UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
FACULDADE DE CIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA

TESE DE DOUTORADO

DA ARGUMENTAÇÃO À PROVA: produção e avaliação de argumentos matemáticos produzidos por alunos ingressantes em um curso de formação de professores

Fredy Coelho Rodrigues

Bauru - SP
2023

FREDY COELHO RODRIGUES

DA ARGUMENTAÇÃO À PROVA: produção e avaliação de argumentos matemáticos produzidos por alunos ingressantes em um curso de formação de professores

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de Bauru, como um dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Educação para a Ciência, área de concentração Ensino de Ciências e Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Marco Aurélio Alvarenga Monteiro.

Bauru, SP
2023

R696a

Rodrigues, Fredy Coelho
Da argumentação à prova: : produção e avaliação de argumentos matemáticos produzidos por alunos ingressantes em um curso de formação de professores / Fredy Coelho Rodrigues. -- Bauru, 2023
327 p. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências, Bauru
Orientador: Marco Aurélio Alvarenga Monteiro

1. Formação de professores. 2. Argumentação matemática. 3. Argumentação coletiva. 4. Argumentos de prova. 5. Argumentos de justificação. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de Ciências, Bauru. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Bauru

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA TESE DE DOUTORADO DE FREDY COELHO RODRIGUES, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA, DA FACULDADE DE CIÊNCIAS - CÂMPUS DE BAURU.

Aos 14 dias do mês de julho do ano de 2023, às 09:00 horas, por meio de Videoconferência, realizou-se a defesa de TESE DE DOUTORADO de FREDY COELHO RODRIGUES, intitulada **Da argumentação à prova: produção e avaliação de argumentos matemáticos produzidos por alunos ingressantes em um curso de formação de professores**. A Comissão Examinadora foi constituida pelos seguintes membros: Prof. Dr. MARCO AURELIO ALVARENGA MONTEIRO (Orientador(a) - Participação Virtual) do(a) Departamento de Fisica e Quimica / Faculdade de Engenharia - UNESP/Guaratingueta, Profa. Dra. ELIANE SCHEID GAZIRE (Participação Virtual) do(a) Departamento de Educação / Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Prof. Dr. PAULO CESAR OLIVEIRA (Participação Virtual) do(a) Departamento de Física, Química e Matemática / Universidade Federal de São Carlos, Prof. Assoc. NELSON ANTONIO PIROLA (Participação Virtual) do(a) Departamento de Educacao / Faculdade de Ciências - UNESP/Bauru, Prof. Assoc. EDER PIRES DE CAMARGO (Participação Virtual) do(a) Departamento de Física e Química / Faculdade de Engenharia - UNESP/Ilha Solteira. Após a exposição pelo doutorando e arguição pelos membros da Comissão Examinadora que participaram do ato, de forma presencial e/ou virtual, o discente recebeu o conceito final: _ APROVADO _ _ _ _ _ _ _ _ . Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelo(a) Presidente(a) da Comissão Examinadora.

gov.br Documento assinado digitalmente
MARCO AURELIO ALVARENGA MONTEIRO
Data: 24/07/2023 08:24:41-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. MARCO AURELIO ALVARENGA MONTEIRO

Dedico este trabalho de tese a minha mãe Mariete Ferreira Coelho que sempre lutou e trabalhou incansavelmente para investir e apoiar a educação dos filhos. Você plantou a semente, acreditou no poder transformador da Educação e hoje estamos aqui, colhendo o fruto desse sonho realizado. Se não fosse por você eu não teria chegado até aqui.

AGRADECIMENTOS

À Deus, por me conceder equilíbrio e saúde mental, para me reconstruir e finalizar este projeto que constitui um sonho realizado.

À minha mãe Mariete Ferreira Coelho pelo amor, acolhida e apoio incondicional durante o período de medo, solidão e instabilidade emocional que vivi ao longo do doutorado.

Ao meu irmão Franco Coelho Rodrigues pelo suporte e incentivo durante as adversidades.

Às minhas queridas filhas, Sophia Coelho, Ana Lívia Coelho e Isabela Coelho, pelo amor e compreensão nos momentos de ausência.

Ao meu orientador Marco Aurélio Alvarenga Monteiro, pela parceria, confiança, aprendizado e troca de experiências.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência da Unesp campus Bauru, em especial, Marco Aurélio Alvarenga Monteiro, Nelson Antônio Pirola, Roberto Nardi, Fernanda Bozelli, Silvia Regina Vieira da Silva, Wilson Massashiro Yonezawa e Ivete Baraldi (in memória) pela amizade, aprendizado, conselhos e parcerias no desenvolvimento de artigos.

Aos meus colegas do Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência, pelo trabalho colaborativo, aprendizado, trocas de experiências e parcerias na escrita de artigos.

Ao Instituto Federal do Sul de Minas, campus Passos, por apoiar o desenvolvimento desta pesquisa contribuindo para o meu afastamento integral das atividades docentes.

Aos meus colegas de trabalho da licenciatura em matemática do IFSULDEMINAS, Campus Passos, pela compreensão e apoio durante o período de afastamento docente.

À minha orientadora do Mestrado Eliane Scheid Gazire pelo incentivo ao prosseguimento na pós-graduação, trocas de experiência e oportunidades de divulgação do meu trabalho.

É experiência aquilo que “nos passa”, ou que nos toca, ou que nos acontece, e ao nos passar nos forma e nos transforma. Somente o sujeito da experiência está, portanto, aberto à transformação (LARROSA, 2002, p.26).

RESUMO

Este estudo teve por objetivo investigar como alunos ingressantes em um curso de Licenciatura em Matemática do IFSULDEMINAS, Campus Passos argumentam e avaliam seu desempenho durante o processo de justificação e validação de conceitos matemáticos em um contexto de ensino baseado em argumentação coletiva e investigação. O estudo se justifica na medida em que contribui para aprofundar a discussão sobre o tema, oferecendo subsídios teóricos e metodológicos para fomentar e avaliar a prática de argumentação coletiva (processo e produto) em sala de aula, contribuindo assim para a formação conceitual e proficiência da prática argumentativa. Para tanto foi realizado um estudo de caso (exploratório/descritivo/explicativo) para compreender melhor o fenômeno que envolve "**três situações de argumentação coletiva**". O estudo de caso foi estruturado em três fases. Na **1ª fase** realizamos uma pesquisa bibliográfica (estado do conhecimento da literatura nacional e internacional) e uma pesquisa bibliométrica (literatura internacional) para estabelecer a definição do problema, os objetivos de pesquisa, a questão central de investigação bem como a seleção do referencial teórico da pesquisa. Já na **2ª fase** coletamos dados por meio de observação participante (documentada por meio de videogravação e notas de campo), recolha de registros escritos produzidos por três grupos de trabalho e autoscopia operacionalizada pela dinâmica de grupo focal. Com a observação participante registramos todo o processo de argumentação coletiva realizada de modo oral e multimodal. Por meio da recolha dos registros escritos produzidos pelos grupos de trabalho documentamos toda a produção de argumentos gerados por escrito. E por último, com a autoscopia, propiciamos cada grupo de trabalho autoavaliar coletivamente o seu desempenho na prática da argumentação. Na **3ª e última fase,** analisamos os dados com base na lente teórica da análise argumentativa (Toulmin, 1958; 2001) e da análise de conteúdo (Bardin, 1985). Com base nas ideias de Toulmin e nas estruturas globais de argumentação analisamos a anatomia do processo argumentativo buscando compreender como os alunos argumentam (raciocinam) para justificar conceitos e ideias matemáticas. Por outro lado, por meio da estrutura do argumento de Toulmin aliado as ideias de Nicolas Balacheff sobre os tipos e níveis de prova analisamos a fisiologia do argumento de prova enquanto produto final da argumentação para compreender como os alunos argumentam (raciocinam) para validar ideias matemáticas em problemas de prova. Por fim, aplicamos a análise de conteúdo nas transcrições das sessões de autoscopia para compreender como os alunos autoavaliam seu desempenho na prática da argumentação e quais competências e habilidades argumentativas são evidenciadas como importantes por eles visando a formação do professor que ensina matemática. Ao examinarmos a anatomia das situações de argumentação coletiva, os resultados indicaram que as estruturas de argumentação global encontradas no estudo (estrutura fonte; estrutura linear; estrutura de argumentos independentes; estrutura espiral; estrutura reservatório; estrutura fonte divergente) variavam em sua complexidade muito em função do apoio docente que é oferecido durante a argumentação como também em função da natureza do tipo de problema proposto. Em particular, uma nova estrutura global de argumentação (Estrutura fonte divergente) não documentada na literatura emergiu nos dados da pesquisa. No contexto dos 5 problemas analisados, as argumentações de uma maneira geral, evoluíram do campo visual de justificação para o campo conceitual e o material concreto utilizado na atividade viabilizou essa transição. Por outro lado, ao examinamos em detalhes toda a fisiologia e qualidade (solidez) do argumento de prova utilizado para fins de validação nos problemas 3 e 5 da atividade, os resultados mostraram que os alunos investigados tiveram dificuldades em produzir provas conceituais (forte e de boa elaboração), contudo, essa dificuldade foi minimizada na medida em que o professor ofereceu apoio solicitando generalizações. Em relação ao contexto citado anteriormente, o modelo de avaliação do argumento de prova proposto por Rodrigues e Monteiro (2021) foi testado pela primeira vez durante este estudo e os resultados mostraram que o referido modelo demonstrou sua eficiência

na avaliação e classificação dos componentes do argumento de prova, exceto em uma situação particular, onde foi proposto nos resultados do estudo, uma classificação adicional para os dados (dado genérico). Quando chamados a refletirem e realizarem uma autoavaliação do seu desempenho na prática da argumentação coletiva, os alunos destacaram estar diante de uma abordagem nova e desconhecida por eles, no entanto, em meio as dificuldades (conteúdo e com a metodologia), eles conseguiram colaborativamente atingir um aprendizado conceitual e desenvolver competências e habilidades relacionadas a proficiência da prática de argumentação e prova em sala de aula. Neste último caso, os alunos apresentaram um conjunto de competências e habilidades argumentativas nos quais eles julgaram ter grande importância para a formação do professor que ensina matemática.

Palavras-chave: formação de professores; argumentação matemática; argumentação coletiva; argumentos de prova; argumentos de justificação; prática argumentativa.

ABSTRACT

This study aimed to investigate how new students in a Mathematics Degree course at IFSULDEMINAS, Campus Passos argue and evaluate their performance during the process of justification and validation of mathematical concepts in a teaching context based on collective argumentation and investigation. The study is justified in that it contributes to deepen the discussion on the subject, offering theoretical and methodological subsidies to encourage and evaluate the practice of collective argumentation (process and product) in the classroom, thus contributing to the conceptual formation and proficiency of argumentative practice. For that, a case study (exploratory/descriptive/explanatory) was carried out to better understand the phenomenon that involves "three situations of collective argumentation". The case study was structured in three phases. In the 1st phase we carried out a bibliographical research (state of knowledge of national and international literature) and a bibliometric research (international literature) to establish the definition of the problem, the research objectives, the central question of investigation as well as the selection of the theoretical reference of the research. In the 2nd phase, we collected data through participant observation (documented through video recording and field notes), collection of written records produced by three working groups and autoscopy operationalized by the focus group dynamics. With participant observation, we recorded the entire process of collective argumentation carried out in an oral and multimodal way. Through the collection of written records produced by the working groups, we documented the entire production of arguments generated in writing. And finally, with autoscopy, we allow each work group to collectively self-assess their performance in the practice of argumentation. In the 3rd and last phase, we analyzed the data based on the theoretical lens of argumentative analysis (Toulmin, 1958; 2001) and content analysis (Bardin, 1985). Based on Toulmin's ideas and on the global structures of argumentation, we analyze the anatomy of the argumentative process, seeking to understand how students argue (reason) to justify mathematical concepts and ideas. On the other hand, through the structure of Toulmin's argument combined with Nicolas Balacheff's ideas about the types and levels of proof, we analyze the physiology of the proof argument as a final product of argumentation to understand how students argue (reason) to validate mathematical ideas in proof problems. Finally, we applied content analysis to the transcripts of the autoscopy sessions to understand how students self-assess their performance in the practice of argumentation and which argumentative skills and abilities are evidenced as important by them, aiming at the formation of teachers who teach mathematics. When examining the anatomy of collective argumentation situations, the results indicated that the global argumentation structures found in the study (source structure; linear structure; structure of independent arguments; spiral structure; reservoir structure; divergent source structure) varied in their complexity greatly depending on the teaching support that is offered during the argumentation, as well as depending on the nature of the type of problem proposed. In particular, a new global structure of argumentation (Divergent source structure) not documented in the literature emerged in the research data. In the context of the 5 problems analyzed, the arguments in general evolved from the visual field of justification to the conceptual field and the concrete material used in the activity made this transition possible. On the other hand, when we examined in detail all the physiology and quality (solidity) of the proof argument used for validation purposes in problems 3 and 5 of the activity, the results showed that the investigated students had difficulties in producing conceptual proofs (strong and well elaborated), however, this difficulty was minimized as the professor offered support by requesting generalizations. Regarding the aforementioned context, the proof argument evaluation model proposed by Rodrigues and Monteiro (2021) was tested for the first time during this study and the results showed that the referred model demonstrated its efficiency in the evaluation and classification of the proof argument components, except in a particular situation, where an additional

classification for the data was proposed in the results of the study (generic data). When asked to reflect and carry out a self-assessment of their performance in the practice of collective argumentation, the students highlighted that they were facing a new and unknown approach, however, amidst the difficulties (content and methodology), they managed to collaboratively achieve conceptual learning and develop skills and abilities related to proficiency in the practice of argumentation and proof in the classroom. In the latter case, the students presented a set of competences and argumentative abilities in which they judged to be of great importance for the formation of the teacher who teaches mathematics.

Keywords: teacher training; mathematical argumentation; collective argumentation; proof arguments; justification arguments; argumentative practice.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Evolução das publicações no período de 2011 a 2020..... **35**
Figura 2 - Os dez países com maior número de publicações..... **37**
Figura 3 - Quantidade de trabalhos produzidos por foco temático de pesquisa..... **48**
Figura 4 - A produção e sua distribuição no tempo..... **76**
Figura 5 - A produção por região do país..... **77**
Figura 6 - A produção e sua distribuição de acordo com as instituições acadêmicas..... **78**
Figura 7 - A produção e a sua distribuição por níveis de Ensino..... **79**
Figura 8 - Quantidade de trabalhos produzidos por foco temático de pesquisa..... **81**
Figura 9 - Mapa de abrangência do IFSULDEMINAS..... **138**
Figura 10 - Fases do estudo de caso distribuídas ao longo dos capítulos..... **142**
Figura 11 - Estrutura simples do modelo de Toulmin..... **157**
Figura 12 - Estrutura completa do modelo de Toulmin..... **157**
Figura 13 - Ilustração da estrutura de linha..... **164**
Figura 14 - Ilustração da estrutura argumentos independentes..... **165**
Figura 15 - Ilustração da estrutura fonte..... **166**
Figura 16 - Ilustração da estrutura espiral..... **166**
Figura 17 - Ilustração da estrutura de reservatório..... **167**
Figura 18 - Ilustração da estrutura de reunião ou coleta..... **168**
Figura 19 - TAP no contexto da teoria de Balacheff (1987,1988) **169**
Figura 20 - Primeiro problema da atividade proposta..... **181**
Figura 21 - Estrutura reservatório observada na discussão da questão 1 – grupo 1..... **182**
Figura 22 - Estrutura reservatório observada na discussão da questão 1 – grupo 2..... **185**
Figura 23 - Conjecturas elaboradas no registro escrito para a questão 1 - grupo 2..... **188**
Figura 24 - Estrutura Fonte divergente observada na discussão da questão 1 – grupo 3..... **189**
Figura 25 - Conclusão baseada na quantidade grãos ordenados, questão 1- grupo 3..... **190**
Figura 26 - Conclusão baseada na quantidade total de grãos questão 1- grupo 3..... **191**
Figura 27 - Segundo problema da atividade proposta..... **193**
Figura 28 - Estrutura espiral observada na discussão da questão 2 – grupo 1..... **194**
Figura 29 - Estrutura espiral observada na solução da questão 2 - grupo 2..... **198**
Figura 30 - Registro escrito da representação geométrica do número 15 (base decimal) na base 3..... **200**
Figura 31 - Registro escrito da justificação de conversão do número 15 (base decimal) para a base 3..... **202**
Figura 32 - Estrutura espiral observada na solução da questão 2 - grupo 3..... **203**
Figura 33 - Registro escrito mostrando a conversão de 15 para a base 5..... **205**
Figura 34 - Registro escrito mostrando a conversão de 15 para a base 2 – 1ª parte..... **205**
Figura 35 - Registro escrito mostrando a conversão de 15 para a base 2 – 2ª parte..... **205**
Figura 36 - Terceiro problema da atividade proposta..... **208**
Figura 37 - Estrutura espiral observada na solução da questão 3 - grupo 1..... **208**
Figura 38 - Produção escrita do grupo 1 para a questão 3..... **210**
Figura 39 - Estrutura de Linha observado na solução da questão 3 - grupo 2..... **212**
Figura 40 - Estrutura espiral observado na solução de prova da questão 3 - grupo 3..... **214**
Figura 41 - Registro escrito da conclusão final da questão 3 – grupo 3..... **217**
Figura 42 - Quarto problema da atividade proposta..... **218**
Figura 43 - Estrutura argumentos independentes observado na solução da questão 4 - grupo 1..... **219**
Figura 44 - Estrutura de linha observado na solução da questão 4 - grupo 2..... **220**
Figura 45 - Resolução apresentada para justificar conclusão da questão 4 – grupo 2..... **221**

Figura 46 - Estrutura espiral observado na solução da questão 4 - grupo 3..... **222**
Figura 47 - Garantia apresentada por escrito para fundamentar a resolução da questão..... **223**
Figura 48 - Garantia apresentada por escrito para fundamentar a conclusão da questão..... **224**
Figura 49 - Quinto problema da atividade proposta..... **225**
Figura 50- Estrutura de argumentos independentes observado durante a discussão da questão 5..... **225**
Figura 51 - Registro escrito da conclusão da questão 5 - grupo 1..... **226**
Figura 52 - Estrutura fonte observada durante a discussão da questão 5 – grupo 2..... **227**
Figura 53 - Registro escrito do apoio as garantias da questão 5..... **230**
Figura 54 - Estrutura fonte observada durante a discussão da questão 5 – grupo 3..... **231**
Figura 55 - Registro escrito da garantia oferecida para conversão $(120)_4 = 24$, questão 5 – grupo 3..... **232**
Figura 56 - Registro escrito da garantia oferecida para conversão $(10000)_5 = 625$, questão 5 – grupo 3..... **232**
Figura 57 - Argumento composto por 3 elementos: dado, garantia e conclusão..... **236**
Figura 58 - Classificação dos componentes do argumento de prova..... **238**
Figura 59 - Garantia apresentada como prova..... **238**
Figura 60 - Argumento composto por 3 elementos: dado, garantia e conclusão..... **239**
Figura 61 - Classificação dos componentes do argumento de prova..... **240**
Figura 62 - Argumento composto por 3 elementos: dado, garantia e conclusão..... **241**
Figura 63 - Classificação dos componentes do argumento de prova..... **243**
Figura 64 - Argumento composto por 3 elementos: dado, garantia e conclusão..... **244**
Figura 65 - Classificação dos componentes do argumento de prova..... **245**
Figura 66 - Argumento composto por 3 elementos: dado, garantia e conclusão..... **246**
Figura 67 - Classificação dos componentes do argumento de prova..... **248**
Figura 68 - Garantia apresentada como prova..... **248**
Figura 69 - Argumento composto por 3 elementos: dado, garantia e conclusão..... **249**
Figura 70 - Classificação dos componentes do argumento de prova..... **250**
Figura 71 - Garantia apresentada como prova..... **251**
Figura 72 - Argumento composto por 3 elementos: dado, garantia e conclusão..... **251**
Figura 73 - Classificação dos componentes do argumento de prova..... **252**
Figura 74 - Garantia apresentada como prova..... **253**
Figura 75 - Argumento composto por 3 elementos: dado, garantia e conclusão..... **253**
Figura 76 - Classificação dos componentes do argumento de prova..... **255**
Figura 77 - Garantia apresentada como prova..... **256**
Figura 78 - Argumento composto por 3 elementos: dado, garantia e conclusão..... **256**
Figura 79 - Classificação dos componentes do argumento de prova..... **258**

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Parâmetros de avaliação dos hot topics..... **35**
Quadro 2 - As dez áreas com maior número de pesquisas..... **37**
Quadro 3 - As dez instituições que mais publicaram sobre o tema no período..... **38**
Quadro 4 - As dez fontes com maior número de publicações..... **39**
Quadro 5 - Os vinte tópicos mais importantes relacionados ao tema "argumentação" e "matemática" **40**
Quadro 6 - Os "hot topics" associados ao tema argumentação e matemática..... **41**
Quadro 7 - Artigos sobre o tema argumentação e matemática..... **45**
Quadro 8 - Identificação dos artigos selecionados..... **46**
Quadro 9 - Os dez artigos mais citados na literatura internacional..... **47**
Quadro 10 - Categorias referentes aos focos temáticos de pesquisa..... **48**
Quadro 11 - Relação de trabalhos por categoria..... **49**
Quadro 12 - Dissertações e teses sobre argumentação no ensino de matemática disponibilizados na BDTD..... **74**
Quadro 13 - Informações sobre os trabalhos selecionados por ordem alfabética dos autores..... **75**
Quadro 14 - Categorias referentes aos focos temáticos de pesquisa..... **80**
Quadro 15 - Relação de trabalhos por categoria..... **81**
Quadro 16 - Caracterização hierárquica e relação entre os três polos..... **129**
Quadro 17 - Síntese..... **133**
Quadro 18 - Os municípios onde a instituição atua..... **138**
Quadro 19 - Cursos ofertados pelo IFSULDEMINAS, Campus Passos..... **139**
Quadro 20 - Perfil dos participantes do estudo..... **176**
Quadro 21 - Distribuição das estruturas de argumentação em cada questão..... **180**
Quadro 22 - Distribuição das estruturas de argumentação por grupo e problema..... **233**
Quadro 23 - Síntese dos resultados..... **234**
Quadro 24 - Evolução do argumento de prova em cada grupo nos problemas 3 e 5..... **258**
Quadro 25 - Competências e habilidades argumentativas que emergem da autoscopia..... **266**

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BDTD	Base Digital de Teses e Dissertações
AProvaME	Argumentação e Prova na Matemática Escolar
PNLD	Plano Nacional do Livro Didático
M	Mestrado Acadêmico
MP	Mestrado Profissional
D	Doutorado
IES	Instituição de Ensino Superior
PUC-SP	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
UNESP	Universidade Estadual Paulista
USP	Universidade de São Paulo
UEM	Universidade Estadual de Maringá
UFRN	Universidade Federal do Rio Grande do Norte
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
UFG	Universidade Federal de Goiás
UFMS	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFN	Universidade Franciscana
WoS	Web of Science
TUR	Turquia
ALE	Alemanha
FRA	França
ESP	Espanha
EUA	Estados Unidos
ESC	Escócia
ISR	Israel
IND	Indonésia
BNCC	Base Nacional Comum Curricular

SUMÁRIO

Apresentação..... **19**

Introdução..... **25**

Capítulo 1 - A argumentação no ensino da matemática: uma análise bibliométrica da produção científica internacional..... **32**
1.1 O levantamento de dados bibliométricos..... **33**
1.2 Análise dos dados bibliométricos..... **34**
1.3 Resultados do levantamento bibliométrico..... **35**
1.3.1 O total de publicações e os tipos de documentos..... **35**
1.3.2 As principais áreas de pesquisa..... **36**
1.3.3 Principais países e instituições produtoras de conhecimento..... **37**
1.3.4 As principais fontes e autores das publicações..... **38**
1.3.5 Os vinte tópicos centrais candidatos a "hot topics" **40**
1.3.6. Os "hot topics" de pesquisa..... **41**
1.4 Uma conclusão sobre o levantamento bibliográfico..... **42**

Capítulo 2 - Argumentação no ensino da matemática: o estado do conhecimento da produção científica internacional..... **45**
2.1 O levantamento de artigos de alto impacto na área..... **45**
2.2 Resultados da busca..... **45**
2.3 A argumentação no ensino de matemática: o que dizem as pesquisas internacionais sobre o assunto?..... **48**
2.3.1 Estruturas, modelos ou padrões de argumentação..... **50**
2.3.2 Expectativas, crenças e percepções em relação a argumentação..... **53**
2.3.3 Estratégias de apoio à argumentação e prova..... **57**
2.3.3.1 Roteiros de colaboração e exemplos heurísticos..... **57**
2.3.3.2 Telhas de linguagem virtual em uma abordagem de investigação..... **60**
2.3.3.3 Normas de apoio à argumentação..... **60**
2.3.3.4 Argumentação coletiva..... **61**
2.3.3.5 Tarefas de modelagem matemática..... **62**
2.3.3.6 Apoio docente em situações contingente em sala de aula..... **63**
2.3.3.7 Atividades envolvendo literacias multimodais e gestão de diferentes registros semióticos..... **64**
2.3.4 Ambientes de argumentação..... **65**
2.3.5 Tipos, modos e finalidades da argumentação em sala de aula..... **66**
2.3.6 Análise de livro didático..... **70**
2.4 Considerações finais sobre o estado do conhecimento da produção científica internacional..... **71**

Capítulo 3 - A argumentação no ensino da matemática: o estado do conhecimento da produção nacional..... **72**
3.1 Levantamento das pesquisas relacionadas ao tema..... **73**
3.1.1 Resultados da busca..... **74**
3.2 A argumentação no ensino de matemática: o que dizem as produções nacionais envolvendo dissertações e teses? **79**
3.2.1 Análise de livro didático e revista pedagógica..... **82**
3.2.2 Concepções de alunos sobre argumentação e prova..... **84**

3.2.3 Estratégias desencadeadoras do processo de argumentação e prova..... **84**
3.2.3.1 Investigação matemática..... **84**
3.2.3.2 Experimentação com o uso da tecnologia..... **86**
3.2.3.3 Utilização de sequência/atividades didática (s) com ou sem o suporte da tecnologia..... **87**
3.2.4 Argumentação como uma estratégia ou método de ensino..... **87**
3.2.5 Espaço ou ambientes para a argumentação e prova..... **88**
3.2.6 Formação de professores no contexto da argumentação e prova..... **89**
3.2.7 Ensino da lógica construtora da argumentação e prova..... **90**
3.3 Considerações finais sobre o estado do conhecimento da produção nacional..... **91**
3.4 O problema de pesquisa e as questões de investigação que emergem do cenário da pesquisa internacional e nacional..... **92**

Capítulo 4 - A argumentação no contexto do ensino e aprendizagem da matemática..... **95**
4.1 A argumentação e o argumento matemático..... **95**
4.2 Argumentar coletivamente no contexto da matemática..... **98**
4.2.1 Os tipos de argumentos matemáticos no contexto da argumentação coletiva..... **99**
4.2.2 A aprendizagem no contexto da argumentação coletiva em sala de aula..... **102**
4.3 Habilidades de argumentação e as estratégias argumentativas associadas em contexto de ensino envolvendo a matemática..... **105**
4.4 Normas sociais e normas sociomáticas como estratégias para apoiar o desenvolvimento de habilidades argumentativas em sala de aula..... **108**

Capítulo 5 - O argumento de prova no contexto da matemática..... **112**
5.1 A evolução dos critérios de prova (demonstração) ao longo dos séculos..... **112**
5.2 A prova numa perspectiva lógica e formal no campo da matemática..... **115**
5.3 A prova no contexto da educação matemática em sala de aula..... **118**
5.4 Os diferentes tipos e níveis de prova para o contexto de sala de aula..... **123**
5.4.1 A provas pragmáticas e as provas intelectuais..... **123**
5.4.2 Os diferentes níveis de prova entre a prova pragmática e a prova conceitual..... **125**

Capítulo 6 - Metodologia: a pesquisa quantitativa e a pesquisa qualitativa no contexto do estudo..... **131**
6.1 O estudo de caso enquanto abordagem qualitativa..... **133**
6.1.1 As características fundamentais do estudo de caso abordado neste estudo..... **136**
6.1.2 Fases do desenvolvimento do estudo de caso..... **142**
6.1.3 A fase exploratória: a definição do problema e as questões de pesquisa..... **142**
6.1.3.1 Atividade proposta..... **144**
6.1.3.2 Atividade: fabricação de números..... **145**
6.1.3.3 Metodologia de organização da aula: aplicação da atividade..... **147**
6.2 A coleta de dados..... **148**
6.2.1 Observação de uma situação argumentativa envolvendo argumentação coletiva e documentada por meio de videogravação e notas de campo..... **149**
6.2.2 Recolha de registros escritos produzidos coletivamente por cada grupo de trabalho em torno da atividade proposta..... **151**
6.2.3 Autoscopia..... **152**
6.2.3.1 Sessões de autoscopia realizadas por meio de grupo focal..... **155**
6.3 Análise de dados..... **157**
6.3.1 Análise argumentativa de Toulmin (1958;2001) **157**

6.3.2 Estrutura para identificar um argumento matemático produzido no modelo de Toulmin..... **161**
6.3.3 Modelo de análise para identificar estruturas globais de argumentação e avaliar o raciocínio dos alunos..... **162**
6.3.4 Modelo de análise para avaliar o argumento de validação durante a argumentação coletiva..... **169**
6.3.5 Análise de conteúdo das sessões de autoscopia colhidas por meio do grupo focal..... **172**
6.3.6 Triangulação de fontes e métodos..... **173**

Capítulo 7 – Análise dos dados..... **175**
7.1 Perfil dos alunos participantes e a realização da atividade..... **176**
7.2 Anatomia do processo de argumentação coletiva: produção e avaliação de argumentos de justificação com base em estruturas globais de argumentação..... **179**
7.2.1 Problema 1..... **181**
7.2.1.1 Estrutura fonte-divergente..... **192**
7.2.2 Problema 2..... **193**
7.2.3 Problema 3..... **208**
7.2.4 Problema 4..... **218**
7.2.5 Problema 5..... **225**
7.3 Análise do argumento de validação para os problemas envolvendo a elaboração de prova matemática..... **235**
7.3.1 Argumentos de prova produzidos pelo grupo 1 referente a questão 3..... **236**
7.3.2 Argumentos de prova produzidos pelo grupo 2, referente a questão 3..... **241**
7.3.3 Argumentos de prova produzidos pelo grupo 3, referente a questão 3..... **243**
7.3.4 Argumentos de prova produzidos pelo grupo 1, referente a questão 5..... **251**
7.3.5 Argumentos de prova produzidos pelo grupo 2, referente a questão 5..... **254**
7.3.6 Argumentos de prova produzidos pelo grupo 3, referente a questão 5..... **255**
7.4 Autoavaliação do processo argumentativo pelos alunos participantes da pesquisa: Aprendizagem, competências e habilidades argumentativas documentadas durante as sessões de autoscopia..... **259**
7.4.1Aprendizagem, competências e habilidades argumentativas documentadas pelos grupos durante as sessões de autoscopia..... **259**

Considerações finais..... **268**

Referências..... **278**

Apêndice A..... **292**
Apêndice B..... **305**
Apêndice C..... **315**
Anexo A..... **326**

APRESENTAÇÃO

Meu nome é Fredy Coelho Rodrigues, sou natural de Araçuaí-MG, cidade localizada no Vale do Jequitinhonha, norte do Estado de Minas Gerais.

Sou oriundo de família humilde, o filho mais velho de um total de dois irmãos. A minha mãe, professora aposentada dos anos iniciais do Ensino Fundamental na rede pública de ensino, desde a minha infância e adolescência, foi quem me incentivou a estudar para conquistar um bom emprego.

Sempre estudei em escola pública e procurava me dedicar ao máximo aos estudos porque tinha o sonho de algum dia cursar uma faculdade e conquistar o meu sucesso financeiro.

Em dezembro de 2000, após a conclusão do ensino médio, eu e meu irmão, com o dinheiro do décimo terceiro salário da minha mãe fizemos a inscrição para o vestibular da Universidade Estadual de Minas Gerais (UNIMONTES) Campus Montes Claros-MG. Na oportunidade, consciente do fraco Ensino Médio que tivemos na rede pública de ensino, estrategicamente, optamos pela inscrição em cursos de menor concorrência da Universidade no intuito de aumentar a probabilidade de êxito na aprovação pelo vestibular. Na época, optei pelo curso de Licenciatura em Matemática, pela afinidade na área e por ser um curso noturno e que me possibilitasse trabalhar durante o dia. O meu irmão pelas mesmas razões optou pelo curso de Ciências Contábeis.

Com a aprovação no vestibular, que contou com nosso esforço e também muita sorte, tivemos que nos mudar para Montes Claros-MG mesmo sem perspectiva de recursos financeiros para se manter na cidade. Logo de início, precisei trabalhar para me manter. Como eu tinha muita facilidade na área de exatas, comecei a ministrar aulas particulares de Matemática, Física e Química. De início eu ficava o dia inteiro na porta de várias escolas particulares da cidade oferecendo serviço de reforço escolar aos pais que levavam os filhos para a escola.

Em pouco tempo adquiri uma clientela de alunos para reforço escolar, o que ajudou a me manter nos primeiros meses na cidade. O meu irmão, por ser mais novo, dependia de mim. Eu ministrava aulas particulares o dia inteiro e a noite me deslocava para a faculdade, orgulhoso, feliz, focado e comprometido com o curso.

Durante o período que cursei a Licenciatura em Matemática (2001-2004), pude vivenciar uma experiência que contribuiu muito para o meu desenvolvimento profissional. Ao iniciar esse curso, eu acreditava que para ser um bom professor era preciso ter apenas um bom conhecimento teórico do conteúdo de Matemática a ser trabalhado com os alunos. No entanto,

essa ideia começou a mudar a partir do momento que passei a experienciar metodologias alternativas de ensino ao longo de um estágio realizado no Laboratório de Educação Matemática dessa instituição. A experiência de ensino-aprendizagem vivenciada no ambiente deste laboratório me deixou marcas e veio, posteriormente, influenciar de forma positiva a minha prática docente em sala de aula.

A minha história com o Laboratório de Educação Matemática (LEM) teve início no segundo semestre de 2001, período em que eu cursava o segundo período do curso de Licenciatura em Matemática e fui contemplado com uma bolsa de estágio neste laboratório. Na época, não sabia dizer ao certo o que era um Laboratório de Educação Matemática e muito menos que tipo de atividades passaria a desenvolver durante o estágio neste ambiente. A única coisa que me vinha à cabeça era a ideia de um espaço reservado ao estudo da Matemática, orientação de estágio e utilização de jogos. Eu acreditava que o meu papel dentro daquele projeto, portanto, consistiria apenas em prestar assistência aos professores e acadêmicos do curso no que diz respeito ao controle do acervo de livros didáticos e materiais manipulativos ali existentes, em especial os jogos. Acreditava, também, que a minha função seria zelar pela manutenção deste espaço, de modo que o mesmo estivesse sempre pronto para recepcionar os acadêmicos durante as atividades de estudo e estágio.

No entanto, eu estava errado, já que, antes mesmo do laboratório começar a funcionar, pude participar ativamente da fase de construção do seu espaço físico, como também, depois de pronto, experienciar, neste ambiente, várias atividades de ensino envolvendo a elaboração de oficinas didáticas, a confecção e uso de materiais manipuláveis e metodologias alternativas para o ensino da Matemática. Desde então, pude perceber que não bastava apenas ter o domínio de conteúdo para ensinar, é preciso também deter o conhecimento de metodologias alternativas capazes de propiciar ao aluno uma compreensão melhor da Matemática. Por meio dessa experiência de ensino, percebi que o Laboratório de Educação Matemática representa uma necessidade nos cursos de formação de professores.

Após um ano de estágio, fui indicado pelo coordenador do laboratório e por outro professor do curso de Matemática para uma vaga de emprego em um colégio particular da cidade. Sendo assim, tive que abandonar aquela atividade, de modo a ceder a vaga do referido estágio a outro acadêmico do curso para que o mesmo pudesse ter a mesma oportunidade que tive. O exercício da docência representava para mim a oportunidade de colocar em prática toda aquela experiência de ensino-aprendizagem que vivi no ambiente do laboratório, que me deixou marcas e que vem me transformando ao longo dos anos como professor de Matemática. Essa

experiência me possibilitou ser um professor reflexivo, que a todo o momento passa a questionar a sua prática profissional.

Após concluir a Licenciatura em Matemática no final de 2004, pude ingressar no início de 2005 em uma pós-graduação lato sensu em Matemática Superior com ênfase na área de Análise Matemática na própria instituição. Não era a área que eu desejava dar continuidade aos meus estudos, no entanto, era a única área de especialização ofertada pela Universidade naquele período. Não imaginava que esta especialização, depois de concluída, fosse me abrir as portas para a docência na Educação Superior.

No final de 2006, após a conclusão da especialização, de maneira despretensiosa para testar meus conhecimentos, prestei um processo seletivo para professor na referida Universidade para a área de Cálculo Diferencial e Integral (área que eu tinha muita facilidade) e acabei sendo aprovado para um regime de trabalho de 20 horas. Em pouco tempo, sai da condição de aluno para professor da Universidade que havia estudado.

Em 2007, apenas com uma titulação de especialista em uma grande Universidade, veio a cobrança pela titulação de mestre uma vez que o Conselho Estadual de Educação passaria a exigir a referida titulação para o exercício do magistério da Educação Superior no âmbito da Universidade. Neste período eu lecionava Cálculo Diferencial e Integral no curso de Licenciatura em Matemática da UNIMONTES como também em cursos de engenharia em uma Universidade privada. Paralelo a isso, mantinha o vínculo docente de professor da Educação Básica em um colégio particular da cidade (Colégio Berlaar Imaculada Conceição) em que eu atuava desde a época de acadêmico.

No ano posterior, em 2008 ingressei no Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da PUC-MINAS (Belo Horizonte). Na época, este era o único programa de pós-graduação na área de Ensino de Matemática em Minas Gerais. Na impossibilidade de afastamento das atividades docentes, tentei conciliar as atividades do mestrado com uma demanda semanal de 40 aulas semanais. Diante das dificuldades para trabalhar, viajar e estudar acabei trancando o mestrado. Frustrado com a grande quantidade de aulas que eu tinha semanalmente, resolvi tentar concurso na rede federal de ensino, almejando melhores condições de trabalho em um regime de Dedicação Exclusiva que posteriormente pudesse viabilizar algum tipo de afastamento para que eu pudesse cursar mestrado.

Em 2009, já contando com a minha experiência, ainda que curta, na docência de disciplinas de cálculo, prestei o concurso para o Instituto Federal do Norte de Minas Gerais para a área de Cálculo Diferencial e Integral – fui aprovado em 1º lugar no certame. Em 2010, com um quantitativo bem menor de aulas (12 aulas) e em um regime de dedicação exclusiva, pude

retornar ao mestrado em ensino e sob a orientação da profa. Dra. Eliane Scheid Gazire conclui o mestrado em 2011 defendendo uma dissertação que na época foi elogiada pelo professor Sergio Lorenzato (UNICAMP) como "tese acadêmica em um mestrado profissional". O título da minha dissertação de mestrado foi "**Laboratório de Educação Matemática: Descobrindo as potencialidades do seu uso em um curso de formação de professores**" e teve relação com a minha experiência formativa na época de bolsista-estagiário no Laboratório de Educação Matemática da Universidade onde realizei a graduação. A partir deste trabalho, publiquei artigos, livro e realizei inúmeros projetos de extensão associados ao meu trabalho de mestrado.

Atuando como docente na rede federal de ensino, logo depois que conclui o mestrado, passei a coordenar o curso de Licenciatura em Matemática do IFNMG Campus Salinas. Foram 2 anos à frente deste curso de Licenciatura e com vários projetos aprovados, sendo o projeto mais importante deles o PIBID/CAPES em 2012.

Entre 2012 e 2014 passei a almejar um doutorado na área de Ensino. Havia, porém, um grande obstáculo, os programas de pós-graduação do estado de São Paulo, almejados por mim, eram muito distantes da cidade onde eu morava e trabalhava (Salinas/Norte de Minas Gerais).

A solução que eu encontrei para encurtar a distância e então viabilizar a minha qualificação (Doutorado) foi solicitar transferência do Instituto Federal do Norte de Minas para o Instituto Federal do Sul de Minas, o que acabou dando certo.

Em julho de 2014, por meio de transferência, iniciei minhas atividades docentes no IFSULDEMINAS, Campus Passos. Pouco tempo depois de lotado no Campus, fui designado coordenador do curso de Licenciatura em Matemática, período em que trabalhei na implantação do Laboratório de Educação Matemática (LEM) bem como do Laboratório Virtual de Educação Matemática (LAVEM). No período a frente a coordenação de curso, o sonho do doutorado ficou em segundo plano devido as inúmeras atribuições e contratempos que a função administrativa me consumia.

A pós-graduação a nível de doutorado constituía uma necessidade cada vez maior na medida em que inúmeros projetos financiados pela CAPES e FAPEMIG exigiam a titulação de doutor para submissão/coordenação. Durante o ano de 2019, por exemplo, passei por uma situação desconfortável em tive que tomar o "nome emprestado" de um colega doutor para submeter um projeto a FAPEMIG.

Em 2019, prestei o processo seletivo de doutorado da UNESP Campus Bauru, motivado pela necessidade de aprimorar meus conhecimentos e melhorar minha prática docente.

Após lograr êxito com a aprovação no processo seletivo, logo em seguida consegui o afastamento das minhas atividades docentes junto ao IFSULDEMINAS, Campus Passos para então me dedicar integralmente as atividades do doutorado.

Pretendia de início dar prosseguimento aos meus estudos sobre **"Laboratórios de Ensino na formação de professores**". No entanto, não foi possível seguir diretamente com a temática uma vez que a minha proposta de investigação teria que se ajustar ou estar em consonância com a área de atuação/pesquisa do meu orientador de doutorado. Nesse sentido, passei a estudar o processo de "**argumentação**" no ensino de ciências, com foco ao meu contexto de formação -a matemática. Ainda que a temática tivesse mudado, no entanto, ela ainda possuía uma forte relação/ligação com os meus estudos anteriores a nível de mestrado, afinal de contas toda a exploração de material manipulável e atividades de ensino realizadas no âmbito do LEM se dá a partir de uma situação de argumentação coletiva.

O primeiro contato com a argumentação no ensino de ciências ocorreu durante as aulas da disciplina de Análise de Discurso ministrada pelo prof. Dr. Marco Aurélio Alvarenga Monteiro (meu orientador) durante o segundo semestre de 2019 junto ao programa de pós-graduação em Educação para a Ciência da Unesp, campus Bauru. Nesta oportunidade, a leitura de trabalhos envolvendo a temática da argumentação informal em diferentes campos da ciência despertou a minha curiosidade de explorar a temática no campo da educação matemática crítica. A ideia, portanto, era buscar reflexões numa tentativa de relativizar o termo "argumentação matemática" para além do campo da técnica. A pretensão era explorar outras possibilidades de argumentação matemática desprovido da "forma" e do "formalismo" matemático, reconhecendo e valorizando, diferentes etnoargumentações e justificações conceituais que pudessem ser consideradas como provas válidas e explicativas.

No contexto da referida disciplina tive a oportunidade de conhecer a teoria (anatômica e fisiológica) da estrutura do argumento, amplamente utilizada no ensino de ciências e baseada no estudo do filósofo Stephen Toulmin. O conhecimento desta teoria alavancou os meus estudos na medida em que busquei produzir articulações do referido estudo com o meu campo de formação – a matemática.

No campo da disciplina de Psicologia da Educação Matemática, tive o primeiro contato com os estudos de Nicolas Balacheff envolvendo a temática relativo aos tipos e níveis de prova em matemática. A partir daí, tendo em vista o estudo de tese, surgiu a ideia de articular/juntar a teoria de Balacheff ao modelo do argumento proposto por Toulmin. A referida ideia, portanto, se materializou na criação de um modelo ou abordagem metodológica (RODRIGUES e MONTEIRO, 2021) para avaliar a qualidade/solidez do argumento de prova em Educação

Matemática. O trabalho de tese neste contexto passou a adquirir forma e contornos na medida em que se voltou à exploração e teste do referido modelo teórico desenvolvido pelo autor e seu orientador (RODRIGUES e MONTEIRO, 2021).

A partir daí nos propusemos a estudar a argumentação enquanto um "processo" e também "produto" e dessa forma o estudo ganhou forma sob o título: "**Da argumentação à prova: produção e avaliação de argumentos matemáticos por alunos ingressantes em curso de formação de professores em matemática**".

Sendo este o título do nosso trabalho de tese, os resultados apresentados ao longo do texto, irão cotejar importantes contribuições à literatura para aprofundar a discussão e compreensão do tema envolvendo a complexa passagem/transição da argumentação (prova) empírica para argumentação (prova) conceitual. No que tange a formação de professores, cuja experiência do autor foi brevemente relatada, o estudo pretende levantar subsídios teóricos e metodológicos para apoiar a instrumentalização do futuro professor de matemática com o trabalho da argumentação e prova em sala de aula como também no âmbito de atividades de laboratório envolvendo uso de material concreto e argumentação coletiva.

INTRODUÇÃO

A argumentação constitui um campo de estudo interdisciplinar que recebe contribuições de profissionais e estudiosos de diferentes áreas do conhecimento: filosofia, psicologia, linguística, comunicação, educação, ensino de ciências, matemática etc. Este campo de estudo teve um grande impulso no final da década de 50 a partir da publicação de duas obras clássicas e de referência na área, o "*Tratado da Argumentação*" de Perelman e Olbretchs-Tyteca e "*Usos do Argumento*" de Stephen Toulmin, ambos publicados em 1958 (MENDONÇA; JUSTI, 2013).

Contribuições para a evolução deste campo de estudo advém das diferentes perspectivas que refletem os modos variados de como a argumentação vem sendo conduzida e trabalhada ultimamente (WENZEL, 1990).

Para Wenzel (1990) a argumentação pode ser pensada por meio de três perspectivas diferentes: retórica, dialética e lógica.

No campo da retórica, por exemplo, a argumentação tem por finalidade a persuasão na medida que se ocupa com a produção de um discurso (oral ou escrito) para auxiliar membros de um grupo social a resolver problemas e orientá-los na tomada de uma decisão. Já no campo da dialética, uma argumentação está relacionada a organização sistemática de uma interação discursiva (debate) para discutir ideias e orientar membros de um grupo social na produção e a tomada das melhores decisões. Por fim, no campo da lógica, a argumentação está associada a um conjunto de afirmativas devidamente fundamentadas por evidências e razões suficientemente relevantes para convencer um determinado grupo social (WENZEL, 1990).

Em relação a estas três formas de se pensar a argumentação, Wenzel (1990) explica que a perspectiva retórica está relacionada ao processo de construção do argumento, a dialética por sua vez ao procedimento utilizado na produção e a lógica concebe o argumento enquanto produto já acabado.

O estudo da retórica, da dialética e da lógica teve origem na Grécia Antiga e obteve maior destaque a partir do trabalho de Aristóteles (MENDONÇA; JUSTI, 2013). Ainda de acordo com Mendonça e Justi (2013) a perspectiva lógica de argumentação subdivide-se em duas categorias: lógica formal e lógica informal.

> A lógica formal tem como intuito criar meios de garantir que nosso pensamento proceda corretamente a fim de chegar a conhecimentos verdadeiros. No trabalho de Aristóteles, os argumentos demonstrativos (aqueles que objetivam atingir uma certeza absoluta) foram estudados no domínio da lógica formal (também denominada analítica) a partir de raciocínios silogísticos dedutivos e indutivos. Na lógica formal, a validade dos

> argumentos depende apenas do formato das afirmativas (as premissas precedem a conclusão, que é uma consequência das mesmas) (MENDONÇA; JUSTI, 2013, p.190).

Por outro lado,

> A lógica informal tem como intuito desenvolver procedimentos para análise, interpretação, avaliação, crítica e construção da argumentação no discurso cotidiano. No prefácio da edição de 2003 do livro "Os usos do Argumento", Toulmin afirma que sua intenção original ao escrevê-lo era criticar a suposição de muitos filósofos anglo americanos de que qualquer argumento significativo deveria ser expresso em terminações formais. Toulmin alertou contra os riscos desse tipo de raciocínio, devido à pretensão de se basear em universalidades que nem sempre se encontram presentes na proposição maior ou geral. De fato, a partir desse livro, Toulmin rompeu com o campo tradicional da lógica formal e se focou no estudo de como as pessoas argumentam em situações corriqueiras (MENDONÇA; JUSTI, 2013, p.190).

Dentro da perspectiva da lógica informal, a argumentação tem sido recentemente definida como

> uma atividade verbal, social e racional destinada a convencer uma crítica razoável da aceitabilidade de um ponto de vista, apresentando uma constelação de proposições que justificam ou refutam a proposição expressa no ponto de vista. (VAN EEMEREN; GROOTENDORST, 2004, p.1, **tradução nossa)**.

Enquanto atividade verbal, a argumentação faz uso da linguagem oral ou escrita. Os autores reconhecem a importância de outras formas de comunicação não verbal tais como gestos e expressões faciais, no entanto, recomendam que estas últimas atuem de forma a complementar os significados gerados pelas ações verbais. Para além do componente verbal, consideramos importante também o componente visual, expresso por representações envolvendo desenhos, gráficos, diagramas, figuras, tabelas, quadros, modelos e imagens (TRIANTAFILLOU; SPILIOTOPOULOU; POTARI, 2016).

A argumentação é também uma atividade social, isso porque envolve duas ou mais pessoas em um debate de ideias (VAN EEMEREN; GROOTENDORST, 2004). Toda via, o caráter social, pode ser caracterizado também no ato de pensamento individual na medida em que um sujeito realiza ponderações envolvendo os prós e os contras de um determinado assunto ou ideia. Nesse caso, ele argumenta consigo mesmo, contudo, prevê reações e contra-argumentos de possíveis interlocutores para os quais ele deseja convencer. Por fim configura-se como uma atividade racional porque envolve o emprego de raciocínio para desenvolver e defender um ponto de vista. O julgamento racional relaciona-se à avaliação da solidez do

argumento no contexto de um debate ou discussão (VAN EEMEREN; GROOTENDORST, 2004).

A definição proposta por Van Eemeren e Grootendorst (2004) tem sido comumente utilizada na literatura educacional e "*envolve a construção de alegações, o fornecimento de provas para apoiar as alegações, e a avaliação destas provas para julgar a validade das alegações*" (AYALON; HERSHKOWITZ, 2018 p.164). Ela, portanto, situa a argumentação em um espaço social, e se incorporada ao discurso em sala de aula tem o potencial de viabilizar um espaço de articulação e avaliação crítica de ideias, reflexão, raciocínio e apoio a construção colaborativa do conhecimento (SCHWARZ; HERSHKOWITZ; PRUSAK, 2010; AYALON; HERSHKOWITZ, 2018; AYALON, 2019).

Este tipo de argumentação é considerada mais "frutífera" e propícia à aprendizagem (ASTERHAN; SCHWARZ, 2016). Ela é caracterizada por uma interação discursiva envolvendo dois ou mais alunos no exercício de uma escuta crítica e respeitosa envolvendo as ideias do outro, a tentativa de identificar os pontos fracos e fortes de cada ideia, a busca por ideias alternativas e o estabelecimento de um consenso (FELTON; GARCIA-MILA; GILABERT, 2009; MUELLER; YANKELEWITZ; MAHER, 2012; AYALON; HERSHKOWITZ, 2018; AYALON, 2019).

De acordo com Jiménez-Aleixandre e Brocos (2015) a argumentação, portanto, envolve um processo de interação discursiva marcado pelo contraste entre duas ou mais ideias (ou pontos de vista), ainda que uma destas esteja implícita. Essa divergência de pontos de vista constitui a base da argumentação (AMOSSY, 2011) e o desenvolvimento marcado pelo confronto e debate destas ideias em resposta a uma questão é o que Plantin (2008) denomina por uma situação argumentativa.

É importante destacar que dentro de uma situação argumentativa, uma argumentação "*não se desenrola no espaço abstrato da lógica pura, mas em uma situação de comunicação em que o locutor apresenta seu ponto de vista na língua natural com todos os seus recursos*" que dispõe (AMOSSY, 2011, p.132).

Nesse contexto, uma ação argumentativa envolve, portanto, a elaboração de um raciocínio embasado por evidências para justificar (formular) uma conclusão própria ou avaliar de forma crítica a conclusão do outro (JIMÉNEZ-ALEIXANDRE; BROCOS, 2015). O conhecimento, assim, é avaliado sob a luz de evidências empíricas ou teóricas e o raciocínio empregado na justificação de uma conclusão tem por finalidade o convencimento. Dessa forma, o objetivo da argumentação é convencer e a sua especificidade é "*por em ação um raciocínio em uma situação de comunicação*" (BRETON, 1999, p.7).

No intuito de refinar os conceitos subjacentes a prática da argumentação, Jiménez-Aleixandre e Brocos (2015, p.144) sugerem "*usar o termo argumento para o produto, o enunciado ou o resultado de um discurso razoado, e argumentação, o discurso argumentativo, para o processo dialógico social*". Ainda de acordo com estes autores, um argumento pressupõe minimamente a existência de dados (evidências), justificativa e conclusão (JIMÉNEZ-ALEIXANDRE; BROCOS, 2015).

Um argumento científico, portanto, é definido como uma proposição devidamente embasada por uma justificativa de natureza empírica ou teórica (JIMÉNEZ-ALEIXANDRE; ERDURAN, 2008 e MENDONÇA; JUSTI, 2013).

Para Asterhan e Schwarz (2016) a argumentação é um dos principais processos associados ao desenvolvimento de competências e habilidades que podem ajudar os alunos a lidar melhor com as novas exigências de uma sociedade cada vez mais diversa e complexa do século XXI. Estas competências e habilidades envolvem, pensamento crítico, flexibilidade de pensamento, autonomia, aprendizagem colaborativa, escuta ativa, resolução de problemas, comunicação e expressão de argumentos. A prática da argumentação desempenha, portanto, um papel essencial no desenvolvimento destas competências e habilidades nos estudantes (SCHWARZ; BAKER, 2017; AYALON, 2019).

Dentro das diversas áreas que compõem a atividade humana, o pensamento racional (pensamento crítico) não se satisfaz apenas com declarações vazias e sem nenhum tipo de embasamento, pelo contrário, ele avalia a solidez das relações que envolvem dados, conclusão e justificativas e em um segundo momento avalia a força e a verdade do argumento composto por estes elementos (SCARPA, 2015).

Ainda de acordo com Scarpa (2015) saber argumentar e avaliar argumentos são habilidades importantes em várias esferas sociais uma vez que contribuem para o indivíduo organizar o seu pensamento (raciocínio), avaliar ideias e tomar decisões importantes. É por meio da argumentação, por exemplo, que diversos segmentos da sociedade discutem pautas sociais e estabelecem consensos necessários para viabilizar uma vida em sociedade (SCARPA, 2015).

No contexto dessa pesquisa o interesse pela temática da "argumentação" surgiu durante as aulas da disciplina de Análise de Discurso ministrada pelo professor Doutor Marco Aurélio Alvarenga Monteiro junto ao programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência da Unesp campus Bauru. No âmbito da disciplina, o pesquisador teve a oportunidade de explorar e aprofundar suas leituras no estudo da Análise do Discurso voltado para a produção e análise de argumentos científicos em sala de aula. O vasto referencial teórico sobre o tema e a sua

grande relevância para a área do ensino de ciências aguçou inicialmente a curiosidade do pesquisador em aprofundar o estudo da temática na área do Ensino da Matemática, haja visto que, nessa área de ensino o seu conhecimento estava restrito único e exclusivamente a argumentação enquanto produção de argumentos lógicos e formais.

Posteriormente, o interesse pela temática foi se tornando cada vez maior, na medida em que as pesquisas sobre o tema começaram a ganhar cada vez mais destaque por diferentes razões: contribui para o estabelecimento de competências e habilidades relevantes ao processo de justificação e formação de conceitos; potencializa a interação social no desenvolvimento do conhecimento; e ao nível do currículo, desenvolve a autonomia intelectual dos alunos (DOUEK; PICHAT, 2003).

Motivado e imerso no contexto da pesquisa referente ao assunto, o pesquisador sob a orientação do professor Dr. Marco Aurélio Alvarenga Monteiro desenvolveu um modelo teórico metodológico (RODRIGUES; MONTEIRO, 2021) para avaliar a qualidade (solidez) de um argumento utilizado para fins de justificação/ validação. No entanto o modelo teórico ainda que descrito e apresentado em publicação internacional não havia sido testado em uma situação prática de argumentação e prova em sala de aula. Diante deste contexto, portanto, esta pesquisa se justifica na medida em que pretende buscar subsídios teóricos e metodológicos para compreender, aprimorar e avaliar a prática da argumentação e prova em sala de sala de aula a partir da aplicação do modelo teórico desenvolvido e publicado por Rodrigues e Monteiro (2021).

O estudo, neste contexto, visa compreender em detalhes o fenômeno que envolve a argumentação enquanto processo e produto a partir da análise de três situações de argumentação envolvendo alunos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática do IFSULDEMINAS, Campus Passos. Em outras palavras, o objetivo consiste em investigar como alunos ingressantes em um curso de Licenciatura em Matemática do IFSULDEMINAS, Campus Passos argumentam e avaliam seu desempenho durante o processo de justificação e validação de conceitos matemáticos em um contexto de ensino baseado em argumentação coletiva e investigação.

Para tanto, optamos pela realização de um estudo de caso, uma vez que o nosso objeto de estudo envolve a exploração de "**situações de argumentação coletiva envolvendo alunos ingressantes em um curso de formação de professores em matemática de uma instituição federal de ensino localizada no sul do estado de Minas Gerais durante a realização de uma investigação numérica**".

Investigar situações de argumentação coletiva em um curso de formação de professores em matemática é de extrema importância para o referido curso, uma vez que o projeto pedagógico não contempla elementos que fazem referência ao processo de argumentação na formação do futuro professor de matemática. Dessa forma, os resultados da investigação poderão em um futuro bem próximo fornecer subsídios teóricos visando a elaboração de ações propositivas para atender as eventuais necessidades de reformulação/atualização do projeto pedagógico do curso.

Em suma, os objetivos secundários decorrentes do objetivo principal são:

a) Investigar como os alunos ingressantes em um curso de licenciatura em matemática argumentam coletivamente para justificar e validar ideias e conjecturas matemáticas;
b) Identificar qual (is) estrutura (s) de argumentação global está (ão) presente (s) na argumentação coletiva e avaliar o raciocínio associado a esta (s) estrutura (s);
c) Investigar como os alunos ingressantes autoavaliam o seu desempenho durante a argumentação coletiva. Com base na autoavaliação, identificar quais competências e habilidades argumentativas são consideradas por eles como importantes/fundamentais/necessárias para a formação do professor que ensina matemática.

O que se espera, ao fim dessa investigação, é que o relato de caso, possa contribuir para formação de professores em matemática, oferecendo subsídios teóricos e metodológicos para a reflexão sobre a prática docente.

O estudo está estruturado em sete (7) capítulos, descritos suscintamente a seguir.

No capítulo 1, por meio de um estudo bibliométrico, é apresentado o cenário da produção científica internacional referente a temática. Neste capítulo foram levantados os principais “hot topics” de pesquisa na área com o objetivo de auxiliar o pesquisador no delineamento do problema de pesquisa e das questões de investigação.

Já no capítulo 2 é apresentado o estado do conhecimento da produção cientifica internacional (*corpus*: artigos científicos) envolvendo o tema argumentação no ensino da matemática.

Por sua vez, no capítulo 3, é apresentado o estado do conhecimento da produção científica nacional (*corpus:* dissertações e teses) envolvendo o mesmo tema. A partir dos resultados apresentados neste capítulo e nos capítulos anteriores foi possível delinear com exatidão o problema de pesquisa, os objetivos e as questões de investigação.

O capítulo 4 apresenta a primeira parte do referencial teórico da pesquisa, ou seja, a argumentação no contexto do ensino e aprendizagem da matemática. É explicitado distinções entre argumentação e argumento, o significado de argumentar coletivamente, a aprendizagem no contexto da argumentação coletiva bem como as competências e habilidades associadas ao processo argumentativo.

No capítulo 5, a segunda parte do referencial teórico da pesquisa é apresentado. O capítulo destaca, de modo especial, o conceito de prova explicativa (HANNA, 2000), o argumento de prova e a teoria de Nicolas Balacheff (1987;1988) sobre os tipos e níveis de prova em matemática.

A metodologia do estudo compõe o capítulo 6. Ela é apresentada estrategicamente após o referencial teórico do estudo uma vez que os procedimentos de análise a serem utilizados na leitura dos dados da investigação requerem uma fundamentação teórica nos aportes teóricos da literatura. Neste capítulo, portanto, é descrito os procedimentos metodológicos do estudo, a descrição do caso estudado, os participantes da pesquisa, os instrumentos utilizados para a coleta de dados bem como as estratégias de análise propostas construídas sob a luz do quadro teórico indicado nos capítulos 4 e 5.

Por fim, o capítulo 7 apresenta os resultados da pesquisa, analisados e discutidos sob a luz do quadro teórico descrito nos capítulos 4 e 5.

E nas considerações finais do estudo são apresentadas as reflexões finais sobre o caso investigado, as respostas às questões de pesquisa, as limitações do estudo, as possibilidades de investigações futuras e a conclusão final de todo o trabalho realizado.

Capítulo 1 - A argumentação no ensino da matemática: Uma análise bibliométrica da produção científica internacional

A bibliometria é uma técnica que consiste no uso de ferramentas matemáticas e estatísticas com o objetivo de analisar e medir a literatura em um determinado campo do conhecimento (HUANG *et al.*, 2016).

De acordo com Vanti (2002) o estudo bibliométrico permite identificar tendências de crescimento do conhecimento em uma determinada área bem como identificar os principais periódicos, o mapeamento da produtividade dos autores, a evolução e a tendência da pesquisa dentro da área bem como o surgimento de novos temas entre outros aspectos.

Na literatura, os estudos realizados por Carpes, Scherer e Beuron (2012); Da Rocha *et al.* (2013); Rodrigues *et al.* (2016) e Piveta *et al.* (2018) abordaram a bibliometria para descrever as características das publicações relacionadas aos seus temas de estudo. Em todos estes trabalhos citados, os autores analisaram as publicações relativas ao seu tema de interesse junto base de dados da *Web of Science* (WoS) levando em consideração as seguintes variáveis de pesquisa: número total de publicações, áreas de pesquisa, tipos de documentos, idiomas das publicações, principais autores e títulos das fontes, principais países e instituições difusoras de conhecimento. Outro ponto comum envolvendo os trabalhos citados envolveu a utilização dos índices “h-b” e “m” de Banks (2006) para identificar quais tópicos estavam sendo estudados junto a temática abordada e quais os mais relevantes (hot topics) tendo em vista a realização de trabalhos futuros. Como resultado destes estudos, foi possível, conhecer evolução dos temas de pesquisa ao longo do período investigado bem como identificar os principais hot topics associados a estes temas.

Estudos de natureza bibliométrica buscam ampliar a compreensão de um tema ou área importante na medida em que visam compreender o que está sendo produzido e o que ainda pode ser explorado em relação ao tema. (PIVETA *et al.*, 2018).

Dentro deste contexto que envolve as pesquisas bibliométricas o objetivo da análise bibliométrica realizada neste capítulo foi apresentar um panorama da produção acadêmica internacional envolvendo o tema “argumentação e matemática” no período de 2011 a 2020. Em particular, pretende-se caracterizar as publicações relativas à temática e identificar tópicos que abordados junto ao tema constitui “hot topic”, ou seja, tópicos de maior relevância para a realização de trabalhos futuros.

1.1 O levantamento de dados bibliométricos

O levantamento de dados e informações foi realizado junto a base dados da *Web of Science* (coleção principal). Esta plataforma de pesquisa consiste em uma base de dados multidisciplinar que indexa aproximadamente 12.000 periódicos do mundo inteiro, sendo estes, os mais citados em suas respectivas áreas. Por meio desta base é possível analisar a produção científica de uma determinada área do conhecimento utilizando ferramentas de análise de citações, referências, índice h e criação de ranking por inúmeros parâmetros, permitindo assim a realização de análises bibliométricas (CAPES, 2021).

A opção de escolha por esta base se deu mediante o notório reconhecimento que esta apresenta no contexto internacional da pesquisa ao disponibilizar publicações de alto impacto.

O levantamento de dados esteve estruturado em três etapas e descritas a seguir.

Na primeira etapa, houve a seleção de trabalhos na plataforma *Web of Science* utilizando como critério de pesquisa as palavras chaves "*argument* AND math**" no campo de busca título das publicações. O asterisco empregado permitiu obter derivações das palavras chaves argumentação (argument/argumentative) e matemática (math/mathematics/mathematical) e dessa forma circundar melhor o tema. Outro critério adotado foi a busca por trabalhos publicados no período de 2011 a 2020[1]. A busca por palavras chaves diretamente no título das publicações permitiu obter trabalhos que tivessem maior interação com a temática "argumentação e matemática" quando comparado a pesquisa realizada no campo tópico. Os dados coletados nesta etapa estiveram associados as seguintes variáveis: número total de publicações, áreas de pesquisa, tipos de documentos, idiomas das publicações, principais autores e títulos das fontes, principais países e instituições difusoras de conhecimento.

Na segunda etapa, foram pesquisados os tópicos (palavras) centrais associados ao tema "argumentação e matemática". Estes tópicos foram pesquisados junto ao campo palavras chaves das publicações obtidas e também a partir das palavras que acompanhavam os termos de busca "argument*" e "math*" no título das publicações. De modo a obter resultados mais relevantes foi adicionado dois filtros de refinamento de busca (idioma "inglês" e tipo de documento "artigo") junto aos critérios já estabelecidos na etapa anterior. Dentre os tópicos levantados a partir do título e das palavras chaves das publicações foram selecionados os 20 tópicos mais importantes. O critério de escolha dos tópicos mais importantes esteve relacionado ao maior número de ocorrência destes no título e nas palavras chaves das publicações.

[1] Período referente aos 10 últimos, ou seja, de 2011 até o presente momento em que o estudo bibliométrico foi realizado.

Na terceira etapa, cada um dos 20 tópicos selecionados foi combinado aos termos "*argument* AND math**" gerando a seguinte estrutura de busca "*tópico AND argument* AND math**". Nesta etapa os critérios de busca envolveram a combinação de três termos em um campo de pesquisa mais abrangente do que foi utilizado anteriormente, ou seja, a busca no campo por tópico (título/palavras chaves/resumo) da plataforma da *Web of Science*. Essa mudança ocorreu pelo fato de que a busca no campo "título" retornava um número muito pequeno de publicações. Outros critérios também foram adotados, tais como, período de 2011 a 2020, idioma inglês e tipo de documentos restrito a artigos de periódicos.

Para cada combinação "*tópico AND argument* AND math**" foram coletados o total de publicações associadas a cada terno e o valor do índice h-index disponibilizado pela plataforma.

1.2 Análise dos dados bibliométricos

A partir dos trabalhos selecionados e da coleta de dados sucedeu uma análise de citação por meio dos recursos e ferramentas da plataforma *Web of Science* levando em consideração as características gerais das publicações, representadas pelas variáveis: total de publicações, principais autores, áreas de pesquisa, tipos de documentos, título das principais fontes, ano de publicação dos documentos, idiomas, países e análise do número de vezes que cada combinação de tópicos relativo ao assunto foi citada através do índice h-index. Este índice[2], também chamado de índice h foi proposto por Hirsch (2005) como forma de caracterizar/quantificar a produção científica de um pesquisador.

Para analisar os tópicos (hot topics) que combinados ao tema "argumentação e matemática" são mais propícios e relevantes para a realização de estudos futuros foi utilizado os índices "h-b" e "m" de Banks (2006).

O índice h-b, por exemplo, é uma extensão do índice h-index de Hirsch (2005). De acordo com Banks (2006), o índice h-b é obtido por meio do número de citações de um tópico ou combinação em um determinado período, listados em ordem decrescente de citações. Ele está presente em publicações que tenham um número de citações maior ou igual a sua posição no ranking (BANKS, 2006).

Banks (2006) ainda estabeleceu um outro índice, denominado por ele de índice m, fundamental para comparar os tópicos e combinação pesquisados. Este índice segundo o autor

[2] O índice h de um pesquisador é determinado quando uma quantidade h de seus artigos tem pelo menos h citações cada um (HIRSCH, 2005).

é calculado através da razão entre o "índice h-b" e período "n" de anos que se deseja obter informações, ou seja, $m = \frac{indice\ h-b}{n}$.

Para analisar o índice m, Banks (2006) estabeleceu algumas definições que permitem realizar comparações entre tópicos e suas combinações de modo a determinar os "hot topics".

Quadro 1 - Parâmetros de avaliação dos hot topics

Índice m	Tópico/combinação
0< m ≤ 0,5	Pode ser de interesse para pesquisadores em um campo específico da pesquisa, o qual engloba uma comunidade pequena;
0,5< m ≤ 2	Provavelmente pode ser tornar um "hot topic" como área de pesquisa, no qual uma comunidade é muito grande ou o tópico/combinação apresenta características muito interessantes;
m >2	É considerado um "hot topic", tópico exclusivo com alcance não apenas na sua própria área de pesquisa e é provável que tenha efeitos de aplicação ou características únicas.

Fonte: Banks (2006)

Com base no cálculo do índice m é possível comparar as combinações de tópicos e, portanto, apontar aquela (s) combinação (ões) que possam ser chamadas de "hot topic" dentro da área (BANKS, 2006).

Este método segundo Banks (2006) pode ser usado para se ter uma ideia sobre qual temática é atualmente assunto de pesquisa no momento.

Ao final da análise, os dados foram tratados por meio de recursos da uma estatística descritiva e os resultados apresentados por meio de gráficos e quadros na próxima seção.

1.3 Resultados do levantamento bibliométrico

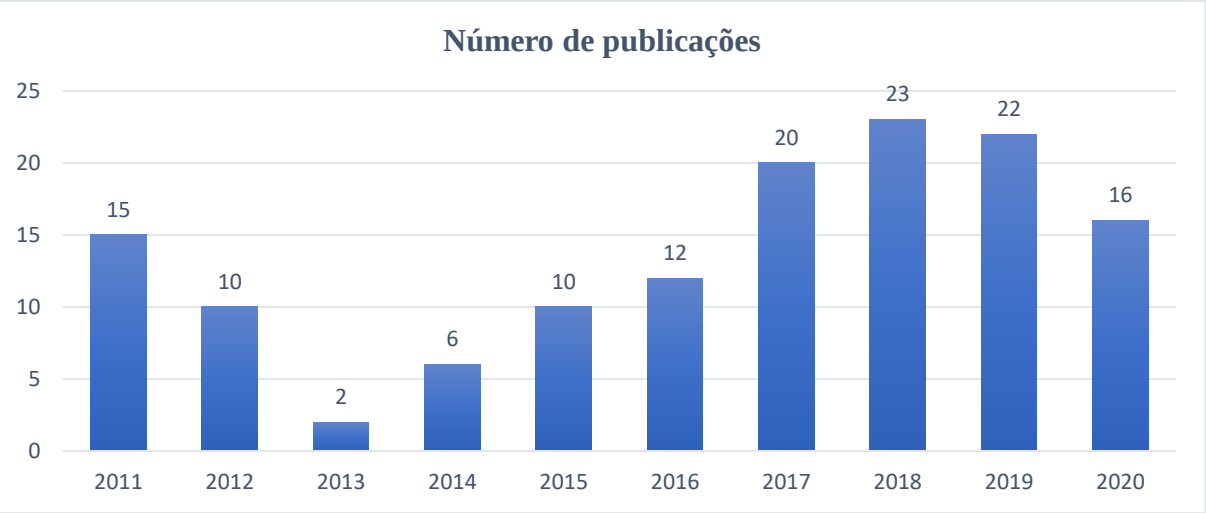
Em um primeiro momento, os resultados apresentam as principais características das publicações internacionais associadas aos termos de busca argumentação e matemática e suas derivações (argument* AND math*). Em um segundo momento é apresentado os tópicos quentes (hot topics) que associados a estrutura *argument* AND math** sinalizam a relevância de temas propícios a serem investigados em trabalhos futuros.

1.3.1 O total de publicações e os tipos de documentos

No período de 2011 a 2020 foram encontrados 136 documentos disponibilizados na *Web of Science* envolvendo os termos de busca "argumentação e matemática" e suas respectivas derivações.

A Figura 1 ilustra a quantidade de documentos publicados por ano bem como a evolução deste quantitativo de publicações ao longo do período investigado.

Figura 1 - Evolução das publicações no período de 2011 a 2020



Fonte: Dados da pesquisa

Observando o histórico temporal do número de publicações verificou-se um aumento gradativo das publicações no período de 2013 a 2018. A maior taxa de aumento por ano ocorreu no período de 2016 (12 documentos) a 2017 (20 documentos), ou seja, um aumento de cerca de 66,67% nas publicações. Posteriormente, destacamos uma redução do número de publicações registradas no período de 2018 a 2020. A maior taxa de redução por ano foi registrada no período de 2019 (22 documentos) a 2020 (16 documentos). Essa redução pode ser explicada pelo contexto de pandemia (Covid-19) iniciado no final do ano de 2019 provocando o fechamento de escolas durante o ano de 2020 e por consequência disso o atraso no desenvolvimento de pesquisas tendo em vista as dificuldades de realização de coleta de dados no contexto escolar.

Do total[3] de 136 documentos encontrados, 81 (59,56%) são artigos publicados em periódicos, 42 (30,88%) são artigos publicados em anais de eventos, 8 (5,88%) correspondem a livros (6) e artigos (2) de revisão de literatura e outros 7 (5,15%) documentos estão relacionados a artigos de correção (2), artigos de acesso antecipado (2) e material de editorial (3).

1.3.2 As principais áreas de pesquisa

Considerando o quantitativo de publicações encontradas (136 documentos) o Quadro 2 apresenta as dez (10) principais áreas de pesquisas que detém o maior número de publicações relacionadas a temática.

[3] A soma envolvendo todos os tipos documentos ultrapassa o total de 136 registros. Isso ocorre porque existem artigos classificados em duas categorias de documento ao mesmo tempo.

Quadro 2 - As dez áreas com maior número de pesquisas

Áreas de pesquisa	Nº de Publicações	Porcentagem do total
1.Educação – Pesquisa Educacional	91	66,91%
2.Matemática	21	15,44%
3.Filosofia	21	15,44%
4.História e Filosofia da Ciência	15	11,03%
5.Psicologia	8	5,88%
6.Ciência da Computação	5	3,68%
7.Comunicação	5	3,68%
8.Física	5	3,68%
9.Linguística	4	2,94%
10.Ciência, Tecnologia - outros tópicos	4	2,94%

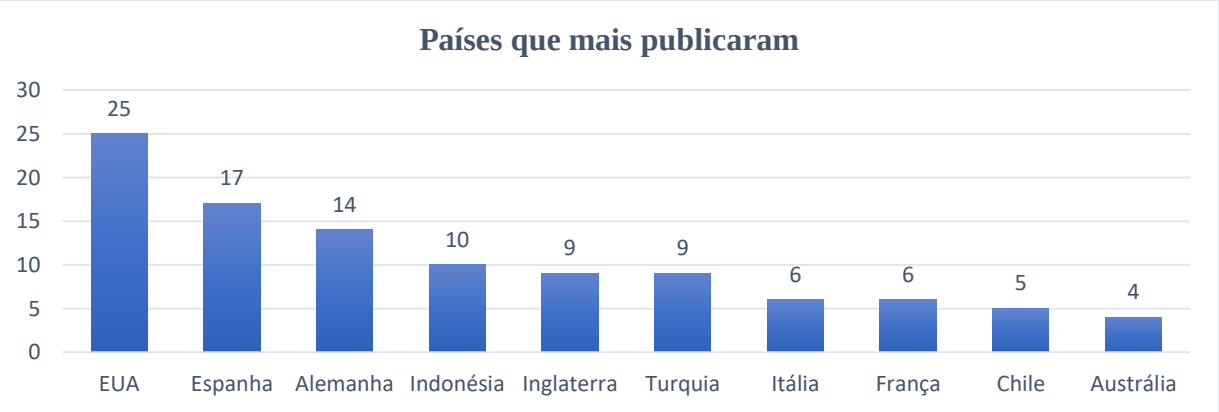
Fonte: Dados da pesquisa

A área de pesquisa que concentra a maior parte das publicações é área de Educação (Pesquisa Educacional) com 91 registros (66,91%) seguido das áreas de Matemática e Filosofia com 21 (15,44%) publicações cada. O fato da área de Educação (Pesquisa Educacional) configurar como principal área de pesquisa para essa temática, evidencia, portanto, uma demanda por estudos que possam contribuir com a melhoria do ensino e aprendizagem no contexto educacional. É importante destacar também que as áreas supracitadas não são disjuntas, ou seja, uma determinada publicação inserida no tema proposto pode pertencer a mais de uma área. Nesse caso, o quantitativo de publicações envolvendo a soma de todas as áreas pode ultrapassar os 100%.

1.3.3. Principais países e instituições produtoras de conhecimento

Quanto ao levantamento dos países que mais produziram conhecimento em torno do tema “argumentação e matemática”, a Figura 2, apresenta o ranking dos dez (10) países que mais apresentaram publicações relacionadas a esta temática.

Figura 2 - Os dez países com maior número de publicações



Fonte: Dados da pesquisa

De acordo com a Figura 2, os Estados Unidos é o país que deteve o maior número de publicações relacionadas ao tema. O Total de publicações (25) corresponde a cerca de 18,4% de toda a produção mundial registrada no período de 2011 a 2020. Na sequência aparecem os seguintes países e seus respectivos números de publicações: Espanha (17); Alemanha (14); Indonésia (10); Inglaterra (9); Turquia (9); Itália (6); França (6); Chile (5) e Austrália (4).

A partir destes resultados, pode-se inferir que são estes os principais países onde se encontram as instituições que mais publicam em torno do tema.

O idioma inglês se destaca como língua oficial de grande parte da produção científica. Ao todo foram 112 (82,35%) publicações na língua inglesa. Na sequência aparecem o idioma espanhol com 15 (11,02%) publicações, o francês com 3 (2,21%) publicações, o alemão e o português com 2 (1,47%) publicações cada e por fim o idioma croata e o polonês com 1 (0,74%) publicação cada.

Com relação as instituições que mais publicaram em torno do tema, "argumentação e matemática" o Quadro 3 apresenta o ranking das dez (10) instituições que mais produziram publicações associadas a esta temática.

Quadro 3 - As dez instituições que mais publicaram sobre o tema no período

Instituição	País	Número de Trabalhos
1.Middle East Technical University	Turquia	6
2.Technical University of Munich	Alemanha	5
3.Autonomous University of Barcelona	Espanha	4
4.Centre National De La Recherche Scientifique CNRS	França	4
5.University Of Granada	Espanha	4
6.Kent State University	EUA	3
7.Universitas Negeri Malang	Indonésia	3
8.Universitas Pendidikan Indonesia	Indonésia	3
9.University of Dundee	Escócia	3
10.University of Haifa	Israel	3

Fonte: Dados da pesquisa

As instituições que mais se destacaram na publicação de temas relacionados à "argumentação e matemática" foram o *Middle East Technical University* (Turquia) com 6 publicações e a *Technical University of Munich* (Alemanha) com 5 publicações.

A importância de se conhecer estas instituições difusoras de conhecimento está relacionada à possibilidade de escolha delas para convênios e parcerias em programas de internacionalização envolvendo mestrado e doutorado sanduiche fora do Brasil.

1.3.4. As principais fontes e autores das publicações

Conhecer as fontes que mais publicaram em torno do tema "argumentação e matemática" se torna importante para subsidiar pesquisadores na coleta de dados em futuras

investigações. O Quadro 4 apresenta as 10 principais fontes de publicação sobre o tema abordado.

Quadro 4- As dez fontes com maior número de publicações

Fonte	Tipo de fonte	Número de publicações
1.Journal of Physics Conference Series	Anais de evento	6
2.Pme Conference Proceedings	Anais de evento	6
3.Educational Studies In Mathematics	Periódico	5
4.International Journal of Mathematical Education in Science and Technology	Periódico	5
5.International Journal of Science and Mathematics Education	Periódico	5
6.Investigacion en Educacion Matemática	Anais de evento	5
7.Proceedings of The Seventh Congress of The European Society for Research in Mathematics Education Cerme 7	Anais de evento	5
8.Icme 13 Monographs	Anais de evento	4
9.Journal of Mathematical Behavior	Periódico	4
10.Proceedings of The Ninth Conference of The European Society for Research In Mathematics Education Cerme9	Anais de evento	4

Fonte: Dados da pesquisa

Conforme indicado no quadro, os principais periódicos e seus respectivos números de publicações sobre o tema "argumentação e matemática" são: *Educational Studies In Mathematics* (5), *International Journal of Mathematical Education In Science And Technology* (5), International Journal of Science and *Mathematics Education* (5) e *Journal of Mathematical Behavior* (4).

Por outro lado, os eventos mais importantes e seu quantitativo de publicações nos anais em relação ao tema são: *Journal of Physics Conference Series* (6), *Pme Conference Proceedings* (5), *Investigacion en Educacion Matematica* (5), *Proceedings of The Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education Cerme 7* (5), *Icme 13 Monographs* (4) e *Proceedings of the Ninth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education Cerme 9* (4).

No que tange os autores, os dados coletados na plataforma *Web of Science* permitiram elencar os 20 autores com maior número de publicações no período investigado e listados a seguir: *Reiss K.* (5); *Fischer F.* (4); *Kollar I.*(4); *Planas N.*(4); *Ufer S.* (4); *Vogel F.* (4); *Bostan M.I.* (3); *Goizueta M.* (3); *Kosko K.W.* (3); *Pease A.* (3); *Reichersdorfer E.* (3); *Akyuz D.* (2); *Albano G.*(2); *Ayalon M.*(2); *Bozkurt F.*(2); *Budzynska K.*(2); *Busch J.*(2); *Cervantes-Barraza*

J.A.(2); *Conner A.*(2); *Corneli J.*(2); *Dello Iacono U.*(2); *Dogruer S.S.*(2); *Drekalovic V.*(2); *Erkek O.*(2); *Gurcan F.*(2).

De certa forma há uma grande diversidade de autoria de publicações e uma similaridade entre os autores com relação ao número de publicações. Isso ocorre porque muitos deles publicam artigos em conjunto.

1.3.5 Os vinte tópicos centrais candidatos a "hot topics"

A partir do filtro de busca adotado na segunda etapa do levantamento bibliométrico, obteve-se o total de 66 registros (publicações).

Nestas publicações foram pesquisados os tópicos (palavras) associados aos termos de busca "*argument* AND math**" no título e no campo palavras chaves das publicações levantadas nesta etapa.

Foram selecionados, portanto, 20 tópicos centrais, tidos como os mais importantes associados ao tema e selecionados a partir do critério de maior ocorrência destes no título e nas palavras chaves.

O quadro 5 apresenta os 20 tópicos mais importantes relacionados ao tema e candidatos a "hot topic".

Quadro 5 - Os vinte tópicos mais importantes relacionados ao tema "argumentação" e "matemática"

Tópicos selecionados	
1. raciocínio (reasoning)	11. modelagem (modelling)
2. habilidades (skills)	12. experimentação (experimentation)
3. colaboração (collaboration)	13. investigação (inquiry)
4. prova (proof)	14. solução de problemas (problem solving)
5. conceitos (concepts)	15. semiótica (semiotic)
6. normas (norms)	16. multimodal (multimodal)
7. roteiros (scripts)	17. sala de aula (classroom)
8. andaimes (scaffolding)	18. suporte do professor (support teacher)
9. tecnologia (technology)	19. heurística (heuristic)
10. computador (computer)	20. educação (education)

Fonte: Dados da pesquisa

Estes tópicos quando combinados individualmente com os termos "*argument* AND math**" podem gerar de acordo com Banks (2006) tópicos quentes (hot topics), ou seja, tópicos de grande relevância e importância para serem abordados em pesquisas futuras.

1.3.6. Os “hot topics” de pesquisa

O quadro 6, indicado a seguir, apresenta o total de publicações, o valor do índice h-b e do índice m associado a cada estrutura “*Argument* AND math* AND tópico*” inserida no campo de busca por tópicos da *Web of Science* e em conformidade com os critérios adotados na terceira etapa do estudo.

Quadro 6 - Os “hot topics” associados ao tema argumentação e matemática

Estrutura de pesquisa **Argument* AND math* AND tópico**	**Total de publicações**	**Índice h-b**	**Índice m**
Argument* AND math* AND reasoning	327	22	2,2
Argument* AND math* AND skills	102	16	1,6
Argument* AND math* AND collaboration	31	8	0,8
Argument* AND math* AND proof	520	26	2,6
Argument* AND math* AND concepts	251	23	2,3
Argument* AND math* AND norms	81	14	1,4
Argument* AND math* AND scripts	9	4	0,4
Argument* AND math* AND scaffolding	15	6	0,6
Argument* AND math* AND technology	96	17	1,7
Argument* AND math* AND computer	109	14	1,4
Argument* AND math* AND modelling	1.168	41	4,1
Argument* AND math* AND experiment	168	16	1,6
Argument* AND math* AND inquiry	85	17	1,7
Argument* AND math* AND “problem solving”	58	11	1,1
Argument* AND math* AND semiotic	15	5	0,5
Argument* AND math* AND multimodal	6	2	0,2
Argument* AND math* AND classroom	173	21	2,1
Argument* AND math* AND “teacher support”	2	1	0,1
Argument* AND math* AND heuristic	80	16	1,6
Argument* AND math* AND education	317	25	2,5

Fonte: Dados da pesquisa

Com base nas considerações de Banks (2006) foram classificados como “hot topics” (tópico quente) seis combinações das vinte analisadas. Os tópicos raciocínio (reasoning), prova (proof), conceitos (concepts), modelagem (modelling), sala de aula (classroom) e educação (education) quando combinados a estrutura “*argument* AND math**” alcançaram índice $m > 2$.

A partir dos resultados apresentados podemos inferir que o tema argumentação e matemática tem um potencial muito grande para ser explorado no contexto educacional de sala de aula. Para tanto a abordagem de ensino envolvendo a modelagem ou a exploração de um

modelo se apresenta como uma possibilidade interessante para explorar conceitos e o raciocínio utilizado pelos alunos na validação de ideias e modelos.

Os tópicos habilidades (skills), colaboração (collaboration), normas (norms), andaimes (scaffolding), tecnologia (technology), computador (computer), experimento (experiment), investigação (inquiry), resolução de problemas (problem solving) e heurística (heuristic) quando combinados a estrutura "*argument* AND math**" apresentaram $0{,}5 < m \leq 2$. Estes tópicos no contexto da temática são considerados como hot topics emergentes, ou seja, eles merecem atenção dos pesquisadores pois podem indicar tendências de interesse em ascendência (BANKS, 2006)

Por fim, os tópicos roteiros (scripts), semiótica (semiotic), multimodal (multimodal) e suporte do professor (teacher support) quando combinados a estrutura "argument* AND math*" obtiveram índice $0 < m \leq 0{,}5$. Isso significa que este tema é de interesse de um campo específico de pesquisa (BANKS, 2006).

1.4. Uma conclusão sobre o levantamento bibliométrico

A busca direta pelos termos "argumentação" e "matemática" seja ela no campo de busca título ou tópico da *Web of Science* sempre retornou um número pequeno de registros. Devido a isso optamos por circundar o tema "argumentação" e "matemática" por meio dos termos "argument*" e "math*". A partir dessa estratégia foi possível obter um número maior de registros fiéis a temática viabilizando assim uma análise bibliométrica.

Em um primeiro momento, com base nas informações levantadas na base de dados da *Web of Science* e adotando um filtro de pesquisa mais restrito (busca no título) foi obtido um total de 136 publicações abordando o tema "argumentação" e "matemática" ao longo do período investigado. O volume de publicações crescia gradativamente desde 2013, no entanto, a partir de 2019 registrou uma leve queda no número de publicações e posteriormente uma redução mais acentuada em 2020, o que pode ser explicado pelos reflexos da pandemia (Covid-19) iniciada durante o período. Do total de registros (136), 60% correspondiam a artigos científicos publicados em periódicos e 30,4% estavam associados a trabalhos publicados em anais de congresso.

No que tange a produção de artigos científicos os principais periódicos difusores de conhecimento em relação ao tema foram: "*Educational Studies In Mathematics*", "*International Journal of Mathematical Education In Science And Technology*", "*International Journal of Science and Mathematics Education*" e "*Journal of Mathematical Behavior*". Por outro lado, os anais de eventos de maior destaque internacional na publicação de artigos e resumos foram:

"*Journal of Physics Conference Series*", "*Pme Conference Proceedings*", "*Investigacion en Educacion Matematica*", "*Proceedings of The Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education Cerme 7*", "*Icme 13 Monographs*" e "*Proceedings of The Ninth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education Cerme9".*

Dos trabalhos publicados nas mais variadas fontes, o estudo destaca os autores de referência no assunto: *Reiss K.*; *Fischer F.*; *Kollar I.*; *Planas N.*; *Ufer S.*; *Vogel F.*; *Bostan M.I.*; *Goizueta M.*; *Kosko K.W.*; *Pease A.*; *Reichersdorfer E.*; *Akyuz D.*; *Albano G.*; *Ayalon M.*; *Bozkurt F.*; *Budzynska K.*; *Busch J.*; *Cervantes-Barraza J.A.*; *Conner A.*; *Corneli J.*; *Dello Iacono U.*; *Dogruer S.S.*; *Drekalovic V.*; *Erkek O.*; *Gurcan F.*

Por outro lado, as instituições de ensino e pesquisa que mais produziram conhecimento dentro da temática foram: *Middle East Technical University* (TUR), *Technical University of Munich* (ALE), *Autonomous University of Barcelona* (ESP), *Centre National De La Recherche Scientifique CNRS* (FRA), *University Of Granada* (ESP), *Kent State University* (EUA), *Universitas Negeri Malang* (IND), *Universitas Pendidikan Indonesia* (IND), *University of Dundee* (ESC) e *University of Haifa* (ISR). Estas instituições, dada a excelência dentro da temática abordada, certamente são potenciais alvos de parcerias interinstitucionais de programas de internacionalização acadêmica e intercâmbios de capacitação a nível de graduação, mestrado e doutorado.

Os Estados Unidos foi o país que deteve o maior número de publicações em relação ao tema investigado, ou seja, 18,4% das publicações de toda a produção internacional, seguido por Espanha (12,5%) e Alemanha (10,3%). Por sua vez, a língua inglesa se destacou como língua oficial de grande parte da produção científica internacional, contabilizando 82,35% das publicações levantadas.

A grande maioria das publicações, cerca de 97% delas, estavam fortemente vinculadas a três áreas de pesquisa, Educação (Pesquisa Educacional) com 91 registros (66,91%) seguido das áreas de Matemática e Filosofia com 21 (15,44%) registros cada.

Em um segundo momento, com base nas informações levantadas na base de dados da *Web of Science* e adotando um filtro de busca mais amplo (buscas no título/resumo e palavras chaves) foram analisadas publicações de tópicos associados ao tema "argumentação e matemática" ao longo do período investigado.

Foram considerados "hot topics" (tópico quente) seis combinações das vinte analisadas. Os tópicos raciocínio (reasoning), prova (proof), conceitos (concepts), modelagem (modelling), sala de aula (classroom) e educação (education) quando combinados a estrutura "argument* AND math*" obtiveram índice $m > 2$. Isso significa que o tema argumentação e matemática

tem um potencial muito grande para ser explorado no contexto educacional de sala de aula. Para tanto a abordagem de ensino envolvendo a modelagem ou exploração de modelos se apresenta como uma possibilidade interessante para explorar conceitos e o raciocínio utilizado pelos alunos na validação de ideias e modelos.

Os referidos tópicos, portanto, quando associados a estrutura "*argument* AND math**" são temáticas emergentes, sendo objeto de pesquisa nas mais variadas áreas de pesquisa.

Os resultados dessa análise bibliométrica são importantes para caracterizar a produção científica internacional envolvendo a temática argumentação e matemática. Contudo deve-se considerar a limitação desta análise uma vez que esta foi realizada tomando como referência apenas os periódicos indexados na base de dados da *Web of Science*. Nesse sentido, sugerimos como trabalhos futuros a realização de estudos utilizando outras bases de dados ou então estudos comparativos envolvendo duas bases ou mais bases.

No próximo capítulo, abordaremos o estado do conhecimento da produção científica internacional. A ideia, portanto, é explorar com maior profundidade o conteúdo dos estudos de referência e de maior impacto com relação a temática.

Capítulo 2 - Argumentação no ensino da matemática: o estado do conhecimento da produção científica internacional

O Estado do Conhecimento é um tipo de estudo bibliográfico "*que aborda apenas um setor das publicações sobre o tema estudado*" (ROMANOWSKI; ENS, 2006, p.40). Em se tratando deste capítulo abordou, portanto, artigos científicos publicados em periódicos internacionais com elevado fator de impacto nos últimos 10 anos (2011-2020). O objetivo é apresentar um panorama da pesquisa internacional sobre o tema "argumentação no ensino da matemática" exibindo assim os principais focos temáticos de pesquisa em relação ao assunto, as possibilidades de investigação decorrentes dessa produção e a definição do nosso problema de pesquisa frente ao que se apresenta como lacuna na literatura abordada. Para apresentar este cenário classificamos os artigos por focos temáticos de pesquisa em função dos seus diferentes objetivos e questões de pesquisa. Por outro lado, as lacunas e possibilidades de investigação foram retomadas dos artigos internacionais publicados mais recentemente a partir de 2019. A seguir apresentamos os principais focos temáticos de pesquisa bem como as principais lacunas de pesquisa oriundas de cada foco.

2.1 O levantamento de artigos de alto impacto na área

O Estado do conhecimento apresentado neste capítulo abordou "*apenas um setor das publicações sobre o tema estudado*" (ROMANOWSKI e ENS, 2006, p.40), ou seja, artigos científicos presentes na base de dados da *Web of Science* (WoS) no período de 2011 a novembro de 2020.

Os critérios de busca adotados foram: busca por documentos na Principal coleção da WoS. Na sequência, busca avançada no título pelas palavras chaves "argument* AND math*". Critérios de refinamento: idioma inglês, tipo de documento artigos, período 2011 a dezembro de 2020, trabalhos pertencentes a categoria educação/pesquisa educacional.

2.2 Resultados da busca

O Quadro 7, a seguir, apresenta a expressão booleana utilizada para a busca de trabalhos na base de dados da WoS considerando os filtros de busca e refinamento citados na seção anterior. Além da expressão booleana, o Quadro apresenta também os resultados de busca e a quantidade de artigos excluídos e selecionados para análise.

Quadro 7 - Artigos sobre o tema argumentação e matemática

Expressão Booleana[4]	Resultados	Excluídos	Selecionados
Argument* AND math*	38	6	32

Fonte: Quadro elaborado pelo autor

Como resultado da busca, conforme indicado no quadro, foram encontrados inicialmente um total de 38 trabalhos (artigos científicos). Foram descartados 6 trabalhos por não fazerem referência direta ao assunto abordado, ou seja, os termos de busca "argumentação" e "matemática" foram abordadas em outros contextos tais como: Aspectos teóricos de validação na área de pesquisa (1), avaliação na área de pesquisa (1), direito de ensino e aprendizagem (1), psicologia na área (1) e estudantes de engenharia (1). Para além destes trabalhos, um outro estudo foi descartado pelo fato de que o texto na versão completa não foi disponibilizado gratuitamente na plataforma da WoS.

O *corpus* de pesquisa neste levantamento, compreendeu, portanto, 32 artigos científicos seguindo a ordem de apresentação indicada no quadro a seguir - dos trabalhos mais recentes aos mais antigos.

Quadro 8 - Identificação dos artigos selecionados

Nº	Título do artigo e citação
1	Supporting grades 1-8 pre-service teachers' argumentation skills: constructing mathematical arguments in situations that facilitate analyzing cases (ZAMBAK; MAGIERA, 2020).
2	Teacher support for argumentation and the incorporation of contingencies in mathematics classrooms (SOLAR *et al*., 2020)**.**
3	Mathematical competencies: a case study on semiotic systems and argumentation in an Italian High School (CAPONE et al., 2020).
4	Mathematical Practices of Eighth Graders about 3D Shapes in an Argumentation, Technology, and Design-Based Classroom Environment (DOGRUER; AKYUZ, 2020)**.**
5	Promoting mathematical proof from collective argumentation in primary school (CERVANTES-BARRAZA; HERNANDEZ MORENO; RUMSEY, 2020)**.**
6	Exploring changes in mathematics teachers' envisioning of potential argumentation situations in the classroom (AYALON, 2019).
7	Prospective Middle School Mathematics Teachers' Global Argumentation Structures (ERKEK; IŞIKSAL BOSTAN, 2019)**.**
8	Emergence of argument in children's mathematical writing (KOSKO; ZIMMERMAN, 2019)**.**
9	How elementary and collegiate instructors envision tasks as supportive of mathematical argumentation: A comparison of instructors' task constructions (ROGERS; KOSKO, 2019)**.**
10	A scaffolding toolkit to foster argumentation and proofs in mathematics: some case studies (ALBANO; DELLO IACONO, 2019).
11	Arguments constructed within the mathematical modeling cycle (DEDE, 2019).
12	Secondary students' proof constructions in mathematics: The role of written versus oral mode of argument representation (STYLIANIDES, 2019).
13	A Different Look at the Reasoning Process of Prospective Middle School Mathematics Teachers: Global Argumentation Structures (ERKEK; BOSTAN, 2019).

[4] As "Expressões Booleanas" são estruturas de linguagem lógica que ao serem combinados com determinados operadores (AND, OR ou NOT) permitem uma busca ampla de resultados complexos em uma mesma e única pesquisa.

14	Prospective mathematics teachers' expectations for middle grades students' arguments (SUOMINEN; CONNER; PARK, 2018).
15	A framework for identifying mathematical arguments as supported claims created in day-to-day classroom interactions (NORDIN; BJÖRKLUND BOISTRUP, 2018).
16	Proving in Geometry: A Sociocultural Approach to Constructing Mathematical Arguments Through Multimodal Literacies (TAYLOR, 2018).
17	Mathematics teachers' attention to potential classroom situations of argumentation (AYALON; HERSHKOWITZ, 2018).
18	How to combine collaboration scripts and heuristic worked examples to foster mathematical argumentation - when working memory matters (SCHWAIGHOFER et al., 2017).
19	An Investigation of Pre-service Middle School Mathematics Teachers' Ability to Conduct Valid Proofs, Methods Used, and Reasons for Invalid Arguments (DEMIRAY; IŞIKSAL BOSTAN, 2017).
20	Perceived instructor argumentativeness, verbal aggressiveness, and classroom communication climate in relation to student state motivation and math anxiety (LIN; DURBIN; RANCER, 2017).
21	The poetics of argumentation: the relevance of conversational repetition for two theories of emergent mathematical reasoning (STAATS, 2017a).
22	Developing argumentation skills in mathematics through computer-supported collaborative learning: the role of transactivity (VOGEL et al., 2016).
23	Making use of what's given: Children's detailing in mathematical argumentative writing (KOSKO, 2016).
24	Teachers' Contextualization of Argumentation in the Mathematics Classroom (STAPLES; NEWTON, 2016).
25	The Nature of Argumentation in School Mathematics and Physics Texts: The Case of Periodicity (TRIANTAFILLOU; SPILIOTOPOULOU; POTARI, 2016).
26	Scaffolding norms of argumentation-based inquiry in a primary mathematics classroom (MAKAR; BAKKER; BEN-ZVI, 2015).
27	Participation of non-dominant students in argumentation in the mathematics classroom (CIVIL; HUNTER, 2015).
28	Effects of collaboration scripts and heuristic worked examples on the acquisition of mathematical argumentation skills of teacher students with different levels of prior achievement (KOLLAR et al., 2014).
29	Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities (CONNER et al., 2014).
30	The relationship between diagrammatic argumentation and narrative argumentation in the context of the development of mathematical thinking in the early years (KRUMMHEUER, 2013).
31	'Warrant' revisited: Integrating mathematics teachers' pedagogical and epistemological considerations into Toulmin's model for argumentation (NARDI; BIZA; ZACHARIADES, 2012).
32	Students build mathematical theory: semantic warrants in argumentation (WALTER; BARROS, 2011).

Fonte: Quadro elaborado pelo autor

Dos trabalhos indicados no Quadro 8 os dez (10) mais citados na literatura internacional estão indicados no quadro a seguir.

Quadro 9 - Os dez artigos mais citados na literatura internacional

Nº	Título do artigo e citação	Nº de citações
1	Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities (CONNER et al., 2014).	42
2	Effects of collaboration scripts and heuristic worked examples on the acquisition of mathematical argumentation skills of teacher students with different levels of prior achievement (KOLLAR et al., 2014).	32
3	'Warrant' revisited: Integrating mathematics teachers' pedagogical and epistemological considerations into Toulmin's model for argumentation (NARDI; BIZA; ZACHARIADES, 2012).	25
4	Scaffolding norms of argumentation-based inquiry in a primary mathematics classroom (MAKAR; BAKKER; BEN-ZVI, 2015).	23

5	Developing argumentation skills in mathematics through computer-supported collaborative learning: the role of transactivity (VOGEL et al., 2016).	22
6	Participation of non-dominant students in argumentation in the mathematics classroom (CIVIL; HUNTER, 2015).	22
7	Mathematics teachers' attention to potential classroom situations of argumentation (AYALON; HERSHKOWITZ, 2018).	13
8	The relationship between diagrammatic argumentation and narrative argumentation in the context of the development of mathematical thinking in the early years (KRUMMHEUER, 2013).	10
9	Secondary students' proof constructions in mathematics: The role of written versus oral mode of argument representation (STYLIANIDES, 2019).	9
10	Making use of what's given: Children's detailing in mathematical argumentative writing (KOSKO, 2016).	7

Fonte: Quadro elaborado pelo autor

Os artigos selecionados para análise, em especial os mais citados, foram importantes para a construção do referencial teórico apresentado no capítulo 4.

2.3 A argumentação no ensino de matemática: o que dizem as pesquisas internacionais sobre o assunto?

Após a seleção dos 32 artigos científicos de referência na área, procedeu-se a análise do *corpus* e para tanto, recorreu-se à Análise de Conteúdo (BARDIN, 1985) levando em consideração toda e qualquer palavra, expressão e ideia apresentada como também as interpretações e justificativas utilizadas (BARDIN, 1985; FIORENTINI e LORENZATO, 2006). Buscou-se, portanto, identificar palavras, ideias e/ou assuntos, comuns ou não comuns, na tentativa de buscar unidades de significados ou padrões e regularidades para em seguida agrupá-los em categorias propiciando uma melhor compreensão do objeto de estudo (FIORENTINI e LORENZATO, 2006).

Por meio de categorias emergentes (FIORENTINI; LORENZATO, 2006) foi realizada uma análise vertical (FIORENTINI; LORENZATO, 2006) das mesmas com o objetivo de descrever os trabalhos relacionados ao tema "argumentação no ensino da matemática".

No quadro a seguir é apresentado os principais focos temáticos de pesquisa da produção científica internacional analisada.

Quadro 10 - Categorias referentes aos focos temáticos de pesquisa.

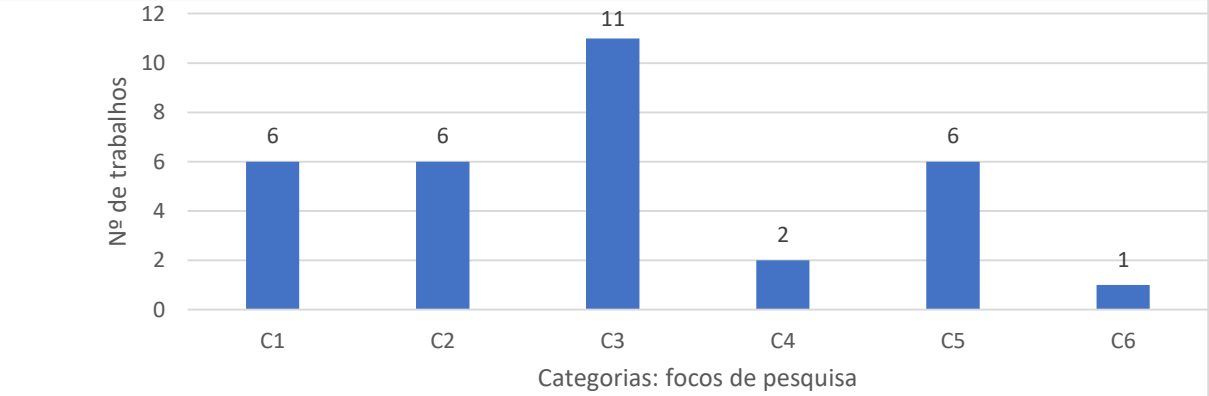
Cód.	Categoria - C	Descrição
C_1	Estruturas, modelos ou padrões de argumentação.	Envolve trabalhos cujo objetivo foi apresentar uma estrutura, modelo ou padrão para investigar ou analisar o processo argumentativo em sala de aula.
C_2	Expectativas, crenças e percepções em relação a argumentação.	Contempla trabalhos cujo objetivo de pesquisa tiveram relação com as expectativas, crenças ou percepções de professores/alunos em relação a argumentação.

C_3	Estratégias de apoio à argumentação e prova.	Aborda estudos que exploraram o uso de estratégias para apoiar ou desencadear a argumentação (ou o desenvolvimento de habilidades/competências argumentativas) em sala de aula.
C_4	Ambientes de argumentação.	Envolve trabalhos que tiveram por objetivo explorar o ambiente/contexto de aprendizagem onde são realizadas as práticas argumentativas em sala de aula.
C_5	Tipos, modos e finalidades da argumentação em sala de aula.	Os estudos identificados dentro dessa categoria abordaram os diferentes tipos/modos e finalidades de argumentação em sala de aula.
C_6	Análise da argumentação em livro didático.	Contempla estudos que abordam a análise da argumentação em livros didáticos.

Fonte: Quadro elaborado pelo autor

O quantitativo de trabalhos produzidos por foco temático de pesquisa é indicado no gráfico da Figura 3.

Figura 3 - Quantidade de trabalhos produzidos por foco temático de pesquisa



Fonte: Elaborado pelo autor

Por meio do gráfico verificou-se que o maior número de trabalhos, onze (11), contemplou a temática "estratégias de apoio à argumentação e prova", seguido pelas temáticas "Estruturas, modelos ou padrões de argumentação", "Expectativas, crenças e percepções em relação a argumentação" e "Tipos, modos e finalidades da argumentação em sala de aula" com seis (6) trabalhos cada uma. Por outro lado, os assuntos menos abordados foram "ambientes de argumentação" e "análise da argumentação em livro didático" com duas (2) e uma (1) ocorrências respectivamente.

As produções levantadas puderam ser classificadas em categorias referentes aos diferentes focos temáticos de pesquisa, conforme indicado no próximo quadro.

Quadro 11 - Relação de trabalhos por categoria

Cód.	Categoria - C	Relação de trabalhos	Total
C_1	Estruturas, modelos ou padrões de argumentação.	(ERKEK; IŞIKSAL BOSTAN, 2019); (ERKEK; BOSTAN, 2019); (CONNER *et al.*, 2014); (NARDI; BIZA; ZACHARIADES, 2012); (NORDIN; BJÖRKLUND BOISTRUP, 2018); (STAATS, 2017a).	6

C_2	Expectativas, crenças e percepções em relação a argumentação.	(AYALON; HERSHKOWITZ, 2018); (AYALON, 2019); (LIN; DURBIN; RANCER, 2017); (SUOMINEN; CONNER; PARK, 2018); (ROGERS; KOSKO, 2019); (DEMIRAY; IŞIKSAL BOSTAN, 2017).	6
C_3	Estratégias de apoio à argumentação e prova.	(KOLLAR *et al*., 2014); (VOGEL *et al*., 2016); (SCHWAIGHOFER *et al*., 2017); (ALBANO; DELLO IACONO, 2019); (MAKAR; BAKKER; BEN-ZVI, 2015); (CERVANTES-BARRAZA; HERNANDEZ MORENO; RUMSEY, 2020); (ZAMBAK; MAGIERA, 2020); (DEDE, 2019); (SOLAR *et al*., 2020); (TAYLOR, 2018); (CAPONE *et al*., 2020).	11
C_4	Ambientes de argumentação	(CIVIL; HUNTER, 2015); (DOGRUER; AKYUZ, 2020).	2
C_5	Tipos, modos e finalidades da argumentação em sala de aula.	(KRUMMHEUER, 2013); (KOSKO, 2016); (KOSKO; ZIMMERMAN, 2019); (STYLIANIDES, 2019); (WALTER; BARROS, 2011); (STAPLES; NEWTON, 2016).	6
C_6	Análise da argumentação em livro didático.	(TRIANTAFILLOU; SPILIOTOPOULOU; POTARI, 2016)	1

Fonte: Quadro elaborado pelo autor

A discussão apresentada a seguir está relacionada a cada um dos agrupamentos que constituem os focos temáticos de pesquisa referente aos trabalhos levantados. Serão apresentados também as principais lacunas de pesquisa oriundas de cada foco temático baseados nos estudos mais recentes.

2.3.1 Estruturas, modelos ou padrões de argumentação

A argumentação no contexto do ensino da matemática, pode ter cada argumento analisado individualmente por meio de uma "estrutura local" de argumentação, como também, é possível representar e analisar todo o conjunto de argumentos produzidos por meio de uma "estrutura global" que representa toda a cadeia de argumentos (KNIPPING, 2008; REID; KNIPPING, 2010).

A estrutura da argumentação global (KNIPPING, 2008) foi recentemente abordada em dois estudos (ERKEK; BOSTAN, 2019 e ERKEK; IŞIKSAL BOSTAN, 2019). Ambos os estudos trouxeram uma nova contribuição à literatura, a ampliação das categorias referentes a estrutura da argumentação global (estrutura-fonte; estrutura-reservatório; estrutura-espiral; estrutura-coletora) propostos por Knipping (2008) e Reid e Knipping (2010), passando a incluir também, outras duas novas categorias (estrutura-independente e estrutura-linear). Estas categorias de modo geral dão suporte a análise de todo o processo de argumentativo ocorrido em sala de aula. Nesse caso, a avaliação se dá por meio de diagramas que representam argumentos interconectados e que não levam em consideração a análise de cada argumento individual (KNIPPING, 2008). Ambos os estudos contaram com a participação de alunos de um curso de formação inicial de professores em matemática de uma universidade pública

situada em Ancara na Turquia. De modo geral, os dois estudos destacaram inicialmente em seus resultados, o fato de os sujeitos investigados recorrerem frequentemente a estruturas simples de argumentação global uma vez que o raciocínio matemático deles era fraco ou insuficiente para gerar estruturas mais complexas.

Em particular, o primeiro estudo (ERKEK; IŞIKSAL BOSTAN, 2019) investigou a natureza das estruturas de argumentação em um ambiente de tecnologia (Geogebra) e como esta tecnologia apoiou a formação de estruturas de argumentação global em alunos de um curso de formação inicial de professores. Como resultado verificou que o uso da tecnologia aliado a natureza das atividades geométricas propostas teve um impacto positivo na construção de argumentos bem como no surgimento de variadas estruturas de argumentação global.

Já o segundo estudo (ERKEK; BOSTAN, 2019) avaliou as habilidades de raciocínio dos professores em formação inicial durante a argumentação, examinando e identificando as estruturas globais de argumentação tendo em vista o apoio oferecido pelo docente durante todo o processo de argumentação. O estudo concluiu que a natureza das atividades propostas e apoio oferecido pelo professor pesquisador, no que se refere as orientações e aos questionamentos bem elaborados levaram os sujeitos investigados a raciocinarem utilizando estruturas de argumentação global mais complexas.

Por outro lado, a estrutura para analisar um argumento local, ou pontual, foi abordada em quatro estudos (NARDI; BIZA; ZACHARIADES, 2012); (CONNER *et al*., 2014); (STAATS, 2017) e (NORDIN; BOISTRUP, 2018). Em cada um deles é apresentado sugestões de aprimoramento e uso da estrutura argumentativa de Toulmin (1958) – o modelo mais utilizado na pesquisa em Educação Matemática para analisar a produção de argumentos em sala de aula. As contribuições destes estudos estão relacionadas à mudança do layout da estrutura argumentativa de Toulmin para atender a argumentação coletiva (CONNER *et al*., 2014), classificação das garantias (NARDI; BIZA; ZACHARIADES, 2012); identificação de estruturas poéticas de repetição (STAATS, 2017) e utilização do modelo de Toulmin em uma abordagem multimodal (NORDIN; BOISTRUP, 2018).

O estudo realizado por Nardi, Biza e Zachariades (2012), por exemplo, com foco na argumentação do professor, apresentou uma abordagem metodológica para analisar os argumentos apresentados por professores de matemática em uma atividade que envolve, resolução, avaliação e feedback à dois tipos diferentes de solução de um mesmo problema matemático resolvido por alunos do ensino secundário. A abordagem levou em consideração o conceito de dependência de campo proposto por Toulmin (1958) e adaptações realizadas na classificação dos tipos de garantias (a priori, empírica, institucional e avaliativa) propostos no

trabalho de Freeman (2005). Como resultado deste estudo, os autores apresentam uma nova classificação para as garantias do argumento produzido pelo professor: garantia a priori (epistemológica ou pedagógica), garantia institucional (curricular ou epistemológico), garantia empírica (empírico profissional ou empírico pessoal) e garantia avaliativa. O estudo demonstrou, portanto, como os argumentos do professor podem ser analisados não somente por sua precisão matemática, mas também sob a luz de outras considerações a partir da garantia, envolvendo aspectos pedagógicos, curriculares, profissionais e pessoais.

Com foco na argumentação coletiva, o estudo realizado por Conner *et al.* (2014) abordou adaptações no layout da estrutura argumentativa de Toulmin (1958) para evidenciar o suporte e apoio oferecido pelo professor (tipos de perguntas realizadas, contribuições diretas na formulação do argumento e outras ações de apoio à argumentação) no desenvolvimento de uma argumentação coletiva em sala de aula. No intuito de avaliar os efeitos dessa proposta, o estudo propôs ilustrar a utilização da estrutura em dois episódios de argumentação coletiva ocorridas em uma sala de aula do ensino secundário sob a regência de um professor de matemática em formação inicial. A partir destes episódios, discutiu-se como o uso da estrutura permitiu compreender a participação/papel do professor na construção dos argumentos coletivos em sala de aula bem como examinar os aspectos matemáticos inseridos nessa argumentação. O estudo concluiu que a estrutura proposta foi útil para examinar os tipos de raciocínios e conceitos particularmente matemáticos usados por alunos e professor para justificar de forma colaborativa uma conclusão bem como possibilitar a compreensão de como o professor apoia a argumentação coletiva em sala de aula.

Com base na estrutura argumentativa de Toulmin (1958) o estudo realizado por Staats (2017) abordou como recurso de análise da argumentação as estruturas poéticas de repetição que emergem na língua falada, ou seja, a repetição de frases que se perpetuam ao longo do discurso. Esta repetição contribui com a argumentação na medida em que tem o potencial de validar o discurso anterior tornando mais fácil a interpretação e a transmissão de significado através da estrutura do discurso. O estudo, portanto, teve por objetivo demonstrar que elementos do discurso argumentativo, tais como a garantia, a justificação, a qualificação e a produção colaborativa de conjecturas, são frequentemente transmitidas através da estrutura da fala por meio das estruturas poéticas. Inicialmente o estudo apresenta exemplos de estruturas poéticas, recomendações para representar repetições em transcrições e comentários sobre o tratamento de estruturas poéticas em várias tradições acadêmicas. No decorrer do texto o autor reanalisa monólogos matemáticos de outros estudos (INGLIS, MEJIA-RAMOS, SIMPSON, 2007; MARTIN, TOWERS, 2009) e como resultado revela que as estruturas poéticas de repetição

esteve presente em vários tipos de argumentos dos textos analisados facilitando a expressão de mandados, apoios, qualificações e coações por parte dos oradores envolvidos.

Já em um contexto de argumentação multimodal, o estudo realizado por Nordin e Boistrup (2018) propôs um modelo teórico que torna possível identificar argumentos matemáticos, formais e informais, reconstruídos a partir de interações e discussões realizadas em sala de aula, levando em consideração uma ampla gama de recursos comunicacionais, tais como discurso (oral e escrito), desenhos, gestos e símbolos. O modelo apresenta, portanto, uma estrutura passo a passo de como reconstruir sistematicamente os argumentos matemáticos tendo por base a estrutura reduzida[5] do modelo argumentativo de Toulmin em uma abordagem de interação e comunicação multimodal. A estrutura foi testada junto a uma turma de alunos com idade entre 9 e 11 anos na Suécia e como resultado deste estudo, os autores mostraram como os argumentos matemáticos podem ser identificados por meio de reivindicações apoiadas e como eles podem ser identificados quando veiculados através de uma gama mais ampla de modos que vão além do oral e do escrito.

Emerge destes estudos apresentados a importância de utilizar o modelo argumentativo de Toulmin (1958) em uma abordagem que leve em consideração a argumentação coletiva e a construção de argumentos colaborativos em sala de aula com apoio do professor. A ideia de utilizar estruturas globais de argumentação para analisar e avaliar todo o conjunto de argumentos produzidos em sala de aula constitui uma oportunidade para se conhecer melhor os diferentes tipos de raciocínio utilizados pelos alunos durante uma argumentação coletiva para justificar conceitos. Como proposta para estudos futuros dentro dessa temática destacamos a sugestão de Erkek e Bostan (2019) para explorar com maior profundidade os benefícios da tecnologia na argumentação de modo a comparar as estruturas globais de argumentação de dois grupos, um deles trabalhando a argumentação com o suporte da tecnologia e outro imerso em uma atividade tradicional envolvendo lápis e papel.

2.3.2 Expectativas, crenças e percepções em relação a argumentação

Os estudos identificados dentro desse foco temático de pesquisa, seis (6) no total, abordaram a "atenção" (AYALON; HERSHKOWITZ, 2018) e "mudança de percepção" (AYALON, 2019) de professores de matemática para potenciais situações que encorajam a argumentação em sala de aula; "percepções/concepções" (LIN; DURBIN; RANCER, 2017; DEMIRAY; IŞIKSAL BOSTAN, 2017) geradas a partir da argumentação do professor;

[5] **Limitação do estudo: o** modelo foi proposto para a estrutura reduzida de Toulmin.

“expectativas” (SUOMINEN; CONNER; PARK, 2018) de professores com relação a produção de argumentos dos alunos; “visão/percepção” (ROGERS; KOSKO, 2019) de professores em relação as tarefas como apoio à argumentação matemática.

O estudo realizado por Demiray e Işiksal Bostan, (2017) teve por objeto de estudo as concepções de professores na validação de uma conjectura utilizando diferentes tipos de provas matemáticas. Nesse sentido investigou as capacidades/habilidades de professores de matemática em formação inicial para conduzir provas validas[6], os métodos utilizados e as razões apresentadas para justificar os argumentos inválidos. O estudo contemplou a participação de 115 professores de matemática em formação inicial que frequentavam uma universidade pública localizada em Ancara na Turquia. Um questionário de prova, contendo três declarações de prova foi administrado a estes professores de matemática, objetivando levantar dados a respeito da capacidade de produção de provas. Os resultados deste estudo revelaram que: 1- mais da metade dos sujeitos investigados foram capazes de produzir provas válidas e além disso, os alunos mais velhos foram os que tiveram menor sucesso na condução de provas válidas; 2- a prova direta e a indução matemática foram os métodos mais utilizados para validar as declarações do questionário; 3- em relação aos argumentos inválidos, o estudo apontou que "inserir números para verificar a declaração dada" e "reescrever os dados na declaração" eram as razões comuns para declarar argumentos inválidos.

Já o estudo realizado por Lin, Durbin e Rancer (2017) abordou aspectos da comunicação em sala de aula do professor e sua relação com o estado de motivação e a ansiedade do aluno em sala de aula. O estudo teve por objetivo analisar como o estilo de comunicação, argumentativo e agressivo, do professor está relacionado às percepções dos alunos em relação a este processo de comunicação em sala: motivação e ansiedade. Participaram deste estudo 216 alunos universitários que estiveram matriculados em uma aula de matemática/estatística em uma universidade americana. Os resultados indicaram que a percepção dos alunos em relação ao nível de argumentação do professor e a agressividade verbal dele afetam diretamente as percepções do clima de comunicação em sala de aula. Estas três percepções, de acordo com o estudo, influenciam de forma direta o estado de motivação acarretando ainda um impacto direto na ansiedade matemática dos alunos. Decorre deste estudo portanto, que os professores de matemática/estatística podem adaptar a sua forma de comunicação[7] em sala de aula (professores

[6] Uma prova válida no contexto deste estudo envolve o estabelecimento de uma conclusão que é validada por meio de deduções e uso de regras matemáticas lógicas e formais.

[7] Professores percebidos como mais argumentativos (superiores na argumentação) foram aqueles também considerados como mais abertos ao diálogo e interação em classe, atentos a ouvir, relaxados, possui atitude amigável e são dominantes. Por outro lado, professores percebidos como verbalmente

mais argumentativos) para então influenciar positivamente a redução da ansiedade matemática dos alunos.

As expectativas de futuros professores de matemática com relação aos argumentos produzidos por alunos do ensino secundário foi o objeto de estudo da pesquisa realizada por Suominen, Conner e Park (2018). Nesta investigação, 15 professores de matemática em formação inicial para o ensino secundário (séries 6-12) foram convidados a se colocar como professores de matemática deste nível de ensino e avaliar (validar) cinco argumentos de alunos que supostamente provaram que a soma dos primeiros *n* números naturais ímpares *é* n^2. Em seguida os professores tiveram que descrever suas expectativas em relação as habilidades dos alunos para construir cada argumento bem como as razões para essas expectativas. Os resultados mostraram que apenas seis professores em formação assumiram a perspectiva de professor, sete professores, na maior parte do tempo, se colocaram na condição de aluno deste nível de ensino e apenas dois professores se moveram entre a perspectiva de estudante e professor (perspectiva combinada) para então determinar suas expectativas em relação aos argumentos produzidos. O estudo descreveu as expectativas e as razões de cinco participantes representativos da amostra, destacando, portanto, as três categorias emergentes e reflexões sobre estas diferentes perspectivas discutidas para a formação docente.

Por outro lado, Ayalon e Hershkowitz (2018) investigou a atenção de professores de matemática do ensino secundário para potenciais situações de ensino que encorajam a argumentação a partir da escolha de atividades de ensino presentes no livro didático utilizado pelos professores. Participaram deste estudo um grupo de 17 professores dos sétimos anos do ensino secundário israelense. A cada um deles foi solicitado escolher três tarefas de um livro didático, que, em sua opinião, têm o potencial de encorajar a argumentação em sala de aula, e depois justificar suas escolhas. Como resultado, o estudo encontrou uma diversidade de respostas envolvendo os focos de atenção dos professores. Alguns professores estavam atentos à três dimensões da atenção (matemática, sociocultural e cognitiva), por outro lado, a atenção da maioria era apenas parcial ou quase inexistente, ou seja, eles atendiam apenas a um foco de atenção, a matemática inserida na tarefa ou apenas à situação social na sala de aula, ou não demonstravam atenção a qualquer dimensão (AYALON; HERSHKOWITZ, 2018).

Com base no estudo anterior, Ayalon (2019) investigou mudanças provocadas na percepção de professores de matemática em serviço sobre o conhecimento de potenciais situações de ensino que encorajam a argumentação em sala de aula. O estudo também realizado

---

agressivos, foram vistos como sendo contenciosos, hostis, pouco amigáveis, desatentos e tensos (LIN, DURBIN; RANCER, 2017).

em Israel contou com a participação de 30 professores do ensino secundário durante o período em que cursavam o mestrado em Educação Matemática. Em uma etapa inicial, a percepção ou visão de argumentação de cada um dos professores investigados foi obtida a partir de uma análise individual sobre o potencial de várias tarefas matemáticas para apoiar a argumentação, semelhante ao que foi feito no estudo anterior (AYALON; HERSHKOWITZ, 2018). Em uma etapa posterior, os professores em conjunto analisaram de forma colaborativa às análises realizadas pelos professores do estudo anterior (AYALON; HERSHKOWITZ, 2018) sobre o potencial destas tarefas para fomentar a argumentação. Em seguida, cada professor investigado realizou o refinamento da sua análise inicial e teceu reflexões. Ao comparar os resultados da etapa inicial com os resultados da etapa posterior, verificou-se que, ao revisar suas respostas iniciais, a maioria dos professores investigados se referia a três ou quatro dimensões da argumentação (matemática, social, cognitiva, afetiva) em comparação a nenhuma ou apenas uma dimensão registrada na etapa inicial. Os resultados revelaram ainda que os professores aumentaram sua percepção do potencial das tarefas matemáticas para apoiar a argumentação. Para além disso, o estudo forneceu evidências de que a análise colaborativa das respostas autênticas de outros professores apoiou o aprendizado dos professores investigados aumentando dessa forma a sua perícia em relação ao uso da argumentação em sala de aula.

Por sua vez, Rogers e Kosko (2019) examinaram como professores de diferentes níveis de ensino veem as tarefas como apoio à argumentação matemática (criar e criticar argumentos matemáticos) em sala de aula. Para tanto, solicitou a oito professores de diferentes níveis de ensino[8] a criação de tarefas destinadas a apoiar a argumentação em sala de aula. Pretendeu-se com isso explorar e comparar as descrições dos professores sobre como envolver os alunos na argumentação matemática a partir da natureza da atividade criada por eles. O estudo apresenta uma estrutura de raciocínio e progresso (modelo de engajamento do aluno em argumentação matemática) utilizada para explicar as expectativas dos professores em relação a argumentação dos alunos em uma atividade. Com base na análise da tarefa produzida por escrito e entrevistas realizadas com os participantes da pesquisa, verificou-se que, embora todos os professores tenham solicitado explicações em suas tarefas criadas, havia diferenças fundamentais na natureza do raciocínio e da prova esperados por eles. Os resultados mostraram que os professores das primeiras séries concentraram seus esforços em viabilizar a produção de justificativas empíricas e explicações procedimentais; os professores das séries seguintes fizeram algo semelhante aos anteriores, porém enfatizaram a exibição de raciocínios; já os

[8] O estudo envolveu a participação de professores de dois extremos: series iniciais do Ensino Fundamental e o Ensino Superior.

professores universitários exigiram na atividade a produção de argumentos mais formalizados, solicitando constantemente a elaboração de conjecturas e generalizações.

Como propostas de investigações futuras, os estudos mais recentes recomendam: a) explorar a mudança de visão dos professores de matemática sobre possíveis situações de argumentação em sala de aula por meio de uma pesquisa longitudinal, com uma maior variedade de atividades colaborativas e cenários de ensino (AYALON, 2019) e b) analisar o discurso matemático em salas de aula de matemática para investigar como as palavras chaves, conjetura, descrição, prova e explicação são usadas para orientar os alunos em atividades que envolvem raciocínio e comprovação (ROGERS; KOSKO, 2019).

2.3.3 Estratégias de apoio à argumentação e prova

Onze (11) estudos (KOLLAR *et al.*, 2014); (VOGEL et al., 2016); (SCHWAIGHOFER et al., 2017); (ALBANO; DELLO IACONO, 2019); (MAKAR; BAKKER; BEN-ZVI, 2015); (CERVANTES-BARRAZA; HERNANDEZ MORENO; RUMSEY, 2020); (ZAMBAK; MAGIERA, 2020); (DEDE, 2019); (SOLAR et al., 2020); (CAPONE et al., 2020) e (TAYLOR, 2018) foram classificados neste foco temático de pesquisa e exploraram o uso de estratégias para apoiar ou desencadear a argumentação em sala de aula. Para Staples e Newton (2016) há dois propósitos intimamente relacionados, mas distintos de envolver os alunos com argumentação, ou seja, desenvolver conceitos matemáticos e desenvolver proficiência com a prática da argumentação. A primeira prioriza a compreensão conceitual e considera a argumentação como uma prática de provocações e aprendizagem colaborativa para desenvolver a compreensão de uma propriedade ou conceito. Já a segunda prioriza o desenvolvimento de proficiência da prática argumentativa (habilidades e competências) com a finalidade de promover a justificação e a validação de uma propriedade (STAPLES; NEWTON, 2016). A seguir são apresentadas algumas estratégias, identificadas na literatura internacional, capazes de desencadear e apoiar a argumentação em sala de aula.

2.3.3.1 Roteiros de colaboração e exemplos heurísticos. Estudos empíricos[9] realizados na Alemanha, Kollar *et al.* (2014), Vogel *et al.* (2016) e Schwaighofer *et al.(*2017), exploraram a combinação de roteiros de colaboração e exemplos heurísticos como estratégias para fomentar e avaliar a aquisição de habilidades de argumentação matemática. Nestes estudos, ambos os andaimes citados foram utilizados para guiar alunos ingressantes em um curso de formação de

[9] Estes estudos abordaram as habilidades de argumentação dentro de uma perspectiva cognitiva.

professores em matemática no processo de prova matemática (BOERO, 1999) e na produção de certos tipos de sequências de argumento (LEITÃO, 2000).

No estudo realizado por Kollar *et al.* (2014), por exemplo, os pesquisadores investigaram se os efeitos de combinação entre roteiros de colaboração e exemplos heurísticos em um ambiente de tecnologia suportado pelo computador constitui uma maneira eficaz de propiciar a aquisição de dois componentes que envolvem as habilidades de argumentação em matemática - um componente social-discursivo que envolve a capacidade do aluno se envolver em um processo de argumentação colaborativa e um componente individual-matemático relacionado a capacidade do aluno gerar argumentos a favor ou contra uma conjectura. Participaram deste estudo de abordagem quantitativa, 101 estudantes ingressantes em um curso de formação inicial de professores em matemática de duas universidades alemãs. Estes estudantes, com diferentes níveis de desempenho prévio em relação a matemática básica, foram divididos em dois grupos e submetidos a duas abordagens instrucionais diferentes, sistematicamente variadas em um design fatorial 2x2: roteiros de colaboração (com vs. sem) e exemplos heurísticos trabalhados versus resolução de problemas. Os dados foram coletados por meio de pré e pós-testes e os resultados mostraram que ambos os andaimes tiveram um efeito positivo e significativo na aquisição e na disposição dos alunos para usar habilidades de argumentação matemática social-discursiva. Evidenciou ainda que os efeitos dessas duas abordagens são dependentes do desempenho prévio dos alunos em relação a matemática escolar, ou seja, o efeito de ambos os andaimes nos componentes social-discursivo e individual-matemático dependiam do desempenho anterior dos alunos. Não houve, portanto, evidências de um efeito sinérgico em relação ao uso combinado das duas abordagens investigadas, isso porque os alunos que trabalharam com as duas abordagens ao mesmo tempo não tiveram um desempenho melhor do que os alunos que haviam experienciado apenas uma abordagem.

Com foco no componente socio-discursivo das habilidades de argumentação matemática, o estudo realizado por Vogel *et al.* (2016) aprofundou a análise de uma parte dos dados coletados no estudo realizado por Kollar *et al.* (2014) e dessa forma investigou em que medida três diferentes tipos de atividade colaborativa (atividades construtivas, transatividade dialógica, transatividade dialética) gerada pelo aluno ou pelo parceiro de aprendizagem podem explicar os efeitos positivos dos roteiros de colaboração e dos exemplos heurísticos sobre a disposição dos alunos em usar habilidades de argumentação. O estudo concluiu que o

envolvimento dos alunos na "transatividade dialética autogerada"[10] mediou os efeitos de ambos os andaimes no que diz respeito à disposição destes alunos para usar habilidades de argumentação. Por outro lado, a transatividade dialética gerada pelo parceiro de aprendizagem bem como as outras atividades de aprendizagem colaborativa, medidas e avaliadas, não apresentaram o mesmo efeito. Os autores ressaltam que para promover o desenvolvimento de habilidades de argumentação em matemática, os ambientes de aprendizagem devem ser projetados de forma a viabilizar junto aos alunos uma experiencia de ensino que envolva a transatividade dialética.

Por sua vez Schwaighofer *et al.* (2017) investigaram como combinar o uso de roteiros de colaboração e exemplos heurísticos na aquisição de habilidades de argumentação relacionado ao componente social-discursivo (dialético e dialógico) em atividades de prova matemática. Além disso, os autores avaliaram como o conhecimento prévio e a capacidade de memória de trabalho dos alunos moderaram esses efeitos de combinação. Participaram deste estudo 108 alunos ingressantes em um curso de formação de professores em matemática de uma universidade americana. Estes alunos foram aleatoriamente submetidos a uma dentre quatro condições experimentais do estudo, todas elas relacionadas às diferentes formas de combinação envolvendo roteiros de colaboração e exemplos de trabalho heurístico (sequenciamento e desbotamento de uma abordagem em relação a outra). Os dados foram coletados por meio de pré e pós-testes e os resultados obtidos não revelaram efeitos positivos que evidenciasse uma ordem superior de sequenciamento de uma abordagem em relação a outra na aquisição de habilidades de argumentação dialógica e dialética. Para além disso, os resultados revelaram ainda evidências de que alunos com capacidade de memória, menos favorável do que outros, se beneficiaram mais da situação em que o roteiro de colaboração (domínio geral) é apresentado primeiro e se desbota na medida em que exemplos heurísticos (domínio específico de conteúdo) são apresentados logo em seguida.

Com base na análise destes três estudos verificou-se que os roteiros de colaboração constituem um importante recurso para sequenciar atividades e orientar os alunos através de um processo de aprendizagem colaborativa contribuindo assim para o componente "social-discursivo" das habilidades de argumentação. Por outro lado, os exemplos de trabalho heurístico consistem em guias que contêm princípios, estratégias e métodos que podem viabilizar a construção do argumento de prova e dessa forma contribuir para o desenvolvimento

[10] Refere-se a um tipo de atividade em que o aluno responde à contribuição do parceiro de aprendizagem de forma argumentativa, critica e/ou integra as contribuições de seu parceiro de aprendizagem (VOGUEL, et al. 2016).

do componente “individual-matemático” das habilidades de argumentação em matemática. Uma possível combinação entre roteiros de colaboração e exemplos de trabalho heurístico desponta como uma estratégia promissora para viabilizar a resolução de tarefas de prova matemática (KOLLAR *et al.*, 2014; VOGEL *et al.*, 2016; SCHWAIGHOFER *et al.*, 2017).

2.3.3.2 Telhas de linguagem virtual em uma abordagem de investigação. O estudo realizado por Albano e Dello Iacono (2019) apresentou um kit de ferramentas digitais, orientado por uma questão semiaberta e um conjunto de "telhas de linguagem virtual”, cujo objetivo é favorecer a construção de argumentos e a elaboração de provas formais. Por meio deste recurso tecnológico, os alunos tiveram a liberdade de articular livremente seu pensamento, arrastando telhas apropriadas para então construir frases, elaborar argumentos, responder perguntas de sondagem, comunicar suas descobertas e criar provas matemáticas. O estudo[11] analisou do ponto de vista teórico o potencial didático do kit de ferramentas para apoiar o desenvolvimento da competência argumentativa. De acordo com o estudo, do ponto de vista educacional, o kit pode ser usado em todos os níveis de ensino em uma abordagem investigativa onde os alunos são orientados a explorar, conjecturar, refutar e produzir provas. Para além disso, o kit de ferramentas pode contribuir para favorecer o aprimoramento da comunicação matemática no que diz respeito à passagem dos registros informais para os registros formais (prova formal) em conformidade com as normas sociomáticas que regulam comunicação na área.

Neste cenário, uma possibilidade interessante e não documentada pelos autores no estudo envolve a exploração dos blocos dinâmicos de programação do aplicativo Scratch como “telhas de linguagem virtual”. O referido aplicativo, portanto, constitui um ambiente propicio à realização de explorações e investigações que permitem viabilizar a construção de argumentos (algoritmos) e avaliação da validade (funcionalidade) destes argumentos no contexto da tecnologia (programação).

2.3.3.3 Normas de apoio à argumentação. Por meio de um estudo de caso, Makar; Bakker; Ben-zvi (2015) buscaram compreender como um professor de matemática do 4º ano do ensino primário estabelece e mantem normas[12] de investigação em sala de aula para apoiar a argumentação. O estudo, portanto, propôs analisar as estratégias utilizadas por um professor de

[11] O trabalho constitui um estado da arte sobre o tema abordado em diferentes contextos, analisando, do ponto de vista teórico, seu potencial educacional para fomentar a argumentação e a prova em matemática e para avaliar automaticamente as perguntas abertas.

[12] Por normas, os autores se referem a estruturas cognitivas e sociais, no âmbito de sala de aula, referente às expectativas coletivas do professor e dos alunos sobre o que conta como atividades e interações apropriadas (Cobb, 2002; Enyedy e Stevens, 2015; Webb et al., 2014).

matemática para estruturar o desenvolvimento de normas para apoiar a argumentação em atividades de investigação em sala de aula. Os dados referentes a esta investigação foram coletados por meio de observações e filmagens das aulas do referido professor durante um ano escolar bem como por meio de entrevistas realizadas com este professor. Como resultado deste estudo, verificou-se que o professor investigado constantemente diagnosticava as normas de sala de aula durante as atividades realizadas pelos alunos, como também utilizava responsavelmente estratégias que mudavam conforme as normas iam surgindo, se desenvolviam e se estabilizavam. Ao final da coleta de dados, o estudo apresentou evidências de que as normas de sala de aula para apoiar a argumentação (ouvir ativamente, justificar e explicar aos colegas, basear-se nas ideias de outros e questionar e desafiar ideias) foram aos poucos sendo assimiladas pelos alunos e posteriormente praticadas por eles, independente da presença do professor em sala de aula.

Este estudo, ressaltou a importância de normas de estímulo à investigação como uma estratégia capaz de promover e manter a argumentação em sala de aula. Para Zambak e Magiera (2020) dois tipos de normas, as “sociais” e as “sociomáticas”, podem contribuir para apoiar o desenvolvimento de habilidades de argumentação numa sala de aula de matemática.

2.3.3.4 Argumentação coletiva. O estudo realizado por Cervantes-Barraza; Hernandez Moreno; Rumsey (2020) abordou a construção de provas matemáticas a partir da argumentação coletiva em sala de aula. O estudo contou com a participação de uma turma de alunos do primário de uma escola particular situada no sul do México e propôs investigar: como os estudantes do quinto ano desenvolvem uma prova matemática a partir do processo de argumentação coletiva? Apoiado em uma metodologia que oferece suporte a experimentação didática em sala de aula, o estudo propôs a aplicação de uma tarefa matemática para explorar construção de provas a partir da argumentação coletiva em sala de aula. Os argumentos produzidos foram analisados com base no modelo argumentativo de Toulmin (1958) com adaptações para incluir a participação do professor durante a produção de argumentos. Ao final dessa investigação, os resultados apontaram para o grande potencial da argumentação coletiva no nível primário e a importância do papel do professor auxiliando (mediação) e encorajando os alunos a construírem provas matemáticas através de um trabalho de argumentação colaborativa para convencer os outros sobre a validade de suas reivindicações.

Já Zambak e Magiera (2020) mostraram como a argumentação coletiva acompanhada de uma instrução de ensino[13] apoiou a capacidade de professores em formação inicial de construir argumentos matemáticos válidos sobre números e operações bem como o engajamento deles em métodos de raciocínio dedutivo. O estudo contou com a participação de 37 acadêmicos de um curso de formação inicial de professores de uma grande universidade privada no meio-oeste dos EUA. Estes professores, durante um semestre trabalharam individualmente (produção de argumento monológico) e em pequenos grupos (produção de argumentos dialógicos) na resolução de casos-problemas de modo a evidenciar os seus variados tipos de raciocínios[14] por escrito. Os resultados deste estudo revelaram que os professores demonstraram evolução nas habilidades de argumentação e raciocínio ao longo do tempo em virtude da possibilidade de produzir argumentos de forma coletiva e colaborativa. Em particular, uma porção significativa dos professores investigados deixou de emitir argumentos sem comprovação, em direção à construção de argumentos do tipo dedutivo com justificações fundamentadas e seus devidos apoios de sustentação. Para além da importância da argumentação coletiva, os autores atribuem os resultados positivos também à uma sequência de atividades de aprendizagem que apoiou o desenvolvimento de habilidades de argumentação dos futuros professores.

Diante dos trabalhos apresentados verificou-se que a abordagem da argumentação coletiva na medida em que viabiliza a produção de argumentos colaborativos tem o potencial de promover o raciocínio dedutivo (ZAMBAK; MAGIERA, 2020) e a produção de argumentos de prova mais genéricos (CERVANTES-BARRAZA; HERNANDEZ MORENO; RUMSEY, 2020).

Como possibilidade de trabalho futuro, Zambak e Magiera (2020) propõem a ampliação da investigação realizada por eles ressaltando a necessidade de investigar com maior profundidade a atividade mental (raciocínio) por meio de outros tipos de problemas e bem como por outros modos de argumentação não ficando restrito apenas aos argumentos produzidos por escrito.

2.3.3.5 Tarefas de modelagem matemática. Dede (2019) investigou os argumentos produzidos dentro de um ciclo de modelagem matemática levando em consideração os

[13] A instrução de ensino era composta por problemas do tipo não convencional, uso de normas sociais e normas sociomáticas e o ensino explícito da estrutura argumentativa de Tolumin.
[14] O estudo apresenta níveis de proficiência relacionado a capacidade dos professores de reconhecer e raciocinar sistematicamente. Apresenta também uma sequência de atividades de aprendizagem que apoia a proficiência dos professores com o raciocínio educativo.

processos cognitivos dos sujeitos envolvidos nessa atividade. Participaram desta investigação quatro estudantes de um curso de formação de professores em matemática primária, que por meio do trabalho em grupo atuaram na solução de uma tarefa de modelagem. O estudo se propôs a responder a seguinte questão de pesquisa: como os participantes constroem argumentos dentro do ciclo de modelagem matemática? (Como formulam conclusões? Como refutam conclusões uns dos outros para alcançar a melhor solução comum? Quais garantias utilizam?). Os dados foram coletados por meio de gravação em vídeo da solução do problema de modelagem e analisados por meio do modelo argumentativo de Toulmin. O resultado principal dessa investigação, revelou que os argumentos construídos dentro do ciclo de modelagem mantinham relações com as etapas de transição do ciclo de modelagem, ou seja, os dados e conclusões da maioria dos argumentos correspondiam aos pontos de início e término da transição das etapas do ciclo de modelagem.

2.3.3.6 Apoio docente em situações contingente em sala de aula. Solar *et al.* (2020) investigou associações entre argumentação e situações contingentes em aulas de matemática. Para tanto, o estudo abordou a utilização de três estratégias de apoio docente (tarefas matemáticas abertas à discussão, estratégias comunicativas e estratégias de reconhecimento do pensamento dos alunos) para viabilizar à argumentação em sala de aula e identificar situações contingentes desencadeadas por erros cometidos por alunos do Ensino Fundamental. O estudo, portanto, propôs investigar por meio de estudos de caso exploratórios: como o apoio do professor durante uma aula com argumentação pode ajudar incorporar situações contingentes na sala de aula de matemática? Durante todo o estudo, a produção de argumentos em sala de aula ocorreu de forma coletiva e os resultados revelaram que o conjunto de estratégias (orquestração argumentativa) utilizado por três docentes investigados contribuíram para fomentar a argumentação em sala de aula em situações contingentes explorando o erro dos alunos. Em particular os autores destacaram que reconhecer o pensamento dos alunos promove de forma significativa a incorporação de situações contingentes na sala de aula de matemática.

As estratégias de orquestração argumentativas foram descritas por Solar *et al.* (2020) para situações contingentes, no entanto os próprios autores do estudo revelaram que elas podem ser relevantes para situações que não são necessariamente contingentes. Estudos recentes têm vinculado processos de argumentação com o ciclo de modelagem na sala de aula de matemática (DEDE, 2019). Dessa forma, Solar *et al.* (2020) sugere investigar como a orquestração argumentativa promove o desenvolvimento de processos de modelagem nos estudantes.

2.3.3.7 Atividades envolvendo literárias multimodais e gestão de diferentes registros semióticos. A instrução com literárias multimodais[15] apoiada ao contexto social dos alunos foi uma abordagem utilizada por Taylor (2018) para viabilizar a alfabetização disciplinar no que diz respeito a produção e compreensão do argumento de prova. Neste estudo, o autor descreveu a sua participação em uma pesquisa-ação abordando de modo especial o caso da aluna Jasmine do 10º ano do ensino secundário de uma escola pública localizada nos EUA. Em uma atividade de sala de aula, o autor explorou o uso de literacias multimodais por meio da metodologia de projetos e contemplando aspectos do contexto social dos alunos em sala de aula. Foi proposto aos alunos que criassem uma apresentação multimodal relacionada à prova com o objetivo de justificar e defender uma posição em um processo judicial. Os resultados deste estudo revelaram que a aluna investigada criou e apresentou argumentos (textos, vídeos, imagens, diálogos, gestos, citações de livros, documentos) para casos judiciais em um esforço para relacionar o seu contexto social com prova e justificação em geometria. Nesse sentido, os resultados ilustraram os ricos usos das literacias multimodais, por parte da aluna investigada, como prática social que facilitou o seu aprendizado de provas. O autor conclui dizendo que os textos multimodais proporcionaram a oportunidade de estruturar os argumentos de maneira significativa e atendendo à função da prova.

Por sua vez Capone *et al.* (2020) realizaram um estudo que teve por objetivo apoiar o desenvolvimento de competências e habilidades matemáticas por meio de atividades concebidas para estimular o uso de diferentes registros de representação semiótica na compreensão de conceitos e o uso da argumentação lógica em matemática como prática para o desenvolvimento de competências demonstrativas. Participaram do estudo, cerca de 400 alunos de quinze anos divididos em 20 turmas do Ensino Médio de diferentes escolas da Campânia, no sul da Itália. A estes alunos foi proposto a realização de tarefas[16] de resolução de problemas em grupo bem como o uso do recurso da colaboração como um instrumento catalisador para o desenvolvimento de competências e habilidades relacionadas a capacidade de raciocínio, representação e comunicação. Os pesquisadores buscaram investigar, portanto, as principais dificuldades que emergem na transição de um registro de representação semiótico a outro, bem como as dificuldades dos alunos em produzir um argumento lógico-dedutivo por escrito. Os resultados deste estudo revelaram dificuldades dos alunos na transição entre os diferentes

[15] As literacias multimodais descrevem práticas de alfabetização que envolvem a utilização e composição de textos multimodais em seus diferentes modos de comunicação (fala, escrita, imagem, gesto e som) para representar ou comunicar um significado (TAYLOR, 2018).

[16] Estas tarefas de resolução de problemas foram concebidas de modo a estarem centradas na gestão de diferentes registros de representação semiótica

registos semióticos bem como dificuldades na produção de textos argumentativos escritos. No entanto, ao longo das atividades desenvolvidas verificou-se uma melhoria na capacidade de comunicação, refletindo uma evolução na construção de argumentos mais completos e o uso de uma linguagem cada vez mais rigorosa do ponto de vista científico. As atividades propostas tiveram efeitos positivos uma vez que contribuíram para a melhoria dos níveis de habilidade dos alunos quando comparado os níveis da prova do PISA italiano.

Como proposta de investigação Capone *et al.* (2020) sugere a produção de atividades focadas na gestão de diferentes registros e representação semióticos (tanto conversões como tratamentos) e verificar como estas atividades contribuem para aumentar as habilidades de argumentação em matemática.

2.3.4 Ambientes de argumentação.

Dois (2) estudos (CIVIL; HUNTER, 2015) e (DOGRUER; AKYUZ, 2020) foram classificados neste foco temático de pesquisa e tiveram por objetivo explorar o ambiente/contexto de aprendizagem onde são realizadas as práticas argumentativas em sala de aula.

O estudo realizado por Civil e Hunter (2015) focalizou a argumentação em ambientes de sala de aula através de uma lente sociocultural e linguística. Participaram desta investigação estudantes imigrantes do ensino primário (9-12 anos) não dominantes da prática argumentativa e inseridos em dois contextos geográficos diferentes, EUA e Nova Zelândia. Com foco nas experiências de vida e no contexto social destes alunos, o estudo propôs investigar os obstáculos e as possibilidades de participação destes estudantes no processo de argumentação em sala de aula. Em ambos os contextos foi proposto diferentes tarefas matemáticas para fomentar a argumentação coletiva em sala de aula. Para além disso, o professor mobilizou recursos para viabilizar a criação de um ambiente de argumentação onde fosse possível construir relacionamentos (confiança, humor, conversa informal, convivência em/com família, colaboração, desafio, uso da língua materna) para encorajar e apoiar os alunos a construir seus próprios argumentos. Os resultados deste estudo revelaram características comuns aos dois contextos investigados, o que ajudou os alunos no seu engajamento em relação a prática de argumentar e construção de argumentos mais ricos. Isso foi possível devido a vivência/experiência de um ambiente de sala de aula onde os alunos tiveram a liberdade de evidenciar seus próprios modos culturais de ser e agir, incluindo a valorização da sua primeira língua, a forma de falar, gestos e valores. Nesse sentido, construir relacionamentos e incentivar os estudantes a serem eles mesmos durante a prática da argumentação coletiva foram vistos no

estudo como recursos fundamentais para apoiar a argumentação. As descobertas realizadas destacaram a necessidade de obter uma melhor compreensão do potencial de interação entre as práticas cotidianas realizadas fora da escola e as práticas realizadas no âmbito das disciplinas escolares e seus discursos associados na produção de argumentos.

Por sua vez Dogruer e Akyuz (2020) ressaltou a importância do estabelecimento de ambiente ou cultura de sala de aula capaz de apoiar à argumentação e a formação de conceitos. O estudo foi realizado na Turquia e teve por objetivo investigar as práticas matemáticas desenvolvidas por uma turma de alunos do oitavo ano do Ensino Básico quando estudavam os conteúdos de prismas, cilindros e áreas de superfície. Nesse sentido, o estudo pretendeu documentar o surgimento destas práticas matemáticas e mostrar que elas são sustentadas por ideias que posteriormente são retomadas e compartilhadas no ambiente de sala de aula. Para tanto, foi criado um ambiente de aprendizagem para que os estudantes pudessem se envolver na prática da argumentação. Este ambiente foi enriquecido com instruções baseadas em pesquisas que preconizam o uso da tecnologia (software dinâmico Geogebra), investigação e utilização de normas comunicacionais (normas sociais e normas sociomáticas) em sala de aula. Os resultados deste estudo indicaram a ocorrência de três práticas matemáticas e várias ideias associadas e tomadas como compartilhadas: (1) definição de prismas, (2) cálculo da área de superfície de um prisma, e (3) cálculo da área de superfície de um cilindro. Para além disso, o estudo revelou que o entendimento dos alunos melhorou na medida em que foi possível aprender conceitos em um ambiente de argumentação com investigações e suporte do software de geometria dinâmica Geogebra. Todo esse processo ainda foi facilitado por meio da adoção de normas sociais e normas sociomatemáticas que viabilizaram junto ao ambiente possibilidades de explicação e justificação de soluções. Estas normas foram valiosas e o professor participante desempenhou um papel fundamental para promover seu desenvolvimento.

Decorre deste último estudo que novas investigações podem se concentrar em como as normas sociais se desenvolvem e mudam entre os participantes em um ambiente de sala de aula baseado em tecnologia e investigação.

2.3.5 Tipos, modos e finalidades da argumentação em sala de aula.

Os estudos identificados dentro desse foco temático de pesquisa, seis (6) no total, abordaram “os modos de argumentação oral e/ou escrito” (KOSKO, 2016), (KOSKO; ZIMMERMAN, 2019) e (STYLIANIDES, 2019), os tipos de argumentação, “substantiva e formal” (WALTER; BARROS, 2011), “narrativa e diagramática” (KRUMMHEUER, 2013)

bem como as diferentes “finalidades” de uma tarefa de argumentação (STAPLES; NEWTON, 2016).

O estudo realizado por Walter e Barros (2011) propôs uma análise fundamentada, em termos da argumentação substancial[17], da construção teórica de estudantes diante das estratégias utilizadas por eles na resolução de um problema e do uso de garantias para comunicar suas ideias (esclarecer, descrever, explicar, justificar) e convencer os outros da validade de suas conjecturas. Participaram deste estudo dezoito estudantes de Cálculo de uma universidade particular localizada no oeste dos EUA. Os estudantes foram divididos em quatro grupos de trabalho colaborativo em uma atividade de resolução de problema que propôs encontrar o volume de um sólido de revolução sem a instrução prévia relativo às técnicas de solução. Como questão de pesquisa o estudo propôs investigar: como pequenos grupos de estudantes de cálculo universitário poderiam usar argumentação substancial para convencer a si mesmos e a outros da verdade matemática? Os resultados deste estudo mostraram que os quatro grupos investigados, cada um ao seu modo, adotaram diferentes estratégias em um nível qualitativo de detalhes, o que revelou uma visão de como eles fizeram uso do seu potencial criativo para o significado matemático, comunicação e precisão na resolução do problema proposto. Para além disso, o estudo também mostrou que a teoria matemática elaborada para resolver o problema ocorreu através do raciocínio analógico dos estudantes e da argumentação substancial voltada para a construção de sentido e consenso. A argumentação substancial produzida no âmbito deste estudo foi utilizada para fins de validação.

A relação entre argumentação narrativa e argumentação diagramática foi abordada por Krummheuer (2013) no contexto do desenvolvimento do pensamento matemático em aulas primárias de matemática do Ensino Básico. O objetivo do estudo foi investigar potenciais contribuições destes dois tipos particulares de argumentação coletiva no desenvolvimento do conceito de “Nicho Interacional no Desenvolvimento do Pensamento Matemático”. Para tanto o estudo, com foco na abordagem qualitativa, se propôs a comparar duas cenas de sala de aula, uma da pré-escola e outra de uma aula de matemática da primeira série, de modo a investigar a ocorrência e relação entre as argumentações diagramáticas e narrativas e os seus possíveis movimentos de contribuição visando o desenvolvimento do pensamento matemático. De acordo com o estudo, à medida que as crianças amadurecem, o raciocínio muda de uma argumentação

[17] Refere-se a um tipo de argumentação não formal e que visa apresentar de forma convincente e colaborativa no contexto do estudo, os antecedentes, relações, descrições, explicações, e justificativas que visam convencer os outros da validade de suas conjecturas ao invés de focar explicitamente a produção de provas formais (WALTER; BARROS, 2011).

diagramática para uma argumentação narrativa e que essa mudança não ocorre de forma linear. A faixa etária dos 5 aos 7 anos é crucial para que as crianças adquiram habilidades de linguagem narrativa e este processo de aquisição da linguagem deve ser apoiado e refletido pedagogicamente.

Já o estudo realizado por Staples e Newton (2016) abordou uma tarefa (Truque dos números) para apresentar duas possibilidades distintas de contextualizar a argumentação em uma sala de aula do 7º ano do ensino secundário. A primeira possibilidade esteve relacionada ao desenvolvimento de conceitos matemáticos e segunda à proficiência com a prática da argumentação no estabelecimento da verdade. Com base em dados de uma investigação, o estudo, portanto, documenta como a argumentação - uma prática que é central para o trabalho da matemática - pode ser contextualizada pelo professor em sala de aula do ensino secundário para servir a dois diferentes fins: a) argumentação para o desenvolvimento de conceitos e b) argumentação para a matemática enquanto desenvolvimento da prática da prova e o estabelecimento da verdade. O estudo abordou as escolhas realizadas por dois professores de matemática no contexto da tarefa proposta e como estas escolhas influenciaram as oportunidades dos alunos se engajarem na argumentação. Na conclusão do estudo, os autores destacam a importância de os professores serem mais estratégicos em suas escolhas, de modo a aproveitar melhor a argumentação como prática docente e oferecer aos alunos oportunidades de desenvolver uma compreensão bem mais ampla da argumentação como prática disciplinar não se restringindo apenas a uma prática de aprendizagem de conteúdo.

Por sua vez Kosko (2016) abordou o modo escrito da argumentação matemática no contexto da primeira infância. O objetivo do referido estudo foi investigar como determinada informação fornecida em uma atividade é operacionalizada na escrita argumentativa de crianças pequenas. Como questão de pesquisa investigou: como a alteração da complexidade de uma informação ou dado matemático afeta o detalhamento da escrita matemática? Para tanto, o autor realizou um estudo exploratório através do qual analisou duas tarefas (uso de hastes cuisenaire) com características muito semelhantes, porém com informações diferentes em relação a sua complexidade. Participaram desta tarefa duas turmas de alunos da Educação infantil. Os resultados indicaram que o aumento da complexidade dos dados fornecidos pode encorajar muitas crianças a operacionalizar estas informações por meio de detalhamentos[18] em sua escrita argumentativa, como também fornecer uma visão das concepções comunicadas por elas sobre a matemática envolvida na questão.

[18] Este detalhamento envolve a operacionalização linguística de informações fornecidas dentro e ao longo do sequenciamento de garantias para dar apoio a uma afirmação (KOSKO, 2016).

O modo escrito de argumentar também foi objeto de estudo de Kosko e Zimmerman (2019). Os autores realizaram um estudo exploratório por meio do qual examinaram a natureza da escrita argumentativa matemática em crianças da educação infantil. Nesse sentido, buscou-se detalhar as características particulares da escrita matemática das crianças investigadas e como essas características se manifestam entre tarefas e ao longo das séries. Participaram deste estudo 61 alunos da educação infantil de uma escola suburbana situado em um estado do meio-este dos EUA. O estudo propôs analisar a redação matemática dos alunos da educação infantil usando tarefas modificadas de testes Piagetiano. Os resultados deste estudo corroboraram para fornecer um conjunto de seis classificações (declarações matemáticas; recontagens matemáticas; procedimentos matemáticos; detalhes matemáticos; descrições matemáticas; e explicações matemáticas) para a escrita matemática infantil. Estas classificações permitiram examinar de forma sequencial como tal escrita se desenvolve e difere ao longo das séries da Educação Infantil.

Por fim o trabalho de Stylianides (2019) discutiu o papel do modo escrito versus o modo oral de representação de um argumento de prova. Nesse sentido explorou o potencial das provas apresentadas oralmente quando comparadas às provas redigidas por escrito em uma pesquisa envolvendo a participação de alunos do Ensino Secundário (14-15 anos) durante a produção de provas matemáticas. O estudo propôs a realização de um experimento de design, envolvendo a aplicação de uma tarefa de prova a duas turmas de matemática. Os dados coletados permitiram ao autor comparar o papel do modo de representação escrito (prova produzida no âmbito de pequenos grupos) versus o modo de representação oral (prova apresentada a toda a sala de aula). Os resultados obtidos por meio desta comparação mostraram que os argumentos que melhor atendem aos padrões de prova são aqueles mais prováveis de serem encontrados no modo de apresentação oral do que no modo escrito. Para além disso, o estudo suscita reflexões sobre a utilização de outras abordagens metodológicas que não fique restrito apenas a produção de argumentos por escrito de modo a não corroborar para uma imagem menos favorável do potencial das provas construídas pelos alunos.

Com vistas a realização de estudos futuros, Stylianides (2019) propõe explorar e analisar uma estrutura de argumentação mais complexa onde primeiramente cada aluno escreve seus argumentos de prova por escrito, depois apresenta oralmente seus argumentos, e finalmente ele escreve seus argumentos novamente. (Ou seja, primeiro escrito, depois oral, depois escrito novamente). Essa exploração poderá oferecer uma visão melhor a respeito de "*se a apresentação oral de um argumento, que o presente estudo sugere que pode ser influenciada*

pelo trabalho prévio de redação de um argumento, pode influenciar, por sua vez, a posterior reescrição do argumento" (p.180).

Por outro lado, acreditamos também que a argumentação coletiva e colaborativa possa também ser abordada através dessa proposta de estrutura de argumentação mais complexa. Nesse caso poderia ser investigado as contribuições da argumentação coletiva e colaborativa no refinamento dos argumentos escritos produzidos por cada aluno. Nesse caso, primeiramente cada aluno escreve seus argumentos de prova por escrito, depois a sala toda discute os argumentos coletivamente e constroem um argumento de prova de forma colaborativa. Posteriormente à plenária discursiva, cada aluno volta a reescrever (refinamento) seus argumentos de prova por escrito. A ideia, portanto, será investigar os avanços obtidos na qualidade do argumento produzido em decorrência das contribuições da argumentação coletiva para esta escrita.

2.3.6 Análise de livro didático.

Um único estudo (TRIANTAFILLOU; SPILIOTOPOULOU; POTARI, 2016) foi classificado nesta categoria. O estudo realizado por Triantafillou; Spiliotopoulou e Potari (2016) abordou a natureza da argumentação em unidades temáticas de livros didáticos de matemática e física na Grécia. O estudo teve por objetivo investigar as práticas argumentativas utilizadas de forma consciente ou inconsciente na organização e desenvolvimento de novos conhecimentos relacionados ao assunto periodicidade no âmbito dos livros investigados. Para tanto foram analisadas 71 unidades temáticas retiradas de 4 livros de matemática e 4 de física e avaliadas com base em um sistema de codificação de categorias (empírica, lógica-empírica, nomológica e matemática) e subcategorias criadas durante o estudo e relacionadas às sequencias de modos de raciocínio empregados nos textos analisados. Os resultados mostraram que cada modo de raciocínio desempenhou um papel diferente na conceituação de aspectos relacionados a periodicidade. Para além disso, a análise de duas unidades temáticas levantou

> (...) considerações pragmáticas sobre a compreensão do texto em relação ao discurso da argumentação científica e destaca diferenças ontológicas nos dois assuntos ao subir de observações para generalizações. Com relação a esta última, o raciocínio baseado em evidências matemáticas parece ser mais seguro e confiável do que o raciocínio baseado em evidências experimentais" (TRIANTAFILLOU; SPILIOTOPOULOU; POTARI, 2016, p.700, **tradução nossa**).

O estudo ressalta a importância de o professor tornar mais transparente para seus alunos a distinção entre o modo de raciocínio empírico e matemático. Ainda de acordo com os autores, caberá ao professor também integrar e combinar estas formas de raciocínio à outras formas de

raciocínio (modos lógico-empírico e nomológico) viabilizando assim práticas de ensino que potencializem a formação de conceitos e provas em sala de aula.

2.4. Considerações finais sobre o estado do conhecimento da produção científica internacional

Diante do estado do conhecimento sobre "argumentação no ensino da matemática" apresentado neste capítulo tecemos algumas considerações que são importantes para nortear a construção do problema de pesquisa.

1- Há uma forte tendência nos trabalhos analisados em abordar a argumentação coletiva e colaborativa como uma abordagem sociocultural para viabilizar processos de aprendizagem em sala de aula. Nesse sentido a produção de argumentos em sala de aula, na grande maioria dos trabalhos analisados, ocorreu por meio de atividades propostas para serem realizadas em duplas, grupos ou por toda a turma de alunos.

2- Uma outra tendência para os trabalhos analisados é o fato de grande parte deles abordarem tarefas ou estratégias promotoras da argumentação visando a proficiência da prática argumentativa (habilidades e competências) com a finalidade de promover a justificação e a validação.

3- Identificamos que a argumentação coletiva apoiada pelo professor e a instituição de normas argumentativas, surgem nesse contexto, como uma estratégia eficaz para apoiar o raciocínio dos alunos e promover a produção de argumentos dedutivos viabilizando assim a transição de argumentos informais para argumentos formais em uma atividade de justificação e prova matemática.

4- Uma abordagem metodológica (exploração investigativa ou modelagem) com um problema do tipo não convencional[19] com ou sem o suporte da tecnologia favorecerá aos alunos um ambiente para observar padrões, elaborar conjecturas, testar, refutar, reelaborar conjecturas, criar modelos, argumentar e provar.

5- Argumentos que melhor atendem aos padrões de prova são aqueles mais prováveis de serem encontrados no modo de apresentação oral do que no modo escrito (STYLIANIDES, 2019).

Uma vez conhecido o contexto e o foco das investigações da pesquisa no âmbito internacional, passaremos na sequência, no próximo capítulo a explorar o contexto nacional de pesquisa.

[19] Problema aberto ou problema divergente.

Capítulo 3 - A argumentação no ensino da matemática: o estado do conhecimento da produção nacional

No contexto educacional brasileiro, tradicionalmente as aulas de matemática tem se pautado em uma linha de comunicação unidirecional, retórica e de autoridade que parte do professor para o aluno e privilegia na maioria das vezes o uso de técnicas, modelos e procedimentos mnemônicos que visam essencialmente o êxito do aluno na resolução de exercícios. (MALHEIRO, 2005; BOAVIDA *et a*l., 2008; ALMEIDA e MALHEIRO, 2018, RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021).

Este modelo tradicional de ensino com aulas pautadas na transmissão dos saberes docentes, não valoriza o processo de construção do conhecimento ativo por parte do aluno, haja visto que a aula de matemática inserida neste contexto não é dada ao aluno a oportunidade de contra-argumentar para explicar e justificar suas ideias. (VINCENT; CHICK; MCCRAE, 2005; RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021).

A argumentação nesse cenário, envolve, sobretudo, os diferentes tipos de raciocínios (presuntivo/indutivo/dedutivo), sejam eles manifestados de forma oral, por escrito ou gestual com finalidade de justificar e convencer alguém sobre a validade de uma determinada uma ideia (NUNES, 2011; RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021).

Para Boavida (2005) a realização de aulas que privilegiam a prática da argumentação em sala de aula na Educação Básica pode contribuir para tornar o aluno um sujeito mais autônomo para assumir suas posições de forma crítica e embasada. Este tipo de aula, diferentemente da aula tradicional, corrobora para o desenvolvimento de competências e habilidades argumentativas associadas a capacidade de escuta ativa, discordar, contrapor e comunicar ideias bem como agir de forma crítica e respeitosa na busca pelo consenso (BOAVIDA, 2005).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destaca a capacidade de argumentar como uma dentre as dez competências gerais propostas para a Educação Básica (BRASIL, 2017). O documento inclusive recomenda a utilização de estratégias pedagógicas que estimulem e provoque nos alunos "*processos de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar criativos, analíticos, indutivos, dedutivos e sistêmicos e que favoreçam a tomada de decisões orientadas pela ética e o bem comum*. " (BRASIL, 2017, p.535).

A prática da argumentação, portanto, desempenha um papel importante em sala de aula na mediação e construção de novos saberes. Contribui nesse sentido para o desenvolvimento do pensamento crítico-reflexivo uma vez que tem o potencial para desencadear no aluno um

tipo de experiencia cognitiva que o possibilita tomar consciência e agir sobre o conhecimento (LEITÃO, 2007).

Segundo Almeida e Malheiro (2018, p.59) são muitos os estudos *"concernentes à argumentação na educação, que destacam a importância do aprimoramento da habilidade argumentativa dos estudantes, buscando a melhoria nas aprendizagens e uma formação crítica*".

Atualmente, este assunto vem ganhando espaço nas pesquisas por diferentes razões: contribui para o estabelecimento de competências e habilidades relevantes ao processo de justificação e formação de conceitos; potencializa a interação social no desenvolvimento do conhecimento; e ao nível do currículo, desenvolve a autonomia intelectual dos alunos (DOUEK; PICHAT, 2003).

A partir do contexto apresentado, este capítulo teve por objetivo apresentar um panorama geral sobre o estado do conhecimento em relação ao tema "argumentação no ensino da matemática" no contexto envolvendo o cenário nacional. O referido tema começou a ganhar destaque recentemente, principalmente em virtude das novas recomendações curriculares preconizadas pela BNCC.

3.1 Levantamento das pesquisas relacionadas ao tema

De acordo com Wesendonk e Terrazan (2016) é importante que sejam realizadas periódicas revisões de literatura das áreas de estudos. Isso se torna necessário pois conforme se organizam e crescem,

> o volume e a diversificação de suas produções, por decorrência, aumentam, surgindo, então, a necessidade de que sejam feitas revisões periódicas sobre as temáticas investigadas na área, de forma a contribuir para o avanço da consolidação do conhecimento construído. (WESENDONK e TERRAZAN, 2016, p. 781).

O estudo realizado por Rodrigues, Silva e Monteiro (2021), por exemplo, realizou um detalhado e sistemático estudo bibliográfico denominado por "Estado do Conhecimento" (ROMANOWSKI e ENS, 2006) sobre o tema argumentação no ensino da matemática. Este tipo de estudo abordou "*apenas um setor das publicações sobre o tema estudado*" (ROMANOWSKI e ENS, 2006, p.40), ou seja, dissertações e teses presentes na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) no período relativo a janeiro de 2000 a setembro de 2020.

A busca pelos trabalhos na referida base de dados utilizou as palavras-chaves

> "argumentação" e "matemática" no campo de busca por assunto bem como um filtro de refinamento que levou em consideração os trabalhos publicados nos últimos 20 anos, ou seja, no período de janeiro de 2000 a setembro de 2020. A expressão "argumentação matemática" não foi utilizada como termo de busca uma vez que esta poderia restringir o assunto a um tipo de argumentação que é intrínseco ao campo da matemática (argumentação formal) podendo deixar de fora trabalhos que discutissem a produção de argumentos informais envolvendo a matemática. (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021, p.205).

Sobre o período de coleta de dados, os pesquisadores optaram por selecionar trabalhos referente aos últimos 20 anos (2000-2020) devido ao "*número expressivo de trabalhos (dissertações e teses) realizados entre os anos de 2000 e 2010 comparado a um quantitativo bem inferior registrado na última década (2010-2020)*" (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021, p.205).

3.1.1 Resultados da busca

O Quadro 12, a seguir, apresenta a expressão booleana utilizada para a busca de trabalhos na base de dados da BDTD. A consulta foi realizada no campo de busca por assunto (resumo/título/palavras-chaves) utilizando como descritores os termos de busca "argumentação" e "matemática" no período de janeiro de 2000 a setembro de 2020. Além da expressão booleana, o Quadro também apresenta os resultados e a quantidade de artigos excluídos e selecionados para análise (RODRIGUES, SILVA, MONTEIRO, 2021).

Quadro 12 – Dissertações e teses sobre argumentação no ensino de matemática disponibilizados na BDTD.

Expressão Booleana[20]	Resultados	Excluídos	Selecionados
Argumentação AND matemática	49	12	37

Fonte: Quadro elaborado pelo autor

Como resultado da busca, conforme indicado no quadro, foram encontrados inicialmente um total 49 trabalhos (dissertações e teses). Foram descartados 12 trabalhos por não fazerem referência à área pretendida (Ensino de Matemática), ou seja, os termos de busca "argumentação" e "matemática" foram abordadas em outras áreas do conhecimento que não interessavam ao estudo proposto (RODRIGUES, SILVA, MONTEIRO, 2021). São elas: Ensino de Química (1), Ensino de Física (2), Ensino de Biologia (4), Ensino de Filosofia (2) e Ensino de Ciências em geral (3). O *corpus* de pesquisa que compôs este levantamento

[20] As "Expressões Booleanas" são estruturas de linguagem lógica que ao serem combinados com determinados operadores (AND, OR ou NOT) permitem uma busca ampla de resultados complexos em uma mesma e única pesquisa.

compreendeu, portanto, somente 37 trabalhos distribuídos entre dissertações (31) e teses (6) conforme indicado no quadro a seguir

Quadro 13 - Informações sobre os trabalhos selecionados por ordem alfabética dos autores.

Nº	Título do trabalho e Citação	Tipo[21]
1	Argumentação e prova na matemática escolar do ensino básico: a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. (ALMEIDA, 2007).	MP
2	Uma abordagem para a prova com construções geométricas e Cabri-géomètre. (ARAUJO 2007).	M
3	O desafio de argumentar nas aulas de matemática: Uma investigação com estudantes do 1º ano do Ensino Fundamental. (AZEVEDO, 2019)	M
4	Argumentação e prova no ensino médio: análise de uma coleção didática de matemática. (BARBOSA, 2007).	MP
5	Um olhar sobre as ideias matemáticas em um curso de cálculo: a produção de significados para a continuidade. (BARTO, 2004).	M
6	A lógica no desenvolvimento da competência argumentativa. (BIANCHI, 2007).	D
7	Geometria sintética: investigação sobre o uso de um software de geometria dinâmica como meio para demonstrações visuais. (BRESOLIN, 2016).	MP
8	Argumentação e demonstração dos alunos do Ensino Médio: uma proposta de investigação matemática sobre crescimento e decrescimento de funções afins. (CAMPOS, 2018).	MP
9	Concepções de alunos sobre provas e argumentos matemáticos: análise de questionário no contexto do Projeto AProvaME. (CARVALHO, 2007).	MP
10	Argumentações matemáticas sob uma perspectiva crítica: análise de práticas didáticas no ensino fundamental. (COSTA, 2017).	MP
11	Argumentação e prova no ensino fundamental: análise de uma coleção didática de matemática. (CRUZ, 2008).	MP
12	Argumentação e prova: análise de argumentos geométricos de alunos da educação básica. (DORO, 2007).	MP
13	Contexto para argumentar: Uma abordagem para iniciação à prova no EM utilizando P.A. (EDUARDO, 2007).	MP
14	A educação matemática na revista Nova Escola. (EVANGELISTA, 2008).	M
15	Elaborando e lendo gráficos cartesianos que expressam movimento: uma aula utilizando sensor e calculadora gráfica. (FARIA, 2007).	M
16	Um estudo sobre argumentação e prova envolvendo o teorema de Pitágoras. (FERREIRA FILHO, 2007).	MP
17	Formação de professores envolvendo a prova matemática: um olhar sobre o desenvolvimento profissional. (GRINKRAUT, 2009).	D
18	Abordagens no ensino da prova e argumentação escolar: análise de uma coleção de livros didáticos do ensino fundamental. (JAMELLI, 2007).	MP
19	Um panorama de argumentação de alunos da educação básica: O caso do fatorial. (LEANDRO, 2006).	MP
20	Prática argumentativa no ensino de matemática: contribuições para o processo de resolução de problemas verbais. (LIMA, 2018).	D
21	Matemática sem Números: uma proposta de atividades para o estudo da Lógica. (MARTINS, 2014).	MP
22	Uma análise da abordagem sobre argumentações e provas numa coleção do ensino médio. (MENDES, 2007).	MP
23	A prática da argumentação como método de ensino: o caso dos conceitos de área e perímetro de figuras planas. (NUNES, 2011).	D
24	Argumentação e prova: explorações a partir da análise de uma coleção didática. (PASINI, 2007).	MP

[21] M – Mestrado Acadêmico; MP – Mestrado Profissional; D – Doutorado.

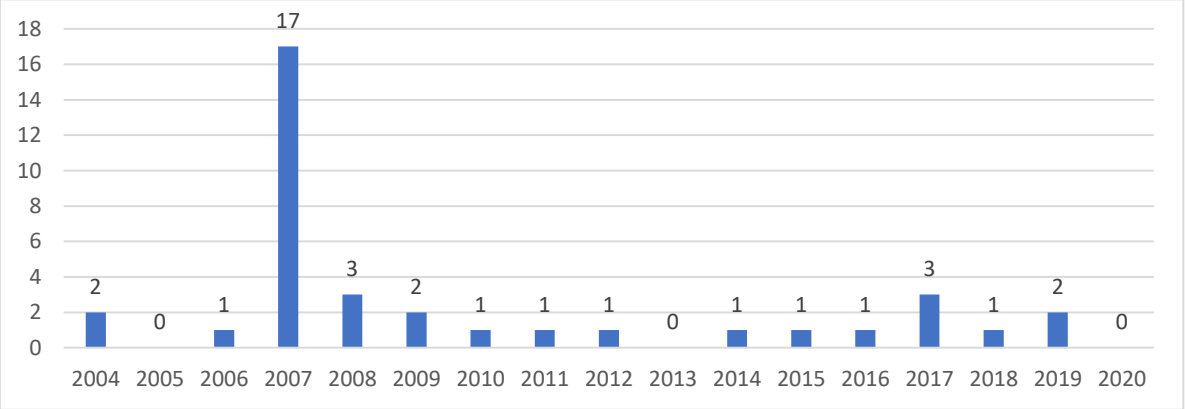
25	Argumentação em atividades investigativas na sala de aula de matemática. (REGINALDO, 2012).	M
26	Práticas argumentativas no estudo da geometria por acadêmicos de Licenciatura em Matemática. (SALES, 2010).	D
27	Argumentação e prova na matemática do ensino médio: progressões aritméticas e o uso de tecnologia. (SALOMÃO, 2007).	MP
28	Argumentação e prova: análise de argumentos algébricos de alunos da educação básica. (SANTOS, 2007).	MP
29	O manual do professor de Matemática nos livros didáticos: uma análise no fomento à argumentação (SILVA, 2017).	M
30	Desenvolvimento de uma sequência didática sobre quadriláteros e suas propriedades: contribuições de um grupo colaborativo. (SILVA FILHO, 2007).	MP
31	Análise das interações tutor/participantes: um ponto de partida para avaliação de cursos de desenvolvimento profissional à distância. (SOCOLOWSKI, 2004).	M
32	Argumentação e prova no estudo de progressões aritméticas com o auxílio do Hot Potatoes. (SOLIS, 2008).	MP
33	Raciocínio lógico-analítico: uma proposta de conteúdo e abordagem para o ensino médio e para concursos públicos. (SOUSA, 2019).	MP
34	A questão da argumentação e prova na matemática escolar: o caso da medida da soma dos ângulos internos de um quadrilátero qualquer. (SOUZA, 2009).	MP
35	A argumentação na resolução de problemas de Matemática: uma análise a partir da Epistemologia Genética. (STOCK, 2015).	M
36	Argumentação e prova: uma experiência em geometria espacial no ensino médio. (VIEIRA, 2007).	MP
37	A natureza da aprendizagem matemática em um ambiente online de formação continuada de professores. (ZULATTO, 2007).	D

Fonte: RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO (2021)

No Quadro 13 são exibidos os trinta e sete trabalhos acadêmicos selecionados na Base Digital de Teses de Dissertações (BDTD). Destes trabalhos, "*vinte de dois (22) são dissertações de metrado profissional, nove (9) são dissertações de mestrado acadêmico e seis (6) são teses de doutorado*" (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021, p.208).

A evolução de toda essa produção acadêmica envolvendo as dissertações e teses no período de janeiro 2000 a setembro 2020 é indicado na figura a seguir.

Figura 4 - A produção e sua distribuição no tempo



Fonte: RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO (2021)

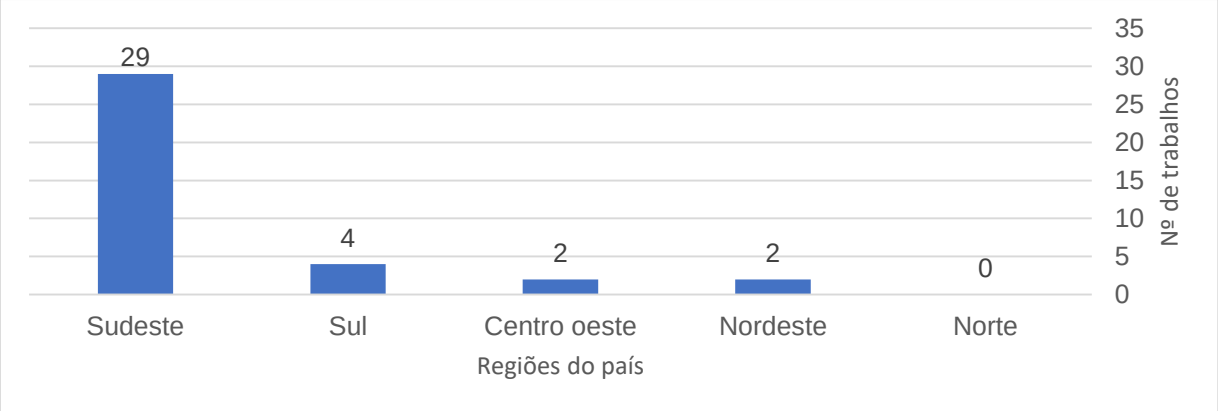
De acordo com o gráfico, tem-se que os dois primeiros trabalhos (BARTO, 2004; SOCOLOWSKI, 2004) que tratam da temática “argumentação no ensino da matemática” no que se refere ao período investigado foram encontrados somente no ano de 2004. Trata-se de duas dissertações de mestrado defendidas junto ao programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP sob a orientação da professora Dra. Janete Bolite Frant. (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021).

> O ano de 2007 concentrou cerca de 46% (17 trabalhos) de toda a produção de dissertações e teses relacionadas ao tema no período investigado. Este grande volume de trabalhos registrados no referido ano é explicado pela intensa produtividade acadêmica do projeto de pesquisa AProvaME (Argumentação e Prova na Matemática Escolar) vinculado ao Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP durante o referido ano. (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021, p.209).

Ainda de acordo com os dados disponibilizados no gráfico, a partir de 2008 a quantidade de estudos produzidos e defendidos em relação a temática não ultrapassou o quantitativo de três trabalhos. Este número se manteve estável durante todo o período, exceto em 2013 onde não foi verificado a existência de nenhum trabalho defendido. Esta ausência de trabalhos também foi verificada em 2005 e em 2020 até o mês em que a coleta de informações foi realizada. Estes dados, portanto, revelam uma forte diminuição do número de pesquisas sobre a temática a partir de 2008. (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021).

A Figura 5, ilustra a distribuição de toda essa produção acadêmica por regiões geográficas do Brasil.

Figura 5 - A produção por região do país.



Fonte: RODIGUES; SILVA; MONTEIRO (2021)

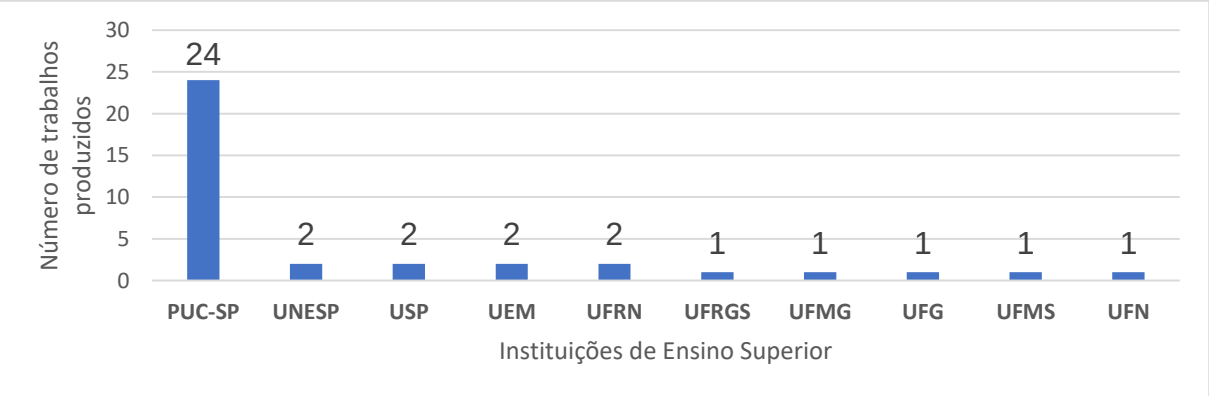
A maioria das produções levantadas na BDTD é proveniente da região Sudeste (29 trabalhos). Segundo Rodrigues, Silva e Monteiro (2021)

> O fato de a região abrigar um número elevado de Instituições de Ensino Superior (IES) de grande tradição em pesquisa no país, tais como, PUC-SP, USP, UNESP, UFMG, justifica, em parte, a relevante contribuição destas instituições para realização das pesquisas dentro temática abordada bem como na formação de professores em matemática. Além disso, na região Sudeste está concentrado um número elevado de programas de Pós-Graduação, outra provável razão para a maior parte das contribuições de pesquisa ser oriunda dessa região. (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021, p.210).

Na sequência, a segunda região com maior produção de trabalhos sobre a temática foi a região Sul (4 trabalhos), porém com uma diferença significativa na quantidade de trabalhos quando comparado à região Sudeste. Aparecem na sequência, respectivamente, as regiões, Centro Oeste e Nordeste, com dois (2) trabalhos cada uma. Não foi encontrado nenhuma produção oriunda da região Norte. "*Isso pode ser explicado, em parte, pelo número reduzido de programas de Pós-Graduação existentes na região quando comparado às outras regiões do país*" (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021, p.210).

A Figura 6 apresenta a distribuição de toda a produção levantada (37 trabalhos) por instituição de ensino pelo qual estas produções estão vinculadas.

Figura 6 - A produção e sua distribuição de acordo com as instituições acadêmicas.



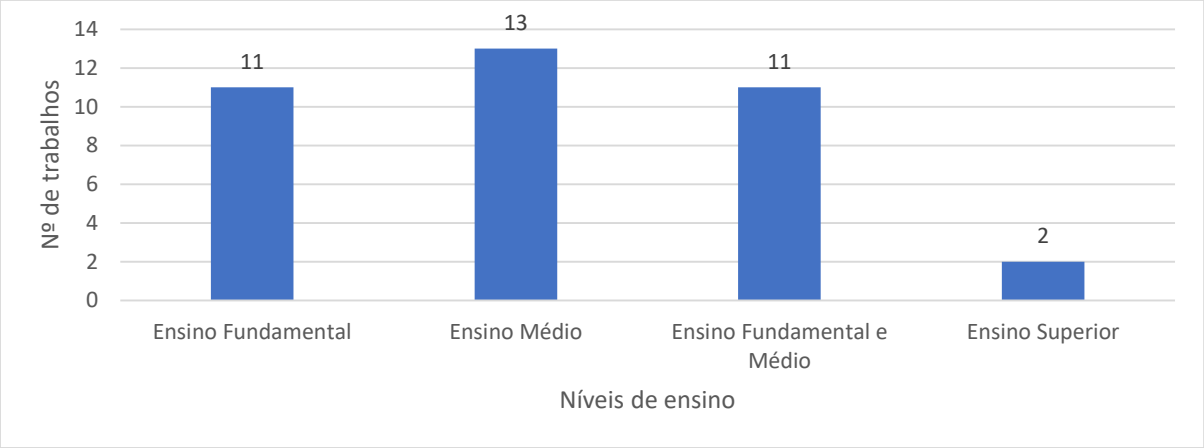
Fonte: RODIGUES; SILVA; MONTEIRO (2021)

Como pode ser observado no gráfico da Figura 6, as IES que mais contribuíram com a produção acadêmica na área do tema pesquisado foram: PUC-SP, localizada na região sudeste, com vinte e quatro (24) produções envolvendo teses e dissertações. "*A maior parte destes trabalhos tem origem no projeto de pesquisa AProvaME vinculado ao Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da referida instituição*". (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021, p.211). Em seguida, com o mesmo número de produções, dois (2) trabalhos cada uma, aparecem outras quatro instituições, sendo duas da região sudeste, a UNESP e a USP, uma da região Sul, a UEM e a outra da região nordeste, a UFRN, com duas produções. As instituições que registraram apenas uma produção foram a UFMG pertencente a região Sudeste,

a UFG e a UFMS, ambas da região Centro Oeste e a UFRGS e a UFN, pertencentes a região Sul do Brasil (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021).

As pesquisas que envolviam as produções levantadas estavam vinculadas a diferentes níveis de ensino conforme indicado no gráfico da figura a seguir.

Figura 7 - A produção e a sua distribuição por níveis de Ensino.



Fonte: RODIGUES; SILVA; MONTEIRO (2021)

O nível de escolaridade que mais se destacou nos trabalhos produzidos foi o Ensino Médio, com o registro de treze (13) trabalhos seguidos bem de perto pelo Ensino Fundamental com onze (11) trabalhos. O que se denominou por Ensino Fundamental e Médio, totalizou onze (11) trabalhos e compreendeu os estudos que realizaram simultaneamente coleta de dados no Ensino Fundamental e Médio bem como aqueles trabalhos de formação continuada de professores que abordaram conteúdos a escolha do professor, seja do Ensino Fundamental e/ou Médio. O nível de escolaridade menos privilegiado nos trabalhos produzidos foi o Ensino Superior, com apenas dois (2) trabalhos. Este último resultado aponta para a carência de estudos sobre argumentação no contexto do ensino da matemática nesta etapa de ensino. (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021).

3.2 A argumentação no ensino de matemática: o que dizem as produções nacionais envolvendo dissertações e teses?

Após a seleção dos 37 trabalhos, procedeu-se a análise do mesmo e para tanto, recorreu-se à Análise de Conteúdo (BARDIN, 1985). A referida técnica leva em consideração toda e qualquer palavra, expressão e ideia apresentada como também as interpretações e justificativas utilizadas. (BARDIN, 1985; FIORENTINI e LORENZATO, 2006).

Para Fiorentini e Lorenzato (2006) a identificação de palavras, ideias ou assuntos sejam eles, comuns ou não comuns, permitem uma melhor compreensão do objeto de estudo. Ainda de acordo com estes autores, a análise se torna um processo meticuloso que "*implica múltiplas*

leituras do material disponível, tentando nele buscar unidades de significados ou, então, padrões e regularidades para, depois agrupá-los em categorias". (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p.133).

A categorização consiste em um "*processo de classificação ou de organização de informações em categorias, isto é, em classes ou conjuntos que contenham elementos ou características comuns*" (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p.134).

No estudo realizado por Rodrigues, Silva e Monteiro (2021), por exemplo, foi adotado um tipo de categoria definida como "emergente" (FIORENTINI; LORENZATO, 2006). As categorias tiveram, portanto, as nomenclaturas inspiradas e adaptadas a partir das categorias propostas no estudo de Sá e Queiroz (2011)[22].

Através da organização dos trabalhos em categorias por meio de uma análise vertical (FIORENTINI; LORENZATO, 2006)

> foi possível identificar os focos temáticos de pesquisa relacionados ao tema "argumentação no ensino da matemática". Em cada categoria ou agrupamento, foi priorizado a descrição de ao menos dois trabalhos, quando houver, para ilustrar o foco temático. É importante destacar que as categorias abordadas neste estudo não são totalmente disjuntas, contudo, a distinção e classificação dos trabalhos só foi possível na medida em que foi priorizado a identificação do principal foco temático de pesquisa abordado em cada estudo. (RODRIGUES, SILVA, MONTEIRO, 2021, p.206).

Nos trabalhos indicados no Quadro 13, verificou-se que as pesquisas se relacionam, principalmente aos seguintes focos temáticos, indicados no quadro a seguir.

Quadro 14: Categorias referentes aos focos temáticos de pesquisa.

Cód.	Categoria - C	Descrição
C_1	Análise de livro didático e revista pedagógica.	Trabalhos que analisam a abordagem ou o tipo de argumentação empreendida em livros didáticos e revistas pedagógicas.
C_2	Concepções de alunos sobre argumentação e prova.	Trabalhos que realizam um mapeamento das concepções de alunos sobre argumentação e prova no contexto escolar.
C_3	Estratégias desencadeadoras do processo de argumentação e prova.	Trabalhos que abordam a utilização de estratégias de ensino (recursos ou metodologias) para desencadear a argumentação/prova no ambiente da sala de aula.
C_4	Argumentação como uma estratégia ou método de ensino.	Trabalhos que abordam diretamente a argumentação como uma estratégia ou método de ensino para desencadear a resolução de problemas e/ou formação de conceitos em sala de aula.
C_5	Espaços ou ambientes para argumentação e prova.	Trabalhos que apresentam questões relacionadas a criação, descrição e dinâmica de funcionamento de um espaço destinado à prática da argumentação em ambientes de ensino-aprendizagem.

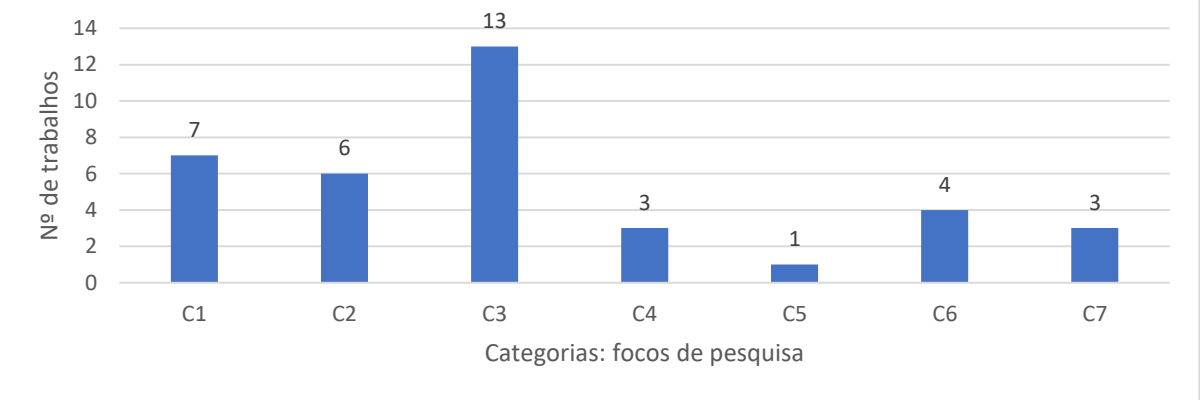
[22] O estado do conhecimento realizado por estes autores abordou a argumentação no Ensino de Ciências, tomando como base de consulta artigos do Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências (ENPEC) no período de 1997 a 2009 e os artigos publicados em revistas brasileiras que constam na área de avaliação do Programa QUALIS da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

C_6	Formação de professores no contexto da argumentação e prova.	Trabalhos que abordam a formação inicial e/ou continuada de professores no contexto da argumentação e prova.
C_7	Proposta do Ensino explícito da lógica formal no currículo.	Trabalhos que apresentam propostas para a inserção do ensino explicito do conteúdo de lógica formal no currículo.

Fonte: RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO (2021)

O quantitativo de trabalhos produzidos por foco temático de pesquisa é indicado no gráfico da Figura 8.

Figura 8 - Quantidade de trabalhos produzidos por foco temático de pesquisa



Fonte: RODIGUES; SILVA; MONTEIRO (2021)

Segundo Rodrigues, Silva e Monteiro (2021)

> [...] mais de 1/3 (13) de todos os trabalhos analisados, explorou o uso de estratégias desencadeadoras do processo de argumentação e prova (C3) como principal foco temático de pesquisa. Por outro lado, o tema espaços ou ambientes para argumentação e prova (C5) foi abordado uma única vez em toda a produção levantada, o que sugere uma carência de estudos dentro desse foco temático. Da mesma forma, verificou-se poucas pesquisas associadas a argumentação como estratégia ou método de ensino (C4) e a formação de professores no contexto da argumentação e prova (C6). (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021, p. 213-214).

A produções levantadas podem ser classificadas em categorias referentes aos diferentes focos temáticos de pesquisa, conforme indicado no próximo quadro.

Quadro 15 - Relação de trabalhos por categoria

Cód.	Categoria - C	Relação de trabalhos	Total
C_1	Análise de livro didático e revista pedagógica.	(BARBOSA, 2007; JAMELLI, 2007; MENDES, 2007; PASINI, 2007; CRUZ, 2008; EVANGELISTA, 2008; SILVA 2017).	7
C_2	Concepções de alunos sobre argumentação e prova.	ALMEIDA, 2007; CARVALHO, 2007; DORO, 2007; LEANDRO, 2006; SANTOS, 2007 e SOUZA, 2009).	6
C_3	Estratégias desencadeadoras do	(BARTO, 2004; CAMPOS, 2018; REGINALDO, 2012; FERREIRA FILHO, 2007; COSTA, 2017; SALES, 2010; BRESOLIN, 2016; VIEIRA, 2007; SOLIS, 2008;	13

	processo de argumentação e prova.	ARAUJO, 2007; SALOMÃO 2007; FARIA, 2007, AZEVEDO, 2019).	
C_4	Argumentação como uma estratégia ou método de ensino.	(LIMA, 2018; NUNES, 2011; STOCK, 2015).	3
C_5	Espaços ou ambientes para argumentação e prova.	(EDUARDO, 2007).	1
C_6	Formação de professores no contexto da argumentação e prova.	(ZULATTO, 2007; GRINKRAUT, 2009; SOCOLOWSKI, 2004; SILVA FILHO, 2007).	4
C_7	Proposta do Ensino explícito da lógica formal no currículo.	(BIANCHI, 2007; MARTINS, 2014; SOUSA, 2019).	3

Fonte: RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO (2021)

A discussão apresentada a seguir está relacionada a cada um dos agrupamentos que constituem os focos temáticos de pesquisa referente aos trabalhos levantados.

3.2.1 Análise de livro didático e revista pedagógica: foram identificadas sete produções (dissertações) com esse foco temático na BDTD (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021).

> Em cinco trabalhos[23] (BARBOSA, 2007; JAMELLI, 2007; MENDES, 2007; PASINI, 2007 e CRUZ, 2008) os autores analisaram como são tratadas as questões relativas à abordagem da argumentação e prova em relação a alguns conteúdos de Matemática em coleções de livros didáticos do Ensino Fundamental (JAMELLI, 2007; PASINI, 2007; CRUZ, 2008) ou Médio (BARBOSA, 2007; MENDES,2007) aprovados pelo Plano Nacional do Livro Didático – PNLD/2005. De modo geral, os resultados das análises destas coleções trouxeram à tona um problema relacionado a inadequação das obras em relação a complexa transição da prova pragmática para a prova conceitual, ou seja, a passagem da abordagem empírica típica de exercícios de verificação para uma abordagem de prova conceitual que encaminhe os alunos para o desenvolvimento de demonstrações formais (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021, p.214).

Em Silva (2017), por exemplo, o pesquisador analisou as potencialidades didáticas do manual do professor vinculado a uma coleção de livros didáticos de matemática do Ensino Médio aprovado pelo PNLD/2015. Foi investigado como se assentam as perspectivas argumentativas (retórica, dialética e analítica) abordadas no manual do professor tendo em vista as orientações pedagógicas para o docente e objetivos de aprendizagem propostos para o aluno. Para além disso, foi investigado também se as atividades propostas na obra ofereciam suporte para o desenvolvimento de competências e habilidades argumentativas no aluno. Como resultado deste estudo, é apontado divergências entre os objetivos de aprendizagem indicados para o aluno e as estratégias didáticas recomendadas ao professor. Além de observado a

[23] Todos estes cinco trabalhos estavam vinculados ao projeto AProvaME – Argumentação e Prova na Matemática Escolar da PUC/SP.

existência de perspectivas opostas de argumentação no manual foi verificado também que a proposta didática direcionada ao aluno apresentava não conformidades quando comparado a proposta curricular. (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021).

Já no trabalho de Evangelista (2008) foi investigado a visão de Educação Matemática que emerge dos textos da Revista Nova Escola bem como o tipo de argumentação utilizada nestes textos para conseguir a adesão dos professores de matemática do ensino básico para esta concepção. Nos resultados do estudo foram encontrados dois tipos de argumentos vinculados nos textos da revista: o argumento de autoridade e o argumento pelo exemplo[24], ambos utilizados com a função de convencer o leitor. A revista apresenta uma visão reducionista e simplificadora de resultados de pesquisas da área e propõe convencer os professores de que matemática pode se tornar fácil preferencialmente com o uso de jogos em sala de aula, ou então que, para se ter êxito no ensino da matemática basta seguir as práticas indicadas na revista. (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021).

3.2.2 Concepções de alunos sobre argumentação e prova: verificou-se a existência de seis produções (dissertações) com este foco temático de pesquisa (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021).

> Todos estes estudos estavam vinculados a um mesmo projeto de pesquisa[25] e dessa forma compartilhavam do mesmo objetivo de investigação: realizar um mapeamento das concepções de alunos sobre argumentação e prova a partir dos resultados obtidos a partir de um questionário[26] aplicado em aproximadamente 2.000 alunos adolescentes de escolas públicas e privadas de Ensino Fundamental e Médio do Estado de São Paulo. (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021, p.216).

Ainda de acordo com Rodrigues, Silva e Monteiro (2021, p. 216)

> De modo geral os resultados destes estudos revelaram que os alunos tiveram muitas dificuldades em trabalhar com argumentação e prova em questões tanto de álgebra quanto de geometria, talvez por falta de hábito e convívio com esse tema e prática da argumentação no ambiente escolar (ALMEIDA, 2007; CARVALHO, 2007; DORO, 2007; SOUZA, 2009; LEANDRO, 2006;

[24] O argumento de autoridade, propõe, o uso de asserções de especialistas da área, autores de livro didático ou até mesmo do coordenador pedagógico da escola para fundamentar conclusões e validar um ponto de vista. Por outro lado, o argumento pelo exemplo se verifica quando a revista apresenta exemplos de práticas exitosas passíveis de serem desenvolvidas pelos leitores e que, segundo o testemunho dos docentes que as desenvolveram obtiveram o resultado almejado (EVANGELISTA, 2008; RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021).

[25] Projeto AProvaME – Argumentação e Prova na Matemática Escolar da PUC/SP.

[26] Por meio de um questionário contemplando questões de álgebra e geometria os referidos estudos pretendiam levantar informações dos alunos investigados a respeito da avaliação de argumentos como prova de uma dada afirmação bem como a construção de provas.

> SANTOS, 2007). Em todos estes estudos, a concepção de prova pragmática (BALACHEFF, 1988) esteve presente na maioria das respostas dos alunos com o predomínio do empirismo ingênuo[27] como principal forma de pensamento.

No estudo conduzido por Doro (2007) "*os alunos preferiram utilizar a linguagem cotidiana e as evidências empíricas para fundamentar a sua argumentação e prova*" (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021, p.216).

Já em Carvalho (2007), por exemplo, os alunos "*consideravam um mesmo argumento sempre verdadeiro e simultaneamente válido somente com base no teste de alguns casos particulares*" (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021, p.216). Na visão deles as evidências empíricas são consideradas provas e os argumentos em língua natural possuem maior clareza e maior poder de explicação (CARVALHO, 2007; RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021).

Nestes estudos verificou-se que

> [...] a teoria de Balacheff (1988), sobre os tipos e níveis de prova utilizada como referencial teórico analítico, nos estudos citados pode trazer interessantes contribuições para prática docente do professor em sala de aula, especialmente atuando como uma ferramenta de avaliação do nível de compreensão de prova dos alunos por meio das seguintes categorias, em ordem de evolução: 1- Empirismo ingênuo; 2- Experimento crucial; 3- Experimento genérico e 4- Experiencia mental. (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021, p. 216).

3.2.3 Estratégias desencadeadoras do processo de argumentação e prova: treze produções, todas elas envolvendo dissertações de mestrado, abordaram a utilização de estratégias pedagógicas de ensino para desencadear situações de argumentação e prova no ambiente da sala de aula.

> Estas estratégias estavam associadas à algumas abordagens metodológicas inovadoras e amplamente difundidas no ensino da matemática: investigação matemática; experimentação com o uso da tecnologia e utilização de sequência/atividades didática (s) com ou sem o suporte da tecnologia. (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021, p. 217).

3.2.3.1 Investigação matemática: três estudos abordaram a investigação matemática como uma estratégia de ensino capaz de desencadear a argumentação em sala de aula (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021).

[27] O empirismo ingênuo e outras formas de pensamento em relação à prova são descritas no capítulo 4.

Campos (2018), por exemplo, investigou se as atividades de investigação podem ajudar a desenvolver a capacidade de argumentação em alunos do 1º ano do Ensino Médio. A pesquisa apresenta uma importante reflexão sobre o papel da argumentação e prova na formação integral[28] do aluno e para tanto propõe relacionar a teoria da investigação matemática proposta por Ponte (2003) a teoria dos tipos e níveis de prova em matemática descritos por Balacheff (1988). O estudo concluiu que as atividades de investigação oferecem contribuições para a formação integral dos alunos investigados na medida em que possibilitou criar aproximações entre a matemática tradicionalmente abordada na Educação Básica e a matemática estudada na Educação Superior. (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021).

Reginaldo (2012) por sua vez investigou como se desencadeia e se desenvolve a argumentação em atividades de investigação envolvendo a matemática. A pesquisa contou com a participação de três turmas de alunos do Ensino Fundamental de uma escola pública municipal de Belo Horizonte/MG. Foi aplicado a estas turmas quatro atividades de investigação e os resultados revelaram que: 1- Os alunos foram capazes de argumentar de diversas formas, como por exemplo, produzir refutações por meio de contraexemplo, realizar demonstrações, exibir provas com recurso não discursivo etc. 2 – As intervenções/mediações realizadas pelo professor durante o transcorrer das atividades foram importantes para estimular nos alunos diferentes formas de argumentação e contribuir para desencadeamento e desenvolvimento do processo argumentativo em sala de aula. 3- Outros obstáculos à prática argumentativa como a falta de tempo em sala de aula, a prioridade e domínio da linguagem algébrica dentre outros foram citados, contudo, eles podem ser contornados. (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021).

Já o estudo realizado por Costa (2017) explorou a utilização de atividades didáticas em cenários de investigação numa perspectiva crítica (SKOVSMOSE, 2014). Para tanto foi realizado um experimento de ensino, contemplando a produção e utilização de atividades investigativas com o objetivo de promover a argumentação "em e com" matemática. A pesquisa foi realizada com alunos do 6º e 7º ano do Ensino Fundamental e os resultados revelaram que *"as atividades propostas ofereceram uma contribuição importante para a formação integral*[29] *dos alunos, em especial, desenvolvendo o pensamento crítico e a tomada de decisão".* (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021, p.218). Em especial, o pensamento crítico se

[28] A proposta de formação integral defendida por Costa (2018) tem por base o trabalho como princípio educativo, a pesquisa como fundamento pedagógico e a integração entre educação, trabalho, ciência, tecnologia e cultura como base de uma proposta e desenvolvimento do currículo.

[29] Costa (2017) entende a formação integral, relacionando-a ao pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e qualificação para o mercado de trabalho.

manifestou por meio de argumentações "*e estas devem ser trabalhadas em sala de aula, privilegiando-se o diálogo entre professor-aluno e aluno-aluno de modo que o aluno seja capaz de justificar ou refutar enunciados em diferentes contextos*". (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021, p.218).

3.2.3.2 Experimentação com o uso da tecnologia: três estudos trataram a experimentação e uso da tecnologia como estratégia desencadeadora da argumentação. (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021).

Destacamos aqui dois estudos. No primeiro, Bresolin (2016) investigou "*de que forma o software Geogebra pode proporcionar o desenvolvimento de competências e habilidades criativas, intuitivas e visuais na argumentação e prova de teoremas de geometria*" (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021, p.218). Os resultados revelaram que as atividades experimentais realizadas por meio do suporte dos recursos dinâmicos do Geogebra oportunizaram o desenvolvimento da criatividade nos alunos bem como o uso do pensamento intuitivo e o estímulo a visualização como forma de análise e exploração de ideias visando a construção de teoremas. O estudo indica as contribuições da geometria sintética para viabilizar a construção de demonstrações e desenvolver habilidades de argumentação. (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021).

No segundo estudo, Araújo (2007) abordou a prova matemática em um contexto de ensino envolvendo experimentação e construções geométricas por meio de um *software* dinâmico. De acordo com Rodrigues, Silva e Monteiro (2021, p.219)

> A pesquisa se constituiu em um experimento de ensino baseado na metodologia do "*design experiments*", cujos dados foram analisados sob a luz teoria de Balacheff (1988) referente a natureza dos argumentos matemáticos. O autor pretendia que o s*oftware*, por meio dos seus recursos dinâmicos, viabilizasse a construção de provas conceituais por parte de alunos da 7ª série do Ensino Fundamental (atual 8° ano).

Contrariando a pretensão do autor, um dos principais resultados do estudo revelou que o *software* contribuiu mais para a realização de verificações empíricas de propriedades do que para a realização de provas conceituais. Isso ocorreu porque a grande maioria dos alunos centraram seus esforços nas tarefas de construção e descrição do que nas de justificativa. Outra explicação está relacionada a falta de experiencia dos alunos com atividades de argumentação em sala de aula como também está ligado a própria característica dinâmica do software que pode ter contribuído para que os alunos apreciassem mais provas empíricas do que provas conceituais. (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021).

3.2.3.3 Utilização de sequência/atividades didática (s) com ou sem o suporte da tecnologia: Sete trabalhos exploraram o desenvolvimento e/ou aplicação de uma sequência didática contemplando a resolução de problemas como forma de promover o desencadeamento da prática argumentativa em sala de aula. Em três trabalhos (SALOMÃO, 2007; VIEIRA, 2007, SOLIS, 2008) a tecnologia foi utilizada para dar suporte ao desenvolvimento das atividades. (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021).

Dentre os trabalhos consultados e analisados, destacamos o trabalho realizado por Sales (2010) que analisou a transição da argumentação ingênua para a argumentação lógica. O estudo investigou o processo de argumentação, tanto explicativa quanto justificatória durante a resolução de problemas junto a alunos de um curso de formação de professores em Matemática (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021).

> A metodologia do estudo adotou como método a Etnografia aplicada à Educação e os dados foram analisados sob a luz dos referenciais teóricos que envolvem a Teoria Antropológica do Didático e o modelo argumentativo de Toulmin (1958). O estudo trouxe uma importante discussão, clarificação e distinção dos termos: argumentação, justificação, explicação, prova e demonstração. Para além disso, o autor também discute a complexa questão da continuidade e ruptura na transição da argumentação para a demonstração. (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021, p.219).

Na conclusão do estudo é pontuado que a passagem da argumentação para a demonstração é possível e para tanto é necessário a elaboração de uma sequência didática que contribua para que o aluno possa adentrar a obra matemática. O estudo ainda destaca o envolvimento coletivo dos alunos na produção de um teorema em sala de aula (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021).

3.2.4 Argumentação como uma estratégia ou método de ensino: três produções, duas teses e uma dissertação abordaram a argumentação como "*uma estratégia ou método de ensino para desencadear processos de resolução de problemas e/ou formação de conceitos em sala de aula*". (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021, p.220).

Por meio de um estudo de caso múltiplo e comparativo, Stock (2015) investigou como alunos do Ensino Fundamental e Médio utilizaram a argumentação na resolução de problemas em matemática e como esta prática corroborou para a aprendizagem. A coleta de dados foi realizada com base em registros orais e escritos produzidos pelos alunos durante a resolução de problemas e os dados foram analisados sob a luz da Epistemologia Genética de Piaget e com base na teoria da análise do erro. Os resultados deste estudo revelaram que:

> [...] na perspectiva do professor que ensina matemática, a argumentação contribui para a identificação dos erros cometidos pelos alunos, bem como verificar/avaliar se estes compreendem realmente o conteúdo envolvido nos problemas. Ainda na perspectiva da prática do professor, a avaliação do processo argumentativo, oferece subsídios para a reflexão da sua prática docente. Por outro lado, na perspectiva do aluno, a argumentação contribui para que este possa discutir e repensar suas estratégias de resolução, compreendendo, assim, a Matemática envolvida na questão. (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021, p.220).

Nunes (2011) por sua vez, tomando como referência o caso da área e perímetro de figuras planas investigou em que medida a prática da argumentação em sala de aula pode se apresentar como um método de ensino capaz de viabilizar a compreensão de conceitos. O estudo aborda reflexões teóricas sobre a classificação dos argumentos e a convergência do processo argumentativo. Para além disso, apresenta uma experiência de referência onde os argumentos são analisados com base no modelo argumentativo de Toulmin (1958). Com apoio nos pressupostos da Engenharia Didática, o estudo propôs, portanto, a realização de um experimento de ensino, suplantado pelo uso da tecnologia e conduzido junto a um grupo de seis alunos do 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública municipal em Belém/PA. Os resultados do estudo revelaram que a sequência didática apresentada habilitou a argumentação como um método de ensino na medida em que favoreceu a formação de conceitos relativo à área e perímetro de figuras planas. No que tange às competências e habilidades argumentativas, o estudo cita que os alunos tiveram "*maior autonomia para comunicar e defender suas ideias, estando atentos à funcionalidade e a validade dos argumentos, além de aprenderem símbolos e linguagens específicas da comunicação matemática*" (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021, p.221).

3.2.5 Espaço ou ambientes para a argumentação e prova: foi identificado somente um trabalho (dissertação) com este foco temático (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021).

A criação e descrição de um ambiente de aprendizagem capaz de fomentar a cultura argumentativa em sala de aula foi tema do estudo realizado por Eduardo (2007). Para tanto propôs investigar, "*como o ambiente de aprendizagem favorece e estimula o aprimoramento de hábitos de pensamentos matemáticos dos alunos em um contexto argumentativo que antecede a prova e demonstração em Matemática*" (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021, p.221). Participaram dessa investigação uma turma de alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública do Estado de São Paulo em dois cenários de investigação: sala de aula e

o laboratório de informática. Em ambos os ambientes foram utilizados a dinâmica de jogos e o uso da tecnologia para promover a interação bem como cenários de mediação propícios ao estímulo e favorecimento de competências matemáticas. Os dados foram coletados por meio de registros que envolviam filmagem em vídeo das atividades realizadas, captação de áudio dos diálogos produzidos pelos alunos e registros por escrito oriundos de um blog. Os resultados revelaram que a argumentação cotidiana esteve presente em todos os cenários de mediação. Os diálogos produzidos pelos alunos "*mostraram que o ambiente de aprendizagem contribuiu para o desenvolvimento de hábitos do pensamento matemático, através do qual, a argumentação auxiliou na negociação de significados matemáticos*" (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021, p.221).

3.2.6 Formação de professores no contexto da argumentação e prova: Verificou-se a existência de quatro trabalhos com esse enfoque de pesquisa, duas teses e duas dissertações de mestrado, todos eles voltados para a formação continuada de professores. (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021).

Silva Filho (2007) realizou um estudo em que propôs a formação de um grupo colaborativo no contexto escolar onde a pesquisa foi realizada e em seguida investigou as contribuições deste grupo para a formação e professores. O grupo tinha por objetivo

> [...] realizar um trabalho colaborativo para discutir o ensino e aprendizagem de argumentação e prova a partir da elaboração, teste, avaliação e reformulação de uma sequência didática voltada para o ensino de quadriláteros. As discussões ocorridas no âmbito do grupo eram fundamentadas especialmente em orientações curriculares sobre o assunto e por trabalhos de especialistas da área como Balacheff (1988) em relação aos tipos e níveis de prova em Matemática. (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021, p.222).

Na conclusão do estudo, foi observado que a contribuição mais significativa do grupo colaborativo esteve ligada as possibilidades de ressignificação da aprendizagem docente. Por meio do grupo os professores puderam experimentar, testar, refletir e avaliar estratégias pedagógicas de ensino, ressignificando seu conhecimento matemático, em especial, aqueles que estavam relacionados ao processo de transição das provas empíricas para as provas conceituais. (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021, p.221).

Por sua vez Grinkraut (2009) investigou o desenvolvimento profissional de dois professores de Matemática em decorrência da participação de ambos em um projeto de pesquisa denominado AProvaME. No âmbito deste projeto de pesquisa, os dois professores investigados desenvolveram atividades coletivas de reflexão sobre a prática pedagógica, colaboração em

grupo e investigação. Por dois anos, o estudo acompanhou o desenvolvimento da prática docente destes dois professores avaliando situações de aprendizagem em sala de aula envolvendo a construção de provas com o suporte da tecnologia. O estudo, portanto, teve por objetivo averiguar em que medida a participação destes professores no projeto AProvaME promoveu transformações em concepções e práticas e influenciou o seu desenvolvimento profissional. Os resultados deste estudo revelaram que

> para um dos professores a participação em uma prática de grupo reflexiva, colaborativa e investigativa catalisou experiências que refletiu em seu desenvolvimento profissional, acarretando mudanças em suas concepções e práticas adotadas em sala de aula. Por outro lado, o outro professor não submetido a estas práticas de forma tão intensa, aliado a fatores pessoais, não conseguiu romper com concepções e práticas tradicionais. (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021, p.222-223).

Ainda assim, os resultados consideram de modo geral que a participação dos dois professores no projeto AProvaME contribuiu para ampliação dos seus conhecimentos em relação aos temas discutidos no âmbito do projeto. A prova disso é que ao final de todo o processo, os professores investigados "*passaram a valorizar as produções dos alunos, o raciocínio envolvido na elaboração de prova, ainda que, na maioria das vezes, estes alunos não tenham conseguido atingir o grau de formalização matemática almejado*". (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021, p.222).

3.2.7 Ensino da lógica construtora da argumentação e prova: foram identificados três trabalhos, sendo uma tese e duas dissertações de mestrado que defendem propostas distintas de inclusão, ensino explicito e inserção de lógica formal no currículo. (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021).

Em Bianchi (2007) foi apresentado uma proposta para inserção da lógica matemática no currículo do Ensino Médio como tema transdisciplinar para fomentar o raciocínio argumentativo. A proposta é composta por uma sequência de atividades didáticas cujo objetivo é abordar o conteúdo de lógica e sua aplicação interdisciplinar. No ensejo da proposta "*ensinar modos de pensar, otimiza a capacidade de análise de qualquer texto que tenha informações matemáticas ou não"* (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021, p.223). A lógica, portanto, é tida como meio e método de transformação do conhecimento real pela análise crítica. Dessa forma ela pode auxiliar os professores a fomentar a capacidade discursiva e argumentativa dos alunos bem como o raciocínio e a criticidade. (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021).

Por sua vez Martins (2014) apresentou uma proposta para o ensino de lógica, sendo esta, parte integrante do currículo da disciplina de matemática do 1º ano do Ensino Médio. O conteúdo de lógica dentro dessa perspectiva de organização curricular passaria a ser o primeiro conteúdo de estudo da disciplina e dessa forma passa a contribuir para o desenvolvimento de competências e habilidades argumentativas em relação aos conteúdos seguintes. A proposta didática apresentada no estudo pretendia libertar os alunos da falsa ideia de que a matemática trabalha apenas com números e contas. Nesse sentido, objetivava, portanto, sanar eventuais dificuldades dos alunos em relação a interpretação, argumentação e raciocinar logicamente (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021).

Diferentemente das duas propostas anteriores, Sousa (2019) defendeu a criação de uma disciplina curricular para abordar o assunto "fundamentos de lógica" em todos os anos do Ensino Médio. A ideia é fomentar o raciocínio crítico e a produção de argumentos analíticos, apresentando a lógica, em uma linguagem acessível e adaptada a este nível de ensino. Nesse sentido, o estudo apresenta uma sequência de atividades didáticas como proposta de ensino para a exploração das bases lógicas para a construção e análise crítica de argumentos formais e informais. (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021).

3.3 Considerações finais sobre o estado do conhecimento da produção nacional

Por meio do estudo realizado por Rodrigues, Silva e Monteiro (2021, p.224) verificou-se que

> Em grande parte da produção analisada, a temática abordada envolveu a argumentação voltada para a produção do argumento de prova, com especial atenção à transição das provas pragmáticas para provas conceituais no Ensino Básico. Nesse contexto a utilização de estratégias promotoras da argumentação e prova na construção e validação de conjecturas constituiu uma forte tendência dentro de boa parte das pesquisas sobre argumentação no ensino da matemática e para tanto, estas pesquisas enfatizaram o papel/importância do professor atuar como mediador da argumentação em sala de aula.

A teoria de Balacheff (1987;1988) sobre os tipos e níveis do argumento de prova em matemática constituiu um assunto bem recorrente na maioria dos trabalhos analisados, constituindo assim um referencial teórico de referência para o assunto abordado nestas pesquisas e para futuras pesquisas.

Os trabalhos que abordaram a produção de argumentos informais com base no modelo da estrutura argumentativa de Toulmin (1958) foram poucos, contudo, por se tratar dos mais

recentes, constitui, portanto, uma possível tendência de novos trabalhos no futuro seguirem esta mesma linha de abordagem metodológica. (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021).

Foi verificado também que

> Estudos sobre argumentação no Ensino Superior, especialmente na formação inicial de professores de Matemática são escassos na literatura analisada e, portanto, reside aí a necessidade de mais estudos voltados para a formação docente em relação à condução de processos argumentativos em sala de aula no Ensino Básico, haja vista que a argumentação não é uma prática tão comum em sala de aula nesse nível de escolaridade (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021, p.224).

O "Estado do Conhecimento" sobre a argumentação no ensino da matemática no cenário nacional revelou que os focos de pesquisa sobre o assunto giraram em torno dos seguintes temas: 1- Análise de livro didático e revista pedagógica; 2- Concepções de alunos sobre argumentação e prova; 3- Estratégias desencadeadoras do processo de argumentação e prova; 4- Argumentação como uma estratégia de ensino ou método de ensino; 5- Espaços ou ambientes para argumentação e prova; 6- Formação de professores no contexto de argumentação e prova e; 7- Proposta de Ensino explícito da lógica formal no currículo. (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021).

No contexto dos trabalhos levantados e tendo em vista o que não foi percebido como tema de pesquisa durante a investigação, surge, portanto, algumas ideias de investigação para trabalhos futuros: 1- A utilização da modelagem matemática e da resolução de problemas enquanto metodologias de ensino desencadeadoras do processo argumentativo em sala de aula; 2- A produção de argumentos de forma coletiva e colaborativa em sala de aula; 3- O ensino explícito da argumentação com base na estrutura argumentativa de Toulmin (1958). (RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO, 2021).

3.4 O problema de pesquisa e as questões de investigação que emergem do cenário da pesquisa internacional e nacional

O problema de pesquisa e as questões de investigação nascem a partir de uma série de pesquisas exploratórias para investigar tendências de pesquisa na área e as suas respectivas lacunas de investigação.

No capítulo 1, por exemplo, foi realizado um estudo bibliométrico envolvendo a produção científica internacional e o resultado do estudo apontou os "tópicos mais quentes" (hot topics) propícios de investigação e associados a temática "argumentação" e "matemática". Em particular, as palavras chaves "argumentação coletiva"; "argumento colaborativo"; "apoio

do professor"; "raciocínio"; "argumento de validação"; "investigação" e "abordagem multimodal" quando combinadas aos termos "argumentação" e "matemática" indicou uma estrutura de relevância para novas investigações em relação ao assunto.

Já no capítulo 2, por meio do estado do conhecimento da produção científica internacional, os principais focos de pesquisa e assuntos que refletem maior tendência de investigação na literatura internacional foram apresentados e descritos. Como resultado desta investigação exploratória, nos chamou a atenção a tendência de as pesquisas abordarem a argumentação coletiva apoiada pelo professor como uma abordagem sociocultural para viabilizar o processo de aprendizagem em sala de aula. Para além disso, o raciocínio do aluno e a produção de argumentos de justificação e validação podem ser fomentados por diversas estratégias de argumentação, dentre elas, uma em especial, a investigação envolvendo um problema não convencional se apresentou como uma possibilidade interessante para fomentar a argumentação multimodal em sala de aula.

Por fim no capítulo 3, por meio do estado do conhecimento da produção científica nacional os resultados revelaram que produção brasileira estava mais concentrada em investigar a argumentação enquanto produto final, ou seja, a produção do argumento de prova, com especial atenção à transição das provas pragmáticas para provas conceituais. A teoria de Balacheff (1987;1988) sobre os tipos e níveis do argumento de prova em matemática constituiu um assunto bem recorrente na maioria dos trabalhos. Foi verificado também, no cenário nacional, que as pesquisas envolvendo a argumentação e o argumento de prova, numa perspectiva não formal, eram escassos em cursos de formação de professores em matemática.

Diante desse cenário retratado pelas pesquisas exploratórias, os resultados destas investigações, nos possibilitou, portanto, construir o problema de pesquisa bem como delinear as questões de investigação. Nesse sentido, o problema a ser apresentado, agregou os potenciais termos e ideias que se apresentaram como "hot topics" de pesquisa em relação ao assunto argumentação no ensino da matemática.

Na sequência é apresentado o problema de pesquisa: "**Da argumentação à prova: construção e avaliação de argumentos matemáticos produzidos por alunos ingressantes em curso de formação de professores em matemática em um contexto de ensino baseado em argumentação coletiva e investigação**".

Decorre do problema de pesquisa a seguinte questão central de pesquisa: **como alunos ingressantes de um curso de Licenciatura em Matemática do IFSULDEMINAS, Campus Passos argumentam e avaliam seu desempenho na justificação e validação de conceitos matemáticos em um contexto de ensino baseado em argumentação coletiva durante uma**

investigação na construção de números em diferentes sistemas de numeração não decimal?

Em torno da questão central proposta, surge, portanto, a necessidade de obter respostas para as seguintes questões secundárias de pesquisa que decorrem da questão principal:

a) Como alunos ingressantes em um curso de Licenciatura em Matemática do IFSULDEMINAS, Campus Passos constroem argumentos (raciocinam/evidenciam aprendizagem) para justificar/validar conceitos matemáticos em um contexto de ensino baseado em argumentação coletiva e investigação?
b) Que estrutura (s) de argumentação global pode (m) ser identificada (s) para examinar o tipo de raciocínio empregado por estes alunos durante a argumentação?
c) Como os alunos investigados autoavaliam o seu desempenho na prática de argumentação coletiva? Com base na autoavaliação dos alunos, que competências e habilidades argumentativas são consideradas por eles como importantes/fundamentais/necessárias para a formação do professor que ensina matemática?

Nos capítulos 4 e 5, abordaremos o referencial teórico da pesquisa, construídos a partir do estado do conhecimento da literatura nacional e internacional.

Capítulo 4 - A argumentação no contexto do ensino e aprendizagem da matemática

Um cidadão crítico é aquele que de forma independente consegue avaliar os fatos, formar a sua própria opinião e expor suas ideias.

De acordo com Júnior e Nasser (2014) "*a grande maioria de nossos alunos não sabe justificar afirmações simples, o que pode refletir negativamente na construção de sua cidadania*" (p.1015). Para estes autores a escola não tem cumprido o papel de formar um cidadão crítico capaz de se posicionar (concordando ou discordando) e apresentar argumentos/justificativas para validar o seu ponto de vista (JÚNIOR; NASSER, 2014).

Para Boavida (2005) o desenvolvimento de práticas de argumentação em sala de aula na Educação Básica promove o surgimento de competências argumentativas e estas abrangem a capacidade de comunicar, ouvir, agir de forma crítica e atenciosa, contribuindo para tornar o aluno um sujeito mais autônomo para assumir suas posições de forma crítica e embasada.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) destacam o papel da matemática na formação do cidadão crítico na medida em que ela pode contribuir para o desenvolvimento da capacidade/habilidade de comprovação, argumentação e justificação. Para tanto, o ensino dessa disciplina deverá se apoiar em estratégias que explorem o raciocínio do aluno (BRASIL, 1997, p.26).

4.1 A argumentação e o argumento matemático

De acordo com Zambak e Magiera (2020) um argumento matemático pode ser pensado como uma atividade monológica ou como uma atividade dialógica, discursiva ou coletiva. Enquanto atividade monológica, trata-se de uma situação em que um único individuo se envolve em uma atividade para construir e validar uma conjectura. No que tange a situação envolvendo uma atividade dialógica, envolve um indivíduo tentando convencer um ouvinte da validade de uma conjectura (ZAMBAK; MAGIERA, 2020).

Para Lakatos (1978) a visão dialógica, especialmente, destaca a natureza social da atividade matemática. Ainda de acordo com este autor a argumentação matemática pode envolver uma série de atividades abarcando desde a criação de conjecturas, exemplos para viabilizar o teste da conjectura criada, experiências de pensamento, representação de ideias matemáticas, a tomada do ponto de vista do outro bem como a análise e revisão do raciocínio.

Um argumento matemático, por exemplo, pode ser visto como "*uma sequência conectada de afirmações destinadas a verificar ou refutar uma alegação matemática*" (STYLIANIDES, 2007a, p. 2).

Para Triantafillou, Spiliotopoulou e Potari (2016) um argumento pode ser distinguido a partir do seu caráter "*probatório*" e "*não probatório*". De acordo com estes autores

> Os argumentos não probatórios envolvem os casos de argumentos empíricos e raciocínios que capturam argumentos válidos a favor ou contra uma alegação matemática; os argumentos probatórios envolvem exemplos genéricos (por exemplo, casos particulares vistos como representativos do caso geral) e demonstrações (por exemplo, sequência conectada de afirmações baseadas em verdades aceitas, tais como axiomas, teoremas, definições e declarações). (TRIANTAFILLOU; SPILIOTOPOULOU; POTARI, 2016, p.683-684, **tradução nossa**).

A argumentação, portanto, em um contexto social que envolve a sala de aula de matemática

> [...] é concebida como um processo dinâmico de discurso social para descobrir novas ideias matemáticas e convencer outros de que uma afirmação é verdadeira (Rumsey, Guarino, Gildea, Cho, & Lockhart, 2019; Rumsey & Langrall, 2016). (CERVANTES-BARRAZA; HERNANDEZ MORENO; RUMSEY, 2020, p.6, **tradução nossa**).

De acordo com Staples e Newton (2016) há dois propósitos intimamente relacionados, mas distintos, de envolver os alunos com argumentação em ambientes de sala de aula. O primeiro deles está relacionado ao desenvolvimento de conceitos matemáticos e o segundo a proficiência com a prática da argumentação visando o estabelecimento da verdade de uma afirmação. Ainda de acordo com estes autores ambas as perspectivas são valiosas e complementares, sendo que primeira prioriza a compreensão conceitual, aproveitando a argumentação como uma prática de provocação e aprendizagem com foco na compreensão de uma determinada ideia específica, conceito ou propriedade. A segunda perspectiva, por sua vez, tem por foco o desenvolvimento da proficiência como uma valiosa prática matemática. Nesse sentido, engajar os alunos na argumentação irá ajudá-los a desenvolver competências e habilidades para melhorar a consulta da validade de uma abordagem, a pensar se uma linha de raciocínio constitui uma abordagem viável bem como desenvolver o argumento para apoiar (ou refutar) uma alegação matemática.(STAPLES; NEWTON, 2016).

Staples e Newton (2016) revelam ainda que

> Uma vez que uma comunidade concorda que um argumento é sólido, uma nova verdade é estabelecida, é aí que a verdade ou a reivindicação se tornam parte da base de conhecimento do campo e podem ser usadas em outros argumentos para abrigar novos conhecimentos. De fato, uma característica definidora da argumentação no campo da matemática é seu papel no

> estabelecimento de novos conhecimentos. (STAPLES; NEWTON, 2016, p.296, **tradução nossa**).

Ainda no que diz respeito a argumentação matemática, Wood (1999) revela que

> [...] a compreensão conceitual na matemática está relacionada ao desenvolvimento do pensamento e raciocínio dos alunos que ocorre durante os atos de desafio e justificativa. Ou seja, é geralmente aceito que a mudança conceitual e a progressão do pensamento resultam dos processos mentais envolvidos na resolução do conflito de ideias. (WOOD, 1999, p. 189, **tradução nossa**).

Decorre, portanto, que a construção de argumentos matemáticos e a avaliação crítica do raciocínio envolvido, constituem práticas curriculares importantes para a construção do conhecimento tanto na Educação Básica quanto na Educação Superior (SCHWAIGHOFER *et al*., 2017).

Segundo Civil e Hunter (2015, p.297), "*construir e compreender o raciocínio inerente aos argumentos matemáticos*" constitui um aspecto fundamental das práticas disciplinares no âmbito da matemática. É por meio da argumentação matemática que os alunos tem a oportunidade de experienciar a matemática como uma disciplina que oferece ferramentas para compreender e desenvolver o raciocínio utilizado para validar uma ideia/conjectura durante uma argumentação (WOOD, 1999). O pensamento e raciocínio empregados durante a construção de argumentos matemáticos corroboram, portanto, para a melhoria da compreensão conceitual de tópicos de matemática (DOGRUER e AKYUZ, 2020).

Nesse caso, a produção de sentidos e significados pode ser potencializada pela participação dos alunos em um discurso coletivo permeado de raciocínios sob a mediação do professor (CONNER *et al*., 2014; CIVIL e HUNTER, 2015).

O envolvimento de professores e alunos neste processo de interação discursiva, voltado para a produção de argumentos matemáticos é designada, portanto, como argumentação coletiva (CONNER *et al*., 2014).

Civil e Hunter (2015) destacam a importância da participação dos alunos em uma argumentação coletiva. Para tanto, evidenciam o benefício desta prática em sala de aula no aprimoramento de explicações e justificações matemáticas.

> [...] a argumentação é uma ferramenta poderosa de raciocínio que permite aos participantes elaborar e justificar conceitos matemáticos e desenvolver uma compreensão de perspectivas opostas à medida que todos os participantes trabalham para a construção de um consenso coletivo. (CIVIL; HUNTER, 2015, p.297, **traduçao nossa**).

4.2 Argumentar coletivamente no contexto da matemática

As teorias socioculturais no campo da educação matemática têm enfatizado a importância da argumentação coletiva dentro do trabalho em sala de aula em pequenos grupos (DEDE, 2019). O foco destas abordagens socioculturais tem orientado o processo de aprendizagem a partir da interação do sujeito com o ambiente social no qual está inserido (VIGOTSKI, 2009), ao invés de uma aprendizagem individual, descontextualizada e desprovida de interação social (DEDE, 2019). Em geral, estas abordagens propõem a discussão e a solução de problemas em um ambiente social (sala de aula) onde os alunos possam trabalhar em grupo, interagindo uns com os outros e aprendendo com seu parceiro de aprendizagem (DEDE, 2019).

Dentre as abordagens socioculturais existentes, a argumentação coletiva se apresenta como uma possibilidade para dinamizar os processos de ensino e aprendizagem da matemática em sala de aula (DEDE, 2019).

Estudos anteriores sobre argumentação buscavam associá-la a uma defesa retórica de ideias, ou seja, a produção de argumentos para convencer um grupo à espera de persuasão. No entanto, nos estudos mais recentes o conceito de argumentação coletiva começou a ser descrito para evocar o potencial aspecto interativo da argumentação entre todos os sujeitos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem em sala de aula (KRUMMHEUER, 1995).

No contexto atual que envolve ensino da matemática o conceito de argumentação coletiva está associado ao conjunto de interações sociais discursivas a partir do qual duas ou mais pessoas tentam convencer umas às outras sobre a validade de seus argumentos (KRUMMHEUER, 1995; CONNER *et al*., 2014; CERVANTES-BARRAZA; HERNANDEZ MORENO; RUMSEY, 2020).

Para Conner *et al.* (2014) a argumentação coletiva é frequentemente descrita como um processo através do qual várias pessoas formulam coletivamente uma conclusão e de forma colaborativa fornecem justificativas e provas para apoiar esta conclusão. Na sala de aula "*este é um processo no qual vários alunos se envolvem em argumentação para convencer outros da validade de sua linha de raciocínio*" (SOLAR *et al*., 2020, p.3).

De acordo com Conner *et al.* (2014)

> A participação em discussões de forma distintamente matemática pode ser enquadrada como argumentação coletiva, onde a argumentação coletiva envolve múltiplas pessoas chegando a uma conclusão, muitas vezes por consenso (CONNER *et al.*, 2014, p.401, **tradução nossa**).

A argumentação coletiva, portanto, pode ser caracterizada pela resolução colaborativa de problemas ou tarefas matemáticas envolvendo a elaboração de provas em um ambiente de discussão onde grupos de alunos se envolvem em um debate inserido no contexto matemático (CERVANTES-BARRAZA; HERNANDEZ MORENO; RUMSEY, 2020).

No contexto da sala de aula, envolve qualquer instância onde professor e alunos trabalham de forma conjunta para estabelecer reivindicações matemáticas e fornecer provas para apoiá-las (CONNER *et al*., 2014). Ainda de acordo com estes autores o professor cumpre um papel de facilitador deste processo e em certos momentos contribui para a elaboração de partes do argumento produzido, como também, por meio de questionamentos bem elaborados fomenta a elaboração de argumentos por parte dos alunos (CONNER *et al.*, 2014). Dessa forma, o professor desempenha um papel fundamental no estabelecimento de normas de conduta que visam fomentar a argumentação em sala de aula (YACKEL, 2002; CONNER *et al.*, 2014; AYALON; HERSHKOWITZ, 2018; SOLAR *et al.*, 2020).

Em suma, a argumentação coletiva fornece o contexto para o exame de conjecturas, justificações e provas em um cenário de ensino onde os esforços estão direcionados para apoiar ou refutar conclusões (ZAMBAK; MAGIERA, 2020). É neste contexto que os alunos avaliam criticamente as ideias do parceiro de aprendizagem, experimentam e aprendem formas alternativas de pensar, reelaboram seu pensamento, constroem consenso e validam resultados (KRUMMHEUER, 1995; CONNER et al., 2014; ZAMBAK; MAGIERA, 2020).

4.2.1 Os tipos de argumentos matemáticos no contexto da argumentação coletiva

Com base em aspectos figurados e conceituais do raciocínio desenvolvido por Fischbein (1993), Mariotti e Fischbein (1997), Knipping (2008) descreve dois tipos de argumentos em matemática, sendo o primeiro tipo pautado em um campo conceitual de justificação e o segundo tipo em um campo visual de justificação. Dessa forma, o raciocínio relacionado no aspecto figural (desenho) diz respeito às percepções do espaço e o raciocínio baseado no aspecto conceitual está relacionado ao conhecimento abstrato e teórico (KNIPPING, 2008).

Knipping (2008) descreve as argumentações conceituais como argumentações "*pertencentes a um campo conceitual dedutivo de justificação, no qual as conclusões são deduzidas usando conceitos*" (KNIPPING, 2008, p.436). A conclusão "*é deduzida dos dados, e os princípios conceituais gerais que justificam a dedução são explicitamente declarados como justificações*" (KNIPPING, 2008, p.436).

Neste tipo de argumentação, as garantias e apoios são

> [...] conceitos matemáticos ou relações matemáticas entre conceitos e fazem referência a teoremas, definições, axiomas e regras de lógica. Embora a forma como as conclusões são estabelecidas nas salas de aula utilizando argumentações conceituais possa ser descrita como dedutiva, a expressão deste raciocínio pode não estar em uma forma logicamente correta. Os conceitos e as relações matemáticas podem ser formulados em linguagem corrente (Knipping 2003). Embora as argumentações neste campo possam não ser formais, elas são rigorosas no sentido de que cada passo e justificação na cadeia de argumentos tem de ser explicitada e deve ser baseada em conceitos que são compartilhados na comunidade da classe (KNIPPING, 2008, p.436, **tradução nossa**).

No que diz respeito as *argumentações visuais* a referência à uma figura é considerado parte da argumentação (KNIPPING, 2008).

De acordo com Knipping (2008) uma figura quando relacionada a uma prova aparece no início do processo para evidenciar uma relação geral que deve ser interpretada e justificada. A figura, portanto, representa uma estratégia, ponto de partida para a realização de um raciocínio de comprovação (KNIPPING, 2008). Em uma argumentação que toma por base a representação de uma figura,

> As afirmações individuais não são necessariamente desenvolvidas sequencialmente como nas argumentações conceituais, mas frequentemente trazidas à tona simultaneamente com base em figuras. Os dados são descritos visualmente [...]. As conclusões também não são constituídas como resultados de etapas individuais na argumentação, mas são encontradas na figura e a partir dela. Na argumentação visual, muitas vezes a argumentação ocorre em dois níveis diferentes, ou seja, concreta e conceitualmente. No nível empírico-visual, a argumentação é sobre um diagrama particular e as relações que são evidentes nesse diagrama. As propriedades e relações matemáticas estão ligadas a figuras concretas e são discutidas como conhecimento acessível através dos sentidos. No nível conceptual- visual, o diagrama é tomado como uma representação de uma ideia. (KNIPPING, 2008, p.436-437, **tradução nossa**)..

Ainda de acordo com Knipping (2008, p.437) em uma argumentação visual, "*muitos dados podem ser derivados da figura de uma só vez, pelo que se espera que a argumentação comece e prossiga em paralelo*".

Neste contexto, Mueller, Yankelewitz e Maher (2012) definem um argumento matemático como como uma explicação matemática que visa convencer a si mesmo ou a outras pessoas sobre a verdade de uma proposição. Lithner (2008) explica que para um argumento ser considerado como matemático ele deve estar ancorado na matemática, ou seja, possuir uma justificativa dependente do campo (TOULMIN, 1958).

Para Lithner (2008), a ancoragem

> [...] não se refere à coerência lógica do mandado, mas à sua fixação em dados em propriedades matemáticas relevantes dos componentes sobre os quais se raciocina: objetos, transformações e conceitos. O objeto é a entidade fundamental, a "coisa" que se está fazendo algo com, por exemplo, números, variáveis, funções, diagramas, etc. Uma transformação é o que está sendo feito a um objeto, e o resultado é outro objeto. Uma sequência de transformações, por exemplo, encontrar os máximos polinomiais, é um procedimento. Um conceito é uma ideia matemática central construída sobre um conjunto de objetos, transformações e suas propriedades, por exemplo, a função do conceito de infinito. (p. 261, **tradução nossa**).

A argumentação coletiva, no contexto deste estudo, leva em consideração também a distinção entre os tipos de "*argumentos analíticos*" e "*argumentos substanciais*" (TOULMIN, 1958/2006).

Um argumento analítico pode ser compreendido como um argumento lógico formal, ou seja, um argumento de prova onde uma dedução lógica e correta estabelece uma conclusão que decorre de premissas verdadeiras (KRUMMHEUER, 1995; CONNER *et al*., 2014).

Em rejeição ao argumento analítico (prova formal em matemática) como o único tipo de argumentos válido, Toulmin (1958;2001) e Krummheuer (1995) passaram a discutir o uso do argumento substancial como possibilidade de expandir a ideia de um argumento válido. Para Krummheuer (1995, p.236) a argumentação substancial, "*tem direito por si só*". Uma reivindicação, por exemplo, para ser válida, não necessita de ter sido conduzida por meio de justificações oriundas do campo da lógica tradicional, ela por si só, é motivada pela apresentação de uma justificação convincente envolvendo, dados, garantias, apoios, elementos qualificadores e refutação (KRUMMHEUER, 1995; TOULMIN, 1958/2006; CONNER *et al*., 2014). O argumento substancial, portanto, inclui elementos que não são puramente lógicos e que podem ser expressos na linguagem natural do aluno (KRUMMHEUER, 1995).

Segundo Conner *et al.* (2014)**,** pesquisas recentes em Educação Matemática tem destacado a importância da argumentação coletiva como parte importante do discurso produzido em sala de aula. Em decorrência disso, muitos educadores matemáticos, utilizando-se das ideias de Toulmin sobre a composição do argumento substancial, passaram a examinar os argumentos produzidos pelos alunos por meio da argumentação coletiva realizada em sala de aula (CONNER *et al.*, 2014).

O *argumento substancial (racional)* baseado nas ideias de Toulmin (1958) e desvinculado do campo da lógica tradicional, trata-se, portanto, de uma concepção alternativa para o argumento matemático analítico sendo de fundamental importância para a compreensão dos processos de prova realizados em sala de aula pelos alunos (KNIPPING, 2008).

4.2.2 A aprendizagem no contexto da argumentação coletiva em sala de aula

Erkek e Işiksal Bostan (2019) consideram a interação social e a argumentação como ingredientes altamente importantes para a aprendizagem dos alunos. Ainda de acordo com estes autores, um ambiente de sala de aula discursivo e com interação social potencializa a aprendizagem na medida em que ajuda os alunos a formular suas ideias, revela sua compreensão sobre o tema de estudo e permite refletir sobre seus pensamentos (ERKEK; IŞIKSAL BOSTAN, 2019).

A importância da interação social e da argumentação na aprendizagem dos alunos é reconhecida por vários autores na literatura (MONTEIRO; TEIXEIRA, 2004; WALTER; BARROS, 2011; BOZELLI; TEIXEIRA, 2019; MONTEIRO; TEIXEIRA 2019).

Dentro da comunidade de sala de aula, o aprendizado é documentado em termos das mudanças observadas na qualidade dos argumentos que os alunos coletivamente conseguem produzir juntos (YACKEL, 2002). A construção do conhecimento é considerada como uma atividade situada, crítica e reflexiva que envolve a participação do grupo de alunos em uma cultura argumentativa implementada em sala de aula (CONNER *et al.*, 2014; SOLAR *et al*., 2020).

No que diz respeito ao aluno inserido nessa cultura argumentativa, a colaboração do parceiro de aprendizagem (colega de classe ou professor) em uma atividade em grupo é considerada um catalisador das habilidades de raciocínio (CAPONE *et al.*, 2020). Nesse caso a formação de conceitos se desenvolve inicialmente em um nível interpsicológico resultado das experiencias de interação social com o grupo e em um segundo momento, no nível intrapsicológico do sujeito (VIGOTSKI, 2009).

A argumentação nesse contexto de argumentação coletiva está associada também a uma atividade dialética envolvendo discussões controversas entre os parceiros de aprendizado (SCHWAIGHOFER *et al*., 2017). Por meio de uma discussão dialética ocorre a avaliação crítica dos argumentos produzidos, apresentação de contra-argumentos (explicação de argumentos conflitantes) e integração de partes de argumentos produzidos por cada aluno para se chegar a uma solução conjunta, gerando consenso (LEITÃO, 2000; SCHWARZ, 2009; SCHWAIGHOFER *et al.*, 2017).

O aprendizado em atividades de argumentação dialética é o resultado da superação das diferenças (WEGERIF, 2008; VOGEL *et al*., 2016) enquanto que em uma atividade dialógica, por exemplo, as próprias diferenças constituem o que se aprende, não havendo superação das mesmas por ausência de uma argumentação que envolva a elaboração de contra-argumentos (VOGEL *et al*., 2016). Na atividade argumentativa dialética, portanto,

> [...] os alunos trocam argumentos ou componentes de argumentos que se baseiam nas contribuições do parceiro de aprendizagem, abordando diretamente possíveis desacordos ou conflitos, ou que visam a superação de um conflito. Um exemplo de argumentação dialética seria que um aprendiz propondo resolver uma tarefa de prova através de uma declaração geral usando um exemplo específico, e seu parceiro de aprendizagem se opondo a esta sugestão e apontando que um exemplo é válido apenas para refutar uma declaração geral (VOGEL *et al*., 2016, p.480 **tradução nossa**).

Vogel *et al.* (2016) explicam que em uma atividade argumentativa dialética, o aluno precisa elaborar profundamente as contribuições do seu parceiro de aprendizagem para então em seguida criticar e contra-argumentar em função desta contribuição.

Nesse sentido, os alunos podem aprender melhor o conhecimento conceitual (específico do domínio da matemática) ao se engajarem em uma argumentação dialética do que em uma atividade que envolva uma explicação dialógica (ASTERHAN; SCHWARZ, 2009; VOGEL *et al.*, 2016).

Do ponto de vista epistemológico, Capone *et al*. (2020, p.4-5) explica que

> [...] há uma diferença básica entre a matemática e os outros domínios do conhecimento científico. Objetos matemáticos, em contraste com fenômenos da astronomia, física, química, biologia, etc., nunca são acessíveis por percepção ou por instrumentos (microscópios, telescópios, aparelhos de medição) (**tradução nossa).**

Para Duval (2006), uma maneira de ter acesso a estes objetos matemáticos é lidar com eles utilizando "*registros de representação semiótica*". Este termo é usado para indicar diferentes tipos de representação de uma ideia, como por exemplo, a linguagem natural, a linguagem algébrica, gráficos, tabelas, figuras, equações, fórmulas, etc. (DUVAL, 2006).

Ainda de acordo com este autor a aprendizagem associada a compreensão de um conceito em matemática requer a coordenação de mais (pelo menos dois) registros de representação semiótica, ou seja, aprender um conceito envolve a habilidade de passar de um registro de representação para outro. Os "tratamentos" e as "conversões" são dois tipos de transformações de representações semióticas, sendo o tratamento o mais importante do ponto de vista matemático e a conversão o fator decisivo para a aprendizagem (DUVAL, 2006).

Os tratamentos

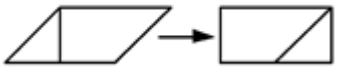
> [...] são transformações de representações que acontecem dentro do mesmo registro: por exemplo, realizar um cálculo enquanto permanece estritamente no mesmo sistema de notação para representar os números, resolver uma

> equação ou sistema de equações, completar uma figura usando critérios perceptivos de conectividade ou simetria, etc. Isso dá destaque ao papel intrínseco dos sistemas semióticos nos processos matemáticos. Os tratamentos, que podem ser realizados, dependem principalmente das possibilidades de transformação semiótica, específicas do registro utilizado. (DUVAL, 2006, p.111, **tradução nossa**).

Exemplo 1 - Transformação numérica, decimal para fração

0,5 → ½

Exemplo 2 - Transformação geométrica visual para ilustrar a área de um paralelogramo



Fonte: Duval (2006)

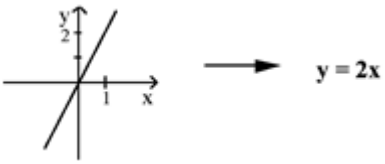
Por outro lado, as conversões

> [...] são transformações de representação que consistem em alterar um registro sem alterar os objetos que estão sendo denotados: por exemplo, passando da notação algébrica de uma equação para sua representação gráfica, passando da declaração da linguagem natural de uma relação para sua notação usando letras, etc. A conversão é uma transformação de representação, que é mais complexa do que o tratamento, pois qualquer mudança de registro primeiro requer o reconhecimento do mesmo objeto representado entre duas representações cujo conteúdo muitas vezes não tem nada em comum. (DUVAL, 2006, p.112, **tradução nossa**).

Exemplo 3: Da linguagem natural para a linguagem algébrica

a é maior do que b → a>b

Exemplo 4: Da notação geométrica (gráfica) para a notação algébrica



Fonte: Duval (2006)

Segundo Duval (2006) a coordenação dos registros semióticos, ou seja, a capacidade de lidar com múltiplas representações de um mesmo conceito, passando de uma para outra, é fundamental para a compreensão matemática.

A avaliação da aprendizagem em uma argumentação coletiva pode ser analisada também por meio da repetição de termos e palavras que se perpetuam ao longo do discurso ou debate (STAATS, 2017b).

Staats (2017, p.290) destaca que repetição de conversas durante uma argumentação é "*importante para descrever argumentos emergentes e coletivos porque permite que os oradores usem comparativamente poucas palavras para sinalizar tópicos sobre os quais eles concordam ou discordam*". De acordo com Staats (2017) "*estruturas poéticas de repetição*" são encontradas em conversas altamente colaborativas, elas emergem da língua falada e se constituem em frases que se perpetuam ao longo do discurso. Estas estruturas contribuem com a argumentação na medida em que tem o potencial de validar o discurso anterior tornando mais fácil a interpretação e a transmissão de significado através da estrutura do discurso (STAATS, 2017b).

É por meio da estrutura da fala, por exemplo, que "*estruturas poéticas de repetição*" são transmitidas durante o raciocínio matemático para evidenciar os componentes centrais (garantias, justificações, apoios e qualificações) dos argumentos produzidos pelos alunos em uma argumentação coletiva, revelando dessa forma compreensão e aprendizagem (STAATS, 2017b).

De modo geral, os alunos experimentam muitas dificuldades para produzir argumentos matemáticos (SCHWAIGHOFER *et al.*, 2017). Ainda de acordo com estes autores, os alunos geralmente pecam na elaboração de cadeias lógicas compostas por mais de um argumento (HEINZE; REISS; RUDOLPH, 2005; VOGEL *et al.*, 2016), falham em se engajar em um ciclo abrangente de discurso argumentativo envolvendo a elaboração de contra-argumentos e integração da argumentação (LEITÃO, 2000), como também não sentem necessidade de elaborar justificações para suas reivindicações (JIMÉNEZ-ALEIXANDRE; BUGALLO RODRÍGUEZ; DUSCHL, 2000; VOGEL *et al.*, 2016; SCHWAIGHOFER *et al.*, 2017).

Para Dede (2019) os estudos sobre argumentação coletiva na Educação Matemática, embora em quantidade limitada, estão divididos em dois focos de pesquisa: o primeiro trata do exame dos argumentos produzidos por alunos em atividades de prova e o segundo considera os argumentos produzidos no âmbito de pequenos grupos em diferentes atividades de ensino (DEDE, 2019).

4.3 Habilidades de argumentação e as estratégias argumentativas associadas em contexto de ensino envolvendo a matemática

As habilidades de argumentação em matemática estão relacionadas a capacidade do sujeito de investigar conjecturas matemáticas de maneira individual ou em um contexto coletivo e colaborativo avançando em seguida para uma etapa de elaboração de prova ou refutação da conjectura criada (KOEDINGER, 1998; KOLLAR *et al.*, 2014).

De acordo com Vogel *et al.* (2016, p.478) as habilidades de argumentação são necessárias

> [...] para que os indivíduos possam participar de discussões aparentemente abertas não apenas em domínios políticos e filosóficos, mas também em domínios que normalmente são mais motivados por regras formais e abordagens dedutivas, como a matemática (**tradução nossa**).

As habilidades de argumentação matemática não incluem apenas habilidades matemáticas específicas do campo (YACKEL; COBB, 1996) inclui também habilidades relacionadas a aspectos sócio discursivos da argumentação (KOLLAR *et al.*, 2014).

Kollar *et al.* (2014) distingue dois componentes que envolvem as habilidades de argumentação matemática, um componente de domínio específico "*individual-matemático*" e outro componente de domínio geral "*social-discursivo*".

O componente "*individual-matemático*" é descrito como a capacidade de um sujeito, individualmente, gerar argumentos a favor ou contra uma conjectura bem como avaliar argumentos com base em critérios[30] utilizados no campo da matemática, elaborar uma prova e realizar refutação de argumentos (HEINTZ, 2000; REICHERSDORFER *et al.*, 2012; KOLLAR *et al.*, 2014).

Já o componente "*social-discursivo*" refere-se à capacidade do sujeito de participar de um contexto de interação social se envolvendo em um processo de argumentação colaborativa (KOLLAR; FISCHER; SLOTTA, 2007; KOLLAR *et al.*, 2014). Este componente é importante para alcançar soluções conjuntas (consenso) a partir de uma discussão em grupo, nesse sentido, está relacionado ao debate e comunicação de ideias com outras pessoas do grupo (KOLLAR *et al.*, 2014).

Sobre o consenso do trabalho em grupo, Walter e Barros (2011) explicam que ele é

> [...] necessariamente obtido através da reflexão, discussão, explicação e negociação para resolver tensões entre contrastes evidentes em abordagens de solução dentro de uma comunidade de aprendizagem. A produção de mandados semânticos é uma possibilidade direcionada para a construção de consenso em relação a entendimentos matemáticos e inferências entre os membros de uma comunidade de aprendizagem. (WALTER; BARROS, 2011, p.326).

[30] Normas sociomáticas.

Para Schwaighofer *et al.* (2017) as habilidades de argumentação relacionadas ao componente social-discursivo são importantes e necessárias, por exemplo, em uma situação envolvendo a produção de uma prova matemática. Nesse caso, isso se verifica quando uma ideia individual é explicada por um aluno a outros colegas ou quando todo o grupo em conjunto discute e avalia estratégias para a elaboração do argumento de prova (SCHWAIGHOFER *et al.*, 2017).

Vogel *et al.* (2016) explicam que as habilidades de argumentação ligadas ao componente socio-discursivo são necessárias tanto para construir argumentos sólidos quanto para se engajar em um diálogo argumentativo. Elas podem induzir, por exemplo, o desenvolvimento de habilidades ligadas ao domínio individual-matemático (SCHWAIGHOFER *et al.*, 2017). Isso ocorre porque em uma atividade de argumentação coletiva, habilidades de argumentação ligadas ao componente socio-discursivo são exercitadas e podem conduzir o aluno à uma elaboração cognitiva de conceitos matemáticos necessários para resolver um problema ou elaborar uma prova (ANDRIESSEN; BAKER; SUTHERS, 2003; SCHWAIGHOFER *et al.*, 2017).

Kollar *et al.* (2014) citam que o uso de "*roteiros de colaboração*" são eficazes na promoção do componente "*social-discursivo*" das habilidades de argumentação matemática e da mesma forma os "*exemplos de trabalho heurístico*" se mostraram eficazes em alguns estudos (RUMMEL; SPADA, 2005; HILBERT et al., 2008; REISS et al., 2008) na aquisição do componente "*individual-matemático*".

Os roteiros de colaboração, por exemplo, são definidos como recursos de intervenção que orientam, especificam, distribuem e sequenciam atividades de aprendizagem evocando o trabalho colaborativo no âmbito do grupo (KOLLAR; FISCHER; HESSE, 2006; KOLLAR *et al.*, 2014; VOGEL *et al.*, 2016). Eles podem auxiliar os alunos em uma atividade de grupo a fornecer argumentos em defesa de suas ideias e a compartilhá-las com seus colegas, como também, elaborar contra-argumentos e integrar diferentes argumentos de seus parceiros de aprendizagem (KOLLAR *et al.*, 2014; VOGEL *et al.*, 2016; *SCHWAIGHOFER et al.*, 2017).

Eles constituem um andaime promissor para apoiar os aspectos sociais-discursivos das habilidades de argumentação em matemática (KOLLAR *et al*., 2014; VOGEL *et al.*, 2016) e podem ser utilizados, por exemplo, para auxiliar os alunos a construir argumentos com base nos elementos da estrutura argumentativa de Toulmin (1958), sequenciar fases da argumentação (LEITÃO, 2000) e orientar os alunos em ações de interação e discussão dialética em sala de aula (KOLLAR *et al.*, 2014). Portanto, os roteiros de colaboração "*ajudam os alunos a executar*

habilidades em um nível mais elevado do que eles seriam capazes de fazer" (KOLLAR *et al.*, 2014, p.26).

Por outro lado, os exemplos de trabalho heurístico constituem um guia para a resolução de um problema (ou tarefa de prova), ou seja, envolve a indicação de etapas e procedimentos para a realização desta atividade (REISS; RENKL, 2002; KOLLAR *et al.*, 2014).

Para Kollar *et al.* (2014), grande parte das pesquisas que apontam a eficácia dos exemplos de trabalho heurísticos foram conduzidos em domínios bem estruturados (ex: resolução de problemas). No entanto, a argumentação, especialmente a elaboração de argumentos de prova, constitui um domínio mal definido e por este motivo é impossível fornecer aos alunos um procedimento que leve a uma solução bem-sucedida diretamente. Contudo, heurísticas para a escolha de métodos, princípios e estratégias de domínio específico geralmente estão disponíveis (KOLLAR *et al.*, 2014; SCHWAIGHOFER *et al.*, 2017).

Um exemplo importante de modelagem heurística para o argumento de prova é o modelo proposto por Boero (1999), composto por seis fases que abrangem processos exploratórios e sistematizadores regidos por estratégias heurísticas (KOLLAR *et al.*, 2014). Outro exemplo, envolve heurísticas que estimulam a avaliação e desenvolvimento de "provas e refutações" (LAKATOS, 1978).

Em suma, os roteiros de colaboração são recursos poderosos para fomentar o componente social-discursivo das habilidades de argumentação matemática e da mesma forma os exemplos de trabalho heurísticos tem se revelado uma possibilidade interessante para promover o componente individual-matemático (RUMMEL; SPADA, 2005; HILBERT *et al.*, 2008; REISS *et al.*, 2008).

De acordo com Vogel *et al.* (2016) uma combinação entre roteiros de colaboração e exemplos de trabalho heurístico desponta como uma estratégia promissora para viabilizar a resolução de tarefas de prova matemática. Para tanto os exemplos de trabalho heurísticos devem levar em consideração as peculiaridades do domínio específico e os roteiros de colaboração direcionar os tópicos de discussão relacionados a tarefa de prova que se apresentam mais frutíferos para a solução do problema.

4.4 Normas sociais e normas sociomáticas como estratégias para apoiar o desenvolvimento de habilidades argumentativas em sala de aula

A argumentação e o desenvolvimento de habilidades argumentativas estão fortemente associados à promoção de normas sociais de argumentação em sala de aula como também à promoção da adesão aos critérios disciplinares matemáticos (normas sociomáticas) para

determinar a verdade de uma reivindicação (AYALON, 2019; AYALON e HERSHKOWITZ, 2018; VOGEL *et al*., 2016; ZAMBAK e MAGIERA, 2020; DEDE, 2019; MAKAR; BAKKER; BEN-ZVI, 2015; CIVIL e HUNTER, 2015).

As normas sociais de argumentação referem-se as formas aceitáveis de comunicação dentro da sala de aula (DOGRUER; AKYUZ, 2020). Para tanto, cabe ao professor orientar e encorajar os alunos a: exercitar a escuta ativa[31], explicar suas ideias, se posicionar a favor ou contra uma ideia, comentar a solução do colega e apresentar suas ideias com clareza e justificativa (DEDE, 2019; DOGRUER; AKYUZ, 2020).

No âmbito do trabalho em grupo estas normas podem envolver a explicação das respostas de cada integrante do grupo, apresentação e compartilhamento de ideias incompletas, estratégias, métodos, justificativas de soluções diferentes e/ou baseadas em ideias de outros colegas (DEDE, 2019; MAKAR; BAKKER; BEN-ZVI, 2015).

Já as normas sociomáticas referem-se as regras de discussões matematicamente aceitáveis (tipos de justificativas e provas) dentro da comunidade (YACKEL; COBB, 1996). Estas normas descrevem também as formas de raciocínio e as habilidades de solução de problemas aceitos no âmbito dessa comunidade (ZAMBAK; MAGIERA, 2020). Constituem, portanto, formas matematicamente aceitáveis para explicar e justificar a solução de problemas. Estas normas disciplinares, inerentes ao campo da matemática, permitem o estabelecimento da validade das reivindicações geradas (por exemplo, a eficiência da evidência de apoio, a clareza do raciocínio) (ZAMBAK; MAGIERA, 2020).

Sendo o professor um representante da comunidade matemática, ele desempenha um papel de suma importância na avaliação do que constitui um argumento matemático sólido e aceitável evitando assim que os alunos não fiquem restritos a elaboração de justificativas puramente empíricas, mas que possam ao invés disso construir justificativas mais elaboradas (dedutivas) com base em inferências lógicas. (AYALON, 2019; AYALON; HERSHKOWITZ, 2018; ZAMBAK; MAGIERA, 2020).

As pesquisas que abordam a prática da argumentação e prova em diferentes níveis de ensino (Fundamental, Médio e Superior) sugerem que os alunos são capazes de elaborar reivindicações, tecer justificações e apresentar exemplos comprobatórios em diferentes níveis de sofisticação (ROGERS; KOSKO, 2019). Ainda de acordo com estes autores, parece haver um consenso na literatura sobre a importância dos "exemplos empíricos" para o

[31] Ouvir com atenção e de forma crítica as ideias do colega de modo a identificar os pontos fortes e pontos falhos. Mas a ele escuta ativa não é apenas ouvir, é engajar-se com o raciocínio do orador para dar sentido à sua contribuição (MAKAR; BAKKER; BEN-ZVI, 2015)

desenvolvimento e engajamento dos alunos, em especial os mais novos, na argumentação matemática em sala de aula. Em se tratando de alunos do Ensino médio, por exemplo, o estudo realizado por Ellis *et al.* (2012) verificou que muitos estudantes que exploravam a construção de conjecturas através de exemplos empíricos conseguiram posteriormente produzir argumentos válidos por meio de deduções, contraexemplos, ou argumentos fundamentados em exemplos genéricos. No contexto do Ensino Superior, em se tratando de alunos ingressantes em um curso de formação de professores em Matemática é de se esperar também que muitos alunos façam uso de exemplos empíricos para justificar suas ideias.

De acordo com Balacheff (1988), o teste empírico, ou ingênuo, inclui inicialmente o uso de vários exemplos como meio de justificação, posteriormente o número de exemplos é reduzido até se alcançar um exemplo generalizador como forma de justificação. Ainda segundo Balacheff (1988) este processo é importante para o desenvolvimento da argumentação matemática uma vez que marca a transição da prova empírica para a prova conceitual e posteriormente a transição à prova formal.

O desenvolvimento de normas sociomáticas, envolvendo o que conta como justificação válida, explicação ou descrição aceitável, é de fundamental importância para o desenvolvimento da argumentação matemática (YACKEL; COBB, 1996). Conforme as crianças começam a internalizar e aceitar gradativamente essas normas de sala de aula, as suas justificações também se tornam cada vez mais matemáticas (YACKEL; COBB, 1996; ROGERS; KOSKO, 2019). Para tanto, o professor tem um papel muito importante neste processo, uma vez que ele deverá viabilizar situações argumentativas em sala de aula visando a internalização e aceitação dessas normas. Uma possibilidade que avança nessa direção é propiciar aos alunos oportunidades de desacordo e busca pelo consenso durante a prática argumentativa (STYLIANIDES, 2007b; ROGERS; KOSKO, 2019).

Para além das normas de argumentação Solar *et al.* (2020) recomendam também outras estratégias que podem apoiar o desenvolvimento da argumentação coletiva em sala de aula: estratégias comunicativas e tarefas matemáticas abertas à discussão.

> Entre as estratégias comunicativas, a pesquisa mostra que o incentivo à participação, a gestão de erros e perguntas deliberadas são as formas mais eficazes de apoiar a argumentação. Por sua vez, as tarefas matemáticas abertas à discussão, especialmente aquelas que devem ser resolvidas utilizando diversas estratégias ou aquelas que podem ser abordadas de múltiplas maneiras, promovem o debate entre os estudantes e, assim, fomentam a argumentação (SOLAR *et al.*, 2020, p.4, **tradução nossa)**.

Enfim, o envolvimento ativo de alunos na produção de argumentos substanciais e a busca pelo consenso contribuiu para o desenvolvimento de habilidades de pensamento e raciocínio matemático reflexivo (WALTER; BARROS, 2011). Estas habilidades de raciocínio e pensamento crítico orientado a tomada de decisão podem ser desenvolvidas por meio de práticas de argumentação (DRIVER; NEWTON; OSBORNE, 2000; BOZELLI; TEIXEIRA, 2019).

Portanto, a argumentação matemática em um contexto coletivo e colaborativo, contribui para o surgimento de oportunidades para os alunos assumirem um papel de protagonismo na comunicação, avaliação das suas ideias e aprendizagem da matemática (SOLAR et al., 2020).

Capítulo 5 – O argumento de prova no contexto da matemática

A busca pela "*verdade*" é considerada a essência de toda atividade científica, em especial, a "*verdade matemática*" constitui a essência da atividade do matemático (DOMINGUES, 2002).

Os critérios utilizados para se estabelecer a verdade ou a falsidade de uma proposição são diferentes nas ciências empíricas e nas ciências dedutivas. Em muitas atividades das ciências empíricas, como a Física, a Química e a Biologia, por exemplo, são empregues o método experimental, por meio do qual o conhecimento verdadeiro é obtido de forma indutiva e empírica com base na realização de um experimento, observações e testes. Por outro lado, na ciência dedutiva, como a matemática, é empregado, o método axiomático-dedutivo, por meio do qual, o conhecimento se torna verdadeiro quando passa pelo crivo do argumento de prova (demonstração). O referido argumento estabelece uma generalização sobre o objeto de estudo a partir de uma cadeia articulada e formalizada de raciocínios dedutivos.

Um aspecto que coloca a matemática em oposição à outras ciências no processo de estabelecimento da verdade é o uso da prova formal (demonstração) como instrumento de validação quando comparado as verdades obtidas na maioria das vezes em outras ciências por meio de experimentações, testes e observação (BICUDO, 2002).

5.1 A evolução dos critérios de prova (demonstração) ao longo dos séculos

De acordo com Hanna (1990) uma prova formal (demonstração) de uma determinada frase

> [...] é uma sequência finita de frases, de tal forma que a primeira frase é um axioma, cada uma das frases seguintes é um axioma ou foi derivada de frases anteriores, aplicando regras de inferência, e a última frase é a que deve ser provada (HANNA, 1990, p.6, **tradução nossa**).

No entanto, segundo Domingues (2002), a matemática se desenvolveu por vários milênios sem se valer do formalismo do método axiomático-dedutivo para o estabelecimento da verdade de uma proposição (frase). Ainda de acordo com este autor, o conhecimento matemático produzido pelos babilônios e egípcios, por exemplo, detinha como critério de confiabilidade a concordância com a realidade a que se destinava. Essa "concordância", portanto, assumia o ideário de "verdade matemática". De modo geral, o conhecimento, neste período, "*era o produto da evidência física, da tentativa e erro, da analogia ou do insight*" (DOMINGUES, 2002, p.56).

Há evidências, com base em registros escritos do papiro de Moscou, de que os matemáticos egípcios da época chegaram a exercitar a ideia de demonstração por meio de

deduções algébricas, "*embora talvez de maneira isolada e esporádica, e evidentemente sem os formalismos do método axiomático-dedutivo*". (DOMINGUES, 2002, p.57).

De acordo com Hanna (1990, p.6) os gregos foram os pioneiros em fazer "*uma distinção entre conteúdo de um argumento e uma estrutura formal baseada nas regras do pensamento independente do conteúdo*". Tanto Aristóteles quanto Platão tiveram visões diferentes sobre a gênese por traz destas regras formais de pensamento, entretanto, ambos reconheciam o poder e a utilidade dessas regras. (HANNA, 1990).

Segundo Domingues (2002), o caminho que levou ao surgimento do método axiomático é incerto e é muito provável que tenha tido início com o desenvolvimento da matemática na Grécia, possivelmente a partir dos estudos de Tales de Mileto (séc. VII a.C.) com a formulação das propriedades gerais das figuras geométricas.

De acordo com Araújo (2007, p.5) é atribuído a Tales de Mileto, um dos sete sábios da Antiguidade, o reconhecimento de precursor da organização dedutiva da Geometria. É atribuída a ele a demonstração dos cinco teoremas seguintes:

- Um ângulo inscrito num semicírculo é reto;
- Um círculo é bissectado por um diâmetro;
- Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais;
- Os pares de ângulos opostos formados por duas retas que se cortam são iguais;
- Se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado de um são iguais respectivamente a dois ângulos e um lado de outro, então os triângulos são congruentes.

Posteriormente a este período, as contribuições da escola pitagórica por volta de 532 a.C., teriam sido responsáveis pela criação da matemática pura a partir do estudo de problemas abstratos imprimindo à matemática um caráter ainda mais dedutivo (DOMINGUES, 2002). Ainda de acordo com este autor, as deduções e generalizações produzidas pelos pitagóricos eram em sua maioria oriundas de casos particulares e sem nenhuma base axiomática pré-estabelecida.

Faltava à época, portanto, um "*método postulacional, com vistas à criação de sistemas matemáticos os mais amplos e confiáveis possíveis*" (DOMINGUES, 2022, p.59). Em outras palavras, faltava uma estrutura preliminar, composta por noções básicas, postulados e definições que pudessem ser utilizadas para estruturar e fundamentar a produção de provas (demonstrações).

A proposta de um método postulacional, surgiu então somente por volta de 300 a.C. com a publicação da obra "*Os Elementos*" de Euclides, um compêndio de toda a matemática básica grega da época.

> No modelo dedutivo utilizado por Euclides, possivelmente inspirado em Aristóteles, não há conceitos primitivos. Todos os objetos geométricos a serem estudados, mesmo os mais intuitivos, são explicitamente definidos. Numa proposta dessa natureza, obviamente as primeiras definições têm de ser dadas em termos de conceitos não apresentados antes. (Por exemplo, Euclides definia *ponto* como "aquilo que não tem partes".) Efetivamente, o objetivo de Euclides não era apenas apresentar formalmente os objetos iniciais do seu discurso mas também garantir que eles correspondiam a uma realidade ligada à sua experiencia e expectativa do leitor. Os postulados que se seguiam, por sua vez, tinham um caráter de auto-evidência (salvo uma notável exceção). Por essas razões, as axiomáticas como a usada por Euclides nos Elementos, calcadas de alguma maneira na evidência e na experiência, vieram a ser conhecidas como axiomáticas materiais. (DOMINGUES, 2002, p. 59).

A obra era composta por nada menos que 465 proposições demonstradas utilizando o modelo de método axiomático citado anteriormente. Tratava-se, portanto, do primeiro grande testemunho do poder do método dedutivo na matemática. A referida obra foi considerada por cerca de dois mil anos (até o final do século XIX) como um modelo de excelência de emprego do método axiomático-dedutivo (DOMINGUES, 2002).

Hanna (1990) explica que o desenvolvimento alcançado pela matemática, desde a geometria dos gregos até os novos sistemas matemáticos que surgem no final do século XIX contribuíram efetivamente para a separação entre o conteúdo e a forma do argumento contido na prova.

No final do século XIX o paradigma euclidiano passou por um reexame profundo abrindo espaço para o surgimento das geometrias não euclidianas a partir da idealização de outros espaços métricos e da criação das álgebras não convencionais. Este período foi marcado por um substancial aumento do rigor axiomático de sistemas matemáticos diversos numa tentativa de reduzir a prova (demonstração) ao uso da evidência intuitiva. A demonstração em Geometria, por exemplo, afastava-se, portanto, de ideias intuitivas, ou fatos tidos como óbvios acerca de conceitos conhecidos intuitivamente. Essa nova visão por traz da reformulação do conceito de demonstração formal, ganhou destaque nos trabalhos do matemático G. Frege (1848-1925). (DOMINGUES, 2002).

O século XX por sua vez, inaugurou um período, onde a matemática formal encontrou solidez na axiomatização da teoria de conjuntos e na dedução lógica (HANNA; DE VILLIERS, 2008). A visão formalista da matemática começou a prevalecer soberanamente e as

demonstrações cultivadas em larga escala eram repletas de abstrações e generalizações sem, contudo, exibir um sentido de utilidade (DOMINGUES, 2002).

Ainda de acordo com Domingues (2002) é nesse contexto, de domínio do formalismo matemático, que surge o computador como uma ferramenta de apoio aos trabalhos de demonstração, causando assim constrangimentos aos matemáticos puros por revelar certas limitações do formalismo rigoroso. Um exemplo disso foi a contribuição dada pelo computador para a primeira demonstração dada à conjectura[32] das 4 cores. Este último episódio, por exemplo, mostrou o quanto os métodos matemáticos de prova formal por mais apurados e estruturados que sejam não são capazes de tudo, eles deixam vazios que precisam ser preenchidos pela argúcia dos matemáticos bem como por métodos mais amplos de busca pela verdade – como por exemplo o computador. (DOMINGUES, 2002).

5.2 A prova numa perspectiva lógica e formal no campo da matemática

Dentro do campo da matemática, um sistema axiomático é qualquer conjunto formado por uma quantidade finita de axiomas que definem uma determinada teoria. Estes axiomas constituem as verdades mais elementares desta teoria e quando são ligados por meio de conjunções lógicas resultam em teoremas matemáticos, ou seja, novos resultados dessa teoria (HANNA, 2000; BICUDO, 2002; DOMINGUES, 2002).

Um sistema formal, por exemplo, a grosso modo, refere-se a parte sintática de um sistema axiomático e de modo preciso, pode ser melhor explicado em três partes (BICUDO, 2002).

A primeira parte de um sistema formal é sua **linguagem** e para utilizá-la corretamente é necessário conhecer os seus **símbolos**. Ainda de acordo com o autor, toda sequência finita de símbolos é uma **expressão** da linguagem desse sistema formal. Dentre as expressões de linguagem, um subconjunto delas, se destaca como sendo as **fórmulas** de linguagem. Uma linguagem, portanto, é completamente especificada, quando estiverem discriminados seus símbolos e fórmulas. A segunda parte de um sistema formal consiste nos seus **axiomas**, sendo exigido que cada axioma seja representado por uma fórmula de linguagem do sistema formal. Na terceira e última etapa, são utilizadas **regras de inferência (dedução)** que permitem obter teoremas a partir dos axiomas existentes. Cada regra de inferência afirma que, sob certas condições, uma fórmula (**conclusão**/**tese**) pode ser inferida de certas outras fórmulas (**hipóteses**).(BICUDO, 2002).

[32] Uma questão em aberto desde 1852, que diz que é possível cobrir o mapa mundi com apenas 4 cores, sem que duas cores sejam encontradas lado a lado.

No contexto que envolve um sistema axiomático conforme o que foi descrito anteriormente, uma "prova formal em matemática" (demonstração)

> [...] é uma sequência finita de fórmulas, em que cada uma seja ou um axioma, ou seja, uma conclusão de uma regra cujas hipóteses precedam essa fórmula na sequência dada. Se A for a última fórmula em uma demonstração P, diremos que P é uma DEMONSTRAÇÃO de A. (BICUDO, 2002, p.83).

A "prova formal matemática" (demonstração), é o tipo de prova que é aceita pela comunidade científica da matemática e para tanto ela deve possuir uma estrutura específica que segue regras bem definidas e formalizadas pelos matemáticos (HANNA, 1990).

> [...] consiste naturalmente, de cadeias explícitas de inferência seguindo regras acordadas de dedução, e muitas vezes é caracterizada pelo uso de notação formal, sintaxe e regras de manipulação. No entanto, claramente, para os matemáticos a prova é muito mais do que uma sequência de passos corretos; é também e, talvez o mais importante, uma sequência de ideias e insights com o objetivo da compreensão matemática – especificamente, entendendo por que uma reivindicação é verdadeira. (HANNA, 2008, p.330, **tradução nossa**).

A prova formal matemática, é considerada "*como uma – dentre as várias - forma de argumentação acerca do objeto matemático*". (GARNICA, 2002, p.96). Provar, significa, portanto, argumentar pela aceitação da validade de uma proposição a partir da validade de outras proposições já demonstradas. Ainda de acordo com Garnica (2002) a prova formal matemática "*é o fio condutor de seu regime de verdade, seu estilo, o que estabelece em última instancia, sua política geral de verdade*". (GARNICA, 2002, p.98).

A abordagem formal da prova foi desenvolvida "*para eliminar a necessidade de recorrer à prova intuitiva e ao julgamento humano, ambos vistos como fontes potenciais de erro grave*". (HANNA, 1990, p.6).

Uma Prova (demonstração) que está definida em um sistema formal, serve, de fato, de modelo para as demonstrações matemáticas (BICUDO, 2002) e o seu nível de formalismo, depende essencialmente da respectiva quota-parte de linguagem natural e linguagem simbólica (BALACHEFF, 1987).

A prova formal matemática (demonstração), portanto, está inserida em um domínio indeterminado quanto ao conteúdo, mas determinado quanto a forma. O rótulo "prova matemática", está relacionado ao fato de que as demonstrações são modeladas em um sistema formal (vocabulário e regras sintáticas conhecidas), antes de serem passíveis de tratamento matemático (SILVA, 2002). Este tratamento matemático, segundo o autor, refere-se "*as cadeias*

finitas logicamente articuladas de formas declarativas no contexto de um sistema formal determinado" (SILVA, 2002, p.76).

Neste contexto, Silva (2002), enfatiza três aspectos importantes relacionados a função da prova formal em matemática (demonstração): o lógico-epistemológico, o retórico e o heurístico.

Em relação ao aspecto lógico-epistemológico, compete a prova matemática (demonstração) a função de estabelecer a veracidade relativa de um enunciado (tese). A verdade é obtida a partir de um encadeamento lógico de ideias representadas por símbolos e objetos matemáticos em uma sequência ordenada de proposições regidas por relações de dependência ou consequência. Nesse sentido, a veracidade da tese, depende essencialmente da veracidade dos enunciados pressupostos na demonstração (SILVA, 2002).

No que tange o aspecto retórico, a demonstração tem a função de convencer alguém sobre a veracidade da tese. Isso ocorre sempre que alguém aceite os pressupostos dos quais essa demonstração depende. Para que uma demonstração possa de fato desempenhar o seu papel retórico ela dever ser necessariamente finita, uma vez que nossa faculdade de compreensão é finita, não havendo assim compreensão sem convencimento (SILVA, 2002). Em outras palavras,

> Somos, como seres humanos, essencialmente finitos, na extensão de nossas vidas e na capacidade de nossa compreensão. Isso implica que nenhuma demonstração infinita pode ser compreendida, e assim cumprir sua função retórica (SILVA, 2002, p.75).

Os aspectos, lógico e retórico, apesar de relacionados são independentes entre si, ou seja, pode existir uma situação em que uma demonstração que sustente logicamente a verdade não ofereça convicção (convencimento) a alguém pelo fato de ser muito longa e difícil de acompanhar. Da mesma forma, é possível também imaginar uma outra situação em que a demonstração é capaz de convencer alguém da verdade ainda que está não conduza logicamente a verdade definitiva. Isso pode ocorrer devido a algum erro de conexão lógica que não conduz a verdade e este erro acaba passando por desapercebido por aquele que se sentiu convencido pela veracidade da proposição. Para além disso, a dependência da tese por pressupostos injustificados também corrobora para ilustrar esta segunda situação. Ainda de acordo com o autor, ainda que independentes entre si, os aspectos lógico e retórico das demonstrações podem conviver em harmonia (SILVA, 2002).

Por fim, no âmbito do aspecto heurístico, a demonstração tem uma função heurística na medida em que é indutora (catalizadora) de descobertas matemáticas conforme é bem descrito no livro de Provas e refutações de Imre Lakatos (1976). Quando uma demonstração abre espaço

a contraexemplos, uma demonstração pode induzir ao progresso matemático. O aspecto heurístico da demonstração conforme aponta Lakatos depende essencialmente da incorreção lógica da demonstração, não sendo ela, portanto, um aspecto independente como os outros aspectos já citados (SILVA, 2002).

Em meio a essa diversidade de aspectos, a demonstração é mais comumente tratável por seu aspecto lógico (SILVA, 2002).

Segundo Garnica (2002), a matemática formal, acadêmica

> [...] na prática segundo a literatura disponível, caracteriza-se como uma Matemática platônica, o modo de argumentação por excelência, é a prova rigorosa ou demonstração formal, envolta em paradoxos, mas com o objetivo de firmar, definitivamente, a veracidade das afirmações matemáticas. Dirige-se mais à prática profissional e científica de justificação de conhecimento matemático, devendo ser relativizada e mais estudada quanto a sua forma de utilização em sala de aula.(GARNICA, 2002, p.97).

Para Garnica (2002), a matemática profissional, ou matemática acadêmica, é uma dentre as várias matemáticas existentes, ou seja, constitui uma dentre as várias formas de apreensão do mundo, o que a configura como uma dentre as várias Etnomatemáticas[33] existentes. Ainda de acordo com este autor, a partir daí, as classificações das formas de argumentação (prova) podem ser revistas, podendo a prova de conteúdos matemáticos ser vista sob diferentes perspectivas[34] (campo da técnica x campo da crítica) e de modos diferenciados, ambos coexistentes em sala de aula e utilizados para o estabelecimento de justificações.

5.3 A prova no contexto da educação matemática em sala de aula

Neste tópico discutiremos o discurso da Educação Matemática no que diz respeito à prova em Matemática. A ideia, portanto, é relativizar posições classicamente hegemônicas levando em consideração o conceito de etnoargumentação (GARNICA, 2002) aplicado ao contexto de sala de aula.

A Matemática da Educação Matemática, em seu regime de verdade, "*é uma outra Matemática, radicalmente distinta daquela vista sob a perspectiva da prática profissional dos matemáticos*". (GARNICA, 2002, p.99).

---

[33] A Etnomatemática é o conjunto de formas de matemática que são próprias de grupos culturais. Esta é a definição do professor Ubiratan D'Ambrosio, pioneiro nas pesquisas sobre Etnomatemática.

[34] Os campos técnico e crítico apresentam concepções divergentes sobre a verdade matemática e sobre os terrenos nos quais estão situadas essas duas distintas leituras: a técnica, no campo da Matemática e a crítica, no campo da Educação Matemática. (GARNICA, 2002).

> A Educação Matemática concebendo a própria Matemática (acadêmica, formal) como uma dentre as Etnomatemáticas existentes, atribui significados à "Matemática", qualquer que seja ela. De uma forma geral, atribui significados às Etnomatemáticas. Tais significados [...] são mais amplos que os da própria Matemática (formal, profissional, acadêmica), pois ao discurso da Educação Matemática cabe tratar não só daquela Matemática desenvolvida na prática científica (cuja comunidade é formada em situações de ensino e aprendizagem de matemática, "objeto" da Educação Matemática), mas às várias Etnomatemáticas, visando àquele que, de modo genérico, chamamos "aprendiz". Constitui-se, portanto, um outro regime de verdade, o da Educação Matemática, no qual as concepções acerca das demonstrações (tidas nesse regime como Etnoargumentações[35]) são relativizadas e tomadas de modo muito mais amplo que na política geral de verdade da Matemática profissional. (GARNICA, 2002, p.98).

Para Lourenço (2002) a forma de se argumentar provando resultados de maneira puramente formal deve ser na medida do possível revista, sobretudo quando se trata do ensino da matemática, uma vez que essas demonstrações se apresentam destituídas de significado para muitos estudantes. Nesse contexto, a prova formal satisfaz mais os anseios da comunidade de matemáticos e não convence a maioria dos estudantes, que por "*não, entendê-las, passa a decorar a sequência de palavras, traços e argumentos e daí a repulsa pela matemática*". (LOURENÇO, 2002, p.107).

Ainda de acordo com este autor traduzir o pensamento matemático em

> [...] fórmulas, símbolos e relações demonstráveis é tarefa do matemático e talvez seja uma tarefa difícil, mas conhecer a matemática ou ter dela uma ideia significativa não é sinônimo de dominar sua parte formal e seus algoritmos. (LOURENÇO, 2002, p.102).

De acordo com Hanna (1990)

> Os matemáticos admitem livremente que uma prova pode carecer de convicção quando se mostra válida apenas em virtude de sua forma, sem considerar o seu conteúdo. E quando uma nova ideia matemática é de fato aceita, muitas vezes é o significado do que é provado, e não a exatidão da prova, que tem o maior peso. A aceitação de um teorema pelos matemáticos praticantes é um processo social que é mais uma função de compreensão e de significado do que de prova rigorosa. (HANNA, 1990, p.8).

Em outras palavras, os matemáticos não veem as provas apenas como derivações sintáticas, ou seja, "*sequências de frases, cada uma das quais é um axioma ou a consequência*

[35] Etnoargumentações – "demonstrações" em sentido amplo – tem, sempre, a função de convencer, tomando "conhecimento", aqui como a negociação que se estabelece para a atribuição de significados. (GARNICA, 2002, p.98).

imediata de frases anteriores pela aplicação de regras de inferência". Pelo contrário, as provas são vistas pelos matemáticos como sendo "*principalmente conceituais, sendo a abordagem técnica específica secundária*". (HANNA, 2000, p.7).

Para Hanna (1990) "*uma prova é valorizada por trazer à tona relações matemáticas essenciais ao invés de meramente demonstrar a exatidão de um resultado*". (HANNA, 1990, p.9). No contexto da sala de aula, a autora preconiza o uso da prova de modo a propiciar aos alunos a compreensão (significado) da matemática e não somente a validação de um resultado. Dessa forma, a aceitação de uma prova em sala de aula deve levar em consideração mais a compreensão e o estabelecimento de significados matemáticos (conteúdo) ao invés do emprego do rigoroso processo de demonstração (forma) para o estabelecimento da verdade. Uma prova tem valor quando leva à compreensão e ajuda os alunos a pensar mais claramente e eficazmente sobre a matemática. (HANNA, 2000).

Dessa forma, na Educação Matemática, o ensino de prova deve se afastar do uso excessivo da prova formal e passar a "*levar em conta o papel da prova como meio de comunicação, e em reconhecimento dos processos sociais que desempenham um papel tão crucial na aceitação pelos matemáticos de um novo resultado*", dando maior ênfase assim ao conceito de prova como "argumento convincente" e a busca por formas alternativas de demonstrar a validade dos resultados. (HANNA, 1990, p.9). Em outras palavras, a autora defende maior ênfase na adoção de critérios sociais para aceitação de uma verdade matemática em detrimento dos critérios puramente formais. Para ela a prova é vista como um argumento que deve ser ao mesmo tempo válido e explicativo.

Hanna (1990) diferencia a "prova que prova" da "prova explicativa" da seguinte forma,

> Uma prova que prova apenas que um teorema é verdadeiro; ela fornece apenas razões probatórias. [...] uma prova que explica, por outro lado, também mostra porque um teorema é verdadeiro; fornece um conjunto de razões que derivam do próprio fenômeno. [...] uma prova que prova pode se basear em indução matemática ou mesmo em considerações sintáticas. Mas uma prova que explica deve fornecer uma fundamentação baseada nas ideias matemáticas envolvidas, as propriedades matemáticas que fazem com que o teorema matemático seja verdadeiro. (HANNA, 1990, p.10).

A seguir vamos exemplificar esta diferença. Considere o seguinte problema: Provar que a soma dos primeiros n inteiros positivos, $S(n)$, é igual a $\frac{n(n+1)}{2}$.

Um exemplo de prova que prova e que não tem o poder explicativo é a prova por indução abaixo:

Para $n = 1$, a afirmação é verdadeira.

Assumimos que a afirmação seja verdadeira para um valor de $n = k$ arbitrário, ou seja $S(k) = \frac{k(k+1)}{2}$.

Então considere: $S(k+1) = S(k) + (k+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Portanto a afirmação é verdadeira para $k+1$ se for verdadeira para k. Pelo teorema da indução, a afirmação é verdadeira para todos os n.

Para Hanna (1990) a prova por indução é um tipo de prova probatória, no entanto, não explica por que a soma dos primeiros n inteiros positivos, $S(n)$, é igual a $\frac{n(n+1)}{2}$ ou que propriedade característica dessa soma é responsável por gerar o resultado $\frac{n(n+1)}{2}$.

Por outro lado, um exemplo de prova que prova e que também é um tipo de prova explicativa é a prova de Gauss exibida abaixo:

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 \ldots + \ldots + (n-2) + (n-1) + n$$

$$S = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + \ldots + 4 + 3 + 2 + 1$$

Somando as duas equações anteriores teremos:

$$2S = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) = n(n+1)$$

Logo, $S = \frac{n(n+1)}{2}$.

Neste último tipo de prova legítima (prova que prova), sem apego ao rigor formal, a explicação é capaz de trazer à tona a mensagem matemática da proposição. A ideia, portanto, segundo Hanna (1990), é aproveitar o potencial pedagógico deste tipo de prova em sala de aula, cabendo ao professor, substituir uma prova do tipo não explicativa (prova por indução por exemplo) por outra igualmente legítima, que tem poder explicativo (prova de Gauss). O termo explicar é utilizado quando a prova revela e faz uso das propriedades matemáticas (caracterizadora de uma entidade ou estrutura mencionada no teorema) que a motivam, ou seja, o foco da prova explicativa é a compreensão, e não o mecanismo dedutivo. (HANNA, 1990; HANNA, 2000).

Ambas as provas apresentadas são convincentes, no entanto, verifica-se que nem toda prova convincente é explicativa. Na prova por indução, por exemplo, pode-se estar convencido de que uma afirmação é verdadeira sem saber por que é verdadeira (HANNA, 1990).

Assim, não haverá infidelidade na prática da matemática

> [...] se na educação matemática nos concentrarmos o máximo possível em boas explicações matemáticas, destacando para os alunos em nossa prova de teorema as importantes ideias matemáticas que levem à sua verdade. (HANNA, 1990, p.13, **tradução nossa**).

A melhor prova, portanto, "*é aquela que também ajuda a compreender o significado do teorema a ser provado: ver não só que é verdade, mas também porque é verdade*". (HANNA, 2000, p.8).

Na Educação Matemática, portanto, deve-se valorizar também a "prova através do raciocínio" (que envolve investigações) quanto a "prova através da lógica" (SIMPSON, 1995; HANNA, 2000).

> O primeiro é "estranho" aos estudantes [...], uma vez que não tem qualquer ligação com sua estrutura mental existente e, portanto, só pode ser dominado por uma minoria. [...] o segundo apela ao aprendiz "natural", no entanto, porque encarna um argumento heurístico, e por isso é acessível a uma maior proporção de estudantes. (HANNA, 2000, p.10, **tradução nossa**).

Nesse contexto, o raciocínio[36] e a justificação também devem ser valorizados por meio da argumentação informal de modo a resgatar uma outra face da matemática, como uma ciência que enfatiza a heurística e a abordagem indutiva. Nesse caso, uma prova indutiva (prova por exemplo) é um tipo de prova matematicamente válida para uma situação de refutação por contraexemplo e inválida em situações de apoio/exemplo para uma declaração universal. Uma prova genérica, por sua vez, tem alto potencial didático em sala de aula para validar e explicar uma propriedade (HANNA, 2000; HANNA; DE VILLIERS, 2008). É sempre válido lembrar que os raciocínios indutivos são *"formas mais frequentes de produção justificativas semiformais e não-formais e, de outro, a exigência de deduções*" está mais ligado à produção de justificativas formais. (GARNICA, 2002, p.96).

Para Bicudo (2002) as descobertas das verdades matemáticas, e sua apreensão pelo entendimento dos alunos, ocorre mais "substantivamente" e muito menos "formalmente" (BICUDO, 2002, p.84, citando a obra "Das Continuum" de Hermann Weyl).

Considerando a prova como um tipo de argumentação no contexto da Educação Matemática, ela pode então se prestar a dois objetivos pedagógicos e distintos: explicar o porquê de uma conjectura é válida e convencer alguém de que a conjectura é plausível. (HANNA, 2000; PEDEMONTE, 2002). São chamadas de argumentações construtivas aquelas provas que contribuem para a afirmação de uma conjectura e argumentações estruturantes, aqueles tipos de provas que justificam a plausibilidade de uma conjectura (PEDEMONTE, 2002; FIALLO; GUTIÉRREZ, 2017).

[36] Utilizamos a palavra raciocínio "para designar a atividade intelectual, em sua maioria não explícita, de manipulação de informações para produzir novas informações a partir de dados". (BALACHEFF, 1987, p.2).

5.4 Os diferentes tipos e níveis de prova para o contexto de sala de aula

Os tipos e níveis de prova apresentados "*envolve a noção de prova do ponto de vista das práticas matemáticas dos alunos e não do lógico*" (BALACHEFF, 1988, p.216). Trata-se de uma abordagem experimental onde o autor propôs observar de maneira mais simples e cuidadosa os processos de prova utilizados pelos alunos na resolução de um problema, especialmente, "*como os alunos chegam a sua convicção sobre a validade da solução proposta*". (BALACHEFF, 1988, p. 216).

No que diz respeito a aprendizagem matemática, a abordagem situacional e cognitiva proposta por Balacheff (1987;1988), demarca as várias etapas desde as provas pragmáticas até as provas intelectuais. As dificuldades para passar de uma etapa para outra estão

> [...] ligadas à passagem de uma matemática "prática", caracterizada pela ação e observação nos primeiros anos do ensino secundário, para uma matemática mais teórica, caracterizada precisamente pela introdução da demonstração. (BALACHEFF, 1987, p.1, **tradução nossa**).

Durante o processo de elaboração de provas, Balacheeff (1987) destaca que "*a produção de uma prova exige que os interlocutores sejam tidos em conta para finalmente construir um sistema de validação comum, pelo menos localmente, com referência às propostas debatidas*". (BALACHEFF, 1987, p.9).

5.4.1 As provas pragmáticas e as provas intelectuais

Balacheff (1987;1988) categoriza os tipos de provas produzidas por alunos em sala de aula em "provas pragmáticas" e "provas intelectuais".

As provas pragmáticas (empíricas) são aquelas que recorrem a fatos ou ações reais sobre o objeto de estudo (BALACHEFF, 1988).

> As provas pragmáticas relacionam-se a um saber prático e envolve argumentações cujas justificativas são de natureza empírica e resultante de um processo de observação e ação direta do aluno sobre o seu objeto de estudo. A validação de uma proposição neste tipo de prova, falha em seu caráter geral, uma vez que a justificação se dá a partir de uma explicação baseada em casos particulares (RODRIGUES e MONTEIRO, 2021, p.146).

A comunicação destas provas é feita por ostentação (mostração). As operações e os conceitos que elas mobilizam nos alunos consistem em atos: "a prova..., funciona!". A linguagem não é a ferramenta fundamental para a expressão do conhecimento. O conhecimento é atestado pela ação e não essencialmente pelo discurso. A linguagem para este tipo de prova é expressa na linguagem de familiaridade - a linguagem cotidiana do aluno. (BALACHEFF, 1987, p.13).

São exemplos de provas pragmáticas: A substituição direta de valores numéricos em uma equação para fins de verificação, figuras e desenhos para retratar casos particulares referente a uma propriedade mais geral, movimentação de gráficos e objetos de aprendizagem dinâmicos na tela do computador, como também o que Balacheff (1987) chama de "teoremas em ação" que não foram comprovados, mas testados pela prática.

Por sua vez as provas intelectuais (conceituais) são "*aquelas que não envolvem ação e repousam sobre formulações das propriedades em questão e sobre as relações entre elas*" (BALACHEFF, 1988, p.217).

> [...] relacionam-se a um saber racional que envolve argumentações cujas justificativas resultam de ações interiorizadas que fluem do pensamento, formulações abstratas e sequencias de raciocínio que controlam toda a generalidade da situação. São provas que se constituem em discursos lógico-dedutivos em torno da caracterização do objeto de estudo e suas relações. (RODRIGUES e MONTEIRO, 2021, p.146).

A produção de provas intelectuais "*requer, em particular, a expressão linguística dos objetos sobre os quais se baseiam as suas relações*" (BALACHEFF, 1987, p.12). Ainda de acordo com este autor, neste tipo de prova, "*o orador deve assumir uma posição de teorista na qual o conhecimento (até então atuado) se torna objeto de reflexão, discurso e até mesmo debate*". (BALACHEFF, 1987, p.14).

Para Balacheff (1988) a passagem da prova pragmática à prova intelectual

> [...] requer uma posição alterada: o orador deve distanciar-se da ação e dos processos de solução do problema [...]. O conhecimento, até agora atuado, torna-se objeto de reflexão, de discurso e mesmo de discordâncias. A linguagem do quotidiano, cujo suporte principal é a linguagem natural, permite algum movimento nessa direção. Mas deve haver mais do que isso para produzir provas formais. A linguagem deve tornar-se uma ferramenta para deduções lógicas e não apenas um meio de comunicação (BALACHEFF, 1988, p.217, **tradução nossa**).

A elaboração desta linguagem funcional, segundo Balacheff (1988, p.217-218), requer em particular:

- Descontextualização: Trata-se de uma renúncia ao objeto em particular e o acesso a uma classe representativa e genérica destes objetos;
- Despersonalização: Separação da ação entre quem age e de quem a ela dever ser independente;
- Destemporalização: Desacoplando do tempo e duração: Trata-se de um processo fundamental para a passagem do mundo das ações para o das relações e operações.

Em resumo, a evolução das provas pragmáticas para provas intelectuais e destas para a demonstração é marcada não só por uma evolução das características da linguagem, mas também pelo do estado e natureza do conhecimento. A linguagem, em especial, não é um meio de comunicação, mas sim uma ferramenta para realizar deduções lógicas, o que é característico do processo dedutivo (BALACHEFF, 1987; 1988).

A prova pragmática "*é baseada em conhecimentos práticos que estão essencialmente envolvidos na ação, enquanto a prova intelectual requer que esse conhecimento possa ser tomado como um objeto de reflexão*" oriundo da razão (BALACHEFF, 1987, p.15). Por sua vez a demonstração também requer um estatuto particular para este conhecimento. Ela se baseia-se num corpo de conhecimentos "*altamente institucionalizado, um conjunto de definições, teoremas e regras de dedução, cuja validade é socialmente partilhada*" (BALACHEFF, 1987, p.15).

Para Balacheff (1987;1988) a transição da prova pragmática para a prova intelectual, incluindo a demonstração (prova formal) repousa em três polos que se interagem fortemente: O polo do conhecimento (natureza do conhecimento), o polo da língua (formulação) e o polo da validação (tipos de racionalidade de base para a prova) conforme ilustrado no quadro abaixo a seguir.

Quadro 16 - Caracterização hierárquica e relação entre os três polos

Natureza do conhecimento	Formulação	Validação
-Prático -O conhecimento como um objeto (conhecimento) - O Conhecimento teórico e reconhecido (conhecimento científico)	-Ostentação/mostração; -Linguagem de familiaridade; -Linguagem funcional -Formalismo ingênuo	-Prova pragmática (teoremas em ação); -Prova intelectual -Demonstração

Fonte: Adaptado de Balacheff (1987).

5.4.2 Os diferentes níveis de prova entre a prova pragmática e a prova intelectual

Da prova pragmática à prova intelectual, Balacheff (1987;1988) descreve cinco formas de validação reconhecidas como prova pelos seus produtores (alunos): empirismo ingênuo, experimento crucial, o exemplo genérico, a experiência mental e demonstração.

O empirismo ingênuo: constitui o nível mais elementar da hierarquia que envolve os tipos de prova pragmática (prova empírica). O modo de validação, ou afirmação da verdade, se dá através da ação, observação e teste de uma proposição para alguns poucos casos particulares

(geralmente selecionados sem critérios específicos). Nesse caso, o raciocínio indutivo realizado pelo aluno promove uma generalização imprópria ao se basear apenas no teste empírico de uma proposição. O empirismo ingênuo, portanto, é um meio rudimentar de realizar uma prova e constitui uma forma resistente à generalização, contudo, representa um primeiro passo no alcance da generalização (BALACHEFF, 1987;1988; RODRIGUES e MONTEIRO, 2021).

Exemplo - Situação típica de empirismo ingênuo

> [...] os alunos determinam experimentalmente que o número de diagonais de um certo pentágono é 5; modificam a forma do pentágono e conferem novamente a constatação inicial; daí concluem peremptoriamente que um hexágono tem 6 diagonais. (GRAVINA, 2001, p.66).

Experimento crucial: constitui o segundo nível da prova pragmática. Trata-se de um procedimento ou modo de validação onde logo de início o aluno tenta depreender uma generalização empírica. Neste nível de prova, o aluno realiza a verificação de uma proposição em uma instância (exemplo/caso) que ele considera mais complexa/especial. Depois que a proposição é verificada para este caso não tão particular, conclui-se que ela será verdadeira para todos os outros casos, ou seja, "*se funciona aqui, sempre funcionará*". (BALACHEFF, 1988, p.219). Nesse caso o aluno tem uma falsa ideia da generalização pelo fato de não considerar a situação pensada por ele como um simples caso particular.

Exemplo - Situação típica envolvendo experimento crucial

> [...] os alunos fazem experiência com um polígono de muitos vértices (uma imensa figura), buscando depreender generalização empírica, buscando a validação em outros casos particulares. (GRAVINA, 2001, p.66).

Nestes dois primeiros níveis de prova, segundo Balacheff, a linguagem apresentada pelo aluno pode envolver justificações informais (pouco elaboradas) expressas por meio do linguajar cotidiano ou por meio de cálculos empíricos, ilustrações, gráficos e figuras ambos fundamentados por ações experimentais. Ainda de acordo com o autor o experimento crucial pode ser considerado um meio de prova *"quando constitui a refutação de uma asserção*" (BALACHEFF, 1988, p.230).

Os dois primeiros níveis não estabelecem a verdade de uma proposição. São chamados de prova pragmática porque são reconhecidas dessa forma pelos seus produtores (alunos). (BALACHEFF, 1988).

Exemplo genérico: constitui um nível que marca a transição da prova pragmática para a prova intelectual.

> O modo de validação parte de um exemplo particular do objeto de estudo (um representante da classe) e por meio de operações e transformações realizadas neste objeto explicita-se as razões que validam a conjectura e justificam a sua generalidade. Se a validação constituir uma ação focada em um raciocínio único e exclusivamente voltado para o caso particular então este nível de prova se concentra na categoria de prova pragmática. Por outro lado, se o caso particular oferecer suporte para expressar um tipo de raciocínio generalizador, então, este nível de prova pertencerá à categoria de prova intelectual (RODRIGUES e MONTEIRO, 2021, p.147).

Nesse caso, envolvendo a transição da prova pragmática para a prova intelectual, o aluno elabora uma proposição geral a partir de um exemplo específico encarado como um representante de classe (o objeto nesse caso não está presente por si mesmo). Posteriormente, o aluno realiza operações e formulações mentais a partir deste exemplo (contém nome e ilustração de um de seus representantes), exibindo assim propriedades gerais. (BALACHEFF, 1987;1988). A dificuldade deste nível de prova

> [...] reside no fato de que os oradores precisam de estar de acordo quanto ao caráter genérico do exemplo utilizado e, portanto, de partilhar as mesmas concepções dos objetos em questão: caso contrário, a explicação que se desenvolve parecerá estar fundamentalmente ligada a um caso particular. (BALACHEFF, 1988, p.225).

A prova inclui, portanto, "*tentativas de transformar as propriedades observadas no exemplo em propriedades abstratas de toda a classe*". (FIALLO; GUTIERREZ, 2017, p.4).

Exemplo - Situação envolvendo exemplo genérico

> [...] os alunos utilizam o caso particular do hexágono para explicação, mas desprendem-se de particularidades, o que dá indícios de pensamento dedutivo: "num polígono com 6 vértices, em cada vértice temos 3 diagonais. Assim são 18 diagonais; mas como uma diagonal une dois pontos, o número de diagonais é 9. O mesmo acontece com 7 vértices, 8, 9...(GRAVINA, 2001, p.66).

Experiencia mental (prova matemática conceitual): constitui um dos níveis mais elevados de prova e está inserido na categoria de prova intelectual.

> O modo de validação é constituído de justificativas desprendidas de concretização e contextualização em um representante particular. O raciocínio argumentativo realizado por meio de operações e deduções flui por meio do pensamento que controla toda a generalidade da situação. Trata-se de um nível de prova onde ocorre construções cognitivas mais complexas, melhoria na estruturação do discurso e melhor encadeamento do raciocínio. (RODRIGUES e MONTEIRO, 2021, p.147).

De acordo com Balacheff (1987) é o momento em que o aluno passa a argumentar com maior fluência em linguagem natural e utilizando-a como ferramenta para a realização de deduções lógicas.

> [...] a justificação, que constitui a base da validação da proposta, se baseia numa análise das propriedades dos objetos em questão. Essas propriedades não são mais evidenciadas em instâncias, mas formuladas em sua generalidade. A ação é internalizada, invocada no discurso que explicita a prova. (BALACHEFF, 1988, p.226).

Consiste, portanto, em uma cadeia de declarações dedutivas organizadas com a ajuda de exemplos específicos, porém internalizados, ou seja, invoca uma ação internalizada. As operações, relações e articulação de conceitos e ideias matemáticas são realizadas mentalmente e desprovidas de qualquer tipo de concretização e implementação prática. (BALACHEFF, 1987).

Este nível de prova leva em consideração o conteúdo das ideias matemáticas utilizadas para validar uma proposição. Este tipo argumento de prova, não formal e também não rigorosa, está de acordo com o que Garnica (2002) chama de "etnoargumentação" para o contexto de sala de aula (GARNICA, 2002).

Exemplo - Situação envolvendo experiência mental

> [...] os alunos se desprendem do caso particular o que transparece na argumentação: "em cada vértice o número de diagonais é o número de vértices menos os dois vértices vizinhos; é preciso multiplicar isto que encontramos pelo número de vértices, porque em cada vértice parte o mesmo número de diagonais. Mas estamos contando cada diagonal duas vezes; o número de diagonais que procuramos se encontra dividindo por 2 e obtemos uma vez cada diagonal" (GRAVINA, 2001, p.66-67).

Demonstração (prova matemática conceitual formal): considerado um tipo especial de experiencia mental, devido a forma de raciocinar logicamente. Constitui também o nível mais elevado de prova e está inserido na categoria de prova intelectual. Trata-se de um nível de prova

> [...] mais complexa, uma vez que apresenta rigor e formalização na linguagem. [...] a demonstração é um tipo de argumentação, formal, que articula o uso de definições, teoremas e regras lógicas de dedução e que exprime uma validade socialmente compartilhada por toda a comunidade científica. (RODRIGUES e MONTEIRO, 2021, p.147).

Este nível de prova leva em consideração a estrutura lógica formal dos argumentos para validar uma proposição.

Para uma demonstração, podemos ter diferentes tipos de provas formais (direta, por indução, por contradição, analítica no sentido de Lakatos etc.) que devem ser diferenciadas pelos seus níveis de descontextualização, destemporalização e despersonalização, bem como pelo seu nível de formalização (ou seja, pela respectiva quota-parte de linguagem natural e de linguagem simbólica) (BALACHEFF, 1987; 1988).

Exemplo - Situação envolvendo prova formal

A formalização da prova apresentada no exemplo anteriormente, na medida em que se faça a transição da linguagem natural (semântica) para a linguagem matemática (sintaxe). Para além disso, o estabelecimento de premissas verdadeiras se faz necessário de tal modo que articuladas por meio de operações de deduções nos levará ao resultado válido.

De acordo com Balacheff (1988) para o exemplo genérico e a experiencia de pensamento, "*já não se trata de "mostrar" o resultado porque "funciona"; trata-se antes de estabelecer a natureza necessária da sua verdade, apresentando as razões. Trata-se de uma mudança radical no raciocínio dos alunos subjacente a estas provas*". (BALACHEFF, 1988, p.218).

Ainda de acordo com este autor estes diferentes tipos e níveis de prova são uteis para avaliar o progresso dos estudantes na prova de aprendizagem. Para transitar de um nível inferior para outro imediatamente superior os estudantes devem atingir um nível maior de internalização e descontextualização do raciocínio (BALACHEFF, 1988; FIALLO; GUTIERREZ, 2017).

O quadro a seguir sintetiza os tipos de prova do nível mais elementar ao mais complexo.

Quadro 17: Síntese

Tipo de prova	Nível de prova	Raciocínio
Prova Pragmática	Empirismo ingênuo	indutivo
	Experiência crucial	indutivo
Prova Pragmática ou Prova Intelectual	Exemplo genérico	Indutivo ou dedutivo
Prova Intelectual	Experiencia mental	presuntivo/dedutivo
	Demonstração	dedutivo

Fonte: autores (2022)

Nas provas pragmáticas, as explicações são advindas de ações. Por outro lado, as provas intelectuais, não dependem de ações sobre uma determinada representação, pelo contrário, as ações são interiorizadas e por meio de um discurso lógico-dedutivo o aluno passa a controlar toda a generalidade da situação e as relações em torno do objeto de estudo (BALACHEFF, 1987;1988).

Do ponto de vista didático, Balacheff (1988) considera a prova matemática conceitual menos formal do que a prova conceitual formal (demonstração). A primeira, leva em consideração o "conteúdo" para validar (BALACHEFF 1988) e explicar (HANNA, 1990) uma proposição, enquanto a segunda, leva em consideração apenas o aspecto "formal" para fins de validação de uma proposição.

O grande desafio para os educadores é fomentar o uso da prova no ensino da matemática não somente como método para certificar que algo é verdade, mas também porque é verdade. (HANNA, 2008).

No próximo capítulo será apresentado a metodologia do estudo.

Capítulo 6 - Metodologia: a pesquisa quantitativa e a pesquisa qualitativa no contexto do estudo

De acordo com Borba *et al*. (2006, p.10)

> As pesquisas atuais são, em linhas gerais, classificadas em duas grandes vertentes: pesquisa quantitativa e pesquisa qualitativa. Essencialmente, a primeira delas lida com grande número de indivíduos, recorrendo aos métodos estatísticos para a análise de dados coletados de maneiras diversas, inclusive entrevistas. Chamá-la de pesquisa estatística ou pesquisa positivista é ainda comum. A pesquisa qualitativa, também chamada de pesquisa naturalística, tem como foco entender e interpretar dados e discursos, mesmo quando envolve grupos de participantes. [...] ela depende da relação observador-observado e, como não é de se entranhar, surge na transição do século XIX para o século XX. A sua metodologia por excelência repousa sobre a interpretação e as várias técnicas de análise do discurso.

Ainda de acordo com estes autores, o termo quantitativo

> [...] tem a ver com o objetivo passível de ser mensurado. Ele carrega consigo as noções próprias ao paradigma positivista que destaca como pontos importantes para a produção da ciência a razão, a objetividade, o método, a definição de conceitos, a construção de instrumentos para garantir a objetividade da pesquisa. Embutida no seu significado está, também, a ideia de racionalidade entendida como quantificação.(BORBA *et al*., 2006, p.105).

Por outro lado, o temo qualitativo

> Engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões. O significado atribuído a essa concepção de pesquisa também engloba noções a respeito de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiências, como, por exemplo, da vermelhidão do vermelho, etc. Entende-se que a noção de rigor não seria aplicável a dados qualitativos, uma vez que a eles faltaria precisão e objetividade, dificultando ou impossibilitando a aplicação de quantificadores. (BORBA *et al*., 2006, p.106).

O estudo realizado pode ser classificado em sua maior parte na vertente descrita como pesquisa qualitativa, no entanto, alguns dados coletados numa etapa preliminar e exploratória, conforme apresentado no capítulo 1, por meio de um estudo bibliométrico, permite classificar esta etapa isolada do estudo na vertente de pesquisa quantitativa.

Considerando que o foco da pesquisa está direcionada a vertente qualitativa, Bogdan e Biklen (1994, p. 47-51) apresentam uma boa caracterização para este tipo de pesquisa:

1. Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal;
2. A investigação qualitativa é descritiva;

3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos;
4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva;
5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa.

São estas características, dentre outras, que permeiam o presente estudo.

De acordo com Bastos e Keller (1995, p.53) a "*pesquisa científica é uma investigação metódica acerca de um determinado assunto com o objetivo de esclarecer aspectos do objeto em estudo".*

Envolve, portanto, um processo de estudo, que consiste na busca disciplinada de compreensões acerca do objeto de estudo, problema ou questões que inquietam o pesquisador perante algo que já se sabe ou que se deseja aprofundar (FIORENTINI; LORENZATO, 2006).

O objeto de estudo dessa investigação compreende especificamente "**situações de situação de argumentação coletiva envolvendo alunos ingressantes em um curso de formação de professores em matemática do IFSULDEMINAS, Campus Passos diante de uma atividade de investigação envolvendo sistemas de numeração não decimal"**.

A ideia de abordar a temática da "argumentação" neste estudo, surgiu devido ao interesse do pesquisador em aprofundar melhor o seu conhecimento sobre o assunto. A motivação nasceu a partir das profícuas reflexões realizadas sobre a temática no ensino de Ciências durante as aulas de Análise do Discurso ministradas pelo professor Dr. Marco Aurélio Alvarenga Monteiro junto ao programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência. Foi nesse contexto que surgiu o anseio do pesquisador de compreender melhor o tema, dentro do contexto do ensino da matemática, haja visto que o tema "argumentação" é apontado pela BNCC (Base Nacional Comum Curricular) como uma dentre as dez competências básicas para a formação integral do aluno na Educação Básica.

Para além disso, o pesquisador na condição de docente do referido curso de licenciatura em matemática, verificou que o projeto pedagógico do curso (PPC Matemática - IFSULDMEINAS, Campus Passos) não mencionava nada a respeito do tema argumentação. Da mesma forma, não citava nada a respeito das diferentes concepções de um argumento de prova bem como as competências e habilidades associadas ao processo argumentativo, assuntos que consideramos de suma importância para serem abordados, explorados e refletidos na formação do professor que ensina matemática.

No âmbito deste estudo, portanto, com foco na abordagem qualitativa de pesquisa, optamos pela realização de um estudo de caso uma vez que se deseja estudar, investigar e

compreender algo singular, que tenha valor em si mesmo (FIORENTINI; LORENZATO, 2006; LUDKE; ANDRE, 1986).

6.1 O estudo de caso enquanto abordagem qualitativa

O estudo de caso no contexto da pesquisa educacional refere-se ao estudo de um caso, seja ele simples e específico ou complexo e abstrato (LUDKE; ANDRE, 1986).

> O caso é sempre bem delimitado, devendo ter seus contornos claramente definidos no desenrolar do estudo. O caso pode ser similar a outros, mas é ao mesmo tempo distinto, pois tem um interesse próprio, singular (LUDKE; ANDRE, 1986, p.17).

O caso, constitui-se, portanto, em uma unidade dentro de um sistema mais amplo (GOODE; HATT, 1968; LUDKE; ANDRE, 1986).

O interesse pelo estudo de caso "*incide naquilo que ele tem de único, de particular, mesmo que posteriormente venham a ficar evidentes certas semelhanças com outros casos ou situações*" (LUDKE; ANDRE, 1986, p.17).

No contexto do presente estudo, o caso escolhido para ser investigado refere-se a "**situações de argumentação coletiva envolvendo alunos ingressantes em um curso de formação de professores em matemática do IFSULDEMINAS, Campus Passos durante a realização de uma investigação numérica**".

A escolha do referido caso se deve ao fato de que durante o período que estava cursando o doutorado, o pesquisador imerso no contexto da pesquisa sobre o assunto, sob a orientação do prof. Dr. Marco Aurélio Alvarenga Monteiro, desenvolveu um modelo teórico metodológico (RODRIGUES; MONTEIRO, 2021) para avaliar a qualidade de um argumento matemático utilizado para fins de justificação e validação. O modelo teórico foi publicado em um periódico internacional, contudo, o referido modelo ainda não havia sido testado em uma situação prática de argumentação coletiva em sala de aula. É neste contexto de pesquisa, portanto, que o nosso objeto de estudo constitui um caso único e singular. É por meio dele que situações de argumentação coletiva serão investigadas a partir da exploração do modelo produzido pelos pesquisadores. A pesquisa pretende dessa forma levantar subsídios teóricos e metodológicos para compreender, aprimorar e avaliar a prática da argumentação e prova em sala de aula. Para tanto a investigação envolverá a exploração do modelo teórico desenvolvido por Rodrigues e Monteiro (2021).

O estudo, neste contexto, visa compreender em detalhes o fenômeno que envolve a argumentação enquanto processo e produto a partir da análise de três situações de argumentação

envolvendo alunos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática do IFSULDEMINAS, Campus Passos durante uma investigação numérica.

Por meio da exploração deste caso em particular, informações relativas ao processo argumentativo serão expostas, possibilitando novas compreensões, reflexões.

Para Fiorentini e Lorenzato (2006),

> O caso não significa apenas uma pessoa, grupo de pessoas ou uma escola. Pode ser qualquer "sistema delimitado" que apresenta algumas características singulares e que fazem por merecer um investimento investigativo especial por parte do pesquisador. Nesse sentido, o caso pode ser uma instituição, um programa, uma comunidade, uma associação, uma experiência, um grupo de professores de uma escola. (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p.110)

Ao analisar profundamente situações de argumentação coletiva envolvendo alunos ingressantes em um curso de licenciatura, por meio de um estudo de caso, poderemos compreender melhor a forma como estes alunos argumentam e autoavaliam o seu desempenho. Essa avaliação e reflexão da prática pode ser importante para a busca subsídios teóricos e metodológicos visando a implementação de mudanças na reformulação/atualização do Projeto Pedagógico do Curso (PPC – Matemática/IFSULDEMINAS, Campus Passos).

Ainda de acordo com Fiorentini e Lorenzato (2006, p.110), o caso a ser investigado

> [...] busca retratar a realidade de forma profunda e mais completa possível, enfatizando a interpretação ou a análise do objeto, no contexto em que ele se encontra, mas não permite a manipulação das variáveis e não favorece a generalização. Por isso, o estudo de caso tende a seguir uma abordagem qualitativa.

Os autores explicam que a perspectiva qualitativa de pesquisa busca investigar e interpretar a abordagem envolvendo o estudo de caso "*como um todo orgânico, uma unidade de ação com dinâmica própria, mas que guarda forte relação com seu entorno ou contexto sociocultural.* " (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p.110-111).

Dentro do escopo da nossa investigação, o problema de pesquisa proposto no estudo de caso, é descrito como: "**Da argumentação à prova: a construção de argumentos matemáticos por alunos ingressantes em curso de licenciatura em matemática em um contexto de ensino baseado em argumentação coletiva durante uma investigação**".

De acordo com Fiorentini e Lorenzato (2006, p.61) para se eleger um problema, "*existe toda uma fase exploratória inicial em torno do tema de investigação. Essa exploração será mais fecunda se for reflexiva, inquisitiva e mediada por leituras e experiências acerca da temática*".

Em nosso estudo, o delineamento do problema e das questões de pesquisa se deu a partir do estudo bibliográfico (capítulo 2 e 3) e do estudo bibliométrico (capítulo 1) realizados em torno do panorama da pesquisa nacional e internacional.

Diante do problema proposto, segue-se que o objetivo principal do estudo consiste em investigar "**como alunos ingressantes em um curso de Licenciatura em Matemática do IFSULDEMINAS, Campus Passos argumentam e avaliam seu desempenho na justificação e validação de conceitos matemáticos em um contexto de ensino baseado em argumentação coletiva durante uma investigação envolvendo a construção de números em diferentes sistemas de numeração não decimal".** Constituem objetivos secundários em decorrência do objetivo principal:

a) Investigar como alunos de um curso de Licenciatura em Matemática do IFSULDEMINAS, Campus Passos constroem argumentos (raciocinam/evidenciam aprendizagem) para justificar/validar conceitos matemáticos em um contexto de ensino baseado em argumentação coletiva durante uma investigação;
b) Investigar que estrutura (s) de argumentação global pode (m) ser identificada (s) durante o processo argumentativo para descrever o tipo de raciocínio empregado pelos alunos investigados;
c) Investigar como os alunos ingressantes autoavaliam o seu desempenho na prática de argumentação coletiva. Com base na autoavaliação dos alunos, identificar quais competências e habilidades argumentativas são consideradas por eles importantes/fundamentais/necessárias para formação do professor que ensina matemática.

Conforme os objetivos que integram o nosso estudo, este assume uma perspectiva exploratória (diagnóstica) e explicativa (FIORENTINI; LORENZATO, 2006).

O estudo de caso é exploratório (diagnóstico) na medida em que

> [...] o pesquisador, diante de uma problemática ou temática ainda pouco definida e conhecida, resolve realizar um estudo com o intuito de obter informações ou dados mais esclarecedores e consistentes sobre ela. Esse tipo de investigação acontece, com frequência, antes de o pesquisador elaborar propriamente um projeto de pesquisa. Funciona como uma sondagem e visa verificar se uma determinada ideia de investigação é viável ou não. Essa modalidade de pesquisa também é frequentemente utilizada como primeira entrada em campo, tendo em vista o levantamento de hipóteses ou a busca de subsídios que permitam um melhor redirecionamento da pesquisa. (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p.70).

O problema de pesquisa, bem como as questões de pesquisa surgiram a partir de um estudo exploratório da literatura nacional e internacional envolvendo o tema argumentação no ensino da matemática, conforme descrito nos capítulos 1,2 e 3.

O estudo de caso é considerado explicativo, uma vez que "*o pesquisador procura explicitar as causas dos problemas ou fenômenos, isto é, busca o porquê das coisas*" (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p.70).

Uma vez definido o nosso objeto de estudo e definido a problema de pesquisa a ser explorado, sucedeu-se a realização de um estudo de caso para compreender melhor e explicar o fenômeno que envolve "**situações de argumentação coletiva envolvendo alunos ingressantes em um curso de formação de professores em matemática do IFSULDEMINAS, Campus Passos diante de uma atividade de investigação envolvendo sistemas de numeração não decimal"**

Buscou-se, dessa forma, por meio da exploração do fenômeno supracitado, explicar: **"como alunos ingressantes em um curso de Licenciatura em Matemática do IFSULDEMINAS, Campus Passos argumentam e avaliam seu desempenho na justificação e validação de conceitos matemáticos em um contexto de ensino baseado em argumentação coletiva e investigação? "**

Nas seções seguintes iremos abordar detalhadamente cada etapa da pesquisa e fundamentar os princípios metodológicos de coleta e análise de dados envolvendo o estudo de caso.

6.1.1 As características fundamentais do estudo de caso abordado neste estudo

Ludke e Andre (1986) destacam algumas características ou princípios frequentemente associados ao estudo de caso qualitativo (ou naturalístico). Estas características gerais compõem a descrição do nosso estudo de caso uma vez que elas se superpõem às características da pesquisa qualitativa.

1. O estudo de caso visa a descoberta.

> Mesmo que o investigador parta de alguns pressupostos teóricos iniciais, ele procurará se manter constantemente atento a novos elementos que podem emergir como importantes durante o estudo. O quadro teórico inicial servirá assim de esqueleto, de estrutura básica a partir da qual novos aspectos serão detectados, novos elementos ou dimensões poderão ser acrescentados na medida em que o estudo avance. (LUDKE; ANDRE, 1986, p.18).

Em nosso estudo sobre as situações de argumentação envolvendo alunos ingressantes em um curso de Licenciatura em Matemática do IFSULDEMINAS, Campus Passos pretende-se descobrir: como estes alunos argumentam para justificar e validar suas ideias? Como eles autoavaliam a sua prática de argumentação? Que competências e habilidades argumentativas são consideradas importantes/necessárias/fundamentais no entendimento dos alunos visando o aprimoramento da formação do professor que ensina matemática? Que estruturas de argumentação global ajudam a explicar o raciocínio destes alunos?

2. O estudo de caso enfatiza a intepretação em contexto.

Para uma apreensão mais completa do objeto de estudo e das questões de pesquisa que circundam este objeto

> [...] é preciso levar em conta o contexto em que ele se situa. Assim, para compreender melhor a manifestação geral de um problema, as ações, as percepções, os comportamentos e as interações das pessoas devem ser relacionadas à situação específica onde ocorrem à problemática determinada a que estão ligadas. (LUDKE; ANDRE, 1986, p.18-19).

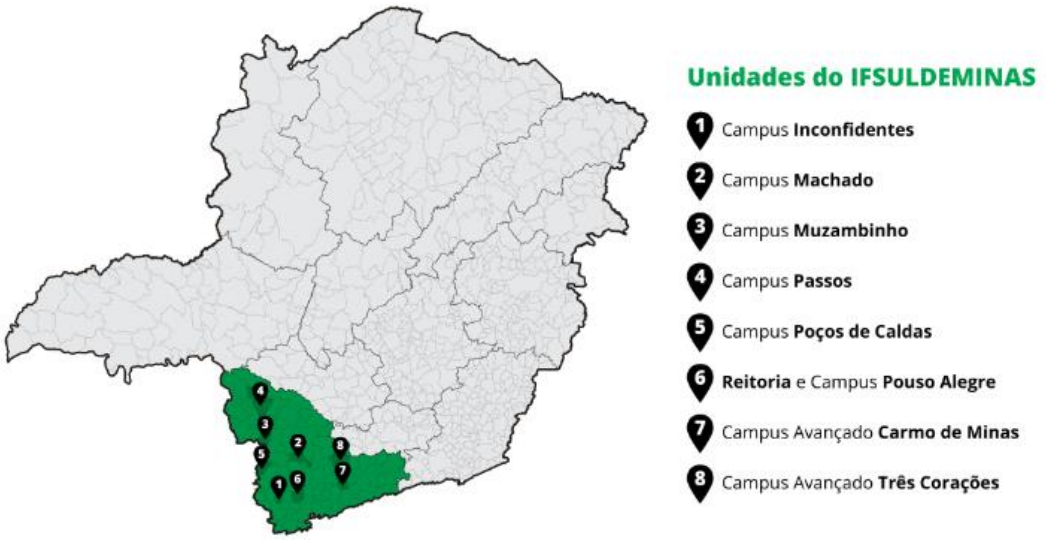
O contexto envolvido em nossa pesquisa, por exemplo, focalizou uma instituição pública de ensino responsável pela formação de professores em matemática – IFSULDEMINAS, Campus Passos. Esta instituição, federal, está localizada na cidade de Passos, região sudoeste do estado de Minas Gerais e recebe alunos de todo o território nacional por meio de ingresso no processo seletivo por notas do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM. No entanto, a maior parte dos alunos vinculados ao curso de Licenciatura em Matemática desta instituição residem na cidade de Passos e cidades vizinhas, sendo a maioria deles estudantes oriundos de escolas públicas e trabalhadores durante o período diurno.

Um pouco mais sobre a história do IFSULDEMINAS

> Em 2008, o Governo Federal deu um salto na educação do país com a criação dos Institutos Federais. Por meio da Rede Federal de Educação Profissional, Científica e Tecnológica, 31 centros federais de educação tecnológica (Cefets), 75 unidades descentralizadas de ensino (Uneds), 39 escolas agrotécnicas, 7 escolas técnicas federais e 8 escolas vinculadas a universidades deixaram de existir para formarem os Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia.
> No Sul de Minas Gerais, as escolas agrotécnicas federais de Inconfidentes, Machado e Muzambinho, tradicionalmente reconhecidas pela qualidade na oferta de Ensino Médio e técnico, foram unificadas. Nasceu, assim, o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas Gerais (IFSULDEMINAS), que atualmente, também possui campi em Passos, Poços de Caldas, Pouso Alegre e campi avançados em Carmo de Minas e Três Corações, além de núcleos avançados e polos de rede em diversas cidades da região. O Instituto oferta cursos técnicos integrados ao Ensino Médio, subsequentes (pós-médio), especialização técnica, Proeja, graduação, pós-graduação e cursos na modalidade de Educação a Distância (EaD) e os cursos

de Formação Inicial e Continuada (FIC). A Reitoria está estrategicamente localizada no município de Pouso Alegre e interliga toda a estrutura administrativa e educacional dos campi. (IFSULDEMINAS, 2022)

Figura 9 – Mapa de abrangência do IFSULDEMINAS



Fonte: Site do IFSULDEMINAS (2022)

Quadro 18 - Os municípios onde a instituição atua

Campus	Modalidade de ensino	Municípios
Inconfidentes	Educação à Distância	Bom Repouso, Borda da Mata, Inconfidentes, Monte Sião, Pouso Alegre, Senador Amaral e Conceição dos Ouros.
	Presencial e à Distância	Cambuí
	Presencial	Inconfidentes, Ouro Fino, São Gonçalo do Sapucaí e Jacutinga.
Machado	Educação à Distância	Poço Fundo, Alfenas, Muzambinho e Guaxupé.
	Presencial e à Distância	Machado
	Presencial	Carvalhópolis, Poço Fundo e Coqueiral.
Muzambinho	Educação à Distância	Alfenas, Boa Esperança, Três Corações, Cataguases, Guaxupé, Juiz de Fora, Muzambinho, Passos, Timóteo, Arceburgo, Monte Santo de Minas, Cambuquira e Três Pontas.
	Presencial e à Distância	Muzambinho, Alterosa e Capetinga.
	Presencial	Botelhos, Caconde e Guaxupé.
Passos	Presencial	Passos
	Educação à Distância	Campo do Meio, Campanha, Três Corações, Varginha e Passos
Poços de Caldas	Presencial	Poços de Caldas.
Três Corações	Presencial	Três Corações
Carmo de Minas	Presencial	Carmo de Minas
Pouso Alegre	Educação a Distância	Varginha
	Presencial	Pouso Alegre, Três Corações, Cambuquira, São Lourenço, Caxambu e Itanhandu.

Fonte: Site do IFSULDEMINAS (2022)

Em particular o Campus Passos, lócus da nossa pesquisa, oferece os seguintes cursos indicados no quadro a seguir.

Quadro 19 – Cursos ofertados pelo IFSULDEMINAS, Campus Passos

Nº	Curso	Tipo de curso	Período	Modalidade de Ensino
1	Comunicação visual integrado ao Ensino Médio	Técnico	Diurno	Presencial
2	Informática integrado ao Ensino Médio	Técnico	Diurno	Presencial
3	Produção de Moda integrado ao Ensino Médio	Técnico	Diurno	Presencial
4	Enfermagem subsequente ao Ensino Médio	Técnico	Noturno	Presencial
5	Administração subsequente ao Ensino Médio	Técnico	-	A Distância
6	Serviços públicos subsequente ao Ensino Médio	Técnico	-	A Distância
7	Bacharelado em Ciência da Computação	Graduação	Diurno	Presencial
8	Licenciatura em Matemática	Graduação	Noturno	Presencial
9	Bacharelado em Administração de Empresas	Graduação	Noturno	Presencial
10	Tecnologia em Design de Moda	Graduação	Noturno	Presencial
11	Tecnologia em Produção Publicitária	Graduação	Noturno	Presencial
12	Ensino de Humanidades	Pós-graduação	Noturno	Presencial
13	Desenvolvimento Web	Pós-graduação	-	A Distância
14	Enfermagem em Urgência e Emergência	Pós-graduação	-	A Distância
15	Enfermagem Oncológica	Pós-graduação	-	A Distância
16	Gestão Escolar	Pós-graduação	-	A Distância
17	Mídias e Educação	Pós-graduação	-	A Distância
18	Modelagem do Vestuário	Pós-graduação	-	A Distância

Fonte: Site do IFSULDEMINAS, Campus Passos (2022)

Especialmente neste estudo, os sujeitos participantes da pesquisa, são compostos por alunos ingressantes no primeiro ano do curso Licenciatura em Matemática do IFSULDEMINAS, Campus Passos, noturno, ano 2022.

A maioria dos alunos ingressantes e matriculados na licenciatura, experienciaram nos dois anos anteriores ao curso, aulas do Ensino Médio no formato online o que de certa forma, devido ao contexto de pandemia, comprometeu a qualidade do ensino, o processo de socialização e a aprendizagem destes alunos.

O contexto indicado, portanto, bem como o perfil e particularidades dos sujeitos investigados são importantes para dar contorno ao contexto levantado e dessa forma possibilitar uma interpretação e explicação mais fidedigna dos dados coletados no contexto descrito.

3. O estudo de caso busca relatar a realidade de forma completa e profunda.

> O pesquisador procura revelar a multiplicidade de dimensões presentes numa determinada situação ou problema, focalizando-a como um todo. Esse tipo de abordagem enfatiza a complexidade natural das situações, evidenciando a inter-relação dos seus componentes. (LUDKE; ANDRE, 1986, p.19).

Ao estudar situações de argumentação envolvendo alunos ingressantes no primeiro ano da Licenciatura em Matemática do IFSULDEMINAS, Campus Passos, durante o ano de 2022, pretendemos focalizar a dinâmica do processo argumentativo, bem como as variadas formas de argumentação utilizadas pelos alunos (oral, escrita, multimodal) para justificar e validar suas ideias bem como as suas interrelações com o contexto matemático (argumentação formal) e com o contexto cotidiano no qual os alunos estão inseridos (argumentação informal).

4. O estudo de caso utiliza uma variedade de fontes de informação.

No desenvolvimento de um estudo de caso, "*o pesquisador recorre a uma variedade de dados, coletados em diferentes momentos, em situações variadas e com uma variedade de tipos de informantes*" (LUDKE; ANDRE, 1986, p.19).

O fato do estudo de caso em particular ser realizado no IFSULDEMINAS, Campus Passos com alunos da Licenciatura em Matemática matriculados no primeiro ano de curso em 2022, o pesquisador coletará dados através da: a) observação de uma aula envolvendo situações de argumentação; b) videogravação da aula contemplando a argumentação coletiva para justificar e validar ideias; c) recolha de registros escritos com argumentos que validam a ideia do grupo; d) sessões de autoscopia para recolha de informações a respeitos das crenças e expectativas e avaliação dos alunos em relação a prática argumentativa.

5. O estudo de caso revela uma experiencia vicária e permite generalizações naturalísticas.

> O pesquisador procura relatar as suas experiencias durante o estudo de modo que o leitor ou usuário possa fazer as suas "generalizações naturalísticas". Em lugar da pergunta: este caso é representativo do que? o leitor vai indagar: o que eu posso (ou não) aplicar deste caso na minha situação? A generalização naturalística [...] ocorre em função do conhecimento experiencial do sujeito, no momento em que este tentar associar dados encontrados no estudo com dados que são frutos das suas experiencias pessoais. (LUDKE; ANDRE, 1986, p.19).

Em se tratando do nosso estudo em questão, o futuro leitor, por exemplo, poderá utilizar subsídios teóricos e metodológicos da nossa pesquisa para investigar o processo argumentativo em sala de aula, partindo da argumentação para justificar uma ideia até o argumento de prova que da validade a esta ideia.

Os resultados oriundos de um estudo de caso contribuem para a formação de professores, uma vez que permite a reflexão sobre a prática docente. Por exemplo, um determinado leitor (pesquisador ou professor) poderá chegar à conclusão de que determinados elementos daquela situação ou prática argumentativa exposta no trabalho podem ser

confirmados em sua própria prática docente, como também servir de alerta para eventuais correções de erros e aperfeiçoamento da prática.

6. O estudo de caso procura representar os diferentes e às vezes conflitantes pontos de vista presentes numa situação social.

> Quando o objeto ou situação estudados podem suscitar opiniões divergente, o pesquisador vai procurar trazer para o estudo essa divergência de opiniões revelando ainda o seu próprio ponto de vista sobre a questão. Desse modo é deixado aos usuários do estudo tirarem conclusões sobre esses contraditórios. [...] O pressuposto que fundamenta essa orientação é o de que a realidade pode ser vista sob diferentes perspectivas, não havendo uma única que seja a mais verdadeira. (LUDKE; ANDRE, 1986, p.20).

Ao analisar uma instância de argumentação coletiva, o pesquisador levará em consideração os diferentes pontos de vista convergentes e divergentes na construção dos argumentos, visto que a argumentação é um processo social, que envolve o embate de ideias até se chegar ao consenso. Em se tratando do estudo de caso realizado nesta pesquisa, este permitirá expor os diferentes modos/formas de argumentação utilizadas por alunos ingressantes no primeiro ano de curso de uma Licenciatura em Matemática para justificar e validar uma ideia. Conhecer estas diferentes formas/modos de argumentar e representar o argumento permitirá ao professor de matemática melhores condições para avaliar o nível de prova dos seus alunos de modo a realizar pontuais intervenções em sua prática pedagógica de modo a viabilizar a transição do raciocínio empírico-indutivo para o raciocínio dedutivo.

7. Os relatos de um estudo de caso utilizam uma linguagem e uma forma mais acessível do que outros relatórios de pesquisa.

> Os dados do estudo de caso podem ser apresentados numa variedade de formas, tais como dramatizações, desenhos, fotografias, colagens, slides, discussões, mesas-redondas etc. Os relatos escritos apresentam, geralmente, um estilo informal, narrativo, ilustrado com figuras de linguagem, citações, exemplos e descrições. [...] A preocupação aqui é com uma transmissão direta, clara e bem articulada do caso e num estilo que se aproxime da experiencia pessoal do leitor. (LUDKE; ANDRE, 1986, p.20).

A linguagem utilizada para apresentação dos resultados de pesquisa consiste em trechos de citações informais e formais de diálogos em grupo para representar todo o contexto que envolve uma argumentação coletiva em sala de aula. Para representar todo processo de argumentação (oral, escrita, multimodal) em grupo utilizamos macroestruturas de argumentação global. Por outro lado, para registrar o argumento para fins de validação de uma ideia, utilizamos o modelo de Toulmin sob a luz da teoria de Nicolas Balacheff, ou seja, o modelo proposto por Rodrigues e Monteiro (2021).

Por fim, diante de todas estas características que envolve o estudo de caso, Ludke e Andre (1986, p.21) alertam que a preocupação central ao se realizar este tipo de estudo é a "*compreensão de uma instância singular. Isso significa que o objeto estudado é tratado como único, uma representação singular da realidade que é multidimensional e historicamente situada*". Ainda de acordo com os autores, cada caso é tratado como tendo por si só um valor intrínseco, devendo este não ser tratado como um caso típico ou representativo de uma população determinada.

6.1.2 Fases do desenvolvimento do estudo de caso

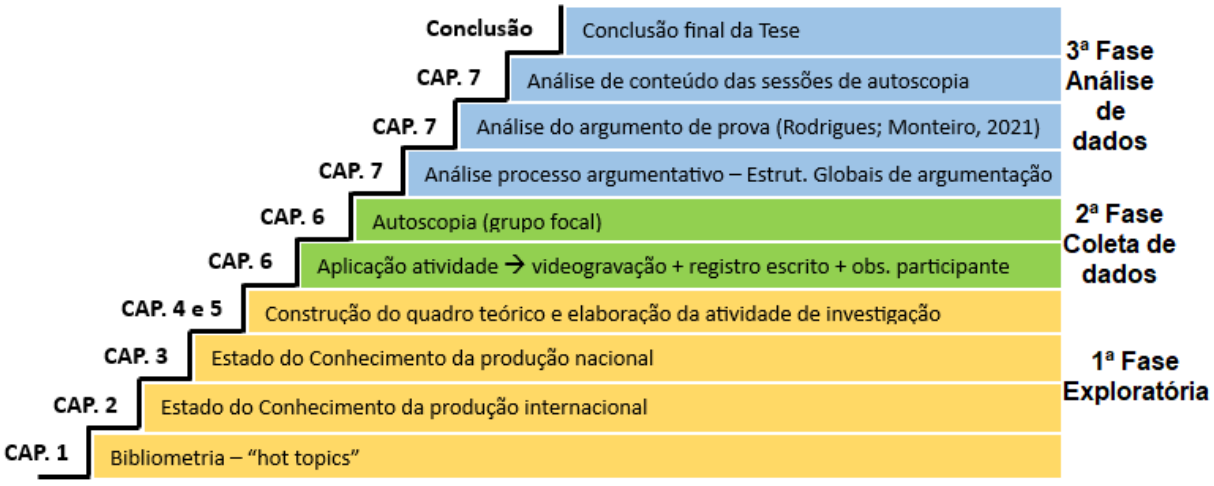
O estudo de caso pode ser caracterizado em três fases que se superpõem em diversos momentos, sendo difícil, portanto, precisar as fronteiras que as separam (LUDKE; ANDRE, 1986). São elas:

1ª Fase: Exploratória;

2ª Fase: Coleta de dados;

3ª Fase: Interpretação sistemática dos dados e elaboração do relatório.

Figura 10 – Fases do estudo de caso distribuídas ao longo dos capítulos.



Fonte: O autor

6.1.3 A fase exploratória: a definição do problema e as questões de pesquisa

O interesse inicial pelo tema de pesquisa surgiu durante as aulas da disciplina de Análise do Discurso ministrada pelo professor Doutor Marco Aurélio Alvarenga Monteiro junto ao programa de pós-graduação em Educação para a Ciência da Unesp, Campus Bauru. Nesta oportunidade o pesquisador teve a oportunidade de estudar e conhecer a estrutura do argumento informal (Toumin,1958) aplicado aos estudos de argumentação no Ensino de Ciências.

Inserido no contexto destes estudos, o pesquisador teve inicialmente a ideia de investigar a temática da "**argumentação no ensino da matemática**" desde a argumentação oral e informal até aquela comumente conhecida no meio acadêmico matemático, como argumentação lógica e formal desenvolvido por escrito.

O estudo de caso começou, portanto, de modo muito incipiente e foi se desenvolvendo a medida em o pesquisador foi delineando o problema e as questões de pesquisa através da revisão de literatura nacional e internacional sobre o assunto.

Por meio de uma revisão bibliométrica foi identificado os "hot topics" (tópicos quentes) envolvendo a temática, o que indicou para o pesquisador que o tema argumentação e matemática tinha um potencial muito grande para ser explorado no contexto educacional de sala de aula. Para tanto a abordagem de ensino envolvendo investigação e argumentação coletiva se apresentava, naquela oportunidade, como uma possibilidade interessante para explorar conceitos e o raciocínio utilizado pelos alunos na justificação e validação de ideias e modelos.

Por outro lado, a revisão bibliográfica do tipo "estado do conhecimento" da produção do conhecimento nacional e internacional permitiu ao pesquisador identificar os focos de pesquisa em relação a temática bem como as lacunas de pesquisas indicadas nas investigações mais recentes. Dessa forma foi possível estabelecer o problema de pesquisa e apontar as questões de investigação: **Como alunos ingressantes do curso de Licenciatura em Matemática do IFSULDEMINAS, Campus Passos argumentam coletivamente para justificar e validar suas ideias? Que estruturas de argumentação global estão associadas ao raciocínio de justificação e validação utilizado pelos dos alunos investigados? Como os alunos autoavaliam o seu desempenho na prática de argumentação? Que competências e habilidades argumentativas são consideradas por eles importantes/fundamentais/necessárias para a formação do professor que ensina matemática?**

Todos os questionamos foram motivados pela leitura do quadro teórico e pela necessidade de compreender melhor o fenômeno que rege a relação argumentação e prova no contexto do ensino da matemática.

Foi durante esta fase que o pesquisador planejou a sua inserção/entrada na atividade de campo, ou seja, idealizou uma atividade exploratória de cunho investigativo que pudesse viabilizar a criação de modelos e diferentes representações de um conteúdo matemático de modo a fomentar a argumentação coletiva dos alunos investigados. O conteúdo matemático explorado na atividade envolve a construção e conversão de números em diferentes sistemas de

numeração não decimal. A ideia de abordar uma atividade envolvendo essa temática, surgiu durantes as aulas de Pensamento Computacional para professores de Ciências e Matemática, ministradas pelo professor Dr. Wilson Massahiro junto ao programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência da Unesp, Campus Bauru. No contexto da referida disciplina, o pesquisador elaborou uma atividade que permitia ao aluno a elaboração de conjecturas, teste, justificação e validação de conceitos relativos a número binário. Para o contexto da nossa pesquisa, com foco na argumentação no ensino da matemática, a atividade foi adaptada de modo a contemplar de modo geral a construção de números em diferentes sistemas de numeração não decimal. A ideia, portanto, era propor uma atividade de investigação que possibilitasse diversas possibilidades de justificação, resolução e criação de conjecturas. Trata-se, portanto, de uma atividade que foi utilizada como uma estratégia para fomentar a argumentação coletiva em sala de aula. O caráter exploratório e investigativo inserido na atividade tinha por objetivo viabilizar o debate de ideias, a produção de argumentos, contra-argumentos, consenso, justificação e validação de ideias. As questões propostas ao longo da atividade são regidas por questionamentos que induzem o processo argumentativo em sala de aula. A atividade é composta por 5 problemas, dos quais três questões (nº 1, 2 e 4) exigem a resolução de problemas e uma justificação para a referida solução. Por outro lado, outras duas questões (nº3 e 5) contemplavam problemas de prova para fins de validação de uma ideia matemática.

Na atividade foi inserido um roteiro de colaboração para auxiliar os alunos no desenvolvimento de competências e habilidades argumentativas ligadas ao componente social-discursivo. Este roteiro está presente nas três primeiras questões de modo a contribuir para a orquestração do discurso. Posteriormente ele é retirado no intuito de preservar a maior autonomia dos alunos durante o processo de argumentação.

6.1.3.1 Atividade proposta

A atividade proposta teve por objetivo proporcionar aos alunos em um primeiro momento construir e justificar conjecturas/conceitos matemáticos e num segundo momento propiciar a validação (prova) das conjecturas formuladas.

A atividade de investigação foi adaptada a partir do estudo realizado por Rodrigues *et al.* (2021) e foi utilizada como uma estratégia promotora da argumentação coletiva, realizada por meio do trabalho em grupos, em uma aula de matemática ministrada pelo pesquisador a alunos ingressantes de um curso de licenciatura em matemática do IFSULDEMINAS, Campus Passos, durante o ano de 2022. O tema abordado na atividade envolve a construção de números em diferentes sistemas de numeração não decimal com vistas a compreensão do sistema de

numeração decimal bem como a elaboração de conjecturas, modelos, testes, justificações e validações das ideias produzidas.

6.1.3.2 Atividade: fabricação de números

Considere a quantidade de grãos de feijão abaixo

1) A quantidade de feijões que você dispõe representa um número no sistema de numeração de base decimal, que número é este? Represente este número na ficha, posicionando adequadamente os feijões ao longo das diferentes ordens e justifique suas ideias (apresente critérios/regras para a fabricação/decomposição do numeral correspondente a este número).

Ficha: Fabricação de números

8ª ordem	7ª ordem	6ª ordem	5ª ordem	4ª ordem	3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem
____	____	____	____	____	____	____	____

Orientação: Debatam o problema ouvindo com atenção as ideias de cada colega do grupo. Caso não concorde, contra-argumente respeitosamente, apontando um contra-exemplo para refutar a ideia do colega. Você pode também reformular a ideia (ou parte dela) do seu colega e juntos, de forma colaborativa, construirem um argumento para justificar as suas ideias. O respeito e a escuta ativa são fundamentais em uma argumentação, uma vez que esta envolve o confronto de ideias e não o embate pessoal.

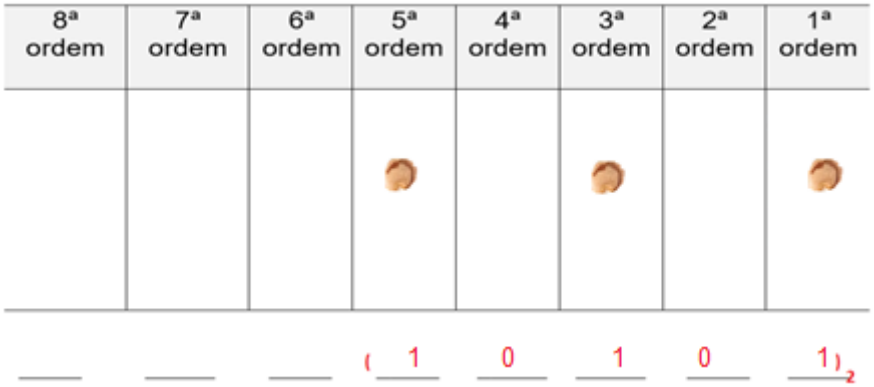
2) Com esta mesma quantidade de grãos de feijão é possível encontrar/fabricar outros números em outros sistemas de numeração que não seja o decimal? Justifique suas ideias.

Orientação: **Discuta com seus colegas a possibilidade de criar outros novos números em diferentes sistemas de numeração que não seja o sistema de base 10 (sistema decimal). Discuta com seu colega, as regras/critérios para a apresentação desse número. Você pode se espelhar no sistema de numeração de base decimal. Fiquem à vontade para criar ilustrações, semelhantes àquela indicada na questão 1, bem como realizar testes para verificar a ideia e posteriormente tirar uma conclusão.**

3) Prove para o seu colega de grupo "*como converter um número do sistema de numeração de base decimal para um número em uma base não decimal qualquer*"

Orientação: Nesta etapa você precisa validar a conclusão tirada na questão anterior, produzindo uma generalização da ideia produzida. Você pode argumentar exibindo uma prova conceitual, ou seja, articulando conceitos, ideias e objetos matemáticos para produzir uma generalização, como também pode fazer uso da linguagem matemática (formal e simbólica) para realizar uma demonstração.

4) Imagine agora que você tenha a seguinte situação, a "*representação de um número binário*" (sistema de numeração de base 2) indicado na ficha a seguir.



O que fazer para converter este número (representado na ficha) para o sistema de numeração de base decimal? Justifique suas ideias.

5) Prove para o seu colega de grupo "*como converter um número do sistema de numeração não decimal para um número correspondente no sistema de numeração decimal*"

A atividade desenvolvida foi proposta no âmbito desta pesquisa como uma estratégia promotora da argumentação coletiva em sala de aula, operacionalizada por meio de grupos de alunos igualmente distribuídos. Por meio da atividade, o pesquisador avaliou a produção argumentativa multimodal (oral, escrita, gestual, esquemas, gráficos etc.) de cada grupo de alunos buscando compreender: como estes alunos argumentam coletivamente para justificar e validar suas ideias. Como autoavaliam a sua prática de argumentação? Que competências e habilidades argumentativas são consideradas importantes/necessárias/fundamentais para estes alunos visando o aprimoramento da formação do professor que ensina matemática?

É importante ressaltar que junto a atividade proposta (exploração investigativa) tem-se um "roteiro de colaboração" inserido na atividade com o objetivo de auxiliar os alunos no

processo de argumentação. O referido roteiro aparece explícito nos três primeiros problemas da atividade, em seguida ele é retirado para dar maior autonomia aos alunos para argumentarem coletivamente.

6.1.3.3 Metodologia de organização da aula: aplicação da atividade

Atividade proposta tem por característica, fomentar a argumentação, viabilizar a formulação de conjecturas, o teste das conjecturas e a validação (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016).

A aplicação da atividade foi planejada em três etapas, inspiradas no trabalho de Ponte, Brocardo e Oliveira (2016):

a) Introdução da tarefa;

b) realização da argumentação coletiva;

c) apresentação de argumentos por escrito.

Na introdução da atividade, o pesquisador procurou garantir que todos os alunos entendessem o sentido da atividade proposta e aquilo que se espera ao final dela. Os alunos foram orientados a exercitar a escuta ativa e crítica das ideias do colega, se posicionar a favor ou contra a conjectura criada, apresentando argumentos que justifiquem o seu ponto de vista e/ou refutando o colega de forma respeitosa. Da mesma forma os alunos foram alertados para a possibilidade de reformular a conjectura do parceiro de aprendizagem e dessa forma construírem argumentos colaborativos. Nesta etapa, o aluno deverá sentir que suas ideias são valorizadas e que o professor/pesquisador espera que ele as discuta com os seus colegas. Foi criado, portanto, um ambiente de aprendizagem onde os alunos pudessem ficar à vontade para investigar e argumentar. Argumentar no sentido de debater de forma dialética ideias, produzir justificativas e validações.

Na etapa de realização da argumentação coletiva, os alunos receberam a atividade proposta e foram orientados a realizá-la em grupos de trabalho igualmente distribuídos. Nesta etapa de exploração dos problemas de investigação o pesquisador orientou os alunos a produzirem/criarem conjecturas e as discutirem com os colegas de grupo de modo que coletivamente e colaborativamente eles pudessem produzir justificações/validações dessas conjecturas. De início os alunos constroem conjecturas, avaliam a sua plausibilidade por meio de testes e justificações e posteriormente realizam um trabalho de validação utilizando uma prova ou demonstração.

Durante o desenvolvimento desta etapa, o pesquisador percorreu a sala de aula, respondendo a perguntas feitas pelos alunos, realizando questionamentos, fornecendo pistas em

alguns pontos onde os alunos não poderiam prosseguir, contudo sem fornecer orientações e direcionamentos para a resolução dos problemas de investigação. O pesquisador encorajou os alunos a apresentarem suas ideias/soluções uns para os outros, apoiando cada participante a exercitar a escuta ativa, respeitar as ideias do colega de grupo bem como questionar e intervir nas ideias/conjecturas propostas pelo colega durante a discussão realizada no âmbito de cada grupo.

Objetivando que os participantes pudessem apresentar justificativas para os argumentos produzidos, o pesquisador, quando conveniente, realizou alguns questionamentos: "Por que vocês fizeram dessa maneira?", "Vocês podem elaborar um pouco mais sobre essa parte, melhorando a justificativa?", "Em que vocês estão baseando no que diz?", “Vocês conseguem justificar esse resultado de outra forma”? “Vocês conseguem propor outra estratégia de resolução? ”, "Vocês podem explicar com mais detalhes como fizeram essa parte?", “Como vocês podem generalizar isso? ”

Na terceira e última etapa, o pesquisador requisitou de cada grupo de trabalho, uma apresentação por escrito dos resultados e conclusões da atividade proposta. Não foi exigido a elaboração de um relatório estruturado. Os alunos tiveram a liberdade de registrar as suas ideias, utilizando qualquer estratégia, seja ela algébrica, geométrica, formal, informal, ou por testes e exemplos empíricos.

As etapas 2 e 3 não eram necessariamente lineares. Os alunos tinham a liberdade de argumentarem oralmente como também de forma multimodal e paralelo a este processo eles deveriam registrar por escrito as justificativas/validações de suas ideias. Durante a realização destas duas últimas etapas era de se esperar que os alunos utilizassem processos matemáticos de abstração, investigação, modelação, generalização, prova ou demonstração (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016).

6.2 A coleta de dados

Uma vez identificados o problema, os contornos aproximados do problema e as questões de pesquisa, o pesquisador procedeu “*à coleta sistemática de informações, utilizando instrumentos mais ou menos estruturados, técnicas mais ou menos variadas, sua escolha sendo determinada pelas características próprias do objeto estudado”* (LUDKE; ANDRE, 1986, p.22).

Ainda de acordo com estes autores

> A importância de determinar os focos da investigação e estabelecer os contornos do estudo decorre do fato de que nunca será possível explorar todos os ângulos do fenômeno num tempo razoavelmente limitado. A seleção de

> aspectos mais relevantes e a determinação do recorte é, pois, crucial para atingir os propósitos do estudo de caso e para chegar a uma compreensão mais completa da situação estudada.(LUDKE; ANDRE, 1986, p.22).

No que tange o contexto desta investigação, a coleta de dados foi realizada por meio de:

- Observação participante de situações de argumentação coletiva realizadas em grupos de trabalho durante uma investigação matemática. Todo o processo de observação da argumentação coletiva foi documentado por meio de videogravações e notas de campo do pesquisador;
- Recolha de material escrito produzido coletivamente por cada grupo de trabalho em torno da atividade de investigação proposta.
- Autoscopia;

Os procedimentos adotados em torno de cada instrumento indicado são descritos mais detalhadamente a seguir.

6.2.1 Observação de uma situação argumentativa envolvendo argumentação coletiva e documentada por meio de videogravação e notas de campo

Para Ludke e Andre (1986) a observação, enquanto instrumento de coleta de dados, apresenta algumas vantagens, dentre elas:

- possibilita uma experiencia direta para verificação da ocorrência de um fenômeno;
- permite ao observador chegar mais próximo da perspectiva dos sujeitos.

No presente estudo, optou-se por realizar um tipo de observação cujo papel do pesquisador é descrito por Ludke e Andre (1986) como "*observador enquanto participante*" por meio do qual

> [...] a identidade do pesquisador e os objetivos do estudo são revelados ao grupo pesquisado desde o início. Nessa posição, o pesquisador pode ter acesso a uma gama variada de informações, até mesmo confidenciais, pedindo cooperação do grupo. Contudo, terá em geral que aceitar o controle do grupo sobre o que será ou não tornado público pela pesquisa. (LUDKE; ANDRE, 1986, p.29)

De acordo com Ludke e Andre (1986) a "*observação*" possibilita ao pesquisador, um contato mais pessoal e direto com o seu objeto de estudo. No entanto este método de coleta de dados recebe algumas críticas pelo fato de que este se baseia na interpretação pessoal do pesquisador durante as anotações que ele produz em torno do que ele vê (LUDKE; ANDRE, 1986).

Ainda de acordo com estes autores,

> Há formas muito variadas de registrar as observações. Alguns farão apenas anotações escritas, outros combinarão as anotações com o material transcrito de gravações. Outros ainda registrarão os eventos através de filmes, fotografias, slides ou outros equipamentos (LUDKE; ANDRE, 1986, p.32).

Numa tentativa de minimizar qualquer tipo de desvantagem metodológica relativo a problemas de interpretações pessoais equivocadas oriundas das notas ou memórias de observação de campo, foi adotado neste estudo, uma outra forma registro de eventos, ou seja, transcrições do áudio das vídeogravações e captação de imagens que possam registrar outras formas de argumentação multiomodal.

A videogravação tem uma função importante, como por exemplo registrar "*dados sempre que algum conjunto de ações humanas é complexo e difícil de ser descrito compreensivamente por um único observador, enquanto ele se desenrola*" (BAUER; GASKELL, 2008, p.149). Especialmente nesta fase do estudo, os dados, envolvem todo o registro de falas, gestos e ilustrações produzidas pelos alunos durante o processo de argumentação em grupo.

Para Bauer e Gaskell (2008) é preciso ter alguns cuidados com a gravação em vídeo para não comprometer a capacidade comprobatória dos dados. Os autores alertam especialmente para:

- a provável baixa fidelidade visual;
- a qualidade do som que pode variar entre claramente audível e apenas compreensível;
- os ângulos da câmera que podem não estar sempre na posição ideal para mostrar os detalhes mais significativos da atividade em ação.

Nesse contexto de pesquisa, o pesquisador atento a todos estes detalhes durante a observação, focou no aspecto oral, gestual e visual das produções dos alunos.

Flick (2013, p.130) entende que a "*gravação em áudio ou vídeo tem prioridade sobre as anotações rápidas oriundas da observação de campo*". Para Bauer e Gaskell (2008), a gravação em vídeo seria, portanto, um conjunto de dados de pesquisa mais eficiente que as memórias (ou notas) de observação em campo.

Neste estudo, a observação de todo o processo argumentativo que ocorreu no âmbito de cada grupo foi documentada especialmente por meio de vídeo gravações de modo a captar toda a argumentação oral entre os participantes do grupo bem como as representações/ilustrações produzidas pelos alunos a partir do manuseio do material didático envolvido na atividade.

No entanto, para além do fenômeno observado e documentado por meio da videogravação, o pesquisador também fez uso do diário ou notas de campo para realizar anotações, colher suas impressões e reflexões pessoais acerca do contexto que envolve o fenômeno estudado. Estas anotações em diário de campo foram importantes para descrever todo o cenário não captado pela videogravação bem como registrar as dificuldades e não conformidades identificadas, sejam elas, de caráter metodológico ou não.

Portanto, a observação no que diz respeito a sua parte descritiva, compreende um registro detalhado do que ocorre (LUDKE; ANDRE, 1986). Ainda de acordo com estes autores ela permite:

(1) Descrever os sujeitos investigados;
(2) Reconstruir diálogos;
(3) Descrever os locais;
(4) Descrever eventos especiais;
(5) Descrição da atividade realizada;
(6) Descrever os comportamentos do pesquisador.

No que se refere a parte reflexiva das observações estas deverão suscitar no pesquisador: "*suas especulações, sentimentos, problemas, ideias, impressões, preconcepções, dúvidas, incertezas, surpresas e decepções*" (LUDKE; ANDRE, 1986, p.31). Os autores ainda citam que as reflexões em torno da observação podem ser de vários tipos:

(1) Reflexões analíticas;
(2) Reflexões metodológicas;
(3) Dilemas éticos e conflitos;
(4) Mudanças na perspectiva do observador;
(5) Esclarecimentos necessários.

6.2.2 Recolha de registros escritos produzidos coletivamente por cada grupo de trabalho em torno da atividade proposta

Outra etapa da coleta de dados, consistiu no recolhimento dos registros escritos envolvendo a resolução e argumentação escrita em torno da atividade proposta.

No que antecedeu o recolhimento da ficha de atividades, os grupos foram orientados a registrar por escrito, de forma coletiva, os resultados oriundos da exploração da atividade, apontando em um primeiro momento as conjecturas formuladas bem como as justificações/explicações utilizadas para identificar/encontrar esta conjectura. Em um segundo

momento, os grupos foram orientados a dar validade a estas conjecturas exibindo ao fim do processo algum argumento de prova/demonstração.

Neste processo de justificação e validação os alunos foram estimulados a desenvolver uma argumentação e prova, por escrito, a partir do que foi discutido oralmente por eles em grupo e tendo por base a exploração do material concreto inserido na atividade proposta.

No registro escrito, os alunos ficaram à vontade para registrar suas ideias por meio de figuras, desenhos, cálculos, argumentos informais e formais, bem como utilizar qualquer tipo de estratégia que possa convencer outra pessoa sobre a validade das conjecturas encontradas.

Nessa fase, foi coletado um único registro por grupo como fonte principal de dados. Os demais registros escritos produzidos, foram utilizados como fontes secundárias e complementares para compreender melhor o registro principal do grupo.

Não foi exigido dos alunos nenhuma forma padronizada de registro. Eles tiveram total autonomia para justificar e validar por escrito as ideias debatidas, os resultados e conclusões.

6.2.3 Autoscopia

É um procedimento de coleta de dados (SADALLA; LAROCCA, 2004).

> A autoscopia vale-se do recurso de videogravação de uma prática, visando a análise e autoavaliação por um ou mais protagonistas dessa prática. Por meio da videogravação objetiva-se apreender as ações do ator (ou atores), o cenário e a trama que compõem uma situação. O material videogravado é submetido a sessões de análise a posteriori da ação os quais se destinam a apreensão do processo reflexivo do ator (ou atores), através de suas verbalizações durante a análise das cenas videogravadas. (SADALLA; LAROCCA, 2004, p.419).

Ainda de acordo com os autores a palavra “autoscopia” composta pela junção dos termos “auto” e “scopia” significa uma ação realizada pelo próprio sujeito tendo em vista o cumprimento de uma finalidade ou objetivo. Trata-se, portanto, de uma

> [...] técnica de pesquisa e de formação que se vale de videogravação de ações de um ou mais sujeitos, numa dada situação, visando a posterior autoanálise delas. Em sua especificidade, a autoscopia supõe dois momentos essenciais: a videogravação propriamente dita da situação a ser analisada e as sessões de análise e reflexão (SADALLA; LAROCCA, 2004, p.421).

O objetivo do uso da técnica de autoscopia, no contexto deste estudo, está relacionado a autoavaliação da prática argumentativa por parte dos integrantes de cada grupo de trabalho. Cada grupo, portanto, pôde autoavaliar coletivamente a sua participação e dos seus integrantes

na prática argumentativa. Este momento de reflexão sobre a prática permite apreender as ações e verbalizações dos diferentes atores no processo de argumentação.

Por meio da videogravação pretendeu-se registrar todo o processo de argumentação coletiva empreendida por alunos ingressante em um curso de formação inicial de professores de matemática em uma atividade de investigação. Buscou-se, especificamente, apreender todas as ações (gestos, falas, registros escritos e representações por meio de material concreto) dos diferentes sujeitos envolvidos na atividade bem como a caracterização do ambiente e da trama que compõem a situação argumentativa.

As sessões de análise, "*ocorrem a posteriori da ação e destinam-se a suscitar e apreender o processo reflexivo do ator (ou atores) por meio de suas verbalizações durante a análise das cenas videogravadas*" (SADALLA; LAROCCA, 2004, p.421). Pretende-se dessa forma, que os sujeitos envolvidos na situação argumentativa façam uma autoavaliação do seu desempenho a partir da análise das cenas de videogração que remontam toda a argumentação coletiva empreendida na realização da atividade proposta.

O sujeito que assiste às videogravações é "*ativo perante os elementos da recepção videográfica*" (SADALLA; LAROCCA, 2004, p.421-422). Ao analisar e refletir sobre a prática argumentativa apresentada, cada sujeito em particular, atribui novos sentidos a este contexto, ressignificando os elementos apresentados, interpretando-os da sua forma e atribuindo certos valores a estes elementos em conformidade com sua experiencia de vida e conhecimento prévio. (ROSADO, 1993; SADALLA; LAROCCA, 2004). A videogravação portanto potencializa a função de autoavaliação do sujeito (FERRÉS, 1996; SADALLA; LAROCCA, 2004).

> No vídeo, a pessoa pode contemplar-se a partir de infinitos pontos de vista. (...) no vídeo vejo-me como sou visto, descubro como os outros me veem. Vejo-me para me compreender. O fato de ver-me e de escutar-me leva a uma tomada de consciência de mim mesmo, de minha imagem, do som da minha voz, da qualidade e da quantidade de meus gestos, de minhas atitudes, de minha postura, de minha maneira de atuar e de ser. (FERRÉS, 1996, p.52).

Para Sadalla e Larocca (2004, p.422) o processo de análise através do recurso do vídeo envolve a tomada de consciência do sujeito e a reflexão deste sobre "*variados códigos expressivos: linguagem, metalinguagem, deslocamentos, posturas, expressões faciais, maneirismos, entre outros, tanto de si como das demais pessoas envolvidas na situação registrada*". Ainda de acordo com os autores o encontro objetivado do sujeito com a sua imagem videogravada, torna-se um instrumento capaz de provocar "*verbalizações mediante o*

conflito que se instala entre a imagem e o eu subjetivo e mediante a possibilidade de promover articulações entre elementos envolvidos nos registros".

Este encontro e confronto do sujeito consigo mesmo, ativa o seu potencial reflexivo/expressivo e possibilita uma análise de si mesmo a partir de uma autoavaliação do seu desempenho e de outros sujeitos (FERRÉS, 1996; SADALLA; LAROCCA, 2004) durante a argumentação empreendida na atividade proposta. Trata-se, portanto, "*de uma reapropriação de si e também de uma ocasião privilegiada de autocrítica em face da representação que se tem do próprio papel no mundo e a atuação que nele se verifica*"(SADALLA; LAROCCA, 2004, p.423).

A prática pedagógica constitui um fenômeno complexo formado "*pela interferência de múltiplas variáveis, muitas das quais atuam simultaneamente*" (SADALLA; LAROCCA, 2004, p.423). A vivacidade e o dinamismo, por exemplo, oriundos dessa prática para serem mais bem compreendidos, necessitam de um instrumento capaz de captar e conservar todas essas características. Nesse contexto, a videogravação tem a sua importância destacada uma vez que "*permite registrar, até mesmo, acontecimentos fugazes e não-repetíveis que muito provavelmente escapariam a uma observação direta*" (SADALLA; LAROCCA, 2004, p.423). Outro ponto positivo a se destacar sobre a videogravação é a possibilidade de viabilizar o distanciamento emotivo tão necessário para a realização de uma análise reflexiva sobre material registrado, algo que na observação direta, por exemplo, não é possível de ser feito. (FERRÉS, 1996; SADALLA; LAROCCA, 2004). Para além disso, uma vez que "*os dados provêm das sessões de análise do material videogravado. Em face dessa particularidade, outra vantagem proporcionada pela tecnologia da videogravação é a versatilidade durante a exibição*" (SADALLA; LAROCCA, 2004, p.423). Nesse caso, o vídeo pode ser exibido em ritmo normal, acelerado, ter imagens congeladas, retrocedidas e repetidas quantas vezes necessário para a boa apreensão (SADALLA; LAROCCA, 2004).

De acordo com Rosado (1993), na análise autostopica

> [...] ao tentar entender e dotar de sentido o que lhe é apresentado, o sujeito apreende o objeto, percebendo aspectos que antes desconhecia, constatando contradições. E é esse processo reflexivo que o faz procurar novos conhecimentos. A confrontação, pela imagem, com as representações que se tem sobre si, já permite uma mudança de atitude. Por mais que não seja este o objetivo da utilização da autoscopia, que ela não tenha como meta a intervenção, só o fato de se ver na tela provoca, no indivíduo, possibilidades de modificações, a partir de vários pontos de vista (SADALLA; LAROCCA, 2004, p.423).

Durante a análise autostopica, cada grupo de trabalho ao rever o seu desempenho na situação argumentativa videogravada autoavaliou a participação coletiva do grupo na prática de argumentação. Neste processo de autoavaliação da prática argumentativa pelo grupo o pesquisador esteve atendo para:

a) esclarecer alguns pontos conflituosos ou não tão compreensíveis captados/registrados pela videogravação e pela recolha do material escrito;
b) refletir sobre a importância de argumentar coletivamente e colaborativamente;
c) identificar as competências e habilidades argumentativas que os alunos consideram importantes/fundamentais/necessárias para a formação do professor que ensina matemática, especificamente no que tange o uso da argumentação no ensino da matemática.

A autoavaliação das sessões de autoscopia, por cada grupo de trabalho, foram gravadas em áudio, transcritas e posteriormente analisadas pelo pesquisador.

A autoscopia representa a possibilidade de os acadêmicos em formação inicial refletirem sobre a sua prática pedagógica, especialmente, o fato de argumentar coletivamente e colaborativamente em sala de aula para justificar e validar conceitos.

A coleta de dados referente a videogravação e a recolha de registros escritos foi realizada no dia da aplicação da atividade. Já as sessões de autoscopia e a gravação destas em áudio, foram realizadas em uma outra data posterior a aplicação da atividade.

6.2.3.1 Sessões de autoscopia realizadas por meio de grupo focal

De acordo com Dias (2000) um grupo focal constitui pequenos grupos de pessoas reunidas em torno de uma discussão objetiva, conduzida ou moderada pelo pesquisador ou outra pessoa, sobre um determinado tema. O objetivo do grupo focal, segundo a autora, é identificar percepções, sentimentos, atitudes e ideias dos participantes a respeito de um determinado assunto ou atividade.

> [...] os usuários dessa técnica partem do pressuposto de que a energia gerada pelo grupo resulta em maior diversidade e profundidade de respostas, isto é, o esforço combinado do grupo produz mais informações e com maior riqueza de detalhes do que o somatório das respostas individuais. Resumindo, a sinergia entre os participantes leva a resultados que ultrapassam a soma das partes individuais (DIAS, 2000, p.4).

As principais características do grupo focal, segundo a autora, são:

• envolvimento e interação das pessoas;

• reuniões com discussão em grupo;

- homogeneidade dos participantes quanto aos aspectos de interesse da pesquisa;
- geração de dados;
- natureza qualitativa;
- discussão focada em tópico que é determinado pelo propósito da pesquisa.

A técnica do grupo focal é recomendada para fornecer interpretações dos resultados dos participantes a partir de estudos iniciais, e gerar informações adicionais ao um estudo. O uso do grupo focal é particularmente apropriado quando o objetivo é explicar como as pessoas consideram ou concebem uma experiência, uma ideia ou um evento. As discussões que ocorrem durante as reuniões oferecem informações sobre o que as pessoas pensam, sentem e como agem (DIAS, 2000).

No contexto deste estudo, o grupo focal foi utilizado pelo pesquisador para viabilizar as reflexões oriundas da técnica da Autoscopia. Pretendeu-se por meio do grupo focal, que cada grupo de trabalho participante de uma situação de argumentação pudesse refletir coletivamente e individualmente sobre o seu desempenho na prática de argumentação.

Para tanto o pesquisador propôs o seguinte roteiro de questões para reflexão:

1. Para vocês o que significa argumentar em sala de aula?
2. O que vocês acharam da atividade fabricação/conversão de números em diferentes sistemas de numeração não decimal? Algo inserido na atividade auxiliou o grupo na argumentação?
3. Como vocês avaliam o desempenho do grupo na prática de argumentação coletiva?
4. Que dificuldades vocês encontraram para argumentar junto aos seus colegas?
5. Quais os pontos positivos de argumentar e construir argumentos em grupo?
6. Que competências e habilidades vocês consideram importantes para a prática da argumentação em sala de aula?
7. Para vocês existe diferença entre prova e demonstração? Justifique suas ideias.

O grupo focal, portanto, possibilitou aos participantes de cada grupo exporem abertamente e detalhadamente seus pontos de vista, como também oportunizou aos alunos trazerem à tona respostas mais completas, permitindo ao pesquisador conhecer melhor e mais profundamente o grupo pesquisado e o fenômeno estudado (DIAS, 2000).

As sessões de autoscopia, realizadas por meio de grupo focal, foram gravadas em áudio e realizadas em uma data posterior a aplicação da atividade.

6.3 Análise de dados

Nessa fase da pesquisa, surge a necessidade de juntar os dados coletados e analisá-los com base em algumas ferramentas e modelos que melhor descrevem ou ilustram toda a dinâmica das situações argumentativas que constituem objeto de estudo desta investigação.

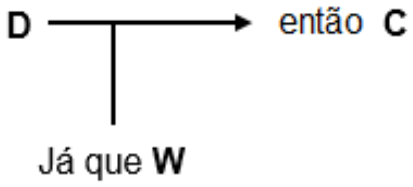
É nesta fase da pesquisa que ocorre o confronto dos dados coletados com o referencial teórico levantado, produzindo assim resultados, sentidos e significados para o caso estudado (situações de argumentação envolvendo alunos ingressantes no primeiro ano de um curso de formação de professores em matemática e um contexto de ensino envolvendo argumentação coletiva e investigação numérica).

6.3.1 Análise argumentativa de Toulmin (1958;2001)

O modelo de Toulmin (1958; 2001) descreve uma estrutura para representar o conteúdo semântico de um argumento informal em diferentes campos do conhecimento. Constitui, portanto, uma teoria de análise do raciocínio que visa ser amplamente relevante para explicar como um grupo social (sala de aula ou pequenos grupos) chega a aceitar uma conclusão sem fazer uso da lógica formal (inadequada por exemplo para as argumentações orais em sala de aula) (TOULMIN, 1958; 2001).

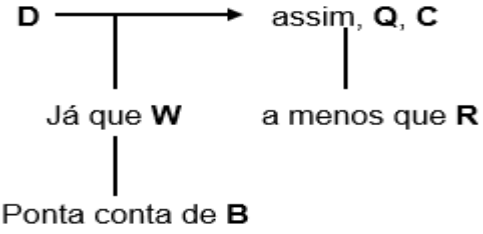
Toulmin (2001) define um argumento como sendo uma afirmativa acompanhada de sua justificativa. Ele propõe o seguinte modelo geométrico para apresentar a estrutura simples (Figura 11) e completa (Figura 12) de um argumento.

Figura 11 - Estrutura simples do modelo de Toulmin



Fonte: Toulmin (1958; 2001)

Figura 12 – Estrutura completa do modelo de Toulmin



Fonte: Toulmin (1958; 2001)

A estrutura simples do modelo apresenta apenas três componentes: **D** – dados, **W** – garantia e **C** - conclusão. Já a estrutura completa, reconhecidamente pelo autor como mais complexa é composta pelos componentes **D** – dados, **W** – garantia, **B** – apoio a garantia, **Q** – qualificador modal, **R** - refutação e **C** – conclusão.

De acordo com Toulmin (2001)

- Dados (**D**): correspondem a informações, fatos ou declarações de natureza explícita e particular utilizadas para fundamentar uma conclusão.
- Conclusão (**C**): é uma proposição (declaração) também chamada de alegação e cujo mérito pretende-se que seja estabelecido.
- Garantia (**W**): é uma proposição (explícita ou implícita), entendida também como uma justificação (hipotética e geral) que por meio de uma referência implícita aos dados (D) promove a ligação entre este último e a conclusão (C). Inclui uma apelação a uma regra ou caso particular, exemplo, ou uma analogia para explicar/justificar. As garantias podem sofrer tipificações (RODRIGUES e MONTEIRO, 2021) e são utilizadas para autorizar um passo adicional (conclusão prévia) em um argumento ou uma conclusão final.

Os três primeiros elementos, Dados (premissa menor), Garantia (premissa principal) e Conclusão são denominados de componentes fundamentais da estrutura de um argumento (TOULMIN, 2001) e compõe a forma mais simplificada do modelo (Figura 11). Entretanto, para que o argumento seja tido como mais completo, é possível acrescentar outros três elementos à estrutura do modelo (Figura 12).

Toulmin (2001) descreve estes outros três elementos como:

- Apoio a garantia (**B**): é uma proposição de caráter teórico, dependente do campo do argumento, é aceita sem questionamento e fornece apoio/sustentação a uma garantia (G). Trata-se, portanto, de uma outra razão, justificação ou prova para acreditar na garantia (G). Como suporte a garantia é expressa por meio de uma lei geral, ideias aceitas pela comunidade local onde o argumento está sendo construído, definições, fórmulas, teoremas matemáticos e/ou axiomas.
- Qualificador Modal (**Q**): trata-se uma proposição, descrita por um advérbio de intensidade, que estabelece e descreve o grau de certeza ou força conferida pela garantia (G) à uma conclusão (C). A referida qualificação pode ser realizada por meio de vários meios linguísticos, incluindo advérbios como possivelmente

ou provavelmente, e verbos auxiliares modais como deveria, pode ou deve (TOULMIN, 1958; STAATS, 2017).

- Refutação (**R**): refere-se a uma proposição que especifica em que situação (es) a garantia (G) é invalida na fundamentação e suporte a conclusão (C).

O modelo foi apresentado como "*independente do campo*" sendo, portanto, utilizado em vários campos, como matemática, ciência e filosofia (WALTER; BARROS, 2011). A "*dependência ao campo de atividade*" está condicionada apenas à garantia e ao apoio da mesma, uma vez que, em campos ou áreas diferentes, as garantias e apoios são utilizados de maneiras distintas para justificar uma mesma conclusão (TOULMIN, 1958; 2001).

Especialmente por meio das garantias que são apresentadas, o referido modelo fornece um esboço funcional capaz de exibir detalhes do raciocínio do aluno durante a construção de conjecturas, explicações, justificações e apresentação de provas dentro da cultura de sala de aula (WALTER; BARROS, 2011).

Para Toulmin (2001) o propósito de um argumento "*é estabelecer uma conclusão (não necessariamente verdadeira) com a qual estamos inteiramente confiantes e que se apresenta sob respaldado de garantias, apoios e elementos qualificadores*" (RODRIGUES e MONTEIRO, 2021).

A estrutura argumentativa proposta por Toulmin, também denominada por TAP (*Toulmin's Argument Pattern*), constitui um modelo teórico para analisar um argumento em função da presença dos seus elementos constituintes bem como através da relação que se estabelece entre eles (TOULMIN, 2001).

Sasseron e Carvalho (2014) explicam que grande parte dos estudos ligados a argumentação em situações de ensino e aprendizagem utilizam as ideias propostas por Toulmin (1958;2001) como referencial teórico analítico da estrutura do argumento. Ainda de acordo com estas autoras o modelo argumentativo de Toulmin é muito utilizado para investigar/analisar os argumentos produzidos por alunos para explicar ou refutar um fenômeno.

Este modelo funcional elaborado por Toulmin pode ser utilizado em análises de argumentos formais e informais, bem como para sua relação mútua (MARIOTTI; BALACHEFF, 2008). Em outras palavras, ele pode representar um único passo dedutivo, como também representar passos empíricos e abdutivos (FIALLO; GUTIÉRREZ, 2017).

No contexto da educação matemática, o modelo argumentativo de Toulmin tem sido utilizado em diversos trabalhos (KOLLAR et al., 2014; CONNER et al., 2014; WALTER; BARROS, 2011; ERKEK; IŞIKSAL BOSTAN, 2019; DEDE, 2019; KOSKO; ZIMMERMAN, 2019; NORDIN; BJÖRKLUND BOISTRUP, 2018; STAATS, 2017; ZAMBAK; MAGIERA,

2020; SOLAR et al., 2020; CERVANTES-BARRAZA; HERNANDEZ MORENO; RUMSEY, 2020) como uma ferramenta útil para analisar os processos de argumentação e prova em sala de aula, sejam eles realizados de forma individual ou coletiva (oral ou por escrito).

De acordo com Toulmin (1958, p.43) "*os argumentos não têm simplesmente uma forma específica; devem também ser organizados numa sequência de acordo com regras e procedimentos gerais*".

Esse entendimento de Toulmin (1958) permitiu a Pedemonte e Balacheff (2016) realizar uma distinção entre argumentação e prova formal matemática.

> É aqui que podemos distinguir a argumentação da prova. O raciocínio matemático não pode ser reduzido à aplicação do raciocínio lógico formal (onde as conclusões são derivadas de premissas dadas por meio de teoremas, axiomas ou definições). O raciocínio matemático inclui a argumentação que fornece "razões" para a aceitação ou rejeição de determinadas afirmações, mas que não necessariamente apoia a validade a partir de uma perspectiva matemática. Embora estes argumentos possam ser representados com uma estrutura ternária (Toulmin, 1958, e cf. infra), podem não se basear num teorema ou definição, ou num axioma como é o caso de uma prova matemática; em vez disso, pode ser uma conjectura, uma construção pessoal ou um princípio (por exemplo, um teorema em ação) fornecido pela concepção mobilizada ou uma função de raciocínio como a abdução ou empirismo ingênuo (derivando uma reivindicação a partir da observação de alguns casos). (PEDEMONTE; BALACHEFF, 2016, p.105-106, t**radução nossa**).

Para Hanna e De Villiers (2008)

> Compreender a relação entre argumentação (um discurso fundamentado que não é necessariamente dedutivo, mas que usa argumentos de plausibilidade) e prova matemática (uma cadeia de inferências dedutivas bem-organizadas que utiliza argumentos de necessidade) pode ser essencial para projetar tarefas de aprendizagem e currículos que visam ensinar provas e comprovar. Alguns pesquisadores veem a prova matemática como distinta da argumentação, enquanto outros veem a argumentação e prova como partes de um contínuo e não como uma dicotomia. [...] O primeiro grupo se concentraria principalmente na organização lógica das declarações em uma prova e teria como objetivo ensinar uma estrutura conceitual que constrói provas independentes da resolução de problemas. Por outro lado, o segundo grupo se concentraria principalmente produção de argumentos no contexto de resolução de problemas, experimentação e exploração, mas esperaria que esses argumentos fossem posteriormente organizados logicamente para formar uma prova matematicamente válida (HANNA; DE VILLIERS, 2008, p.331, **tradução nossa**).

Neste estudo, assumimos a postura do segundo grupo, ou seja, não enxergamos argumentação e prova como uma dicotomia, muito pelo contrário, consideramos a argumentação e prova como partes de um contínuo. Nesse sentido, diante de um problema

envolvendo a elaboração de conjecturas e provas, a solução está dividida em duas partes, o aluno argumenta inicialmente para afirmar/justificar uma conjectura e em um segundo momento para provar que a conjectura é verdadeira (FIALLO; GUTIÉRREZ, 2017). Ainda de acordo com os autores estas fases, por vezes parecem entrelaçadas, e, portanto, não são necessariamente sequencias.

A partir disso, as "*conjecturas levantadas e as provas produzidas pelos alunos são os elementos centrais, a par dos discursos elaborados para refletir sobre as conjecturas (argumentações) e convencer da sua verdade (provas)* ". (FIALLO; GUTIERREZ, 2017, p.2).

O modelo de Toulmin (2001) será utilizado como referencial teórico de base para análise dos dados desta pesquisa, especificamente, na construção e avaliação das estruturas globais de argumentação bem como na análise dos argumentos de prova.

O nosso objetivo é construir uma análise, dentro de uma comunidade de aprendizagem composta por pequenos grupos de estudantes ingressantes em um curso de formação inicial de professores, fundamentada em argumentações substanciais (ou também formais) buscando a construção do consenso matemático e a verdade.

6.3.2 Estrutura para identificar um argumento matemático produzido no modelo de Toulmin

Ao realizar a separação dos diferentes componentes de um argumento, a análise da argumentação coletiva permitiu examinar os tipos de raciocínio e justificação utilizados pelos alunos na construção da conclusão e como os alunos contribuem para este raciocínio.

Os argumentos produzidos durante as interações discursivas realizadas no âmbito de cada grupo podem ser identificados por meio da utilização de uma estrutura passo-a-passo:

(1) identificar uma conclusão (parcial ou final) na transcrição da argumentação;

(2) buscar dados que apoiem cada conclusão;

(3) buscar garantias (justificativas) que mostram como os dados sustentam a (s) conclusão (ões).

(4) buscar qualquer possível apoio à garantia;

(5) buscar elementos de refutação parcial ou total de uma conclusão;

(6) identificar elementos qualificadores (advérbios de intensidade) da conclusão;

(7) interpretar os elementos identificados levando em conta o contexto particular, ao escrever o argumento reconstruído como uma conclusão apoiada.

A referida estrutura corresponde a uma ampliação da estrutura proposta no estudo de Nordin e Björklund Boistrup (2018). A adaptação/ampliação se deu na inclusão dos itens (5) e (6). Ao fazer isso, mostramos como reconstruir sistematicamente os argumentos matemáticos (NORDIN; BJÖRKLUND BOISTRUP, 2018).

A estrutura permite distinguir sistematicamente os argumentos como também leva em consideração a sua representação multimodal[37]. Além disso, ela assegura que os argumentos sejam matemáticos sem a necessidade de produzir noções formais (simbolização matemática). Contudo, ela também tem o poder de captar argumentos veiculados de modo mais formal. (NORDIN; BJÖRKLUND BOISTRUP, 2018).

6.3.3 Modelo de análise para identificar estruturas globais de argumentação e avaliar o raciocínio dos alunos

De acordo com Knipping (2008) a estrutura argumentativa de Toulmin é útil para reconstruir etapas de fluxos de argumentação, no entanto, não é adequado para representar toda a anatomia do processo argumentativo que ocorre em sala de aula, sendo esta última, uma atividade bem complexa onde o professor desempenha um papel fundamental na orquestração do discurso. Ainda de acordo com essa autora, todo o processo de argumentação desenvolvido em sala de aula requer, portanto, um modelo diferente para ilustrar a estrutura global de um discurso argumentativo. Nesse sentido, Knipping (2008) apresenta um modelo[38] com representações diagramáticas (modelos geométricos) para ilustrar as complexas estruturas de argumentação que envolvem este tipo de discurso em sala de aula e dessa forma examinar o processo de argumentação de uma forma mais abrangente e tirar conclusões analisando o raciocínio dos alunos. Essa análise da estrutura global da argumentação é definida por Knipping (2008) como análise anatômica da estrutura dos argumentos inter-relacionados.

Knipping (2008) defende que o exame das estruturas globais de argumentação é benéfico para compreender toda a complexidade que envolve o ensino e o fornecimento de justificações e provas. Para além disso as instruções e o apoio fornecido pelo professor durante a argumentação são eficazes para moldar a estrutura global de argumentação (KNIPPING, 2008).

---

[37] Ex: argumentos matemáticos criados pelos alunos através de modos informais, tais como desenhos.
[38] O modelo apresentado por Knipping (2008) propõe uma adaptação do modelo de Toulmin para um macro contexto de argumentação, ou seja, envolve uma tentativa de categorizar os processos de argumentação em sala de aula.

Quatro tipos de estruturas de argumentação global: *estrutura-fonte, estrutura-reservatório, estrutura-espiral* e *estrutura-coleta* são apresentados nos estudos de Knipping (2008) e Reid e Knipping (2010).

Posteriormente, outras duas novas estruturas de argumentação global: *estrutura-linear e estrutura-argumentos independentes* foram acrescentadas a literatura através dos estudos de Erkek e Bostan (2019) e Erkek e Işiksal Bostan (2019) em um contexto de ensino onde a argumentação foi abordada em um ambiente de tecnologia envolvendo experimentação virtual no software Geogebra.

De acordo com Erkek e Bostan (2019)

> Não há explicações relatadas por estudos na literatura relacionada de uma estrutura de argumentação global ser superior a outra. Apenas foi dito que algumas estruturas são figurativamente mais complexas quando comparadas a outras. Estruturas complexas de argumentação global surgem como resultado do emprego de habilidades de raciocínio de ordem superior, bem como do exame abrangente e da associação de conceitos (ERKEK; BOSTAN, 2019, p.22, **tradução nossa**).

Segundo Erkek e Bostan (2019) o exame das estruturas globais de argumentação permite aos pesquisadores analisarem o panorama geral da argumentação em sala de aula na medida em que é possível verificar como os alunos são apoiados pelo professor durante o processo de argumentação. O apoio do professor, segundo estes autores, deverá conduzir os alunos a discutir relações conceituais em suas mentes e quando for o caso exibir concepções errôneas (ERKEK; BOSTAN, 2019).

Examinando as estruturas globais de argumentação, informações importantes poderão ser obtidas no que diz respeito às habilidades de raciocínio, compreensão dos alunos sobre a declaração do problema e pensamento matemático (KOSKO; ROUGEE; HERBST, 2014; WALTER; BARROS, 2011; ERKEK; BOSTAN, 2019).

No intuito de promover a compreensão das estruturas globais de argumentação Knipping (2008) define inicialmente os termos: *etapa de argumentação, fluxo de argumentação, argumentos e fluxos de argumentação paralelos*.

De acordo com Knipping (2008) uma determinada "etapa de argumentação" faz referência a um argumento distinto composto pelos seguintes componentes: dado(s), conclusão e garantia, podendo incluir ainda caso exista, os elementos de apoio, refutação e qualificador modal. Já o "fluxo de argumentação" envolve toda uma cadeia de etapas de argumentação, ou seja, uma série de argumentos interconectados entre si que visam justificar uma conclusão alvo. E por fim, "argumentos paralelos" são argumentos distintos e que sustentam a mesma conclusão

dentro de um fluxo de argumentação. Os argumentos paralelos surgem durante uma argumentação quando são produzidos argumentos substancialmente diferentes para uma mesma conclusão intermediária ou numa situação em que diferentes garantias são apresentadas para apoiar a mesma conclusão intermediária (KNIPPING, 2008). Ainda de acordo com esta autora, fluxos de argumentação que possuem a mesma conclusão alvo são denominados "fluxos de argumentação paralelos".

Knipping (2008) revela que na representação diagramática da argumentação, as proposições inseridas nos fluxos de argumentação são geralmente representadas por retângulos, círculos e losangos (diamantes).

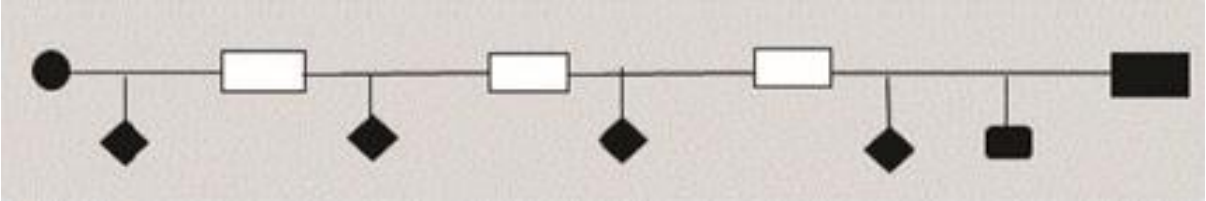
> Os diferentes símbolos não representam apenas as diferentes funções das afirmações (dado, conclusão, garantia), que também são indicadas pelas letras D, C, W na frente das afirmações, mas também o status que as afirmações têm dentro da estrutura global da argumentação. Por exemplo, a conclusão alvo é representada por um retângulo preto. Os retângulos brancos representam conclusões alvo de estágios intermediários dentro da argumentação global; eles indicam os pontos finais dos estágios. Estes podem tornar-se pontos de partida, portanto dados (D), na próxima etapa da argumentação (KNIPPING, 2008, p.435, **tradução nossa**).

Os retângulos brancos que possuem o status de dados (D) em um determinado fluxo de argumentação possui também o status de conclusão (C) para um fluxo de argumentação anterior. Conclusões ou dados que não têm o status de um alvo intermediário são representados por círculos pretos, garantias (W) e apoio (B) são simbolizados por losangos pretos e o elemento de refutação (parcial ou total), quando presente é representado pelo quadrado preto.

Com base nos estudos de Knipping (2008), Reid e Knipping (2010), Erkek e Bostan (2019), Erkek e Işiksal Bostan (2019) são descritas as estruturas globais de argumentação:

1-Estrutura de linha: Consiste em uma estrutura onde os argumentos são interconectados de forma linear até se obter uma conclusão final. São propriedades desta estrutura: a) No fluxo de argumentação a conexão entre argumentos é estabelecida através de conclusão/dados, ou seja, a conclusão da primeira etapa do fluxo de argumentação (retângulo branco) corresponde aos dados da segunda etapa do fluxo de argumentação e assim sucessivamente até atingir a conclusão final; b) não há argumentos paralelos; c) não há processos de raciocínio retroativos (indo e vindo), pelo contrário, o raciocínio empregado é sequencial, linear e para frente o tempo todo até alcançar a conclusão alvo (ERKEK; BOSTAN, 2019).

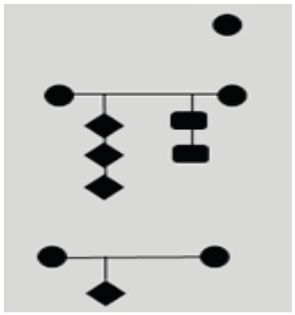
Figura 13 - Ilustração da estrutura de linha



Fonte: Erkek e Bostan (2019, p.14).

2-Estrutura de argumentos independentes: É composta por argumentos distintos e isolados que não tem conexão uns com os outros. Isso pode ocorrer nas seguintes situações: a) o aluno não consegue resolver um problema ou estabelecer uma conclusão final, contudo, ele expressa uma opinião qualquer que vem à mente sobre a solução do problema; b) o aluno expressa um argumento e logo em seguida o refuta; c) o aluno constrói um argumento e logo em seguida declara outro argumento sem conexão com o anterior (ERKEK; BOSTAN, 2019).

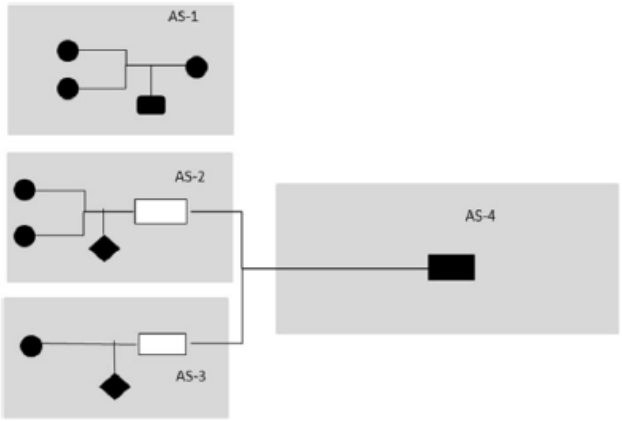
Figura 14 - Ilustração da estrutura argumentos independentes



Fonte: Erkek e Bostan (2019, p.15)

3- Estrutura de fonte: Nesta estrutura, opiniões e argumentos surgem de uma variedade de fontes (nascentes) diferentes (KNIPPING, 2008). Há um efeito funil, ou seja, muitas conjecturas e argumentos associados surgem no início da discussão e as justificações vão convergindo para uma conclusão final, ou seja, há uma espécie de unificação de nascentes (KNIPPING, 2008). São características desta estrutura: a) presença de argumento (s) isolado(s) desconectado(s) do tema e que não se conecta(m) à estrutura principal (AS-1); b) presença de fluxos de argumentos paralelos para apoiar uma mesma conclusão (AS-2, AS-3); c) existência de etapas de argumentação com mais de um dado (AS1 e AS2); d) presença de componentes de refutação de uma conjectura (AS-1). Esta estrutura geralmente aparece em situações onde o professor, por meio de questionamentos, encoraja os alunos a exibir diferentes justificações para uma mesma conjectura (KNIPPING, 2008; REID; KNIPPING, 2010; ERKEK; BOSTAN, 2019; ERKEK; IŞIKSAL BOSTAN, 2019).

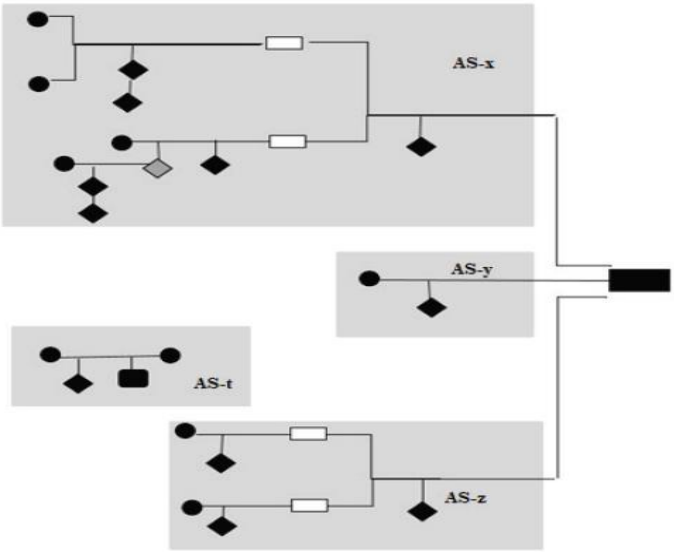
Figura 15 - Ilustração da estrutura fonte.



Fonte: Erkek e Işiksal Bostan (2019, p.623)

4- Estrutura de espiral: Esta estrutura guarda as mesmas características mencionadas na estrutura de fonte. A principal diferença entre elas está relacionada a posição dos fluxos de argumentos paralelos. Na estrutura de fonte estes fluxos aparecem no início da argumentação, já na estrutura espiral, eles aparecem no final da argumentação. Em outras palavras, na estrutura fonte, o alvo dos fluxos de argumentação paralelos é a conjectura inicialmente criada, podendo esta ser justificada por diferentes argumentos ao passo que na estrutura espiral, o alvo dos fluxos de argumentação paralelos é a conclusão final justificada/fundamentada por diferentes argumentos ou métodos de prova. Neste último caso, cada fluxo de argumentação paralelo (AS-x, AS-y e AS-z) indicado na Figura 16 obtém a mesma conclusão de forma independente. Esta estrutura geralmente aparece em situações em que o professor solicita aos alunos outros métodos de solução do problema (KNIPPING, 2008; REID; KNIPPING, 2010; ERKEK; BOSTAN, 2019; ERKEK; IŞIKSAL BOSTAN, 2019).

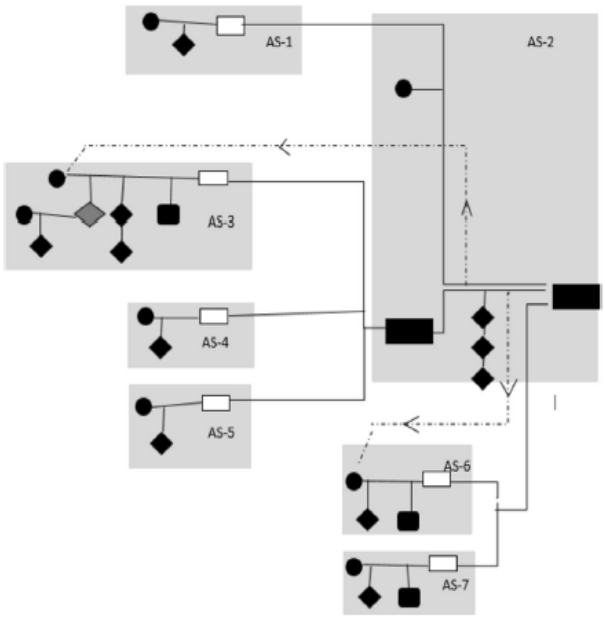
Figura 16 - Ilustração da estrutura espiral



Fonte: Erkek e Bostan (2019, p.8)

5- Estrutura de reservatório: Esta estrutura revela conclusões intermediárias que são independentes e autossuficientes (KNIPPING, 2008). Estas conclusões intermediárias funcionam como uma espécie de reservatório de retenção e purificação da água para então viabilizar a passagem da água para a etapa seguinte (REID; KNIPPING, 2010). Nesta estrutura o raciocínio do aluno se move para trás e depois para frente para fornecer ao processo argumentativo apoios adicionais: dados e justificativas. Reid e Knipping (2010) explicam que diante do impacto e relevância destes novos apoios, estes podem conduzir o aluno a realizar novas deduções e justificações para se chegar à uma conclusão final mais confiável. Nesta estrutura, portanto, há discussões e argumentações mais profundas e complexas, uma vez que o(s) aluno(s) reexamina(m) os argumentos a fim de encontrar suportes e dados adicionais, avançando e retrocedendo em seu pensamento dedutivo de modo a propor explicações adicionais. As linhas tracejadas e orientadas com uma seta indicadas na Figura 17 apontam para as etapas de argumentação para onde o raciocínio retrocede e para onde os novos dados foram estabelecidos para se chegar à conclusão desejada. Esta estrutura geralmente aparece em situações onde o professor solicita aos alunos a revisão de determinadas justificativas e apresentação de dados para embasar alguma conclusão (KNIPPING, 2008; REID; KNIPPING, 2010; ERKEK; BOSTAN, 2019; ERKEK; IŞIKSAL BOSTAN, 2019).

Figura 17 - Ilustração da estrutura de reservatório

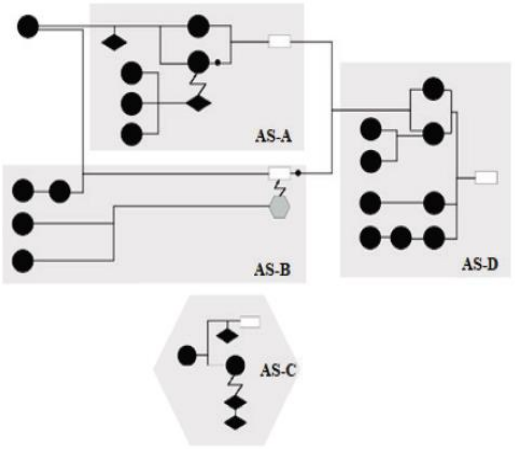


Fonte: Erkek e Işiksal Bostan (2019, p.625)

6- Estrutura de reunião ou coleta: Nesta estrutura diversos dados são coletados para apoiar várias conclusões inter-relacionadas, contudo elas não alcançam a conclusão final almejada. São características desta estrutura: a) Outros novos dados podem surgir e serem adicionados

aos fluxos de argumentação mesmo que o processo argumentativo ainda esteja em andamento; b) não há argumentos paralelos e os fluxos de argumentação prosseguem independentemente da estrutura principal, está característica em especial, distingue a referida estrutura das estruturas de fonte e espiral; c) não há processo de raciocínio de ida e volta característico da estrutura de reservatório (REID; KNIPPING, 2010; ERKEK; BOSTAN, 2019). Esta estrutura pode aparecer em situações em que o problema é aberto e o aluno tem a liberdade de coletar dados para problematizar a sua questão de estudo.

Figura 18 - Ilustração da estrutura de reunião ou coleta



Fonte: Erkek e Bostan (2019, p.9)

Na literatura, não é citado que haja uma estrutura de argumentação global melhor do que a outra, ao invés disso, é apontado como estas estruturas, das mais simples (*estrutura de argumentos independentes, estrutura de linha*) às mais complexas (*estrutura de fonte, estrutura de espiral, estrutura de reservatório*) podem ser utilizadas para oferecer um macro modelo do processo argumentativo em sala de aula, explicando em detalhes, o apoio oferecido pelo professor na atividade argumentativa bem como o monitoramento do raciocínio empregado pelos alunos (ERKEK; IŞIKSAL BOSTAN, 2019).

No contexto, deste estudo, optamos por analisar a anatomia de situações de argumentação coletiva durante a realização de uma tarefa de investigação por alunos ingressantes em um curso de licenciatura em matemática. Pretende-se dessa forma examinar o processo de argumentação coletiva de uma forma mais abrangente, investigando que estruturas de argumentação emergem da situação argumentativa proposta no estudo de caso bem como analisar o raciocínio dos alunos com base na identificação destas estruturas.

Knipping (2008) explica que na análise da argumentação geral são avaliados os diagramas globais produzidos por argumentos inter-relacionados, enquanto as contribuições individuais para a argumentação não são analisadas. Ainda de acordo com a autora, o exame

dos argumentos individuais dos participantes será benéfico para compreender o papel de cada sujeito no contexto da estrutura global (KNIPPING, 2008).

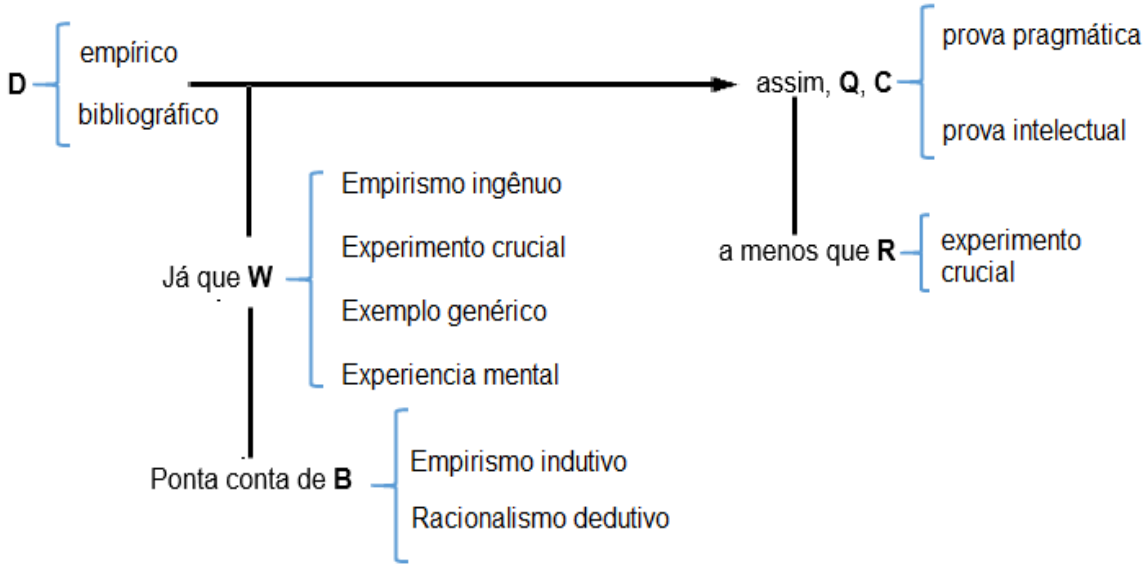
Uma alternativa interessante para abordar a sugestão anterior citada por Knipping (2008) é utilizar cores diferentes no layout da estrutura de argumentação global para indicar a participação de cada aluno na construção dos componentes dos argumentos. Dessa forma, a estrutura poderá evidenciar com mais detalhes as habilidades individuais de cada aluno e auxiliar no monitoramento do seu raciocínio durante todo o processo argumentativo.

Para Knipping (2008) conversações realizadas em sala de aula podem revelar diferentes práticas que seguem sua própria lógica peculiar de argumentação. Nesse sentido, o método de análise das estruturas de argumentação global pode ser usado como uma forma de investigar e comparar estas diferentes práticas de sala de aula. Em particular, "*o método é promissor para comparar processos em salas de aula em que a atividade de provar é enfatizada em salas de aula onde diferentes funções de provar são enfatizadas*" (KNIPPING, 2008, p.438).

6.3.4 Modelo de análise para avaliar o argumento de validação durante a argumentação coletiva

O modelo de análise do argumento de prova (RODRIGUES; MONTEIRO, 2021) indicado na Figura 19 foi desenvolvido pelo autor durante o curso de doutorado sob a orientação do professor Dr. Marco Aurélio Alvarenga Monteiro.

Figura 19 - TAP no contexto da teoria de Balacheff (1987,1988).



Fonte: Rodrigues e Monteiro (2021)

.

O referido modelo "*integra a estrutura argumentativa de Toulmin (2001) à teoria de Nicolas Balacheff (1987,1988) sobre os tipos e níveis de prova*" (RODRIGUES; MONTEIRO, 2021, p.147)

O modelo foi descrito e discutido teoricamente em uma revista de publicação internacional, contudo, ele ainda não havia sido testado pelos pesquisadores em uma situação prática de ensino envolvendo argumentação coletiva em sala de aula. A testagem e avaliação desta estrutura, portanto, é realizada de forma inédita neste estudo.

De acordo com Rodrigues e Monteiro (2021) este modelo teórico-metodológico sob a luz da teoria de Nicolas Balacheff (1987, 1988) sobre os tipos e níveis de prova constitui uma versão aprimorada da estrutura argumentativa de Toulmin (2001) para avaliar a qualidade do argumento de prova.

Os elementos: dados (D), garantia (W), apoio da garantia (B), qualificador (Q), Refutação (R) e conclusão (C) são definidos por Toulmin (2001). O que o modelo apresenta de inovador é a possibilidade de classificar os componentes do argumento de prova sob a luz da teoria de Balacheff (1987;1988). A classificação da garantia, em especial, por si só, orienta a classificação dos outros componentes do argumento (RODRIGUES e MONTEIRO, 2021).
Em particular, os dados (D) podem

> [...] ser classificados como empíricos ou bibliográficos. O dado é empírico quando é coletado diretamente do fenômeno ou objeto de estudo por meio da observação e manipulação do objeto. Por outro lado, o dado é classificado como bibliográfico quando é coletado indiretamente pelo aluno por meio de buscas a fontes bibliográficas no intuito de compreender melhor a situação problema. (RODRIGUES e MONTEIRO, 2021, p.148).

A natureza da garantia (W) está relacionada ao modo como o aluno obtém o modelo/resultado/conjectura e realiza a validação deste (a).

> Para Balacheff (1987) esse "*modo*" está relacionado com estratégias/raciocínios utilizados pelos alunos em sua argumentação para produzir provas. Nesse sentido a garantia apresentada se baseia em alguma das seguintes categorias já descritas na seção anterior: empirismo ingênuo, experimento crucial, exemplo genérico e experiência mental (RODRIGUES e MONTEIRO, 2021, p.148).

Os apoios (B), podem aparecer implícitos na explicação/justificação do aluno fazendo referência ao raciocínio empregado. Eles podem ser classificados em:

> empirismo indutivo e racionalismo dedutivo. O empirismo indutivo é caracterizado por uma corrente epistemológica em que o conhecimento é construído a partir da ação-experiência-observação. Já o racionalismo

> dedutivo, remete ao mundo da razão, ao conhecimento construído de forma lógica, através de operações mentais. (RODRIGUES e MONTEIRO, 2021, p.148).

Ainda de acordo com Rodrigues e Monteiro (2021)

> A classificação do apoio depende do tipo de garantia apresentada, ou seja, os tipos de garantias denominadas de empirismo ingênuo e experimento crucial remetem a corrente teórica ligada ao Empirismo indutivo. A garantia baseada na experiência mental tem apoio na teoria do racionalismo dedutivo. E por fim a garantia com base no exemplo genérico, a depender do nível de dedução realizado pelo aluno e grau de apego deste ao caso particular, pode tanto variar de empirismo indutivo ao racionalismo dedutivo. (RODRIGUES e MONTEIRO, 2021, p.148).

É importante salientar que se a explicação/justificação do aluno for baseada na ação experimental, trata-se de um apoio associado ao empirismo indutivo. Caso contrário, se a explicação/justificação do aluno envolver conceitos e teorias para fundamentar o raciocínio, trata-se do uso da razão para realizar deduções (RODRIGUES e MONTEIRO, 2021).

O qualificador modal (Q) quando estiver presente,

> [...] pode ser analisado com base no tipo de teste realizado pelo aluno para então proferir um grau de força a conclusão. Em um nível de força, do menor para o maior, os testes podem ser classificados como: teste ingênuo, teste crucial e teste genérico. Dessa forma um argumento baseado em um teste genérico, a conclusão tem mais força do que uma conclusão baseada em argumentos associados a testes ingênuos e crucial. (RODRIGUES e MONTEIRO, 2021, p.148).

Rodrigues e Monteiro (2021) explicam ainda que o elemento de refutação (R) enquanto parte integrante da estrutura completa do argumento de Toulmin (2001) pode ser compreendido também como um experimento crucial (Balacheff, 1987), "*cujo contraexemplo desprovido do caráter generalizador, atua na refutação parcial de uma conclusão*" (RODRIGUES e MONTEIRO, 2021, p.148).

Por fim o tipo de conclusão proferida,

> seja ela, pragmática ou intelectual, é designada com base na avaliação da classificação das garantias e dos apoios fornecidos. A classificação do apoio decorre da classificação da garantia e nesse caso, o apoio em última instância, por si só, é capaz de direcionar o tipo de conclusão do argumento. (RODRIGUES e MONTEIRO, 2021, p.148).

Para Rodrigues e Monteiro (2021) o

> argumento, portanto, é forte e bem elaborado se a conclusão for classificada como prova intelectual ou se a conclusão for um elemento de prova pragmática, do tipo experimento crucial à serviço da refutação de um argumento. Por outro lado, o argumento será classificado como fraco e de

> pouca elaboração quando a conclusão estiver baseada uma prova pragmática de caráter não refutador. (RODRIGUES e MONTEIRO, 2021, p.148).

O modelo é indicado "*como um instrumento para avaliar a qualidade do argumento de prova, com fins de validação, produzido por alunos da Educação Básica especialmente no Ensino Médio*" (RODRIGUES e MONTEIRO, 2021, p.148). Neste último nível de ensino, os alunos deverão estar mais aptos a demonstrar competências e habilidades para produzir provas mais elaboradas (Balacheff, 1987,1988; RODRIGUES e MONTEIRO, 2021).

Neste estudo, entretanto, utilizaremos o referido modelo para compreender como alunos ingressantes em um curso de formação de professores em matemática argumentam para justificar (validar) suas ideias.

É importante salientar a distinção que fazemos entre os termos justificação e validação no contexto deste estudo. Toda validação constitui uma justificação. Contudo, nem toda justificação é uma validação. Uma justificação no nível de prova conceitual ou formal, é o que consideramos como validação. Uma justificação empírica ou por meio de um desenho/ilustração sem caráter generalizador não será considerado uma validação, mas sim uma simples justificação.

6.3.5 Análise de conteúdo das sessões de autoscopia colhidas por meio do grupo focal

O conteúdo verbal das sessões de autoscopia foram gravados em áudio, transcritos e examinadas por meio da técnica de "análise de conteúdo" (BARDIN, 1985). Esta técnica foi utilizada para compreender melhor as informações que emergiam dos dados coletados por meio da transcrição das sessões de autoscopia.

Para que o processo de análise de conteúdo seja bem-sucedido, Bardin (1985) recomenda que o pesquisador faça reiteradas leituras do material escrito, de modo que possa evidenciar elementos comuns e não comuns aos discursos aos quais permitirá ao pesquisador estabelecer relações e promover a compreensão do objeto de estudo.

Fiorentini e Lorenzato (2006) explicam que esta técnica leva em consideração "*as palavras utilizadas nas respostas, as ideias ou opiniões expressas e as interpretações e justificativas apresentadas.*" (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p.137).

A análise das informações se torna:

> [...] um processo trabalhoso e meticuloso que implica múltiplas leituras do material disponível, tentando nele buscar unidades de significados ou, padrões e regularidades para, depois agrupá-los em categorias. A busca dessa organização é guiada, geralmente, pela questão investigativa e pelos objetivos do estudo. (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p.133).

A categorização consiste em um "*processo de classificação ou de organização de informações em categorias, isto é, em classes ou conjuntos que contenham elementos ou características comuns*" (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p.134).

Nessa etapa de análise do material transcrito das sessões de autoscopia, utilizou-se um tipo de categoria definida como "emergente", obtido "*mediante um processo interpretativo, diretamente do material de campo*" (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p.135). Ainda de acordo com os autores, a separação das informações em unidades de significados, por meio de categorias, facilita o confronto das mesmas bem como a percepção de relações, padrões e regularidades.

A estratégia adotada para realizar a análise de conteúdo (BARDIN, 1985), baseia-se no "*construção iterativa de uma explicação*" (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p.139). Nessa estratégia, a análise dos dados não se processam a partir de um quadro teórico previamente definido (FIORENTINI; LORENZATO, 2006).

Neste processo de análise

> [...] o pesquisador elabora pouco a pouco uma explicação lógica do fenômeno ou da situação estudados, examinando as unidades de sentidos, as inter-relações entre essas unidades e entre as categorias [...] que elas se encontram reunidas. (LAVILLE; DIONNE, 1999, p.227).

De acordo com (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p.139-140) "*a vantagem é que as categorias construídas emergem do material em análise e não da literatura propriamente dita, embora nesse processo, o diálogo com a literatura e outras formas de classificação seja conveniente e necessário*" .

Durante essa etapa de análise das transcrições de autoavaliação do desempenho dos alunos na prática argumentativa, pretendeu-se que as categorias e as unidades de significados revelassem elementos que pudessem apontar quais competência e habilidades argumentativas são consideradas pelos alunos como importantes/necessárias/fundamentais para a formação do professor que ensina matemática

6.3.6 Triangulação de fontes e métodos.

BORBA *et al*., (2006) destacam a importância da utilização de uma estratégia de coleta de dados para aumentar a credibilidade de uma pesquisa que adota a abordagem qualitativa. Esta estratégia/método é denominada por triangulação de dados (ALVES-MAZZOTTI, 1998). Ainda de acordo com este último autor, a triangulação é um dos instrumentos utilizados para atestar a confiabilidade de uma pesquisa, não sendo o único, havendo, pois, outros critérios tais como a transferibilidade, a consistência e a confiabilidade.

De acordo com BORBA *et al*., (2006)

> a triangulação em uma pesquisa qualitativa consiste na utilização de vários e distintos procedimentos para obtenção de dados. Os principais tipos de triangulação são a de fontes e a de métodos. Quando checamos, por exemplo, as informações obtidas em uma entrevista com as atas de uma reunião sobre um mesmo assunto, estamos fazendo uma triangulação de fontes. Por outro lado, se observarmos o trabalho de um grupo de alunos e depois entrevistarmos seus componentes sobre o trabalho desenvolvido, realizaremos uma triangulação de métodos. Fazendo assim, o pesquisador, ao invés de construir suas conclusões apenas a partir de observações, pode utilizar entrevistas para checar algum detalhe ou para compreender melhor algum fato ocorrido durante as observações, promovendo uma maior credibilidade de sua pesquisa.(BORBA et al., 2006, p.37-38).

Neste estudo, os dados relativos à argumentação coletiva (multimodal) coletados por meio de observação (videogravada e notas de campo), recolha de registros escritos e autoscopia, depois de transcritos, foram analisados tendo como referência a combinação dos métodos de análise argumentativa de Toulmin ampliado (modelo global e modelo local) e análise de conteúdo (Bardin, 1985). Dessa forma foi estabelecido, portanto, uma triangulação de fontes na coleta de dados bem como uma triangulação no método de análise dos dados.

Este estudo foi submetido a avaliação do comitê de ética em pesquisa do Centro Universitário Teresa D'Ávila – UNIFATEA e após análise foi aprovado pelo referido comitê da instituição por meio do parecer de nº 5.866.186 de dezembro de 2022.

No próximo capítulo apresentaremos a análise dos dados coletados durante a pesquisa.

Capítulo 7 – Análise dos dados

Neste capítulo, será apresentado a análise do *corpus* da pesquisa, constituído durante a aplicação da atividade de investigação "*fabricação de números*" e realização das sessões de autoscopia. Na seção 7.1, será apresentado o perfil dos sujeitos participantes do estudo, a composição dos grupos de trabalho envolvidos na argumentação coletiva bem como a descrição geral de toda a dinâmica operacional envolvendo a realização da atividade e coleta de dados. Já na seção 7.2, com o objetivo de compreender "*como os alunos investigados argumentam (raciocinam/evidenciam aprendizagem) para* ***justificar*** *suas ideias*? " e "*Quais estruturas de argumentação global podem ser identificadas para descrever o raciocínio utilizado por estes alunos*?" Foram utilizados como objeto de análise: a) a transcrição da videogração de três situações de argumentação coletiva envolvendo a aplicação da atividade de investigação (APÊNDICE A; B; C); b) os registros escritos produzidos pelos grupos e as c) notas de campo oriundas da observação participante do pesquisador (APÊNDICE, A; B; C). A ideia inicial foi propiciar uma avaliação anatômica do "processo" argumentativo por meio de estruturas globais de argumentação a partir de contribuições individuais de alunos e professor na produção colaborativa de argumentos em situações de argumentação coletiva em sala de aula. Com base nas estruturas geradas foram analisados o raciocínio dos alunos, os tipos de argumentos e componentes utilizados para justificação, a aprendizagem coletiva no âmbito do grupo e o papel do professor em relação ao tipo e complexidade da estrutura gerada.

Por sua vez na seção 7.3, com o objetivo de compreender "*como os alunos investigados argumentam para* ***validar*** *suas ideias?* ", foram utilizados, como objeto de análise: a) a transcrição da videogração de três situações de argumentação coletiva envolvendo a aplicação da atividade de investigação (APÊNDICE A; B; C); b) os registros escritos produzidos pelos grupos e as c) notas de campo oriundas da observação participante do pesquisador (APÊNDICE, A; B; C). Diferentemente da seção 7.2, a ideia aqui, ficou restrita a análise e avaliação do argumento de prova, ou seja, o "produto final" da argumentação comprobatória tendo como ferramenta de análise o modelo teórico desenvolvido por Rodrigues e Monteiro (2021). Por fim, na seção 7.4, com o objetivo de "*investigar como os alunos autoavaliam o seu desempenho na prática da argumentação coletiva?* " e "*Quais competências e habilidades eles consideram importantes/fundamentais/necessárias para a formação do professor que ensina matemática?*" Foram utilizados, como objeto de análise a transcrição das sessões de autoscopia viabilizadas por encontros de grupo focal realizados junto a cada grupo e analisadas por meio da técnica de Análise de conteúdo (BARDIN, 1985; FIORENTINI e LORENZATO, 2006).

7.1 Perfil dos alunos participantes e a realização da atividade

Participaram da coleta de dados 10 alunos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática do IFSULDEMINAS, Campus Passos durante o ano de 2022. A princípio, a turma ingressante era composta por 40 alunos, porém, durante o primeiro e segundo semestre de 2022 a evasão no referido curso foi alta motivada pelos reflexos do contexto vivido na pandemia causado pelo Coronavírus. No período de transição das aulas remotas para as aulas presenciais, ocorrido em 2022, por exemplo, muitos alunos abandonaram o curso de matemática por diversos motivos, dentre eles um foi bastante citado pelos alunos ainda em curso, ou seja, a falta de base, ou pré-requisitos de matemática básica para acompanhar o curso. Uma possível explicação para isso pode estar ligada ao modelo de ensino com aulas remotas que vigorou durante o período da pandemia. Neste modelo de ensino a distância muitos alunos tiveram dificuldades para acompanhar as aulas ministradas de forma remota como também relataram dificuldades de aprendizagem e defasagem de conteúdos da matemática do Ensino Médio. Isso provavelmente foi um dos principais motivos que corroborou para a alta evasão no curso durante o ano de 2022. O Quadro 20 apresenta informações sobre os participantes da pesquisa, tais como, pseudônimo de identificação na pesquisa, gênero, período do curso, e o grupo que integrou durante a realização da atividade.

Quadro 20 – Perfil dos participantes do estudo.

Grupos	Pseudônimo	Gênero	Período do curso em 2022
Grupo 1	Alisson	Masculino	2º período
	Ana Paula	Feminino	2º período
	Cristina	Feminino	2º período
	Paulínia	Feminino	2º período
Grupo 2	Caique	Masculino	2º período
	Carolina	Feminino	2º período
	Luiz Fernando	Masculino	2º período
Grupo 3	Ana Lívia	Feminino	2º período
	Lena	Feminino	2º período
	Luiz Felipe	Masculino	2º período

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na sequência, em particular, uma descrição do perfil de cada participante da pesquisa é brevemente apresentada.

Alisson, reside na cidade de Passos-MG, concluiu o Ensino Médio em escola pública durante o ano de 2021. Durante a pandemia do Coronavírus, cursou 2 anos do Ensino Médio em regime de aulas remotas. Ele cita que este modelo de ensino lhe trouxe prejuízos na aprendizagem de conteúdos de matemática bem como de outros que não foram vistos. Alisson, trabalha 8 horas por dia no comércio e cursa a licenciatura em matemática no período noturno.

Ana Paula, também é residente na cidade de Passos-MG. Ela se declara tímida, com dificuldades em matemática e oriunda de escola pública. Concluiu o Ensino Médio em 2021, sendo os dois últimos anos sob o regime de aulas remotas. Ela não exerce atividade remunerada, atua como bolsista do projeto de iniciação à docência (Residência Pedagógica) do IFSULDEMINAS, Campus Passos durante o período diurno e a noite cursa a licenciatura em matemática.

Cristina, reside na cidade de Passos-MG, concluiu o Ensino Médio em 1997 em escola pública. Ela atualmente não exerce nenhum tipo de atividade remunerada e declara ter dificuldades em matemática devido ao longo período em que ficou afastada dos estudos e sem ter contato com a matemática. Durante o período noturno ela frequenta as aulas do curso de matemática.

Paulínia, também reside na cidade de Passos-MG, concluiu o Ensino Médio em 1995 em escola pública e assim como Cristina, declara ter dificuldades em pré-requisitos de matemática básica devido ao longo período afastada das atividades escolares. Ela trabalha 8 horas por dia no comércio da cidade e a noite cursa a licenciatura em matemática.

Caique, reside na cidade de Passos-MG, concluiu o Ensino Médio em escola pública no ano de 2015. É licenciado em Física e exerce a atividade docente durante o período diurno. Declara trabalhar em média 8 horas por dia e a noite busca uma capacitação adicional cursando a licenciatura em matemática.

Carolina, reside na cidade de Passos-MG, concluiu o Ensino Médio em escola pública durante o ano de 2021. Devido ao contexto de pandemia, cursou 2 anos do Ensino Médio sob o regime de aulas remotas. Ela não exerce atividade remunerada, no entanto, exerce atividade monitoria de matemática em uma escola pública da cidade e atua como bolsista do programa Residência Pedagógica do IFSULDEMINAS, Campus Passos durante o período diurno. A noite cursa a licenciatura em matemática.

Luiz Fernando, também reside em Passos-MG, é oriundo de escola pública, tendo concluído o Ensino Médio em 2021. Os dois últimos anos, segundo ele foram sob o regime de aulas remotas no qual o aprendizado e a base da matemática do ensino médio ficaram comprometidos. Ele é bolsista do programa Residência Pedagógica do IFSULDEMINAS, Campus Passos durante o período diurno e a noite cursa a licenciatura em matemática.

Ana Lívia, residente na cidade de São João Batista do Glória-MG, se desloca por meio de ônibus todos os dias da sua cidade até a cidade de Passos-MG para cursar a licenciatura em matemática durante o período noturno. Ela concluiu o Ensino Médio em 2021 e assim como a maioria dos colegas cursou os últimos dois anos do referido nível de ensino sob o regime de

aulas remotas. Ela trabalha 8 horas por dia, atuando como professora assistente em uma escola particular da sua cidade.

Lena, reside em Passos-MG, concluiu o Ensino Médio em 2021 e durante a pandemia cursou a maior parte do nível de escolarização anterior sob o regime de aulas remotas. Durante o período diurno ela trabalha meio expediente no comercio dos pais e na outra parte do dia se dedica a atividade de bolsista do programa Residência Pedagógica do IFSULDEMINAS, Campus Passos. No período noturno se dedica a cursar a licenciatura em matemática.

Luiz Felipe, reside na cidade de Passos-MG, concluiu o Ensino Médio em 2021 sendo os dois últimos anos desse nível de ensino cursados sob o regime de aulas remotas em escola pública. Ele não exerce atividade de trabalho remunerado durante o período diurno, no entanto, atua como bolsista do programa de Residência Pedagógica do IFSULDEMINAS, Campus Passos. Durante o período noturno está envolvido com as atividades da licenciatura em matemática enquanto aluno do referido curso.

Todos os alunos citados cursaram durante o primeiro semestre de 2022, sob o regime de aulas presenciais, as seguintes disciplinas da licenciatura em matemática: Fundamentos de Matemática I, Geometria Plana, Geometria Analítica I, História da Educação, Sociologia da Educação, Prática de Ensino de Matemática I. Já no segundo semestre de 2022, período em que os dados foram coletados, os alunos estavam terminando de cursar as disciplinas de: Fundamentos de Matemática II, Geometria Espacial, Geometria Analítica II, Filosofia da Educação, Introdução à Informática; Prática de Ensino da matemática II e Didática.

Foi diante do contexto citado e do arcabouço de conteúdos disciplinares estudados até aquele momento que os participantes da pesquisa se inseriram na prática da argumentação coletiva durante uma atividade de investigação matemática realizada na primeira quinzena de dezembro de 2022. Nesta oportunidade, 10 alunos ingressantes e matriculados no segundo semestre de 2022 aceitaram participar da tomada de dados da pesquisa.

A atividade de investigação matemática "*Fabricação de números*" foi aplicada no dia 08 de dezembro 2022, durante o horário de aula da disciplina de Fundamentos de Matemática II, ou seja, no horário das 19:00 às 22:40 (4 horas aula). Os dez alunos participantes foram então subdivididos em três grupos de trabalho sem critério de escolha para a formação dos referidos grupos. Foi solicitado aos alunos que realizassem a investigação com o suporte do material didático (ficha e grãos de feijão) disponibilizado pelo professor (pesquisador) a cada grupo. Durante a investigação, os alunos foram orientados pelo professor a argumentarem coletivamente (oral, escrito, multimodal) para justificar e validar suas ideias e quando fosse necessário poderiam acioná-lo para solicitar apoio e participar da discussão. No primeiro dia de

investigação em campo, os dados foram coletados por meio de videogravação de três situações de argumentação envolvendo cada grupo de trabalho durante o desenvolvimento da atividade de investigação. Os registros escritos produzidos por cada grupo também foram coletados após o término da atividade. Para além disso, o professor atuando como "observador participante" colheu informações adicionais relativos ao aspecto multimodal da argumentação. O segundo dia de tomada de dados, ocorreu no dia 22 de dezembro de 2022 durante o horário de aula da disciplina de Fundamentos de Matemática II, das 19 às 22:40 (4 horas aula). No referido dia, os alunos participantes (7) da pesquisa foram levados a refletirem e autoavaliarem o seu desempenho na prática da argumentação coletiva. Para tanto, o pesquisador, na primeira parte do encontro concedeu um tempo de 2h/a para que cada grupo pudesse explorar livremente a videogravação contendo as imagens da participação deles na argumentação coletiva. Já na segunda parte do encontro (2h/a), foram realizadas três sessões de autoscopia, uma envolvendo cada grupo participante e viabilizadas por meio da dinâmica de grupo focal. A partir de questionamentos bem orientados e direcionados ao grupo, os alunos puderam avaliar o desempenho do grupo na prática da argumentação coletiva.

Nas próximas seções, são apresentados os resultados para as questões de investigação deste estudo.

7.2 Anatomia do processo de argumentação coletiva: produção e avaliação de argumentos de justificação com base em estruturas globais de argumentação

As estruturas de argumentação global são úteis para representar a anatomia do processo de argumentação (KNIPPING, 2008). Ainda de acordo com esta autora toda situação de argumentação que ocorre em sala de aula requer um modelo diferente para ilustrar a estrutura global do discurso orquestrado pelo professor. Dessa forma, com base em modelos geométricos é possível examinar o processo argumentativo de uma maneira mais abrangente e tirar conclusões a partir da análise do raciocínio dos alunos (KNIPPING, 2008).

Em particular, no contexto da pesquisa, propôs-se a realização de uma investigação matemática em grupo de modo que os argumentos produzidos de forma coletiva e colaborativa em diferentes situações de argumentação fossem determinados e representados geometricamente por meio de macroestruturas de argumentação (KNIPPING, 2008; REID; KNIPPING, 2010; ERKEK; BOSTAN, 2019; ERKEK; ISIKSAL BOSTAN, 2019). Tomando por base a estrutura anatômica do processo argumentativo, os tipos de argumentos de justificação são analisados bem como a relação entre os componentes do argumento

(KNIPPING, 2008; BALACHEFF, 1987;9888; TOULMIN, 1958; 2001) de modo a compreender como os alunos raciocinam e argumentam para justificar suas ideias. Informações sobre situações de aprendizagem no contexto analisado também são apresentadas.

A atividade "Fabricação de números", utilizada como estratégia promotora da argumentação, foi cuidadosamente planejada para fomentar a produção de conjecturas e argumentos associados bem como a realização de testes e exibição de diferentes argumentos de justificação e validação. A atividade, portanto, foi estruturada em cinco questões abertas, das quais três envolviam problemas de justificação de ideias e resultados matemáticos e duas questões envolvendo problemas ligados a elaboração do argumento de prova para fins de validação.

Como resultado preliminar dessa investigação, o Quadro 21 ilustra as estruturas globais de argumentação e o número de vezes que surgiram nas situações de argumentação envolvendo cada questão.

Quadro 21 - Distribuição das estruturas de argumentação em cada questão

	Estruturas globais de argumentação
Questão 1	2 Estruturas de Reservatório 1 Estrutura de Fonte divergente
Questão 2	3 Estruturas Espiral
Questão 3	2 Estruturas Espiral 1 Estrutura de Linha
Questão 4	1 Estrutura de Argumentos independentes 1 Estrutura de Linha 1 Estrutura Espiral
Questão 5	1 Estrutura de Argumentos independentes 2 Estruturas Fonte
Total	**15**

Fonte: Elaborado pelo autor.

Quando o Quadro 21 é examinado em termos da variedade de estruturas de argumentação, três diferentes tipos de estruturas podem ser observados na questão 4. Por outro lado, duas estruturas diferentes são observadas nas questões 1, 3 e 5. E apenas uma única estrutura na questão 2. Quando analisado a distribuição destas estruturas, verificou-se que a estrutura espiral era a mais utilizada com 6 ocorrências e estava presente nas questões 2,3 e 4 da atividade. A segunda estrutura mais utilizada foi a estrutura de argumentos independentes, a estrutura de linha e a estrutura fonte com duas ocorrências cada. Dentre as estruturas documentadas na literatura a única que não apareceu em nossa pesquisa foi a estrutura de coleta, isso porque a natureza da atividade proposta não favorecia o processo contínuo de coleta de dados, característico dessa estrutura. No entanto a atividade propiciou o surgimento de uma nova estrutura não documentada na literatura e para a qual demos o nome de "Estrutura Fonte

Divergente" como forma de contraposição a ideia da "Estrutura Fonte" (KNIPPING, 2008; REID; KNIPPING, 2010).

A seguir é apresentado uma descrição detalhada de todo o processo de argumentação coletiva envolvendo três situações de argumentação coletiva em torno da atividade de investigação proposta. Cada situação de argumentação compreende uma experiência de argumentação coletiva realizada em grupo (**Grupo1; Grupo2; Grupo3**).

Dessa forma, optamos por discorrer sobre a produção e avaliação dos argumentos produzidos pelos três grupos investigados ao longo das cinco questões da atividade. A participação do professor na argumentação coletiva (CONNER et. al., 2014) só ocorreu quando este foi acionado pelos alunos a prestar algum apoio. A análise das participações individuais dos alunos e do professor no âmbito do trabalho grupo a análise levou em consideração a classificação do argumento de justificação, a relação entre os componentes do argumento produzido, o raciocínio utilizado e as situações onde a aprendizagem foi documentada.

7.2.1- Problema 1

Figura 20 - Primeiro problema da atividade proposta.

Considere a quantidade de grãos de feijão abaixo

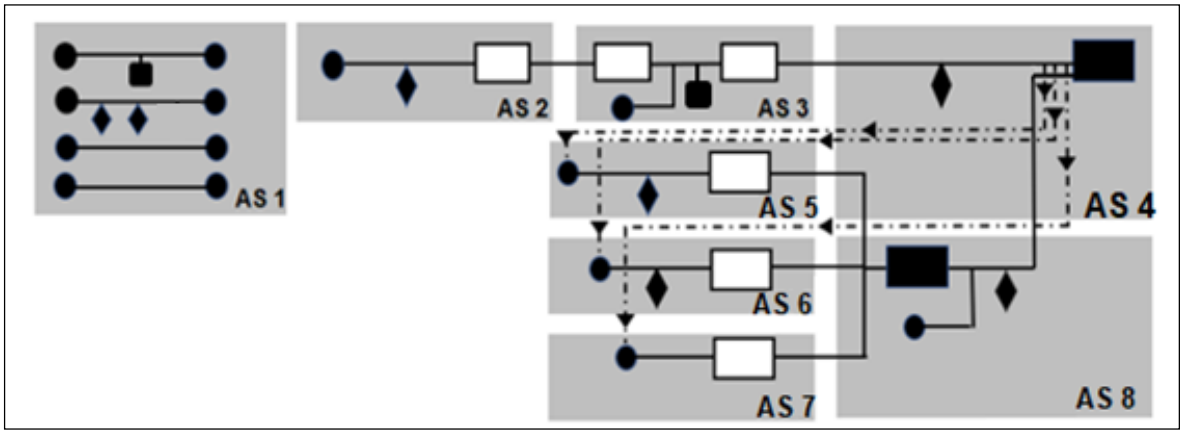
1) A quantidade de feijões que você dispõe representa um número no sistema de numeração de base decimal, que número é este? Represente este número na ficha, posicionando adequadamente os feijões ao longo das diferentes ordens e justifique suas ideias (apresente critérios/regras para a fabricação e decomposição do numeral correspondente a este número.)

Fonte: Rodrigues et. al (2021).

O grupo 1, composto por Alisson, Ana Paula, Cristina e Paulínia, discutiu a primeira questão e logo de início construíram várias conjecturas envolvendo números binários, algumas refutadas por integrantes do próprio grupo e outras desconexas com o assunto abordado no problema. O apoio do professor na orquestração do discurso (KNIPPING, 2008) foi importante para que o grupo pudesse seguir na atividade e compreender qual era o foco da discussão. Apoiados pelo professor o grupo conseguiu alcançar a conclusão final do problema. A Figura

21 ilustra a anatomia da situação argumentativa experienciada pelo grupo 1 durante a discussão e resolução da questão 1.

Figura 21 - Estrutura reservatório observada na discussão da questão 1 – grupo 1.



Fonte: Elaborado pelo autor.

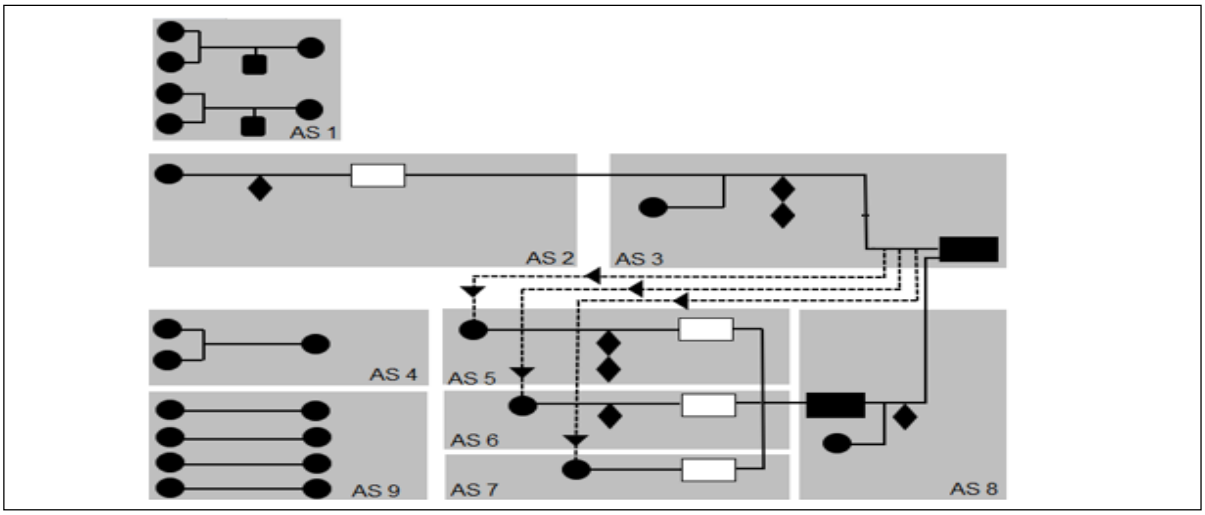
A estrutura é composta por oito blocos de argumentação, **AS 1, AS 2, AS 3, AS 4**, **AS 5, AS 6, AS 7 e AS 8** sendo que a estrutura **AS 1** é composta por conjecturas e argumentos isolados (números binários), desconectados do assunto alvo do problema (representação de um número na base decimal). Por outro lado, o fluxo **AS 2, AS 3** e **AS 4** conduziu logo de início o grupo a uma conclusão (solução) para o problema (retângulo preto). Contudo a justificação desta conclusão teve que ser aprimorada pelo grupo a pedido do professor. Por este motivo, mais dados foram explorados e apresentados nos blocos **AS 5, AS 6 e AS 7**. Posteriormente estes dados foram filtrados (retângulo preto) no bloco **AS 8** até atingir novamente o bloco **AS 4,** oferecendo assim uma justificativa adicional para apoiar a conclusão final (retângulo preto). Em particular, na estrutura **AS 1**, quatro conjecturas envolvendo números binários foram produzidas. A primeira conjectura formulada pretendia definir um número binário, "binário é assim...no caso, zero e um, zero e dois" **<Paulínia, fala 1>**. Esta conjectura foi imediatamente refutada por Alisson e Cristina **<fala 2, 3, 7>** sendo estes dois últimos os responsáveis por conjecturarem que um número binário envolve apenas o uso dos algarismos 0 e 1 **<fala 3, 4>**. Essa conjectura foi aceita por todos sob a justificativa de que uma combinação de algarismos envolvendo zeros e uns gera um número binário **<fala 5, 8 a 16, 20>**. Outras duas conjecturas tidas como ideias equivocadas (erros conceituais) foram elaboradas pelo grupo e sem nenhuma contestação por seus membros. Por exemplo, Alisson considerou o fato de que 000 e 111 não podem ser considerados números binários **<fala 18>,** além disso Cristina considerou que potências de expoente e base envolvendo 0 e 1 podem ser números binários **<fala 19>**. Nessa altura da discussão, o professor percebeu que o grupo estava fugindo do foco de discussão do problema **<fala 23, 24>** e por este motivo interveio junto ao grupo chamando a atenção dos

membros para o enunciado da questão que se referia a um número no sistema de numeração de base decimal **<fala 25>**. Esta intervenção surtiu efeito e o fluxo de argumentação que parte dos blocos **AS 2, AS 3** e vai até o bloco **AS 4** permitiu ilustrar essa situação de argumentação visual (KNIPPING, 2008) onde os alunos conseguem chegar inicialmente a uma conclusão (solução) para o problema. No bloco **AS 2**, por exemplo, assumindo como dados a quantidade de feijão indicada no enunciado da questão, Cristina concluiu que aquela quantidade fazia referência ao número 15 **<fala 26>** tendo por garantia para isso o processo de contagem dos grãos **<obs. 26, fala, 27, 28, 29>**. Já no bloco **AS 3**, o grupou assumiu a conclusão anterior (15) de **AS 2** (retângulo branco) como um dado e concluiu (primeiro retângulo branco de **AS 3**) que o número 15 poderia ser decomposto por uma soma "10 + 5" ou um produto "5 x 3" **<fala 31, 32, 33>**. Posteriormente esta soma e produto, já com o status de dados (primeiro retângulo branco de **AS 3**) e juntamente com a ficha permitiu ao grupo concluir (segundo retângulo branco de **AS 3**) que na primeira ordem da ficha era possível representar a soma (10+5) por um grupo de dez grãos somado a outro grupo de 5 grãos e na segunda ordem da ficha o produto (5x3) poderia ser representado por um grupo de 3 grãos multiplicado outro grupo de 5 grãos de feijão **<obs. 33, 34, fala 34>**. Na sequência da argumentação coletiva (CONNER, et al. 2014), o professor orientou os alunos a discutir e refutar a segunda parte da conclusão mencionada uma vez que o grupo estava trabalhando no sistema de numeração de base decimal e não convinha representar na segunda ordem da ficha 15 grãos em forma de produto **<fala 35 ao 46>**. Já no bloco **AS 4,** a conclusão anterior de **AS 3**, passou a ter o status de dados para **AS 4** e devido a refutação parcial da conclusão anterior, os dados ficaram restritos apenas a representação de um grupo de dez feijões mais um grupo de cinco grãos na primeira ordem da ficha. Na sequência do fluxo, o grupo então concluiu (retângulo preto) que aquela quantidade de grãos da primeira ordem poderia ser representada, portanto, por um único feijão na segunda ordem da ficha e outros cinco feijões na primeira ordem **<fala 45, 46>**. Para tanto a garantia apresentada pelo grupo se baseou na decomposição geométrica do número (15) em unidades (5 grãos na primeira ordem) e dezenas (1 grão na segunda ordem) **<fala 47 a 65>**. Não satisfeito apenas com a justificativa da representação geométrica apresentada para a conclusão no bloco **AS 4,** o professor orientou **<fala 66>** os alunos retroagir no raciocínio utilizado na solução do problema e apresentar mais dados para apoiar a conclusão final (retângulo preto) obtida em **AS4**. As linhas de pontilhado que partiram de **AS 4** para os blocos de argumentação **AS 5, AS 6 e AS 7**, apontam, portanto, para onde o raciocínio dos alunos retroagiu e quais os dados foram inseridos para apoiar a solução do problema. Uma dica de apoio **<fala 66>** do professor ao grupo foi explorar a decomposição aritmética do número 15 em potências de 10 com base em alguns exemplos

fornecidos pelo próprio docente. Em particular, em **AS 5, AS 6 e AS 7,** apoiados pelo professor**,** os alunos passaram a argumentar para cada dado fornecido pelo docente. Estes dados faziam referência aos números 328 (**AS 5**), 8.729 (**AS 6**) e 649,5 (**AS 7**). Em cada um destes blocos, os alunos foram orientados a realizar a decomposição dos dados numéricos em potências de base 10. Como resultado (conclusão), os alunos obtiveram $328 = 3x10^2+2x10+8x10^0$ (retângulo branco de **AS 5**) **<fala 66, 67, 68>**, $8.729= 8x10^3+7x10^2+2x10+9x10^0$ (retângulo branco de **AS 6**) **<fala 68, 69>** e $649,5= 6x10^2+4x10+9x10^0+5x10^{-1}$ (retângulo branco de **AS 7**) **<fala 70 a 78>**. Nas duas primeiras conclusões os alunos apresentaram como garantia a decomposição aritmética do número em analogia aos termos, unidade, dezena, centena e unidade de milhar **<fala 68, 69>**. As três conclusões dos blocos de argumentação **AS 5, AS 6** e **AS7** (retângulos brancos) em conjunto, passaram em seguida a terem o status de dados para o bloco **AS 8** e corroboraram para a conclusão intermediária (retângulo preto em **AS 8**) "cada dígito de um número no sistema de numeração de base decimal por ser decomposto como uma potência de base 10" **<fala 81>**. Esta conclusão intermediária (retângulo preto) por ser autossuficiente funcionou como um filtro purificador da informação e juntamente com um dado adicional (15) sob a garantia de que $15= 1x10 + 5x10^0$ viabilizou, portanto, a representação aritmética de 1 dezena na segunda ordem da ficha e 5 unidades na primeira ordem da ficha **<fala 84>** contribuindo dessa forma para apoiar a conclusão alvo no bloco **AS 4**. A estrutura indicada na Figura 21, apresentou discussões mais profundas e complexas uma vez que os alunos tiveram a oportunidade de reexaminar os seus argumentos na tentativa de encontrar/explorar dados adicionais para apoiar a conclusão final. Neste processo, os alunos retrocederam e depois avançaram em seu raciocínio, estabelecendo deduções e explicações por meio de um tipo de argumentação conceitual (KNIPPING, 2008) apoiados pelo professor em uma dinâmica de argumentação coletiva (CONNER et al. 2014) e colaborativa. A aprendizagem foi documentada em termos de melhoria da qualidade do argumento apresentado pelo grupo antes (argumentação visual) e depois (argumentação conceitual) do apoio docente (YACKEL, 2002; KNIPPING, 2008). Para além disso, a aprendizagem também foi evidenciada quando o grupo mostrou compreensão do assunto realizando a representação/conversão da conclusão por meio de dois registros (geométrico e aritmético) de representação semiótica (DUVAL, 2006). A estrutura indicada na Figura 21 revelou também uma conclusão intermediária, independente, autossuficiente e que viabilizou/fundamentou a decomposição do número 15 para então apoiar a representação do número na ficha. Diante disso, concluiu-se que esta estrutura foi compatível com a estrutura reservatório (KNIPPING, 2008; REID; KNIPPING, 2010; ERKEK; BOSTAN, 2019; ERKEK; ISIKSAL BOSTAN, 2019).

Já o grupo 2, composto por Caique, Carolina e Luiz Fernando, iniciou a discussão do problema explorando a construção de algumas conjecturas que logo em seguida foram refutadas na medida em que o grupo passou a compreender melhor o que era solicitado no enunciado do problema. O apoio do professor na orquestração do discurso (KNIPPING, 2008) foi importante para que o grupo pudesse manter o foco na discussão do problema e alcançar a conclusão final. A intervenção docente, por exemplo, corroborou para que os alunos pudessem revisar a solução do problema, oferecendo/explorando dados e apoios adicionais para apoiar a conclusão final. A Figura 22 ilustra a anatomia da situação argumentativa experienciada pelo grupo 2 durante a discussão e resolução da questão 1.

Figura 22 - Estrutura reservatório observada na discussão da questão 1 – grupo 2.



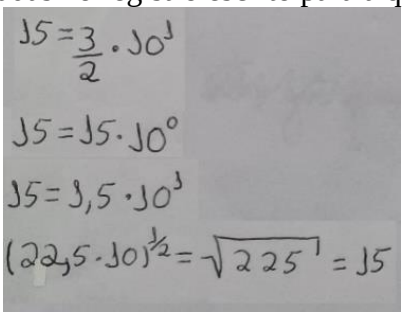
Fonte: Elaborado pelo autor.

A estrutura é composta por nove blocos de argumentação coletiva (CONNER et. al., 2014), **AS 1, AS 2, AS 3, AS 4**, **AS 5, AS 6, AS 7, AS 8 e AS 9** sendo que **AS 1, AS 4 e AS 9** é composto por conjecturas e argumentos isolados, desconectados do assunto alvo do problema (representação de um número na base decimal). Por outro lado, os fluxos de argumentação **AS 2** e **AS 3** conduziram o grupo logo no início da discussão a uma conclusão (solução) para o problema. Contudo a justificação desta conclusão teve que ser aprimorada pelo grupo a pedido do professor durante a orquestração do discurso (KNIPPING, 2008). Por este motivo, mais dados foram explorados e apresentados nos blocos **AS 5, AS 6 e AS 7**. Posteriormente estes dados foram filtrados (retângulo preto – conclusão intermediária) em **AS 8** até atingir novamente o bloco **AS 4** oferecendo uma justificativa adicional para apoiar a conclusão final (retângulo preto). Em **AS 1**, em especial, duas conjecturas foram inicialmente produzidas e refutadas pelo grupo. Conjectura 1: A quantidade de grãos de feijão deve ser representada na

ficha por fileira **<fala 3>**. Conjectura 2: A quantidade de grãos feijão deve ser representada na ficha por meio de dois grupos, um grupo de nove grãos e outro grupo de seis grãos **<fala 6, 7>**. Essas duas conjecturas foram abandonadas pelo grupo quando Luiz Fernando as refutou explicando aos colegas que eles deveriam representar era o total de grãos na ficha **<fala 8>** na primeira ordem. Após todos do grupo terem compreendido a ideia central do problema, no bloco **AS 2** é apresentado um argumento visual (KNIPPING, 2008) onde Luiz Fernando de posse dos dados (quantidade de grãos de feijão) e por meio do processo de contagem utilizado como garantia **<obs. 8>** concluiu que a quantidade de grãos faz referência ao número 15 **<fala 8>**. Na sequência da discussão, no bloco **AS 3,** a conclusão de **AS 2** (retângulo branco) passou a ter o status de dados e em conjunto com ficha de fabricação de números permitiu ao grupo concluir (retângulo preto de **AS 3**) que a representação daquela quantidade de grãos na ficha era equivalente a "um grão na segunda ordem e cinco grãos na primeira ordem" **<Luiz Fernando, obs. 15>**. Essa passagem dos dados à conclusão foi viabilizada por uma argumentação visual (KNIPPING, 2008) no qual a garantia (justificativa) apresentada acabou por estabelecer uma regra de representação geométrica do número na ficha, ou seja, "um feijão aqui na segunda ordem vale 10 e outro aqui na primeira ordem vale 1" **<Caique, fala, 12, obs. 12>**. Esta garantia foi apoiada pela justificativa de Luiz Fernando "quando tem um aqui (referindo ao feijão da segunda ordem) se refere a um grupo de dez unidades que foi formado na primeira casa e estes cinco é porque não gerou grupo de dez unidades (dezena) " **<fala, 20>**. Após o grupo ter chegado à conclusão do problema, Luiz Fernando, no bloco **AS 4**, explicou ao grupo a possibilidade de adotar outro critério que levaria a uma outra representação geométrica da quantidade de grãos na ficha. Segundo ele "se eu adotasse como critério um grupo de cinco elementos, então eu teria três feijões na segunda ordem e nenhum feijão na primeira ordem" **<fala 21>**. Esta conjectura que remetia ao numeral $(30)_5$ =15 na base 5, contudo, foi considerada um argumento isolado e sem conexão com a estrutura principal da argumentação uma vez que fugiu ao tema referente a base decimal. Na sequência da argumentação, assim como ocorreu com o grupo 1, o professor não satisfeito com justificação visual para a conclusão proferida no bloco **AS 3,** orientou **<fala 24>** os alunos a retroagirem no raciocínio utilizado na solução do problema e apresentarem mais dados para apoiar a conclusão final (retângulo preto) obtida em **AS 3**. Ele sugeriu aos alunos explorarem a decomposição do número 15 no sistema de numeração de base decimal utilizando para isso potências de base 10 **<fala 24>**. As linhas de pontilhado que partem doo bloco **AS 3** para **AS 5, AS 6 e AS 7**, apontam, portanto, para onde o raciocínio dos alunos retroagiu e quais os dados foram inseridos para atender ao pedido do professor e então apoiar a conclusão do problema. Antes de explorarem a decomposição

aritmética do número 15 em potências de base 10, o professor orientou os alunos a explorarem a decomposição de alguns números para que então pudessem chegar a uma conclusão intermediária que fundamentasse a decomposição de um número no sistema de numeração de base decimal e por consequência disso a decomposição do número 15. Em particular, nos blocos de argumentação **AS 5, AS 6 e AS 7,** apoiados pelo professor**,** os alunos passaram a argumentar para cada dado fornecido pelo docente. Estes dados faziam referência aos números 523 (**AS 5**), 1.326 (**AS 6**) e 378,5 (**AS 7**). Em cada um dos blocos, os alunos foram orientados a realizar a decomposição dos dados numéricos em potências de base 10. Como resultado (conclusão parcial), os alunos obtiveram $523 = 5x10^2+2x10+3x10^0$ (retângulo branco de **AS 5**) **<fala 26 a 32>**, $1.326= 1x10^3+3x10^2+2x10+6x10^0$ (retângulo branco de **AS 6**) **<fala 32 a 34>** e $378,5= 3x10^2+7x10+8x10^0+5x10^{-1}$ (retângulo branco de **AS 7**) **<fala 34 a 36>**. Na primeira conclusão a garantia apresentada se baseou na decomposição aritmética do número por analogia aos termos, unidade, dezena e centena **<fala 27>** utilizados no sistema de base 10. Já a segunda conclusão por sua vez se baseou na formação de grupos de 10 para o número pensado em termos de quantidade **<fala 34>.** As três conclusões obtidas nos blocos **AS 5, AS 6** e **AS7** (retângulos brancos) passaram em seguida a terem o status de dados para o bloco **AS 8** e corroboraram para a conclusão intermediária (retângulo preto em **AS 8**) "cada algarismo de um número no sistema de numeração de base decimal pode ser decomposto como uma potência de base 10" **<fala 28, 32, 37>**. Esta conclusão intermediária (retângulo preto) por ser autossuficiente funcionou como um filtro purificador da informação e juntamente com um dado adicional (15) usado para teste, viabilizou, portanto, uma melhor compreensão da conclusão **<obs. 15>.** Isso só foi possível porque a garantia apresentada $15= 1x10 + 5x10^0$ **<fala 38, 39>** se traduziu em uma explicação aritmética para a decomposição do número 15 em consonância com a sua representação geométrica indicada na ficha por 1 dezena na segunda ordem e 5 unidades na primeira ordem apoiando assim a conclusão alvo em **AS 3 <obs. 15>**. Esta argumentação conceitual (KNIPPING, 2008), portanto, ofereceu uma melhor justificação e fundamentação da conclusão final. Posteriormente a isso os alunos ainda tentaram explorar outras formas de decomposição do número 15 acreditando que talvez pudessem encontrar outras possibilidades de fornecer mais apoios e fundamentações para apoiar conclusão alvo do problema (retângulo preto de **AS 3**). No entanto, as quatros conjecturas formuladas em forma de igualdade e apresentadas na Figura 23, fugiram do foco do problema, constituíram argumentos isolados no bloco **AS 9** e por este motivo não foram conectadas a estrutura principal da situação argumentativa.

Figura 23 - Conjecturas elaboradas no registro escrito para a questão 1 - grupo 2.



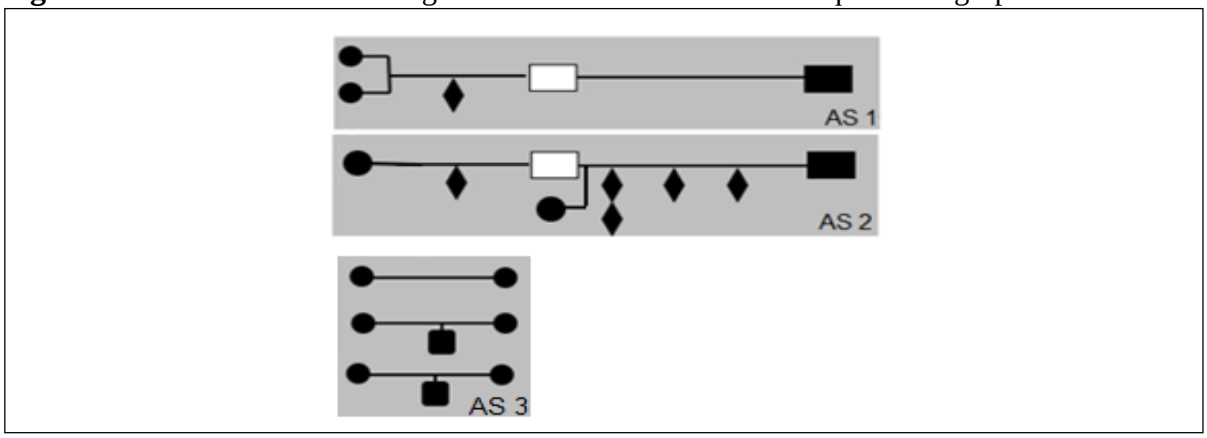
Fonte: Dados da pesquisa.

A estrutura indicada na Figura 22, apresentou discussões mais profundas e complexas uma vez que os alunos tiveram a oportunidade de reexaminar os seus argumentos na tentativa de encontrar dados adicionais para apoiar a conclusão final. Neste processo os alunos retrocederam e depois avançaram em seu raciocínio, estabelecendo deduções e explicações adicionais por meio da elaboração de argumentos conceituais (KNIPPING, 2008) contando com o apoio do professor. Assim como ocorrido com grupo 1, a aprendizagem foi documentada em termos de melhoria da qualidade do argumento apresentado pelo grupo antes (argumentação visual) e depois (argumentação conceitual) do apoio docente (YACKEL, 2002; KNIPPING, 2008). Para além disso, a aprendizagem também foi evidenciada quando o grupo mostrou compreensão do assunto realizando a representação/conversão da conclusão por meio de dois registros (geométrico e aritmético) de representação semiótica (DUVAL, 2006). A estrutura indicada na Figura 22 também revelou uma conclusão intermediária, independente, autossuficiente e que viabilizou/fundamentou a decomposição do número 15 para então apoiar a representação do número na ficha. Diante disso, concluiu-se que esta estrutura era compatível com a estrutura reservatório (KNIPPING, 2008; REID; KNIPPING, 2010; ERKEK; BOSTAN, 2019; ERKEK; ISIKSAL BOSTAN, 2019).

Por fim, o grupo 3, composto por Ana Lívia, Lena e Luiz Felipe, diferentemente dos dois grupos anteriores não contou com o mesmo tipo de apoio (orientação) docente durante a argumentação coletiva (CONNER, et. al, 2014) quando comparado ao apoio fornecido aos dois grupos anteriores. Isso ocorreu porque o grupo procurou ter mais autonomia na discussão do problema e o professor evitou de fornecer os mesmos tipos de apoios oferecidos aos grupos anteriores com receio de que isso poderia gerar estruturas de argumentação semelhantes. Dessa forma, o apoio docente foi um pouco mais restrito à situação argumentativa do grupo 3 no que tange a resolução do problema 1, quando comparado as outras duas situações de argumentação anteriores. Por consequência disso, a estrutura de argumentação que ilustrou a situação de argumentação experienciada pelo grupo 3 se diferenciou bastante das outras duas estruturas

anteriores onde os dois grupos tiveram um suporte maior do professor durante a orquestração do discurso (KNIPPING, 2008). Um ponto importante a ser destacado na estrutura indicada na Figura 24, constitui um resultado inovador neste estudo, ou seja, a presença de dois fluxos de argumentação, **AS 1** e **AS 2**, independentes um do outro e que conduzem os dados do problema (interpretados de forma diferente) a dois tipos de conclusão (solução) também diferentes (dois retângulos pretos) é algo inédito na literatura.

Figura 24 - Estrutura Fonte divergente observada na discussão da questão 1-grupo 3.

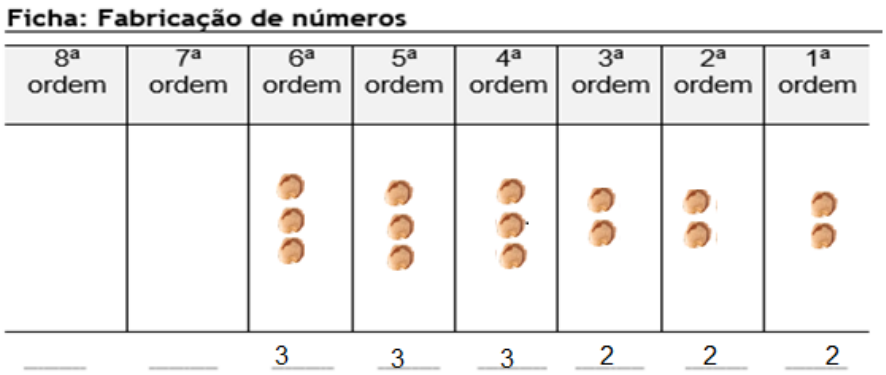


Fonte: Dados da pesquisa.

A estrutura é composta por três blocos de argumentação **AS 1, AS 2 e AS 3**, sendo que **AS 3** é composto por conjecturas que constituíam argumentos isolados e desconectados do assunto alvo do problema (representação de um número na base decimal). Por outro lado, os fluxos **AS 1** e **AS 2,** partindo de uma leitura diferente dos dados, ilustraram duas situações em que o grupo chegou a obter duas diferentes conclusões (soluções) para o problema proposto. Ambas as soluções se mostraram coerentes a partir da subjetividade empregada pelo grupo na leitura dos dados bem como na justificação oferecida para as diferentes conclusões. Em particular, no bloco **AS 1**, o grupo considerou como dados para o problema: 1) a ficha de fabricação de números e 2) a quantidade de grãos ordenada conforme a representação no enunciado da questão. Diante disso, Luiz Felipe concluiu que o numeral correspondente àquela quantidade de grãos (ordenada) no sistema de numeração de base decimal fazia referência ao número 333.222, ou seja, trezentos e trinta e três mil, duzentos e vinte e dois **<fala 3>**. Esta conclusão aceita pelo grupo foi apoiada pela garantia de que aquela quantidade de grãos (ordenada) fazia referência a um número com unidade, dezena, centena, unidade de milhar, centena de milhar etc., parecido com a ideia de composição do número no ábaco **<fala 1, 2>**. Esta conclusão por sua vez (primeiro retângulo preto) passou a ter o status de dados na sequência do fluxo **AS 1** de tal modo que estes dados foram utilizados para viabilizar a conclusão final do fluxo **AS 1**

(retângulo preto). Na conclusão, portanto, Lena representou geometricamente na ficha a quantidade de grãos (ordenado) referente ao numeral 333.222, conforme a ilustração da Figura 25 **<obs. 5>**.

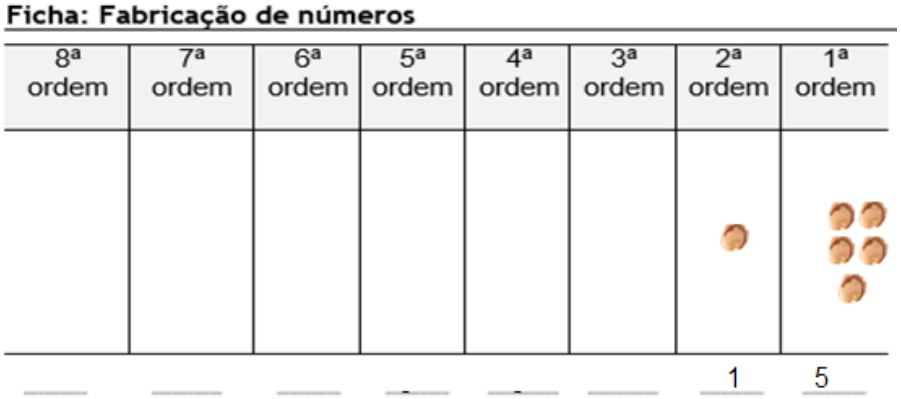
Figura 25 - Conclusão baseada na quantidade de grãos ordenados, questão 1- grupo 3.



Fonte: Dados da pesquisa.

A garantia que liga o dado (333.222) indicado no retângulo branco à conclusão indicada pela representação geométrica do número na ficha (Figura 25) está implícita nesta etapa da situação argumentativa. A garantia (quantidade ordenada), ainda que implícita, esteve fundamentada na teoria dos registros de representação semiótica (DUVAL, 2006). Por meio desta teoria, o grupo foi capaz de mostrar compreensão do assunto uma vez que utilizou dois registros de representação semiótica para explicar uma ideia, ou seja, a conclusão se originou da transição de um registro aritmético para um registro geométrico (DUVAL, 2006). Na sequência, Lena diz ao grupo, "mas esse número nós podemos colocar de outro jeito também né" **<fala 6>**. Ana Lívia concorda e neste momento da argumentação o professor orientou o grupo a observar apenas a quantidade total de grãos de feijão desprovido do critério de ordem **<obs. 11, fala, 8 a 12>.** Na sequência da situação de argumentação no fluxo **AS 2**, o grupo assumiu como dados apenas a quantidade total de grãos (desprovido de ordenamento) e concluiu (primeiro retângulo branco) que está quantidade total de grãos se referia ao número 15 **<fala 13>.** Para tanto a garantia apresentada se baseou no processo de contagem realizado por Lena **<obs. 13>**. Na sequência do fluxo **AS 2,** a conclusão (15) passou a ser usado como um dado (expresso pela quantidade de grãos) e somado a outro dado (ficha) foram utilizados para estabelecer a conclusão final do fluxo **AS 2** (retângulo preto) **<obs. 15>** conforme a ilustração indicada na Figura 26.

Figura 26 - Conclusão baseada na quantidade total de grãos questão 1- grupo 3.



Fonte: Dados da pesquisa.

Com relação a esta conclusão, Ana Lívia chamou a atenção do grupo para o fato de que eles deveriam apresentar regras/critérios para a representação geométrica do número **<fala 16>**. Diante disso, o grupo apresentou várias justificativas para a passagem (conversão) do registro aritmético (15) para o registro geométrico (DUVAL, 2006). Estas justificativas foram tomadas como garantias e apoio para viabilizar a passagem dos dados a conclusão final (retângulo preto) do fluxo **AS 2.** São elas:

> Garantia 1: "uma dezena e 5 unidades" **<Ana Lívia, fala 16>**.
> Apoio da garantia 1: "Dez unidades formam uma dezena" **<Luiz Felipe, fala 19>**.
> Garantia 2: **"**15 dividido por 10, da 1 (dezena) e sobra 5 (unidades) " **<Lena, fala 17>**.
> Garantia 3: Este resultado pode ser gerado pelos métodos do material dourado **<Lena, fala 20>** ou quadro valor de lugar **<Ana Lívia, fala 23>**.

Nesta etapa de justificação da conclusão no fluxo **AS 2**, o professor ainda orientou os alunos a apresentarem mais uma justificativa para apoiar a conclusão. Para tanto sugeriu que os alunos explorassem a decomposição do número 15 **<fala 24>** sem, contudo, oferecer dados adicionais para ilustrar a decomposição de outros números**.** Infelizmente, os resultados apresentados pelos alunos não contemplaram a decomposição dos algarismos no número 15 em potências de base 10. Os alunos optaram por realizar decomposições que fugiram do foco do problema e que acabavam por não apoiar a conclusão alvo. Estas conjecturas estão indicadas no bloco **AS 3** e se apresentaram desconectadas das estruturas principais de argumentação uma vez que as decomposições realizadas se mostraram desconexas a ideia de decomposição dos algarismos do número 15 em potências de base decimal, ou seja, $15= 1x10 +5x10^0$. A seguir são apresentadas as conjecturas que compuseram os argumentos isolados e desconexos de **AS 3**.

> Conjectura 1: 15 = 20 – 5 **<Ana Lívia, fala 28>.**
> Conjectura 2: 15 = $\sqrt{15}$ **<Letífica, fala 29>** refutada por Luiz Felipe **<fala 30>**.
> Conjectura 3: **15 = $\sqrt{225}$ <Ana Lívia, fala 32 a 39>** refutada pelo professor **<fala 34>**.

A justificação da conclusão alvo do fluxo **AS 1** foi baseada em uma argumentação visual (KNIPPING, 2008) uma vez que a garantia apresentada na justificação esteve baseada na representação ordenada dos grãos no enunciado do problema. Por sua vez, a justificação da conclusão alvo no fluxo **AS 2** transitou da argumentação visual (KNIPPING, 2008) para a argumentação conceitual (KNIPPING, 2008) uma vez que a justificação de apego visual evoluiu para uma justificação mais racional envolvendo o uso de garantias fundamentadas em conceitos, relações e operações matemáticas. Essa necessidade de emitir justificações foi fomentada pelo enunciado do problema que orientava o grupo a exibir critérios e regras para justificar a representação geométrica do número <<**Ana Lívia, fala 16**>. A aprendizagem foi documentada em termos da melhoria da qualidade do argumento (YACKEL, 2002) apresentado como também por meio do processo de conversão de representação semiótica entre registros (DUVAL, 2006). A estrutura indicada na Figura 24, nasceu de uma variedade de fontes de dados diferentes, no entanto, os fluxos de argumentação não convergiram para um mesmo poço ou único resultado (conclusão). Caso isso acontecesse, esta estruturara seria compatível com a estrutura fonte (KNIPPING, 2008; REID; KNIPPING, 2010; ERKEK; BOSTAN, 2019; ERKEK; ISIKSAL BOSTAN, 2019). No entanto, devido à natureza dos dados e subjetividade da forma como eles foram lidos e interpretados, estes acabaram por revelar dois fluxos de argumentação que transitaram entre argumentos visuais e conceituais (KNIPPING, 2008) sendo cada um deles independentes um do outro e com resultados (conclusões) diferentes e incompatíveis de serem modelados pela estrutura fonte. Neste contexto, diante do fato de não existir na literatura uma estrutura de argumentação global que explicasse a situação de argumentação experienciada pelo grupo 3 na resolução da questão 1, optamos, portanto, por denominar a anatomia da referida situação de argumentação por estrutura “Fonte divergente” e descrevê-la a seguir.

7.2.1.1 Estrutura fonte-divergente

Nesta estrutura os argumentos surgem de uma variedade de fontes (nascentes) diferentes. Diferentemente da estrutura fonte (KNIPPING, 2008; REID; KNIPPING, 2010; ERKEK; BOSTAN, 2019; ERKEK; ISIKSAL BOSTAN, 2019) as conjecturas e argumentos associados

que surgem no início da discussão não vão convergir para apoiar uma única conclusão final (efeito funil). Pelo contrário, nesta estrutura as conjecturas e argumentos associados nascem de várias fontes e no decorrer do processo argumentativo o fluxo de argumentos diverge para conclusões distintas uma (s) da (s) outra (s). São características dessa estrutura: 1) Não há uma única estrutura principal de argumentação. 2) Fluxos de argumentação que não se conectam às estruturas principais podem aparecer para representar argumentos isolados, argumentos refutados ou argumentos independentes sem conexão com o assunto explorado. 3) As etapas de argumentação podem conter mais de um dado e estes por sua vez podem ser lidos e interpretados de maneiras diferentes. Essa estrutura em geral nasce a partir da subjetividade e capacidade do sujeito em realizar distintas interpretações dos dados do problema. Ao reinterpretar os dados de uma maneira diferente novos argumentos surgem e conduzem o sujeito a uma conclusão distinta da anterior. Dentro dessa conceituação que foi apresentada, a estrutura fonte (KNIPPING, 2008; REID; KNIPPING, 2010; ERKEK; BOSTAN, 2019; ERKEK; ISIKSAL BOSTAN, 2019) acabou por inspirar o nome da nova estrutura encontrada, “estrutura Fonte divergente”.

7.2.2 - Problema 2

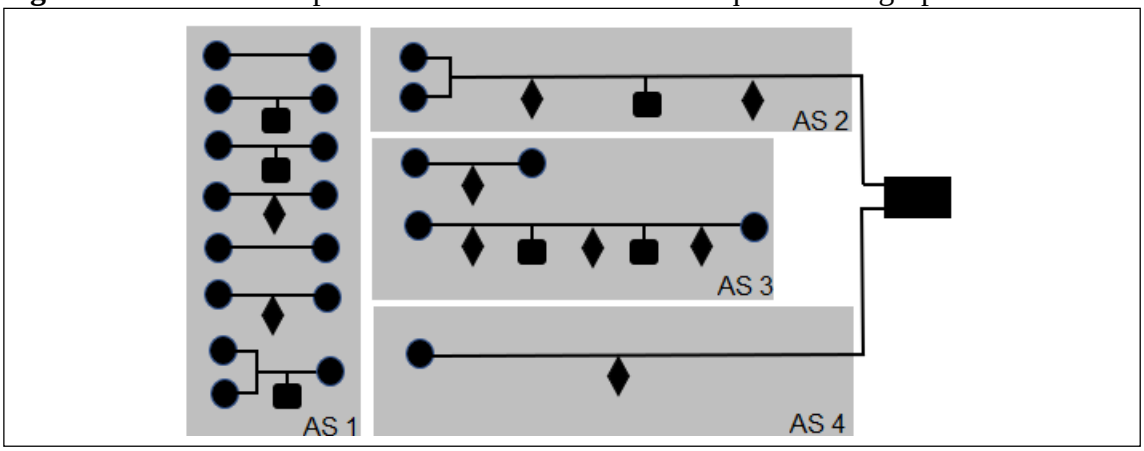
Figura 27 - Segundo problema da atividade proposta.

> 2) Com esta mesma quantidade de grãos de feijão é possível encontrar/fabricar outros números em outros sistemas de numeração que não seja o decimal? Justifique suas ideias.

Fonte: Rodrigues et. al (2021).

Os integrantes do grupo 1 (Alisson, Ana Paula, Cristina e Paulínia) discutiram a segunda questão entre si e logo de início construíram várias conjecturas, algumas refutadas pelo próprio grupo e outras que não se conectavam entre si ou fugiam do assunto abordado na medida em que expressavam uma confusão de ideias, opiniões ou dúvidas. O apoio do professor na orquestração do discurso (KNIPPING, 2008) foi importante para que o grupo pudesse alcançar a conclusão final (retângulo preto) do problema bem como apresentar duas estratégias distintas de resolução para o problema proposto. A Figura 28 ilustra a anatomia da situação argumentativa experienciada pelo grupo 1 durante a discussão e resolução da questão 2.

Figura 28 - Estrutura espiral observada na discussão da questão 2 – grupo 1.



Fonte: Dados da pesquisa.

A estrutura é composta por quatro blocos de argumentos, **AS 1, AS 2, AS 3** e **AS 4**, sendo que os blocos **AS 1** e **AS 3** são compostos por argumentos isolados e desconectados uns dos outros e por este motivo acabaram por não gerar um fluxo de argumentos que pudesse conduzir a solução do problema. Por outro lado, os fluxos paralelos **AS 2** e **AS 4**, independentes um do outro, são compostos por argumentos que conduzem a solução do problema. Ambos os fluxos (**AS 2 e AS 4**) possuem uma particularidade em comum, eles se conectam apenas a conclusão final para indicar, portanto, que o problema foi resolvido de duas maneiras distintas. Quando a argumentação coletiva (CONNER, et. al.2014) teve início, o grupo pensou que a ideia de resolução do problema era a semelhante à da questão anterior, porém, com uma diferença, converter o número 15 (base decimal) para outra base não decimal a partir da decomposição do número em potências que não poderia envolver a base decimal. No bloco **AS 1**, em especial, várias conjecturas foram produzidas, algumas passaram por refutação e outras foram justificadas, contudo, nenhuma delas se conectavam para avançar em direção a solução do problema. Todas estas conjecturas se baseavam no mesmo dado do problema, ou seja, uma quantidade de grãos de feijão representado pelo numeral 15 no sistema de numeração de base decimal. A seguir, são apresentadas todas as conjecturas da estrutura **AS 1,** para mostrar o quanto este bloco foi tomado por argumentos isolados e independentes. Conjectura 1: A decomposição de 15 pode ser realizada por meio de números (bases) e operações (simples) sem que apareça o número 10 (referente a base decimal). O trecho a seguir **<falas 89 a 97>** ilustra o diálogo ocorrido no âmbito do grupo em argumentação coletiva (CONNER, et.al., 2014) para se chegar a essa referida conjectura.

> - Oh Cristina, essa dois aí não é igual ao que a gente estava fazendo não? **<Alisson, fala 89>**.

> - Aquela de 2^2... porque aqui está falando de diferentes bases né... em outros sistemas de numeração que não seja decimal... pode ser. <**Cristina, fala 90**>.
> - Vocês estão em qual? Na segunda? Nessa aqui? <**Ana Paula, fala 91**>.
> - A segunda aqui é do mesmo jeito que estávamos fazendo, entendeu? <**Alisson, fala 92**>.
> - Aquele de aumentar? Decompor? <**Ana Paula, fala 93**>.
> - Isso! <**Alisson, fala 94**>.
> - Só que não decimal, a gente pode usar qualquer outro número <**Paulínia, fala 95**>.
> - Mas agora o negócio é que a dezena pode ser diferente <**Alisson, fala 96**>.
> - Então pode utilizar da mesma forma que a gente estava fazendo de decomposição... colocar 3+2 + uma dezena que não seja o decimal... aí pode ser uma potência 3^2 <**Cristina, fala 97**>.

Conjectura 2: A decomposição do número 15 pode ser realizada por meio de números e operações matemáticas utilizando o número 10 (referente a base decimal) **<Ana Paula, fala 98>**. Esta conjectura foi imediatamente refutada pelas falas de Alisson, Cristina e Paulínia **<fala 99, 100, 101>**, onde ambos defendem que não pode aparecer o número 10 enquanto potência na decomposição do número 15**.** Conjectura 3: O número 15 pode ser originado a partir da raiz quadrada de 125 **<Ana Paula, fala 102>**. A conjectura foi refutada pela fala de Cristina, "mas não pode pegar mais do que 15 (grãos) né" **<fala 103>**. Nesta etapa de argumentação os alunos se mostravam confusos em relação ao que fazer e por este motivo voltaram a reler o enunciado da questão **<fala 104 a 108>**. Logo em seguida Paulínia apresentou uma nova ideia (Conjectura 4), segundo ela o 15 poderia ser decomposto como 3x5 **<fala 109>** sob a justificativa de que o resultado deste produto resulta em 15 **<fala 111>**, contudo Paulínia se mostrou insegura em relação a esta ideia **<fala 111>** que posteriormente é validada por Cristina e Ana Paula **<fala 112, 113>**. Ana Paula, entendeu que a ideia de Paulínia era válida porque ela não havia se utilizado do número 10 como um dos fatores no produto **<fala 113, obs. 113>.** Na sequência, Cristina opinou que (conjectura 5) o número 15 poderia ser escrito também por meio de outros números e operações diversas envolvendo multiplicação, raiz e potências **<fala 114>**. Por sua vez Alisson, chamou a atenção do grupo para o fato de que na questão 1 era formado grupos de 10 com a quantidade de grãos e já na questão 2, o número 15, portanto, poderia ser organizado em grupos diferentes daquele grupo utilizado na base decimal (conjectura 6) **<fala 117>**. O grupo finalmente entendeu a lógica do problema **<fala 118 a 120>** e logo solicitou o apoio do professor para confirmar o seu entendimento **<fala 121>**. Por sua vez o professor ofereceu apoio ao grupo lançando um questionamento para reflexão

> Se eu quiser organizar esta mesma quantidade de grãos em grupos de dois é possível? Ou seja, quero agora apenas mudar o critério do agrupamento, ao invés de um grupo de 10, agora será grupos de dois, é possível? **<Professor, fala 122>**

Como resposta ao professor, Cristina e Ana Paula citam que é possível e a partir daí elaboraram juntas a sétima conjectura, ou seja, a dezena agora corresponde a um grupo de dois grãos **<fala 123, 125>**. O professor por sua vez refutou a conjectura dizendo "você está trabalhando com grupos de dez que estão relacionados a dezena, certo? Agora tem sentido falar dezena se você está organizando a quantidade de feijões em grupos de dois? " **<fala 128>**. A discussão do grupo já estendia por um bom tempo desde a elaboração das conjecturas e dos argumentos associados. Com isso, o professor ao perceber que a discussão não evoluía, orientou o grupo a trabalhar com a quantidade de feijões na primeira ordem da ficha e a partir dali formar grupos de dois, por exemplo, semelhante ao que eles fizeram na base 10 durante a resolução da questão 1 **<fala 129>**. No fluxo **AS 2,** o grupo utilizou a ficha de fabricação de números e a quantidade de grãos (15) como dados do problema para concluir que com esta mesma quantidade de grãos é possível gerar outro número em outro sistema de numeração não decimal (retângulo preto). O diálogo a seguir apresenta toda a justificação (garantias e elemento de refutação parcial) que se baseou o argumento indicado no fluxo **AS 2** para estabelecer a conclusão (retângulo preto) envolvendo a resolução do problema bem como o apoio oferecido pelo professor ao grupo.

> - Cada dupla de feijão que formou na primeira ordem vai passar a ser um feijão novo na segunda ordem e fica um (grão) apenas na primeira ordem. Não pode ser dezena porque não é 10 < **Paulínia, fala 130**>.
> - Certo, e na segunda ordem ainda é possível formar grupos e continuar o processo? <**Professor, fala 131**>.
> - Sim! <**Todos, fala 132**>.
> - Na segunda ordem dá para formar mais três grupos e vai sobrar um feijão < **Paulínia, fala 133**>.
> - Ok! Continuem... <**Professor, fala 134**>.
> - Na terceira ordem vai ter três feijões, cada um representa um grupo formado na segunda (ordem) e sobra um feijão < **Paulínia, fala 135**>.
> -Na quarta ordem vai ter apenas 1 feijão de um grupo formado na terceira ordem. Tem um feijão que não dá para montar grupo < **Paulínia, fala 136**>.
> - Se não deu para formar mais grupos, então a fabricação do numeral se encerra. Vamos registrar o que sobrou em cada ordem < **Professor, fala 137**>.
> - Fica um feijão na primeira ordem, um na segunda ordem, um na terceira e um na quarta < **Cristina, fala 138**>.
> - Vejam que vocês acabaram de fabricar um numeral no sistema de numeração de base binário correspondente ao número 15 do sistema de numeração de base decimal < **Professor, fala 139**>.
> - Mil cento e onze < **Alisson, fala 140**>.
> - Tem certeza? Quando você diz mil cento e onze não dá a ideia de organização do número em grupos de 10? < **Professor, fala 141**>.
> - Mas e aí? Como que eu falo então? < **Alisson, fala 142**>.
> - Lembrei, lembra da aula de informática, você só fala os números, tipo 1111 < **Cristina, fala 143**>.

> - Isso! Você fala somente os algarismos, certo? Após isso você utiliza uma notação especial para se referir a base binária. Pode ser $(1111)_2$ ou 1111_2. Se você chegar no teclado do computador e digitar 15, o computador vai codificar a informação em número binário 1111_2 **<Professor, fala 144>**.

Por meio de processo de argumentação visual (KNIPPING, 2008) e com o apoio do professor na orquestração discurso (KNIPPING, 2008) o grupo argumentou de forma coletiva (CONNER, et.al. 20214) e conseguiu alcançar a solução do problema ao final do fluxo **AS 2.** Já no bloco **AS 3** os alunos passaram a discutir o caminho inverso da solução obtida no fluxo **AS 2**, ou seja, o processo de conversão de um número de uma base não decimal para o sistema de numeração de base decimal. Por este motivo, os dois argumentos produzidos foram considerados isolados e independentes do contexto do problema uma vez que fugiram ao tema relacionado a solução do problema **<fala 145 a 163>**. Posteriormente a esta discussão isolada ocorrida em **AS 3**, o professor novamente apoiou o grupo na busca por outro método resolutivo para a questão 2, distinto do método descrito no fluxo **AS 2**. Nesse sentido, o fluxo **AS 4** ilustrou um argumento que contemplou esta estratégia diferente. Os trechos de fala entre o professor e os alunos, indicados a seguir, corroboraram para apresentar este novo método.

> Agora imagine uma situação em que você tenha que converter o número 150 (base decimal) para a base 2. Será que você irá colocar 150 grãos na primeira ordem da ficha e exaustivamente vai formando grupos até obter o resultado? Será que não teríamos outra opção para diminuir este trabalho árduo? **<Professor, fala 164>**

Os alunos permaneceram calados e pensativos.

> Voltem na ficha e na fabricação do número binário correspondente ao número no sistema de base dez, 15. Que operação matemática poderia comandar todo esse processo de conversão? **<Professor, fala 165>**

Analisando a ficha e pensando na operação citada pelo professor, Alisson concluiu que a igualdade $15 = (1111)_2$ era possível de ser obtida de outra forma. Ele se justificou dizendo

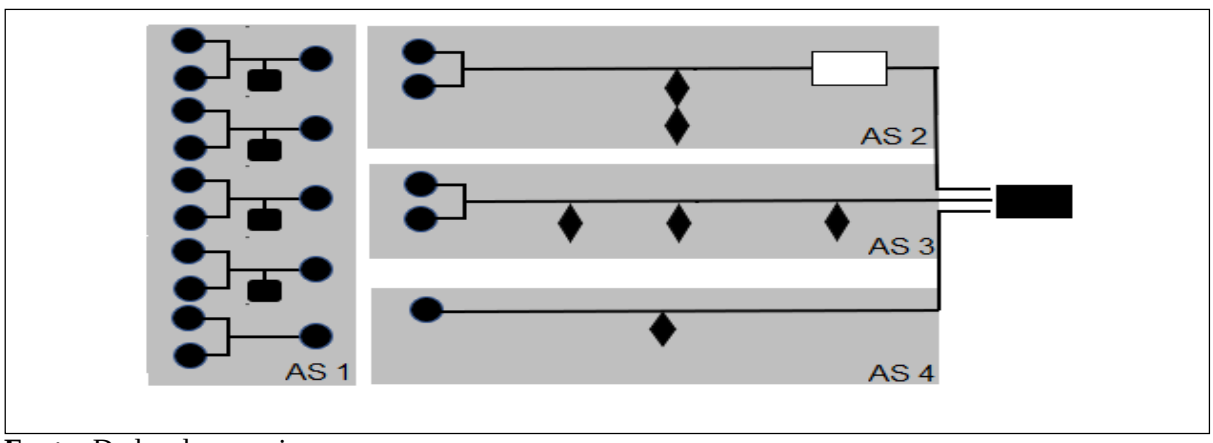
> É a divisão, pegando os resultados (quocientes) e sobras (restos) para formar o número. Por exemplo, 15 dividido por 2, da 7 e sobra 1, depois 7 feijões divididos por 2, da os 3 feijões da terceira ordem e sobra 1. E aí você pega os feijões da terceira ordem e divide novamente por 2 e da 1 com sobra 1. Sempre pegando os resultados da divisão e as sobras **<Alisson, fala 166>**.

Neste último argumento, Alisson e o grupo, se utilizaram de uma argumentação visual (KNIPPING, 2008) para alcançar a conclusão final. Portanto, segundo o grupo, com a quantidade de grãos (15) informado no enunciado do problema é possível gerar números em

outros sistemas de numeração não decimal, uma prova disso foi a conversão do número 15 para a base binária, ou seja, 15= $(1111)_2$, utilizando para isso dois métodos resolutivos diferentes para se chegar a mesma conclusão. A argumentação visual prevaleceu nas duas estratégias de solução e resolução do problema apresentadas. Por sua vez a aprendizagem foi documentada pelos variados processos de conversão das representações semióticas entre registros, ou seja, da representação geométrica do número na ficha utilizando grãos para a sua notação aritmética obtida por meio de divisão euclidiana e vice e versa (DUVAL, 2006). A estrutura indicada na Figura 28, apresenta dois fluxos de argumentação paralelos **AS 2 e AS 4**. Ambos os fluxos chegaram a mesma conclusão por meio de dois métodos resolutivos diferentes elaborados pelos alunos sob a orientação do professor. Em virtude de os argumentos seguirem independentes um dos outros e atuarem como métodos diferentes de justificação da conclusão alvo, concluiu-se que esta estrutura é compatível com a estrutura espiral (KNIPPING, 2008; REID; KNIPPING, 2010; ERKEK; BOSTAN, 2019; ERKEK; ISIKSAL BOSTAN, 2019).

Os membros do grupo 2 (Caique, Carolina e Luiz Fernando) discutiram a segunda questão entre si e logo de início, assim como a primeira equipe, construíram várias conjecturas, a maioria delas refutadas no âmbito do próprio grupo e uma outra não justificada e que não se conectava com as demais conjecturas. Em linhas gerais, neste primeiro momento da situação argumentativa, o grupo produziu uma série de conjecturas e argumentos associados e não avançou na discussão do assunto pretendido. Em meio a esta situação de confusão, dúvidas e falta de um norte, a intervenção e apoio do professor na orquestração do discurso (KNIPPING, 2008) foi essencial para que o grupo pudesse alcançar a conclusão final (retângulo preto) do problema bem como apresentar três estratégias distintas de resolução para o problema proposto. A Figura 29 ilustra a anatomia da situação argumentativa experienciada pelo grupo 2 durante a discussão e resolução da questão 2.

Figura 29 - Estrutura espiral observada na solução da questão 2 - grupo 2.



Fonte: Dados da pesquisa.

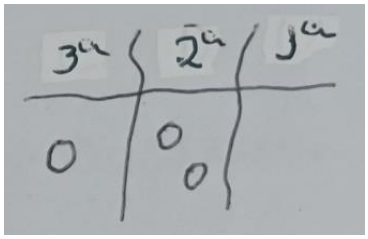
A estrutura é composta por quatro blocos de argumentação, **AS 1, AS 2, AS 3** e **AS 4**. A estrutura **AS 1** é composta por conjecturas e argumentos associados, sendo a maioria destes refutados no âmbito do próprio grupo. Entretanto todos eles têm algo em comum, constituem afirmações isoladas e desconectas que não conduzem a uma conclusão (solução) para o problema. Por outro lado, os fluxos **AS 2**, **AS 3** e **AS 4,** cada um de uma forma diferente e independente do outro, conduziram a solução do problema por meio de três estratégias de justificação diferentes. Ambos possuem uma particularidade em comum, se conectam apenas a conclusão final do problema para indicar, portanto, que o problema foi resolvido de três maneiras distintas pelos alunos. Em particular na estrutura do bloco **AS 1**, várias conjecturas associadas a argumentos isolados foram produzidas. As quatro primeiras conjecturas, por exemplo, passaram pela refutação do grupo e apenas a última conjectura foi aceita por eles. Todas estas conjecturas tiveram como ponto de partida inicial (ou dados) a quantidade de grãos de feijão (15) e a ficha de fabricação de números. Após a leitura do enunciado da questão por Luiz Fernando **<fala 47>**, Caique teceu a primeira conjectura. De acordo com ele, no sistema de numeração de base 3, um grão de feijão pertencente a primeira ordem equivale a um grupo de outros três grãos e da mesma forma um grão pertencente a segunda ordem equivale a um grupo de outros três grãos **<fala 48>**. Esta conjectura foi imediatamente contestada por Luiz Fernando que a refutou, "Não! Um feijão da primeira ordem ainda não compõe grupo" **<fala 49>**. Na sequência Carolina conjecturou a possibilidade de os quinze grãos de feijão serem distribuídos, da seguinte forma: 3 grãos na primeira ordem da ficha, 3 na segunda, 3 na terceira, 3 na quarta ordem e por fim 3 na quinta ordem **<obs. 50>.** Essa conjectura também foi refutada por Luiz Fernando, ao convencer Carolina de que essa ideia não tinha sentido, uma vez que a cada três grãos um grupo é formado **<fala 51, 52>**. Diante do que estava sendo discutido na conjectura de Carolina, Luiz Fernando substitui os três grãos de feijão de cada ordem por um único grão em cada ordem. A conjectura criada por Luiz Fernando indicou que, um grão de feijão deve ocupar a primeira ordem, um grão a segunda ordem, um outro a terceira ordem, um a quarta e por fim um grão a quinta ordem **<fala 53, obs. 53>**. Essa conjectura foi imediatamente recusada por Caique **<fala 54>** que acabou convencendo o grupo da veracidade de uma outra conjectura que na sequência foi apresentada por ele ao grupo. De acordo com Caique, na base 3 é preciso trabalhar com as potências de 3. Nesse sentido, cada grão de feijão na primeira ordem tem valor 3^1 e cada grão na segunda ordem tem valor 3^2 **<fala 54>**. Portanto o número 15 poderia ser representado por 2 grãos na primeira ordem e um grão na segunda ordem, de tal forma que $3^2 + 3^1 + 3^1 = 15$ **<obs. 54>**. Essa conjectura acabou sendo refutada posteriormente

pelo professor que explicou ao grupo que a potência de três a ser utilizada na primeira ordem é 3^0 de modo que seja possível gerar a unidade **<fala 60>**. A última conjectura indicada em **AS 1** não sofreu refutação pelo grupo, contudo, esta foi tida como inválida, isso porque Luiz Fernando considerou de forma equivocada que três grãos na primeira ordem passariam a gerar outros 15 grãos na 5 ordem a partir de sucessivas somas envolvendo uma mesma parcela (3) ao longo das ordens compreendidas entre a primeira e quinta ordem **<fala 55, obs. 55>**. O professor percebendo que o grupo não avançava na discussão e diante da pergunta de Luiz Fernando, "como que eu represento na base 3"? **<fala 61>** realizou uma intervenção junto ao grupo, oferecendo apoio para que a discussão pudesse ter continuidade.

> Primeiramente, você tem que representar a quantidade de feijões que você quer converter na primeira ordem. Na base decimal você organiza a quantidade de feijões em grupos de 10 e passa um feijão para a segunda ordem para representar o agrupamento formado. Como seria isso na base 3? **<Professor, fala 62>**

O apoio surtiu efeito e a discussão teve continuidade até alcançar a conclusão alvo (retângulo preto) por meio do fluxo **AS 2.** Para este fluxo, por exemplo, o grupo considerou como dados para o problema, a quantidade de grãos feijões, 15, inseridos na primeira ordem da ficha. A partir daí Luiz Fernando concluiu (retângulo branco) que este quantitativo de grãos fazia referência ao número representado geometricamente na Figura 30.

Figura 30 - Registro escrito da representação geométrica do número 15 (base decimal) na base 3



Fonte: Dados da pesquisa.

A fim de justificar a sua conclusão (retângulo branco do fluxo **AS 2**) ele apresentou o seu raciocínio, utilizado como garantia

> Ah tá, então eu formo 5 grupos de três na primeira ordem e passo os feijões correspondentes a estes grupos para a segunda ordem. Na segunda ordem eu formo 1 grupo de três que vai para a terceira ordem e sobra dois feijões na segunda ordem que não dá para formar mais grupo **<Luiz Fernando, fala 63>**.

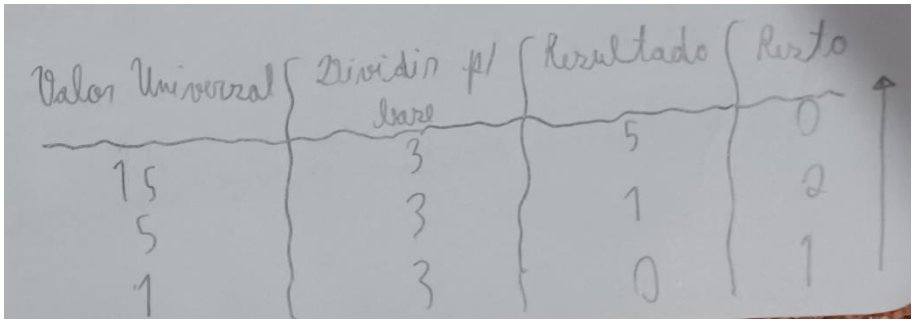
Esta justificação foi apoiada ainda por uma garantia adicional apresentada por Caique, ou seja, 15= "$0x3^0 + 2x3^1 + 1x3^2$" **<fala 64>**. Por meio dela, cada grão poderia ser expresso por uma potência de base 3, semelhante ao que o grupo explorou na questão 1 por meio da decomposição do número 15 na base decimal. A representação geométrica, portanto, indicada na Figura 30 passou em seguida a ser considerada um dado (retângulo branco) para que então o grupo pudesse concluir na sequência do fluxo que ela fazia referência ao número $(120)_3$ **<fala 63, 65, 69>**. Essa correspondência é o que Duval (2006) chama de conversão das representações ssemióticas entre registros, ou seja, a compreensão do grupo foi viabilizada a partir da transição da representação geométrica do número na base 3 para o registro aritmético, $(120)_3$. Com base neste resultado em específico, 15= $(120)_3$, o grupo concluiu por fim (retângulo preto) que é possível sim gerar outro número em um sistema de numeração de base não decimal a partir da quantidade de grãos disponibilizado no enunciado da questão. Por sua vez o fluxo **AS 3** ilustrou uma outra situação de argumentação, onde o professor orientou o grupo na busca por outra estratégia de resolução para a conclusão do problema. Apoiados pelo professor, o grupo assumiu como dados para o problema, os números 15 e 1024 na base decimal e com base nos resultados, 15= $(1111)_2$,15= $(120)_3$ e 1024= $(10000000000)_2$, encontrados e utilizados como garantia, concluíram que é possível sim gerar outros números em um sistema de numeração de base não decimal (retângulo preto). A garantia agora, diferentemente daquela apresentada no fluxo **AS 2,** envolveu o método de divisão euclidiana para a conversão de um número da base decimal para uma base não decimal, conforme indicado no diálogo a seguir e nas observações realizadas junto ao grupo.

> -Vocês fizeram com o deslocamento do feijãozinho, ok! Com 15 é tranquilo! Agora imagine se eu fosse transformar/passar 150 da base decimal para a base 3. Será que eu vou precisar colocar 150 feijõezinhos e ter todo aquele trabalho de ficar formando grupo e remanejando para outras ordens e assim sucessivamente? Será que não existe uma estratégia mais simples para realizar essa conversão? <**Professor, fala 71**>.
> - Como assim? <**Carolina, fala 72>.**
> - Qual a operação matemática que está por traz deste processo de organização de feijão em grupos? <**Professor, fala 73**>.
> - É divisão! <**Caique, fala 74>.**
> - Isso! Acompanhem aqui na ficha de vocês. 15 feijões na primeira ordem dividido por três, resulta em um quociente 5 e um primeiro resto 0. Depois 5 feijões na segunda ordem divididos por três, resulta em um quociente igual a 1 e um segundo reto igual a 2. Veja que o último quociente obtido mais os restos tomados na ordem inversa vai gerar o numeral que vocês obtiveram por meio da exploração de grupos na ficha, ou seja, 15= $(120)_3$ <**Professor, fala 75**>.
> - Isso facilita bastante <**Carolina, fala 76**>.

> -Então nessa 2) pode aumentar os números para dar mais exemplos? **<Luiz Fernando, fala 77>**.
> - Pode. Existem várias estratégias de transformação e eu quero ver quais que vocês são capazes de exibir. **<Professor, fala 78, obs. 78>**.
> - 15= $(1111)_2$ **<Caique, fala 79, obs. 78>**.
> - Se você digitar quinze no teclado do computador, o computador vai registrar/armazenar na memória 1111_2. O computador trabalha com a base binária, base 2 **<Professor, fala, 80>**.
> - Ah entendi **<Caique, fala 81>**.
> -O que é um byte? É um conjunto de 8 bits. Um bit é um caractere 0 ou 1. Megabyte, terabyte, quilobyte são múltiplos de byte e do bit **<Professor, fala 82, obs. 82>**.
> 1024= $(10000000000)_2$ **<Caique, obs. 82>**.
> - Hum, interessante! **<Caique, fala 83>.**

Nesta estratégia de argumentação e solução do problema, o grupo apoiado pelo professor se utilizou de uma argumentação visual para compreender o processo de conversão numérica por meio da divisão euclidiana. Posteriormente, o grupo renunciou ao material concreto e começou a realizar a conversão do número sem o apelo visual ao objeto material em si, evidenciando assim desprendimento do argumento visual (KINIPPING, 2008) em direção a um tipo de argumento conceitual (KNIPPING, 2008). Foi o caso dos exemplos de conversão dos números 15 e 1024 para a base 2. No processo de conversão Caique trabalhou mentalmente com a conversão de 15 para a base 2 sem apego ao uso material didático para ilustrar o processo de divisão euclidiana **<Caique, obs. 78>**. Posteriormente ele explorou o caso da conversão de 1024 para a base 2, trabalhando mentalmente com os restos deixado pelas metades, ou seja, sucessivas divisões por 2 **<Caique, obs. 82>**. Por fim, no fluxo **AS 4**, o grupo assumiu como dado apenas o número 15 no sistema de numeração de base decimal e converteu ele para a base 3, utilizando para isso a sugestão do professor de realizar a divisão com o auxílio de uma tabela operatória **<fala 75, obs. 75>**. A justificativa apresentada como garantia na Figura 31, fundamentou o resultado 15= $(120)_3$.

Figura 31 - Registro escrito da justificação de conversão do número 15 (base decimal) para a base 3.

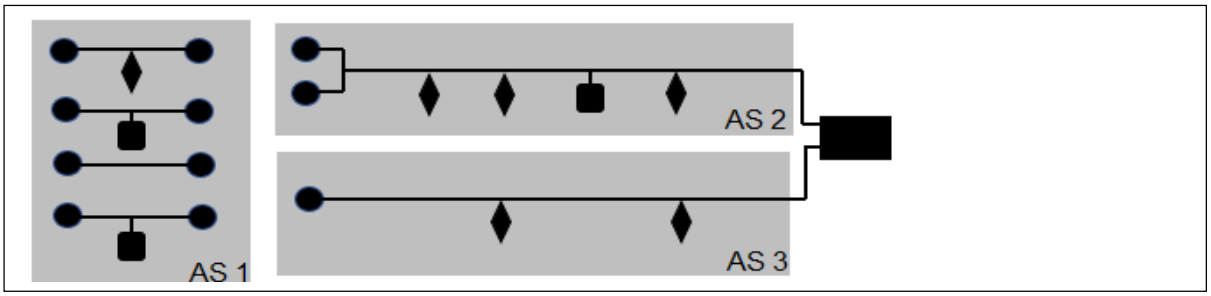


Fonte: Dados da pesquisa.

Com base neste último resultado, o grupo concluiu que é possível sim gerar outro número em um sistema de numeração de base não decimal (retângulo preto). Da primeira estratégia de resolução até a última apresentada, a justificação da conclusão transitou entre argumentações visuais e argumentações conceituais (KNIPPING, 2008). Por sua vez a aprendizagem foi documentada pela mudança (evolução) na qualidade do argumento de justificação produzido pelos alunos (YACKEL, 2002) como também pelos variados processos de conversão das representações semióticas entre registros (DUVAL, 2006). Neste último caso, apoiados pelo professor, aos alunos apresentaram resoluções geométricas e aritméticas para o problema proposto e transitaram de um registro para outro e vice e versa para confirmar resultados. A estrutura indicada na Figura 29, apresentou três fluxos de argumentação paralelos **AS 2, AS 3 e AS 4**. Ambos os fluxos chegaram a uma mesma conclusão por meio de três métodos resolutivos diferentes elaborados pelos alunos sob a orientação do professor. Em virtude de os argumentos seguirem independentes uns dos outros e atuarem como métodos diferentes de justificação da conclusão alvo (retângulo preto), concluiu-se que esta estrutura é compatível com a estrutura espiral (KNIPPING, 2008; REID; KNIPPING, 2010; ERKEK; BOSTAN, 2019; ERKEK; ISIKSAL BOSTAN, 2019).

Por fim, os integrantes do grupo 3 (Ana Lívia, Lena e Luiz Felipe) ao discutirem a questão 2, produziram de início uma série de conjecturas e argumentos associados, todos baseados na decomposição do número 15 e com o critério de não poder utilizar a base 10 na decomposição numérica. O grupo, contudo, se apresentou confuso, em dúvidas e sem avançar na discussão. A intervenção do professor na orquestração do discurso (KNIPPING, 2008) foi necessária e por meio de questionamentos bem orientados contribuiu para que o grupo alcançasse a conclusão final do problema (retângulo preto) apresentando para isso duas estratégias distintas de resolução para o problema proposto. A Figura 32 ilustra a anatomia da situação argumentativa experienciada pelo grupo 3 durante a discussão e resolução da questão 2.

Figura 32 - Estrutura espiral observada na solução da questão 2 - grupo 3.



Fonte: Dados da pesquisa.

No bloco **AS 1**, logo no início da discussão, Luiz Felipe teceu uma conjectura afirmando que 15 = 3x5 **<fala 47>**, tomando como garantia para isso o fato do número 15 poder ser escrito como um produto de fatores envolvendo a base 5 **<fala 47>**. Aproveitando essa mesma ideia Luiz Felipe também afirmou que o número 15 poderia também ser escrito como, "$15= 5^2 -10$" **<fala 47>**. Esta conjectura, contudo, foi rejeitada pelo grupo através da fala de Lena, "não pode ser base 10" **<fala 48>** e com a concordância de Luiz Felipe **<fala 49>** que imediatamente reformulou sua conjectura, reescrevendo-a como "$15= 5^2- 2x5$" **<fala 49>**. Neste momento da discussão, o grupo se mostrou inseguro e com dúvidas em relação a conjectura criada. O apoio do professor para a orquestração do discurso (KNIPPING, 2008) foi solicitado por Ana Lívia **<fala 50>**. Por sua vez, o professor ao perceber que os alunos estavam trabalhando com a ideia de decomposição de um número na base 5, orientou os alunos a pensarem no tipo de agrupamento que é realizado nesta base **<fala 51>**. Em resposta ao professor, Ana Lívia conjecturou que se a base é 5 então por traz dela estão envolvidos os conceitos de meia dezena e meia centena **<fala 52>**. O professor na sequência contesta essa conjectura, refutando-a **<fala 53>** e esclarecendo que

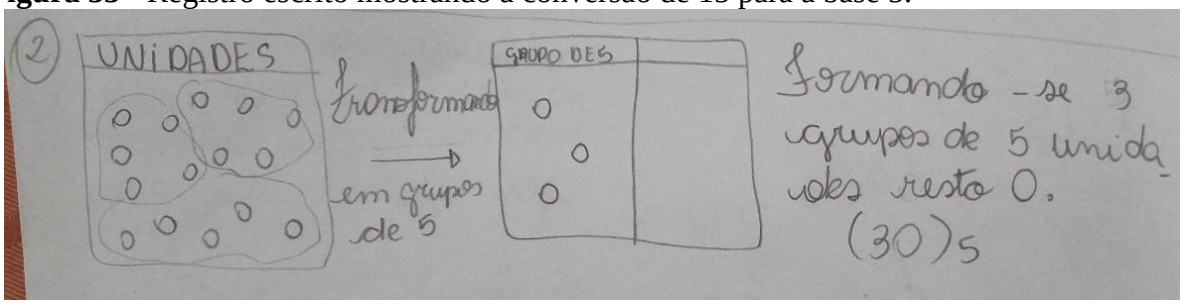
> A base agora é 5. Vocês esqueçam dezena, centena e unidade de milhar... são termos utilizados para a base decimal. Antes trabalhávamos com grupos de 10 (base decimal), agora vocês vão trabalhar na base 5, com grupos de quanto? **<Professor, fala 53>.**

Nesta etapa de construção de conjecturas infrutíferas e desconectadas umas das outras e diante da inercia do grupo o professor realizou uma intervenção para apoiar a discussão e conduzir os alunos a explorar uma solução para o problema.

> Peguem os 15 feijões e organizem eles dentro dessa proposta de grupos de 5. Na base decimal a gente trabalhava com grupos de 10, agora nós vamos trabalhar com esta mesma quantidade e formar grupos de 5 (...) **<Professor, fala 55** >.

No fluxo **AS 2,** a partir da orientação do professor **<fala 55>,** os alunos rotularam como dados para problema a quantidade de feijões (15) e a ficha de fabricação de números. Eles concluíram (retângulo preto) que é possível sim gerar novos números em outros sistemas de numeração não decimal a partir da quantidade de grãos indicada no enunciado da questão. Esta conclusão foi possível na medida em que os alunos converteram 15 para a base 5, $15 = (30)_5$, e 15 para a base 2, $15 = (1111)_2$. Para tanto as resoluções e o raciocínio utilizado como garantia foram usados para justificar a conclusão alvo (retângulo preto). Na Figura 33, por exemplo, é indicado a primeira garantia da conclusão.

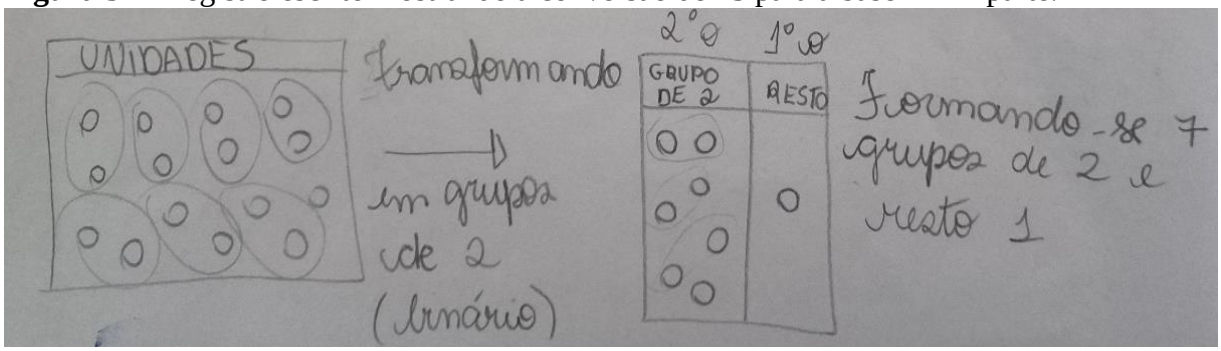
Figura 33 - Registro escrito mostrando a conversão de 15 para a base 5.



Fonte: Dados da pesquisa.

Por meio da ilustração foi possível verificar que os alunos inicialmente separaram os grãos em grupos de cinco, de tal forma, que foi possível gerar três grupos com cinco elementos cada e nenhum resto ou sobra. Os três grupos formados foram, portanto, deslocados para a segunda ordem por onde o processo de formação de grupos não foi adiante. Dessa forma o número de grãos disponíveis na segunda e primeira ordem indicaram o número $(30)_5=15$. A Figura 34, por sua vez apresenta a segunda garantia para a conclusão.

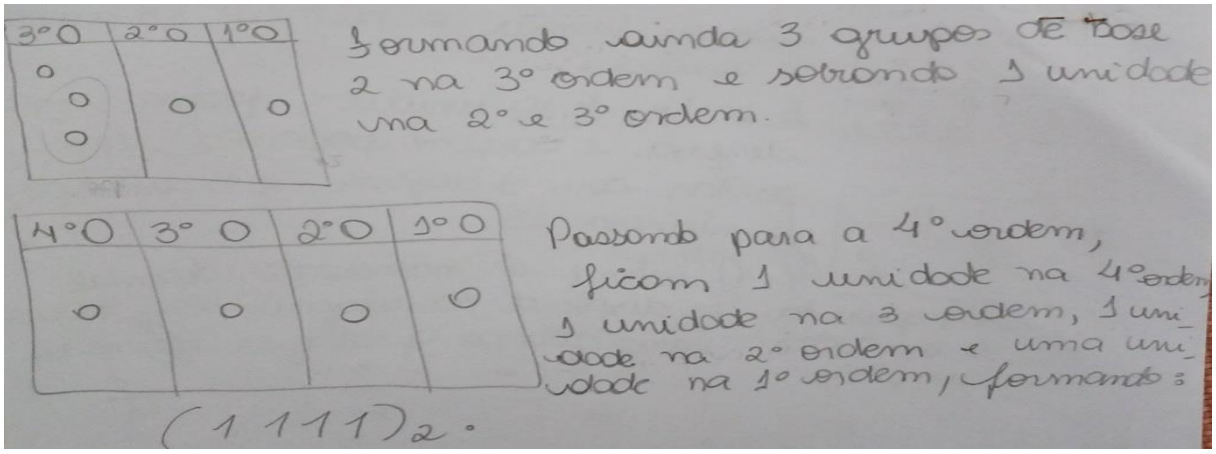
Figura 34 - Registro escrito mostrando a conversão de 15 para a base 2 – 1ª parte.



Fonte: Dados da pesquisa.

Na imagem anterior, a quantidade de grãos (15) foi organizada em grupos de dois, resultando em sete grupos e uma sobra (resto) relativo a um grão que não gerou grupo. Os grupos formados na primeira ordem foram representados por sete grãos na segunda ordem. Com esta quantidade de grãos na segunda ordem, os alunos novamente passaram a organizá-los em grupos de dois, conforme pode ser observado na Figura 34. Já na Figura 35, segunda parte da resolução, o total de grupos formados na segunda ordem aparece indicado na terceira ordem por três grãos e um grão de resto na segunda ordem.

Figura 35 - Registro escrito mostrando a conversão de 15 para a base 2 – 2ª parte.



Fonte: Dados da pesquisa.

Com os três grãos indicados na terceira ordem (Figura 35) foi possível formar apenas um grupo envolvendo dois grãos e uma sobra (resto) de um grão na terceira ordem que não compõe grupo. A parte inferior da Figura 35, por exemplo, ilustra o resultado desta distribuição de grãos que indica, portanto, a conversão do número 15 do sistema de numeração de base decimal para a base binária. Cada grão indicado na sua respectiva ordem compõe o número $(1111)_2$. O elemento de refutação (quadrado preto) que apareceu na sequência do fluxo **AS 2**, esteve ligado a um erro do grupo durante a conversão do número 15 para a base binária **<fala 56, 57>**. Este erro foi apontado pelo professor **<fala 60>** e prontamente corrigido pelo grupo por meio da atualização da última garantia exibida na Figura 35 **<fala 60 a 64>**. Sobre o resultado encontrado na conversão do número 15 para a base 2, o professor ressaltou ao grupo a título de informação que a base binária

> É o sistema de numeração que o computador utiliza. No sistema de numeração decimal nós trabalhamos com grupos de 10, isso porque a nossa máquina de calcular, as mãos têm 10 dedos. Já o computador ele trabalha com a base 2 e em virtude disso temos os termos, bit, byte, quilo byte, megabyte... tudo isso está por traz do conceito de binário, 0 e 1. Quando você chegar no teclado do computador e digitar 15 o computador vai armazenar na memória o número binário (...) **<Professor, fala 55>**.

Por sua vez, no fluxo **AS 3**, o professor não satisfeito apenas com a exibição do método geométrico para resolução do problema, passou na sequência, a orientar o grupo na procurar por outra estratégia de resolução, diferente daquela que foi apresentada por eles no fluxo **AS 2**. O diálogo apresentado a seguir indica o apoio do professor para a exibição de outro método resolutivo por parte do grupo.

> - Tentem mudar a estratégia de conversão. Pega o 15 e utilize aquela estratégia que vocês haviam mencionado **<Professor, fala 68>**.

> - No caso de dividir por 3? **<Ana Lívia, fala 69>**
> -Vocês estão trabalhando com qual base? **<Professor, fala 70>**
> - Base 2 **<Ana Lívia, fala 71>**.
> - Na base 2, vocês trabalham formando grupos de 2, isso sugere que a divisão seja por quanto? **<Professor, fala 72>**
> - Divisão por 2 **<Ana Lívia, fala 73>**.
> - Olha que interessante! (...) **<Professor, fala 74>**.

Com base no diálogo a estratégia de conversão adotada para converter um número do sistema de numeração de base decimal para uma base não decimal qualquer envolveria, portanto, o processo de divisão euclidiana do número (na base 10) pela base que se almejasse transformar, conforme a indicação das falas citadas a seguir e utilizadas como garantias para a conclusão do problema (retângulo preto). Primeira garantia apresentada:

> - 15 dividido por 2, é formar 7 grupos de dois e sobra 1 que é o resto, circule este resto. Depois 7 dividido por 2, resulta em 3 grupos de dois e sobra 1, circule este novo resto. Com três é possível formar grupos, então continuamos a divisão por 2. Forma um grupinho e sobra 1. Com este resultado dá para formar grupo? Não! Então o último quociente, circule ele, mais os restos tomando na ordem inversa formam o número procurado, $(1111)_2$. É útil essa estratégia caso você tenha que converter um número muito grande como 240 por exemplo **<Professor, fala 74>.**

Segunda garantia apresentada:

> - 15 dividido por 5, vai dar 3 (quociente) e resto zero. Aqui não dá para dividir. Vai dar $(30)_5$ **<Ana Lívia, fala 75>**.

Da primeira estratégia de resolução até a segunda apresentada, a garantia apresentada para justificar a conclusão transitou de argumentos visuais (KNIPPING, 2008) com apelo ao material didático para explicar o processo de conversão numérica (resolução geométrica) à argumentos conceituais (KNIPPING, 2008) por meio dos quais a explicação se baseou em uma justificação racional envolvendo ideias e propriedades da divisão euclidiana (resolução aritmética). A aprendizagem foi documentada pela mudança (evolução) na qualidade do argumento de justificação produzido pelos alunos (YACKEL, 2002) como também pelos variados processos de conversão das representações semióticas entre registros (DUVAL, 2006). Neste último caso, apoiados pelo professor, aos alunos apresentaram resoluções geométricas e aritméticas para o problema proposto e transitaram de um registro para outro e vice e versa para confirmar resultados. A estrutura indicada na Figura 32, apresentou dois fluxos de argumentação paralelos **AS 2 e AS 3**. Ambos os fluxos chegaram a uma mesma conclusão por meio de dois métodos resolutivos diferentes elaborados pelos alunos sob a orientação do

professor que também participou da argumentação coletiva (CONNER et. al, 2014). Em virtude de os argumentos seguirem independentes uns dos outros e atuarem como métodos diferentes de justificação da conclusão alvo (retângulo preto), concluiu-se que esta estrutura é compatível com a estrutura espiral (KNIPPING, 2008; REID; KNIPPING, 2010; ERKEK; BOSTAN, 2019; ERKEK; ISIKSAL BOSTAN, 2019).

7.2.3 Problema 3

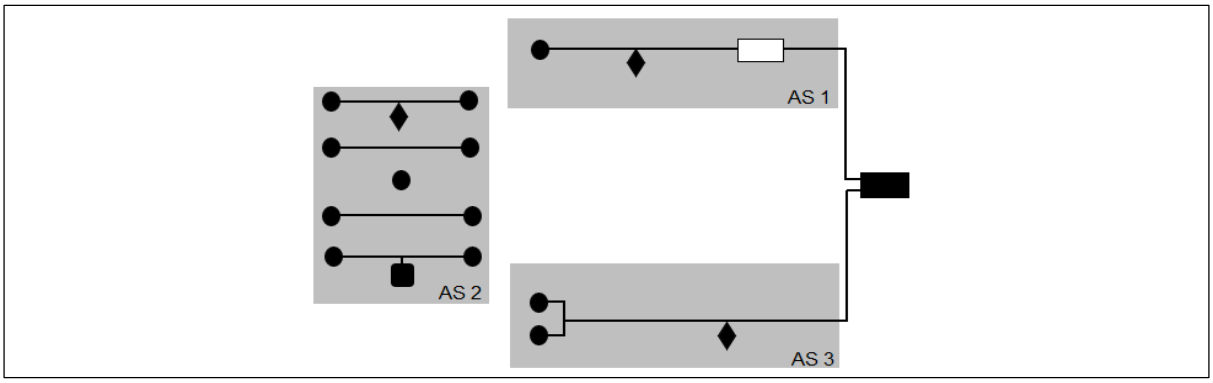
Figura 36. Terceiro problema da atividade proposta.

> 3) Mostre para o seu colega de grupo "*como converter um número do sistema de numeração de base decimal para um número em uma base não decimal qualquer*"

Fonte: Rodrigues et. al. (2021).

Os membros do grupo 1 (Alisson, Ana Paula, Cristina e Paulínia), discutiram a terceira questão entre si e contaram com o apoio e orientação do professor na orquestração de um discurso argumentativo (KNIPPING, 2008) e coletivo (CONNER, et. al. 2014) para então evoluírem na produção de uma prova empírica (BALACHEFF, 1987) para uma prova mais genérica (BALACHEFF, 1987; HANNA, 1990; 2000). O grupo apresentou dois modos (métodos) de prova para mostrar como converter um número do sistema de numeração de base decimal para um número em uma base não decimal qualquer, conforme ilustrado na estrutura anatômica da argumentação indicado na Figura 37.

Figura 37 - Estrutura espiral observada na solução da questão 3 - grupo 1.



Fonte: Dados da pesquisa.

A estrutura indicada na Figura 37 é composta por três blocos de argumentação, **AS1, AS2 e AS3**. Os fluxos **AS 1 e AS 3**, em especial, ilustram duas situações de argumentação onde os alunos expressam seus "modos de prova" (BALACHEFF, 1998). No fluxo **AS 1**, o grupo

expressou coletivamente (CONNER, et al, 2014) e espontaneamente sua concepção inicial de prova e por fim, no fluxo **AS 3**, outro modo de prova foi apresentado pelo grupo a partir do desafio e apoio do professor para que eles pudessem produzir uma prova mais genérica (HANNA, 1990; 2000; BALACHEFF, 1988) do que a prova inicialmente apresentada. A seguir, passaremos a discutir, com mais detalhes os argumentos que compuseram cada situação. Em particular, no fluxo **AS 1**, Cristina utilizou o número 15 no sistema de numeração de base decimal como um dado e posteriormente converteu o referido número para a base 3 encontrando como resultado o número 120_3, e dessa forma concluiu que, $15= (120)_3$ (retângulo branco do fluxo **AS 1**) **<fala 171>**

> "15 dividido por 3, da grupos (5) e não sobra nada. Depois 5 dividido por 3 da 1 grupo e sobra 2 que não dá para dividir. Como não dá mais para dividir tem o número 120 na base 3" **<Cristina, fala, 171>**.

Posteriormente, esta conclusão parcial (retângulo branco), ou resultado particular, passou a se tornar um dado que posteriormente foi utilizado de forma indevida pelo grupo para validar uma conclusão (BALACHEFF, 1987; TRIANTAFILLOU; SPILIOTOPOULOU; POTARI, 2016) de cunho geral (retângulo preto) e convencer os colegas de grupo. No fluxo **AS 1**, o grupo, portanto, com base apenas a exploração de um caso particular, concluiu ter provado a conversão de um número do sistema de numeração de base decimal para uma base não decimal qualquer (BALACHEFF, 1987;1988). Não satisfeito com a qualidade da prova empírica produzida, o professor solicitou ao grupo uma generalização do processo de prova **<fala 181 a 188>** e para tanto auxiliou o grupo na discussão que ocorreu no âmbito da argumentação coletiva (CONNER, et. al. 2014) e ilustrado pelo diálogo seguir.

> - Como converter um número do sistema de numeração de base decimal para um número em uma base não decimal? Se eu quiser converter para a base 2, o que eu faço? **<Professor, fala 181>**.
> - Divide por 2 **<Cristina, fala 182>**.
> - Isso! Se eu quiser converter para a base 3, o que eu faço? **<Professor, fala 183>**.
> - Divide por 3 **<Cristina, fala 184>**.
> -Isso! Ilustre isso pra mim e tentem generalizar isso... como seria para uma base qualquer? **<Professor, fala 185>**.
> - Chamem essa base qualquer de b, por exemplo **<Professor, fala 186>**.
> -Para um número n vou dividir por b **<Ana Paula, fala 187>**.
> - Isso! Pensem de maneira mais geral, tomando como referência aquilo que vocês fariam para a base 2 e 3 **<Professor, fala 188>**.

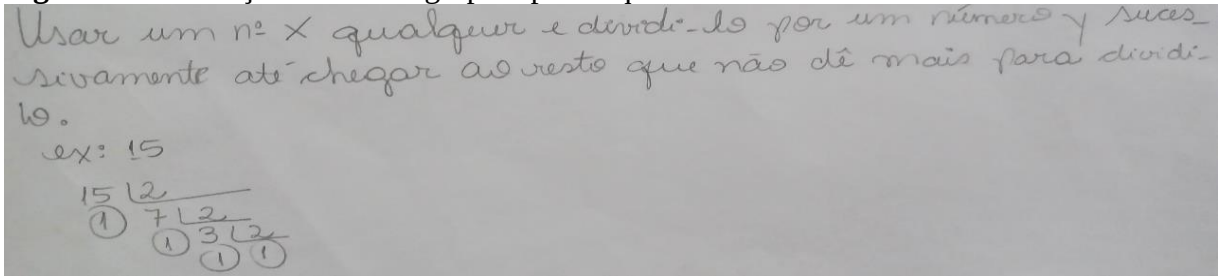
Na sequência da argumentação, conforme ilustrou a estrutura **AS 2**, o grupo se deparou em um estado de confusão de ideias e dificuldades para compreender o que foi solicitado pelo

professor. Esta confusão de ideias resultou em uma série de conjecturas e argumentos associados, todos eles isolados, sem conexão uns com os outros e com o tema do problema. Para efeito de exemplificação desta referida situação, Ana Paula propôs ao grupo logo no início, dividir um número n por b **<fala 187>**. No entanto essa ideia não gerou nenhuma discussão posterior e acabou sendo abandonada por ela e pelos seus colegas de grupo. Na sequência Paulínia argumentou que um número no sistema de numeração de base decimal pode ser qualquer número em particular **<fala 189>** e Alisson sugeriu o número 99 **<fala 190>**. Nesse ponto da argumentação, o grupo começou a confundir "número decimal" com "número no sistema de numeração de base decimal" o que pôde ser observado diante das falas de Paulínia e Ana Paula.

> "0,1 é um número na base decimal" **<Paulínia, fala 193>**
> "Esse número decimal, multiplicado por outro decimal vira um número inteiro" **<Ana Paula, fala 194>**

A estrutura **AS2** ilustrou, portanto, uma situação de confusão de ideias onde os alunos se mostraram reflexivos e em dúvida de como converter um número do sistema de numeração de base decimal para uma base não decimal qualquer **<fala, 195, 196, 197>**. O professor diante das dificuldades do grupo e participando da argumentação coletiva (CONNER, et. al. 2014) sugeriu rotular n como um número qualquer no sistema de numeração de base decimal e b como uma base qualquer **<fala 200>**. Ele ainda orientou os alunos a promoverem uma generalização de todo o processo de conversão **<fala 198>** tomando por base o exemplo que eles exploraram juntos na questão 2, ou seja, a conversão de 15 para a base 2 **<fala 200>**. Como resultado dessa orientação do professor, o fluxo **AS 3** exibiu, portanto, a nova tentativa do grupo em produzir uma prova mais genérica (HANNA, 2000) diferente daquela apresentada no fluxo **AS 1**. A ideia geral para converter um número do sistema de numeração de base decimal para uma base não decimal qualquer, no entendimento do grupo, passou pela realização de sucessivas divisões, a começar de n/b, até se chegar a um quociente zero **<Paulínia, fala, 201>.** Essa mesma ideia o grupo exibiu no registro da produção escrita entregue ao professor, conforme indicado na Figura 38.

Figura 38 - Produção escrita do grupo 1 para a questão 3.



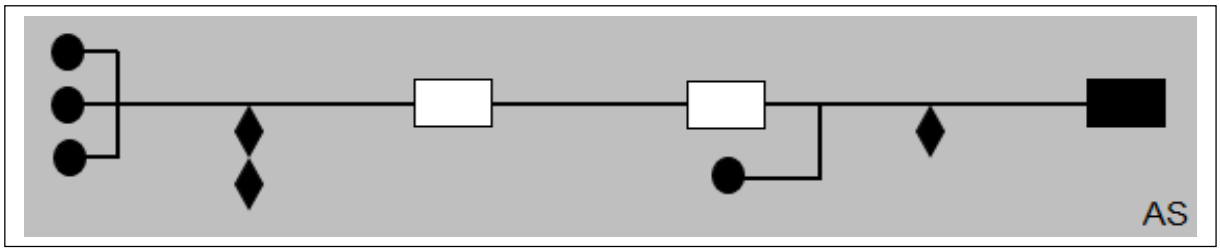
Fonte: Dados da pesquisa.

Na Figura anterior a justificação apresentada pelo grupo constitui um argumento visual, do nível conceitual visual, ainda inferior a um tipo de argumento essencialmente conceitual (KNIPPING, 2008). A partir da garantia apresentada para efeito de justificação foi possível verificar uma tentativa de generalização, ainda que em linguagem substancial (TOULMIN, 1958; KRUMMHEUER, 1995), contudo, desprovido de forma e rigor matemático característicos de um argumento analítico (TOULMIN, 1958; KRUMMHEUER, 1995). Ainda assim, este argumento é tido como matemático uma vez que o conteúdo da garantia apresentada é dependente do campo (TOUMIN, 1958; LITHNER, 2008), ou seja, o campo matemático. Com base na análise da garantia apresentada na Figura 38 é possível verificar também que o grupo não estabeleceu nenhuma condição de existência para as variáveis envolvidas na justificação como também não explicou de forma genérica e detalhada o processo de divisões sucessivas e obtenção dos algarismos do numeral obtido no sistema de numeração de base não decimal. Pelo contrário, fizeram uso de um caso particular para complementar essa parte da explicação (BALACHEFF, 1987;1988). A aprendizagem no âmbito da argumentação coletiva (CONNER, et. al. 2014) foi documentada pela mudança (evolução) na qualidade do argumento de justificação produzido pelos alunos (YACKEL, 2002), ou seja, do argumento empírico visual para um argumento visual em um nível conceitual-visual se aproximando do argumento essencialmente conceitual (KNIPPING, 2008). A estrutura indicada na Figura 37 apresentou, portanto, dois fluxos de argumentação paralelos **AS 1** e **AS 3**. Em ambos os fluxos, o grupo tentou chegar a mesma conclusão por meio de dois modos/métodos de prova diferentes. O fato dos argumentos indicados nos fluxos **AS 1 e AS 3** seguirem de forma independentes um do outro e atuarem como métodos de validação diferentes para a conclusão alvo (retângulo preto), concluiu-se, portanto, que esta estrutura é compatível com a estrutura espiral (KNIPPING, 2008; REID; KNIPPING, 2010; ERKEK; BOSTAN, 2019; ERKEK; ISIKSAL BOSTAN, 2019).

Os membros do grupo 2 (Caique, Carolina e Luiz Fernando) discutiram a terceira questão entre si e para a resolução deste problema de prova eles não contaram com nenhum tipo de apoio e participação do professor na argumentação coletiva (CONNER et. al. 2014). Na situação de argumentação apresentada, o grupo partiu de um dado particular (caso empírico) e foi capaz de produzir um argumento de prova conceitual e racional (BALACHEFF, 1987; KNIPPING, 2008) de caráter genérico (HANNA, 1990; 2000) cujo conteúdo desempenhou uma função explicativa (HANNA, 1990; 2000) e probatória (TRIANTAFILLOU; SPILIOTOPOULOU; POTARI, 2016) para efeito de convencimento junto a classe. Para mostrar como converter um número do sistema de numeração de base decimal para um número

em uma base não decimal qualquer, a discussão do grupo partiu de um caso particular de conversão na base 5, como uma espécie de dados para o problema, e avançou para uma ideia de conversão mais ampla e geral que pôde levar em consideração um número qualquer (n) e uma base qualquer (b). A estrutura de argumentação global que representa a anatomia desta situação de argumentação é apresentada na Figura 39.

Figura 39 - Estrutura de Linha observado na solução da questão 3 - grupo 2.



Fonte: Dados da pesquisa

No início da estrutura de argumentação (**AS**), os alunos tomaram como dados para o problema, a quantidade de grãos de feijão (15) no sistema de numeração de base decimal, a ficha de fabricação de números e o resultado da questão da questão 2, ou seja, $15 = (120)_3$. Durante o início da argumentação coletiva (CONNER, et. al. 2014), Luiz Fernando disse aos colegas que era preciso converter 15 para a base 5, semelhante ao que foi feito na transformação para a base 3 na questão 2 **<fala 85, 87>**. Em seguida, Caique de posse da ficha e dos grãos, realizou a conversão do número 15 da base decimal para a base 5, concluindo, portanto, (primeiro retângulo branco) que ficará três grãos de feijão na segunda ordem da ficha e nenhum grão na primeira ordem **<obs. 88, 89, fala 90>**. Esta conclusão geométrica, fundamentada por uma argumentação visual (KNIPPING, 2008) teve por justificativa (garantia) o princípio básico que rege o sistema de numeração de base 5, ou seja, a formação de agrupamentos de cinco unidades para a fabricação de um número na referida base **<obs. 88, 89, fala 89, 90>**. Está justificativa foi ainda apoiada (segundo losango preto) por outra garantia referente a decomposição dos algarismos do número 15 em potências de base 5, ou seja, $15= 0x5^0+3x5^1$ **<Luiz Fernando, fala 91>**. Na sequência do fluxo **AS**, a primeira conclusão (primeiro retângulo branco), essencialmente de caráter geométrico, passou a ter o status de dados para que então logo em seguida o grupo viesse a concluir que esta representação geométrica fazia referência ao numeral $(30)_5$ (segundo retângulo branco). Essa correspondência, geométrica-aritmética que liga os dados (primeiro retângulo branco) a conclusão (segundo retângulo branco) de acordo com a teoria dos registros de representação semiótica (DUVAL, 2006), revelou uma compreensão do grupo sobre o processo de transformação do número 15 da base decimal para a base 5. Posteriormente a isso, o resultado $15= (30)_5$, em especial, passou a se tornar um dado específico

(segundo retângulo branco) que acrescido a outro de cunho mais generalista, $n=(x)_b$, oferecido por Carolina e Luiz Fernando **<fala 93 a 96>** permitiu ao grupo em conjunto chegar a uma generalização para a conclusão final (retângulo preto). O diálogo a seguir, oriundo de uma argumentação coletiva (CONNER et. al. 2014) ilustra toda a tentativa de generalização do grupo a partir da exploração da conversão do número 15 para base 3.

> - Como que a gente explica isso de uma forma geral? Para ter todas as formas **<Carolina, fala 92>**.
> - Sim, igual Caique está fazendo ali...Da forma que ele explicou a da base 5 temos que mostrar para todas as bases **<Luiz Fernando, fala 93>**.
> - Tipo, tem que valer para todas, 5, 6, 7, 8.... **<Carolina, fala, 94>**.
> - Tem que pegar um número n na base 10, uma base b, e um número x que é o resultado final **<Luiz Fernando, fala 95>**.
> - Mas aí eu pego uma quantidade e distribuo em grupos conforme for a base né...**<Carolina, fala 96>**.
> - Sim, vamos escrever assim... tipo... vamos dividir n pela base, cada base (tipo 3 grupos de 3, 5 grupos de 5, 6 grupos de 6) ... como nós vamos explicar? É dividir e sair fazendo grupos novamente **<Luiz Fernando, fala 97>**.
> - A cada número da base você forma grupos que tem a quantidade da base, tipo a base 5 **<Caique, fala 98>**.
> - E pode ser um número qualquer viu. Escreve aí Caique **<Luiz Fernando, fala 99>**.

Na conclusão final do grupo, o processo de conversão de um número do sistema de numeração de base decimal para uma base qualquer foi apresentado pelo grupo por meio da fala de Caique durante a leitura do que havia escrito:

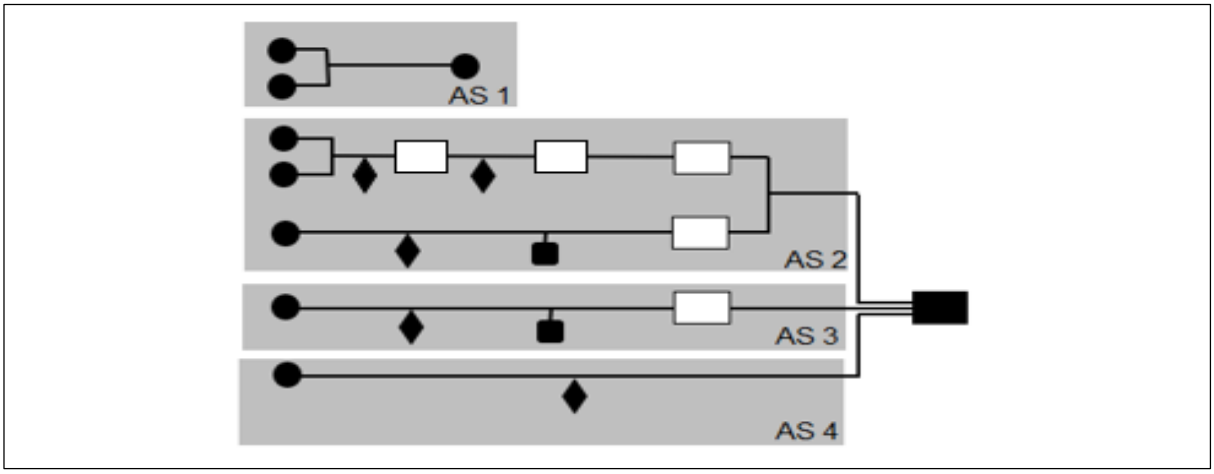
> Para converter da base 10 para uma base qualquer é preciso pegar um número qualquer **(n)** e dividir pela base **(b)** formando grupos conforme for o número da base **(b)** e a partir disso o número de grupos formados você torna dividir pela base **(b)** e assim vai até quando não for possível dividir e formar grupos. O resultado final e as sobras que não resultou em grupo vai gerar a fabricação do número **(x)** na base qualquer **(b) <Caique, fala 100>.**

O argumento é considerado matemático porque a garantia (justificativa) apresentada é dependente do campo (TOUMIN, 1958; LITHNER, 2008), ou seja, está baseada em dados, objetos, conceitos, relações e propriedades matemáticas (LITHNER, 2008). A tentativa de generalização da conclusão final (retângulo preto) pode ser considerada precária do ponto de vista do rigor e da forma, caraterísticos de um argumento matemático analítico (TOULMIN, 1958; KRUMMHEUER, 1995), contudo, o seu conteúdo é racionalmente explicativo (HANNA, 1990; 2000) e probatório (TRIANTAFILLOU; SPILIOTOPOULOU; POTARI, 2016) uma vez que a generalização apresentada é desprovida de uma contextualização em um caso particular. Este argumento, portanto, na qualidade de uma etno-argumentação

(GARNICA, 2002) para o contexto de sala de aula é considerado convincente (CERVANTES-BARRAZA; HERNANDEZ MORENO; RUMSEY, 2020) uma vez que expressa racionalmente de maneira clara e exata a compreensão do grupo sobre todo o processo de conversão de um número do sistema de numeração de base decimal para uma base não decimal qualquer. A aprendizagem no âmbito da argumentação coletiva (CONNER, et. al. 2014) foi documentada pela evolução do argumento de prova utilizado ao longo da argumentação. Este transitou da argumentação visual para a argumentação conceitual (KNIPPING, 2008). O raciocínio generalizador utilizado pelo grupo partiu inicialmente de um caso particular e foi sequencial e linear para frente durante todo o processo de resolução do problema até atingir uma generalização para a conclusão final. A conexão entre os argumentos foi estabelecida através de conclusão/dados, por onde a conclusão da primeira etapa do fluxo (retângulo branco) correspondeu aos dados da segunda etapa e assim sucessivamente. Além disso, a inexistência de argumentos paralelos e retroatividade do raciocínio fez com que este fluxo de argumentação fosse compatível a estrutura de linha (ERKEK, BOSTAN, 2019).

Por sua vez o grupo 3 (Ana Lívia, Lena e Luiz Felipe) contando com a participação do professor na argumentação coletiva (CONNER et. al. 2014) apresentou três modos de prova para explicar como converter um número do sistema de numeração de base decimal para um número em uma base não decimal qualquer, conforme ilustrado na estrutura exibida na Figura 40.

Figura 40 - Estrutura espiral observado na solução de prova da questão 3 - grupo 3.



Fonte: Dados da pesquisa.

A estrutura indicada na Figura 17 é composta por blocos de argumentos, **AS 1, AS 2, AS 3 e AS 4**. Os fluxos **AS 2, AS 3 e AS 4**, em especial, ilustram três situações de argumentação onde os alunos expressam seus "modos de prova" (BALACHEFF, 1998). No fluxo **AS 2**, o grupo expressa espontaneamente sua concepção inicial de prova, já no fluxo **AS 3**, a pedido do

professor, produzem um outro tipo de prova que eles julgam ter mais validade do que a prova anterior. E por fim, no fluxo **AS 4**, também a pedido do professor, outro modo de prova é apresentado pelos alunos na tentativa de propor uma generalização para a conclusão do resultado envolvendo o problema. A estrutura ainda é composta por uma estrutura **AS 1**, onde os alunos produziram um argumento inicial que não tinha conexão com os demais representados nos fluxos **AS 2, AS 3** e **AS 4.** A seguir é apresentado a discussão dos argumentos produzidos em cada fluxo que compõe a estrutura. Na estrutura **AS 1**, no início da situação argumentativa, Lena sugeriu ao grupo a escolha de um número para que posteriormente eles pudessem convertê-lo para uma base não decimal qualquer **<fala 78>**. Para tanto, Luiz Felipe cita, que este número poderia ser o número 23 **<fala 79>**. Sem nenhuma explicação, essa ideia foi logo abandonada pelo grupo o que resultou em um argumento isolado na estrutura **AS 1** e desconectado dos demais. Na argumentação descrita nos fluxos **AS 2, AS 3 e AS 4,** os fluxos eram paralelos, independentes uns dos outros e se interconectam apenas ao resultado final do problema para indicar que a conversão de um número da base decimal para uma base não decimal, foi explicada pelo grupo por meio de três modos de provas diferentes. No fluxo **AS 2**, em especial, dois argumentos paralelos foram produzidos para defender uma mesma conclusão, $24 = (120)_4$ dentro do fluxo. No primeiro argumento, os dados considerados por Lena referiam-se a uma quantidade de grãos de feijão (24) e a ficha de fabricação de números onde os feijões deveriam estar alocados na primeira ordem. Ana Lívia inicialmente concluiu (primeiro retângulo branco) que na segunda ordem da ficha deveria ter 6 grãos **<fala 82>** sob a garantia de que cada grão da segunda ordem se referia a um agrupamento de 4 grãos da primeira ordem **<Lena, obs. 81>**. Esta conclusão parcial (primeiro retângulo branco) se tornou em seguida um dado para a conclusão (segundo retângulo branco) seguinte de Ana Lívia, ou seja, na terceira ordem terá um grão de feijão e na segunda ordem 2 grãos **<fala 82>** sob a justificativa de que com 6 grãos na segunda ordem era possível formar um grupo de 4 feijões e sobra 2 **<fala 82>**. A conclusão exposta no segundo retângulo branco se tornou então um dado para a conclusão de Ana Lívia indicada no terceiro retângulo branco, ou seja, $(120)_4$ **<fala 82>**. A passagem dos dados à conclusão nesta última etapa de argumentação com base no visual (KNIPPING, 2008) foi viabilizada pela transição do registro geométrico de representação semiótica para o registro aritmético (DUVAL, 2006). No mesmo fluxo, em paralelo a esta linha de argumentação, Ana Lívia considerou o numeral 24 na base decimal como um dado que sob a garantia de sucessivas divisões por 4 resultou no numeral $(120)_4$ **<fala 82, 86>**. Para se chegar a este resultado, o professor imediatamente refutou um resultado preliminar de Ana Lívia, $(60)_4$, alegando que na base 4 não poderia aparecer o algarismo 6, e nesse sentido, era necessário que ela continuasse

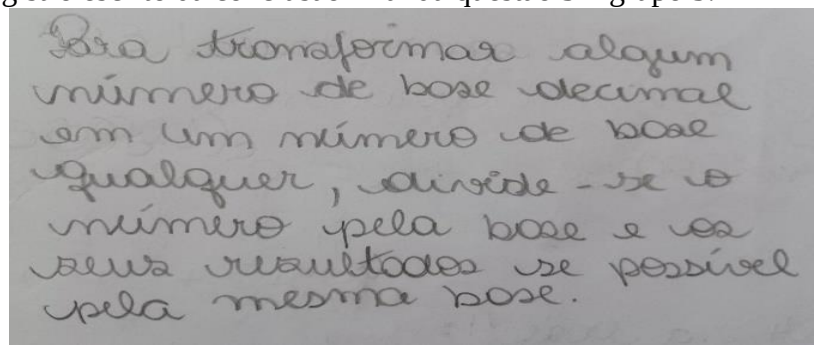
com a divisão euclidiana para formar grupos e chegar em $(120)_4$ **<fala 83, 86>.** Os argumentos paralelos indicados no fluxo **AS 2**, descreveram inicialmente um modo de prova empírica (BALACHEFF, 1987;1988) utilizada pelos alunos para explicar e mostrar a conversão de um número do sistema de numeração de base decimal para uma base não decimal qualquer. Este tipo de argumento é considerado não probatório (TRIANTAFILLOU; SPILIOTOPOULOU; POTARI, 2016) uma vez que a justificação se baseou no uso de um caso empírico. Não satisfeito com a qualidade da prova produzida, o pesquisador solicitou ao grupo uma generalização da ideia por ora apresentada por eles **<fala 88>**. O fluxo **AS 3** ilustrou uma primeira tentativa do grupo em alcançar esta generalização. Logo de início no fluxo, numa tentativa de generalização atípica, o grupo passou a trabalhar com o número 625 na base decimal, tido por eles como muito grande **<fala 89>** e com mais de dois algarismos **<fala, 91>**. A base 5 foi escolhida por Ana Lívia pelo fato dela entender que poderia escolher uma base qualquer para a explicação **<fala 92, 94>**. Utilizando a divisão euclidiana de 625 por 5 como justificativa para a conversão de base **<fala 94>**, Ana Lívia concluiu que o resultado era $(5000)_5$. No entanto, o pesquisador que acompanhava de perto a discussão refutou o resultado dizendo que a divisão não acabava ali e que na base 5 não era permitido aparecer o algarismo 5 na notação do numeral **<fala, 98, 100, 102>**. O resultado foi prontamente corrigido por Ana Lívia, ou seja, $(10000)_5$ **<fala 103>**. No argumento indicado no fluxo **AS 3** o grupo apresentou um modo de prova, diferente do fluxo anterior, porém, ainda baseado em um teste empírico diferente (BALACHEFF, 1987;1988) e no qual eles acreditavam que poderia representar uma generalização para fins de validação do processo de conversão de um número da base decimal para uma base não decimal, ou seja, a validação da conclusão final (retângulo preto). Neste modo de prova, os alunos raciocinaram utilizando um o recurso baseado no teste empírico de um caso atípico (BALACHEFF, 1987;1988), no qual eles acreditavam que poderia ter o poder de causar uma generalização e validação do processo. O número (625) escolhido pelos alunos para esta tarefa forçada de generalização e validação foi considerado por eles como um "número muito grande" **<fala 89>** e com "mais de dois algarismos" **<fala 91>** quando comparado a um caso mais simples trabalhado anteriormente. Dessa forma, a ideia era a seguinte, se o processo de conversão era valido para um número muito grande, logo ele acabaria sendo válido também para qualquer outro caso mais simples **<fala 88 a 95>**. Quando questionados pelo professor, se este modo de prova apresentado era capaz de convencê-los da validade do método de conversão **<fala 104>**, os alunos disseram que sim **<fala 105>.** Ainda que este argumento fosse considerado convincente pelos alunos, ele não poderia ser considerado probatório (TRIANTAFILLOU; SPILIOTOPOULOU; POTARI, 2016). O professor por sua vez, não

satisfeito com a qualidade da prova produzida, solicitou ao grupo uma nova tentativa de generalização para o resultado, de modo a não particularizar valores para o número a ser convertido e nem para a base **<fala 106>**. O fluxo **AS 4**, por fim, ilustrou uma outra tentativa de produção de prova por parte do grupo, dessa vez uma prova mais genérica que as anteriores e desprovida de particularidades. No fluxo **AS 4**, os dados levaram em consideração a ideia de um número qualquer (n) no sistema de numeração de base decimal e uma base (b) qualquer a ser usada no processo de conversão. O diálogo apresentado a seguir, oriundo da argumentação coletiva (CONNER et al, 2014), ilustra muito bem o esforço do grupo em tentar alcançar uma explicação mais geral para o método de conversão de um número da base decimal para uma base não decimal qualquer.

> -Dividindo um número n pela base b e conforme os resultados, vai dividindo pela mesma base na medida em que for formando grupos e deixando restos ao longo das ordens" **<Ana Lívia, fala, 107>**.
> - Algum número de base decimal. Para transformar algum número de base decimal em um número de base qualquer, divide-se.... **<Ana Lívia, fala 108>**.
> - O número pela base e os restos (quocientes) também pela mesma base **<Luiz Felipe, fala 109>**.
> -...um número pela base e os seus resultados (quocientes) se possível, pela.. **<Ana Lívia, fala 110>**.
> - mesma base **<Luiz Felipe, fala 111>**.

O registro final de sistematização da conclusão final (retângulo preto) aparece, portanto, indicado na Figura 41 a seguir.

Figura 41 - Registro escrito da conclusão final da questão 3 – grupo 3.



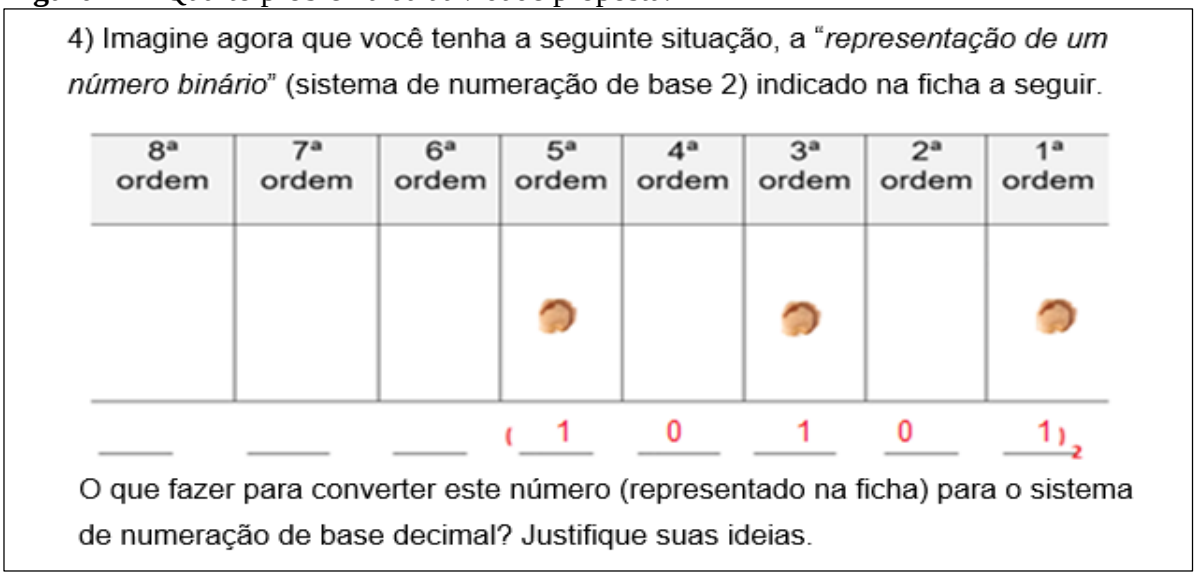
Fonte: Dados da pesquisa.

A conclusão indicada na Figura 41 por meio da linguagem corrente (informal) é precária do ponto de vista do rigor e da forma, característicos de um argumento analítico (TOULMIN, 1958; KRUMMHEUER, 1995) contudo, mesmo que o seu conteúdo escrito apresente falhas na descrição detalhada do processo, ainda assim, após complementado por elementos presentes no argumento oral **<Ana Lívia, fala 107>** este foi considerado razoavelmente explicativo

(HANNA, 1990; 2000) e probatório (TRIANTAFILLOU; SPILIOTOPOULOU; POTARI, 2016) uma vez que a generalização apresentada é desprovida de uma contextualização em um caso particular. Trata-se, portando, de um argumento conceitual (KNIPPING, 2008), aceitável e convincente ao seu modo característico enquanto uma etno-argumentação (GARNICA, 2002) para o contexto de sala de aula uma vez que expressa racionalmente de maneira clara e exata a compreensão do grupo sobre o processo de conversão. A aprendizagem de prova no âmbito da argumentação coletiva (CONNER, et. al. 2014) foi documentada pela evolução do argumento de prova utilizado ao longo da argumentação. A argumentação transitou de argumentos empíricos e visuais, evoluiu posteriormente para um teste empírico crucial e por fim alcançou uma explicação mais genérica e conceitual (KNIPPING, 2008, BALACHEFF, 1987;1988). A estrutura anatômica indicada na Figura 40, apresentou, portanto, três fluxos de argumentação paralelos **AS 2, AS 3** e **AS 4**. Ambos os fluxos chegaram a uma mesma conclusão por meio de três modos/métodos de prova diferentes elaborados pelos alunos. Em virtude de os argumentos seguirem independentes uns dos outros e atuarem como métodos diferentes de validação da conclusão alvo na perspectiva de quem as produziu, concluiu-se, portanto, que esta estrutura era compatível com a estrutura espiral (KNIPPING, 2008; REID; KNIPPING, 2010; ERKEK; BOSTAN, 2019; ERKEK; ISIKSAL BOSTAN, 2019).

7.2.4 Problema 4

Figura 42 - Quarto problema da atividade proposta.

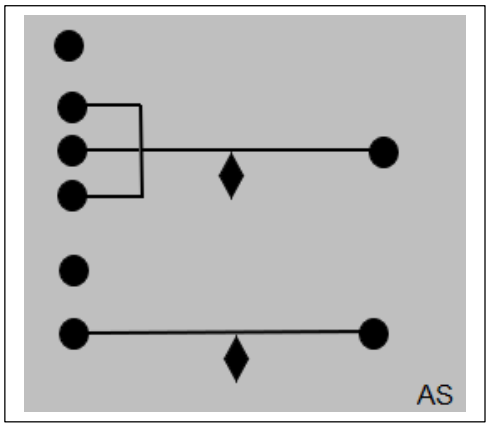


Fonte: Rodrigues et. al (2021).

Na questão 4, o grupo 1 (Alisson, Ana Paula, Cristina e Paulínia) após a leitura do enunciado do problema, mantiveram-se por um período em silêncio, reflexivos e confusos em

relação ao que precisava ser feito para resolver o problema e dessa forma iniciar a argumentação coletiva (CONNER, et. al, 20214). Mesmo requisitando o auxílio do professor na orquestração do discurso (KNIPPING, 2008), o grupo não conseguiu resolver o problema proposto. A anatomia dessa situação argumentativa foi ilustrada na Figura 43.

Figura 43 - Estrutura argumentos independentes observado na solução da questão 4 - grupo 1.



Fonte: Dados da pesquisa.

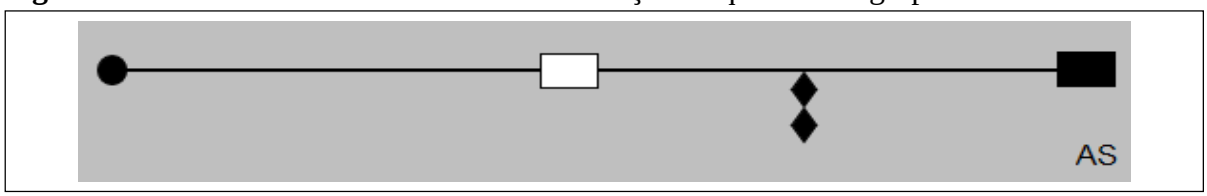
A estrutura indicada na Figura 43, apresenta dados, opiniões (ideias) e argumentos isolados. Estes argumentos isolados ainda que independentes uns dos outros não se interconectavam para gerar uma conclusão ou um resultado final. Na estrutura **AS**, Ana Paula diante do número binário indicado na ficha (dado) e da inercia do grupo em iniciar uma discussão do assunto, acionou o professor para indagar como o problema poderia ser resolvido? **<fala 203>**. O professor por sua vez, orientou o grupo a considerar como dados para o problema, o número binário representado na ficha bem como os resultados indicados nas questões 2 e 3 da atividade proposta. Para além disso, o professor concluiu na sua orientação para o grupo, que a solução do problema deveria seguir o caminho inverso do que foi realizado por eles nas duas questões anteriores **<fala 204>.** O professor justificou esta orientação dizendo que, antes eles (os alunos) trabalhavam com a ideia de formar grupos e que a partir daquele momento deveriam pensar em fazer o contrário, ou seja, decompor e desmanchar os grupos formados **<fala 206, 208>**. No entanto, os alunos mesmo diante do apoio oferecido pelo docente, ainda se mostraram confusos e na dúvida em como prosseguir com a resolução do problema, o que pôde ser verificado na fala de Cristina, "oh Pa (Paulínia), como vamos escrever isso aqui? " **<fala 210>**. Na sequência, em resposta a dúvida de Cristina, Paulínia concluiu, de forma um pouco vaga, que a solução do problema deveria seguir o processo inverso sugerido pelo professor **<fala 207>**. Para tanto, como garantia a esta conclusão, ela explicou

> "(...) a gente pega de dois em dois e vai voltando...2,4,8. Você quer saber como nós vamos colocar isso no papel? Vamos escrever... é o processo inverso! Se dá através da devolução de quantidade de pares atribuída a cada ordem anterior e pronto" **<Paulínia, fala 211>**.

Cristina concorda **<fala 212>** e a discussão se encerra com o grupo acreditando ter concluído a solução do problema. Na situação argumentativa apresenta no fluxo **AS**, o grupo demonstrou ter compreendido de modo geral a ideia de recomposição dos grãos até a primeira ordem da ficha para então retornar à quantidade de grãos referente a um número no sistema de numeração de base decimal. Contudo, a compreensão dessa ideia geral não foi o suficiente para que o grupo pudesse realizar uma aplicação desta para a resolução do caso particular (problema). Nesta estrutura de argumentos (**AS**), com forte apego à argumentações de cunho visual (KNIPPING, 2008), verificou-se, portanto, que os alunos não conseguiram resolver o problema ainda que o professor tenha oferecido apoio para isso <**fala 204,206**>. Ao apresentar uma ideia bem geral de como resolver o problema e depois abandoná-la **<Paulínia, fala 211>** Paulínia e o os colegas além de mostrarem que não compreenderam tão bem o enunciado do problema, também demonstraram ansiedade com o término da atividade **<fala 213>**. Considerando o fato de que os argumentos produzidos se revelaram isolados, independentes, desconectados uns dos outros e não conduziram a solução/conclusão do problema, a estrutura de argumentação global mais compatível com essa situação argumentativa foi a estrutura de argumentos independentes (ERKEK, BOSTAN, 2019).

Por sua vez, o grupo 2 (Caique, Carolina e Luiz Fernando) chegou à conclusão (solução) do problema sem necessitar do apoio do professor na orquestração do discurso (KNIPPING, 2008). Logo de início após a leitura do enunciado do problema por Luiz Fernando **<fala101>**, Caique revelou ao grupo que já tinha ideia de como solucionar a questão 4 **<fala 102>**. Em virtude disso não houve discussão no âmbito do grupo uma vez que Luiz Fernando atribuiu a Caique a responsabilidade de apresentar por escrito a sua linha de raciocínio **<fala 103>** para a conclusão do problema. Enquanto Caique redigia por escrito a conclusão, Carolina iniciava a questão 5 **<fala 105>**. A anatomia da situação de argumentação experienciada pelo grupo 2 foi então ilustrada pela Figura 44 a seguir.

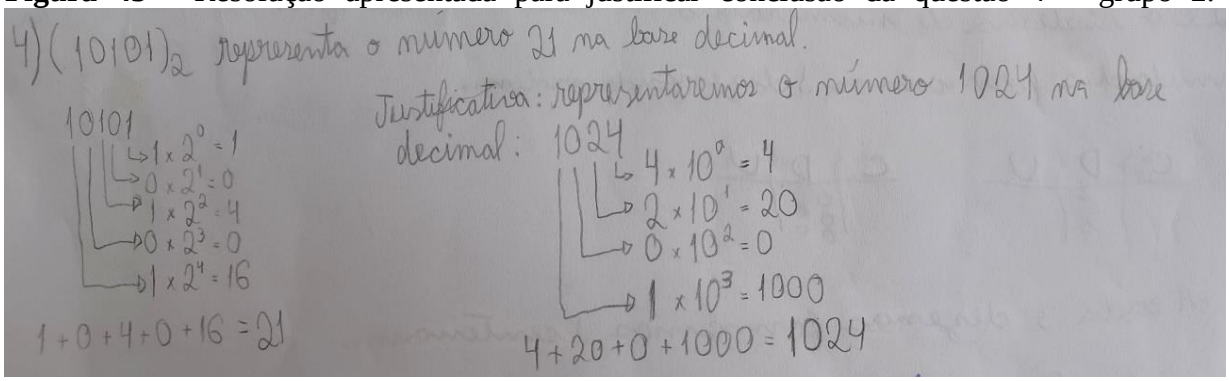
Figura 44 - Estrutura de linha observado na solução da questão 4 - grupo 2.



Fonte: Dados da pesquisa.

No fluxo apresentado na Figura 44, Caique assumiu como dados para o problema a representação geométrica do número binário na ficha de fabricação de números. Imediatamente ele percebeu que a representação geométrica indicada mantinha uma correspondência direta com a notação aritmética do número informado logo abaixo no enunciado e vice e versa. Tratava-se, portanto, do mesmo número, porém representado de uma forma diferente. Este entendimento relativo a esta correspondência direta encontra fundamento na teoria dos registros de representação semiótica (DUVAL, 2006). A partir daí, apoiado por uma argumentação visual, Caique concluiu (primeiro retângulo branco) que a quantidade de grãos inicialmente considerada por ele fazia referência ao numeral indicado por $(10101)_2$. Na sequência, sob os olhares atentos dos colegas, ele passou a considerar a conclusão anterior (retângulo branco) como um dado para então concluir que o número binário $(10101)_2$ é representado pelo número 21 no sistema de numeração de base decimal. Para tanto, de modo a convencer (CERVANTES-BARRAZA; HERNANDEZ MORENO; RUMSEY, 2020) os colegas, ele apresentou o seguinte raciocínio na resolução do problema como forma de justificar a passagem dos dados à conclusão (retângulo preto).

Figura 45 - Resolução apresentada para justificar conclusão da questão 4 – grupo 2.



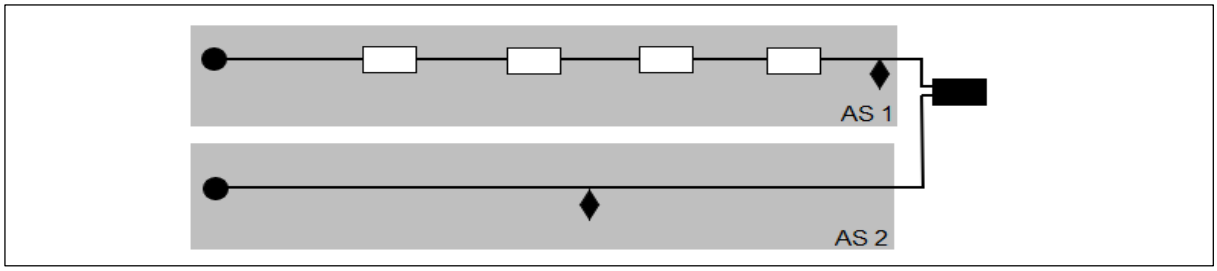
Fonte: Dados da pesquisa.

Na garantia apresentada, Caique converteu o número binário $(10101)_2$ para o sistema de numeração de base decimal, utilizando para isso a decomposição dos algarismos do número binário em potências de base 2 para então concluir que este fazia referência o número 21 na base decimal. O resultado encontrado ilustra o processo de "tratamento" descrito por Duval (2006) como uma transformação da representação numérica dentro de um mesmo registro, ou seja, $21 = (10101)_2$. Como apoio a esta garantia, Caique mostrou que a decomposição dos algarismos do número binário em potências de base 2 teve por fundamento uma analogia a decomposição dos algarismos do número 1024 no sistema de numeração de base decimal em grupos de 10 (unidade, dezena, centena, unidade de milhar). O fato de o professor não ter sido acionado para acompanhar e prestar apoio a solução deste problema, contribuiu para que o

grupo não tenha iniciado a discussão de uma outra solução para o problema. O raciocínio utilizado por Caique para convencer o grupo da sua conclusão foi sequencial e linear para frente durante todo o processo de resolução do problema até atingir a conclusão final (retângulo preto). Por meio do raciocínio apresentado o grupo se nutriu de um tipo de argumentação conceitual (KNIPPPING, 2008) que articulava ideias e propriedades numéricas para resolver o problema. A argumentação partiu de dados oriundos do material concreto, contudo, ela foi se desenvolvendo através de operações mentais e expressas por meio de cálculos desprovidos do recurso material em si para ilustrar resultados A aprendizagem pôde ser documentada pela melhoria da qualidade do argumento apresentado (YACKEL, 2002), ou seja, a argumentação teve início com a exploração de argumentos visuais durante a exploração dos dados do problema e evoluiu para a apresentação de argumentos conceituais (KNIPPING, 2008) utilizados na garantia para justificar a resolução do problema. A conexão entre as duas etapas de argumentação foi estabelecida através de conclusão/dados, por onde a conclusão da primeira etapa do fluxo (retângulo branco) correspondeu aos dados da segunda etapa até chegar à conclusão alvo (retângulo preto). Além disso, a inexistência de argumentos paralelos e retroatividade do raciocínio fez com que este fluxo de argumentação fosse compatível a estrutura de linha (ERKEK, BOSTAN, 2019).

Já o grupo 3 (Ana Lívia, Lena e Luiz Felipe) contando com o suporte do professor na orquestração do discurso (KNIPPING,2008), discutiu o problema e conseguiu produzir duas resoluções distintas para alcançar a mesma conclusão. A segunda solução, em especial, partiu de uma solicitação do professor ao grupo. As duas soluções, portanto, foram apresentadas de forma independente uma da outra através de dois fluxos paralelos **AS 1** e **AS 2** interconectados somente à conclusão final e indicados na Figura 46.

Figura 46 - Estrutura espiral observado na solução da questão 4 - grupo 3.

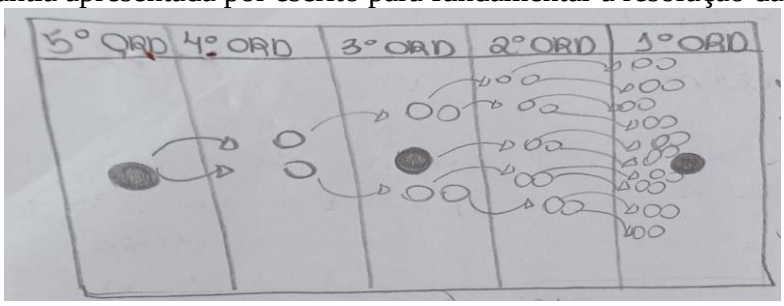


Fonte: Dados da pesquisa.

No fluxo de argumentação **AS 1**, Ana Lívia considerou como dado para o problema a representação geométrica do número binário $(10101)_2$ na ficha de fabricação de números. Na sequência, sob os olhares dos integrantes do grupo, ela passou a operar sobre os grãos que indicavam a posição geométrica do número binário na ficha. Ela então concluiu (retângulo

preto) que o número binário em questão representava o número 21 no sistema de numeração de base decimal **<fala 114>**. Para tanto Ana Lívia alegou junto ao grupo que "na quinta ordem tem 1 (grão) então volta 2 e depois 4. E aí vai voltando dobrado mais o resto" **<fala 112>,** ou seja, "serão realizadas sucessivas multiplicações por 2 até chegar a primeira ordem" **<fala 118>**. Uma maneira eficiente que ela encontrou para convencer a todos sobre a conclusão final (retângulo preto) do problema foi apresentar um desenho como explicação, ou garantia, para autorizar a passagem de dados entre as 5 etapas de argumentação exibidas do fluxo **AS 1** para fundamentar a conclusão (retângulo preto). No desenho indicado na Figura 47 e com base em uma argumentação visual (KNIPPING, 2008) Ana Lívia apresentou detalhadamente a sua ideia para justificar a conclusão final (21), ou seja, a conversão do número binário $(10101)_2$ para o sistema de numeração de base decimal.

Figura 47 - Garantia apresentada por escrito para fundamentar a resolução da questão.



Fonte: Dados da pesquisa.

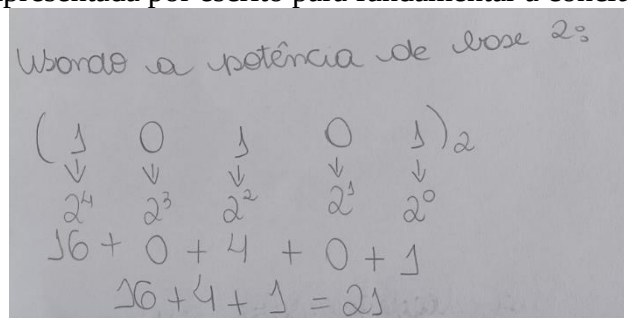
De acordo com Ana Lívia

> Como estamos trabalhando com um número binário, o feijão da quinta ordem corresponde a dois na quarta ordem. Esses dois feijões passaram para a terceira ordem multiplicado por dois e se juntando com um feijão que já estava lá né. Então com 5 feijões na terceira ordem multiplicados por 2 soma 10 feijões na segunda ordem. Os 10 feijões da segunda ordem multiplicados por 2 e somados com 1 feijão dá o resultado 21" **<Ana Lívia, fala 120>.**

Na primeira solução apresentada e indicada no fluxo **AS 1**, o professor prestou apoio ao grupo apenas confirmando algumas ideias e procedimentos que os alunos realizavam e necessitavam de confirmação para ir adiante **<fala 113, 117, 119>**. Na sequência, no fluxo **AS 2**, o professor orientou **<fala 117, 121>** os alunos a produzirem uma outra solução alternativa para o problema de modo a chegarem ao mesmo resultado (conclusão), porém, sem envolver o deslocamento de grãos na ficha. Dessa forma, ao invés de explorar a representação geométrica do número, os alunos passaram a considerar como dados para o problema, a representação aritmética do número binário indicado na ficha, ou seja, $(10101)_2$. Diante disso, o professor sugeriu ao grupo que trabalhassem com as potencias de 2 envolvendo os algarismos do número binário, processo semelhante ao que eles fizeram na questão 1 da atividade ao trabalhar com a decomposição de

vários números em potências de base 10 **<fala 121>.** Seguindo essa orientação e por analogia a base 10**,** os alunos apresentaram como justificativa para a conclusão alvo (retângulo preto) a resolução indicada na Figura 48 a seguir.

Figura 48 - Garantia apresentada por escrito para fundamentar a conclusão da questão.



Fonte: Dados da pesquisa.

Por meio da garantia apresentada, o grupo concluiu no fluxo **AS 2** que $(10101)_2=21$ **<fala, 126>**. A argumentação neste ponto foi marcada pela elaboração de um argumento conceitual (KNIPPING, 2008) utilizado para fins de justificação da conclusão. Por meio de operações mentais expressas por cálculos, o grupo argumentou racionalmente articulando ideias e propriedade matemáticas para estabelecer uma conclusão (BALACHEFF, 1987;1988; KINIPPING, 2008). O professor desempenhou um papel fundamental no apoio ao grupo **<fala, 113, 117, 121, 124>** durante a argumentação coletiva (CONNER, et. al. 2014), especialmente solicitado uma justificação alternativa da conclusão obtida por meio do fluxo **AS 2** como também oferecendo pistas para a resolução **<fala 121>**. A aprendizagem foi documentada pela mudança na qualidade do argumento apresentado (YACKEL, 2002). A argumentação teve início com a produção de argumentos visuais no fluxo **AS 1** para justificar a conclusão e terminou com a elaboração de um argumento conceitual no fluxo **AS 2** para justificar a conclusão de maneira racional (KINIPPING, 2008; BALACHEFF, 1987;1988). O apoio do professor, participando da argumentação coletiva foi importante para viabilizar essa melhoria na produção de argumentos. Em alguns momentos da argumentação coletiva situações de aprendizagem foram observadas quando o grupo mostrou compreensão de uma ideia por meio da conversão desta em diferentes registros de representação semiótica (DUVAL, 2006). A estrutura indicada na Figura 46, apresentou dois fluxos de argumentação paralelos **AS 1** e **AS 2**. Ambos os fluxos chegaram a mesma conclusão por meio de duas estratégias distintas de solução. O fato de os argumentos seguirem independentes e se interligarem a conclusão alvo somente ao final de todo o processo argumentativo, nos permitiu concluir que esta estrutura é

compatível com a estrutura espiral (KNIPPING, 2008; REID; KNIPPING, 2010; ERKEK; BOSTAN, 2019; ERKEK; ISIKSAL BOSTAN, 2019).

7.2.5 Problema 5

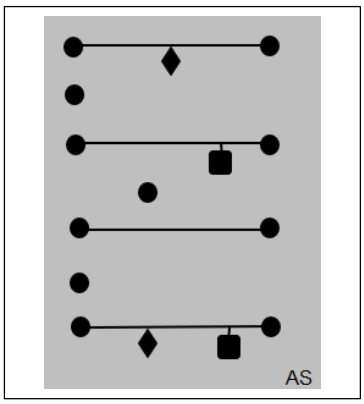
Figura 49 - Quinto problema da atividade proposta.

> 5) Mostre para o seu colega de grupo "*como converter um número do sistema de numeração não decimal para um número correspondente no sistema de numeração decimal*"

Fonte: Dados da pesquisa.

Na questão 5, o grupo 1 (Alisson, Ana Paula, Cristina e Paulínia) não conseguiu produzir um argumento de prova para validar a afirmação proposta. Considerando o fato de que o grupo não conseguiu resolver o problema em particular da questão 4, era de se esperar, portanto, que tivessem dificuldades para compreender e produzir uma prova comprobatória para a questão 5. Após a leitura do enunciado do problema **<Paulínia, fala 214>** o grupo se manteve confuso em relação ao que era solicitado. Durante a discussão os membros do grupo confundiram os conceitos matemáticos "sistema de numeração decimal" e "número decimal". Essa confusão de ideias conceituais corroborou para o insucesso da equipe no entendimento do problema e acarretou o surgimento de argumentos isolados sem conexão com o enunciado do problema. O professor por sua vez, não foi acionado nenhuma vez pelo grupo para prestar apoio na orquestração do discurso (KNIPPING, 2008) ou tirar dúvidas. Neste contexto, a estrutura de argumentação que ilustrou toda a discussão ocorrida no âmbito do grupo foi apresentada na Figura 50 a seguir.

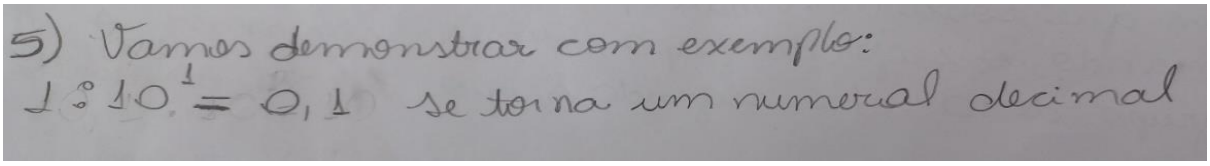
Figura 50 - Estrutura de argumentos independentes observado durante a discussão da questão 5 – grupo 1.



Fonte: Dados da pesquisa.

Na estrutura **AS,** indicada na Figura 50 foi possível encontrar dados aleatórios e opiniões (ideias) isoladas dos alunos bem como argumentos associados, alguns refutados e outros justificados, sem, contudo, haver uma interconexão entre eles para se estabelecer uma conclusão final. Logo de início na discussão do problema, Alisson e Cristina rotulam o produto "0,1 x 10" como um dado **<fala 215, 220>** a ser retomado ao contexto do problema e cujo resultado equivocadamente foi assumido por Alisson como 15 **<fala 215>**. Paulínia concordou **<fala 216>** e tentou justificar a conclusão de Alisson oferecendo como garantia o fato de que um "número decimal multiplicado pela base 10 vai dar um número decimal" **<fala 216, 218>**. Para Alisson, este procedimento faria com que o resultado voltasse um número na escala zero **<fala 217>**. Na sequência, Paulínia refuta a conclusão dela mesma de que produto "0,1 x 10" seja um número decimal **<fala 291>.** De acordo com ela o resultado dá 1 que por sua vez não é um número decimal **<fala 222>**. Neste ponto da discussão Paulínia levanta um questionamento junto ao grupo, "o que é um número decimal?" **<fala 224>**. Essa dúvida, mostrou como o foco da discussão do grupo se desviou do assunto "sistema de numeração decimal" e acabou por envolver o conceito de "número decimal". Na sequência Cristina opinou junto ao grupo que um número decimal envolve duas casas decimais **<fala 225>** e Alisson confirma essa ideia **<fala 226>**. De posse do celular ele realizou uma consulta na *internet* sobre o assunto e concluiu que um decimal "é o que vem depois da vírgula" **<fala 228>**. A partir dessas informações Paulínia concluiu que o produto "0,1 x 10^2" resulta em 10 **<fala 227, obs. 227>.** Como garantia ela pensou no número que multiplicado por 0,1 vai gerar o número 10 **<fala 227>**. Contudo, Paulínia logo em seguida refutou a própria ideia, reformulando-a e concluindo que não se trata de realizar um produto, mas sim uma divisão, onde 1/10 é igual a 0,1 **<fala 229>.** Tendo em vista o enunciado da questão, verificou-se que a conclusão final do problema indicada na fala de Paulínia **<fala 229>** bem como no registro escrito (Figura 51) produzido pelo grupo apontou para uma confusão de ideias e conceitos matemáticos que corroboraram para a falta de êxito do grupo na solução do problema de prova.

Figura 51 - Registro escrito da conclusão da questão 5 - grupo 1



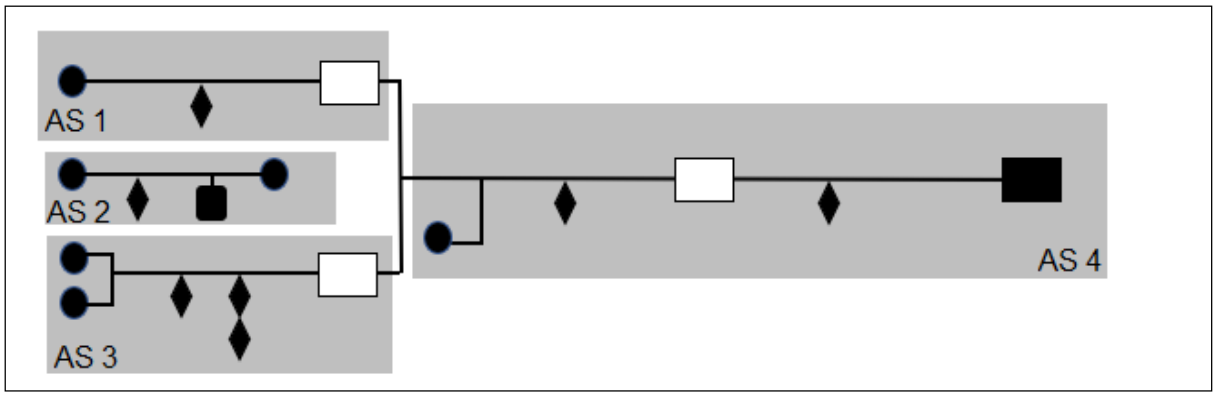
Fonte: Dados da pesquisa.

Diante de tudo o que foi aviventado na argumentação coletiva (CONNER, et. al, 2014) do grupo e na produção escrita, observou-se os argumentos produzidos eram isolados, independentes,

desconectados uns dos outros e não conduziram o grupo a solução do problema, por este motivo, a estrutura de argumentação global mais compatível com essa situação argumentativa foi a estrutura de argumentos independentes (ERKEK, BOSTAN, 2019).

O grupo 2 (Caique, Carolina e Luiz Fernando) por sua vez construiu um tipo de argumento de prova a partir de um caso empírico de referência. A generalização que em um primeiro momento foi produzida na linguagem informal dos alunos foi sendo aprimorada e ao final do processo contemplou até o uso da linguagem matemática como forma de expressão e generalização. O apoio do professor na orquestração do discurso (KNIPPING, 2008) foi importante para conduzir os alunos na transição do argumento de prova empírico (BALACHEFF, 1987;1988) para um argumento mais generalista e conceitual (BALACHEFF, 1987;1988; HANNA, 1990;2000; KNIPPING, 2008). Porém, o argumento apresentado esteve longe de ser considerado um argumento analítico (TOULMIN, 1958; KRUMMHEUER, 1995) caracterizado pelo rigor e forma. Contudo, para um contexto de uma etno-argumentação (GARNICA, 2002) característico do ambiente de sala de aula, foi considerado pelo professor como um argumento substancial válido (TOULMIN, 1958; KRUMMHEUER, 1995, CONNER, et. al. 2014) e probatório (TRIANTAFILLOU; SPILIOTOPOULOU; POTARI, 2016) uma vez que cumpriu a sua função explicar (HANNA, 1990; 2000) o processo de conversão de um número do sistema de numeração de base qualquer para uma base decimal. A situação argumentativa que ilustrou a discussão realizada no âmbito do grupo 2 foi apresentada na Figura 52 a seguir.

Figura 52 - Estrutura fonte observada durante a discussão da questão 5 – grupo 2



Fonte: Dados da pesquisa.

A Figura 52 é composta por 4 blocos de argumentação (**AS 1; AS 2; AS 3** e **AS 4**) das quais três convergem por meio de um único fluxo para uma solução final (retângulo preto) em **AS 4**. Na estrutura indicada, os blocos **AS 1 e AS 3**, estão posicionados logo no início da situação

argumentativa para apoiar uma mesma conclusão intermediária em **AS4**. Em particular, no bloco **AS 1**, considerando os dados do problema, Carolina logo concluiu que para converter um número do sistema de numeração de base não decimal para o sistema de numeração de base decimal era preciso realizar o processo inverso das sucessivas divisões feitas na resolução da questão 3 **<fala 105>**. Trata-se, portanto, segundo ela, de "desmanchar os grupos da base feitos pela divisão" **<fala 105>.** Já em **AS 2**, Luiz Fernando conjecturou que para mostrar o processo de conversão era preciso realizar inicialmente uma divisão e posteriormente uma multiplicação para se chegar a um número no sistema de base decimal **<fala 106>**. Ele ofereceu dois exemplos como garantia **<fala 106, 108>** para justificar a sua ideia, contudo, logo em seguida ele mesmo refutou essa ideia **<fala 106, 108>** abandonando-a. Já em **AS 3**, o grupo considerou como dados para o problema, o resultado da questão 3) citado por Carolina **<fala 105>,** ou seja, $(120)_3$=15, e o processo de decomposição dos algarismos de um número na base decimal. Diante disso, Caique e Luiz Fernando passaram a descrever melhor o processo inverso citado como garantia **<fala 105>** por Carolina. Todos eles pretendiam compreender melhor este processo de conversão de um número do sistema de numeração não decimal para o sistema de numeração decimal. Para tanto, tomando como referência o dado $(120)_3$=15 e fazendo uma analogia ao processo de decomposição dos algarismos de um número na base decimal, Caique começou por explicar "da direita para esquerda a gente considera a base elevado a zero. A gente multiplica o primeiro algarismo da direita do número pela base elevado a zero" **<fala 109>** e Luiz Fernando complementou, "o número da primeira ordem vezes a base elevado a zero...depois 1,2,3, voltando né" **<fala 110>.** Caique concordou e ofereceu um apoio para o que foi dito anteriormente, ou seja, segundo ele "cada ordem representa um expoente para a base. 1ª ordem, expoente zero, 2ª ordem, expoente um, 3ª ordem, expoente dois" **<fala, 111>**. As conclusões parciais de Carolina no fluxo **AS 1** (retângulo branco), Caique e Luiz Felipe no fluxo **AS 3** (retângulo branco) ainda que semelhantes, não se constituíam ainda naquele momento uma generalização ou conclusão final para o problema. A conclusão parcial dos fluxos **AS1 e AS3** na verdade**,** ficou restrita a descrição do processo inverso realizado na questão 3), especificamente, para mostrar o desmanche dos agrupamentos formados. Faltava ainda explicar, que após o desmonte dos grupos, realizados por multiplicações envolvendo os algarismos do numeral pela base elevado a um expoente condizente a sua ordem era necessário por fim ainda realizar uma soma de todas estas decomposições. Estas duas conclusões parciais (retângulo branco) de **AS 1 e AS 3** passaram em seguida a servir de dados para **AS 4** juntamente com outro dado (informação particular) retomado do início da discussão pelo grupo, ou seja, $(120)_3= 0x3^0+2x3^1+1x3^2=12$ **<fala 112 a 115>**. Diante dos dados e da orientação do professor

para que o grupo pudesse generalizar a ideia de conversão (primeiro retângulo branco) partindo de uma base b qualquer **<fala 116>** os alunos estabeleceram a seguinte justificação como garantia para a conclusão do processo.

> Cada algarismo do número na base correspondente multiplicado pela sua base elevando a ordem (onde a primeira ordem é zero, a segunda ordem é equivalente a 1, a terceira ordem a 2 e assim por diante...) A soma dos seus resultados vai gerar o número na base decimal **<Caique, fala 118>.**

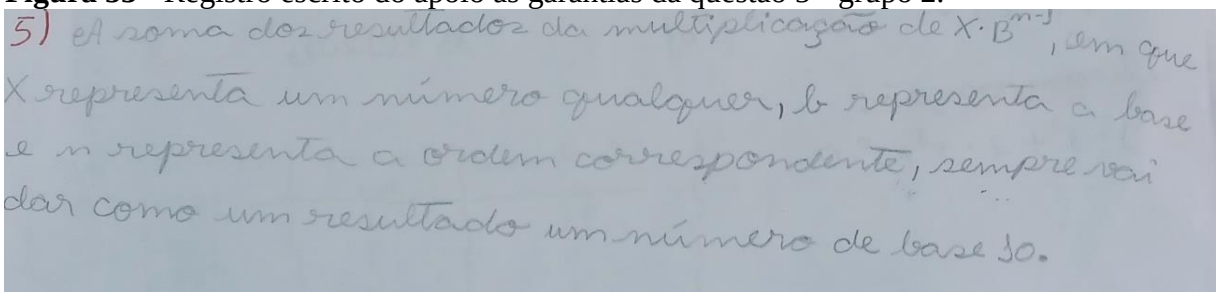
Por sua vez, o professor, percebendo a compreensão e os avanços do grupo na generalização do processo de conversão (primeiro retângulo branco), sugeriu ao grupo uma tentativa de generalização melhor rotulando para isso a base por "b", as suas respectivas potências em ordem decrescente por "b^n, b^{n-1}, ..., b^0" e a quantidade de dígitos de um número numa base b qualquer por "d_n, d_{n-1}, ..., d_0" **<fala 119>.** A ideia era propiciar aos alunos a transição de uma explicação da linguagem informal para a linguagem matemática. Em virtude dessa orientação, o grupo passou então considerar a conclusão anterior (primeiro retângulo branco) como ponto de partida (dado) para o estabelecimento de uma nova justificação mais refinada para estabelecer a compreensão da conclusão do processo de conversão (retângulo preto). O diálogo a seguir ilustrou o esforço do grupo na tentativa de melhorar a explicação (garantia) do processo de conversão **<fala 120 a 141>**, com destaque aos trechos que melhor evidenciaram essa justificação

> - Escreve.... em cada base... em cada valor de base ...cada algarismo da base correspondente vezes b elevado a sua ordem **<Luiz Fernando, fala124>**.
> - A sua ordem menos um (n-1) **<Carolina, fala 125>**.
> - Eu estou colocando assim, a primeira ordem equivalente a expoente zero (expoente da base) **<Caique, fala 126>**.
> - (...) a primeira ordem corresponde ao expoente zero, a segunda ordem corresponde ao expoente 1, a terceira ordem ao expoente 2 e assim por diante... todos os resultados **<Caique, fala 128>**.
> - A base pode ser qualquer base b **<Caique, fala 132>**.
> -Não importa a base que tiver. O resultado da multiplicação da base correspondente vezes o algarismo correspondente e o resultado somado individualmente vão dar um número na base 10 e assim por diante **<Caique, fala 136>**.
> - (...) cada algarismo da base correspondente elevado a sua ordem (que está correspondendo a ordem da sua base ne – ordem 1 expoente zero, ordem 2, expoente 1, ordem 3, expoente 2...) A multiplicação do algarismo do número na base **<Caique, fala 138>**.
> - Esse negócio da ordem aqui convém sempre colocar -1 (n-1) **<Carolina, fala 139>**.
> - -1 cada ordem, 1-1=0; 2-1=1; 3-1=2" **<Luiz Fernando, fala 140>**
> - Hum... é verdade, vai ser a linguagem matemática nesse caso. A soma dos resultados da multiplicação de xb^{n-1} onde x representa um número (digito)

> qualquer, b a base e n, a ordem correspondente sempre vai dar resultado de base 10 <**Caique, fala 141**>.

A garantia apresentada na linguagem matemática na última fala de Caique <**fala 141**> foi considerada pelo grupo uma generalização mais convincente e resumida <**fala, 142, 143**> quando comparada a anterior. No registro escrito produzido pelo grupo, essa garantia foi apresentada por meio da Figura 53 a seguir.

Figura 53 - Registro escrito do apoio as garantias da questão 5 - grupo 2.

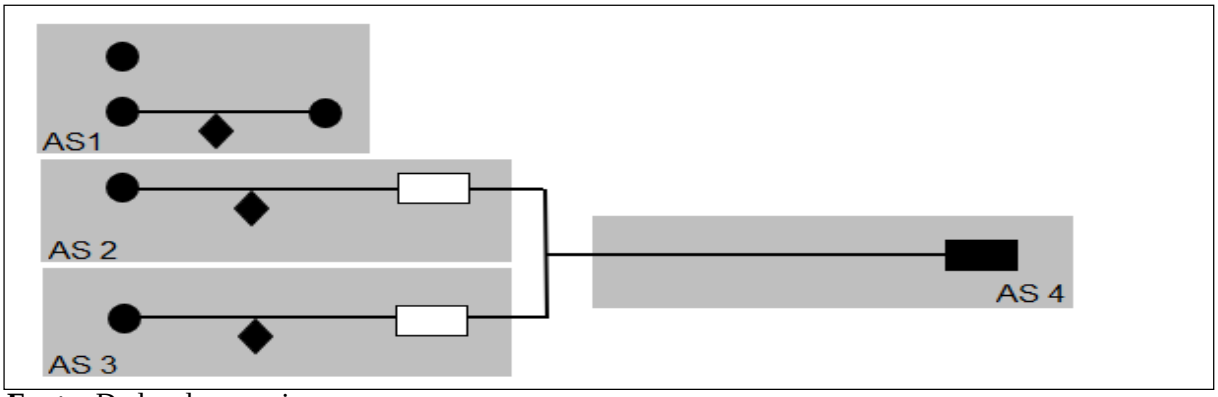


Fonte: Dados da pesquisa.

Ainda que a prova apresentada tivesse longe de ser considerada um argumento analítico (TOUMIN, 1958), ela foi considerada probatória (TRIANTAFILLOU; SPILIOTOPOULOU; POTARI, 2016) e explicativa (HANNA, 1990; 2000) uma vez que por meio de uma argumentação substancial (TOULMIN, 1958; KRUMMHEUER, 1995) e conceitual (BALACHEFF, 1987;1988; KNIPPING, 2008) ela teve o poder de articular conceitos e ideias matemáticas para convencer o grupo do processo de conversão de um número do sistema de numeração de base não decimal para o sistema de numeração de base decimal. A aprendizagem de prova foi documentada pela melhoria na qualidade do argumento produzido (YACKEL, 2002). Em outras palavras, contando com o apoio docente, o argumento de prova conceitual contemplou uma generalização que evoluiu da linguagem corrente (informal) para a linguagem matemática, sem, contudo, envolver rigor e forma característicos do argumento analítico. A situação argumentativa indicada na estrutura global de argumentação (Figura 52) apresentou as seguintes características: a) estruturas de argumentação que não se conectam a estrutura principal; b) fluxos de argumentação paralelos para apoiar uma mesma conclusão parcial; c) etapas de argumentação com mais de um dado; d) componentes de refutação para uma conjectura. O fato dos fluxos paralelos (**AS 1 e AS 3**) estarem localizado no início da discussão isso corroborou para que esta estrutura fosse classificada como estrutura fonte (KNIPPING, 2008; REID; KNIPPING, 2010; ERKEK; BOSTAN, 2019; ERKEK; ISIKSAL BOSTAN, 2019).

Por fim, o grupo 3 (Ana Lívia, Lena e Luiz Felipe) por meio de dois testes empíricos realizados com um número na base 4 e outro na base 5 pretendeu mostrar o processo geral de conversão de um número no sistema de numeração de base não decimal para a base decimal. O professor foi solicitado a avaliar o modo de prova produzido pelos alunos, todavia, não satisfeito com a qualidade da prova apresentada orientou a elaboração de uma prova mais generalista (HANNA, 1990; 2000) desprovida de fundamentação nos casos particulares apresentados, o que não foi atendido pelos alunos. A situação argumentativa que ilustrou a discussão realizada no âmbito do grupo 3 foi indicada na Figura 54 a seguir.

Figura 54 - Estrutura fonte observada durante a discussão da questão 5 – grupo 3.



Fonte: Dados da pesquisa.

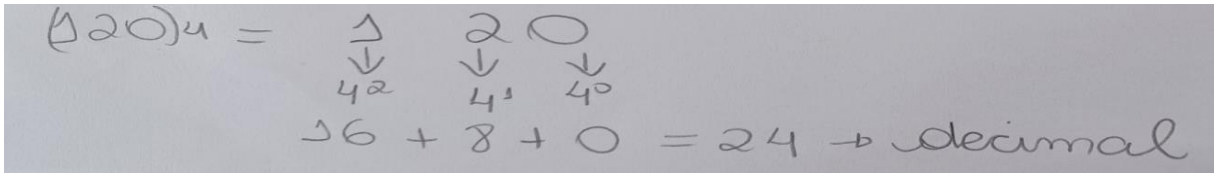
Na estrutura **AS 1**, Luiz Felipe inicialmente se mostrou confuso ao propor aos colegas a conversão do número 24 para a base 10 **<fala 126>** e depois comentou "eu não lembro o que faz com isso aqui depois" **<fala 126>.** Por sua vez Ana Lívia, com dúvidas, chama o professor e pergunta se com os dois exemplos já vistos anteriormente, 24 e 625, o grupo pode mostrar o processo de conversão de um número do sistema de numeração de base não decimal para um número no sistema numeração decimal **<fala 127>.** O professor não satisfeito com a escolha de exemplos a serem usados para efeito de prova comprobatória (TRIANTAFILLOU; SPILIOTOPOULOU; POTARI, 2016), orientou os alunos a buscar por uma prova que pudesse realizar uma generalização (HANNA, 1990; 2000) do processo de conversão **<fala 128>** conforme pode ser visto no trecho de fala a seguir

> Eu vou dar a vocês um desafio, tentem pensar de uma forma mais genérica... porque a matemática ela parte disso aqui e posteriormente ela tenta promover uma generalização.... Por exemplo, lembram que vocês promoveram generalizações na questão 3? Perceberam que ao término da questão vocês tentaram ser mais genéricos com a estratégia adotada? Os exemplos estão corretos, mas eu posso generalizar a partir disso aqui? Aqui vocês pretendem particularizar o resultado com 24 e 625. Vocês precisam partir de um número

> no sistema de numeração não decimal para gerar um número no sistema de numeração decimal. Vocês podem, se quiser, se espelhar na conversão do número $(10101)_2$ para a base decimal e depois generalizar **<Professor, fala 128>**

O fluxo **AS 2** ilustrou a situação de argumentação coletiva (CONNER et. al. 2014) em que o grupo concluiu a validade do processo de conversão de um número em uma base qualquer para a base decimal com base em um processo particular de conversão de um número escolhido por eles na base 4 para a base 10, ou seja, $(120)_4 = 24$ (retângulo branco). A garantia apresentada para justificar esta conversão foi apresentada na Figura 55.

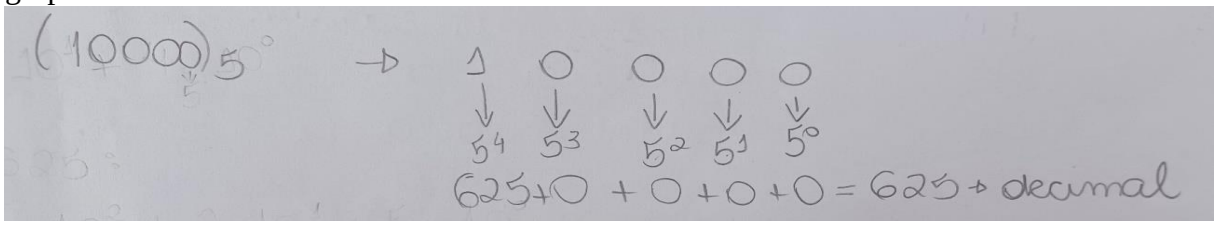
Figura 55 - Registro escrito da garantia oferecida para conversão $(120)_4 = 24$, questão 5 – grupo 3.



Fonte: Dados da pesquisa.

Por meio da figura anterior, os alunos consideraram como dado para o problema, o numeral $(120)_4$ na base 4 e por meio da decomposição dos algarismos deste numeral em potências de base 4 e posteriormente explorando a soma destes resultados eles realizaram uma prova empírica para explicar o processo de conversão, $(120)_4=10$. Na sequência, por meio do fluxo **AS 3,** o grupo optou por converter o número $(10000)_5$ da base 5 para a base decimal. Eles concluíram, portanto, que $(10000)_5 = 625$, sob a justificativa de que a decomposição dos algarismos do numeral $(10000)_5$ em potencias de base 5 e as suas respectivas somas resultava no número 625 na base decimal, conforme indicado na Figura 56.

Figura 56. Registro escrito da garantia oferecida para conversão $(10000)_5 = 625$, questão 5 – grupo 3.



Fonte: Dados da pesquisa.

Por meio desta justificativa que apontou para a conversão de $(10000)_5$ da base 5 para a base decimal, ou seja, $(10000)_5 =625$, o grupo concluiu a validade do processo de conversão de um número em uma base qualquer para a base decimal com base em um processo particular de conversão. Estes dois processos de justificação semelhantes (aplicados a dois casos particulares) enquanto conclusão dos fluxos **AS 2 e AS 3** posteriormente foram considerados

como dados e garantia para a obtenção da conclusão geral (retângulo preto)**.** Ao terminarem o argumento de prova, Ana Lívia chamou o professor para mostrar a prova produzida pelo grupo **<fala 129>.** O pesquisador por sua vez, insistiu na necessidade de uma generalização.

> Vocês fizeram por meio de dois exemplos né? Vocês conseguiriam generalizar isso? Não estou dizendo que o que vocês fizeram está tudo errado, só gostaria que vocês fizessem um esforço para pensarem de forma mais ampla possível. Vocês tentaram com a base 4 e base 5. Porque não experimentem justificar usando uma base b, uma base genérica. Sendo assim vocês estariam a trabalhar com potências de base b. A quantidade de potências de base b dependeria da quantidade de dígitos que compõe o numeral. Pensem em uma generalização **<Professor, fala 130>.**

O grupo, no entanto, não deu prosseguimento a orientação do professor e optou por entregar o próprio registro do modo de prova produzido por eles **<fala 132, 133>**. A conclusão final (retângulo preto) do fluxo **AS 4** sobre como converter um número do sistema de numeração de base não decimal para um número na base decimal se fundamentou, portanto, nas conclusões dos fluxos **AS 2** e **AS 3** (retângulos brancos). O argumento empírico apresentado não é considerado probatório (TRIANTAFILLOU; SPILIOTOPOULOU; POTARI, 2016) uma vez que este se fundamentou na apresentação de casos particulares para atingir uma generalização. A situação de argumentação apresentada na Figura 54, guarda algumas características bem particulares: a presença de fluxos de argumentação que não se conectam a estrutura principal bem como a presença de fluxos de argumentação paralelos para apoiar uma mesma conclusão parcial e que posteriormente fundamentou uma conclusão final. O fato dos fluxos paralelos (**AS 2 e AS 3**) estarem localizado no início da discussão isso fez com que esta estrutura fosse compatível com a estrutura fonte (KNIPPING, 2008; REID; KNIPPING, 2010; ERKEK; BOSTAN, 2019; ERKEK; ISIKSAL BOSTAN, 2019).

O Quadro 22, apresenta um panorama geral, que sintetiza a distribuição das estruturas de argumentação global por grupo e questão. Essa variedade de estruturas anatômicas decorre de diferentes situações de argumentação onde, por exemplo, o tipo de questão proposta e o papel do professor desempenharam um papel fundamental no delineamento das estruturas.

Quadro 22 – Distribuição das estruturas de argumentação por grupo e problema

	Grupo 1	**Grupo 2**	**Grupo 3**
Problema 1	Estrutura Reservatório	Estrutura Reservatório	Estrutura Fonte Divergente
Problema 2	Estrutura Espiral	Estrutura Espiral	Estrutura Espiral
Problema 3	Estrutura Espiral	Estrutura de Linha	Estrutura Espiral

Problema 4	Estrutura de Argumentos independentes	Estrutura de Linha	Estrutura Espiral
Problema 5	Estrutura de Argumentos independentes	Estrutura Fonte	Estrutura Fonte

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na literatura não é citado que haja uma estrutura de argumentação global melhor do que a outra, ao invés disso, é apontado como estas estruturas das mais simples as mais complexas podem ser utilizadas para monitorar, avaliar e ilustrar o raciocínio utilizado pelos alunos durante a prática da argumentação coletiva. Foi neste contexto, portanto, que mostramos como alunos ingressantes em um curso de licenciatura em matemática produziram argumentos matemáticos para justificar e validar suas ideias em um contexto de ensino baseado em investigação e argumentação coletiva.

O Quadro 23 sintetiza os resultados da seção 7.2 ilustrando a evolução do argumento de justificação produzido pelos grupos durante a resolução dos 5 problemas da tarefa de investigação.

Quadro23 – Síntese dos resultados

Problema	**Evolução do argumento de justificação durante a argumentação coletiva**		
	Grupo 1	**Grupo 2**	**Grupo 3**
Problema 1	Argumentação visual ⬇ Argumentação conceitual	Argumentação visual ⬇ Argumentação conceitual	Argumentação visual ⬇ Argumentação conceitual
Problema 2	Argumentação visual	Argumentação visual ⬇ Argumentação conceitual	Argumentação visual ⬇ Argumentação conceitual
Problema 3	Argumentação visual	Argumentação visual ⬇ Argumentação conceitual	Argumentação visual ⬇ Argumentação conceitual
Problema 4	--------	Argumentação visual ⬇ Argumentação conceitual	Argumentação visual ⬇ Argumentação conceitual
Problema 5	--------	Argumentação conceitual	Argumentação visual

Fonte: Dados da pesquisa

Com base no Quadro é possível verificar que os grupos 2 e 3 conseguiram na maioria das questões desenvolver uma argumentação que evoluiu de justificações com base no visual para justificações conceituais. Por outro lado, o grupo 1 teve dificuldades em produzir

argumentos de justificação conceitual. Em todas as situações de argumentação, o material didático concreto auxiliou no surgimento da argumentação visual e a transição desta para a argumentação conceitual esteve na maioria das vezes ligadas ao apoio docente na argumentação.

7.3 Análise do argumento de validação para os problemas envolvendo a elaboração de prova matemática

Nesta seção tomando por base a teoria de Balacheff (1987;1988) sobre os tipos de níveis de prova bem como a estrutura fisiológica do argumento local (TOLMIN, 1958; 2006) utilizaremos o modelo teórico metodológico desenvolvido por Rodrigues e Monteiro (2021) para analisar e avaliar a qualidade do argumento de prova produzido em situações de argumentação coletiva envolvendo os sujeitos investigados alunos investigados em seus respectivos grupos de trabalho.

O argumento de prova, portanto, foi avaliado com base no tipo e nível de prova produzido (BALACHEFF, 1987;1988), função da prova (HANNA, 1990;2000), qualidade da prova elaborada (RODRIGUES; MONTEIRO, 2021) e caráter probatório e não probatório (TRIANTAFILLOU; SPILIOTOPOULOU; POTARI, 2016).

Para tanto, foram selecionadas duas questões da atividade de investigação para análise e discussão. Trata-se, portanto, das questões 3) e 5), que diferentemente das outras questões da atividade, foram escolhidas por se tratar de problemas envolvendo demonstração ou prova. O objetivo aqui foi mostrar como os alunos ingressantes em um curso de formação de professores em matemática constroem argumentos de prova em um contexto de ensino baseado em argumentação coletiva e investigação.

Na questão 3) foi proposto aos alunos "**mostrar para o seu colega de grupo *como converter um número do sistema de numeração de base decimal para um número em uma base não decimal qualquer***". As questões 1) e 2) que antecediam a questão 3) tinham por objetivo preparar os alunos para esta primeira atividade de prova. Em especial na questão 1), os alunos tiveram a oportunidade de explorar os critérios e regras de fabricação de um número no sistema de numeração de base 10 bem como compreender o processo de decomposição dos algarismos deste número em potências de base 10. Todos estes conceitos foram importantes para que em seguida os alunos, por analogia a base decimal, pudessem construir números em outros sistemas de numeração não decimal. Dessa forma, todas as ideias trabalhadas de modo particular nos problemas das questões 1) e 2) tinham por objetivo fornecer aos alunos uma base

teórica de conteúdo, ideias e processos matemáticos para que eles tivessem condições de produzir um argumento de prova mais genérico durante a resolução da questão 3).

Na questão 5) foi proposto aos alunos "**mostrar para o seu colega de grupo *como converter um número do sistema de numeração não decimal para um número correspondente no sistema de numeração decimal***". No intuito de fornecer suporte de conteúdo, ideias e processo matemáticos subjacentes a esta tarefa de prova, antecedeu-se a questão 5), a questão 4) que teve por objetivo explorar um problema particular de conversão de um número da base binária para a base decimal e dessa forma abrir caminhos para que o grupo pudesse produzir uma generalização do seu argumento de prova durante a resolução da questão 5).

O argumento de prova, enquanto produto da argumentação, foi oriundo de dados coletados por meio de videogravação (argumentação oral), recolha da atividade com a síntese escrita (argumentação escrita) e observação participante do pesquisador (argumentação multimodal).

7.3.1 Argumentos de prova produzidos pelo grupo 1 referente a questão 3

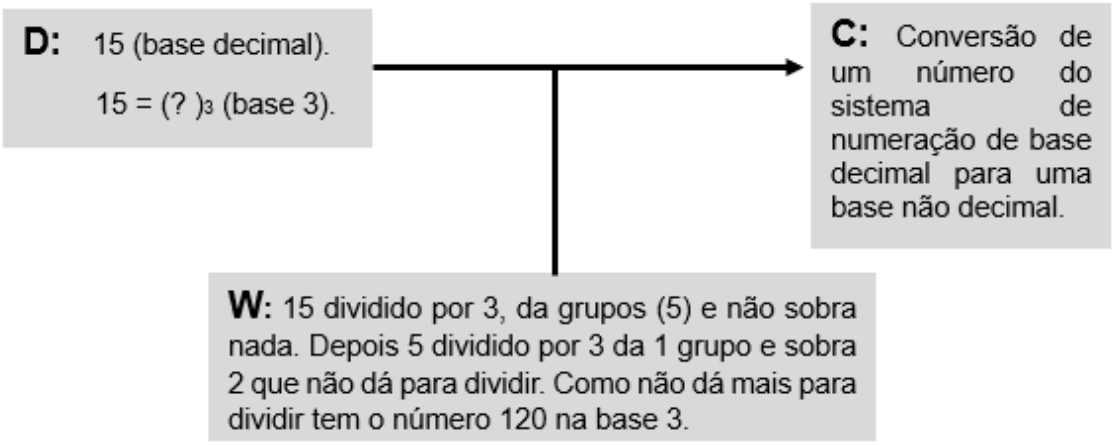
A estrutura espiral (KNIPPING, 2008; REID; KNIPPING, 2010; ERKEK; BOSTAN, 2019; ERKEK; ISIKSAL BOSTAN, 2019) que modelou a situação argumentativa do grupo 1, durante a discussão da questão 3, apontou para dois "modos de provas" reconhecidos dessa forma pelos seus produtores – os alunos (BALACHEFF, 1988).

Para mostrar o processo de conversão de um número do sistema de numeração de base decimal para uma base não decimal qualquer, o grupo 1 apresentou inicialmente o seguinte argumento de prova com base na conversão do número 15 da base decimal para a base 3.

> "15 dividido por 3, da grupos (5) e não sobra nada. Depois 5 dividido por 3 da 1 grupo e sobra 2 que não dá para dividir. Como não dá mais para dividir tem o número 120 na base 3" **<Grupo 1, argumento oral, fala 171>**.

O argumento de prova foi então representado geometricamente no TAP (**D:** Dados, **W:** Garantia e **C:** Conclusão**)** conforme indicado na Figura 57.

Figura 57: Argumento composto por 3 elementos: dado, garantia e conclusão.



Fonte: Dados da pesquisa.

O tipo de prova elaborada pelos alunos correspondeu ao que Balacheff (1988) denomina por "prova pragmática ou prova empírica". Trata-se de um tipo de prova que envolve uma justificação de natureza de natureza empírica (BALACHEFF, 1988).

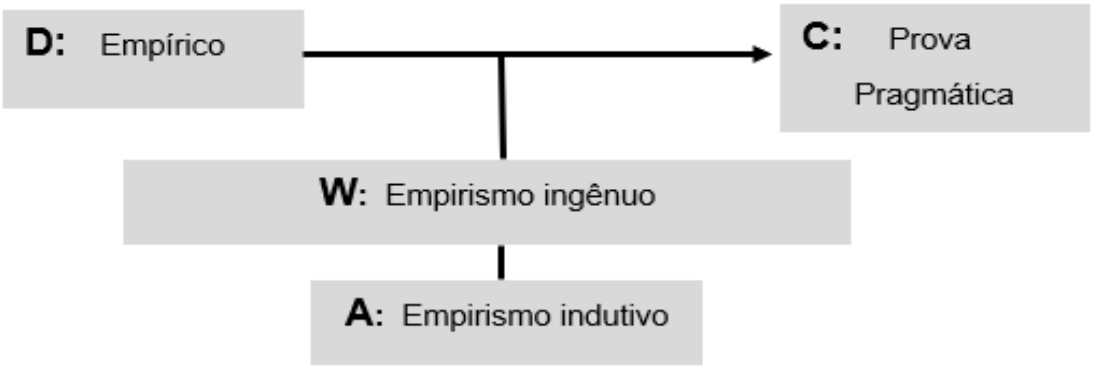
Ao examinar o argumento de prova indicado na Figura 57 foi possível verificar que os dados (**D**) utilizados pelo grupo foram de natureza empírica. Por sua vez, a garantia (**W)** apresentada pelo grupo falhou no seu caráter geral, uma vez que a explicação do processo de conversão de um número da base decimal para uma base não decimal qualquer **(C)** se deu a partir da apresentação de um caso particular (BALACHEFF, 1988; RODRIGUES e MONTEIRO, 2021). O conhecimento neste tipo de prova, foi de natureza prática, e foi atestado por uma ação do grupo sobre um objeto particular de estudo, ou seja, a conversão do número 15 para a base 3 e não essencialmente por um discurso racional e generalista (BALACHEFF, 1987).

Em particular, ao examinar o exemplo empírico apresentado pelo grupo, desprovido de critério de escolha, foi possível concluir também que o nível de prova, ou forma de validação apresentado pelos alunos na garantia, se encaixou no nível mais elementar da hierarquia apresentada por Balacheff (1987; 1988) para os tipos de provas pragmáticas (prova empírica), ou seja, a categoria "empirismo ingênuo". Ainda de acordo com este autor o empirismo ingênuo constitui uma forma resistente à generalização, contudo, constitui o primeiro degrau para o alcance da generalização (BALACHEFF, 1987;1988).

Este tipo de prova, portanto, apoiada no empirismo indutivo (prova por exemplo) é considerada inválida para justificar uma declaração universal (HANNA, 2000) como é o caso do problema em questão.

Por fim, o argumento de prova apresentado pelo grupo pôde ter a sua qualidade avaliada com base na classificação dos componentes do argumento (RODRIGUES e MONTEIRO, 2021) apresentado na Figura 58.

Figura 58. Classificação dos componentes do argumento de prova

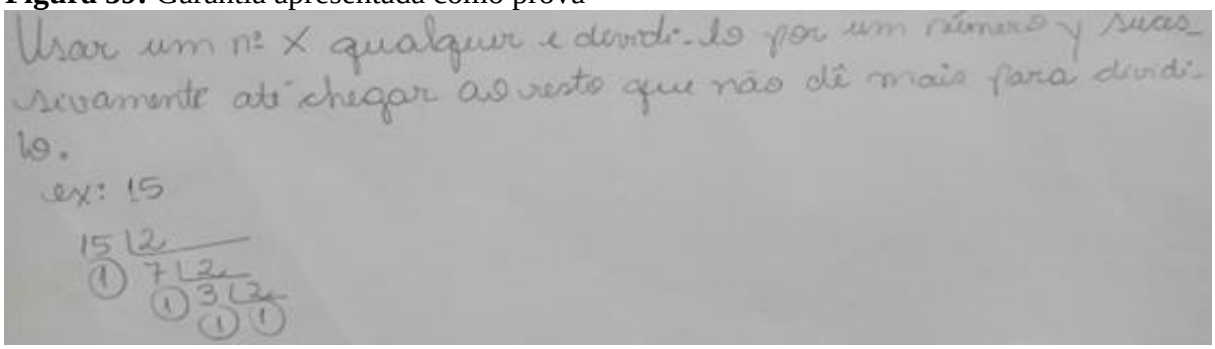


Fonte: Dados da pesquisa

Com relação ao aspecto de solidez da prova, o argumento, portanto, é considerado fraco e de pouca elaboração (RODRIGUES e MONTEIRO, 2021) uma vez que a conclusão está baseada em uma prova pragmática (BALACHEFF, 1987;1988).

Na sala de aula, durante a sequência da atividade, o professor pesquisador foi chamado pelo grupo para avaliar o argumento de prova produzido pelo grupo. Não satisfeito com a qualidade do argumento apresentado, o professor solicitou ao grupo uma tentativa de generalização do processo de conversão e a redação de um novo argumento de prova. Na sequência este novo argumento de prova é apresentado, sendo este, portanto, descrito e estruturado com o apoio de um exemplo de referência, ou seja, a conversão do número 15 da base 10 para a base 2, conforme indicado na Figura 59 a seguir.

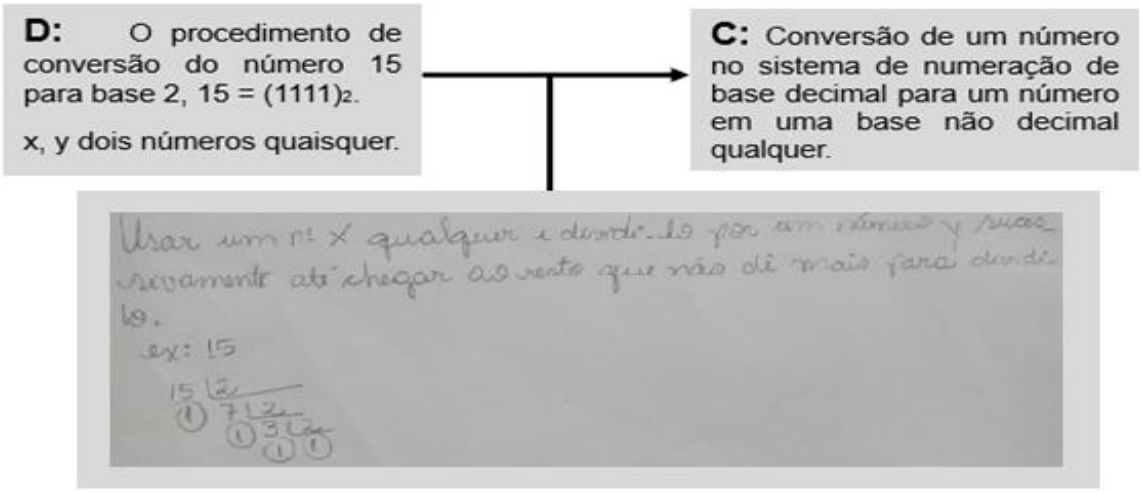
Figura 59: Garantia apresentada como prova



Fonte: Dados da pesquisa

O referido argumento foi então representado geometricamente no TAP (**D:** Dados, **W:** Garantia e **C:** Conclusão**)** conforme indicado na Figura 60.

Figura 60: Argumento composto por 3 elementos: dado, garantia e conclusão.



Fonte: Dados da pesquisa

Com base na análise da garantia (justificação) apresentada pelo grupo, o argumento de prova foi classificado como "prova pragmática" (BALACHEFF, 1987; 1988). Isso ocorreu porque a justificação apresentada como prova, se iniciou de forma generalista na linguagem informal e posteriormente recorreu a um caso particular para dar continuidade a explicação do processo geral de conversão (BALACHEFF, 1987;1988; RODRIGUES e MONTEIRO, 2021).

Ao examinar o argumento de prova indicado na Figura 60 foi possível verificar que os dados (**D**) utilizados pelo grupo foram de natureza empírica e genérica. Com relação ao argumento inserido na garantia (**W),** à rigor, ele constituiu uma tentativa "falha" e/ou "incompleta" de elaboração de uma prova genérica (HANNA, 2000) e conceitual (BALACHEFF, 1987;1988) para explicar o processo de conversão de um número da base decimal para uma base não decimal **(C)**. Durante a explicação do processo de conversão faltou ao grupo realizar uma descrição das variáveis escolhidas, por exemplo, x (número na base decimal) e y (base), bem como fornecer a indicação de uma condição de existência para estas variáveis. Para além disso, foi observado também um erro na descrição do processo de conversão, os alunos deveriam ter dito inicialmente que o primeiro passo seria dividir x por y e na sequência continuar a divisão envolvendo os resultados (quocientes) pela base y até atingir um quociente igual à zero. Deveriam concluir na sequência, que o último quociente mais os restos tomados na ordem inversa deverá compor o número na base decimal. Para explicar esta última parte por exemplo, os alunos apresentaram um caso particular que ilustrou o número sendo formado a partir da tomada dos restos na ordem inversa. Esta recorrência ao caso particular para então terminar a descrição do argumento de prova, foi um fator preponderante para que pudéssemos classificar este tipo de prova como pragmática (BALACHEFF, 1987;1988). Em outras palavras, o caso particular apresentado na prova, foi usado para atingir

uma generalização do processo de conversão, especificamente no que tange as divisões sucessivas e a obtenção dos algarismos do numeral no sistema de numeração de base não decimal.

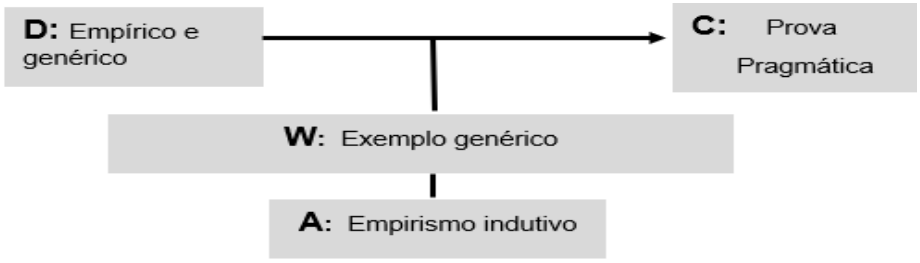
Para Hanna (2000), um argumento que envolve uma prova empírica (prova pragmática) é apoiado no empirismo indutivo (prova por exemplo) e por este motivo é considerada inválida para justificar uma declaração universal (HANNA, 2000).

Diante disso, concluímos que o argumento apresentado não cumpriu adequadamente, a rigor, o seu papel de "prova que prova" e "prova que explica" (HANNA, 1990) devido as inadequações apontadas.

A prova pragmática (BALACHEEF, 1987;1988) produzida pelos alunos, encontrou-se, portanto, no nível "exemplo genérico" (BALACHEFF,1987; 1988). Este nível de prova marca a transição da prova pragmática para a prova conceitual (BALACHEFF, 1987; 1988) na medida em que um caso particular, (15 da base decimal para a base 2), oferece suporte para o grupo expressar um raciocínio generalizador (BALACHEFF, 1987; 1988; RODRIGUES e MONTEIRO, 2021). Contudo, se a tentativa de generalização e o raciocínio de validação estiverem ainda fortemente apoiados no caso particular, então essa prova se concentra de fato na categoria pragmática (BALACHEFF, 1987;1988). Outro motivo para classificarmos o nível de prova, "exemplo genérico", na categoria de prova pragmática, foi devido a contextualização da garantia a um caso particular (BALACHEFF, 1987;1988).

Por fim, o argumento de prova produzido pelo grupo teve a sua qualidade (solidez) avaliada com base na classificação dos componentes do argumento (RODRIGUES e MONTEIRO, 2021) apresentado na Figura 61.

Figura 61: Classificação dos componentes do argumento de prova



Fonte: Dados da pesquisa

Com relação a solidez do novo argumento, este ainda foi considerado fraco e de pouca elaboração uma vez que a conclusão esteve baseada em uma prova pragmática (RODRIGUES; MONTEIRO, 2021).

Em resumo, concluiu-se que o grupo pouco evoluiu na qualidade da prova apresentada, isso provavelmente ocorreu devido ao apego direto ao caso particular para explicar a parte final

do processo de conversão de um número da base 10 para uma base não decimal. Contudo, representou ao menos um avanço para os alunos transitar de um nível inferior de "empirismo ingênuo" para um nível superior "exemplo genérico" dentro da categoria de prova pragmática (BALACHEFF, 1987, 1988).

7.3.2 Argumentos de prova produzidos pelo grupo 2, referente a questão 3

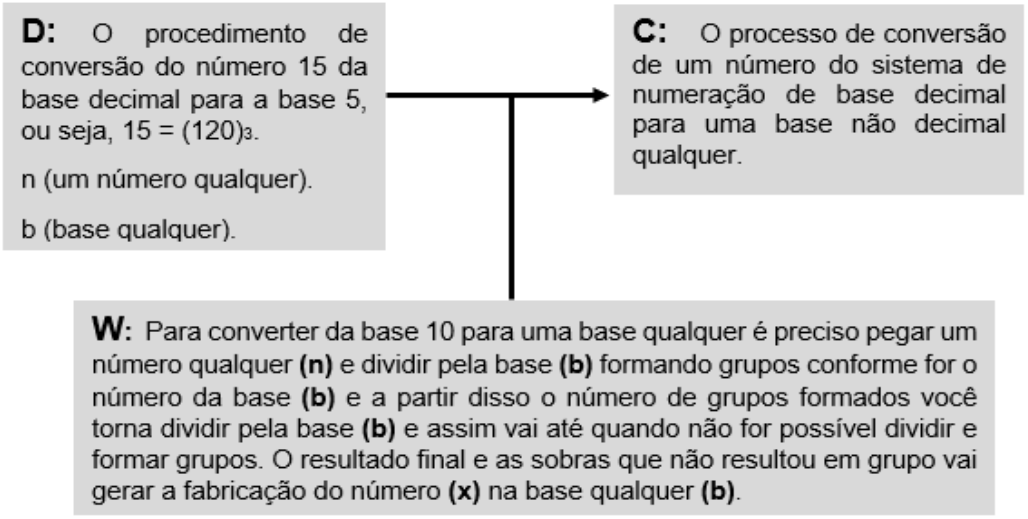
A estrutura de linha (ERKEK; BOSTAN, 2019) que modelou a situação argumentativa do grupo 2, durante a discussão da questão 3, apontou para um "modo de prova" reconhecido dessa forma pelos seus produtores – os alunos (BALACHEFF, 1988). Neste modo de prova, os alunos não solicitaram participação e o apoio do professor durante a produção coletiva do argumento.

Para mostrar como converter um número do sistema de numeração de base decimal para um número em uma base não decimal qualquer, o argumento de prova produzido pelo grupo partiu de um caso particular (conversão do número 15 da base 10 para a base 5) e avançou para uma ideia geral de conversão que levou em consideração um número qualquer (n) e uma base qualquer (b), ou seja,

> Para converter da base 10 para uma base qualquer é preciso pegar um número qualquer **(n)** e dividir pela base **(b)** formando grupos conforme for o número da base **(b)** e a partir disso o número de grupos formados você torna dividir pela base **(b)** e assim vai até quando não for possível dividir e formar grupos. O resultado final e as sobras que não resultou em grupo vai gerar a fabricação do número **(x)** na base qualquer **(b) <Grupo 2, argumento oral, fala 100>.**

O argumento de prova foi então representado geometricamente no TAP (**D:** Dados, **W:** Garantia e **C:** Conclusão**)** conforme indicado na Figura 62.

Figura 62: Argumento composto por 3 elementos: dado, garantia e conclusão.



Fonte: Dados da pesquisa

O tipo de prova produzida, na perspectiva dos seus produtores (os alunos), foi classificado como prova intelectual ou conceitual (BALACHEFF, 1987; 1988). Neste tipo de prova, ainda que o ponto de partida da explicação, se espelhe em um caso particular, (15 na base 3), o conhecimento do grupo esteve relacionado a um saber racional a partir do qual a justificação resultou de ações interiorizadas que fluíram do pensamento dos alunos produzindo um raciocínio que passou a controlar toda a generalidade da situação (BALACHEFF, 1987; RODRIGUES e MONTEIRO, 2021).

Ao examinar o argumento de prova indicado na Figura 62 foi possível verificar que os dados (**D**) utilizados pelo grupo foram de natureza empírica e genérica. A garantia (**W)** por sua vez não ofereceu rigor e forma, contudo, o conteúdo foi explicativo e convincente a ponto de ser considerado uma prova genérica (HANNA, 1990; 2000) para explicar o processo de conversão de um número da base decimal para uma base não decimal. Algumas não conformidades foram observadas nessa explicação, como por exemplo, a ausência de descrição e condição da existência das variáveis envolvidas no argumento. No entanto, por meio desta etno-argumentação (GARNICA, 2002) o grupo foi capaz de mostrar compreensão do processo de conversão e se sentir convencido da validade do argumento.

Foi verificado também que esta prova conceitual (BALACHEEF, 1987;1988) produzida pelos alunos, situou-se no nível da "experiência mental" (BALACHEFF,1987; 1988) isso porque a prova foi constituída de uma justificação desprendida de contextualização em um representante particular (BALACHEFF, 1987; RODRIGUES e MONTEIRO, 2021). Neste nível de prova (experiência mental) o grupo foi capaz de experienciar uma melhora na estruturação do discurso ainda que na linguagem informal, bem como um melhor encadeamento do raciocínio (BALACHEFF, 1987;1988). Em particular, o raciocínio argumentativo apresentado na garantia foi realizado por meio de operações e deduções que fluíram do pensamento dos alunos e controlaram toda a generalidade da situação (BALACHEFF, 1987; RODRIGUES e MONTEIRO, 2021). Dessa forma, o argumento de prova esteve apoiado numa razão dedutiva e por este motivo foi considerada probatória (TRIANTAFILLOU; SPILIOTOPOULOU; POTARI, 2016) explicativa (HANNA, 1990; 2000) e conceitual (BALACHEFF, 1987; RODRIGUES; MONTEIRO, 2021) para justificar uma declaração universal. Foi com base neste caráter explicativo e comprobatório da prova conceitual que foi possível classificá-la como uma prova que tem dupla função, ou seja, "prova que prova" e "prova que explica" (HANNA, 1990; 2000). Este tipo de prova, segundo a autora deve ser mais valorizado no contexto da sala de aula do que simplesmente a prova que apenas comprova a verdade.

Por fim, o argumento de prova produzido pelo grupo pôde ter a sua qualidade (solidez) avaliada com base na classificação dos componentes do argumento (RODRIGUES e MONTEIRO, 2021) apresentado na Figura 63.

Figura 63: Classificação dos componentes do argumento de prova.

Fonte: Dados da pesquisa

De acordo com Rodrigues e Monteiro (2021) este argumento, portanto, é considerado forte uma vez que a conclusão está baseada em um tipo de prova conceitual (BALACHEFF, 1987;1988).

7.3.3 Argumentos de prova produzidos pelo grupo 3, referente a questão 3

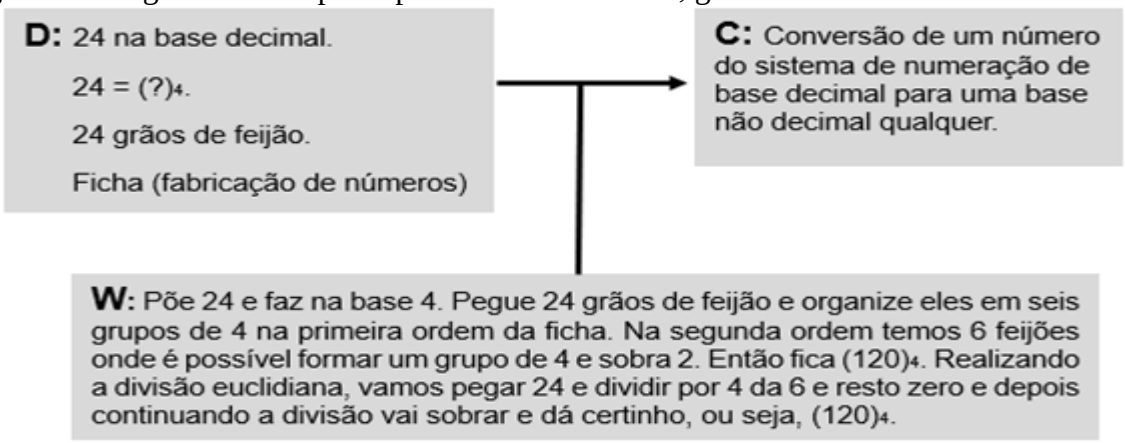
A estrutura espiral (KNIPPING, 2008; REID; KNIPPING, 2010; ERKEK; BOSTAN, 2019) que modelou a situação argumentativa do grupo 3, durante a discussão da questão 3, apontou para três "modos de prova" reconhecidamente dessa forma pelos seus produtores – os alunos (BALACHEFF, 1988).

Inicialmente analisaremos a concepção espontânea de prova produzida pelos alunos e em seguida, as outras duas provas produzidas por solicitação do professor. Para mostrar como converter um número do sistema de numeração de base decimal para um número em uma base não decimal qualquer, o grupo utilizou um exemplo empírico (conversão do número 24 da base 10 para a base 4) para então validar o processo, ou seja,

> - "Põe 24 e faz na base 4" **<Grupo 3, argumento oral, fala 81>**.
> - "Lena pega a ficha e os grãos para realizar algum teste. Luiz Felipe entrega 24 grãos de feijão a Lena. Ela organiza 24 em seis grupos de 4 na primeira ordem" **<Grupo 3, argumento multimodal, obs.81>**.
> - "E na segunda ordem? Na segunda ordem temos 6 feijões onde é possível formar um grupo de 4 e sobra 2. Então fica $(120)_4$ **<Grupo 3, argumento oral, fala 82>**.
> - "Agora vamos pegar 24 e dividir por 4 da 6 e resto zero" **<Grupo 3, argumento oral, fala 82>**.
> - "É mesmo, vai sobrar e dar certinho" **< Grupo 3, argumento oral, fala 86>**.

O argumento de prova foi então representado geometricamente no TAP (**D:** Dados, **W:** Garantia e **C:** Conclusão**)** conforme indicado na Figura 64.

Figura 64: Argumento composto por 3 elementos: dado, garantia e conclusão.



Fonte: Dados da pesquisa

O tipo de argumento de prova elaborado pelos alunos correspondeu ao que Balacheff (1988) chamou de "prova pragmática ou prova empírica". Trata-se de um tipo de prova que envolve argumentações cujas justificativas são de natureza empírica, recorrendo, a fatos ou ações sobre o objeto de estudo (BALACHEFF, 1988). De fato, se observamos a garantia apresentada pelo grupo é possível verificar que o processo de justificação do argumento foi realizado por "mostração", ou seja, a "prova funciona" (BALACHEFF, 1987;1988). Nesta situação o conhecimento foi atestado pela ação direta do sujeito (grupo) sobre o objeto e não essencialmente pelo discurso (BALACHEFF, 1987;1988). O fato de o grupo ter recorrido a um material didático em particular (ficha e grãos de feijão) para mostrar na prática o processo de conversão corroborou para ilustrar uma situação em que Balacheff (1987;1988) chama de "Teoremas em ação".

Ao examinar o argumento de prova indicado na Figura 64 foi possível verificar que os dados (**D**) utilizados pelo grupo foram de natureza puramente empírica. Por sua vez, a garantia (**W)** apresentada pelo grupo falhou no seu caráter geral, uma vez que a explicação do processo de conversão de um número da base decimal para uma base não decimal qualquer **(C)** se deu a partir da apresentação de um caso particular (BALACHEFF, 1988; RODRIGUES e MONTEIRO, 2021) totalmente desprovido de descontextualização, despersonalização e destemporalização (BALACHEFF, 1987;1988). O conhecimento neste tipo de prova, foi de natureza prática, e foi atestado por uma ação do grupo sobre um objeto particular de estudo, ou seja, a conversão do número 24 para a base 4 e não essencialmente por um discurso racional e generalista (BALACHEFF, 1987).

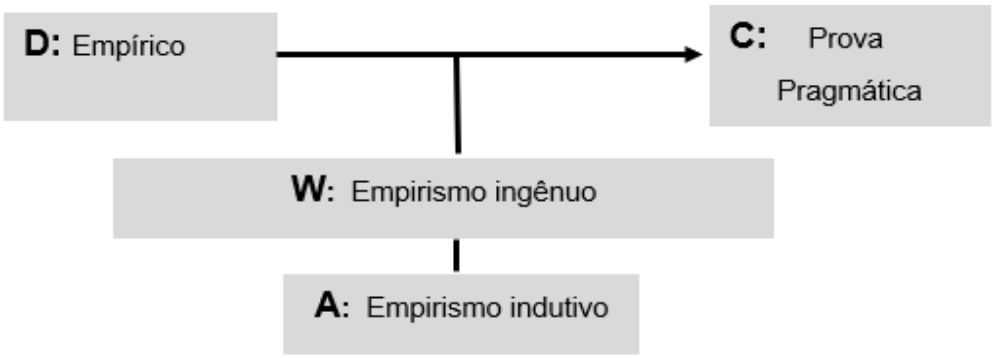
Em particular, ao examinar o exemplo empírico apresentado pelo grupo, desprovido de critério de escolha, verificou-se que o nível de prova, ou forma de validação apresentada, se

encaixou no nível mais elementar da hierarquia apresentada por Balacheff (1987; 1988) para os tipos de provas pragmáticas (prova empírica), ou seja, a categoria “empirismo ingênuo”. Essa classificação se deu pelo fato de que o raciocínio indutivo utilizado pelos alunos promoveu uma generalização imprópria ao se basear apenas no teste empírico da proposição (BALACHEFF, 1987;1988; RODRIGUES e MONTEIRO, 2021).

Uma vez que a prova apresentada esteve apoiada no empirismo indutivo (prova por exemplo) esta foi é considerada inválida para justificar uma declaração universal (HANNA, 2000).

Por fim, o argumento de prova apresentado pelo grupo também teve a sua qualidade (solidez) avaliada com base na classificação dos componentes do argumento (RODRIGUES e MONTEIRO, 2021) apresentado na Figura 65.

Figura 65: Classificação dos componentes do argumento de prova



Fonte: Dados da pesquisa

De acordo com Rodrigues e Monteiro (2021) este argumento, portanto, é considerado fraco e de pouca elaboração uma vez que a conclusão está baseada em um tipo de prova pragmática (BALACHEFF, 1987;1988).

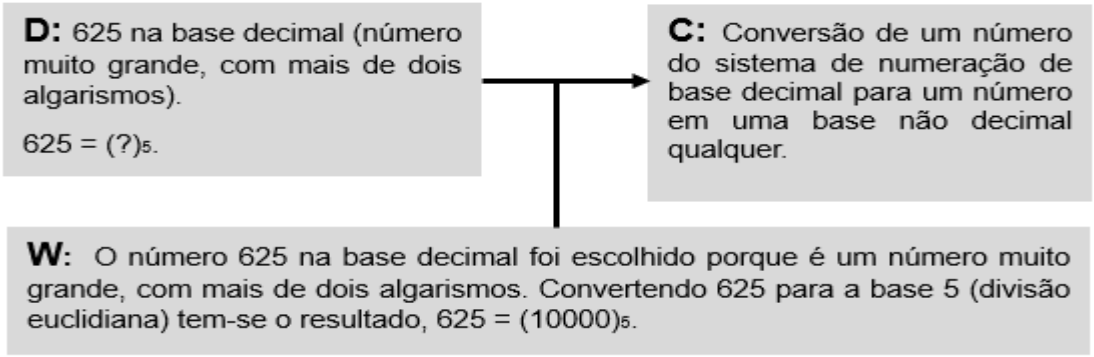
Não satisfeito com a qualidade da prova produzida, o pesquisador solicitou ao grupo uma generalização da ideia por ora apresentada. Na sequência, é apresentado um diálogo que aponta para o novo argumento de prova produzido pelo grupo numa tentativa de atingir a generalização solicitada pelo professor.

> - “Você diz um número muito grande?” **<Grupo 3, argumento oral, fala 89, grifo nosso>**.
> - “Que número seria este?” **<Professor, fala 90>**.
> - “Você fala, de mais de dois algarismos? Tipo 625” **<Grupo 3, argumento oral, fala 91, grifo nosso>**.
> - “Aí nós podemos pegar qualquer base” **<Grupo 3, argumento oral, fala 92>**.

> - "A ideia é produzir uma generalização, pegar um número qualquer na base decimal e converter para uma base não decimal qualquer **<Professor, fala 93>**.
> - "Então 625 dividido por 5" **<Grupo 3, argumento oral, fala 94>**.
> - O grupo realiza os cálculos de conversão **<Grupo 3, argumento multimodal, obs. 94>**.
> - "$(10000)_5$", "e assim?", "só isso?" **<Grupo 3, argumento oral, fala 103>**.

O argumento de prova foi então representado geometricamente no TAP (**D:** Dados, **W:** Garantia e **C:** Conclusão**)** conforme indicado na Figura 66.

Figura 66: Argumento composto por 3 elementos: dado, garantia e conclusão.



Fonte: Dados da pesquisa

O novo argumento de prova elaborado pelo grupo foi classificado também na categoria "prova pragmática ou prova empírica" (BALACHEFF, 1987;1988). Por meio da garantia elaborada com base no diálogo apresentado pelo grupo e o professor foi possível verificar uma tentativa de generalização atípica não mais baseada em um simples caso particular. Na situação descrita, diferentemente da prova inicialmente apresentada por eles, adotou-se um critério de escolha para o número a ser usado na prova, ou seja, "um número muito grande" e "com mais de dois algarismos. A base 5, portanto, foi escolhida pelo fato de o grupo entender que poderia escolher uma base qualquer a ser tomada para a explicação **<fala 92, 94>**. Diferentemente da prova anterior, o novo argumento acabou promovendo uma mudança na escolha do dado de teste, ou seja, o grupo adotou um critério de escolha para o caso particular, imaginando que por conta disso, o exemplo atípico tinha o poder de alcançar uma generalização. Contudo, esta nova tentativa de prova, ainda permaneceu situada na categoria de prova pragmática ou empírica uma vez que esta manifestou forte apelo ao cálculo e a exploração de um caso particular atípico para atingir uma generalização (BALACHEFF, 1987;1988). Nesta situação, o conhecimento também foi atestado pela ação direta do sujeito (grupo) sobre um objeto escolhido por meio de critérios equivocados que visavam a generalização (BALACHEFF, 1987;1988).

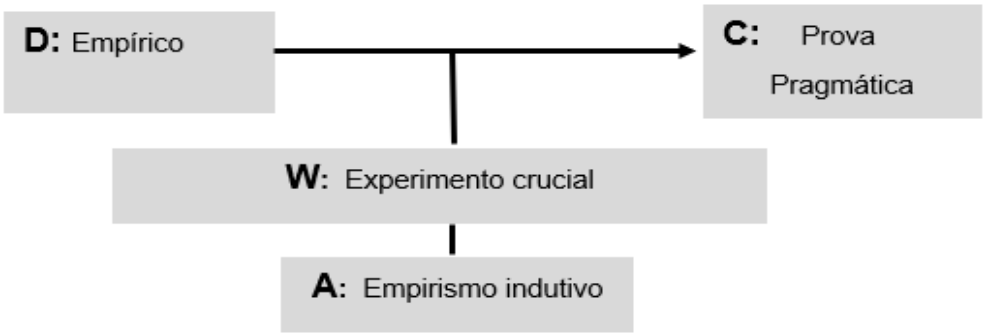
Ao examinar o argumento de prova indicado na Figura 66 foi possível verificar que os dados (**D**) utilizados pelo grupo foram de natureza puramente empírica e envolveu a adoção de um critério de escolha. Por sua vez, a garantia (**W)** apresentada pelo grupo falhou no seu caráter geral, uma vez que a explicação do processo de conversão de um número da base decimal para uma base não decimal qualquer **(C)** se deu a partir da apresentação de um caso particular (BALACHEFF, 1988; RODRIGUES e MONTEIRO, 2021) totalmente desprovido de descontextualização, despersonalização e destemporalização (BALACHEFF, 1987;1988). A natureza essencialmente prática do conhecimento, típico da prova pragmática (BALACHEFF, 1987;1988) foi observada quando o grupo exerceu uma ação de conversão do número 625 para a base 5 imaginando que este procedimento por si só era o suficiente para garantir uma comprovação para o processo de conversão. Faltou ao grupo um discurso racional e generalista (BALACHEFF, 1987) para descrever o processo de conversão de bases, o que permitiria sair da categoria de prova pragmática para a categoria de prova conceitual (BALACHEFF, 1987;1988).

Em particular, ao examinar o exemplo empírico apresentado pelo grupo, desta vez provido de critério de escolha, verificou-se que o nível de prova, ou forma de validação apresentada, se encaixou no nível "experimento crucial" (BALACHEFF, 1987; 1988) para o tipo de prova pragmática. Essa classificação se deu pelo fato de que o raciocínio indutivo utilizado pelos alunos promoveu uma generalização imprópria ao se basear apenas no teste empírico de um caso particular atípico escolhido por meio de um critério que os alunos acreditavam ter o poder de generalização (BALACHEFF, 1987;1988; RODRIGUES e MONTEIRO, 2021). Em outras palavras se o processo de conversão é valido para um número muito grande, logo ele acabaria sendo válido também para qualquer outro caso mais simples, ou seja, "*se funciona aqui, sempre funcionará*" (BALACHEFF,1988, p.219).

Uma vez que esta prova esteve apoiada no empirismo indutivo (prova por exemplo) esta foi é considerada inválida para fins de comprovação de uma declaração universal (HANNA, 2000).

Por fim, o argumento de prova apresentado pelo grupo teve a sua qualidade (solidez) avaliada com base na classificação dos componentes do argumento proposto por Rodrigues e Monteiro (2021) conforme apresentado na Figura 67.

Figura 67: Classificação dos componentes do argumento de prova.



Fonte: Dados da pesquisa

De acordo com Rodrigues e Monteiro (2021) este argumento, portanto, é considerado fraco e de pouca elaboração uma vez que a conclusão está baseada em um tipo de prova pragmática (BALACHEFF, 1987;1988).

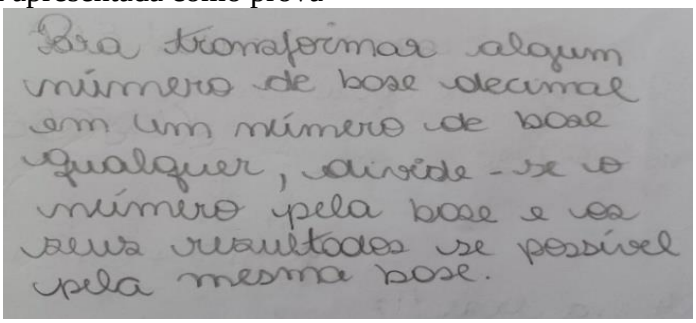
Na sequência que sucedeu a produção da prova, o grupo foi questionado pelo professor se este modo de prova apresentado era capaz de convencê-los da validade do método de conversão **<fala 104>**, e os alunos por sua vez disseram que sim **<fala 105>.** O professor mais uma vez não satisfeito com a qualidade da prova produzida, solicitou ao grupo uma outra tentativa de generalização para o resultado, de modo a não particularizar valores para o número a ser convertido e nem para a base **<fala 106>**.

Como resultado desta nova solicitação os alunos apresentaram um novo argumento de prova para mostrar o processo de conversão de um número da base 10 para uma base não decimal qualquer.

> Dividindo um número n pela base b e conforme os resultados, vai dividindo pela mesma base na medida em que for formando grupos e deixando restos... **<GRUPO 3, argumento oral, fala 107>**.

Este argumento foi apresentado também por escrito, conforme indicação na Figura 68.

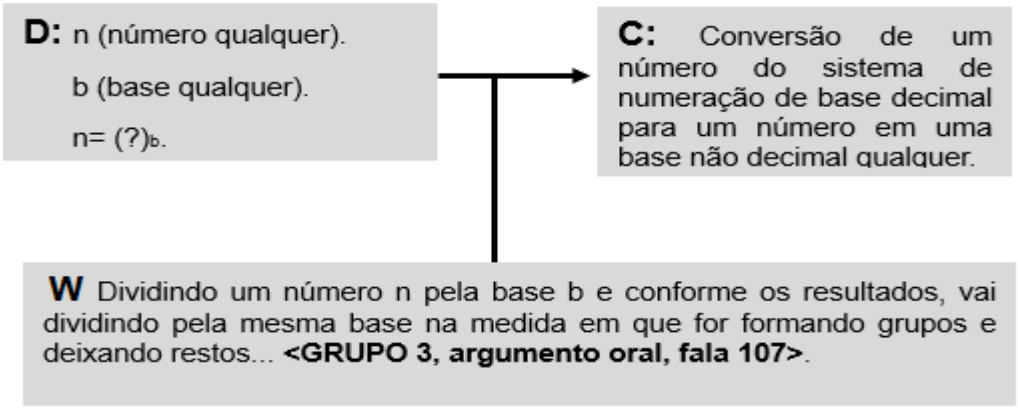
Figura 68: Garantia apresentada como prova



Fonte: Dados da pesquisa

Este argumento, na sequência, foi então representado geometricamente no TAP (**D:** Dados, **W:** Garantia e **C:** Conclusão**)** para análise, conforme indicação da Figura 69. Priorizamos a representação do argumento oral na garantia de prova, uma vez que este se mostrou mais completa do que aquela apresentada no registro escrito.

Figura 69: Argumento composto por 3 elementos: dado, garantia e conclusão.



Fonte: Dados da pesquisa

Nesta última versão do argumento elaborado pelo grupo, a prova, portanto, foi classificada na categoria "prova intelectual" ou "prova conceitual" (BALACHEFF, 1987;1988) uma vez que em seu conteúdo não é explicitado uma ação ou teste empírico. Pelo contrário, uma formulação de cunho geral foi estabelecida de modo a articular conceitos, ideias, relações e/ou propriedades para validar e explicar um processo (BALACHEFF, 1987;1988; HANNA, 2000; RODRIGUES e MONTEIRO, 2021). Outro aspecto que também corroborou para que pudéssemos classificar esta prova como conceitual foi a presença de uma expressão linguística "n" e "b" para dos objetos para os quais se baseiam alguma relação (BALACHEFF, 1987; 1988). Para além disso, verificou-se que este tipo de prova é genérico (HANNA, 2000) uma vez que a sua linguagem informal foi tida como "funcional", ou seja, caracterizada por uma descontextualização, despersonalização e destemporalização em relação a um objeto em particular (BALACHEFF, 1987;1988). Ainda de acordo com este autor o conhecimento, nesta situação, se tornou objeto de reflexão discurso e debate.

Ao examinar o argumento de prova indicado na Figura 69 foi possível verificar que os dados (**D**) utilizados pelo grupo foram de natureza genérica, ou seja, "n" para representar um número qualquer e "b" para representar uma base qualquer. Por sua vez, a garantia (**W)** apresentada pelo grupo apresentou alguns pontos falhos no seu caráter geral e explicativo, dentre eles, pontuamos: 1) falta de uma condição de existência para as variáveis "n" e "b"; 2) detalhamento das divisões sucessivas a partir dos quocientes "q" e restos "r" obtidos; 3) falta

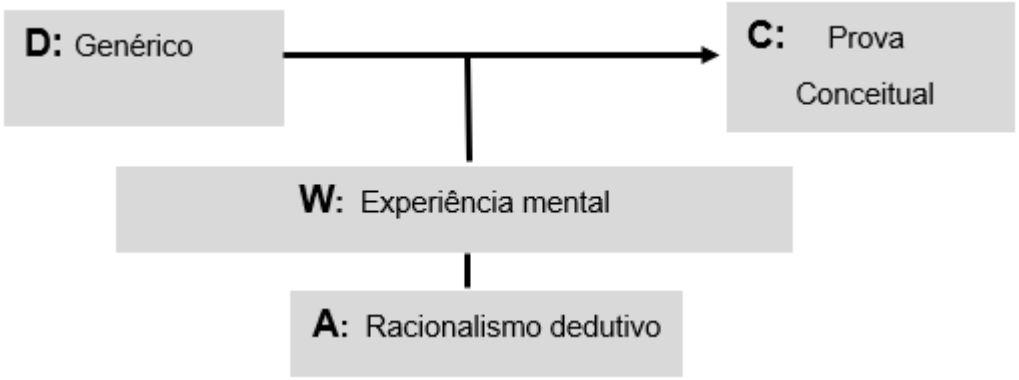
de clareza no critério de parada das divisões sucessivas e obtenção dos algarismos que irão compor o número. O conteúdo da garantia foi apresentado na linguagem informal, sendo esta precária do ponto de vista conceitual e do rigor de uma justificação matemática formal e rigorosa. Contudo, julgamos que ela fosse considerada aceitável e convincente como uma etno-argumentação (GARNICA, 2002) para o contexto de sala de aula uma vez que o grupo mostrou a compreensão de todo o processo de conversão de um número do sistema de numeração de base decimal para uma base não decimal qualquer **(C)**.

Em particular, ao examinar o conteúdo do argumento, verificou-se que este esteve mais próximo do nível "experiencia mental" (BALACHEFF, 1987; 1988) quando comparado ao nível "exemplo genérico" (BALACHEFF, 1987;1988) isso porque a justificativa apresentada esteve desprendida de concretização e contextualização em um representante particular (BALACHEFF, 1987;1988; RODRIGUES e MONTEIRO, 2021). Em outras palavras, a ideia apresentada como prova não foi evidenciada em uma instância, mas formulada em uma generalidade (BALACHEFF, 1988; HANNA, 2000). A operação descrita, a relação entre as variáveis bem como a articulação entre conceitos e ideias matemáticas foram realizadas mentalmente e desprovido de qualquer tipo de implementação prática (BALACHEFF, 1987).

Uma vez que esta prova esteve apoiada no uso de uma razão dedutiva, esta foi considerada válida para fins de comprovação de uma declaração universal (HANNA, 2000) em particular, no contexto da etno-argumentação (GARNICA, 2002) na sala de aula de matemática.

Por fim, o argumento de prova apresentado pelo grupo teve a sua qualidade avaliada (solidez) com base na classificação dos componentes do argumento proposto por Rodrigues e Monteiro (2021) conforme apresentado na Figura 70.

Figura 70: Classificação dos componentes do argumento de prova.



Fonte: Dados da pesquisa

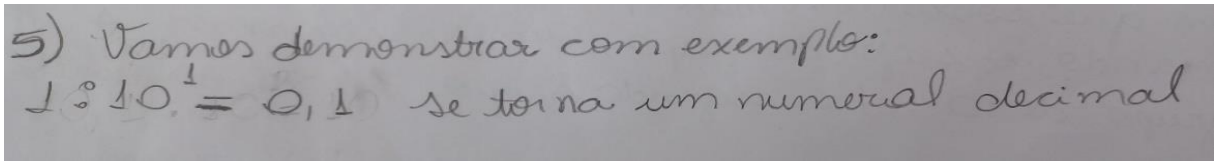
De acordo com Rodrigues e Monteiro (2021) este argumento, portanto, é considerado forte e de boa elaboração uma vez que a conclusão está baseada em um tipo de prova conceitual

(BALACHEFF, 1987;1988). Ainda que se tenha identificado algumas não conformidades na generalização apresentada, o argumento ainda assim se manteve com esta avaliação (RODRIGUES; MONTEIRO, 2021) porque cumpriu a sua função de prova que explica (HANNA, 2000) dentro de um contexto de etno-argumentação (GARNICA, 2002) em sala de aula.

7.3.4 Argumentos de prova produzidos pelo grupo 1, referente a questão 5

A estrutura de argumentos independentes (ERKEK, BOSTAN, 2019) que modelou a situação argumentativa do grupo 1, durante a discussão da questão 5, apontou a ausência de um argumento de prova para validar a afirmação proposta. Os argumentos apontados nesta estrutura estavam relacionados a ideias e conjecturas equivocadas cujo conteúdo se mostrou inválido para viabilizar uma prova justificatória. Para ilustrar essa situação, a Figura 71, indicada a seguir apresenta o argumento produzido pelo grupo para mostrar a conversão de um número do sistema de numeração de base decimal para uma base não decimal qualquer.

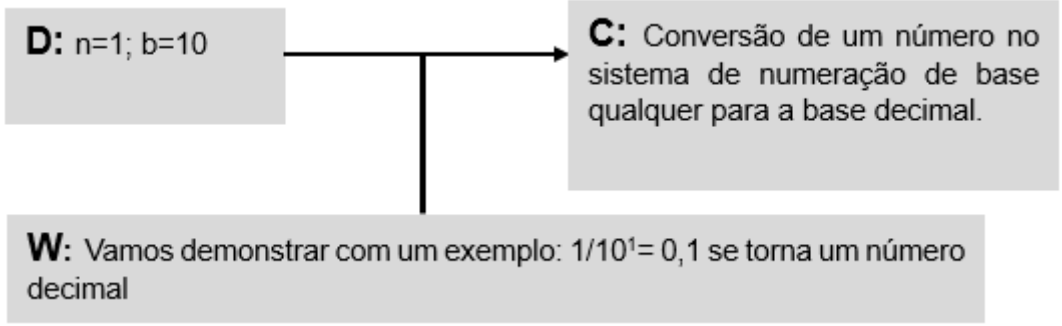
Figura 71: Garantia apresentada como prova



Fonte: Dados da pesquisa

Este argumento, na sequência, foi então representado geometricamente no TAP (**D:** Dados, **W:** Garantia e **C:** Conclusão**)** para análise, conforme indicação na Figura 72.

Figura 72: Argumento composto por 3 elementos: dado, garantia e conclusão



Fonte: Dados da pesquisa

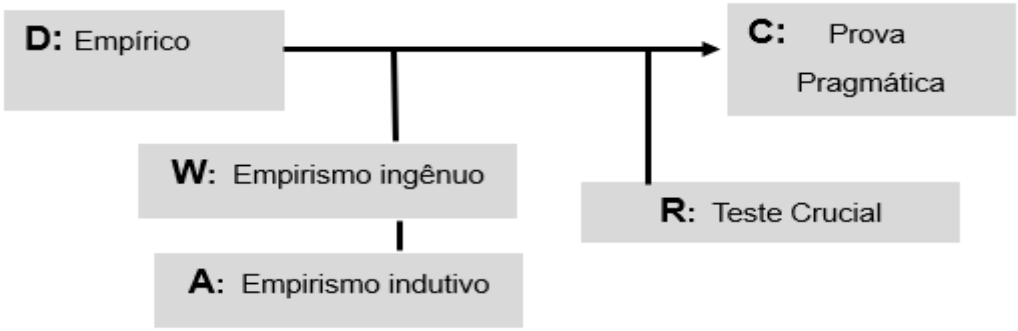
Em uma análise preliminar da garantia, verificou-se que o argumento se encaixa na categoria de "prova pragmática ou prova empírica" (BALACHEFF, 1987;1988) uma vez que o grupo utilizou um exemplo em particular para alcançar indevidamente uma generalização

(HANNA, 2000; BALACHEFF, 1987;1988). Para além disso, verificou-se que esta prova se encontrou no nível mais elementar da hierarquia que envolve os tipos de prova pragmática (BALACHEFF, 1987;1988). Outro ponto importante a ressaltar é que, esta prova esteve apoiada no empirismo indutivo (prova por exemplo) e por este motivo foi considerada inválida para fins de comprovação de uma declaração universal (HANNA, 2000).

Ao examinar minuciosamente o argumento indicado na Figura 72 foi possível verificar que os dados (**D**) utilizados pelo grupo foram de natureza empírica e o conteúdo da garantia **(W)** esteve ligado a uma justificação empírica sem nenhuma conexão com a conclusão (**C**). Na referida garantia os alunos confundiram os conceitos matemáticos "sistema de numeração decimal" e "número decimal". Essa confusão de ideias conceituais corroborou para o insucesso da equipe no entendimento do problema e por fim acarretou o surgimento de um argumento isolado e sem nenhuma conexão com a conclusão.

Por fim, o argumento de prova apresentado pelo grupo teve a sua qualidade (solidez) avaliada com base na classificação dos componentes do argumento proposto por Rodrigues e Monteiro (2021) e apresentados na Figura 73.

Figura 73: Classificação dos componentes do argumento de prova.



Fonte: Dados da pesquisa

De acordo com Rodrigues e Monteiro (2021) este argumento é considerado fraco e de pouca elaboração uma vez que a conclusão está baseada em um tipo de prova pragmática (BALACHEFF, 1987;1988). É considerado inválido para fins de comprovação de uma declaração universal (HANNA, 2000) uma vez que baseou a explicação utilizando um caso empírico. Por fim, na avaliação do conteúdo da garantia, esta pôde ser refutada desqualificando os dados utilizados, ou seja, n=1 e b=10 são números no sistema de numeração de base decimal (teste crucial de refutação - **R**) e operando os mesmos (divisão) o resultado ainda é um número no sistema de numeração de base decimal (propriedade de fechamento da divisão no corpo dos reais).

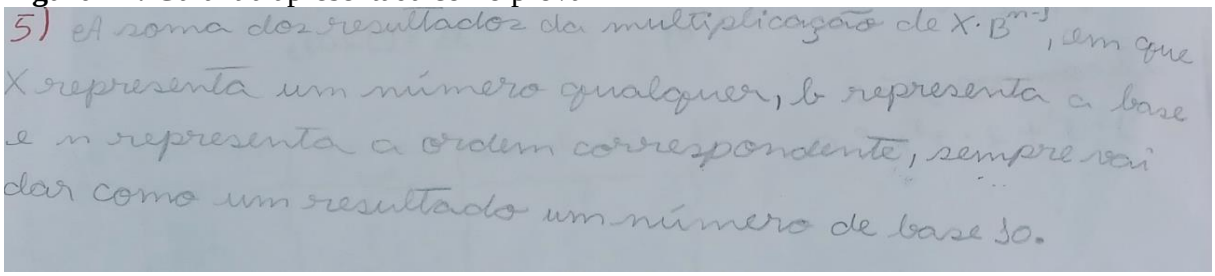
Considerando o fato de que o grupo não conseguiu resolver um problema em particular envolvendo o assunto de conversão de bases (questão 4) tido como pré-requisito conceitual para a questão 5, era de se esperar, portanto, que tivessem dificuldades para compreender e produzir uma prova probatória e/ou explicativa para a questão 5.

7.3.5 Argumentos de prova produzidos pelo grupo 2, referente a questão 5

A estrutura fonte (KNIPPING, 2008; REID; KNIPPING, 2010; ERKEK; BOSTAN, 2019; ERKEK; ISIKSAL BOSTAN, 2019) que modelou a situação argumentativa do grupo 2, durante a discussão da questão 5, apontou para um "modo de prova" reconhecidamente dessa forma pelos seus produtores – os alunos (BALACHEFF, 1988).

Para mostrar como converter um número do sistema de numeração não decimal para um número na base decimal o grupo 2 apresentou o seguinte argumento de prova indicado na Figura 74.

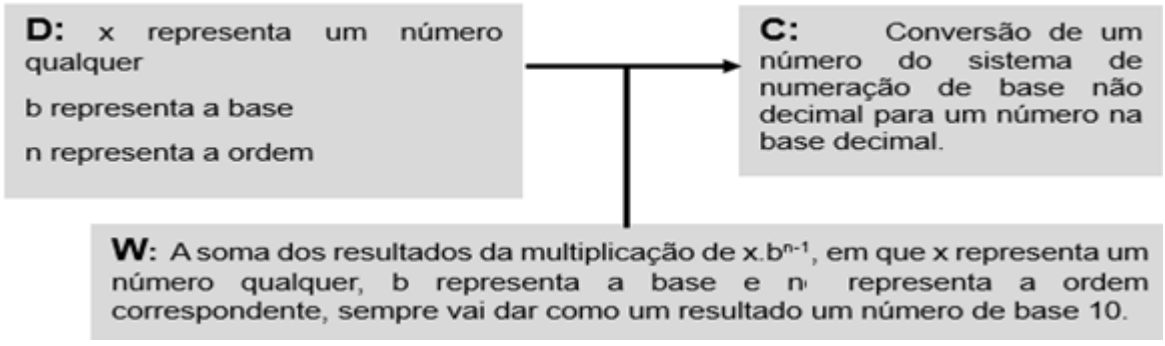
Figura 74: Garantia apresentada como prova



Fonte: Dados da pesquisa

Este argumento, na sequência, foi então representado geometricamente no TAP (**D:** Dados, **W:** Garantia e **C:** Conclusão**)** para análise, conforme a seguir.

Figura 75: Argumento composto por 3 elementos: dado, garantia e conclusão



Fonte: Dados da pesquisa

Com base na análise da garantia apresentada verificou-se que o argumento de prova elaborado pelo grupo se encaixa na categoria "prova intelectual" ou "prova conceitual" (BALACHEFF, 1987;1988) uma vez que as ideias comunicadas repousam em formulações sobre objetos abstratos, propriedades e relações entre eles (BALACHEFF, 1988). A expressão

da linguagem por exemplo, como pôde ser vista, ainda que na linguagem informal, evoluiu na medida em que objetos abstratos e suas relações puderam ser descritas por meio de variáveis, “n”, “b” e “x” (BALACHEFF, 1987; 1988). Para além disso, verificou-se que este tipo de prova é genérico (HANNA, 2000) uma vez que a sua linguagem informal foi tida como “funcional”, ou seja, caracterizada por uma descontextualização, despersonalização e destemporalização em relação a um objeto em particular (BALACHEFF, 1987;1988). Ainda de acordo com este autor este tipo de prova relaciona-se a um saber racional que envolve argumentações cujas justificativas resultam de ações interiorizadas que fluem do pensamento e controlam toda a generalidade da situação (BALACHEFF, 1987;1988; RODRIGUES; MONTEIRO, 2021).

Ao examinar o argumento de prova indicado na Figura 75 foi possível verificar também que os dados (**D**) utilizados pelo grupo foram de natureza genérica, isso porque a variável “x” foi utilizada para fazer a referência a um número qualquer em uma base “b” qualquer e “n” para indicar de forma geral uma determina ordem. Por sua vez, a garantia (**W)** apresentada pelo grupo apresentou uma pequena falha de descrição da variável “x” o que poderia causar algum tipo de incompreensão da prova no que compete a sua função explicativa (HANNA, 2000). Com relação a variável “x” especificamente, para efeito de correção do argumento, na verdade ela descreve o algarismo do número associado a ordem que ele se encontra. O grupo pecou na descrição da variável, contudo, na discussão oral ocorrida em sala de aula eles tinham uma compreensão do real significado da variável “x”, conforme aponta a fala a seguir.

> Cada algarismo do número na base correspondente multiplicado pela sua base elevando a ordem (onde a primeira ordem é zero, a segunda ordem é equivalente a 1, a terceira ordem a 2 e assim por diante...) A soma dos seus resultados vai gerar o número na base decimal **<Grupo, argumento oral, fala 118, grifo nosso>.**

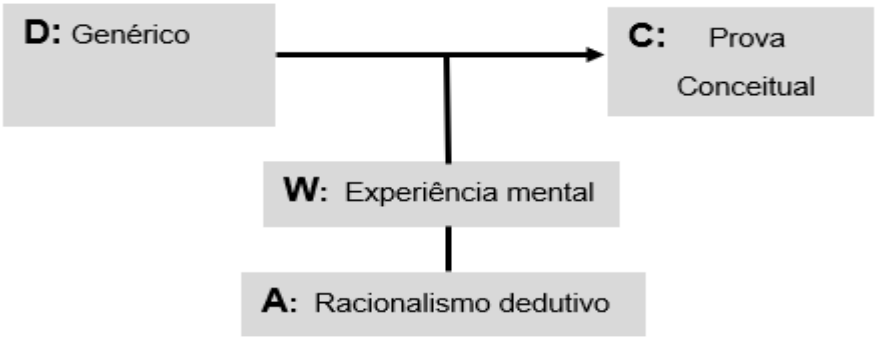
Dentre todos os argumentos produzidos até então este foi o único argumento de prova que transcendeu da linguagem informal para a linguagem matemática, na medida em que produziu uma generalização por meio do uso de símbolos matemáticos “$x.b^{n-1}$” de modo a estabelecer uma relação entre os objetos abstratos. O suporte e apoio do professor foi importante para que houvesse essa transição de linguagem **<fala 119>**. Porém o argumento apresentado esteve longe de ser considerado um argumento de uma prova formal e rigorosa. Contudo, para um contexto de etno-argumentação (GARNICA, 2002) característico do ambiente de sala de aula esta foi considerada uma prova genérica explicativa (HANNA, 2000). Ainda que ela estivesse diante de uma pequena não conformidade apontada anteriormente, esta prova acabou sendo convincente no âmbito do grupo para explicar o processo de conversão de um número do sistema de numeração de base não decimal para uma base decimal (**C**).

Em particular, diante do conteúdo apresentado na garantia da prova, verificou-se que este tipo prova conceitual esteve situado no nível de “experiencia mental” (BALACHEFF, 1987; 1988) isso porque a explicação apresentada na garantia ficou desprendida de concretização e contextualização em um representante particular (BALACHEFF, 1987;1988; RODRIGUES e MONTEIRO, 2021). Em outras palavras, a explicação apresentada como prova não foi evidenciada em uma instância particular, mas formulada em uma generalidade com avanços na linguagem (BALACHEFF, 1988; HANNA, 2000).

Considerando que esta prova esteve apoiada no uso de uma razão dedutiva, ela portanto, foi considerada válida para fins de comprovação de uma declaração universal (HANNA, 2000) em particular, no contexto da etno-argumentação (GARNICA, 2002) em uma sala de aula de matemática.

Por fim, o argumento de prova apresentado pelo grupo teve a sua qualidade (solidez) avaliada com base na classificação dos componentes do argumento proposto por Rodrigues e Monteiro (2021) conforme apresentado na Figura 76.

Figura 76: Classificação dos componentes do argumento de prova.



Fonte: Dados da pesquisa

De acordo com Rodrigues e Monteiro (2021) este argumento, portanto, é considerado forte e de boa elaboração uma vez que a conclusão está baseada em um tipo de prova conceitual (BALACHEFF, 1987;1988). Ainda que se tenha identificado uma pequena não conformidade na generalização apresentada (descrição da variável “x”), o argumento ainda assim se manteve com esta avaliação (RODRIGUES e MONTEIRO, 2021) porque a cumpriu a sua função de prova que explica (HANNA, 2000) dentro de um contexto de etno-argumentação (GARNICA, 2002) em sala de aula.

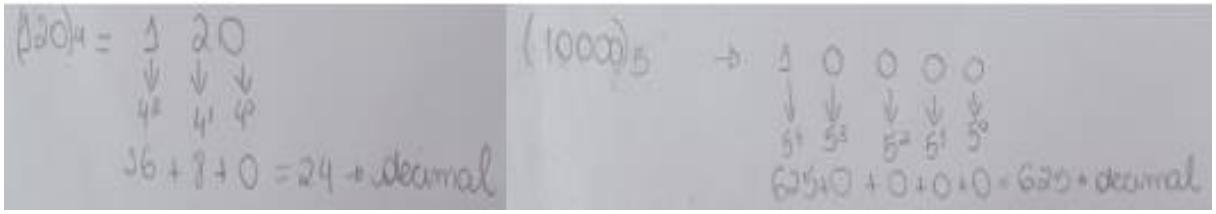
7.3.6 Argumentos de prova produzidos pelo grupo 3, referente a questão 5

A estrutura fonte (KNIPPING, 2008; REID; KNIPPING, 2010; ERKEK; BOSTAN, 2019; ERKEK; ISIKSAL BOSTAN, 2019) que modelou a situação argumentativa do grupo 3,

durante a discussão da questão 5, apontou para um "modo de prova" reconhecidamente dessa forma pelos seus produtores – os alunos (BALACHEFF, 1988).

Para mostrar como converter um número do sistema de numeração não decimal para um número na base decimal o grupo 3 apresentou o seguinte argumento de prova indicado na Figura 77.

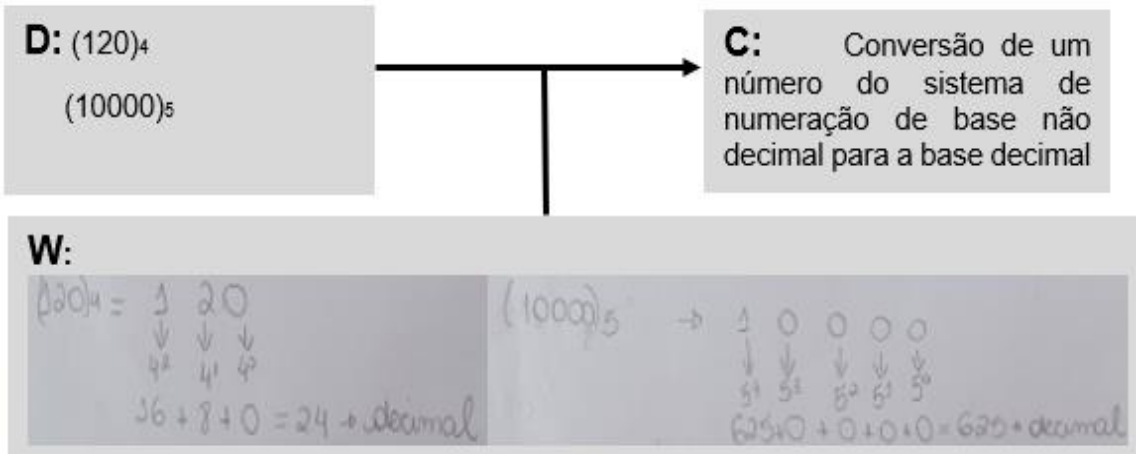
Figura 77 - Garantia apresentada como prova



Fonte: Dados da pesquisa

Este argumento, na sequência, foi então representado geometricamente no TAP (**D:** Dados, **W:** Garantia e **C:** Conclusão**)** para análise, conforme indicação da Figura 78.

Figura 78: Argumento composto por 3 elementos: dado, garantia e conclusão



Fonte: Dados da pesquisa

Analisando a garantia apresentada, verificou-se que o argumento de prova elaborado pelo grupo se encaixa na categoria "prova pragmática" ou "prova empírica" (BALACHEFF, 1987;1988) uma vez a justificativa é de natureza empírica e resultante de um processo de observação e ação direta do aluno sobre seu objeto de estudo (BALACHEFF, 1987;1988). Neste tipo de prova o conhecimento é atestado por uma ação (resolver um caso particular) e não essencialmente por um discurso racional e generalista (BALACHEFF, 1987). Para além disso, a linguagem escolhida na apresentação dos objetos utilizados na garantia, ou seja, os números $(120)_4$ e $(10000)_5$, apontou para uma contextualização da prova uma vez que ela não

sofre renúncia ao objeto em particular impedindo assim o acesso a uma classe representativa e genérica destes objetos (BALACHEFF, 1988).

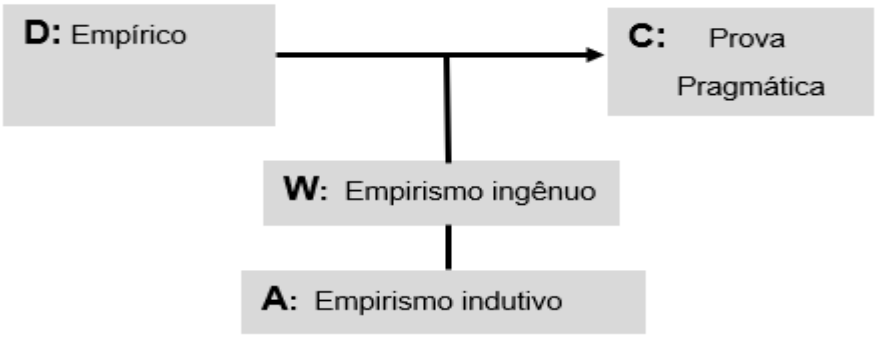
Ao examinar os componentes do argumento indicado na Figura 78 foi possível verificar que os dados (**D**) utilizados pelo grupo foram de natureza puramente empírica. Já o conteúdo da garantia **(W)** esteve ligado a uma justificação empírica que falhou em atingir a generalidade do processo a ser mostrado, ou seja, a explicação da conversão de um número do sistema de numeração não decimal para a base decimal **(C)**. Isso ocorreu porque o grupo apresentou dois casos particulares como tentativa de provocar uma generalização indevida e viabilizar a prova (BALACHEFF, 1988; RODRIGUES e MONTEIRO, 2021). Na situação descrita, os casos empíricos apresentados para efeito de prova foram desprovidos de descontextualização, despersonalização e destemporalização (BALACHEFF, 1987;1988). A natureza essencialmente prática do conhecimento, típico da prova pragmática (BALACHEFF, 1987;1988) foi observada quando o grupo exerceu uma ação de conversão dos números $(120)_4$ e $(10000)_5$ para a base decimal, imaginando que este procedimento por si só era o suficiente para garantir uma comprovação para o processo de conversão. Faltou ao grupo um discurso racional e generalista (BALACHEFF, 1987) para descrever o processo de conversão de bases, o que permitiria a eles saírem da categoria de prova pragmática para a categoria de prova conceitual (BALACHEFF, 1987;1988).

Em particular, diante do conteúdo apresentado na garantia da prova, verificou-se que este tipo de prova pragmática (empírica) esteve situado no nível de "empirismo ingênuo" (BALACHEFF, 1987; 1988) isso porque a explicação apresentada na garantia ficou restrito ao uso de exemplos particulares, escolhidos sem critérios para efeito de comprovação e explicação do processo de conversão (BALACHEFF, 1987;1988; RODRIGUES e MONTEIRO, 2021).

Neste tipo de prova, o raciocínio indutivo dos alunos promoveu uma generalização imprópria ao se basear no teste empírico da proposição (BALACHEFF, 1987;1988; RODRIGUES e MONTEIRO, 2021). Isso corroborou para que a prova empírica fosse considerada inválida para fins de comprovação de uma declaração universal (HANNA, 2000).

Por fim, o argumento de prova apresentado pelo grupo teve a sua qualidade (solidez) avaliada com base na classificação dos componentes do argumento proposto por Rodrigues e Monteiro (2021) conforme apresentado na Figura 79.

Figura 79: Classificação dos componentes do argumento de prova



Fonte: Dados da pesquisa

De acordo com Rodrigues e Monteiro (2021) este argumento é considerado fraco e de pouca elaboração uma vez que a conclusão está baseada em um tipo de prova pragmática (BALACHEFF, 1987;1988).

O Quadro 24 sintetiza os resultados da seção 7.3 ilustrando a evolução do argumento de prova produzido pelos grupos durante a tarefa de validação dos problemas 3 e 5.

Quadro 24 – Evolução do argumento de prova em cada grupo nos problemas 3 e 5

Grupos	**Problema 3**			**Problema 5**		
	Tipo de prova	Nível de prova	Qualidade (solidez) da prova	Tipo de prova	Nível de prova	Qualidade (solidez) da prova
Grupo 1	Prova Pragmática	Empirismo ingênuo ⬇ Exemplo genérico	Argumento fraco e pouco elaborado	-	-	-
Grupo 2	Prova Conceitual	Experiência mental	Argumento forte e bem elaborado	Prova Conceitual	Experiência mental	Argumento forte e bem elaborado
Grupo 3	Prova Pragmática ⬇ Prova Conceitual	Empirismo ingênuo ⬇ Experimento crucial ⬇ Experiência mental	Argumento fraco e pouco elaborado ⬇ Argumento forte e bem elaborado	Prova Pragmática	Empirismo ingênuo	Argumento fraco e pouco elaborado

Fonte: Dados da pesquisa

Com base no Quadro 24, apenas o grupo 2 foi capaz de obter êxito nos dois problemas de prova, mantendo a qualidade (solidez) do argumento de prova como forte e bem elaborado (RODRIGUES; MONTEIRO, 2021). O grupo 1 não foi capaz de produzir uma prova probatória em nenhum momento. Já o grupo 3 evoluiu na qualidade da prova produzida (argumento fraco

e pouco elaborado para argumento forte e bem elaborado) para o problema 3, no entanto, não foi capaz de produzir uma prova probatória para o problema 5. O apoio docente foi importante para a evolução do argumento de prova.

7.4 Autoavaliação do processo argumentativo pelos alunos participantes da pesquisa: Aprendizagem, competências e habilidades argumentativas documentadas durante as sessões de autoscopia

A coleta de dados da autoscopia foi realizada ao longo de duas etapas e envolveu a participação de três grupos (**Grupo 1; Grupo 2; Grupo 3**) de alunos ingressantes na licenciatura em matemática durante o ano de 2022. Na primeira etapa, realizada na primeira quinzena de dezembro de 2022, ocorreu a videogravação de três situações de argumentação coletiva, sendo uma para cada grupo, durante a realização de uma atividade de investigação matemática. A segunda etapa da coleta de dados ocorreu na segunda quinzena de dezembro de 2022. Nesta última etapa, ocorreram as sessões de autoscopia viabilizadas por meio de três reuniões de grupo focal, sendo uma para cada grupo participante do estudo. Neste dia, os alunos tiveram a oportunidade de assistir a videogravação da situação argumentativa experienciada pelo grupo durante a primeira etapa da coleta de dados e posteriormente, por meio da dinâmica de grupo focal, cada aluno teve a oportunidade de realizar uma autoavaliação de si e do grupo em relação a prática argumentativa experienciada. Os resultados obtidos em cada sessão de autoscopia dos grupos foram analisados por meio da técnica de análise de conteúdo (BARDIN, 1985; FIORENTINI; LORENZATO, 2006) e os resultados são apresentados a seguir.

7.4.1 Aprendizagem, competências e habilidades argumentativas documentadas pelos grupos durante as sessões de autoscopia.

Participaram das sessões de autoscopia, Paulínia e Cristina representantes do grupo 1, Luiz Fernando e Carolina pelo grupo 2 e Lena, Luiz Felipe e Ana Lívia pelo grupo 3. As autoavaliações de cada integrante dos grupos foram combinadas de modo a gerar uma avaliação coletiva no âmbito de cada grupo.

Inicialmente, cada grupo, foi indagado pelo pesquisador sobre **o que significa argumentar em uma aula de matemática?**

No entendimento do grupo 1 (Paulínia e Cristina) argumentar está relacionado a um processo que envolve uma "*investigação*" (LAKATOS, 1978) minuciosa de um assunto, de modo a ampliar o entendimento dele. Deve contemplar, portanto, análises para saber o que é válido ou não sobre o assunto e para tanto o conhecimento prévio dos alunos sobre o tema é muito importante para sustentar a discussão. Para Lakatos (1978), a argumentação enquanto

processo relacionado à investigação, envolve uma série de atividades, desde a criação de conjecturas, exemplos para viabilizar o teste, experiencias de pensamento, análise e revisão do raciocínio. As habilidades e competências argumentativas neste caso se confundem às habilidades de investigação, ou seja, elaborar conjecturas, testar, refutar, reformular conjecturas, justificar e provar (LAKATOS, 1978; KOEDINGER, 1998; KOLLAR, et. al. 2014, PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016).

Já o grupo 2 (Luiz Fernando e Carolina) considera que argumentar envolve um processo que compreende apresentar ideias, questionar, ouvir o colega, pensar e construir junto com o colega na busca de um consenso para se chegar a uma prova ou demonstração. Este posicionamento do grupo ressalta o caráter coletivo e colaborativo da argumentação uma vez que eles entendem que por meio do processo de argumentação vários alunos formulam coletivamente uma conclusão e de forma colaborativa fornecem justificativas e provas para apoiar a conclusão e obter o consenso (CONNER, et. al., 2014; CIVIL e HUNTER, 2015). Dentro dessa perspectiva, as habilidades sociais de argumentação são evidenciadas através da capacidade do aluno, expressar uma ideia, exercitar a escuta ativa, questionar, raciocinar e construir juntos e buscar o consenso (BOAVIDA, 2005; CONNER, et. al.,2014; CIVIL e HUNTER, 2015).

Por sua vez, o grupo 3 (Lena, Luiz Felipe e Ana Lívia), também descreve a argumentação como um processo, e no entendimento deles, envolve autocontrole do grupo durante a apresentação, análise e defesa de diferentes ideias e que se encerra na busca pelo consenso e no estabelecimento da verdade quando se pretende provar algo. Da mesma forma que o grupo anterior, o grupo 3 também ressalta o caráter coletivo da argumentação (CONNER, et. al., 2014) e diferentemente de todos, o grupo destaca o caráter dialético da argumentação (VOGEL, et. al., 2016) uma vez que é necessário ter autocontrole para gerenciar e superar situações de desacordos e conflitos para se estabelecer o consenso. As habilidades e competências de argumentação são evidenciadas aqui pela capacidade dos alunos terem autocontrole para gerenciar conflitos de ideias bem como avaliar criticamente as ideias do colega e chegar ao consenso (WOOD, 1999; CONNER et. al., 2014, CIVIL e HUNTER, 2015). Em particular, a capacidade de elaborar profundamente as contribuições do seu parceiro de aprendizagem para então criticar e contra-argumentar em função desta contribuição constitui uma habilidade importante que caracteriza esta perspectiva dialética (VOGEL, et.al. 2016).

Na sequência, **o pesquisador indagou os grupos sobre o que eles acharam da atividade fabricação/conversão de números em diferentes sistemas de numeração não decimal? E se algo inserido na atividade auxiliou o grupo na argumentação?**

Na avaliação do grupo 1 (Paulínia e Cristina) a atividade requereu antes uma exploração inicial de pesquisa (produção de conjecturas, teste, refutação) para que posteriormente o grupo tivesse a ideia de como resolver o problema, que por sua vez contemplava modos diferentes de resolução. Com base no que foi pontuado pelos alunos foi possível concluir que atividade de investigação contento problemas abertos à discussão, especialmente aqueles que devem ser resolvidos utilizando estratégias diversas de resolução contribuiu para fomentar a argumentação (SOLAR et. al., 2020; RODRIGUES; SILVA e MONTEIRO, 2021).

Por outro lado, o grupo 2 (Luiz Fernando e Carolina) destacou a atividade como interessante uma vez que permitiu ao grupo compreender a variedade de representações de um número em diferentes sistemas de numeração não decimal. Para além disso o grupo ressaltou também que a atividade permitiu o envolvimento dos seus integrantes em uma argumentação coletiva (CONNER, et.al., 2014) na medida em que todos tiveram a oportunidade de participar colaborativamente, pensando junto, criando e contribuindo com a equipe na solução do problema.

Os alunos do grupo 3 (Lena, Luiz Felipe e Ana Lívia) por sua vez também classificaram a atividade como interessante na medida em que ela viabilizou o entendimento de outros sistemas de numeração que não fosse o decimal. Para tanto o grupo destacou o potencial do material didático concreto utilizado (ficha e os grãos de feijão) como um recurso para estimular o raciocínio e auxiliar a argumentação. Neste último caso o material didático (ficha e os grãos de feijão) e as ilustrações nele produzidas auxiliaram os alunos no processo de argumentação visual (KNIPPING, 2008).

Diante das respostas levantadas, nenhuma evidência sobre o uso do roteiro de colaboração (KOLLAR, et.al., 2014) integrado à atividade foi encontrada a fim de estabelecer algum tipo de relação positiva entre este andaime e a argumentação ocorrida em sala de aula.

O pesquisador, na sequência da dinâmica, indagou aos alunos **que dificuldades eles encontraram na prática de argumentação coletiva realizada?**

Para os integrantes do grupo 1 (Paulínia e Cristina) a maior dificuldade encontrada por eles residia no fato deles não estarem acostumados a uma aula envolvendo argumentação coletiva (CONNER, et. al., 2014) em sala de aula. Ainda de acordo com o grupo, eles estão acostumados com o ensino tradicional pautado na transmissão de um saber que é tido como certo, pronto e ninguém questiona. Experienciar uma prática de argumentação coletiva era algo novo para eles e causava estranheza uma vez que todo mundo tinha que participar, apresentar ideias, discutir, analisar qual ideia era mais coerente e desenvolver ela para chegar a um resultado que fosse verdadeiro.

O grupo 2 (Luiz Fernando e Carolina) apontou como dificuldade a capacidade de expressar o pensamento e compreender o pensamento do outro. Em particular, o grupo cita a dificuldade de expressar por escrito o que foi pensado e discutido por eles bem como provar que um argumento está correto. O uso do material concreto no entendimento do grupo ajudou a viabilizar a argumentação com base no visual (KNIPPING, 2008).

A dificuldade em lidar com opiniões diferentes foi a grande dificuldade apontada pelo grupo 3 (Lena, Luiz Felipe, Ana Lívia), bem como distração e dispersão do grupo durante alguns momentos da discussão.

Diante do exposto, verificou-se que todas as dificuldades citadas estavam mais relacionadas ao componente social-discursivo que envolve as habilidades de argumentação (KOLLAR et. al., 2014).

No nosso dia a dia, exercício da cidadania, por exemplo, pressupõe a formação de um aluno crítico e autônomo, dotado de um conjunto de competências e habilidades relacionadas a capacidade de saber ouvir e compreender o pensamento do outro, saber lidar e respeitar opiniões diferentes, agir e se posicionar (concordando ou discordando), expressar o pensamento (comunicar) de forma crítica e respeitosa e apresentar argumentos para validar suas ideias (BOAVIDA, 2005; JÚNIOR; NASSER, 2014).

Na sequência os alunos opinaram sobre quais os pontos positivos de argumentar e construir argumentos em grupo?

Enquanto ponto positivo, o grupo 1 (Paulínia e Cristina) apontou para a possibilidade de aprender melhor o assunto, na medida em que juntos em grupo, os colegas possam pensar, analisar e discutir e avaliar as ideias de cada um para que então seja encontrada uma melhor solução para o problema, algo que se fosse sozinho, não seria possível de alcançar na mesma qualidade. Para os alunos a interação social e a argumentação são ingredientes importantes para a aprendizagem uma vez que potencializa o aprendizado na medida em que viabiliza condições para o aluno formular, apresentar, refletir e discutir suas ideias em grupo de modo a ampliar a sua compreensão do tema de estudo (CONNOR, et. al., 2014; STAPLES; NEWTON, 2016; MONTEIRO; TEIXEIRA, 2019; ERKEK; ISIKSAL BOSTAN, 2019). A formação de conceitos no contexto citado, se desenvolve inicialmente em um nível interpsicológico resultado das experiencias de interação social no âmbito da argumentação coletiva em grupo e em um segundo momento, no nível intrapsicológico do sujeito (VIGOTSKI, 2009; CONNOR, et.al., 2014).

Para o grupo 2 (Carolina e Luiz Fernando) os pontos positivos de argumentar coletivamente em grupo envolvem o desenvolvimento intelectual e das relações interpessoais

dos sujeitos envolvidos. Nesse sentido o grupo cita o desenvolvimento da capacidade de contestar, compreender várias formas e estratégias de pensar e resolver problemas, compreender melhor a suas próprias ideias na medida em que você tem que explicar para convencer o outro. No que tange o desenvolvimento intelectual dos alunos, Capone et. al. (2020) revela que um aluno inserido nessa cultura de argumentação coletiva, a colaboração do parceiro de aprendizagem (colega ou professor) em uma atividade de grupo é considerada um catalizador das habilidades intelectuais de raciocínio (CAPONE, et.al., 2020). No que se refere ao desenvolvimento das relações interpessoais, as discussões controversas entre os parceiros de aprendizagem, a avaliação crítica dos argumentos produzidos e a integração de partes de argumentos produzidos por cada aluno para se chegar ao consenso contribuem para aprimorar o caráter dialético das discussões (LEITÃO, 2000; SCHWARZ, 2009; SCHWAIGHOFER et al., 2017). Como consequência dessa experiencia de argumentar de forma dialética temos o desenvolvimento de competências ligadas ao caráter interpessoal das relações sociais (BOAVIDA, 2005; JUNIOR; NASSER, 2014). A aprendizagem, nesse contexto é o resultado da superação das diferenças (WEGERIF, 2008; VOGEL, et al. 2016), ou seja, os alunos trocam "*argumentos ou componentes de argumentos que se baseiam nas contribuições do parceiro de aprendizagem abordando diretamente possíveis desacordos ou conflitos, ou que visam a superação de um conflito*" (VOGEL et al., 2016, p.480).

Por sua vez o grupo 3 (Lena, Luiz Felipe e Ana Lívia) destacaram como pontos positivos a possibilidade da participação coletiva e colaborativa na construção de argumento de melhor qualidade (vai juntado a opinião de um com o outro até chegar um consenso). Este ponto positivo destacado pelo grupo evidencia a certeza deles de que o aprendizado é potencializado e documentado em termos das mudanças observadas na qualidade dos argumentos que o grupo consegue produzir juntos de forma coletiva e colaborativa quando comparado a uma construção individual (YACKEL, 2002). O grupo também ressaltou a importância da interação social durante argumentação para viabilizar o aprendizado dos alunos (VIGOTSKI, 2009; BOZELLI; TEIXEIRA, 2019; MONTEIRO; TEIXEIRA, 2019) uma vez que, durante uma argumentação, diferentes pontos de vista são expostos ao grupo e perante isso o aluno tem a oportunidade de avaliar essas ideias para então formar ou mudar a sua forma de pensar (ERKEK; ISIKSAL BOSTAN, 2019).

A aprendizagem no âmbito dos grupos, portanto, foi documentada especialmente pela mudança na qualidade dos argumentos de prova produzidos (YACKEL, 2002) e indicados na seção 7.3. A aprendizagem também foi documentada na seção 7.2 através da descrição de situações de argumentação por meio das quais o conhecimento foi oriundo de um processo de

interação social (VIGOTSKI, 2009) ocorrido no âmbito dos grupos. Este conhecimento viabilizado por meio processo de argumentação coletiva (CONNER, et. al, 2014) favoreceu a produção de argumentos de justificação e proporcionou os alunos uma melhor compreensão do assunto estudado. Em várias situações na referida seção, a aprendizagem também foi documentada em termos das múltiplas representações de uma mesma ideia por meio de diferentes registros de representação semiótica (DUVAL, 2006) e melhoria da qualidade do argumento produzido (YACKEL, 2002).

Na sequência os alunos foram indagados sobre **como eles avaliam o desempenho do grupo na prática da argumentação coletiva em torno da atividade proposta?**

Para o grupo 1 (Paulínia e Cristina) a abordagem de argumentar coletivamente é nova para eles, contudo, por meio dela foi possível compreender o processo de fabricação de números de várias formas. Ainda que o pré-requisito em matemática básica dos membros do grupo fosse variado e até precário, por meio da argumentação coletiva, todos conseguiram se unir para contribuir com algo e fazerem as coisas fluírem até obter os resultados. A avaliação do grupo corroborou para mostrar o quanto a argumentação coletiva (CONNER, et al., 2014) propiciou situações de argumentação onde os alunos puderam compreender melhor os conceitos matemáticos na medida em que eles se uniram para e experienciar juntos de forma colaborativa a progressão do pensamento e do raciocínio fomentado por atos desafio, conflito de ideias, reflexão, justificação e resolução do conflito de ideias no âmbito do grupo (WOOD, 1999; DOGRUER; AKYUZ, 2020).

Na avaliação do grupo 2 (Luiz Fernando, Carolina) foi uma experiencia interessante e não foi difícil de se envolver nela. Todos do grupo colaboraram e conseguiram debater todas as questões. Sempre que surgia uma dificuldade o outro ajudava e tudo foi se encaixando, um falava, o outro avaliava se concordava, ou seja, essa dinâmica melhorou bem mais a forma de pensar e aprender do grupo. De acordo com Dede (2019), as teorias socioculturais no campo da Educação Matemática têm ressaltado a importância da argumentação coletiva (CONNER, et. al., 2014) em sala de aula exatamente para viabilizar situações de aprendizagem como a descrita pelo grupo, ou seja, uma situação em que o aluno interage e aprende com seu parceiro de aprendizagem (VIGOTSKI, 2009; DEDE, 2019) aprimorando dessa forma explicações e justificações matemáticas (CIVIL; HUNTER, 2015).

Já o grupo 3 (Lena, Luiz Felipe e Ana Lívia) avaliaram o desempenho como bom. Ressaltaram que as dificuldades encontradas foram sanadas com o apoio do professor. O professor neste processo cumpriu um papel de orquestrador do discurso (KINIPPING, 2008) e em determinados momentos também participou da elaboração de partes do argumento como

também por meio de questionamentos bem elaborados fomentou a elaboração de argumentos por parte dos alunos (CONNER, et al., 2014). O grupo pontuou ainda que o trabalho em equipe ajudou a desenvolver a capacidade de pensar, falar, apresentar ideias e avaliá-las em conjunto para obter o melhor resultado. Trata-se, portanto, de uma prática de argumentação coletiva (CONNER, et. al.,2014) onde os alunos avaliam criticamente as ideias do parceiro de aprendizagem, experimentam formas alternativas de pensar, reelaboram seu pensamento, constroem consenso e validam resultados colaborativamente (KRUMMHEUER, 1995; CONNER, et. al., 2014; ZAMBAK; MAGIERA, 2020).

Por fim, foi solicitado a cada grupo **indicar algumas competências e habilidades que eles consideram importante para a prática da argumentação em sala de aula.**

Com relação as competências e habilidades o grupo 1 (Paulínia e Cristina) destacou: a curiosidade para investigar, saber se comunicar, ter clareza na comunicação, capacidade de convencimento, capacidade de propor diferentes estratégias e métodos de resolver um problema. Já o grupo 2 (Luiz Fernando e Carolina) destacou o respeito ao colega, escutar e avaliar (raciocinando) as ideias do colega, oportunizar o colega a falar, transmitir ideias com clareza, valorizar todos os argumentos que forem produzidos, elaborar/reelaborar suas ideias em cima das ideias do colega, utilizar objetos concretos para viabilizar a argumentação, argumentar com base no conteúdo (dependência do campo). Por sua vez o grupo 3 (Ana Lívia, Lena e Luiz Felipe) considerou inicialmente o conhecimento prévio como um pré-requisito importante para a prática da argumentação. Na sequência eles pontuaram outras competências e habilidades inerentes ao processo argumentativo, tais como, o respeito as ideias do colega, de modo que este se sinta seguro e a vontade para expressar suas ideias. Construir argumentos colaborativamente construindo sobre a ideia do outro. Ter autocontrole para não julgar as ideias do outro bem como a manutenção da atenção para não perder o foco na argumentação.

Todas as competências e habilidades citadas pelos três grupos estavam relacionadas a normas sociais de argumentação (DOGRUER; AKYUZ, 2020) que segundo os autores referem-se a normas aceitáveis de comunicação dentro de sala de aula. Nenhuma competência e habilidade associada às regras de argumentação matematicamente aceitáveis (normas sociomáticas), ou seja, tipos de justificativas e provas aceitáveis (YACKEL; COBB, 1996; ZAMBAK; MAGIERA, 2020), foram identificadas nas respostas dos grupos. No entanto estas aparecem evidenciadas na seção 7.2 e 7.3 conforme as justificações e provas conceituais que foram aceitas para efeito de validação e explicação.

E por último foi perguntado aos grupos, se **na opinião deles, existe alguma diferença entre prova e demonstração e caso exista, que eles justifiquem as suas ideias**.

O grupo 1 (Paulínia e Cristina), não soube conceituar exatamente os termos “prova” e “demonstração”, no entanto evidenciam que a prova está ligada a um contexto mais específico e particular e por outro lado a demonstração a um contexto mais amplo e geral. Por sua vez o grupo 2 (Carolina e Luiz Fernando) entendem que a prova está associada a um teste empírico prático e a demonstração está relacionado ao conhecimento em debate, envolve o uso de regras e conceitos matemáticos para explicar todo o seu raciocínio. Da mesma forma, o grupo 3 (Ana Lívia, Lena e Luiz Felipe) consideraram que a prova diz respeito a um teste empírico prático sendo um caso particular da demonstração que é mais ampla e se utiliza de recursos aprofundados.

As respostas evidenciaram uma compreensão bem redutora do termo “prova” quando comparado ao termo “demonstração”. É como se o poder da prova estivesse restrito apenas a verificação e teste de casos empíricos. A prova conceitual (BALACHEFF, 1987;1988) não é conhecida por estes alunos e da mesma forma a demonstração enquanto tipo de prova conceitual também é desconhecida. Diante do que foi apontado pelos alunos, consideramos que a melhoria na qualidade do argumento de prova passa pela compreensão dos alunos do que seja provar e demonstrar, como também compreender que uma prova conceitual (BALAHCHEFF, 1987;1988) que explica (HANNA, 2000) tem o poder de provar tanto quanto uma demonstração matemática (prova formal).

O Quadro 25 apresentado a seguir lista uma relação de competências e habilidades argumentativas que os alunos durante as seções de autoscopia consideraram importantes para a prática da argumentação e formação do professor que ensina matemática.

Quadro 25 - Competências e habilidades argumentativas que emergem da autoscopia

Grupo	**Competências e habilidades argumentativas consideradas importantes e necessárias para a formação do professor que ensina matemática com base na autoavaliação das situações de argumentação**
Grupo 1	1-Capacidade de investigar: Curiosidade; elaborar conjecturas; testar; refutar; reformular conjecturas; justificar; provar; compreender o tipo de prova válida. 2- Ter conhecimento prévio do assunto para sustentar a discussão/argumentação. 3- Argumentar coletivamente: discutir ideias, pensar juntos, avaliar a ideia do colega, estabelecer consenso, discutir o que conta como verdadeiro. 4- Expressar com clareza na comunicação das ideias; 5- Propor diferentes estratégias de justificação e resolução de uma conjectura.
Grupo 2	1 – Argumentar coletivamente: Exercitar a escuta ativa; respeitar o colega; argumentar transmitindo o pensamento e as ideias com clareza; compreender e avaliar as diversas formas de pensamento de cada colega; questionar/contestar; 2- Argumentar colaborativamente: pensar e raciocinar em grupo; elaborar e reelaborar suas ideias em cima das ideias do colega; 3- Argumentar com base no conteúdo (dependência da garantia ao campo); 4- Expressar por escrito o que foi pensado;

	5 – Argumentar de forma dialética: avaliar criticamente argumentos e integrar partes de argumentos para convencer e estabelecer o consenso. 6- Compreensão conceitual mais sólida na medida em que o aluno compreende melhor as suas próprias ideias quando este está sujeito a explicá-las e validá-las para convencer o outro e gerar consenso.
Grupo 3	1-Argumentação coletiva: apresentar e defender ideias; avaliar em conjunto e criticar as ideias do parceiro de aprendizagem; reelaborar o pensamento; buscar o consenso; 2- Argumentação colaborativa: construir argumentos a partir das ideias do colega de aprendizagem; validar resultados colaborativamente; 3- Argumentação dialética: Ter autocontrole para gerenciar e superar situações de desacordos e conflitos para estabelecer o consenso; 4- Ter autocontrole para não julgar as ideias do outro, respeitar as ideias do colega; 5- Ter atenção para não perder o foco no discurso argumentativo; 6- Estabelecer a verdade por meio da prova. 7-Ter conhecimento prévio do assunto para sustentar a discussão/argumentação

Fonte: Dados da pesquisa

De modo geral, a autoavaliação do processo argumentativo pelos grupos corroborou para um exercício de prática reflexiva por meio do qual os alunos destacaram estar diante de uma abordagem nova e desconhecida por eles, no entanto, em meio as dificuldades (conteúdo e metodologia), eles conseguiram colaborativamente atingir um aprendizado conceitual e desenvolver competências e habilidades relacionadas a proficiência da prática de argumentação e prova em sala de aula. (STAPLES; NEWTON, 2016). Neste último caso, os alunos apresentaram um conjunto de competências e habilidades argumentativas nos quais eles julgaram ter grande importância para a formação do professor que ensina matemática. De modo particular o grupo 1 ressaltou a importância da atividade de investigação conter problemas abertos com diferentes possibilidades de resolução como forma de fomentar a argumentação e por outro lado consideraram importante o conhecimento prévio do assunto para que os alunos possam da sustentação a argumentação durante o debate. O grupo 2, por sua vez ressaltou o uso do material concreto utilizado na atividade para viabilizar a argumentação bem como a aprendizagem por meio do concreto. Por fim, o grupo 3 também destacou o uso do material concreto na atividade para estimular o raciocínio e fomentar a argumentação. Para além disso o grupo também ressaltou o apoio do professor para que os alunos pudessem construir argumentos de melhor qualidade.

A seguir apresentamos as considerações finais da nossa investigação com base nos resultados encontrados a partir da exploração do nosso estudo de caso.

Considerações finais

Este trabalho teve por objetivo investigar como alunos ingressantes em um curso de Licenciatura em Matemática do IFSULDEMINAS, Campus Passos argumentam e avaliam seu desempenho durante o processo de justificação e validação de conceitos matemáticos em um contexto de ensino baseado em argumentação coletiva e investigação.

Para tanto realizamos um estudo de caso (exploratório/descritivo/explicativo) para compreender melhor o fenômeno que envolve "**três situações de argumentação coletiva**" em um contexto de ensino envolvendo argumentação coletiva (3 grupos) e investigação matemática. O estudo de caso foi estruturado em três fases. Na **1ª fase** realizamos uma pesquisa bibliográfica (estado do conhecimento) e uma pesquisa bibliométrica para estabelecer a definição do problema, os objetivos de pesquisa, a questão central de investigação bem como a seleção do referencial teórico da pesquisa. Já na **2ª fase** coletamos dados por meio de observação participante (documentada por meio de videogravação e notas de campo), recolha de registros escritos produzidos pelos grupos de trabalho e autoscopia operacionalizada pela dinâmica de grupo focal. Com a observação participante registramos todo o processo de argumentação coletiva realizada de modo oral e multimodal. Por meio da recolha dos registros escritos produzidos pelos grupos de trabalho documentamos toda a produção de argumentos gerados por escrito. E por último, com a autoscopia, propiciamos cada grupo de trabalho autoavaliar coletivamente o seu desempenho na argumentação. Na **3ª e última fase,** analisamos os dados com base na lente teórica da análise argumentativa (Toulmin, 1958; 2001) e da análise de conteúdo (Bardin, 1985). Com base na análise da estrutura do argumento (Toulmin, 2001) e nas estruturas globais de argumentação analisamos a anatomia do processo argumentativo buscando compreender como os alunos argumentam (raciocinam) para justificar conceitos e ideias matemáticas. Por outro lado, por meio da estrutura do argumento de Toulmin aliado as ideias de Nicolas Balacheff sobre os tipos e níveis de prova analisamos a fisiologia do argumento de prova enquanto produto final da argumentação para compreender como os alunos argumentam (raciocinam) para validar ideias matemáticas em problemas de prova. Por fim, aplicamos a análise de conteúdo nas transcrições das sessões de autoscopia para compreender como os alunos autoavaliam seu desempenho da prática da argumentação e quais competências e habilidades argumentativas são evidenciadas como importantes por estes alunos visando a formação do professor que ensina matemática.

Com base na análise da argumentação coletiva (oral, escrita, multimodal) realizada em torno da atividade de investigação numerica (5 problemas) os resultados obtidos são apresentados a seguir de modo a trazer as respostas para as questões de pesquisa.

1-Como alunos ingressantes na licenciatura em matemática argumentam para justificar conceitos e ideias matemáticas em um contexto de argumentação coletiva e investigação? Que estrutura (s) de argumentação global pode (m) ser identificada (s) para examinar o tipo de raciocínio empregado por estes alunos durante a argumentação?

No **problema 1** da atividade de investigação três estruturas globais de argumentação foram encontradas muito em função do tipo de apoio docente fornecido aos grupos. Tanto o grupo 1 quanto o grupo 2 contaram com um tipo de apoio docente bem semelhante e por consequência disso geraram estruturas globais de argumentação bem parecidas (Estrutura reservatório). A estrutura de reservatório é tida como a mais complexa dentre todas as estruturas citadas na literatura uma vez que o raciocínio do aluno retroage para frente e para trás promovendo deduções adicionais em direção a novas justificações para apoiar a conclusão. O apoio docente na orquestração do discurso corroborou para que esta estrutura fosse obtida. Por outro lado, o grupo 3 atuando de forma mais autônoma no processo de argumentação coletiva e sem contar com o mesmo tipo de apoio docente oferecido aos grupos 1 e 2, acabou, contudo, por gerar uma estrutura nova e não documentada na literatura. Esta foi descrita neste estudo como Estrutura Fonte Divergente. A explicação para o surgimento desta estrutura, portanto, se deve a natureza do problema proposto na atividade, ou seja, o problema permitia uma leitura subjetiva e diferente dos dados o que levou os alunos a obterem conclusões diferentes apoiados nos dados. A melhoria da qualidade do argumento de justificação, ou seja, a passagem da argumentação visual para a argumentação conceitual foi viabilizada pelo apoio docente para os grupos 1 e 2 e pela orientação inserida na atividade para o grupo 3. Para ambos os grupos, a aprendizagem durante a argumentação coletiva foi documentada em termos de mudanças na qualidade do argumento produzido pelos grupos como também através do processo de conversão das representações semióticas entre registros.

O **segundo problema** de investigação resultou em uma estrutura de argumentação semelhante para os três grupos, ou seja, a estrutura espiral. Contudo, a estrutura se diferenciou um pouco de um grupo para outro em função do número de fluxos paralelos existentes, ou seja, o número de soluções diferentes que os grupos conseguiram exibir. Os grupos 1 e 3 exibiram duas resoluções diferentes para justificar a sua conclusão para o problema. Por sua vez o grupo 2 exibiu três resoluções diferentes para justificar a sua conclusão. É importante ressaltar que a natureza do problema proposto (problema não estruturado) favoreceu a utilização de diferentes estratégias de justificação (resolução) da conclusão. Para além disso, o apoio do professor, na orquestração do discurso, especialmente solicitando aos grupos a exibição de outros métodos e estratégias de solução do problema corroborou também para o surgimento da estrutura espiral.

O raciocínio utilizado pelos grupos 2 e 3 durante a exibição das soluções geométricas e aritméticas como forma justificação para a conclusão do problema esteve associado a uma argumentação que transitou da produção de argumentos visuais para argumentos conceituais. No entanto, nas justificações produzidas pelo grupo 1, o raciocínio utilizado pelos alunos ficou restrito a produção de argumentos visuais a partir dos quais o material concreto (ficha e grãos de feijão) foi acionado a todo momento para auxiliar a argumentação. Nesse caso, a passagem da argumentação visual para a argumentação conceitual poderia ter sido viabilizada pelo docente, caso este tivesse solicitado aos alunos a elaboração de argumentos de justificação desprendidos do uso do material concreto. Para os grupos 2 e 3 a aprendizagem foi documentada pela mudança (evolução) na qualidade do argumento de justificação produzido pelos alunos. Em todos os grupos aprendizagem conceitual relativo ao tema proposto no problema foi documentado através dos variados processos de conversão das representações semióticas entre registros no âmbito de cada grupo no estudo do problema.

O **terceiro problema** resultou em uma estrutura de argumentação semelhante para os grupos 1 e 3, ou seja, a estrutura espiral. Contudo, a estrutura se diferenciou um pouco uma da outra em função do número de fluxos paralelos existentes, ou seja, o número de modos de provas exibidos por cada grupo a pedido do professor. A anatomia desta estrutura reflete, portanto, o apoio docente junto ao grupo, na medida em que ele avaliava os raciocínios utilizados nos modos de prova e solicitava aos alunos logo em seguida outros tipos de justificações mais generalistas. Por outro lado, sem contar com o apoio docente, a discussão ocorrida no âmbito do grupo 2 gerou uma estrutura anatômica linear. Isso ocorreu porque o grupo não solicitou apoio docente na avaliação do argumento produzido. Esta estrutura pode ser gerada também em situações em que o professor não participa da argumentação coletiva junto ao grupo e os alunos são livres para expressar o seu modo de prova. A aprendizagem foi documentada na evolução da qualidade dos argumentos produzidos durante a argumentação coletiva. Em particular, no âmbito do grupo 1 a argumentação visual evoluiu do nível concreto-visual para o nível visual-conceitual. Em relação ao grupo 2, os argumentos evoluíram de uma argumentação visual para uma argumentação conceitual e por fim no âmbito do grupo 3, a argumentação iniciou em um nível concreto-visual, transitou na sequência para uma argumentação visual a nível de teste crucial e por fim avançou para uma argumentação em um nível conceitual e racional.

O **quarto problema** de investigação resultou em três estruturas de argumentação distintas para cada grupo. A estrutura de argumentos independentes modelou a anatomia da argumentação do grupo 1 uma vez que o grupo, ainda que apoiado pelo professor, não

conseguiu estabelecer uma resolução (conclusão) para o problema. Já a estrutura de linha representou a argumentação do grupo 2. O fato do professor não ter participado da discussão (oferecendo suporte e apoio) contribuiu para que a estrutura argumentativa gerada fosse mais simples, uma vez que os alunos apresentaram apenas uma única solução para o problema. Caso o apoio do professor tivesse sido requisitado, ou se ele tivesse acompanhado a discussão do grupo no momento da resolução da questão, provavelmente teria solicitado ao grupo outro tipo de justificação relacionada a outro modo de resolução do problema. Nessa situação, a estrutura poderia ter evoluído para uma estrutura espiral. Por fim, a estrutura espiral modelou geometricamente toda a argumentação no âmbito do grupo 3. O grupo conseguiu produzir duas estratégias de resolução para efeito de justificação da solução do problema. Isso foi devido ao apoio do professor que solicitou do grupo outra forma de resolução para o problema. Isso acabou contribuindo com o tipo e forma da estrutura gerada. A aprendizagem foi documentada no âmbito dos grupos 2 e 3, pela evolução na qualidade da argumentação que se iniciou com a produção de argumentos visuais e terminou com a elaboração de um argumento conceitual. Para tanto, o papel do professor foi importante para viabilizar esta transição, especialmente no âmbito da argumentação coletiva realizada pelo grupo 3. Ainda com relação a este último grupo a aprendizagem de conceitos foi documentada por meio da conversão das representações semióticas entre registros.

O **quinto problema** da atividade resultou em uma estrutura de argumentos independentes e duas estruturas fonte. A estrutura de argumentos independentes surgiu no contexto em que o grupo 1 não conseguiu resolver o problema de prova proposto. Por sua vez a estrutura fonte surgiu no contexto de argumentação dos grupos 2 e 3. O grupo 2, partindo de um caso empírico de referência, conseguiu desenvolver uma argumentação essencialmente conceitual ao longo de toda a situação argumentativa. Apoiados pelo professor em melhorar a justificação empreendida, o grupo desenvolveu uma etno-argumentação que transitou de uma explicação conceitual e geral na linguagem informal para uma explicação conceitual e geral na linguagem matemática. Por outro lado, no âmbito do grupo 3, a argumentação se baseou em argumentos essencialmente empíricos para viabilizar sem sucesso uma generalização o que tornou a prova apresentada não probatória. O professor ofereceu apoios ao grupo na tentativa de melhorar o argumento de prova, contudo, o grupo não conseguiu avançar na discussão em direção a uma argumentação conceitual e mais generalista. A aprendizagem de prova foi documentada apenas para o contexto de argumentação envolvendo o grupo 2, uma vez que o grupo mostrou evolução na qualidade do argumento produzido. Em outras palavras, contando com o apoio docente, o argumento de prova conceitual contemplou uma generalização que

evoluiu da linguagem corrente (informal) para a linguagem matemática, sem, contudo, envolver rigor e forma característicos do argumento analítico.

De modo geral os grupos 2 e 3 conseguiram na maioria das questões desenvolver uma argumentação que evoluiu de justificações com base no visual para justificações conceituais e racionais. Por outro lado, o grupo 1 teve dificuldades em produzir argumentos de justificação conceitual. Em todas as situações de argumentação, o material didático concreto auxiliou no surgimento da argumentação visual e a transição desta para a argumentação conceitual esteve na maioria das vezes ligadas ao apoio docente durante a argumentação. Destacamos nesta parte dos resultados o surgimento de uma nova estrutura de argumentação global não documentada na literatura e descrita por nós como "estrutura fonte divergente".

Para o contexto de formação de professores os resultados mostraram a importância da aprendizagem de conceitos matemáticos se dar a partir de uma dinâmica de trabalho em grupo em um contexto de ensino envolvendo argumentação coletiva e investigação matemática. Por meio dos resultados obtidos, foi possível verificar que a natureza da atividade (investigação) proposta, os problemas (não estruturados) utilizados, a metodologia proposta (argumentação coletiva) e o material concreto (MD) utilizado como recurso didático contribuíram para viabilizar e fomentar inicialmente a produção de argumentos empírico-visuais. Estes argumentos por sua vez evoluíram para argumentos conceituais muito em função do apoio fornecido pelo professor (solicitando generalizações) durante a sua participação na argumentação coletiva como também através do roteiro de colaboração inserido na atividade. Este resultado, reforça também, a necessidade de os cursos de formação de professores, investirem em pesquisa e planejamento de práticas metodológicas semelhantes a que foi apresentada, uma vez que estas são capazes de viabilizar a complexa passagem/transição do argumento empírico para o argumento conceitual.

2-Como alunos ingressantes na licenciatura em matemática argumentam para validar conceitos e ideias matemáticas em um contexto de argumentação coletiva e investigação?

No que tange a produção e avaliação do argumento de prova inserido no **problema 3** da atividade, os resultados revelaram ainda que os alunos do grupo 1 produziram dois tipos prova empírica (prova pragmática) para validar o problema. Ambos os tipos de prova foram considerados não probatórios, contudo, ao menos o segundo tipo de prova produzida representou um avanço no aprendizado de prova para os alunos do grupo uma vez que eles transitaram de nível inferior de "empirismo ingênuo" no primeiro modo de prova pragmática para um nível superior "exemplo genérico" no segundo modo de prova pragmática. Por sua vez o grupo 2, obteve melhor êxito, na medida em que conseguiu produzir um tipo de prova

conceitual em um nível de experiência mental. O raciocínio do grupo partiu de um caso particular de referência, se desprendeu da contextualização em torno do objeto durante a descrição da garantia, apresentando por fim um argumento de validação com uma descrição genérica, explicativa, probatória e expressa por meio da linguagem informal. Por fim o grupo 3, apresentou três modos de prova que no decorrer do processo foram evoluindo. Do primeiro modo de prova para o segundo modo, o grupo transitou de uma prova pragmática no nível de "empirismo ingênuo" para uma prova pragmática no nível "experimento crucial". E na sequência, no terceiro modo de prova, apresentaram por fim uma prova conceitual no nível de "experiência" mental. A evolução no modo de prova, se deu muito por conta do apoio fornecido pelo professor aos grupos, principalmente quando este avaliava as provas produzidas pelos alunos e incentivava os mesmos a melhorarem a explicação promovendo generalizações. Apenas os grupos 2 e 3 conseguiram produzir uma prova sólida de qualidade, ou seja, um argumento de prova forte e bem elaborado.

Com relação a produção e avaliação do argumento de prova inserido no **problema 5** da atividade, os resultados revelaram que apenas os grupos 2 e 3 foram capazes de apresentar provas na tentativa de validar o problema proposto. Em particular o grupo 2 produziu uma prova conceitual no nível de "experiencia mental". A prova atingiu satisfatoriamente a função de "provar e explicar" dentro de um contexto de etno-argumentação em sala de aula. Durante a sua produção pelo grupo, a generalização evoluiu da linguagem corrente (informal) para a linguagem matemática. Já o grupo 3 produziu uma prova empírica (pragmática) no nível de "empirismo ingênuo" para validar o processo de conversão. A prova foi recusada pelo professor uma vez que a considerou não probatória. Ele incentivou o grupo a produzir uma outra prova mais genérica para explicar o processo de conversão, no entanto, o grupo não avançou na discussão, talvez por terem se sentido convencidos com a prova produzida. Apenas o grupo 2 conseguiu produzir uma prova sólida e de qualidade, ou seja, um argumento de prova forte e bem elaborado.

De modo geral apenas o grupo 2 foi capaz de obter êxito nos dois problemas de prova, mantendo a qualidade (solidez) do argumento de prova como forte e bem elaborado. O grupo 1 não foi capaz de produzir uma prova probatória em nenhum momento. Já o grupo 3 evoluiu na qualidade da prova produzida (argumento fraco e pouco elaborado para argumento forte e bem elaborado) para o problema 3, no entanto, não foi capaz de produzir uma prova probatória para o problema 5. O apoio docente foi importante para a evolução do argumento de prova.

No contexto da formação de professores, o estudo mostrou a importância do professor de matemática conhecer os vários tipos de prova em matemática e as suas diferentes

possibilidades de etnoargumentação no contexto de sala de aula. Os resultados mostraram o quanto é importante em um primeiro momento o professor identificar o nível de prova dos alunos com base no primeiro modo de prova elaborado por eles durante o trabalho em grupo. Posteriormente, tomando como ponto de partida este primeiro modo de prova elaborado pelo grupo, o estudo mostrou a importância da intervenção do professor junto ao grupo, participando ativamente da argumentação coletiva, promovendo reflexões e incentivando os alunos a realizarem raciocínios generalizadores de modo a produzirem colaborativamente provas conceituais em diferentes níveis de etnoargumentação. A participação ativa do professor durante a argumentação coletiva, avaliando e reavaliando os argumentos de validação, considerando o que é probatório e não probatório, bem como solicitando generalizações junto ao grupo, constituiu por meio deste estudo uma estratégia interessante e eficaz para minimizar a tensão envonvendo a complexa passagem/transição da prova empírica para a prova conceitual/formal.

A estrutura de avaliação do argumento de prova proposto por Rodrigues e Monteiro (2021) foi testada pela primeira vez neste estudo. Diante dos resultados obtidos ela se mostrou útil para avaliar a qualidade (solidez) do argumento de prova produzido a partir da classificação dos componentes do argumento de prova. Em particular no contexto deste estudo, não houve nenhum tipo de dado que pudesse ser classificado como bibliográfico, no entanto, os resultados apontaram para a necessidade de a estrutura incorporar uma terceira classificação para os tipos de dados, ou seja, “o dado genérico”. Em nenhum momento da análise foi reportado dados que fizesse referência a qualificadores modais durante a produção dos argumentos de prova.

No contexto da formação de professores, o modelo de avaliação do argumento de prova proposto por Rodrigues e Monteiro (2021), em decorrência dos resultados encontrados neste estudo, se apresenta, portanto, como uma ferrametne útil para ser explorada e utilizada pelo professor de matemática para avaliar a qualidade do argumento de prova para fins de validação na Educação Básica. O modelo desenvolvido pelo autor pode ser utilizado como um instrumento eficaz para avaliar o nível de competência e habilidade do (s) aluno (s) da Educação Básica no que tange a proficiência da prática argumentativa para fins de prova.

3) Como os alunos investigados autoavaliam o seu desempenho na prática de argumentação coletiva?

De modo geral, a autoavaliação do processo argumentativo pelos grupos corroborou para um exercício de prática reflexiva por meio do qual os alunos destacaram estar diante de uma abordagem nova e desconhecida por eles. No entanto, em meio as dificuldades (conteúdo e metodologia), eles conseguiram colaborativamente atingir um aprendizado conceitual e

desenvolver competências e habilidades relacionadas a proficiência da prática de argumentação e prova em sala de aula. De modo particular o grupo 1 ressaltou a importância de a atividade de investigação conter problemas abertos com diferentes possibilidades de resolução como forma de fomentar a investigação e argumentação em sala de aula. Para eles o conhecimento prévio do assunto é fundamental para que se possa sustentar uma argumentação durante o debate. O grupo 2, por sua vez ressaltou o uso do material concreto utilizado na atividade para viabilizar a argumentação bem como a aprendizagem por meio do concreto e visual. Por fim, o grupo 3 também destacou o uso do material concreto na atividade para estimular o raciocínio e fomentar a argumentação. Para além disso o grupo também ressaltou o apoio do professor para que os alunos pudessem construir argumentos de melhor qualidade.

4) Com base na autoavaliação dos alunos, que competências e habilidades argumentativas são explicitadas como importantes para a formação do professor que ensina matemática?

Diante da experiencia de argumentação coletiva experienciada e do exercício de refletir coletivamente sobre esta prática, emergiu, portanto, da autoavaliação dos grupos um conjunto de competências e habilidades argumentativas que os alunos declararam terem tido dificuldades, contudo, foram tidas como importantes/necessárias/fundamentais para a formação do professor que ensina matemática. **1- Competências e habilidades argumentativas ligadas ao componente social discursivo:** Realizar escuta ativa, respeitar as ideias do colega, discutir ideias, avaliar, questionar e contestar as ideias do parceiro de aprendizagem, pensar juntos, expressar com clareza na comunicação das ideias, elaborar e reelaborar as ideias a partir das ideias do colega; construir argumentos a partir das ideias do parceiro de aprendizagem; ter autocontrole para gerenciar e superar situações de desacordos e conflitos para estabelecer o consenso, validar resultados coletivamente e colaborativamente, ter atenção para não perder o foco na discussão. **2- Competências e habilidades argumentativas ligadas ao componente específico matemático:** Ter conhecimento prévio do assunto para sustentar a discussão/argumentação; elaborar conjecturas; testar; refutar; reformular conjecturas; justificar; provar; compreender o tipo de prova válida, estabelecer a verdade por meio da prova, compreender o que conta como verdadeiro no campo, argumentar com base no conteúdo, propor diferentes estratégias de justificação de uma conjectura, expressar matematicamente por escrito o que foi pensado.

No que tange a formação do professor que ensina matemática, o estudo mostrou que o o desenvolvimento destas competências e habilidades ligadas à proficiência da prática de argumentação e prova foram desenvolvidas e potencializadas por meio da dinâmica de argumentação coletiva em grupo, contando com o apoio do professor nas discussões bem como

o suporte do material didático concreto em uma atividade de investigação contendo problemas não estruturados.

Com relação as limitações deste estudo, o modelo que envolve as estruturas globais de argumentação não contempla em seu layout as contribuições individuais de alunos e professor para a argumentação coletiva. Nesse sentido, trabalhos futuros poderão ser realizados no intuito de testar uma implementação diagramática de cores diferentes para cada componente do argumento e associá-las a participação individual de cada sujeito envolvido na prática de argumentação coletiva. Outra limitação deste modelo envolve a impossibilidade de representar os fluxos de argumentação na linha do tempo em que eles ocorrem em sala de aula, ou seja, o modelo desvaloriza o momento em que um determinado argumento é introduzido na estrutura.

Neste contexto, sugerimos para efeito de trabalhos futuros, um estudo comparativo sobre a natureza das estruturas de argumentação global em um contexto de ensino que avalie o surgimento e a complexidade destas estruturas ao longo de atividades experimentais presenciais, virtuais e remotas.

Com relação ao modelo utilizado para avaliar a qualidade (solidez) do argumento de prova produzido pelos alunos, ele foi testado pela primeira vez neste estudo e os resultados mostraram a compatibilidade do modelo para avaliar e classificar os componentes do argumento de prova, exceto os qualificadores modais, uma vez que estes não foram identificados durante o processo de argumentação coletiva neste estudo. A única não conformidade encontrada na avaliação deste modelo foi a impossibilidade de classificar um tipo de dado que apareceu no contexto da nossa pesquisa, ou seja, o dado genérico. Nesse sentido, mais estudos podem ser realizados no intuito de avaliar a compatibilidade do modelo a outros contextos de ensino bem como avaliar a possibilidade de ampliação das categorias propostas para cada componente do argumento.

Na perspectiva das práticas educacionais inclusivas, ressaltamos a necessidade de trabalhos futuros que contemplem o desenvolvimento de estruturas (modelos) de argumentação e prova que leve em consideração a captação e avaliação de argumentos produzidos por modos de argumentação não escritos e orais. Esta discussão não está presente na literatura de pesquisa.

Por meio do estudo de caso envolvendo alunos ingressantes em um curso de formação de professores examinamos com detalhes toda a anatomia do processo de argumentação em um contexto de ensino que envolve argumentação coletiva e investigação matemática. Os resultados indicaram que as estruturas de argumentação global variavam em sua complexidade muito em função do apoio docente que é oferecido a argumentação como também em função da natureza do tipo de problema proposto. Neste contexto global, as argumentações de uma

maneira geral, evoluíram do campo visual de justificação para o campo conceitual e o material concreto utilizado na atividade viabilizou essa transição. Por outro lado, examinamos em detalhes toda a fisiologia e qualidade (solidez) do argumento de prova utilizado para fins de validação. Os resultados mostraram que os alunos investigados tiveram dificuldades em produzir provas conceituais, contudo essa dificuldade é minimizada quando o professor oferece apoio solicitando generalizações. Quando chamados a refletirem e realizarem uma autoavaliação do desempenho deles na prática da argumentação coletiva, os alunos destacaram a possibilidade de em colaboração com os colegas melhorar o aprendizado e desenvolver competências e habilidades relacionadas a proficiência da prática de argumentação e prova em sala de aula. Neste último caso, os alunos citam uma relação de competências e habilidades argumentativas relacionados aos componentes “social-discursivo” e “individual-matemático” nos quais eles avaliam ser importantes para a formação do professor que ensina matemática.

Avaliar a argumentação e prova em sala de aula é uma questão complexa. Perspectivas de pesquisas passadas nos ajudaram a entender alguns dos dilemas e desafios de envolver os alunos em uma atividade de argumentação e prova em sala de aula. Complementar estes pontos de vista com análises baseadas em modelos e métodos originais neste estudo foi promissor e nos permitiu ampliar o conhecimento na área.

REFERÊNCIAS

ALBANO, G.; DELLO IACONO, U. A scaffolding toolkit to foster argumentation and proofs in mathematics: some case studies. **International Journal of Educational Technology in Higher Education**, v. 16, n. 1, 1 dez. 2019.

ALMEIDA. J. C. P. de. **Argumentação e prova na matemática escolar do ensino básico:** a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. 2007. 221 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

ALMEIDA, W. N. C.; MALHEIRO, J. M. S. A argumentação e a experimentação investigativa no ensino de matemática. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Florianópolis, v. 11, n. 2, p. 57-83, nov. 2018.

ALVES-MAZZOTTI, A. J. **O método nas ciências sociais**. São Paulo: Editora Pioneira, 1998.

AMOSSY, R. Argumentação e análise do discurso: perspectivas teóricas e recortes disciplinares. **Revista Eletrônica de Estudos Integrados em Discurso e Argumentação**, v. 0, n. 1, p. 129–144, 2011.

ANDRIESSEN, J.; BAKER, M.; SUTHERS, D. D. Argumentation, computer support, and the educational context of confronting cognitions. In: ANDRIESSEN, J.; BAKER, M.; SUTHERS, D. D. (Eds.). . **Arguing to learn: Confronting cognitions in computer-supported collaborative learning environments**. New York: Springer, 2003. p. 1–25.

ARAUJO, I. B. de. **Uma abordagem para a prova com construções geométricas e Cabri-géomètre**. 2007. 291 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

ASTERHAN, C. S. C.; SCHWARZ, B. B. Argumentation and explanation in conceptual change: Indications from protocol analyses of peer-to-peer dialog. **Cognitive Science**, v. 33, n. 3, p. 374–400, 2009.

ASTERHAN, C. S. C.; SCHWARZ, B. B. Argumentation for Learning: Well-Trodden Paths and Unexplored Territories. **Educational Psychologist**, v. 51, n. 2, p. 164–187, 2016.

AYALON, M. Exploring changes in mathematics teachers' envisioning of potential argumentation situations in the classroom. **Teaching and Teacher Education**, v. 85, p. 190–203, 1 out. 2019.

AYALON, M.; HERSHKOWITZ, R. Mathematics teachers' attention to potential classroom situations of argumentation. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 49, p. 163–173, 1 mar. 2018.

AZEVEDO, S. A. A. **O desafio de argumentar nas aulas de Matemática:** uma investigação com estudantes do 1º ano do Ensino Fundamental. 2019. 259 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2019.

BALACHEFF, N. Processus de preuve et situations de validation. **Educational Studies in Mathematics**, v. 18, n. 2, p. 147–176, 1987.

BALACHEFF, N. Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics (ODD). **Mathematics, teachers, and children**, p. 215–235, 1988.

BARBOSA, E. S. de S**. Argumentação e prova no ensino médio:** análise de uma coleção didática de matemática. 2007. 143 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1985.

BARTO, M. C. A. L. **Um olhar sobre as ideias matemáticas em um curso de cálculo:** a produção de significados para a continuidade. 2004. 145 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

BASTOS, C. L.; KELLER, V. **Aprendendo a aprender**. 6 edição ed. Petrópolis: Vozes, 1995.

BAUER, M. .; GASKELL, G. **Pesquisa Qualitativa com texto, imagem e som: um manual prática**. 7. ed. Petrópolis: Vozes, 2008.

BERLAND, L. K.; MCNEILL, K. L. A learning progression for scientific argumentation: Understanding student work and designing supportive instructional contexts. **Science Education**, v. 94, n. 5, p. 765–793, 2010.

BERLAND, L. K.; REISER, B. J. Making sense of argumentation and explanation. **Science Education**, v. 93, n. 1, p. 26–55, 2009.

BIANCHI, C. **A lógica no desenvolvimento da competência argumentativa**, 2007. 206f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

BICUDO, I. Demonstração em Matemática. **Bolema - Boletim de Educação Matemática**, v. 15, n. 18, p. 79–90, 2002.

BOAVIDA, A. M. R. **A argumentação em Matemática Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração**. 2005. 975f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, 2005.

BOAVIDA, A.M.R.; PAIVA, A. L.; CEBLA, G.; VALE, I.; PIMENTEL, T. **A experiências matemática no ensino básico**: Programa de formação contínua em matemática para professores dos 1º e 2º ciclos do ensino básico. Lisboa: Ministério da Educação, 2008.

BOERO, P. Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. **Prueba: International Newsletter on the Teaching and Learning of Proof**, p. 1–6, 1999.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C. et al. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

BOZELLI, F. C.; TEIXEIRA, O. P. B. **Contextos argumentativos e discursivos no ensino de Ciências**. 1. ed. São Paulo: Espelho D'alma, 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica, Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão; Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica. **Base Nacional Comum Curricular**. 2017.

BRESOLIN, N. R. Q. **Geometria sintética**: investigação sobre o uso de um software de geometria dinâmica como meio para demonstrações visuais. 2016. 108f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática) - Centro Universitário Franciscano, Santa Maria – RS.

BRETON, P. **A argumentação na comunicação**. Bauru: EDUSC, 1999.

CAMPOS, R. R. **Argumentação e demonstração dos alunos do Ensino Médio:** uma proposta de investigação matemática sobre crescimento e decrescimento de funções afins. 2018. 94f. Dissertação (Mestrado profissional em Ensino de Matemática) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

CAPONE, R. et al. Mathematical competencies: a case study on semiotic systems and argumentation in an Italian High School. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, 2020.

CARPES, A. D. M.; SCHERER, F. L.; BEURON, T. A. PANORAMA INTERNACIONAL DAS PUBLICAÇÕES EM MARKETING E Hot Topics RELACIONADOS. **Estudo & Debate**, p. 29–40, 2011.

CARVALHO, M. B. de. **Concepções de alunos sobre provas e argumentos matemáticos:** análise de questionário no contexto do Projeto AProvaME. 2007. 138 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

CERVANTES-BARRAZA, J. A.; HERNANDEZ MORENO, A.; RUMSEY, C. Promoting mathematical proof from collective argumentation in primary school. **School Science and Mathematics**, v. 120, n. 1, p. 4–14, 1 jan. 2020.

CIVIL, M.; HUNTER, R. Participation of non-dominant students in argumentation in the mathematics classroom. **Intercultural Education**, v. 26, n. 4, p. 296–312, 4 jul. 2015.

CONNER, A. M. et al. Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. **Educational Studies in Mathematics**, v. 86, n. 3, p. 401–429, 2014.

COSTA, V. M. **Argumentações matemáticas sob uma perspectiva crítica:** análise de práticas didáticas no ensino fundamental. 2017. 123f. Dissertação (Mestrado profissional em Ensino de Matemática) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

CRUZ, F. P. da. **Argumentação e prova no ensino fundamental:** análise de uma coleção didática de matemática. 2008. 123 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

DA ROCHA, A. C. et al. Recursos Hídricos e Gestão: Um estudo bibliométrico da produção

científica e dos hot topics publicados na base Web of Science na última década. **Espacios**, v. 34, n. 5, p. 1–16, 2013.

DEDE, A. T. Arguments constructed within the mathematical modelling cycle. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 50, n. 2, p. 292–314, 2019.

DEMIRAY, E.; IŞIKSAL BOSTAN, M. An Investigation of Pre-service Middle School Mathematics Teachers' Ability to Conduct Valid Proofs, Methods Used, and Reasons for Invalid Arguments. **International Journal of Science and Mathematics Education**, v. 15, n. 1, p. 109–130, 1 jan. 2017.

DIAS, C. A. Grupo focal: técnica de coleta de dados em pesquisas qualitativas. **Informação & Sociedade: estudos**, v. 10, n. 2, p. 141–158, 2000.

DOGRUER, S. S.; AKYUZ, D. Mathematical Practices of Eighth Graders about 3D Shapes in an Argumentation, Technology, and Design-Based Classroom Environment. **International Journal of Science and Mathematics Education**, 2020.

DOMINGUES, H. H. A Demonstração ao Longo dos Séculos. **Bolema - Boletim de Educação Matemática**, v. 15, n. 18, p. 55–67, 2002.

DORO, A. T. **Argumentação e prova: análise de argumentos geométricos de alunos da educação básica.** 2007. 125 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007. 227.

DOUEK, N.; PICHAT, M. From oral to written texts in grade I and the approach to mathematical argumentation. **Proceedings of PME-XXVII**, v. 2, p. 341-348, Honolulu, 2003.

DRIVER, R.; NEWTON, P.; OSBORNE, J. Establishing the norms of scientific argumentation in classrooms. **Science Education**, v. 84, n. 3, p. 287–312, 2000.

DUVAL, R. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 61, n. 1–2, p. 103–131, 2006.

EDUARDO, A. C. **Contextos para argumentar:** uma abordagem para iniciação a prova no EM utilizando P.A. 2007. 213 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

ELLIS, A. B. et al. Middle school students' example use in conjuecture exploration and justification. **34th Annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology Of Mathematics Education**, n. April 2014, p. 135–142, 2012.

ERKEK, Ö.; BOSTAN, M. I. A different look at the reasoning process of prospective middle school mathematics teachers: Global argumentation structures. **Egitim ve Bilim**, v. 44, n. 199, p. 1–27, 2019.

ERKEK, Ö.; IŞIKSAL BOSTAN, M. Prospective Middle School Mathematics Teachers' Global Argumentation Structures. **International Journal of Science and Mathematics Education**, v. 17, n. 3, p. 613–633, 15 mar. 2019.

EVANGELISTA, E.M. **A educação matemática na revista Nova Escola.** 2008. 65f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e o Ensino da Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2008.

FARIA, R. **Elaborando e lendo gráficos cartesianos que expressam movimento:** uma aula utilizando sensor e calculadora gráfica. 2007. 119 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

FELTON, M.; GARCIA-MILA, M.; GILABERT, S. Deliberation versus Dispute: The Impact of Argumentative Discourse Goals on Learning and Reasoning in the Science Classroom. **Informal Logic**, v. 29, n. 4, p. 417, 2009.

FERREIRA FILHO, J. L. **Um estudo sobre argumentação e prova envolvendo o teorema de Pitágoras.** 2007. 189 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

FERRÉS, J. **Vídeo e educação.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

FIALLO, J.; GUTIÉRREZ, A. Analysis of the cognitive unity or rupture between conjecture and proof when learning to prove on a grade 10 trigonometry course. **Educational Studies in Mathematics**, v. 96, n. 2, p. 145–167, 2017.

FIGUEIRA, M. J. S.; NARDI, R. A argumentação no ensino de Ciências: perspectivas teóricas, apontamentos metodológicos e atividades didáticas sobre o tema. In: BOZELLI, F. C.; TEIXEIRA, O. P. B. (Eds.). . **Contextos argumentativos e discursivos no ensino de Ciências**. 1ª ed. São Paulo: Espelho D'alma, 2019. p. 318.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2006.

FISCHBEIN, E. The theory of figural concepts. **Educational Studies in Mathematics**, v. 24, n. 2, p. 139–162, 1993.

FLICK, U. **Introdução à Metodologia de Pesquisa: um guia para iniciantes**. Porto Alegre: Penso, 2013.

FREEMAN, J. B. Systematizing Toulmin's warrants: An epistemic approach. **Argumentation**, v. 19, n. 3, p. 331–346, 2005.

GOODE; HATT, K. **Métodos em Pesquisa Social**. São Paulo: Editora Nacional, 1968.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. [s.l: s.n.].

GRINKRAUT, M. L**. Formação de professores envolvendo a prova matemática:** um olhar sobre o desenvolvimento profissional. 2009. 349 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

HANNA, G. Some pedagogical aspects of proof. **Interchange**, v. 21, n. 1, p. 6–13, 1990.

HANNA, G. Proof, explanation and exploration: An overview. **Educational Studies in Mathematics**, v. 44, n. 1–3, p. 5–23, 2000.

HANNA, G.; DE VILLIERS, M. ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education. **ZDM - International Journal on Mathematics Education**, v. 40, n. 2, p. 329–336, 2008.

HEINTZ, B. **Die Innenwelt der Mathematik: Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin**. Wien: Springer, 2000.

HEINZE, A.; REISS, K.; RUDOLPH, F. Mathematics achievement and interest in mathematics from a differential perspective. **ZDM - International Journal on Mathematics Education**, v. 37, n. 3, p. 212–220, 2005.

HILBERT, T. S. et al. Learning to prove in geometry: Learning from heuristic examples and how it can be supported. **Learning and Instruction**, v. 18, n. 1, p. 54–65, 2008.

HUANG, Y. et al. Rehabilitation using virtual reality technology: a bibliometric analysis, 1996–2015. **Scientometrics**, v. 109, n. 3, p. 1547–1559, 2016.

INGLIS, M.; MEJIA-RAMOS, J. P.; SIMPSON, A. Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. **Educational Studies in Mathematics**, v. 66, n. 1, p. 3–21, 2007.

JAMELLI, S. M. **Abordagens no ensino da prova e argumentação escolar:** análise de uma coleção de livros didáticos do ensino fundamental. 2007. 117 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

JIMÉNEZ-ALEIXANDRE, M. P.; BROCOS, P. Desafios Metodológicos Na Pesquisa Da Argumentação Em Ensino De Ciências. **Ensaio Pesquisa em Educação em Ciências (Belo Horizonte)**, v. 17, n. spe, p. 139–159, 2015.

JIMÉNEZ-ALEIXANDRE, M. P.; BUGALLO RODRÍGUEZ, A.; DUSCHL, R. A. "Doing the lesson" or "doing science": Argument in high school genetics. **Science Education**, v. 84, n. 6, p. 757–792, 2000.

JIMÉNEZ-ALEIXANDRE, M. P.; ERDURAN, S. Argumentation in science education: An overview. In: ERDURAN, S.; JIMÉNEZ-ALEIXANDRE, M. P. (Eds.). . **Argumentation in science education: Perspectives from classroom-based research**. Dordrecht: Springer., 2008. p. 3–27.

KELLY, G. J. Inquiry, activity and epistemic practice. In: DUSCHL, R.; GRANDY, R. (Eds.). . **Teaching Science Inquiry: Recommendations for Research and Implementation**. Holanda: Rotterdan Sense Publishers, 2008. p. p.99-117.

KNIPPING, C. A method for revealing structures of argumentations in classroom proving processes. **ZDM - International Journal on Mathematics Education**, v. 40, n. 3, p. 427–441, 2008.

KOEDINGER, K. R. Conjectura e argumentação em alunos de geometria do ensino médio. In: LEHRER, R. (Ed.). . **Projetando ambientes de aprendizagem para o desenvolvimento da**

compreensão da geometria e do espaço. Mahwah: NJ: Erlbaum, 1998. p. 319–347.

KOLLAR, I. et al. Effects of collaboration scripts and heuristic worked examples on the acquisition of mathematical argumentation skills of teacher students with different levels of prior achievement. **Learning and Instruction**, v. 32, p. 22–36, ago. 2014.

KOLLAR, I.; FISCHER, F.; HESSE, F. W. Collaboration scripts - A conceptual analysis. **Educational Psychology Review**, v. 18, n. 2, p. 159–185, 2006.

KOLLAR, I.; FISCHER, F.; SLOTTA, J. D. Internal and external scripts in computer-supported collaborative inquiry learning. **Learning and Instruction**, v. 17, n. 6, p. 708–721, 2007.

KOSKO, K. W. Making use of what's given: Children's detailing in mathematical argumentative writing. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 41, p. 68–86, 1 mar. 2016.

KOSKO, K. W.; ROUGEE, A.; HERBST, P. What actions do teachers envision when asked to facilitate mathematical argumentation in the classroom? **Mathematics Education Research Journal**, v. 26, n. 3, p. 459–476, 2014.

KOSKO, K. W.; ZIMMERMAN, B. S. Emergence of argument in children's mathematical writing. **Journal of Early Childhood Literacy**, v. 19, n. 1, p. 82–106, 1 mar. 2019.

KRUMMHEUER, G. The ethnography of argumentation. In: COBB, P.; BAUERSFELD, H. (Eds.). . **The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures**. Hillsdale: Erlbaum, 1995. p. 229–269.

KRUMMHEUER, G. The relationship between diagrammatic argumentation and narrative argumentation in the context of the development of mathematical thinking in the early years. **Educational Studies in Mathematics**, v. 84, n. 2, p. 249–265, 2013.

KUHN, D. **The Skills of Argument**. New York: Cambridge University, 1991.

LAKATOS, I. **A Lógia do Descobrimento Matemático: Provas e refutações**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978.

LARROSA, Jorge. Notas sobre a experiência e o saber da experiência. **Revista Brasileira de Educação.** São Paulo: Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, n.19,jan./abr, p.20-28, 2002.

LAVILLE, C.; DIONNE, J. **A construção do saber: manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1999.

LEANDRO, E. J. **Um panorama de argumentação de alunos da educação básica:** O caso do fatorial. 2006. 139 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

LEITÃO, S. The potential of argument in knowledge building. **Human Development**, v. 43, p. 332–360, 2000.

LEITÃO, S. **Argumentação e desenvolvimento do pensamento reflexivo.** Psicologia: Reflexão e Crítica, v. 20, n.3, 2007, p. 454-462.

LIMA, P. J. dos S. **Prática argumentativa no ensino de matemática:** contribuições para o processo de resolução de problemas verbais. 2018. 305f. Tese (Doutorado em Educação) - Centro de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2018.

LIN, Y.; DURBIN, J. M.; RANCER, A. S. Perceived instructor argumentativeness, verbal aggressiveness, and classroom communication climate in relation to student state motivation and math anxiety. **Communication Education**, v. 66, n. 3, p. 330–349, 2017.

LITHNER, J. A research framework for creative and imitative reasoning. **Educational Studies in Mathematics**, v. 67, n. 3, p. 255–276, 2008.

LUDKE, M.; ANDRE, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MAKAR, K.; BAKKER, A.; BEN-ZVI, D. Scaffolding norms of argumentation-based inquiry in a primary mathematics classroom. **ZDM - Mathematics Education**, v. 47, n. 7, p. 1107–1120, 1 nov. 2015.

MALHEIRO, J.M.S. **Panorama da educação fundamental e média no Brasil:** o modelo da Aprendizagem Baseada em Problemas como experiência na prática docente. Dissertação de mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas – Universidade Federal do Pará, Belém, 2005.

MARCOS LUIZ LOURENÇO. A Demonstração com Informática Aplicada a Educação. **Bolema - Boletim de Educação Matemática**, v. 15, n. 18, p. 100–111, 2002.

MARIOTTI, M. A.; BALACHEFF, N. Introduction to the special issue on didactical and epistemological perspectives on mathematical proof. **ZDM - International Journal on Mathematics Education**, v. 40, n. 3, p. 341–344, 2008.

MARIOTTI, M. A.; FISCHBEIN, E. Defining in classroom activities. **Educational Studies in Mathematics**, v. 34, n. 3, p. 219–248, 1997.
MARTIN, L. C.; TOWERS, J. Improvisational coactions and the growth of collective mathematical understanding. **Research in Mathematics Education**, v. 11, n. 1, p. 1–19, 2009.

MARTINS, P.R.G.M.V. **Matemática sem Números:** uma proposta de atividades para o estudo da Lógica. 2014. 82f. Dissertação (Mestrado profissional – PROFMAT) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2014.

MENDES, L. J. **Uma análise da abordagem sobre argumentações e provas numa coleção do ensino médio**. 2007. 92 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007. 228

MENDONÇA, P. C. C.; JUSTI, R. DA S. Ensino-Aprendizagem de Ciências e Argumentação: Discussões e Questões Atuais. **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências**, v. 13, n. 1, p. 187–216, 2013.

MERCIER, H.; HEINTZ, C. Scientists' Argumentative Reasoning. **Topoi**, v. 33, n. 2, p. 513–524, 2014.

MONTEIRO, M. A. A.; TEIXEIRA, O. P. . B. An analysis of the dialogical interactions science in classes of the primary school. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 9, n. 3, p. 243–263, 2004.

MONTEIRO, M. A. A.; TEIXEIRA, O. P. . B. Contextos argumentativos e processos interativos em sala de aula. In: BOZELLI, F. C.; TEIXEIRA, O. P. B. (Eds.). . **Contextos argumentativos e discursivos no ensino de Ciências**. 1. ed. São Paulo: Espelho D'alma, 2019. p. 27–44.

MUELLER, M.; YANKELEWITZ, D.; MAHER, C. A framework for analyzing the collaborative construction of arguments and its interplay with agency. **Educational Studies in Mathematics**, v. 80, n. 3, p. 369–387, 2012.

NARDI, E.; BIZA, I.; ZACHARIADES, T. "Warrant" revisited: Integrating mathematics teachers' pedagogical and epistemological considerations into Toulmin's model for argumentation. **Educational Studies in Mathematics**, v. 79, n. 2, p. 157–173, fev. 2012.

NORDIN, A. K.; BJÖRKLUND BOISTRUP, L. A framework for identifying mathematical arguments as supported claims created in day-to-day classroom interactions. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 51, p. 15–27, 1 set. 2018.

NUNES, J. M. V. **A prática da argumentação como método de ensino:** o caso dos conceitos de área e perímetro de figuras planas. 2011. 220 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011

PASINI, M. F. **Argumentação e prova: explorações a partir da análise de uma coleção didática.** 2007. 225 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

PEDEMONTE, B. **Etude didactique et cognitive des rapports entre argumentation et démonstration dans l ' apprentissage des mathématiques To cite this version : HAL Id : tel-00004579 E t u d e d i d a c t i q u e e t c o g n i t i v e d e s r a p p o r t s d e l ' a r g u**. [s.l: s.n.].

PEDEMONTE, B.; BALACHEFF, N. Establishing links between conceptions, argumentation and proof through the ck¢-enriched Toulmin model. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 41, p. 104–122, 2016.

PERELMAN, C.; OLBRECHTS-TYTECA, L. **Traité de l'argumentation: La nouvelle rhétorique**. Bruxelles: Éditions de l' Université de Bruxelles, 1958.

PIVETA, M. N. et al. A contribuição da visão baseada em recursos para o estudo da internacionalização: uma análise bibliométrica da produção científica entre os anos de 2007 e 2016. **Internext**, v. 13, n. 2, p. 43, 2018.

PLANTIN, C. **A argumentação: história, teorias, perspectivas**. Tradução d ed. São Paulo: Parábola, 2008.

PONTE, J. .; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

REGINALDO, B.K.S. **Argumentação em atividades investigativas na sala de aula de matemática**. 2012, 168f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012

REICHERSDORFER, E. et al. **Different collaborative learning settings to foster mathematical argumentation skills**. (T. Y. Tso, Ed.)Proceedings of the 36th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. **Anais**...Taipei: PME, 2012

REID, D. A.; KNIPPING, C. **Proof in mathematics education: Research, learning, and teaching**. Rotterdam: The Netherlands: Sense Publishers., 2010.

REISS, K. M. et al. Reasoning and proof in geometry: Effects of a learning environment based on heuristic worked-out examples. **ZDM - International Journal on Mathematics Education**, v. 40, n. 3, p. 455–467, 2008.

REISS, K.; RENKL, A. Learning to prove: The idea of heuristic examples. **ZDM - International Journal on Mathematics Education**, v. 34, n. 1, p. 29–35, 2002.

RODRIGUES, F. C; MONTEIRO, M.A.A. Modelo para avaliação do argumento de prova em um contexto de ensino baseado em modelagem. **Revista Ensenanza de la Física**, v. 33, n. 2, p. 143–151, 2021.

RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO. Argumentação no Ensino da Matemática: a produção nacional e a formação do professor que ensina matemática. **Revista Ensino da Matemática em Debate,** v.8, n.1, p.202-229, 2021.

RODRIGUES, F. C. ALVES, G. G. YONEZAWA, W. M. MONTEIRO, M.A.A. ensamento computacional : proposta metodológica para o ensino de números binárioS. **Revista de produtos educacionais e pesquisas em ensino**, v.5, n.1, p.129-153, 2021.

RODRIGUES, F.C; SANTOS, M.S. JALHIUM, N. B. MONTEIRO, M.A.A. A argumentação em uma atividade de investigação na formação de professores de matemática. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v.10, n.21, p. 293-312, 2021

ROGERS, K. C.; KOSKO, K. W. How elementary and collegiate instructors envision tasks as supportive of mathematical argumentation: A comparison of instructors' task constructions. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 53, n. September 2018, p. 228–241, 2019.

ROMANOWSKI, J. P.; ENS, R. T. Revista Diálogo Educacional. **Revista Diálogo Educacional**, v. 6, n. 19, p. 37–50, 2006.

ROMANOWSKI, P. J.; ENS, R. T. As pesquisas denominadas do tipo "estado da arte" em educação. **Revista Diálogo Educacional**, [S.l.], v. 6, n. 19, p. p. 37-50, jul. 2006. ISSN 1981-416X.

ROSADO, E. M. . O alcance do vídeo na sala de aulas. In: **O vídeo no campo da educação**.

Ijuí: Unijui, 1993. p. 8–56.

RUMMEL, N.; SPADA, H. Learning to collaborate: An instructional approach to promoting collaborative problem solving in computer-mediated settings. **Journal of the Learning Sciences**, v. 14, n. 2, p. 201–241, 2005.

SÁ, L. P.; QUEIROZ, S. L. Argumentação no ensino de ciências: contexto brasileiro. **Revista Ensaio**, v. 13, n. 2, p. 13-30, 2011.

SADALLA, A. M. F. DE A.; LAROCCA, P. Autoscopia: um procedimento de pesquisa e de formação. **Educação e Pesquisa**, v. 30, n. 3, p. 419–433, 2004.

SALES, A. **Práticas argumentativas no estudo da geometria por acadêmicos de Licenciatura em Matemática**, 2010, 229f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2010.

SALOMÃO, P. R. **Argumentação e prova na matemática do ensino médio:** progressões aritméticas e o uso de tecnologia. 2007. 133 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007

SANTOS, J. B. S. **Argumentação e prova:** análise de argumentos algébricos de alunos da educação básica. 2007. 145 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

SASSERON, L.H., Interações discursivas e investigação em sala de aula: o papel do professor. In: Anna Maria Pessoa de Carvalho. (Org.). **Ensino de Ciências por investigação: condições para implementação em sala de aula**. 1ed.São Paulo: Cengage Learning, v. 1, p. 41-62, 2013.

SASSERON, L. H.; CARVALHO, A. M. P. Construindo argumentação na sala de aula: a presença do ciclo argumentativo, os indicadores de alfabetização científica e o padrão de Toulmin. **Ciência & Educação,** v. 17, p. 97-114, 2011.

SCARPA, D. L. **Cultura escolar e cultura científica: aproximações, distanciamentos e hibridações por meio da análise de argumentos no ensino de biologia e na Biologia.** [s.l.] Universidade de São Paulo, 2009.

SCARPA, D. L. O Papel Da Argumentação No Ensino De Ciências: Lições De Um Workshop. **Ensaio Pesquisa em Educação em Ciências (Belo Horizonte)**, v. 17, n. spe, p. 15–30, 2015.

SCHWAIGHOFER, M. et al. How to combine collaboration scripts and heuristic worked examples to foster mathematical argumentation – when working memory matters. **International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning**, v. 12, n. 3, p. 281–305, 1 set. 2017.

SCHWARZ, B. B. Argumentation and learning. In: MULLER-MIRZA, N.; PERRET-CLERMONT, A.-N. (Eds.). . **Argumentation and education – theoretical foundations and practices**. Berlin: Springer Verlag, 2009. p. 91–126.

SCHWARZ, B. B.; BAKER, M. J. **Dialogue, argumentation and education: History, theory and practice**. Cambridge: Cambridge University Press, 2017.

SCHWARZ, B. B.; HERSHKOWITZ, R.; PRUSAK, N. Argumentation and mathematics. In: LITTLETON, K.; HOWE, C. (Eds.). . **Educational dialogues: Understanding and promoting productive interaction**. London, UK: Taylor & Francis, Routledge, 2010. p. 103–127.

SILVA, J. J. DA. A Demonstração Matemática da Perspectiva da Lógica Matemática. **Bolema - Boletim de Educação Matemática**, v. 15, n. 18, p. 68–78, 2002.

SILVA, R. C. M. da. **O manual do professor de Matemática nos livros didáticos:** uma análise no fomento à argumentação. 2017. 137f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Centro de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2017.

SILVA FILHO, A. F. da. **Desenvolvimento de uma sequência didática sobre quadriláteros e suas propriedades:** contribuições de um grupo colaborativo. 2007. 178 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

SIMPSON, A. **Developing a proving attitude**. Justifying and Proving in School Mathematics. **Anais**...Londres: Instudo de Educação, Universidade de Londres, 1995

SKOVSMOSE, O. **Um convite a Educação Matemática Crítica**. Tradução: Orlando de Andrade Figueiredo. 1 Ed. Campinas, SP: Papirus, 2014 229

SOCOLOWSKI, R. C. A. J. **Análise das interações tutor/participantes:** um ponto de partida para avaliação de cursos de desenvolvimento profissional à distância. 2004. 129 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004

SOLAR, H. et al. Teacher support for argumentation and the incorporation of contingencies in mathematics classrooms. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, 2020.

SOLIS, A. **Argumentação e prova no estudo de progressões aritméticas com o auxílio do Hot Potatoes**. 2008. 183 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

SOUSA, W. E. **Raciocínio lógico-analítico:** uma proposta de conteúdo e abordagem para o ensino médio e para concursos públicos. 2019. 236 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Goiás, Catalão, 2019.

SOUZA, M. E. C. de O. de. **A questão da argumentação e prova na matemática escolar:** o caso da medida da soma dos ângulos internos de um quadrilátero qualquer. 2009. 115 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

STAATS, S. The poetics of argumentation: the relevance of conversational repetition for two theories of emergent mathematical reasoning. **Research in Mathematics Education**, v. 19, n. 3, p. 276–292, 2017a.

STAATS, S. The poetics of argumentation: the relevance of conversational repetition for two theories of emergent mathematical reasoning. **Research in Mathematics Education**, v. 19, n. 3, p. 276–292, 2 set. 2017b.

STAPLES, M.; NEWTON, J. Teachers' Contextualization of Argumentation in the Mathematics Classroom. **Theory into Practice**, v. 55, n. 4, p. 294–301, 1 out. 2016.

STOCK, S.B. **A argumentação na resolução de problemas de Matemática:** uma análise a partir da Epistemologia Genética. 2015, 182 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2015.

STYLIANIDES, A. J. The notion of proof in the context of elementary school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 65, n. 1, p. 1–20, 2007a.

STYLIANIDES, A. J. Introducing Young Children to the Role of Assumptions in Proving. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 9, n. 4, p. 361–385, 2007b.

STYLIANIDES, A. J. Secondary students' proof constructions in mathematics: The role of written versus oral mode of argument representation. **Review of Education**, v. 7, n. 1, p. 156–182, 2019.

SUOMINEN, A. L.; CONNER, A.; PARK, H. Prospective mathematics teachers' expectations for middle grades students' arguments. **School Science and Mathematics**, v. 118, n. 6, p. 218–231, out. 2018.

TAYLOR, C. Proving in Geometry: A Sociocultural Approach to Constructing Mathematical Arguments Through Multimodal Literacies. **Journal of Adolescent and Adult Literacy**, v. 62, n. 2, p. 175–184, 1 set. 2018.

TOULMIN, S. **The uses of Argument**. New York: Cambridge University Press, 1958.

TOULMIN, S. **Os usos do argumento.** São Paulo: Editora Martins Fontes**,** 2001.

TRIANTAFILLOU, C.; SPILIOTOPOULOU, V.; POTARI, D. The Nature of Argumentation in School Mathematics and Physics Texts: The Case of Periodicity. **International Journal of Science and Mathematics Education**, v. 14, n. 4, p. 681–699, 1 maio 2016.

VAN EEMEREN, F. H. et al. **Fundamentals of argumentation theory: A handbook of historical backgrounds and contemporany developments**. New Jersey: Lawrence Erlbaum, 1996.

VAN EEMEREN, F. H.; GROOTENDORST, R. A. **A Systematic theory of argumentation: the pragma-dialectical approach**. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

VICENTE, A.; GARNICA, M. As Demonstrações em Educação Matemática : 2002.

VIEIRA, R. D.; NASCIMENTO, S. S. **Argumentação no ensino de ciências: tendências, práticas e metodologia de análise**. 1ª ed. ed. Curitiba: Editora Appris, 2013.

VIEIRA, W. Z. V. **Argumentação e prova:** uma experiência em geometria espacial no ensino médio. 2007. 189 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

VIGOTSKI, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem**. 2. ed. São Paulo: WMF

Martins Fontes, 2009.

VINCENT, J.; CHICK, H.; MACCRAE, B. **Argumentation profile charts as tools for analysing studentes argumentations.** In H.L. CHICK; J.L. VINCENT (Eds.) Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psycholgy of Mathematics Education (Vol.4, pp.281-288). Melborne: PME, 2005.

VOGEL, F. et al. Developing argumentation skills in mathematics through computer-supported collaborative learning: the role of transactivity. **Instructional Science**, v. 44, n. 5, p. 477–500, 1 out. 2016.

VON AUFSCHNAITER, C. et al. Arguing to learn and learning to argue: Case studies of how students' argumentation relates to their scientific knowledge. **Journal of Research in Science Teaching**, v. 45, n. 1, p. 101–131, 2008.

WALTER, J. G.; BARROS, T. Students build mathematical theory: Semantic warrants in argumentation. **Educational Studies in Mathematics**, v. 78, n. 3, p. 323–342, dez. 2011.

WALTON, D. N. **Lógica informal: manual de informação crítica**. São Paulo: Martins Fontes, 2006.

WEGERIF, R. Dialogic or dialectic? The significance of ontological assumptions in research on educational dialogue. **British Educational Research Journal**, v. 34, n. 3, p. 347–361, 2008.

WENZEL, J. W. Three Perspectives on Argument: Rhetoric, Dialetic, Logic. In: TRAPP, R.; SCHUETZ, J. (Eds.). . **Perspetives of argumentation: Essays in honour of Wayne Brockriede**. New York: Waveland, 1990. p. 9–26.

WOOD, T. Creating a context for argument in mathematics class. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 30, n. 2, p. 171–191, 1999.

YACKEL, E. What we can learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 21, n. 4, p. 423–440, 2002.

YACKEL, E.; COBB, P. Sociomathematical Norms , Argumentation , and Autonomy in Mathematics Author (s): Erna Yackel and Paul Cobb Source : Journal for Research in Mathematics Education , Jul ., 1996 , Vol . 27 , No . 4 (Jul ., Published by : National Council of Teachers of. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 27, n. 4, p. 458–477, 1996.

ZAMBAK, V. S.; MAGIERA, M. T. Supporting grades 1–8 pre-service teachers' argumentation skills: constructing mathematical arguments in situations that facilitate analyzing cases. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, 2020.

ZULATTO, R. B. A. **A natureza da aprendizagem matemática em um ambiente online de formação continuada de professores**. 2007. 174 f. Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2007.

APÊNDICE A – TRANSCRIÇÃO DA VIDEOGRAVAÇÃO E REGISTROS DE OBSERVAÇÕES DO PESQUISADOR REFERENTE A ATIVIDADE REALIZADA JUNTO AO GRUPO 1

Data: 08/12/2022; **Grupo 1:** Alisson, Ana Paula, Cristina e Paulínia**.**

<Nº>	<Sujeito>	<Transcrição da fala>	Observações (notas)
1	Paulínia	Tipo assim, binário é assim... no caso, zero e um, zero e dois.	Assume a liderança do grupo com as anotações e iniciando o debate.
2	Alisson e Cristina	Não!	Discordância
3	Alisson	Binário é sempre zero e um.	
4	Cristina	É tudo zero e um.	
5	Cristina	Pode ser, “um e zero”, “um e um”, “um, zero e um”	Alisson concorda balançando a cabeça.
6	Paulínia	Ah tá! É tipo uma....	Cristina indica com as mãos que se refere a uma sequência ordenada.
7	Alisson	Não passa para o dois não.	Ana Paula observa a discussão com insegurança no olhar.
8	Paulínia	Então são os números de zeros combinados com um, tipo: “zero e um”, “um e zero”, “um, zero, zero” etc... pode repetir os números...	Erro de compreensão da Paulínia: número é diferente de numeral.
9	Alisson	Isso! Pode repetir o um também viu, tipo “um, um, zero, zero”, “um, zero, zero, zero”, desse jeito.	
10	Paulínia	Assim, tipo... ordem... 1= 01 2= 10 3= 11	Começa a escrever o que foi discutido. Cita o termo ordem (critério).
11	Alisson	Isso, vai só alternando zero e um em diferentes ordens. Você pode repetir o um ou o zero.	
12	Cristina	Sempre trocando de lugar zero e um ao longo das casas.	Alisson concorda, balançando a cabeça e sorrindo.
13	Alisson	Você pode repetir o 1.	
14	Cristina	Pode trocar de lugar também.	
15	Alisson	Isso ai pode! De repente você pode ter 010; 011, confundi.	
16	Cristina	0101.	
17	Paulínia	Entendi. Eu coloquei aqui, que de acordo com a ordem, eu coloquei o tanto de zero. Entendeu?	
18	Alisson	Só não pode ser 000 ou 111.	Conceitos equivocados.
19	Cristina	Potências de expoente e base envolvendo 0 e 1 pode ser um número binário	Conceitos equivocados.
20	Paulínia	Eu sei que é só zero e um... a cabeça falha, você sabe né, você entende.	Paulínia realiza anotações... parece estar ordenando os números binários.
21	Alisson	Agora você pode fazer o inverso.	

22	Paulínia	Não. Agora a gente tem que achar o outro sistema de...	O pesquisador se aproxima do grupo e acompanha a discussão.
23	Pesquisador	O que vocês estão discutindo aí?	
24	Cristina	Colocando os números binários.	
25	Pesquisador	Tá! mas aqui... vejam só. Você tem essa quantidade de feijão. Essa quantidade de feijão remete a um número para vocês. Este número vai estar associado a um numeral no sistema de numeração de base decimal.	O pesquisador pega a quantidade de feijões em mãos. O pesquisador se afasta do grupo
26	Cristina	O número é 15	Realiza contagem dos grãos
27	Paulínia	A quantidade?	
28	Cristina	Isso.	Em referência à disposição dos feijões representados na ficha.
29	Paulínia	Sim!	
30	Alisson	Pensei que tinha alguma coisa relacionado com decimal também.	
31	Cristina	Então vamos colocar aqui, que diversas formas que a gente chega.	
32	Alisson	Pode ser	
33	Cristina	É assim: 5 + 10 ou 3x5	Ela representa na ficha na primeira ordem um grupo de 10 e um grupinho de 5 e na segunda ordem um grupo de 3 e um grupo de 5
34	Paulínia	Na primeira ordem é soma e na segunda é a multiplicação, ah tá entendi.	Os alunos estão pensando provavelmente em operações que resultam no 15.
35	Pesquisador	E aí? Melhorou a compreensão do grupo?	O pesquisador se aproxima do grupo. Os integrantes do grupo balançam a cabeça sinalizando que sim.
36	Paulínia	Agora está saindo...	
37	Pesquisador	Trabalhe com a quantidade de feijões indicada, estou observando que tem feijões a mais aí. Olhe, a quantidade de feijão que está aqui na tabelinha de vocês. Vocês dispõem desta quantidade aqui que está relacionada a um número. Que número é este?	Faz um alerta a equipe para a quantidade de feiões na segunda ordem
38	Todos	15	
39	Pesquisador	Ok! Como a gente representa esta quantidade aqui relacionada ao 15 aqui na ficha?	
40	Cristina	Certo, cada feijãozinho representa uma unidade, então na primeira ordem a gente utilizou várias formas diferentes. Na primeira ordem a gente colocou 5 feijões mais 10 feijões. Aqui na segunda ordem 3 feijãozinhos x 5 feijãozinhos que dá 15 feijãozinhos, ou não pode ser assim?	Os alunos estão representando o 15 por meio de soma e multiplicação na primeira e segunda ordem respectivamente.

41	Pesquisador	Eu pergunto a vocês o seguinte: Porque vocês fizeram um grupo de 10 na primeira ordem? Aqui você separou 5 unidades e deixou um grupinho de 10 aqui.	
42	Alisson	Decimal.	
43	Pesquisador	Isso! Sistema de numeração de base decimal. O sistema de enumeração de base decimal trabalha com que? Vamos pensar em regras que compõe este sistema de numeração. Quais as regras que estão por trás do sistema de numeração de base decimal que a gente utiliza?	
44	Paulínia	Tem a dezena.	
45	Alisson	Na segunda ordem aqui vai só 1.	
46	Cristina	Vai ficar 5 unidades e passar uma dezena, o que eu entendi foi isso.	
47	Pesquisador	A ideia de dezena vem de que?	
48	Cristina	De 10.	
49	Pesquisador	Sim, do que vocês acabaram de fazer aqui na ficha... de um grupo. Então quando você trabalha com o sistema de numeração de base decimal, você trabalha com grupos de que?	Aponta para a representação na ficha.
50	Paulínia	Dezenas.	
51	Pesquisador	Isso! De dez, grupamento de 10. Quando você tem a centena é um agrupamento de 10^2. O que é a unidade de milhar? Não é mil? É 10^3, ou seja, você está trabalhando com agrupamento de 10, correto? Para além dessa ideia que vocês indicaram aqui, o que mais vocês sabem a respeito da representação de um número no sistema de numeração de base 10? Tem alguma outra regra que a gente pode utilizar?	
52	Cristina	Tem.	
53	Pesquisador	É isso que eu quero que vocês discutam e anotem. A atividade pede exatamente para vocês fazerem essa representação aqui e o porquê disso? Discutam entre vocês, ouça o colega... o que o colega pode acrescentar na resposta.	Ele faz referência a representação do 15 na ficha.
54	Alisson	Você fala a dezena aqui	
55	Cristina	A gente tem que representar em grupos, um conjunto de 10.	
56	Paulínia	Como a gente vai fazer?	
57	Alisson	O problema aqui, 15 né, vai gerando grupo de 10.	
58	Cristina	A gente pode representar uma dezena por um saquinho de 10 feijões.	
59	Pesquisador	Como vocês estão trabalhando no sistema de numeração de base 10, a cada grupo de 10 formado você vai passar um grão de feijão para a segunda ordem para simbolizar/representar o grupo formado na primeira ordem.	

60	Paulínia	E qual o objetivo da terceira, quarta e quinta ordem...?	
61	Pesquisador	Isso aí é para quando você for trabalhar com quantidades maiores. Imagine se eu tivesse a quantidade de 243 feijões e quisesse representar essa quantidade aqui na ficha... Aí você iria colocar eles aqui e fazer a distribuição dos grupos.	
62	Paulínia	O objetivo desse primeiro exercício é saber explicar essa quantidade de 15 feijões na ficha?	
63	Pesquisador	Sim. O porquê disso aqui resultou nisso, quais critérios ou regras que vocês utilizaram? Lembrando que vocês estão no sistema de numeração de base decimal.	O pesquisador se afasta do grupo.
64	Paulínia	Unidade...	Fala realizando registros.
65	Alisson	Na segunda ordem aqui vai só 1 grão.	
66	Pesquisador	temos a decomposição do número, por exemplo o 15... decompor é pensar ele assim... ele é formado por 2 dígitos, certo, o 5 e o 1. Esse 1 aqui significa que é um grupinho de 10, concordam? Mais 5 unidades. Por exemplo, se eu falo 328, você tem quantos dígitos?	O pesquisador confunde a questão. 1) letra c).
67	Todos	Três.	
68	Pesquisador	Isso! Significa que cada digito é uma potência de 10. O que é 3? 3 centenas, só que uma centena é 10^2, então temos $3x10^2$ (3 grupos de 10 ao quadrado), o que é 2? 2 grupos de 10, o que é 8? 8 unidades $8x10^0$. Veja que a potência vai diminuído... 10^2, 10^1, 10^0. Veja que cada digito é possível escrever como uma potência de 10. E o número é gerado a partir da soma destas potências. Isso é uma decomposição que você faz do número. Outro exemplo, 8.729.... vamos pensar aqui, tem quantos dígitos? Como seria a decomposição?	Todos acompanham o raciocínio e fala do pesquisador.
69	Alisson	4 dígitos Unidade, dezena, centena e unidade de milhar... 8 unidades de milhar, $8x1000= 8x10^3$. 7 centenas, $7x100 =7x10^2$. Duas dezenas, $2x10 = 2x10^1$. 9 unidades, ou seja, $9x10^0$.	
70	Pesquisador	Vou dar como desafio para vocês... 649,5... como eu escrevo este número sob a forma de potências de 10?	Os alunos acompanham o raciocínio do pesquisador repetindo em voz baixa o que ele diz.
71	Cristina	Divido ele?	
72	Pesquisador	O que está complicando o número aí?	
73	Alisson	O meio né.	
74	Pesquisador	Vamos sumir com esta parte por enquanto? Pense apenas no 649, como fica?	
75	Cristina	$6x10^2 + 4x10^1 + 9x10^0$	
76	Pesquisador	E o que seria o 5? Veja que é bem sugestivo a potência, olha 10^2, 10^1, 10^0 então fica 5?	
77	Cristina	$5x10^{-1}$	

78	Alisson	Dá meio.	
79	Pesquisador	Sim, 10^{-1} =1/10 vezes 5 resulta em meio. Se eu colocasse um 7 aqui, aí ficaria $7x10^{-2}$.	
80	Paulínia	Porque é duas casas depois da virgula, se fosse três seria menos 3.	
81	Pesquisador	Moral da história, no sistema de numeração de base 10, você trabalha com grupos de 10, você dispõe de 10 algarismos para escrever um número (0 a 9) e cada dígito do número pode ser escrito como uma potência de base 10, certinho?	
82	Paulínia	Certinho	
83	Pesquisador	Então, essa parte da decomposição aqui eu quero que vocês façam a decomposição do número 15 e estabeleçam uma relação com a conclusão estabelecida	O pesquisador se afasta. Conversa informal.
84	Cristina	Ok! Então vai ficar 15 = $1x10 + 5x10^{0}$. Esse resultado representa algebricamente 1 dezena (1 grão de feijão na segunda ordem) e 5 unidades (5 grãos na primeira ordem da ficha). 10 elevando a zero é 1 e vezes 5 da 5.	Conversa informal. Cristina realizando anotações. Paulínia lê o enunciado da três
85	Alisson	A próxima agora é a dois... com essa dois é por 15 também né.	
86	Cristina	Eu acho que é a mesma ideia de antes.	
87	Adecio	Mas não tem como uah...	OBS: Na questão 1, parece que a equipe não deu importância ao roteiro de colaboração.
88	Cristina	Com esta mesma quantidade de grãos de feijão é possível encontrar/fabricar outros números em outros sistemas de numeração que não seja o decimal? Justifique suas ideias.	Realiza a leitura do enunciado da questão 2). Não leu a orientação do roteiro.
89	Alisson	Oh Cristina, essa dois aí não é igual ao que a gente estava fazendo não?	
90	Cristina	Aquela de 2^{2}.... porque aqui está falando de diferentes né... em outros sistemas de numeração que não seja decimal... pode ser.	A equipe pensa na decomposição do 15 por meio de outras operações/potências. Silêncio no grupo. Cristina realiza registros escritos.
91	Ana Paula	Vocês estão em qual? Na segunda? Nessa aqui?	
92	Alisson	A segunda aqui, é do mesmo jeito que nós estávamos fazendo, entendeu?	
93	Ana Paula	Aquele de aumentar...de decompor?	
94	Alisson	Isso!	
95	Paulínia	Só que não decimal, então a gente pode usar qualquer outro número.	
96	Alisson	Mas agora o negócio que a dezena pode ser diferente.	
97	Cristina	Então pode utilizar daquela forma mesma que a gente estava fazendo de decomposição... colocar 3+2 + uma dezena que não seja o decimal... ai pode ser uma potência 3^{2}.	

98	Ana Paula	Então eu vou utilizar a base 10.	
99	Alisson	Não pode ter base 10.	Em referência a potência. Paulínia lê o roteiro de orientação da questão.
100	Cristina	Não pode ter a base 10.	
101	Paulínia	Que não seja sistema de base 10... então vamos lá gente? Então vamos...	Paulínia lê parte da orientação do roteiro de colaboração. Conversa informal.
102	Ana Paula	Então faz o raiz de 125.	
103	Cristina	Mas não pode pegar mais do que 15 né.	
105	Paulínia	Lê... lê aí.	
105	Cristina	2) Com esta mesma quantidade de grãos de feijão é possível encontrar/fabricar outros números em outros sistemas de numeração que não seja o decimal? Justifique suas ideias. Orientação: Discuta com seus colegas a possibilidade de criar outros números em diferentes sistemas de numeração que não seja o sistema de base 10 (sistema decimal). Discuta com seu colega, as regras/critérios para a apresentação desse número. Você pode se espelhar no sistema de numeração de base decimal. Fiquem à vontade para criar ilustrações, semelhantes àquela indicada na questão 1, bem como realizar testes para verificar a ideia e posteriormente tirar uma conclusão.	
106	Paulínia	Então... é.	
107	Cristina	Com esta mesma quantidade de grãos de feijão é possível encontrar/fabricar outros números... tipo assim, com o 15 mesmo, não pode passar.	
108	Paulínia	A quantidade dele aqui tem que ter 15? Ou pode passar? Entendeu?	
109	Paulínia	Então vamos lá... o quinze aqui... 3x5... vai dar 15 feijões., mas aqui não tem 15 feijões.... eu posso fazer essa conta? será que pode?	
110	Cristina	Qual que você fez, 5x3?	
111	Paulínia	Sim, por que aí o resultado vai dar 15, eu posso fazer dessa forma?	
112	Cristina	Pode uai.	
113	Ana Paula	Pode, porque a única coisa que ele fala é para não utilizar o número na base 10.	O grupo entendeu que não pode utilizar o 10 como um fator no produto durante a decomposição
114	Cristina	Multiplicação, raiz e potenciação...acabamos. Vamos perguntar ele p ver se estamos no caminho.	Conversa informal. O grupo aguarda o pesquisador para verificar se a questão 2) está correta
115	Alisson	A dois deu certo?	
116	Cristina	Vamos ver com ele se é maios ou menos isso.	O professor Bruno sai da sala

117	Alisson	É assim Paulínia, é que ele não seja... pelo que eu entendi aqui... que não seja igual a primeira. Você teve que juntar um grupinho de 10, entendeu? Na 1) você teve que juntar o grupinho de 10 para dar o decimal, certo? Agora aqui não precisa juntar esse grupinho, pode ser outro valor entendeu?	
118	Cristina	Dando grupo de cinco ou de três.	
119	Paulínia	Então... então...tá!	
120	Alisson	Você tem que ter os 15 feijões. Na primeiro nós tivemos que separar 1 grupo de 10 mais 5 para dar 15. Neste agora não...pode ser outros grupos.	O pesquisador chega no grupo.
121	Cristina	O 2) seria mais ou menos isso?	
122	Pesquisador	Se eu quiser organizar esta mesma quantidade de grãos em grupos de dois é possível? Ou seja, quero agora apenas mudar o critério do agrupamento, ao invés de um grupo de 10, agora será grupos de dois, é possível?	Ana Paula balança a cabeça, dizendo que sim.
123	Cristina	Sim, é possível, agora a dezena será um grupo de dois	
124	Paulínia	Pera aí... não entendi.	
125	Ana Paula	O grupo de dois agora valerá uma dezena.	
126	Pesquisador	Vamos pensar... qual a ideia por traz do sistema de numeração de base decimal?	
127	Cristina	Formar grupos de 10.	
128	Pesquisador	Isso. Você está trabalhando com grupos de dez que estão relacionados a dezena, certo? Agora tem sentido falar dezena se você está organizando a quantidade de grãos em grupos de dois?	Os alunos por meio de expressões faciais parecem perceber que chamar o grupo de dois de dezena é um equívoco.
129	Pesquisador	O sistema de numeração de base 2 é utilizado na informática. O computador utiliza uma lógica binária para codificar a informação por meio de uma sequência de zeros e uns. Faremos o seguinte, peguem essa quantidade de feijão (15) e organizem ela em grupos de dois na primeira ordem da ficha e realizem o mesmo procedimento de formação de grupos que vocês fizeram na base 10.	Paulínia de posse da ficha e sob olhares dos colegas realiza o que o pesquisador solicitou.
130	Paulínia	Cada dupla de feijão que formou na primeira ordem vai passar a ser um feijão novo na segunda ordem e fica um apenas na primeira. Não pode ser dezena porque não é 10 que foi passado.	Os colegas observam o deslocamento dos grãos realizado por Paulínia.
131	Pesquisador	Certo, e na segunda ordem ainda é possível formar grupos e continuar o processo?	
132	Cristina, Paulínia e Alisson	Sim!	Ana Paula apenas observa.
133	Paulínia	Na segunda ordem dá para formar mais três grupos e vai sobrar 1 feijão.	
134	Pesquisador	Ok, continuem...	

135	Paulínia	Na terceira ordem vai ter três feijões, cada um representa um grupo formado na segunda e sobra um feijão.	
136	Paulínia	Na quarta ordem vai ter apenas 1 feijão de um grupo formado na terceira ordem. Tem um feijão que não dá para montar grupo.	O grupo todo observa o deslocamento de grãos realizados por Paulínia.
137	Pesquisador	Se não deu para formar mais grupos, então a fabricação do numeral se encerra. Vamos registrar o que sobrou em cada ordem?	
138	Cristina	Fica 1 feijão na primeira ordem, 1 na segunda ordem, 1 na terceira 1 na quarta ordem.	
139	Pesquisador	Vejam que vocês acabaram de fabricar um numeral no sistema de numeração binário correspondente ao numeral 15 do sistema de numeração de base decimal.	
140	Alisson	Mil cento e onze.	
141	Pesquisador	Tem certeza? Quando você diz mil cento e onze não dá uma ideia de organização do número em grupos de 10?	
142	Alisson	Mas e aí? Como que eu falo então?	
143	Cristina	Lembrei, lembra da aula de informática, você só fala os números, tipo 1111.	
144	Pesquisador	Isso, você fala somente os algarismos, certo? após isso você utiliza uma notação especial para se referir a base binária. Pode ser $(1111)_2$ ou 1111_2. Se você chegar no teclado do computador e digitar 15, o computador vai codificar em $(1111)_2$ ou 1111_2..	Os alunos observaram com atenção o pesquisador mostrar no papel a notação que pode ser utilizada.
145	Paulínia	Cada casa que passa então é um grupo de dois.	
146	Cristina	Isso.	
147	Alisson	Na base dez é grupos de 10, a lógica aí é trabalhar com grupos de dois.	
148	Alisson	Então cada feijão que restou se ele voltar para a casa (ordem) anterior ele vai desfazendo a conversão...multiplicando por dois.	
149	Pesquisador	Isso Alisson! Vocês perceberam que estão a trabalhar com potências?	
150	Paulínia	Potências de dois porque a base é dois.	
151	Pesquisador	Existe alguma relação entre cada algarismo que compõe o número binário com as potências de dois?	
152	Alisson	A potencias de dois vão crescendo para cada número (algarismo) porque vai acumulando (dobrando). Cada número (algarismo) tem a valência de uma potência de dois.	
153	Pesquisador	Bacana isso! Quais seriam essa potencias de dois para cada algarismo do número encontrado?	
154	Alisson	2, 4, 8, 16	
155	Pesquisador	Será? Vocês concordam que 2 remete a quantidade de grãos restantes na primeira ordem?	
156	Cristina	Gente, é 1, 2, 4, 8, 16 e assim vai...	

157	Alisson	Mas não pode ter 16 porque só tem 4 números (algarismos).	Cristina e Paulínia concordam balançando a cabeça.
158	Pesquisador	Agora pense na representação destes números em potências para então associá-los a cada algarismo do número binário encontrado.	
159	Cristina	Como assim?	
160	Pesquisador	Cada algarismo do número binário encontrado tem uma identificação com uma potência de dois, concordam ou não?	
161	Alisson	É a valência que eu disse antes, 2^0; 2^1; 2^2;2^3. Quatro números (algarismos) ligados as potencias de dois.	
162	Pesquisador	Concordam com o que Alisson disse? Agora pensem na possibilidade de trabalhar com grupos de três, quatro... como seria isso? É possível? Fiquem à vontade para realizar testes. Discutam entre vocês.	Todos do grupo confirmam que sim, balançando a cabeça ou fazendo sinal de positivo com as mãos.
163	Paulínia	Da sim, é o mesmo raciocínio usado na base 2 e 10.	O grupo não sente a necessidade de realizar testes.
164	Pesquisador	Agora imagine uma situação em que você tenha que converter o número 150 (Base decimal) para a base 2. Será que você irá colocar 150 grãos na primeira ordem da ficha e exaustivamente até formar grupos e obter o resultado? Teria uma outra opção para diminuir este trabalho árduo?	O grupo fica confuso e em silêncio sem pensar em uma estratégia para realizar tal procedimento
165	Pesquisador	Voltem na ficha e na fabricação do número binário correspondente ao número decimal 15. Que operação matemática poderia comandar todo este processo de conversão?	
166	Alisson	É a divisão pegando os resultados e sobras para formar o novo número. Por exemplo: 15 dividido por 2 da 7 e sobra 1, depois 7 feijões dividido por 2, da os 3 feijões da 3 ordem e sobra 1. E ai você pega os feijões da terceira ordem e divide novamente por 2 e da 1 com sobra de 1. Sempre pegando os resultados da divisão e as sobras.	Após alguns momentos de silêncio e teste.
167	Pesquisador	Ok! Pensem numa generalização para este processo e lembrem-se da existência de outras bases não decimais.	Fredy se afasta do grupo, o grupo fica em silencio.
168	Paulínia	Isso é meio complicado...não estou entendendo.	
169	Alisson	Essa é a três.	
170	Paulínia	Mostre para o seu colega de grupo como converter um número do sistema de numeração de base decimal para um número em uma base não decimal qualquer	Paulínia lê e relê a questão 3, se mostrando confusa e sem saber o que tem que fazer.
171	Cristina	Vamos pegar um número diferente do exemplo dele e dividir por três para testar. 15 dividido por 3 da grupos e não sobra nada. Depois 5 dividido por 3 da 1grupo e sobra 2	Pensando em voz alta.

		que não dá para dividir. Como não dá mais p dividir tem o número 120 na base 3.	
172	Alisson	A 4) é isso aqui.	Paulínia e Ana Paula acenam para a câmera.
173	Pesquisador	E aí como anda a discussão por aqui?	Fredy se aproxima do grupo.
174	Cristina	Estou escrevendo aquela que discutimos.	
175	Paulínia	Eu estou quebrando a cabeça na 5).	
176	Cristina	Tá! Estamos na 5) então.	
177	Paulínia	Olha como fizemos a 4).	O pesquisador observa o registro escrito.
178	Pesquisador	Vocês estão misturando os registros do número 2 e do número 4. Vejam melhor isso aqui e discutam.	O pesquisador se afasta do grupo. Os alunos passam a reler os registros para melhor organizá-los.
179	Cristina	Então temos que fazer a 4) e a 5) porque isso aqui então vai entrar na 1) e na 2).	Paulínia e Alisson balança a cabeça concordando. Cristina continua realizando registros escritos.
180	Paulínia	Da uma olhadinha se a 3) está correta?	O pesquisador se aproxima do grupo.
181	Pesquisador	Como converter um número do sistema de numeração de base decimal para um número em uma base não decimal? Se eu quiser converter para a base 2, o que eu faço?	
182	Cristina	Divide por 2.	
183	Pesquisador	Isso! Se eu quiser converter para a base 3, o que eu faço?	
184	Cristina	Divide por 3	
185	Pesquisador	Isso! Ilustre isso p mim e tentem generalizar isso... como seria para uma base qualquer?	Os alunos ficam pensativos sem saber o que fazer.
186	Pesquisador	Chamem essa base qualquer de b, por exemplo.	
187	Ana Paula	Para um número n vou dividir por b.	
188	Pesquisador	Isso! Pensem de maneira mais geral, tomando como referência aquilo que vocês fariam para a base 2 e 3.	O pesquisador se afasta do grupo e os alunos começam a realizar registros na ficha.
189	Paulínia	Um número do sistema de numeração de base decimal, pode ser qualquer número.	
190	Alisson	Então pega 99.	Teste crucial.
191	Paulínia	Pode!	Ela Realiza registros com o número escolhido. Enquanto isso Cristina trabalha sozinha em outra questão.
192	Paulínia	Como que a gente vai fazer para passar um número do sistema decimal para uma base não decimal?	Alisson, Ana Paula e Paulínia ficam em silencio pensando.
193	Paulínia	Já sei, “0,1” é um número na base decimal...	Confusão de número decimal com número no

			sistema de numeração de base decimal.
194	Ana Paula	Esse número decimal multiplicado por outro decimal vira um número inteiro.	Paulínia realiza registros com base no que Ana Paula disse e posteriormente começa a coçar a cabeça com dúvidas
195	Paulínia	Como converter um número do sistema de numeração de base decimal para um número em uma base não decimal?	O pesquisador se aproxima do grupo e Cristina o chama.
196	Pesquisador	E aí? Alguma questão para discutir?	
197	Paulínia	É a três	Dúvida na questão 3)
198	Pesquisador	Vocês podem começar a explorar isso aí com exemplos mais simples/particulares e depois tentar ampliar esta compreensão, o que acham?	Os alunos ficam com dúvida sem saber por onde partir. Observa-se que Ana Paula e Alisson não estão concentrados na atividade. A todo momento se distraem com o celular.
199	Paulínia	Vou ler aqui novamente para todo mundo. Como converter um número do sistema de numeração de base decimal para um número em uma base não decimal?	O grupo fica atento a leitura.
200	Pesquisador	E aí? Olha vamos generalizar? Chama no número de n e a base de b... e com base nos exemplos que vocês testaram tentem generalizar. Tente escrever de uma maneira geral aquilo que em particular você fez no número 2). Tentem aí, discutam entre vocês	
201	Paulínia	Ah tá divisões sucessivas até chegar no zero.	Começa a pensar e realizar registros na ficha. Fredy se afasta do grupo. Cristina parece concordar com o que Paulínia escreveu. Alisson e Ana Paula manuseando o celular.
202	Cristina	Falta ainda a 4) e a 5)	
203	Ana Paula	Fredy, e a 4) como que a gente consegue solucionar?	O pesquisador se aproxima do grupo.
204	Pesquisador	Pessoal, percebam que agora é o caminho inverso. Vocês devem discutir e pensar o caminho da volta do que vocês fizeram na questão 2 e 3. Entenderam?	
205	Ana Paula	Sim.	O pesquisador se afasta do grupo.
206	Pesquisador	Para você ter um resultado na base 10, você pensa o seguinte, como eu estou na base 2, se esse feijãozinho está aqui é porque ele foi originado a partir de grupos de dois... então se ele voltar para essa ordem, gera dois...e cada uma destas, ao retornar a ordem anterior gera outras duas... ai no final das contas, quando todos chegarem a primeira ordem, teremos um	Ele aponta para o feijão na ficha. Os alunos balançam a cabeça para sinalizar que sim.

		quantitativo que representa o número na base 10. Entenderam?	
207	Paulínia	O processo é inverso.	
208	Pesquisador	Sim. Na dois você formava grupos, agora você vai decompor/desmanchar os grupos, entenderam? Agora é o inverso.	
209	Paulínia	Vamos escrever aqui.	Inicia os registros da discussão.
210	Cristina	Oh Paty, como que eu escrevo aqui?	
211	Paulínia	Vamos lá... a gente pega de dois em dois e vai voltando...2,4, 8. Você quer saber como nós vamos colocar isso no papel? Vamos escrever... É o processo inverso! Se dá através da devolução de quantidade de pares atribuída a cada ordem anterior e pronto.	Ela explica para Cristina como se decompõe o grupo o grupo realizando mostrando como o processo inverso ocorre. O procedimento é fetio com Paulínia deslocando os grãos na ficha
212	Cristina	Sim.	Ela realizava os registros escritos em função da explicação de Paulínia.
213	Paulínia	Falta só a 5) agora para a gente ir embora	
214	Paulínia	5) Mostre para o seu colega de grupo "*como converter um número do sistema de numeração não decimal para um número correspondente no sistema de numeração decimal*".	
215	Alisson	É aquele negócio do 0,1 x10 lá, da 15.	
216	Paulínia	0,1 é um decimal, no caso. Ele multiplicado por 10 é isso ai. Um decimal multiplicado pela base 10 vai dar um número decimal.	
217	Alisson	Ele vai voltar um número na escala zero	Paulínia e Cristina ficam realizando registros escritos e pensativas.
218	Paulínia	Vamos colocar exemplos: 0,1 no sistema de numeração decimal, ele multiplicado por 10 se torna um numeral decimal.	
219	Alisson	Como que é?	
220	Cristina	Ponha aí, 01x10.	
221	Alisson	Da 1	
222	Paulínia	É da 1, ele não é decimal.	
223	Cristina	Não.	
224	Paulínia	O que é um número decimal?	Risos.
225	Cristina	Decimal é duas casas, eu acho.	
226	Alisson	É uai.	
227	Paulínia	Então é aqui oh... elevado a dois... aí se transforma em 10. Vocês concordam?	Potência de 10 ao quadrado. Eles estão pensando na potência que multiplicado 0,1 resulta em 10. Risos.
228	Alisson	Um decimal pelo que estou vendo aqui... é o que vem depois da vírgula, é desse jeito aí mesmo.	Consulta ao celular.
229	Paulínia	Então, você vai tirar um número do sistema de numeração não decimal, ele não é decimal,	Risos de Paulínia. Conversa informal.

		então é dividido, então ele é dividido, no caso ali é 1/10 que vai dar 0,1, é o contrário disso... entendeu... então não é multiplicado... é dividido. É o contrário, 1/10... então $1/10^2$ é igual a 0,1.	Encerramento do trabalho.

APÊNDICE B – TRANSCRIÇÃO DA VIDEOGRAVAÇÃO E REGISTROS DE OBSERVAÇÕES DO PESQUISADOR REFERENTE A ATIVIDADE REALIZADA JUNTO AO GRUPO 2

Data: 08/12/2022; **Grupo 2:** Caique, Carolina e Luiz Fernando

<Nº>	<Sujeito>	<Transcrição da fala>	Observação (notas)
1	Luiz Fernando	Vamos focar em fazer o 1)	Luiz Fernando assume o papel de líder do grupo, propondo aos demais a leitura da primeira questão.
2	Carolina	O que você entendeu?	Olhando para Luiz Fernando.
3	Luiz Fernando	Devemos representar na ficha essa quantidade de feijão.... será que é por fileira aqui? ...sim!	
4	Carolina	Caique fica ai pensando...	Carolina sorri
5	Luiz Fernando	O que você pensou Caique?	Todos olham para Caique
6	Caique	Uah...eu pensei que tem que distribuir a quantidade de feijão, mas acho que isso pode ser feito assim 9 e depois 6 ...pode ser de várias maneiras diferentes.	O grupo fica em silencio e pensativo
7	Luiz Fernando	Éh... então primeiro a gente representa 9 e depois 6.	O grupo entendeu que os 15 feijões estavam distribuídos em dois grupos devendo cada um deles ser representados na ficha.
8	Luiz Fernando	Ah tá, temos que representar é o total de feijões, 15. Temos que fazer na folha... como que gerar o 15	Silêncio. O grupo houve a discussão de outro grupo. O pesquisador se aproxima do grupo. Luiz realiza a contagem dos grãos.
9	Pesquisador	Vocês compreenderam a questão 1?	
10	Luiz Fernando	Temos que representar o 15 aqui na ficha né..., mas?	O grupo volta a atenção para o pesquisador.
11	Pesquisador	Esta quantidade de feijão está associada a diferentes numerais em diferentes sistemas de numeração... vai depender de critérios que eu vou adotar para gerar estes numerais. Critérios diferentes para agrupamentos desta quantidade vão gerar numerais diferentes.	
12	Caique	Poderia ser um critério, por exemplo, um feijão aqui na segunda ordem vale 10 e outro aqui na primeira ordem vale uma unidade.	Caique aponta para o valor correspondente a um feijão na 2ª e 1ª ordem da ficha. Intuitivamente ele faz uso da base decimal.
13	Pesquisador	Isso! Como vocês organizariam então essa quantidade de feijão na ficha? Lembrem-se de explicar o porquê de ter organizado dessa forma, certo?	Silêncio. O grupo fica pensativo e um começa a olhar para o outro.
14	Pesquisador	Bom, de início vocês associaram a quantidade ao número 15. Agora eu quero saber como vocês poderiam representar o número 15 aqui na ficha, ao longo dessas ordens?	O grupo ouve a instrução.

15	Luiz Fernando	Huum...	Em silencio e sorrindo, ele pega 15 grãos de feijão e coloca um grão na 2ª ordem e 5 grãos na 1ª ordem.
16	Caique	Mas a gente tem que desenhar na ficha né	
17	Pesquisador	Sim! Na folha de resposta do grupo vocês deverão fazer o desenho para representar essa ideia. Agora eu preciso entender por que razão vocês colocaram 1 feijão na 2ª ordem e 5 feijões na 1ª ordem. Discutam e tire suas conclusões.	
18	Carolina	Como assim?	Todos olham para o pesquisador
19	Pesquisador	Bom, da quantidade de feijão que vocês tinham aí (15), que critério vocês adotaram para ter essa representação que vocês indicaram ai na ficha?	
20	Luiz Fernando	Ah tá, foi assim... quando tem 1 aqui (referindo ao feijão da segunda ordem) se refere a um grupo de 10 unidades que foi formado na primeira casa e estes cinco aqui é porque não gerou um grupo de 10 unidades (dezena).	Ele indica a representação na ficha.
21	Luiz Fernando	Se eu adotasse como critério um grupo de 5 elementos, então eu teria 3 feijões na 2ª ordem e nenhum feijão na 1ª ordem, não é isso?	Os outros dois elementos do grupo balançam a cabeça concordando.
22	Pesquisador	Isso!	Se afasta do grupo e solicita o registro das ideias.
23	Carolina	Vou escrever aqui.	Todos acompanham Carolina passar a limpo o registro realizado por Luiz Fernando.
24	Pesquisador	vocês não discutiram a decomposição número...Como que eu posso decompor o número 15 no sistema de numeração de base 10 utilizando potências de base 10 para justificar a conclusão?	O grupo fica pensativo diante do questionamento do pesquisador.
25	Luiz Fernando	Decompor realizando divisão né.	
26	Pesquisador	Será? Pensemos o seguinte, o 15, você tem 1 dezena e 5 unidades, certo? Se fosse 523?	
27	Carolina	Seria 5 centenas, 2 dezenas e 3 unidades.	
28	Pesquisador	Isso! Perceberam que cada algarismo do numeral pode ser escrito como uma potência de 10?	
29	Caique	2 dezenas e depois 5 centenas que é 50 dezenas.	
30	Pesquisador	Então seria, 2 dezenas (2x10) + 5 centenas ($5x10^2$). Certo? E a unidade como fica?	Os membros do grupo balançam a cabeça concordando.
31	Caique	Uah... aí fica 3 na potência 10 elevado a zero para gerar a unidade.	
32	Pesquisador	Isso! Logo o 523 pode ser decomposto da seguinte forma: $5x10^2+2x10^1+3x10^0$. No sistema de numeração de base decimal cada	

		dígito do numeral pode ser escrito como uma potência de 10. Testa para mim por favor a decomposição de 1.326. Como ficaria?	
33	Luiz Fernando	Vai ficar $1x\ 10^3+ 3x10^2+2x10^1+6x10^0$.	
34	Pesquisador	Isso! Veja que o número está sendo escrito por meio de grupamentos de 10, certo? Como ficaria a decomposição de 378,5?	Os alunos balançam a cabeça concordando. O pesquisador se afasta do grupo.
35	Luiz Fernando	$3x10^2+7x10+8x10^0$	
36	Caique	Ai o outro vai ser menos 1 por que é 0,5 = 5/10 = 1/5 $=5x10^{-1}$	
37	Pesquisador	Então, destas decomposições podemos concluir que cada dígito de um número no sistema de numeração de base decimal pode ser escrito como potências de base 10.	
38	Luiz Fernando	Agora a gente tem que fazer isso agora do 15 para terminar a questão. Então vai ser 1x10	
39	Caique	Mais $5x10^0$	
40	Luiz Fernando	Aqui não dá para fazer desenho.	O grupo aguarda enquanto Carolina passa a limpo a conclusão final.
41	Caique	Nesta 1 letra c) nós podemos fazer de outras formas também tipo 15 x 10^0 ou então $5x10^0$ + $5x10^0$ +$5x10^0$	
42	Luiz Fernando	Calma que eu me perdi, $5x10^0$ + $5x10^0$ +... +$5x10^0$ (5 somas). É está certo.	
43	Caique	Dá para escrever de outra forma ainda 1,5 $x10^0$.	Luiz Fernando pede para Caique escrever no papel para que ele possa analisar. Carolina e Luiz Fernando concordam com Caique, sorrindo e balançando a cabeça.
44	Luiz Fernando	15 ao quadrado (devia estar pensando na raiz de 225). Mas não dá porque tem que ser na base 10.	Ele tenta encontrar outro exemplo, mas depois refuta.
45	Carolina	Quais destes exemplos eu vou colocar?	Ela aponta para o seu manuscrito. Os alunos selecionam os exemplos que deverão ser apresentados no registro escrito. Conversa informal.
46	Caique	E nesse caso aqui envolvendo raiz (raiz de 225)	O grupo se propõe a analisar o exemplo apresentado por Caique e todos concordam em colocá-lo no registro a ser entregue ao pesquisador.
47	Luiz Fernando	Ah, tem que escrever que é base decimal viu... coloca um título... 15 na base decimal. A 2) agora perguntou a mesma coisa só que é fora do sistema decimal. Com esta mesma quantidade de grãos de feijão é possível encontrar/fabricar outros números em outros sistemas de numeração que não seja o	Carolina balança a cabeça, concordando. Enquanto Carolina faz a transcrição do que foi discutido no número 1), Luiz Fernando enuncia a questão 2).

		decimal? É aquela de representar em vários números (bases)	
48	Caique	É tipo no sistema de base 3 né...cada feijãozinho aqui vai valer três. Três de segunda ordem e três de primeira ordem.	
49	Luiz Fernando	Não! Um feijão da segunda ordem equivale a três da primeira ordem. Dessa forma aí está sendo um para cada.	Refutação do argumento de Caique.
50	Carolina	Pera aí que eu vou representar aqui...aí a gente anota depois.	Carolina distribui 15 feijões sendo, 3 na primeira ordem, 3 na segunda, 3 na terceira, 3 na quarta e 3 na quinta ordem. A discussão é pausada com a chegada do pesquisador.
51	Luiz Fernando	Espera aí, mas a cada três não forma um?	
52	Carolina	Verdade.	
53	Luiz Fernando	Então tem que ser um aqui, um aqui, um, um e um. Estamos na base três.	Conforme a distribuição de Carolina de três feijões em cada ordem, Luiz substitui cada grupo de 3 feijão por 1 único feijão.
54	Caique	Não! Tem que pegar as potencias de 3, cada feijão na primeira ordem vale 3^1 e cada feijão na segunda ordem 3^2.	Caique por este entendimento ilustra dois feijões na primeira ordem e 1 feijão na segunda ordem. Assim no entendimento dele $3^1+3^1+3^2=15$.
55	Luiz Fernando	Eu acho que é assim... você começa com três aqui e vai passando para cada casa, tipo, 6, 9, 12 até chegar no 15.	Na representação por desenho, Luiz mostra os três feijões se deslocando da primeira ordem até a 5 ordem onde segundo ele os mesmos valerão 15. Os alunos não avançam na discussão. O pesquisador se aproxima do grupo.
56	Pesquisador	E aí como vão? Conseguiram resolver o problema lá daquela decomposição?	Carolina mostra Fredy o resultado da decomposição.
57	Carolina	Fizemos de várias formas aqui.	
58	Pesquisador	Ok! Esse primeiro aqui já basta, porque vocês expressaram cada dígito como uma potência de 10. E os outros que eu deixei? Quero ver... O importante é que vocês percebam que um número na base decimal ele pode ser decomposto como uma soma onde cada digito que compõe uma parcela dessa soma é escrito como uma potência de base 10.	O pesquisador verificou como os alunos expressaram os outros exemplos de números para decomposição deixados.
59	Caique	Olhe aqui para mim, eu converti 15 na base 3. Cada feijão da primeira ordem é uma potência de 3, ou seja, $1x3+1x3=6$. O feijão na segunda ordem é $1x3^2=9$ e totaliza 15.	Ele mostra o exemplo de dois feijões na primeira ordem e um feijão na segunda ordem.

60	Pesquisador	Sim, você trabalhou com potencias, no entanto, a potência de três na primeira ordem é 3^0 é a unidade.	Refutação do resultado de Caique.
61	Luiz Fernando	Como que eu represento na base 3?	
62	Pesquisador	Primeiramente você tem que representar a quantidade de feijões que você quer converter na primeira ordem. Na base decimal você organiza a quantidade de feijões na primeira ordem em grupos de 10 e passa um feijão para a segunda ordem para representar o agrupamento formado. Como seria isso na base 3?	Luiz Fernando pega os 15 feijões e coloca na 1ª ordem da ficha.
63	Luiz Fernando	Ah tá, então eu formo 5 grupos de 3 na primeira ordem e passo feijões para a segunda ordem. Na segunda ordem formo 1 grupo de três que vai para a terceira ordem e sobra dois feijões na segunda ordem que não dá para formar grupo. O número formado será 120 (cento e vinte) na base 3.	Sob orientação do pesquisador Luiz remaneja os grãos.
64	Caique	Então a primeira ordem é 3 elevado a zero né... aí fica $0x\ 3^0+2x3^1+1x3^2$.	
65	Pesquisador	Isso! Cuidado para não falar cento e vinte. É um, dois, zero base 3.	
66	Carolina	Vou anotar e tem que colocar as regras e critérios.... temos que fazer a decomposição também.	Carolina começa a produzir os registros por escrito do que foi discutido. Conversa informal entre Caique e Luiz Fernando. Carolina também faz a ilustração da situação discutida.
67	Luiz Fernando	Temos, igual fizemos no outro.	
68	Carolina	Então a decomposição seria 120 (cento e vinte) =	Carolina acompanha o raciocínio de Luiz e Caique para chegar ao resultado.
69	Luiz Fernando e Caique	$0x\ 3^0+2x3^1+1x3^2$.	Luiz comete erros na soma e Caique corrige.
70	Luiz Fernando	120 é o total de feijão, o número é um, dois e zero. Com esta mesma quantidade de feijões é possível encontrar/fabricar números em outros sistemas de numeração que não seja o decimal? Já fizemos com base 3, vamos fazer com a base 5. A gente faz só de duas mesmas.	Carolina anota. Luiz Fernando relê o enunciado da questão 2). Carolina passa a limpo alguns registros e Luiz e Caique aproveita para lanchar
71	Pesquisador	Veja bem, como vocês estão a trabalhar na base três, não tem sentido dizer dezena e centena... porque dezena e centena são referentes a base 10. Então o número obtido por vocês é $(120)_3$. Eu não posso falar 120 porque remete a um número na base decimal composto por dezena e centena. Vocês fizeram com o deslocamento do feijãozinho, ok! Com 15 é tranquilo! Agora imagine se eu fosse transformar/passar 150 da base decimal para a base 3. Será que eu vou	

		precisar colocar 150 feijãozinho e ter todo aquele trabalho de ficar formando grupo e remanejando para outras ordens e assim sucessivamente? Será que não existe uma estratégia mais simples para realizar essa conversão?	
72	Carolina	Como assim?	O grupo fica em silêncio e não progride na discussão da tarefa.
73	Pesquisador	Qual a operação matemática que está por traz deste processo de organização de feijão em grupos?	
74	Caique	É divisão!	
75	Pesquisador	Isso! Acompanhem aqui na ficha de vocês. 15 feijões na primeira ordem, dividido por 3, resulta em um quociente 5 e em um primeiro resto 0. Depois 5 feijões na segunda ordem dividido por 3, resulta em um quociente igual a 1 e um resto igual a 2. Veja que o último quociente obtido mais os restos obtidos na ordem inversa vai gerar o numeral que vocês obtiveram por meio da exploração da ficha $(120)_3$. Vocês também podem utilizar aquela tabela de divisão ensinado lá no Ensino fundamental.	O pesquisador em conjunto com os alunos foram realizando as operações. Luiz Fernando cita um exemplo. O pesquisador desenha uma tabela de divisão para mostrar outra estratégia de divisão. Valor inicial Dividir pela base Resultado Resto.
76	Carolina	Isso facilita bastante.	
77	Luiz Fernando	Então nessa 2) pode aumentar os números para dar mais exemplos?	
78	Pesquisador	Pode. Existem várias estratégias de transformação e eu quero ver quais que vocês são capazes de exibir.	Caique cita um exemplo de divisão euclidiana de 15 na base 2 para explicar ao pesquisador como ele compreendeu. Ele explora as propriedades da divisão mentalmente
79	Caique	$15= 1111_2$	
80	Pesquisador	Se você digitar quinze no teclado do computador, o computador vai registrar/armazenar na memória 1111_2. O computador trabalha com a base binária, base 2.	
81	Caique	Ahhhh entendi.	Descoberta expressa por meio de um sorriso.
82	Pesquisador	O que é um byte? É um conjunto de 8 bits. Um bit é um caractere 0 ou 1. Megabyte, terabyte, kylobayte são múltiplos de byte e do bit	Caique experimenta converter 1024 para a base 2 para ver a quantidade de um e zeros....1024= (100000000). O pesquisador confere e da ok, explicando que se ele digitar 1024 o computador vai gerar uma combinação de zeros e 1

83	Caique	Hummm, interessante!	O pesquisador se afasta e vai em direção a outro grupo.
84	Carolina	Na 3) Mostre para o seu colega de grupo como converter um número do sistema de numeração de base decimal para um número em uma base não decimal qualquer. Vamos ficar atento com a essa orientação.... validar a conclusão tirada na questão anterior.	
85	Luiz Fernando	Vamos voltar, bora focar...já fizemos na base 3, agora basta fazer na base 5.	Momento de conversa informal.
86	Carolina	Generalize essa ideia.	
87	Luiz Fernando	Tem que fazer os desenhos... o que nós fizemos na questão anterior? Ah representar os feijões. É aquela ideia que fizemos com o 3, agora vamos fazer com o 5.	Luiz diz olhando para Caique aguardando aprovação.
88	Caique	Por cinco é a mesma coisa... aqui oh...	Caique organiza os 15 feijões na primeira ordem e os agrupa em grupos de 5.
89	Luiz Fernando	Faz a separação das casas	Caique coloca 3 feijões na segunda ordem, não restando feijão na primeira ordem.
90	Caique	Vai ficar 3x 5 na segunda casa.	
91	Luiz Fernando	Agora a gente explica da mesma forma que a base 3. Então da $0x5^0+3x5^1$.	
92	Carolina	Como que a gente explica isso de uma forma geral? Para ter todas as formas.	
93	Luiz Fernando	Sim, igual Caique está fazendo ali...Da forma que ele explicou a da base 5 temos que mostrar para todas as bases.	Apontando para a representação do 15 na base 5, indicado na ficha de Caique.
94	Carolina	Tipo, tem que valer para todas 5, 6, 7, 8....	
95	Luiz Fernando	Tem que pegar um número n na base 10, uma base b, e um número x que é o resultado final	Conversa informal durante o período. Carolina realizando anotações. *Parece que ele quis dizer, a cada digito aumenta um expoente.
96	Carolina	Mas ai eu pego uma quantidade e distribuo em grupos conforme for a base né..	Interessante, generalização de Carolina para a distribuição na ficha.
97	Luiz Fernando	Sim, vamos escrever assim... tipo... vamos dividir n pela base, cada base (tipo 3 grupos de 3, 5 grupos de 5, 6 grupos de 6)... como nós vamos explicar? É dividir e sair fazendo grupos e novamente	
98	Caique	A cada número da base você forma grupos que tem a quantidade da base, tipo a base 5	Todos do grupo pensando apenas na generalização da base e não do número n (base decimal)
99	Luiz Fernando	E pode ser um número qualquer viu. Escreve aí Caique	Luiz lê o enunciado da questão para compreender.

100	Caique	Para converter da base 10 para uma base qualquer é preciso pegar um número qualquer (n) e dividir pela base (b) formando grupos conforme for a base (b) e a partir disso o número de grupos formados você torna dividir pela base (b) e assim vai até quando for possível dividir e formar grupos. O resultado final e as sobras que não resultou em grupo vai gerar a fabricação do número na base qualquer	O pesquisador se aproxima do grupo e pergunta sobre a questão 2).
101	Luiz Fernando	Agora é a 4). Imagine agora que você tenha a seguinte situação, a "*representação de um número binário*" (sistema de numeração de base 2) indicado na ficha a seguir. O que fazer para converter este número (representado na ficha) para o sistema de numeração de base decimal? Justifique suas ideias.	Conversa informal e Luiz Fernando realizando registros por escrito. Ele acrescenta o exemplo de Caique (10024 na base 2) na questão fazendo a divisão utilizando uma tabela. O pesquisador responde uma dúvida de Caique sobre 1 byte aleatório convertido para a base decimal.
102	Caique	A 4) eu sei fazer... é mais ou menos o que eu estava conversando com ele (pesquisador) antes.	
103	Luiz Fernando	Então você escreve aí e faz a 4). Imagine agora que você tenha a seguinte situação, a representação de um número binário (sistema de numeração de base 2) indicado na ficha a segui. O que fazer para converter este número indicado na ficha para o sistema de numeração de base decimal? Justifique suas ideias	O grupo por algum tempo fica em silencio, aguardando Caique realizar alguns registros escritos. Depois disso Luiz Fernando passa a enunciar a questão 4).
104	Pesquisador	Vocês estão em qual questão?	Conversa informal sobre o PIBID enquanto Caique realiza a transcrição do número 4).
105	Carolina	Agora eu vou fazer a 5). É o inverso do que fizemos na 3), tipo é descrever como desfaz aquelas divisões da 3). É desmanchar os grupos da base feitos pela divisão. Vamos fazer a 5). Parece ser tranquila.	Conversa informal
106	Luiz Fernando	Mostre para o seu colega de grupo como converter um número do sistema de numeração não decimal para um número correspondente no sistema de numeração decimal.... No caso a gente divide e multiplica, não? Exemplo: Aqui você vai dividindo para chegar no número decimal, 3x1=3, 5x2=10, 5x1...não! Não é isso não!	
107	Carolina	É aquilo que eu falei antes	
108	Luiz Fernando	3x3=9, 9+5 da 15? Não...	
109	Caique	Da direita para a esquerda a gente considera a base elevado a zero. A gente multiplica o	

		primeiro algarismo da direita do número pela base elevado a zero.	
110	Luiz Fernando	O número da primeira ordem vezes a base elevado a zero...depois 1,2,3, voltando né.	
111	Caique	Cada ordem representa um expoente para a base. 1ª ordem, expoente zero, 2ª ordem expoente 1, 3ª ordem expoente 2.	
112	Luiz Fernando	Vamos ver se dá certo aqui.... Essa aqui foi a última né (referente ao último exemplo do número 3, "120" base 3).	
113	Caique	Isso!	
114	Carolina	Decompõe ai	
115	Luiz Fernando	$0x3^0+2x3^1+1x3^2$. Essa é a justificativa... Agora como que nós vamos explicar isso? Tem que ser geral viu.	
116	Pesquisador	Agora vocês precisam generalizar essa ideia. Não é pensar que a base é somente 2,3,4,5,6... é preciso generalizar... a base pode ser um "b"	
117	Carolina	É	
118	Caique	Cada algarismo do número na base correspondente multiplicado pela sua base elevando a ordem (onde a primeira ordem é zero, a segunda ordem é equivalente a 1, a terceira ordem a 2 e assim por diante....) A soma dos seus resultados vai gerar o número na base decimal.	Caique consegue uma generalização
119	Pesquisador	Isso. Pense na possibilidade de generalizar a quantidade de dígitos do número, "d_n, d_{n-1}, ..., d_0"... depois a base e depois as potencias em ordem decrescente "b^n, b^{n-1}, ..., b^0"	
120	Caique	O resultado será sempre na base 10?	
121	Pesquisador	Sim. Quando você pega um número em uma base não decimal e você trabalha com as potencias relativas aquela base você vai gerar um número na base decimal.	
122	Luiz Fernando	É o caso de voltar né... a gente vai voltar para a base 10. Então seria qualquer base, cada ordem dela conforme a separação aqui será elevado a zero (ordem 1), 1 (ordem 2) ....etc. que vai dar o resultado na base 10.	
123	Pesquisador	Isso, agora transcreva essa ideia para o papel	
124	Luiz Fernando E Caique	Escreve.... Em cada base... em cada valor de base...cada algarismo da base correspondente vezes b elevado a sua ordem.	Os dois pensam juntos e falam juntos.
125	Carolina	A sua ordem menos 1 (-1)	
126	Caique	Eu estou colocando assim, a primeira ordem equivalente a expoente zero (expoente da base)	
127	Luiz Fernando	Tá! Cada algarismo da base correspondente elevado a ordem.	
128	Caique	Elevado a sua ordem, em que a primeira ordem corresponde ao expoente zero, a segunda ordem corresponde ao expoente 1, a	

		terceira ordem ao expoente 2 e assim por diante... todos os resultados.	
129	Luiz Fernando	Cada algarismo da base correspondente elevado a ordem que ... a primeira ordem está relacionada ao expoente zero, mas só que aqui elevado a sua ordem 10 né? Não.	
130	Caique	A ordem do expoente da base.	
131	Luiz Fernando	Mas qual vai ser o elevado? A base aqui não é 10?	
132	Caique	A base pode ser qualquer base b.	
133	Carolina	Se eu utilizar a base 10, eu vou estar voltando do decimal para o decimal.	
134	Caique	Não importa a base que tiver o resultado vai gerar um número na base 10.	
135	Luiz Fernando	Entendi.	
136	Caique	Não importa a base que tiver. O resultado da multiplicação da base correspondente vezes o algarismo correspondente e o resultado somado individualmente vão dar um número na base 10 e assim por diante.	
137	Luiz Fernando	Que mais? Só?	
138	Caique	Vou anotar...cada algarismo da base correspondente elevado a sua ordem (que está correspondendo a ordem da sua base ne – ordem 1 expoente zero, ordem 2, expoente 1, ordem 3, expoente 2....) A multiplicação do algarismo do número na base.	Caique realiza o registro do que pensa e do que havia raciocinado com os colegas. Caique e Luiz relê e fazem ajuste no texto.
139	Carolina	Esse negócio da ordem aqui convém sempre colocar -1	Ela volta nesta sugestão.
140	Luiz Fernando	-1 de cada ordem 1-1=0 2-1=1 3-1=2	
141	Caique	Hum... é verdade, vai ser a linguagem matemática nesse caso. A soma dos resultados da multiplicação de xb^{n-1} onde x representa um digito qualquer, b a base e n, a ordem correspondente sempre vai dar resultado de base 10.	
142	Carolina	Você escreveu na linguagem matemática e ficou bem mais resumida.	
143	Luiz Fernando	Em forma de desenho fica muito mais fácil de ser escrito.	
144	Carolina	Sim.	Começa a transcrever no rascunho a conclusão da 5). Conversa informal (PIBID)

APÊNDICE C – TRANSCRIÇÃO DA VIDEOGRAVAÇÃO E REGISTROS DE OBSERVAÇÕES DO PESQUISADOR REFERENTE A ATIVIDADE REALIZADA JUNTO AO GRUPO 3

Data: 08/12/2022**; Grupo 3:** Ana Lívia, Lena, Luiz Felipe

<Nº>	<Sujeito>	<Transcrição da fala>	Observação (notas)
1	Ana Lívia	Acho que é assim, unidade, dezena, centena, unidade de milhar, centena de milhar.... parecido com o que a gente faz no ábaco.	Ela aponta para a ordem dos feijões na ficha.
2	Ana Lívia	Vamos pensar como se fosse o ábaco. Que número seria esse?	O grupo fica um tempo em silencio.
3	Luiz Felipe	Três, três, três, dois, dois, dois... 333.222 (trezentos e trinta e três mil duzentos e vinte e dois).	
4	Ana Lívia	Aham	Concordando com o colega
5	Luiz Felipe	Vamos colocar aqui...	Leticia toma a iniciativa de representar a quantidade de feijões na ficha...dois feijões na primeira ordem, 2 na segunda ordem, 2 na terceira ordem, 3 na quarta ordem, 3 na quinta ordem e 3 na sexta ordem.
6	Lena	Mas esse número nós podemos colocar de outro jeito também né.	
7	Ana Lívia	A quantidade de feijões que você dispõe representa um número no sistema de numeração de base decimal, que número é este? Represente este número na ficha.	Ana Lívia chama a atenção da equipe para o enunciado da questão 1 e o que está sendo pedido. O grupo fica pensativo. O pesquisador se aproxima.
8	Pesquisador	Aqui vocês têm essa quantidade de feijão. Essa quantidade de feijão está associada a uma ideia de número. Que número que é este?	
9	Ana Lívia	A gente pode montar o número que quiser?	
10	Pesquisador	Qual o número que está associado a esta quantidade de feijão no sistema decimal?	
11	Lena	Você fala no total ou separado para cada um deles?	Leticia aponta para a fileira de feijões da ficha, pensando não no total, mas no ordenamento deles.
12	Pesquisador	É em relação ao total, ou seja, a quantidade que você tem aí.	
13	Lena	Vai dar 15	Lena realiza contagem dos grãos.
14	Pesquisador	15 é o número que representa esta quantidade de feijões. A quantidade de feijões representa o número quinze que é representado pelo numeral 15. Agora, discutam.... com essa quantidade de feijões, como eu vou gerar o quinze aqui.	O pesquisador aponta para a ficha. O grupo por meio de expressões faciais sinaliza ter compreendido a questão.

15	Lena e Ana Lívia	É o quinze.	Sob os olhares de Luiz Felipe as duas alunas representam o quinze na ficha, sendo um feijão na segunda ordem e cinco feijões na primeira ordem.
16	Ana Lívia	Apresente critérios e regras para a fabricação e decomposição do numeral correspondente a este número... tipo assim, uma dezena e cinco unidades, ou pode ser quinze unidades também, né.	Ana Lívia lê o que é solicitado posteriormente na atividade
17	Lena	15 dividido por 10 da um e sobra 5	
18	Ana Lívia	Verdade, faz sentido	
19	Lena	Hunrum	O grupo fica pensativo e cada um fica relendo o enunciando da questão.
19	Luiz Felipe	1 dezena, dez unidades formam uma dezena.	
20	Lena	Podemos usar o método do material dourado para chegar no 15	Sugere isso...,mas a discussão não vai adiante. O pesquisador se aproxima
21	Luiz Felipe	Pronto!	
22	Lena	É isso ai.	
23	Ana Lívia	Pode ser métodos... utilizar método do quadro valor de lugar...expressão	
24	Pesquisador	Olha, vocês poderiam explorar a decomposição do numeral 15 para tentar uma justificação adicional aqui na resposta	Ana Lívia realiza anotações e o silêncio no grupo se instala. Lena pega uma folha para realizar alguns testes... Ela começa a decompor o 15.
25	Luiz Felipe	Como que a gente vai fazer isso aqui?	Lena começa a rir. Ana Lívia Segue realizando anotações sozinha
26	Ana Lívia	É preciso fazer o desenho aqui?	
27	Luiz Felipe	Desenho de que?	
28	Ana Lívia	20 menos 5? Colocando feijãozinho	Ela começa a fazer o desenho
29	Lena	Não tem como colocar raiz de 15 né?	
30	Luiz Felipe	Não	Cada integrante do grupo trabalha sozinho, realizando testes e pensando sozinho
31	Lena	Como que eu provo (mostrar) isso?	
32	Ana Lívia	Pode ser raiz de 225	Ela responde olhando para Lena. O pesquisador se aproxima do grupo.
33	Lena	Tem como envolver raiz dentro dessa representação?	Pergunta feita ao pesquisador

34	Pesquisador	Dentro dessa em especial, não, porque estamos trabalhando com quantidades, a não ser que envolva raiz que resulte em um número inteiro. É na representação de que? Quero entender melhor sua pergunta.	
35	Lena	Eu estava tentando entender assim, o 15 na potência ao quadrado	
36	Pesquisador	Por que ao quadrado?	
37	Lena	Eu penso depois para chegar na raiz exata.	
38	Ana Lívia	E a raiz de 225 é 15.	
39	Lena	Eu pensei assim, na base 10, 10 elevado ao quadrado, cem mais cinco ao quadrado 25, da 125, raiz quadrada, 15.	
40	Pesquisador	Fiquem atentos ao critério envolvendo a decomposição dos algarismos do número viu, saiu alguma coisa?	
41	Todos	Sim	Todos os membros do grupo balançam a cabeça sinalizando que sim.
44	Pesquisador	Ótimo!	O pesquisador se afasta do grupo
45	Ana Lívia	Com esta mesma quantidade de feijões é possível encontrar/fabricar outros números em outros sistemas de numeração não decimal? Justifique suas ideias	Questão 2) Ela começa a ler as orientações e para no meio para então começar a discutir a questão com os colegas. Ana Lívia começa a realizar registros e os colegas acompanham.
46	Ana Lívia	Fredy, aqui está pedindo para gerar um número em outro sistema de numeração não decimal.	
47	Luiz Felipe	Na 2) pode ser base 5. Pode ser 3x5 ou 5 ao quadrado -10	
48	Leticia	Não pode ser base 10	
49	Luiz Felipe	Então pode ser 5 ao quadrado menos 2 vezes 5.	O grupo aparentemente aceita a ideia de Luiz e se mantem em silencio e pensativo.
50	Ana Lívia	Fredy, aqui a gente pode fazer desse jeito "5 ao quadrado menos 2 vezes 5". A gente usaria a base 5.	Ana Lívia chama o pesquisador e pergunta.
51	Pesquisador	Bom, se a base é 5, vocês vão utilizar qual ideia?	
52	Lena	Meia dezena...meia centena.	
53	Pesquisador	A base agora é 5. Vocês esqueçam dezena, centena e unidade de milhar... são termos utilizados para a base decimal. Antes trabalhávamos com grupos de 10, agora vocês vão trabalhar na base 5, com grupos de quanto?	
54	Ana Lívia	Grupos de 5	

55	Pesquisador	Então a ideia é essa. Peguem os 15 feijões e organizem eles dentro dessa proposta de grupos de 5. Na base decimal a gente trabalhava com grupos de 10, agora nós vamos trabalhar com esta mesma quantidade e formar grupos de 5, conforme vocês mesmos querem.... Então, se a gente organizar em grupos de 5 teremos, 3 grupos na grupos na primeira ordem e não sobra nenhum feijão. Para cada grupo formado passa um feijão para a segunda ordem. Na primeira ordem não temos feijão e na segunda ordem três feijões, logo $(30)_5$ é o numeral que representa a quantidade de feijões referente a 15 na base decimal. Experimentem agora gerar um número binário. Já ouviram falar no número binário? É o sistema de numeração que o computador utiliza. No sistema de numeração decimal nós trabalhamos com grupos de 10, isso porque a nossa máquina de calcular, as mãos têm 10 dedos. Já o computador ele trabalha com a base 2 e em virtude disso temos os termos, bit, byte, kilobyte, megabyte... tudo isso está por traz do conceito de binário, 0 e 1. Organize essa quantidade de feijões aí em grupos de dois para ver a que resultado vocês chegam. Quando você chegar no teclado do computador e digitar 15 o computador vai armazenar na memória o número binário que vocês irão gerar aí.	Lena pega os 15 feijões e passa a distribui-los na ficha. O professor Bruno sai da sala. O grupo se mostra surpreso com o resultado.
56	Lena	Vamos organizar aqui, vai sobrar um.	
57	Ana Lívia	Será 7 grupos de 2 e sobrará 1.	Luiz Felipe concorda balançando a cabeça. O grupo para e não avança com o raciocínio de continuar formando grupos. Ana Lívia começa a escrever registrando o que foi feito e discutido. O grupo se mantém em silencio enquanto Ana Lívia realiza registros.
58	Lena	Falta a 3), 4) e 5) agora.	Ana Lívia continua realizando registros e em seguida chama o pesquisador.
59	Ana Lívia	Fredy, é assim?	
60	Pesquisador	Isso! Aqui neste caso, há sete feijões na segunda ordem, é possível formar grupos de dois?	
61	Ana Lívia	Ah tá, então devo continuar.	
62	Pesquisador	Talvez seja interessante retornar a ficha e realizar o deslocamento dos grãos.	Leticia pega a ficha e os grãos de feijão.

63	Todos	Com 15 feijões na primeira ordem eu formo 7 grupos de dois e sobra 1. Então eu devo colocar 7 feijões na segunda ordem. Com esta quantidade de feijões na segunda ordem eu formo 3 grupos e sobra 1. Agora eu vou colocar três feijões na terceira ordem. Com esta quantidade de feijões eu formo um grupo e sobra 1. Na quarta ordem então terá um único feijão e não será possível mais formar grupo. O número $(1111)_2$ representa o número 15 no sistema de numeração de base binaria.	Pesquisador realiza o movimento dos grãos e os alunos vão falando.
64	Ana Lívia	Ah então podemos fazer assim, passo a passo né...	
65	Pesquisador	Entenderam a lógica? Tudo que fizermos em outras bases é por analogia aquilo que fizemos na base decimal.	
66	Ana Lívia	Vamos lá... uma unidade eu posso utilizar este termo né, na base dois?	Ela passa a registrar o que foi discutido com o grupo e o pesquisador a respeito da conversão para a base 2. Conversa informal e lanche.
67	Pesquisador	sim	Ana Lívia volta a realizar registros por escrito.
68	Pesquisador	Tentem mudar a estratégia de conversão. Pega o 15 e utilize aquela estratégia que vocês haviam mencionado.	
69	Ana Lívia	No caso de dividir por 3?	
70	Pesquisador	Vocês estão trabalhando com qual base?	
71	Ana Lívia	Base 2	
72	Pesquisador	Na base dois vocês trabalharam formando grupos de dois, isso sugere que a divisão seja por quanto?	
73	Ana Lívia	Divisão por 2	
74	Pesquisador	Olha que interessante, a lógica disso tudo, temos o 15. 15 dividido por 2, é formar 7 grupos de dois e sobra 1 que é o resto, circule este resto. Depois 7 dividido por 2, resultado em 3 grupos de dois e sobra 1, circule este novo resto. Com três é possível formar grupos, então continuamos a divisão por 2. Forma um grupinho e sobra 1. Com este resultado dá para formar grupo? Não! Então o último quociente, circule ele, mais os restos tomando na ordem inversa formam o número procurado, $(1111)_2$. É útil essa estratégia caso você tenha que converter um número muito grande como 240 por exemplo. Testa aí para outras bases.	Ana Luiz realiza a anotação por escrito em torno da fala do pesquisador. O pesquisador mostra na ficha a ilustração geométrica dessa divisão.
75	Ana Lívia	15 dividido por 5, vai dar 3 e resto zero. Aqui não dá para dividir. Vai dar $(30)_5$	Ana Lívia passa a maior parte do tempo realizando registros escritos para

			justificar a questão 2. Conversa informal.
76	Lena	Vamos para a três?	
77	Ana Lívia	Mostre para o seu colega de grupo como converter um número do sistema de numeração de base decimal para um número em um sistema de numeração de base não decimal qualquer. Orientação: Nesta etapa você precisa validar a conclusão tirada na questão anterior, produzindo uma generalização da ideia produzida. Você pode argumentar utilizando uma prova conceitual, ou seja, articulando ideias e conceitos e objetos matemáticos para produzir uma generalização, como também fazer uso da linguagem matemática (formal e simbólica) para realizar uma demonstração.	Importante: Ana Lívia chamou a atenção para a orientação da questão.
78	Lena	A gente tem que escolher um número e converter ele para qualquer base.	Ana Lívia balança a cabeça sinalizando que sim.
79	Luiz Felipe	Um número? Qualquer número? 23	Ana Lívia aguarda Luiz escolher o número.
80	Ana Lívia	Podia ser maior...nós vamos converter para grupos de quanto? De base quanto?	O grupo generaliza a partir da escolha de um caso aleatório.
81	Lena	Põe 24 e faz na base 4... A representação decimal é 20 +4	Luiz Felipe e Ana Lívia concordam balançando a cabeça. Ana Lívia realiza registro por escrito enquanto Lena pega a ficha e os grãos para realizar algum teste. Luiz Felipe entrega 24 grãos de feijão a Lena. Ela organiza 24 em seis grupos de 4 na primeira ordem. Enquanto isso Ana Lívia continua realizando anotações.
82	Ana Lívia	E na segunda ordem? Na segunda ordem temos 6 feijões onde é possível formar um grupo de 4 e sobra 2. Então fica $(120)_4$. Agora vamos pegar 24 e dividir por 4 da 6 e resto zero. O resultado da divisão não deu resultado igual ao resultado na representação na ficha. Fredy, o que deu errado aqui?	Leticia imediatamente começa a formar grupos com os feijões da segunda ordem com o suporte da ficha. Ana Lívia realiza registros. Conversa informal. O grupo tem dificuldade de discutir o assunto. O grupo fica parado...parece que algo deu errado...ficam à espera do pesquisador para tirar dúvidas.
83	Pesquisador	Isso... entendi. Pela Lógica quando você trabalha no sistema de numeração de base 10, você dispõe de 10 algarismos de 0 a 9. Na base dois, dois algarismos 0 e 1, sempre abaixo da	

		base. Na base 3, os algarismos são 0,1,2. Na base quatro, você pode utilizar os algarismos 0,1,2,3. Como apareceu um 6 aqui na divisão tem algo errado... vejam que esse resto aqui ainda é possível continuar a divisão e formando grupos de 4.	
84	Todos	ahhhh	O grupo inteiro percebeu o vacilo em não dar continuidade a divisão
85	Pesquisador	Lembrem-se da ficha na representação dos 24 feijões... ou seja... isso significa que na segunda ordem ainda é possível você continuar formando mais grupos.	
86	Leticia	É mesmo, vai sobrar e dar certinho.	Ana Lívia refaz o registro escrito enquanto Leticia fala.
87	Ana Lívia	Ai Fredy, a três é isso? Pegar qualquer número e provar?	
88	Pesquisador	A três... como podemos generalizar isso? Mostre para o seu colega de grupo como converter um número do sistema de numeração de base decimal para um número em um sistema de numeração de base não decimal qualquer. Aí você mostrou para a base 4, certo? E se fosse para uma outra base qualquer? Como vocês fariam?	
89	Ana Lívia	Você diz um número muito grande?	
90	Pesquisador	Que número seria este?	
91	Lena	Você fala, de mais de dois algarismos? Tipo 625	
92	Ana Lívia	Aí nós podemos pegar qualquer base	
93	Pesquisador	A ideia é produzir uma generalização, pegar um número qualquer na base decimal e converter para uma base não decimal qualquer.	
94	Ana Lívia	Então 625 dividido por 5 resultado $(5000)_5$	Ana Lívia realiza os cálculos sob a supervisão dos colegas.
95	Lena	Outra questão...nossa!	Os alunos não leram o enunciado da questão coletivamente. Ana Lívia ficou concentrada nos registros da questão anterior.
96	Luiz Felipe	Tem que voltar agora para o decimal.	
97	Ana Lívia	É assim?	Ela pergunta ao pesquisador sobre o que ela registrou na questão 3.
98	Pesquisador	Aí você mostrou como converter o número 24 na base 4 e 625 na base 5... Mas na base 5, não pode aparecer o algarismo 5	
99	Lena	Uah...625 na base 5.	

100	Pesquisador	Eu não posso utilizar o algarismo 5 na base 5. Eu só posso utilizar o 0,1,2,3,4. São 5 algarismos.	
101	Ana Lívia	Eu não posso utilizar o 6 aqui?	
102	Pesquisador	Você não pode utilizar o algarismo 5. Com 5 ainda não é possível formar grupos de 5? Dá 1 grupo e sobra zero. Entenderam?	A partir daí Ana Lívia começa a corrigir o registro escrito
103	Ana Lívia	É assim? $(10000)_5$ só isso?	
104	Pesquisador	Isso! Agora vocês acham que isso aí apenas é capaz de convencer alguém como que prova? Vocês se sentem convencidos com a validade deste método?	O pesquisador lê o enunciado do que foi pedido na questão 3
105	Todos	Sim	Sorrisos entre os integrantes do grupo
106	Pesquisador	A ideia é generalizar ao máximo. Como utilizar a matemática para promover essas generalizações? Na questão 3, vocês provaram como converter 24 para a base 4 e 625 para a base 5. Vamos pensar fora da caixinha. Se eu quero generalizar eu devo evitar particularizar situações. Então como converter um número qualquer do sistema de numeração de base decimal para uma base b qualquer? Vamos tentar ampliar o pensamento? o que poderíamos fazer? Tentem explicar de uma forma mais genérica. Está certo o que vocês fizeram, contudo vocês utilizaram casos particulares. Vamos pensar de uma maneira mais ampla. Como eu poderia justificar isso? Pode ser com suas próprias palavras	
107	Ana Lívia	Dividindo um número n pela base b e conforme os resultados, vai dividindo pela mesma base na medida em que for formando grupos e deixando restos ao longo das ordens.	Tentativa de produzir uma generalização por Ana Lívia. OBS: o papel do pesquisador foi importante para estabelecer a passagem da prova empírica para a prova conceitual. Conversa informal.
108	Ana Lívia	Algum número de base decimal. Para transformar algum número de base decimal em um número de base qualquer, divide-se....	Ana Lívia fala e escreve ao mesmo tempo
109	Luiz Felipe	O número pela base e os restos também (quocientes) pela mesma base	
110	Ana Lívia	...um número pela base e os seus resultados (quocientes) se possível, pela	Dando continuidade à escrita anterior dela.
111	Luiz Felipe	mesma base	
112	Ana Lívia	...pela mesma base. Imagine agora que você tem a seguinte situação, a representação de um número binário (sistema de numeração de base 2) indicado na ficha a seguir. O que fazer para converter este número (representado na ficha) para o sistema	A equipe passa para a questão 4). Ana Lívia aponta para a ficha mostrando os colegas.

		de numeração de base decimal? Justifique suas ideias. Bom, aqui na quinta ordem tem 1 então volta dois e depois quatro. E ai voltando dobrado mais o resto. É assim Fredy?	
113	Pesquisador	Isso, agora conte quantos feijões tem na primeira ordem.	
114	Ana Lívia	Deu 21	
115	Pesquisador	Isso significa que este número indicado aqui na ficha corresponde ao número 21 na base decimal. Entenderam?	
116	Ana Lívia	Tá. Aí eu vou ter que explicar isso?	
117	Pesquisador	Sim, você pode fazer isso por desenho como também dá para gente pensar em outras possibilidades de encontrar o 21 que não seja por desenho na ficha. Pensem em outra estratégia. Se você tivesse um número binário com algarismo na ordem 10, você iria ficar a vida toda passando/deslocando feijão?	
118	Ana Lívia	Eu posso justificar dizendo que serão realizadas sucessivas multiplicações por 2 até chegar a primeira ordem?	
119	Pesquisador	Sim	
120	Ana Lívia	Como estamos trabalhando com um número binário, o feijão na quinta ordem corresponde a dois na quarta ordem. Esses dois feijões passam para a terceira ordem multiplicado por dois e se juntando com um feijão que já estava lá né. Então com 5 feijões na terceira ordem multiplicados por 2 somam 10 feijões na segunda ordem. Os 10 feijões da segunda ordem multiplicados por 2 e somados com um feijão dá o resultado 21	
121	Pesquisador	Sim, agora pense na decomposição que a gente fez com um número na base decimal. Como a base era 10, cada digito não poderia ser escrito como uma potência de 10? E o número então gerado pela soma destas potencias. Lembram disso? Na unidade 10^0, depois tantos grupos de 10^2, 10^3, etc... Como a base aqui é dois você pode fazer a mesma coisa.	
122	Ana Lívia	Entendi, eu posso colocar....	
123	Todos	$1x2^0$ 0x2 $1x2^2$ $0x2^3$ $1x2^4$	O pesquisador vai apontando para cada ordem e os alunos vão falando as potencias e a quantidade de feijão em cada ordem.
124	Pesquisador	Agora é obter os resultados e realizar as somas, entenderam? É algo semelhante ao que vocês fizeram la atras na decomposição na base 10	Todos balançam a cabeça, sinalizando compreensão.
125	Ana Lívia e Luiz Felipe	Uhum..	Ana Lívia realiza registros escritos para explicar a

			estratégia anterior bem como a nova estratégia originada com o apoio do pesquisador.
126	Ana Lívia	Como este número está na base dois, vai acontecer igual na base 10 que ele disse, cada algarismo vai ser escrito na potência de 2. $1x2^0 = 1$ $0x2 = 0$ $1x2^2 = 4$ $0x2^3 = 0$ $1x2^4 = 16$ Somando tudo vai dar 21 Tudo acontece semelhante a base 10.	Os alunos finalmente parecem ter compreendido.
126	Luiz Felipe	Essa 5) aqui é o que ele tinha falado.... é o que ele falou transformar o número para a base 10. Pegar aqui o 24... eu não lembro o que faz com isso aqui depois.... tipo isso...	Ana Lívia se concentra nos registros da questão anterior. Conversa informal sobre Pibid. O pesquisador é chamado por Ana Lívia.
127	Ana Lívia	Fredy.... Como converter um número do sistema de numeração não decimal para um número correspondente no sistema de numeração decimal, por exemplo 24 e 625	Ela cita exemplos de questões anteriores
128	Pesquisador	Eu vou dar a vocês um desafio, tentem pensar de uma forma mais genérica... porque a matemática ela parte disso aqui e posteriormente ela tenta promover uma generalização... Por exemplo, lembram que vocês promoveram generalizações na questão 3? Perceberam que ao término da questão vocês tentaram ser mais genéricos com a estratégia adotada? Os exemplos estão corretos, mas eu posso generalizar a partir disso aqui? Aqui vocês pretendem particularizar o resultado com 24 e 625. Vocês precisam partir de um número no sistema de numeração não decimal para gerar um número no sistema de numeração decimal. Vocês podem, se quiser, se espelhar na conversão do número $(10101)_2$ para a base decimal e depois generalizar.	O pesquisador se afasta do grupo
129	Ana Lívia	Na base 5. Aqui vai ficar... $0x5^0$ $0x5^1$ $0x5^2$ $1x5^3$ vai dar 625 Fredy, é assim?	Ana Lívia Realiza registros. Parte de um exemplo já usado. Chama o pesquisador.
130	Pesquisador	Isso! Você fez dois exemplos né. Vocês conseguiriam generalizar isso? Não estou dizendo que o que vocês fizeram está tudo errado, só gostaria que vocês fizessem um esforço para pensarem de forma mais ampla possível. Vocês tentaram com a base 4 e 5. Porque não experimentem justificar usando uma base b, uma base genérica. Sendo assim	Os alunos têm dificuldade de prosseguir e o pesquisador tenta ajudar

		você estaria a trabalhar com as potencias de base b. A quantidade de potencias de b dependeria também da quantidade de dígitos do número na base decimal. Vocês podem propor uma generalização do número na base decimal como xyz. Vamos pensar em uma generalização?	
131	Ana Lívia	Ok!	Ana Luiz realiza registros. Ana Lívia deixa o grupo para ir embora por causa do ônibus.
132	Leticia	Nós temos que terminar agora. Vamos deixar assim mesmo?	
133	Luiz Felipe	Vamos! Pode entregar? Pode deixar os escritos aqui?	Conversa informal. Leticia balança a cabeça dizendo que sim
134	Pesquisador	Pode sim. Obrigado viu gente pela participação	

ANEXO A

Atividade: fabricação de números

EQUIPE: _____

Considere a quantidade de grãos de feijão abaixo

1) A quantidade de feijões que você dispõe representa um número no sistema de numeração de base decimal, que número é este? Represente este número na ficha, posicionando adequadamente os feijões ao longo das diferentes ordens e justifique suas ideias (apresente critérios/regras para a fabricação e decomposição do numeral correspondente a este número.)

Ficha: Fabricação de números

8ª ordem	7ª ordem	6ª ordem	5ª ordem	4ª ordem	3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem
____	____	____	____	____	____	____	____

Orientação: Debatam o problema ouvindo com atenção as ideias de cada colega do grupo. Caso não concorde, contra-argumente respeitosamente, apontando um contra-exemplo para refutar a ideia do colega. Você pode também reformular a ideia (ou parte dela) do seu colega e juntos, de forma colaborativa, construirem um argumento para justificar as suas ideias. O respeito e a escuta ativa são fundamentais em uma argumentação, uma vez que esta envolve o confronto de ideias e não o embate pessoal.

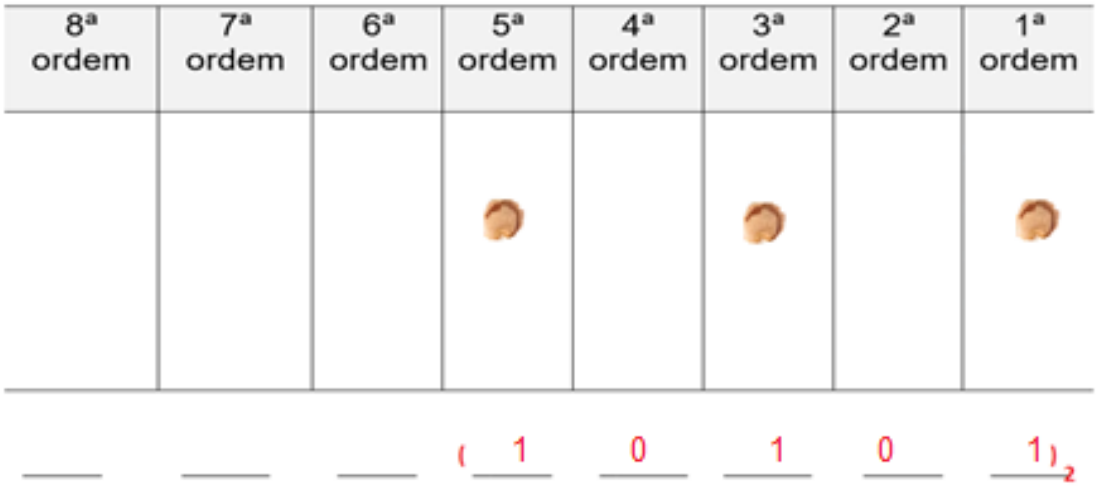
2) Com esta mesma quantidade de grãos de feijão é possível encontrar/fabricar outros números em outros sistemas de numeração que não seja o decimal? Justifique suas ideias.

Orientação: **Discuta com seus colegas a possibilidade de criar outros novos números em diferentes sistemas de numeração que não seja o sistema de base 10 (sistema decimal). Discuta com seu colega, as regras/critérios para a apresentação desse número. Você pode se espelhar no sistema de numeração de base decimal. Fiquem à vontade para criar ilustrações, semelhantes àquela indicada na questão 1, bem como realizar testes para verificar a ideia e posteriormente tirar uma conclusão.**

3) Mostre para o seu colega de grupo "*como converter um número do sistema de numeração de base decimal para um número em uma base não decimal qualquer*"

Orientação: Nesta etapa você precisa validar a conclusão tirada na questão anterior, produzindo uma generalização da ideia produzida. Você pode argumentar exibindo uma prova conceitual, ou seja, articulando conceitos, ideias e objetos matemáticos para produzir uma generalização, como também pode fazer uso da linguagem matemática (formal e simbólica) para realizar uma demonstração.

4) Imagine agora que você tenha a seguinte situação, a "*representação de um número binário*" (sistema de numeração de base 2) indicado na ficha a seguir.



O que fazer para converter este número (representado na ficha) para o sistema de numeração de base decimal? Justifique suas ideias.

5) Mostre para o seu colega de grupo "*como converter um número do sistema de numeração não decimal para um número correspondente no sistema de numeração decimal*"