UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Leonardo Pereira Serantola

Dimensão Generalizada de Hausdorff

São José do Rio Preto
2019

Leonardo Pereira Serantola

Dimensão Generalizada de Hausdorff

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CNPq

Orientador: Prof. Dr. Marcio Ricardo Alves Gouveia

São José do Rio Preto
2019

S481d

SERANTOLA, LEONARDO
Dimensão Generalizada de Hausdorff / LEONARDO SERANTOLA. -- São José do Rio Preto, 2019
74 p. + 1 CD-ROM

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto
Orientador: Márcio Ricardo Alves Gouveia

1. Dimensão de Hausdorff. 2. Medida de Carathéodory. 3. Função de escala logarítmica. 4. Função côncava. 5. Dimensão não inteira. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Leonardo Pereira Serantola

Dimensão Generalizada de Hausdorff

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CNPq

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Marcio Ricardo Alves Gouveia
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto

Prof. Dr. Marcus Augusto Bronzi
UFU – Câmpus de Santa Mônica

São José do Rio Preto
25 de outubro de 2019

À minha esposa Yuki, e às minhas
filhas Catarina, Bárbara e Milena.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais Norberto e Inez por me propiciarem apoio, incentivo e estrutura para chegar até aqui.
À Yuki, minha esposa e melhor amiga pelo amor, carinho, apoio nas horas difíceis, compreensão e desprendimento.
Às minhas filhas Catarina, Bárbara e Milena pelo fornecimento de motivação interna para chegar até aqui.
Aos meus amigos de graduação Amanda, João, Vinicius, Daniel, Plínio, Isabela, Mateus e Rodrigo.
Ao meu Orientador, Prof. Dr. Márcio Ricardo Alves Gouveia por todo apoio prestado.
Aos examinadores da banca, Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita e Prof. Dr. Marcus Augusto Bronzi.
À CNPq processo 134589/2017-3, pelo apoio financeiro prestado.

RESUMO

O presente trabalho trata de conceitos relacionados com a medida generalizada de Hausdorff, onde o principal objetivo consiste na obtenção de conjuntos cuja dimensão seja um número positivo não inteiro. Ele começa com uma definição sobre as propriedades que uma função de conjunto deve satisfazer para ser considerada uma medida de Carathéodory, suas implicações e consequências. Após a explicação destes conceitos iniciais, dá-se alguns exemplos de funções de conjunto contínuas e monótonas com a apresentação da função de escala logarítmica, que é peça chave para o desenvolvimento de conjuntos de medidas positivas não inteiras, além da introdução da medida de Hausdorff com seus desdobramentos. Algumas hipóteses sobre funções côncavas são apresentadas juntamente com fórmulas deduzidas com bases nestas hipóteses e na concavidade da função. Utiliza-se a função de escala logarítima para a determinação da dimensão de vários conjuntos, inclusive o conjunto de Cantor. Posteriormente, há uma adaptação dos conceitos trabalhados para o tratamento de dimensões relacionadas à números diádicos irracionais. Por fim, os conceitos tratados sobre a reta real são estendidos para produtos cartesianos, com especial enfoque para conjuntos planares.

Palavras–chave: Dimensão de Hausdorff, Medida de Carathéodory, Função de escala logarítmica, Função côncava, Dimensão não inteira.

ABSTRACT

The present work deals with concepts related to the generalized Hausdorff measure, where the main objective is to obtain sets whose dimension is a positive non integer number. It begins with a definition of the properties that a set function must satisfy to be considered a Carathéodory measure, their implications and consequences. Following the explanation of these initial concepts, some examples of continuous and monotonous set functions are given with the presentation of the logarithmic scale function, which is key to the development of non-integer positive measure sets, in addition to the introduction of the Hausdorff measure with its developments. Some assumptions about concave functions are presented together with formulas derived from these assumptions and the concavity of the function. The logarithmic scale function is used to determine the dimension of various sets, including the Cantor set. Later, there is an adaptation of the concepts worked for the treatment of dimensions related to irrational dyadic numbers. Finally, the concepts treated on the real line are extended to Cartesian products, with special focus on planar sets.

Keywords: Hausdorff Dimension, Carathéodory Measure, Logarithmic Scale Function, Concave Function, Non Integer Dimension.

Lista de Figuras

3.1 Ampliação dos conjuntos por um fator λ para o comprimento, λ^2 para a área e λ^s para a medida s-dimensional de Hausdorff. Fonte: Elaborado pelo autor. 33

3.2 Gráfico de $\Omega^s(F)$ versus s para um determinado conjunto F. A dimensão de Hausdorff é o valor de s no qual a função salta de ∞ para 0. Fonte: Elaborado pelo autor. 35

3.3 Coordenadas Locais. Fonte: Elaborado pelo autor. 35

3.4 Mudança de Coordenadas. Fonte: Elaborado pelo autor. 36

3.5 Subvariedades. Fonte: Elaborado pelo autor. 37

3.6 Construção da poeira de Cantor ($\dim_H F = 1$). Fonte: Elaborado pelo autor. 40

3.7 Construção do conjunto de Cantor F através de repetidas remoções da terça parte intermediária dos intervalos. Note que tanto a parte esquerda como a direita de F são cópias de F com um fator de escala de $\frac{1}{3}$. Fonte: Elaborado pelo autor. 41

3.8 Cálculo da medida para uma superfície. Fonte: Elaborado pelo autor. 44

4.1 Notação para a demonstração do Lema de Riesz. Fonte: Elaborado pelo autor. 51

5.1 Gráficos das funções $f = x^p$, $g = x^p \left(\frac{1}{\log\left(\frac{1}{x}\right)}\right)^{p_1}$ e $h = x^p \left(\frac{1}{\log\log\left(\frac{1}{x}\right)}\right)^{p_2}$. Fonte: Elaborado pelo autor. 57

5.2 Exemplo de gráfico de uma função côncava. Fonte: Elaborado pelo autor. 59

5.3 Intervalo $[0, \xi_0]$ com os intervalos centrais deletados a cada iteração. Fonte: Elaborado pelo autor. . . 62

5.4 Cálculo do comprimento de ξ_n. Fonte: Elaborado pelo autor. 63

Sumário

1 Introdução **8**

2 Conceitos Relacionados à Medida **10**

3 Dimensão de Hausdorff **31**

4 Dimensão Generalizada de Hausdorff **48**

5 Aplicações e algumas extensões **55**

5.1 Construção de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ com medida $L(A) = 1$. 62

5.2 Estendendo para conjuntos no plano e no espaço 67

Referências **74**

Capítulo 1

Introdução

Carathéodory definiu uma teoria da medida excepcionalmente simples e geral que contém a teoria de Lebesgue como um caso especial, e que, em particular, define uma medida p-dimensional de um subconjunto de um espaço q-dimensional. O artigo que será analisado na presente dissertação, adicionará uma pequena contribuição para este trabalho (medida de Carathéodory). Depois de considerações introdutórias, que generalizarão a medida de Carathéodory de um modo simples e apresentarão uma visão geral de muitos conceitos análogos de medida, introduziremos uma explanação da medida p-dimensional que pode ser imediatamente estendida para valores não inteiros de p e sugere a possibilidade da existência de conjuntos de dimensões não inteiras ou fracionárias, e até de conjuntos cujas dimensões extrapolam a escala dos inteiros positivos para uma mais refinada escala logarítmica. Deste modo, a dimensão se torna um tipo de medida característica de graduação similar à ordem de convergência para zero, à força de uma convergência, e conceitos relacionados. Como é bem conhecido, Frechet definiu (M. Frechet. Les dimensions d un ensemble abstrait, Math. Ann. 68, 1910, p. 145-168), de uma maneira essencialmente diferente, tipos de dimensões que interpolam a sequência dos números naturais. A prova de que existem conjuntos que possuem exatamente uma dimensão dada (isto é, têm uma medida correspondente que não é nem zero, nem infinito), não é, entretanto, tão natural quanto nosso conceito de dimensão. Com respeito a isto, nós nos restringiremos aos exemplos mais simples, notadamente certos conjuntos perfeitamente lineares não densos (estes conjuntos exibem um comportamento anormal e aparecem aqui sob uma nova perspectiva) e conjuntos planares e espaciais surgindo deles a partir de produtos cartesianos.

No passado, os matemáticos estavam mais concentrados em conjuntos e funções para os quais os métodos do cálculo podiam ser aplicados. Conjuntos ou funções que não fossem suficientemente contínuas ou regulares, tinham a tendência de serem ignoradas como entidades patológicas e não dignas de estudo. Certamente elas eram respeitadas como curiosidades individuais e raramente eram pensadas como uma classe da qual uma teoria geral poderia ser concebida.

Nos anos mais recentes, esta atitude foi modificada com muitos matemáticos se enveredando pelos

estudos dos objetos não contínuos, por se transformar em uma área digna de estudos e grandes resultados. Mais ainda, conjuntos irregulares possibilitaram uma representação de muitos fenômenos naturais de maneira mais fiel à realidade do que as figuras clássicas da geometria euclidiana. A geometria fractal forneceu uma estrutura geral para o estudo de tais conjuntos irregulares.

Nesta dissertação trataremos também dos conceitos relacionados com a medida e a dimensão de Hausdorff, o que viabiliza a criação de conjuntos de medidas racionais não inteiras que constituem o cerne deste trabalho baseado no artigo: **Dimension and Outer Measure** (Dimensão e Medida Exterior) de Felix Hausdorff, de acordo com a referência [7].

Capítulo 2

Conceitos Relacionados à Medida

Este capítulo fornecerá o embasamento teórico necessário para a compreensão da medida e dimensão de Hausdorff em sua totalidade. Iniciamos com definições sobre espaço métrico, medida, σ-álgebra, medida exterior e seus desdobramentos. Introduzimos também as medidas de Lebesgue e Carathéodory, além de definimos funções de conjunto e o conceito de medida exterior de Caratéodory.

Definição 1. *Uma* **ordem parcial em um conjunto** A *é uma relação* $\preceq$ *em* A *que é*

I- Reflexiva: $a \preceq a$, $\forall a \in A$.

II- Anti-simétrica: se $a \preceq b$ *e* $b \preceq a$, *então* $a = b$.

III- Transitiva: se $a \preceq b$ *e* $b \preceq c$, *então* $a \preceq c$.

Uma ordem total num conjunto A *é uma ordem parcial em* A *com a seguinte propriedade adicional:* $a \preceq b$, $a = b$ *ou* $b \preceq a$ *para quaisquer elementos* a *e* b *pertencentes a* A. *Um conjunto* A *com uma ordem total específica em* A *é chamado de um conjunto totalmente ordenado.*

Definição 2. *Seja* B *um subconjunto de um conjunto parcialmente ordenado* A. *Um elemento* m *em* A *é chamado de* **limite inferior de** B *se, para qualquer* $x \in B$, $m \preceq x$, *isto é, se* m *preceder cada elemento em* B. *Se um limite inferior de* B *domina cada um dos outros limites inferiores de* B, *ele é denominado de* **ínfimo de** B, *sendo designado por* $\inf(B)$.

Em geral, B *pode ter um, muitos ou nenhum limite inferior, porém existe quando muito um* $\inf(B)$.

Definição 3. *Uma* **métrica** *num conjunto* M *é uma função* $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$, *que associa a cada par ordenado de elementos* $x, y \in M$ *um número real* $d(x, y)$, *chamado a distância de* x *a* y, *de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer* $x, y, z \in M$*:*

I- $d(x, x) = 0$*;*

II- Se $x \neq y$ *então* $d(x, y) > 0$,

III- $d(x, y) = d(y, x)$*;*

IV- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Um espaço métrico é um par (M, d), onde M é um conjunto e d é uma métrica em M.

Produtos Cartesianos e Axioma da Escolha

O produto cartesiano de n conjuntos $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ é o conjunto das n-uplas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, com $a_i \in A_i$, onde $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ e $i \in I$.

Seja $\{A_i\}_{i \in I}$ uma família qualquer não vazia de conjuntos não vazios. O axioma da escolha estabelece então, que é possível escolher simultaneamente um elemento de cada conjunto, isto é, existe um subconjunto B de $\bigcup_{i \in I} A_i$ tal que a intersecção de B com cada conjunto A_i consiste de exatamente um elemento. Em outras palavras, o produto cartesiano de uma família não vazia de conjuntos não vazios é não vazia.

Definição 4. *Uma família $\mathcal{X}$ de subconjuntos de um conjunto X é uma* **σ-álgebra** *se satisfaz as seguintes condições:*

I. $\emptyset$, X pertencem a $\mathcal{X}$.

II. Se $A \in \mathcal{X}$, então o complemento $C(A) = X \setminus A \in \mathcal{X}$.

III. Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma coleção de conjuntos em $\mathcal{X}$, então a união $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ pertence a $\mathcal{X}$.

Um par ordenado $(X, \mathcal{X})$ consistindo de um conjunto X e uma σ-álgebra $\mathcal{X}$ de subconjuntos de X é denominado um espaço mensurável. Qualquer conjunto em $\mathcal{X}$ é denominado um **conjunto $\mathcal{X}$-mensurável**.

A partir das regras de De Morgan:

$$\left(\bigcup_{\alpha} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha} (A_\alpha)^c, \qquad \left(\bigcap_{\alpha} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha} (A_\alpha)^c,$$

segue que a intersecção de uma sequência de conjuntos em $\mathcal{X}$ também pertence a $\mathcal{X}$.

Definição 5. *Uma* **função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é mensurável** *se, para todo número real α, o conjunto*

$$\{x \in X; f(x) > \alpha\}$$

pertence a $\mathcal{X}$.

Definição 6. *Uma* **medida** *é uma função real estendida (uma função que pode assumir o valor $+\infty$) μ definida em uma σ-álgebra $\mathcal{X}$ de subconjuntos de X tal que:*

I. $\mu(\emptyset) = 0$.

II. $\mu(E) \geq 0, \ \forall E \in \mathcal{X}$.

III. μ é enumeravelmente aditiva no sentido de que, se $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma coleção disjunta qualquer de conjuntos em $\mathcal{X}$, então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n). \tag{2.1}$$

Como μ pode assumir o valor $+\infty$, a aparição do valor $+\infty$ no lado direito de 2.1 significa que, ou $\mu(E_n) = +\infty$ para algum n ou a série de termos não negativos no lado direito de 2.1 é divergente. Se a medida não assume o valor $+\infty$, nós dizemos que ela é uma medida finita. De maneira geral, se existe uma sequência (E_n) de conjuntos em $\mathcal{X}$ com $X = \bigcup E_n$ e $\mu(E_n) < \infty$ para qualquer n, então dizemos que μ é uma medida σ-finita.

Definição 7. *Uma* **medida exterior** *é uma medida m^* satisfazendo as seguintes propriedades:*

I. $0 \leq m^*(E) \leq +\infty$ *para todo* $E \subset \mathcal{X}$ *e* $m^*(\emptyset) = 0$.

II. Se $E \subset F$, *então* $m^*(E) \leq m^*(F)$.

III. Se $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *é uma coleção de subconjuntos de* $\mathcal{X}$, *então*

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} m^*(E_k).$$

Definição 8. *Uma medida μ é uma* **medida de Carathéodory** *se ela satisfaz as seguintes condições:*

I. Todo subconjunto A de um espaço euclidiano q-dimensional apresenta um único valor $\mu(A)$ com $0 \leq \mu(A) \leq \infty$.

II. Se B é um subconjunto de A, então $\mu(B) \leq \mu(A)$.

III. Se A é uma união finita $A = \bigcup_{i=0}^{n} A_i$ ou uma união infinita enumerável $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$, então $\mu(A) \leq \mu(A_1) + \mu(A_2) + \ldots + \mu(A_n)$ *para o caso finito ou* $\mu(A) \leq \mu(A_1) + \mu(A_2) + \ldots$ *para o caso infinito enumerável.*

IV. Se A e B são dois conjuntos cuja distância $d(A, B) > 0$, *então*

$$L(A \cup B) = L(A) + L(B).$$

V. $\mu(A)$ *é o ínfimo de* $\mu(B_i)$, *com* $A \subset B_i$ *onde* $i \in \lambda$, *com* λ *sendo um conjunto de índices, ou seja,*

$$\mu(A) = \inf\{\mu(B_i);\ B_i \supset A \text{ e } i \in \lambda\}$$

Toda função μ que satisfaz as condições da Definição 8 também satisfaz as condições para ser considerada uma medida exterior (Definição 7), ou seja, as condições I, II e III referentes à medida de Carathéodory são exatamente as condições que uma função tem que satisfazer para ser uma medida exterior. Para uma função ser uma **medida exterior de Carathéodory**, ela deve satisfazer mais condições além das usuais de medida exterior, ou seja, deve satisfazer as cinco condições da Definição 8.

Definição 9. *Um conjunto A é* **mensurável com respeito à medida exterior de Carathéodory** *μ se, para todo conjunto W a equação*

$$\mu(W) = \mu(A \cap W) + \mu(W \setminus (A \cap W)) \tag{2.2}$$

é satisfeita.

Lema 1. *Um conjunto E satisfaz a condição de Carathéodory se e somente se, para cada conjunto A com $m^*(A) < +\infty$, a seguinte condição é satisfeita:*

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c). \tag{2.3}$$

Demonstração. Como $A \cap E$ e $A \cap E^c$ são disjuntos e possuem união A, segue das condições de medida exterior que

$$m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c). \tag{2.4}$$

Portanto, se (2.3) é satisfeita, (2.2) também será satisfeita. A desigualdade (2.3) é trivial no caso $m^*(A) = +\infty$, o que acarreta na necessidade apenas do tratamento do caso $m^*(A) < +\infty$.

Teorema 1. *Seja m^* uma medida exterior. Então o conjunto $\mathcal{L}$ de todos os subconjuntos de $\mathbb{R}^p$ que satisfazem a condição de Carathéodory da definição (9) é uma σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^p$. Mais ainda, a restrição de m^* a $\mathcal{L}$ é uma medida sobre $\mathcal{L}$.*

Demonstração. Mostraremos que se E e F satisfazem a condição (2.2), então $E \cap F$ também satisfaz esta condição. Como $E \in \mathcal{L}$, então

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c),$$

para qualquer $A \subseteq \mathbb{R}^p$. Como $F \in \mathcal{L}$, nós temos

$$m^*(A \cap E) = m^*(A \cap E \cap F) + m^*(A \cap E \cap F^c).$$

Portanto, segue que

$$m^*(A) = m^*(A \cap E \cap F) + m^*(A \cap E \cap F^c) + m^*(A \cap E^c).$$

A partir de $E \in \mathcal{L}$, temos também a seguinte relação

$$m^*(A \cap (E \cap F)^c) = m^*(A \cap (E \cap F)^c \cap E) + m^*(A \cap (E \cap F)^c \cap E^c)$$

$$= m^*(A \cap F^c \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

Segue portanto que

$$m^*(A) = m^*(A \cap (E \cap F)) + m^*(A \cap (E \cap F)^c),$$

para todo conjunto A. Consequentemente, $E \cap F$ pertence a $\mathcal{L}$.

Como $\mathcal{L}$ contém os complementos dos conjuntos em $\mathcal{L}$, segue das leis de De Morgan da Teoria dos Conjuntos que se $E, F \in \mathcal{L}$, então $E^c, F^c \in \mathcal{L}$, $E^c \cap F^c = (E \cup F)^c \in \mathcal{L}$ e, portanto $E \cup F \in \mathcal{L}$. Mais ainda, se $E \cap F = \emptyset$, então segue do fato de E satisfazer (2.2) com A substituído por $A \cap (E \cup F)$ e $F = F \cap E^c$ que

$$m^*(A \cap (E \cup F)) = m^*(A \cap (E \cup F) \cap E) + m^*(A \cap (E \cup F) \cap E^c)$$

$$= m^*(A \cap E) + m^*(A \cap F).$$

Por indução nós concluímos que se $E_1, \ldots, E_n$ pertencem a $\mathcal{L}$ e são disjuntos dois a dois, então $E_1 \cup \ldots \cup E_n$ pertence a $\mathcal{L}$ e

$$m^*(A \cap (E_1 \cup \ldots \cup E_n)) = m^*(A \cap E_1) + \ldots + m^*(A \cap E_n),$$

para todo $A \subseteq \mathbb{R}^p$.

Mostraremos agora que $\mathcal{L}$ é uma σ-álgebra e que m^* é contavelmente aditiva sobre $\mathcal{L}$. Para fazer isto, seja $\{E_n\}$ uma sequência de elementos dois a dois disjuntos em $\mathcal{L}$ e seja $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Sabemos que $F_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ pertence a $\mathcal{L}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mais ainda, se $A \subseteq \mathbb{R}^p$, então

$$m^*(A) = m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap F_n^c)$$

$$= m^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} A \cap E_k\right) + m^*(A \cap F_n^c)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap E_k) + m^*(A \cap F_n^c).$$

Como $F_n \subseteq E$, então $A \cap F_n^c \supseteq A \cap E^c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$m^*(A) \geq \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap E_k) + m^*(A \cap E^c),$$

o que implica em

$$m^*(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A \cap E_k) + m^*(A \cap E^c). \tag{2.5}$$

Por outro lado, segue da subaditividade enumerável de m^* que

$$m^*(A \cap E) = m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A \cap E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A \cap E_k). \tag{2.6}$$

Portanto, ficamos com

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c),$$

que implica em $E \in \mathcal{L}$ (Lema (1)), acarretando que $\mathcal{L}$ é uma σ-álgebra de conjuntos de $\mathbb{R}^p$. Além disso, se adotarmos $A = E$ em (2.5) e (2.6), obtemos

$$m^*(E) = \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k),$$

o que mostra que m^* é enumeravelmente aditiva sobre $\mathcal{L}$. □

Definição 10. *Se m^* é uma medida exterior, então a σ-álgebra $\mathcal{L}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^p$ que satisfaz a condição de Carathéodory é denominada de σ-**álgebra de Lebesgue de** $\mathbb{R}^p$. Um conjunto $E \in \mathcal{L}$ é chamado um subconjunto Lebesgue mensurável de $\mathbb{R}^p$. A restrição de uma medida exterior m a m^* sobre $\mathcal{L}$ é chamada de media de Lebesgue em $\mathbb{R}^p$.*

Definição 11. *Uma **célula** I em $\mathbb{R}^p$ é o produto cartesiano de p células $I_1, \ldots, I_p$ em $\mathbb{R}$. Portanto,*

$$I = I_1 \times \ldots \times I_p,$$

onde I_i com $i = 1, \ldots, p$ é uma célula em $\mathbb{R}$, que pode assumir uma das seguintes formas com pontos extremos a e b: $(a,b), [a,b], (a,b]$ ou $[a,b)$, cujo comprimento é $l((a,b)) = b - a$, independentemente do intervalo ser fechado, aberto, semi-aberto ou semi-fechado. Para $I = I_1 \times \ldots \times I_p$, temos o seguinte volume p-dimensional:

$$l(I) = (b_1 - a_1) \ldots (b_p - a_p).$$

Teorema 2. *Se I é qualquer célula em $\mathbb{R}^p$, então $m^*(I) = l(I)$.*

Demonstração. Como a sequência $(I, \emptyset, \emptyset, \ldots)$ é uma cobertura de I, segue que $m^*(I) \leq l(I) + 0 + 0 + \ldots = l(I)$. Para estabelecer a desigualdade oposta, seja $\epsilon > 0$ e seja (I_k) uma cobertura de I por células abertas tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) \leq m^*(I) + \epsilon.$$

Se I é uma célula fechada, seja $J = I$; caso contrário, seja J uma célula fechada tal que $J \subseteq I$ e $l(I) - \epsilon < l(J)$. Pelo Teorema de Heine-Borel, existe um $m \in \mathbb{N}$ tal que $J \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} I_k$.

Dividiremos o espaço $\mathbb{R}^p$ em um número finito de intervalos fechados através de uma extensão de hiperplanos $(p-1)$-dimensionais, onde cada um deles contém a face de uma das células $I_1, \ldots, I_m$ e de J. Sejam $K_1, \ldots, K_n$ células distintas e fechadas nas quais as células (também fechadas) $I_1^-, \ldots, I_m^-$ são divididas por estes hiperplanos; sejam $J_1, \ldots, J_r$ células fechadas nas quais J é dividida. Chegamos em

$$l(J) = \sum_{j=1}^{r} l(J_j) \leq \sum_{k=1}^{n} l(K_k)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} l(I_k) \leq m^*(I) + \epsilon.$$

Consequentemente, $l(I) \leq l(J) + \epsilon \leq m^*(I) + 2\epsilon$. Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, nós deduzimos que $l(I) \leq m^*(I)$. Logo, segue que $l(I) = m^*(I)$, conforme afirmado. □

Teorema 3. *Se I é uma célula em $\mathbb{R}^p$, então I é mensurável e $m(I) = l(I)$.*

Demonstração. Consideraremos uma célula aberta em $\mathbb{R}^p$. De acordo com o Lema (2.3) é suficiente mostrar que se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é tal que $m^*(A) < +\infty$, então

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap I) + m^*(A \setminus I).$$

Seja $n \in \mathbb{N}$ e seja $I_n = \left\{x \in I; d(x, I^c) > \frac{1}{n}\right\}$, onde d é a função distância. Logo, $I_n \subseteq I$. Mais ainda, como $I \setminus I_n$ está contido na união de $2p$ células, cada uma delas apresentando um lado com comprimento $\frac{1}{n}$, então $m^*(I - I_n) \to 0$, conforme $n \to +\infty$.

Notemos que $A \supseteq (A \cap I_n) \cup (A \setminus I)$ e $d(A \cap I_n, A \setminus I) \geq \frac{1}{n}$. Portanto, segue das propriedades de medida exterior que

$$m^*(A) \geq m^*((A \cap I_n) \cup (A \setminus I)) \tag{2.7}$$

$$= m^*(A \cap I_n) + m^*(A \setminus I). \tag{2.8}$$

Por outro lado, como

$$A \cap I = (A \cap I_n) \cup (A \cap (I \setminus I_n)),$$

segue da subaditividade e por m^* ser monótona que

$$m^*(A \cap I_n) \leq m^*(A \cap I) \leq m^*(A \cap I_n) + m^*(I \setminus I_n).$$

Portanto, nós temos que

$$m^*(A \cap I) = \lim_{n \to \infty} m^*(A \cap I_n).$$

Logo, aplicando o limite na Equação (2.7), (2.8), chegamos em

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap I) + m^*(A \setminus I),$$

o que mostra que I é um conjunto mensurável pelo Lema (2.3). □

Teorema 4. *Se μ é outra medida definida sobre $\mathcal{L}$, tal que $\mu(I) = l(I)$ para toda célula aberta $I \subseteq \mathbb{R}^p$, então $\mu = m$.*

Demonstração. Para $n \in \mathbb{N}$, seja I_n a seguinte célula aberta:

$$I_n = (-n, n) \times \ldots \times (-n, n).$$

Seja $E \in \mathcal{L}$ qualquer conjunto com $E \subseteq I_n$ e seja (J_k) uma sequência de células abertas tal que $E \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} J_k$. Como μ é uma medida e $\mu(J_k) = l(J_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, nós ficamos com

$$\mu(E) \leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} J_k\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(J_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} l(J_k).$$

Portanto, nós temos $\mu(E) \leq m^*(E) = m(E)$ para todos os conjuntos mensuráveis $E \subseteq I_n$. Como μ e m são aditivos, temos

$$\mu(E) + \mu(I_n \setminus E) = \mu(I_n) = m(I_n) = m(E) + m(I_n \setminus E).$$

Como todos os termos acima são finitos e $\mu(E) \leq m(E)$ e $\mu(I_n \setminus E) \leq m(I_n \setminus E)$, segue que $\mu(E) = m(E)$ para todos os conjuntos mensuráveis $E \subseteq I_n$.

Um conjunto mensurável arbitrário E pode ser escrito como a união de sequências de conjuntos disjuntas (E_n), definidas por

$$E_1 = E \cap I_1,\ E_n = E \cap (I_n \setminus I_{n-1}),\ \text{para } n > 1.$$

Como $\mu(E_n) = m(E_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} m(E_n) = m(E).$$

Portanto, μ e m concordam em valor sobre todos os conjuntos mensuráveis. □

Teorema 5. *Se E e F são conjuntos Lebesgue mensuráveis e se $I \subseteq F$, então $m(E) \leq m(F)$. Se, além disso, $m(E) < +\infty$, então $m(F \setminus E) = m(F) - m(E)$.*

Demonstração. Como m é aditivo, é imediato a partir do fato de que $F = E \cup (F \setminus E)$ e $E \cap (F \setminus E) = \emptyset$ que

$$m(F) = m(E) + m(F \setminus E).$$

Como $m(F \setminus E) \geq 0$, temos que $m(F) \geq m(E)$. Se $m(E) < +\infty$, então podemos subtrair $m(E)$ de cada lado da equação acima. □

Teorema 6. *I. Se (E_k) é uma sequência crescente de conjuntos menuráveis de Lebesgue, então*

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k\right) = \lim_{k \to \infty} m(E_k). \tag{2.9}$$

II. Se (F_k) é uma sequência decrescente de conjuntos mensuráveis de Lebesgue e se $m(F_1) < +\infty$, então

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} F_k\right) = \lim_{k\to\infty} m(F_k). \tag{2.10}$$

Demonstração. I. Se $m(E_k) = +\infty$ para algum $k \in \mathbb{N}$, então ambos os lados de (2.9) são iguais a $+\infty$. Logo, podemos supor que $m(E_k) < +\infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Agora, seja $A_1 = E_1$ e $A_k = E_k - E_{k-1}$ para $k > 1$. Então, (A_k) é uma sequência disjunta de conjuntos mensuráveis tais que

$$E_k = \bigcup_{j=1}^{k} A_j \text{ e } \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k.$$

Como m é enumeravelmente aditiva, temos que

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k\right) = m\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} m(A_k) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} m(A_k)\right).$$

Pelo Teorema (5), temos que $m(A_k) = m(E_k) - m(E_{k-1})$ para $k > 1$, o que acarreta uma soma finita telescópica e

$$\sum_{k=1}^{n} m(A_k) = m(E_n).$$

Portanto, a Equação (2.9) está provada.

II. Seja $E_k = F_1 - F_k$ para $k \in \mathbb{N}$. (E_k) é uma sequência crescente de conjuntos mensuráveis. Se aplicarmos a parte (I) e o Teorema (5), chegamos em

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n) = \lim_{n\to\infty} [m(F_1) - m(F_n)]$$

$$= m(F_1) - \lim_{n\to\infty} m(F_n).$$

Como $\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k = F_1 - \bigcap_{k=1}^{+\infty} F_k$, segue do Teorema (5) que

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k\right) = m(F_1) - m\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} F_k\right).$$

Combinando as duas últimas relações, chegamos em (2.10). □

Lema 2. *Todo subconjunto aberto de $\mathbb{R}^p$ é a união de uma coleção enumerável de células abertas.*

Demonstração. Seja $\mathbb{Q}$ o conjunto de todos os números racionais em $\mathbb{R}$ e seja $\mathbb{Q}^p = \mathbb{Q} \times \ldots \times \mathbb{Q}$ a coleção de todos os pontos de $\mathbb{R}^p$, cujas coordenadas são números racionais. $\mathbb{Q}^p$ é um conjunto enumerável; seja $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma enumeração de $\mathbb{Q}^p$.

Se G é um conjunto aberto arbitrário de $\mathbb{R}^p$, para cada $z \in G \cap \mathbb{Q}^p$, seja $C\left(z, \frac{1}{n_z}\right)$ um cubo aberto, ou seja, uma célula cujos lados são iguais, com centro z e comprimento de cada lado de $\frac{1}{n_z}$, com n_z o menor número natural tal que $C\left(z, \frac{1}{n_z}\right) \subset G$. Utilizando o princípio do bom ordenamento para $\mathbb{N}$, obtemos

$$G_0 = \bigcup \left\{ C\left(z, \frac{1}{n_z}\right); z \in G \cap \mathbb{Q}^p \right\}.$$

Portanto, G_0 é a reunião de uma coleção enumerável de cubos abertos. Logo, G_0 é aberto e $G_0 \subseteq G$.

Mostraremos agora que $G = G_0$. Se $y \in G$ é arbitrário, como G é aberto, existe um cubo $C\left(y, \frac{1}{2n_y}\right)$ com centro y tal que $C\left(y, \frac{1}{n_y}\right) \subseteq G$. Consideramos agora o cubo $C\left(y, \frac{1}{2n_y}\right)$, cuja medida dos lados é metade daquela referente a $C\left(y, \frac{1}{n_y}\right)$. Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, temos também que $\mathbb{Q}^p$ é denso em $\mathbb{R}^p$, e há uma quantidade enumerável infinita de pontos racionais em $G \cap C\left(y, \frac{1}{2n_y}\right)$. Seja w o primeiro ponto racional de acordo com a enumeração de $\mathbb{Q}^p$ escolhida acima. Como $w \in G \cap C\left(w, \frac{1}{2n_y}\right)$, segue que $y \in C\left(w, \frac{1}{2n_y}\right) \subseteq C\left(w, \frac{1}{n_w}\right) \subseteq G_0$.

Concluímos então que $G = G_0$. Portanto, G é a união de uma coleção enumerável de cubos abertos, que são células abertas. □

Teorema 7. *Todo subconjunto aberto e todo subconjunto fechado de $\mathbb{R}^p$ é Lebesgue mensurável.*

Demonstração. Segue do Lema (2) e pelo fato de que a coleção $\mathcal{L}$ é detentora das propriedades de uma σ-álgebra, todo conjunto aberto pertence a $\mathcal{L}$. Como um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^p$ é o complemento de um conjunto aberto em $\mathbb{R}^p$, todo subconjunto fechado é também Lebesgue mensurável. □

A intersecção de uma sequência (ou coleção enumerável) de conjuntos abertos é frequentemente chamada um conjunto G_δ. É bem conhecido que tal conjunto não necessariamente é um conjunto aberto; entretanto, ele é um conjunto mensurável, pois a intersecção de uma sequência de conjuntos em uma σ-álgebra também pertence a esta σ-álgebra. Similarmente, a união de uma sequência (ou coleção enumerável) de conjuntos fechados é frequentemente chamada de um conjunto F_σ. Tal conjunto não necessariamente é fechado, mas trata-se de um conjunto mensurável. Um conjunto que é a união de uma sequência de conjuntos G_δ é frequentemente chamada de um conjunto $G_{\delta\sigma}$, que é sempre mensurável. Um conjunto que é a intersecção de uma sequência de conjuntos F_σ é frequentemente chamado de um conjunto $F_{\sigma\delta}$ que também é mensurável. Se continuarmos este processo, podemos definir conjuntos que são conjuntos

$$G_{\delta\sigma\delta}, F_{\sigma\delta\sigma}, G_{\delta\sigma\delta\sigma}, F_{\sigma\delta\sigma\delta}, \ldots.$$

Todos os conjuntos que são obtidos desta maneira são conjuntos Lebesgue mensuráveis, o que acarreta em uma certa dificuldade de imaginar um subconjunto de $\mathbb{R}^p$ que não seja Lebesgue mensurável, mas ele existe.

Definição 12. *A menor σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^p$ que contém todos os conjuntos abertos é chamada de σ-***álgebra de Borel** *e será denotada por $\mathcal{B}$. Qualquer conjunto em $\mathcal{B}$ será denominado de um conjunto de Borel.*

A intersecção de uma coleção arbitrária de σ-álgebras é uma σ-álgebra. Consequentemente, a intersecção de todas as σ-álgebras que contêm os conjuntos abertos de $\mathbb{R}^p$ é uma σ-álgebra que contém os conjuntos abertos; ela é precisamente, a coleção de conjuntos de Borel. Como $\mathcal{L}$ é uma σ-álgebra que contém todos os conjuntos abertos, segue que

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}.$$

Em adição a todos os conjuntos abertos e todos os conjuntos fechados, a coleção $\mathcal{B}$ deve conter também os fechos de todos os conjuntos G_δ, F_σ, $G_{\delta\sigma}, F_{\sigma\delta}, \ldots$.

Como vimos, toda função μ que satisfaz as 5 condições da Definição 8 é denominada uma **medida exterior de Carathéodory**. Isto corresponde a um sistema de conjuntos mensuráveis e a uma teoria da medida detentora das propriedades desenvolvidas por Carathéodory. Exemplos de conjuntos mensuráveis são os cubos no espaço q-dimensional, conjuntos fechados, conjuntos abertos ou regiões e conjuntos de Borel (que surgem de conjuntos abertos por repetidas aplicações de uniões e intersecções sobre sequências de conjuntos).

Se μ satisfaz somente as 4 primeiras condições da Definição, definimos $m(A) = \inf\{\mu(B_i); A \subset B_i\}$, onde os conjuntos B_i são mensuráveis (relativo a μ) ou são Borelianos. Ambas as funções combinadas (μ e m) satisfazem todas as 5 condições da Definição 8 e, portanto, são medidas exteriores de Caratheodory.

Nós naturalmente nos restringiremos às medidas exteriores que são idênticas para conjuntos congruentes (conjuntos que apresentam o mesmo diâmetro), ou seja, são idênticas para conjuntos que apresentam o mesmo diâmetro (será definido posteriormente) com relação a uma determinada métrica. Mais ainda, se $\mu(B) = m^p \mu(A)$ sempre que B é similar com A na proporção $m : 1$, ou seja, o diâmetro do conjunto B é m vezes maior do que o diâmetro do conjunto A, então chamamos μ de medida exterior de dimensão p.

Se para qualquer conjunto A, duas medidas exteriores $\mu(A)$, $\nu(A)$ são simultaneamente nulas ou positivas ou infinitas, então nós as denominamos de medidas de mesma ordem ou ordem igual. Em particular, isto é válido se existem duas constantes positivas h, k tais que

$$h\mu(A) \leq \nu(A) \leq k\mu(A)$$

é satisfeita para qualquer subconjunto A. Se $\nu(A)$ é zero, quando $\mu(A)$ é finito (ou se $\mu(A)$ é infinito quando $\nu(A)$ é diferente de zero), então dizemos que μ é de menor ordem e ν de maior ordem. Em particular este é o caso se, para todo $\epsilon > 0$,

$$\nu(A) \leq \epsilon\mu(A).$$

Seja Γ uma coleção de subconjuntos limitados U_i, $i \in \lambda$ (λ conjunto de índices) em um espaço métrico q-dimensional dotado da propriedade de poder cobrir qualquer subconjunto A deste espaço q-dimensional

com uma quantidade finita ou enumerável de conjuntos U_i que possuem diâmetros $d(U_i)$ arbitrariamente pequenos. Seja um número finito não negativo $l(U_i)$ associado a cada conjunto U_i. Então, dado um número positivo ϵ, podemos cobrir A com uma união finita ou enumerável de conjuntos U_i onde $d(U_j) < \epsilon$, para todo j, onde o índice j se refere aos conjuntos U_i que fazem parte da cobertura de A ($A \subset \bigcup U_j$), ou seja, $A \cap U_j \neq \emptyset$, para todo j. O ínfimo das somas $\sum l(U_j)$ que surgem de todas as possíveis combinações de conjuntos U_j que cobrem A, com $d(U_j) < \epsilon$, será denotado por $\mu_\epsilon(A)$, e este pode assumir o valor zero, positivo ou infinito. Conforme ϵ decresce, os gargalos se tornam mais estreitos e $\mu_\epsilon(A)$ tem seu decrescimento interrompido, apresentando o seguinte limite (finito ou infinito):

$$\mu(A) = \lim_{\epsilon \to 0} \mu_\epsilon(A) = \lim_{\epsilon \to 0} \inf \sum l(U_j) \geq \mu_\epsilon(A). \tag{2.11}$$

Esta função de conjunto μ satisfaz as primeiras 4 condições de medida de Carathéodory sem restrições sobre $\mu(U_i)$. Se os U_i são conjuntos de Borel, então esta função de conjunto satisfaz as 5 condições da Definição 8 e a prova disto se encontra na Proposição 1. O $\inf \sum l(U_j)$ existe, pois estamos lidando com subconjuntos de números reais não negativos, ou seja, conjuntos totalmente ordenados com relação à ordem usual, o que garante a existência do ínfimo.

Observação. Para os conjuntos U_i onde a função de conjunto l está definida, temos

$$l(U_i) = \mu(U_i).$$

Observação. Uma função de conjunto nada mais é do que uma medida, ou seja, uma função real estendida l definida sobre uma σ-álgebra $\mathbf{X}$ de subconjuntos de X que satisfaz as seguintes propriedades:

- $l(\emptyset) = 0$,
- $l(U_i) \geq 0$, $\forall\, U_i \in X$,
- l é enumeravelmente aditiva no sentido de que, se $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma coleção disjunta de conjuntos em $\mathbf{X}$, então

$$l\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} l(U_i). \tag{2.12}$$

Como permitimos à função l assumir o valor $+\infty$, ressaltamos que a aparição do valor $+\infty$ no lado direito da Equação (2.12) significa que, ou $l(U_i) = +\infty$ para algum i ou a série de termos não negativos no lado direito de 2.12 é divergente. Se uma função de conjunto não assume o valor $+\infty$, dizemos que ela é finita. Mais geralmente, se existe uma sequência (U_i) de conjuntos em $\mathbf{X}$, com $X = \bigcup U_i$ e tal que $l(U_i) < \infty$ para todo i, então dizemos que l é σ-finita com $\sum_{i=1}^{\infty} l(U_i)$ podendo convergir ou divergir. O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é um exemplo de conjunto com medida l σ-finita.

Proposição 1. *A função de conjunto μ da Equação (2.11) é uma medida que satisfaz as 4 primeiras condições para ser uma medida de Carathéodory.*

Demonstração. Para a condição I, se pegarmos $U_i = \emptyset$ para todo $i \in \mathbb{N}$, então $\emptyset \subset U_1 \cup U_2 \cup \ldots$, e então

$$0 \leq \mu(\emptyset) \leq 0 + 0 + \ldots = 0,$$

pois $\mu(U_i) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$ e $\mu(E) \geq 0$, devido ao fato da função μ ser uma função de conjunto.

Para a condição II, se $B \subset A$ e $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma coleção de conjuntos com $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, então $B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ também. Portanto, $\mu(B) \leq \mu(A)$.

Para a condição III, é suficiente provar a asserção para o caso em que $\mu(U_i) < \infty$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Seja $\epsilon > 0$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, escolhemos uma sequência (U_i^n) de conjuntos tal que

$$A_n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i^n \quad e \quad \sum_{i=1}^{\infty} (U_i^n) \leq \mu(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Como $\{U_i^n, n \in \mathbb{N},\ i \in \mathbb{N}\}$ é uma família enumerável de conjuntos que cobrem o conjunto $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, segue da definição de μ que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \mu(U_i^n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) + \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, a propriedade III está provada.

Para a condição IV é suficiente provar a desigualdade $\mu(A \cup B) \geq \mu(A) + \mu(B)$ sob a hipótese de $\mu(A \cup B) < \infty$ e os conjuntos A e B apresentarem distância positiva entre eles, ou seja, $\delta = d(A, B) > 0$, pois $A \cap B = \emptyset$.

Se $\epsilon > 0$ é dado, seja $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma cobertura de $A \cup B$ tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(U_n) \leq \mu(A \cup B) + \epsilon.$$

Pela forma como foi definida nossa medida μ, podemos assumir que os conjuntos $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ apresentam diâmetros menores do que δ. Neste caso, nenhum conjunto U_i pode conter pontos de ambos os conjuntos A e B, pois a distância entre A e B é $d(A, B) = \delta$. Portanto, podemos dividir os conjuntos U_i em três classes diferentes: a classe dos conjuntos U_j que contêm pontos de A, a classe dos conjuntos U_k que contêm pontos de B e a classe dos conjuntos U_h que não contêm pontos nem de A, nem de B. Partindo desta divisão, ficamos com

$$\mu(A) \leq \sum_j \mu(U_j) \quad \text{e} \quad \mu(B) \leq \sum_k \mu(U_k),$$

de onde concluímos que

$$\mu(A) + \mu(B) \leq \sum_j \mu(U_j) + \sum_k \mu(U_k) + \sum_h \mu(U_h) \leq \sum_n \mu(U_n) \leq \mu(A \cup B) + \epsilon.$$

Portanto, temos que $\mu(A)+\mu(B) \leq \mu(A\cup B)+\epsilon$. Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, nós concluímos que $\mu(A)+\mu(B) \leq \mu(A\cup B)$, como planejávamos mostrar. $\square$

Para a quinta condição, note que para qualquer conjunto A existe um conjunto W contendo A com $\mu(W) = \mu(A)$ e da seguinte forma: W é a intersecção de conjuntos enumeráveis V_i, onde cada um destes conjuntos é representado por uniões de conjuntos enumeráveis U_j, isto é, $W = \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j\right)$. Se os U_j's são conjuntos de Borel, então W é um Boreliano e a quinta condição está satisfeita.

A quinta condição pode ser vista sob uma outra ótica: se $B^* \supset A$, então B^* é uma cobertura do conjunto A, o que acarreta $L(A) \leq L(B) = \inf\{L(B^*); B^* \supset A\}$, pela propriedade III. Como $L(B) = \inf L(B^*); B^* \supset A$, existe $\epsilon > 0$ tal que $L(B) - \epsilon < L(A)$, o que acarreta $L(B) \leq L(A)$. Logo, $L(B) = L(A)$.

Relações Entre Funções de Conjunto

Seja Ξ uma segunda coleção de conjuntos como Γ e, para cada conjunto V_i desta coleção é associado um número finito $m(V_i) \geq 0$. Do mesmo modo como foi feito para o sistema Γ, definimos os números $\nu_\epsilon(A)$, $\nu(A)$ para cada conjunto A do espaço e assumimos que existem as seguintes relações (que serão nomeadas de α) entre estas coleções e as funções de conjunto l e m: para cada conjunto $U_i \in \Gamma$ e para todo número positivo ϵ, existe um conjunto $V_i \in \Xi$ que contém U_i tal que

$$d(V_i) < rd(U_i) + \epsilon, \quad m(V_i) < kl(U_i) + \epsilon, \tag{2.13}$$

onde r, k são duas constantes positivas.

Para cada conjunto $V_i \in \Xi$ e para todo número positivo ϵ, existe um conjunto $U_i \in \Gamma$ que contém V_i tal que

$$d(U_i) < pd(V_i) + \epsilon \quad l(U_i) < qm(V_i) + \epsilon, \tag{2.14}$$

onde p e q são duas constantes positivas.

Prontamente concluímos que

$$\nu_\epsilon(A) \leq k\mu_\epsilon(A), \quad \nu(A) \leq k\mu(A),$$

por (2.13) e

$$\mu_\epsilon(A) \leq q\nu_\epsilon(A), \quad \mu(A) \leq q\nu(A),$$

por (2.14) e cada subconjunto A do espaço que está sendo analisado. Um caso especial surge para $r = k = 1$ quando Γ é uma subcoleção de Ξ e $l(U_i) = m(U_i)$. Então ficamos com $\nu(A) \leq \mu(A)$, analisando 2.13.

Se para as duas coleções de conjuntos Γ e Ξ as equações (2.13) e (2.14) forem válidas, então a seguinte condição é satisfeita para duas constantes positivas h, k:

$$h\mu(A) \leq \nu(A) \leq k\mu(A),$$

e ambas funções de conjunto possuem a mesma ordem, ou seja, $\mu(A)$ apresenta medida μ finita se e somente se $\nu(A)$ apresenta medida finita, $\mu(A) = 0$ se e somente se $\nu(A) = 0$ e $\mu(A) = +\infty$ se e somente se $\nu(A) = +\infty$. Mais ainda, se h=k, então $\nu(A)$ é proporcional a $\mu(A)$ e Ξ consiste de conjuntos de Borel. Assim, a função de conjunto μ restrita aos elementos de Γ também satisfaz a quinta condição de Carathéodory e, para cada conjunto A, existe um conjunto de Borel B contendo A com $\mu(B) = \mu(A)$.

Funções Contínuas e Fecháveis

Definição 13. *A função l, que pode ser concebida como definida para qualquer conjunto limitado, pode apresentar uma das seguintes propriedades:*

I. Para o menor subconjunto fechado $U_i \in \Gamma$ contendo $U \in \Gamma$, temos

$$l(U_i) = l(U).$$

II. Se construirmos uma esfera de raio $\rho > 0$ ao redor de cada ponto pertencente ao conjunto U e se U_ρ denota o conjunto de pontos interiores destas esferas, então temos para um arbitrário $\epsilon > 0$ e $\rho > 0$ suficientemente pequeno,

$$l(U_\rho) < l(U) + \epsilon.$$

Para o caso I, dizemos que a função l é **fechável** *e para o caso II, que ela é contínua, pois ela é equivalente à definição usual de continuidade.*

Proposição 2. *Uma função de conjunto l é contínua se e somente se, a condição II acima é válida.*

Demonstração. Se l é contínua no ponto $U \in \Omega$, para qualquer $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que $d(U, U_\rho) \leq \delta$ implica em $|l(U) - l(U_i)| < \epsilon$, onde d é uma métrica estabelecida em Ω. Como U_ρ denota o conjunto dos pontos interiores cujas esferas cobrem U, temos então que $d(U, U_\rho) = 0 < \delta$, pois $U \subseteq U_\rho$, o que acarreta em $|l(U_\rho) - l(U)| < \epsilon$, ou seja, $l(U_\rho) < l(U) + \epsilon$. Se a condição II for válida, dado um $\epsilon > 0$, conseguimos um U_ρ que cobre U com $l(U_\rho) < l(U) + \epsilon$, ou seja, $|l(U_\rho) - l(U)| < \epsilon$. Como U_ρ cobre U, temos que $d(U_\rho, U) = 0 < \delta$, isto é, $d(U_\rho, U) < \delta$ implica em $|l(U_\rho) - l(U)| < \epsilon$. Portanto, a função l é contínua de acordo com a definição tradicional.

Seja Γ uma coleção de conjuntos de um tipo conhecido. Tomaremos Ξ como sendo ou a coleção de conjuntos fechados U_i ou a coleção de conjuntos abertos U_ρ (onde $\rho > 0$). Como o diâmetro $d(U)$ é também uma função de conjunto fechável e contínua, podemos associar a um dado conjunto $U \in \Gamma$ e $\epsilon > 0$, um conjunto $V = U_i \in \Xi$ ou um conjunto $V = U_\rho \in \Xi$ tal que

$$d(V) = d(U), \quad l(V) = l(U), \tag{2.15}$$

ou no mínimo satisfazendo

$$d(V) < d(U) + \epsilon, \quad l(V) < l(U) + \epsilon. \tag{2.16}$$

Esta relação se baseia na Definição (8) acima, se caracteriza como sendo da forma α mencionada anteriormente e isto implica que para qualquer conjunto A do espaço euclidiano q-dimensional temos

$$\nu(A) \leq \mu(A),$$

onde a medida exterior ν se refere ao sistema Ξ e aplicamos a mesma função de conjunto l nos elementos de Γ e nos elementos de Ξ com A um conjunto pertencendo a uma determinada σ-álgebra (que pode ser uma coleção de conjuntos no espaço euclidiano $\mathbb{R}^p$).

Por outro lado, se Γ é uma coleção de todos os conjuntos limitados, então Ξ é um subcoleção de Γ, devido às Equações (2.15) e (2.16), e então,

$$\mu(A) \leq \nu(A)$$

e chegamos à conclusão de que $\mu(A) = \nu(A)$ é uma medida exterior que também satisfaz a quinta condição de Carathéodory, assegurando que, para qualquer conjunto A, existe um conjunto de Borel B contendo A com $\mu(B) = \mu(A)$. Consequentemente, obtemos o seguinte teorema:

Teorema 8. *Se l é uma função de conjunto contínua e fechável definida para o conjunto limitado U e se A é coberto por conjuntos limitados U_i de maneira finita ou enumerável com diâmetros $< \epsilon$, então*

$$\mu(A) = \lim_{\epsilon \to 0} \inf \sum l(U_i)$$

é uma medida exterior.

Seja a função l contínua e monótona, isto é, se $U \subset V$, então $l(U) \leq l(V)$. Então a função l também é fechável, uma vez que os conjuntos U_is também são fecháveis com U_i o menor conjunto fechado que contém U de acordo com o valor assumido na função de conjunto l, além de U_i ser a intersecção dos conjuntos U_ρ (que são os pontos interiores das esferas de raio $< \rho$ que cobrem o conjunto U_i), com $U, U_i, U_\rho \in \Gamma$.

Sejam Γ e Ξ duas coleções de conjuntos do seguinte tipo: entre $U \in \Gamma$ e $U_\rho \in \Gamma$, sempre existe um conjunto $V \in \Xi$ e entre $V \in \Xi$ e $V_\rho \in \Xi$, sempre existe um conjunto $U \in \Gamma$, ou seja, $U \subset V \subsetneq U_\rho$ e $V \subset U \subsetneq V_\rho$ respectivamente.

Como o diâmetro $d(U)$ é uma função contínua e monótona, para cada $U \in \Gamma$ e $\epsilon > 0$ podemos encontrar $V \in \Xi$ tal que

$$d(V) < d(U) + \epsilon, \quad l(V) < l(U) + \epsilon,$$

e consequentemente $\nu(A) \leq \mu(A)$. Reciprocamente, como $d(V)$ é uma função contínua e monótona, para cada $V \in \Xi$ e $\epsilon > 0$, podemos encontrar um $U \in \Gamma$ tal que

$$d(U) < d(V) + \epsilon, \quad l(U) < l(V) + \epsilon$$

o que acarreta em $\mu(A) \leq \nu(A)$ e as funções de conjunto $\mu(A)$, $\nu(A)$ coincidem com respeito às coleções de conjuntos Γ e Ξ e a função de conjunto l.

Isto é válido, por exemplo, se U é fechado e V são esferas abertas no espaço q-dimensional. Os valores $\mu(A)$, $\nu(A)$ baseados nesta construção se caracterizam como medidas exteriores sobre a função de conjunto l, sem restrições, pois estamos lidando com conjuntos de Borel e somente $l \geq 0$ é requerido. Entretanto, em geral, não é possível inferir esta equivalência, pois nem sempre teremos conjuntos de Borel ou uma função de conjunto $l > 0$ para qualquer elemento do domínio.

O mesmo é válido se substituirmos as esferas por cubos ou paralelepípedos ou conjuntos q-dimensionais geométricos no geral. Para funções de conjunto contínuas e monótonas l, não faz diferença se estes entes geométricos são abertos ou fechados (com ou sem fronteira), pois as fronteiras destes conjuntos são conjuntos de medida nula (Definição 12 abaixo) e não acrescentam valor algum à função l.

Definição 14. *Um* **bloco q-dimensional** $A \subset \mathbb{R}^q$ *é um produto cartesiano*

$$A = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_q, b_q]$$

de q intervalos compactos $[a_i, b_i]$, chamados suas arestas. O produto cartesiano $\prod_{i=1}^{q} (a_i, b_i)$ chama-se bloco q-dimensional aberto. Quando todas as arestas do bloco A têm o mesmo comprimento $a = b_i - a_i$, diz-se que A é um cubo q-dimensional. Quando $q = 1$, os blocos são simplesmente intervalos. Se $n = 2$, o bloco reduz-se a um retângulo e o cubo a um quadrado.

Definição 15. *Diz-se que* **um conjunto $A \subset \mathbb{R}^q$ tem medida q-dimensional nula segundo Lebesgue**, *e escreve-se med.$A = 0$, quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, é possível obter uma cobertura enumerável $A \subset B_1 \cup \ldots \cup B_k \cup \ldots$ por meio de blocos abertos $B_k \subset \mathbb{R}^q$ tais que $\sum_{k=1}^{\infty} B_k < \epsilon$.*

Vejamos alguns exemplos de funções de conjunto.

Exemplo 1. *Considere $\mathcal{F}$ um sistema de subconjuntos limitados U. A função diâmetro d, definida em $\mathcal{F}$, é dada por:*

$$\begin{array}{rccl} d & : & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & & U & \longmapsto & d(U) = \sup\{dist(u_0, u_1); u_0, u_1 \in U\}, \end{array}$$

onde $dist(u_0, u_1)$ é a distância entre os pontos $u_0, u_1 \in U$ para uma determinada métrica. $\Diamond$

Exemplo 2. *Considere $\mathcal{F}$ um sistema de subconjuntos limitados U do plano. Defina a função Δ em $\mathcal{F}$ por:*

$$\begin{aligned} \Delta \; : \; \mathcal{F} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ U &\longmapsto \Delta(U) = \sup\{area(u_0, u_1, u_2); u_0, u_1, u_2 \in U\}, \end{aligned}$$

onde $area(u_0, u_1, u_2)$ é a área do triângulo formado pelos vértices de pontos $u_0, u_1, u_2 \in U$. $\Diamond$

Exemplo 3. *Considere $\mathcal{F}$ um sistema de subconjuntos limitados U do espaço $\mathbb{R}^p$. Defina a função Δ_p por:*

$$\begin{aligned} \Delta_p \; : \mathcal{F} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ U &\longmapsto \Delta_p(U) = sup\{vol(u_0, u_1, \ldots, u_p); u_0, u_1, \ldots, u_p \in U\}, \end{aligned}$$

onde $vol(u_0, u_1, \ldots, u_p)$ representa o volume do paralelepípedo p-dimensional formado pelos vértices de pontos $u_0, u_1, \ldots, u_p \in U$. $\Diamond$

Os exemplos 1 e 2 constituem casos particulares do exemplo 3 para $p = 1$ e $p = 2$ respectivamente. Uma medida exterior relacionada com $l = \Delta_p$, ou seja, a medida de um conjunto U que é dada pelo supremo dos somatórios dos volumes p-dimensionais de uma coleção de conjuntos que formam uma cobertura para este conjunto U, com o volume destes conjuntos tendendo a zero (conforme a medida exterior $\mu(A)$ do Teorema 1), apresenta dimensão p. Uma medida exterior relacionada com Δ_q é invariante com relação às transformações que preservam comprimento e também com transformações que preservam volume em um espaço q-dimensional. $\Diamond$

Exemplo 4. (Noção da medida de Jordan-Peano).

Mais detalhes sobre esta medida, consultar a Referência [2].

Definição 16. *Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Nós consideraremos produtos de intervalos limitados.*

$$C = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times, \ldots, \times [a_n, b_n),$$

que são fechados à esquerda e abertos à direita, ou seja, são conjuntos semiabertos. Este conjunto será denominado de **retângulo n-dimensional**. *Definimos a medida de Jordan em tal retângulo como sendo o produto do comprimento dos intervalos:*

$$J(C) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\ldots(b_n - a_n).$$

A partir disto, consideramos os conjuntos simples, algumas vezes chamados de polirretângulos que são reuniões finitas de retângulos,

$$S = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k$$

para k inteiro positivo.

Não podemos definir a medida de Jordan do polirretângulo como sendo a simples soma das medidas dos retângulos individuais, pois a intersecção destes conjuntos pode ser não vazia, mas podemos redefinir o conjunto S como a união de retângulos cuja intersecção dois a dois é vazia, ou seja, uma união disjunta.

Daí a medida de Jordan J do conjunto S é definida como a soma das medidas de Jordan dos retângulos disjuntos, ou seja,

$$J(S) = J(C_1) + J(C_2) + \ldots + J(C_i),$$

com i inteiro positivo. Esta medida está bem definida independente da forma como a reunião disjunta dos retângulos é estabelecida. Para conjuntos mais gerais, a medida é calculada da seguinte maneira:

$$J_i(S) = \sup_{B \subset S} J(B)$$

onde B é um retângulo contido em S. Nesse caso, J_i é denominada de medida interior de Jordan.

$$J_e(S) = \inf_{B \supset S} J(B)$$

onde B é um retângulo contendo S. Nesse caso, J_e é a medida exterior de Jordan. Um conjunto S é Jordan mensurável se $J_i = J_e$. $\Diamond$

Conjunto de Vitali

O conjunto de Vitali é um exemplo elementar de um conjunto de números reais que não é Lebesgue mensurável, o que implica este conjunto em não ser também Jordan mensurável. O Teorema de Vitali é um teorema de existência que afirma a existência de tais conjuntos. Existe uma quantidade não enumerável de conjuntos de Vitali.

Um conjunto de Vitali é um subonjunto do intervalo $[0,1]$ de números reais tais que, para cada número real r, existe exatamente um número $v \in V$ tal que $v - r$ é um número racional. Conjuntos de Vitali existem porque os números racionais $\mathbb{Q}$ formam um subgrupo normal dos números reais $\mathbb{R}$ com relação à adição, e isto permite a construção de um grupo quociente aditivo $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ que é o grupo formado pelas classes de equivalência de números racionais como um subgrupo dos números reais com relação à adição. O grupo $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ consiste de classes disjuntas de números de $\mathbb{Q}$ no sentido de que, cada elemento do grupo quociente é um conjunto da forma $\mathbb{Q} + r$ para algum $r \in \mathbb{R}$, A quantidade não enumerável de elementos de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ particiona $\mathbb{R}$. Cada elemento de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ intersecciona $[0,1]$ e através da aplicação do axioma da escolha, garantimos a existência de um subconjunto do intervalo $[0,1]$ contendo exatamente um elemento representante de cada classe de equivalência de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Um conjunto formado desta maneira é denominado de conjunto de Vitali. Todo conjunto de Vitali V é não enumerável e $v - u$ é irracional para qualquer $u, v \in V$ com $u \neq v$.

Um conjunto de Vitali não é mensurável. Para mostrar isto, assumimos que V é mensurável e chegamos em um absurdo. Seja $q_1, q_2, \ldots$ uma enumeração dos números racionais (por exemplo, $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$) em $[-1,1]$. A partir da construção de V, notamos que os conjuntos transladados $V_k = V + q_k = \{v + q_k; v \in V\}$, $k = 1, 2, \ldots$, são dois a dois disjuntos e notamos ainda que

$$[0,1] \subseteq \bigcup_k V_k \subseteq [-1,2].$$

Para mostrar a primeira inclusão, consideramos qualquer número real $r \in [0,1]$ e seja v um elemento representante em V da classe de equivalência $[r]$; então, $r - v = q$ para algum número racional $q \in [-1,1]$, o que implica que r está em V_k.

Aplicando a medida de Lebesgue a estas inclusões e usando a σ-aditividade:

$$1 \leq \sum_k \lambda(V_k) \leq 3.$$

A medida de Lebesgue é invariante por translações, o que acarreta $\lambda(V_k) = \lambda(V)$ e portanto,

$$1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(V) \leq 3.$$

Mas isto é impossível de ocorrer. Somando cópias infinitas da constante $\lambda(V)$ conduz a zero ou ∞, em conformidade com o valor da constante ser 0 ou positiva. Em nenhum destes casos a soma se encontra no intervalo $[1,3]$. Portanto V não pode ser mensurável e a medida de Lebesgue λ não pode ser definida para nenhum valor de $\lambda(V)$.

Um outro conjunto que não é Jordan mensurável é o conjunto gordo de Cantor ou conjunto de Smith-Volterra-Cantor, cuja descrição em detalhes foge do escopo deste trabalho. $\Diamond$

Exemplo 5. *O volume de um conjunto U no espaço q-dimensional é definido da seguinte maneira:*

$$vol(U) = \inf\{vol(A); U \subset A\},$$

onde o ínfimo é tomado sobre as esferas A (ou cubos, ou paralelepípedos, ou triângulos generalizado), que contém o conjunto U, ou seja, $U \subset A$, e $vol(A)$ representa o volume de A. $\Diamond$

Exemplo 6. *Se um conjunto U é coberto por um número finito de paralelepípedos q-dimensionais seu volume exterior (no sentido de Jordan-Peano, e não no sentido da medida de Lebesgue) é dado por*

$$vol(U) = inf\left\{\sum_i vol(V_i); U \subset \bigcup_i V_i\right\},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as famílias de paralelepípedos q-dimensionais $(V_i)_i$'s que cobrem o conjunto U. $\Diamond$

Exemplo 7. *O volume q-dimensional, no sentido de Jordan ou Lebesgue, do menor conjunto convexo U_c que contém o conjunto U é dado por:*

$$vol(U) = \inf\{vol(U_c); U \subset U_c\},$$

onde $vol(U_c)$ é o volume do conjunto convexo U_c que contém U. $\Diamond$

A prova de que estas funções de conjuntos são contínuas se reduz aos métodos e conceitos de geometria elementar exceto para os últimos dois casos, que exigem considerações detalhadas de conjuntos convexos.

Adicionalmente, notamos que toda função não negativa, contínua e monótona $\lambda(t)$ com $t \geq 0$, combinada com uma outra função de conjunto $l(.)$ não negativa, contínua e monótona, dá origem à uma nova função de conjunto $\lambda(l(.))$. Podemos combinar também outras funções de conjunto de modo análogo e, se a escolha do sistema Γ for composta por conjuntos abertos, então há uma grande gama de possibilidades para se definir medidas exteriores, de acordo com a definição de Carathéodory. Além das considerações abaixo, que estão restritas às funções diâmetro d, nós daremos um ligeiro exemplo dos exemplos 2 e 4: se cobrirmos o conjunto planar A com triângulos Δ_ϵ de diâmetros menores do que ϵ, então uma medida exterior (de dimensão $\frac{2}{3}$) é obtido por

$$\mu(A) = \lim_{\epsilon \to 0} \inf \sum \Delta_n^{\frac{2}{3}},$$

que, de acordo com a afirmação de W. Blaschke, que se encontra no artigo *Ubber Affine Geometrie III, Eine Minimumeigenschaft der Ellipse (Leipz. Berichte* 69*, 1917, p.12)*, leva a um comprimento afim para curvas convexas de segmentos

$$\int k^{\frac{1}{3}} ds$$

onde k representa a curvatura e s o comprimento de arco.

Capítulo 3

Dimensão de Hausdorff

Este capítulo possui o intuito de prover uma visão geral sobre medida e dimensão de Hausdorff, sobre como ela é definida e como se trabalha com ela. Conceitos sobre variedades diferenciáveis serão introduzidos juntamente com proposições e exemplos sobre a relação existente entre funções Lipschitzianas e medida de Hausdorff. Exemplos como o conjunto de Cantor e a poeira de Cantor serão explanados.

Definição 17. *Uma* δ**-cobertura** $\{U_i\}$ *de um conjunto* F *é uma família* $(U_i)_{i\in\lambda}$*, onde* λ *é um conjunto de índices,* $F \subset \bigcup U_i$*, e cada conjunto* U_i *tem diâmetro menor do que* δ*, ou seja,* $d(U_i) < \delta$*.*

Suponha que F seja um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e s um número real não negativo. Para qualquer $\delta > 0$, definimos

$$\Omega^s_\delta(F) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} d(U_i)^s \,;\ \{U_i\}\,\text{é uma } \delta\text{-cobertura de F}\right\}. \tag{3.1}$$

Portanto, olhamos para todas as coberturas de F formadas por conjuntos de diâmetros menores ou iguais a δ e procuramos minimizar a soma dos diâmetros elevados às potências s. Conforme δ decresce, a classe das coberturas admimissíveis de F é reduzida e então, o ínfimo de $\Omega^s_\delta(F)$ aumenta, aproximando-se do limite para $\delta \to 0$. Escrevemos

$$\Omega^s(F) = \lim_{\delta\to 0} \Omega^s_\delta(F). \tag{3.2}$$

Este limite existe para qualquer subconjunto F de $\mathbb{R}^n$, se considerarmos que o valor do limite possa ser 0 ou $+\infty$ (o que geralmente ocorre, sendo 0 para o conjunto vazio e $+\infty$ se a série $\sum_{i=1}^{\infty} d(U_i)^s$ diverge). Denominamos $\Omega^s(F)$ de **medida** s**-dimensional de Hausforff do conjunto** F. O limite em (3.2) nunca poderá ser um número real não negativo, pois $d(U_i) \geq 0$, para todo $i \in \lambda$, o que acarreta no ínfimo ser um número real não negativo.

Ω^s é uma medida, pois as seguintes condições se verificam:

- $\Omega^s(\emptyset) = 0$,

- $E \subset F \Rightarrow \Omega^s(E) \leq \Omega^s(F)$,
- Se $\{F_i\}$ é uma coleção enumerável de conjuntos, então

$$\Omega^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \Omega^s(F_i). \tag{3.3}$$

A desigualdade (3.3) se torna uma igualdade se a coleção $\{F_i\}_i$ é composta de conjuntos de Borel disjuntos.

Observação. A prova de que Ω^s é uma medida segue as mesmas etapas e passos da demonstração da Proposição (1) situada nas páginas 7 e 8.

A partir de agora neste capítulo, o diâmetro de um conjunto U representado por $d(U)$ será notado por $|U|$. As medidas de Hausdorff generalizam as ideias familiares de comprimento, área e volume, onde pode ser mostrado que, para subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, a medida n-dimensional de Hausdorff é apenas a medida n-dimensional de Lebesgue acompanhada de uma constante (o volume n-dimensional usual). Mais precisamente, se F é um subconjunto de Borel de $\mathbb{R}^n$, então

$$\Omega^n(F) = c_n^{-1} vol^n(F)$$

onde c_n é o volume n-dimensional de uma bola de diâmetro 1 e então,

$$c_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^n\left(\frac{n}{2}\right)!}$$

se n é par e

$$c_n = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{n!}$$

se n é ímpar. Similarmente, para conjuntos de dimensões mais baixas de $\mathbb{R}^n$, temos que $\Omega^0(F)$ é o número de pontos em F, $\Omega^1(F)$ dá o comprimento da curva suave F, $\Omega^2(F) = \frac{4}{\pi}\text{área}F$ se F é uma superfície suave, $\Omega^3(F) = \frac{6}{\pi}\text{volume}(F)$ e $\Omega^m(F) = c_m^{-1}\text{volume}^m(F)$ se F é uma superfície m-dimensional de $\mathbb{R}^n$.

Quando se amplia por um fator λ, o comprimento de uma curva é multiplicado por λ, a área de uma região planar é multiplicada por λ^2 e o volume de um objeto em 3 dimensões é multiplicado por λ^3. Generalizando, espaços s-dimensionais com medida de Hausdorff apresentam um fator multiplicativo de λ^s.

As duas proposições seguintes serão muito úteis.

Definição 18. *Uma transformação $S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma* **transformação de similaridade** *se existe um número real $\lambda > 0$ tal que $|S(x) - S(y)| = \lambda|x - y|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, isto é, uma transformação de similaridade transforma conjuntos de $\mathbb{R}^n$ em conjuntos geometricamente similares com todos os comprimentos multiplicados por um fator λ, que pode amplificar ou contrair um determinado conjunto.*

Proposição 3. *Seja S uma transformação de similaridade com um fator de escala $\lambda > 0$. Se $F \subset \mathbb{R}^n$, então*

$$\Omega^s(S(F)) = \lambda^s \Omega^s(F).$$

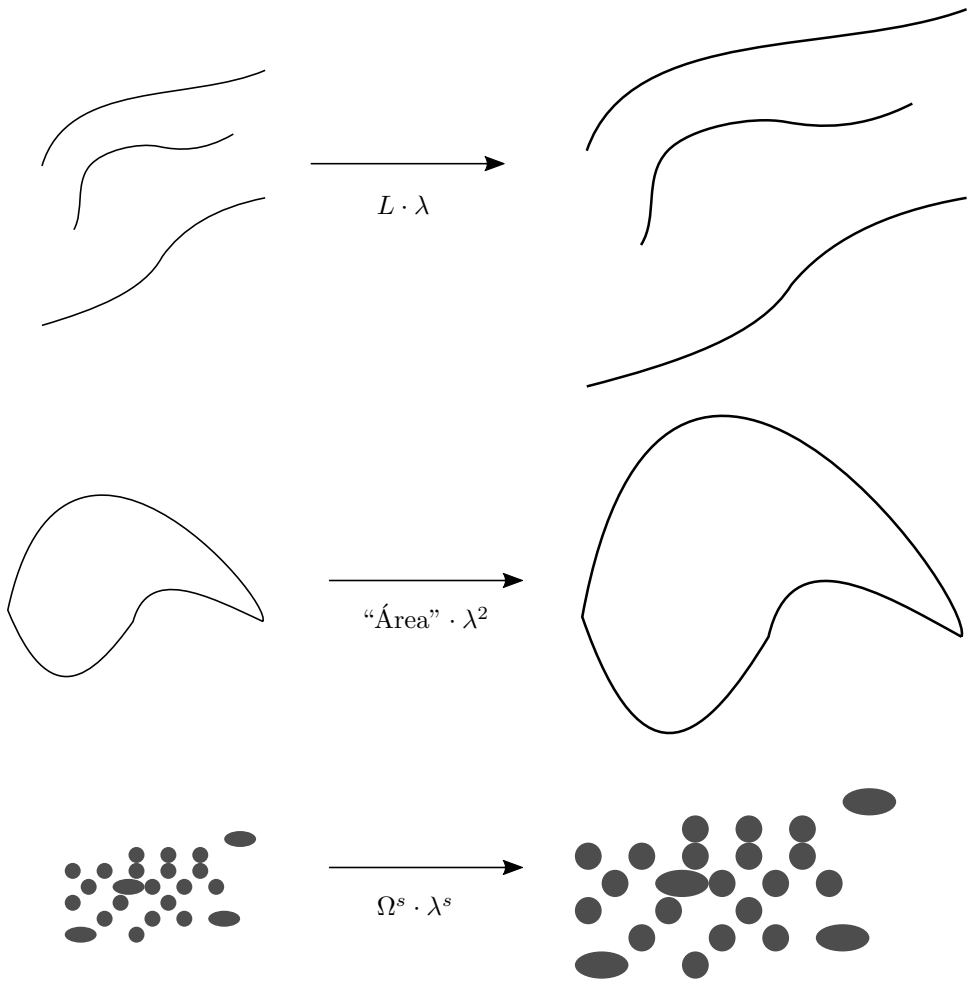


Figura 3.1: Ampliação dos conjuntos por um fator λ para o comprimento, λ^2 para a área e λ^s para a medida s-dimensional de Hausdorff. Fonte: Elaborado pelo autor.

Demonstração. Se $\{U_i\}_i$ é uma δ-cobertura do conjunto F, então $\{S(F)\}$ é uma $\lambda\delta$- cobertura de $S(F)$, acarretando em

$$\sum |S(U_i)|^s = \lambda^s \sum |U_i|^s \Rightarrow \Omega^s_{\lambda\delta}(S(F)) \leq \lambda^s \Omega^s_\delta(F),$$

aplicando o ínfimo. Fazendo $\delta \to 0$ origina $\Omega^s(S(F)) \leq \lambda^s \Omega^s(F)$. Substituindo S por S^{-1}, λ por $\frac{1}{\lambda}$ e F por $S(F)$, origina a desigualdade oposta requerida, provando a proposição. □

Proposição 4. *Sejam $F \subset \mathbb{R}^n$ e $f : F \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma função tais que*

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x-y|^\alpha, \qquad x, y \in F$$

para constantes $c > 0$ e $\alpha > 0$. Então, para cada $s \geq 0$

$$\Omega^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \Omega^s(F). \tag{3.4}$$

Demonstração. Se $\{U_i\}$ é uma δ-cobertura de F, então, como $|f(F \cap U_i)| \leq c|F \cap U_i|^\alpha \leq c|U_i|^\alpha$, segue que $\{f(F \cap U_i)\}$ é uma ϵ-cobertura de $f(F)$, onde $\epsilon = c\delta^\alpha$. Portanto, $\sum_i |f(F \cap U_i)|^{\frac{s}{\alpha}} \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \sum_i |U_i|^s$, e então $\Omega_\epsilon^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \Omega_\delta^s(F)$. Como $\delta \to 0$, então $\epsilon \to 0$, originando a Equação (3.4). □

A condição $|f(x) - f(y)| \leq c|x-y|^\alpha$, $x, y \in F$, é conhecida como condição de Holder com expoente α; tal condição implica que f é contínua. Particularmente importante é o caso $\alpha = 1$, isto é

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x-y|, \quad x, y \in F,$$

quando f é denominada de função Lipschitziana, e

$$\Omega^s(f(F)) \leq c^s \Omega^s(F).$$

Em particular, a desigualdade acima é válida para qualquer função diferenciável com derivada limitada; tal função é necessariamente Lipschitziana como consequência do Teorema do Valor Médio. Se f é uma isometria, isto é, $|f(x) - f(y)| = |x-y|$, então $\Omega^s(f(F)) = \Omega^s(F)$. Portanto, a medida de Hausdorff é invariante com relação à translação (isto é, $\Omega^s(F+z) = \Omega^s(F)$, onde $F + z = \{x+z; x \in F\}$) e também com relação à rotação, como certamente é esperado.

Está claro que, para um dado conjunto $F \subset \mathbb{R}$ e $\delta < 1$, $\Omega_\delta^s(F)$ é não crescente com relação a s, e então $\Omega^s(F)$ também é não crescente. De fato, mais do que isto é verdadeiro: se $t > s$ e $\{U_i\}$ é uma δ-cobertura de F, teremos então que:

$$\sum_i |U_i|^t = \sum_i |U_i|^{t-s} |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s$$

então, extraindo o ínfimo, $\Omega_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} \Omega_\delta^s(F)$. Fazendo $\delta \to 0$, vemos que se $\Omega^s(F) < \infty$ então $\Omega^t(F) = 0$ para $t > s$. Portanto, o gráfico de $\Omega^s(F)$ com relação a s, Figura (3.2), mostra que existe um valor crítico de s no qual $\Omega^s(F)$ salta de ∞ para o valor 0. Este valor crítico é denominado de **dimensão de Hausdorff do conjunto** F e escrito com a seguinte notação: $\dim_H F$ ou também da forma $HD(F)$. Esta dimensão é definida para qualquer conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$. Formalmente,

$$\dim_H F = \inf\{s \geq 0;\ \Omega^s(F) = 0\} = sup\{s;\ \Omega^s(F) = \infty\}.$$

Adotando o supremo do conjunto vazio como o valor 0, ficamos com

$$\Omega^s(F) = \begin{cases} \infty, & \text{se} \quad 0 \leq s < \dim_H(F) \\ 0, & \text{se} \quad s > \dim_H(F). \end{cases}$$

Se $s = \dim_H F$, então $\Omega^s(F)$ pode ser zero, infinito ou satisfazer a seguinte desigualdade:

$$0 < \Omega^s(F) < \infty.$$

Um conjunto de Borel que satisfaz esta última condição é chamado de **conjunto** s. Matematicamente, os conjuntos s são os mais convenientes de se estudar e, afortunadamente, eles aparecem de maneira frequente nos fractais.

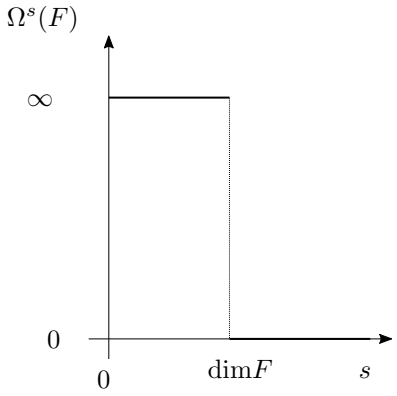


Figura 3.2: Gráfico de $\Omega^s(F)$ versus s para um determinado conjunto F. A dimensão de Hausdorff é o valor de s no qual a função salta de ∞ para 0. Fonte: Elaborado pelo autor.

Exemplo 8. *Como um exemplo inicial muito simples, seja F um disco de raio unitário em $\mathbb{R}^3$. Das propriedades usuais de comprimento, de área e de volume, obtemos $\Omega^1(F) = comprimento(F) = \infty$, $0 < \Omega^2(F) = \frac{4}{\pi} área(F) = 4 < \infty$ e $\Omega^3(F) = \frac{6}{\pi} volume(F) = 0$. Portanto, $\dim_\Omega F = 2$, com $\Omega^s(F) = \infty$ se $s < 2$ e $\Omega^s(F) = 0$ se $s > 2$.*

Definição 19. *Seja M um espaço topológico. Um* **sistema de coordenadas locais ou carta local em** *M é um homeomorfismo $x : U \longrightarrow x(U)$ de um subconjunto aberto $U \subset M$ sobre um aberto $x(U) \subset \mathbb{R}^m$, onde m é a dimensão do homeomorfismo x.*

Definição 20. *Seja $\phi : U_0 \longrightarrow U$ uma parametrização do subconjunto aberto U, contido na superfície $M^m \subset \mathbb{R}^n$. O homeomorfismo inverso $x = \phi^{-1} : U \longrightarrow U_0$ é um sistema de coordenadas locais em M, conforme mostra a Figura 3.4.*

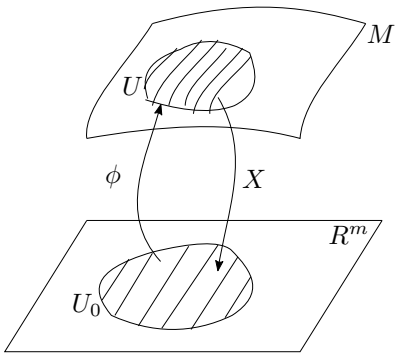


Figura 3.3: Coordenadas Locais. Fonte: Elaborado pelo autor.

Um **atlas de dimensão** *m* **sobre um espaço topológico** *M é uma coleção Υ de sistemas de coordenadas locais $x : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ em M, cujos domínios U cobrem M. Os domínios U do sistema de*

coordenadas $x \in \Upsilon$ são chamados as vizinhanças coordenadas de Υ.

Um espaço topológico M no qual existe um atlas de dimensão m chama-se uma variedade topológica de dimensão m. Em outras palavras, M é uma variedade topológica de dimensão m se, e somente se, cada ponto de M possui uma vizinhança homeomorfa a um aberto do $\mathbb{R}^m$.

Mudança de Coordenadas

Dados os sistemas de coordenadas locais $x : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $y : V \longrightarrow \mathbb{R}^m$ no espaço topológico M, tais que $U \cap V \neq \emptyset$, cada ponto $p \in U \cap V$ apresenta coordenadas $x^i = x^i(p)$ no sistema x e coordenadas $y^i = y^i(p)$ relativamente ao sistema y.

A correspondência $\left(x^1(p), x^2(p), \ldots, x^m(p)\right) \longleftrightarrow \left(y^1(p), y^2(p), \ldots, y^m(p)\right)$ estabelece um homeomorfismo $\phi_{xy} = y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \to y(U \cap V)$ que é chamado mudança de coordenadas.

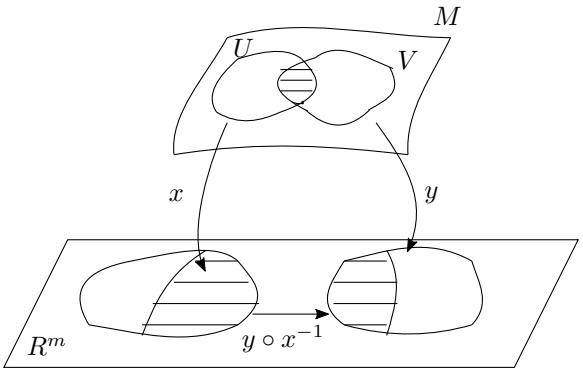


Figura 3.4: Mudança de Coordenadas. Fonte: Elaborado pelo autor.

Definição 21. *Um* **atlas Υ sobre um espaço topológico M diz-se diferenciável de classe C^k** *$(k > 1)$, se todas as mudanças de coordenadas ϕ_{xy} com $x, y \in \Upsilon$ são aplicações de classe C^k. Escreve-se então que $\Upsilon \in C^k$.*

Seja Υ um atlas de dimensão m e classe C^k num espaço topológico M. Um sistema de coordenadas $z : W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ em M diz-se admissível relativamente ao atlas Υ se, para todo sistema de coordenadas locais $x : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, pertencente a Υ, com $U \cap W \neq \emptyset$, as mudanças de coordenadas ϕ_{xz} e ϕ_{zx} são de classe C^k. Em outras palavras, se $\Upsilon \cup \{z\}$ é ainda um atlas de classe C^k em M.

Um atlas Υ de dimensão m e classe C^k, sobre M, diz-se máximo quando contém todos os sistemas de coordenadas locais que são admissíveis em relação a Υ. Todo atlas de classe C^k em M pode ser ampliado, de modo único, até se tornar um atlas máximo de classe C^k: basta acrescentar-lhe todos os sistemas de coordenadas admissíveis.

Definição 22. *Um* **espaço topológico não vazio M é de Hausdorff** *se, dados $x, y \in M$, conseguimos abertos A e B com $x \in A$, $y \in B$ e $A \cap B = \emptyset$.*

Definição 23. *Uma* **variedade diferenciável de dimensão** m **e classe** C^k *é um par ordenado* (M, Υ)*, em que* M *é um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável e* Υ *é um atlas máximo de dimensão* m *e classe* C^k *sobre* M*.*

Definição 24. *Uma* **imersão** *do aberto* $U \subset \mathbb{R}^m$ *no espaço euclidiano* $\mathbb{R}^n$ *é uma aplicação diferenciável* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *tal que, para cada* $x \in U$*, a derivada* $f'(x) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *é uma transformação linear injetora. Evidentemente, isto só pode ocorrer quando* $m \leq n$*.*

Definição 25. *Sejam* M^m *e* N^n *variedades de classe* C^k $(k \geq 1)$*. Diz-se que uma aplicação* $f : M \longrightarrow N$ *é um* **mergulho** *se*

I. f *é uma imersão.*

II. f *é um homeomorfismo de* M *sobre o subespaço* $f(M) \subset N$*.*

Uma subvariedade M^m *de classe* C^k *de uma variedade* N^n *de classe* C^r $(r \geq k)$ *é um subconjunto* $M \subset N$*, com a topologia induzida pela de* N*, e dotado de uma estrutura de variedade* C^k *tal que a aplicação de inclusão* $i : M \longrightarrow N$ *é um mergulho de classe* C^k*. As três condições abaixo devem ser satisfeitas por uma subvariedade:*

I. M *é uma variedade de classe* C^k*.*

II. $M \subset N$ *e a topologia de* M *é a induzida pela de* N*.*

III. Para cada $p \in M$*, existem sistemas de coordenadas* $y : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *em* N *e* $x : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *em* M *tais que* $p \in U \subset V$ *e* $y \circ x^{-1} : x(U) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *é uma imersão de classe* C^k*, ou seja,* $y \circ x^{-1}$ *é necessariamente um mergulho, pois a topologia de* U *é a induzida pela de* V*.*

Intuitivamente, M *está "situada" em* N *assim como uma superfície de classe* C^k *em* $\mathbb{R}^n$*.*

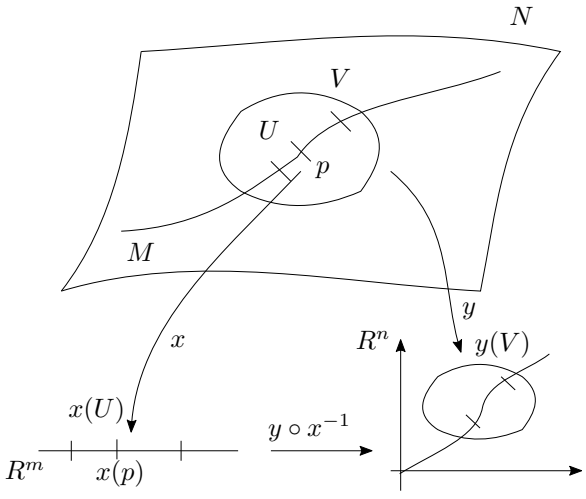


Figura 3.5: Subvariedades. Fonte: Elaborado pelo autor.

Definição 26. *Uma aplicação* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$*, definida no aberto* $U \subset \mathbb{R}^m$*, diz-se* **diferenciável no ponto**

$a \in U$ quando existe uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(a+v) - f(a) = T.v + r(v), \text{ onde } \lim_{v \to 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0. \tag{3.5}$$

Aqui, supõe-se tacitamente que $a + v \in U$, para que $f(a+v)$ tenha sentido. Como U é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $|v| < \delta \Longrightarrow a + v \in U$. A igualdade acima é a definição do resto $r(v)$. Uma vez dada T, a dierenciabilidade de f no ponto a tem a sua essência na afirmação de que $r(v)$ é infinitésimo em relação a v, o que se exprime com $\lim_{v \to 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0$. Ou, em termos explícitos: para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |v| < \delta \Longrightarrow |r(v)| < \epsilon |v|$.

A dimensão de Hausdorff satisfaz as seguintes propriedades:

(i) Monotonicidade. Se $E \subset F$, então $\dim_H E \leq \dim_H F$. Isto é imediato da propriedade de medida da qual $\Omega^s(E) \leq \Omega^s(F)$ para cada s.

(ii) Estabilidade enumerável. Se $F_1, F_2, \ldots$, é uma sequência enumerável de conjuntos, então $\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \leq i < \infty} \{\dim_H F_i\}$. Certamente, $s = \dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \geq \dim_H F_j$ para cada j, concluído a partir da propriedade de monotonicidade (i). Por outro lado, se $s > \dim_H F_i$ para todo i, então $\Omega^s(F_i) = 0$, o que acarreta $\Omega^s(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = 0$, fornecendo a desigualdade oposta.

(iii) Conjuntos enumeráveis. Se F é enumerável, então $\dim_H F = 0$. Se F_i é composto por um único ponto temos $\Omega^0(F_i) = 1$ e a $\dim_H F_i = 0$. Assim, usando a propriedade de estabilidade enumerável (ii) obtemos $\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = 0$.

(iv) Conjuntos abertos. Se $F \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, então $\dim_H F = n$. O conjunto F contém uma bola n-dimensional de volume positivo e, portanto, $\dim_H F \geq n$, ao mesmo tempo que F está contido em uma união enumerável de bolas, o que acarreta $\dim_H F \leq n$, usando as propriedades de estabilidade enumerável (ii) e de monotonicidade (i).

(v) Conjuntos **"suaves"**. Seja f uma aplicação que leva um subconjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ em uma subvariedade $F \subset \mathbb{R}^n$. Se o conjunto F é **suave**, ou seja, se a função f é continuamente diferenciável (de classe C^{∞}), as subvariedades m-dimensionais de $\mathbb{R}^n$ apresentam $\dim_H F = m$. Em particular, curvas suaves apresentam dimensão 1 e superfícies suaves apresentam dimensão 2. Essencialmente, isto pode ser deduzido da relação entre as medidas de Hausdorff e Lebesgue.

Proposição 5. *Seja $F \subset \mathbb{R}^n$ e suponha que $f : F \to \mathbb{R}^m$ satisfaz à condição de Holder*

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x-y|^{\alpha}, \quad x, y \in F.$$

Então $dim_H f(F) \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right) dim_H F$.

Demonstração. Se $s > \dim_H F$ então pela Proposição 3, $\Omega^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \Omega^s(F) = 0$, o que implica em $dim_H f(H) \leq \frac{s}{\alpha}$ para todo $s > dim_H F$, de acordo com a definição de dimensão de Hausdorff, pois a

transição da medida de Hausdorff de ∞ até 0 ocorreu antes da $dim_H f(F)$ assumir o valor $\frac{s}{\alpha}$. Portanto, $dim_H f(F) \leq \frac{s}{\alpha}$. $\square$

Corolário 1. *I. Se $f : F \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação Lipschitziana, então $dim_H f(F) \leq dim_H F$.*

II. Se $f \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação bi-Lipschitziana, isto é,

$$c_1|x-y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x-y| \quad x, y \in F$$

onde $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$, então $dim_H f(F) = dim_H F$.

Demonstração. A primeira parte segue da Proposição (4) adotando $\alpha = 1$. Aplicando isto novamente para $f^{-1} : f(F) \to F$ origina a outra desigualdade requerida para a segunda parte. $\square$

Este corolário revela a propriedade fundamental da dimensão de Hausdorff: a dimensão de Hausdorff é invariante sob a ação de transformações bi-Lipschitzianas. Portanto, se dois conjuntos apresentam dimensões de Hasudorff diferentes, então não pode existir uma função bi-Lipschitizana que leva um conjunto ao outro. Esta situação é semelhante à da topologia, onde vários invariantes (tais como homotopia e homologia de grupos) são usados na distinção de conjuntos que não são homeomorfos: se um invariante topológico de dois conjuntos difere, então estes conjuntos não podem ser homeomorfos um ao outro.

Em topologia, dois conjuntos são considerados iguais se existe um homeomorfismo entre eles. Uma aproximação com relação à geometria fractal é considerar dois conjuntos como iguais se existe uma função bi-Lipschitziana entre eles. Os invariantes topológicos são usados para distinguir entre dois conjuntos não homeomorfos e, nós podemos procurar por parâmetros (incluindo dimensão) para distinguir entre dois conjuntos que não são bi-Lipschitz equivalentes. Como transformações bi-Lipschitzianas são necessariamente homeomorfismos, os parâmetros topológicos fornecem uma base para esta direção e a dimensão de Hausdorff fornece outras características de distinção entre os fractais.

Em geral, só a dimensão de um conjunto revela muito pouco sobre propriedades topológicas. Entretanto, todo conjunto de dimensão menor do que 1 é necessariamente tão esparso que se torna totalmente desconexo, ou seja, pontos do conjunto tomados dois a dois não pertencem à mesma componente conexa. Isto é o que se encontra na proposição a seguir.

Proposição 6. *Um conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ com $dim_H F < 1$ é totalmente desconexo.*

Demonstração. Sejam x e y pontos distintos de F. Definimos uma função $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ por $f(z) = |z - x|$. f não aumenta as distâncias, pois

$$|f(z) - f(w)| = ||z-x| - |w-x|| \leq |(z-x) - (w-x)| = |z-w|$$

obtendo do corolário 1 que $dim_H f(F) \leq dim_H F < 1$. Portanto $f(F)$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$ de medida Ω^1 ou comprimento zero, acarretando um conjunto complementar denso. Escolhendo r com $r \notin f(F)$ e $0 < r < f(y)$ segue que

$$F = \{z \in F : |z - x| < r\} \cup \{z \in F : |z - x| > r\}.$$

Portanto, F é a reunião de dois conjuntos abertos disjuntos com x em um deles e y no outro. Então, x e y se situam em diferentes componentes conexas de F. □

Exemplo 9. *Seja F o conjunto correspondente à poeira de Cantor (Figura 3.6), construído a partir de um quadrado unitário. Em cada estágio da construção, os quadrados são divididos em 16 quadrados, cujos lados apresentam $\frac{1}{4}$ do comprimento do lado do quadrado imediatamente anterior, sendo que o mesmo padrão de divisão é mantido para os quadrados subsequentes. Então, $1 \leq \Omega^1(F) \leq \sqrt{2}$, o que acarreta $\dim_\Omega F = 1$.*

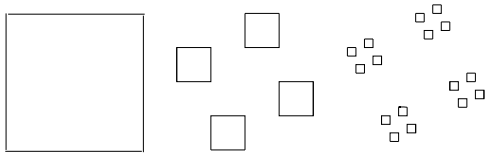


Figura 3.6: Construção da poeira de Cantor ($\dim_H F = 1$). Fonte: Elaborado pelo autor.

Observe que E_k, o k-ésimo estágio de construção, consiste de 4^k quadrados dotados de lados de tamanho 4^{-k} e diâmetro $4^{-k}\sqrt{2}$. Considerando os quadrados de E_k como sendo uma δ-cobertura de F, onde $\delta = 4^{-k}\sqrt{2}$, obtemos dessa forma a estimativa $\Omega^1_\delta(F) \leq 4^k 4^{-k}\sqrt{2}$ para o ínfimo definido em 3.1. Como $k \to \infty$, então $\delta \to 0$, originando $\Omega^1(F) \leq \sqrt{2}$. Para a estimativa inferior, seja proj a projeção ortogonal sobre o eixo x. A projeção ortogonal não aumenta distâncias, ou seja, $|proj(x) - proj(y)| \leq |x - y|$ se x, $y \in \mathbb{R}^2$ e então, proj é uma função Lipschitziana. Devido à estrutura da construção de F, a projeção de F sobre o eixo x ($proj(F)$) é o intervalo unitário $[0,1]$. Usando a desigualdade $\Omega^s(f(F)) \leq c^s \Omega^s(F)$, ou seja 3.4, obtemos

$$1 = comprimento\,[0,1] = \Omega^1([0,1]) = \Omega^1(projF) \leq \Omega^1(F). \ \Diamond$$

Conjunto de Cantor

Exemplo 10. *A dimensão de Hasudorff do conjunto de Cantor F é $dim_H F = \frac{log2}{log3} = 0.6309\ldots$.*

A noção heurística para a obtenção da dimensão do conjunto de Cantor é a seguinte: o conjunto de Cantor é dividido em uma parte esquerda $F_L = F \cap \left[0, \frac{1}{3}\right]$ e uma parte direita $F_R = F \cap \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Claramente ambas as partes são geometricamente similares à F, mas com uma escala de razão $\frac{1}{3}$, e $F = F_L \cup F_R$ uma união disjunta. Portanto, para qualquer s,

$$\Omega^s(F) = \Omega^s(F_L) + \Omega^s(F_R) = \left(\frac{1}{3}\right)^s \Omega^s(F) + \left(\frac{1}{3}\right)^s \Omega^s(F).$$

Assumindo que no valor crítico $s = dim_H F$ temos $0 < \Omega^s(F) < \infty$ podemos dividir a expressão acima por $\Omega^s(F)$ a fim de obter



Figura 3.7: Construção do conjunto de Cantor F através de repetidas remoções da terça parte intermediária dos intervalos. Note que tanto a parte esquerda como a direita de F são cópias de F com um fator de escala de $\frac{1}{3}$. Fonte: Elaborado pelo autor.

$$1 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^s,$$

o que acarreta $s = \frac{log2}{log3}$. $\diamond$

Para enunciarmos o próximo teorema precisaremos da seguinte definição

Definition 3.0.1. *Seja E um subconjunto de um espaço métrico (X, d). Seja ν uma classe de subconjuntos de X tais que para todo $\epsilon > 0$ e todo $x \in E$ existe algum subconjunto $U \in \nu$ com $x \in U$ e $diam(U) < \epsilon$. Uma família ν satisfazendo essas condições é chamada uma classe de Vitali para E.*

Teorema 9 (Teorema da Cobertura de Vitali para Medida de Lebesgue)**.** *Seja $E \subset \mathbb{R}$ um conjunto mensurável que apresenta medida de Lebesgue finita, e seja ν uma classe de Vitali para E consistindo de subconjuntos fechados de $\mathbb{R}$. Então existe uma subcoleção disjunta finita ou infinita enumerável $\{U_j\} \subset \nu$ tal que*

$$\Omega_d\left(E \setminus \bigcup_j U_j\right) = 0.$$

Teorema 10 (Teorema da Cobertura de Vitali para Medida de Hausdorff)**.** *Seja H^s a medida s-dimensional de Hausdorff, seja $E \subset \mathbb{R}$ um conjunto H^s- mensurável e ν uma classe de conjuntos fechados para E. Então existe uma subcoleção disjunta finita ou infinita enumerável $\{U_j\} \subset \nu$ tal que*

$$\Omega^s\left(E \setminus \bigcup_j U_j\right) = 0 \text{ ou } \sum_j diam\,(U_j)^s = \infty.$$

Estes dois teoremas mencionados acima (Teoremas 2 e 3) não serão provados neste trabalho.

Definição 27. *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ tem* **medida nula** *($med.X = 0$) quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, for possível obter uma sequência de cubos m-dimensionais abertos $C_1, C_2, \ldots, C_i, \ldots$ tais que $X \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ e $\sum_{i=1}^{\infty} vol.C_i < \epsilon$.*

Definição 28. *Um conjunto limitado $X \subset \mathbb{R}^m$ é J-***mensurável** *(mensurável segundo Jordan) quando, tomando-se um bloco $A \subset \mathbb{R}^m$ que contenha X, a função característica $\chi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é integrável. Quando X é J-mensurável, seu volume é, por definição, a integral de sua função característica:*

$$vol.X = \int_A \chi_X(x)\, dx.$$

Teorema 11. *Uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ limitada no bloco $A \subset \mathbb{R}^m$, é integrável se, e somente se, o conjunto D_f dos seus pontos de descontinuidade tem medida nula.*

O teorema acima não será provado neste presente trabalho e a demonstração pode ser encontrada na Referência [10], páginas 362-364.

Teorema 12. *Um conjunto limitado $X \subset \mathbb{R}^m$ é J-mensurável se, e somente se, sua fronteira δX tem medida nula.*

Demonstração. Dado o bloco $A \supset X$ em $\mathbb{R}^m$, seja D o conjunto dos pontos de descontinuidade da função característica $\chi_X : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Evidentemente, $D \subset \delta X$. Por outro lado, um ponto de δX que não seja uma descontinuidade de χ_X deve pertencer a δA. Assim, podemos escrever $\delta X = D \cup (\delta X \cap \delta A)$. Se $X \subset int.A$ então $\delta X = D$. Como δA (reunião das faces próprias do bloco A) tem medida nula, segue-se que $med.\delta X = 0 \Longleftrightarrow med.D = 0$. Em particular, o fato de X ser J-mensurável independe do bloco A tomado na definição. □

Exemplo 11. *Seja $X \subset A$ um subconjunto tal que X e $A \setminus X$ são ambos densos no bloco A. (isto é, todo subconjunto aberto de A) contém pontos de X e de $A \setminus X$. Um exemplo seria $X =$conjunto dos pontos de A cujas coordenadas são números racionais). A função característica do subconjunto X é $\chi_X : A \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $\chi_X(x) = 0$ se $x \notin X$ e $\chi_X(x) = 1$ se $x \in X$. Para toda partição P do bloco A e para todo bloco $B \in P$, temos $m_B = 0$ e $M_B = 1$. Segue-se que $s(\chi_X; P) = 0$ e $S(\chi_X; P) = vol.A$, seja qual for a partição P. Assim, a função χ_X não é integrável.* ◊

Exemplo 12. *Um conjunto não compacto de medida nula nem sempre é J-mensurável: o conjunto dos pontos de um bloco A que têm coordenadas racionais é enumerável, logo tem medida nula mas não é J-mensurável, como se viu no Exemplo (11). Mas se $X \subset \mathbb{R}^m$ é J-mensurável e tem medida nula (ou, mais geralmente, tem interior vazio) então seu volume deve ser zero pois, como nenhum bloco está contido em X, temos $vol.int.X = 0$. Assim, se $X \subset \mathbb{R}^m$ é J-mensurável, tem-se $vol.X = 0$ se e somente se, X tem interior vazio.* ◊

Para $p = 1, 2, \ldots$, obtemos a medida exterior p-dimensional de Carathéodory escolhendo o diâmetro p-dimensional dado no Exemplo 7 para a função de conjunto l do Teorema sobre medida exterior localizado no Capítulo (1). Como esta definição requer uma quantidade substancial de conhecimento sobre a teoria dos conjuntos convexos, uma simplificação é desejável. Se, por um momento, adotarmos esferas ao invés do conjunto U, sempre obteremos uma medida exterior p-dimensional L_p (no sentido concebido no Capítulo (1) como segue.

Definição 29. *Seja um conjunto A e uma cobertura finita ou infinita enumerável de esferas K_n cujos diâmetros d_n são menores do que ϵ, definimos a* **função de conjunto**

$$L_p(A) = \lim_{\epsilon \to 0} \inf c_p \sum d_n^p,$$

onde

$$c_p = \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{2^p \Pi\left(\frac{p}{2}\right)}$$

é o volume de uma esfera p-dimensional de diâmetro 1, com $\Pi(x)$ sendo o fatorial generalizado $\Pi(x) = x! = \Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x \exp(-t)\, dt$.

Na verdade, não precisamos considerar o diâmetro p-dimensional em sua totalidade, pois já foi mostrado na seção 2 que L_p é uma medida exterior devido às esferas serem conjuntos de Borel. L_p permanece uma medida exterior quando as esferas são substituídas por conjuntos arbitrários limitados, pois d^p é uma função de conjunto contínua. Além disso, a definição pode ser modificada através da utilização de cubos ou paralelepípedos ou triangularizações geométricas em vez de esferas, resultando na modificação do fator c_p. Como $(d(.))^p$ é uma função monótona, a característica de estes conjuntos serem abertos ou fechados será indiferente. Em adição à estas características, todas estas medidas exteriores apresentam a mesma ordem, pois uma delas pode envolver um determinado conjunto de um dado tipo de diâmetro d com diâmetro de outro tipo rd, onde r é uma constante. Por exemplo, podemos envolver um conjunto limitado de diâmetro d de um espaço q-dimensional no interior de uma esfera de diâmetro $2d$ e até mesmo dentro de um conjunto de diâmetro $\sqrt{\left(\frac{2q}{q+1}\right)}d$.

Vamos nos concentrar na Definição 24 e mostrar que nos casos $p = 1$, $p = 2$, $p = q$, ela nos dará as expressões usuais de comprimento, de área e de volume, pelo menos para os conjuntos mais simples.

Exemplo 13. *Para todo conjunto A de um espaço q-dimensional, $L_q(A)$ é exatamente a medida exterior de Lebesgue $m(A)$.*

Por um lado, toda cobertura de A por esferas conduz à uma soma de volumes maiores ou iguais a $m(A)$, ou seja, $L_q(A) \geq m(A)$. Por outro lado, é possível usar os conhecidos Teoremas de cobertura de Lebesgue e Vitali a fim de envolver A por esferas de diâmetros arbitrariamente pequenos tal que a soma de seus volumes excede $m(A)$ por uma quantia arbitrariamente pequena, ou seja, $L_{q\epsilon}(A) \leq m(A)$ e $L_q(A) \leq m(A)$). $\Diamond$

Exemplo 14. *Para uma curva simples A, $L_1(A)$ é exatamente o comprimento $\lambda(A)$, isto é, o supremo dos comprimentos dos polígonos inscritos em A.*

Temos que envolver A em esferas K_n de diâmetro $d_n < \epsilon$ e construir

$$L_1(A) = \lim_{\epsilon \to 0} \inf \sum d_n.$$

A prova de que $L_1 \geq \lambda$ segue exatamente a prova de Carathéodory. Na verdade, podemos dizer que está contida na prova de Carathéodory, pois L_1, que usa todos os conjuntos limitados $U_i s$, que apresentam diâmetros menores ou iguais à nossa prova que utiliza esferas. Para provar que $L_1 \leq \lambda$, onde λ pode ser

adotado como finito, decompomos A em segmentos de comprimento $\lambda_n < \epsilon$ e envolvemos cada um deles em uma esfera de diâmetro λ_n. Um segmento de comprimento λ está inteiramente contido em uma esfera de raio $\frac{\lambda}{2}$ cujo centro é o centro do segmento em questão. Temos, portanto, $L_{1\epsilon} \leq \sum \lambda_n = \lambda$, $L_1 \leq \lambda$. $\Diamond$

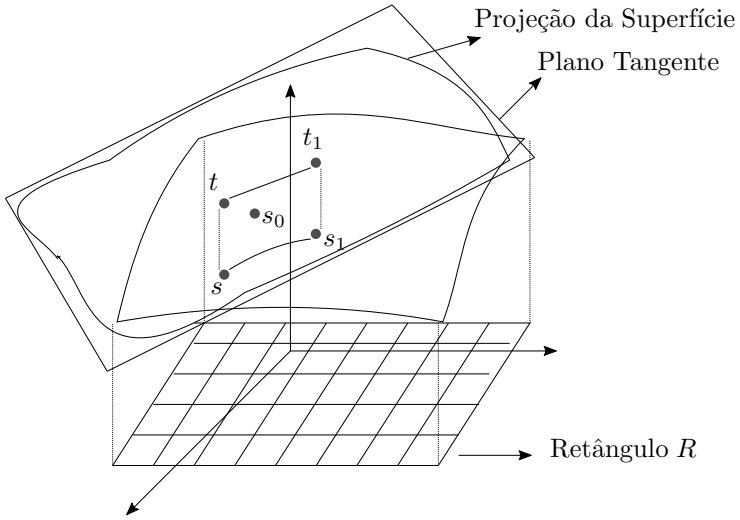


Figura 3.8: Cálculo da medida para uma superfície. Fonte: Elaborado pelo autor.

Exemplo 15. *Para um elemento de superfície*

$$F: \quad a \leq x \leq A, \;\; b \leq y \leq B, \;\; z = f(x,y),$$

possuindo derivadas parciais contínuas $p = f_x$ e $q = f_y$, temos que $L_2(F)$ é dado pela seguinte integral

$$\int_a^A \int_b^B \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy.$$

Uma visão geral da prova é a seguinte: temos que $L_2(F) = L = \lim_{\epsilon \to 0} L_\epsilon$ representa o ínfimo de $\pi \sum \epsilon_n^2$ se F for coberto por esferas de raio $\epsilon_n < \epsilon$. A partir disto, particionamos o retângulo

$$R: \quad a \leq x \leq A, \;\; b \leq y \leq B$$

em subrretângulos onde p e q apresentam oscilações arbitrariamente pequenas em cada um deles. Primeiro assumimos que R é um subrretângulo, desenhamos o plano tangente no ponto $s_0 \in F$ e projetamos cada ponto s de F verticalmente (paralelo ao eixo z) no ponto t do plano tangente e então, um retângulo planar T é produzido. Então, construímos T^*, a projeção vertical da superfície F sobre o plano tangente que passa por s_0 e podemos assumir que:

- *A área A_T do retângulo T e a área A_T^* da projeção da superfície no plano tangente T^* diferem da área de F (A_F) por um valor menor do que ϵR.*

- *O quociente de distorção* $\frac{ss_1}{tt_1}$ *da primeira projeção é menor que* $1+\epsilon$*, onde* $s, s_1 \in F$ *e* $t, t_1 \in T^*$ *e* ss_1 *representa o módulo do caminho geodésico ligando* s *e* s_1*, ou seja, o menor caminho entre* s *e* s_1 *contido na superície* F *e* tt_1 *representa o módulo do menor caminho contido no plano, ligando os pontos* t *e* t_1 *da projeção da superfície, ou seja, o módulo do segmento de reta ligando os pontos* t *e* t_1*.*

Depois disto, cobrimos T *com círculos tendo centros em* t_n *e raio* $\tau_n < \frac{\varrho}{1+\epsilon}$ *tal que*

$$\pi \sum \tau_n^2 < A_T + \delta,$$

onde $\delta > 0$ *é arbitrário. As esferas com centro em* s_n *(pontos da superfície correspondentes a* t_n*) e raio* $(1+\epsilon)\,\tau_n < \varrho$ *cobrem a superfície* F *e encontramos que*

$$L_\varrho \leq \pi \sum (1+\epsilon)^2\, \tau_n^2 < (1+\epsilon)^2\, (A_T + \delta)\,,$$

que se torna $L \leq (1+\epsilon)^2\, A_T$*, uma vez que* ϱ *e* δ *vão para* 0*.*

Por outro lado, se cobrirmos F *com esferas de raio* $\varrho_n < \varrho$ *com*

$$\pi \sum \varrho_n^2 < L_\varrho + \delta,$$

então a projeção vertical à superfície tangente origina círculos de mesmo raio que englobam T^**, originando*

$$A_T^* \leq \pi \sum \varrho_n^2,$$

isto é, $A_T^* \leq L$*. Sintetizando estas idéias,*

$$A_F - \epsilon R < L < (1+\epsilon)^2\, (A_F + \epsilon R)\,.$$

Além disso, observamos que $L\,(F)$ *não se altera se removermos as* 4 *linhas fronteiriças correspondentes aos limites do retângulo, pois estes possuem medidas de Lebesgue nulas e, sendo curvas planas, também apresentam medida-L igual a* 0*.*

Agora, retornamos à interpretação original de R *e o particionamos em subrretângulos* R_n *como descrito acima, e observamos que, de acordo com as idéias trabalhadas,* $L = \sum L_n$*. A desigualdade acima também é obtida para o retângulo total, e então* $L = A_F$*.* $\Diamond$

Definições Equivalentes da Dimensão de Hausdorff

Existem outras classes de cobertura de conjuntos que definem medidas que levam à dimensão de Hausdorff. Por exemplo, podemos utilizar coberturas por bolas esféricas. Seja

$$B_\delta^s\,(F) = \inf\left\{\sum |B_i|^s; \{B_i\} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } F \text{ por bolas}\right\},$$

nós obtemos uma medida $B^s\,(F) = \lim_{\delta\to 0} B_\delta^s\,(F)$ *e uma dimensão na qual* $B^s\,(F)$ *salta de* ∞ *para* 0*. Claramente,* $H_\delta^s\,(F) \leq B_\delta^s\,(F)$*, pois qualquer* $\delta-$*cobertura de* F *por bolas é uma cobertura permissível com relação à definição de* H_δ^s*. Também, se* $\{U_i\}$ *é uma* δ*-cobertura de* F*, então* $\{B_i\}$ *é uma* 2δ*-cobertura, onde,*

para cada i, B_i é escolhido para ser alguma bola contendo U_i, com raio $|U_i| \leq \delta$. Portanto, $\sum |B_i|^s \leq \sum (2|U_i|)^s = 2^s \sum |U_i|^s$. Usando o ínfimo, obtemos $B^s_{2\delta}(F) \leq 2^s H^s_\delta(F)$. Fazendo $\delta \to 0$, segue que $H^s(F) \leq B^s(F) \leq 2^s H^s(F)$. Em particular, isto implica que os valores de s nos quais H^s e B^s saltam de ∞ para 0 são os mesmos, o que acarreta nas dimensões definidas pelas duas medidas serem iguais.

Medidas net se caracterizam como outra variação útil. Em nome da simplicidade, seja F um subconjunto do intervalo $[0,1)$. Um intervalo binário é um intervalo da forma $\left[r2^{-k}, (r+1)2^{-k}\right)$, onde $k = 0,1,2,\ldots$ e $r = 0,1,\ldots,2^k-1$. Definimos

$$M^s_\delta(F) = \inf\left\{\sum |U_i|^s; \{U_i\} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } F \text{ por intervalos binários}\right\},$$

o que leva às medidas net

$$M^s(F) = \lim_{\delta \to 0} M^s_\delta(F).$$

Como qualquer intervalo $U \subset [0,1)$ está contido em dois intervalos binários consecutivos, cada um de comprimento no máximo de $2|U|$, nós vemos que, do mesmo modo como foi feito para as medidas B que

$$H^s(F) \leq M^s(F) \leq 2^{s+1} H^s(F).$$

Segue que o valor de s no qual $M^s(F)$ salta de ∞ para 0 é igual à dimensão de Hausdorff de F, isto é, ambas as definições de medidas geram a mesma dimensão.

Para certos propósitos, as medidas net são mais convenientes do que as medidas de Hausdorff. Isto acontece porque dois intervalos binários ou são disjuntos ou um deles está contido no outro, o que viabiliza qualquer cobertura de intervalos binários ser reduzida a uma cobertura disjunta de intervalos binários.

Definições de Dimensão mais Refinadas

Algumas vezes é desejável ter uma indicação mais nítida de dimensão do que apenas um número. Para alcançar isto, seja $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função crescente e contínua, que denominaremos de função dimensão. Definimos analogamente:

$$H^h_\delta(F) = \inf\left\{\sum h(|U_i|); \{U_i\} \text{ é uma } \delta - \text{cobertura de } F\right\}$$

para F um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Isto conduz à uma medida através do limite $H^h(F) = \lim_{\delta \to 0} H^h_\delta(F)$. Se $h(t) = t^s$, trata-se da definição usual de uma medida s-dimensional de Hausdorff. Se h e g consistem em funções dimensão tais que $\frac{h(t)}{g(t)} \to 0$, conforme $t \to 0$, então chegamos em $H^h(F) = 0$ sempre que $H^g(F) < \infty$. Portanto, particionando as funções dimensão nas quais H^h é finito e nas quais H^h é infinito nos fornece uma indicação mais precisa de dimensão de F, além do número $dim_H F$, conforme será tratado posteriormente para as funções de escala logarítmica.

Um exemplo importante disto é o movimento Browniano em $\mathbb{R}^3$*, que não entraremos em detalhes neste trabalho. Pode ser mostrado que um caminho Browniano portador de dimensão de Hausdorff* 2 *apresenta medida* $H^2 = 0$*. Cálculos mais refinados mostram que tal caminho apresenta medida* H^h *positiva e finita, onde* $h(t) = t^2 \log\log\left(\frac{1}{t}\right)$*. Embora caminhos Brownianos apresentem dimensão* 2*, a dimensão é, em esseência, logaritmicamente menor do que* 2*.*

Capítulo 4

Dimensão Generalizada de Hausdorff

Este capítulo é baseado nos conceitos desenvolvidos no artigo da Referência [6] sobre dimensão de Hausdorff, com a definição do que é uma cobertura destacada e como um conjunto que a apresente, possui dimensão generalizada de Hausdorff finita.

A necessidade de generalização da dimensão de Hausdorff surge para ampliar as possibilidades de funções de conjunto, pois em vez de serem aplicadas apenas nos diâmetros dos conjuntos que fazem parte de uma determinada cobertura de um conjunto A, elas poderão ser aplicadas em outras funções que associam a cada conjunto da cobertura um número real.

Com o intuito de generalizarmos a definição de dimensão de Hausdorff neste capítulo definiremos alguns conceitos e estabeleceremos alguns resultados preliminares.

Definição 30. *Dizemos que* $h(x)$ *é uma* **função medida de Hausdorff** *se ela satisfaz as seguintes condições:*

I. $\lim\limits_{y \to x} \inf h(y) > 0, \forall x > 0.$

II. $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0.$

Se $h(x)$ é uma função medida de Hausdorff e S é um conjunto em um espaço métrico (X, ρ), então definimos a medida de Hausdorff $\Omega^h(S)$ de S em termos das medidas:

$$\Omega^h_\delta(S) = \inf_{\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \supset S} \sum_{i=1}^{\infty} h(d(U_i)), \quad \delta > 0,$$

onde o ínfimo é considerado sobre todas as coberturas enumeráveis de S por conjuntos abertos, cada um deles com diâmetro estritamente menor do que δ, com $d(U_i)$ sendo a função diâmetro do conjunto U_i. Então

$$\Omega^h(S) = \lim_{\delta \to 0} \Omega^h_\delta(S).$$

Esta medida será denominada de medida h.

Definition 4.0.2. *Um conjunto S tem* **dimensão generalizada de Hausdorff finita** *se $\Omega^h(S) = 0$ para alguma função medida de Hausdorff h; caso contrário, o conjunto S apresentará* **dimensão generalizada de Hausdorff infinita**.

Definição 31. *Dizemos que uma sequência $\{U_i\}$ é uma cobertura destacada para um conjunto S se*

$$S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

com $d(U_i) \to 0$ conforme $i \to \infty$.

Se conseguirmos introduzir uma cobertura enumerável onde os menores índices estejam associados a conjuntos que apresentam diâmetros maiores e os maiores índices (que tendem ao infinito) estejam associados a conjuntos cujos diâmetros tendem a zero, esta cobertura será destacada.

O próximo resultado mostra que um conjunto em um espaço métrico apresenta dimensão generalizada de Hausdorff finita se e somente se ele apresenta uma cobertura destacada. Após isto, mostraremos que um espaço de Banach tem dimensão generalizada de Hausdorff finita se e somente se este espaço apresenta dimensão finita no sentido usual.

Teorema 13. *Um conjunto S em um espaço métrico apresenta dimensão generalizada de Hausdorff finita se e somente se, apresenta uma cobertura destacada.*

Demonstração. Suponha que S tem dimensão generalizada de Hausdorff finita. Então, para alguma função medida de Hausdorff h, nós temos $\Omega^h(S) = 0$. Devido a um critério atribuído a A. S. Besicovitch [3], é possível escolher uma sequência $\{U_i\}$ com

$$S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

com

$$\sum_{i=1}^{\infty} h(d(U_i)),$$

convergente. Esta convergência, juntamente com a condição (I) da Definição (30) implicam em

$$d(U_i) \to 0, \text{ quando } i \to \infty.$$

Então S tem uma cobertura destacada.

Reciprocamente, se $\{U_i\}$ é uma cobertura destacada de S, a condição $d(U_i) \to 0$ conforme $i \to \infty$ nos possibilita a escolha de uma função medida de Hausdorff h contínua estritamente crescente com

$$\sum_{i=1}^{\infty} h(d(U_i)),$$

convergente. Logo, novamente pelo critério de Besicovitch, $\Omega^h(S) = 0$ e S tem dimensão generalizada de Hausdorff finita. □

Definição 32. *Um* **espaço normado** X *é um espaço vetorial com uma norma definida sobre ele. Um espaço de Banach é um espaço normado completo, ou seja, toda sequência de Cauchy* $\{x_i\}$ *de termos em* X*, converge para um ponto* $x \in X$*.*

Considerando um espaço de Banach X, a bola unitária em X é compacta se e somente se X apresenta dimensão linear finita. Provaremos o seguinte teorema:

Teorema 14. *Seja* X *um espaço de Banach. Então, as seguintes condições serão equivalentes:*

I. X *tem dimensão finita,*

II. X *tem dimensão de Hausdorff generalizada finita,*

III. X *é portador de uma cobertura destacada.*

Demonstração. Devido ao Teorema 13, é suficiente provar que X tem uma cobertura destacada se e somente se a bola unitária

$$S = \{x \in X; ||x|| \leq 1\},$$

de X é compacta.

Inicialmente, suponhamos que S seja compacto. Então, para $r = 1, 2, \ldots$, nós podemos escolher um sistema de bolas finitas:

$$S_i^{(r)} = \left\{x \in X; ||x - x_i^{(r)}|| \leq r^{-2}\right\}, \quad i = 1, 2, \ldots, k(r),$$

cobrindo S. O sistema de conjuntos expandidos

$$rS_i^{(r)} = \left\{x \in X; ||x - rx_i^{(r)}|| \leq r^{-1}\right\},$$

$i = 1, 2, \ldots, k(r), r = 1, 2, \ldots$ é uma cobertura destacada de X.

Agora suponhamos que X apresenta uma cobertura destacada $\{U_i\}$, com

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

e com

$$d(U_i) \to 0 \text{ conforme } i \to \infty.$$

Iremos supor que X tem dimensão infinita e chegaremos a um absurdo. Antes disto, provaremos dois lemas essenciais ao desenvolvimento posterior.

Lema 3 (Lema de Riesz)**.** *Seja Y e Z subespaços de um espaço normado X de qualquer dimensão, suponha que Y é fechado e é um subconjunto próprio de Z. Então, para todo número real θ no intervalo $(0,1)$, existe $z \in Z$ tal que*

$$||z|| = 1, \;\; ||z - y|| \geq \theta,$$

para todo $y \in Y$.

Demonstração. Consideramos qualquer $v \in Z \setminus Y$ e denotamos sua distância até Y por a, conforme mostra a figura (4.1),

$$a = \inf_{y \in Y} ||v - y||.$$

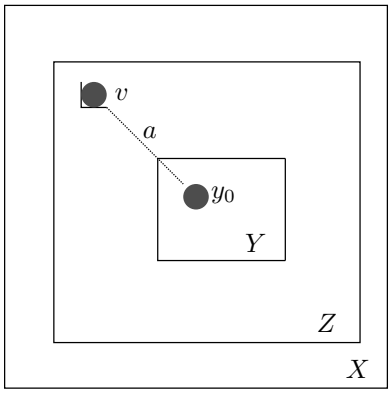


Figura 4.1: Notação para a demonstração do Lema de Riesz. Fonte: Elaborado pelo autor.

A figura acima, apesar de não ser a mais adequada para se representar espaços vetoriais, é muito utilizada devido a propósitos didáticos, para melhor compreensão.

Claramente, $a > 0$, pois Y é fechado. Agora, pegamos qualquer $\theta \in (0,1)$. Pela definição de ínfimo, existe $y_0 \in Y$ tal que

$$a \leq ||v - y_0|| \leq \frac{a}{\theta}. \tag{4.1}$$

Note que $\frac{a}{\theta} > a$, pois $0 < \theta < 1$. Seja

$$z = c\,(v - y_0) \;\text{ onde } c = \frac{1}{||v - y_0||}.$$

Então, $||z|| = 1$ e mostraremos que $||z - y|| \geq \theta$ para qualquer $y \in Y$. Temos

$$||z - y|| = ||c\,(v - y_0) - y|| = c||v - y_0 - c^{-1}y|| = c||v - y_1||,$$

onde

$$y_1 = y_0 + c^{-1}y.$$

A forma de y_1 mostra que $y_1 \in Y$. Portanto, $||v - y_1|| \geq a$, pela definição de a. Utilizando 4.1, ficamos com

$$||z - y|| = c||v - y_1|| \geq ca = \frac{a}{||v - y_0||} \geq \frac{a}{\frac{a}{\theta}} = \theta.$$

Como $y \in Y$ é arbitrário, isto completa a prova. □

Lema 4. *Se C é uma bola fechada de raio r em um espaço vetorial normado X de dimensão infinita, então, dado δ com $0 < \delta < r$, existe uma sequência infinita $\{x_i\}$ de pontos em C com*

$$||x_i - x_j|| \geq \delta \text{ para } i \neq j.$$

Demonstração. É suficiente provar este lema para o caso do conjunto C ser uma bola unitária fechada com centro na origem. Para concretizar isto, faremos uso do Lema de Riesz. Escolhamos $x_1 \in C$. Então, o espaço gerado por x_1 é um subespaço próprio fechado de X. Portanto, pelo Lema de Riesz, podemos escolher x_2 tal que

$$||x_2|| = 1 \text{ e } ||x_2 - x_1|| \geq \delta.$$

Então, o espaço gerado por x_1 e x_2 é um subespaço fechado próprio de X e, novamente pelo Lema de Riesz, podemos escolher x_3 com

$$||x_3|| = 1 \text{ e } ||x_3 - x_i|| \geq \delta,\ i = 1, 2.$$

Continuando este processo, nós obteremos a sequência requerida de pontos $\{x_i\}$. □

Retornaremos agora à demonstração do teorema em questão. Escolhamos uma sequência estritamente crescente $J(1), J(2), \ldots,$ de inteiros positivos com

$$d(U_i) < 5^{-r} \text{ para } i \geq J(r).$$

Aplicando o Lema (4) à bola

$$||x|| \leq \frac{4}{5},$$

selecionamos uma sequência infinita de pontos $\left\{x_i^1\right\}$ com

$$||x_i^{(1)}|| \leq \frac{4}{5},\ \ i = 1, 2, \ldots.$$

$$||x_i^{(1)} - x_j^{(1)}|| \geq \frac{3}{5}, \;\; i \neq j.$$

As bolas $S_i^{(1)}$ definidas por

$$||x - x_i^{(1)}|| \leq \frac{1}{5}, \; i = 1, 2, \ldots,$$

estão contidas na bola unitária $||x|| \leq 1$ e nenhum ponto de nenhuma delas se encontra à uma distância de $\frac{1}{5}$ de qualquer outro ponto de qualquer outra. Portanto, não existe conjunto U_i com $i \geq J(1)$ que intersecciona mais de uma bola. Então, podemos escolher um inteiro j tal que

$$S_i^{(1)} \cap U_i = \emptyset \text{ para } J(1) \leq i < J(2).$$

Escrevamos $y_1 = x_j^{(1)}, C_1 = S_j^{(1)}$. Logo, C_1 é um conjunto de pontos x com

$$||x - y_1|| \leq \frac{1}{5},$$

$$C_1 \subset S,$$

e

$$C_1 \cap U_i = \emptyset, \text{ para } J(1) \leq i < J(2).$$

Agora, aplicamos para C_1 o argumento que havíamos aplicado a S. Obtemos um ponto y_2 e uma bola C_2 de pontos x com

$$||x - y_2|| \leq 5^{-2},$$

$$C_2 \subset C_1,$$

e

$$C_2 \cap U_i = \emptyset \text{ para } J(2) \leq i < J(3).$$

Continuando desta maneira, obtemos uma sequência $\{y_j\}$ de pontos e uma sequência $\{C_j\}$ de bolas, C_j sendo a bola

$$||x - y_j|| \leq 5^{-j},$$

com

$$C_1 \supset C_2 \supset \ldots,$$

e

$$C_j \cap U_i = \emptyset \text{ para } J(j) \leq i < J(j+1).$$

Como X é completo, existe um único ponto z em

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} C_j.$$

Este ponto z não se encontra em

$$\bigcup_{j=J(1)}^{\infty} U_i.$$

Isto contradiz a escolha de $\{U_i\}$ como uma cobertura destacada de X. Com isto, a prova está completa.

Capítulo 5

Aplicações e algumas extensões

Neste derradeiro capítulo, apresentaremos a função de conjunto em escala logarítmica e como ela se relaciona com dimensões positivas não inteiras. Aplicamos esta função a um conjunto específico A da reta real, definimos funções côncavas como elas se relacionam com conjuntos que apresentam dimensões menores do que 1. Por fim, damos alguns exemplos e apresentamos uma extensão da medida generalizada de Hausdorff para o $\mathbb{R}^2$ em casos particulares.

Agora que a definição de medida exterior estabelecida no Capítulo 1 teve a sua existência justificada pelo menos para algumas extensões, é o momento de estendê-la para valores positivos não inteiros de p (que são excluídos da definição dada por Carathéodory). A questão é avaliar se isto é trivial, no sentido de que todos os conjuntos possuem medida exterior 0 ou ∞. O cerne do problema se encontra na dificuldade que surge a partir da construção de conjuntos A para os quais $0 < L_p(A) < \infty$ e que possuem exatamente a dimensão p nesse sentido. Este problema pode ser estendido para além desta fronteira: na definição de L_p vimos que, desconsiderando a constante numérica c_p, a p-ésima potência do diâmetro d tem exercido um papel central na função de conjunto l. [Conforme será explicado, podemos substituir isto por uma função do tipo $d^p \log\left(\frac{1}{d}\right)$, que tende a zero conforme $d \to 0$ ($\lim_{d\to 0} d^p \log\left(\frac{1}{d}\right) = 0$, pois d^p tende a zero de maneira mais rápida do que $\log\left(\frac{1}{p}\right)$ tende a ∞) de maneira mais vagarosa que d^p, mas mais rápida do que qualquer potência menor e, neste sentido, construir conjuntos cujas dimensões se situam na escala dos inteiros positivos]. Devemos usar a liberdade destacada no Capítulo 2 adotando como hipóteses que toda função λ é positiva, contínua, crescente e converge para zero quando $x \to 0$, assegurando uma medida exterior L no seguinte sentido:

Definição 33. *Seja A um conjunto dotado de uma cobertura finita ou infinita enumerável formada por esferas K_n, cujos diâmetros são $d_n < \lambda$. Definimos*

$$L(A) = \lim_{\varrho \to 0} L_\varrho(A),$$

onde $L_\varrho(A)$ é o ínfimo das somas $\sum \lambda(d_n)$. Se $0 < L(A) < \infty$, então dizemos que A possui **dimensão**

generalizada de Hausdorff $[\lambda(x)]$, *ou seja,* $dim(A) = [\lambda(x)]$.

As exigências que foram impostas sobre $\lambda(x)$ não são absolutamente necessárias, mas no sentido do Capítulo 2, elas são úteis para o propósito de se excluir os valores nulos ou infinitos, que $L(A)$ possa assumir.

Denotaremos a dimensão $[x^p]$ por p. Um conjunto desta dimensão apresenta dimensão p no sentido do Capítulo (1), mas não vice-versa, conforme mostraremos posteriormente.

Sejam $\lambda(x)$, $\mu(x)$ duas funções correspondentes às medidas exteriores $L(A)$, $M(A)$ respectivamente, com L e M sendo funções da mesma ordem. Então dizemos que as dimensões $[\lambda]$ e $[\mu]$ são iguais. Todo conjunto de dimensão $[\lambda]$ é também de dimensão $[\mu]$ e vice-versa. Se M apresenta uma ordem superior à de L, então dizemos que $[\mu]$ é de mais alta e $[\lambda]$ é de mais baixa dimensão, ou seja, $[\mu]$ tem dimensão mais alta do que $[\lambda]$. Um conjunto de uma determinada dimensão apresenta medida zero para qualquer dimensão mais alta, e apresenta medida infinita para qualquer dimensão mais baixa. Naturalmente, não faz sentido para duas dimensões diferentes serem comparadas de alguma forma.

Obviamente $L(A)$ só depende do comportamento de $\lambda(x)$ em uma vizinhança arbitrariamente pequena do ponto $x = 0$, isto é, a dimensão aparenta ser uma característica de graduação semelhante à ordem de uma função tender a zero e conceitos relacionados. Se $\lambda(x) \leq \mu(x)$ para valores de x suficientemente pequenos, então $L(A) \leq M(A)$ é válido para qualquer conjunto A. Se $\mu = c\lambda$, $(c > 0)$, então $M = cL$. Se $\frac{\mu}{\lambda} \to 0$ para $x \to 0$, então $M \leq \epsilon L$ para todo número positivo ϵ, acarretando o anulamento da medida M para valores finitos de L. Então, $[\mu]$ pertence à uma dimensão maior e $[\lambda]$ à uma dimensão menor. Em particular, q é de uma dimensão maior e p é de uma dimensão menor sempre que $q > p$. Uma função como $e^{\frac{-1}{x}}$, que vai para zero mais rápido que qualquer x^p, resulta em uma dimensão infinitamente grande, que não pode ser realizada por conjunto euclidiano algum. Apesar disto, dimensões infinitamente menores podem ser realizadas, como será mostrado a seguir. Consideremos as funções de escala logarítmica

$$\lambda(x) = x^{p_0}\left(\frac{1}{l_1\frac{1}{x}}\right)^{p_1}\left(\frac{1}{l_2\frac{1}{x}}\right)^{p_2}\cdots\left(\frac{1}{l_k\frac{1}{x}}\right)^{p_k},\ \text{com } l_n\left(\frac{1}{x}\right) = \underbrace{\log\log\ldots\log}_{n\ \text{vezes}}\left(\frac{1}{x}\right),$$

onde o primeiro expoente não nulo p_i é assumido ser positivo juntamente com as derivadas sucessivas de $\lambda(x)$ para x suficientemente pequeno, como é requisitado pelas nossas suposições iniciais. Eles definem dimensões que podem ser denotadas por

$$P = (p_0, p_1, \ldots, p_k).$$

Um conjunto sobre o qual estamos aplicando a função de conjunto λ, sempre apresenta dimensão p_0 para qualquer escolha dos p_is, pois x^{p_0} determina o resultado do limite quando $x \to 0$ ou $x \to \infty$ para a função de escala logarítmica λ.

Na vizinhança do ponto $x = 0$, as funções $f(x) = x^p$ com $0 < p < 1$, $g(x) = x^p\left(\frac{1}{\log\frac{1}{x}}\right)^{p_1}, p_1 > 0$ e $h(x) = x^p\left(\frac{1}{\log\log\frac{1}{x}}\right)^{p_2}, p_2 > 0$ apresentam os seguintes esboços gráficos, localizados na figura 5.1. Quando $\lambda = f$, o conjunto A apresenta dimensão $[x^p] = p$ e, quando $\lambda = g$ ou $\lambda = h$, o limite de $\frac{\lambda(x)}{x}$ para $x \to 0$ tende a ∞, isto é, as funções g e h apresentam comportamento análogo ao da função f, o que acarreta em

dimensões do conjunto A menores do que 1 para as funções g e h. A função λ' tende a ∞ quando x tende a zero e a reta tangente ao gráfico tende para a vertical conforme x se aproxima de zero.

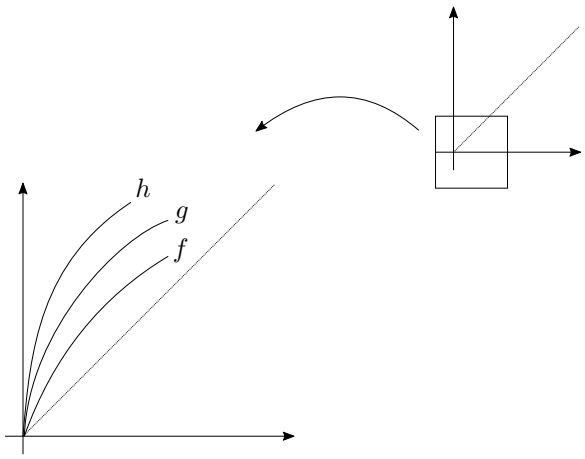


Figura 5.1: Gráficos das funções $f = x^p$, $g = x^p \left(\frac{1}{\log\left(\frac{1}{x}\right)}\right)^{p_1}$ e $h = x^p \left(\frac{1}{\log\log\left(\frac{1}{x}\right)}\right)^{p_2}$. Fonte: Elaborado pelo autor.

Isto pode ser ordenado de maneira lexicográfica, ou seja, se $Q = (q_0, q_1, \ldots, q_k)$ e $P = (p_0, p_1, \ldots, p_k)$, dizemos que P é maior do que Q se a primeira diferença não nula $q_i - p_i$ é positiva. Nós dividimos estas dimensões em duas classes:

$$\text{Dimensões menores do que 1} : \frac{\lambda(x)}{x} \to \infty,$$

quando $x \to 0$.

Aqui, $\lambda'(x) \to \infty$, e λ'' é negativo para pequenos valores de x. A função $\lambda(x)$ é côncava e os expoentes podem assumir os seguintes valores:

- $p_0 = 0$ e o primeiro expoente não nulo $p_i > 0$,
- $0 < p_0 < 1$,
- $p_0 = 1$ e o primeiro expoente não nulo $p_i < 0$.

Para $p_0 = 0$ e o primeiro expoente não nulo $p_i > 0$, temos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\lambda(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x\left(l_i \frac{1}{x}\right)^{p_i} \left(l_{i+1} \frac{1}{x}\right)^{p_{i+1}} \ldots \left(l_k \frac{1}{k}\right)^{p_k}}.$$

Como $x\left(l_i \frac{1}{x}\right)^{p_i} \ldots \left(l_k \frac{1}{x}\right)^{p_k} \to 0$ para $x \to 0$ (x tende a zero mais rapidamente do que $l_i \left(\frac{1}{x}\right)^{p_i} \to \infty$, para todo i), temos que $\lim_{x\to 0} \frac{\lambda(x)}{x} = \infty$.

Para $0 < p_0 < 1$, ficamos com o seguinte limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\lambda(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{1-p_0}\left(l_i \frac{1}{x}\right)^{p_i} \ldots \left(l_k \frac{1}{x}\right)^{p_k}},$$

que acaba sendo semelhante ao caso anterior com $\lim_{x\to 0}\frac{\lambda(x)}{x}=\infty$, pois x^{1-p_0} tende a zero mais rapidamente do que $l_i\left(\frac{1}{x}\right)^{p_i}\to\infty,\forall i$.

Para $p_0=1$ e o próximo expoente não nulo $p_i<0$, ficamos com

$$\lim_{x\to 0}\frac{\lambda(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(l_i\frac{1}{x}\right)^{-p_i}}{\left(l_{i+1}\frac{1}{x}\right)^{p_{i+1}}\ldots\left(l_k\frac{1}{x}\right)^{p_k}}=0,$$

pois o termo $\left(l_i\frac{1}{x}\right)^{p_i}$ tende a ∞ e ele é preponderante perante as outras potências $l_j\left(\frac{1}{x}\right)^{p_j},i<j\leq k$ no denominador.

$$\text{Dimensões maiores do que 1: } \frac{\lambda(x)}{x}\to 0,$$

quando $x\to 0$.

Aqui, $\lambda'(x)\to 0$ e λ'' é positiva. A função $\lambda(x)$ é convexa e os expoentes podem assumir os seguintes valores:

- $p_0=1$ e o próximo expoente não nulo é $p_i>0$,
- $p_0>1$.

Quando $p_0=1$ e o próximo expoente não é nulo $p_k>0$, ficamos com o seguinte limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(l_k\frac{1}{x}\right)^{p_k}}=0, \tag{5.1}$$

com $\left(l_k\frac{1}{x}\right)^{p_k}\to\infty$ para $x\to 0$ e, portanto, o limite acima (5.1) tende a zero.

Quando $p_0>1$, ficamos com o seguinte limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^{p_0-1}}{\left(l_1\frac{1}{x}\right)^{p_1}\left(l_2\frac{1}{x}\right)^{p_2}\ldots\left(l_k\frac{1}{x}\right)^{p_k}}=0,$$

pois x^{p_0-1} tende a zero e cada termo do denominador $\left(l_i\frac{1}{x}\right)^{p_i}$ tende a ∞ para $x\to 0$ e qualquer i.

A transição entre a duas regiões ocorre em dimensão 1 quando $\lambda(x)=x$.

Para construir conjuntos de dimensão $[\lambda(x)]$ como descrito acima, o argumento prévio sugere que escolhamos $\lambda(x)$ côncava. As hipóteses relacionadas com a função contínua $\lambda(x)$ de valores positivos x são as seguintes:

- I. $\lambda(x)>0$,
- II. $\lambda(x_1)<\lambda(x_2)$ para $x_1<x_2$,
- III.

$$\begin{vmatrix}\lambda(x_1) & x_1 & 1\\ \lambda(x_2) & x_2 & 1\\ \lambda(x_3) & x_3 & 1\end{vmatrix}>0 \text{ para } x_1<x_2<x_3,$$

- IV. $\lambda(x) \to 0$ conforme $x \to 0$,
- V. $\lambda(x) \to \infty$ conforme $x \to \infty$.

Somente as primeiras quatro condições na vizinhança do ponto $x = 0$ são essenciais. Por simplicidade, assumiremos que $\lambda(x)$ satisfaz as quatro primerias condições para todos os valores positivos de x e que, adicionalmente, a condição V também pode ser verificada.

Definição 34. *Uma função é* **côncava** *se satisfaz as seguintes desigualdades fundamentais:*

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \geq \frac{f(x) - f(x_3)}{x - x_3},$$

ou seja, seu gráfico se situa acima de qualquer de suas secantes. Trabalhando com estas desigualdades, chegamos em:

$$f(x) \geq f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x - x_1).$$

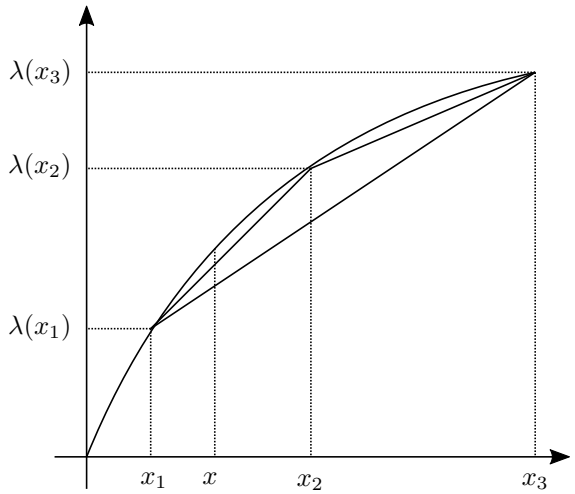


Figura 5.2: Exemplo de gráfico de uma função côncava. Fonte: Elaborado pelo autor.

A curva $y = \lambda(x)$ é côncava devido à condição III, que trata-se de uma proposição que será provada logo em seguida, e se o ponto 2 da curva se situa acima da reta secante formada pelos pontos 13, então nós colocamos

$$ik = \frac{\lambda(x_k) - \lambda(x_i)}{x_k - x_i},$$

onde ik representa o valor do coeficiente angular da reta ligando os pontos $(x_i, \lambda(x_i))$ e $(x_k, \lambda(x_k))$ do gráfico da função λ, o que origina

$$12 > 13 > 23, \tag{5.2}$$

para os quocientes das diferenças.

Proposição 7. *Uma função é côncava se e somente se, a seguinte condição se verifica:*

$$\begin{vmatrix} \lambda(x_1) & x_1 & 1 \\ \lambda(x_2) & x_2 & 1 \\ \lambda(x_3) & x_3 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

Demonstração.

$$\begin{vmatrix} \lambda(x_1) & x_1 & 1 \\ \lambda(x_2) & x_2 & 1 \\ \lambda(x_3) & x_3 & 1 \end{vmatrix} > 0 \Leftrightarrow$$

$$x_2\lambda(x_1) + x_1\lambda(x_3) + x_3\lambda(x_2) > x_2\lambda(x_3) + x_3\lambda(x_1) + x_1\lambda(x_2) \Leftrightarrow$$

$$x_3\lambda(x_2) - x_3\lambda(x_1) - x_1\lambda(x_2) + x_1\lambda(x_1) > x_2\lambda(x_3) - x_2\lambda(x_1) - x_1\lambda(x_3) + x_1\lambda(x_1) \Leftrightarrow$$

$$(x_3 - x_1)(\lambda(x_2) - \lambda(x_1)) > (x_2 - x_1)(\lambda(x_3) - \lambda(x_1)) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\lambda(x_2) - \lambda(x_1)}{x_2 - x_1} > \frac{\lambda(x_3) - \lambda(x_1)}{x_3 - x_1},$$

que nada mais é do que a definição de função côncava. □

Se $x_1 < x_4 < x_3$ também se verifica, então

$$14 > 13 > 43, \tag{5.3}$$

o que acarreta

$$14 > 23, \quad 12 > 43.$$

Quando a primeira relação (5.2) se verifica, assumimos que $x_4 = x_1 - x_2 + x_3$ seja simétrico a x_2 com relação ao ponto médio de x_1, x_3. Então, chegamos a

$$\frac{\lambda(x_4) - \lambda(x_1)}{x_4 - x_1} > \frac{\lambda(x_3) - \lambda(x_2)}{x_3 - x_2},$$

e como $x_4 - x_1 = x_3 - x_2$ por hipótese, $(x_4 = x_1 - x_2 + x_3)$ chegamos em

$$\lambda(x_1 - x_2 + x_3) > \lambda(x_1) - \lambda(x_2) + \lambda(x_3), \text{ com } x_1 < x_2 < x_3. \tag{5.4}$$

Na segunda relação, nós temos $x_4 = \alpha x_1$ e $x_3 = \alpha x_2$, onde $\alpha > 1$, obtendo

$$\frac{\lambda(x_2) - \lambda(x_1)}{x_2 - x_1} > \frac{\lambda(x_3) - \lambda(x_4)}{x_3 - x_4},$$

e como $x_2 - x_1 = x_3 - x_4$ também por hipótese, ficamos com

$$\lambda(x_2) - \lambda(x_1) > \lambda(\alpha x_2) - \lambda(\alpha x_1),$$

e como $\alpha > 1$,

$$\alpha\lambda(x_2) - \alpha\lambda(x_1) > \lambda(\alpha x_2) - \lambda(\alpha x_1), \tag{5.5}$$

o que gera a igualdade:

$$\alpha\lambda(x_2) - \alpha\lambda(x_1) > \lambda(\alpha x_2) - \lambda(\alpha x_1), \text{ com } x_1 < x_2, \text{ e } \alpha > 1.$$

A função $\alpha\lambda(x) - \lambda(\alpha x)$ é, portanto, crescente com os valores de x e apresenta valores maiores do que seu limite 0 quando $x \to 0$ e então

$$\alpha\lambda(x) > \lambda(\alpha x), \text{ com } \alpha > 1. \tag{5.6}$$

Se adotarmos $x_3 = x_2 + h$ em (5.4), então

$$\lambda(x_1 + h) - \lambda(x_1) > \lambda(x_2 + h) - \lambda(x_2), \text{ com } x_1 < x_2 \text{ e } h > 0,$$

e a função $\lambda(x + h) - \lambda(x)$ decresce conforme aumentam os valores de x, tratando-se de valores menores do que $\lim \lambda(h)$ conforme $x \to 0$ e então para $x_1, x_2 \to 0$, obtemos

$$\lambda(h) - \lambda(0) > \lambda(x_2 + h) - \lambda(x_2),$$

e como $\lambda(0) = 0$, ficamos com

$$\lambda(h) > \lambda(x_2 + h) - \lambda(x_2),$$

o que origina

$$\lambda(h) + \lambda(x_2) > \lambda(x_2 + h).$$

Como estamos tratando de valores x_1, x_2 muito próximos de 0, podemos substituir h por x_1 na equação acima, o que origina a equação seguinte:

$$\lambda(x_1 + x_2) < \lambda(x_1) + \lambda(x_2).$$

Em suma, a função λ apresenta as seguintes propriedades:

- I. $\lambda(x_1 - x_2 + x_3) > \lambda(x_1) - \lambda(x_2) + \lambda(x_3)$, $(x_1 < x_2 < x_3)$,
- II. $\alpha\lambda(x_2) - \alpha(x_1) > \lambda(\alpha x_2) - \lambda(\alpha x_1)$, $(x_1 < x_2, \alpha > 1)$,
- III. $\alpha\lambda(x) > \lambda(\alpha x)$, $(\alpha > 1)$,
- IV. $\lambda(x_1 + x_2) < \lambda(x_1) + \lambda(x_2)$.

Após estas considerações iniciais, mostraremos que existem conjuntos fechados A de dimensão $[\lambda(x)]$, ou seja, conjuntos A que apresentam medida finita positiva $L(A)$, onde $L(A) = \lim_{\varrho \to 0} L_\varrho(A)$, sendo $L_\varrho(A)$ o ínfimo de $\sum \lambda(\alpha_n)$, onde o conjunto A foi coberto por intervalos de comprimento $\alpha_n < \varrho$.

5.1 Construção de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ com medida $L(A) = 1$.

Consideraremos a sequência de números positivos $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ com

$$\xi_0 > 2\xi_1, \quad \xi_1 > 2\xi_2, \ldots.$$

A partir do intervalo fechado $[0, \xi_0]$ sobre o eixo x, nós deletamos o intervalo aberto central de comprimento $\xi_0 - 2\xi_1$ denotado por $\beta\left(\frac{1}{2}\right)$. A partir dos dois intervalos fechados restantes de comprimento ξ_1, nós deletamos o intervalo central aberto de comprimento $\xi_1 - 2\xi_2$ e denotamos estes intervalos deletados por $\beta\left(\frac{1}{4}\right)$ à esquerda e $\beta\left(\frac{3}{4}\right)$ à direita. Novamente, a partir dos 4 intervalos fechados restantes de comprimento ξ_2, deletamos o intervalo central aberto de comprimento $\xi_2 - 2\xi_3$ e denotamos estes intervalos deletados (da esquerda para a direita) por $\beta\left(\frac{1}{8}\right)$, $\beta\left(\frac{3}{8}\right)$, $\beta\left(\frac{5}{8}\right)$, $\beta\left(\frac{7}{8}\right)$, etc.

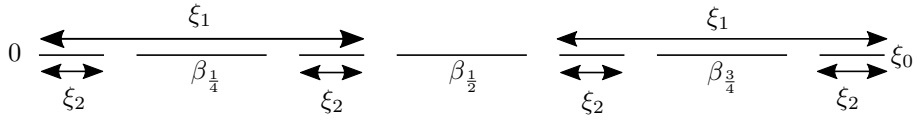


Figura 5.3: Intervalo $[0, \xi_0]$ com os intervalos centrais deletados a cada iteração. Fonte: Elaborado pelo autor.

Desta maneira, todo número diádico (número racional cujo denominador é uma potência de 2, ou seja, um número da forma $\frac{a}{2^b}$, onde a é um número inteiro e b é um número natural) y entre 0 e 1 será associado a um intervalo aberto $\beta(y)$, e depois de deletar o conjunto aberto $B = \bigcup_{y \in \gamma} \beta(y)$, (onde γ é o conjunto dos números diádicos entre 0 e 1) do intervalo original $[0, \xi_0]$, o que resta é um conjunto não denso A que pode ser coberto por 2^n intervalos de comprimento ξ_n para $n = 0, 1, 2, \ldots$ e cuja medida $L(A)$ é menor ou igual a $\liminf 2^n \lambda(\xi_n)$, desde que $\xi_n \to 0$. Agora, nós escolhemos ξ_n que satisfaz a seguinte condição:

$$2^n \lambda(\xi_n) = 1, \ \forall n \geq 1, \tag{5.7}$$

onde $\lambda(\xi_n)$ possui medida $\frac{1}{2^n}$, o que acarreta $L \leq 1$. Esta escolha é admissível, pois $\lambda(x)$ é levado em um valor positivo somente uma vez e, utilizando a relação $\alpha\lambda(x) > \lambda(\alpha x)$, $\alpha > 1$, que é a Equação (5.6), chegamos em

$$\lambda(\xi_{n-1}) = 2\lambda(\xi_n) > \lambda(2\xi_n), \text{ e então } \xi_{n-1} > 2\xi_n,$$

pois λ é uma função crescente.

Por outro lado, devemos mostrar que $L \geq 1$, para obtermos a igualdade almejada. Nossa construção se baseia no fato de que entre dois intervalos $\beta\left(\frac{k-1}{2^n}\right)$ e $\beta\left(\frac{k}{2^n}\right)$ correspondentes aos sucessivos números com denominador 2^n, existe um intervalo de comprimento ξ_n. Se denominarmos de $u(y)$ e $v(y)$ os pontos extremos da esquerda e direita respectivamente de $\beta(y)$, com ambos os pontos não pertencendo ao intervalo aberto, então

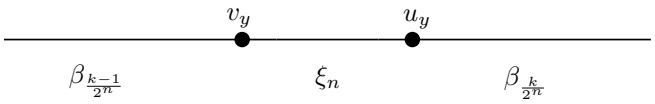


Figura 5.4: Cálculo do comprimento de ξ_n. Fonte: Elaborado pelo autor.

$$u\left(\frac{k}{2^n}\right) - v\left(\frac{k-1}{2^n}\right) = \xi_n. \tag{5.8}$$

Isto é válido para $n > 1$ e $k = 2, 3, \ldots, 2^n - 1$, mas também para $k = 1$, $k = 2^n$ e $n = 1$, $n = 0$, se assumirmos a hipótese de que

$$v(0) = 0,\ u(1) = \xi_0.$$

A Equação (5.8), que é simplificada para

$$u(y_2) - v(y_1) = \xi_n, \tag{5.9}$$

pode servir para determinar os pontos extremos de um intervalo recursivamente, pois um número diádico $y = \frac{2k-1}{2^{n+1}}$ com denominador 2^{n+1} é a média aritmética de seus "vizinhos", isto é, dois números sucessivos $y_1 = \frac{k-1}{2^n}$ e $y_2 = \frac{k}{2^n}$ com denominador 2^n. A Equação (5.8) origina

$$u(y_2) - v(y) = u(y) - v(y_1) = \xi_{n+1}. \tag{5.10}$$

Afirmamos agora que, para o pedaço restante α situado entre dois intervalos $\beta(y)$ e $\beta(\eta)$ com $y < \eta$

$$\alpha = u(\eta) - v(y), \tag{5.11}$$

satisfaz a desigualdade

$$\lambda(\alpha) \geq \eta - y. \tag{5.12}$$

Provaremos isto de maneira geral para $0 \leq y < \eta \leq 1$. Como esta desigualdade é imediatamente verificada para os casos mais baixos, por exemplo $y = 0$, $\eta = 1$, $\alpha = \xi_0$, $\lambda(\alpha) = 1$, devemos provar por indução para os números diádicos com denominador menor ou igual a 2^{n+1}, assumindo ser verdadeira esta desigualdade para os números diádicos com denominador menor ou igual a 2^n. Nós devemos apenas distinguir quando y ou η ou ambos possuem denominador reduzido 2^{n+1}.

Caso I. Consideramos y tendo denominador reduzido 2^{n+1}, e η apresentando denominador menor ou igual a 2^n. Sejam y_1, y_2 pontos situados na vizinhança de y como acima. Então $y_1 < y_2 \leq \eta$ e

$$(y_2) - v(y_1) = \xi_n,$$

$$u(y_2) - v(y) = \xi_{n+1},$$

$$v(y) = v(y_1) + \xi_n - \xi_{n+1}$$

$$\alpha = \alpha * -\xi_n + \xi_{n+1},$$

onde

$$\alpha* = u(\eta) - v(y_1) \geq u(y_2) - v(y_1) = \xi_n.$$

Observamos que para $y < \eta$, $\beta(y)$ se encontra à esquerda de $\beta(\eta)$. Pela Equação (5.4), temos

$$\lambda(\alpha) \geq \lambda(\alpha*) - \lambda(\xi_n) + \lambda(\xi_{n+1}),$$

e como a Inequação (5.12) é válida para α^* por indução,

$$\lambda(\alpha) \geq (\eta - y_1) - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = \eta - y.$$

Caso II. Seja η apresentando um denominador reduzido 2^{n+1}, e y com um denominador $\leq 2^n$. Seja η_1, η_2 pontos situados na vizinhança de η. Então $y \leq \eta_1 < \eta_2$ e

$$(\eta_2) - v(\eta_1) = \xi_n,$$

$$u(\eta) - v(\eta_1) = \xi_{n+1},$$

$$u(\eta) = u(\eta_2) - \xi_n + \xi_{n+1},$$

$$\alpha = \alpha * -\xi_n + \xi_{n+1},$$

onde

$$\alpha* = u(\eta_2) - v(y) \geq u(\eta_2) - v(\eta_1) = \xi_n.$$

Além disso,

$$\lambda(\alpha) \geq \lambda(\alpha*) - \lambda(\xi_n) + \lambda(\xi_{n+1}) \geq (\eta_2 - y) - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = \eta - y.$$

Caso III. Seja y e η ambos detentores de denominador reduzido 2^{n+1}. Seja y_1, y_2, η_1, η_2 pontos de suas vizinhanças originando $y_1 < y_2 \leq \eta_1 < \eta_2$. Então, como acima, ficamos com

$$v(y) = v(y_1) + \xi_n - \xi_{n+1},$$

$$u(\eta) = u(\eta_2) - \xi_n + \xi_{n+1},$$

$$\alpha = \alpha * -2\xi_n + 2\xi_{n+1},$$

onde

$$\alpha* = u(\eta_2) - v(y) > u(\eta_2) - v(\eta_1) + u(y_2) - v(y_1) = 2\xi_n.$$

Pelas desigualdades (5.4) e (5.5) da seção anterior, encontramos para $(\alpha = 2)$

$$\lambda(\alpha) > \lambda(\alpha*) - \lambda(2\xi_n) + \lambda(2\xi_{n+1}) > \lambda(\alpha*) - 2\lambda(\xi_n) + 2\lambda(\xi_{n+1}) \geq (\eta_2 - y_1) - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = \eta - y.$$

Com isso, provamos a Equação (5.12).

Agora, cobriremos A com intervalos abertos $\alpha_n < \varrho$ tal que

$$\sum \lambda(\alpha_n) < L_\varrho + \epsilon.$$

Podemos considerar um número finito de α's pois, de acordo com o Teorema de Borel Lebesgue, este intervalo $[0, \xi_0]$ admite uma subcobertura finita. Este α pode ser substituído por intervalos fechados que podem ser os segmentos do intervalo original $[0, \xi_0]$. Podemos substituir dois segmentos α adjacentes ou que se sobrepõem por um único segmento α, pois $\lambda(x_1 + x_2) < \lambda(x_1) + \lambda(x_2)$ e também, podemos encolher um α que se sobrepõe a um determinado $\beta(y)$ (sem conter $\beta(y)$ em sua totalidade) até o início da parte sobreposta. Finalmente obtemos $n+1$ intervalos $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ juntamente com n intervalos $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ da sequência $\beta(y)$ que cobre o intervalo original. Se os últimos intervalos mencionados correspondem aos números diádicos $y_1, y_2, \ldots, y_n$, então pela Equação (5.12) obtemos

$$\lambda(\alpha_0) \geq y_1,$$

$$\lambda(\alpha_1) \geq y_2 - y_1,$$

$$\cdots \quad \cdots$$

$$\lambda(\alpha_{n-1}) \geq y_n - y_{n-1},$$

$$\lambda(\alpha_n) \geq 1 - y_n,$$

e então

$$L_\varrho + \epsilon > \sum \lambda(\alpha_i) \geq 1,$$

e segue que

$$L_\varrho \geq 1 \geq L \geq L_\varrho,$$

o que caracteriza $L_\varrho = L = 1$. Assim, concluímos que $L(A) = 1$, e portanto, o conjunto A apresenta dimensão $\dim(A) = [\lambda(x)]$.

Exemplo 16. *A fim de gerar um conjunto de dimensão p, $(0 < p < 1)$, temos que ajustar $\lambda(x) = x^p$, que satisfaz nossos requisitos para todos os números positivos x. Por 5.7, ficamos com*

$$2^n \xi_n^p = 1,$$

$$\xi_n = \xi^n,$$

com $\xi = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{2}$.

Por exemplo, para obter a dimensão $\frac{1}{2}$*, temos que escolher* $\xi = \frac{1}{4}$*, isto é, remover a metade central de cada intervalo remanescente. Para um dado* ξ *onde* $0 < \xi < \frac{1}{2}$*, a dimensão é calculada através de*

$$\log\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}} < \log\frac{1}{2},$$

o que origina

$$p = \frac{\log 2}{\log\left(\frac{1}{\xi}\right)}.$$

O conjuto clássico de Cantor para o qual a terça parte central do intervalo é removida ($\xi = \frac{1}{3}$*), a dimensão é dada por* $p = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0,63903$*.*

Para construir um conjunto de dimensão infinitamente pequena $(0, p)$ *na escala logarítmica* $(p > 0)$*, utilizamos*

$$\lambda(x) = \frac{1}{\left(\log\frac{1}{x}\right)^{p}},$$

que é côncavo somente para valores suficientemente pequenos de x *e para* n *maior do que um certo valor,*

$$\left(\log\frac{1}{\xi_n}\right)^{p} = 2^n,$$

$$\xi_n = e^{-\eta^n},$$

onde $\eta = 2^{\frac{1}{p}} > 1$*.*

A função $\lambda(x)$ *é côncava para os valores de* x *(a função será côncava nos intervalos onde* $\lambda''(x) \leq 0$*):*

$$\lambda'(x) = -px\left[\log\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{-p-1},$$

e a derivada segunda é dada pela seguinte expressão

$$\lambda''(x) = p\left[\log\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{-p-1}\left\{-1 + x^2(p+1)\left[\log\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{-1}\right\},$$

para valores muito pequenos de x*,* $x^2(p+1)\left[\log\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{-1}$ *fica muito próximo de zero, o que acarreta*

$$-1 + x^2(p+1)\left[\log\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left[\log\left(\frac{1}{x}\right)\right]} \leq \frac{1}{p+1},$$

o que para p *grande, caracteriza* x *com valores suficientemente pequenos.*

As condições $\frac{\xi_{n-1}}{\xi_n} > 2$*,* $\eta^n - \eta^{n-1} > \log 2$*, são também satisfeitas para* n *maior do que um certo valor.* $\Diamond$

Se substituirmos (5.7) por $2^n\lambda(\xi_n) = L$, então $L(A) = L$. Se inserirmos dentro de cada intervalo $\beta(y)$ que foi deixado livre em A, conjuntos como o conjunto A com a mesma dimensão $[\lambda(x)]$ tal que as somas de suas medidas L convergem e repetir este procedimento com os intervalos abertos restantes, todos eles

apresentarão medidas L finitas, obtendo dessa forma um conjunto que tem dimensão $[\lambda(x)]$ em todos os intervalos.

Por outro lado, não é possível a costrução de um conjunto A cuja intersecção A_0^a com o intervalo $0 \leq x < a$ apresente dimensão crescente $[\lambda(x)]$ no sentido de que $\lim_{x\to 0} \frac{\lambda_b(x)}{\lambda_a(x)} = 0$ para $b > a$. Se (a_n) é uma sequência que converge para b por valores menores do que b, então $L_b\left(A_0^{a_n}\right) = 0$ e, como a medida L de conjuntos crescentes converge para a medida L de suas somas, teríamos $L_b\left(A_0^b\right) = 0$ com A_0^b não possuindo dimensão $[\lambda(x)]$. Se a dimensão $[\lambda_a(x)]$ existe e é uma função de a, então dimensões incomparáveis aparecem em todo intervalo arbitrariamente pequeno.

5.2 Estendendo para conjuntos no plano e no espaço

Retornando ao conjunto A discutido anteriormente, definimos uma função constante por partes $\varphi(x)$ sobre o conjunto $B = \bigcup \beta(y)$:

$$\varphi(x) = y, \text{ se } x \text{ pertence algum } \beta(y).$$

Se x e $\xi > x$ são dois pontos em B, ou eles pertencem ao mesmo $\beta(y)$ e $\varphi(\xi) - \varphi(x) = 0$, ou eles pertencem a diferentes intervalos $\beta(y)$, $\beta(\eta)$ com $y < \eta$, o que origina

$$\xi - x > u(\eta) - v(y) = \alpha,$$

e então, usando a Equação (5.12), ficamos com

$$\lambda(\xi - x) > \eta - y = \varphi(\xi) - \varphi(x).$$

Em qualquer caso temos

$$0 \leq \varphi(\xi) - \varphi(x) < \lambda(\xi - x) \text{ para } x < \xi.$$

Esta função é uniformemente contínua em B e pode, portanto, ser estendida para uma função contínua $\varphi(x)$ sobre o intervalo original $[0, \xi_0]$ no qual o conjunto B é denso. A função $\varphi(x)$ em geral irá satisfazer

$$0 \leq \varphi(\xi) - \varphi(x) \leq \lambda(\xi - x) \text{ para } x < \xi. \tag{5.13}$$

Trata-se de uma função monótona que não decresce conforme x cresce, varre todos os números reais de 0 a 1 e assume cada um destes valores ao menos uma vez para algum ponto de A. O intervalo $0 \leq y \leq 1$ é a única imagem (não sendo imagem inversa única entretanto) do intervalo $0 \leq x \leq \xi_0$ submetido à função $y = \varphi(x)$, e um intervalo α do eixo x corresponde por (5.13) a um intervalo $\gamma \leq \lambda(\alpha)$ do eixo y. Esta função ilustra a última parte da prova referente ao conjunto A deste capítulo de maneira mais clara: cobrimos A por intervalos α_n tais que

$$\sum \lambda(\alpha_n) < L_\varrho + \epsilon,$$

e que nós assumimos pertencer ao intervalo original. Então, os intervalos correspondentes γ_n devem cobrir o intervalo $[0,1]$ em sua totalidade, pois todo y tal que $0 \leq y \leq 1$ é a imagem de no mínimo um ponto x de A, e se x se encontra em α_n, então y se localiza em γ_n. Então $\sum \lambda_n \geq 1$, $\sum \lambda(\alpha_n) \geq 1$ e a prova continua da forma como foi feita no Capítulo 3.

A função inversa $x = \psi(y)$ é toda varrida pelos pontos racionais diádicos entre 0 e 1, o que significa que ela assume todos os valores entre $u(y)$ e $v(y)$ incluindo os extremos, enquanto $\psi(0) = 0$ e $\psi(1) = \xi_0$. Incidentalmente, esta função pode ser explicitamente construída da seguinte maneira: seja y um diádico irracional com a seguinte expansão diádica

$$y = \frac{y_1}{2} + \frac{y_2}{2^2} + \ldots, \ (y_n = 0, 1),$$

o que origina

$$x = \psi(y) = y_1\xi_0 + (y_2 - y_1)\xi_1 + (y_3 - y_2)\xi_2 + \ldots.$$

Isto é válido para $y = 0$, $y = 1$. Por outro lado, se y é um diádico racional, $0 < y < 1$, então y apresenta duas expansões diádicas, a primeira terminando com 1 e a segunda com 0, como representado abaixo

$$y = \frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{2^2} + \ldots + \frac{u_n}{2^n}, \ u_n = 1,$$

$$y = \frac{v_1}{2} + \frac{v_2}{2^2} + \ldots + \frac{v_n}{2^n}, \ v_n = 0,$$

e isto corresponde exatamente aos pontos finais do intervalo $\beta(y)$

$$u(y) = u_1\xi_0 + (u_2 - u_1)\xi_1 + (u_3 - u_2)\xi_2 + \ldots,$$

$$v(y) = v_1\xi_0 + (v_2 - v_1)\xi_1 + (v_3 - v_2)\xi_2 + \ldots.$$

A função $\phi(x)$ apresenta a seguinte interpretação simples: se A_a^b é a intersecção de A com o intervalo J_a^b com $(a \leq x < b)$, então

$$\phi(x) = L(A_0^x),$$

que pode ser obtido inicialmente nos pontos do conjunto $B = \bigcup \beta(y)$, e então estendida devido à monotonicidade de ambas as funções. Se x se encontra em $\beta(y)$ com $y = \frac{k}{2^n}$, então os β-intervalos correspondentes aos números diádicos de denominador 2^n dividem o conjunto A em 2^n pedaços congruentes, cada um com medida $\frac{1}{2^n}$, e como há k destes pedaços sobre a esquerda de $\beta(y)$, temos que

$$L\left(A_0^x\right) = \frac{k}{2^n} = y = \phi\left(x\right).$$

A função $\pi\left(x\right) = L\left(A_0^x\right)$ pode ser interpretada de uma maneira mais geral. Consideremos a medida exterior L se anulando nos conjuntos formados por um único ponto e no conjunto vazio e, para todos os outros conjuntos, existe um conjunto de Borel apresentando a mesma medida. Assumimos que A se encontra sobre o intervalo J_0^a, apresentando medida positiva $L\left(A\right) = L$. Com isto, $\phi\left(x\right)$ vai de zero a L de maneira monótona conforme x varia de zero a a. De acordo com a mensurabilidade dos intervalos, ficamos com

$$\phi\left(\xi\right) - \phi\left(x\right) = L\left(A_x^\xi\right), \tag{5.14}$$

com $x < \xi$.

Em particular,

$$L - \phi\left(x\right) = L\left(A_x^a\right),$$

com $\phi\left(x\right)$ sendo contínua pois, de acordo com propriedades de medida exterior, temos

$$L\left(A_0^x\right) \to L\left(A_0^\xi\right), \qquad L\left(A_x^a\right) \to L\left(A_\xi^a\right),$$

conforme x converge para ξ por valores menores e por valores maiores do que ξ respectivamente.

A função

$$x^* = \phi\left(x\right),$$

associa unicamente para qualquer conjunto X situado no intervalo $[0, a]$ um conjunto X^* sobre o intervalo $[0, L]$. Em geral X^* não é invertível de uma única maneira, pois $\phi\left(x\right)$ pode apresentar, no máximo, muitos intervalos enumeráveis onde ela é constante (um intervalo da imagem de ϕ pode conter enumeráveis números diádicos, e a imagem inversa deste intervalo ψ contérá enumeráveis intervalos associados aos números diádicos em questão). Mas se X e Y não apresentam pontos em comum, ou seja, $X \cap Y = \emptyset$, então X^* e Y^* apresentam no máximo um conjunto de pontos enumeráveis em comum. Embora a imagem inversa do conjunto X^* não é determinada de maneira única, ele apresenta uma imagem inversa maximal X, isto é, o conjunto de todos os pontos x cujas imagens se encontram em X^*, que não contém pontos ou contém todos os pontos de um intervalo constante. A imagem e a imagem inversa maximal de um conjunto de Borel é ainda um conjunto de Borel.

Para um intervalo J temos por (5.14) que

$$m\left(J^*\right) = L\left(A \cap J\right),$$

onde m denota a medida exterior de Lebesgue. Para um conjunto arbitrário X, somente a desigualdade

$$m\left(X^*\right) \geq L\left(A \cap X\right), \tag{5.15}$$

é válida, pela qual uma cobertura de X^* com intervalos J_n^* (sobre o intervalo $[0, L]$) satisfaz

$$\sum m\left(J_n^*\right) + \epsilon,$$

com os intervalos da imagem inversa maximal J_n cobrindo o conjunto X, o que acarreta

$$L\left(A \cap X\right) \leq \sum L\left(A \cap J_n\right) = \sum m\left(J_n^*\right).$$

A equação

$$m\left(X^*\right) = L\left(A \cap X\right), \tag{5.16}$$

cujo lado esquerdo representa a variação superior de $\phi\left(x\right)$ em X ou a integral superior de Stieltjes-Lebesgue $\int_X d\phi$, certamente é válida nos seguintes casos:

I. Quando X é um conjunto de Borel. Se Y for o complemento de X com relação ao intervalo J, então os conjuntos borelianos X^* e Y^* apresentam no máximo uma quantidade enumerável de pontos em comum e

$$m\left(J^*\right) = m\left(X^*\right) + m\left(Y^*\right),$$

$$m\left(J^*\right) \geq L\left(A \cap X\right) + L\left(A \cap Y\right) \geq L\left(A \cap J\right) = m\left(J^*\right),$$

e então para X e Y como em (5.15), a igualdade é assegurada.

II. Se X é um subconjunto de A. Se V é um conjunto de Borel que contém X com $L\left(V\right) = L\left(X\right)$, então $A \cap V$ se situa entre X e V, o que acarreta $L\left(A \cap V\right) = L\left(X\right)$, e então ficamos com

$$m\left(V^*\right) \geq m\left(X^*\right) \geq L\left(A \cap X\right) = L\left(A \cap V\right) = m\left(V^*\right).$$

III. A propriedade é válida para todo conjunto X se e somente se A é mensurável com respeito a L. Se B é o complemento de A com relação ao intervalo original $[0, a]$ e se (5.16) é válida no geral, então temos em particular

$$m\left(B^*\right) = 0, \tag{5.17}$$

e reciprocamente por II, nós temos para um conjunto arbitrário X que

$$m\left(X^*\right) = m\left(\left(A \cap X\right)^*\right) = L\left(A \cap X\right).$$

De (5.17) segue novamente que existe um conjunto de Borel V^* sobre B^* tal que $m(V^*) = 0$. Sua imagem inversa maximal V é um conjunto de Borel sobre B com $L(A \cap V) = 0$, cujo complemento também é um conjunto de Borel sobre A com $L(U) = L(A)$, e então A é mensurável com respeito a L. Esta conclusão novamente nos leva de volta a (5.17).

Se A é mensurável com relação a L, então nós podemos facilmente concluir de (5.16) que $A \cap X$ é mensurável com relação a L se X^* é linearmente mensurável, ou seja, é Lebesgue mensurável.

Se L procede de $\lambda(x)$, então a função

$$\phi_\varrho(x) = L_\varrho(A_0^x)$$

é notável por razões que se tornarão claras agora. Se varrermos de maneira monótona de 0 até $L_\varrho(A)$, como

$$L_\varrho(X+Y) \leq L_\varrho(X) + L_\varrho(Y)$$

implica que

$$\phi_\varrho(\xi) - \phi_\varrho(x) \leq L_\varrho\left(A_x^\xi\right), \qquad x < \xi$$

e para $\xi - x < \rho$

$$L_\varrho\left(A_x^\xi\right) \leq \lambda(\xi - x),$$

o que prova a continuidade de $\phi_\varrho(x)$. A função ϱ-dependente $x^* = \phi_\varrho(x)$ associa a cada intervalo $\alpha < \varrho$ um intervalo imagem $\alpha^* \leq \lambda(\alpha)$. Incidentalmente, podemos concluir a desigualdade

$$m(X^*) \leq L_\varrho(X)$$

entre um conjunto e sua imagem.

A construção de um conjunto planar de uma determinada dimensão prescrita apresenta algumas dificuldades. Sejam A um conjunto sobre o eixo x, B um conjunto sobre o eixo y, e $C = A \times B$ o conjunto planar de pontos (x, y), onde x assume valores pertencentes ao conjunto A e y assume valores pertencentes ao conjunto B. Provaremos, sob hipóteses específicas, que o conjunto C apresenta dimensão $[\lambda(t)\,\mu(t)]$, quando A é de dimensão $[\lambda(t)]$ e B é de dimensão $[\mu(t)]$. Sejam as correspondentes medidas exteriores de A, B e C sendo L, M e N e sejam ambas as funções $\lambda(t)$, $\mu(t)$ escolhidas conforme estabelecido anteriomente, o que acarreta estas funções sendo côncavas.

Seja A o conjunto trabalhado anteriormente, baseado em comprimentos de intervalos satisfazendo

$$2^m \lambda(\xi_m) = L,$$

o que acarreta a não necessidade da especificação do conjunto B daqui para frente. Vamos cobrir B com intervalos $\eta_n < \varrho$ satisfazendo

$$\sum \mu(\eta_n) < M + \epsilon.$$

Então, C será coberto por conjuntos $C_n = A \times \eta_n$. Assumindo que $\varrho \leq \xi_0$, escolhamos um índice m para cada n tal que

$$\xi_{m-1} > \eta_n \geq \xi_m$$

e envolvamos A em 2^m intervalos de comprimento ξ_m. Este procedimento cobrirá C_n com 2^m retângulos tendo lados ξ_m, η_n ou em 2^m círculos de diâmetros $d_{mn} = \sqrt{\xi_m^2 + \eta_n^2}$. Como $\xi_m < \frac{1}{2}\xi_{m-1}$, ficamos com

$$d_{mn} \leq \sqrt{2}\eta_n < 2\varrho,$$

$$d_{mn} \leq \sqrt{\xi_m^2 + \xi_{m-1}^2} < \frac{\sqrt{5}}{2}\xi_{m-1},$$

e então, pelos resultados da seção 10,

$$\lambda(d_{mn})\,\mu(d_{mn}) < \frac{\sqrt{5}}{2}\lambda(\xi_{m-1})\,\sqrt{2}\mu(\eta_n).$$

Segue daí que

$$N_{2\varrho}(C) \leq \sum_n 2^m \lambda(d_{mn})\,\mu(d_{mn})$$

$$< \sum_n \sqrt{10}\; 2^{m-1}\lambda(\xi_{m-1})\,\mu(\eta_n)$$

$$= \sqrt{10}L \sum \mu(\eta_n) < \sqrt{10}L(M + \epsilon),$$

e, finalmente,

$$N \leq \sqrt{10}LM.$$

A fim de fornecer um limite inferior para N, assumimos que A e B são conjuntos fechados sobre os intervalos $[0, \xi_0]$, $[0, \eta_0]$ e cobrimos C com círculos K_n de diâmetros $d_n < \varrho$ tal que

$$\sum \lambda(d_n)\,\mu(d_n) < N_\varrho + \epsilon.$$

Para cada círculo é associado um quadrado inscrito no mesmo com os lados paralelos aos eixos coordenados e com intersecção R_n com o retângulo original ($0 \leq x \leq \xi_0,\ 0 \leq y \leq \eta_0$). O retângulo R_n apresenta lados α_n, $\beta_n \leq d_n$. Agora, iremos fazer uso das seguintes funções:

$$\phi_\varrho(x) = L_\varrho(A_0^x), \qquad \psi_\varrho(y) = M_\varrho(B_0^y).$$

Como

$$u = \phi_\varrho(x), \qquad v = \psi_\varrho(y),$$

podemos projetar R_n sobre um retângulo no plano uv com lados

$$\gamma_n \leq \lambda(\alpha_n), \qquad \delta_n \leq \mu(\beta_n).$$

Estes retângulos devem cobrir o seguinte retângulo em sua totalidade, ou seja,

$$0 \leq u \leq L_\varrho, \qquad 0 \leq v \leq M_\varrho,$$

pois $\phi_\varrho(x)$ assume cada valor pelo menos uma vez para um determinado ponto do conjunto A e $\psi_\varrho(y)$ assume cada valor pelo menos uma vez para um determinado ponto do conjunto B. Então temos $\sum \gamma_n \delta_n \geq L_\varrho M_\varrho$ e além disso

$$\sum \lambda(d_n)\mu(d_n) \geq \sum \lambda(\alpha_n)\mu(\beta_n) \geq \sum \gamma_n \delta_n \geq L_\varrho M_\varrho,$$

o que acarreta $N_\varrho \geq L_\varrho M_\varrho$ e, portanto, $N \geq LM$.

Se combinarmos as desigualdades acima, então iremos ver, por exemplo, que o conjunto C terá exatamente dimensão $[\lambda\mu]$, sempre que A e B forem tomados nos moldes do conjunto A discutido anteriomente, apresentando dimensões $[\lambda]$, $[\mu]$ e sempre que eles se originarem de funções côncavas. Então podemos associar ao conjunto C uma dimensão na escala logarítmica que é menor do que 2. Se aumentarmos esta dimensão acima de 1 e expandirmos o conjunto C, cujos únicos subconjuntos conexos são pontos isolados, através da adição de segmentos de reta enumeráveis também tendo N- dimensão 0 para formar uma curva simples, então o conjunto resultante apresenta a mesma N- medida do conjunto C. Segue daí que existem curvas de Jordan de dimensões arbitrárias entre 1 e 2. É também fato notável a existência de curvas de Jordan de dimensão 2 e, adotando procedimento similar ao que foi empregado neste caso ou como é sugerido para conjuntos lineares, podemos gerar curvas de Jordan para cada segmento de curva apresentando a mesma dimensão situada entre 1 e 2.

Com 3 funções côncavas λ, μ, ν e 3 conjuntos específicos A, B, C do tipo descrito neste capítulo, podemos construir o conjunto espacial $A \times B \times C$ de dimensão $[\lambda\mu\nu]$ e chegar nas correspondentes conclusões pertinentes, que são os mesmos resultados obtidos com 2 funções, apenas estendendo para 3 funções.

Referências

[1] Bartle, R. G., The Elements of Integration, John Wiley & Sons, Inc, 1966.

[2] Bartle, R., G., *The Elements of Lebesgue Measure*, John Wiley & Sons, Inc, 1966.

[3] Besicovitch, A., S., *On the Definition of Tangents to Sets of Infinite Linear Measure*, Proc. Camb. Phil. Soc., 52, 1956, 20-29.

[4] Falconer, K., *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Aplications*, John Wiley & Sons, Inc, 2003.

[5] Garcia, A., Lequain, Y., *Elementos de Álgebra*, 6.ed., Rio de Janeiro, IMPA, 2015.

[6] Goodey, P., R., *Generalizazed Hausdorff Dimension*, Department of Mathematics, Royal Holloway College, Englefield Green, Surrey, 1970, Mathematika 17, 324-327.

[7] Hausdorff, F., *Dimension and Outer Measure*, Classics on Fractals, 1918.

[8] Lipschutz, S., *Teoria dos Conjuntos*, Coleção Schaum, Mcgraw-Hill do Brasil, LTDA.

[9] Lima, E., L., *Análise Real Volume* 1, IMPA, 2011.

[10] Lima, E., L., *Análise Real Volume* 2, IMPA, 2016.

[11] Lima, E., L., *Elementos de Topologia Geral*, Editora SBM, 2009.

[12] Lima, E., L., *Variedades Diferenciáveis*, IMPA, 2011.

[13] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, Inc, 1978.

[14] Vitali, G., Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta, Bologna, Tip. Gamberini e Parmeggiani, 1905.