

JOÃO HENRIQUE PEREIRA SILVA

**CONTROLE ROBUSTO $\mathcal{H}_\infty$ CHAVEADO PARA
SISTEMAS LINEARES**

Ilha Solteira - SP
2013

JOÃO HENRIQUE PEREIRA SILVA

CONTROLE ROBUSTO $\mathcal{H}_\infty$ CHAVEADO PARA SISTEMAS LINEARES

Dissertação apresentada à Faculdade de
Engenharia do Câmpus de Ilha Solteira
- UNESP como parte dos requisitos para
obtenção do título de Mestre em Engen-
haria Elétrica.
Especialidade: Automação.

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto
Teixeira
Orientador

Ilha Solteira - SP
2013

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

S586c Silva, João Henrique Pereira.
Controle robusto h-infinito chaveado para sistemas lineares / João Henrique Pereira Silva. - Ilha Solteira : [s.n.], 2013
69 f.:il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de Conhecimento: Automação, 2012

Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
Inclui bibliografia

1. Controle robusto H-infinito. 2. Controle chaveado. 3. Desigualdades de Lyapunov-Metzler. 4. Falhas estruturais.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Controle robusto H-infinito chaveado para sistemas lineares

AUTOR: JOÃO HENRIQUE PEREIRA SILVA

ORIENTADOR: Prof. Dr. MARCELO CARVALHO M TEIXEIRA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica ,
Área: AUTOMAÇÃO, pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. MARCELO CARVALHO M TEIXEIRA
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. MÁRCIO ROBERTO COVACIC
Departamento de Engenharia Elétrica / Universidade Estadual de Londrina

Data da realização: 08 de março de 2013.

À toda a minha família,
pelo carinho, compreensão, confiança e incentivo em todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por estar sempre comigo. Fortalecendo-me nos momentos de fraqueza. Dando-me sabedoria nos momentos de dúvida. Dando-me a vitória nos momentos em que tudo parece derrota.

À minha mãe Regina, pela força, incentivo e amor depositados em mim.

Ao meu pai João Batista, pelo apoio e incentivo incondicionais nos momentos mais importantes da minha vida e à minha madrastra Maria Nilva, por ter participado da minha vida durante este período.

Aos meus avós Procides e Maria, pelos valiosos ensinamentos de vida e aos meus irmãos Flávio e Leandro, pela companhia e momentos de descontração vividos a cada dia.

À UNESP, pela excelente estrutura de trabalho e pelo alto nível de pesquisa que desenvolve.

Ao Prof. Dr. Marcelo C. M. Teixeira, pela excelente orientação e confiança depositados. O entusiasmo com que se dedica à pesquisa, a competência profissional e o espírito crítico somados ao seu bom humor e camaradagem não são apenas notáveis como me inspiram a continuar a seguir na carreira de pesquisador.

Ao Prof. Dr. Edvaldo Assunção, brilhante professor e pesquisador, pelo acompanhamento nas bancas examinatórias, pelas valiosas sugestões técnicas no decorrer do mestrado e pelas palavras de paz e incentivo.

À professora Dra. Neusa A. Pereira da Silva pelo acompanhamento nas bancas examinatórias deste trabalho e pelas valiosas sugestões técnicas.

Ao amigo e colega do Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC), Wallysonn Alves de Souza, professor do Instituto Federal de Goiás (IFG), pela especial participação e sugestões na realização deste trabalho. Excelente pesquisador e companheiro.

Aos meus amigos e colegas do LPC, Edson, Manoel, Marinez, Emerson, Rodolfo, Herbert, Luiz Buzachero, Luiz Antônio e Luciano, do Laboratório de Eletrônica de Potência (LEP), pelo apoio técnico, cordialidade e companheirismo. Sucesso sempre!

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro.

“A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu,
mas pensar o que ninguém ainda pensou sobre aquilo
que todo mundo vê.”

Arthur Schopenhauer

RESUMO

Neste trabalho são propostas condições suficientes para o controle $\mathcal{H}_\infty$ chaveado de sistemas lineares incertos contínuos no tempo. A técnica abordada para este estudo consiste na utilização de uma função quadrática de Lyapunov e em um caso mais específico, uma função quadrática de Lyapunov por partes. A análise de estabilidade é descrita por meio de Desigualdades Matriciais Lineares (em inglês: *Linear Matrix Inequalities*), LMIs, que, quando factíveis, são facilmente resolvidas por meio de ferramentas disponíveis na literatura de programação convexa. Assim é apresentada uma metodologia de chaveamento do ganho de realimentação do vetor de estado, que assegura também o critério de desempenho $\mathcal{H}_\infty$, cuja estratégia busca a obtenção do mínimo valor da derivada de uma função de Lyapunov quadrática. O método foi estendido com o emprego de uma função de Lyapunov quadrática por partes, cujo projeto é baseado nas desigualdades de Lyapunov-Metzler. É demonstrado que esta nova estratégia de chaveamento, além de uma implementação simples, oferece uma flexibilização das LMIs em comparação com os métodos convencionais que também utilizam o controle $\mathcal{H}_\infty$. A teoria é ilustrada através de exemplos, que permitem comprovar o bom desempenho dos métodos propostos, incluindo a implementação em laboratório do controle de um helicóptero 3-DOF de bancada da QUANSER, sujeito a falhas estruturais.

Palavras-chave: Estabilidade quadrática. Sstemas incertos. Sistemas chaveados. Escalonamento do ganho de controle. Controle robusto $\mathcal{H}_\infty$. Desigualdades de Lyapunov-Metzler. Falhas estruturais.

ABSTRACT

Sufficient conditions for the switched $\mathcal{H}_\infty$ control of continuous-time uncertain linear systems are proposed. The technique discussed in this study is based on quadratic Lyapunov functions and a piecewise quadratic Lyapunov functions. The stability analysis is described by LMIs that, when feasible, are easily solved by available tools in the convex programming literature. Thus, a methodology for designing the switching of state vector feedback gains, which also ensures $\mathcal{H}_\infty$ performance criterion, is presented. This new procedure chooses the state feedback gain that returns the minimum value of the time derivative of the Lyapunov function. The method was extended to a piecewise quadratic Lyapunov function and is designed from the solution of Lyapunov-Metzler inequalities. It is shown that this switching strategy, beyond a simple implementation, offers a relaxation in the LMIs, when compared with the conventional methods used in $\mathcal{H}_\infty$ control. The procedure are illustrated by means of examples, including an implementation in the control of a 3-DOF helicopter, subject to structural failures.

Keywords: Quadratic stability. Uncertain systems. Switched systems. Gain scheduling of control. $\mathcal{H}_\infty$ robust control. Lyapunov-Metzler inequalities. Structural failures.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Região $\mathcal{S}(\alpha, r, \theta)$	33
Figura 2	Esquema de controle chaveado	36
Figura 3	Sistema massa-mola-amortecedor	39
Figura 4	Sinal de controle e saída $y(t)$: método dos ganhos chaveados (linha tracejada), método do ganho fixo (linha contínua) e distúrbio (linha pontilhada)	41
Figura 5	Região de alocação dos polos para os dois métodos	42
Figura 6	Helicóptero 3-DOF da Quanser	42
Figura 7	Modelo esquemático do Helicóptero 3-DOF	43
Figura 8	Trajectoria das variáveis de estado: $x_1(t)$: ângulo de elevação, $x_2(t)$: ângulo de arfagem e $x_3(t)$: deslocamento angular. Método dos ganhos chaveados (linha tracejada) e método do ganho fixo (linha contínua) . .	50
Figura 9	Sinal de controle do método que utiliza o ganho fixo: $u_1(t)$ (linha tracejada) e $u_2(t)$ (linha contínua)	50
Figura 10	Sinal de controle do método dos ganhos chaveados: $u_{\sigma 1}(t)$ (linha tracejada) e $u_{\sigma 2}(t)$ (linha contínua)	51
Figura 11	Trajectoria das variáveis de estado, baseada no método que utiliza os ganhos chaveados: $x_1(t)$: ângulo de elevação (linha pontilhada), $x_2(t)$: ângulo de arfagem (linha contínua) e $x_3(t)$: deslocamento angular (linha tracejada)	51
Figura 12	Sinal de controle $u_{\sigma}(t)$: tensão V_f (linha pontilhada) e tensão V_b linha contínua	52
Figura 13	Sinal de chaveamento	52
Figura 14	Esquema de controle com dois estágios	56
Figura 15	Sistema carro-mola com dois graus de liberdade	59

Figura 16	Trajectoria das variáveis de estado. $x_1(t)$, (linha contínua) e $x_2(t)$, (linha tracejada)	61
Figura 17	Sinal de controle	61

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Parâmetros da $\mathcal{D}$ -Estabilidade	40
Tabela 2	Parâmetros do helicóptero	44
Tabela 3	Parâmetros da $\mathcal{D}$ -Estabilidade	47

LISTA DE ABREVIACÕES E SIGLAS

LMI	Linear Matrix Inequalitie (Desigualdade Matricial Linear)
LMIs	Linear Matrix Inequalities (Desigualdades Matriciais Lineares)
3-DOF	3-Degree of Freedom (3 Graus de Liberdade)

LISTA DE SÍMBOLOS

I	Matriz identidade.
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$\mathbb{K}_N$	Conjunto $\{1,2,\dots,N\}$.
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos.
$A > 0$	Matriz A definida positiva.
$A < 0$	Matriz A definida negativa.
$\text{diag}\{A, B\}$	Matriz bloco diagonal formada pelas matrizes A e B .
$\text{He}\{\cdot\}$	Operador hermitiano $\text{He}\{A\} = A + A'$, $A \in \mathbb{R}^n$.
$*$	Bloco simétrico de uma matriz simétrica.
$\ \mathcal{F}\ _2^2$	Quadrado da norma de uma trajetória $\mathcal{F}(t)$, igual a $\int_0^\infty \mathcal{F}(t)^T \mathcal{F}(t) dt$, para sistemas contínuos.
$\mathcal{L}_2$	Conjunto de todas as trajetórias $\mathcal{F}(t)$ tais que $\ \mathcal{F}\ _2^2 < \infty$.
$D^+(v(x))$	Derivada direcional à direita de uma trajetória qualquer do sistema.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	25
2	PRELIMINARES	27
2.1	SISTEMAS LINEARES INCERTOS E INVARIANTES NO TEMPO	27
2.1.1	Condições de estabilidade	28
2.1.2	Controle robusto $\mathcal{H}_\infty$	29
2.1.3	Controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ com realimentação escalonada	30
2.1.4	Alocação de polos - $\mathcal{D}$ -estabilidade	32
3	PROJETO DE CONTROLE CHAVEADO $\mathcal{H}_\infty$	35
3.1	PROJETO DO CONTROLADOR CHAVEADO $\mathcal{H}_\infty$	35
3.1.1	Custo funcional $\mathcal{H}_\infty$	35
3.1.2	Sistema com a matriz B fixa	36
3.1.3	Sistema com a matriz $B(\beta)$ utilizando integrador	37
3.2	EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	38
3.2.1	Exemplo 1: Sistema massa-mola-amortecedor	38
3.2.2	Exemplo 2: Helicóptero 3-DOF	41
3.2.2.1	<i>Implementação experimental baseada no método dos ganhos chaveados</i>	49
3.3	CONCLUSÕES PARCIAIS	52
4	PROJETO DE CONTROLE ROBUSTO $\mathcal{H}_\infty$ CHAVEADO UTILIZANDO AS DESIGUALDADES DE LYAPUNOV - METZLER	55
4.1	PROJETO DO CONTROLADOR CHAVEADO $\mathcal{H}_\infty$	55
4.1.1	Sistema com a matriz B fixa	55
4.1.2	Sistema com a matriz $B(\beta)$ utilizando integrador	58
4.2	EXEMPLO DE APLICAÇÃO	58

4.2.1	Exemplo 4: carro-mola	58
4.3	CONCLUSÕES PARCIAIS	61
5	CONCLUSÕES	63
	REFERÊNCIAS	65

1 INTRODUÇÃO

Sistemas chaveados são, na sua essência, sistemas dinâmicos híbridos compostos por um número finito de subsistemas e uma regra lógica que é projetada para orquestrar o chaveamento entre estes subsistemas, assegurando estabilidade e desempenho (BRANICKY, 1998). Nas últimas décadas, tem-se observado um crescente interesse da comunidade científica no estudo da estabilidade de sistemas lineares chaveados, no que se refere à análise de estabilidade e projeto de controle (GEROMEL; COLANERI, 2006.; WICKS; PELETIES; DECARLO, 1994; ZHAI; LIN; ANTSAKLIS, 2003). Esta motivação se deve ao fato de que a comutação entre subsistemas pode melhorar o desempenho global e fornecer propriedades importantes que não são encontradas nos subsistemas isolados, e portanto ter inúmeras aplicações em vários sistemas práticos, como sistemas mecânicos, sistemas elétricos de potência, controle de aeronaves, indústria automotiva, eletrônica de potência (CARDIM et al., 2009, 2011; DEAECTO; GEROMEL, 2008; MAZUMDER; NAYFEH; BOROJEVIC, 2002).

A associação da análise da estabilidade e síntese de controle para sistemas lineares chaveados já tem sido abordado na literatura. Há condições suficientes, baseadas em diferentes técnicas, como por exemplo, aquelas baseadas na função quadrática de Lyapunov (JI; WANG; XIE, 2005; SKAFIDAS et al., 1999), funções múltiplas de Lyapunov (BRANICKY, 1998; ZHAO; HILL, 2008), e funções quadráticas de Lyapunov por partes (GEROMEL; COLANERI, 2006.; HU; MA; LI, 2006). Estas técnicas diferem entre si no grau de conservadorismo e também na técnica numérica de solução.

Supondo agora que condições adicionais sejam consideradas, como robustez e atenuação de distúrbios, o problema de projeto de controle que utiliza o critério de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ surge como uma possibilidade (DEAECTO; GEROMEL; DAAFOUZ, 2010). O controle $\mathcal{H}_\infty$ é um campo promissor de pesquisa na teoria de controle, assim como o desempenho $\mathcal{H}_\infty$ é também de extrema importância. Hespanha (2003), Zhai et al. (2001) apresentam estudos sobre atenuação de distúrbios de sistemas chaveados. Diversos outros trabalhos, como Lall e Dullerud (1997) e Nie e Zhao (2003) também se dedicaram ao estudo de problemas relacionados ao projeto de controle $\mathcal{H}_\infty$. Dentro do interesse presente neste trabalho, devem ser mencionados os trabalhos que utilizam o projeto de controle $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas contínuos no tempo, com chaveamento da realimentação do vetor de estado, como visto nos trabalhos de Geromel e Deaecto (2009), Ji et al. (2006) e Zhao e Hill (2008).

A motivação principal deste trabalho é propor condições suficientes para o controle $\mathcal{H}_\infty$ chaveado de sistemas lineares incertos contínuos no tempo. A técnica abordada para este estudo utiliza inicialmente uma função de Lyapunov quadrática e, em um caso mais específico, uma função quadrática de Lyapunov por partes. A análise da estabilidade é descrita por meio de LMIs que, quando factíveis, são facilmente resolvidas por meio de ferramentas disponíveis na literatura de programação convexa, como por exemplo o *tolbox* do MATLAB descrito por Gahinet et al. (1994).

Assim, é apresentada uma estratégia de chaveamento do ganho de realimentação do vetor de estado, que assegura também o critério desempenho $\mathcal{H}_\infty$. É demonstrado que esta nova modelagem oferece, em geral, um melhor desempenho quando comparado com o controle robusto clássico definido a partir de um único ganho de realimentação.

Este procedimento produziu alguns resultados, um deles que culminou em uma publicação na XIX edição do Congresso Brasileiro de Automática, em Campina Grande-PB, 2012, (SILVA et al., 2012).

Posteriormente, esta lei de chaveamento também é estendida para uma função quadrática de Lyapunov por partes, cujo projeto é baseado nas desigualdades de Lyapunov-Metzler. Nesse caso, a lei de controle proposta é composta de dois estágios, que utilizam duas regras de chaveamento distintas. A primeira destas regras seleciona uma função de Lyapunov quadrática enquanto que a segunda, posteriormente, seleciona os ganhos que retornam o menor valor para a derivada da função de Lyapunov selecionada. A validade e eficácia deste método são comprovados através de exemplo numérico.

Exemplos comprovam a validade e eficácia dos métodos propostos, incluindo a implementação em laboratório para o projeto de controle de um helicóptero 3-DOF de bancada da QUANSER (QUANSER, 2002).

2 PRELIMINARES

Neste capítulo serão apresentados alguns resultados preliminares, baseados em estudos já consolidados e disponíveis na literatura, que serão fundamentais no decorrer desta dissertação.

2.1 SISTEMAS LINEARES INCERTOS E INVARIANTES NO TEMPO

Considere o sistema linear incerto e invariante no tempo representado pela seguinte equação em espaços de estados:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\beta)x(t) + B(\beta)u(t) + H(\beta)w(t), \quad x(0) = 0, \\ y(t) &= C(\beta)x(t) + D(\beta)u(t) + G(\beta)w(t),\end{aligned}\tag{1}$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle, $w(t) \in \mathbb{R}^p$ a entrada externa tal que $w(t) \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ é a saída e $A(\beta), B(\beta), C(\beta), D(\beta), G(\beta)$ e $H(\beta)$ são matrizes de dimensões adequadas que descrevem o sistema e pertencem a um conjunto convexo de natureza politópica, isto é, $(A, B, C, D, G, H)(\beta) \in \mathcal{P}$,

$$\mathcal{P} \triangleq \left\{ (A, B, C, D, G, H)(\beta) : (A, B, C, D, G, H)(\beta) = \sum_{i=1}^N \beta_i (A, B, C, D, G, H)_i, \beta \in \Lambda_N \right\}, \tag{2}$$

sendo Λ_N o simplex unitário definido como

$$\Lambda_N = \left\{ \beta \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \beta_i = 1, \beta_i \geq 0, i \in \mathbb{K}_N \right\}, \tag{3}$$

cujos vértices são denotados por $(A_i, B_i, C_i, D_i, G_i, H_i)$, $i \in \mathbb{K}_N$. O número de vértices é igual a $N = 2^\phi$, sendo ϕ o número de parâmetros incertos distintos das matrizes. A lei de controle tradicional para a realimentação do vetor de estado, supondo que este esteja disponível para realimentação, é dada por:

$$u(t) = -Kx(t), \tag{4}$$

sendo $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a matriz de ganho fixo de realimentação do sistema.

Substituindo (4) no sistema (1), o seguinte sistema em malha fechada é obtido:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_f(\beta)x(t) + H(\beta)w(t), \quad A_f(\beta) = (A(\beta) - B(\beta)K), \\ y(t) &= C_f(\beta)x(t) + G(\beta)w(t), \quad C_f(\beta) = (C(\beta) - D(\beta)K).\end{aligned}\tag{5}$$

2.1.1 Condições de estabilidade

Considere o sistema (1) com $w(t) = 0$,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\beta)x(t) + B(\beta)u(t), \\ y(t) &= C(\beta)x(t) + D(\beta)u(t).\end{aligned}\tag{6}$$

Substituindo a lei de controle (4) em (1), o seguinte sistema em malha fechada é obtido

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_f(\beta)x(t), \\ y(t) &= C_f(\beta)x(t).\end{aligned}\tag{7}$$

Para este sistema, defina a função de Lyapunov quadrática

$$v(x(t)) = x(t)'Px(t),\tag{8}$$

sendo a matriz $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica positiva definida. A derivada de (8), em relação ao tempo, é dada por:

$$\begin{aligned}\dot{v}(x(t)) &= \dot{x}(t)'Px(t) + x(t)'P\dot{x}(t) \\ &= x(t)'(A_f(\beta)'P + PA_f(\beta))x(t).\end{aligned}\tag{9}$$

Para a estabilidade de (7), uma condição necessária e suficiente é que $\dot{v}(x(t))$ seja negativa definida, isto é, $\dot{v}(0) = 0$ e $\dot{v}(x(t)) < 0$, para todo $x(t) \neq 0$ e $\beta \in \Lambda_N$. Portanto,

$$A_f(\beta)'P + PA_f(\beta) < 0, \quad \beta \in \Lambda_N.\tag{10}$$

As condições de estabilidade para o sistema (7) são obtidas através do conceito de estabilidade quadrática, visto em Bernussou, Peres e Geromel (1989), e apresentadas no lema a seguir.

Lema 2.1. *O sistema (6)-(7) é quadraticamente estabilizável se existe uma matriz simétrica positiva definida $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tais que as seguintes LMIs sejam factíveis, para todo $i \in \mathbb{K}_N$:*

$$\begin{aligned}A_iX - B_iM + XA_i' - M^TB_i' &< 0, \\ X &> 0.\end{aligned}\tag{11}$$

O ganho do controlador, quando (11) é factível, é dado por

$$K = MX^{-1}.\tag{12}$$

Demonstração. Multiplicando as desigualdades (11) por β_i e realizando o somatório de

$i = 1 \dots N$, pré e pós multiplicando por P^{-1} , com as substituições de variáveis $M = KX$ e $X = P^{-1}$, é obtido a desigualdade (10), que é condição necessária e suficiente para garantir a estabilidade quadrática de (11). $\square$

Há pacotes computacionais de otimização para resolver as LMIs (11), tais como o LMI *control toolbox* (GAHINET et al., 1994), pacote do *software* MATLAB.

2.1.2 Controle robusto $\mathcal{H}_\infty$

Será aplicado agora o conceito de estabilidade robusta com a teoria de otimização $\mathcal{H}_\infty$. Para isso, considere o sistema (1), pertencente ao conjunto (2) e o seu sistema realimentado dado por (5).

O custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ ótimo do sistema é definido como o valor mínimo de γ , $\gamma > 0$ finito, tal que

$$\|y(t)\|_2 < \gamma \|w(t)\|_2, \quad (13)$$

para qualquer saída $y(t) \in \mathcal{L}_2$ computada como resposta à qualquer entrada $w(t) \in \mathcal{L}_2$, para todo $(A, B, C, D, G, H)(\beta) \in \mathcal{P}$. O menor valor de γ corresponde à norma $\mathcal{H}_\infty$ associada ao pior caso no politopo e pode ser computado por meio de uma busca exaustiva do parâmetro β .

A estabilidade do sistema (5) com o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ é assegurada, se, dada a função de Lyapunov quadrática (8), a seguinte desigualdade é verdadeira (BOYD et al., 1994)

$$\dot{v}(x(t)) + \gamma^2 y(t)' y(t) - w(t)' w(t) < 0. \quad (14)$$

O objetivo consiste em obter um ganho $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ que estabilize o sistema (1) e minimize, simultaneamente, o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, para todo $(A, B, C, D, G, H) \in \mathcal{P}$.

Teorema 1 ((BOYD et al., 1994)). *O sistema (5) é assintoticamente estável se, dado um escalar $\mu > 0$, existirem matrizes $X = X^T > 0$ e M , de dimensões adequadas, satisfazendo o seguinte problema de otimização*

$$\begin{aligned} \min \quad & \mu \\ \text{s. a} \quad & X = X' > 0 \\ & \begin{bmatrix} A_i X + X A_i' - B_i M - M' B_i' & H_i & X C_i' - M' D_i' \\ * & -\mu I & G_i' \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad i \in \mathbb{K}_N, \end{aligned} \quad (15)$$

sendo $\mu = \gamma^2 > 0$. A matriz de ganho de realimentação é dada por

$$K = MX^{-1}, \quad (16)$$

e assegura

$$\|H(\beta, s)\|_\infty \leq \sqrt{\mu}. \quad (17)$$

O projeto de controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ que utiliza o ganho fixo estabilizante K pode simplificar o problema de controle. Entretanto as condições do Teorema 1 podem gerar resultados conservadores, e muitas vezes as condições são infactíveis. Logo, estratégias de controle baseadas em ganhos dependentes de parâmetros se tornam uma opção para reduzir o conservadorismo, sob o custo de se conhecer o parâmetro β em tempo real. Esta formulação será apresentada na Subsecção 2.1.3.

Vários artigos já publicaram estudos acerca do procedimento de ganho escalonado para síntese de controle. Alguns trabalhos focados neste assunto podem ser encontrados nas obras de Shahruz e Behtash (1992), Rugh e Shamma (2000), Apkarian e Adams (1998) e Montagner et al. (2007).

2.1.3 Controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ com realimentação escalonada

Considere agora a seguinte subclasse de sistemas lineares incertos invariantes no tempo, tal que $B(\beta) = B$ e $D(\beta) = D$, para todo $\beta \in \Lambda_N$:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\beta)x(t) + Bu(t) + H(\beta)w(t), & x(0) &= 0, \\ y(t) &= C(\beta)x(t) + Du(t) + G(\beta)w(t), \end{aligned} \quad (18)$$

e a lei de controle que possui a seguinte forma

$$u(t) = u_\beta(t) = -K(\beta)x(t) = -\sum_{i=1}^N \beta_i K_i x(t), \quad \beta \in \Lambda_N. \quad (19)$$

Note que este controlador não é possível de ser implementado, devido à natureza incerta dos parâmetros β_i . Entretanto, esta etapa do projeto é necessária para o projeto do controlador chaveado a ser proposto, que não utiliza os parâmetros incertos. Substituindo (19) em (18), obtém-se o sistema realimentado

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_f(\beta)x(t) + H(\beta)w(t), & A_f(\beta) &= (A(\beta) - BK(\beta)), \\ y(t) &= C_f(\beta)x(t) + G(\beta)w(t), & C_f(\beta) &= (C(\beta) - DK(\beta)). \end{aligned} \quad (20)$$

Uma condição suficiente para a estabilidade do sistema (20) é definida pela estabilidade quadrática, apresentada através do Lema 2.1, fazendo a substituição de K por

K_i .

O objetivo é projetar um ganho dependente de parâmetros $K(\beta)$, utilizando a função quadrática de Lyapunov, de modo que o sistema (20) seja estável e, simultaneamente, minimize o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$. O teorema abaixo é um caso particular do resultado apresentado por Montagner et al. (2005), considerando $B(\beta) = B$ e $D(\beta) = D$.

Teorema 2. *O sistema (20) é assintoticamente estável se, dado um escalar $\mu > 0$, existirem matrizes $X = X^T > 0$ e M_i , $i \in \mathbb{K}_N$, de dimensões adequadas, satisfazendo o seguinte problema de otimização*

$$\begin{aligned} \min \quad & \mu \\ \text{s. a} \quad & X = X^T > 0 \\ & \begin{bmatrix} A_i X + X A_i' - B M_i - M_i' B' & H_i & X C_i' - M_i' D' \\ * & -\mu I & G_i' \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad i \in \mathbb{K}_N. \end{aligned} \quad (21)$$

As matrizes de ganho de realimentação são dadas por

$$K_i = M_i X^{-1} \quad (22)$$

e asseguram

$$\|H(\beta, s)\|_\infty \leq \sqrt{\mu}, \quad (23)$$

sendo $\mu = \gamma^2 > 0$.

Demonstração. Multiplicando as LMIs (21) por seu respectivo β_i , realizando o somatório para $i = 1, 2, \dots, N$ e aplicando o complemento de Schur em relação à última linha e coluna, com $M_i = K_i X$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & H(\beta) + X(C(\beta) - DK(\beta))'G(\beta) \\ * & -\gamma^2 I + G(\beta)'G(\beta) \end{bmatrix} < 0, \quad (24)$$

sendo

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} = & (A(\beta) - BK(\beta))X + X(A(\beta) - BK(\beta))' \\ & + X(C(\beta) - DK(\beta))'(C(\beta) - DK(\beta))X. \end{aligned} \quad (25)$$

Pré-multiplicando e pós-multiplicando as desigualdades (24) por $\text{diag}\{X^{-1}, I\}$, com $X = P^{-1}$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} A_f(\beta)'P + PA_f(\beta) + C_f(\beta)'C_f(\beta) & PH(\beta) + C_f(\beta)'G(\beta) \\ * & G(\beta)'G(\beta) - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (26)$$

sendo $A_f(\beta)$ e $C_f(\beta)$ definidos em (20). Multiplicando (26) à esquerda pelo vetor $[x(t)' \ w(t)']$ e à direita pelo seu transposto, e rearranjando os termos, obtém-se

$$\begin{aligned} (A_f(\beta)x(t) + H(\beta)w(t))'Px(t) \\ + x'(t)P(A_f(\beta)x(t) + H(\beta)w(t)) &< -y(t)'y(t) + \gamma^2 w(t)'w(t), \\ \dot{v}(x(t)) &< -y(t)'y(t) + \gamma^2 w(t)'w(t). \end{aligned} \quad (27)$$

Integrando ambos os lados de (27) de $t = 0$ a $t \rightarrow \infty$, obtém-se, para $v(x) = x'Px$,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (y(t)'y(t) - \gamma^2 w(t)'w(t))dt &< - \int_0^\infty \dot{v}(x(t))dt \\ &= v(x(0)) - v(x(\infty)) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (28)$$

pois considerando a estabilidade assintótica do sistema (note que (26) implica que $A_f(\beta)'P + PA_f(\beta) < 0$) e condições iniciais nulas $x(0) = 0$, é verificado que $v(x(\infty)) = v(x(0)) = 0$, levando a

$$\|y(t)\|_2 \leq \gamma \|w(t)\|_2, \quad (29)$$

□

Portanto, se uma solução factível existe, o ganho $K(\beta)$ garante a estabilidade do sistema (20), simultaneamente com a minimização do custo $\mathcal{H}_\infty$. As condições do Teorema 2 permitem um grau extra de liberdade, que é fornecido pelas variáveis M_i e reduzem o conservatismo das condições relacionadas ao Teorema 1.

Através da imposição de que a matriz de entrada $B(\beta) = B$, isto é, que seja fixa, as condições do Teorema 2 permitem uma adequação do sistema (18) à lei de controle chaveada que será proposta no Capítulo 3.

Especificações como alocação dos polos podem ser impostas para cada vértice de ambos os sistemas (1) e (18), permitindo alguma melhoria nas propriedades dinâmicas dos sistemas realimentados (5) e (20).

2.1.4 Alocação de polos - $\mathcal{D}$ -estabilidade

Uma propriedade desejável do sistema em malha fechada é que os polos estejam alocados em uma determinada região do plano complexo, para assegurar algumas propriedades dinâmicas como *overshoot* e tempo de estabelecimento do sistema.

Esta seção discute formulações baseadas em LMIs para uma ampla classe de regiões onde se deseja fazer um agrupamento de polos, bem como uma extensão do teorema de Lyapunov para estas regiões. As principais motivações para que se restrinja os polos em uma região localizada na metade esquerda do plano convexo é garantir uma resposta

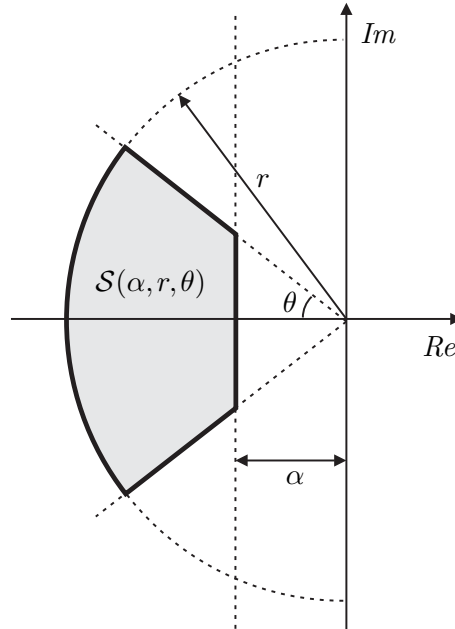
transitória satisfatória. As regiões de interesse podem incluir α -estabilidade ($\text{Re}(s) \leq -\alpha$), setores cônicos, entre outras regiões.

Uma região do plano complexo $\mathcal{S}(\alpha, r, \theta)$ é definida por Chilali e Gahinet (1996). Nesta região, os polos complexos de um sistema da forma $x \pm jy$ satisfazem

$$x < -\alpha < 0, \quad |x \pm jy| < r, \quad \tan(\theta)x < -|y| \quad (30)$$

como está ilustrado na Figura 1. Através da restrição dos polos nesta região, são garantidos uma taxa de decaimento α mínima, bem como um coeficiente de amortecimento mínimo $\zeta > \cos(\theta)$, e uma máxima frequência natural amortecida $\omega_d < r \sin(\theta)$, sendo $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$.

Figura 1 - Região $\mathcal{S}(\alpha, r, \theta)$



Fonte: Chilali e Gahinet (1996)

O objetivo é alocar os polos de cada vértice do politopo, para o sistema em malha fechada (5) dentro da região $\mathcal{S}$, garantindo um certo desempenho para a resposta transitória.

Uma condição suficiente para restringir todos os autovalores de $(A(\beta) - B(\beta)K)$ na região $\mathcal{S}(\alpha, r, \theta)$ é dada pelo teorema a seguir.

Teorema 3. *O sistema em malha fechada (5), com a lei de controle $u(t) = -Kx(t)$ possui polos na região $\mathcal{S}(\alpha, r, \theta)$ se existir uma matriz simétrica definida positiva X e uma matriz M tais que*

$$A_i X + X A_i' - B_i M - M' B_i' + 2\alpha X < 0, \quad (31)$$

$$\begin{bmatrix} -rX & A_iX - B_iM \\ XA'_i - M'B'_i & -rX \end{bmatrix} < 0, \quad (32)$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)(A_iX + XA'_i - B_iM - M'B'_i) & \cos(\theta)(A_iX - XA'_i - B_iM + M^T B'_i) \\ \cos(\theta)(XA'_i - A_iX - M'B'_i + B_iM) & \sin(\theta)(XA'_i + A_iX - M'B'_i - B_iM) \end{bmatrix} < 0. \quad (33)$$

Demonstração. A demonstração é igual àquela detalhada por Chilali e Gahinet (1996), substituindo-se a matriz A pela matriz $(A(\beta) - B(\beta)K)$. $\square$

De maneira análoga à feita para o sistema com ganho K único, as restrições de $\mathcal{D}$ -estabilidade podem ser perfeitamente aplicadas para os sistemas com ganhos $K(\beta)$. O objetivo é alocar os polos de cada vértice do politopo, para o sistema em malha fechada (20) dentro da região $\mathcal{S}$, garantindo um certo limite para a resposta transitória.

Uma condição suficiente para restringir todos os autovalores de $(A(\beta) - BK(\beta))$ na região $\mathcal{S}(\alpha, r, \theta)$ é dada pelo teorema a seguir.

Teorema 4. *O sistema (20), com a lei de controle $u(t) = -K(\beta)x(t)$ possui polos na região $\mathcal{S}(\alpha, r, \theta)$ se existir uma matriz simétrica definida positiva X e matrizes M_i , $i \in \mathbb{K}_N$, tais que*

$$A_iX + XA'_i - BM_i - M'_iB' + 2\alpha X < 0, \quad (34)$$

$$\begin{bmatrix} -rX & A_iX - BM_i \\ XA'_i - M'_iB' & -rX \end{bmatrix} < 0, \quad (35)$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)(A_iX + XA'_i - BM_i - M'_iB') & \cos(\theta)(A_iX - XA'_i - BM_i + M'_iB') \\ \cos(\theta)(XA'_i - A_iX - M'_iB' + BM_i) & \sin(\theta)(XA'_i + A_iX - M'_iB' - BM_i) \end{bmatrix} < 0. \quad (36)$$

Demonstração. A demonstração decorre do Teorema 3, substituindo-se $(A(\beta) - B(\beta)K)$ por $(A(\beta) - BK(\beta))$. $\square$

3 PROJETO DE CONTROLE CHAVEADO $\mathcal{H}_\infty$

Neste capítulo é apresentada uma metodologia de chaveamento do ganho de realimentação do vetor de estado, que assegura também o critério desempenho $\mathcal{H}_\infty$. Este procedimento realiza uma busca do mínimo valor da derivada de uma função de Lyapunov quadrática. É demonstrado que a estratégia de chaveamento proposta, além de uma implementação simples, consegue oferecer uma maior flexibilização das LMIs, em comparação com métodos convencionais que também utilizam o controle $\mathcal{H}_\infty$.

3.1 PROJETO DO CONTROLADOR CHAVEADO $\mathcal{H}_\infty$

O propósito desta seção é projetar uma lei de controle chaveada, tal que o sistema (18) seja estável e também minimize o custo funcional $\mathcal{H}_\infty$.

3.1.1 Custo funcional $\mathcal{H}_\infty$

O custo funcional $\mathcal{H}_\infty$ é um importante índice de desempenho utilizado para quantificar a qualidade do projeto de controle de sistemas que utilizam alguma estratégia de chaveamento, uma vez que a norma $\mathcal{H}_\infty$ comumente utilizada na literatura não pode ser definida para estes sistemas. O custo funcional $\mathcal{H}_\infty$ é definido a seguir (DEAECTO; DAAFOUZ; GEROMEL, 2012)

$$J_\infty(\sigma) := \sup_{w \in \mathcal{L}_2} \frac{\|y\|_2^2}{\|w\|_2^2}, \quad (37)$$

sendo que σ representa a regra de chaveamento. É importante ressaltar que, quando a regra de comutação é fixa, $\sigma(t) = i$, i fixo, para todo $t \geq 0$, o custo funcional se iguala ao quadrado do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ do sistema (1). Entretanto, quando a função de comutação $\sigma(\cdot)$ é variante no tempo o custo (37) torna-se bastante difícil de calcular e, por este motivo, a ideia consiste em determinar um limitante superior do mesmo, ou seja,

$$\sup_{w \in \mathcal{L}_2} \frac{\|y\|_2^2}{\|w\|_2^2} < \gamma^2, \quad (38)$$

e certificar o desempenho do sistema através da minimização deste limitante.

3.1.2 Sistema com a matriz B fixa

Suponha que as desigualdades (21), do Teorema 2 sejam factíveis para todo $i \in \mathbb{K}_N$ e sejam os ganhos $K_i = M_i X^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_N$, e a matriz de Lyapunov $P = X^{-1}$.

Considere a lei de controle chaveada definida a seguir:

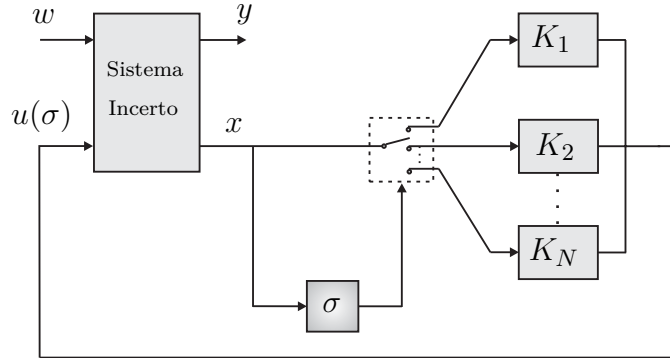
$$u(t) = u_\sigma(t) = -K_\sigma x(t), \quad (39)$$

sendo $\sigma : R_+ \rightarrow \mathbb{K}_N$ a regra de chaveamento tal que

$$\sigma(t) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} (-x(t)' P B K_i x(t)). \quad (40)$$

Esta função selecciona em um dado instante de tempo um ganho K_i , entre outros N ganhos disponíveis, que retorna o menor valor da derivada da função de Lyapunov quadrática, conforme o esquema da Figura 2.

Figura 2 - Esquema de controle chaveado



Fonte: Geromel e Deaecto (2009)

Substituindo a lei de controle chaveada (39) no sistema (20), o seguinte sistema em malha fechada é obtido:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_f(\beta)x(t) + H(\beta)w(t), & A_f(\beta) &= (A(\beta) - BK_\sigma), \\ y(t) &= C_f(\beta)x(t) + G(\beta)w(t), & C_f(\beta) &= (C(\beta) - DK_\sigma). \end{aligned} \quad (41)$$

A seguir são propostas condições de estabilidade para o sistema (41) utilizando a lei de controle (39).

Teorema 5. *Suponha que as condições do Teorema 2, relativas ao sistema (20) com a lei de controle (19), sejam satisfeitas e obtenha $K_i = M_i X^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_r$ e $P = X^{-1}$. Então a lei de controle chaveada (39)-(40) torna o ponto de equilíbrio $x = 0$, do sistema (20), assintoticamente estável e garante $J_\infty(\sigma) \leq \sqrt{\mu}$.*

Demonstração. Considere a função de Lyapunov quadrática $v(x) = x'Px$. Defina $\dot{v}_{\beta(t)}(x(t))$ e $\dot{v}_{\sigma(t)}(x(t))$ as derivadas da função de Lyapunov, em relação ao tempo, para os sistemas (20) e (41), com as leis de controle (19) e (39), respectivamente. Então, segue que

$$\begin{aligned}\dot{v}_{\sigma(t)}(x(t)) &= 2x(t)'P(A(\beta)x(t) + Bu_{\sigma(t)} + H(\beta)w(t)) \\ &= 2x(t)'PA(\beta)x(t) - 2x(t)'PBK_{\sigma(t)}x(t) + 2x(t)'PH(\beta)w(t).\end{aligned}\quad (42)$$

De (3), sabe-se que $\sum_{i=1}^N \beta_i = 1$ e $\beta_i \geq 0$, $i \in \mathbb{K}_N$. Assim, note que

$$\min_{i \in \mathbb{K}_N} \{x(t)'PB(-K_i)x(t)\} \leq x(t)'PB\left(-\sum_{i=1}^N \beta_i K_i\right)x(t). \quad (43)$$

Logo,

$$\begin{aligned}\dot{v}_{\sigma(t)}(x(t)) &= 2x(t)'P(A(\beta)x(t) + H(\beta)w(t)) + 2 \min_{i \in \mathbb{K}_N} \{x(t)'PB(-K_i)x(t)\} \\ &\leq 2x(t)'P(A(\beta)x(t) + H(\beta)w(t)) + 2x(t)'PB\left(-\sum_{i=1}^N \beta_i K_i\right)x(t) \\ &= 2x(t)'P(A(\beta) - BK(\beta))x(t) + H(\beta)w(t) \\ &= 2x(t)'P(A(\beta)x(t) + Bu_\beta + H(\beta)w(t)) = \dot{v}_\beta(x(t)).\end{aligned}\quad (44)$$

Portanto,

$$\dot{v}_{\sigma(t)}(x(t)) \leq \dot{v}_\beta(x(t)). \quad (45)$$

De, (45) segue que

$$\dot{v}_{\sigma(t)}(x(t)) + y(t)'y(t) - \gamma^2 w(t)'w(t) \leq \dot{v}_\beta(x(t)) + y(t)'y(t) - \gamma^2 w(t)'w(t). \quad (46)$$

Tendo em vista que $\dot{v}_\beta(x) = \dot{v}(x)$, decorrente da demonstração do Teorema 2, equações (27)-(29), então tem-se de (46) que a factibilidade da LMI (21) garante que o sistema (41), com a lei de controle chaveada (39)-(40) obtenha $J_\infty(\sigma) \leq \sqrt{\mu}$. $\square$

3.1.3 Sistema com a matriz $B(\beta)$ utilizando integrador

É notável que a regra de chaveamento (40), por exigir que a matriz B seja fixa, tem sua aplicação restrita apenas aos subsistemas descritos em (18). Contudo, é possível reduzir essa restrição, utilizando-se uma formulação com integrador, ao custo de se aumentar a dimensão do sistema.

Para o sistema (1), considere a nova variável, $v \in \mathbb{R}^m$ como sendo a derivada temporal da entrada de controle $u(t) \in \mathbb{R}^m$. Definindo $x_{n+l}(t)$ e $v_l(t)$, tais que, $\dot{x}_{n+l}(t) = \dot{u}_l(t) =$

$v_l(t)$, $l = 1, 2, \dots, m$ e reescrevendo o sistema (1), obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\beta)x(t) + B(\beta)u(t) + H(\beta)w(t), \\ \dot{x}_{n+1}(t) = v_1, \\ \vdots \\ \dot{x}_{n+m}(t) = v_m, \\ y(t) = C(\beta)x(t) + Du(t) + G(\beta)w(t), \end{cases} \quad (47)$$

ou de forma equivalente

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \hat{A}(\beta)\hat{x}(t) + \hat{B}v(t) + \hat{H}(\beta)w(t) \\ \hat{y} &= \hat{C}(\beta)\hat{x}(t) + \hat{G}(\beta)w(t) \end{aligned} \quad (48)$$

sendo

$$\hat{x}(t) = [x' \ x_{n+1} \dots x_{n+m}]', \quad \hat{A}(\beta) = \begin{bmatrix} A(\beta) & B(\beta) \\ 0_{m \times n} & 0_{m \times m} \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ I_{m \times m} \end{bmatrix}, \quad (49)$$

$$\hat{H}(\beta) = \begin{bmatrix} H(\beta) \\ 0_{m \times p} \end{bmatrix}, \quad \hat{C}(\beta) = \begin{bmatrix} C(\beta) & D \end{bmatrix} \text{ e } \hat{G}(\beta) = G(\beta). \quad (50)$$

Das considerações acima, note que o sistema (48) é similar ao sistema (41), podendo-se adotar o procedimento estabelecido anteriormente para projetar a lei de controle chaveada (39)-(40).

3.2 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

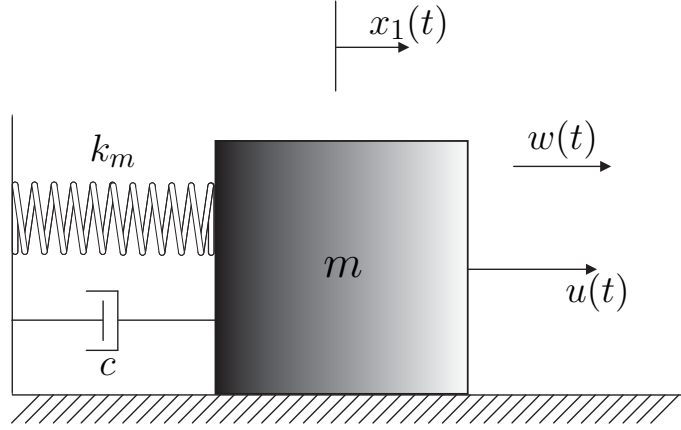
3.2.1 Exemplo 1: Sistema massa-mola-amortecedor

Considere o sistema massa-mola-amortecedor com um grau de liberdade apresentado na Figura 3, desprezando-se o atrito da massa com a superfície e supondo que a constante de elasticidade seja linear (SILVA, 2009).

No sistema da Figura 3, $x_1(t)$ é o deslocamento da massa m , $u(t)$ o sinal de controle, $w(t)$ é o distúrbio externo, c é o amortecedor e k_m é a constante da mola.

O problema consiste no controle de vibrações da massa m , através do sinal de controle $u(t)$. Este sistema é submetido a um sinal de distúrbio externo $w(t)$ na forma de uma varredura senoidal de amplitude de $2N$ e média zero, iniciando em $5rad/s$ e terminando em $350rad/s$, em um tempo de duração de 10 segundos (CABELLO, 2009).

Figura 3 - Sistema massa-mola-amortecedor



Fonte: Elaboração do próprio autor

O sistema é descrito pela seguinte realização em espaço de estados:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\beta)x(t) + Bu(t) + H(\beta)w(t), \quad x(0) = 0, \\ y(t) &= C(\beta)x(t), \end{aligned} \quad (51)$$

sendo

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_m}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} w(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (52)$$

sendo que esta equação corresponde à equação (18), considerando-se G e D iguais a zero.

A massa do sistema é $m = 1\text{kg}$ e a constante da mola $k_m = 100\text{N/m}$. O amortecedor c está sujeito a quebra e, portanto possui um parâmetro incerto, pertencente ao intervalo $0 \leq c \leq 0,2\text{Ns/m}$. Deste modo, o sistema é constituído de dois vértices politópicos, conforme descritos abaixo.

- Vértice 1 ($c = 0,2\text{Ns/m}$):

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100 & -0,2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = B, \quad H_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad (53)$$

- Vértice 2 ($c = 0$):

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = B_1 = B, \quad H_1 = H_2, \quad C_1 = C_2. \quad (54)$$

O objetivo é projetar um controlador que minimize o limitante $\mathcal{H}_\infty$ para rejeitar a vibração da massa m em relação à entrada do distúrbio e também satisfazer as restrições do lugar dos polos na região $\mathcal{S}(\alpha, r, \theta)$, para todo $i \in \mathbb{K}_N$. Foram considerados os resultados referentes aos Teoremas 1 e 3, formulados através do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mu \\ \text{s.a} \quad & X = X^T > 0, \\ & LMIs \text{ (15) e (31) -- (33)}. \end{aligned} \tag{55}$$

Os parâmetros da região $\mathcal{S}$, das LMIs (55), estão mostrados na Tabela 1:

Tabela 1 - Parâmetros da
 $\mathcal{D}$ -Estabilidade

Parâmetro	Valor
α	0,3
r	1
θ	$(15\pi)/180$

Fonte: Dados da pesquisa do autor

Considerando o problema de otimização (55) e utilizando o *software* MATLAB por meio do solver *LMILab*, a solução encontrada é factível, fornecendo o valor do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ igual a $\gamma = 5,6726$ e os valores da matriz X e do ganho K , apresentados abaixo:

$$X = \begin{bmatrix} 0,5064 & -0,2600 \\ -0,2600 & 0,1736 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} -99,6987 & 1,0988 \end{bmatrix}. \tag{56}$$

De maneira análoga, foram considerados os resultados referentes aos Teoremas 2 e 4, com os valores da Tabela 1, formulados através do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mu \\ \text{s.a} \quad & X = X^T > 0, \\ & LMIs \text{ (21) e (34) -- (36)}. \end{aligned} \tag{57}$$

Considerando o problema de otimização (57), a solução é factível, fornecendo o valor do custo funcional $\mathcal{H}_\infty$ igual a $\gamma = 1,9468$ e os valores da matriz X e os valores dos ganhos K_1 e K_2 , apresentados abaixo:

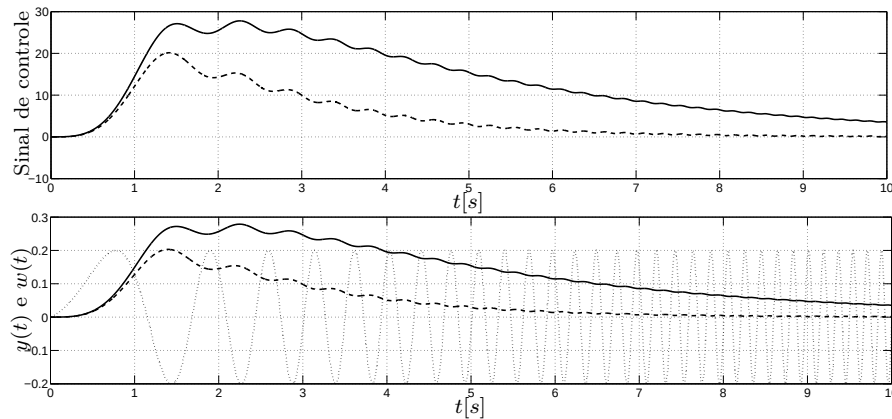
$$X = \begin{bmatrix} 1,6702 & -1,5061 \\ -1,5061 & 1,5161 \end{bmatrix}, \tag{58}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -99,1333 & 1,6034 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} -99,1333 & 1,8034 \end{bmatrix}. \quad (59)$$

Analisando os resultados, observa-se que método baseado no chaveamento do ganho reduziu o custo obtido com o método clássico em cerca de 65%, o que significa uma melhoria significativa no índice de desempenho do sistema.

A Figura 4 apresenta o gráfico do sinal de controle $u(t)$, utilizando o método existente, Teoremas 1 e 3, e $u_\sigma(t)$, utilizando o método proposto, Teoremas 5 e 4. Na figura inferior, são apresentados a saída $y(t)$ e o distúrbio externo $w(t)$, para os dois métodos. Verifica-se que o método que utiliza os ganhos chaveados é válido e eficaz e, além disso, fornece respostas transitórias mais amortecidas e menos oscilatórias quando comparado com o método clássico. A Figura 5 ilustra as regiões de alocação de polos, sendo que a figura da esquerda trata do método que utiliza o ganho fixo, Teorema 3, e a figura da direita, aborda o método que utiliza os ganhos chaveados, Teorema 4, respectivamente.

Figura 4 - Sinal de controle e saída $y(t)$: método dos ganhos chaveados (linha tracejada), método do ganho fixo (linha contínua) e distúrbio (linha pontilhada)

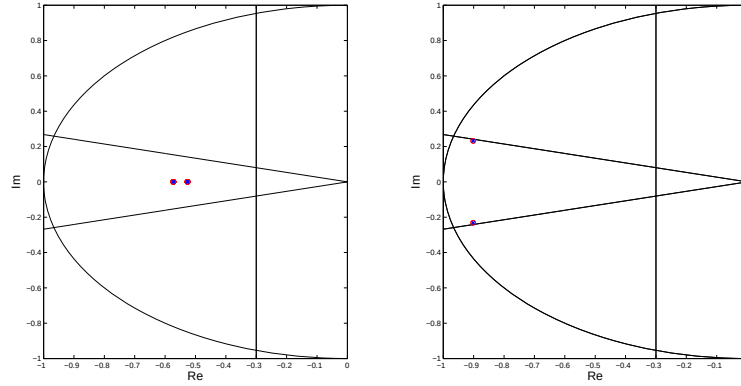


Fonte: Elaboração do próprio autor

3.2.2 Exemplo 2: Helicóptero 3-DOF

Considere o helicóptero com três graus de liberdade mostrado na Figura 6. Dois motores DC estão montados nas extremidades de uma haste retangular e acionam duas hélices propulsoras. Os eixos dos motores são paralelos entre si, sendo o vetor de empuxo normal em relação à haste. A haste do helicóptero está suspensa por uma junta na extremidade de um braço e está livre para inclinação em torno do seu centro (QUANSER, 2002).

Figura 5 - Região de alocação dos polos para os dois métodos



Fonte: Elaboração do próprio autor

Figura 6 - Helicóptero 3-DOF da Quanser



Fonte: Buzachero (2010)

O braço é conectado por uma junta 2-DOF e é livre para inclinar e guinar. Na extremidade oposta do braço existe um contrapeso que torna a massa efetiva leve o suficiente para viabilizar que os motores levanten o helicóptero. O esquema da Figura 7 ilustra o funcionamento do modelo. Uma tensão elétrica maior aplicada ao motor dianteiro, representada pela tensão (V_f) provoca uma inclinação positiva, enquanto que uma tensão elétrica maior aplicada ao motor traseiro, representada pela tensão (V_b) provoca uma inclinação negativa (ângulo pitch (ρ)). Uma voltagem positiva nos dois motores causa uma elevação de todo o corpo (ângulo elevation (ε) do braço). Se o corpo inclina, o vetor impulsão resulta no deslocamento do corpo (ângulo travel (λ) do braço) (QUANSER, 2002). As variáveis ξ e δ representam as integrais dos erros dos ângulos de elevação e deslocamento, respectivamente, ou seja:

$$\xi = \int_0^t (\varepsilon - \varepsilon_{ref}) dt \quad e \quad \delta = \int_0^t (\lambda - \lambda_{ref}) dt, \quad (60)$$

$$\begin{aligned}
B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{l_a k_f}{m_w l_w^2 + 2m_f l_a^2} & \frac{l_a k_f}{m_w l_w^2 + 2m_f l_a^2} \\ \frac{1}{2} \frac{k_f}{m_f l_h} & -\frac{1}{2} \frac{k_f}{m_f l_h} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{mg}{J_e} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{63}$$

Tabela 2 - Parâmetros do helicóptero

Constante da força de propulsão da hélice	k_f	0,1188
Massa do corpo do helicóptero (Kg)	m_h	1,15
Massa do contra-peso (Kg)	m_w	1,87
Massa do conjunto da hélice dianteira (Kg)	m_f	$m_h/2$
Massa do conjunto da hélice traseira (Kg)	m_b	$m_h/2$
Distância: eixo de pitch - cada motor (m)	l_h	$7 \times 0,0254$
Distância: eixo de elev. - helicóptero (m)	l_a	$26 \times 0,0254$
Distancia: eixo de elev. - contra-peso (m)	l_w	$18,5 \times 0,0254$
Constante gravitacional (m/s^2)	g	9,81
Momento de inércia sobre o eixo de elevação ($Kg(m)^2$)	J_e	0,91
Massa das peças do conjunto de massa ativa (Kg)	m	0,154

Fonte: Buzachero (2010)

Para adicionar uma falha estrutural ao sistema do helicóptero, implementou-se uma queda de 30% da potência do motor traseiro, através da inserção de uma chave temporizada conectada a um amplificador com ganho de 0,7, atuando diretamente na tensão de atuação sobre o motor. Assim, constitui-se um politopo de dois vértices com uma incerteza na matriz de entrada do sistema do helicóptero, atuando sobre a tensão dianteira entre $0,7V_b$ e V_b . Substituindo os valores da Tabela 2 em (62)-(63), obtém-se os vértices do politopo, descritos na sequência.

- Vértice 1 (Ganho igual a 1 no canal de V_b):

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,2304 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0858 & 0,0858 \\ 0,5810 & -0,5810 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (64)$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1,6601 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C_1 = C, G_1 = G;$$

- Vértice 2 (Ganho igual a 0,7 no canal de V_b):

$$A_2 = A_1, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0858 & 0,0601 \\ 0,5810 & -0,4067 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, H_2 = H_1, C_2 = C_1, G_2 = G_1. \quad (65)$$

Sabendo que a matriz B não é constante, será aplicado o método apresentado na Subseção 3.1.3. Para isso, serão definidas duas novas variáveis de estado $x_9(t)$, $x_{10}(t)$, v_1 e v_2 tal que $\dot{x}_9(t) = \dot{u}_1(t) = v_1$ e $\dot{x}_{10}(t) = \dot{u}_2(t) = v_2$. Portanto, $u(t) = [V_f \ V_b]' = [\int v_1(t)dt \ \int v_2(t)dt]'$ obtendo-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\beta) & B(\beta) \\ 0_{2 \times 8} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{8 \times 2} \\ I_{2 \times 2} \end{bmatrix} v(t) + \begin{bmatrix} H(\beta) \\ 0_{2 \times 1} \end{bmatrix} w(t), \quad (66)$$

$$\begin{bmatrix} y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(\beta) & 0_{3 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} + G(\beta)w(t),$$

podendo ser reescrito como

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= \hat{A}(\beta)\hat{x}(t) + \hat{B}v(t) + \hat{H}(\beta)w(t), \\ y(t) &= \hat{C}(\beta)\hat{x}(t) + \hat{G}(\beta)w(t).\end{aligned}\tag{67}$$

As novas matrizes de espaço de estados, lei de controle e os vértices estão definidos a seguir:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \rho & \lambda & \dot{\varepsilon} & \dot{\rho} & \dot{\lambda} & \xi & \delta & V_f & V_b \end{bmatrix}^T, \quad v(t) = \begin{bmatrix} V_f \\ V_b \end{bmatrix}, \tag{68}$$

• Vértice 1 (Ganho igual a 1 no canal de V_b):

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0858 & 0,0858 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5810 & -0,5810 \\ 0 & -1,2304 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1,6601 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \tag{69}$$

- Vértice 2 (Ganho igual a 0,7 no canal de V_b):

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0858 & 0,0601 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5810 & -0,4067 \\ 0 & -1,2304 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (70)$$

$$B_2 = B_1 = B, H_2 = H_1, C_2 = C_1, G_2 = G_1.$$

Considerando o sistema (66), o objetivo é obter um controlador robusto visando a minimização do limitante $\mathcal{H}_\infty$, calcular o ganho do controlador K e também satisfazer as restrições do lugar dos polos na região $\mathcal{S}(\alpha, r, \theta)$, para todo $i \in \mathbb{K}_N$. Foram considerados os resultados referentes aos Teoremas 1 e 3, formulados através do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mu \\ \text{s.a} \quad & X = X^T > 0, \\ & LMI\text{s (15) e (31) -- (33)}. \end{aligned} \quad (71)$$

Os parâmetros da região $\mathcal{S}$, das LMIs (71), estão mostrados na Tabela 3:

Tabela 3 - Parâmetros da $\mathcal{D}$ -Estabilidade

Parâmetros	Valor
α	0,4
r	3,5
θ	$(75\pi)/180$

Fonte: Dados da pesquisa do autor

Considerando o problema de otimização (71), a solução encontrada é factível, fornecendo o valor do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ igual a $\gamma = 1,5716$ e os valores da matriz X e do ganho K , apresentados abaixo:

$$X = 10^3*$$

$$\begin{bmatrix} 0,0015 & 0,0001 & 0,0002 & -0,0013 & -0,0003 & -0,0000 & -0,0010 & -0,0003 & -0,0052 & -0,0053 \\ 0,0001 & 0,0038 & 0,0000 & -0,0006 & -0,0082 & 0,0010 & 0,0002 & -0,0000 & -0,0111 & -0,0111 \\ 0,0002 & 0,0000 & 0,0011 & -0,0005 & -0,0010 & -0,0007 & 0,0001 & -0,0013 & 0,0063 & 0,0026 \\ -0,0013 & -0,0006 & -0,0005 & 0,0036 & 0,0053 & 0,0006 & 0,0001 & 0,0004 & -0,0358 & -0,0168 \\ -0,0003 & -0,0082 & -0,0010 & 0,0053 & 0,0449 & 0,0008 & -0,0005 & 0,0004 & -0,1559 & 0,0176 \\ -0,0000 & 0,0010 & -0,0007 & 0,0006 & 0,0008 & 0,0011 & -0,0000 & 0,0004 & -0,0159 & -0,0061 \\ -0,0010 & 0,0002 & 0,0001 & 0,0001 & -0,0005 & -0,0000 & 0,0019 & 0,0002 & 0,0039 & 0,0037 \\ -0,0003 & -0,0000 & -0,0013 & 0,0004 & 0,0004 & 0,0004 & 0,0002 & 0,0028 & -0,0051 & -0,0018 \\ -0,0052 & -0,0111 & 0,0063 & -0,0358 & -0,1559 & -0,0159 & 0,0039 & -0,0051 & 1,8899 & 0,4477 \\ -0,0053 & -0,0111 & 0,0026 & -0,0168 & 0,0176 & -0,0061 & 0,0037 & -0,0018 & 0,4477 & 0,5794 \end{bmatrix},$$

$$K =$$

$$\begin{bmatrix} 90,7166 & 160,3309 & -152,3721 & 75,5504 & 55,2309 & -213,1711 & 33,7185 & -40,7484 & 8,4332 & -2,9809 \\ 105,0961 & 13,0046 & -29,5899 & 91,1123 & -4,4183 & -40,9484 & 39,1043 & -6,1422 & 0,5392 & 4,4901 \end{bmatrix}.$$

$$\|K\| = 353,57.$$

De maneira análoga, foram considerados os resultados referentes aos Teoremas 2 e 4, com os valores da Tabela 3, formulados através do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mu \\ \text{s.a} \quad & X = X^T > 0, \\ & LMIs \text{ (21) e (34) - (36)}. \end{aligned} \tag{72}$$

Considerando o problema de otimização (72), a solução encontrada é factível, fornecendo o valor do custo funcional $\mathcal{H}_\infty$ igual $\gamma = 0,7622$ e os valores das matrizes X e dos ganhos K_1 e K_2 , apresentados abaixo:

$$X = 10^3*$$

$$\begin{bmatrix} 0,0020 & -0,0002 & -0,0000 & -0,0024 & 0,0022 & 0,0003 & -0,0008 & -0,0004 & -0,0210 & -0,0124 \\ -0,0002 & 0,0045 & -0,0001 & -0,0001 & -0,0114 & 0,0013 & 0,0002 & -0,0000 & 0,0175 & -0,0082 \\ -0,0000 & -0,0001 & 0,0013 & -0,0002 & -0,0006 & -0,0009 & 0,0002 & -0,0014 & 0,0045 & 0,0034 \\ -0,0024 & -0,0001 & -0,0002 & 0,0087 & -0,0018 & -0,0003 & -0,0002 & 0,0005 & -0,0566 & -0,0840 \\ 0,0022 & -0,0114 & -0,0006 & -0,0018 & 0,0532 & -0,0006 & -0,0007 & 0,0002 & -0,1603 & 0,0851 \\ 0,0003 & 0,0013 & -0,0009 & -0,0003 & -0,0006 & 0,0014 & -0,0002 & 0,0004 & -0,0026 & -0,0012 \\ -0,0008 & 0,0002 & 0,0002 & -0,0002 & -0,0007 & -0,0002 & 0,0016 & 0,0003 & 0,0086 & 0,0082 \\ -0,0004 & -0,0000 & -0,0014 & 0,0005 & 0,0002 & 0,0004 & 0,0003 & 0,0027 & -0,0037 & -0,0030 \\ -0,0210 & 0,0175 & 0,0045 & -0,0566 & -0,1603 & -0,0026 & 0,0086 & -0,0037 & 2,7489 & 1,9420 \\ -0,0124 & -0,0082 & 0,0034 & -0,0840 & 0,0851 & -0,0012 & 0,0082 & -0,0030 & 1,9420 & 3,0153 \end{bmatrix},$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 136,9111 & 103,3142 & -71,9783 & 97,4333 & 40,0590 & -114,2631 & 59,0034 & -16,2750 & 7,7199 & -2,3540 \\ 154,6792 & -53,1828 & 47,0949 & 114,3866 & -26,8745 & 56,1198 & 65,8035 & 16,9922 & -1,4232 & 7,2969 \end{bmatrix}, \quad (73)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 152,0755 & 142,8155 & -128,2469 & 99,7167 & 52,5611 & -181,4280 & 65,8426 & -33,3173 & 9,0787 & -2,6240 \\ 172,9187 & -5,7096 & -20,5717 & 117,1436 & -11,8435 & -24,6713 & 74,0421 & -3,5113 & 0,2111 & 4,7965 \end{bmatrix}, \quad (74)$$

$$\|K_1\| = 277,49, \quad \|K_2\| = 371,60.$$

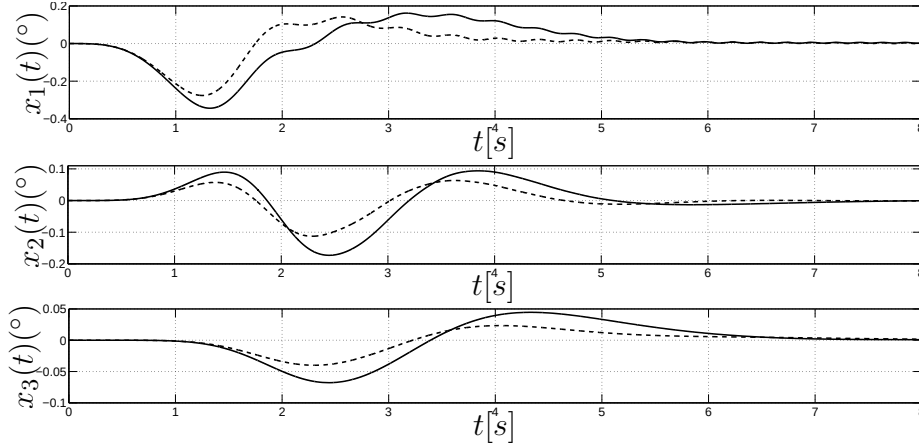
Analisando os resultados, nota-se que método proposto, que utiliza os ganhos chaveados, forneceu um custo menor quando comparado com o método clássico. Numericamente, essa redução é de cerca de 51%, o que significa uma melhoria significativa no índice de desempenho do sistema.

Para a simulação, foi considerado que a massa ativa do helicóptero está submetida a um sinal de distúrbio externo $w(t)$ na forma de uma varredura senoidal de amplitude de $2N$ e média zero, iniciando em $5rad/s$ e terminando em $350rad/s$, durante 10 segundos. A Figura 8 apresenta as trajetórias das variáveis de estado, $x_1(t)$ sendo o ângulo de elevação, $x_2(t)$ o ângulo de arfagem e $x_3(t)$ o deslocamento angular, representando as saídas do sistema, em função do tempo. As Figuras 9 e 10 apresentam, respectivamente, o sinal de controle $u(t)$, do método que utiliza o ganho fixo e $u_\sigma(t)$, do método que utiliza os ganhos chaveados, em função do tempo para a entrada $w(t)$. É verificado que o método que utiliza os ganhos chaveados é válido e eficaz e, além disso, o método dos ganhos chaveados forneceu respostas transitórias mais amortecidas com menores oscilações. Testes foram feitos no modelo real para verificar o comportamento do controlador chaveado atuando em sistemas físicos sujeitos a falhas.

3.2.2.1 Implementação experimental baseada no método dos ganhos chaveados

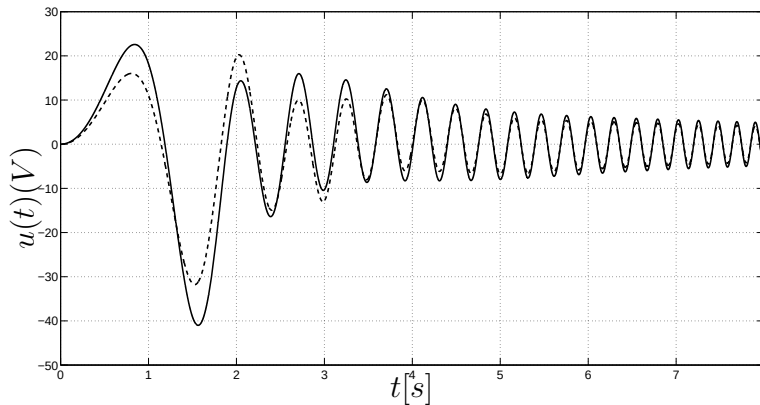
O propósito aqui é checar a validade do método proposto, baseado nos ganhos chaveados, para o controle do helicóptero. A trajetória do helicóptero foi dividida em três estágios. O primeiro estágio é de decolagem, em que o helicóptero sobe $27,5^\circ$ alcançando o ângulo de elevação $\varepsilon = 0^\circ$. No segundo estágio o helicóptero viaja 120° mantendo a mesma elevação, ou seja, o helicóptero alcança $\lambda = 120^\circ$ tendo como referência o ponto de decolagem. No terceiro estágio o helicóptero realiza a aterrissagem retomando o ângulo inicial $\varepsilon = -27,5^\circ$. No instante $t = 22s$, insere-se a perda de 30% do motor traseiro.

Figura 8 - Trajetória das variáveis de estado: $x_1(t)$: ângulo de elevação, $x_2(t)$: ângulo de arfagem e $x_3(t)$: deslocamento angular. Método dos ganhos chaveados (linha tracejada) e método do ganho fixo (linha contínua)



Fonte: Elaboração do próprio autor

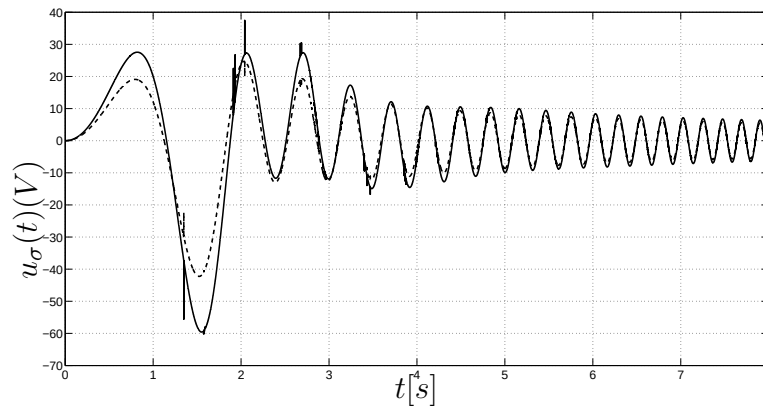
Figura 9 - Sinal de controle do método que utiliza o ganho fixo: $u_1(t)$ (linha tracejada) e $u_2(t)$ (linha contínua)



Fonte: Elaboração do próprio autor

Inserindo os valores dos ganhos K_1 e K_2 , equações (73) e (74) no software do modelo de bancada do helicóptero e considerando que a massa ativa do helicóptero está submetida a um sinal de distúrbio externo $w(t)$ na forma de uma onda senoidal de amplitude $10cm$ e frequência $0,3Hz$, foram colhidos os dados via MATLAB e verificado o real comportamento do sistema. Na Figura 11, pode-se observar o comportamento das variáveis de estado que representam as saídas do sistema, ou seja, elevação (ε), deslocamento angular (λ) e arfagem (ρ). Da Figura 12, observa-se que apesar de as curvas do sinal de controle serem muito ruidosas, é nítida a atuação do controlador no sistema, aplicando tensões positivas e negativas nos sinais de entrada dos motores garantindo a estabilidade do sistema. Verifica-se também que, apesar da presença do distúrbio $w(t)$ no sistema, o

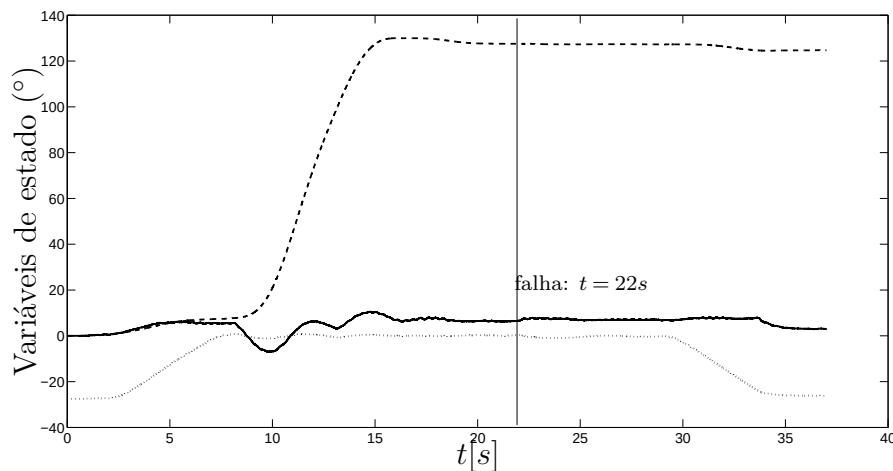
Figura 10 - Sinal de controle do método dos ganhos chaveados: $u_{\sigma 1}(t)$ (linha tracejada) e $u_{\sigma 2}(t)$ (linha contínua)



Fonte: Elaboração do próprio autor

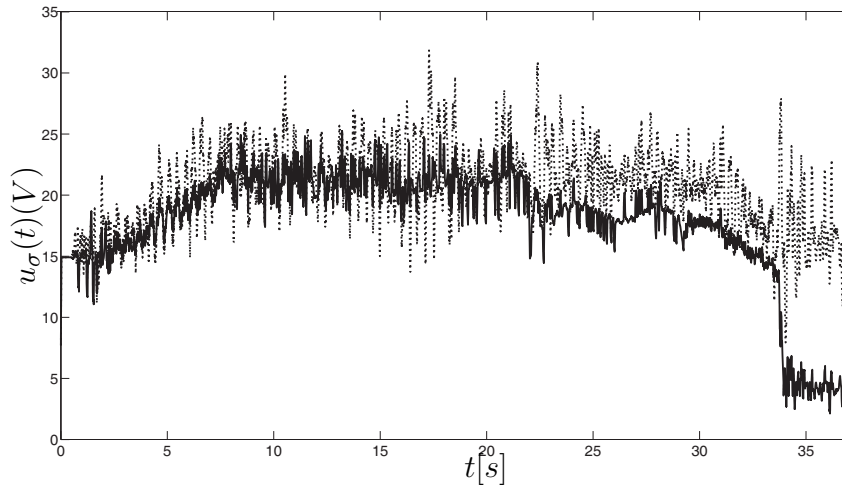
controlador chaveado o rejeita de maneira satisfatória. Por fim a Figura 13 mostra o gráfico da atuação da regra de chaveamento no sistema. O controlador K_1 é ativado quando a regra comuta para valor igual a 1 e o controlador K_2 é ativado no valor 0, de acordo com a regra proposta (40). Nota-se que uma maior intensidade de comutação entre os dois valores ocorre durante a decolagem e durante o pouso.

Figura 11 - Trajetória das variáveis de estado, baseada no método que utiliza os ganhos chaveados: $x_1(t)$: ângulo de elevação (linha pontilhada), $x_2(t)$: ângulo de arfagem (linha contínua) e $x_3(t)$: deslocamento angular (linha tracejada)



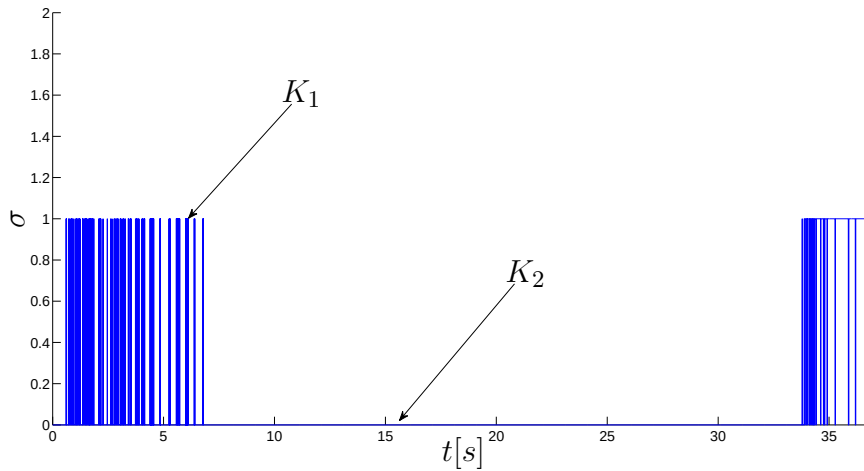
Fonte: Elaboração do próprio autor

Figura 12 - Sinal de controle $u_\sigma(t)$: tensão V_f (linha pontilhada) e tensão V_b linha contínua



Fonte: Elaboração do próprio autor

Figura 13 - Sinal de chaveamento



Fonte: Elaboração do próprio autor

3.3 CONCLUSÕES PARCIAIS

Neste capítulo, foi apresentada a estratégia de chaveamento do ganho de realimentação do vetor de estado, que assegura também o critério desempenho $\mathcal{H}_\infty$. Mais especificamente, a função de chaveamento apresentada seleciona em um dado instante de tempo um ganho K_i , entre outros N ganhos disponíveis, que retorna o menor valor da derivada da função de Lyapunov quadrática. Para retirar a restrição sobre a matriz B , mencionada anteriormente, é possível aplicar o método para sistemas que utilizam em sua estrutura um integrador. Foi comprovado através de exemplos que esta nova modelagem,

de chaveamento dos ganhos, oferece um melhor desempenho quando comparado com o controle robusto clássico, definido a partir de um ganho fixo de realimentação. Com a inserção de LMIs de restrições de alocação de polos, como a $\mathcal{D}$ -estabilidade, o método se mostra ainda mais valioso, uma vez que algumas propriedades dinâmicas são asseguradas.

4 PROJETO DE CONTROLE ROBUSTO $\mathcal{H}_\infty$ CHAVEADO UTILIZANDO AS DESIGUALDADES DE LYAPUNOV - METZLER

Neste capítulo, toda a formulação proposta será baseada nas desigualdades de Lyapunov-Metzler, definidas por Geromel e Colaneri (2006.), para projetar um controlador chaveado. A lei de controle proposta será composta de dois estágios, que utilizam duas regras de chaveamento distintas. Uma delas selecionará uma função de Lyapunov e posteriormente selecionará os ganhos que retornam o menor valor para a derivada da função de Lyapunov selecionada.

4.1 PROJETO DO CONTROLADOR CHAVEADO $\mathcal{H}_\infty$

4.1.1 Sistema com a matriz B fixa

Considere o sistema (20). A análise de estabilidade se dá por meio da escolha de uma função de Lyapunov quadrática por partes, isto é,

$$v(x) = \min_{j \in \mathbb{K}_N} (x' P_j x), \quad (75)$$

sendo P_j , $j \in \mathbb{K}_N$, matrizes simétricas positivas definidas. Também, será considerado o conjunto $M(x)$ definido como

$$M(x) = \{j \in \mathbb{K}_N : x^T P_j x \leq x^T P_i x, \forall i \in \mathbb{K}_N\}. \quad (76)$$

Define-se uma regra de chaveamento composta por dois estágios, sendo que o primeiro estágio seleciona uma matriz P_j , $j \in \mathbb{K}_N$, que minimiza a função de Lyapunov dada em (75) (GEROMEL; COLANERI, 2006.) e o segundo estágio é composto de uma regra similar àquela definida anteriormente em (40). Este esquema é ilustrado pela Figura 14.

Portanto, considere o controlador chaveado

$$u(t) = u_{\sigma\nu}(t) = -K_{\sigma\nu}x(t), \quad (77)$$

sendo

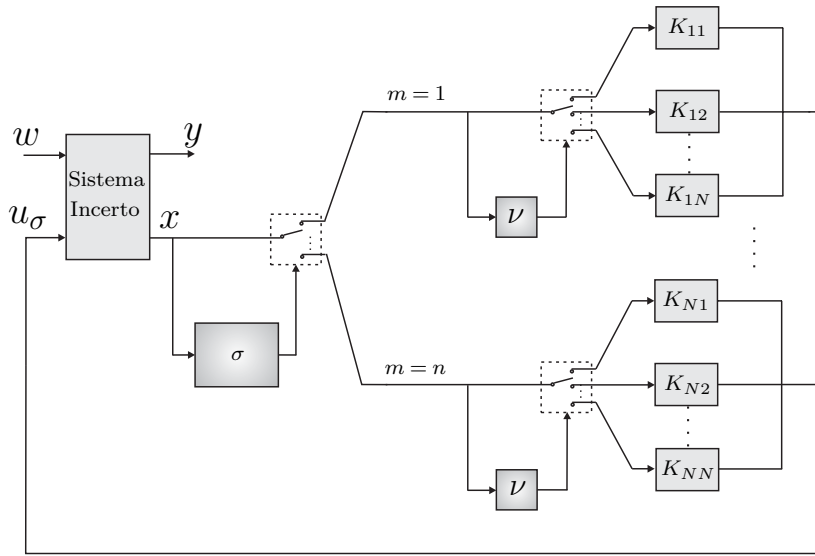
$$\sigma = \arg \min_{j \in \mathbb{K}_N} \{x(t)' P_j x(t)\}, \quad \nu = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} \{-x(t)' P_\sigma B K_{\sigma i} x(t)\}, \quad \sigma \in \mathbb{K}_N. \quad (78)$$

Substituindo (77) em (20), é obtido o sistema em malha fechada

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_f(\beta)x(t) + H(\beta)w(t), & A_f(\beta) &= (A(\beta) - BK_{\sigma\nu}), \\ y(t) &= C_f(\beta)x(t) + G(\beta)w(t), & C_f(\beta) &= (C(\beta) - DK_{\sigma\nu}). \end{aligned} \quad (79)$$

O objetivo é projetar uma lei de controle chaveada, tal que o sistema (79) seja estável e também minimize o custo funcional $J_\infty(\sigma)$.

Figura 14 - Esquema de controle com dois estágios



Fonte: Elaboração do próprio autor

Teorema 6. *Dado o escalar $\eta > 0$, se existirem um escalar $\mu > 0$ e matrizes $X_i = X_i'$ e matrizes M_{ji} , $j, i \in \mathbb{K}_N$, de dimensões adequadas, satisfazendo o seguinte problema de otimização*

$$\begin{aligned} \min \quad & \mu \\ \text{s.a} \quad & X_i = X_i' > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \text{He}\{A_i X_j - B M_{ji}\} - \eta X_j & H_i & X_j C_i' - M_{ji}' D' & \eta X_j \\ * & -\mu I & G_i' & 0 \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & -\eta X_i \end{bmatrix} < 0, \quad (80)$$

então a lei de controle (77)-(78) torna o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema (79) assintoticamente estável, com as matrizes de ganho de realimentação dadas por

$$K_{ji} = M_{ji} X_i^{-1} \quad (81)$$

e asseguram

$$J_\infty(\sigma) \leq \sqrt{\mu}. \quad (82)$$

Demonstração. Aplicando o complemento de Schur em relação a última linha e coluna de (80), a seguinte desigualdade é obtida:

$$\begin{bmatrix} \text{He}\{A_i X_j - B M_{ji}\} - \eta X_j + \eta X_j P_i X_j & H_i & X_j C'_i - M'_{ji} D'_i \\ * & -\mu I & G'_i \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (83)$$

sendo $\text{He}\{\cdot\}$ o operador hermitiano e $P_i = X_i^{-1}$. Reaplicando o complemento de Schur em (83), obtém-se

$$\begin{bmatrix} \text{He}\{A_i X_j - B M_{ji}\} + X_j C'_{fi} C_{fi} X_j - \eta X_j + \eta X_j P_i X_j & H_i + X_j C'_{fi} G_i \\ * & -\mu I + G'_i G_i \end{bmatrix} < 0, \quad (84)$$

sendo $C_{fi} = C_i - D K_{ji}$.

Definindo $X_j = P_j^{-1}$, $M_{ji} = K_{ji} X_j$, pré-multiplicando e pós-multiplicando (84) por $\text{diag}\{P_j, I\}$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \text{He}\{P_j A_i - P_j B K_{ji}\} + C'_{fi} C_{fi} + \eta(P_i - P_j) & P_j H_i + C'_{fi} G_i \\ * & -\mu I + G'_i G_i \end{bmatrix} < 0. \quad (85)$$

Pré-multiplicando as desigualdades (85) pelo vetor $[x' \ w'] \neq 0$ e pós-multiplicando pelo vetor $[x' \ w']' \neq 0$, para $\beta_i \geq 0$, $i \in \mathbb{K}_N$ e $\sum_{i=1}^N \beta_i = 1$, obtém-se

$$\begin{aligned} & x' \left(\sum_{i=1}^N \beta_i (A'_i P_j + P_j A_i - K'_{ji} B' P_j - P_j B K_{ji} + \eta(P_i - P_j) + C'_{fi} C_{fi}) \right) x \\ & + x' \left(\sum_{i=1}^N \beta_i (P_j H_i + C'_{fi} G_i) \right) w + w' \left(\sum_{i=1}^N \beta_i (H'_i P_j + G'_i C_{fi}) \right) x \\ & + w' \left(\sum_{i=1}^N \beta_i (-\gamma^2 I + G'_i G_i) \right) w < 0. \end{aligned} \quad (86)$$

Logo, de (86) e como $x'(P_i - P_j)x \geq 0$, pois $j \in M(x(t))$ e $\eta > 0$, tem-se

$$\begin{aligned} 0 & > x' \left(\sum_{i=1}^N \beta_i (A'_i P_j + P_j A_i - K_{ji}^T B' P_j - P_j B K_{ji} + C'_{fi} C_{fi}) \right) x \\ & + x' \left(\sum_{i=1}^N \beta_i (P_j H_i + C'_{fi} G_i) \right) w + w' \left(\sum_{i=1}^N \beta_i (H'_i P_j + G'_i C_{fi}) \right) x \\ & + w' \left(\sum_{i=1}^N \beta_i (-\gamma^2 I + G'_i G_i) \right) w, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2x'P_j(A(\beta)x + H(\beta)w) + \sum_{i=1}^N \beta_i \left(-x'K'_{ji}B'P_jx - x'P_jBK_{ji}x \right) + y'y - \gamma^2w'w \\
&\geq 2x'P_j(A(\beta)x + H(\beta)w) + 2 \min_{i \in \mathbb{K}_N} \left(-x'P_jBK_{ji}x \right) + y'y - \gamma^2w'w \\
&= 2x'P_j(A(\beta)x + H(\beta)w) + 2 \left(-x'P_jBK_{j\sigma}x \right) + y'y - \gamma^2w'w \\
&\geq \min_{j \in M(x)} \left\{ 2x'P_j(A(\beta)x + H(\beta)w) + 2 \left(-x'P_jBK_{j\sigma}x \right) \right\} + y'y - \gamma^2w'w \\
&= \min_{j \in M(x)} \{ \dot{x}'P_jx + x'P_j\dot{x} \} + y'y - \gamma^2w'w, \\
&\therefore D^+(v(x)) + y'y - \gamma^2w'w < 0, \tag{87}
\end{aligned}$$

sendo $D^+(v(x))$ definida como a derivada direcional à direita de uma trajetória qualquer do sistema.

Integrando ambos os lados de (87) de $t = 0$ a $t = \infty$, é assegurado que $J_\infty(\sigma) \leq \sqrt{\mu}$ para todo $w \in \mathcal{L}_2$. $\square$

4.1.2 Sistema com a matriz $B(\beta)$ utilizando integrador

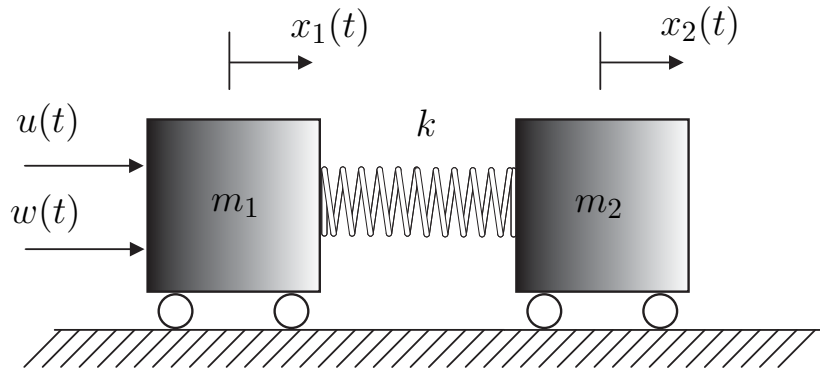
Assim como foi demonstrado na Subseção 3.1.3, pode-se reduzir a restrição da matriz B através da reestruturação do sistema, através de um integrador. Para isso, basta considerar o sistema (1), definindo as novas variáveis e reescrevendo o sistema.

4.2 EXEMPLO DE APLICAÇÃO

4.2.1 Exemplo 4: carro-mola

Considere o exemplo constituído por dois carros e uma mola, ilustrado na Figura 15 e já proposto, por exemplo, em Skafidas et al. (1999) e Reinelt (2000).

Figura 15 - Sistema carro-mola com dois graus de liberdade



Fonte: Reinelt (2000)

O sistema é descrito pela seguinte realização em espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} w(t), \quad (88)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}.$$

Os dois carros possuem massas nominais de $m_1 = 1Kg$ e $m_2 = 1Kg$ e estão conectados por uma mola de constante k .

A constante da mola é modelada como um parâmetro incerto pertencente ao intervalo $0,5 \leq k(t) \leq 2,0$. Os dois vértices são demonstrados abaixo:

- Vértice 1 ($k = 0,5N/m$):

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & -0,5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = B, \quad H_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (89)$$

- Vértice 2 ($k = 2N/m$):

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = B_1 = B, \quad H_1 = H_2, \quad C_1 = C_2. \quad (90)$$

O objetivo é projetar um controlador que minimize o limitante $\mathcal{H}_\infty$ para rejeitar a vibração da massa m_1 em relação à entrada do distúrbio. O distúrbio $w(t)$ possui a forma de um degrau de amplitude igual a 0,27 aplicado no tempo $t = 1s$. Foram considerados os resultados referentes ao Teorema 6, utilizando $\eta = 0,01$.

As condições do Teorema 6 são factíveis, fornecendo o valor do custo funcional $\mathcal{H}_\infty$, igual a $\gamma = 4,6940$ e os valores das matrizes X_1 , X_2 e dos ganhos K_{11} , K_{12} , K_{21} e K_{22} apresentados abaixo:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0,7036 & 0,7357 & -0,3266 & -0,1698 \\ 0,7357 & 1,2833 & -0,5532 & -1,1493 \\ -0,3266 & -0,5532 & 0,3291 & 0,2642 \\ -0,1698 & -1,1493 & 0,2642 & 6,6261 \end{bmatrix}, \quad (91)$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 9,9132 & 9,8971 & -1,6518 & -1,4730 \\ 9,8971 & 9,9644 & -1,7271 & -1,6713 \\ -1,6518 & -1,7271 & 0,4961 & 0,4505 \\ -1,4730 & -1,6713 & 0,4505 & 0,7086 \end{bmatrix}, \quad (92)$$

$$K_{11} = \begin{bmatrix} -39,0996 & 67,7763 & 56,1859 & 23,6019 \end{bmatrix}, \quad (93)$$

$$K_{12} = \begin{bmatrix} -39,1954 & 67,8158 & 56,0554 & 23,6067 \end{bmatrix}, \quad (94)$$

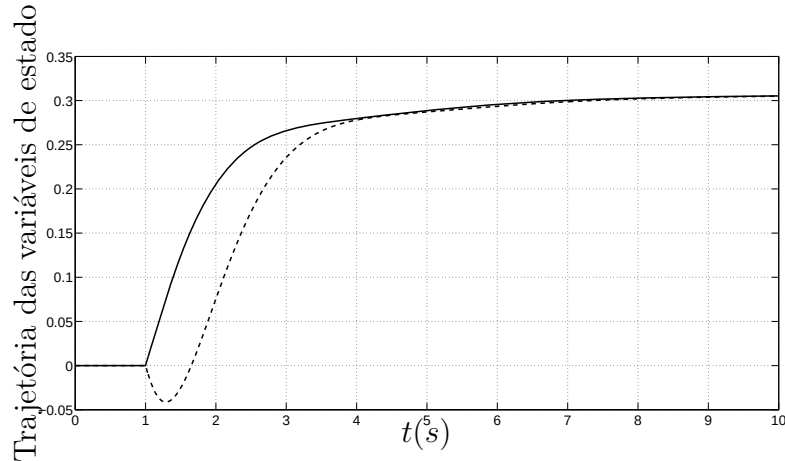
$$K_{21} = \begin{bmatrix} -496,4050 & 536,8515 & -26,9003 & 229,2961 \end{bmatrix}, \quad (95)$$

$$K_{22} = \begin{bmatrix} -496,4050 & 536,8515 & -26,9003 & 229,2961 \end{bmatrix}. \quad (96)$$

Nas Figuras 16 e 17 estão ilustrados os dois gráficos das simulações das trajetórias das variáveis de estado $x_1(t)$, $x_2(t)$ e do sinal de controle $u(t)$, respectivamente. Estas

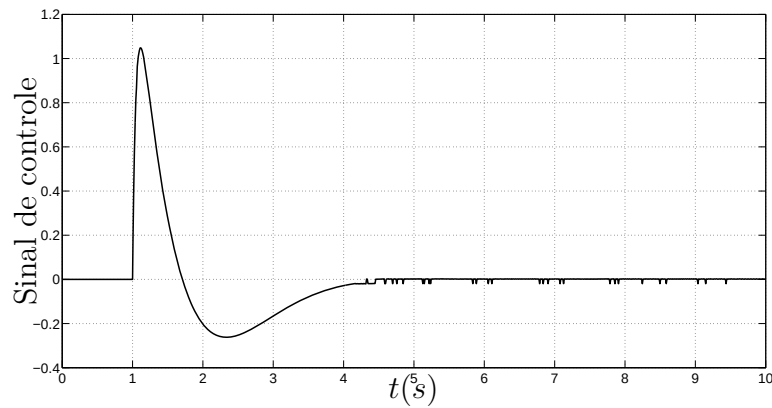
simulações mostram que as trajetórias convergem para o ponto de equilíbrio no instante $t = 6s$, utilizando-se um esforço de controle de valor igual a 1 no intervalo de $[1, 4]$ segundos e portanto, ilustram a eficiência deste método, diante do grande intervalo de incerteza na constante da mola e sob o efeito da entrada exógena.

Figura 16 - Trajetória das variáveis de estado. $x_1(t)$, (linha contínua) e $x_2(t)$, (linha tracejada)



Fonte: Elaboração do próprio autor

Figura 17 - Sinal de controle



Fonte: Elaboração do próprio autor

Uma pesquisa futura seria verificar se a generalização obtida neste capítulo pode proporcionar um custo $\mathcal{H}_\infty$ menor do que o obtido com o método proposto no Capítulo 3, baseado em funções de Lyapunov quadráticas.

4.3 CONCLUSÕES PARCIAIS

Neste capítulo, a regra de chaveamento apresentada no Capítulo 3 foi estendida para uma classe particular de matrizes de Lyapunov-Metzler dependentes de parâmetros. Nesse

caso, a lei de controle proposta foi composta de dois estágios, que utilizam duas regras de chaveamento distintas. A primeira destas regras seleciona uma função de Lyapunov enquanto que a segunda, posteriormente, seleciona o ganho que retorna o menor valor para a derivada da função de Lyapunov selecionada. Diferentemente do exposto por Deaecto (2010), aqui a formulação é dedicada ao projeto de controle $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas com incertezas politópicas. Porém é claramente possível que este método seja aplicado em sistemas chaveados com incertezas, bem como para outros sistemas. Foi demonstrado através de exemplo a validade e eficácia do método.

5 CONCLUSÕES

Os sistemas chaveados têm sido objeto de crescente interesse nas últimas décadas, por parte da comunidade científica, para análise de estabilidade e projeto de controle. Estes sistemas possuem algumas vantagens em relação aos sistemas não chaveados, como a melhoria do desempenho global. Dentro deste contexto, os sistemas com técnicas baseadas na função de Lyapunov quadrática e na função da Lyapunov quadrática por partes têm uma grande importância. Supondo que condições como robustez e atenuação de distúrbios sejam consideradas, o controle $\mathcal{H}_\infty$ é um campo promissor de pesquisa na teoria de controle, assim como o desempenho $\mathcal{H}_\infty$ é também de extrema importância.

Este trabalho se inicia com uma abordagem de resultados já consagrados e disponíveis na literatura, com formulações baseadas em termos de desigualdades matriciais lineares (LMIs). Destaque é dado ao projeto de controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ e ao projeto de controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ com escalonamento do ganho, com aplicação a uma subclasse de sistemas lineares tal que $B(\beta) = B$, para todo $\beta \in \Lambda_N$. Esta formulação é de essencial importância para a regra de chaveamento proposta neste trabalho.

A contribuição principal deste trabalho, uma estratégia de chaveamento do ganho de realimentação do vetor de estado, assegura também o desempenho $\mathcal{H}_\infty$. Mais especificamente, a função de chaveamento apresentada seleciona em um dado instante de tempo um ganho K_i , entre N ganhos disponíveis, o qual retorna o menor valor da derivada da função de Lyapunov quadrática. Para remover a restrição sobre a matriz B , mencionada anteriormente, é possível aplicar a regra para sistemas que utilizam em sua estrutura um integrador. Foi comprovado através de exemplos, inclusive através de abordagens que tratam de falhas estruturais, aplicados no controle de um helicóptero de bancada, que esta nova modelagem, de chaveamento dos ganhos, oferece um desempenho melhor quando comparado com o controle robusto clássico definido a partir do método clássico, a partir de um ganho fixo de realimentação. Com a inserção de LMIs de restrições de alocação de polos, como a $\mathcal{D}$ -estabilidade, o método se mostra ainda mais valioso, uma vez que algumas propriedades dinâmicas são asseguradas.

A regra de chaveamento foi estendida para uma classe particular de matrizes de Lyapunov-Metzler dependentes de parâmetros. Nesse caso, a lei de controle proposta foi composta de dois estágios, que utilizam duas regras de chaveamento distintas. A primeira destas regras seleciona uma função de Lyapunov enquanto que a segunda, posteriormente, seleciona o ganho que retorna o menor valor para a derivada da função de

Lyapunov selecionada. Diferentemente do exposto por Deaecto (2010), aqui a formulação é dedicada ao projeto de controle $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas com incertezas politópicas. Porém é claramente possível que este método, com os dois estágios mencionados, seja aplicado em sistemas chaveados com incertezas, bem como para outros sistemas. Foi demonstrado através de exemplo a validade e eficácia do método.

Seguindo pela mesma ideia aqui desenvolvida, é possível e imediato obter também resultados com a norma $\mathcal{H}_2$, utilizando LMIs. Outra ideia interessante é investigar o uso da regra de chaveamento, com algumas adequações em sua estrutura, em sistemas discretos. Um projeto mais ambicioso seria a remodelagem matemática na estrutura da regra de chaveamento, possibilitando sua aplicação para qualquer sistema, isto é, uma regra que se aplica inclusive a sistemas com a matriz $B(\beta)$ não fixa, e eliminando a necessidade de sistemas com integrador. Estes pontos serão investigados em trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

- APKARIAN, P.; ADAMS, R. J. Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, Piscataway, v. 6, n. 1, p. 21–32, Jan. 1998.
- BERNUSSOU, J.; PERES, P. L. D.; GEROMEL, J. C. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, v. 13, n. 1, p. 65–72, 1989.
- BOYD, S.; EL GHAOU, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. Philadelphia: SIAM, 1994. (Studies in Applied Mathematics).
- BRANICKY, M. S. Multiple lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Piscataway, v. 43, n. 4, p. 475–482, Apr. 1998.
- BUZACHERO, L. F. S. **Otimização de controladores robustos de sistemas dinâmicos sujeitos a falhas estruturais**. 2010. 72 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Unversidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2010.
- CABELLO, R. V. C. **Controle H-infinito de vibrações com restrições no esforço de controle**. 2009. 111 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009.
- CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; COVACIC, M. R. Variable-structure control design of switched systems with an application to a DC-DC power converter. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, Piscataway, v. 56, n. 9, p. 3505–3513, Sept. 2009.
- CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; COVACIC, M. R.; SEIXAS, F. J. M. de; FARIA, F. A.; JUNIOR, E. I. M. Implementation of a DC-DC converter with variable structure control of switched systems. In: IEEE INTERNATIONAL ELECTRIC MACHINES DRIVES CONFERENCE-IEMDC, 8., 2011, Niagara Falls. **Proceedings...** Piscataway: IEEE, 2011. p. 872–877.
- CHILALI, M.; GAHINET, P. $\mathcal{H}_\infty$ design with pole placement constraints: an LMI approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Piscataway, v. 41, n. 3, p. 358–367, Mar. 1996.
- DEAECTO, G. S. **Projeto de controladores dinâmicos com comutação**. 2010. 161 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia Eletrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2010.
- DEAECTO, G. S.; DAAFOUZ, J.; GEROMEL, J. C. $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ performance optimization of singularly perturbed switched systems. **SIAM Journal on Control and Optimization**, Philadelphia, v. 50, n. 3, p. 1597–1615, 2012.
- DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C. Controle de sistemas lineares com comutação.

SBA: Controle & Automação: Revista da Sociedade Brasileira de Automática, Campinas, v. 19, n. 4, p. 431–444, Out./Dez. 2008.

DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C.; DAAFOUZ, J. On $\mathcal{H}_\infty$ control design of continuous-time switched linear systems. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL-CDC, 49., 2010, Atlanta. **Proceedings...** Piscataway: IEEE, 2010. p. 7345–7350.

GAHINET, P.; NEMIROVSKII, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. The LMI control toolbox. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 33., 1994, Lake Buena Vista. **Proceedings...** Piscataway: IEEE, 1994. v. 3, p. 2038–2041.

GEROMEL, J. C.; COLANERI, P. Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems. **SIAM Journal on Control and Optimization**, Philadelphia, v. 45, n. 5, p. 1915–1930, Dec. 2006.

GEROMEL, J. C.; DEAECTO, G. S. Switched state feedback control for continuous-time uncertain systems. **Automatica**, Kidlington, v. 45, n. 2, p. 593–597, 2009.

HESPANHA, J. P. Root-mean-square gains of switched linear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Piscataway, v. 48, n. 11, p. 2040–2045, 2003.

HU, T.; MA, L.; LI, Z. On several composite quadratic Lyapunov functions for switched systems. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 45., 2006, San Diego. **Proceedings...** Piscataway: IEEE, 2006. p. 113–118.

JI, Z.; GUO, X.; WANG, L.; XIE, G. Robust $\mathcal{H}_\infty$ control and stabilization of uncertain switched linear systems: a multiple Lyapunov functions approach. **Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, New York, v. 128, n. 3, p. 696–700, 2006.

JI, Z.; WANG, L.; XIE, G. Quadratic stabilization of switched systems. **International Journal of Systems Science**, Oxfordshire, v. 36, n. 7, p. 395–404, 2005.

LALL, S. G.; DULLERUD, G. E. H_∞ synthesis for multi-rate hybrid systems. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 36., 1997, San Diego. **Proceedings...** Piscataway: IEEE, 1997. v. 3, p. 2035–2040.

MAZUMDER, S. K.; NAYFEH, A. H.; BOROJEVIC, A. Robust control of parallel dc-dc buck converters by combining integral-variable-structure and multiple-sliding-surface control schemes. **IEEE Transactions on Power Electronics**, Piscataway, v. 17, n. 3, p. 428–437, May 2002.

MONTAGNER, V. F.; OLIVEIRA, R. C. L.; PERES, P. L.; BLIMAN, P. A. Linear matrix inequality characterisation for $\mathcal{H}_\infty$ and $\mathcal{H}_2$ guaranteed cost gain-scheduling quadratic stabilisation of linear time-varying polytopic systems. **IET Control Theory & Applications**, Stevenage, v. 1, n. 6, p. 1726–1735, Nov. 2007.

MONTAGNER, V. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; LEITE, V. J. S.; PERES, P. L. D. LMI approach for $\mathcal{H}_\infty$ linear parameter-varying state feedback control. **IEE Proceedings Control Theory and Applications**, Stevenage, v. 152, n. 2, p. 195–201, Mar. 2005.

- NIE, H.; ZHAO, J. Hybrid state feedback $\mathcal{H}_\infty$ robust control for a class of linear systems with time-varying norm-bounded uncertainty. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2003, Denver. **Proceedings...** Piscataway: IEEE, 2003. v. 4, p. 3608–3613.
- QUANSER. **3-DOF helicopter reference manual**. Markham, 2002. 35 p.
- REINELT, W. Robust control of a two-mass-spring system subject to its input constraints. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2000, Chicago. **Proceedings...** Piscataway: IEEE, 2000. v. 3, p. 1817–1821.
- RUGH, W. J.; SHAMMA, J. S. Research on gain scheduling. **Automatica**, Kidlington, v. 36, n. 10, p. 1401–1425, 2000.
- SHAHRUZ, S.; BEHTASH, S. Design of controllers for linear parameter-varying systems by the gain scheduling technique. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, Maryland Heights, v. 168, n. 1, p. 195–217, 1992.
- SILVA, E. R. P. da. **Controle robusto de sistemas não-lineares sujeitos a falhas estruturais**. 2009. 81 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2009. Disponível em: <<http://www.athena.biblioteca.unesp.br/exlibris/bd/bis/33004099080P0/2009>>. Acesso em: 6 Set. 2009.
- SILVA, J. H. P.; JUNIOR, E. I. M.; SOUZA, W.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R.; MOREIRA, M. Controle $\mathcal{H}_\infty$ com chaveamento do ganho da realimentação do vetor de estado para sistemas lineares incertos. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA - CBA, 19., 2012. **Anais...** Campina Grande: SBA, 2012.
- SKAFIDAS, E.; EVANS, R. J.; SAVKIN, A. V.; PETERSEN, I. R. Stability results for switched controller systems. **Automatica**, Kidlington, v. 35, n. 4, p. 553–564, 1999.
- WICKS, M. A.; PELETIES, P.; DECARLO, R. A. Construction of piecewise Lyapunov functions for stabilizing switched systems. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 33., 1994, Lake Buena Vista. **Proceedings...** Piscataway: IEEE, 1994. v. 4, p. 3492–3497.
- ZHAI, G.; HU, B.; YASUDA, K.; MICHEL, A. N. Disturbance attenuation properties of time-controlled switched systems. **Journal of the Franklin Institute**, Kidlington, v. 338, n. 7, p. 765–779, 2001.
- ZHAI, G.; LIN, H.; ANTSAKLIS, P. J. Quadratic stabilizability of switched linear systems with polytopic uncertainties. **International Journal of Control**, Oxfordshire, v. 76, n. 7, p. 747–753, 2003.
- ZHAO, J.; HILL, D. J. On stability, $\mathcal{L}_2$ gain and $\mathcal{H}_\infty$ control for switched systems. **Automatica**, Kidlington, v. 44, n. 5, p. 1220–1232, 2008.