



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
**“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”**  
Faculdade de Ciências e Tecnologia  
Câmpus de Presidente Prudente

# Estudos numéricos da formulação natural do tensor: aplicação em escoamentos viscoelásticos com escorregamento

Fabiano Ruano Neto

Orientador: Prof. Dr. Cassio Machiaveli Oishi

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, Março de 2021



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

**Estudos numéricos da formulação natural do  
tensor: aplicação em escoamentos  
viscoelásticos com escorregamento**

Fabiano Ruano Neto

Orientador: Prof. Dr. Cassio Machiaveli Oishi

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, Março de 2021

R894e	<p>Ruano Neto, Fabiano</p> <p>Estudos numéricos da formulação natural do tensor : aplicação em escoamentos viscoelásticos com escorregamento / Fabiano Ruano Neto. -- Presidente Prudente, 2021</p> <p>114 f. : il., tabs.</p> <p>Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente</p> <p>Orientador: Cassio Machiaveli Oishi</p> <p>1. Formulação natural do tensor. 2. Condição de contorno com escorregamento. 3. Solução numérica. 4. Diferenças finitas. I. Título.</p>
-------	--

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

**CERTIFICADO DE APROVAÇÃO**

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Estudos numéricos da formulação natural do tensor: aplicação em escoamentos viscoelásticos com escorregamento

**AUTOR: FABIANO RUANO NETO**

**ORIENTADOR: CÁSSIO MACHIAVELI OISHI**

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, pela Comissão Examinadora:



Prof. Dr. CÁSSIO MACHIAVELI OISHI (Participação Virtual)

Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

**VIDEOCONFERÊNCIA**

Prof. Dr. ANTONIO CASTELO FILHO (Participação Virtual)

Departamento de Ciências de Computação e Estatística / Universidade de São Paulo

**VIDEOCONFERÊNCIA**

Prof. Dr. LUIS JORGE LIMA FERRÁS (Participação Virtual)

Universidade do Minho

Presidente Prudente, 15 de março de 2021

*Dedico este trabalho à minha família.*

# Agradecimentos

---

A Deus pela vida e por todas as oportunidades e experiências até aqui.

À minha mãe e ao meu pai por todo suporte e incentivo desde sempre.

Aos professores da graduação e pós-graduação pela contribuição em minha formação acadêmica. Em especial ao professor José Roberto, meu primeiro orientador, e à professora Gilcilene por me inserir na área de matemática computacional e por toda motivação inspirada.

Ao professor e orientador Cassio por toda dedicação, paciência, disponibilidade e atenção no desenvolvimento, detalhes e discussões do trabalho.

Ao Hugo por toda ajuda e disponibilidade com as implementações no código.

Às amigas Karina e Marcela pela amizade desde a graduação, por todas as risadas e descontrações.

À Cinthia por toda ajuda e atenção com a parte burocrática do programa.

A todos que estiveram comigo durante o curso e contribuíram de forma direta ou indireta.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.



# Resumo

---

Neste projeto investiga-se numericamente escoamentos com escorregamento utilizando uma formulação alternativa para descrever o tensor que representa os efeitos viscoelásticos do fluido. São analisados o caso Newtoniano e, no caso viscoelástico, os modelos constitutivos Oldroyd-B e PTT (Phan-Thien–Tanner) linear, os últimos tanto na formulação cartesiana quanto na alternativa. Em particular, nesta formulação, conhecida como formulação natural do tensor, as equações constitutivas que definem o modelo matemático do fluido viscoelástico são construídas utilizando uma decomposição diádica do tensor polimérico. Estudos recentes indicaram que a aplicação dessa formulação pode melhorar a precisão numérica da solução em escoamentos com singularidades de tensão, como é o caso da contração abrupta e do *stick-slip*. Entretanto, até o presente momento, nenhum estudo foi realizado com a formulação natural do tensor aplicada na solução de escoamentos viscoelásticos com escorregamento. Dessa forma, neste projeto são analisados os efeitos da condição de contorno Navier linear combinada à formulação natural do tensor na solução numérica de escoamentos com singularidades de tensão, como a contração 4:1 e a expansão 1:4. Para este estudo é utilizado um método de projeção e as equações são discretizadas através de fórmulas de diferenças finitas para malhas não-uniformes. Os resultados obtidos foram positivos no contexto do estudo numérico fornecendo dados ainda não presentes na literatura. Verificou-se que a variação no coeficiente de escorregamento, com ambas as formulações, provoca alterações nas propriedades do escoamento bem como, em alguns casos, impede a convergência. Em contrapartida, é necessário um referencial teórico para uma conclusão mais concreta dos resultados como, por exemplo, considerar a condição *slip* no estudo assintótico, o que ainda não foi publicado na literatura.

Palavras-Chave: *Formulação natural do tensor, Condição de contorno com escorregamento, Solução numérica, Diferenças finitas.*



# Abstract

---

In this project we numerically investigate slip flows using an alternative formulation to describe the tensor which represents the fluid viscoelastic effects. We analyze both Newtonian and non-Newtonian cases, considering Oldroyd-B and linear PTT (Phan-Thien-Taner) models with cartesian and alternative formulations. In particular, in this formulation which is known as Natural Stress Formulation (NSF), the constitutive equations that define the mathematical modelling of viscoelastic materials are constructed by using a dyadic decomposition of the polymeric tensor. According to recent studies, this formulation can improve the accuracy of the numerical solution for solving stress singularity flows, as for instance, the contraction flow and the stick-slip problem. However, until now, there is no study using the NSF for solving viscoelastic fluid slip flows. Therefore, in this project, we analyze the effects of linear Navier slip law combined with NSF in the numerical solution of viscoelastic flows with stress singularities, as in the 4:1 contraction and 1:4 expansion. This study is conducted using a projection method and the equations are discretized with a finite difference scheme for non-uniform meshes. The obtained results are good in the numerical study context as they provide new data to the literature. It has been verified that varying the slip coefficient in both formulations causes changes in the flow properties and, in some cases, it is not possible to achieve convergence. In contrast, a theoretical reference is still needed in order to confirm and concretize the results as, for instance, considering the slip boundary condition in asymptotic analysis, not yet available in the literature.

Keywords: *Natural stress formulation, slip boundary condition, numerical solution, finite difference.*



# Lista de Figuras

---

2.1	Tipos de parede em que a condição <i>slip</i> é empregada. . . . .	30
3.1	Pontos de interesse de uma célula. . . . .	35
3.2	Células do canal de placas paralelas (a) e da contração (b). . . . .	35
3.3	Discretização da condição <i>slip</i> em uma parede horizontal. . . . .	39
3.4	Discretização da condição <i>slip</i> em uma parede vertical. . . . .	41
3.5	Algumas regiões de interesse da contração. . . . .	43
3.6	Pontos da discretização da equação em $u$ na Região 1. . . . .	43
3.7	Pontos da discretização da equação em $v$ na Região 1. . . . .	44
3.8	Pontos da discretização da equação em $u$ na Região 2. . . . .	44
3.9	Pontos da discretização da equação em $v$ na Região 2. . . . .	45
3.10	Pontos da discretização da equação em $u$ na Região 3. . . . .	46
3.11	Pontos da discretização da equação em $v$ na Região 3. . . . .	46
4.1	Geometria da expansão 1:4 de comprimento $40L$ . . . . .	49
4.2	Regiões em que a malha não-uniforme é mais refinada. . . . .	50
4.3	Comprimentos de vórtices obtidos por Ferrás [15] comparados aos deste trabalho. . . . .	51
4.4	Ângulo $\theta$ e distância $r$ para o estudo assintótico. . . . .	51
4.5	Comportamento assintótico da velocidade e das componentes do tensor $\mathbf{T}^s$ próximo à quina ao longo de $\theta = \frac{\pi}{2}$ - $Re = 0.01$ . . . . .	52
4.6	Comportamento assintótico das propriedades do escoamento para diferentes valores de $\bar{k}$ ao longo de $\theta = \frac{\pi}{2}$ - $Re = 0.01$ . . . . .	53
4.7	Variação no comprimento dos vórtices com o aumento de $\bar{k}$ - NSF, M2. . . . .	55
4.8	Dimensão dos vórtices obtidos por [15] comparados aos deste trabalho - CSF e NSF. . . . .	56
4.9	Ângulos tomados para estudo do comportamento assintótico . . . . .	56
4.10	Cortes verticais . . . . .	57
4.11	Comportamento assintótico das soluções numéricas próximo à quina ao longo de $\theta = \frac{\pi}{2}$ - $Re = 0.01$ , $\varepsilon = 0.25$ , $Wi = 1$ , $\beta = \frac{1}{9}$ . . . . .	58
4.12	Comportamento assintótico das soluções numéricas próximo à quina ao longo de $\theta = \frac{3}{4}\pi$ - $Re = 0.01$ , $\varepsilon = 0.25$ , $Wi = 1$ , $\beta = \frac{1}{9}$ . . . . .	59
4.13	Comportamento assintótico das soluções numéricas próximo à quina ao longo de $\theta = \pi$ - $Re = 0.01$ , $\varepsilon = 0.25$ , $Wi = 1$ , $\beta = \frac{1}{9}$ . . . . .	60
4.14	Variação assintótica das variáveis naturais ao longo de diferentes ângulos $\theta$ - $Re = 0.01$ , $\varepsilon = 0.25$ , $Wi = 1$ , $\beta = \frac{1}{9}$ . . . . .	61
4.15	Comportamento assintótico próximo à quina ao longo de $\theta = \frac{\pi}{2}$ - CSF, $Re = 0.01$ , $\varepsilon = 0.25$ , $Wi = 1$ , $\beta = \frac{1}{9}$ . . . . .	62
4.16	Comportamento assintótico próximo à quina ao longo de $\theta = \frac{\pi}{2}$ - NSF, $Re = 0.01$ , $\varepsilon = 0.25$ , $Wi = 1$ , $\beta = \frac{1}{9}$ . . . . .	63

4.17	Comportamento assintótico da pressão ao longo de $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$ e $\pi$ - $Re = 0.01, \varepsilon = 0.25, Wi = 1, \beta = \frac{1}{9}$ . . . . .	64
4.18	Perfis das propriedades do escoamento com a variação de $\bar{k}$ em $x \approx 10$ - NSF, $Re = 0.01, \varepsilon = 0.25, Wi = 1, \beta = \frac{1}{9}$ . . . . .	65
4.19	Perfis das propriedades do escoamento com a variação de $\bar{k}$ em $x = 20$ - NSF, $Re = 0.01, \varepsilon = 0.25, Wi = 1, \beta = \frac{1}{9}$ . . . . .	66
4.20	Perfis das propriedades do escoamento com a variação de $\bar{k}$ em $x \approx 30$ - NSF, $Re = 0.01, \varepsilon = 0.25, Wi = 1, \beta = \frac{1}{9}$ . . . . .	67
4.21	Representação da contração 4:1, regiões de formação de vórtices e singularidade onde é feita a análise assintótica. . . . .	68
4.22	Regiões mais refinadas da malha não-uniforme. . . . .	68
4.23	Resultados do caso Newtoniano obtidos por [16] comparados aos deste trabalho. . . . .	69
4.24	Cortes horizontal e vertical na geometria ( $L = 1$ ). . . . .	70
4.25	Comportamento assintótico da velocidade, das componentes do tensor $\mathbf{T}^s$ e da pressão próximo à quina - $Re = 0.01$ . . . . .	71
4.26	Comportamento assintótico da velocidade, das componentes do tensor $\mathbf{T}^s$ e da pressão próximo à quina - $Re = 0.01$ . . . . .	72
4.27	Perfis das propriedades do escoamento com a variação de $\bar{k}$ em $x \approx 10$ - $Re = 0.01$ . . . . .	73
4.28	Perfis das propriedades do escoamento com a variação de $\bar{k}$ em $x = 20$ - $Re = 0.01$ . . . . .	74
4.29	Perfis das propriedades do escoamento com a variação de $\bar{k}$ em $x \approx 30$ - $Re = 0.01$ . . . . .	75
4.30	Perfil horizontal de (a) $u$ e (b) $p$ em $y = 4$ - $Re = 0.01$ . . . . .	76
4.31	Comparação do comportamento assintótico das propriedades do escoamento utilizando as formulações CSF e NSF na malha M1 - $Re = 0.01, Wi = 1$ e $\beta = \frac{1}{2}$ . . . . .	77
4.32	Propriedades do escoamento ao se aproximarem da quina da contração - CSF, $Re = 0.01, Wi = 1$ e $\beta = \frac{1}{2}$ . . . . .	78
4.33	Propriedades do escoamento ao se aproximarem da quina da contração - NSF, $Re = 0.01, Wi = 1$ e $\beta = \frac{1}{2}$ . . . . .	79
4.34	Redução da dimensão dos vórtices com o aumento de $\bar{k}$ - Oldroyd-B, NSF, M1. . . . .	80
4.35	Comportamento assintótico das variáveis com $\beta = \frac{1}{9}$ - CSF, M1, $Re = 0.01, Wi = 1$ . . . . .	82
4.36	Comportamento assintótico das variáveis com $\beta = \frac{1}{9}$ - CSF, M2, $Re = 0.01, Wi = 1$ . . . . .	83
4.37	Redução da dimensão dos vórtices com o aumento de $\bar{k}$ - PTT, NSF, M1. . . . .	84
4.38	Comportamento assintótico das variáveis com $\beta = \frac{1}{2}$ - CSF, M2, $Re = 0.01, Wi = 1$ . . . . .	85
4.39	Comportamento assintótico das variáveis com $\beta = \frac{1}{2}$ - NSF, M2, $Re = 0.01, Wi = 1$ . . . . .	86

# Lista de Tabelas

---

4.1	Detalhes das malhas utilizadas nas simulações. . . . .	50
4.2	Tamanhos de vórtice, $X_R$ - Newtoniano, expansão. . . . .	51
4.3	Tamanhos de vórtice, $X_R$ - CSF e NSF - PTT, expansão. . . . .	54
4.4	Tamanhos de vórtice, $X_R$ - Newtoniano, contração. . . . .	69
4.5	Tamanhos de vórtice, $X_R$ - PTT, contração. . . . .	81
4.6	Tamanhos de vórtice, $X_R$ - CSF e NSF - PTT, contração. . . . .	84



---

## Lista de Siglas

CSF: Cartesian Stress Formulation

NSF: Natural Stress Formulation

PTT: Phan-Thien–Tanner



# Sumário

---

<b>Resumo</b>	<b>7</b>
<b>Abstract</b>	<b>9</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>10</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>12</b>
<b>Lista de Siglas</b>	<b>15</b>
<b>Capítulos</b>	
<b>1 Introdução</b>	<b>19</b>
<b>2 Formulação Matemática</b>	<b>23</b>
2.1 Equações governantes para fluidos Newtonianos e viscoelásticos . . . . .	23
2.2 Adimensionalização . . . . .	24
2.3 <i>Natural Stress Formulation</i> (Formulação natural do tensor) . . . . .	26
2.4 Condições auxiliares . . . . .	28
2.4.1 Condições iniciais . . . . .	28
2.4.2 Paredes rígidas . . . . .	28
2.4.3 Entrada de fluido ( <i>inflow</i> ) . . . . .	28
2.4.4 Saída de fluido ( <i>outflow</i> ) . . . . .	29
2.5 Leis de escorregamento . . . . .	29
2.5.1 Adimensionalização das leis de escorregamento . . . . .	32
<b>3 Método numérico</b>	<b>33</b>
3.1 Método de projeção . . . . .	33
3.2 Malha computacional e discretização do domínio . . . . .	34
3.3 Classificação das células . . . . .	34
3.4 Discretização temporal da equação de momento . . . . .	35
3.5 Atualização do tensor tensão - CSF . . . . .	36
3.6 Atualização do tensor tensão - NSF . . . . .	37
3.7 Discretização da lei Navier linear . . . . .	39
3.8 Equações de movimento com influência <i>slip</i> . . . . .	42
3.9 Equações constitutivas - Oldroyd-B e PTT . . . . .	46
3.10 Etapas do método numérico . . . . .	47
<b>4 Resultados Numéricos</b>	<b>49</b>
4.1 Expansão 1:4 . . . . .	49
4.1.1 Fluido Newtoniano . . . . .	50

4.1.2	PTT . . . . .	54
4.2	Contração 4:1 . . . . .	68
4.2.1	Fluido Newtoniano . . . . .	69
4.2.2	Oldroyd-B . . . . .	76
4.2.3	PTT . . . . .	81
<b>5</b>	<b>Conclusão e trabalhos futuros</b>	<b>87</b>
	<b>Referências</b>	<b>88</b>
	<b>Apêndices</b>	
<b>A</b>	<b>Diferenças finitas para malhas não-uniformes</b>	<b>93</b>
<b>B</b>	<b>Discretização espacial das equações de quantidade de movimento e constitutiva</b>	<b>95</b>
B.1	Equação de quantidade de movimento - direção $x$ . . . . .	95
B.2	Equação de quantidade de movimento - direção $y$ . . . . .	96
B.3	Equação de Poisson . . . . .	98
B.4	Equações de atualização da velocidade . . . . .	98
B.5	Equações constitutivas . . . . .	99
B.5.1	Formulação Cartesiana - CSF . . . . .	99
B.5.2	Formulação tensão natural - NSF . . . . .	99
<b>C</b>	<b>Equações de movimento em termos das variáveis naturais - detalhes</b>	<b>101</b>
<b>D</b>	<b>Leis de escorregamento em termos das variáveis naturais</b>	<b>103</b>
<b>E</b>	<b>Análise assintótica da contração: solução Newtoniana</b>	<b>105</b>
<b>F</b>	<b>Equações em coordenadas polares</b>	<b>111</b>

# Introdução

A análise matemática sobre a aplicação de condições de contorno em superfícies sólidas nos escoamentos de fluidos é extremamente complexa, combinando as dificuldades da teoria clássica da mecânica do contínuo com efeitos moleculares que surgem na escala microscópica. Dessa forma, um passo inicial nos estudos das equações de Navier-Stokes é assumir a condição de contorno sem escorregamento ou sem deslizamento (*no-slip*), ou seja, assumir que a velocidade relativa entre a superfície rígida e o fluido é zero na direção tangencial do escoamento. Essa imposição já foi causa de debates tanto do ponto de vista teórico como prático, ainda no contexto de fluidos Newtonianos [31], surgindo a necessidade de um olhar mais cuidadoso para a chamada “condição de deslizamento na parede” (*wall slip*). O artigo de revisão como em [25] abordou questões importantes sobre esse assunto para fluidos Newtonianos.

Os estudos sobre escoamentos com escorregamento ganharam ainda mais destaque no contexto de fluidos não-Newtonianos, já que na falta de uma imposição correta da condição de contorno, pode ocorrer a formação de uma camada limite próxima a parede, resultando na amplificação de efeitos de tensão cisalhante. Os artigos de revisão de [4] e [32] detalham os mecanismos por trás da imposição de condições de parede com efeitos de deslizamento/escorregamento para materiais não-Newtonianos.

Os dois parágrafos iniciais dessa Introdução ilustram de forma superficial a complexidade do assunto, tanto para fluidos Newtonianos, como para materiais não-Newtonianos. Portanto, a fim de simplificar os estudos sobre escoamentos viscoelásticos com escorregamento, neste trabalho foca-se apenas na análise numérica da imposição da condição de deslizamento na parede, analisando os efeitos da aplicação de diferentes tipos de condições de escorregamento já consolidadas na literatura, como as leis de Navier-linear e Navier-não-linear.

Alguns estudos numéricos sobre a combinação de equações constitutivas de modelos viscoelásticos usando condições de contorno de escorregamento na parede foram apresentados na literatura. Por exemplo, no trabalho de [33], efeitos da condição de deslizamento foram analisados para o modelo de Carreau considerando um escoamento compressível e isotérmico enquanto que nos trabalhos de Karapetsas e Mitsoulis [20] e Ferrás et al. [16], os autores investigaram, respectivamente, a relação da lei de Navier-linear em escoamentos viscoelásticos modelados pelas equações constitutivas do fluido K-BKZ e sPTT. Outro trabalho interessante foi apresentado por Ferrás et al. [17], onde modelos não-lineares para imposição da condição de contorno de escorregamento na parede foram numericamente analisados no contexto do método de volumes finitos. Já em [19], o modelo de Navier-não-linear foi imposto na solução do escoamento viscoelástico do modelo Oldroyd-B em um tubo.

Mais recentemente, pesquisadores têm estendido os estudos de escoamentos com escorregamentos para solução de problemas de interesse prático. Em [21], os autores utilizaram um método espectral para estudar escoamentos viscoelásticos com escorregamento em meios porosos, enquanto que Drapaca [5] aplicou o conceito de derivadas fracionárias de Caputo combinado com condições de contorno de escorregamento para modelar numericamente microaneurismas cerebrais. Com respeito ao problema de extrusão, amplamente investigado no contexto industrial, Kwon [22] investigou a relação entre modelos de deslizamento na parede com o surgimento de instabilidade de fraturas, como é o caso do efeito *sharkskin*. Já no contexto de processamento de polímeros, Fernandes et al. [13] implementaram no pacote computacional OpenFOAM as condições de contorno de deslizamento parcial acopladas as equações constitutivas do modelo PTT.

Os trabalhos numéricos citados acima envolvendo escoamentos viscoelásticos com condições de contorno de escorregamento na parede utilizaram, para definir as equações constitutivas, a clássica formulação cartesiana do tensor polimérico. Nesta formulação, o tensor que representa a contribuição não-Newtoniana é decomposto em componentes combinadas com os vetores da base canônica do sistema de coordenadas cartesianas. Em particular, essa abordagem no tratamento do tensor polimérico é amplamente adotada em Reologia Computacional [26]. Entretanto, uma dificuldade reconhecida na literatura ao utilizar a formulação cartesiana é o tratamento numérico da singularidade do tensor. Estas singularidades surgem como consequência de uma mudança abrupta nas condições de contorno, como no caso do *stick-slip*, ou devido a presença de quinas na geometria do problema, como no escoamento da contração. Uma forma alternativa de representar o tensor polimérico foi apresentada por Renardy [29], com o objetivo de representar melhor o comportamento da singularidade da tensão. Essa formulação recebeu o nome de formulação natural do tensor (*Natural Stress Formulation*). Porém, essa formulação foi proposta originalmente no contexto de escoamentos estacionários, e como é de conhecimento, os problemas mais complexos são intrinsecamente transientes.

A primeira versão das equações constitutivas e transientes da formulação natural do tensor foi apresentada pelo orientador desse projeto e o colaborador Jonathan D. Evans em [8]. Logo após essa publicação, a formulação foi analisada em mais detalhes nos recentes trabalhos [10, 12], que evidenciaram o potencial dessa metodologia na obtenção de soluções mais acuradas em escoamentos com singularidades. Vale ressaltar que o pesquisador J.D. Evans já havia investigado a formulação natural do tensor do ponto de vista da análise assintótica nos trabalhos [7, 9], porém nenhum resultado ainda havia sido publicado no contexto de solução das equações transientes. Desta forma, o orientador, em colaboração com J.D. Evans e outros pesquisadores, vem trabalhando no desenvolvimento e aperfeiçoamento numéricos dessa formulação alternativa.

Nos trabalhos citados acima do orientador desse projeto e colaboradores, a formulação natural do tensor foi aplicada apenas em escoamentos viscoelásticos sem escorregamentos, ou seja, apenas adotando a condição de contorno do tipo sem deslizamento (*no-slip*). Neste trabalho de mestrado é analisada e implementada a lei de Navier linear para a modelagem de escoamentos com escorregamentos utilizando a formulação natural do tensor para a definição do sistema de equações constitutivas. A lei Navier não-linear é estudada brevemente porém não implementada. Vale ressaltar que, em grande maioria dos trabalhos que discutiram efeitos das condições de contorno de escorregamento na parede, utilizaram escoamentos que apresentam singularidade da tensão, como no caso da contração 4:1 [16] ou no problema de extrusão (*stick-slip* e *slip-stick*) [17, 22]. Portanto, a combinação da formulação natural do tensor com modelos de leis de escorregamento na parede auxiliará na obtenção de uma solução numérica mais precisa nestes escoamentos complexos.

Alguns resultados alcançados no trabalho são:

- Implementação da lei de escorregamento no código do grupo de pesquisa;
- Testes de validação na contração e expansão com as referências [15, 16] considerando os casos Newtoniano e viscoelástico utilizando condições de contorno com escorregamento. Para o caso viscoelástico utilizou-se a formulação tradicional para o tensor polimérico;
- Simulações de fluidos viscoelásticos nas geometrias com contração e expansão combinando a formulação natural do tensor com a condição de escorregamento.

O trabalho está organizado da seguinte maneira:

- Capítulo 2: são apresentadas as equações governantes, o processo de adimensionalização, as equações constitutivas escritas com a formulação natural do tensor, as condições de contorno consideradas, as leis de escorregamento na forma dimensional e adimensional;
- Capítulo 3: é apresentado o método numérico empregado, a malha computacional utilizada e a discretização do domínio bem como a discretização das equações (equação de momento, atualização dos tensores em ambas as formulações, lei de Navier linear e consequentes mudanças nas equações);
- Capítulo 4: resultados numéricos que tratam de escoamentos na contração e expansão para fluidos Newtonianos e viscoelásticos;
- Capítulo 5: considerações finais sobre o trabalho e etapas futuras.

Além disso, encontram-se nos apêndices alguns complementos dos estudos desenvolvidos como, por exemplo, as equações de quantidade de movimento escritas em termos das variáveis da formulação NSF, as leis de escorregamento Navier linear e Navier não-linear também escritas com as variáveis naturais e estudos iniciais sobre análise assintótica, nos quais considerou-se o caso Newtoniano.



## Formulação Matemática

### 2.1 Equações governantes para fluidos Newtonianos e viscoelásticos

O escoamento de fluidos incompressíveis e compressíveis, laminares e turbulentos é modelado pelas equações de Navier-Stokes. Essas equações representam, matematicamente, os conceitos físicos de conservação de massa, balanço do momento e conservação de energia. Neste trabalho são considerados escoamentos incompressíveis e isotérmicos e, desta forma, as equações de quantidade de movimento e continuidade se resumem, respectivamente, a

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}^\top) \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.2)$$

onde

- $\mathbf{x} = (x, y)^\top$  é o vetor posição de um sistema de coordenadas cartesianas bidimensionais;
- $\mathbf{u} = (u, v)^\top$  é o vetor velocidade com componentes  $u = u(x, y, t)$  e  $v = v(x, y, t)$ ;
- $t \geq 0$  é o tempo;
- $\rho$  é a densidade do fluido;
- $p$  é a pressão;
- $\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau^{xx} & \tau^{xy} \\ \tau^{xy} & \tau^{yy} \end{bmatrix}$  é o tensor tensão extra, com  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(x, y, t)$ .

O tensor  $\boldsymbol{\tau}$  é decomposto em uma parcela que representa a contribuição do solvente (Newtoniana)  $\boldsymbol{\tau}^s$  e uma polimérica  $\boldsymbol{\tau}^p$  e é dado por

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^s + \boldsymbol{\tau}^p. \quad (2.3)$$

A contribuição newtoniana é escrita como

$$\boldsymbol{\tau}^s = 2\eta_s \mathbf{D}, \quad (2.4)$$

onde  $\eta_s$  é a viscosidade do solvente e  $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^\top)$  é o tensor taxa de deformação.

A parcela polimérica depende do modelo viscoelástico utilizado. Os modelos utilizados nesse trabalho são o Oldroyd-B e o PTT (Phan-Thien-Tanner), cujas equações constitutivas são dadas, respectivamente, por

$$\boldsymbol{\tau}^p + \lambda_p \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}^p = 2\eta_p \mathbf{D}, \quad (2.5)$$

e

$$\boldsymbol{\tau}^p + \lambda_p \left( \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}^p + \frac{\varepsilon}{\eta_p} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}^p) \boldsymbol{\tau}^p \right) = 2\eta_p \mathbf{D}. \quad (2.6)$$

As constantes  $\lambda_p$  e  $\eta_p$  são o tempo de relaxação do polímero e viscosidade polimérica, respectivamente, e o parâmetro  $\varepsilon$ , para o modelo PTT, regula a influência do termo quadrático em (2.6), isto é, controla o comportamento elongacional do modelo. Ainda, a derivada convectiva contravariante  $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}^p$  é expressa por

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}^p = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}^p}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\tau}^p - (\nabla \mathbf{u}) \boldsymbol{\tau}^p - \boldsymbol{\tau}^p (\nabla \mathbf{u})^\top. \quad (2.7)$$

## 2.2 Adimensionalização

A adimensionalização das equações é feita utilizando os seguintes termos

$$\mathbf{x} = L\bar{\mathbf{x}}, \quad t = \frac{L}{U}\bar{t}, \quad \mathbf{u} = U\bar{\mathbf{u}}, \quad p = \rho U^2 \bar{p}, \quad \boldsymbol{\tau}^s = \frac{\eta_0 U}{L} \bar{\mathbf{T}}^s, \quad \boldsymbol{\tau}^p = \frac{\eta_0 U}{L} \bar{\mathbf{T}}, \quad (2.8)$$

em que  $L$  é o comprimento característico,  $U$  é a velocidade característica e  $\eta_0 = \eta_s + \eta_p$  é a viscosidade total a uma taxa nula de cisalhamento.

Substituindo as expressões de (2.8) nas equações de Navier-Stokes e, a fim de simplificar a notação, omitindo as barras, obtêm-se as equações na forma adimensional

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}^\top) = -\nabla p + \frac{\beta}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{Re} \nabla \cdot \mathbf{T}, \quad (2.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.10)$$

Também substituindo (2.8) nas equações dos modelos constitutivos, obtêm-se, para o fluido Oldroyd-B, a equação

$$\mathbf{T} + Wi \left( \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{T} - (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{T} - \mathbf{T} (\nabla \mathbf{u})^\top \right) = 2(1 - \beta) \mathbf{D}, \quad (2.11)$$

e, para o fluido PTT, a equação na forma adimensional é dada por

$$\mathbf{T} + Wi \left( \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{T} - (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{T} - \mathbf{T} (\nabla \mathbf{u})^\top + \frac{\varepsilon}{1 - \beta} \text{tr}(\mathbf{T}) \mathbf{T} \right) = 2(1 - \beta) \mathbf{D}. \quad (2.12)$$

Os parâmetros adimensionais presentes nas equações governantes são:

- Número de Reynolds ( $Re$ ): razão entre as forças inerciais e as forças viscosas. É dado por

$$Re = \frac{\rho U L}{\eta_0}. \quad (2.13)$$

- Número de Weissenberg ( $Wi$ ): razão entre a escala de tempo característica de um fluido e a escala de tempo característica de um escoamento. Este parâmetro é dado por

$$Wi = \frac{\lambda_p U}{L}. \quad (2.14)$$

- Razão das viscosidades ( $\beta \in (0, 1]$ ): essa constante regula a contribuição do solvente Newtoniano. Quando  $\beta = 1$  e  $\mathbf{T} = 0$ , o escoamento é Newtoniano. O parâmetro em questão é definido como

$$\beta = \frac{\eta_s}{\eta_0}. \quad (2.15)$$

Reescrevendo as equações de Navier-Stokes e as equações constitutivas adimensionais em coordenadas cartesianas, tem-se:

- Navier-Stokes

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\beta}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y} \right), \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\beta}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y} \right), \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.18)$$

- Oldroyd-B

$$T^{xx} + Wi \left( \frac{\partial T^{xx}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xx})}{\partial y} - 2\frac{\partial u}{\partial x}T^{xx} - 2\frac{\partial u}{\partial y}T^{xy} \right) = 2(1-\beta)\frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.19)$$

$$T^{xy} + Wi \left( \frac{\partial T^{xy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xy})}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}T^{xx} - \frac{\partial u}{\partial y}T^{yy} \right) = (1-\beta) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (2.20)$$

$$T^{yy} + Wi \left( \frac{\partial T^{yy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{yy})}{\partial y} - 2\frac{\partial v}{\partial x}T^{xy} - 2\frac{\partial v}{\partial y}T^{yy} \right) = 2(1-\beta)\frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2.21)$$

- PTT

$$T^{xx} + Wi \left( \frac{\partial T^{xx}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xx})}{\partial y} - 2\frac{\partial u}{\partial x}T^{xx} - 2\frac{\partial u}{\partial y}T^{xy} + \frac{\varepsilon}{1-\beta}f_{xx} \right) = 2(1-\beta)\frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.22)$$

$$T^{xy} + Wi \left( \frac{\partial T^{xy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xy})}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}T^{xx} - \frac{\partial u}{\partial y}T^{yy} + \frac{\varepsilon}{1-\beta}f_{xy} \right) = (1-\beta) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (2.23)$$

$$T^{yy} + Wi \left( \frac{\partial T^{yy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{yy})}{\partial y} - 2\frac{\partial v}{\partial x}T^{xy} - 2\frac{\partial v}{\partial y}T^{yy} + \frac{\varepsilon}{1-\beta}f_{yy} \right) = 2(1-\beta)\frac{\partial v}{\partial y}, \quad (2.24)$$

com

$$f_{xx} = (T^{xx} + T^{yy})T^{xx}, \quad f_{xy} = (T^{xx} + T^{yy})T^{xy}, \quad f_{yy} = (T^{xx} + T^{yy})T^{yy}. \quad (2.25)$$

### 2.3 Natural Stress Formulation (Formulação natural do tensor)

A Formulação natural do tensor (NSF), proposta por Renardy [29], tem por objetivo evitar instabilidades no cálculo do tensor  $\mathbf{T}$  próximo às quinas presentes, por exemplo, em escoamentos com contração e no *cross-slot*. A ideia é representar o tensor numa base natural alinhada às linhas de corrente do escoamento em questão. A seguir são descritos os passos para a obtenção das equações constitutivas em termos das variáveis naturais  $\lambda$ ,  $\mu$ , e  $\nu$ . O primeiro passo é escrever o tensor polimérico  $\mathbf{T}$  em função do tensor configuração  $\mathbf{A}$ , isto é,

$$\mathbf{T} = \frac{(1-\beta)}{Wi}(\mathbf{A} - \mathbf{I}). \quad (2.26)$$

Considerando o modelo Oldroyd-B, substituímos (2.26), com  $\overset{\nabla}{\mathbf{I}} = -2\mathbf{D}$ , em (2.11) e, fazendo as simplificações necessárias, obtém-se

$$Wi\overset{\nabla}{\mathbf{A}} + (\mathbf{A} - \mathbf{I}) = 0. \quad (2.27)$$

O tensor  $\mathbf{A}$  é escrito como

$$\mathbf{A} = \lambda\mathbf{u}\mathbf{u}^\top + \mu(\mathbf{u}\mathbf{w}^\top + \mathbf{w}\mathbf{u}^\top) + \nu\mathbf{w}\mathbf{w}^\top, \quad (2.28)$$

onde  $\mathbf{w} = \frac{1}{|\mathbf{u}|^2}(-v, u)^\top$  um vetor ortogonal a  $\mathbf{u}$  com  $|\mathbf{u} \times \mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{w}| = |\mathbf{u}|\frac{|\mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|^2} = 1$ .

A próxima etapa consiste em substituir (2.28) em (2.27) e escrever as equações em termos das novas variáveis, cujo resultado é o seguinte

$$Wi \left[ \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{2\lambda}{|\mathbf{u}|} \frac{\partial |\mathbf{u}|}{\partial t} + \frac{2\mu}{|\mathbf{u}|^4} \left( v \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial v}{\partial t} \right) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\lambda + 2\mu \nabla \cdot \mathbf{w} \right] + \lambda - \frac{1}{|\mathbf{u}|^2} = 0, \quad (2.29)$$

$$Wi \left[ \frac{\partial \mu}{\partial t} + \left( \lambda - \frac{\nu}{|\mathbf{u}|^4} \right) \left( u \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial u}{\partial t} \right) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mu + \nu \nabla \cdot \mathbf{w} \right] + \mu = 0, \quad (2.30)$$

$$Wi \left[ \frac{\partial \nu}{\partial t} + \frac{2\nu}{|\mathbf{u}|} \frac{\partial |\mathbf{u}|}{\partial t} + 2\mu \left( u \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial u}{\partial t} \right) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\nu \right] + \nu - |\mathbf{u}|^2 = 0, \quad (2.31)$$

com

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = \frac{1}{|\mathbf{u}|^4} \left[ (v^2 - u^2) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 4uv \frac{\partial u}{\partial x} \right]. \quad (2.32)$$

A fim de evitar instabilidades numéricas nos termos divididos por potências de  $|\mathbf{u}|$ , é feita uma mudança nas variáveis naturais. Para tanto, utiliza-se os termos abaixo

$$\lambda = \frac{\hat{\lambda}}{|\mathbf{u}|^2}, \quad \mu = \hat{\mu}, \quad \nu = \hat{\nu}|\mathbf{u}|^2, \quad (2.33)$$

que, substituídos em (2.29)–(2.31), produzem as equações

$$\left[ \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial t} + \frac{2\hat{\mu}}{|\mathbf{u}|^2} \left( v \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial v}{\partial t} \right) + |\mathbf{u}|^2 (\mathbf{u} \cdot \nabla) \left( \frac{\hat{\lambda}}{|\mathbf{u}|^2} \right) + 2\hat{\mu}|\mathbf{u}|^2 \nabla \cdot \mathbf{w} \right] + \frac{\hat{\lambda} - 1}{Wi} = 0, \quad (2.34)$$

$$\left[ \frac{\partial \hat{\mu}}{\partial t} + \left( \frac{\hat{\lambda} - \hat{\nu}}{|\mathbf{u}|^2} \right) \left( u \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial u}{\partial t} \right) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \hat{\mu} + \hat{\nu}|\mathbf{u}|^2 \nabla \cdot \mathbf{w} \right] + \frac{\hat{\mu}}{Wi} = 0, \quad (2.35)$$

$$\left[ \frac{\partial \hat{\nu}}{\partial t} + \frac{2\hat{\mu}}{|\mathbf{u}|^2} \left( u \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{1}{|\mathbf{u}|^2} (\mathbf{u} \cdot \nabla) (\hat{\nu}|\mathbf{u}|^2) \right] + \frac{\hat{\nu} - 1}{Wi} = 0, \quad (2.36)$$

com

$$|\mathbf{u}|^2 \nabla \cdot \mathbf{w} = \frac{1}{|\mathbf{u}|^2} \left[ (v^2 - u^2) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 4uv \frac{\partial u}{\partial x} \right]. \quad (2.37)$$

No caso do fluido PTT, os passos seguidos são os mesmos realizados para o Oldroyd-B. Substituindo (2.26) com  $\overset{\nabla}{\mathbf{I}} = -2\mathbf{D}$ , agora em (2.12), o resultado é

$$Wi \overset{\nabla}{\mathbf{A}} + (\mathbf{A} - \mathbf{I}) + \varepsilon \operatorname{tr}(\mathbf{A} - \mathbf{I})(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = 0. \quad (2.38)$$

Escrevendo as equações de (2.38) em termos de  $\hat{\lambda}$ ,  $\hat{\mu}$  e  $\hat{\nu}$ , tem-se

$$\left[ \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial t} + \frac{2\hat{\mu}}{|\mathbf{u}|^2} \left( v \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial v}{\partial t} \right) + |\mathbf{u}|^2 (\mathbf{u} \cdot \nabla) \left( \frac{\hat{\lambda}}{|\mathbf{u}|^2} \right) + 2\hat{\mu}|\mathbf{u}|^2 \nabla \cdot \mathbf{w} \right] + \frac{\alpha(\hat{\lambda} - 1)}{Wi} = 0, \quad (2.39)$$

$$\left[ \frac{\partial \hat{\mu}}{\partial t} + \left( \frac{\hat{\lambda} - \hat{\nu}}{|\mathbf{u}|^2} \right) \left( u \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial u}{\partial t} \right) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \hat{\mu} + \hat{\nu}|\mathbf{u}|^2 \nabla \cdot \mathbf{w} \right] + \frac{\alpha \hat{\mu}}{Wi} = 0, \quad (2.40)$$

$$\left[ \frac{\partial \hat{\nu}}{\partial t} + \frac{2\hat{\mu}}{|\mathbf{u}|^2} \left( u \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{1}{|\mathbf{u}|^2} (\mathbf{u} \cdot \nabla) (\hat{\nu}|\mathbf{u}|^2) \right] + \frac{\alpha(\hat{\nu} - 1)}{Wi} = 0, \quad (2.41)$$

onde  $\alpha = 1 + \varepsilon(\hat{\lambda} - 2 + \hat{\nu})$  e

$$|\mathbf{u}|^2 \nabla \cdot \mathbf{w} = \frac{1}{|\mathbf{u}|^2} \left[ (v^2 - u^2) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 4uv \frac{\partial u}{\partial x} \right]. \quad (2.42)$$

Agora, a fim de determinar uma relação entre as variáveis NSF e as CSF, substitui-se (2.28) e (2.33) em (2.26). Desta forma, as variáveis se relacionam pelas expressões abaixo

$$T^{xx} = \frac{(1 - \beta)}{Wi} \left[ \frac{1}{|\mathbf{u}|^2} \left( \hat{\lambda}u^2 - 2\hat{\mu}uv + \hat{\nu}v^2 \right) - 1 \right], \quad (2.43)$$

$$T^{xy} = \frac{(1 - \beta)}{Wi|\mathbf{u}|^2} \left[ \hat{\lambda}uv + \hat{\mu}(u^2 - v^2) - \hat{\nu}uv \right], \quad (2.44)$$

$$T^{yy} = \frac{(1 - \beta)}{Wi} \left[ \frac{1}{|\mathbf{u}|^2} \left( \hat{\lambda}v^2 + 2\hat{\mu}uv + \hat{\nu}u^2 \right) - 1 \right], \quad (2.45)$$

e

$$\hat{\lambda} - 1 = \frac{Wi}{(1 - \beta)|\mathbf{u}|^2} (u^2 T^{xx} + 2uv T^{xy} + v^2 T^{yy}), \quad (2.46)$$

$$\hat{\mu} = \frac{Wi}{(1 - \beta)|\mathbf{u}|^2} (-uv T^{xx} + (u^2 - v^2) T^{xy} + uv T^{yy}), \quad (2.47)$$

$$\hat{\nu} - 1 = \frac{Wi}{(1 - \beta)|\mathbf{u}|^2} (v^2 T^{xx} + 2uv T^{xy} + u^2 T^{yy}). \quad (2.48)$$

## 2.4 Condições auxiliares

O uso de condições auxiliares na solução numérica de equações diferenciais parciais é muito importante uma vez que busca-se solução única para um determinado problema. Assim, são necessárias as *condições iniciais* que são valores das propriedades do escoamento conhecidos em todo o domínio no tempo  $t = 0$  e também as *condições de contorno* que são valores prescritos de propriedades do escoamento em determinadas áreas do domínio. A seguir são apresentadas as condições auxiliares utilizadas neste trabalho.

### 2.4.1 Condições iniciais

As condições iniciais adotadas nas simulações para o campo de velocidade  $\mathbf{u}$ , a pressão  $p$  e o tensor polimérico  $\mathbf{T}$  são nulas. Em decorrência disso, com (2.46)-(2.48), para as variáveis naturais tem-se  $\hat{\lambda} = \hat{\nu} = 1$  e  $\hat{\mu} = 0$ .

### 2.4.2 Paredes rígidas

Como o fluido não penetra as paredes, a velocidade normal é nula e, representada por

$$u_n = 0. \quad (2.49)$$

A velocidade tangencial depende do tipo de condição de contorno adotada: sem escorregamento (*no-slip*) ou com escorregamento (*slip*). No caso *no-slip* o fluido adere à parede e não se movimenta, de modo que a velocidade tangencial é

$$u_t = 0. \quad (2.50)$$

Já quando a condição é *slip*, tem-se

$$u_t = u_{slip}. \quad (2.51)$$

Neste trabalho, é adotada a lei de escorregamento Navier linear, cuja expressão é dada por (2.56). Detalhes e a discretização das condições de escorregamento são apresentadas na Seção 2.5.

### 2.4.3 Entrada de fluido (*inflow*)

Na região por onde o fluido é injetado a velocidade normal é prescrita ( $u_{inflow}$ ) e consideramos a velocidade tangencial nula,

$$\begin{cases} u_n = u_{inflow} \\ u_t = 0 \end{cases}. \quad (2.52)$$

Para o tensor  $\mathbf{T}$  é considerada a solução analítica de um escoamento em um canal de placas paralelas totalmente desenvolvido para um fluido Oldroyd-B. As condições são expressas por

$$T^{xx} = 2(1 - \beta)Wi \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \quad T^{xy} = (1 - \beta) \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad T^{yy} = 0. \quad (2.53)$$

No caso da NSF, as condições no *inflow* são

$$\hat{\lambda} = \frac{Wi}{(1 - \beta)} T^{xx} + 1, \quad \hat{\mu} = \frac{Wi}{(1 - \beta)} T^{xy}, \quad \hat{\nu} = \frac{Wi}{(1 - \beta)} T^{yy} + 1, \quad (2.54)$$

e são obtidas por meio das equações (2.46)–(2.48).

#### 2.4.4 Saída de fluido (*outflow*)

Na região de *outflow* é aplicada condição de Neumann homogênea tanto para  $\mathbf{u}$  quanto para  $\mathbf{T}$ , ou seja,

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial \mathbf{n}} = 0, \\ \frac{\partial u_t}{\partial \mathbf{n}} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{n}} = 0, \end{cases} \quad (2.55)$$

sendo  $\mathbf{n}$  o vetor normal ao *outflow*.

## 2.5 Leis de escorregamento

Por muito tempo a condição de não escorregamento (*no-slip*) tem sido empregada na modelagem de experimentos macroscópicos e essa condição afirma que, em um escoamento, o fluido adere à parede e as partículas de fluido próximas da parede não se movimentam [14]. Porém, em algumas situações como o escoamento de gás, de fluidos não-Newtonianos e dinâmica de linha de contato sabe-se que a velocidade do fluido na parede não é nula [23].

Em 1822, Navier [24] apresentou a ideia de que um líquido pode deslizar sobre uma superfície sólida com velocidade de escorregamento  $u_{slip}$  oposta a uma força de fricção proporcional ao gradiente de velocidade na direção normal à parede, isto é, a velocidade  $u_{slip}$  é proporcional à taxa de cisalhamento na superfície [1].

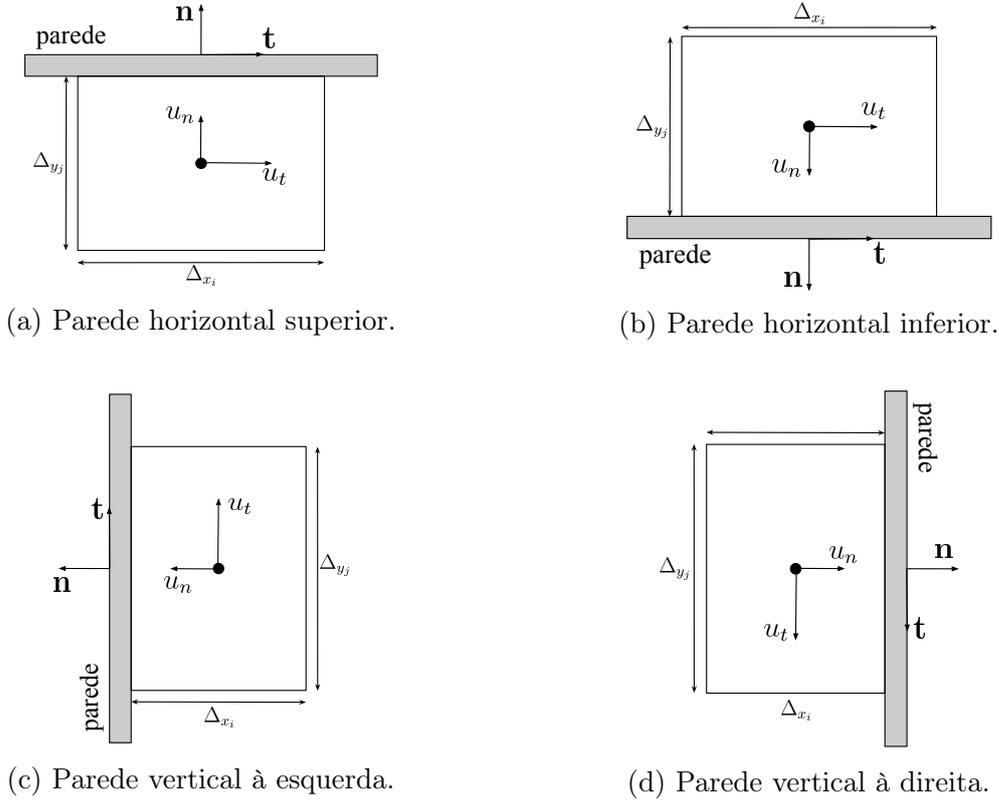
A Figura 2.1 ilustra os quatro tipos de paredes presentes nas geometrias dos escoamentos estudados neste trabalho e as componentes normal e tangencial do vetor velocidade.

A lei de escorregamento Navier linear é dada pela expressão

$$\mathbf{u}_{parede} = -k \{ \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} - [(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{n}^\top] \mathbf{n} \}, \quad (2.56)$$

onde  $\mathbf{n}$  é o vetor normal ao contorno,  $k$  é o coeficiente de fricção que controla a intensidade da velocidade de escorregamento na parede e  $\boldsymbol{\tau}$  é o tensor tensão extra apresentado em (2.3).

A partir dessa expressão, reescrita em coordenadas cartesianas bidimensionais, tem-se as expressões para cada uma das paredes apresentadas na Figura 2.1. Começa-se reescrevendo o tensor tensão extra  $\boldsymbol{\tau} = 2\eta_s \mathbf{D} + \boldsymbol{\tau}^p$ , ou seja,



(a) Parede horizontal superior.

(b) Parede horizontal inferior.

(c) Parede vertical à esquerda.

(d) Parede vertical à direita.

Figura 2.1: Tipos de parede em que a condição *slip* é empregada.

$$\begin{bmatrix} \tau^{xx} & \tau^{xy} \\ \tau^{xy} & \tau^{yy} \end{bmatrix} = \eta_s \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & 2\frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_p^{xx} & \tau_p^{xy} \\ \tau_p^{xy} & \tau_p^{yy} \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

Inicialmente, considera-se uma parede horizontal superior e, neste caso, o vetor normal é dado por  $\mathbf{n} = [0, 1]$ . Assim, substituindo  $\mathbf{n}$  e  $\boldsymbol{\tau}$  em (2.61), a velocidade  $\mathbf{u}_{parede}$  é expressa por

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{parede} &= -k \left\{ [0 \ 1] \begin{bmatrix} \tau^{xx} & \tau^{xy} \\ \tau^{xy} & \tau^{yy} \end{bmatrix} - \left[ \left( [0 \ 1] \begin{bmatrix} \tau^{xx} & \tau^{xy} \\ \tau^{xy} & \tau^{yy} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right] [0 \ 1] \right\}_{parede} \\ &= -k \{ [\tau^{xy} \ \tau^{yy}] - [0 \ \tau^{yy}] \}_{parede} \\ &= -k [\tau^{xy} \ 0]_{parede} \\ &= -k \left[ \eta_s \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \tau_p^{xy} \ 0 \right]_{parede}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Como se trata de uma parede paralela ao eixo  $x$ , temos que  $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ . Finalmente, a expressão se reduz a

$$\mathbf{u}_{parede} = -k \left[ \eta_s \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_p^{xy}, \ 0 \right]_{parede}. \quad (2.59)$$

Quando a condição de escorregamento é empregada numa parede horizontal inferior o vetor normal é  $\mathbf{n} = [0, -1]$  e, procedendo de maneira análoga ao que foi feito acima, obtém-se

$$\mathbf{u}_{parede} = k \left[ \eta_s \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_p^{xy}, \quad 0 \right]_{parede}. \quad (2.60)$$

Considerando paredes verticais, a maneira de determinar as expressões para  $\mathbf{u}_{parede}$  segue o mesmo procedimento utilizado para paredes horizontais, porém, agora a derivada nula é  $\frac{\partial u}{\partial y}$ .

Para uma parede vertical à esquerda tem-se  $\mathbf{n} = [-1, 0]$  e, então

$$\mathbf{u}_{parede} = k \left[ 0, \quad \eta_s \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_p^{xy} \right]_{parede}, \quad (2.61)$$

e, para uma parede vertical à direita, como  $\mathbf{n} = [1, 0]$ ,

$$\mathbf{u}_{parede} = -k \left[ 0, \quad \eta_s \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_p^{xy} \right]_{parede}. \quad (2.62)$$

Os mesmos procedimentos são realizados para a lei de Navier não-linear, dada pela expressão

$$\mathbf{u}_t = -k \|\boldsymbol{\tau}_t\|^m \frac{\boldsymbol{\tau}_t}{\|\boldsymbol{\tau}_t\|}, \quad (2.63)$$

onde  $\boldsymbol{\tau}_t$  é o tensor tensão extra tangente à parede dado por

$$\boldsymbol{\tau}_t = (\mathbf{I} - \mathbf{n}^\top \cdot \mathbf{n}) (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}^\top). \quad (2.64)$$

Desta forma, de acordo com o vetor normal  $\mathbf{n}$ , ou seja, dependendo da parede que se toma como referência, tem-se as seguintes expressões:

- Para  $\mathbf{n} = [0, 1]$ :

$$\mathbf{u}_{parede} = -k \left[ \left( \eta_s \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_p^{xy} \right)^m, \quad 0 \right]_{parede}, \quad (2.65)$$

- Para  $\mathbf{n} = [0, -1]$ :

$$\mathbf{u}_{parede} = k \left[ \left( \eta_s \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_p^{xy} \right)^m, \quad 0 \right]_{parede}, \quad (2.66)$$

- Para  $\mathbf{n} = [-1, 0]$ :

$$\mathbf{u}_{parede} = k \left[ 0, \quad \left( \eta_s \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_p^{xy} \right)^m \right]_{parede}, \quad (2.67)$$

- Para  $\mathbf{n} = [1, 0]$ :

$$\mathbf{u}_{parede} = -k \left[ 0, \quad \left( \eta_s \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_p^{xy} \right)^m \right]_{parede}. \quad (2.68)$$

### 2.5.1 Adimensionalização das leis de escorregamento

Para adimensionalizar as expressões referentes as leis de escorregamento Navier linear ( $m = 1$ ) e não-linear, são utilizadas as seguintes variáveis adimensionais

$$\mathbf{x} = L\bar{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{u} = U\bar{\mathbf{u}}, \quad \boldsymbol{\tau}^p = \frac{\eta_0 U}{L} \bar{\mathbf{T}}, \quad k = U^{1-m} \left(\frac{\eta_0}{L}\right)^{-m} \bar{k}. \quad (2.69)$$

Com as substituições e os cálculos necessários são obtidas as seguintes expressões adimensionais para  $\mathbf{u}_{parede}$  em que as barras são omitidas:

- Navier linear ( $m = 1$ ):

$$\mathbf{u}_{parede} = \mp k \left[ \beta \frac{\partial u}{\partial y} + T^{xy}, \quad 0 \right]_{parede}, \quad (2.70)$$

$$\mathbf{u}_{parede} = \mp k \left[ 0, \quad \beta \frac{\partial v}{\partial x} + T^{xy} \right]_{parede}. \quad (2.71)$$

- Navier não-linear:

$$\mathbf{u}_{parede} = \mp k \left[ \left( \beta \frac{\partial u}{\partial y} + T^{xy} \right)^m, \quad 0 \right]_{parede}, \quad (2.72)$$

$$\mathbf{u}_{parede} = \mp k \left[ 0, \quad \left( \beta \frac{\partial v}{\partial x} + T^{xy} \right)^m \right]_{parede}. \quad (2.73)$$

Vale lembrar que, para  $m = 1$ , tem-se a lei Navier linear e que, no caso de fluidos Newtonianos, basta tomar  $\beta = 1$  nas expressões acima.

## Método numérico

### 3.1 Método de projeção

Devido à dificuldade de resolver simultaneamente o sistema de equações (2.9)–(2.10), o método de projeção objetiva desacoplar as variáveis  $\mathbf{u}$  e  $p$  desse sistema, resultando, assim, em equações onde  $\mathbf{u}$  e  $p$  são determinadas de maneira isolada.

O método de projeção é embasado no Teorema da Decomposição de Helmholtz-Hodge que garante que, para um campo vetorial  $\tilde{\mathbf{u}}$  em uma região  $\Omega$  com fronteira suave  $\partial\Omega$ , a decomposição de  $\tilde{\mathbf{u}}$  na forma

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \nabla\psi, \quad (3.1)$$

existe e é única, sendo  $\psi$  um campo escalar definido em  $\Omega$  e com  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ .

Inicialmente, o método de projeção baseia-se em resolver a equação

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{u}}^\top) = -\nabla\tilde{p} + \frac{\beta}{Re}\nabla^2\tilde{\mathbf{u}} + \frac{1}{Re}\nabla \cdot \mathbf{T}, \quad (3.2)$$

em que tem-se os valores de  $\mathbf{T}$  e  $\tilde{p} \neq p$ , uma pressão tentativa.

Como, para calcular  $\mathbf{u}$ , é necessário obter o valor de  $\psi$ , isolamos  $\mathbf{u}$  em (3.1) e, aplicando o divergente, tem-se

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \nabla^2\psi. \quad (3.3)$$

Desconsiderando a equação de incompressibilidade para  $\tilde{\mathbf{u}}$  e aplicando (2.2) em (3.3), chega-se à equação de Poisson

$$\nabla^2\psi = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}. \quad (3.4)$$

As condições de contorno adotadas para  $\tilde{\mathbf{u}}$  são as mesmas utilizadas para  $\mathbf{u}$  apresentadas na Seção 2.4. Já para  $\psi$  as condições de contorno para *inflow* e fronteiras rígidas, segundo [34], são

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} = 0, \quad (3.5)$$

e no *outflow*,

$$\psi = 0. \quad (3.6)$$

## 3.2 Malha computacional e discretização do domínio

A malha computacional em que as equações são discretizadas é do tipo não-uniforme e as células desta malha são deslocadas. Desta forma, define-se por  $N_x$  e  $N_y$  a quantidade de intervalos em que o domínio é dividido nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Os pontos da malha distam, na direção  $x$ ,

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N_x, \quad (3.7)$$

e, na direção  $y$ ,

$$\Delta y_j = y_j - y_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, N_y. \quad (3.8)$$

É necessário identificar as células que compõem a malha e os pontos em que as incógnitas das equações governantes serão calculadas. Deste modo, as células são identificadas pelo par ordenado  $(i, j)$  e seu centro pelo ponto  $\mathbf{x}_{i,j}$ , matematicamente representado por

$$\mathbf{x}_{i,j} = \left( x_i + \frac{1}{2}\Delta x_i, y_j + \frac{1}{2}\Delta y_j \right). \quad (3.9)$$

Nesses pontos são calculadas as componentes do tensor tensão  $T^{xx}, T^{xy}, T^{yy}$ , as variáveis naturais  $\lambda, \mu$  e  $\nu$ , a pressão  $p$  e o campo escalar  $\psi$ .

Agora, é possível classificar pontos que se encontram nas faces das células do domínio. Um ponto localizado na face vertical esquerda de uma célula é indicado por  $\mathbf{x}_{i-\frac{1}{2},j}$  e representado por

$$\mathbf{x}_{i-\frac{1}{2},j} = \left( x_i, y_j + \frac{1}{2}\Delta y_j \right), \quad (3.10)$$

e, neste ponto, é calculada a componente  $u$  da velocidade. Um ponto que está na face vertical direita de uma célula é da forma

$$\mathbf{x}_{i+\frac{1}{2},j} = \left( x_i + \Delta x_i, y_j + \frac{1}{2}\Delta y_j \right). \quad (3.11)$$

Já um ponto posicionado na face horizontal inferior de uma célula é escrito como  $\mathbf{x}_{i,j-\frac{1}{2}}$  e sua representação é

$$\mathbf{x}_{i,j-\frac{1}{2}} = \left( x_i + \frac{1}{2}\Delta x_i, y_j \right), \quad (3.12)$$

ponto em que a componente  $v$  da velocidade é calculada. Por outro lado, um ponto na face horizontal superior é representado por

$$\mathbf{x}_{i,j+\frac{1}{2}} = \left( x_i + \frac{1}{2}\Delta x_i, y_j + \Delta y_j \right). \quad (3.13)$$

A Figura 3.1 ilustra os pontos descritos onde as propriedades  $u, v, p, \psi, T^{xx}, T^{xy}, T^{yy}, \lambda, \mu$  e  $\nu$  são calculadas.

## 3.3 Classificação das células

As células computacionais são classificadas como:

- INFLOW (I): células da região por onde o fluido entra;

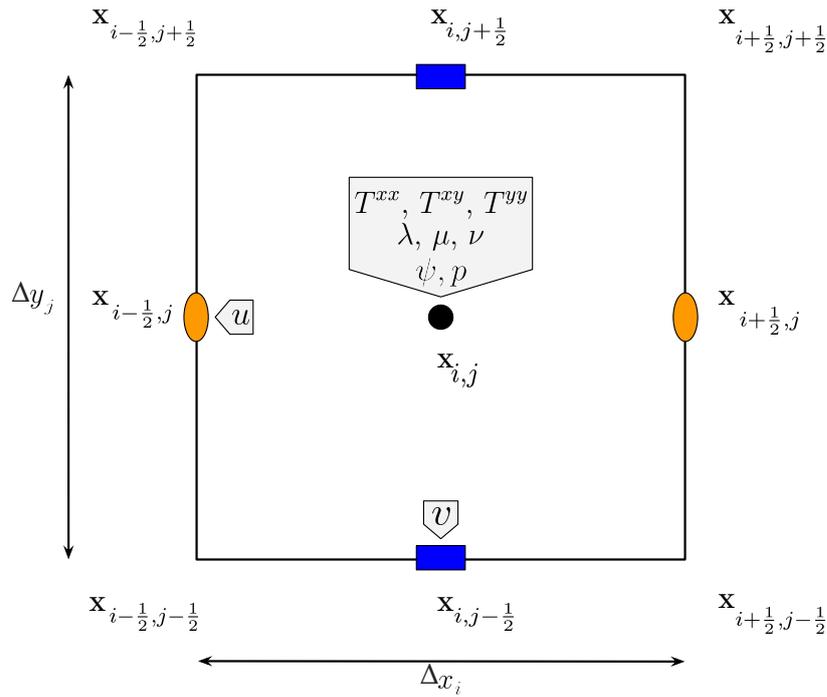


Figura 3.1: Pontos de interesse de uma célula.

- OUTFLOW (O): células da região por onde o fluido sai;
- FULL (F): células da região preenchida por fluido;
- BOUNDARY (B): células de regiões de parede rígida (ou contorno).

Em escoamentos em um canal de placas paralelas e em uma contração abrupta, por exemplo, as células são classificadas como na Figura 3.2.

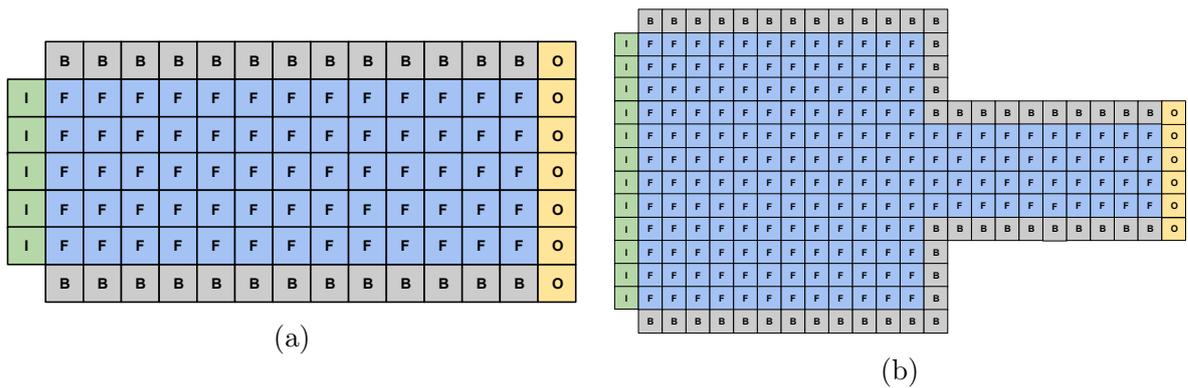


Figura 3.2: Células do canal de placas paralelas (a) e da contração (b).

### 3.4 Discretização temporal da equação de momento

Nesta seção é feita a discretização temporal da equação (3.2) de modo que a velocidade  $\mathbf{u}$  é aproximada de maneira semi-implícita, uma vez que a derivada temporal é aproximada com o método de Euler Implícito e os termos convectivos são aproximados utilizando o método de Euler Explícito.

Assim tem-se a seguinte equação discretizada

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^n}{\Delta_t} + \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{u}}^\top)^n = -\nabla \tilde{p}^{n+1} + \frac{\beta}{Re} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + \frac{1}{Re} \nabla \cdot \mathbf{T}^n. \quad (3.14)$$

Como procura-se determinar  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ , é assumido que  $\tilde{\mathbf{u}}^n = \mathbf{u}^n$  e  $\tilde{p}^{n+1} = p^n$ , valores conhecidos. Desta forma, a equação anterior torna-se

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta_t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}^\top)^n = -\nabla p^n + \frac{\beta}{Re} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + \frac{1}{Re} \nabla \cdot \mathbf{T}^n. \quad (3.15)$$

Também é necessário atualizar a pressão  $p^{n+1}$  e essa atualização é feita inicialmente discretizando a equação (2.9) no tempo

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta_t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}^\top)^n = -\nabla p^{n+1} + \frac{\beta}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1} + \frac{1}{Re} \nabla \cdot \mathbf{T}^n, \quad (3.16)$$

e realizando a operação (3.16) – (3.15), que resulta em

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}}{\Delta_t} = -\nabla p^{n+1} + \nabla p^n + \frac{\beta}{Re} [\nabla^2 \mathbf{u}^{n+1} - \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}]. \quad (3.17)$$

Agora, substituindo (3.1) em (3.17) obtém-se

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+1} - \nabla \psi^{n+1}}{\Delta_t} = -\nabla p^{n+1} + \nabla p^n + \frac{\beta}{Re} [\nabla^2 \mathbf{u}^{n+1} - \nabla^2 (\mathbf{u}^{n+1} + \nabla \psi^{n+1})]. \quad (3.18)$$

Procedendo com as simplificações possíveis e descartando o termo do operador  $\nabla^2$ , tem-se a seguinte equação para atualizar a pressão

$$p^{n+1} = p^n + \frac{\psi^{n+1}}{\Delta_t}. \quad (3.19)$$

### 3.5 Atualização do tensor tensão - CSF

Agora é necessário calcular as componentes do tensor tensão, isto é,  $T^{xx,n+1}$ ,  $T^{xy,n+1}$  e  $T^{yy,n+1}$ . Isso é feito discretizando, no tempo com o método de Euler Explícito, o conjunto de equações (2.19)-(2.21) se o modelo constitutivo Oldroyd-B for utilizado ou então as equações (2.22)-(2.24) quando o modelo escolhido for o PTT. Para o modelo Oldroyd-B, as equações discretizadas são dadas por

$$T^{xx,n+1} = T^{xx,n} + \Delta_t \cdot \left[ -\frac{\partial(u^{n+1}T^{xx,n})}{\partial x} - \frac{\partial(v^{n+1}T^{xx,n})}{\partial y} + 2\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} T^{xx,n} + 2\frac{\partial u^{n+1}}{\partial y} T^{xy,n} + 2\frac{(1-\beta)}{Wi} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} - \frac{1}{Wi} T^{xx,n} \right], \quad (3.20)$$

$$T^{xy,n+1} = T^{xy,n} + \Delta_t \cdot \left[ -\frac{\partial(u^{n+1}T^{xy,n})}{\partial x} - \frac{\partial(v^{n+1}T^{xy,n})}{\partial y} + \frac{\partial v^{n+1}}{\partial x} T^{xx,n} + \frac{\partial u^{n+1}}{\partial y} T^{yy,n} + \frac{(1-\beta)}{Wi} \left( \frac{\partial u^{n+1}}{\partial y} + \frac{\partial v^{n+1}}{\partial x} \right) - \frac{1}{Wi} T^{xy,n} \right], \quad (3.21)$$

$$T^{yy,n+1} = T^{yy,n} + \Delta_t \cdot \left[ -\frac{\partial(u^{n+1}T^{yy,n})}{\partial x} - \frac{\partial(v^{n+1}T^{yy,n})}{\partial y} + 2\frac{\partial v^{n+1}}{\partial x}T^{xy,n} + 2\frac{\partial v^{n+1}}{\partial y}T^{yy,n} + 2\frac{(1-\beta)}{Wi}\frac{\partial v^{n+1}}{\partial y} - \frac{1}{Wi}T^{yy,n} \right]. \quad (3.22)$$

Já para o PTT, temos as seguintes equações

$$T^{xx,n+1} = T^{xx,n} + \Delta_t \cdot \left[ -\frac{\partial(u^{n+1}T^{xx,n})}{\partial x} - \frac{\partial(v^{n+1}T^{xx,n})}{\partial y} + 2\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}T^{xx,n} + 2\frac{\partial u^{n+1}}{\partial y}T^{xy,n} - \frac{\varepsilon}{1-\beta}f_{xx}^n + 2\frac{(1-\beta)}{Wi}\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} - \frac{1}{Wi}T^{xx,n} \right], \quad (3.23)$$

onde  $f_{xx}^n = (T^{xx,n} + T^{yy,n})T^{xx,n}$ ,

$$T^{xy,n+1} = T^{xy,n} + \Delta_t \cdot \left[ -\frac{\partial(u^{n+1}T^{xy,n})}{\partial x} - \frac{\partial(v^{n+1}T^{xy,n})}{\partial y} + \frac{\partial v^{n+1}}{\partial x}T^{xx,n} + \frac{\partial u^{n+1}}{\partial y}T^{yy,n} - \frac{\varepsilon}{1-\beta}f_{xy}^n + \frac{(1-\beta)}{Wi}\left(\frac{\partial u^{n+1}}{\partial y} + \frac{\partial v^{n+1}}{\partial x}\right) - \frac{1}{Wi}T^{xy,n} \right], \quad (3.24)$$

onde  $f_{xy}^n = (T^{xx,n} + T^{yy,n})T^{xy,n}$ ,

$$T^{yy,n+1} = T^{yy,n} + \Delta_t \cdot \left[ -\frac{\partial(u^{n+1}T^{yy,n})}{\partial x} - \frac{\partial(v^{n+1}T^{yy,n})}{\partial y} + 2\frac{\partial v^{n+1}}{\partial x}T^{xy,n} + 2\frac{\partial v^{n+1}}{\partial y}T^{yy,n} - \frac{\varepsilon}{1-\beta}f_{yy}^n + 2\frac{(1-\beta)}{Wi}\frac{\partial v^{n+1}}{\partial y} - \frac{1}{Wi}T^{yy,n} \right]. \quad (3.25)$$

onde  $f_{yy}^n = (T^{xx,n} + T^{yy,n})T^{yy,n}$ .

### 3.6 Atualização do tensor tensão - NSF

Assim como feito para a formulação cartesiana, também é necessário atualizar os tensores da formulação NSF, quando esta é adotada. O método utilizado para discretizar as equações (2.34)-(2.36), do fluido Oldroyd-B, no tempo é o de Euler Explícito e o resultado da discretização é:

$$\hat{\lambda}^{n+1} = \hat{\lambda}^n + \Delta_t \cdot f_{NSF}^{\hat{\lambda}} \quad (3.26)$$

$$\hat{\mu}^{n+1} = \hat{\mu}^n + \Delta_t \cdot f_{NSF}^{\hat{\mu}} \quad (3.27)$$

$$\hat{\nu}^{n+1} = \hat{\nu}^n + \Delta_t \cdot f_{NSF}^{\hat{\nu}} \quad (3.28)$$

com

$$f_{NSF}^{\hat{\lambda}} = -\frac{2\hat{\mu}^n}{|\mathbf{u}^{n+1}|^2 + tol} \left( v^{n+1}\frac{\partial u^{n+1}}{\partial t} - u^{n+1}\frac{\partial v^{n+1}}{\partial t} \right) - |\mathbf{u}^{n+1}|^2 \left( \frac{\partial(u^{n+1}\lambda^n)}{\partial x} + \frac{\partial(v^{n+1}\lambda^n)}{\partial y} \right) - 2\hat{\mu}^n|\mathbf{u}^{n+1}|^2 \nabla \cdot \mathbf{w}^{n+1} - \frac{1}{Wi}(\hat{\lambda}^n - 1), \quad (3.29)$$

onde  $\lambda^n = \frac{\hat{\lambda}^n}{|\mathbf{u}^{n+1}|^2 + tol}$ ,

$$f_{NSF}^{\hat{\mu}} = - \left( \frac{\hat{\lambda}^n - \hat{\nu}^n}{|\mathbf{u}^{n+1}|^2 + tol} \right) \left( u^{n+1} \frac{\partial v^{n+1}}{\partial t} - v^{n+1} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial t} \right) - \left( \frac{\partial(u^{n+1} \hat{\mu}^n)}{\partial x} + \frac{\partial(v^{n+1} \hat{\mu}^n)}{\partial y} \right) - \hat{\nu}^n |\mathbf{u}^{n+1}|^2 \nabla \cdot \mathbf{w}^{n+1} - \frac{\hat{\mu}^n}{Wi}, \quad (3.30)$$

$$f_{NSF}^{\hat{\nu}} = - \frac{2\hat{\mu}^n}{|\mathbf{u}^{n+1}|^2 + tol} \left( u^{n+1} \frac{\partial v^{n+1}}{\partial t} - v^{n+1} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial t} \right) - \frac{1}{|\mathbf{u}^{n+1}|^2 + tol} \left( \frac{\partial(u^{n+1} \nu^n)}{\partial x} + \frac{\partial(v^{n+1} \nu^n)}{\partial y} \right) - \frac{1}{Wi} (\hat{\nu}^n - 1), \quad (3.31)$$

onde  $\nu^n = \hat{\nu}^n |\mathbf{u}^{n+1}|^2$  e

$$|\mathbf{u}^{n+1}|^2 \nabla \cdot \mathbf{w}^{n+1} = \frac{1}{|\mathbf{u}^{n+1}|^2 + tol} \left[ [(v^{n+1})^2 - (u^{n+1})^2] \left( \frac{\partial u^{n+1}}{\partial y} + \frac{\partial v^{n+1}}{\partial x} \right) + 4u^{n+1} v^{n+1} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} \right]. \quad (3.32)$$

Para o modelo PTT, seguindo o mesmo procedimento, também pelo método de Euler Explícito discretiza-se as equações (2.39)-(2.41) e obtém-se

$$\hat{\lambda}^{n+1} = \hat{\lambda}^n + \Delta_t \cdot g_{NSF}^{\hat{\lambda}} \quad (3.33)$$

$$\hat{\mu}^{n+1} = \hat{\mu}^n + \Delta_t \cdot g_{NSF}^{\hat{\mu}} \quad (3.34)$$

$$\hat{\nu}^{n+1} = \hat{\nu}^n + \Delta_t \cdot g_{NSF}^{\hat{\nu}} \quad (3.35)$$

com

$$g_{NSF}^{\hat{\lambda}} = - \frac{2\hat{\mu}^n}{|\mathbf{u}^{n+1}|^2 + tol} \left( v^{n+1} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial t} - u^{n+1} \frac{\partial v^{n+1}}{\partial t} \right) - |\mathbf{u}^{n+1}|^2 \left( \frac{\partial(u^{n+1} \lambda^n)}{\partial x} + \frac{\partial(v^{n+1} \lambda^n)}{\partial y} \right) - 2\hat{\mu}^n |\mathbf{u}^{n+1}|^2 \nabla \cdot \mathbf{w}^{n+1} - \frac{\alpha^n}{Wi} (\hat{\lambda}^n - 1), \quad (3.36)$$

onde  $\lambda^n = \frac{\hat{\lambda}^n}{|\mathbf{u}^{n+1}|^2 + tol}$ ,

$$g_{NSF}^{\hat{\mu}} = - \left( \frac{\hat{\lambda}^n - \hat{\nu}^n}{|\mathbf{u}^{n+1}|^2 + tol} \right) \left( u^{n+1} \frac{\partial v^{n+1}}{\partial t} - v^{n+1} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial t} \right) - \left( \frac{\partial(u^{n+1} \hat{\mu}^n)}{\partial x} + \frac{\partial(v^{n+1} \hat{\mu}^n)}{\partial y} \right) - \hat{\nu}^n |\mathbf{u}^{n+1}|^2 \nabla \cdot \mathbf{w}^{n+1} - \frac{\alpha^n \hat{\mu}^n}{Wi}, \quad (3.37)$$

$$g_{NSF}^{\hat{\nu}} = - \frac{2\hat{\mu}^n}{|\mathbf{u}^{n+1}|^2 + tol} \left( u^{n+1} \frac{\partial v^{n+1}}{\partial t} - v^{n+1} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial t} \right) - \frac{1}{|\mathbf{u}^{n+1}|^2 + tol} \left( \frac{\partial(u^{n+1} \nu^n)}{\partial x} + \frac{\partial(v^{n+1} \nu^n)}{\partial y} \right) - \frac{\alpha^n}{Wi} (\hat{\nu}^n - 1), \quad (3.38)$$

onde  $\nu^n = \hat{\nu}^n |\mathbf{u}^{n+1}|^2$ , e

$$|\mathbf{u}^{n+1}|^2 \nabla \cdot \mathbf{w}^{n+1} = \frac{1}{|\mathbf{u}^{n+1}|^2 + \text{tol}} \left[ [(v^{n+1})^2 - (u^{n+1})^2] \left( \frac{\partial u^{n+1}}{\partial y} + \frac{\partial v^{n+1}}{\partial x} \right) + 4u^{n+1}v^{n+1} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} \right]. \quad (3.39)$$

Note que, para as três últimas equações, temos  $\alpha^n = 1 + \varepsilon(\hat{\lambda}^n - 2 + \hat{\nu}^n)$ . Nessas equações foram acrescentadas as parcelas *tol* em determinados denominadores pois os vetores da base (2.28) se degeneram em regiões próximas ao contorno e pontos onde a velocidade é nula. Assim, para evitar possíveis divisões por zero, a constante *tol* é adicionada aos denominadores.

### 3.7 Discretização da lei Navier linear

A discretização das condições *slip* é iniciada pela equação (2.70), referente a uma parede horizontal superior, ilustrada na Figura 3.3 abaixo.

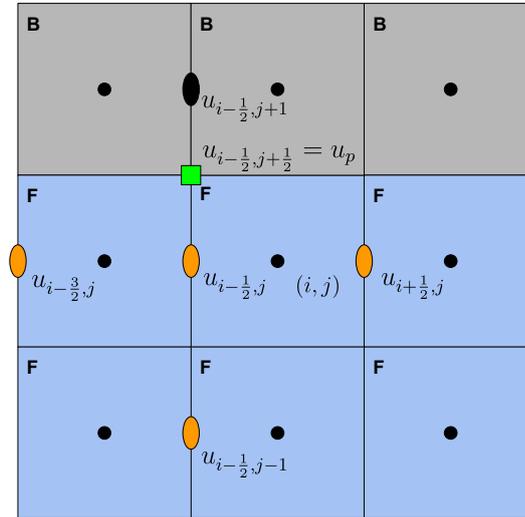


Figura 3.3: Discretização da condição *slip* em uma parede horizontal.

Calculando  $u_p = u_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}$ , com (2.70), tem-se

$$\begin{aligned} u_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} &= -k \left( \beta \frac{\partial u}{\partial y} + T^{xy} \right) \Big|_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \\ &= -k \left[ \beta \left( a u_{i-\frac{1}{2}, j} + b u_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + c u_{i-\frac{1}{2}, j+1} \right) + T_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{xy} \right], \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde

$$a = -\frac{h_{y2}}{h_{y1}(h_{y1} + h_{y2})}, \quad b = \frac{h_{y2} - h_{y1}}{h_{y1}h_{y2}}, \quad c = \frac{h_{y1}}{h_{y2}(h_{y1} + h_{y2})}, \quad (3.41)$$

e

$$h_{y1} = \frac{1}{2}(\Delta_{y_{j-1}} + \Delta_{y_j}), \quad h_{y2} = \frac{1}{2}(\Delta_{y_j} + \Delta_{y_{j+1}}). \quad (3.42)$$

Ao aproximar a derivada  $\frac{\partial u}{\partial y}$ , o ponto  $u_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}$ , que está fora do domínio, é inserido na equação. É utilizada extrapolação de ordem 1 para aproximá-lo, isto é,

$$u_{i-\frac{1}{2},j+1} = 2u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2},j}, \quad (3.43)$$

e, substituindo em (3.40)

$$u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = -k \left\{ \beta \left[ au_{i-\frac{1}{2},j} + bu_p + c \left( 2u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2},j} \right) \right] + T_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{xy} \right\}. \quad (3.44)$$

Com simplificações a expressão acima torna-se

$$u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = -\frac{k\beta(a-c)}{1+k\beta(b+2c)}u_{i-\frac{1}{2},j} - \frac{k}{1+k\beta(b+2c)}T_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{xy}. \quad (3.45)$$

Note que é necessário calcular  $T_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{xy}$  em um ponto onde não está definido. Para isto, é feita a seguinte média

$$T_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{xy} = \frac{T_{i-1,j+\frac{1}{2}}^{xy} - T_{i,j+\frac{1}{2}}^{xy}}{2}, \quad (3.46)$$

e, em seguida, a extrapolação de grau 0 abaixo

$$T_{i-1,j+\frac{1}{2}}^{xy} = T_{i-1,j}^{xy}, \quad (3.47)$$

$$T_{i,j+\frac{1}{2}}^{xy} = T_{i,j}^{xy}. \quad (3.48)$$

Finalmente, substituindo em (3.45), a velocidade na parede é

$$u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = -\frac{k\beta(a-c)}{1+k\beta(b+2c)}u_{i-\frac{1}{2},j} - \frac{k}{2[1+k\beta(b+2c)]} (T_{i-1,j}^{xy} + T_{i,j}^{xy}). \quad (3.49)$$

Em relação a uma parede horizontal inferior (Figura 2.1b), a partir da equação (2.65) e, com cálculos semelhantes aos feitos no caso da parede superior, a expressão encontrada para  $u_p = u_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}$  é

$$u_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \frac{k\beta(c-a)}{1-k\beta(b+2a)}u_{i-\frac{1}{2},j} + \frac{k}{2[1-k\beta(b+2a)]} (T_{i-1,j}^{xy} + T_{i,j}^{xy}), \quad (3.50)$$

em que os termos  $a, b$  e  $c$  são os mesmos de (3.41)

Considera-se, agora, paredes verticais. Em uma parede à direita, por exemplo, representada pela Figura 3.4, a velocidade normal à parede é nula, porém a velocidade tangencial não é. A expressão para calcular  $v_p$  será determinada de forma semelhante aos casos de paredes horizontais.

A equação (2.5) é discretizada entre as células  $(i, j)$  e  $(i, j-1)$ ,

$$\begin{aligned} v_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} &= -k \left( \beta \frac{\partial v}{\partial x} + T^{xy} \right) \Big|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \\ &= -k \left[ \beta \left( av_{i,j-\frac{1}{2}} + bv_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + cv_{i+1,j-\frac{1}{2}} \right) + T_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{xy} \right]. \end{aligned} \quad (3.51)$$

com

$$a = -\frac{h_{x_2}}{h_{x_1}(h_{x_1} + h_{x_2})}, \quad b = \frac{h_{x_2} - h_{x_1}}{h_{x_1}h_{x_2}}, \quad c = \frac{h_{x_1}}{h_{x_2}(h_{x_1} + h_{x_2})}, \quad (3.52)$$

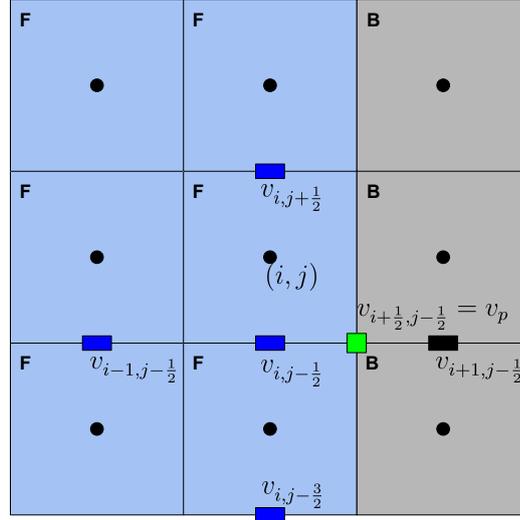


Figura 3.4: Discretização da condição *slip* em uma parede vertical.

em que

$$h_{x_1} = \frac{1}{2}(\Delta_{x_{i-1}} + \Delta_{x_i}), \quad h_{x_2} = \frac{1}{2}(\Delta_{x_i} + \Delta_{x_{i+1}}). \quad (3.53)$$

O ponto  $v_{i+1,j-\frac{1}{2}}$  está fora do domínio e será aproximado por extrapolação linear:

$$v_{i+1,j-\frac{1}{2}} = 2v_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}, \quad (3.54)$$

Substituindo (3.54) em (3.51),

$$v_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = -k \left\{ \beta \left[ av_{i,j-\frac{1}{2}} + bv_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + c \left( 2v_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}} \right) \right] + T_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{xy} \right\}. \quad (3.55)$$

A equação (3.55), com as devidas manipulações, é reescrita como

$$v_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = -\frac{k\beta(a-c)}{1+k\beta(b+2c)}v_{i,j-\frac{1}{2}} - \frac{k}{1+k\beta(b+2c)}T_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{xy}. \quad (3.56)$$

Assim como nos cálculos para paredes horizontais, a componente  $T_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{xy}$  de (3.56) é aproximada por uma média aritmética e, em seguida, por extrapolação de grau 0. Desta forma, a expressão final é

$$v_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = -\frac{k\beta(a-c)}{1+k\beta(b+2c)}v_{i,j-\frac{1}{2}} - \frac{k}{2[1+k\beta(b+2c)]} (T_{i-1,j}^{xy} + T_{i,j}^{xy}). \quad (3.57)$$

De modo análogo, a expressão para uma parede à esquerda é

$$v_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \frac{k\beta(c-a)}{1-k\beta(b+2a)}v_{i,j-\frac{1}{2}} + \frac{k}{2[1-k\beta(b+2a)]} (T_{i-1,j}^{xy} + T_{i,j}^{xy}), \quad (3.58)$$

com os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  de (3.52).

### 3.8 Equações de movimento com influência *slip*

Um aspecto importante da discretização é notar as mudanças que as condições de contorno geram na equação de movimento discretizada. No Apêndice B são apresentadas várias fórmulas de diferenças utilizadas na discretização das equações de movimento nas direções  $x$  e  $y$ . Substituindo tais fórmulas em (B.2) e (B.11), obtêm-se, respectivamente, equações da forma:

$$a_1 \tilde{u}_{i-\frac{3}{2},j}^{n+1} + b_1 \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j-1}^{n+1} + c_1 \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} + d_1 \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j+1}^{n+1} + e_1 \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = z_1^n, \quad (3.59)$$

$$a_2 \tilde{v}_{i-1,j-\frac{1}{2}}^{n+1} + b_2 \tilde{v}_{i,j-\frac{3}{2}}^{n+1} + c_2 \tilde{v}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} + d_2 \tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} + e_2 \tilde{v}_{i+1,j-\frac{1}{2}}^{n+1} = z_2^n, \quad (3.60)$$

com os coeficientes em (3.59) dados por

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{\beta \Delta_t}{Re} \frac{2}{h_{x_1}(h_{x_1} + h_{x_2})}, \\ b_1 &= -\frac{\beta \Delta_t}{Re} \frac{2}{h_{y_1}(h_{y_1} + h_{y_2})}, \\ c_1 &= 1 + \frac{\beta \Delta_t}{Re} \left( \frac{2}{h_{x_1} h_{x_2}} + \frac{2}{h_{y_1} h_{y_2}} \right), \\ d_1 &= -\frac{\beta \Delta_t}{Re} \frac{2}{h_{y_2}(h_{y_1} + h_{y_2})}, \\ e_1 &= -\frac{\beta \Delta_t}{Re} \frac{2}{h_{x_2}(h_{x_1} + h_{x_2})}, \end{aligned}$$

onde  $h_{x_1} = \Delta_{x_{i-1}}$ ,  $h_{x_2} = \Delta_{x_i}$ ,  $h_{y_1} = \frac{1}{2}(\Delta_{y_{j-1}} + \Delta_{y_j})$  e  $h_{y_2} = \frac{1}{2}(\Delta_{y_j} + \Delta_{y_{j+1}})$ . Já os coeficientes de (3.60) são dados por

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{\beta \Delta_t}{Re} \frac{2}{h_{x_1}(h_{x_1} + h_{x_2})}, \\ b_2 &= -\frac{\beta \Delta_t}{Re} \frac{2}{h_{y_1}(h_{y_1} + h_{y_2})}, \\ c_2 &= 1 + \frac{\beta \Delta_t}{Re} \left( \frac{2}{h_{x_1} h_{x_2}} + \frac{2}{h_{y_1} h_{y_2}} \right), \\ d_2 &= -\frac{\beta \Delta_t}{Re} \frac{2}{h_{y_2}(h_{y_1} + h_{y_2})}, \\ e_2 &= -\frac{\beta \Delta_t}{Re} \frac{2}{h_{x_2}(h_{x_1} + h_{x_2})}, \end{aligned}$$

onde  $h_{x_1} = \frac{1}{2}(\Delta_{x_{i-1}} + \Delta_{x_i})$ ,  $h_{x_2} = \frac{1}{2}(\Delta_{x_i} + \Delta_{x_{i+1}})$ ,  $h_{y_1} = \Delta_{y_{j-1}}$  e  $h_{y_2} = \Delta_{y_j}$ .

As condições de contorno *slip* aplicadas às equações (3.59) e (3.60) são do tipo explícita, isto é, a velocidade na parede,  $u_p$ , é conhecida desde o instante de tempo precedente. Assim, sendo, por exemplo,  $\tilde{u}_p^{n+1}$  a velocidade intermediária no tempo atual, em casos de condição de contorno *slip*, a velocidade  $u_p^n$  é utilizada.

Considerando a geometria da contração, a discretização das equações de movimento é detalhada em três regiões de interesse: na quina da contração, em uma parede vertical e em uma parede horizontal. Estas regiões são destacadas na figura abaixo.

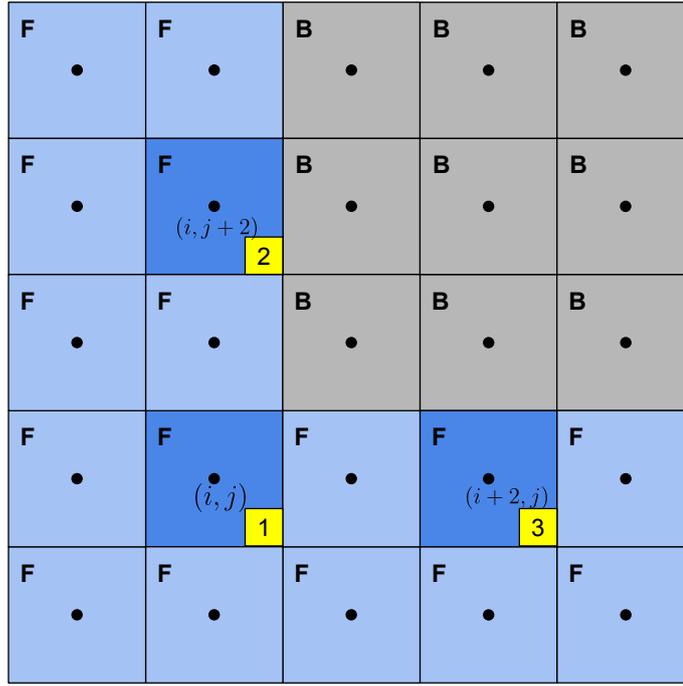
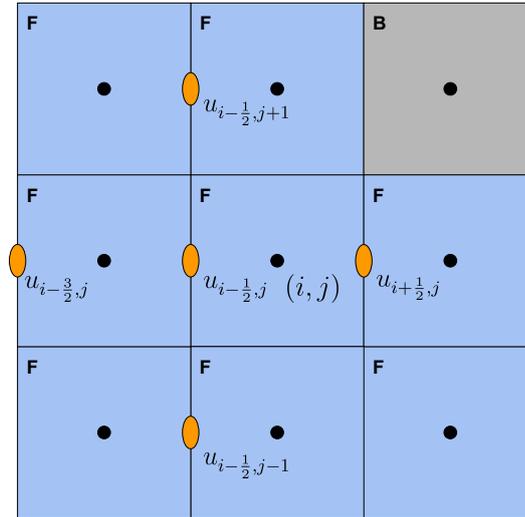


Figura 3.5: Algumas regiões de interesse da contração.

Inicia-se pela Região 1, próxima à quina da contração. Esta célula é identificada por  $(i, j)$  e, assim, a equação de movimento na direção  $x$  discretizada na face esquerda desta célula é

$$a_1 \tilde{u}_{i-\frac{3}{2},j}^{n+1} + b_1 \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j-1}^{n+1} + c_1 \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} + d_1 \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j+1}^{n+1} + e_1 \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = z_1^n, \quad (3.61)$$

Figura 3.6: Pontos da discretização da equação em  $u$  na Região 1.

e a equação na direção  $y$ , discretizada na face inferior da célula, é dada por

$$a_2 \tilde{v}_{i-1,j-\frac{1}{2}}^{n+1} + b_2 \tilde{v}_{i,j-\frac{3}{2}}^{n+1} + c_2 \tilde{v}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} + d_2 \tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} + e_2 \tilde{v}_{i+1,j-\frac{1}{2}}^{n+1} = z_2^n. \quad (3.62)$$

Observe que, em ambas as equações, pontos do contorno não estão presentes e, portanto, as equações não sofrem alterações. Em contrapartida, observa-se que nas Regiões 2 e 3, há modificações nas equações devido à inclusão de pontos das paredes.

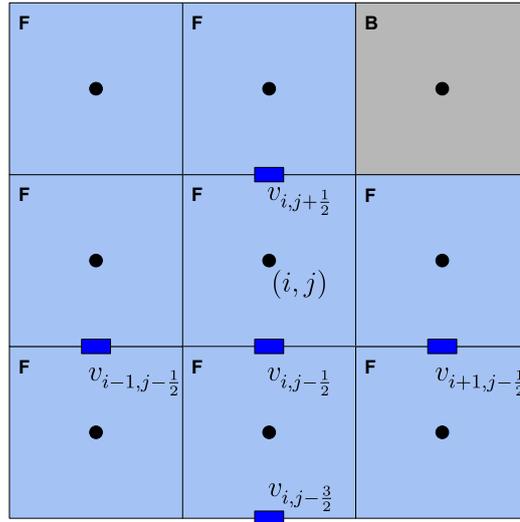


Figura 3.7: Pontos da discretização da equação em  $v$  na Região 1.

A Região 2 trata-se de uma parede vertical; é preciso atentar-se às diferenças que a condição de contorno implica nas equações.

Discretizando a equação de movimento na direção  $x$  na face esquerda da célula  $(i, j+2)$  tem-se

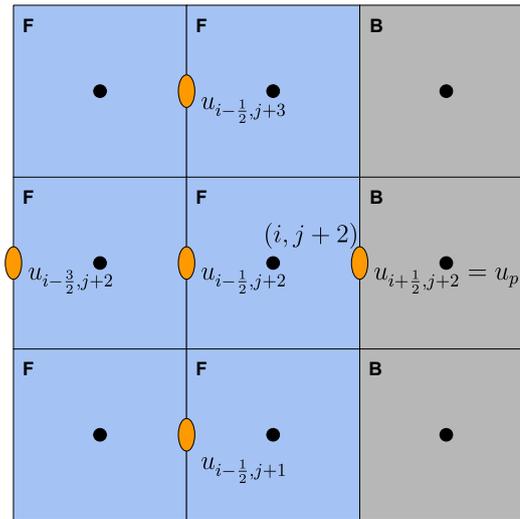


Figura 3.8: Pontos da discretização da equação em  $u$  na Região 2.

$$a_1 \tilde{u}_{i-\frac{3}{2}, j+2}^{n+1} + b_1 \tilde{u}_{i-\frac{1}{2}, j+1}^{n+1} + c_1 \tilde{u}_{i-\frac{1}{2}, j+2}^{n+1} + d_1 \tilde{u}_{i-\frac{1}{2}, j+3}^{n+1} + e_1 u_p^n = z_1^n \quad (3.63)$$

Como em paredes verticais  $\mathbf{u}_p = (0, v_p)$ , isto é, pelo fato do fluido não penetrar a parede, a equação anterior reduz-se a

$$a_1 \tilde{u}_{i-\frac{3}{2}, j+2}^{n+1} + b_1 \tilde{u}_{i-\frac{1}{2}, j+1}^{n+1} + c_1 \tilde{u}_{i-\frac{1}{2}, j+2}^{n+1} + d_1 \tilde{u}_{i-\frac{1}{2}, j+3}^{n+1} = z_1^n. \quad (3.64)$$

Agora, discretizando a equação de movimento na direção  $y$  na face inferior da célula  $(i, j+2)$ , encontra-se

$$a_2 \tilde{v}_{i-1, j+\frac{3}{2}}^{n+1} + b_2 \tilde{v}_{i, j+\frac{1}{2}}^{n+1} + c_2 \tilde{v}_{i, j+\frac{3}{2}}^{n+1} + d_2 \tilde{v}_{i, j+\frac{5}{2}}^{n+1} + e_2 \tilde{v}_{i+1, j+\frac{3}{2}}^{n+1} = z_2^n. \quad (3.65)$$

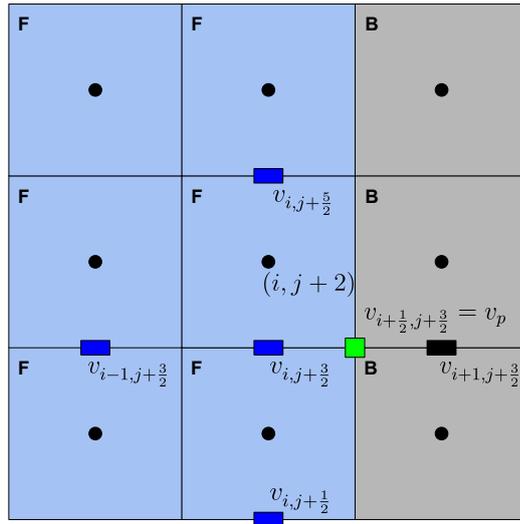


Figura 3.9: Pontos da discretização da equação em  $v$  na Região 2.

Note que o ponto  $\tilde{v}_{i+1, j+\frac{3}{2}}^{n+1}$  está fora do domínio e, como feito na Seção 3.7, será aproximado por extrapolação linear, ou seja,

$$\tilde{v}_{i+1, j+\frac{3}{2}}^{n+1} = v_{i+1, j+\frac{3}{2}}^n = 2v_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{3}{2}}^n - v_{i, j+\frac{3}{2}}^n = 2v_p - v_{i, j+\frac{3}{2}}^n. \quad (3.66)$$

Substituindo (3.66) em (3.65), a equação é reescrita como

$$a_2 \tilde{v}_{i-1, j+\frac{3}{2}}^{n+1} + b_2 \tilde{v}_{i, j+\frac{1}{2}}^{n+1} + c_2 \tilde{v}_{i, j+\frac{3}{2}}^{n+1} + d_2 \tilde{v}_{i, j+\frac{5}{2}}^{n+1} = z_2^n - e_2 \left( 2v_p - v_{i, j+\frac{3}{2}}^n \right), \quad (3.67)$$

onde

$$v_p = -\frac{k\beta(a-c)}{1+k\beta(b+2c)} v_{i, j+\frac{3}{2}} - \frac{k}{2[1+k\beta(b+2c)]} (T_{i, j+1}^{xy} + T_{i, j+2}^{xy}) \quad (3.68)$$

Na Região 3, quando discretiza-se a equação de movimento na direção  $x$  na face esquerda da célula  $(i+2, j)$ , a equação resultante é

$$a_1 \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}, j}^{n+1} + b_1 \tilde{u}_{i+\frac{3}{2}, j-1}^{n+1} + c_1 \tilde{u}_{i+\frac{3}{2}, j}^{n+1} + d_1 \tilde{u}_{i+\frac{3}{2}, j+1}^{n+1} + e_1 \tilde{u}_{i+\frac{5}{2}, j}^{n+1} = z_1^n, \quad (3.69)$$

e o ponto  $\tilde{u}_{i+\frac{3}{2}, j+1}^{n+1}$  é aproximado por

$$\tilde{u}_{i+\frac{3}{2}, j+1}^{n+1} = u_{i+\frac{3}{2}, j+1}^n = 2u_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2}}^n - u_{i+\frac{3}{2}, j}^n = 2u_p - u_{i+\frac{3}{2}, j}^n, \quad (3.70)$$

Ao substituir (3.70) em (3.69), a equação é

$$a_1 \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}, j}^{n+1} + b_1 \tilde{u}_{i+\frac{3}{2}, j-1}^{n+1} + c_1 \tilde{u}_{i+\frac{3}{2}, j}^{n+1} + e_1 \tilde{u}_{i+\frac{5}{2}, j}^{n+1} = z_1^n - d_1 \left( 2u_p - u_{i+\frac{3}{2}, j}^n \right) \quad (3.71)$$

onde

$$u_p = -\frac{k\beta(a-c)}{1+k\beta(b+2c)} u_{i+\frac{3}{2}, j} - \frac{k}{2[1+k\beta(b+2c)]} (T_{i+1, j}^{xy} + T_{i+2, j}^{xy}) \quad (3.72)$$

Finalmente, discretizando a equação de movimento na direção  $y$  na face inferior da célula  $(i+2, j)$  tem-se

$$a_2 \tilde{v}_{i+1, j-\frac{1}{2}}^{n+1} + b_2 \tilde{v}_{i+2, j-\frac{3}{2}}^{n+1} + c_2 \tilde{v}_{i+2, j-\frac{1}{2}}^{n+1} + d_2 \tilde{v}_{i+2, j+\frac{1}{2}}^{n+1} + e_2 \tilde{v}_{i+3, j-\frac{1}{2}}^{n+1} = z_2^n, \quad (3.73)$$

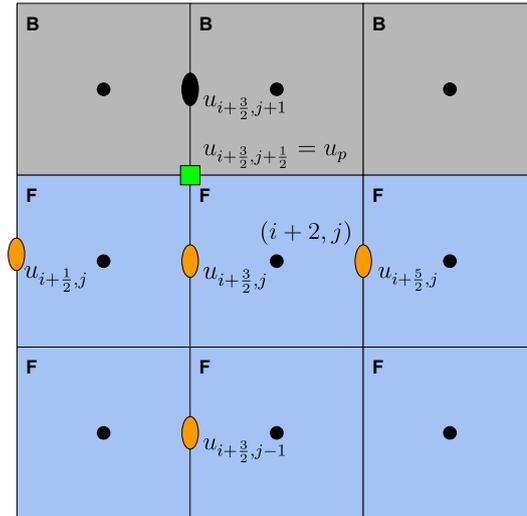


Figura 3.10: Pontos da discretização da equação em  $u$  na Região 3.

Neste caso  $\mathbf{u}_p = (u_p, 0)$  e, então, a última equação torna-se

$$a_2 \tilde{v}_{i+1, j-\frac{1}{2}}^{n+1} + b_2 \tilde{v}_{i+2, j-\frac{3}{2}}^{n+1} + c_2 \tilde{v}_{i+2, j-\frac{1}{2}}^{n+1} + e_2 \tilde{v}_{i+3, j-\frac{1}{2}}^{n+1} = z_2^n. \quad (3.74)$$

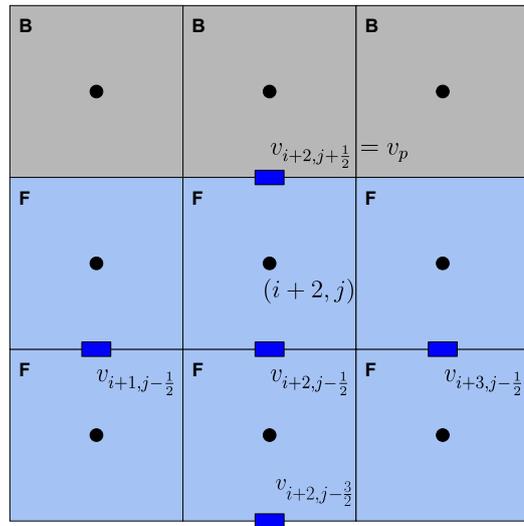


Figura 3.11: Pontos da discretização da equação em  $v$  na Região 3.

### 3.9 Equações constitutivas - Oldroyd-B e PTT

As condições de contorno *slip* (ou *no-slip*) do problema afetam também as equações constitutivas. Quando as equações dos modelos Oldroyd-B e PTT são atualizadas, seja pela formulação CSF ou pela NSF, nas derivadas presentes nessas equações encontram-se termos com as incógnitas  $u^{n+1}$  e  $v^{n+1}$ . Como esta é a última etapa do método numérico, as componentes  $u^{n+1}$  e  $v^{n+1}$  trazem consigo informações das condições de contorno levadas em consideração na etapa do cálculo de  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$  e, conseqüentemente, na atualização de  $\mathbf{u}^{n+1}$ . Portanto, no cálculo das derivadas presentes nas equações constitutivas, essas informações são incluídas nas aproximações por diferenças finitas.

### 3.10 Etapas do método numérico

São descritos nesta seção os passos do método utilizado e consistem em

- Passo 1: Calcular  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$  com a equação (3.15):

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta_t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}^\top)^n = -\nabla p^n + \frac{\beta}{Re} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + \frac{1}{Re} \nabla \cdot \mathbf{T}^n.$$

- Passo 2: Calcular  $\psi^{n+1}$  com a equação (3.4):

$$\nabla^2 \psi = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}.$$

- Passo 3: Atualizar  $\mathbf{u}^{n+1}$  com a equação (3.1):

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} - \nabla \psi.$$

- Passo 4: Atualizar  $p^{n+1}$  com a equação (3.19):

$$p^{n+1} = p^n + \frac{\psi^{n+1}}{\Delta_t}.$$

- Passo 5: Atualizar  $\mathbf{T}^{n+1}$  com as equações:

– Oldroyd-B

- \* (3.20)-(3.22) se a formulação adotada for a CSF:

$$\begin{aligned} T^{xx,n+1} &= T^{xx,n} + \Delta_t \cdot f_{CSF,OB}^{xx}, \\ T^{xy,n+1} &= T^{xy,n} + \Delta_t \cdot f_{CSF,OB}^{xy}, \\ T^{yy,n+1} &= T^{yy,n} + \Delta_t \cdot f_{CSF,OB}^{yy}, \end{aligned}$$

- \* (3.26)-(3.28) se a formulação adotada for a NSF:

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}^{n+1} &= \hat{\lambda}^n + \Delta_t \cdot f_{NSF,OB}^{\hat{\lambda}}, \\ \hat{\mu}^{n+1} &= \hat{\mu}^n + \Delta_t \cdot f_{NSF,OB}^{\hat{\mu}}, \\ \hat{\nu}^{n+1} &= \hat{\nu}^n + \Delta_t \cdot f_{NSF,OB}^{\hat{\nu}}. \end{aligned}$$

– PTT

- \* (3.23)-(3.25) se a formulação adotada for a CSF:

$$\begin{aligned} T^{xx,n+1} &= T^{xx,n} + \Delta_t \cdot f_{CSF,PTT}^{xx}, \\ T^{xy,n+1} &= T^{xy,n} + \Delta_t \cdot f_{CSF,PTT}^{xy}, \\ T^{yy,n+1} &= T^{yy,n} + \Delta_t \cdot f_{CSF,PTT}^{yy}, \end{aligned}$$

- \* (3.33)-(3.35) se a formulação adotada for a NSF:

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}^{n+1} &= \hat{\lambda}^n + \Delta_t \cdot f_{NSF,PTT}^{\hat{\lambda}}, \\ \hat{\mu}^{n+1} &= \hat{\mu}^n + \Delta_t \cdot f_{NSF,PTT}^{\hat{\mu}}, \\ \hat{\nu}^{n+1} &= \hat{\nu}^n + \Delta_t \cdot f_{NSF,PTT}^{\hat{\nu}}. \end{aligned}$$



## Resultados Numéricos

A seguir são apresentados alguns resultados de validação do código e dos estudos desenvolvidos combinando a formulação NSF com condições de contorno do tipo *slip*, bem como comparações entre as duas formulações adotadas para o tensor polimérico. As simulações são feitas nas geometrias da expansão e da contração, cujas proporções são 1:4 e 4:1, respectivamente.

### 4.1 Expansão 1:4

As simulações na geometria com expansão são realizadas em duas malhas não-uniformes, M1 e M2, que são mais refinadas em regiões de interesse da geometria: quinas superior e inferior e quinas que delimitam a transição do canal menor para o canal maior da expansão. Os detalhes das malhas utilizadas e das regiões onde é mais refinada são apresentados na Tabela 4.1 e Figura 4.2, respectivamente. São apresentados resultados para os casos Newtoniano e viscoelástico, neste último, considerando-se o modelo PTT.

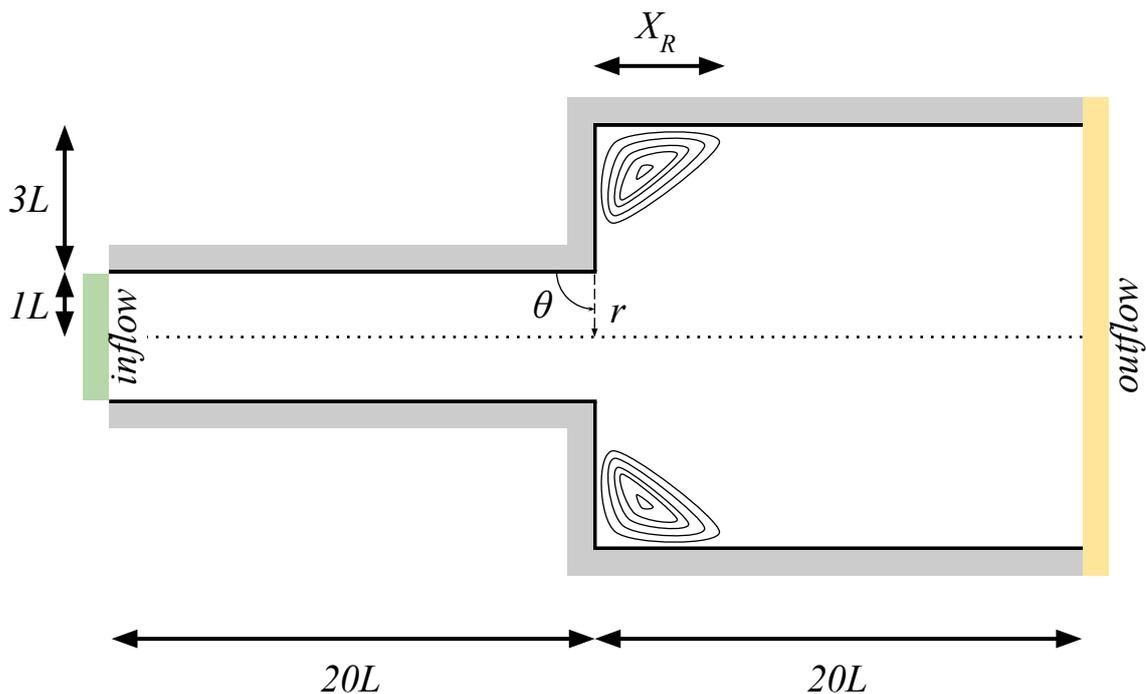


Figura 4.1: Geometria da expansão 1:4 de comprimento  $40L$ .

Tabela 4.1: Detalhes das malhas utilizadas nas simulações.

Malha	Espaçamento mín.	Cél. na direção $x$	Cél. na direção $y$	Número de células
M1	$\Delta_x = \Delta_y = 0.008$	190	260	32300
M2	$\Delta_x = \Delta_y = 0.004$	220	340	48400

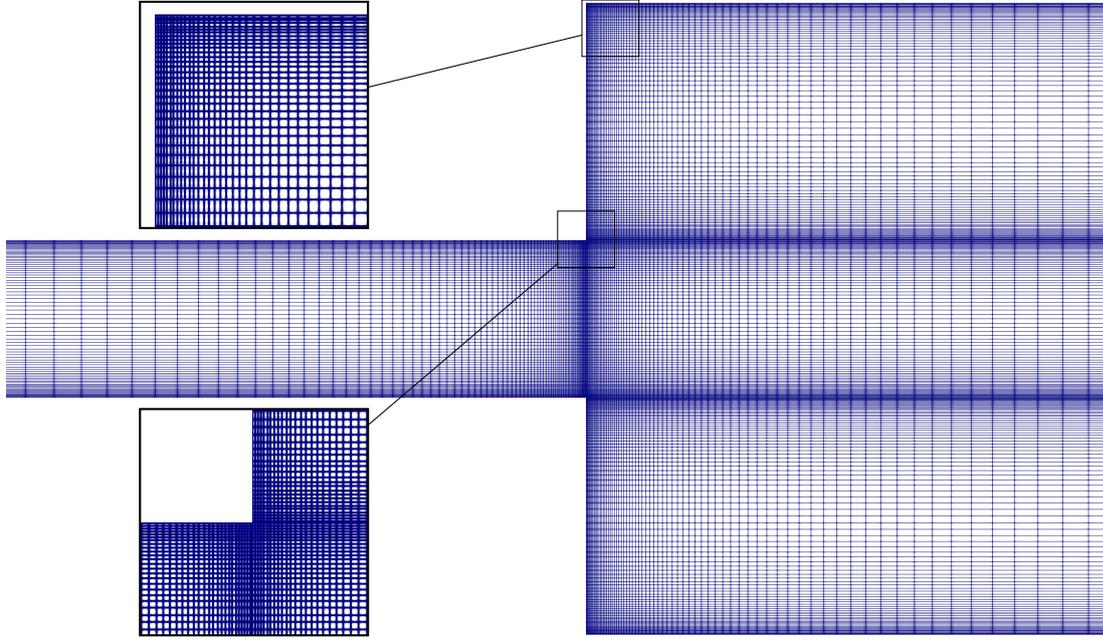


Figura 4.2: Regiões em que a malha não-uniforme é mais refinada.

#### 4.1.1 Fluido Newtoniano

O objetivo inicial é validar os resultados seguindo a referência [15] em que os autores estudam a influência da velocidade de escorregamento no tamanho e intensidade dos vórtices, por exemplo. Para as simulações, é considerada a geometria com expansão, Figura 4.1, e os seguintes parâmetros adimensionais:

- Comprimento característico:  $L = 1$ ;
- Número de Reynolds:  $Re = 0.01$ ;
- Passo temporal:  $\Delta_t = 10^{-4}$ ;
- *Inflow*: perfil de velocidade desenvolvido com  $\frac{u}{\bar{U}} = 1.5$ ;
- Coeficiente de escorregamento:  $\bar{k} = 0, 0.001, 0.1, 1, 10, 45, 100, 10000$ .

Conforme Ferrás [15], aumentar o valor do parâmetro  $\bar{k}$  implica na redução da dimensão do vórtice,  $X_R$ . No trabalho do autor citado, os resultados são ilustrados por meio das linhas de corrente do escoamento e por uma imagem semelhante à Figura 4.3. O maior valor testado pelos autores foi  $\bar{k} = 4500$  e, ainda assim, havia presença de recirculação.

Os resultados na Figura 4.3 e na Tabela 4.2 indicam que os valores obtidos nas simulações deste trabalho estão de acordo com o que foi descrito no artigo de referência, porém, como a malha aqui utilizada é mais grosseira, não foi possível capturar o vórtice nas simulações com  $\bar{k} = 45, 100$  e  $10000$ .

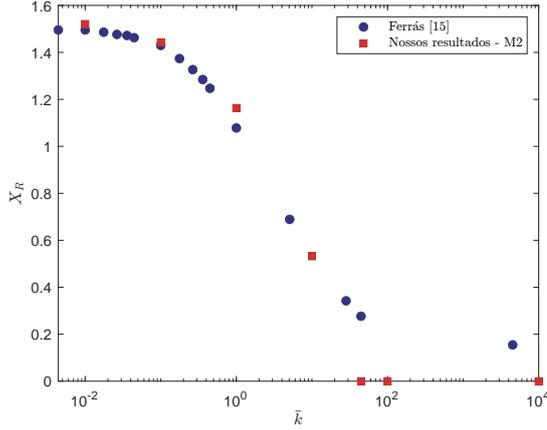


Figura 4.3: Comprimentos de vórtices obtidos por Ferrás [15] comparados aos deste trabalho.

Tabela 4.2: Tamanhos de vórtice,  $X_R$  - Newtoniano, expansão.

$\bar{k}$	M2
0	1.503234
0.001	1.520757
0.1	1.442187
1.0	1.163254
10	0.531966
45	0.0
100	0.0
10000	0.0

Vários resultados no presente trabalho são a respeito do comportamento assintótico das propriedades próximo à singularidade da geometria adotada. Tal estudo consiste em avaliá-las à medida que se aproximam da quina, ou seja, sendo  $r$  a distância de um ponto até a quina, avalia-se como as propriedades se comportam quando  $r \rightarrow 0$  e verifica-se se estão em conformidade com as previsões teóricas. Além disso, é relevante ressaltar que essa análise pode ser feita considerando um ou mais ângulos  $\theta$  e, nesta seção, os resultados são construídos tomando  $\theta = \frac{\pi}{2}$  como ilustrado pela Figura 4.4. Os resultados teóricos de [3], para o caso *no-slip*, indicam que a velocidade e componentes do tensor do solvente próximos à quina são dados por

$$\mathbf{u} \propto r^{0.5445}, \quad \mathbf{T}^s \propto r^{-0.4555}. \quad (4.1)$$

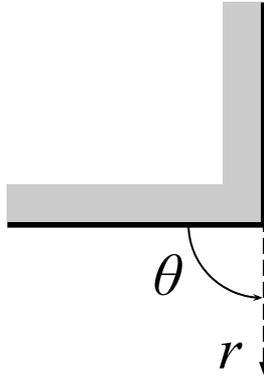


Figura 4.4: Ângulo  $\theta$  e distância  $r$  para o estudo assintótico.

Desta forma, a Figura 4.5 traz o resultado da simulação com  $\bar{k} = 0$  em que observa-se que o comportamento das propriedades está de acordo com a predição teórica enquanto a Figura 4.6, com gráficos para diferentes valores de  $\bar{k}$ , exibe um distanciamento da reta para  $\bar{k} > 0$ . Isso era esperado uma vez que, para  $\bar{k} \neq 0$ , os resultados teóricos da variação assintótica são outros pois a condição de contorno envolve uma lei de escorregamento.

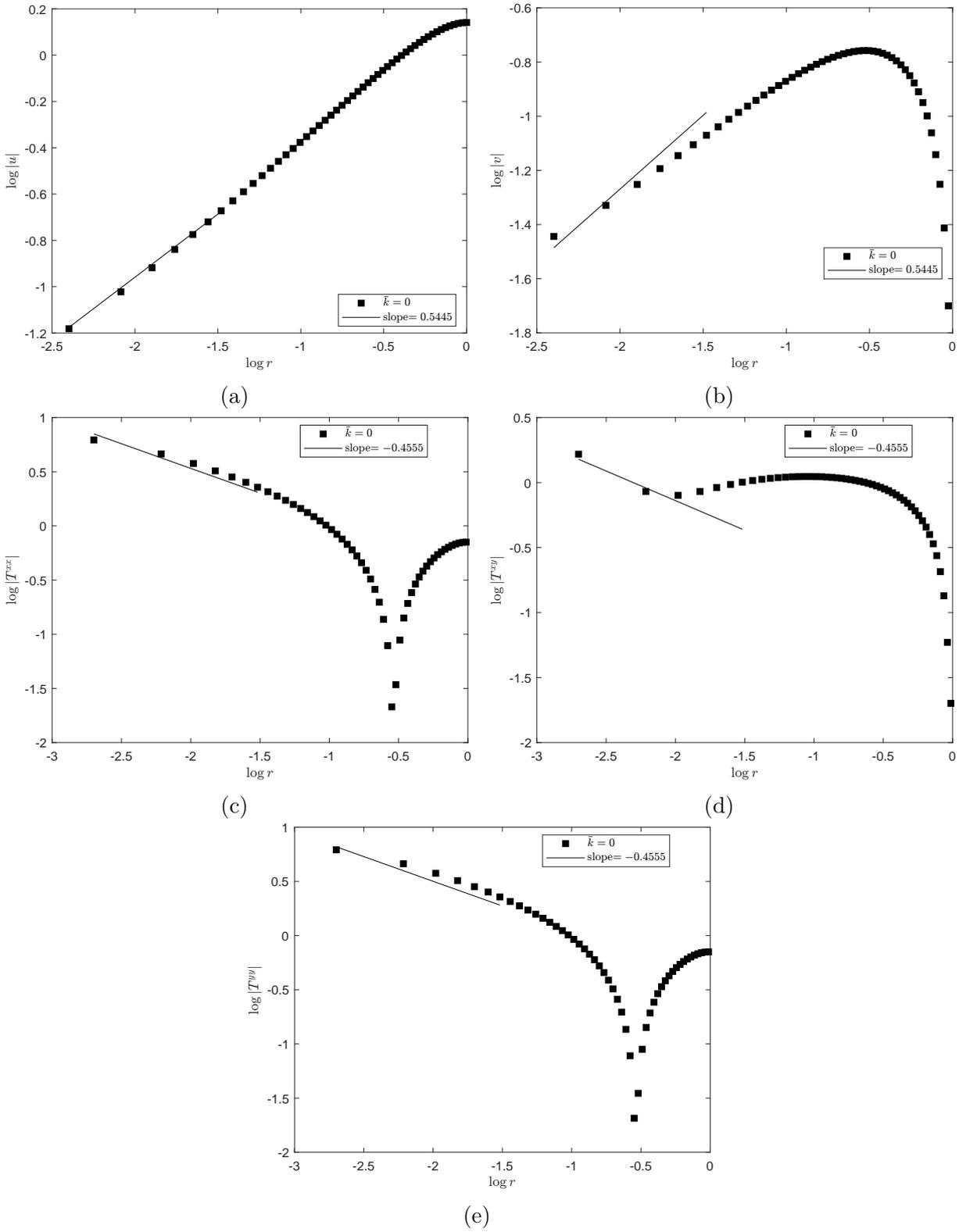


Figura 4.5: Comportamento assintótico da velocidade e das componentes do tensor  $\mathbf{T}^s$  próximo à quina ao longo de  $\theta = \frac{\pi}{2}$  -  $Re = 0.01$ .

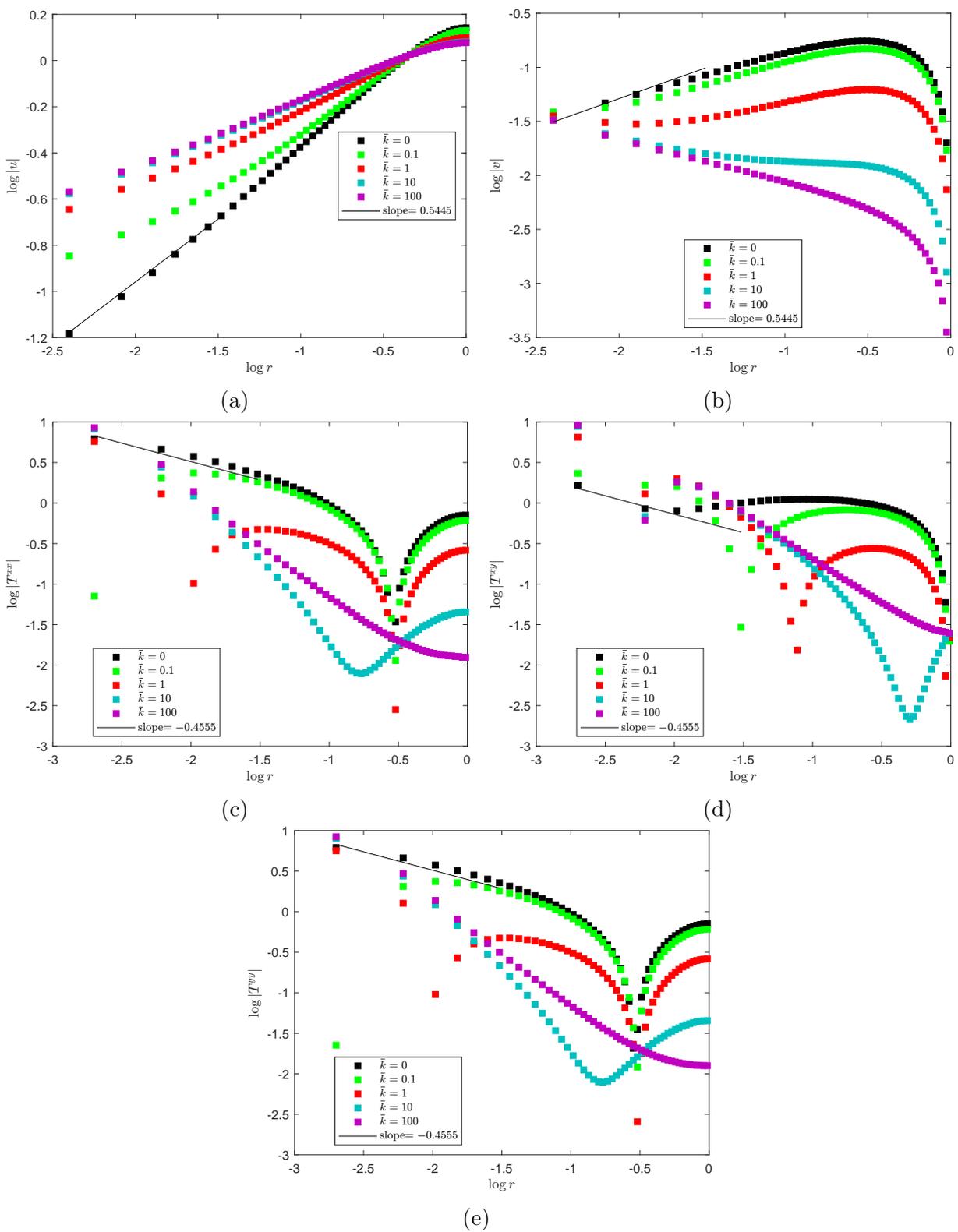


Figura 4.6: Comportamento assintótico das propriedades do escoamento para diferentes valores de  $\bar{k}$  ao longo de  $\theta = \frac{\pi}{2}$  -  $Re = 0.01$ .

### 4.1.2 PTT

Nesta subseção [15] ainda é utilizada como referência, agora no estudo do fluido PTT. Os parâmetros adimensionais abaixo descritos são os utilizados nas simulações desta subseção em que são consideradas as formulações CSF e NSF.

- Comprimento característico:  $L = 1$ ;
- Número de Reynolds:  $Re = 0.01$ ;
- Número de Weissenberg:  $Wi = 1$ ;
- $\varepsilon = 0.25$ ;
- Razão das viscosidades:  $\beta = \frac{1}{9}$ ;
- Passo temporal:  $\Delta_{t_{CSF}} = 10^{-4}$ ,  $\Delta_{t_{NSF}} = 10^{-5}$ ;
- Tolerância da formulação NSF:  $tol_{NSF} = 10^{-5}$ ;
- *Inflow*: perfil de velocidade e de  $\mathbf{T}$  desenvolvidos com  $\frac{u}{U} = 1.5$ ;
- Coeficiente de escorregamento:  $\bar{k} = 0, 0.045, 0.18, 0.27, 0.36, 0.39, 0.41, 0.42, 0.45, 0.6, 0.65, 0.7, 45$ .

Os resultados são validados comparando os tamanhos dos vórtices formados no canto superior da expansão. Na Tabela 4.3 e Figura 4.8 vê-se que os valores obtidos pela CSF, principalmente em M2, são bastante próximos dos de [15]. Já quando a formulação NSF é utilizada, os vórtices têm maior dimensão, quando comparados à CSF para um mesmo  $\bar{k}$ , e só desaparecem para valores um pouco maiores de  $\bar{k}$ . Na Figura 4.7 é ilustrada a redução no comprimento das recirculações por meio das linhas de corrente do escoamento considerando-se a formulação NSF, a malha M2 e alguns valores de  $\bar{k}$  selecionados. Observa-se na Figura 4.7e o vórtice de menor dimensão, obtido com  $\bar{k} = 0.7$ , o qual denomina-se neste trabalho “ $\bar{k}$  de transição”.

Tabela 4.3: Tamanhos de vórtice,  $X_R$  - CSF e NSF - PTT, expansão.

$\bar{k}$	CSF		NSF		Ferrás [15] - CSF
	M1	M2	M1	M2	
0	1.376331	1.358653	1.449045	1.420133	1.3665
0.045	1.299366	1.295675	1.295188	1.350113	1.2704
0.18	0.911696	0.885275	1.054136	1.061453	0.8991
0.27	0.627049	0.632389	0.911696	0.885275	0.6247
0.36	0.310571	0.349214	0.668600	0.669394	0.2756
0.39	0.203903	0.236603	-	-	-
0.41	0.057700	0.120444	-	-	-
0.42	0	0.013288	-	-	-
0.45	0	0	0.480676	0.472999	0
0.6	-	-	0.203903	0.206044	-
0.65	-	-	0.121444	0.130898	-
0.7	-	-	0.057700	0.060359	-
45	0	0	0	0	0

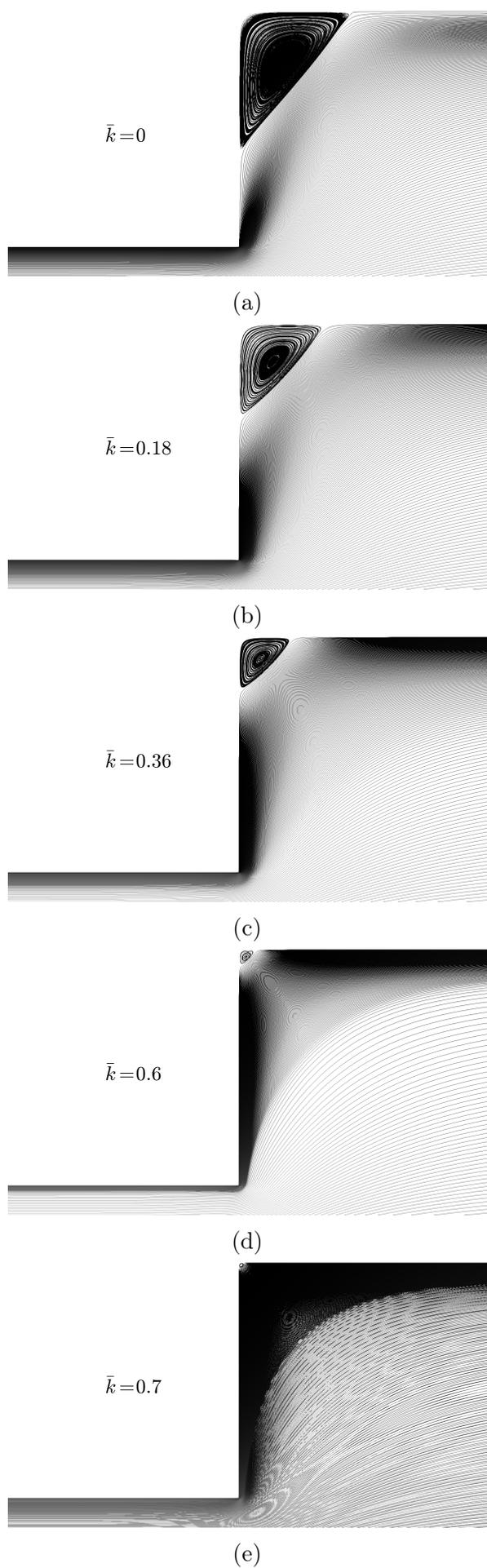


Figura 4.7: Variação no comprimento dos vórtices com o aumento de  $\bar{k}$  - NSF, M2.

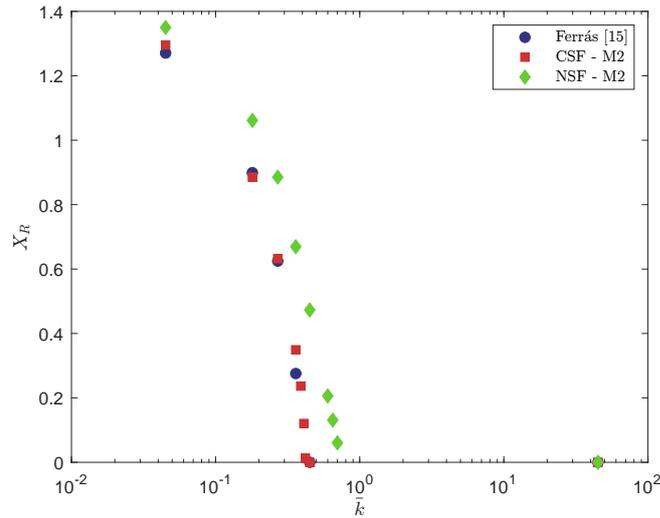


Figura 4.8: Dimensão dos vórtices obtidos por [15] comparados aos deste trabalho - CSF e NSF.

Os estudos teóricos da variação assintótica do fluido PTT detalhados em [27] indicam como as propriedades do escoamento devem portar-se próximo da quina da expansão considerando a condição de contorno *no-slip*. No caso da formulação CSF, as propriedades têm como esperado o seguinte comportamento

$$\mathbf{u} \propto r^{0.5445}, \quad \mathbf{T} \propto r^{-0.3286}, \quad p \propto r^{-0.4555}, \quad (4.2)$$

e, para a NSF, as variáveis naturais têm como previsão

$$\lambda \propto r^{-1.4176}, \quad \mu \propto r^{-0.1268}, \quad \nu \propto r^{1.1638}. \quad (4.3)$$

Inicialmente são comparadas as soluções numéricas obtidas com as formulações CSF e NSF, no caso *no-slip*, que são plotadas ao longo dos ângulos  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{3\pi}{4}$  e  $\pi$ . As simulações são realizadas na malha M2 e o ângulo  $\theta$  é medido a partir da parede horizontal do canal estreito no sentido anti-horário, conforme ilustrado pela Figura 4.9.

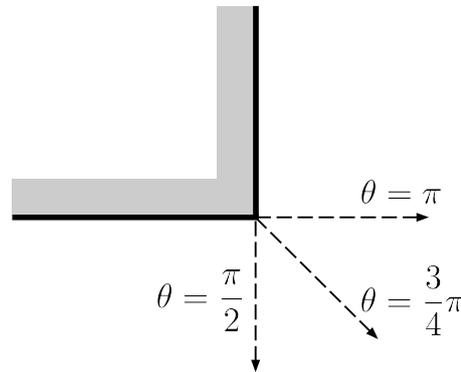


Figura 4.9: Ângulos tomados para estudo do comportamento assintótico

Por meio das Figuras 4.11, 4.12 e 4.13 vê-se que a formulação NSF apresenta melhor desempenho no cálculo das componentes de  $\mathbf{T}$  e apresenta melhoria considerável na aproximação da pressão.

Analisa-se, agora, a variação assintótica das variáveis naturais  $\lambda$ ,  $\mu$  e  $\nu$  ao longo dos mesmos ângulos  $\theta$ . Neste caso, segundo a Figura 4.14, também tem-se soluções adequadas

às potências previstas em (4.3) reforçando a validade e coerência dos resultados. No que diz respeito às simulações com diferentes valores de  $\bar{k}$ , o comportamento assintótico das propriedades é exibido nas Figuras 4.15 e 4.16, com as formulações CSF e NSF, respectivamente. Para ambas as formulações observa-se que as soluções numéricas distanciam-se da reta com o aumento de  $\bar{k}$  mas que o comportamento da pressão no caso NSF, aparentemente, acompanha a inclinação da reta. Com atenção especial à pressão, analisada em  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{3\pi}{4}$  e  $\pi$ , a Figura 4.17 indica que não há discrepâncias significativas entre as soluções numéricas produzidas por ambas as formulações. Vale destacar que as soluções numéricas para  $\bar{k} \neq 0$  afastam-se da reta pois a inclinação de tal reta é referente ao caso  $\bar{k} = 0$ .

Por fim, são apresentados os perfis das propriedades do escoamentos em três regiões da geometria:  $x \approx 10$ ,  $x = 20$  e  $x \approx 30$ , como ilustrado na Figura 4.10.

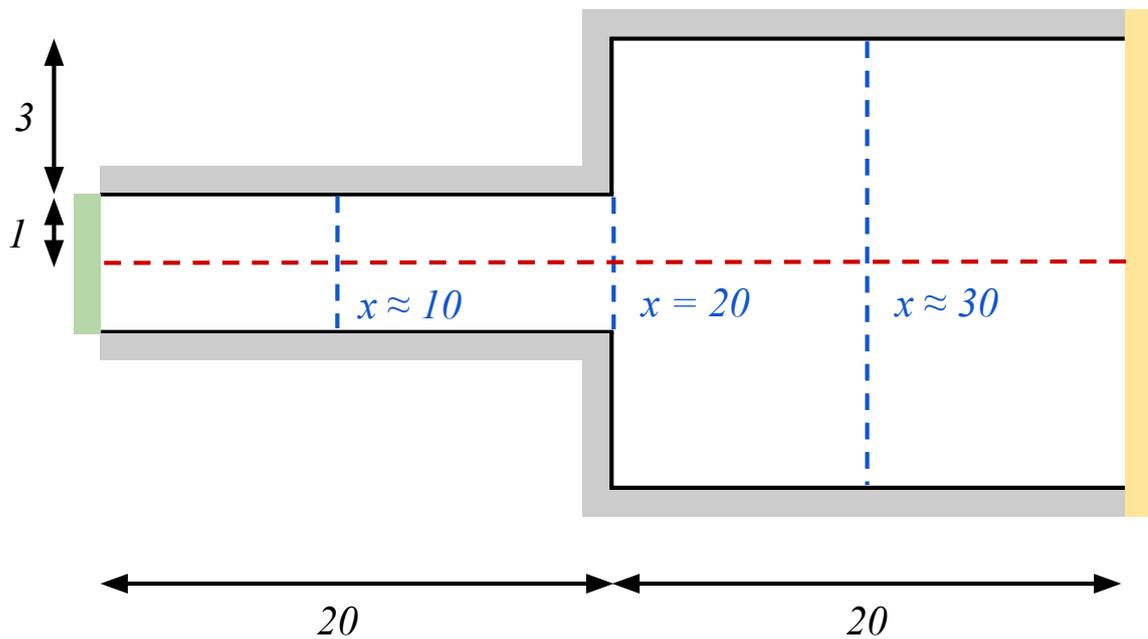


Figura 4.10: Cortes verticais

O fato de malhas não-uniformes serem utilizadas nas simulações nem sempre possibilita que o corte seja feito exatamente no ponto  $x$  desejado. Nesses casos, é tomado o ponto da malha que se encontra mais próximo do ponto desejado. Essa é a razão do símbolo “ $\approx$ ” acima.

Como visto nas Figuras 4.18, 4.19 e 4.20 a condição de escorregamento provoca mudanças nas propriedades nos três cortes estudados. Em particular, em  $x \approx 10$ , as variáveis naturais  $\hat{\lambda}$  e  $\hat{\mu}$  têm seus valores reduzidos com o aumento de  $\bar{k}$  ao passo que  $\hat{\nu}$  é praticamente uma constante de valor 1. Comportamentos bastante semelhantes das variáveis naturais ocorrem em  $x \approx 30$ . Já em  $x = 20$ ,  $\hat{\lambda}$  e  $\hat{\nu}$  apresentam maiores variações próximo às paredes enquanto os valores de  $\hat{\mu}$  variam ao longo do interior do canal.

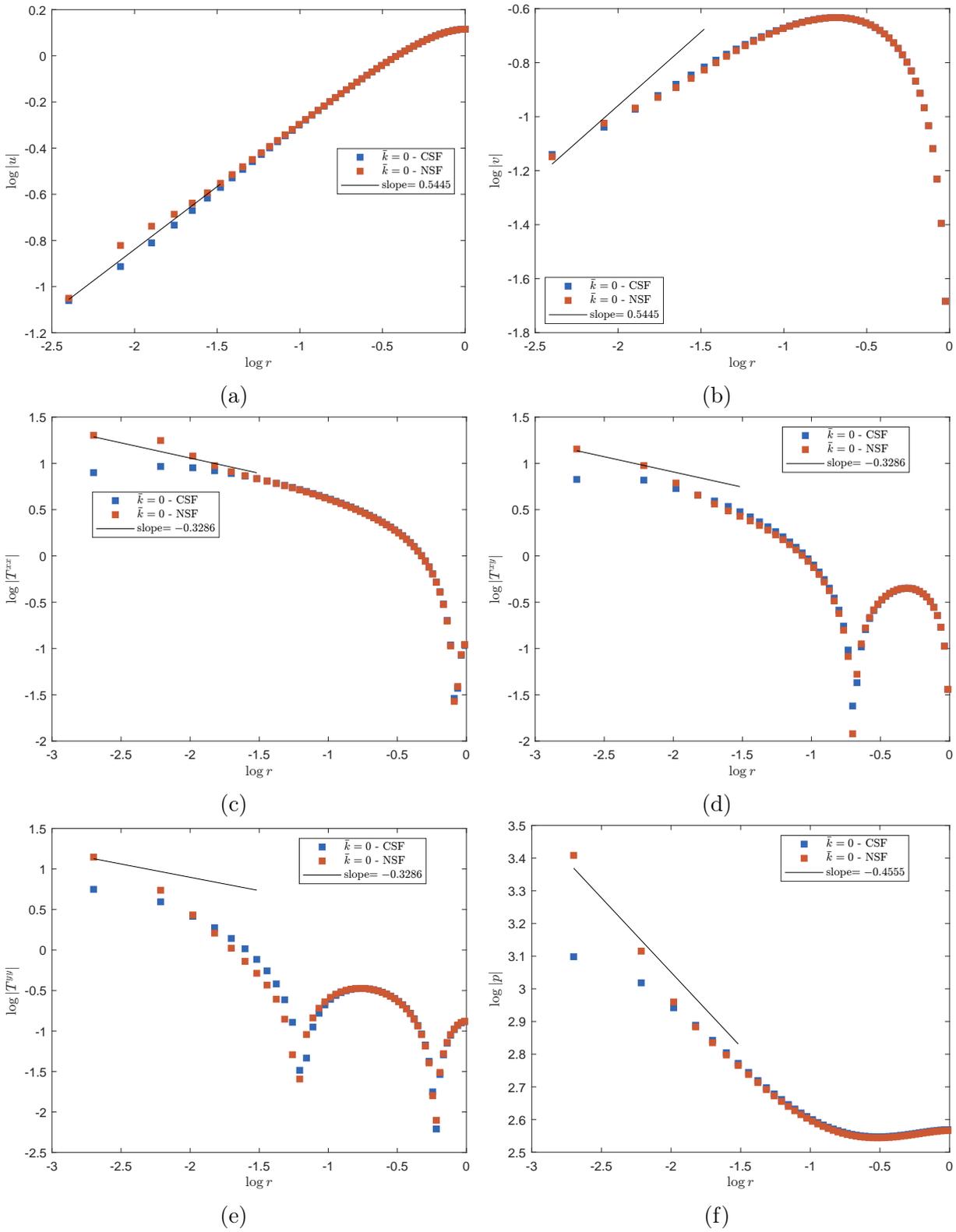


Figura 4.11: Comportamento assintótico das soluções numéricas próximo à quina ao longo de  $\theta = \frac{\pi}{2}$  -  $Re = 0.01$ ,  $\varepsilon = 0.25$ ,  $Wi = 1$ ,  $\beta = \frac{1}{9}$ .

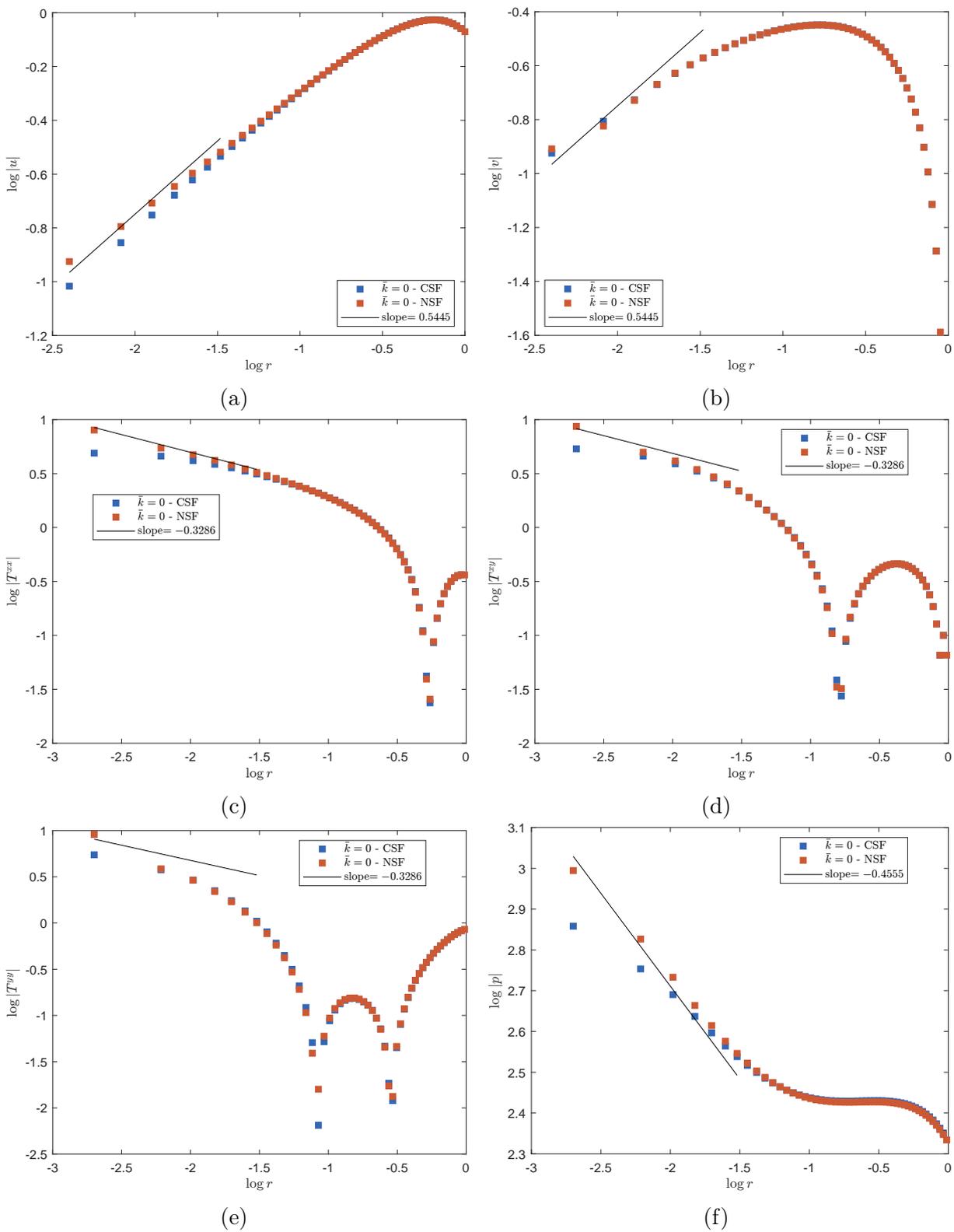


Figura 4.12: Comportamento assintótico das soluções numéricas próximo à quina ao longo de  $\theta = \frac{3}{4}\pi$  -  $Re = 0.01$ ,  $\varepsilon = 0.25$ ,  $Wi = 1$ ,  $\beta = \frac{1}{9}$ .

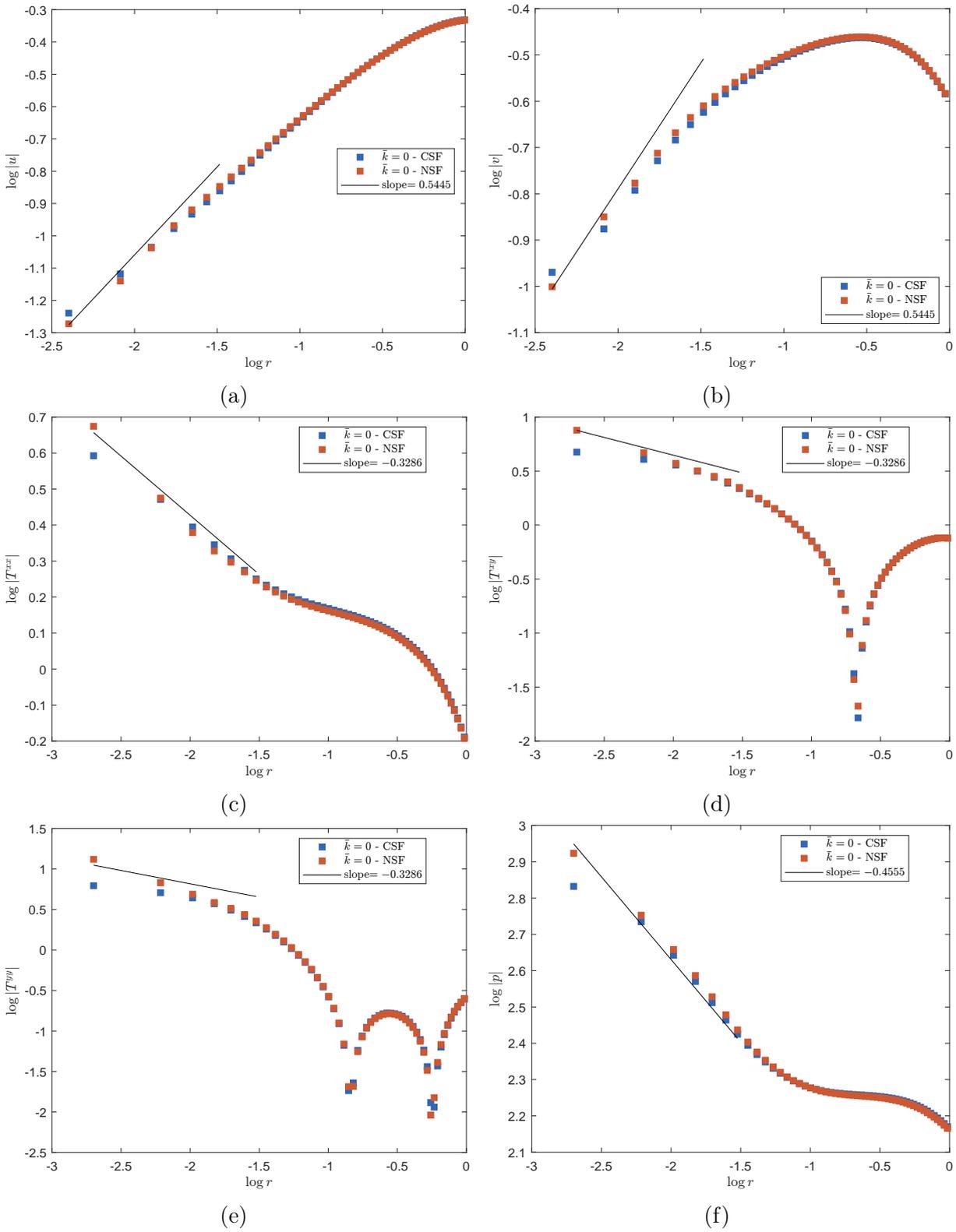


Figura 4.13: Comportamento assintótico das soluções numéricas próximo à quina ao longo de  $\theta = \pi - Re = 0.01, \varepsilon = 0.25, Wi = 1, \beta = \frac{1}{9}$ .

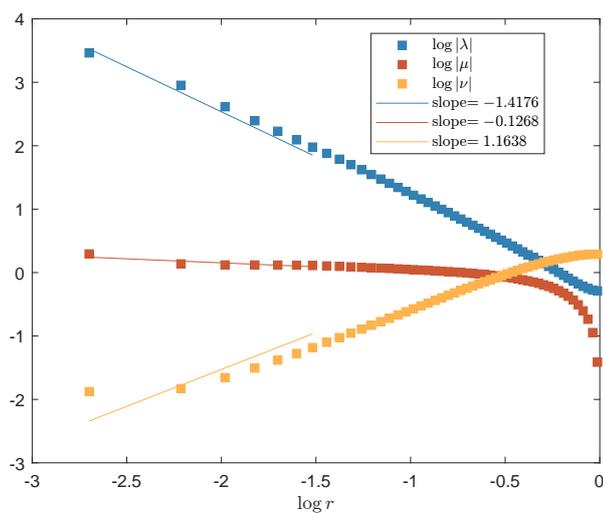
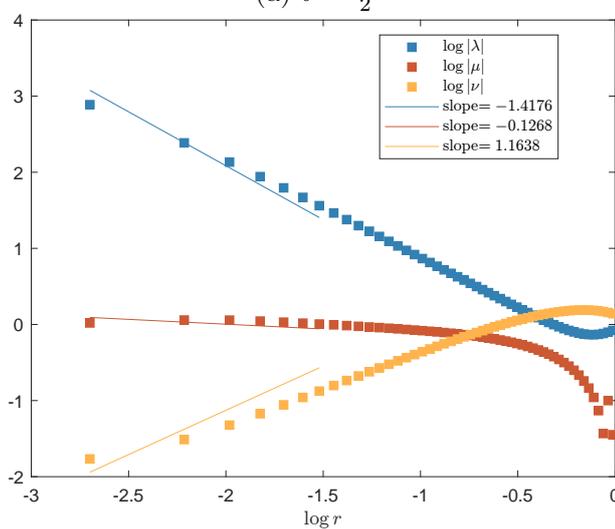
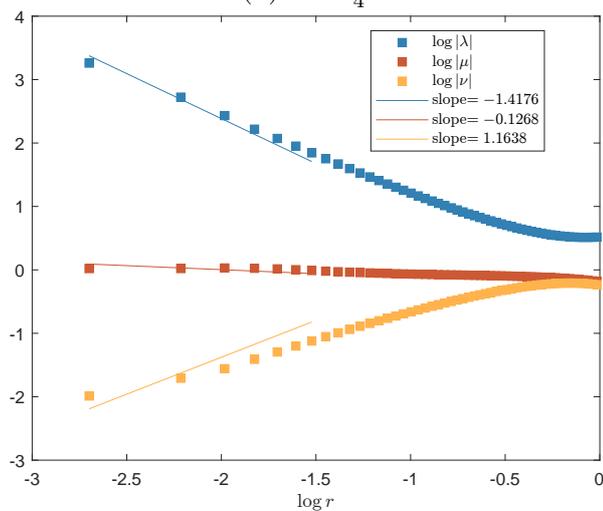
(a)  $\theta = \frac{\pi}{2}$ (b)  $\theta = \frac{3\pi}{4}$ (c)  $\theta = \pi$ 

Figura 4.14: Variação assintótica das variáveis naturais ao longo de diferentes ângulos  $\theta$  -  $Re = 0.01$ ,  $\varepsilon = 0.25$ ,  $Wi = 1$ ,  $\beta = \frac{1}{9}$ .

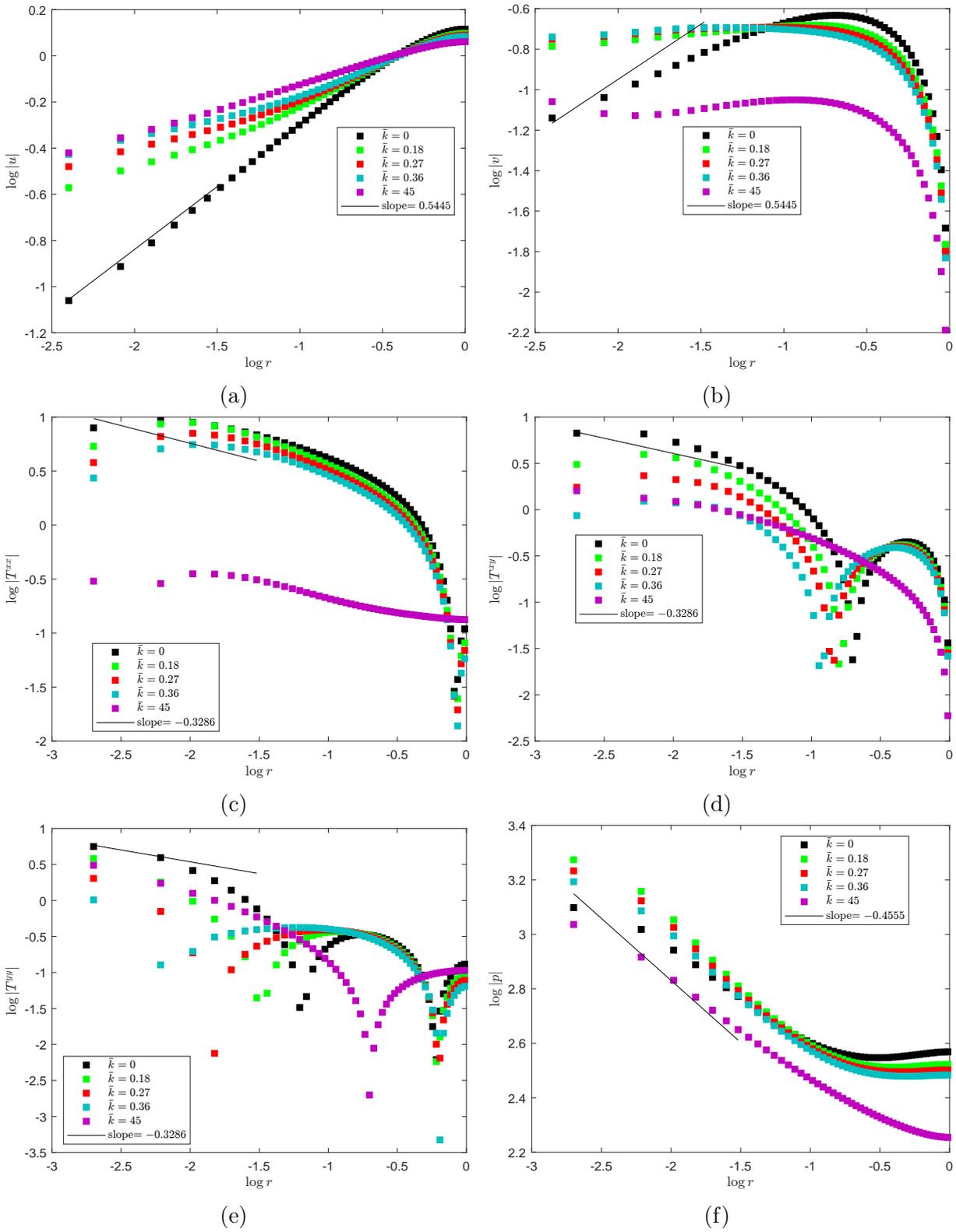


Figura 4.15: Comportamento assintótico próximo à quina ao longo de  $\theta = \frac{\pi}{2}$  - CSF,  $Re = 0.01$ ,  $\varepsilon = 0.25$ ,  $Wi = 1$ ,  $\beta = \frac{1}{9}$ .

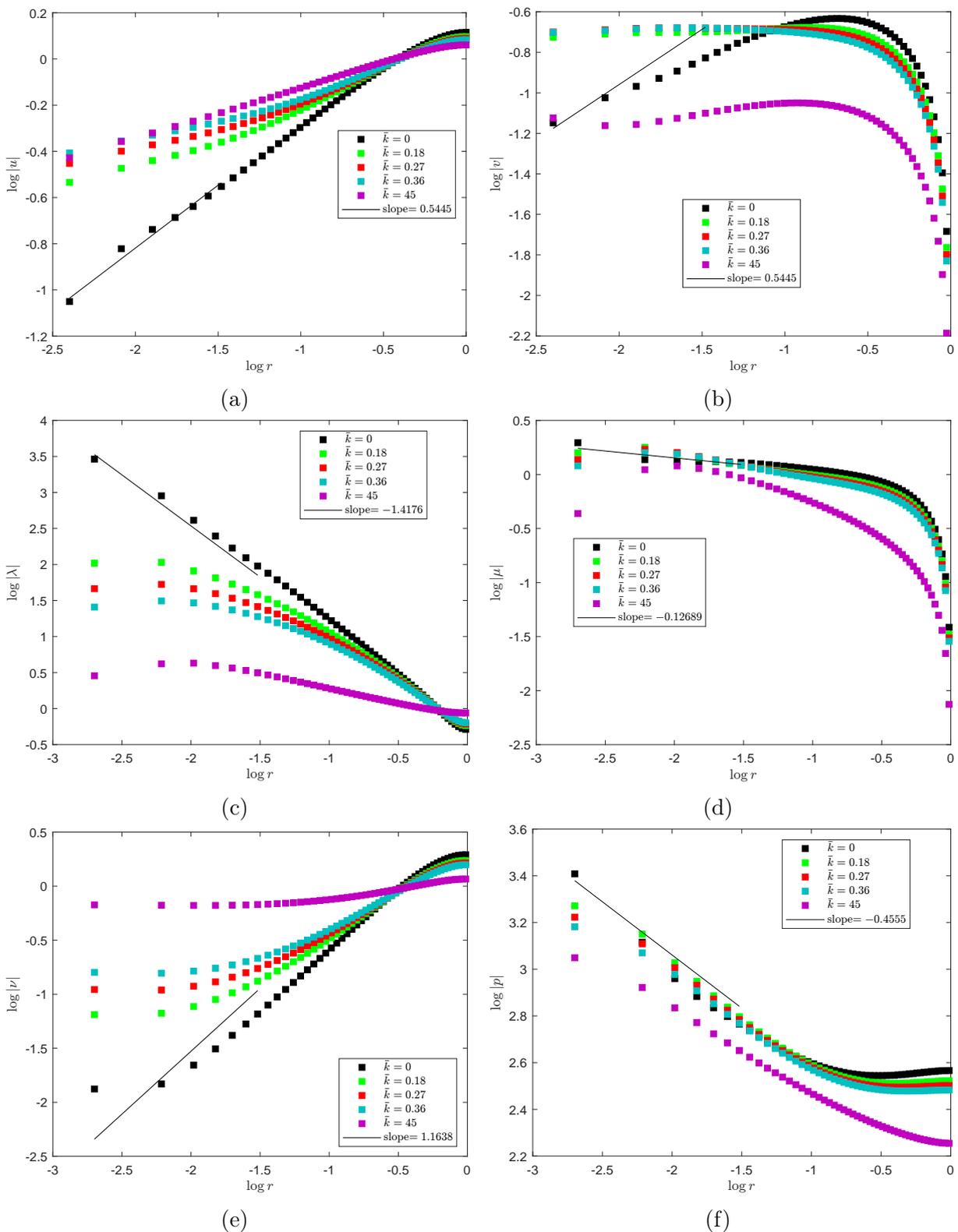
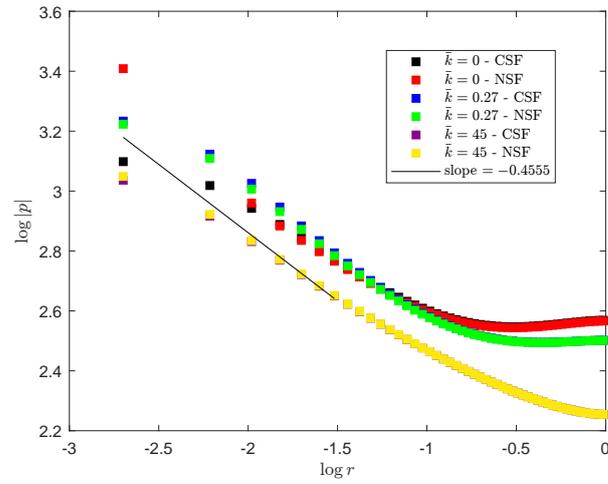
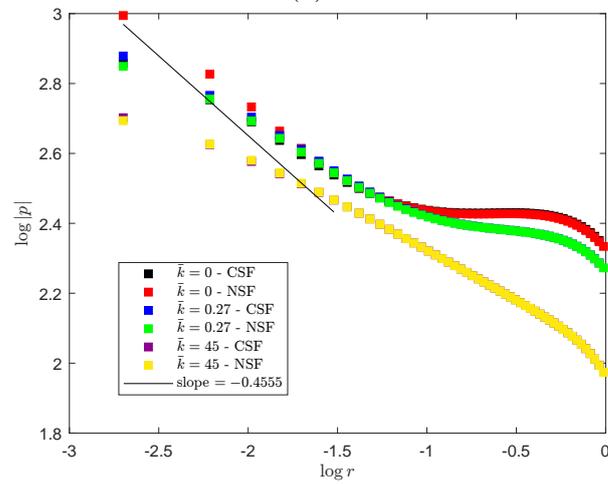


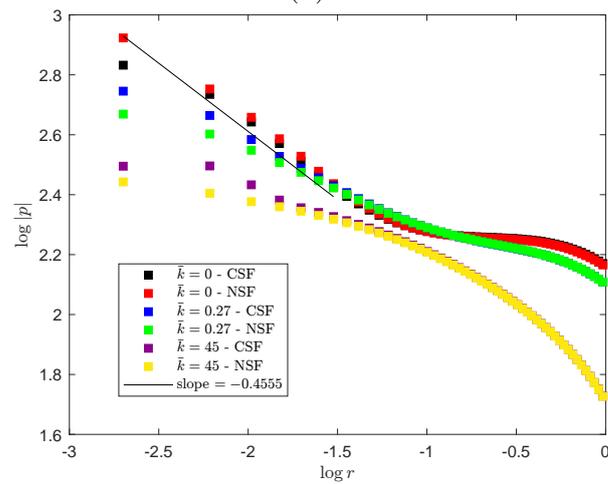
Figura 4.16: Comportamento assintótico próximo à quina ao longo de  $\theta = \frac{\pi}{2}$  - NSF,  $Re = 0.01$ ,  $\varepsilon = 0.25$ ,  $Wi = 1$ ,  $\beta = \frac{1}{9}$ .



(a)



(b)



(c)

Figura 4.17: Comportamento assintótico da pressão ao longo de  $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$  e  $\pi$  -  $Re = 0.01$ ,  $\varepsilon = 0.25$ ,  $Wi = 1$ ,  $\beta = \frac{1}{9}$ .

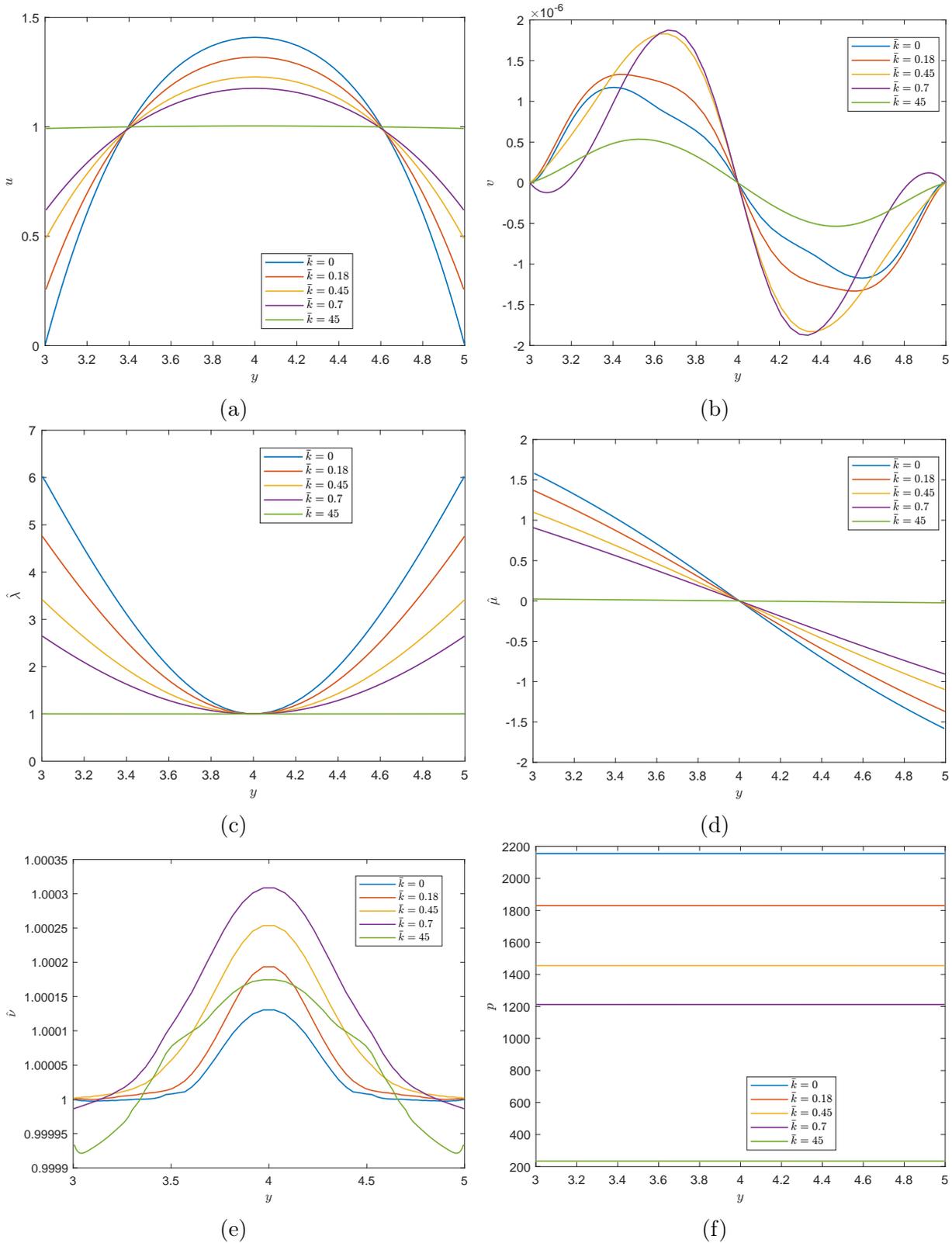


Figura 4.18: Perfis das propriedades do escoamento com a variação de  $\bar{k}$  em  $x \approx 10$  - NSF,  $Re = 0.01$ ,  $\varepsilon = 0.25$ ,  $Wi = 1$ ,  $\beta = \frac{1}{9}$ .

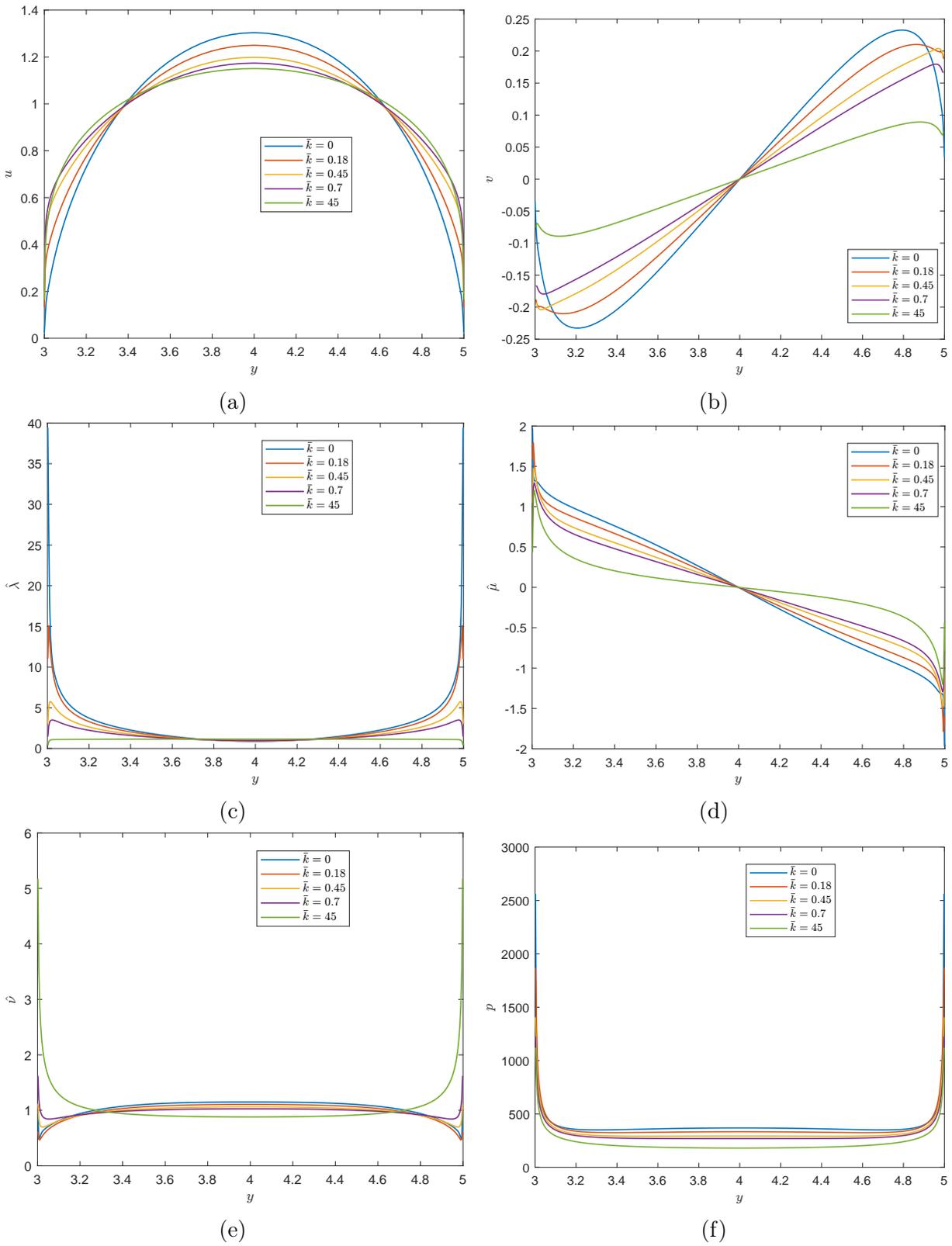


Figura 4.19: Perfis das propriedades do escoamento com a variação de  $\bar{k}$  em  $x = 20$  - NSF,  $Re = 0.01$ ,  $\varepsilon = 0.25$ ,  $Wi = 1$ ,  $\beta = \frac{1}{9}$ .

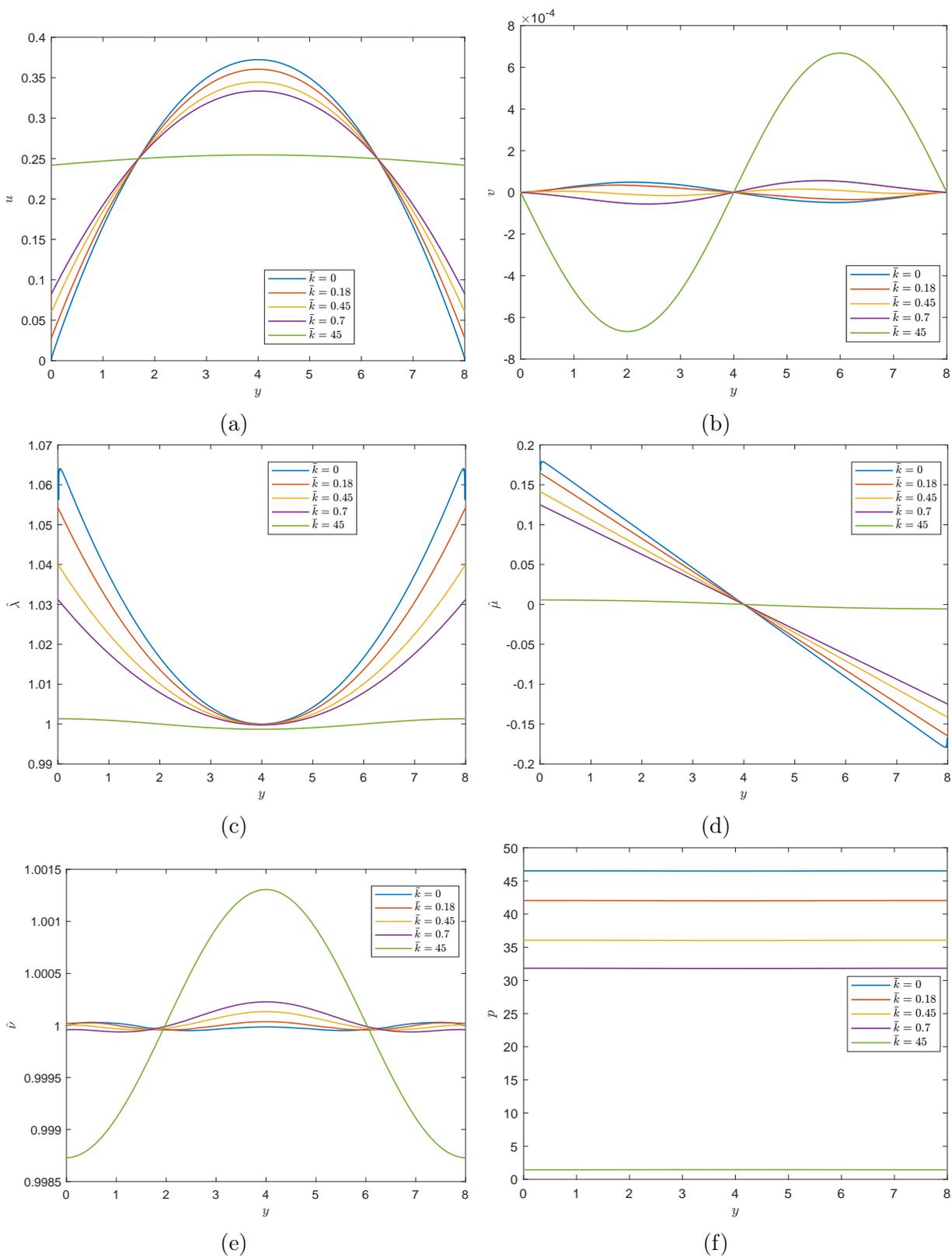


Figura 4.20: Perfis das propriedades do escoamento com a variação de  $\bar{k}$  em  $x \approx 30$  - NSF,  $Re = 0.01$ ,  $\varepsilon = 0.25$ ,  $Wi = 1$ ,  $\beta = \frac{1}{9}$ .

## 4.2 Contração 4:1

As simulações nessa seção são realizadas numa contração de comprimento  $40L$  ilustrada pela figura abaixo e nas mesmas malhas detalhadas na Tabela 4.1. A Figura 4.22 ilustra a estrutura da malha não-uniforme.

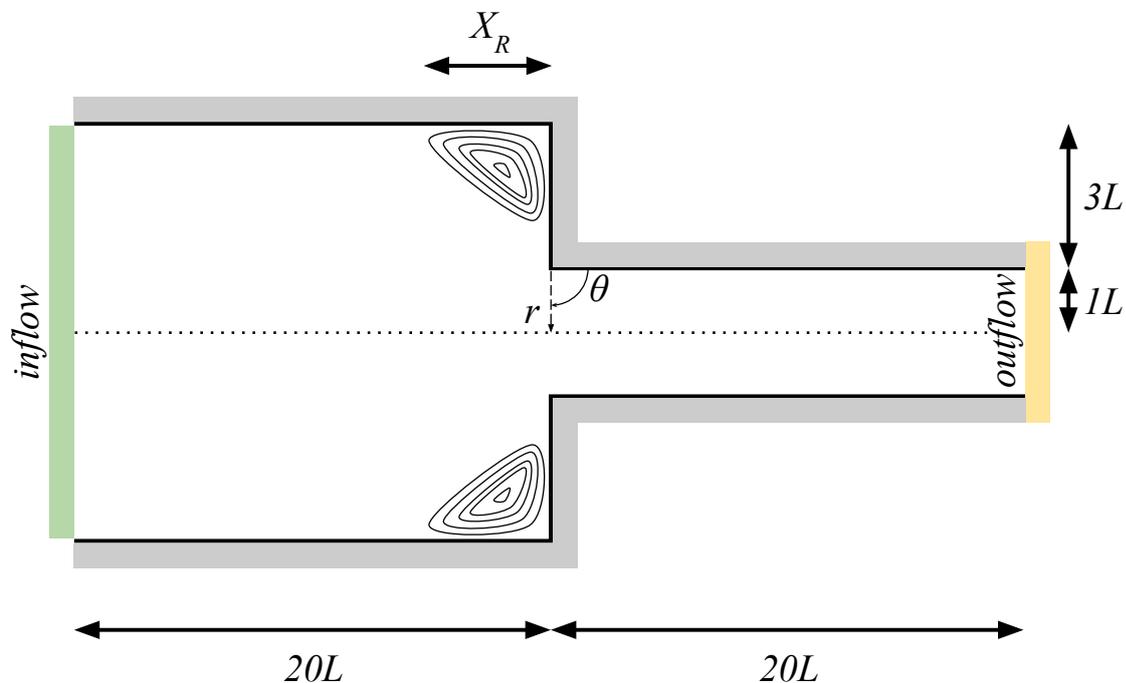


Figura 4.21: Representação da contração 4:1, regiões de formação de vórtices e singularidade onde é feita a análise assintótica.

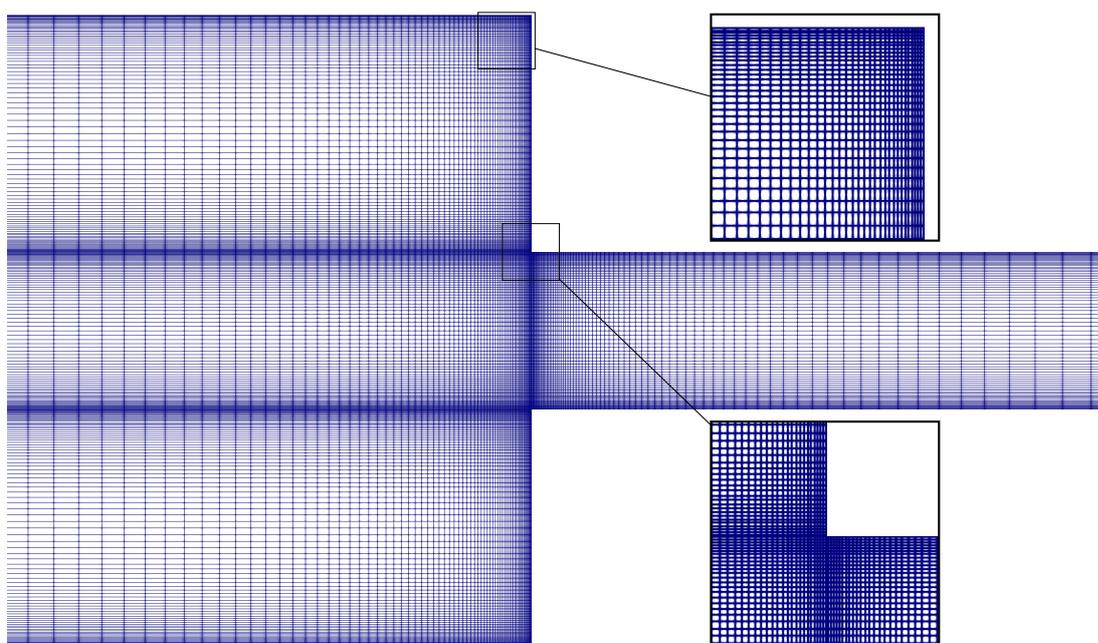


Figura 4.22: Regiões mais refinadas da malha não-uniforme.

### 4.2.1 Fluido Newtoniano

Nas simulações iniciais é considerado um fluido Newtoniano ( $\beta = 1$ ) e os parâmetros adimensionais:

- Comprimento característico:  $L = 1$ ;
- Número de Reynolds:  $Re = 0.01$ ;
- Passo temporal:  $\Delta_t = 10^{-4}$ ;
- *Inflow*: perfil de velocidade desenvolvido, com  $\frac{u}{U} = 0.375$ ;
- Coeficiente de escorregamento:  $\bar{k} = 0, 0.45, 1, 10, 100$ .

Para a validação, são considerados resultados como tamanhos dos vórtices,  $X_R$ , e comportamento assintótico das componentes da velocidade, do tensor do solvente e pressão próximo à singularidade para o caso *no-slip*. Os resultados obtidos são comparados com os presentes em [16], Figura 4.23, e mostram que, à medida que o valor da constante de fricção  $\bar{k}$  é aumentado, o tamanho do vórtice diminui até que não haja recirculação ( $\bar{k} \approx 50$ ); os valores obtidos neste trabalho são organizados na Tabela 4.4. Comparando esses valores com os produzidos por Ferrás [16], vê-se que os valores obtidos estão coerentes.

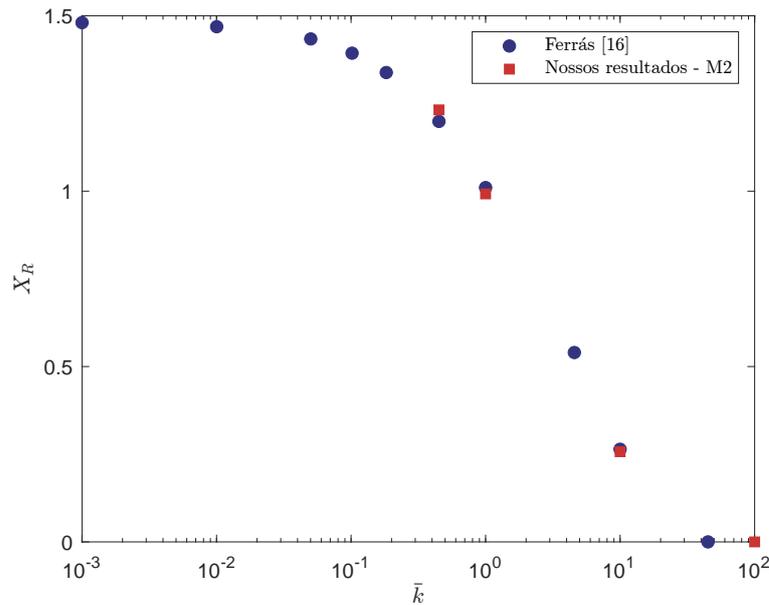


Figura 4.23: Resultados do caso Newtoniano obtidos por [16] comparados aos deste trabalho.

Tabela 4.4: Tamanhos de vórtice,  $X_R$  - Newtoniano, contração.

$k$	M1	M2
0.0	1.465579	1.525190
0.45	1.164632	1.231791
1.0	0.976286	0.992115
10	0.369544	0.257082
100	0.0	0.0

O artigo apresenta ainda resultados do comportamento assintótico de algumas propriedades próximo à singularidade. Esses resultados teóricos são os mesmos de (4.1) e os resultados apresentados na Figura 4.25 confirmam as predições teóricas, com exceção da pressão, do caso *no-slip* para as propriedades do escoamento, isto é, ao se aproximarem da quina ( $r \rightarrow 0$ ), seus valores se aproximam da inclinação das respectivas retas. Isso não acontece para outros valores de  $\bar{k}$ , conforme a Figura 4.26; os valores das propriedades se afastam da reta relativa a  $\bar{k} = 0$ .

Ainda com simulações em que a constante de fricção  $\bar{k}$  assume diferentes valores, são analisados os perfis das propriedades do escoamento e os cortes são feitos em três regiões da geometria:  $x \approx 10$ ,  $x = 20$  e  $x \approx 30$ , como na Figura 4.24.

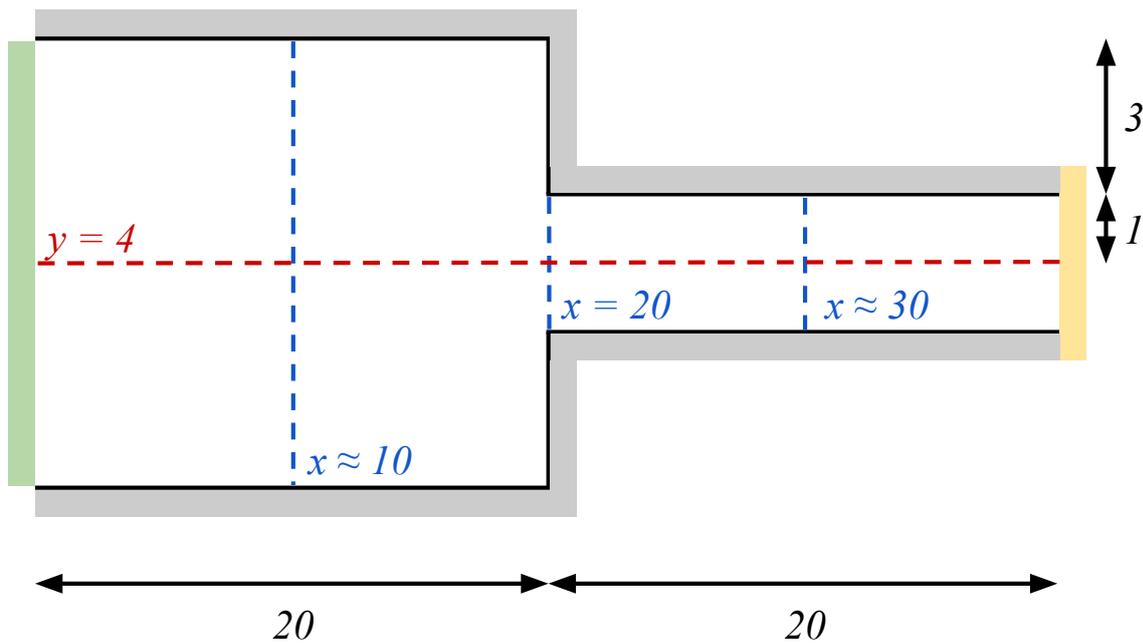


Figura 4.24: Cortes horizontal e vertical na geometria ( $L = 1$ ).

As Figuras 4.27, 4.28 e 4.29 exibem de forma clara a influência da condição *slip* nos perfis das propriedades do escoamento nas três regiões da geometria. Voltando a atenção à componente  $u$  da velocidade, é bastante evidente seu aumento na parede à medida que  $\bar{k}$  também aumenta, o que era esperado. No corte em  $x = 20$ , em particular, o aumento do valor de  $u$  também ocorre porém sem grandes variações com os diferentes valores do coeficiente de escorregamento. Em termos da pressão, uma diminuição em seu valor acontece nos três cortes estudados com a variação de  $\bar{k}$ , atingindo os menores valores em  $x \approx 30$ .

Outro detalhe relevante é a variação da componente  $u$  da velocidade ao longo da geometria da contração na altura  $y = 4$ . A Figura 4.30a ilustra essa variação enquanto a Figura 4.30b apresenta a mesma análise para a pressão. Observa-se que aumentar  $\bar{k}$  faz com que, no centro do canal, ambas as propriedades tenham seus valores reduzidos.

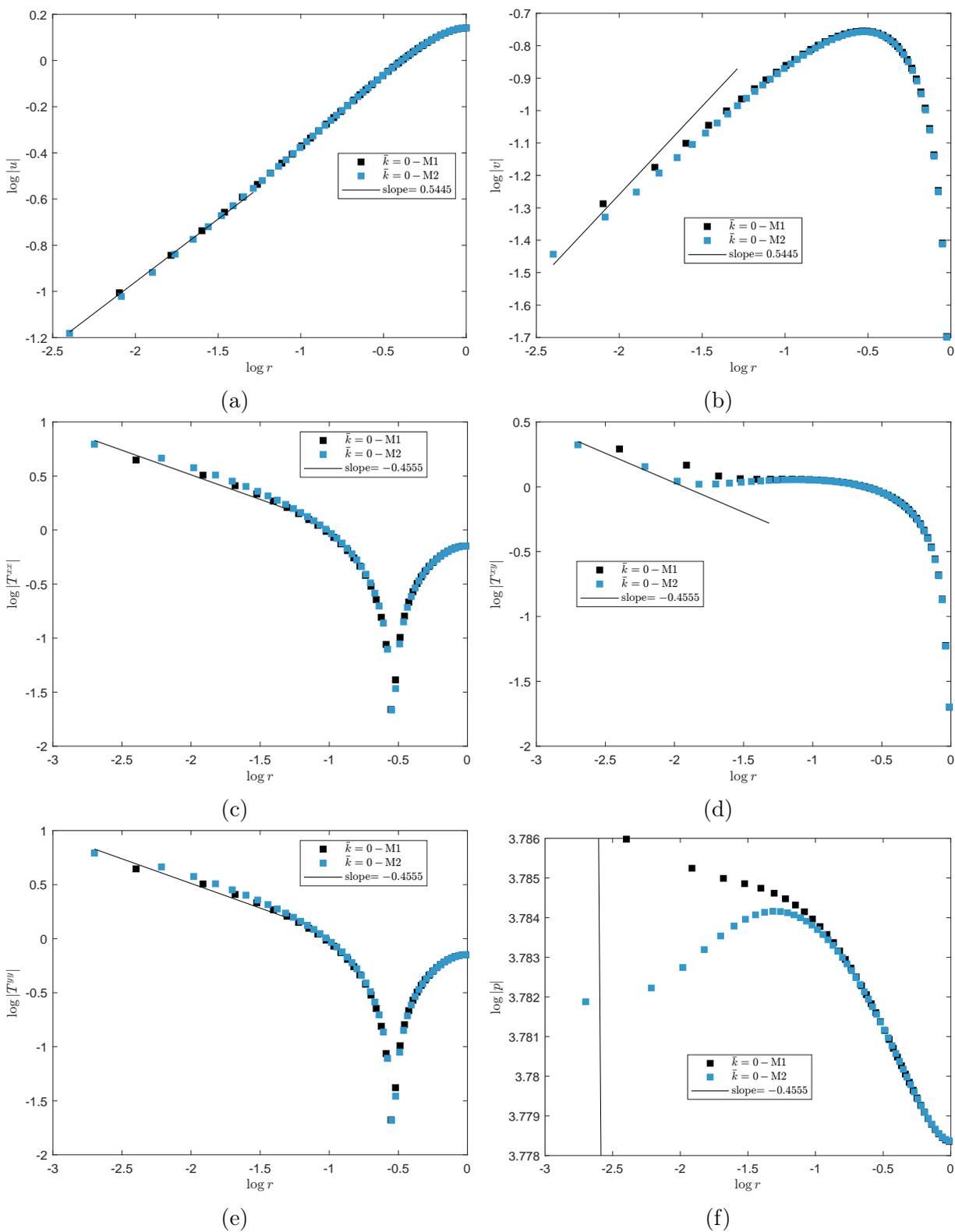


Figura 4.25: Comportamento assintótico da velocidade, das componentes do tensor  $\mathbf{T}^s$  e da pressão próximo à quina -  $Re = 0.01$ .

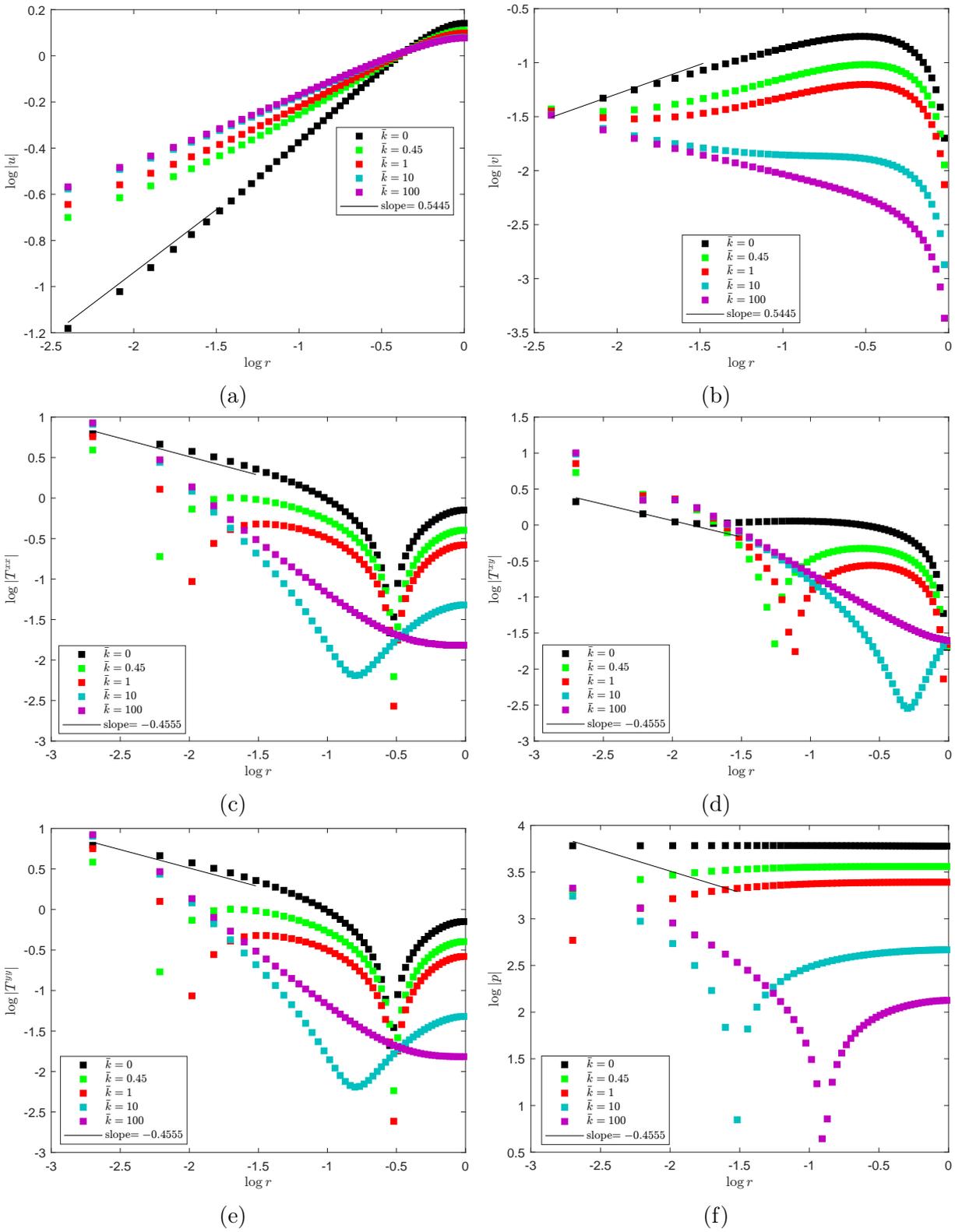


Figura 4.26: Comportamento assintótico da velocidade, das componentes do tensor  $\mathbf{T}^s$  e da pressão próximo à quina -  $Re = 0.01$ .

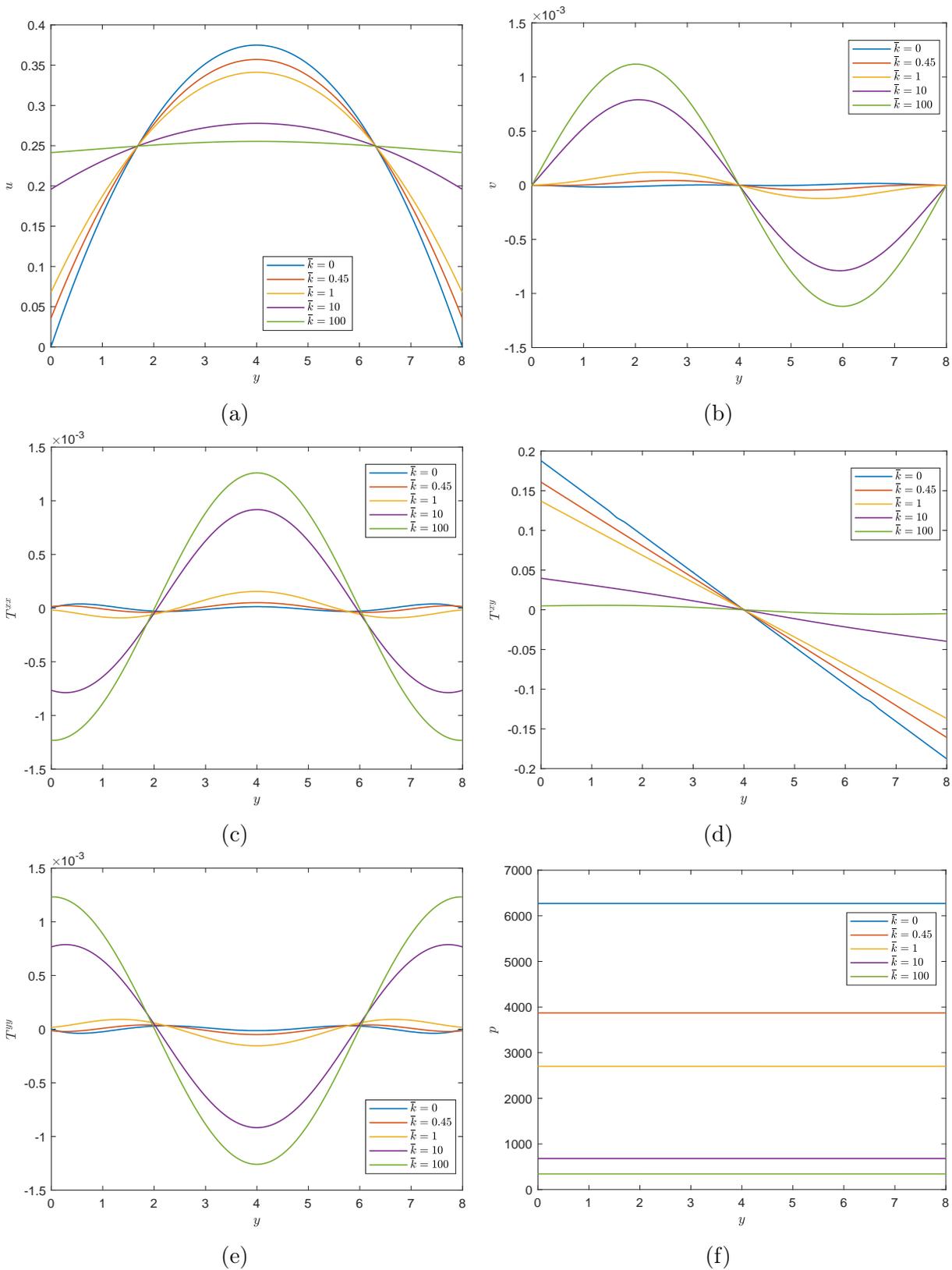


Figura 4.27: Perfis das propriedades do escoamento com a variação de  $\bar{k}$  em  $x \approx 10 - Re = 0.01$ .

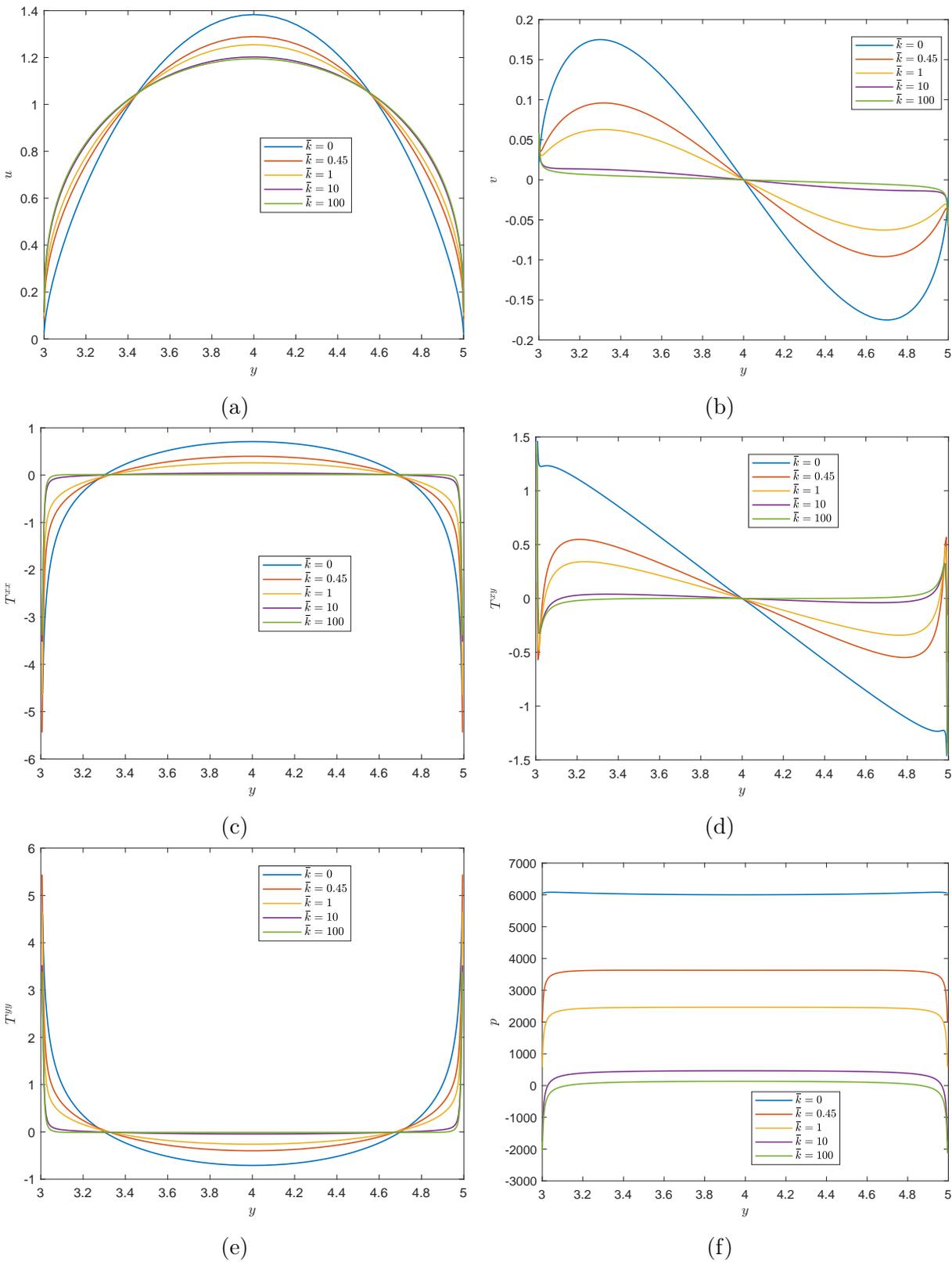


Figura 4.28: Perfis das propriedades do escoamento com a variação de  $\bar{k}$  em  $x = 20 - Re = 0.01$ .

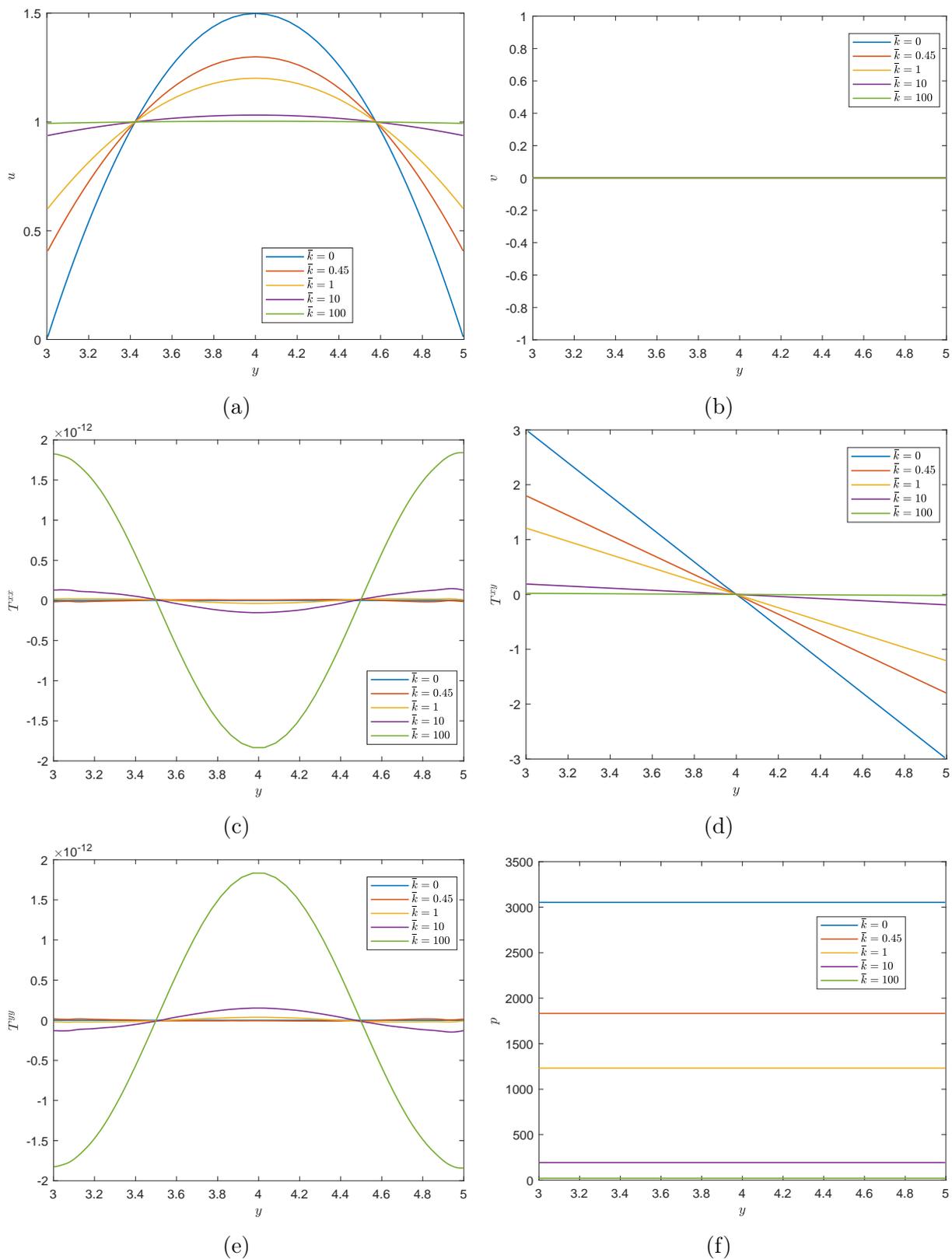


Figura 4.29: Perfis das propriedades do escoamento com a variação de  $\bar{k}$  em  $x \approx 30$  -  $Re = 0.01$ .

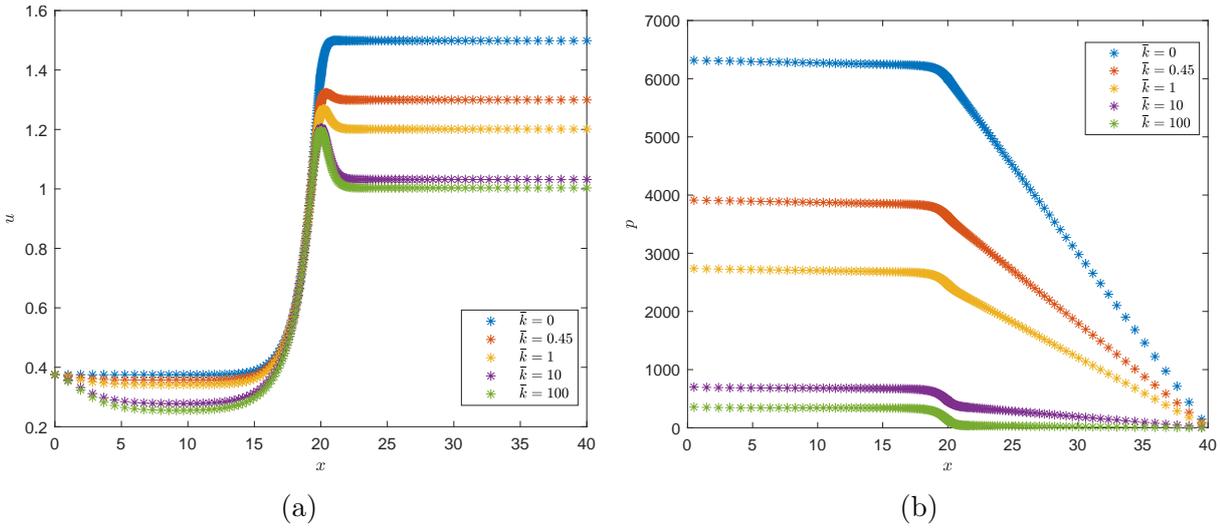


Figura 4.30: Perfil horizontal de (a)  $u$  e (b)  $p$  em  $y = 4$  -  $Re = 0.01$ .

### 4.2.2 Oldroyd-B

Os próximos resultados dizem respeito à simulação com o fluido Oldroyd-B, utilizando as formulações CSF e NSF, com os seguintes parâmetros adimensionais:

- Comprimento característico:  $L = 1$ ;
- Razão das viscosidades:  $\beta = \frac{1}{2}$ ;
- Tolerância da formulação NSF:  $\text{tol}_{NSF} = 10^{-6}$ ;
- Número de Reynolds:  $Re = 0.01$ ;
- Número de Weissenberg:  $Wi = 1$ ;
- Passo temporal:  $\Delta t_{CSF} = 5 \times 10^{-5}$ ,  $\Delta t_{NSF} = 10^{-5}$ ;
- *Inflow*: perfis de velocidade e de  $\mathbf{T}$  desenvolvidos, com  $\frac{u}{\bar{U}} = 0.375$ ;
- Coeficiente de escorregamento:  $\bar{k} = 0, 0.1, 0.18, 0.5$ .

O principal objetivo deste teste é comparar a precisão de ambas as formulações na captura dos valores dos tensores e da pressão. São comparados os resultados assintóticos de  $T^{xx}$ ,  $T^{xy}$ ,  $T^{yy}$  e  $p$  produzidos pelas formulações bem como o comportamento das variáveis naturais  $\lambda$ ,  $\mu$  e  $\nu$  na malha M1. Os artigos de referência [6] e [18] detalham os cálculos para a obtenção das proporcionalidades da velocidade  $\mathbf{u}$  e componentes do tensor  $\mathbf{T}$ . Segundo esses autores, o comportamento assintótico respeita

$$\mathbf{u} \propto r^{\frac{5}{9}}, \quad \mathbf{T} \propto r^{-\frac{2}{3}}, \quad (4.4)$$

e as variáveis naturais, conforme [11], são dadas por

$$\lambda \propto r^{-1.8310}, \quad \mu \propto r^{-0.28651}, \quad \nu \propto r^{1.2580}, \quad (4.5)$$

válidos somente para o caso em que  $\bar{k} = 0$ .

A Figura 4.31 mostra que, de fato, a NSF aproxima melhor os valores das componentes de  $\mathbf{T}$  perto da singularidade e, inclusive, consideravelmente, a pressão conforme  $r \rightarrow 0$ . Já para as componentes da velocidade, a diferença é menos significativa.

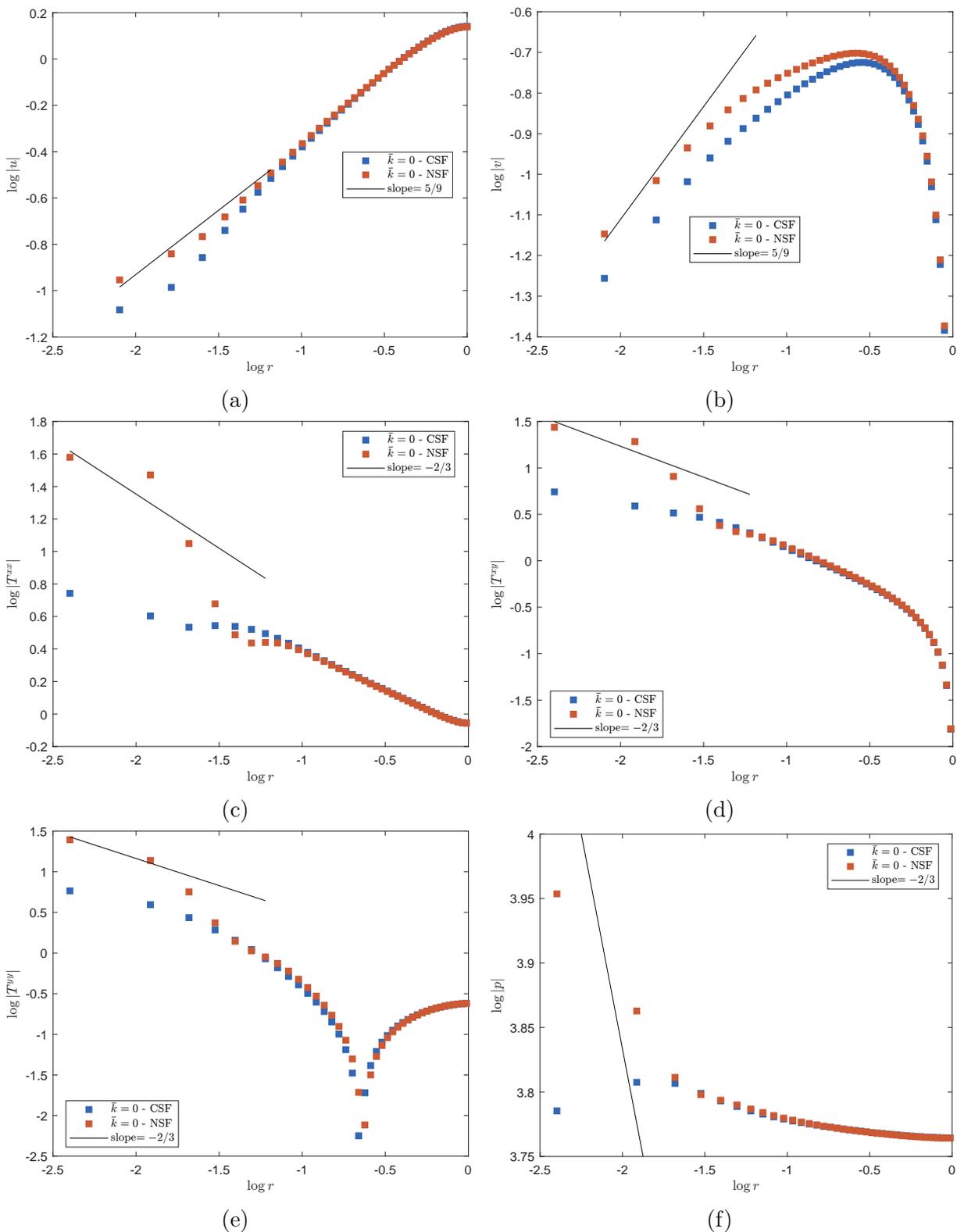


Figura 4.31: Comparação do comportamento assintótico das propriedades do escoamento utilizando as formulações CSF e NSF na malha M1 -  $Re = 0.01$ ,  $Wi = 1$  e  $\beta = \frac{1}{2}$ .

Em seguida são apresentados resultados assintóticos com os valores  $\bar{k} = 0, 0.1, 0.18$  e  $0.5$  produzidos também por ambas as formulações com a observação de que a inclinação presente nas Figuras 4.32 e 4.33 é referente a  $\bar{k} = 0$ .

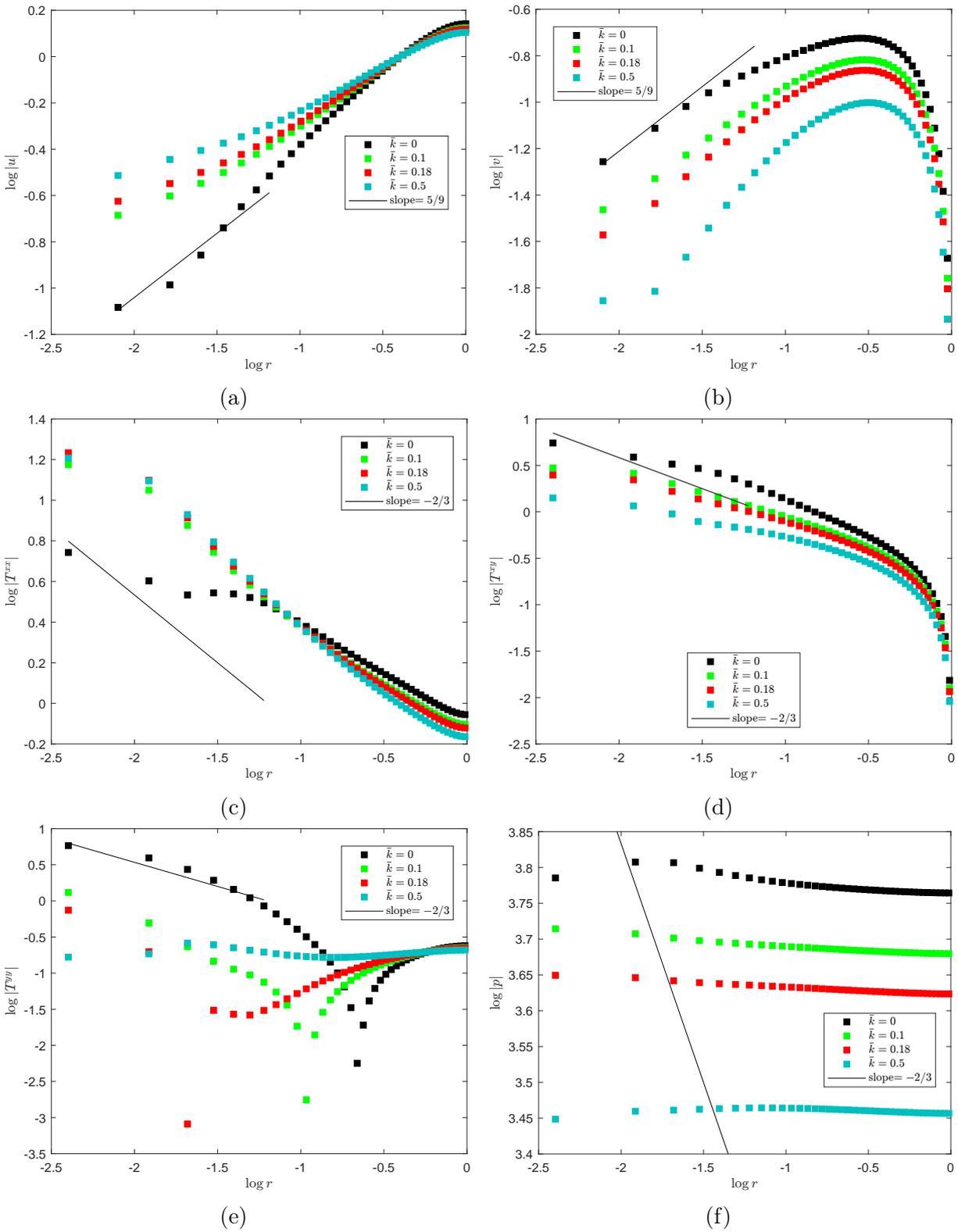


Figura 4.32: Propriedades do escoamento ao se aproximarem da quina da contração - CSF,  $Re = 0.01$ ,  $Wi = 1$  e  $\beta = \frac{1}{2}$ .

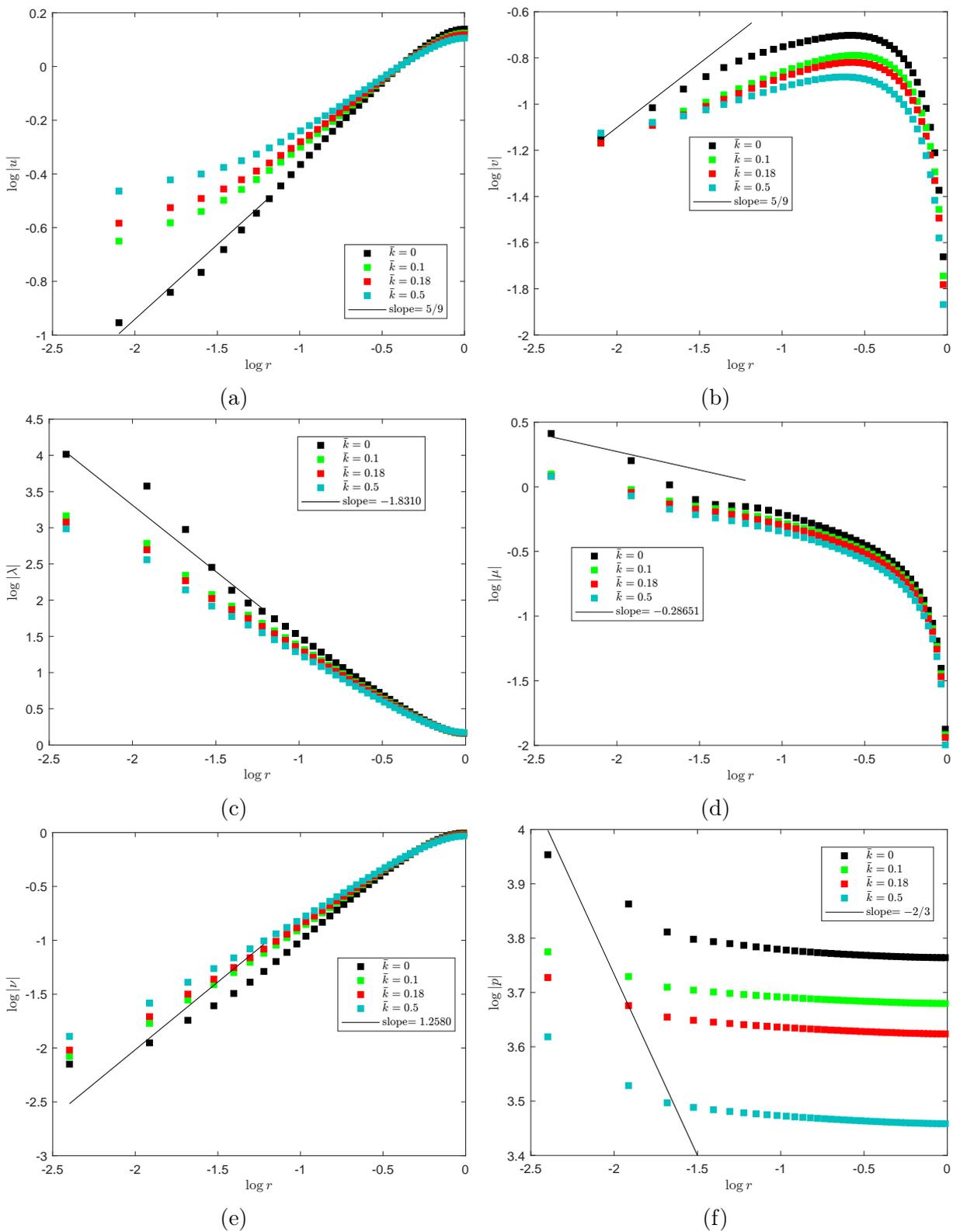


Figura 4.33: Propriedades do escoamento ao se aproximarem da quina da contração - NSF,  $Re = 0.01$ ,  $Wi = 1$  e  $\beta = \frac{1}{2}$ .

Abaixo, na Figura 4.34, são ilustrados os vórtices com tamanho em redução com o aumento do coeficiente de escorregamento. Para estes resultados, considerou-se a formulação NSF e os valores  $\bar{k} = 0, 0.1, 0.18,$  e  $0.5$ .

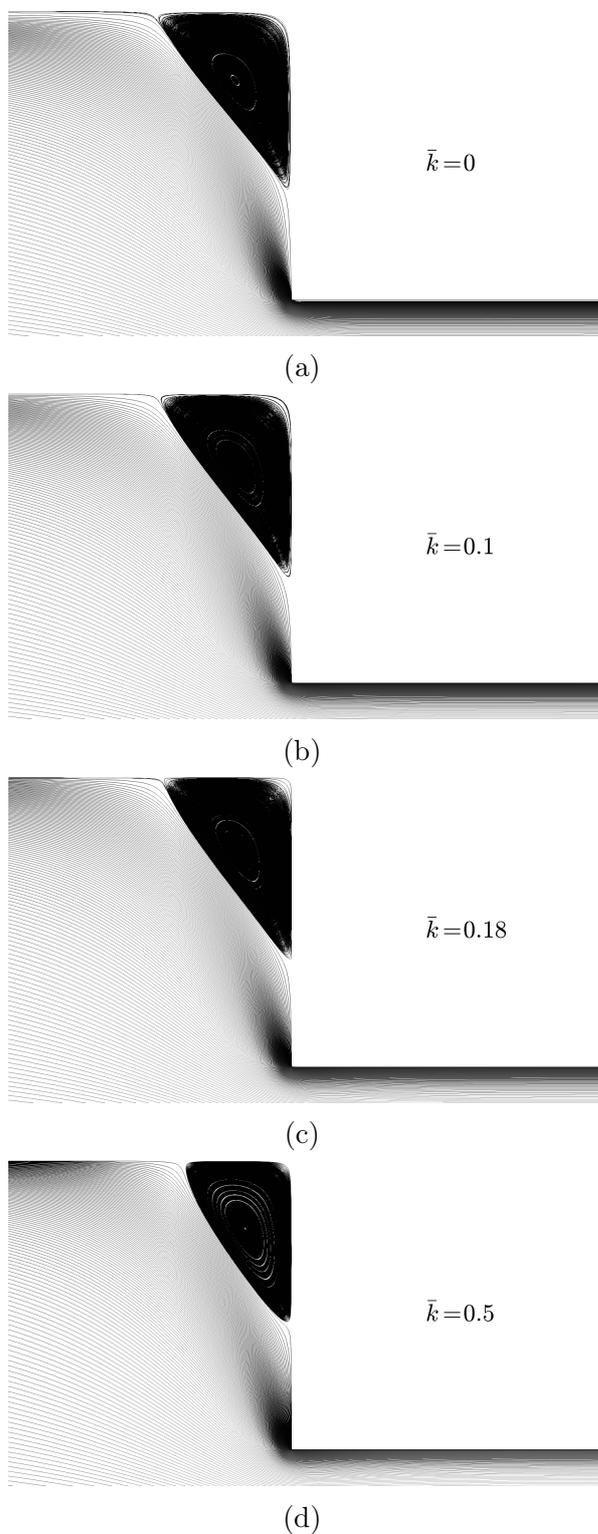


Figura 4.34: Redução da dimensão dos vórtices com o aumento de  $\bar{k}$  - Oldroyd-B, NSF, M1.

### 4.2.3 PTT

Considerando agora o modelo constitutivo PTT, as simulações são executadas com os parâmetros adimensionais:

- Comprimento característico:  $L = 1$ ;
- Número de Reynolds:  $Re = 0.01$ ;
- Número de Weissenberg:  $Wi = 1$ ;
- $\varepsilon = 0.25$ ;
- Razão das viscosidades:  $\beta = \frac{1}{9}$  (CSF) e  $\beta = \frac{1}{2}$  (CSF e NSF);
- Passo temporal:  $\Delta_{t_{CSF}} = 10^{-4}$ ,  $\Delta_{t_{NSF}} = 10^{-5}$ ;
- *Inflow*: perfil de velocidade e de  $\mathbf{T}$  desenvolvidos com  $\frac{u}{U} = 0.375$ ;
- Coeficiente de escorregamento:  $\bar{k} = 0, 0.18, 0.27, 0.36, 0.45, 1, 4.5, 45$ .

Para validar os resultados, o trabalho de Ferrás [16] é utilizado como referência na comparação do tamanho do vórtice que se forma no canto superior da contração, para alguns valores de  $\bar{k}$ . Considerando a formulação cartesiana, os resultados são apresentados na tabela abaixo e indicam boa concordância com a referência.

Tabela 4.5: Tamanhos de vórtice,  $X_R$  - PTT, contração.

$\bar{k}$	M1	M2	Ferrás [16]
0.0	1.551008	1.525190	1.5180
0.18	1.465579	1.446187	1.4794
0.27	1.465579	1.446187	1.4779
0.36	1.465579	1.446187	1.4806
0.45	1.465579	1.446187	1.4848
4.5	1.551008	-	1.5516
45	1.551008	-	1.5667

O estudo seguinte é sobre o comportamento assintótico das propriedades do escoamento próximo da quina da contração e, para isso, são utilizadas ambas as malhas M1 e M2 e alguns valores de  $\bar{k}$ . Desta forma, busca-se comparar os resultados numéricos obtidos com os resultados teóricos de [27] dados por (4.2).

Esses resultados são apresentados nas Figuras 4.35 e 4.36 em que as retas são referentes ao caso *no-slip*. Vê-se que, para este caso, os resultados numéricos estão em conformidade com os teóricos a menos da pressão, que não acompanha a inclinação esperada.

Logo após, são exibidos os resultados das simulações com  $\beta = \frac{1}{2}$  com o intuito de avaliar as diferenças entre os resultados produzidos por ambas as formulações para o tensor polimérico. Inicialmente é medido o comprimento dos vórtices para diferentes coeficientes  $\bar{k}$  considerando-se as formulações CSF e NSF e as malhas M1 e M2, cujos resultados são apresentados na Tabela 4.6 e na Figura 4.37. Esses resultados indicam que a formulação NSF tem vórtices menos duradouros, ou seja, os vórtices tendem a diminuir mais rapidamente com o aumento de  $\bar{k}$  do que os produzidos pela CSF. Nas Figuras 4.38 e 4.39 é exibida a variação assintótica das propriedades do escoamento onde observa-se que o aumento de  $\bar{k}$  tende a afastar as propriedades da reta de referência no caso da CSF enquanto que as variáveis naturais mantêm-se um pouco mais alinhadas ao caso  $\bar{k} = 0$ .

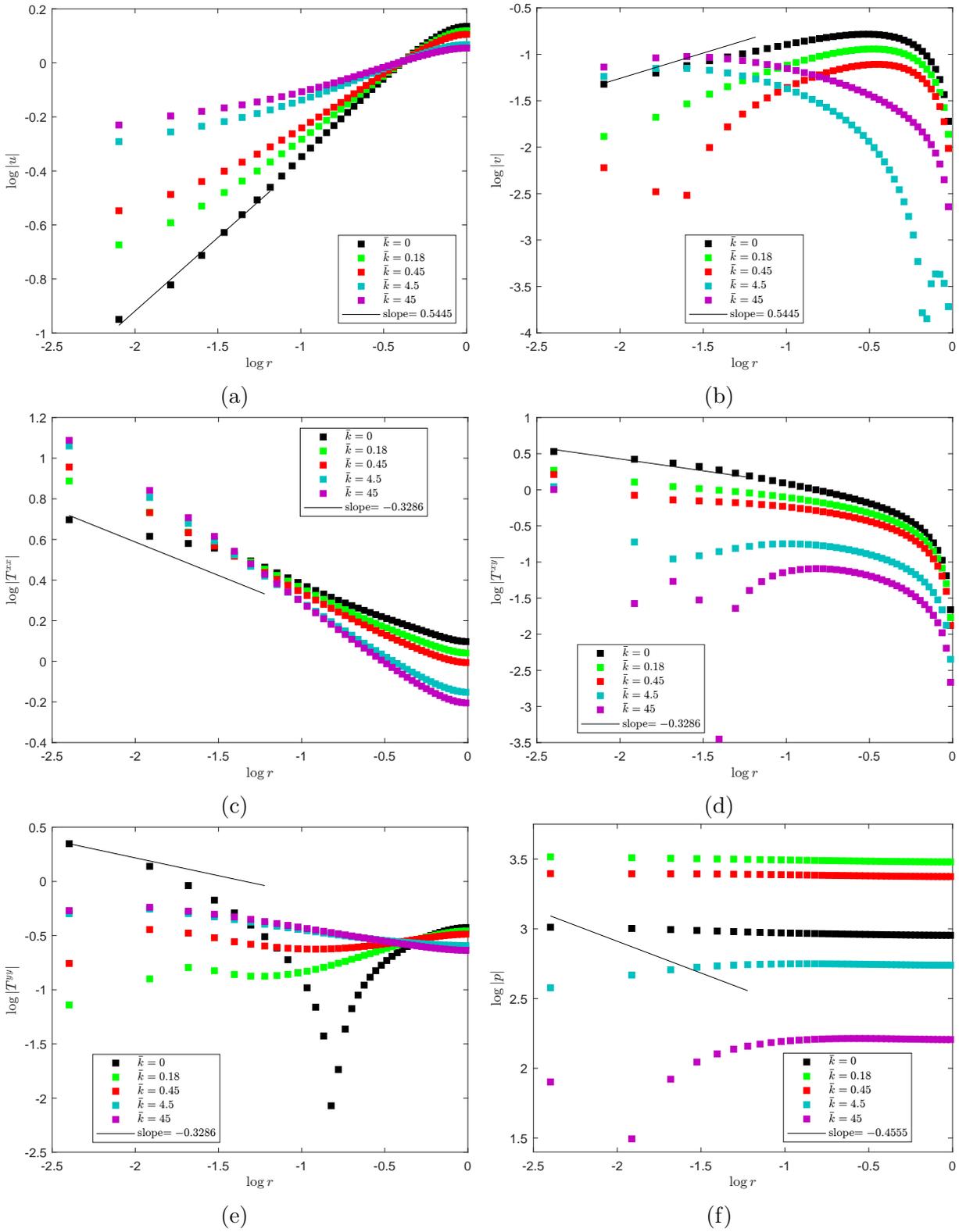


Figura 4.35: Comportamento assintótico das variáveis com  $\beta = \frac{1}{9}$  - CSF, M1,  $Re = 0.01$ ,  $Wi = 1$ .

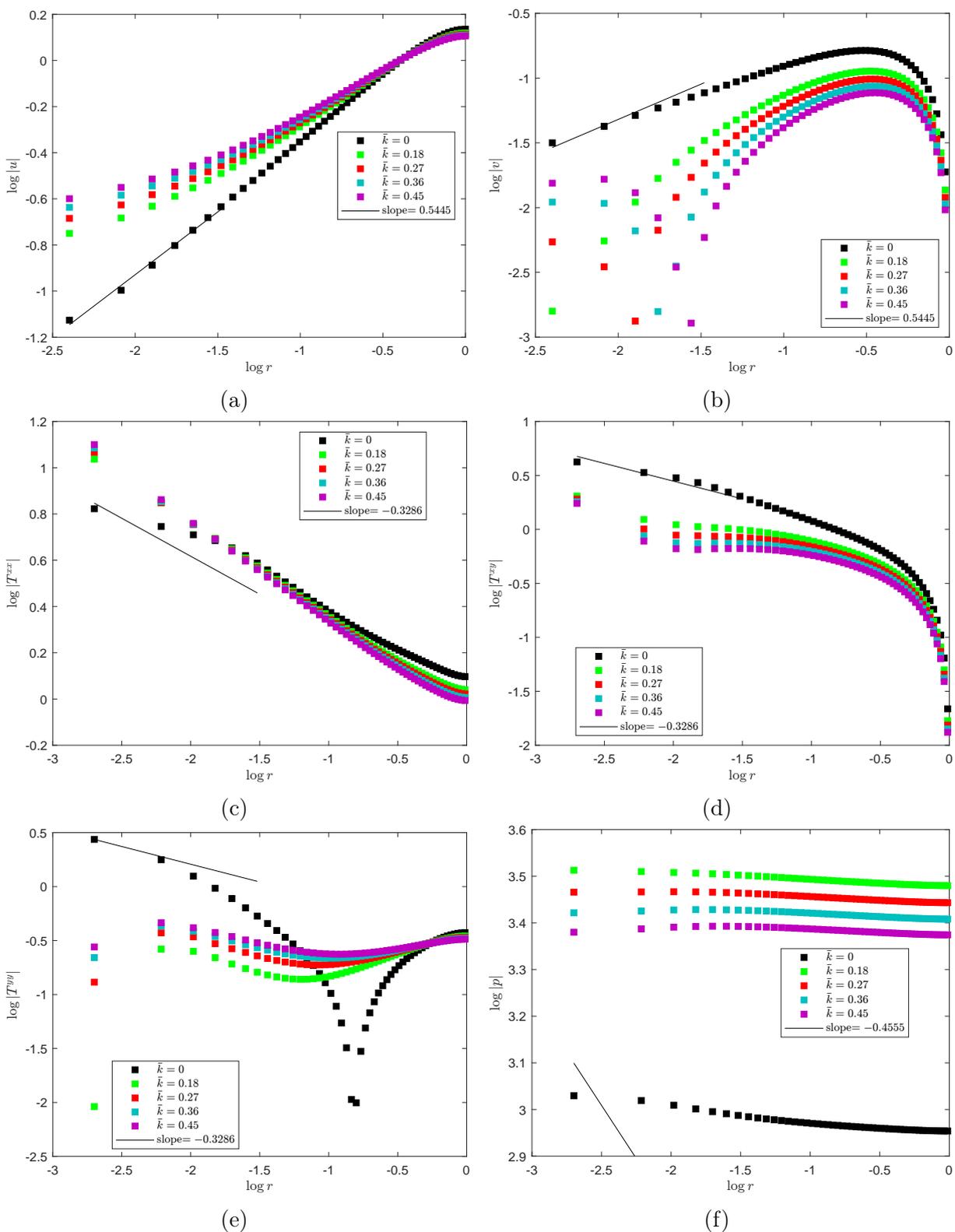
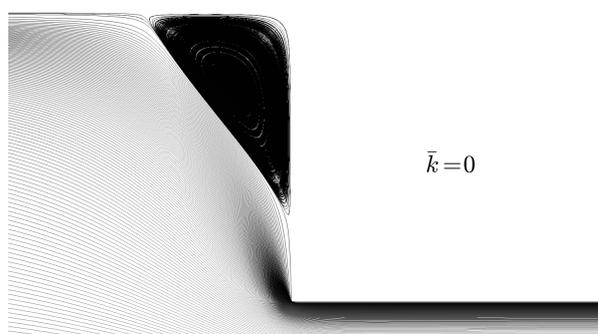


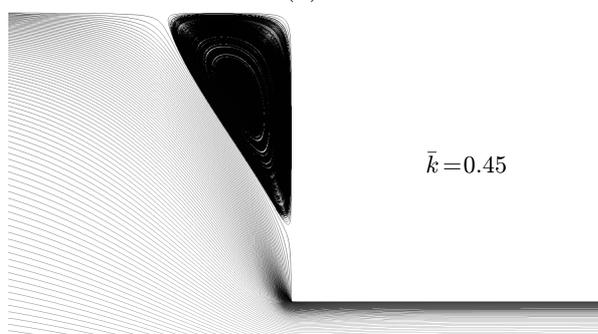
Figura 4.36: Comportamento assintótico das variáveis com  $\beta = \frac{1}{9}$  - CSF, M2,  $Re = 0.01$ ,  $Wi = 1$ .

Tabela 4.6: Tamanhos de vórtice,  $X_R$  - CSF e NSF - PTT, contração.

$\bar{k}$	CSF		NSF	
	M1	M2	M1	M2
0	1.465579	1.525190	1.551008	1.525190
0.45	1.307366	1.299675	1.307366	1.299675
1	1.098592	1.167254	1.164632	1.167254



(a)



(b)



(c)

Figura 4.37: Redução da dimensão dos vórtices com o aumento de  $\bar{k}$  - PTT, NSF, M1.

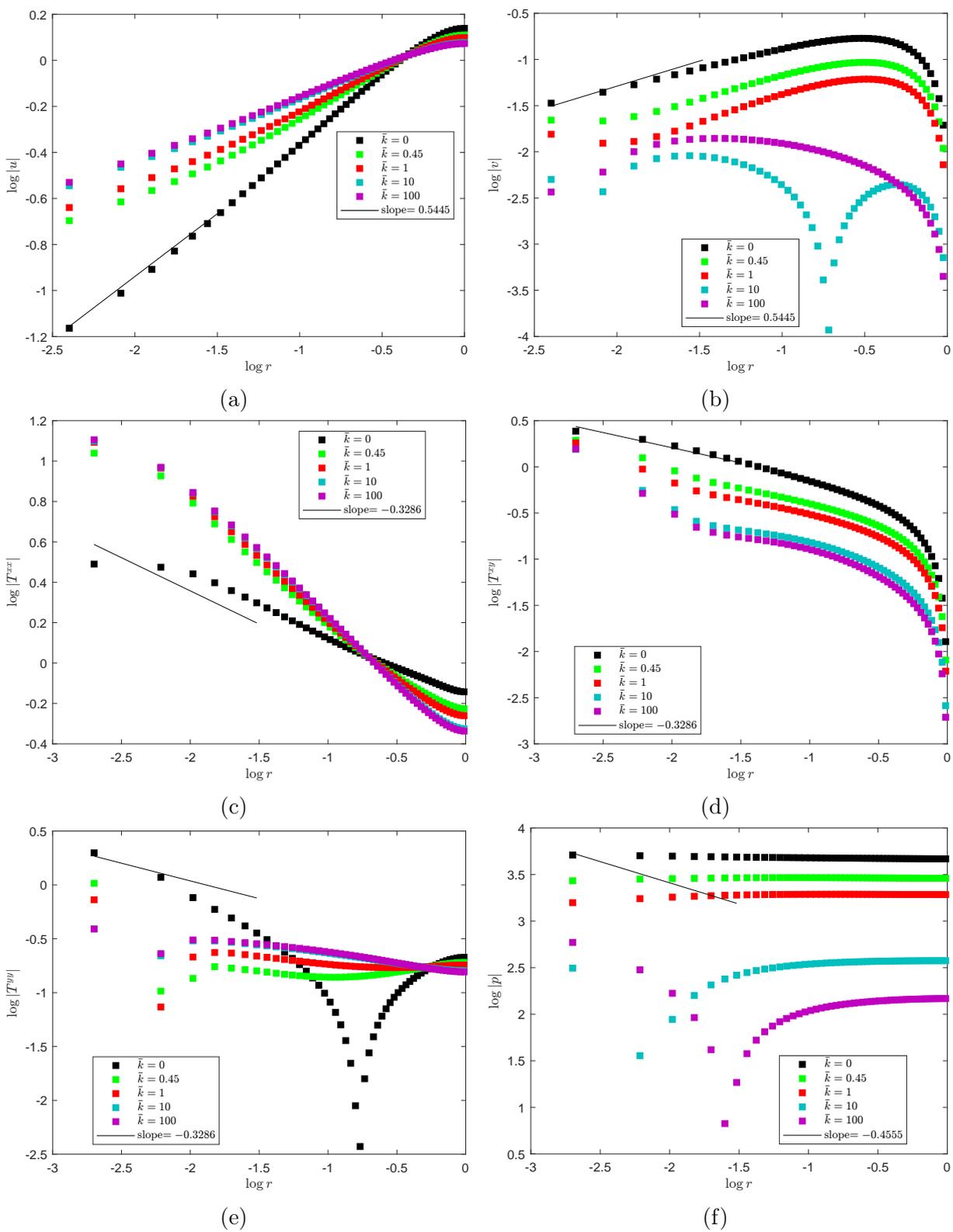


Figura 4.38: Comportamento assintótico das variáveis com  $\beta = \frac{1}{2}$  - CSF, M2,  $Re = 0.01$ ,  $Wi = 1$ .

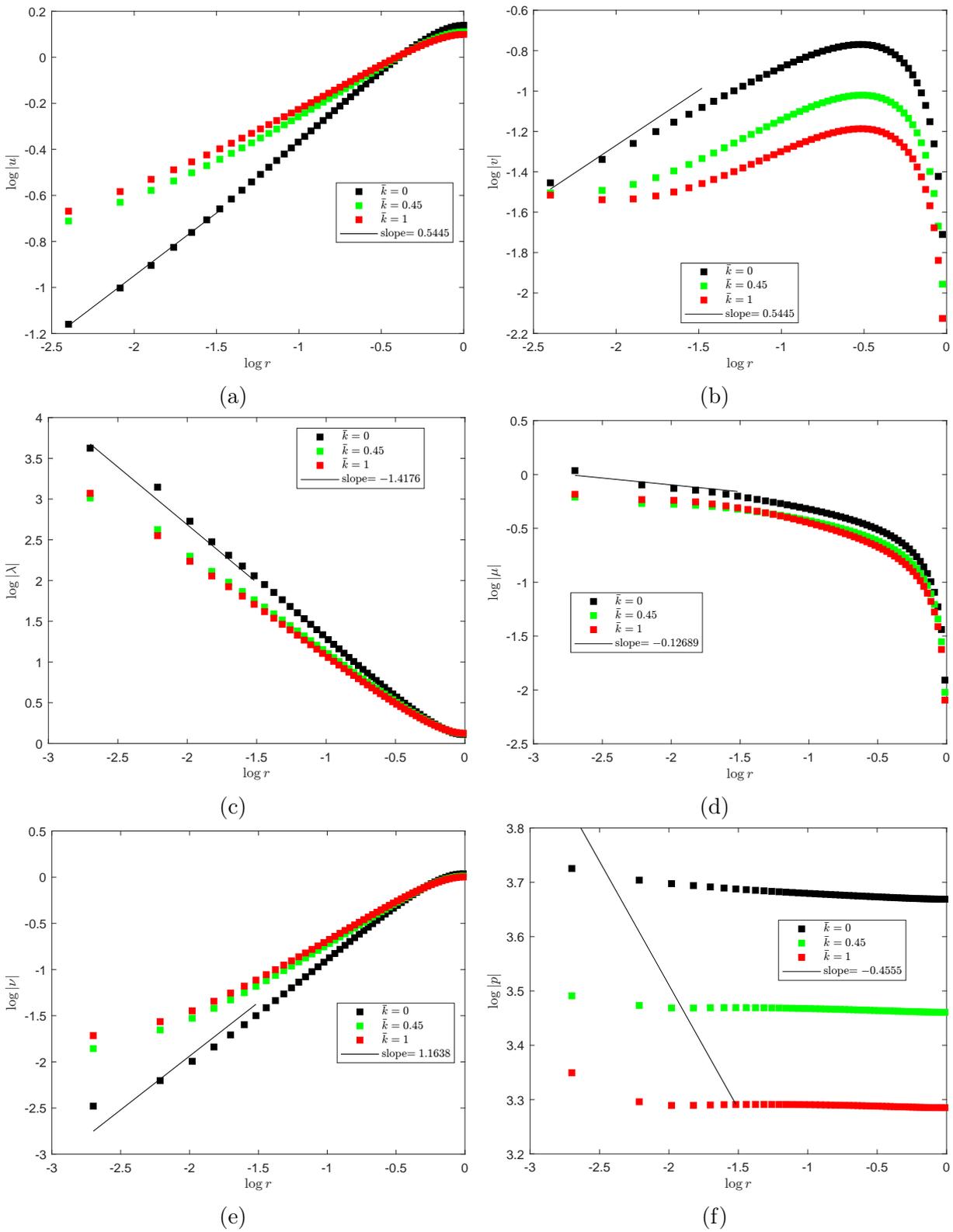


Figura 4.39: Comportamento assintótico das variáveis com  $\beta = \frac{1}{2}$  - NSF, M2,  $Re = 0.01$ ,  $Wi = 1$ .

## Conclusão e trabalhos futuros

Neste trabalho foram apresentadas as equações de Navier-Stokes e também os modelos constitutivos Oldroyd-B e PTT assim como detalhes de adimensionalização e discretização dessas equações. Em especial, nos casos viscoelásticos, com destaque para a *Natural Stress Formulation* (NSF), apresentou-se as equações constitutivas de ambos os modelos citados acima em termos dessa formulação alternativa e algumas de suas particularidades.

Um ponto importante deste trabalho foi a adoção de condições de contorno levando-se em conta escoamentos com escorregamento na parede. Para o desenvolvimento dos estudos foram empregadas as leis de escorregamento (ou *slip laws*) Navier linear e Navier não-linear. Ao longo do trabalho foram apresentadas essas leis, os parâmetros utilizados em suas adimensionalizações e também a discretização do caso linear para quatro tipos de paredes: horizontal superior, horizontal inferior, vertical à esquerda e vertical à direita. Vale ressaltar que, até o presente momento, apenas a lei linear foi, de fato, implementada no código para tratar condições de contorno com deslizamento. Ainda, a lei Navier linear está implementada em termos da formulação tradicional (CSF) para o tensor polimérico e, portanto, nas simulações com a NSF o termo  $T^{xy}$  vem da equação (2.44) que relaciona as variáveis naturais com as cartesianas.

Foram escolhidas duas geometrias com singularidades para os estudos deste trabalho: expansão e contração. Desta forma, foi possível analisar mais efetivamente os resultados produzidos pela NSF, uma vez que seu uso objetiva evitar instabilidades no cálculo de  $\mathbf{T}$  perto de quinas. Além disso, a utilização de malhas não-uniformes, refinadas especialmente em quinas, também contribuiu para a captura de resultados mais acurados nessas regiões sem a necessidade de malhas extremamente refinadas e poupando custos computacionais.

As simulações realizadas nessas geometrias para fluidos Newtonianos evidenciaram as mudanças acarretadas pelos acréscimos no coeficiente *slip*,  $\bar{k}$ . Os perfis das propriedades apresentados no caso da contração é um exemplo em que o aumento nesse coeficiente provoca alterações no comportamento das propriedades nas paredes rígidas e que são propagadas também para o interior do canal. Outro exemplo é o estudo do comportamento assintótico das propriedades onde variações de  $\bar{k}$  causam afastamento das soluções numéricas em relação às soluções para  $\bar{k} = 0$ , para os quais tem-se uma predição teórica. Vale destacar que, para que a comparação seja mais fiel e comprobatória, é necessário, no estudo assintótico, incluir a condição de contorno do tipo *slip* na análise a fim de obter o comportamento das propriedades influenciadas por  $\bar{k} \neq 0$ . Finalmente, em ambas as geometrias confirmou-se que o aumento de  $\bar{k}$  reduz a dimensão dos vórtices até eliminá-los, conforme os resultados de [15] e [16].

No caso de fluidos viscoelásticos, os testes realizados na geometria com expansão foram bastante positivos em relação à estabilidade: os parâmetros adimensionais utilizados produziram resultados convergentes para ambas as formulações CSF e NSF. Isso permitiu uma comparação adequada entre os resultados das formulações utilizadas em termos de comportamento assintótico das variáveis e análise da variação de dimensão dos vórtices. Para este último, verificou-se que a formulação NSF exige maiores valores de  $\bar{k}$  para anular os vórtices, isto é, para um mesmo valor de  $\bar{k}$  os vórtices obtidos com essa formulação são maiores que os obtidos pela CSF. Outro destaque é que determinou-se que o valor  $\bar{k} = 0.7$  como o último valor dessa constante antes do desaparecimento do vórtice com a NSF ao passo que, para a CSF, o vórtice é presente até  $\bar{k} = 0.42$ . Em termos do estudo assintótico faz-se necessário frisar que os resultados obtidos para o caso  $\bar{k} \neq 0$  não acompanham a inclinação da reta justamente pelo fato do estudo teórico considerar condição de não escorregamento. Ainda assim, em alguns resultados a solução numérica aparenta acompanhar a inclinação da reta, como foi o caso das variáveis  $\mu$  e, principalmente,  $p$  conforme a Figura 4.16f. Para as variáveis  $\lambda$  e  $\nu$  a inclinação foi mais expressiva. O estudo dos perfis das propriedades também expôs a influência do coeficiente de escorregamento em cada uma das regiões analisadas, sendo  $x = 20$  o corte em que ocorre mais variações nos valores das variáveis próximo às quinas.

Já os testes executados no canal com contração com os modelos Oldroyd-B e PTT impuseram certas restrições aos parâmetros adimensionais e malhas utilizadas. Para o modelo Oldroyd-B com  $\beta = \frac{1}{2}$ , por exemplo, não foi possível realizar simulações com valores maiores que  $\bar{k} = 0.5$  e nem com a malha mais refinada M2 no caso da formulação NSF. Apesar disso, o comportamento assintótico das variáveis naturais nos casos com escorregamento manteve-se semelhante ao do caso *no-slip*. O comprimento horizontal dos vórtices diminuiu com o aumento de  $\bar{k}$ . Com o modelo PTT e  $\beta = \frac{1}{9}$  testes com a NSF não foram possíveis nem mesmo para o caso *no-slip* além de, para a CSF com M2, as simulações ficaram limitadas a  $\bar{k} = 0.45$ . Apesar disso, foi possível validar os resultados obtidos com [16] em termos do comprimento dos vórtices para alguns valores de  $\bar{k}$  em M1 e M2. Com o uso da formulação CSF e malha M2, a variação assintótica das propriedades  $T^{xx}$  e  $T^{xy}$ , variando-se  $\bar{k}$ , ficou próxima ao caso  $\bar{k} = 0$  enquanto  $T^{yy}$  a mudança na inclinação é mais drástica. Considerando o fluido PTT e  $\beta = \frac{1}{2}$  simulações com as formulações CSF e NSF foram realizadas em M1 e M2 para até  $\bar{k} = 1$  indicando decréscimo no vórtice com o aumento desse coeficiente para ambas as formulações. Observou-se que o comportamento assintótico das variáveis  $\lambda$  e  $\mu$  com  $\bar{k} = 0.45$  e  $\bar{k} = 1$  permaneceu próximo do solução numérica do caso sem escorregamento. Já a variável  $\nu$ , com o aumento do coeficiente *slip*, afasta-se da previsão teórica do caso  $\bar{k} = 0$ .

Sumarizando os resultados, a formulação NSF se mostrou bastante flexível nas simulações realizadas na expansão possibilitando refinamento de malha e variação de  $\beta$  ao passo que as simulações na contração sofreram algumas limitações. A combinação da NSF com condições de contorno do tipo *slip* ainda não havia sido apresentada na literatura e, assim, este trabalho contribui no sentido de trazer resultados satisfatórios para dois modelos constitutivos frequentemente utilizados em problemas de *benchmark* tradicionais.

O leitor encontra constantemente no texto informações sobre o comportamento assintótico das variáveis do escoamento. Este comportamento é determinado de forma analítica em várias referências consultadas e sempre é considerando o caso de condição de contorno do tipo *no-slip*. Como etapa de estudo seguinte, pretendemos incluir na análise teórica condições de contorno do tipo *slip* de modo a determinar o comportamento assintótico das propriedades do escoamento levando-se em conta esse tipo de condição de contorno.

## Referências

---

- [1] M. N. Azese. On the detection, measurement, and characterization of slip-velocity in couette-rheology involving viscoelastic liquids. *Physics of Fluids*, 31:023101, 2019.
- [2] W. E Boyce and R. C. Diprima. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. Livros Técnicos e Científicos Editora, LTC, S.A., 2002.
- [3] W. R. Dean; P. E. Montagnon. On the steady motion of viscous liquid in a corner. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 45(3):389–394, 1949.
- [4] M. M. Denn. Extrusion instabilities and wall slip. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 33(1):265–287, 2001.
- [5] C. S. Drapaca. Poiseuille flow of a non-local non-newtonian fluid with wall slip: A first step in modeling cerebral microaneurysms. *Fractal and Fractional*, 2(1):9, 2018.
- [6] J. D. Evans. Re-entrant corner flows of oldroyd-b fluids. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 461(2060):2573–2603, 2005.
- [7] J. D. Evans. Re-entrant corner flows of ucm fluids: The natural stress basis. *Journal Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 150(2-3):139–153, 2008.
- [8] J. D. Evans; C. M. Oishi. Transient computations using the natural stress formulation for solving sharp corner flows. *Journal Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 249:48–52, 2017.
- [9] J. D. Evans; D. N. Sibley. Re-entrant corner flows for ptt fluids in the natural stress basis. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 157(1-2):79–91, 2009.
- [10] J. D. Evans; H. L. França; C. M. Oishi. Application of the natural stress formulation for solving unsteady viscoelastic contraction flows. *Journal of Computational Physics*, 388:462–489, 2019.
- [11] J. D. Evans; H. L. França, I. L. Palhares Junior, C. M. Oishi. Testing viscoelastic numerical schemes using the oldroyd-b fluid in newtonian kinematics. *Applied Mathematics and Computation*, 387(125106), 2020.
- [12] J. D. Evans; I. L. Palhares; C. M. Oishi. Stresses of the oldroyd-b, ptt and giesekus fluids in a newtonian velocity field near the stick-slip singularity. *Physics of Fluids*, 29:1–33, 2017.
- [13] C. Fernandes *et al.* Implementation of partial slip boundary conditions in an open-source finite-volume-based computational library. *Journal of Polymer Engineering*, 39(4):377–387, 2019.

- 
- [14] L. L. Ferrás. *Theoretical and numerical studies of slip flows*. PhD thesis, Universidade do Minho, 2012.
- [15] L. L. Ferrás; A. M. Afonso, M. A. Alves, J. M. Nóbrega, F. T. Pinho. Newtonian and viscoelastic fluid flows through an abrupt 1:4 expansion with slip boundary conditions. *Physics of Fluids*, 32:043103, 2020.
- [16] L. L. Ferrás *et al.* Slip flows of newtonian and viscoelastic fluids in a 4:1 contraction. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 214:28–37, 2014.
- [17] L. L. Ferrás *et al.* A numerical and theoretical study on viscoelastic fluid slip flows. *Physics of Fluids*, 29(5):053102, 2017.
- [18] E. J. Hinch. The flow of an oldroyd fluid around a sharp corner. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 50(2):161–171, 1993.
- [19] K. D. Housiadas. Viscoelastic poiseuille flows with total normal stress dependent, nonlinear navier slip at the wall. *Physics of Fluids*, 25(4):043105, 2013.
- [20] G. Karapetsas; E. Mitsoulis. Some experiences with the slip boundary condition in viscous and viscoelastic flows. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 198:96–108, 2013.
- [21] M. M. Khader; S. Mziou. Chebyshev spectral method for studying the viscoelastic slip flow due to a permeable stretching surface embedded in a porous medium with viscous dissipation and non-uniform heat generation. *Boundary Value Problems*, 2017:37, 2017.
- [22] Y. Kwon. Numerical modelling of two-dimensional melt fracture instability in viscoelastic flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 855:595–615, 2018.
- [23] E. Lauga; M. P. Brenner; H. A. Stone. Microfluidics: The no-slip boundary condition. *Arxiv preprint cond-mat/0501557*, 2005.
- [24] C. L. M. H. Navier. Memoire sur les lois du mouvement des fluides. *Mémoires de l'académie royale des sciences de l'institut de france*, 6:389–440, 1822.
- [25] C. Neto. Boundary slip in newtonian liquids: a review of experimental studies. *Reports on Progress in Physics*, 68(12):2859–2897, 2005.
- [26] R. G. Owens; T. N. Phillips. *Computational Rheology*. Imperial College Press, 2005.
- [27] I. L. Palhares Júnior. *Análise numérica de escoamentos viscoelásticos com singularidades*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.
- [28] A. L. Rabenstein. *Introduction to ordinary differential equation*. Academic Press International Edition, 1966.
- [29] M. Renardy. How to integrate the upper convected maxwell (ucm) stresses near a singularity (and maybe elsewhere, too). *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 52(1):91–95, 1994.
- [30] M. Renardy. *Mathematical analysis of viscoelastic flows*. Society for Industrial and Applied Mathematics, SIAM, 2000.

- 
- [31] R. Richardson. On the no-slip boundary condition. *Journal of Fluid Mechanics*, 59(4):707–719, 1973.
- [32] T. Sochi. Slip at fluid-solid interface. *Polymer Reviews*, 51(4):309–340, 2011.
- [33] E. Taliadorou; G. C. Georgiou; A. N. Alexandrou. A two-dimensional numerical study of the stick-slip extrusion instability. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 141(1-3):30–44, 2007.
- [34] M. F. Tomé. *GENSMAC: a multiple free surface fluid flow solver*. PhD thesis, University of Strathclyde, 1993.



## Diferenças finitas para malhas não-uniformes

Neste apêndice são apresentadas as fórmulas de diferenças finitas utilizando uma malha não-uniforme, isto é, uma malha cujos pontos consecutivos distam uma medida que não é constante.

Para isso, são considerados os pontos descritos na Seção 3.2, uma função  $u = u(x)$  e suas derivadas de primeira e segunda ordem, ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (\text{A.1})$$

O interesse é aproximar essas derivadas em pontos  $x_i$  utilizando diferenças centrais. Inicialmente, constrói-se um polinômio interpolador de Lagrange para  $u$  em função de  $x_{i-1}$ ,  $x_i$  e  $x_{i+1}$ . Logo, tem-se o seguinte polinômio de segundo grau

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1})}u_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})}u_i + \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)}u_{i+1} \\ &= \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i-1} + x_{i+1} - x_i)}u_{i-1} - \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)}u_i \\ &\quad + \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i + x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)}u_{i+1} \\ &= \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{\Delta_{x_i}(\Delta_{x_i} + \Delta_{x_{i+1}})}u_{i-1} - \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{\Delta_{x_i}\Delta_{x_{i+1}}}u_i + \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{\Delta_{x_{i+1}}(\Delta_{x_i} + \Delta_{x_{i+1}})}u_{i+1}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Em seguida, deriva-se  $p_2(x)$  e obtém-se

$$p_2'(x) = \frac{2x - x_i - x_{i+1}}{\Delta_{x_i}(\Delta_{x_i} + \Delta_{x_{i+1}})}u_{i-1} - \frac{2x - x_{i-1} - x_{i+1}}{\Delta_{x_i}\Delta_{x_{i+1}}}u_i + \frac{2x - x_i - x_{i-1}}{\Delta_{x_{i+1}}(\Delta_{x_i} + \Delta_{x_{i+1}})}u_{i+1}. \quad (\text{A.3})$$

Agora, derivando  $p_2'(x)$ , encontra-se

$$p_2''(x) = \frac{2}{\Delta_{x_i}(\Delta_{x_i} + \Delta_{x_{i+1}})}u_{i-1} - \frac{2}{\Delta_{x_i}\Delta_{x_{i+1}}}u_i + \frac{2}{\Delta_{x_{i+1}}(\Delta_{x_i} + \Delta_{x_{i+1}})}u_{i+1}. \quad (\text{A.4})$$

Sendo, neste caso,  $x = x_i$ , esse valor é substituído nas derivadas de  $p_2(x)$  e, com algumas manipulações, tem-se

$$p_2'(x_i) = -\frac{\Delta_{x_{i+1}}}{\Delta_{x_i}(\Delta_{x_i} + \Delta_{x_{i+1}})}u_{i-1} - \frac{\Delta_{x_{i+1}} - \Delta_{x_i}}{\Delta_{x_i}\Delta_{x_{i+1}}}u_i + \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta_{x_{i+1}}(\Delta_{x_i} + \Delta_{x_{i+1}})}u_{i+1}, \quad (\text{A.5})$$

bem como

$$p_2''(x_i) = \frac{2}{\Delta_{x_i}(\Delta_{x_i} + \Delta_{x_{i+1}})}u_{i-1} - \frac{2}{\Delta_{x_i}\Delta_{x_{i+1}}}u_i + \frac{2}{\Delta_{x_{i+1}}(\Delta_{x_i} + \Delta_{x_{i+1}})}u_{i+1}. \quad (\text{A.6})$$

Finalmente, as fórmulas de diferenças para as derivadas de primeira e segunda ordem são dadas, respectivamente por

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_i} \approx -\frac{h_2}{h_1(h_1 + h_2)}u_{i-1} + \frac{h_2 - h_1}{h_1 h_2}u_i + \frac{h_1}{h_2(h_1 + h_2)}u_{i+1} \quad (\text{A.7})$$

e

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=x_i} \approx \frac{2}{h_1(h_1 + h_2)}u_{i-1} - \frac{2}{h_1 h_2}u_i + \frac{2}{h_2(h_1 + h_2)}u_{i+1} \quad (\text{A.8})$$

com  $h_1 = x_i - x_{i-1}$  e  $h_2 = x_{i+1} - x_i$ .

De maneira análoga, ao discretizar a equação de quantidade de movimento na direção  $y$ , as aproximações das derivadas de uma função  $v = v(y)$  em pontos  $y_j$  são dadas por

$$\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{y=y_j} \approx -\frac{h_2}{h_1(h_1 + h_2)}v_{j-1} + \frac{h_2 - h_1}{h_1 h_2}v_j + \frac{h_1}{h_2(h_1 + h_2)}v_{j+1} \quad (\text{A.9})$$

e

$$\left. \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right|_{y=y_j} \approx \frac{2}{h_1(h_1 + h_2)}v_{j-1} - \frac{2}{h_1 h_2}v_j + \frac{2}{h_2(h_1 + h_2)}v_{j+1} \quad (\text{A.10})$$

em que  $h_1 = y_j - y_{j-1}$  e  $h_2 = y_{j+1} - y_j$ .

As fórmulas de diferenças obtidas até aqui são utilizadas também para discretizar termos convectivos, pressão, tensores e o campo escalar  $\psi$ , bastando atentar-se em que direção se encontra a equação onde estes termos estão presentes e adequar as fórmulas.

## Discretização espacial das equações de quantidade de movimento e constitutiva

Aqui é apresentada a discretização das equações utilizadas neste trabalho. A discretização é feita utilizando o método de diferenças finitas em uma malha não-uniforme e, portanto, as fórmulas de diferenças adotadas são as obtidas no Apêndice A.

### B.1 Equação de quantidade de movimento - direção $x$

A equação (3.15), escrita em relação a direção  $x$ , é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{u}^{n+1} - u^n}{\Delta_t} + \frac{\partial(u^n u^n)}{\partial x} + \frac{\partial(u^n v^n)}{\partial y} = -\frac{\partial p^n}{\partial x} + \frac{\beta}{Re} \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}^{n+1}}{\partial y^2} \right) \\ + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial T^{xx, n}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy, n}}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

e aplicada a um ponto  $P_{i-\frac{1}{2}, j}$  torna-se

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{u}_{i-\frac{1}{2}, j}^{n+1} - u_{i-\frac{1}{2}, j}^n}{\Delta_t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} \Big|_{i-\frac{1}{2}, j}^n + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \Big|_{i-\frac{1}{2}, j}^n = -\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{i-\frac{1}{2}, j}^n + \frac{\beta}{Re} \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} \Big|_{i-\frac{1}{2}, j}^{n+1} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \Big|_{i-\frac{1}{2}, j}^{n+1} \right) \\ + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} \Big|_{i-\frac{1}{2}, j}^n + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y} \Big|_{i-\frac{1}{2}, j}^n \right). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

A seguir são explicitadas as discretizações de cada derivada presente em (B.2) e, para isso, utiliza-se fórmulas de diferenças finitas seguindo a ordem de ocorrência na equação. Com fórmulas centrais, os termos convectivos são aproximados por

$$\frac{\partial(u^2)}{\partial x} \Big|_{i-\frac{1}{2}, j}^n \approx -\frac{h_2}{h_1(h_1 + h_2)} (u_{i-1, j}^n)^2 + \frac{h_2 - h_1}{h_1 h_2} (u_{i-\frac{1}{2}, j}^n)^2 + \frac{h_1}{h_2(h_1 + h_2)} (u_{i, j}^n)^2, \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial(uv)}{\partial y} \Big|_{i-\frac{1}{2}, j}^n \approx \frac{u_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^n v_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^n - u_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^n v_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta_{y_j}}, \quad (\text{B.4})$$

onde  $h_1 = \frac{1}{2}\Delta_{x_{i-1}}$  e  $h_2 = \frac{1}{2}\Delta_{x_i}$ . O método CUBISTA (Convergent and Universally Bounded Interpolation Scheme for the Treatment of Advection) é empregado para aproximar as variáveis  $u$  e  $v$  dessas equações em pontos onde não estão definidas.

Em seguida, discretiza-se as derivadas de segunda ordem em relação a  $x$  e a  $y$ :

$$\left. \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} \right|_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} \approx \frac{2}{h_1(h_1+h_2)} \tilde{u}_{i-\frac{3}{2},j}^{n+1} - \frac{2}{h_1 h_2} \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} + \frac{2}{h_2(h_1+h_2)} \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}, \quad (\text{B.5})$$

com  $h_1 = \Delta_{x_{i-1}}$  e  $h_2 = \Delta_{x_i}$ .

$$\left. \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right|_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} \approx \frac{2}{h_1(h_1+h_2)} \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j-1}^{n+1} - \frac{2}{h_1 h_2} \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} + \frac{2}{h_2(h_1+h_2)} \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j+1}^{n+1}, \quad (\text{B.6})$$

em que  $h_1 = \frac{1}{2}(\Delta_{y_{j-1}} + \Delta_{y_j})$  e  $h_2 = \frac{1}{2}(\Delta_{y_j} + \Delta_{y_{j+1}})$ .

A derivada da pressão

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{i-\frac{1}{2},j}^n \approx -\frac{h_2}{h_1(h_1+h_2)} p_{i-1,j}^n + \frac{h_2-h_1}{h_1 h_2} p_{i-\frac{1}{2},j}^n + \frac{h_1}{h_2(h_1+h_2)} p_{i,j}^n, \quad (\text{B.7})$$

onde  $h_1 = \frac{1}{2}\Delta_{x_{i-1}}$  e  $h_2 = \frac{1}{2}\Delta_{x_i}$ .

E, finalmente, as derivadas do tensor polimérico  $\mathbf{T}$

$$\left. \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} \right|_{i-\frac{1}{2},j}^n \approx -\frac{h_2}{h_1(h_1+h_2)} T_{i-1,j}^{xx,n} + \frac{h_2-h_1}{h_1 h_2} T_{i-\frac{1}{2},j}^{xx,n} + \frac{h_1}{h_2(h_1+h_2)} T_{i,j}^{xx,n}, \quad (\text{B.8})$$

onde  $h_1 = \frac{1}{2}\Delta_{x_{i-1}}$  e  $h_2 = \frac{1}{2}\Delta_{x_i}$ .

$$\left. \frac{\partial T^{xy}}{\partial y} \right|_{i-\frac{1}{2},j}^n \approx -\frac{h_2}{h_1(h_1+h_2)} T_{i-\frac{1}{2},j-1}^{xy,n} + \frac{h_2-h_1}{h_1 h_2} T_{i-\frac{1}{2},j}^{xy,n} + \frac{h_1}{h_2(h_1+h_2)} T_{i-\frac{1}{2},j+1}^{xy,n}, \quad (\text{B.9})$$

com  $h_1 = \frac{1}{2}(\Delta_{y_{j-1}} + \Delta_{y_j})$  e  $h_2 = \frac{1}{2}(\Delta_{y_j} + \Delta_{y_{j+1}})$ .

Assim, as aproximações acima são todas substituídas na equação (B.2) e, percorrendo os índices  $i$  e  $j$  do domínio, obtém-se um sistema linear a ser resolvido.

## B.2 Equação de quantidade de movimento - direção $y$

Assim como feito para a equação de movimento na direção  $x$ , discretiza-se, agora, a equação na direção  $y$  inicialmente escrevendo a equação (3.15) em termos da componente  $v$  da velocidade,

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{v}^{n+1} - v^n}{\Delta_t} + \frac{\partial(u^n v^n)}{\partial x} + \frac{\partial(v^n v^n)}{\partial y} = & -\frac{\partial p^n}{\partial y} + \frac{\beta}{Re} \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}^{n+1}}{\partial y^2} \right) \\ & + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial T^{xy,n}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy,n}}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Aplicando esta equação no ponto  $P_{i,j-\frac{1}{2}}$ , tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{v}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} \Big|_{i,j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\partial(vv)}{\partial y} \Big|_{i,j-\frac{1}{2}}^n = & - \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{i,j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\beta}{Re} \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} \Big|_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} \Big|_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} \right) \\ & + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} \Big|_{i,j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y} \Big|_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right). \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

As fórmulas de diferenças finitas utilizadas para aproximar as derivadas de (B.11) são as mesmas utilizadas na subseção anterior bem como o método utilizado para aproximar os termos convectivos. As derivadas são, então, aproximadas pelas fórmulas abaixo

$$\frac{\partial(v^2)}{\partial y} \Big|_{i,j-\frac{1}{2}}^n \approx - \frac{h_2}{h_1(h_1 + h_2)} (v_{i,j-1}^n)^2 + \frac{h_2 - h_1}{h_1 h_2} (v_{i,j-\frac{1}{2}}^n)^2 + \frac{h_1}{h_2(h_1 + h_2)} (v_{i,j}^n)^2, \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x} \Big|_{i,j-\frac{1}{2}}^n \approx \frac{u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n v_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n - u_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n v_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x_i}, \quad (\text{B.13})$$

onde  $h_1 = \frac{1}{2}\Delta_{y_{j-1}}$  e  $h_2 = \frac{1}{2}\Delta_{y_j}$ .

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} \Big|_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} \approx \frac{2}{h_1(h_1 + h_2)} \tilde{v}_{i-1,j-\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{2}{h_1 h_2} \tilde{v}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} + \frac{2}{h_2(h_1 + h_2)} \tilde{v}_{i+1,j-\frac{1}{2}}^{n+1}, \quad (\text{B.14})$$

onde  $h_1 = \frac{1}{2}(\Delta_{x_{i-1}} + \Delta_{x_i})$  e  $h_2 = \frac{1}{2}(\Delta_{x_i} + \Delta_{x_{i+1}})$ .

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} \Big|_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} \approx \frac{2}{h_1(h_1 + h_2)} \tilde{v}_{i,j-\frac{3}{2}}^{n+1} - \frac{2}{h_1 h_2} \tilde{v}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} + \frac{2}{h_2(h_1 + h_2)} \tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}, \quad (\text{B.15})$$

com  $h_1 = \Delta_{y_{j-1}}$  e  $h_2 = \Delta_{y_j}$ .

$$\frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{i,j-\frac{1}{2}}^n \approx - \frac{h_2}{h_1(h_1 + h_2)} p_{i,j-1}^n + \frac{h_2 - h_1}{h_1 h_2} p_{i,j-\frac{1}{2}}^n + \frac{h_1}{h_2(h_1 + h_2)} p_{i,j}^n, \quad (\text{B.16})$$

em que  $h_1 = \Delta_{y_{j-1}}$  e  $h_2 = \Delta_{y_j}$ .

$$\frac{\partial T^{xy}}{\partial x} \Big|_{i,j-\frac{1}{2}}^n \approx - \frac{h_2}{h_1(h_1 + h_2)} T_{i-1,j-\frac{1}{2}}^{xy,n} + \frac{h_2 - h_1}{h_1 h_2} T_{i,j-\frac{1}{2}}^{xy,n} + \frac{h_1}{h_2(h_1 + h_2)} T_{i+1,j-\frac{1}{2}}^{xy,n}, \quad (\text{B.17})$$

onde  $h_1 = \frac{1}{2}(\Delta_{x_{i-1}} + \Delta_{x_i})$  e  $h_2 = \frac{1}{2}(\Delta_{x_i} + \Delta_{x_{i+1}})$ .

$$\frac{\partial T^{yy}}{\partial y} \Big|_{i,j-\frac{1}{2}}^n \approx - \frac{h_2}{h_1(h_1 + h_2)} T_{i,j-1}^{yy,n} + \frac{h_2 - h_1}{h_1 h_2} T_{i,j-\frac{1}{2}}^{yy,n} + \frac{h_1}{h_2(h_1 + h_2)} T_{i,j}^{yy,n}, \quad (\text{B.18})$$

com  $h_1 = \frac{1}{2}\Delta_{y_{j-1}}$  e  $h_2 = \frac{1}{2}\Delta_{y_j}$ .

Finalmente, as derivadas de (B.11) são substituídas pelas fórmulas de diferenças acima e um novo sistema linear é obtido.

### B.3 Equação de Poisson

Através das etapas descritas em B.1 e B.2 são obtidos os valores de  $\tilde{u}^{n+1}$  e  $\tilde{v}^{n+1}$ , respectivamente. Agora, estes valores serão utilizados para resolver a equação de Poisson (3.4) aplicada a um ponto  $P_{i,j}$  e dada por

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big|_{i,j}^{n+1} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{i,j}^{n+1} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \Big|_{i,j}^{n+1} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \Big|_{i,j}^{n+1}, \quad (\text{B.19})$$

cujas derivadas são aproximadas por

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big|_{i,j}^{n+1} \approx \frac{2}{h_1(h_1 + h_2)} \psi_{i-1,j}^{n+1} - \frac{2}{h_1 h_2} \psi_{i,j}^{n+1} + \frac{2}{h_2(h_1 + h_2)} \psi_{i+1,j}^{n+1}, \quad (\text{B.20})$$

em que  $h_1 = \frac{1}{2}(\Delta_{x_{i-1}} + \Delta_{x_i})$  e  $h_2 = \frac{1}{2}(\Delta_{x_i} + \Delta_{x_{i+1}})$ .

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{i,j}^{n+1} \approx \frac{2}{h_1(h_1 + h_2)} \psi_{i,j-1}^{n+1} - \frac{2}{h_1 h_2} \psi_{i,j}^{n+1} + \frac{2}{h_2(h_1 + h_2)} \psi_{i,j+1}^{n+1} \quad (\text{B.21})$$

com  $h_1 = \frac{1}{2}(\Delta_{y_{j-1}} + \Delta_{y_j})$  e  $h_2 = \frac{1}{2}(\Delta_{y_j} + \Delta_{y_{j+1}})$ .

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \Big|_{i,j}^{n+1} = \frac{\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}}{\Delta_{x_i}}, \quad (\text{B.22})$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \Big|_{i,j}^{n+1} = \frac{\tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \tilde{v}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta_{y_j}}. \quad (\text{B.23})$$

Novamente obtém-se um sistema linear cuja solução  $\psi^{n+1}$  é utilizada na próxima etapa.

### B.4 Equações de atualização da velocidade

O próximo passo do método da projeção é atualizar a velocidade utilizando os valores  $\tilde{u}^{n+1}$ ,  $\tilde{v}^{n+1}$  e  $\psi^{n+1}$  na equação (3.1) que, escrita em coordenadas cartesianas bidimensionais, produz as seguintes equações aplicadas, respectivamente, em  $P_{i-\frac{1}{2}}$ , e  $P_{i,j-\frac{1}{2}}$ :

$$u_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} = \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}, \quad (\text{B.24})$$

$$v_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} = \tilde{v}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}. \quad (\text{B.25})$$

As derivadas dessas equações são aproximadas pelas fórmulas de diferenças abaixo

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{i-\frac{1}{2},j}^n \approx -\frac{h_2}{h_1(h_1 + h_2)} \psi_{i-1,j}^n + \frac{h_2 - h_1}{h_1 h_2} \psi_{i-\frac{1}{2},j}^n + \frac{h_1}{h_2(h_1 + h_2)} \psi_{i,j}^n, \quad (\text{B.26})$$

com  $h_1 = \frac{1}{2}\Delta_{x_{i-1}}$  e  $h_2 = \frac{1}{2}\Delta_{x_i}$ .

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{i,j-\frac{1}{2}}^n \approx -\frac{h_2}{h_1(h_1 + h_2)} \psi_{i,j-1}^n + \frac{h_2 - h_1}{h_1 h_2} \psi_{i,j-\frac{1}{2}}^n + \frac{h_1}{h_2(h_1 + h_2)} \psi_{i,j}^n, \quad (\text{B.27})$$

com  $h_1 = \frac{1}{2}\Delta_{y_{j-1}}$  e  $h_2 = \frac{1}{2}\Delta_{y_j}$ .

## B.5 Equações constitutivas

Duas formulações para o tensor polimérico e dois modelos constitutivos são utilizados neste trabalho: as formulações CSF e NSF e os modelos Oldroyd-B e PTT, respectivamente. O único termo que distingue os modelos viscoelásticos não envolve derivadas em sua expressão, independentemente da formulação adotada. Portanto, as fórmulas de diferenças apresentadas em B.5.1 são utilizadas em ambos os modelos e as apresentadas em B.5.2 também se aplicam aos modelos Oldroyd-B e PTT.

### B.5.1 Formulação Cartesiana - CSF

Nesta seção, a fim de simplificar a notação, adota-se a notação genérica  $T$  para as componentes do tensor, isto é,  $T^{xx}$ ,  $T^{xy}$  e  $T^{yy}$ . Como comentado acima, as aproximações de derivadas serão utilizadas nos modelos Oldroyd-B e PTT, cujas equações de atualização são, respectivamente, (3.20)-(3.22) e (3.23)-(3.25). Assim, tais derivadas serão substituídas pelas seguintes fórmulas de diferenças

$$\left. \frac{\partial(uT)}{\partial x} \right|_{i,j}^n \approx \frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} T_{i+\frac{1}{2},j}^n - u_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} T_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta x_i}, \quad (\text{B.28})$$

$$\left. \frac{\partial(vT)}{\partial y} \right|_{i,j}^n \approx \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} T_{i,j+\frac{1}{2}}^n - v_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} T_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta y_j}, \quad (\text{B.29})$$

Nas equações acima, em que  $T$  está em pontos onde o tensor não está definido, o método CUBISTA é utilizado para aproximá-los.

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j}^{n+1} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - u_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}}{\Delta x_i}, \quad (\text{B.30})$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{i,j}^{n+1} = \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta y_j}, \quad (\text{B.31})$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{i,j}^{n+1} \approx -\frac{h_2}{h_1(h_1 + h_2)} v_{i-1,j}^{n+1} + \frac{h_2 - h_1}{h_1 h_2} v_{i,j}^{n+1} + \frac{h_1}{h_2(h_1 + h_2)} v_{i+1,j}^{n+1}, \quad (\text{B.32})$$

com  $h_1 = \frac{1}{2}(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)$  e  $h_2 = \frac{1}{2}(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})$ .

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j}^{n+1} \approx -\frac{h_2}{h_1(h_1 + h_2)} u_{i,j-1}^{n+1} + \frac{h_2 - h_1}{h_1 h_2} u_{i,j}^{n+1} + \frac{h_1}{h_2(h_1 + h_2)} u_{i,j+1}^{n+1}, \quad (\text{B.33})$$

com  $h_1 = \frac{1}{2}(\Delta y_{j-1} + \Delta y_j)$  e  $h_2 = \frac{1}{2}(\Delta y_j + \Delta y_{j+1})$ .

Em (B.32) é utilizada interpolação linear de incógnitas nos níveis  $j - \frac{1}{2}$  e  $j + \frac{1}{2}$  para substituir as incógnitas  $v_{i-1,j}^{n+1}$ ,  $v_{i,j}^{n+1}$  e  $v_{i+1,j}^{n+1}$ . E em (B.33) as incógnitas  $u_{i,j-1}^{n+1}$ ,  $u_{i,j}^{n+1}$  e  $u_{i,j+1}^{n+1}$  também são substituídas por interpolação linear, porém com incógnitas dos níveis  $i - \frac{1}{2}$  e  $i + \frac{1}{2}$ .

### B.5.2 Formulação tensão natural - NSF

Ao utilizar a formulação NSF, as derivadas existentes nas equações (3.30)-(3.32) e (3.36)-(3.38) são discretizadas da mesma maneira que as derivadas da formulação CSF. É importante notar que as derivadas temporais são discretizadas de outra forma, apresentada abaixo

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{i,j}^{n+1} = \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} + u_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} - u_{i+\frac{1}{2},j}^n - u_{i-\frac{1}{2},j}^n}{2\Delta t}, \quad (\text{B.34})$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{i,j}^{n+1} = \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} + v_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{i,j+\frac{1}{2}}^n - v_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{2\Delta t}, \quad (\text{B.35})$$

e que, agora, a nova variável genérica,  $\phi$ , representa as variáveis naturais  $\lambda$ ,  $\mu$  e  $\nu$ :

$$\left. \frac{\partial(u\phi)}{\partial x} \right|_{i,j}^n \approx \frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}\phi_{i+\frac{1}{2},j}^n - u_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}\phi_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta x_i}, \quad (\text{B.36})$$

$$\left. \frac{\partial(v\phi)}{\partial y} \right|_{i,j}^n \approx \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}\phi_{i,j+\frac{1}{2}}^n - v_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}\phi_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta y_j}. \quad (\text{B.37})$$

## Equações de movimento em termos das variáveis naturais - detalhes

O objetivo deste apêndice é apenas detalhar os cálculos para a obtenção das equações de quantidade de movimento que envolvam somente as variáveis naturais. Uma intenção futura é implementar uma versão NSF “pura” do código. Assim, partimos da equação

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}^\top) = -\nabla p + \frac{\beta}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1-\beta}{ReWi} \nabla \cdot (\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{I}), \quad (\text{C.1})$$

em que

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{\hat{\lambda}}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u}\mathbf{u}^\top + \hat{\mu}(\mathbf{u}\mathbf{w}^\top + \mathbf{w}\mathbf{u}^\top) + \hat{\nu}|\mathbf{u}|^2 \mathbf{w}\mathbf{w}^\top. \quad (\text{C.2})$$

Observe que será necessário calcular o divergente de  $\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{I}$ , ou seja,

$$\nabla \cdot (\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{I}) = \nabla \cdot \left[ \frac{\hat{\lambda}}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u}\mathbf{u}^\top + \hat{\mu}(\mathbf{u}\mathbf{w}^\top + \mathbf{w}\mathbf{u}^\top) + \hat{\nu}|\mathbf{u}|^2 \mathbf{w}\mathbf{w}^\top - \mathbf{I} \right]. \quad (\text{C.3})$$

Como vale a propriedade distributiva para o divergente, para manter a organização dos cálculos são explicitados separadamente cada termo entre colchetes de (C.3). Assim, temos:

$$\nabla \cdot \left( \frac{\hat{\lambda}}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u}\mathbf{u}^\top \right) = \frac{\hat{\lambda}}{|\mathbf{u}|^2} [\mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}], \quad (\text{C.4})$$

$$\nabla \cdot [\hat{\mu}(\mathbf{u}\mathbf{w}^\top + \mathbf{w}\mathbf{u}^\top)] = \hat{\mu} [\mathbf{w}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{w} + \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{w}) + (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{u}], \quad (\text{C.5})$$

$$\nabla \cdot [\hat{\nu}|\mathbf{u}|^2 \mathbf{w}\mathbf{w}^\top] = \hat{\nu}|\mathbf{u}|^2 [\mathbf{w}(\nabla \cdot \mathbf{w}) + (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{w}]. \quad (\text{C.6})$$

Usando a condição de incompressibilidade e reorganizando os termos, tem-se então que

$$\nabla \cdot (\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{I}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \left[ \frac{\hat{\lambda}}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u} + \hat{\mu}\mathbf{w} \right] + (\mathbf{w} \cdot \nabla) (\hat{\mu}\mathbf{u} + \hat{\nu}|\mathbf{u}|^2 \mathbf{w}) + (\hat{\mu}\mathbf{u} + \hat{\nu}|\mathbf{u}|^2 \mathbf{w}) (\nabla \cdot \mathbf{w}). \quad (\text{C.7})$$

Logo, substituindo o termo acima em C.1, a nova equação de quantidade de movimento é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}^T) = -\nabla p + \frac{\beta}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1-\beta}{ReWi} \left\{ (\mathbf{u} \cdot \nabla) \left[ \frac{\hat{\lambda}}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u} + \hat{\mu} \mathbf{w} \right] \right. \\ \left. + (\mathbf{w} \cdot \nabla) (\hat{\mu} \mathbf{u} + \hat{\nu} |\mathbf{u}|^2 \mathbf{w}) + (\hat{\mu} \mathbf{u} + \hat{\nu} |\mathbf{u}|^2 \mathbf{w}) (\nabla \cdot \mathbf{w}) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Agora, escreve-se os novos termos de (C.8) em coordenadas cartesianas bidimensionais e, em seguida, a nova equação de movimento. Os novos termos reescritos são

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \left[ \frac{\hat{\lambda}}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u} + \hat{\mu} \mathbf{w} \right] &= \frac{1}{|\mathbf{u}|^2} \left( u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \begin{pmatrix} u\hat{\lambda} - v\hat{\mu} \\ v\hat{\lambda} + u\hat{\mu} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{|\mathbf{u}|^2} \begin{pmatrix} u \frac{\partial(u\hat{\lambda})}{\partial x} - u \frac{\partial(v\hat{\mu})}{\partial x} + v \frac{\partial(u\hat{\lambda})}{\partial y} - v \frac{\partial(v\hat{\mu})}{\partial y} \\ u \frac{\partial(v\hat{\lambda})}{\partial x} + u \frac{\partial(u\hat{\mu})}{\partial x} + v \frac{\partial(v\hat{\lambda})}{\partial y} + v \frac{\partial(u\hat{\mu})}{\partial y} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{w} \cdot \nabla) (\hat{\mu} \mathbf{u} + \hat{\nu} |\mathbf{u}|^2 \mathbf{w}) &= \frac{1}{|\mathbf{u}|^2} \left( -v \frac{\partial}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial y} \right) \begin{pmatrix} u\hat{\mu} - v\hat{\nu} \\ v\hat{\mu} + u\hat{\nu} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{|\mathbf{u}|^2} \begin{pmatrix} -v \frac{\partial(u\hat{\mu})}{\partial x} + v \frac{\partial(v\hat{\nu})}{\partial x} + u \frac{\partial(u\hat{\mu})}{\partial y} - u \frac{\partial(v\hat{\nu})}{\partial y} \\ -v \frac{\partial(v\hat{\mu})}{\partial x} - v \frac{\partial(u\hat{\nu})}{\partial x} + u \frac{\partial(v\hat{\mu})}{\partial y} + u \frac{\partial(u\hat{\nu})}{\partial y} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

$$\begin{aligned} (\hat{\mu} \mathbf{u} + \hat{\nu} |\mathbf{u}|^2 \mathbf{w}) (\nabla \cdot \mathbf{w}) &= \frac{1}{|\mathbf{u}|^2} \begin{pmatrix} u\hat{\mu} - v\hat{\nu} \\ v\hat{\mu} + u\hat{\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{|\mathbf{u}|^2} \begin{pmatrix} (u\hat{\mu} - v\hat{\nu}) \left( -\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ (v\hat{\mu} + u\hat{\nu}) \left( -\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Finalmente, as equações de quantidade de movimento nas direções  $x$  e  $y$  são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\beta}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1-\beta}{ReWi|\mathbf{u}|^2} \left\{ u \left[ \frac{\partial(u\hat{\lambda})}{\partial x} - \frac{\partial(v\hat{\mu})}{\partial x} \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{\partial(u\hat{\mu})}{\partial y} - \frac{\partial(v\hat{\nu})}{\partial y} \right] - v \left[ \frac{\partial(u\hat{\mu})}{\partial x} - \frac{\partial(v\hat{\nu})}{\partial x} - \frac{\partial(u\hat{\lambda})}{\partial y} + \frac{\partial(v\hat{\mu})}{\partial y} \right] + (u\hat{\mu} - v\hat{\nu}) \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\beta}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{1-\beta}{ReWi|\mathbf{u}|^2} \left\{ -v \left[ \frac{\partial(v\hat{\mu})}{\partial x} + \frac{\partial(u\hat{\nu})}{\partial x} \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{\partial(v\hat{\lambda})}{\partial y} - \frac{\partial(v\hat{\nu})}{\partial y} \right] + u \left[ \frac{\partial(v\hat{\lambda})}{\partial x} + \frac{\partial(u\hat{\mu})}{\partial x} + \frac{\partial(v\hat{\mu})}{\partial y} + \frac{\partial(u\hat{\nu})}{\partial y} \right] + (v\hat{\mu} - u\hat{\nu}) \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

## Leis de escorregamento em termos das variáveis naturais

A reescrita das leis Navier linear e Navier não-linear em termos das variáveis da formulação NSF é bastante simples. Tomando as equações (2.70) e (2.71) e também (2.72) e (2.73), basta substituir o termo  $T^{xy}$  por (2.44) nessas equações e, assim, tem-se

- Navier linear ( $m = 1$ ):

$$\mathbf{u}_{parede} = \mp k \left[ \beta \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1 - \beta}{Wi|\mathbf{u}|^2} \left( \hat{\lambda}uv + \hat{\mu}(u^2 - v^2) - \hat{\nu}uv \right), 0 \right]_{parede}, \quad (D.1)$$

$$\mathbf{u}_{parede} = \mp k \left[ 0, \beta \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1 - \beta}{Wi|\mathbf{u}|^2} \left( \hat{\lambda}uv + \hat{\mu}(u^2 - v^2) - \hat{\nu}uv \right) \right]_{parede}. \quad (D.2)$$

- Navier não-linear:

$$\mathbf{u}_{parede} = \mp k \left[ \left( \beta \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1 - \beta}{Wi|\mathbf{u}|^2} \left( \hat{\lambda}uv + \hat{\mu}(u^2 - v^2) - \hat{\nu}uv \right) \right)^m, 0 \right]_{parede}, \quad (D.3)$$

$$\mathbf{u}_{parede} = \mp k \left[ 0, \left( \beta \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1 - \beta}{Wi|\mathbf{u}|^2} \left( \hat{\lambda}uv + \hat{\mu}(u^2 - v^2) - \hat{\nu}uv \right) \right)^m \right]_{parede}. \quad (D.4)$$



## Análise assintótica da contração: solução Newtoniana

Para a construção da solução Newtoniana adimensionaliza-se a equação (2.1) com (2.8) mas mudando o termo da pressão para  $p = \frac{\eta_0 U}{L} \bar{p}$  e obtém-se a equação de quantidade de movimento

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}^\top) = -\frac{1}{Re} \nabla p + \frac{\beta}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (\text{E.1})$$

Além disso, é considerado um escoamento bidimensional estacionário com baixo número de Reynolds ( $Re \ll 1$ ) e, assim, os termos viscosos e o gradiente de pressão dominam sobre os termos convectivos. Aplicando essas simplificações a equação acima, obtém-se a equação de Stokes

$$0 = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (\text{E.2})$$

Aplicando nesta equação o operador rotacional, tem-se

$$0 = -\nabla \times (\nabla p) + \nabla \times (\nabla^2 \mathbf{u}), \quad (\text{E.3})$$

em que

$$\nabla \times (\nabla^2 \mathbf{u}) = -\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2}, \quad (\text{E.4})$$

$$\nabla \times (\nabla p) = \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} = 0. \quad (\text{E.5})$$

Substituindo (E.4) e (E.5) em (E.2), temos

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} = 0. \quad (\text{E.6})$$

Escrevendo as componentes do vetor velocidade em termos da função corrente  $\psi$

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \end{cases} \quad (\text{E.7})$$

e substituindo-as em (E.6), obtemos

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = 0, \quad (\text{E.8})$$

que, em coordenadas polares, é dada por

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial r^4} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4 \psi}{\partial r^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 \psi}{\partial \theta^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \theta^2 \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad (\text{E.9})$$

que é o operador biharmônico aplicado em  $\psi$ , ou seja,

$$\nabla^4 \psi = 0. \quad (\text{E.10})$$

Com o método de separação de variáveis, a solução de (E.10) é da forma

$$\psi(r, \theta) = p(r)q(\theta). \quad (\text{E.11})$$

O interesse inicial é obter uma expressão para  $p(r)$ . Para isso substituímos (E.11) em (E.9) e obtém-se

$$p(r)q^{IV}(\theta) + 2P_1(r)q''(\theta) + P_2(r)q(\theta) = 0, \quad (\text{E.12})$$

com

$$\begin{cases} P_1(r) = r^2 p''(r) - r p'(r) + 2p(r), \\ P_2(r) = r^4 p^{IV}(r) + 2r^3 p'''(r) - r^2 p''(r) + r p'(r). \end{cases} \quad (\text{E.13})$$

Dividindo (E.13) por  $p(r)$ , derivando em relação a  $r$  e com manipulação algébrica, tem-se

$$2 \frac{\left[ \frac{P_2(r)}{p(r)} \right]'}{\left[ \frac{P_1(r)}{p(r)} \right]'} = - \frac{q''(\theta)}{q(\theta)}, \quad (\text{E.14})$$

que é válida somente se cada membro for uma constante, seja  $c$  essa constante, ou seja,

$$2 \left[ \frac{P_2(r)}{p(r)} \right]' = c \left[ \frac{P_1(r)}{p(r)} \right]', \quad (\text{E.15})$$

e

$$q''(\theta) = -cq(\theta). \quad (\text{E.16})$$

Derivando duas vezes (E.16) temos

$$q^{IV}(\theta) = -cq''(\theta) = -c(-cq(\theta)) = c^2 q(\theta). \quad (\text{E.17})$$

Assim, substituindo (E.16) e (E.17) em (E.12), obtém-se a expressão

$$p(r)c^2 q(\theta) - 2cP_1(r)q(\theta) + P_2(r)q(\theta) = 0, \quad (\text{E.18})$$

que, com  $P_1(r)$  e  $P_2(r)$  de (E.13) e dividida por  $q(\theta)$ , torna-se

$$r^4 p^{IV}(r) + 2r^3 p'''(r) + (-2c - 1)r^2 p''(r) + (2c + 1)r p'(r) + (c^2 - 4c)p(r) = 0. \quad (\text{E.19})$$

A equação acima é do tipo Cauchy [28] e tem por solução base uma expressão da forma

$$p(r) = r^n q(\theta). \quad (\text{E.20})$$

Desta forma, a função corrente  $\psi$  é escrita como

$$\psi(r, \theta) = r^n q(\theta). \quad (\text{E.21})$$

Substituindo (E.21) em (E.9), tem-se

$$(n^4 - rn^3 + 4n^2)q + (2n^2 - 4n + 4) \frac{d^2 q}{d\theta^2} + \frac{d^4 q}{d\theta^4} = 0, \quad (\text{E.22})$$

ou, conforme [30]

$$\left( (n-2)^2 + \frac{d^2}{d\theta^2} \right) \left( n^2 + \frac{d^2}{d\theta^2} \right) q = 0. \quad (\text{E.23})$$

Tomando  $q(\theta) = e^{t\theta}$  em (E.23), encontra-se a equação característica

$$((n-2)^2 + t^2)(n^2 + t^2) = 0, \quad (\text{E.24})$$

que tem como raízes complexas conjugadas:  $(n-2)i$ ,  $-(n-2)i$ ,  $ni$  e  $-ni$ . Assim, a solução geral de  $q(\theta)$  é dada pela combinação linear das partes reais de  $e^{(n-2)i}$  e  $e^{ni}$  [2]

$$q(\theta) = A_0 \cos(n\theta) + B_0 \sin(n\theta) + C_0 \cos((n-2)\theta) + D_0 \sin((n-2)\theta), \quad (\text{E.25})$$

com  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$  e  $D_0$  constantes reais.

Considerando, por simplicidade,

$$\psi(r, \theta) = r^{n+1} q(\theta), \quad (\text{E.26})$$

podemos também escrever, como [3],

$$q(\theta) = A_0 \cos((n+1)\theta) + B_0 \sin((n+1)\theta) + C_0 \cos((n-1)\theta) + D_0 \sin((n-1)\theta). \quad (\text{E.27})$$

Agora, por meio das condições de contorno para  $\mathbf{u}$ , constrói-se condições de contorno para  $q(\theta)$  utilizando (E.7) e também a forma polar do vetor velocidade  $\mathbf{u}$

$$\begin{cases} u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \\ u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \end{cases} \quad (\text{E.28})$$

Levando em conta duas condições de contorno para a velocidade: condição *no-slip* e impermeabilidade em ambas as paredes tem-se, então

- em  $\theta = 0$ :

*no-slip*:

$$0 = u = \frac{\partial \psi}{\partial y}. \text{ Logo, } \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0.$$

$$0 = u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0. \text{ Logo, } \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0.$$

impermeabilidade:

$$0 = v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \text{ Logo, } \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0.$$

$$0 = u_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r}. \text{ Logo, } \frac{\partial\psi}{\partial r} = 0.$$

- em  $\theta = \frac{3}{2}\pi$ :

*no-slip*:

$$0 = v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \text{ Logo, } \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0.$$

$$0 = u_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r}. \text{ Logo, } \frac{\partial\psi}{\partial r} = 0.$$

*impermeabilidade*:

$$0 = u = \frac{\partial\psi}{\partial y}. \text{ Logo, } \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0.$$

$$0 = u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = 0. \text{ Logo, } \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = 0.$$

Portanto,  $\psi$  é constante em  $\theta = 0$  e em  $\theta = \frac{3}{2}\pi$  e, é tomado, por conveniência,  $\psi = 0$ . Assim, as condições de contorno para  $q(\theta)$  são:

(a) em  $\theta = 0$ :  $0 = \psi(r, 0) = r^{n+1}q(0) \Rightarrow q(0) = 0$ ,

(b) em  $\theta = \frac{3}{2}\pi$ :  $0 = \psi(r, \frac{3}{2}\pi) = r^{n+1}q(\frac{3}{2}\pi) \Rightarrow q(\frac{3}{2}\pi) = 0$ ,

(c) em  $\theta = 0$ :  $0 = \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = r^{n+1}q'(0) \Rightarrow q'(0) = 0$ ,

(d) em  $\theta = \frac{3}{2}\pi$ :  $0 = \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = r^{n+1}q'(\frac{3}{2}\pi) \Rightarrow q'(\frac{3}{2}\pi) = 0$ ,

ou de forma reduzida,  $q(0) = q'(0) = q(\frac{3}{2}\pi) = q'(\frac{3}{2}\pi) = 0$ .

Aplicando as condições (a) e (c) em (E.27), obtém-se as expressões

$$A_0 + C_0 = 0, \tag{E.29}$$

$$B_0(n+1) + D_0(n-1) = 0, \tag{E.30}$$

que, substituídas em (E.27) e com manipulações algébricas produzem

$$q(\theta) = 2C_0 \operatorname{sen}(n\theta) \operatorname{sen}\theta + \frac{2D_0}{n+1} [-n \cos(n\theta) \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}(n\theta) \cos\theta]. \tag{E.31}$$

Para usar a condição (d), é necessária a derivada de  $q(\theta)$ , dada por

$$q'(\theta) = 2C_0 [n \cos(n\theta) \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}(n\theta) \cos\theta] + 2D_0(n-1) \operatorname{sen}(n\theta) \operatorname{sen}\theta. \tag{E.32}$$

Aplicando (b) na equação acima, tem-se

$$C_0 \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi n\right) - \frac{D_0}{n+1} n \cos\left(\frac{3}{2}\pi n\right) = 0, \tag{E.33}$$

e, então, substituindo (d) em (E.32)

$$C_0 n \cos\left(\frac{3}{2}\pi n\right) + D_0(n-1) \sin\left(\frac{3}{2}\pi n\right) = 0. \quad (\text{E.34})$$

Assim, as expressões (E.29), (E.30), (E.33) e (E.34) compõem um sistema linear cujas incógnitas são  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$  e  $D_0$ . Inicialmente, será determinado o valor de  $n$  impondo que o sistema linear homogêneo seja possível e indeterminado, ou seja, que a matriz de coeficientes tenha determinante igual a 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & n+1 & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & \sin\left(\frac{3}{2}\pi n\right) & -\frac{n}{n+1} \cos\left(\frac{3}{2}\pi n\right) \\ 0 & 0 & n \cos\left(\frac{3}{2}\pi n\right) & (n-1) \sin\left(\frac{3}{2}\pi n\right) \end{vmatrix} = n^2 - \sin^2\left(\frac{3}{2}\pi n\right) = 0, \quad (\text{E.35})$$

ou seja,

$$n^2 = \sin^2\left(\frac{3}{2}\pi n\right). \quad (\text{E.36})$$

Extraindo a raiz quadrada de (E.36)

$$n = \pm \sin\left(\frac{3}{2}\pi n\right), \quad (\text{E.37})$$

cuja solução  $n = 0.5445$  é a mais influente para  $\psi(r, \theta) = r^{n+1}q(\theta)$  com  $r \rightarrow 0$ .

Portanto, quando  $r \rightarrow 0$ ,  $\mathbf{u} = \mathcal{O}(r^{0.5445})$  e, como  $\nabla \mathbf{u} = \mathcal{O}(r^{-0.4555})$ , segue que  $\mathbf{T}^s = \mathcal{O}(r^{-0.4555})$ .

Agora, com o valor de  $n = 0.5445$ , resolve-se o sistema linear de incógnitas  $A_0, B_0, C_0$  e  $D_0$ . A matriz ampliada, obtida substituindo o valor de  $n$  na matriz de coeficientes presente em (E.35), dada por

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5445 & 0 & -0.4555 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5444 & 0.2957 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4567 & -0.2480 & 0 \end{array} \right), \quad (\text{E.38})$$

e, na forma escalonada

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5445 & 0 & -0.4555 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5444 & 0.2957 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (\text{E.39})$$

Desta forma,  $D_0$  é a variável livre do sistema e, então, a solução é escrita como

$$\begin{cases} A_0 = -0.5432D_0 \\ B_0 = 0.2949D_0 \\ C_0 = -0.5432D_0 \end{cases}. \quad (\text{E.40})$$

Isolando  $D_0$  em termos de  $C_0$  em (E.40), substituindo esse termo e  $n = 0.5445$  em (E.31), obtém-se a seguinte expressão para  $q(\theta)$

$$q(\theta) = 2C_0 \{ \sin \theta [ \sin (0.5445\theta) + 2.2008 \cos (0.5445\theta) ] - 4.0419 \sin (0.5445\theta) \cos \theta \}. \quad (\text{E.41})$$

Finalmente, a expressão para a função corrente é

$$\psi(r, \theta) = 2C_0 r^{1.5445} \{ \sin \theta [ \sin (0.5445\theta) + 2.2008 \cos (0.5445\theta) ] - 4.0419 \sin (0.5445\theta) \cos \theta \}. \quad (\text{E.42})$$

Agora, retorna-se à equação (E.2) de modo a determinar o comportamento assintótico da pressão. O operador Laplaciano, em coordenadas polares é dado por

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad (\text{E.43})$$

e, então

$$\nabla p = \nabla^2 \mathbf{u} = \left( \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \mathbf{r} + \left( \nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \boldsymbol{\theta}. \quad (\text{E.44})$$

Assim, o gradiente de pressão é escrito, em termos de  $\psi$ , como

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^2 \partial \theta} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \theta^3}, \quad (\text{E.45})$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = -r \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}. \quad (\text{E.46})$$

Agora, usando (E.26), tem-se

$$\frac{\partial p}{\partial r} = r^{n-2} (q''' + (n+1)^2 q'), \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = -(n-1)r^{n-1} (q'' + (n+1)^2 q). \quad (\text{E.47})$$

Finalmente, de (E.47), tem-se que  $p = \mathcal{O}(r^{n-1}) = \mathcal{O}(r^{-0.4555})$ . Desta forma, o comportamento assintótico das propriedades do escoamento Newtoniano é resumido como

$$\mathbf{u} \propto r^{0.5445}, \quad \mathbf{T}^s \propto r^{-0.4555}, \quad p \propto r^{-0.4555} \quad \text{para } r \rightarrow 0. \quad (\text{E.48})$$

## Equações em coordenadas polares

Nesse apêndice são apresentados os operadores presentes nas equações e as equações governantes escritas em coordenadas polares. Essas equações, nesse sistema de coordenadas, são utilizadas na análise assintótica.

Parte-se, então, das relações entre as bases canônicas cartesianas  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$  e polar  $\{\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}\}$

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}, \\ \boldsymbol{\theta} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}, \end{cases} \quad (\text{F.1})$$

com a relação inversa dada por

$$\begin{cases} \mathbf{i} = \cos \theta \mathbf{r} - \sin \theta \boldsymbol{\theta}, \\ \mathbf{j} = \sin \theta \mathbf{r} + \cos \theta \boldsymbol{\theta}. \end{cases} \quad (\text{F.2})$$

Com essas relações, inicialmente, escreve-se o vetor velocidade  $\mathbf{u}$  em ambos os sistemas de coordenadas

$$\begin{cases} \mathbf{u} = u \mathbf{i} + v \mathbf{j}, \\ \mathbf{u} = u_r \mathbf{r} + u_\theta \boldsymbol{\theta}, \end{cases} \quad (\text{F.3})$$

e, substituindo (F.1) e (F.2) em (F.3), obtém-se

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \end{pmatrix}, \quad (\text{F.4})$$

e

$$\begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (\text{F.5})$$

No caso do tensor  $\mathbf{T}$ , dado nos sistemas cartesianos e polar por

$$\begin{cases} \mathbf{T} = T^{xx} \mathbf{i} \otimes \mathbf{i} + T^{xy} (\mathbf{i} \otimes \mathbf{j} + \mathbf{j} \otimes \mathbf{i}) + T^{yy} \mathbf{j} \otimes \mathbf{j}, \\ \mathbf{T} = T^{rr} \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} + T^{r\theta} (\mathbf{r} \otimes \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \otimes \mathbf{r}) + T^{\theta\theta} \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta}, \end{cases} \quad (\text{F.6})$$

as relações são obtidas ao substituir (F.1) e (F.2) em (F.6) e, assim, tem-se

$$\begin{pmatrix} T^{xx} & T^{xy} \\ T^{xy} & T^{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{rr} & T^{r\theta} \\ T^{r\theta} & T^{\theta\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{F.7})$$

e

$$\begin{pmatrix} T^{rr} & T^{r\theta} \\ T^{r\theta} & T^{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{xx} & T^{xy} \\ T^{xy} & T^{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{F.8})$$

Para a construção dos operadores é preciso considerar as relações entre coordenadas cartesianas e polares

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \\ r^2 = x^2 + y^2, \\ \theta = \arctan \frac{y}{x}, \end{cases} \quad (\text{F.9})$$

e, com isso, tem-se as seguintes derivadas parciais

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta, & \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r}, \\ \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta, & \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r}. \end{cases} \quad (\text{F.10})$$

Utilizando a regra da cadeia, as derivadas parciais em relação a  $x$  e a  $y$  são escritas como

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}. \end{cases} \quad (\text{F.11})$$

Substituindo (F.10) em (F.11), tem-se

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta, \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \cos \theta. \end{cases} \quad (\text{F.12})$$

Destaca-se aqui duas importantes relações para a conversão das equações de coordenadas cartesianas para polares

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \boldsymbol{\theta}, \\ \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta} = -\mathbf{r}. \end{cases} \quad (\text{F.13})$$

Daqui em diante são construídos os operadores presentes nas equações constitutivas começando pelo operador gradiente

• Operador gradiente  $\nabla$ :

$$\begin{aligned} \nabla &= \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} = \left( \frac{\partial}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \right) (\cos \theta \mathbf{r} - \sin \theta \boldsymbol{\theta}) + \\ &\quad \left( \frac{\partial}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \cos \theta \right) (\sin \theta \mathbf{r} + \cos \theta \boldsymbol{\theta}) \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \boldsymbol{\theta}. \end{aligned} \quad (\text{F.14})$$

- Gradiente de velocidade  $\nabla \mathbf{u}$ :

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u} = \nabla \otimes \mathbf{u} &= \left( \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} \mathbf{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta} \boldsymbol{\theta} \right) \otimes (u_r \mathbf{r} + u_\theta \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{r} \otimes \left( \frac{\partial(u_r \mathbf{r})}{\partial r} + \frac{\partial(u_\theta \boldsymbol{\theta})}{\partial r} \right) + \\ &\frac{1}{r} \boldsymbol{\theta} \otimes \left( \frac{\partial(u_r \mathbf{r})}{\partial \theta} + \frac{\partial(u_\theta \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta} \right) = \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \boldsymbol{\theta} \otimes \mathbf{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{r} \otimes \boldsymbol{\theta} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) + \\ &\frac{1}{r} \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right). \end{aligned} \quad (\text{F.15})$$

Na forma matricial, pode ser representado por

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) \end{pmatrix}. \quad (\text{F.16})$$

- Tensor taxa de deformação  $\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\top)$ :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) \right] \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) \right] & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) \end{pmatrix}. \quad (\text{F.17})$$

- Operador convecção  $\mathbf{u} \cdot \nabla$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \nabla &= (u_r \mathbf{r} + u_\theta \boldsymbol{\theta}) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \boldsymbol{\theta} \right) \\ &= u_r \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + u_\theta \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (\text{F.18})$$

ou seja,

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) = u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (\text{F.19})$$

- Convecção do tensor  $\mathbf{T}$ :

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{T} &= \left( u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (T^{rr} \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} + T^{r\theta} (\mathbf{r} \otimes \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \otimes \mathbf{r}) + T^{\theta\theta} \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta}) \\ &= \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \left( u_r \frac{\partial T^{rr}}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial T^{rr}}{\partial \theta} - 2 \frac{u_\theta}{r} T^{r\theta} \right) + \\ &\mathbf{r} \otimes \boldsymbol{\theta} \left( u_r \frac{\partial T^{r\theta}}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial T^{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{u_\theta}{r} (T^{rr} - T^{\theta\theta}) \right) + \\ &\boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta} \left( u_r \frac{\partial T^{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial T^{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2 \frac{u_\theta}{r} T^{r\theta} \right), \end{aligned} \quad (\text{F.20})$$

e na forma matricial

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{T} = \begin{pmatrix} (\mathbf{u} \cdot \nabla) T^{rr} - 2 \frac{u_\theta}{r} T^{r\theta} & (\mathbf{u} \cdot \nabla) T^{r\theta} + \frac{u_\theta}{r} (T^{rr} - T^{\theta\theta}) \\ (\mathbf{u} \cdot \nabla) T^{r\theta} + \frac{u_\theta}{r} (T^{rr} - T^{\theta\theta}) & (\mathbf{u} \cdot \nabla) T^{\theta\theta} + 2 \frac{u_\theta}{r} T^{r\theta} \end{pmatrix}. \quad (\text{F.21})$$

- Deformação afim do tensor polimérico  $(\nabla \mathbf{u}) \mathbf{T} + \mathbf{T} (\nabla \mathbf{u})^T$ :

$$(\nabla \mathbf{u}) \mathbf{T} + \mathbf{T} (\nabla \mathbf{u})^T = \begin{pmatrix} 2T^{rr} \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2\frac{T^{r\theta}}{r} (\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta) & T^{r\theta} \left[ \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} (\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r) \right] + T^{rr} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{T^{\theta\theta}}{r} (\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta) \\ T^{r\theta} \left[ \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} (\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r) \right] + T^{rr} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{T^{\theta\theta}}{r} (\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta) & 2T^{r\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + 2\frac{T^{\theta\theta}}{r} (\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r) \end{pmatrix}. \quad (\text{F.22})$$

- Equação da continuidade  $\nabla \cdot \mathbf{u}$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \left( \frac{\partial()}{\partial r} \mathbf{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial()}{\partial \theta} \boldsymbol{\theta} \right) \cdot (u_r \mathbf{r} + u_\theta \boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}. \quad (\text{F.23})$$

- Equação constitutiva do modelo PTT:

$$\frac{\partial T^{rr}}{\partial t} + u_r \frac{\partial T^{rr}}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial T^{rr}}{\partial \theta} - 2T^{rr} \frac{\partial u_r}{\partial r} - 2\frac{T^{r\theta}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{T^{rr}}{Wi} + \frac{\varepsilon}{1-\beta} f_{rr} = 2\frac{1-\beta}{Wi} \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad (\text{F.24})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{r\theta}}{\partial t} + u_r \frac{\partial T^{r\theta}}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial T^{r\theta}}{\partial \theta} + T^{rr} \frac{u_\theta}{r} - T^{rr} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{T^{\theta\theta}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{T^{r\theta}}{Wi} + \frac{\varepsilon}{1-\beta} f_{r\theta} = \\ \frac{1-\beta}{Wi} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right), \end{aligned} \quad (\text{F.25})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{\theta\theta}}{\partial t} + u_r \frac{\partial T^{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial T^{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2T^{r\theta} \frac{u_\theta}{r} - 2T^{r\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - 2\frac{T^{\theta\theta}}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - 2\frac{T^{\theta\theta}}{r} u_r + \frac{T^{\theta\theta}}{Wi} + \\ \frac{\varepsilon}{1-\beta} f_{\theta\theta} = 2\frac{1-\beta}{Wi} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right), \end{aligned} \quad (\text{F.26})$$

onde

$$f_{rr} = (T^{rr} + T^{\theta\theta})T^{rr}, \quad f_{r\theta} = (T^{rr} + T^{\theta\theta})T^{r\theta}, \quad f_{\theta\theta} = (T^{rr} + T^{\theta\theta})T^{\theta\theta}. \quad (\text{F.27})$$

No caso das equações constitutivas da formulação NSF, (2.39)-(2.41), são alterados apenas os termos convectivos com a equação (F.19) e  $\nabla \cdot \mathbf{w}$  é reescrito como

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = \frac{1}{|\mathbf{u}|^4} \left[ (u_\theta^2 - u_r^2) \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) + 4u_r u_\theta \frac{\partial u_r}{\partial r} \right]. \quad (\text{F.28})$$