

IFT - UNESP
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-D.006/24

Modelos cosmológicos fundamentados na geometria diferencial de Lyra

Dimas Jackson de Oliveira

Orientador

prof. Bruto Max Pimentel Escobar

16 de dezembro de 2024.

O48m Oliveira, Dimas Jackson de
Modelos cosmológicos fundamentados na geometria diferencial de Lyra
/ Dimas Jackson de Oliveira. – São Paulo, 2024
58 f.: il. color.

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de
Física Teórica (IFT), São Paulo
Orientador: Bruto Max Pimentel Escobar

1. Cosmologia. 2. Geometria diferencial. 3. Gravitação. I. Título

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca
do Instituto de Física Teórica (IFT), São Paulo. Dados fornecidos pelo
autor(a).

MODELOS COSMOLÓGICOS FUNDAMENTADOS NA GEOMETRIA DIFERENCIAL DE LYRA

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Física Teórica do Câmpus de São Paulo, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física, Especialidade Física Teórica.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. BRUTO MAX PIMENTEL ESCOBAR (Orientador)
Instituto de Física Teórica/UNESP

Prof. Dr. RODRIGO SANTOS BUFALO
Departamento de Física/Universidade Federal de Lavras

Prof. Dr. RODOLFO ALVÁN CASANA SIFUENTES
Departamento de Física/Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. ANDERSON ANTUNES NOGUEIRA
Instituto de Física e Química/Universidade Federal de Itajubá

Prof. Dr. GABRIEL BRANDÃO DE GRACIA
Departamento de Física/Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Conceito: Aprovado

São Paulo, 16 de dezembro de 2024.

Dedico esta tese ao Deus e pai de nosso Senhor Jesus Cristo por meio do qual o kósmos e todas as demais coisas foram criadas e para quem são todas as coisas. Ele é antes de tudo, e por meio dele tudo subsiste.

Agradecimentos

Agradeço a CAPES pelo financiamento de pesquisa que viabilizou a execução desse projeto e ao Instituto de Física Teórica da UNESP que mantém o programa pós-graduação.

Agradeço ao prof. Pimentel por todo o direcionamento, pela paciência e proposição do tema abordado. Ao amigo e colega de pesquisa Eduardo M. de Moraes que colaborou com a construção dos alicerces da geometria sobre a qual edifiquei este trabalho.

Agradeço a minha amada esposa Nayara por acreditar em mim e pelo carinho e compreensão nas horas em que foi necessário abrir mão de momentos de descanso e lazer para me dedicar a esta tese. Agradeço aos meus pais Suely e Dorival pois, se cheguei até aqui foi porque estive sobre seus ombros em muitos momentos. Aos meus irmãos Jason e Silas e demais familiares por serem um refúgio e conselheiros em momentos de estresse e dificuldades.

Agradeço ao Cristo que me deu vida e me permitiu encontrar por meio da matemática e do método científico uma bela concha em meio ao seu infinito oceano de verdades não descobertas.

“This most beautiful system of the sun, planets, and comets, could only proceed from the counsel and dominion of an intelligent and powerful Being.”

Sir Isaac Newton

Resumo

Esta tese propõe uma teoria cosmológica baseada na geometria de Lyra, que modifica a geometria de Riemann (na qual se baseia a Teoria da Relatividade Geral) ao introduzir uma "função de escala", o qual é um objeto geométrico fundamental que altera a conexão afim, a definição de tensores e as equações de campo.

A partir da sistematização moderna da geometria de Lyra, são discutidos aspectos de simetria com base nas equações de Killing e a métrica obtida para um espaço com simetria máxima é proposta como solução das equações de campo de Lyra na presença de um fluido perfeito. Restringindo-se a um espaço-tempo quadridimensional sem torção, propõe-se uma teoria gravitacional com base na compatibilidade da métrica. As equações de campo modificadas são derivadas de um princípio variacional análogo à ação de Einstein-Hilbert e as soluções resultantes apresentam um vínculo entre o fator de escala do universo e a função de escala de Lyra.

Além disso, dois modelos cosmológicos com base na geometria de Lyra são propostos: o primeiro assume a função de escala de Lyra proporcional ao inverso do fator de escala, de forma a satisfazer o vínculo encontrado nas equações de campo. Essa proposição permite a derivação da distância de luminosidade, que possibilita uma comparação com o modelo Λ CDM. O segundo modelo, baseado em simetria conforme, descreve a função de escala de Lyra assumindo o papel do fator de escala, resultando em equações similares às de Friedmann na Relatividade Geral, com soluções como o universo cíclico e o universo ricocheteante (*bouncing*). Esses modelos sugerem que a expansão do universo pode ser explicada por aspectos puramente geométricos, na geometria de Lyra, sem necessidade de postular a existência de energia escura.

Palavras Chaves: Geometria de Lyra; Simetria Conforme; Cosmologia; Gravidade Modificada; Geometria Diferencial.

Áreas do conhecimento: Física; Gravitação; Cosmologia.

Abstract

This thesis proposes a cosmological theory based on Lyra's geometry, which modifies Riemannian geometry (the bases for General Theory of Relativity) to introduce a "displacement field", a fundamental geometric object that alters the affine connection, the definition of tensors and the field equations.

From the modern systematization of Lyra geometry, aspects of symmetry are discussed based on the Killing equations and the metric obtained for a space with maximum symmetry is proposed as a solution to the Lyra field equations in the presence of a perfect fluid. Restricting ourselves to a torsion-free four dimensional space-time, we propose a metric compatible gravitational theory. The modified field equations are derived from a variational principle similar to the Einstein-Hilbert approach and the resulting solutions present a constraint between the scale factor and the displacement field.

In addition, two cosmological models based on the Lyra's Geometry are proposed. The first assume the displacement field proportional to the inverse of the scale factor, in order to satisfy the constraint found in the field equations. This proposition allows the derivation of the luminosity distance, which leads to a comparison with the Λ CDM model. The second model, based on conformal symmetry, describes the displacement field as the scale factor, resulting in equations similar to Friedmann's equations from General Relativity, having solutions such as the cyclic universe and the bouncing universe. These models suggest that the expansion of the universe can be explained by purely geometric aspects in the Lyra's Geometry, without the need to postulate the existence of dark energy.

Keywords: Lyra Geometry; Conformal Symmetry; Cosmology; Modified Gravity; Differential Geometry.

Areas of Knowledge: Physics; Gravitation; Cosmology.

Índice

1	Introdução	1
1.1	Uma breve história da Cosmologia	1
1.1.1	Antiguidade	1
1.1.2	Idade Média	2
1.1.3	Modernidade	3
1.2	Geometria de Riemann	5
1.2.1	Definição formal	5
1.2.2	Conexão afim	6
1.2.3	Sistema de coordenadas	7
1.2.4	Espaços tangente e cotangente	8
1.3	Geometria de Weyl	9
2	Geometria de Lyra	11
2.1	Proposição original	11
2.2	Estado da arte	15
2.3	Sistematização	16
2.3.1	Variedades	16
2.3.2	Vetores	17
2.3.3	Métrica	18
2.3.4	Covetores	19
2.3.5	Tensores	20
2.3.6	Conexão	21
2.3.7	Curvas autoparalelas	22
2.3.8	As componentes da conexão	23
2.3.9	Curvatura	23
2.3.10	Espaço-tempo de Lyra	24
3	Equações de campo	27
3.1	Espaços simétricos	27
3.1.1	Vetores de Killing	27
3.1.2	Espaços com simetria máxima	28
3.2	Solução das equações de campo	32

3.2.1	Equações de Campo	32
3.2.2	Equações de Friedmann modificadas	36
3.2.3	Determinando a função de escala ϕ	38
4	Modelos cosmológicos	40
4.1	Um primeiro modelo cosmológico	40
4.2	Estimando λ com otimização da verossimilhança	43
4.3	Modelo com simetria <i>conforme</i>	47
5	Conclusão	52
5.1	Aspectos de simetria e soluções das equações de campo	52
5.2	Modelos cosmológicos	53
	Referências	56

Capítulo 1

Introdução

1.1 Uma breve história da Cosmologia

A palavra “Cosmologia” tem origem no grego antigo, sendo uma junção das palavras *kósmos* que significa “mundo” ou “universo” e *lógos*, o sufixo que designa o estudo de algo. O interesse pelo conhecimento do mundo e a curiosidade sobre qual a razão por trás dos fenômenos que observamos ao nosso redor é uma característica inerente ao ser humano. As mais antigas civilizações de diferentes culturas possuíam sua própria Cosmologia, construída com base em suas observações da natureza, seu conhecimento matemático, seus mitos e sua religião.

1.1.1 Antiguidade

Na concepção cosmológica dos hebreus na antiguidade, a Terra e os Céus formam uma unidade dentro de infinitas “águas do caos” e uma cúpula usualmente conhecida como firmamento (hebraico *raqia*, extensão) mantém afastado o oceano das águas externas. Essa descrição é semelhante a que está presente na literatura Babilônica acadiana [1] escrita a cerca de 2300-500 A.C. que contém os mesmos elementos e a Terra é plana e circular. Veja uma ilustração esquemática da Cosmologia dos hebreus da antiguidade na Figura 1.1. A cosmovisão dos babilônicos não era exatamente geocêntrica e havia a ideia da existência de sete céus e sete terras ligados à simbolismos (não como os planetas que conhecemos hoje).

Tal como a maioria das áreas do conhecimento, a sistematização do pensamento a respeito do funcionamento do universo parece ter se iniciado na Grécia antiga. Aristóteles (384-322 A. C.) concebeu uma cosmologia geocêntrica baseada no modelo de Eudoxo de Cnido (408-355 A. C.) em que a Terra é estática, esférica e é cercada por 43 a 55 esferas celestes concêntricas, que são materiais e cristalinas. Em sua obra “Sobre o Céu”, Aristóteles descreve um universo que existe inalterado por toda a eternidade e contém um quinto elemento, chamado éter, além dos quatro elementos clássicos. Nesse período já era conhecido o fato de que a Terra

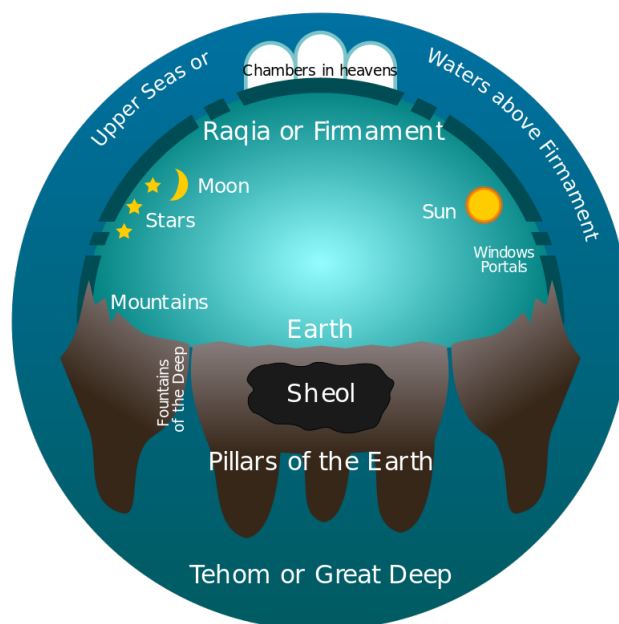


Figura 1.1: Cosmologia dos hebreus na antiguidade. Fonte: By Tom-L - Own work Based on File: Early Hebrew Conception of the Universe.png and several other depictions, including Understanding the Bible, Stephen L. Harris, 2003., CC BY 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=99817773>.

não é plana, porém a ideia de que o Sol orbita a Terra permaneceu dominante até o fim da idade média.

1.1.2 Idade Média

O universo copernicano, descrito pela primeira vez na obra *De revolutionibus orbium coelestium* (Das revoluções das esferas celestes) de 1543, é heliocêntrico, os planetas (incluindo a Terra) orbitam o Sol e a Lua orbita a Terra. Para Copérnico o universo era limitado pela esfera das estrelas fixas. As descobertas de Johannes Kepler (1571-1630) permitiram uma compreensão do Sistema Solar semelhante à que temos hoje (até Saturno), porém os objetos mais distantes ainda eram estrelas fixas presas em uma fina esfera celeste. A concepção de universo que temos hoje envolvendo um espaço muito maior do que o planeta Terra surgiu muito recentemente na história da humanidade, somente na década de 1920, após o Debate Shapley–Curtis, ficou demonstrado que muitas nebulosas eram de fato galáxias distantes. Em 1917 Albert Einstein havia proposto um modelo cosmológico com matéria uniformemente distribuída no qual o espaço é esférico e curvo, baseado na hiperesfera de Riemann. A curvatura é definida pela presença

de uma constante cosmológica equivalente a uma força repulsiva que neutraliza a gravidade, o que resulta no universo em um ponto de equilíbrio instável, podendo colapsar ou expandir indefinidamente após uma perturbação.

1.1.3 Modernidade

O modelo cosmológico mais aceito pela comunidade científica atualmente é chamado Λ CDM (Λ refere-se à constante cosmológica e CDM é a sigla *Cold Dark Matter*, que significa matéria escura fria). Este modelo é uma compilação das diversas contribuições experimentais e teóricas durante o último século, começando com a proposta do matemático e cosmólogo russo Alexander Friedmann e independentemente do padre e astrônomo belga Georges Lemaître, que sugeriram na década de 1920 que o universo teve um início e está em expansão. Lemaître denominou sua teoria de “hipótese do átomo primordial” porém ela ficou mais conhecida popularmente por “teoria do Big Bang” quando Sir Fred Hoyle cunhou este termo em um programa de rádio, em 1950 [2]. Fred Hoyle não acreditava nesta teoria e a tratou como pseudociência, pois a ideia do universo ter um início sugere a necessidade de um criador, no entanto, as observações de Edwin Hubble do afastamento entre galáxias em 1929 [3] forneceram uma evidência experimental para a expansão do universo. Em 1998, Riess et. al. [4] apresentaram dados observacionais do desvio para o vermelho de supernovas que evidenciaram que o universo não apenas está em expansão, mas se expande aceleradamente, esta foi uma das descobertas mais importantes e surpreendentes para a cosmologia moderna.

A presença da constante cosmológica Λ nas equações de campo de Einstein justifica esta expansão acelerada, sua origem é interpretada como a densidade de energia do vácuo, também denominada energia escura. Dados mais recentes como os obtidos pelo satélite Planck em 2018 [5] mostram uma boa consistência com as previsões teóricas feitas pelo Λ CDM. Apesar de se ajustar bem aos dados experimentais este modelo prevê que aproximadamente 95% da densidade de energia do universo atualmente não seja bariônica, isto é, não é formada por átomos ou qualquer partícula fundamental conhecida, sendo $\sim 25\%$ matéria escura e $\sim 70\%$ energia escura. Sendo assim, de acordo com este modelo todas as bilhões de galáxias observadas formadas por incontáveis partículas elementares correspondem apenas a $\sim 5\%$ do universo. Além disso, o valor experimental da constante cosmológica difere em 120 ordens de grandeza do valor teórico, previsto

pela teoria quântica de campos para a energia do vácuo. Este é um problema físico em aberto conhecido como “problema da constante cosmológica”.

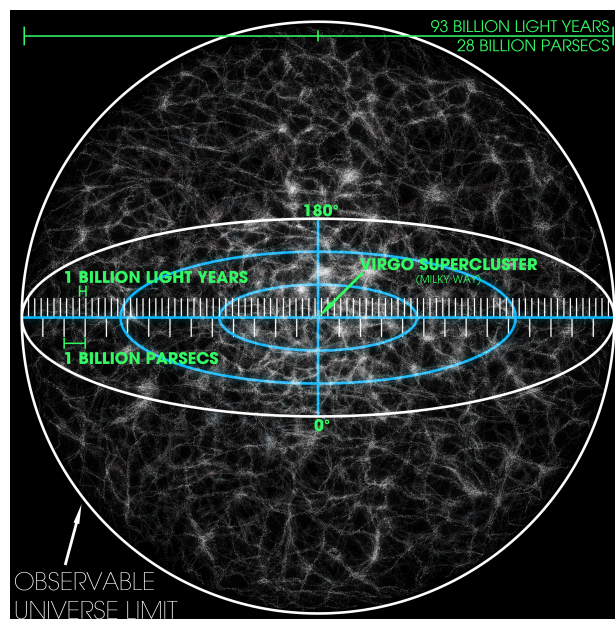


Figura 1.2: Visualização simulada do universo observável com aproximadamente 93 bilhões de anos-luz (ou 28,5 bilhões de parsecs) de diâmetro. Fonte: By Andrew Z. Colvin - Own work, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=13251597>.

Na Figura 1.2 pode-se ver uma simulação computacional do universo observável com aproximadamente 93 bilhões de anos-luz (ou 28,5 bilhões de parsecs) de diâmetro. Note que cada ano-luz equivale a aproximadamente 9,5 trilhões de quilômetros, logo, é extremamente difícil entender com clareza a dimensão do universo observável. A escala da Figura 1.2 é tal que os grãos finos representam coleções de um grande número de superaglomerados de galáxias. O Superaglomerado de Virgem – lar da nossa galáxia Via Láctea – está marcado no centro, mas é muito pequeno para ser visto na imagem.

Dentre os diversos modelos criados ao longo da história da Cosmologia podemos observar que o desenvolvimento de novas técnicas de observação da natureza, aliado à criação de novas estruturas matemáticas, foram fundamentais para os grandes saltos na compreensão do universo. O homem da antiguidade observava a olho nu o movimento dos astros e as estrelas fixas no que aparenta ser uma abóbada sólida que toca o horizonte. Sua geometria rudimentar enfatizava a esfera como objeto mais perfeito, logo, a mais adequada para a grandiosidade do universo. A invenção do cálculo diferencial por Sir Isaac Newton e o advento dos

primeiros telescópios nos levaram ao heliocentrismo e a uma descrição correta das órbitas elípticas dos planetas. Semelhantemente, a geometria de Riemann, na qual se baseia a Relatividade Geral, e os enormes telescópios modernos permitiram a construção do modelo cosmológico padrão. Em nossa geração, a detecção de ondas gravitacionais, a observação da sombra de buracos negros e o lançamento do telescópio espacial James Webb prenunciam uma nova ruptura paradigmática na Cosmologia e Astrofísica. Nesse trabalho tentaremos dar um pequeno passo no entendimento de estruturas matemáticas mais complexas, estudando as soluções cosmológicas em uma geometria mais geral do que a de Riemann, na qual se baseia o modelo Λ CDM.

1.2 Geometria de Riemann

De forma simplificada, podemos pensar na geometria de Riemann como uma extensão da geometria euclidiana para espaços curvos, permitindo-nos medir distâncias, ângulos e curvaturas em espaços de dimensões mais altas e não necessariamente planos [6]. A geometria de Riemann é definida sobre uma variedade de Riemann. Uma variedade de Riemann consiste em um conjunto de pontos que podem ser descritos por coordenadas, semelhante à geometria euclidiana. No entanto, diferentemente da geometria euclidiana¹, uma variedade de Riemann possui uma métrica, que é uma função matemática que associa cada ponto da variedade com um número real, caracterizando o tensor métrico. Esse tensor métrico é responsável por definir a distância entre pontos na variedade, bem como os ângulos entre vetores tangentes em cada ponto. O tensor métrico também é usado para definir a curvatura da variedade, que é um aspecto importante da geometria de Riemann. A curvatura descreve como a variedade muda em diferentes direções em cada ponto e é representada por um tensor chamado tensor de curvatura. A curvatura é uma propriedade fundamental das variedades de Riemann e tem uma série de implicações importantes na física, como a descrição da gravitação na Relatividade Geral.

1.2.1 Definição formal

Formalmente, uma variedade de Riemann é um espaço diferenciável M equipado com uma métrica de Riemann definida no espaço vetorial tangente a um

¹Apesar da geometria euclidiana não possuir uma métrica em sua sistematização original, é possível descrevê-la usando a métrica e as demais entidades da geometria de Riemann.

ponto p qualquer de M , que denotaremos por $T_p M$. Assim, a métrica $g : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, é uma função que leva dois campos vetoriais como entrada e produz um escalar como resultado, definida em pares de espaços tangentes $T_p M$.

A métrica deve ser linear em suas duas entradas, isto é, dados os campos vetoriais X, Y, Z definidos tais que $X_p \in T_p M$ são vetores tangentes para todo $p \in M$ (o mesmo para Y_p e Z_p), o campo tensorial métrico g associa a cada ponto $p \in M$ um tensor métrico g_p tal que $g_p(aX_p + Y_p, Z_p) = ag_p(X_p, Z_p) + g_p(Y_p, Z_p)$, para qualquer número real a . Esta propriedade também é válida para a segunda entrada da métrica. É necessário também que a métrica seja simétrica, o que é garantido matematicamente pela expressão $g_p(X_p, Y_p) = g_p(Y_p, X_p)$. Além disso, a métrica deve ser não degenerada, isto é: para todo vetor tangente $X_p \neq 0$, existe um Y_p tal que $g_p(X_p, Y_p) \neq 0$. Uma métrica que obedece a estas três propriedades (bilinear, simétrica e não-degenerada) permite definir o comprimento de curvas em M e o ângulo entre vetores em $T_p M$, o que por sua vez permite definir o conceito de curvatura.

A norma de um vetor $|\cdot| : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por meio da métrica como $|X_p| = \sqrt{g_p(X_p, X_p)}$ e o produto escalar entre dois vetores X_p e Y_p é, por definição, $g(X_p, Y_p)$. A condição de que a métrica deve ser positivo definida, i. e., $g(X_p, X_p) > 0$, define uma variedade de Riemann, contudo, nos casos de interesse físico esta condição geralmente não é satisfeita. Nessa situação a variedade é chamada de pseudo-riemanniana e o produto escalar definido por $\sqrt{-g_p(X_p, Y_p)}$.

1.2.2 Conexão afim

Com o propósito de conectar diferentes espaços tangentes em uma variedade e assim permitir que campos vetoriais sejam diferenciados ao longo da variedade, introduz-se o objeto geométrico chamado conexão afim. No caso de uma variedade equipada de um tensor métrico, define-se a conexão de Levi-Civita da variedade por meio do transporte de um vetor ao longo de uma curva ou, equivalentemente, prescrevendo uma forma de derivar vetores respeitando a regra de diferenciação de Leibniz e a linearidade do operador derivada. Matematicamente, define-se a conexão afim ∇ como o mapa² bilinear $(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$, tal que, para toda função suave f na variedade M são válidas as propriedades:

²Em geometria diferencial, um mapa é uma função que associa pontos de uma variedade diferenciável a pontos de outra variedade diferenciável. Um mapa bilinear é linear em suas duas entradas, e. g. a métrica.

1. A primeira entrada de ∇ é infinitamente diferenciável em M e linear:

$$\nabla_{fX}Y = f\nabla_XY$$

2. A segunda entrada de ∇ obedece à regra de Leibniz:

$$\nabla_X(fY) = \partial_X f Y + f\nabla_XY,$$

na qual $\partial_X f$ é a derivada direcional de f na direção do campo vetorial X . Particularmente, uma conexão afim ∇ é chamada de conexão de Levi-Civita se ela preserva a métrica na variedade, i. e., $\nabla g = 0$ e se ela é livre de torção: $\nabla_XY - \nabla_YX = [X, Y]$. Aqui, $[X, Y]$ é um operador chamado Colchete de Lie, que é linear, antissimétrico $[X, Y] = -[Y, X]$ e obedece a identidade de Jacobi: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

A curvatura R de uma variedade de Riemann é definida em termos da conexão de Levi-Civita da seguinte forma:

$$R(X, Y)Z = \nabla_X\nabla_YZ - \nabla_Y\nabla_XZ - \nabla_{[X, Y]}Z. \quad (1.1)$$

A curvatura de Riemann mede a taxa de variação da conexão de Levi-Civita em diferentes direções e pode ser usada para calcular o volume de uma região em M , bem como a curvatura média de uma superfície. Em um sistema de coordenadas particular, a curvatura é dada por um tensor de quarta ordem definido em cada ponto p de M .

1.2.3 Sistema de coordenadas

Até agora, os objetos geométricos e as propriedades foram definidas independentes de um sistema de coordenadas, o qual será introduzido a partir deste ponto. Uma carta em uma variedade M é um par (χ, U) em que U é um sub-conjunto aberto de M e $\chi : U \rightarrow \chi(U)$ é um mapa bijetor de U para um sub-conjunto aberto $\chi(U)$ em $\mathbb{R}^N$. Se $\chi(p) = (x^1(p), \dots, x^N(p))$ para todo p em U , então, as funções x^i formam um sistema de coordenadas local.

A definição é feita sobre um sub-conjunto da variedade pois, em geral, são necessárias mais de uma carta para cobrir a variedade M , como por exemplo na descrição do espaço S^2 (superfície esférica bidimensional). Nesse caso são necessários duas cartas: uma que contenha o polo norte e todos os demais pontos com exceção do polo sul e outro que contenha o polo sul e os demais pontos exceto o polo norte.

1.2.4 Espaços tangente e cotangente

Seja $v = X_p$ um vetor tangente ao ponto p que pertence ao campo vetorial $X \in T_p M$. Define-se uma base natural $e_i \equiv \partial_i$ ao espaço tangente $T_p M$, associada à um sistema de coordenadas x_i , tal que um vetor tangente v pode ser escrito em termos de coeficientes v_i como: $v = v^i e_i$. Aqui, utilizamos a notação de Einstein de somatório implícito sobre índices repetidos. A base canônica de um espaço tangente é definida como uma derivada porque o espaço tangente é um espaço vetorial que é definido como o conjunto de todas as derivadas de curvas suaves em uma variedade diferenciável. À estes coeficientes v^i , dá-se o nome de componentes contravariantes do vetor. As componentes contravariantes do tensor métrico em um determinado sistema de coordenadas podem ser obtidas operando a métrica sobre os vetores da base canônica:

$$g_{ij} \equiv g(e_i, e_j), \quad (1.2)$$

de forma que o produto escalar entre dois vetores pode ser escrito como:

$$g(u, v) = g(u^i e_i, v^j e_j) = g_{ij} u^i v^j. \quad (1.3)$$

A métrica permite associar o espaço tangente $T_p M$ ao seu espaço dual $T_p^* M$ chamado de espaço cotangente, o qual está associado à base $\theta^i = dx^i$. Assim como a base canônica de um espaço tangente é definida em termos de derivadas de curvas suaves, a base canônica de um espaço cotangente é definida em termos de diferenciais de funções suaves. Dado um ponto p em uma variedade diferenciável M , o espaço cotangente $T_p^* M$ é o espaço vetorial de todas as formas lineares sobre os vetores do espaço tangente $T_p M$. Isto é, $T_p M$ é o espaço de todas as formas lineares que mapeiam um vetor $v \in T_p M$ em um número real. Assim, relaciona-se à cada vetor u suas componentes covariantes u_i por meio de $u = u_i \theta^i$. Considerando que o produto escalar entre os vetores da base ortonormal é, por definição,

$$g(e_i, \theta^j) = \delta^j_i, \quad (1.4)$$

obtemos que a aplicação da métrica transforma uma componente covariante de um vetor em uma componente contravariante. Isso pode ser demonstrado da

seguinte forma:

$$g(u, e_i) = u_j g(\theta^j, e_i) = u_i. \quad (1.5)$$

Por outro lado, considerando o vetor u em termos das suas componentes contravariantes, temos:

$$g(u, e_i) = u^j g(e_j, e_i) = g_{ij} u^j. \quad (1.6)$$

Logo, obtemos a relação

$$g_{ij} u^j = u_i. \quad (1.7)$$

O leitor atento deve ter notado que na equação (1.5) aplicamos a métrica sobre um elemento do espaço dual θ^j . De fato a métrica pode ser definida como um mapa bilinear $g : T_p M \times T_p M^* \rightarrow \mathbb{R}$ ou ainda $g : T_p M^* \times T_p M^* \rightarrow \mathbb{R}$, o que permite obter as componentes contravariantes g^{ij} e mistas g^i_j do tensor métrico. Não apresentaremos aqui os detalhes técnicos destas definições pois fogem ao escopo do presente trabalho mas cabe ressaltar que estas definições são equivalentes.

1.3 Geometria de Weyl

A geometria de Weyl é uma modificação da geometria diferencial de Riemann que possui uma métrica g_{ij} e um campo vetorial ϕ que é conhecido como campo de Weyl [7]. Ela é caracterizada pela invariância de escala local, o que significa que as medidas físicas não são alteradas por uma transformação local de escala. A geometria de Weyl é uma geometria diferencial em que a métrica é conformemente invariante. Isso significa que a métrica pode ser multiplicada por uma função escalar positiva sem alterar a estrutura geométrica da variedade. Formalmente, se (M, g) é uma variedade de Riemann, então a geometria de Weyl é definida por uma métrica h que difere da métrica original por uma função escalar ϕ , ou seja, $h = e^{2\phi} g$. A função ϕ é conhecida como fator conformal e é uma função real diferenciável em M . A geometria de Weyl é importante em várias áreas da física teórica, como teoria das cordas e cosmologia, pois permite a descrição de campos escalares conformes [8, 9]. Além disso, a geometria de Weyl está relacionada à teorias de calibre, em que a invariância de escala é uma característica importante [10, 11].

A equação que define as componentes da métrica na geometria de Weyl é: $h_{ij} = e^{2\phi} g_{ij}$ onde h_{ij} é a métrica de Weyl e g_{ij} é a métrica de Riemann original. O fator de conformal ϕ é uma função real diferenciável em M . Consequentemente, as componentes do tensor de curvatura de Weyl são dadas pela seguinte equação:

$$C_{ijkl} = R_{ijkl} - 2(g_{i[k}R_{l]j} - g_{j[k}R_{l]i}) + \frac{1}{3}R(g_{i[k}g_{l]j} - g_{j[k}g_{l]i}), \quad (1.8)$$

onde R_{ijkl} é o tensor de curvatura de Riemann, R é a curvatura escalar e C_{ijkl} é o tensor de curvatura de Weyl. O tensor de curvatura de Weyl mede a parte não integrável da curvatura e é invariante sob transformações conformes. A geometria de Lyra, que é parte do objeto de estudo deste trabalho, pode ser considerada uma modificação da geometria de Weyl [12]. Na geometria de Lyra, o conceito de calibre introduzido por Weyl por meio do fator conformal é substituído por uma função de calibre no espaço afim, como veremos no próximo capítulo.

Capítulo 2

Geometria de Lyra

Em 1951 o matemático Gerhard Lyra propôs uma modificação da geometria de Riemann procurando construir uma teoria que fosse invariante sobre transformações generalizadas de calibre [13]. Seu trabalho possui semelhanças com a geometria de Weyl de 1918, porém, ao contrário desta, a geometria de Lyra preserva a integrabilidade de vetores. Lyra propôs que uma função de calibre fosse introduzida como parte da estrutura geométrica de uma variedade, formando o que ele chamou de “sistema de referência”. Um sistema de referência de Lyra é formado pelo sistema de coordenadas como se conhece da geometria de Riemann, em conjunto com a função de calibre introduzida. Lyra elaborou a estrutura de sua geometria diferencial, mas a derivação de equações de campo e as implicações físicas desta nova geometria só foram analisadas anos depois. O físico D. K. Sen em julho de 1957 propôs um modelo cosmológico estático baseado na geometria de Lyra [12]. Este modelo é semelhante ao modelo de universo estático de Einstein, mas mostra um desvio para o vermelho e tem uma densidade finita mesmo sem a introdução de uma constante cosmológica. Iniciaremos este capítulo apresentando a definição da geometria de Lyra tal como desenvolvida pelo seu criador originalmente. Em seguida, introduziremos uma generalização da geometria de Lyra, tal como sistematizada e estudada em nosso grupo de pesquisas.

2.1 Proposição original

Na geometria de Lyra o vetor deslocamento entre um ponto p com coordenadas $x^i, i = 1, 2, \dots, N$ em um espaço N –dimensional, e um ponto infinitesimalmente próximo p' com coordenadas $x^i + dx^i$, não é dado pelos diferenciais dx^i , mas pelos N números

$$\zeta^i = x^0 dx^i. \quad (2.1)$$

Nesse caso, o deslocamento é escalonado por uma função de calibre x^0 que deve ser por definição analítica, não nula e depender das N coordenadas. É importante notar que aqui x^0 não representa uma coordenada temporal, como usualmente nos textos de Relatividade Geral, mas um novo objeto geométrico. Esta é a notação introduzida originalmente por Lyra, posteriormente introduziremos uma notação diferente para evitar erros na definição de um espaço-tempo. Lyra introduz o conceito de sistema de referência (x^i, x^0) com $i = 1, 2, \dots, N$, formado por N coordenadas (sistema de coordenadas) e a função de calibre x^0 . A transformação de um sistema de referência (x^i, x^0) para um sistema $(x^{i'}, x^{0'})$ é definido pelas $n + 1$ funções $x^i = f^i(x^{i'}, \dots, x^{N'}, x^{0'})$ e $x^0 = f^0(x^{i'}, \dots, x^{N'}, x^{0'})$ que devem satisfazer as condições

$$\frac{\partial x^0}{\partial x^{0'}} \neq 0 \quad (2.2)$$

$$\det \left[\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \right] \neq 0. \quad (2.3)$$

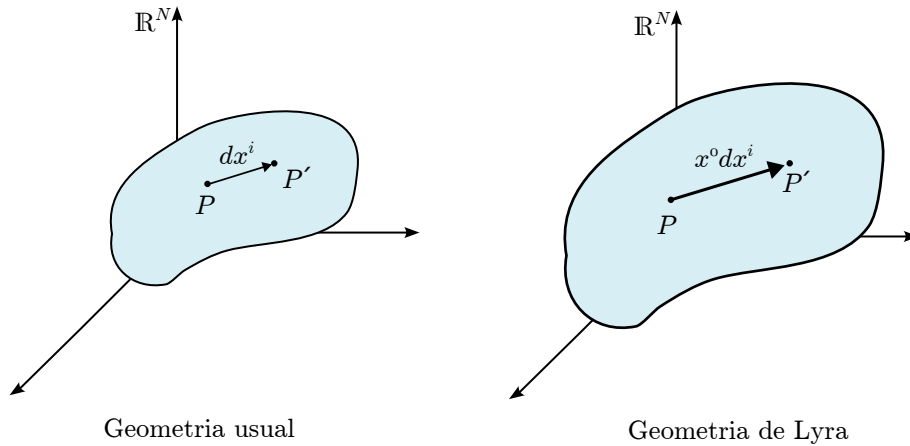


Figura 2.1: Comparação de um deslocamento infinitesimal, em uma variedade N -dimensional, na geometria de Lyra e na geometria usual.

Como consequência da introdução da função de calibre x^0 , que reescala um deslocamento infinitesimal, a regra de transformação de um tensor de ordem $r + s$ é alterada da seguinte forma:

$$A'^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = \left(\frac{x^{0'}}{x^0} \right)^{r-s} \frac{\partial x^{i_1'}}{\partial x^{k_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_r'}}{\partial x^{k_r}} \frac{\partial x^{l_1}}{\partial x^{j_1'}} \cdots \frac{\partial x^{l_s}}{\partial x^{j_s'}} A^{k_1 \dots k_r}_{l_1 \dots l_s}. \quad (2.4)$$

Note que todos os índices latinos indicam as N coordenadas do espaço, não incluem a função de escala x^0 . Contrariando a notação usual dos textos de Relatividade Geral, aqui x^0 não representa a coordenada temporal de um espaço-tempo quadridimensional.

Para cada ponto p em uma variedade na geometria de Lyra, existe um sistema de referência local $(\bar{x}^i, \bar{x}^0)$ tal que, nesse sistema, as componentes de um vetor qualquer $\bar{u}^i$ não se alteram por um transporte paralelo infinitesimal. Este sistema de referência é chamado de geodésica em p e é definido por $\delta \bar{u}^i = 0$. Usando a regra de transformação (2.4), em um sistema de referência qualquer (x^i, x^0) , tem-se:

$$u^i = \frac{x^0}{\bar{x}^0} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} \bar{u}^k, \quad (2.5)$$

logo,

$$\delta u^i = \left(\frac{1}{x^0} \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^n} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^l} \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^k} + \delta_k^i \frac{1}{x^0} \frac{\partial x^0}{\partial x^l} \right) u^k x^0 dx^l. \quad (2.6)$$

Portanto, o transporte paralelo infinitesimal de um vetor, em um sistema de referência qualquer, é definido pela conexão afim

$$\delta u^i = -\tilde{\Gamma}_{kl}^i u^k x^0 dx^l = \left(\frac{1}{2} \delta_k^i \varphi_l - \Gamma_{kl}^i \right) u^k x^0 dx^l. \quad (2.7)$$

Adotando-se o seguinte sistema de referência, os coeficientes $\tilde{\Gamma}_{kl}^i$ podem ser localmente transformados para zero em um ponto $p_\circ = (x_\circ^i)$:

$$x^i - x_\circ^i = \bar{x}^i - \frac{1}{2} \Gamma_{\circ kl}^i \bar{x}^k \bar{x}^l \quad (2.8)$$

$$\frac{x^0}{x_\circ^0} = \bar{x}^0 e^{-\frac{1}{2} \varphi_{\circ k} \bar{x}^k}. \quad (2.9)$$

na qual o objeto $\varphi_{\circ k}$ é definido por:

$$\varphi_{\circ k} = \frac{1}{x_\circ^0} \frac{\partial x^0}{\partial x^k}, \quad (2.10)$$

Assim, a conexão afim na geometria de Lyra é determinada não somente pelas componentes Γ_{kl}^i , mas também pelo campo vetorial de deslocamento φ_k .

O escalar de curvatura na geometria de Lyra é dado por

$$K = \frac{R}{(x^0)^2} + \frac{3}{x^0} \nabla_i \varphi^i + \frac{3}{2} \varphi_i \varphi^i + 2\varphi_{\circ i} \varphi^i \quad (2.11)$$

em que R é o escalar de curvatura da geometria de Riemann e a derivada covariante também é definida da mesma forma, porém substituindo Γ_{kl}^i por $\tilde{\Gamma}_{kl}^i$ dado na equação (2.7) e ∂_i por $1/x^0 \partial_i$. Escolhendo o calibre $x^0 = 1$, o que implica em $\varphi_{\circ} = 0$, o escalar de curvatura é simplificado para

$$K = R + 3\nabla_i \varphi^i + \frac{3}{2} \varphi_i \varphi^i. \quad (2.12)$$

Este escalar de curvatura pode ser usado para construir uma teoria de campo a partir da densidade lagrangiana que se segue:

$$L = K \sqrt{-g}, \quad (2.13)$$

a qual, por sua vez, dá origem às equações de campo

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R + \frac{3}{2} \varphi_i \varphi_k - \frac{3}{4} \varphi_l \varphi^l = -k T_{ik}. \quad (2.14)$$

Assumindo a existência de uma métrica esfericamente simétrica e estática

$$ds^2 = dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.15)$$

e um campo de deslocamento do tipo tempo $\varphi_k = (0, 0, 0, \beta)$, Sen obteve soluções para as equações de campo de Lyra [12]. Em um modelo de fluido ideal de pressão p e densidade ρ , usando as equações de campo 2.14 e a lei de conservação para T_{ij} ele derivou o seguinte vínculo para o deslocamento β :

$$k\rho = -3\beta^2. \quad (2.16)$$

Portanto, para $\beta^2 > 0$ a densidade do fluido é negativa. Sen considerou que seria absurdo um fluido com densidade negativa e mostrou que a lei de Hubble é satisfeita neste modelo para β imaginário puro. Considerando a distância d entre dois pontos, ele demonstrou que o desvio para o vermelho espectral de um

comprimento de onda λ é dado por

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{\beta}{2i}d, \quad (2.17)$$

logo, $\beta/2 = 2H_0$ e H_0 é a constante de Hubble. Assim, pode-se notar dois pontos interessantes nesta teoria: o primeiro é que há desvio para o vermelho mesmo em um modelo de fluido ideal estático e o segundo é que o desvio para o vermelho está associado com a presença da função de calibre x^0 introduzida por Lyra como um elemento fundamental da teoria.

2.2 Estado da arte

A teoria de Lyra tanto para o calibre $x^0 = 1$ como para o caso mais geral vem sendo amplamente estudada desde a sua proposição [12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20] e continua sendo um tópico de pesquisas ativo em cosmologia [21, 22, 23, 24]. Por exemplo, modelos FRW foram estudados na teoria cosmológica baseada na geometria de Lyra de forma que uma nova classe de soluções exatas foi obtida considerando uma função de escala dependente do tempo para modelos de parâmetros de desaceleração constante do universo [18].

Foram obtidas soluções exatas das equações de Sen (2.14) na geometria de Lyra para parâmetro de desaceleração constante, nos quais o campo $\beta(t)$ e a densidade de energia $\rho(t)$ foram examinadas tanto para a lei de potência quanto para expansão exponencial em um universo plano e com curvatura diferente de zero [19]. Nesses casos, o termo $\beta(t)$, o qual tem origem na função de escala x^0 , tem o mesmo efeito da constante cosmológica Λ presente nas equações de Einstein, porém com uma origem geométrica para a expansão. Além disso, as soluções exatas das equações de campo de Sen (2.14) para energia escura, foram analisadas no contexto da simetria local rotacional, considerando a métrica de Bianchi tipo I e sob a suposição da anisotropia do fluido [20].

Este estudo mostrou que há uma expansão exponencial volumétrica dentro da variedade de Lyra tanto para o caso de um campo β uniforme, como para uma dependência temporal. Em ambos os casos foi constatado que o universo se aproxima da isotropia monotonicamente, mesmo com a presença de anisotropia no modelo de fluido. Após um determinado tempo, o fluido se torna isotrópico e evolui para um estágio de expansão exponencial tal como modelos com constante cosmológica.

Na próxima seção será introduzida uma sistematização da geometria de Lyra, que resulta em modificações mais fundamentais do que as estudadas na literatura supracitada. Essa sistematização foi necessária devido ao fato de que nos trabalhos mencionados acima a abordagem dos autores partiu das equações de campo de Sen (2.14), de tal modo que não foram considerado na literatura aspectos geométricos fundamentais.

2.3 Sistematização

Nosso grupo de pesquisas tem trabalhado em uma sistematização da geometria de Lyra [25, 26, 27, 28], que propõe modificações nas estruturas geométricas mais gerais do que as que vimos na Seção 2.1, a qual apresentaremos a partir desta seção.

2.3.1 Variedades

Uma variedade de Lyra M é um subconjunto do espaço $\mathbb{R}^N$ com $N \in \mathbb{Z}_+^*$ que pode ser descrita por uma (ou mais de uma) carta de Lyra (U, χ, Φ) . Aqui, U é um subconjunto de M , $\chi : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ é um mapa injetivo que associa cada ponto de U a um ponto em $\mathbb{R}^N$ (N é a dimensão de M) e $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ é um mapa de escala, que associa um número real a cada ponto do subconjunto U . Note que a definição da carta de Lyra é semelhante a feita na geometria de Riemann, porém adicionando-se um mapa de escala. Aplicando χ em um ponto p do subconjunto U da variedade, obtêm-se um sistema de coordenadas formado pela n -upla $(x(p)^1, x(p)^2, \dots, x(p)^N) \equiv x$, o qual deve respeitar as propriedades topológicas de M .

O mapa de escala deve ser, por definição, infinitamente diferenciável e relaciona cada um dos pontos de U a um número real positivo $\phi(x) = \Phi(p)$. Dessa forma, define-se um sistema de referência por $(\phi, x^1(p), x^2(p), \dots, x^N(p))$ o qual é formado por um sistema de coordenadas e uma função de escala. Note que aqui há uma diferença na notação da função de escala em relação à equação (2.1), com o propósito de evitar que este seja confundido com a coordenada temporal x^0 quando construirmos um espaço-tempo de Lyra. O campo de deslocamento $\phi(x)$ também não deve ser confundido com o campo vetorial de deslocamento φ_k introduzido por Lyra, o qual está presente na equação (2.7).

Um sistema de referência em particular é suficiente para descrever uma su-

perfície suave, porém não é necessário que um sistema de referência parametrize por completo uma variedade M . Um conjunto de cartas (U_k, χ_k, Φ_k) , com $k = 1, 2, \dots, I$ tal que $M \subset \bigcup_{k \in I} U_k$ e tal que quaisquer dois sistemas referenciais de Lyra são suavemente conectados, define um atlas de Lyra.

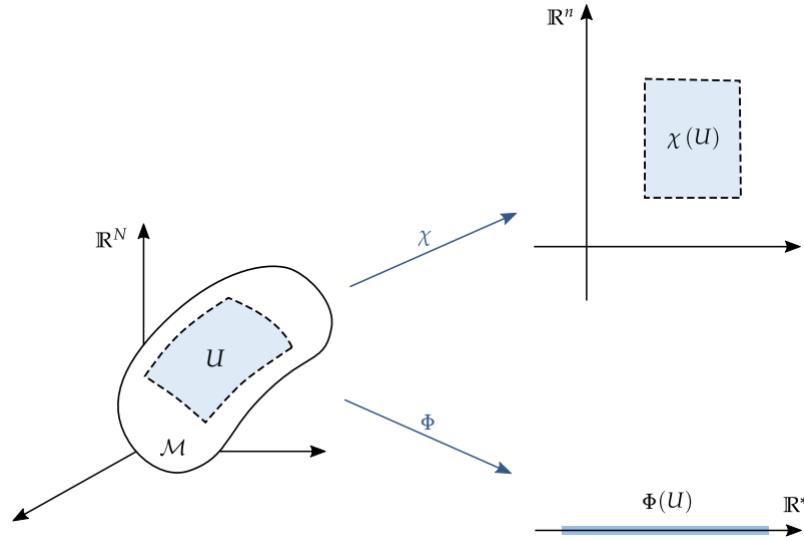


Figura 2.2: Representação do sistema de referência de uma variedade de Lyra. Fonte: [25].

Uma variedade diferenciável na geometria de Lyra M é um subconjunto de $\mathbb{R}^N$ equipado com uma estrutura diferenciável, isto é, um atlas maximal. Um atlas é dito maximal sempre que existir uma carta (U, χ, Φ) que possa ser conectada suavemente a todas as demais cartas do atlas (U_k, χ_k, Φ_k) e que pertença ao atlas em questão, isto é, $(U, \chi, \Phi) = (U_k, \chi_k, \Phi_k)$ para algum $k \in I$. Assim, um atlas maximal comporta todas as possíveis mudanças de coordenadas suaves na variedade M .

2.3.2 Vetores

De forma semelhante ao que apresentamos na Seção 1.2 para a variedade de Riemann, nesta seção introduziremos o conceito de vetores tangentes na geometria de Lyra. Em uma variedade diferenciável de Lyra M , uma curva é definida como o mapeamento de um intervalo fechado em um subconjunto unidimensional da variedade $\alpha : [a, b] \rightarrow M$. Dado um ponto tal que $p = \alpha(0)$, o vetor tangente à curva α é, por definição, a derivada direcional de um mapa diferenciável $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada ponto da variedade a um número real. Logo, dado um campo

vetorial X , o vetor tangente $v = X_p$ é dado por

$$vF = \left. \frac{dF(\alpha)}{dt} \right|_p, \quad (2.18)$$

em que $t \in [a, b]$ é um parâmetro para a curva α . Define-se o espaço vetorial tangente $T_p M$ como o conjunto de vetores gerados por todas as curvas na variedade M que passam por p . Um sistema de referência de Lyra $(\phi, x^1, x^2, \dots, x^N)$ está relacionado à uma base para natural para o espaço vetorial $T_p M$, definida por

$$e_i \equiv \frac{1}{\phi(x)} \partial_i. \quad (2.19)$$

Tal como na geometria de Riemann, um vetor pode ser decomposto em termo dos elementos da base canônica tal que $v = v^i e_i$, logo, as componentes covariantes de um vetor na geometria de Lyra serão dadas por:

$$v^i = \phi(x) \left. \frac{dx^i}{dt} \right|_{t=0}. \quad (2.20)$$

Como consequência da introdução da função de escala na base canônica, a lei de transformação de um vetor na geometria de Lyra, de um sistema de referência (ϕ, x^i) para outro sistema de referência $(\phi', x^{i'})$ também será alterada para

$$v^{i'} = \frac{\phi'(x')}{\phi(x)} \frac{dx^{i'}}{dx^j} v^j. \quad (2.21)$$

Além disso, na geometria de Lyra a comutatividade dos elementos da base depende da escolha do sistema de referência, sendo dada por

$$[e_i, e_j] = \gamma_{ij}^k e_k, \quad (2.22)$$

em que $\gamma_{ij}^k \equiv \phi^{-2}(\delta_i^k \partial_j \phi - \delta_j^k \partial_i \phi)$. Note que o caso particular $\phi = 1$ permite recuperar a estrutura de comutatividade da geometria de Riemann $[e_i, e_j] = 0$.

2.3.3 Métrica

Tal como na geometria de Riemann, o produto escalar será generalizado na geometria de Lyra a partir da introdução da métrica g . Sejam v e u dois vetores tangentes pertencentes ao mesmo espaço vetorial $T_p M$, então, o produto interno

entre estes vetores será denotado por $g(v, u)$. A métrica na variedade de Lyra deve ser simétrica, isto é,

$$g(v, u) = g(u, v). \quad (2.23)$$

Além disso, a métrica deve ser bilinear:

$$g(\lambda v + \mu u, w) = \lambda g(v, w) + \mu g(u, w), \quad (2.24)$$

para quaisquer escalares λ e μ e também não degenerada, de forma que o único vetor ortogonal à todos os demais é o vetor nulo. Isso é garantido desde que,

$$g(v, u) = 0, \quad (2.25)$$

para todo vetor $u \neq 0 \in T_p M$ se, e somente se, $v = 0$. Introduzindo um sistema de referência e sua base canônica, pode-se obter as componentes da métrica por:

$$g_{ij} = g(e_i, e_j), \quad (2.26)$$

as quais são funções suaves das coordenadas definidas em cada ponto da variedade. Logo, estende-se a definição de produto interno

$$g(v, u) = g(e_i, e_j) v^i u^j = g_{ij} v^i u^j, \quad (2.27)$$

e consequentemente, de comprimento de um vetor e ângulos entre vetores

$$|v| \equiv \sqrt{g(v, v)}, \quad (2.28)$$

tal como desejado para uma geometria diferencial.

2.3.4 Covetores

Define-se um covetor em um ponto p da variedade M como o mapa linear $w : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ de forma que o conjunto de todos os covetores no ponto p formam um espaço vetorial chamado de espaço dual e denotado por $T_p^* M$. O espaço dual também é chamado de espaço cotangente e está associado a uma base ortonormal em relação a base do espaço tangente. Pode-se mostrar por meio da derivada de curvas suaves na variedade, que a base do espaço cotangente na geometria de

Lyra é dada por

$$\theta^i = \phi(x) dx^i. \quad (2.29)$$

Dessa forma, um covetor w pode ser escrito em termos de suas componentes covariantes

$$w = w_i \theta^i. \quad (2.30)$$

A métrica permite relacionar elementos do espaço tangente com o espaço dual tal como na geometria de Riemann,

$$g_{ij} w^j = u_i. \quad (2.31)$$

De forma prática, a contração da métrica com um índice de um vetor ou covetor implica em abaixar ou levantar o respectivo índice. A lei de transformação de um covetor na geometria de Lyra, de um sistema de referência (ϕ, x^i) para outro sistema de referência (ϕ', x'^i) também será alterada para

$$w'_i = \frac{\phi(x)}{\phi'(x')} \frac{dx^j}{dx'^i} w_j. \quad (2.32)$$

Logo, suas componentes se transformam covariantemente, tal como esperado.

2.3.5 Tensores

Generalizando a definição de vetores e covetores pode-se definir tensores sobre a variedade de Lyra M . Um tensor misto T de ordem (k, l) é um mapa multilinear

$$T : \underbrace{T_p M \otimes \cdots \otimes T_p M}_{k\text{-fatores}} \times \underbrace{T_p^* M \otimes \cdots \otimes T_p^* M}_{l\text{-fatores}} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.33)$$

o qual pode ser representado por suas componentes

$$T = T_{j_1, j_2, \dots, j_l}^{i_1, i_2, \dots, i_k} \theta^{i_1} \otimes \cdots \otimes \theta^{i_k} e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_l}, \quad (2.34)$$

em uma base canônica. Dessa forma, um vetor é um tensor contravariante de ordem 1 e a métrica é g_{ij} um tensor covariante de ordem 2. As componentes de um

tensor misto de ordem (k, l) na geometria de Lyra obedecem a lei de transformação

$$T'^{i_1, i_2 \dots i_k}_{j_1, j_2 \dots j_l}(x') = \left(\frac{\phi'(x')}{\phi(x)} \right)^{k-l} \frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x_{m_1}} \cdots \frac{\partial x'^{i_k}}{\partial x_{m_k}} \frac{\partial x^{n_1}}{\partial x'_{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{n_l}}{\partial x'_{j_l}} T^{m_1, m_2 \dots m_k}_{n_1, n_2 \dots n_l}(x), \quad (2.35)$$

a qual é uma generalização da regra de transformação de tensores da geometria de Riemann. Esta regra permite uma definição análoga das quantidades tensoriais importantes para a construção de modelos físicos, como veremos a seguir.

2.3.6 Conexão

Na geometria de Lyra a conexão afim ∇ é definida da mesma maneira que na geometria de Riemann, ou seja, como o mapa linear em suas duas entradas $T_p M \otimes T_p M \rightarrow T_p M$. A conexão associa dois campos vetoriais (X, Y) ao vetor $\nabla_X Y$, tal que, para toda função suave f na variedade M são válidas as propriedades:

$$\nabla_f X Y = f \nabla_X Y, \quad (2.36)$$

$$\nabla_X(fY) = \partial_X f Y + f \nabla_X Y, \quad (2.37)$$

na qual $\partial_X f$ é a derivada direcional de f na direção do campo vetorial X . Assim, a conexão permite estender para variedade de Lyra M a operação de derivada, respeitando a regra de Leibniz.

As componentes da conexão na geometria de Lyra são definidas por

$$\Gamma^i_{lk} e_i \equiv \nabla_{e_k} e_l, \quad (2.38)$$

o que leva à definição de derivada covariante na variedade M aplicada sobre um vetor contravariante

$$\nabla_i v^j = \frac{1}{\phi} \partial_i v^j + \Gamma^j_{ki} v^k. \quad (2.39)$$

É importante destacar que, além da presença da função de escala ϕ , a derivada covariante é alterada pelas componentes da conexão que são diferentes, em geral, em relação a geometria de Riemann. Além disso, a conexão afim na variedade de Lyra não é simétrica, logo, a ordem dos índices inferiores deve ser respeitada.

Semelhantemente,

$$\nabla_i w_j = \frac{1}{\phi} \partial_i w_j - \Gamma_{ji}^k w_k, \quad (2.40)$$

é a derivada covariante das componentes covariantes de um vetor. As expressões acima podem ser extendidas para a derivação de tensores de ordem mais alta pelo acréscimo dos termos correspondentes a cada índice, tal como na geometria de Riemann.

2.3.7 Curvas autoparalelas

Diz-se que uma curva é autoparalela caso seu vetor tangente v seja paralelamente transportado em relação a sua própria curva geradora, ou seja, se $\nabla_v v = 0$ sobre a curva. Na geometria de Lyra, esta equação diferencial toma a forma

$$\frac{d^2 x^i}{d\lambda^2} + \left(\phi \Gamma_{jk}^i + \phi^{-1} \partial_k \phi \delta_j^i \right) \frac{dx^j}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda}. \quad (2.41)$$

Por outro lado, uma geodésica é uma curva cuja distância é estacionária sob variações infinitesimais fixas nos extremos. Considerando o elemento de linha infinitesimal na variedade de Lyra

$$ds^2 = \phi^2 g_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.42)$$

pode-se mostrar que a equação da geodésica é

$$\frac{d^2 x^i}{d\lambda^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} \frac{dx^j}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda} + \phi^{-1} \left(\partial_j \phi \delta_k^i + \partial_k \phi \delta_j^i - \partial_l \phi g^{il} g_{jk} \right) \frac{dx^j}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda}. \quad (2.43)$$

Nesta expressão, $\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}$ é o símbolo de Christoffel de segundo tipo, tal como definido na Relatividade Geral

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{il} (\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{jk}). \quad (2.44)$$

Portanto, nem sempre uma curva autoparalela é uma geodésica, ao contrário do que ocorre na variedade de Riemann. Esta equivalência pode ser recuperada considerando o caso particular $\phi = 1$. Como a equação da geodésica difere da equação do transporte paralelo, não é trivial distinguir qual delas descreve o mo-

vimento de uma partícula teste em um campo gravitacional, por exemplo. Seriam necessárias validações experimentais para determinar qual delas é a adequada. Portanto, a escolha da geodésica ou da curva auto-paralela como o movimento natural de uma partícula configura uma hipótese adicional na construção de uma teoria escalar-tensorial de gravitação na variedade de Lyra.

2.3.8 As componentes da conexão

A forma mais geral para a conexão afim na geometria de Lyra permite que a métrica não seja necessariamente compatível, isto é, $\nabla_v g \neq 0$ e que o tensor de torção $\tau = \nabla_u v - \nabla_v u - [u, v]$ seja não nulo. Contudo, no presente trabalho nos restringiremos à uma variedade de Lyra na qual a compatibilidade da métrica é válida e que não há torção. Nesse caso, as componentes da conexão podem ser escritas em termo dos símbolos de Christoffel como

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{\phi} \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} + \phi^{-2} \left(\delta_j^i \partial_k \phi - g_{jk} \partial^i \phi \right). \quad (2.45)$$

Aqui podemos ver que o caso $\phi = 1$ também permite recuperar a condição de igualdade entre o símbolo de Christoffel e as componentes da conexão afim que há na Relatividade Geral. Além disso, a escolha de um espaço sem torção e compatível permite recuperar a equivalência entre a equação da geodésica (2.44) e equação do transporte paralelo (2.41). Isto pode ser visto substituindo diretamente a equação (2.45) na equação (2.41), de modo que uma teoria de gravitação análoga à Relatividade Geral possa ser construída.

2.3.9 Curvatura

A curvatura na geometria de Lyra também é definida da mesma forma que na geometria de Riemann, isto é, como o mapa linear $R : T_p M \otimes T_p M \otimes T_p M \rightarrow T_p M$, tal que

$$R(u, v)w \equiv \nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_u w - \nabla_{[v, u]} w. \quad (2.46)$$

Em um sistema de referência de Lyra em particular, as componentes do tensor de curvatura podem ser calculadas em termos das componentes da conexão afim, as

quais são dadas por:

$$R^i_{jkl} = \frac{1}{\phi^2} \partial_k (\phi \Gamma^i_{jl}) - \frac{1}{\phi^2} \partial_l (\phi \Gamma^i_{jk}) + \Gamma^m_{jl} \Gamma^i_{mk} - \Gamma^m_{jk} \Gamma^i_{ml}. \quad (2.47)$$

Igualmente, o tensor de Ricci na variedade de lyra é a contração do tensor de curvatura $R_{jk} \equiv R^i_{jki}$ e o escalar de curvatura o seu traço $R \equiv g^{jk} R_{jk}$. O escalar de curvatura de Lyra pode ser escrito em termos do escalar de curvatura de Riemann, o qual denotaremos por $\mathcal{R}$, de forma que

$$R = \frac{1}{\phi^2} \mathcal{R} + \frac{6}{\phi} \nabla_j \nabla^j \phi - \frac{12}{\phi^2} \nabla_j \phi \nabla^j \phi, \quad (2.48)$$

em que $\nabla_j \phi \equiv \phi^{-1} \partial_j \phi$. Estas quantidades serão usadas para a construção de um espaço-tempo quadridimensional sobre uma variedade de Lyra e na derivação de equações de campo com base em um princípio variacional.

2.3.10 Espaço-tempo de Lyra

Até o momento, as definições apresentadas são válidas para um espaço N -dimensional descrito pelas $N + 1$ funções (ϕ, x^j) , com $j = 1, 2, \dots, N$ em um sistema de referência de Lyra. A partir deste ponto substituiremos os índices latinos por índices gregos $\mu = 0, 1, 2, 3$ para denotar o espaço-tempo de Lyra, cuja coordenada temporal será representada pelo índice 0. Nesse caso, a distância infinitesimal entre dois eventos no espaço-tempo de Lyra fica definida por

$$ds^2 = \phi^2 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.49)$$

A presença da função de escala ϕ no elemento de linha é fundamental para que este seja invariante sobre a transformação de um sistema de referência para outro. A teoria gravitacional que será objeto de estudo neste trabalho é uma generalização da Relatividade Geral para a geometria de Lyra, já que assumiremos as mesmas hipóteses de ausência de torção e compatibilidade da métrica. Portanto, a forma natural para a ação do campo gravitacional é

$$S = \int d^4x \phi^4 \sqrt{-g} (R + 2\mathcal{K}L_m), \quad (2.50)$$

a qual generaliza a ação de Einstein-Hilbert. Aqui $\mathcal{K}$ é uma constante. Aplicando o princípio da mínima ação, as equações de campo obtidas para a métrica são:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} + 2\phi\nabla_\mu\nabla_\nu\phi - 2\phi g_{\mu\nu}\nabla_\lambda\nabla^\lambda\phi + 3g_{\mu\nu}\nabla_\lambda\phi\nabla^\lambda\phi = \mathcal{K}\phi^2T_{\mu\nu}, \quad (2.51)$$

na qual o tensor energia-momento é definido por

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\phi^4\sqrt{-g}L_m)}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.52)$$

Como ϕ e $g_{\mu\nu}$ são campos independentes, temos:

$$\frac{\delta\phi}{\delta g_{\mu\nu}} = 0, \quad (2.53)$$

logo, a definição do tensor energia momento será a mesma da geometria de Riemann:

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}L_m)}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.54)$$

Variando a ação em relação ao campo ϕ , obtêm-se a equação diferencial

$$6\phi\nabla_\mu\nabla^\mu\phi - 12\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi + \mathcal{R} = -\mathcal{K}\phi^2T, \quad (2.55)$$

sendo que a quantidade T é o traço do tensor energia momento $T \equiv g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$. As equações de campo da relatividade geral podem ser recuperadas considerando o limite $\phi = 1$, tal como ocorre nas expressões para a conexão e para a equação da geodésica.

Além disso, as equações de campo de Lyra possuem um limite newtoniano bem definido, de modo que as equações de campo tendem a uma equação de Poisson e a equação da geodésica gera uma lei de força conservativa no limite de campo fraco [25, 27, 28]. Logo, a teoria gravitacional da forma como apresentamos não exclui a gravitação newtoniana, mas a generaliza de forma semelhante ao que ocorre na Relatividade Geral.

A teoria de Lyra também admite soluções exatas esféricamente simétricas e estáticas, que generalizam a solução de Schwarzschild das equações de campo de Einstein [26]. O estudo das geodésicas e do movimento de partículas teste na geometria de Lyra mostra que a predição para a precessão do periélio de

Mercúrio é a mesma que a prevista pela Relatividade Geral em primeira ordem de aproximação [25]. Portanto, há indícios de que uma teoria de gravitação embasada na geometria de Lyra forneça uma descrição dos fenômenos gravitacionais na escala do Sistema Solar equivalente a teoria da Relatividade Geral. No próximo capítulo passaremos a discutir as soluções cosmológicas para as equações de campo que foram apresentadas nessa seção, iniciando pelo estudo de espaços com máxima simetria na geometria de Lyra.

Capítulo 3

Equações de campo

Neste capítulo discutiremos os aspectos de simetria na geometria de Lyra por meio das equações de Killing e apresentaremos a solução das equações de campo para uma métrica de um espaço-tempo com máxima simetria.

3.1 Espaços simétricos

Tanto na geometria de Riemann como na geometria de Lyra, o campo gravitacional em geral não é invariante sob transformações como rotações e translações, todavia, espaços simétricos podem ser construídos de forma que a métrica permaneça invariante ao passar por uma transformação infinitesimal de coordenadas. Em particular, espaços com simetria máxima, ou também chamados *maximamente simétricos*, são importantes para o estudo da cosmologia. Nesta seção discutiremos as propriedades de simetria da métrica de maneira independente de qualquer sistema de coordenadas na geometria de Lyra, de forma análoga ao que é feito na Relatividade Geral [29].

3.1.1 Vetores de Killing

Uma quantidade importante para o estudo das simetrias de um espaço métrico são os chamados vetores de Killing, os quais são vetores gerados por uma transformação infinitesimal de sistema de referência que preserva a forma da métrica. Esses vetores satisfazem certas propriedades que permitem determinar a simetria do espaço em questão, assim iniciaremos este estudo pela construção dos vetores de Killing. Uma transformação geral de sistema de referência $(x, \phi) \rightarrow (x', \phi')$ que mantém invariante a forma das componentes do tensor métrico é chamada de *isometria*. Este tipo de transformação é caracterizado por

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\phi'^2}{\phi^2} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta}(x'), \quad (3.1)$$

a qual implica em vínculos para x' e ϕ' . De forma geral, estes vínculos podem ser bastante genéricos e não permitem nenhuma conclusão direta sobre a simetria do espaço métrico, porém, é interessante considerarmos uma transformação infinitesimal

$$\begin{cases} x'^{\mu} \rightarrow x^{\mu} + \epsilon \xi^{\mu}(x) \\ \phi'(x') \rightarrow \phi(x) + \epsilon \Psi(x) \end{cases} \quad (3.2)$$

em que $\epsilon \ll 1$. Nesse caso, a expansão da equação (3.1) desprezando os termos de ordem ϵ^2 ou superior, fornece

$$\frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} g_{\mu\beta}(x) + \frac{\partial \xi^{\nu}}{\partial x^{\beta}} g_{\alpha\nu}(x) + \xi^{\lambda} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}} = -2g_{\mu\nu} \frac{\Psi}{\phi}. \quad (3.3)$$

Definindo $\xi_{\nu} = g_{\mu\nu} \xi^{\mu}$, a equação (3.3) pode ser reescrita como:

$$\nabla_{\mu} \xi_{\nu} + \nabla_{\nu} \xi_{\mu} + \xi_{\mu} \nabla_{\nu} \phi + \xi_{\nu} \nabla_{\mu} \phi = 2g_{\mu\nu} \left(\xi_{\lambda} \nabla^{\lambda} \phi - \frac{\Psi}{\phi} \right). \quad (3.4)$$

esta é a equação que define um *vetor de Killing* na geometria de Lyra, um importante objeto matemático que permite o estudo das propriedades de simetria de um espaço independentemente de um sistema de coordenadas particular. Qualquer combinação linear entre vetores de Killing, isto é,

$$\sum_n c_n \xi_{\mu}^n, \quad (3.5)$$

com c_n constante, é também um vetor de Killing. Em um espaço de dimensão N há N vetores ξ_{μ}^n e $N(N+1)/2$ componentes independentes para $\nabla_{\mu} \xi_{\nu}$, devido à simetria nos índices μ e ν imposta pela equação (3.4). Portanto, um espaço N -dimensional pode conter no máximo $N(N+3)/2$ vetores de Killing independentes, ao contrário da geometria de Riemann na qual um espaço de dimensão N pode conter $N(N+1)/2$ vetores de Killing devido a antissimetria da equação de Killing.

3.1.2 Espaços com simetria máxima

Usando os vetores de Killing pode-se definir matematicamente os conceitos de homogeneidade e isotopia para espaços curvos. Um espaço métrico é denominado homogêneo se existe uma isometria infinitesimal que transforma um

ponto qualquer X em qualquer outro ponto que pertença a sua vizinhança imediata. Em um espaço homogêneo N –dimensional existem N vetores de Killing independentes que satisfazem

$$\xi_{\mu}^{(\nu)}(X; X) = \delta_{\mu}^{\nu}, \quad (3.6)$$

na qual o índice ν indica diferentes vetores dentre os N existentes e o índice μ indica as diferentes componentes de um mesmo vetor. Além disso, diz-se que um espaço é isotrópico em um determinado ponto X se existe uma isometria infinitesimal que mantém o ponto X fixo, de forma que $\xi_{\mu}(X) = 0$ e para o qual $\nabla_{\nu}\xi_{\mu}(X)$ assume quaisquer valores possíveis. Devido à condição de simetrização (3.4), em um espaço N –dimensional há $N(N+3)/2$ vetores de Killing independentes $\xi_{\lambda}^{(\mu\nu)}(x, X) = \xi_{\lambda}^{(\nu\mu)}(x, X)$ tais que

$$\begin{aligned} \xi_{\lambda}^{(\mu\nu)}(X, X) &= 0, \\ \partial_{\rho}\xi_{\lambda}^{(\mu\nu)}(x, X)|_{x=X} &= \delta_{\rho}^{\mu}\delta_{\lambda}^{\nu}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Destas propriedades decorre o importante fato de que qualquer espaço isotrópico em todos os pontos é também homogêneo. Um espaço métrico N –dimensional na geometria de Lyra, para o qual existe o número máximo de vetores de Killing $2N$ é chamado de *espaço maximamente simétrico*, como, por exemplo, um espaço que é homogêneo e ao mesmo tempo isotrópico em um determinado ponto X . Isto segue da quantidade de vetores de Killing independentes que espaços homogêneos e isotrópicos possuem, como mostrado acima. Como qualquer espaço isotrópico em todos os pontos é também homogêneo, pode-se depreender que qualquer espaço isotrópico em todos os pontos é também maximamente simétrico. Pode-se provar também que a recíproca é verdadeira, isto é, todo espaço maximamente simétrico é necessariamente homogêneo e isotrópico em todos os seus pontos.

Embora espaços que não possuem simetria máxima apareçam em determinados problemas de interesse físico, em muitos casos é possível encontrar subespaços maximamente simétricos que formam o espaço métrico em questão. Por exemplo, no estudo da cosmologia aparecem espaços-tempo cuja métrica é homogênea e isotrópica nas coordenadas espaciais e há dependência apenas temporal. Nesses casos, as seções formadas por tempos constantes são hiper-superfícies que formam espaços maximamente simétricos. Considerando um espaço N –dimensional composto por um subespaço maximamente simétrico de dimensão $M < N$ pode-se

escolher um sistema de referências tal que (ϕ, u^i) , com $i = 1, 2, \dots, M$ descrevem o subespaço maximamente simétrico e as $M - N$ coordenadas restantes são fixadas como v^a . No caso de um espaço-tempo homogêneo e isotrópico quadridimensional as três coordenadas espaciais $u^1 = r$, $u^2 = \theta$, $u^3 = \varphi$ e a função de escala ϕ formam um subespaço maximamente simétrico e a coordenada a ser fixada é a temporal $u^0 = t \equiv v^0$, com v^0 constante. No caso geral, os subespaços formados por seções constantes v^a serão maximamente simétricos se a métrica do espaço todo $g_{\mu\nu}$ for invariante sob as seguintes transformações infinitesimais:

$$\begin{cases} u^i \rightarrow u^{i'} = u^i + \epsilon \zeta^i(u, v), \\ \phi(u, v) \rightarrow \phi'(u', v') = \phi(u, v) + \epsilon \Psi(u, v) \\ v^a \rightarrow v^{a'} = v^a. \end{cases} \quad (3.8)$$

Estas transformações são semelhantes às transformações (3.2), porém nesse caso os vetores de Killing associados às coordenadas v^a são nulos: $\zeta^a(u, v) = 0$. Note que, nesta seção usaremos os índices i, j, k para indicar as coordenadas do subespaço maximamente simétrico u e os índices a, b, c para denotar as coordenadas v restantes. Considerando a equação (3.8) como uma isometria da métrica $g_{\mu\nu}$, a equação de Killing modificada para a geometria de Lyra (3.3) fornece:

$$\frac{\partial \zeta^k(u, v)}{\partial u^i} g_{kj}(u, v) + \frac{\partial \zeta^k(u, v)}{\partial u^j} g_{ki}(u, v) + \zeta^k(u, v) \frac{\partial g_{ij}(u, v)}{\partial u^k} = -2g_{ij} \frac{\Psi}{\phi}, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \zeta^k(u, v)}{\partial u^i} g_{ka}(u, v) + \frac{\partial \zeta^k(u, v)}{\partial v^a} g_{ik}(u, v) + \zeta^k(u, v) \frac{\partial g_{ia}(u, v)}{\partial u^k} = -2g_{ia} \frac{\Psi}{\phi}, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \zeta^k(u, v)}{\partial v^a} g_{kb}(u, v) + \frac{\partial \zeta^k(u, v)}{\partial v^b} g_{ka}(u, v) + \zeta^k(u, v) \frac{\partial g_{ab}(u, v)}{\partial u^k} = -2g_{ab} \frac{\Psi}{\phi}. \quad (3.11)$$

A equação (3.9) garante que $g_{ij}(u, v)$ é a métrica para o subespaço cujos vetores de Killing são ζ_k , de modo que para v fixo, $g_{ij}(u, v)$ é homogênea e isotrópica em u . Pode-se mostrar [29] que é possível escolher um referencial $u'(u, v)$ tal que $g'_{ia} = 0$. Nesse caso, as equações (3.10) e (3.11) fornecem

$$\frac{\partial \zeta^k(u, v)}{\partial v^a} = 0, \quad (3.12)$$

logo, $\zeta^k = \zeta^k(u)$ e também

$$\zeta^k \frac{\partial g_{ab}}{\partial u^k} = -2g_{ab} \frac{\Psi}{\phi}. \quad (3.13)$$

Assim, na geometria de Lyra, a métrica g_{ab} pode depender de forma geral tanto de u como de v , porém dependerá apenas de u no caso em que a função de escala ϕ é invariante ($\Psi = 0$). Além disso, para cada v_0 fixo, há $N(N+3)/2$ vetores de Killing para a métrica $g_{ij}(u, v)$ que também são vetores de Killing da métrica $\tilde{g}_{ij}(u, v_0)$ tal que pode-se escrever

$$g_{ij}(u, v) = f(v, v_0) \tilde{g}_{ij}(u, v_0). \quad (3.14)$$

Portanto, para qualquer espaço métrico que obedeça as condições impostas acima pode-se escolher as coordenadas u^i de forma que a métrica do espaço de dimensão N seja dada por

$$ds^2 = \phi^2 g_{ab}(v) dv^a dv^b + \phi^2 f(v) \tilde{g}_{ij}(u) du^i du^j, \quad (3.15)$$

em que $\tilde{g}_{ij}(u)$ é a métrica do subespaço de dimensão M e depende apenas das coordenadas u^i . O fato de que os vetores de Killing para as coordenadas v^a serem nulos nos permite determinar a forma de $\tilde{g}_{ij}(u)$ e, portanto, reescrever a equação (3.15) como

$$ds^2 = \phi^2 g_{ab}(v) dv^a dv^b + \phi^2 f(v) \left[du^2 + \frac{k (u_j du^j)^2}{1 - ku^2} \right], \quad (3.16)$$

na qual

$$k = \begin{cases} +1 & \text{subespaço com } K > 0 \\ -1 & \text{subespaço com } K < 0 \\ 0 & \text{subespaço com } K = 0 \end{cases}. \quad (3.17)$$

Nesta expressão K é a constante de curvatura do subespaço descrito pelas coordenadas u^i , a qual é proporcional ao escalar de curvatura R deste mesmo subespaço. Para o caso especial do espaço-tempo homogêneo e isotrópico que mencionamos anteriormente, a equação (3.16) fornece

$$ds^2 = \phi^2 dt^2 - \phi^2 a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right], \quad (3.18)$$

que é a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) modificada pela função de escala da geometria de Lyra. Note que a métrica FLRW modificada foi derivada apenas considerando os aspectos de simetria do espaço-tempo e as

propriedades dos vetores de Killing, sem a necessidade das equações de campo de Lyra. No entanto, resta saber se esta métrica também é uma solução das equações de campo para um fluido perfeito com densidade uniforme, tal como ocorre na Relatividade Geral.

3.2 Solução das equações de campo

Nesta seção verificaremos se a métrica apresentada em (3.18) é solução das equações de campo de Lyra (2.51) na presença de um fluido ideal e discutiremos quais as implicações da presença da função de escala ϕ para a evolução temporal.

3.2.1 Equações de Campo

Consideraremos uma variedade em que a função de escala dependa apenas do tempo $\phi \equiv \phi(t)$, de modo que a métrica

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} \left(1, -a^2/(1-kr^2), -a^2r^2, -a^2r^2 \sin^2(\theta) \right), \quad (3.19)$$

dá origem as seguintes componentes da conexão afim (por meio da equação (2.45)):

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \frac{1}{\phi} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{\phi}}{\phi} \right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2a^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^1 = \frac{1}{\phi} \begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{\phi}}{\phi} \right) & 0 & 0 \\ \frac{\dot{a}}{a} & \frac{kr}{(1-kr^2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r(kr^2 - 1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (kr^2 - 1)r \sin^2(\theta) \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^2 = \frac{1}{\phi} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{\phi}}{\phi} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{\dot{a}}{a} & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta) \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^3 = \frac{1}{\phi} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{\phi}}{\phi}\right) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & 0 & \cot(\theta) \\ \frac{\dot{a}}{a} & \frac{1}{r} & \cot(\theta) & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

Contraindo a equação (2.47) pode-se obter as componentes do tensor de Ricci na geometria de Lyra:

$$R_{00} = \frac{3}{\phi^2} \left[\frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi} + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{\phi}}{\phi} - \frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2} \right], \quad (3.24)$$

$$R_{11} = -\frac{1}{(1-kr^2)\phi^2} \left[\frac{5\dot{\phi}a\ddot{a}}{\phi} + \frac{a^2\dot{\phi}^2}{\phi^2} + a\ddot{a} + \frac{a^2\ddot{\phi}}{\phi} + 2k + 2\dot{a}^2 \right], \quad (3.25)$$

$$R_{22} = -\frac{r^2}{\phi^2} \left[\frac{5\dot{\phi}a\ddot{a}}{\phi} + \frac{a^2\dot{\phi}^2}{\phi^2} + a\ddot{a} + \frac{a^2\ddot{\phi}}{\phi} + 2k + 2\dot{a}^2 \right], \quad (3.26)$$

$$R_{33} = -\frac{r^2 \sin^2(\theta)}{\phi^2} \left[\frac{5\dot{\phi}a\ddot{a}}{\phi} + \frac{a^2\dot{\phi}^2}{\phi^2} + a\ddot{a} + \frac{a^2\ddot{\phi}}{\phi} + 2k + 2\dot{a}^2 \right]. \quad (3.27)$$

A equação (2.48) permite o cálculo do escalar de curvatura para o modelo em questão, o qual é dado por

$$R = \frac{6}{a^2\phi^2} \left[a\ddot{a} + \dot{a}^2 + \frac{3a\dot{a}\dot{\phi}}{\phi} + \frac{a^2\ddot{\phi}}{\phi} + k \right]. \quad (3.28)$$

Consideraremos nesta solução o tensor energia-momento definido pela equação (2.54) o qual para um fluido ideal de densidade ρ e pressão p é dado por:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (3.29)$$

em que u_μ é a quadrivelocidade na geometria de Lyra:

$$u_\mu = \phi \frac{dx_\mu}{ds}. \quad (3.30)$$

A quadrivelocidade é normalizada de forma que $u_\mu u^\mu = 1$, logo, as componentes

do tensor energia momento são:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -pg_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -pg_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -pg_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Nesse caso, as equações de campo (2.51) fornecem:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \phi^2 \mathcal{K} \frac{\rho}{3}, \quad (3.32)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 - 2 \left(\frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2} + \frac{\dot{\phi}\dot{a}}{\phi a} + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{\phi}}{\phi} \right) + \frac{k}{a^2} = -\phi^2 \mathcal{K} p. \quad (3.33)$$

na qual $\mathcal{K}$ é uma constante e p e ρ podem depender do tempo. Já a equação de campo (2.55) para ϕ se torna

$$\frac{\ddot{\phi}}{\phi} + \frac{\ddot{a}}{a} + 3 \frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -\frac{k}{a^2}. \quad (3.34)$$

Além disso, a lei de conservação para o tensor momento energia $\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$, nesse caso resulta em

$$(p + \rho) \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{\phi}}{\phi} \right) + \frac{\dot{\rho}}{3} = 0. \quad (3.35)$$

Considerando a equação de estado $w\rho = p$, com w constante, temos que

$$\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{\phi}}{\phi} = \frac{\dot{\rho}}{3\rho(1+w)}, \quad (3.36)$$

a qual pode ser reescrita como uma derivada total

$$\frac{d}{dt} \left[\ln a + \ln \phi + \frac{1}{3(1+w)} \ln \rho \right] = 0, \quad (3.37)$$

logo, integrando esta expressão temos:

$$(a\phi)^{-3(1+w)} = C_0 \rho. \quad (3.38)$$

Aqui C_0 é uma contante de integração e o valor de w varia de acordo com a

natureza do fluido em questão. Para o caso de poeira (partículas não interagentes à uma velocidade pequena comparada a velocidade da luz) $w = 0$, por tanto:

$$\rho_m = C_m (a\phi)^{-3}. \quad (3.39)$$

Já para radiação e partículas com velocidades próximas a da luz, o tensor energia momento dado pela equação (2.54) pode ser calculado a partir da densidade lagrangiana para o campo eletromagnético

$$\mathcal{L}_R = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (3.40)$$

em que $F^{\mu\nu}$ é o tensor do campo eletromagnético. Assim,

$$\delta S_R = \int \phi^4 d^4x \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_R)}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_R)}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right] \right\} \delta g^{\mu\nu}. \quad (3.41)$$

Pelo princípio da mínima ação $\delta S_R = 0$, temos que

$$\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_R)}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_R)}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_R)}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right], \quad (3.42)$$

consequentemente, encontra-se

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_R)}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_R)}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right] \right\}. \quad (3.43)$$

Observe que a densidade lagrangiana depende somente de $g^{\mu\nu}$ e não de $\partial_\lambda g^{\mu\nu}$, logo

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_R)}{\partial g^{\mu\nu}}, \quad (3.44)$$

então,

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} + F^\alpha_\mu F_{\alpha\nu}. \quad (3.45)$$

Portanto, o traço $T^\mu_\mu = 0$. Por outro lado, a equação (3.31) mostra que $T^\mu_\mu = \rho - 3p$, logo para radiação $w = 1/3$, de modo que

$$\rho_r = C_r (a\phi)^{-4}. \quad (3.46)$$

Esse resultado para a evolução da densidade de matéria e energia é semelhante ao que ocorre na geometria de Riemann, porém modificado pela presença da função de escala $\phi(t)$. Aqui não introduziremos uma constante cosmológica associada à energia do vácuo, tal como é feito na Teoria da Relatividade Geral, pois queremos analisar o efeito gravitacional da função de escala.

3.2.2 Equações de Friedmann modificadas

Note que a equação a equação (3.32) é a primeira equação de Friedmann modificada:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 = \phi^2 \mathcal{K} \frac{\rho}{3} - \frac{k}{a^2}. \quad (3.47)$$

Subtraindo as equações (3.32) e (3.33) encontra-se a segunda equação de Friedmann modificada:

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{\phi}}{\phi} - \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 + \frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi} = -\phi^2 \frac{\mathcal{K}}{2} \left(\frac{\rho}{3} + p\right). \quad (3.48)$$

Introduzindo o parâmetro de Hubble

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.49)$$

e um parâmetro análogo para ϕ

$$H_\phi \equiv \frac{\dot{\phi}}{\phi}, \quad (3.50)$$

pode-se reescrever as duas equações de Friedmann modificadas como

$$(H + H_\phi)^2 = \phi^2 \mathcal{K} \frac{\rho}{3} - \frac{k}{a^2}, \quad (3.51)$$

$$\dot{H} + \dot{H}_\phi + (H + H_\phi)^2 - H_\phi^2 - HH_\phi = -\phi^2 \frac{\mathcal{K}}{2} \left(\frac{\rho}{3} + p\right). \quad (3.52)$$

Introduzindo os parâmetros

$$\Omega = \frac{\mathcal{K}\rho}{3H^2}, \quad (3.53)$$

$$\Omega_\phi = -\frac{(H_\phi^2 + 2HH_\phi)}{H^2}, \quad (3.54)$$

pode-se reescrever a equação (3.51) em uma forma mais familiar para a cosmologia:

$$\frac{k}{a^2 H^2} = \phi^2 \Omega + \Omega_\phi - 1. \quad (3.55)$$

A equação (3.55) mostra que na geometria de Lyra a função de escala é um fator crucial na determinação da curvatura do espaço-tempo e para o parâmetro de expansão. O sinal de k determina a curvatura do espaço: se $\Omega_\phi + \phi^2 \Omega > 1$, então $\kappa > 0$ e o espaço-tempo é fechado, enquanto que, para $\Omega_\phi + \phi^2 \Omega < 1$, $\kappa < 0$ e o espaço-tempo é aberto. Para o caso $\Omega_\phi + \phi^2 \Omega = 1$, temos $\kappa = 0$ e o espaço-tempo é plano. Dados experimentais coletados pelo satélite Planck em 2018 [5] apresentam o valor de $\Omega_\Lambda = 0,6847 \pm 0,0073$ (contribuição do vácuo) e $\Omega = 0,3166 \pm 0,0084$ implicando que $\Omega_\Lambda + \Omega \approx 1$. Na geometria de Lyra, o papel da energia do vácuo é desempenhado pelo parâmetro Ω_ϕ , de forma que ainda é necessário determinar ϕ^2 na equação (3.55) para estabelecer qual a curvatura do espaço-tempo.

Separando as contribuições de matéria e radiação e também considerando o valor atual do parâmetro de Hubble H_0 , a equação de Friedmann modificada (3.51) pode ser escrita como:

$$H^2 = H_0^2 \left(\phi^2 \Omega_r a^{-4} + \phi^2 \Omega_m a^{-3} + \Omega_k a^{-2} + \Omega_\phi \right), \quad (3.56)$$

em que $\Omega_k = -k/H_0^2$. Avaliando esta expressão no tempo presente ($t = t_0$), resulta no seguinte vínculo:

$$1 = \phi_0^2 \Omega_{r0} + \phi_0^2 \Omega_{m0} + \Omega_{k0} + \Omega_{\phi 0}, \quad (3.57)$$

De modo que os coeficientes de matéria bariônica e radiação são escalonados pelo valor atual da função de escala.

Por outro lado, as equações de Friedmann da Relatividade Geral, para um espaço-tempo em expansão devido a presença de uma constante cosmológica Λ fornecem

$$H^2 = H_0^2 \left(\Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_k a^{-2} + \Omega_\Lambda \right), \quad (3.58)$$

Para que a presença da função de escala ϕ reproduza os efeitos cosmológicos da constante Λ , deve-se ter:

$$\Omega_\Lambda = \Omega_\phi - (1 - \phi^2)(\Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3}). \quad (3.59)$$

Esta equação pode ser usada como um vínculo para que os efeitos cosmológicos da geometria de Lyra reproduzam a expansão acelerada do universo tal como descrito pelo modelo cosmológico Λ CDM.

3.2.3 Determinando a função de escala ϕ

Para determinarmos ϕ é necessário retornarmos às equações de campo. Note que as equações (3.32), (3.33) e (3.34) formam o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} 2\frac{\dot{\phi}\dot{a}}{\phi a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2} = -\frac{k}{a^2} + \phi^2 \mathcal{K} \frac{\rho}{3}, \\ 4\frac{\dot{\phi}\dot{a}}{\phi a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2} + 2\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\ddot{\phi}}{\phi} = -\frac{k}{a^2} - \phi^2 \mathcal{K} p, \\ 3\frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2} + \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{k}{a^2}. \end{cases} \quad (3.60)$$

Eliminando os termos com derivadas de segunda ordem em ϕ e a , resulta

$$\begin{cases} \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} + \frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{k}{a^2} + \phi^2 \mathcal{K} p, \\ \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} + \frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{k}{a^2} + \phi^2 \mathcal{K} \frac{\rho}{3}, \end{cases} \quad (3.61)$$

das quais encontra-se $\phi^2(\rho - 3p) = 0$. Para $\phi \neq 0$ temos que $\rho = 3p$, que satisfaz a condição forte de energia para um fluido perfeito. Por outro lado, é necessário encontrar uma solução para ϕ que obedeça a equação

$$\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} + \frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{k}{a^2} + \phi^2 \mathcal{K} p. \quad (3.62)$$

Usando a equação de estado e a solução da equação de continuidade (3.46) para $\rho(a, \phi)$, resulta:

$$\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} + \frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{k}{a^2} + \phi^2 \mathcal{K} w (a\phi)^{-3(1+w)}. \quad (3.63)$$

Portanto, a solução para ϕ dependerá da constituição do fluido, se matéria ou radiação e da forma particular de $a(t)$.

Consideremos inicialmente o caso em que o universo é dominado por matéria

bariônica ($w = 0$). Nesta situação, a equação (3.63) se torna

$$\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} + \frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{k}{a^2}, \quad (3.64)$$

Para um universo plano, isto é, com $k = 0$ a solução desta equação é simplesmente $\phi \propto a$. Nos casos em que $k = \pm 1$, temos:

$$\phi(t) = ca(t)e^{\pm \int a^{-1}(t)dt}, \quad (3.65)$$

em que c é uma constante de integração. Portanto, para um universo dominado por matéria a função de escala ϕ dependerá da integral do fator de escala e não pode ser determinado diretamente.

Considerando um universo dominado por radiação, tal que $w = 1/3$ a equação (3.63) se torna:

$$\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} + \frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{k}{a^2} + \frac{\mathcal{K}}{3} \frac{1}{a^4 \phi^2}, \quad (3.66)$$

a qual não é uma equação diferencial separável nas variáveis a e ϕ . Contudo, para situações em que o fator de escala seja conhecido em função do tempo pode ser possível obter $\phi(t)$. Por exemplo, para $a(t) = t^{1/2}$ (universo plano e dominado por radiação na geometria de Riemann) a equação (3.66) fornece $\phi(t) = t^{-1/2}$. Note que, nesse caso temos $\phi = a^{-1}$. Não somente isso, a equação (3.63) admite uma solução da forma $\phi \propto a^{-1}$ para casos mais gerais de $a(t)$ sob certas circunstâncias. Na próxima seção utilizaremos esse fato para construir um modelo cosmológico baseado na geometria de Lyra.

Capítulo 4

Modelos cosmológicos

Neste capítulo analisaremos dois modelos cosmológicos baseado na geometria de Lyra e calcularemos quantidades observáveis para uma validação dos modelos. O primeiro modelo será desenvolvido a partir da relação entre o fator de escala e a função de escala. Já o segundo será construído tendo como princípio a invariância sob transformações de simetria conforme para a métrica.

4.1 Um primeiro modelo cosmológico

Inicialmente propõe-se como modelo cosmológico a escolha da função de escala em particular

$$\phi = \lambda a^{-1}, \quad (4.1)$$

em que λ é uma constante arbitrária, a equação (3.63) fornece:

$$-\frac{k}{a^2} + \lambda^2 \frac{\mathcal{K}}{a^2} w = 0. \quad (4.2)$$

Para $\lambda^2 = \mathcal{K}^{-1}$, temos

$$w = k. \quad (4.3)$$

Portanto, a composição do fluido do universo determina diretamente a sua curvatura nesse modelo. Um universo dominado por matéria ($w = 0$) implica em um espaço-tempo plano, já um universo dominado por energia escura ($w = -1$) deve possuir curvatura negativa.

Além disso, nesse modelo temos $H_\phi = -H$ de modo que a equação (3.54) fornece $\Omega_\phi = 1$. Como consequência a equação de Friedmann modificada (3.56)

se torna

$$H^2 = H_0^2 \left(\lambda^2 \Omega_r a^{-6} + \lambda^2 \Omega_m a^{-5} + \Omega_k a^{-2} + 1 \right), \quad (4.4)$$

e o vínculo entre os parâmetros de densidade no tempo presente (3.57) é

$$\lambda^2 \Omega_{m0} + \lambda^2 \Omega_{r0} + \Omega_{k0} = 0. \quad (4.5)$$

Cabe destacar a diferença deste modelo em relação ao modelo cosmológico Λ CDM que é baseado na geometria de Riemann: aqui os parâmetros de densidade (a menos do fator λ^2) somam zero, enquanto no Λ CDM sua soma é 1.

A equação (4.4) pode ser usada para o cálculo do observável chamado distância de luminosidade que relaciona a luminosidade absoluta de um objeto com o fluxo observado. A distância de luminosidade no sistema internacional de unidades pode ser calculada por

$$d_L(z) = (1+z)c \int_0^z \frac{1}{H(z')} dz', \quad (4.6)$$

Na qual z é o desvio para o vermelho de uma linha espectral. Por sua vez, o desvio para o vermelho é definido pela equação

$$a = \frac{1}{1+z}, \quad (4.7)$$

logo, a distância de luminosidade no presente modelo será

$$d_L(z) = (1+z) \frac{c}{H_0 \lambda} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{\Omega_r (1+z')^6 + \Omega_m (1+z')^5 + \Omega_k (1+z')^2 + \lambda^2}} dz'. \quad (4.8)$$

Para um universo com $k = 0$, considerando novamente $\lambda^2 = \mathcal{K}^{-1}$, ou em unidades S.I. $\lambda^2 = \frac{c^2}{8\pi G}$, resulta

$$d_L(z) = (1+z) \frac{\sqrt{8\pi G}}{H_0} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{\Omega_r (1+z')^6 + \Omega_m (1+z')^5 + 8\pi G/c^2}} dz'. \quad (4.9)$$

A expressão para a distância de luminosidade no modelo cosmológico Λ CDM, que está fundamentado na Teoria da Relatividade Geral, é

$$d_{L\Lambda}(z) = (1+z) \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{\Omega_r (1+z')^4 + \Omega_m (1+z')^3 + \Omega_\Lambda}} dz'. \quad (4.10)$$

A distância de luminosidade permite o cálculo do parâmetro de distância modular μ que é uma quantidade observável. A distância modular é definida por:

$$\mu \equiv 25 + 5 \log_{10} (d_L / \text{Mpc}) . \quad (4.11)$$

A Figura 4.1 mostra uma comparação entre a distância modular no modelo de gravidade modificada pela geometria de Lyra definido acima, com o modelo Λ -CDM e valores experimentais coletados a partir de supernovas do tipo Ia pela colaboração Pantheon+SH0ES [30]. Os valores de desvio para o vermelho considerados são z entre 0.01 e 2.26. Como podemos claramente notar, o modelo Λ CDM se ajusta melhor aos dados experimentais da distância modular μ em relação ao modelo simples proposto nessa seção a partir da equação (4.1). Apesar disso, este modelo serve como base para o processo de encontrar outras soluções mais elaboradas.

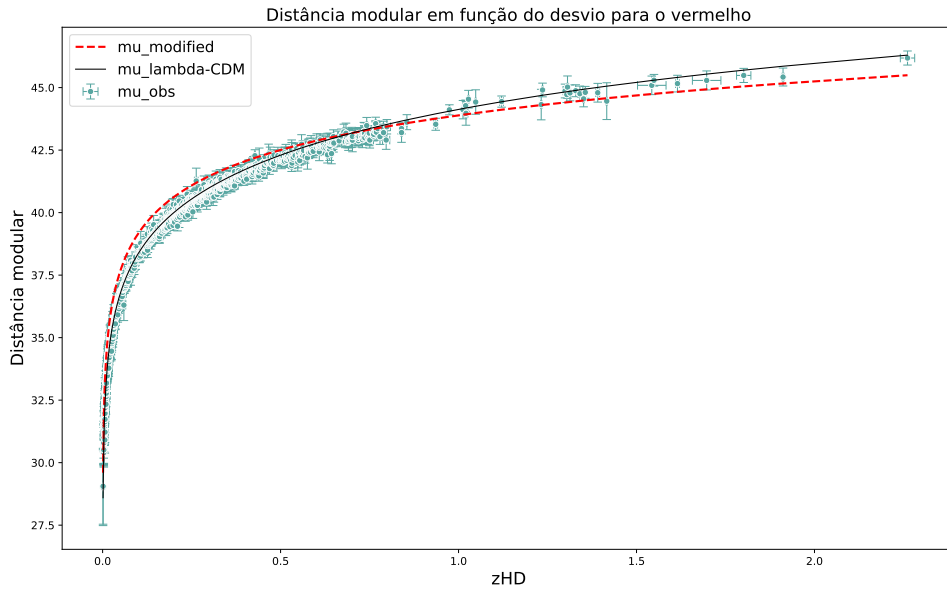


Figura 4.1: Comparação entre a distância modular no modelo simples proposto, dado por (4.9), com o modelo Λ CDM dado por (4.10) e dados experimentais de supernovas tipo Ia.

4.2 Estimando λ com otimização da verossimilhança

Nesta seção usaremos os dados de distâncias de luminosidade do Pantheon + SH0ES [30] de 1701 Supernovas para estimar parâmetros cosmológicos. Os parâmetros que nos interessam são a constante de Hubble H_0 , a fração de densidade de matéria Ω_m e parâmetro λ , que é uma quantidade geométrica na geometria de Lyra definido na seção anterior. O conjunto de parâmetros cosmológicos será calculado dadas as distâncias experimentais das supernovas, de forma que obteremos os valores dos parâmetros que maximizam a distribuição de verossimilhança.

O modelo teórico para a distância de luminosidade será

$$d_L(z) = (1+z) \frac{1}{H_0 \lambda} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{\Omega_r(1+z')^6 + \Omega_m(1+z')^5 + \lambda^2}} dz', \quad (4.12)$$

Que é o mesmo da equação (4.9) porém sem relacionar o valor de λ com a constante de proporcionalidade das equação de campo de Lyra. Nesse caso, iniciaremos com a proposta

$$\lambda^2 = 1 - \Omega_m - \Omega_r \quad (4.13)$$

que se baseia na fração de energia escura Ω_Λ do modelo Λ CDM. Porém, este será apenas o valor inicial que será usado na otimização da probabilidade, sendo que o valor de λ será determinado pelo algoritmo de regressão. Para que todos os valores a serem estimados tenham a mesma ordem de magnitude, estimaremos o parâmetro h definido por

$$H_0 = h \times 100 \text{Km/sMpc}. \quad (4.14)$$

Para efetuar a integração numérica da expressão (4.12) foi utilizado o algoritmo ‘quad’ da biblioteca ‘scipy’ da linguagem de programação Python. O algoritmo ‘quad’ utiliza métodos de quadratura de Gauss-Kronrod adaptativos. O método de quadratura de Gauss-Kronrod é uma fórmula de integração numérica de mais alta acurácia algébrica [31]. Isso significa que ele ajusta dinamicamente os pontos e os pesos de integração para obter uma aproximação precisa da integral.

A função de verossimilhança considerada é uma gaussiana

$$\ln [\mathcal{L}(\theta|x)] \propto -\frac{1}{2} \left((\mu_\theta - \mu_x)^T \cdot C^{-1} \cdot (\mu_\theta - \mu_x) \right), \quad (4.15)$$

na qual μ_θ é a distância modular calculada pela integração numérica da equação (4.12), μ_x são os dados experimentais da distância de luminosidade e C a matriz de covariância.

Para otimizar a função de verossimilhança, o método de Nelder-Mead foi escolhido. O método Nelder-Mead é um algoritmo para encontrar o mínimo de uma função em um espaço multidimensional. Este método não requer o cálculo de gradientes, tornando-o adequado para problemas onde as derivadas não estão disponíveis ou demandam alto processamento para serem calculadas.

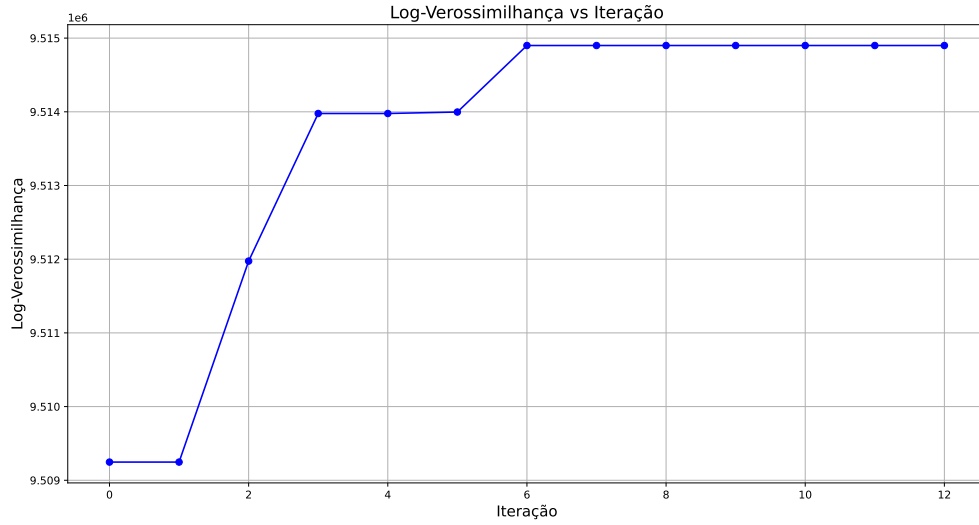


Figura 4.2: Valores da distribuição de verossimilhança em função do número de iterações do algoritmo de otimização de Nelder-Mead.

Como pode-se ver na Figura 4.3, os valores otimizados dos parâmetros cosmológicos Ω_m , h e λ^2 parecem gerar uma curva que se ajusta melhor aos pontos observados experimentalmente. Para comprovar isto, calcularemos o percentual de pontos dentro de 1σ , os resíduos e o parâmetro qui-quadrado reduzido χ^2_ν , comparando os valores obtidos com a otimização da distribuição de verossimilhança deste modelo em relação ao modelo Λ CDM.

O parâmetro de estatística qui-quadrado reduzido χ^2_ν é definido por

$$\chi^2_\nu = \frac{\chi^2}{\nu}, \quad (4.16)$$

na qual χ^2 é uma soma ponderada dos desvios quadráticos médios:

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(O_i - C_i)^2}{\sigma_i^2}, \quad (4.17)$$

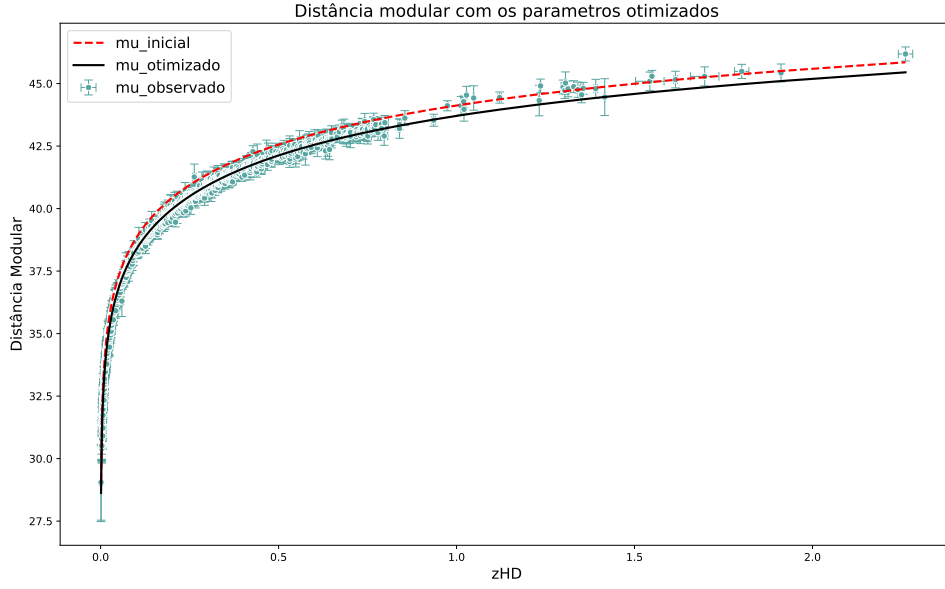


Figura 4.3: Comparação entre a distância modular teórico e experimental, considerando o valor inicial proposto com o valor otimizado para os parâmetros cosmológicos.

que recebe como entrada: a variância σ_i^2 , as observações experimentais O , e os dados calculados C . O número de graus de liberdade, $\nu = n - m$ é igual a o número de observações n menos o número de parâmetros ajustados m .

Efetuando o cálculo, temos que

$$\chi_{\nu\text{CDM}}^2 = 0.00792, \quad (4.18)$$

$$\chi_{\nu\text{OPT}}^2 = 0.00416. \quad (4.19)$$

Comparando o valor de χ_{ν}^2 para o modelo teórico otimizado e ΛCDM , podemos ver que o otimizado é muito menor. Um valor menor de qui-quadrado reduzido em geral indica um melhor ajuste do modelo aos dados, mas também pode indicar um ajuste excessivo, onde o modelo ajusta o ruído nos dados em vez de capturar a tendência subjacente. Portanto, embora geralmente seja desejável buscar um pequeno valor reduzido de qui-quadrado, é crucial equilibrar a complexidade do modelo e a qualidade do ajuste para evitar ajuste excessivo.

Na Figura 4.5 pode-se notar, pela comparação dos resíduos entre os modelos, que há muito mais pontos sobre a curva no modelo otimizado do que no modelo

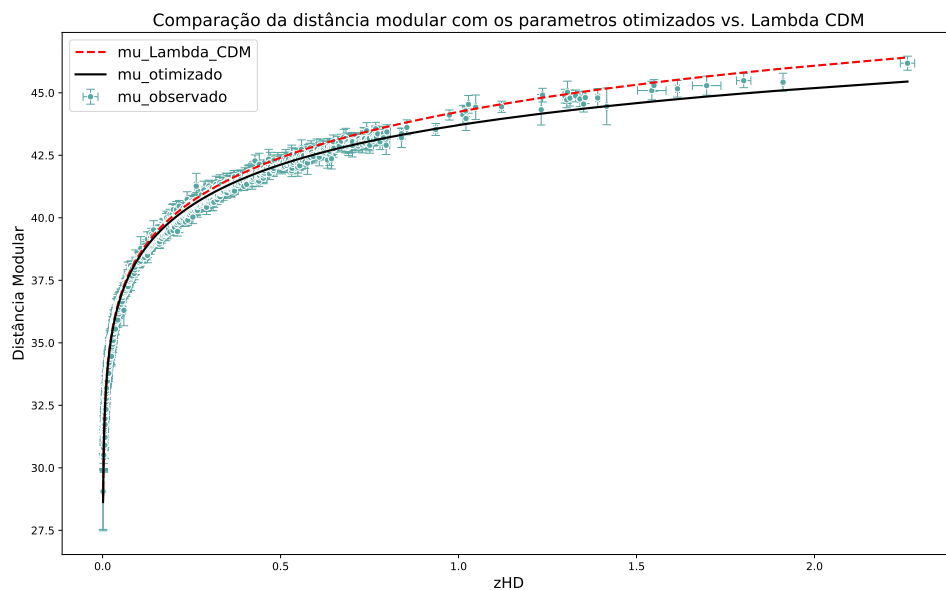


Figura 4.4: Comparação entre a distância modular com os parâmetros otimizados pela verossimilhança em relação a curva gerada pelo modelo Λ CDM.

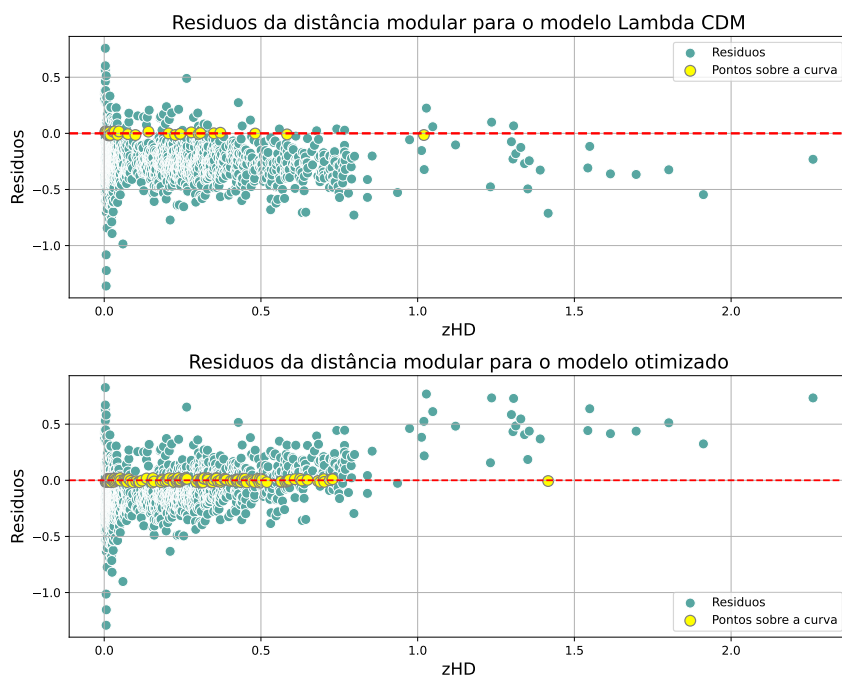


Figura 4.5: Resíduos gerados pelo modelo Λ CDM em comparação com o modelo otimizado, fundamentado na geometria de Lyra.

Λ CDM. Na verdade, o número de pontos sobre a curva no modelo otimizado é de 136, comparado a apenas 32 no modelo Λ CDM. Além disso, o percentual de pontos dentro de 1σ é de 64.02% para o Λ CDM e 65.25% para o presente modelo, fundamentado pela geometria de Lyra. Estas são algumas evidências e indicativos de que o modelo discutido nesta seção possa descrever melhor os dados da distância modular quando comparado com o modelo Λ CDM. Ademais, esta é uma explicação para o fenômeno com uma origem puramente geométrica, não necessitando da introdução de uma constante cosmológica, já que λ é o produto entre o fator de escala a e a função de escala ϕ .

4.3 Modelo com simetria *conforme*

Retornando à métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) modificada pela função de escala da geometria de Lyra, obtida na equação (3.18), é interessante notar que a escolha do fator de escala $a = 1$ produz:

$$ds^2 = \phi^2(x) \left[dt^2 - \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]. \quad (4.20)$$

Esta métrica possui invariância conforme, isto é, ela não muda de forma mediante uma transformação de coordenadas $g_{\mu\nu} \rightarrow \phi(x)g_{\mu\nu}$, com $\phi(x)$ uma função suave e contínua que pode depender em geral de todas as coordenadas espaço-temporais. A invariância conforme é um tipo de simetria que envolve transformações que preservam ângulos, mas não necessariamente distâncias. Esta invariância é uma característica de certas teorias físicas, particularmente na teoria de campos e na mecânica estatística [32]. Na geometria de Lyra, pode-se notar que a invariância surge naturalmente a partir da introdução da função de escala, sendo gerada por um fator puramente geométrico.

Nesse caso, as equações de Friedmann modificadas são similares às equações de Friedmann da geometria de Lyra quando escritas em termos do tempo conforme, a menos da substituição do fator de escala pela função de escala ϕ e do tempo conforme pela coordenada temporal t (não há a necessidade de definir o tempo conforme aqui, tal como na Relatividade Geral). Pode-se mostrar isso a partir das

equações (3.51) e (3.52) pois quando $a = 1$ temos $H = 0$:

$$H_\phi^2 = \phi^2 \mathcal{K} \frac{\rho}{3} - k, \quad (4.21)$$

$$\dot{H}_\phi = -\phi^2 \frac{\mathcal{K}}{2} \left(\frac{\rho}{3} + p \right). \quad (4.22)$$

Na expressão acima $H_\phi = \frac{\dot{\phi}}{\phi}$, já que não é necessário fazer nenhuma substituição na variável temporal, e a função de escala ϕ faz o papel do fator de escala.

Outro ponto interessante de se notar é que a equação de campo para a função de escala ϕ (3.34), no caso em particular que $\phi = \phi(t)$, se torna

$$\ddot{\phi} = -k\phi, \quad (4.23)$$

a qual é uma equação do tipo oscilador harmônico simples. Esta equação diferencial possui como solução geral

$$\phi(t) = c_1 \cos(\sqrt{k}t) + c_2 \sin(\sqrt{k}t). \quad (4.24)$$

Além disso, a expansão do universo depende nesse modelo diretamente da curvatura do espaço-tempo. Se o espaço-tempo possui curvatura fechada $k > 0$ o fator de escala oscila em uma senoide, dando origem a um universo que ricocheteia (*bouncing*) em ciclos [33]. Porém, se a curvatura do espaço-tempo for aberta $k < 0$ a solução poderá ser um universo *bouncing* único; que se contrai até atingir um diâmetro mínimo e depois expande aceleradamente na forma de um cosseno hiperbólico, ou ainda um universo que parte de um ponto inicial de dimensão “zero” e expande de forma acelerada, como um seno hiperbólico.

Note também que no caso de um espaço-tempo plano $k = 0$, a equação para ϕ é:

$$\frac{\ddot{\phi}}{\phi} = 0. \quad (4.25)$$

Nesse caso a solução geral é

$$\phi(t) = c_1 + c_2 t, \quad (4.26)$$

assim, o universo pode permanecer estático ou se expandir com velocidade constante.

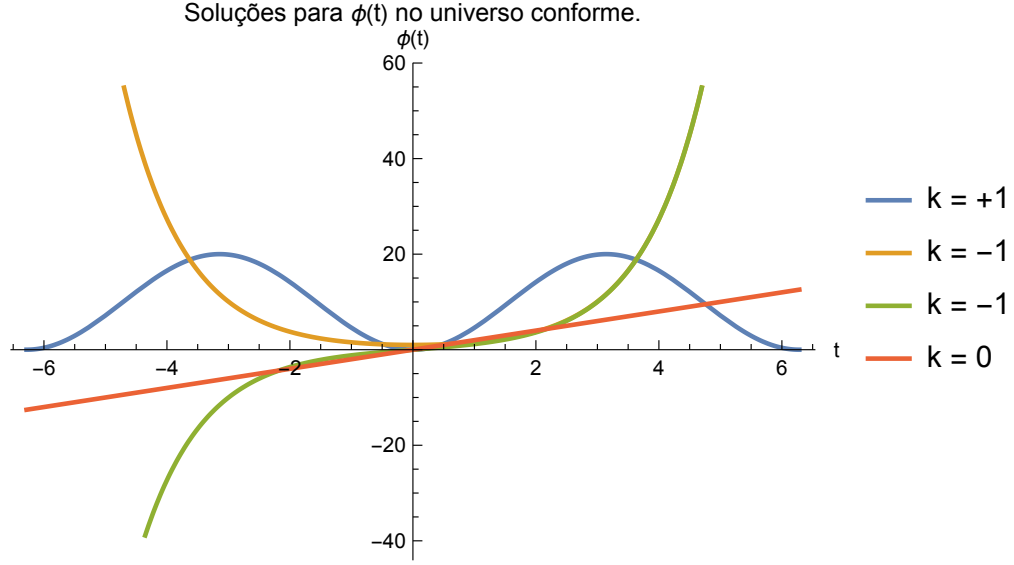


Figura 4.6: Possíveis soluções para a função de escala $\phi(t)$ no universo conforme de Lyra.

Na solução desta equação de campo não fizemos nenhuma consideração sobre a constituição do fluido do universo, apenas mostramos que a equação para ϕ é compatível com as soluções de universos dominados por matéria, radiação e energia escura encontradas na Relatividade Geral. Nesse modelo cosmológico as soluções da equação de continuidade para um fluido ideal formado por matéria e radiação são:

$$\rho_m = C_m \phi^{-3}, \quad (4.27)$$

$$\rho_r = C_r \phi^{-4}. \quad (4.28)$$

tal que $\rho = \rho_m + \rho_r$. Assim, a evolução da densidade de matéria e radiação neste modelo baseado na geometria de Lyra, é semelhante ao que ocorre na Relatividade Geral, que é fundamentada na geometria de Riemann. Portanto, é possível também reproduzir na geometria de Lyra a expansão acelerada do universo mesmo em um espaço-tempo plano, desde que se introduza uma constante cosmológica tal como é feito usualmente na Teoria da Relatividade Geral. Introduzindo a constante cosmológica Λ tal que sua equação de estado é $\rho_\Lambda = -p$, a equação de Friedmann se torna:

$$H_\phi^2 = \phi^2 H_0^2 (\Omega_r \phi^{-4} + \Omega_m \phi^{-3} + \Omega_k \phi^{-2} + \Omega_\Lambda), \quad (4.29)$$

Os demais resultados derivados a partir das equações de Friedmann conforme (4.21) e (4.22) permanecem os mesmos da geometria de Riemann, desde que se substitua o tempo conforme pelo tempo físico e o fator de escala pelo campo ϕ . Além disso, o fator de escala do universo tem uma origem geométrica mais fundamental, já que é o própria função de escala introduzido na definição de um sistema de referência de Lyra.

Em um universo plano ($k = 0$) formado por um fluido de um único componente, caracterizado pelo parâmetro w da equação de estado, as equações de Friedmann fornecem:

$$\frac{d \ln \phi}{dt} = H_0 \sqrt{\Omega_i} \phi^{-1/2(1+3w_i)}. \quad (4.30)$$

Os diferentes valores de w_i correspondem a um universo dominado por matéria ($w = 0$), radiação ($w = 1/3$), energia escura ($w = -1$). A solução da equação (4.30) é:

$$\phi(t) \propto t^{2/(1+3w_i)}, \quad (4.31)$$

de modo que a função de escala possui as seguintes soluções:

$$\begin{cases} \phi(t) \propto t^2, \text{ matéria} \\ \phi(t) \propto t, \text{ radiação} \\ \phi(t) \propto t^{-1}, \text{ energia escura.} \end{cases} \quad (4.32)$$

Esses casos são aproximações para diferentes períodos do universo, em que cada um destes componentes pode ter existido em abundância em relação aos demais, tal como ocorre no modelo Λ CDM. Isso pode ser visto por meio dos parâmetros de densidade de energia em função do desvio para o vermelho z , definido por $z = \phi^{-1} - 1$ (assumindo que $\phi = 1$ no presente). A Figura 4.7 mostra a evolução da fração de cada componente do fluido, com a passagem do tempo (aumento do desvio para o vermelho). Note que o universo foi inicialmente dominado por radiação, em seguida por matéria bariônica e na época atual é dominado por energia escura.

A idade do universo pode ser calculada integrando a equação (4.29):

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{d\phi}{\sqrt{\Omega_r \phi^{-2} + \Omega_m \phi^{-1} + \Omega_k + \Omega_\Lambda \phi^2}} \quad (4.33)$$

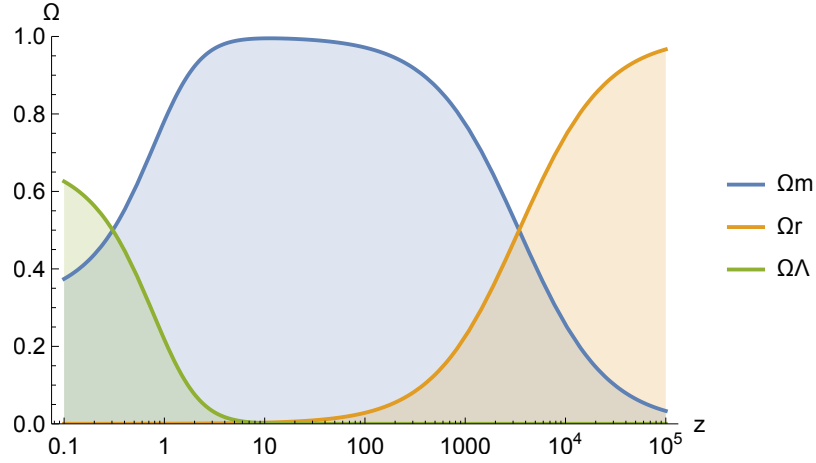


Figura 4.7: Evolução da fração de cada componente do universo em função do desvio para o vermelho.

Assumindo os valores para os parâmetros de densidade $\Omega_k = 0.00$, $\Omega_r = 9.00 \times 10^{-5}$, $\Omega_m = 0.31$, $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m - \Omega_r$ e $H_0 = 2.26 \times 10^{-18} \text{s}^{-1}$, temos:

$$t_0 = 13.3 \times 10^9 \text{ anos.} \quad (4.34)$$

Embora o tempo físico e o tempo conforme sejam iguais nesse modelo, o valor da idade do universo em relação ao obtido na Relatividade Geral é o mesmo.

Definindo o desvio para o vermelho por meio da equação

$$\phi = \frac{1}{1+z} \quad (4.35)$$

ou seja, assumindo que $\phi = 1$ no tempo presente, temos que a distância de luminosidade neste modelo será:

$$d_L(z) = (1+z) \frac{c}{H_0} \int_0^z dz' \frac{1}{\sqrt{\Omega_r(1+z')^{-2} + \Omega_m(1+z')^{-1} + \Omega_k + \Omega_\Lambda(1+z')^2}}. \quad (4.36)$$

Nesse caso a distância de luminosidade é a mesma expressão obtida na Relatividade Geral, quando o parâmetro de Hubble é escrito em função do tempo conforme.

Capítulo 5

Conclusão

A presente tese tratou da proposição de modelos cosmológicos alicerçados na geometria de Lyra, discutindo desde sua formulação original, o estado da arte, uma sistematização moderna elaborada em nosso grupo de pesquisa e modelos cosmológicos com base nesta sistematização. A geometria de Lyra é uma modificação da geometria de Riemann que introduz como objeto geométrico fundamental além da métrica, um campo chamado de “campo de deslocamento”. O campo de deslocamento juntamente com um sistema de coordenadas forma um “sistema de referência”, entidade que permite descrever um espaço vetorial na geometria de Lyra. Como consequência, a conexão afim, a definição de tensores e as equações de campo são modificadas pela presença do campo de deslocamento.

5.1 Aspectos de simetria e soluções das equações de campo

Tendo como fundamento a sistematização proposta, foram discutidas as soluções das equações de Killing, permitindo a derivação de uma métrica para subespaços com máxima simetria na geometria de Lyra. Essa análise levou a conclusão de que é possível construir um espaço com simetria máxima na geometria de Lyra, de forma semelhante ao que ocorre na geometria de Riemann. No entanto, foi constatado que o número máximo de vetores de Killing que um espaço pode conter é maior na geometria de Lyra do que na geometria de Riemann. Isso se deve ao fato de que a equação de Killing é anti-simétrica para uma isometria infinitesimal na geometria de Riemann e simétrica na geometria de Lyra.

Em seguida, foi verificado que a métrica obtida das equações de Killing é também solução das equações de campo de Lyra na presença de um fluido perfeito com densidade uniforme. Com o propósito de construir uma teoria gravitacional, nos restringimos a análise de um espaço-tempo quadri-dimensional com ausência de torção e aderindo a compatibilidade da métrica. Contudo, teorias mais gerais

são também admissíveis na geometria de Lyra considerando os efeitos de torção e não-metricidade. As equações de campo modificadas foram derivadas a partir de um princípio variacional assumindo um escalar de Lyra, de forma similar à ação de Einstein-Hilbert.

As equações de campo de Lyra foram resolvidas para a métrica que descreve um espaço com simetria máxima, a qual é uma modificação da métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, que é solução das equações de campo de Einstein. Na solução, surge um vínculo entre o fator de escala e o campo de deslocamento que depende das particularidades do modelo cosmológico que se queira analisar. Isso ocorre tal que a constituição do universo (se este é formado majoritariamente por radiação ou matéria) e a curvatura do espaço-tempo afetam diretamente o comportamento do campo de deslocamento. Por outra perspectiva, pode-se interpretar que a geometria do espaço-tempo de Lyra é que define a curvatura por meio do campo de deslocamento. Assim, o campo de deslocamento também define qual será o padrão de expansão ou contração do universo. Dessa forma, é possível que um fenômeno como a expansão acelerada do universo seja explicado unicamente por aspectos geométricos fundamentais na geometria de Lyra. Não há a necessidade de introduzir tipos exóticos de partículas nem energia escura, tal como atração gravitacional é explicada na geometria de Riemann, assim o é a expansão cósmica na geometria de Lyra.

5.2 Modelos cosmológicos

Como primeiro modelo cosmológico, foi proposto a escolha em particular do campo de deslocamento como sendo proporcional ao fator de escala do universo. Nesse caso, a constante de proporcionalidade entre estes objetos está relacionada à constante que há entre a parte geométrica e o tensor de energia-momento nas equações de campo. Este modelo permitiu a derivação de uma quantidade observável, a saber, a distância de luminosidade, que relaciona a luminosidade absoluta de um astro com o fluxo observado. A partir disto, foi possível comparar a curva da distância de luminosidade gerada por este modelo com àquela obtida na Teoria da Relatividade Geral por meio do modelo Λ CDM, com dados observacionais de Supernovas do tipo Ia. A Figura 4.1 mostra que o modelo Λ CDM se ajusta melhor aos dados do que este primeiro modelo simples proposto na geometria de Lyra, no entanto é de se destacar que tal fenômeno possa ser explicado sem a necessidade de introduzir uma constante às equações de campo.

Uma otimização do valor da constante de proporcionalidade entre o fator de escala e o campo de deslocamento foi proposta com o intuito de obter um ajuste melhor aos dados observados da distância de luminosidade. Para isto, foi considerado uma distribuição de verossimilhança gaussiana, a qual foi otimizada por meio do algoritmo de Nelder-Mead. Os valores otimizados dos parâmetros cosmológicos permitiram uma comparação das curvas teóricas de distância modular do modelo proposto em relação ao modelo Λ CDM, com os dados experimentais. Para esta análise foram considerados três indicadores: a comparação estatística de qui-quadrado reduzido, o percentual de pontos dentro do desvio padrão e os resíduos dos valores teóricos em relação aos dados. A Figura 4.4 mostra que as curvas geradas pelo modelo baseado na geometria de Lyra e pelo modelo Λ CDM são semelhantes, tornando difícil de se distinguir visualmente. Por causa disso, as métricas mencionadas anteriormente foram usadas como evidências para determinar qual modelo se ajusta melhor as dados experimentais.

O cálculo de qui-quadrado reduzido resultou em um valor de 0.00792 para o modelo Λ CDM e 0.00416 para o modelo otimizado da geometria de Lyra. Um valor menor do qui-quadrado reduzido geralmente indica um melhor ajuste do modelo aos dados. No entanto, isso também pode significar que o modelo está ajustando o ruído nos dados em vez de capturar a tendência subjacente. Portanto, apesar de ser desejável obter um pequeno valor reduzido de qui-quadrado, é essencial equilibrar a complexidade do modelo com a qualidade do ajuste para evitar o ajuste excessivo. Na Figura 4.5, é possível observar, pela comparação dos resíduos entre os modelos, que há significativamente mais pontos sobre a curva no modelo otimizado do que no modelo Λ CDM. Especificamente, o modelo otimizado possui 136 pontos sobre a curva, enquanto o modelo Λ CDM tem apenas 32. Não obstante, o percentual de pontos dentro de 1σ é de 64,02% para o Λ CDM e 65,25% para o presente modelo, baseado na geometria de Lyra. Essas evidências sugerem que o modelo apresentado pode descrever melhor os dados da distância modular em comparação com o modelo Λ CDM. Além disso, essa explicação tem uma origem puramente geométrica, eliminando a necessidade de introduzir uma constante cosmológica. Isso ocorre pois, nesse caso, λ é o produto entre o fator de escala a e o campo de deslocamento ϕ , que é um objeto geométrico fundamental introduzido na geometria de Lyra.

Um segundo modelo cosmológico foi sugerido levando em consideração os aspectos de simetria, particularmente por meio da métrica invariante sob uma transformação conforme. Na geometria de Lyra, bastou que fosse escolhido o

fator de escala constante igual a 1 para que a métrica possua invariância conforme. Nesta situação, o campo de deslocamento passa a fazer o papel do fator de escala e a coordenada temporal é o próprio tempo conforme. Então, as equações de Friedmann modificadas se tornam nesse modelo extremamente similares as equações de Friedmann escritas em função do tempo conforme na Relatividade Geral. Basta apenas substituir o fator de escala pelo campo de deslocamento e o tempo conforme pelo tempo usual. A equação de campo para o campo de deslocamento (que não existe na Relatividade Geral) nesse modelo pode ser uma equação de oscilador harmônico simples ou possuir uma solução linear (a depender do sinal da curvatura). Logo, esta equação diferencial admite como solução as diversas possíveis soluções para o fator de escala da Relatividade Geral, tais como: o universo cíclico cujo fator de escala é uma senoide; o universo que ricocheteia (*bouncing*) que contrai até um ponto mínimo e depois se expande aceleradamente ou ainda um universo que parte de um ponto inicial de dimensão zero e se expande indefinidamente na forma de um seno hiperbólico. Os resultados encontrados nesse trabalho serão publicados [34].

Para futuros trabalhos de pesquisa, sugere-se o estudo de teoria de perturbações em cosmologia usando a geometria de Lyra. Outros problemas como a discrepância na velocidade da rotação de galaxias, o problema da planura, a inflação e o problema do horizonte no universo primordial também ainda não foram estudados no contexto da geometria de Lyra tal como apresentada aqui. É possível que este arcabouço rico de conceitos geométricos forneça avanços também nestas áreas, devido a flexibilidade introduzida pelo campo de deslocamento que não existe na geometria de Riemann. Por fim, é possível que a geometria de Lyra seja útil para um melhor entendimento de teorias conformes, como sugere o segundo modelo discutido nesta tese.

Referências

- [1] N. S. Hetherington. *Cosmology: Historical, literary, philosophical, religious and scientific perspectives*, volume 1634. CRC Press, 1993.
- [2] S. Mitton. *Fred Hoyle: A life in science*. Cambridge University Press, 2011.
- [3] E. Hubble. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 15(3):168–173, 1929.
- [4] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P. M. Garnavich, R. L. Gilliland, C. J. Hogan, S. Jha, R. P. Kirshner, et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, 116(3):1009, 1998.
- [5] N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini, A. J. Banday, R. B. Barreiro, N. Bartolo, S. Basak, et al. Planck 2018 results. vi. cosmological parameters. *arXiv preprint arXiv:1807.06209*, 2018.
- [6] M. P. Do Carmo. *Geometria diferencial de curvas e superficies*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.
- [7] E. Scholz. The unexpected resurgence of Weyl geometry in late 20th-century physics. *Beyond Einstein: Perspectives on geometry, gravitation, and cosmology in the twentieth century*, pages 261–360, 2018.
- [8] J. T. Wheeler. Weyl geometry. *General Relativity and Gravitation*, 50:1–36, 2018.
- [9] C. Romero, J. B. Fonseca-Neto, and M. L. Pucheu. General relativity and weyl geometry. *Classical and Quantum Gravity*, 29(15):155015, 2012.
- [10] J. M. Charap and W. Tait. A gauge theory of the weyl group. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 340(1622):249–262, 1974.
- [11] L. O’Raifeartaigh. *The dawning of gauge theory*, volume 106. Princeton University Press, 1997.

- [12] D. K. Sen. A static cosmological model. *Zeitschrift für Physik*, 149(3):311–323, 1957.
- [13] G. Lyra. Über eine modifikation der riemannschen geometrie. *Math. Zeitschr.*, 54:52–64, 1951.
- [14] D. K. Sen. On geodesics of a modified riemannian manifold. *Canadian Mathematical Bulletin*, 3(3):255–261, 1960.
- [15] D. K. Sen and J. R. Vanstone. On Weyl and Lyra manifolds. *Journal of Mathematical Physics*, 13(7):990–993, 1972.
- [16] W. D. Halford. Cosmological theory based on Lyra’s geometry. *Australian Journal of Physics*, 23(5):863–870, 1970.
- [17] T. Singh and G. P. Singh. Lyra’s geometry and cosmology: a review. *Fortschritte der Physik/Progress of Physics*, 41(8):737–764, 1993.
- [18] G. P. Singh and K. Desikan. A new class of cosmological models in Lyra geometry. *Pramana*, 49:205–212, 1997.
- [19] A. Pradhan and A. K. Vishwakarma. A new class of lrs bianchi type-i cosmological models in Lyra geometry. *Journal of Geometry and Physics*, 49(3-4):332–342, 2004.
- [20] K. S Adhav. Lrs bianchi type-i universe with anisotropic dark energy in Lyra geometry. *International Journal of Astronomy and Astrophysics*, 1(4):204–209, 2011.
- [21] B. P. Brahma and M. Dewri. Bianchi type-v dark energy modified $f(r, t)$ gravity model in the presence of massive scalar field in Lyra geometry. *Trends in Sciences*, 19(21):293–293, 2022.
- [22] D. D. Pawar, B. L. Jakore, and V. J. Dagwal. Kaluza–klein cosmological model with strange-quark-matter in Lyra geometry. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 20(05):2350079, 2023.
- [23] V. Gore, A. Dixit, and D. S. Chouhan. String cosmological scenario in periodic time-varying deceleration parameter in Lyra geometry. *Canadian Journal of Physics*, 101(5):222–234, 2023.

- [24] B. K. Bishi, P. V. Lapse, and A. Beesham. Dark energy cosmological models in Lyra geometry for bianchi-i space time. *Proceedings of the National Academy of Sciences, India Section A: Physical Sciences*, pages 1–15, 2023.
- [25] E. M. de Moraes. Gravitação escalar-tensorial na variedade de Lyra. 2022.
- [26] R. R. Cuzinatto, E. M. de Moraes, and B. M. Pimentel. Lyra scalar-tensor theory: A scalar-tensor theory of gravity on Lyra manifold. *Physical Review D*, 103(12):124002, 2021.
- [27] R. R. Cuzinatto, E. M. de Moraes, and B. M. Pimentel. Particle and light motion in lyra–schwarzschild spacetime. *Classical and Quantum Gravity*, 41:37, 2024.
- [28] F. Caruso, J. G. Pereira, and A. Santoro, editors. *Tribute to Ruben Aldrovandi*. Livraria da Física, São Paulo, 2024. Vários autores.
- [29] S. Weinberg. Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity. 1972.
- [30] A. G. Riess, W. Yuan, L. M. Macri, D. Scolnic, D. Brout, S. Casertano, D. O. Jones, Y. Murakami, G. S. Anand, L. Breuval, T. G. Brink, A. V. Filippenko, S. Hoffmann, S. W. Jha, W. D’arcy K., J. Mackenty, B. E. Stahl, and W. Zheng. A comprehensive measurement of the local value of the hubble constant with 1 km s⁻¹ mpc⁻¹ uncertainty from the hubble space telescope and the sh0es team. *The Astrophysical Journal Letters*, 934(1):L7, July 2022.
- [31] Encyclopedia of Mathematics. Gauss-kronrod quadrature formula, 2024. Accessed: 2024-07-20.
- [32] Y. Nakayama. Scale invariance vs conformal invariance. *Physics Reports*, 569:1–93, 2015.
- [33] M. Novello and S. E. P. Bergliaffa. Bouncing cosmologies. *Physics reports*, 463(4):127–213, 2008.
- [34] D. Jackson and B. M. Pimentel. Cosmological models in LyST gravity. 2024. (Sendo preparado para submissão no Jornal of Cosmology and Astroparticle Physics.).