



IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT – 004/14

Simetria Discreta S_3 como
uma possível extensão para
o Modelo Padrão

Pedro Contino da Silva Costa

Orientador:

Prof. Dr. Vicente Pleitez

Fevereiro de 2014.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Vicente Pleitez por ter me orientando desde minha iniciação científica, dando-me total suporte para minha evolução dentro da área de Física de Partículas.

À Dr. Ana C. B. Machado, pela ajuda e pela possibilidade de trabalhar em um de seus modelos.

À Dr. Elaine C. F. S. Fortes pelos exemplo de pessoa e apoio.

Aos meus colegas do Instituto de Física Teórica, com os quais tive o privilégio de caminhar ao longo desses dois anos. Com os quais pude aprender a ter outro olhar do mundo, quebrando preconceitos, e outras coisas além da física. Em particular sou grato ao Fagner C. Correia, ao Paulo H. Ortega, ao Thiago C. Peixoto, ao Anderson A. Nogueira, ao Rennan L. Jusinskas e à Tatiana R. Cardoso pelo companheirismo e amizade.

Em especial aos meus pais pelo grande suporte e apoio dados ao longo de toda minha jornada, apoiando-me nas minhas decisões tomadas.

À Adriane F. M. dos Santos pela total compreensão e apoio ao longo das minhas escolhas.

Agradeço, também, a prestativa atenção das secretarias da Pós-Graduação.

À CAPES, pelo apoio financeiro e o respeito dado aos seus bolsistas.

Resumo

Uma nova fase de medidas para os ângulos de mistura para o setor leptônico se iniciou. Os últimos dados para o valor de θ_{13} excluíram seu valor nulo em mais de 10σ , descartando então a matriz de mistura TBM dos léptons. A conhecida textura de Fritzscht, usada para calcular os ângulos de mistura dos quarks, fornece grande concordância empírica para os atuais valores dos ângulos, assim como, para as diferenças de massas dos neutrinos.

As simetrias discretas S_3 , juntamente com as simetrias abelianas Z_3 e Z_5 são combinadas entre si formando o grupo de sabor $G_F = S_3 \otimes Z_5 \otimes Z_3$ que tem como objetivo estender a simetria usual do Modelo Padrão $G = SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, essa extensão ocorre com um acréscimo de mais cinco campos escalares, que são singletos de $SU(2)$.

A principal finalidade da inclusão de G_F é fazer com que a textura de Fritzscht não precise ser imposta como ponto de partida nas matrizes de massa dos léptons carregados e dos neutrinos e sim que sejam resultantes no setor de Yukawa após a quebra de simetria.

Nosso objetivo, aqui, é analisar a extensão do MP, desde a inclusão das massas dos neutrinos, discutindo a possibilidade deles serem partículas de Dirac ou Majorana, como também explorando os últimos dados de θ_{13} , com suas implicações. Veremos que a textura de Fritzscht é uma boa escolha para as matrizes de massas, tanto para o setor dos léptons quanto para os quarks. Por fim, faremos a extensão do MP com o grupo de sabor $G_F = S_3 \otimes Z_5 \otimes Z_3$, analisando somente o setor dos léptons, que nos levará a textura Fritzscht, mas com pequenos desvios.

Palavras-chave: Oscilação de Neutrinos; Mecanismos de Massa; Textura de Fritzscht; Bases Fracas; Violação de CP; Grupo de Sabor $G_F = S_3 \otimes Z_5 \otimes Z_3$;

Área de Conhecimento: Física de Partículas e Campos.

Abstract

A new phase of measures for the mixing angles for the lepton sector began. The latest data for the value of θ_{13} excluded its null value in more than 10σ , then discarding the TBM mixing matrix of leptons. The known Fritzsch texture, used to calculate the mixing angles of quarks, provides extensive empirical agreement for the current values of the angles, as well as for differences in masses of neutrinos.

The discrete symmetries S_3 , together with the Abelian symmetries Z_3 and Z_5 are combined together to form the group flavor $G_F = S_3 \otimes Z_5 \otimes Z_3$ that aims to expand the usual symmetry of the Standard Model $G = SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, this extension occurs with an increase of five scalar fields which are singlet of $SU(2)$.

The main purpose to the inclusion of G_F is to make the texture of Fritzsch need not be imposed as a starting point in the mass matrices of charged leptons and neutrinos, but they result in the Yukawa sector after symmetry breaking.

Our goal here is to analyze since extension of the MP by the inclusion of the masses of the neutrinos, also exploring the possibility that its be Dicac's particle or Majorana's particle and finally the latest test data of θ_{13} . At the end, we will see the extension of the Standard Model with the group of flavor $G_F = S_3 \otimes Z_5 \otimes Z_3$, only analyzing the lepton's sector, leading us to the Fritzsch texture, but with small deviations.

Keywords: Neutrino Oscillation; Mechanisms Mass; Fritzsch texture; Weak bases; CP Violation; Flavor Group $G_F = S_3 \otimes Z_5 \otimes Z_3$;

Knowledge Area: Particle Physics and Fields Theory.

Sumário

1	Introdução	3
2	Modelo Padrão	9
2.1	O Modelo Padrão	9
2.2	Matrizes de Massa e de Mistura	15
2.2.1	Matrizes de Massa	15
2.2.2	Mistura de Sabor	18
3	Massas dos Neutrinos, Mistura e Oscilações	21
3.1	Massas dos Neutrinos	22
3.1.1	Massas de Dirac	22
3.1.2	Massas de Majorana	23
3.1.3	Termo de massa Dirac-Majorana	25
3.1.4	O Mecanismo Seesaw	27
3.2	Massas dos Neutrinos em teorias de gauge $SU(2) \otimes U(1)$	30
3.3	Medidas de θ_{13} e suas Implicações	32
3.3.1	Medidas de θ_{13}	34
3.3.2	Implicações	36
4	Noções de Teorias de Grupos	39
4.1	Grupos	39
4.2	Caráteres, Representações, Classes Conjugadas e Teorema da Ortogonalidade	40
4.2.1	Representações de Grupos	40
4.2.2	Classes Conjugadas	41
4.2.3	Caráter	41
4.2.4	Teorema da Ortogonalidade	42
4.3	Grupo $SU(n)$ e Álgebras de Lie	43
4.4	Grupo de Permutação S_3	44
4.4.1	Classes Conjugadas em S_3	45

4.4.2	Conjunto de Representações Irredutíveis de S_3	46
4.4.3	Regras de Multiplicação de S_3	50
4.4.4	Grupo S_3 como Simetria de um Triângulo Equilátero	51
4.5	Grupo Z_3	53
5	Textura de Fritzsche e Bases Fracas	55
5.1	Textura de Fritzsche	56
5.2	WBT como Gerador dos Elementos Nulos na Textura de Fritzsche	59
6	Um Modelo S_3 para Matrizes de Massas dos Leptons com Textura Mínima Aproximada	65
6.1	θ_{13} na Matriz de Massa dos Neutrinos com Textura Mínima	65
6.2	O Modelo	71
7	Conclusão	81
A	Bases Fracas Invariantes e Violação de CP	83
A.1	Condições para Invariância CP	85
A.2	Transformações de Bases Fracas	90
A.3	Bases Fracas Invariantes	91
A.4	Condições de Bases Fracas Invariantes para Invariância de CP	93
A.5	Duas e Três Gerações	95
A.5.1	$n_g = 2$	95
A.5.2	$n_g = 3$	96
B	Desvios da Textura Mínima	99

1

Introdução

As interações eletromagnéticas e fracas são formuladas por teorias de gauge com simetria $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, já as interações fortes são descritas por teorias de gauge com simetria de cor $SU(3)_c$. Disso, podemos naturalmente esperar que todas essas interações de partículas elementares devem ser descritas por teorias de gauge com alguma simetria interna G , isto é, a lagrangiana, da teoria, deve ser invariante sob transformações de gauge de G . O exemplo mais simples é tomar o grupo de simetria G sendo um produto direto de cada simetria, $G = SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. A teoria resultante é chamada de o modelo padrão de física de partículas. O importante princípio na formulação é que 1) a teoria é uma teoria de gauge, 2) ela deve ser renormalizável e livre de anomalias e 3) a quebra de simetria deve ocorrer espontaneamente.

Infelizmente, o Modelo Padrão possui muitos problemas a serem resolvidos, e muitos teóricos acreditam que ele não seja a teoria final. Entretanto, devido ao sucesso do modelo em explicar uma grande variedade de resultados experimentais é imprescindível que todos os passos de sua construção sejam seguidos para qualquer modelo adicional que proponha modificá-lo.

A inclusão das massas dos neutrinos no MP tem se mostrado com essencial para modelos além do Modelo Padrão devido a vários experimentos demonstrando o fenômeno de oscilação [1, 2, 3], neutrinos produzidos em um autoestado de sabor bem definido que podem ser detectados, após se propagarem por uma distância macroscópica, como um diferente autoestado de sabor. A origem do fenômeno de oscilações de neutrinos está associada a explicação do déficit dos neutrinos solares (ν_e) medidos na

Terra, (somente 1/3 dos neutrinos, previstos teoricamente, produzidos em reações termonucleares eram medidos) juntamente com a anomalia dos neutrinos atmosféricos, déficit na razão entre o fluxo de neutrinos do múon ν_μ e o fluxo de neutrinos do elétron ν_e produzidos nas camadas mais altas da atmosfera.

A maneira mais simples de explicar ambos os fenômenos é que oscilação pode ocorrer naturalmente se essas partículas são massivas, assim como todos os férmions carregados, e os sabores leptônicos misturados, de maneira análoga ao setor dos quarks. Desta forma, neutrinos seriam descritos por três estados ν_1, ν_2 e ν_3 com massas m_1, m_2, m_3 , respectivamente, sendo que estes estados de massa seriam diferentes dos estados de sabor ν_e, ν_μ e ν_τ . Assim, neste contexto, os estados de sabor seriam misturas dos estados de massa.

Como dito anteriormente, o MP não inclui as massas dos neutrinos, isso porque, desde a sua concepção por Glashow, Salam e Weinberg nos anos 1960, não havia evidências concretas para suas massas de forma que eles foram introduzidos no modelo como partículas de massa nula para as quais nenhum termo de massa renormalizável pode ser construído. Contudo, a predição de massa nula para eles pelo MP é algo meramente accidental. A razão para essas partículas não ganharem massa pelo mecanismo de Higgs provém do fato de os neutrinos de mão direita ν_R não estarem incluídos na lista de férmions do MP. Consequentemente, no MP não há nem mistura nem violação de CP no setor leptônico, como há no setor dos quarks. Todavia, a existência de suas massas abre um caminho novo para estas possibilidades.

Com a introdução dos neutrinos de mão direita no Modelo Padrão, para que eles possam adquirir massa, sejam elas massas de Dirac ou de Majorana, (sendo a última uma possibilidade adicional para férmions sem carga elétrica) tem-se como consequência imediata a matriz de mistura no setor leptônico, que da mesma forma que para os quarks, surgem nas correntes carregadas, conhecida como Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (PMNS). Esta surge como resultado do produto entre a matriz que diagonaliza a matriz de massa dos léptons carregados, $\mathcal{U}_l^\dagger M_l \mathcal{V}_{lR} = \text{diag}(m_e, m_\mu, m_\tau)$, e a matriz que diagonaliza os neutrinos $\mathcal{U}_\nu^\dagger M_\nu \mathcal{V}_{\nu R} = \text{diag}(m_1, m_2, m_3)$, e assim temos, $V_{\text{PMNS}} = \mathcal{U}_l^\dagger \mathcal{U}_\nu$. Tendo como resultado essa nova matriz de mistura, iniciou-se a quantificação de seus ângulos, que surgem através de sua parametrização em termos de três ângulos de mistura e três fases de violação de CP

$$V_{\text{PMNS}} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{CP}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} P_\nu \quad (1.1)$$

com $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$, $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ e $P_\nu = \text{diag}(e^{i\delta_1}, e^{i\delta_2}, 1)$. Estes ângulos são relacionados com razões de massas do setor leptônico, sendo θ_{12} o ângulo associado a oscilação dos

neutrinos solares e θ_{23} aos neutrinos atmosféricos. Até o ano de 2010, o ângulo θ_{13} de (1.1) era assumido, sendo uma boa aproximação, nulo. Desta forma a matriz PMNS, junto aos outros valores aproximados dos ângulos de mistura, era conhecida como matriz tribimáxima,

$$U_{\text{TBM}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

nome esse atribuído por conta dela ser gerada pelo produto entre a matriz trimáxima V_C e a bimáxima U_{BM} . Essas últimas são as matrizes que diagonalizam as matrizes hermitianas dos léptons carregados M_l^2 e dos neutrinos M_ν^2 quando essas assumem a seguinte textura, propostas por [4]

$$\mathcal{M}_l^2 = \begin{pmatrix} a & b & b^* \\ b^* & a & b \\ b & b^* & a \end{pmatrix}; \quad \mathcal{M}_\nu^2 = \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & z & 0 \\ y & 0 & x \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

em que a, x, y e z são parâmetros reais, desta forma $U_{\text{TBM}} = V_C^\dagger U_{BM}$.

Entretanto, em 2011 uma nova etapa de medidas de oscilações se iniciou. Naquele ano, algumas indicações do ângulo de mistura θ_{13} não nulo surgiram, a partir de observações do aparecimento do neutrino do elétron vindo de um feixe de neutrinos de múons, por meio de aceleradores em experimentos de oscilações relatados por [5, 6]. Essas indicações geraram grandes repercussões, levando a TBM a não ser mais uma boa matriz de mistura, uma vez que ela possui o elemento (1,3) igual a zero. Neste mesmo ano, propostas para modificações de (1.2) por meio de alterações em (1.3) surgiram. Como exemplo podemos citar [7], em que se considera uma extensão simples e geral da proposta original de (1.3), levando-se em conta efeitos perturbativos sobre as matrizes de massa $\mathcal{M}_l^2$ e $\mathcal{M}_\nu^2$. Essas matrizes tomam uma nova forma e não mais são diagonalizadas somente pela trimaxima e bimáxima. Para a nova matriz dos léptons neutros a diagonalização passou a ser feita por $\mathcal{U}_\nu = U_{BM} W$ e para a nova matriz dos léptons carregados por $\mathcal{U}_l = V_C V_L^l$, sendo V_L^l a matriz que mede o desvio da matriz de mistura dos léptons carregados a partir da trimáxima e W a matriz que caracteriza o desvio da matriz de mistura dos neutrinos a partir da bimáxima. Levando ao seguinte resultado,

$$\begin{aligned} V_{\text{PMNS}} &= \mathcal{U}_l^\dagger \mathcal{U}_\nu = V_L^{l\dagger} V_C^\dagger U_{BM} W \\ &= V_L^{l\dagger} U_{\text{TBM}} W = U_{\text{TBM}} + \text{pequenas perturbações} \end{aligned}$$

desta forma as correções da TBM surgem dos dois setores, dos léptons carregados e

dos neutrinos.

Em 2012 novos relatos para θ_{13} foram feitos por [8, 3, 9], fornecendo após ajustes globais o seguinte valor: $\sin\theta_{13}^2 \simeq 0.025$, tanto para a hierarquia normal como a invertida, com $\theta_{13} = 0$, agora, excluído em mais de 10σ .

Da mesma maneira que se imaginavam texturas que levassem a TBM, (1.3), novas texturas (além das citadas a pouco, que são apenas correções das velhas texturas) para relacionar as massas e os ângulos de misturas que concordassem, também, com essas novas medidas, foram propostas para o setor leptônico. Como destaque, e a que será abordada na dissertação, temos a textura de Fritzsche. Diferente de (1.3) que propõe diferentes formas para as matrizes dos léptons carregados e dos neutros, ela é assumida ter a mesma forma para ambos os léptons,

$$M_l = \begin{pmatrix} 0 & A_l & 0 \\ A_l & 0 & B_l \\ 0 & B_l & C_l \end{pmatrix}, M_\nu = \begin{pmatrix} 0 & A_\nu & 0 \\ A_\nu & 0 & B_\nu \\ 0 & B_\nu & C_\nu \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

sendo cada entrada complexa. Embora a idéia de usar a textura da forma de (1.4), no setor leptônico seja nova, ela já foi utilizada para o setor de quarks. Apesar de Weinberg [10] ter primeiramente proposto essa forma de matriz, ele o fez apenas para duas gerações de quarks. Mas, foi Fritzsche quem a usou para calcular os ângulos de Cabibbo, ângulos que surgem através da parametrização da matriz de mistura dos quarks para duas gerações, e posteriormente estendeu seu uso para três gerações, sendo como uma de suas propostas iniciais calcular os três ângulos de mistura em termos das massas dos quarks.

Em [11] Fritzsche achou a seguinte relação consistente para o ângulo de Cabibbo,

$$\theta_c = \arctan \sqrt{m_d/m_s} - \arctan \sqrt{m_u/m_c} \quad (1.5)$$

considerado apenas quatro sabores de quarks u, d, s e c , com m sendo suas respectivas massas. Para encontrar esse resultado Fritzsche assumiu $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$ como sendo a simetria de gauge da dinâmica de sabor, com $SU(2)_L \times SU(2)_R$ correspondendo a simetria quiral. Ele também assumiu que a geração de massa para os bósons carregados que se acoplam com os quarks de mão direita, acoplamento esse que surge através dessa nova simetria, é a única fonte de violação de paridade, impondo desta forma que todas as outras interações fossem invariantes. Através dessa simetria de gauge assumida, ele viu que os escalares que contribuíam para a geração das massas dos quarks podiam ser representadas por matrizes 2×2 , sendo elas as matrizes hermitianas S, T

junto a não hermitiana U . Desta maneira, Fritzsche obteve o seguinte termo de Yukawa

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y^{(Q)} = & f_S (\bar{u}_0 \quad \bar{d}_0)_L S \begin{pmatrix} u_0 \\ d_0 \end{pmatrix}_R + f_T (\bar{c}_0 \quad \bar{s}_0)_L T \begin{pmatrix} c_0 \\ s_0 \end{pmatrix}_R \\ & + f_U (\bar{u}_0 \quad \bar{d}_0)_L U \begin{pmatrix} c_0 \\ s_0 \end{pmatrix}_R + f'_S (\bar{c}_0 \quad \bar{s}_0)_L U \begin{pmatrix} u_0 \\ d_0 \end{pmatrix}_R + h.c \end{aligned} \quad (1.6)$$

sendo f_S, f_T, f_U e f'_U as constantes de acoplamento e $u_0, d_0, \dots$ denotam os quarks no autoestado de sabor. Com o objetivo frear algumas interações para gerar uma textura que levasse a Eq.(1.5) Fritzsche introduziu uma simetria discreta R em que os campos dos quarks e os escalares se transformam da seguinte forma

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_0 \\ d_0 \end{pmatrix}_L & \rightarrow i \begin{pmatrix} u_0 \\ d_0 \end{pmatrix}_L ; \quad \begin{pmatrix} u_0 \\ d_0 \end{pmatrix}_R & \rightarrow -i \begin{pmatrix} u_0 \\ d_0 \end{pmatrix}_R ; \quad \begin{pmatrix} c_0 \\ s_0 \end{pmatrix}_{L,R} & \rightarrow \begin{pmatrix} c_0 \\ s_0 \end{pmatrix}_{L,R} \\ S & \rightarrow S ; \quad T & \rightarrow T ; \quad U & \rightarrow iU \end{aligned} \quad (1.7)$$

Através da imposição de (1.7) ele pode eliminar o primeiro termo da Eq.(1.6). Exigindo-se, também, que a interação dada em (1.6) fosse invariante por paridade e sabendo-se, também, que os campos se transformam da seguinte maneira por P

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_0 \\ d_0 \end{pmatrix}_{L,R} & \rightarrow \begin{pmatrix} u_0 \\ d_0 \end{pmatrix}_{R,L} ; \quad \begin{pmatrix} c_0 \\ s_0 \end{pmatrix}_{L,R} & \rightarrow \begin{pmatrix} c_0 \\ s_0 \end{pmatrix}_{R,L} \\ T & \rightarrow T ; \quad U & \rightarrow U^T \end{aligned}$$

conclui-se que $f_T = f_T^*, f_U = f_U^*$. Com os campos escalares neutros desenvolvendo seus respectivos valores esperados de vácuo, Fritzsche obteve as seguintes matrizes de massa para os quarks do tipo up, u_0 e d_0 e para os quarks do tipo down c_0 e s_0 , respectivamente

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha^* & \beta \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma^* & \delta \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

que ao serem diagonalizadas e usando parametrizações corretas levaram a (1.5). Posteriormente, usando a mesma idéia, Fritzsche estendeu sua aplicação para as três gerações de quarks obtendo suas matrizes de massa da forma da Eq.(1.4), conseguindo calcular seus ângulos de mistura para as três gerações em termos de suas massas.

Essas matrizes de massa com texturas dadas por (1.8) e (1.4) passaram a ser chamadas de texturas de Fritzsche. Analisando essas idéias, junto as recentes medidas de θ_{13} , o autor de [12] propôs essa mesma textura para o setor dos léptons, mas em prin-

cíprio sem impor nenhuma simetria adicional, ao contrário de Fritzsch, no grupo usual do MP $G = SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Em [12] toma-se como ponto de partida que as matrizes de massa dos léptons carregados e dos neutros possuam a forma de (1.3) e mostra-se que elas levam a boas previsões tanto para as diferenças de massas dos neutrinos como para seus ângulos de mistura, incluindo θ_{13} não nulo.

Embora, tenha-se demonstrado bons resultados através de [12], um impasse natural surge, uma vez que essa textura não aparece naturalmente no grupo usual G . Em [13] teve-se a idéia de estender a simetria do MP, para que, então, a textura de Fritzsch possa surgir naturalmente, utilizando-se S_3 como a principal simetria.

Assim, para explorarmos esses temas, este texto será apresentado em cinco partes. No Capítulo 2, faremos uma breve introdução ao MP, visando esclarecer como as massas dos férmions dos bósons e do escalar são geradas e, também, como as matrizes de mistura dos quarks surgem. No capítulo 3, discutimos as possibilidades para as massas dos neutrinos junto a suas implicações, discutimos, também, o mecanismo que garante que suas massas sejam pequenas em comparação aos outros férmion, conhecido como mecanismo seesaw, que como veremos será essencial e leva a grandes consequências para os neutrinos. Por fim, falaremos sobre as recentes medidas de θ_{13} e suas implicações. Já no capítulo 4, fazemos uma breve introdução a teoria de grupos para que, então, possamos com facilidade obter as representações do grupo discreto S_3 , assim como suas leis de multiplicação. No Capítulo 5 discutimos se a textura de Fritzsch ainda fornece boas previsões, com os atuais valores das massas dos quarks, para a matriz CKM. Veremos, também, que o excesso de parâmetros nas matrizes de massa, no total de dezoito em cada setor, pois as matrizes possuem todas suas entradas complexas, para apenas treze parâmetros necessários (seis massas, seis ângulos de mistura e uma fase de violação de CP), além de possibilitar o uso de texturas permite o uso de bases fracas no MP para reduzir seus parâmetros livres. Finalmente, no capítulo 6 mostramos uma visão geral de como a matriz de mistura para os férmions são construídas através de (1.4) e que elas levam a boas previsões com os dados experimentais, em sequência demosntramos que de fato o modelo proposto por [13] leva a textura mínima, mas com pequenas alterações.

2

Modelo Padrão

As partículas elementares e suas interações são descritas pelo Modelo Padrão (MP): uma teoria quântica de campos relativística de quatro dimensões, baseada na simetria de gauge com grupo $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ (onde c representa a cor, L a quiralidade de mão esquerda, e Y a hipercarga). Tem-se 8 geradores, T^a ¹, para o grupo $SU(3)_c$ que se refere à cromodinâmica quântica (QCD), descrevendo a interação forte entre as partículas coloridas (quarks e glúons), 3 geradores, τ^b ², para o grupo $SU(2)_L$ e 1 gerador para o grupo $U(1)_Y$. O produto destes dois grupos, $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, está relacionado com a força eletrofraca, que é a interação entre os bósons de gauge massivos, $W^\pm$, Z , o fóton e os férmions. À esta teoria, cada um deles está relacionado a um campo vetorial: $G_\mu^a T^a$ para cor; $W_\mu^b \tau^b$ para $SU(2)_L$ e B_μ para a hipercarga $U(1)_Y$. Consolidado ao longo dos anos, o MP nos deu uma boa compreensão das interações fundamentais a energias da ordem de 100 GeV e, sem dúvida, esta teoria representando uma das maiores conquistas da Física.

2.1 O Modelo Padrão

Os férmions (léptons e quarks) do MP estão divididos em três gerações, mais conhecidas por famílias, cada uma contribuindo com 4 dubletos de mão esquerda (L), um no setor leptônico e três no setor dos quarks, e sete singletos de mão direita (R). Mais pre-

¹Conhecidos como Matrizes de Gell-Mann

²Correspondem às matrizes de Pauli.

cisamente, as famílias dos férmions sob a simetria do MP são organizadas da seguinte forma:

$$L_L = \begin{pmatrix} \nu_l \\ l \end{pmatrix}_L \sim \left(1, 2, -\frac{1}{2}\right); \quad (2.1a)$$

$$Q_L = \begin{pmatrix} U_i \\ D_i \end{pmatrix}_L \sim \left(3, 2, \frac{1}{6}\right); \quad (2.1b)$$

$$l_R \sim (1, 1, -1); \quad U_R \sim (3, 1, \frac{2}{3}); \quad D_R \sim \left(3, 1, -\frac{1}{3}\right) \quad (2.1c)$$

A notação usada aqui significa que, por exemplo, um dubleto leptônico de mão esquerda L_L é singleto (1) sob o grupo $SU(3)_c$, dubleto (2) sob o grupo $SU(2)_L$, e carrega uma hipercarga $-1/2$ sob o grupo $U(1)_Y$. Com todos estes ingredientes, a lagrangiana do modelo para o setor eletrofraco, que é o setor que iremos abordar, é:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^3 W_{\mu\nu}^i W^{i\mu\nu} \\ & + \bar{\psi}_R i\gamma^\mu (\partial_\mu + ig'B_\mu Y) \psi_R \\ & + \bar{\psi}_L i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + ig'B_\mu Y - \frac{ig}{2}\tau \cdot W_\mu \right) \psi_L + h.c \end{aligned} \quad (2.2)$$

em que a primeira linha fornece os termos cinéticos dos bósons de gauge e de auto interação e os dois últimos termos se referem ao setor eletrofraco, $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Desta forma, vemos que nesse estágio as massas de todos os férmions são nulas. Na Eq.(2.2) temos que $\psi_{L,R}$ ³ representam as componentes left e right dos campos fermiônicos definidos em (2.1a-c), com soma implícita em todos os sabores dos férmions e dos quarks.

Na lagrangiana do modelo escrita acima os tensores dos campos são dados por

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^i &= \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i + ig\varepsilon^{ijk} [W_\mu^j, W_\nu^k] \\ B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \end{aligned} \quad (2.3)$$

sendo ε^{ijk} a constante de estrutura do grupo $SU(2)$. Até este ponto, temos as interações de todas as partículas, porém, nenhum campo é massivo, pois a invariância sobre a simetria do MP não permite adicionarmos termo de massa, $m\bar{\psi}_L\psi_R$, em que $\bar{\psi}_L$ representam as componentes de mão esquerda (dubletos) enquanto ψ_R é componente de mão direita (singletos da teoria). Adicionar um termo de massa deste tipo implica a não-invariância da lagrangeana uma vez que além de ψ_L e ψ_R pertencerem a diferentes

³ $\psi_{L,R} = P_{L,R}\psi$ são as componentes quirais obtidas do espinor ψ pela aplicação dos projetores quirais $P_{L,R} = (1 \mp \gamma_5)/2$

representações de $SU(2)$ possuem diferentes valores para as hipercargas⁴, levando a um produto não invariante entre eles. A solução para este problema é introduzir um novo campo ao modelo: um dubleto escalar, com hipercarga $Y = +1/2$, o que nos remete a

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \sim \left(1, 2, \frac{1}{2}\right) \quad (2.4)$$

Agora, a lagrangiana completa pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_s + \mathcal{L}_Y$$

sendo $\mathcal{L}_G$ os dois primeiros termos da Eq.(2.2), $\mathcal{L}_F$ os dois últimos termos da mesma,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F &= \bar{\psi}_R i\gamma^\mu (\partial_\mu - ig' B_\mu Y) \psi_R + \bar{\psi}_L i\gamma^\mu \left(\partial_\mu - ig' B_\mu Y - \frac{ig}{2} \tau \cdot W_\mu \right) \psi_L \\ \mathcal{L}_G &= -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 W_{\mu\nu}^i W^{i\mu\nu} \end{aligned}$$

$\mathcal{L}_s$ é a lagrangiana dos escalares e, $\mathcal{L}_Y$, a de Yukawa, que descreve as interações entre os escalares e os férmions. As duas últimas lagrangianas são obtidas após a introdução da Eq.(2.4).

Os dois novos termos da lagrangeana que são responsáveis pelas massas de todas as partículas e que são permitidos pela simetria de gauge do modelo são :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s &= (D_\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) - V(\phi^\dagger \phi) \\ \mathcal{L}_Y &= \bar{L}_{iL} G_{ij} \phi l_{jR} + \bar{Q}_{iL} f_{ij}^U \tilde{\phi} U_{jR} + \bar{Q}_{iL} f_{ij}^D \phi D_{jR} + h.c \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde D_μ é o termo da derivada covariante, dada por

$$D_\mu = \partial_\mu - ig \frac{1}{2} \tau \cdot W_\mu - ig' \frac{1}{2} B_\mu$$

e $V(\phi^\dagger \phi)$ o potencial dos escalares dado por

$$V(\phi^\dagger \phi) = -\mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (\mu^2 > 0)$$

⁴A hipercarga é um número quântico definido por $Y = Q - \frac{\tau^3}{2}$ que é o gerador do grupo $U(1)_Y$, onde Q é definido como carga e $\frac{\tau^3}{2}$ é a terceira componente dos geradores do grupo de gauge. Para o grupo $SU(2)_L$ seus geradores satisfazem a seguinte álgebra $\left[\frac{\tau^i}{2}, \frac{\tau^j}{2}\right] = i\epsilon^{ijk} \frac{\tau^k}{2}$. Desta forma fica claro o porquê ψ_L e ψ_R possuem diferentes valores para hipercargas, uma vez que eles tem geradores diferentes, sendo $\frac{\tau^3}{2} = 0$ para os campos de mão direita.

na Eq.(2.5) define-se

$$\tilde{\phi} = i\sigma_2\phi^* = i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^- \\ \phi_0^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^- \\ \phi_0^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_0^* \\ -\phi^- \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

onde ϕ^* é o conjugado complexo de ϕ ⁵ e sua inclusão é necessária para gerar as massas dos quarks do tipo up- U , que é o elemento superior do dubleto dos quarks definido pela Eq.(2.1b), através da quebra de simetria do campo neutro do dubleto escalar definido pela Eq.(2.4).

Quando ϕ adquire o valor esperado no vácuo (VEV) diferente de zero, ele quebra espontaneamente a simetria, isto é $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}$, com isso três dos quatro bósons de gauge se tornam massivos, o que não adquire massa corresponde ao fóton. Sendo assim, vamos ver como essas massas são geradas.

O campo ϕ , após a quebra espontânea de simetria, adquire a seguinte forma no gauge unitário

$$\phi' = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\vartheta+H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

em que H é o bóson de Higgs e ϑ é o valor esperado do vácuo de ϕ ,⁶

$$\phi_0 = \langle 0 | \phi | 0 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\vartheta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Feita essa quebra e esquecendo-se, a princípio, do termo do potencial $V(\phi^\dagger\phi)$, na lagrangiana dos escalares, temos

$$D_\mu\phi' = \left(\partial_\mu - ig\frac{1}{2}\tau.W_\mu - ig'\frac{1}{2}B_\mu \right) \frac{\vartheta+H}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mas, como as massas são geradas a partir de ϑ , vamos desconsiderar os termos de interação com H . Uma vez, que os termos de massas são obtidos através dos termos

⁵A inclusão de $\tilde{\phi}$ na Eq.(2.5) é permitida porque sua representação fundamental e seu conjugado são equivalentes no grupo $SU(2)$. Isso pode ser facilmente verificado, uma vez que $\phi^\dagger\phi$ é invariante pelo grupo $SU(2)_L$ então $(\phi^\dagger\phi)^t = \phi^t\phi^* = \phi^t(-i\sigma_2)(i\sigma_2\phi^*) = \phi^t\epsilon\tilde{\phi}$ também é (ϵ é o tensor Levi-Civita em duas dimensões).

⁶Com a finalidade de explicitar a captura dos bósons de Goldstone, não citados aqui, na aquisição de massas para as partículas de gauge, considera-se a parametrização do escalar com os campos $H(x)$ e $\zeta^i(x)$ ($i = 1, 2, 3$) da seguinte forma $\phi(x) = e^{-\frac{i\tau\zeta^i(x)}{2\vartheta}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\vartheta+H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Aproveitando-se a invariância do sistema, a lagrangiana pode ser escrita no gauge unitário, em que ϕ assume a forma da Eq.(2.7) com a devida transformação $\phi' = U(x)\phi(x)$ onde $U(x) = e^{-\frac{i\tau\zeta^i(x)}{2\vartheta}}$, juntamente com corretas formas de mudança para os campos de gauge.

quadráticos dos campos, devemos calcular

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \vartheta \end{pmatrix} \left(g \frac{1}{2} \tau^\alpha W_\mu^\alpha + g' \frac{1}{2} B_\mu \right) \left(g \frac{1}{2} \tau^\beta W_\mu^\beta + g' \frac{1}{2} B_\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \vartheta \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

com $\tau^\alpha W_\mu^\alpha = \tau \cdot W_\mu$, que é o produto escalar. Vamos calcular explicitamente esse produto matricial, lembrado que τ^α são as matrizes de Pauli definidas por

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad (2.9)$$

e que possuem a seguinte propriedade

$$(\tau \cdot a)(\tau \cdot b) = a \cdot b + \tau \cdot (a \times b) \quad (2.10)$$

Primeiro vamos calcular o seguinte produto da Eq.(2.8)

$$\begin{aligned} \left(g \frac{1}{2} \tau^\alpha W_\mu^\alpha + g' \frac{1}{2} B_\mu \right) \left(g \frac{1}{2} \tau^\beta W_\mu^\beta + g' \frac{1}{2} B_\mu \right) &= \frac{g^2}{4} (W_\mu \cdot \tau) (W^\mu \cdot \tau) \\ &+ \frac{gg'}{2} (W_\mu \cdot \tau) B^\mu + \frac{1}{4} g'^2 B^\mu B_\mu \end{aligned}$$

que pela propriedade definida pela Eq.(2.10) temos

$$(W_\mu \cdot \tau) (W^\mu \cdot \tau) = W_\mu \cdot W^\mu$$

uma vez que $(W_\mu \times W^\mu) = 0$, que é o produto vetorial. Retornando a Eq.(2.8), ficamos com

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \vartheta \end{pmatrix} \left(\frac{g^2}{4} W_\mu \cdot W^\mu + \frac{gg'}{2} (W_\mu \cdot \tau) B^\mu + \frac{1}{4} g'^2 B^\mu B_\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \vartheta \end{pmatrix}$$

Agora, uma vez que as matrizes de Pauli são definidas pela Eq.(2.9) tem-se

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & \vartheta \end{pmatrix} (W_\mu \cdot \tau) B^\mu \begin{pmatrix} 0 \\ \vartheta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \vartheta \end{pmatrix} \left[W_\mu^1 B^\mu \begin{pmatrix} \vartheta \\ 0 \end{pmatrix} - i W_\mu^2 B^\mu \begin{pmatrix} \vartheta \\ 0 \end{pmatrix} + W_\mu^3 B^\mu \begin{pmatrix} 0 \\ -\vartheta \end{pmatrix} \right] \\ &= -\vartheta^2 W_\mu^3 B^\mu \end{aligned}$$

Portanto, os termos de massa para os bósons de gauge podem ser escritos da seguinte forma

$$\frac{\vartheta^2}{8} \left[g^2 (W_\mu^1)^2 + g^2 (W_\mu^2)^2 + (-g W_\mu^3 + g' B_\mu)^2 \right] \quad (2.11)$$

Ao introduzirmos, agora, os campos carregados

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp i W_\mu^2)$$

A lagrangiana de massa, dada pela Eq.(2.11), fica

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{4}g^2\vartheta^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{\vartheta^2}{8} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

da Eq.(2.12) já conseguimos identificar as massas dos campos carregados, dadas no primeiro termo, entretanto, devemos diagonalizar a matriz da lagrangiana acima para, então, encontrarmos as massas, dos campos de gauge restantes. Ao fazermos a seguinte mudança de base, de (W^3, B) para (Z, A) dada por

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_w & -\sin \theta_w \\ \sin \theta_w & \cos \theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}$$

com

$$\cos \theta_w = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad \sin \theta_w = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (2.13)$$

a matriz na Eq.(2.12) pode ser diagonalizada para

$$\frac{\vartheta^2}{8} \begin{pmatrix} Z_\mu & A_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^2 + g'^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Portanto, a partir das equações (2.12) e (2.14), podemos ver que: a massa para os bósons $W^\pm$ é $M_W^2 = (g^2\vartheta^2)/4$, o bóson Z_μ tem massa $M_Z^2 = \vartheta^2(g^2 + g'^2)/4$ e o campo do fóton A_μ , como podemos observar por (2.14), não tem termo de massa, ou seja, $M_{A_\mu} = 0$.

Já para o potencial escalar, após a quebra de simetria, temos

$$V(\phi^\dagger \phi) = -\frac{\mu^2\vartheta^2}{4} + \frac{1}{2}(2\mu^2)H^2 + \lambda\vartheta H^3 + \frac{\lambda}{4}H^4 \quad (2.15)$$

que fornece $m_H = \sqrt{2\mu^2}$ para a partícula de higgs.

Nos faltam os termos de massa dos férmions para o modelo, que são obtidos dos termos de $\mathcal{L}_Y$ da Eq.(2.5). Para simplificar, vamos considerar os termos de massa e de interação com o bóson de Higgs apenas para os quarks, com o procedimento análogo para os léptons carregados. Então, os termos de acoplamento de Yukawa para os quarks invariantes por $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ são dados por:

$$-\mathcal{L}_Y^{(Q)} = \bar{Q}_{iL} f_{ij}^U \tilde{\phi} U_{jR} + \bar{Q}_{iL} f_{ij}^D \phi D_{jR} + h.c$$

onde f_{ij}^μ e f_{ij}^d são os acoplamentos de Yukawa e $\tilde{\phi}$ definido pela Eq. (2.6). Após a

quebra de simetria, Eq.(2.7), chega-se em:

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y^{(Q)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \vartheta \bar{U}_{iL} f_{ij}^U U_{jR} + \frac{1}{\sqrt{2}} \vartheta \bar{D}_{iL} f_{ij}^D D_{jR} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}} H \bar{U}_{iL} f_{ij}^U U_{jR} + \frac{1}{\sqrt{2}} H \bar{D}_{iL} f_{ij}^D D_{jR} + h.c
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Como vemos, existem quatro termos em (2.16): os termos de massa que dependem da matriz de ordem três dada pelas constantes de acoplamento f_{ij} e o termos de interação entre o bóson de Higgs (H) e os férmions. Novamente, vamos somente analisar os termos de massa, que na Eq.(2.16) são os dois primeiros termos, sendo assim

$$\mathcal{L}^{m_Q} = -\bar{U}_{iL} M_{ij}^{(U)} U_{jR} - \bar{D}_{iL} M_{ij}^{(D)} D_{jR} + h.c \tag{2.17}$$

com

$$M_{ij}^{(U)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \vartheta f_{ij}^U \tag{2.18a}$$

$$M_{ij}^{(D)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \vartheta f_{ij}^D \tag{2.18b}$$

Vamos, agora, diagonalizar esses termos de massa obtidos e, em seguida, obter os termos de mistura para os quarks do MP.

2.2 Matrizes de Massa e de Mistura

2.2.1 Matrizes de Massa

Notemos que a partir de Eq(2.18a) e Eq(2.18b) com os índices i e j correndo por todas as famílias de férmions, as constantes de acoplamento de Yukawa formam uma matriz de ordem 3, e a dimensão de massa vem do VEV ϑ que é um fator multiplicativo.

Sendo assim, a forma das matrizes de massa do MP é

$$M^\alpha = \vartheta \begin{pmatrix} f_{11}^\alpha & f_{12}^\alpha & f_{13}^\alpha \\ f_{21}^\alpha & f_{22}^\alpha & f_{23}^\alpha \\ f_{31}^\alpha & f_{32}^\alpha & f_{33}^\alpha \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

em que ϑ corresponde ao VEV do ϕ após a quebra, α = léptons carregados - l , quarks tipo - U e quarks tipo- D . Como vemos essas matrizes de massa não são diagonais.

Da algebra linear, sabe-se que podemos diagonalizar uma matriz hermitiana, ou matriz auto-adjunta através de uma transformação bi-unitária, da seguinte forma

$$\mathcal{U}^{\dagger\alpha} M^\alpha \mathcal{V}^\alpha = \hat{M} = \text{diag}(m_1, m_2, m_3) \tag{2.20}$$

onde $\hat{M}$ é uma matriz diagonal e ambas $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ são matrizes unitárias, estas últimas são as matrizes unitárias que diagonalizam as seguintes matrizes hermitianas $MM^\dagger$ e $M^\dagger M$, uma vez que

$$\begin{aligned}\mathcal{U}^\dagger MM^\dagger \mathcal{U} &= \mathcal{U}^\dagger M (\mathcal{V}\mathcal{V}^\dagger) M^\dagger \mathcal{U} = (\mathcal{U}^\dagger M \mathcal{V}) (\mathcal{V}^\dagger M^\dagger \mathcal{U}) = \hat{M} \hat{M}^\dagger \\ \mathcal{V}^\dagger MM^\dagger \mathcal{V} &= \mathcal{V}^\dagger M (\mathcal{U}\mathcal{U}^\dagger) M^\dagger \mathcal{V} = (\mathcal{V}^\dagger M \mathcal{U}) (\mathcal{U}^\dagger M^\dagger \mathcal{V}) = \hat{M}^\dagger \hat{M}\end{aligned}$$

Isso significa que $\mathcal{U}$ correspondem aos autovetores da matriz $MM^\dagger$ colocados em formas de colunas e as matrizes $\mathcal{V}$ correspondem aos autovetores da matriz $M^\dagger M$ colocados em formas de colunas, que nada mais são que combinações lineares dos f_{ij} .

Vamos, retornar ao caso dos quarks, e vamos diagonalizar suas matrizes de massas obtidas. Retornando a Eq.(2.17) e usando a igualdade da Eq.(2.20), temos

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_D^\dagger M^{(D)} \mathcal{V}_D &= \hat{M}^{(D)} \\ \mathcal{U}_U^\dagger M^{(U)} \mathcal{V}_U &= \hat{M}^{(U)}\end{aligned}\tag{2.21}$$

feito isso, devemos rotacionar os campos de quarks U e D para os autoestados de massa, para que se mantenha a forma da Eq.(2.20), ou seja

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{m_Q} &= -\bar{U}_L (\mathcal{U}_U \mathcal{U}_U^\dagger) M^{(U)} (\mathcal{V}_U \mathcal{V}_U^\dagger) U_R - \bar{U}_R (\mathcal{V}_U \mathcal{V}_U^\dagger) M_d^{(U)\dagger} (\mathcal{U}_U \mathcal{U}_U^\dagger) U_L \\ &- \bar{D}_L (\mathcal{U}_D \mathcal{U}_D^\dagger) M^{(D)} (\mathcal{V}_D \mathcal{V}_D^\dagger) D_R - \bar{D}_R (\mathcal{U}_D \mathcal{U}_D^\dagger) M^{(D)} (\mathcal{V}_D^\dagger \mathcal{V}_D) D_L\end{aligned}$$

de onde podemos definir

$$\begin{aligned}D'_L &= \mathcal{U}_D^\dagger D_L; \\ D'_R &= \mathcal{V}_D^\dagger D_R; \\ U'_L &= \mathcal{U}_U^\dagger U_L; \\ U'_R &= \mathcal{V}_U^\dagger U_R,\end{aligned}\tag{2.22}$$

em que os campos com e sem linha denotam os autoestados de massa e os autoestados de sabor, respectivamente. Então isso resulta na seguinte equação

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{m_Q} &= -\bar{U}'_L \hat{M}^{(U)} U'_R - \bar{U}'_R \hat{M}^{(U)\dagger} U'_L \\ &- \bar{D}'_L \hat{M}^{(D)} D'_R - \bar{D}'_R \hat{M}^{(D)\dagger} D'_L\end{aligned}\tag{2.23}$$

aqui usamos a notação matricial, com

$$D_L = \begin{pmatrix} D_{L1} \\ D_{L2} \\ D_{L3} \end{pmatrix}, \quad D'_L = \begin{pmatrix} D'_{L1} \\ D'_{L2} \\ D'_{L3} \end{pmatrix},$$

da mesma forma para os outros campos e sendo $\hat{M}^{(U)}$ e $\hat{M}^{(D)}$ geralmente complexas. Entretanto, se parametrizarmos os seus elementos diagonais, usando o valor absoluto $m_i^{(D,U)}$ e a fase global $\alpha_i^{(D,U)}$, como

$$\begin{aligned} \hat{M}^{(U)} &= m_i^{(U)} e^{i\alpha_i^{(U)}} \\ \hat{M}^{(D)} &= m_i^{(D)} e^{i\alpha_i^{(D)}} \end{aligned}$$

podemos absorver esses fatores de fases pela transformação quiral $U(1)$, que mantém a física inalterada.

$$\begin{aligned} D'_{Li} &\rightarrow e^{\frac{i\alpha_i^{(D)}}{2}} D'_{Li} \\ D'_{Ri} &\rightarrow e^{\frac{-i\alpha_i^{(D)}}{2}} D'_{Ri} \\ U'_{Li} &\rightarrow e^{\frac{i\alpha_i^{(U)}}{2}} U'_{Li} \\ U'_{Ri} &\rightarrow e^{\frac{-i\alpha_i^{(U)}}{2}} U'_{Ri} \end{aligned} \tag{2.24}$$

Então, finalmente

$$\mathcal{L}^{m_Q} = -\overline{U'_L} m^{(U)} U'_R - \overline{D'_L} m^{(D)} D'_R \tag{2.25}$$

onde $m^{(D,U)}$ são reais e diagonais

$$m^{(D)} = \begin{pmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{pmatrix}, \quad m^{(U)} = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix}$$

com D' e U' sendo os quarks do tipo down e quarks do tipo up em seus autoestados de massa, respectivamente.

$$D'_{L,R} = \begin{pmatrix} d'_{L,R} \\ s'_{L,R} \\ b'_{L,R} \end{pmatrix}, \quad U'_{L,R} = \begin{pmatrix} u'_{L,R} \\ c'_{L,R} \\ t'_{L,R} \end{pmatrix}$$

A matriz de massa dos léptons carregados é obtida da mesma maneira através do

seguinte termo de Yukawa

$$-\mathcal{L}_Y^{(L)} = \bar{L}_{iL} G_{ij} \phi l_{jR} + h.c \quad (2.26)$$

com $i, j = e, \mu, \tau$ e G_{ij} a constante de acoplamento para os léptons.

2.2.2 Mistura de Sabor

Tanto as correntes neutras como as carregadas, são obtidas a partir de $\mathcal{L}_F$, após o uso dos campos de gauge $W^\pm$, e Z_μ definidos a pouco. Vamos expressar primeiro, as correntes neutras:

$$\mathcal{L}_Z^{(Q)} = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{U}_L \gamma^\mu U_L Z_\mu, \quad (2.27)$$

que como veremos não implica em mistura de sabor. A lagrangeana da Eq.(2.27) das correntes neutras em termos dos autoestados de massa dos quarks é,

$$\mathcal{L}_Z^{(Q)} = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{U}'_L \mathcal{U}_U^\dagger \gamma^\mu \mathcal{U}_U U'_L Z_\mu = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{U}'_L \gamma^\mu U'_L Z_\mu$$

uma vez que $\mathcal{U}_U$ é uma matriz unitária e com os campos dos autoestados de massa definidos na Eq.(2.22). Portanto, a interação com o bóson Z possui a mesma forma, mesmo após a mudança de base. Já, no setor carregado temos

$$\mathcal{L}_W^{(Q)} = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{U}_L \gamma^\mu D_L W_\mu^+ + \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{D}_L \gamma^\mu U_L W_\mu^-, \quad (2.28)$$

que nos autoestados de massa fica

$$\mathcal{L}_W^{(Q)} = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{U}'_L \mathcal{U}_U^\dagger \gamma^\mu \mathcal{U}_D D'_L W_\mu^+ + \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{D}'_L \mathcal{U}_D^\dagger \gamma^\mu \mathcal{U}_U U'_L W_\mu^- \quad (2.29)$$

$$= \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{U}'_L \gamma^\mu V D'_L W_\mu^+ + \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{D}'_L \gamma^\mu V^\dagger U'_L W_\mu^- \quad (2.30)$$

sendo V a chamada matriz de mistura de sabor, definida por

$$V_{\text{CKM}} = \mathcal{U}_U^\dagger \mathcal{U}_D \quad (2.31)$$

que em termos numéricos atuais assume a seguinte forma

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} 0.97427 \pm 0.00015 & 0.22534 \pm 0.00065 & 0.00351^{+0.00015}_{-0.00014} \\ 0.22520 \pm 0.00065 & 0.97345 \pm 0.00016 & 0.0412^{+0.0011}_{-0.0005} \\ 0.00867^{+0.00029}_{-0.00031} & 0.0404^{+0.0011}_{-0.0005} & 0.9991546^{+0.000021}_{-0.000046} \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Essa matriz da Eq.(2.31) é unitária e possuem nove parâmetros livres, porém alguns deles podem ser absorvidos, por serem não físicos, por meio de transformações unitárias⁷, de modo que V_{CKM} é descrita por três ângulos de mistura e uma fase. Os valores numéricos são determinados por experimentos, com valores atuais retirados do PDG[14].

Visto isso, uma pergunta natural pode surgir: Existe uma matriz de mistura para os léptons, no MP, formada na corrente carregada? A resposta é não, vamos ver por que. Voltemos a Eq.(2.26), após a quebra de simetria em ϕ devemos diagonalizar a matriz de massa, M^l . Feito isso temos

$$\mathcal{U}_L^\dagger M^{(l)} \mathcal{V}_R = \hat{M}^{(l)} \quad (2.33)$$

precisamos então, eliminar $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$. Novamente, indo para os autoestados de massa, tem-se

$$l_L \rightarrow \mathcal{U}_L^\dagger l_L; \quad \nu_L \rightarrow \mathcal{U}_L^\dagger \nu_L; \quad l_R \rightarrow \mathcal{V}_R^\dagger l_R \quad (2.34)$$

lembrando que no MP não há neutrino de mão direita. Pela Eq.(2.34) vemos que fizemos a mesma mudança de variáveis para as duas componentes de L_L , essas mudanças de variáveis comutam com as interações na derivada covariante em $SU(2)$. Então, $\mathcal{U}_L$ e $\mathcal{V}_R$ desaparecem completamente da teoria, isso significa que no MP os léptons conservam CP, e também conservam o número leptônico de cada geração, uma vez que as correntes carregadas permanecem diagonais.

Ano após ano as oscilações de neutrinos vem se mostrando como algo certo. A principal consequência das oscilações foi descartar a massa nula dos neutrinos no MP. Sendo assim, extensões para o Modelo Padrão devem certamente surgir, para que se inclua as massas dos neutrinos. Este será o principal assunto abordado no próximo capítulo.

⁷As n componentes da primeira coluna $(V_{11}, V_{21}, \dots, V_{n1})^t$ da matriz de mistura $\mathcal{V}$ podem ser feitas reais tomando-se $V_{i1} = |V_{i1}| e^{i\alpha_i^{(U)}}$ e redefinindo os quarks do tipo up como $U'_{Li} \rightarrow e^{i\alpha_i^{(U)}} U'_{Li}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Similarmente, podemos fazer as $(n - 1)$ componentes da primeira linha $(V_{12}, V_{13}, \dots, V_{1n})$ real, através da redefinição $D'_{Li} \rightarrow e^{i\alpha_i^{(U)}} D'_{Li}$ ($i = 2, 3, \dots, n$), notando que $V_{11} = |V_{11}|$ já foi feito real pela redefinição de U'_{L1} . Após esse procedimento, $(2n - 1)$ fases são removidas de V sem consequências físicas. Após tudo isso os parâmetros restantes são caracterizados por $n(n - 1)/2$ ângulos e $n(n + 1)/2 - (2n - 1) = (n - 1)(n - 2)/2$ fases.

3

Massas dos Neutrinos, Mistura e Oscilações

Experimentos de neutrinos solares, atmosféricos, com reatores e aceleradores vem demonstrando fortes evidências para oscilações de neutrinos [15, 16], que correspondem a transições em voo entre diferentes sabores de neutrinos ν_e , ν_μ , ν_τ . Isto é, a existência de oscilações de sabores de neutrinos implica que se um dado neutrino de um dado sabor, digamos ν_μ , com energia E é produzido em algum processo de interação fraca (Sol por exemplo), ao percorrer uma distância suficientemente grande, L , até o detector, a probabilidade de achar um neutrino de diferente sabor, digamos ν_e , $P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; E, L)$, será diferente de zero¹. A oscilação de neutrinos foi observada respectivamente, nos experimentos dos neutrinos solares [17, 18], KamLAND [19, 20] e Super-Kamokande [21, 22]. Fortes evidências para o desaparecimento de ν_μ devido as oscilações, também, foram obtidas por K2K [23]. Em sequência, MINOS [24, 25] e T2K [1] também reportaram evidências para o desaparecimento do neutrino do múon, enquanto experimentos demonstrando o aparecimento de ν_τ devido a oscilação $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ foram reportadas por Super-Kamokande [26] e Opera [27].

As oscilações de neutrinos são a primeira evidência experimental de extensão do MP, uma vez que este considera os neutrinos não massivos.

¹ $P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; E, L)$ é chamado de oscilação $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ ou probabilidade de transição.

3.1 Massas dos Neutrinos

Enquanto para férmions carregados, a conservação de carga elétrica nos permite escrever apenas termos de massa do tipo Dirac, para neutrinos podemos escrever dois termos de massa invariantes por Lorentz, massas de Majorana e de Dirac, sendo assim vamos analisar essas duas possibilidades.

3.1.1 Massas de Dirac

Se neutrinos de mão direita são introduzidos no MP, termos de massa de Dirac podem ser construídos para neutrino, inteiramente análogo para os termos de massa dos quarks e dos léptons carregados. Em geral, podemos escrever, para um número arbitrário de gerações de férmions,

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = -\bar{\nu}_L M_D \nu_R + h.c$$

onde

$$\nu_{L,R} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \\ \vdots \end{pmatrix}_{L,R}$$

E por (2.20) podemos encontrar os autoestados de massa

$$V_L^\dagger M_D V_R = \text{diag}(m_1, m_2, m_3, \dots)$$

em que, como no caso dos quarks, V_L e V_R são as matrizes que relacionam os autoestados de sabor aos autoestados de massa:

$$\nu'_{L,R} = V_{L,R}^\dagger \nu_{L,R}$$

No MP devido a ausência das massas dos neutrinos, os números leptônicos de sabor², $L_e, L_\mu, L_\tau \dots$ e obviamente o número leptônico de sabor total $L = L_e + L_\mu + L_\tau \dots$ são conservados. Na presença de termos de massa de Dirac, cada número leptônico de sabor será violado, mas o número total será conservado. Igualmente aos outros termos de massa de Dirac, $\mathcal{L}_D$ é invariante sob a transformação global $U(1)$

²Em uma interação de partícula elementar o número leptônico de sabor é o número de léptons participantes menos o número de anti-léptons: $L = n_l - n_{\bar{l}}$. Para as famílias usuais do MP temos $L_e = n_e + n_{\nu_e} - n_{\bar{e}} - n_{\bar{\nu}_e}$ que assume a mesma forma para μ e τ . Sendo uma simetria interna no MP, os números leptônicos de sabor são individualmente conservados para cada um dos três sabores. Neste caso a matriz de mistura dos léptons é a matriz identidade.

$$\nu_{L,R} \rightarrow e^{i\alpha} \nu_{L,R} \quad (3.1)$$

3.1.2 Massas de Majorana

Neutrinos são os únicos férmions que não possuem carga elétrica. Como resultado, podemos ter termos de massa diferentes envolvendo os neutrinos - que são os termos de massa de Majorana. Vamos tomar ψ sendo o campo associado com uma partícula com spin 1/2 e chamar $\psi^c = C \bar{\psi}^T$ sendo seu campo de conjugação de carga (conforme apresentado na Eq.(A.2), mas no presente caso toma-se a fase arbitrária nula). Então, as três quantidades invariantes por Lorentz³ além de $\bar{\psi}\psi$ são dadas por $\bar{\psi}^c\psi$, $\bar{\psi}\psi^c$ e $\bar{\psi}^c\psi^c$, com $\bar{\psi}^c = -\psi^T C^{-1}$. E como ψ e $\bar{\psi}$ anti-comutam, temos $\bar{\psi}^c\psi^c = -\psi^T \bar{\psi}^T = \bar{\psi}\psi$. Podemos, também, estabelecer o espinor de Weyl de quiralidade direita e associá-lo com um anti-espinor de quiralidade esquerda ψ_L^c . A partir da definição do campo de conjugação de carga, ψ^c , podemos obter os seguintes resultados.

$$\begin{aligned} (\psi_L)^c &= C \bar{\psi}_L^T = C \left[\left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \psi \right)^\dagger \gamma^0 \right]^T \\ &= C \left[\psi^\dagger \frac{1 - \gamma_5}{2} \gamma^0 \right]^T = C \gamma^0 \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi^* \\ &= \frac{1 + \gamma_5}{2} \gamma^0 \psi^* = C \gamma^0 \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi^* \\ &= \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi^c = (\psi^c)_R \equiv \psi_R^c \end{aligned}$$

e similarmente, $(\psi_R)^c = (\psi^c)_L \equiv \psi_L^c$. Analogamente podemos obter os resultados para os espinores adjuntos. Resumindo, temos os seguintes resultados

$$\begin{cases} \psi_{L,R}^c &= (\psi_{R,L})^c = C \bar{\psi}_{L,R}^T \\ \bar{\psi}_{L,R}^c &= (\bar{\psi}_{L,R})^c = \psi_{R,L}^T C \end{cases} \quad (3.2)$$

com C satisfazendo as seguintes propriedades, $C^{-1} \gamma^\mu C = -\gamma^{\mu T}$ e $C = -C^{-1} = -C^\dagger = -C^T$.

Termos de massa de Majorana são

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Majorana}} &= -\frac{m_L}{2} \left(\overline{(\psi_L)^c} \psi_L + \bar{\psi}_L (\psi_L)^c \right) - \frac{m_R}{2} \left(\overline{(\psi_R)^c} \psi_R + \bar{\psi}_R (\psi_R)^c \right) \\ &= \frac{m_L}{2} (\psi_L^T C^{-1} \psi_L - \bar{\psi}_L C \bar{\psi}_L^T) + \frac{m_R}{2} (\psi_R^T C^{-1} \psi_R - \bar{\psi}_R C \bar{\psi}_R^T) \end{aligned}$$

³Os espinores de Dirac $\psi(x)$ se transformam pelas transformações de Lorentz da seguinte forma, $\psi'(x) = S(\Lambda) \psi(x')$ com $S(\Lambda)$ uma matriz não singular 4×4 tal que $S(\Lambda)^{-1} \gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu$ e pode ser mostrado que o campo ψ^c se transforma igualmente por Lorentz, isto é $\psi'^c(x) = S(\Lambda) \psi^c(x')$.

os fatores $1/2$ são inseridos com o objetivo de, na equação de movimento, m_L possa ser interpretado como massa de ψ_L , enquanto m_R massa de ψ_R . Notemos que um termo de massa de majorana pode ser introduzido mesmo quando ψ é um espinor de Weyl⁴. Termos de Majorana, claramente, não são invariantes sob a transformação dada por (3.1).

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi \Rightarrow \begin{cases} \bar{\psi}^c \psi \rightarrow e^{2i\alpha} \bar{\psi}^c \psi \\ \bar{\psi} \psi^c \rightarrow e^{-2i\alpha} \bar{\psi} \psi^c \end{cases}$$

Portanto, termos de massa de Majorana podem somente ser usadas para partículas que não transportem quaisquer números quânticos conservados, como carga elétrica. Ao introduzirmos termos de massa de Majorana para neutrinos, então o número leptônico de sabor L não é mais conservado⁵.

Vamos considerar que há n_g gerações de neutrinos de mão esquerda. Então, os termos de Majorana são escritos por

$$\mathcal{L}_{\text{Majorana}} = \frac{1}{2} \nu_L^T C^{-1} M_L \nu_L + h.c \quad (3.3)$$

onde ν_L , como antes, denota uma matriz coluna de neutrinos no autoestado de sabor, e sem perda de generalidade M_L é uma matriz $n_g \times n_g$ simétrica. Então da álgebra linear,

$$V_L^T M_L V_L = \text{diag}(m_1, m_2, m_3, \dots)$$

onde V_L é uma matriz unitária que leva os autoestados de massa aos autoestados de sabor $\nu_L = V_L \nu'_L$. As massas $m_1, m_2, m_3, \dots$ são reais e não negativas. Os termos de massa podem, então serem escritos

$$\mathcal{L}_{\text{Majorana}} = -\frac{m_i}{2} \left((\nu'_{Li})^c \nu'_{Li} + \bar{\nu}'_{Li} (\nu'_{Li})^c \right)$$

com o índice i correndo de 1 até n_g .

Vamos, agora, derivar a equação de Dirac para férmions de spin-1/2 com massas de Majorana. Na ausência de interação, a lagrangiana é

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma_\mu (\partial^\mu \psi) - \frac{i}{2} (\partial^\mu \bar{\psi}) \gamma_\mu \psi - \frac{m}{2} e^{i\zeta} \bar{\psi} C \bar{\psi}^T + \frac{m}{2} e^{-i\zeta} \psi^T C^{-1} \psi$$

⁴Um espinor de Weyl é um espinor de Dirac de duas componentes, autoestado de γ_5 : $\gamma_5 \psi = \pm \psi \Leftrightarrow \gamma_5 \psi^c = \mp \psi^c$. Então, se ψ for um espinor de Weyl, ψ^c também é, mas com quiralidade oposta. Desta forma, conclui-se que ψ_R e ψ_L são espinores de Weyl.

⁵Para um simples decaimento β^- ; $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$ o número leptônico é conservado para partículas de Dirac. Mas, um neutrino de Majorana, $\nu = \bar{\nu}$, possui $n_{\nu_e} = n_{\bar{\nu}_e} = 0$, levando a uma violação na conservação número leptônico de sabor.

então, das equações de Euler-Lagrange

$$\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \bar{\psi})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = 0$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \bar{\psi})} &= -\frac{i}{2} \gamma_\mu \psi \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} &= \frac{i}{2} \gamma_\mu (\partial^\mu \psi) - m e^{i\zeta} C \bar{\psi}^T \end{aligned}$$

portanto,

$$-i \gamma_\mu (\partial^\mu \psi) + m e^{i\zeta} C \bar{\psi}^T = 0$$

Obtemos a usual equação de Dirac, mas para um campo que é idêntico com o seu conjugado de carga (partícula igual a anti-partícula)

$$\psi = e^{i\zeta} C \bar{\psi}^T \quad (3.4)$$

mas, uma vez que um espinor de Majorana é um espinor de Dirac, tal que

$$\psi = e^{i\alpha} \psi^c$$

com α sendo uma fase arbitrária, conclui-se que termos de massa de Majorana levam a férmions de Majorana.

3.1.3 Termo de massa Dirac-Majorana

Além dessas duas diferentes formas permitidas para os termos de massa dos neutrinos há, também, uma maneira mais geral, em que podemos combiná-las num único termo.

Esta forma, conhecida como termo de massa Dirac-Majorana, é extremamente útil pois permite o uso do mecanismo seesaw, que é descrito em seguida. Este termo de massa é escrito da seguinte maneira

$$\mathcal{L}^{D+M} = -\frac{1}{2} \overline{(\eta_L)^c} \mathcal{M} \eta_L + h.c \quad (3.5)$$

sendo $\mathcal{M}$ uma matriz complexa $2n_g \times 2n_g$ dada por

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} M_L & M_D \\ M_D^T & M_R \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

com M_D , M_L e M_R as matrizes de massa de Dirac, Majorana de mão esquerda e direita,

respectivamente. Temos

$$\eta_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ (\nu_R)^c \end{pmatrix}$$

em que ν_L e $(\nu_R)^c$ são matrizes colunas de ordem n .

A matriz $\mathcal{M}$, da mesma forma que a matriz M_L na Eq.(3.3), embora não demonstrado, é uma matriz simétrica, pois conforme (3.2) temos

$$\begin{aligned} \overline{(\eta_L)^c} \mathcal{M} \eta_L &= -(\eta_L)^T C^{-1} \mathcal{M} \eta_L \\ &= (\eta_L)^T (C^{-1})^T \mathcal{M}^T \eta_L = \overline{(\eta_L)^c} \mathcal{M}^T \eta_L \end{aligned}$$

portanto

$$\mathcal{M}^T = \mathcal{M} \quad (3.7)$$

Neste ponto, pode surgir a dúvida: Se quando temos massas do tipo Dirac os neutrinos são de Dirac e quando colocamos termos de massa de Majorana temos partículas de Majorana, o que teremos quando incluimos ambos os termos?

Para explorarmos melhor essa questão, vamos escrever a lagrangiana (3.5) em termos dos autoestados de massa. Sendo assim,

$$\mathcal{M} = (U^\dagger)^T m U^\dagger$$

em que U é uma matriz unitária $2n \times 2n$ e

$$m_{ik} = m_k \delta_{ik}, m_k \geq 0, i, k = 1, 2, \dots, 2n.$$

Portanto,

$$\mathcal{L}^{D+M} = -\frac{1}{2} \overline{(\eta'_L)^c} m \eta'_L + h.c \quad (3.8)$$

com

$$\eta'_L = U^\dagger \eta_L$$

Podemos ainda escrever a Eq.(3.8) da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{D+M} &= -\frac{1}{2} \overline{(\eta'_L + (\eta'_L)^c)} m (\eta'_L + (\eta'_L)^c) \\ &= -\frac{1}{2} \bar{\chi} m \chi \end{aligned}$$

e lembrando de (3.7) definimos

$$\chi = \eta'_L + (\eta'_L)^c \quad (3.9)$$

A partir de (3.9) fica fácil ver que

$$\chi = C \bar{\chi}^T$$

conforme (3.4).

Então, se o termo de massa do neutrino é dado por (3.6), as partículas com massas definidas são neutrinos de Majorana.

3.1.4 O Mecanismo Seesaw

A inclusão de neutrinos de mão direita podem nos levar a dificuldades ao entendimento das pequenas massas dos neutrinos. Felizmente, uma explicação natural para suas pequenas massas foi encontrada pelo mecanismo seesaw (Gell-Mann et al.1979; Yanagida 1979; Mohapatra e Senjanovic 1980), que iremos descrever agora.

Para fins didáticos vamos considerar primeiramente que só há uma geração de neutrinos-um neutrino de mão direita e um de mão esquerda. A matriz de massa geral (3.6) toma a seguinte forma

$$\mathcal{L}_{\text{massa}} = -\frac{1}{2} \left(\overline{(\nu_L)^c} \quad \bar{\nu}_R \right) \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ (\nu_R)^c \end{pmatrix} + h.c.$$

Assumimos que a matriz de massa 2×2 seja real. Essa matriz, fornece os seguintes autovalores

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{2} \left[m_L + m_R + \sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D^2} \right] \\ m_2 &= \frac{1}{2} \left[m_L + m_R - \sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D^2} \right] \end{aligned} \quad (3.10)$$

e podemos escrever os autoestados de massa dos dois neutrinos em termos de um ângulo θ qualquer

$$\begin{aligned} \nu_{1L} &= \sin \theta \nu_L + \cos \theta (\nu_R)^c \\ \nu_{2L} &= \cos \theta \nu_L - \sin \theta (\nu_R)^c \end{aligned}$$

devidamente normalizados. Entretanto, esses autovalores podem nos trazer problemas. Ao deixarmos desse modo temos que no caso de massas de puro Dirac, isto é, $m_R = m_L = 0$, a Eq.(A.12) não levará ao caso degenerado para as massas, assim como ambos

autovalores não serão positivos no cenário seesaw, que será estudado adiante. Para contornarmos esse problema, invertamos o o sinal de m_2 , $m_2 \rightarrow -m_2$ acrescentando-se um fator extra i em ν_{2L} . Sendo assim, ficamos com

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{2} \left[m_L + m_R + \sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D^2} \right] \\ m_2 &= \frac{1}{2} \left[-(m_L + m_R) + \sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D^2} \right] \\ \nu_{1L} &= \sin \theta \nu_L + \cos \theta (\nu_R)^c \\ \nu_{2L} &= i \{ \cos \theta \nu_L - \sin \theta (\nu_R)^c \} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Então, podemos diagonalizar a matriz pela seguinte transformação

$$\begin{pmatrix} \nu_L \\ (\nu_R)^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta & -i \cos \theta \\ \cos \theta & i \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{2L} \\ \nu_{1L} \end{pmatrix}$$

logo,

$$\begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ i \cos \theta & -i \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta & -i \cos \theta \\ \cos \theta & i \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Através da Eq.(3.12) podemos encontrar as relações que θ deve satisfazer. Por exemplo, a condição do elemento (1, 2) ser nulo da matriz diag(m_1, m_2), acima, fornece

$$-i \sin \theta \cos \theta m_L - i \cos^2 \theta m_D + i \sin^2 \theta m_D + i \sin \theta \cos \theta m_R = 0$$

então

$$i (m_R - m_L) \sin \theta \cos \theta + i (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) m_D = \frac{i}{2} (m_R - m_L) \sin 2\theta - i \cos 2\theta m_D = 0$$

que com facilidade encontramos

$$\tan 2\theta = \frac{2m_D}{m_R - m_L} \quad (3.13)$$

Vamos considerar um caso físico interessante que leva ao mecanismo seesaw, $m_L = 0$ e $m_R \gg m_D$. Então

$$\sqrt{m_R^2 + 4m_D^2} = m_R \sqrt{1 + \frac{4m_D^2}{m_R^2}}$$

que por expansão de Taylor fornece

$$\sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D^2} \approx m_R + \frac{2m_D^2}{m_R}$$

sendo assim as massas são dadas por

$$\begin{aligned} m_1 &\approx \frac{m_D^2}{m_R} \\ m_2 &\approx m_R + \frac{m_D^2}{m_R} \approx m_R \end{aligned}$$

Esse resultado ilustra o mecanismo seesaw. Assumindo que m_D possua a mesma escala de massa que os léptons carregados e os quarks, vemos que as massas dos neutrinos são suprimidas pelo fator m_D/m_R . Além disso podemos ver pelas equações (3.11), que relacionam os autoestados de massa aos autoestados de sabor, e da Eq.(3.13) que a mistura entre $(\nu_L)^c$ e ν_R é suprimida pelo mesmo fator.

Esses resultados podem ser generalizados para um número arbitrário de gerações. Vamos retornar a Eq.(3.8), mas agora vamos escrever a diagonalização da seguinte maneira

$$U^\dagger \mathcal{M} U^* = \begin{pmatrix} D_L & 0 \\ 0 & D_R \end{pmatrix}$$

sendo D_L e D_R matrizes $n_g \times n_g$, não negativas e reais. Escrevemos

$$U = \begin{pmatrix} V_L & V_{LR} \\ V_{RL} & V_R \end{pmatrix}$$

e assumimos que $M_L = 0$, que M_R seja uma matriz não singular e que $M_D \ll M_R$. Usando essa aproximação, obtemos

$$\begin{aligned} V_R^\dagger M_R V_R^* &= D_R \\ V_L^\dagger (-M_D M_R^{-1} M_D^T) V_L^* &= D_L \end{aligned} \tag{3.14}$$

Como vemos da Eq.(3.14) as massas dos neutrinos pesados são $\sim M_R$, enquanto que para os neutrinos leves são $\sim M_D^2/M_R$, ao invés de $\sim M_D$. As matrizes V_L e V_R são aproximadamente unitárias e V_{LR} e V_{RL} são $\sim M_D/M_R$.

Os neutrinos leves são apenas misturas de ν_L . Esses são os dois feitos principais do mecanismo seesaw: a supressão das massas dos neutrinos leves relativos aos outros férmions e a supressão da mistura dos dubletos de neutrinos com os singletos.

3.2 Massas dos Neutrinos em teorias de gauge $SU(2) \otimes U(1)$

Vamos considerar uma extensão arbitrária do MP em que as estruturas de gauge e as interações com os léptons com $W^\pm$, com o fóton e com Z são idênticas ao caso do MP

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{gauge}} &= \frac{g}{\sqrt{2}} \left(W_\mu^+ \bar{\nu}_L \gamma^\mu l_L + W_\mu^- \bar{l}_L \gamma^\mu \nu_L \right) + (\bar{l}_L \gamma^\mu l_L + \bar{l}_R \gamma^\mu l_R) \\ &+ \frac{g}{c_w} Z_\mu \left[\frac{1}{2} \bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L + \left(s_w^2 - \frac{1}{2} \right) \bar{l}_L \gamma^\mu l_L + s_w^2 \bar{l}_R \gamma^\mu l_R \right]\end{aligned}$$

sendo $c_w = \cos \theta_w$ e $s_w = \sin \theta_w$ definidos em (2.13). Aqui introduzimos n' neutrinos de mão direita ν_R que são singletos de $SU(2) \otimes U(1)$. Os termos de massa mais gerais de Majorana e de Dirac, para neutrinos e léptons carregados, são

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{massa}} &= -\bar{l}_L M_l l_R - \bar{\nu}_L M_\nu \nu_R \\ &+ \frac{1}{2} \nu_L^T C^{-1} M_L \nu_L + \frac{1}{2} \nu_R^T C^{-1} M_R \nu_R + h.c.\end{aligned}\tag{3.15}$$

onde M_l é a matriz de massa $n_g \times n_g$ para os léptons carregados, M_ν é a matriz de massa de Dirac $n_g \times n'$, M_L é a matriz de massa de $n_g \times n_g$ para ν_L e M_R é a matriz de massa de Majorana para ν_R . Ambas, M_L e M_R sem perda de generalidade são simétricas. As matrizes de Dirac M_l e M_ν são geradas pela maneira usual, através de acoplamentos de Yukawa com os escalares. Os termos de massa de M_R são invariantes $SU(2) \otimes U(1)$, e portanto em geral podem ser incluídos independentemente assumindo os espectros dos campos escalares. Em nível de árvore, M_L pode surgir através de acoplamentos de Yukawa de um triplete de Higgs⁶.

É frequentemente útil reescrever as massas dos neutrinos na Eq.(3.15) em termos somente de campos de mão esquerda ou somente em termos de campos de mão direita. Isto, pode ser feito definindo-se

$$\begin{aligned}\nu'_R &\equiv (\nu_L)^c \\ \nu''_L &\equiv (\nu_R)^c\end{aligned}\tag{3.16}$$

com $(\nu_L)^c$ e $(\nu_R)^c$ definidos na Eq.(3.2). Sendo assim, os termos de massa dos neutrinos em termos somente de campos de mão direita é

$$\mathcal{L}_{\text{massa}} = -\bar{l}_L M_l l_R + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \nu_R'^T & \nu_R^T \end{pmatrix} C^{-1} \begin{pmatrix} M_L^\dagger & M_\nu \\ M_\nu^T & M_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_R' \\ \nu_R \end{pmatrix} + h.c.\tag{3.17}$$

⁶Mesmo em extensões mínimas do MP, onde neutrinos de mão direita são introduzidos mas a estrutura de Higgs é a padrão-sem tripletos escalares- massas de Majorana para neutrinos ativos podem ser geradas perturbativamente, uma vez que L, número leptônico, não é mais uma simetria da lagrangiana.

ou, em termos somente de campos de mão esquerda

$$\mathcal{L}_{\text{massa}} = -\bar{l}_L M_l l_R + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} v_L^T & v_L^{\prime\prime T} \end{pmatrix} C^{-1} \begin{pmatrix} M_L & M_v^* \\ M_v^\dagger & M_R^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_L \\ v_L^{\prime\prime} \end{pmatrix} + h.c. \quad (3.18)$$

Sem perda de generalidade, podemos trabalhar em bases fracas⁷, onde a matriz de massa para os léptons carregados M_l é diagonal e real. A matriz de massa Dirac-Majorana pode ser diagonalizada com a ajuda de uma matriz unitária. Da mesma forma que obtivemos a matriz de mistura para as três gerações de quarks conhecidas Eq.(2.31), a inclusão de neutrinos de mão direita fornece uma matriz de mistura para os léptons na corrente carregada, que irá consistir das n_g primeiras colunas dessa matriz unitária.

$$\mathcal{L}_W^l = \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \begin{pmatrix} \bar{\nu}_1 & \bar{\nu}_2 & \dots & \bar{\nu}_{n_g+n'} \end{pmatrix}_L V \gamma^\mu \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \\ \vdots \end{pmatrix}_L + h.c. \quad (3.19)$$

em que matriz de mistura V para os léptons é uma matriz $(n_g + n') \times n_g$.

Em (3.19) mostramos o caso geral da matriz de mistura no setor leptônico, em que introduzimos n_g neutrinos de mão esquerda e n' neutrinos de mão direita, onde os últimos podem ser escritos em termos somente de RH, ou em termos somente de LH, com o uso das definições (3.16), (com isto, chega-se as $n_g + n'$ componentes de mão esquerda da Eq.(3.19)). Além de assumirmos um número arbitrário de gerações de léptons⁸, consideramos um termo de massa geral.

Entretanto, podemos considerar, por exemplo, uma lagrangiana que só tenha neutrinos de Majorana com apenas três gerações,

$$-\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\nu}_L M_\nu (\nu_L)^c + \bar{l}_L M_l l_R + \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{l}_L \gamma^\mu \nu_L + h.c$$

e quando diagonalizamos as massas dos neutrinos e as massas dos léptons carregados, $\mathcal{U}_l^\dagger M_l \mathcal{V}_{lR} = \text{diag}(m_e, m_\mu, m_\tau)$ e $\mathcal{U}_\nu^\dagger M_\nu \mathcal{V}_{\nu R} = \text{diag}(m_1, m_2, m_3)$ chega-se a uma matriz de mistura 3×3 nas correntes carregadas: $V_{\text{PMNS}} = \mathcal{U}_l^\dagger \mathcal{U}_\nu$.

⁷Mudanças para bases fracas (WB) são extensões de liberdade que geralmente se tem para refasar um campo. Este método é abordado na presente dissertação com um pouco mais de detalhe no apêndice, devido ao seu grau de importância e a carência de matérias que tratam do assunto.

⁸No MP considera-se três gerações de léptons $n_g = 3$, ou seja, três famílias. Para cada família de léptons há um respectivo neutrino, de mão esquerda associado. Não há necessidade de que $n' = n_g$.

3.3 Medidas de θ_{13} e suas Implicações

Antes de falarmos sobre as recentes medidas devemos entender como esses ângulos de mistura surgem na Eq.(3.19). Da mesma forma que é feito para matriz V_{CKM} ⁹, a matriz de mistura V para os léptons que surge nas correntes carregadas, conhecida como matriz PMNS, pode ser expressa por três ângulos de mistura e uma fase de violação de CP, ou três fases quando se inclui as massas de Majorana para os neutrinos.

$$V_{\text{PMNS}} = \begin{pmatrix} V_{e1} & V_{e2} & V_{e3} \\ V_{\mu 1} & V_{\mu 2} & V_{\mu 3} \\ V_{\tau 1} & V_{\tau 2} & V_{\tau 3} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

$$= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{CP}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} P_v$$

com $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$, $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ e $P_v = \text{diag}(e^{i\delta_1}, e^{i\delta_2}, 1)$ a matriz de fase diagonal que contém duas fases de violação de CP de Majorana.

Até 2011 os valores aproximados, obtidos experimentalmente, para esses ângulos de mistura eram dados por

$$\sin^2 \theta_{12} \approx 1/3, \quad \sin^2 \theta_{23} \approx 1/2, \quad \sin^2 \theta_{13} \approx 0 \quad (3.21)$$

Com uso desses valores de (3.21) na Eq.(3.20) temos a seguinte matriz de mistura numérica resultante

$$V_{\text{PMNS}} \approx \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Essa matriz de mistura com valores aproximados dos ângulos de mistura é conhecida como matriz tribimáxima (TBM).

Sabendo-se que a matriz de mistura nas correntes carregadas leptônicas deveria ter esses valores aproximados a busca por texturas que a gerassem se iniciou. A matriz tribimáxima possui esse nome uma vez que ela é gerada pelo produto entre as matrizes trimáxima e a bimáxima, conforme [28]. A matriz de mistura de neutrinos trimáxima

⁹Há uma série de parametrizações da matriz V_{CKM} que são fisicamente equivalentes. Usando três ângulos de mistura, $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ e uma fase de violação de CP, δ , um exemplo é dado por Kobayashi e Maskawa, com $V_{CKM} = R_1(\theta_2)R_3(\theta_1)C(0, 0, \delta)R_1(\theta_3)$ sendo R_i uma rotação ao redor do eixo i e $C(0, 0, \delta) = \text{diag}(1, 1, e^{i\delta})$.

foi originalmente proposta por Cabibbo [29], dada por

$$V_C = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix}$$

com $\omega = e^{i2\pi/3}$. Em seus trabalhos originais, Harrison, Perkins e Scott (HPS) [4] propõe as seguintes matrizes de massas

$$\mathcal{M}_l^2 = \begin{pmatrix} a & b & b^* \\ b^* & a & b \\ b & b^* & a \end{pmatrix}; \quad \mathcal{M}_L^2 = \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & z & 0 \\ y & 0 & x \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

que podem levar a TBM, com a , x , y e z sendo parâmetros reais, $\mathcal{M}_l^2 \equiv M_l M_l^\dagger$ e $\mathcal{M}_L^2 \equiv M_L M_L^\dagger$, sendo as matrizes M_l a matriz de massa para os léptons carregados e M_L a matriz de massa para neutrinos de majorana. As matrizes de massa são diagonalizadas pela matriz trimáxima V_C , para os léptons carregados, e pela matriz bimáxima,

$$U_{BM} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix};$$

para os campos dos neutrinos, isto é $V_C^\dagger M_l^2 V_C = \text{diag}(m_e^2, m_\mu^2, m_\tau^2)$ e $U_{BM}^\dagger M_L^2 U_{BM} = \text{diag}(m_1^2, m_2^2, m_3^2)$. Então, conforme dito inicialmente, a combinação entre as matrizes trimáxima e bimáxima levam a então chamada matriz de mistura tribimaxima:

$$U_{\text{TBM}} = V_C^\dagger U_{BM} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}; \quad (3.23)$$

Entendido como os ângulos de mistura surgem na matriz PMNS, vamos entender como esses ângulos surgem nas medidas quando há oscilações de neutrinos¹⁰. Temos que a probabilidade de oscilação dos neutrinos no vácuo, como visto em [30], é dada pela seguinte equação

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(x) = P_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta}(x) = \left| \sum_i V_{\beta i} e^{-i \Delta m_{i1}^2 \frac{x}{2E}} V_{\alpha i}^* \right|^2 \quad (3.24)$$

¹⁰Na presente dissertação não iremos discutir a evolução do entendimento sobre as oscilações dos neutrinos que se iniciou com o chamado: Problema dos Neutrinos Solares, onde procurava-se entender o porquê que se media apenas 1/3 dos neutrinos oriundos das reações termonucleares ocorridas no Sol.

onde $x \simeq t$ é a distância entre a fonte e o detector, E a energia dos neutrinos, $\Delta m_{i1}^2 = m_i^2 - m_1^2$ e V_{ij} são os elementos da matriz PMNS¹¹ da Eq.(3.20). A partir dessa equação fica claro que para termos oscilações devemos ter tanto diferença de massas como mistura de sabor descrito por V . De fato, se $\Delta m_{21}^2 = \Delta m_{31}^2 = 0$ então $P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(x) = 0$ para $\alpha \neq \beta$ devido a condição de unitariedade V , $(VV^\dagger)_{\beta\alpha} = 0$.

Analisando a Eq.(3.24) para apenas três gerações, juntamente na forma parametrizada da Eq.(3.20), podemos entender um pouco melhor como os ângulos de mistura solar, θ_{12} , e dos atmosféricos, θ_{23} , podem ser calculados e, também, como o recente valor para θ_{13} foi obtido.

3.3.1 Medidas de θ_{13}

Em 2012, três experimentos em reatores de neutrinos, Double Chooz [8], Daya Bay [3] e RENO [9] reportaram seus primeiros resultados sobre a reação do desaparecimento do $\bar{\nu}_e$, pela seguinte reação $\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$. Daya Bay e RENO mediram reações com $\bar{\nu}_e$ perto e longe dos detectores e obtiveram evidências de valores de θ_{13} com significância em torno de 5σ .

A análise da expressão (3.24), usada para obter os resultados, pode ser feita para esclarecer melhor sobre essas medidas. Vamos retornar a Eq.(3.24) no caso em que há dominância da diferença entre as massas dos neutrinos ao quadrado $\Delta m_{21}^2 \ll \Delta m_{31}^2$, sugeridos pelos dados experimentais das oscilações dos neutrinos atmosféricos e solares:

$$\begin{aligned} |\Delta m_{21}^2| &\cong 7.6 \times 10^{-5} eV^2, \\ |\Delta m_{31}^2| &\cong 2.4 \times 10^{-3} eV^2, \\ |\Delta m_{21}^2| / |\Delta m_{31}^2| &\cong 0.032, \end{aligned} \quad (3.25)$$

retirados do PDG [14]. Então, ignorando-se a pequena diferença de massa, $\Delta m_{21}^2 \approx 0$, em (3.24)

$$P_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta}(x) \cong \left| V_{\beta 1} V_{\alpha 1}^* + V_{\beta 2} V_{\alpha 2}^* + V_{\beta 3} V_{\alpha 3}^* e^{-i \Delta m_{31}^2 \frac{x}{2E}} V_{\alpha i}^* \right|^2$$

recorrendo-se, novamente, da condição da unitariedade de V , temos $V_{\beta 1} V_{\alpha 1}^* + V_{\beta 2} V_{\alpha 2}^* = \delta_{\alpha\beta} - V_{\beta 3} V_{\alpha 3}^*$ e assim,

$$P_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta}(x) \cong \left| \delta_{\alpha\beta} - V_{\beta 3} V_{\alpha 3}^* \left(1 - e^{-i \Delta m_{31}^2 \frac{x}{2E}} \right) \right|^2 \quad (3.26)$$

¹¹A matriz PMNS é aquela que relaciona os autoestados de massa com os autoestados de sabor, $\nu_{lL}(x) = \sum_j V_{lj} \nu_{jL}$, $l = e, \mu, \tau$ quando se realiza mudanças de bases fracas que deixam a matriz de massa dos léptons carregados diagonal.

Ao analisarmos a expressão (3.26) para o caso da reação comentada acima, ou seja, para probabilidade do não desaparecimento de $\bar{\nu}_e$ em $\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$, temos

$$P_{\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e}(x) \cong \left| 1 - |V_{e3}|^2 \left(1 - e^{-i \Delta m_{31}^2 \frac{x}{2E}} \right) \right|^2$$

desta forma

$$\begin{aligned} \left| 1 - |V_{e3}|^2 \left(1 - e^{-i \Delta m_{31}^2 \frac{x}{2E}} \right) \right|^2 &= \left[1 - |V_{e3}|^2 \left(1 - e^{-i \Delta m_{31}^2 \frac{x}{2E}} \right) \right] \\ &\times \left[1 - |V_{e3}|^2 \left(1 - e^{i \Delta m_{31}^2 \frac{x}{2E}} \right) \right] \\ &= 1 - |V_{e3}|^2 \left(1 - e^{i \Delta m_{31}^2 \frac{x}{2E}} \right) - |V_{e3}|^2 \left(1 - e^{-i \Delta m_{31}^2 \frac{x}{2E}} \right) \\ &+ |V_{e3}|^4 \left(1 - e^{-i \Delta m_{31}^2 \frac{x}{2E}} \right) \left(1 - e^{i \Delta m_{31}^2 \frac{x}{2E}} \right) \end{aligned}$$

resta-nos calcular esse último termo acima, lembrando que $1/2 (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \cos \theta$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} &= 1 - 2 |V_{e3}|^2 + |V_{e3}|^2 \left(e^{i \Delta m_{31}^2 \frac{x}{2E}} + e^{-i \Delta m_{31}^2 \frac{x}{2E}} \right) \\ &+ 2 |V_{e3}|^4 - |V_{e3}|^4 \left(e^{i \Delta m_{31}^2 \frac{x}{2E}} + e^{-i \Delta m_{31}^2 \frac{x}{2E}} \right) \\ &= 1 - 2 |V_{e3}|^2 + 2 |V_{e3}|^2 \cos \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{2E} x \right) \\ &+ 2 |V_{e3}|^4 - 2 |V_{e3}|^4 \cos \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{2E} x \right) \\ &= 1 - 2 |V_{e3}|^2 (1 - |V_{e3}|^2) + 2 |V_{e3}|^2 (1 - |V_{e3}|^2) \cos \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{2E} x \right) \end{aligned}$$

Portanto,

$$P_{\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e}(x) \cong 1 - 2 |V_{e3}|^2 (1 - |V_{e3}|^2) \left(1 - \cos \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{2E} x \right) \right) \quad (3.27)$$

com $\sin^2 \theta_{13} = |V_{e3}|^2$.

Experimentos no reator com o desaparecimento de $\bar{\nu}_e$ com $x \sim 1 \text{ km}$, $\langle E \rangle \sim 3 \text{ MeV}$ são sensíveis a $\sim E/L \sim 3 \times 10^{-3} eV^2 \sim |\Delta m_{31}^2|$ conforme a Eq.(3.25). Portanto, conhecendo a probabilidade de desaparecimento de $\bar{\nu}_e$ pela Eq.(3.27) podemos ver que θ_{13} pode ser medido.

Os valores obtidos são dados pela tabela a seguir

	Double Chooz	Daya Bay	RENO
$\sin^2 2\theta_{13}$	$0.109 \pm 0.030 \pm 0.025$	$0.089 \pm 0.010 \pm 0.005$	$0.100 \pm 0.013 \pm 0.019$

Tabela-3.1: Resultados obtidos para $\sin^2 2\theta_{13}$.

Vimos, então, de uma maneira bem resumida como os ângulos de mistura são obtidos. Dados atuais dos ângulos de mistura junto com seus valores para as diferenças de massas são encontrados na tabela a seguir

Parâmetros	Valor Central	3σ
$\Delta m_{21}^2 [10^{-5} eV^2]$	$7.54^{+0.26}_{-0.22}$	$6.99 - 8.18$
$\Delta m^2 [10^{-3} eV^2]$	$2.43^{+0.06}_{-0.10} (2.42^{+0.07}_{-0.11})$	$2.19 (2.17) - 2.62 (2.61)$
$\sin^2 \theta_{12}$	$0.307^{+0.018}_{-0.016}$	$0.259 - 0.359$
$\sin^2 \theta_{23}$	$0.386^{+0.024}_{-0.021} (0.392^{+0.039}_{-0.022})$	$0.331 (0.335) - 0.637 (0.663)$
$\sin^2 \theta_{13}$	$0.0241 \pm 0.0025 (0.0244^{+0.0023}_{-0.0025})$	$0.0169 (0.0171) - 0.0313 (0.0315)$

Tabela-3.2: Os resultado foram obtidos por fluxos de $\bar{\nu}_e$ [2]. Os valores (valores entre parênteses) corresponde a $m_1 < m_2 < m_3$ ($m_3 < m_1 < m_2$). A definição de Δm^2 usada é: $\Delta m^2 = m_3^2 - (m_2^2 + m_1^2)/2$. Então, $\Delta m^2 = \Delta m_{31}^2 - \Delta m_{21}^2/2$, se $m_1 < m_2 < m_3$, e $\Delta m^2 = \Delta m_{32}^2 - \Delta m_{21}^2/2$ para $m_3 < m_1 < m_2$.

Dados recentes, retirados de [31], fornecem os seguintes valores para a matriz PMNS

$$V_{\text{PMNS}} = \mathcal{U}_l^\dagger \mathcal{U}_\nu = \begin{pmatrix} 0.78 - 0.845 & 0.52 - 0.61 & 0.13 - 0.17 \\ 0.40 - 0.58 & 0.39 - 0.65 & 0.57 - 0.80 \\ 0.19 - 0.43 & 0.53 - 0.74 & 0.59 - 0.81 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

3.3.2 Implicações

A partir de (3.20), ao tomarmos valores nulos para $\sin \theta_{13}$ os termos que contém as fases nas exponenciais complexas desaparecem, levando-nos a uma matriz real, que implica a não violação de CP nos termos de interação das correntes carregadas. Portanto, os valores atuais não nulos podem implicar que haja uma violação de CP no setor leptônico, embora não tenhamos nenhuma evidência experimental, diferente do setor dos quarks, no qual a terceira geração foi incluída por conta das evidências experimentais da violação de CP. Temos, então, uma implicação imediata do valor atual para θ_{13} . Outra implicação é que a matriz TBM, (3.23), não é mais consistente, por conta de seu valor nulo no elemento U_{e3} .

Da mesma maneira que texturas de massas eram pensadas para que levassem a TBM, como visto na Eq.(3.22), o mesmo passou a ser feito para os valores não nulos de θ_{13} . Após as texturas serem pensadas e testadas a maneira de se fazer para que elas apareçam nos termos de Yukawa é impor novas simetrias no modelo, a simetria discreta A_4 , grupo tetraédrico, por exemplo era frequentemente usado para que a TBM fosse gerada. Mas, no modelo que estudaremos aqui, temos como principal simetria a

simetria não abeliana S_3 , em conjunto de Z_3 e Z_5 . Sendo assim, devemos analisar com detalhes como suas representações são obtidas para que, então, possamos extrair suas leis de multiplicação e, finalmente, aplicar no MP. Portanto, uma breve revisão sobre teorias de grupos deve ser feita.

4

Noções de Teorias de Grupos

4.1 Grupos

Um grupo G é definido como um conjunto de elementos $\{a, b, c, \dots\}$ com as seguintes condições

1. Se a e b estão em G , $a.b$ está, também em G .
2. Há uma lei de associetividade, $a.(b.c) = (a.b).c$ para quaisquer elementos em G .
3. Há um elemento unidade e em G , que satisfaz $a.e = e.a = a$ para qualquer a em G .
4. Existe um elemento inverso a^{-1} em G para qualquer a em G , tal que $a.a^{-1} = a^{-1}a = e$.

Muitos exemplos de Grupos são interessantes em física de partículas, como exemplo de grupos contínuos podemos citar o grupo ortogonal n dimensional, $(O(n))$ e o grupo especial unitário $(U(n))$. $O(n)$ é um em que o comprimento $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ no espaço real n dimensional é invariante sob qualquer rotação no espaço real. $U(n)$ é um em que o comprimento definido por $s^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2$ num espaço complexo n dimensional é invariante sob qualquer rotação no respectivo espaço, quando o determinante da matriz de transformação U é 1, $\det U = 1$, ele é chamado de grupo $SU(n)$.

No caso em que $a.b = b.a$ para quaisquer elementos a, b em G o grupo é chamado de abeliano, ou grupo comutativo, enquanto no caso $a.b \neq b.a$ ele é chamado de não abeliano ou grupo não comutativo.

4.2 Caráteres, Representações, Classes Conjugadas e Teorema da Ortogonalidade

4.2.1 Representações de Grupos

O que de fato usamos na física são as representações dos grupos. Sendo assim, é importante definirmos algumas propriedades.

Uma representação de um grupo é: um grupo de identidades matemáticas homomórficas¹ ao grupo abstrato original. Uma representação linear é uma representação em termos de operadores lineares. Assim, se fizermos uma aplicação homomórfica de um grupo arbitrário G num grupo de operadores $D(G) \in L$, dizemos que $D(G)$ é uma representação de G no espaço de representações L . Se a dimensão de L é n dizemos que a representação tem dimensão n , quando a representação é dada em forma de matrizes, ela é denotada por $D_{ij}(G)$. Como pode haver várias representações para um mesmo grupo, então denotaremos $D^{(\mu)}(G)$ [ou $D_{ij}^{\mu}(G)$] para uma dada representação de dimensão μ . Os elementos de uma representação devem ter as seguintes propriedades:

$$D(R)D(S) = D(RS) \quad (4.1a)$$

$$D(RR^{-1}) = D(E) = I \quad (4.1b)$$

$$D(R^{-1}) = [D(R)]^{-1} \quad (4.1c)$$

com R, S , elementos de G , com G sendo um dado grupo e E sendo o elemento identidade de G . Dizemos que $D(G)$ é uma representação de G .

A definição acima permite tirar duas conclusões:

- Cada grupo tem uma representação unidimensional que é denotada pelo número 1;
- O determinante de cada matriz representação é também uma representação, pois:

$$\det D(R) \det D(S) = \det [D(R)D(S)] = \det [D(RS)]$$

¹O Homomorfismo de um grupo é um mapa $f : G \rightarrow H$ entre dois grupos que preserva a estrutura do grupo, isso é satisfaz: $f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2)$.

4.2.2 Classes Conjugadas

Considerando-se dois elementos g_1 e g_2 pertencentes ao grupo G , diz-se que são conjugados se existir um elemento g tal que:

$$g_1 = g g_2 g^{-1} \quad (4.2)$$

a conjugatividade é representada por $g_1 \sim g_2$, temos portanto:

- reflexividade $g \sim g$
- simetria $g_1 \sim g_2$ segue que $g_2 \sim g_1$
- transitividade $g_1 \sim g_2$ e $g_2 \sim g_3$ então $g_1 \sim g_3$.

Uma vez que a conjugação é uma relação de equivalência, podemos formar classes de equivalência, chamadas classe de conjugação: dado um grupo qualquer, o elemento g , sua classe de conjugação é o conjunto de todos os elementos conjugados:

$$[g] = \{g \in G \mid g \sim h\}$$

g é chamado o representativo da classe:

- Se g' é outro elemento de $[g]$, ele também pode ser usado como representativo, isto é, $[g] = [g']$ se e somente se $g \sim g'$.
- Para grupos abelianos cada elemento é sempre sua própria classe.
- Se g é a ordem de p , todo elemento de $[g]$ é também de ordem p .

4.2.3 Caráter

Outra propriedade importante de uma dada representação é o que chamamos de Caráter. Ele é obtido através do traço de uma dada representação matricial definido por

$$\chi^{(\mu)}(R) = \text{Tr} D(R)^{(\mu)} = \sum_i D(R)_{ii}^{(\mu)} \quad (4.3)$$

Da definição acima, resultam as seguintes consequências:

1. Duas representações equivalentes² do mesmo grupo têm os mesmos caracteres, já que o traço de duas matrizes equivalentes são iguais;

²Duas representações $D(G)$ e $D'(G)$ são ditas **equivalentes**, se $\forall R \in G$, existe uma transformação de similaridade S , tal que: $D'(G) = S^{-1}D(R)S$.

2. O caráter da representação do elemento identidade E do grupo é igual à dimensionalidade da representação, pois a matriz correspondente a E é a matriz identidade³;
3. c) Todos os elementos de uma dada classe de um grupo têm o mesmo caráter, pois que se A é um elemento de uma classe, o outro tem a forma XAX^{-1} e as correspondentes matrizes têm traços iguais.

Para finalizarmos esta seção mostraremos o resultado final do teorema da ortogonalidade, sem sua respectiva demonstração, e por fim a relação de ortogonalidade e completeza para os caracteres.

4.2.4 Teorema da Ortogonalidade

O teorema da ortogonalidade diz que

$$\sum_R D_{ie}^{(\mu)}(R) D_{mj}^{(v)}(R^{-1}) = \sum_R D_{ie}^{(\mu)}(R) D_{mj}^{*(v)}(R) \quad (4.4)$$

$$= \frac{g}{n_\mu} \delta_{\mu\nu} \delta_{ij} \delta_{em} \quad (4.5)$$

com g sendo o número de elementos do grupo e n_μ a dimensionalidade da representação e os δ_{ij} são os deltas de kronecker. Para um grupo finito, temos

$$\sum_\mu n_\mu^2 = g \quad (4.6)$$

por fim a relação de ortogonalidade e de completeza para os caracteres é

$$\sum_{k=1}^s c_k \chi^{(\mu)}(c_k) \chi^{*(\nu)}(c_k) = g \delta_{\mu\nu} \quad (4.7)$$

onde c_k representa o número de elementos de cada classe. A equação (4.7) pode ser reescrita como

$$\sum_{\mu=1}^N \sqrt{\frac{c_l}{g}} \chi^{(\mu)}(c_l) \sqrt{\frac{c_k}{g}} \chi^{*(\mu)}(c_k) = \delta_{kl} \quad (4.8)$$

³Como exemplo podemos tomar uma representação de dimensionalidade 2 e 3. Para a primeira a matriz unitária (matriz identidade), possui a soma dos elementos diagonais (traço) igual a 2 e para a última igual a 3, que são exatamente a dimensionalidade da representação.

4.3 Grupo $SU(n)$ e Álgebras de Lie

Estamos interessados no grupo $SU(n)$ definido num espaço complexo n dimensional que é expresso por uma matriz unitária $n \times n$ com seu determinante sendo igual a 1

$$U^\dagger = U^{-1}, \quad \det U = 1 \quad (4.9)$$

a pergunta que se faz é: Quantos parâmetros livres há em U ? Para responder essa pergunta vamos analisar o grupo $SU(2)$. A condição da unitariedade

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

fornece as seguintes equações

$$\begin{aligned} aa^* + bb^* &= 1; & a^*c + b^*d &= 0 \\ ac^* + bd^* &= 0; & cc^* + dd^* &= 1 \end{aligned}$$

Vê-se, portanto, que os oito elementos do grupo estão sujeitos a 4 relações algébricas, fornecendo-nos 4 parâmetros reais ($8-4=4$), mas a condição do determinante igual a 1 fornece mais uma relação algébrica,

$$ad - bc = 1$$

que implica, então num total de 3 parâmetros reais.

O mesmo raciocínio pode ser feito para $SU(n)$. Neste caso há $n^2 + 1$ relações algébricas e desta forma o número de parâmetros livres é dado por $2n^2 - (n^2 + 1) = n^2 - 1$. Usando esses parâmetros θ^i ($i = 1, 2, \dots, n^2 - 1$), a matriz unitária U para $SU(n)$ é escrita por

$$U(\theta) = e^{-\theta^i L^i} = e^{-\vec{\theta} \cdot \vec{L}} \quad (4.10)$$

onde L^i são matrizes $n \times n$ chamadas de geradores para o grupo $SU(n)$. Uma vez que U é unitária, as matrizes L^i são hermitianas, e possuem traço nulo, uma vez que $\det(e^A) = e^{\text{Tr}A}$. Voltemos para o caso de $SU(2)$ as matrizes L^i são as matrizes de spin de Pauli $\frac{\sigma^i}{2}$ ($i = 1, 2, 3$) ou equivalentemente, matrizes de isospin $\frac{\tau^i}{2}$ ($i = 1, 2, 3$), com τ dado pela Eq.(2.9).

Pode-se verificar que esses geradores satisfazem a seguinte álgebra que é chamada de álgebra de Lie

$$[L^i, L^j] = if_{ijk} L^k \quad (4.11)$$

com $(i, j, k = 1, 2, \dots, n^2 - 1)$. Tem-se f_{ijk} constantes antisimétricas para trocas de quaisquer pares i, j e k que é denominada de constante de estrutura do grupo.

A identidade de Jacobi

$$[L^i [L^j, L^k]] = [L^j [L^k, L^i]] = [L^k [L^i, L^j]] = 0$$

com a álgebra de Lie (4.11) leva a seguinte equação

$$f_{jkl}f_{ilm} + f_{kil}f_{jlm} + f_{ijl}f_{klm} = 0 \quad (4.12)$$

Então, se nós identificarmos as matrizes $(T^i)_{jk} = -if_{ijk}$, (4.12) resulta em (4.11) novamente.

Portanto, as próprias constantes de estrutura geram uma representação de álgebra de Lie. A representação geradas pelas constantes de estrutura é chamada de “representação adjunta”.

4.4 Grupo de Permutação S_3

S_3 , que é uma simetria discreta não abeliana, consiste em todas as permutações a três objetos que é igual a $3!=6$. Todos os seis elementos correspondem a seguinte transformação

$$e : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2, x_3) \quad (4.13a)$$

$$a_1 : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_2, x_1, x_3) \quad (4.13b)$$

$$a_2 : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_3, x_2, x_1) \quad (4.13c)$$

$$a_3 : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_3, x_2) \quad (4.13d)$$

$$a_4 : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_3, x_1, x_2) \quad (4.13e)$$

$$a_5 : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_2, x_3, x_1) \quad (4.13f)$$

Esses elementos podem, também, ser separados em permutações pares e permutações ímpares dadas a seguir.

$$e : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2, x_3)$$

$$a_4 : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_3, x_1, x_2)$$

$$a_5 : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_2, x_3, x_1)$$

que são as permutações pares, e

$$a_1 : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_2, x_1, x_3)$$

$$a_2 : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_3, x_2, x_1)$$

$$a_3 : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_3, x_2)$$

que são as permutações ímpares.

Suas multiplicações formam uma álgebra fechada

$$a_1 a_2 : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_2, x_3, x_1) \quad (4.14a)$$

$$a_2 a_1 : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_3, x_1, x_2) \quad (4.14b)$$

$$a_4 a_2 : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_3, x_2) \quad (4.14c)$$

e como podemos ver

$$a_1 a_2 = a_5; \quad a_2 a_1 = a_4; \quad a_4 a_2 = a_3 \quad (4.15)$$

Renomeando a_1 e a_2 por a e b respectivamente, todos os elementos são escritos como

$$\{e, a, b, ab, ba, bab\} \quad (4.16)$$

notemos que $aba = bab$.

4.4.1 Classes Conjugadas em S_3

A partir dos elementos de S_3 podemos formar três classes conjugadas

$$c_1 : \{e\}; \quad c_2 : \{ab, ba\}; \quad c_3 : \{a, b, bab\} \quad (4.17)$$

Aqui, o subscrito de c_n , n , denota o número de elementos em uma classe conjugada c_n .

Em que podemos rapidamente verificar a igualdade (4.2) definida para os conjugados. Tomemos um exemplo para c_2 e um outro para c_3 , respectivamente, para a verificação.

Tomando-se o elemento ab , como g_2 e a , sendo outro elemento qualquer de S_3 , como g tem-se

$$a(ab)a^{-1} = ba$$

uma vez que $a^2 = e = aa^{-1}$ e neste caso $a^{-1} = a$. Sendo ba o outro elemento de c_2 conforme o esperado.

Tomando-se, agora, bab como g_2 e ab como g ,

$$(ab)(bab)(ab)^{-1} = abbabb^{-1}a^{-1} = a$$

onde usamos também, agora, que $b^{-1} = b$. Sendo a também um elemento de c_3 .

Os elementos $\{e, ab, ba\}$ correspondem as permutações pares e os elementos $\{a, b, bab\}$ são as permutações ímpares.

4.4.2 Conjunto de Representações Irredutíveis de S_3

Antes de calcularmos o conjunto de representações irredutíveis deste grupo devemos definir o que é uma representação redutível

- **Teorema 1.1** Uma representação matricial é dita **redutível** se, por transformações de similaridade sua matriz pode ser posta na forma

$$D(R) = \begin{pmatrix} D^i(R) & A(R) \\ 0 & D^k(R) \end{pmatrix}$$

onde $D^i(R)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) são também representações do mesmo grupo. Quando ela não pode ser escrita dessa forma, ela é dita **irredutível**.

Através da visualização da tabela de multiplicação do grupo S_3 :⁴

	e	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
e	e	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	a_1	e	a_4	a_5	a_2	a_3
a_2	a_2	a_5	e	a_4	a_3	a_1
a_3	a_3	a_4	a_5	e	a_1	a_2
a_4	a_4	a_3	a_1	a_2	a_5	e
a_5	a_5	a_2	a_3	a_1	e	a_4

podemos obter as representações mais facilmente. Primeiramente vamos encontrar as representações uni-dimensionais de S_3 .

Da tabela, pode-se verificar que

$$(a_1)^2 = (a_2)^2 = (a_3)^2 = e$$

⁴Ao tomarmos algum elemento da primeira coluna a_i com o primeiro elemento da primeira linha a_j seguiremos a seguinte regra: $a_i a_j$.

então, usando (4.1a) e (4.1b),

$$D(a_1)D(a_1) = D((a_1)^2) = D(e) = 1 \quad (4.18)$$

como essa mesma relação é válida para a_2 e a_3 é fácil concluirmos que

$$D(a_1) = D(a_2) = D(a_3) = \pm 1 \quad (4.19)$$

por outro lado, ainda da tabela

$$\begin{aligned} (a_4)^2 &= a_5; & (a_4)^3 &= (a_4)^2 a_4 = a_5 a_4 = e \\ (a_5)^2 &= a_4; & (a_5)^3 &= (a_5)^2 a_5 = a_4 a_5 = e \end{aligned}$$

então

$$[D(a_5)]^3 = 1 \quad (4.20a)$$

$$[D(a_4)]^3 = 1 \quad (4.20b)$$

Uma vez que as representações podem pertencer ao espaço complexo, a partir de (4.20a) e (4.20b) temos as seguintes soluções:

$$D(a_4) = D(a_5) = 1, \omega, \omega^2 \quad (4.21)$$

sendo $\omega = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Proseguindo-se com a análise da tabela, vemos também que

$$a_1 a_2 = a_4 \wedge a_1 a_3 = a_5$$

desta maneira ao usarmos o resultado obtido na Eq.(4.19) na relação acima

$$D(a_1 a_2) \Rightarrow D(a_4) = 1$$

$$D(a_1 a_3) \Rightarrow D(a_5) = 1$$

o que elimina as três possíveis soluções em (4.21).

Conclui-se, então, que existem duas representações unidimensionais para este grupo. Podemos construir uma tabela mostrando para cada respectiva classe, dadas na Eq.(4.17), como elas são representadas e seus respectivos caracteres

	$D^{(1)}$	$D^{(1')}$	$\chi^{(1)}$	$\chi^{(1')}$
C_1	+1	+1	+1	+1
C_2	+1	+1	+1	+1
C_3	+1	-1	+1	-1

(4.22)

onde os índices (1) e (1') significam duas representações unidimensionais distintas de S_3 .

Nosso próximo passo é obtermos outras representações possíveis de dimensionalidade maior para o dado grupo. Mas, antes devemos nos perguntar: Essa busca de representações de dimensionalidades maiores possuem um limite? A resposta é sim, e ainda podemos descobrir de que ordens serão essas representações. Para tal feito devemos utilizar a equação (4.6). Sabemos que o número total de elementos para este grupo é 6, ou seja

$$g = 6$$

também, acabamos de descobrir duas únicas possíveis representações irredutíveis unidimensionais. Tomando-se os dois primeiros índices do somatório de (4.6) por 1 e 1' e que para representações unidimensionais o que temos é $n_1 = 1$ e $n_{1'} = 1$, assim

$$\sum_{\mu=1} n_{\mu}^2 = (1)^2 + (1)^2 + n_i^2 = 6$$

portanto, vemos que a única possibilidade para $n_i \in N$ é

$$n_i = 2 \quad (4.23)$$

ou seja, sabemos que somente teremos mais uma representação possível em S_3 e ela é bi-dimensional. Uma outra informação adicional obtida por (4.23) é que por se tratar de uma representação bi-dimensional, temos

$$\chi^{(2)}(C_1) = 2 \quad (4.24)$$

uma vez que é o elemento identidade de uma matriz (2×2) . Resta-nos encontramos os dois caracteres restantes para, então podermos mais facilmente encontrar uma representação para os dubletos.

Utilizaremos a Eq.(4.7) para calcularmos esses caracteres. Tomando-se $\mu = 2$ e $\nu = 1$ e em seguida $\mu = 2$ e $\nu = 1'$ nesta equação, encontramos

$$c_1 \chi^{(2)}(c_1) \chi^{*(1)}(c_1) + c_2 \chi^{(2)}(c_2) \chi^{*(1)}(c_2) + c_3 \chi^{(2)}(c_3) \chi^{*(1)}(c_3) = 0 \quad (4.25a)$$

$$c_1 \chi^{(2)}(c_1) \chi^{*(1')}(c_1) + c_2 \chi^{(2)}(c_2) \chi^{*(1')}(c_2) + c_3 \chi^{(2)}(c_3) \chi^{*(1')}(c_3) = 0 \quad (4.25b)$$

Como já sabemos os valores dos caracteres unidimensionais e que

$$\chi^{(1)}(c_k), \chi^{(1')}(c_k) \in R$$

e também pela Eq.(4.24), temos que

$$1 \times 2 \times 1 + 2 \times \chi^{(2)}(c_2) \times 1 + 3 \times \chi^{(2)}(c_3) \times 1 = 0 \quad (4.26a)$$

$$1 \times 2 \times 1 + 2 \times \chi^{(2)}(c_2) \times 1 + 3 \times \chi^{(2)}(c_3) \times (-1) = 0 \quad (4.26b)$$

somando-se a Eq.(4.26a) com a Eq.(4.26b) vemos facilmente que

$$\chi^{(2)}(C_2) = -1$$

que implica em

$$\chi^{(2)}(C_3) = 0$$

logo o que temos é

	$\chi^{(2)}$
C_1	2
C_2	-1
C_3	0

Finalmente, estamos aptos para obtermos uma representação para o dubleto. A partir de $\chi_2(C_3) = 0$ podemos diagonalizar um elemento da classe conjugada de C_3 . Aqui, escolhemos a em C_3 como o elemento diagonal

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

os outros elementos de C_2 são matrizes não diagonais. Relembrando que $b^2 = e$ podemos escolher

$$b = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \implies bab = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

portanto podemos escrever os elementos em C_2 por

$$ab = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}; ba = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

pelo fato do traço dos elementos de C_2 ser igual a -1, temos

$$\cos\theta = -\frac{1}{2} \implies \theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

para $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Escolhendo-se $\theta = \frac{4\pi}{3}$ obtemos a seguinte representação para S_3

$$C_1 \rightarrow e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C_2 \rightarrow ab = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad ba = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$C_3 \rightarrow a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad bab = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

4.4.3 Regras de Multiplicação de S_3

Uma vez que obtivemos todas as representações irredutíveis possíveis, estamos aptos para extrair as regras de multiplicação do grupo. De acordo com [32] há uma maneira muito simples de obtê-las. Usando as regras do produto tensorial vamos transformar cada elemento $x_i y_i$ por a ,

Por a temos que

$$x_1 \rightarrow x_1; \quad x_2 \rightarrow -x_2$$

dá mesma forma para y , uma vez que

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

então

$$x_1 y_1 \rightarrow x_1 y_1 \tag{4.27}$$

$$x_1 y_2 \rightarrow -x_1 y_2$$

$$x_2 y_1 \rightarrow -x_2 y_1$$

$$x_2 y_2 \rightarrow x_2 y_2$$

fazendo uma combinação certa e usando o resultado de (4.27), tem-se

$$a(x_1 y_1 + x_2 y_2) = (x_1 y_1 + x_2 y_2); \quad a(x_1 y_2 - x_2 y_1) = -(x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

mas, isso fornece exatamente o resultado das representações de a para os singletos 1 e

1'. Sendo assim, essa combinação linear corresponde aos seguintes singletos

$$1 : x_1y_1 + x_2y_2; \quad 1' : x_1y_2 - x_2y_1 \quad (4.28)$$

Além disso, para uma combinação correta de um dubleto transformado por a , usando novamente a Eq.(4.27),

$$a \begin{pmatrix} x_2y_2 & - & x_1y_1 \\ x_1y_2 & + & x_2y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2y_2 - x_1y_1 \\ -x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

que é exatamente a representação do dubleto de a , obtida anteriormente. Logo, essa combinação corresponde ao dubleto

$$2 : \begin{pmatrix} x_2y_2 & - & x_1y_1 \\ x_1y_2 & + & x_2y_1 \end{pmatrix}$$

Da mesma forma, podemos estudar o produto tensorial do dubleto (x_1, x_2) e o singlete $1' y'$. O produto $x_i y'$ sob a , fornece

$$\begin{aligned} x_1 y' &\rightarrow -x_1 y' \\ x_2 y' &\rightarrow x_2 y' \end{aligned}$$

lembrando que $y' \rightarrow -y'$ pois está na representação $1'$. Isso implica a seguinte forma de dubleto

$$2 : \begin{pmatrix} -x_2 y' \\ x_1 y' \end{pmatrix}$$

Resumindo, temos as seguintes regras de multiplicação

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_2 \otimes \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_2 = (x_1y_1 + x_2y_2)_1 + (x_1y_2 - x_2y_1)_{1'} + \begin{pmatrix} x_2y_2 & - & x_1y_1 \\ x_1y_2 & + & x_2y_1 \end{pmatrix}_2 \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_2 \otimes (y')_{1'} &= \begin{pmatrix} -x_2 y' \\ x_1 y' \end{pmatrix}_2 \\ (x')_{1'} \otimes (y')_{1'} &= (x' y')_1 \end{aligned}$$

4.4.4 Grupo S_3 como Simetria de um Triângulo Equilátero

Vamos verificar, agora se de fato essas matrizes obtidas deixam o triângulo equilátero invariante. Para isso fixamos o triângulo de lado $\sqrt{3}$ com seu baricentro (ponto de

encontro de suas medianas) na origem de coordenadas. com seus vértices A , B e C fixados nos seguintes coordenadas $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $(-1, 0)$ e $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ respectivamente.

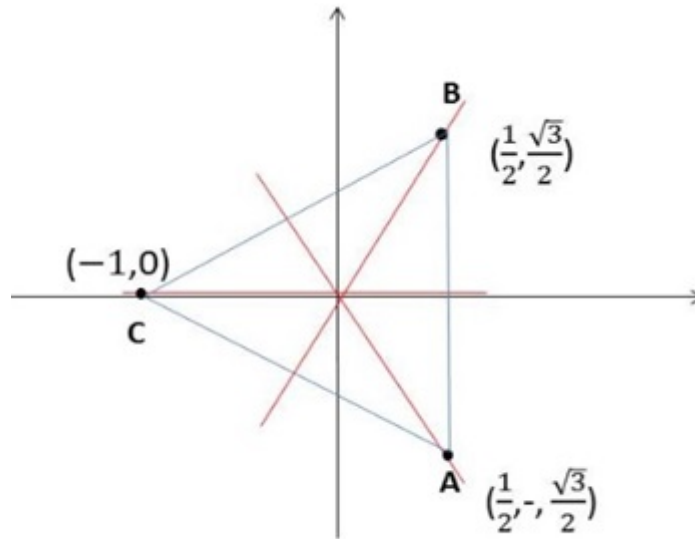


Figura 4.1: Triângulo equilátero com seu baricentro fixado na origem de coordenadas

Vemos que ao aplicarmos o único elemento de C_1 , a matriz identidade, em todos os vértices do triângulo o deixa invariante. Vamos para classe C_2 agora. Ao aplicarmos o elemento ab em todos os vértices, temos:

$$ab \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$ab \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$ab \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou seja, é exatamente uma rotação do triângulo no sentido horário de $\frac{4\pi}{3}$. Vamos aplicar a matriz b .

$$b \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$b \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que é uma rotação através do eixo que passa por B . Por consistência, vamos tomar um último exemplo, a matriz a

$$a \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$a \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

que corresponde a $y \rightarrow -y$.

4.5 Grupo Z_3

Nesta seção faremos uma análise bem sucinta deste grupo. Aqui temos um grupo finito de 3 elementos, com a seguinte tabela de multiplicação

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

(4.30)

Este é um grupo cíclico de ordem 3. Vemos que como cada elemento do grupo aparece exatamente uma vez em cada linha e coluna, deve haver um elemento inverso. Vemos, também, que o grupo é abeliano.

Sem muito esforço, através de (4.6) que só há três representações irredutíveis e todas elas são do tipo singlete

$$1^2 + 1'^2 + 1''^2 = 3$$

e obtê-las não nos dá muito trabalho. Dá tabela de multiplicação

$$D(e) = 1 \tag{4.31}$$

$$D(a)D(b) = 1 \tag{4.32}$$

$$D(a)D(a) = [D(a)]^2 = D(b) \tag{4.33}$$

aplicando-se $D(a)$ em (4.33), por (4.32) conclui-se

$$[D(a)]^3 = 1$$

então

$$D(a) = 1, \omega, \omega^2$$

com $\omega = e^{i2\pi/3}$. As soluções obtidas para $D(a)$, são as mesmas para $D(b)$. Portanto, obedecendo a relação (4.32) temos as seguintes representações

$$\begin{aligned} 1 : D(e) &= 1; & D(a) &= 1; & D(b) &= 1 \\ 1' : D(e) &= 1; & D(a) &= e^{i2\pi/3}; & D(b) &= e^{i4\pi/3} \\ 1'' : D(e) &= 1; & D(a) &= e^{i4\pi/3} & D(b) &= e^{i2\pi/3} \end{aligned}$$

Vimos que em modelos além do MP as massas dos neutrinos devem ser incluídas. Ao inserí-las temos como principal consequência a matriz de mistura nas correntes carregadas. Vimos, também, que com θ_{13} não nulo a matriz TBM (3.23) não é mais a matriz correta que descreve os ângulos de mistura para os neutrinos. Sendo assim, as matrizes de massa que levavam a TBM também devem ser modificadas.

Uma vez que Fritzsche conseguiu calcular os três ângulos de mistura dos quarks [33], embora usando a simetria quiral conforme discutido no Cap.(1), em termos das razões de suas massas, vamos analisar como sua textura se comporta para os valores atuais das massas dos quarks.

5

Textura de Fritzsch e Bases Fracas

No Cap.(1) vimos que Fritzsch conseguiu ajustar os ângulos de mistura com os termos de massa dos quarks a partir de sua textura, iniciando para duas gerações em [33] e posteriormente para três gerações. Entretanto, para obter a forma desejada das matrizes dos quarks ele impôs uma série de simetrias no MP que não condizem com o modelo atual, destacando-se a simetria quiral $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$ no setor eletrofraco.

Visto isso vamos analisar sua textura, sem impor nenhuma simetria no modelo, e construir a matriz CKM, com os valores das massas retiradas do PDG, e analisar se ela ainda pode ser considerada uma boa textura ao compararmos com os valores atuais da CKM.

Em seguida, vamos fazer uma breve análise de como o uso de Transformações de Bases Fracas (WBT), tema que é abordado com mais ênfase no Apêndice(A), que explora o excesso de parâmetros nas matrizes de massa, tanto a dos quarks quanto a dos léptons, podem fornecer os mesmos zeros contidos na textura de Fritzsch, mas sem que haja a necessidade de acrescentar alguma simetria no MP.

5.1 Textura de Fritzsch

As matrizes de massa para os quarks-up e para os quarks-down, dadas por Fritzsch, são respectivamente,

$$M_U = \begin{pmatrix} 0 & A_U & 0 \\ A_U & 0 & B_U \\ 0 & B_U & C_U \end{pmatrix}, M_D = \begin{pmatrix} 0 & A_D & 0 \\ A_D & 0 & B_D \\ 0 & B_D & C_D \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

onde aqui, por simplicidade, tomaremos todas as entradas de (5.1) sendo reais.

Sabendo-se que o traço e o determinante de matrizes são invariantes por transformações de similaridade, pode-se através das matrizes anteriores (5.1), escrever os elementos $A_{U,D}$, $B_{U,D}$ e $C_{U,D}$ em termos de massa.

Na base em que M_U e M_D são diagonais, temos

$$\hat{M}_U = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & -m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix}, \hat{M}_D = \begin{pmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & -m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Os autovalores das massas dos quarks são usualmente escolhidos positivos, entretanto o sinal do parâmetro de massa de campos de spin 1/2 não tem significado físico, sendo assim, podemos tomar seus autovalores da forma dada em (5.2).

Explorando a invariância por similaridade, das quantidades citadas a pouco, temos

$$\text{Tr}[M_U] = \text{Tr}[\hat{M}_U]$$

então

$$|C_U| = m_u - m_c + m_t \quad (5.3)$$

através de

$$\text{Det}[M_U] = \text{Det}[\hat{M}_U] \implies A_U^2 C_U = m_u m_c m_t$$

$$|A_U| = \sqrt{\frac{m_u m_c m_t}{m_u - m_c + m_t}} \quad (5.4)$$

e finalmente por

$$\text{Tr}[M_U^2] = \text{Tr}[\hat{M}_U^2] \implies 2A_U^2 + 2B_U^2 + 2C_U^2 = m_u^2 + m_c^2 + m_t^2$$

temos

$$|B_U| = \left(m_t m_c + m_u m_c - m_t m_u - \frac{m_u m_c m_t}{m_u - m_c + m_t} \right)^{1/2} \quad (5.5)$$

Os elementos A_D , B_D e C_D são igualmente obtidos, basta apenas fazermos a seguinte mudança

$$m_u \rightarrow m_d; \quad m_c \rightarrow m_s; \quad m_t \rightarrow m_b$$

Sabemos que a matriz CKM é obtida pelo produto entre as matrizes que diagonalizam as matrizes dos quarks, conforme a Eq.(2.31). Sendo assim, vamos construir as matrizes que diagonalizam (5.1)

$$O_U^T M_U O_U = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & -m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix}, \quad O_D^T M_D O_D = \begin{pmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & -m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{pmatrix}$$

em que as matrizes $O_{U,T}$ são as matrizes formadas pelas colunas dos autovetores de $M_{U,D}$. Autovetores esses que são facilmente obtidos por

$$(M - \lambda_i) \cdot \vec{e}_i = 0 \quad (5.6)$$

em que M são as matrizes, λ os autovalores das matrizes de (5.1) e $\vec{e}$ os autovetores que queremos calcular. Com o uso de (5.6) facilmente obtemos, para as matrizes de entrada (5.1), a seguinte forma para os autovetores

$$\vec{e}_i = \left(1/\sqrt{N} \right) (1, \lambda_i/A, \lambda_i B/A (\lambda_i - C)) \quad (5.7)$$

sendo N o fator de normalização e A , B e C são em termos das massas dos quarks como vimos em (5.3-5.5). Com esses ingredientes em mãos podemos sem dificuldades construir a matriz CKM

$$V_{\text{CKM}} = O_U^T Q O_D \quad (5.8)$$

com

$$Q = \text{diag}(1, e^{i\sigma}, e^{i\tau})$$

em que a matriz Q surge do fato assumido que matrizes (5.1) são reais. Na verdade suas fases devem ser absorvidas, retornando na construção da Eq.(5.8). Isto ficará mais claro na Sec.(6.1).

Usando as massas dos quarks retiradas do PDG[14], sem levar em conta os desvios

$$\begin{aligned} m_u &= 2.3\text{MeV}; & m_c &= 1.275\text{GeV}; & m_t &= 173.3\text{GeV}; \\ m_d &= 4.3\text{MeV}; & m_s &= 95\text{MeV}; & m_b &= 4.66\text{GeV} \end{aligned}$$

e substituindo esses valores em (5.7), obtemos os seguintes elementos para (5.8), sem nenhuma aproximação

$$\begin{aligned} V_{11} &= 0.97721 + 0.00872e^{i\sigma} + 0.00011e^{i\tau} \\ V_{12} &= 0.20791 - 0.04095e^{i\sigma} - 0.00050e^{i\tau} \\ V_{13} &= 0.00060 + 0.00578e^{i\sigma} - 0.00362e^{i\tau} \\ V_{21} &= 0.04151 - 0.2051e^{i\sigma} - 0.00253e^{i\tau} \\ V_{22} &= 0.00883 + 0.96413e^{i\sigma} + 0.01165e^{i\tau} \\ V_{23} &= 0.00003 - 0.13608e^{i\sigma} + 0.08458e^{i\tau} \\ V_{31} &= 0.00003 + 0.01761e^{i\sigma} - 0.02956e^{i\tau} \\ V_{32} &= 5.58706 \cdot 10^{-6} - 0.08277e^{i\sigma} + 0.13598e^{i\tau} \\ V_{33} &= 1.60763 \cdot 10^{-6} + 0.01168e^{i\sigma} + 0.98699e^{i\tau} \end{aligned} \tag{5.9}$$

Essas fases podem ser usadas para ajustar com os valores experimentais de (2.32), lembrando que devemos tomar o módulo dos elementos de (5.9).

Ao fixarmos as fases, ajustando com os valores experimentais dos elementos $|V_{12}|$ e $|V_{21}|$ de (2.32), obtemos as seguintes valores

$$\sigma = 1.98929; \quad \tau = 1.98946$$

levando-nos a seguinte matriz CKM aproximada, por meio da textura de Fritzsch

$$V_{\text{CKM}} \approx \begin{pmatrix} 0.97366 & 0.22764 & 0.00200 \\ 0.22770 & 0.97223 & 0.05151 \\ 0.01196 & 0.05321 & 0.99867 \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

Ao compararmos (5.10) com (2.32) vemos que os elementos $|V_{12}|$ e $|V_{21}|$, usados como pontos de partida para ajustarmos as fases, leva-nos aos valores exatos experimentais. Vemos, também, que os elementos diagonais possuem grande precisão, mas os quatro elementos restantes não possuem grande grau de acurácia.

Então, dos nove elementos da CKM temos cinco com grande precisão, lembrando que não exploramos os desvios das massas e as fases foram fixadas explorando apenas dois elementos da matriz experimental. Sendo assim, podemos dizer que o *Ansatz* de Fritzsch é ainda uma excelente escolha para a textura de massas dos quarks.

5.2 WBT como Gerador dos Elementos Nulos na Textura de Fritzsch

O *ansatz* sugerido por Fritzsch [33] possui duas características distintas:

1. Hermiticidade: As matrizes M_U e M_D são assumidas hermitianas.
2. Interações com vizinhos mais próximos (NNI-nearest-neighbor interactions): É assumido que os quarks “leves” adquirem suas massas através de interações com seus vizinhos mais próximos. Para n gerações isso implica a seguinte forma para M_U e M_D :

$$M_U, M_D = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 0 & x & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & x & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & x \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

sendo x valores genéricos não nulos dos elementos na matriz acima.

Sabe-se bem do MP que podemos, sem perda de generalidade, fazer com que as matrizes dos quarks M_U e M_D sejam hermitianas. Esse resultado sai do fato que no MP se dois conjuntos de massas dos quarks (M_U, M_D) e (M'_U, M'_D) são relacionadas por $M'_U = U^\dagger M_U V_u$, $M'_D = U^\dagger M_D V_d$, com U , V_u e V_d sendo matrizes unitárias, então elas dão origem as mesmas massas dos quarks e as mesmas misturas do sabor nas correntes carregadas. Pode-se usar essa liberdade para escolher M_U e M_D hermitianas. Então, a característica (i) do *ansatz* de Fritzsch não possui, por ela mesma, nenhum conteúdo físico.

Em [34] se questiona quando a hipótese NNI tem por ela mesma algum conteúdo físico. Foi visto, no mesmo, que a resposta depende do número de gerações, demonstrando que para menos do que cinco gerações sempre é possível escolher uma base fraca onde as matrizes M_U e M_D tem a forma da Eq.(5.11), e portanto, a hipótese NNI não possui nenhum conteúdo por ela mesma.

Isso tem importantes consequências para o *ansatz* de Fritzsch, uma vez que isso implica que para três ou quatro gerações, os zeros das matrizes de massa de Fritzsch não são uma característica especial daquele *ansatz*, mas apenas uma escolha especial de bases fracas. Já para cinco ou mais gerações, não é mais possível escolher sem perda de generalidade, uma base fraca onde M_U e M_D possua a forma da Eq.(5.11), e portanto o *ansatz* de Fritzsch se torna menos atraente, e a hipótese NNI passa a ter um

conteúdo físico por ela mesma, implicando correlações entre as massas dos quarks e os ângulos de mistura.

Uma vez que estamos explorando a textura de Fritzsch no MP em que assume-se apenas três gerações, tanto para quarks quanto para léptons, vamos demonstrar com detalhe o caso para três gerações de quarks.

- **Teorema A.3** : Dadas duas matrizes de massa para quarks quaisquer 3×3 M_U, M_D , há sempre uma WBT tal que as novas matrizes M'_U, M'_D tenham elementos $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(3, 1)$ e $(2, 2)$ nulos.

Vamos a prova. Considere as matrizes hermitianas H_U e H_D , definidas em (A.13), que possuem uma simples transformação de bases fracas

$$H'_{U,D} = W_L^\dagger H_{U,D} W_L \quad (5.12)$$

sendo W_L , unitária. Primeiro vamos demonstrar que dadas duas matrizes hermitianas arbitrárias H_U e H_D , é sempre possível fazer uma WBT tal que na nova base

$$(H'_U)_{12} = (H'_D)_{12} = 0 \quad (5.13)$$

Essa condição é uma exigência para os zeros nas texturas de Fritzsch, uma vez que para essas texturas sempre teremos a condição (5.13), juntamente com $(H'_U)_{21} = (H'_D)_{21} = 0$ como podemos ver

$$\begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ x & 0 & x \\ 0 & x & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x^* & 0 \\ x^* & 0 & x^* \\ 0 & x^* & x^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & 0 & x' \\ 0 & x' & x' \\ x' & x' & x' \end{pmatrix}$$

sendo x e x' valores genéricos não necessariamente iguais. Provaremos que se as matrizes hermitianas 3×3 H_U, H_D satisfizerem a Eq.(5.13) é sempre possível achar W_R^U, W_R^D tal que $M^{(U)'} , M^{(D)'}$ tenham os elementos $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(3, 1)$, e $(2, 2)$ nulos. Com o objetivo de provar a primeira declaração, vamos mostrar que, dadas duas matrizes 3×3 hermitianas arbitrárias H_U, H_D podemos sempre achar uma matriz unitária W_L tal que

$$(W_L)_{i1}^* (H_U)_{ij} (W_L)_{j2} = 0 \quad (5.14a)$$

$$(W_L)_{i1}^* (H_D)_{ij} (W_L)_{j2} = 0 \quad (5.14b)$$

$$(W_L)_{i1}^* (W_L)_{j2} = 0 \quad (5.14c)$$

As equações acima restringem o vetor com componentes $(W_L)_{i1}^*$ ser ortogonal aos outros três vetores. Para isso ser possível, $(W_L)_{j2}$ deve ser escolhido de tal maneira que

esses vetores sejam linearmente independentes

$$a (W_L)_{j2} + b (H_U)_{ij} (W_L)_{j2} + c (H_D)_{ij} (W_L)_{j2} = 0 \quad (5.15)$$

para a , b e c não nulos. Da álgebra linear sabemos que dada uma matriz quadrada A , um escalar λ é chamado de autovalor de A se existe um vetor (coluna) v não nulo tal que $Av = \lambda v$, e que qualquer vetor satisfazendo essa condição é chamado de autovetor de A . Sendo assim, a Eq.(5.15) nos diz que $(W_L)_{i2}$ tem que ser um autovetor normalizado da matriz $H_U + \frac{c}{b}H_D$ com autovalor $(-a/b)$. Uma vez $(W)_{i2}$ sendo encontrado, podemos contruir um vetor $(W_L)_{i1}$ satisfazendo as Eqs.(5.14a), (5.14b) e (5.14c). De fato

$$(W_L)_{i1} = N \epsilon_{ijk} (W_L)_{j2}^* (W_L)_{l2}^* (H_U)_{lk} \quad (5.16)$$

onde N é o vetor de normalização e ϵ_{ijk} é o tensor levi-Civita que é $+1$ para permutações pares e -1 para ímpares. Tem-se da Eq.(5.16) que se as Eqs.(5.14a) e (5.14c) são satisfeitas, então pela a Eq.(5.15) a Eq.(5.14b) também é. De fato, com o uso da Eq.(5.16), temos

$$\begin{aligned} (W_L)_{i1}^* (H_U)_{ij} (W_L)_{j2} &= N \epsilon_{ist} (W_L)_{s2} (W_L)_{l2} (H_U)_{lt}^* (H_U)_{ij} (W_L)_{j2} \\ &= N \epsilon_{1st} (W_L)_{s2} (W_L)_{l2} (H_U)_{lt}^* (H_U)_{1j} (W_L)_{j2} \\ &\quad + N \epsilon_{2st} (W_L)_{s2} (W_L)_{l2} (H_U)_{lt}^* (H_U)_{2j} (W_L)_{j2} \\ &\quad + N \epsilon_{3st} (W_L)_{s2} (W_L)_{l2} (H_U)_{lt}^* (H_U)_{3j} (W_L)_{j2} \end{aligned}$$

Ao calcularmos essa soma,

$$\begin{aligned} &= N (W_L)_{22} (W_L)_{l2} (H_U)_{l3}^* (H_U)_{1j} (W_L)_{j2} - N (W_L)_{32} (W_L)_{l2} (H_U)_{l2}^* (H_U)_{1j} (W_L)_{j2} \\ &- N (W_L)_{12} (W_L)_{l2} (H_U)_{l3}^* (H_U)_{2j} (W_L)_{j2} + N (W_L)_{32} (W_L)_{l2} (H_U)_{l1}^* (H_U)_{2j} (W_L)_{j2} \\ &+ N (W_L)_{12} (W_L)_{l2} (H_U)_{l2}^* (H_U)_{3j} (W_L)_{j2} - N (W_L)_{22} (W_L)_{l2} (H_U)_{l1}^* (H_U)_{3j} (W_L)_{j2} \end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned}
&= N (W_L)_{22} (W_L)_{12} (H_U)_{13}^* (H_U)_{1j} (W_L)_{j2} + N (W_L)_{22} (W_L)_{22} (H_U)_{23}^* (H_U)_{1j} (W_L)_{j2} \\
&+ N (W_L)_{22} (W_L)_{32} (H_U)_{33}^* (H_U)_{1j} (W_L)_{j2} - N (W_L)_{32} (W_L)_{12} (H_U)_{12}^* (H_U)_{1j} (W_L)_{j2} \\
&- N (W_L)_{32} (W_L)_{22} (H_U)_{22}^* (H_U)_{1j} (W_L)_{j2} - N (W_L)_{32} (W_L)_{32} (H_U)_{32}^* (H_U)_{1j} (W_L)_{j2} \\
&- N (W_L)_{12} (W_L)_{12} (H_U)_{13}^* (H_U)_{2j} (W_L)_{j2} - N (W_L)_{12} (W_L)_{22} (H_U)_{23}^* (H_U)_{2j} (W_L)_{j2} \\
&- N (W_L)_{12} (W_L)_{32} (H_U)_{33}^* (H_U)_{2j} (W_L)_{j2} + N (W_L)_{32} (W_L)_{12} (H_U)_{11}^* (H_U)_{2j} (W_L)_{j2} \\
&+ N (W_L)_{32} (W_L)_{22} (H_U)_{21}^* (H_U)_{2j} (W_L)_{j2} + N (W_L)_{32} (W_L)_{32} (H_U)_{31}^* (H_U)_{2j} (W_L)_{j2} \\
&+ N (W_L)_{12} (W_L)_{12} (H_U)_{12}^* (H_U)_{3j} (W_L)_{j2} + N (W_L)_{12} (W_L)_{22} (H_U)_{22}^* (H_U)_{3j} (W_L)_{j2} \\
&+ N (W_L)_{12} (W_L)_{32} (H_U)_{32}^* (H_U)_{3j} (W_L)_{j2} - N (W_L)_{22} (W_L)_{12} (H_U)_{11}^* (H_U)_{3j} (W_L)_{j2} \\
&- N (W_L)_{22} (W_L)_{22} (H_U)_{21}^* (H_U)_{3j} (W_L)_{j2} - N (W_L)_{22} (W_L)_{32} (H_U)_{31}^* (H_U)_{3j} (W_L)_{j2}
\end{aligned}$$

usando a condição de hermiticidade de H_U podemos ver que todos os termos vão se cancelar, por exemplo, a partir do primeiro termo da primeira linha da equação acima, pode-se ver que um dos seus três termos com soma em j irá se cancelar com um dos termos do primeiro item da última linha, pois

$$N (W_L)_{22} (W_L)_{12} (H_U)_{13}^* (H_U)_{12} (W_L)_{22} - N (W_L)_{22} (W_L)_{22} (H_U)_{21}^* (H_U)_{31} (W_L)_{12} = 0$$

Ja a verificação da Eq.(5.14c) é mais rápida,

$$\begin{aligned}
(K_L)_{i1}^* (K_L)_{j2} &= N \epsilon_{ist} (W_L)_{s2} (W_L)_{l2} (H_U)_{lt}^* (W_L)_{j2} \\
&= N \epsilon_{12t} (W_L)_{22} (W_L)_{l2} (H_U)_{lt}^* (W_L)_{12} \\
&+ N \epsilon_{21t} (W_L)_{12} (W_L)_{l2} (H_U)_{lt}^* (W_L)_{22} \\
&+ N \epsilon_{13t} (W_L)_{32} (W_L)_{l2} (H_U)_{lt}^* (W_L)_{12} \\
&+ N \epsilon_{23t} (W_L)_{32} (W_L)_{l2} (H_U)_{lt}^* (W_L)_{22} \\
&+ N \epsilon_{31t} (W_L)_{12} (W_L)_{l2} (H_U)_{lt}^* (W_L)_{32} \\
&+ N \epsilon_{32t} (W_L)_{22} (W_L)_{l2} (H_U)_{lt}^* (W_L)_{32}
\end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned}
&= N (W_L)_{22} (W_L)_{l2} (H_U)_{l3}^* (W_L)_{12} - N (W_L)_{32} (W_L)_{l2} (H_U)_{l2}^* (W_L)_{12} \\
&- N (W_L)_{12} (W_L)_{l2} (H_U)_{l3}^* (W_L)_{22} + N (W_L)_{32} (W_L)_{l2} (H_U)_{l1}^* (W_L)_{22} \\
&+ N (W_L)_{12} (W_L)_{l2} (H_U)_{l2}^* (W_L)_{32} - N (W_L)_{22} (W_L)_{l2} (H_U)_{l1}^* (W_L)_{32} \\
&= 0
\end{aligned}$$

vamos retornar a segunda parte da prova, que diz se uma matriz hermitiana $H = MM^\dagger$ tem o elemento H_{12} nulo, a qual acabamos de encontrar, então podemos achar uma matriz unitária W_R , tal que $M' = MW_R$ possua os elementos $M'_{11}, M'_{13}, M'_{31}$ e M'_{22} nulos. Essa condição pode ser satisfeita através das seguintes condições para a matriz W_R .

$$\begin{aligned}(W_R)_{i1} &= N_1 \epsilon_{ijk} M_{1j} M_{3k} \\ (W_R)_{i2} &= N_2 M_{1i}^* \\ (W_R)_{i3} &= N_3 (M_{1i}^* H_{13} - M_{31}^* H_{11})\end{aligned}\tag{5.17}$$

onde N_i são os fatores de normalização. Usando a definição $H = MM^\dagger$ e o fato que $H_{21} = 0$ temos que

$$\begin{aligned}M_{1i} (W_R)_{i1} &= M_{3i} (W_R)_{i1} = M_{1i} (W_R)_{i3} = M_{2i} (W_R)_{21} = 0 \\ (W_R)_{i1} (W_R)_{i3}^* &= (W_R)_{i2}^* (W_R)_{i3} = (W_R)_{i1} (W_R)_{i2}^* = 0\end{aligned}\tag{5.18}$$

Uma maneira simples de verificarmos (5.18) é contruir a matriz W_R , a partir de (5.17)

$$W_R = \begin{pmatrix} N_1 (M_{12} M_{33} - M_{13} M_{32}) & N_2 M_{11}^* & N_3 (M_{11}^* H_{13} - M_{31}^* H_{11}) \\ N_1 (-M_{11} M_{33} + M_{13} M_{31}) & N_2 M_{12}^* & N_3 (M_{12}^* H_{13} - M_{32}^* H_{11}) \\ N_1 (M_{11} M_{32} - M_{12} M_{31}) & N_2 M_{13}^* & N_3 (M_{13}^* H_{13} - M_{33}^* H_{11}) \end{pmatrix}$$

que, por exemplo, para $M_{1i} (W_R)_{i1}$ obtemos

$$\begin{aligned}M_{1i} (W_R)_{i1} &= M_{11} N_1 (M_{12} M_{33} - M_{13} M_{32}) \\ &+ M_{12} N_1 (-M_{11} M_{33} + M_{13} M_{31}) \\ &+ M_{13} N_1 (M_{11} M_{32} - M_{12} M_{31}) \\ &= 0\end{aligned}$$

Pudemos verificar que as bases fracas podem ser exploradas para a construção das texturas desejadas, sem que modifiquemos o MP. O problema aqui é que somente obtivemos os elementos zeros do *Ansatz* e, como sabemos, Fritzsch também impôs que os elementos $(1, 2)$, $(2, 1)$ e $(2, 3)$, $(3, 2)$ sejam iguais, algo que as bases fracas por si só não garantem.

Nosso próximo passo é explorar essa mesma textura para o setor dos léptons e, finalmente, construir o modelo de extensão.

6

Um Modelo S_3 para Matrizes de Massas dos Leptons com Textura Mínima Aproximada

6.1 θ_{13} na Matriz de Massa dos Neutrinos com Textura Mínima

Nesta seção vamos mostrar que a matriz de massa dos neutrinos com a textura mínima (ou a chamada Textura de Fritzsche conforme (1.4)) descreve as diferenças de massas dos neutrinos e as misturas que são empiricamente determinadas, incluindo o atual valor medido de θ_{13} , como visto em (3.3.1). Essa matriz de massa somente permite a hierarquia normal das massas dos neutrinos, excluindo tanto a hierarquia inversa quanto a degenerada, como veremos adiante.¹

Após os últimos dados de oscilações, incluindo θ_{13} não nulo, os autores de [12] propuseram uma matriz de massa com uma textura mínima, a textura Fritzsche, para o setor leptônico capaz de concordar com os dados experimentais para esses novos parâmetros.

Em [12] as matrizes de massa para os léptons carregados, M_l , e dos neutrinos de

¹As hierarquias para as massas dos neutrinos são as seguintes: hierarquia normal, $m_1 \ll m_2 \ll m_3$; hierarquia invertida, $m_3 \ll m_1 \ll m_2$; hierarquia aproximadamente degenerada, $m_1 \approx m_2 \approx m_3$.

Dirac, M_D , são assumidos possuírem a seguinte forma,

$$M_l = \begin{pmatrix} 0 & A_l & 0 \\ A_l & 0 & B_l \\ 0 & B_l & C_l \end{pmatrix}, \quad M_D = \begin{pmatrix} 0 & A_v & 0 \\ A_v & 0 & B_v \\ 0 & B_v & C_v \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

diferente do que fizemos para as matrizes dos quarks (5.1) vamos tomar cada entrada sendo complexa, como de fato são. Então, ao parametrizarmos os elementos da matriz, usando os valores absolutos, $|A|$, $|B|$ e $|C|$ e uma fase global α , temos

$$M_l = \begin{pmatrix} 0 & |A_l| e^{i\varphi_l} & 0 \\ |A_l| e^{i\varphi_l} & 0 & |B_l| e^{i(\phi_l+\varphi_l)} \\ 0 & |B_l| e^{i(\phi_l+\varphi_l)} & |C_l| e^{i2\phi_l} \end{pmatrix}, \quad M_D = \begin{pmatrix} 0 & |A_v| e^{i\varphi_v} & 0 \\ |A_v| e^{i\varphi_v} & 0 & |B_v| e^{i(\phi_v+\varphi_v)} \\ 0 & |B_v| e^{i(\phi_v+\varphi_v)} & |C_v| e^{i2\phi_v} \end{pmatrix}$$

desta forma as matrizes M_l e M_D podem ser escritas do seguinte modo

$$M_l = d_l^\dagger |M_l| d_l^\dagger, \quad M_D = d_v^\dagger |M_D| d_v^\dagger \quad (6.2)$$

sendo, agora, $|M_l|$ e $|M_D|$ matrizes simétricas reais e

$$d_l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi_l} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\phi_l} \end{pmatrix}, \quad d_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi_v} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\phi_v} \end{pmatrix},$$

são as matrizes diagonais de fases. Então, da álgebra linear, sabemos que essas matrizes podem ser diagonalizadas da seguinte maneira

$$\begin{aligned} O_l^T |M_l| O_l &= \text{diag}(m_e, m_\mu, m_\tau) \\ O_v^T |M_D| O_v &= \text{diag}(m_1, m_2, m_3) \end{aligned}$$

em que as matrizes O_l e O_v são matrizes ortogonais reais. Sendo assim, as matrizes dadas na Eq.(6.2) podem ser diagonalizadas da seguinte forma:

$$M_l^{diag} = U_l^T M_l U_l, \quad M_D^{diag} = U_v^T M_D U_v \quad (6.3)$$

onde

$$U_l = d_l^\dagger O_l; \quad U_v = d_v^\dagger O_v$$

Em princípio nos parece que isso basta, entretanto, temos que absorver essas fases. Vamos expressar este procedimento somente para os léptons carregados, uma vez que

para os neutrinos o procedimento é análogo. Devemos tomar,

$$\begin{aligned}
\mu_L &\rightarrow e^{i\phi_l} \mu_L, \\
\tau_L &\rightarrow e^{i\phi_l} \tau_L, \\
\mu_R &\rightarrow e^{-i\phi_l} \mu_R, \\
\tau_R &\rightarrow e^{-i\phi_l} \tau_R,
\end{aligned} \tag{6.4}$$

sendo assim

$$(\bar{e}_L \bar{\mu}_L \bar{\tau}_L) \rightarrow (\bar{e}_L \bar{\mu}_L \bar{\tau}_L) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_l} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\phi_l} \end{pmatrix},$$

para os termos de massa dos léptons carregados, temos,

$$\begin{aligned}
(\bar{e}_L \bar{\mu}_L \bar{\tau}_L) M_l \begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix} &= (\bar{e}_L \bar{\mu}_L \bar{\tau}_L) (U_l U_l^T) M_l (U_l U_l^T) \begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix} \\
&= (\bar{e}_L \bar{\mu}_L \bar{\tau}_L) U_l M_l^{diag} U_l^T \begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix} \\
&= (\bar{e}_L \bar{\mu}_L \bar{\tau}_L) d_l^\dagger O_l M_l^{diag} O_l^T d_l^\dagger \begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

então, com o uso da Eq.(6.4),

$$(\bar{e}_L \bar{\mu}_L \bar{\tau}_L) O_l M_l^{diag} O_l^T \begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix} = \bar{l}'_L M_l^{diag} l'_R$$

onde l' expressa que estamos nos autoestados de massa

$$l' = O_l^T l$$

As massas dos neutrinos leves, M_ν , são obtidas através do mecanismo seesaw

$$M_\nu = -M_D^T M_R^{-1} M_D \tag{6.5}$$

em que M_R é a matriz dos neutrinos de mão direita, que aqui, por simplicidade, assume-

se que M_R está na base onde M_D é diagonal, conforme (6.3), então

$$U_\nu^T M_R U_\nu = M_0 I_3$$

com I_3 a matriz identidade 3×3 e M_0 real e muito maior que a escala de massa dos neutrinos de Dirac. Isso significa que na base onde M_D possui a forma (6.1) temos

$$M_R = M_0 d_\nu^2 \quad (6.6)$$

uma vez que

$$\begin{aligned} U_\nu^T M_R U_\nu &= M_0 U_\nu^T d_\nu^2 U_\nu \\ &= M_0 O_\nu^T d_\nu^\dagger d_\nu^2 d_\nu^\dagger O_\nu \\ &= M_0 I_3 \end{aligned} \quad (6.7)$$

Neste caso, a matriz de massa M_ν continua sendo diagonalizada por $U_\nu = d_\nu^\dagger O_\nu$, que é a mesma matriz que diagonaliza M_D .

$$\begin{aligned} M_\nu^{\text{diag}} &= U_\nu^T M_\nu U_\nu \\ &= -\frac{1}{M_0} [M_D^{\text{diag}}]^2 \end{aligned}$$

uma vez que

$$\begin{aligned} U_\nu^T M_\nu U_\nu &= -U_\nu^T M_D^T M_R^{-1} M_D U_\nu \\ &= -\frac{1}{M_0} O_\nu^T (d_\nu^\dagger M_D^T d_\nu^\dagger) (d_\nu^\dagger M_D d_\nu^\dagger) O_\nu \\ &= -\frac{1}{M_0} O_\nu^T |M_D|^2 O_\nu \\ &\quad -\frac{1}{M_0} [M_D^{\text{diag}}]^2 \end{aligned}$$

lembrando que M_D é simétrica e real.

Como o esperado, essas fases, que a princípio foram absorvidas, retornam na matriz de mistura dos léptons,

$$\begin{aligned} U_{\text{PMNS}} &= U_l^\dagger U_\nu \\ &= O_l^T d_l d_\nu^\dagger O_\nu \end{aligned} \quad (6.8)$$

em que

$$d_l d_\nu^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i(-\phi_l + \phi_\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i(-\phi_l + \phi_\nu)} \end{pmatrix}$$

que podemos simplificar, definindo-se $\sigma = -\phi_l + \phi_\nu$, $\tau = -\phi_l + \phi_\nu$ e, também, podemos chamar esse produto das fases por Q , logo

$$Q = d_l d_\nu^\dagger = \text{diag}(1, e^{i\sigma} e^{i\tau}) \quad (6.9)$$

sendo assim, podemos reescrever a Eq.(6.8) da seguinte forma

$$U_{\text{PMNS}} = O_l^T Q O_\nu \quad (6.10)$$

Sendo o resultado da Eq.(6.10) o mesmo que usamos na Eq.(5.8), entretanto com a matriz Q sendo claramente justificada.

Os próximos passos para construirmos os elementos da matriz PMNS são os mesmos feitos na Sec.(5.1), ou seja, podemos facilmente escrever os elementos da matriz de massa em termos das massas dos léptons e assim construirmos as matrizes O .

Entretanto, se fizermos exatamente o mesmo que fizemos para os quarks, obteremos razões entre massa dos léptons em termos de raízes quadráticas², levando-nos a termos do tipo

$$U_{e2} \simeq -\sqrt{\frac{m_{D\nu_e}}{m_{D\nu_\mu}}} - e^{i\sigma} \sqrt{\frac{m_e}{m_\mu}} \quad (6.11)$$

em que os termos de massa da forma m_D se referem aos termos de massa de Dirac para os neutrinos. Todavia, algo muito interessante ocorre aqui, se deixarmos os elementos da matriz PMNS da forma (6.11) não alcançamos os valores desejados para os ângulos de mistura empíricos dos neutrinos, incluindo θ_{13} não nulo. Mas, se usarmos o mecanismo seesaw, detalhado na Sec.(3.1.4), teremos êxito com a matriz PMNS. Por exemplo, para o elemento dado em (6.11) devemos usar as seguintes relações obtidas por seesaw

$$m_1 = \frac{(m_{D\nu_e})^2}{m_R}; \quad m_2 = \frac{(m_{D\nu_\mu})^2}{m_R}$$

em que m_1 e m_2 são as massas dos neutrinos leves, que participam das interações fracas,

²Embora não tenhamos mostrado na Sec.(5.1), pois obtivemos os elementos da matriz em termos numéricos, seus elementos quando obtidos de forma aproximada são todos em termos de raízes quadráticas das razões de massas, por exemplo $V_{12} \simeq -\sqrt{\frac{m_d}{m_s}} + e^{i\sigma} \sqrt{\frac{m_u}{m_c}}$ e $V_{23} \simeq e^{i\sigma} \sqrt{\frac{m_s}{m_b}} - e^{i\tau} \sqrt{\frac{m_c}{m_t}}$.

e m_R a massa dos neutrinos pesados que não participam. Fazendo isto com todos os elementos, conforme realizado em [35], temos

$$\begin{aligned}
U_{e1} &\approx \left(\frac{m_2}{m_2 + m_1}\right)^{1/4} + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{1/4} \left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^{1/2} e^{i\sigma}, \\
U_{e2} &\approx -\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{1/4} - \left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^{1/2} e^{i\sigma}, \\
U_{\mu 1} &\approx \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{1/4} e^{i\sigma} - \left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^{1/2}, \\
U_{\mu 3} &\approx \left(\frac{m_2}{m_3}\right)^{1/4} e^{i\sigma} - \left(\frac{m_\mu}{m_\tau}\right)^{1/2} e^{i\tau}, \\
U_{\tau 2} &\approx -\left(\frac{m_2}{m_3}\right)^{1/4} e^{i\tau} - \left(\frac{m_\mu}{m_\tau}\right)^{1/2} e^{i\sigma}, \\
U_{e3} &\approx \left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^{1/2} U_{\mu 3} + \left(\frac{m_2}{m_3}\right)^{1/2} \left(\frac{m_1}{m_3}\right)^{1/4}, \\
U_{\tau 1} &\approx -\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{1/4} U_{\tau 2},
\end{aligned} \tag{6.12}$$

onde as massas dos léptons carregados são denotadas como m_e , m_μ e m_τ , e termos com $(m_e/m_\tau)^{1/2}$ são negligenciados.

Para que o uso do mecanismo seesaw seja realizado, devemos ter um termo de massa geral para os neutrinos, conforme o termo de massa da lagrangiana (3.5). Sendo assim, estamos detectando de uma maneira indireta a natureza dos neutrinos, seriam eles neutrinos de Majorana.

Características aproximadas dos ângulos de mistura podem ser vistas dessas expressões. Por exemplo, podemos ver das Eqs.(6.12) as relações entre as massas e os ângulos de mistura

$$|U_{e2}| \approx \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{1/4}, \quad |U_{\mu 3}| \approx \left(\frac{m_2}{m_3}\right)^{1/4}, \quad |U_{e3}| \approx \left(\frac{m_2}{m_3}\right)^{1/2} \left(\frac{m_1}{m_3}\right)^{1/4}$$

Com o objetivo de verificar a inclusão dos recentes valores de θ_{13} na matriz de mistura, podemos ver as seguintes relações entre os ângulos de mistura

$$|U_{e3}| \approx |U_{\mu 3}|^2 |U_{e2} U_{\mu 3}| = |U_{\mu 3}|^3 |U_{e2}|$$

e usando-se os valores conhecidos aproximados para θ_{23} e θ_{12} , ou seja, $|U_{\mu 3}| \sim 1/\sqrt{2}$ e $|U_{e2}| \sim 1/\sqrt{3}$, vemos que $|U_{e3}| \sim 1/(2\sqrt{6}) \simeq 0.2$, que significa que $|U_{e3}|$ não pode ser muito pequeno.

A partir dos resultados obtidos em (6.12) vemos que, como dito no início, somente a hierarquia normal é permitida para esse modelo. Por exemplo, a partir da expressão

de $|U_{\mu 3}|$ que possui um valor aproximado em torno de $1/\sqrt{2}$ tem-se que $m_3 \approx 4m_2$, não permitindo a hierarquia invertida. Tem-se, também, que a partir de $|U_{e2}|$ podemos ver que essa matriz não pode ser degenerada para as massas dos neutrinos.

Os resultados obtidos usando (6.12), gerados através das texturas mínimas para os léptons foram

$$\Delta m_{atm}^2 = (2.24 - 2.65) \times 10^{-3} eV^2, \quad \Delta m_{sol}^2 = (7.29 - 7.92) \times 10^{-5} eV^2, \quad (6.13)$$

$$\sin^2 \theta_{23} = 0.40 - 0.62, \quad \sin^2 \theta_{12} = 0.29 - 0.34$$

em que $\Delta m_{sol}^2 = \Delta m_{12}^2$ e $\Delta m_{atm}^2 = \Delta m_{23}^2$.

Ao compararmos os resultados em (6.13) com os fornecidos pela **tabela—3.2** vemos que essas texturas levam a boas estimativas para os ângulos de mistura e para diferença de massas dos neutrinos.

Pudemos constatar que o *ansatz* fornece resultados muito satisfatório para ambos setores, o dos quarks e dos léptons. O excesso de parâmetros livres que o MP deixa nas matrizes de massa pode estar nos dizendo que exista mais alguma simetria no modelo não ainda explorada, ou apenas, não foi feita uma escolha correta de bases fracas. Mas, tudo indica que somente com as bases fracas a textura de Fritzsch não poderá ser obtida. Sendo assim, vamos explorar uma nova simetria no MP no setor dos léptons.

6.2 O Modelo

No modelo proposto em [13] a inclusão de S_3 , juntamente com as simetrias abelianas Z_5 e Z_3 , levam a inserção de mais cinco campos escalares complexos no MP. Esses novos campos escalares não podem afetar o que já se sabe do MP, como as massas dos férmions e a massa do Higgs recentemente medida. Suas respectivas massas devem ser checadas no termo de potencial dos escalares, assim como é feito com o escalar usual do MP ϕ , Eq.(2.15), entretanto essa análise é bem complicada e mesmo em [13] sua análise não foi completa, porém já foi abordada com detalhe em [36]. Nosso objetivo, aqui, será apenas a obtenção das texturas discutidas na seção anterior.

Como dito anteriormente, a proposta do modelo é baseada sobre a simetria S_3 que é capaz de gerar as texturas desejadas para as matrizes de massa de Dirac para leptons carregados e neutrinos.

O modelo estende a simetria do grupo do modelo padrão incluindo um grupo de sabor $G_F = S_3 \otimes Z_5 \otimes Z_3$. As três famílias dos dubletos de lepton de mão esquerda L_i e os singletos de mão direita l_{iR} e ν_{iR} , $i = 1, 2, 3$ (ou $l_i = e, \mu, \tau$), transformam-se não trivialmente sob G_F . O dubleto de Higgs ϕ é um singlete de G_F , já os cinco campos escalares complexos $\eta, \chi, \chi',$ e ζ_i , $i = 1, 2$, são completos singletos do MP. Os campos no modelo são dispostos em multipletos que se transformam sobre representações irre-

utíveis de G_F . Como visto anteriormente há somente três representações em S_3 , que

$$\begin{aligned}
2 : \quad L_D &\equiv (L_e, L_\mu), \quad E_D \equiv (e_R, \mu_R) \\
N_D &\equiv (\nu_{1R}, \nu_{2R}), \quad \zeta_D \equiv (\zeta_1, \zeta_2); \\
1 : \quad L_S &\equiv L_\tau, \quad E_S \equiv \tau_R, \quad N_S \equiv \nu_{3R} \\
&\quad \chi, \quad \chi' \\
1' : \quad \eta
\end{aligned} \tag{6.14}$$

As cargas dos campos sobre G_F são fornecidas pela seguinte tabela:

	L_D	L_S	E_D	E_S	N_D	N_S	ϕ	ζ_D	η	χ	χ'
S_3	2	1	2	1	2	1	1	2	1'	1	1
Z_5	ω_5^4	1	ω_5	1	ω_5	1	1	ω_5^4	ω_5^2	1	ω_5^3
Z_3	ω	ω	ω	ω	ω	ω	1	1	1	ω	ω

Tabela – 6.1 : Propriedades de transformação sob $G_F = S_3 \otimes Z_5 \otimes Z_3$ onde $\omega = e^{i2\pi/3}$ e $\omega_5 = e^{i2\pi/5}$.

Notemos que o seguinte produto para três dubletos x, y, z :

$$\begin{aligned}
[x \times y \times z]_1 &\equiv [x \times y]_2 \times z]_1 = [x \times [y \times z]_2]_1 \\
[x \times y \times z]_{1'} &\equiv [x \times y]_2 \times z]_{1'} = -[x \times [y \times z]_2]_{1'}
\end{aligned} \tag{6.15}$$

são unicamente definidos. Podemos verificar facilmente através das regras de multiplicação de S_3 dadas na Eq.(4.29)

$$[x \times y]_2 \times z]_1 = \left[\begin{pmatrix} x_2 y_2 - x_1 y_1 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right]_1 = x_2 y_2 z_1 - x_1 y_1 z_1 + x_1 y_2 z_2 + x_2 y_1 z_2$$

e

$$[x \times [y \times z]_2]_1 = \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y_2 z_2 - y_1 z_1 \\ y_1 z_2 + y_2 z_1 \end{pmatrix} \right]_1 = x_1 y_2 z_2 - x_1 y_1 z_1 + x_2 y_1 z_2 + x_2 y_2 z_1$$

são de fato iguais, o mesmo ocorrendo na representação $1'$.

Podemos escrever facilmente a lagrangiana de Yukawa para os léptons que deve ser invariante sobre a simetria do modelo.

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y &= \frac{a_l^*}{\Lambda} [\bar{L}_D \phi E_D]_{1'} \eta^* + \frac{b_l'^*}{\Lambda} \bar{L}_S \phi [E_D \zeta_D]_1 \\
&+ \frac{b_l^*}{\Lambda} [\bar{L}_D \zeta_D]_1 \phi E_S + c_l^* \bar{L}_S \phi E_S + h.c.
\end{aligned} \tag{6.16}$$

em que $\frac{a_l^*}{\Lambda}$, $\frac{b_l^*}{\Lambda}$, $\frac{b_l'^*}{\Lambda}$ e c_l^* são os acoplamentos de Yukawa para os léptons carregados. A invariância por S_3 pode ser verificada facilmente com o uso dos valores de a em diferentes representações dadas na Eq.(4.22), especificamente $D(a)^1 = 1$ e $D(a)^{1'} =$

–1. Desta forma, por exemplo, podemos verificar a invariância por S_3 no primeiro elemento de (6.16), que fornece

$$D(a)^{1'} [\bar{L}_D \phi E_D]_{1'} D(a)^{1'} \eta^* = [\bar{L}_D \phi E_D]_{1'} \eta^*$$

Com o uso apenas da simetria S_3 termos como

$$\begin{aligned} & [\bar{L}_D \phi E_D]_1 \chi \\ & \bar{L}_S \phi E_S \chi' \\ & [\bar{L}_D \phi E_D]_{1'} \eta \end{aligned}$$

poderiam ser permitidos na Eq.(6.16), que afetariam a forma desejada da matriz de massa (6.1), mas com o uso das simetria Z_3 e Z_5 eles não são. Pode-se verificar isso com o uso da **tabela – 6.1**:

$$\begin{aligned} [\bar{L}_D \phi E_D]_1 \chi & \rightarrow_{Z_5} w_5^{-4} \times 1 \times w_5 \times 1 \neq 1 \\ \bar{L}_S \phi E_S \chi' & \rightarrow_{Z_5} 1 \times 1 \times 1 \times w_5^3 \neq 1 \\ [\bar{L}_D \phi E_D]_{1'} \eta & \rightarrow_{Z_5} w_5^{-4} \times 1 \times w_5^{-1} \times w_5^2 \neq 1 \end{aligned}$$

Uma vez tendo obtido a lagrangiana de Yukawa para os leptons carregados invariante por $SU(2) \otimes U(1) \otimes G_F$, podemos aplicar suas regras de multiplicação dadas na Eq.(3.13). Para o presente modelo, temos

$$[\bar{L}_D E_D]_{1'} \rightarrow \left[\left(\begin{pmatrix} \bar{L}_e \\ \bar{L}_\mu \end{pmatrix} \right) \otimes \left(\begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \end{pmatrix} \right) \right]_{1'} = \bar{L}_e \mu_R - \bar{L}_\mu e_R \quad (6.17)$$

$$[E_D \zeta_D]_1 \rightarrow \left[\left(\begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \end{pmatrix} \right) \otimes \left(\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \right) \right]_1 = e_R \zeta_1 + \mu_R \zeta_2$$

$$[\bar{L}_D \zeta_D]_1 \rightarrow \left[\left(\begin{pmatrix} \bar{L}_e \\ \bar{L}_\mu \end{pmatrix} \right) \otimes \left(\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \right) \right]_1 = \bar{L}_e \zeta_1 + \bar{L}_\mu \zeta_2$$

logo, $\mathcal{L}_Y^l$ toma a seguinte forma

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y^l &= \frac{a_l^*}{\Lambda} \bar{L}_e \phi \mu_R \eta^* - \frac{a_l^*}{\Lambda} \bar{L}_\mu \phi e_R \eta^* + \frac{b_l'^*}{\Lambda} \bar{L}_S \phi e_R \zeta_1 \\ &+ \frac{b_l'^*}{\Lambda} \bar{L}_S \phi \mu_R \zeta_2 + \frac{b_l^*}{\Lambda} \bar{L}_e \zeta_1 \phi E_S + \frac{b_l^*}{\Lambda} \bar{L}_\mu \zeta_2 \phi E_S \\ &+ c_l^* \bar{L}_S \phi E_S + h.c. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Assim como fizemos para o MP no Cap.2, para encontrarmos os termos de massa devemos quebrar a simetria, que inclui, agora, G_F . Os VEVs que serão usados em (6.18) são

$$\langle \zeta_D \rangle = (0, u_2)^T, \quad \langle \eta \rangle = u_\eta, \quad \langle \phi^0 \rangle = v \quad (6.19)$$

onde $\sqrt{2}v_\phi = v = 246 \text{ GeV}$ é a escala eletrofraca; u_2 e u_n a princípio podem ser complexos.

Vamos, agora, quebrar a simetria em G_F , expandido os escalares em torno desses mínimos

$$\eta^* = \eta_0^* + \mu_\eta^*; \quad \zeta_1 = \zeta_1^0; \quad \zeta_2 = \zeta_2^0 + \mu_2 \quad (6.20)$$

então, a Eq.(6.18) em torno desses mínimos fica

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y^l &= \frac{a_l^*}{\Lambda} [\bar{L}_e \phi \mu_R - \bar{L}_\mu \phi e_R] [\eta_0^* + \mu_\eta^*] \\ &+ \frac{b_l'^*}{\Lambda} \bar{L}_\tau \phi [e_R \zeta_1^0 + \mu_R (\zeta_2^0 + \mu_2)] \\ &+ \frac{b_l^*}{\Lambda} [\bar{L}_e \zeta_1^0 + \bar{L}_\mu (\zeta_2^0 + \mu_2)] \phi \tau_R. \\ &+ c_l^* \bar{L}_\tau \phi \tau_R + h.c \end{aligned}$$

uma vez que o dubleto escalar ϕ é o usual do MP, dado em (2.4), a lagrangiana acima fica, então

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y^l &= \frac{a_l^*}{\Lambda} \left[(\bar{\nu}_e \bar{e})_L \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \mu_R - (\bar{\nu}_\mu \bar{\mu})_L \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} e_R \right] [\eta_0^* + \mu_\eta^*] \\ &+ \frac{b_l'^*}{\Lambda} (\bar{\nu}_\tau \bar{\tau})_L \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} [e_R \zeta_1^0 + \mu_R (\zeta_2^0 + \mu_2)] \\ &+ \frac{b_l^*}{\Lambda} [(\bar{\nu}_e \bar{e})_L \zeta_1^0 + (\bar{\nu}_\mu \bar{\mu})_L (\zeta_2^0 + \mu_2)] \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \tau_R. \\ &+ c_l^* (\bar{\nu}_\tau \bar{\tau})_L \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \tau_R + h.c \end{aligned}$$

mas, aqui, não há interesse nos termos de interação com ϕ^+ , sendo assim

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y^l &= \phi_{\text{aclop}}^+ \\
&+ \frac{a_l^*}{\Lambda} [\bar{e}_L \phi^0 \mu_R - \bar{\mu}_L \phi^0 e_R] \eta_0^* + \frac{a_l^*}{\Lambda} [\bar{e}_L \phi^0 \mu_R - \bar{\mu}_L \phi^0 e_R] \mu_\eta^* \\
&+ \frac{b_l'^*}{\Lambda} \bar{\tau}_L \phi^0 e_R \zeta_1^0 + \frac{b_l'^*}{\Lambda} \bar{\tau}_L \phi^0 \mu_R \zeta_2^0 \\
&+ \frac{b_l'^*}{\Lambda} \bar{\tau}_L \phi^0 \mu_R \mu_2 + \frac{b_l^*}{\Lambda} \bar{e}_L \phi^0 \zeta_1^0 \tau_R \\
&+ \frac{b_l^*}{\Lambda} \bar{\mu}_L \phi^0 \tau_R \zeta_2^0 + \frac{b_l^*}{\Lambda} \bar{\mu}_L \phi^0 \tau_R \mu_2 \\
&+ c_l^* \bar{\tau}_L \phi^0 \tau_R + h.c
\end{aligned} \tag{6.21}$$

da mesma forma que isolamos os termos de interação com ϕ^+ , vamos fazer o mesmo com os termos de interação entre os férmions e os escalares η_0^* , ζ_1^0 e ζ_2^0 que na forma matricial, a Eq.(6.21) fica

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y^l &= \phi_{\text{aclop}}^+ + (\eta_0^*)_{\text{aclop}} + (\zeta_1^0)_{\text{aclop}} + (\zeta_2^0)_{\text{aclop}} \\
&+ (\bar{e}_L \bar{\mu}_L \bar{\tau}_L) \begin{pmatrix} 0 & \frac{a_l^*}{\Lambda} & 0 \\ -\frac{a_l^*}{\Lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix} \phi^0 \mu_\eta^* + (\bar{e}_L \bar{\mu}_L \bar{\tau}_L) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{b_l'^*}{\Lambda} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b_l'^*}{\Lambda} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix} \phi^0 \mu_2 \\
&+ (\bar{e}_L \bar{\mu}_L \bar{\tau}_L) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_l^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix} \phi^0 + h.c
\end{aligned}$$

os escalares escritos como: ϕ_{aclop} , representam os termos de interação com os campos fermiônicos. A partir de agora, usaremos a notação

$$\begin{aligned}
A_l &= a_l \vartheta \frac{\mu_\eta}{\Lambda}; & B_l &= b_l \vartheta \frac{\mu_2^*}{\Lambda} \\
B_l' &= b_l' \vartheta \frac{\mu_2^*}{\Lambda}; & C_l &= c_l \vartheta
\end{aligned}$$

para que as comparações com (6.1) fiquem claras. Definimos, também, o seguinte tripleto

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} e & \mu & \tau \end{pmatrix}^T$$

Ao quebrarmos a simetria em $SU(2) \otimes U(1)$ e expandirmos a lagrangiana em torno do mínimo de ϕ^0

$$\phi^0 = \vartheta + H$$

Chega-se em,

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y^l = & \phi_{\text{aclop}}^+ + (\eta_0^*)_{\text{aclop}} + (\zeta_1^0)_{\text{aclop}} + (\zeta_2^0)_{\text{aclop}} \\
& + \bar{\psi}_L \begin{pmatrix} 0 & A_l^* & 0 \\ -A_l^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\psi_R(\vartheta+H)}{\vartheta} + \bar{\psi}_L \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_l^* \\ 0 & B_l'^* & 0 \end{pmatrix} \frac{\psi_R(\vartheta+H)}{\vartheta} \\
& + \bar{\psi}_L \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_l^* \end{pmatrix} \frac{\psi_R(\vartheta+H)}{\vartheta} + h.c
\end{aligned} \tag{6.22}$$

Mas, novamente, não estamos interessados nos termos de interação com o Higgs H , logo a Eq.(6.22) fica

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y^l = & \phi_{\text{aclop}}^+ + (\eta_0^*)_{\text{aclop}} + (\zeta_1^0)_{\text{aclop}} + (\zeta_2^0)_{\text{aclop}} + H_{\text{aclop}} \\
& + \bar{\psi}_L \begin{pmatrix} 0 & A_l^* & 0 \\ -A_l^* & 0 & B_l^* \\ 0 & B_l'^* & C_l^* \end{pmatrix} \psi_R + h.c
\end{aligned}$$

sendo assim, a matriz de massa para os léptons carregados na base $\bar{\psi}_R \psi_L$ é :

$$M_l = \begin{pmatrix} 0 & -A_l & 0 \\ A_l & 0 & B_l' \\ 0 & B_l & C_l \end{pmatrix} \tag{6.23}$$

o sinal negativo na componente (1, 2) da matriz acima pode ser eliminado através de uma refasagem apropriada dos campos.

Analogamente, a matriz de massa de Dirac para os neutrinos, invariante por $SU(2) \otimes U(1) \otimes G_F$, é gerada pela seguinte lagrangiana efetiva de Yukawa

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y^\nu = & \frac{a_v^*}{\Lambda} [\bar{L}_D \tilde{\phi} N_D]_1 \eta^* + \frac{b_v'^*}{\Lambda} \bar{L}_S \tilde{\phi} [N_D \zeta_D]_1 \\
& + \frac{b_v^*}{\Lambda} [\bar{L}_D \zeta_D]_1 \tilde{\phi} N_S + c_v^* \bar{L}_S \tilde{\phi} N_S + h.c.
\end{aligned} \tag{6.24}$$

novamente, usando as regras do produto para S_3 ,

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y^\nu = & \frac{a_v^*}{\Lambda} \bar{L}_e \tilde{\phi} \nu_{2R} \eta^* - \frac{a_v^*}{\Lambda} \bar{L}_\mu \tilde{\phi} \nu_{1R} \eta^* + \frac{b_v'^*}{\Lambda} \bar{L}_\tau \tilde{\phi} \nu_{1R} \zeta_1 \\
& + \frac{b_v'^*}{\Lambda} \bar{L}_\tau \tilde{\phi} \nu_{2R} \zeta_2 + \frac{b_v^*}{\Lambda} \bar{L}_e \zeta_1 \tilde{\phi} \nu_{3R} + \frac{b_v^*}{\Lambda} \bar{L}_\mu \zeta_2 \tilde{\phi} \nu_{3R} \\
& + c_v^* \bar{L}_\tau \tilde{\phi} \nu_{3R} + h.c.
\end{aligned}$$

tomaremos a mesma sequência de passos que fizemos para os léptons carregados, desconsiderando os termos de interação dos campos. Explicitando o dubleto escalar, dado agora por $\tilde{\phi}$ que é definido pela Eq.(2.6), temos

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y^\nu &= \frac{a_v^*}{\Lambda} \left[(\bar{\nu}_e \bar{e})_L \begin{pmatrix} \phi_0^* \\ -\phi^- \end{pmatrix} \nu_{2R} - (\bar{\nu}_\mu \bar{\mu})_L \begin{pmatrix} \phi_0^* \\ -\phi^- \end{pmatrix} \nu_{1R} \right] [\eta_0^* + \mu_\eta^*] \\
&+ \frac{b_v'^*}{\Lambda} (\bar{\nu}_\tau \bar{\tau})_L \begin{pmatrix} \phi_0^* \\ -\phi^- \end{pmatrix} [\nu_{1R} \zeta_1^0 + \nu_{2R} (\zeta_2^0 + \mu_2)] \\
&+ \frac{b_v^*}{\Lambda} [(\bar{\nu}_e \bar{e})_L \zeta_1^0 + (\bar{\nu}_\mu \bar{\mu})_L (\zeta_2^0 + \mu_2)] \begin{pmatrix} \phi_0^* \\ -\phi^- \end{pmatrix} \nu_{3R} \\
&+ c_v^* (\bar{\nu}_\tau \bar{\tau})_L \begin{pmatrix} \phi_0^* \\ -\phi^- \end{pmatrix} \nu_{3R} + h.c.
\end{aligned}$$

que fornece

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y^\nu &= \phi_{\text{aclop}}^- + \frac{a_v^*}{\Lambda} [\bar{\nu}_e \phi_0^* \nu_{2R} - \bar{\nu}_\mu \phi_0^* \nu_{1R}] \eta_0^* \\
&+ \frac{a_v^*}{\Lambda} [\bar{\nu}_e \phi_0^* \nu_{2R} - \bar{\nu}_\mu \phi_0^* \nu_{1R}] \mu_\eta^* + \frac{b_v'^*}{\Lambda} \bar{\nu}_\tau \phi_0^* \nu_{1R} \zeta_1^0 \\
&+ \frac{b_v^*}{\Lambda} \bar{\nu}_\tau \phi_0^* \nu_{2R} \zeta_2^0 + \frac{b_v'^*}{\Lambda} \bar{\nu}_\tau \phi_0^* \nu_{2R} \mu_2 \\
&+ \frac{b_v^*}{\Lambda} \bar{\nu}_e \phi_0^* \nu_{3R} \zeta_1^0 + \frac{b_v^*}{\Lambda} \bar{\nu}_\mu \phi_0^* \nu_{3R} \zeta_2^0 + \frac{b_v^*}{\Lambda} \bar{\nu}_\mu \phi_0^* \nu_{3R} \mu_2 \\
&+ c_v^* \bar{\nu}_\tau \phi_0^* \nu_{3R} + h.c
\end{aligned}$$

e, ainda, na forma matricial

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y^\nu &= \phi_{\text{aclop}}^- + (\eta_0^*)_{\text{aclop}} + (\zeta_1^0)_{\text{aclop}} + (\zeta_2^0)_{\text{aclop}} \\
&+ (\bar{\nu}_e \bar{\nu}_\mu \bar{\nu}_\tau)_L \begin{pmatrix} 0 & \frac{a_v^*}{\Lambda} & 0 \\ -\frac{a_v^*}{\Lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{1R} \\ \nu_{2R} \\ \nu_{3R} \end{pmatrix} \phi_0^* \mu_\eta^* + (\bar{\nu}_e \bar{\nu}_\mu \bar{\nu}_\tau)_L \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b_v^*}{\Lambda} \\ 0 & \frac{b_v'^*}{\Lambda} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{1R} \\ \nu_{2R} \\ \nu_{3R} \end{pmatrix} \phi_0^* \mu_2 \\
&+ (\bar{\nu}_e \bar{\nu}_\mu \bar{\nu}_\tau)_L \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_v^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{1R} \\ \nu_{2R} \\ \nu_{3R} \end{pmatrix} \phi_0^* + h.c
\end{aligned}$$

ao quebrarmos a simetria $SU(2) \otimes U(1)$ com a seguinte aproximação $\phi_0^* \sim H - i\rho + \vartheta$

e, também, definindo-se os seguintes tripletos

$$\nu \equiv \begin{pmatrix} \nu_e & \nu_\mu & \nu_\tau \end{pmatrix}^T; \quad N \equiv \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{pmatrix}^T \quad (6.25)$$

e

$$\begin{aligned} A_\nu &= a_\nu \vartheta \frac{\mu_\eta}{\Lambda}; & B_\nu &= b_\nu \vartheta \frac{\mu_2^*}{\Lambda} \\ B'_\nu &= b'_\nu \vartheta \frac{\mu_2^*}{\Lambda}; & C_\nu &= c_\nu \vartheta \end{aligned}$$

obtemos,

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y^\nu &= \phi_{\text{aclop}}^- + (\eta_0^*)_{\text{aclop}} + (\zeta_1^0)_{\text{aclop}} + (\zeta_2^0)_{\text{aclop}} + (i\rho)_{\text{aclop}} + H_{\text{aclop}} \\ &+ \bar{\nu}_L \begin{pmatrix} 0 & -A_\nu^* & 0 \\ A_\nu^* & 0 & B_\nu^* \\ 0 & B_\nu'^* & C_\nu^* \end{pmatrix} N_R + h.c \end{aligned}$$

ao escrevermos as matrizes de massa na mesma base que escrevemos para os léptons carregados, temos

$$M_D = \begin{pmatrix} 0 & -A_\nu & 0 \\ A_\nu & 0 & B'_\nu \\ 0 & B_\nu & C_\nu \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

Com (6.23) e (6.26) temos as texturas desejadas, mas, como estamos trabalhando com o termo de massa geral Dirac-Majorana, devemos obter o termo de massa de Majorana para os neutrinos pesados através do modelo proposto, uma vez que é necessário utilizar o mecanismo seesaw. Logo, os termos de massa de Majorana para os neutrinos de mão direita são

$$-\mathcal{L}_M^\nu = \frac{1}{2} \lambda_1 [\bar{N}_D N_D^c]_1 \chi'^* + \frac{1}{2} \lambda_2 \bar{N}_S N_S^c \chi^* + h.c \quad (6.27)$$

usando as regras de multiplicação

$$-\mathcal{L}_M^\nu = \frac{1}{2} \lambda_1 [\bar{\nu}_{1R} (\nu_{1R})^c + \bar{\nu}_{2R} (\nu_{2R})^c] \chi'^* + \frac{1}{2} \lambda_2 [\bar{\nu}_{3R} (\nu_{3R})^c] \chi^* + h.c.$$

Os VEVs dos escalares são

$$\langle \chi' \rangle = \mu'_S, \quad \langle \chi \rangle = \mu_S \quad (6.28)$$

que podem ser complexos. Expandindo a lagrangiana em termos desses novos mínimos,

$$\chi^* = \chi_0^* + \mu_S^*; \quad \chi'^* = \chi_0'^* + \mu_S'^*$$

chega-se

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_\nu^M &= \left(\chi_0'^* \right)_{\text{aclop}} + \left(\chi_0^* \right)_{\text{aclop}} + \frac{1}{2} \lambda_1 \left[\bar{\nu}_{1R} (\nu_{1R})^c + \bar{\nu}_{2R} (\nu_{2R})^c \right] \mu_S'^* \\ &+ \frac{1}{2} \lambda_2 \bar{\nu}_{3R} (\nu_{3R})^c \mu_S^* + h.c. \end{aligned}$$

escrevendo a lagrangiana na forma matricial, e usando o tripleto N definido em (6.25), tem-se

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_\nu^M &= \left(\chi_0'^* \right)_{\text{aclop}} + \left(\chi_0^* \right)_{\text{aclop}} \\ &+ \frac{1}{2} \bar{N}_R \begin{pmatrix} \lambda_1 \mu_S'^* & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \mu_S'^* & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \mu_S^* \end{pmatrix} (N^c)_L + h.c. \end{aligned}$$

portanto, a matriz de massa é

$$M_R = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \quad (6.29)$$

com $\mu_1 = \lambda_1 \mu_S'^*$, $\mu_2 = \lambda_2 \mu_S^*$.

A matriz de massa para os neutrinos leves, M_ν , é dada gerada pelo mecanismo seesaw dada na Eq.(6.5), que nos leva ao seguinte cálculo

$$- \begin{pmatrix} 0 & A_\nu & 0 \\ -A_\nu & 0 & B_\nu \\ 0 & B'_\nu & C_\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -A_\nu & 0 \\ A_\nu & 0 & B'_\nu \\ 0 & B_\nu & C_\nu \end{pmatrix}$$

fornecendo-nos

$$M_\nu = - \begin{pmatrix} \frac{A_\nu^2}{\mu_1} & 0 & \frac{A_\nu B'_\nu}{\mu_1} \\ 0 & \frac{A_\nu^2}{\mu_1} + \frac{B_\nu^2}{\mu_2} & \frac{B_\nu C_\nu}{\mu_2} \\ \frac{A_\nu B'_\nu}{\mu_1} & \frac{B_\nu C_\nu}{\mu_2} & \frac{B_\nu'^2}{\mu_1} + \frac{C_\nu^2}{\mu_2} \end{pmatrix} \quad (6.30)$$

A partir das Eqs.(6.23), (6.26) e (6.29), podemos recuperar as texturas mínimas dadas pelas Eqs.(6.1) e (6.6) se (i) $|\mu_1| = |\mu_2| = M_0$ em M_R (onde M_R é dado por (6.7) na base onde M_D tem a forma real, discutida na seção anterior), (ii) $B'_l = B_l$ em M_l ,

e (iii) $B'_\nu = B_\nu$ em M_D . É argumentado em [35] que (i) não é essencial desde que M_D possua autovalores hierarquicos. Podemos verificar isso aplicando uma transformação de refasagem em (6.30), para obter

$$d_\nu^\dagger M_\nu d_\nu^\dagger = \begin{pmatrix} a^2 e^{-i2\delta_2} & 0 & ab' \\ 0 & a^2 e^{i2\delta_1} + b^2 & bc \\ ab' & bc & b'^2 e^{i2\delta_2} + c^2 \end{pmatrix} \quad (6.31)$$

em que $a^2 = \left| \frac{A_\nu^2}{\mu_1} \right|$, $b^2 = \left| \frac{B_\nu^2}{\mu_2} \right|$, $b'^2 = \left| \frac{B_\nu'^2}{\mu_1} \right|$, $c^2 = \left| \frac{C_\nu^2}{\mu_1} \right|$ são números reais. Dada a hierarquia, $c \gg b, b' \gg a$ podemos ver que cada elemento de $M_\nu^\dagger M_\nu$, calculado da Eq.(6.31), não depende das fases δ_1 e δ_2 nos termos principais. Por exemplo, o elemento (1,1) dessa matriz é dado por $a^4 + a^2 b'^2$, que já não depende da fase, já o elemento (2,2) é dado por

$$\begin{aligned} b^2 c^2 + a^4 + b^4 + a^2 b'^2 (e^{i2\delta_1} + e^{-i2\delta_1}) &= b^2 c^2 \left[1 + \frac{a^4}{b^2 c^2} + \frac{b^2}{c^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a^2}{c^2} (e^{i2\delta_1} + e^{-i2\delta_1}) \right] \end{aligned} \quad (6.32)$$

e das hierarquias acima vemos que os termos das fases na Eq.(6.32) são muito suprimidos. Então, podemos considerar M_ν sendo real na primeira aproximação.

Embora com pequenos desvios, que podem ser contornados, veja o apêndice (B), vimos que a simetria S_3 pode ser explorada no MP nos levando a textura de Fritzsch.

7

Conclusão

Como se sabe, o Modelo Padrão possui grandes êxitos e vem sendo testado ao longo dos anos. Entretanto, experimentos de oscilações dos neutrinos são cada vez mais precisos e, como vimos, isso é resultado das massas dos neutrinos e da mistura de sabor no setor leptônico, ambos não incluídos no MP. Segue-se imediatamente desses resultados, que modelos além do MP devem ser propostos, a inclusão das massas dos neutrinos torna-se extremamente necessária.

Ao incluir os neutrinos massivos, surge a questão se eles são partículas de Dirac ou Majorana, possibilidade extra que surge por serem férmions neutros. Até o momento, não há evidências experimentais em que possamos argumentar em favor de uma ou outra possibilidade.

Com θ_{13} não nulo, temos três ângulos de mistura no setor leptônico, e há possibilidade de violação de CP, pois uma fase na matriz PMNS tem agora, a possibilidade de sobreviver. Com esses novos ingredientes no setor leptônico, colocamo-nos em igualdade com o setor dos quarks, onde há três ângulos de mistura e uma fase, levando à violação de CP, mas aqui, com evidências experimentais.

O excesso de parâmetros nas matrizes de massa de ambos os setores, deixa-nos livres para utilizar transformações de bases fracas, mas foi com a textura de Fritzsch, em ambos os setores, que obtivemos êxitos experimentais, tanto para a CKM quanto para a PMNS.

Constamos também, a necessidade do seesaw, mecanismo esse que além de justificar as pequenas massas dos férmions neutros, na ordem de no máximo de alguns

elétron-volts, fornece os valores esperados dos ângulos de mistura e diferença de massas dos neutrinos. O uso desse mecanismo tem implicações que vão ainda além, ele pode indicar que os neutrinos sejam de Majorana.

Pode-se questionar se a falha do MP em prever os valores numéricos da CKM e PMNS, poderia estar nos revelando uma simetria escondida do Modelo Padrão, questionamento este, que se torna ainda mais forte pelo fato de termos as mesmas texturas em ambos os setores, levando-nos a simetria S_3 ser uma ótima candidata como modelo de extensão.

Vimos que ao estendermos o Modelo Padrão, através da inclusão da simetria $G_F = S_3 \otimes Z_5 \otimes Z_3$, fomos capazes de gerar a textura mínima para os léptons proposta por [35], mas, com alguns graus de liberdade adicionais: M_R possui dois elementos diagonais ao invés de um e os elementos (2,3) e (3,2) tanto de M_l quanto de M_D são independentes. Entretanto, se retirarmos essas liberdades extras, conseguiremos reproduzir exatamente o *ansatz* de Fritzsch.

Os efeitos de nova física se dão, também, pelo acréscimo dos cinco campos escalares complexos $\eta, \chi, \chi',$ e $\zeta_i, i = 1, 2$ que foram explorados em [36], entretanto, o potencial escalar deve ser ainda melhor estudado.

Em resumo, fizemos um apanhado geral dos últimos experimentos sobre oscilações, e observamos suas implicações como o descarte da matriz TBM. Vimos que a textura de Fritzsch leva a bons resultados nos dois setores. Discutimos, também, a possibilidade de transformações de bases fracas para alcançarmos *ansatz*. Por fim, construímos um modelo baseado no grupo de permutações de três objetos, S_3 , que pode explicar os dados atuais dos ângulos de mistura no setor dos léptons e que, além disso, poderá ser igualmente explorado no setor dos quarks.



Bases Fracas Invariantes e Violação de CP

É de costume tomar o seguinte caminho para analisar a violação de CP no MP: diagonaliza-se as matrizes de massas para os quarks e nota-se o aparecimento a matriz de mistura V , como feito em (2.2.1), nas correntes carregadas, de onde pode ser feita a análise para condições de violação de CP. Citamos, também, no capítulo 2 como algumas fases podem ser removidas de CKM, através do refasamento dos campos dos quarks, entretanto, pode-se concluir que para 3 ou mais gerações de férmions algumas fases não podem ser removidas.

No presente apêndice, descreveremos o caminho que parece ser o mais natural para os estudos de propriedades de CP, para quaisquer teorias de gauge.

Propriedades de transformação de CP, dos campos em uma dada lagrangiana, são definidas pela parte da lagrangia que conserva CP, sendo assim uma lagrangiana completa, que possui uma parte que conserva CP, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{CP} + \mathcal{L}_{\text{restante}} \quad (\text{A.1})$$

em que $\mathcal{L}_{CP}$ é a parte que conserva CP, tipicamente essa é a parte da lagrangiana que envolve interações de gauge com vários campos. Por exemplo, a lagrangiana para um campo de Dirac ψ , com massa m e carga q agindo com um campo EM, é escrita somente pelo primeiro termo da Eq.(A.1), uma vez que é invariante por transformação

de CP, como veremos a seguir

$$\mathcal{L}_D(t, \vec{r}) = \bar{\psi}(t, \vec{r}) [\gamma_\mu (i\partial^\mu - qA^\mu(t, \vec{r})) - m] \psi(t, \vec{r})$$

sabe-se que, por paridade e que por conjugação de carga, os espinores de Dirac se transformam da seguinte forma

$$\begin{aligned} P\psi(t, \vec{r})P^\dagger &= \exp(i\beta_p) \gamma^0 \psi(t, -\vec{r}) \\ C\psi(t, \vec{r})C^\dagger &= \exp(i\beta_c) \psi^c(t, \vec{r}) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

sendo β fases arbitrárias e $\psi^c = C\bar{\psi}^T$. Combinando-se as duas transformações, conclui-se que para o espinor e seu adjunto se transformam da seguinte forma

$$\begin{aligned} (CP) \psi(t, \vec{r}) (CP)^\dagger &= \exp(i\zeta) \gamma^0 C \bar{\psi}^T(t, -\vec{r}) \\ (CP) \bar{\psi}(t, \vec{r}) (CP)^\dagger &= -\exp(-i\zeta) \psi^T(t, -\vec{r}) C^{-1} \gamma^0 \end{aligned}$$

com $\exp(i\zeta) = \exp(i\beta_p + i\beta_c)$, uma vez que

$$\begin{aligned} (C (P\psi(t, \vec{r})P^\dagger) C^\dagger) &= \exp(i\beta_p) \gamma^0 (C\psi(t, -\vec{r})C^\dagger) \\ &= \exp(i\beta_p + i\beta_c) \psi^c(t, -\vec{r}) \\ &= \exp(i\zeta) \gamma^0 C \bar{\psi}^T(t, -\vec{r}) \end{aligned}$$

que pode ser feito de maneira análoga para o adjunto. Por CP tem-se, também que $\partial^\mu \rightarrow \partial_\mu$ e

$$(CP) A^\mu(t, \vec{r}) (CP)^\dagger = -A_\mu(t, -\vec{r})$$

vamos, agora, retornar a $\mathcal{L}_D$ e aplicar uma transformação de CP:

$$\begin{aligned} (CP) \mathcal{L}_D(t, \vec{r}) (CP)^\dagger &= -\exp(-i\zeta) \psi^T(t, -\vec{r}) C^{-1} \gamma^0 [\gamma_\mu (i\partial_\mu + \\ &+ qA_\mu(t, -\vec{r})) - m] \exp(i\zeta) \gamma^0 C \bar{\psi}^T(t, -\vec{r}) \end{aligned}$$

pode-se notar facilmente que as fases são absorvidas. Das propriedades das matrizes gama, tem-se

$$\begin{aligned} \gamma^0 \gamma_\mu \gamma^0 &= \gamma^\mu \\ C \gamma^\mu &= -\gamma^\mu C \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Então,

$$(CP) \mathcal{L}_D(t, \vec{r}) (CP)^\dagger = -\psi^T(t, -\vec{r}) \left[\gamma^\mu (-i\partial_\mu - qA_\mu(t, -\vec{r})) - m \right] \bar{\psi}^T(t, -\vec{r})$$

a princípio, parece-nos que o sinal negativo está impedindo a invariância, mas lembrando da relação de anti-comutação dos campos de Dirac, que em teoria de campos quânticos, é um operador, chega-se em

$$\begin{aligned} (CP) \mathcal{L}_D(t, \vec{r}) (CP)^\dagger &= -\bar{\psi}(t, -\vec{r}) \left[\gamma^\mu \left(i\overleftarrow{\partial}_\mu + qA_\mu(t, -\vec{r}) \right) + m \right] \psi(t, -\vec{r}) \\ &= \mathcal{L}_D(t, -\vec{r}) \end{aligned}$$

Com o objetivo de analisar se a lagrangiana inteira viola CP, devemos checar se $\mathcal{L}_{CP}$, que é invariante por CP, implica em restrições não triviais, restrições essas que não são automaticamente satisfeitas para os termos restantes da lagrangiana, $\mathcal{L}_{restante}$

- A lagrangiana leva a violação de CP se, e somente se tais restrições existem e não são satisfeitas.

Tipicamente, $\mathcal{L}_{CP}$ permite um grande grau de liberdade de escolhas na definição de transformação de CP, isto é por conta da existência de simetrias internas e naturais. CP é violado somente quando não há possibilidade de escolha de transformação de CP que deixa $\mathcal{L}_{restante}$ invariante.

A.1 Condições para Invariância CP

Vamos considerar a lagrangiana do MP (Modelo Padrão) com o dubleto de Higgs e com um arbitrário número, n_g , de gerações de férmions. A original simetria de gauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ foi quebrada espontaneamente para $U(1)_{EM}$ do eletromagnetismo.

Vamos iniciar escolhendo que parte da lagrangiana que iremos usar para definir CP. Esta será a parte da lagrangiana envolvendo interações de gauge. Devemos considerar as transformações CP dos autoestados de sabor, os campos, U e D . A transformação CP mais geral dos quarks que deixam invariantes as interações de gauge é

$$\begin{aligned} (CP)U_L(t, \vec{r})(CP)^\dagger &= e^{i\zeta_w} K_L \gamma^0 C \bar{U}_L^T(t, -\vec{r}) \\ (CP)D_L(t, \vec{r})(CP)^\dagger &= K_L \gamma^0 C \bar{D}_L^T(t, -\vec{r}) \\ (CP)U_R(t, \vec{r})(CP)^\dagger &= K_R^U \gamma^0 C \bar{U}_R^T(t, -\vec{r}) \\ (CP)D_R(t, \vec{r})(CP)^\dagger &= K_R^D \gamma^0 C \bar{D}_R^T(t, -\vec{r}) \end{aligned} \tag{A.4}$$

onde K_L , K_R^u e K_R^d são matrizes unitárias $n_g \times n_g$. Disto segue que

$$\begin{aligned}
(CP)\bar{U}_L(t, \vec{r})(CP)^\dagger &= -e^{-i\zeta_W} U_L^T(t, -\vec{r})C^{-1}\gamma^0 K_L^\dagger \\
(CP)\bar{D}_L(t, \vec{r})(CP)^\dagger &= -D_L^T(t, -\vec{r})C^{-1}\gamma^0 K_L^\dagger \\
(CP)\bar{U}_R(t, \vec{r})(CP)^\dagger &= -U_R^T(t, -\vec{r})C^{-1}\gamma^0 K_R^{U\dagger} \\
(CP)\bar{D}_R(t, \vec{r})(CP)^\dagger &= -D_R^T(t, -\vec{r})C^{-1}\gamma^0 K_R^{D\dagger}
\end{aligned} \tag{A.5}$$

O aparecimento, nas transformações de CP acima, das matrizes unitárias misturando as famílias não deve nos surpreender. Antes de introduzirmos os acoplamentos de Yukawa, todas as gerações de férmions possuem idênticas interações fracas e os sabores são idestíguíveis. Como resultado, as gerações podem se misturar sob transformação de CP. Essa é a razão do aparecimento das matrizes K_L , K_R^U e K_R^D nas transformações de CP. Estas matrizes são unitárias pois devemos preservar a normalização na lagrangiana. Além disso, a presença de $\bar{U}_L\gamma^\mu D_L$ nas correntes carregadas, $\mathcal{L}_W^{(Q)}$, restringe a U_L e D_L a se transformarem com a mesma matriz unitária K_L . Por outro lado, uma vez que não há corrente carregada para campos de mão direita, U_R e D_R podem se transformar diferentemente.

Vamos verificar se tais tranformações de CP dadas pela equações (A.4) e (A.4) juntamente com as seguintes transformações para os gauges carregados:

$$\begin{aligned}
(CP)W^{+\mu}(t, \vec{r})(CP)^\dagger &= -e^{i\zeta_W} W_\mu^-(t, -\vec{r}) \\
(CP)W^{-\mu}(t, \vec{r})(CP)^\dagger &= -e^{-i\zeta_W} W_\mu^+(t, -\vec{r})
\end{aligned}$$

sendo assim, para a corrente carregada dada na Eq.(2.28), tem-se a seguinte transformação por CP

$$\begin{aligned}
(CP)\mathcal{L}_W^{(Q)}(t, \vec{r})(CP)^\dagger &= \frac{g}{\sqrt{2}} \left(U_L^T(t, -\vec{r})C^{-1}\gamma^0 K_L^\dagger \gamma_\mu K_L \gamma^0 C \bar{D}_L^T(t, -\vec{r}) W_\mu^-(t, -\vec{r}) + \right. \\
&\quad \left. + D_L^T(t, -\vec{r})C^{-1}\gamma^0 K_L^\dagger \gamma_\mu K_L \gamma^0 C \bar{U}_L^T(t, -\vec{r}) W_\mu^+(t, -\vec{r}) \right)
\end{aligned}$$

em que absorvemos as fases de imediato vindas dos campos W e U . Sendo assim, chega-se em

$$\begin{aligned}
(CP)\mathcal{L}_W^{(Q)}(t, \vec{r})(CP)^\dagger &= \frac{g}{\sqrt{2}} \left(-U_L^T(t, -\vec{r})\gamma^\mu \bar{D}_L^T(t, -\vec{r}) W_\mu^-(t, -\vec{r}) - \right. \\
&\quad \left. - D_L^T(t, -\vec{r})\gamma^\mu \bar{U}_L^T(t, -\vec{r}) W_\mu^+(t, -\vec{r}) \right)
\end{aligned}$$

com o uso das relações dadas na Eq.(A.3). Lembrando-se, novamente, das relações de

anticomutação dos férmions, têm-se

$$(CP) \mathcal{L}_W^{(Q)}(t, \vec{r}) (CP)^\dagger = \mathcal{L}_W^{(Q)}(t, -\vec{r})$$

devemos frisar, aqui, que estamos trabalhando nos autoestados de sabor. No caso dos autoestados de massa a matriz de mistura dos quarks, V , surge e somente teremos conservação de CP caso V seja real.

Vamos, agora, considerar a lagrangiana de Yukawa, $\mathcal{L}_Y$, dada pela Eq.(2.5), e testá-la sob as condições das Eq.(A.4) e Eq.(A.5)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y = & - \left[(\overline{U}_L \overline{D}_L) f^D \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} D_R + (\overline{U}_L \overline{D}_L) f^U \begin{pmatrix} \phi^{0\dagger} \\ -\phi^- \end{pmatrix} U_R + (\overline{\nu}_L \overline{l}_L) G \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} l_R \right] \\ & - \left[\overline{D}_R f^{D*} (\phi^- \phi^{0\dagger}) \begin{pmatrix} U_L \\ D_L \end{pmatrix} + \overline{U}_R f^{U*} (\phi^0 - \phi^+) \begin{pmatrix} U_L \\ D_L \end{pmatrix} + \overline{l}_R G^* (\phi^- \phi^{0\dagger}) \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Achamos que para a invariância CP ser mantida, as matrizes de acoplamento de Yukawa f^D e f^U devem satisfazer

$$K_L^\dagger f^U K_R^U = f^{U*} \quad (\text{A.7a})$$

$$K_L^\dagger f^D K_R^D = f^{D*} \quad (\text{A.7b})$$

vamos somente verificar a Eq.(A.7b), uma vez que a outra relação se dá de forma análoga. Tomando-se o primeiro termo da Lagrangiana que envolve ϕ^+ vemos que

$$\overline{U}_L f^D \phi^+ D_R \quad (\text{A.8})$$

ao aplicarmos CP neste termo e sabendo que ϕ^+ se transforma como

$$(CP) \phi^+(t, \vec{r}) (CP)^\dagger = e^{i\zeta_W} \phi^-(t, -\vec{r})$$

Colocando-se todas essas relações de transformações para os campos juntas na Eq.(A.8) temos

$$(CP) \overline{U}_L f^D \phi^+ D_R (CP)^\dagger = -U_L^T C^{-1} \gamma^0 (K_L^\dagger f^D K_R^D) \gamma^0 C \overline{D}_R^T \phi^-$$

uma vez que a matriz γ^0 não atua nas matrizes K e do fato que $(\gamma^0)^2 = 1$, chega-se

$$(CP) \overline{U}_L f^D \phi^+ D_R (CP)^\dagger = \overline{D}_R (K_L^\dagger f^D K_R^D) U_L \phi^- \quad (\text{A.9})$$

comparando-se a Eq.(A.9) com o primeiro termo correspondente ao hermitiano conju-

gado da Eq.(A.8)

$$\overline{D}_R f^{D*} U_L \phi^-$$

conclui-se a relação da Eq.(A.7b).

Será conveniente trabalharmos com as matrizes de massas $M^{(U)} = \vartheta f^U$ e $M^{(D)} = \vartheta f^D$, ao invés de f^U e f^D

$$\begin{aligned} K_L^\dagger M^{(U)} K_R^U &= M^{(U)*} \\ K_L^\dagger M^{(D)} K_R^D &= M^{(D)*} \end{aligned} \quad (\text{A.10a})$$

Podemos, então declarar:

- **Teorema A.1** : A lagrangiana do SM é invariante CP se e somente se as matrizes de massas dos quarks $M^{(U)}$ e $M^{(D)}$ são tais que as matrizes K^L , K_R^U , e K_R^D existam e satisfaçam as equações (A.10a).

O ponto não trivial aqui, é o aparecimento das matrizes K_L em ambas as equações, Eq.(A.10a). Isso é uma consequência da existência de uma corrente carregada conectando os quarks do tipo down- D_L e os quarks do tipo up- U_L . Veremos que, para três ou mais gerações, em geral não podemos encontrar uma matriz K_L satisfazendo ambas as equações (A.10a), e portanto CP pode ser violada. Em contraste, o setor leptônico no MP é invariante CP por causa que as matrizes unitárias K_L^l e K_R^l podem ser sempre encontradas tais que

$$K_L^{l\dagger} M^l K_R^l = M^{l*} \quad (\text{A.11})$$

que de (2.33), temos

$$M^l = \mathcal{U}_L \hat{M}^l \mathcal{V}_R^\dagger \quad (\text{A.12})$$

onde a matriz $\hat{M}^l$ é uma matriz diagonal real; portanto, as matrizes $K_L^l = \mathcal{U}_L \mathcal{U}_L^T$ e $K_R^l = \mathcal{V}_R \mathcal{V}_R^T$ satisfazem a Eq.(A.11). Vamos demonstrar isso: Em termos das matrizes $\mathcal{U}_L$ e $\mathcal{V}_R$ a Eq.(A.11) fica

$$\begin{aligned} K_L^{l\dagger} M^l K_R^l &= (\mathcal{U}_L \mathcal{U}_L^T)^\dagger M^l (\mathcal{V}_R \mathcal{V}_R^T) \\ &= \mathcal{U}_L^* \left(\mathcal{U}_L^\dagger M^l \mathcal{V}_R \right) \mathcal{V}_R^T \\ &= \mathcal{U}_L^* \hat{M}^l \mathcal{V}_R^T \end{aligned}$$

para concluir a igualdade, devemos retornar a Eq.(A.12) e tomar o complexo de ambos os lados, então chega-se na Eq.(A.11).

A partir das matrizes de massa, podemos definir, também, as seguintes matrizes

hermitianas

$$\begin{aligned} H_U &\equiv M^{(U)} M^{(U)\dagger} \\ H_D &\equiv M^{(D)} M^{(D)\dagger} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

que facilmente, a partir de (2.21), chega-se em

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_U^\dagger H_U \mathcal{V}_U &= (\hat{M}^{(U)})^2 \\ \mathcal{U}_D^\dagger H_D \mathcal{V}_U &= (\hat{M}^{(D)})^2 \end{aligned}$$

vemos que as equações (A.10a) implicam que,

$$\begin{aligned} K_L^\dagger H_U K_L &= H_U^* \\ K_L^\dagger H_D K_L &= H_D^* \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

como veremos a seguir.

$$K_L^\dagger H_U K_L = K_L^\dagger M^{(U)} M^{(U)\dagger} K_L$$

mas, sabe-se que as matrizes K são unitárias, dessa forma

$$\begin{aligned} K_L^\dagger M^{(U)} M^{(U)\dagger} K_L &= (K_L^\dagger M^{(U)} K_R^U) (K_R^{U\dagger} M^{(U)\dagger} K_L) \\ &= M^{(U)*} M^{(U)T} \\ &= H_U^* \end{aligned}$$

Se a equação (A.14) se mantém, então as matrizes

$$\begin{aligned} K_R^U &= (M^{(U)})^{-1} K_L M^{(U)*} \\ K_R^D &= (M^{(D)})^{-1} K_L M^{(D)*} \end{aligned}$$

são unitárias e satisfazem as equações (A.10a).

Terminaremos esta seção incluindo mais um teorema

- **Teorema A.2:** A lagrangiana do MP é invariante CP se e somente se as matrizes $H_U \equiv M^{(U)} M^{(U)\dagger}$ e $H_D \equiv M^{(D)} M^{(D)\dagger}$ são tais que a matriz unitária K_L exista e satisfaça a Eq.(A.14).

A.2 Transformações de Bases Fracas

Uma vez que $M^{(U)}$ e $M^{(D)}$ são matrizes complexas $n_g \times n_g$, elas contém um total de $4n_g^2$ números reais. Entretanto, há um grande número de informações não físicas nessas matrizes, que é adequado para fazermos transformações em bases fracas (WBT-weak basis transformations).

Quando uma teoria possui muitos campos com os mesmos números quânticos - os n_g multipletos Q_L (2.1b)- um é livre para ser reescrito em termos de lagrangianas de novos campos, obtido do campo original por meio de uma transformação unitária que mistura eles. Tais mudanças de bases fracas (WB) são extensões de liberdade que em geral se tem para refasar um campo. Uma WBT é uma transformação de campos de férmions que deixam os termos cinéticos invariantes bem como as interações de gauge. A WBT depende sobre a teoria de gauge que está em consideração, isto porque se houver mais interações de gauge, em princípio, haverá menos graus de liberdade para fazer uma WBT. No MP uma WBT é definido por

$$\begin{aligned} Q_L &= W_L Q'_L, \\ U_R &= W_R^U U'_R, \\ D_R &= W_R^D D'_R, \end{aligned}$$

onde as matrizes W_L , W_R^U e W_R^D são matrizes unitárias agindo na “family space”- famílias de multipletos idênticos que podem ser multiplicados por transformações de bases fracas- e Q_L representa o dubleto dos quarks U_L e D_L . Sob esta WBT as matrizes contidas na Eq.(A.6) se transformam como

$$\begin{aligned} M^{(U)'} &= W_L^\dagger M^{(U)} W_R^U, \\ M^{(D)'} &= W_L^\dagger M^{(D)} W_R^D, \end{aligned} \tag{A.15}$$

As matrizes transformadas $M^{(U)'}$ e $M^{(D)'}$ possuem o mesmo conteúdo físico que as matrizes originais $M^{(U)}$ e $M^{(D)}$. Podemos usar a liberdade de uma WBT para colocar um $M^{(U)}$ e/ou $M^{(D)}$ em uma forma especial. Por exemplo, no MP, através de uma WBT podemos fazer $M^{(D)}$ hermitiana e simultaneamente $M^{(U)}$ diagonal com elementos reais não negativos. Em particular há uma WB na qual

$$\begin{aligned} H_U &= \text{diag}(m_u^2, m_c^2, m_t^2 \dots) \\ H_D &\equiv H'_D = V \text{diag}(m_d^2, m_s^2, m_b^2 \dots) V^\dagger \end{aligned} \tag{A.16}$$

como alternativa, podemos considerar outro WB, em que

$$\begin{aligned} H_U &\equiv H'_U = V \text{diag}(m_u^2, m_c^2, m_t^2 \dots) V^\dagger \\ H_D &= \text{diag}(m_d^2, m_s^2, m_b^2 \dots) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

onde V é a matriz CKM. Em uma WBT podemos reescrever a lagrangeana em termos de novos campos que fisicamente devem ser invariantes sob tais mudanças. O resultado sobre qualquer processo físico pode somente depender sobre quantidades WB invariantes. Essas quantidades são especialmente úteis para análises de violação de CP. De fato, a possibilidade de se refasar cada campo significa que há fases ilegítimas na lagrangiana. Essas fases devem ser com cuidado distinguidas das fases físicas que são as marcas da violação de CP.

Suponhamos que, em uma particular WB, as matrizes K_L , K_R^U e K_R^D existam e satisfaçam a Eq.(A.10a). Em outra WB as matrizes de acoplamento de Yukawa são dadas por (A.15). Então, as matrizes unitárias

$$\begin{aligned} K'_L &\equiv W_L K_L W_L^T \\ K_R^{U'} &\equiv W_R^U K_R^U W_R^{U\dagger} \\ K_R^{D'} &\equiv W_R^D K_R^D W_R^{DT} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

satisfazem

$$\begin{aligned} K_L'^{\dagger} M^{(U)'} K_R^{U'} &= M^{(U)'} \\ K_L'^{\dagger} M^{(D)'} K_R^{D'} &= M^{(D)'} \end{aligned}$$

Então, o teorema 2.1 é invariante sob uma mudança WB.

A.3 Bases Fracas Invariantes

Quantidades fisicamente significantes devem ser invariantes sob as Eqs.(A.15). Com o objetivo de achar tais quantidades devemos livrar-se do conjunto de matrizes unitárias arbitrárias W_L , W_R^U e W_R^D . Fazemos isto, primeiro considerando as matrizes H_U e H_D , que nos permitem eliminar as matrizes unitárias W_R^U e W_R^D . De fato,

$$\begin{aligned} H'_U &= W_L^\dagger H_U W_L \\ H'_D &= W_L^\dagger H_D W_L \end{aligned}$$

Então, os traços de arbitrários polinômios de H_U e H_D são invariantes WB. A partir da seguinte propriedade para os traços $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ isso pode ser facilmente

verificado

$$\begin{aligned}\text{Tr}(H'_U) &= \text{Tr}(W_L^\dagger H_U W_L) \\ &= \text{Tr}(W_L^\dagger W_L H_U) \\ &= \text{Tr}(H_U)\end{aligned}$$

Sendo assim, além de $\text{Tr}(H_U)$ temos $\text{Tr}(H_D^2 H_U)$ e $\text{Tr}(H_D H_U H_D^2 H_U^2)$ invariantes sob WBT e, portanto são em princípio quantidades fisicamente significantes. Considerando quaisquer das bases fracas nas Eqs.(A.16) e (A.17), vemos que

$$\begin{aligned}\text{Tr}(H_U^\alpha) &= m_u^{2\alpha} + m_c^{2\alpha} + m_t^{2\alpha} + \dots \\ \text{Tr}(H_D^\alpha) &= m_d^{2\alpha} + m_s^{2\alpha} + m_b^{2\alpha} + \dots\end{aligned}$$

são quantidades fisicamente significantes.

Antes de mostrarmos mais uma quantidade com significado físico vamos mostrar como se define os invariantes mais simples por uma dada refasagem.

Como comentado em (2.2.2) a matriz CKM, V , é complexa, mas algumas das fases não possuem significados físicos. De fato, temos a liberdade de refasagem para os campos de quarks, isto também foi feito no 6 para os léptons no modelo em que há massas dos neutrinos

$$\begin{aligned}U_\alpha &= e^{i\psi_\alpha} U'_\alpha \\ D_k &= e^{i\psi_k} D'_k\end{aligned}$$

com n_g fases arbitrárias ψ_α e n_g fases arbitrárias ψ_k . Sob estas transformações V se transforma como

$$V'_{\alpha k} = e^{i(\psi_k - \psi_\alpha)} V_{\alpha k}$$

Quantidades fisicamente significantes devem ser invariantes sob a refasagem dos campos; somente funções de V que são invariantes por refasagem podem ser mensuráveis. Os invariantes mais simples são os módulos dos elementos de matrizes, definidos por

$$U_{ai} \equiv |V_{ai}|^2 \quad (\text{A.19})$$

Os próximos invariantes mais simples são os “quartests”

$$Q_{ai\beta j} \equiv V_{ai} V_{\beta j} V_{\alpha j}^* V_{\beta i}^* \quad (\text{A.20})$$

Aqui exigimos que $\alpha \neq \beta$ e $i \neq j$ para impedir que isso não se reduza ao produto de dois módulos ao quadrado. É fácil verificar que $Q_{\alpha i \beta j} = Q_{\beta j \alpha i} = Q_{\alpha j \beta i}^* = Q_{\beta i \alpha j}^*$

Estamos aptos a expressar outra quantidade com significado físico que é dada por $\text{Tr}(H_D^r H_U^s)$. Temos

$$(H_U^r H_D^s)_{ik} = \sum_j (H_U^r)_{ij} (H_D^s)_{jk} \quad (\text{A.21})$$

mas, por (A.16) temos

$$\begin{aligned} (H_D^s)_{jk} &= \sum_{nl} V_{jn} m_{(n)}^{2s} \delta_{nl} (V_{lk}^*)^T \\ &= \sum_n m_{(n)}^{2s} V_{kn}^* V_{jn} \end{aligned}$$

assim como

$$(H_U^r)_{ij} = m_{(i)}^{2r} \delta_{ij}$$

ao substituirmos essas últimas igualdades na Eq.(A.21) encontramos

$$(H_U^r H_D^s)_{ik} = m_{(j)}^{2r} m_{(n)}^{2s} \sum_n V_{kn}^* V_{in}$$

portanto, ao tomarmos seu traço e usando a Eq.(A.19), chega-se em:

$$\text{Tr}(H_D^r H_U^s) = \sum_{\alpha=u,c,t} \sum_{i=d,s,b} m_{\alpha}^{2r} m_i^{2s} U_{\alpha i}$$

Então, quantidades WB - invariantes em geral são fisicamente mensuráveis.

A.4 Condições de Bases Fracas Invariantes para Invariância de CP

Queremos derivar uma condição necessária para invariância CP, expressa em termos de invariantes de bases fracas. Como as matrizes K_L , K_R^U e K_R^D são WB dependentes, de acordo com a Eq.(A.18), isso na prática é equivalente a eliminar as matrizes das condições para invariância CP. Iniciamos de (A.14), em que K_R^U e K_R^D já estão ausentes. Como $H_U^* = H_U^T$ e $H_D^* = H_D^T$, uma vez que são matrizes hermitianas, obtemos

$$K_L^\dagger [H_U, H_D] K_L = K_L^\dagger H_U H_D K_L - K_L^\dagger H_D H_U K_L$$

como as matrizes K são unitárias

$$\begin{aligned}
&= (K_L^\dagger H_U K_L)(K_L^\dagger H_D K_L) - (K_L^\dagger H_D K_L)(K_L^\dagger H_U K_L) \\
&= H_U^* H_D^* - H_D^* H_U^* \\
&= H_U^T H_D^T - H_D^T H_U^T
\end{aligned}$$

portanto

$$K_L^\dagger [H_U, H_D] K_L = [H_U^T, H_D^T]$$

mas,

$$\begin{aligned}
[H_U^T, H_D^T] &= (H_D H_U)^T - (H_U H_D)^T \\
&= [H_D, H_U]^T
\end{aligned}$$

concluindo

$$K_L^\dagger [H_U, H_D] K_L = -[H_U, H_D]^T \quad (\text{A.22})$$

Multiplicamos (A.22) por ela mesma um número r de vezes, com r ímpar, obtemos

$$K_L^\dagger [H_U, H_D]^r K_L = -[H_U, H_D]^{rT}$$

tomando-se seu traço, e lembrando que $\text{Tr}(A^T) = \text{Tr}(A)$, temos

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(K_L^\dagger [H_U, H_D]^r K_L) &= \text{Tr}([H_U, H_D]^r) \\
&= \text{Tr}(-[H_U, H_D]^r)
\end{aligned}$$

De onde conclui-se que

$$\text{Tr}[H_U, H_D]^r = 0 \quad \text{para } r \text{ ímpar} \quad (\text{A.23})$$

A Eq.(A.23) não é trivial se $r \geq 3$. Para $r = 1$ isso é trivial, uma vez que o traço de um comutador é identicamente igual a zero.

A Eq.(A.23) é uma condição necessária para invariância CP, válida para um número arbitrário de gerações.

Pode-se encontrar, também

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[H_U, H_D]^3 &= 6i \text{ImTr}(H_U^2 H_D^2 H_U H_D) \\
&= 6i \sum_{\alpha, \beta=u, c, t} \sum_{i, j=d, s, b} m_\alpha^4 m_\beta^2 m_i^4 m_j^2 \text{Im} Q_{\alpha i \beta j}
\end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

uma vez que

$$\begin{aligned}
(H_U^2 H_D^2 H_U H_D)_{ij} &= \sum_{l,m,k} (H_U^2)_{il} (H_D^2)_{lm} (H_U H_D)_{mj} \\
&= \sum_{l,m,k} \sum_{n,s} m_{(i)}^4 \delta_{il} m_{(n)}^4 V_{mn}^* V_{ln} m_{(m)}^2 m_{(s)}^2 V_{js}^* V_{ms} \\
&= \sum_m \sum_{n,s} m_{(i)}^4 m_{(k)}^2 m_{(n)}^4 m_{(s)}^2 V_{in} V_{ms} V_{js}^* V_{mn}^*
\end{aligned}$$

Ao calcularmos o traço

$$\begin{aligned}
6i \text{ImTr} (H_U^2 H_D^2 H_U H_D) &= 6i \sum_{m,i} \sum_{n,s} m_{(i)}^4 m_{(k)}^2 m_{(n)}^4 m_{(s)}^2 \text{Im} V_{in} V_{ms} V_{is}^* V_{mn}^* \\
&= 6i \sum_{m,i} \sum_{n,s} m_{(i)}^4 m_{(k)}^2 m_{(n)}^4 m_{(s)}^2 \text{Im} Q_{inms}
\end{aligned}$$

onde usamos a definição do quartests dada pela Eq.(A.20).

A.5 Duas e Três Gerações

A.5.1 $n_g = 2$

A condição da Eq.(A.23) deve ser automaticamente satisfeita, no caso de duas gerações, pois não há violação de CP no MP quando $n_g = 2$. Isso pode ser mostrado de diferentes maneiras. Por exemplo, é bem conhecido que o número de fases contidas na matriz de mistura de quarks para um número arbitrário de gerações é dado por

$$N_{\text{fase}} = \frac{1}{2} (n_g - 1) (n_g - 2) \quad (\text{A.25})$$

Então, no caso de $n_g = 2$, temos $N_{\text{fase}} = 0$. Sendo assim, para duas gerações de quarks não há fase que não possa ser removida e portanto pode ser encontrado a forma em que V seja real, então não há violação de CP.

Outra maneira de se concluir a mesma coisa é analisando o segundo termo invariante pelas refasagens da matriz CKM na Eq.(A.20) no caso de duas gerações. Neste caso, a única possibilidade para os quartests é

$$Q_{udcs} = V_{ud} V_{cs} V_{us}^* V_{cd}^*$$

Da condição de unitariedade da matriz CKM em duas gerações, temos

$$V_{ud} V_{cd}^* + V_{us} V_{cs}^* = 0 \quad (\text{A.26})$$

Ao multiplicarmos a Eq.(A.26) por $V_{us}^* V_{cs}$, chega-se em

$$V_{ud} V_{cs} V_{us}^* V_{cd}^* = -|V_{us}|^2 |V_{cs}|^2$$

com o uso, também, da Eq.(A.19) chega-se em

$$Q_{udcs} = -U_{us} U_{cs} \quad (\text{A.27})$$

então, novamente, pelo fato de Q_{udcs} ser real não há violação de CP. Finalmente, ao analisarmos a Eq.(A.24), vemos que a identidade da Eq.(A.23) é imediatamente satisfeita, uma vez que $\text{Im}Q_{udcs} = 0$, de acordo com a Eq.(A.27).

A.5.2 $n_g = 3$

Antes de analisarmos a Eq.(A.24) no caso de três gerações, vamos analisar quantas fases físicas estão contidas na CKM para três gerações e também as relações para seus quartests.

A partir da Eq.(A.26) temos que para $n_g = 3$ o número de fases físicas é $N_{fase} = 1$, que é a fase que gera violação de CP. Vamos demonstrar isso de uma outra maneira.

A relação de ortogonalidade das primeiras duas linhas da CKM com três gerações, fornece-nos

$$V_{ud} V_{cd}^* + V_{us} V_{cs}^* + V_{ub} V_{cb}^* = 0 \quad (\text{A.28})$$

multiplicando a Eq.(A.28) por $V_{us}^* V_{cs}$, chega-se em

$$V_{ud} V_{cs} V_{us}^* V_{cd}^* + |V_{us}|^2 |V_{cs}|^2 + V_{ub} V_{cs} V_{cb}^* V_{us}^* = 0 \quad (\text{A.29})$$

tomando-se a parte imaginária da Eq.(A.29), temos

$$\text{Im}Q_{udcs} = -\text{Im}Q_{ubcs} \quad (\text{A.30})$$

Então, os dois quartests Q_{udcs} e Q_{ubcs} possuem as partes imaginárias simétricas. Procedendo-se da mesma maneira para as outras relações de ortogonalidade de V , pode ser mostrada a mesma relação da Eq.(A.30) para quaisquer pares de linhas ou colunas de V , então todas as partes imaginárias dos quartests são iguais a menos de um sinal. Sendo assim, podemos definir

$$J \equiv \text{Im}Q_{uscb} = \text{Im}(V_{us} V_{cb} V_{ub}^* V_{cs}^*) \quad (\text{A.31})$$

com J sendo conhecido como invariante de Jarlskog. Portanto, a parte imaginária de

todos os quartests são iguais a J , a menos de um sinal. Disto, retornamos a Eq.(A.24) para o caso de três gerações. Com o uso de (A.31) pode ser encontrado que

$$\begin{aligned} \text{Tr} [H_U, H_D]^3 &= 6i (m_t^2 - m_c^2) (m_t^2 - m_u^2) (m_c^2 - m_u^2) \\ &\times (m_b^2 - m_s^2) (m_b^2 - m_d^2) (m_s^2 - m_d^2) J \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Pode-se concluir a partir de (A.32) que para termos violação de CP as massas de todos os quarks-up (u, c, t) não podem ser degeneradas, as massas de todos os quarks-down (d, b, s), também, não podem e J não pode ser nulo.

B

Desvios da Textura Mínima

Vamos analisar as consequências dos desvios de M_l e M_D da textura mínima dada na em (6.1). A textura que obtivemos através do modelo proposto, tanto para M_D quanto para M_l foi:

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & -A & 0 \\ A & 0 & B' \\ 0 & B & C \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Esta textura generaliza a textura mínima (6.1) em que B e B' não são necessariamente iguais. Esperamos que $|B| \sim |B'|$ tal que a hierarquia $|A| \ll |B|, |B'| \ll |C|$ seja mantida em conformidade com as hierarquias das massas $m_1 \ll m_2 \ll m_3$.

Uma vez que M' , dada em (B.1) não é mais simétrica, mesmo se eliminarmos o sinal de menos do elemento (1, 2), a matriz de massa relevante que nos fornece os quadrados das massas é $M'^{\dagger}M'$. Esta matriz pode sempre tomar a forma real

$$|M'^{\dagger}M'| = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & ab' \\ 0 & a^2 + b^2 & bc \\ ab' & bc & b'^2 + c^2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

pelo refasamento apropriado dos campos, com $a \equiv |A|$, $b \equiv |B|$, $b' \equiv |B'|$ e $c \equiv |C|$. Vemos que a Eq.(B.2) possui a mesma forma da Eq.(6.31) quando as fases são negligenciadas.

Com o objetivo de calcular os desvios da textura mínima, vamos obter o polinômio característico de (B.2). O polinômio característico para uma matriz quadrada qualquer A é dado por

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) \quad (\text{B.3})$$

em que I_n é a matriz identidade de ordem n e λ uma incógnita. Para uma matriz quadrada de ordem 3 a Eq.(B.3) assume a seguinte forma

$$\Delta(\lambda) = \lambda^3 - \text{Tr}(A) \lambda^2 + (A_{11} + A_{22} + A_{33}) \lambda - \det(A) \quad (\text{B.4})$$

sendo A_{11}, A_{22} e A_{33} , respectivamente os cofatores¹ de a_{11}, a_{22} e a_{33} . Vamos, então, obter a Eq.(B.4) para a matriz $|M'^{\dagger}M'|$, segue-se que

$$\begin{aligned} \text{Tr}(|M'^{\dagger}M'|) &= 2a^2 + b^2 + b'^2 + c^2 \\ \det(|M'^{\dagger}M'|) &= a^4 c^2 \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

e por fim

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 |M'^{\dagger}M'|_{ii} &= \begin{vmatrix} a^2 + b^2 & bc \\ bc & b'^2 + c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^2 & b'a \\ b'a & b'^2 + c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{vmatrix} \\ &= (a^2 + b^2)(a^2 + b'^2) + 2a^2 c^2 \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Portanto, com os resultados de (B.5) e (B.6) encontramos o seguinte polinômio característico para (B.2)

$$\lambda^3 - (2a^2 + b^2 + b'^2 + c^2) \lambda^2 + [(a^2 + b^2)(a^2 + b'^2) + 2a^2 c^2] \lambda - a^4 c^2 = 0 \quad (\text{B.7})$$

A Eq.(B.7) deve ser comparada com o polinômio característico para $|M|^2$ que é obtido da Eq.(B.2) quando $b = b'$. Sabemos que $|M|^2$ possui os seguintes autovalores (m_1^2, m_2^2, m_3^2) com os mesmos autovetores de $|M|$

$$|M| = \begin{pmatrix} 0 & |A| & 0 \\ |A| & 0 & |B| \\ 0 & |B| & |C| \end{pmatrix}$$

Se identificarmos os autovalores de $|M'^{\dagger}M'|$ com (m_1^2, m_2^2, m_3^2) , podemos escrever a, c

¹Os cofatores são definidos da seguinte maneira: Dada uma matriz $A = [a_{ij}]$ quadrada de ordem n . Seja M_{ij} a submatriz de A de ordem $(n - 1)$ obtida pela exclusão de sua linha i e de sua coluna j . O determinante $|M_{ij}|$ é chamado de *menor* relativo ao elemento a_{ij} de A e definimos o *cofator* de a_{ij} , denotado por A_{ij} , como sendo o menor com um “sinal”: $A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$.

e $\bar{b} \equiv \sqrt{\frac{1}{2}(b^2 + b'^2)}$ como funções das massas e um grau de liberdade restante por conta de que em princípio $b \neq b'$, quantificado por $\Delta b^2 \equiv b^2 - b'^2$. Assume-se $m_3 > m_2 > m_1$ para nas expressões a seguir.

Vamos analisar as relações de $a, c, \bar{b}$ com as massas e Δb^2 . A relação entre a e c é a mesma fornecida que pela textura mínima, quando $b = b'$ e é obtida igualando o $\det(|M'^{\dagger}M'|) = m_1^2 m_2^2 m_3^2$ com a equação do determinante dada na Eq.(B.5)

$$a = \sqrt{\frac{m_1 m_2 m_3}{c}} \quad (\text{B.8})$$

já a relação entre $\bar{b}$ e c é obtida igualando-se $\text{Tr}(|M'^{\dagger}M'|) = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2$ com o traço da Eq.(B.5)

$$(\bar{b})^2 = \frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - c^2) - \frac{m_1 m_2 m_3}{c} \quad (\text{B.9})$$

Por fim, c pode ser obtido como uma raiz da equação

$$(c^2 - m_1^2 - m_2^2 - m_3^2)^2 - (\Delta b^2)^2 = 4(m_1^2 m_2^2 + m_2^2 m_3^2 + m_1^2 m_3^2) - 8m_1 m_2 m_3 c \quad (\text{B.10})$$

que se obtém quando igualamos $\sum_{i=1}^3 |M'^{\dagger}M'|_{ii} = m_1^2 m_2^2 + m_2^2 m_3^2 + m_1^2 m_3^2$ com a Eq.(B.6), para esse cálculo usa-se, também, a Eq.(B.8) para a . Entre as possíveis raízes a única que reduz as expressões obtidas por Fritzsch [33] (que analisou a mesma textura, mas considerando os quarks) no limite $\Delta b^2 \rightarrow 0$ é

$$c_0 \equiv m_1 - m_2 + m_3,$$

Em geral, podemos escrever

$$c = c_0 + \delta c \quad (\text{B.11})$$

Para quantificar o desvio δc , devemos reescrever a Eq.(B.10) em termos dos desvios relativos $\delta c/c_0$, que fornece

$$\frac{1}{4} \left(\frac{\delta c}{c_0} \right)^4 + \left(\frac{\delta c}{c_0} \right)^3 + \alpha_2 \left(\frac{\delta c}{c_0} \right)^2 + \alpha_1 \left(\frac{\delta c}{c_0} \right) = \left(\frac{\Delta b^2}{2c_0^2} \right)^2 \quad (\text{B.12})$$

com

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -2 \frac{b_0^2}{c_0^2} \\ \alpha_2 &= \frac{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + [m_1 m_3 - m_2 (m_1 + m_3)]}{c_0^2}\end{aligned}$$

e

$$b_0 \equiv \sqrt{\frac{(m_2 - m_1)(m_1 + m_3)(m_3 - m_2)}{m_1 - m_2 + m_3}} \quad (\text{B.13})$$

A Eq.(B.13) corresponde a $b = b'$ na textura mínima e pode ser obtida da Eq.(B.9) no limite em que $c = c_0$, vejamos isso

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - c_0^2) - \frac{m_1 m_2 m_3}{c_0} &= \frac{1}{2} [m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - (m_1 - m_2 + m_3)^2] \\ &- \frac{m_1 m_2 m_3}{m_1 - m_2 + m_3},\end{aligned}$$

que então fornece

$$\begin{aligned}&= \frac{(m_1 m_2 - m_1 m_3 + m_2 m_3) (m_1 - m_2 + m_3) - m_1 m_2 m_3}{m_1 - m_2 + m_3} \\ &= \frac{(m_2 - m_1)(m_1 + m_3)(m_3 - m_2)}{m_1 - m_2 + m_3}\end{aligned}$$

A Eq.(B.12) pode ser resolvida numericamente, mas podemos buscar uma solução aproximada que vá a zero quando $\Delta b^2 \rightarrow 0$. Para quantificarmos Δb^2 melhor, podemos parâmetrizar Δb^2 por duas formas

$$\Delta b^2 = 2\bar{b}^2 \beta \quad (\text{B.14})$$

ou

$$\Delta b^2 = 2b_0^2 \beta_0 \quad (\text{B.15})$$

dependendo da escolha dos parâmetros de entrada, seja por $\{a, \bar{b}, c\}$ ou pelas massas $\{m_i\}$. Uma vez que $\bar{b}$ se aproxima de b_0 no limite em que $\Delta b^2 \rightarrow 0$, tem-se $\beta = \beta_0$ para pequenos valores. Para grandes valores, β rigorosamente obedece $|\beta| \lesssim 1$ por definição, enquanto que $|\beta_0|$ pode assumir valores maiores do que um, mas ainda é preciso que $|\beta| \lesssim 1$ para garantir $b \sim b'$. Podemos obter uma solução aproximada para

a Eq.(B.12) quando desprezamos os termos quárticos e cúbicos,

$$\alpha_2 \left(\frac{\delta c}{c_0} \right)^2 - 2 \frac{b_0^2}{c_0^2} \left(\frac{\delta c}{c_0} \right) - \left(\frac{2b_0^2 \beta_0}{2c_0^2} \right)^2 = 0 \quad (\text{B.16})$$

de onde obtemos, tomando-se apenas a raiz positiva

$$\frac{\delta c}{c_0} \approx \frac{-b_0^2}{c_0^2} f(\beta_0) \quad (\text{B.17})$$

onde

$$f(\beta_0) \equiv \frac{1}{\alpha_2} \left[\sqrt{1 + \alpha_2 \beta_0^2} - 1 \right]$$

Considerando a hierarquia para o espectro $m_1 \ll m_2 \ll m_3$, tem-se $b_0^2/c_0^2 \approx m_2/m_3$ pois,

$$\begin{aligned} \frac{b_0^2}{c_0^2} &= \frac{(m_2 - m_1)(m_1 + m_3)(m_3 - m_2)}{(m_1 - m_2 + m_3)^3} \\ &= \frac{1}{m_3^3} \frac{(m_2 - m_1)(m_1 + m_3)(m_3 - m_2)}{\left(1 - \frac{m_2}{m_3} + \frac{m_1}{m_3}\right)^3} \\ &\approx \frac{m_2}{m_3} \end{aligned}$$

que leva a um erro para a Eq.(B.17) da ordem de $\beta_0^6 b_0^6 / c_0^6 \sim \beta_0^6 m_2^3 / m_3^3$, uma vez que a contribuição do erro vem quase que toda de $(\delta c / c_0)^3$, que desconsideramos em (B.16),

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta c}{c_0} \right)^3 &\approx \left[\frac{-b_0^2}{c_0^2} f(\beta_0) \right]^2 \\ &\approx -\frac{\beta_0^6 b_0^6}{c_0^6} \end{aligned}$$

pois, $f(\beta_0) \approx \beta_0^2$. Podemos ver que o desvio relativo $\delta c / c_0$ é pequeno e δc é no máximo na ordem de m_2 desde que $b \sim b'$.

Como se espera que b e b' sejam da mesma ordem, (lembrando-se novamente que $|B| \sim |B'|$ tal que a hierarquia $|A| \ll |B|$, $|B'| \ll |C|$ seja mantida, com $b \equiv |B|$, $b' \equiv |B'|$) eles variam significativamente com β_0 (ou β) na Eq.(B.15) (ou na Eq.(B.14)). Podemos escrever b e b' como função de massa e β_0 ,

$$\Delta b^2 = \frac{2(m_2 - m_1)(m_1 + m_3)(m_3 - m_2)}{m_1 - m_2 + m_3} \beta_0 \quad (\text{B.18})$$

Então, para um dado β_0 e massas $\{m_i\}$, recorrendo-se, também das Eqs.(B.8) e (B.9),

a matriz (B.2) pode ser determinada.

No caso das matrizes M_l e M_D , dadas pelas Eqs.(6.23) e (6.26), suas texturas modificadas (B.1) introduzem mais dois graus de liberdade que podemos parametrizar como β_{0l} e $\beta_{0\nu}$. Pode ser verificado em [13], por exemplo, que as soluções dadas em (6.12) podem ser ampliadas significativamente quando β_{0l} e $\beta_{0\nu}$ podem variar sob o intervalo $|\beta_{0\alpha}| \lesssim 1$, $\alpha = l, \nu$. Além da solução $\beta_{0l} = \beta_{0\nu} = 0$, que necessariamente estão presentes, pode-se achar soluções além deste ponto.

Como um exemplo, uma comparação numérica entre dois casos pode ser feita: (i) a textura mínima ($\beta_{0l} = \beta_{0\nu} = 0$) e (ii) $(\beta_{0l}, \beta_{0\nu}) = (1, -0.418)$; (ii) é significamente diferente do caso mínimo. Como discutido a pouco, usa-se $\beta_{0\nu}$ ao invés de β_{0l} devido aos valores de entrada para os parâmetros, que nesse caso foram $\{a, \bar{b}, c\}$ ao invés das massas dos neutrinos. As comparações são feitas nas figuras abaixo, retirados de [13]. Na Fig.5.1, é mostrado $\sin^2\theta_{13}$ como uma função de $\sin^2\theta_{23}$. Pode ser visto que para os dois casos (i) e (ii) são indistinguíveis. Na Fig.5.2 é mostrado $\sin^2\theta_{12}$ como uma função da massa do neutrino mais leve m_1 , em que os dois casos (i) e (ii) são quase completamente separados.

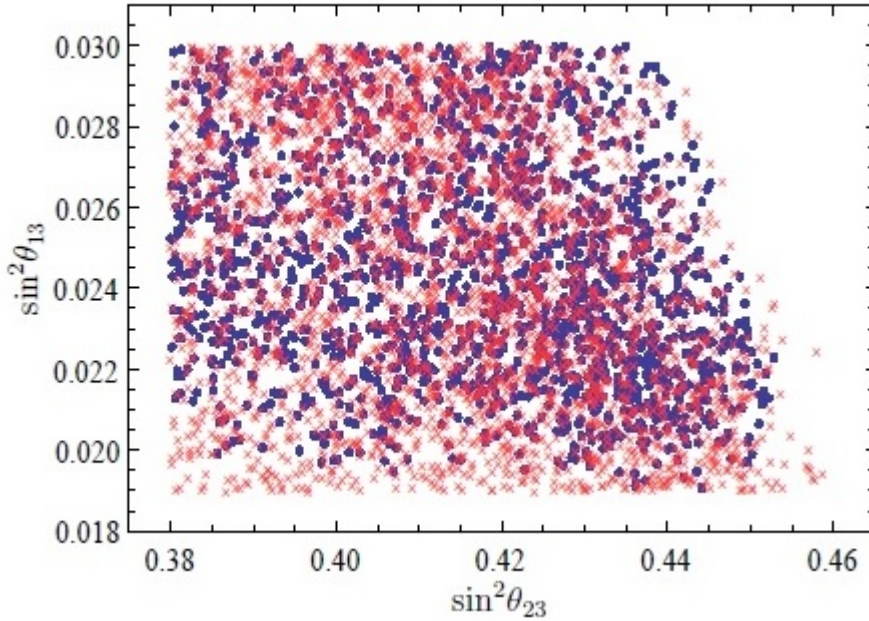


Figura B.1: $\sin^2\theta_{13}$ como uma função de $\sin^2\theta_{23}$; os símbolos $\times$ correspondem a $(\beta_{0l} = \beta_{0\nu} = 0)$ enquanto que os pontos correspondem a $(\beta_{0l}, \beta_{0\nu}) = (1, -0.418)$ - extraído de [13].

Para gerar esses pontos, o seguinte procedimento foi usado por [13]. Utilizou-se como entrada para o setor leptônico carregado, os valores centrais das massas (m_e, m_μ, m_τ) [14] e β_{0l} , que determina os valores da matriz (B.2), como discutido na Eq.(B.18). Para o setor dos neutrinos, usou-se $\{a, \bar{b}, c, \beta_{0\nu}\}$ como entrada para fixar a matriz de massa (6.31), com $\delta_1 = \delta_2 = 0$. As duas fases δ e τ (6.9) completaram a lista

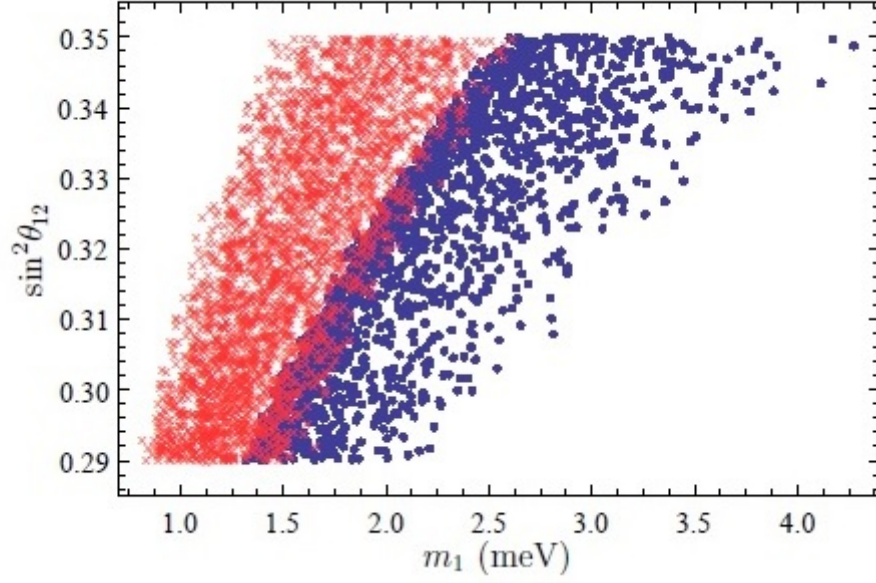


Figura B.2: $\sin^2 \theta_{12}$ como uma função da massa do neutrino mais leve m_1 ; os símbolos $\times$ correspondem a $(\beta_{0l} = \beta_v = 0)$ enquanto que os pontos correspondem a $(\beta_{0l}, \beta_v) = (1, -0.418)$ - extraído de [13].

para os parâmetros livres. Então, fixado os valores (β_{0l}, β_v) , variou-se $\{a, \bar{b}, c, \delta, \tau\}$ aleatoriamente e selecionou-se apenas pontos compatíveis, junto a $2-\sigma$, com os valores de ângulos de mistura $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$ e as diferenças de massa ao quadrado, $\Delta m_{21}^2, \Delta m_{31}^2$. Embora, tenha-se utilizado dados levemente diferentes, pode-se ver que esses pontos são compatíveis com as previsões de [12] para a textura mínima.

Referências Bibliográficas

- [1] K. Abe et al., T2K Collab. (Phys. Rev. D 88, 032002, 2013).
- [2] K. Schreckenbach et al. (Phys. Lett. B 160, 325, 1985).
- [3] F. P. An et al., Daya Bay Collab. (Phys. Rev. Lett. 108, 171803 2012).
- [4] P. F. Harrison, D. H. Perkins, and W. G. Scott (Phys. Lett. B 530, 167, 2002); P. F. Harrison and W. G. Scott (Phys. Lett. B 535, 163, 2002).
- [5] T2K Collaboration, K. Abe *et al.* (Phys. Rev. Lett. 107, 041801, 2011).
- [6] MINOS Collaboration, P. Adamson *et al.* (Phys. Rev. Lett. 107, 181802, 2011).
- [7] Y.H. Ahn, Hai-Yang Cheng, and Sechul Oh *An extension of tribimaximal lepton mixing* (Phys. Rev. D 84, 113007, 2011).
- [8] Y. Abe et al., Double Chooz Collab. (Phys. Rev. Lett. 108, 131801, 2012).
- [9] J.K. Ahn et al., RENO Collab. (Phys. Rev. Lett. 108, 191802, 2012).
- [10] S. Weinberg (HUTP-77-A057, Trans. New York Acad. Sci. 38:185-201, 1977).
- [11] H. Fritzsch (Phys. Lett. B 70, 1977, 436).
- [12] M. Fukugita, Y. Shimizu, M. Tanimoto and T. T. Yanagida, θ_{13} in *Neutrino Mass Matrix with the Minimal Texture* (arXiv:1204.2389 [hep-ph]).
- [13] A. G. Dias, A. C. B. Machado and C. C. Nishi, *An S_3 Model for Lepton Mass Matrices with Nearly Minimal Texture* (Phys. Rev. D **86**, 093005, 2012).
- [14] J. Beringer et al., *THE CKM QUARK-MIXING MATRIX* (PR D86, 010001, 2012 and 2013 update for the 2014 edition, <http://pdg.lbl.gov>).
- [15] B. Pontecorvo (Zh. Eksp. Teor. Fiz. 33, 549, 1957 and 34, 247, 1958).
- [16] Z. Maki, M. Nakagawa, and S. Sakata (Prog. Theor. Phys. 28, 870, 1962).
- [17] B.T. Cleveland et al. (Astrophys. J. 496, 505, 1988).

- [18] Q.R. Ahmad et al., SNO Collab. (Phys. Rev. Lett. 89, 011301, 2002).
- [19] K. Eguchi et al., KamLAND Collab. (Phys. Rev. Lett. 90, 021802, 2003).
- [20] T. Araki et al., KamLAND Collab. (Phys. Rev. Lett. 94, 081801, 2005).
- [21] Y. Fukuda et al., Super-Kamiokande Collab. (Phys. Rev. Lett. 81, 1562, 1998).
- [22] Y. Ashie et al., Super-Kamiokande Collab. (Phys. Rev. Lett. 93, 101801, 2004).
- [23] M.H. Ahn et al., K2K Collab. (Phys. Rev. D 74, 072003, 2006).
- [24] D.G. Michael et al., MINOS Collab. (Phys. Rev. Lett. 97, 191801, 2006).
- [25] P. Adamson et al., MINOS Collab. (Phys. Rev. Lett. 101, 131802, 2008).
- [26] K. Abe et al., Super-Kamiokande Collab. (Phys. Rev. Lett. 110, 181802, 2013).
- [27] A. Pastore, talk at the EPS HEP 2013 Conference (July 18-24, 2013, Stockholm).
- [28] Ahn, Y. H. and Cheng, Hai-Yang and Oh. Sechul (PhysRev. D 84, 113007)
- [29] N. Cabibbo (Phys. Lett. B 72, 333, 1978)
- [30] T.Mori, C.S.Lim, S.N.Mukherjee, *The Physics of the Standard Model and Beyond* (Word Scientific Publishing 2004).
- [31] A. C. B. Machado, V. Pleitez *Quase-Dirac neutrinos in a model with local B-L symmetry* (J. Phys. Nucl. Part. Phys. 40, 2013, 035002, 11pp)
- [32] Ishimori, T. Kobayashi, H. Ohki, Y. Shimizu, H. Okada and M. Tanimoto, *Non-Abelian Discrete Symmetries in Particle Physics* (arXiv:1003.3552 [hep-th]).
- [33] H. Fritzsch (Phys. Lett. B 73, 317, 1978).
- [34] G. C. Branco, L. Lavoura and F. Mota, *Nearest neighbor interactions and the physical content of fritzsch mass matrices* (Phys. Rev. D 39,3443, 1989).
- [35] M. Fukugita, M. Tanimoto and T. Yanagida, *Predictions from the Fritzsch type lepton mass matrices* (Phys. Lett. B **562**, 273, 2003).
- [36] R. Longas, *Desvio da textura mnima das matrizes de massa dos leptons com uma simetria S*(Tese de mestrado, UFABC 2013).
- [37] C. S. Lam, *Mass Independent Textures and Symmetry* (Phys. Rev. D **74**, 113004, 2006).
- [38] M. Fukugita, M. Tanimoto and T. Yanagida, (Prog.Theor.Phys. 89, 263-268, 1993).

- [39] G. Branco, L. Lavoura, J. Silva, *CP Violation* (Clarendon Press Oxford, 1999).
- [40] E.D. Commins and P. H. Bucksbaum, *Weak Interaction of Leptons and Quarks* (Cambridge University Press 1983).
- [41] M. Veltman, *Radiative Corrections to Vector Boson Masses* (Phys. Lett. B 91, 95, 1980).
- [42] A. de Gouvêa (hep-ph/0503086 v2 11 Mar 2005).
- [43] R.N. Mohapatra e P.B. Pal, *Massive Neutrinos in Physics and Astrophysics* (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1991).
- [44] D.C. Kennedy, em Proceeding of the 1990 Theoretical Advanced Study Institute, M. Cvetič e P. Langacker (World Scientific, 1991).
- [45] Ta-Pei Cheng and Ling-Fong Li, *Gauge theory of elementary particle physics* (Oxford, NY, 1984).
- [46] A. Zee and F. Wilczek; *Horizontal Interaction and Weak Mixing Angles* (Phys. Rev. Lett. 42, 421, 1979).
- [47] Y. Koide and A. Ghosal; *Bimaximal neutrino mixing in a Zee-type model with badly broken flavor symmetry* (Phys. Rev. D 63, 037301, 2001).
- [48] H. Zhang, *Flavor $S_4 \times Z_2$ symmetry and neutrino mixing* (Phys. Lett. B 665, 2007, 132).
- [49] H. Sawanaka (Int. J. Mod. Phys. E 16, 1383, 2007) M. Hirsch, A. S. Joshipura, S. Kaneko and J. W. F. Valle *Predictive Flavor Symmetries of the Neutrino Mass Matrix* (Phys. Rev. Lett. 99, 2007, 151802); R. R. Volkas; *A_4 symmetry breaking scheme for understanding quark and lepton mixing angles* (hep-ph/0612296) B. Adhikary, B. Brahmachari, A. Ghosal, E. Ma and M. K. Parida, (Phys. Lett. B 638, 2006, 345).
- [50] P. H. Frampton and T. W. Kephart, *Simple nonAbelian finite flavor groups and fermion masses* (Int. J. Mod. Phys. A 10, 4689, 1995).
- [51] K. S. Babu and J. Kubo; *Dihedral families of quarks, leptons, and Higgs bosons* (Phys. Rev. D 71, 2005, 056006).
- [52] X. G. He, Y. Y. Keum, and R. R. Volkas (J. High Energy Phys. 04, 039, 2006).