

IFT - UNESP
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.001/2023

Construção generalizada de Hierarquias Tzitzeica/Bullough–Dodd para álgebras $A_{2r}^{(2)}$

Ysla França Adans

Orientador

José Francisco Gomes

Co-Orientador

Abraham Hirsch Zimmerman

Março de 2023

A221c Adans, Ysla França
Construção generalizada de hierarquias Tzitzeica/Bullough-Dodd para
álgebras $A_{2r}^{(2)}$ / Ysla França Adans. – São Paulo, 2023
100 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista (Unesp),
Instituto de Física Teórica (IFT), São Paulo
Orientador: José Francisco Gomes
Coorientador: Abraham Hirsz Zimerman

1. Teoria de campos (Física). 2. Equações diferenciais não-lineares. 3.
Equações integro-diferenciais. I. Título

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca
do Instituto de Física Teórica (IFT), São Paulo. Dados fornecidos pelo
autor(a).

Dedico esta dissertação a Cicera Romana Correia de França minha amada mãe e a Gabriel Vieira Lobo, meu companheiro nessa jornada.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha mãe, Cicera Romana Correia de França, que me apoiou durante toda a minha vida e me mostrou que o saber o era o bem mais precioso que eu poderia ter. A senhora é o maior exemplo da minha vida e obrigada por me apoiar em mais uma mudança. Ao meu irmão Robson Correia por ter sido um grande incentivador dos meus estudos e ao meu tio Cicero Correia por todo o apoio dado, sem vocês não estaria aqui.

Aos meus companheiros de graduação e mestrado Daniel Cardoso e João Caetano obrigada por serem minha família nesses 7 anos, por todo apoio, amizade, conselho e compreensão e por não desistirem de me trazer para o IFT. Também agradeço a Isabela Maietto, por todo o incentivo antes e durante minha vinda ao IFT. Aos meus amigos Ana Katarine, Gleidson Souza, Mirela Santiago e Rebeca Dourado obrigada pela amizade duradoura e sincera todos esses anos.

A todos os meus professores, muito obrigada. A diferença que cada um de vocês fez na minha vida é notável. Como estudante da escola pública a vida inteira, agradeço por ter conseguido estudar em ambientes de qualidade, como à rede federal de ensino no ensino médio - IFBA, onde realizei minhas primeiras pesquisa e que proporcionou (e ainda proporciona para muitos alunos) uma formação excepcional no ensino médio. Agradeço assim, ao Prof. Dr. Osvaldo Rocha, a Profa. Dra. Luciene Carvalho e a Profa. Dra. Ana Paula Lopes por me introduzirem no caminho da pesquisa científica. Não posso esquecer também da Universidade Federal da Bahia (UFBA) por me preparar tão bem durante a graduação e aos meus antigos orientadores, Prof. Dr. José David Mangueira Viana e Profa. Dra. Maria das Graças Reis Martins, que me deram ótima formação científica e humana durante a graduação.

Agradeço também a minha atual instituição, o Instituto de Física Teórica - IFT pela formação robusta e a oportunidade de pesquisar em alto nível. Um agradecimento a todos os funcionários e professores da instituição, que mantém juntamente com os alunos o instituto funcionando.

Agradeço imensamente ao meu orientador, Prof. Dr. José Francisco Gomes por ter me acolhido mesmo antes do meu começo oficial no IFT. Obrigada por ter acreditado no meu potencial e ter me dado a oportunidade de pesquisar física matemática na sua companhia, sempre me orientando com sua experiência ao mesmo tempo que me fornecia a liberdade que eu precisava para desenvolver meu próprio raciocínio. Ao meu co-orientador, o Prof. Dr. Abraham Hirszt Zimerman obrigada por seu um dos maiores exemplos de dedicação à ciência que eu conheço. Sua assiduidade nas reuniões, bom humor e anos de contribuição a área são um verdadeiro exemplo. Também gostaria de agradecer a todos os membros e

colaboradores do grupo por todas as discussões valorosas que tivemos.

Finalmente gostaria de agradecer ao meu companheiro de pesquisa e vida, Gabriel Lobo. Obrigada por ter sido a melhor parceria para a pesquisa e discussão que eu poderia ter durante o mestrado, mas também obrigada por ter dado um novo significado a minha vida. *All's well that ends well to end up with you.* Te amo!

Eu gostaria de agradecer à CNPq e à FAPESP pelo apoio financeiro na bolsa de mestrado regular no país sob processo número: 2021/00623-4, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) para a realização desse trabalho. As opiniões, hipótese e conclusões ou recomendações expressas nesse material são de responsabilidade do autor e não necessariamente refletem a visão da FAPESP e da CNPq.

A vida não é fácil para nenhum de nós. Mas e daí? Nós devemos ter persistência e, acima de tudo, confiança em nós mesmos. Devemos acreditar que somos talentosos em alguma coisa, e que essa coisa, a qualquer custo, deve ser alcançada.
- Marie Curie

Resumo

Uma estrutura de Lie algébrica graduada juntamente com uma representação de curvatura zero tem um papel fundamental na construção sistemática de hierarquias integráveis. Como um exemplo de construção explícito, a álgebra afim A_1 gera a hierarquia mKdV que contém as conhecidas equações sinh(sine)-Gordon e mKdV.

Neste trabalho, expandimos esta construção sistemática para uma classe de álgebras, as álgebras afins *twisted* $A_{2r}^{(2)}$. Exploramos a álgebra $A_2^{(2)}$ cujo tempo relativístico leva ao modelo *Tzitzeica* (ou *Bullough-Dodd*) usando um processo chamado *folding*, que consiste na aplicação de um automorfismo a álgebra $A_2^{(1)}$. Usando a representação da curvatura nula, apresentamos explicitamente a hierarquia $A_2^{(2)}$ e $A_4^{(2)}$ e usamos a álgebra afim para construir duas sub-hierarquias, uma associada aos fluxos temporais positivos e outra aos fluxos temporais negativos. Além disso, utilizamos o método de *Dressing* para obter as soluções soliton usando o operador vértice para essas hierarquias juntamente com o método Hirota.

Palavras Chaves: Hierarquias Integráveis; Soluções soliton; Álgebras *twisted*; Hierarquia *Tzitzeica*/ *Bullough-Dodd*; Vácuo não-nulo.

Áreas do conhecimento: Física; Física Das Partículas Elementares e Campos; Hierarquias Integráveis.

Abstract

A graded algebraic Lie structure together with a zero curvature representation has a fundamental structural role in the systematic construction of integrable hierarchies. As an explicit construction example, the affine algebra A_1 generates the mKdV hierarchy that contains the well-known sinh(sine)-Gordon and mKdV equations.

In this work, we aim to expand this systematic construction for a class of algebras, the $A_{2r}^{(2)}$ twisted affine algebras. We explored the algebra $A_2^{(2)}$ whose relativistic time leads to the Tzitzeica (or Bullough-Dodd) model using a process called folding, which consists in applying an automorphism to the $A_2^{(1)}$ algebra. Using the zero curvature representation, we present the $A_2^{(2)}$ and $A_4^{(2)}$ hierarchy explicitly and use the affine algebra to construct two sub-hierarchies, one associated with the positive and other with the negative temporal flows. Furthermore, the Dressing Method is used to obtain the soliton solutions using the vertex operator for these hierarchies together with the Hirota method.

Keywords: Integrable hierarchies; Soliton solutions; Twisted algebras; Tzitzeica/Bullough-Dodd hierarchy; Nonvanishing vacuum.

Knowledge area: Physics; Field Theory; Integrable hierarchies.

Publicações

Durante o decorrer do mestrado, as seguintes publicações foram desenvolvidas pela discente:

1. ADANS, Y. et al. Twisted affine integrable hierarchies and soliton solutions. *Brazilian Journal of Physics*, Springer, v. 53, n. 1, p. 24, 2023.
2. ADANS, Y. et al. Comments on the negative grade kdv hierarchy. *Proceedings of the 34th International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics - SciPost*, 2022.
3. ADANS, Y.; FRANÇA, G.; GOMES, J.; LOBO, G.; ZIMERMAN, A. Negative KdV and mKdV Hierarchies and their Gauge-Miura Transformations. In preparation.

Índice

1	Introdução	1
2	Hierarquias Integráveis	4
2.1	Condição de Curvatura Nula	4
2.1.1	Problema Linear Associado	4
2.1.2	Cargas Conservadas	6
2.2	Álgebras de <i>Kac-Moody</i> e hierarquias integráveis	8
2.2.1	Hierarquia <i>mKdV</i> - $A_1 = sl(2)$	11
2.2.2	Hierarquia <i>mKdV</i> - $A_2 = sl(3)$	15
3	Construção de álgebras $A_{2r}^{(2)}$	22
3.1	Exemplos: $A_2^{(2)}$ e $A_4^{(2)}$	22
3.1.1	$A_2^{(2)}$	22
3.1.2	$A_4^{(2)}$	24
3.1.3	Generalização $A_{2r}^{(2)}$	26
4	Hierarquia Tzitzeica/Bullough–Dodd	30
4.1	Hierarquia $A_2^{(2)}$	30
4.1.1	Estrutura geral do modelo	30
4.1.2	Tempos Positivos	32
4.1.3	Tempos negativos - Análise geral	34
4.1.4	Sub-hierarquia Negativa com vácuo nulo	36
4.1.5	Sub-hierarquia Negativa com vácuo não-nulo	37
4.2	Hierarquia Tz/BD - $A_4^{(2)}$ e generalização para $A_{2r}^{(2)}$	38
4.2.1	Hierarquia Tz/BD - $A_4^{(2)}$	38
4.2.2	Análise geral para $A_{2r}^{(2)}$	42
5	Método Dressing	45
5.1	Formulação Geral	45
5.2	Dressing para hierarquias do tipo <i>mKdV</i>	52
5.2.1	$A_1 = sl(2)$	54
5.2.2	$A_2 = sl(3)$	62

6	Soluções para Hierarquia Tz-Bd	72
6.1	$A_2^{(2)}$	72
6.1.1	Resultados gerais	72
6.1.2	Operador de Vértice e auto-valores	75
6.1.3	Forma funcional das soluções	78
6.2	$A_4^{(2)}$ e generalização para modelos de Toda $A_{2r}^{(2)}$	81
6.2.1	Soluções 1-soliton $A_4^{(2)}$	82
6.2.2	Ansatz geral para soluções do tipo $A_{2r}^{(2)}$ para modelos do tipo Toda	84
7	Conclusão	87
A	Representação matricial das álgebras $A_r = sl(r + 1)$	89
A.1	$A_1 = sl(2)$	89
A.2	$A_2 = sl(3)$	89
A.3	$A_r = sl(r + 1)$	90
B	Hierarquias Tz/BD $A_{2r}^{(2)}$	92
B.1	Lax Temporais para hierarquias Tz/BD $A_2^{(2)}$	92
B.2	Vértice e funções $\tau_{i,j}$ para hierarquia $A_4^{(2)}$	95
	Referências	98

Capítulo 1

Introdução

Modelos integráveis em $1 + 1$ dimensões são caracterizados por apresentarem um número infinito de leis de conservação, sendo estas responsáveis pela estabilidade de suas soluções soliton [1, 2]. Do ponto de vista da mecânica clássica, essas leis de conservação podem ser interpretadas como Hamiltonianas geradoras de evoluções temporais num espaço de muitos tempos. Cada uma dessas evoluções temporais está diretamente correlacionada a uma equação não linear de evolução e o conjunto dessas equações constitui o que denominamos como *hierarquia integrável*, que tem em comum entre si um conjunto de cargas conservadas com relação às diversas evoluções temporais.

Surge então uma questão natural: dado um sistema, como verificar sua integrabilidade? Ou então, seria possível desde do início garantir a integrabilidade de um sistema? A utilização de uma estrutura Lie algébrica graduada tem mostrado-se fundamental para responder essas questões, pois através dela é possível a construção sistemática de hierarquias integráveis. Utiliza-se para isso álgebras infinitas afins do tipo *Kac-Moody* e uma estrutura de curvatura nula [3] que garantem que esses sistemas serão integráveis por construção. Nessa construção é introduzido o conceito de par de Lax $\{A_x, A_{t_N}\}$: um conjunto de operadores que tem como papel caracterizar a equação de movimento. Dado a condição de curvatura nula e um par de Lax $\{A_x, A_{t_N}\}$ podemos obter então uma equação de movimento não-linear como resposta. O mais interessante dessa construção é que modificando somente o A_{t_N} pode-se obter uma equação de movimento totalmente distinta, mas que ainda irá compartilhar da mesma estrutura devido ao fato do A_x ser o mesmo.

Como exemplo explícito dessa construção algébrica, utilizando a álgebra afim $\mathcal{G} = A_1 = sl(2)$ geramos a hierarquia *mKdV* que contém - entre outras as equações - a equação *sinh-Gordon* e *mKdV* (veja [4, 5]). Uma característica interessante nessa hierarquia é que ela se subdivide em duas grandes categorias: temos as equações ditas pertencentes a sub-hierarquia *positiva* que apresentam uma estrutura de *polinômio diferencial*, onde a equação é composta por uma soma de termos envolvendo produtos de potências do campo da teoria e de suas derivadas, todos

eles apresentando a mesma dimensão e também tempos as pertencentes a sub-hierarquia *negativa* que apresentam equações *não-locais* caracterizadas por termos contendo anti-derivadas.

Além disso, através dessa estrutura algébrica também é possível obter e classificar soluções do tipo soliton [6, 7, 8], utilizando diferentes métodos como o método de *Dressing*, que se sustenta no fato da equação de curvatura nula ser invariante por transformações de *gauge*. Pode-se inclusive introduzir diferentes condições de contorno para as soluções soliton [4, 9], que serão estritamente necessárias para certas soluções do fluxo negativo.

Assim, uma abordagem utilizando a equação de curvatura nula, álgebras graduadas e transformações de *gauge* para estudar modelos integráveis mostra-se valorosa para entender de forma sistemática diversos problemas em integrabilidade clássica. Nessa dissertação estendemos o estudo dos modelos integráveis do tipo *mKdV* para as álgebras *Twisted* A_{2n}^2 , que podem ser obtidas das álgebras A_{2n}^1 via *folding* [10, 11, 12, 13]. Em específico, focamos na álgebra A_2^2 , cujo tempo relativístico origina o modelo de Tzitzeica (ou Bullough-Dodd) [10, 14] e encontramos as soluções para toda a hierarquia, classificando as sub-hierarquias positivas e negativas a partir de diferentes condições de contorno possíveis. Os novos resultados acerca da hierarquia *Tzitzeica/ Bullough-Dodd* aqui apresentados geraram o artigo *Twisted Affine Integrable Hierarchies and Soliton Solutions* disponível em [15].

A dissertação divide-se então na seguinte estrutura:

- Capítulo 2: apresentamos o conceito de integrabilidade utilizado, a formulação de curvatura nula e sua conexão com uma estrutura algébrica graduada. Propriedades importantes, como a invariância por transformação de *gauge* e a existência de cargas conservadas são apresentadas. Por fim, exemplificamos essa formulação com a construção da hierarquia *mKdV* para as álgebras A_1 e A_2 ;
- Capítulo 3: construímos explicitamente as álgebras *twisted* $A_2^{(2)}$ e $A_4^{(2)}$ através da introdução de um automorfismo σ (processo de *folding*) nas álgebras A_2 e A_4 respectivamente. Apresentamos uma generalização para o caso $A_{2r}^{(2)}$;
- Capítulo 4: construímos explicitamente a hierarquia *Tzitzeica/ Bullough-Dodd* para as álgebras $A_2^{(2)}$ e $A_4^{(2)}$, bem como classificamos as possíveis sub-hierarquias tanto pelo fluxo temporal quanto pelas soluções de vácuo possíveis. Apresentamos uma generalização quanto a classificação para o caso $A_{2r}^{(2)}$;

- Capítulo 5: introduzimos e detalhamos o processo de obtenção de soluções via método de *Dressing*, bem como introduzimos também o método de *Hirota*. A formulação geral para hierarquias do tipo *mKdV* é apresentada, bem como todas as soluções 1 – *soliton* para o caso A_1 e as soluções 1 e 2 soliton com vácuo nulo para o caso A_2 ;
- Capítulo 6: obtemos as soluções gerais para modelos *twisted*. No caso $A_2^{(2)}$, obtemos as soluções com vácuo nulo e não-nulo enquanto no caso $A_4^{(2)}$ focamos no caso de vácuo nulo. Um *ansatz* geral para álgebras $A_{2r}^{(2)}$ é apresentado;
- Capítulo 7: apresentamos uma breve conclusão e desdobramentos do trabalho, bem como perspectivas futuras.

Detalhes mais extensos estão indicados no apêndice. Sempre que possível, resumimos os passos ou resultados obtidos na seção no final do capítulo.

Capítulo 2

Hierarquias Integráveis

Estabelecemos nesse capítulo as bases teóricas em que os modelos estudados nessa dissertação foram desenvolvidos. Apresentamos aqui a definição de integrabilidade adotada e suas implicações. A partir disso, estabelecemos como uma abordagem utilizando álgebras de *Kac-Moody* é crucial para construção sistemática de um conjunto de equações integráveis, formando assim uma *hierarquia integrável*. Exemplificamos essa estrutura através dos bem conhecidos modelos do tipo *mKdV* para as álgebras $sl(2)$ e $sl(3)$.

2.1 Condição de Curvatura Nula

2.1.1 Problema Linear Associado

Consideremos o seguinte problema linear associado para $\Psi(x, t, \lambda)$ em $1 + 1$ dimensões

$$\partial_t \Psi(x, t, \lambda) + A_t \Psi(x, t, \lambda) = 0 \quad (2.1)$$

$$\partial_x \Psi(x, t, \lambda) + A_x \Psi(x, t, \lambda) = 0 \quad (2.2)$$

onde temos

- $x, t \rightarrow$ coordenadas temporais e espaciais;
- $\lambda \rightarrow$ parâmetro espectral complexo \mathbb{C} ;
- $\Psi(x, t, \lambda) \rightarrow$ elemento de grupo que contém dependência espacial, temporal e com o parâmetro espectral;
- $\mathbf{v}(x, t) = \{v_1(x, t), \dots, v_r(x, t)\} \rightarrow$ campos da teoria;
- $A_\mu = A_\mu(\mathbf{v}, \mathbf{v}_x, \mathbf{v}_{2x}, \dots, \int \mathbf{v} dx, \dots) \rightarrow$ elemento pertencente a uma álgebra de Lie $\hat{\mathcal{G}}$ chamados de **Pares de Lax**, ou potenciais de *gauge* da teoria. Além disso, também são funcionais dos campos da teoria $\mathbf{v}(x, t)$.

Sempre que uma equação de movimento conseguir ser escrita no formato de um problema linear como em (2.1) e (2.2), o problema é dito **integrável**. A primeira consequência direta do problema poder ser escrito nesse formato é a dita **condição de curvatura nula**. Sabemos que a seguinte condição de compatibilidade para o sistema deve ser satisfeita

$$\begin{aligned}\Psi_{x,t} &= \Psi_{t,x} \\ \partial_x (A_t \Psi) &= \partial_t (A_x \Psi) \\ \partial_x (A_t \Psi) - \partial_t (A_x \Psi) &= 0\end{aligned}\tag{2.3}$$

de modo que a seguinte condição deve ser válida

$$\partial_x (A_t) \cdot \Psi + A_t \cdot \partial_x (\Psi) - \partial_t (A_x) \cdot \Psi - A_x \cdot \partial_t (\Psi) = 0.\tag{2.4}$$

Notamos que por se tratar de um problema linear, $\Psi_x = -A_x \Psi$ e $\Psi_t = -A_t \Psi$ e daí segue

$$(\partial_x A_t - A_t A_x - \partial_t A_x + A_x A_t) \Psi = 0\tag{2.5}$$

que dá origem a equação de **curvatura nula**:

$$[\partial_x + A_x, \partial_t + A_t] = 0\tag{2.6}$$

e caso exista uma solução não trivial de (2.6) que leve em equações de movimento para o sistema o modelo será então integrável.

Uma segunda propriedade interessante que obtemos de modelos que podem ser descrito através de uma equação de curvatura nula, é o fato que os pares de Lax sempre podem ser escritos no formato puro *gauge*, i.e:

$$A_\mu = T^{-1} \partial_\mu T = T^{-1} T_\mu.\tag{2.7}$$

com $\mu = x, t$.

- Prova: Seja

$$A_x = T^{-1} T_x = \quad \text{e} \quad A_t = T^{-1} T_t\tag{2.8}$$

note que

$$\begin{aligned}
 [A_x, A_t] &= T^{-1}T_x \cdot T^{-1}T_t - T^{-1}T_t \cdot T^{-1}T_x \\
 &= -T_x^{-1}T \cdot T^{-1}T_t + T_t^{-1}T \cdot T^{-1}T_x \\
 &= -T_x^{-1}T_t + T_t^{-1}T_x.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Por outro lado, também temos

$$\begin{aligned}
 \partial_x A_t - \partial_t A_x &= T_x^{-1}T_t + T^{-1}T_{x,t} - T_t^{-1}T_x - T^{-1}T_{x,t} \\
 &= T_x^{-1}T_t - T_t^{-1}T_x,
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

e desse modo, a equação de curvatura nula é satisfeita:

$$\begin{aligned}
 [\partial_x + A_x, \partial_t + A_t] &= [A_x, A_t] + \partial_x A_t - \partial_t A_x \\
 &= -T_x^{-1}T_t + T_t^{-1}T_x + T_x^{-1}T_t - T_t^{-1}T_x \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

O fato dos pares de Lax poderem ser escritos no formato puro *gauge* será essencial quando formos calcular as soluções dos modelos integráveis nos capítulos posteriores, mas para além disso, essa propriedade garante a existência de cargas conservadas para nosso modelo como veremos a seguir.

2.1.2 Cargas Conservadas

Note que a equação (2.7) implica que T pode ser escrito como a exponencial ordenada [16]

$$T_\gamma(x_1, t_1; x_0, t_0) = \mathcal{P} \exp \left(\int_{x_0, t_0}^{x_1, t_1} A_\mu dx^\mu \right) \tag{2.12}$$

onde γ indica o caminho de integração utilizado e \mathcal{P} o ordenamento da exponencial. Seja então o seguinte produto

$$T_{\gamma_0}(x_1, t_1; x_0, t_0) T_{\gamma_1}(x_0, t_0; x_1, t_0) \tag{2.13}$$

é fácil ver então que tal produto define um **caminho fechado**, de modo que podemos transformar a integral de caminho em uma integral de superfície via teorema de *Stokes*. Assim, aplicando o teorema e a expansão de Baker-Campbell-

Hausdorff ¹, temos:

$$T_{\gamma_0}(x_1, t_1; x_0, t_0)T_{\gamma_1}(x_0, t_0; x_1, t_0) = \exp \left(\frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}} dx^\mu \wedge dx^\nu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]) \right) \quad (2.14)$$

onde \mathcal{S} é a superfície delimitada pelo caminho fechado $\gamma_0 + \gamma_1$. Note, que se a condição de curvatura nula é válida, $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = 0$ e daí

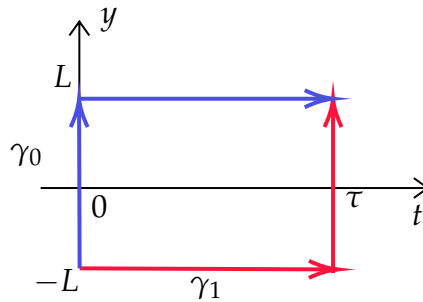
$$T_{\gamma_0}(x_1, t_1; x_0, t_0)T_{\gamma_1}(x_0, t_0; x_1, t_0) = 1 \quad (2.15)$$

ou seja, caso a equação de curvatura nula seja válida a exponencial ordenada (2.12) independe da trajetória, só dependendo dos pontos finais e iniciais:

$$T_{\gamma_0}(x_1, t_1; x_0, t_0) = T_{\gamma_1}(x_1, t_1; x_0, t_0) \quad (2.16)$$

Assim integrar no caminho γ_0 com y de $-L \leq y \leq L$ e em t de $0 \leq t \leq \tau$ é equivalente a integrar no caminho γ_1 em t de $0 \leq t \leq \tau$ e em y de $-L \leq y \leq L$

$$T_{\gamma_0} = T_{\gamma_1} \quad (2.17)$$



de modo que a seguinte equivalência é válida

$$\begin{aligned} & \mathcal{P} \exp \left(\int_0^\tau A_t(y = L, t) dt \right) \cdot \mathcal{P} \exp \left(\int_{-L}^L A_x(y, t = 0) dy \right) = \\ & \mathcal{P} \exp \left(\int_{-L}^L A_x(y, t = \tau) dy \right) \cdot \mathcal{P} \exp \left(\int_0^\tau A_t(y = -L, t) dt \right) \end{aligned}$$

e adotando condições periódicas de contorno $A_t(y = -L, t) = A_t(y = L, t)$,

$$1_e^A e^B = e^{A+B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}([A,[A,B]] + [B,[B,A]]) + \dots}$$

pode-se mostrar que

$$\begin{aligned} & \mathcal{P} \exp \left(\int_{-L}^L A_x(y, t = \tau) dy \right) \\ &= \mathcal{P} \exp \left(\int_0^\tau A_t(y = L, t) dt \right) \cdot \mathcal{P} \exp \left(\int_{-L}^L A_x(y, t = 0) dy \right) \cdot \mathcal{P} \exp \left(- \int_0^\tau A_t(y = L, t) dt \right) \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde tomando o traço dos dois lados, nos resta a seguinte equivalência

$$\text{Tr} \left(\mathcal{P} \exp \left(\int_{-L}^L A_x(y, t = 0) dy \right) \right) = \text{Tr} \left(\mathcal{P} \exp \left(\int_{-L}^L A_x(y, t = \tau) dy \right) \right) \quad (2.19)$$

que nos mostra claramente que essa quantidade calculada num tempo τ qualquer é a mesma daquela calculada no tempo inicial, ou seja

$$\text{Tr} \left(\mathcal{P} \exp \left(\int_{-L}^L A_x(y, t, \lambda) dy \right) \right) \quad (2.20)$$

é uma quantidade conservada. Como veremos a seguir, a introdução de uma estrutura algébrica graduada [3] trás consigo naturalmente um parâmetro λ que nos permite realizar a seguinte expansão dessa quantidade

$$\text{Tr} \left(\mathcal{P} \exp \left(\int_{-L}^L A_x(y, t, \lambda) dy \right) \right) = \sum_n \lambda^n Q_n \quad (2.21)$$

onde $\frac{dQ_n}{dt} = 0$, gerando assim uma quantidade infinita de cargas conservadas:

$$Q_1 = \int_{-L}^L A_x(y, t, \lambda) dy \quad (2.22)$$

$$Q_2 = \int_{-L}^L A_x(y_2, t, \lambda) dy_2 \int_{-L}^L A_x(y_1, t, \lambda) dy_1 \quad (2.23)$$

⋮

2.2 Álgebras de Kac-Moody e hierarquias integráveis

Como vimos anteriormente, a garantia de integrabilidade de um modelo implica em propriedades deveras interessantes para nosso sistema, como a existência de soluções solitônicas e de cargas conservadas. Porém, não é trivial dada uma equação de movimento verificarmos se ela pode ser advinda de uma condição de curvatura nula.

Assim, seguiremos aqui uma formulação [6, 16] que propõe o caminho inverso: dado a condição de curvatura nula, iremos descobrir diversos modelos que são integráveis desde o primeiro princípio. Nosso ponto de partida será a construção de espaços graduados a partir de uma álgebra de Lie afim $\hat{\mathcal{G}}$.

Dada a álgebra afim $\hat{\mathcal{G}}$, introduzimos um operador de gradação \hat{Q} tal que $\hat{\mathcal{G}}$ se decompõe através das seguintes regras

$$\hat{\mathcal{G}} = \sum \mathcal{G}_a, \quad [Q, \mathcal{G}_a] = a\mathcal{G}_a, \quad [\mathcal{G}_a, \mathcal{G}_b] \subset \mathcal{G}_{a+b}, \quad a, b \in \mathbb{Z}. \quad (2.24)$$

obtendo assim uma álgebra de *Kac-Moody* sem a extensão de termo central. Além disso, precisamos fixar um elemento $E^{(1)} \in \mathcal{G}_1$ tal que a álgebra afim $\hat{\mathcal{G}}$ seja decomposta em $\hat{\mathcal{G}} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{M}$, onde \mathcal{K} é o *Kernel* de $E^{(1)}$, definido como:

$$\mathcal{K} = \{y \in \mathcal{K}, [y, E^{(1)}] = 0\} \quad (2.25)$$

e \mathcal{M} seu complemento. Por fim, introduzimos essa estrutura graduada na condição de curvatura nula, i.e.:

$$\begin{aligned} [\partial_x + A_x, \partial_{t_{N,M}} + A_{t_{N,M}}] &= 0, \\ [\partial_x + E^{(1)} + A_0, \partial_{t_{N,M}} + D^{(N)} + \dots + D^{(0)} + \dots + D^{(-M)}] &= 0, \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde A_x e $A_{t_{N,M}}$ são os pares de Lax conforme definidos previamente. Os elementos $D^{(i)} \in \mathcal{G}_i$ e $A_0 \in \mathcal{M}_0 \in \mathcal{G}_0$ devem respeitar a estrutura graduada previamente definida, onde os $D^{(i)}$ fazem parte do *ansatz* inicial e devem ser determinados, ao passo que $A_0 = A_0(v(x, t))$ é um funcional que depende dos campos da teoria e caracteriza o modelo estudado.

Assim, a equação (2.26) irá se decompor de grau em grau devido a nossa estrutura graduada

$$[E^{(1)}, D^{(N)}] = 0, \quad (2.27)$$

$$[E^{(1)}, D^{(N-1)}] + [A_0, D^{(N)}] + \partial_x D^{(N)} = 0, \quad (2.28)$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$[E^{(1)}, D^{(-1)}] + [A_0, D^{(0)}] + \partial_x D^{(0)} - \partial_{t_{NM}} A_0 = 0, \quad (2.29)$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$[A_0, D^{(-M)}] + \partial_x D^{(-M)} = 0, \quad (2.30)$$

onde a parte positiva dessa hierarquia será resolvida recursivamente começando de (2.27), enquanto a parte negativa será determinada começando de (2.30). Encontrados todos os elementos $D^{(i)}$, podemos utilizar (2.29) para determinar a equação de movimento associado a certo $t_{N,M}$, já que A_0 é parametrizado utilizando os campos $v_i(x, t)$.

Note que para cada par $\{N, M\}$ escolhidos teremos uma diferente equação de movimento, de modo que mesmo sem modificar o A_x que contém a informação inicial do modelo podemos obter diversas equações de movimento integráveis somente alterando o par $\{N, M\}$. A esse conjunto de equações de movimento integráveis advindas de um mesmo potencial espacial A_x mas com diferentes potenciais temporais $A_{t_{N,M}}$ denominamos **hierarquias integráveis**. Dentre as possibilidades mais simples para a escolha de N e M , podemos obter o que chamamos de sub-hierarquias, sendo as mais comuns as sub-hierarquias positivas e negativas. Sejam as escolhas:

- $M = 0$:

Nesse caso temos $D^{(-i)} = 0$ para qualquer $i > 0$ e obtemos a **sub-hierarquia positiva**, tais que decomposição grau a grau se reduz à:

$$[E^{(1)}, D^{(N)}] = 0, \quad (2.31)$$

$$[E^{(1)}, D^{(N-1)}] + [A_0, D^{(N)}] + \partial_x D^{(N)} = 0, \quad (2.32)$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$[A_0, D^{(0)}] + \partial_x D^{(0)} - \partial_{t_N} A_0 = 0, \quad (2.33)$$

levando a uma restrição nos valores de N pois a equação de ordem mais alta implica em $D^{(N)} \in \mathcal{K}$, de modo N sempre estará restrito a fluxos temporais que estão no *Kernel*.

- $N = 0$:

Fixando $D^{(i)} = 0$ para qualquer $i \geq 0$ obtemos a **sub-hierarquia negativa**:

$$[A^{(0)}, D^{(-M)}] + \partial_x D^{(-M)} = 0, \quad (2.34)$$

$$[A^{(0)}, D^{(-M+1)}] + [E^{(1)}, D^{(-M)}] + \partial_x D^{(-M+1)} = 0, \quad (2.35)$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$[E^{(1)}, D^{(-1)}] - \partial_{t_N} A^{(0)} = 0, \quad (2.36)$$

que não apresenta nenhuma restrição a cerca dos fluxos temporais permitidos. Um caso notável é obtido quando tomamos $M = 1$ e parametrizamos os elementos como $A_0 = B^{-1}\partial_x B$ e $D^{(-1)} = B^{-1}E^{(-1)}B$, tal que $E^{(-1)} = (E^{(1)})^+$ e $B = e^{\mathcal{G}_0}$ é um elemento de grau zero do grupo [17]. Nesse caso (2.26) se reduz à

$$\partial_t(B^{-1}\partial_x B) - [E^{(1)}, B^{-1}E^{(-1)}B] = 0. \quad (2.37)$$

dando origem ao modelo relativístico de Toda, a exemplo da equação de Sinh-gordon e Tzitzeica.

Ao final, podemos sumarizar as informações de como obter uma hierarquia integrável a partir de uma álgebra afim nos seguintes passos:

- Tome uma álgebra afim $\hat{\mathcal{G}}$ e adicione um operador de gradação \hat{Q} com $[\hat{Q}, \mathcal{G}_a] = a\mathcal{G}_a$, decompondo esta em $\hat{\mathcal{G}} = \sum \mathcal{G}_a$;
- Escolha um elemento $E^{(1)}$ tal que ele decomponha $\hat{\mathcal{G}}$ em $\hat{\mathcal{G}} = \mathcal{K}_E \oplus \mathcal{M}_E$, onde \mathcal{K}_E é o *Kernel* de $E^{(1)}$ e \mathcal{M}_E seu espaço complementar;
- Escolha um A_x contendo a informação do campo $v(x, t)$ que caracteriza o modelo;
- Resolva a equação de curvatura nula de modo a determinar $A_{t_{M,N}}$ e a equação de movimento para dado par $\{N, M\}$;

Como forma de ilustrar essa construção sistemática, iremos exemplificar os passos acima para os modelos do tipo $mKdV$, para as álgebras afim $A_1 = sl(2)$ e $A_2 = sl(3)$. O primeiro exemplo será de grande valia para introduzirmos o conceito de solução de vácuo e o segundo será nossa base de comparação para o foco principal desse trabalho, que são os modelos do tipo $mKdV$ para a álgebra *twisted* $A_2^{(2)}$.

2.2.1 Hierarquia $mKdV$ - $A_1 = sl(2)$

Seja a álgebra afim sem a extensão de termo central $\hat{\mathcal{G}} = A_1$:

$$A_1 = \left\{ h^{(m)} = \lambda^m h, E_{\pm\alpha}^{(m)} = \lambda^m E_{\pm\alpha} \right\} \quad (2.38)$$

cuja as relações de comutação são dadas por

$$\left[h^{(m)}, E_{\pm\alpha}^{(n)} \right] = \pm 2E_{\pm\alpha}^{(m+n)}, \quad \left[E_{\alpha}^{(m)}, E_{-\alpha}^{(n)} \right] = h^{(m+n)}. \quad (2.39)$$

Introduzimos o operador de gradação *principal* \hat{Q}_p

$$\hat{Q}_p = 2\lambda \frac{d}{d\lambda} + \frac{1}{2}h \quad (2.40)$$

tal que decompomos A_1 nos seguintes subespaços graduados

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{2n} &= \{h^{(n)}\}, \\ \mathcal{G}_{2n+1} &= \{E_\alpha^{(n)}, E_{-\alpha}^{(n+1)}\}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Nossa próxima escolha importante é a escolha do elemento constante de grau um $E^{(1)} \in \mathcal{G}_1$

$$E^{(1)} = E_\alpha^{(0)} + E_{-\alpha}^{(1)} \quad (2.42)$$

que decompõe a álgebra em *Kernel* e seu complementar $\hat{\mathcal{G}} = \mathcal{K}_E \oplus \mathcal{M}_E$:

$$\mathcal{K}_E = \{y \in \mathcal{K}, [y, E^{(1)}] = 0\} = \{E_\alpha^{(n)} + E_{-\alpha}^{(n+1)}\} \in \mathcal{G}_{2n+1} \quad (2.43)$$

e

$$\mathcal{M}_E = \{h^{(n)}, E_\alpha^{(n)} - E_{-\alpha}^{(n+1)}\}. \quad (2.44)$$

Enfim, fixamos o objeto que definira toda a hierarquia *mKdV* o operador de Lax espacial A_x

$$A_x^{\text{mKdV}}(v) = E^{(1)} + A^{(0)}(v) = E_\alpha^{(0)} + E_{-\alpha}^{(1)} + v h^{(0)} = \begin{pmatrix} v & 1 \\ \lambda & -v \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

onde $v(x, t) = \phi_x$ é o campo da teoria e adotamos a representação espacial conforme o apêndice A. Note que pelo fato do nosso espaço de grau zero apresentar somente um elemento - $h^{(0)}$ - teremos somente um único campo associado ao modelo.

Dado que agora temos todos os ingredientes necessários para caracterizar a hierarquia integrável, podemos começar a calcular as equações de movimento propriamente ditas. Por exemplo, sabemos que fixando $M = 0$ obteremos fluxos temporais positivos $N = 3, 5, 7, \dots$ devido a restrição (2.31). Assim, o primeiro

tempo possível $N = 3$ fixa o seguinte conjunto de equações

$$[E^{(1)}, D^{(2)}] + [v h^{(0)}, D^{(3)}] + \partial_x D^{(3)} = 0, \quad (2.46)$$

$$[E^{(1)}, D^{(1)}] + [v h^{(0)}, D^{(2)}] + \partial_x D^{(2)} = 0, \quad (2.47)$$

$$[E^{(1)}, D^{(0)}] + [v h^{(0)}, D^{(1)}] + \partial_x D^{(1)} = 0, \quad (2.48)$$

$$[v h^{(0)}, D^{(0)}] + \partial_x D^{(0)} - \partial_{t_3} v h^{(0)} = 0, \quad (2.49)$$

onde

$$D^{(2m)} = a_{2m} h^{(n)} \quad \text{e} \quad D^{(2m+1)} = a_{2m+1} E_{\alpha}^{(m)} + b_{2m+1} E_{-\alpha}^{(m+1)}. \quad (2.50)$$

Resolvendo grau a grau, obtemos o seguinte Lax temporal

$$\begin{aligned} A_{t_3}^{mKdV} &= E_{\alpha}^{(1)} + E_{-\alpha}^{(2)} + v h^{(1)} + \frac{1}{2} (v_x - v^2) E_{\alpha}^{(0)} \\ &\quad - \frac{1}{2} (v_x + v^2) E_{\alpha}^{(1)} + \frac{1}{4} (v_{xx} - 2v^3) h^{(0)} \end{aligned} \quad (2.51)$$

nos levando a seguinte equação de movimento:

$$4v_{t_3} = v_{3x} - 6v^2 v_x \quad (2.52)$$

que é a chamada equação de $mKdV$, que nomeia toda a hierarquia. É obvio que podemos repetir o mesmo procedimento para diferentes valores de N , obtendo diferentes equações de movimento, por exemplo, escolhendo $N = 5$ obtemos

$$16v_{t_5} = v_{5x} - 10v^2 v_{3x} - 40v v_x v_{2x} - 10v_x^3 + 30v^4 v_x \quad (2.53)$$

ou $N = 7$

$$\begin{aligned} 64v_{t_7} &= v_{7x} - 182v_x v_{2x}^2 - 126v_x^2 v_{3x} - 140v v_{2x} v_{3x} - 84v v_x v_{4x} \\ &\quad - 14v^2 v_{5x} + 420v^2 v_{3x} + 560v^3 v_x v_{2x} + 70v^4 v_{3x} - 140v^6 v_x \end{aligned} \quad (2.54)$$

e assim em diante. Todas as equações obtidas são altamente não-lineares e não é trivial obter soluções gerais para esse tipo de equação. Porém, é fácil identificar a existência de uma solução trivial, chamada de solução de **vácuo** para as equações acima. No caso das equações positivas (2.52)-(2.54) todas elas admitem como solução de vácuo $v_{vac} = v_0$, com v_0 uma constante livre. Assim, dizemos que a sub-hierarquia positiva de $mKdV$ admite tanto soluções de vácuo **nulo** como

não-nulo.

Como já vimos, fazendo $N = 0$ obtemos a sub-hierarquia negativa que não apresenta nenhuma restrição quanto aos fluxos temporais possíveis. Por exemplo, tomando $M = 1$, devemos resolver o seguinte conjunto de equações (onde adotamos a parametrização $v = \phi_x$)

$$\left[\phi_x h^{(0)}, D^{(-1)} \right] + \partial_x D^{(-1)} = 0, \quad (2.55)$$

$$\left[E^{(1)}, D^{(-1)} \right] - \partial_{t_{-1}} \phi_x h^{(0)} = 0. \quad (2.56)$$

que nos leva ao seguinte Lax temporal

$$A_{t_{-1}}^{\text{mKdV}} = e^{-2\phi} E_{\alpha}^{(-1)} + e^{2\phi} E_{-\alpha}^{(0)} \quad (2.57)$$

associada com a bem conhecida equação de sinh-Gordon:

$$\phi_{x,t_{-1}} = e^{2\phi} - e^{-2\phi}. \quad (2.58)$$

Note que nesse caso ao passo que $v = 0$ (ou $\phi = 0$) é uma solução de vácuo possível, o mesmo não ocorre para $v = v_0$ (ou $\phi = v_0 x$)

$$\phi_{x,t_{-1}} = e^{2v_0 x} - e^{-2v_0 x} \neq 0 \quad (2.59)$$

estabelecendo assim uma diferença crucial entre as soluções de vácuo dos tempos positivos e negativos. A próxima possibilidade seria considerar $M = 2$, que nos levaria ao seguinte Lax temporal

$$A_{t_{-2}}^{\text{mKdV}} = h^{(-1)} + \left(2e^{-2\phi} d^{-1}(e^{2\phi}) \right) E_{\alpha}^{(-1)} - 2e^{2\phi} d^{-1}(e^{-2\phi}) E_{-\alpha}^{(0)} \quad (2.60)$$

tal que denotamos $d^{-1}f = \int_0^x f dx'$, associado a seguinte equação de movimento

$$\phi_{x,t_{-2}} = -2 \left(e^{-2\phi} d^{-1}(e^{2\phi}) + e^{2\phi} d^{-1}(e^{-2\phi}) \right) \quad (2.61)$$

admitindo somente como solução de vácuo $v = v_0 \neq 0$ (ou $\phi = v_0 x$), ao passo que $v = 0$ (ou $\phi = \phi_0$) nós leva a uma inconsistência

$$\left(e^{-2\phi_0} d^{-1}(e^{2\phi_0}) + e^{2\phi_0} d^{-1}(e^{-2\phi_0}) \right) \neq 0 \quad (2.62)$$

nos sugerindo então que no caso dos tempos negativos, existem um vácuo prefe-

rencial para cada fluxo.

Isso pode ser facilmente compreendido caso realizemos a projeção da equação de curvatura nula no vácuo:

$$\left[E^{(1)} + v_0 h^{(0)}, D_{vac}^{(-N)} + D_{vac}^{(-N+1)} + \cdots + D_{vac}^{(-1)} \right] = 0 \quad (2.63)$$

da onde tomamos a equação de grau mais baixo

$$\left[v_0 h^{(0)}, D_{vac}^{(-N)} \right] = 0 \quad (2.64)$$

e então para que $v_0 \neq 0$, $D_{vac}^{(-N)}$ deve comutar com $h^{(0)}$ levando a $D_{vac}^{(-N)} \in \mathcal{G}_{-2n}$ e $N = 2n$. Por outro lado, se $v_0 = 0$ a equação de menor grau torna-se

$$\left[E^{(1)}, D_{vac}^{(-N)} \right] = 0 \quad (2.65)$$

e daí $D_{vac}^{(-N)} \in \mathcal{K}_E$ de modo que N é ímpar.

Assim, a sub-hierarquia negativa de $mKdV$ se quebra em outras duas sub-hierarquias: uma par, admitindo estritamente vácuo **não-nulo** ($v_0 \neq 0$) e uma ímpar admitindo somente vácuo **nulo** ($v_0 = 0$). Como veremos posteriormente, definir quais vácuos podem ser utilizados para determinadas equações é uma passo de extrema importância para conseguir obter soluções mais gerais para essas equações de movimento.

Podemos considerar agora uma camada adicional de complexidade ao nosso problema introduzindo um modelo do tipo $mKdV$ mas agora a dois campo. Para isso, iremos utilizar a álgebra $A_2 = sl(3)$.

2.2.2 Hierarquia $mKdV$ - $A_2 = sl(3)$

Seja a álgebra afim sem extensão de termo central $\mathcal{G} = A_2$:

$$A_2 = \left\{ h_1^{(m)}, h_2^{(m)}, E_{\pm\alpha_1}^{(m)}, E_{\pm\alpha_2}^{(m)}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m)} \right\} \quad (2.66)$$

onde $T^{(m)} = \lambda^m T$ e cuja as relações de comutação são dadas por:

$$\left[h_i^{(m)}, E_{\alpha_j}^{(n)} \right] = \alpha_i \cdot \alpha_j E_{\alpha_j}^{(m+n)}, \quad \left[h_i^{(m)}, h_j^{(n)} \right] = 0, \quad (E_{\alpha_i}^{(m)})^\dagger = E_{-\alpha_i}^{(-m)}, \quad (2.67)$$

$$\left[E_{\alpha_i}^{(m)}, E_{-\alpha_i}^{(n)} \right] = h_i^{(m+n)}, \quad \left[E_{\alpha_1}^{(m)}, E_{\alpha_2}^{(n)} \right] = E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(m+n)}; \quad (2.68)$$

onde $\alpha_1 = e_1 - e_2$ e $\alpha_2 = e_2 - e_3$, com $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$. Introduzimos o operador de gradação principal \hat{Q}_p

$$\hat{Q}_p = 3\lambda \frac{d}{d\lambda} + h_1 + h_2 \quad (2.69)$$

tal que decompos A_2 numa álgebra de *Kac-Moody* com os seguintes espaços graduados

$$\mathcal{G}_{3m} = \{h_1^{(m)}, h_2^{(m)}\} \quad (2.70)$$

$$\mathcal{G}_{3m+1} = \{E_{\alpha_1}^{(m)}, E_{\alpha_2}^{(m)}, E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m+1)}\} \quad (2.71)$$

$$\mathcal{G}_{3m+2} = \{E_{-\alpha_1}^{(m+1)}, E_{-\alpha_2}^{(m+1)}, E_{(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m)}\}. \quad (2.72)$$

Seguindo nosso receituário, agora escolhemos o elemento constante de grau um $E^{(1)} \in \mathcal{G}_1$

$$E^{(1)} = E_{\alpha_1} + E_{\alpha_2} + E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}^{(1)}, \quad (2.73)$$

que decompõe a álgebra em *Kernel* e seu complementar $\hat{\mathcal{G}} = \mathcal{K}_E \oplus \mathcal{M}_E$:

$$\mathcal{K}_E = \{E^{(3m+1)}, E^{(3m+2)}\} \quad (2.74)$$

onde

$$E^{(3m+1)} = E_{\alpha_1}^{(m)} + E_{\alpha_2}^{(m)} + E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m+1)} \in \mathcal{G}_{3m+1}, \quad (2.75)$$

$$E^{(3m+2)} = E_{-\alpha_1}^{(m+1)} + E_{-\alpha_2}^{(m+1)} + E_{(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m)} \in \mathcal{G}_{3m+2}, \quad (2.76)$$

e

$$\mathcal{M}_E = \{M_0^{(3m)}, M_1^{(3m)}, M_2^{(3m+1)}, M_3^{(3m+1)}, M_4^{(3m+2)}, M_5^{(3m+2)}\} \quad (2.77)$$

com

$$M_0^{(3m)} = h_1^{(n)} \in \mathcal{G}_{3m}, \quad (2.78)$$

$$M_1^{(3m)} = h_2^{(n)} \in \mathcal{G}_{3m}, \quad (2.79)$$

$$M_2^{(3m+1)} = E_{\alpha_1}^{(m)} + E_{\alpha_2}^{(m)} - E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m+1)} \in \mathcal{G}_{3m+1}, \quad (2.80)$$

$$M_3^{(3m+1)} = E_{\alpha_1}^{(m)} - E_{\alpha_2}^{(m)} + E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m+1)} \in \mathcal{G}_{3m+1}, \quad (2.81)$$

$$M_4^{(3m+2)} = E_{-\alpha_1}^{(m+1)} + E_{-\alpha_2}^{(m+1)} - E_{(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m)} \in \mathcal{G}_{3m+2}, \quad (2.82)$$

$$M_5^{(3m+2)} = E_{-\alpha_1}^{(m+1)} - E_{-\alpha_2}^{(m+1)} + E_{(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m)} \in \mathcal{G}_{3m+2}. \quad (2.83)$$

Agora, adotamos o operador de Lax espacial A_x

$$\begin{aligned} A_x^{\text{mKdV}}(v_1, v_2) &= E^{(1)} + A^{(0)}(v_1, v_2) = E_{\alpha_1} + E_{\alpha_2} + E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}^{(1)} + v_1 h_1^{(0)} + v_2 h_2^{(0)} \\ &= \begin{pmatrix} v_1 & 1 & 0 \\ 0 & v_2 - v_1 & 1 \\ \lambda & 0 & -v_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.84)$$

onde $v_i(x, t) = (\phi_i)_x$ são os campo da teoria e adotamos a representação matricial conforme o apêndice A. Note que agora o espaço de grau zero possui mais elementos, de modo que isso implica numa teoria a com uma quantidade maior de campos.

Começamos então a calcular as equações de movimento. Para as sub-hierarquias positivas - $M = 0$ - obteremos fluxos temporais $N = 2, 4, 5, \dots$ conforme os elementos do *Kernel* possíveis. Assim, resolvendo a equação de curvatura nula para o primeiro fluxo $N = 2$, obtemos o seguinte Lax temporal

$$\begin{aligned} A_{t_2}^{\text{mKdv}} &= E_{-\alpha_1}^{(1)} + E_{-\alpha_2}^{(1)} + E_{(\alpha_1+\alpha_2)}^{(0)} + v_2 E_{\alpha_1}^{(0)} - v_1 E_{\alpha_2}^{(0)} + (v_1 - v_2) E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}^{(1)} \\ &+ \frac{1}{3} \left(v_1^2 + 2v_2v_1 - 2v_2^2 - \partial_x v_1 + 2\partial_x v_2 \right) h_1^{(0)} \\ &+ \frac{1}{3} \left(2v_1^2 - 2v_2v_1 - v_2^2 - 2\partial_x v_1 + \partial_x v_2 \right) h_2^{(0)} \end{aligned} \quad (2.85)$$

nos levando as seguintes equações de movimento:

$$3v_{1t_2} = (2v_1 + 2v_2) \partial_x v_1 + (2v_1 - 4v_2) \partial_x v_2 - \partial_x^2 v_1 + 2\partial_x^2 v_2, \quad (2.86)$$

$$3v_{2t_2} = (4v_1 - 2v_2) \partial_x v_1 - (2v_1 + 2v_2) \partial_x v_2 - 2\partial_x^2 v_1 + \partial_x^2 v_2. \quad (2.87)$$

Podemos repetir o mesmo procedimento para os demais tempos: $N = 4$

$$\begin{aligned} 9v_{t_4} &= - 4(v_x + w_x) v^3 + 2(6w(w_x - v_x) + v_{2x} - 2w_{2x}) v^2 \\ &+ 2 \left(6(v_x - w_x) w^2 - (v_{2x} - 2w_{2x}) w + 2v_x^2 + 2w_x^2 - 5v_x w_x + v_{3x} + w_{3x} \right) v_1 \\ &- 4w^3 (v_x - 2w_x) + 4(v_x + w_x) v_{2x} + 4(v_x - 2w_x) w_{2x} + w^2 (v_{2x} - 2w_{2x}) \\ &+ 2w \left(-(v_x - 2w_x)^2 + v_{3x} - 2w_{3x} \right) - 2v_{4x} + 4w_{4x}. \end{aligned} \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned}
9w_{t_4} &= 4(w_x - 2v_x)v^3 + 2(6w(v_x - w_x) + 2v_{2x} - w_{2x})v^2 \\
&+ 2\left(6(w_x - v_x)w^2 + (w_{2x} - 2v_{2x})w + (w_x - 2v_x)^2 + 2v_{3x} - w_{3x}\right)v_1 \\
&+ 4w^3(v_x + w_x) + 4(2v_x - w_x)v_{2x} - 4(v_x + w_x)w_{2x} + w^2(4v_{2x} - 2w_{2x}) \\
&- 2w\left(2v_x^2 - 5w_xv_x + 2w_x^2 + v_{3x} + w_{3x}\right) - 2v_{4x} + w_{4x} \quad (2.89)
\end{aligned}$$

e $N = 5$

$$\begin{aligned}
9v_{t_5} &= 5\left(-3(v_x - 2w_x)w^2 + (v_{2x} - 2w_{2x})w + w_x(v_x - 2w_x) + v_{3x}\right)v^2 \\
&+ 5\left(4(v_x - w_x)w^3 - (v_{2x} - 2w_{2x})w^2 + (2(v_x - 2w_x)(v_x - w_x) - v_{3x})w\right. \\
&+ 4v_xv_{2x} - w_x(v_{2x} + 2w_{2x})v - 5w^4v_x + 5w(4w_xv_{2x} + v_x(2w_{2x} - 3v_{2x})) \\
&+ 5w^2(-v_x^2 + 2w_xv_x + v_{3x}) - 5v_xv^4 - 10ww_xv^3 - v_{5x} \\
&+ 5\left(v_x^3 - w_xv_x^2 + (w_x^2 + v_{3x} - w_{3x})v_x + v_{2x}^2 - 2v_{2x}w_{2x} - w_xv_{3x}\right) \quad (2.90)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9w_{t_5} &= 5v^2\left((6v_x - 3w_x)w^2 + (2v_{2x} - w_{2x})w - w_x^2 + 2v_xw_x + w_{3x}\right) \\
&+ v\left(-2v_xw^3 + w^2(w_{2x} - 2v_{2x}) + w\left(4v_x^2 - 6w_xv_x + 2w_x^2 - w_{3x}\right)\right) \\
&+ (2w_xv_{2x} + (4v_x - 3w_x)w_{2x})v - w^4w_x - v^4w_x + w_{2x}(w_{2x} - 2v_{2x}) \\
&+ w(4w_xw_{2x} - v_x(2v_{2x} + w_{2x})) + w_x\left(v_x^2 - w_xv_x + w_x^2 - v_{3x}\right) - w_{5x} \\
&+ (w_x - v_x)w_{3x} + w^2(v_x(w_x - 2v_x) + w_{3x}) + 5\left(4w(w_x - v_x)v^3\right) \quad (2.91)
\end{aligned}$$

onde adotamos $v_1 = v$ e $v_2 = w$ para possibilitar a escrita das derivadas de modo compacto. É notório que o grau de complexidade do sistema aumenta com N , porém é fácil identificar que no caso das equações positivas (2.86) -(2.91) temos soluções de vácuo $\mathbf{v}_{vac} = \mathbf{v}_0 = (v_0, w_0)$, com v_0, w_0 constantes livres. Assim, dizemos que a sub-hierarquia positiva de $mKdV$ para $A_2 = sl(3)$ admite tanto soluções de vácuo **nulo** como **não-nulo**.

Para a sub-hierarquia negativa começamos com o caso mais simples $M = 1$, obtendo o seguinte Lax temporal

$$A_{t-1}^{mKdV} = e^{2\phi_1 - \phi_2} E_{-\alpha_1}^{(0)} + e^{2\phi_2 - \phi_1} E_{-\alpha_2}^{(0)} + e^{-\phi_1 - \phi_2} E_{(\alpha_1 + \alpha_2)}^{(-1)}, \quad (2.92)$$

associado a um modelo de Toda:

$$\phi_{1x,t} = e^{2\phi_1 - \phi_2} - e^{-\phi_1 - \phi_2}, \quad (2.93)$$

$$\phi_{2x,t} = e^{2\phi_2 - \phi_1} - e^{-\phi_1 - \phi_2} \quad (2.94)$$

Note que novamente para o caso do modelo de toda, ao passo que $\mathbf{v} = 0$ (ou $\phi = 0$) é uma solução de vácuo possível, o mesmo não ocorre para $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ (ou $\phi = \mathbf{v}_0 x$), como pode ser facilmente verificado. Assim, repetimos o esperado padrão advindo do $A_1 = sl(2)$ em que existe um vácuo preferencial para cada sub-hierarquia negativa.

Nossa próxima possibilidade é adotar $M = 2$, que nós leva ao seguinte par de equações de movimento

$$\begin{aligned} \partial_{t-2} v_1 = & e^{d^{-1}(2v_1 - v_2)} d^{-1} \left(e^{-d^{-1}(2v_1 - v_2)} \left[c_2 e^{d^{-1}(v_1 - 2v_2)} - c_3 e^{d^{-1}(v_1 + v_2)} \right] \right) - \\ & e^{d^{-1}(-v_1 - v_2)} d^{-1} \left(e^{-d^{-1}(-v_1 - v_2)} \left[c_1 e^{d^{-1}(-2v_1 + v_2)} - c_2 e^{d^{-1}(v_1 - 2v_2)} \right] \right) \end{aligned} \quad (2.95)$$

$$\begin{aligned} \partial_{t-2} v_2 = & -e^{d^{-1}(-v_1 + 2v_2)} d^{-1} \left(e^{-d^{-1}(-v_1 + 2v_2)} \left[c_1 e^{d^{-1}(-2v_1 + v_2)} - c_3 e^{d^{-1}(v_1 + v_2)} \right] \right) - \\ & e^{d^{-1}(-v_1 - v_2)} d^{-1} \left(e^{-d^{-1}(-v_1 - v_2)} \left[c_1 e^{d^{-1}(-2v_1 + v_2)} - c_2 e^{d^{-1}(v_1 - 2v_2)} \right] \right) \end{aligned} \quad (2.96)$$

onde é fácil verificar que somente uma solução de vácuo com $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ é possível, caso $c_1 = c_2 = c_3$, recaindo assim no mesmo padrão de vácuo do fluxo temporal anterior.

Por fim, podemos analisar a última possibilidade menos complexa para fluxo temporal negativo, $M = 3$, que equivale ao seguinte par de equações de movimento (onde c_1 e c_2 são constantes livres):

$$\begin{aligned} \partial_{t-3} v_1 = & -e^{d^{-1}(v_1 - v_2)} d^{-1} \left((c_1 - 2c_2) e^{d^{-1}(2v_1 - v_2)} d^{-1} e^{d^{-1}(2v_2 - v_1)} \right) \\ & - e^{d^{-1}(v_1 - v_2)} d^{-1} \left((2c_1 - c_2) e^{d^{-1}(2v_2 - v_1)} d^{-1} e^{d^{-1}(2v_1 - v_2)} \right) \\ & + e^{d^{-1}(2v_1 - v_2)} d^{-1} \left((c_1 + c_2) e^{d^{-1}(-v_1 + 2v_2)} d^{-1} e^{d^{-1}(-v_1 - v_2)} \right) \\ & - e^{d^{-1}(2v_1 - v_2)} d^{-1} \left((c_1 - 2c_2) e^{d^{-1}(-v_1 - v_2)} d^{-1} e^{d^{-1}(-v_1 + 2v_2)} \right), \end{aligned} \quad (2.97)$$

$$\begin{aligned} \partial_{t-3} v_2 = & -e^{d^{-1}(-v_1 + 2v_2)} d^{-1} \left((c_1 + c_2) e^{d^{-1}(2v_1 - v_2)} d^{-1} e^{d^{-1}(-v_2 - v_1)} \right) \\ & - e^{d^{-1}(-v_1 + 2v_2)} d^{-1} \left((2c_1 - c_2) e^{d^{-1}(-v_1 - v_2)} d^{-1} e^{d^{-1}(2v_1 - v_2)} \right) \\ & - e^{d^{-1}(-v_1 - v_2)} d^{-1} \left((2c_1 - c_2) e^{d^{-1}(-v_1 + 2v_2)} d^{-1} e^{d^{-1}(2v_1 - v_2)} \right) \\ & - e^{d^{-1}(-v_1 - v_2)} d^{-1} \left((c_1 - 2c_2) e^{d^{-1}(2v_1 - v_2)} d^{-1} e^{d^{-1}(-v_1 + 2v_2)} \right). \end{aligned} \quad (2.98)$$

Pode-se verificar que o conjunto solução $\mathbf{v} = (v_0, w_0)$ com $v_0, w_0 \neq 0$ é solução do par de equações, fixando então que o fluxo temporal negativo t_{-3} somente aceita vácuo não-nulo.

Novamente, uma explicação mais sistemática desse fenômeno ocorre quando realizemos a projeção da equação de curvatura nula no vácuo:

$$\left[E^{(1)} + v_0 h_1^{(0)} + w_0 h_2^{(0)}, D_{vac}^{(-N)} + D_{vac}^{(-N+1)} + \dots + D_{vac}^{(-1)} \right] = 0 \quad (2.99)$$

cuja a equação de grau mais baixo será

$$\left[v_0 h_1^{(0)} + w_0 h_2^{(0)}, D_{vac}^{(-N)} \right] = 0 \quad (2.100)$$

e então para que $v_0, w_0 \neq 0$, $D_{vac}^{(-N)}$ deve comutar com $h_1^{(0)} + h_2^{(0)}$, levando a $D_{vac}^{(-N)} \in \mathcal{G}_{-3n}$ e $N = -3n$. Por outro lado, se $(v_0, w_0) = (0, 0)$ a equação de menor grau torna-se

$$\left[E^{(1)}, D_{vac}^{(-N)} \right] = 0 \quad (2.101)$$

e daí $D_{vac}^{(-N)} \in \mathcal{K}_E$ de modo que $N = 3m + 1$ ou $N = 3m + 2$.

Assim, a sub-hierarquia negativa de $mKdV$ $A_2 = sl(3)$ se quebra novamente em duas sub-hierarquias: uma composta pelos tempos múltiplos de 3, admitindo estritamente vácuo **não-nulo** e uma admitindo somente vácuo **nulo** ($v_0 = 0$), com $N = 3m + 1$ ou $N = 3m + 2$. É fácil então perceber, que conforme aumentamos a álgebra (A_3, A_4, \dots) mais tempos negativos comportarão vácuos nulos, ao passo que os tempos com vácuo não nulos **sempre** ficarão restritos ao fluxos temporais contidos no sub-espço onde vivem os operadores de Cartan. De modo geral, se consideramos $A_r = sl(r + 1)$ com o operador de gradação

$$\hat{Q}_p = (r + 1)\lambda \frac{d}{d\lambda} + c_1 h_1 + c_2 h_2 + \dots + c_r h_r \quad (2.102)$$

o sub-espço que contém os operadores de Cartan serão tais que

$$\mathcal{G}_{(r+1)\mathbf{m}} = \{h_1^{(m)}, h_2^{(m)}, \dots, h_r^{(m)}\} \quad (2.103)$$

e para um Lax espacial do tipo $mKdV$

$$A_x^{mKdV}(v_1, v_2, \dots, v_r) = E^{(1)} + v_1 h_1^{(0)} + v_2 h_2^{(0)} + \dots + v_r h_r^{(0)} \quad (2.104)$$

cuja projeção num vácuo não-nulo sempre será do tipo

$$\left[E^{(1)} + v_0 h_1^{(0)} + w_0 h_2^{(0)} + \cdots + z_0 h_r^{(0)}, D_{vac}^{(-N)} + D_{vac}^{(-N+1)} + \cdots + D_{vac}^{(-1)} \right] = 0 \quad (2.105)$$

levando a uma equação de grau mais baixo

$$\left[v_0 h_1^{(0)} + w_0 h_2^{(0)} + \cdots + z_0 h_r^{(0)}, D_{vac}^{(-N)} \right] = 0 \quad (2.106)$$

e então para que exista uma solução de vácuo **não-nulo** $D^{(-N)}$ deve comutar com a soma de cartans $v_0 h_1^{(0)} + w_0 h_2^{(0)} + \cdots + z_0 h_r^{(0)}$, levando a $D_{vac}^{(-N)} \in \mathcal{G}_{-(r+1)n}$ e $N = (r+1)n$. Por outro lado, para vácuo **nulo**

$$\left[E^{(1)}, D_{vac}^{(-N)} \right] = 0 \quad (2.107)$$

e daí $D_{vac}^{(-N)} \in \mathcal{K}_E$ de modo que $N = (r+1)m + 1, N = (r+1)m + 2, \dots, N = (r+1)m + r$, devido a quantidade de elementos no *Kernel* para álgebra $A_r = sl(r+1)$ [18].

Gostaríamos então de estender a análise realizada para os modelos A_r para uma outra classe de álgebras e os modelos do tipo $mKdV$ advindas delas: as álgebras *twisted* $A_{2r}^{(2)}$. Para isso, mostramos no próximo capítulo como obtê-las a partir dos modelos A_{2r} iniciais.

Capítulo 3

Construção de álgebras $A_{2r}^{(2)}$

Nesse capítulo descrevemos o procedimento adotado para obtenção das álgebras *twisted* afim $A_{2r}^{(2)}$, baseado no processo de *folding* das álgebras $A_{2r}^{(1)}$ conforme proposto por [10, 11, 12]. Começamos com os casos explícitos das álgebras $A_2^{(2)}$ e $A_4^{(2)}$, e depois propomos a generalização para modelos $A_{2r}^{(2)}$.

3.1 Exemplos: $A_2^{(2)}$ e $A_4^{(2)}$

3.1.1 $A_2^{(2)}$

Seja a álgebra $\hat{\mathcal{G}} = A_2$, cujo sistema de raízes simples positivas é dado por $\alpha_1 = e_1 - e_2$ e $\alpha_2 = e_2 - e_3$ (com $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$), tal que:

$$[h_i, E_{\alpha_j}] = \alpha_i \cdot \alpha_j E_{\alpha_j}, \quad [h_i, h_j] = 0, \quad (E_{\alpha_i})^\dagger = E_{-\alpha_i}, \quad (3.1)$$

$$[E_{\alpha_i}, E_{-\alpha_i}] = h_i, \quad [E_{\alpha_1}, E_{\alpha_2}] = E_{\alpha_1 + \alpha_2}; \quad (3.2)$$

onde $h_i = \frac{2\alpha_i}{\alpha_i^2} \cdot H$, $i = 1, 2$.

O processo de *folding* será realizado através da introdução automorfismo σ , que atua da seguinte forma sobre as raízes simples:

$$\sigma(\alpha_1) = \alpha_2, \quad \sigma(\alpha_2) = \alpha_1; \quad (3.3)$$

cuja representação digramática é dada pela figura 3.1

Estendemos então a atuação do automorfismo σ sobre os entes da álgebra,

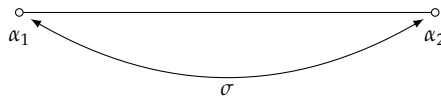


Figura 3.1: Diagrama de Dynkin A_2^2

obtendo

$$\sigma(h_1) = \sigma(\alpha_1 \cdot H) = \alpha_2 \cdot H = h_2, \quad (3.4)$$

$$\sigma(h_2) = \sigma(\alpha_2 \cdot H) = \alpha_1 \cdot H = h_1, \quad (3.5)$$

$$\sigma(E_{\alpha_1}) = E_{\alpha_2}, \quad \sigma(E_{\alpha_2}) = E_{\alpha_1}, \quad (3.6)$$

$$\sigma(E_{\alpha_1+\alpha_2}) = \sigma([E_{\alpha_1}, E_{\alpha_2}]) = [E_{\alpha_2}, E_{\alpha_1}] = -E_{\alpha_1+\alpha_2}. \quad (3.7)$$

Percebe-se então, que a álgebra $\mathcal{G} = A_2$ será decomposta em uma parte par sobre o automorfismo $\mathcal{G}_p = \{y \in \mathcal{G}_p, \sigma(x) = x\}$ e uma parte ímpar, $\mathcal{G}_i = \{y \in \mathcal{G}_p, \sigma(y) = -y\}$:

$$\mathcal{G}_p = \{h_1 + h_2, E_{\pm\alpha_1} + E_{\pm\alpha_2}, \} \quad (3.8)$$

$$\mathcal{G}_i = \{h_1 - h_2, E_{\pm\alpha_1} - E_{\pm\alpha_2}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}\}. \quad (3.9)$$

Para que o processo de tornar essa álgebra afim seja consistente com as características apontadas na seção anterior, devemos respeitar a seguinte estrutura

$$[\mathcal{G}_p, \mathcal{G}_p] \subset \mathcal{G}_p, \quad [\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_i] \subset \mathcal{G}_p, \quad [\mathcal{G}_p, \mathcal{G}_i] \subset \mathcal{G}_i. \quad (3.10)$$

Assim, introduzimos um parâmetro espectral $\lambda \in \mathbb{C}$ e um expoente $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$T_a^{(m)} = \lambda^m T_a \in \mathcal{G}_p; \quad (3.11)$$

e

$$T_a^{(m+\frac{1}{2})} = \lambda^{m+\frac{1}{2}} T_a \in \mathcal{G}_i; \quad (3.12)$$

de modo que a estrutura (3.10) será satisfeita e teremos uma álgebra infinito dimensional *twisted* $A_{2r}^{(2)}$.

Por fim, para obter os espaços graduados que iremos utilizar na construção da hierarquia tipo mKdV, introduzimos o operador gradação principal \hat{Q} , dado por

$$\hat{Q} = 6\hat{d} + (\mu_1 + \mu_2) \cdot H, \quad (3.13)$$

tal que ação de $\hat{d} = \lambda \frac{d}{d\lambda}$ em um ente graduado é $T_a^{(n)}$

$$[\hat{d}, T_a^{(n)}] = nT_a^{(n)}, \quad (3.14)$$

enquanto μ_i , $i = 1, 2$, é o peso fundamental associado a raiz α_i ,

$$\mu_i \cdot \alpha_j = \delta_{ij} \quad (3.15)$$

de modo que:

$$[\mu_i \cdot H, E_{\alpha_j}^{(m)}] = (\mu_i \cdot \alpha_j) E_{\alpha_j}^{(m)}, \quad (3.16)$$

Assim $\hat{\mathcal{G}} = A_2^{(2)}$ irá se decompor em $\hat{\mathcal{G}} = \oplus \mathcal{G}_a$, com \mathcal{G}_a dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{6m} &= \{h_1^{(m)} + h_2^{(m)}\}, \\ \mathcal{G}_{6m+1} &= \{E_{\alpha_1}^{(m)} + E_{\alpha_2}^{(m)}, E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m+\frac{1}{2})}\}, \\ \mathcal{G}_{6m+2} &= \{E_{-\alpha_1}^{(m+\frac{1}{2})} - E_{-\alpha_2}^{(m+\frac{1}{2})}\}, \\ \mathcal{G}_{6m+3} &= \{h_1^{(m+\frac{1}{2})} - h_2^{(m+\frac{1}{2})}\}, \\ \mathcal{G}_{6m+4} &= \{E_{\alpha_1}^{(m+\frac{1}{2})} - E_{\alpha_2}^{(m+\frac{1}{2})}\}, \\ \mathcal{G}_{6m+5} &= \{E_{-\alpha_1}^{(m+1)} + E_{-\alpha_2}^{(m+1)}, E_{+(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m+\frac{1}{2})}\}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

que será a estrutura graduada a ser utilizada para obter a hierarquia integrável associada a essa álgebra.

3.1.2 $A_4^{(2)}$

Podemos começar o processo de generalização desejado adotando a próxima álgebra do tipo A_{2r} possível: $\hat{\mathcal{G}} = A_4$. Seu sistema de raízes simples positivas é dado por:

$$\alpha_1 = e_1 - e_2, \quad \alpha_2 = e_2 - e_3, \quad \alpha_3 = e_3 - e_4 \quad \text{e} \quad \alpha_4 = e_4 - e_5 \quad (3.18)$$

com $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$, $(i, j = 1, \dots, 5)$, tal que:

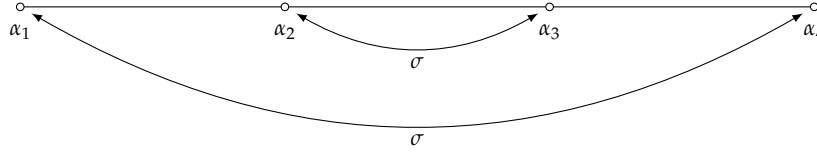
$$[h_i, E_{\alpha_j}] = \alpha_i \cdot \alpha_j E_{\alpha_j}, \quad [h_i, h_j] = 0, \quad (E_{\alpha_i})^\dagger = E_{-\alpha_i}, \quad [E_{\alpha_i}, E_{-\alpha_i}] = h_i, \quad (3.19)$$

$$[E_{\alpha_1}, E_{\alpha_2}] = E_{\alpha_1+\alpha_2}, \quad [E_{\alpha_2}, E_{\alpha_3}] = E_{\alpha_2+\alpha_3}, \quad [E_{\alpha_3}, E_{\alpha_4}] = E_{\alpha_3+\alpha_4}, \quad (3.20)$$

$$[E_{\alpha_1+\alpha_2}, E_{\alpha_3}] = E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}, \quad [E_{\alpha_2+\alpha_3}, E_{\alpha_4}] = E_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}, \quad (3.21)$$

e

$$[E_{\alpha_1+\alpha_2}, E_{\alpha_3+\alpha_4}] = E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}. \quad (3.22)$$


 Figura 3.2: Diagrama de Dynkin A_4^2

Note que devido ao aumento de raízes simples, deveremos mudar o automorfismo σ utilizado no processo de *folding*. A partir do exemplo anterior, é fácil ver que σ deve atuar da seguinte forma sobre as raízes simples nesse caso (veja a figura 3.2):

$$\sigma(\alpha_1) = \alpha_4, \quad \sigma(\alpha_2) = \alpha_3, \quad \sigma(\alpha_3) = \alpha_2, \quad \sigma(\alpha_4) = \alpha_1; \quad (3.23)$$

Por fim, estendemos a atuação do automorfismo σ sobre os entes da álgebra

$$\sigma(h_1) = h_4, \quad \sigma(h_2) = h_3, \quad \sigma(h_3) = h_2, \quad \sigma(h_4) = h_1, \quad (3.24)$$

$$\sigma(E_{\alpha_1}) = E_{\alpha_4}, \quad \sigma(E_{\alpha_2}) = E_{\alpha_3}, \quad \sigma(E_{\alpha_3}) = E_{\alpha_2}, \quad \sigma(E_{\alpha_4}) = E_{\alpha_1}, \quad (3.25)$$

$$\sigma(E_{\alpha_1+\alpha_2}) = -E_{\alpha_3+\alpha_4}, \quad \sigma(E_{\alpha_2+\alpha_3}) = -E_{\alpha_2+\alpha_3}, \quad \sigma(E_{\alpha_3+\alpha_4}) = -E_{\alpha_1+\alpha_2}. \quad (3.26)$$

$$\sigma(E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}) = E_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}, \quad \sigma(E_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}) = E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \quad (3.27)$$

$$\sigma(E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}) = -E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}. \quad (3.28)$$

De modo então, que a decomposição em partes pares e ímpares será dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_p = \{ & h_1 + h_4, h_2 + h_3, E_{\pm\alpha_1} + E_{\pm\alpha_4}, E_{\pm\alpha_2} + E_{\pm\alpha_3}, \\ & E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)} - E_{\pm(\alpha_3+\alpha_4)}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)} + E_{\pm(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)} \} \end{aligned} \quad (3.29)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_i = \{ & h_1 - h_4, h_2 - h_3, E_{\pm\alpha_1} - E_{\pm\alpha_4}, E_{\pm\alpha_2} - E_{\pm\alpha_3}, E_{\pm(\alpha_2+\alpha_3)}, \\ & E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)} + E_{\pm(\alpha_3+\alpha_4)}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)} - E_{\pm(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)} \}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Introduzimos o parâmetro espectral $\lambda \in \mathbb{C}$ e um expoente $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$T_a^{(m)} \in \mathcal{G}_p, \quad T_a^{(m)} = \lambda^m T_a \quad \text{e} \quad T_a^{(m+\frac{1}{2})} \in \mathcal{G}_i, \quad T_a^{(m+\frac{1}{2})} = \lambda^{m+\frac{1}{2}} T_a, \quad (3.31)$$

obtendo assim a álgebra infinito dimensional *twisted* $A_4^{(2)}$.

Por fim, para obter os espaços graduados, o operador gradação principal \hat{Q}

será dado por:

$$\hat{Q} = 10\hat{d} + (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) \cdot H, \quad (3.32)$$

tal que μ_i , $i = 1, \dots, 4$, é o peso fundamental associado a raiz α_i e desse modo $\hat{G} = A_4^{(2)}$ irá se decompor em $\hat{G} = \oplus \mathcal{G}_a$:

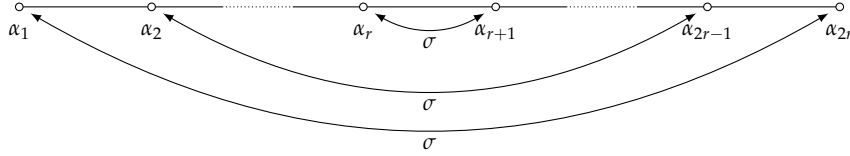
$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{10\mathbf{m}} &= \{h_1^{(m)} + h_4^{(m)}, h_2^{(m)} + h_3^{(m)}\} \\ \mathcal{G}_{10\mathbf{m}+1} &= \{E_{\alpha_1}^{(m)} + E_{\alpha_4}^{(m)}, E_{\alpha_2}^{(m)} + E_{\alpha_3}^{(m)}, E_{-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}^{(m+\frac{1}{2})}\} \\ \mathcal{G}_{10\mathbf{m}+2} &= \{E_{(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m)} - E_{(\alpha_3+\alpha_4)}^{(m)}, E_{-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}^{(m+\frac{1}{2})} - E_{-(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}^{(m+\frac{1}{2})}\} \\ \mathcal{G}_{10\mathbf{m}+3} &= \{E_{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}^{(m)} + E_{(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}^{(m)}, E_{-(\alpha_2+\alpha_3)}^{(m+\frac{1}{2})}, E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m+\frac{1}{2})} + E_{-(\alpha_3+\alpha_4)}^{(m+\frac{1}{2})}\} \\ \mathcal{G}_{10\mathbf{m}+4} &= \{E_{-\alpha_1}^{(m+\frac{1}{2})} - E_{-\alpha_4}^{(m+\frac{1}{2})}, E_{-\alpha_2}^{(m+\frac{1}{2})} - E_{-\alpha_3}^{(m+\frac{1}{2})}\} \\ \mathcal{G}_{10\mathbf{m}+5} &= \{h_1^{(m+\frac{1}{2})} - h_4^{(m+\frac{1}{2})}, h_2^{(m+\frac{1}{2})} - h_3^{(m+\frac{1}{2})}\} \\ \mathcal{G}_{10\mathbf{m}+6} &= \{E_{\alpha_1}^{(m+\frac{1}{2})} - E_{\alpha_4}^{(m+\frac{1}{2})}, E_{\alpha_2}^{(m+\frac{1}{2})} - E_{\alpha_3}^{(m+\frac{1}{2})}\} \\ \mathcal{G}_{10\mathbf{m}+7} &= \{E_{-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}^{(m+1)} + E_{-(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}^{(m+1)}, E_{(\alpha_2+\alpha_3)}^{(m+\frac{1}{2})}, E_{(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m+\frac{1}{2})} + E_{(\alpha_3+\alpha_4)}^{(m+\frac{1}{2})}\} \\ \mathcal{G}_{10\mathbf{m}+8} &= \{E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m+1)} - E_{-(\alpha_3+\alpha_4)}^{(m+1)}, E_{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}^{(m+\frac{1}{2})} - E_{(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}^{(m+\frac{1}{2})}\} \\ \mathcal{G}_{10\mathbf{m}+9} &= \{E_{-\alpha_1}^{(m+1)} + E_{-\alpha_4}^{(m+1)}, E_{-\alpha_2}^{(m+1)} + E_{-\alpha_3}^{(m+1)}, E_{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}^{(m+\frac{1}{2})}\}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

que será a estrutura graduada a ser utilizada para obter a hierarquia integrável associada a essa álgebra. Como podemos ver, o processo utilizado para obter a álgebra $A_4^{(2)}$ foi altamente similar aquele utilizado para obter a álgebra $A_2^{(2)}$, de modo que propomos a seguinte generalização para álgebras superiores.

3.1.3 Generalização $A_{2r}^{(2)}$

Consideremos a Álgebra $A_{2r} = sl(2r+1)$ com $r = 1, 2, \dots$ com raízes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2r}$ caracterizada pela seguinte matriz de Cartan K ($K_{ij} = \frac{2\alpha_i \cdot \alpha_j}{\alpha_j^2}$), [19]

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$


 Figura 3.3: Diagrama de Dynkin $A_{2r}^{(2)}$

De modo geral, o automorfismo σ de segunda ordem ($\sigma^2 = I$) que irá atuar sobre as raízes simples de A_{2r} será dado por

$$\sigma(\alpha_1) = \alpha_{2r}, \quad \sigma(\alpha_2) = \alpha_{2r-1}, \quad \dots \quad \sigma(\alpha_{r-1}) = \alpha_{r+2}, \quad \sigma(\alpha_r) = \alpha_{r+1} \quad (3.35)$$

que pode ser representado no diagrama de Dynkin como na figura 3.3 ou seja, estaremos sempre ligando a primeira raiz a última, a segunda a anti-penúltima e assim por diante.

Nota-se então, que o efeito sobre a álgebra do automorfismo σ será

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha_i \cdot H) &= \alpha_{2r-i+1} \cdot H, \quad i = 1, \dots, r, \\ \sigma(E_\alpha) &= \zeta_\alpha E_{\sigma(\alpha)}, \quad \zeta_\alpha = \pm 1. \end{aligned} \quad (3.36)$$

de modo que o valor de ζ_α será dado por ,

$$\begin{aligned} \zeta_{\alpha_i} &= +1, \quad i = 1, \dots, r, \\ \zeta_{\alpha_i + \alpha_{i+1}} &= -1, \quad i = 1, \dots, r-1, \\ &\vdots \\ \zeta_{\alpha_i + \dots + \alpha_j} &= (-1)^{j-i}, \quad i = 1, \dots, r, \quad j = i, i+1, \dots, r. \end{aligned} \quad (3.37)$$

onde \mathcal{G} irá se decompor em uma parte par $\mathcal{G}_p = \{y \in \mathcal{G}_p, \sigma(y) = y\}$ e uma parte ímpar, $\mathcal{G}_i = \{y \in \mathcal{G}_p, \sigma(y) = -y\}$ sobre σ . Devido a isso, o processo de tornar essa álgebra afim deve então respeitar a seguinte estrutura

$$[\mathcal{G}_p, \mathcal{G}_p] \subset \mathcal{G}_p, \quad [\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_i] \subset \mathcal{G}_p, \quad [\mathcal{G}_p, \mathcal{G}_i] \subset \mathcal{G}_i, \quad (3.38)$$

de modo que atribuímos índices inteiros aos entes pares σ , i.e., $T_a^{(m)}$, $\sigma(T_a) = T_a$ e semi-inteiro a parte ímpar, $T_a^{(m+\frac{1}{2})}$, $\sigma(T_a) = -T_a$, $m \in \mathbb{Z}$, $a = 1, \dots, \dim A_{2r}$.

Por fim definimos o operador de gradação principal

$$\hat{Q} = 2(2r + 1)\hat{d} + \sum_{i=1}^{2r} \mu_i \cdot H \quad (3.39)$$

onde d é o operador que conta o índice do componente da álgebra, i.e., $[d, T_a^{(n)}] = nT_a^{(n)}$ e $\mu_i, i = 1, \dots, 2r$ são os pesos fundamentais da álgebra de Lie A_{2r} . Desse modo, Q decompõe $A_{2r}^{(2)}$ em subespaços graduados dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{2(2r+1)m+[0]} &= \{(1 + \sigma)h_i^{(m)}, \quad i = 1, \dots, r\}, \\ \mathcal{G}_{2(2r+1)m+[1]} &= \{(1 + \sigma)E_{\alpha_i}^{(m)}, i = 1, \dots, r, (1 - \sigma)E_{-(\alpha_1 + \dots + 2r)}^{(m+\frac{1}{2})}\}, \\ \mathcal{G}_{2(2r+1)m+[2]} &= \{(1 + \sigma)E_{\alpha_i + \alpha_{i+1}}^{(m)}, \quad i = 1, \dots, r - 1, \\ &\quad (1 - \sigma)E_{-(\alpha_1 + \dots + \alpha_{2r-1})}^{(m+\frac{1}{2})}, \quad (1 - \sigma)E_{-(\alpha_2 + \dots + 2r)}^{(m+\frac{1}{2})}\}, \\ &\quad \vdots \\ \mathcal{G}_{2(2r+1)m+[\frac{1}{2}2(2r+1)]} &= \{(1 - \sigma)h_i^{(m+\frac{1}{2})}, \quad i = 1, \dots, r\}, \\ \mathcal{G}_{2(2r+1)m+[\frac{1}{2}2(2r+1)+1]} &= \{(1 - \sigma)E_{\alpha_i}^{(m+\frac{1}{2})}, i = 1, \dots, r, (1 + \sigma)E_{-(\alpha_1 + \dots + 2r)}^{(m+1)}\}, \\ &\quad \vdots \\ \mathcal{G}_{2(2r+1)m+[2(2r+1)-1]} &= \{(1 + \sigma)E_{-\alpha_i}^{(m)}, i = 1, \dots, r, (1 - \sigma)E_{\alpha_1 + \dots + 2r}^{(m+\frac{1}{2})}\}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

De modo geral, o processo de obtenção das álgebras *twisted* $A_{2r}^{(2)}$ e seus subespaços graduados através do processo de *folding* da álgebra A_{2r} pode ser resumido pelo seguinte "receituário"

- Introduza um automorfismo σ de segunda ordem ($\sigma^2 = I$) e verifique sua ação sobre as raízes simples;
- Estenda essa análise para os entes da álgebra;
- Determine combinações pares e ímpares sobre σ ;
- Torne a álgebra infinito dimensional introduzindo o parâmetro $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$\begin{aligned} - T_a^{(m)} \quad \text{para parte par:} \quad & T_a^{(m)} = \lambda^m T_a, \\ - T_a^{(m+\frac{1}{2})} \quad \text{para parte ímpar:} \quad & T_a^{(m+\frac{1}{2})} = \lambda^{m+\frac{1}{2}} T_a, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

- Introduza o operador gradação principal \hat{Q}

$$\hat{Q} = 2(2r + 1)d + \sum_{i=1}^{2r} \mu_i \cdot H$$

que decompõe $A_{2r}^{(2)}$ em $2(2r + 1)$ sub-espacos.

Dado que agora conhecemos a estrutura graduada das álgebras de interesse, podemos então agora prosseguir e obter a hierarquia integrável do tipo $mKdV$ associada a esses modelos, a qual chamamos hierarquia *Tzitzeica/Bullough–Dodd*.

Capítulo 4

Hierarquia Tzitzeica/Bullough–Dodd

Nesse capítulo construímos a hierarquia do tipo $mKdV$ para os modelos advindos de álgebras do tipo $A_{2r}^{(2)}$, denominadas hierarquias do tipo **Tzitzeica/Bullough–Dodd**. Com base na estrutura apresentada no capítulo anterior, construímos as sub-hierarquias positivas e negativas para esses modelos, bem como o estudo das soluções de vácuo possível. Calculamos explicitamente os modelos $A_2^{(2)}$ e $A_4^{(2)}$ e apresentamos os pontos passíveis de generalização para as demais álgebras $A_{2r}^{(2)}$.

4.1 Hierarquia $A_2^{(2)}$

4.1.1 Estrutura geral do modelo

Consideremos os sub-espços graduados da álgebra de *Kac-Moody* $A_2^{(2)}$ sem a extensão do termo central, conforme (4.1):

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{6m} &= \{h_1^{(m)} + h_2^{(m)}\}, \\ \mathcal{G}_{6m+1} &= \{E_{\alpha_1}^{(m)} + E_{\alpha_2}^{(m)}, E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m+\frac{1}{2})}\}, \\ \mathcal{G}_{6m+2} &= \{E_{-\alpha_1}^{(m+\frac{1}{2})} - E_{-\alpha_2}^{(m+\frac{1}{2})}\}, \\ \mathcal{G}_{6m+3} &= \{h_1^{(m+\frac{1}{2})} - h_2^{(m+\frac{1}{2})}\}, \\ \mathcal{G}_{6m+4} &= \{E_{\alpha_1}^{(m+\frac{1}{2})} - E_{\alpha_2}^{(m+\frac{1}{2})}\}, \\ \mathcal{G}_{6m+5} &= \{E_{-\alpha_1}^{(m+1)} + E_{-\alpha_2}^{(m+1)}, E_{+(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m+\frac{1}{2})}\}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Primeiramente fixamos o elemento constante de grau um

$$E^{(1)} = E_{\alpha_1}^{(0)} + E_{\alpha_2}^{(0)} + E_{-\alpha_1-\alpha_2}^{(\frac{1}{2})}\tag{4.2}$$

que decompõe a álgebra em *Kernel* e seu complementar $\hat{\mathcal{G}} = \mathcal{K}_E \oplus \mathcal{M}_E$:

$$\mathcal{K}_E = \{E^{(6m+1)}, E^{(6m+5)}\} \quad (4.3)$$

onde

$$E^{(6m+1)} = E_{\alpha_1}^{(m)} + E_{\alpha_2}^{(m)} + E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m+\frac{1}{2})}, \quad (4.4)$$

$$E^{(6m+5)} = E_{-\alpha_1}^{(m+1)} + E_{-\alpha_2}^{(m+1)} + E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(m+\frac{1}{2})} \quad (4.5)$$

e

$$\mathcal{M}_E = \{M_0^{(6m)}, M_1^{(6m+1)}, M_2^{(6m+2)}, M_3^{(6m+3)}, M_4^{(6m+4)}, M_5^{(6m+5)}\} \quad (4.6)$$

com

$$M_0^{(6m)} = h_1^{(m)} + h_2^{(m)} \quad (4.7)$$

$$M_1^{(6m+1)} = E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m+\frac{1}{2})}, \quad (4.8)$$

$$M_2^{(6m+2)} = E_{-\alpha_1}^{(m+\frac{1}{2})} - E_{-\alpha_2}^{(m+\frac{1}{2})}, \quad (4.9)$$

$$M_3^{(6m+3)} = h_1^{(m+\frac{1}{2})} - h_2^{(m+\frac{1}{2})}, \quad (4.10)$$

$$M_4^{(6m+4)} = E_{\alpha_1}^{(m+\frac{1}{2})} - E_{\alpha_2}^{(m+\frac{1}{2})}, \quad (4.11)$$

$$M_5^{(6m+5)} = E_{(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m+\frac{1}{2})}. \quad (4.12)$$

Enfim, fixamos o objeto que definirá toda a hierarquia, o operador de Lax espacial

$A_x^{\text{Tz/BD}}$

$$\begin{aligned} A_x^{\text{Tz/BD}}(v) = E^{(1)} + A^{(0)}(v) &= E_{\alpha_1}^{(0)} + E_{\alpha_2}^{(0)} + E_{-\alpha_1-\alpha_2}^{(\frac{1}{2})} + v \left(h_1^{(0)} + h_2^{(0)} \right) \\ &= \begin{pmatrix} v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \lambda^{\frac{1}{2}} & 0 & -v \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde $v(x, t) = \phi_x$ é o campo da teoria. Note que poderíamos ter obtido esse mesmo Lax espacial através de uma redução do Lax espacial do modelo A_2 , i.e:

$$\begin{aligned} A_x^{\text{mKdV}}(v_1, v_2) &= E_{\alpha_1}^{(0)} + E_{\alpha_2}^{(0)} + E_{-(\alpha_1 + \alpha_2)}^{(1)} + v_1 h_1^{(0)} + v_2 h_2^{(0)} \\ &\Downarrow \lambda = \lambda^{\frac{1}{2}}, \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{v} \\ A_x^{\text{Tz/BD}}(v) &= E_{\alpha_1}^{(0)} + E_{\alpha_2}^{(0)} + E_{-\alpha_1 - \alpha_2}^{(\frac{1}{2})} + v \left(h_1^{(0)} + h_2^{(0)} \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

e assim, podemos sempre estudar esse modelo por duas vias: uma construção independente através da álgebra $A_2^{(2)}$ e através de uma redução de campos $v_1 = v_2$ nos modelos já obtidos previamente para a álgebra A_2 . Sempre que possível iremos comparar os dois problemas. Começemos então com a sub-hierarquia positiva.

4.1.2 Tempos Positivos

Como sempre, começamos fixando $M = 0$ na equação de curvatura nula

$$[\partial_x + E^{(1)} + v \left(h_1^{(0)} + h_2^{(0)} \right), \partial_{t_N} + D^{(N)} + \dots + D^{(0)}] = 0 \quad (4.15)$$

e determinamos os fluxos temporais possíveis com o auxílio da equação de ordem mais alta para a curvatura nula, i.e

$$[E^{(1)}, D^{(N)}] = 0 \quad (4.16)$$

note que como os entes do *Kernel* (4.3) estão nos espaços com $\text{mod}(6) = 1$ ou $\text{mod}(6) = 5$, os fluxos temporais positivos serão $N = 5, 7, 11, \dots$. Assim, para o primeiro fluxo $N = 5$, temos

$$[E^{(1)}, D^{(4)}] + [v \left(h_1^{(0)} + h_2^{(0)} \right), D^{(5)}] + \partial_x D^{(5)} = 0, \quad (4.17)$$

$$[E^{(1)}, D^{(3)}] + [v \left(h_1^{(0)} + h_2^{(0)} \right), D^{(4)}] + \partial_x D^{(4)} = 0, \quad (4.18)$$

\vdots \vdots

$$[v \left(h_1^{(0)} + h_2^{(0)} \right), D^{(0)}] + \partial_x D^{(0)} - \partial_{t_5} v \left(h_1^{(0)} + h_2^{(0)} \right) = 0, \quad (4.19)$$

e resolvendo grau a grau, obtemos o seguinte Lax temporal

$$A_{t_5}^{\text{Tx/BD}} = D^{(0)} + D^{(1)} + D^{(2)} + D^{(3)} + D^{(4)} + D^{(5)} \quad (4.20)$$

onde

$$D^{(5)} = E^{(5)} = E_{-\alpha_1}^{(1)} + E_{-\alpha_2}^{(1)} + E_{(\alpha_1+\alpha_2)}^{(\frac{1}{2})}, \quad (4.21)$$

$$D^{(4)} = v(E_{\alpha_1}^{(\frac{1}{2})} - E_{\alpha_2}^{(\frac{1}{2})}), \quad (4.22)$$

$$D^{(3)} = \frac{1}{3}(v^2 + v_x)(h_1^{(\frac{1}{2})} - h_2^{(\frac{1}{2})}), \quad (4.23)$$

$$D^{(2)} = -\frac{1}{3}\partial_x(v^2 + v_x)(E_{-\alpha_1}^{(\frac{1}{2})} - E_{-\alpha_2}^{(\frac{1}{2})}), \quad (4.24)$$

$$D^{(1)} = -\frac{1}{9}[(v^2 + v_x)^2 - 2(v^2 + v_x)_{2x}]E^{(1)} - \frac{1}{3}[v_x(v_x - 2v^2) + \frac{1}{2}(v^2 + 2v_x)_{2x}]E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}^{(\frac{1}{2})}, \quad (4.25)$$

$$D^{(0)} = -\frac{1}{9}(v^5 - 5vv_x^2 - 5v^2v_{2x} + 5v_xv_{2x} + v_{4x})(h_1^{(0)} + h_2^{(0)}), \quad (4.26)$$

associado a seguinte equação de movimento:

$$9v_{t_5} = -v_{5x} - 5v_{3x}v_x + 5v^2v_{3x} - 5v_{2x}^2 + 20vv_xv_{2x} - 5v^4v_x + 5v_x^3. \quad (4.27)$$

Podemos prosseguir e calcular o próximo tempo positivo, $N = 7$ cujo par de Lax é dado por

$$A_{t_7}^{\text{Tz/BD}} = D^{(0)} + D^{(1)} + D^{(2)} + D^{(3)} + D^{(4)} + D^{(5)} + D^{(6)} + D^{(7)} \quad (4.28)$$

escrito explicitamente no apêndice B.1, que está associado a seguinte equação de movimento

$$\begin{aligned} 81v_{t_7} = & 28v_xv^6 - 42v_{3x}v^4 - 336v_xv_{2x}v^3 + 28v_x^4 + 168v_x^2v_{3x} \\ & + 21(2v_{3x}v_x - 12v_x^3 + 2v_{2x}^2 + v_{5x})v^2 + 42v(4v_{2x}v_x^2 + 3v_{4x}v_x + 5v_{2x}v_{3x}) \\ & + 21v_x(11v_{2x}^2 - v_{5x}) - 3(14v_{3x}^2 + 21v_{2x}v_{4x} + v_{7x}) \end{aligned} \quad (4.29)$$

e assim em diante.

Convêm fazer duas observações aqui sobre a parte positiva da hierarquia Tzitzeica/Bullough–Dodd. Primeiramente, note que por advir de uma redução da hierarquia $mKdV$ A_2 (4.14), podemos confirmar as equações de movimento por esse processo. Porém ao passo que na hierarquia $mKdV - A_2$ existem os fluxos temporais $N = 2$ e $N = 4$, na hierarquia Tz/BD esses fluxos não existem pois não temos elementos do *Kernel* nesses espaços.

Isso é também confirmado pela redução $v_1 = v_2 = v$, visto que tanto (2.86)-

(2.87)

$$3v_{t_2} = 2vv_x + \partial_x^2 v, \quad (4.30)$$

$$3v_{t_2} = -2vv_x - \partial_x^2 v. \quad (4.31)$$

quanto (2.88)-(2.89)

$$9v_{t_4} = -4v_x v^3 - 2v_{2x} v^2 + 2(v_{3x} - 2v_x^2)v + 4v_x v_{2x} + v_{4x}, \quad (4.32)$$

$$9v_{t_4} = 4v_x v^3 + 2v_{2x} v^2 - 2(v_{3x} - 2v_x^2)v - 4v_x v_{2x} - v_{4x}. \quad (4.33)$$

se reduzem a sistemas triviais

$$v_t = 0. \quad (4.34)$$

no limite $v_1 = v_2$. Porém, realizando o mesmo limite em (2.90)-(2.91) recuperamos (4.27), como esperado. Outro fato notável é as equações positivas da hierarquia apresentam tanto soluções de vácuo **nulo** quanto **não-nulo**.

4.1.3 Tempos negativos - Análise geral

Gostaríamos então de estender agora nossa análise para os tempos negativos desta hierarquia. Convém antes disso analisar a equação de curvatura projetada no vácuo, verificando assim se existe alguma restrição sobre os fluxos temporais negativos. Seja a equação de curvatura nula para os fluxos negativos de $A_2^{(2)}$:

$$[\partial_x + E^{(1)} + v(h_1^{(0)} + h_2^{(0)})], \partial_{t_{-N}} + D^{(-1)} + \dots + D^{(-N)}] = 0 \quad (4.35)$$

projetando no vácuo $v = v_0$, obtemos

$$[E^{(1)} + v_0(h_1^{(0)} + h_2^{(0)})], D_{vac}^{(-1)} + \dots + D_{vac}^{(-N)}] = 0 \quad (4.36)$$

note que para $v_0 \neq 0$ a equação de menor ordem ($-N$) será

$$[D^{(-N)}, v_0(h_1^{(0)} + h_2^{(0)})] = 0 \quad (4.37)$$

ou seja, $D^{(-N)}$ deve estar no *Kernel* do operador $\mathcal{H} = h_1^{(0)} + h_2^{(0)}$, $D^{(-N)} \in \mathcal{K}_{\mathcal{H}}$. Isso só acontece para $N = 6m + 3$ ou $N = 6m$, visto que:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{6m} &= h_1^{(m)} + h_2^{(m)}, \\ \mathcal{G}_{6m+3} &= h_1^{(m+\frac{1}{2})} - h_2^{(m+\frac{1}{2})}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

A outra opção, é ter $v_0 = 0$. Nesse caso, temos que a equação mais baixa será $(-N + 1)$:

$$[D^{(-N)}, E^{(1)}] = 0 \quad (4.39)$$

que só será satisfeita com $N = 6m + 1$ ou $N = 6m + 5$, já que $D^{(-N)}$ precisa estar no *Kernel* de $E^{(1)}$, $D^{(-N)} \in \mathcal{K}_E$.

Em resumo, as solução de vácuo **não-nulo** $v_0 \neq 0$ se originam de tempos com $D^{(N)}$ pertencente ao *Kernel* do operador $\mathcal{H} = h_1^{(0)} + h_2^{(0)}$ ($N = 3, 6, 9, \dots$), enquanto os tempo com $D^{(N)}$ pertencente ao *Kernel* de $E^{(1)}$ levarão a soluções de vácuo **nulo** $v_0 = 0$ ($N = 1, 5, 7, \dots$).

Surge então uma questão: já que os modelos $A_2^{(2)}$ podem ser obtidos via redução dos modelos A_2 , o que acontece então com tempos como $N = 2$ que anteriormente apresentavam uma solução de vácuo nulo? Vejamos.

Seja o par de equações do modelo *mKdV* A_2 para t_{-2} (2.95) - (2.96). Sob a redução $v_1 = v_2 = v$, temos:

$$v_{t_{-2}} = e^{d^{-1}(v)} d^{-1} \left(e^{-d^{-1}(v)} \left[c_2 e^{d^{-1}(-v)} - c_3 e^{d^{-1}(2v)} \right] \right) - e^{d^{-1}(-2v)} d^{-1} \left(e^{-d^{-1}(-2v)} \left[c_1 e^{d^{-1}(-v)} - c_2 e^{d^{-1}(-v)} \right] \right), \quad (4.40)$$

$$v_{t_{-2}} = e^{d^{-1}(v)} d^{-1} \left(e^{-d^{-1}(v)} \left[-c_1 e^{d^{-1}(-v)} + c_3 e^{d^{-1}(2v)} \right] \right) - e^{d^{-1}(-2v)} d^{-1} \left(e^{-d^{-1}(-2v)} \left[c_1 e^{d^{-1}(-v)} - c_2 e^{d^{-1}(-v)} \right] \right), \quad (4.41)$$

de modo que para ambas serem válidas devemos ter a seguinte condição $c_1 = -c_2$ e $c_3 = 0$, levando a seguinte equação:

$$v_{t_{-2}} = c_2 \left[e^{d^{-1}(v)} d^{-1} \left(e^{-d^{-1}(v)} e^{-d^{-1}(v)} \right) + e^{d^{-1}(-2v)} d^{-1} \left(2e^{-d^{-1}(-2v)} e^{-d^{-1}(v)} \right) \right] \\ v_{t_{-2}} = c_2 \left[e^{d^{-1}(v)} d^{-1} \left(e^{-2d^{-1}(v)} \right) + 2e^{d^{-1}(-2v)} d^{-1} \left(e^{d^{-1}(v)} \right) \right]. \quad (4.42)$$

Porém a condição anterior para que a equação tivesse solução de vácuo nulo em A_2 era que $c_1 = c_2 = c_3$, que claramente não concorda com a condição imposta pela redução. Assim, no processo de redução, perdemos a possibilidade da equação de movimento apresentar uma solução de vácuo como anteriormente, como pode ser facilmente verificado fazendo $v = 0$ ($d^{-1}(v) = c_0$)

$$e^{c_0} d^{-1} \left(e^{-2c_0} \right) + 2e^{-2c_0} d^{-1} \left(e^{c_0} \right) = 3xe^{-c_0} \neq 0. \quad (4.43)$$

Também é fácil checar que um vácuo não-nulo também não é possível $v = v_0(d^{-1}(v) = v_0x)$

$$e^{v_0x}d^{-1}\left(e^{-2v_0x}\right) + 2e^{-2v_0x}d^{-1}\left(e^{v_0x}\right) = -\frac{3}{2v_0}e^{-v_0x} \neq 0. \quad (4.44)$$

Concluimos então que a sub-hierarquia negativa se divide em **três** categorias de acordo com sua solução de vácuo:

- **Apresentam somente vácuo não-nulo:** t_{-6n}, t_{-6n+3}
- **Apresentam somente vácuo nulo:** t_{-6n+1}, t_{-6n+5}
- **Não apresentam vácuo nulo nem não-nulo:** t_{-6n+2}, t_{-6n+4}

Como estaremos interessados em calcular as soluções soliton para a hierarquia isso depende diretamente da existência de um vácuo **constante**, iremos focar em construir as duas primeiras sub-hierarquias.

4.1.4 Sub-hierarquia Negativa com vácuo nulo

Como vimos, os tempos que apresentam somente vácuo nulo são tais que $N = -6n + 1$ ou $N = -6n + 5$. Como primeiro exemplo, podemos calcular o modelo associado a $N = -1$, que será um modelo tipo *Toda*. Seja então a equação de curvatura nula dividida por grau (com $v = \phi_x$):

$$\left[\phi_x \left(h_1^{(0)} + h_2^{(0)}\right), D^{(-1)}\right] + \partial_x D^{(-1)} = 0, \quad (4.45)$$

$$\left[E^{(1)}, D^{(-1)}\right] - \partial_{t_{-1}} \phi_x \left(h_1^{(0)} + h_2^{(0)}\right) = 0, \quad (4.46)$$

resolvendo grau a grau obtemos o seguinte Lax temporal

$$A_{t_{-1}}^{\text{Tz/BD}} = e^\phi E_{-\alpha_1}^{(0)} + e^\phi E_{-\alpha_2}^{(0)} + e^{-2\phi} E_{(\alpha_1+\alpha_2)}^{(-\frac{1}{2})}, \quad (4.47)$$

associado a um modelo de Toda:

$$\phi_x, t_{-1} = e^\phi - e^{-2\phi} \quad (4.48)$$

que nada mais é que a equação de *Tzitzeica* (ou *Bullough-Dodd*) que nomeia a hierarquia. Os primeiros estudos feitos acerca dessa equação são dados em [20] e [21]. É fácil ver que ela aceita uma solução de vácuo nulo.

O próximo fluxo temporal possível é tal que $N = -5$,

$$A_{t_{-5}}^{\text{Tz/BD}} = D^{(-1)} + D^{(-2)} + D^{(-3)} + D^{(-4)} + D^{(-5)}, \quad (4.49)$$

onde os operadores $D^{(i)}$ estão descritos no apêndice B.1. A equação de movimento é dada então por:

$$\begin{aligned} v_{t_{-5}} = & 3e^{d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{-2d^{-1}v} d^{-1} \left[e^{d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{-2d^{-1}v} - e^{d^{-1}v} \right) \right) \right] \right) \\ & + 6e^{-2d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{d^{-1}v} d^{-1} \left[e^{d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{-2d^{-1}v} - e^{d^{-1}v} \right) \right) \right] \right). \end{aligned} \quad (4.50)$$

e no caso em que $v_0 = 0$, o termo $e^{-2d^{-1}v} - e^{d^{-1}v}$ se anula, satisfazendo a equação. No apêndice B.1, exibimos o próximo fluxo temporal $N = -7$. Também chamamos atenção ao fato que todos esses modelos podem ser obtidos como redução dos modelos advindo da hierarquia $mKdV$ para A_2 .

4.1.5 Sub-hierarquia Negativa com vácuo não-nulo

Por fim, os tempos que apresentam somente vácuo não-nulo são tais que $N = -6$ ou $N = -6n + 3$. Como primeiro exemplo, podemos calcular o modelo associado a $N = -3$, com o seguinte Lax temporal

$$A_{t_{-3}}^{\text{Tz/BD}} = D^{(-1)} + D^{(-2)} + D^{(-3)} \quad (4.51)$$

tal que

$$\begin{aligned} D^{(-1)} = & -3e^{d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{-2d^{-1}v} d^{-1} (e^{d^{-1}v}) \right) (E_{-\alpha_1}^{(0)} + E_{-\alpha_2}^{(0)}) \\ & + 6e^{-2d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{d^{-1}v} d^{-1} (e^{d^{-1}v}) \right) E_{\alpha_1 + \alpha_2}^{(-\frac{1}{2})}, \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$D^{(-2)} = 3e^{-d^{-1}v} d^{-1} (e^{d^{-1}v}) (E_{\alpha_1}^{(-\frac{1}{2})} - E_{\alpha_2}^{(-\frac{1}{2})}), \quad (4.53)$$

$$D^{(-3)} = h_1^{(-\frac{1}{2})} - h_2^{(-\frac{1}{2})}, \quad (4.54)$$

e assim temos a equação de movimento

$$-\frac{1}{3}v_{t_{-3}} = e^{d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{-2d^{-1}v} d^{-1} (e^{d^{-1}v}) \right) + 2e^{-2d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{d^{-1}v} d^{-1} (e^{d^{-1}v}) \right), \quad (4.55)$$

onde podemos checar facilmente que só é possível uma solução de vácuo não-nulo $v = v_0 \neq 0$, admitindo $d^{-1}v_0 = v_0x$:

$$\begin{aligned}
 0 &= e^{v_0x} d^{-1} \left(e^{-2v_0x} d^{-1}(e^{v_0x}) \right) + 2e^{-2v_0x} d^{-1} \left(e^{v_0x} d^{-1}(e^{v_0x}) \right) \\
 &= e^{v_0x} d^{-1} \left(\frac{1}{v_0} e^{-v_0x} \right) + 2e^{-2v_0x} d^{-1} \left(\frac{1}{v_0} e^{2v_0x} \right) \\
 &= e^{v_0x} \left(-\frac{1}{v_0^2} e^{-v_0x} \right) + 2e^{-2v_0x} \left(\frac{1}{2v_0^2} e^{2v_0x} \right) = 0.
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

Se $v_0 = 0$, (4.55) não é satisfeita já que $d^{-1}v_0|_{v_0=0} = c$.

O próximo fluxo temporal passível de calculo é tal que $N = -6$,

$$A_{t_{-6}}^{\text{Tz/BD}} = D^{(-1)} + D^{(-2)} + D^{(-3)} + D^{(-4)} + D^{(-5)} + D^{(-6)}, \tag{4.57}$$

onde os operadores $D^{(i)}$ estão descritos no apêndice B.1. A equação de movimento é dada por:

$$v_{t_{-6}} = e^{d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{-2d^{-1}v} d^{-1}\mathcal{W} \right) + 2e^{-2d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{d^{-1}v} d^{-1}\mathcal{W} \right) \tag{4.58}$$

com

$$\mathcal{W} = e^{d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{-2d^{-1}v} d^{-1}(e^{d^{-1}v}) + 2e^{d^{-1}v} d^{-1}(e^{-2d^{-1}v}) \right) \right) \tag{4.59}$$

onde podemos verificar que $\mathcal{W} = 0$ para $v = v_0 \neq 0$, $d^{-1}v_0 = v_0x$ e daí (4.58) é satisfeita. Também podemos verificar que $v_0 = 0$, $\mathcal{W} \neq 0$ de modo que não é possível obter uma solução de vácuo nulo para (4.58).

Como vimos na seção anterior, a construção das álgebras *twisted* é altamente generalizável, de modo que podemos realizar o mesmo processo de construção de hierarquias para as demais álgebras. A seguir, fazemos um breve compilado de outros exemplos.

4.2 Hierarquia Tz/BD - $A_4^{(2)}$ e generalização para $A_{2r}^{(2)}$

4.2.1 Hierarquia Tz/BD - $A_4^{(2)}$

Um exemplo posterior imediato é considerar agora um modelo *twisted* com dois campos, como a hierarquia baseada na álgebra $\mathcal{G} = A_4^{(2)}$. Relembremos sua

estrutura graduada dada em (3.33)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_{10\mathbf{m}} &= \{h_1^{(m)} + h_4^{(m)}, h_2^{(m)} + h_3^{(m)}\} \\
 \mathcal{G}_{10\mathbf{m}+1} &= \{E_{\alpha_1}^{(m)} + E_{\alpha_4}^{(m)}, E_{\alpha_2}^{(m)} + E_{\alpha_3}^{(m)}, E_{-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}^{(m+\frac{1}{2})}\} \\
 &\vdots \\
 \mathcal{G}_{10\mathbf{m}+5} &= \{h_1^{(m+\frac{1}{2})} - h_4^{(m+\frac{1}{2})}, h_2^{(m+\frac{1}{2})} - h_3^{(m+\frac{1}{2})}\} \\
 &\vdots \\
 \mathcal{G}_{10\mathbf{m}+9} &= \{E_{-\alpha_1}^{(m+1)} + E_{-\alpha_4}^{(m+1)}, E_{-\alpha_2}^{(m+1)} + E_{-\alpha_3}^{(m+1)}, E_{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}^{(m+\frac{1}{2})}\}.
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

e daí definimos o elemento de constante de grau $E^{(1)}$ como

$$E^{(1)} = E_{\alpha_1}^{(0)} + E_{\alpha_2}^{(0)} + E_{\alpha_3}^{(0)} + E_{\alpha_4}^{(0)} + E_{-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}^{(\frac{1}{2})} \tag{4.61}$$

cujos os elementos do *Kernel*, \mathcal{K}_E são dados por:

$$\mathcal{K}_E = \{E^{(10\mathbf{m}+1)}, E^{(10\mathbf{m}+3)}, E^{(10\mathbf{m}+7)}, E^{(10\mathbf{m}+9)}\} \tag{4.62}$$

tal que

$$\begin{aligned}
 E^{(10\mathbf{m}+1)} &= E_{\alpha_1}^{(m)} + E_{\alpha_2}^{(m)} + E_{\alpha_3}^{(m)} + E_{\alpha_4}^{(m)} + E_{-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}^{(m+\frac{1}{2})}, \\
 E^{(10\mathbf{m}+3)} &= E_{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}^{(m)} + E_{(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}^{(m)} + E_{-(\alpha_2+\alpha_3)}^{(m+\frac{1}{2})} + E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m+\frac{1}{2})} + E_{-(\alpha_3+\alpha_4)}^{(m+\frac{1}{2})}, \\
 E^{(10\mathbf{m}+7)} &= E_{-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}^{(m+1)} + E_{-(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}^{(m+1)} + E_{(\alpha_2+\alpha_3)}^{(m+\frac{1}{2})} + E_{(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m+\frac{1}{2})} + E_{(\alpha_3+\alpha_4)}^{(m+\frac{1}{2})}, \\
 E^{(10\mathbf{m}+9)} &= E_{-\alpha_1}^{(m+1)} + E_{-\alpha_2}^{(m+1)} + E_{\alpha_3}^{(m+1)} + E_{-\alpha_4}^{(m+1)} + E_{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}^{(m+\frac{1}{2})}.
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

O próximo passo é definir o operador de Lax espacial $A_x^{\text{Tz/BD}}$:

$$\begin{aligned}
 A_x^{\text{Tz/BD}}(v, w) &= E^{(1)} + A^{(0)}(v, w) = E^{(1)} + v(h_1^{(0)} + h_4^{(0)}) + w(h_2^{(0)} + h_3^{(0)}) \\
 &= \begin{pmatrix} v & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w-v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v-w & 1 \\ \lambda^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 & -v \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

onde $v_1 = v(x, t)$ e $v_2 = w(x, t)$ são os campos do modelo.

Sabemos então que para a sub-hierarquia positiva a seguinte equação é válida

$$[\partial_x + E^{(1)} + v(h_1^{(0)} + h_4^{(0)}) + w(h_2^{(0)} + h_3^{(0)}), \partial_{t_N} + D^{(N)} + \dots + D^{(0)}] = 0 \quad (4.65)$$

tal que usando a equação de ordem mais alta e (4.62), fixamos N em

$$N = 3, 7, 9, \dots \quad (4.66)$$

Para o primeiro tempo positivo, $N = 3$, temos o seguinte Lax Temporal

$$A_{t_3}^{\text{Tz/BD}}(v, w) = D^{(0)} + D^{(1)} + D^{(2)} + D^{(3)} \quad (4.67)$$

tal que

$$\begin{aligned} D^{(3)} &= E^{(3)} = E_{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}^{(0)} + E_{(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}^{(0)} + E_{-(\alpha_2+\alpha_3)}^{(\frac{1}{2})} + E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}^{(\frac{1}{2})} + E_{-(\alpha_3+\alpha_4)}^{(\frac{1}{2})}, \\ D^{(2)} &= v \left(E_{(\alpha_1+\alpha_2)}^{(0)} - E_{(\alpha_3+\alpha_4)}^{(0)} \right) + (v - w) \left(E_{-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}^{(\frac{1}{2})} - E_{-(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}^{(\frac{1}{2})} \right), \\ D^{(1)} &= \frac{1}{5} \left(v_x + w_x - v^2 + vw + 2w^2 \right) \left(E_{\alpha_1}^{(0)} + E_{\alpha_4}^{(0)} \right), \\ &\quad + \frac{1}{5} \left(v_x - 4w_x - v^2 - 4vw + 2w^2 \right) \left(E_{\alpha_2}^{(0)} + E_{\alpha_3}^{(0)} \right) \\ &\quad + \frac{1}{5} \left(-4v_x + 6w_x - v^2 + 6vw - 3w^2 \right) E_{-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}^{(\frac{1}{2})}, \\ D^{(0)} &= \frac{1}{5} \left(-v^3 + 6wv^2 - 3v \left(w^2 + v_x - w_x \right) + 3w \left(w_x - v_x \right) + 2v_{2x} - 3w_{2x} \right) \left(h_1^{(0)} + h_4^{(0)} \right) \\ &\quad + \frac{1}{5} \left(2w^3 + 9v^2w - 3v \left(3w^2 + 2v_x - w_x \right) + 3w \left(w_x - 2v_x \right) + 3v_{2x} - 7w_{2x} \right) \left(h_2^{(0)} + h_3^{(0)} \right), \end{aligned} \quad (4.68)$$

associado ao seguinte par de equações de movimento

$$\begin{aligned} 5v_{t_3} &= -3v^2 (v_x - 2w_x) + 3v (4wv_x - 2ww_x - v_{2x} + w_{2x}) - 3v_x^2 \\ &\quad - 3w (v_{2x} - w_{2x}) + 3w_x^2 - 3w^2v_x + 2v_{3x} - 3w_{3x}, \end{aligned} \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned} 5w_{t_3} &= w^2 (6w_x - 9v_x) + 3v (6wv_x - 6ww_x - 2v_{2x} + w_{2x}) - 6v_x^2 \\ &\quad + w (3w_{2x} - 6v_{2x}) + 3w_x^2 - 3v_xw_x + 9w_xv^2 + 3v_{3x} - 7w_{3x}, \end{aligned} \quad (4.70)$$

evidentemente, tanto vácuo **não-nulo** $(v, w) = (v_0, w_0) \neq 0$, quanto **vácuo nulo**

$(v, w) = (0, 0)$, são soluções de (4.69)-(4.70). Como esperado, as demais equações positivas também apresentam as duas possibilidades de vácuo.

Quanto a sub-hierarquia negativa, sabemos que os tempos possíveis serão determinado analisando a equação de curvatura nula

$$[\partial_x + E^{(1)} + v(h_1^{(0)} + h_4^{(0)}) + w(h_2^{(0)} + h_3^{(0)}), \partial_{t_{-N}} + D^{(-1)} + \dots + D^{(-N)}] = 0 \quad (4.71)$$

projetada no vácuo $(v, w) = (v_0, w_0)$:

$$[E^{(1)} + v_0(h_1^{(0)} + h_4^{(0)}) + w_0(h_2^{(0)} + h_3^{(0)}), D_{vac}^{(-1)} + \dots + D_{vac}^{(-N)}] = 0 \quad (4.72)$$

de modo que é fácil perceber pela equação de ordem mais baixa que para $(v, w) = (v_0, w_0) \neq 0$, $D^{(-N)}$ deve pertencer ao *Kernel* de $\mathcal{H} = c_1(h_1^{(0)} + h_4^{(0)}) + c_2(h_2^{(0)} + h_3^{(0)})$, $\mathcal{K}_{\mathcal{H}}$ e por (3.33), vemos que para vácuo **não-nulo** N é tal que

$$N = 10m \quad \text{ou} \quad N = 10m + 5. \quad (4.73)$$

Já se $(v, w) = (0, 0)$, D^{-N} deve comutar com $E^{(1)}$, de modo que $D^{-N} \in \mathcal{K}_E$ e os tempos que apresentaram vácuo **nulo** serão

$$N = 10m + 1, \quad N = 10m + 3, \quad N = 10m + 7, \quad \text{ou} \quad N = 10m + 9. \quad (4.74)$$

Os demais tempos $N = 10m + 2$, $N = 10m + 4$, $N = 10m + 6$ e $N = 10m + 8$ não apresentam soluções de vácuo nem nulo nem não-nulo.

Como exemplo, tomemos o modelo de Toda, $N = 1$, associado a essa hierarquia. Seu Lax temporal será tal que

$$A_{t_{-1}}^{\text{Tz/BD}} = e^{2\phi_1 - \phi_2} E_{-\alpha_1}^{(m)} + e^{\phi_2 - \phi_1} E_{-\alpha_2}^{(m)} + e^{\phi_2 - \phi_1} E_{\alpha_3}^{(m)} + e^{2\phi_1 - \phi_2} E_{-\alpha_4}^{(m)} + e^{-2\phi_1} E_{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)}^{(m - \frac{1}{2})} \quad (4.75)$$

onde parametrizamos $v = \partial_x \phi_1$ e $w = \partial_x \phi_2$, e cujo o par de equações de movimento será dado por

$$\partial_{xt} \phi_1 = e^{2\phi_1 - \phi_2} - e^{-2\phi_1}, \quad (4.76)$$

$$\partial_{xt} \phi_2 = e^{-\phi_1 + \phi_2} - e^{-2\phi_1}, \quad (4.77)$$

que claramente só aceita solução de vácuo nulo.

Já para o primeiro tempo negativo que aceita vácuo **não-nulo**, temos $N = 5$,

tal que

$$A_{t-5}^{\text{Tz/BD}} = D^{(-1)} + D^{(-2)} + D^{(-3)} + D^{(-4)} + D^{(-5)}, \quad (4.78)$$

associado ao seguinte par de equações de movimento

$$\begin{aligned} v_{t-5} = & -e^{d^{-1}(2v-w)} d^{-1} \left(e^{d^{-1}(-v+w)} d^{-1} \left[e^{-d^{-1}(v)} (c_{-3} - a_{-3}) \right] \right) \\ & - e^{d^{-1}(2v-w)} d^{-1} \left(e^{-d^{-1}(2v)} d^{-1} \left[e^{d^{-1}(w)} (c_{-3} - b_{-3}) \right] \right) \\ & - 2e^{-d^{-1}(2v)} d^{-1} \left(e^{d^{-1}(2v-w)} d^{-1} \left[e^{d^{-1}(w)} (c_{-3} - b_{-3}) \right] \right) \end{aligned} \quad (4.79)$$

e

$$\begin{aligned} w_{t-5} = & e^{d^{-1}(-v+w)} d^{-1} \left(e^{d^{-1}(2v-w)} d^{-1} \left[e^{-d^{-1}(v)} (c_{-3} - a_{-3}) \right] \right) \\ & - 2e^{-d^{-1}(2v)} d^{-1} \left(e^{d^{-1}(2v-w)} d^{-1} \left[e^{d^{-1}(w)} (c_{-3} - b_{-3}) \right] \right) \end{aligned} \quad (4.80)$$

onde

$$\begin{aligned} a_{-3} &= -e^{d^{-1}w} d^{-1} \left[e^{-d^{-1}(2v)} d^{-1} \left(e^{d^{-1}(2v-w)} \right) \right] \\ b_{-3} &= 4e^{2d^{-1}(v-w)} d^{-1} \left[e^{-d^{-1}(v-w)} d^{-1} \left(e^{-d^{-1}(v-w)} \right) \right] \\ c_{-3} &= e^{-d^{-1}v} d^{-1} \left[e^{-d^{-1}(v-w)} d^{-1} \left(e^{d^{-1}(2v-w)} \right) - 2e^{d^{-1}(2v-w)} d^{-1} \left(e^{-d^{-1}(v-w)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Pode se mostrar por substituição direta que $v = v_0$ e $w = w_0$ são de fato soluções possíveis, como esperado pela análise anterior.

4.2.2 Análise geral para $A_{2r}^{(2)}$

Concluimos então que apesar de obviamente ao aumentarmos o *rank* álgebra, o grau de complexidade do problema aumentar devido ao número de campos envolvidos, muitas das análises feitas são generalizáveis para os modelos $A_{2r}^{(2)}$ do tipo Tzitzeica/Bullough–Dodd.

Primeiramente, seja uma álgebra de $\mathcal{G} = A_{2r}^{(2)}$ com $r = 1, 2, 3, \dots$ podemos ver através de (3.40) que o elemento constante de grau um sempre poderá ser escrito como

$$E^{(1)} = E_{\alpha_1}^{(0)} + E_{\alpha_2}^{(0)} + \dots + E_{\alpha_{2r}}^{(0)} + E_{-(\alpha_1 + \dots + \alpha_{2r})}^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^{2r} E_{\alpha_i}^{(0)} + E_{-(\alpha_1 + \dots + \alpha_{2r})}^{\left(\frac{1}{2}\right)} \quad (4.82)$$

e daí terminamos o *Kernel* de $E^{(1)}$, tal que $A_{2r}^{(2)} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{M}$.

Já um elemento qualquer de grau zero pode ser escrito como

$$\begin{aligned} A_0(v_1, v_2, \dots, v_r) &= v_1 \left(h_1^{(0)} + h_{2r}^{(0)} \right) + v_2 \left(h_2^{(0)} + h_{2r-1}^{(0)} \right) + \dots + v_r \left(h_r^{(0)} + h_{r+1}^{(0)} \right) \\ &= \sum_{i=1}^r v_i \left(h_i^{(0)} + h_{2r+1-i}^{(0)} \right) \end{aligned} \quad (4.83)$$

de modo que o operador de Lax espacial será dado por

$$A_x^{\text{Tz-BD}} = E^{(1)} + A_0 = \sum_{i=1}^{2r} E_{\alpha_i}^{(0)} + E_{-(\alpha_1 + \dots + \alpha_{2r})}^{(\frac{1}{2})} + \sum_{i=1}^r v_i \left(h_i^{(0)} + h_{2r+1-i}^{(0)} \right) \quad (4.84)$$

e a equação de curvatura nula mais geral será do tipo

$$\begin{aligned} [\partial_x + E^{(1)} + A_0, \partial_{t_{N,M}} + D^{(N)} + \dots + D^{(0)} + \dots + D^{(-M)}] &= 0 \\ [\partial_x + E^{(1)} + \sum_{i=1}^r v_i \left(h_i^{(0)} + h_{2r+1-i}^{(0)} \right), \partial_{t_{N,M}} + D^{(N)} + \dots + D^{(0)} + \dots + D^{(-M)}] &= 0. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Para a **sub-hierarquia positiva**, temos $M = 0$

$$[\partial_x + E^{(1)} + \sum_{i=1}^r v_i \left(h_i^{(0)} + h_{2r+1-i}^{(0)} \right), \partial_{t_N} + D^{(N)} + \dots + D^{(0)}] = 0 \quad (4.86)$$

e daí, pela equação de grau mais alto, temos que sempre N é tal que

$$D^{(N)} \in \mathcal{K}_E \quad (4.87)$$

e ambas soluções de vácuo são possíveis.

Já para os tempos negativos, temos

$$[\partial_x + E^{(1)} + \sum_{i=1}^r v_i \left(h_i^{(0)} + h_{2r+1-i}^{(0)} \right), \partial_{t_N} + D^{(-N)} + \dots + D^{(-1)}] = 0 \quad (4.88)$$

que quando projetada no vácuo $v_i = v_{0,i}$ nos leva á

$$[E^{(1)} + \sum_{i=1}^r v_{0,i} \left(h_i^{(0)} + h_{2r+1-i}^{(0)} \right), D_{vac}^{(-N)} + \dots + D_{vac}^{(-1)}] = 0 \quad (4.89)$$

da onde a seguinte condição é fixada para $v_{0,i} \neq 0$

$$\sum_{i=1}^r \left[v_{0,i} \left(h_i^{(0)} + h_{2r+1-i}^{(0)} \right), D_{vac}^{(-N)} \right] = 0. \quad (4.90)$$

Com auxílio de (3.40), é fácil ver que N deve ser tal que

$$N = -2(2r + 1)m \quad \text{ou} \quad N = -2(2r + 1)m - (2r + 1) \quad (4.91)$$

para que a equação de movimento apresente uma solução de **vácuo não-nulo**. Já para $v_{0,i} = 0$, a seguinte condição é fixada

$$[E^{(1)}, D_{vac}^{(-N)}] = 0 \quad (4.92)$$

de modo que

$$D^{(-N)} \in \mathcal{K}_E. \quad (4.93)$$

Teremos então - para um dado n fixo - as seguintes condições de vácuo sub-hierarquias negativas:

- $2rn$ tempos que permitem **vácuo nulo**¹;
- $2n$ tempos que permitem **vácuo não-nulo**²;
- $2rn$ tempos sem vácuo determinado.

Agora que temos caracterizadas as possíveis soluções de vácuo, podemos então construir soluções gerais baseadas nestas. Para isso, iremos utilizar o método de *Dressing*, que necessariamente precisa de uma solução de vácuo conhecida, de modo que iremos focar somente nas duas primeiras possibilidades acima.

¹número de espaços com elementos do *Kernel*;

²número de espaços que contêm operadores Cartan;

Capítulo 5

Método Dressing

Nesse capítulo, desenvolvemos um dos possíveis métodos utilizados para obter soluções do tipo soliton para modelos integráveis, o chamado método *Dressing* [4, 6, 8, 9]. Como iremos ver, esse método baseia-se em "vestir" as soluções de vácuo previamente através de transformações de gauge, obtendo assim diferentes soluções 1 – **soliton**, 2 – **soliton** e assim por diante. Introduzimos ainda um ansatz auxiliar, chamado **ansatz de Hirota** [22] para simplificar nosso problema em casos em que torne-se muito difícil o cálculo via vértice. Ao fim, exemplificamos o método através dos modelos $A_1 = sl(2)$ e $A_2 = sl(3)$

5.1 Formulação Geral

A ideia central do método de *Dressing* é utilizar soluções de vácuo $v_{vac} = 0$ ou $v_{vac} = v_0$ para construir as demais soluções para o problema utilizando sucessivas transformações de *gauge*, se valendo da invariância por transformação de *gauge* da equação de curvatura nula. Para isso, primeiramente definimos os potências no vácuo como

$$A_\mu^{vac} = A_\mu|_{v=v_{vac}} \quad (5.1)$$

onde $\mu = x, t_N$. Sabemos que a equação de curvatura nula

$$[\partial_x + A_x^{vac}, \partial_{t_N} + A_{t_N}^{vac}] = 0 \quad (5.2)$$

se reduz a

$$[A_x^{vac}, A_{t_N}^{vac}] = 0 \quad (5.3)$$

quando uma solução de vácuo é utilizada. Queremos então aplicar uma transformação de gauge Θ de modo a construir outras soluções a partir do vácuo:

$$A_\mu = \Theta(\partial_\mu + A_\mu^{vac})\Theta^{-1}, \quad (5.4)$$

com $\mu = x, t$. Chamaremos essa transformação de gauge Θ de operador de *Dressing*. Lembramos então que as soluções de A_μ sempre podem ser escritas no formato puro gauge, de modo que podemos escrever os operadores de Lax no vácuo na forma

$$A_\mu^{vac} = T_0 \partial_\mu T_0^{-1}, \quad (5.5)$$

e assim temos

$$A_\mu = \Theta \partial_\mu \Theta^{-1} + \Theta T_0 \partial_\mu T_0^{-1} \Theta^{-1} \quad (5.6)$$

que pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} A_\mu &= \Theta T_0 \partial_\mu (T_0^{-1} \Theta^{-1}) \\ &= T \partial_\mu T^{-1} \end{aligned} \quad (5.7)$$

com $T = \Theta T_0$.

Temos que Θ é um elemento de grupo que pode ser construído tando de elementos positivos da álgebra graduada, quanto de elementos negativos através da decomposição de *Riemann–Hilbert* [23, 24]

$$\Theta = \Theta_+ = e^{\theta_0} e^{\theta_1} e^{\theta_2} \dots \quad (5.8)$$

$$\Theta = \Theta_- = e^{\theta_{-1}} e^{\theta_{-2}} e^{\theta_{-3}} \dots \quad (5.9)$$

Se substituirmos (5.8) e (5.9) em (5.4) temos de modo geral duas equações que devem ser satisfeitas:

$$A_x = e^{\theta_0} e^{\theta_1} e^{\theta_2} \dots (\partial_x)^{-\theta_2} e^{-\theta_1} e^{-\theta_0} + e^{\theta_0} e^{\theta_1} e^{\theta_2} \dots (A_x^{vac})^{-\theta_2} e^{-\theta_1} e^{-\theta_0} \quad (5.10)$$

e

$$A_x = e^{\theta_{-1}} e^{\theta_{-2}} e^{\theta_{-3}} \dots (\partial_x)^{\theta_{-3}} e^{\theta_{-2}} e^{\theta_{-1}} + e^{\theta_{-1}} e^{\theta_{-2}} e^{\theta_{-3}} \dots (A_x^{vac})^{\theta_{-3}} e^{\theta_{-2}} e^{\theta_{-1}}. \quad (5.11)$$

Gostaríamos então de poder determinar cada um dos elementos θ_i positivos e negativos utilizando a decomposição por grau em (5.10) e (5.11). Caso isso seja possível, poderemos construir transformações T partindo tanto de Θ_+ quanto de Θ_- , o que irá levar a seguinte equivalência entre Θ_+ e Θ_- :

$$A_\mu = T \partial_\mu T^{-1} = \Theta_+ T_0 \partial_\mu (\Theta_+ T_0)^{-1} \quad (5.12)$$

e

$$A_\mu = T\partial_\mu T^{-1} = \Theta_- T_0 \partial_\mu (\Theta_- T_0)^{-1} \quad (5.13)$$

de modo que a seguinte relação deve ser satisfeita

$$\Theta_+ T_0 \partial_\mu (\Theta_+ T_0)^{-1} = \Theta_- T_0 \partial_\mu (\Theta_- T_0)^{-1} \quad (5.14)$$

note que se

$$\Theta_+ T_0 = \Theta_- T_0 g \quad (5.15)$$

com g constante, essa relação é satisfeita imediatamente

$$\begin{aligned} \Theta_+ T_0 \partial_\mu (\Theta_+ T_0)^{-1} &= \Theta_- T_0 g \partial_\mu g^{-1} (\Theta_- T_0)^{-1} \\ &= \Theta_- T_0 g g^{-1} \partial_\mu (\Theta_- T_0)^{-1} \\ &= \Theta_- T_0 \partial_\mu (\Theta_- T_0)^{-1}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Assim, vemos que de modo geral:

$$\Theta_-^{-1} \Theta_+ = T_0 g T_0^{-1} \quad (5.17)$$

Este resultado será de suma importância para a construção das nossas soluções. Agora lembramos então que

$$A_x^{vac} = T_0 \partial_x T_0^{-1} \quad (5.18)$$

e

$$A_{t_N}^{vac} = T_0 \partial_{t_N} T_0^{-1} \quad (5.19)$$

e que $[A_x^{vac}, A_{t_N}^{vac}] = 0$ pela condição de curvatura nula, o que nos permite determinar T_0 :

$$\begin{aligned} T_0^{-1} &= e^{x A_x^{vac}} e^{t_N A_{t_N}^{vac}} \\ T_0 &= e^{-x A_x^{vac}} e^{-t_N A_{t_N}^{vac}}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Introduzimos uma representação

$$\{|\lambda_i\rangle, \dots, |\lambda_{r+1}\rangle\} \quad (5.21)$$

com estados de peso mais alto tal que:

$$\theta_i |\lambda_j\rangle = 0 \quad (5.22)$$

para $i > 0$. Para que esses estados sejam introduzidos, é necessário adicionar a *loop* álgebra uma **extensão central** de Kac-Moody, i.e, modificamos nossa álgebra adicionando um elemento a mais κ tal que

$$\begin{aligned} [h_i^{(m)}, h_j^{(n)}] &= \kappa m \delta_{i,j} \delta_{m+n,0} \quad , \quad [E_{\alpha_i}^{(m)}, E_{-\alpha_i}^{(n)}] = h_i^{(m+n)} + \kappa m \delta_{m+n,0} \\ [\kappa, E_{\alpha_i}^{(n)}] &= [\kappa, h_i^{(m)}] = 0 \end{aligned} \quad (5.23)$$

note que κ é sempre adicionado no subespaço de grau zero \mathcal{G}_0 , de modo que nosso potencial A_0 será modificado para

$$A_0(\mathbf{v}) \rightarrow A_0(\mathbf{v}) + \partial_x \nu \kappa \quad (5.24)$$

onde ν é um campo auxiliar. Como κ comuta com todos os elementos da álgebra, esse campo estará desacoplado dos campos $v_i(x, t)$ e todas as equações de movimento calculadas previamente sem o termo central continuam válidas.

Gostaríamos então de calcular o seguinte elemento de matriz nessa representação:

$$\langle \lambda_i | \Theta_-^{-1} \Theta_+ | \lambda_j \rangle = \langle \lambda_i | \dots e^{-\theta_{-2}} e^{-\theta_{-1}} e^{\theta_0} e^{\theta_1} e^{\theta_2} \dots | \lambda_j \rangle \quad (5.25)$$

note que pela definição de estado de peso mais alto, temos a direita

$$e^{\theta_i} |\lambda_j\rangle = |\lambda_j\rangle \quad (5.26)$$

para $i > 0$, e a esquerda

$$\langle \lambda_i | = \langle \lambda_i | e^{\theta_j} \quad (5.27)$$

para $j < 0$. Assim, calcular esse elemento de matriz se resume a calcular

$$\langle \lambda_i | \Theta_-^{-1} \Theta_+ | \lambda_j \rangle = \langle \lambda_i | e^{\theta_0} | \lambda_j \rangle. \quad (5.28)$$

Porém, vimos em (5.17) que a seguinte relação também é válida

$$\Theta_-^{-1} \Theta_+ = T_0 g T_0^{-1} \quad (5.29)$$

e assim chegamos a relação geral:

$$\langle \lambda_i | T_0 g T_0^{-1} | \lambda_j \rangle = \langle \lambda_i | e^{\theta_0} | \lambda_j \rangle, \quad (5.30)$$

onde lembramos que

$$T_0 g T_0^{-1} = e^{-x A_x^{vac}} e^{-t_N A_{t_N}^{vac}} g e^{t_N A_{t_N}^{vac}} e^{x A_x^{vac}} \quad (5.31)$$

e é esperado e^{θ_0} tenha alguma dependência com os campos $\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$.

Note então que enquanto o lado direito terá uma dependência com a solução $\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ que estamos buscando determinar, o lado esquerdo dependerá exclusivamente do potenciais de *Lax* calculados no vácuo $A_\mu|_{v=v_{vac}}$ e do elemento de grupo constante g , que é livre. Portanto, uma escolha adequada do elemento de grupo g se faz necessária para que nosso problema seja factível. Para isso, escolhemos a constante livre como

$$g = \prod_{i=1}^n e^{F(\gamma_i)} \quad (5.32)$$

com

$$[A_\mu^{vac}, F(\gamma_i)] = \omega_\mu(\gamma_i) F(\gamma_i). \quad (5.33)$$

de modo que será possível rescrever a expressão (5.31) como:

$$\begin{aligned} T_0 g T_0^{-1} &= e^{-x A_x^{vac}} e^{-t_N A_{t_N}^{vac}} \prod_{i=1}^n e^{F(\gamma_i)} e^{t_N A_{t_N}^{vac}} e^{x A_x^{vac}} \\ &= \prod_{i=1}^n e^{x A_x^{vac}} e^{(e^{-\omega t}) F(\gamma_i)} e^{-x A_x^{vac}}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

que analogamente se reduz à

$$T_0 g T_0^{-1} = \prod_{i=1}^n e^{(e^{-\omega t_N(\gamma_i) t_N - \omega_x(\gamma_i) x} F(\gamma_i))} = \prod_{i=1}^n e^{\rho_i(t_N, x) F(\gamma_i)}. \quad (5.35)$$

com $\rho_i(t_N, x) = e^{-\omega t_N(\gamma_i) t_N - \omega_x(\gamma_i) x}$. Assim encontramos e^{θ_0} que contém as informações do campo, utilizando:

$$\begin{aligned} \tau_{ij}(\mathbf{v}) &= \langle \lambda_i | e^{\theta_0} | \lambda_j \rangle = \langle \lambda_i | T_0 g T_0^{-1} | \lambda_j \rangle \\ &= \langle \lambda_i | \prod_{i=1}^n e^{\rho_i(t_N, x) F(\gamma_i)} | \lambda_j \rangle \end{aligned} \quad (5.36)$$

de modo que temos

$$\tau_{ij}(\mathbf{v}) = \langle \lambda_i | \prod_{i=1}^n \left(1 + \rho_i F(\gamma_i) + \frac{1}{2} \rho_i^2 F^2(\gamma_i) + \dots \right) | \lambda_j \rangle. \quad (5.37)$$

Sendo $F(\gamma_i)$ um operador nilpotente, i.e, $F^k(\gamma_i) = 0$ para algum k , temos

$$\tau_{ij}(\mathbf{v}) = \langle \lambda_i | \prod_{i=1}^n \left(1 + \rho_i F(\gamma_i) + \frac{1}{2} \rho_i^2 F^2(\gamma_i) + \dots + \frac{1}{k!} \rho_i^k F^k(\gamma_i) \right) | \lambda_j \rangle \quad (5.38)$$

onde k dependerá da nilpotência do operador de vértice e n é escolhido de acordo com o número de solitons que se deseja para a solução. Por exemplo, caso estejamos lidando com uma solução 1–*soliton*, escolhemos $n = 1$ e temos:

$$\tau_{ij}(\mathbf{v}) = \langle \lambda_i | \left(1 + \rho_1 F(\gamma_1) + \frac{1}{2} \rho_1^2 F^2(\gamma_1) + \dots + \frac{1}{k!} \rho_1^k F^k(\gamma_1) \right) | \lambda_j \rangle \quad (5.39)$$

ao passo que para uma solução 2–*solitons*, temos $n = 2$ e daí

$$\begin{aligned} \tau_{ij}(\mathbf{v}) = & \langle \lambda_i | \left(1 + \rho_1 F(\gamma_1) + \frac{1}{2} \rho_1^2 F^2(\gamma_1) + \dots + \frac{1}{k!} \rho_1^k F^k(\gamma_1) \right) \times \\ & \left(1 + \rho_2 F(\gamma_2) + \frac{1}{2} \rho_2^2 F^2(\gamma_2) + \dots + \frac{1}{k!} \rho_2^k F^k(\gamma_2) \right) | \lambda_j \rangle \end{aligned} \quad (5.40)$$

e assim por diante.

Aqui vale salientar que nem sempre é trivial calcular os elementos de matrizes que envolvem potências do tipo $\langle \lambda_i | F^k(\gamma_i) | \lambda_j \rangle$. Podemos então, utilizar um *ansatz* proposto por Hirota [22] que substitui esses elementos de matriz por coeficientes a determinar, i.e, propomos então

$$\tau_{ij}(\mathbf{v}) = 1 + \sum_l \alpha_l \rho^l + \sum_{l,m} \alpha_{l,m} \rho_l \rho_m + \dots + \sum_l \beta_l \rho_l^2 + \sum_{l,m} \beta_{l,m} \rho_l^2 \rho_m + \dots \quad (5.41)$$

onde expandimos até um dado k e determinamos os coeficientes α , β por substituição direta na equação de movimento. Note que ainda precisamos conhecer as funções ρ_i nesse caso. Por exemplo no caso 1–*soliton* se propomos que $F^2(\gamma_i) = 0$, é imediato que

$$\tau_{ij}(\mathbf{v}) = 1 + \alpha_1 \rho_1 \quad (5.42)$$

de onde determinamos α_1 . Podemos generalizar isso para n solitons como

$$\tau_{ij}(\mathbf{v}) = 1 + \sum_l \alpha_l \rho^l + \sum_{l,m} \alpha_{l,m} \rho_l \rho_m + \sum_{l,m,p} \alpha_{l,m,p} \rho_l \rho_m \rho_p + \dots \quad (5.43)$$

Por outro lado, se propomos que $F^3(\gamma_i) = 0$, temos para o caso 1– soliton

$$\tau_{ij}(\mathbf{v}) = 1 + \alpha_1 \rho_1 + \beta_1 \rho_1^2 \quad (5.44)$$

que levaria no caso 2– solitons à

$$\begin{aligned} \tau_{ij}(\mathbf{v}) = 1 &+ \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 + \beta_1 \rho_1^2 + \beta_2 \rho_2^2 + \beta_{1,2} \rho_1 \rho_2 \\ &+ \delta_{1,2} \rho_2 \rho_1^2 + \delta_{2,1} \rho_2^2 \rho_1 + \omega \rho_1^2 \rho_2^2 \end{aligned} \quad (5.45)$$

e assim por diante. Podemos resumir então, o método que iremos utilizar nos seguintes passos:

- Introduza as soluções de vácuo no par de Lax e determine A_μ^{vac} ;
- Determine o operador e^{θ_0} e sua relação com os campos $\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$;
- Determine o auto-estado de vácuo (Vértice) $F(\gamma_i)$ e seus auto-valores espaciais e temporais ω_x e ω_{t_N} ;
- Construa a função $\rho(x, t_N)$ e escolha o tipo de solução pretendida fixando um n (1– soliton, 2– soliton, etc.);
- Calcule os elementos τ_{ij} :
 - Via elemento de Matrizes, utilizando os produtos de vértice OU
 - via ansatz de *Hirota*, propondo que o vértice trunque em certa potência;
- Escreva os campos $\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ em função dos elementos τ_{ij} e determine as soluções.

De modo a ilustrar a formulação geral aqui expostas, iremos mostrar como aplicar o método a um modelo mais simples, o $A_1 = sl(2)$ e logo após calcular algumas soluções do modelo $A_2 = sl(3)$, para poder comparar essas soluções com as do modelo *twisted* $A_2^{(2)}$, que serão obtidas no próximo capítulo. Porém, antes disso expomos algumas características gerais que serão válidas para *qualquer modelo* do tipo $mKdV$, incluindo o modelo *Tzitzeica/Bullough–Dodd*.

5.2 Dressing para hierarquias do tipo mKdV

Notemos primeiramente que os modelos do tipo $mKdV$ são definidos através de um Lax espacial do tipo (onde já estamos considerando a extensão com termo central)

$$A_x^{\text{mKdV}}(\mathbf{v}) = E^{(1)} + A^{(0)}(\mathbf{v}) + \nu_x \kappa = E^{(1)} + v_1 \mathcal{H}_0^1 + \cdots + v_n \mathcal{H}_0^n + \nu_x \kappa, \quad (5.46)$$

onde o elemento $E^{(1)}$ depende da álgebra utilizada e o número de campos v_i depende de quantidade de elementos $\mathcal{H}_0^i \in \mathcal{G}_0$ presentes no sub-espço de grau zero do modelo. Note então, que a projeção desse operador no vácuo será tal que (onde consideramos $A_x^{\text{mKdV}-\text{vac}} = A_x^{\text{vac}}$ e $\nu_x = 0$)

$$A_x^{\text{vac}} = E^{(1)} + A_{\text{vac}}^{(0)} = E^{(1)} + v_{0,1} \mathcal{H}_0^1 + \cdots + v_{0,n} \mathcal{H}_0^n \quad (5.47)$$

caso consideramos um caso de vácuo **nulo**, i.e, $v_{0,i} = 0$ para qualquer i , temos

$$A_x^{\text{vac}} = E^{(1)} \in \mathcal{G}_1 \quad (5.48)$$

ou seja, a projeção no vácuo fica restrita a um sub-espço específico \mathcal{G}_1 . Caso consideremos qualquer um dos vácuos possíveis **não-nulo**, i.e, $v_{0,i} \neq 0$ para pelo menos um i , temos então

$$A_x^{\text{vac}} = E^{(1)} + v_{0,1} \mathcal{H}_0^1 + \cdots + v_{0,n} \mathcal{H}_0^n \in \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_1 \quad (5.49)$$

de modo que a projeção tanto terá contribuições em \mathcal{G}_1 quanto em \mathcal{G}_0 . Desse modo, para determinar o operador de *Dressing* Θ , teremos

$$A_x = \Theta \partial_x \Theta^{-1} + \Theta A_x^{\text{vac}} \Theta^{-1} \quad (5.50)$$

$$E^{(1)} + A^{(0)} + \nu_x \kappa = \Theta \partial_x \Theta^{-1} + \Theta \left(E^{(1)} + A_{\text{vac}}^{(0)} \right) \Theta^{-1} \quad (5.51)$$

de modo que adotando a decomposição positiva, i.e, $\Theta = e^{\theta_0} e^{\theta_1} e^{\theta_2} \dots$, temos:

$$\begin{aligned} E^{(1)} + A_0 + \nu_x \kappa &= e^{\theta_0} e^{\theta_1} e^{\theta_2} \dots (\partial_x) \dots e^{-\theta_2} e^{-\theta_1} e^{-\theta_0} \\ &+ e^{\theta_0} e^{\theta_1} e^{\theta_2} \dots \left(E^{(1)} + A_{\text{vac}}^{(0)} \right) \dots e^{-\theta_2} e^{-\theta_1} e^{-\theta_0} \end{aligned} \quad (5.52)$$

e quebrando em graus, temos para o **grau 0**

$$A_0 + \nu_x \kappa = e^{\theta_0} \partial_x e^{-\theta_0} + e^{\theta_0} A_{vac}^{(0)} e^{-\theta_0} \quad (5.53)$$

notemos então que no caso das hierarquias do tipo $mKdV$, podemos escrever

$$A_0 + \nu_x \kappa = v_1 \mathcal{H}_0^1 + \dots + v_n \mathcal{H}_0^n + \nu_x \kappa = e^{-\mathcal{B}_0 - \nu \kappa} \partial_x e^{\mathcal{B}_0 + \nu \kappa} \quad (5.54)$$

com

$$\mathcal{B}_0 = e^{\phi_1 \mathcal{H}_0^1 + \dots + \phi_n \mathcal{H}_0^n}, \quad (5.55)$$

onde parametrizamos $v_i = (\phi_i)_x$ e lembramos que no caso das hierarquias do tipo $mKdV$, $[\mathcal{H}_0^l, \mathcal{H}_0^m] = 0$. Assim, é fácil ver que a solução de (5.53) será

$$e^{-\theta_0} = e^{-\mathcal{B}_0^{vac}} e^{\mathcal{B}_0 + \nu \kappa}. \quad (5.56)$$

onde

$$\mathcal{B}_0^{vac} = e^{\phi_{0,1} \mathcal{H}_0^1 + \dots + \phi_{0,n} \mathcal{H}_0^n} \quad (5.57)$$

com $\phi_{0,i} = v_{0,i} x$. Note que no limite de vácuo **nulo** a expressão se reduz à

$$e^{-\theta_0} = e^{\mathcal{B}_0 + \nu \kappa}. \quad (5.58)$$

O elemento $e^{-\theta_0}$ irá nos dar informação acerca dos campos, e assim, poderemos determinar a solução. Determinado θ_0 , podemos recursivamente determinar os outros θ_i . Por exemplo, a próxima equação positiva será

$$E^{(1)} = e^{\theta_0} E^{(1)} e^{-\theta_0} - e^{\theta_0} (\partial_x \theta_1) e^{-\theta_0} + e^{\theta_0} \left([\theta_1, A_{vac}^{(0)}] \right) e^{-\theta_0} \quad (5.59)$$

da onde determinamos θ_1 e assim por diante. Além disso, também podemos fazer a decomposição do operador de Dressing em elementos negativos, i.e, $\Theta = e^{\theta_{-1}} e^{\theta_{-2}} e^{\theta_{-3}} \dots$, tal que

$$\begin{aligned} E^{(1)} + A_0 + \nu_x \kappa &= e^{\theta_{-1}} e^{\theta_{-2}} e^{\theta_{-3}} \dots (\partial_x) \dots e^{-\theta_{-3}} e^{-\theta_{-2}} e^{-\theta_{-1}} \\ &+ e^{\theta_{-1}} e^{\theta_{-2}} e^{\theta_{-3}} \dots \left(E^{(1)} + A_{vac}^{(0)} \right) \dots e^{-\theta_{-3}} e^{-\theta_{-2}} e^{-\theta_{-1}} \end{aligned} \quad (5.60)$$

de modo que, analogamente, resolvemos grau a grau

- Grau 0

$$A_0 + v_x \kappa = [\theta_{-1}, E^{(1)}] \quad (5.61)$$

- Grau -1

$$0 = [\theta_{-2}, E^{(1)}] + \frac{1}{2} [[\theta_{-1}, E^{(1)}], \theta_{-1}] + [\theta_{-1}, A_{vac}^{(0)}] - \partial_x \theta_{-1} \quad (5.62)$$

e assim em diante. Os resultados gerais utilizados nessa seção serão úteis para todos os modelos do tipo $mKdV$ estudados nessa dissertação. De modo geral, iremos precisar da projeção do operador de Lax espacial no vácuo

$$A_x^{vac} = E^{(1)} + v_{0,1} \mathcal{H}_0^1 + \dots + v_{0,n} \mathcal{H}_0^n \quad (5.63)$$

e da relação entre o elemento de grau zero do operador de *Dressing* e os campos

$$e^{-\theta_0} = e^{-\mathcal{B}_0^{vac}} e^{\mathcal{B}_0 + v\kappa} \quad (5.64)$$

com

$$\mathcal{B}_0 = e^{\phi_1 \mathcal{H}_0^1 + \dots + \phi_n \mathcal{H}_0^n}. \quad (5.65)$$

Dados esses ingredientes, podemos então exemplificar com os modelos expostos anteriormente.

5.2.1 $A_1 = sl(2)$

De modo a elucidar o procedimento descrito acima, detalhamos o processo geral aqui para o sistema mais simples possível, que é a hierarquia $mKdV$ proveniente do modelo $A_1 = sl(2)$. Esse modelo já foi amplamente estudado previamente em [4], porém, por ser um modelo que contém somente **um campo** e com subespaços graduados relativamente pequenos, é possível realizar o processo para ambos os vácuos de modo bastante sistemático e assim escolhemos ele para ilustrar as principais etapas a serem utilizadas pelo método. A seguir, determinamos o vértice, os auto-valores positivos e negativos da solução e forma funcional da solução para a hierarquia $mKdV$.

Determinando o vértice

No caso da hierarquia $mKdV$ para $A_1 = sl(2)$, (5.63) se reduz à

$$A_x^{\text{vac}} = E^{(1)} + v_0 h_1^{(0)} \quad (5.66)$$

de modo que o primeiro passo é achar um operador que seja auto-estado de A_x^{vac} , tal que

$$[A_x^{\text{vac}}, F(\gamma_i)] = \omega_x(\gamma_i)F(\gamma_i). \quad (5.67)$$

note que começamos utilizando o A_x^{vac} para determinar o vértice porque ele é **universal** e serve para **toda** a hierarquia. Nosso *ansatz* geral é que o operador de vértice será uma combinação do tipo

$$F(\gamma_i) \equiv \sum_{j=-\infty}^{\infty} \bar{\gamma}_i^{-2j} \left[a_0 \kappa \delta_{j,0} + a_1 h^{(j)} + a_2 E_{\alpha}^{(j)} + a_3 E_{-\alpha}^{(j+1)} \right], \quad (5.68)$$

de modo que substituindo em (5.67) chegamos ao seguinte sistema de equações

$$a_1 \omega_x = \bar{\gamma}_i^2 (a_3 - a_2), \quad a_2 \omega_x = 2(a_2 v_0 - a_1), \quad (5.69)$$

$$a_3 \omega_x = 2(a_1 - a_3 v_0), \quad a_0 \omega_x = a_2 \bar{\gamma}_i^2. \quad (5.70)$$

Resolvendo esse sistema para o auto-valor ω_x , obtemos

$$\omega_x = \pm 2 \sqrt{v_0^2 + \bar{\gamma}_i^2} \quad (5.71)$$

de modo que fazemos a seguinte mudança de variável para que o formato do vértice torne-se mais simples

$$\sqrt{\bar{\gamma}_i^2 - v_0^2} = \gamma_i \quad (5.72)$$

e agora obtemos

$$\omega_x = \pm 2 \gamma_i \quad (5.73)$$

em conjunto com o seguintes operadores de vértice

$$F^+(\gamma_i) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\gamma_i^2 - v_0^2)^{-j} \epsilon \left[h^{(j)} - \frac{(v_0 + \gamma_i)}{2\gamma_i} \kappa \delta_{j,0} + \frac{1}{v_0 - \gamma_i} E_{\alpha}^{(j)} + \frac{1}{\gamma_i + v_0} E_{-\alpha}^{(j+1)} \right] \quad (5.74)$$

e

$$F^-(\gamma_i) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\gamma_i^2 - v_0^2)^{-j} \epsilon \left[h^{(j)} + \frac{(v_0 - \gamma_i)}{2\gamma_i} \kappa \delta_{j,0} + \frac{1}{v_0 + \gamma_i} E_{\alpha}^{(j)} - \frac{1}{\gamma_i - v_0} E_{-\alpha}^{(j+1)} \right] \quad (5.75)$$

onde os coeficientes satisfazem o sistema (5.69) e ϵ é um parâmetro livre. Note que se definirmos o operador

$$\Omega_{(2n+1)} \equiv E_{\alpha}^{(n)} + E_{-\alpha}^{(n+1)} + v_0 h^{(n)} = E^{(n)} + v_0 h^{(n)} \quad (5.76)$$

é fácil verificar que os operadores de vértice acima são auto-estados dele, tal que

$$[\Omega_{(2n+1)}, F^{\pm}(\gamma_i)] = \pm 2\gamma_i (\gamma_i^2 - v_0^2)^n F^{\pm}(\gamma_i) \quad (5.77)$$

$\Omega_{(2n+1)}$ **não** tem grau $2n + 1$ sobre a gradação principal usual, pois a projeção nos *cartans* tem grau $2n$.

Auto-valores positivos

De posse do operador de vértice, podemos começar a calcular os auto-valores associados a cada fluxo temporal. Começamos com os fluxos positivos. Seja o modelo *mKdV* tal que $N = 3$, cujo o Lax temporal

$$\begin{aligned} A_{t_3}^{\text{mKdV}} &= E_{\alpha}^{(1)} + E_{-\alpha}^{(2)} + v h^{(1)} + \frac{1}{2} (v_x - v^2) E_{\alpha}^{(0)} \\ &\quad - \frac{1}{2} (v_x + v^2) E_{\alpha}^{(1)} + \frac{1}{4} (v_{xx} - 2v^3) h^{(0)} \end{aligned} \quad (5.78)$$

tem a seguinte projeção no vácuo ($v = v_0$)

$$A_{t_3}^{\text{vac}} = E_{\alpha}^{(1)} + E_{-\alpha}^{(2)} + v_0 h^{(1)} - \frac{v_0^2}{2} (E_{\alpha}^{(0)} + E_{-\alpha}^{(1)} + v_0 h^{(0)}) \quad (5.79)$$

$$= \Omega_{(3)} - \frac{v_0^2}{2} \Omega_{(1)} \quad (5.80)$$

e daí é imediato que

$$[A_{t_3}^{\text{vac}}, F^\pm(\gamma_i)] = [\Omega_{(3)}, F^\pm(\gamma_i)] - \frac{v_0^2}{2} [\Omega_{(1)}, F^\pm(\gamma_i)] \quad (5.81)$$

onde determinamos o seguinte auto-valor

$$\omega_{t_3} = -(2\gamma_i^3 - 3v_0^2) \quad (5.82)$$

onde adotamos daqui para frente a convenção $F(\gamma_i) \equiv F^-(\gamma_i)$. Do mesmo modo, é fácil verificar que para o próximo fluxo temporal, temos

$$A_{t_5}^{\text{vac}} = \Omega_{(5)} - \frac{v_0^2}{2} \Omega_{(3)} + \frac{3v_0^4}{8} \Omega_{(1)} \quad (5.83)$$

da onde é imediato que

$$\omega_{t_5} = -\frac{1}{4} \gamma_i (\gamma_i - v_0) (v_0 + \gamma_i) (3v_0^4 - 12v_0^2 + 8\gamma_i^2) \quad (5.84)$$

e daí por diante. De fato, foi verificado por [4] que no caso da hierarquia positiva, sempre podemos escrever

$$A_{t_{2m+1}}^{\text{vac}} = \sum_{i=0}^m a_i \Omega_{(2i+1)} \quad (5.85)$$

de modo que podemos achar os auto-valores utilizando sempre a relação (5.77):

$$\omega_{t_{2m+1}} = \sum_{i=0}^m -2a_i \gamma_i (\gamma_i^2 - v_0^2)^n. \quad (5.86)$$

Note também que para a hierarquia positiva, podemos facilmente tomar o limite $v_0 \rightarrow 0$ e obter todos os resultados para soluções solitons com condição de contorno nulo.

Auto-valores negativos ímpares

Como vimos anteriormente, a sub-hierarquia negativa se divide em ímpares e pares, devido aos diferentes vácuos das soluções. Começamos então com os fluxos

temporais ímpares, tais que $v_0 = 0$. Nesse caso, o vértice se reduz à:

$$F(\gamma_i) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_i^{-2j} \epsilon \left[h^{(j)} - \frac{1}{2} \kappa \delta_{j,0} + \frac{1}{\gamma_i} E_{\alpha}^{(j)} - \frac{1}{\gamma_i} E_{-\alpha}^{(j+1)} \right] \quad (5.87)$$

o operador auxiliar se reduz à

$$\Omega_{(-2n+1)} = E^{(-2n+1)} \quad (5.88)$$

tal que agora os auto-valores serão

$$[\Omega_{(-2n+1)}, F(\gamma_i)] = [E^{(-2n+1)}, F(\gamma_i)] = -2\gamma_i^{-2n+1} F(\gamma_i). \quad (5.89)$$

Note que para os fluxos temporais negativos ímpares, temos as seguintes projeções no vácuo

$$\begin{aligned} A_{t-1}^{\text{vac}} &= \left(e^{-2\phi} E_{\alpha}^{(-1)} + e^{2\phi} E_{-\alpha}^{(0)} \right)_{v=0} = E_{\alpha}^{(-1)} + E_{-\alpha}^{(0)} \\ &= E^{(-1)} \end{aligned} \quad (5.90)$$

$$\begin{aligned} A_{t-3}^{\text{vac}} &= \left[e^{-2\phi} E_{\alpha}^{(-2)} + e^{2\phi} E_{-\alpha}^{(-1)} + d^{-1} \left(e^{-2\phi} - e^{2\phi} \right) h^{(-1)} \right. \\ &\quad + 2e^{2\phi} d^{-1} \left(e^{-2\phi} d^{-1} \left(e^{-2\phi} - e^{2\phi} \right) \right) E_{\alpha}^{(-1)} \\ &\quad \left. - 2e^{2\phi} d^{-1} \left(e^{-2\phi} d^{-1} \left(e^{-2\phi} - e^{2\phi} \right) \right) E_{-\alpha}^{(0)} \right]_{v=0} \\ &= E_{\alpha}^{(-2)} + E_{-\alpha}^{(-1)} \\ &= E^{(-3)} \end{aligned} \quad (5.91)$$

de modo que podemos generalizar

$$A_{t-2n+1}^{\text{vac}} = E_{\alpha}^{(-n)} + E_{-\alpha}^{(-n+1)} = E^{(-2n+1)} \quad (5.92)$$

e daí é imediato que os auto-valores serão

$$\omega_{t-2n+1} = -2\gamma_i^{-2n+1} \quad (5.93)$$

tal como é esperado para esses modelos, mostrando assim que no limite em que $v_0 = 0$ recuperamos resultados muito bem conhecidos.

Auto-valores negativos pares

Começamos então com os fluxos temporais pares, tais que $v_0 \neq 0$. Nesse caso, usamos o vértice completo com a deformação em v_0 . Seja então as projeções no vácuo (onde lembramos que $v = v_0 \rightarrow \phi = v_0 x$)

$$\begin{aligned}
 A_{t-2}^{\text{vac}} &= \left(h^{(-1)} + \left(2e^{-2\phi} d^{-1} (e^{2\phi}) \right) E_{\alpha}^{(-1)} - 2e^{2\phi} d^{-1} (e^{-2\phi}) E_{-\alpha}^{(0)} \right)_{v=v_0} \\
 &= \frac{1}{v_0} \left(E_{\alpha}^{(-1)} + E_{-\alpha}^{(0)} \right) + h^{(-1)} \\
 &= \frac{1}{v_0} \Omega_{(-1)}
 \end{aligned} \tag{5.94}$$

$$\begin{aligned}
 A_{t-4}^{\text{vac}} &= \left[h^{(-2)} + e^{-2\phi} d^{-1} \left(2e^{2\phi} \right) E_{\alpha}^{(-2)} + e^{2\phi} d^{-1} \left(-2e^{-2\phi} \right) E_{-\alpha}^{(-1)} \right. \\
 &\quad + d^{-1} \left(e^{-2\phi} d^{-1} \left(2e^{2\phi} \right) + e^{2\phi} d^{-1} \left(2e^{-2\phi} \right) \right) h^{(-1)} \\
 &\quad + e^{-2\phi} d^{-1} \left(2e^{2\phi} d^{-1} \left(e^{-2\phi} d^{-1} \left(2e^{2\phi} \right) + e^{2\phi} d^{-1} \left(2e^{-2\phi} \right) \right) \right) E_{\alpha}^{(-1)} \\
 &\quad \left. - e^{2\phi} d^{-1} \left(2e^{-2\phi} d^{-1} \left(e^{-2\phi} d^{-1} \left(2e^{2\phi} \right) + e^{2\phi} d^{-1} \left(2e^{-2\phi} \right) \right) \right) E_{-\alpha}^{(0)} \right]_{v=v_0} \\
 &= \frac{1}{v_0} \left(E_{\alpha}^{(-2)} + E_{-\alpha}^{(-1)} \right) + h^{(-2)} \\
 &= \frac{1}{v_0} \Omega_{(-3)}
 \end{aligned} \tag{5.95}$$

de modo que podemos generalizar

$$A_{t-2n}^{\text{vac}} = \frac{1}{v_0} \Omega_{(-2n+1)} \tag{5.96}$$

e daí, é imediato que os auto-valores serão do tipo

$$[A_{t-2n}^{\text{vac}}, F(\gamma_i)] = \frac{1}{v_0} [\Omega_{(-2n+1)}, F(\gamma_i)] = -\frac{2\gamma_i (\gamma_i^2 - v_0^2)^n}{v_0} F(\gamma_i), \tag{5.97}$$

com

$$\omega_{t-2n} = -\frac{2\gamma_i (\gamma_i^2 - v_0^2)^n}{v_0}. \tag{5.98}$$

Os valores obtidos em (5.98) implicam imediatamente que $v_0 \neq 0$, visto que a expressão apresenta polos em zero. De posse dos auto-valores possíveis, as

funções $\rho_i(t_N, x) = e^{-\lambda_{t_N}(\gamma_i)t_N - \omega_x(\gamma_i)x}$ ficam completamente definidas, de modo que para que a solução fique totalmente determinada devemos então determinar a forma funcional desta.

Forma funcional das soluções

Seja a seguinte relação previamente definida

$$\tau_{ij}(\mathbf{v}) = \langle \lambda_i | e^{\theta_0} | \lambda_j \rangle \quad (5.99)$$

notamos que para o caso da hierarquia $mKdV$ para a álgebra $sl(2) = A_1$, temos

$$e^{-\theta_0} = e^{-\mathcal{B}_0^{vac}} e^{\mathcal{B}_0 + \nu\kappa} \quad (5.100)$$

com (onde lembramos que $v = \phi_x$)

$$\mathcal{B}_0 = e^{\phi h_1^{(0)}} \quad \mathcal{B}_0^{vac} = e^{v_0 x h_1^{(0)}} \quad (5.101)$$

e assim, obtemos a seguinte equivalência

$$\tau_{ij}(\mathbf{v}) = \langle \lambda_i | e^{v_0 x h_1^{(0)} - \phi h_1^{(0)} - \nu\kappa} | \lambda_j \rangle. \quad (5.102)$$

Introduzimos então o seguinte sistema de pesos fundamentais:

$$\begin{aligned} h_1 |\lambda_0\rangle &= 0 |\lambda_0\rangle & \kappa |\lambda_0\rangle &= 1 |\lambda_0\rangle \\ h_1 |\lambda_1\rangle &= 1 |\lambda_1\rangle & \kappa |\lambda_1\rangle &= 1 |\lambda_1\rangle \end{aligned} \quad (5.103)$$

e assim, podemos calcular as seguintes quantidades

$$\tau_{00}(\mathbf{v}) = \langle \lambda_0 | e^{v_0 x h_1^{(0)} - \phi h_1^{(0)} - \nu\kappa} | \lambda_0 \rangle = e^{-\nu} \quad (5.104)$$

e

$$\tau_{11}(\mathbf{v}) = \langle \lambda_1 | e^{v_0 x h_1^{(0)} - \phi h_1^{(0)} - \nu\kappa} | \lambda_1 \rangle = e^{v_0 x - \phi - \nu} \quad (5.105)$$

da onde é imediato que

$$\phi(x, t) = v_0 x + \ln \left(\frac{\tau_{00}}{\tau_{11}} \right) \quad (5.106)$$

e daí

$$v(x, t) = v_0 + \partial_x \ln \left(\frac{\tau_{00}}{\tau_{11}} \right), \quad (5.107)$$

de modo que nossa solução fica totalmente determinada para dados τ_{00} e τ_{11} . Lembremos que esses elementos são dados por

$$\tau_{ij}(\mathbf{v}) = \langle \lambda_i | \prod_{i=1}^n \left(1 + \rho_i F(\gamma_i) + \frac{1}{2} \rho_i^2 F^2(\gamma_i) + \cdots + \frac{1}{k!} \rho_i^k F^k(\gamma_i) \right) | \lambda_j \rangle. \quad (5.108)$$

tal que ρ_i e $F(\gamma_i)$ estão completamente determinados na subseção anterior. Assim, fixando por exemplo a solução 1 – *soliton*, temos

$$\tau_{ij}(\mathbf{v}) = 1 + \langle \lambda_i | F(\gamma_1) | \lambda_j \rangle \rho_1 + \frac{1}{2} \langle \lambda_i | F^2(\gamma_1) | \lambda_j \rangle \rho_1^2 + \cdots \quad (5.109)$$

onde falta determinar

$$\langle \lambda_0 | F(\gamma_1)^k | \lambda_0 \rangle \quad \text{e} \quad \langle \lambda_1 | F(\gamma_1)^k | \lambda_1 \rangle. \quad (5.110)$$

Utilizando o vértice dado em (5.75) e os pesos fundamentais dados acima, é fácil ver que em primeira ordem, temos

$$\langle \lambda_0 | F(\gamma_1) | \lambda_0 \rangle = \frac{(v_0 - \gamma_1)}{2\gamma_1} \epsilon \quad (5.111)$$

e

$$\langle \lambda_1 | F(\gamma_1) | \lambda_1 \rangle = \epsilon + \frac{(v_0 - \gamma_1)}{2\gamma_1} \epsilon = \frac{(v_0 + \gamma_1)}{2\gamma_1} \epsilon. \quad (5.112)$$

Para os termos de ordem maior, i.e $k > 1$, pode-se mostrar (veja [4] para as contas em detalhes) que

$$\langle \lambda_0 | F(\gamma_1)^k | \lambda_0 \rangle = \langle \lambda_1 | F(\gamma_1)^k | \lambda_1 \rangle = 0 \quad (5.113)$$

de modo que temos

$$\tau_{00}(\mathbf{v}) = 1 + \frac{(v_0 - \gamma_1) \epsilon}{2\gamma_1} \rho_1 \quad \text{e} \quad \tau_{11}(\mathbf{v}) = 1 + \frac{(v_0 + \gamma_1) \epsilon}{2\gamma_1} \rho_1 \quad (5.114)$$

e daí, nossa solução será tal que

$$v(x, t) = v_0 + \partial_x \ln \left(\frac{1 + \frac{(v_0 - \gamma_1)}{2\gamma_1} \epsilon \rho_1}{1 + \frac{(v_0 + \gamma_1)}{2\gamma_1} \epsilon \rho_1} \right), \quad (5.115)$$

ρ_1 está totalmente determinado, já que

$$\rho_1(t, x) = e^{-\omega_t(\gamma_1)t - \omega_x(\gamma_1)x} = e^{-\omega_t(\gamma_1) + 2\gamma_1 x} \quad (5.116)$$

e os auto valores são tais que

$$\omega_{t_{2m+1}} = \sum_{i=0}^m -2a_i \gamma_i \left(\gamma_i^2 - v_0^2 \right)^n, \quad (5.117)$$

para tempos positivos e

$$\omega_{t_{-2n+1}} = -2\gamma_i^{-2n+1}, \quad (5.118)$$

$$\omega_{t_{-2n}} = -\frac{2\gamma_i \left(\gamma_i^2 - v_0^2 \right)^n}{v_0}. \quad (5.119)$$

para tempos negativos. Para os tempos negativos que só aceitam solução de vácuo **nulo**, basta fazer $v_0 \rightarrow 0$ na forma funcional. Além das soluções 1 – *soliton* aqui expostas, as demais soluções n – *soliton* podem ser calculadas (ver [4]). É interessante analisar como o parâmetro de deformação altera as soluções e estabelece uma subdivisão clara para hierarquias não somente quanto aos seus fluxos temporais, mas também quanto a suas soluções.

5.2.2 $A_2 = sl(3)$

Operador de vértice e auto-valores para vácuo nulo

Gostaríamos agora de achar algumas soluções para a hierarquia $mKdV$ advinda $A_2 = sl(3)$. Note que a agora, nosso Lax espacial dependerá de dois campos

$$A_x^{mKdV}(v_1, v_2) = E^{(1)} + v_1 h_1^{(0)} + v_2 h_2^{(0)}. \quad (5.120)$$

Como o escopo principal desse trabalho não é estudar a fundo essa hierarquia, mas sim usa-lá como parâmetro de comparação para a hierarquia *twisted* $A_2^{(2)}$, focare-

mos somente nas soluções de **vácuo nulo** $(v_1, v_2) = (0, 0)$ nessa exemplificação. Assim, temos

$$A_x^{vac} = E^{(1)} = E_{\alpha_1}^{(0)} + E_{\alpha_2}^{(0)} + E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}^{(1)} \quad (5.121)$$

de modo que para obter o operador de vértice devemos resolver a seguinte equação de auto-valores

$$[A_x^{vac}, F(\gamma_i)] = [E^{(1)}, F(\gamma_i)] = \omega_x(\gamma_i)F(\gamma_i). \quad (5.122)$$

onde propomos o seguinte *ansatz*

$$\begin{aligned} F(\gamma_i) = & \sum_j \{ [a_1 h_1^{(j)} + a_2 h_2^{(j)} + a_3 \kappa \delta_{j,0}] \gamma_i^{-3j} + [a_4 E_{\alpha_1}^{(j)} + a_5 E_{\alpha_2}^{(j)} + a_6 E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}^{(j+1)}] \gamma_i^{-3j-1} \\ & + [a_7 E_{-\alpha_1}^{(j+1)} + a_8 E_{-\alpha_2}^{(j+1)} + a_9 E_{(\alpha_1+\alpha_2)}^{(j)}] \gamma_i^{-3j-2} \}, \end{aligned} \quad (5.123)$$

tal que, substituindo em (5.122) obtemos o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \omega_x a_1 &= \gamma_i (a_7 - a_9), & \omega_x a_6 &= \gamma_i (a_1 + a_2), \\ \omega_x a_2 &= \gamma_i (a_8 - a_9), & \omega_x a_7 &= \gamma_i (a_6 - a_5), \\ \omega_x a_3 &= \gamma_i a_9, & \omega_x a_8 &= \gamma_i (a_4 - a_6), \\ \omega_x a_4 &= \gamma_i (a_2 - 2a_1), & \omega_x a_9 &= \gamma_i (a_5 - a_4). \\ \omega_x a_5 &= \gamma_i (a_1 - 2a_2), \end{aligned} \quad (5.124)$$

A solução mais geral para esse sistema é tal que

$$\omega_x^6 = -3^3 \gamma_i^6 \quad (5.125)$$

ou seja, teríamos 6 possibilidades de valores de ω_x distintos, i.e

$$\begin{aligned} \omega_{1,x} &= \sqrt{3} \gamma_i e^{\frac{i\pi}{6}}, & \omega_{2,x} &= \sqrt{3} \gamma_i e^{-\frac{i\pi}{6}}, \\ \omega_{3,x} &= \sqrt{3} \gamma_i e^{\frac{3i\pi}{6}}, & \omega_{4,x} &= \sqrt{3} \gamma_i e^{-\frac{3i\pi}{6}}, \\ \omega_{5,x} &= \sqrt{3} \gamma_i e^{\frac{5i\pi}{6}}, & \omega_{6,x} &= \sqrt{3} \gamma_i e^{-\frac{5i\pi}{6}}, \end{aligned} \quad (5.126)$$

note porém, que eles diferem entre si somente por **uma fase**, i.e, podemos escrever ω_x

$$\omega_x = \sqrt{3} \bar{\gamma}_i \quad (5.127)$$

tal que

$$\bar{\gamma}_i = \gamma_i e^{i\theta} \quad \text{com} \quad e^{6i\theta} = -1 \quad (5.128)$$

de modo que nosso vértice seria então

$$\begin{aligned} F(\bar{\gamma}_i) = & \sum_j \{ [a_1 h_1^{(j)} + a_2 h_2^{(j)} + a_3 \kappa \delta_{j,0}] e^{-3ij\theta} \bar{\gamma}_i^{-3j} \\ & + [a_4 E_{\alpha_1}^{(j)} + a_5 E_{\alpha_2}^{(j)} + a_6 E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}^{(j+1)}] e^{-3i(j+1)\theta} \bar{\gamma}_i^{-3(j+1)} \\ & + [a_7 E_{-\alpha_1}^{(j+1)} + a_8 E_{-\alpha_2}^{(j+1)} + a_9 E_{(\alpha_1+\alpha_2)}^{(j)}] e^{-3i(j+2)\theta} \bar{\gamma}_i^{-3(j+2)} \}, \end{aligned} \quad (5.129)$$

com os seguintes coeficientes

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{2a_1}{1 - \sqrt{3}e^{3i\theta}}, & a_3 &= -\frac{(\sqrt{3}e^{3i\theta} + 1)a_1}{\sqrt{3}e^{3i\theta} + 3}, \\ a_4 &= \frac{2e^{2i\theta}a_1}{1 - \sqrt{3}e^{3i\theta}}, & a_5 &= \frac{(\sqrt{3}e^{3i\theta} + 3)a_1}{3e^{4i\theta} - \sqrt{3}e^{i\theta}}, \\ a_6 &= \frac{(\sqrt{3}e^{3i\theta} - 3)a_1}{3e^{4i\theta} - \sqrt{3}e^{i\theta}}, & a_7 &= \frac{2e^{-2i\theta}a_1}{1 - \sqrt{3}e^{3i\theta}}, \\ a_8 &= e^{-2i\theta}a_1, & a_9 &= \frac{e^{-2i\theta}(\sqrt{3}e^{3i\theta} + 1)a_1}{\sqrt{3}e^{3i\theta} - 1}, \end{aligned} \quad (5.130)$$

tal que $a_1 = \text{constante}$ é um coeficiente livre. Como estamos trabalhando somente com soluções de vácuo nulo, os únicos tempos possíveis serão tais que $N = 3m \pm 1$. É fácil ver que nesses casos, temos:

$$A_{t_{3m\pm 1}}^{vac} = E^{(3m\pm 1)} \quad (5.131)$$

cujo os auto-valores associados são

$$[A_{t_{3m\pm 1}}^{vac}, F(\gamma_i)] = [E^{(1)}, F(\gamma_i)] = \sqrt{3} i^m \bar{\gamma}_i^{3m\pm 1} F(\bar{\gamma}_i) \quad (5.132)$$

i.e

$$\omega_{3m\pm 1} = \sqrt{3} i^m \bar{\gamma}_i^{3m\pm 1}. \quad (5.133)$$

De posse dos auto-valores, podemos então calcular as diversas soluções. Do mesmo modo que no caso $sl(2)$ fixamos um dos auto-valores para computar as soluções de modo mais simples, adotaremos o mesmo procedimento aqui. No nosso caso, faremos a seguintes escolha

$$e^{i\theta} = i \rightarrow \omega_{3m\pm 1} = \sqrt{3}i^m (i\gamma_i)^{3m\pm 1} \quad (5.134)$$

e

$$a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = e^{\frac{i\pi}{6}} \quad (5.135)$$

temos então o seguinte vértice

$$\begin{aligned} F(\gamma_i) = & \sum_j [e^{\frac{i\pi}{6}} h_1^{(j)} + e^{-\frac{i\pi}{6}} h_2^{(j)} + \frac{e^{i\pi\kappa\delta_{j,0}}}{\sqrt{3}}] \gamma_i^{-3j} + [e^{\frac{5i\pi}{6}} E_{\alpha_1}^{(j)} + e^{\frac{i\pi}{6}} E_{\alpha_2}^{(j)} + e^{-\frac{i\pi}{2}} E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}^{(j+1)}] \gamma_i^{-3j-1} \\ & + [e^{\frac{5i\pi}{6}} E_{-\alpha_1}^{(j+1)} + e^{\frac{i\pi}{6}} E_{-\alpha_2}^{(j+1)} + e^{-\frac{i\pi}{2}} E_{(\alpha_1+\alpha_2)}^{(j)}] \gamma_i^{-3j-2} \end{aligned} \quad (5.136)$$

Começemos então com a solução *1-soliton*.

Solução *1-soliton*

De modo usual com as funções τ_{ij}

$$\tau_{ij}(\mathbf{v}) = \langle \lambda_i | e^{\theta_0} | \lambda_j \rangle \quad (5.137)$$

notamos que para álgebra $sl(3) = A_2$ com vácuo nulo, temos

$$e^{-\theta_0} = e^{\mathcal{B}_0 + \nu\kappa} \quad (5.138)$$

com

$$\mathcal{B}_0 = e^{\phi_1 h_1 + \phi_2 h_2} \quad (5.139)$$

e assim, obtemos a seguinte equivalência

$$\tau_{ij}(\mathbf{v}) = \langle \lambda_i | e^{-\phi_1 h_1^{(0)} - \phi_2 h_2^{(0)} - \nu\kappa} | \lambda_j \rangle. \quad (5.140)$$

Introduzimos então o seguinte sistema de pesos fundamentais:

$$\begin{aligned} h_1|\lambda_0\rangle &= 0|\lambda_0\rangle, & h_2|\lambda_0\rangle &= 0|\lambda_0\rangle, & \kappa|\lambda_0\rangle &= 1|\lambda_0\rangle, \\ h_1|\lambda_1\rangle &= 1|\lambda_1\rangle, & h_2|\lambda_1\rangle &= 0|\lambda_1\rangle, & \kappa|\lambda_1\rangle &= 1|\lambda_1\rangle, \\ h_1|\lambda_2\rangle &= 0|\lambda_2\rangle, & h_2|\lambda_2\rangle &= 1|\lambda_2\rangle, & \kappa|\lambda_2\rangle &= 1|\lambda_2\rangle, \end{aligned} \quad (5.141)$$

e nos leva as seguintes quantidades

$$\tau_{00}(\mathbf{v}) = \langle \lambda_0 | e^{\phi_1 h_1^{(0)} + \phi_2 h_2^{(0)} + \nu \kappa} | \lambda_0 \rangle = e^{-\nu}, \quad (5.142)$$

$$\tau_{11}(\mathbf{v}) = \langle \lambda_1 | e^{\phi_1 h_1^{(0)} + \phi_2 h_2^{(0)} + \nu \kappa} | \lambda_1 \rangle = e^{-\nu - \phi_1}, \quad (5.143)$$

e

$$\tau_{22}(\mathbf{v}) = \langle \lambda_2 | e^{\phi_1 h_1^{(0)} + \phi_2 h_2^{(0)} + \nu \kappa} | \lambda_2 \rangle = e^{-\nu - \phi_2}, \quad (5.144)$$

da onde é imediato que

$$\phi_1(x, t) = \ln \left(\frac{\tau_{00}}{\tau_{11}} \right) \quad \text{e} \quad \phi_2(x, t) = \ln \left(\frac{\tau_{00}}{\tau_{22}} \right) \quad (5.145)$$

e daí

$$v_i(x, t) = \partial_x \ln \left(\frac{\tau_{00}}{\tau_{ii}} \right). \quad (5.146)$$

No caso da solução 1 – *soliton* temos então

$$\tau_{ij}(\mathbf{v}) = 1 + \langle \lambda_i | F(\gamma_1) | \lambda_j \rangle \rho_1 + \frac{1}{2} \langle \lambda_i | F^2(\gamma_1) | \lambda_j \rangle \rho_1^2 + \dots \quad (5.147)$$

note que em primeira ordem utilizando (5.136), temos

$$\begin{aligned} \langle \lambda_0 | F(\gamma_1) | \lambda_0 \rangle &= \frac{e^{i\pi}}{\sqrt{3}}, \\ \langle \lambda_1 | F(\gamma_1) | \lambda_1 \rangle &= \frac{e^{i\pi}}{\sqrt{3}} + e^{\frac{i\pi}{6}} = \frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{\sqrt{3}}, \\ \langle \lambda_2 | F(\gamma_1) | \lambda_2 \rangle &= \frac{e^{i\pi}}{\sqrt{3}} + e^{-\frac{i\pi}{6}} = \frac{e^{-\frac{i\pi}{3}}}{\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (5.148)$$

Para os termos de ordem maior, i.e $k > 1$, podemos verificar com o auxílio do método de *Hirota* que

$$\langle \lambda_0 | F(\gamma_1)^k | \lambda_0 \rangle = \langle \lambda_1 | F(\gamma_1)^k | \lambda_1 \rangle = \langle \lambda_2 | F(\gamma_1)^k | \lambda_2 \rangle = 0 \quad (5.149)$$

de modo que nossas soluções serão

$$v_1(x, t) = \partial_x \ln \left(\frac{1 + e^{i\pi} \rho_1}{1 + e^{\frac{i\pi}{3}} \rho_1} \right), \quad (5.150)$$

e

$$v_2(x, t) = \partial_x \ln \left(\frac{1 + e^{i\pi} \rho_1}{1 + e^{-\frac{i\pi}{3}} \rho_1} \right), \quad (5.151)$$

onde absorvemos um fator de $\sqrt{3}$. Lembramos ρ_1 está totalmente determinado por

$$\rho_1(t, x) = e^{-\omega_{3m\pm 1} t - \omega_1 x} \quad (5.152)$$

com

$$\omega_{3m\pm 1} = \sqrt{3} i^m (i\gamma_i)^{3m\pm 1}. \quad (5.153)$$

Do mesmo jeito que realizamos o procedimento para um auto-valor específico, podemos repetir o exato mesmo procedimento para o vértice geral dado em (5.129). Nesse caso, obtemos

$$v_1(x, t) = \partial_x \ln \left(\frac{1 - \frac{a_1(1+\sqrt{3}e^{3i\theta})}{3+\sqrt{3}e^{3i\theta}} \rho_1}{1 + \frac{2a_1}{3+\sqrt{3}e^{3i\theta}} \rho_1} \right), \quad (5.154)$$

e

$$v_2(x, t) = \partial_x \ln \left(\frac{1 - \frac{a_1(1+\sqrt{3}e^{3i\theta})}{3+\sqrt{3}e^{3i\theta}} \rho_1}{1 - \frac{a_1(2\sqrt{3}e^{3i\theta}+3e^{6i\theta}+5)}{2\sqrt{3}e^{3i\theta}+3e^{6i\theta}-3} \rho_1} \right), \quad (5.155)$$

com

$$\omega_{3m\pm 1} = \sqrt{3} i^m \tilde{\gamma}_i^{3m\pm 1} \quad (5.156)$$

que obviamente se reduz a solução anterior dado as escolhas de θ e a_1 anteriores.

Ao introduzirmos mais um campo no modelo e aumentarmos o *rank* da álgebra, o grau de complexidade do modelo e para obter as soluções também aumentou, seja pelo tamanho do vértice, seja pelo aumento de possibilidade dos auto-valores. Visto isso, na próxima seção iremos obter a solução *2-solitons* utilizando um *mix* entre o método *Dressing* e o método de *Hirota*. O mesmo procedimento será utilizado posteriormente para a solução do modelo *twisted* $A_2^{(2)}$.

Solução 2-solitons

Para obtermos a forma funcional da solução *2-solitons*, lembramos uma propriedade muito importante das soluções para hierarquias integráveis: a forma funcional da solução é a mesma para todos os fluxos temporais dentro de uma mesma hierarquia, ou seja, os coeficientes

$$\tau_{ij}(\mathbf{v}) = 1 + \sum_l \alpha_l \rho^l + \sum_{l,m} \alpha_{l,m} \rho_l \rho_m + \cdots + \sum_l \beta_l \rho_l^2 + \sum_{l,m} \beta_{l,m} \rho_l^2 \rho_m + \cdots \quad (5.157)$$

que acompanham as funções ρ_n e suas potências na expansão das funções τ_{ij} são os mesmos para qualquer fluxo temporal dentro da mesma hierarquia, visto que esses coeficientes estão ligados a elementos de matrizes do tipo $\langle \lambda_i | F(\gamma_l)^k \cdots F(\gamma_m)^k | \lambda_j \rangle$ que só dependem dos *pesos fundamentais* e do *operador de vértice*, que não mudam numa mesma hierarquia. Assim, o elemento que diferencia os diferentes fluxos temporais é justamente a função $\rho(x, t)$. Desse modo, suponha que gostaríamos de encontrar uma solução do tipo *2-solitons*, i.e:

$$\tau_{i,j} = 1 + a_{i,j} \rho_1(x, t) + b_{i,j} \rho_2(x, t) + c_{i,j} \rho_1(x, t) \rho_2(x, t) \quad (5.158)$$

e sabemos, a priori devido ao método de *Dressing* que as soluções são tais que

$$\phi_1(x, t) = \ln \left(\frac{\tau_{00}}{\tau_{11}} \right) \quad \text{e} \quad \phi_2(x, t) = \ln \left(\frac{\tau_{00}}{\tau_{22}} \right) \quad (5.159)$$

e também conhecemos as funções ρ_i . Assim, podemos obter os coeficientes $a_{i,j}$, $b_{i,j}$ e $c_{i,j}$ substituindo a forma funcional das soluções em alguma equação de movimento da hierarquia com o ρ_i fixo. Obviamente é conveniente fazer isso nas equações de ordem mais baixa. Seja então, a equação de *Toda* para $mKdV - A_2$

$$\phi_{1x,t} = e^{2\phi_1 - \phi_2} - e^{-\phi_1 - \phi_2}, \quad (5.160)$$

$$\phi_{2x,t} = e^{2\phi_2 - \phi_1} - e^{-\phi_1 - \phi_2} \quad (5.161)$$

substituímos o seguinte *ansatz* no par acima

$$\phi_1(x, t) = \ln \left(\frac{1 + a_{0,0}\rho_1(x, t) + b_{0,0}\rho_2(x, t) + c_{0,0}\rho_1(x, t)\rho_2(x, t)}{1 + a_{1,1}\rho_1(x, t) + b_{1,1}\rho_2(x, t) + c_{1,1}\rho_1(x, t)\rho_2(x, t)} \right) \quad (5.162)$$

e

$$\phi_2(x, t) = \ln \left(\frac{1 + a_{0,0}\rho_1(x, t) + b_{0,0}\rho_2(x, t) + c_{0,0}\rho_1(x, t)\rho_2(x, t)}{1 + a_{2,2}\rho_1(x, t) + b_{2,2}\rho_2(x, t) + c_{2,2}\rho_1(x, t)\rho_2(x, t)} \right) \quad (5.163)$$

com

$$\rho_i(t_N, x) = e^{-\sqrt{3}\tilde{\gamma}_i x - \sqrt{3}\frac{t}{\tilde{\gamma}_i}} \quad (5.164)$$

conforme determinado anteriormente por (5.134). A solução do sistema será então:

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= \delta_1 a_{0,0}, & a_{2,2} &= \delta_1^2 a_{0,0}, & \delta_1 &= -e^{-\frac{i\pi}{3}}, \\ b_{1,1} &= \delta_2 b_{0,0}, & b_{2,2} &= \delta_2^2 b_{0,0}, & \delta_2 &= -e^{\frac{i\pi}{3}}, \end{aligned} \quad (5.165)$$

e

$$c_{0,0} = c_{1,1} = c_{2,2} = \frac{a_{0,0}b_{0,0}(\tilde{\gamma}_1^2 - \tilde{\gamma}_2\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2^2)}{(\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2)^2} \quad (5.166)$$

de modo que nossa solução 2 – *solitons* será

$$\phi_1(x, t) = \ln \left(\frac{1 + a_{0,0}\rho_1 + b_{0,0}\rho_2 + \frac{a_{0,0}b_{0,0}(\tilde{\gamma}_1^2 - \tilde{\gamma}_2\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2^2)\rho_1\rho_2}{(\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2)^2}}{1 + \delta_1 a_{0,0}\rho_1 + \delta_2 b_{0,0}\rho_2 + \frac{a_{0,0}b_{0,0}(\tilde{\gamma}_1^2 - \tilde{\gamma}_2\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2^2)\rho_1\rho_2}{(\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2)^2}} \right) \quad (5.167)$$

e

$$\phi_2(x, t) = \ln \left(\frac{1 + a_{0,0}\rho_1(x, t) + b_{0,0}\rho_2(x, t) + \frac{a_{0,0}b_{0,0}(\tilde{\gamma}_1^2 - \tilde{\gamma}_2\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2^2)\rho_1\rho_2}{(\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2)^2}}{1 + \delta_1^2 a_{0,0}\rho_1(x, t) + \delta_2^2 b_{0,0}\rho_2 + \frac{a_{0,0}b_{0,0}(\tilde{\gamma}_1^2 - \tilde{\gamma}_2\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2^2)\rho_1\rho_2}{(\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2)^2}} \right). \quad (5.168)$$

Por fim, cabe ressaltar que apesar dos coeficientes terem sido calculados para $N = -1$, a generalidade do vértice para toda a hierarquia garante que o formato funcional é o mesmo, e as demais soluções são obtidas utilizando os distintos $\rho_i(x, t)$.

Redução $v_1 \rightarrow v_2$

Para encerrar o capítulo, gostaríamos de realizar uma ponte entre os resultados obtidos e o foco central do nosso trabalho, que são as soluções *solitons* para modelos do tipo *twisted*. Como apontamos previamente, uma outra maneira de obter os modelos *twisted* $A_2^{(2)}$ é tomar o limite $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v$ nos modelos advindo de A_2 . Vejamos o que acontece no caso em que tentamos o limite na solução *1-solitons*, i.e, igualando $v_1 = v_2$ temos

$$\partial_x \ln \left(\frac{1 - \frac{a_1(1+\sqrt{3}e^{3i\theta})}{3+\sqrt{3}e^{3i\theta}}\rho_1}{1 + \frac{2a_1}{3+\sqrt{3}e^{3i\theta}}\rho_1} \right) = \partial_x \ln \left(\frac{1 - \frac{a_1(1+\sqrt{3}e^{3i\theta})}{3+\sqrt{3}e^{3i\theta}}\rho_1}{1 - \frac{a_1(2\sqrt{3}e^{3i\theta}+3e^{6i\theta}+5)}{2\sqrt{3}e^{3i\theta}+3e^{6i\theta}-3}\rho_1} \right) \quad (5.169)$$

cuja única solução possível é

$$a_1 = 0 \quad (5.170)$$

ou seja, $v = 0$ que é solução de vácuo. Ou seja, sobre a redução necessária para os modelos *twisted*, a solução *1-soliton* colapsa numa solução de **vácuo**. Como poderíamos então encontrar uma solução não trivial para esses modelos?

Realizemos a mesma redução na solução *2-solitons*. Nesse caso, tomemos o limite $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow \gamma$ nas soluções anteriormente obtidas (5.167) e (5.168):

$$\phi_1 = \ln \left(\frac{1 + (a_{0,0} + b_{0,0})\rho + \frac{a_{0,0}b_{0,0}\rho^2}{4}}{1 + (\delta_1 a_{0,0} + \delta_2 b_{0,0})\rho + \frac{a_{0,0}b_{0,0}\rho^2}{4}} \right) \quad (5.171)$$

e

$$\phi_2 = \ln \left(\frac{1 + (a_{0,0} + b_{0,0})\rho + \frac{a_{0,0}b_{0,0}\rho^2}{4}}{1 + (\delta_1^2 a_{0,0} + \delta_2^2 b_{0,0})\rho + \frac{a_{0,0}b_{0,0}\rho^2}{4}} \right). \quad (5.172)$$

Podemos verificar que no caso em que $a_{0,0} = b_{0,0}$, obtemos $\phi_1 = \phi_2 = \phi$ igual à:

$$\phi = \ln \left(\frac{\frac{1}{4}a_{0,0}^2\rho^2 + 2a_{0,0}\rho + 1}{\frac{1}{4}a_{0,0}^2\rho^2 - a_{0,0}\rho + 1} \right) \quad (5.173)$$

já que $\delta_1^2 + \delta_2^2 = \delta_1 + \delta_2 = -1$. Como iremos ver, essa solução é equivalente a solução da equação obtida através do modelo $A_2^{(2)}$. Note que com essa redução obtemos uma indicação muito importante: as soluções para o modelo *twisted* **não** truncam em primeira ordem de ρ mas sim em segunda. Assim, é natural que o

vértice desses modelos seja tal que $\langle \lambda_i | F(\gamma_l)^2 | \lambda_j \rangle \neq 0$. Logo, no próximo capítulo estamos interessados em achar todas as soluções para o modelo $A_{(2)}^{(2)}$, com vácuo **nulo** e **não-nulo**, bem como uma possível generalização para modelos de ordem mais alta a vácuo nulo.

Capítulo 6

Soluções para Hierarquia Tz-Bd

O objetivo central desse capítulo é apresentar as soluções gerais para a hierarquia *Tzitzeica/Bullough–Dodd* - $A_2^{(2)}$, bem como algumas soluções de vácuo nulo para álgebras maiores e um *ansatz* para generalização das soluções para modelos *twisted* $A_{2r}^{(2)}$. Os resultados inéditos aqui expostos geraram a publicação [15].

6.1 $A_2^{(2)}$

6.1.1 Resultados gerais

Recordamos primeiramente, que ao contrário do casos anteriores, a hierarquia *Tzitzeica/Bullough–Dodd* apresenta a seguinte estrutura quanto as soluções de vácuo:

- $t_{6n+1}, t_{6n+5} \rightarrow$ **ambos os vácuos;**
- $t_{-6n}, t_{-6n+3} \rightarrow$ **somente vácuo não-nulo;**
- $t_{-6n+1}, t_{-6n+5} \rightarrow$ **somente vácuo nulo;**
- $t_{-6n+2}, t_{-6n+4} \rightarrow$ **não admitem vácuo nulo nem não-nulo.**

Desse modo, como o método *Dressing* precisa necessariamente de uma solução de vácuo como ponto de partida, focaremos na obtenção de soluções para os três primeiros casos.

Para isso, projetamos o Lax espacial num vácuo constante qualquer:

$$\begin{aligned} A_x^{\text{Tz-Bd}}(v)|_{v=v_0} &= E^{(1)} + v_x \kappa + v \left(h_1^{(0)} + h_2^{(0)} \right) |_{v=v_0} \\ A_x^{\text{vac}} &= E^{(1)} + v_0 \left(h_1^{(0)} + h_2^{(0)} \right) \end{aligned} \quad (6.1)$$

e analogamente projetamos os operadores temporais:

- Sub-hierarquia positiva:

$$\begin{aligned}
A_{t_5}^{\text{vac}} &= E_{-\alpha_1}^{(1)} + E_{-\alpha_2}^{(1)} + E_{(\alpha_1+\alpha_2)}^{(\frac{1}{2})} + v_0(E_{\alpha_1}^{(\frac{1}{2})} - E_{\alpha_2}^{(\frac{1}{2})}) + \frac{v_0^2}{3}(h_1^{\frac{1}{2}} - h_2^{\frac{1}{2}}) \\
&\quad - \frac{v_0^4}{9}[E_{\alpha_1}^{(0)} + E_{\alpha_2}^{(0)} + E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}^{(\frac{1}{2})} + v_0(h_1^0 + h_2^0)]
\end{aligned} \tag{6.2}$$

$$\begin{aligned}
A_{t_7}^{\text{vac}} &= E_{\alpha_1}^{(1)} + E_{\alpha_2}^{(1)} + E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}^{(\frac{3}{2})} + v_0(h_1^{(1)} + h_2^{(1)}) \\
&\quad + -\frac{v_0^2}{9}[3(E_{-\alpha_1}^{(1)} + E_{-\alpha_2}^{(1)} + E_{(\alpha_1+\alpha_2)}^{(\frac{1}{2})}) + 3v_0(E_{-\alpha_1}^{(\frac{1}{2})} - E_{-\alpha_2}^{(\frac{1}{2})}) + v_0^2(h_1^{\frac{1}{2}} - h_2^{\frac{1}{2}})] \\
&\quad + \frac{4v_0^6}{81}[E_{\alpha_1}^{(0)} + E_{\alpha_2}^{(0)} + E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}^{(\frac{1}{2})} + v_0(h_1^0 + h_2^0)] \\
&\quad \vdots
\end{aligned} \tag{6.3}$$

- Sub-hierarquia negativa com vácuo *nulo*:

$$\begin{aligned}
A_{t_{-1}}^{\text{vac}} &= E_{-\alpha_1}^{(0)} + E_{-\alpha_2}^{(0)} + E_{(\alpha_1+\alpha_2)}^{(-\frac{1}{2})} = E^{(-1)}, \\
A_{t_{-5}}^{\text{vac}} &= E_{\alpha_1}^{(-1)} + E_{\alpha_2}^{(-1)} + E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}^{(-\frac{1}{2})} = E^{(-5)}, \\
&\quad \vdots \\
A_{t_{-6m\pm 1}}^{\text{vac}} &= E_{\pm\alpha_1}^{(-n)} + E_{\pm\alpha_2}^{(-n)} + E_{\mp(\alpha_1+\alpha_2)}^{(-n\pm\frac{1}{2})} = E^{(-6m\pm 1)},
\end{aligned} \tag{6.4}$$

- Sub-hierarquia negativa com vácuo *não-nulo*:

$$\begin{aligned}
A_{t_{-3}}^{\text{vac}} &= h_1^{(-\frac{1}{2})} - h_2^{(-\frac{1}{2})} + \frac{3}{v_0} \left(E_{\alpha_1}^{(-\frac{1}{2})} - E_{\alpha_2}^{(-\frac{1}{2})} \right) + \frac{3}{v_0^2} \left(E_{-\alpha_1}^{(0)} + E_{-\alpha_2}^{(0)} + E_{\alpha_1+\alpha_2}^{-\frac{1}{2}} \right), \\
A_{t_{-6}}^{\text{vac}} &= \frac{1}{v_0} \left(E_{\alpha_1}^{(-1)} + E_{\alpha_2}^{(-1)} + E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}^{-\frac{1}{2}} + v_0(h_1^{(-1)} + h_2^{(-1)}) \right), \\
&\quad \vdots \\
A_{t_{-6m+3}}^{\text{vac}} &= h_1^{(-n+\frac{1}{2})} - h_2^{(-n+\frac{1}{2})} + \frac{3}{v_0} \left(E_{\alpha_1}^{(-n+\frac{1}{2})} - E_{\alpha_2}^{(-n+\frac{1}{2})} \right), \\
&\quad + \frac{3}{v_0^2} \left(E_{-\alpha_1}^{(-n+1)} + E_{-\alpha_2}^{(-n+1)} + E_{\alpha_1+\alpha_2}^{-n+\frac{1}{2}} \right), \\
A_{t_{-6m}}^{\text{vac}} &= \frac{1}{v_0} \left(E_{\alpha_1}^{(-n)} + E_{\alpha_2}^{(-n)} + E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}^{-n+\frac{1}{2}} + v_0(h_1^{(-n)} + h_2^{(-n)}) \right).
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Definindo os seguintes operadores

$$\Omega_{(6m+1)} \equiv E_{\alpha_1}^{(m)} + E_{\alpha_2}^{(m)} + E_{-\alpha_1-\alpha_2}^{(m+\frac{1}{2})} + v_0(h_1^{(m)} + h_2^{(m)}), \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{(6m+5)} &\equiv E_{-\alpha_1}^{(m+1)} + E_{-\alpha_2}^{(m+1)} + E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(m+\frac{1}{2})} + v_0(E_{\alpha_1}^{(m+\frac{1}{2})} - E_{\alpha_2}^{(m+\frac{1}{2})}) \\ &+ \frac{v_0^2}{3}(h_1^{(m+\frac{1}{2})} - h_2^{(m+\frac{1}{2})}), \end{aligned} \quad (6.7)$$

tal que

$$[\Omega_{(6m+1)}, \Gamma_{(6l+5)}] = \frac{6l+1}{2} \kappa \delta_{m+l+1,0}, \quad (6.8)$$

podemos condensar os resultados dos operadores de vácuo para as sub-hierarquias positivas

$$A_x^{\text{vac}} = \Omega_{(1)}, \quad (6.9)$$

$$A_{t_5}^{\text{vac}} = \Gamma_{(5)} - \frac{v_0^4}{3^2} \Omega_{(1)}, \quad (6.10)$$

$$A_{t_7}^{\text{vac}} = \Omega_{(7)} - \frac{v_0^2}{3} \Gamma_{(5)} + \frac{2^2 v_0^6}{3^4} \Omega_{(1)}, \quad (6.11)$$

$$A_{t_{11}}^{\text{vac}} = \Gamma_{(11)} - \frac{v_0^4}{3^2} \Omega_{(7)} + \frac{5v_0^6}{3^4} \Gamma_{(5)} - \frac{2^3 v_0^{10}}{3^6} \Omega_{(1)}, \quad (6.12)$$

$$A_{t_{13}}^{\text{vac}} = \Omega_{(13)} - \frac{v_0^2}{3} \Gamma_{(11)} + \frac{2^2 v_0^6}{3^4} \Omega_{(7)} - \frac{7v_0^8}{3^5} \Gamma_{(5)} + \frac{35v_0^{12}}{3^8} \Omega_{(1)}, \quad (6.13)$$

⋮

bem como para as sub-hierarquias negativas com vácuo $v_0 \neq 0$

$$A_{t_{-6m+3}}^{\text{vac}} = \frac{3}{v_0^2} \Gamma_{(-6m+5)}, \quad (6.14)$$

$$A_{t_{-6m}}^{\text{vac}} = \frac{1}{v_0} \Omega_{(-6m+1)}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (6.15)$$

e para aquelas com $v_0 = 0$,

$$A_{t_{-6m+1}}^{\text{vac}} = \Omega_{(-6m+1)}|_{v_0=0} = E^{(-6m+1)}, \quad (6.16)$$

$$A_{t_{-6m-1}}^{\text{vac}} = \Gamma_{(-6m+1)}|_{v_0=0} = E^{(-6m-1)}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (6.17)$$

Desse modo, diagonalizar os operadores de Lax projetados no vácuo se resume a diagonalizar os operadores $\Omega_{(6m+1)}$ e $\Gamma_{(6m+5)}$. Prosseguimos então para a deter-

minação do operador de vértice.

6.1.2 Operador de Vértice e auto-valores

Neste ponto, já é claro que precisamos resolver o seguinte sistema

$$[A_x^{\text{vac}}, F(z)] = [E^{(1)} + v_0 (h_1^{(0)} + h_2^{(0)}), F(z)] = \gamma F(z), \quad (6.18)$$

onde a mudança de notação $\gamma_1 = z$ e $\omega_x = \gamma$ ficará clara mais a frente. Propomos então o seguinte *ansatz*

$$\begin{aligned} F(z) = & \sum_j z^{-6j} \{ \epsilon (h_1^{(j)} + h_2^{(j)}) + a_1 \kappa \delta_{j,0} + a_2 (E_{\alpha_1}^{(j)} + E_{\alpha_2}^{(j)}) + a_3 E_{-(\alpha_1 + \alpha_2)}^{(j+\frac{1}{2})} \\ & + a_4 (E_{-\alpha_1}^{(j+\frac{1}{2})} - E_{-\alpha_2}^{(j+\frac{1}{2})}) + a_5 (h_1^{(j+\frac{1}{2})} - h_2^{(j+\frac{1}{2})}) + a_6 (E_{\alpha_1}^{(j+\frac{1}{2})} - E_{\alpha_2}^{(j+\frac{1}{2})}) \\ & + a_7 (E_{-\alpha_1}^{(j+1)} + E_{-\alpha_2}^{(j+1)}) + a_8 E_{(\alpha_1 + \alpha_2)}^{(j+\frac{1}{2})} \} \end{aligned} \quad (6.19)$$

onde ϵ é um parâmetro livre. Substituindo esse *ansatz* na equação de auto-valores, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \gamma a_2 &= a_2 v_0 - \epsilon, & \gamma a_3 &= 2\epsilon - 2a_3 v_0, & \gamma a_4 &= -a_4 v_0 - a_2 + a_3, \\ \gamma a_5 &= a_4, & \gamma a_6 &= a_6 v_0 - 3a_5, & \gamma a_7 &= a_6 - a_7 v_0, \\ \gamma a_8 &= 2a_8 v_0 - 2a_6, & \gamma z^6 a_8 &= 2a_1, & z^6 (a_7 - a_8) &= \epsilon \gamma \end{aligned} \quad (6.20)$$

que nos leva as seguintes soluções

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{-(\gamma + v_0)\epsilon}{3\gamma}, & a_2 &= \frac{\epsilon}{v_0 - \gamma}, & a_3 &= \frac{2\epsilon}{\gamma + 2v_0}, & a_4 &= \frac{3\gamma\epsilon}{(\gamma - v_0)(\gamma + v_0)(\gamma + 2v_0)}, \\ a_5 &= \frac{3\epsilon}{(\gamma - v_0)(\gamma + v_0)(\gamma + 2v_0)}, & a_6 &= \frac{-9\epsilon}{(\gamma - v_0)^2(\gamma + v_0)(\gamma + 2v_0)} \\ a_7 &= -\frac{9\epsilon}{(\gamma + 2v_0)(\gamma^2 - v_0^2)^2}, & a_8 &= \frac{18\epsilon}{(\gamma - 2v_0)(\gamma - v_0)^2(\gamma + v_0)(\gamma + 2v_0)} \end{aligned} \quad (6.21)$$

desde que a seguinte equivalência seja respeitada ¹

$$z^6 = 3^{-3} [(v_0 - \gamma)((v_0 + \gamma))]^2 (2v_0 - \gamma)(2v_0 + \gamma) \quad (6.22)$$

¹note que no limite em que $v_0 \rightarrow 0$, recuperamos o resultado esperado para álgebras A_2 : $\gamma^6 = -3^3 z^6$

e daí, obtemos então o seguinte vértice

$$\begin{aligned}
 F(\gamma) = \sum_j 3^{3j} [(v_0 - \gamma)(v_0 + \gamma)]^{-2j} [(2v_0 - \gamma)(2v_0 + \gamma)]^{-j} \{ & \epsilon(h_1^{(j)} + h_2^{(j)}) + a_1 \kappa \delta_{j,0} \\
 & a_2(E_{\alpha_1}^{(j)} + E_{\alpha_2}^{(j)}) + a_3 E_{-(\alpha_1 + \alpha_2)}^{(j+1/2)} + a_4(E_{-\alpha_1}^{(j+1/2)} - E_{-\alpha_2}^{(j+1/2)}) + a_5(h_1^{(j+1/2)} - h_2^{(j+1/2)}) \\
 & + a_6(E_{\alpha_1}^{(j+1/2)} - E_{\alpha_2}^{(j+1/2)}) + a_7(E_{-\alpha_1}^{(j+1)} + E_{-\alpha_2}^{(j+1)}) + a_8 E_{(\alpha_1 + \alpha_2)}^{(j+1/2)} \} \quad (6.23)
 \end{aligned}$$

com os coeficientes determinados em (6.21). Utilizando esse vértice, obtemos então por cálculo direto os seguintes auto-valores para os operadores $\Omega_{(6m+1)}$ e $\Gamma_{(6m+5)}$

$$[\Omega_{6m+1}, F(\gamma)] = (-3)^{-3m} \gamma (\gamma^2 - 4v_0^2)^m (v_0^2 - \gamma^2)^{2m} F(\gamma), \quad (6.24)$$

$$[\Gamma_{6m+5}, F(\gamma)] = (-1)^{-m} (3)^{-3m-2} \gamma (\gamma^2 - 4v_0^2)^{m+1} (v_0^2 - \gamma^2)^{2m+1} F(\gamma), \quad (6.25)$$

da onde é imediato que

$$[A_x^{\text{vac}}, F(\gamma)] = \omega_1 F(\gamma) = \gamma F(\gamma), \quad (6.26)$$

$$[A_{t_N}^{\text{vac}}, F(\gamma)] = \omega_N F(\gamma), \quad (6.27)$$

onde, por exemplo, utilizando (6.10) e (6.11) obtemos para os primeiros fluxos positivos

$$\omega_5 = \frac{1}{9} \gamma (\gamma^2 - 4v_0^2) (v_0^2 - \gamma^2) - \frac{v_0^4}{9} \gamma = \frac{1}{9} (5v_0^2 \gamma^3 - 5v_0^4 \gamma - \gamma^5), \quad (6.28)$$

$$\omega_7 = \frac{1}{81} (-3\gamma^7 + 21\gamma^5 v_0^2 - 42\gamma^3 v_0^4 + 28\gamma v_0^6), \quad (6.29)$$

que estarão ligados as seguintes funções $\rho(x, t)$

$$\rho(t_5, x) = e^{-\omega_x x - \omega_5 t_5} = e^{-\gamma x - \frac{1}{9}(5v_0^2 \gamma^3 - 5v_0^4 \gamma - \gamma^5)t_5}, \quad (6.30)$$

$$\rho(t_7, x) = e^{-\omega_x x - \omega_7 t_7} = e^{-\gamma x - \frac{1}{81}(-3\gamma^7 + 21\gamma^5 v_0^2 - 42\gamma^3 v_0^4 + 28\gamma v_0^6)t_7}, \quad (6.31)$$

tal que para valores maiores de N basta realizar o mesmo procedimento com os diferentes Lax temporais projetados no vácuo. Já para o sub hierarquias negativas

com vácuo **não-nulo**, temos

$$\omega_{-3} = \frac{3^2\gamma}{v_0^2(\gamma - v_0)(\gamma + v_0)}, \quad (6.32)$$

$$\omega_{-6} = -\frac{3^3\gamma}{v_0(\gamma - 2v_0)(\gamma + 2v_0)[(\gamma - v_0)(\gamma + v_0)]^2}, \quad (6.33)$$

tal que as funções $\rho(x, t)$ para os primeiros fluxos negativos serão

$$\rho(t_{-3}, x) = e^{-\gamma x - \frac{3^2\gamma}{v_0^2(\gamma - v_0)(\gamma + v_0)}t_{-3}}, \quad (6.34)$$

$$\rho(t_{-6}, x) = e^{-\gamma x + \frac{3^3\gamma}{v_0(\gamma - 2v_0)(\gamma + 2v_0)[(\gamma - v_0)(\gamma + v_0)]^2}t_{-6}}, \quad (6.35)$$

Caso consideremos o caso em que $v_0 = 0$, o operador de vértice (6.23) torna-se

$$\begin{aligned} F(\gamma) = & \sum_j 3^{3j}\gamma^{-6j}e\{(h_1^{(j)} + h_2^{(j)}) - \frac{1}{3}\kappa\delta_{j,0} - \gamma^{-1}(E_{\alpha_1}^{(j)} + E_{\alpha_2}^{(j)}) + 2\gamma^{-1}E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}^{(j+1/2)} \\ & + 3\gamma^{-2}(E_{-\alpha_1}^{(j+1/2)} - E_{-\alpha_2}^{(j+1/2)}) + 3\gamma^{-3}(h_1^{(j+1/2)} - h_2^{(j+1/2)}) \\ & - 9\gamma^{-4}(E_{\alpha_1}^{(j+1/2)} - E_{\alpha_2}^{(j+1/2)}) - 9\gamma^{-5}(E_{-\alpha_1}^{(j+1)} + E_{-\alpha_2}^{(j+1)}) \\ & + 18\gamma^{-5}E_{(\alpha_1+\alpha_2)}^{(j+1/2)}\}. \end{aligned} \quad (6.36)$$

É interessante notar que nesse caso, identificamos o vértice obtido previamente em [11], considerando $\gamma = \sqrt{3}z$. Assim, os auto-valores serão

$$\omega_{-6m+1} = (-1)^{-m}(3)^{3m}\gamma^{-6m+1}, \quad (6.37)$$

$$\omega_{-6m+5} = (-1)^{-m+1}(3)^{3m-2}\gamma^{-6m+5}, \quad (6.38)$$

tal que

$$\rho(t_{-6m+1}, x) = e^{-\gamma x - (-1)^{-m}(3)^{3m}\gamma^{-6m+1}t_{-6m+1}}, \quad (6.39)$$

$$\rho(t_{-6m+5}, x) = e^{-\gamma x + (-1)^{-m+1}(3)^{3m-2}\gamma^{-6m+5}t_{-6m+5}}. \quad (6.40)$$

Em resumo as equações (6.30)-(6.31), (6.34)-(6.35) e (6.39)-(6.40) fixam a dependência temporal de cada modelo. Agora, basta descobrirmos a forma funcional das soluções e teremos o resultado para os campos de toda a hierarquia.

6.1.3 Forma funcional das soluções

Seja então a função $\tau_{ij}(\mathbf{v})$

$$\tau_{ij}(\mathbf{v}) = \langle \lambda_i | e^{\theta_0} | \lambda_j \rangle \quad (6.41)$$

teremos para o caso da hierarquia $A_2^{(2)}$

$$e^{-\theta_0} = e^{-\mathcal{B}_0^{vac}} e^{\mathcal{B}_0 + \nu\kappa} \quad (6.42)$$

com

$$\mathcal{B}_0 = e^{\phi(h_1^{(0)} + h_2^{(0)})} \quad \mathcal{B}_0^{vac} = v_0 x (h_1^{(0)} + h_2^{(0)}) \quad (6.43)$$

de modo que

$$\tau_{ij}(\mathbf{v}) = \langle \lambda_i | e^{v_0 x (h_1^{(0)} + h_2^{(0)}) - \phi(h_1^{(0)} + h_2^{(0)}) - \nu\kappa} | \lambda_j \rangle. \quad (6.44)$$

Introduzimos então o seguinte sistema de pesos fundamentais [14]:

$$\begin{aligned} (h_1^{(0)} + h_2^{(0)}) |0\rangle &= 0, & \kappa |0\rangle &= 2|0\rangle \\ (h_1^{(0)} + h_2^{(0)}) |1\rangle &= 1|1\rangle, & \kappa |1\rangle &= 2|1\rangle \end{aligned} \quad (6.45)$$

de modo que estabelecemos as relações

$$\tau_{00}(\mathbf{v}) = \langle \lambda_0 | e^{v_0 x h_1^{(0)} - \phi h_1^{(0)} - \nu\kappa} | \lambda_0 \rangle = e^{-2\nu} \quad (6.46)$$

e

$$\tau_{11}(\mathbf{v}) = \langle \lambda_1 | e^{v_0 x (h_1^{(0)} + h_2^{(0)}) - \phi (h_1^{(0)} + h_2^{(0)}) - \nu\kappa} | \lambda_1 \rangle = e^{v_0 x - \phi - 2\nu} \quad (6.47)$$

da onde é imediato que

$$\phi(x, t) = v_0 x + \ln \left(\frac{\tau_{00}}{\tau_{11}} \right) \quad \text{e} \quad v(x, t) = v_0 + \partial_x \ln \left(\frac{\tau_{00}}{\tau_{11}} \right). \quad (6.48)$$

Note que com base no estudo prévio feito através da redução realizada no modelo A_2 (subseção 5.2.2), sabemos que é esperado que o vértice (6.23) deve truncar

somente em *terceira ordem*, i.e, $\langle \lambda_i | F^3(\gamma) | \lambda_j \rangle = 0$. Assim, temos

$$\tau_{ii} = 1 + \langle i | F(\gamma) | i \rangle \rho + \langle i | F^2(\gamma) | i \rangle \rho^2, \quad (6.49)$$

onde as funções de $\rho(x, t)$ estão completamente determinadas para um dado N conforme exposto na seção anterior. Assim, utilizando o vértice dado em (6.23) e o sistema de pesos fundamentais dado em (6.45), temos os seguintes elementos de matriz:

$$\begin{aligned} c_0^{(1)} = \langle 0 | F(\gamma) | 0 \rangle &= -\frac{2(\gamma + v_0)}{3\gamma} \epsilon, & c_0^{(2)} = \langle 0 | F^2(\gamma) | 0 \rangle &= \frac{(\gamma^2 - 4v_0^2)(\gamma + v_0)}{36\gamma^2(\gamma - v_0)} \epsilon^2 \\ c_1^{(1)} = \langle 1 | F(\gamma) | 1 \rangle &= \frac{\gamma - 2v_0}{3\gamma} \epsilon, & c_1^{(2)} = \langle 1 | F^2(\gamma) | 1 \rangle &= \frac{(\gamma - 2v_0)^2}{36\gamma^2} \epsilon^2 \end{aligned} \quad (6.50)$$

Note que esses elementos de matriz (6.50) são os mesmos para todos os fluxos temporais da hierarquia. No caso das soluções para fluxos **positivos**, v_0 pode assumir qualquer valor constante. Já para os fluxos negativos, os elementos de matriz serão fixado escolhendo $v_0 = 0$ ou $v_0 \neq 0$ a depender do fluxo temporal considerados. Ao fim, nossa solução será tal que

$$v(x, t_k) = \partial_x \phi(x, t_k) = v_0 + \partial_x \ln \left(\frac{1 + c_0^{(1)} \rho(x, t_k) + c_0^{(2)} \rho^2(x, t_k)}{1 + c_1^{(1)} \rho(x, t_k) + c_1^{(2)} \rho^2(x, t_k)} \right). \quad (6.51)$$

Um forma de checar a consistência dessa solução é repetir o mesmo procedimento de *Hirota* realizado para o caso A_2 : dado o formato funcional (6.48), propomos uma expansão para τ_{ii} e calculamos os coeficientes tal que ele satisfaça a equação de movimento. Note porém, que no caso de interesse, precisamos de uma solução que abarque tanto os casos em que $v_0 = 0$ quanto aqueles em que $v_0 \neq 0$, assim, invés de usar o modelo mais simples disponível que seria o de *Toda*, tomamos o segundo fluxo mais simples - t_5 :

$$9v_{t_5} = -v_{5x} - 5v_{3x}v_x + 5v^2v_{3x} - 5v_{2x}^2 + 20vv_xv_{2x} - 5v^4v_x + 5v_x^3 \quad (6.52)$$

substituímos então nessa equação o *ansatz* (6.48) acompanhado das seguintes propostas

$$\tau_{00}(x, t) = 1 + \beta_1 \alpha \rho_1(x, t) + \delta_1 \alpha^2 \rho_1(x, t)^2, \quad (6.53)$$

$$\tau_{11}(x, t) = 1 + \beta_2 \alpha \rho_1(x, t) + \delta_2 \alpha^2 \rho_1(x, t)^2, \quad (6.54)$$

com

$$\rho_1(t, x) = e^{f_1 x + g_1 t}, \quad (6.55)$$

Substituindo na equação de movimento para t_5 , coletamos o sistema em potências de ρ . A equação de menor grau para ρ nos dá a relação de dispersão

$$-5f_1^3 v_0^2 + 5f_1 v_0^4 + f_1^5 + 9g_1 = 0. \quad (6.56)$$

se tomamos $f_1 = -\gamma$, (6.56) coincide com a relação de dispersão já previamente conhecida, i.e. $g_1 = -\frac{1}{9}(5v_0^2 \gamma^3 - 5v_0^4 \gamma - \gamma^5)$. Utilizando agora essa relação de dispersão no coeficiente de grau ρ^2 , temos

$$6\gamma(\delta_2 - \delta_1)(\gamma - v_0) = (\beta_2 - \beta_1) \left(\beta_1 (2\gamma^2 - 5\gamma v_0 + 2v_0^2) + \beta_2 (4\gamma^2 - \gamma v_0 - 2v_0^2) \right),$$

tal que, resolvemos a expressão para δ_1 e substituímos na próxima potência ρ^3 , obtendo

$$-36\delta_2 \gamma^2 (\gamma - v_0) = (\beta_1 - \beta_2) (\gamma - 2v_0) \left(\beta_2 (9\gamma^2 + v_0 (\gamma - 2v_0)) + \beta_1 (3\gamma - v_0) (\gamma - 2v_0) \right),$$

de modo que, obtemos o coeficiente γ_2 . Substituímos ambas informações na equação para ρ^4 , obtemos

$$20\gamma^3 (\beta_1 - \beta_2)^3 (\gamma - 2v_0)^2 (17\gamma^2 - 5v_0^2) (\beta_1 (\gamma - 2v_0) + 2\beta_2 (\gamma + v_0)) = 0,$$

e daí, temos os seguintes coeficientes não triviais como conjunto solução, ($\beta_1 \neq \beta_2$)

$$\beta_2 = -\frac{\beta_1 (\gamma - 2v_0)}{2(\gamma + v_0)}, \quad \delta_1 = \frac{\beta_1^2 (\gamma^2 - 4v_0^2)}{16(\gamma^2 - v_0^2)}, \quad \delta_2 = \frac{\beta_1^2 (\gamma - 2v_0)^2}{16(\gamma + v_0)^2} \quad (6.57)$$

As demais potências de ρ se anulam quando a escolha (6.57) é feita. Veja que essa solução coincide com a encontrada previamente (6.51) desde que a escolha de constantes livres seja adequada. Assim, tomando $f_1 = -\gamma$, $\alpha = \frac{\epsilon}{3\gamma}$ e $\beta_1 = -2(\gamma + v_0)$ temos

$$g_1 = \frac{1}{9} \left(-5v_0^2 \gamma^3 + 5v_0^4 \gamma + \gamma^5 \right), \quad \beta_1 = c_0^{(1)}, \quad \beta_2 = c_1^{(1)}, \quad (6.58)$$

e

$$\delta_1 = c_0^{(2)}, \quad \delta_2 = c_1^{(2)}, \quad (6.59)$$

como gostaríamos de verificar. Assim, determinamos a solução mais simples para o sistema *twisted* $A_2^{(2)}$. Como esperado, foi verificado que essa solução depende até termos em $\rho^2(x, t)$, recuperando resultados como expostos em [11, 25, 26] para modelo de *Toda* e generalizando para toda hierarquia advinda dos modelos provenientes da álgebra $A_2^{(2)}$. Como veremos a seguir, esse formato de solução é extensível para os demais modelos advindo das álgebras $A_{2r}^{(2)}$.

6.2 $A_4^{(2)}$ e generalização para modelos de *Toda* $A_{2r}^{(2)}$

De modo a estender o tratamento apresentado para as soluções da hierarquia *Tz-Bd* - $A_2^{(2)}$ para outras hierarquias *twisted*, apresentamos aqui mais um exemplo: as soluções para hierarquia advinda da álgebra $A_4^{(2)}$. Note que introduzir um número maior de subespaços graduados como no caso anterior aumentou o grau de complexidade do operador de vértice e das soluções, mesmo a considerando somente modelos a um campo.

Obviamente, introduzir um vácuo não-nulo v_0 é uma camada adicional de complexidade, pois introduzimos um parâmetro de deformação. Assim, em modelos com um número maior de campos, trabalhar com modelos com vácuo não nulo significa introduzir n parâmetros de deformação $v_{i,0}$. Por esse motivo, optamos nesse trabalho por trabalhar somente com modelos a vácuo nulo quando tratamos de modelos a mais de um campo, como é o caso do $A_4^{(2)}$. Utilizaremos um método similar ao utilizado com o caso anterior:

- Determinação dos auto-valores via operador de vértice;
- Determinação dos coeficientes das funções $\tau_{i,j}$ utilizando o método de *Hirota*, adotando o modelo de *Toda* com expansão até ρ^2 para o cálculo.

Os detalhes, devido a extensão do modelo, estão descritos no apêndice B.

6.2.1 Soluções 1-soliton $A_4^{(2)}$

Os fluxos temporais que apresentam soluções de vácuo nulo para o modelo $A_4^{(2)}$ são tais que

$$N = 10m + 1, \quad N = 10m + 3, \quad N = 10m + 7, \quad \text{ou} \quad N = 10m + 9, \quad (6.60)$$

com $m \in \mathbb{Z}$. É fácil (via seção 4.2), que o operador de Lax espacial projetado no vácuo $(v, w) = (0, 0)$ é simplesmente

$$A_x^{\text{vac}} = E^{(1)} = E_{\alpha_1}^{(0)} + E_{\alpha_2}^{(0)} + E_{\alpha_3}^{(0)} + E_{\alpha_4}^{(0)} + E_{-(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)}^{(\frac{1}{2})} \quad (6.61)$$

e as projeções temporais são dadas por

$$A_{t_N}^{\text{vac}} = E^{(N)} \quad (6.62)$$

conforme descrito em (4.62). Assim, utilizando a equação de auto-valor

$$[E^{(N)}, F(\gamma)] = \omega_x F(\gamma) \quad (6.63)$$

achamos o vértice conforme descrito no apêndice B.2. Esse vértice é tal que

$$\begin{aligned} [E^{10m-1}, F(\gamma)] &= \eta_k i^{-1} \gamma^{10m-1} F(\gamma) = (-1)^m \eta_k (i\gamma)^{10m-1} F(\gamma), \\ [E^{10m+1}, F(\gamma)] &= \eta_k i^1 \gamma^{10m+1} F(\gamma) = (-1)^m \eta_k (i\gamma)^{10m+1} F(\gamma) \end{aligned} \quad (6.64)$$

e

$$\begin{aligned} [E^{10m-3}, F(\gamma)] &= \eta_k i^{-3} \gamma^{10m-3} F(\gamma) = (-1)^m \eta_k (i\gamma)^{10m-3} F(\gamma), \\ [E^{10m+3}, F(\gamma)] &= \eta_k i^3 \gamma^{10m+3} F(\gamma) = (-1)^m \eta_k (i\gamma)^{10m+3} F(\gamma). \end{aligned} \quad (6.65)$$

tal que

$$\eta_k = 2 \sin \left(\frac{2\pi i k}{5} \right), \quad \text{com} \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4. \quad (6.66)$$

Em resumo, as funções $\rho(x, t)$ serão tais que

$$\rho(t_N, x) = e^{-\omega_x x - \omega_N t_N} \quad (6.67)$$

com

$$\begin{aligned}
 \omega_x &= \eta_k (i\gamma), \\
 \omega_{10m+1} &= \eta_k (-1)^m (i\gamma)^{10m+1}, \\
 \omega_{10m-1} &= \eta_k (-1)^m (i\gamma)^{10m-1}, \\
 \omega_{10m+3} &= \eta_k (-1)^m (i\gamma)^{10m+3}, \\
 \omega_{10m-3} &= \eta_k (-1)^m (i\gamma)^{10m-3}.
 \end{aligned} \tag{6.68}$$

Desse modo, de posse do elemento de grau zero

$$\mathcal{B}_0 = e^{\phi_1(h_1^{(0)}+h_4^{(0)})+\phi_2(h_2^{(0)}+h_3^{(0)})} \tag{6.69}$$

de modo que

$$\tau_{ij}(\mathbf{v}) = \langle \lambda_i | e^{-\phi_1(h_1^{(0)}+h_4^{(0)})-\phi_2(h_2^{(0)}+h_3^{(0)})-2v\kappa} | \lambda_j \rangle, \tag{6.70}$$

utilizamos os pesos fundamentais conforme apêndice B.2 e obtemos

$$\phi_1(x, t_N) = \ln \left(\frac{\tau_{00}}{\tau_{11}} \right) \quad \rightarrow \quad v(x, t_N) = \partial_x \ln \left(\frac{\tau_{00}}{\tau_{11}} \right) \tag{6.71}$$

e

$$\phi_2(x, t_N) = \ln \left(\frac{\tau_{00}}{\tau_{22}} \right) \quad \rightarrow \quad v(x, t_N) = \partial_x \ln \left(\frac{\tau_{00}}{\tau_{22}} \right). \tag{6.72}$$

Realizamos então a expansão

$$\tau_{00}(x, t) = 1 + \beta_0 \alpha \rho_1(x, t) + \delta_0 \alpha^2 \rho_1(x, t)^2, \tag{6.73}$$

$$\tau_{11}(x, t) = 1 + \beta_1 \alpha \rho_1(x, t) + \delta_1 \alpha^2 \rho_1(x, t)^2, \tag{6.74}$$

$$\tau_{22}(x, t) = 1 + \beta_2 \alpha \rho_1(x, t) + \delta_2 \alpha^2 \rho_1(x, t)^2 \tag{6.75}$$

e substituindo no par de equações de Toda

$$\partial_{xt} \phi_1 = e^{2\phi_1 - \phi_2} - e^{-2\phi_1}, \tag{6.76}$$

$$\partial_{xt} \phi_2 = e^{-\phi_1 + \phi_2} - e^{-2\phi_1}, \tag{6.77}$$

obtemos

$$\begin{aligned}\beta_0 &= 2 \sec\left(\frac{2\pi k}{5}\right), \quad \beta_1 = 2 \cos\left(\frac{4\pi k}{5}\right) \sec\left(\frac{2\pi k}{5}\right), \quad \beta_2 = 2, \\ \beta_0 &= -2(\beta_1 + \beta_2), \quad \delta_0 = \delta_1 = \delta_2.\end{aligned}\tag{6.78}$$

com $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ e $\rho(t_N, x) = e^{-\omega_x x - \omega_N t_N}$ com os auto-valores definidos em (6.68).

Como pode-se ver, conforme aumentamos o *rank* da álgebra, introduzimos mais possibilidades no coeficiente η_k que acompanham os auto-valores. Abaixo, propomos uma *ansatz* geral que leva essas possibilidades em conta e pode ser útil para aplicar o método de *Hirota* de forma mais rápida a álgebras maiores.

6.2.2 Ansatz geral para soluções do tipo $A_{2r}^{(2)}$ para modelos do tipo *Toda*

Somente como informação adicional, realizamos o mesmo procedimento descrito acima para equações do tipo *Toda* advindas de álgebras maiores. Devido a complexidade do operador de vértice, utilizamos o método de *Hirota* para determinar inclusive o auto-valor do modelo. Por exemplo, no caso $A_6^{(2)}$ cujo o modelo de *Toda* é dado pelo seguinte conjunto de equações de movimento

$$\begin{aligned}\partial_{xt}\phi_1 &= e^{2\phi_1 - \phi_2} - e^{-2\phi_1}, \\ \partial_{xt}\phi_2 &= e^{-\phi_1 + 2\phi_2 - \phi_3} - e^{-2\phi_1}, \\ \partial_{xt}\phi_3 &= e^{-\phi_2 + \phi_3} - e^{-2\phi_1},\end{aligned}\tag{6.79}$$

obtemos a seguinte solução

$$\begin{aligned}\phi_1(x, t) &= \ln\left(\frac{\tau_{00}}{\tau_{11}}\right), \\ \phi_2(x, t) &= \ln\left(\frac{\tau_{00}}{\tau_{22}}\right), \\ \phi_3(x, t) &= \ln\left(\frac{\tau_{00}}{\tau_{33}}\right),\end{aligned}\tag{6.80}$$

com

$$\begin{aligned}
 \tau_{00} &= 1 + \beta_0 a \rho(x, t) + a^2 \rho^2(x, t), \\
 \tau_{11} &= 1 + \beta_1 a \rho(x, t) + a^2 \rho^2(x, t), \\
 \tau_{22} &= 1 + \beta_2 a \rho(x, t) + a^2 \rho^2(x, t), \\
 \tau_{33} &= 1 + \beta_3 a \rho(x, t) + a^2 \rho^2(x, t),
 \end{aligned} \tag{6.81}$$

tal que

$$\begin{aligned}
 \beta_0 &= 2 \sec\left(\frac{2\pi k}{7}\right), \quad \beta_1 = 2 \cos\left(\frac{4\pi k}{7}\right) \sec\left(\frac{2\pi k}{7}\right), \\
 \beta_2 &= (-1)^k \cos\left(\frac{\pi k}{7}\right) \sec\left(\frac{2\pi k}{7}\right), \quad \beta_3 = 2, \quad \beta_0 = -2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3),
 \end{aligned} \tag{6.82}$$

em conjunto com

$$\rho(t_{-1}, x) = e^{\eta_k(\bar{\gamma}x - \frac{t}{\bar{\gamma}})}, \quad \eta_k = 2 \sin\left(\frac{2\pi i k}{5}\right) \tag{6.83}$$

com $k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 6$.

A partir disso, propomos então o seguinte *ansatz* para modelos *twisted* $A_{2r}^{(2)}$

$$\begin{aligned}
 \phi_1(x, t) &= \ln\left(\frac{\tau_{00}}{\tau_{11}}\right), \\
 \phi_2(x, t) &= \ln\left(\frac{\tau_{00}}{\tau_{22}}\right), \\
 &\vdots \\
 \phi_r(x, t) &= \ln\left(\frac{\tau_{00}}{\tau_{rr}}\right),
 \end{aligned} \tag{6.84}$$

com

$$\begin{aligned}
 \tau_{00} &= 1 + \beta_0 a \rho(x, t) + a^2 \rho^2(x, t), \\
 \tau_{11} &= 1 + \beta_1 a \rho(x, t) + a^2 \rho^2(x, t), \\
 \tau_{22} &= 1 + \beta_2 a \rho(x, t) + a^2 \rho^2(x, t), \\
 &\vdots \\
 \tau_{rr} &= 1 + \beta_r a \rho(x, t) + a^2 \rho^2(x, t),
 \end{aligned} \tag{6.85}$$

tal que

$$\begin{aligned}\beta_0 &= 2 \sec\left(\frac{2\pi k}{2r+1}\right), & \beta_1 &= 2 \cos\left(\frac{4\pi l}{2r+1}\right) \sec\left(\frac{2\pi k}{2r+1}\right), \\ \beta_2 &= (-1)^k \cos\left(\frac{\pi k}{2r+1}\right) \sec\left(\frac{2\pi k}{2r+1}\right), \\ \beta_r &= 2, & \beta_0 &= -2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_r),\end{aligned}\tag{6.86}$$

com $l = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 2r$. No caso dos modelos de *Toda*, temos

$$\rho(t_{-1}, x) = e^{\eta_k(\bar{\gamma}x - \frac{t}{\bar{\gamma}})}, \quad \eta_k = 2 \sin\left(\frac{2\pi ik}{2r+1}\right).\tag{6.87}$$

Podemos descobrir o formato dos demais *betas* utilizando a relação $\beta_0 = -2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_r)$. Por exemplo, para o modelo de *Toda* para A_8^2 , teríamos:

$$\begin{aligned}\beta_0 &= 2 \sec\left(\frac{2\pi k}{9}\right), & \beta_1 &= 2 \cos\left(\frac{4\pi k}{9}\right) \sec\left(\frac{2\pi k}{9}\right), \\ \beta_2 &= (-1)^k \cos\left(\frac{\pi k}{9}\right) \sec\left(\frac{2\pi k}{9}\right), \\ \beta_4 &= 2, & \beta_0 &= -2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4)\end{aligned}\tag{6.88}$$

com $k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 8$ e

$$\rho(t_{-1}, x) = e^{\eta_k(\bar{\gamma}x - \frac{t}{\bar{\gamma}})}, \quad \eta_k = 2 \sin\left(\frac{2\pi ik}{9}\right).\tag{6.89}$$

Daí, teríamos a relação

$$\beta_3 = -\frac{\beta_0}{2} - \beta_1 - \beta_2 - \beta_4\tag{6.90}$$

e assim descobriríamos a forma funcional deste β_3 , que poderá ser usada no $A_{10}^{(2)}$ (com as devidas modificações no argumento das funções trigonométricas) e assim por diante. Note também que pela estrutura de hierarquia, uma vez descobertos os coeficientes β_i irão servir para **todos** os fluxos temporais, não somente para t_{-1} . Assim, basta determinar o auto-valor de cada tempo posteriormente, com as funções τ_{ij} já fixas.

Capítulo 7

Conclusão

Nesse trabalho, generalizamos para as álgebras $A_{2r}^{(2)}$ técnicas bem consolidadas para modelos do tipo $mKdV$ para álgebras A_r . Além de reproduzir resultados já bem conhecidos com condição de contorno nula para modelos do tipo *Toda*, obtemos equações não locais que necessariamente necessitam de uma condição de contorno não-nula, levando assim a introdução de um parâmetro de deformação na forma de vácuo na nossa formulação.

Utilizar o processo de *folding* para a construção das álgebras $A_{2r}^{(2)}$ elucidou algumas questões, como por exemplo, a existência de soluções que dependem de ρ^2 . Da redução $v_1 \rightarrow v_2$ fica claro por exemplo, que não é possível uma solução que trunque em primeira ordem. Outra estrutura importante que introduzimos é o conceito de vácuo como forma de classificar as sub-hierarquias negativas. Ao passo que a sub-hierarquia positiva sempre aceita ambos os vácuos, a sub-hierarquia negativa se quebra em outras sub-hierarquias a depender da solução de vácuo aceita. No caso das álgebras A_r cada fluxo negativo aceita pelo menos um vácuo, seja nulo ou não-nulo. Porém, quando realizamos o *folding*, observa-se que certos fluxos para $A_{2r}^{(2)}$ não aceitam nem um vácuo nulo nem um não-nulo. Isso é um problema em aberto que carece de um olhar mais atento, já que precisamos de um vácuo bem definido para construir as soluções soliton.

Outra observação interessante que surge ao introduzirmos o vácuo não-nulo é que os operadores de Lax projetados no vácuo não necessariamente ficarão num espaço graduado bem definido. Tomemos como exemplo os operadores Ω_{6m+1} e Γ_{6m+5}

$$\begin{aligned}\Omega_{(6m+1)} &\equiv E_{\alpha_1}^{(m)} + E_{\alpha_2}^{(m)} + E_{-\alpha_1-\alpha_2}^{(m+\frac{1}{2})} + v_0(h_1^{(m)} + h_2^{(m)}), \\ \Gamma_{(6m+5)} &\equiv E_{-\alpha_1}^{(m+1)} + E_{-\alpha_2}^{(m+1)} + E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(m+\frac{1}{2})} + v_0(E_{\alpha_1}^{(m+\frac{1}{2})} - E_{\alpha_2}^{(m+\frac{1}{2})}) \\ &\quad + \frac{v_0^2}{3}(h_1^{(m+\frac{1}{2})} - h_2^{(m+\frac{1}{2})})\end{aligned}$$

é claro que esses operadores só teriam grau $6m + 1$ e $6m + 5$ respectivamente se

introduzirmos um operador de gradação que enxergasse a potência de v_0 , i.e:

$$\hat{Q} = 6\hat{d}_1 + \hat{d}_2 + (\mu_1 + \mu_2) \cdot H \quad \text{com} \quad \hat{d}_1 = \lambda \frac{d}{d\lambda}, \quad \hat{d}_2 = v_0 \frac{d}{dv_0} \quad (7.1)$$

o que induz que poderíamos introduzir uma estrutura de 2 – *loops*, conforme explorado em [27, 28]. Como uma perspectiva futura, pode-se tentar implementar essa estrutura desde o início e verificar quais seriam as modificações geradas por ela.

Além dos aspectos aqui abordados, destacamos que a experiência durante o estudo desse tópico levou a desdobramento em outras direções. Devido ao interesse e expertise desenvolvido em equações negativas não-locais estendemos essa análise para modelos $KdV - A_r$, onde obtemos as equações para a sub-hierarquia negativa desse modelo bem como sua relação com as sub-hierarquias negativas de $mKdV$ via transformação de *Miura*. Resultados preliminares foram submetidos em [29] e um trabalho mais aprofundado encontra-se em desenvolvimento. Ademais, um estudo acerca da estrutura de vácuo para soluções quasi-periódicas elípticas em sistemas integráveis também encontra-se em desenvolvimento.

Apêndice A

Representação matricial das álgebras

$$A_r = sl(r + 1)$$

Abaixo exibimos a representação matricial utilizado no decorrer no trabalho. As demais raízes são obtidas via relação de comutação de cada álgebra.

A.1 $A_1 = sl(2)$

Seja, a álgebra de Lie $\mathcal{G} = A_1 = sl(2)$, escolhemos uma representação matricial tal que

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{-\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

A.2 $A_2 = sl(3)$

Seja a álgebra de Lie $\mathcal{G} = A_2 = sl(3)$, escolhemos uma representação matricial tal que

$$E_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

$$E_{-\alpha_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

A.3 $A_r = sl(r + 1)$

Seja a álgebra de Lie $\mathcal{G} = A_r = sl(r + 1)$, escolhemos uma representação matricial tal que

- Raízes simples positivas:

$$E_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{(r+1) \times (r+1)}, \quad E_{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{(r+1) \times (r+1)}, \quad (\text{A.5})$$

$$\vdots$$

$$E_{\alpha_r} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{(r+1) \times (r+1)}. \quad (\text{A.6})$$

- Raízes simples negativas:

$$E_{-\alpha_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{(r+1) \times (r+1)}, \quad E_{-\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{(r+1) \times (r+1)} \quad (\text{A.7})$$

$$\vdots$$

$$E_{-\alpha_r} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{(r+1) \times (r+1)}. \quad (\text{A.8})$$

- Cartans:

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{(r+1) \times (r+1)} \quad h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{(r+1) \times (r+1)}, \quad (\text{A.9})$$

$$\vdots$$

$$h_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}_{(r+1) \times (r+1)}. \quad (\text{A.10})$$

Apêndice B

Hierarquias Tz/BD $A_{2r}^{(2)}$

B.1 Lax Temporais para hierarquias Tz/BD $A_2^{(2)}$

- $N = 7$

$$A_{Tz}^{\text{Tz/BD}} = D^{(0)} + D^{(1)} + D^{(2)} + D^{(3)} + D^{(4)} + D^{(5)} + D^{(6)} + D^{(7)} \quad (\text{B.1})$$

com

$$\begin{aligned} D^{(7)} &= E_{\alpha_1}^{(1)} + E_{\alpha_2}^{(1)} + E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}^{(\frac{3}{2})}; \\ D^{(6)} &= v(h_1^{(1)} + h_2^{(1)}); \\ D^{(5)} &= -\frac{1}{3}(v^2 + v_x)(E_{-\alpha_1}^{(1)} + E_{-\alpha_2}^{(1)}) - \frac{1}{3}(v^2 - 2v_x)E_{(\alpha_1+\alpha_2)}^{(\frac{1}{2})}; \\ D^{(4)} &= -\frac{1}{3}(v^3 - v_x v - v_{2x}) (E_{\alpha_1}^{(\frac{1}{2})} - E_{\alpha_2}^{(\frac{1}{2})}); \\ D^{(3)} &= -\frac{1}{9}(v^4 + 2v_x v^2 - 2v_{2x} v - v_x^2 - v_{3x})(h_1^{\frac{1}{2}} - h_2^{\frac{1}{2}}); \\ D^{(2)} &= \frac{1}{9}(4v_{1x} v^3 + 2v_{2x} v^2 + 4v_{1x}^2 v - 2v v_{3x} - 4v_{1x} v_{2x} - v_{4x}) (E_{-\alpha_1}^{(\frac{1}{2})} - E_{-\alpha_2}^{(\frac{1}{2})}); \\ D^{(1)} &= \frac{1}{81}[4v^6 - 24v_x v^4 - 18v_{2x} v^3 + 6v^2(2v_x^2 + 3v_{3x}) + 3v(24v_x v_{2x} + v_{4x}) \\ &\quad + 4v_x^3 - 24v_x v_{3x} - 3(3v_{2x}^2 + v_{5x})]E^{(1)} \\ &\quad + \frac{1}{9}[4v_x v^4 - 2v_{2x} v^3 - 4(2v_x^2 + v_{3x})v^2 + (v_{4x} - 16v_x v_{2x})v \\ &\quad - 4v_x^3 + 4v_{2x}^2 + 6v_x v_{3x} + v_{5x}]E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}^{(\frac{1}{2})}; \\ D^{(0)} &= \frac{1}{81}[4v^7 - 42v_{2x} v^4 - 84v_{1x}^2 v^3 + 21(2v_x v_{2x} + v_{4x})v^2 \\ &\quad + 7(4v_x^3 + 12v_{3x} v_x + 9v_{2x}^2)v_1 + 42v_{2x}(2v_{1x}^2 - v_{3x}) \\ &\quad - 21v_{1x} v_{4x} - 3v_{6x}](h_1^0 + h_2^0); \end{aligned}$$

- $N = -5$

$$A_{t_{-5}}^{\text{Tz/BD}} = D^{(-1)} + D^{(-2)} + D^{(-3)} + D^{(-4)} + D^{(-5)} \quad (\text{B.2})$$

com

$$\begin{aligned} D^{(-1)} &= 3e^{d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{-2d^{-1}v} d^{-1} \mathcal{I} \right) \left(E_{-\alpha_1}^{(0)} + E_{-\alpha_2}^{(0)} \right) \\ &\quad - 6e^{-2d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{d^{-1}v} d^{-1} \mathcal{I} \right) E_{\alpha_1 + \alpha_2}^{(-\frac{1}{2})}; \\ D^{(-2)} &= -3e^{-d^{-1}v} d^{-1} \mathcal{I} \left(E_{\alpha_1}^{(-\frac{1}{2})} - E_{\alpha_2}^{(-\frac{1}{2})} \right); \\ D^{(-3)} &= -e^{-d^{-1}v} \mathcal{I} \left(h_1^{(-\frac{1}{2})} - h_2^{(-\frac{1}{2})} \right); \\ D^{(-4)} &= e^{d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{-2d^{-1}v} - e^{d^{-1}v} \right) \left(E_{-\alpha_1}^{(-\frac{1}{2})} - E_{-\alpha_2}^{(-\frac{1}{2})} \right); \\ D^{(-5)} &= e^{-d^{-1}v} \left(E_{\alpha_1}^{(-1)} + E_{\alpha_2}^{(-1)} \right) + e^{2d^{-1}v} E_{-\alpha_1 - \alpha_2}^{(-\frac{1}{2})}; \end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{I} = e^{d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{-2d^{-1}v} - e^{d^{-1}v} \right) \right).$$

- $N = -6$

$$A_{t_{-6}}^{\text{Tz/BD}} = D^{(-1)} + D^{(-2)} + D^{(-3)} + D^{(-4)} + D^{(-5)} + D^{(-6)} \quad (\text{B.3})$$

com

$$\begin{aligned} D^{(-1)} &= 3e^{d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{-2d^{-1}v} d^{-1} \left[e^{d^{-1}v} d^{-1} (\mathcal{I}) \right] \right) \left(E_{-\alpha_1}^{(0)} + E_{-\alpha_2}^{(0)} \right) \\ &\quad - 6e^{-2d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{d^{-1}v} d^{-1} \left[e^{d^{-1}v} d^{-1} (\mathcal{I}) \right] \right) E_{\alpha_1 + \alpha_2}^{(-\frac{1}{2})}; \\ D^{(-2)} &= -3e^{-d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{d^{-1}v} \mathcal{I} \right) \left(E_{\alpha_1}^{(-\frac{1}{2})} - E_{\alpha_2}^{(-\frac{1}{2})} \right); \\ D^{(-3)} &= -d^{-1} \mathcal{I} \left(h_1^{(-\frac{1}{2})} - h_2^{(-\frac{1}{2})} \right); \\ D^{(-4)} &= \mathcal{I} \left(E_{-\alpha_1}^{(-\frac{1}{2})} - E_{-\alpha_2}^{(-\frac{1}{2})} \right); \\ D^{(-5)} &= e^{-d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{d^{-1}v} \right) \left(E_{\alpha_1}^{(-1)} + E_{\alpha_2}^{(-1)} \right) - 2e^{2d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{-2d^{-1}v} \right) E_{-\alpha_1 - \alpha_2}^{(-\frac{1}{2})}; \\ D^{(-6)} &= h_1^{(-1)} + h_2^{(-1)}. \end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{I} = e^{d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{-2d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{d^{-1}v} \right) + 2e^{d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{-2d^{-1}v} \right) \right).$$

- $N = -7$

$$A_{t_{-7}}^{\text{Tz/BD}} = D^{(-1)} + D^{(-2)} + D^{(-3)} + D^{(-4)} + D^{(-5)} + D^{(-6)} + D^{(-7)} \quad (\text{B.4})$$

com

$$D^{(-1)} = 3e^{d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{-d^{-1}v} d^{-1} e^{-d^{-1}v} d^{-1} \left[e^{d^{-1}v} \left(d^{-1} (\mathcal{I}) \right) \right] \right) \left(E_{-\alpha_1}^{(0)} + E_{-\alpha_2}^{(0)} \right) \\ - 6e^{-2d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{2d^{-1}v} d^{-1} e^{-d^{-1}v} d^{-1} \left[e^{d^{-1}v} \left(d^{-1} (\mathcal{I}) \right) \right] \right) E_{\alpha_1 + \alpha_2}^{(-\frac{1}{2})};$$

$$D^{(-2)} = -3e^{-d^{-1}v} d^{-1} \left[e^{d^{-1}v} \left(d^{-1} (\mathcal{I}) \right) \right] \left(E_{\alpha_1}^{(-\frac{1}{2})} - E_{\alpha_2}^{(-\frac{1}{2})} \right);$$

$$D^{(-3)} = -d^{-1} (\mathcal{I}) \left(h_1^{(-\frac{1}{2})} - h_2^{(-\frac{1}{2})} \right);$$

$$D^{(-4)} = \mathcal{I} \left(E_{-\alpha_1}^{(-\frac{1}{2})} - E_{-\alpha_2}^{(-\frac{1}{2})} \right);$$

$$D^{(-5)} = e^{-d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{-2d^{-1}v} - e^{d^{-1}v} \right) \right) \left(E_{\alpha_1}^{(-1)} + E_{\alpha_2}^{(-1)} \right) \\ - 2e^{2d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{-2d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{-2d^{-1}v} - e^{d^{-1}v} \right) \right) E_{-\alpha_1 - \alpha_2}^{(-\frac{1}{2})};$$

$$D^{(-6)} = d^{-1} \left(e^{-2d^{-1}v} - e^{d^{-1}v} \right) \left(h_1^{(-1)} + h_2^{(-1)} \right);$$

$$D^{(-7)} = e^{d^{-1}v} \left(E_{-\alpha_1}^{(-1)} + E_{-\alpha_2}^{(-1)} \right) + e^{-2d^{-1}v} E_{\alpha_1 + \alpha_2}^{(-\frac{3}{2})};$$

onde

$$\mathcal{I} = e^{d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{-d^{-1}v} (a_5 - b_5) \right)$$

tal que

$$a_5 = e^{-d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{-2d^{-1}v} - e^{d^{-1}v} \right) \right)$$

e

$$b_5 = -2e^{2d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{-2d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{-2d^{-1}v} - e^{d^{-1}v} \right) \right)$$

associado a seguinte equação de movimento

$$\partial_{t_{-7}} v = 3e^{d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{-d^{-1}v} d^{-1} e^{-d^{-1}v} d^{-1} \left[e^{d^{-1}v} d^{-1} (\mathcal{I}) \right] \right) \\ + 6e^{-2d^{-1}v} d^{-1} \left(e^{2d^{-1}v} d^{-1} e^{-d^{-1}v} d^{-1} \left[e^{d^{-1}v} d^{-1} (\mathcal{I}) \right] \right).$$

B.2 Vértice e funções $\tau_{i,j}$ para hierarquia $A_4^{(2)}$

Seja o seguinte *ansatz* para o vértice no caso da hierarquia Tz/BD para álgebra $A_4^{(2)}$

$$\begin{aligned}
 F(z) = & \sum_j \{ [a_1(h_1^{(j)} + h_4^{(j)}) + a_2(h_2^{(j)} + h_3^{(j)}) + a_3\kappa\delta_{j,0}] z^{-10j} \\
 & + [a_4(E_{\alpha_1}^{(j)} + E_{\alpha_4}^{(j)}) + a_5(E_{\alpha_2}^{(j)} + E_{\alpha_3}^{(j)}) + a_6 E_{-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}^{(j+1/2)}] z^{-10j-1} \\
 & + [a_7(E_{(\alpha_1+\alpha_2)}^{(j)} - E_{(\alpha_3+\alpha_4)}^{(j)}) + a_8(E_{-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}^{(j+1/2)} - E_{-(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}^{(j+1/2)})] z^{-10j-2} \\
 & + [a_9(E_{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}^{(j)} + E_{(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}^{(j)}) + a_{10}(E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}^{(j+1/2)} + E_{-(\alpha_3+\alpha_4)}^{(j+1/2)}) + a_{11}E_{-(\alpha_2+\alpha_3)}^{(j+1/2)}] z^{-10j-3} \\
 & + [a_{12}(E_{-\alpha_1}^{(j+1/2)} - E_{-\alpha_4}^{(j+1/2)}) + a_{13}(E_{-\alpha_2}^{(j+1/2)} - E_{-\alpha_3}^{(j+1/2)})] z^{-10j-4} \\
 & + [a_{14}(h_1^{(j+1/2)} - h_4^{(j+1/2)}) + a_{15}(h_2^{(j+1/2)} - h_3^{(j+1/2)})] z^{-10j-5} \\
 & + [a_{16}(E_{\alpha_1}^{(j+1/2)} - E_{\alpha_4}^{(j+1/2)}) + a_{17}(E_{\alpha_2}^{(j+1/2)} - E_{\alpha_3}^{(j+1/2)})] z^{-10j-6} \\
 & + [a_{18}(E_{-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}^{(j)} + E_{-(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}^{(j)}) + a_{19}(E_{(\alpha_1+\alpha_2)}^{(j+1/2)} + E_{(\alpha_3+\alpha_4)}^{(j+1/2)}) + a_{20}E_{(\alpha_2+\alpha_3)}^{(j+1/2)}] z^{-10j-7} \\
 & + [a_{21}(E_{(\alpha_1+\alpha_2)}^{(j)} - E_{(\alpha_3+\alpha_4)}^{(j)}) + a_{22}(E_{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}^{(j+1/2)} - E_{(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}^{(j+1/2)})] z^{-10j-8} \\
 & + [a_{23}(E_{-\alpha_1}^{(j+1)} + E_{-\alpha_4}^{(j+1)}) + a_{24}(E_{-\alpha_2}^{(j+1)} + E_{-\alpha_3}^{(j+1)}) + a_{25}E_{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}^{(j+1/2)}] z^{-10j-9} \}.
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

Obtemos os seguintes coeficientes para o vértice

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 2\eta_k^4\alpha, a_2 = 10\alpha, a_3 = -2\alpha\eta_k^2, a_{15} = 2\eta_k^3\alpha \\
 a_4 &= a_{23} = a_{10} = a_{19} = -\frac{2}{\sqrt{5}}\eta_k^5\alpha, \\
 a_5 &= a_{24} = a_9 = a_{18} = a_{14} = 2i\sqrt{5}\eta_k\alpha, \\
 a_6 &= a_{25} = a_{11} = a_{20} = -2^2i\eta_k^3\alpha, \\
 a_8 &= a_{22} = a_{13} = a_{17} = -2i\eta_k^4\alpha, \\
 a_7 &= a_{21} = -a_{12} = -a_{16} = 2\sqrt{5}\eta_k^2\alpha.
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

tal que (com α uma constante livre)

$$\eta_k = 2 \sin\left(\frac{2\pi ik}{5}\right), \quad \text{com } k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4. \tag{B.7}$$

Introduzimos então os seguinte sistema de pesos fundamentais $|\lambda_0\rangle$, $|\lambda_1\rangle$ e $|\lambda_2\rangle$ tal que:

$$\begin{aligned} h_1 + h_4|\lambda_0\rangle &= 0|\lambda_0\rangle, & h_2 + h_3|\lambda_0\rangle &= 0|\lambda_0\rangle, & \kappa|\lambda_0\rangle &= 2|\lambda_0\rangle, \\ h_1 + h_4|\lambda_1\rangle &= 1|\lambda_1\rangle, & h_2 + h_3|\lambda_1\rangle &= 0|\lambda_1\rangle, & \kappa|\lambda_1\rangle &= 2|\lambda_1\rangle, \\ h_1 + h_4|\lambda_2\rangle &= 0|\lambda_2\rangle, & h_2 + h_3|\lambda_2\rangle &= 1|\lambda_2\rangle, & \kappa|\lambda_2\rangle &= 2|\lambda_2\rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Desse modo, com $\mathcal{B}_0 = e^{-(h_1+h_4)\phi_1 - (h_2+h_3)\phi_2}$, temos:

$$\begin{aligned} \tau_{00} &= \langle \lambda_0 | \mathcal{B}_0 e^{-\kappa\nu} | \lambda_0 \rangle = e^{-2\nu}, \\ \tau_{11} &= \langle \lambda_1 | \mathcal{B}_0 e^{-\kappa\nu} | \lambda_1 \rangle = e^{-2\nu - \phi_1}, \\ \tau_{22} &= \langle \lambda_2 | \mathcal{B}_0 e^{-\kappa\nu} | \lambda_2 \rangle = e^{-2\nu - \phi_2}, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

e assim podemos escrever

$$\begin{aligned} \phi_1(x, t) &= \ln \left(\frac{\tau_{00}}{\tau_{11}} \right), \\ \phi_2(x, t) &= \ln \left(\frac{\tau_{00}}{\tau_{22}} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

De modo geral, para hierarquia $A_{2r}^{(2)}$ introduzindo o seguinte sistema de pesos fundamentais $\{|\lambda_0\rangle, \dots, |\lambda_r\rangle\}$

$$\begin{aligned} h_1 + h_{2r}|\lambda_0\rangle &= 0|\lambda_0\rangle, & h_2 + h_{2r-1}|\lambda_0\rangle &= 0|\lambda_0\rangle, & h_r + h_{r+1}|\lambda_0\rangle &= 0|\lambda_0\rangle, \\ h_1 + h_{2r}|\lambda_1\rangle &= 1|\lambda_0\rangle, & h_2 + h_{2r-1}|\lambda_1\rangle &= 0|\lambda_0\rangle, & h_r + h_{r+1}|\lambda_1\rangle &= 0|\lambda_0\rangle, \\ h_1 + h_{2r}|\lambda_2\rangle &= 0|\lambda_2\rangle, & h_2 + h_{2r-1}|\lambda_2\rangle &= 1|\lambda_2\rangle, & \dots & h_r + h_{r+1}|\lambda_2\rangle = 0|\lambda_2\rangle, \\ &\vdots & &\vdots & &\vdots \\ h_1 + h_{2r}|\lambda_r\rangle &= 0|\lambda_r\rangle, & h_2 + h_{2r-1}|\lambda_r\rangle &= 0|\lambda_r\rangle, & h_r + h_{r+1}|\lambda_r\rangle &= 1|\lambda_r\rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

e

$$\kappa|\lambda_j\rangle = 2|\lambda_j\rangle \quad (\text{B.12})$$

para j qualquer, obtemos

$$\begin{aligned} \tau_{00} &= \langle \lambda_0 | \mathcal{B}_0 e^{-\kappa\nu} | \lambda_0 \rangle = e^{-2\nu}, \\ \tau_{jj} &= \langle \lambda_j | \mathcal{B}_0 e^{-\kappa\nu} | \lambda_j \rangle = e^{-2\nu - \phi_j}, \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

com $j = 1, \dots, r$ para $\mathcal{B}_0 = e^{\phi_1(h_1^{(0)} + h_{2r}^{(0)}) + \dots + \phi_r(h_r^{(0)} + h_{r+1}^{(0)})}$.

Referências

- [1] FORDY, A. A historical introduction to solitons and bäcklund transformations. In: *Harmonic Maps and Integrable Systems*. [S.l.]: Springer, 1994. p. 7–28.
- [2] TORRIELLI, A. Classical integrability. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 49, n. 32, p. 323001, jul 2016. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/49/32/323001>>.
- [3] DRINFEL'D, V. G.; SOKOLOV, V. V. Lie algebras and equations of korteweg-de vries type. *Journal of Soviet mathematics*, Springer, v. 30, n. 2, p. 1975–2036, 1985.
- [4] GOMES, J. et al. Negative even grade mkdv hierarchy and its soliton solutions. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 42, n. 44, p. 445204, 2009.
- [5] GOMES, J.; RETORE, A.; ZIMERMAN, A. Construction of type-ii bäcklund transformation for the mkdv hierarchy. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 48, n. 40, p. 405203, 2015.
- [6] BABELON, O.; BERNARD, D. Affine solitons: a relation between tau functions, dressing and bäcklund transformations. *International Journal of Modern Physics A*, World Scientific, v. 8, n. 03, p. 507–543, 1993.
- [7] JIMBO, M.; MIWA, T. Solitons and infinite dimensional lie algebras. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, v. 19, n. 3, p. 943–1001, 1983.
- [8] ARATYN, H. et al. Symmetry flows, conservation laws and dressing approach to the integrable models. In: _____. *Integrable Hierarchies and Modern Physical Theories*. Dordrecht: Springer Netherlands, 2001. p. 243–275. ISBN 978-94-010-0720-7. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-94-010-0720-7_8>.
- [9] GOMES, J.; FRANÇA, G. S.; ZIMERMAN, A. H. Dressing approach to the nonvanishing boundary value problem for the akns hierarchy. In: IOP PUBLISHING. *Journal of Physics: Conference Series*. [S.l.], 2012. v. 343, n. 1, p. 012039.
- [10] ROBERTSON, C. Folding defect affine toda field theories. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 47, n. 18, p. 185201, 2014.

- [11] ASSIS, P. E. G. d. *Sólitons do modelo de Bullough-Dodd e suas generalizações pela inclusão de campos de matéria*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo.
- [12] OLIVE, D.; TUROK, N. The symmetries of dynkin diagrams and the reduction of toda field equations. *Nuclear Physics B*, v. 215, n. 4, p. 470–494, 1983. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321383902560>>.
- [13] KNEIPP, M. A.; OLIVE, D. I. Solitons and vertex operators in twisted affine toda field theories. *Communications in mathematical physics*, Springer, v. 177, p. 561–582, 1996.
- [14] ASSIS, P.; FERREIRA, L. The bullough–dodd model coupled to matter fields. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 800, n. 3, p. 409–449, 2008.
- [15] ADANS, Y. et al. Twisted affine integrable hierarchies and soliton solutions. *Brazilian Journal of Physics*, Springer, v. 53, n. 1, p. 24, 2023.
- [16] DAS, A. *Integrable models*. [S.l.]: World scientific, 1989. v. 30.
- [17] LEZNOV, A.; SAVELIEV, M. Representation of zero curvature for the system of nonlinear partial differential equations and its integrability. *Letters in Mathematical Physics*, Springer, v. 3, n. 6, p. 489–494, 1979.
- [18] OLIVE, D.; TUROK, N. Local conserved densities and zero-curvature conditions for toda lattice field theories. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 257, p. 277–301, 1985.
- [19] FRAPPAT, L.; SCIARRINO, A.; SORBA, P. *Dictionary on Lie algebras and superalgebras*. [S.l.]: Academic Press San Diego, CA, 2000. v. 10.
- [20] TZITZEICA, M. Sur une nouvelle classe des surfaces. *CR Acad. Sci. Paris*, v. 150, p. 955–956, 1910.
- [21] DODD, R.; BULLOUGH, R. Polynomial conserved densities for the sine-gordon equations. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society London, v. 352, n. 1671, p. 481–503, 1977.
- [22] HIROTA, R. Direct methods in soliton theory. *Solitons*, Springer, p. 157–176, 1980.

- [23] FADDEEV, L. D.; TAKHTAJAN, L. A. *Hamiltonian methods in the theory of solitons*. [S.l.]: Springer, 1987. v. 23.
- [24] ARATYN, H.; GOMES, J.; ZIMERMAN, A. Integrable hierarchy for multidimensional toda equations and topological–anti-topological fusion. *Journal of Geometry and Physics*, v. 46, n. 1, p. 21–47, 2003. ISSN 0393-0440. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0393044002001262>>.
- [25] HALL, R. A. *Affine Toda solitons and fusing rules*. Tese (Doutorado) — Durham University, 1994.
- [26] MCGHEE, W. A. The topological charges of the affine toda solitons. *International Journal of Modern Physics A*, World Scientific, v. 9, n. 15, p. 2645–2665, 1994.
- [27] ARATYN, H. et al. Kac-moody construction of toda type field theories. *Physics Letters B*, v. 254, n. 3, p. 372–380, 1991. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026939191171Q>>.
- [28] FERREIRA, L. et al. Comments on two-loop kac-moody algebras. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 274, n. 1, p. 65–71, 1992.
- [29] ADANS, Y. et al. Comments on the negative grade kdv hierarchy. *Proceedings of the 34th International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics - SciPost*, 2022.