

**PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA**

Teoremas de Hahn-Banach e algumas aplicações

Marina Fuzaro Magossi

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO
2026

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Marina Fuzaro Magossi

Teoremas de Hahn-Banach e algumas aplicações

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora
Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso

**Rio Claro/SP
2026**

M211t	Magossi, Marina Fuzaro Teoremas de Hahn-Banach e algumas aplicações / Marina Fuzaro Magossi. -- Rio Claro, 2026 110 p. Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro Orientador: Suzete Maria Silva Afonso 1. Análise Funcional. 2. Teoremas de Hahn-Banach. 3. Espaços Normados. 4. Espaços Vetoriais Topológicos. 5. Espaços Localmente Convexos. I. Título.
-------	--

Impacto potencial desta pesquisa

Esta pesquisa, centrada nos Teoremas de Hahn-Banach e suas aplicações em espaços vetoriais topológicos, tem como objetivo não apenas aprofundar aspectos teóricos fundamentais da Análise Funcional, mas também oferecer subsídios práticos para áreas correlatas como Otimização, Teoria de Operadores e Teoria da Representação. A dissertação alinha-se diretamente aos objetivos do Programa de Pós-Graduação em Matemática - Mestrado Profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da UNESP/Rio Claro, ao promover uma formação sólida e abrangente na área, preparando a mestranda e outros leitores para uma atuação qualificada em instituições privadas de ensino superior.

Ao explorar diferentes formulações do Teorema de Hahn-Banach e suas aplicações em contextos concretos, esta pesquisa favorece o desenvolvimento de competências teórico-práticas essenciais para a docência e para o avanço do raciocínio matemático abstrato, o que é coerente com a missão do mestrado profissional: formar profissionais capazes de aplicar o conhecimento matemático de forma crítica e inovadora, com potencial para contribuir significativamente na formação de novos alunos e no fortalecimento do ensino da matemática em ambientes acadêmicos.

Potential impact of this research

This research, centered on the Hahn-Banach Theorems and their applications in topological vector spaces, aims not only to deepen the fundamental theoretical aspects of Functional Analysis but also to provide practical contributions to related areas such as Optimization, Operator Theory, and Representation Theory. The dissertation is directly aligned with the objectives of the Professional Master's Program in Mathematics of the Institute of Geosciences and Exact Sciences at UNESP/Rio Claro, by promoting a solid and comprehensive academic education in the field, preparing the master's student and other readers for a qualified professional role in private institutions of higher education.

By exploring different formulations of the Hahn-Banach Theorem and its applications in concrete contexts, this research fosters the development of essential theoretical and practical competencies for teaching and for the advancement of abstract mathematical reasoning. This is consistent with the mission of the professional master's program: to train professionals capable of applying mathematical knowledge critically and innovatively, with the potential to contribute significantly to the education of new students and to the strengthening of mathematics teaching in academic environments.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Marina Fuzaro Magossi

TEOREMAS DE HAHN-BANACH E ALGUMAS APLICAÇÕES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso
IGCE - UNESP - Rio Claro (SP)

Prof. Dr. Jamil Viana Pereira
IGCE - UNESP - Rio Claro (SP)

Profa. Dra. Jaqueline Siqueira
Instituto de Matemática - UFRJ - Rio de Janeiro
(RJ)

Conceito: Aprovado

Rio Claro (SP), 06 de abril de 2026

*Dedico este trabalho a todos que não desistiram,
mesmo em face do maior desencanto.*

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço à minha avó, Zulmira, e minha tia-avó, Marilene, pela educação, pelo colo e por toda a estrutura que me proporcionaram. Se eu sou quem sou hoje, é por causa de vocês. A toda minha família, agradeço por nunca diminuïrem meu sonho.

Também agradeço aos meus amigos, por me apoiarem e me incentivarem a seguir em frente. Em especial, Olga, Igor, Moka e Mizu, que sempre estiveram ao meu lado.

Agradeço à Maria Eduarda e à Lorena. Em cada aula, em cada evento, vocês sempre estiveram presentes e tornaram os dias melhores.

Um agradecimento especial à UNESP - Rio Claro, por ter me dado uma segunda família. Em particular, agradeço à minha orientadora de mestrado, Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso, e à minha orientadora durante a graduação, Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti, por todos os ensinamentos, pela paciência, e por me mostrarem os caminhos da vida acadêmica.

Finalmente, agradeço ao João Gabriel, meu namorado desde o começo da graduação, parceiro da vida e cúmplice de todas as minhas ideias, por ser meu porto seguro, meu lar e me ensinar a nunca desistir, por todo apoio, por todas as vezes que me impulsionou. Enfim, por tudo.

*Não sabemos o que estamos fazendo,
mas é isso que nos permite fazê-lo.*
Richard Feynman

Esta dissertação tem como tema central os Teoremas de Hahn-Banach e algumas de suas aplicações em Análise Funcional, com ênfase no contexto de espaços vetoriais topológicos e espaços localmente convexos. Inicialmente, são apresentadas diferentes versões do teorema, tanto em sua formulação analítica quanto em sua interpretação geométrica, contemplando casos em espaços vetoriais reais e complexos, espaços normados e espaços localmente convexos. A partir dessas formulações, discutem-se consequências importantes relacionadas à separação de conjuntos convexos, à existência de hiperplanos de suporte e à estrutura de conjuntos convexos compactos, com destaque para o Teorema de Krein-Milman. Na parte final do trabalho, desenvolvem-se aplicações à teoria de representação de pontos de conjuntos convexos por meio de medidas de probabilidade, envolvendo resultados do tipo Choquet e o teorema do baricentro, bem como ao problema do momento, com ênfase nos casos clássicos de Hamburger e de Stieltjes e em formulações mais gerais que envolvem operadores lineares positivos. Ao longo do texto, procura-se evidenciar o papel dos Teoremas de Hahn-Banach como princípio fundamental que permite estender funcionais lineares preservando propriedades de dominância e positividade, separar conjuntos convexos por meio de funcionais lineares contínuos e estabelecer representações por medidas, ressaltando sua importância estrutural na Análise Funcional e suas conexões com a teoria da convexidade, da medida e dos operadores lineares. Nesse sentido, o trabalho também contribui para o fortalecimento da formação matemática voltada à docência e à pesquisa, especialmente no contexto do ensino superior.

Palavras-chave: Análise Funcional. Teoremas de Hahn-Banach. Espaços Normados. Espaços Vetoriais Topológicos. Espaços Localmente Convexos.

Abstract

This dissertation focuses on the Hahn-Banach Theorems and some of their applications in Functional Analysis, with emphasis on the context of topological vector spaces and locally convex spaces. Initially, different versions of the theorem are presented, both in their analytic formulation and in their geometric interpretation, including cases in real and complex vector spaces, normed spaces, and locally convex spaces. From these formulations, important consequences are discussed concerning the separation of convex sets, the existence of supporting hyperplanes, and the structure of compact convex sets, with particular emphasis on the Krein-Milman Theorem. In the final part of the work, applications are developed to the representation theory of points of convex sets through probability measures, involving Choquet-type results and the barycenter theorem, as well as to the moment problem, with emphasis on the classical cases of the Hamburger and Stieltjes moment problems and on more general formulations involving positive linear operators. Throughout the text, the Hahn-Banach Theorems are highlighted as a fundamental principle that allows the extension of linear functionals while preserving domination and positivity properties, the separation of convex sets by means of continuous linear functionals, and the construction of representations by measures, emphasizing their structural importance in Functional Analysis and their connections with convexity theory, measure theory, and the theory of linear operators. In this sense, the work also contributes to strengthening mathematical training oriented toward teaching and research, particularly in the context of higher education.

Keywords: Functional Analysis. Hahn-Banach Theorems. Normed Spaces. Topological Vector Spaces. Locally Convex Spaces.

1	Introdução	12
2	Os Teoremas de Hahn-Banach	15
2.1	Teorema de Hahn-Banach para espaços vetoriais e espaços vetoriais normados	16
2.2	Teorema de Hahn-Banach para espaços vetoriais topológicos	33
2.3	Teorema de Hahn-Banach para espaços localmente convexos	42
2.4	Outras versões do Teorema de Hahn-Banach	44
2.4.1	Distância a hiperplanos	49
2.4.2	Teorema de Krein-Milman	52
2.4.3	Versões ordenadas do Teorema de Hahn-Banach	54
3	Aplicações dos teoremas de Hahn-Banach	56
3.1	Teorema de Krein-Milman e elementos da Teoria de Representação	56
3.2	O problema do momento e resultados relacionados	62
	Referências	71
A	Sobre Espaços Vetoriais Topológicos	73
A.1	Preliminares	73
A.1.1	Conjuntos e ordens	74
A.1.2	Aplicações (Mapeamentos)	74
A.1.3	Famílias	75
A.1.4	Operações com conjuntos	75
A.1.5	Ordens	76
A.1.6	Filtros	78
A.1.7	Topologia geral	79
A.1.8	Subespaços, produtos, quocientes	83
A.1.9	Axiomas de separação	84
A.1.10	Compacidade e espaços pré-compactos	85
A.2	Espaços vetoriais topológicos	85
A.3	Espaços produto, subespaços, somas diretas e espaços quociente	94
A.3.1	Espaços vetoriais topológicos de dimensão finita	95
A.4	Variedades lineares e hiperplanos	96

A.5	Conjuntos limitados	98
A.6	Complexificação	99
A.7	Espaços vetoriais topológicos localmente convexos	100
A.7.1	Conjuntos convexos e seminormas	100
A.7.2	Espaços normados e normáveis	103
A.7.3	Espaço normado das transformações lineares limitadas	104
A.7.4	Outros exemplos de espaços normados	107
B	Os matemáticos por trás do teorema	109

CAPÍTULO 1

Introdução

A Análise Funcional ocupa posição central na matemática moderna ao investigar espaços vetoriais munidos de estruturas topológicas e métricas, bem como operadores lineares definidos sobre esses espaços. Desde o início do século XX, essa área tornou-se um dos principais ambientes conceituais para o desenvolvimento de diversas teorias matemáticas, estabelecendo conexões profundas com a análise convexa, a teoria da medida, a teoria dos operadores e problemas provenientes da física matemática e da otimização.

Entre os resultados fundamentais dessa teoria destaca-se o Teorema de Hahn-Banach, cuja importância se deve tanto ao seu conteúdo analítico quanto às suas profundas consequências geométricas. Em sua formulação mais básica, o teorema afirma que funcionais lineares definidos em subespaços podem ser estendidos ao espaço inteiro preservando determinadas propriedades de dominância. Em formulações mais gerais, ele fornece instrumentos essenciais para a separação de conjuntos convexos por hiperplanos, para o estudo da dualidade em espaços vetoriais topológicos e para a construção de representações por meio de medidas.

Historicamente, versões iniciais desse resultado aparecem em trabalhos de Eduard Helly no início do século XX. Posteriormente, Hans Hahn apresentou uma formulação mais geral em 1927, e Stefan Banach, em 1929, estabeleceu a forma atualmente conhecida do teorema no contexto de espaços normados. Desde então, o Teorema de Hahn-Banach tornou-se um dos pilares da Análise Funcional, servindo como ferramenta fundamental para o desenvolvimento da teoria da dualidade, da análise convexa e da teoria de operadores.

O papel do Teorema de Hahn-Banach é particularmente significativo porque muitos resultados estruturais da Análise Funcional podem ser compreendidos como desdobramentos diretos desse princípio de extensão. A possibilidade de estender funcionais lineares contínuos e de separar conjuntos convexos por hiperplanos permite analisar a geometria de espaços normados e de espaços localmente convexos por meio de seus funcionais lineares contínuos. Essa perspectiva estabelece uma ligação profunda entre a estrutura algébrica dos espaços vetoriais, sua estrutura topológica e a geometria da convexidade.

O objetivo desta dissertação é apresentar e discutir diferentes versões dos Teoremas de Hahn-Banach, enfatizando tanto suas formulações analíticas quanto suas interpretações geométricas, bem como destacar algumas de suas aplicações em Análise Funcional. Em

particular, busca-se evidenciar como as diversas versões do teorema se articulam entre si e como delas decorrem resultados importantes relacionados à separação de conjuntos convexos, à teoria de representação e ao problema do momento.

Inicialmente são apresentadas versões clássicas do Teorema de Hahn-Banach em espaços vetoriais reais e complexos, bem como em espaços normados. Em seguida, o estudo é ampliado para o contexto de espaços vetoriais topológicos e espaços localmente convexos, no qual o teorema adquire uma formulação particularmente rica do ponto de vista geométrico. Nesse cenário surgem naturalmente resultados de separação de conjuntos convexos por hiperplanos, a noção de hiperplano de suporte, fórmulas de distância a hiperplanos e o Teorema de Krein-Milman, que relaciona a estrutura de conjuntos convexos compactos com seus pontos extremos.

As aplicações discutidas na parte final do trabalho foram escolhidas com o objetivo de ilustrar como os princípios de extensão e separação fornecidos pelos Teoremas de Hahn-Banach aparecem em contextos relevantes da análise. A primeira dessas aplicações está relacionada à teoria de representação de pontos de conjuntos convexos compactos por meio de medidas de probabilidade. Nesse contexto, resultados como o Teorema de Krein-Milman, os teoremas de Choquet e o teorema do baricentro mostram que a geometria convexa de um conjunto compacto pode ser descrita em termos de seus pontos extremos e de medidas representativas. Essa abordagem evidencia uma interação profunda entre convexidade, teoria da medida e dualidade.

Uma segunda direção de aplicação considerada nesta dissertação diz respeito ao problema do momento. Nesse contexto, busca-se caracterizar sequências que podem ser representadas como momentos de uma medida. São discutidas formulações clássicas do problema, como os problemas de Hamburger e de Stieltjes, bem como resultados relacionados à determinabilidade da medida representativa. Também são consideradas formulações mais gerais envolvendo operadores lineares positivos e versões do tipo Markov do problema do momento. Nesses contextos, os Teoremas de Hahn-Banach aparecem novamente como ferramentas fundamentais para a extensão de funcionais e operadores preservando propriedades de positividade.

Do ponto de vista metodológico, o trabalho possui caráter predominantemente expositivo. O objetivo não é apresentar resultados originais, mas organizar e discutir diferentes formulações e aplicações dos Teoremas de Hahn-Banach, destacando suas conexões com a geometria convexa, a teoria da medida e o estudo de operadores lineares positivos. Sempre que possível, são incluídas demonstrações detalhadas dos resultados centrais, reservando-se a referências externas apenas alguns teoremas cuja prova exigiria o desenvolvimento de ferramentas adicionais que extrapolariam o escopo deste trabalho.

A organização da dissertação reflete esse percurso. No Capítulo 2 são apresentadas e demonstradas diferentes versões do Teorema de Hahn-Banach, incluindo suas formulações em espaços vetoriais, espaços normados e espaços vetoriais topológicos, bem como algumas de suas consequências geométricas relacionadas à separação de conjuntos convexos e à existência de hiperplanos de suporte. No Capítulo 3 são discutidas aplicações desses resultados, particularmente na teoria de representação de pontos de conjuntos convexos compactos e no estudo do problema do momento.

Para o desenvolvimento desta etapa da dissertação, supõe-se que o leitor esteja familiarizado com certos conceitos clássicos de análise funcional e teoria da medida, tais como medidas de Borel regulares, medidas de Dirac, integração em relação a medidas, o Teorema da Representação de Riesz, bem como noções básicas sobre espaços L^p e operadores lineares contínuos. Esses tópicos podem ser encontrados, por exemplo, em textos

clássicos de análise funcional e teoria da medida. Optou-se por não incluir uma exposição sistemática de todos esses pré-requisitos no corpo do texto, a fim de preservar o foco nos resultados centrais relacionados aos Teoremas de Hahn-Banach.

Por fim, a dissertação inclui um apêndice no qual são reunidas algumas noções preliminares utilizadas ao longo do texto, especialmente relacionadas à teoria de espaços vetoriais topológicos e espaços localmente convexos. Esses conceitos são apresentados de forma sucinta com o objetivo de tornar o trabalho mais autocontido, sem interromper o desenvolvimento da exposição principal. Dessa forma, o leitor já familiarizado com esses tópicos pode prosseguir diretamente na leitura do texto principal, enquanto aqueles que desejarem revisar os fundamentos encontram no apêndice um ponto de referência conveniente.

Do ponto de vista conceitual, muitos dos resultados discutidos neste trabalho podem ser interpretados como manifestações de um mesmo princípio fundamental. O Teorema de Hahn-Banach permite estender funcionais lineares preservando propriedades de dominância ou positividade. Essa propriedade de extensão conduz naturalmente a resultados de separação de conjuntos convexos por hiperplanos. Por sua vez, tais resultados de separação desempenham papel essencial na descrição da estrutura geométrica de conjuntos convexos compactos, como evidenciado pelo Teorema de Krein-Milman. Finalmente, esses mesmos princípios permitem estabelecer representações de pontos e funcionais por meio de medidas, conduzindo aos resultados de representação do tipo Choquet e às formulações do problema do momento discutidas na parte final do trabalho.

Em síntese, esta dissertação busca apresentar uma visão articulada dos Teoremas de Hahn-Banach e de algumas de suas aplicações, ressaltando sua posição central na Análise Funcional. Ao longo do texto, procura-se evidenciar que extensão de funcionais, separação de conjuntos convexos e representação por medidas constituem diferentes manifestações de um mesmo princípio matemático fundamental.

Os Teoremas de Hahn-Banach

O Teorema de Hahn-Banach é um dos resultados estruturais mais importantes da Análise Funcional. Sua relevância decorre do fato de que ele permite estender funcionais lineares definidos em subespaços preservando propriedades de dominância ou continuidade, constituindo assim uma ferramenta fundamental para o estudo da dualidade, da separação de conjuntos convexos e da geometria de espaços vetoriais topológicos.

Uma questão central na teoria consiste em compreender em que medida funcionais lineares contínuos podem ser utilizados para investigar a estrutura de um espaço vetorial topológico. Embora o dual topológico de um espaço de Banach sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ — isto é, o espaço dos funcionais lineares contínuos definidos nesse espaço — seja sempre um espaço de Banach, esse fato, por si só, não garante a existência de funcionais lineares contínuos não nulos. De fato, existem exemplos de espaços vetoriais topológicos metrizáveis nos quais o único funcional linear contínuo é o funcional nulo (veja [1, Capítulo 1, Exercício 6]). O Teorema de Hahn-Banach mostra que tal situação não ocorre em contextos adequadamente estruturados, assegurando a possibilidade de estender funcionais lineares preservando certas propriedades fundamentais.

O objetivo deste capítulo é apresentar e demonstrar diferentes versões do Teorema de Hahn-Banach em diversos contextos da Análise Funcional, incluindo espaços vetoriais, espaços vetoriais normados, espaços vetoriais topológicos e espaços localmente convexos. Busca-se evidenciar a utilidade do teorema e ilustrar seu alcance por meio de consequências e aplicações que desempenham papel central na teoria.

Embora algumas dessas versões possam ser vistas como generalizações naturais de outras, optamos por desenvolver o teorema de forma gradual em seus diferentes contextos. Essa abordagem permite não apenas acompanhar a evolução lógica das formulações do resultado, mas também destacar as ideias fundamentais que conduzem às suas interpretações analítica e geométrica, ressaltando a riqueza conceitual do Teorema de Hahn-Banach no quadro geral da Análise Funcional.

2.1 Teorema de Hahn-Banach para espaços vetoriais e espaços vetoriais normados

Os teoremas de Hahn-Banach vêm em duas versões: analítica e geométrica. A versão analítica diz respeito à extensão de funcionais lineares de um subespaço para todo o espaço vetorial com propriedades prescritas, enquanto a versão geométrica lida com a separação de conjuntos convexos disjuntos usando hiperplanos.

Formas mais simples ou menos gerais do Teorema de Hahn-Banach foram provadas por Helly em 1912 e por Hahn em 1922. Hahn melhorou seu resultado e em 1927 publicou uma forma do teorema para funcionais definidos em espaços de Banach. A forma definitiva do Teorema de Hahn-Banach, para funcionais definidos em espaços normados, foi publicada por Banach em 1929. As primeiras demonstrações do teorema usavam indução transfinita¹.

O caso complexo do Teorema de Hahn-Banach foi demonstrado primeiramente para os espaços L^p , $p > 1$, por Murray em 1936. O caso geral foi provado de forma independente em dois trabalhos, um de G. A. Soukhomlinov e outro de H. F. Bohnenblust e A. Sobczyk, ambos publicados no ano de 1938.

Iniciamos esta seção expondo a formulação analítica do Teorema de Hahn-Banach para espaços vetoriais reais. A demonstração desse resultado baseia-se no Lema de Zorn, um resultado fundamental da teoria dos conjuntos equivalente ao Axioma da Escolha. A ideia geral consiste em considerar o conjunto de todas as extensões lineares possíveis do funcional definido inicialmente em um subespaço e ordená-lo pela relação de extensão. Mostra-se então que toda cadeia desse conjunto possui um majorante, o que permite aplicar o Lema de Zorn para garantir a existência de uma extensão maximal. Finalmente, demonstra-se que tal extensão maximal está necessariamente definida em todo o espaço vetorial.

Teorema 2.1 (Teorema de Hahn-Banach - Teorema de Extensão - Caso Real). Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e seja $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional sublinear em E , ou seja, p é uma função real definida em E que goza das seguintes propriedades:

$$p(\lambda x) = \lambda p(x), \quad \forall \lambda > 0, \forall x \in E, \quad (2.1)$$

e

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in E. \quad (2.2)$$

Se G é um subespaço vetorial de E e $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear tal que

$$g(x) \leq p(x), \quad \forall x \in G,$$

então existe um funcional linear $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ que estende g ($f|_G \equiv g$) a E e satisfaz $f(x) \leq p(x)$, para todo $x \in E$.

Demonstração. Consideremos $\mathcal{P}$ o seguinte conjunto:

$$\mathcal{P} = \{h : D(h) \subseteq E \rightarrow \mathbb{R} : D(h) \text{ é subespaço vetorial de } E, G \subseteq D(h), h \text{ é linear,}$$

$$h \text{ estende } g \text{ e } h(x) \leq p(x), \text{ para todo } x \in D(h)\}.$$

¹Na teoria dos conjuntos, a indução transfinita é uma técnica matemática rigorosa que permite provar propriedades para todos os números ordinais (ou, de forma mais geral, para qualquer conjunto bem ordenado) a partir de etapas finitas. É uma generalização da indução finita.

Em $\mathcal{P}$, definimos a seguinte relação de ordem parcial:

$$h_1 \leq h_2 \iff D(h_1) \subseteq D(h_2) \quad \text{e} \quad h_2|_{D(h_1)} \equiv h_1. \quad (2.3)$$

Note que $\mathcal{P}$ é não-vazio, pois $g \in \mathcal{P}$. Além disso, todo subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{P}$ possui um majorante. Com efeito, seja $Q = \{h_j\}_{j \in I}$ um subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{P}$ arbitrário, em que I é um conjunto de índices, e defina $h : D(h) \rightarrow \mathbb{R}$, em que $D(h) = \bigcup_{j \in I} D(h_j)$, por

$$h(x) = h_j(x), \quad \text{se } x \in D(h_j).$$

Devemos verificar, por meio da relação de ordem estabelecida em (2.3), que:

- (i) $D(h)$ é um subespaço vetorial de E e $G \subseteq D(h)$;
- (ii) h está bem definida;
- (iii) h é linear, h estende g , $h(x) \leq p(x)$ para todo $x \in D(h)$ e, por conseguinte, $h \in \mathcal{P}$;
- (iv) h é um majorante de Q .

Com relação a (i), note que $G \subseteq D(h)$, pois $G \subseteq D(h_j)$ para todo $j \in I$. Além disso, $0 \in D(h)$, pois $0 \in D(h_j)$ para todo $j \in I$, uma vez que $D(h_j)$ é subespaço de E . Se $x, y \in D(h)$, existem $h_i, h_j \in Q$ tais que

$$x \in D(h_i) \quad \text{e} \quad y \in D(h_j). \quad (2.4)$$

Como Q é totalmente ordenado, temos

$$h_i \leq h_j \quad \text{ou} \quad h_j \leq h_i.$$

Podemos, então, supor que $h_i \leq h_j$ sem perda de generalidade. Assim,

$$D(h_i) \subseteq D(h_j) \quad \text{e} \quad h_j|_{D(h_i)} \equiv h_i. \quad (2.5)$$

De (2.4) e (2.5), segue que

$$x, y \in D(h_j).$$

Sendo $D(h_j)$ um subespaço, podemos afirmar que se $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$x + \alpha y \in D(h_j) \subseteq \bigcup_{i \in I} D(h_i),$$

concluindo a prova de (i).

Para provar (ii), tome $x \in D(h)$ e note que se $h(x) = h_i(x)$ e $h(x) = h_j(x)$, como $h_i, h_j \in Q$, então $h_i \leq h_j$ ou $h_j \leq h_i$, posto que Q é totalmente ordenado. Supondo $h_i \leq h_j$, temos $h_j(x) = h_i(x)$, pois $h_j|_{D(h_i)} \equiv h_i$. Isso prova a validade de (ii).

Agora, vejamos (iii). Com relação a linearidade, sejam $x, y \in D(h)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Como Q é totalmente ordenado, podemos supor, como em (i), que $x, y \in D(h_i)$ para algum $i \in I$. Sendo $D(h_i)$ um subespaço vetorial de E , temos

$$x + \alpha y \in D(h_i).$$

Dessa forma, pela linearidade de h_i ,

$$h(x + \alpha y) = h_i(x + \alpha y) = h_i(x) + \alpha h_i(y) = h(x) + \alpha h(y),$$

provando a linearidade de h .

Além disso, se $x \in G$ então $x \in D(h_i)$ para todo $i \in I$. Portanto,

$$h(x) = h_i(x) = g(x),$$

provando que h estende g . Também temos que h é dominado por p . De fato, dado $x \in D(h)$, temos que $x \in D(h_i)$ para algum $i \in I$ e, portanto,

$$h(x) = h_i(x) \leq p(x), \text{ pois } h_i \in Q \subseteq \mathcal{P}.$$

Pela arbitrariedade de $x \in D(h)$, segue que $h(x) \leq p(x)$, para todo $x \in D(h)$, o que nos mostra que h é dominado por p . Por fim, note que h é um majorante de Q . De fato, $D(h_i) \subseteq D(h)$ e $h|_{D(h_i)} \equiv h_i$ para todo $i \in I$. Logo,

$$h_i \leq h, \text{ para todo } h_i \in Q.$$

Concluimos, assim, que $\mathcal{P}$ é indutivo (veja Definição A.23), uma vez que Q foi escolhido de forma arbitrária. Portanto, pelo Lema de Zorn (veja Lema A.24), concluimos que $\mathcal{P}$ admite um elemento maximal, o qual será denotado por $f: D(f) \rightarrow \mathbb{R}$. Então, f é linear, $G \subseteq D(f)$, $f|_G \equiv g$ e $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in D(f)$.

Para finalizar a prova, devemos constatar que $D(f) = E$. Para isso, suponha, por absurdo, que exista $x_0 \in E \setminus D(f)$. Dados, $x, y \in D(f)$, temos

$$f(x) + f(y) = f(x + y) \leq p(x + y) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0),$$

donde

$$f(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - f(x). \quad (2.6)$$

Por (2.6), segue que

$$\sup\{f(y) - p(y - x_0) : y \in D(f)\} \leq \inf\{p(x + x_0) - f(x) : x \in D(f)\}.$$

Considerando $A = \{f(y) - p(y - x_0) : y \in D(f)\}$ e $B = \{p(x + x_0) - f(x) : x \in D(f)\}$, pela relação acima, podemos tomar $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sup A \leq \alpha \leq \inf B.$$

Dessa forma, temos

$$f(y) - p(y - x_0) \leq \alpha \Leftrightarrow f(y) - \alpha \leq p(y - x_0), \text{ para todo } y \in D(f), \quad (2.7)$$

e

$$\alpha \leq p(x + x_0) - f(x) \Leftrightarrow f(x) + \alpha \leq p(x + x_0), \text{ para todo } x \in D(f). \quad (2.8)$$

Seja $M = D(f) + \text{span}\{x_0\} \subseteq E$ e defina

$$\begin{aligned} \tilde{f}: M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x + tx_0 &\longmapsto f(x) + t\alpha. \end{aligned}$$

Note que

- (i) M é um subespaço de E , $D(f) \subset M$ e $G \subseteq D(f) \subset M$;

- (ii) $\tilde{f}$ é linear;
- (iii) $\tilde{f}|_G \equiv f|_G \equiv g$;
- (iv) $\tilde{f}(x + tx_0) \leq p(x + tx_0)$, para todo $x \in D(f)$, $t \in \mathbb{R}$.

As provas de (i), (ii) e (iii) são simples. Vamos comprovar que (iv) vale.

Para $t = 0$ é claro que

$$\tilde{f}(x) \leq p(x), \quad \text{pois} \quad \tilde{f}(x) = f(x) \leq p(x), \quad \forall x \in D(f).$$

Para $t > 0$, por (2.8) e pelo fato de p ser sublinear, temos

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x + tx_0) &= f(x) + t\alpha \\ &= t \left[f\left(\frac{x}{t}\right) + \alpha \right] \\ &\leq t \cdot p\left(\frac{x}{t} + x_0\right) \\ &= p(x + tx_0). \end{aligned}$$

Para $t < 0$, como $(-t) > 0$, por (2.7) e pelo fato de p ser sublinear, temos:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x + tx_0) &= f(x) + t\alpha \\ &= -t \left[f\left(-\frac{x}{t}\right) - \alpha \right] \\ &\leq -tp\left(-\frac{x}{t} - x_0\right) \\ &= p(x + tx_0). \end{aligned}$$

Dessa forma, (i), (ii), (iii) e (iv) mostram que $\tilde{f} \in \mathcal{P}$ e $\tilde{f} > f$ pois $D(f) \subset M$ e $\tilde{f}|_{D(f)} \equiv f$. Porém, isso contradiz a maximalidade de f . Logo, $D(f) = E$ e $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear tal que $f|_G \equiv g$ e $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$, de onde segue o resultado. $\square$

Como consequência do Teorema 2.1, temos o seguinte resultado.

Corolário 2.2. *Se $p: E \rightarrow \mathbb{R}$ for um funcional sublinear em um espaço vetorial real E , então para cada elemento $x_0 \in E$, existirá um funcional linear $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$f(x_0) = p(x_0) \quad \text{e} \quad f(x) \leq p(x), \quad \forall x \in E.$$

Demonstração. Seja $p: E \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional sublinear e fixe $x_0 \in E$.

Sendo p um funcional sublinear, temos

$$p(0) = p(0 + 0) \leq p(0) + p(0) \quad \rightarrow \quad 0 \leq p(0).$$

Além disso, para $\lambda = 2 > 0$, temos

$$p(0) = p(2 \cdot 0) = 2p(0) \quad \rightarrow \quad p(0) = 0.$$

- (I) Se $x_0 = 0$, basta tomar $f \equiv 0$, pois $f(0) = 0 = p(0)$.
- (II) Suponha agora $x_0 \neq 0$.

Considere o subespaço

$$G = \text{span}\{x_0\} = \{\alpha x_0 : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Defina $f_0: G \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_0(\alpha x_0) = \alpha p(x_0).$$

É fácil verificar que f_0 é linear e satisfaz $f_0(x_0) = p(x_0)$.

Vamos mostrar que $f_0(x) \leq p(x)$ para todo $x \in G$. Se $x = \alpha x_0$, temos:

- Se $\alpha \geq 0$, por termos $p(0) = 0$ e a homogeneidade positiva de p , segue que

$$f_0(\alpha x_0) = \alpha p(x_0) = p(\alpha x_0)$$

e, portanto, $f_0(x) = p(x) \leq p(x)$.

- Se $\alpha < 0$, escreva $\alpha = -\beta$ com $\beta > 0$. Pela subaditividade de p , temos

$$0 = p(0) = p(x_0 + (-x_0)) \leq p(x_0) + p(-x_0),$$

donde $p(-x_0) \geq -p(x_0)$. Multiplicando por β e usando homogeneidade positiva,

$$p(\beta(-x_0)) \geq -\beta p(x_0).$$

Como $\beta(-x_0) = \alpha x_0$, obtemos

$$p(\alpha x_0) \geq \alpha p(x_0) = f_0(\alpha x_0).$$

Logo,

$$f_0(x) \leq p(x), \quad \forall x \in G.$$

Pelo Teorema 2.1, existe uma extensão linear $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ de f_0 tal que

$$f(x) \leq p(x), \quad \forall x \in E.$$

Como f estende f_0 , segue que

$$f(x_0) = f_0(x_0) = p(x_0).$$

Concluimos, portanto, que existe um funcional linear $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_0) = p(x_0) \quad \text{e} \quad f(x) \leq p(x), \quad \forall x \in E,$$

como queríamos demonstrar. □

O próximo resultado trata da existência de extensões lineares contínuas de funcionais contínuos definidos em subespaços de espaços vetoriais normados. Observamos que é comum se referir ao próximo teorema como Teorema de Extensão de Hahn-Banach para Espaços Normados. Antes de enunciá-lo, cabe estabelecer a seguinte notação: se E for um espaço vetorial real ou complexo, denotamos por E' o dual topológico de E , ou seja, o espaço vetorial dos funcionais lineares e limitados (contínuos) definidos em E , com a norma

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} |f(x)| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} |f(x)|, \quad (2.9)$$

veja o Apêndice A, Seção A.7.3, Definição A.162.

Corolário 2.3 (Teorema de Hahn-Banach para Espaços Normados- Caso Real). Sejam G um subespaço de um espaço vetorial normado real $(E, \|\cdot\|)$ e $g: G \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo. Então, existe um funcional linear contínuo $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ que estende g tal que $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$, em que

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \quad \text{e} \quad \|g\|_{G'} = \sup_{\substack{x \in G \\ x \neq 0}} \frac{|g(x)|}{\|x\|}.$$

Demonstração. Sendo g um funcional linear contínuo, temos

$$g(x) \leq |g(x)| \leq \|g\|_{G'} \|x\|, \text{ para todo } x \in G. \quad (2.10)$$

Definindo $p: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ por

$$p(x) = \|g\|_{G'} \|x\|, \quad x \in E,$$

temos que p é um funcional sublinear tal que, por (2.10),

$$g(x) \leq p(x), \text{ para todo } x \in G.$$

Com efeito, para constatar que p é sublinear, tomamos $x, y \in E$ e $\lambda > 0$ arbitrários. Temos

$$p(\lambda x) = \|g\|_{G'} \|\lambda x\| = \|g\|_{G'} |\lambda| \|x\| \underbrace{=}_{\lambda > 0} \lambda \|g\|_{G'} \|x\| = \lambda p(x)$$

e

$$p(x + y) = \|g\|_{G'} \|x + y\| \leq \|g\|_{G'} [\|x\| + \|y\|] = p(x) + p(y).$$

O Teorema 2.1 nos garante que existe $f \in E \rightarrow \mathbb{R}$ linear tal que $f|_G \equiv g$, e

$$f(x) \leq p(x), \text{ para todo } x \in E.$$

Note que pela definição de p , para todo $x \in E$, temos

$$f(x) \leq p(x) = \|g\|_{G'} \|x\|,$$

e sendo E um espaço vetorial e f um funcional linear, também segue que

$$-f(x) = f(-x) \leq \|g\|_{G'} \|-x\| = \|g\|_{G'} \|x\|.$$

Com isso, temos

$$|f(x)| \leq \|g\|_{G'} \|x\| \Rightarrow \|f\|_{E'} \leq \|g\|_{G'}, \quad (2.11)$$

o que nos garante que f é limitado (e, portanto, contínuo).

Além disso, uma vez que $G \subset E$, por propriedades de supremo e pelo fato de que $f|_G \equiv g$, obtemos

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geq \sup_{\substack{x \in G \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in G \\ x \neq 0}} \frac{|g(x)|}{\|x\|} = \|g\|_{G'},$$

ou seja,

$$\|f\|_{E'} \geq \|g\|_{G'}. \quad (2.12)$$

Por (2.11) e (2.12), concluímos que

$$\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}.$$

□

A seguir, temos uma consequência direta do corolário anterior, que trata da existência e caracterização de um funcional linear contínuo definido em um espaço normado não trivial.

Corolário 2.4. *Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado real não trivial e $x_0 \in E$. Se $x_0 \neq 0$, então existe um funcional linear contínuo $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$f(x_0) = \|x_0\| \quad \text{e} \quad \|f\|_{E'} = 1.$$

Demonstração. Considere $G = \text{span}\{x_0\}$ e defina $g: G \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(tx_0) = t\|x_0\|, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Note que g é linear, limitada (portanto contínua) e $\|g\|_{G'} = 1$. De fato, dados $x, y \in G$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos $x = t_1x_0$ e $y = t_2x_0$, sendo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$,

$$g(\alpha x) = g(\alpha t_1x_0) = \alpha t_1\|x_0\| = \alpha g(t_1x_0) = \alpha g(x)$$

e

$$g(x + y) = g(t_1x_0 + t_2x_0) = g((t_1 + t_2)x_0) = (t_1 + t_2)\|x_0\| = t_1\|x_0\| + t_2\|x_0\| = g(x) + g(y).$$

Além disso, dado $x \in G$ qualquer, $x \neq 0$, existe $t_1 \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $x = t_1x_0$ e

$$|g(x)| = |t_1\|x_0\|| = \|t_1x_0\| = \|x\| \quad \Rightarrow \quad \frac{|g(x)|}{\|x\|} = 1.$$

Sendo x arbitrário, podemos concluir que $\|g\|_{G'} = 1$. Ainda, por definição da g , temos

$$g(x_0) = \|x_0\|.$$

O Teorema de Hahn-Banach para espaços normados (veja Corolário 2.3) nos garante que existe $f \in E'$ tal que $f|_G \equiv g$ e $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$. Com isso, concluímos que

$$\|f\|_{E'} = 1 \quad \text{e} \quad f(x_0) = \|x_0\|. \quad \square$$

Utilizando as mesmas ideias do Corolário 2.4, podemos provar o seguinte resultado.

Corolário 2.5. *Seja $(E, \|\cdot\|_E)$ um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{R}$. Então, para todo $x_0 \in E \setminus \{0\}$, existe um funcional linear contínuo $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$f(x_0) = \|x_0\|^2 \quad \text{e} \quad \|f\|_{E'} = \|x_0\|.$$

Demonstração. Basta considerar $G = \text{span}\{x_0\}$, definir o funcional $g: G \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(tx_0) = t\|x_0\|^2,$$

e prosseguir exatamente como na prova do Corolário 2.4. $\square$

Agora, veremos a versão analítica do Teorema de Hahn-Banach para espaços vetoriais complexos. Para prová-la usaremos a versão analítica do Teorema de Hahn-Banach para espaços vetoriais reais.

Teorema 2.6 (Teorema de Hahn-Banach - Caso Complexo). Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e $p: E \rightarrow \mathbb{R}$ uma seminorma em E (veja Definição A.145 e Proposição A.146). Se G é um subespaço vetorial próprio de E e $g: G \rightarrow \mathbb{K}$ é um funcional linear tal que

$$|g(x)| \leq p(x), \quad \forall x \in G, \quad (2.13)$$

então existe um funcional linear $f: E \rightarrow \mathbb{K}$ que estende g em E , $f|_G \equiv g$, e satisfaz

$$|f(x)| \leq p(x), \quad \text{para todo } x \in E.$$

Demonstração. Antes de tudo, observemos que

$$p(x) \geq 0, \quad \forall x \in E. \quad (2.14)$$

Com efeito, da propriedade (b) de seminorma - Proposição A.146, segue que

$$p(0) = p(2 \cdot 0) = 2p(0),$$

donde $p(0) = 0$.

Da mesma propriedade segue também que

$$p(-x) = |-1|p(x) = p(x).$$

Portanto, pela propriedade (a) de seminorma - Proposição A.146, obtemos

$$2p(x) = p(x) + p(-x) \geq p(x + (-x)) = p(0) = 0,$$

de onde segue que

$$p(x) \geq 0, \quad \forall x \in E.$$

Agora, vamos considerar dois casos, quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Caso 1: Consideremos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Sendo p uma seminorma, p cumpre as condições (2.1) e (2.2) do Teorema 2.1. E de (2.13) segue que $g(x) \leq p(x)$, para todo $x \in G$. Pelo Teorema de Hahn-Banach para espaços vetoriais reais (Teorema 2.1), existe um funcional linear $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in G$ e

$$f(x) \leq p(x), \quad \text{para todo } x \in E. \quad (2.15)$$

Da desigualdade (2.15) e da linearidade de f segue que

$$-f(x) = f(-x) \leq p(-x) = |-1|p(x) = p(x), \quad \text{para todo } x \in E. \quad (2.16)$$

De (2.15) e (2.16) concluímos que $|f(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

Caso 2: Consideremos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Neste caso, E é um espaço vetorial complexo e g toma valores em $\mathbb{C}$.

Definindo $g_1: G \rightarrow \mathbb{R}$ e $g_2: G \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g_1(x) = \operatorname{Re}(g(x)) \quad \text{e} \quad g_2(x) = \operatorname{Im}(g(x))$$

para $x \in G$, temos que g_1 e g_2 são lineares, tomam valores reais e

$$g(x) = g_1(x) + ig_2(x), \quad \forall x \in G.$$

Como artifício, chamemos de $E_{\mathbb{R}}$ e $G_{\mathbb{R}}$ os espaços vetoriais reais subjacentes a E e G , respectivamente (isto é, como conjunto, o respectivo espaço é o mesmo, a operação de adição é a mesma e a multiplicação por escalar é feita apenas com escalares reais). Então, g_1 e g_2 são funcionais lineares em $G_{\mathbb{R}}$. Para $x \in G_{\mathbb{R}}$, temos

$$g_1(x) \leq |g_1(x)| \leq |g(x)| \leq p(x).$$

Pelo Teorema 2.1, existe um funcional linear $f_1 : E_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ que estende g_1 e cumpre $f_1(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E_{\mathbb{R}}$.

Agora vamos estudar o caso de g_2 . Note que, se $x \in G$, então

$$-g_2(x) + ig_1(x) = i[g_1(x) + ig_2(x)] = ig(x) = g(ix) = g_1(ix) + ig_2(ix).$$

Assim, se $x \in G$, temos $g_2(x) = -g_1(ix)$. Então, definamos $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$f(x) = f_1(x) - if_1(ix), \quad \forall x \in E.$$

Portanto, $f(x) = g(x)$ para todo $x \in G$. Resta-nos mostrar que f é um funcional linear em E (no espaço complexo) e que $|f(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

• f é linear: Dados $x \in E$ e $\lambda = a + bi \in \mathbb{C}$, temos

$$f((a + bi)x) = f_1(ax + ibx) - i(f_1(i(a + bi)x)) =$$

$$af_1(x) + bf_1(ix) - i[af_1(ix) - bf_1(x)] = (a + bi)[f_1(x) - if_1(ix)] = (a + bi)f(x),$$

pela linearidade de f_1 .

Além disso, se $x, y \in E$, temos

$$f(x + y) = f_1(x + y) - if_1(i(x + y)) = f_1(x) + f_1(y) - (if_1(ix) + if_1(iy)) =$$

$$f_1(x) - if_1(ix) + f_1(y) - if_1(iy) = f(x) + f(y),$$

novamente pela linearidade de f_1 .

• $|f(x)| \leq p(x)$, para todo $x \in E$.

Se $x \in E$ é tal que $f(x) = 0$, o resultado é imediato, pois sabemos que $p(x) \geq 0$ (veja (2.14)). Seja $x \in E$ tal que $f(x) \neq 0$. Então, $f(x) = |f(x)|e^{i\theta}$ para algum $\theta \in (-\pi, \pi]$, de onde segue que $|f(x)| = e^{-i\theta}f(x) = f(e^{-i\theta}x)$. Como $|f(x)|$ é real, segue que

$$|f(x)| = f(e^{-i\theta}x) = f_1(e^{-i\theta}x) \leq p(e^{-i\theta}x) = |e^{-i\theta}|p(x) = p(x). \quad \square$$

Assim como no caso real, o caso complexo do Teorema de Hahn-Banach possui sua versão para espaços normados, bem como os respectivos corolários. Como suas demonstrações são similares, a seguir, deixamos esses resultados enunciados, nos quais $\mathbb{K}$ denota $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Corolário 2.7. Sejam G um subespaço de um espaço vetorial normado $(E, \|\cdot\|)$ sobre $\mathbb{K}$ e $g : G \rightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Então, existe um funcional linear contínuo $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ que estende g tal que $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$.

Corolário 2.8. Seja $(E, \|\cdot\|_E)$ um espaço vetorial normado não trivial sobre $\mathbb{K}$ e $x_0 \in E$. Se $x_0 \neq 0$, então existe um funcional linear contínuo $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ tal que

$$f(x_0) = \|x_0\| \quad e \quad \|f\|_{E'} = 1.$$

Corolário 2.9. *Seja $(E, \|\cdot\|_E)$ um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$. Então, para todo $x_0 \in E \setminus \{0\}$, existe um funcional linear contínuo $f: E \rightarrow \mathbb{K}$ tal que*

$$f(x_0) = \|x_0\|^2 \quad \text{e} \quad \|f\|_{E'} = \|x_0\|.$$

A interpretação geométrica do Teorema de Hahn-Banach desempenha papel central na teoria da convexidade em espaços vetoriais topológicos. De maneira geral, os resultados de separação afirmam que conjuntos convexos suficientemente regulares podem ser distinguidos por hiperplanos definidos por funcionais lineares contínuos. Essa perspectiva permite estudar propriedades geométricas de conjuntos convexos por meio de funcionais lineares, estabelecendo uma ligação entre a estrutura geométrica do espaço e o seu dual topológico.

A primeira e a segunda forma geométrica do Teorema de Hahn-Banach dizem, essencialmente, que se A e B são subconjuntos convexos disjuntos de um espaço normado real E , então existe um funcional linear contínuo $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) < f(y), \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B.$$

Sob determinadas condições sobre A e B , pode-se ir mais longe e garantir que

$$\sup\{f(x): x \in A\} < \inf\{f(y): y \in B\}.$$

Podemos interpretar esses resultados sob a perspectiva de que o funcional f separa os conjuntos A e B . Por isso, esses resultados também são chamados de *teoremas de separação*.

A abordagem desses teoremas requer algumas definições e resultados preliminares. Embora alguns tenham sido apresentados no Apêndice A, no contexto de espaços vetoriais topológicos – e pudessem, portanto, ser apenas mencionados, cabendo ao leitor realizar as devidas adaptações – optamos por retomá-los a seguir, com o intuito de promover maior clareza e facilitar a leitura.

Definição 2.10. *Seja V um espaço vetorial real, $V \neq \{0\}$. Um *hiperplano* de V é um subespaço W de V , $W \neq V$, tal que se W_1 é subespaço de V e $W \subset W_1$, então $W_1 = V$ ou $W_1 = W$.*

Pode-se provar que os hiperplanos são exatamente os núcleos dos funcionais lineares, conforme atesta a próxima proposição.

Proposição 2.11. *Sejam V um espaço vetorial real, $V \neq \{0\}$, e W um subespaço de V . Então, W é um hiperplano de V se, e somente se, existe um funcional linear não nulo $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\ker(f) = W$.*

Demonstração. Suponha que W seja um hiperplano de V . Como $W \neq V$, podemos escolher $v_0 \in V - W$. Tome $W_1 = W + \text{span}\{v_0\}$. Como $W \subset W_1$ e $W \neq W_1$, podemos concluir que $W_1 = V$, já que W é um hiperplano de V . Portanto, cada $v \in V$ se escreve de modo único como $v = u + av_0$, com $u \in W$ e $a \in \mathbb{R}$. Definindo $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(u + av_0) = a,$$

temos que f é um funcional linear não nulo, tal que $\ker(f) = W$.

Reciprocamente, suponha que exista um funcional linear não nulo $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\ker(f) = W$. Como $f \neq 0$, temos que $\ker(f) \neq V$. Seja W_1 um subespaço de V tal

que $\ker(f) \subseteq W_1$. Devemos mostrar que se $\ker(f) \neq W_1$, então $W_1 = V$. Pois bem, é exatamente isso que vamos fazer. Suponha que $\ker(f) \neq W_1$ e escolha $v_0 \in W_1 - \ker(f)$. Dado $v \in V$ arbitrário, note que

$$u = v - \frac{f(v)}{f(v_0)}v_0 \in \ker(f) \subseteq W_1.$$

Portanto, como W_1 é um subespaço vetorial e $u, v_0 \in W_1$, segue que

$$v = u + \frac{f(v)}{f(v_0)}v_0 \in W_1.$$

Como v foi tomado arbitrariamente em V , concluímos que $W_1 = V$. □

Se W é um hiperplano de um espaço vetorial real V e $v_0 \in V$, o conjunto

$$v_0 + W = \{v_0 + v : v \in W\}$$

é chamado de *hiperplano afim* de V .

Afirmção: Os hiperplanos afins de V são precisamente os conjuntos da forma

$$H = \{x \in V : f(x) = \alpha\},$$

em que f é um funcional linear não nulo definido em V e α é um número real.

De fato, sendo W um hiperplano de V , existe um funcional linear não nulo $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\ker(f) = W$ (pela Proposição 2.11). Portanto,

$$v_0 + W = v_0 + \ker(f) = \{v_0 + v : v \in \ker(f)\}.$$

Se $u \in v_0 + W$, então $f(u) = f(v_0)$ e, portanto, $u \in \{x \in V : f(x) = f(v_0)\}$. Por outro lado, se $u \in \{x \in V : f(x) = f(v_0)\}$, podemos dizer que $u = v_0 + v$, com $v \in \ker(f)$, posto que f é linear ($f(u) = f(v_0) \Rightarrow f(u - v_0) = 0 \Rightarrow u - v_0 \in \ker(f)$). Logo, $u \in v_0 + \ker(f)$.

No que segue E denotará um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{R}$ e chamaremos os hiperplanos afins simplesmente de hiperplanos.

Vimos na Proposição A.123 que um hiperplano $H = \{x \in E : f(x) = \alpha\}$ é fechado se, e somente se, o funcional linear não nulo f é contínuo.

A seguir, recordaremos o conceito de funcional de Minkowski (*gauge*), agora associado a um subconjunto aberto e convexo de um espaço vetorial normado $(E, \|\cdot\|)$ que contém o vetor nulo, que será útil na obtenção das formas geométricas do Teorema de Hahn-Banach.

Definição 2.12. Seja $C \subset E$ um conjunto aberto convexo com $0 \in C$. O *funcional de Minkowski* $p : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ associado a C é definido como:

$$p(x) = \inf \left\{ \alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in C \right\}, \quad \text{para } x \in E.$$

Observação 2.13. O conjunto

$$\left\{ \alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in C \right\}$$

é não vazio para todo $x \in E$. Com efeito, como $0 \in C$ e C é aberto, existe $r > 0$ tal que $B(0; r) \subset C$, em que $B(0; r) = \{x \in E : \|x\| < r\}$. Dado $x \in E$ arbitrário, $x \neq 0$, temos que $\frac{r}{2} \frac{x}{\|x\|} \in B(0; r) \subset C$. Portanto,

$$\left(\frac{r}{2} \frac{1}{\|x\|} \right)^{-1} \in \left\{ \alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in C \right\}.$$

Note que para $x = 0$ é claro que o conjunto $\left\{\alpha > 0: \frac{x}{\alpha} \in C\right\}$ é não vazio, já que $0 = 0/\alpha \in C$ para todo $\alpha > 0$.

Usaremos três resultados auxiliares para demonstrar a Primeira Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach, que serão expostos na sequência.

Lema 2.14. *Seja $C \subset E$ um conjunto aberto convexo com $0 \in C$ e seja $p : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ o funcional de Minkowski associado a C . O funcional p é tal que:*

- (i) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, para $\lambda > 0$ e $x \in E$;
- (ii) existe $M > 0$ tal que $0 \leq p(x) \leq M\|x\|$, $\forall x \in E$;
- (iii) $C = \{x \in E: p(x) < 1\}$;
- (iv) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, para $x, y \in E$.

Demonstração. (i) Dados $x \in E$ e $\lambda > 0$, temos

$$p(\lambda x) = \inf \left\{ \alpha > 0: \frac{\lambda x}{\alpha} \in C \right\}.$$

Fazendo $\beta = \frac{\alpha}{\lambda}$, temos $\alpha = \lambda\beta$ e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} p(\lambda x) &= \inf \left\{ \alpha > 0: \frac{\lambda x}{\alpha} \in C \right\} \\ &= \inf \left\{ \lambda\beta > 0: \frac{x}{\beta} \in C \right\} \\ &= \lambda \inf \left\{ \beta > 0: \frac{x}{\beta} \in C \right\} \\ &= \lambda p(x). \end{aligned}$$

(ii) Como C é aberto e $0 \in C$, existe $r > 0$ tal que $B(0; r) \subset C$. Para todo $x \in E$, $x \neq 0$ tem-se $\frac{r}{2\|x\|}x \in B_E(0; r)$. Então

$$\left(\frac{r}{2\|x\|} \right)^{-1} \in \left\{ \alpha > 0: \frac{x}{\alpha} \in C \right\}, \quad (2.17)$$

visto que $B_E(0; r) \subset C$. Por definição, temos:

$$0 \leq p(x), \quad \text{para todo } x \in E. \quad (2.18)$$

Além disso, por (2.17), temos:

$$p(x) \leq \frac{2\|x\|}{r} \quad \text{para todo } x \in E. \quad (2.19)$$

Por (2.18) e (2.19), concluímos que

$$0 \leq p(x) \leq M\|x\| \quad \text{para todo } x \in E,$$

em que $M = \frac{2}{r}$.

(iii) Chamemos $\hat{C} = \{x \in E : p(x) < 1\}$. Vamos mostrar que $C = \hat{C}$.

$C \subseteq \hat{C}$: Seja $x \in C$.

• Se $x = 0$, então $p(0) = \inf \mathbb{R}_+ = 0 < 1$. Logo $0 \in \hat{C}$.

• Suponhamos que $x \neq 0$. Como C é aberto, existe $s > 0$ tal que $B_E(x; s) \subset C$.

Podemos então afirmar que existe $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno de forma que $(1+\epsilon)x \in C$ (basta tomar $\epsilon = s/2\|x\|$ se $x \neq 0$). Dessa forma,

$$\frac{1}{1+\epsilon} \in \left\{ \alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in C \right\}$$

e, pela definição de p , tem-se:

$$p(x) \leq \frac{1}{1+\epsilon} < 1,$$

de onde segue que $x \in \hat{C}$.

$\hat{C} \subseteq C$: Seja $x \in \hat{C}$. Então $p(x) < 1$ e existe $0 < \alpha < 1$ tal que $\alpha^{-1}x \in C$. Como $0 \in C$ e C é convexo, temos que $\alpha \cdot (\alpha^{-1}x) + (1-\alpha) \cdot 0 = (\alpha \cdot \alpha^{-1}) \cdot x = x \in C$.

(iv) Sejam $x, y \in E$ e $\epsilon > 0$ arbitrários. Note que $\frac{x}{p(x) + \epsilon} \in C$, pois

$$p\left(\frac{x}{p(x) + \epsilon}\right) \stackrel{(i)}{=} \frac{p(x)}{p(x) + \epsilon} < 1 \stackrel{(iii)}{\implies} \frac{x}{p(x) + \epsilon} \in C.$$

Da mesma forma temos que $\frac{y}{p(y) + \epsilon} \in C$. Como C é convexo, tomando

$$0 < t = \frac{p(x) + \epsilon}{p(x) + p(y) + 2\epsilon} < 1,$$

temos que

$$\frac{x+y}{p(x) + p(y) + 2\epsilon} = t \frac{x}{p(x) + \epsilon} + (1-t) \frac{y}{p(y) + \epsilon} \in C.$$

De (i) e (iii) concluímos que

$$\frac{p(x+y)}{p(x) + p(y) + 2\epsilon} = p\left(\frac{x+y}{p(x) + p(y) + 2\epsilon}\right) < 1$$

e, portanto, $p(x+y) < p(x) + p(y) + 2\epsilon$. O resultado segue fazendo $\epsilon \rightarrow 0$. $\square$

Observação 2.15. As afirmações (i) e (iv) do Lema 2.14 estabelecem que o funcional de Minkowski é um funcional sublinear.

Lema 2.16. *Seja $C \subsetneq E$ um conjunto aberto convexo e não vazio e seja $x_0 \in E - C$. Existe $f \in E' = \{h : E \rightarrow \mathbb{R} : h \text{ é um funcional linear e limitado}\}$ tal que $f(x) < f(x_0)$, para todo $x \in C$.*

Demonstração. Se $0 \notin C$, escolha $z_0 \in C$ e considere $D = \{x - z_0 : x \in C\}$. Note que D é aberto, convexo, não-vazio, pois C é aberto, convexo, não vazio e $0 \in D$. Podemos então considerar o funcional de Minkowski associado a D :

$$p(x) = \inf \left\{ \alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in D \right\}, \quad \text{para } x \in E.$$

Sejam $y_0 = x_0 - z_0 \notin D$, $G = \text{span}\{y_0\}$ e $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ o funcional linear dado por $g(ty_0) = t$, para t real.

Afirmção: $g(x) \leq p(x)$ para todo $x \in G$.

Com efeito, seja $x \in G$. Digamos que $x = ty_0$. Então $g(x) = t$. Se $t \leq 0$ então, pelo item (ii) do Lema 2.14, temos $g(x) = t \leq 0 \leq p(x)$. Agora, se $t > 0$, como $y_0 \notin D$, temos pelo item (iii) do Lema 2.14 que $p(y_0) \geq 1$. Dessa forma $p(x) = p(ty_0) = tp(y_0) \geq t = g(ty_0) = g(x)$, já que p é sublinear.

Assim, pela Forma Analítica do Teorema de Hahn-Banach, existe um funcional linear $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in G$ e $f(x) \leq p(x)$, para todo $x \in E$. Pelo Lema 2.14 - item (iii), existe $M > 0$ tal que $f(x) \leq p(x) \leq M\|x\|$, para todo $x \in E$, de onde segue que $-f(x) = f(-x) \leq M\|-x\| = M\|x\|$. Consequentemente, $|f(x)| \leq M\|x\|$ para todo $x \in E$, ou seja, f é limitado.

Como $p(y) < 1$ para todo $y \in D$, segue que $f(y) \leq p(y) < 1$ para todo $y \in D$. Daí,

$$f(y) < 1 = g(y_0) = f(y_0) = f(x_0 - z_0),$$

para todo $y \in D$, ou seja,

$$f(x - z_0) < f(x_0 - z_0),$$

para todo $x \in C$ e, portanto, $f(x) < f(x_0)$ para todo $x \in C$.

Quando $0 \in C$, basta aplicar o raciocínio análogo. □

O último ingrediente que nos falta é uma propriedade interessante dos funcionais lineares contínuos em espaços normados:

Lema 2.17. Sejam E um espaço normado, $f \in E'$ um funcional não nulo e A um subconjunto convexo, aberto e não vazio de E . Então, $f(A)$ é um intervalo aberto (não necessariamente limitado).

Demonstração. Inicialmente, observe que f é um funcional sobrejetor. De fato, como f é linear, temos que $f(E)$ é um subespaço de $\mathbb{R}$, ou seja, $f(E) = \{0\}$ ou $f(E) = \mathbb{R}$. Como f é não nulo, segue que $f(E) = \mathbb{R}$.

Da linearidade de f , também podemos extrair a propriedade de que $f(A)$ é convexo, uma vez que A é convexo. Portanto, $f(A)$ é um intervalo.

Suponha que $f(A)$ seja um intervalo limitado superiormente. Seja “ a ” a extremidade superior deste intervalo.

Afirmção: $a \notin f(A)$.

Com efeito, se $a \in f(A)$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = a$. Como A é aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x; \epsilon) \subset A$.

Dado $z \in E - \{0\}$ qualquer, temos

$$y = x + \frac{\epsilon}{2\|z\|} \cdot z \in B(x; \epsilon) \subset A$$

Daí,

$$f(y) \leq a,$$

donde

$$f(x) + \frac{\epsilon}{2\|z\|} f(z) \leq a \quad \Rightarrow \quad f(z) \leq 0.$$

Sendo $z \in E - \{0\}$ arbitrário, concluímos que

$$f(E) \subset (-\infty, 0],$$

o que viola a sobrejetividade de f . Por conseguinte, a afirmação é verdadeira.

Analogamente, prova-se que se $f(A)$ for um intervalo limitado inferiormente, então a extremidade inferior de $f(A)$ também não pertence a $f(A)$. Isso nos leva a inferir que $f(A)$ é um intervalo aberto. $\square$

Agora, para simplificar a notação, o hiperplano $H = \{x \in E: f(x) = a\}$ será denotado pelo símbolo $[f = a]$.

Teorema 2.18 (Primeira Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach). Sejam A e B subconjuntos convexos, não vazios e disjuntos do espaço normado E . Se A é aberto, então existem um funcional $f \in E'$ e $a \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) < a \leq f(y), \quad \text{para todos } x \in A \text{ e } y \in B.$$

Neste caso diz-se que o hiperplano fechado $[f = a]$ separa A e B no sentido fraco.

Demonstração. Chame

$$C = A - B = \{x - y: x \in A, y \in B\}.$$

Note que:

(1) C é aberto, pois $C = \bigcup_{y \in B} A - \{y\}$ é uma união arbitrária de abertos (sendo A aberto, $A - \{y\}$ também é aberto).

(2) C é convexo, pois A e B são convexos.

(3) $C \neq \emptyset$, pois A e B são não vazios.

(4) $0 \notin C$, pois $A \cap B = \emptyset$.

(5) $C \neq E$, pois $0 \notin C$ e $0 \in E$.

Portanto, pelo Lema 2.16, existe $f \in E'$ tal que

$$f(z) < f(0) = 0 \quad \forall z \in C,$$

ou seja,

$$f(x - y) < 0 \quad \forall x \in A, y \in B.$$

Daí,

$$f(x) < f(y) \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B. \quad (2.20)$$

Note que $f(A)$ é limitado superiormente por $f(y)$ para todo $y \in B$. Então, $\sup_{x \in A} f(x)$ é um número real. Seja $a = \sup_{x \in A} f(x)$.

De (2.20) segue que

$$f(x) \leq a \leq f(y) \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B.$$

Mas, como $f(A)$ é um intervalo aberto pelo Lema 2.17, podemos afirmar que $a \notin f(A)$, logo

$$f(x) < a \leq f(y) \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B,$$

o que completa a prova. $\square$

Teorema 2.19 (Segunda Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach). Sejam A e B subconjuntos convexos, não vazios e disjuntos do espaço normado $(E, \|\cdot\|)$. Se A é fechado e B é compacto, então existem um funcional $f \in E'$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) \leq a < b \leq f(y), \quad \text{para todos } x \in A \text{ e } y \in B.$$

Para $c \in (a, b)$ diz-se que o hiperplano fechado $[f = c]$ separa A e B estritamente.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, temos que os conjuntos

$$A + B(0, \varepsilon) \quad \text{e} \quad B + B(0, \varepsilon)$$

são convexos, pois A , B e $B(0, \varepsilon)$ são convexos, em que $B(0, \varepsilon) = \{x \in E : \|x\| < \varepsilon\} = \varepsilon B(0, 1) = \varepsilon\{x \in E : \|x\| < 1\}$. Ademais, tais conjuntos são abertos, pois

$$A + B(0, \varepsilon) = \bigcup_{x \in A} (x + B(0, \varepsilon)) = \bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon)$$

e

$$B + B(0, \varepsilon) = \bigcup_{y \in B} (y + B(0, \varepsilon)) = \bigcup_{y \in B} B(y, \varepsilon),$$

além de serem não vazios, posto que A e B são não vazios.

Afirmção: Existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(A + B(0, \varepsilon)) \cap (B + B(0, \varepsilon)) = \emptyset.$$

Suponha, por absurdo, que isso não seja verdade. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$(A + B(0, 1/n)) \cap (B + B(0, 1/n)) \neq \emptyset.$$

Logo, existem sequências $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$, $(y_n) \subset B$ e $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B(0, 1/n)$ tais que

$$x_n + u_n = y_n + v_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$\|x_n - y_n\| = \|v_n - u_n\| \leq \|v_n\| + \|u_n\| < \frac{2}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.21)$$

Como B é compacto, a sequência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente, digamos $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, tal que

$$y_{n_k} \rightarrow y \in B. \quad (2.22)$$

De (2.21) e (2.22), segue que

$$\|x_{n_k} - y\| \leq \|x_{n_k} - y_{n_k}\| + \|y_{n_k} - y\| \rightarrow 0,$$

ou seja, $x_{n_k} \rightarrow y$. Como A é fechado, temos $y \in A$. Portanto,

$$y \in A \cap B,$$

o que contradiz o fato de que A e B são disjuntos.

Logo, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(A + B(0, \varepsilon)) \cap (B + B(0, \varepsilon)) = \emptyset.$$

Pelo Teorema 2.18, existem $f \in E'$ e $c \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(\tilde{x}) < c \leq f(\tilde{y}), \quad \forall \tilde{x} \in A + B(0, \varepsilon), \quad \forall \tilde{y} \in B + B(0, \varepsilon). \quad (2.23)$$

Podemos reescrever essas desigualdades presentes em (2.23) como

$$f(x) + \varepsilon f(z_1) < c \leq f(y) + \varepsilon f(z_2), \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B, \quad \forall z_1, z_2 \in B(0, 1). \quad (2.24)$$

De (2.24), segue que

$$\varepsilon f(z_1) < c - f(x), \quad \forall z_1 \in B(0, 1), \quad \forall x \in A. \quad (2.25)$$

Como (2.25) também vale para $-z_1$ (pois $-z_1 \in B(0, 1)$), obtemos

$$\varepsilon |f(z_1)| < c - f(x), \quad \forall z_1 \in B(0, 1), \quad \forall x \in A. \quad (2.26)$$

Como (2.26) vale para todo $z_1 \in B(0, 1)$, obtemos

$$\varepsilon \|f\| \leq c - f(x), \quad \forall x \in A,$$

ou equivalentemente,

$$f(x) \leq c - \varepsilon \|f\|, \quad \forall x \in A. \quad (2.27)$$

De modo análogo, a partir de (2.24), obtemos

$$\varepsilon \|f\| \leq f(y) - c, \quad \forall y \in B,$$

ou seja,

$$c + \varepsilon \|f\| \leq f(y), \quad \forall y \in B. \quad (2.28)$$

De (2.27) e (2.28), concluímos que

$$f(x) \leq c - \varepsilon \|f\| < c + \varepsilon \|f\| \leq f(y), \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B.$$

Tomando

$$a = c - \varepsilon \|f\| \quad \text{e} \quad b = c + \varepsilon \|f\|,$$

obtemos

$$f(x) \leq a < b \leq f(y), \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B,$$

o que conclui a demonstração. $\square$

Como aplicação do Teorema 2.19, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 2.20. Sejam E um espaço vetorial normado e F um subespaço vetorial de E . F é denso em E se, e somente se, para todo funcional $f \in E'$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in F$, tem-se $f \equiv 0$.

Demonstração. Se F é denso em E , então $\overline{F} = E$. Seja $f \in E'$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in F$. Queremos mostrar que $f \equiv 0$.

Pois bem, tomemos $x \in E$ arbitrariamente. Como $E = \overline{F}$, existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset F$ tal que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$. Agora, como f é contínuo, temos $f(x_n)$ converge para $f(x)$, pelo Critério Sequencial.

Uma vez que $f(x_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, concluímos pela unicidade do limite que $f(x) = 0$. Assim, pela arbitrariedade de $x \in E$, podemos inferir que $f \equiv 0$.

Reciprocamente, suponhamos que, para todo funcional $f \in E'$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in F$, temos $f \equiv 0$. Devemos mostrar que $\overline{F} = E$.

Suponha que exista $x_0 \in E \setminus \overline{F}$. Considere $A = \overline{F}$ e $B = \{x_0\}$. Temos:

- (i) A e B são convexos ($\overline{F}$ é um subespaço vetorial de E e, portanto, convexo);
- (ii) A é fechado e B é compacto;

(iii) $A \cap B = \emptyset$;

(iv) A e B são não vazios.

Então, A e B satisfazem as condições da Segunda Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach (Teorema 2.19). Assim, podemos afirmar que existe $f \in E'$ tal que

$$f(x) < f(x_0), \quad \forall x \in A = \overline{F}. \quad (2.29)$$

Afirmção: $f(x) = 0, \quad \forall x \in F$.

De fato, suponha que exista $y_0 \in F$ tal que $f(y_0) \neq 0$. Dado $t \in \mathbb{R} - \{0\}$, temos $ty_0 \in F$, posto que F é um subespaço.

De (2.29) segue que

$$tf(y_0) = f(ty_0) < f(x_0) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

donde

(I) $t < f(x_0)/f(y_0), \quad \forall t \in \mathbb{R}$ se $f(y_0) > 0$ ou

(II) $t > f(x_0)/f(y_0), \quad \forall t \in \mathbb{R}$ se $f(y_0) < 0$.

Nos dois casos, (I) e (II), obtemos uma contradição, visto que $\mathbb{R}$ é ilimitado superior e inferiormente.

Dessa forma, a afirmação procede. Então, f é um funcional não nulo ($f(x_0) > 0$) em E' que se anula em F . Isso contradiz a hipótese. Portanto, devemos ter $E = \overline{F}$. $\square$

2.2 Teorema de Hahn-Banach para espaços vetoriais topológicos

Começamos com um lema geométrico fundamental, que mostra que um subconjunto aberto convexo de um espaço vetorial topológico de Hausdorff que não contém a origem pode ser evitado por alguma reta passando pela origem.

Lema 2.21. *Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial topológico de Hausdorff sobre $\mathbb{R}$ e seja $B \subset \mathbb{V}$ um subconjunto aberto, convexo e não vazio tal que $0 \notin B$. Então existe um subespaço vetorial unidimensional $L \subset \mathbb{V}$ tal que*

$$L \cap B = \emptyset.$$

Demonstração. A ideia da demonstração é reduzir o problema a um subespaço bidimensional, onde podemos usar argumentos geométricos no plano.

Seja $E \subset \mathbb{V}$ um subespaço vetorial de dimensão 2. Se $E \cap B = \emptyset$, então qualquer subespaço unidimensional de E é disjunto de B , e o resultado segue.

Suponhamos, portanto, que

$$B_1 =: E \cap B \neq \emptyset.$$

Como E é um subespaço vetorial de dimensão finita de um espaço vetorial topológico de Hausdorff, a topologia induzida em E coincide com a topologia de alguma norma em E . Fixemos uma norma $\|\cdot\|$ em E (todas são equivalentes em dimensão finita).

Considere o círculo unitário

$$C = \{x \in E: \|x\| = 1\}.$$

A aplicação

$$f : E \setminus \{0\} \rightarrow C, \quad f(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

associa a cada vetor não nulo a sua direção no círculo unitário. Esta aplicação é contínua e aberta.

De fato, considere a aplicação

$$\Phi : (0, \infty) \times C \rightarrow E \setminus \{0\}, \quad \Phi(r, u) = ru.$$

Ela é um homeomorfismo (e consequentemente uma aplicação aberta), com inversa dada por

$$\Phi^{-1}(x) = (\|x\|, x/\|x\|).$$

Assim,

$$f = \pi_2 \circ \Phi^{-1},$$

onde $\pi_2 : (0, \infty) \times C \rightarrow C$ é a projeção na segunda coordenada, que é uma aplicação aberta. Portanto, f é aberta. Como B_1 é aberto em E e não contém a origem, segue que $B_1 \subset E \setminus \{0\}$ é aberto, e portanto $f(B_1)$ é aberto em C na topologia relativa.

Além disso, como B_1 é convexo, ele é conexo. Logo, $f(B_1)$ é um subconjunto aberto e conexo de C ; em particular, trata-se de um arco aberto do círculo unitário.

Mostremos agora que esse arco não pode conter pontos diametralmente opostos. Suponhamos, por absurdo, que existam $x, y \in B_1$ tais que

$$f(y) = -f(x).$$

Então existe $\lambda > 0$ tal que

$$y = -\lambda x.$$

Como B_1 é convexo, o segmento que une x e y está contido em B_1 . Em particular, para

$$t = \frac{\lambda}{1 + \lambda} \in (0, 1),$$

temos

$$tx + (1 - t)y = 0,$$

o que implica $0 \in B_1$, contradizendo a hipótese.

Portanto, $f(B_1)$ não contém pares antipodais. Como $f(B_1)$ é conexo, isso implica que $f(B_1)$ está contido em algum semicírculo aberto de C , e consequentemente existe $u \in C$ tal que

$$u \notin f(B_1) \quad \text{e} \quad -u \notin f(B_1).$$

Seja

$$L = \{tu : t \in \mathbb{R}\}.$$

Então L não intersecta B_1 , pois caso contrário existiria um vetor em B_1 colinear com u , o que implicaria que sua direção pertence a $f(B_1)$, uma contradição.

Como $B_1 = E \cap B$, segue que

$$L \cap B = \emptyset,$$

concluindo a prova. □

O teorema seguinte é conhecido como a forma geométrica do Teorema de Hahn–Banach, ou Teorema de Mazur (cf. Day [2], Bourbaki [3]).

Teorema 2.22 (Teorema de Hahn-Banach - Forma Geométrica). *Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial topológico sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, seja M uma variedade linear em $\mathbb{V}$ e seja $A \subset \mathbb{V}$ um subconjunto aberto, convexo e não vazio tal que*

$$A \cap M = \emptyset.$$

Então existe um hiperplano fechado $H \subset \mathbb{V}$ tal que

$$M \subset H \quad e \quad H \cap A = \emptyset.$$

Demonstração. Por uma translação, podemos assumir que $0 \in M$, de modo que M é um subespaço vetorial.

Consideremos primeiro $\mathbb{V}$ como espaço vetorial real subjacente, que denotamos por $\mathbb{V}_{\mathbb{R}}$. O conjunto A permanece aberto e convexo em $\mathbb{V}_{\mathbb{R}}$, e M um subespaço vetorial real.

Seja $\mathfrak{M}$ o conjunto de todos os subespaços vetoriais reais fechados de $\mathbb{V}_{\mathbb{R}}$ que contêm M e não intersectam A . Este conjunto é não vazio, pois $M \in \mathfrak{M}$.

Ordenamos $\mathfrak{M}$ pela inclusão. Seja $\{M_\alpha\}$ uma cadeia em $\mathfrak{M}$ e considere

$$M' = \overline{\bigcup_{\alpha} M_{\alpha}}.$$

Então M' é um subespaço vetorial real fechado contendo M . Mostremos que M' não intersecta A . Suponha, por absurdo, que exista $x \in M' \cap A$. Como A é aberto, existe uma vizinhança aberta U de x tal que $U \subset A$. Como $x \in \overline{\bigcup_{\alpha} M_{\alpha}}$, segue que

$$U \cap \bigcup_{\alpha} M_{\alpha} \neq \emptyset,$$

o que implica que algum M_{α} intersecta A , contradizendo a definição de $\mathfrak{M}$.

Logo, $M' \in \mathfrak{M}$ e é um majorante da cadeia. Pelo Lema de Zorn (Lema A.24), existe um elemento maximal $H_0 \in \mathfrak{M}$.

Considere o espaço quociente real

$$\mathbb{V}_{\mathbb{R}}/H_0.$$

Este é um espaço vetorial topológico de Hausdorff (veja Proposição A.113). Seja

$$\varphi : \mathbb{V}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{V}_{\mathbb{R}}/H_0$$

a aplicação quociente.

Se

$$\dim(\mathbb{V}_{\mathbb{R}}/H_0) \geq 2,$$

então $\varphi(A)$ é aberto, convexo e não contém a origem. Pelo Lema 2.21, existe um subespaço unidimensional

$$N \subset \mathbb{V}_{\mathbb{R}}/H_0$$

tal que

$$N \cap \varphi(A) = \emptyset.$$

Então

$$H_1 := \varphi^{-1}(N)$$

é um subespaço vetorial real fechado contendo estritamente H_0 e não intersectando A , contradizendo a maximalidade de H_0 .

Logo,

$$\dim(\mathbb{V}_{\mathbb{R}}/H_0) = 1.$$

Portanto, existe um funcional linear real contínuo não nulo

$$f : \mathbb{V}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$H_0 = \ker f.$$

Como $M \subset H_0$, temos

$$f|_M = 0,$$

e como $H_0 \cap A = \emptyset$, segue que

$$f(x) \neq 0 \quad \text{para todo } x \in A.$$

Como A é conexo e f é contínuo, f tem sinal constante em A . Multiplicando f por -1 , se necessário, podemos assumir que

$$f(x) > 0 \quad \text{para todo } x \in A.$$

Caso real.

Neste caso,

$$H := H_0$$

é o hiperplano desejado.

Caso complexo.

Definimos

$$g(x) = f(x) - if(ix).$$

Então g é um funcional linear complexo contínuo e satisfaz

$$\operatorname{Re} g(x) = f(x).$$

Segue que

$$g(m) = 0 \quad \text{para todo } m \in M,$$

e

$$g(x) \neq 0 \quad \text{para todo } x \in A.$$

Logo,

$$H =: \ker g$$

é um hiperplano complexo fechado contendo M e disjunto de A , o que completa a demonstração. $\square$

Corolário 2.23. *Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial topológico. Então existe um funcional linear contínuo $f \neq 0$ em $\mathbb{V}$ se, e somente se, $\mathbb{V}$ contém um subconjunto aberto, convexo, não vazio e próprio.*

Demonstração. Suponha que exista um funcional linear contínuo não nulo f em $\mathbb{V}$. Então o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{V} : |f(x)| < 1\}$$

é aberto, convexo e não vazio. Como $f \neq 0$, existe $x_1 \in \mathbb{V}$ tal que $f(x_1) \neq 0$. Definindo

$$x_0 = \frac{1}{|f(x_1)|} x_1 \in \mathbb{V},$$

obtemos

$$|f(x_0)| = 1,$$

logo $x_0 \notin A$ e $A \neq \mathbb{V}$.

Reciprocamente, suponha que exista um subconjunto aberto, convexo, não vazio e próprio $A \subset \mathbb{V}$. Seja $x_0 \in \mathbb{V} \setminus A$.

Aplicando o Teorema 2.22 à variedade linear

$$M = \{x_0\},$$

obtemos um hiperplano fechado $H \subset \mathbb{V}$ tal que

$$x_0 \in H \quad \text{e} \quad H \cap A = \emptyset.$$

Pela caracterização de hiperplanos fechados (Proposição A.123), existe um funcional linear contínuo não nulo f em $\mathbb{V}$ e um escalar α tais que

$$H = \{x \in \mathbb{V} : f(x) = \alpha\}.$$

Como $H \neq \mathbb{V}$, segue que $f \neq 0$, concluindo a prova. $\square$

Corolário 2.24. *Sejam E um espaço vetorial topológico, C um subconjunto convexo aberto de E , E_1 um subespaço de E tal que $E_1 \cap C \neq \emptyset$, $T_1 \in L(E_1, \mathbb{R})$ um funcional linear contínuo e $P : C \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional convexo semicontínuo superiormente ² tal que*

$$T_1(x) \leq P(x), \quad \forall x \in E_1 \cap C.$$

Então existe um funcional linear contínuo $T \in L(E, \mathbb{R})$ que estende T_1 e satisfaz

$$\tilde{T}(x) \leq P(x), \quad \forall x \in C.$$

Demonstração. Considere o espaço vetorial topológico produto

$$F = E \times \mathbb{R}.$$

Defina o subconjunto

$$A = \{(x, t) \in C \times \mathbb{R} : t > P(x)\}. \quad (2.30)$$

²Um funcional $P : C \rightarrow \mathbb{R}$ é convexo se

$$P(tx + (1-t)y) \leq tP(x) + (1-t)P(y), \quad \forall x, y \in C, t \in [0, 1],$$

e é semicontínuo superiormente se, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$\{x \in C : P(x) < \alpha\}$$

é aberto.

Como P é convexo e semicontínuo superiormente e C é aberto, segue que A é um subconjunto aberto e convexo de F .

Considere agora a variedade linear

$$M = \{(x, T_1(x)) : x \in E_1\}.$$

Esta é uma variedade linear em F , pois é o gráfico de uma aplicação linear. Além disso, temos

$$M \cap A = \emptyset.$$

De fato, se $(x, T_1(x)) \in M \cap A$, então $x \in E_1 \cap C$ e

$$T_1(x) > P(x),$$

o que contradiz a hipótese.

Pelo Teorema 2.22, existe um hiperplano fechado $H \subset F$ contendo M e disjunto de A . Logo, existem um funcional linear contínuo não nulo

$$\Lambda : F \rightarrow \mathbb{R}$$

e um escalar α tais que

$$H = \{(x, t) \in F : \Lambda(x, t) = \alpha\}.$$

Como Λ é linear e $F = E \times \mathbb{R}$, todo vetor $(x, t) \in F$ pode ser escrito como

$$(x, t) = (x, 0) + (0, t).$$

Pela linearidade de Λ ,

$$\Lambda(x, t) = \Lambda(x, 0) + \Lambda(0, t).$$

Definindo

$$T(x) = \Lambda(x, 0), \quad x \in E,$$

obtemos um funcional linear contínuo $T \in L(E, \mathbb{R})$.

Além disso, definindo

$$\beta = \Lambda(0, 1),$$

temos

$$\Lambda(0, t) = t \Lambda(0, 1) = \beta t.$$

Portanto

$$\Lambda(x, t) = T(x) + \beta t.$$

Como H contém M , temos

$$\Lambda(x, T_1(x)) = \alpha, \quad \forall x \in E_1.$$

Substituindo a expressão de Λ , obtemos

$$T(x) + \beta T_1(x) = \alpha, \quad \forall x \in E_1.$$

Tomando $x = 0$, segue que $\alpha = 0$, pois $T(0) = T_1(0) = 0$. Logo,

$$T(x) + \beta T_1(x) = 0,$$

ou seja,

$$T(x) = -\beta T_1(x), \quad \forall x \in E_1.$$

Além disso, $\beta \neq 0$, pois caso contrário o hiperplano não separaria os conjuntos considerados.

Definindo

$$\tilde{T} = -\frac{1}{\beta}T,$$

obtemos um funcional linear contínuo $\tilde{T}$ que estende T_1 .

Finalmente, como $H \cap A = \emptyset$, temos que para todo $(x, t) \in A$,

$$\Lambda(x, t) \leq \alpha = 0.$$

Logo, para todo $x \in C$ e todo $t > P(x)$,

$$T(x) + \beta t \leq 0.$$

Dividindo por $-\beta > 0$, obtemos

$$\tilde{T}(x) \leq t,$$

para todo $x \in C$ e todo $t > P(x)$.

Se tivéssemos $\tilde{T}(x) > P(x)$, poderíamos escolher um número

$$t = \frac{\tilde{T}(x) + P(x)}{2},$$

o qual satisfaz $t > P(x)$ e $t < \tilde{T}(x)$, o que contradiz a desigualdade $\tilde{T}(x) \leq t$. Portanto,

$$\tilde{T}(x) \leq P(x), \quad \forall x \in C.$$

□

Este resultado mostra como a forma geométrica do Teorema de Hahn-Banach implica diretamente sua forma analítica. A ideia central é interpretar o gráfico do funcional T_1 como uma variedade linear no espaço produto $E \times \mathbb{R}$, e o epígrafo estrito do funcional convexo P (conjunto A descrito em (2.30)) como um subconjunto aberto e convexo desse espaço.

A condição $T_1(x) \leq P(x)$ garante que esses dois conjuntos são disjuntos. O Teorema de Mazur fornece então um hiperplano fechado que contém o gráfico de T_1 e não intersecta o epígrafo estrito de P . Esse hiperplano é o gráfico de um funcional linear contínuo T em E , que estende T_1 e satisfaz a desigualdade $T(x) \leq P(x)$ em C .

Assim, a extensão do funcional é obtida como consequência direta de um resultado de separação geométrica.

Teorema 2.25 (Teorema de Hahn-Banach - Forma Analítica). *Sejam $\mathbb{V}$ um espaço vetorial topológico, p uma seminorma em $\mathbb{V}$, M um subespaço de $\mathbb{V}$ e f um funcional linear em M tal que*

$$|f(x)| \leq p(x), \quad \forall x \in M.$$

Então existe um funcional linear f_1 em $\mathbb{V}$ que estende f e satisfaz

$$|f_1(x)| \leq p(x), \quad \forall x \in \mathbb{V}.$$

Demonstração. O caso $f = 0$ é trivial. Suponhamos, portanto, que $f \neq 0$. Então existe $x_0 \in M$ tal que $f(x_0) \neq 0$. Definindo

$$y_0 = \frac{x_0}{f(x_0)},$$

temos $f(y_0) = 1$, e portanto o conjunto

$$H = \{x \in M : f(x) = 1\}$$

é não vazio. Além disso, H é uma variedade linear em $\mathbb{V}$.

Os conjuntos

$$V_n = \{x \in \mathbb{V} : p(x) < 1/n\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

formam uma base de vizinhanças de zero para uma topologia de espaço vetorial topológico em $\mathbb{V}$.

Seja

$$A = V_1 = \{x \in \mathbb{V} : p(x) < 1\}.$$

O conjunto A é não vazio, pois $p(0) = 0$ implica $0 \in A$.

Além disso, A é convexo. De fato, se $x, y \in A$ e $t \in [0, 1]$, então, pela subaditividade e homogeneidade da seminorma,

$$p(tx + (1-t)y) \leq tp(x) + (1-t)p(y) < t + (1-t) = 1,$$

logo $tx + (1-t)y \in A$.

Finalmente, A é aberto na topologia considerada, pois os conjuntos V_n formam uma base de vizinhanças de zero e $A = V_1$.

Mostremos que $H \cap A = \emptyset$. De fato, se $x \in H$, então $f(x) = 1$, e portanto

$$p(x) \geq |f(x)| = 1,$$

logo $x \notin A$.

Pelo Teorema 2.22, existe um hiperplano fechado H_1 em $\mathbb{V}$ contendo H e disjunto de A .

Logo, existe um funcional linear contínuo não nulo g em $\mathbb{V}$ e um escalar α tais que

$$H_1 = \{x \in \mathbb{V} : g(x) = \alpha\}.$$

Como $H \subset H_1$, temos

$$g(x) = \alpha, \quad \forall x \in H.$$

Mostremos que $\alpha \neq 0$. Caso contrário, teríamos $H_1 = \ker g$, o que implicaria $g(x) = 0$ para todo $x \in H$. Mas isso é impossível, pois H é não vazio e não pode estar contido no núcleo de um funcional que define um hiperplano contendo um conjunto disjunto de A .

Seja agora $x \in M$ arbitrário.

Se $f(x) = 0$, então claramente

$$\alpha f(x) = 0.$$

Se $f(x) \neq 0$, definimos

$$z = \frac{x}{f(x)}.$$

Então $z \in M$ e

$$f(z) = 1,$$

logo $z \in H$. Como $H \subset H_1$, segue que

$$g(z) = \alpha.$$

Pela linearidade de g , obtemos

$$g(x) = g(f(x)z) = f(x)g(z) = \alpha f(x).$$

Portanto,

$$g(x) = \alpha f(x), \quad \forall x \in M.$$

Definindo

$$f_1 = \frac{1}{\alpha}g,$$

obtemos um funcional linear em $\mathbb{V}$ que estende f .

Resta verificar que

$$|f_1(x)| \leq p(x), \quad \forall x \in \mathbb{V}.$$

Seja $x \in \mathbb{V}$. Se $f_1(x) = 0$, então a desigualdade é trivial.

Suponha agora que $f_1(x) \neq 0$ e defina

$$y = \frac{x}{f_1(x)}.$$

Então

$$f_1(y) = 1,$$

ou seja, $y \in H_1$. Como $H_1 \cap A = \emptyset$, segue que $y \notin A$, e portanto

$$p(y) \geq 1.$$

Pela homogeneidade da seminorma,

$$p(x) = |f_1(x)| p(y) \geq |f_1(x)|.$$

Logo,

$$|f_1(x)| \leq p(x), \quad \forall x \in \mathbb{V},$$

completando a prova. $\square$

Como toda norma é, em particular, uma seminorma, o Teorema de Hahn-Banach na forma analítica implica imediatamente o seguinte resultado para espaços normados.

Corolário 2.26. *Se $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ for um espaço normado, M um subespaço de $\mathbb{V}$ e f um funcional linear em M tal que*

$$|f(x)| \leq \|x\|, \quad \forall x \in M,$$

então existe uma extensão linear f_1 em $\mathbb{V}$ tal que

$$|f_1(x)| \leq \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{V}.$$

2.3 Teorema de Hahn-Banach para espaços localmente convexos

Recordemos que um espaço vetorial topológico E é dito *localmente convexo* se a origem possui uma base de vizinhanças formada por conjuntos convexos. Equivalentemente, a topologia de E pode ser definida por uma família de seminormas. Para mais detalhes, veja o Apêndice A, Seção A.7 e a referência [1].

No que segue, trabalharemos com espaços vetoriais topológicos localmente convexos, que chamaremos simplesmente de espaços localmente convexos.

Teorema 2.27 (Teorema de Hahn-Banach para espaços localmente convexos - Versão Analítica). *Seja E um espaço localmente convexo de Hausdorff sobre $\mathbb{R}$, M um subespaço vetorial de E e $f \in M'$ um funcional linear contínuo em M . Então existe um funcional linear contínuo $\tilde{f} \in E'$ tal que*

$$\tilde{f}|_M = f.$$

Demonstração. Como E é localmente convexo, sua topologia é definida por uma família de seminormas $(p_i)_{i \in I}$. A topologia induzida em M é definida pelas seminormas restritas $(p_i|_M)_{i \in I}$.

Como $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é linear e contínuo, existe uma vizinhança convexa de zero em M sobre a qual f é limitada. Equivalentemente, existe um subconjunto finito $\{i_1, \dots, i_n\} \subset I$ e uma constante $C > 0$ tais que

$$|f(x)| \leq C \max_{1 \leq j \leq n} p_{i_j}(x), \quad \forall x \in M.$$

Definimos a seminorma

$$p(x) = \max_{1 \leq j \leq n} p_{i_j}(x), \quad x \in E.$$

Então p é uma seminorma contínua em E e satisfaz

$$|f(x)| \leq Cp(x), \quad \forall x \in M.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach na forma analítica (Teorema 2.25), existe uma extensão linear $\tilde{f} : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\tilde{f}|_M = f \quad \text{e} \quad |\tilde{f}(x)| \leq Cp(x), \quad \forall x \in E.$$

Como p é contínua, a desigualdade acima implica que $\tilde{f}$ é contínuo em E . Isso conclui a prova. $\square$

Apresentamos agora uma forma geométrica fundamental do Teorema de Hahn-Banach em espaços localmente convexos.

Teorema 2.28 (Separação de conjuntos convexos - forma geométrica). *Sejam A e B subconjuntos convexos, não vazios e disjuntos de um espaço localmente convexo de Hausdorff E sobre $\mathbb{R}$. Suponha que A seja compacto e B seja fechado. Então existe um funcional linear contínuo $f \in E'$ e números reais a e b tais que*

$$f(x) \leq a < b \leq f(y), \quad \forall x \in A, \forall y \in B.$$

Demonstração. Como A é compacto e B é fechado e disjunto de A , segue que A e B podem ser separados por vizinhanças. Mais precisamente, para cada $x \in A$, existe uma vizinhança aberta V_x de zero tal que

$$(x + V_x) \cap B = \emptyset.$$

Como E é localmente convexo, podemos escolher cada V_x convexa. A família $\{x + V_x : x \in A\}$ é uma cobertura aberta de A . Como A é compacto, existem pontos $x_1, \dots, x_n \in A$ tais que

$$A \subset \bigcup_{j=1}^n (x_j + V_{x_j}).$$

Definimos

$$V = \bigcap_{j=1}^n V_{x_j}.$$

Então V é uma vizinhança aberta convexa de zero e satisfaz

$$(A + V) \cap B = \emptyset.$$

Assim, o conjunto

$$A + V$$

é convexo, aberto e disjunto de B .

Pelo Teorema de Hahn-Banach na forma geométrica (Teorema 2.22), existe um funcional linear contínuo $f \in E'$ e um número real α tais que

$$f(x) \leq \alpha \leq f(y), \quad \forall x \in A + V, \forall y \in B.$$

Como $A \subset A + V$, temos

$$\sup_{x \in A} f(x) \leq \inf_{y \in B} f(y).$$

Além disso, como A é compacto e f é contínuo, o conjunto $f(A)$ é compacto em $\mathbb{R}$, e portanto atinge seu supremo. Definimos

$$a = \sup_{x \in A} f(x), \quad b = \inf_{y \in B} f(y).$$

Como $A + V$ é aberto e disjunto de B , segue que a separação é estrita, isto é,

$$a < b.$$

Portanto,

$$f(x) \leq a < b \leq f(y), \quad \forall x \in A, \forall y \in B. \quad \square$$

Uma consequência fundamental desse resultado é que o dual contínuo separa pontos.

Corolário 2.29. *Se E é um espaço localmente convexo de Hausdorff sobre $\mathbb{R}$, então o dual contínuo E' separa pontos. Isto é, dados $x, y \in E$ com $x \neq y$, existe $f \in E'$ tal que*

$$f(x) \neq f(y).$$

Demonstração. Basta aplicar o Teorema 2.28 aos conjuntos convexos compactos $A = \{x\}$ e $B = \{y\}$. $\square$

O resultado que encerra esta seção fornece uma forma importante de separação entre subespaços e pontos.

Corolário 2.30. *Sejam E um espaço localmente convexo de Hausdorff sobre $\mathbb{R}$, M um subespaço vetorial de E e $x_0 \notin \overline{M}$. Então existe um funcional linear contínuo $f \in E'$ tal que*

$$f(x_0) = 1 \quad \text{e} \quad f(x) = 0, \quad \forall x \in M.$$

Demonstração. Considere os conjuntos

$$A = \{x_0\}, \quad B = \overline{M}.$$

O conjunto A é convexo e compacto, enquanto B é convexo e fechado. Como $x_0 \notin \overline{M}$, os conjuntos A e B são disjuntos.

Pelo Teorema 2.28, existe um funcional linear contínuo $g \in E'$ e números reais $a < b$ tais que

$$g(x_0) \leq a < b \leq g(x), \quad \forall x \in \overline{M}.$$

Como $0 \in M \subset \overline{M}$, temos

$$g(x_0) < g(0) = 0.$$

Mostremos agora que $g(x) = 0$ para todo $x \in M$. Seja $x \in M$. Como $tx \in M \subset \overline{M}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, temos

$$g(x_0) < g(tx) = tg(x), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Se $g(x) > 0$, tomando $t \rightarrow -\infty$ obtemos uma contradição. Se $g(x) < 0$, tomando $t \rightarrow +\infty$ também obtemos uma contradição. Logo

$$g(x) = 0, \quad \forall x \in M.$$

Como $g(x_0) \neq 0$, definimos

$$f(x) = \frac{g(x)}{g(x_0)}, \quad x \in E.$$

Então $f \in E'$ satisfaz

$$f(x_0) = 1 \quad \text{e} \quad f(x) = 0, \quad \forall x \in M. \quad \square$$

2.4 Outras versões do Teorema de Hahn-Banach

Os resultados desta seção mostram que o Teorema de Hahn-Banach admite diversas formulações equivalentes ou generalizadas. Elas conectam extensão dominada de operadores lineares, separação convexa, propriedades métricas em espaços normados e resultados estruturais sobre conjuntos convexos compactos.

Começamos com alguns conceitos e resultados básicos da geometria convexa em dimensão finita.

Definição 2.31 (Combinação convexa). Sejam $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$. Dizemos que

$$x = \sum_{j=1}^m \lambda_j x_j$$

é uma *combinação convexa* de $x_1, \dots, x_m$ se

$$\lambda_j \geq 0 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^m \lambda_j = 1.$$

Definição 2.32 (Envoltório convexo). Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. O *envoltório convexo* de A é o conjunto

$$\text{co}(A) = \left\{ \sum_{j=1}^m \lambda_j x_j : x_j \in A, \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^m \lambda_j = 1 \right\}.$$

Equivalentemente, $\text{co}(A)$ é o menor subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ que contém A .

Definição 2.33 (Ponto extremo). Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ convexo. Um ponto $x \in K$ é chamado *ponto extremo* se não existem $y, z \in K$ distintos e $\lambda \in (0, 1)$ tais que

$$x = \lambda y + (1 - \lambda)z.$$

Denotamos por $\text{Ext}(K)$ o conjunto dos pontos extremos de K .

Exemplo 2.34. Considere o disco unitário fechado em $\mathbb{R}^2$,

$$C = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\},$$

onde $\|\cdot\|$ denota a norma euclidiana.

É fácil constatar que C é convexo. Além disso, seus pontos extremos são exatamente os pontos da circunferência unitária, isto é,

$$\text{Ext}(C) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}.$$

De fato, seja $x \in C$ tal que $\|x\| < 1$. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que $\|x\| + \varepsilon < 1$. Tomando $u \in \mathbb{R}^2$ com $u \neq 0$ e $\|u\| < \varepsilon$, temos

$$\|x \pm u\| \leq \|x\| + \|u\| < 1,$$

de modo que $x + u, x - u \in C$. Assim,

$$x = \frac{1}{2}(x + u) + \frac{1}{2}(x - u),$$

com $x + u \neq x - u$, o que mostra que x não é ponto extremo.

Por outro lado, seja $x \in C$ com $\|x\| = 1$ e suponha que

$$x = \lambda y + (1 - \lambda)z, \quad y, z \in C, \quad \lambda \in (0, 1).$$

Então,

$$1 = \|x\| = \|\lambda y + (1 - \lambda)z\| \leq \lambda\|y\| + (1 - \lambda)\|z\| \leq \lambda + (1 - \lambda) = 1.$$

Logo, todas as desigualdades acima são, na verdade, igualdades. Em particular,

$$\lambda\|y\| + (1 - \lambda)\|z\| = 1.$$

Como $\lambda \in (0, 1)$ e $\|y\|, \|z\| \leq 1$, segue necessariamente que

$$\|y\| = \|z\| = 1.$$

Além disso, como há igualdade na desigualdade triangular para a norma euclidiana, os vetores λy e $(1 - \lambda)z$ têm a mesma direção. Portanto, existe $t \geq 0$ tal que

$$y = tz.$$

Como $\|y\| = \|z\| = 1$, obtemos $t = 1$, e assim $y = z$. Portanto, x não pode ser escrito como combinação convexa não trivial de dois pontos distintos de C , o que mostra que x é ponto extremo.

Teorema 2.35 (Carathéodory). *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Todo ponto $x \in \text{co}(A)$ pode ser escrito como combinação convexa de no máximo $n + 1$ pontos de A .*

Demonstração. Seja

$$x = \sum_{j=1}^m \lambda_j x_j$$

uma representação convexa com m mínimo.

Se $m \leq n + 1$, não há o que provar.

Supondo $m \geq n + 2$, sabemos que os vetores

$$x_1 - x, \dots, x_m - x$$

são linearmente dependentes, pois pertencem a $\mathbb{R}^n$.

Da dependência linear dos vetores $x_1 - x, \dots, x_m - x$, existem escalares $a_1, \dots, a_m$, não todos nulos, tais que

$$\sum_{j=1}^m a_j (x_j - x) = 0.$$

Expandindo a soma, obtemos

$$\sum_{j=1}^m a_j x_j - \left(\sum_{j=1}^m a_j \right) x = 0.$$

Definindo

$$S := \sum_{j=1}^m a_j,$$

podemos escrever

$$\sum_{j=1}^m a_j x_j = Sx.$$

Por outro lado, sabemos que

$$x = \sum_{j=1}^m \lambda_j x_j, \quad \sum_{j=1}^m \lambda_j = 1.$$

Substituindo essa expressão na igualdade anterior, obtemos

$$\sum_{j=1}^m a_j x_j = S \sum_{j=1}^m \lambda_j x_j.$$

Reorganizando os termos,

$$\sum_{j=1}^m (a_j - S\lambda_j) x_j = 0.$$

Definindo agora

$$b_j := a_j - S\lambda_j,$$

segue que

$$\sum_{j=1}^m b_j x_j = 0.$$

Além disso,

$$\sum_{j=1}^m b_j = \sum_{j=1}^m a_j - S \sum_{j=1}^m \lambda_j = S - S = 0.$$

Portanto, renomeando os coeficientes b_j como a_j , podemos assumir que existem $a_1, \dots, a_m$, não todos nulos, tais que

$$\sum_{j=1}^m a_j x_j = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^m a_j = 0.$$

Definimos, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_j(t) := \lambda_j + ta_j, \quad j = 1, \dots, m.$$

Observemos que, como

$$\sum_{j=1}^m a_j = 0,$$

temos

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j(t) = \sum_{j=1}^m (\lambda_j + ta_j) = \sum_{j=1}^m \lambda_j + t \sum_{j=1}^m a_j = 1.$$

Além disso,

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j(t) x_j = \sum_{j=1}^m (\lambda_j + ta_j) x_j = \sum_{j=1}^m \lambda_j x_j + t \sum_{j=1}^m a_j x_j = x.$$

Portanto, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$x = \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) x_j \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) = 1.$$

Nosso objetivo agora é escolher um valor de t tal que todos os coeficientes $\lambda_j(t)$ permaneçam não negativos e, ao mesmo tempo, pelo menos um deles se torne igual a zero.

Como os coeficientes a_j não são todos nulos e satisfazem

$$\sum_{j=1}^m a_j = 0,$$

existem índices j_1 e j_2 tais que

$$a_{j_1} > 0 \quad \text{e} \quad a_{j_2} < 0.$$

Consideremos então

$$t_+ := \min \left\{ -\frac{\lambda_j}{a_j} : a_j < 0 \right\}.$$

Esse número está bem definido, pois o conjunto considerado é finito e não vazio.

Pela definição de t_+ , temos

$$\lambda_j(t_+) \geq 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

e existe pelo menos um índice j_0 tal que

$$\lambda_{j_0}(t_+) = 0.$$

Logo,

$$x = \sum_{j=1}^m \lambda_j(t_+) x_j$$

é uma combinação convexa de pontos de A na qual pelo menos um coeficiente é nulo. Eliminando esse coeficiente, obtemos uma representação de x como combinação convexa de apenas $m - 1$ pontos de A .

Isso contradiz a escolha inicial de m como sendo mínimo. Portanto,

$$m \leq n + 1.$$

□

Corolário 2.36. *Se $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto, então $\text{co}(K)$ é compacto.*

Demonstração. Seja $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\text{co}(K)$. Pelo Teorema de Carathéodory (Teorema 2.35), para cada m existem pontos $x_{m,0}, \dots, x_{m,n} \in K$ e escalares $\lambda_{m,0}, \dots, \lambda_{m,n} \geq 0$ tais que

$$\sum_{j=0}^n \lambda_{m,j} = 1 \quad \text{e} \quad x_m = \sum_{j=0}^n \lambda_{m,j} x_{m,j}.$$

Como K é compacto, para cada $j = 0, \dots, n$ a sequência $(x_{m,j})_{m \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente. Aplicando um argumento diagonal, podemos extrair uma subsequência de (x_m) (que continuamos denotando por (x_m)) tal que

$$x_{m,j} \rightarrow x_j \in K, \quad j = 0, \dots, n.$$

Por outro lado, os vetores de coeficientes

$$(\lambda_{m,0}, \dots, \lambda_{m,n})$$

pertencem ao simplexo

$$\Delta_n = \{(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^{n+1} : \sum_{j=0}^n \lambda_j = 1\},$$

que é um subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}^{n+1}$, portanto compacto. Assim, extraindo novamente uma subsequência se necessário, podemos supor que

$$\lambda_{m,j} \rightarrow \lambda_j, \quad j = 0, \dots, n,$$

com $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \Delta_n$.

Passando ao limite na expressão de x_m , obtemos

$$x_m = \sum_{j=0}^n \lambda_{m,j} x_{m,j} \longrightarrow \sum_{j=0}^n \lambda_j x_j.$$

Como $x_j \in K$ e $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \Delta_n$, segue que

$$\sum_{j=0}^n \lambda_j x_j \in \text{co}(K).$$

Portanto toda sequência em $\text{co}(K)$ possui uma subsequência convergente com limite em $\text{co}(K)$. Logo $\text{co}(K)$ é sequencialmente compacto e, como estamos em $\mathbb{R}^n$, isso equivale à compacidade. $\square$

2.4.1 Distância a hiperplanos

Lema 2.37. *Seja X um espaço normado real e considere o hiperplano*

$$H = \{x \in X : T(x) = \alpha\},$$

onde $T \in X'$ é um funcional linear contínuo não nulo e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então, para todo $x_0 \in X$,

$$d(x_0, H) := \inf_{h \in H} \|x_0 - h\| = \frac{|T(x_0) - \alpha|}{\|T\|}.$$

Demonstração. Seja $h \in H$. Como $T(h) = \alpha$, temos

$$T(x_0 - h) = T(x_0) - \alpha.$$

Pela definição da norma de T ,

$$|T(x_0 - h)| \leq \|T\| \|x_0 - h\|.$$

Logo

$$|T(x_0) - \alpha| \leq \|T\| \|x_0 - h\|.$$

Tomando o ínfimo em $h \in H$, obtemos

$$d(x_0, H) \geq \frac{|T(x_0) - \alpha|}{\|T\|}.$$

Para obter a desigualdade inversa, seja $\varepsilon > 0$. Pela definição da norma de T (ver (2.9)),

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|T(x)|}{\|x\|}.$$

Isso significa que podemos encontrar vetores $v \in X$ tais que o quociente $|T(v)|/\|v\|$ fique arbitrariamente próximo de $\|T\|$. Em particular, existe $v \in X$ tal que

$$\frac{|T(v)|}{\|v\|} > \|T\| - \varepsilon.$$

Definindo

$$u = \frac{v}{T(v)},$$

temos $T(u) = 1$. Além disso,

$$\|u\| = \frac{\|v\|}{|T(v)|} < \frac{1}{\|T\| - \varepsilon}.$$

Como ε pode ser tomado arbitrariamente pequeno, podemos garantir

$$\|u\| \leq \frac{1}{\|T\|} + \varepsilon.$$

Definimos agora

$$h = x_0 - (T(x_0) - \alpha)u.$$

Então

$$T(h) = T(x_0) - (T(x_0) - \alpha)T(u) = \alpha,$$

logo $h \in H$. Além disso,

$$\|x_0 - h\| = |T(x_0) - \alpha| \|u\| \leq |T(x_0) - \alpha| \left(\frac{1}{\|T\|} + \varepsilon \right).$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue que

$$d(x_0, H) \leq \frac{|T(x_0) - \alpha|}{\|T\|}.$$

Portanto,

$$d(x_0, H) = \frac{|T(x_0) - \alpha|}{\|T\|}.$$

□

O teorema a seguir também está demonstrado em [4].

Teorema 2.38. *Sejam X um espaço vetorial normado e A, B subconjuntos convexos de X tais que*

$$d(A, B) := \inf_{(a,b) \in A \times B} \|a - b\| > 0.$$

Então existem dois hiperplanos fechados paralelos H_1 e H_2 em X que separam A e B e satisfazem

$$d(H_1, H_2) = d(A, B).$$

Demonstração. Seja

$$d_0 = d(A, B) > 0.$$

Observe que

$$d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} \|a - b\| = \inf_{x \in A - B} \|x\| = d(0, A - B).$$

Logo

$$B(0, d_0) \cap (A - B) = \emptyset.$$

Como a bola $B(0, d_0)$ é um conjunto aberto e convexo e $A - B$ é convexo, podemos aplicar a forma geométrica do Teorema de Hahn-Banach para conjuntos convexos disjuntos. Assim, existe um funcional linear contínuo $f \in X'$ tal que

$$f(x) < d_0 \quad \forall x \in B(0, d_0), \quad f(y) \geq d_0 \quad \forall y \in A - B.$$

Da primeira desigualdade segue que

$$|f(x)| \leq d_0 \quad \text{sempre que } \|x\| < d_0,$$

o que implica

$$\|f\| \leq 1.$$

Definimos agora

$$\alpha = \inf f(A), \quad \beta = \sup f(B).$$

Se $a \in A$ e $b \in B$, então $a - b \in A - B$ e portanto

$$f(a - b) \geq d_0.$$

Pela linearidade de f obtemos

$$f(a) - f(b) \geq d_0.$$

Tomando ínfimo em $a \in A$ e supremo em $b \in B$, segue que

$$\alpha - \beta \geq d_0.$$

Consideremos então os hiperplanos

$$H_1 = [f = \alpha], \quad H_2 = [f = \beta].$$

Esses hiperplanos são fechados e paralelos, pois são definidos pelo mesmo funcional linear. Além disso, pela definição de α e β , eles separam A e B .

Como A e B estão separados por H_1 e H_2 , segue imediatamente que

$$d(H_1, H_2) \leq d(A, B).$$

Para provar a desigualdade inversa, observe que a distância entre dois hiperplanos paralelos é igual à distância de qualquer ponto de um deles ao outro. Assim, tomando $h_1 \in H_1$ e usando o Lema 2.37, obtemos

$$d(H_1, H_2) = d(h_1, H_2) = \frac{|f(h_1) - \beta|}{\|f\|} = \frac{\alpha - \beta}{\|f\|} \geq \alpha - \beta.$$

Como $\alpha - \beta \geq d_0 = d(A, B)$, concluímos que

$$d(H_1, H_2) \geq d(A, B).$$

Portanto

$$d(H_1, H_2) = d(A, B),$$

o que conclui a demonstração. $\square$

O resultado acima revela a relação entre a estrutura métrica de um espaço normado e seu dual topológico. A existência de hiperplanos que realizam exatamente a distância entre dois conjuntos convexos decorre diretamente da forma geométrica do Teorema de Hahn-Banach, mostrando que informações métricas podem ser recuperadas por meio de funcionais lineares contínuos.

2.4.2 Teorema de Krein-Milman

Os resultados de separação obtidos a partir do Teorema de Hahn-Banach possuem consequências profundas na teoria da convexidade. Em particular, eles desempenham papel fundamental na descrição da estrutura de conjuntos convexos compactos em espaços localmente convexos. Um dos resultados mais importantes nesse contexto é o Teorema de Krein-Milman, que afirma que tais conjuntos são determinados por seus pontos extremos. Para abordar esse resultado, começamos apresentando uma generalização da noção de ponto extremo, já introduzida na Definição 2.33.

Definição 2.39. Seja C um subconjunto convexo de um espaço vetorial. Dizemos que um ponto $x \in C$ é um *ponto extremo* de C se não existem $y, z \in C$, com $y \neq z$, e $\lambda \in (0, 1)$ tais que

$$x = \lambda y + (1 - \lambda)z.$$

O conjunto de todos os pontos extremos de C será denotado por

$$\text{Ext}(C).$$

O resultado seguinte garante que conjuntos convexos compactos possuem pontos extremos.

Lema 2.40. *Seja E um espaço vetorial topológico localmente convexo de Hausdorff sobre $\mathbb{R}$ e seja $C \subset E$ um conjunto convexo compacto não vazio. Então C possui pelo menos um ponto extremo.*

Demonstração. Considere a família

$$\mathcal{F} = \{F \subset C : F \text{ é não vazio, convexo e compacto}\}.$$

Ordenamos $\mathcal{F}$ pela relação

$$F_1 \preceq F_2 \iff F_2 \subset F_1.$$

Assim, um elemento maximal nessa ordem corresponde a um elemento minimal de $\mathcal{F}$ com respeito à inclusão usual.

Seja $(F_i)_{i \in I}$ uma cadeia em $(\mathcal{F}, \preceq)$. Então a cadeia corresponde a uma família decrescente de subconjuntos de C . Definimos

$$F = \bigcap_{i \in I} F_i.$$

Mostremos que F pertence a $\mathcal{F}$. Como cada F_i é compacto e $F_i \subset C$, a família $\{F_i\}_{i \in I}$ possui a propriedade da interseção finita. De fato, se $F_{i_1}, \dots, F_{i_k}$ pertencem à cadeia, existe i_0 tal que

$$F_{i_0} \subset F_{i_j}, \quad j = 1, \dots, k,$$

e portanto

$$\bigcap_{j=1}^k F_{i_j} = F_{i_0} \neq \emptyset.$$

Como C é compacto e cada F_i é fechado em C , segue que

$$F = \bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset.$$

Além disso, F é convexo e compacto, pois é interseção de conjuntos convexos e compactos. Logo $F \in \mathcal{F}$ e é um majorante da cadeia em $(\mathcal{F}, \preceq)$.

Pelo Lema de Zorn, existe um elemento maximal F_0 em $(\mathcal{F}, \preceq)$, isto é, um elemento minimal de $\mathcal{F}$ com respeito à inclusão.

Mostraremos que F_0 consiste de um único ponto. Suponhamos, por absurdo, que existam $y, z \in F_0$ com $y \neq z$. Como E é localmente convexo, existe um funcional linear contínuo $f \in E'$ tal que

$$f(y) \neq f(z).$$

Sem perda de generalidade, suponha $f(y) < f(z)$.

Definamos

$$\alpha = \max_{x \in F_0} f(x).$$

Como F_0 é compacto e f é contínuo, esse máximo é atingido. Considere então

$$F_1 = \{x \in F_0 : f(x) = \alpha\}.$$

O conjunto F_1 é não vazio, convexo e compacto. Além disso,

$$F_1 \subsetneq F_0,$$

o que contradiz a minimalidade de F_0 . Portanto F_0 deve consistir de um único ponto, digamos $F_0 = \{x\}$.

Finalmente, mostraremos que x é um ponto extremo de C . Suponha que

$$x = \lambda y + (1 - \lambda)z, \quad y, z \in C, \quad \lambda \in (0, 1).$$

Considere o conjunto

$$F = \text{co}\{y, z\}.$$

Então F é convexo, compacto e está contido em C . Além disso $x \in F$.

Como $F_0 = \{x\}$ é minimal na família $\mathcal{F}$, não pode existir subconjunto convexo compacto não vazio de C estritamente contido em F_0 . Portanto y e z devem coincidir com x , isto é,

$$y = z = x.$$

Logo x é ponto extremo de C . □

Estamos agora em condições de provar o Teorema de Krein-Milman.

Teorema 2.41 (Krein-Milman). *Seja E um espaço vetorial topológico localmente convexo de Hausdorff sobre $\mathbb{R}$ e seja $C \subset E$ um subconjunto convexo compacto não vazio. Então*

$$C = \overline{\text{co}}(\text{Ext}(C)).$$

Demonstração. Definamos

$$K = \overline{\text{co}}(\text{Ext}(C)).$$

Como $\text{Ext}(C) \subset C$ e C é convexo e fechado, segue imediatamente que

$$K \subset C.$$

Suponhamos, por absurdo, que exista $x_0 \in C \setminus K$. Como K é convexo e fechado e C é compacto, pelo teorema de separação para conjuntos convexos existe um funcional linear contínuo $f \in E'$ tal que

$$f(x_0) > \sup_{x \in K} f(x).$$

Como C é compacto e f é contínuo, existe $x^* \in C$ tal que

$$f(x^*) = \max_{x \in C} f(x).$$

Definamos

$$M = \{x \in C : f(x) = f(x^*)\}.$$

O conjunto M é não vazio, convexo e compacto. Pelo Lema 2.40, M possui um ponto extremo e .

Mostremos que e é também ponto extremo de C . Suponha que

$$e = \lambda y + (1 - \lambda)z, \quad y, z \in C, \quad \lambda \in (0, 1).$$

Como f atinge seu máximo em C no ponto x^* , temos

$$f(y) \leq f(x^*) \quad \text{e} \quad f(z) \leq f(x^*).$$

Por outro lado,

$$f(e) = f(x^*) = \lambda f(y) + (1 - \lambda)f(z).$$

Isso só é possível se

$$f(y) = f(z) = f(x^*),$$

o que implica $y, z \in M$. Como e é extremo em M , segue que $y = z = e$. Portanto e é ponto extremo de C .

Assim,

$$e \in \text{Ext}(C) \quad \text{e} \quad f(e) = f(x^*).$$

Como $\text{Ext}(C) \subset K$, temos

$$\sup_{x \in K} f(x) \geq f(e).$$

Por outro lado,

$$f(x_0) \leq f(x^*) = f(e),$$

o que contradiz a escolha de f .

Logo $C \subset K$, e concluímos que

$$C = \overline{\text{co}}(\text{Ext}(C)).$$

□

2.4.3 Versões ordenadas do Teorema de Hahn-Banach

O Teorema de Hahn-Banach admite também formulações em espaços vetoriais ordenados, nas quais a extensão linear preserva desigualdades associadas a operadores convexos. Nessas versões, considera-se um espaço vetorial munido de uma relação de ordem compatível com as operações lineares, e procura-se estender operadores lineares mantendo uma condição de dominância em relação a um operador convexo.

Resultados desse tipo mostram que, sob hipóteses adequadas de compatibilidade entre a ordem e a função dominante, é possível obter extensões lineares que preservam simultaneamente a estrutura de ordem e as desigualdades envolvidas. Tais formulações aparecem em contextos mais gerais de análise funcional, teoria da otimização convexa e teoria de operadores positivos.

Para uma discussão detalhada dessas extensões ordenadas do Teorema de Hahn-Banach, ver [5] e as referências ali citadas.

Aplicações dos teoremas de Hahn-Banach

Neste capítulo apresentamos duas classes de aplicações dos teoremas de Hahn-Banach. A primeira está relacionada à estrutura geométrica de conjuntos convexos compactos em espaços localmente convexos e à teoria de representação por medidas de probabilidade. A segunda diz respeito ao problema do momento e a resultados associados à existência e à unicidade de medidas representativas.

Mais precisamente, o capítulo está organizado da seguinte forma:

- na Seção 3.1 discutimos o Teorema de Krein-Milman e alguns resultados da teoria de representação, com base principalmente em [6];
- na Seção 3.2 apresentamos o problema do momento e resultados relacionados, tomando como referências principais [5] e [7].

Para o desenvolvimento desta etapa do trabalho, assumimos que o leitor esteja familiarizado com alguns conceitos clássicos de análise funcional e teoria da medida que não serão retomados em detalhe, tais como medidas de Borel regulares, medidas de Dirac, suporte de medidas, integração em relação a medidas, o Teorema da Representação de Riesz, além de noções básicas sobre espaços L^p , positividade de funcionais e operadores, e conceitos elementares de convexidade.

Esses tópicos podem ser encontrados, por exemplo, em [6], [7], [8], [9] e [10]. Optamos por não apresentar uma exposição sistemática desses resultados para evitar tornar o texto excessivamente extenso. No apêndice, concentramos a discussão nas preliminares diretamente necessárias para compreender o núcleo deste trabalho, a saber, as diferentes versões dos teoremas de Hahn-Banach e o contexto de espaços vetoriais topológicos em que esses resultados se inserem.

3.1 Teorema de Krein-Milman e elementos da Teoria de Representação

Nossa primeira aplicação dos teoremas de Hahn-Banach está relacionada à teoria de representação.

O Teorema de Carathéodory, originalmente formulado em termos de combinações convexas finitas de pontos, pode ser reinterpretado em linguagem de teoria da medida por meio de medidas discretas. De fato, um ponto x de um conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ pode ser escrito como combinação convexa finita de pontos x_i , com coeficientes $\lambda_i \geq 0$ tais que $\sum_i \lambda_i = 1$; esses coeficientes definem naturalmente uma medida discreta.

A partir dessa observação, utilizaremos o Teorema de Krein-Milman para obter representações integrais mais gerais, em termos de medidas de probabilidade arbitrárias.

Para a discussão que se seguirá, consideramos K um subconjunto convexo não vazio de um espaço localmente convexo de Hausdorff E . Para cada $y \in K$, denotaremos por δ_y a medida de Dirac concentrada em y , isto é, a medida de Borel em K que atribui valor 1 a todo subconjunto de Borel que contém y e valor 0 aos demais subconjuntos.

Se $x \in K$ e K estiver contido em um subespaço de dimensão n de E , então, pelo Teorema de Krein-Milman e pelo Teorema de Carathéodory, existem pontos extremos $e_1, \dots, e_{n+1}$ de K e coeficientes $a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}_+$ tais que

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_j = 1 \quad \text{e} \quad x = \sum_{j=1}^{n+1} a_j e_j.$$

Definindo

$$\mu := \sum_{j=1}^{n+1} a_j \delta_{e_j},$$

obtemos, para todo funcional linear contínuo $L \in E'$,

$$L(x) = \sum_{j=1}^{n+1} a_j L(e_j) = \int_K L d\mu.$$

Assim, a medida μ representa o ponto x , no sentido de que a integração de funcionais lineares contínuos coincide com sua avaliação em x .

A partir de agora, consideraremos em K apenas medidas de probabilidade de Borel regulares e não negativas.

Definição 3.1. Seja K um subconjunto compacto não vazio de um espaço localmente convexo X e seja μ uma medida de probabilidade em K .

Dizemos que μ *representa* um ponto $x \in X$ se

$$L(x) = \int_K L d\mu$$

para todo funcional linear contínuo $L \in X'$.

Definição 3.2. Seja K um espaço compacto de Hausdorff e seja μ uma medida de Borel regular não negativa em K .

Dizemos que μ é *suportada* por um subconjunto de Borel $B \subset K$ se $\mu(K \setminus B) = 0$. O *suporte* de μ é o menor subconjunto fechado $B \subset K$ que suporta μ .

Os resultados de Choquet podem ser vistos como um refinamento do Teorema de Krein-Milman no contexto de representações integrais. Enquanto Krein-Milman assegura que um conjunto convexo compacto é gerado por seus pontos extremos, os teoremas de Choquet fornecem uma descrição mais precisa dessa geração, ao garantir que cada ponto do conjunto pode ser representado como o baricentro de uma medida de probabilidade

concentrada, em sentido apropriado, no conjunto dos pontos extremos. Dessa forma, tais teoremas estabelecem uma ponte natural entre a geometria convexa e a teoria da medida, permitindo interpretar pontos de conjuntos convexos como médias generalizadas de seus elementos extremos.

A demonstração do Teorema de Choquet recorre ao Teorema da Representação de Riesz como instrumento fundamental para estabelecer a correspondência entre funcionais lineares positivos definidos em espaços de funções contínuas e medidas de probabilidade. Por esse motivo, tal resultado é apresentado a seguir, sem demonstração, uma vez que sua prova extrapola os objetivos e o escopo deste trabalho.

Teorema 3.3 (Teorema da Representação de Riesz). *Seja Y um espaço compacto de Hausdorff e seja $C(Y)$ o espaço de Banach de todas as funções contínuas reais em Y , munido da norma do supremo. Então, para todo funcional linear contínuo positivo $L: C(Y) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $L(1) = 1$, existe uma única medida de probabilidade μ em Y tal que*

$$L(f) = \int_Y f d\mu$$

para todo $f \in C(Y)$.

Teorema 3.4 (Choquet). *Suponha que K seja um subconjunto convexo compacto e metrizável de um espaço localmente convexo X e que $x_0 \in K$. Então existe uma medida de probabilidade μ em K que representa x_0 e cujo suporte está contido no conjunto dos pontos extremos de K .*

Demonstração. Como K é compacto e metrizável, o espaço $C(K)$ é separável. Consequentemente, o espaço A das funções afins contínuas em K também é separável. Assim, podemos escolher uma sequência $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em A tal que $\|h_n\| = 1$ e $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seja densa na esfera unitária de A . Em particular, essa família separa pontos de K .

Definimos

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} h_n^2.$$

Como a série converge uniformemente, segue que $f \in C(K)$. Além disso, f é estritamente convexa em K . De fato, se $x \neq y$, então $h_n(x) \neq h_n(y)$ para algum n , pois a família $\{h_n\}$ separa pontos. Logo, h_n não é constante no segmento $[x, y]$, e portanto h_n^2 é estritamente convexa nesse segmento. Daí segue que f é estritamente convexa em $[x, y]$.

Seja $B = A + \mathbb{R}f$ o subespaço de $C(K)$ gerado por A e f . Pelo Lema de Zorn, podemos definir um funcional sublinear p em $C(K)$ por

$$p(g) := \bar{g}(x_0), \quad g \in C(K),$$

onde $\bar{g}$ denota a menor função afim contínua que majora g em K . Da definição, segue que p é subaditivo e satisfaz $p(rg) = rp(g)$ para todo $r \geq 0$.

Definimos agora um funcional linear em B por

$$h + rf \mapsto h(x_0) + r\bar{f}(x_0), \quad h \in A, r \in \mathbb{R}.$$

Mostremos que esse funcional é dominado por p em B , isto é, que

$$h(x_0) + r\bar{f}(x_0) \leq \overline{(h + rf)}(x_0), \quad h \in A, r \in \mathbb{R}.$$

Se $r \geq 0$, então a menor função afim contínua que majora $h + rf$ é $h + r\bar{f}$, e a desigualdade segue imediatamente. Se $r < 0$, então $h + rf$ é côncava, e portanto

$$\overline{(h + rf)} = h + rf \geq h + r\bar{f},$$

o que novamente implica a desigualdade desejada.

Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe um funcional linear m em $C(K)$ tal que

$$m(g) \leq \bar{g}(x_0), \quad g \in C(K),$$

e

$$m(h + rf) = h(x_0) + r\bar{f}(x_0), \quad h \in A, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Se $g \in C(K)$ e $g \leq 0$, então $\bar{g} \leq 0$, de modo que

$$m(g) \leq \bar{g}(x_0) \leq 0.$$

Portanto, m é positivo no sentido usual, isto é, $m(g) \geq 0$ sempre que $g \geq 0$.

Pelo Teorema da Representação de Riesz, existe uma medida de Borel regular não negativa μ em K tal que

$$m(g) = \int_K g \, d\mu, \quad g \in C(K).$$

Como $1 \in A$, temos

$$1 = m(1) = \int_K 1 \, d\mu = \mu(K),$$

e portanto μ é uma medida de probabilidade.

Além disso,

$$\int_K f \, d\mu = m(f) = \bar{f}(x_0).$$

Como $f \leq \bar{f}$ em K , segue que

$$\int_K f \, d\mu \leq \int_K \bar{f} \, d\mu.$$

Por outro lado, se $h \in A$ e $h \geq f$, então $h \geq \bar{f}$, e assim

$$h(x_0) = m(h) = \int_K h \, d\mu \geq \int_K \bar{f} \, d\mu.$$

Tomando o ínfimo sobre todas as funções afins contínuas h que majoram f , obtemos

$$\bar{f}(x_0) \geq \int_K \bar{f} \, d\mu.$$

Como

$$\int_K f \, d\mu = \bar{f}(x_0),$$

concluimos que

$$\int_K f \, d\mu = \int_K \bar{f} \, d\mu.$$

Logo,

$$\int_K (\bar{f} - f) \, d\mu = 0.$$

Como $\bar{f} - f \geq 0$, segue que μ se anula no complemento do conjunto

$$\mathcal{E} = \{x \in K : f(x) = \bar{f}(x)\}.$$

Resta mostrar que $\mathcal{E} \subset \text{Ext}(K)$. De fato, se

$$x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$$

com $y, z \in K$ distintos, então, pela convexidade estrita de f ,

$$f(x) < \frac{1}{2}f(y) + \frac{1}{2}f(z) \leq \frac{1}{2}\bar{f}(y) + \frac{1}{2}\bar{f}(z) \leq \bar{f}(x),$$

onde a última desigualdade decorre do fato de que $\bar{f}$ é uma função afim. Portanto $x \notin \mathcal{E}$. Assim, todo ponto de $\mathcal{E}$ é extremo em K .

Como μ se anula no complemento de $\mathcal{E}$, concluímos que o suporte de μ está contido em $\text{Ext}(K)$. Além disso, para todo $h \in A$,

$$\int_K h d\mu = m(h) = h(x_0).$$

Em particular, isso vale para a restrição a K de todo funcional linear contínuo em X , e portanto μ representa x_0 . $\square$

O Teorema de Choquet–Bishop–de Leeuw estende a teoria de representação integral ao caso de conjuntos convexos compactos não metrizáveis. No entanto, sua demonstração não será apresentada neste trabalho; uma exposição detalhada pode ser encontrada em [6]. Essa escolha decorre do fato de que a prova envolve ferramentas técnicas de teoria da medida e integração, como a ordem de Choquet entre medidas e o uso sistemático de medidas de Baire, que fogem ao escopo principal deste texto. Ainda assim, vale ressaltar que o teorema se apoia de maneira essencial nos teoremas de Hahn-Banach. São esses resultados que fornecem os princípios de extensão e separação necessários para a construção de medidas representativas adequadas e para o tratamento geométrico da convexidade em dimensão infinita, mesmo na ausência de hipóteses de metrizabilidade.

Teorema 3.5 (Choquet–Bishop–de Leeuw). *Suponha que K seja um subconjunto convexo compacto de um espaço localmente convexo X e que $x_0 \in K$. Então existe uma medida de probabilidade μ em K que representa x_0 e que se anula em todo subconjunto de Baire de K disjunto do conjunto dos pontos extremos de K .*

Noutras palavras, qualquer ponto de K pode ser interpretado como o baricentro de uma medida de probabilidade cujo comportamento é essencialmente determinado por sua restrição ao conjunto dos pontos extremos de K .

Em resumo, ao discutir representações integrais por meio de medidas, observamos que o Teorema de Krein-Milman fornece um mecanismo estrutural para decompor elementos de conjuntos convexos em termos de seus pontos extremos. O Teorema de Hahn-Banach, por sua vez, oferece as ferramentas analíticas fundamentais, como separação e extensão de funcionais lineares, que sustentam a demonstração e as aplicações do Teorema de Krein-Milman, desempenhando um papel central na teoria da convexidade e nas representações integrais em espaços localmente convexos.

Os próximos dois teoremas encontram-se integralmente demonstrados em [11]. Nesta seção, apresentamos apenas as ideias centrais de suas demonstrações, destacando o papel desempenhado por argumentos de separação do tipo Hahn-Banach, em consonância com o foco deste trabalho.

Teorema 3.6. *Se K é um subconjunto compacto convexo de um espaço localmente convexo X e μ é uma medida de probabilidade em K , então existe um único ponto $\bar{\mu} \in K$, chamado baricentro de μ , tal que*

$$L(\bar{\mu}) = \int_K L d\mu$$

para todo funcional linear contínuo $L \in X'$.

O teorema do baricentro estabelece uma identificação fundamental entre medidas de probabilidade definidas em conjuntos convexos compactos e pontos do espaço ambiente. Mais precisamente, a cada medida de probabilidade μ em K associa-se um único ponto $\bar{\mu} \in K$, caracterizado pela coincidência entre a integração de funcionais lineares contínuos em relação a μ e a avaliação desses funcionais em $\bar{\mu}$.

A existência e a unicidade desse ponto dependem essencialmente de argumentos de separação por funcionais lineares contínuos, assegurados pelos teoremas de Hahn-Banach. Tais argumentos garantem que os funcionais lineares contínuos distinguem pontos de conjuntos convexos, permitindo identificar o funcional

$$L \mapsto \int_K L d\mu$$

como a avaliação em um ponto de K .

Em conjunto com os teoremas de Choquet apresentados anteriormente, esse resultado completa o quadro da representação integral: enquanto o Teorema de Choquet assegura a existência de medidas representativas para pontos de conjuntos convexos compactos, o teorema do baricentro garante que tal representação determina canonicamente o ponto representado.

Essa interpretação geométrica torna natural a comparação entre valores pontuais e valores médios de funções convexas, conduzindo ao teorema de Jensen no contexto de espaços localmente convexos.

Teorema 3.7 (Jensen). *Suponha que μ seja uma medida de probabilidade em um subconjunto compacto convexo K de um espaço localmente convexo X . Então*

$$f(\bar{\mu}) \leq \int_K f(x) d\mu(x)$$

para toda função convexa contínua $f: K \rightarrow \mathbb{R}$.

A desigualdade de Jensen expressa uma consequência funcional direta da identificação entre medidas de probabilidade e pontos fornecida pelo teorema do baricentro. Sua demonstração baseia-se na representação de funções convexas contínuas como supremos de funções afins contínuas, o que depende de argumentos de separação do tipo Hahn-Banach aplicados ao epígrafo da função convexa. Dessa forma, a desigualdade resulta da avaliação dessas funções afins no baricentro da medida, evidenciando novamente o papel central dos teoremas de Hahn-Banach na passagem de propriedades geométricas para afirmações integrais.

Em síntese, o Teorema de Krein-Milman fornece o ponto de partida geométrico da teoria da representação, ao assegurar que conjuntos convexos compactos são gerados por seus pontos extremos. Os teoremas de Choquet refinam esse resultado ao garantir que pontos desses conjuntos admitem representações integrais por medidas de probabilidade suportadas no conjunto dos pontos extremos.

Nesse contexto, os teoremas de Hahn-Banach desempenham papel fundamental, pois fornecem os princípios de separação e extensão de funcionais lineares contínuos que sustentam tanto a construção dessas representações quanto sua interpretação geométrica. Em particular, eles permitem identificar medidas de probabilidade com pontos do conjunto convexo por meio do baricentro e fundamentam resultados como a desigualdade de Jensen, evidenciando sua importância na teoria da representação integral em espaços localmente convexos.

3.2 O problema do momento e resultados relacionados

Nesta seção discutimos o problema do momento e alguns resultados a ele relacionados, destacando o papel desempenhado pelos teoremas de Hahn-Banach na extensão de funcionais lineares positivos e, em versões mais gerais, de operadores lineares positivos.

Começamos com o problema do momento de Stieltjes. Dada uma sequência de números reais $(y_k)_{k \geq 0}$, procura-se uma medida de Radon não negativa μ em $[0, \infty)$ tal que

$$\int_0^\infty t^k d\mu(t) = y_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Os números y_k são chamados de *momentos* da medida μ .

Esse problema tem natureza essencialmente inversa: busca-se reconstruir uma medida a partir de seus momentos. O problema direto correspondente consiste em calcular os momentos

$$\int_0^\infty t^k d\mu(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

a partir de uma medida previamente dada.

Há uma conexão profunda entre o problema do momento, a estrutura dos polinômios não negativos e a extensão de funcionais lineares positivos. Para explicitar essa relação, seja $\mathcal{P} = \mathbb{R}[t]$ o espaço vetorial dos polinômios reais em uma variável e, para cada $j \in \mathbb{N}$, seja

$$\phi_j(t) := t^j.$$

Dada uma sequência $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$, definimos um funcional linear

$$T_0: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}, \quad T_0\left(\sum_{j \in J_0} a_j \phi_j\right) := \sum_{j \in J_0} a_j y_j, \quad (3.1)$$

onde $J_0 \subset \mathbb{N}$ é finito. Por construção, temos

$$T_0(\phi_j) = y_j, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Dessa forma, o problema do momento pode ser reformulado como o problema de decidir quando o funcional linear T_0 admite uma representação integral positiva.

A questão central consiste em verificar se T_0 assume valores não negativos em todo polinômio não negativo no conjunto considerado. Quando essa condição de positividade é satisfeita, torna-se natural procurar uma extensão linear positiva de T_0 a um espaço funcional mais amplo, preservando essa positividade. Uma vez obtida tal extensão, o Teorema da Representação de Riesz–Markov–Kakutani permite representá-la por meio de uma medida.

Teorema 3.8 (Teorema da Representação de Riesz–Markov–Kakutani). Seja $C_c([0, \infty))$ o espaço das funções contínuas reais com suporte compacto em $[0, \infty)$. Se $T: C_c([0, \infty)) \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear positivo, isto é,

$$T(f) \geq 0, \quad \forall f \in C_c([0, \infty)), \quad f \geq 0,$$

então existe uma única medida de Borel regular positiva μ em $[0, \infty)$ tal que

$$T(f) = \int_{[0, \infty)} f(t) d\mu(t), \quad \forall f \in C_c([0, \infty)).$$

A demonstração desse resultado não será apresentada aqui, pois foge ao escopo deste trabalho.

Retornando ao funcional T_0 , a estratégia geral consiste em estendê-lo a um espaço ordenado de funções que contenha $\mathcal{P}$ e, idealmente, também $C_c([0, \infty))$. Em muitos contextos, esse espaço é um reticulado de Banach. Por exemplo, se ν é uma medida de Borel regular positiva em $[0, \infty)$ com momentos finitos, pode-se considerar um espaço de Banach como $L^\alpha_\nu([0, \infty))$. Um subespaço natural é

$$X_1 := \{g \in X : \exists p \in \mathcal{P} \text{ tal que } |g| \leq p\},$$

que contém $\mathcal{P}$ e as funções contínuas reais com suporte compacto em $[0, \infty)$. A extensão positiva de T_0 a esse subespaço e, posteriormente, a um espaço maior onde se possa aplicar o Teorema da Representação de Riesz constitui um dos mecanismos básicos para resolver o problema do momento.

No caso multidimensional, para $j = (j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^n$ e $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, escrevemos

$$\phi_j(t) = t^j = t_1^{j_1} \cdots t_n^{j_n}.$$

Dada uma sequência $(y_j)_{j \in \mathbb{N}^n}$, investiga-se a existência de uma forma linear positiva T , definida em um espaço de funções contendo polinômios e funções contínuas com suporte compacto, tal que

$$T(\phi_j) = y_j, \quad j \in \mathbb{N}^n.$$

Quando tal forma linear admite representação por uma medida de Borel positiva regular μ em $\mathbb{R}^n$, dizemos que μ é uma *medida representativa* da sequência $y = (y_j)_{j \in \mathbb{N}^n}$, e que y é uma *sequência de momentos*. Formulações análogas valem quando $\mathbb{R}^n$ é substituído por um subconjunto fechado $F \subset \mathbb{R}^n$.

Em contextos mais gerais, autores têm considerado também versões operacionais do problema do momento, nas quais os momentos y_j tomam valores em um espaço vetorial ordenado Y . Nesse caso, resultados do tipo Hahn-Banach para operadores tornam-se relevantes, e hipóteses de completude de ordem sobre o contradomínio passam a desempenhar papel essencial.

No caso clássico unidimensional, a análise do problema do momento está intimamente ligada à estrutura dos polinômios não negativos em subconjuntos fechados de $\mathbb{R}$. Em uma variável, os polinômios não negativos possuem descrições particularmente acessíveis, ao passo que em várias variáveis a situação é substancialmente mais delicada. Como é bem conhecido, para $n \geq 2$ existem polinômios não negativos em todo $\mathbb{R}^n$ que não são soma de quadrados de polinômios.

Essa relação entre positividade algébrica e representabilidade por medidas aparece de forma central nos problemas clássicos do momento. Em particular, condições de positividade sobre o funcional T_0 podem ser traduzidas em positividade de formas quadráticas e de matrizes de Hankel.

Antes de discutir resultados mais recentes, recordemos os problemas clássicos unidimensionais:

- o problema do momento de *Hamburger*, quando se busca uma medida em $\mathbb{R}$;
- o problema do momento de *Stieltjes*, quando se busca uma medida em $[0, \infty)$;
- o problema do momento de *Hausdorff*, quando se busca uma medida em $[0, 1]$.

A partir deste ponto, denotaremos por $C_c(F)$ o espaço vetorial das funções reais contínuas com suporte compacto em um fechado $F \subset \mathbb{R}^n$, por $(C_c(F))_+$ o cone das funções não negativas em $C_c(F)$, e por $\mathcal{P}_+(F)$ o cone dos polinômios reais que são não negativos em F .

A demonstração do teorema a seguir encontra-se em [7, p. 63].

Teorema 3.9 (Teorema de Hamburger). *Para uma sequência real $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, são equivalentes:*

- (a) *y é uma sequência de momentos de Hamburger, isto é, existe uma medida de Radon não negativa μ em $\mathbb{R}$ tal que $t^j \in L^1_\mu(\mathbb{R})$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e*

$$\int_{\mathbb{R}} t^j d\mu(t) = y_j, \quad j \in \mathbb{N};$$

- (b) *y é positiva semidefinida, isto é, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todos $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$,*

$$\sum_{i,j=0}^n y_{i+j} x_i x_j \geq 0;$$

- (c) *todas as matrizes de Hankel*

$$H_n(y) = (y_{i+j})_{i,j=0}^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

são positivas semidefinidas;

- (d) *o funcional T_0 , definido em (3.1), é positivo em $\mathbb{R}[t]$, isto é,*

$$T_0(p^2) \geq 0, \quad \forall p \in \mathbb{R}[t];$$

- (e)

$$T_0(q) \geq 0, \quad \forall q \in \mathcal{P}_+(\mathbb{R}).$$

A demonstração do Teorema de Hamburger baseia-se em equivalências entre diferentes expressões de positividade da sequência de momentos, como a positividade de formas quadráticas associadas, a positividade das matrizes de Hankel e a positividade do funcional T_0 sobre o cone dos polinômios não negativos. Essas equivalências reduzem o problema à análise do funcional linear definido em $\mathbb{R}[t]$.

O passo essencial consiste em mostrar que a positividade de T_0 sobre $\mathcal{P}_+(\mathbb{R})$ garante a existência de uma medida de Radon positiva que o represente. Essa passagem está intimamente ligada a resultados de extensão de funcionais positivos do tipo Hahn-Banach. Uma vez obtida tal extensão, a medida representativa é fornecida pelo Teorema da Representação de Riesz.

O problema do momento de Stieltjes pode ser visto como uma versão refinada do problema de Hamburger, na qual se impõe a restrição adicional de que a medida representativa tenha suporte contido no semieixo positivo. Essa restrição geométrica se traduz em condições adicionais de positividade.

A demonstração do próximo teorema encontra-se em [7, p. 65].

Teorema 3.10 (Teorema de Stieltjes). *Para uma sequência real $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, são equivalentes:*

(a) *y é uma sequência de momentos de Stieltjes, isto é, existe uma medida de Radon não negativa μ em $[0, \infty)$ tal que $t^j \in L_\mu^1([0, \infty))$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e*

$$\int_0^\infty t^j d\mu(t) = y_j, \quad j \in \mathbb{N};$$

(b) *para todo $n \in \mathbb{N}$ e todos $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$,*

$$\sum_{i,j=0}^n y_{i+j} x_i x_j \geq 0 \quad e \quad \sum_{i,j=0}^n y_{i+j+1} x_i x_j \geq 0;$$

(c) *todas as matrizes de Hankel*

$$(y_{i+j})_{i,j=0}^n \quad e \quad (y_{i+j+1})_{i,j=0}^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

são positivas semidefinidas;

(d)

$$T_0(p^2) \geq 0 \quad e \quad T_0(tq^2) \geq 0, \quad \forall p, q \in \mathbb{R}[t];$$

(e)

$$T_0(q) \geq 0, \quad \forall q \in \mathcal{P}_+([0, \infty)).$$

A demonstração baseia-se em equivalências análogas às do caso de Hamburger, com o acréscimo das condições que envolvem o fator t e refletem a restrição do suporte a $[0, \infty)$. O núcleo do argumento consiste em mostrar que a positividade de T_0 sobre $\mathcal{P}_+([0, \infty))$ é suficiente para garantir a existência de uma medida de Radon positiva com suporte no semieixo positivo.

Embora os teoremas anteriores garantam a existência de medidas representativas, eles não asseguram, em geral, a unicidade da solução. O teorema seguinte fornece uma condição suficiente de determinabilidade. Sua demonstração encontra-se em [7, p. 80–81].

Teorema 3.11 (Critério de Carleman). *Suponha que $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seja uma sequência positiva semidefinida. Então:*

(a) *se*

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_{2n}^{-\frac{1}{2n}} = +\infty,$$

então y é uma sequência de momentos de Hamburger determinada;

(b) se, além disso, $(y_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ é positiva semidefinida e

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_{2n}^{-\frac{1}{2n}} = +\infty,$$

então y é uma sequência de momentos de Stieltjes determinada.

O resultado acima mostra que, sob hipóteses adequadas de crescimento, a solução do problema do momento pode tornar-se rígida, no sentido de que a medida representativa é única. Já o teorema seguinte evidencia que essa rigidez não é automática.

Teorema 3.12 (Condição de Krein). *Seja f uma função de Borel não negativa em $\mathbb{R}$. Suponha que a medida μ , definida por*

$$d\mu(t) = f(t) dt,$$

seja uma medida de Radon em $\mathbb{R}$ e possua momentos finitos de todas as ordens,

$$y_n := \int_{\mathbb{R}} t^n d\mu(t), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Se

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{-\ln(f(x))}{1+x^2} dx < +\infty,$$

então a sequência de momentos $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é M -indeterminada.

A demonstração desse resultado baseia-se em técnicas de Análise Complexa, em particular na teoria dos espaços de Hardy e em versões do Teorema de Paley–Wiener. Como essa abordagem se afasta das técnicas centrais deste trabalho, omitiremos a prova, que pode ser consultada em [7, p. 85–87].

Os resultados clássicos apresentados até aqui tratam, essencialmente, da existência e da unicidade de medidas representativas escalares, isto é, medidas com valores em $\mathbb{R}$. Nessa formulação, a positividade do funcional T_0 e a estrutura dos polinômios não negativos permitem decidir quando uma sequência de números reais é realizável como sequência de momentos.

Entretanto, em diversas situações – especialmente em problemas mais abstratos ou em formulações com restrições adicionais – é natural considerar versões do problema do momento nas quais os “momentos” assumem valores em espaços ordenados mais gerais, e a solução procurada não é apenas um funcional linear escalar, mas um operador linear entre espaços funcionais. Nesse contexto, surgem naturalmente problemas do tipo Markov, nos quais se busca um operador linear submetido simultaneamente a condições de positividade, interpolação e dominância.

A passagem do caso clássico escalar para esse quadro mais geral exige ferramentas adicionais. Em particular, torna-se necessário controlar extensões de operadores lineares positivos definidos inicialmente no espaço dos polinômios e garantir que tais extensões preservem desigualdades relevantes em espaços funcionais maiores. É precisamente nesse ponto que entram, de forma decisiva, os resultados do tipo Hahn–Banach para operadores, bem como propriedades de aproximação polinomial em espaços L^1 .

Os resultados que apresentamos a seguir, baseados em [5] e em trabalhos correlatos, situam-se nesse nível mais geral. Eles mostram como a teoria clássica do problema do momento pode ser ampliada para contextos multidimensionais, com valores em reticulados de Banach e sob restrições do tipo Markov.

Os resultados finais desta seção exigem uma hipótese técnica adicional de aproximação, necessária para transferir condições de positividade formuladas inicialmente no espaço dos polinômios para espaços funcionais mais amplos. Em particular, nos problemas do momento com restrições do tipo Markov, torna-se essencial garantir que funções contínuas não negativas com suporte compacto possam ser aproximadas por elementos de subcones adequados de polinômios não negativos.

Essa propriedade de densidade permite controlar extensões lineares positivas por meio de argumentos do tipo Hahn-Banach e desempenha papel central na demonstração de resultados de existência e unicidade de operadores lineares que realizam sequências de momentos sob restrições normativas.

Começamos recordando um lema fundamental de aproximação polinomial em subconjuntos fechados e ilimitados, cuja demonstração pode ser encontrada em [5].

Lema 3.13. *Seja $F \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto fechado e ilimitado, e seja ν uma medida M -determinada em F , com momentos finitos de todas as ordens. Então, para toda função $x \in C_c(F)$ tal que $x(t) \geq 0$ para todo $t \in F$, existe uma sequência de polinômios $(p_m)_m$ tal que*

$$p_m \geq x \quad \text{em } F, \quad p_m \rightarrow x \quad \text{em } L_\nu^1(F).$$

Em particular,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_F p_m(t) d\nu(t) = \int_F x(t) d\nu(t).$$

Além disso, o cone $\mathcal{P}_+(F)$ é denso em $(L_\nu^1(F))_+$ e $\mathcal{P}$ é denso em $L_\nu^1(F)$.

O próximo lema explora a estrutura de produto da medida para obter aproximações em várias variáveis a partir do caso unidimensional. A ideia consiste em aplicar aproximações coordenada a coordenada e, em seguida, combinar os resultados por meio do Teorema de Fubini.

Lema 3.14. *Seja $\nu = \nu_1 \times \cdots \times \nu_n$ o produto de n medidas M -determinadas em $\mathbb{R}$. Então toda função contínua não negativa com suporte compacto em $X = L_\nu^1(\mathbb{R}^n)$ pode ser aproximada por somas dominantes de funções da forma*

$$p_1 \otimes \cdots \otimes p_n,$$

onde

$$(p_1 \otimes \cdots \otimes p_n)(t_1, \dots, t_n) = p_1(t_1) \cdots p_n(t_n),$$

e cada p_j é um polinômio não negativo em $\mathbb{R}$, para $j = 1, \dots, n$.

Com base nesses resultados de aproximação, pode-se caracterizar a positividade de operadores lineares limitados definidos em espaços $L_\nu^1(\mathbb{R}^n)$ por meio de condições algébricas explícitas envolvendo combinações finitas de monômios.

O próximo teorema estabelece essa equivalência para operadores lineares limitados com valores em reticulados de Banach. Sua demonstração pode ser encontrada em [12].

Teorema 3.15. *Seja ν como no lema anterior, seja $X = L_\nu^1(\mathbb{R}^n)$ e seja Y um reticulado de Banach. Suponha que $T: X \rightarrow Y$ seja um operador linear limitado. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) T é positivo no cone positivo de X ;

(b) para quaisquer subconjuntos finitos $J_k \subset \mathbb{N}$, $k = 1, \dots, n$, e quaisquer escalares $\{\lambda_{j_k}\}_{j_k \in J_k} \subset \mathbb{R}$, vale

$$0 \leq \sum_{i_1, j_1 \in J_1} \left(\cdots \left(\sum_{i_n, j_n \in J_n} \lambda_{i_1} \lambda_{j_1} \cdots \lambda_{i_n} \lambda_{j_n} T(x_{i_1+j_1, \dots, i_n+j_n}) \right) \cdots \right).$$

Munidos dessas caracterizações de positividade e das propriedades de aproximação polinomial em L_ν^1 , passamos agora ao estudo do problema do momento sob restrições superiores e inferiores, usualmente denominado problema do momento do tipo Markov. Nesse contexto, busca-se caracterizar sequências que admitem realização por operadores lineares situados entre dois operadores positivos dados.

Os resultados a seguir, demonstrados em [13], fornecem critérios necessários e suficientes para a existência e a unicidade de tais operadores.

Teorema 3.16. *Sejam T_1, T_2 operadores lineares de X em Y tais que*

$$0 \leq T_1 \leq T_2$$

no cone positivo de X , e seja $(y_n)_{n \geq 0}$ uma sequência de elementos de Y . As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) *existe um único operador linear limitado $T: X \rightarrow Y$ tal que*

$$T(\phi_j) = y_j, \quad j \in \mathbb{N},$$

e

$$T_1 \leq T \leq T_2$$

no cone positivo de X , com

$$\|T_1\| \leq \|T\| \leq \|T_2\|;$$

(b) *para todo polinômio*

$$\sum_{j=0}^m \alpha_j \phi_j \geq 0$$

em K , vale

$$\sum_{j=0}^m \alpha_j T_1(\phi_j) \leq \sum_{j=0}^m \alpha_j y_j;$$

além disso, se $J_0 \subset \mathbb{N}$ é finito e $\{\alpha_j\}_{j \in J_0} \subset \mathbb{R}$, então

$$\sum_{i, j \in J_0} \alpha_i \alpha_j y_{i+j+\ell} \leq \sum_{i, j \in J_0} \alpha_i \alpha_j T_2(\phi_{i+j+\ell}), \quad \ell \in \{0, 1\}.$$

O teorema anterior trata do caso unidimensional, no qual as restrições do tipo Markov podem ser expressas diretamente por desigualdades envolvendo índices escalares. Em problemas multidimensionais, contudo, torna-se necessário introduzir hipóteses adicionais de aproximação para garantir que condições algébricas formuladas no nível dos polinômios se estendam a funções positivas arbitrárias.

O próximo resultado estabelece essa generalização para subconjuntos fechados e ilimitados de $\mathbb{R}^n$, sob uma hipótese explícita de densidade de um subcone $\mathcal{P}_{++}$ de polinômios não negativos.

Teorema 3.17. *Sejam $F \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto fechado e ilimitado, ν uma medida de Borel positiva em F , determinada pelos momentos, com momentos finitos de todas as ordens, e $X = L^1_\nu(F)$. Para $j \in \mathbb{N}^n$ e $t \in F$, seja*

$$\phi_j(t) = t^j.$$

Sejam ainda Y um reticulado de Banach ordem-completo, $(y_j)_{j \in \mathbb{N}^n}$ uma sequência de elementos de Y , e T_1, T_2 operadores lineares limitados de X em Y . Suponha que exista um subcone $\mathcal{P}_{++} \subseteq \mathcal{P}_+(F)$ tal que cada $f \in (C_c(F))_+$ possa ser aproximada em X por uma sequência $(p_\ell)_\ell$ com

$$p_\ell \in \mathcal{P}_{++} \quad e \quad p_\ell \geq f.$$

Então são equivalentes:

(a) *existe um único operador linear limitado $T: X \rightarrow Y$ tal que*

$$T(\phi_j) = y_j, \quad j \in \mathbb{N}^n,$$

e

$$0 \leq T_1 \leq T \leq T_2$$

em X_+ , com

$$\|T_1\| \leq \|T\| \leq \|T_2\|;$$

(b) *para todo subconjunto finito $J_0 \subset \mathbb{N}^n$ e quaisquer escalares $\{\alpha_j\}_{j \in J_0} \subset \mathbb{R}$, valem as implicações*

$$\sum_{j \in J_0} \alpha_j \phi_j \in \mathcal{P}_+(F) \implies \sum_{j \in J_0} \alpha_j T_1(\phi_j) \leq \sum_{j \in J_0} \alpha_j y_j,$$

e

$$\sum_{j \in J_0} \alpha_j \phi_j \in \mathcal{P}_{++} \implies \sum_{j \in J_0} \alpha_j T_1(\phi_j) \geq 0 \quad e \quad \sum_{j \in J_0} \alpha_j y_j \leq \sum_{j \in J_0} \alpha_j T_2(\phi_j).$$

Como consequência direta do teorema multidimensional, obtém-se uma formulação particularmente simples do problema do momento de Markov no caso unidimensional.

Corolário 3.18. *Seja $X = L^1_\nu(\mathbb{R})$, onde ν é uma medida de Borel positiva em $\mathbb{R}$, determinada pelos momentos e com momentos finitos de todas as ordens. Suponha que Y seja um reticulado de Banach ordem-completo e que $(y_n)_{n \geq 0}$ seja uma sequência de elementos de Y . Sejam T_1, T_2 operadores lineares de X em Y tais que*

$$0 \leq T_1 \leq T_2$$

em X_+ . Então são equivalentes:

(a) *existe um único operador linear limitado $T: X \rightarrow Y$ tal que*

$$T(\phi_n) = y_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

e

$$T_1 \leq T \leq T_2$$

em X_+ , com

$$\|T_1\| \leq \|T\| \leq \|T_2\|;$$

(b) para todo subconjunto finito $J_0 \subset \mathbb{N}$ e quaisquer escalares $\{\alpha_j\}_{j \in J_0} \subset \mathbb{R}$,

$$\sum_{i,j \in J_0} \alpha_i \alpha_j T_1(\phi_{i+j}) \leq \sum_{i,j \in J_0} \alpha_i \alpha_j y_{i+j} \leq \sum_{i,j \in J_0} \alpha_i \alpha_j T_2(\phi_{i+j}).$$

O resultado a seguir encerra a seção ao fornecer um critério abstrato para a existência de operadores lineares limitados sob hipóteses de crescimento do tipo exponencial, conectando as condições de positividade e controle normativo discutidas anteriormente com estimativas explícitas no contexto de operadores. Sua demonstração pode ser encontrada em [14].

Teorema 3.19. *Suponha que $A_1, \dots, A_n$ sejam elementos de $Y(U)$ e que exista um número real $M > 0$ tal que*

$$|B_k| \leq M \frac{A_1^{2k_1}}{k_1!} \cdots \frac{A_n^{2k_n}}{k_n!}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^n,$$

e

$$\sum_{p=1}^n A_p^2 \leq I,$$

onde $I: H \rightarrow H$ é o operador identidade.

Seja $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}^n} \subset X$ tal que

$$\|g_k\|_\infty = 1 \quad e \quad g_k(0) = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}^n.$$

Então existe um operador linear limitado $T \in B(X, Y)$ tal que

$$T(h) \leq (2 + \tilde{B}M^{-1}e^{-1})\|h\|_\infty u_0, \quad \forall h \in X,$$

onde

$$u_0 = MeI.$$

Em particular,

$$T \leq 2Me + \tilde{B}.$$

Esse teorema pode ser interpretado como uma aplicação final da metodologia desenvolvida ao longo da seção, na qual condições de crescimento adequadas permitem controlar extensões lineares positivas por meio de estimativas normativas explícitas.

Ao longo desta seção, analisamos o papel central do Teorema de Hahn-Banach no estudo do problema do momento, tanto em suas formulações unidimensionais quanto multidimensionais. Vimos como resultados de extensão de funcionais e operadores lineares, aliados a argumentos de positividade e aproximação polinomial, permitem estabelecer critérios de existência, unicidade e controle normativo de soluções. Dessa forma, a teoria do problema do momento revela-se profundamente ligada à estrutura dos espaços localmente convexos e à possibilidade de separar cones por funcionais lineares contínuos, tema que permeia toda a análise desenvolvida neste trabalho.

Referências

- [1] SCHAEFER, H. H. *Topological Vector Spaces*. 3. ed. Tübingen: Springer, 1971.
- [2] DAY, M. M. *Normed Linear Spaces*. 3rd. ed. [S.l.]: Springer, 1973.
- [3] BOURBAKI, N. *Espaces Vectoriels Topologiques*. [S.l.]: Masson, 1981. (Éléments de Mathématique).
- [4] OLTEANU, O. A strong separation theorem in normed linear spaces. *Mathematica (Cluj)*, v. 35, n. 58(1), p. 59–63, 1993.
- [5] OLTEANU, O. On Hahn-Banach theorem and some of its applications. *Open Mathematics*, v. 20, p. 366–390, 2022.
- [6] PHELPS, R. R. *Lectures on Choquet's Theorem*. 2nd. ed. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2001.
- [7] SCHMÜDGEN, K. *The Moment Problem*. Cham: Springer International Publishing, 2017. (Graduate Texts in Mathematics).
- [8] RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*. 3rd. ed. New York: McGraw-Hill, 1987. ISBN 978-0070542341.
- [9] FOLLAND, G. B. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1999.
- [10] CONWAY, J. B. *A Course in Functional Analysis*. 2. ed. New York: Springer, 1990.
- [11] NICULESCU, C. P.; PERSSON, L.-E. *Convex Functions and Their Applications: A Contemporary Approach*. 2nd. ed. New York: Springer-Verlag, 2018. v. 23. (CMS Books in Mathematics, v. 23).
- [12] OLTEANU, O. Polynomial approximation on unbounded subsets, Markov moment problem and other applications. *Mathematics*, v. 8, n. 1654, p. 1–12, 2020.
- [13] OLTEANU, O. On Markov moment problem and related results. *Symmetry*, v. 13, n. 986, 2021.

-
- [14] OLTEANU, O.; MIHĂILĂ, J. M. Operator-valued mazur–orlicz and moment problems in spaces of analytic functions. *Symmetry*, v. 13, n. 6, p. 986, 2021.
- [15] MUNKRES, J. R. *Topology*. 2nd. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2000. ISBN 9780131816299.
- [16] HORVATH, J. *Topological Vector Spaces and Distributions*. [S.l.]: Addison-Wesley, 1966.
- [17] BREZIS, H. *Analyse Fonctionnelle: Théorie et applications*. 2e édition revue. ed. Paris: Dunod, 1999.
- [18] KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. 1st. ed. New York: John Wiley & Sons, 1989. ISBN 978-0471504597.
- [19] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. New York: Springer, 2010. ISBN 978-0387709130.
- [20] HAHN, H. Über lineare gleichungssysteme in linearen räumen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, v. 157, p. 214–229, 1927.
- [21] BANACH, S. Sur les fonctionnelles linéaires. *Studia Mathematica*, v. 1, p. 211–216, 1929.
- [22] HELLY, E. Über lineare funktionaloperationen. *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, Ila*, v. 121, p. 265–297, 1912.
- [23] DUNFORD, N.; SCHWARTZ, J. T. *Linear Operators, Part I: General Theory*. [S.l.]: Interscience Publishers, 1958.
- [24] REID, C. *Hilbert*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1970.
- [25] KRAFT, V. The Vienna circle: The origin of neo-positivism. *Philosophy and Phenomenological Research*, v. 15, p. 640–641, 1955.
- [26] GOLDSTEIN, R. *Incompleteness: The Proof and Paradox of Kurt Gödel*. [S.l.]: W. W. Norton & Company, 2005.
- [27] KACZOROWSKI, P. Stefan Banach: A short life of genius. *The Mathematical Intelligencer*, v. 14, n. 4, p. 30–35, 1992.

Sobre Espaços Vetoriais Topológicos

Este apêndice tem como objetivo construir os fundamentos teóricos necessários para a compreensão dos espaços vetoriais topológicos, que serviram de alicerce para os resultados apresentados nesta dissertação, especialmente no que se refere às diversas formulações do Teorema de Hahn-Banach. Partimos de uma abordagem ampla, revisitando conceitos fundamentais da Teoria dos Conjuntos, Topologia Geral e Álgebra Linear, de modo a assegurar um entendimento sólido das estruturas envolvidas.

Inicialmente, são apresentadas noções preliminares como ordens, mapeamentos, famílias, filtros, operações com conjuntos e os principais axiomas topológicos. Em seguida, passamos à definição formal de espaço vetorial topológico, explorando suas propriedades, exemplos e construções associadas, como produtos, subespaços, quocientes, hiperplanos e conjuntos limitados.

Também dedicamos especial atenção aos espaços localmente convexos, que desempenham papel central em diversas aplicações da Análise Funcional. Nesse contexto, são abordados conceitos como conjuntos convexos, seminormas, espaços normados e normáveis, bem como transformações lineares contínuas.

Desta forma, este texto serve como material de consulta e suporte para a compreensão dos teoremas e aplicações discutidos nos capítulos anteriores.

Neste trabalho, o símbolo $\mathbb{R}_+$ denotará o conjunto dos números reais não negativos.

A.1 Preliminares

Esta seção apresenta definições e propriedades fundamentais para uma boa compreensão de um espaço vetorial topológico. Reunimos conceitos essenciais da teoria dos conjuntos, de topologia geral e da estrutura algébrica dos espaços vetoriais, os quais servirão como base para o desenvolvimento dos resultados posteriores. Esses fundamentos estão organizados em diversas subseções, abrangendo temas como conjuntos e ordens, mapeamentos (aplicações), famílias, filtros, topologia geral, produtos e quocientes topológicos, axiomas de separação e compacidade. A familiaridade com esses conceitos é indispensável para entender a construção e as aplicações do Teorema de Hahn-Banach em espaços vetoriais topológicos, foco principal deste trabalho.

A.1.1 Conjuntos e ordens

Sejam X e Y conjuntos. Usaremos as notações padrão:

- $x \in X$ para “ x é um elemento de X ”;
- $X \subseteq Y$ (ou $Y \supseteq X$) para “ X é um subconjunto de Y ”;
- $X = Y$ para “ $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$ ”.

Se (p) é uma proposição em termos de variáveis em X , o subconjunto de todos os $x \in X$ para os quais (p) é verdadeira é denotado por:

$$\{x \in X : (p)\}$$

ou, se não houver confusão, simplesmente $\{x : (p)\}$. A *complementação* de X relativa a Y é o conjunto:

$$\{x \in Y : x \notin X\}$$

e é denotado por $Y - X$. O conjunto vazio é denotado por $\emptyset$ e considerado um conjunto finito; o conjunto com um único elemento (chamado *unitário*) contendo x é denotado por $\{x\}$.

Se $(p_1), (p_2)$ são proposições envolvendo relações definidas em X , então:

- $(p_1) \Rightarrow (p_2)$ significa “ (p_1) implica (p_2) ”;
- $(p_1) \Leftrightarrow (p_2)$ significa “ (p_1) é logicamente equivalente a (p_2) ”.

O conjunto de todos os subconjuntos de X é usualmente denotado por $\mathcal{P}(X)$.

A.1.2 Aplicações (Mapeamentos)

Uma *aplicação* f de X em Y é denotada por:

$$f : X \rightarrow Y \quad \text{ou por} \quad x \mapsto f(x).$$

O conjunto X é chamado de *domínio* de f , a imagem de X sob f é o *contradomínio*, e o *gráfico* de f é o subconjunto:

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y.$$

A aplicação da função f ao conjunto $\mathcal{P}(X)$ de todos os subconjuntos de X em $\mathcal{P}(Y)$, associada a f , também é denotada por f ; isto é, para qualquer $A \subseteq X$, escrevemos:

$$f(A) \quad \text{para denotar o conjunto} \quad \{f(x) : x \in A\} \subseteq Y.$$

A aplicação associada de $\mathcal{P}(Y)$ em $\mathcal{P}(X)$ é denotada por f^{-1} ; assim, para qualquer $B \subseteq Y$, temos:

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Se $B = \{b\}$, podemos escrever $f^{-1}(b)$ em vez da notação mais precisa $f^{-1}(\{b\})$.

Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ são aplicações, a composição $x \mapsto g(f(x))$ é denotada por $g \circ f$.

A.1.3 Famílias

Sejam A um conjunto *não vazio* e X um conjunto. Uma aplicação $\alpha \mapsto x(\alpha)$ de A em X também é chamada de *família em X* . Na prática, o termo “família” é usado para designar aplicações cujo domínio A é considerado apenas sob o ponto de vista de suas propriedades de teoria dos conjuntos (isto é, cardinalidade e possivelmente ordem). Escreve-se, nesse caso, x_α para $x(\alpha)$ e denota-se a família por $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$.

Assim, todo conjunto X não vazio pode ser visto como a *família* (aplicação identidade) $\alpha \mapsto x_\alpha \in X$, mas é importante notar que, se $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ for uma família em X , então $\alpha \neq \beta$ não implica $x_\alpha \neq x_\beta$.

Uma *sequência* é uma família $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, com $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ denotando o conjunto dos números naturais.

Se não houver risco de ambiguidade com conjuntos unitários e se o domínio (conjunto de índices) for claro no contexto, uma família pode ser denotada simplesmente por $\{x_\alpha\}$ (em particular, uma sequência por $\{x_n\}$).

A.1.4 Operações com conjuntos

Seja $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ uma família de conjuntos. Para a união dessa família, usamos as notações:

$$\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \quad \text{ou, brevemente,} \quad \bigcup X_\alpha,$$

se o conjunto índice A estiver claro no contexto.

Se $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ for uma sequência de conjuntos, também escreveremos:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

e, se $\{X_1, \dots, X_k\}$ for uma família finita de conjuntos, usamos:

$$\bigcup_{i=1}^k X_i \quad \text{ou} \quad X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k.$$

Notações similares são usadas para *interseções* (com $\cap$ no lugar de $\cup$) e para *produtos cartesianos* (com $\prod$ no lugar de $\cup$).

Se $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ for uma família tal que $X_\alpha = X$ para todo $\alpha \in A$, o produto

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$$

também costuma ser denotado por X^A .

Definição A.1. Seja X um conjunto e $\mathcal{R} \subseteq X \times X$. Dizemos que $\mathcal{R}$ é uma *relação de equivalência* em X se, para todos $x, y, z \in X$, as seguintes propriedades são satisfeitas:

- (i) $x\mathcal{R}x$ (reflexividade);
- (ii) Se $x\mathcal{R}y$, então $y\mathcal{R}x$ (simetria);
- (iii) Se $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$, então $x\mathcal{R}z$ (transitividade).

Definição A.2. Para cada $x \in X$, o conjunto

$$[x] = \{y \in X \mid y\mathcal{R}x\}$$

é chamado de *classe de equivalência* de x .

Definição A.3. O conjunto

$$X/\mathcal{R} = \{[x] \mid x \in X\}$$

é chamado de *conjunto quociente* de X pela relação $\mathcal{R}$.

A.1.5 Ordens

Definição A.4. Uma *estrutura de ordem* sobre um conjunto X é uma relação binária $\mathcal{R}$, denotada usualmente por $\leq$, tal que:

- (i) $x \leq x$ (reflexiva);
- (ii) Se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$ (antissimétrica);
- (iii) Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$ (transitiva).

Exemplo A.5. A relação $x \leq y$ sobre o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ define uma estrutura de ordem, pois satisfaz as três propriedades da Definição A.4.

Definição A.6. Um conjunto X com uma estrutura de ordem $\leq$ é chamado de *conjunto ordenado*, denotado por $(X, \leq)$.

Exemplo A.7. O par $(\mathbb{R}, \leq)$ é um conjunto ordenado.

Definição A.8. Seja $(X, \leq)$ um conjunto ordenado. Um subconjunto $A \subseteq X$ é dito *majorado* (ou *limitado superiormente*) se existe $a_0 \in X$ tal que $a \leq a_0$ para todo $a \in A$; tal elemento a_0 é chamado de *majorante* (ou *cota superior*) de A .

Além disso, um elemento $x \in X$ é chamado de *máximo* ou *maximal* de X se $y \leq x$ para todo $y \in X$.

Exemplo A.9. O subconjunto $[0, 2] \subset \mathbb{R}$ é majorado por $2 \in \mathbb{R}$, pois $a \leq 2$ para todo $a \in [0, 2]$. Qualquer número real $a_0 > 2$ também é um majorante de $[0, 2]$.

Definição A.10. Dizemos que A é *minorado* (ou *limitado inferiormente*) se existe $a_0 \in X$ tal que $a_0 \leq a$ para todo $a \in A$; nesse caso, a_0 é chamado de *minorante* (ou *cota inferior*) de A .

Exemplo A.11. O subconjunto $[0, 2] \subset \mathbb{R}$ é minorado por $0 \in \mathbb{R}$, pois $0 \leq a$ para todo $a \in [0, 2]$. Qualquer número real $a_0 < 0$ também é um minorante de $[0, 2]$.

Definição A.12. Um subconjunto A que é simultaneamente majorado e minorado é chamado de *limitado*.

De acordo com os Exemplos A.9 e A.11, o conjunto $[0, 2]$ é limitado.

Definição A.13. Se A é majorado e existe um menor majorante a_0 (isto é, tal que $a_0 \leq b$ para todo majorante b de A), então esse a_0 é único e é chamado de *supremo* (ou *menor cota superior*) de A . Denotamos:

$$a_0 = \sup A.$$

De forma similar, define-se o *ínfimo* (ou *maior cota inferior*) de A , denotado por $\inf A$, como o maior minorante de A , se existir.

Pelos Exemplos A.9 e A.11, também podemos inferir que $0 = \inf[0, 2)$ e $2 = \sup[0, 2)$.

Definição A.14. Para cada par $(x, y) \in X \times X$, o supremo e o ínfimo do conjunto $\{x, y\}$ (quando existirem) são denotados por $\sup(x, y)$ e $\inf(x, y)$, respectivamente.

Definição A.15. O conjunto $(X, \leq)$ é chamado de um *reticulado* (ou *lattice*) se, para todo par (x, y) , os elementos $\sup(x, y)$ e $\inf(x, y)$ existem.

Exemplo A.16. Considere o conjunto $X = \{a, b\}$. O conjunto das partes de X é

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

Equipamos $\mathcal{P}(X)$ com a relação de inclusão $\subseteq$, ou seja, para $A, B \in \mathcal{P}(X)$, dizemos que $A \leq B$ se $A \subseteq B$.

Esse conjunto ordenado $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ é um *reticulado*, pois:

- Para todo par $A, B \in \mathcal{P}(X)$, o *supremo* $\sup(A, B)$ (menor cota superior) é dado por $A \cup B$;
- Para todo par $A, B \in \mathcal{P}(X)$, o *ínfimo* $\inf(A, B)$ (maior cota inferior) é dado por $A \cap B$.

Como uniões e interseções de conjuntos sempre pertencem à $\mathcal{P}(X)$, os supremos e ínfimos existem para todo par de subconjuntos. Portanto, $\mathcal{P}(X)$ com a ordem por inclusão é um reticulado.

Definição A.17. Dizemos que $(X, \leq)$ é um *reticulado completo* se $\sup A$ e $\inf A$ existem para todo subconjunto não vazio $A \subseteq X$.

Em contextos interdisciplinares, evitamos usar a expressão “reticulado completo” sem esclarecimento, pois a palavra “completo” também é usada em outros ramos da matemática com o significado de “completude uniforme”, isto é, relacionado à convergência de sequências de Cauchy.

Definição A.18. O conjunto $(X, \leq)$ é dito *totalmente ordenado* se, para todo par (x, y) , pelo menos uma das relações $x \leq y$ ou $y \leq x$ é verdadeira.

Exemplo A.19. No conjunto ordenado $([0, 2], \leq)$, o número 2 é um elemento maximal, pois $a \leq 2$ para todo $a \in [0, 2]$.

Observação A.20. Se x for um elemento maximal de X e $y \in X$, então $x \leq y$ implica $x = y$. De fato, como $x \leq y$ e $y \leq x$ e $(X, \leq)$ é ordenado, pela propriedade antissimétrica, segue que $y = x$.

Definição A.21. Seja $(X, \leq)$ um conjunto ordenado não vazio. Dizemos que X é *dirigido* se todo subconjunto $\{x, y\} \subseteq X$ (e, portanto, cada subconjunto finito de X) possui um limitante superior.

Se $x_0 \in X$, o subconjunto

$$\{x \in X : x_0 \leq x\}$$

é chamado de *seção de X gerada por x_0* .

Uma família $\{y_\alpha : \alpha \in A\}$ é *dirigida* se A é um conjunto dirigido. As *seções* de uma família dirigida são as subfamílias $\{y_\alpha : \alpha_0 \leq \alpha\}$, para algum $\alpha_0 \in A$.

Exemplo A.22. O conjunto ordenado $(\mathbb{R}, \leq)$ é dirigido, pois todo subconjunto finito de $\mathbb{R}$ tem um limitante superior.

O subconjunto $[2, \infty) \subset \mathbb{R}$ é uma seção de $\mathbb{R}$ gerada por 2.

A família $\{\alpha^2\}_{\alpha \in \mathbb{R}_+}$ é dirigida, pois o conjunto de índices $\mathbb{R}_+$ é dirigido. Suas seções são da forma $\{\alpha^2 : \alpha \geq b\}$, com $b \in \mathbb{R}_+$.

Definição A.23. Um conjunto ordenado X é dito *ordenado indutivo* se todo subconjunto totalmente ordenado de X possui um majorante (ou seja, uma cota superior).

Lema A.24 (Lema de Zorn). *Em todo conjunto ordenado indutivo, existe pelo menos um elemento maximal.*

Cabe mencionar que o mérito do Lema A.24 foi dado a Max Zorn em 1935, porém o mesmo resultado já havia sido obtido por Kuratowski em 1922 a partir do Princípio de Maximalidade de Hausdorff, que foi provado em 1914.

Observação A.25. Nas aplicações mais comuns do *Lema de Zorn*, o conjunto X é uma família de subconjuntos de um conjunto S , ordenada pela inclusão de conjuntos, isto é, pela relação $\subseteq$.

A.1.6 Filtros

Definição A.26. Seja X um conjunto não vazio. Uma coleção $\mathcal{F}$ não vazia de subconjuntos de X é chamada de *filtro* sobre X se satisfaz os seguintes axiomas:

- (i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$;
- (ii) $F \in \mathcal{F}$ e $F \subset G \subset X \Rightarrow G \in \mathcal{F}$;
- (iii) $F \in \mathcal{F}$ e $G \in \mathcal{F} \Rightarrow F \cap G \in \mathcal{F}$.

Exemplo A.27. Seja X um conjunto não vazio. A coleção $\mathcal{F}$ de todos os subconjuntos de X que contêm um subconjunto não vazio A de X fixado é um filtro sobre X . Com efeito:

- (i) $X \in \mathcal{F}$, pois $A \subset X$, logo $\mathcal{F} \neq \emptyset$ e $\emptyset \notin \mathcal{F}$, pois $\emptyset$ não contém nenhum subconjunto não vazio de X . Em particular, $\emptyset$ não contém A , pois caso contrário $A = \emptyset$, o que não ocorre por hipótese.
- (ii) Se $F \in \mathcal{F}$ e $F \subset G \subset X$, então $\emptyset \neq A \subset F$. Logo, $\emptyset \neq A \subset F \subset G \subset X$ e, por conseguinte, $G \in \mathcal{F}$.
- (iii) Se $F \in \mathcal{F}$ e $G \in \mathcal{F}$, então $\emptyset \neq A \subset F$ e $\emptyset \neq A \subset G$. Logo, $\emptyset \neq A \subset F \cap G$ e, por conseguinte, $F \cap G \in \mathcal{F}$.

Definição A.28. Uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X é uma *base de filtro* se satisfaz:

- (i) $\mathcal{B} \neq \emptyset$ e $\emptyset \notin \mathcal{B}$;
- (ii) $B_1 \in \mathcal{B}$ e $B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Exemplo A.29. No conjunto $\mathbb{R}$ com a topologia usual, considere a coleção de intervalos:

$$\mathcal{B} = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}.$$

Essa coleção constitui uma base de filtro, pois, além de $\mathcal{B} \neq \emptyset$ e $\emptyset \notin \mathcal{B}$, a interseção de dois intervalos (a, ∞) e (b, ∞) de $\mathcal{B}$ sempre contém um intervalo da mesma forma, como $(\max(a, b), \infty)$.

Definição A.30. Seja X um conjunto não vazio. O *filtro* $\mathcal{F}$ gerado por uma base de filtro $\mathcal{B}$ de X é o menor filtro que contém $\mathcal{B}$. Ele é construído a partir de todos os subconjuntos F de X que contêm algum conjunto de $\mathcal{B}$, ou seja:

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq X : \exists B \in \mathcal{B}, B \subseteq F\}. \quad (\text{A.1})$$

Isso significa que qualquer subconjunto de X que contenha um elemento da base de filtro $\mathcal{B}$ também faz parte do filtro $\mathcal{F}$.

Observação A.31. Note que $\mathcal{F}$, definido em (A.1), é um filtro. De fato:

- (i) $\mathcal{F} \neq \emptyset$, pois $\emptyset \neq \mathcal{B}$ e $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$;
- (ii) $\emptyset \notin \mathcal{F}$, pois, caso contrário, deveria existir $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq \emptyset$, o que só ocorreria se $\emptyset \in \mathcal{B}$ - mas isso não ocorre (Definição A.28);
- (iii) $F \in \mathcal{F}$ e $F \subset G \subset X \Rightarrow G \in \mathcal{F}$, pois existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset F \subset G$;
- (iv) $F \in \mathcal{F}$ e $G \in \mathcal{F} \Rightarrow F \cap G \in \mathcal{F}$, pois existem $B_1 \in \mathcal{B}$ e $B_2 \in \mathcal{B}$ tais que $B_1 \subset F$ e $B_2 \subset G$. Como $\mathcal{B}$ é uma base de filtro, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset F \cap G$.

Definição A.32. Se $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ são filtros sobre X , dizemos que $\mathcal{F}_1$ é mais grosso do que $\mathcal{F}_2$ ou que $\mathcal{F}_2$ é mais fino que $\mathcal{F}_1$.

A.1.7 Topologia geral

Topologias

Definição A.33. Uma *topologia* sobre um conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X com as seguintes propriedades:

- (A1) $\emptyset \in \tau$ e $X \in \tau$.
- (A2) Toda união de conjuntos de τ é um conjunto de τ , ou seja, dada uma família arbitrária $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$, com $U_\lambda \in \tau$ para todo $\lambda \in L$, sendo L um conjunto de índices não necessariamente enumerável, tem-se $\bigcup_{\lambda \in L} U_\lambda \in \tau$.
- (A3) Toda interseção finita de conjuntos de τ é um conjunto de τ , ou seja, se $U_1, \dots, U_n \in \tau$, então $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau$.

Um *espaço topológico* é um conjunto X munido de uma topologia τ sobre X . Neste caso, os elementos de X são chamados de *pontos* e os elementos de τ são chamados de *conjuntos abertos*.

Exemplo A.34. (a) Dado um conjunto X arbitrário, a coleção $\tau = \{\emptyset, X\}$ é uma topologia sobre X , dita a *topologia caótica* sobre X .

(b) Dado um conjunto X arbitrário, a coleção $\tau = \mathcal{P}(X)$ de todas as partes de X é uma topologia sobre X , dita a *topologia discreta* sobre X .

(c) Relembremos que uma *métrica* sobre um conjunto X é uma função $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ que satisfaz as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in X$:

- (M1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- (M2) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (M3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Um *espaço métrico* é um conjunto X munido de uma métrica d sobre X . Neste caso, definimos a *bola aberta de centro a e raio r* ($a \in X$ e $r > 0$) por

$$B_X(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}.$$

A coleção τ formada por todas as uniões arbitrárias de bolas abertas em X é uma topologia sobre X , dita a *topologia induzida pela métrica d* .

Exemplo A.35. Sejam (X, τ_1) e (Y, τ_2) espaços topológicos. Definimos

$$\tau_1 \times \tau_2 = \{U \times V : U \in \tau_1, V \in \tau_2\}.$$

Então $(X \times Y, \tau_1 \times \tau_2)$ é um espaço topológico.

De fato, $\tau_1 \times \tau_2$ é uma coleção de subconjuntos de $X \times Y$ que satisfaz os axiomas de topologia, conforme verificaremos abaixo.

(A1) Como $\emptyset \in \tau_1$ e $\emptyset \in \tau_2$, então $\emptyset = \emptyset \times \emptyset \in \tau_1 \times \tau_2$. Além disso, como $X \in \tau_1$ e $Y \in \tau_2$, temos $X \times Y \in \tau_1 \times \tau_2$.

(A2) Dada uma família arbitrária $(U_\lambda \times V_\mu)_{(\lambda, \mu) \in L_1 \times L_2}$ com $U_\lambda \in \tau_1$ e $V_\mu \in \tau_2$, tem-se

$$\bigcup_{(\lambda, \mu) \in L_1 \times L_2} (U_\lambda \times V_\mu) = \bigcup_{\lambda \in L_1} U_\lambda \times \bigcup_{\mu \in L_2} V_\mu \in \tau_1 \times \tau_2,$$

já que uniões arbitrárias de abertos continuam em τ_1 e τ_2 .

(A3) Se $U_1 \times V_1, \dots, U_n \times V_n \in \tau_1 \times \tau_2$, então

$$\bigcap_{i=1}^n (U_i \times V_i) = \left(\bigcap_{i=1}^n U_i \right) \times \left(\bigcap_{i=1}^n V_i \right) \in \tau_1 \times \tau_2,$$

pois τ_1 e τ_2 são topologias, então fechadas por interseções finitas.

Definição A.36. Dizemos que um conjunto τ de subconjuntos de X é *invariante por interseções finitas e uniões arbitrárias* se toda interseção finita de elementos de τ pertence a τ e toda união (possivelmente infinita) de elementos de τ também pertence a τ .

No que segue, X denotará um conjunto não vazio.

Definição A.37. Um conjunto $F \in \tau$ é chamado de *aberto* de X segundo a topologia τ de X e o complementar desse conjunto em X , $G = X \setminus F$, é chamado de *fechado* de X segundo a topologia τ de X .

Definição A.38. Dado $A \subset X$, o conjunto aberto $\text{int } A$ que é a união de todos os subconjuntos abertos de X contidos em A , é chamado de *interior* de A . O conjunto fechado $\bar{A}$, formado pela interseção de todos os conjuntos fechados de X que contêm A , é chamado de *fecho* de A .

Definição A.39. Um elemento $x \in \text{int } A$ é denominado *ponto interior* de A e um elemento $x \in \bar{A}$ é denominado *ponto aderente* de A .

Definição A.40. Seja X um espaço topológico. Um subconjunto $U \subset X$ é uma *vizinhança de x* ou *x -vizinhança* se $x \in \text{int } U$, e é uma *vizinhança de A* , com $\emptyset \neq A \subset X$, se $x \in A$ implica que $x \in \text{int } U(A \subset \text{int } U)$.

Definição A.41. Sejam X um conjunto e A um subconjunto de X . Um ponto $x \in X$ é chamado ponto de acumulação de A se toda vizinhança V de x contém algum ponto de A diferente de x .

Definição A.42. Se A e B são subconjuntos de X , B é denso em relação a A se $A \subset \bar{B}$.

Definição A.43. Diz-se que um subconjunto A de um espaço topológico X é localmente fechado em um ponto $x \in A$ se existir uma vizinhança V de x em X tal que $A \cap V$ é um subconjunto fechado do subespaço V . A é dito ser localmente fechado se é localmente fechado em cada $x \in A$.

Definição A.44. Se X for um conjunto e τ_1, τ_2 forem topologias sobre X , diremos que τ_2 é mais fina do que τ_1 (ou τ_1 é mais grossa do que τ_2), se cada conjunto aberto de X segundo a topologia τ_1 for um conjunto aberto de X segundo a topologia τ_2 (equivalentemente, se cada conjunto fechado de X segundo a topologia τ_1 for um conjunto fechado de X segundo a topologia τ_2).

Continuidade e convergência

Definição A.45. Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$. Dizemos que f é *contínua em $x \in X$* se, para toda vizinhança V de $f(x)$ em Y , o conjunto $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de x em X . Dizemos que f é *contínua* se o for em cada ponto $x \in X$; de modo equivalente, se $f^{-1}(G)$ for aberto em X para todo aberto $G \subset Y$.

Proposição A.46. Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ são funções contínuas entre espaços topológicos, então a composição $g \circ f : X \rightarrow Z$ também é contínua.

Demonstração. Seja $x \in X$ e V uma vizinhança de $g(f(x))$ em Z . Como g é contínua em $f(x)$, $g^{-1}(V)$ é uma vizinhança de $f(x)$ em Y . Como f é contínua em x , segue que

$$(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$$

é uma vizinhança de x em X . Portanto, $g \circ f$ é contínua em cada $x \in X$, e assim é contínua. $\square$

Definição A.47. Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação. Dizemos que f é uma *aplicação aberta* se, para todo aberto $G \subset X$, temos $f(G)$ aberto em $f(X)$ (com a topologia de Y).

Definição A.48. Uma bijeção $f : X \rightarrow Y$ entre espaços topológicos é um *homeomorfismo* se f for contínua e aberta e sua inversa f^{-1} for contínua. Equivalentemente, f é um homeomorfismo se $f(A)$ é aberto em Y se, e somente se, A é aberto em X .

Proposição A.49. *Uma bijeção $f : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo se, e somente se, f é contínua e aberta.*

Demonstração. Suponha que f seja um homeomorfismo. Pela Definição A.48, segue que f é contínua, além de ser uma aplicação aberta.

Reciprocamente, suponha que f seja uma bijeção contínua e aberta. Seja $O \subset Y$ um aberto. Como f é bijetora, se $A = f^{-1}(O) \subset X$ então $f(A) = O$. Como f é contínua, A é aberto em X ; como f é aberta, $O = f(A)$ é aberto em Y . Logo, f^{-1} é contínua. Assim, f é um homeomorfismo. $\square$

Proposição A.50. *Se (X, τ_1) , (Y, τ_2) são espaços topológicos e $\tau_1 \times \tau_2$ é a topologia produto sobre $X \times Y$, então as projeções*

$$p_1 : X \times Y \rightarrow X, \quad p_1(x, y) = x, \quad \text{e} \quad p_2 : X \times Y \rightarrow Y, \quad p_2(x, y) = y$$

são contínuas.

Demonstração. Seja $U \in \tau_1$. Então $p_1^{-1}(U) = U \times Y \in \tau_1 \times \tau_2$, pois $Y \in \tau_2$. Logo, p_1 é contínua. Analogamente, se $V \in \tau_2$, então $p_2^{-1}(V) = X \times V \in \tau_1 \times \tau_2$, pois $X \in \tau_1$. Portanto, p_2 também é contínua. $\square$

Proposição A.51. *Sejam L, M, E e U espaços topológicos com suas respectivas topologias. Se $f_1 : L \rightarrow M$ e $f_2 : E \rightarrow U$ são contínuas, então a aplicação $\varphi = f_1 \times f_2 : L \times E \rightarrow M \times U$, definida por $\varphi(x, y) = (f_1(x), f_2(y))$, é contínua.*

Demonstração. Como $f_1 = p_1 \circ \varphi$ e $f_2 = p_2 \circ \varphi$, onde p_1 e p_2 são as projeções de $M \times U$, temos que f_1 e f_2 são contínuas como composições de funções contínuas.

Para mostrar que φ é contínua, seja $A \times B$ um aberto básico em $M \times U$. Então:

$$\varphi^{-1}(A \times B) = f_1^{-1}(A) \times f_2^{-1}(B),$$

que é aberto em $L \times E$ porque f_1 e f_2 são contínuas. $\square$

Definição A.52. Um filtro $\mathcal{F}$ sobre um espaço topológico X é dito *convergente a $x \in X$* se $\mathcal{F}$ é mais fino do que o filtro de vizinhanças de x .

Definição A.53. Uma sequência (ou mais geralmente, uma família dirigida) em X é dita *convergente a $x \in X$* se o filtro de seção associado converge para x . Em outras palavras, uma sequência $\{x_n\}$ converge para x se o filtro gerado pelos conjuntos dos termos da sequência a partir de certo índice (isto é, os conjuntos $\{x_n : n \geq n_0\}$) contém todas as vizinhanças de x .

Definição A.54. Seja X um conjunto, $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma família de espaços topológicos e $\{f_\alpha : X \rightarrow X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma família de funções. A *topologia projetiva* (ou topologia núcleo) sobre X é a topologia mais grossa que torna cada f_α contínua.

Definição A.55. Seja X um conjunto, $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma família de espaços topológicos e $\{g_\alpha : X_\alpha \rightarrow X\}_{\alpha \in A}$ uma família de funções. A *topologia indutiva* sobre X é a topologia mais fina que torna cada g_α contínua.

Definição A.56. Se $A = \{1\}$ na Definição A.54 e $f_1 : X \rightarrow X_1$, a topologia projetiva sobre X com relação a (X_1, f_1) é chamada de *imagem inversa* da topologia de X_1 por f_1 .

Definição A.57. Se $A = \{1\}$ na Definição A.55 e $g_1 : X_1 \rightarrow X$, a topologia indutiva sobre X com relação a (X_1, g_1) é chamada de *imagem direta* da topologia de X_1 por g_1 .

A.1.8 Subespaços, produtos, quocientes

Definição A.58. Se (X, τ) é um espaço topológico e $A \subset X$ é um subconjunto, a *topologia induzida* em A (ou *topologia subespaço*) é a topologia τ_A composta pelos conjuntos da forma $U \cap A$, onde $U \in \tau$. Mais especificamente, $\tau_A = \{U \cap A : U \in \tau\}$.

O conjunto A munido dessa topologia é chamado de *subespaço topológico* de X .

Definição A.59. Se (X, τ) é um espaço topológico, $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência sobre X e $g: X \rightarrow X/\mathcal{R}$ é a aplicação canônica, então a imagem direta $\hat{\tau} = \{U \subset X/\mathcal{R} : g^{-1}(U) \in \tau\}$ é chamada de *topologia quociente* de τ .

Observação A.60. Note que se $g: X \rightarrow X/\mathcal{R}$ é a aplicação canônica, então $\hat{\tau}$ realmente define uma topologia sobre $X/\mathcal{R}$.

De fato,

(A1) Como $g^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau$, segue que $\emptyset \in \hat{\tau}$. Como g é sobrejetora, temos $g^{-1}(X/\mathcal{R}) = X \in \tau$, logo $X/\mathcal{R} \in \hat{\tau}$.

(A2) Seja $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \hat{\tau}$. Então, para todo λ , $g^{-1}(U_\lambda) \in \tau$, e

$$g^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} g^{-1}(U_\lambda) \in \tau,$$

logo, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \hat{\tau}$.

(A3) Se $V_1, \dots, V_n \in \hat{\tau}$, então $g^{-1}(V_i) \in \tau$ para todo i . Assim,

$$g^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^n V_i\right) = \bigcap_{i=1}^n g^{-1}(V_i) \in \tau$$

e, portanto, $\bigcap_{i=1}^n V_i \in \hat{\tau}$.

Definição A.61. O espaço topológico $(X/\mathcal{R}, \hat{\tau})$ é chamado de *quociente topológico* de X por $\mathcal{R}$.

Definição A.62. Seja $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ uma família de espaços topológicos. O produto cartesiano $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ é munido da *topologia produto*, que é a topologia projetiva induzida pelas projeções $f_\alpha: X \rightarrow X_\alpha$ definidas por $f_\alpha((x_\beta)_{\beta \in A}) = x_\alpha$.

Observação A.63. A topologia produto sobre X é a topologia mais grossa para a qual cada projeção f_α é contínua. A coleção de conjuntos do tipo $\prod_{\alpha \in A} U_\alpha$, onde U_α é aberto em X_α e $U_\alpha = X_\alpha$ para quase todo α , forma uma base para essa topologia.

Proposição A.64. Sejam X e Y espaços topológicos e $f: X \rightarrow Y$ uma função contínua. Se $x \in \overline{A}$, onde $A \subset X$, então $f(x) \in \overline{f(A)}$.

Demonstração. Seja V uma vizinhança de $f(x)$ em Y . Como f é contínua em x , então $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de x em X . Como $x \in \overline{A}$, temos $f^{-1}(V) \cap A \neq \emptyset$, ou seja, existe $a \in A$ tal que $f(a) \in V$. Portanto, $V \cap f(A) \neq \emptyset$, o que implica $f(x) \in \overline{f(A)}$. $\square$

Proposição A.65. No espaço produto $\prod_{i \in I} X_i$, o fecho de um produto de subconjuntos $\prod_{i \in I} A_i$ é igual ao produto dos fechos $\prod_{i \in I} \overline{A_i}$.

Demonstração. Seja $a = (a_i) \in \overline{\prod_{i \in I} A_i}$. Como a projeção $p_i: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$ é contínua, segue da Proposição A.64 que $a_i = p_i(a) \in \overline{A_i}$ para todo $i \in I$. Logo, $a \in \prod_{i \in I} \overline{A_i}$.

Reciprocamente, seja $b = (b_i) \in \prod_{i \in I} \overline{A_i}$ e $\prod_{i \in I} O_i$ um aberto básico contendo b . Como $b_i \in \overline{A_i}$, existe $x_i \in A_i \cap O_i$ para cada $i \in I$. Logo, o ponto $(x_i) \in \prod_{i \in I} A_i$ está contido no aberto $\prod_{i \in I} O_i$, o que mostra que b está no fecho de $\prod_{i \in I} A_i$. $\square$

Corolário A.66. Um produto $\prod_{i \in I} A_i$ de subconjuntos não vazios é fechado em $\prod_{i \in I} X_i$ se, e somente se, cada A_i é fechado em X_i .

Definição A.67. Sejam X e Y espaços topológicos e $f: X \rightarrow Y$ uma função. Dizemos que f é *fechada* (ou uma *aplicação fechada*) se o gráfico de f ,

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\},$$

é um subconjunto fechado de $X \times Y$ (com a topologia produto).

Proposição A.68. Sejam X e Y espaços topológicos e $f: X \rightarrow Y$ uma função. Então f é fechada se, e somente se, para todo subconjunto fechado $A \subset X$, a imagem $f(A)$ é fechada em Y .

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponha que f seja fechada e $A \subset X$ seja fechado. Considere $G(f|_A) = \{(x, f(x)) : x \in A\} = G(f) \cap (A \times Y)$. Como $G(f)$ e $A \times Y$ são fechados em $X \times Y$, sua interseção $G(f|_A)$ também é fechada. Como a projeção $\pi_Y: X \times Y \rightarrow Y$ é contínua, temos que $\pi_Y(G(f|_A)) = f(A)$ é fechado.

$(\Leftarrow)$ Suponha agora que para todo conjunto fechado $A \subset X$, tenhamos $f(A)$ fechado em Y . Tomando $A = X$, temos que $f(X)$ é fechado. Assim, o gráfico $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$ é fechado como imagem de X via a função contínua $x \mapsto (x, f(x))$. $\square$

A.1.9 Axiomas de separação

Definição A.69. Um espaço topológico X é chamado de *espaço de Hausdorff* (ou simplesmente *separado*) se, para quaisquer dois pontos distintos $x, y \in X$, existem vizinhanças abertas U de x e V de y tais que $U \cap V = \emptyset$.

Observação A.70. Em um espaço de Hausdorff, todo filtro que converge possui um *único ponto limite*. Isto é, se $\mathcal{F}$ é um filtro que converge em X , então existe um único ponto $x \in X$ tal que $\mathcal{F}$ converge para x .

Demonstração. Suponha, por contradição, que um filtro $\mathcal{F}$ convirja para dois pontos distintos $x, y \in X$. Como X é de Hausdorff, existem vizinhanças abertas U de x e V de y tais que $U \cap V = \emptyset$.

Como $\mathcal{F}$ converge para x , temos $U \in \mathcal{F}$; analogamente, como $\mathcal{F}$ converge para y , então $V \in \mathcal{F}$. Pela propriedade de filtros, a interseção $U \cap V$ também pertence a $\mathcal{F}$. Isso implicaria que $\emptyset \in \mathcal{F}$, o que é impossível, pois nenhum filtro contém o conjunto vazio. Portanto, a convergência só pode ocorrer para um único ponto. $\square$

Definição A.71. Um espaço topológico X é dito *regular* se ele é de Hausdorff e, para todo ponto $x \in X$, existe uma base de vizinhanças composta por conjuntos fechados. Em outras palavras, cada ponto possui uma base de vizinhanças fechadas.

Definição A.72. Um espaço topológico X de Hausdorff é chamado *completamente regular* se, dado qualquer subconjunto fechado $A \subset X$ e qualquer ponto $b \in X \setminus A$, existe uma função contínua $f: X \rightarrow [0, 1]$ tal que

$$f(b) = 1 \quad \text{e} \quad f(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in A.$$

A.1.10 Compacidade e espaços pré-compactos

Os conceitos e resultados expostos nesta subseção podem ser encontrados com suas respectivas demonstrações em livros clássicos de Topologia Geral, como [15].

Definição A.73. Seja X um espaço topológico. Uma família $A = \{A_i\} (i \in I)$ é uma *cobertura aberta* de X se cada $A_i (i \in I)$ é aberto em X e $X \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$.

Definição A.74. Seja X um espaço topológico. Dada uma cobertura aberta $A = \{A_i\} (i \in I)$ de X , dizemos que a família $S = \{A_j\} (j \in J)$, em que J é um subconjunto finito de I é uma *subcobertura aberta finita* de X se $X \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j$.

Definição A.75. Seja X um espaço topológico de Hausdorff. Dizemos que X é *compacto* se toda cobertura aberta de X admite uma subcobertura finita.

Proposição A.76. *Todo subespaço fechado de um espaço compacto também é compacto.*

Proposição A.77 (Teorema de Tychonoff). *O produto topológico de qualquer família de espaços compactos é compacto.*

Proposição A.78. *Se X é compacto, Y é um espaço de Hausdorff e $f: X \rightarrow Y$ é contínua, então $f(X)$ é um subespaço compacto de Y .*

Proposição A.79. *Se $f: X \rightarrow Y$ é uma bijeção contínua de um espaço compacto X em um espaço de Hausdorff Y , então f é um homeomorfismo.*

Observação A.80. Se (X, τ_1) é um espaço compacto e τ_2 é uma topologia de Hausdorff sobre X tal que $\tau_2 \subseteq \tau_1$, então necessariamente $\tau_1 = \tau_2$.

Definição A.81. Um espaço topológico de Hausdorff X é dito *localmente compacto* se, para cada ponto $x \in X$, existe uma vizinhança compacta de x , isto é, um conjunto compacto que contém x em seu interior.

A.2 Espaços vetoriais topológicos

Antes de introduzirmos a definição de espaço vetorial topológico, revisitaremos os conceitos de espaço vetorial e de corpo valorado.

Definição A.82. Seja $\mathbb{F}$ um corpo (não necessariamente comutativo) e $\mathbb{V}$ um conjunto. Dizemos que $\mathbb{V}$ é um *espaço vetorial à esquerda* sobre $\mathbb{F}$ se estão definidas:

- uma operação de adição $+: \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, denotada por $(x, y) \mapsto x + y$,
- uma multiplicação escalar $\cdot: \mathbb{F} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, denotada por $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$,

e se essas operações satisfazem os seguintes axiomas para todos $x, y, z \in \mathbb{V}$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$:

- (1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (associatividade da adição);
- (2) $x + y = y + x$ (comutatividade da adição);
- (3) Existe um elemento $0 \in \mathbb{V}$ tal que $x + 0 = x$ para todo $x \in \mathbb{V}$. (elemento neutro);
- (4) Para cada $x \in \mathbb{V}$, existe $z \in \mathbb{V}$ tal que $x + z = 0$. (inverso aditivo);

- (5) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (distributividade escalar sobre a adição vetorial);
- (6) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (distributividade escalar sobre a adição de escalares);
- (7) $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ (associatividade da multiplicação escalar);
- (8) $1x = x$, onde $1 \in \mathbb{F}$ é o elemento neutro multiplicativo. (identidade escalar).

Observação A.83. O elemento $0 \in \mathbb{V}$ do Axioma (3) é único e é chamado de *vetor nulo* de $\mathbb{V}$. Não faremos distinção notacional entre os elementos neutros de $\mathbb{F}$ e $\mathbb{V}$.

Observação A.84. Para qualquer $x \in \mathbb{V}$, o elemento z do Axioma (4) também é único, sendo usualmente denotado por $-x$. É comum escrever $x - y$ como abreviação de $x + (-y)$, sendo $-x = (-1)x$.

Definição A.85. Se os axiomas (1)–(4) permanecem válidos, mas a multiplicação escalar é definida como $(\lambda, x) \mapsto x\lambda$, e os axiomas (5)–(8) são ajustados em conformidade, então $\mathbb{V}$ é chamado de *espaço vetorial à direita* sobre $\mathbb{F}$.

Observação A.86. Salvo menção explícita em contrário, adotaremos o convenção de que um *espaço vetorial sobre um corpo* $\mathbb{F}$ refere-se a um espaço vetorial à esquerda.

Definição A.87. Um corpo valorado $\mathbb{F}$ é um corpo munido de uma função chamada *valor absoluto* ou *valoração*, que mede o “tamanho” ou “magnitude” dos elementos de $\mathbb{F}$. À propósito, uma *valoração* sobre um corpo $\mathbb{F}$ é uma função:

$$|\cdot|: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

que satisfaz as seguintes propriedades para todos $x, y \in \mathbb{F}$:

- (i) Não-negatividade: $|x| \geq 0$ e $|x| = 0$ se e somente se $x = 0$.
- (ii) Multiplicatividade: $|xy| = |x||y|$.
- (iii) Desigualdade triangular: $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Se, além disso, a valoração satisfizer a desigualdade ultramétrica:

$$|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$$

para todos $x, y \in \mathbb{F}$, dizemos que $|\cdot|$ é uma *valoração ultramétrica*.

Exemplo A.88. O corpo dos números reais $\mathbb{R}$ e o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$, com a valoração usual, são exemplos de corpos valorados.

Definição A.89. Dizemos que um corpo valorado $(\mathbb{F}, |\cdot|)$ é *não discreto* se sua valoração não assume apenas um conjunto discreto de valores distintos.

Definição A.90 (Espaço Vetorial Topológico). Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo valorado $\mathbb{F}$ não discreto e uma topologia τ em $\mathbb{V}$. Dizemos que o par $(\mathbb{V}, \tau)$ é um *espaço vetorial topológico* sobre $\mathbb{F}$ se os seguintes axiomas são satisfeitos:

- (LT1) A aplicação $(x, y) \mapsto x + y$ é contínua de $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$ em $\mathbb{V}$;
- (LT2) A aplicação $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ é contínua de $\mathbb{F} \times \mathbb{V}$ em $\mathbb{V}$.

Observação A.91. Aqui, $\mathbb{V}$ é considerado com a topologia τ , $\mathbb{F}$ com a topologia induzida pelo seu valor absoluto, e os produtos $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$ e $\mathbb{F} \times \mathbb{V}$ são dotados das topologias produto.

Exemplo A.92. São exemplos de espaços vetoriais topológicos:

- (i) o espaço $\mathbb{R}^n$ com a topologia usual herdada da métrica euclidiana;
- (ii) o espaço $C([0, 1], \mathbb{R})$ das funções contínuas de $[0, 1]$ em $\mathbb{R}$, munido da topologia da convergência uniforme.
- (iii) Todo espaço normado (em particular, os espaços de Banach e de Hilbert), pois a topologia induzida pela norma torna a adição e a multiplicação escalar contínuas.

Definição A.93. Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo valorado $\mathbb{K}$, com $\mathbb{K}$ não discreto. Diz-se que um subconjunto $U \subset \mathbb{V}$ é *radial* se, para todo subconjunto finito $F \subset \mathbb{V}$, existe $\lambda_0 \in \mathbb{K}$, com $|\lambda_0| > 0$, tal que

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \geq |\lambda_0| \Rightarrow F \subset \lambda U.$$

Em outras palavras, U é radial se absorve todo subconjunto finito de $\mathbb{V}$, uniformemente a partir de algum valor mínimo de escala.

Exemplo A.94. Considere o espaço vetorial $\mathbb{V} = \mathbb{K}^n$, onde $\mathbb{K}$ é um corpo valorado não discreto, como o corpo dos números reais $\mathbb{R}$.

Seja $U = B = \{x \in \mathbb{K}^n : \|x\| < 1\}$, a bola aberta de raio 1 centrada na origem, com respeito a uma norma compatível com a valoração de $\mathbb{K}$. Mostraremos que U é radial.

Seja $F \subset \mathbb{K}^n$ um subconjunto finito arbitrário. Então, existe $M > 0$ tal que

$$\|x\| \leq M \quad \text{para todo } x \in F.$$

Seja $\lambda \in \mathbb{K}$ com $|\lambda| > M$. Então, para todo $x \in F$, temos

$$\left\| \frac{x}{\lambda} \right\| = \frac{\|x\|}{|\lambda|} \leq \frac{M}{|\lambda|} < 1.$$

Escolhendo $|\lambda| > M$ garantimos que $\|x/\lambda\| < 1$, ou seja, $x/\lambda \in U$. Isso implica que $x \in \lambda U$ e, portanto,

$$F \subset \lambda U.$$

Sendo assim, para $F \subset \mathbb{K}^n$ finito, existe $\lambda_0 = M$ tal que $F \subset \lambda U$ sempre que $|\lambda| \geq |\lambda_0|$. Logo, U é radial.

Definição A.95. Sejam $\mathbb{V}_1$ e $\mathbb{V}_2$ dois espaços vetoriais topológicos sobre o mesmo corpo $\mathbb{F}$. Se uma aplicação linear $T: \mathbb{V}_1 \rightarrow \mathbb{V}_2$ injetora for um homeomorfismo, então T será um isomorfismo topológico, e diremos que $\mathbb{V}_1$ e $\mathbb{V}_2$ são topologicamente isomorfos.

Definição A.96. Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial topológico sobre um corpo valorado $\mathbb{F}$. Dizemos que um subconjunto $A \subseteq \mathbb{V}$ é *balanceado* se, para todo escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ com $|\lambda| \leq 1$, tem-se

$$\lambda A \subseteq A.$$

Exemplo A.97. (a) No espaço $\mathbb{R}^n$, qualquer bola centrada na origem (em qualquer norma) é um conjunto balanceado. Por exemplo, o conjunto

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$$

é balanceado, pois multiplicar qualquer vetor por um escalar de módulo menor ou igual a 1 resulta em um vetor ainda dentro da bola.

(b) Em $\mathbb{C}$, o disco unitário aberto

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

é um conjunto balanceado do espaço vetorial topológico $\mathbb{C}$.

(c) Qualquer subespaço vetorial $W \subseteq \mathbb{V}$ é automaticamente balanceado, já que é fechado sob multiplicação escalar.

(d) Por outro lado, o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < \|x\| < 2\}$ não é balanceado, pois contém vetores de norma entre 1 e 2, mas ao multiplicar por escalares com módulo menor que 1, produz vetores com norma menor que 1, os quais não pertencem a A .

A partir das definições anteriores, obtemos as propriedades que serão apresentadas nas Proposições A.99 e A.101. Antes, provaremos um resultado auxiliar para a prova de uma das propriedades.

Lema A.98. *Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial topológico sobre o corpo $\mathbb{F}$. Se A e B são subconjuntos de $\mathbb{V}$, para cada vizinhança U de 0, temos $(x_0 - U) \cap (A + B) = \emptyset$ se, e somente se, $(B + U) \cap (x_0 - A) = \emptyset$.*

Demonstração. De fato, suponha que $x \in (x_0 - U) \cap (A + B)$. Então, existem $u \in U$, $a \in A$ e $b \in B$ tais que

$$x = x_0 - u = a + b.$$

Reescrevendo a igualdade, obtemos

$$b + u = x_0 - a.$$

Como $b \in B$ e $u \in U$, segue que $b + u \in B + U$; além disso, $x_0 - a \in x_0 - A$. Portanto,

$$b + u \in (B + U) \cap (x_0 - A).$$

Reciprocamente, suponha que $y \in (B + U) \cap (x_0 - A)$. Então, existem $b \in B$, $u \in U$ e $a \in A$ tais que

$$y = b + u = x_0 - a.$$

Da igualdade $x_0 - a = b + u$, segue que

$$x_0 - u = a + b \in A + B,$$

e como $u \in U$, temos $x_0 - u \in x_0 - U$. Assim,

$$x_0 - u \in (x_0 - U) \cap (A + B),$$

completando a prova. □

Proposição A.99. *Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial topológico sobre o corpo $\mathbb{F}$.*

a) *Para cada $x_0 \in \mathbb{V}$ e cada $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ não nulo, a transformação dada por $T(x) = \lambda_0 x + x_0$ é um homeomorfismo de $\mathbb{V}$ em $\mathbb{V}$.*

b) *Para todo subconjunto $A \subseteq \mathbb{V}$ e toda base $\mathcal{U}$ do filtro das vizinhanças de $0 \in \mathbb{V}$, o fecho $\overline{A}$ é dado por*

$$\overline{A} = \bigcap \{A + U : U \in \mathcal{U}\}.$$

c) *Se A é um subconjunto aberto de $\mathbb{V}$ e B é um subconjunto arbitrário de $\mathbb{V}$, então $A + B$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{V}$.*

d) *Se A e B são subconjuntos fechados de $\mathbb{V}$ tais que todo filtro em A possui um ponto aderente (em particular, se A é compacto), então $A + B$ é fechado.*

e) *Se A é um subconjunto balanceado de $\mathbb{V}$, então seu fecho $\overline{A}$ é balanceado. Além disso, o interior $\text{Int}(A)$ é balanceado sempre que $0 \in \text{Int}(A)$.*

Demonstração. a) A transformação $T(x) = \lambda_0 x + x_0$ é uma composição de transformações contínuas: a multiplicação por escalar $x \mapsto \lambda_0 x$ (contínua) e a translação $x \mapsto x + x_0$ (também contínua). A inversa é dada por

$$T^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda_0}(x - x_0),$$

que também é contínua. Logo, T é um homeomorfismo.

b) Seja $\mathcal{U}$ uma base do filtro das vizinhanças de $0 \in \mathbb{V}$. Definimos

$$B := \bigcap_{U \in \mathcal{U}} (A + U).$$

Queremos provar que $\overline{A} = B$.

(I) Prova de que $B \subseteq \overline{A}$:

Tomemos $x \in B$ arbitrariamente. Então, para todo $U \in \mathcal{U}$, tem-se $x \in A + U$, ou seja, existem $a_U \in A$ e $u_U \in U$ tais que $x = a_U + u_U$, ou equivalentemente, $a_U = x - u_U$.

Agora, seja V uma vizinhança arbitrária de x . Como a aplicação $y \mapsto x - y$ é contínua, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x - U \subseteq V$. Como $x = a_U + u_U$, segue que

$$a_U = x - u_U \in x - U \subseteq V,$$

e como $a_U \in A$, temos $V \cap A \neq \emptyset$. Sendo V uma vizinhança arbitrária de x , podemos afirmar que $x \in \overline{A}$. Finalmente, a arbitrariedade de $x \in B$ nos permite concluir que $B \subseteq \overline{A}$.

(II) Prova de que $\overline{A} \subseteq B$:

Tomemos, agora, $x \in \overline{A}$ arbitrariamente. Então, por definição do fecho, toda vizinhança de x intersecta A .

Seja $U \in \mathcal{U}$. Como U é uma vizinhança de 0 , o conjunto $x - U := \{x - u : u \in U\}$ é uma vizinhança de x . Como $x \in \overline{A}$, existe $a \in A$ tal que $a \in x - U$, ou seja, $x \in a + U \subset A + U$.

Como isso vale para todo $U \in \mathcal{U}$, temos $x \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}} (A + U) = B$. Sendo $x \in \overline{A}$ arbitrário, temos $\overline{A} \subseteq B$.

As inclusões provadas em (I) e (II) certificam a aprova da igualdade desejada.

- c) Sejam $A \subseteq \mathbb{V}$ um conjunto aberto e $B \subseteq \mathbb{V}$ um conjunto arbitrário. Desejamos provar que a soma $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ é um conjunto aberto.

Para cada $b \in B$, consideremos a translação $T_b: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ dada por

$$T_b(x) = x + b.$$

Como $\mathbb{V}$ é um espaço vetorial topológico, a aplicação T_b é um homeomorfismo. Em particular, a imagem de um aberto por T_b é aberta. Logo, para cada $b \in B$, o conjunto $A + b := T_b(A)$ é aberto.

Assim, a soma dos conjuntos A e B pode ser expressa como a união:

$$A + B = \bigcup_{b \in B} (A + b),$$

isto é, a união dos abertos $A + b$, com b variando em B . Como união arbitrária de conjuntos abertos é um conjunto aberto, concluímos que $A + B$ é um conjunto aberto.

- d) Seja $x_0 \notin A + B$. Vamos mostrar que existe uma vizinhança de zero U tal que

$$(x_0 - U) \cap (A + B) = \emptyset, \quad (\text{A.2})$$

ou, equivalentemente, pelo Lema A.98,

$$(B + U) \cap (x_0 - A) = \emptyset.$$

É importante observar que $x_0 - U$ é uma vizinhança de x_0 pelo item a). Portanto, de acordo com (A.2), vamos mostrar que existe uma vizinhança de x_0 que não intersecta $A + B$, o que nos permitirá concluir que $x_0 \notin \overline{A + B}$ e, consequentemente, $A + B = \overline{A + B}$.

Suponha, por absurdo, que tal vizinhança U não exista. Então, para toda vizinhança U de 0, temos

$$(B + U) \cap (x_0 - A) \neq \emptyset.$$

Nesse caso, a família de conjuntos $(B + U) \cap (x_0 - A)$, com U percorrendo uma base de vizinhanças de 0, constitui uma base filtro sobre $x_0 - A$.

Pela hipótese, como A é tal que todo filtro nele tem ponto aderente, segue que essa base filtro tem um ponto aderente $z_0 \in x_0 - A$. Como cada conjunto da base está contido em $B + U$, temos

$$x_0 - A \subseteq \overline{B + U} \subseteq \bigcap_{U \in \mathcal{U}} \overline{B + U},$$

e como $\overline{B + U} \subseteq B + U + U$ (por propriedade de fecho e adição contínua), temos

$$x_0 - A \subseteq \bigcap_{U \in \mathcal{U}} (B + U + U).$$

Sendo $\mathbb{V}$ um espaço vetorial topológico, nele a adição é contínua e, portanto, a família $\{U + U\}_{U \in \mathcal{U}}$ também forma uma base de vizinhanças de zero. Assim, o ponto aderente z_0 pertence a todos os fechos $\overline{B + U}$, e consequentemente

$$z_0 \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}} \overline{B + U} = \overline{B}.$$

Logo, $z_0 \in \overline{B} = B$, pois B é fechado. Mas, como $z_0 \in x_0 - A$, segue que $x_0 = z_0 + a$ para algum $a \in A$, mostrando que $x_0 \in A + B$, o que contradiz a hipótese inicial de que $x_0 \notin A + B$.

Assim, tal vizinhança U deve existir, concluindo que $A + B$ é fechado em L .

e) Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial topológico sobre o corpo $\mathbb{F}$.

Parte 1: *Se $A \subseteq \mathbb{V}$ é balanceado, então seu fecho $\overline{A}$ também é balanceado.*

Seja $\lambda \in \mathbb{F}$ tal que $|\lambda| \leq 1$. Como A é balanceado, tem-se $\lambda A \subseteq A$. Como a multiplicação por escalar

$$T_\lambda: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}, \quad x \mapsto \lambda x$$

é contínua, a imagem do fecho de um conjunto está contida no fecho de sua imagem, isto é,

$$\lambda \overline{A} = T_\lambda(\overline{A}) \subseteq \overline{T_\lambda(A)} = \overline{\lambda A}.$$

Como $\lambda A \subseteq A$, então $\overline{\lambda A} \subseteq \overline{A}$. Assim, concluímos que

$$\lambda \overline{A} \subseteq \overline{\lambda A} \subseteq \overline{A},$$

de onde segue que $\overline{A}$ é balanceado.

Parte 2: *Se $0 \in \text{Int}(A)$, então $\text{Int}(A)$ é balanceado.*

Suponha que $0 \in \text{Int}(A)$. Como $\mathbb{V}$ é um espaço vetorial topológico, existe uma vizinhança U de 0 tal que U é aberta, balanceada e satisfaz $U \subseteq A$ (isto é uma propriedade padrão da base de vizinhanças da origem). Em particular, $U \subseteq \text{Int}(A)$.

Seja $\lambda \in \mathbb{F}$ com $|\lambda| \leq 1$. Como U é balanceada, temos $\lambda U \subseteq U \subseteq \text{Int}(A)$. Além disso, como a multiplicação por escalar é um homeomorfismo, $\lambda \text{Int}(A)$ é aberto.

Como $\lambda U \subseteq \lambda \text{Int}(A) \cap \text{Int}(A)$ e $\lambda U \neq \emptyset$, segue que a interseção $\lambda \text{Int}(A) \cap \text{Int}(A)$ é um aberto não vazio. Por maximalidade do interior de A , conclui-se que

$$\lambda \text{Int}(A) \subseteq \text{Int}(A),$$

demonstrando que $\text{Int}(A)$ é balanceado.

Com isso, demonstramos ambas as afirmações do item e). □

Definição A.100. Uma topologia τ em um espaço vetorial topológico $\mathbb{V}$ é dita invariante por translações se todas as translações em $\mathbb{V}$ são homeomorfismos.

É interessante observar que tal topologia é completamente determinada pelo filtro da vizinhança de um ponto $x \in \mathbb{V}$ qualquer, em particular, pelo filtro da vizinhança de $0 \in \mathbb{V}$.

Proposição A.101. *Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo valorado não discreto $\mathbb{F}$ e seja τ uma topologia em $\mathbb{V}$. Então, $(\mathbb{V}, \tau)$ é um espaço vetorial topológico se, e somente se, τ é invariante por translações e admite uma base $\mathcal{B}$ de vizinhanças de 0 com as seguintes propriedades:*

- (a) para todo $X \in \mathcal{B}$, existe $Y \in \mathcal{B}$ tal que $Y + Y \subset X$;
- (b) cada $X \in \mathcal{B}$ é balanceado e radial;
- (c) existe $\lambda \in \mathbb{F}$ com $0 < |\lambda| < 1$ tal que, para todo $X \in \mathcal{B}$, temos $\lambda X \in \mathcal{B}$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que $(\mathbb{V}, \tau)$ seja um espaço vetorial topológico. Então, as aplicações

$$(x, y) \mapsto x + y \quad \text{e} \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

são contínuas. Pela continuidade da adição e da multiplicação por escalar, τ é invariante por translações, e existe uma base de vizinhanças de zero composta por conjuntos balanceados e radiais.

Seja W uma vizinhança de 0 em $\mathbb{V}$. Como a multiplicação por escalar é contínua, existe uma vizinhança U de 0 e $\epsilon > 0$ tal que $\lambda U \subset W$ sempre que $|\lambda| \leq \epsilon$. Como $\mathbb{F}$ é um corpo valorado não discreto, o conjunto

$$V := \bigcup_{|\lambda| \leq \epsilon} \lambda U$$

é uma vizinhança de 0, contida em W , e é balanceada e radial.

De fato:

- V é balanceada: para qualquer $\mu \in \mathbb{F}$ com $|\mu| \leq 1$, temos

$$\mu V = \mu \left(\bigcup_{|\lambda| \leq \epsilon} \lambda U \right) = \bigcup_{|\lambda| \leq \epsilon} (\mu \lambda) U \subset \bigcup_{|\eta| \leq \epsilon} \eta U = V,$$

pois $|\mu \lambda| \leq \epsilon$ sempre que $|\lambda| \leq \epsilon$ e $|\mu| \leq 1$.

- V é radial: dado um subconjunto finito $F = \{b_1, \dots, b_n\} \subset \mathbb{V}$, pela continuidade da multiplicação por escalar, existe $\epsilon > 0$ tal que, para cada b_i , existe uma vizinhança U_{b_i} de b_i com

$$\eta U_{b_i} \subset V \quad \text{sempre que } |\eta| \leq \epsilon.$$

Definindo $\lambda_0 := 1/\epsilon > 0$, então, para todo $\lambda \in \mathbb{F}$ com $|\lambda| \geq \lambda_0$, temos $U_{b_i} \subset \lambda V$, logo

$$F \subset \bigcup_{i=1}^n U_{b_i} \subset \lambda V.$$

Assim, V é radial, pois absorve todo subconjunto finito.

Portanto, o conjunto $\mathcal{B}$ de todas as vizinhanças balanceadas e radiais de 0 forma uma base de vizinhanças de 0 que satisfaz (a), (b) e (c). A propriedade (a) decorre da continuidade da adição; (b), da construção de $\mathcal{B}$; e (c) segue da continuidade da multiplicação por escalar e da existência de escalares com módulo arbitrariamente pequeno em $\mathbb{F}$.

($\Leftarrow$) Suponha agora que τ seja invariante por translações e que $\mathcal{B}$ seja uma base de vizinhanças de 0 satisfazendo (a), (b) e (c).

Seja $x_0 \in \mathbb{V}$ e $V \in \tau$ uma vizinhança de x_0 . Como τ é invariante por translações, existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $x_0 + W \subset V$. Pela condição (a), existe $U \in \mathcal{B}$ com $U + U \subset W$. Se $x, y \in \mathbb{V}$ com $x - x_0 \in U$ e $y - y_0 \in U$, então

$$x + y - (x_0 + y_0) = (x - x_0) + (y - y_0) \in U + U \subset W,$$

logo $x + y \in x_0 + y_0 + W \subset V$. Isso mostra que a adição é contínua.

Para a continuidade da multiplicação por escalar, fixemos $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ e $x_0 \in \mathbb{V}$. Seja $V \in \mathcal{B}$ dado. Pela condição (a), existe $U \in \mathcal{B}$ com $U + U \subset V$. Como U é radial (por (b)), existe $\epsilon > 0$ tal que $(\lambda - \lambda_0)x_0 \in U$ sempre que $|\lambda - \lambda_0| \leq \epsilon$.

Seja $\mu \in \mathbb{F}$ com $0 < |\mu| < 1$, como garantido por (c). Como $|\mu|^{-1} > 1$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|\mu|^{-n} \geq |\lambda_0| + \epsilon$. Definindo $W := \mu^n U \in \mathcal{B}$, temos que, se $x \in x_0 + W$, então

$$\lambda x = \lambda_0 x_0 + (\lambda - \lambda_0)x_0 + \lambda(x - x_0) \in \lambda_0 x_0 + U + U \subset \lambda_0 x_0 + V,$$

para todo $\lambda \in \mathbb{F}$ com $|\lambda - \lambda_0| \leq \epsilon$. Assim, a multiplicação por escalar é contínua. $\square$

Corolário A.102. *Se $\mathbb{V}$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ e $\mathcal{B}$ é uma base de filtro em $\mathbb{V}$ que satisfaz as condições (a) a (c) da Proposição A.101, então $\mathcal{B}$ é uma base de vizinhança de 0 para uma única topologia τ tal que $(\mathbb{V}, \tau)$ é um espaço vetorial topológico sobre $\mathbb{F}$.*

Demonstração. Definimos a topologia τ da seguinte forma: um subconjunto $G \subset \mathbb{V}$ é aberto se, para todo $x \in G$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x + V \subset G$. Com essa definição, $\mathcal{B}$ é uma base de vizinhança de 0 para a topologia τ .

Como $\mathcal{B}$ satisfaz as condições (a) a (c) da Proposição A.101, as operações de adição vetorial e multiplicação escalar são contínuas em τ , ou seja, $(\mathbb{V}, \tau)$ é um espaço vetorial topológico.

Além disso, como a topologia foi definida a partir de $\mathcal{B}$ por meio da condição acima, ela é a única topologia que torna $\mathcal{B}$ uma base de vizinhança de 0 e que faz de $\mathbb{V}$ um espaço vetorial topológico. Assim, tal topologia τ é única com essa propriedade. $\square$

Considere o seguinte exemplo como ilustração do Corolário A.102.

Exemplo A.103. Seja $\mathbb{F}[t]$ o anel de polinômios da forma $f(t) = \sum_n \alpha_n t^n$, com coeficientes em um corpo valorado $\mathbb{F}$. Considerando apenas a multiplicação à esquerda por escalares (isto é, por polinômios constantes), $\mathbb{F}[t]$ se torna um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$.

Fixe um número real $r \in (0, 1]$ e, para cada $\epsilon > 0$, defina:

$$V_\epsilon := \left\{ f(t) = \sum_n \alpha_n t^n \in \mathbb{F}[t] : \sum_n |\alpha_n| r^n \leq \epsilon \right\}.$$

A família $\mathcal{B} := \{V_\epsilon : \epsilon > 0\}$ satisfaz as condições da Proposição A.101, podendo assim ser utilizada para definir uma topologia vetorial sobre $\mathbb{F}[t]$, conforme garantido também pelo corolário correspondente.

Mais precisamente:

- A topologia gerada por $\mathcal{B}$ é *invariante por translações*, pois os conjuntos V_ϵ são simétricos em torno da origem, e a adição é compatível com a estrutura definida.
- A condição (a) da Proposição A.101 é satisfeita: dado $\epsilon > 0$, basta tomar $\delta = \epsilon/2$, então $V_\delta + V_\delta \subseteq V_\epsilon$, pela desigualdade triangular da soma $\sum_n |\alpha_n| r^n$.
- A condição (b) também é satisfeita:
 - Cada V_ϵ é *balanceado*, pois se $|\lambda| \leq 1$ e $f(t) \in V_\epsilon$, então $\lambda f(t) \in V_\epsilon$.
 - Cada V_ϵ é *radial*, pois para todo subconjunto finito de polinômios, existe λ suficientemente grande tal que todos os elementos estão contidos em λV_ϵ .

- A condição (c) é satisfeita porque, para qualquer $0 < |\lambda| < 1$, temos $\lambda V_\epsilon = V_{|\lambda|\epsilon} \in \mathcal{B}$.

Assim, pelo Corolário A.102, a família $\mathcal{B}$ define de forma única uma topologia τ sobre $\mathbb{F}[t]$ tal que $(\mathbb{F}[t], \tau)$ é um espaço vetorial topológico sobre $\mathbb{F}$.

Proposição A.104. *Sejam $\mathbb{V}$ um espaço vetorial topológico e $x \in \mathbb{V}$. Então, toda vizinhança de x contém uma vizinhança fechada de x . Em particular, a família de todas as vizinhanças fechadas de 0 forma uma base de vizinhanças de 0.*

Demonstração. Seja U uma vizinhança de 0. Então, existe uma vizinhança V de 0 tal que $V + V \subset U$. Como $y \in \bar{V}$ se, e somente se, $(y - V) \cap V \neq \emptyset$, segue que $\bar{V} \subset V + V \subset U$. De fato, se $y \in \bar{V}$, então existe $x \in (y - V) \cap V$. Como $y = y - x + x$, com $y - x, x \in V$, segue que $y \in V + V$.

Portanto, $\bar{V}$ é uma vizinhança fechada de 0 contida em U . Como as translações são homeomorfismos, dado $x \in \mathbb{V}$, a translação $x + \bar{V}$ é uma vizinhança fechada de x contida em $x + U$. Isso prova a primeira afirmação. A segunda decorre do fato de que, para cada vizinhança de 0, existe uma vizinhança fechada de 0 contida nela. $\square$

A.3 Espaços produto, subespaços, somas diretas e espaços quociente

Todos os resultados apresentados nesta subseção encontram-se demonstrados em [1].

Definição A.105. Seja $\{\mathbb{V}_a : a \in A\}$ uma família de espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{F}$. O produto cartesiano

$$\mathbb{V} = \prod_{a \in A} \mathbb{V}_a$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$, com operações definidas componente a componente.

Se, além disso, cada $\mathbb{V}_a$ for um espaço vetorial topológico com topologia τ_a , então $\mathbb{V}$, munido da topologia produto $\tau = \prod_{a \in A} \tau_a$, será um espaço vetorial topológico. Nesse caso, $(\mathbb{V}, \tau)$ é chamado de *espaço produto* da família $\{\mathbb{V}_a : a \in A\}$.

Definição A.106. Um *subespaço vetorial* M de um espaço vetorial $\mathbb{V}$ sobre um corpo $\mathbb{F}$ é um subconjunto $M \neq \emptyset$ que é invariante por adição e multiplicação escalar.

A seguir, registramos uma consequência simples dos axiomas (LT1) e (LT2), cuja demonstração pode ser consultada em [1].

Proposição A.107. *Se $(\mathbb{V}, \tau)$ for um espaço vetorial topológico e $W \subset \mathbb{V}$ for um subespaço vetorial, então o fecho topológico $\bar{W}$ de W em $\mathbb{V}$ também será um subespaço vetorial.*

Definição A.108. Sejam $M_1, M_2, \dots, M_n$ subespaços vetoriais de um espaço vetorial topológico $\mathbb{V}$, tais que¹

$$M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n = \{0\} \quad \text{e} \quad \text{span}(M_1 \cup \dots \cup M_n) = \mathbb{V},$$

¹Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$, e sejam $M_1, \dots, M_n \subseteq \mathbb{V}$ subconjuntos. O *espaço vetorial gerado* pela união desses conjuntos, denotado por $\text{span}(M_1 \cup \dots \cup M_n)$, é definido por:

$$\text{span}(M_1 \cup \dots \cup M_n) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i : k \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{F}, v_i \in M_j \text{ para algum } j \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Isto é, o conjunto de todas as combinações lineares finitas de vetores pertencentes a $M_1 \cup \dots \cup M_n$.

dizemos que $\mathbb{V}$ é a *soma direta algébrica* dos subespaços M_i , denotada por

$$\mathbb{V} = M_1 \oplus_{\text{alg}} M_2 \oplus_{\text{alg}} \cdots \oplus_{\text{alg}} M_n.$$

Nesse caso, todo vetor $v \in \mathbb{V}$ admite uma representação única da forma

$$v = \sum_{i=1}^n v_i, \quad \text{com } v_i \in M_i.$$

Definição A.109. A aplicação que associa a cada $v \in \mathbb{V}$ sua componente $v_i \in M_i$ na decomposição direta é chamada de *projeção* de $\mathbb{V}$ sobre M_i , e denotada por $\mu_i: \mathbb{V} \rightarrow M_i$.

Definição A.110. Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial topológico que é soma direta algébrica dos subespaços $M_1, \dots, M_n$. Se a aplicação

$$\psi: \prod_{i=1}^n M_i \rightarrow \mathbb{V}, \quad (v_1, \dots, v_n) \mapsto \sum_{i=1}^n v_i$$

for um isomorfismo de espaços vetoriais topológicos, diremos que $\mathbb{V}$ é a *soma direta topológica* dos subespaços M_i , e escrevemos:

$$\mathbb{V} = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n.$$

Proposição A.111. Se $\mathbb{V}$ for um espaço vetorial topológico que é soma direta algébrica de subespaços $M_1, \dots, M_n$, então $\mathbb{V} = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ (no sentido topológico) se, e somente se, cada projeção $\mu_i: \mathbb{V} \rightarrow M_i$ for contínua.

Definição A.112. Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial topológico e $M \subset \mathbb{V}$ um subespaço vetorial. Define-se a aplicação quociente $\psi: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}/M$ por

$$\psi(v) = v + M.$$

A topologia quociente $\hat{\tau}$ é a topologia mais fina em $\mathbb{V}/M$ que torna ψ contínua. O espaço $(\mathbb{V}/M, \hat{\tau})$ é denominado *espaço quociente*.

Proposição A.113. Se $\mathbb{V}$ for um espaço vetorial topológico e $M \subset \mathbb{V}$ for um subespaço vetorial, então o espaço quociente $\mathbb{V}/M$ será de Hausdorff se, e somente se, M for fechado em $\mathbb{V}$.

Proposição A.114. Se $\mathbb{V}$ for um espaço vetorial topológico que é soma direta algébrica de dois subespaços M e N , então

$$\mathbb{V} = M \oplus N$$

(no sentido topológico) se, e somente se, a aplicação $f: \mathbb{V}/M \rightarrow N$, que associa a cada classe $v + M$ seu único representante em N , for um isomorfismo de espaços vetoriais topológicos.

A.3.1 Espaços vetoriais topológicos de dimensão finita

Definição A.115. Por *dimensão* de um espaço vetorial topológico $\mathbb{V}$ sobre um corpo $\mathbb{F}$, entende-se a *dimensão algébrica* de $\mathbb{V}$ sobre $\mathbb{F}$, isto é, a cardinalidade de qualquer conjunto maximal linearmente independente de vetores em $\mathbb{V}$. Tal conjunto é chamado de *base* (ou *base de Hamel*) de $\mathbb{V}$.

Seja $\mathbb{F}_0$ o espaço vetorial topológico unidimensional obtido considerando $\mathbb{F}$ como espaço vetorial sobre si mesmo.

Teorema A.116. *Todo espaço vetorial topológico de Hausdorff $\mathbb{V}$, unidimensional, sobre um corpo não discreto $\mathbb{F}$ é isomorfo a $\mathbb{F}_0$. Mais precisamente, para cada $x_0 \in \mathbb{V}$ com $x_0 \neq 0$, a aplicação $\lambda \mapsto \lambda x_0$ define um isomorfismo de $\mathbb{F}_0$ sobre $\mathbb{V}$, e todo isomorfismo de $\mathbb{F}_0$ sobre $\mathbb{V}$ é dessa forma.*

Demonstração. Pelo axioma (LT2), a aplicação $\lambda \in \mathbb{F}_0 \mapsto \lambda x_0 \in \mathbb{V}$ é contínua. Além disso, essa aplicação é linear e bijetora, pois $\mathbb{V}$ tem dimensão 1, e $x_0 \neq 0$. Logo, trata-se de um isomorfismo algébrico de $\mathbb{F}_0$ sobre $\mathbb{V}$.

Para concluir que $\lambda \in \mathbb{F}_0 \mapsto \lambda x_0 \in \mathbb{V}$ é um isomorfismo topológico, é suficiente mostrar que a aplicação inversa $\lambda x_0 \in \mathbb{V} \mapsto \lambda \in \mathbb{F}_0$ é contínua. Para isso, mostraremos que essa aplicação é contínua em 0.

Com efeito, seja $0 < \epsilon < 1$. Como $\mathbb{F}$ não é discreto, existe $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ com $0 < |\lambda_0| < \epsilon$. Como $\mathbb{V}$ é de Hausdorff, existe uma vizinhança V de 0 em $\mathbb{V}$, balanceada, tal que $\lambda_0 x_0 \notin V$.

Suponha, por contradição, que exista $\lambda \in \mathbb{F}$ com $|\lambda| \geq \epsilon$ tal que $\lambda x_0 \in V$. Como $|\lambda_0/\lambda| < 1$ (pois $0 < |\lambda_0| < \epsilon \leq |\lambda|$), temos $\lambda_0 x_0 = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)(\lambda x_0) \in V$, pois V é balanceada. No entanto, $\lambda_0 x_0 \notin V$. Eis uma contradição. Portanto, $\lambda x_0 \in V$ implica necessariamente $|\lambda| < \epsilon$. Isso mostra que a aplicação inversa $\lambda x_0 \mapsto \lambda$ é contínua em 0 e, por linearidade, é contínua em todo ponto.

Por fim, seja $u: \mathbb{F}_0 \rightarrow \mathbb{V}$ um isomorfismo topológico qualquer. Como $\mathbb{V}$ é unidimensional, u é completamente determinado pela imagem de $1 \in \mathbb{F}$. Seja $x_0 := u(1) \in \mathbb{V} \setminus \{0\}$. Pela linearidade de u , para $\lambda \in \mathbb{F}_0$, temos:

$$u(\lambda) = u(\lambda \cdot 1) = \lambda \cdot u(1) = \lambda x_0.$$

Portanto, todo isomorfismo topológico de $\mathbb{F}_0$ sobre $\mathbb{V}$ é da forma $\lambda \mapsto \lambda x_0$, com $x_0 \neq 0$. $\square$

O resultado a seguir, de destaque teórico, é enunciado sem demonstração, cuja exposição rigorosa pode ser encontrada em [1, Teorema 3.2, p. 21].

Teorema A.117. *Todo espaço vetorial topológico de Hausdorff de dimensão finita n sobre um corpo $\mathbb{F}$ completo e valorado é isomorfo a $\mathbb{F}_0^n$.*

Mais precisamente, para cada base $\{x_1, \dots, x_n\}$ de $\mathbb{V}$, a aplicação

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$$

define um isomorfismo de $\mathbb{F}_0^n$ sobre $\mathbb{V}$, e todo isomorfismo de $\mathbb{F}_0^n$ sobre $\mathbb{V}$ é dessa forma.

A.4 Variedades lineares e hiperplanos

Definição A.118. Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$. Uma *variedade linear* (ou *subespaço afim*) em $\mathbb{V}$ é um subconjunto que pode ser escrito como uma translação de um subespaço $M \subseteq \mathbb{V}$, ou seja, um conjunto da forma $F = x_0 + M$, para algum $x_0 \in \mathbb{V}$.

Tal conjunto F determina M de forma única, enquanto determina x_0 apenas módulo M , isto é:

$$x_0 + M = x_1 + M \quad \text{se, e somente se,} \quad M = N \text{ e } x_1 - x_0 \in M.$$

Dizemos que duas variedades lineares $x_0 + M$ e $x_1 + N$ são *paralelas* se $M \subseteq N$ ou $N \subseteq M$.

A *dimensão* de uma variedade linear é definida como a dimensão do subespaço do qual ela é translação.

Definição A.119. Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$. Um *hiperplano* em $\mathbb{V}$ é uma variedade linear própria e maximal, isto é, um subespaço afim próprio de $\mathbb{V}$ que não está contido em nenhum outro subespaço afim próprio. O subespaço correspondente a um hiperplano tem codimensão 1.

Além disso, dois hiperplanos em $\mathbb{V}$ são paralelos se, e somente se, os subespaços associados forem idênticos.

Um hiperplano que é também um subespaço (ou seja, que contém a origem) é chamado de *hiperplano homogêneo*.

Definição A.120. Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$. Denotamos por $\mathbb{V}^*$ o *dual algébrico* de $\mathbb{V}$, ou seja, o espaço vetorial (à direita, sobre $\mathbb{F}$) de todas as formas (funcionais) lineares em $\mathbb{V}$, $f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{F}$.

Proposição A.121. Um subconjunto $H \subseteq \mathbb{V}$ é um hiperplano se, e somente se,

$$H = \{x \in \mathbb{V} : f(x) = \alpha\}$$

para algum $\alpha \in \mathbb{F}$ e algum funcional linear não nulo $f \in \mathbb{V}^*$. Além disso, f e α são determinados por H a menos de um fator escalar $\beta \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$.

Demonstração. Se $f \in \mathbb{V}^*$ e $f \neq 0$, então $M = \ker f = f^{-1}(0)$ é um subespaço próprio e maximal de $\mathbb{V}$, já que a codimensão de M é igual a 1. Suponha agora que exista $x_0 \in \mathbb{V}$ tal que $f(x_0) = \alpha$. Então:

$$H = \{x \in \mathbb{V} : f(x) = \alpha\} = x_0 + M,$$

o que mostra que H é um hiperplano.

Reciprocamente, suponha que H seja um hiperplano. Então $H = x_0 + M$, onde M é um subespaço de $\mathbb{V}$ tal que $\dim(\mathbb{V}/M) = 1$. Pelo Teorema A.116, $\mathbb{V}/M$ é isomorfo, como espaço vetorial, a $\mathbb{F}$. Seja $\phi: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}/M$ a projeção natural e seja g um isomorfismo de $\mathbb{V}/M$ em $\mathbb{F}$. Definindo $f = g \circ \phi$, obtemos um funcional linear não nulo $f \in \mathbb{V}^*$ tal que:

$$H = \{x \in \mathbb{V} : f(x) = \alpha\}, \quad \text{com } \alpha = f(x_0).$$

Se houver outro par (f_1, α_1) tal que $H = \{x \in \mathbb{V} : f_1(x) = \alpha_1\}$, então necessariamente $f_1^{-1}(0) = M$, ou seja, f_1 também se anulará exatamente sobre M . Portanto, existe um isomorfismo $g_1: \mathbb{V}/M \rightarrow \mathbb{F}$ tal que $f_1 = g_1 \circ \phi$. Seja ξ o elemento de $\mathbb{V}/M$ tal que $g(\xi) = 1$. Se $g_1(\xi) = \beta$, então $f_1(x) = f(x)\beta$ para todo $x \in \mathbb{V}$. Isso conclui a demonstração. $\square$

Observação A.122. Como as translações em um espaço vetorial topológico $\mathbb{V}$ são homeomorfismos, segue da Proposição A.121 que o fecho $\overline{F}$ de um subespaço afim F é novamente um subespaço afim.

Proposição A.123. Seja $H \subseteq \mathbb{V}$ um hiperplano em um espaço vetorial topológico $\mathbb{V}$. Então H é ou um subconjunto fechado ou denso em $\mathbb{V}$. Além disso, se $H = \{x \in \mathbb{V} : f(x) = \alpha\}$, então H é fechado se, e somente se, f é contínua.

Demonstração. Suponha que o hiperplano H não seja fechado. Nesse caso, ele deve ser denso em $\mathbb{V}$, pois, do contrário, seu fecho $\overline{H}$ seria um subespaço afim próprio de $\mathbb{V}$ contendo H , o que contraria a maximalidade do hiperplano.

Para demonstrar a segunda afirmação, basta provar que o conjunto $f^{-1}(\alpha)$ é fechado se, e somente se, f é contínua. De fato, se f é contínua, então $f^{-1}(\alpha)$ é fechado, já que $\{\alpha\}$ é fechado em $\mathbb{F}$.

Reciprocamente, suponha que $f^{-1}(\alpha)$ seja fechado em $\mathbb{V}$. Pela Proposição A.113, $\mathbb{V}/f^{-1}(\alpha)$ é um espaço de Hausdorff tal que $\dim(\mathbb{V}/f^{-1}(\alpha)) = 1$. Podemos escrever $f = g \circ \phi$, onde $\phi: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}/f^{-1}(\alpha)$ é a projeção natural, e g é um isomorfismo linear.

Pelo Teorema A.116, segue que g é contínua. Como ϕ também é contínua, temos que f é composição de funções contínuas e, portanto, f é contínua. $\square$

A.5 Conjuntos limitados

Seguindo a linha teórica adotada nas seções anteriores, esta subseção apresenta os principais conceitos e resultados sobre conjuntos limitados, conforme desenvolvidos em [1].

Nesta seção, $\mathbb{V}$ denotará um espaço vetorial topológico.

Definição A.124. Um subconjunto A de $\mathbb{V}$ é dito *limitado* se, para toda vizinhança V de 0 em $\mathbb{V}$, existe um escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ tal que $A \subset \lambda V$.

Definição A.125. Dizemos que uma família $\mathfrak{B}$ de subconjuntos limitados de $\mathbb{V}$ é um *sistema fundamental de conjuntos limitados* se todo subconjunto limitado de $\mathbb{V}$ está contido em algum elemento de $\mathfrak{B}$.

Definição A.126. Um subconjunto $B \subset \mathbb{V}$ é *totalmente limitado* se, para toda vizinhança V de 0, existe um subconjunto finito $B_0 \subset B$ tal que $B \subset B_0 + V$.

Proposição A.127. Sejam $A, B \subset \mathbb{V}$ subconjuntos (totalmente) limitados. Então os seguintes conjuntos também são (totalmente) limitados:

- i) todo subconjunto de A ;
- ii) o fecho $\overline{A}$;
- iii) $A \cup B$, $A + B$, e λA , para todo $\lambda \in \mathbb{F}$.

Além disso, todo conjunto totalmente limitado é limitado.

Corolário A.128. As propriedades de limitação e total limitação são preservadas sob somas e uniões finitas, bem como sob dilatações da forma $x \mapsto \lambda_0 x + x_0$.

Corolário A.129. A família de todos os subconjuntos fechados e balanceados de $\mathbb{V}$ constitui um sistema fundamental de conjuntos limitados.

Proposição A.130. Sejam $A, B \subset \mathbb{V}$ subconjuntos compactos de um espaço vetorial topológico de Hausdorff. Então $A \cup B$, $A + B$, e λA com $\lambda \in \mathbb{F}$, também são compactos.

Corolário A.131. A compacidade de subconjuntos de espaços vetoriais topológicos de Hausdorff é preservada sob uniões finitas, somas e dilatações.

Observação A.132. Diremos que uma sequência é *nula* quando converge para o vetor nulo do espaço.

Proposição A.133. Um subconjunto $A \subset \mathbb{V}$ é limitado se, e somente se, para toda sequência nula $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{F}$ e toda sequência $\{x_n\} \subset A$, a sequência $\{\lambda_n x_n\}$ é nula em $\mathbb{V}$.

Proposição A.134. Se $u: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ é uma aplicação linear contínua entre espaços vetoriais topológicos, então a imagem de um subconjunto (totalmente) limitado de $\mathbb{V}$ é (totalmente) limitada em $\mathbb{W}$.

Proposição A.135. Se $\{\mathbb{V}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma família de espaços vetoriais topológicos e $\mathbb{V} = \prod_\alpha \mathbb{V}_\alpha$, então um subconjunto $B \subset \mathbb{V}$ é limitado se, e somente se, existe uma família de conjuntos limitados $\{B_\alpha \subset \mathbb{V}_\alpha\}$ tal que $B \subset \prod_\alpha B_\alpha$.

A.6 Complexificação

Nesta seção, consideramos espaços vetoriais sobre um tipo mais restrito de corpo $\mathbb{F}$ do que o permitido anteriormente: assumimos que ou $\mathbb{F}$ é um subcorpo de $\mathbb{R}$, ou que $\mathbb{F}$ é um subcorpo de $\mathbb{C}$ que contém a unidade imaginária i e é invariante por conjugação. Em ambos os casos, entende-se que $\mathbb{F}$ carrega o valor absoluto induzido.

Qualquer corpo $\mathbb{F}$ com essas propriedades pode ser escrito como $\mathbb{F} = \mathbb{H} + i\mathbb{H}$ se contiver a unidade imaginária i , onde $\mathbb{H} := \mathbb{F} \cap \mathbb{R}$ é um subcorpo de $\mathbb{R}$. Se $\mathbb{H}$ é, por outro lado, um subcorpo de $\mathbb{R}$, denotamos por $\mathbb{H}(i) := \mathbb{H} + i\mathbb{H}$ a extensão complexa de $\mathbb{H}$.

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{H}$. Podemos estender a multiplicação escalar em $\mathbb{V}$ para $\mathbb{F} = \mathbb{H}(i)$? Se sim, então $\mathbb{V}$ possui um automorfismo u tal que $u^2 = -e$, onde e denota a aplicação identidade; por exemplo, a aplicação $x \mapsto ix$ é tal automorfismo.

Reciprocamente, se u é um automorfismo de $\mathbb{V}$ (sobre $\mathbb{H}$) satisfazendo $u^2 = -e$, então a definição a seguir:

$$(\lambda + i\mu)x := \lambda x + \mu u(x), \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{H}) \quad (\text{A.3})$$

estende a multiplicação escalar para $\mathbb{F} = \mathbb{H} + i\mathbb{H}$, como pode ser rapidamente verificado.

De forma análoga, se $\mathbb{V}$ é um espaço vetorial topológico sobre $\mathbb{H}$ e se u é um automorfismo (topológico) de $\mathbb{V}$ tal que $u^2 = -e$, então a fórmula (A.3) torna $\mathbb{V}$ em um espaço vetorial topológico sobre $\mathbb{F}$.

Teorema A.136. *Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial topológico sobre $\mathbb{H} \subset \mathbb{R}$. Então a multiplicação escalar em $\mathbb{V}$ admite uma extensão contínua para $\mathbb{H}(i) \times \mathbb{V}$ em $\mathbb{V}$ se, e somente se, $\mathbb{V}$ admite um automorfismo u tal que $u^2 = -e$, em que e é a aplicação identidade.*

Reciprocamente, se $\mathbb{V}$ é um espaço vetorial (ou espaço vetorial topológico) sobre um corpo $\mathbb{F} = \mathbb{H}(i)$ contendo i , então a restrição da multiplicação escalar a $\mathbb{H} \times \mathbb{V}$ transforma $\mathbb{V}$ em um espaço vetorial $\mathbb{V}_0$ sobre $\mathbb{H}$. Denotamos $\mathbb{V}_0$ como o *espaço subjacente real* de (ou associado a) $\mathbb{V}$. Uma *forma linear real* em $\mathbb{V}$ é uma forma linear em $\mathbb{V}_0$, e um *hiperplano real* em $\mathbb{V}$ é um hiperplano em $\mathbb{V}_0$. Analogamente, um *subespaço real* (ou *subespaço afim real*) de $\mathbb{V}$ é um subespaço (ou subespaço afim) de $\mathbb{V}_0$.

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{F} = \mathbb{H} + i\mathbb{H}$ e seja $f \in \mathbb{V}^*$ uma forma linear em $\mathbb{V}$. Então $f = g + ih$, onde g e h são funções $\mathbb{H}$ -valoradas unicamente determinadas em $\mathbb{V}$; claramente, g e h são formas lineares reais sobre $\mathbb{V}$, chamadas de *parte real* e *parte imaginária* de f , respectivamente. Como $g(ix) + ih(ix) = f(ix) = if(x) = ig(x) - h(x)$ para todo $x \in \mathbb{V}$, temos:

$$f(x) = g(x) - ig(ix) \quad (x \in \mathbb{V}). \quad (\text{A.4})$$

Reciprocamente, se g é qualquer forma linear real em $\mathbb{V}$, então é fácil verificar que a função f definida por (A.4) pertence a $\mathbb{V}^*$, sendo a única cuja parte real é g . Além disso, se $\mathbb{V}$ é um espaço vetorial topológico sobre $\mathbb{F}$, então (A.4) mostra que f é contínua se, e somente se, g for contínua. Assim, provamos o seguinte resultado:

Teorema A.137. *Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial topológico sobre $\mathbb{F}$, e seja $\mathbb{V}_0$ seu espaço subjacente real. A aplicação $f \mapsto g$ definida por (A.4) é um isomorfismo de $(\mathbb{V}^*)_0$ sobre $(\mathbb{V}_0)^*$, levando o espaço das formas lineares contínuas em $\mathbb{V}$ sobre o espaço das formas lineares contínuas em $\mathbb{V}_0$.*

Para hiperplanos em $\mathbb{V}$, temos o seguinte resultado, cuja prova pode ser consultada em [1, Teorema 7.3, p. 33].

Teorema A.138. *Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial topológico sobre $\mathbb{F}$. Todo hiperplano (fechado) em $\mathbb{V}$ é a interseção de uma família unicamente determinada de hiperplanos reais (fechados).*

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{H} \subset \mathbb{R}$. Nem sempre existe um automorfismo u de $\mathbb{V}$ tal que $u^2 = -e$; exemplos são fornecidos por espaços vetoriais reais de dimensão ímpar. Ainda assim, é desejável, especialmente para fins da teoria espectral, imergir $\mathbb{V}$ isomorficamente em um espaço vetorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{H}(i)$; o procedimento a seguir fornece tal imersão.

Considere o produto $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$ sobre $\mathbb{H}$. A aplicação $u: (x, y) \mapsto (-y, x)$ é um automorfismo (topológico, caso $\mathbb{V}$ seja um espaço vetorial topológico sobre $\mathbb{H}$) de $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$ satisfazendo $u^2 = -e$; assim, a multiplicação escalar pode ser estendida para $\mathbb{K} \times \mathbb{V}$ em $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$ por meio da equação (A.3).

Portanto, $i \cdot (y, 0) = (0, y)$, e se concordarmos em escrever $(x, 0) = x$ para todo $x \in \mathbb{V}$, então cada $z \in \mathbb{V} \times \mathbb{V}$ possui uma representação única da forma $z = x + iy$, com $x, y \in \mathbb{V}$.

Se $\mathbb{V}$ é um espaço vetorial topológico sobre $\mathbb{H}$, então $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$ sobre $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial topológico tal que $(\mathbb{V} \times \mathbb{V})_0 = \mathbb{V} \oplus i\mathbb{V}$. Esse tipo de imersão é chamado de *complexificação* de um espaço vetorial (ou espaço vetorial topológico) definido sobre um subcorpo de $\mathbb{R}$.

A.7 Espaços vetoriais topológicos localmente convexos

Espaços vetoriais topológicos localmente convexos constituem uma importante classe de espaços no contexto da Análise Funcional. Tais espaços estendem naturalmente a noção de espaços normados, permitindo o uso de ferramentas topológicas em contextos mais gerais, onde a normabilidade pode não estar presente.

A ideia central é dotar um espaço vetorial de uma topologia compatível com sua estrutura algébrica e suficientemente rica para permitir noções de continuidade e convergência, mas suficientemente fraca para acomodar exemplos de interesse na análise funcional, como espaços de distribuições e de funções suaves.

A convexidade local, em particular, é uma propriedade que assegura a existência de uma base de vizinhanças do zero composta por conjuntos convexos, o que permite o uso de técnicas como o teorema de Hahn-Banach, separação de conjuntos convexos e dualidade funcional.

Nesta seção, estudaremos os principais conceitos e resultados relacionados aos espaços vetoriais topológicos localmente convexos, com ênfase em suas propriedades fundamentais, exemplos típicos e aplicações à teoria de dualidade.

A.7.1 Conjuntos convexos e seminormas

Conjuntos convexos preservam propriedades importantes quando tratamos de combinações lineares. Além disso, com as seminormas - que são funções sublineares -, obtemos espaços topologicamente convexos, nos permitindo análises mais profundas de continuidade e convergência. Nesta subseção, estudaremos algumas definições e resultados básicos sobre esses conjuntos.

Definição A.139. Um subconjunto A de um espaço vetorial $\mathbb{V}$ é convexo se, dados $x, y \in A$, temos que

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in A, \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Nesse sentido, chamamos os conjuntos $\{\lambda x + (1 - \lambda)y : 0 < \lambda < 1\}$ e $\{\lambda x + (1 - \lambda)y : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ são chamados, respectivamente, de segmentos de reta aberto e fechado ligando x a y .

Os quatro resultados a seguir serão somente enunciados. Suas demonstrações encontram-se em [1, p. 38].

Proposição A.140. *A convexidade de um subconjunto A é preservada por translação.*

Proposição A.141. *Seja A um subconjunto convexo de um espaço vetorial topológico $\mathbb{V}$. Se $x \in \text{Int}(A)$ e $y \in \overline{A}$, então o segmento de reta aberto ligando x a y está contido no conjunto interior de A , $\text{Int}(A)$.*

Proposição A.142. *Sejam $\mathbb{V}$ um espaço vetorial topológico, com A e B subconjuntos convexos. Então o interior e o fecho de A , assim como $A + B$ e αA , com $\alpha \in \mathbb{F}$, são convexos.*

Proposição A.143. *Se A é convexo com interior não vazio, então o fecho $\overline{A}$ é igual ao fecho de $\text{Int}(A)$, e o interior de A é igual ao interior de $\overline{A}$.*

Definição A.144. Um cone C de vértice 0 é um subconjunto de um espaço vetorial $\mathbb{V}$ invariante sob todas as aplicações homotéticas $x \mapsto \lambda x$ com razão $\lambda > 0$. Se, além disso, C for convexo, então C é chamado de *cone convexo* de vértice 0 . Assim, um cone convexo de vértice 0 é um subconjunto $C \subset \mathbb{V}$ tal que $C + C \subset C$ e $\lambda C \subset C$ para todo $\lambda > 0$.

Um cone convexo de vértice x_0 é um conjunto da forma $x_0 + C$, onde C é um cone convexo de vértice 0 .

É um exercício simples mostrar que o interior e o fecho de um cone convexo de vértice 0 em um espaço vetorial topológico $\mathbb{V}$ são cones convexos de vértice 0 em $\mathbb{V}$.

Se M for um subconjunto radial de $\mathbb{V}$, define-se a seguinte função real não negativa em $\mathbb{V}$:

$$x \mapsto p_M(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda M\},$$

chamada de *funcional de Minkowski*, ou *gauge*, de M . Note que se M for um conjunto radial em $\mathbb{V}$ e $M \subset N$, então $p_N(x) \leq p_M(x)$ para todo $x \in \mathbb{V}$, uma vez que $\{\lambda > 0 : x \in \lambda M\} \subset \{\lambda > 0 : x \in \lambda N\}$.

Definição A.145. Uma *seminorma* em $\mathbb{V}$ é definida como o gauge de um subconjunto radial, balanceado e convexo de $\mathbb{V}$. Uma *norma* é uma seminorma p tal que $p(x) = 0$ implica $x = 0$.

A seguinte descrição analítica de seminormas é frequentemente usada como definição:

Proposição A.146. *Uma função real p definida em um espaço vetorial $\mathbb{V}$ é uma seminorma se, e somente se:*

- (a) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{V}$;
- (b) $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$ para todos $x \in \mathbb{V}, \lambda \in \mathbb{F}$.

Demonstração. Seja p uma seminorma em $\mathbb{V}$, isto é, $p = p_M$, em que M é radial, balanceado e convexo. Sejam $x, y \in \mathbb{V}$ dados, $\lambda_1 > p(x)$ e $\lambda_2 > p(y)$. Então $x + y \in \lambda_1 M + \lambda_2 M$ (pela definição de ínfimo). Como M é convexo, temos

$$\lambda_1 M + \lambda_2 M = (\lambda_1 + \lambda_2) \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} M + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} M \right] \subset (\lambda_1 + \lambda_2) M;$$

implicando que $p(x + y) \leq \lambda_1 + \lambda_2$, e portanto $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

Para o item (b), observe que $\lambda x \in \mu M$ é equivalente a $|\lambda|x \in \mu M$, já que M é balanceado. Logo, se $\lambda \neq 0$:

$$p(\lambda x) = \inf\{\mu > 0 : x \in |\lambda|^{-1} \mu M\} = \inf_{\mu > 0}\{|\lambda|\mu : x \in \mu M\} = |\lambda|p(x),$$

o que prova (b), já que $p(0) = 0$.

Reciprocamente, suponha que p seja uma função que satisfaz (a) e (b), e defina o conjunto $M = \{x \in \mathbb{V} : p(x) < 1\}$. Claramente, M é radial e balanceado. Ademais, de (a) e (b) segue que M é convexo. Vamos mostrar que $p = p_M$.

De (b), tem que $\{x \in \mathbb{V} : p(x) < \lambda\} = \lambda M$ para todo $\lambda > 0$; portanto, se $p(x) = \alpha$, então $x \in \lambda M$ para todo $\lambda > \alpha$, mas para nenhum $\lambda < \alpha$, provando que

$$p(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda M\} = p_M(x).$$

□

Exemplo A.147. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$ e a função $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$p(x, y) = |x|, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Esta função é uma seminorma, pois satisfaz as propriedades (a) e (b) da Proposição A.146, como veremos abaixo.

(a): Para quaisquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$p(\lambda(x, y)) = p(\lambda x, \lambda y) = |\lambda x| = |\lambda||x| = |\lambda|p(x, y).$$

(b): Para (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em $\mathbb{R}^2$, temos

$$p((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = p(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| = p(x_1, y_1) + p(x_2, y_2).$$

No entanto, observe que $p(x, y) = 0$ quando $x = 0$, independentemente do valor de y , ou seja, $p(x, y) = 0$ não implica que $(x, y) = (0, 0)$. Portanto, essa função é uma *seminorma*, mas não uma *norma*.

Se $\mathbb{V}$ é um espaço vetorial topológico, a continuidade de uma seminorma p em $\mathbb{V}$ é caracterizada pela relação a seguir:

Proposição A.148. *Seja p uma seminorma em $\mathbb{V}$. As seguintes propriedades são equivalentes:*

(a) p é contínua em $0 \in \mathbb{V}$.

(b) O conjunto $M_0 = \{x \in \mathbb{V} : p(x) < 1\}$ é aberto em $\mathbb{V}$.

(c) p é uniformemente contínua em $\mathbb{V}$.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (c): pela desigualdade (a) da Proposição A.146, temos $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$ para todos $x, y \in \mathbb{V}$.

(c) $\Rightarrow$ (b): como $M_0 = p^{-1}((-\infty, 1))$ e a pré-imagem de um aberto por uma aplicação contínua é aberta, segue a validade da implicação.

(b) $\Rightarrow$ (a): pois $\epsilon M_0 = \{x \in \mathbb{V} : p(x) < \epsilon\}$ para todo $\epsilon > 0$ é uma vizinhança de 0. $\square$

Para finalizar esta subseção, apresentamos a definição de espaço vetorial topológico convexo e alguns resultados importantes.

Definição A.149. Um *espaço vetorial topológico convexo* é um espaço vetorial topológico $\mathbb{V}$ de Hausdorff sobre um corpo valorado $\mathbb{F}$ tal que existe uma base de vizinhanças de 0 composta por conjuntos convexos. Em outras palavras, para todo aberto $U \subseteq \mathbb{V}$ contendo a origem, existe um subconjunto $V \subseteq U$, aberto e convexo, tal que $0 \in V$.

A demonstração do resultado abaixo pode ser encontrada no capítulo 2 de Horvath (cf. [16], p. 97-98).

Proposição A.150. *Sejam $\mathbb{V}$ um espaço localmente convexo cuja topologia é definida pela família de seminormas $(p_i)_{i \in I}$ e $\mathbb{W}$ um espaço localmente convexo cuja topologia é definida pela família de seminormas $(q_j)_{j \in J}$, e considere uma aplicação linear $f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$.*

A aplicação f será contínua se, e somente se para todo $a \in \mathbb{F}$ existirem $i_1, \dots, i_n \in I$ e $M > 0$ tais que

$$q_j(f(x)) \leq M \max_{1 \leq k \leq n} p_{i_k}(x), \quad \forall x \in \mathbb{V}.$$

A.7.2 Espaços normados e normáveis

Dando seguimento à construção da teoria para o estudo de convergência e continuidade, temos nos espaços normados uma base sólida para ampliação de análises topológicas, com as propriedades de distância e conceitos de completude e compacidade. Nesta seção, enunciaremos resultados relevantes sobre tais espaços.

Pela definição dada na Subseção A.7.1, uma norma p em um espaço vetorial $\mathbb{V}$ (sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) é a função gauge de um conjunto convexo, balanceado e radial tal que $p(x) = 0$ implica $x = 0$; frequentemente, uma norma é denotada por $\|\cdot\|$. Recordamos da Proposição A.146 que uma norma $\|\cdot\|$ em $\mathbb{V}$ é caracterizada pelas seguintes propriedades analíticas:

(i) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{F}$, $x \in \mathbb{V}$.

(ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todos $x, y \in \mathbb{V}$.

(iii) $\|x\| = 0$ implica $x = 0$.

Definimos um *espaço normado* como um par $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$, com o entendimento de que $\mathbb{V}$ carrega a topologia gerada pela métrica $(x, y) \mapsto \|x - y\|$. Sob essa topologia, $\mathbb{V}$ é um espaço vetorial topológico.

Por outro lado, um *espaço normável* é um espaço vetorial topológico $\mathbb{V}$ cuja topologia pode ser obtida a partir de uma norma $\|\cdot\|$ em $\mathbb{V}$ via a métrica $(x, y) \mapsto \|x - y\|$. Um espaço

normado completo $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ (no qual toda sequência de Cauchy² converge em $\mathbb{V}$) é chamado de *espaço de Banach*, ou abreviadamente *B-espaço*. O conjunto $\{x \in \mathbb{V} : \|x\| \leq 1\}$ é a *bola unitária* (fechada) de $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$.

Existe uma condição necessária e suficiente simples para que um espaço vetorial topológico (necessariamente de Hausdorff) seja normável; o resultado é devido a Kolmogorov e segue abaixo.

Proposição A.151. *Um espaço vetorial topológico de Hausdorff $\mathbb{V}$ é normável se, e somente se, $\mathbb{V}$ possui uma vizinhança limitada convexa de 0.*

Proposição A.152. *O produto de uma família de espaços normáveis é normável se, e somente se, o número de fatores diferentes de $\{0\}$ é finito.*

Proposição A.153. *O espaço quociente de um espaço vetorial topológico normável (e completo) $\mathbb{V}$ sobre um subespaço fechado M é normável (e completo). Se $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ é um espaço normado, então a norma $\hat{x} \rightarrow \|\hat{x}\| = \inf\{\|x\| : x \in \hat{x}\}$ gera a topologia de $\mathbb{V}/M$.*

A.7.3 Espaço normado das transformações lineares limitadas

Para introduzirmos o espaço normado das transformações lineares limitadas entre espaços normados, precisaremos recordar alguns conceitos relativos a transformações lineares entre espaços normados sobre um mesmo corpo $\mathbb{F}$. É o que faremos na sequência.

Definição A.154. Sejam $\mathbb{V}$ e $\mathbb{N}$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$. Dizemos que $u : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{N}$ é uma *transformação linear* se

$$u(\alpha x + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y)$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{V}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Se $\mathbb{N} = \mathbb{F}$, dizemos que u é um *funcional linear*.

Definição A.155. Sejam $(\mathbb{V}, \|\cdot\|_{\mathbb{V}})$ e $(\mathbb{N}, \|\cdot\|_{\mathbb{N}})$ espaços vetoriais normados sobre um corpo $\mathbb{F}$. Dizemos que uma transformação linear $u : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{N}$ é *limitada* quando existe uma constante positiva c tal que

$$\|u(x)\|_{\mathbb{N}} \leq c\|x\|_{\mathbb{V}} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{V}. \quad (\text{A.5})$$

A relação (A.5) mostra que uma transformação linear limitada leva conjuntos limitados de $\mathbb{V}$ em conjuntos limitados de $\mathbb{N}$. Isso motiva o termo “transformação limitada”. De fato, se $A \subset \mathbb{V}$ é um conjunto limitado, existe $K > 0$ tal que $\|x\|_{\mathbb{V}} \leq K$ para todo $x \in A$. Sendo u limitada, temos

$$\|u(x)\|_{\mathbb{N}} \leq c\|x\|_{\mathbb{V}} \leq c \cdot K \quad \text{para todo } x \in A,$$

de onde segue que $u(A)$ é um subconjunto limitado de $\mathbb{N}$.

²Seja $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Dizemos que uma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{V}$ é uma *sequência de Cauchy* se, para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x_m\| < \epsilon \quad \text{para todos } n, m \geq N.$$

Definição A.156. Sejam $(\mathbb{V}, \|\cdot\|_{\mathbb{V}})$ e $(\mathbb{N}, \|\cdot\|_{\mathbb{N}})$ espaços normados sobre um corpo $\mathbb{F}$. Dizemos que uma transformação linear $u: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{N}$ é *contínua em* $x_0 \in \mathbb{V}$ quando, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(x_0, \epsilon) > 0$ tal que

$$x \in E, \|x - x_0\|_{\mathbb{V}} < \delta \Rightarrow \|u(x) - u(x_0)\|_{\mathbb{N}} < \epsilon.$$

Dizemos que u é *contínua* em $\mathbb{V}$, quando u é contínua em qualquer ponto de $\mathbb{V}$.

Definição A.157. Sejam $(\mathbb{V}, \|\cdot\|_{\mathbb{V}})$ e $(\mathbb{N}, \|\cdot\|_{\mathbb{N}})$ espaços normados sobre um corpo $\mathbb{F}$. Dizemos que uma transformação linear $u: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{N}$ é *uniformemente contínua* quando, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$x, y \in \mathbb{V}, \|x - y\|_{\mathbb{V}} < \delta \Rightarrow \|u(x) - u(y)\|_{\mathbb{N}} < \epsilon.$$

É claro que se u é uniformemente contínua em E , então u é contínua em E .

O resultado a seguir garante que toda transformação linear limitada entre espaços normados é (uniformemente) contínua, assim como toda transformação linear contínua entre espaços normados é limitada.

Teorema A.158. Sejam $(\mathbb{V}, \|\cdot\|_{\mathbb{V}})$ e $(\mathbb{N}, \|\cdot\|_{\mathbb{N}})$ espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{F}$ e $u: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{N}$ uma transformação linear. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) u é contínua;
- (ii) u é contínua na origem;
- (iii) u é limitada;
- (iv) u é uniformemente contínua.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii) : Sendo u contínua, segue por definição que u é contínua em todos os pontos de $\mathbb{V}$ e, por conseguinte, contínua na origem.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Como u é contínua na origem, para $\epsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x\|_{\mathbb{V}} < \delta \Rightarrow \|u(x)\|_{\mathbb{N}} < 1. \quad (\text{A.6})$$

Agora, para $y \in \mathbb{V} \setminus \{0\}$, temos que $\frac{\delta y}{2\|y\|_{\mathbb{V}}} \in \mathbb{V}$ (pois $\mathbb{V}$ é um espaço vetorial). Além disso,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\delta y}{2\|y\|_{\mathbb{V}}} \right\|_{\mathbb{V}} &= \frac{\delta}{2\|y\|_{\mathbb{V}}} \|y\|_{\mathbb{V}} = \frac{\delta}{2} < \delta \\ &\stackrel{(\text{A.6})}{\Rightarrow} \left\| u \left(\frac{\delta y}{2\|y\|_{\mathbb{V}}} \right) \right\|_{\mathbb{N}} < 1 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} \frac{\delta}{2\|y\|_{\mathbb{V}}} \|u(y)\|_{\mathbb{N}} < 1 \\ &\Rightarrow \|u(y)\|_{\mathbb{N}} < \frac{2}{\delta} \|y\|_{\mathbb{V}} = c\|y\|_{\mathbb{V}}, \quad c = \frac{2}{\delta}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|u(y)\|_{\mathbb{N}} < c\|y\|_{\mathbb{V}}, \text{ para todo } y \in \mathbb{V} \setminus \{0\},$$

onde em $(*)$ usamos o fato de u ser linear. Ainda, para $y = 0$, temos $\|u(0)\|_{\mathbb{N}} = 0$ (novamente usando que u é linear) e, portanto,

$$\|u(y)\|_{\mathbb{N}} \leq c\|y\|_{\mathbb{V}}, \text{ para todo } y \in \mathbb{V},$$

o que nos garante que u é limitada.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) : Sendo u limitada, existe $c > 0$ tal que

$$\|u(y)\|_{\mathbb{N}} \leq c\|y\|_{\mathbb{V}}, \text{ para todo } y \in \mathbb{V}.$$

Dessa forma, dados $x, y \in \mathbb{V}$, $x - y \in \mathbb{V}$, pois $\mathbb{V}$ é um espaço vetorial, e

$$\|u(x) - u(y)\|_{\mathbb{N}} = \|u(x - y)\|_{\mathbb{N}} \leq c\|x - y\|_{\mathbb{V}},$$

o que nos mostra que u é lipschitziana e, portanto, uniformemente contínua.

(iv) $\Rightarrow$ (i) : Se u é uniformemente contínua, então u é contínua pela definição de continuidade uniforme. $\square$

Sejam $(\mathbb{V}, \|\cdot\|_{\mathbb{V}})$ e $(\mathbb{N}, \|\cdot\|_{\mathbb{N}})$ espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{F}$. Considere $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{N})$ o espaço vetorial de todas as transformações lineares contínuas (limitadas) de $\mathbb{V}$ em $\mathbb{N}$, com as operações de soma e multiplicação por escalar:

$$(u + v)(x) = u(x) + v(x), \quad u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{N});$$

$$(\alpha u)(x) = \alpha v(x), \quad \alpha \in \mathbb{F}, \quad u \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{N}).$$

Proposição A.159. Se $(\mathbb{V}, \|\cdot\|_{\mathbb{V}})$ e $(\mathbb{N}, \|\cdot\|_{\mathbb{N}})$ são espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{F}$, então a função $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{N})} : \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|u\|_{\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{N})} = \sup\{\|u(x)\|_{\mathbb{N}} : x \in \mathbb{V}, \|x\|_{\mathbb{V}} \leq 1\}, \quad \text{para } u \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{N}), \quad (\text{A.7})$$

define uma norma em $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{N})$. Portanto, $(\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{N}), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{N})})$ é um espaço normado.

Demonstração. Para simplificar, denotaremos $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{N})}$ simplesmente por $\|\cdot\|$.

Se u é uma transformação linear contínua e, portanto, limitada (Teorema A.158), o número

$$\|u\| = \sup\{\|u(x)\|_{\mathbb{N}} : x \in \mathbb{V}, \|x\|_{\mathbb{V}} \leq 1\}$$

é finito. Mostremos que $\|\cdot\|$ define uma norma.

Primeiramente, note que $\|u\| \geq 0$, pois $\|u(x)\|_{\mathbb{N}} \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{V}$.

Queremos mostrar que $\|u\| = 0$ implica $u = 0$, isto é, que a norma definida realmente satisfaz a propriedade de separação. Temos

$$\begin{aligned} \|u\| = 0 &\iff \sup\{\|u(x)\|_{\mathbb{N}} : x \in \mathbb{V}, \|x\|_{\mathbb{V}} \leq 1\} = 0 \\ &\iff \|u(x)\|_{\mathbb{N}} = 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{V} \text{ com } \|x\|_{\mathbb{V}} \leq 1, \end{aligned}$$

pois o supremo de um conjunto de números reais não negativos é zero se, e somente se, todos os elementos do conjunto são iguais a zero.

Agora, queremos mostrar que $u(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{V}$. Seja $x \in \mathbb{V}$ arbitrário com $x \neq 0$. Então o vetor

$$\frac{x}{\|x\|_{\mathbb{V}}} \text{ satisfaz } \left\| \frac{x}{\|x\|_{\mathbb{V}}} \right\| = 1,$$

e portanto pertence ao conjunto sobre o qual o supremo foi tomado.

Pelo passo anterior, temos $\|u(y)\|_{\mathbb{N}} = 0$ para todo y com $\|y\|_{\mathbb{V}} \leq 1$. Logo, pela linearidade de u segue que

$$u\left(\frac{x}{\|x\|_{\mathbb{V}}}\right) = 0 \implies u(x) = \|x\|_{\mathbb{V}} \cdot u\left(\frac{x}{\|x\|_{\mathbb{V}}}\right) = \|x\|_{\mathbb{V}} \cdot 0 = 0.$$

Portanto, $u(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{V}$, isto é, $u = 0$.

Resumidamente:

$$\begin{aligned} \|u\| = 0 &\implies \|u(x)\|_{\mathbb{N}} = 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{V} \text{ com } \|x\|_{\mathbb{V}} \leq 1 \\ &\implies u(x) = 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{V} \text{ (pela linearidade de } u) \\ &\iff u = 0. \end{aligned}$$

Para a homogeneidade, seja $\alpha \in \mathbb{F}$ um escalar. Então,

$$\begin{aligned} \|\alpha u\| &= \sup\{\|(\alpha u)(x)\|_{\mathbb{N}} : x \in \mathbb{V}, \|x\|_{\mathbb{V}} \leq 1\} \\ &= \sup\{|\alpha| \|u(x)\|_{\mathbb{N}} : x \in \mathbb{V}, \|x\|_{\mathbb{V}} \leq 1\} \\ &= |\alpha| \sup\{\|u(x)\|_{\mathbb{N}} : x \in \mathbb{V}, \|x\|_{\mathbb{V}} \leq 1\} \\ &= |\alpha| \|u\|. \end{aligned}$$

Para a desigualdade triangular, temos:

$$\begin{aligned} \|u + v\| &= \sup\{\|(u + v)(x)\|_{\mathbb{N}} : x \in \mathbb{V}, \|x\|_{\mathbb{V}} \leq 1\} \\ &= \sup\{\|u(x) + v(x)\|_{\mathbb{N}} : x \in \mathbb{V}, \|x\|_{\mathbb{V}} \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|u(x)\|_{\mathbb{N}} + \|v(x)\|_{\mathbb{N}} : x \in \mathbb{V}, \|x\|_{\mathbb{V}} \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|u(x)\|_{\mathbb{N}} : x \in \mathbb{V}, \|x\|_{\mathbb{V}} \leq 1\} + \sup\{\|v(x)\|_{\mathbb{N}} : x \in \mathbb{V}, \|x\|_{\mathbb{V}} \leq 1\} \\ &= \|u\| + \|v\|. \end{aligned}$$

□

Observação A.160. Usando a linearidade de u , é possível verificar (veja [17, 18]) que

$$\|u\|_{\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{N})} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{V} \\ \|x\|_{\mathbb{V}} \leq 1}} \|u(x)\|_{\mathbb{N}} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{V} \\ \|x\|_{\mathbb{V}} = 1}} \|u(x)\|_{\mathbb{N}} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{V} \\ x \neq 0}} \frac{\|u(x)\|_{\mathbb{N}}}{\|x\|_{\mathbb{V}}}.$$

Observação A.161. O espaço vetorial $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{F})$ de todas as aplicações lineares contínuas (limitadas) de $\mathbb{V}$ em $\mathbb{F}$ é um espaço de Banach sob a norma dada em (A.7) (ou qualquer norma equivalente dada na Observação A.160), desde que $\mathbb{F}$ seja um espaço de Banach (veja [17, 18]).

Definição A.162. Se tomarmos $\mathbb{F}_0$ como o espaço vetorial topológico de $\mathbb{F}$ sobre si mesmo, o espaço

$$\mathbb{V}' = \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{F}_0),$$

munido da norma

$$\|u\| = \sup\{\|u(x)\|_{\mathbb{V}} : x \in \mathbb{V}, |x| \leq 1\},$$

é um espaço de Banach, denominado *espaço dual forte de $\mathbb{V}$* .

A.7.4 Outros exemplos de espaços normados

Os exemplos a seguir são fundamentais para conectarmos os assuntos até agora estudados com as aplicações do Capítulo 3. A teoria neles envolvidas pode ser consultada em [18, 19, 8].

Exemplo A.163. Seja X um conjunto não vazio. Denotemos por $B(X)$ o espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ das funções limitadas $f: X \rightarrow \mathbb{F}$. Dotando $B(X)$ da norma

$$\|f\| = \sup\{|f(t)| : t \in X\},$$

temos que $B(X)$ é um espaço de Banach.

Alguns subespaços naturalmente relevantes de $B(X)$ são:

- Se $X_0 \subseteq X$, o conjunto das funções $f \in B(X)$ que se anulam em X_0 é um subespaço fechado de $B(X)$.
- Se Σ é uma σ -álgebra de subconjuntos de X , o subconjunto $M(X, \Sigma)$ das funções Σ -mensuráveis em $B(X)$ é um subespaço fechado.
- Se X for um espaço topológico e $\mathcal{C}(X)$ o conjunto das funções contínuas $f: X \rightarrow \mathbb{F}$ que são limitadas, então $\mathcal{C}(X)$ é um subespaço fechado de $B(X)$.

Exemplo A.164. Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida, onde μ é uma medida positiva, contavelmente aditiva, definida sobre a σ -álgebra Σ . Para $1 \leq p < \infty$, definimos $\mathcal{L}^p$ como o conjunto das funções Σ -mensuráveis $f: X \rightarrow \mathbb{F}$ tais que

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty.$$

As desigualdades de Hölder e Minkowski garantem que $\mathcal{L}^p$ é um espaço vetorial e que $\|\cdot\|_p$ define uma seminorma.

Se denotamos por $\mathcal{N}_\mu$ o subespaço das funções nulas μ -quase sempre, então o espaço quociente

$$L^p(\mu) = \mathcal{L}^p / \mathcal{N}_\mu,$$

dotado da norma

$$\|[f]\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p},$$

é um espaço de Banach.

Além disso, $L^\infty(\mu)$ denota o espaço das classes de equivalência de funções essencialmente limitadas, isto é, tais que existe uma representante limitada fora de um conjunto de medida nula. Podemos identificá-lo com o quociente

$$L^\infty(\mu) = M(X, \Sigma) / (M(X, \Sigma) \cap \mathcal{N}_\mu),$$

onde $M(X, \Sigma)$ é o espaço das funções mensuráveis limitadas. Este também é um espaço de Banach, e sob certas condições é isomorfo a $\mathcal{C}(X)$, para algum espaço compacto apropriado X .

Os matemáticos por trás do teorema

O Teorema de Hahn-Banach, um dos pilares da Análise Funcional, leva o nome dos matemáticos Hans Hahn e Stefan Banach, que apresentaram formulações independentes do resultado em 1927 e 1929, respectivamente [20, 21]. No entanto, as raízes desse teorema remontam a uma versão anterior, formulada por Eduard Helly em 1912 [22].

Helly, matemático austríaco, demonstrou um caso particular do que viria a ser o Teorema de Hahn-Banach para o espaço $C[a, b]$ das funções contínuas sobre um intervalo fechado. Sua abordagem antecipou, de forma notável, conceitos centrais da teoria da dualidade funcional.

Durante a Primeira Guerra Mundial, Helly foi ferido por um tiro no pulmão e feito prisioneiro na Rússia. Apesar das difíceis condições, produziu diversos trabalhos em Análise Funcional enquanto estava confinado [23].

No período entre guerras, viu-se impossibilitado de assumir uma cátedra na Universidade de Viena, sendo considerado “velho demais e judeu demais” para o cargo [24]. Trabalhou, então, em um banco e posteriormente em uma companhia de seguros. Com a anexação da Áustria pela Alemanha nazista em 1938, emigrou para os Estados Unidos com a ajuda de Albert Einstein, que o auxiliou a obter uma posição no *Paterson Junior College*, em Nova Jersey. Em 1943, foi nomeado professor no Instituto de Tecnologia de Illinois, mas faleceu apenas cinco semanas depois, em decorrência de dois ataques cardíacos consecutivos — possivelmente agravados pelos ferimentos sofridos na guerra.

Hans Hahn, por sua vez, foi o primeiro a estabelecer formalmente o teorema que hoje leva seu nome [20]. Nascido em 1879 em Viena, Hahn foi uma figura central no desenvolvimento da Análise Funcional e um dos fundadores do Círculo de Viena, movimento filosófico-científico influente na primeira metade do século XX [25]. Durante a Primeira Guerra Mundial, serviu no exército austro-húngaro e também foi ferido em combate.

Entre seus alunos mais ilustres esteve Kurt Gödel, que defendeu seu doutorado sob sua orientação em 1929 [26].

Stefan Banach, considerado o fundador da Análise Funcional moderna, nasceu em março de 1892, em Cracóvia, então parte do Império Austro-Húngaro. Com a ocupação soviética de Lviv em 1939, após o início da Segunda Guerra Mundial, Banach pôde continuar seus trabalhos devido a uma convivência relativamente pacífica com o novo regime. No entanto, sua situação mudou drasticamente com a ocupação nazista em 1941.

Foi detido sob suspeita de envolvimento com moeda alemã e, mais tarde, para sobreviver, trabalhou em um laboratório alemão alimentando piolhos usados em pesquisas sobre doenças infecciosas [27].

Banach planejava transferir-se para Cracóvia após a guerra, para assumir uma cátedra na *Universidade Jaguelônica*. Contudo, faleceu em Lviv em 1945, vítima de um câncer pulmonar.