Angel Eduardo Obispo Vásquez

Férmions em campos externos em 1+1 e 2+1 dimensões

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para a obtenção do Titulo de Mestre em Física na área de Partículas e Campos

Orientador: Prof. Dr. Marcelo B. Hott.

Guaratinguetá

2012

Obispo Vásquez, Ángel Eduardo
V335f Férmions em campos externos em 1+1 e 2+1 dimensões / Angel Eduardo Obispo Vasquez – Guaratinguetá : [s.n], 2012.
82 f : il.
Bibliografia: f. 80-82

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2012.
Orientador: Prof. Dr. Marcelo Batista Hott

1. Teoria quântica de campos 2. Férmions I. Título

CDU 530.145(043)

unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

ANGEL EDUARDO OBISPO VÁSQUEZ

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

"MESTRE EM FÍSICA"

PROGRAMA: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

Profª. Drª. Silvia Maria Giuliatti Winter
Coordenadora

B A N C A E X A M I N A D O R A:

Prof. Dr. MARCELO BATISTA HOTT
Orientador / Unesp-Feg

Prof. Dr. DENIS DALMAZI
Unesp-Feg

Prof. Dr. HENRIQUE BOSCHI FILHO
UFRJ

Fevereiro de 2012

DADOS CURRICULARES

ANGEL EDUARDO OBISPO VÁSQUEZ

NASCIMENTO	21.09.1984 / LIMA-PERÚ
FILIAÇÃO	Sergio Eduardo Obispo Suchero Elsa del Pilar Vásquez Pizán
2003 / 2008	Curso de Graduação - Bacharelado em Física Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas Universidad Nacional del Callao - UNAC, Lima Perú.
2010 / 2012	Curso de Pós-Graduação em Física, nível Mestrado, na Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá Universidade Estadual Paulista - UNESP, Guaratinguetá-SP Brasil.

AGRADECIMENTOS

Eu ofereço a minha mais profunda gratidão para com aqueles que de uma forma ou de outra participaram na culminação desta dissertação do qual estou orgulhoso.

- A minha familia: especialmente aos meus pais Eduardo e Elsa e a minha irmã Bonny, quem completa todos meus espaços com seu amor e apoio.
- A meu orientador: Marcelo Batista Hott, quem refletindo a sua alta formação acadêmica, me dá as pautas para formar a minha. Mais que meu orientador, um grande amigo.
- Aos professores do grupo de partículas e campos da Unesp-Campus de Guaratinguetá: Professores Drs.: Antonio S. de Castro, Alvaro de Souza Dutra, Denis Dalmazi, Julio Marny Hoff da Silva e Marcelo B. Hott, os quais me aconselharam e me orientaram nesta etapa do mestrado.
- Aos funcionários do curso de pos-graduação: Regina, Christina, Sidney e Juliana.
- A meus conterrâneos peruanos: Luis Benito, Luis Arroyo, Freddy, Carlos, Alonso, Mariela, Augusto, Elver, Andres, Cristian, Carlos e Gretta, pela confiança e amizade.
- A meus grandes amigos brasileiros: Tatiana, William, Renato, Elias, Helton, Fabio e Luiz Paulo.
- Agradeço esta grande universidade e este grande país que me acolhe e me faz sentir em casa.

E por último e o mais importante, meu agradecimento **Deus Nosso Senhor**...Obrigado, muito obrigado **Senhor** por manter a todos exatamente onde eles estão, cumprindo exatamente o papel que cumprem, pois eles são em conjunto minha inspiração, minha força e a razão para sempre querer superar os desafios que a vida me apresenta...

Obrigado Bom Padre!....

Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES.

Esta dissertação está dedicada aos meus pais
pelo grande apoio e amor que sempre me mostraram.

A alegria está na luta,
na tentativa,
no sofrimento envolvido
e não na vitória propriamente dita...
Mahatma Gandhi.

OBISPO, A. E. **Férmions em campos externos em 1+1 e 2+1 dimensões**. 2012. 82 f. Dissertação de Mestrado em Física – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2012.

RESUMO

Nesta dissertação nós discutimos a influência de modos-zero fermiônicos em diferentes contextos. Começamos estudando a localização de férmions sem massa em paredes de domínios (3-brana) num espaço-tempo de 5 dimensões com geometria não deformada, seguindo o cenário proposto originalmente por Rubakov e Shaposhnikov. Lançamos mão de um modelo não-polinomial com um campo escalar auto-interagente que tem como solução da equação de Bogomol'nyi um kink deformável que exibe uma configuração de kink duplo. No contexto em que estamos trabalhando, esta configução de kink duplo permite ilustrar o fenômeno de separação de branas. Novos modelos não-lineares da teoria de campos que forneçam tais configurações de kink duplo são construídos. Usamos um método de reconstrução cujo ponto de partida são os modos-zero das equações de estabilidade de modelos bem conhecidos. Finalmente, mostramos em alguns casos, o papel dos modos-zero fermiônicos no fracionamento do número (ou da carga) fermiônico, especialmente em redes de grafeno.

PALAVRAS-CHAVE: Equação de Dirac, Modos-zero, Localização de férmions, Defeitos topológicos, Fracionamento do número fermiônico, Grafeno.

OBISPO, A. E. **Fermions in external fields in 1+1 and 2+1 dimensions**. 2012. 82 f. Dissertation (Master in Physics) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2012.

ABSTRACT

In this dissertation we discuss the influence of fermion zero modes in different contexts. We begin by studying the localization of massless fermions on domain walls (3-brane) embedded in a five-dimensional flat space-time, following the scenario originally proposed by Rubakov and Shaposhnikov. We use a non-polynomial model with a self-interacting scalar field whose solution of the Bogomol'nyi equation with minimum energy is a kink which can be continuously deformed into a two-kink. In the context we are working on, this two-kink configuration is used to illustrate the brane splitting phenomenon. New field theory nonlinear models are built to provide such two-kink configurations. Such a reconstruction is based on previous methods which employ the zero mode solution of the excitation spectra of the defects as the starting point. Finally, we show in some cases, the role played by fermion zero modes on fermion number (or charge) fractionization, especially in graphene networks.

KEYWORDS: Dirac equation, Zero modes, Fermion localization, Topological defects, Localization, Fermion number fractionalization, Graphene.

Lista de Figuras

2.1 Perfil da solução (2.6), considerando $a = 1$ para $b = -1.1$ (linha tracejada) $b = -1.001$ (linha fina) e $b = -1.0000001$ (linha cheia). 21
2.2 Perfil da densidade de energia do campo escalar para $L = 0.5$ (linha tracejada), $L = 0.8$ (linha fina) e $L = 2.5$ (linha cheia). 22
2.3 Modo zero para $F(r) = \overline{\phi}(r)$, para $L = 0.01$ (linha tracejada), $L = 1.2$ (linha fina) e $L = 1.6$ (linha cheia). 26
2.4 Potenciais efetivos para o caso $F(r) = \overline{\phi}(r)$, para $L = 0.01$ (linha tracejada), $L = 1.6$ (linha fina) e $L = 5.0$ (linha cheia). 27
2.5 Perfil dos modos massivos para $F(r) = \overline{\phi}(r)$, para $L = 4.0$ 28
2.6 Modo zero para $F(r) = \overline{\phi}(r) + M$, para $L = 0.01$ (linha tracejada), $L = 1.2$ (linha fina) e $L = 1.6$ (linha cheia). 29
2.7 Perfil de $F(r) = -W_{\overline{\phi\phi}}$, para $L = 0.01$ (linha tracejada), $L = 1.6$ (linha fina) e $L = 4.5$ (linha cheia). 30
2.8 α_{L_0} no caso $F(r) = -W_{\overline{\phi\phi}}$ para $L = 1.6$ (linha fina) e $L = 4.5$ (lina cheia). 31
2.9 Potenciais efetivos para o caso $F(r) = -W_{\overline{\phi\phi}}$, com $L = 1.5$. $U_L(r)$ (linha contínua), $U_R(r)$ (linha tracejada). 32
2.10 α_{L_1} (superior) e α_{R_1} (inferior) para $F(r) = -W_{\overline{\phi\phi}}$, para $L = 1.6$ (linha fina)e $L = 4.5$ (linha grossa). 33
2.11 Autovalor do primeiro estado excitado contra L 34
2.12 Perfil de $\rho(r, t)$ para distintos valores de t. 35

3.1 Perfil do modo zero e kink deformados para $L = 0.5$ (linha fina) e $L = 4.5$ (linha cheia). 42
3.2 Perfil do modelo sine-Gordon deformado para $L = 0.1$ (linha tracejada), $L = 1.6$ (linha fina) e $L = 4.5$ (linha cheia). 43
3.3 Perfil do potencial (3.17) com $W_\phi = 2\sqrt{\cot^2(\phi/2) + \operatorname{sech}^2(L)}\sin^2(\phi/2)$ para $L = 10.5$ (linha tracejada), $L = 1.6$ (linha fina) e $L = 0.65$ (linha cheia). . . 44
3.4 Perfil do modelo $V_{d\phi^4-I}$ para $L = 0.1$ (linha tracejada), $L = 0.65$ (linha fina) e $L = 1.5$ (linha cheia). 45
3.5 Perfil do modelo $V_{d\phi^4-II}$ para $L = 0.65$ (linha tracejada), $L = 1.5$ (linha fina) e $L = 6.5$ (linha cheia). 47

3.6 Perfil de $V_{Novo-d}(\phi)$ para $\beta = 0.25$ (linha fina), $\beta = 0.3$ (linha cheia). . . . 49

4.1 Potencial simétrico com um mínimo duplamente degenerado 53
4.2 Estrutura cristalina do grafeno construído como uma superposição de duas subredes triangular A e B, com vetores-base $\overrightarrow{a}_i$ para a rede A e vetores $\overrightarrow{s}_i$ conectando A com B. 56
4.3 Rede recíproca do Grafeno formada pelos vetores $\overrightarrow{b}_1$ e $\overrightarrow{b}_2$. A região colorida representa a 1^a zona de Brillouin 57
4.4 Estrutura de banda do Grafeno obtida a partir da aproximação "*Tight Binding* ". 59
4.5 Diagramas da polarização do vácuo 74

Sumário

1 Introdução **14**

2 Mundos brana **18**

2.1 O modelo 20

2.2 Localização de férmions 23

2.2.1 Caso I: $F(r) = \eta\overline{\phi}(r)$ 26

2.2.2 Caso II: $F(r) = -\eta W_{\overline{\phi\phi}}$ 30

3 Reconstrução de defeitos deformados em teoria de campos a partir da deformação do modo-zero **38**

3.1 Aspectos gerais 39

3.2 Método de construção de MNLTC 41

3.2.1 Modelo de seno-Gordon deformado 42

3.2.2 Modelo ϕ^4 deformado I 44

3.2.3 Modelo ϕ^4 deformado II 46

3.2.4 Simetrização do potencial Scarff da mecânica quântica e um novo MNLTC 48

3.3 Comentários Finais 50

4 Modos-Zero Fermiônicos e Carga fracionária induzida **51**

4.1 Fracionamento do número fermiônico em $1+1$ dimensões 52

4.1.1 Mecanismo do fracionamento 52

4.2 Férmions planares, Grafeno e Campos de Gauge 55

4.2.1 O Grafeno 56

4.2.2 Modos-zero fermiônicos em vórtices magnéticos 62

4.2.3 Potencial Vetor minimamente acoplado: modos-zero e fracionamento da carga fermiônica 66

4.2.4 Níveis de Landau e cargas induzidas em campos magnéticos uniformes 69

4.3 Cálculo do número fermiônico via abordagem perturbativa 74

5 Conclusões e Comentários **78**

Referências bibliográficas **79**

Capítulo 1

Introdução

O estudo de sistemas para férmions em $1+1$ e $2+1$ dimensões do espaço-tempo têm sido reconhecidos como importantes para a compreensão de vários fenômenos em distintas áreas da Física, tais como em matéria condensada, física de partículas, entre outros. Um das razões mais imediatas é de ordem pragmática: a dinâmica das partículas é descrita por equações de estrutura bem mais simples que no caso de dimensionalidade maior, que leva a que alguns desses sistemas pertençam à rara categoria de problemas analiticamente solúveis. Embora a generalização dos resultados não seja trivial, o estudo desses modelos costuma apontar rumos para análises de sistemas em dimensões superiores, como por exemplo em supercondutores a alta temperatura, cenários do efeito-Hall quântico e alguns modelos na física de altas energias. Mas, a bem da verdade, a Física em baixas dimensões é muito mais do que um protótipo do mundo tridimensional. A razão vem do fato de que esses sistemas fornecem cenários propícios para o aparecimento de novos e exóticos fenômenos que chamam atualmente a atenção dos físicos. Um dos fenômenos mais surpreendentes foi originado na teoria quântica de campos, o chamado fracionamento de número fermiônico ou fracionamento da carga fermiônica.

Este fenômeno foi descoberto em 1976, quando Jackiw e Rebbi [1] estudavam férmions unidimensionais interagindo com campos escalares de fundo tipo sóliton. Nesse trabalho, eles mostraram a existência de estados isolados de energia nula do sistema férmion-sóliton e demonstraram que esses estados podem apresentar um número (ou carga) fermiônico fracionário $\pm 1/2$. De fato, fracionamento da carga fermiônica está diretamente associado à existência dessas excitações fermiônicas de energia nula, chamadas geralmente de modos-zero fermiônicos. Também mostraram que a realização experimental daquele novo número quântico ocorre em cadeias de poliacetileno [2, 3, 4]. Mais recentemente foi evidenciado que esse número fracionário seria responsável pela condutividade elétrica desse material. Isso motivou um crescimento vertiginoso na pesquisa desse fenômeno em matéria condensada, principalmente no estudo de sistemas em redes cristalinas. Neste ponto, teoria de campos e matéria condensada se ajudam mutuamente.

Os conceitos da teoria de campos usados na descrição de alguns desses sistemas mostrou que a dinâmica dos elétrons perto da superficie de Fermi é feita por meio de uma equação de Dirac. Mesmo se tratando de sistemas não-relativísticos, a equação de Dirac aparece devido à linearização da relação de dispersão em torno de pontos (um número finito deles) no espaço de momenta do férmion onde a energia é nula (pontos de Dirac). Tais sistemas exibem um número fermiônico fracionário se a equação de Dirac possui estados ligados fermiônicos isolados no meio do gap (se existir), isso devido à simetria no número de férmions em relação ao número de anti-férmions (ou entre cargas negativas e positivas). Um das principais vertentes de nossa investigação trata justamente do estudo de efeitos similares no grafeno.

É bem sabido que os portadores de carga (elétrons) numa rede de grafeno (uma única camada de átomos de carbono em rede hexagonal) comportam-se como partículas relativistas sem massa que obedecem uma equação de Dirac em 2 dimensões espaciais. Devido à natureza monoatômica da rede, o gap de energia entre as bandas valência e a banda de condução é nula. No entanto um espaçamento energético entre as bandas pode ser colocado à mão se existirem defeitos (distorções) na rede. As distorções são descritas por meio de um campo escalar que, acoplado ao férmion, proporciona uma "massa" dependente da posição para o férmion. Nesse contexto, Hou, Chamon e Mudry [5] mostraram que estados isolados no gap de energia são obtidos quando os elétrons interagem com as distorções de rede (chamadas de distorções de Kekulé), incorporadas por meio de campos escalares complexos, e que levam a um fracionamento do número fermiônico quando esses campos escalares são de natureza topológica (vórtices). Jackiw e Pi [6] mostraram que o sistema anterior é invariante sob uma transformação de gauge quiral global e que a invariância do sistema sob uma transformação de gauge quiral local é preservada se o componente espacial de um potencial de gauge (axial) acoplado de forma quiral aos férmions é adicionado no sistema. Embora essas distorções de rede não sejam consideradas nesta dissertação, analisamos a possibilidade de obter um número fermiônico induzido quando o campo de gauge usual (potencial vetor magnético) e o campo de gauge considerados em [6] são adicionados ao sistema.

De fato, a existencia de modos-zero considerando estruturas topológicas e que forneçam um número fermiônico induzido parece ocorrer também em cenários cosmológicos, por exemplo, no contexto de mundos-brana. Em 1983 Rubakov e Shaposhnikov [7] propuseram um cenário em que nosso universo estaria confinado em uma parede de domínio. A parede de domínio, denominada também de uma 3-brana, estaria imersa em um mundo de cinco dimensões e é descrita por uma solução tipo kink de um campo escalar real que se estende ao longo da dimensão extra. Ao discutirem a necessária localização da matéria, ou seja a possível realização de nosso universo na brana, observaram que férmions acoplados ao campo escalar (dependente unicamente da coordenada extra) poderiam ser localizados facilmente com o surgimento natural de férmions sem massa (modos-zero).

Pode ser pensado na existência de um número fermiônico fracionário induzido, desde que a equação efetiva dos modos fermiônicos seja equivalente à equação de Dirac em $1+1$ dimensões, similar ao considerado em [1], mas, focaremos nossa atenção somente no papel que desempenham os modos-zero na localização da matéria dentro da brana.

Por outro lado, é bem sabido que o estudo desses sistemas de férmions acoplados a campos escalares com perfil tipo kink têm sido muito estudados e usados em diversas areas da ciência, razão pela qual, vislumbrou-se um crescimento vertiginoso de trabalhos onde novos modelos não-lineares em teoria de campos são construídos. Seguindo esse mesmo espírito, nesta dissertação desenvolvemos um método de reconstrução de modelos não-lineares que apresente como ponto de partida o modo-zero [8, 9] da equação de estabilidade de modelos bem conhecidos e que possam ser aplicáveis a cenários de mundos brana.

Organizamos esta dissertação da seguinte maneira. No 2^{o} capítulo estudamos a localização de férmions sem massa (modos-zero fermiônicos) em cenários de mundos branas, particularmente branas espessas. Investigamos a possível localização de férmions em uma 3-brana em 5D com geometria não deformada e nos detemos na questão de como férmions ficariam localizados em uma situação em que uma brana se deforma a tal ponto de formar duas branas. Esta separação de branas foi proposta originalmente em [10] utilizando um modelo com um campo escalar complexo com simetria Z_3. Os resultados mostrados neste capítulo formam parte de um trabalho já publicado [11], onde, além do estudo no espaço plano, também foi mostrado a possibilidade de localizar férmions num espaço com geometria deformada onde férmions sem massa se mostram como os únicos estados localizados. Nesse artigo encontra-se uma análise mais detalhada desse caso.

No 3^{o} capítulo, mostramos como os modos-zero bosônicos (excitações de um campo escalar real em modelos não-lineares) em 1 dimensão espacial podem ser utilizados para reconstruir modelos de teoria de campos em $1+1$ dimensões do espaço-tempo. Lá encontramos novos modelos de teoria de campos não-linear cujas soluções clássicas de energia mínima são soluções topológicas deformáveis. Alguns desses modelos, chamados de modelos deformados, já foram obtidos em [12]. Nesses trabalhos o método de deformação basicamente consiste em usar um modelo não-linear da teoria de campo e mapeá-lo em outros modelos bem conhecidos. O resultado é um modelo deformado cuja solução BPS exibe uma configuração de kink duplo. Em nosso caso seguimos o método de reconstrução proposto em [8] considerando a superposição de duas cópias de um modo-zero da equação de estabilidade de modelos conhecidos.

No 4^{o} capítulo, mostramos em alguns casos o papel dos modos-zero fermiônicos no fracionamento do número (ou da carga) fermiônico. Neste ponto é importante ressaltar que o fracionamento do número fermiônico também pode surgir da interação de férmions sem massa com um campo magnético. Nesse caso, a imposição de manter a carga fermiônica inteira leva à quantização do fluxo magnético e, se o campo magnético tem origem topológica (vórtices de campo magnético), a quantização do fluxo magnético está direta-

mente associada à vorticidade do campo escalar. De qualquer forma, a simetria do espectro é preservada e o estado isolado no meio do gap entre estados positivos e negativos induz um número fracionário. Estudamos efeito similares em redes de grafeno e analisamos os efeitos da adição de termos constantes que levam a gaps de energia nos estados de uma única partícula, também de forma artificial, visto que a rede de grafeno não apresenta estes gaps de energia. Encerramos a dissertação com as conclusões e comentários finais.

Capítulo 2

Mundos brana

Nosso universo é descrito extremamente bem pelo Modelo Padrão e a Relatividade Geral. Ambas as teorias são expressas num espaço-tempo de 3+1 dimensões. Mas esses modelos são incompletos, o que motivou o aparecimento de uma grande quantidade de trabalhos tentando melhorar nosso modelo do universo assumindo uma ou mais dimensões extras. A primeira teoria que considerou dimensões extras foi a proposta por Kaluza e Klein em 1921. Nesta teoria adicionou-se uma dimensão espacial às $3 + 1$ dimensões conhecidas considerando a dimensão extra curvada sobre si mesma com raio muito menor do que as escalas comumente observadas. Na terminologia matemática, diz-se que essa dimensão é compacta. Mas a teoria Kaluza-Klein apresentava certos problemas em sua interpretação como uma teoria que unificava a gravidade e o eletromagnetismo. A mais notável previa uma unidade de carga que era muito menor que a carga do elétron. Estes problemas, em cumplicidade com a efervescente pesquisa em mecânica quântica na época, fizeram com que a teoria fosse abandonada por vários anos.

Na década de 1970 a ideia foi reestabelecida no cenário da Física das Altas Energias e Cosmologia. Dentro das novas teorias que apareceram, uma surgida recentemente chamada de Cosmologia de Membranas, propõe que existam algumas dimensões espaciais extras em um cenário onde estas possam ser grandes, sob a suposição de que a matéria ordinária (partículas e campos do modelo padrão) esteja localizada no subespaço tridimensional, chamado de brana, imerso em um espaço dimensionalmente maior, chamado de bulk. Essas branas seriam representadas através de defeitos topológicos, tais como paredes de domínio ou cordas cósmicas, supondo que nós vivemos no núcleo desse defeito.

A proposta de que nosso universo poderia ser um defeito topológico em cinco dimensões do espaço-tempo já foi apresentada na década de 80 por Rubakov e Shaposhnikov [7]. Imaginando o mundo real como um universo de $4 + 1$ dimensões no espaço-tempo sem deformação, mostraram que quando campos de matéria são confinados dentro de uma parede de domínio, a teoria efetiva de baixa energia obtida pode ser vista como uma teoria em $(3 + 1)D$. Portanto, os modos-zero 4-dimensionais (as soluções de mais baixa

energia) localizados (confinados) no defeito, podem ser interpretados como partículas sem massa em nosso universo tridimensional.

Essa parede de domínio foi descrita através de um campo escalar representado pela solução clássica (que depende unicamente da dimensão extra) fornecida pelo modelo $\lambda\phi^4$ em $(4+1)D$, de tal forma que entre as excitações desse campo escalar que forman a parede, conseguem localizar modos-zero que poderiam ser vistos como uma partícula escalar 4-dimensional. Também, o modelo incorpora naturalmente férmions através da interação de Yukawa, permitindo desta forma a localização de modos-zero fermiônicos no núcleo da parede.

Neste capítulo desenvolvemos um mecanismo de localização similar ao mostrado no parágrafo anterior. Considerando um modelo 5-dimensional para um campo escalar real ϕ no espaço-tempo de $4+1$ dimensões com a ação dada por

$$S = \int d^4x dr \left(\frac{1}{2}\eta_{ab}\partial^a\phi\partial^b\phi - V(\phi) \right) \ , (a,b) = 0, ..., 4 \tag{2.1}$$

com $r \ \epsilon \ \langle -\infty, +\infty \rangle$ como a dimensão extra e $\eta_{ab} = diag[1,-1,-1,-1,-1]$, estudamos o problema da localização de férmions para situações em que uma brana se deforma a tal ponto de formar duas branas (*split brane*) [10]. Lançamos mão do modelo não-polinomial proposto em [13], onde são encontradas soluções clássicas para um campo escalar com perfil de kink deformável para um kink duplo, sendo esse tipo de soluções ótimas para a descrição do fenômeno de separação de branas. Portanto, o confinamento dos estados fermiônicos de energia nula, ou seja, a realização do universo observável dentro das branas, dependeria unicamente da forma com que os férmions são acoplados ao sistema. Nas próximas seções desenvolvemos em detalhe o mecanismo de localização de férmions. A seguir, analisamos brevemente os aspectos mais relevantes do modelo considerado.

2.1 O modelo

As soluções clássicas com perfil de kink duplo são de grande interesse em diversas áreas da ciência, desde que essas soluções poderiam representar transições de fase de primeira ordem. Fisicamente, essas transições descreven as mudanças de fase (por exemplo, líquido-sólido) e acontecem quando uma função termodinâmica se comporta de maneira não suave ao variar um parâmetro, por exemplo a temperatura. São exemplos desse tipo de transições os câmbios de agregação, os cambios de fase entre fases sólidas em diferentes estruturas cristalinas, etc. No contexto cosmológico, especificamente em cenários de mundos brana, essas transições estariam intimamente ligadas ao fenômeno de separação de branas [10]. Nesta seção analisamos um dos modelos que fornece esse comportamento e que foi proposto anteriormente em [13]. O modelo em questão fornece soluções clássicas para um campo escalar com perfil de kink duplo, a partir de um potencial $V(\phi)$ que pode ser expresso como

$$V(\phi) = \frac{1}{2} W_\phi^2 \ . \tag{2.2}$$

onde as soluções BPS, as quais saturam o limite de Bogomol'nyi (vide capítulo 3), satisfazem a equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{dW(\phi)}{d\phi} = \pm W_\phi(\phi) \tag{2.3}$$

e as equações de movimento (eq. dif. de 2^a ordem) no limite estático. Neste caso, o modelo considerado apresenta um superpotencial $W(\phi)$ dado por [13]:

$$W(\phi) = 2\mu \left[\phi \left(\frac{\phi^2}{3} + f^2 + \frac{b}{2}\sqrt{\phi^2 + f^2} \right) + \frac{bf^2}{2} \arcsin\left(\frac{\phi}{f}\right) \right] \tag{2.4}$$

com $f = \sqrt{b^2 - a^2}$ e $b < -a < 0$. Uma derivada simples permite mostrar que

$$W_\phi(\phi) = 2\mu(\phi^2 + f^2 + b\sqrt{\phi^2 + f^2}). \tag{2.5}$$

Finalmente, ao substituir (2.5) em (2.3), a solução clássica tipo kink correspondente ao modelo considerado é expresso como

$$\overline{\phi} = \pm a \frac{\sinh(2\mu a r)}{\cosh(2\mu a r) - b/f}. \tag{2.6}$$

O sinal $+(-)$ representa a solução com perfil de kink (anti-kink). Pode-se observar na figura 2.1 que a solução adota a forma de kink simples, mas, à medida que b se aproxima

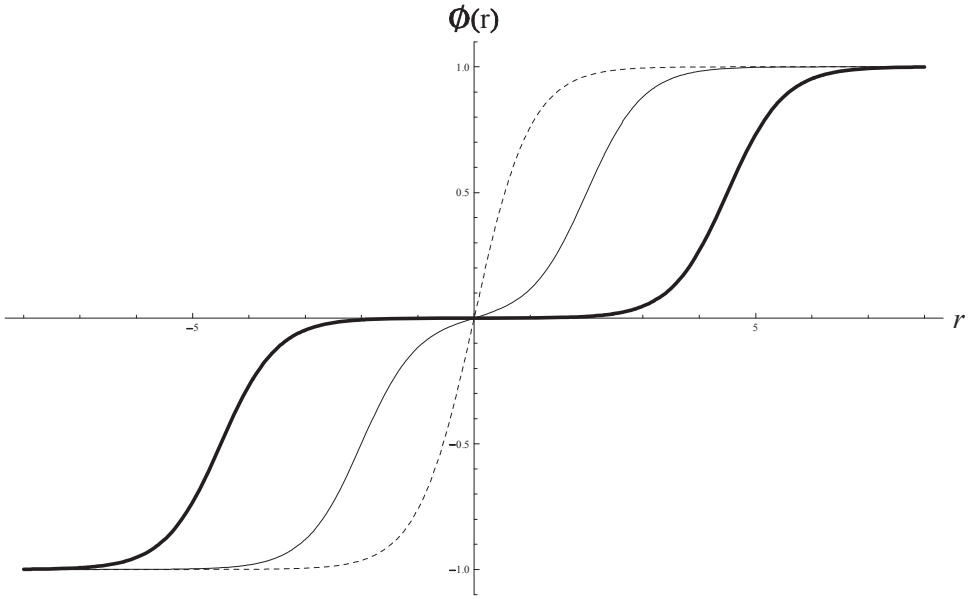


Figura 2.1: Perfil da solução (2.6), considerando $a = 1$ para $b = -1.1$ (linha tracejada) $b = -1.001$ (linha fina) e $b = -1.0000001$ (linha cheia).

de $-a$, a configuração muda para um perfil de kink duplo. Uma análise mais detalhada do modelo é encontrada em [13].

A solução (2.6) pode ser convenientemente reescrita [14] da seguinte forma

$$\overline{\phi} = \pm\frac{a}{2}\left[\tanh(\mu a(r+L)) + \tanh(\mu a(r-L))\right] \ , \tag{2.7}$$

identificando a relação $b = -a\coth(2\mu aL)$. Vemos que a solução (2.7) pode ser vista como a junção de dois kinks $\overline{\phi}_{\pm} = \frac{a}{2}\left[\pm 1 + \tanh(\mu a(r \mp L))\right]$ cujos núcleos ficam em $r = L$ e $r = -L$. Então, é conveniente o uso da expressão (2.7) como nossa solução clássica, já que (2.7) permite perceber de forma direta a localização dos núcleos das branas onde o universo poderia se realizar. De fato, a região de máxima probabilidade da realização do universo observável vem da análise da densidade de energia do campo escalar. A partir da ação (2.1), nós construímos o tensor energia-momento $5D$, onde o componente tempo-tempo dado por

$$T^{00} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2 + V(\phi)\right]\Bigg|_{\phi=\overline{\phi}(r)} \ , \tag{2.8}$$

representa a densidade de energia. Substituindo (2.7) em (2.8), obtemos T^{00} em função da dimensão extra r cujo perfil é mostrado na figura 2.2. Notamos inicialmente que a densidade de energia sempre é positiva (isso não acontece em sistemas onde a geometria do espaço é deformada, pois naqueles casos a densidade de energia pode assumir valores negativos). Além disso, ela apresenta seus valores máximos nos pontos L e $-L$, acompa-

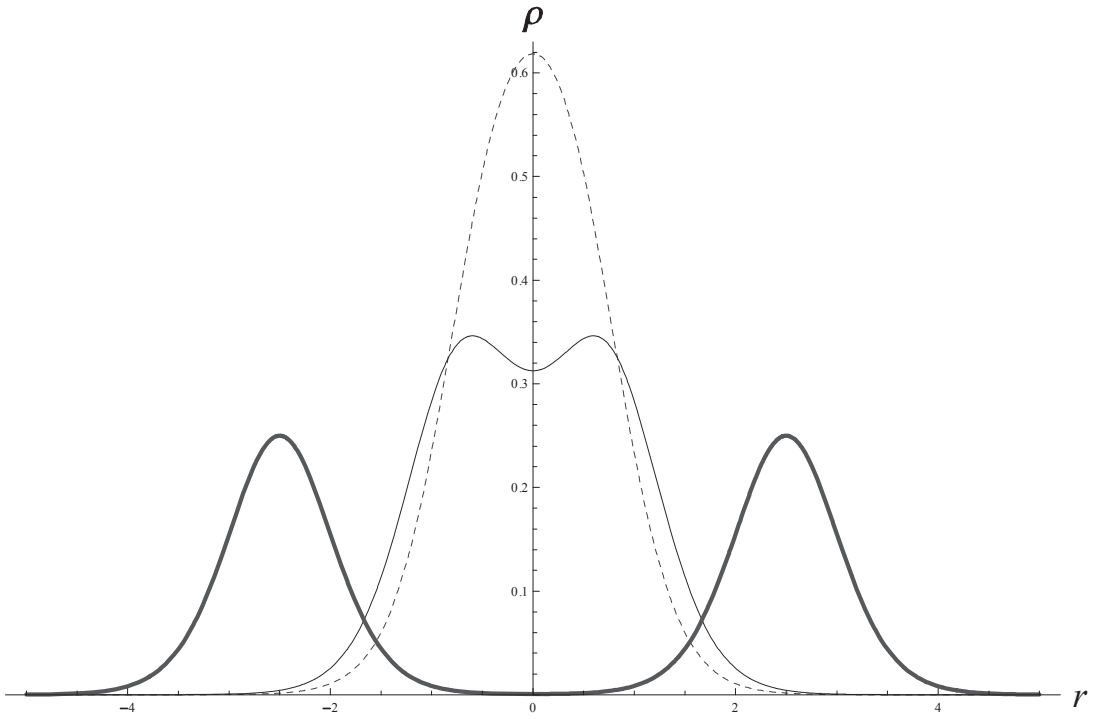


Figura 2.2: Perfil da densidade de energia do campo escalar para $L = 0.5$ (linha tracejada), $L = 0.8$ (linha fina) e $L = 2.5$ (linha cheia).

nhando a separação dos núcleos das branas e mostrando que, nessa região, a probabilidade de confinar matéria ordinária é maxima.

Na seção seguinte, estudaremos a possibilidade de obter férmions localizados em qualquer das duas branas resultantes da divisão da brana original ($L = 0$). Mostraremos que isso vai depender da existência de modos-zero normalizáveis cujas regiões de máxima amplitude acompanhem a divisão das branas. Veremos que o tipo de acoplamento usado cumpre um papel fundamental nesse contexto.

2.2 Localização de férmions

No cenário de mundos brana, tem chamada a atenção a possibilidade do confinamento nas branas de todo tipo de campos de matéria. Seguindo o mesmo interesse, nesta seção analisamos a possibilidade de localizar férmions no núcleo das branas descritas pela solução clássica (2.7), adotando o enfoque proposto em [7]. O problema é abordado basicamente através da procura de soluções normalizáveis da equação de Dirac para férmions acoplados com campos escalares via um acoplamento geral de Yukawa $\overline{\Psi}\widetilde{F}(\overline{\phi})\Psi$, onde $\widetilde{F}(\overline{\phi})$ é uma função arbitrária do campo escalar ϕ tomado na solução clássica. Como será mostrado a seguir, a forma funcional do $\widetilde{F}(\overline{\phi})$, bem como sua dependência com r (dimensão extra), é um fator crucial para a possível localização de férmions na brana. Começamos nossa análise a partir da ação para férmions, definida como

$$S_{férmion} = \int d^5x \left(\overline{\Psi} i\Gamma^a \partial_a \Psi - \overline{\Psi}\widetilde{F}(\overline{\phi})\Psi \right), \tag{2.9}$$

a qual fornece a seguinte aquação de movimento

$$\left[i\Gamma^a \partial_a - \widetilde{F}(\overline{\phi}) \right] \Psi(x,r) = 0, \tag{2.10}$$

onde as matrizes gama satisfazem a álgebra $\{\Gamma^a, \Gamma^b\} = 2\eta^{ab}$ e podem ser definidas na representação irredutível como $\Gamma^\mu = \gamma^\mu$, $\Gamma^4 = -i\gamma^5$. Desta forma, de (2.10) é possível obter

$$\left[i\gamma^\mu \partial_\mu + \gamma^5 \partial_r - \widetilde{F}(\overline{\phi}) \right] \Psi(x,r) = 0 \ . \tag{2.11}$$

Resulta útil usar a decomposição quiral usual de Kaluza-Klein (KK) na equação (2.11), decompondo o espinor 5-dimensional de tal forma que:

$$\Psi(x,r) = \sum_n \psi_{Ln}(x)\alpha_{Ln}(r) + \sum_n \psi_{Rn}(x)\alpha_{Rn}(r), \tag{2.12}$$

onde $\psi_{Ln}(x)$ e $\psi_{Rn}(x)$ são os componentes do campo espinorial quadridimensional de quiralidade esquerda e direita, respectivamente, e que satisfazem

$$\gamma^5 \psi_{Ln}(x) \ = -\psi_{Ln}(x) \ , \quad \gamma^5 \psi_{Rn}(x) \ = \psi_{Rn}(x), \tag{2.13}$$

juntamente com a equação de Dirac 4-dimensional para férmions com massa

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_{L(R)n}(x) = m_n \psi_{R(L)n}(x). \tag{2.14}$$

As funções $\alpha_{Ln}(r)$ e $\alpha_{Rn}(r)$ representam a parte extra-dimensional do campo espinorial e que, após substituir (2.12) em (2.11) e usando as considerações ditas anteriormente, encontramos que elas obedecem as equações:

$$\alpha'_{Rn} - \widetilde{F}(\overline{\phi})\alpha_{Rn} = -m_n\alpha_{Ln} \tag{2.15}$$

$$\alpha'_{Ln} + \widetilde{F}(\overline{\phi})\alpha_{Ln} = m_n\alpha_{Rn} \ , \tag{2.16}$$

onde o símbolo primo $'$ denota a diferenciação com respeito a r.

Neste cenário, a possível localização de férmions na brana, tanto para o caso massivo ($m_n \neq 0$) bem como para o caso sem massa ($m_n = 0$), está representada pelas soluções normalizáveis obtidas a partir das eqs.(2.15)-(2.16). As funções $\alpha_{Ln}(r)$ e $\alpha_{Rn}(r)$ existem somente se elas satisfizerem as relações de normalização

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_{Ln}(r)\alpha_{Lm}(r)dr = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_{Rn}(r)\alpha_{Rm}(r)dr = \delta_{nm} \ , \tag{2.17}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_{Ln}(r)\alpha_{Rm}(r)dr = 0 \ . \tag{2.18}$$

Nessa parte, enfocaremos nossa atenção na procura de soluções para o caso em que $m_n = 0$, também chamada""s de soluções de enegia nula ou simplesmente **modos-zero**. Assim, de (2.15) e (2.16), obtemos

$$\alpha_{L_0}(r) = N_{L_0}e^{-\int^r F(r')dr'} \tag{2.19}$$

$$\alpha_{R_0}(r) = N_{R_0}e^{+\int^r F(r')dr'} \tag{2.20}$$

onde $F(r) = \widetilde{F}(\overline{\phi})$. As quantidades $N_{L(r)_0}$ são constantes de normalização que podem ser encontradas a partir das relações de normalização (2.17)

$$|N_{L_0}|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\int^r F(r')dr'}dr = 1 \tag{2.21}$$

$$|N_{R_0}|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+2\int^r F(r')dr'}dr = 1 \ . \tag{2.22}$$

É evidente que só uma dessas soluções pode ser normalizada, ou seja, quando α_{L_0} é normalizável, α_{R_0} não é, e vice-versa. Isto torna-se evidente de (2.19) e (2.20), onde vemos que a existência de qualquer uma das duas soluções depende somente do comportamento assimptótico de $\int^r F(r')dr'$. Este tipo de situação já foi estudado em [15] no contexto de férmions interagindo com um potencial pseudoescalar em $1+1$ dimensões, onde as soluções para o modo-zero são também chamadas de soluções isoladas. Esta particular estrutura dos modos-zero (com um único tipo de quiralidade) é a principal característica

para obter um número fermiônico fracionário, como foi mostrado em [1].

Por outro lado, para o caso em que $m_n \neq 0$ (modos massivos), as soluções são encontradas das equações diferenciais de 2^a ordem para α_{Ln} e α_{Rn} , obtida após desacoplar (2.15) e (2.16) em

$$-\alpha''_{Rn} + U_R(r)\alpha_{Rn} = m_n^2\alpha_{Rn} \ , \tag{2.23}$$

$$-\alpha''_{Ln} + U_L(r)\alpha_{Ln} = m_n^2\alpha_{Ln} \ , \tag{2.24}$$

onde

$$U_R(r) = F^2 + F' \ , \tag{2.25}$$

$$U_L(r) = F^2 - F' \ . \tag{2.26}$$

Notamos que as equações (2.23) e (2.24) apresentam uma estrutura tipo equação de Schrödinger independente do tempo com potenciais efetivos dados por U_R e U_L, onde seus respectivos hamiltonianos são parceiros supersimétricos um do outro [16]. As implicações da teoria supersimétrica neste contexto permite-nos deduzir que, para o caso em que $F(r) > 0$ (< 0), qualquer estado localizado de U_R (U_L) implicaria num estado localizado de U_L (U_R), exceto o modo-zero que só pertence a U_L (U_R).

No princípio mencionamos que $\widetilde{F}(\overline{\phi})$ é considerada arbitrária, mas agora sua escolha está condicionada diretamente à existência de um modo-zero normalizável que levaria à possível localização do férmion não massivo na brana. Rubakov e Shaposhnikov [7] consideraram férmions 5-dimensionais interagindo com um acoplamento de Yukawa proporcional ao campo escalar ϕ. Nesse trabalho, esse campo escalar representa a solução clássica fornecida por um potencial da teoria de campo do tipo $\lambda\phi^4$. Resulta interessante notar que nessa teoria, a 2^a derivada do superpotencial, que será denotado por $W_{\phi\phi}$, também é proporcional a ϕ. Baseados nestes resultados, é natural o particular interesse nesta dissertação da análise do comportamento dos modos quirais (massivos e não massivos) interagindo com 2 diferentes tipos de acoplamentos: $F(r) = \eta\overline{\phi}(r)$ e $F(r) = -\eta W_{\overline{\phi\phi}}$. Serão considerados $\eta > 0$ como uma constante de acoplamento e $W_{\overline{\phi\phi}}$ como a 2^a derivada do superpotencial (2.4) com respeito a ϕ tomada na solução clássica (2.7).

2.2.1 Caso I: $F(r) = \eta\overline{\phi}(r)$

O termo $\overline{\phi}\ \overline{\Psi}\Psi$ é o acoplamento de Yukawa mais natural usado na descrição de férmions interagindo com campos escalares. Por esse motivo, foi considerado em [7] para estudar pela primeira vez a localização de férmions em paredes de domínio. Seguindo o mesmo cenário, a localização de férmions é abordado inicialmente com o estudo dos modos-zero. É possível verificar de (2.19) e (2.20), que somente o modo α_{L_0} é normalizável e dado por:

$$\alpha_{L_0}(r) = N_{L_0}\left(\cosh(2L) + \cosh(2r)\right)^{-\frac{\eta}{2}}, \tag{2.27}$$

$$\alpha_{R_0}(r) = 0. \tag{2.28}$$

O perfil do modo-zero é mostrado na figura 2.3 considerando $\eta = 2$. Pode-se observar que α_{L_0} é simétrico em r e apresenta um pico em $r = 0$. Em torno desse ponto, a probabilidade de localizar o férmion sem massa é máxima, ou seja, para $L = 0$ (brana sem dividir), a densidade de probabilidade de encontrar o modo α_{L_0} no núcleo da brana é alta.

Quando L aumentar, vê-se que o modo-zero sofre achatamento no seu pico máximo sem acompanhar a divisão das branas, portanto, a densidade de probabilidade de encontrar aquele modo no núcleo das branas diminui para valores de L cada vez maiores.

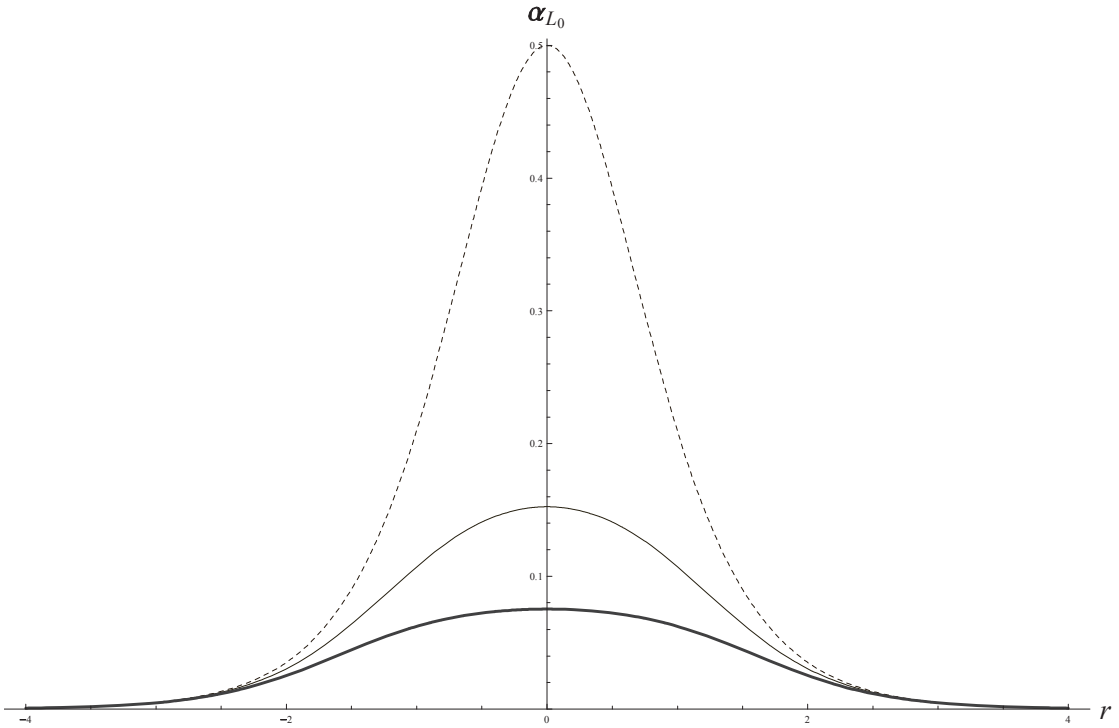


Figura 2.3: Modo zero para $F(r) = \overline{\phi}(r)$, para $L = 0.01$ (linha tracejada), $L = 1.2$ (linha fina) e $L = 1.6$ (linha cheia).

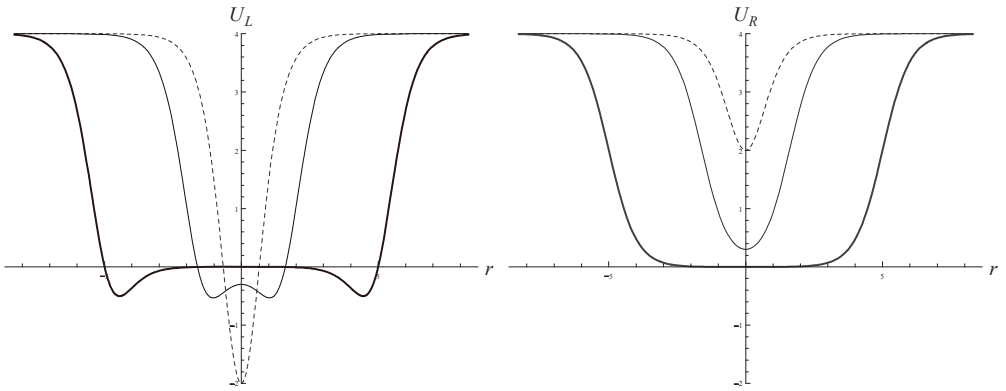


Figura 2.4: Potenciais efetivos para o caso $F(r) = \overline{\phi}(r)$, para $L = 0.01$ (linha tracejada), $L = 1.6$ (linha fina) e $L = 5.0$ (linha cheia).

Mesmo se considerar o campo escalar acoplado à gravidade em $4 + 1$ dimensões do espaço-tempo deformado, o modo-zero ainda mantém um pico na metade entre as duas branas com um comportamento similar ao mostrado na figura acima, ou seja, neste caso também a densidade probabilidade de encontrar o modo não massivo no núcleo das branas é pequena.

Além disso, nesses casos com geometria deformada, a equação efetiva para os modos quirais fornece um potencial efetivo que exibe um perfil do tipo vulcão (aparentemente é independente do modelo usado). A principal característica deste tipo de potenciais é que permite a existência só de soluções para modos fermiônicos sem massa, como único auto-estado do espectro discreto. É importante destacar que isto sempre acontece independente do modelo não-linear de campo acoplado à gravidade que forneça as branas. Por outro lado, o fator de deformação (warp factor) que aparece na métrica desempenha um papel crucial na possível localização daqueles modos, pois agora dele também depende a normalização das soluções (diferente do caso da geometria plana em que a normalizabilidade depende somente do comportamento de $F(r)$). Uma análise mais detalhada desse caso é encontrada em [11].

Na maioria dos casos com geometria deformada, a complexidade das equações permite só um tratamento numérico dos resultados, sendo às vezes imprescindível lançar mão de ferramentas computacionais. No espaço plano, as equações ficam bem mais simples que o caso com geometria deformada (com gravidade), o que permitiu neste caso o cálculo analítico do modo-zero, mas também há casos em que precisamos fazer uso de métodos numéricos, como veremos a seguir.

Substituindo $F(r) = \eta\overline{\phi}(r)$ em (2.25) e (2.26), obtemos os perfis de $U_R(r)$ e $U_L(r)$ (ver figura 2.4). Quando L aumenta, ambos os potenciais sofrem alargamento da boca

do poço. Além disso, pode-se observar a formação de um poço duplo para U_L cujos mínimos acompanham a separação das branas, enquanto U_R sempre apresenta a configuração de um poço simples positivo ($U_R > 0$). Isto explicaria a preferência do modo-zero ficar na quiralidade esquerda, pois só U_L permite a existência de soluções com $m_n = 0$. Mas também os potenciais poderiam suportar estados massivos localizados, sendo eles de paridade definida pois $U_{R(L)}(-r) = U_{R(L)}(r)$. Porém, com a imposibilidade de encontrar soluções analíticas para este caso, foi preciso realizar o estudo somente de forma numérica. Um dos métodos computacionais mais usados e conhecidos na literatura para a resolução de equações diferenciais de 2^a ordem do tipo (2.23) e (2.24) é o método de Numerov [17, 18, 19]. O perfil das soluções fazendo uso deste método para é mostrado na figura 2.5.

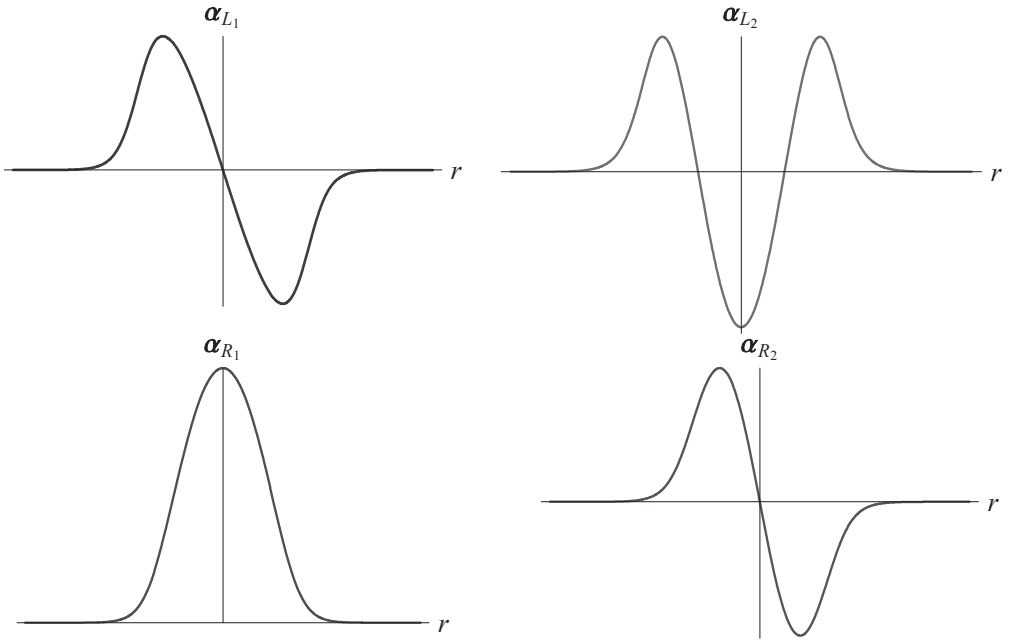


Figura 2.5: Perfil dos modos massivos para $F(r) = \overline{\phi}(r)$, para $L = 4.0$

Encontramos 4 modos massivos para $L = 4$, os quais satisfazem também as equações diferenciais de primeira ordem dadas pela eqs. (2.15) e (2.16). Vemos que todos os estados, exceto α_{L_1} e α_{R_2}, apresentam uma considerável densidade de probabilidade na região entre as duas branas. Enquanto todos os estados, exceto α_{R_1}, apresentam uma densidade de probabilidade proeminente ao redor de $r = \pm L$, lugar onde os núcleos das branas ficam localizados. Neste ponto é claro que o problema da localização de férmions nas branas depende também do comportamento das soluções quando as branas se dividem ($L > 0$). Portanto, resulta pouco interessante considerar acoplamentos que não permitam localizar matéria nelas (as branas). Em nosso caso, o acoplamento $\eta\overline{\phi}(r)$ não permite a localização do modo-zero nas branas já que o pico da solução fica entre a duas paredes de domínio. É interessante notar que um das formas para se conseguir ter o pico de α_{L_0} exatamente no

núcleo de pelo menos uma das branas, é adicionando uma massa constante 5-dimensional ao acoplamento de Yukawa.

Assim, tendo $F(r) = \eta(\overline{\phi}(r) + M)$, encontramos que

$$\alpha_{L_0}(r) = N_{L_0} e^{-\frac{\eta M}{2} r} \left(\cosh(2L) + \cosh(2r)\right)^{-\frac{\eta}{2}} . \tag{2.29}$$

$$\alpha_{R_0}(r) = 0. \tag{2.30}$$

Este termo de massa deverá ser considerado de tal modo que permita a α_{L_0} acompanhar um dos núcleos das branas. Para esse propósito, basta impor que a primeira derivada de $\alpha_{L_0}(r)$ seja nula para $r = L$. Desse modo, o pico máximo de (2.29) sempre fica nesse ponto. Um cálculo simples permite mostrar que o valor para M que fornece tal comportamento para o modo-zero é $M = \frac{1}{2}\tanh(2L)$. Na figura 2.6 pode-se apreciar que agora o pico do modo-zero fica no núcleo da brana da esquerda. A inversão de sinal do M leva o modo-zero ser localizado na brana da direita. Em qualquer dos dois casos, o modo-zero é localizado em alguma das branas. Não encontramos modos massivos localizados nem dentro nem

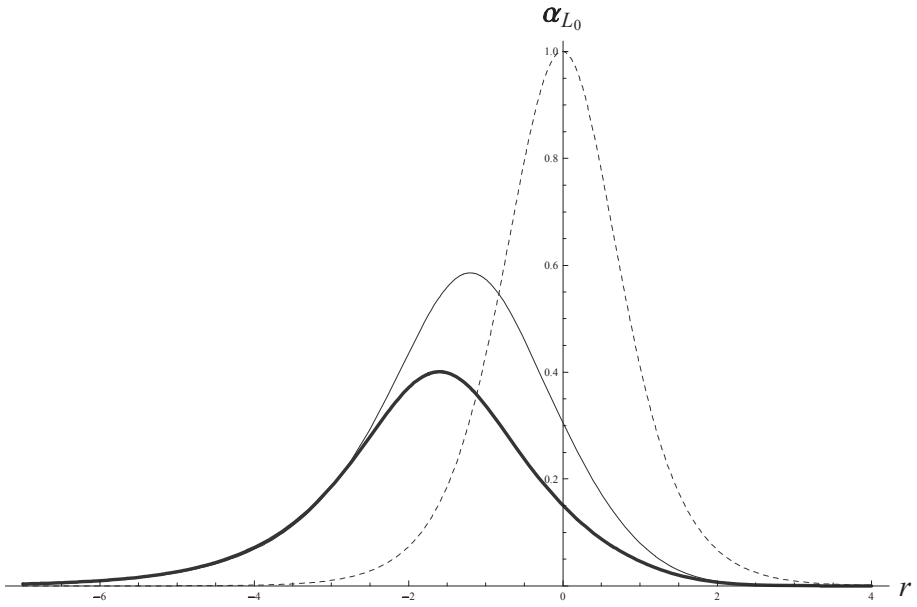


Figura 2.6: Modo zero para $F(r) = \overline{\phi}(r) + M$, para $L = 0.01$ (linha tracejada), $L = 1.2$ (linha fina) e $L = 1.6$ (linha cheia).

fora das branas. A ausência dos modos massivos neste caso pode ser justificado pelo fato de que em torno de $r = -L$, o perfil U_R apresenta uma barreira de potencial onde U_L apresenta um poço. Portanto, nenhum estado massivo localizado é suportado dentro da brana. Contudo, vemos que ter preferência por uma das branas para a realização do universo naturalmente quebra a simetria $r \to -r$, sendo evidente que uma forma de preservar esta simetria é considerar acoplamentos que permitam a localização em ambas as branas, como veremos em seguida.

2.2.2 Caso II: $F(r) = -\eta W_{\overline{\phi\phi}}$

Notamos que com este tipo de acoplamento, das eqs. (2.25) e (2.26) tem-se que

$$U_R(r) = (\eta W_{\overline{\phi\phi}})^2 - \eta W'_{\overline{\phi\phi}} \,, \tag{2.31}$$

$$U_L(r) = (\eta W_{\overline{\phi\phi}})^2 + \eta W'_{\overline{\phi\phi}}. \tag{2.32}$$

Esses potenciais acima são idênticos em estrutura aos potenciais da mecânica quântica supersimétrica em $1+1$ dimensões, onde $-\eta W_{\overline{\phi\phi}}$ desempenha o papel do superpotencial. Como dito anteriormente, a parte r-dependente do campo fermiônico satisfaz duas equações de Schrödinger onde os potencias efetivos são parceiros supersimétricos um de outro, sendo essa característica independente do acoplamento usado. É interessante notar que essa mesma estrutura pode ser encontrada no estudo da estabilidade das soluções clássicas. Nessa análise, a parte r-dependente das excitações do campo escalar (bránons) obedece uma equação de Schrödinger semelhante ao obedecido por $\alpha_{L_n}(r)$ com $\eta = 1$, com um potencial efetivo dado por

$$U_{eff}(r) = W_{\overline{\phi\phi}}{}^2 + W'_{\overline{\phi\phi}}. \tag{2.33}$$

Justamente, o fato de ter um espectro idêntico para bránons (excitações bosónicas) e férmions, é um dos principais ingredientes da supersimetria na Física das partículas. Por esta razão, $W_{\overline{\phi\phi}}$ é dita ser um reminiscente da SUSY. Guiado por isto e pelo fato de que estamos procurando por funções $\alpha_{L_0}(r)$ e $\alpha_{R_0}(r)$ cujos picos estejam localizados no núcleo das branas, adotamos o acoplamento $-\eta W_{\overline{\phi\phi}}$, cujo perfil, obtido a partir das expressões (2.5) e (2.7), é mostrado na figura 2.7.

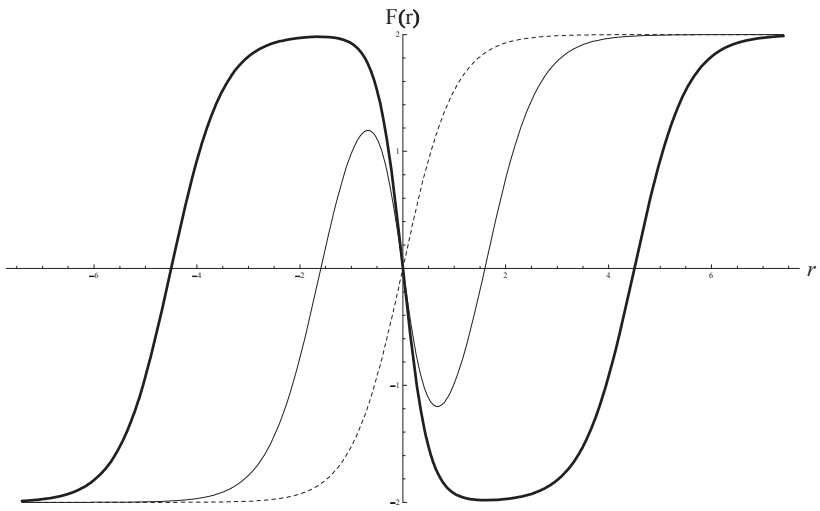


Figura 2.7: Perfil de $F(r) = -W_{\overline{\phi\phi}}$, para $L = 0.01$ (linha tracejada), $L = 1.6$ (linha fina) e $L = 4.5$ (linha cheia).

Novamente obtemos a α_{L_0} como única solução normalizável, expressa como

$$\alpha_{L_0}(r) = N_{L_0}\left(\text{sech}^2(r+L)+\text{sech}^2(r-L)\right)^{\eta}, \tag{2.34}$$

$$\alpha_{R_0}(r) = 0. \tag{2.35}$$

Uma óbvia diferença aparece em relação com o caso anterior: agora obtemos um modo-

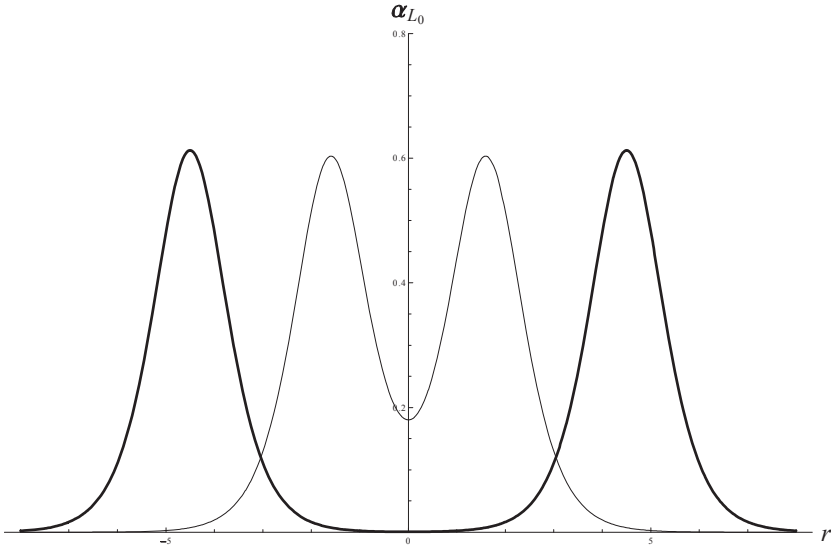


Figura 2.8: α_{L_0} no caso $F(r) = -W_{\overline{\phi\phi}}$ para $L = 1.6$ (linha fina) e $L = 4.5$ (lina cheia).

zero cuja auto-função tem pico em ambas as branas. Da figura 2.8 notamos que α_{L_0} é simétrico em r e apresenta um pico em cada um dos núcleos das branas quando elas se separam. Portanto, a densidade de probabilidade de encontrar férmions não massivos entre as duas branas diminui quando L aumenta.

A localização de férmions massivos vai depender, como sempre, do comportamento dos potenciais efetivos. A figura 2.9 mostra o perfil dos potenciais $U_R(r)$ e $U_L(r)$ para um valor específico de L e considerando $\eta = 1$. Para valores de L próximos a zero, a configuração de U_L é de um poço simples com um mínimo em $r = 0$. Quando L aumenta, o mínimo também aumenta, de tal forma que o perfil de U_L muda de concavidade em $r = 0$ a partir de um valor crítico L_c determinado pela condição $U_L''(r = 0) = 0$. Assim, para $L \gtrsim L_c$, dois pequenos poços são observados ao redor de $r = \pm L$, que logo adotam a forma de um poço duplo para $L = l$, correspondente à condição $U_L(r = 0) = 0$. Este comportamento sinaliza a possível existência de modos massivos além do, sempre presente, modo-zero. Pode-se observar que $U_L(r) = 2(2-3\text{sech}^2(r))$ e $U_R(r) = 2(2-\text{sech}^2(r))$ para $L = 0$ e $\eta = 1$ de tal forma que o primeiro admite dois estados ligados e o segundo, só um. O estado fundamental de $U_L(r)$ para $L = 0$ e $\eta = 1$ é $\alpha_{L_0} \simeq \text{sech}^2(r)$, enquanto o primeiro estado excitado é $\alpha_{L_1} \simeq \text{sech}(r)\tanh(r)$.

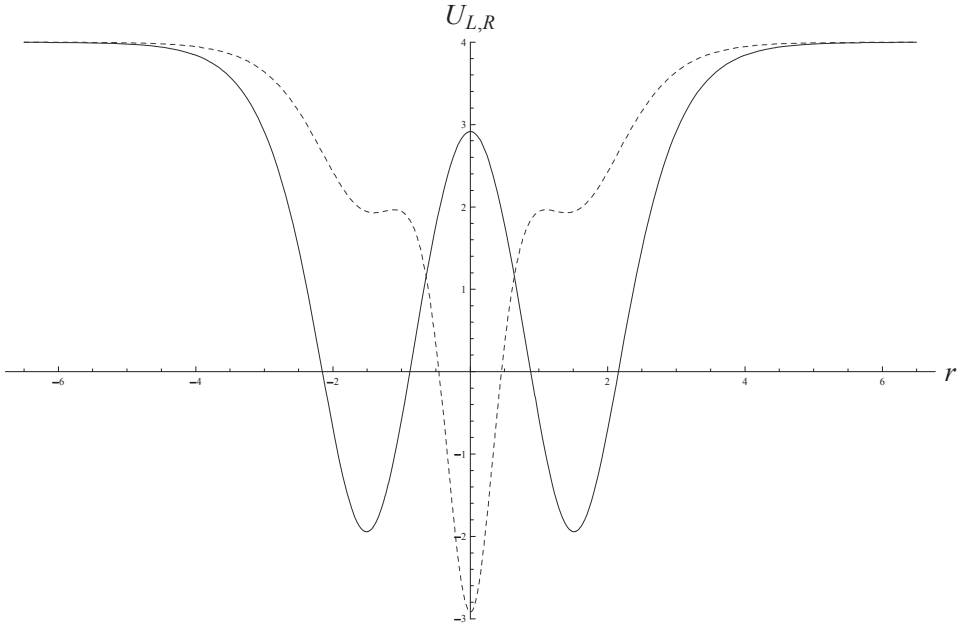


Figura 2.9: Potenciais efetivos para o caso $F(r) = -W_{\overline{\phi\phi}}$, com $L = 1.5$. $U_L(r)$ (linha contínua), $U_R(r)$ (linha tracejada).

Por outro lado, o primeiro estado excitado de $U_R(r)$ para $L = 0$ e $\eta = 1$ é $\alpha_{R_1} \simeq \text{sech}(r)$. Além disso, de (2.34) para $\eta = 1$, pode-se construir uma função anti-simétrica tipo $\alpha_{L_1} \sim \text{sech}^2(r + L) - \text{sech}^2(r - L)$, como uma solução aproximada para o primeiro estado excitado de $U_L(r)$ quando $L \gg l$. Esta aproximação para o primeiro estado excitado é comumente usada no estudo do tunelamento em um potencial tipo poço duplo [20][21].

Usando os resultados descritos acima, em conjunto com o método de Numerov, analisaremos o comportamento de α_{L_1}, α_{R_1} e m_1^2 para valores intermediários de L. A figura 2.10 mostra como α_{R_1} fica distribuído principalmente na região entre as branas, portanto temos uma pequena densidade de probabilidade de observar aquele modo massivo dentro das paredes onde o universo seria realizado, enquanto que para α_{L_1}, a densidade de probabilidade é pronunciada exatamente nos núcleos das branas. Em síntese, pelo menos um modo massivo poderia ser localizado nas branas.

Da figura 2.11 vemos que o autovalor m_1^2 decresce suavemente quando L aumenta; isto é um resultado esperado quando tratamos problemas com poços duplos em mecânica quântica não-relativística. Deste modo, os autovalores de α_{L_0} e α_{L_1} são muito próximos para valores de L suficientemente grandes, ou seja, são estados quase-degenerados. Isto nos permite construir um estado massivo de quiralidade esquerda a partir da mistura do primeiro estado excitado com o estado fundamental, da seguinte forma

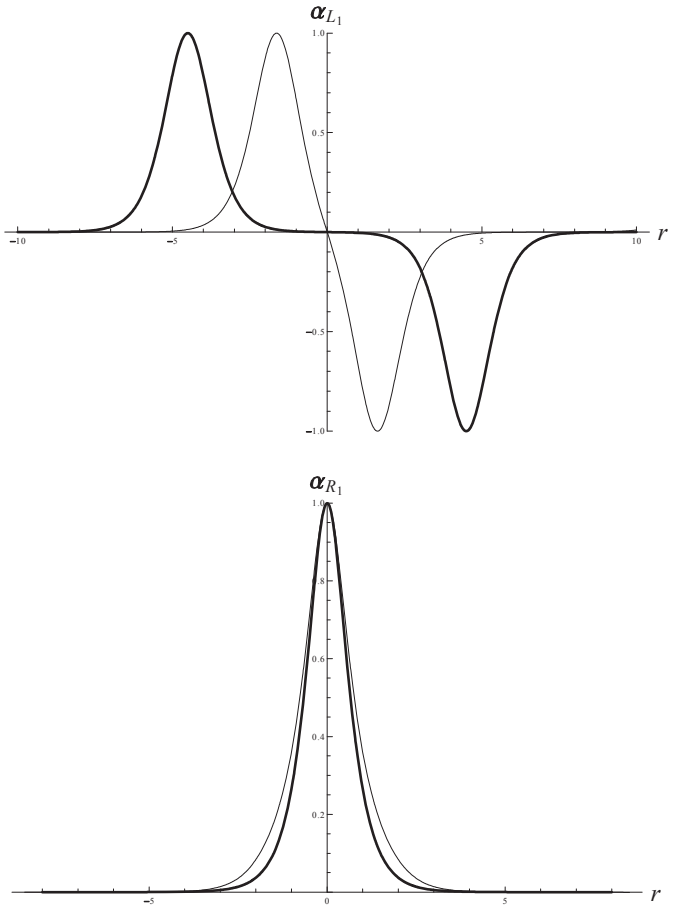


Figura 2.10: α_{L_1} (superior) e α_{R_1} (inferior) para $F(r) = -W_{\overline{\phi\phi}}$, para $L = 1.6$ (linha fina)e $L = 4.5$ (linha grossa).

$$\Psi_{L,mis} = N(\alpha_{L_0} + \alpha_{L_1} e^{-im_1 t})\chi_L, \tag{2.36}$$

onde χ_L é um espinor constante o qual satisfaz $\gamma^5\chi_L = -\chi_L$. Um cenário semelhante é encontrado no estudo quântico da molécula de amônia (NH_3). Nesse caso, uma equação de Schrödinger com um potencial efetivo tipo poço duplo foi usada para descrever a possibilidade da inversão da molécula (quando o átomo de nitrogênio passa através do plano formado pelos 3 átomos de hidrogênio) por meio do efeito túnel. Tal efeito foi vislumbrado através da obtenção de uma densidade de probabilidade dependente do tempo construída a partir da superposição de funções de onda simétricas e antisimétricas geradas por um pequeno "*splitting*" da energia que aparece ao considerar a pequena probabilidade de ter tunelamento entre os dois poços, ou seja, ao considerar as duas possíveis posições do átomo de nitrogênio na molécula de amônia. A construção da expressão (2.36) está baseada nesse argumento. Tratamos de ser cautelosos ao propor este estado misturado, posto que estamos supondo que existe um marco de referência em repouso para as partículas em tal estado misto.

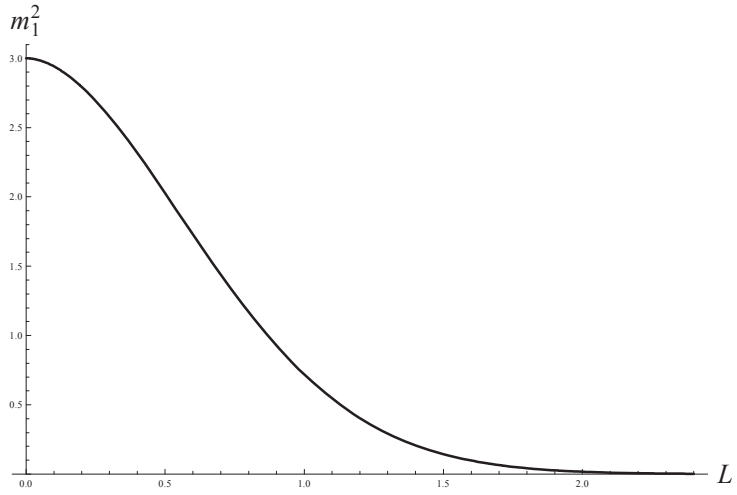


Figura 2.11: Autovalor do primeiro estado excitado contra L

Baseado neste raciocínio, a equação de Dirac $i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_{L,mis} = m_n\psi_R$ é satisfeita, já que $m_1\gamma^0\chi_L e^{-m_1 t} = m_1\chi_R e^{-m_1 t}$ ($\gamma^5\chi_R = \chi_R$) e não existem partículas sem massa de quiralidade direita, nem dentro nem fora das branas. A densidade de probabilidade associada com $\Psi_{L,mis}$ é dado por

$$\rho(r,t) = |N|^2 \left[\alpha_{L_0}^2(r) + \alpha_{L_1}^2(r) + 2\alpha_{L_0}(r)\alpha_{L_1}(r)\cos(m_1 t)\right], \tag{2.37}$$

o qual apresenta uma densidade de probabilidade oscilante com período de oscilação $T = h/m_1c^2$.

Ajudados pelo método de Numerov, o comportamento de $\rho(r,t)$ é mostrado na figura 2.12. Ao definir um instante inicial ($t = 0$), o férmion nesse estado misturado exibe máxima probabilidade de ser medido (localizado) na brana da esquerda. A partir de $t > 0$, essa probabilidade decresce e compensa em um aumento da probabilidade de encontrar o férmion na brana da direita. O tunelamento ocorre para $t = T$, desde que a probabilidade de encontrar o férmion na brana da direita seja máxima. Note que, uma pequena massa m_1 implicaria um longo tempo de tunelamento. O férmion poderia tunelar de uma brana para outra, provavelmente ele poderia ser encontrado em ambas, mas não simultaneamente. Além disso, devido ao férmion ter quiralidade definida, então poderia representar neutrinos com alguma massa pequena.

Quando L cresce, outro estado massivo localizado pode-se realizar dentro das branas. Na verdade, nós encontramos numericamente espaço para mais um estado, neste caso, os modos α_{L_2} e α_{R_2} para um determinado valor de L. De fato, existe uma grande dependência entre o número de estados massivos confinados e o valor de L. Isso é devido a que esse parâmetro define a largura da boca de poço do qual depende a obtenção de mais modos fermiônicos ligados.

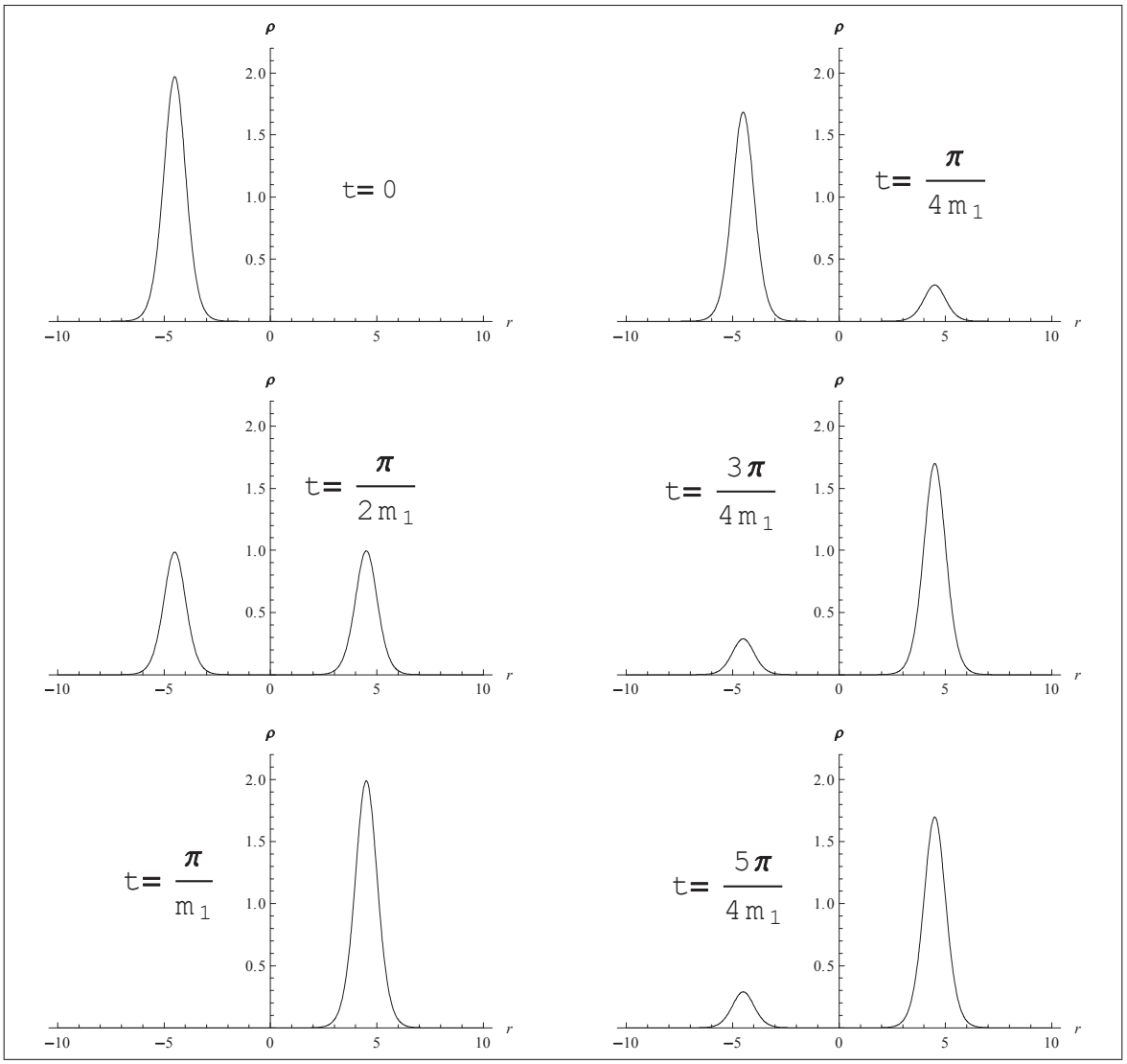


Figura 2.12: Perfil de $\rho(r,t)$ para distintos valores de t.

Estados misturados com esses estados adicionais poderiam ser construidos, mas não serão tratados nesta dissertação. Contudo, é evidente que o acoplamento $-W_{\phi\phi}$ fornece um cenário muito mais interessante do que fornecido pelo acoplamento considerado no Caso I, desde que o acoplamento usado no segundo caso permite, além da localização dos modos massivos, a localização de modos-zero quando as branas são divididas, situação que foi descrita muito bem pelo modelo não-polinomial considerado neste capítulo.

No entanto, outros modelos poderiam ter sido usados para representar a separação das branas; basta que esses modelos forneçam soluções que, além de saturar o limite de Bogomol'nyi, exibam uma configuração tipo kink duplo para as soluções clássicas. De fato, as soluções clássicas com perfil de kink duplo são também de grande interesse em outras áreas da ciência, desde que essas soluções poderiam representar, pelo menos qualitativamente, transições de fase de primeira ordem. Dependendo do contexto, essas

transições poderiam ocorrer devido a variações da temperatura, de tal forma que quando o sistema se aproxima de uma temperatura crítica, a interface que interpola entre duas fases distintas começa a se dividir (*splitting*) formando duas interfaces (paredes de domínio) e aparecendo, no meio delas, uma nova fase homogênea (desordenada). O crescimento dessa fase significa que o sistema estaria cada vez mais próximo da temperatura crítica, podendo até produzir, inclusive, o que em matéria condensada chamam de "*complete wetting*" [22, 23]. A separação de paredes de domínio seguido do "*wetting*" ou do "*complete wetting*" poderiam ocorrer em alguns materiais paramagnéticos [24] e ferroelétricos [25], também em QCD supersimétrica [26]; mas o nosso interesse particular está na possibilidade de ocorrência desses fenômenos em cenários de mundos brana, onde a divisão de branas (*split brane*) [11] toma lugar.

A ideia do "*splitting brane*" foi estabelecida originalmente em [10]. Considerando um modelo que inclue um campo escalar complexo num espaço-tempo $(4+1)D$ com geometria deformada, as equações de movimento para cada um dos componentes do campo, fornece numericamente soluções clássicas com um perfil tipo kink duplo, sendo a brana descrita por um dos componentes desse campo. Mais recentemente, soluções clássicas não analíticas para descrever separação de branas surgem também considerando o potencial $V(\phi) = a\phi^2 - b\phi^4 + c\phi^6$ [17]. Nesse caso, valores críticos de a levam ao aparecimento de soluções clássicas não únicas que exibem uma configuração de kink duplo, mesmo se o espaço-tempo fosse deformado ou não.

Numerosos trabalhos [27] surgiram tentando encontrar novos modelos que forneçam soluções clássicas analíticas que sejam aplicáveis a contextos de mundos brana, especificamente no estudo de modelos num espaço-tempo $5D$ com geometria deformada. Nesses casos, o modelo incorpora à expressão (2.2) uma contribuição negativa proporcional a $W^2(\phi)$, que na maioria dos casos é predominante. Isso produz que a maioria dos modelos apresentem um potencial efetivo não limitado por baixo (unbounded from below) que, de fato, seria uma desvantagem do modelo, devido que implicaria a impossibilidade de analisar a estabilidade das soluções sob pequenas flutuações em torno das soluções de mínima energia. Essa é uma característica especial de todos os modelos polinomiais, inclusive também dos modelos não-polinomiais similares ao considerado neste capítulo. Talvez o único exemplo (e o mais ilustrativo) de um modelo "*bounded from below*" seja o modelo seno-Gordon. Esse modelo exibe uma tendência oscilatoria que implica na existência de soluções clássicas analíticas de energia mínima. Essas particularidades do modelo seno-Gordon juntamente com o nosso interesse de encontrar outros modelos com soluções clássicas com perfil de kink duplo que, além de que possam ser usados para descrever separação de paredes de domínio e a formação de uma fase "*wetting*", possam ser aplicáveis a cenários de mundos brana, motivaram a realização do capítulo seguinte, onde é descrito

um mecanismo de reconstrução de novos modelos não-lineares da teoria de campo que exibam soluções clássicas com perfil de kink simples e que possam ser continuamente deformadas para um kink duplo. Isso será mostrado a seguir.

Capítulo 3

Reconstrução de defeitos deformados em teoria de campos a partir da deformação do modo-zero

Motivados pelos resultados obtidos no capítulo anterior, a seguir descrevemos um método de reconstrução de modelos não-lineares em teoria de campo (MNLTC) que envolvem um campo escalar auto-interagente em $(1 + 1)$ dimensões do espaço-tempo e que forneçam soluções clássicas de energia mínima do tipo kink simples deformáveis a um kink duplo. Tal reconstrução está baseada em métodos prévios [8, 9] que consideram a solução de modo-zero da equação da estabilidade como ponto de partida. Neste caso, novos MNLTC são construídos a partir das autofunções de modo-zero que são deformações de modos-zero da equação de estabilidade para modelos bem conhecidos. O procedimento de deformação desses modos, juntamente com o método de reconstrução serão abordados na seção 3.2.

Como foi dito no final do capítulo anterior, é nossa esperança encontrar novos MNLTC que forneçam soluções clássicas de energia mínima com perfil de kink duplo e que possam ser usadas na descrição de fenômenos críticos tais como a separação de paredes de domínio e a realização do "*wetting*" ou do "*complete wetting*" em alguns materiais paramagnéticos [24] e ferroelétricos [25]. Comentamos também que nossa principal motivação está em construir modelos aplicáveis em cenários de mundos brana, similares ao modelo não-polinomial usado no capítulo anterior. Embora no 2° capítulo só foram considerados cenários onde a geometria é plana, procuramos também potenciais deformados aplicáveis a geometria "*warped*" que são limitados por baixo e cujos mínimos sejam de fato mínimos globais tal que o sistema seja estável. Na seção seguinte mostramos brevemente os aspectos mais gerais do fundamento teórico usado neste capítulo.

3.1 Aspectos gerais

Diversos MNLTC em $1+1$ dimensões do espaço-tempo são descritos pela densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\nu\phi\partial^\nu\phi - V(\phi), \tag{3.1}$$

onde $\nu = 0, 1$ e $V(\phi)$ é um potencial auto-interagente, que admite soluções clássicas exatas, $\phi_c(x,t)$, conhecidas como sólitons [9, 28]. A existência dessas soluções depende de algumas exigências que o potencial $V(\phi)$ da teoria de campos tem que satisfazer. Por exemplo: $V(\phi)$ tem que ser não-negativo e apresentar pelo menos dois mínimos. Isso permite a análise da estabilidade das soluções sob pequenas flutuações em torno das soluções de mínima energia. Tais soluções de energia mínima conectam dois mínimos vizinhos do potencial. Portanto, as soluções $\overline{\phi}(x)$ são soluções topológicas também chamadas de soluções tipo kink ou antikink. Pode-se também mostrar que kinks e antikinks são soluções da equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm\frac{dW}{d\phi} = \pm W_\phi, \tag{3.2}$$

com o potencial sendo expresso numa forma "supersimétrica", a saber $V(\phi) = W_\phi^2/2$, onde $W(\phi)$ é o superpotencial. Usando as considerações ditas anteriormente, a energia (massa) do sóliton escrita como

$$\begin{aligned}
E_{BPS} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + V(\phi)\right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx} \mp W_\phi\right)^2 \pm W_\phi\frac{d\phi}{dx}\right] \qquad (3.3)\\
&= \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(\infty)} d\phi W_\phi \qquad (3.4)\\
&= |W(\phi(+\infty)) - W(\phi(-\infty))|, \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

é também chamado de energia Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield [29, 30], ou simplesmente, energia BPS, e dizemos que a solução de (3.2) satura o limite de Bogomol'nyi.

As soluções de energia mínima são estáveis sob pequenas flutuações lineares. Isso pode ser mostrado expandindo o campo em torno delas, tal como

$$\phi(x,t) = \overline{\phi}(x) + \sum_n \psi_n(x)e^{-i\omega_n t}, \tag{3.6}$$

e mantendo termos quadráticos na ação. Usando a equação de movimento, encontramos que as flutuações $\psi_n(x)$ satisfazem uma equação de Schrödinger independente do tempo

$$[-\psi_n'' + U(x)]\,\psi_n = \omega_n^2 \psi_n. \tag{3.7}$$

A equação (3.7) e conhecida na literatura como a equação de estabilidade, onde

$$U(x) = W_{\phi\phi}^2 + W_\phi W_{\phi\phi\phi}\big|_{\phi=\bar{\phi}(x)} = W_{\phi\phi}^2 \pm \frac{d}{dx} W_{\phi\phi}\bigg|_{\phi=\bar{\phi}(x)}, \tag{3.8}$$

onde o sinal superior (inferior) corresponde à solução da equação (3.2) com o sinal superior (inferior).

Por outro lado, pode-se observar que a equação de Schrödinger (3.7) pode ser fatorada como

$$\mathcal{S}^\dagger \mathcal{S} \psi_n = \omega_n^2 \psi_n, \tag{3.9}$$

com $\mathcal{S}^\dagger = \frac{d}{dx} - w(x)$, onde o superpotencial da mecânica quântica é $w(x) = \mp W_{\phi\phi}|_{\phi=\bar{\phi}(x)}$. Tal fatoração do operador de Schrödinger permite mostrar que $\omega_n^2 \geq 0$.

Portanto, o conhecimento de funções de onda de energia nula, $\psi_0(x)$ ($\omega_0 = 0$), para certos potenciais da equação de Schrödinger pode ser usado para reconstruir MNLTC em $1+1$ dimensões [8, 9].

Nós estamos particularmente interessados na reconstrução de MNLTC cujas soluções clássicas de energia mínima exibam o perfil de um kink simples e que possam ser continuamente deformados em kinks duplos. Tais modelos, chamados de modelos deformados, foram estudados em [12] onde os autores propõem um método de deformação que consiste basicamente no mapeamento de um MNLTC em outro modelo cujas soluções são bem conhecidas. No nosso caso, seguimos o método de reconstrução proposto em [8] considerando um modo-zero deformado construído a partir da superposição de duas copias de um modo zero da equação de estabilidade de um MNLTC conhecido e cujos picos, localizados em lados opostos do origem, são colocados simetricamente em torno dos pontos $x = \pm L$, sendo esse modo-zero deformado autofunção de uma nova equação de estabilidade. Quando finalmente a solução clássica de energia mínina e o MNLTC são obtidos via a deformação do modo-zero, elas são chamadas de defeitos deformados e MNLTC deformados, respectivamente.

A seguir, desenvolvemos brevemente o formalismo matemático da construção de MNLTC. Logo, será mostrado a aplicação desse método usando a deformação do modo zero fornecido pela equação de estabilidade de modelos conhecidos, entre eles, os modelos seno-Gordon e o $\lambda\phi^4$.

3.2 Método de construção de MNLTC

Nesta seção será mostrado brevemente o mecanismo de construção de MNLTC a partir do modo-zero. Da equação (3.9), é fácil ver que o modo-zero satisfaz a

$$\psi_0' = \pm W_{\phi\phi}\psi_0. \tag{3.10}$$

Usando as equações diferenciais de primeira ordem (3.2) encontramos que

$$\psi_0(x) = \pm N\ W_\phi\Big|_{\phi=\overline{\phi}(x)} = N\ \frac{d\overline{\phi}}{dx}, \tag{3.11}$$

onde $N = E_{BPS}^{-1/2}$ é uma constante de normalização. Portanto, dada uma solução de modo-zero associada a um problema quântico não relativístico cujo espectro é não negativo, integramos a eq.(3.11)

$$\overline{\phi}(x) \propto \int^x \psi_0(y)dy, \tag{3.12}$$

para obter a solução kink (antikink) do respectivo MNLTC. Escolhendo uma conveniente constante de integração, que está relacionada com as posições do mínimo do potencial da teoria de campo, procuramos a função inversa de $\overline{\phi}(x)$, escrevendo x como função de $\overline{\phi}$. Finalmente, o potencial da teoria de campos resulta ser

$$V(\overline{\phi}) = \frac{1}{2}W_{\overline{\phi}}^2 \equiv \frac{1}{2}\psi_0^2\left(x\right)\Big|_{x=x(\overline{\phi})}. \tag{3.13}$$

Desde que a continuação analítica de $V(\overline{\phi})$ para valores reais de ϕ fora do domínio de $\overline{\phi}$ revela um potencial não-negativo que é limitado por baixo, já seja com uma estrutura periódica de mínimos ou com mínimos definidos unicamente pelo comportamento assimptótico de $\overline{\phi}$, então podemos estender o domínio do potencial da teoria de campo fora dos valores de $\overline{\phi}$, desta forma

$$V(\phi) = \frac{1}{2}W_\phi^2 \equiv \frac{1}{2}\psi_0^2\left(x(\phi)\right).$$

Deste modo, vemos que é possível a construção *a priori* de modelos da teoria de campos a partir de um modo-zero normalizável arbitrário. Note da eq. (3.12) o aparecimento de outra constante de integração arbitrária que juntamente com a constante surgida da eq. (3.11), definem a fase e amplitude de $\overline{\phi}$. Assim, concluímos que o potencial da teoria de campos não é único, desde que essas constantes implicariam em um deslocamento rígido dos mínimos e um redimensionamento do modelo. A positividade e o número de mínimos do potencial não são afetados por essas constantes, razão pela qual podem ser colocadas convenientemente dependendo de qual modelo queremos reconstruir. Na seção seguinte mostraremos a aplicabilidade do método descrito acima considerando a deformação dos modos-zero das equações de estabilidade de alguns dos modelos da teoria de campo mais

conhecidos na literatura. É evidente que qualquer que seja o modo-zero considerado, a possibilidade de encontrar um MNLTC deformado depende fundamentalmente da integrabilidade de modo-zero e da inversão da solução clássica, onde esse último exibe sempre a um perfil de kink deformável.

3.2.1 Modelo de seno-Gordon deformado

O modelo seno-Gordon é um dos modelos mais conhecidos e estudados na teoria de campos clássicos não-lineares. Igualmente ao modelo $\lambda\phi^4$, o modelo seno-Gordon possui uma propriedade raramente encontrada em modelos não-lineares: fornece soluções exatas. Consideramos o seguinte modo-zero deformado:

$$\psi_0(x) = \operatorname{sech}(x+L) + \operatorname{sech}(x-L). \tag{3.14}$$

Esta função de onda pode ser pensada como a junção de dois modos-zero associados à equação de estabilidade resultante do bem conhecido modelo de seno-Gordon; um deles localizado em $x = L$ e outro em $x = -L$.

A solução tipo kink obtida usando (3.12) é dada por

$$\overline{\phi}(x) = 2\arctan\left[\tanh\left(\frac{x+L}{2}\right)\right] + 2\arctan\left[\tanh\left(\frac{x-L}{2}\right)\right] - \pi, \tag{3.15}$$

onde a constante integração π foi escolhida convenientemente. Os perfis do modo-zero e de $\overline{\phi}(x)$ são mostrados na figura 3.1 para dois valores diferentes de L. Vemos que o modo-zero apresenta um pico na origem para $L = 0$ quando $\overline{\phi}(x)$ exibe um perfil de kink simples, o qual é continuamente deformado para um kink duplo quando L cresce.

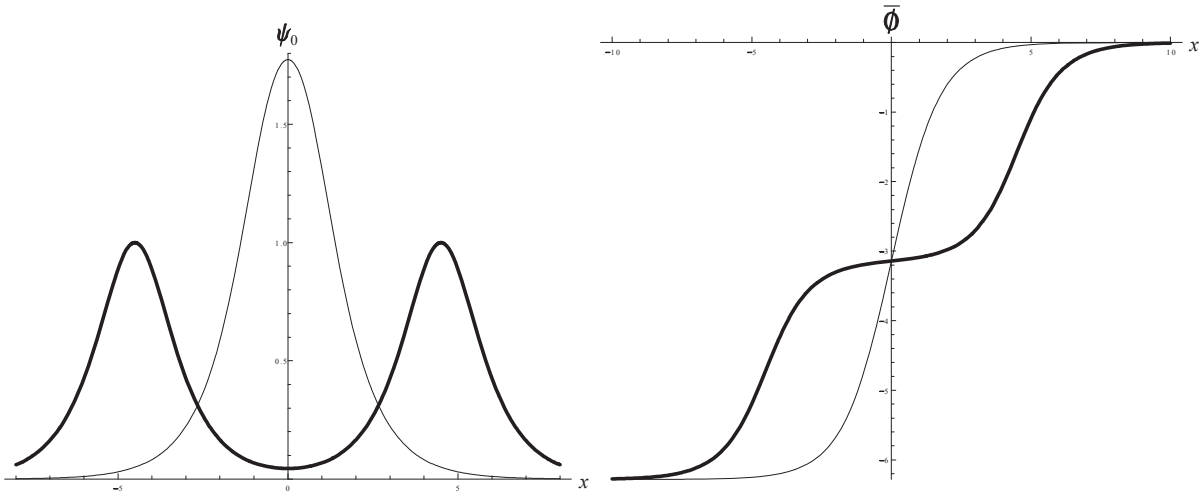


Figura 3.1: Perfil do modo zero e kink deformados para $L = 0.5$ (linha fina) e $L = 4.5$ (linha cheia).

Logo, invertendo x como função de $\overline{\phi}$ e usando (3.13), obtemos

$$V_{ds-G}(\phi) = 2\left[\cot^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + \operatorname{sech}^2(L)\right]\sin^4\left(\frac{\phi}{2}\right). \tag{3.16}$$

O perfil do potencial pode ser observado na figura 3.2. O modelo apresenta uma estrutura periódica de mínimos globais em $\phi = 2n\pi$ com $n = 0, \pm 1, \pm 2...$, para o caso em que $\tanh(L) \leq \sqrt{2}/2$. Quando $\tanh(L) > \sqrt{2}/2$, um mínimo local aparece entre 2 mínimos globais vizinhos que vira mínimo global quando $L \to +\infty$. Notamos que verdadeiramente o modelo (3.16) é uma deformação do modelo seno-Gordon, pois ele é recuperado quando $L = 0$. Um modelo seno-Gordon deformado foi anteriormente obtido no primeiro artigo de [12] usando outro método de deformação.

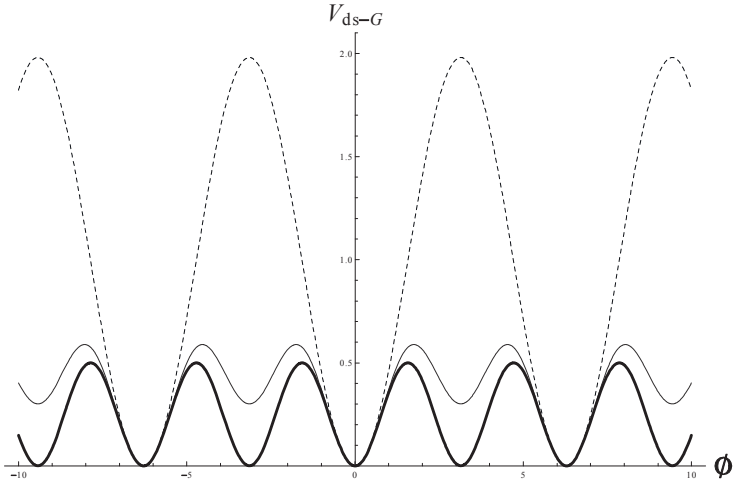


Figura 3.2: Perfil do modelo sine-Gordon deformado para $L = 0.1$ (linha tracejada), $L = 1.6$ (linha fina) e $L = 4.5$ (linha cheia).

Desta forma, encontramos um MNLTC deformado cuja solução clássica de energia mínima exibe um perfil de kink deformável, similar ao modelo usado no 2° capítulo.

Um das diferenças do modelo seno-Gordon deformado encontrado aqui em relação ao proposto em [13], pode ser apreciado mais claramente quando se trabalha em cenários de mundos brana com geometria deformada. Nesse caso, o potencial dado por

$$V_B(\phi) = \frac{1}{2}W_\phi^2(\phi) \ - \frac{4}{3}W^2(\phi), \tag{3.17}$$

apresenta um contribuição negativa que, na maioria dos casos, é predominante. Por esta razão, é comum encontrar modelos não limitados por baixo (unbounded from below). Esse comportamento ocorre sempre em potenciais polinomiais, por exemplo em modelos tipo $\lambda\phi^4$ e ϕ^6, e também no proposto em [13]. Afortunadamente, devido a natureza oscilatoria da expressão (3.16), o modelo seno-Gordon deformado fornece um potencial que é limitado por baixo (ver figura 3.3).

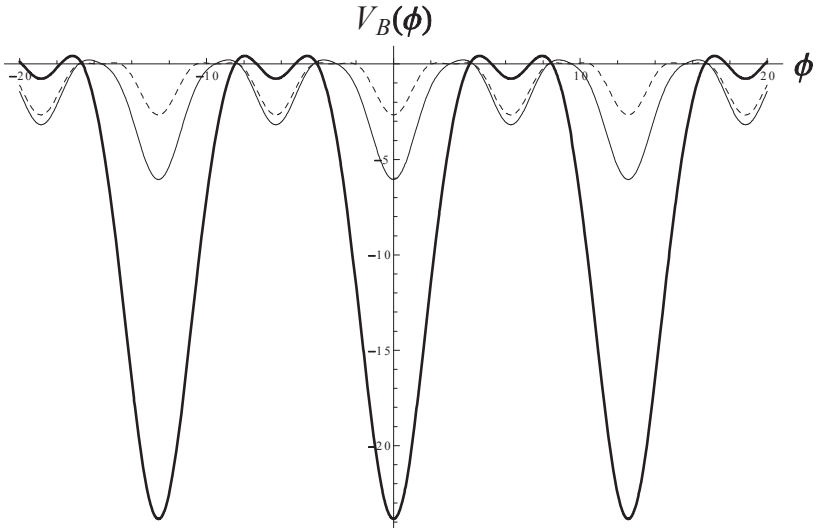


Figura 3.3: Perfil do potencial (3.17) com $W_\phi = 2\sqrt{\cot^2(\phi/2) + \operatorname{sech}^2(L)}\sin^2(\phi/2)$ para $L = 10.5$ (linha tracejada), $L = 1.6$ (linha fina) e $L = 0.65$ (linha cheia).

3.2.2 Modelo ϕ^4 deformado I

Juntamente com o modelo seno-Gordon, o modelo $\lambda\phi^4$ é um dos modelos mais famosos na teoria de campos não-linear. É vasto o número de fenômenos onde este modelo mostrou-se útil, por exemplo, em fisica da matéria condensada para o modelamento de algúns polímeros unidimensionais (como o poliacetileno), em algumas teorias cosmológicas onde a introdução de defeitos topológicos fornecidos pelo este modelo incorpora a aparição de buracos negros, etc. De fato, o modelo usado no capítulo anterior para localizar férmions em cenários de mundos branas, é uma deformação de um modelo do tipo ϕ^4. Esse modelo deformado, obtido a partir da equação de orbita de um MNLTC com dois campos escalares [13], era de natureza não-polinomial e exibia um pérfil de kink duplo. O interesse desta seção é a obtenção de um modelo alternativo usando o método de deformação descrito neste capitulo, e que será desenvolvido a seguir.

Consideramos a seguinte função de onda do modo-zero associado à equação da estabilidade do modelo ϕ^4

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sech}^2(x+L) + \operatorname{sech}^2(x-L)\right). \tag{3.18}$$

A integração da expressão anterior reproduz exatamente a solução clássica (2.7)

$$\overline{\phi}(x) = \frac{1}{2}\left(\tanh(x+L) + \tanh(x-L)\right) = \frac{\sinh(2x)}{\cosh(2L) + \cosh(2x)}, \tag{3.19}$$

e que exibe uma configuração de kink duplo semelhante à da figura 3.1. Seguindo o mecanismo de reconstrução descrito nesta seção, é fácil mostrar que o potencial da teoria

de campo fornecida por (3.19) é dado por

$$V_{d\phi^4-1}(\phi) = \frac{1}{2}\left(\phi^2-1\right)^2 \frac{\left[1+\left(\phi^2-1\right)\tanh^2(2L)\right]}{\left[1+\sqrt{1+\left(\phi^2-1\right)\tanh^2(2L)}\right]^2}. \tag{3.20}$$

O perfil do potencial é mostrado na figura 3.4. O modelo apresenta dois mínimos globais em $\phi = \pm 1$ para o caso em que $\cosh(2L) \leq 2$. Quando $\cosh(2L) > 2$, um mínimo local aparece em $\phi = 0$, que vira mínimo global quando $L \to +\infty$.

Note que para $L = 0$, o modelo ϕ^4 é recuperado. Isso é uma vantagem referente ao modelo considerado no capítulo anterior, já que esse modelo não é bem definido para $L = 0$. Quando $L \to +\infty$, embora o modelo apresente 3 mínimos globais, não foi possível reproduzir o modelo ϕ^6 da teoria de campo. A seguir é mostrado a reconstrução de um MNLTC alternativo ao modelo (3.20) que recupera satisfatoriamente os modelos usuais com 2 e 3 mínimos globais para $L = 0$ e $L \to +\infty$, respectivamente.

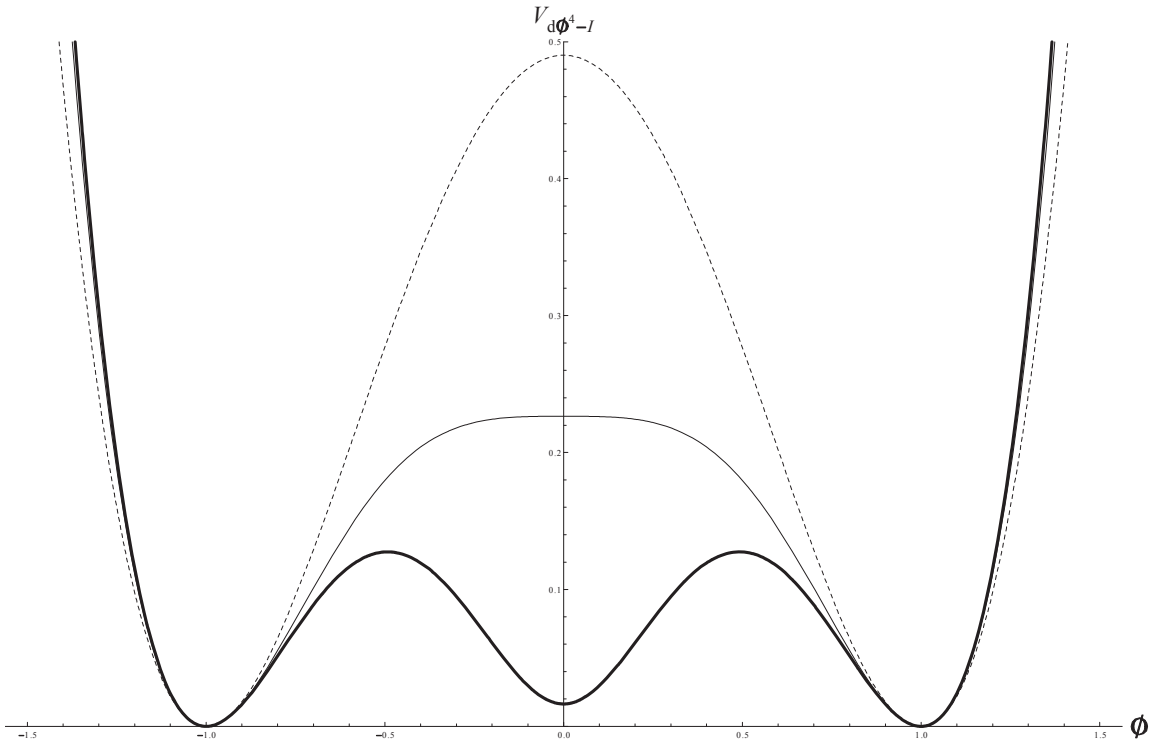


Figura 3.4: Perfil do modelo $V_{d\phi^4-I}$ para $L = 0.1$ (linha tracejada), $L = 0.65$ (linha fina) e $L = 1.5$ (linha cheia).

3.2.3 Modelo ϕ^4 deformado II

A construção deste modelo surgiu da necessidade (e curiosidade) de encontrar MNLTC deformados (se existirem) que reproduzam corretamente os modelos ϕ^4 e ϕ^6 usuais. A grande variedade de candidatos aceitáveis para modos-zero deformados que recuperem o modo-zero do modelo ϕ^4, viu-se reduzido pois poucos conseguem-se integrar e fornecer soluções clássicas aceitáveis do tipo kink. Embora poucas dessas soluções encontradas se conseguiram inverter, a seguir, será mostrado o processo de construção de um MNLTC deformado a partir de um modo-zero que satisfaz os requerimentos desejados neste seção.

Então, propõe-se a seguinte função de onda de modo-zero

$$\psi_0(x) = \frac{\cosh^2(L)\cosh(x)}{\left(\sinh^2(L)+\cosh^2(x)\right)^{3/2}}, \tag{3.21}$$

que também é uma versão deformada do modo-zero da equação de estabilidade do modelo ϕ^4 e cujo perfil é similar ao exibido na figura 3.1 . A solução clássica fornecida pela integração de (3.21) é dada por

$$\overline{\phi}(x) = \frac{\sinh(x)}{\sqrt{\sinh^2(L)+\cosh^2(x)}}. \tag{3.22}$$

Note-se que, por construção, tanto $\psi_0(x)$ quanto $\overline{\phi}(x)$ recuperam a função de onda de modo-zero e a solução clássica, do modelo ϕ^4 usual, para $L = 0$. A simplicidade das expressões acima permitiu encontrar, de forma relativamente simples, um novo MNLTC deformado

$$V_{d\phi^4-II}(\phi) = \frac{1}{2}(\phi^2-1)^2\left[(\phi^2-1)\tanh^2(L)+1\right]. \tag{3.23}$$

O perfil do potencial é mostrado na figura 3.5. Semelhante ao da seção anterior, este modelo apresenta dois mínimos globais em $\phi = \pm 1$ para situações em que $\mathrm{sech}(L) \geq 1/\sqrt{3}$. Isso significa que valores de $L \lessapprox 1.14$ preserva-se o perfil de kink simples na solução clássica. A deformação para um kink duplo acontece quando $\mathrm{sech}(L) < 1/\sqrt{3}$, onde o potencial adquire um mínimo local em $\phi = 0$, que vira mínimo global quando $L \to +\infty$.

Uma das característica principais deste MNLTC deformado, diferentemente do modelo encontrado na seção anterior, é que este recupera exatamente tanto o modelo ϕ^4 quanto o modelo ϕ^6 nos casos em que $L = 0$ e $L \to \infty$, respectivamente. MNLTC similares a (3.23) foram construídos no terceiro artigo da referência [12] e versões mais gerais do mesmo são apresentadas em [24] para descrever transições de fase de primeira ordem em materiais magnéticos e em [31] quando se discute modelos de duas sacolas para os hádrons.

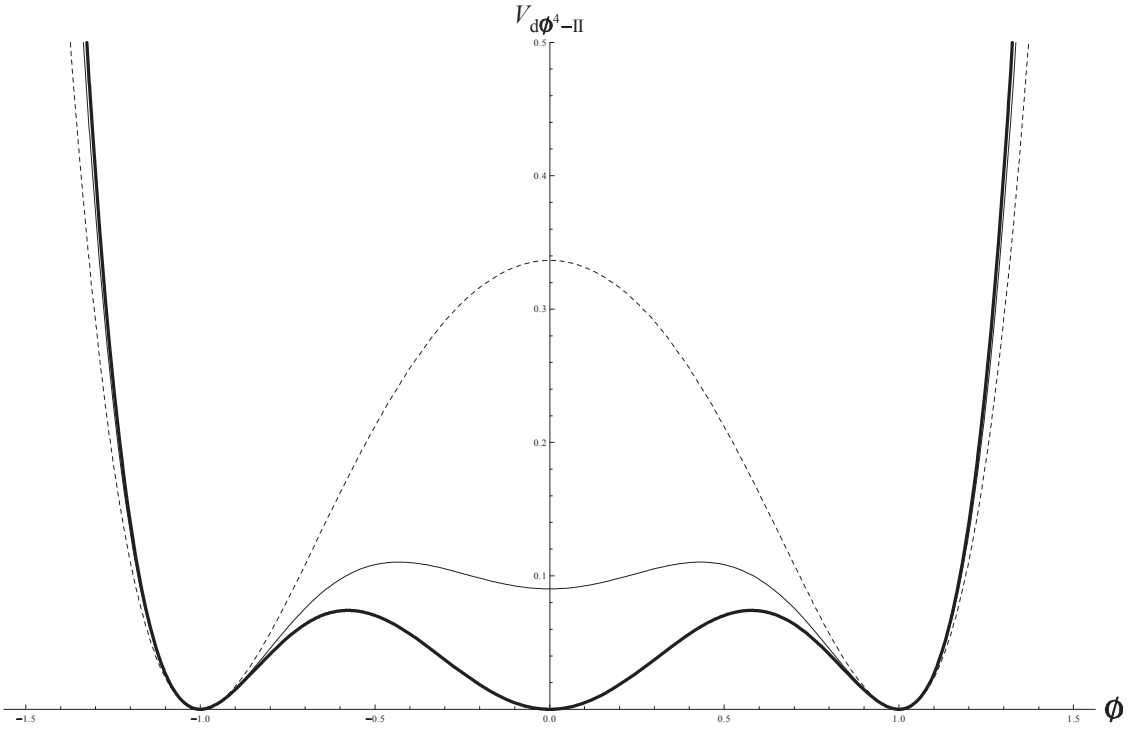


Figura 3.5: Perfil do modelo $V_{d\phi^4-II}$ para $L = 0.65$ (linha tracejada), $L = 1.5$ (linha fina) e $L = 6.5$ (linha cheia).

Em cenários de mundos brana com geometria deformada, tanto o modelo ϕ^4 d-I quanto o modelo ϕ^4 d-II fornecem potenciais não limitados por baixo (unbounded from below). Devido estarmos interessados na construção de modelos que, além de fornecer soluções clássicas com perfil de kink duplo, sejam limitados por baixo (bounded from below) quando aplicados a mundos brana em espaço-tempo curvo, a seguir mostramos o processo de construção de um MNLTC seguindo um processo diferente para deformação do modo-zero. Nesse caso, consideramos um modo-zero surgido da simetrização de um potencial associado à equação de estabilidade de um modelo que, similar ao modelo seno-Gordon deformado, exibe uma natureza oscilatoria.

3.2.4 Simetrização do potencial Scarff da mecânica quântica e um novo MNLTC

Nesta seção será desenvolvido o processo de construção de um novo MNLTC originado da simetrização do potencial Scarff-II associado à equação de estabilidade de um dos MNLTC estudados em [32] e [8]. De fato, a simetrização desse potencial foi resultado da simetrização do modo-zero original $\psi_0(x) = \text{sech}(x)\ \exp(\beta \tan^{-1}(\sinh(x))$ com $\beta > 0$, onde essa simetrização mostra-se como um processo equivalente com o método de deformação do modo-zero usado nos exemplos anteriores, dando origem à seguinte função de onda

$$\psi_0(x) = \text{sech}(x) \cosh(\beta \tan^{-1}(\sinh x)), \tag{3.24}$$

que representa o modo-zero da equação de estabilidade associada ao MNLTC deformado que tenta-se reconstruir. Devido à simetrização, tal função de onda exibe um comportamento similar ao mostrado pelos modos-zero considerados nas seções anteriores, com β desempenhando o papel de parâmetro de deformação.

A formação de dois picos máximos localizados simetricamente em relação á origem acontece para $\beta > 1$. Nesse caso, a solução clássica tipo kink dada por

$$\overline{\phi}(x) = \frac{1}{\beta} \sinh(\beta \tan^{-1}(\sinh x)), \tag{3.25}$$

é continuamente deformada até exibir uma configuração de kink duplo. Seguindo o processo de reconstrução, é mostrado um novo MNLTC deformado dado por

$$V_{Novo-d}(\phi) = \frac{1}{2}\cos^2(\frac{1}{\beta}\sin^{-1}(\beta\,\phi))(1+\beta^2\phi^2), \tag{3.26}$$

cujo comportamento para dois diferentes valores de β é mostrado na figura 3.6.

Este modelo, semelhante ao modelo seno-Gordon deformado, apresenta um conjunto infinito de mínimos, localizados em $\bar{\phi} = \pm(1/\beta)\sinh((2n+1)\pi\beta/2))$, com $\beta > 0$ e n um número inteiro não negativo. Quando $\beta > 1$, um mínimo local aparece em $\phi = 0$, mas nunca vira um mínimo global. Qualquer par de mínimos vizinhos podem ser conectados através da generalização da solução (3.25), na forma

$$\overline{\phi}_n(x) = \pm\frac{1}{\beta}\sinh\beta(n\pi + \tan^{-1}(\sinh x)), \qquad n = 0, 1, 2.... \tag{3.27}$$

onde o sinal superior (inferior) corresponde às soluções que conectam os mínimos positivos (negativos). Então, a fixação de n fornece um setor topológico que é representado por uma determinada solução clássica e uma energia BPS específica. Essa energia, dada por

$$E_{BPS(n)} = 1 + \frac{\cosh(\pi\beta)\cosh(2n\pi\beta)}{(1+4\beta^2)}, \tag{3.28}$$

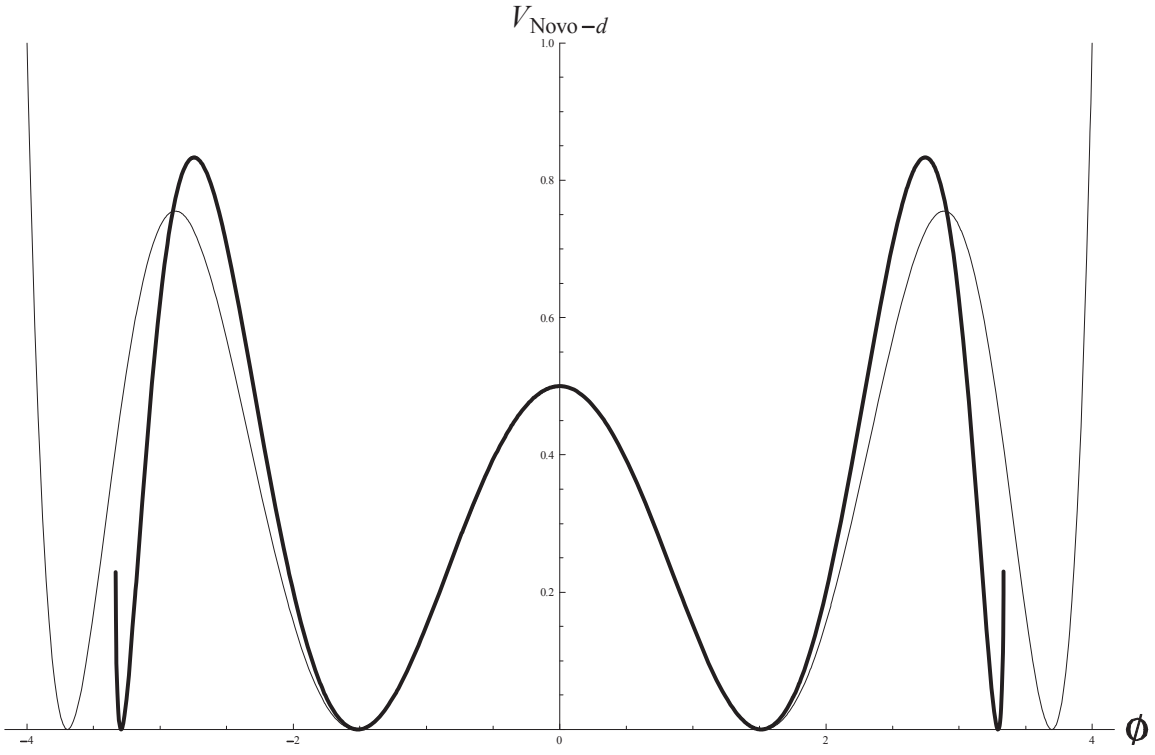


Figura 3.6: Perfil de $V_{Novo-d}(\phi)$ para $\beta = 0.25$ (linha fina), $\beta = 0.3$ (linha cheia).

é diferente em cada setor topológico e muda com a deformação, contrário ao que acontece com o modelo seno-Gordon cujos setores topológicos são degenerados devido que os vácuos vizinhos são equidistantes uns dos outros. Além disso, pode-se perceber que o setor topológico com energia BPS mais baixa que conecta os mínimos $\overline{\phi}_0 = \pm \sinh(\beta\pi/2)/\beta$, é o único cujas soluções clássicas não triviais exibem perfil de kink duplo.

3.3 Comentários Finais

Nosso interesse inicial na reconstrução de novos MNLTC que forneçam soluções clássicas com perfil de kink duplo foi principalmente motivado pela possibilidade de aplicar esses modelos em cenários de mundos brana em situações em que as branas se dividem. De fato, com qualquer dos novos MNLTC encontrados, poderia ser desenvolvida uma análise similar à feita no 2º capítulo, onde foi mostrado que a localização de matéria nas branas dependia principalmente da existência de estados fermiônicos isolados de energia nula (modos-zero) que acompanhem a divisão das paredes de domínio. Além disso, comentamos que a presença desses estados são o ingrediente principal de um dos fenômenos próprio da teoria quântica de campos, o fracionamento do número fermiônico. Embora não tenha sido estudado no contexto de mundos brana, um número fermiônico fraccionário poderia ser induzido neste cenário. Isso pode ser facilmente demonstrado a partir das equações (2.15) e (2.16). Essas expressões podem ser unificadas em uma equação de autovalores da forma $H\ \Psi(r) = E\ \Psi(r)$ identificando $E = m_n^2$ e

$$H = \alpha p + \beta V_s(r), \tag{3.29}$$

com $\Psi^\dagger(r) = (\alpha_{Ln}^*\ \ \alpha_{Rn}^*)$. As matrizes $\alpha = \sigma_2$ e $\beta = \sigma_1$ são as matrizes de Pauli e $V_s(r) = \widetilde{F}(\overline{\phi})$. Portanto, pode-se dizer que o cenário proposto por Rubakov e Shaposhnikov é equivalente a considerar uma equação de Dirac em $1+1$ dimensões para férmions sem massa interagindo com um potencial escalar tipo sóliton em unidades onde $c = \hbar = 1$. Tal como foi mostrado por Jackiw e Rebbi (1976) [1], tais sistemas férmion-sóliton induzem um número fermiônico fracionário supondo a existência de estados de modos-zero. Particularmente, a interação de férmions com sólitons tem chamado muita atenção no contexto da mecânica quântica relativística. Um desses casos foi estudado em [15]. Nesse trabalho os autores mostraram que o sistema férmion-sóliton acoplados via interação pseudo-escalar fornecia estados isolados para férmions massivos, bem como sem massa (as interações escalares e pseudo-escalares são indistinguíveis para férmions sem massa). Usando argumentos de simetria e tendo como precedente o trabalho feito por Jackiw [1], eles comentaram a possibilidade de ter fracionamento de carga fermiônica no caso de férmions de massa nula.

De fato, números fermiônicos irracionais também poderiam ter sido induzidos colocando no sistema termos que quebram a simetria de conjugação de carga [33, 34], mas esses casos não serão analisados nesta dissertação e focaremos nossa atenção no estudo do papel que desempenham os modos-zero na obtenção de números fermiônicos induzidos em diferentes circunstâncias. Isso será mostrado a seguir no próximo capítulo.

Capítulo 4

Modos-Zero Fermiônicos e Carga fracionária induzida

A carga (ou número) fermiônica é uma quantidade conservada associada com a invariância sob transformações de fase $U(1)$ numa lagrangiana com férmions de Dirac. Usualmente, segundo a TQC, esse número fermiônico é zero no vácuo. O surgimento natural de números fermiônicos fracionários induzidos acontece, tal como foi mostrado originalmente por Jackiw e Rebbi (1976) [1], em sistemas em que férmions unidimensionais interagem com campos escalares de fundo tipo sóliton. Nesse trabalho encontraram que a existência de modos-zero fermiônicos no sistema férmion-sóliton implicaria estados quânticos com números fermiônicos fracionário $\pm 1/2$, e além, demonstraram como aquele novo número quântico pode ser induzido na molêcula de poliacetileno.

Mais tarde foi mostrado que esse número fracionário seria responsável pela condutividade elétrica desse material. Isso motivou um crescimento vertiginoso na pesquisa desse fenômeno em matéria condensada, principalmente no estudo de redes cristalinas. Guiados por essa efervescência, neste capítulo estudamos o papel que desempenham os estados fermiônicos de energia nula na possibilidade de obter números fermiônicos induzidos em sistemas semelhantes ao proposto em [1] é também em redes de grafeno.

4.1 Fracionamento do número fermiônico em $1+1$ dimensões

A seguir, é mostrado o mecanismo de fracionamento da carga para férmions unidimensional interagindo com campos escalares de fundo tipo sóliton usando o formalismo desenvolvido em [35].

4.1.1 Mecanismo do fracionamento

Consideramos um campo fermiônico de Dirac Ψ interagindo com um campo escalar real ϕ em $(1+1)$ dimensões do espaço-tempo através de um acoplamento de Yukawa definido pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - V(\phi) + \overline{\Psi}(i\partial\!\!\!/ - g\phi)\Psi, \tag{4.1}$$

onde $V(\phi)$ é a energia potencial do campo escalar e g a constante de acoplamento de Yukawa. Introduzimos a notação de Feynman $\not{A} \equiv \gamma^\nu A_\nu$, onde γ^ν são as matrizes de Dirac que satisfazem o álgebra de Clifford

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \tag{4.2}$$

em $(1+1)$ dimensões do espaço-tempo. O campo fermiônico Ψ e seu adjunto $\Psi^\dagger$ obedecem as seguintes relações de anticomutação a tempos iguais

$$\begin{aligned} \{\Psi(x_1,t), \Psi(x_2,t)\} &= \left\{\Psi^\dagger(x_1,t), \Psi^\dagger(x_2,t)\right\} = 0, \\ \left\{\Psi(x_1,t), \Psi^\dagger(x_2,t)\right\} &= \delta(x_1 - x_2). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Enquanto as expressões acima são de validade geral, $V(\phi)$ é assumido como um potencial simétrico com dois mínimos globais (ver figura 4.1) em $\phi = \pm\mu$, ou seja, um potencial com um mínimo duplamente degenerado. As equações de Euler-Lagrange para o campo ϕ,

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0 \tag{4.4}$$

implica para o caso estático,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}\phi(x)\right)^2 = V(\phi). \tag{4.5}$$

Soluções tipo sóliton surgiriam da equação (4.5), desde que $V(\phi)$ apresenta mínimos estáveis em $\pm\mu$ ($\mu > 0$). Então, procuramos soluções x-dependentes para (4.5) que minimizam a energia bosônica, de tal forma que a densidade de energia seja finita e localizada no espaço ao redor de $x = 0$ e que ϕ exiba o seguinte comportamento assimptótico

$$\lim_{x\to\pm\infty} \phi(x) = \pm\mu. \tag{4.6}$$

Desta forma, os sólitons interpolam entre 2 vácuos duplamente degenerados em $\phi = \pm\mu$, onde a simetria de reflexão $\phi \leftrightarrow -\phi$ é espontaneamente quebrada. Soluções explícitas para a eq. (4.5) são conhecidas para diferentes escolhas de $V(\phi)$, mas, para fins ilustrativos, a forma explícita do perfil do sóliton $\phi(x)$ é considerada arbitrária; tudo o que precisamos é que a propriedade (4.6) seja satisfeita.

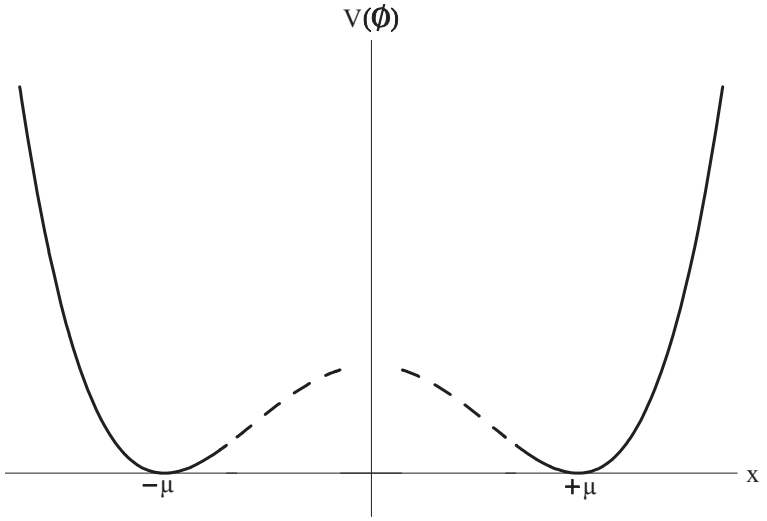


Figura 4.1: Potencial simétrico com um mínimo duplamente degenerado

Com tais configurações do campo $\phi(x)$ descritas acima, o Hamiltoniano de Dirac correspondente à Lagrangiana (4.1) no marco da primeira quantização é dado por

$$H\Psi_E(x) = \left(-i\alpha\frac{d}{dx} + \beta\phi(x)\right)\Psi_E(x) = E\Psi_E(x). \tag{4.7}$$

É importante notar que (4.7) exibe uma simetria de conjugação do espectro com respeito a matriz σ_3, ou seja, $\{H, \sigma_3\} = 0$. Essa simetria permite obter soluções de energia negativa a partir das soluções de energia positiva através da operação $\Psi_{-E}(r) = \sigma_3\ \Psi_E(r)$, portanto, o espectro é simétrico em torno de $E = 0$. Para quantizar um campo fermiônico precisamos encontrar todos os modos (soluções da eq. de Dirac) e associar a cada um deles operadores de criação ou absorção. O mesmo procedimento é aplicável na presença de modos-zero sobre o kink Z_2 em 1+1 dimensões do espaço-tempo, os quais serão denotados por Ψ_0. Então, a expansão do operador do campo $\Psi(x)$ em função dos modos (do contínuo e do discreto) mencionados acima é dado por

$$\Psi(x,t) = \mathbf{a}\ \Psi_0(x) + \int dk \left\{e^{-iE_kt}\mathbf{b}_k\Psi_k^{(+)}(x) + e^{iE_kt}\mathbf{d}_k^\dagger\Psi_k^{(-)}(x)\right\} + \tag{4.8}$$

$$\sum_k \left\{e^{-iE_kt}\mathbf{b}_k\Psi_k^{(+)}(x) + e^{iE_kt}\mathbf{d}_k^\dagger\Psi_k^{(-)}(x)\right\}, \tag{4.9}$$

onde $\Psi_k^{(+)}(x)$ e $\Psi_k^{(-)}(x)$ são as soluções de energia positiva e energia negativa, respectiva-

mente, para (4.7) com $E = \sqrt{k^2 + \mu^2}$. Os operadores $\mathbf{b}_k$, $\mathbf{b}_k^\dagger$ e $\mathbf{d}_k$, $\mathbf{d}_k^\dagger$ absorvem e criam os férmions e antiférmions, respectivamente, sendo o operador $\mathbf{a}$ associado à autofunção de energia zero. O fato crucial está em perceber que, devido que o estado fundamental fermiônico no setor do sóliton está duplamente degenerado, o operador $\mathbf{a}$ que atua no modo-zero leva um novo estado com a mesma energia. Então, pode-se definir dois estados para o vácuo tipo $|\pm\rangle$, de tal forma que $\mathbf{a}\,|+\rangle = |-\rangle$, $\mathbf{a}^\dagger\,|-\rangle = |+\rangle$ e $\mathbf{a}^\dagger\,|+\rangle = \mathbf{a}\,|-\rangle = 0$. Também usaremos as relações de anticomutação a tempos iguais para o campo fermiônico juntamente com

$$\begin{aligned} \left\{\mathbf{b}_{k_1}, \mathbf{b}_{k_2}^\dagger\right\} &= \left\{\mathbf{d}_{k_1}, \mathbf{d}_{k_2}^\dagger\right\} = \delta(k_1 - k_2)\,, \\ \left\{\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger\right\} &= 1. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Devido que a lagrangiana de Dirac em (4.1) é invariante se os campo fermiônicos são rotados por uma fase, o modelo exibe uma corrente de número fermiônico conservada. A corrente de Noether é dada por $\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ ($\mu = 0, 1$). Na TQC, esse operador da corrente precisa ser ordenado normalmente. Isso é equivalente a definir o operador do número fermiônico como

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \int dx : j^0 := \frac{1}{2}\int dx \left[\Psi^\dagger(r), \Psi(r)\right] \\ &= \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} + \int dk \left[\mathbf{b}_k^\dagger\mathbf{b}_k - \mathbf{d}_k^\dagger\mathbf{d}_k\right] - \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

É evidente que $\langle\pm|\,\mathbf{N}\,|\pm\rangle = \pm\frac{1}{2}$. Portanto, cada estado do vácuo é duplamente degenerado e cada um leva um número fermiônico fracionário ou carga $\langle\pm|\,\mathbf{Q}\,|\pm\rangle = \pm\frac{q}{2}$ fracionária. Na seção seguinte, baseados em argumentos similares aos considerados nesta seção, estudamos a possibilidade de obtenção de número fermiônicos induzidos em redes de grafeno.

4.2 Férmions planares, Grafeno e Campos de Gauge

É bem sabido que os portadores de carga (elétrons) numa rede de grafeno (uma única camada de átomos de carbono em rede hexagonal) comportam-se como partículas relativistas sem massa que obedecem uma equação de Dirac $2D$ na representação redutível (matrizes 4×4). Estados isolados no gap de energia são obtidos quando os elétrons interagem com as distorções de rede (chamadas de distorções de Kekulé), incorporadas por meio de campos escalares complexos [5], e que levam a um fracionamento do número fermiônico. Baseando-se nos modelos de formação de vórtices, os resultados de [5] foram estendidos em uma teoria mais geral, dita uma teoria de gauge quiral para o grafeno [6], e mostra-se que nem a estrutura espinorial do modo-zero fermiônico nem a carga fracionária são modificadas pela adição de um potencial vetorial de gauge que se acopla de maneira quiral aos férmions. Embora ainda não exista uma realização experimental do grafeno com as distorções de Kekulé e o acoplamento quiral de elétrons com o potencial de gauge não ter realidade física [39], neste capítulo é abordado o estudo de estados de férmions na presença de potencial vetor que acopla minimamente aos férmions juntamente com o potencial vetorial introduzido em [6] (que acopla de forma quiral) e analisamos a possibilidade de obter um numéro fermiônico induzido na presença de vórtices magnéticos e campos magnéticos homogêneos. Neste último caso, os estados de uma única partícula são todos ligados, assim não é possível apreciar a indução de número fermiônico irracional que são advindos dos modos-zero fermiônicos e de uma assimetria dos estados de espalhamento de férmions e antiférmions resultante da interação com um campo escalar de fundo [33, 34]. Lembramos que esses números irracionais são possíveis quando a simetria das subredes presente na rede de grafeno (simetria do espectro de energia no caso de estados de energia de uma única partícula) é quebrada e que os termos constantes (potencial químico e termo de "massa"que quebra a paridade) quebram estas simetrias. A introdução desses termos em sistemas planares na presença de campos magnéticos homogêneos e estudar o papel que eles desempenham na obtenção e estrutura de números fermiônicos induzidos, é uma das nossas vertentes de investigação.

Finalmente, o último objetivo desta seção é a análise do processo de polarização do vácuo nessa QED_{2+1} estendida para obter a ação efetiva para os campos de gauge, no contexto relativístico, e verificar a geração de termos de Chern-Simons cruzados na teoria por meio da teoria de perturbação. Iniciamos esta seção desenvolvendo os aspectos mais relevantes no modelamento teórico de uma rede grafeno.

4.2.1 O Grafeno

O grafeno consiste de uma folha composta por átomos de carbono com hibridização sp^2 de maneira que o cristal é formado por uma rede hexagonal bidimensional (figura 4.2) que pode-ser visto como a superposição de duas subredes triangulares e que apresentam uma célula unitária formada por dois átomos de carbonos inequivalentes identificados por A e B. A distância entre átomos de Carbono é $a(\approx 0.142nm)$, de maneira que os vetores-base da rede hexagonal que geram a subrede A podem ser escritos como

$$\overrightarrow{a}_1 = a\ (\sqrt{3}, 0)\ ,\ \overrightarrow{a}_2 = \frac{a}{2}\ (\sqrt{3}, 3)\ , \tag{4.12}$$

também vemos que os vetores que ligam um átomo A com seus primeiros vizinhos do tipo B são dados por

$$\overrightarrow{s}_1 = a\ (0, -1), \qquad \overrightarrow{s}_2 = \frac{a}{2}\ (\sqrt{3}, 1), \qquad \overrightarrow{s}_3 = \frac{a}{2}\ (-\sqrt{3}, 1) \tag{4.13}$$

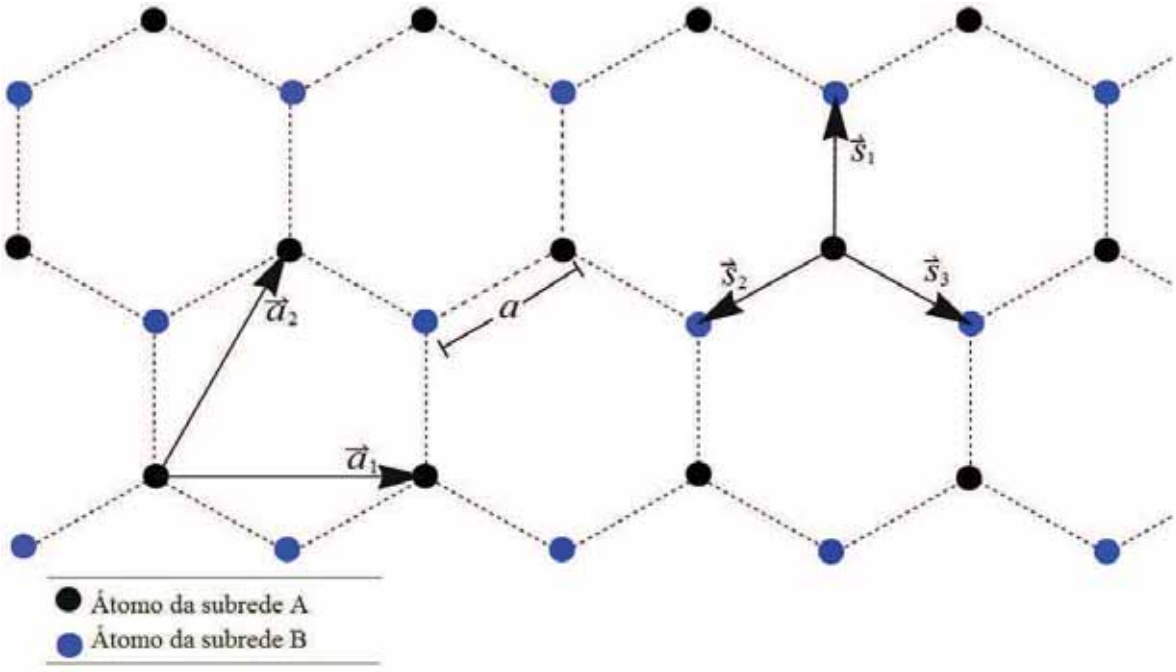


Figura 4.2: Estrutura cristalina do grafeno construído como uma superposição de duas subredes triangular A e B, com vetores-base $\overrightarrow{a}_i$ para a rede A e vetores $\overrightarrow{s}_i$ conectando A com B.

Os vetores da rede recíproca $\overrightarrow{b}_1$ e $\overrightarrow{b}_2$ estão relacionados com os vetores da rede real $\overrightarrow{a}_1$ e $\overrightarrow{a}_2$ pela definição $\overrightarrow{a}_i . \overrightarrow{b}_j = 2\pi\delta_{ij}$. Com a convenção assumida para os vetores-base

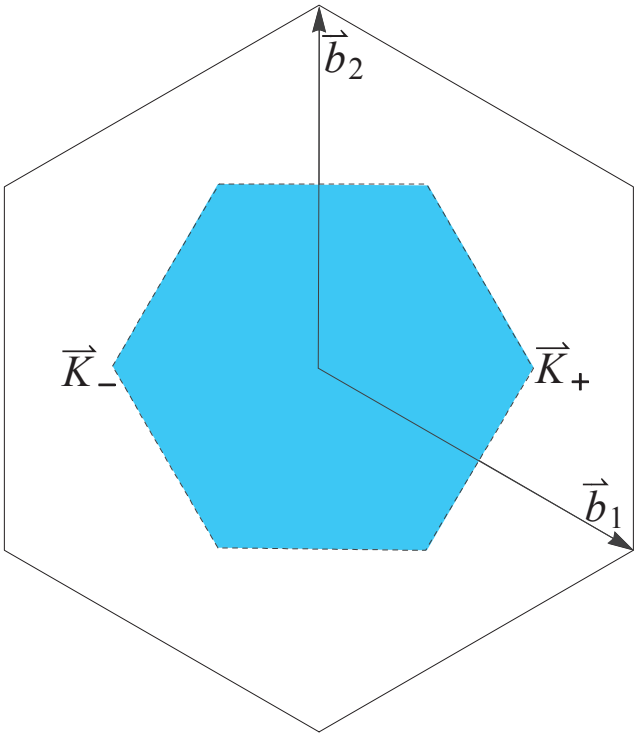


Figura 4.3: Rede recíproca do Grafeno formada pelos vetores $\overrightarrow{b}_1$ e $\overrightarrow{b}_2$. A região colorida representa a 1^a zona de Brillouin

da rede, obtemos que os vetores da rede recíproca são dados por

$$\overrightarrow{b}_1 = \frac{2\pi}{3a}\,(\sqrt{3}, -1)\ ,\ \ \overrightarrow{b}_2 = \frac{4\pi}{3a}(0, 1) \tag{4.14}$$

sendo evidente que a 1^a zona de Brillouin (ZB) pode apresentar também uma estrutura hexagonal como mostra a figura 4.3.

Cada vértice da primeira ZB contém 1/3 de um átomo de carbono, 3 partes de cada tipo. Portanto, o Grafeno é um cristal formado por dois átomos por célula unitária. Além disso, da configuração eletrônica do carbono e do tipo de hibridação que ele possui, vemos que por cada átomo de Carbono existem três elétrons de valência que são responsáveis da formação de fortes ligações covalentes σ. O quarto elétron de valência, aqueles dos orbitais $2p_z$; é responsável pela formação das ligações π. Os elétrons que originam as ligações π são altamente deslocalizados. Esses elétrons comportam-se praticamente como partículas livres, sendo maioritariamente responsáveis pelas propriedades ópticas e de transporte elétrico do grafeno.

O diagrama de bandas para os elétrons π é composto pelas bandas de valência e de condução, π e π^*, respectivamente. Uma expressão analítica para o hamiltoniano dos elétrons π no formalismo de segunda quantização pode ser obtido pelo método de ligações fortes (*tight-binding*), que inclui apenas as interações entre primeiros vizinhos.

O hamiltoniano na aproximação *tight-binding*, que descreve o salto (hooping) de um elétron de um ponto da rede a outro, com uma constante de salto uniforme, é dado por

$$H_0 = -t \sum_{r\epsilon\Lambda_A} \sum_{i=1,2,3} \left[a^\dagger(\overrightarrow{r}) b(\overrightarrow{r} + \overrightarrow{s}_i) + b^\dagger(\overrightarrow{r} + \overrightarrow{s}_i) a(\overrightarrow{r}) \right], \tag{4.15}$$

onde $\Lambda_A = m\overrightarrow{a}_1 + n\overrightarrow{a}_2$ representa os pontos de rede da subrede A e t ($\approx 2.8\ eV$) é a constante de intensidade de salto. Os operadores de aniquilação (criação) a ($a^\dagger$) e b ($b^\dagger$) atuam sobre Λ_A e Λ_B respectivamente e obedecem a álgebra usual onde os únicos anticomutadores não nulos são

$$\left\{ a(\overrightarrow{r_A}), a^\dagger(\overrightarrow{r_A}) \right\} = 1, \qquad \left\{ b(\overrightarrow{r_B}), b^\dagger(\overrightarrow{r_B}) \right\} = 1. \tag{4.16}$$

Por simplicidade consideramos $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_A}$ e $\overrightarrow{r_B} = \overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{s}_i$.

Desta forma, as transformadas de Fourier dos operadores de aniquilação das subredes A e B definidas como

$$\left\{ \begin{array}{c} a(\overrightarrow{r_A}) \\ b(\overrightarrow{r_B}) \end{array} \right\} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\overrightarrow{k}} \left\{ \begin{array}{c} e^{i\overrightarrow{k}.\overrightarrow{r_A}} a(\overrightarrow{k}) \\ e^{i\overrightarrow{k}.\overrightarrow{r_B}} b(\overrightarrow{k}) \end{array} \right\} \tag{4.17}$$

transformam o hamiltoniano (4.15) em

$$H_0 = \sum_{\overrightarrow{k}} \left[\phi(\overrightarrow{k}) a^\dagger(\overrightarrow{k}) b(\overrightarrow{k}) + \phi^*(\overrightarrow{k}) b^\dagger(\overrightarrow{k}) a(\overrightarrow{k}) \right], \tag{4.18}$$

onde o fator de estrutura $\phi(\overrightarrow{k})$ é dado por

$$\phi(\overrightarrow{k}) = -t \sum_{i=1,2,3} e^{i\overrightarrow{k}.\overrightarrow{s}_i} = -t \left[e^{-iak_y} + 2e^{i\frac{a}{2}k_y} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} a k_x \right) \right]. \tag{4.19}$$

É evidente que o hamiltoniano pode ser expresso na forma matricial

$$H_0 = \sum_{\overrightarrow{k}} \left(\begin{array}{cc} a^\dagger_{\mathbf{k}} & b^\dagger_{\mathbf{k}} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 0 & \phi_{\mathbf{k}} \\ \phi^*_{\mathbf{k}} & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} a_{\mathbf{k}} \\ b_{\mathbf{k}} \end{array} \right), \tag{4.20}$$

onde assumimos a convenção $f(\overrightarrow{k}) = f_{\mathbf{k}}$. Diagonalizando este hamiltoniano, encontramos um espectro de energia dado por

$$E_k = \pm |\phi_{\mathbf{k}}| = \pm t \sqrt{3 + 2\cos(\sqrt{3}ak_x) + 4\cos\left(\frac{3a}{2}k_y\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}k_x\right)}, \tag{4.21}$$

que apresenta seis cones (figura 4.4) que se cruzam em $E = 0$, dos quais apenas dois não

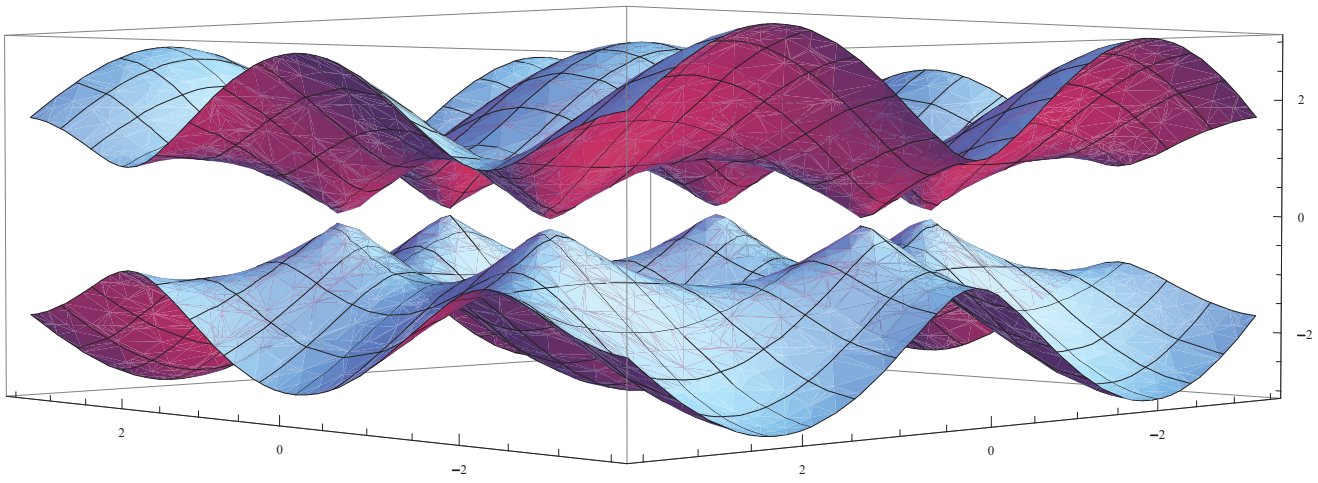


Figura 4.4: Estrutura de banda do Grafeno obtida a partir da aproximação "*Tight Binding* ".

são equivalentes, posicionados no espaço recíproco em

$$\mathbf{k} = \mathbf{K}_{\pm} = \pm\left(\frac{4\pi}{3\sqrt{3}a}, 0\right). \tag{4.22}$$

Os pontos $\mathbf{K}_{\pm}$ são conhecidos na literatura como pontos de Dirac devido que a linearização do hamiltoniano em torno destes pontos fornece uma equação de Dirac efetiva no limite de baixas energias. Além disto, é possível mostrar que expandindo (4.21) na vizinhança de cada um destes pontos e desprezando termos de ordem $\vartheta(k_x^2, k_y^2)$ (limite de baixas energias), o espectro de energia é quase linear, tipo $E = \pm v_f\,|k|$, onde $v_f = 3ta/2$ é a velocidade de Fermi dos elétrons perto do ponto de Dirac. Isso sugere que o elétron nesta região do espaço recíproco comporta-se como uma quase-partícula sem massa com energia positiva (negativa), no caso de ser expandido em torno de $\mathbf{K}_+$ ($\mathbf{K}_-$). Por outro lado, também é interessante analisar o que acontece com a estrutura do hamiltoniano quando expandimos $\phi_{\mathbf{k}}$ em torno dos pontos de Dirac da forma $\mathbf{k} = \mathbf{K}_{\pm} + \mathbf{p}$. Desta maneira, substituindo (4.13) em (4.19) e aproximando $e^{i\mathbf{p}.\mathbf{s}_j} \approx 1 + i\mathbf{p}.\mathbf{s}_j$, obtemos

$$\phi_{\mathbf{p},+} \approx \frac{3ta}{2}[p_x + ip_y] \equiv +v_f\ p, \tag{4.23}$$

$$\phi_{\mathbf{p},-} \approx \frac{3ta}{2}[p_x - ip_y] \equiv -v_f\ p^*, \tag{4.24}$$

onde $\phi_{\mathbf{p},\pm}$ é a linearização de $\phi_{\mathbf{k}}$ em torno dos pontos de Dirac $\mathbf{K}_{\pm}$, respectivamente.

Torna-se evidente a necessidade de ampliar a dimensão da estrutura matricial do hamiltoniano pelo fato de que agora existe um grau de liberdade adicional para o elétron

em cada subrede, tanto na banda de condução ($E > 0$) bem como na banda de valência ($E < 0$). Portanto, o hamiltoniano (4.18) considerando a linearização em torno dos dois pontos de Dirac

$$H_0 = \sum_{\mathbf{p}} \Psi_p^\dagger K_0 \Psi_p = \sum_{\mathbf{p}} \sum_{i=+,-} \left[\phi_{\mathbf{p},i} a_i^\dagger(\mathbf{p}) b_i(\mathbf{p}) + \phi_{\mathbf{p},i}^* b_i^\dagger(\mathbf{p}) a_i(\mathbf{p}) \right], \tag{4.25}$$

pode ser expresso em forma matricial como

$$K_0 = v_f \begin{pmatrix} 0 & p^* & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p^* \\ 0 & 0 & -p & 0 \end{pmatrix},$$

com um espinor de 4 componentes $\Psi_{\mathbf{p}}^T = (b_{\mathbf{p},+}\ ,\ a_{\mathbf{p},+}\ ,\ a_{\mathbf{p},-}\ ,\ b_{\mathbf{p},-})$. É evidente, portanto, que a dinâmica dos portadores de carga no grafeno é governada pelo hamiltoniano de Dirac na representação redutível (matrizes de 4×4), e esses portadores podem, então, ser comparados com partículas relativísticas. No espaço real (espaço de coordenadas), essa linearização do hamiltoniano, chamado agora de hamiltoniano de Dirac, é da forma

$$\widetilde{H}_0 = \int d^2\vec{r}\ \Psi^\dagger(\overrightarrow{r}) K_0(\overrightarrow{r}) \Psi(\overrightarrow{r}), \tag{4.26}$$

onde agora

$$\Psi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \psi_+^b(\vec{r}) \\ \psi_+^a(\vec{r}) \\ \psi_-^a(\vec{r}) \\ \psi_-^b(\vec{r}) \end{pmatrix}, \qquad K_0 = \begin{pmatrix} 0 & -2i\partial_z & 0 & 0 \\ -2i\partial_{\overline{z}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i\partial_z \\ 0 & 0 & 2i\partial_{\overline{z}} & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.27}$$

com $z = x + iy$ e $\partial_z = (\partial_x - i\partial_y)/2$ e considerando $v_f = 1$. Em resumo, acabamos de demonstrar que, quando consideramos elétrons com baixas energias, o problema torna-se equivalente ao problema de uma quase-partícula livre sem massa obedecendo à equação de Dirac. A este modelo aproximado, damos o nome de modelo contínuo ou modelo de Dirac para o grafeno. É evidente que, devido à linearidade da relação de dispersão, o gap entre as bandas de condução e de valência é nulo. Isso é comum ocorrer em materiais constituídos por um único tipo de átomo. No entanto, um gap de energia não nulo no sistema pode surgir devido a defeitos (distorções) na rede. Jackiw e Rebbi [1] mostraram, no poliacetileno, que essas distorções perturbam o movimento do elétron de tal forma que ela acopla aos puntos de Dirac e abre um gap no espectro de energia. Na descrição da equação de Dirac para o poliacetileno, as distorções são descritas por meio de um campo escalar que, acoplado ao férmion, proporciona uma "massa"dependente da posição para

o férmion. Tais sistemas exibem um número fermiônico fracionário se a equação de Dirac possui estados ligados fermiônicos isolados no gap entre as bandas.

No contexto do grafeno, as distorções de redes (ou também chamadas de distorções de Kekulé) são incorporadas ao sistema por meio de campos escalares complexos. A interação de férmions com tais distorções de rede pode ser estudado adicionando ao hamiltoniano (4.25) o seguinte termo [5, 6]:

$$H_{Kekulé} = \Delta \sum_{\mathbf{p}} \left[a_+^\dagger(\mathbf{p}) b_-(\mathbf{p}) + b_+^\dagger(\mathbf{p}) a_-(\mathbf{p}) \right] + \overline{\Delta} \sum_{\mathbf{p}} \left[a_-^\dagger(\mathbf{p}) b_+(\mathbf{p}) + b_-^\dagger(\mathbf{p}) a_+(\mathbf{p}) \right], \tag{4.28}$$

onde Δ é o parâmetro de ordem de Kekulé como função da posição. A estrutura matricial do hamiltoniano *tight binding* que inclui a distorção de Kekulé, é dado por

$$K_0 = \begin{pmatrix} 0 & -2i\partial_z & \Delta(\mathbf{r}) & 0 \\ -2i\partial_{\overline{z}} & 0 & 0 & \Delta(\mathbf{r}) \\ \overline{\Delta}(\mathbf{r}) & 0 & 0 & 2i\partial_z \\ 0 & \overline{\Delta}(\mathbf{r}) & 2i\partial_{\overline{z}} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.29}$$

Quando $\Delta(\mathbf{r}) = \Delta_0 = cte$, a relação de dispersão adquire a forma simples $E = \pm \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + |\Delta_0|^2}$, que prova que um gap no espectro da energia $|\Delta_0|$ aparece. Mesmo se Δ_0 for complexo, o gap de energia é sempre real. Certamente, isso sugere que a fase de Δ_0 é redundante e poderia ser removida de (4.29) por meio de uma transformação quiral. Isso não acontece em sistemas onde a fase de $\Delta(\mathbf{r})$ mude no espaço. Recentemente, Hou, Chamon e Mudry [5] mostraram que quando aquela distorção de rede exibe um perfil tipo vórtice ($\Delta(\mathbf{r}) = \Delta_0(r)e^{in\theta}$), ela apresenta excitações de modos-zero no espectro de energia da partícula. A vorticidade da distorção, mesmo se $n \geq 1$ ou $n \leq -1$, determina em qual das subredes os $|n|$ modos-zero são suportados. A partir da existência de modos-zero fermiônicos e da simetria da subrede, eles mostraram que a carga quântica fermiônica é fracionária.

Jackiw e Pi estenderam o modelo anterior em uma teoria mais geral, dita uma teoria de gauge quiral para o grafeno [6]. Nesse trabalho mostraram que o sistema considerado em [5] é invariante sob uma transformação de gauge quiral global e que a invariância do sistema sob uma transformação de gauge quiral local é preservada se o componente espacial de um potencial de gauge (axial) acoplado de forma quiral aos férmions é adicionado no sistema. Tal potencial de gauge incorporado é o mesmo campo vetorial considerado no modelo fenomenológico Nielsen-Olesen-Landau-Ginzburg-Abrikosov onde campos escalares complexos são minimamente acoplados ao potencial de gauge e cujas as soluções clássicas de energia mínima exibem perfis tipo vórtice.

Neste trabalho estamos interessados no estudo de estados de férmions na presença do potencial vetor que acopla minimamente aos férmions juntamente como o potencial

vetorial introduzido em [6] (que acopla de forma quiral).

4.2.2 Modos-zero fermiônicos em vórtices magnéticos

O hamiltoniano linearizado que descreve a dinâmica dos elétrons sob uma rede grafeno na presença de um campo escalar complexo e um potencial vetor de gauge acoplado de uma forma quiral aos elétrons, é convenientemente reescrito numa versão simplificada como [6]

$$\mathcal{H} = \int d^2\vec{r}\ \Psi^{\dagger}(\vec{r})\left[-i\vec{\alpha}.\vec{\nabla} - q\gamma_5\vec{\alpha}.\overrightarrow{A_5} + g\beta(\varphi^r - i\gamma_5\varphi^i)\right]\Psi(\vec{r}), \tag{4.30}$$

onde $\vec{\alpha},\ \beta$ e γ_5 são as matrizes de Dirac na representação explicitada embaixo. O hamiltoniano (4.30), em ausência do vetor potencial de gauge $\overrightarrow{A_5}(\vec{r})$, pode ser obtido diretamente da expressão (4.29) identificando $\Delta(\mathbf{r}) = g\varphi(\vec{r})$. Portanto, a distorção de Kekulé é representada pelo campo complexo $\varphi(\vec{r}) = |\varphi(\vec{r})|e^{i\chi(\vec{r})} = \varphi^r(\vec{r}) + i\varphi^i(\vec{r})$ e $\overrightarrow{A_5}(\vec{r})$ é o vetor potencial de gauge que permite ao hamiltoniano ser invariante sob a transformação de gauge quiral local $\varphi \rightarrow e^{i2\omega(\vec{r})}\varphi$, $\Psi \rightarrow e^{i\gamma_5\omega(\vec{r})}\Psi$ [6]. A estrutura matricial de (4.30) é posta em evidência usando a seguinte representação

$$\vec{\alpha} = \beta\overrightarrow{\gamma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.31}$$

$$\alpha^3 = \beta\gamma^3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}, \ \gamma_5 = -i\alpha^1\alpha^2\alpha^3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \tag{4.32}$$

$$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.33}$$

onde I é a matriz identidade de 2×2, $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2)$ e σ_3 são as matrizes de Pauli.

Se consideramos o hamiltoniano (4.30) excluindo a contribuição do termo de interação dos elétrons com a distorção de Kekulé e com um conveniente comportamento assimptótico do vetor potencial de gauge, conseguimos mostrar a existência de modos-zero fermiônicos isolados no espectro de energia da partícula. Por simplicidade, consideramos os componentes do vetor $\overrightarrow{A_5}\ (\vec{r})$ da forma

$$A_5^i = \varepsilon^{ij}\partial_j\mathcal{A}_5(r) \Rightarrow B_5 = -\vec{\nabla}^2\mathcal{A}_5(r), \tag{4.34}$$

onde $\mathcal{A}_5(r)$ é uma função escalar que depende únicamente da coordenada radial. A equação de Dirac independente do tempo

$$\vec{\alpha}.(-i\vec{\nabla} - q\gamma_5\overrightarrow{A_5})\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}), \tag{4.35}$$

pode ser expressa em 4 equações acopladas para os componentes do espinor. Duas dessas equações são

$$-2i\left[\partial_{\bar{z}} - q\partial_{\bar{z}}\mathcal{A}_5\right]\psi_+^b = E\psi_+^a, \tag{4.36}$$

e

$$-2i\left[\partial_z + q\partial_z\mathcal{A}_5\right]\psi_+^a = E\psi_+^b, \tag{4.37}$$

enquanto as equações para ψ_-^b e ψ_-^a podem ser obtidas tomando o complexo conjugado das equações acima e identificando $\psi_-^b = (\psi_+^b)^*$ e $\psi_-^a = (\psi_+^a)^*$. Contudo, podemos demonstrar facilmente que os auto-estados de energia zero, não normalizados, podem ser dados por

$$\psi_+^b = f(z)e^{+q\mathcal{A}_5(r)}, \tag{4.38}$$

$$\psi_+^a = h(\bar{z})e^{-q\mathcal{A}_5(r)}, \tag{4.39}$$

$$\psi_-^b = \overline{f(z)}e^{+q\mathcal{A}_5(r)}, \tag{4.40}$$

$$\psi_-^a = \overline{h(\bar{z})}e^{-q\mathcal{A}_5(r)}, \tag{4.41}$$

onde $f(z)$ e $h(\bar{z})$ são funções holomorfas, de fato são funções inteiras. Como foi dito anteriormente, a normalização das autofunções depende do comportamento assimptótico de $\mathcal{A}_5(r)$ e, a partir da dependência funcional dos componentes do espinor, seja $\psi_\pm^b(\vec{r})$ ou $\psi_\pm^a(\vec{r})$ normalizáveis, obtemos as seguintes possibilidades para representar os auto-estados de energia zero

$$\Psi_0(\vec{r}) = N\begin{pmatrix} e^{+il\theta} \\ 0 \\ 0 \\ e^{-il\theta} \end{pmatrix} r^l e^{q\mathcal{A}_5(r)} \quad \text{ou} \quad \Psi_0(\vec{r}) = N\begin{pmatrix} 0 \\ e^{-il\theta} \\ e^{+il\theta} \\ 0 \end{pmatrix} r^l e^{-q\mathcal{A}_5(r)}, \tag{4.42}$$

onde $l \,\epsilon\, \mathbb{Z}_0^+$ e θ é a variável angular em coordenadas cilíndricas. A degenerescência do nível de energia zero depende dos valores que l pode assumir. Além disto, ela está ligada ao fluxo magnético de acordo com os teoremas provados em [36]. Nesta seção focamos nossa atenção em sistemas que forneçam um fluxo magnético finito.

Para mostrar que uma carga fermiônica fracionária pode ser induzida com tais configurações de campo magnético, precisamos perceber uma importante simetria do operador hamiltoniano $\vec{\alpha}.(\vec{p} - \gamma_5\overrightarrow{A_5})$: ele anticomuta com a matriz α^3. Essa simetria, chamada de simetria espectral, permite-nos obter as autofunções de energia negativa a partir de autofunções de energia positiva, desta maneira

$$\Psi_{-|E|}(\vec{r}) = \alpha^3\Psi_{|E|}(\vec{r}), \tag{4.43}$$

ou seja, o espectro de energia é simétrico em torno do nível de energia zero cujas co-

rrespondentes autofunções são autoconjugadas ($\alpha^3\Psi_0 = \Psi_0$) e portanto, autofunções de α^3. A existência desses modos isolados são responsáveis pelo aparecimento de números (cargas) fermiônicos (as) induzidos (as) e além disto, estas quantidades seriam proporcionais ao fluxo magnético. Esta relação entre o número fermiônico induzido e o fluxo magnético, que é verificado ocorrer só em sistemas fermiônicos bidimensionais, tem sua origem na teoria quântica de campos no contexto de férmions relativistícos acoplados a campos de gauge onde uma corrente topologicamente não trivial é induzida no vácuo [2, 33, 35, 37].

Portanto, o mapeamento daqueles em nosso caso, levam a um número fermiônico induzido dado por

$$N = \int d^2\vec{r}\ \left\langle j^0 \right\rangle = \int d^2\vec{r}\ \frac{1}{2}\langle 0|[\Psi^\dagger(\vec{r}), \Psi(\vec{r})]|0\rangle = \mp\frac{\Phi_5}{4\pi}, \tag{4.44}$$

onde $\Phi_5 = \int d^2\vec{r}B_5$ é o fluxo magnético e o sinal superior (inferior) refere-se aos modos-zero que são atribuídos a férmions (antiférmions).

Portanto, a carga fermiônica induzida é finita sempre que o fluxo magnético também for finito. Seguindo o formalismo usado em [36], não é difícil mostrar que $\mathcal{A}_5(r \to \infty) \sim \Phi_5 G(\overrightarrow{r})$, onde $G(\overrightarrow{r})$ é a função de Green, que no caso bidimensional adota a forma $G(\overrightarrow{r}) = -\ln(r)/2\pi$. Finalmente obtemos que

$$\mathcal{A}_5(r \to \infty) \sim -\frac{\Phi_5}{2\pi}\ \ln r. \tag{4.45}$$

Sistemas descritos por tais configurações para as funções escalares relacionados a campos magnéticos pela eq.(4.34), são conhecidos como **solenóides ou vórtices magnéticos**. Vemos que a normalizabilidade das autofunções de energia zero, as quais contêm elementos de apenas uma subrede triangular, vai depender do sinal de Φ_5. Substituindo (4.45) em (4.42), obtemos que o modo-zero para $\Phi_5 > 0$, é dado por

$$\Psi_0(r \to \infty) \sim \begin{pmatrix} e^{+il\theta} \\ 0 \\ 0 \\ e^{-il\theta} \end{pmatrix} r^{l-\frac{q\Phi_5}{2\pi}}\ , \tag{4.46}$$

enquanto que para $\Phi_5 < 0$,

$$\Psi_0(r \to \infty) \sim \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-il\theta} \\ e^{+il\theta} \\ 0 \end{pmatrix} r^{l+\frac{q\Phi_5}{2\pi}}\ . \tag{4.47}$$

Assumimos que $l < [|\frac{\Phi_5}{2\pi}| - 1]$, com $[\nu]$ denotando o máximo inteiro de ν. Se recuperarmos v_f e $\hbar$ nas equações, o espinor dado por (4.46) torna-se

$$\Psi_0(r \to \infty) \sim \begin{pmatrix} e^{+il\theta} \\ 0 \\ 0 \\ e^{-il\theta} \end{pmatrix} r^{l - \frac{q\Phi_5}{hv_F}} \quad , \tag{4.48}$$

implicando numa mudança similar no espinor (4.47). Devido à adimensionalidade do exponente, as unidades de fluxo magnético seriam as mesmas de $\hbar v_F/q$. Portanto, a carga

$$Q = q \int d^2\vec{r}\, \frac{1}{2} \langle 0|[\Psi^\dagger(\vec{r}), \Psi(\vec{r})]|0\rangle = \mp \frac{n_\Phi}{2} q. \tag{4.49}$$

é fracionária se o fluxo magnético é um número inteiro ímpar (n_Φ) do quantum de fluxo hv_F/q, onde h é a constante de Planck. A seguir, desenvolvemos uma análise semelhante considerando o vetor potencial de gauge usual $\overrightarrow{A}$.

4.2.3 Potencial Vetor minimamente acoplado: modos-zero e fracionamento da carga fermiônica

O hamiltoniano (4.30) é também invariante sob a transformação de gauge global usual $\Psi \rightarrow e^{i\xi}\Psi$, com ξ uniforme e constante. Promovendo tal transformação a uma local, um vetor potencial de gauge $\overrightarrow{A}$ deve ser adicionado ao termo cinético de tal forma que $\overrightarrow{A} \rightarrow \overrightarrow{A} + \overrightarrow{\nabla}\xi$. Neste ponto focaremos nossa atenção na estrutura espinorial dos auto-estados de energia zero do sistema quando tal vetor é levado em conta, ou seja, vamos considerar a equação de Dirac do tipo

$$\vec{\alpha}.(-i\overrightarrow{\nabla} - q\gamma_5\overrightarrow{A_5} - e\overrightarrow{A})\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}), \tag{4.50}$$

no cenário em que ambos os potenciais de gauge gerem um fluxo magnético finito. Aqui temos explicitado as constantes de acoplamento e (unidade de carga elétrica) e q, esse último associado ao acoplamento quiral.

É interessante notar que o operador de Dirac em (4.50) anticomuta com duas matrizes: α^3 e $\alpha^3\gamma_5$. No caso anterior mostramos que as possíveis soluções de modo-zero eram autofunções de α^3. Mas se considerarmos $\overrightarrow{A_5} = 0$ e os componentes de $\overrightarrow{A}$ expressos como

$$A^i = \varepsilon^{ij}\partial_j\mathcal{A}(r) \Rightarrow B = -\vec{\nabla}^2\mathcal{A}(r), \tag{4.51}$$

encontramos que as soluções de energia zero são agora autofunções de $\alpha^3\gamma_5$. De (4.50), encontramos que os componentes do espinor satisfazem as equações

$$\begin{aligned}
-2i\left[\partial_z + e\partial_z\mathcal{A}\right]\psi_+^a &= E\psi_+^b, \\
-2i\left[\partial_{\bar{z}} - e\partial_{\bar{z}}\mathcal{A}\right]\psi_+^b &= E\psi_+^a, \\
2i\left[\partial_z + e\partial_z\mathcal{A}\right]\psi_-^b &= E\psi_-^a, \\
2i\left[\partial_{\bar{z}} - e\partial_{\bar{z}}\mathcal{A}\right]\psi_-^a &= E\psi_-^b,
\end{aligned} \tag{4.52}$$

cujas autofunções para $E = 0$ são dadas por

$$\Psi_0(\vec{r}) = N\begin{pmatrix} e^{+il\theta} \\ 0 \\ e^{+il\theta} \\ 0 \end{pmatrix} r^l e^{e\mathcal{A}(r)} \quad \text{ou} \quad \Psi_0(\vec{r}) = N\begin{pmatrix} 0 \\ e^{-il\theta} \\ 0 \\ e^{-il\theta} \end{pmatrix} r^l e^{-e\mathcal{A}(r)}. \tag{4.53}$$

Aqui também o espectro de energia é simétrico ao redor de $E = 0$, mas agora, a matriz de conjugação do espectro é representada por $\alpha^3\gamma_5$, ou seja, os auto-estados de energia negativa são obtidos a partir dos auto-estados de energia positiva pela operação $\Psi_{-|E|}(\vec{r}) = \alpha^3\gamma_5\Psi_{|E|}(\vec{r})$.

Novamente nosso interesse principal fica em sistemas onde o fluxo magnético seja finito e portanto, forneça uma carga fermiônica induzida também finita. Sabemos, de acordo ao caso anterior, que aqueles sistemas são obtidos considerando à função escalar $\mathcal{A}(r)$ do tipo

$$\mathcal{A}(r \to \infty) \sim -\frac{\Phi}{2\pi} \ln r \ . \tag{4.54}$$

Nesse caso, encontramos que as autofunções de energia zero para $\Phi > 0$, são dadas por

$$\Psi_0(r \to \infty) \sim \begin{pmatrix} e^{+il\theta} \\ 0 \\ e^{+il\theta} \\ 0 \end{pmatrix} r^{l-\frac{e\Phi}{2\pi}} \ , \tag{4.55}$$

e para $\Phi < 0$,

$$\Psi_0(r \to \infty) \sim \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-il\theta} \\ 0 \\ e^{-il\theta} \end{pmatrix} r^{l+\frac{e\Phi}{2\pi}} \ . \tag{4.56}$$

Uma carga fermiônica induzida pode ser obtida seguindo o procedimento abordado na seção anterior, sendo evidente que a obtenção de uma carga fermiônica fracionária pode ser encontrada só no caso em que o fluxo magnético seja desta vez um número inteiro ímpar do quantum de fluxo hv_F/e. É interessante notar que a autofunção de energia zero para este tipo de acoplamento apresenta componentes em distintas subredes, diferente do caso em que só $\mathcal{A}_5$ foi considerado [6]. Neste trabalho nós estamos particularmente interesados no estudo da dinâmica dos férmions em redes de grafeno quando ambos os tipos de acoplamentos são incorporados. Baseado no formalismo seguido acima e considerando os casos em que ambos os fluxos magnéticos são quantizados, mostraremos que também é possível obter fracionamento do número fermiônico (carga). Veremos que essas situações acontecem em casos específicos. Além disso, mostramos que existe outra carga, que chamaremos de carga quiral, que também pode ser fracionária. Tudo isso sera mostrado a seguir.

Os componentes do espinor satisfazem as seguintes equações ($\hbar = v_F = 1$)

$$\begin{aligned} -2i\left[\partial_z + \partial_z \mathcal{A}_+\right]\psi_+^a &= E\psi_+^b, \\ -2i\left[\partial_{\bar{z}} - \partial_{\bar{z}} \mathcal{A}_+\right]\psi_+^b &= E\psi_+^a, \\ 2i\left[\partial_z + \partial_z \mathcal{A}_-\right]\psi_-^b &= E\psi_-^a, \\ 2i\left[\partial_{\bar{z}} - \partial_{\bar{z}} \mathcal{A}_-\right]\psi_-^a &= E\psi_-^b, \end{aligned} \tag{4.57}$$

quando ambos os vetores potenciais de gauge são levados em conta. Definimos $\mathcal{A}_\pm =$

$e\mathcal{A} \pm q\mathcal{A}_5$, onde as funções escalares associadas aos dois acoplamentos apresentam os seguintes comportamentos assimptóticos

$$\mathcal{A}_5(r \ \rightarrow \ \infty) \sim -\frac{n_5}{q} \ \ln r, \tag{4.58}$$

$$\mathcal{A}(r \ \rightarrow \ \infty) \sim -\frac{n}{e} \ \ln r, \tag{4.59}$$

com n_5 e n como números inteiros positivos que medem a vorticidade de $\overrightarrow{A_5}$ e de $\overrightarrow{A}$, respectivamente.

Auto-estados de energia zero normalizados são obtidos para alguns casos particulares, a saber

$$\Psi^{n>n_5}_{0,l_+,l_-}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4\pi \int_0^\infty r'^{2l_+ +1} e^{2\mathcal{A}_+(r')} dr'}} \ r^{l_+} e^{il_+\theta} e^{\mathcal{A}_+(r)} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{4\pi \int_0^\infty r'^{2l_- +1} e^{2\mathcal{A}_-(r')} dr'}} \ r^{l_-} e^{il_-\theta} e^{\mathcal{A}_-(r)} \\ 0 \end{pmatrix}, \ n > n_5, \ l_\pm = 0, 1, ..., [n \pm n_5 - 1], \tag{4.60}$$

ou

$$\Psi^{n<n_5}_{0,l_+,l_-}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4\pi \int_0^\infty r'^{2l_+ +1} e^{2\mathcal{A}_+(r')} dr'}} \ r^{l_+} e^{il_+\theta} e^{\mathcal{A}_+(r)} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{4\pi \int_0^\infty r'^{2l_- +1} e^{-2\mathcal{A}_-(r')} dr'}} \ r^{l_-} e^{-il_-\theta} e^{-\mathcal{A}_-(r)} \end{pmatrix}, \ n < n_5, \ l_\pm = 0, 1, ..., [n_5 \pm n - 1]. \tag{4.61}$$

Note que $\alpha^3 \gamma_5 \Psi^{n>n_5}_{0,l_+,l_-}(\vec{r}) = \Psi^{n>n_5}_{0,l_+,l_-}(\vec{r})$ e $\alpha^3 \ \Psi^{n<n_5}_{0,l_+,l_-}(\vec{r}) = \Psi^{n<n_5}_{0,l_+,l_-}(\vec{r})$ quando n_5 e n são ambos número inteiros positivos. Quando ambos os fluxos magnéticos são negativos, os modos-zero satisfazem $\alpha^3 \gamma_5 \Psi^{|n|>|n_5|}_{0,l_+,l_-}(\vec{r}) = -\Psi^{|n|>|n_5|}_{0,l_+,l_-}(\vec{r})$ e $\alpha^3 \ \Psi^{|n|<|n_5|}_{0,l_+,l_-}(\vec{r}) = \Psi^{|n|<|n_5|}_{0,l_+,l_-}(\vec{r})$.

Ambos os tipos de modos-zero dados pelas expressões (4.60) e (4.61) permitem o aparecimento de números fermiônicos fracionários induzidos que dependem dos fluxos magnéticos, como explicitamos abaixo.

$$N = \int d^2\vec{r} \ \frac{1}{2} \langle 0|[\Psi^\dagger(\vec{r}), \Psi(\vec{r})]|0\rangle = \mp \frac{|n|}{2}, \ \text{para} \ \ |n| > |n_5|, \tag{4.62}$$

e

$$N = \int d^2\vec{r} \ \frac{1}{2} \langle 0|[\Psi^\dagger(\vec{r}), \Psi(\vec{r})]|0\rangle = \mp \frac{|n_5|}{2}, \ \text{para} \ \ |n| < |n_5|. \tag{4.63}$$

Além disto, verificamos que um número fermiônico (quiral) fracionário ou carga quiral

fracionária pode também ser induzido da teoria. Obtemos

$$N_5 = \int d^2\vec{r}\,\frac{1}{2}\langle 0|[\Psi^\dagger(\vec{r}),\gamma_5\Psi(\vec{r})]|0\rangle = \mp\frac{|n_5|}{2},\ \text{para}\ \ |n| > |n_5|\,, \tag{4.64}$$

e

$$N_5 = \int d^2\vec{r}\,\frac{1}{2}\langle 0|[\Psi^\dagger(\vec{r}),\gamma_5\Psi(\vec{r})]|0\rangle = \mp\frac{|n|}{2},\ \text{para}\ \ |n| < |n_5|\,. \tag{4.65}$$

O número fermiônico (quiral) é proporcional à carga fermiônica (anômala) fracionária encontradas anteriormente em estruturas hexagonais de Boro-Nitreto [39].

Na seção seguinte analisamos em detalhe os estados para os elétrons em estruturas hexagonais na presença de campos magnéticos homogêneos, quando um potencial químico e um termo que quebra a paridade são adicionados ao hamiltoniano.

4.2.4 Níveis de Landau e cargas induzidas em campos magnéticos uniformes

Nesta seção estudaremos os estados ligados para férmions quando os elétrons sofrem a ação dos potenciais vetoriais de gauge considerando campos magnéticos homogêneos. Nesta análise introduziremos termos na densidade Hamiltoniana que forneçam gaps de energia no espectro da partícula. Tais termos são um potencial químico $\mu\alpha^3$ e um termo de "massa"que quebra paridade $m_\tau\alpha^3\gamma_5 = m_\tau\gamma^0\gamma^3\gamma_5 = m_\tau\beta\tau$. O potencial químico já foi considerado em [33, 34] para mostrar a obtenção de uma carga fermiônica irracional induzida por campos escalares e ainda manter a simetria de reversão temporal. Concernente a m_τ, consideramos ela constante, mas o mesmo termo foi considerado dependente da posição (uma parede de domínio) em [40] para estudar como as propriedades eletrônicas do grafeno são modificadas na presença desses defeitos topológicos.

É interessante notar que quando aqueles termos são adicionados simultámente no hamiltoniano, o correspondente operador de Dirac já não mais anticomuta com α^3 e $\alpha^3\gamma_5$. Obviamente que isto implica a perda da simetria de conjugação do espectro. Porém, ainda é possível encontrar operadores que mapeiem os auto-estados de energia negativa em positiva, e vice-versa. Um desses casos já foi estudado em [35], onde foi construído um operador (matriz) de conjugação do espectro para o caso de férmions massivos unidimensionais interagindo com um campo escalar de fundo tipo sóliton. Devido à natureza não unitária daquele operador, a densidade de estados de energia positiva mostra-se diferente da dos estados de energia negativa pertencentes ao espectro de energia do contínuo e que, como consequência disso, poderia ser induzido um número fermiônico irracional. Em nosso caso consideramos campos magnéticos homogêneos cujos níveis de energia para uma única partícula são os conhecidos níveis de Landau. Uma vez que o espectro é discreto, não há forma de se realizar um número fermiônico irracional. Aqui a densidade do número fermiônico é proporcional à degenerêncencia do nível de Landau mais baixo cujos

auto-estados são associados a α^3 ou $\alpha^3\gamma_5$, dependendo da magnitude do campo magnético aplicado. Isto será mostrado a seguir.

Agora, a equação de Dirac é dada por

$$\left[\overrightarrow{\alpha}.(-i\vec{\nabla} - q\gamma_5\overrightarrow{A_5} - e\overrightarrow{A}) + \mu\alpha_3 + m_\tau\beta\tau\right]\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}), \tag{4.66}$$

onde os vetores potenciais são escritos como em (4.34) e (4.51) com $\mathcal{A}(r)$ e $\mathcal{A}_5(r)$ dados por

$$\mathcal{A}(r) = -\frac{Br^2}{4} \text{ e } \mathcal{A}_5(r) = -\frac{B_5r^2}{4} \text{ com } B,\ B_5 > 0. \tag{4.67}$$

Partindo de (4.57) e (4.67), o sistema de equações para os componentes do espinor pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
-i\left[2\partial_z - \omega_+\overline{z}\right]\psi_+^a &= (E - m_+)\psi_+^b, \\
-i\left[2\partial_{\bar{z}} + \omega_+ z\right]\psi_+^b &= (E + m_+)\psi_+^a \qquad (4.68)\\
i\left[2\partial_z - \omega_-\overline{z}\right]\psi_-^b &= (E + m_-)\psi_-^a, \qquad (4.69)\\
i\left[2\partial_{\bar{z}} + \omega_- z\right]\psi_-^a &= (E - m_-)\psi_-^b, \qquad (4.70)
\end{aligned}$$

onde $\omega_\pm = (eB \pm qB_5)/2$ e $m_\pm = \mu \pm m_\tau$.

Veremos em seguida, que a estrutura espinorial dos auto-estados do operador hamiltoniano depende da condição $\mu > m_\tau$ ou $\mu < m_\tau$, bem como de $eB > qB_5$ ou $eB < qB_5$. Doravante consideramos $\mu,\ m_\tau \geq 0$. Os casos em que $(eB,\ qB_5) < 0$ e/ou $(\mu,\ m_\tau) \leq 0$ não serão considerados aqui, posto que sua análise pode ser realizada de forma similar aos casos considerados neste trabaho. Começamos distinguindo estrategicamente dois tipos de situações diferentes para os casos em que $eB > qB_5$ e $eB < qB_5$.

Caso 1: $qB_5 > eB$. O espectro de energia é $|E_\pm| = \sqrt{4n\,|\omega_\pm| + m_\pm^2}$ com $n\ \epsilon\ \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\psi_+^{E_+>0} &= \frac{e^{-i|E_+|t}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{1+\frac{m_+}{|E_+|}}R_{n,l,\omega_+}(r,\theta) \\ i\sqrt{1-\frac{m_+}{|E_+|}}R_{n-1,l+1,\omega_+}(r,\theta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\psi_-^{E_->0} &= \frac{e^{-i|E_-|t}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i\sqrt{1-\frac{m_-}{|E_-|}}R^*_{n-1,l+1,|\omega_-|}(r,\theta) \\ \sqrt{1+\frac{m_-}{|E_-|}}R^*_{n,l,|\omega_-|}(r,\theta) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.71}$$

$$\psi_{+}^{E_{+}<0} = \frac{e^{i|E_{+}|t}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1-\frac{m_{+}}{|E_{+}|}} R_{n,l,\omega_{+}}(r,\theta) \\ -i\sqrt{1+\frac{m_{+}}{|E_{+}|}} R_{n-1,l+1,\omega_{+}}(r,\theta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi_{-}^{E_{-}<0} = \frac{e^{i|E_{-}|t}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i\sqrt{1+\frac{m_{-}}{|E_{-}|}} R^{*}_{n-1,l+1,|\omega_{-}|}(r,\theta) \\ \sqrt{1-\frac{m_{-}}{|E_{-}|}} R^{*}_{n,l,|\omega_{-}|}(r,\theta) \end{pmatrix} \tag{4.72}$$

onde

$$R_{n,l,\omega_{\pm}}(r,\theta) = \sqrt{|\omega_{\pm}|^{l+1} \frac{n!}{\pi(n+l)!}} e^{il\theta} r^{l} e^{-\frac{|\omega_{\pm}|}{2} r^{2}} L_{n}^{l}(|\omega_{\pm}|\, r^{2}) \text{ com } l \,\epsilon\, \mathbb{N}, \tag{4.73}$$

são os modos de Gauss-Laguerre escritos em coordenadas cilíndricas em função dos polinômios de Laguerre associados $L_{n}^{l}(|\omega_{\pm}|\, r^{2})$. Aqui R^{*} indica o complexo conjugado de R, e satisfaz

$$\int \left| R_{n,l,\omega_{\pm}}(r,\theta) \right|^{2} r dr d\theta = 1, \tag{4.74}$$

e assumimos que $R_{-1,l,\omega_{\pm}}(r,\theta) = 0$.

Para $n = 0$, no caso em que $\mu > m_{\tau}$ ($m_{\pm} > 0$), a estrutura espinorial do estado fundamental adota a seguente forma:

$$\psi_{+}^{E_{+}=m_{+}} = e^{-im_{+}t} \begin{pmatrix} R_{0,l,\omega_{+}}(r,\theta) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \psi_{-}^{E_{-}=m_{-}} = e^{-i|m_{-}|t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ R^{*}_{0,l,|\omega_{-}|}(r,\theta) \end{pmatrix}. \tag{4.75}$$

Observamos que quando $m_{\tau} = 0$, o espinor exibe a mesma estrutura obtida em (4.61), onde vórtices magnéticos foram considerados. Se devolvessemos a μ a possibilidade de que possa assumir valores negativos, a densidade de número fermiônico induzida (pode-se entender como densidade por unidade de área), é dada por

$$\rho = \frac{1}{2} \left\langle 0 \right| \left[\psi^{\dagger}, \psi \right] \left| 0 \right\rangle = -\frac{qB_{5}}{4\pi} \frac{\mu}{|\mu|}, \tag{4.76}$$

$$\rho_{5} = \frac{1}{2} \left\langle 0 \right| \left[\psi^{\dagger}, \gamma_{5}\psi \right] \left| 0 \right\rangle = -\frac{eB}{4\pi} \frac{\mu}{|\mu|}. \tag{4.77}$$

Em geral, em teorias da EDQ$_2$, a adição no hamiltoniano de um termo que quebra a simetria espectral faz com que a solução do estado fundamental privilegie um espectro,

positivo ou negativo, sendo essa escolha dependente do sinal do termo adicionado. Em nosso caso, se $m_\tau = 0$ para $\mu < 0$ a autofunção correspondente a $n = 0$ corresponderia a $E = \mu < 0$ mas com a mesma estrutura e dependência em (r, θ) das autofunções (4.75). Isto explica a ambiguidade do sinal encontrada para os números (cargas) fermiônicos (as) em (4.49), (4.63) e (4.65). Isto é: quando $\mu > 0$ o modo de energia $E = \mu > 0$ (elétron na banda de condução) contribui para $\langle \mathbf{Q} \rangle < 0$, e quando $\mu < 0$ o modo de energia $E = \mu < 0$ (elétron na banda de valência) contribui para $\langle \mathbf{Q} \rangle > 0$. Portanto, quando definimos o sinal de μ, não existe ambiguidade no sinal do número fermiônico. Além disto, vemos que esses resultados são consistente com os encontrados na seção anterior, quando consideramos sistemas como vórtices magnéticos. Resultados similares considerando campos magnéticos homogêneos e inhomogêneos, podem ser encontrados em [41, 42, 43].

Caso 2: $qB_5 < eB$. O espectro de energia é $|E_\pm| = \sqrt{4n\,|\omega_\pm| + m_\pm^2}$ com $n \,\epsilon\, \mathbb{N}$.

$$\psi_+^{E_+>0} = \frac{e^{-i|E_+|t}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1+\frac{m_+}{|E_+|}} R_{n,l,\omega_+}(r,\theta) \\ i\sqrt{1-\frac{m_+}{|E_+|}} R_{n-1,l+1,\omega_+}(r,\theta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.78}$$

$$\psi_-^{E_->0} = \frac{e^{-i|E_-|t}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{1-\frac{m_-}{|E_-|}} R_{n,l,\omega_-}(r,\theta) \\ -i\sqrt{1+\frac{m_-}{|E_-|}} R_{n-1,l+1,\omega_-}(r,\theta) \end{pmatrix} \tag{4.79}$$

$$\psi_+^{E_+<0} = \frac{e^{i|E_+|t}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1-\frac{m_+}{|E_+|}} R_{n,l,\omega_+}(r,\theta) \\ -i\sqrt{1+\frac{m_+}{|E_+|}} R_{n-1,l+1,\omega_+}(r,\theta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.80}$$

$$\psi_-^{E_-<0} = \frac{e^{i|E_-|t}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{1+\frac{m_-}{|E_-|}} R_{n,l,\omega_-}(r,\theta) \\ i\sqrt{1-\frac{m_-}{|E_-|}} R_{n-1,l+1,\omega_-}(r,\theta) \end{pmatrix} \tag{4.81}$$

Para $n = 0$, no caso em que $\mu < m_\tau$ ($m_\pm \gtrless 0$), a estrutura espinorial do estado

fundamental adota a seguente forma:

$$\psi_{+}^{E_{+}=m_{+}} = e^{-im_{+}t}\begin{pmatrix} R_{0,l,\omega_{+}}(r,\theta) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \psi_{-}^{E_{-}=|m_{-}|} = e^{-i|m_{-}|t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R_{0,l,\omega_{-}}(r,\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.82}$$

Aqui observamos que, quando $\mu = 0$, o espinor exibe a mesma estrutura obtida em (4.60). Se devolvessemos a m_τ a possibilidade de que possa assumir valores negativos, as densidades de número fermiônico induzidas é dada por

$$\rho = \frac{1}{2}\left\langle 0\right| \left[\psi^{\dagger},\psi\right] \left|0\right\rangle = -\frac{eB}{4\pi}\frac{m_\tau}{|m_\tau|}, \tag{4.83}$$

$$\rho_5 = \frac{1}{2}\left\langle 0\right| \left[\psi^{\dagger},\gamma_5\psi\right] \left|0\right\rangle = -\frac{qB_5}{4\pi}\frac{m_\tau}{|m_\tau|}, \tag{4.84}$$

resultados que são consistentes com os encontrados em (4.62) e (4.64).

Não foram consideradas os casos para $n = 0$, com $\mu > m_\tau$ para o Caso 1 e $\mu < m_\tau$ para o Caso 2, pois propiciam o surgimento de estruturas espinoriais que levam a densidades de número fermiônico não consistentes com os encontrados anteriormente. Além disso, resulta importante notar que no cálculo das densidades, não foram consideradas ambas massas simultaneamente; pois nesse caso não existiria simetria espectral nehuma no espectro no sistema.

4.3 Cálculo do número fermiônico via abordagem perturbativa

Nesta seção desenvolvemos o cálculo explícito dos mesmos números fermiônicos obtidos na seção anterior, por meio do cálculo da contribuição da polarização do vácuo (ver figura 4.5)

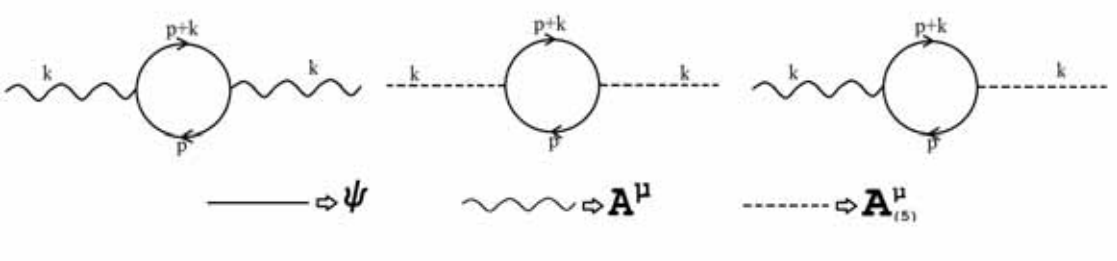


Figura 4.5: Diagramas da polarização do vácuo

e lançando mão da expansão perturbativa em k (momento externo). Neste caso, a contribuição de ordem mais baixa em k é o termo de Chern-Simons. Antecipamos aqui algumas propriedades relevantes. Primeiro é que o propagador fermiônico livre completo, para o caso que trabalhamos (representação redutível), é escrito como

$$S_F(p) = \frac{1}{\not{p} - \mu\gamma_3 - m_\tau\tau}, \tag{4.85}$$

No entanto, devido a impossibilidade de inverter a expressão (4.85) para calcular a autoenergia do fóton $\Pi^{\mu\nu}$ dada por

$$\Pi^{\mu\nu} = -i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} Tr\left[\frac{1}{(\not{p}+\not{k}) - \mu\gamma_3 - m_\tau\tau}\gamma^\mu(e+q\gamma^5)\frac{1}{\not{p} - \mu\gamma_3 - m_\tau\tau}\gamma^\nu(e+q\gamma^5)\right], \tag{4.86}$$

é preciso considerar dois propagadores fermiônicos separadamente, que são:

$$S_{F,\mu}(p) = \frac{1}{\not{p} - \mu\gamma_3} \tag{4.87}$$

e

$$S_{F,m_\tau}(p) = \frac{1}{\not{p} - m_\tau\tau}, \tag{4.88}$$

do um jeito similar ao feito no caso de campos magnéticos homogêneos, onde as densidades do número fermiônico encontradas via técnica não-perturbativa foram calculadas considerando μ e m_τ separadamente. Com o primeiro propagador verificamos que o único diagrama que terá uma contribuição de primeira ordem em k é o terceiro que aparece na figura 4.5, enquanto que se usarmos o segundo propagador, contribuição de primeira

ordem em k será encontrada somente nos dois primeiros diagramas da figura 4.5. Isto tudo é devido ao fato que a contribuição de ordem mais baixa no momento para $\Pi^{\mu\nu}$ deve apresentar o seguinte comportamento $\Pi^{\mu\nu} \sim \varepsilon^{\mu\nu\alpha}k_\alpha$, onde para se obter o simbolo de Levi-Civita é necessário ter traço de $\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\tau$ presente, desde que

$$Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\tau) = -4i\varepsilon^{\mu\nu\alpha}.$$

Assim, no caso do primeiro propagador, este traço aparecerá quando combinamos $Tr(\mu\gamma_3\gamma^\mu \not{p}\gamma^\nu\gamma_5)$. Desta forma, encontramos que $\Pi^{\mu\nu}$ pode se expresso como

$$\Pi^{\mu\nu} = -\frac{\mu eq}{2\pi^3}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}k_\alpha \int d^3p \frac{1}{(p^2-\mu^2)}\frac{1}{(p+k)^2-\mu^2}. \tag{4.89}$$

Os denominadores no integrando podem ser combinados usando a fórmula de Feynman, ou seja

$$\frac{1}{(p^2-\mu^2)}\frac{1}{(p+k)^2-\mu^2} = \int_0^1 \frac{dz}{[p^2-\mu^2+2pk(1-z)+k^2(1-z)]^2}. \tag{4.90}$$

tal que

$$\Pi^{\mu\nu} = -\frac{\mu eq}{2\pi^3}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}k_\alpha I(k^2), \tag{4.91}$$

onde

$$I(k^2) = \int_0^1 dz \int d^3p \frac{1}{[p^2-\mu^2+k^2z(1-z)]^2}. \tag{4.92}$$

A última integral está tabelada na maioria de livros de Teoria Quântica de Campos; recomendamos os resultados mostrados em [45] e [46]. Desta forma

$$I(k^2) = -i\pi^2 \int_0^1 \frac{dz}{[-k^2z^2+k^2z-\mu^2]^{1/2}}, \tag{4.93}$$

resultando simples mostrar que

$$\lim_{k\to 0} I(k^2) = -i\frac{\pi^2}{|\mu|}. \tag{4.94}$$

Finalmente, substituindo (4.94) em (4.91), encontramos que para o primeiro propagador o termo de ordem mais baixa em k dá a seguinte contribuição

$$\Pi^{\mu\nu} = i\frac{eq}{2\pi}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}k_\alpha\frac{\mu}{|\mu|}. \tag{4.95}$$

Considerando que no espaço de coordenadas $k_\alpha = i\partial_\alpha$, construimos a ação efetiva

em segunda ordem dos campos, que neste caso é dada por

$$S_{ef}^{(2)} = \frac{1}{2}\int d^3x \left(A_\mu(x)\Pi^{\mu\nu}(\partial)A_\nu^{(5)}(x) + A_\mu^{(5)}(x)\Pi^{\mu\nu}(\partial)A_\nu(x)\right), \tag{4.96}$$

com a derivada de $\Pi^{\mu\nu}$ atuando sobre o respectivo campo da direita. Assim, temos que ação efetiva em primeira ordem em k é da forma

$$S_{ef}^{(2,1)} = -\frac{eq}{4\pi}\frac{\mu}{|\mu|}\,\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\int d^3x \left(A_\mu(x)\partial_\alpha A_\nu^{(5)}(x) + A_\mu^{(5)}(x)\partial_\alpha A_\nu(x)\right), \tag{4.97}$$

onde é notada a presença de termos do tipo Chern-Simons cruzados. Com essa ação efetiva, a densidade de carga fermiônica pode ser calculada da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\left\langle 0|\ j^0|0\right\rangle &= \frac{1}{e}\frac{\delta S_{ef}^{(2,1)}}{\delta A^0}, \\
&= -\frac{q}{4\pi}\frac{\mu}{|\mu|}\varepsilon^{0\nu\alpha}\partial_\alpha A_\nu^{(5)}, \\
&= -\frac{q}{4\pi}\frac{\mu}{|\mu|}\left(\partial_2 A_1^{(5)} - \partial_1 A_2^{(5)}\right), \\
&= -\frac{q}{4\pi}\frac{\mu}{|\mu|}F_{21}^{(5)}.
\end{aligned} \tag{4.98}$$

Da mesma forma obtemos para $\left\langle 0|\ j_{(5)}^0|0\right\rangle$ o seguinte

$$\left\langle 0|\ j_{(5)}^0|0\right\rangle = \frac{1}{q}\frac{\delta S_{ef}^{(2,1)}}{\delta A^{0(5)}} = -\frac{e}{4\pi}\frac{\mu}{|\mu|}F_{21}. \tag{4.99}$$

Os resultados acima são compatíveis com aqueles encontrados na seção anterior (expressões (4.76) e (4.77), respectivamente) para o caso em que consideramos campos magnéticos homogêneos.

Cálculos similares podem ser feitos considerando o propagador definido por (4.88). Nesse caso, termos para $\Pi^{\mu\nu}$ do tipo $\Pi^{\mu\nu} \sim \varepsilon^{\mu\nu\alpha}k_\alpha$ são obtidos quando combinamos $Tr(m_\tau\tau\gamma^\mu\not{p}\gamma^\nu)$ ou $Tr(m_\tau\tau\gamma^\mu\gamma_5\not{p}\gamma^\nu\gamma_5) = m_\tau Tr(\tau\gamma^\mu\not{p}\gamma^\nu)$. Aqui encontramos

$$\Pi^{\mu\nu} = i\frac{e^2}{2\pi}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}k_\alpha\frac{m_\tau}{|m_\tau|} \tag{4.100}$$

para o primero gráfico, e

$$\Pi^{\mu\nu} = i\frac{q^2}{2\pi}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}k_\alpha\frac{m_\tau}{|m_\tau|} \tag{4.101}$$

para o segundo. A ação efetiva para cada um desses casos pode ser construída de forma

similar a (4.96). Assim, obtemos

$$\begin{aligned} S_{ef}^{(2,1)} &= \frac{1}{2}\int d^3x\,(A_\mu(x)\Pi^{\mu\nu}(\partial)A_\nu(x))\,, \\ &= -\frac{e^2}{4\pi}\frac{m_\tau}{|m_\tau|}\,\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\int d^3x\,(A_\mu(x)\partial_\alpha A_\nu(x))\,, \end{aligned} \tag{4.102}$$

para o primeiro diagrama, e

$$\begin{aligned} S_{ef}^{(2,1)} &= \frac{1}{2}\int d^3x\,\left(A_\mu^{(5)}(x)\Pi^{\mu\nu}(\partial)A_\nu^{(5)}(x)\right), \\ &= -\frac{q^2}{4\pi}\frac{m_\tau}{|m_\tau|}\,\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\int d^3x\,\left(A_\mu^{(5)}(x)\partial_\alpha A_\nu^{(5)}(x)\right), \end{aligned} \tag{4.103}$$

para o segundo. Portanto, as cargas fermiônica fornecidas por (4.102) e (4.103) são dadas por

$$\begin{aligned} \left\langle 0\right|\,j^0\left|0\right\rangle &= \frac{1}{e}\frac{\delta S_{ef}^{(2,1)}}{\delta A^0}, \\ &= -\frac{e}{4\pi}\frac{m_\tau}{|m_\tau|}F_{21}. \end{aligned} \tag{4.104}$$

e

$$\begin{aligned} \left\langle 0\right|\,j_{(5)}^0\left|0\right\rangle &= \frac{1}{q}\frac{\delta S_{ef}^{(2,1)}}{\delta A^0}, \\ &= -\frac{q}{4\pi}\frac{m_\tau}{|m_\tau|}F_{21}^{(5)}. \end{aligned} \tag{4.105}$$

respectivamente; que mostram a compatibilidade com as expressões (4.83) e (4.84).

Capítulo 5

Conclusões e Comentários

No 2° capítulo foi abordado o estudo do mecanismo de localização de férmions (massivos e não massivos) em situações em que uma brana se deforma a tal ponto de formar duas branas se separando num espaço-tempo com geometria não deformada [7]. Modos-zero analíticos foram encontrados considerando ambos os tipos de acoplamento. Mostramos que aqueles férmions de massa nula apresentam um único tipo de quiralidade, ou seja, quando α_{L_0} é normalizável, α_{R_0} não é, e viceversa. Isso poderia explicar por que observamos neutrinos com só um tipo de quiralidade em nosso universo. Especificamente, no caso em que $\widetilde{F}(\overline{\phi}) \propto -W_{\overline{\phi\phi}}$, encontramos modos-zero localizáveis no núcleo das branas, ou seja, o pico máximo da função de onda do estado fundamental acompanha a divisão das branas; ao contrário do que acontece considerando o acoplamento $\widetilde{F}(\overline{\phi}) \propto \overline{\phi}$, onde os modos-zero levam a uma densidade de probabilidade pequena de se encontrar férmions na brana, pois aquelas soluções apresentam um pico na metade entre as duas paredes. Adicionou-se um termo de massa M neste último acoplamento com o propósito de localizar o férmion sem massa em pelo menos uma das duas branas. Considerando $M = \tanh(2L)/2$, conseguimos que o pico do modo zero fique no núcleo da brana esquerda (a mudança do sinal do acoplamento levaria localizar o modo-zero na outra brana). Mas, basseado em um argumento SUSY, vemos que $\widetilde{F}(\overline{\phi}) = \eta(\overline{\phi} + M)$ não soporta estados localizados associados a férmions massivos, ao contrário do que acontece com $\widetilde{F}(\overline{\phi}) \propto \overline{\phi}$ e $\widetilde{F}(\overline{\phi}) \propto -W_{\overline{\phi\phi}}$. Neste último caso, utilizamos o método de Numerov para encontrarmos que um férmion massivo eventualmente poderia tunelar entre as branas. Além disso, ao considerar $\widetilde{F}(\overline{\phi}) = -W_{\overline{\phi\phi}}$, encontramos que a parte r-dependente das excitações do campo escalar (bránons) obedece uma equação de Schrödinger muito similar ao obedecido por α_{L_n}. Isso implicaria num espectro idêntico para bránons (excitações bosónicas) e férmions e portanto, poderia-se dizer que existe uma SUSY ao nível quântico. Contudo, todo essa análise desenvolvida no 2° capítulo poderia ter sido feita usando outros modelos não-lineares da teoria de campo.

No 3° capítulo foram encontrados novos MNLTC deformados construídos a partir de modos-zero que são a deformação das soluções de modo-zero da equação de estabilidade fornecida por modelos bem conhecidos. As soluções clássicas encontradas e que exibem um

perfil de kink duplo, poderiam descrever, pelo menos qualitativamente, transições de fase de primeira ordem; mas a nossa maior motivação estava na aplicabilidade desses modelos a cenários de mundos brana num espaço-tempo $5D$ com geometria deformada, onde esses modelos possam ser "*bounded from below*". Dois dos modelos encontrados, o modelo seno-Gordon deformado e o modelo dado por (3.26), gozavam dessa particularidade devido a sua natureza oscilatória. O modelo seno-Gordon usual é recuparado para o caso em que $L = 0$. Da mesma forma, só o modelo ϕ^4 deformado tipo II recupera com sucesso o modelo $\lambda\phi^4$ e ϕ^6 usuais.

No 4° capítulo estudamos o papel que desempenham os modos-zero fermiônicos na obtenção de número fermiônicos induzidos. Mostramos que é possível realizar modos-zero fermiônicos com diversas estruturas espinoriais que levam ao fracionamento da carga fermiônica no caso de vórtices magnéticos com fluxo magnético finito e quantizado. Também consideramos os efeitos da adição de termos constantes que levam a gaps de energia nos estados de uma única partícula, também de forma artificial, visto que a rede de grafeno não apresenta estes gaps de energia. Verificamos que os gaps de energia introduzidos no sistema não modificam as estruturas espinoriais dos estados de mínima energia (eles não possuem energia nula) quando comparadas com as estruturas espinoriais de energia nula que encontramos quando consideramos os efeitos de vórtices de campos magnéticos, e estes estados de mínima energia ainda levam à indução de número fermiônico no vácuo nessa EDQ_{2+1} estendida com simetria de gauge chiral U(1) local. Finalmente, analisamos o processo de polarização do vácuo para construir a ação efetiva para os campos de gauge, no contexto relativístico, e verificamos a presença de termos do tipo Chern-Simons cruzados nessa EDQ_{2+1}. Neste caso, a corrente fermiônica anômala induzida calculada por meio de teoria de perturbação, exibe uma dependência similar com o potencial químico e o termo de massa que quebra paridade, quando consideramos campos magnéticos homogêneos. A compatibilidade dos resultados obtidos nesses três casos (vórtices, campos magnéticos homogêneos e polarização do vácuo) dá validade aos resultados mostrados nesta dissertação.

Referências Bibliográficas

[1] R. Jackiw e C. Rebbi, Phys. Rev. D **13** (1976) 3398.

[2] R. Jackiw, Phys. Rev. D **29,** 2375 (1984).

[3] W. P. Su, J. R. Schrieffer e A. J. Heeger, Phys. Rev. Lett **42**, 1698 (1979); Phys. Rev. B **22**, 2099 (1980).

[4] R. Jackiw e J. R. Scrieffer, Nucl. Phys. **B190**, 253 (1981).

[5] C.-Y. Hou, C. Chamon e C. Mudry, Phys. Rev. Lett. **98**, 186809 (2007).

[6] R. Jackiw e S.-Y. Pi, Phys. Rev. Lett. **98**, 266402 (2007).

[7] V. A. Rubakov e M. E. Shaposhnikov, Phys. Rev. Lett B **125** (1983) 136-138.

[8] G. Flores e N. F. Svaiter, Phys. Rev. D **66**, 025031 (2002).

[9] T. Vachaspati, Phys Rev. D **69**, 043510 (2004).

[10] A. Campos, Phys.Rev. Lett. **88** (2002) 141602.

[11] A. E. R. Chumbes, A. E. O. Vásquez e M. B. Hott, Phys. Rev. D **83** 105010 (2011).

[12] D. Bazeia, L. Losano e J. M. C. Malbouisson, Phys. Rev. D **66**, 101701 (2002); C.A. Almeida, D. Bazeia, L. Losano e J. M. C. Malbouisson, Phys. Rev. D **69**, 067702 (2004); D. Bazeia e L. Losano, Phys. Rev. D **73**, 025016 (2006); D. Bazeia, M. A. Gonzalez Leon, L. Losano, e J. Mateos Guilarte, Phys. Rev. D **73**, 105008 (2006); D. Bazeia, L. Losano, J. M. C. Malbouisson e R. Menezes, Phys. Rev. D **237**, 973 (2006).

[13] A. E. R. Chumbes e M. B. Hott, Phys. Rev. D **81** (2010) 045008.

[14] A. Alonso Izquierdo, M. A. Gonzalez Leon e J. Mateos Guilarte, Phys. Rev. D **65**, 085012 (2002).

[15] A. S. de Castro e M. B. Hott, Phys. Lett. A **351,** 379 (2006).

[16] F. Cooper, A. Khare e U. Sukhatme, Phys. Rep. **251**, 267 (1995).

[17] Z. -H. Zhao, Y. -X. Liu, H.-T. Li e Y. -Q. Wang, Phys. Rev. D **82,** 084030 (2010).

[18] Z.-H. Zhao, Y.-X. Liu, Y.-Q. Wang e H.-T. Li, JHEP **06** (2011) 045.

[19] W. T. Cruz, A. R. Gomes e C. A. S. Almeida, **arXiv:0912.4021**.

[20] N. Arkani-Hamed e M. Schmaltz, Phys. Rev. D **61**, 033005 (2000).

[21] E. Merzbacher, Quantum Mechanics (John Wiley & Sons,New York), (1970).

[22] R. Lipowsky, Phys. Rev. Lett. **49**, 1575 (1982).

[23] R. Lipowsky, Phys. Rev. Lett. **52**, 1429 (1984).

[24] A. Gordon, T. Salditt, I. D. Vagner e P. Wyder, Phys. Rev. B **43**, 3775 (1991).

[25] S. Dorfman, D. Fuks, A. Gordon e E. Kotomin, Thin Solid Films **336,** 149 (1998**).**

[26] A. Campos, K. Holland e U.-J. Wiesse, Phys. Rev. Lett. **81**, 2420 (1998).

[27] K. Skenderis e P. K. Townsend, Phys. Lett. B **408** (1999) 46; O. DeWolfe, D. Z. Freedman, S. S. Gubser, e A. Karch, Phys. Rev. D **62** (2000) 046008; O. DeWolfe e D. Z. Freedman, e-Print: arXiv:0002226 [hep-th]; C. Csaki, J. Erlich, T. J. Hollowood e Y. Shirman , Nucl. Phys. B **581** (2000) 309; C. Csaki, J. Erlich, C. Grojean e T. J. Hollowood, Nucl. Phys. B 584 (2000) 359; M. Gremm, Phys. Lett B **478** (2000) 434; A. Kehagias e K. Tamvakis, Phys. Lett. B **504**, 38 (2001); M. Giovannini, Phys. Rev. D **64** (2001) 064023; D. Bazeia e A.R. Gomes, JHEP **0405,** 012 (2004); A. de Souza Dutra, A. C. Amaro de Faria Jr. e M. Hott, Phys. Rev. D **78** (2008) 043526.

[28] R. Rajaraman; Phys. Rev. Lett **42** 200 (1979).

[29] E. B. Bolgomol'nyi, Sov. J. Nucl. Phys. **24**, 449 (1976).

[30] M. K. Prasad e C. M. Sommerfeld, Phys. Rev. Lett. **35**, 760 (1975).

[31] N. H. Christ e T. D. Lee, Phys. Rev. D **12**, 1606 (1975).

[32] M. A. Lohe e D. M. O'Brien, Phys. Rev. D 23, 1771 (1981).

[33] C. Chamon, C. -Y. Hou, R. Jackiw, C. Mudry, S.-Y. Pi e G. Semenoff, Phys. Rev. B **77,** 235431 (2008).

[34] C. Chamon, C. -Y. Hou, R. Jackiw, C. Mudry, S.-Y. Pi e A. P. Schnyder, Phys. Rev. Lett **100,** 110405 (2008).

[35] A. J. Niemi e G. W. Semenoff, Phys. Rept. **135**, 99 (1986).

[36] Y. Aharonov e A. Casher, Phys. Rev. A **19**, 2461 (1979).

[37] A. J. Niemi e G. W. Semenoff, Phys. Rev. Lett **51** 23 (1983).

[38] R. MacKenzie e F. Wilczek, Phys. Rev. D 30 (1984) 2260.

[39] G. W. Semenoff, Phys. Rev. Lett. **53**, 2449 (1984).

[40] G. Semenoff, V. Semenoff e F. Zhou, Phys. Rev. Lett. **101,** 087204 (2008).

[41] A. Raya e E. Reyes, Phys. Rev. D **82**, 016004 (2010).

[42] A. Das e M. Hott, Phys. Rev. D **53**, 2252 (1996).

[43] V. Gusynin, V. Miransky e I. Shovkovy, Phys. Rev. D **52**, 4718 (1995).

[44] L. Randall e R. Sundrum, Phys. Rev. Lett **83** (1999) 3370; Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 4690.

[45] L. Ryder, Quantum Field Theory (Cambridge University Press 2ed, New York), (1996).

[46] F. Mandl. e G.Shaw, Quantum Field Theory (John Wiley & Sons, New York), (1986).