) para se determinar o número de passos de tempo que a onda leva para cruzar uma célula num dado meio em questão com uma velocidade *c* de propagação.

5.10. Simulação de uma Onda Plana em Duas Dimensões

Em duas dimensões, uma onda plana é simulada pela propagação de um pulso unidirecional incidente na direção *Y*, que se espalha na direção normal ao plano do problema, propagando-se de modo uniforme. O campo total que se forma é obtido pela superposição dos campos *incidente* e *espalhado*, segundo Kunz & Luebbers [6] e Taflove [15], mostrado pela Fig. 10. Genericamente para um campo de intensidade *C* tem-se:

$$C_{total} = C_{incidente} + C_{espalhado} \tag{105}$$

O plano do problema será dividido em duas regiões: uma interna, de campo *total* e outra externa ou periférica, de campo *espalhado*. O campo *incidente* é gerado por uma fonte pontual conforme mostra a Fig. 10. à esquerda. Importante salientar que na região externa ou periférica do plano do problema só existe a ocorrência de campo espalhado. O campo incidente, disposto em um vetor-coluna, ocorre sempre no vácuo independentemente da natureza do meio de propagação do campo total, conforme descrevem Kunz & Luebbers [6], Sullivan [14] e Taflove [15].

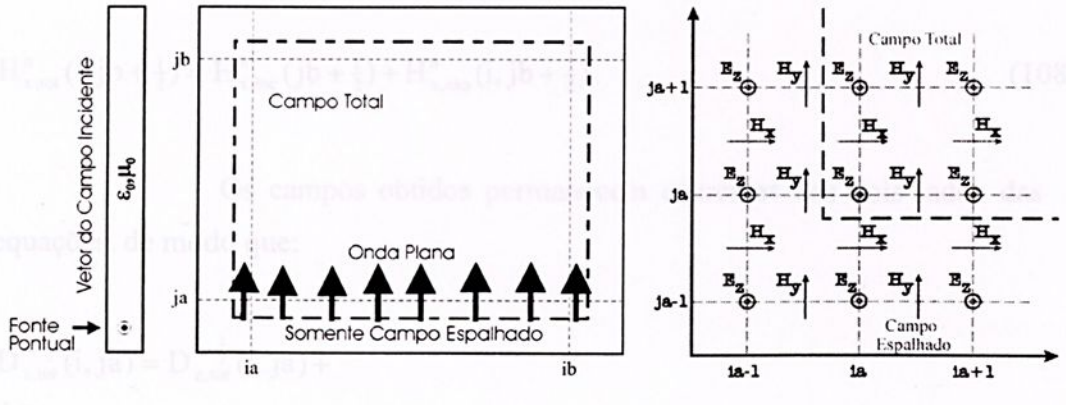


Figura 10 – Campos incidente, espalhado e total e a geração da onda plana.

O campo total passa a ser identificado no índice inferior por *tot*, o incidente por *inc* e o espalhado por *esp*.

Um vetor na direção *y* armazena os campos incidentes cujos efeitos, superpostos aos dos campos espalhados, resultam na propagação dos campos eletromagnéticos da onda plana pela região do *campo total* no sentido de *ja* para *jb*, ou seja, de baixo para cima, observando-se a Fig. 10. A atualização de um ponto pertencente ao *campo total* que utiliza pontos envolvidos fora dele e vice-versa, isto é, valores comprometidos entre as regiões interna e externa, devem sofrer modificações no cálculo das derivadas espaciais.

D_z em $j = ja$ ou $j = jb$, na região interna, de campo total, que utilizam pontos do campo espalhado,

$$D_{z,tot}^{n+\frac{1}{2}}(i,j) = D_{z,tot}^{n-\frac{1}{2}}(i,j) + \frac{1}{2}\left[H_{y,tot}^{n}(i+\tfrac{1}{2},j) - H_{y,tot}^{n}(i-\tfrac{1}{2},j) - H_{x,tot}^{n}(i,j+\tfrac{1}{2}) + H_{x,tot}^{n}(i,j-\tfrac{1}{2})\right] \quad (106)$$

Em *ja - 1/2* e *jb + 1/2*, as equações deverão conter os valores do campo espalhado e incidente representando o campo total conforme segue:

$$H_{x,tot}^{n}(i,ja-\tfrac{1}{2}) = H_{x,inc}^{n}(ja-\tfrac{1}{2}) + H_{x,esp}^{n}(i,ja-\tfrac{1}{2}) \quad (107)$$

$$H_{x,tot}^{n}(i,jb+\tfrac{1}{2}) = H_{x,inc}^{n}(jb+\tfrac{1}{2}) + H_{x,esp}^{n}(i,jb+\tfrac{1}{2}) \quad (108)$$

Os campos obtidos permanecem coerentes dos dois lados das equações, de modo que:

$$D_{z,tot}^{n+\frac{1}{2}}(i,ja) = D_{z,tot}^{n-\frac{1}{2}}(i,ja) + \frac{1}{2}\left[H_{y,tot}^{n}(i+\tfrac{1}{2},ja) - H_{y,tot}^{n}(i-\tfrac{1}{2},ja) - H_{x,tot}^{n}(i,ja+\tfrac{1}{2}) + H_{x,esp}^{n}(i,ja-\tfrac{1}{2})\right] + \frac{1}{2}\left[H_{x,inc}^{n}(ja-\tfrac{1}{2})\right] \quad (109)$$

$$D_{z.tot}^{n+\frac{1}{2}}(i, jb) = D_{z.tot}^{n-\frac{1}{2}}(i, jb) +$$
$$\frac{1}{2}\left[H_{y.tot}^{n}(i+\tfrac{1}{2}, jb) - H_{y.tot}^{n}(i-\tfrac{1}{2}, jb) - H_{x.esp}^{n}(i, jb+\tfrac{1}{2}) + H_{x.tot}^{n}(i, jb-\tfrac{1}{2})\right] - \quad (110)$$
$$\frac{1}{2}\left[H_{x.inc}^{n}(jb+\tfrac{1}{2})\right]$$

Observa-se uma correção aos valores obtidos anteriormente no cálculo do campo total bidimensional, segundo as Eqs. (94) e (95). Analogamente para H_x em pontos imediatamente externos ao intervalo entre *ja* e *jb* e para H_y em pontos imediatamente externos ao intervalo entre *ia* e *ib*, na região de campo espalhado que utilizam pontos do campo total:

$$H_{x.esp}^{n+1}(i, ja-\tfrac{1}{2}) = H_{x.esp}^{n}(i, ja-\tfrac{1}{2}) - \frac{1}{2}\left[E_{z.tot}^{n+\frac{1}{2}}(i, ja) - E_{z.esp}^{n+\frac{1}{2}}(i, ja-1)\right] + \frac{1}{2}\left[E_{z.inc}^{n+\frac{1}{2}}(ja)\right] \quad (111)$$

$$H_{x.esp}^{n+1}(i, jb+\tfrac{1}{2}) = H_{x.esp}^{n}(i, jb+\tfrac{1}{2}) - \frac{1}{2}\left[E_{z.esp}^{n+\frac{1}{2}}(i, jb+1) - E_{z.tot}^{n+\frac{1}{2}}(i, jb)\right] - \frac{1}{2}\left[E_{z.inc}^{n+\frac{1}{2}}(jb)\right] \quad (112)$$

$$H_{y.esp}^{n+1}(ia-\tfrac{1}{2}, j) = H_{y.esp}^{n}(ia-\tfrac{1}{2}, j) + \frac{1}{2}\left[E_{z.tot}^{n+\frac{1}{2}}(ia, j) - E_{z.esp}^{n+\frac{1}{2}}(ia-1, j)\right] - \frac{1}{2}\left[E_{z.inc}^{n+\frac{1}{2}}(j)\right] \quad (113)$$

$$H_{y.esp}^{n+1}(ib+\tfrac{1}{2}, j) = H_{y.esp}^{n}(ib+\tfrac{1}{2}, j) + \frac{1}{2}\left[E_{z.esp}^{n+\frac{1}{2}}(ib+1, j) - E_{z.tot}^{n+\frac{1}{2}}(ib, j)\right] + \frac{1}{2}\left[E_{z.inc}^{n+\frac{1}{2}}(j)\right] \quad (114)$$

Se o campo está na região de campo total, o resultado tem que ser obtido com valores totais e se o campo estiver na região de campo espalhado, o resultado será obtido com valores de campos espalhados. Os campos incidentes unidirecionais são calculados pelas Eqs. (91) e (92).

6. *IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL*

Os estudos que motivaram o desenvolvimento deste trabalho são resultados das análises sobre o comportamento ondulatório em uma série de exemplos, inicialmente simples, ao qual foram incrementadas novas condições e adicionadas conseqüentes verificações sobre as condições de estabilidade, absorção da onda na fronteira, características do meio de propagação, tipos de fontes de excitação, agregando alternativas que foram implementadas e utilizadas nos estudos do problema final. Partindo dos fundamentos do eletromagnetismo, as equações diferenciais de Maxwell foram tomadas de forma numérica pela aplicação direta do método *FDTD*, inicialmente em exemplos em uma direção e depois estendidos aos casos bidirecionais, sendo possível observar a propagação de uma onda plana eletromagnética incidindo em um meio dielétrico pouco dissipativo, com a observação da reflexão e da refração da onda, acompanhada da mudança das propriedades ondulatórias, isto é, a amplitude, a velocidade e o comprimento de onda, com a freqüência mantida invariante.

6.1. Algoritmo básico

Como já visto, o campo elétrico e o magnético devem estar intercalados no tempo e no espaço, para que o *FDTD* seja aplicado. Sob o ponto de vista computacional, basta que um dos campos, elétrico ou magnético, esteja adiantado no espaço de uma célula em relação ao outro, sendo calculado utilizando os valores vizinhos do outro campo, porém dentro do mesmo passo ou laço de tempo. O tempo é implícito no método, porém o espaço, explícito, tem as subdivisões celulares representadas por índices inteiros, que dentro de um tratamento matricial, facilitam o cálculo dos campos eletromagnéticos. O esquema básico para a simulação dos campos encontra-se demonstrado no fluxograma da Fig. 11 e orienta a ordenação dos códigos que são utilizados nos programas de modelagens e simulações.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

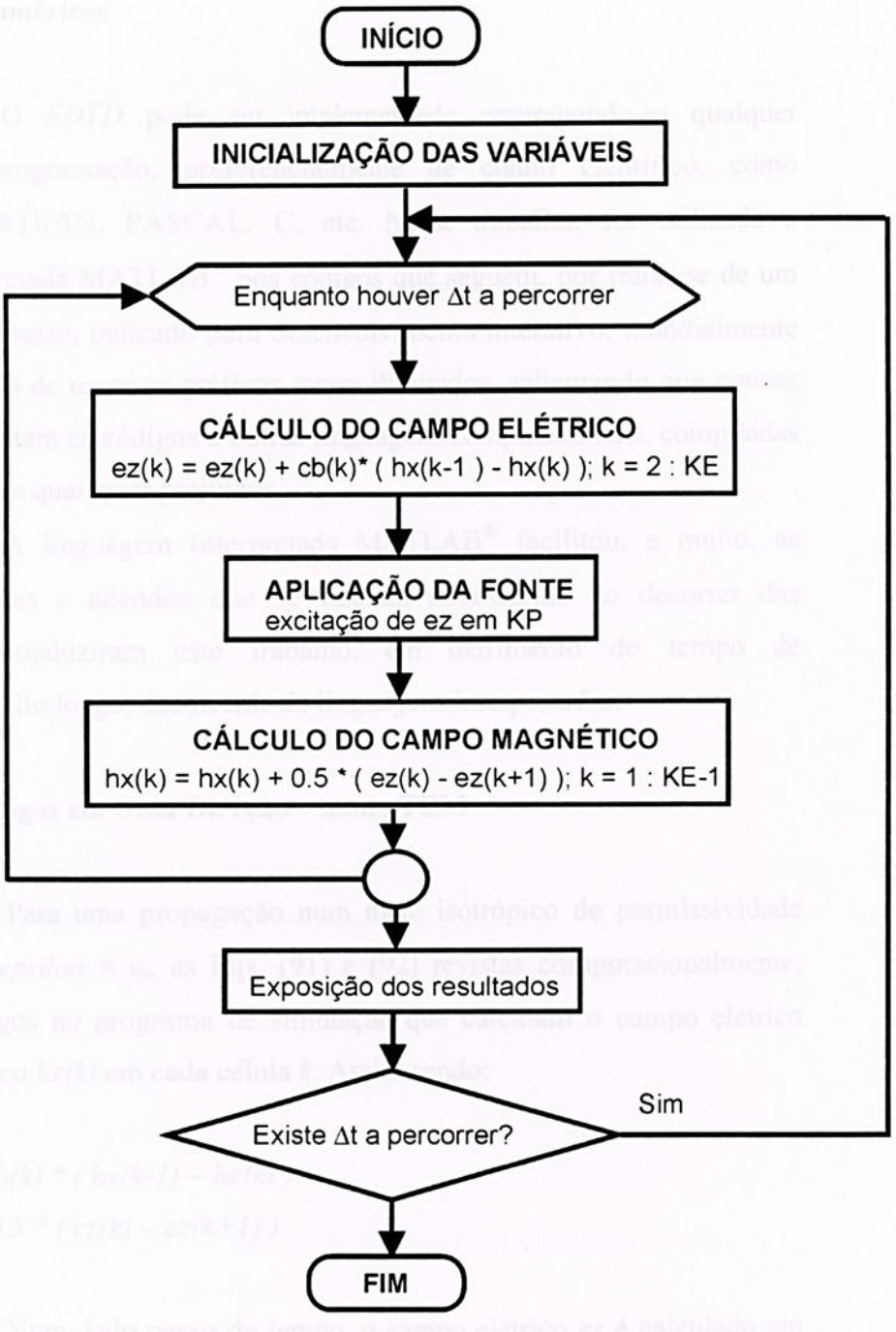


Figura 11 – Fluxograma básico para o Método *FDTD*, modo *TEM*

6.2. Códigos Numéricos

O *FDTD* pode ser implementado empregando-se qualquer linguagem de programação, preferencialmente de cunho científico, como MATLAB®, FORTRAN, PASCAL, C, etc. Neste trabalho, foi utilizada a linguagem interpretada MATLAB® nos códigos que seguem, por tratar-se de um sistema aberto, robusto, indicado para desenvolvimento interativo, mundialmente utilizado e provido de recursos gráficos quase ilimitados, salientando que poucas modificações adaptam os códigos a outras linguagens computacionais, compiladas e mais rápidas, sem quaisquer prejuízos.

A linguagem interpretada MATLAB® facilitou, e muito, as eventuais correções e adendos que se fizeram necessários no decorrer das pesquisas que conduziram este trabalho, em detrimento do tempo de processamento muito longo, decorrente de linguagens interpretadas.

6.2.1. Códigos em Uma Direção – modo TEM

Para uma propagação num meio isotrópico de permissividade elétrica relativa *epsilon* = ε_r, as Eqs. (91) e (92) revistas computacionalmente, definem os códigos no programa de simulação que calculam o campo elétrico *ez(k)* e o magnético *hx(k)* em cada célula *k*. Assim sendo:

```
ez(k) = ez(k) + cb(k) * ( hx(k-1) – hx(k) )
hx(k) = hx(k) + 0.5 * ( ez(k) – ez(k+1) )
```

Num dado passo de tempo, o campo elétrico *ez* é calculado em função do campo magnético *hx* obtido no passo de tempo anterior. Em seguida, a célula *KP* é excitada por uma fonte de campo elétrico. Por sua vez o campo magnético utiliza os valores obtidos e atualizados do campo elétrico *ez* neste mesmo laço (passo) de tempo. Os campos determinados em cada célula, são calculados para cada vetor *ex* e *hy* separadamente para *k* variando de 2 a *KE* e de 1

a *KE-1* respectivamente, respeitando a disposição intercalada entre os campos elétrico e magnético, necessárias para o método FDTD. A variável indexada *cb(k)*, definida igual a 0.5 para o vácuo, é modificada para 0,5/*epsilon* nas células em que o meio dielétrico, diferente do vácuo, foi especificado.

6.2.2. Códigos em Duas Direções – modo TM

Os códigos usados na programação bidimensional, considerando o modo *TM*, são obtidos na seqüência a partir das Eqs. (93), (101) e (99) para o campo elétrico em função da densidade de fluxo elétrico e da constante dielétrica na direção do eixo *Z*. Assim,

```
dz(i,j) = dz(i,j) + 0.5 * ( hy(i,j) – hy(i-1,j) – hx(i,j) + hx(i,j-1) )
ez(i,j) = ga(i,j) * ( dz(i,j) – iz(i,j) )
iz(i,j) = iz(i,j) + gb(i,j) * ez(i,j)
```

As variáveis indexadas *ga(i,j)* e *gb(i,j)*, são definidas respectivamente iguais a 1 e 0 para o vácuo. Para um meio de condutividade σ = *sigma* e permissividade relativa ε_r = *epsilon*, tais valores são atualizados para

```
gb(i,j) = sigma * dt / epsz
ga(i,j) = 1/(epsilon+gb(i,j))
```

dentro de um intervalo discreto de tempo Δt = *dt* estabelecido pelas condições de estabilidade, mencionadas anteriormente.

Da mesma forma as Eqs. (94) e (95) definem os códigos para as componentes do campo magnético segundo as direções *X* e *Y*, resultando:

```
hx(i,j) = hx(i,j) + 0.5 * ( ez(i,j) – ez(i,j+1) )
hy(i,j) = hy(i,j) + 0.5 * ( ez(i+1,j) – ez(i,j) ).
```

6.2.3. Códigos para a onda plana em duas dimensões

Quando a propagação de uma onda plana é simulada, considerando campo incidente e espalhado resultando no campo total, os mesmos códigos bidimensionais são empregados, acrescentando-se a correção dos campos segundo se encontrem na região de campo total ou espalhado. Em cada passo de tempo, isto é, dentro do mesmo laço principal, determinam-se inicialmente os campos incidentes e após a determinação sistemática de cada componente de campo como um todo para o problema, procede-se aos cálculos que corrigem os valores dos campos na divisa entre o campo total e o espalhado no plano do problema.

Para os campos elétrico e magnético no vácuo incidentes na direção do eixo Z e do eixo X respectivamente, conforme as Eqs (91) e (92) tem-se:

```
ez_inc(j) = ez_inc(j) + 0.5*( hx_inc(j-1) - hx_inc(j) ) ;
hx_inc(j) = hx_inc(j) + 0.5*( ez_inc(j) - ez_inc(j+1) ) ;
```

Para o cálculo da densidade de fluxo elétrico na direção do eixo Z a Eq. (93) fornece:

```
dz(i,j) = dz(i,j) + 0.5*( hy(i,j) - hy(i-1,j) - hx(i,j) + hx(i,j-1) );
```

Entre as regiões de campo total e espalhado, a correção incidente da densidade de fluxo elétrico é feita nos moldes das Eqs. (109) e (110) fornecendo:

```
dz(i,ja) = dz(i,ja) + 0.5*hx_inc(ja-1) ;
dz(i,jb) = dz(i,jb) - 0.5*hx_inc(jb) ;
```

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

O campo elétrico da direção do eixo *Z* é determinado pelas Eqs. (101) e (99) resultando:

```
ez(i,j) = ga(i,j) * (dz(i,j) - iz(i,j));
iz(i,j) = iz(i,j) + gb(i,j)*ez(i,j);
```

com *ga(i,j)* e *gb(i,j)*, função de *epsz*, *epsilon*, *sigma* e *dt* conforme os Códigos em Duas Dimensões – modo TM.

Para o cálculo do campo magnético na direção do eixo *X* a Eq. (94) fornece:

```
hx(i,j) = hx(i,j) + 0.5*( ez(i,j) - ez(i,j+1) );
```

Entre as regiões de campo total e espalhado, a correção incidente do campo magnético no eixo *X* é feita nos moldes das Eqs. (111) e (112) fornecendo:

```
hx(i,ja-1) = hx(i,ja-1) + 0.5*ez_inc(ja) ;
hx(i,jb) = hx(i,jb) - 0.5*ez_inc(jb) ;
```

Para o cálculo do campo magnético na direção do eixo *Y* a Eq. (95) fornece:

```
hy(i,j) = hy(i,j) + 0.5*( ez(i+1,j) - ez(i,j) );
```

Entre as regiões de campo total e espalhado, a correção incidente do campo magnético no eixo *Y* é feita nos moldes das Eqs. (113) e (114) resultando:

```
hy(ia-1,j) = hy(ia-1,j) - 0.5*ez_inc(j) ;
hy(ib,j) = hy(ib,j) + 0.5*ez_inc(j) ;
```

O fluxograma da Fig. 12 permite que se determine o campo elétrico e magnético que originam a onda plana eletromagnética em duas dimensões.

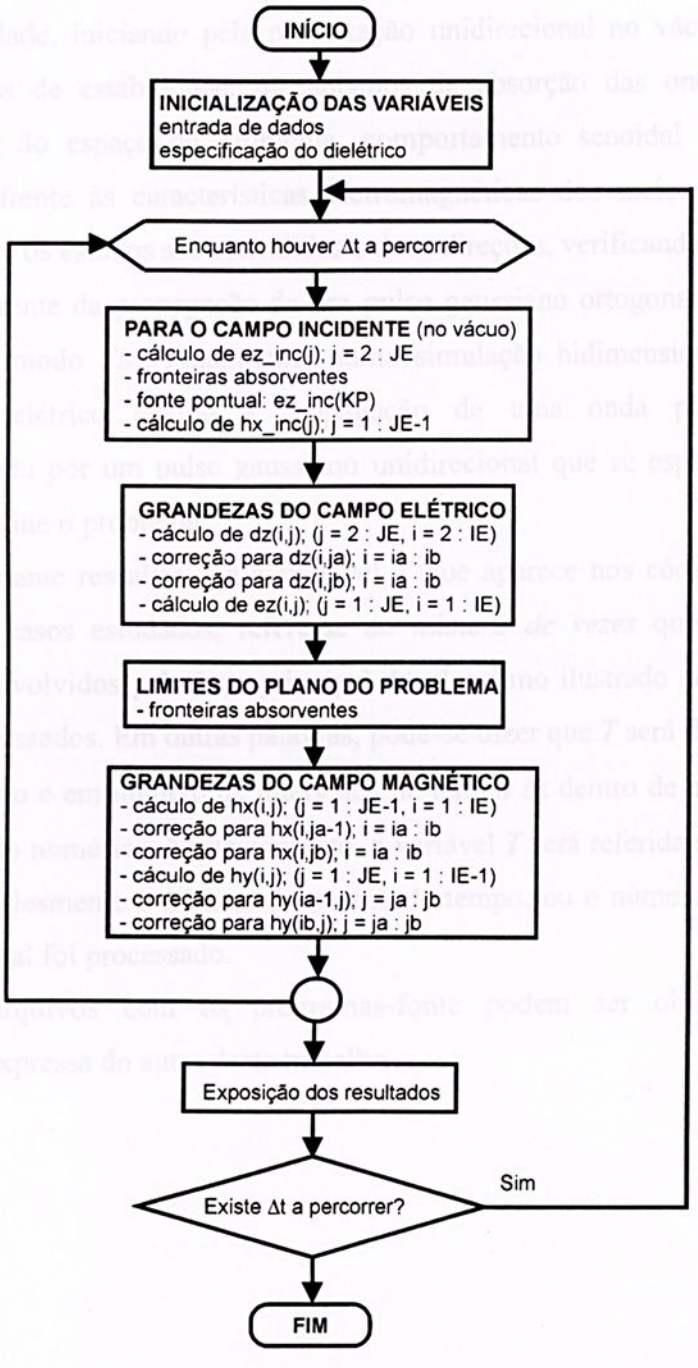


Figura 12 – Fluxograma para cálculo do campo total em *FDTD*

6.3. Estudo de Casos e Verificações

A implementação do método *FDTD* para simulação eletromagnética encontra-se apoiada numa série de estudos de casos com ordem crescente de complexidade, iniciando pela propagação unidirecional no vácuo, adicionando alternativas de estabilidade, mecanismos de absorção das ondas incidentes na fronteira do espaço do problema, comportamento senoidal em função da freqüência frente às características eletromagnéticas dos meios de propagação. Em seguida, os estudos são estendidos a duas direções, verificando-se o campo elétrico decorrente da propagação de um pulso gaussiano ortogonal ao plano do problema no modo *TM*. Finalmente, numa simulação bidimensional, observa-se o campo elétrico devido à propagação de uma onda plana eletromagnética originada por um pulso gaussiano unidirecional que se espalha por todo o plano que define o problema.

Importante ressaltar que a variável T que aparece nos códigos dos programas e nos casos estudados, refere-se ao *número de vezes* que os cálculos dos campos envolvidos pelo laço principal do algoritmo ilustrado pelas Figs. 11 ou 12 são processados. Em outras palavras, pode-se dizer que T será dado em *passos de tempo*, isto é em número de intervalos de tempo Δt dentro de cada laço principal do método numérico. Neste contexto, a variável T será referida sem unidade indicando simplesmente o número de passos de tempo, ou o número de vezes que o laço principal foi processado.

Os arquivos com os programas-fonte podem ser obtidos mediante autorização expressa do autor deste trabalho.



$$P(t) = P_0 e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{t-t_0}{\sigma}\right]^2}$$

6.3.1. Simulação Unidimensional – Pulso Gaussiano em E_z

Um *Pulso Gaussiano* de amplitude unitária dado pela expressão:

p (T) = exp [- 0,5 (T- t_0 / largura)^2] ,

onde t_0 = 40 (instante do primeiro máximo) e *largura* ou *spread* = 12 é aplicado como uma fonte de excitação de campo elétrico, empregando diretamente o campo elétrico *Ex* nas duas equações em rotacional de Maxwell.

Arquivo fdtd1_111.m – Propagação da onda eletromagnética no vácuo – *reflexão* nas fronteiras.

Um pulso gaussiano é gerado no centro do problema e viaja para os dois sentidos, segundo a Eq. (16) de qualquer fenômeno ondulatório, como pode ser visto também pela Fig. 13 à esquerda, após T = 100, isto é, decorridos 100 passos de tempo. Continuando, em T = 230 a onda propaga-se em direção às fronteiras, como mostra a Fig. 13 à direita, sofrendo reflexões com oposição e concordância de fase respectivamente à esquerda e à direita por parte do campo elétrico e com comportamento inverso por parte do campo magnético.

A onda eletromagnética incide nas fronteiras, sofrendo reflexões que interferem no seu comportamento conforme a seqüência da propagação ilustrada pela Fig. 14 em T = 240 e T = 250, à esquerda e direita respectivamente.

Após a reflexão nas fronteiras em T = 440, os pulsos se cruzam novamente, observando-se o fenômeno da interferência destrutiva no campo elétrico e da interferência construtiva no campo magnético, seguindo depois cada onda o seu caminho de acordo com as teorias ondulatórias, registradas e confirmadas em T= 440 e T= 480 pela Fig. 15.

Observe-se a robustez do algoritmo, quando nenhuma fronteira absorvente é estabelecida, sendo que a onda colide com as fronteiras, mas a energia eletromagnética é conservada, sendo verificadas as polaridades dos campos elétrico e magnético que se mantém em conformidade com o sentido do produto vetorial $\boldsymbol{E}$ x $\boldsymbol{H}$ que orienta o resultado do vetor de Poynting, mostrando-se confiável aos resultados obtidos pelas simulações.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

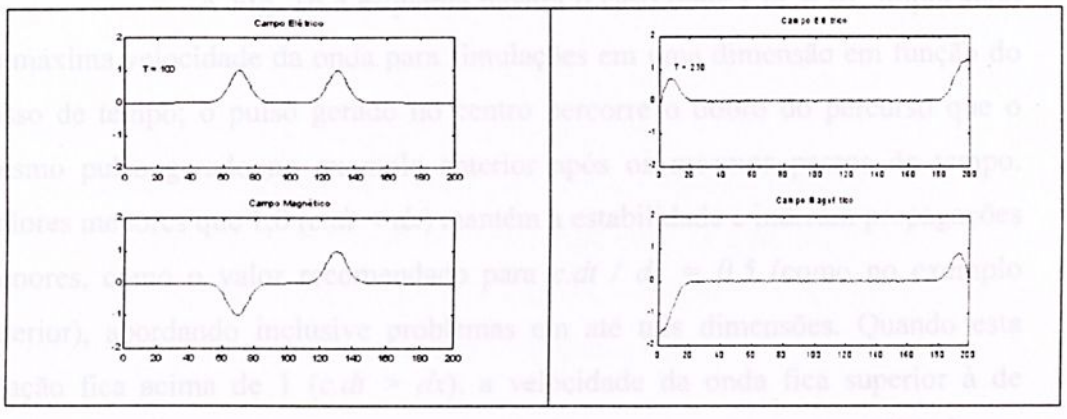


Figura 13 – Pulso gaussiano propagando-se em uma direção no vácuo

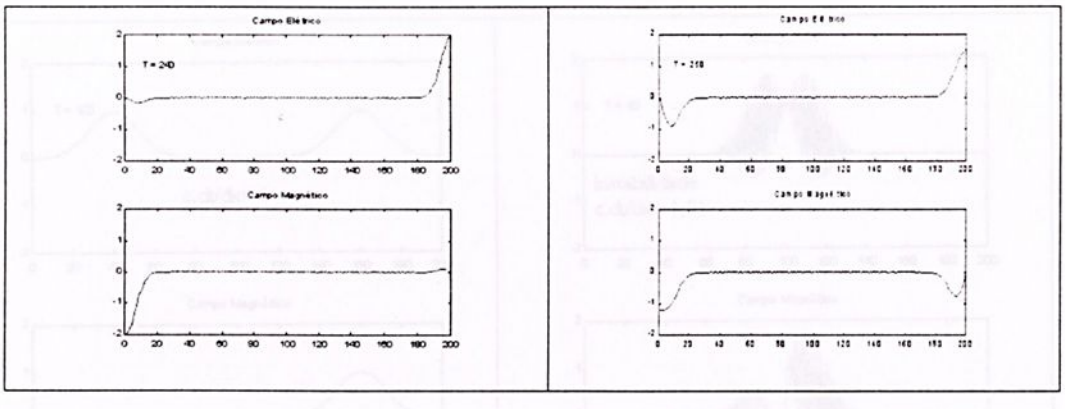


Figura 14 – Pulso gaussiano no vácuo, após reflexão nas fronteiras

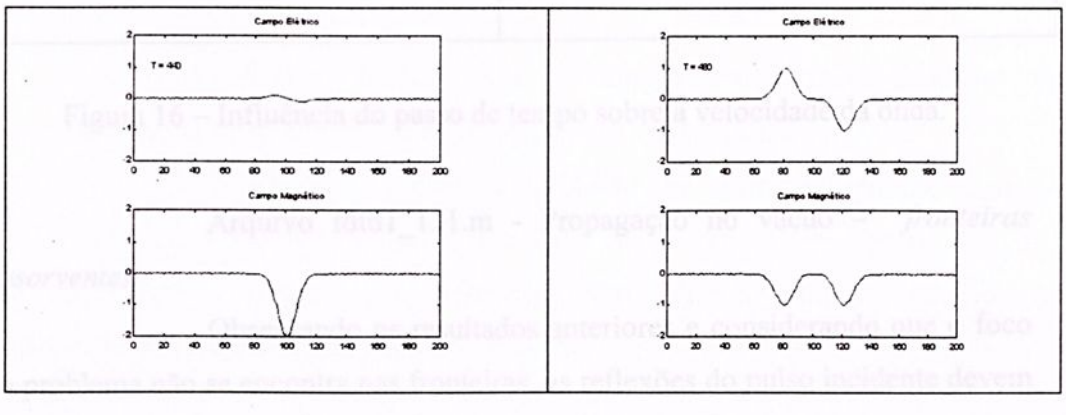


Figura 15 – Interferências dos campos eletromagnéticos refletidos na fronteira.

Arquivo fdtd1_121.m - Propagação no vácuo – *Estabilidade do FDTD.*

A Fig. 16 à esquerda mostra o caso onde $c.dt = dx$, implicando na máxima velocidade da onda para simulações em uma dimensão em função do passo de tempo; o pulso gerado no centro percorre o dobro do percurso que o mesmo pulso gerado no exemplo anterior após os mesmos passos de tempo. Valores menores que 1,0 ($c.dt < dx$) mantém a estabilidade e indicam propagações menores, como o valor recomendado para $c.dt / dx = 0,5$ (como no exemplo anterior), abordando inclusive problemas em até três dimensões. Quando esta relação fica acima de 1 ($c.dt > dx$), a velocidade da onda fica superior à de qualquer onda eletromagnética no vácuo, havendo perda de estabilidade no método, conforme pode ser mostrado pela Fig. 16 à direita.

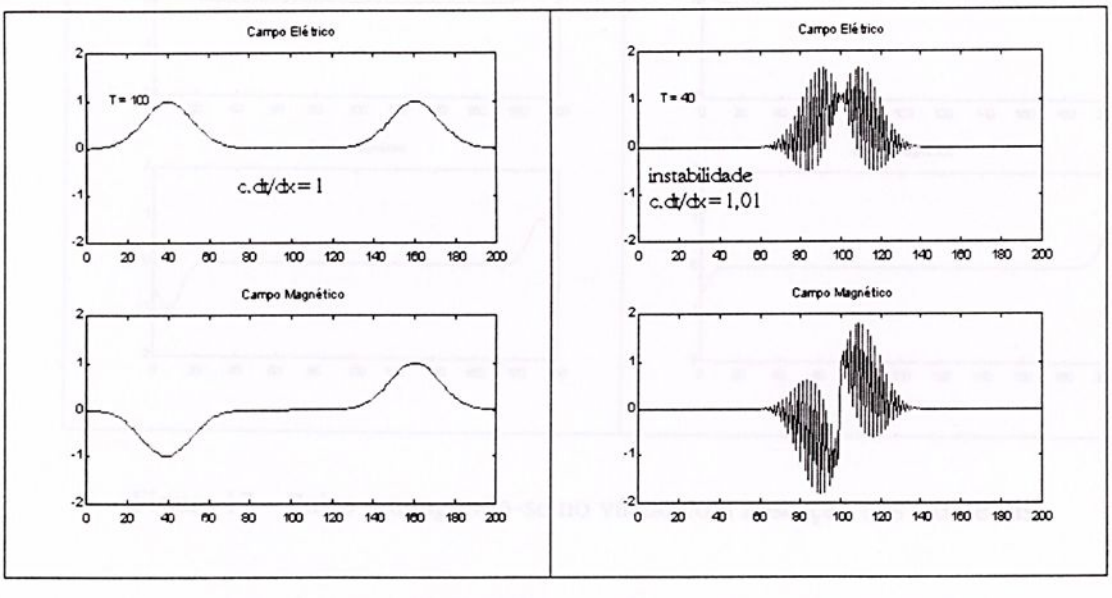


Figura 16 – Influência do passo de tempo sobre a velocidade da onda.

Arquivo fdtd1_131.m - Propagação no vácuo – *fronteiras absorventes*

Observando os resultados anteriores e considerando que o foco do problema não se encontra nas fronteiras, as reflexões do pulso incidente devem

ser trabalhadas, de modo que não venham a gerar interferências, na região objeto de análise do problema. Assim sendo, os pulsos incidentes originados no centro são absorvidos nas fronteiras do problema, através de um artifício matemático que armazena nas células das fronteiras, os valores das células adjacentes obtidos em passo de tempo anterior, como mostra a Fig. 17 em T = 225 e T = 250. Neste caso, os valores dos campos nas fronteiras são atualizados pelos de suas células vizinhas obtidos 2 passos de tempo anteriores, como se a fronteira fosse estendida ao infinito, suprimindo reflexões que, embora coerentes com os princípios físicos, podem mascarar os efeitos esperados nas simulações.

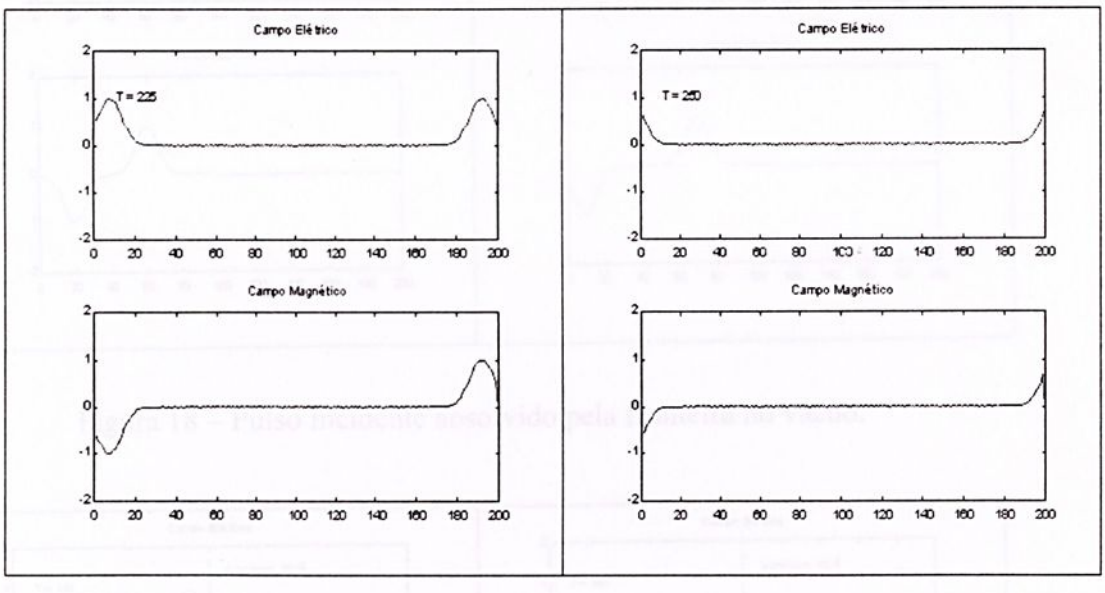


Figura 17 – Pulso propagando-se no vácuo com absorção nas fronteiras.

Arquivo fdtd1_143.m – Propagação num meio dielétrico de permissividade relativa $\varepsilon_r = 4$, com absorção nas duas fronteiras.

O pulso originado na célula 40 que se propaga para a esquerda no vácuo, sofre absorção como é mostrado em T= 80 e T = 100 na Fig. 18, comprovando o mesmo comportamento ondulatório do exemplo anterior ao incidir contra a fronteira no vácuo à esquerda.

O mesmo pulso originado na célula 40 se propaga ainda no vácuo para a direita, incide na interface com o meio dielétrico em T = 140, tendo uma parcela da onda refletida no vácuo e a outra transmitida no dielétrico em T = 180, conforme o exibido na Fig. 19.

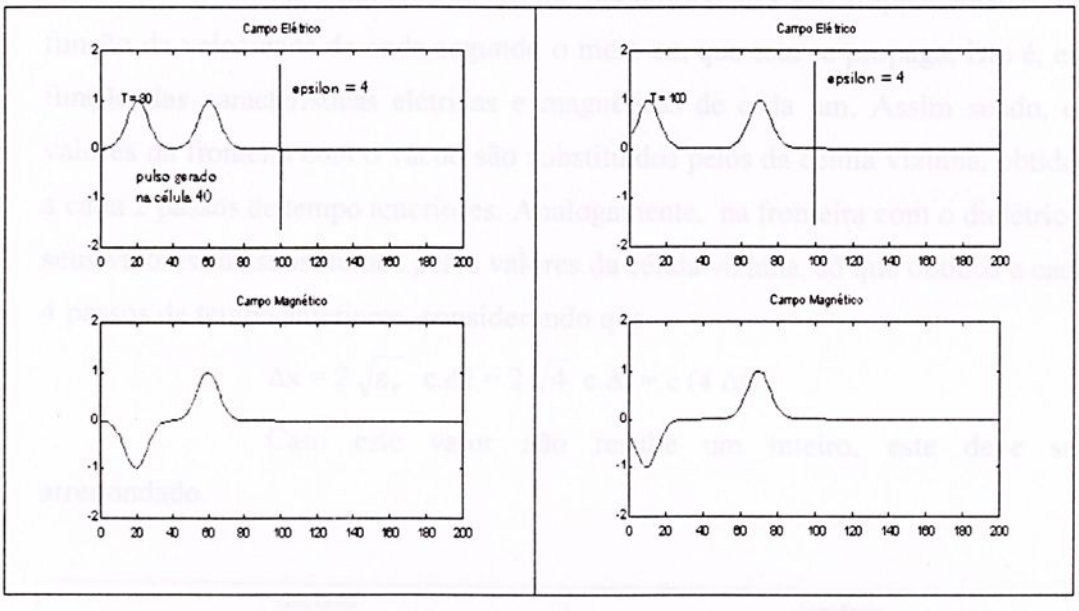


Figura 18 – Pulso incidente absorvido pela fronteira no vácuo.

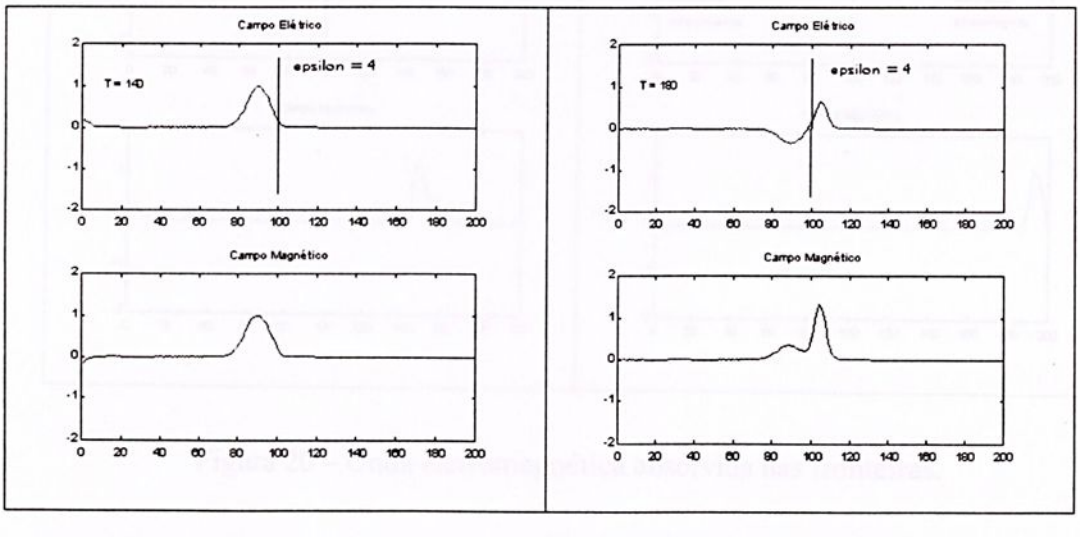


Figura 19 – Incidência, reflexão e transmissão na interface vácuo-dielétrico.

Pela Fig. 20 em T = 360, observa-se a onda refletida sendo absorvida na fronteira do vácuo, enquanto a parte transmitida segue pelo dielétrico com velocidade menor de propagação. Em T = 540, a parcela da onda que foi transmitida ao dielétrico começa a ser absorvida ao incidir na fronteira do meio à direita.

As condições de fronteiras absorventes são implementadas em função da velocidade da onda segundo o meio em que esta se propaga, isto é, em função das características elétricas e magnéticas de cada um. Assim sendo, os valores da fronteira com o vácuo são substituídos pelos da célula vizinha, obtidos a cada 2 passos de tempo anteriores. Analogamente, na fronteira com o dielétrico, seus valores são substituídos pelos valores da célula vizinha, só que obtidos a cada 4 passos de tempo anteriores, considerando que

$$\Delta x = 2\sqrt{\varepsilon_r}\ c.\Delta t = 2\sqrt{4}\ c.\Delta t = c\ (\mathbf{4}\ \Delta t).$$

Caso este valor não resulte um inteiro, este deve ser arredondado.

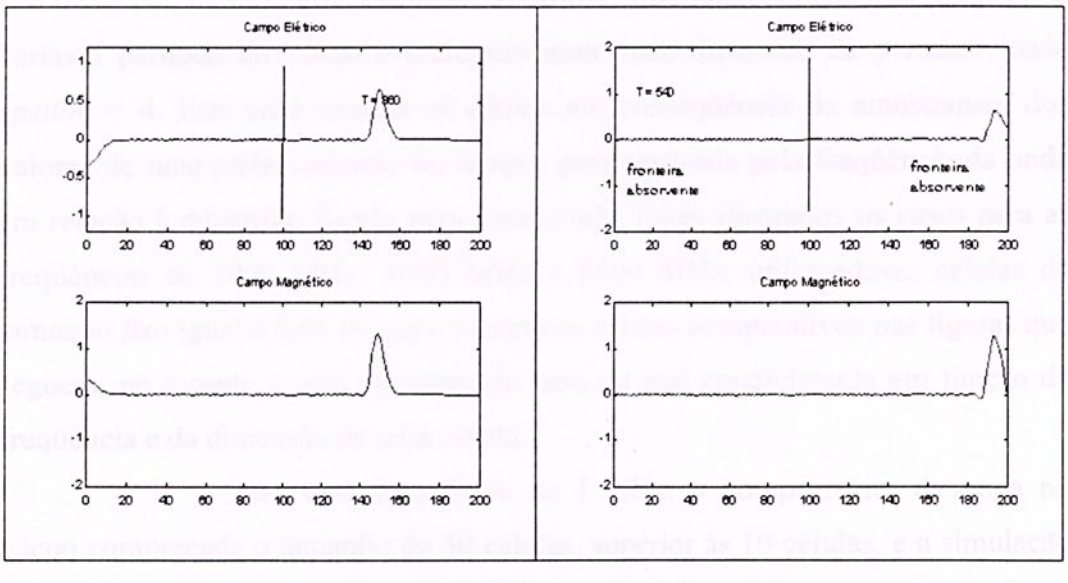


Figura 20 – Onda eletromagnética absorvida nas fronteiras.

6.3.2. Simulação Unidimensional – Senóide em E_z.

Neste caso, observa-se uma onda senoidal de amplitude unitária de campo elétrico cruzando uma interface entre o vácuo e um meio dielétrico, acompanhada de uma redução na sua amplitude e de uma contração no comprimento de onda devido à diminuição da velocidade de propagação. Comprova-se também, que uma amostragem bem distribuída, isto é, bem condicionada, ocorre quando o valor de um comprimento de onda da fonte for abordado por pelo menos 10 células, assegurando que valores intermediários aos máximos e mínimos sejam considerados. Tal feito pode ser conferido variando-se a freqüência da onda gerada pela fonte, estabelecendo-se um valor fixo ao tamanho das células.

Arquivo fdtd1_152.m - Propagação incidente num meio dielétrico

Para este exemplo, utiliza-se uma onda senoidal de freqüência variável partindo do vácuo e incidindo num meio dielétrico de permissividade *epsilon* = 4. Este caso mostra os efeitos em conseqüência da amostragem dos valores de uma onda variando no tempo, parametrizada pela freqüência da onda em relação à dimensão fixada para uma célula. Estão ilustrados os casos para as freqüências de 1000 MHz, 3000 MHz e 5000 MHz, utilizando-se células de tamanho *fixo* igual a 0,01 m, para mostrar os efeitos comparativos nas figuras que seguem, no tocante a uma amostragem bem ou mal condicionada em função da freqüência e da dimensão de uma célula.

Para uma freqüência de 1 GHz, o comprimento de onda no vácuo compreende o tamanho de 30 células, superior às 10 células, e a simulação comporta-se dentro do esperado, conforme pode ser visto à esquerda na Fig. 21.

Aumentando-se a freqüência da onda para 3 GHz, valor este cujo comprimento de onda no vácuo pode ser contido em 10 células, observa-se o limiar do condicionamento amostrado dos valores variando no tempo, conforme os registros obtidos na Fig. 21 à direita.

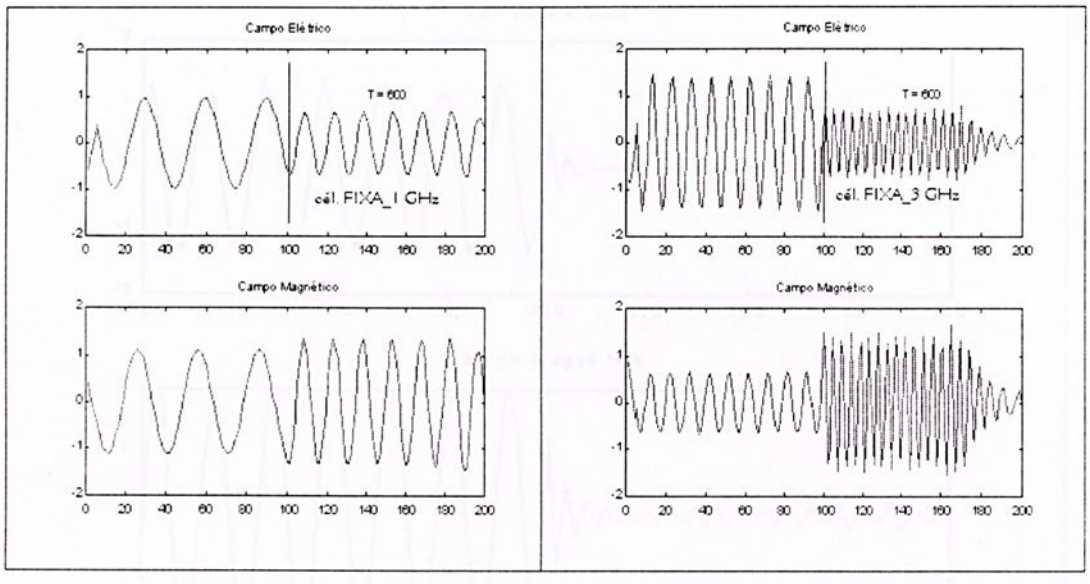


Figura 21 – Ondas senoidais de 1 GHz e 3 GHz incidindo num dielétrico

Quando a freqüência passa dos limites recomendados, um comprimento desta onda pode estar contido em menos do que 10 células, e não se observam as variações na senóide, dificultando a visualização e degradando o método como se pode verificar pela Fig. 22 e pela Fig. 23, com uma melhor resolução do mesmo resultado, onde a freqüência foi estabelecida em 5 GHz e cujo comprimento de onda no vácuo é contido por apenas 6 células.

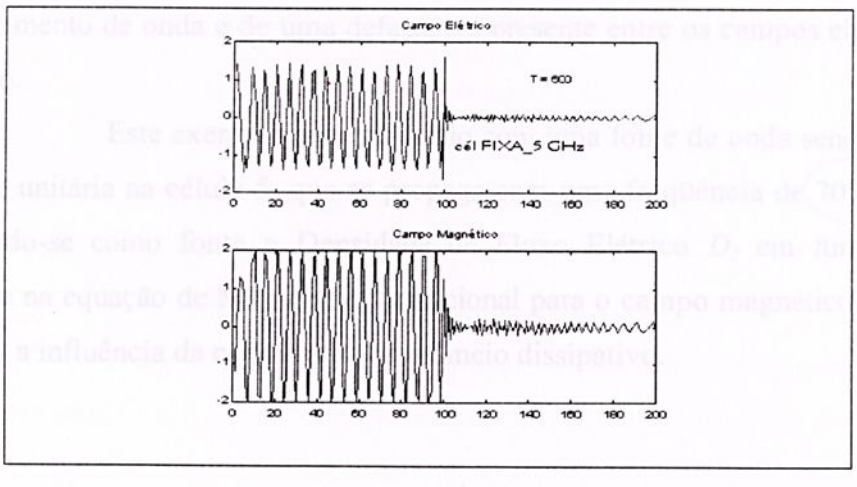


Fig. 22 – Onda senoidal de 5 GHz comprometendo o condicionamento.

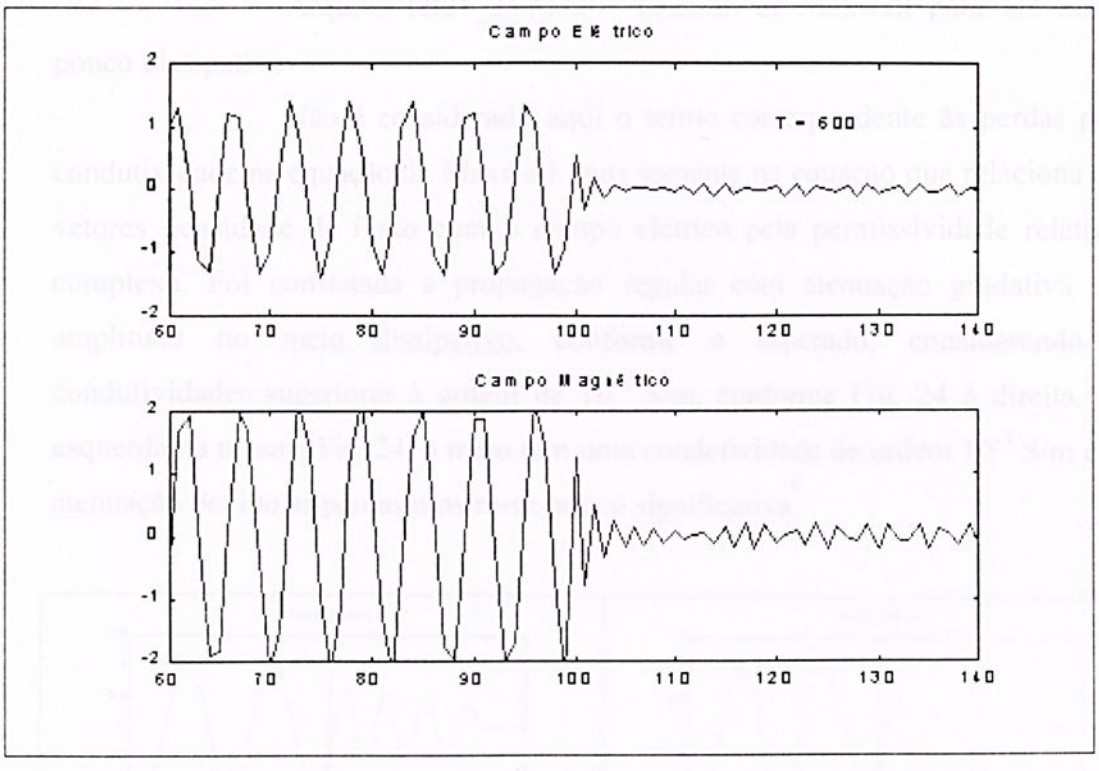


Fig. 23 – Onda senoidal de 5 GHz; região de interesse.

6.3.3. Simulação Unidirecional – Meio Dielétrico Dissipativo

Na propagação de uma onda eletromagnética em um meio dissipativo, observa-se a atenuação exponencial da amplitude, além da contração do comprimento de onda e de uma defasagem presente entre os campos elétrico e magnético.

Este exemplo será simulado com uma fonte de onda senoidal de amplitude unitária na célula 5, que se propaga com uma freqüência de 700 MHz, empregando-se como fonte a Densidade de Fluxo Elétrico D_z em função da freqüência na equação de Maxwell em rotacional para o campo magnético, sendo observada a influência da condutividade do meio dissipativo.

Arquivo fdtd1_211d.m – equação de Maxwell para um meio pouco dissipativo

Não é considerado aqui o termo correspondente às perdas por condutividade na equação de Maxwell. mas somente na equação que relaciona os vetores densidade de fluxo com o campo elétrico pela permissividade relativa complexa. Foi constatada a propagação regular com atenuação gradativa da amplitude no meio dissipativo, conforme o esperado, considerando-se condutividades superiores à ordem de 10^{-2} S/m, conforme Fig. 24 à direita. À esquerda na mesma Fig. 24, o meio tem uma condutividade de ordem 10^{-3} S/m e a atenuação devido às perdas mostra-se pouco significativa.

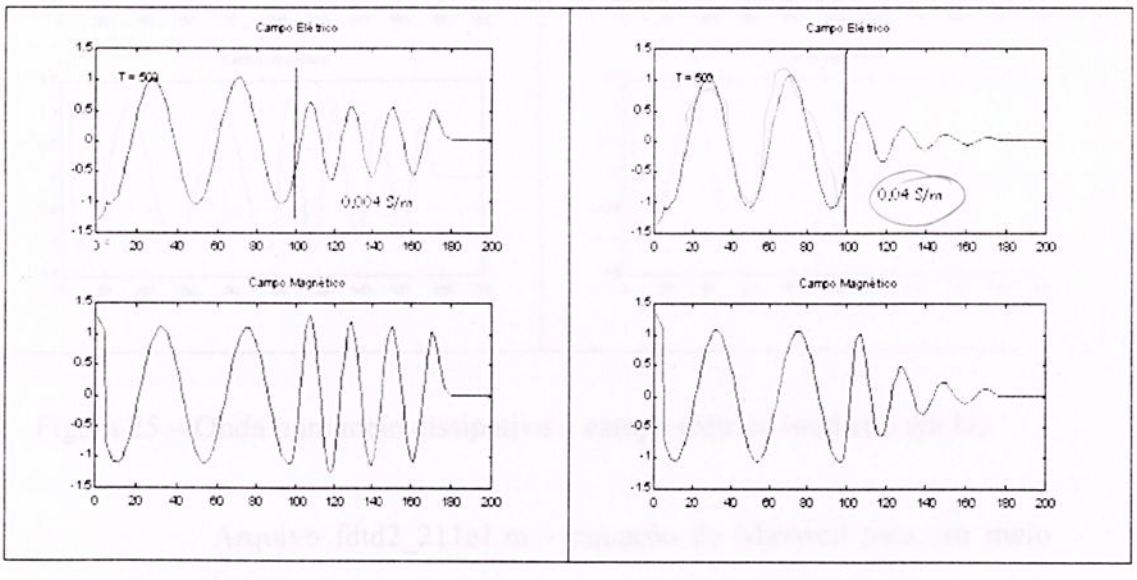


Figura 24 – Onda num meio pouco dissipativo para D_z

Arquivo fdtd1_211e.m – equação de Maxwell para um meio condutivo: E_z implícito

A inclusão do termo correspondente às perdas por condutividade na equação de Maxwell faz com que a simulação da onda eletromagnética seja um modelo coerente com a realidade física. Na determinação do vetor ***D***, o campo elétrico ***E*** que ainda não foi obtido, encontra-se implícito na equação de Maxwell favorecido pela relação existente entre os vetores densidade de fluxo e campo

elétrico através da permissividade relativa complexa. Tendo o valor da densidade de fluxo, o campo elétrico é atualizado e pode-se observar também a atenuação exponencial da amplitude em qualquer meio, desde o dielétrico perfeito ao condutor. Os exemplos da Fig. 25 mostram a atenuação gradativa nos dois meios, independentes da ordem de grandeza da condutividade do meio.

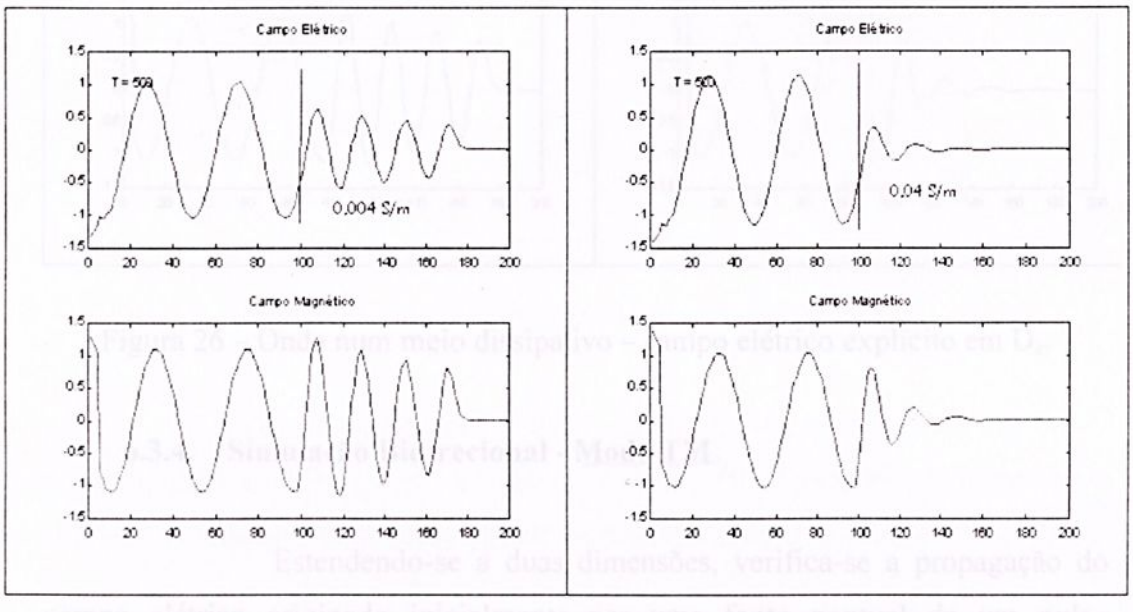


Figura 25 – Onda num meio dissipativo – campo elétrico implícito em D_z.

Arquivo fdtd2_211e1.m – equação de Maxwell para um meio condutivo: E_z explícito

De modo análogo ao anterior, também neste caso, na determinação do vetor ***D***, o campo elétrico ***E*** que ainda não foi obtido, encontra-se explícito na equação de Maxwell imposto pelo valor obtido no passo de tempo anterior. A seguir, do mesmo modo, o campo elétrico é atualizado e observa-se a mesma atenuação exponencial da amplitude mostrada na Fig. 26, fornecendo os mesmos resultados que aqueles calculados pelo valor implícito do campo elétrico, considerando a ordem de grandeza das condutividades abordadas. A Fig. 26 ilustra os testes realizados e comprova ser uma cópia da Fig. 25.

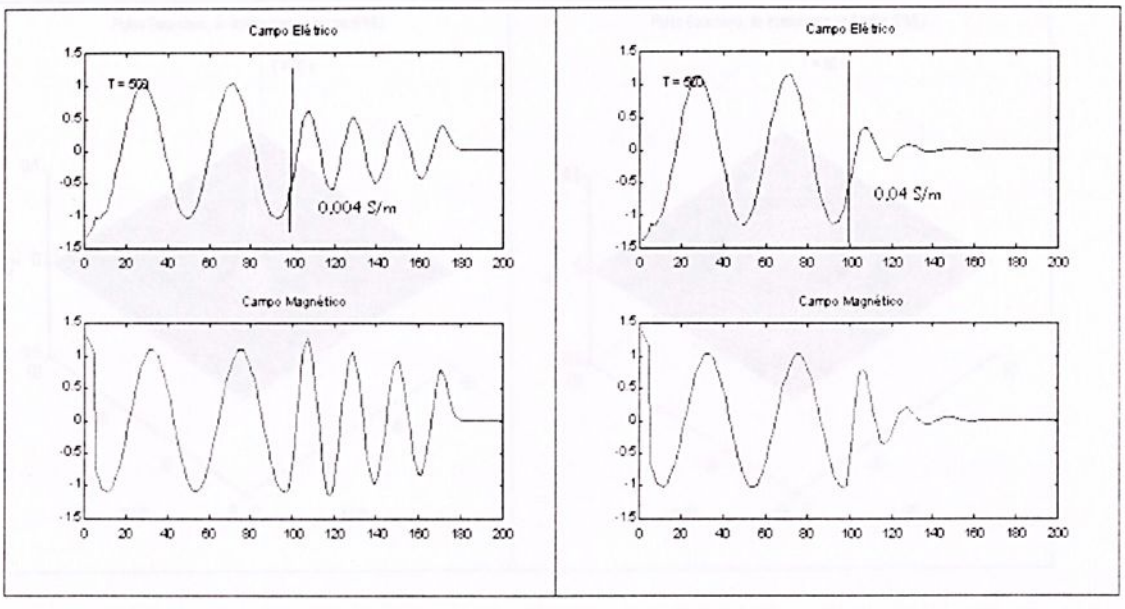


Figura 26 – Onda num meio dissipativo – campo elétrico explícito em D_z.

6.3.4. Simulação Bidirecional - Modo TM

Estendendo-se a duas dimensões, verifica-se a propagação do campo elétrico originado inicialmente por uma fonte pontual de um pulso gaussiano no interior do espaço do problema. Posteriormente, é apresentada a simulação de uma onda plana gerada pela superposição de um pulso incidente com o campo espalhado, segundo a teoria já explanada. A condição para as fronteiras absorventes do plano de simulação pode ser imposta pelo consagrado método da Camada Perfeitamente Casada (PML) segundo Berenger [17,18], ou por aquele já utilizado e comprovado nos casos unidimensionais, conforme Mur [21].

Arquivo fdtd2_311pml.m – pulso GAUSSIANO com absorção na fronteira pela Camada Perfeitamente Casada (PML), segundo Berenger.

O pulso gaussiano com t_0 = 20 e *largura* = 6, deslocado de 5 células do centro nas direções X e Y, gerado por uma fonte pontual propaga-se em todas as direções num plano de 60 x 60 células, formando frentes de onda concêntricas, dirigindo-se para a fronteira como pode ser visto pela Fig. 27.

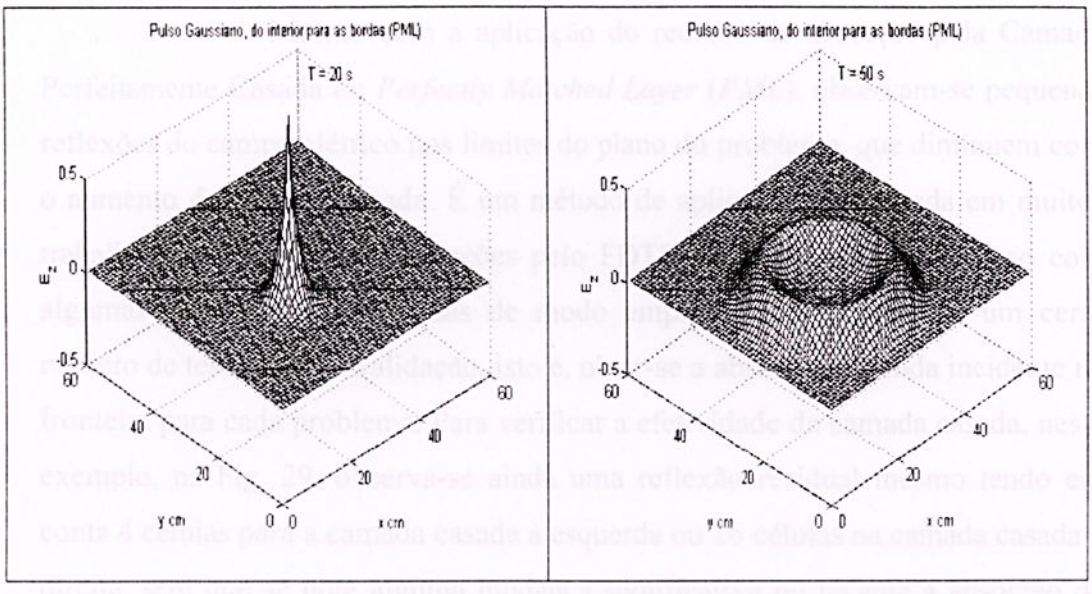


Figura 27 – Onda pontual com frentes de onda concêntricas.

Dando seqüência, a onda incide na fronteira e uma parcela residual de onda refletida aparece no plano. Neste caso a camada casada consta de 8 células e não absorve totalmente a onda na fronteira conforme mostra a Fig. 27.

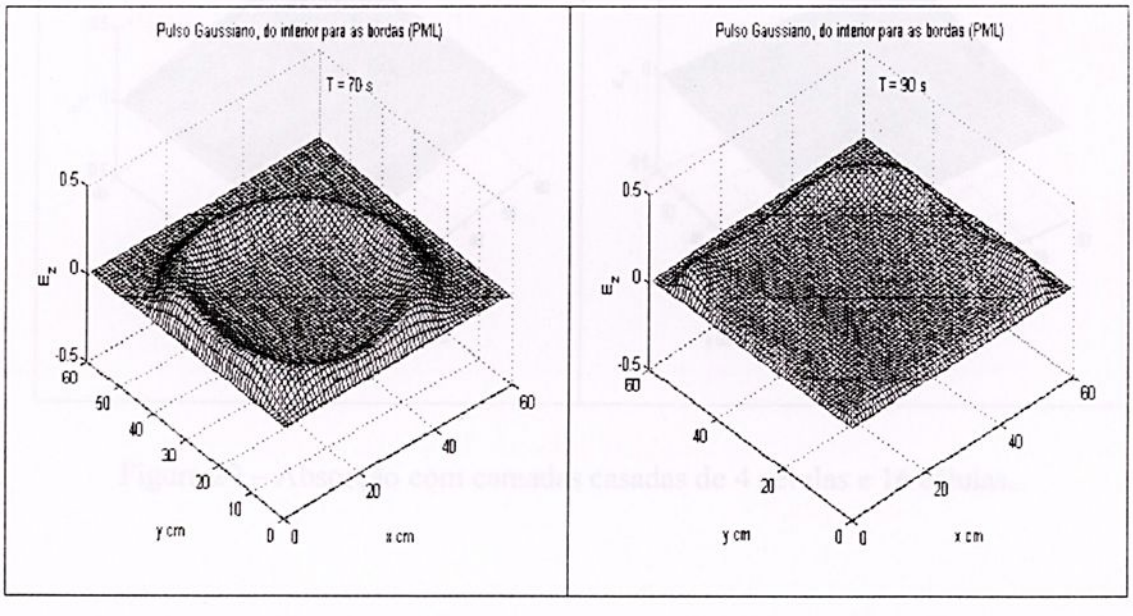


Figura 28 – Incidência da onda na fronteira do problema e a reflexão residual.

Mesmo com a aplicação do recurso de absorção pela Camada Perfeitamente Casada ou *Perfectly Matched Layer* (*PML*), observam-se pequenas reflexões do campo elétrico nos limites do plano do problema, que diminuem com o aumento da camada casada. É um método de aplicação consagrada em muitos trabalhos que tratam de simulações pelo FDTD. Trata-se de um processo com algumas variáveis determinadas de modo empírico, implicando em um certo número de testes para a validação, isto é, obter-se a absorção da onda incidente na fronteira para cada problema. Para verificar a efetividade da camada casada, neste exemplo, na Fig. 29, observa-se ainda uma reflexão residual mesmo tendo em conta 4 células para a camada casada à esquerda ou 16 células na camada casada à direita, sem que se note alguma mudança significativa no tocante à absorção da onda. O número de camadas casadas pode vir a se tornar uma solução de compromisso com o espaço delimitado para o problema.

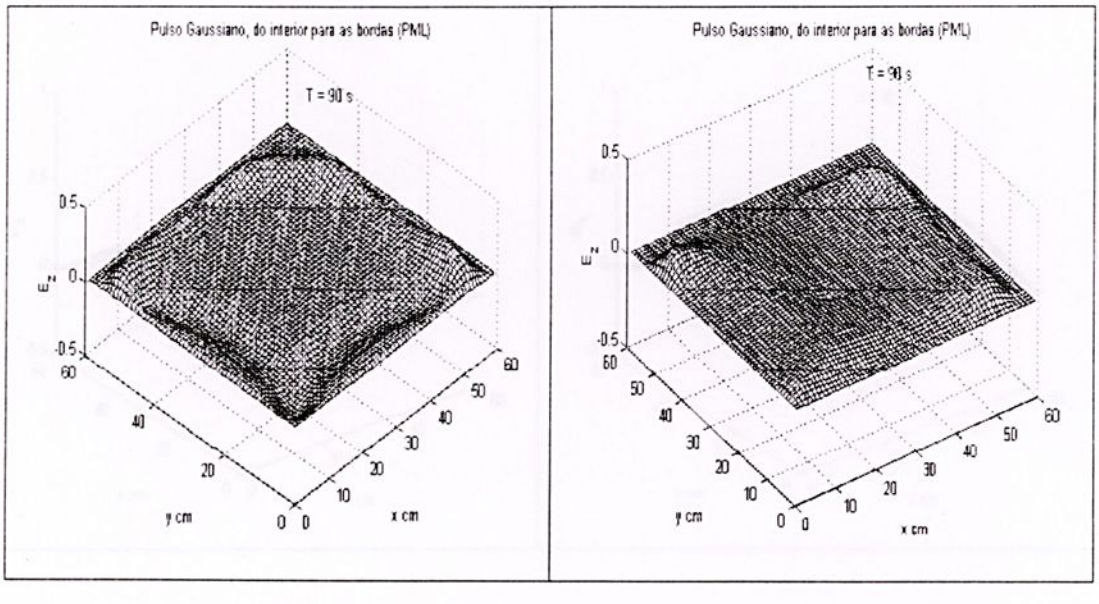


Figura 29 – Absorção com camadas casadas de 4 células e 16 células.

Arquivo fdtd2_311abc.m – pulso GAUSSIANO com absorção na fronteira pelo método utilizado em uma dimensão, segundo Mur.

O mesmo pulso do exemplo anterior, gerado por uma fonte pontual propaga-se em todas as direções formando frentes de onda concêntricas, dirigindo-se para a fronteira como foi mostrado na Fig. 27. Dando seqüência, a onda incide na fronteira e vai sendo absorvida por ela.

Observa-se a absorção da onda incidente nos limites do plano do problema, conforme pode ser ilustrado pela Fig. 30. É um processo que utiliza a velocidade de propagação da onda em função do meio, transferindo o valor das células adjacentes à fronteira, considerando-se o tempo que a onda leva para percorrer uma célula. Trata-se de um método definido em função de conceitos básicos da ondulatória com variáveis determinadas matematicamente.

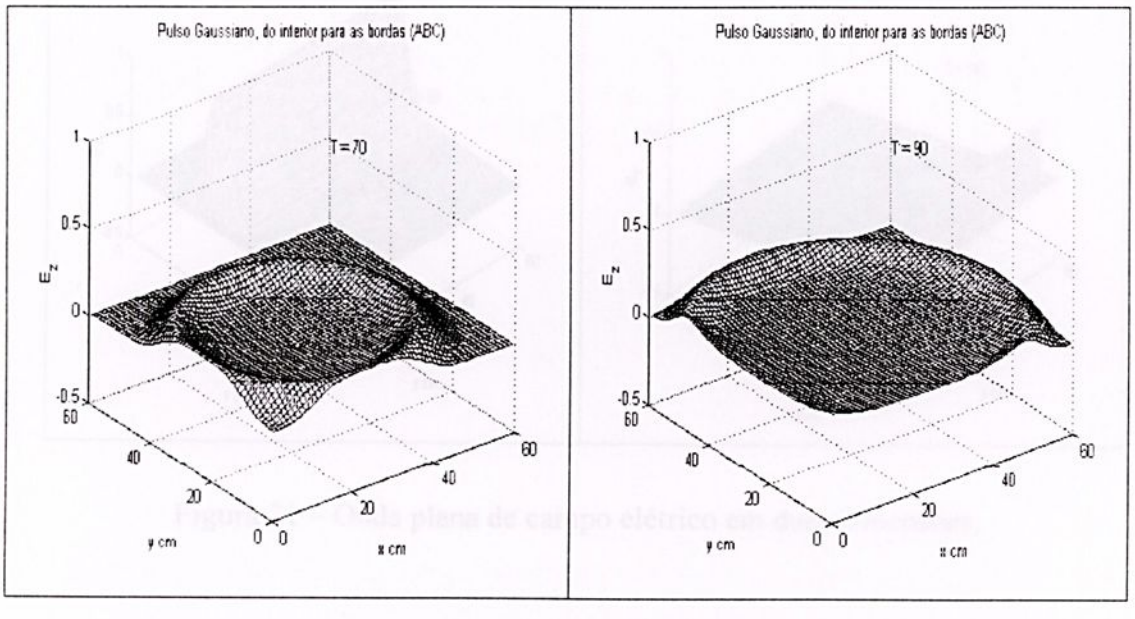


Figura 30 – Absorção da onda incidente na fronteira.

Arquivo fdtd2 _331abc.m – Propagação de Onda Plana em Duas Dimensões com Absorção na Fronteira

A onda plana em duas dimensões é simulada pela superposição de um pulso gaussiano incidente com o campo espalhado, tendo como frentes de onda, superfície planas propagando-se transversalmente pelo espaço do problema. A Fig. 31 mostra a onda plana propagando-se em T = 60 e sendo absorvida pela fronteira em T = 140, comprovando o esperado teoricamente. O exemplo foi realizado com a incidência de um pulso gaussiano (t_0 = 20 e largura = 8) na célula 3 do vetor incidente, que superposto ao campo espalhado, propaga-se num plano constituído de 60 x 60 células.

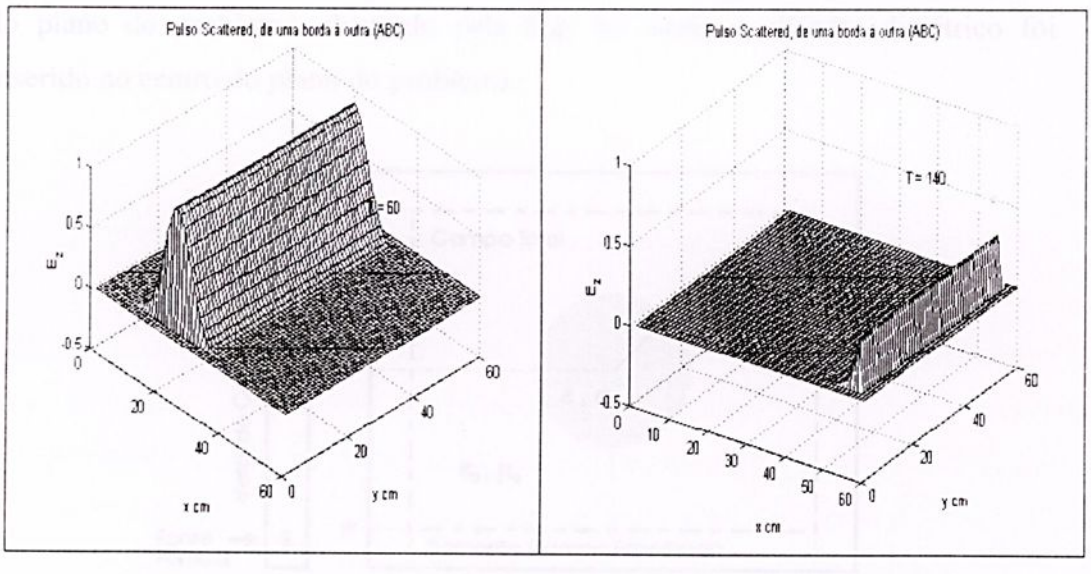


Figura 31 – Onda plana de campo elétrico em duas dimensões.

7. ONDA ELETROMAGNÉTICA INTERAGINDO COM CILINDROS DIELÉTRICOS

7.1. Especificação do material dielétrico

O presente trabalho simula o comportamento de uma onda eletromagnética atingindo um cilindro com características isolantes e de altura infinita. A aplicação das Eqs. (101) e (99) implica na atualização de parâmetros *ga(i,j)* e *gb(i,j)* em função da condutividade e da permissividade elétrica do material que o objeto sob estudo estiver modelado. Sabe-se que no vácuo $\varepsilon_r = 1$ e $\sigma = 0$, fornecendo valores iniciais para *ga(i,j)=1* e *gb(i,j)=0* em todas as células do plano do problema, ilustrado pela Fig. 32, onde o cilindro dielétrico foi inserido no centro do plano do problema.

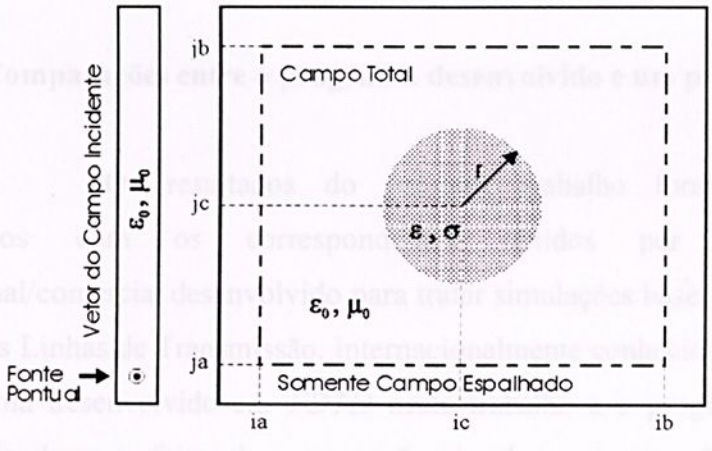


Figura 32 – Campos incidente, espalhado e total com o cilindro dielétrico.

Nas células que interceptam o cilindro, as características elétricas são atualizadas para:

- ε_r = epsilon
- σ = sigma

Sendo *epsz* = ε_0 e *dt* = Δt, o seguinte código, no início do programa, modifica as constantes *ga(i,j)* e *gb(i,j)* especificando assim, um cilindro dielétrico com raio *r* centrado na célula *(ic ; jc)* conforme a Fig. 32. Assim:

```
for j = fix ( jc – r – 1 ) : fix ( jc + r + 1 ) :
    for i = fix ( ic – r – 1 ) : fix ( ic + r + 1 ) ;
        xdist = ic - i ;
        ydist = jc - j ;
        dist = sqrt ( xdist^2 + ydist^2 ) ;
        if dist <= r
            gb(i,j) = sigma * dt / epsz;
            ga(i,j) = 1/( epsilon + gb(i,j) );
        end
    end
end
```

7.2. Comparações entre o programa desenvolvido e um programa TLM

Os resultados do presente trabalho foram analisados e comparados com os correspondentes obtidos por um programa educacional/comercial desenvolvido para tratar simulações baseado no Método da Matriz das Linhas de Transmissão, internacionalmente conhecido pela sigla *TLM*. O programa desenvolvido em *FDTD* neste trabalho e o programa baseado no *TLM*, utilizado para efeitos de comparação, simulam a propagação de uma mesma onda plana em duas dimensões geradas por um pulso gaussiano com amplitude de 2 V/m de largura (*spread*) igual a 8 células de 1 cm, cujo primeiro valor máximo (t_0) ocorre após 25 passos de tempo, propagando-se num plano de 60 x 120 células da esquerda para a direita vindo a colidir com um cilindro dielétrico de permissividade relativa igual a 30, condutividade 0,3 S/m com eixo no centro do plano do problema e raio compreendido entre 20 células.

As figuras a seguir mostram em alguns instantes, os registros obtidos que comparam o comportamento da onda interagindo com o dielétrico nas

simulações realizadas pelos dois programas. Em cada figura que segue, está ilustrado à esquerda o resultado obtido pelo *TLM* e à direita o correspondente obtido pelo *FDTD*.

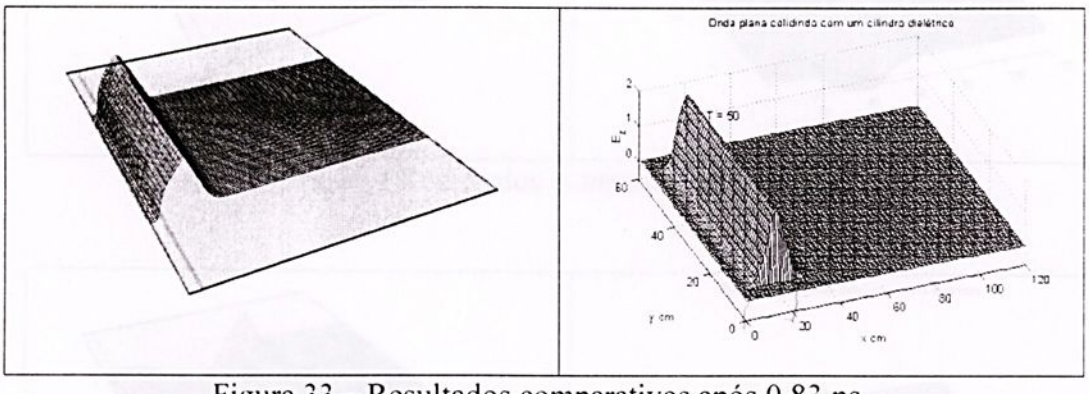


Figura 33 – Resultados comparativos após 0,83 ns.

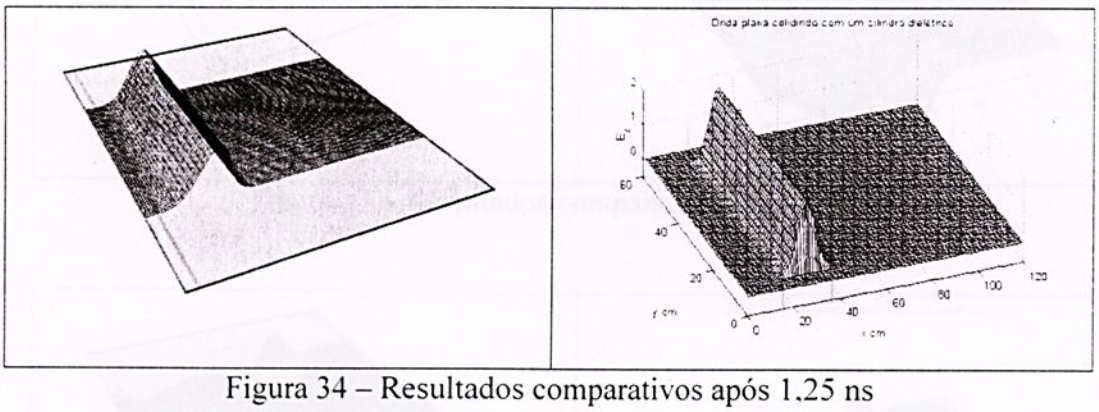


Figura 34 – Resultados comparativos após 1,25 ns

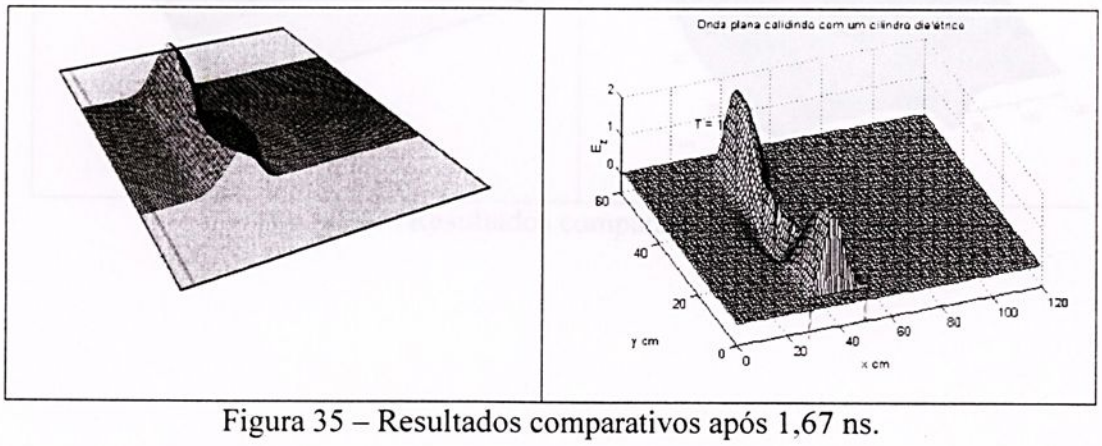


Figura 35 – Resultados comparativos após 1,67 ns.

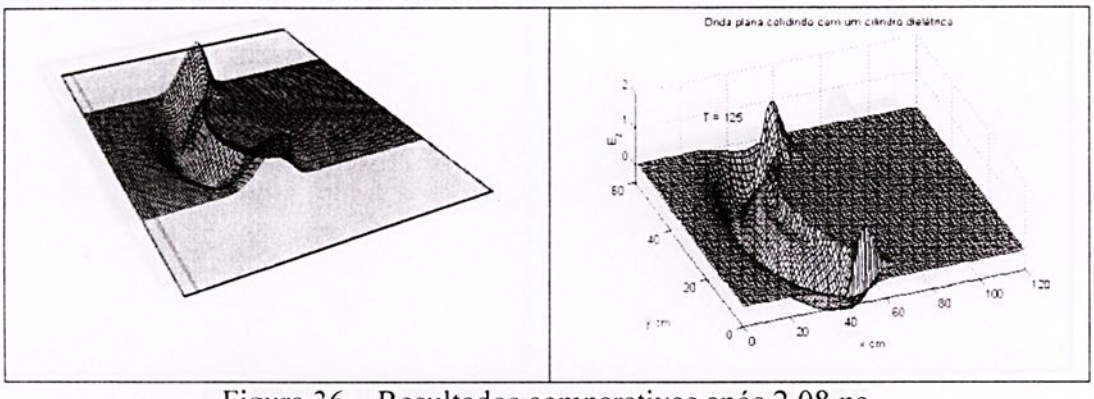


Figura 36 – Resultados comparativos após 2,08 ns.

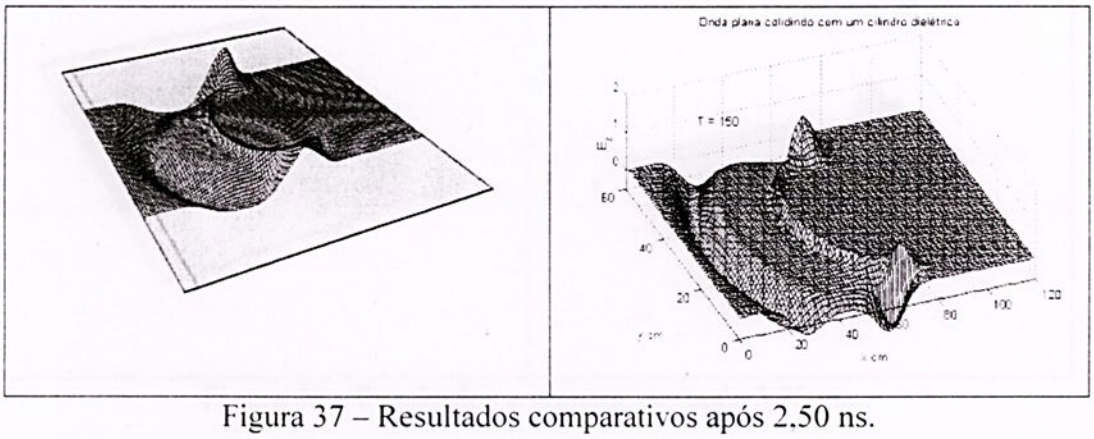


Figura 37 – Resultados comparativos após 2,50 ns.

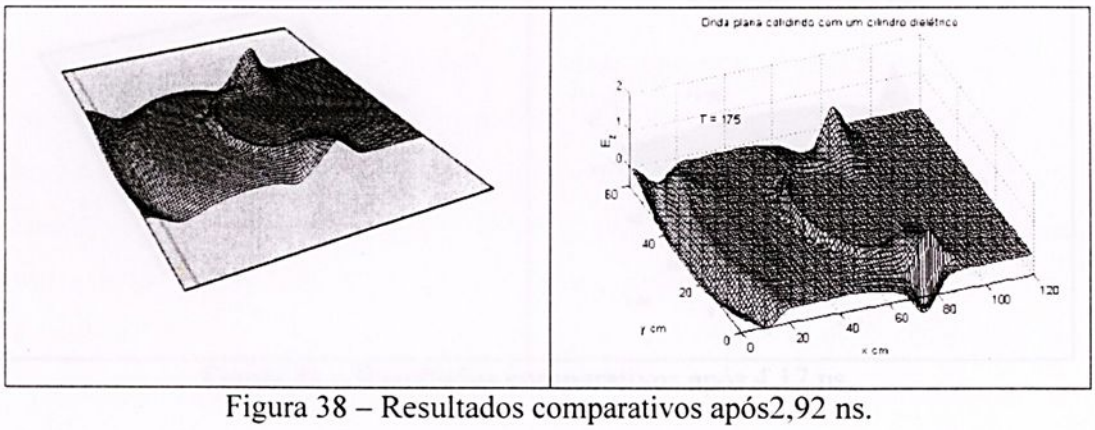


Figura 38 – Resultados comparativos após2,92 ns.

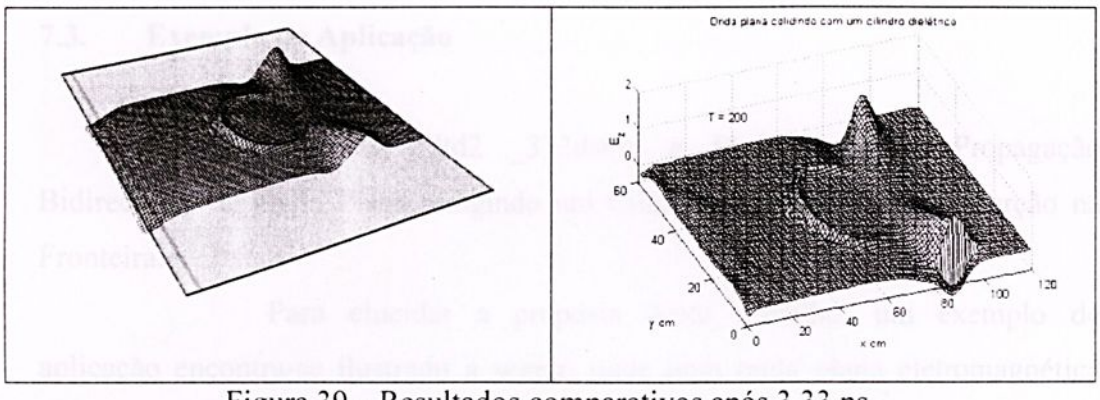


Figura 39 – Resultados comparativos após 3,33 ns.

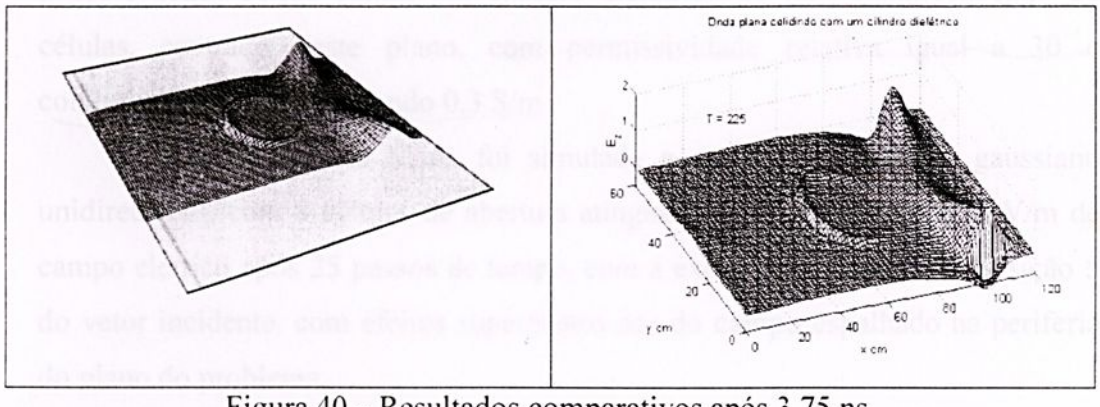


Figura 40 – Resultados comparativos após 3,75 ns.

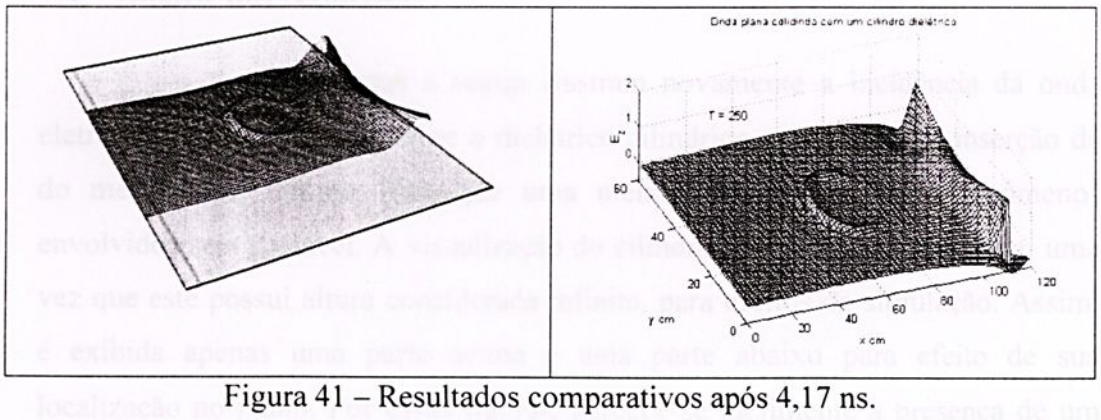


Figura 41 – Resultados comparativos após 4,17 ns.

7.3. Exemplo de Aplicação

Arquivos fdtd2 _333dst.m e fdtd2_visu.m – Propagação Bidirecional de Onda Plana atingindo um Cilindro Dielétrico com Absorção na Fronteira.

Para elucidar a proposta deste trabalho, um exemplo de aplicação encontra-se ilustrado a seguir, onde uma onda plana eletromagnética propagando-se num plano definido por 120 x 120 células inseridas no espaço livres (vácuo) colide contra um cilindro dielétrico de raio compreendendo 20 células, centrado neste plano, com permissividade relativa igual a 30 e condutividade elétrica valendo 0,3 S/m.

A onda plana foi simulada a partir de um pulso gaussiano unidirecional, com 8 células de abertura atingindo o valor máximo de 2 V/m de campo elétrico após 25 passos de tempo, com a excitação iniciando na posição 5 do vetor incidente, com efeitos superpostos aos do campo espalhado na periferia do plano do problema.

7.4. Análise dos resultados

As figuras a seguir ilustram novamente a incidência da onda eletromagnética incidindo sobre o dielétrico cilíndrico, porém com a inserção de do mesmo nas figuras, para que uma melhor compreensão dos fenômenos envolvidos seja possível. A visualização do cilindro não se dá por completa, uma vez que este possui altura considerada infinita, para efeitos de simulação. Assim, é exibida apenas uma parte acima e uma parte abaixo para efeito de sua localização no plano. Por essas figuras, percebe-se facilmente a presença de um campo eletromagnético no interior do dielétrico, mesmo quando a frente de onda já atingiu os limites das fronteiras. Esses campos podem perfeitamente ser objeto de estudos em análises de propagação de ondas, como o aqui apresentado, mas são difíceis de serem observados em análises e ensaios que utilizem técnicas tradicionais, realizadas em ambientes de laboratório.



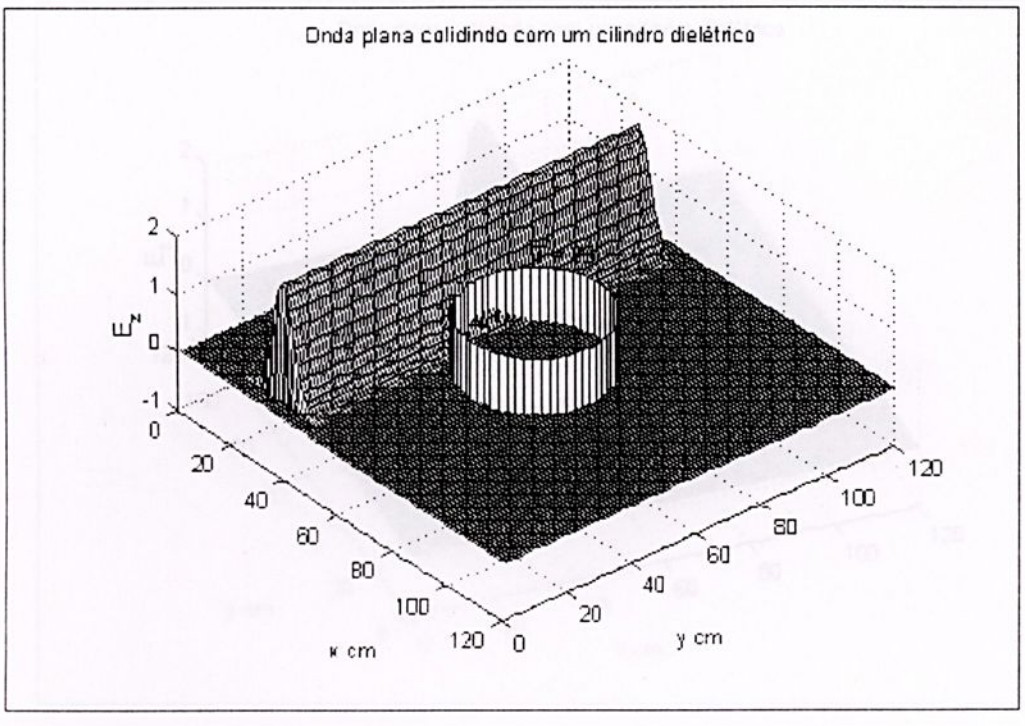


Figura 42 – Exemplo de aplicação, após 80 passos de tempo

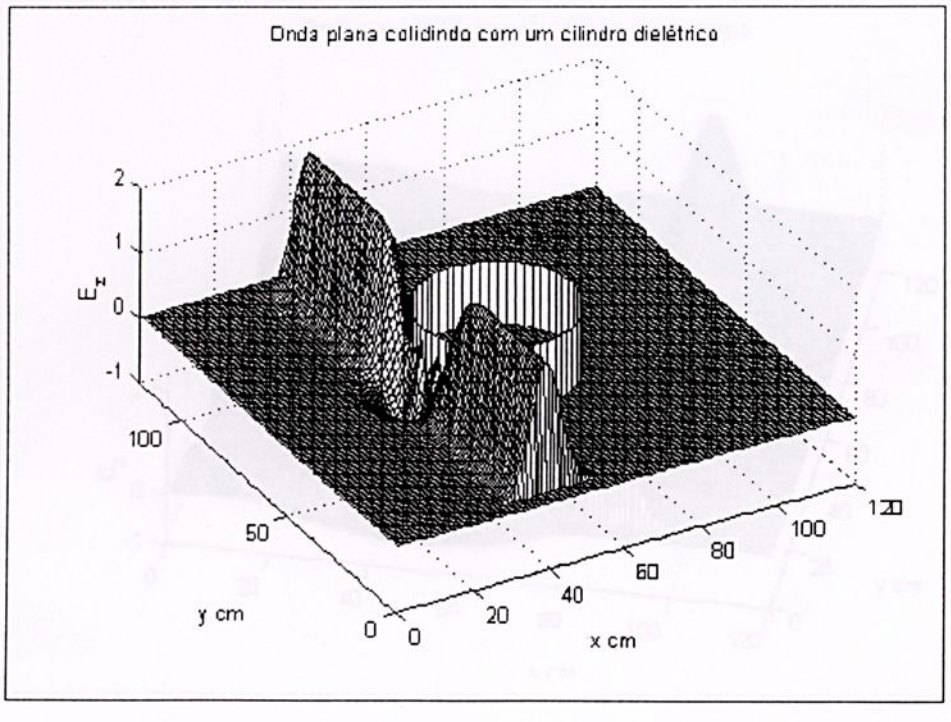


Figura 43 – Exemplo de aplicação, após 100 passos de tempo

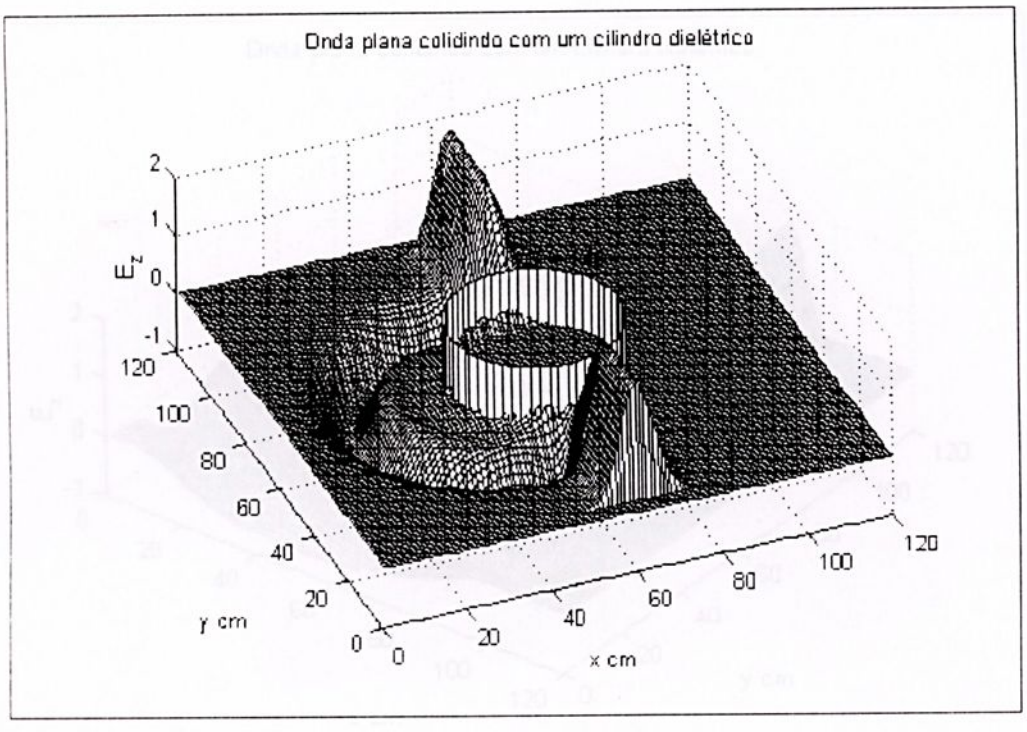


Figura 44 – Exemplo de aplicação. após 140 passos de tempo

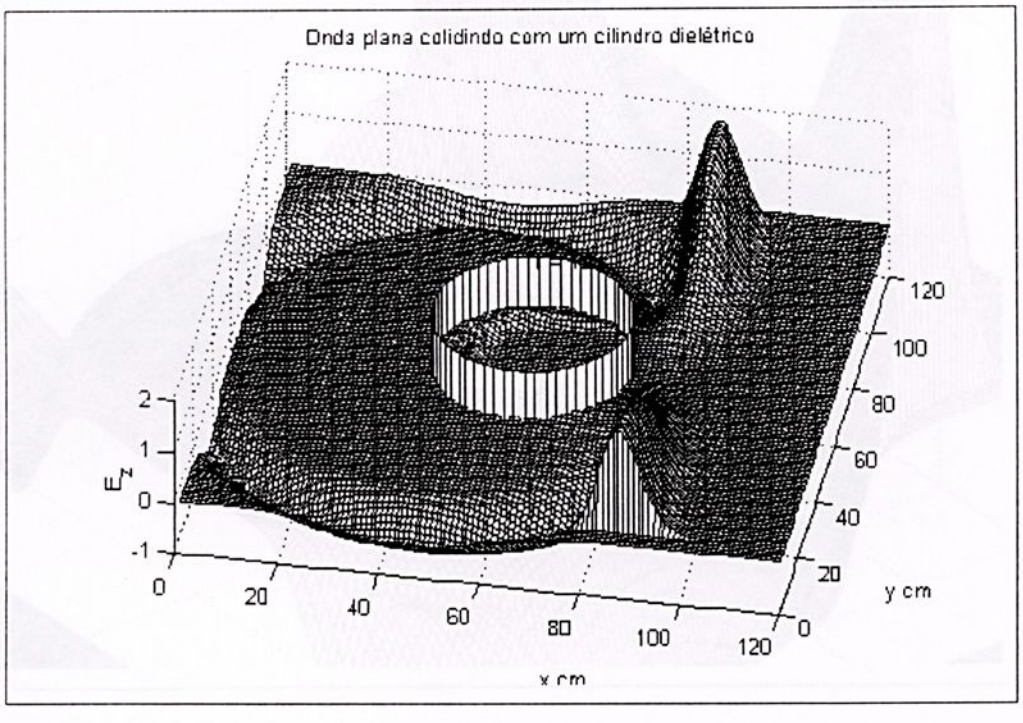


Figura 45 – Exemplo de aplicação, após 190 passos de tempo

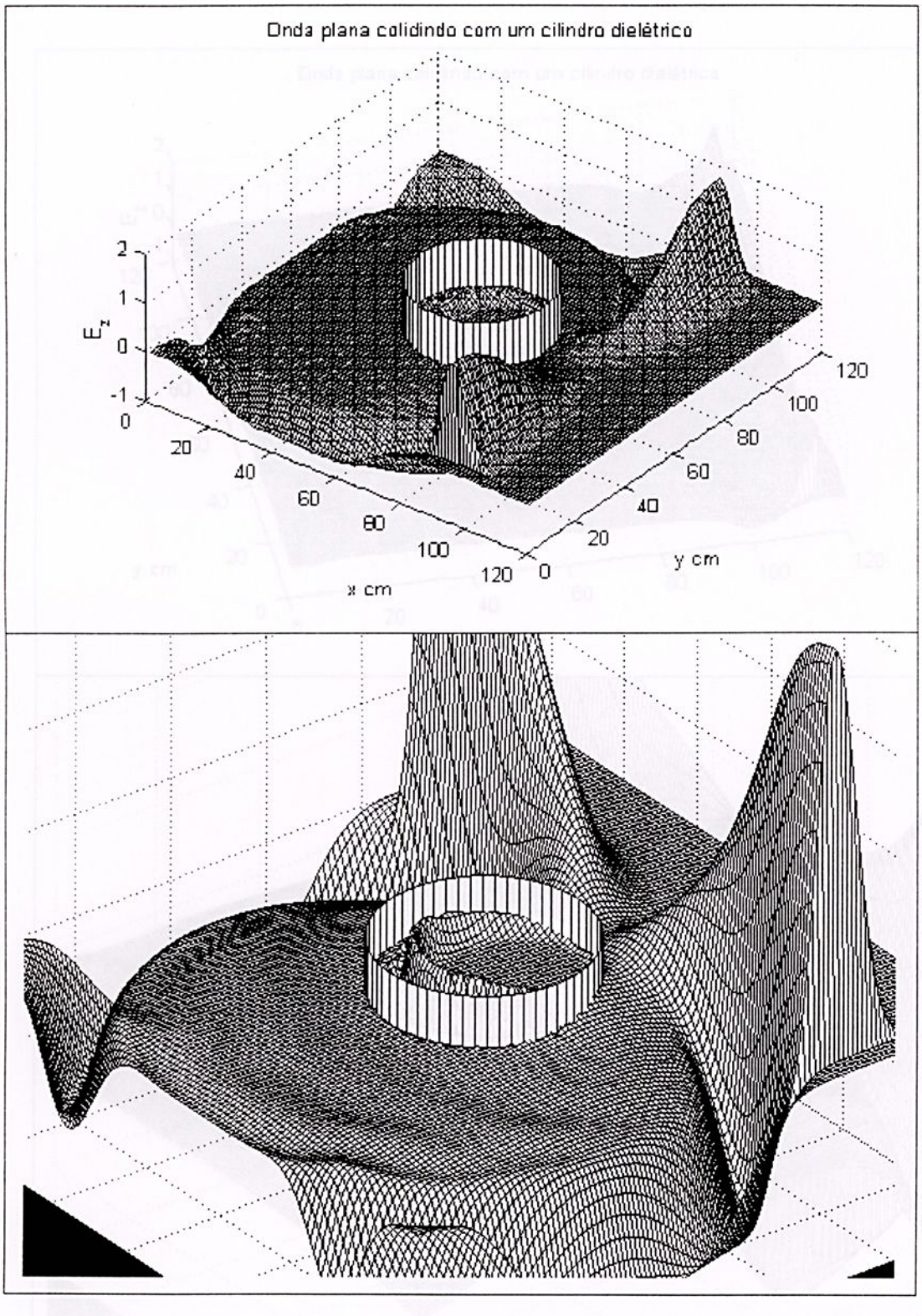


Figura 46 – Exemplo de aplicação após 200 passos de tempo

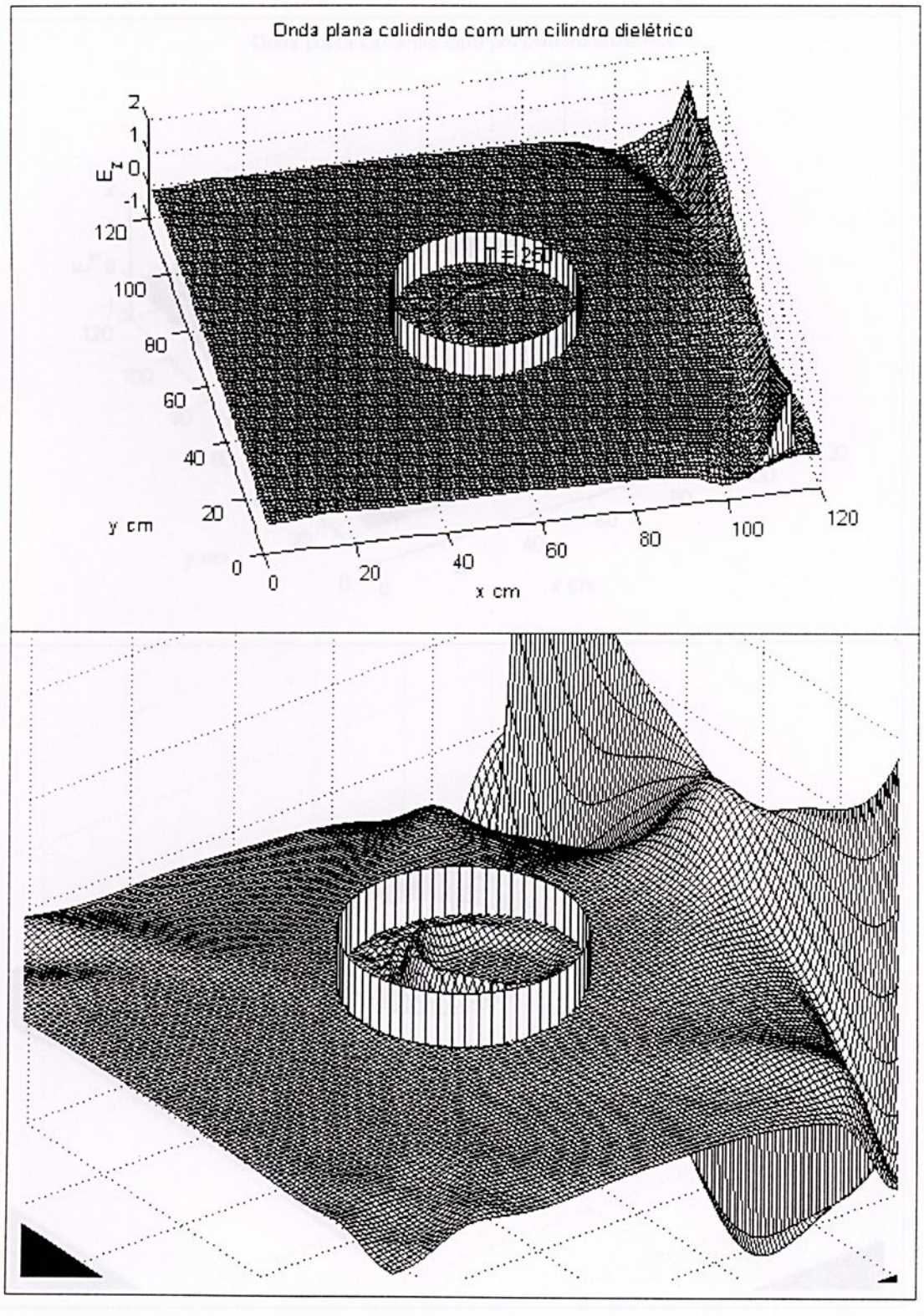


Figura 47 – Exemplo de aplicação, após 250 passos de tempo

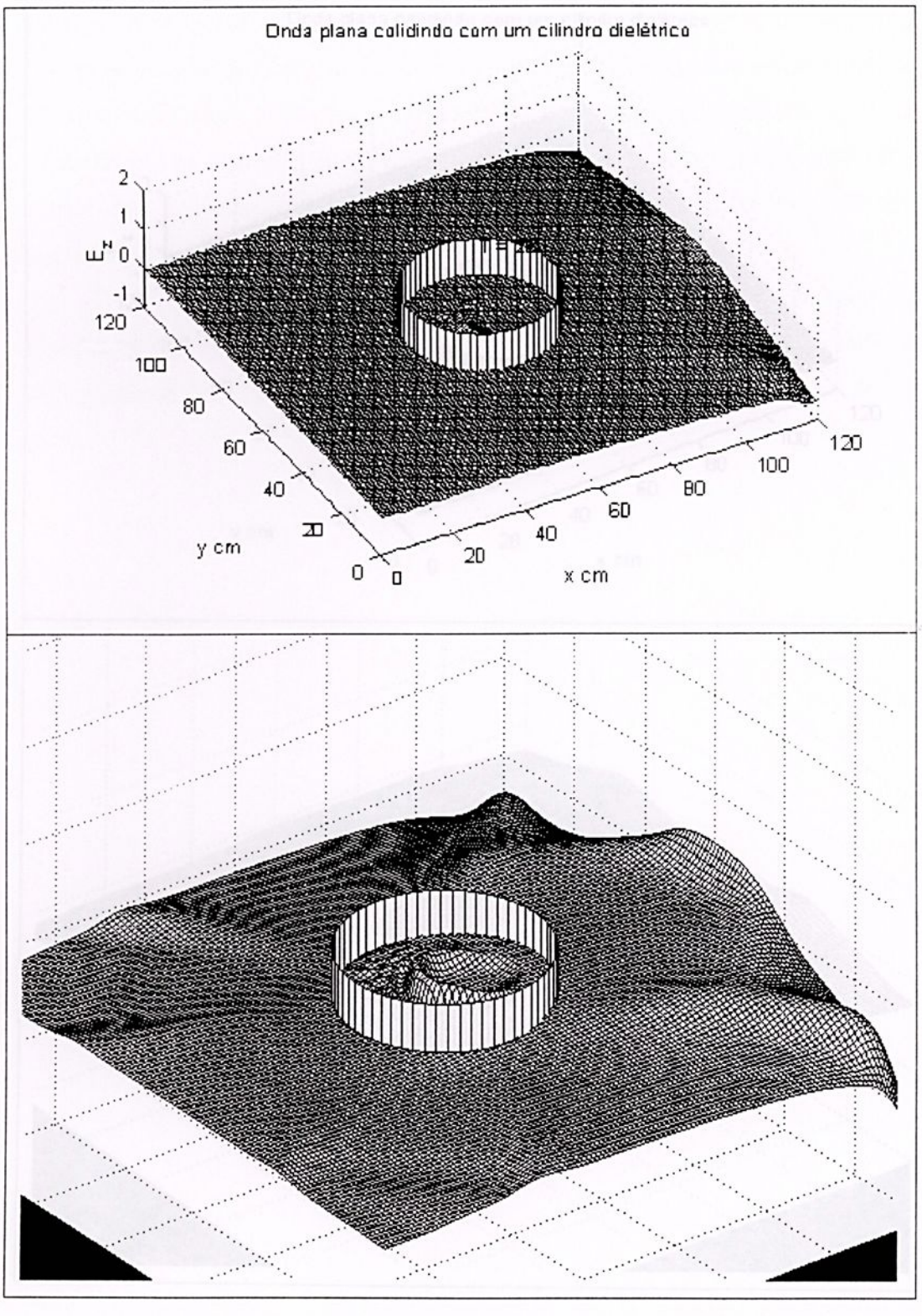


Figura 48 – Exemplo de aplicação, após 280 passos de tempo

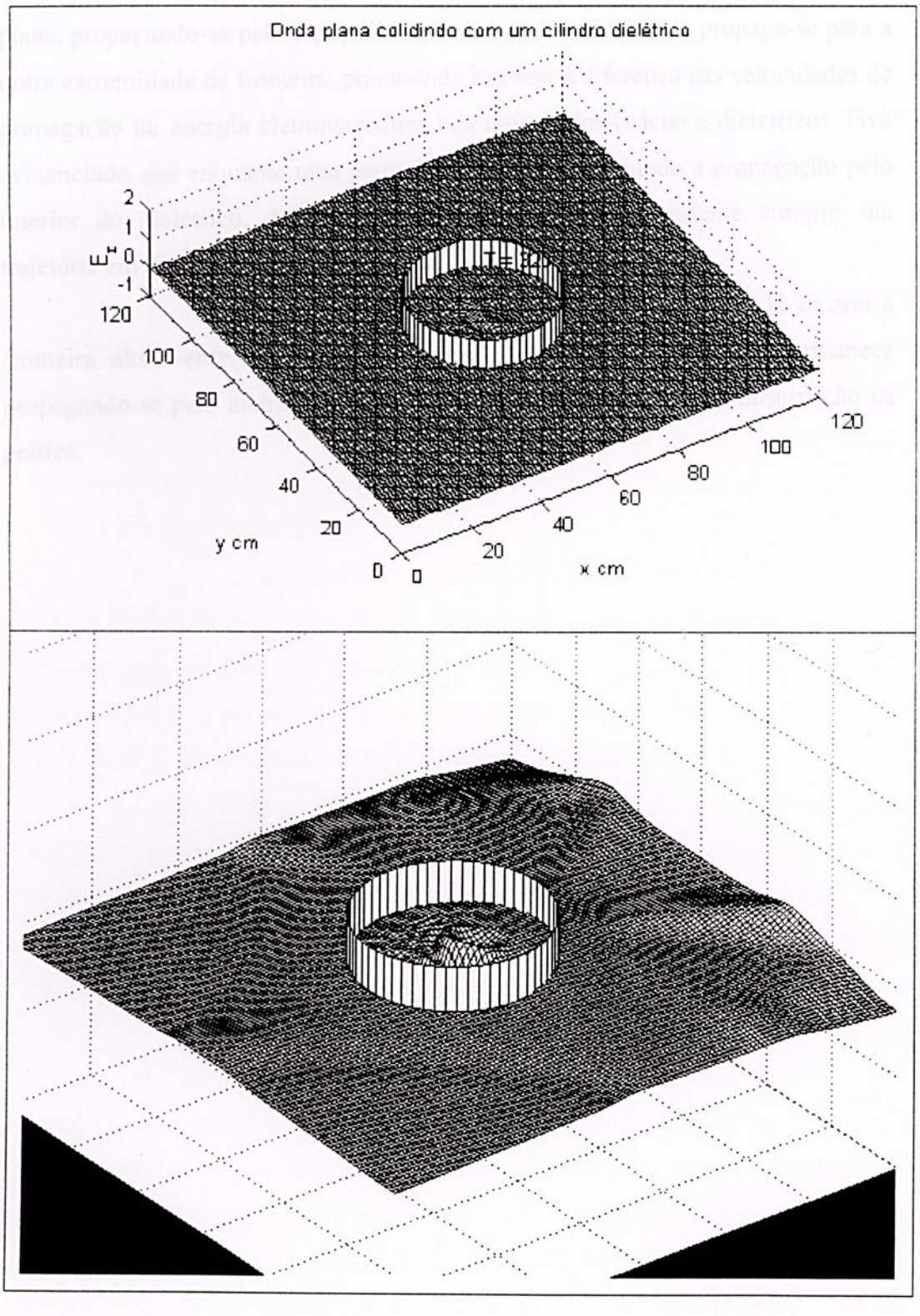


Figura 49 – Exemplo de aplicação, após 320 passos de tempo

Um destaque deve ser dado às Figs. 45 a 49 em que a onda plana, propagando-se pelo espaço livre, atravessou o dielétrico e propaga-se para a outra extremidade da fronteira, procurando mostrar a diferença nas velocidades de propagação da energia eletromagnética nos dois meios (vácuo e dielétrico). Fica evidenciado que enquanto uma parte da energia está iniciando a propagação pelo interior do dielétrico, delimitado pelo cilindro, a parte restante cumpre sua trajetória em direção à outra extremidade.

Finalmente, depois que a frente de onda no vácuo já cruzou a fronteira absorvente, uma parte da energia eletromagnética ainda permanece propagando-se pelo interior do dielétrico; fenômeno este de difícil observação na prática.

8. CONCLUSÕES E PROPOSIÇÕES

O presente trabalho descreve uma simulação de ondas planas eletromagnéticas dada pela conjunção entre um método numérico de eficiência comprovada e um ambiente computacional científico que vem se firmando como uma ferramenta poderosa de auxílio às pesquisas e desenvolvimentos de âmbito acadêmico e industrial.

Cabe ressaltar que o exemplo apresentado neste trabalho dissertativo, representa apenas uma pequena amostra do que é possível ser realizado neste tipo de análise, em diversos campos de trabalho. Fica aberto um leque abordando diversas possibilidades e alternativas de simulações que podem ser obtidas em função do tipo de excitação utilizada, do meio de propagação, da geometria e do tipo de material estudado.

As análises realizadas em *FDTD*, podem ser estendidas a um espaço tridimensional, entre outras, balizadas por critérios técnicos que exijam mais do que trabalhar sob hipóteses simplificadoras em modelos desenvolvidos que possam substituir os protótipos reais, minimizando ensaios de tipo, algumas vezes destrutivos, tornando-se economicamente viáveis [22].

Este programa de simulação em *FDTD*, comparado a um programa desenvolvido comercialmente numa versão educacional baseado no *TLM*, oferece resultados dentro do comportamento ondulatório esperado, desde que sejam feitas as devidas considerações para as condições de contorno estabelecidas em cada método, de acordo com as peculiaridades de cada um.

O método *FDTD* foi escolhido em vista de sua aplicação ser possível em várias plataformas sem grandes complexidades, transformando equações diferenciais em simples equações algébricas de fácil compreensão, com critérios de estabilidade facilmente estabelecidos. Além do mais, o método *FDTD* dispensa a resolução de sistemas de equações com muitas incógnitas, podendo deixar de lado o uso de algoritmos de fatoração de grandes matrizes esparsas, conforme lançam mão a maioria dos métodos numéricos convencionais.



Finalmente, este trabalho deixa um caminho aberto, esperando contribuir com o desenvolvimento de um programa mais elaborado, em linguagem compilada, sendo mais rápido em processamento, e com uma interface homem-máquina amigável, permitindo o diálogo e a visualização para análises de resultados de simulações realizadas em materiais, colocando mais uma alternativa no âmbito da pesquisa e desenvolvimento, tanto no meio acadêmico, como nas indústrias do setor elétrico.

9. *REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS*

1 O'CONNOR, J. J. & ROBERTSON, E. F. The MacTutor History of Mathematics, disponível na Internet desde 1997 pelo acesso: <http://www.groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/Mathematicians/Heaviside.html>.

2 ERDELYI, E. A., AHMED, S. V., BURTNESS, R. D. Flux Distribution in Saturated DC Machines at no Load, 1965, Proceedings of IEEE Trans. On Power Apparatus and Systems, vol. PAS-84, p.375-381.

3 SILVESTER, P. & CHARI, M. V. K. Finite Element Solution of Saturable Magnetic Field Problems, 1970, Proceedings of IEEE Trans. On Power Apparatus and Systems, vol. PAS-89, nº 7, p.1642-1651.

4 JOHNS P. B. A Symmetrical Condensed Nodes for the TLM Method, 1987, Proceedings of IEEE Trans. On Microwave Theory and Tech., vol. MTT-35, número 4, p.370-377.

5 BULHO, M. A. G. V., FANTASIA, R. P., de ALCANTARA Jr, N. P. Um Simulador de Ondas Eletromagnéticas para o Ambiente Windows, Baseado Numa Formulação Bidimensional do TLM, 1998, In: III Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo, p.64-67.

6 KUNZ, K. S. & LUEBBERS, R. J., The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics, 1993, CRC Press, Boca Raton, 447p.

7 GONÇALVES Jr., L., de AQUINO, C. V., de ALCANTARA Jr., N. P. Um Simulador de Ondas Eletromagnéticas Baseado no Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo para o Ensino do Eletromagnetismo, 2001, In: XXIX Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, Porto Alegre.

8 LYNCH, D. R. & PAULSEN, K. D. Origin of Vector Parasites in Numerical Maxwell Solutions, 1991, Proceedings of IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-39, p.383-394.

9 PAULSEN, K. D., LYNCH, D. R. Elimination of Vector Parasites in Finite Element Maxwell Solutions, 1991, Proceedings of IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-39, p.395-404.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

10 HARRINGTON, R. F. Field Computation by Moment Methods, 1968, The Macmillan Co., New York.

11 HOEFER, W. J. R. The transmission Line Matrix Method – Theory and Applications, 1985, Proceeding of IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-33, p.882-893.

12 SARKAR, T. K. The Conjugate Gradient Method as Applied to Electromagnetic Field Problems, 1986, Proceedings of IEEE Antennas and Prop. Soc. Newsletter, vol. 28, p.5-14.

13 SARKAR, T. K. From Reaction Concept to Conjugate Gradient: Have We Made Any Progress?, 1989, Proceedings of IEEE Antennas and Prop. Soc. Newsletter, vol. 31, p.6-12.

14 SULLIVAN, D. M. Electromagnetic Simulation Using the FDTD Method, 2000, IEEE Press, New York, 161p.

15 TAFLOVE, A. Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time Domain, 1993, Artech House, Boston, 599p.

16 REMIS, R. F. On the Stability of the Finite-Difference Time-Domain Method, 2000, Journal of Computation Physics, vol. 163, p.249-261.

17 BERENGER, J.-P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves, 1994, Journal of Computation. Physics, vol. 114, p.185-200.

18 BERENGER, J.-P. Three-Dimensional Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves, 1995, Journal of Computation. Physics, vol. 127, p.363-379.

19 ABARBANEL, S. & GOTTLIEB, D. A Mathematical Analysis of the PML Method, 1996, Journal of Computation. Physics, vol. 134, p.357-363.

20 COLLINO, F., MONK, P. B. Optimizing the perfectly matched layer, 1998, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 164, p. 157-171.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

21 MUR, G. Absorbing Boundary Conditions for the Finite-Difference Approximation of the Time-Domain Electromagnetic-Field Equations, 1981, IEEE Trans. On Electromagnetic Compatibility, vol. EMC-23, 4, p. 377-382.

22 de AQUINO, C. V., de ALCANTARA Jr., N. P., GONÇALVES Jr., L. Simulação de uma Onda Plana Eletromagnética Atingindo um Obstáculo Dielétrico, Empregando o Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo, 2001, In: XXII Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia, Campinas.

0810000988