



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Métodos Matemáticos da Microeconomia

Renato Gomes Fiorotto

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática Universitária como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientador
Prof. Dr. Wladimir Seixas

2013

330 Fiorotto, Renato Gomes
F521m Métodos Matemáticos da Microeconomia/ Renato Gomes
Fiorotto- Rio Claro: [s.n.], 2013.
71 f.:fig.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
Orientador: Wladimir Seixas

1. Economia. 2. Cálculo Diferencial e Integral. I. Título

TERMO DE APROVAÇÃO

Renato Gomes Fiorotto

MÉTODOS MATEMÁTICOS DA MICROECONOMIA

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Wladimir Seixas
Orientador

Prof. Dr. Luis Antonio da Silva Vasconcellos
Departamento de Matemática
FC - Unesp - Campus de Bauru

Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti
Departamento de Matemática
IGCE - Unesp - Campus de Rio Claro

Rio Claro, 06 de Setembro de 2013

Aos meus amados pais, Laudir e Rose
Aos meus irmãos, Ricardo, Rodrigo e Danila.
Aos meus queridos amigos.
Dedico

Agradecimentos

A Deus por estar sempre intercedendo por mim, e por me conceder a graça de concluir mais esta etapa.

Aos meus pais, Laudir e Rose, e meus irmãos Ricardo, Rodrigo e Danila, e a todos os meus parentes. Por estarem sempre ao meu lado, pela confiança e pelo imenso amor dedicado a mim, e naqueles momentos mais difíceis de todo esse caminho que percorri até hoje, sempre acreditaram no meu potencial. O sucesso desse trabalho veio com muito esforço e dedicação, não desistindo nunca.

Ao meu professor orientador Prof. Dr. Wladimir Seixas, pelo apoio, pela orientação, dedicação e por acreditar nesse trabalho.

A todos os meus da pós-graduação: Nilson, Olívio, Leandro, Mariana, Edmar, Vinícius, Dênis, Juliano, João Paulo, Carlos e Edgard e aqueles que viajaram de Van todos as sextas feiras, Thaisa, Érica, Franciele. Aos meus amigos que moraram comigo em São José do Rio Preto: Diego Fiorotto, Renato (Tim), Rodrigo (Birruga), Rodrigo Marini, Gabriel, Allan, Guilherme (Radia), Igor. Aos meus amigos da Rep. Janelas: Breno (Danado), Leandro (Pinda), Paulo (Cabessa), Rodolfo (Xupeta), Bruno (Brunão), Luís Fernando (Panda), Miguel (Mig), Fernando (Tanabi), Filipe (Xiu). Aos amigos de graduação Edilberto (Porva), Caio (Sapo), Marcão (Marcos). Aos meus amigos do Farra: Felipe (Buck), Maicon (Mayquin), Victor (Filo), Lucas (Mac), André (Dedis), Matheus (Matt), Fernando (Fer), Hugo (Tarugo), Rafael (Marcha), Marcelo (Celin). E a todos os meus amigos de Olímpia que estiverem comigo me dando força nessa conquista. A todos os professores e funcionários do departamento de Matemática da UNESP, que direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo

Elaborou-se um texto voltado para os profissionais das áreas de Matemática e Economia, apresentando os pré-requisitos teóricos, os modelos matemáticos e o tratamento matemático da Microeconomia. Estudou-se a teoria da oferta e da demanda, as teorias de comportamento dos produtores e dos consumidores. Neste sentido, estudou-se os comportamentos das curvas de ofertas e curvas demanda. Na teoria de comportamento dos produtores e comportamento dos consumidores, viu-se os efeitos devido a mudança nos bens, a minimização dos custos e a maximização dos lucros.

Palavras-chave: Economia, Cálculo Diferencial e Integral.

Abstract

This text is indicated to the professionals of Mathematics and Economics, introducing the theoretical pre-requisites, the mathematical models and the mathematical treatment for the Microeconomics Theory. We studied supply and demand, the theory of behavior of producers and behavior theory of consumers. The main purpose was to analyze the mathematical methods of microeconomics. We studied the behavior of the supply curves and demand curves. In theory of the producers' behavior and consumers' behavior, we analyzed the cost minimization and profits maximization.

Keywords: Economics, Calculus.

Lista de Figuras

2.1	Equilíbrio da oferta e demanda	19
2.2	Excesso de oferta e escassez de demanda	20
2.3	Ciclo de teia de aranha estável	21
2.4	Ciclo de teia de aranha instável	22
2.5	Ciclo de teia de aranha contínuo	23
2.6	O efeito de um imposto sobre venda	25
2.7	O efeito de um aumento na renda ($m_2 > m_1$)	26
2.8	O efeito de um subsídio	28
2.9	Curva de demanda mais elástica no longo prazo do que no curto prazo	30
2.10	Curva de demanda menos elástica no longo prazo do que no curto prazo	30
2.11	Curvas de oferta primária e secundária	31
2.12	Mercado para um bem perecível	31
3.1	Um diagrama de isoquanta	35
3.2	Rendimentos decrescentes para z_i	35
3.3	Minimização do custo sujeito à $y = 4$	38
3.4	Minimização do custo sujeito à $F(z_1, z_2) = y$	40
3.5	Rendimentos de escala e custo médio	47
3.6	Maximização do Lucro	48
4.1	Curvas de Indiferença	54
4.2	Maximização da Utilidade	57
4.3	Preferências idênticas	60
4.4	Minimização das despesas	61
4.5	Preferências reveladas	62
4.6	Preferências reveladas	63
4.7	Preferências reveladas	64

Sumário

1	Introdução	15
2	Oferta e Demanda	17
2.1	Equilíbrio	18
2.2	O ciclo da teia de aranha	20
2.3	Estática comparativa	23
2.3.1	Efeito do imposto sobre vendas	23
2.3.2	Efeito da renda do consumidor	25
2.3.3	Efeitos de preço cruzado	26
2.4	Elasticidade	28
2.4.1	Elasticidade no curto prazo e no longo prazo	29
3	A Teoria de Comportamento dos Produtores	33
3.1	A empresa que maximiza os lucros	33
3.2	Rendimentos de escala e rendimentos para insumos	34
3.3	Minimização de custos	37
3.4	A Elasticidade de substituição	41
3.5	A função custo e a interpretação do multiplicador de Lagrange	42
3.6	Um exemplo de minimização de custo	43
3.7	Rendimentos de escala e a função custo	45
3.8	Maximização dos lucros	47
3.9	Um exemplo que maximiza o lucro	48
4	A Teoria do Comportamento dos Consumidores	53
4.1	Preferências e funções de utilidades	53
4.2	Maximização da utilidade e função da demanda	55
4.3	Minimização da despesa e funções da demanda compensada	60
4.4	Preferência revelada	61
4.5	Função de Produção de Cobb-Douglas	66
4.5.1	Introdução	66
4.5.2	Hipóteses	67
4.5.3	Resolução	67

5 Conclusão	69
Referências	71

1 Introdução

Em razão do atual ambiente econômico globalizado e altamente competitivo, faz com que o estudo aprofundado do sistema econômico, visando entender, bem como, melhorar os resultados de todas as unidades do sistema produtivo se torne cada vez mais primordial para a sobrevivência e crescimento das empresas. Tais unidades abrangem consumidores, trabalhadores, produtores, empresa e mercado.

Dentro deste contexto, a microeconomia procura analisar o mercado e outros tipos de mecanismos que estabelecem preços relativos entre os produtos e serviços, alocando de modo alternativo os recursos dos quais dispõe determinados indivíduos organizados numa sociedade. Sabe-se que a regra utilizada para estabelecer estes preços é a lei da oferta e demanda (ou procura). A demanda ou procura de um indivíduo por um determinado bem ou serviço refere-se a quantidade desse bem que ele está disposto a comprar. Por outro lado, a oferta de um determinado bem refere-se a quantidade desse bem que o produtor dispõe para vender no mercado. O equilíbrio é dado pela união dos dois lados do mercado, o da oferta e o da demanda. Afim de estabelecer o preço e a quantidade de equilíbrio, utiliza-se normalmente a estática comparativa, com o propósito de estudar possíveis mudanças na oferta e demanda de um mercado.

De encontro com as necessidades de melhorias impostas pela alta competitividade, a teoria de comportamento dos produtores estuda como as empresas podem minimizar os seus custos de produção e com isso maximizar os seus lucros. No presente trabalho, será feita uma revisão sobre como encontrar os pontos de máximo e mínimo de uma função que determina os custos e lucros. Para tanto, será utilizado o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar os possíveis pontos de máximo e mínimo local.

Dentro deste sistema econômico de mercado e consumidor, os consumidores têm renda limitada, a qual pode ser gasta em uma ampla variedade de bens e serviços. A teoria do consumidor descreve, com base em suas preferências, maximizar o próprio bem-estar optando por comprar mais unidades de determinado bem e, em contrapartida, adquirir menos de outro bem. As preferências reveladas das pessoas não são observáveis, o que se observa são as escolhas que as pessoas fazem. Para analisar essa teoria comportamental do consumidor utiliza-se, por exemplo, a função de produção de Cobb-Douglas.

2 Oferta e Demanda

Neste capítulo será discutido como a alocação de recursos deve ser entendida de maneira a organizar a sociedade nas suas atividades econômicas. Neste sentido, as curvas de oferta e demanda são utilizadas, tanto para descrever o sistema de preço, como o mecanismo de mercado. O entendimento de como a economia se comportou no passado leva a previsão de como as variações nas condições econômicas podem afetar o preço e a produção. O comportamento de fornecedores e consumidores de produtos será analisado separadamente e então considerados conjuntamente, interagindo entre si, no mercado.

Considere um determinado bem. Seja p o seu preço e y a oferta deste bem, isto é, y é a quantidade total que os vendedores querem vender. Seja x a demanda do bem, isto é, x é a quantidade total que os consumidores querem comprar.

Supõe-se ainda que vendedores e compradores satisfazem as seguintes condições:

- I. A quantidade a ser vendida depende do preço, isto é, $y = y(p)$ e a oferta é cada vez maior com o aumento de preços. Matematicamente,

$$y'(p) = \frac{dy}{dp} > 0,$$

onde $y'(p)$ é a derivada de y com respeito a variável p . A função $y = y(p)$ é chamada de função oferta. Supõe-se assim que a função oferta é uma função crescente.

- II. A quantidade demandada pelos consumidores depende do preço, isto é, $x = x(p)$ e diminui a medida que o preço aumenta. Matematicamente,

$$x'(p) = \frac{dx}{dp} < 0,$$

onde $x'(p)$ é a derivada de x com respeito a variável p . $x = x(p)$ será denominada função demanda e é suposta ser decrescente.

A justificativa econômica para as suposições anteriores se dá pelo fato de que se o preço sobe, a negociação da oferta do produto torna-se mais rentável para o vendedor, estimulando-o pagar aos trabalhadores mais horas para a produção do bem. O vendedor

estará desta maneira investindo na expansão do tamanho do negócio, tornando-o mais atraente. Pessoas envolvidas em outras atividades serão atraídas para este novo negócio devido a perspectiva de fornecimento de produtos com maior rentabilidade. Tudo isso faz aumentar a oferta, com um aumento na produção. Pelo lado da demanda, um aumento nos preços faz consumidores diminuírem a compra deste produto, ou mesmo substituírem o bem por outro, por conta do alto preço em relação a outros produtos que consumidores desejam comprar. Um aumento nos preços pode levar alguns consumidores a reduzir suas compras dos produtos a zero fazendo a demanda diminuir.

2.1 Equilíbrio

O equilíbrio ocorre quando a quantidade que os consumidores desejam comprar é igual a quantidade que os vendedores desejam vender, ocorrendo assim o equilíbrio do mercado.

Definição 2.1. *O gráfico da função oferta definido pelo conjunto*

$$\{(y, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ tal que } y = y(p) \text{ para todo } p \in \mathbb{R}, p > 0\}$$

*é denominado de **curva da oferta** y e fornece a quantidade de mercadoria que os produtores estão dispostos a vender a um determinado preço.*

Definição 2.2. *O gráfico da função demanda definido pelo conjunto*

$$\{(x, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ tal que } x = x(p) \text{ para todo } p \in \mathbb{R}, p > 0\}$$

*é denominado de **curva da demanda** x e fornece a quantidade de mercadoria que os consumidores desejam comprar a medida que o preço varia.*

Note que a curva da oferta é ascendente pois, quanto mais alto for o preço, maior será a capacidade e o desejo das empresas de produzir e vender, ou seja, $y'(p) > 0$. A curva demanda é descendente porque, os consumidores geralmente estão dispostos a comprar quantidades maiores se o preço está mais baixo, $x'(p) < 0$.

Observação 2.1. A definição de gráfico não é a encontrada usualmente nos textos matemáticos, ou seja,

$$\text{Gráfico de } f = \{(x, y), \text{ onde } y = f(x) \text{ para todo } x \in D(f)\}$$

sendo $D(f)$ o domínio da função f . Por se tratar de uma definição, esta é apenas uma convenção. A razão principal para a adoção do par ordenado trocado se dá pelo fato de que a curva de demanda aparecerá de forma decrescente e o inverso ocorrendo para a oferta. Isto concorda com o entendimento prático no caso econômico.

Definição 2.3. *Seja $\bar{p}$ tal que*

$$y(\bar{p}) = x(\bar{p}).$$

$\bar{p}$ é chamado de **preço de equilíbrio**, isto é, o preço pelo qual a quantidade que os vendedores desejam vender é igual a quantidade que os consumidores desejam comprar. Em outras palavras, é o preço no qual a quantidade ofertada é igual a quantidade demandada. Denota-se por $\bar{q} = y(\bar{p}) = x(\bar{p})$ a quantidade para o preço de equilíbrio $\bar{p}$.

Observe que a existência do preço de equilíbrio é garantida pelo fato de que as curvas de oferta e demanda possuem declividades para cima e para baixo respectivamente.

Os gráficos das funções $y = y(p)$ e $x = x(p)$ serão colocados no mesmo diagrama apesar de ser o mais usual desenhá-los em gráficos separados. O ponto em que os dois gráficos se cruzam será o preço de equilíbrio $\bar{p}$. Ver Figura 2.1.

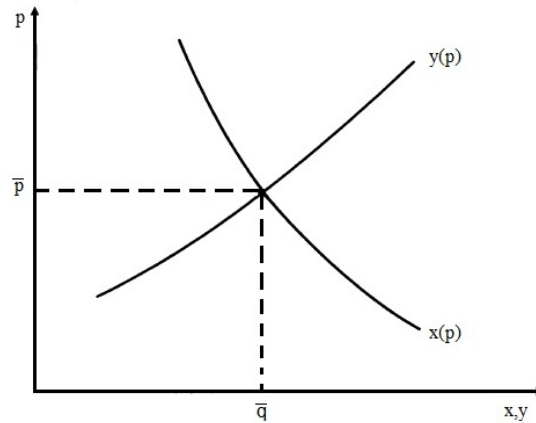


Figura 2.1: Equilíbrio da oferta e demanda

Para compreender melhor o significado econômico do preço de equilíbrio, suponha p_1 o preço de um determinado bem com valor inicialmente superior ao do preço de equilíbrio $\bar{p}$. Como já visto, os produtores procurariam produzir e vender quantidades maiores do que os compradores estariam dispostos a adquirir. Haveria um **excesso de oferta**, isto é, a quantidade oferecida excede a quantidade demandada. Para que tal excedente pudesse ser vendido, ou pelo menos parar de aumentar, os produtores começariam a reduzir seus preços. À medida que o preço caísse, a quantidade demandada aumentaria e a quantidade ofertada diminuiria, até que o preço de equilíbrio, $\bar{p}$ fosse alcançado.

Agora considere que o preço inicial seja o valor p_2 inicialmente inferior ao preço de equilíbrio $\bar{p}$. Ocorreria então, uma **escassez de oferta**, ou seja, a quantidade demandada excede a quantidade ofertada. Os consumidores não conseguiriam comprar toda a quantidade que desejariam. Isso ocasionaria uma pressão ascendente sobre os preços, à medida que os compradores se mostrassem dispostos a pagar mais pelas quantidades existentes e os produtores reagissem com aumento de preço e de produção.

Novamente, o preço acabaria atingindo o valor $\bar{p}$. A Figura 2.2 ilustra o que foi discutido acima.

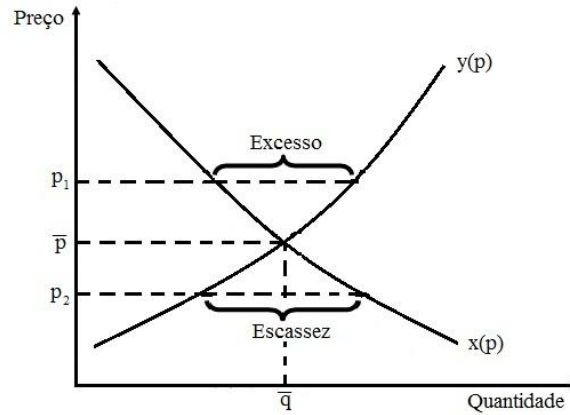


Figura 2.2: Excesso de oferta e escassez de demanda

2.2 O ciclo da teia de aranha

Passa-se agora a discutir um modelo econômico em que o comportamento atual é baseado no padrão de comportamento em momentos passados. O setor da economia que retrata muito bem tal situação é o do setor da agropecuária onde os empresários rurais tomam suas decisões de produzir baseados em experiências passadas. Por exemplo, considere um produtor de leite que tem que comprar ração para o gado antes de vender o leite. Suponha que a quantidade de leite que ele tenha a venda em um determinado ano t dependa das decisões tomadas nos anos anteriores, $(t-1)$, $(t-2)$, $\dots$. Se o preço do leite está em alta, a tendência é que os produtores queiram vender mais. Por outro lado, se os preços estiverem em baixa, eles pretendem vender menos. Levando-se em conta esses fatos, o produtor de leite terá que prever os preços para o próximo ano. Ele poderia utilizar os preços do ano corrente como base para o ano seguinte.

Para ilustrar o que está descrito acima, considere as seguintes **equações de comportamento linear** para a oferta e demanda:

$$\begin{aligned} y_t &= a + bp_{t-1} \\ x_t &= \alpha - \beta p_t, \end{aligned}$$

onde α , β , a e b são constantes positivas e t e $(t-1)$ são índices que se referem ao ano atual e ao ano anterior respectivamente. A condição de equilíbrio no mercado do produto deve ocorrer quando $x(\bar{p}) = y(\bar{p})$. Assim,

$$\alpha - \beta p_t = a + bp_{t-1}.$$

Tem-se que o preço atual está relacionado ao preço do ano anterior, ou seja,

$$p_t = \frac{\alpha - a}{\beta} - \frac{b}{\beta} p_{t-1}. \quad (2.1)$$

O preço de equilíbrio $\bar{p}$ é o único valor que satisfaz $p_t = p_{t-1} = \bar{p}$, ou seja, o preço de equilíbrio é o valor que permanece inalterado ao longo dos anos. A equação (2.1) implica que

$$\bar{p} = \frac{\alpha - a}{\beta} - \frac{b}{\beta} \bar{p}.$$

Tem-se três possibilidades relacionadas aos valores para b e β . São elas $b > \beta$, $b < \beta$ e $b = \beta$. Cada possibilidade irá determinar as posições relativas entre as retas que descrevem as funções de oferta e demanda.

Passa-se agora a analisar cada uma das possibilidades.

$b > \beta$: Neste caso, a declividade da oferta é maior, em valor absoluto, que a declividade da demanda. No tempo ($t = 1$), o preço do produto será p_1 . Os produtores estarão motivados a ofertarem q_2 unidades do produto no período ($t = 2$). Por sua vez, os consumidores só estarão dispostos a demandarem a quantidade q_2 somente se o preço for p_2 , sendo $p_2 < p_1$. Isto causa um excesso de oferta no mercado do produto e como consequência é verificada uma redução no preço do produto até p_2 , com $p_2 < p_1$. Baseado no preço do produto no período ($t = 2$), os produtores são conduzidos a ofertarem q_3 unidades do produto no período ($t = 3$) com $q_2 > q_3 > q_1$. Por sua vez, os consumidores estarão dispostos a demandarem esta quantidade q_3 o que leva a uma escassez de oferta. Isto representa maior motivação para os produtores, cuja resposta é dada pelo aumento da quantidade ofertada no período ($t = 4$). Todo esse processo de ajuste continua de maneira convergente, cada vez mais se aproximando da situação de equilíbrio dada por $\bar{p}$ e $\bar{q}$. Este caso está resumido na Figura 2.3. Dada a sua forma geométrica este ciclo é conhecido como o *ciclo da teia de aranha estável*.

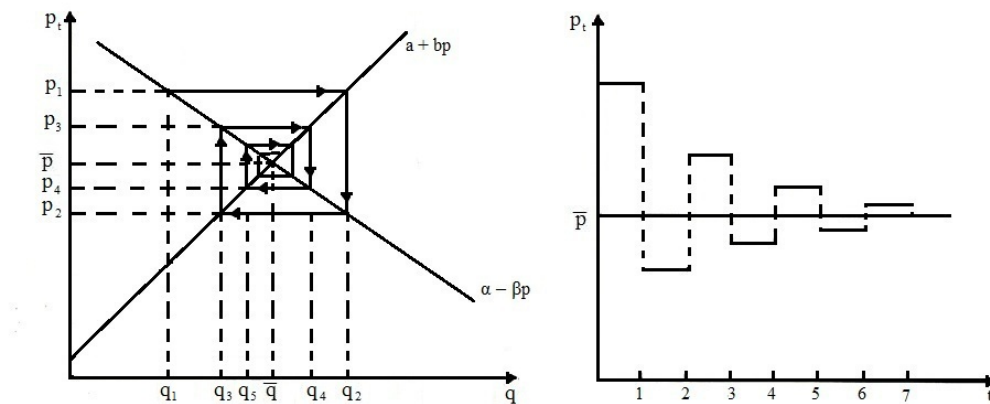


Figura 2.3: Ciclo de teia de aranha estável

$b < \beta$: Neste caso, a declividade da demanda é maior, em valor absoluto, que a declividade da oferta. No tempo ($t = 1$), o preço do produto será p_1 . Os produtores estarão motivados a ofertarem q_2 unidades do produto no período ($t = 2$), os consumidores por sua vez, só estarão dispostos a demandarem esta quantidade q_2 se o preço for p_2 , sendo $p_1 > p_2$. Isto causa um excesso de oferta no mercado do produto. Como consequência, é verificada uma queda no preço do produto até p_2 . Baseado no preço do produto vigente no período ($t = 2$), os produtores são conduzidos a ofertarem q_3 unidades do produto no período ($t = 3$). Dadas às condições de demanda do mercado, os preços voltarão a se elevar até p_3 , sendo $p_3 > p_1 > p_2$. Isto representa maior motivação para os produtores, cuja resposta é dada pelo aumento da quantidade ofertada no período ($t = 4$) com $q_4 > q_2 > q_3$. Esse processo de ajustamento continua de maneira divergente, cada vez mais se afastando da situação de equilíbrio dada por $\bar{p}$ e $\bar{q}$. Este caso está resumido na Figura 2.4, cujo ciclo é conhecido como o *ciclo da teia de aranha instável*.

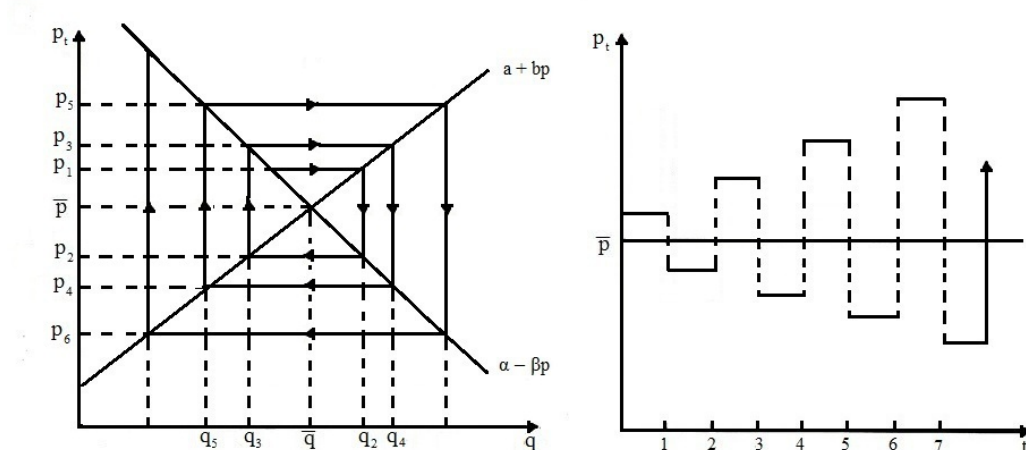


Figura 2.4: Ciclo de teia de aranha instável

$b = \beta$: Neste caso, a declividade da oferta é igual, em valor absoluto, à declividade da demanda. No tempo ($t = 1$), preço do produto será p_1 . Os produtores estarão motivados a ofertarem q_2 unidades do produto no período ($t = 2$). Mas os consumidores só demandarão esta quantidade q_2 , se o preço do produto for p_2 , sendo $p_2 < p_1$. Isto provoca um excesso de oferta no período ($t = 2$), faz com que os produtores reduzam a produção no período ($t = 3$), ofertando q_3 unidades do produto com $q_3 = q_1$. Dadas às condições atuais no período ($t = 3$), os preços voltarão a se elevar, até atingirem a posição observada no período ($t = 1$). A partir daí, o processo se repete indefinidamente, período após período, sem que se estabeleça uma posição de equilíbrio entre preço e quantidade produzida. Este caso está resumido na Figura 2.5. Dada a sua forma geométrica este ciclo é conhecido como o *ciclo da teia de aranha contínuo*.

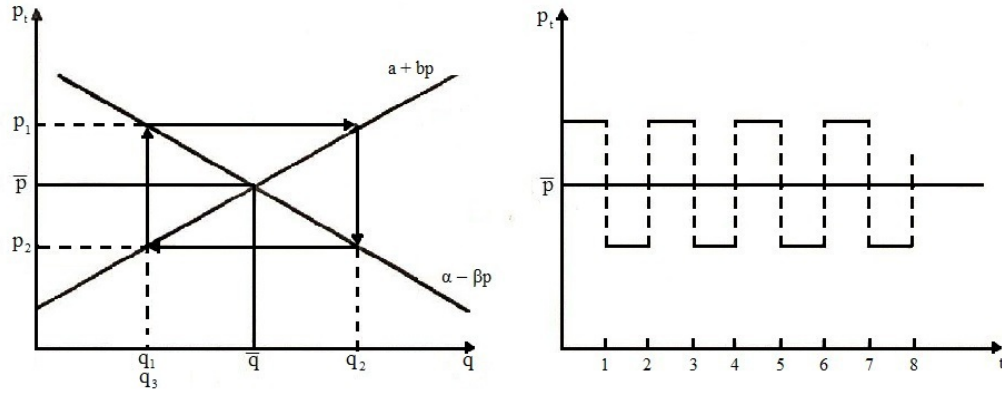


Figura 2.5: Ciclo de teia de aranha contínuo

2.3 Estática comparativa

Definição 2.4. Variáveis determinadas fora do modelo são chamadas de *variáveis exógenas*.

Definição 2.5. Variáveis determinadas dentro do modelo são chamadas de *variáveis endógenas*.

Denomina-se **estática comparativa** a análise dos efeitos que as alterações sofridas pelas variáveis exógenas afetam os valores nas variáveis endógenas. No gráfico da oferta e demanda, uma mudança exógena aparece como um movimento em uma das curvas, enquanto que uma alteração nas variáveis endógenas é representada pela mudança do ponto de equilíbrio, representado pela interseção das curvas ao longo da outra curva.

2.3.1 Efeito do imposto sobre vendas

Considere um mercado no qual exista um imposto de quantidade i cobrado sobre cada unidade de produto vendido. Seja p o preço pelo qual o vendedor paga pelo bem. Se π é o preço que o consumidor paga por este bem então

$$\pi = p + i. \quad (2.2)$$

p , π e q são variáveis endógenas enquanto i é variável exógena, ou seja, determinada pelo governo.

Assim, a oferta é uma função de p , mas a demanda é uma função de π . O equilíbrio ocorrerá quando

$$y(p) = x(\pi). \quad (2.3)$$

Para um valor fixado de i , as equações (2.2) e (2.3) constituem um sistema de duas de equações simultâneas nas duas incógnitas p e π . Não sabendo a forma exata da

função y e x não pode-se resolver a equação para p e π , mas é possível discutir o que ocorre a medida que i varia. Neste sentido, suponha que para alguns valores de i os preços p e π satisfazem as equações (2.2) e (2.3). Desta forma, os preços p e π serão funções implícitas na variável i , ou seja, $p = p(i)$ e $\pi = \pi(i)$. Derivando implicitamente as equações (2.2) e (2.3) com respeito a i e aplicando a regra da cadeia, têm-se respectivamente que

$$\frac{d\pi}{di} = \frac{dp}{di} + 1, \quad (2.4)$$

$$y'(p) \frac{dp}{di} = x'(\pi) \frac{d\pi}{di}. \quad (2.5)$$

Assim, a medida que i varia, mudanças em π devem ser iguais a variações em $p + i$, ou seja, variações em y acarretam em variações em x de forma a manterem o mercado em equilíbrio. Resolvendo (2.4) e (2.5) para $\frac{dp}{di}$ e $\frac{d\pi}{di}$, tem-se

$$\begin{cases} \frac{dp}{di} - \frac{d\pi}{di} = -1 \\ y'(p) \frac{dp}{di} - x'(\pi) \frac{d\pi}{di} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ y'(p) & -x'(\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dp}{di} \\ \frac{d\pi}{di} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{pmatrix} \frac{dp}{di} \\ \frac{d\pi}{di} \end{pmatrix} = \frac{1}{y'(p) - x'(\pi)} \begin{pmatrix} -x'(\pi) & 1 \\ -y'(p) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x'(\pi)}{y'(p) - x'(\pi)} \\ \frac{y'(p)}{y'(p) - x'(\pi)} \end{pmatrix}.$$

Uma vez que $x'(\pi) < 0$ e $y'(p) > 0$ segue que $\frac{dp}{di} < 0$ e $\frac{d\pi}{di} > 0$. A mudança em quantidade é dada por ambos os lados da equação (2.5), uma vez que $q = y(p) = x(\pi)$. Assim,

$$\frac{dq}{di} = y'(p) \frac{dp}{di} \Rightarrow \frac{dq}{di} = \frac{x'(\pi)y'(p)}{y'(p) - x'(\pi)}. \quad (2.6)$$

Conclui-se que $\frac{dq}{di} < 0$. Um aumento no imposto implica em um aumento no preço pago pelo consumidor. Isto leva a uma redução no preço recebido pelo fornecedor e portanto a uma redução na quantidade vendida. Esta situação é ilustrada na Figura 2.6.

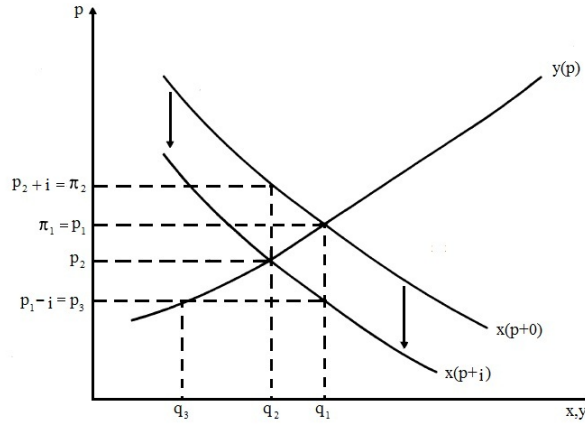


Figura 2.6: O efeito de um imposto sobre venda

2.3.2 Efeito da renda do consumidor

Existem outras variáveis que podem afetar a oferta e a demanda. Por exemplo, renda do consumidor, bem como o preço do bem. Neste caso, se p e m denotam o preço e a renda média de um consumidor neste mercado respectivamente, tem-se que

$$x = x(p, m).$$

Diz-se que x é uma função de mais de uma variável independente. Vê-se que a oferta depende do preço, assim como a demanda depende do preço e da renda do consumidor. Define-se o equilíbrio como

$$y(p) = x(p, m). \quad (2.7)$$

Se a renda m varia, a demanda x se altera, para manter o equilíbrio, a oferta y terá de mudar, isto é, o preço p deve mudar. Logo, a igualdade (2.7) significa que o preço p é uma função implícita de m , ou seja, $p = p(m)$. A medida que m varia, para o mercado permanecer em equilíbrio, (2.7) deve variar na mesma razão ou taxa. Assim, derivando em relação à variável m e aplicando a regra da cadeia na relação (2.7) tem-se

$$y'(p) \frac{dp}{dm} = \frac{\partial x}{\partial p} \frac{dp}{dm} + \frac{\partial x}{\partial m} \frac{dm}{dm}. \quad (2.8)$$

Resolvendo (2.8) para $\frac{dp}{dm}$ segue que

$$y'(p) \frac{dp}{dm} - \frac{\partial x}{\partial p} \frac{dp}{dm} = \frac{\partial x}{\partial m} \Rightarrow \frac{dp}{dm} \left(y'(p) - \frac{\partial x}{\partial p} \right) = \frac{\partial x}{\partial m}.$$

Como $y'(p) - \frac{\partial x}{\partial p} > 0$ tem-se

$$\frac{dp}{dm} = \frac{\frac{\partial x}{\partial m}}{y'(p) - \frac{\partial x}{\partial p}}.$$

Como visto anteriormente, a quantidade vendida q no equilíbrio é dada por $q = y(p) = x(p, m)$. Derivando a quantidade q em relação a renda m obtém-se que

$$\frac{dq}{dm} = y'(p) \frac{dp}{dm} = \frac{y'(p) \frac{\partial x}{\partial m}}{y'(p) - \frac{\partial x}{\partial p}}.$$

Supondo que para a maioria dos bens $\frac{\partial x}{\partial m} > 0$ segue que $\frac{dq}{dm} > 0$ e $\frac{dp}{dm} > 0$. A Figura 2.7 ilustra o efeito da renda do consumidor.

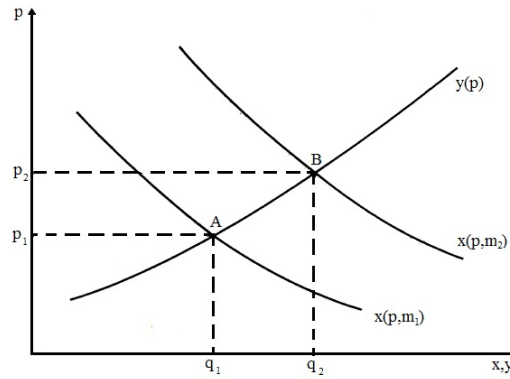


Figura 2.7: O efeito de um aumento na renda ($m_2 > m_1$)

2.3.3 Efeitos de preço cruzado

A demanda ou oferta de um bem é afetada pelos preços de outros bens. Por exemplo, a demanda para o chá pelo preço do café, a demanda pela lã pelo preço da carne de carneiro, e assim por diante. Assim, o equilíbrio em um mercado depende do equilíbrio em outros mercados.

Considere o mercado de combustíveis. Por exemplo, o efeito de um subsídio para o etanol sobre o preço da gasolina. O equilíbrio para os mercados de etanol e gasolina é definido pelas seguintes equações:

$$y^g(p^g) = x^g(p^g, \pi^e), \quad (2.9)$$

$$y^e(p^e) = x^e(p^g, \pi^e), \quad (2.10)$$

$$\pi^e = p^e - s, \quad (2.11)$$

onde p^g é o preço da gasolina, p^e é o preço do etanol recebido pelo fornecedor, π^e é o preço pago pelo consumidor de etanol, s denota o subsídio dado ao etanol, e y^g , y^e , x^g e x^e sendo as ofertas e as demandas para gasolina e etanol respectivamente.

Derivando em relação à variável de subsídio s as relações (2.9), (2.10) e (2.11), segue que

$$\frac{dy^g}{ds} = \frac{dy^g}{dp^g} \frac{dp^g}{ds} = \frac{\partial x^g}{\partial p^g} \frac{dp^g}{ds} + \frac{\partial x^g}{\partial \pi^e} \frac{d\pi^e}{ds}, \quad (2.12)$$

$$\frac{dy^e}{ds} = \frac{dy^e}{dp^e} \frac{dp^e}{ds} = \frac{\partial x^e}{\partial p^g} \frac{dp^g}{ds} + \frac{\partial x^e}{\partial \pi^e} \frac{d\pi^e}{ds}, \quad (2.13)$$

$$\frac{d\pi^e}{ds} = \frac{dp^e}{ds} - 1. \quad (2.14)$$

Substituindo (2.14) em (2.12) e (2.13) tem-se

$$\frac{dy^g}{dp^g} \frac{dp^g}{ds} = \frac{\partial x^g}{\partial p^g} \frac{dp^g}{ds} + \frac{\partial x^g}{\partial \pi^e} \left(\frac{dp^e}{ds} - 1 \right), \quad (2.15)$$

$$\frac{dy^e}{dp^e} \frac{dp^e}{ds} = \frac{\partial x^e}{\partial p^g} \frac{dp^g}{ds} + \frac{\partial x^e}{\partial \pi^e} \left(\frac{dp^e}{ds} - 1 \right). \quad (2.16)$$

Isto resulta em um sistema de duas equações nas incógnitas $\frac{dp^g}{ds}$ e $\frac{dp^e}{ds}$, ou seja,

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy^g}{dp^g} - \frac{\partial x^g}{\partial p^g} \right) \frac{dp^g}{ds} - \frac{\partial x^g}{\partial \pi^e} \frac{dp^e}{ds} &= -\frac{\partial x^g}{\partial \pi^e}, \\ -\frac{\partial x^e}{\partial p^g} \frac{dp^g}{ds} + \left(\frac{dy^e}{dp^e} - \frac{\partial x^e}{\partial \pi^e} \right) \frac{dp^e}{ds} &= -\frac{\partial x^e}{\partial \pi^e}. \end{aligned}$$

Escrevendo o sistema acima na sua forma matricial segue que,

$$\begin{pmatrix} \frac{dy^g}{dp^g} - \frac{\partial x^g}{\partial p^g} & -\frac{\partial x^g}{\partial \pi^e} \\ -\frac{\partial x^e}{\partial p^g} & \frac{dy^e}{dp^e} - \frac{\partial x^e}{\partial \pi^e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dp^g}{ds} \\ \frac{dp^e}{ds} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial x^g}{\partial \pi^e} \\ \frac{\partial x^e}{\partial \pi^e} \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{pmatrix} \frac{dp^g}{ds} \\ \frac{dp^e}{ds} \end{pmatrix} = \frac{-1}{\left(\frac{dy^g}{dp^g} - \frac{\partial x^g}{\partial p^g} \right) \left(\frac{dy^e}{dp^e} - \frac{\partial x^e}{\partial \pi^e} \right) - \frac{\partial x^e}{\partial p^g} \frac{\partial x^g}{\partial \pi^e}} \begin{pmatrix} \frac{dy^e}{dp^e} - \frac{\partial x^e}{\partial \pi^e} & \frac{\partial x^g}{\partial \pi^e} \\ \frac{\partial x^e}{\partial p^g} & \frac{dy^g}{dp^g} - \frac{\partial x^g}{\partial p^g} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x^g}{\partial \pi^e} \\ \frac{\partial x^e}{\partial \pi^e} \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$\frac{dp^g}{ds} = \frac{-\left(\frac{dy^e}{dp^e} - \frac{\partial x^e}{\partial \pi^e} \right) \frac{\partial x^g}{\partial \pi^e} - \frac{\partial x^g}{\partial \pi^e} \frac{\partial x^e}{\partial \pi^e}}{\left(\frac{dy^g}{dp^g} - \frac{\partial x^g}{\partial p^g} \right) \left(\frac{dy^e}{dp^e} - \frac{\partial x^e}{\partial \pi^e} \right) - \frac{\partial x^e}{\partial p^g} \frac{\partial x^g}{\partial \pi^e}} \quad (2.17)$$

$$= \frac{-\frac{dy^e}{dp^e} \frac{\partial x^g}{\partial \pi^e}}{\left(\frac{dy^g}{dp^g} - \frac{\partial x^g}{\partial p^g} \right) \left(\frac{dy^e}{dp^e} - \frac{\partial x^e}{\partial \pi^e} \right) - \frac{\partial x^e}{\partial p^g} \frac{\partial x^g}{\partial \pi^e}}, \quad (2.18)$$

$$(2.19)$$

$$\frac{dp^e}{ds} = \frac{-\frac{\partial x^e}{\partial p^g} \frac{\partial x^g}{\partial \pi^e} - \left(\frac{dy^g}{dp^g} - \frac{\partial x^g}{\partial p^g} \right) \frac{\partial x^e}{\partial \pi^e}}{\left(\frac{dy^g}{dp^g} - \frac{\partial x^g}{\partial p^g} \right) \left(\frac{dy^e}{dp^e} - \frac{\partial x^e}{\partial \pi^e} \right) - \frac{\partial x^e}{\partial p^g} \frac{\partial x^g}{\partial \pi^e}}. \quad (2.20)$$

Passa-se a discutir o sinal da quantidade que aparece nos denominadores das equações (2.20) e (2.19). Inicialmente têm-se as suposições usuais, ou seja, $\frac{dy^g}{dp^g} > 0$, $\frac{dy^e}{dp^e} > 0$, $\frac{\partial x^g}{\partial p^g} < 0$ e $\frac{\partial x^e}{\partial \pi^e} < 0$. Isto implica que $\frac{dy^g}{dp^g} - \frac{\partial x^g}{\partial p^g} > 0$ e $\frac{dy^e}{dp^e} - \frac{\partial x^e}{\partial \pi^e} > 0$.

Parte-se agora da suposição de que $\frac{dp^g}{ds} < 0$ e $\frac{d\pi^e}{ds} < 0$. Economicamente o que se supõe é que um subsídio para o consumo de etanol reduz o preço para consumidores de ambos gasolina e etanol. A primeira vista este parece um problema bem simples, pois um subsídio para o consumo de etanol reduzirá o preço para consumidores mesmo se algum subsídio seja absorvido pelos fornecedores cobrando um preço mais elevado. O preço mais baixo para o etanol reduzirá a demanda para a gasolina, a qual leva seu preço para baixo. A figura 2.8 (a) mostra essa situação. No gráfico de oferta e demanda para o etanol contra o preço pago pelo consumidor π^g , o efeito de um aumento no subsídio é um deslocamento para baixo da curva de oferta pela quantidade aumentada. Se p^g é constante o equilíbrio move de A para B . A queda em π^e faz com que a curva x^g desloque para baixo. A demanda para etanol reage a queda no preço do gasolina e o equilíbrio no mercado de etanol desloca-se de a para b como mostra a figura 2.8 (b). A queda em p^g reduz a demanda para a gasolina, deslocando o equilíbrio para C , que por sua vez tem o efeito sobre o mercado de etanol deslocando para c . Para evitar a conclusão errada que um subsídio pequeno para consumidor de etanol causaria uma espiral sem fim para baixo em ambos os preço de etanol e gasolina, é necessária a suposição que o processo gradualmente atinge um fim. Neste sentido deve ocorrer $\left(\frac{dy^g}{dp^g} - \frac{\partial x^g}{\partial p^g}\right) \left(\frac{dy^e}{dp^e} - \frac{\partial x^e}{\partial \pi^e}\right) - \frac{\partial x^e}{\partial p^g} \frac{\partial x^g}{\partial \pi^e} > 0$, pois se esta condição não for satisfeita o equilíbrio não será estável.

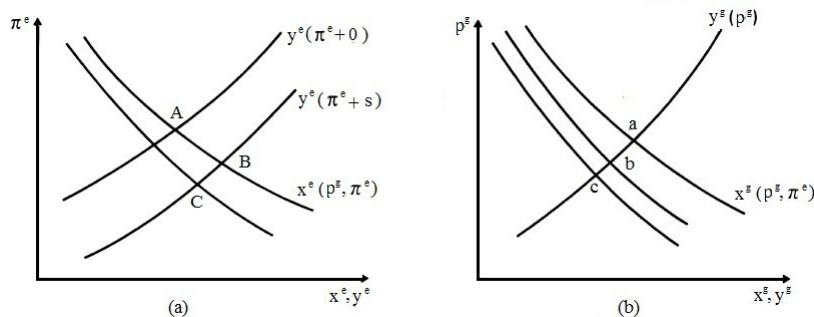


Figura 2.8: O efeito de um subsídio

2.4 Elasticidade

A elasticidade mede o quanto uma variável pode ser afetada pela variação de outra, ou seja, trata-se de um número que fornece a variação percentual que ocorrerá em uma variável como reação a um aumento de um ponto percentual em outra variável. Assim,

elasticidade é sinônimo de sensibilidade, resposta, reação de uma variável, em face de mudança em outra variável.

Definição 2.6. *Seja a função oferta dada por $y = y(p)$. A elasticidade e_{yp} de preço da oferta é a variação da quantidade da oferta dada uma variação no preço do bem, ou seja,*

$$e_{yp} = \frac{p}{y} \frac{dy}{dp}.$$

Assim,

$$e_{yp} = \frac{p}{y} \frac{dy}{dp} \approx \frac{p}{y} \frac{\Delta y}{\Delta p} = \frac{\Delta y/y}{\Delta p/p},$$

onde Δy é a variação na oferta causada por uma pequena variação Δp no preço.

Definição 2.7. *Seja a função demanda dada por $x = x(p, m)$. A elasticidade e_{xp} de preço da demanda é a variação na quantidade de demanda, dada uma variação do bem, ou seja,*

$$e_{xp} = \frac{p}{x} \frac{\partial x}{\partial p}.$$

Definição 2.8. *Seja a função da demanda dada por $x = x(p, m)$. A elasticidade e_{xm} da renda da demanda é a variação percentual da quantidade de demanda, dada uma variação percentual da renda do consumidor, ou seja,*

$$e_{xm} = \frac{m}{x} \frac{\partial x}{\partial m}.$$

2.4.1 Elasticidade no curto prazo e no longo prazo

Para a análise da oferta e da demanda se faz necessário uma distinção entre curto e longo prazo. Desta maneira, entende-se por longo prazo, o período de tempo suficientemente longo para que os consumidores e os produtores possam se ajustar completamente à mudança de preço.

Exemplo 2.1. A demanda da gasolina é muito mais elástica no longo prazo do que no curto prazo. Um aumento no preço tem um pequeno efeito na quantidade de gasolina demandada. Motoristas podem utilizar menos o carro, mas não mudarão imediatamente o tipo de carro que dirigem. No longo prazo, contudo, eles adquirirão veículos menores e mais econômicos, de tal modo que o efeito do aumento do preço sobre a quantidade de gasolina demandada será maior. Portanto, a demanda é mais elástica no longo prazo do que no curto prazo. Veja figura 2.9.

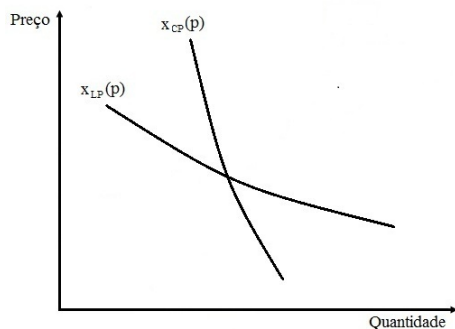


Figura 2.9: Curva de demanda mais elástica no longo prazo do que no curto prazo

Exemplo 2.2. Considere agora a demanda por automóveis. Se o preço aumenta, os consumidores inicialmente se recusam a comprar um carro novo, e a quantidade demandada diminui drasticamente. Entretanto, no longo prazo os carros velhos irão se desgastar e precisarão ser substituídos por outros, de tal modo que a quantidade anual demandada aumentará. A demanda é, portanto menos elástica no longo prazo do que no curto prazo. Ver figura 2.10.

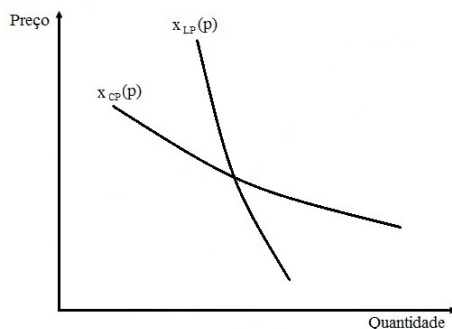


Figura 2.10: Curva de demanda menos elástica no longo prazo do que no curto prazo

Exemplo 2.3. Considere agora a oferta pelo cobre. A oferta primária do cobre é mais elástica a longo prazo, pois, se o preço aumenta, as empresas gostariam de produzir mais. No entanto, as empresas estão limitadas pelas restrições da capacidade de produção no curto prazo. No longo prazo, elas podem ampliar sua capacidade e produzir mais. Por outro lado, se o preço aumenta, há um grande incentivo para converter sucata em nova oferta. Desta maneira, inicialmente a oferta de cobre secundário (isto é, a oferta a partir da sucata) aumenta significativamente. No entanto, à medida que o estoque de sucata diminui, a oferta de cobre secundário também se contrai. A oferta de cobre secundário é, então, mais elástica no curto prazo que a longo prazo. As figuras 2.11 (a) e (b) mostram as curvas de oferta primária e secundária respectivamente.

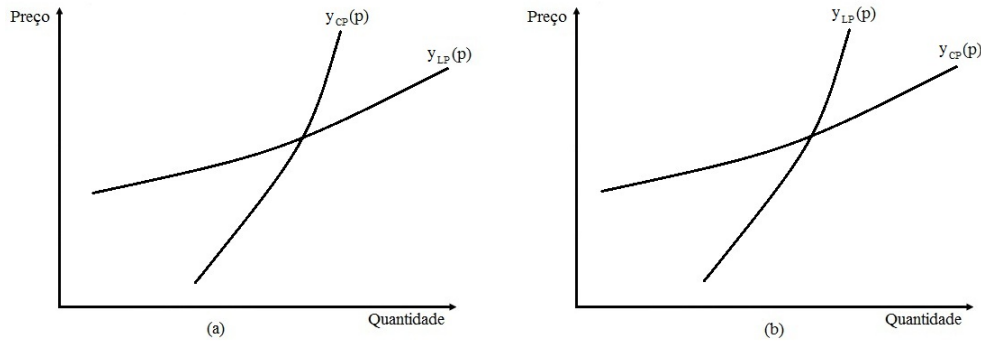


Figura 2.11: Curvas de oferta primária e secundária

Exemplo 2.4. Considere agora o mercado de bens perecíveis, por exemplo, o do peixe fresco. Sabe-se que a qualidade do peixe diminui dentro de um dia mesmo se refrigerado. O estoque das peixarias é máximo quando do início das vendas pela manhã. Se a demanda é menor do que o esperado, eles enfrentam a perspectiva de ficarem com os peixes não vendidos e que não podem ser armazenados para venda no dia seguinte. Assim, o preço será cortado a um nível tal que todo o estoque seja vendido. Este é mostrado na figura 2.12.

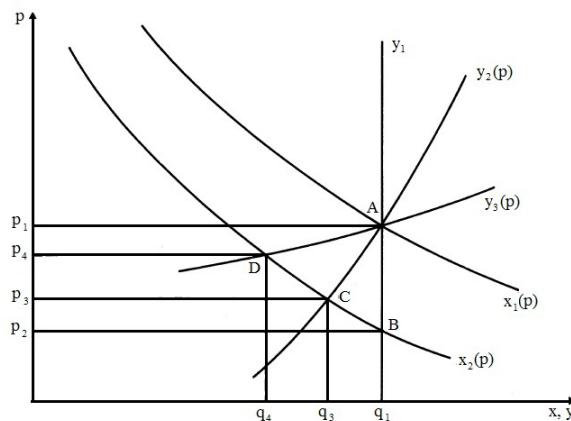


Figura 2.12: Mercado para um bem perecível

Suponha que a demanda tenha sido há algum tempo descrita pela curva de demanda x_1 e o equilíbrio tenha ocorrido no ponto A. As peixarias estão satisfeitas em vender a quantidade q_1 diariamente no preço p_1 . Suponha que algum fato faça com que a demanda de peixes fresco decline. A curva de demanda desloca-se de x_1 para x_2 . As peixarias tem o estoque q_1 para vender e o preço terá de ser cortado para p_2 pois cada peixaria prefere diminuir o preço do que ficar com peixes não vendidos. Desta forma, o equilíbrio será agora o ponto B. Essencialmente a curva de oferta é a reta vertical y_1 . A elasticidade da oferta é zero.

Nos dias subsequentes, as peixarias tem a possibilidade de variação do estoque disponível para venda, e espera-se que eles reajam aos preços baixos, reduzindo a quantidade fornecida. Tem-se a curva de oferta y_2 e um novo equilíbrio agora em C . Embora C é um equilíbrio, no sentido de que as peixarias juntas fornecem voluntariamente q_1 no preço p_1 , estas por outro lado desejam fornecer q_3 no preço p_3 . No entanto, eles estarão menos satisfeitos com essa situação do que estiveram no equilíbrio A . Diante de um preço menor alguns podem decidir fazer algo inteiramente diferente, ou seja, algumas peixarias serão fechadas ou convertidas para venda de outros bens. A quantidade fornecida cai e o ponto de equilíbrio desloca-se ao longo da curva da demanda para um ponto D . A curva de oferta é a curva mais elástica y_3 .

3 A Teoria de Comportamento dos Produtores

3.1 A empresa que maximiza os lucros

Definição 3.1. *Insumo* é todo bem ou serviço utilizado na produção de um outro bem ou serviço.

Um insumo inclui cada um dos elementos (matérias-primas, bens intermediários, uso de equipamentos, capital, horas de trabalho, etc.) necessários para produzir mercadorias ou serviços. No seu conceito mais amplo, insumo é a combinação de fatores da produção, diretos (matérias-primas) e indiretos (mão-de-obra, energia, tributos), que entram na elaboração de certa quantidade de bens ou serviços.

Denota-se por $z_1, z_2, \dots, z_n$ as quantidades dos insumos necessários para produzir um produto cuja quantidade é denotada por y . Tem-se então a seguinte função de produção

$$y = F(z_1, z_2, \dots, z_n), \quad (3.1)$$

a qual fornece a quantidade do produto que pode ser produzida a partir de um conjunto de quantidades de insumos. Diferentes empresas podem ter diferentes funções de produção.

O objetivo da empresa a ser considerado é a maximização dos lucros. Se os insumos $z_1, z_2, \dots, z_n$ tem preços $w_1, w_2, \dots, w_n$ respectivamente, o custo dos insumos para a empresa será

$$Custo = w_1 z_1 + w_2 z_2 + \dots + w_n z_n = \sum_{i=1}^n w_i z_i.$$

Por outro lado, se o preço do produto é p , a receita de venda é dada por py . O lucro da empresa será então

$$Lucro = Receita - Custo = py - \sum_{i=1}^n w_i z_i.$$

Utilizando a relação (3.1) entre y e $z_1, z_2, \dots, z_n$, o objetivo da empresa será o de maximizar o lucro, ou seja,

$$\underset{z_1, z_2, \dots, z_n}{\text{maximizar}} \quad pF(z_1, z_2, \dots, z_n) - \sum_{i=1}^n w_i z_i, \quad (3.2)$$

onde escreve-se $z_1, z_2, \dots, z_n$ abaixo da palavra "maximizar", no sentido de que estas são variáveis que a empresa pode escolher, enquanto os preços são dados.

No problema geral (3.2), defini-se todas as derivadas parciais em relação às variáveis $z_1, z_2, \dots, z_n$ iguais a zero, ou seja,

$$p \frac{\partial F}{\partial z_i} = w_i \quad \text{para } i = 1, \dots, n. \quad (3.3)$$

Definição 3.2. *O produto marginal de um insumo i é o quanto a quantidade do produto varia ao variar a quantidade do insumo i em uma unidade.*

Existe uma lógica econômica simples para as condições (3.3). O lado direito da equação é o custo da utilização de uma unidade extra do insumo i . O lado esquerdo é o efeito no produto de uma unidade extra do insumo i multiplicado pelo preço do produto. $\frac{\partial F}{\partial z_i}$ é chamado de produto marginal do insumo i e $p \frac{\partial F}{\partial z_i}$, o valor do produto marginal, ou seja, é a receita recebida como resultado da utilização de uma unidade extra do insumo i . Se a empresa escolheu um conjunto de insumos $z_1, z_2, \dots, z_n$ na qual, por exemplo, $p \frac{\partial F}{\partial z_i} < w_i$, para algum i , então ela poderá aumentar os seus lucros através da redução da quantidade de z_i para que este subtraia mais do valor custo do que da receita.

3.2 Rendimentos de escala e rendimentos para insumos

Considere $y = F(z_1, z_2, \dots, z_n)$ função de produção para os insumos $z_1, z_2, \dots, z_n$.

Definição 3.3. *Uma isoquanta representa todas as combinações de insumos que oferecem o mesmo nível do produto. Graficamente, uma isoquanta será uma curva de nível para a função produto y .*

Deseja-se saber como o produto responde às mudanças em insumos. Neste sentido, considere o caso particular de uma função $y = F(z_1, z_2)$ para dois insumos z_1 e z_2 . A figura 3.1 apresenta um diagrama onde a quantidade z_1 e z_2 estão representadas sobre os eixos horizontal e vertical respectivamente. Os valores de y para os valores 10, 20 e 30 são representados pelas curvas de nível ou isoquantas. Existem dois tipos distintos de mudanças de insumos que devem ser considerados. O primeiro é exemplificado

pela seta de A para B no diagrama isoquanta na figura 3.1, ou seja, z_2 constante e z_1 crescente. O outro movimento é representado de A para C no diagrama onde z_2 é crescente com z_1 constante.

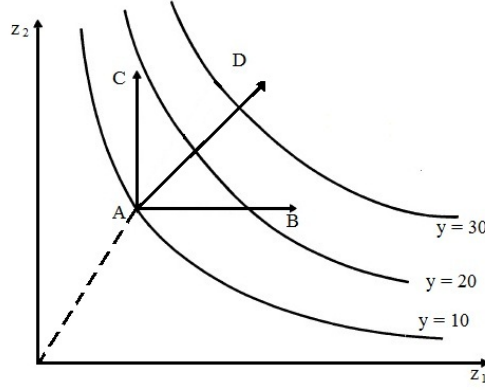


Figura 3.1: Um diagrama de isoquanta

No caso geral da função de produção $y = F(z_1, z_2, \dots, z_n)$ o efeito de tais movimentos é calculado pelas derivadas parciais. Se z_i muda com todos os outros insumos mantidos constantes, a mudança em y será dada por $\frac{\partial F}{\partial z_i}$. Esta derivada parcial, que pode também ser denotada como F_i , é o produto marginal do insumo i .

Em geral, uma função de produção tem a propriedade do produto marginal $\frac{\partial F}{\partial z_i}$ decrescer conforme z_i cresce. Esta propriedade é chamada de **rendimentos decrescentes** para o insumo i . A figura 3.2 mostra a relação entre y e z_i para valores dados de $z_j = \text{constante}$ para todo $j = 1, \dots, n$ com $j \neq i$.

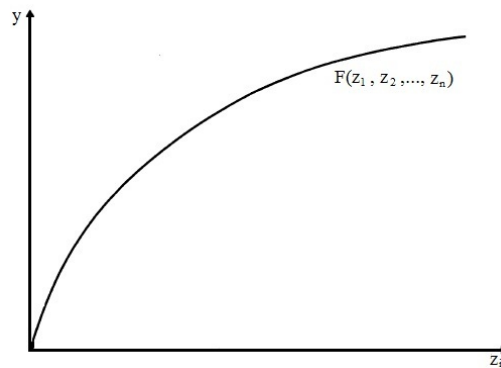


Figura 3.2: Rendimentos decrescentes para z_i

Para estudar o comportamento de $\frac{\partial F}{\partial z_i}$ deriva-se $\frac{\partial F}{\partial z_i}$ com respeito a z_i , ou seja,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z_i^2} = \frac{\partial}{\partial z_i} \left(\frac{\partial F}{\partial z_i} \right), \quad (3.4)$$

a derivada parcial de segunda ordem de F em relação a z_i . Para rendimentos decrescentes exige-se que $\frac{\partial^2 F}{\partial z_i^2} < 0$.

Um segundo tipo de mudança de insumos ocorre quando todos os insumos variam juntos com a mesma taxa. Isto é exemplificado, para o caso de dois insumos, pela seta de A para D na figura 3.1. Em geral, um aumento para o vetor insumo z é obtido multiplicando por uma constante k . Se para $k > 1$

$$F(kz) = kF(z), \quad (3.5)$$

a função de produção é dita ter **rendimentos constantes de escala**. Se

$$F(kz) > kF(z), \quad (3.6)$$

a função de produção tem **rendimentos crescentes de escala**. Caso contrário, ou seja, se

$$F(kz) < kF(z), \quad (3.7)$$

a função tem **rendimentos decrescentes de escala**.

Exemplo 3.1. Considere a função de produção $y = z_1^{1/2} z_2^{1/2}$. Os rendimentos para ambos os insumos são decrescentes pois

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z_1^2} = -\frac{1}{4} z_1^{-3/2} z_2^{1/2} < 0 \quad e \quad \frac{\partial^2 y}{\partial z_2^2} = -\frac{1}{4} z_1^{1/2} z_2^{-3/2} < 0,$$

para todo $z_1, z_2 > 0$.

Além disso, a função de produção tem rendimentos constantes de escala pois

$$F(kz_1, kz_2) = (kz_1)^{1/2} (kz_2)^{1/2} = (k^2 z_1 z_2)^{1/2} = k(z_1 z_2)^{1/2} = kF(z_1, z_2),$$

para $k > 1$.

Exemplo 3.2. Considere a função de produção $y = z_1^{2/3} z_2^{1/2}$. Os rendimentos para ambos insumos são decrescentes pois

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z_1^2} = -\frac{2}{9} z_1^{-4/3} z_2^{1/2} < 0 \quad e \quad \frac{\partial^2 y}{\partial z_2^2} = -\frac{1}{4} z_1^{2/3} z_2^{-3/2} < 0,$$

para todo $z_1, z_2 > 0$.

Os rendimentos de escala são crescentes, pois a função de produção é

$$F(kz_1, kz_2) = (kz_1)^{2/3} (kz_2)^{1/2} = k^{2/3} z_1^{2/3} k^{1/2} z_2^{1/2} = k^{7/6} z_1^{2/3} z_2^{1/2} > k z_1^{2/3} z_2^{1/2} = kF(z_1, z_2), \text{ para } k > 1.$$

Os exemplos acima enfatizam a diferença entre rendimentos de escala e rendimentos para insumos.

3.3 Minimização de custos

Considere uma empresa que, sabendo a quantidade do produto y que se deseja produzir, tem como objetivo minimizar o custo da produção deste produto. Então escreve-se este objetivo como

$$\begin{aligned} & \underset{z_1, z_2, \dots, z_n}{\text{minimizar}} \quad w_1 z_1 + w_2 z_2 + \dots + w_n z_n, \\ & \text{sujeito à } F(z) = y, \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde y é uma constante. Neste problema, as variáveis $z_1, z_2, \dots, z_n$ que minimizam a função $w_1 z_1 + w_2 z_2 + \dots + w_n z_n$ devem ser escolhidas de forma a satisfazer $F(z) = y$. Defina a função

$$L(z_1, \dots, z_n, \lambda) = w_1 z_1 + \dots + w_n z_n + \lambda(y - F(z_1, \dots, z_n)).$$

L é chamada de função lagrangeana e é uma função de $(n + 1)$ variáveis, ou seja, $z_1, z_2, \dots, z_n, \lambda$. Derivando com respeito a cada uma destas variáveis e igualando-as a zero obtém-se um conjunto de $(n + 1)$ equações, ou seja,

$$w_i - \lambda \frac{\partial F}{\partial z_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.9)$$

$$y - F(z) = 0. \quad (3.10)$$

Os valores de $z_1, z_2, \dots, z_n$ procurados devem satisfazer as equações (3.9) e (3.10). Neste caso (3.9) pode ser reescrita como

$$\lambda = \frac{w_i}{\partial F / \partial z_i}. \quad (3.11)$$

Definição 3.4. *O custo marginal representa um acréscimo no custo total que ocorre quando se aumenta a quantidade em uma unidade dos bens produzidos (ou a redução no custo total após a redução em uma unidade na quantidade produzida).*

Custos marginais são crescentes à medida que se vão produzir mais unidades do bem pois, a partir de certo ponto, para conseguir mais uma unidade produzida é necessário acrescentar cada vez mais unidades do fator produtivo.

Uma vez que w_i é o custo de uma unidade extra do insumo i , enquanto $\frac{\partial F}{\partial z_i}$ é o produto marginal da unidade extra, a razão entre ambas será o custo por unidade (ou custo marginal) para se obter mais produto usando mais do insumo i . Suponha que (3.11) não seja satisfeita de modo que, $\frac{w_i}{\partial F / \partial z_i} > \frac{w_j}{\partial F / \partial z_j}$ para todo $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$. Então o custo de produção da quantidade fixa y do produto pode ser reduzida através de uma redução pequena em z_i e elevando z_j o suficiente para manter $F(z_1, z_2, \dots, z_n)$ constante. Desta maneira, (3.8) não ocorre se (3.9) não é satisfeita. Deste modo, as n equações em (3.9) são condições necessárias para (3.8).

Definição 3.5. Uma linha de isocusto é formada pelo conjunto de combinações de fatores produtivos que têm o mesmo custo total.

Exemplo 3.3.

$$\begin{aligned} & \underset{z_1, z_2}{\text{minimizar}} \quad 2z_1 + \frac{1}{2}z_2 \\ & \text{sujeito à} \quad z_1^{1/2} z_2^{1/2} = 4. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Na restrição $z_1^{1/2} z_2^{1/2} = 4$, a figura 3.3 mostra a única isoquanta $y = 4$. O valor de custo é $2z_1 + \frac{1}{2}z_2$ e varia com z_1 e z_2 . A reta que liga os pontos $(z_1, z_2) = (0, 8)$, ao ponto $(z_1, z_2) = (2, 0)$ representa todos os pontos em que o custo do insumo é 4. Tal reta é chamada de isocusto e é uma curva de nível da função $2z_1 + \frac{1}{2}z_2$, da mesma forma que uma isoquanta é uma curva de nível da função $F(z_1, z_2)$. Na figura 3.3 são mostradas também as linhas de isocusto correspondentes aos custos de insumos 8 e 12. As linhas de isocusto formam um conjunto de retas paralelas e as linhas de isocusto próximas a origem representam níveis mais baixos dos custos dos insumos.

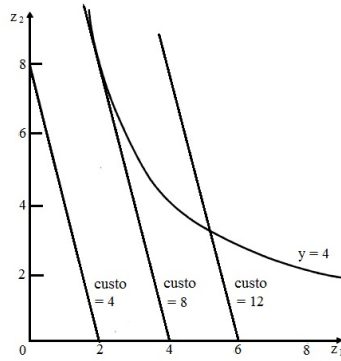


Figura 3.3: Minimização do custo sujeito à $y = 4$

O problema descrito por (3.12) tem por objetivo, em termos do diagrama, o de alcançar o ponto sobre a isoquanta $y = 4$ que está sobre a linha de isocusto mais próxima da origem. Isto ocorre para a linha de isocusto $2z_1 + \frac{1}{2}z_2 = 8$, no ponto onde a linha de isocusto é tangente à isoquanta. Pela técnica da função lagrangeana pode-se determinar a resposta do problema. A função lagrangeana é dada por

$$L(z_1, z_2, \lambda) = 2z_1 + \frac{1}{2}z_2 + \lambda(4 - z_1^{1/2} z_2^{1/2}). \quad (3.13)$$

Derivando com respeito a z_1 , z_2 e λ respectivamente e igualando a zero segue que

$$\begin{aligned} 2 - \frac{1}{2}\lambda z_1^{-1/2} z_2^{1/2} &= 0, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda z_1^{1/2} z_2^{-1/2} &= 0, \\ 4 - z_1^{1/2} z_2^{1/2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Isolando λ nas duas primeiras equações, tem-se

$$\frac{1}{2}\lambda z_1^{-1/2} z_2^{1/2} = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{z_1^{-1/2} z_2^{1/2}},$$

$$\frac{1}{2}\lambda z_1^{1/2} z_2^{-1/2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{z_1^{1/2} z_2^{-1/2}},$$

e igualando-as resulta que,

$$\frac{1}{z_1^{1/2} z_2^{-1/2}} = \frac{4}{z_1^{-1/2} z_2^{1/2}} \Rightarrow \frac{z_2^{1/2}}{z_2^{-1/2}} = \frac{4z_1^{1/2}}{z_1^{-1/2}} \Rightarrow z_2 = 4z_1.$$

Substituindo $z_2 = 4z_1$ na equação (3.14) (c) segue que

$$4 - z_1^{1/2}(4z_1)^{1/2} = 0 \Rightarrow 4 - 2z_1 = 0 \Rightarrow z_1 = 2.$$

Logo, $z_2 = 8$. Substituindo esses valores na primeira ou segunda equação obtém-se que $\lambda = 2$. Assim, esses valores fornecem a solução de (3.14) e quando substituídos em $2z_1 + \frac{1}{2}z_2$ tem-se o valor 8.

Observação 3.1. Uma linha de isocusto é dada por $w_1 z_1 + w_2 z_2 = c$ e pode ser escrita como $z_2 = \frac{c}{w_2} - \left(\frac{w_1}{w_2}\right) z_1$ sendo que w_1, w_2 são constantes e $-\left(\frac{w_1}{w_2}\right)$ é a inclinação da linha de isocusto e $\frac{c}{w_2}$ é o ponto onde a linha de isocusto intercepta o eixo z_2 .

Nota-se assim que a solução para o problema de minimização de custo será o ponto onde uma linha de isocusto é tangente ao isoquanta na linha mais próxima da origem.

Considere agora um mercado de dois bens. Seja $y = F(z_1, z_2)$ a função produção e suponha que z_2 seja uma função implícita de z_1 , isto é, $z_2 = z_2(z_1)$. Derivando a função de produção com respeito a z_1 e recordando que y é constante em uma isoquanta, tem-se

$$\frac{\partial F}{\partial z_1} + \frac{\partial F}{\partial z_2} \left(\frac{dz_2}{dz_1}\right)_y = 0, \quad (3.15)$$

onde $(dz_2/dz_1)_y$ significa a derivada da função implícita definida pela isoquanta y . Assim, a inclinação da isoquanta é dada pela derivada

$$\left(\frac{dz_2}{dz_1}\right)_y = -\frac{\partial F/\partial z_1}{\partial F/\partial z_2}. \quad (3.16)$$

Uma vez que $\frac{\partial F}{\partial z_1}$ e $\frac{\partial F}{\partial z_2}$ são ambas positivas, esta inclinação é negativa, como pode ser visto na figura 3.4.

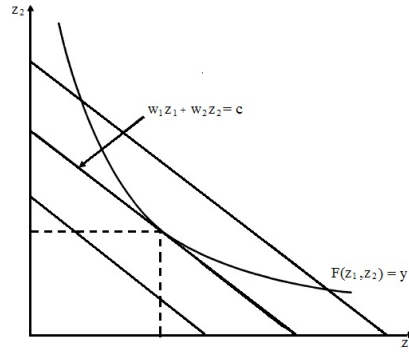


Figura 3.4: Minimização do custo sujeito à $F(z_1, z_2) = y$

Assim, tem-se estabelecido que o valor absoluto da inclinação da isoquanta é dada pela taxa dos produtos marginais.

Definição 3.6. *Taxa marginal de substituição é o quanto um consumidor está disposto trocar um bem que possui por outro, a fim de manter a sua produção constante, permanecendo sob a mesma curva de indiferença.*

Desta forma, para um mercado de dois bens, a taxa marginal de substituição será a taxa na qual z_2 pode ser substituído por z_1 mantendo y constante. Assim, a solução para o problema de minimização de custo é dada por dois requisitos:

- (i) (z_1, z_2) deve estar sobre a isoquanta;
- (ii) a inclinação da isoquanta é igual a inclinação da linha de isocusto no ponto (z_1, z_2) .

A partir desses requisitos temos duas equações:

$$F(z_1, z_2) = y,$$

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial z_1}}{\frac{\partial F}{\partial z_2}} = \frac{w_1}{w_2},$$

as quais são obtidas igualando as derivadas da função lagrangeana a zero e então eliminando λ .

Na figura 3.4, a isoquanta está "curvada para fora da origem", pois o ponto de tangência entre a linha de isocusto e a isoquanta é o ponto onde o custo de produção y está sendo minimizado.

Se a função de produção tem a isoquanta "curvada para a origem" esta é dita quase-côncava. Formalmente, a quase-concavidade requer que A e B estejam ou acima ou sobre a isoquanta. A maneira mais simples para verificar esta condição é descobrir como a taxa marginal de substituição varia com $\frac{z_1}{z_2}$. Na figura 3.4, como $\frac{z_1}{z_2}$ aumenta ao

longo da isoquanta, a inclinação muda de quase vertical para quase horizontal. Assim, a taxa marginal de substituição é uma função decrescente de $\frac{z_1}{z_2}$, ou seja,

$$\frac{d}{d(z_1/z_2)} \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial z_1}}{\frac{\partial F}{\partial z_2}} \right) \leq 0, \quad (3.17)$$

Uma função de produção com esta propriedade de diminuição na taxa marginal de substituição é claramente quase-côncava.

3.4 A Elasticidade de substituição

Considere o caso de dois insumos z_1 e z_2 . Mede-se a sensibilidade de $\frac{z_1}{z_2}$ para mudança em $\frac{w_1}{w_2}$ pela elasticidade de substituição, ou seja,

$$\sigma = \frac{w_1/w_2}{z_1/z_2} \frac{d(z_1/z_2)}{d(w_1/w_2)}. \quad (3.18)$$

Observa-se que a taxa marginal de substituição depende da proporção da quantidade de insumos $\frac{z_1}{z_2}$, e que um aumento em $\frac{w_1}{w_2}$ causa uma queda em $\frac{z_1}{z_2}$. O tamanho da queda resultante depende da forma da isoquanta, ou seja, quanto menor e menos curvada é a isoquanta, maior a mudança.

A elasticidade determina o que acontece com a parte dos custos pagos pela empresa a cada insumo a medida que a taxa dos preços muda, isto é,

$$\frac{d}{d(w_1/w_2)} \left(\frac{w_1 z_1}{w_2 z_2} \right) = \frac{z_1}{z_2} + \frac{w_1}{w_2} \frac{d(z_1/z_2)}{d(w_1/w_2)} = \frac{z_1}{z_2} (1 + \sigma). \quad (3.19)$$

Logo, se $\sigma > -1$, um aumento em w_i aumenta parte do insumo i . Por outro lado, se $\sigma < -1$, um aumento em w_i reduz parte do insumo i .

Exemplo 3.4. Se $y = (z_1^{1/2} + z_2^{1/2})^2$. Então

$$\frac{\partial F}{\partial z_1} = 2(z_1^{1/2} + z_2^{1/2}) \frac{1}{2} z_1^{-1/2} = (z_1^{1/2} + z_2^{1/2}) z_1^{-1/2}$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial z_2} = 2(z_1^{1/2} + z_2^{1/2}) \frac{1}{2} z_2^{-1/2} = (z_1^{1/2} + z_2^{1/2}) z_2^{-1/2}.$$

Logo,

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial z_1}}{\frac{\partial F}{\partial z_2}} = \left(\frac{z_2}{z_1} \right)^{1/2}.$$

A taxa de minimização do custo do insumo satisfaz

$$\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{1/2} = \frac{w_1}{w_2}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado tem-se

$$\frac{z_2}{z_1} = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2,$$

ou seja,

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{-2}. \quad (3.20)$$

Derivando (3.20) em relação à $\left(\frac{w_1}{w_2}\right)$ e substituindo em (3.18) segue que

$$\sigma = \frac{w_1/w_2}{z_1/z_2}(-2) \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{-3}. \quad (3.21)$$

Substituindo (3.20) em (3.21) tem-se

$$\sigma = \frac{w_1/w_2}{(w_1/w_2)^{-2}}(-2) \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{-3} = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^3 (-2) \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{-3} = -2. \quad (3.22)$$

Por outro lado,

$$\frac{w_1 z_1}{w_2 z_2} = \left(\frac{w_1}{w_2}\right) \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{-2} = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{-1}. \quad (3.23)$$

Assim, cada parte do insumo é uma função decrescente de seu preço, correspondendo ao fato que a elasticidade de substituição foi superior a 1.

3.5 A função custo e a interpretação do multiplicador de Lagrange

Definição 3.7. O valor real do custo de produção y quando os custos são minimizados

é $\sum_{i=1}^n w_i z_i(w_1, w_2, \dots, w_n, y)$. Tal função é chamada de função custo.

Denota-se por $c(w_1, w_2, \dots, w_n, y)$ o custo mínimo dado $w_1, w_2, \dots, w_n$ e y .

Uma consequência da solução de (3.9) e (3.11) é o valor $\lambda(w_1, w_2, \dots, w_n, y)$ o qual o multiplicador de Lagrange assume. Em vista da discussão da equação (3.10) não é surpresa que este valor tem significado econômico. Derivando $c(w_1, w_2, \dots, w_n, y)$ com respeito a y , segue que

$$\frac{\partial c(w_1, w_2, \dots, w_n, y)}{\partial y} = \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial z_i(w_1, w_2, \dots, w_n, y)}{\partial y}. \quad (3.24)$$

Por outro lado, derivando (3.9) em relação à y e somando as n igualdades, tem-se

$$\sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial z_i(w_1, w_2, \dots, w_n, y)}{\partial y} = \lambda \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial z_i} \frac{\partial z_i(w_1, w_2, \dots, w_n, y)}{\partial y}, \quad (3.25)$$

e derivando (3.10) com respeito a y , segue que

$$1 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial z_i} \frac{\partial z_i(w_1, w_2, \dots, w_n, y)}{\partial y}. \quad (3.26)$$

De (3.24), (3.25) e (3.26) obtém-se

$$\frac{\partial c(w_1, w_2, \dots, w_n, y)}{\partial y} = \lambda(w_1, w_2, \dots, w_n, y). \quad (3.27)$$

Obteve-se assim um resultado importante que diz que o valor do multiplicador de Lagrange é o efeito sobre o custo a partir de uma mudança no produto requerido, isto é, o multiplicador de Lagrange mede o custo marginal do produto. Este fato concorda com a discussão anteriormente feita da equação (3.10), onde as funções que foram igualadas a λ são interpretadas como a medida do custo marginal.

3.6 Um exemplo de minimização de custo

Considere o problema de minimização de custo de uma empresa cuja função de produção é $y = z_1^\alpha z_2^{1-\alpha}$, sendo α uma constante satisfazendo $0 < \alpha < 1$. A empresa deseja produzir y e os preços dos insumos são w_1, w_2 . Logo, o problema se reduz a:

$$\underset{z_1, z_2}{\text{minimizar}} \quad w_1 z_1 + w_2 z_2,$$

$$\text{sujeito à } z_1^\alpha z_2^{1-\alpha} = y.$$

A função lagrangeana é dada por $L = L(z_1, z_2, \lambda) = w_1 z_1 + w_2 z_2 + \lambda(y - z_1^\alpha z_2^{1-\alpha})$. Derivando com respeito a z_1, z_2 e λ respectivamente tem-se

$$w_1 - \lambda \alpha z_1^{\alpha-1} z_2^{1-\alpha} = 0,$$

$$w_2 - \lambda(1 - \alpha) z_1^\alpha z_2^{-\alpha} = 0,$$

$$y - z_1^\alpha z_2^{1-\alpha} = 0.$$

Segue que,

$$w_1 = \lambda \alpha z_1^{\alpha-1} z_2^{1-\alpha} = \frac{\lambda \alpha y}{z_1},$$

$$w_2 = \lambda(1 - \alpha) z_1^\alpha z_2^{-\alpha} = \frac{\lambda(1 - \alpha)y}{z_2},$$

$$y = z_1^\alpha z_2^{1-\alpha}.$$

Eliminando λ das duas primeiras equações tem-se

$$z_2 = \frac{w_1}{w_2} \frac{(1-\alpha)}{\alpha} z_1. \quad (3.28)$$

Substituindo na expressão de y , obtém-se

$$\begin{aligned} y &= z_1^\alpha \left[\frac{w_1}{w_2} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) z_1 \right]^{1-\alpha}, \\ y &= z_1^\alpha \left[\frac{w_1}{w_2} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) z_1 \right]^1 \left[\frac{w_1}{w_2} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) z_1 \right]^{-\alpha}, \\ y &= \left[\frac{w_1}{w_2} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) z_1 \right]^1 \left[\frac{w_1}{w_2} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \right]^{-\alpha} = \left[\frac{w_1}{w_2} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \right]^{1-\alpha} z_1. \end{aligned}$$

Isolando z_1 , tem-se

$$z_1 = \left[\frac{w_2}{w_1} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right]^{1-\alpha} y.$$

De modo análogo, consegue-se obter z_2 e λ . Seguem as seguintes equações

$$\begin{aligned} z_2(w_1, w_2, y) &= \left[\left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \frac{w_1}{w_2} \right]^\alpha y, \\ \lambda(w_1, w_2, y) &= \left(\frac{w_1}{\alpha} \right)^\alpha \left(\frac{w_2}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Assim,

$$\begin{aligned} c(w_1, w_2, y) &= w_1 \left[\left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \frac{w_2}{w_1} \right]^{1-\alpha} y + w_2 \left[\left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \frac{w_1}{w_2} \right]^\alpha y = \\ &= y \left[\left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \frac{w_2}{w_1} \right] \left[\left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \frac{w_2}{w_1} \right]^{-\alpha} + w_2 y \left[\left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \frac{w_1}{w_2} \right]^\alpha = \\ &= y \left[\left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \frac{w_1}{w_2} \right]^\alpha \left[w_2 \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right) + w_2 \right] = \\ &= y \left[\left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \frac{w_1}{w_2} \right]^\alpha \left(\frac{w_2}{1-\alpha} \right) = \\ &= y \left[\left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \frac{w_2}{w_1} \right]^{-\alpha} \left(\frac{w_2}{1-\alpha} \right) = \\ &= y \left(\frac{w_2}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} \left(\frac{\alpha}{w_1} \right)^{-\alpha} = \\ &= \left(\frac{w_1}{\alpha} \right) \left(\frac{w_2}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} y. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Derivando com respeito a y e utilizando (3.29) (b), tem-se

$$\frac{\partial c(w_1, w_2, \dots, w_n, y)}{\partial y} = \left(\frac{w_1}{\alpha} \right) \left(\frac{w_2}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} = \lambda(w_1, w_2, \dots, w_n, y). \quad (3.31)$$

Isto confirma que (3.27) é verdadeira.

Resta verificar que diminuindo a taxa marginal de substituição a condição se mantém. De fato,

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial z_1}}{\frac{\partial F}{\partial z_2}} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \left(\frac{z_1^{\alpha-1} z_2^{1-\alpha}}{z_1^\alpha z_2^{-\alpha}} \right) = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \left(\frac{z_2}{z_1} \right). \quad (3.32)$$

É claro que (3.28) é satisfeita, de modo que a função definida em (3.29) e (3.30) realmente descreve a solução de minimização de custo.

Finalmente, de (3.28) segue que $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\alpha w_2}{(1-\alpha)w_1}$ a qual implica que a elasticidade de substituição tem o valor $\sigma < -1$, ou seja, um aumento em w_i reduz parte do insumo i . Partes do fator relativo $\left(\frac{w_1 z_1}{w_2 z_2} \right)$ são de fato constantes em $\frac{\alpha}{1-\alpha}$.

3.7 Rendimentos de escala e a função custo

O custo de produção $c(w, y)$ depende do produto pelo simples fato de que mais produto requer mais insumos. Deseja-se estudar a dependência da função custo sobre a produção. Se existem retornos decrescentes para insumos, sabe-se algo sobre o que acontece se apenas um muda. Mas se a quantidade do produto aumenta, parece provável que todos os insumos aumentarão. No entanto nem sempre isto ocorre. Não existe razão para acreditar que todos insumos aumentarão proporcionalmente.

Os argumentos são essencialmente simples com rendimentos crescentes uma vez que pode-se dobrar o produto, dobrando a quantidade de todos os insumos, a qual dobra os custos. O custo mínimo em se produzir $2y$ é portanto menor do que duas vezes o custo y . Com retornos decrescentes, dividindo pela metade os insumos diminui-se menos do que a metade do produto. Então, o custo mínimo $y/2$ é menor do que a metade do custo. Com rendimentos constantes, a produção dobra quando se dobram todos os insumos.

A partir de agora, a dependência dos insumos de minimização de custo $z(w, y)$ e da função custo $c(w, y)$ sobre os preços dos insumos não será feito de maneira explícita, ou seja, uma vez que os preços dos insumos são constantes, a função será escrita simplesmente como $z(y)$ e $c(y)$.

Caso 1: Se a função de produção $y = F(z)$ tem rendimentos crescentes de escala, então por definição $F(kz) > kF(z)$ para $k > 1$. Assim,

$$kc(y) = kwz(y) = \sum_{i=1}^n w_i k z_i(y) > c(ky), \quad (3.33)$$

onde a desigualdade segue do fato que $kz(y)$ produz mais do que ky do produto. Se os rendimentos são crescentes, então o custo mínimo da produção ky deve ser menor do que o custo de kz .

Caso 2: Se $y = F(z)$ tem rendimentos decrescentes de escala, então $kF(z) > F(kz)$, para $k > 1$. Uma vez que isto vale para todo z , valerá também para $\frac{1}{k}z$. Assim,

pode-se escrever

$$kF\left(\frac{1}{k}z\right) > F(z),$$

isto é,

$$\frac{1}{k}F(z) < F\left(\frac{1}{k}z\right), \quad \text{para } k > 1.$$

Logo

$$\frac{1}{k}c(y) = \frac{1}{k}wz(y) = \sum_{i=1}^n w_i \frac{1}{k}z_i(y) > c\left(\frac{1}{k}y\right), \quad (3.34)$$

onde a desigualdade segue do fato que $\frac{1}{k}z(y)$ produz mais do que $\frac{1}{k}c(y)$ do produto por causa de rendimentos decrescentes.

Caso 3: Se $y = F(z)$ tem rendimentos constantes de escala, então $F(kz) = kF(z)$ para $k > 1$ e isto implica que

$$kc(y) = kwz(y) \geq c(ky), \quad (3.35)$$

pois, uma vez que $kz(y)$ é uma maneira possível de produzir ky , isto não pode custar mais. Por outro lado, (3.35) se mantém para todo k e y . Assim aplicando para $\frac{1}{k}$ e ky obtém-se

$$\frac{1}{k}c(ky) \geq c(y). \quad (3.36)$$

Mas, $c(ky) \leq kc(y) \leq c(ky)$ implica que

$$c(ky) = kc(y). \quad (3.37)$$

Definição 3.8. Dada uma função custo $c(y)$, definimos como custo médio a razão $\frac{c(y)}{y}$.

Com rendimentos crescentes de escala, (3.33) implica que

$$\frac{c(y)}{y} > \frac{c(ky)}{ky}, \quad k > 1, \quad (3.38)$$

de modo que diminua o custo médio quando y aumenta. Com rendimentos decrescentes, (3.34) implica que

$$\frac{c(y)}{y} > \frac{c(ky)}{(y/k)}, \quad k > 1. \quad (3.39)$$

Assim, o custo médio aumenta enquanto y aumenta. Com rendimentos constantes, de (3.37) tem-se

$$\frac{c(y)}{y} = \frac{c(ky)}{ky}. \quad (3.40)$$

O custo médio é constante enquanto y muda. Os três casos são ilustrados na figura 3.5

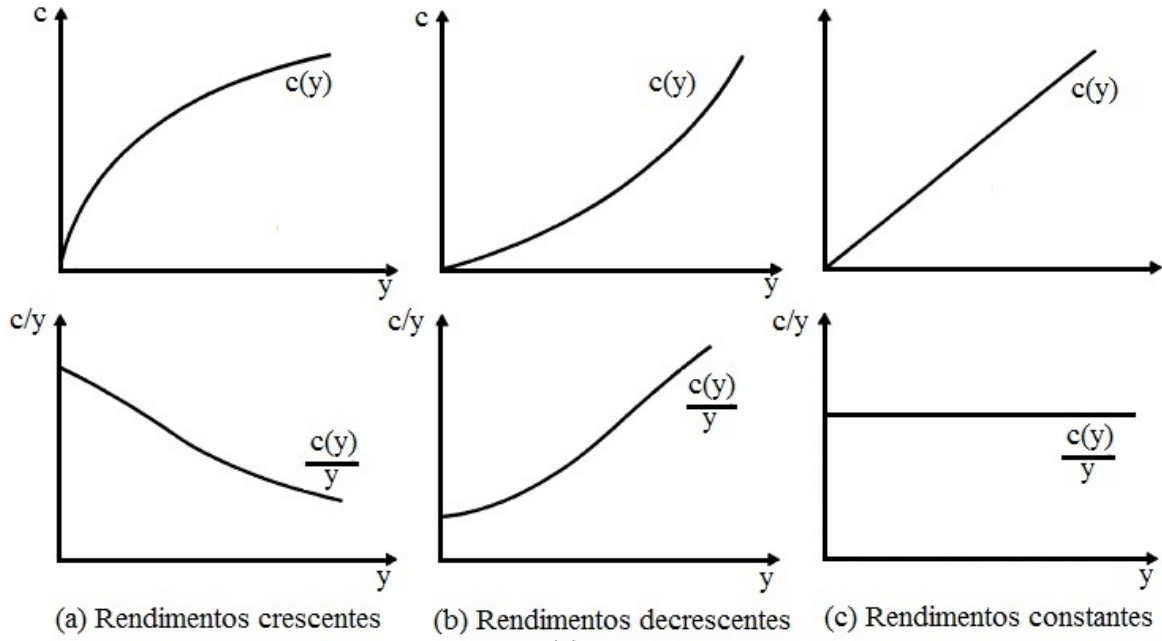


Figura 3.5: Rendimentos de escala e custo médio

3.8 Maximização dos lucros

Seja uma empresa que enfrenta o problema de maximização do lucro, ou seja,

$$\begin{aligned} &\underset{y, z_1, \dots, z_n}{\text{maximizar}} \quad py - (w_1 z_1 + \dots + w_n z_n), \\ &\text{sujeito à } y = F(z_1, \dots, z_n). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Este é um outro modo de escrever o problema (3.2) tendo resolvido o problema de minimização do custo (3.8) e derivado sua função custo $c(w_1, \dots, w_n, y)$, é

$$\underset{y}{\text{maximizar}} \quad py - c(w, y). \quad (3.42)$$

Note agora que este problema de maximização é com relação apenas a variável y . Para esta maximização é necessário que a derivada do lucro com respeito a y seja igual zero, ou seja,

$$p - \frac{\partial c(w_1, \dots, w_n, y)}{\partial y} = 0. \quad (3.43)$$

Além disso, a segunda derivada deve ser negativa. Segue de (3.43) que,

$$-\frac{\partial^2 c(w_1, \dots, w_n, y)}{\partial y^2} < 0. \quad (3.44)$$

A interpretação econômica para as condições acima, estabelece que a empresa deve escolher um nível do produto onde o custo marginal é igual ao preço do produto, e onde o custo marginal é uma função crescente do produto.

Considere a figura 3.6 no ponto A , o custo marginal excede o preço. Assim, a produção de uma unidade extra adiciona mais para o custo do que é ganho por vendê-lo ao preço p , ou seja, lucros podem então ser aumentados pela redução do produto. Agora em C , o preço do produto excede o custo marginal. Então, a produção de uma unidade extra adiciona mais para o que ganho por vendê-lo do que para o custo ao preço p , ou seja, lucros podem ser aumentados com o aumento do produto. Enquanto B é um ponto de lucro máximo, pois o preço do produto é igual ao custo marginal. Agora em D , o preço do produto é igual ao custo marginal, mas a função nesse ponto é decrescente então tem-se que este ponto é um um ponto de lucro mínimo.

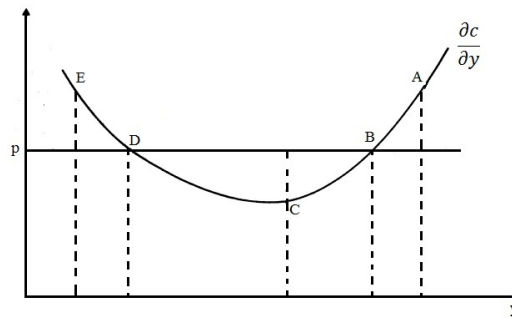


Figura 3.6: Maximização do Lucro

Se a condição (3.44) é satisfeita, então a equação (3.43) determina o valor que maximiza o lucro de y a qual será uma função de $p, w_1, \dots, w_n$, de modo que pode ser escrita como $y(p, w_1, \dots, w_n)$. Claramente os valores de z_i os quais minimizam o custo da produção $y(p, w_1, \dots, w_n)$ são os escolhidos pela empresa que maximizam o lucro $z(p, w_1, \dots, w_n)$, e estão relacionados para os insumos que minimizam os lucros por

$$z(p, w_1, \dots, w_n) = z(w_1, \dots, w_n, y(p, w_1, \dots, w_n)). \quad (3.45)$$

Lembrando que $z_i(w_1, \dots, w_n, y)$ é o valor ideal de z_i , valor este escolhido para minimizar o custo de produção de um produto fixo. A função $z(w_1, \dots, w_n, y)$ fornece a quantidade do insumo a qual a empresa que minimiza o custo vai querer comprar, chamada de função demanda de insumo da empresa que minimiza o lucro. A função $z(p, w_1, \dots, w_n)$ também é uma função demanda de insumo da empresa que maximiza o lucro. A função $y(p, w_1, \dots, w_n)$ mostra quanto uma empresa que maximiza o lucro deseja vender.

3.9 Um exemplo que maximiza o lucro

Considere agora o problema de maximização dos lucros quando $y = z_1^{1/3} z_2^{1/2}$ e os preços são p, w_1 e w_2 .

Primeiro minimizamos o custo da produção y . A função lagrangeana é dada por

$$L(z_1, z_2, \lambda) = w_1 z_1 + w_2 z_2 + \lambda(y - z_1^{1/3} z_2^{1/2}),$$

Derivando com respeito a z_1 , z_2 e λ respectivamente e igualando a zero tem-se:

$$w_1 - \frac{1}{3} \lambda z_1^{-2/3} z_2^{1/2} = 0,$$

$$w_2 - \frac{1}{2} \lambda z_1^{1/3} z_2^{-1/2} = 0,$$

$$y - z_1^{1/3} z_2^{1/2} = 0.$$

Isolando λ nas duas primeiras equações obtém-se

$$3w_1 z_1^{2/3} z_2^{-1/2} = 2w_2 z_1^{-1/3} z_2^{1/2}.$$

Assim,

$$z_1 = \left(\frac{2w_2}{3w_1} \right) z_2. \quad (3.46)$$

Substituindo em $y = z_1^{1/3} z_2^{1/2}$ segue que:

$$y = \left(\frac{2w_2}{3w_1} \right)^{1/3} z_2^{1/3} z_2^{1/2} = \left(\frac{2w_2}{3w_1} \right)^{1/3} z_2^{5/6}.$$

Isolando z_2 resulta que:

$$z_2 = \left(\frac{3w_1}{2w_2} \right)^{2/5} y^{6/5}. \quad (3.47)$$

Retornando na equação (3.46) obtém-se

$$z_1 = \left(\frac{2w_2}{3w_1} \right) \left(\frac{3w_1}{2w_2} \right)^{2/5} y^{6/5} = \left(\frac{2w_2}{3w_1} \right)^{3/5} y^{6/5}. \quad (3.48)$$

A função custo é dada por

$$\begin{aligned} c(w_1, w_2, y) &= w_1 z_1 + w_2 z_2 \\ &= w_1 \left(\frac{2w_2}{3w_1} \right)^{3/5} y^{6/5} + w_2 \left(\frac{3w_1}{2w_2} \right)^{2/5} y^{6/5} \\ &= \left(\frac{2w_2}{3} \right)^{3/5} \left(\frac{w_1}{2} \right)^{-3/5} w_1 y^{6/5} + \left(\frac{w_1}{2} \right)^{2/5} \left(\frac{w_2}{3} \right)^{-2/5} w_2 y^{6/5}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Logo,

$$c(w_1, w_2, y) = 5 \left(\frac{w_1}{2} \right)^{2/5} \left(\frac{w_2}{3} \right)^{3/5} y^{6/5}.$$

Por fim, λ é dado por

$$\begin{aligned}
\lambda &= 3w_1 z_1^{2/3} z_2^{-1/2} \\
&= 3 \left[\left(\frac{2w_2}{3w_1} \right)^{3/5} y^{6/5} \right]^{2/3} \left[\left(\frac{3w_1}{2w_2} \right)^{2/5} y^{6/5} \right]^{-1/2} \\
&= 6 \left(\frac{w_1}{2} \right) \left(\frac{w_1}{2} \right)^{-2/5} \left(\frac{w_2}{3} \right)^{2/5} \left(\frac{w_1}{2} \right)^{-1/5} \left(\frac{w_2}{3} \right)^{1/5} y^{1/5}
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Logo,

$$\lambda = 6 \left(\frac{w_1}{2} \right)^{2/5} \left(\frac{w_2}{3} \right)^{3/5} y^{1/5} = \left(\frac{\partial c(w_1, w_2, y)}{\partial y} \right).$$

Tem-se então que a taxa marginal de substituição diminuirá, pois

$$F(z_1, z_2) = z_1^{1/3} z_2^{1/2},$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial z_1} = \frac{1}{3} z_1^{-2/3} z_2^{1/2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_2} = \frac{1}{2} z_1^{1/3} z_2^{-1/2},$$

Logo,

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial z_1}}{\frac{\partial F}{\partial z_2}} = \frac{\frac{1}{3} z_1^{-2/3} z_2^{1/2}}{\frac{1}{2} z_1^{1/3} z_2^{-1/2}} = \frac{2}{3} \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{-1}.$$

Derivando em relação à $\left(\frac{z_1}{z_2} \right)$,

$$\frac{d(\frac{\partial F}{\partial z_1} / \frac{\partial F}{\partial z_2})}{d(z_1/z_2)} = -\frac{2}{3} \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{-2} \leq 0.$$

Logo a função de produção é quase-concâva.

Agora pode-se maximizar os lucros. Dada a função

$$Lucro = py - c(w_1, w_2, y).$$

Substituindo a expressão para o custo têm-se

$$Lucro = py - 5y^{6/5} \left(\frac{w_1}{2} \right)^{2/5} \left(\frac{w_2}{3} \right)^{3/5}.$$

Derivando com respeito a y , e igualando à zero tem-se:

$$p - 6y^{1/5} \left(\frac{w_1}{2} \right)^{2/5} \left(\frac{w_2}{3} \right)^{3/5} = 0. \tag{3.51}$$

A condição da derivada de segunda ordem é satisfeita, pois

$$-\frac{6}{5}y^{-4/5} \left(\frac{w_1}{2}\right)^{2/5} \left(\frac{w_2}{3}\right)^{3/5} < 0.$$

Portanto de (3.51) tem-se

$$y^{1/5} = \left(\frac{p}{6}\right) \left(\frac{w_1}{2}\right)^{-2/5} \left(\frac{w_2}{3}\right)^{-3/5} \Rightarrow y = \left(\frac{p}{6}\right)^5 \left(\frac{w_1}{2}\right)^{-2} \left(\frac{w_2}{3}\right)^{-3}. \quad (3.52)$$

Substituindo (3.52) em (3.47) e (3.48), tem-se

$$\begin{aligned} z_1(w_1, w_2, y) &= \left(\left(\frac{p}{6} \right)^5 \left(\frac{w_1}{2} \right)^{-2} \left(\frac{w_2}{3} \right)^{-3} \right)^{6/5} \left(\frac{2w_2}{3w_1} \right)^{3/5} \\ &= \left(\frac{p}{6} \right)^6 \left(\frac{w_1}{2} \right)^{-12/5} \left(\frac{w_2}{3} \right)^{-18/5} \left(\frac{w_1}{2} \right)^{-3/5} \left(\frac{w_2}{3} \right)^{3/5} \\ &= \left(\frac{p}{6} \right)^6 \left(\frac{w_1}{2} \right)^{-15/5} \left(\frac{w_2}{3} \right)^{-15/5} \\ &= \left(\frac{p}{6} \right)^6 \left(\frac{w_1}{2} \right)^{-3} \left(\frac{w_2}{3} \right)^{-3}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

e

$$\begin{aligned} z_2(w_1, w_2, y) &= \left(\left(\frac{p}{6} \right)^5 \left(\frac{w_1}{2} \right)^{-2} \left(\frac{w_2}{3} \right)^{-3} \right)^{6/5} \left(\frac{3w_1}{2w_2} \right)^{2/5} \\ &= \left(\frac{p}{6} \right)^6 \left(\frac{w_1}{2} \right)^{-12/5} \left(\frac{w_2}{3} \right)^{-18/5} \left(\frac{w_1}{2} \right)^{2/5} \left(\frac{w_2}{3} \right)^{-2/5} \\ &= \left(\frac{p}{6} \right)^6 \left(\frac{w_1}{2} \right)^{-10/5} \left(\frac{w_2}{3} \right)^{-20/5} \\ &= \left(\frac{p}{6} \right)^6 \left(\frac{w_1}{2} \right)^{-2} \left(\frac{w_2}{3} \right)^{-4}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Assim, a solução será

$$\begin{aligned} y(p, w_1, w_2) &= \left(\frac{p}{6} \right)^5 \left(\frac{w_1}{2} \right)^{-2} \left(\frac{w_2}{3} \right)^{-3}, \\ z_1(p, w_1, w_2) &= \left(\frac{p}{6} \right)^6 \left(\frac{w_1}{2} \right)^{-3} \left(\frac{w_2}{3} \right)^{-3}, \\ z_2(p, w_1, w_2) &= \left(\frac{p}{6} \right)^6 \left(\frac{w_1}{2} \right)^{-2} \left(\frac{w_2}{3} \right)^{-4}. \end{aligned}$$

4 A Teoria do Comportamento dos Consumidores

4.1 Preferências e funções de utilidades

A teoria do comportamento dos consumidores é mais bem compreendida quando examinada em três etapas:

- I. **Preferências do consumidor:** A primeira etapa consiste em encontrar uma forma prática de descrever por que as pessoas poderiam preferir uma mercadoria a outra. Será visto como as preferências do consumidor por vários bens podem ser descritas graficamente e algebricamente.
- II. **Restrições orçamentárias:** Obviamente, os consumidores devem também considerar os preços. Por isso, na segunda etapa leva-se em conta que os consumidores têm renda limitada, o que restringe a quantidade de mercadorias que podem adquirir. O que um consumidor faz nessa situação? Será encontrada uma resposta para essa questão ao unir suas preferências e sua restrição orçamentária.
- III. **Escolhas do consumidor:** Diante de suas preferências e da limitação da renda, os consumidores escolhem comprar as combinações de mercadorias que maximizam sua satisfação. Essas combinações dependerão dos preços dos vários bens disponíveis. Assim, entender as escolhas do consumidor irá ajudar a compreender a demanda, isto é, como a quantidade de bens que os consumidores podem adquirir depende de seus preços.

Definição 4.1. *Função de utilidade é a relação matemática que associa níveis de utilidade a cestas de mercado individuais, isto é,*

$$U = U(x_1, x_2, \dots, x_n) = U(\mathbf{x}). \quad (4.1)$$

A função utilidade associa o valor de "utilidade" com o consumo da "cesta" ou "pacote" de bens consistindo de x_1 unidades do bem 1, x_2 unidades do bem 2, ..., e x_n

unidades do n -ésimo bem. O valor atual da utilidade não tem significado uma vez que o que interessa é se o consumidor prefere uma cesta a outra, e este é indicado por uma cesta tendo um valor mais alto de utilidade do que outra. Se duas cestas tem o mesmo nível de utilidade, o consumidor é indiferente entre elas.

Definição 4.2. *Curva de indiferença é a curva que representa todas as combinações de cestas de mercado que geram o mesmo nível de satisfação para um consumidor.*

Considere o caso para dois bens, então, pode-se representar a função de utilidade em um diagrama de curvas de indiferença, como na figura 4.1.

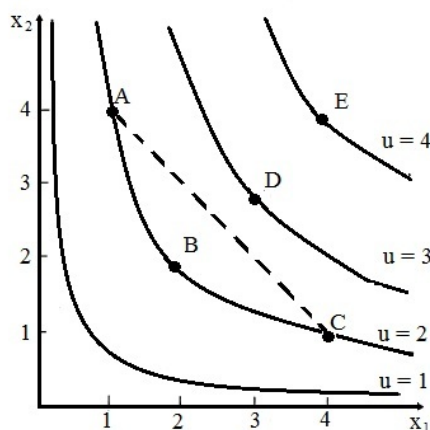


Figura 4.1: Curvas de Indiferença

O contorno da função de utilidade representa diferentes cestas (x_1, x_2) a qual tem o mesmo nível de utilidade pois o consumidor é indiferente entre elas.

Os desenhos das curvas de indiferença na figura 4.1 tem duas propriedades as quais refletem duas suposições padrão sobre as preferências dos consumidores.

- (i) $U(kx) > U(x)$ para $k > 1$. O consumidor prefere mais bens do que menos bens. Assim, as curvas de indiferença mais distantes dão maior utilidade do que aquelas mais próximo da origem.
- (ii) A função utilidade é semi-côncava. Assim as curvas de indiferença são curvas em direção a origem.

Para a função de utilidade $U(x_1, x_2)$ a inclinação da curva de indiferença $U(x_1, x_2) = u$ é

$$\left(\frac{dx_2}{dx_1} \right)_u = -\frac{U_1}{U_2}, \quad (4.2)$$

e $\frac{U_1}{U_2}$ é chamado a taxa marginal de substituição. Suponha que (ii) implica que a função de utilidade tem a propriedade da taxa marginal ser decrescente de substituição, ou seja,

$$\frac{d(U_1/U_2)}{d(x_1/x_2)} \leq 0. \quad (4.3)$$

A taxa marginal de substituição mede a quantidade do bem, x_2 , que o consumidor precisa para compensá-lo pela perda de uma unidade de x_1 , isto é, para mantê-lo sobre a mesma curva de indiferença.

Exemplo 4.1. Seja a função de utilidade $U(x_1, x_2) = x^\alpha x_2^{1-\alpha}$ onde $(0 < \alpha < 1)$.

Considere $\alpha = 1/2$, a qual é ilustrada na figura 4.1. No ponto A o consumidor tem a cesta $(1, 4)$ a qual lhe dá utilidade 2, a cesta $(2, 2)$ no ponto B , lhe dá a mesma utilidade; enquanto a cesta $(4, 4)$ no ponto E dá utilidade 4. Isto mostra que ele é indiferente entre A e B . Lembrando que o valor real de utilidade 2 e 4 não tem significância, seria errado dizer que ele prefere E duas vezes tanto como A ou B . Note também como as propriedades (i) e (ii) são satisfeitas, os pontos $B(2, 2)$, $D(3, 3)$ e $E(4, 4)$ se encontram em curvas de indiferença sucessivamente maiores, enquanto todos os pontos no segmento entre $A(1, 4)$ e $C(4, 1)$ encontram-se acima da curva de indiferença de utilidade $u = 2$.

4.2 Maximização da utilidade e função da demanda

O ponto que representa preferências para uma dada função de utilidade ocorre quando o consumidor é confrontado com um orçamento limitado para gastar na compra de bens. O problema de escolher a cesta a qual ele prefere um determinado bem em relação a todos os outros disponíveis se torna um problema de maximização sujeito a uma dada restrição.

Se o consumidor tem renda m disponível para gastar na aquisição de determinados bens e se os preços dos respectivos bens são dados pelo vetor $p = p(p_1, p_2, \dots, p_n)$ sua restrição orçamentária será:

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n \leq m. \quad (4.4)$$

O consumidor não tem força para mudar m ou p . Suponha que sobre a função de utilidade o consumidor gastará toda sua renda ocorrendo a igualdade em (4.4). Logo, o problema do consumidor pode ser escrito como

$$\begin{aligned} &\underset{x}{\text{maximizar}} \quad U(x), \\ &\text{sujeito à} \quad px = m. \end{aligned} \quad (4.5)$$

A função lagrangeana deu origem a um método de resolver a restrição do problema de minimização. Neste caso, a lagrangeana será dada por

$$L(x, \lambda) = U(x) + \lambda(m - px). \quad (4.6)$$

Igualando a zero sua derivada com respeito as $n + 1$ variáveis x e λ tem-se

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} - \lambda p_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.7)$$

$$m - px = 0. \quad (4.8)$$

Estas equações darão as soluções para as $n + 1$ incógnitas x e λ as quais dependerão do valor de p e m . Escreve-se as soluções como $x(p, m)$ e $\lambda(p, m)$. A razão pela qual as soluções de (4.5) devem satisfazer (4.7) e (4.8) permite escrever

$$\lambda = \frac{\partial U / \partial x_i}{p_i} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.9)$$

O lado direito de (4.9) é o efeito na utilidade de gastar uma unidade monetária extra no bem i se p_i é o seu respectivo preço. A quantidade comprada será $\frac{1}{p_i}$. Chama-se isso de "utilidade marginal de dinheiro gasto no bem i ".

Definição 4.3. *Utilidade Marginal é a satisfação adicional obtida pelo consumo de uma unidade adicional de determinado bem*

A relação (4.9) requer em que esta utilidade marginal deve ser a mesma para todos os bens, isto é, para cada uma das utilizações possíveis do dinheiro. Se estes não forem satisfeitos, o consumidor pode aumentar a sua utilidade pela realocação de dinheiro nos bens com baixas utilidades marginais de dinheiro por aqueles com alto valor, mostrando que utilidade não está sendo maximizada. Logo (4.5) não está sendo resolvido se as equações (4.7) não estão sendo satisfeitas. As equações (4.7) são condições necessárias para a solução de (4.5). É óbvio também que (4.8) é necessário.

Para mostrar geometricamente que estas condições garantem a solução para o problema de maximização, considere o caso de dois insumos, x_1 e x_2

O problema é

$$\begin{aligned} &\underset{x_1, x_2}{\text{maximizar}} \quad U(x_1, x_2), \\ &\text{sujeito à} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = m. \end{aligned} \quad (4.10)$$

A figura 4.2 tem representadas as curvas de nível para a função $U = U(x_1, x_2)$. A restrição $p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$ aparece como uma linha reta, a "linha do orçamento". Maximizar $U(x_1, x_2)$ é equivalente a encontrar uma curva de indiferença tão distante da origem quanto possível.

A solução será o ponto onde a curva de indiferença mais distante da origem é tangente a linha de orçamento. Para localizar este ponto, a inclinação da reta tangente à curva de indiferença deve ser igual à inclinação da linha de orçamento. Sabe-se que a

inclinação da reta tangente à curva de indiferença é dada por $-\left(\frac{\partial U/\partial x_1}{\partial U/\partial x_2}\right)$, enquanto que a inclinação da linha de orçamento será $-\frac{p_1}{p_2}$. Logo, o ponto buscado satisfaz

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

Este ponto é representado pelo ponto *A* na figura 4.2

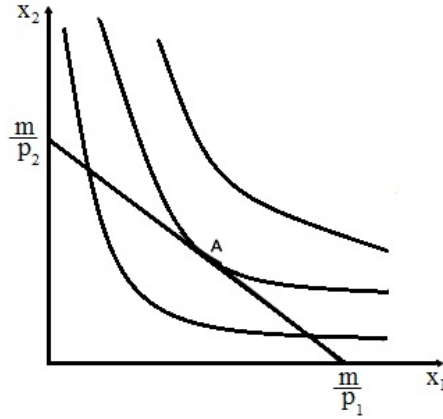


Figura 4.2: Maximização da Utilidade

Por outro lado, para $n = 2$ as equações (4.7) e (4.8) do método lagrangeano e fornece

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \lambda p_1 \quad e \quad \frac{\partial U}{\partial x_2} = \lambda p_2.$$

Isolando λ tem-se

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} = \frac{p_1}{p_2},$$

que está de acordo com o resultado obtido anteriormente.

As funções $x_1(p, m)$, $x_2(p, m), \dots, x_n(p, m)$ que decorrem de (4.8) e (4.9) são chamadas de funções da demanda dos consumidores. Estas funções definem as quantidades que o consumidor deseja comprar de cada bem como funções dos preços de todos os bens e da renda do consumidor.

Exemplo 4.2. Seja um consumidor com a função de utilidade $U_1(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$ enfrentando preços p_1 , p_2 e renda m .

A função lagrangeana é dada por

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} + \lambda(m - p_1 x_1 - p_2 x_2). \quad (4.11)$$

Derivando em relação a x_1 , x_2 e λ obtém-se, respectivamente

$$\begin{aligned}\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha} - \lambda p_1 &= 0, \\ (1-\alpha) x_1^\alpha x_2^{-\alpha} - \lambda p_2 &= 0, \\ m - p_1 x_1 - p_2 x_2 &= 0.\end{aligned}\tag{4.12}$$

Da equação (4.12) (a) segue que

$$p_1 x_1 = \frac{\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha}}{\lambda} x_1 = \frac{\alpha x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}}{\lambda} = \alpha \frac{U_1}{\lambda}.\tag{4.13}$$

De (4.12) (b) tem-se

$$p_2 x_2 = \frac{(1-\alpha) x_1^\alpha x_2^{-\alpha}}{\lambda} x_2 = \frac{(1-\alpha) x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}}{\lambda} = (1-\alpha) \frac{U_1}{\lambda}.\tag{4.14}$$

Substituindo estas duas últimas relações em (4.12) (c) obtém-se

$$m = p_1 x_1 + p_2 x_2 = \alpha \frac{U_1}{\lambda} + (1-\alpha) \frac{U_1}{\lambda} = \frac{U_1}{\lambda}.$$

Substituindo em (4.13) e (4.14) segue que

$$x_1 = \frac{\alpha m}{p_1} \quad e \quad x_2 = \frac{(1-\alpha)m}{p_2}.$$

Observe que a despesa do consumidor no bem 1, $p_1 x_1$, é a fração fixa α de sua renda m , enquanto no bem 2, $p_2 x_2$ é a fração fixa $1-\alpha$ de m .

Exemplo 4.3. Seja um consumidor com função de utilidade $U_2(x_1, x_2) = x_1^{1/2} + x_2^{1/2}$.

A lagrangeana é dada por

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^{1/2} + x_2^{1/2} + \lambda(m - p_1 x_1 - p_2 x_2).\tag{4.15}$$

Derivando em relação a x_1 , x_2 e λ obtém-se, respectivamente

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} x_1^{-1/2} - \lambda p_1 &= 0, \\ \frac{1}{2} x_2^{-1/2} - \lambda p_2 &= 0, \\ m - p_1 x_1 - p_2 x_2 &= 0.\end{aligned}\tag{4.16}$$

Isolando λ na primeira e segunda equação de (4.16), e igualando-as tem-se

$$\frac{1}{2} \frac{x_1^{-1/2}}{p_1} = \frac{1}{2} \frac{x_2^{-1/2}}{p_2}.$$

Segue que

$$x_2^{1/2} = x_1^{1/2} \frac{p_1}{p_2}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado

$$x_2 = x_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^2.$$

Substituindo na equação (4.16) segue que

$$m = p_1 x_1 + p_2 x_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^2 \Rightarrow m = x_1 \left(\frac{p_1 p_2 + p_1^2}{p_2} \right),$$

de modo análogo obtém-se

$$x_1 = \frac{p_2 m}{p_1(p_1 + p_2)}.$$

Substituindo em (4.16) (c) obtém-se

$$x_2 = \frac{p_1 m}{p_2(p_1 + p_2)}.$$

Exemplo 4.4. Seja o consumidor com função de utilidade de $U_3(x_1, x_2) = \alpha \ln x_1 + (1 - \alpha) \ln x_2$.

A lagrangeana é

$$L(x_1, x_2, \lambda) = \alpha \ln x_1 + (1 - \alpha) \ln x_2 + \lambda(m - p_1 x_1 - p_2 x_2). \quad (4.17)$$

Derivando em relação x_1 , x_2 e λ segue respectivamente

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{x_1} - \lambda p_1 &= 0, \\ \frac{(1 - \alpha)}{x_2} - \lambda p_2 &= 0, \\ m - p_1 x_1 - p_2 x_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Isolando o λ nas duas primeiras equações de (4.18) e igualando-as, tem-se

$$\frac{\alpha}{p_1 x_1} = \frac{(1 - \alpha)}{p_2 x_2} \Rightarrow p_2 x_2 \alpha - p_1 x_1 = \alpha p_1 x_1 \Rightarrow \alpha(p_1 x_1 + p_2 x_2) = p_1 x_1 \Rightarrow \alpha m = p_1 x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{\alpha m}{p_1}$$

Substituindo na equação (4.18) (c) segue que

$$x_2 = \frac{(1 - \alpha)}{p_2} m.$$

As expressões para as funções da demanda x_1 e x_2 são exatamente as mesmas que (4.18). O primeiro consumidor e o terceiro comportam-se identicamente. Isto não é apenas coincidência, uma vez que as funções de utilidade satisfazem a relação $U_3(x_1, x_2) = \ln U_1(x_1, x_2)$.

Observação 4.1. $\ln U_1(x_1, x_2) = \ln x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} = \ln x_1^\alpha + \ln x_2^{1-\alpha} = \alpha \ln x_1 + (1-\alpha) \ln x_2 = U^3(x_1, x_2)$. Assim eles tem as mesmas curvas de indiferença são as mesmas, ou seja, em todos os valores de x_1, x_2 tais que U_1 é igual a constante u , U_3 terá o valor constante $\ln u$. A diferença entre as duas funções é o valor de "utilidade" que é associado a cada uma de suas respectivas curvas de indiferença. Os dois consumidores se comportam de mesma maneira por que possuem as mesmas preferências.

A figura 4.3 ilustra as curvas de indiferença correspondendo a ambas U_1 e U_3 , por exemplo, quando $\alpha = 1/3$ e ambos consumidores enfrentando preços $p_1 = 1, p_2 = 2$ e $m = 30$ de modo que $x_1 = x_2 = 10$.

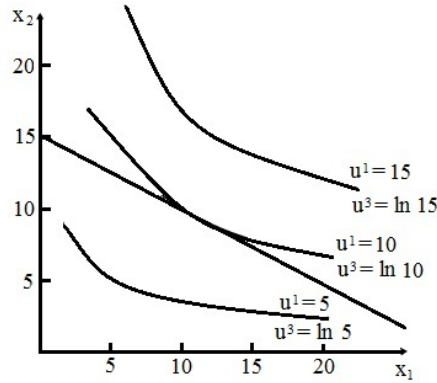


Figura 4.3: Preferências idênticas

4.3 Minimização da despesa e funções da demanda compensada

Considere o problema no qual o consumidor deseja minimizar as despesas necessárias para atingir uma dada curva de indiferença, ou seja,

$$\begin{aligned} & \text{minimizar}_x \quad px, \\ & \text{sujeito à } U(x) = u. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Observe que este problema é idêntico ao problema de minimização de custo do produtor. Sabe-se que a solução de (4.19) será função do tipo $x(p, u)$. Tem-se que estas funções são análogas às funções da demanda de insumo da empresa. Estas funções serão denominadas de funções da demanda compensada. Da mesma maneira que tem-se a função da empresa, existe também a função despesa do consumidor, dada por

$$e(p, u) = px(p, u). \tag{4.20}$$

As funções $x = x(p, u)$ são obtidas pela técnica lagrangeana. Para não confundir com o multiplicador de Lagrange utilizado no problema de maximização de utilidade (4.5), o multiplicador de Lagrange será escrito como μ para a teoria de (4.19). As $n+1$ condições de primeira ordem para a solução de (4.19) são dadas por

$$p_i = \mu \frac{\partial U}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.21)$$

$$\mu = U(x). \quad (4.22)$$

Estas equações definem $x_1, x_2, \dots, x_n$ e μ como sendo funções de p e u .

Considere o problema de minimização de despesas para dois bens. A equação (4.22) dá a curva de indiferença correspondente ao nível de utilidade fixo μ ; os níveis de despesas $p_1x_1 + p_2x_2$ são representados por uma série de linhas paralelas, com menores despesas mais próximas da origem e os menores níveis de despesas compatíveis com o nível de utilidade μ corresponde a linha de orçamento tangente a curva de indiferença. Tem-se que a condição de tangência é dada pela equação (4.21) uma vez que eliminando μ temos $\frac{p_1}{p_2} = \frac{U_1}{U_2}$. Com isso a taxa marginal decrescente de substituição é uma condição suficiente. A solução é ilustrada na figura 4.4

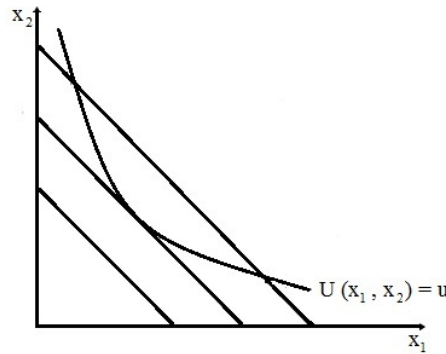


Figura 4.4: Minimização das despesas

Tem-se também a propriedade

$$\frac{\partial e(p, u)}{\partial p_i} = x_i(p, u), \quad (4.23)$$

a derivada da função despesa (4.20) com respeito ao preço de um bem igual à quantidade demandada daquele bem.

4.4 Preferência revelada

As preferências das pessoas não são observáveis. O que se observa são as escolhas que as pessoas fazem.

Se em uma situação A e B são ambas escolhas possíveis e se escolhe A , diz-se que esta escolha revela que se prefere A do que B . Então em qualquer outra situação na qual ambas A e B estão disponíveis, não se deve escolher B . Tal escolha revelaria que se prefere B a A , contradizendo a preferência antes revelada.

O indivíduo, ao fazer sua escolha de consumo, está revelando sua preferência. Portanto, para o caso de dois bens, se ele escolhe a cesta $E = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, então ele prefere essa cesta a todas outras cestas que ele também poderia comprar. O figura 4.5 ilustra essa relação.

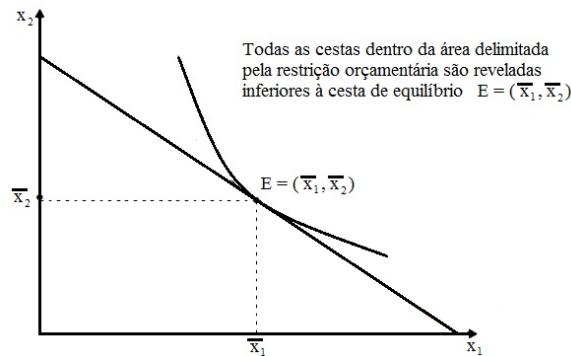


Figura 4.5: Preferências reveladas

Suponha que o consumidor é confrontado por uma restrição orçamentária representada na figura 4.6 por uma linha sólida para consumir a cesta rotulada por X . Sua escolha revela que ele prefere X a qualquer outro ponto sobre ou abaixo da linha de orçamento. Suponha agora que mudanças nos preços e na renda transfere sua restrição orçamentária mostrada pela linha tracejada através de Y_1 . Ele agora irá escolher um ponto tal como Y_1 ou Y_2 , dependendo de sua preferência. Se sua escolha foi Y_1 , nada é revelado sobre suas preferências: quando ele escolheu X , Y_1 não estava disponível, sendo acima de sua linha de orçamento; e quando ele escolheu Y_1 , X não estava disponível. Se, no entanto, sua escolha foi Y_2 na nova situação, sabe-se que ele prefere X do que Y_2 , para que a preferência que foi revelada por sua escolha de X na primeira situação, quando Y_2 estava disponível.

Suponha agora que, a linha de orçamento tenha mudado para a linha tracejada através de Z_1 . Considere o ponto Z_2 a qual se encontra na nova linha de orçamento mas abaixo da reta original. Observe que X encontra-se abaixo da nova reta de orçamento. Quando ele escolhe X , Z_2 estava disponível e, uma vez que X e Z_2 estão ambos disponíveis na nova situação, seria inconsistente para ele agora escolher Z_2 . Apenas uma escolha tal como Z_1 , a qual encontra-se acima da linha de orçamento original é consistente, e uma vez que X ainda está disponível, a escolha de Z_1 revela que ele prefere Z_1 do que X .

Suponha que existam apenas dois bens para simplificar a notação e facilitar a visualização gráfica.

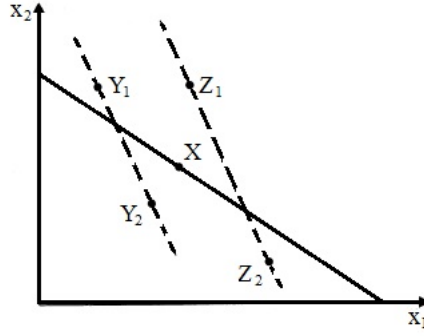


Figura 4.6: Preferências reveladas

Definição 4.4. Diz-se que a cesta $x = (x_1, x_2)$ é diretamente preferência revelada à cesta $y = (y_1, y_2)$, se o consumidor escolhe a cesta x e se a cesta y custa no máximo o mesmo que a cesta x , isto é,

$$p_1 y_1 + p_2 y_2 \leq p_1 x_1 + p_2 x_2. \quad (4.24)$$

Definição 4.5. Princípio da Preferência Revelada. Seja $x = (x_1, x_2)$ a cesta escolhida quando os preços são p_1 e p_2 . Se o consumidor maximiza a sua utilidade, dada sua restrição orçamentária, então para qualquer outra cesta $y = (y_1, y_2)$ tal que $p_1 y_1 + p_2 y_2 \leq p_1 x_1 + p_2 x_2$, tem-se que $x = (x_1, x_2)$ é diretamente preferência revelada à cesta $y = (y_1, y_2)$.

Se o consumidor está agindo de modo coerente com a maximização do seu bem-estar, o seu comportamento irá satisfazer o Princípio da Preferência Revelada e também os axiomas abaixo.

Axioma Fraco da Preferência Revelada (AFrPR). Seja $x = (x_1, x_2)$ de preferência revelada à cesta $y = (y_1, y_2)$, com $x = (x_1, x_2) \neq y = (y_1, y_2)$. Então $y = (y_1, y_2)$ não pode ser preferência revelada à $x = (x_1, x_2)$.

O AFrPR diz que se a cesta $x = (x_1, x_2)$ é preferência revelada à cesta $y = (y_1, y_2)$ quando os preços são p_1 e p_2 e a cesta (y_1, y_2) é escolhida quando os preços são $\bar{p}_1$ e $\bar{p}_2$ (com $x = (x_1, x_2) \neq y = (y_1, y_2)$) então não pode ocorrer que:

$$\bar{p}_1 x_1 + \bar{p}_2 x_2 \leq \bar{p}_1 y_1 + \bar{p}_2 y_2, \quad (4.25)$$

qualquer que seja o outro sistema de preços $\bar{p}_1$ e $\bar{p}_2$

Se a cesta $x = (x_1, x_2)$ foi preferência revelada à cesta $y = (y_1, y_2)$, e a cesta $y = (y_1, y_2)$ passa a ser a cesta escolhida em uma nova relação de preços, então a cesta $x = (x_1, x_2)$ não pode mais ser comprada, ela necessariamente deve custar mais caro do que a cesta (y_1, y_2) . Isto é, se a cesta $x = (x_1, x_2)$ foi preferência revelada à cesta $y = (y_1, y_2)$, então a cesta $y = (y_1, y_2)$ não pode ser preferência revelada à

cesta $x = (x_1, x_2)$. A figura 4.7 ilustra duas cestas que não podem ser cestas ótimas para o problema do consumidor onde a reta orçamentária relevante é a reta onde a cesta se encontra localizada. Não é possível desenhar na figura 4.7 duas curvas de indiferença convexas, tangentes à restrição orçamentária pertinente nos dois pontos ilustrados abaixo sem que elas se toquem.

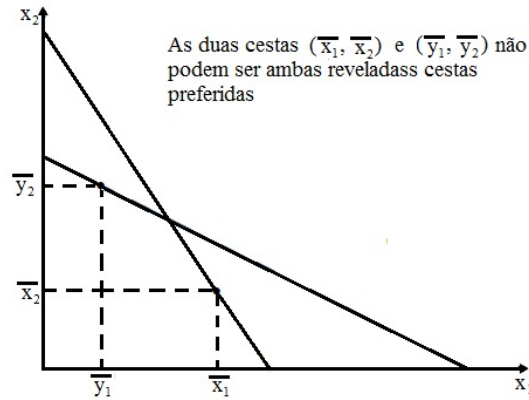


Figura 4.7: Preferências reveladas

O **AFrPR** é uma consequência natural do comportamento otimizador, ou seja, se o consumidor escolhe $x = (x_1, x_2)$ e não $y = (y_1, y_2)$ quando ele podia comprar essas duas cestas, então o consumidor poderá vir a escolher a cesta $y = (y_1, y_2)$ em qualquer outra situação (qualquer outro nível de preços) somente se ele não puder mais adquirir a cesta $x = (x_1, x_2)$. Se esse não for o caso, então esse consumidor está violando a sua escolha anterior. Por isso, se as preferências mudam, o **AFrPR** não tem mais porque ser válido.

Antes de definir o **Axioma Forte da Preferência Revelada (AFoPR)**, suponha que a cesta $x = (x_1, x_2)$ foi diretamente preferência revelada à cesta $y = (y_1, y_2)$, aos preços p_1 e p_2 , e a cesta $y = (y_1, y_2)$ foi diretamente preferência revelada à cesta $z = (z_1, z_2)$, aos preços $\bar{p}_1$ e $\bar{p}_2$. Se as preferências são transitivas, então é válido dizer que a cesta $x = (x_1, x_2)$ é indiretamente preferência revelada à cesta $z = (z_1, z_2)$. É dito indiretamente preferida porque não observa essa relação diretamente. Observa-se diretamente apenas a relação de escolhas entre as cestas $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ e entre as cestas $y = (y_1, y_2)$ e $z = (z_1, z_2)$. Usando essas duas relações de escolhas e supondo que as preferências são transitivas, pode-se indiretamente afirmar que a cesta (x_1, x_2) é preferida à cesta (z_1, z_2) .

Axioma Forte da Preferência Revelada (AFoPR). Seja $x = (x_1, x_2)$ uma cesta preferência revelada direta ou indiretamente à cesta $y = (y_1, y_2)$, $x = (x_1, x_2) \neq y = (y_1, y_2)$. Então $y = (y_1, y_2)$ não pode ser revelada preferida nem direta nem indiretamente à $x = (x_1, x_2)$.

O **AFoPR** estende o **AFrPR** ao incluir a relação indireta de preferência revelada.

É fácil notar que se o consumidor maximiza a utilidade, então suas escolhas devem satisfazer o **AFoPR**.

Exemplo 4.5. Suponha as seguintes três observações, contendo as escolhas do consumidor e os preços cobrados quando essas escolhas foram feitas:

Observações	x_1	x_2	p_1	p_2
1	2	3	2	3
2	3	2	3	2
3	3	3	2	2

Verifica-se que essas escolhas satisfazem o **AFrPR**? Primeiro vamos calcular quanto foi gasto em cada observação e quanto o consumidor gastaria para obter as outras cestas àqueles preços. Na tabela abaixo, tem-se os custos de cada cesta, em que as linhas reportam esse custo calculado para os preços de cada observação, e as colunas representam as quantidades escolhidas em cada observação.

	Cesta Obs 1	Cesta Obs 2	Cesta observada 3
Preços Obs 1	13	12	15
Preços Obs 2	12	13	15
Preços Obs 3	10	10	12

A diagonal da matriz acima é o valor que o consumidor pagou pelas cestas compradas. Cada linha diz o quanto ele pagaria pelas outras cestas, aos preços da cesta escolhida. A diagonal representa o valor das cestas escolhidas. A primeira linha diz o preço da cesta escolhida e o valor das outras cestas, calculados com os mesmos preços da cesta escolhida. Como para a cesta 2 o valor é menor, a cesta 1 foi preferência revelada à cesta 2. A cesta 3 custava mais caro do que a cesta escolhida nessa observação, então não pode-se inferir nenhuma relação entre a cesta 1 e a cesta 3 usando a primeira linha. Na segunda linha, a cesta 2 foi escolhida. A cesta 3 custava mais caro do que a cesta escolhida nessa observação, então não pode-se inferir nenhuma relação entre a cesta 2 e a cesta 3 usando a segunda linha. Porém, a cesta 1 poderia ter sido comprada aos preços vigentes quando a cesta 2 foi escolhida. Portanto, a cesta 2 é preferência revelada à cesta 1. Mas como a cesta 1 foi preferência revelada à cesta 2 na primeira observação, então o **AFrPR** não é satisfeito. Na terceira linha, a cesta 3 foi a escolhida e é preferência revelada às cestas 1 e 2, já que essas cestas custavam mais barato do que a cesta 3 quando essa cesta foi comprada. Como nas observações anteriores, as cestas escolhidas custavam menos do que a cesta 3, essa observação satisfaz o **AFrPR**.

4.5 Função de Produção de Cobb-Douglas

4.5.1 Introdução

Em economia, a função de produção de Cobb-Douglas é amplamente utilizada para representar a relação de uma saída de insumos. Foi proposto por Knut Wicksell (1825-1926) e testado contra a evidência estatística por Charles Cobb e Paul Douglas.

Em 1928, Charles Cobb e Paul Douglas publicaram um estudo na qual modelaram o crescimento da economia americana durante o período de 1899-1922. Eles consideraram uma visão simplificada da economia em que o nível de produção é determinado pela quantidade de trabalho envolvido e a quantidade de capital investido. Embora existam muitos outros fatores que afetam o desempenho econômico, seu modelo provou ser muito preciso.

A função que eles utilizavam para a produção do modelo foi da forma:

$$P(K, L) = bL^\alpha K^\beta, \quad (4.26)$$

onde

- **P** = Produção total (o valor monetário de todos os bens produzidos em um ano (PIB)).
- **L** = Trabalho (o número total de horas que a pessoa trabalha em um ano).
- **K** = Capital (o valor monetário de todas as máquinas, equipamentos e edifício).
- **b** = fator de produtividade total.
- α e β são as elasticidades dos produtos de trabalho e capital, respectivamente. Estes valores são constantes determinadas pela tecnologia disponível.

Elasticidade do produto mede a capacidade de resposta do produto para uma mudança nos níveis de qualquer trabalho ou capital utilizado na produção, *ceteris paribus*. Por exemplo se $\alpha = 0,15$ então um aumento de 1% em trabalho conduziria a um aumento de aproximadamente 0,15% no produto. Além disso, se $\alpha + \beta = 1$, a função de produção tem rendimentos constantes de escala, por exemplo, se **L** e **K**, aumentam cada um em 20%, então a função produção aumenta em 20%. Assim, se a produção aumenta pela mesma mudança proporcional então existem rendimentos constantes de escala. Se a produção aumenta menos do que a mudança proporcional, então existem rendimentos decrescentes de escala. Por outro lado, se a produção aumenta mais do que a mudança proporcional, então existem rendimentos crescentes de escala.

No entanto, se

$$\alpha + \beta < 1,$$

os rendimentos de escala são decrescentes, e se

$$\alpha + \beta > 1,$$

os rendimentos de escala são crescentes. Supondo competição perfeita, α e β podem ser vistos como trabalho e capital do produto.

4.5.2 Hipóteses

Se a função de produção é denotada por $P = P(L, K)$, então a derivada parcial $\frac{\partial P}{\partial L}$ é a taxa na qual a produção muda com respeito à quantidade. Os economistas chamam esta taxa de produção marginal com respeito ao trabalho ou produtividade marginal do trabalho. Da mesma forma, a derivada parcial $\frac{\partial P}{\partial K}$ é a taxa da mudança da produção com respeito ao capital e é chamada a produtividade marginal do capital.

Nestes termos, as suposições feitas por Cobb e Douglas são:

1. Se trabalho ou capital desaparece, então a produção também.
2. A produtividade marginal do trabalho é proporcional à quantidade da produção por unidade de trabalho.
3. A produtividade marginal do capital é proporcional à quantidade de produção por unidade de capital.

4.5.3 Resolução

Sabendo que a produção por unidade de trabalho é $\frac{P}{L}$, a suposição 2 da seção 4.5.2 diz que

$$\frac{\partial P}{\partial L} = \alpha \frac{P}{L},$$

para alguma constante α . Se mantivermos K constante ($K = K_0$) então esta equação diferencial parcial torna-se uma equação diferencial ordinária:

$$\frac{dP}{dL} = \alpha \frac{P}{L}. \quad (4.27)$$

Esta equação diferencial separável pode ser resolvida da seguinte maneira. Inicialmente reescreve-se

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dL} = \frac{\alpha}{L}. \quad (4.28)$$

Integrando ambos os membros na variável L obtém-se

$$\int \frac{1}{P} \frac{dP}{dL} dL = \int \frac{\alpha}{L} dL.$$

Lembrando que $dP = \frac{dP}{dL} dL$ pela técnica de mudança de variável segue

$$\int \frac{1}{P} dP = \alpha \int \frac{1}{L} dL,$$

que resolvendo tem-se

$$\ln P = \alpha \ln L + \bar{c}(k_0),$$

onde $\bar{c}(k_0)$ é a constante de integração como função de k_0 uma vez que seu valor depende do valor de k_0 . Definindo, $c(k_0) = \exp^{\bar{c}(k_0)}$ segue que

$$\ln P = \alpha \ln L + \ln c(k_0).$$

Portanto,

$$P(L, k_0) = C_1(k_0)L^\alpha.$$

Analogamente, a suposição (3) diz que

$$\frac{\partial P}{\partial K} = \beta \frac{P}{K}, \quad (4.29)$$

mantendo L constante ($L = L_0$) esta equação diferencial pode ser resolvida de maneira análoga obtendo

$$P(L_0, K) = C_2(L_0)K^\beta. \quad (4.30)$$

Finalmente, combinando as equações (4.29) e (4.30), temos

$$P(L, K) = bL^\alpha K^\beta, \quad (4.31)$$

onde b é uma constante que é independente de ambos L e K .

A suposição (1) mostra que $\alpha > 0$ e $\beta > 0$

Observe da equação (4.31) que se o trabalho e o capital são ambos aumentados por um fator m então

$$P(mL, mK) = b(mL)^\alpha(mK)^\beta = bm^{\alpha+\beta}L^\alpha K^\beta = m^{\alpha+\beta}bL^\alpha K^\beta = m^{\alpha+\beta}P(L, K).$$

Se $\alpha + \beta = 1$ então $P(L, K) = mP(L, K)$, a qual significa que a produção é também aumentada por um fator de m , como discutido anteriormente.

5 Conclusão

Neste trabalho foi apresentada uma abordagem dos métodos matemáticos aplicados à microeconomia. Foi visto o comportamento das curvas da oferta e da demanda, encontrando o seu ponto de equilíbrio, com um aumento ou uma diminuição no preço do bem. Em seguida, foi observado como o efeito do imposto sobre venda, o efeito da renda do consumidor e o efeito dos preços cruzados movimentam essas curvas. Foram também estudados esses movimentos na elasticidade no curto e longo prazo

Foram realizados estudos em como os produtores se comportam. Os produtores minimizaram os seus custos com a função lagrangeana, e através dessa minimização de custo faz-se a maximização do seus lucros. Todo esse processo foi visto através de alguns exemplos.

Estudou-se a teoria do comportamento dos consumidores com restrição orçamentária. As curvas de indiferença mostram o quanto uma pessoa troca um bem por outro mantendo o mesmo grau de satisfação. Por fim, o Princípio da Preferência Revelada revela a preferência que o consumidor tem sobre outro.

Referências

- [1] DENARDIN, A. A. *Microeconomia II*. 2009. Notas de aulas.
- [2] GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de Cálculo - Volume 1*. 5. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2001.
- [3] GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de Cálculo - Volume 2*. 5. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2001.
- [4] KRUGMAN, P. R.; WELLS, R. *Introdução à Economia*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.
- [5] SMITH, A. *A Mathematical Introduction to Economics*. Oxford: Basil Blackwell, 1982.
- [6] STEWART, J. *Cálculo - Volume I*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.
- [7] STEWART, J. *Cálculo - Volume II*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.