UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Fabricio Fernando Alves

Aspectos dinâmicos de operadores lineares

Tese de Doutorado

Pós-Graduação em Matemática

São José do Rio Preto

2020

Fabricio Fernando Alves

Aspectos dinâmicos de operadores lineares

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Orientador: Prof. Dr. Ali Messaoudi.

São José do Rio Preto

2020

A474a

Alves, Fabricio Fernando
Aspectos dinâmicos de operadores lineares / Fabricio Fernando Alves. -- São José do Rio Preto, 2020
79 f.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto
Orientador: Ali Messaoudi

1. Matemática. 2. Teoria dos sistemas dinâmicos. 3. Dinâmica linear. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Fabricio Fernando Alves

Aspectos dinâmicos de operadores lineares

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Ali Messaoudi
UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Nilson da Costa Bernardes Junior
UFRJ - Rio de Janeiro

Prof. Dr. José Régis Azevedo Varão Filho
UNICAMP - Campinas

Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita
UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 14 de fevereiro de 2020.

À minha esposa, Nayara,

e à minha filha, Estela,

dedico.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, meu “refúgio e fortaleza, socorro bem presente na angústia”(Salmos 46:1), “minha rocha e a minha salvação; a minha defesa”(Salmos 62:6).

Agradeço ao meu orientador, Professor Doutor Ali Messaoudi, pela orientação precisa, pelo constante incentivo, pela paciência, disponibilidade e flexibilidade de horários, além das várias correções, ideias e sugestões que muito ajudaram a dar forma e conteúdo ao trabalho. Aos demais professores da comissão examinadora por aceitarem o convite para examinar este trabalho e também agradeço pelos inúmeros apontamentos e correções sugeridos, os quais, sem dúvida, enriqueceram a tese. Aproveito ainda o ensejo para agradecer os professores com quem convivi durante o período de cumprimento dos créditos em disciplinas: Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi, Dr. Claudio Gomes Pessoa, Dra. Maria Gorete Carreira Andrade, Dr. German Jesús Lozada Cruz e Dra. Juliana Conceição Precioso Pereira.

Não há palavras suficientes para agradecer à minha esposa, Nayara, e à minha filha, Estela, pelo amor, apoio e compreensão, mesmo em face dos vários momentos de ausência, sempre me servindo de inspiração para prosseguir adiante. Agradeço ainda aos meus pais, Marilene e Aldinei, pelo apoio incondicional em todos os momentos e aos meus irmãos, Weslley e Danielle, pela amizade e incentivo. Sou muito grato também aos irmãos na fé pelas orações, intercessões e cuidado em meu favor.

Aos colegas de pós-graduação: Otávio, Junior, Heloísa, Laura, Rafael, Willian, Jarne, Alisson, Rafaela, Ana Lívia, Luiz Fernando e Eliton, pelo convívio agradável, pelas conversas e discussões sempre produtivas nas horas de estudo. Ao Douglas Cesaretti de Freitas, pela amizade de muitos anos, sempre solícito em me ajudar no que fosse preciso.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, à qual agradeço.

Por último, mas não menos importante, agradeço ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo que, por meio de seu Programa de Afastamento para Qualificação, viabilizou a conclusão da tese.

“A fé é a roda mestra; ela põe em funcionamento todas as demais graças”.

Thomas Watson, *A Body of Divinity*.

Banner of Truth, London, 1958, p.151

Resumo

Nessa tese, estudamos algumas propriedades dinâmicas no contexto de Dinâmica Linear em espaços de Banach de dimensão infinita, como transitividade por cadeia, transitividade por cadeia em média, sombreamento e sombreamento médio, entre outros. Vários resultados foram provados e muitas outras questões foram propostas. No que concerne à transitividade por cadeia, provamos que toda componente conexa do espectro de um operador transitivo por cadeia intersecta o círculo unitário. A recíproca desse resultado foi investigada em dimensão finita e para deslocamentos ponderados. Estabelecemos também critérios para que uma classe de deslocamentos ponderados unilaterais seja transitivo por cadeia. Quanto à transitividade por cadeia em média, provamos que a classe dos operadores transitivos por cadeia em média contém a classe dos operadores transitivos por cadeia e dos operadores hiperbólicos. Estudamos ainda a transitividade por cadeia para uma transformação esférica induzida por uma matriz inversível. Além disso, foi demonstrado que um operador hiperbólico possui sombreamento médio; que em dimensão finita hiperbolicidade e sombreamento médio coincidem; que, na presença de expansividade uniforme, a propriedade de sombreamento médio implica a de sombreamento. Introduzimos também o conceito de expansividade média e demonstramos que expansividade média mais sombreamento médio implicam expansividade uniforme e, em particular, hiperbolicidade.

Palavras-chave: Dinâmica linear. Transitividade por cadeia. Transitividade por cadeia em média. Sombreamento. Sombreamento em média.

Abstract

In this thesis, we studied some dynamical properties on the context of Linear Dynamics on infinite-dimensional Banach spaces, such as chain transitivity, average chain transitivity, shadowing and average shadowing, among others. Many results were proved and many other questions were proposed. Concerning chain transitivity, we proved that each connected component of the spectrum of a chain transitive operator intersects the unit circle. The converse was investigated for finite dimension and for weighted shifts. We also established criteria so that a class of unilateral weighted shifts may be chain transitive. For average chain transitivity, we proved that the class of average chain transitive operators contains the class of the chain transitive operators and the class of the hyperbolic ones. We studied yet the chain transitivity for the spherical transformation induced by an invertible matrix. Moreover, we showed that a hyperbolic operator has average shadowing property; in finite dimension, hyperbolicity and average shadowing coincide; under the presence of uniform expansivity, the average shadowing property implies the shadowing property. We also introduced the concept of average expansivity and then we proved that average expansivity plus average shadowing imply uniform expansivity and, in particular, hyperbolicity.

Keywords: Linear Dynamics. Chain transitivity. Average chain transitivity. Shadowing. Average shadowing.

Sumário

Introdução

A teoria dos sistemas dinâmicos se ocupa da análise do comportamento a longo prazo de sistemas em evolução. De modo geral, os possíveis estados de um determinado sistema são descritos através dos elementos de um dado conjunto X, enquanto a evolução do sistema é descrita por meio de uma aplicação $T : X \longrightarrow X$, ou seja, se $x_n \in X$ é o estado do sistema em um instante $n \geq 0$, então $x_{n+1} = T(x_n), n = 0, 1, 2, \ldots$.

Uma tal análise pode ser feita, por exemplo, do ponto de vista topológico, dotando-se o conjunto X de uma topologia e considerando T uma aplicação contínua; ou de modo probabilístico, munindo X de uma σ-álgebra e supondo T mensurável. Essas abordagens dão origem a dois ramos de estudo dos sistemas dinâmicos:

i A Dinâmica Topológica, que se ocupa de propriedades como transitividade topológica, minimalidade, sombreamento (*shadowing*), estabilidade estrutural, caos, entropia topológica, entre outras;

ii A Dinâmica Mensurável, que trata dos estudos probabilísticos (do ponto de vista de medida) dos sistemas dinâmicos, como existência de medidas invariantes, ergodicidade, mistura forte ou fraca (*strong or weak mixing*), entropia métrica, entre outras.

Atualmente, uma área dos Sistemas Dinâmicos que se encontra muito ativa é a Dinâmica Linear, cujo propósito é o estudo da dinâmica de operadores lineares contínuos sobre espaços vetoriais topológicos, principalmente espaços de Fréchet, de Banach e espaços de Hilbert. Esta área encontra-se na intersecção das grandes áreas de Sistemas Dinâmicos e Teoria dos Operadores, empregando métodos de ambas as áreas, além de apresentar conexões com outros ramos da Matemática, tais como Análise Complexa, Análise Funcional, Teoria da Medida, Teoria dos Números e Probabilidade. Têm sido encontradas aplicações da Dinâmica Linear em áreas diversas, tais como Dinâmica Celular, Dinâmica Populacional, Engenharia de Trânsito, Teoria da Difusão e Física Quântica. Os livros de Bayart e Matheron [5] e de Grosse-Erdmann e Peris [20], publicados por volta de 2010, fornecem amplo panorama da área, além de vasta bibliografia.

Algumas das noções investigadas em Dinâmica Linear são: hiperciclicidade (transitividade topológica), superciclicidade (densidade de uma órbita projetiva na esfera unitária), hiperciclicidade frequente (a órbita densa visita cada subconjunto aberto e não vazio com densidade positiva) e caos no sentido de Devaney (hiperciclicidade e densidade do conjunto dos pontos periódicos). É sabido que estas noções jamais ocorrem quando o espaço X tem dimensão finita (veja, por exemplo, [20], Teorema 2.58, ou [5], Proposição 1.1).

Neste trabalho, consideraremos as noções de transitividade por cadeia e sombreamento médio (*average shadowing*). A primeira noção é uma generalização do conceito de transitividade topológica. A transitividade por cadeia foi estudada por Hirsch et al [21] em dinâmica topológica com respeito a repulsores e persistência uniforme. Esta noção junto com a de recorrência por cadeia têm aplicações em Economia, Epidemiologia, Teoria dos Jogos e Biologia Matemática (veja-se, por exemplo, as citações e referências de [21]). Já o sombreamento médio é um dentre os vários tipos de sombreamento que têm sido estudados nos últimos anos, com importante papel em muitos ramos dos Sistemas Dinâmicos, como Dinâmica Topológica, Dinâmica Diferenciável e Teoria ergódica (veja [28], [2], [31]).

Para operadores lineares definidos em espaços de Banach, provamos que toda componente conexa do espectro de um operador transitivo por cadeia intersecta o círculo unitário, estendendo para os operadores transitivos por cadeia um resultado devido a Kitai [22] que havia sido provado para operadores hipercíclicos. Como consequência, operadores que são hiperbólicos (aqueles cuja intersecção do espectro com o círculo unitário é vazia) ou compactos (operadores cujo fecho da imagem da bola unitária é compacto no contradomínio) não possuem transitividade por cadeia (Teorema 2.12 e Corolário 2.20). Investigamos a recíproca do resultado em dimensão finita e para deslocamentos ponderados. Apresentamos ainda critérios para que uma classe de deslocamentos ponderados unilaterais tenha a transitividade por cadeia. Também demonstramos que a classe dos operadores transitivos por cadeia em média contém a classe dos operadores hiperbólicos a dos transitivos por cadeia.

Referente ao sombreamento médio, conseguimos provar que os operadores hiperbólicos possuem sombreamento médio. Provamos também que as noções de hiperbolicidade e sombreamento médio coincidem em dimensão finita. Mostramos ainda uma classe de deslocamentos bilaterais ponderados inversíveis que possuem sombreamento médio e que não são hiperbólicos e que, na presença de expansividade uniforme, sombreamento médio implica sombreamento. Além disso, introduzimos uma nova noção, a de expansividade média, e então demonstramos que operadores expansivos em média que possuem sombreamento médio são uniformemente expansivos e hiperbólicos.

Estudamos propriedades dinâmicas da aplicação esférica $\phi : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$, induzida por uma matriz inversível A, dada por $\phi(x) = \frac{Ax}{\|Ax\|}$, a qual já foi caracterizada no que diz respeito à propriedade de sombreamento em termos dos módulos dos autovalores (veja [28], Teorema 3.2.2). Parece-nos que também é possível caracterizar tal aplicação no que se refere à transitividade por cadeia, o que nos levou a propor uma conjectura e apresentamos uma prova em um caso particular.

Organizamos a tese em três capítulo, distribuídos conforme a descrição seguinte.

O Capítulo 1 é destinado a apresentar os conceitos de hiperciclicidade, expansividade e hiperbolicidade, bem como alguns resultados clássicos, envolvendo esses conceitos, além de fixar a notação a ser empregada no restante do trabalho.

O Capítulo 2 trata da transitividade por cadeia, apresentando exemplos de operadores que possuem essa propriedade, a relação dessa noção com hiperciclicidade e hiperbolicidade. Faz-se ainda uma caracterização de operadores transitivos por cadeia através do seu espectro e propomos critérios de transitividade por cadeia para uma classe de deslocamentos ponderados (*weighted shifts*) para a esquerda. Finaliza-se o capítulo introduzindo uma variação do conceito, a saber, a transitividade por cadeia em média e discutimos sua relação com a transitividade por cadeia e a hiperbolicidade. Encerramos então o capítulo com um estudo das aplicações esféricas.

No Capítulo 3, inicia-se apresentando uma compilação de alguns resultados referentes ao sombreamento e ao sombreamento limite no contexto da Dinâmica Topológica e então são apresentados os resultados da nossa investigação no âmbito dos operadores lineares.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, foram fornecidos alguns conceitos básicos da teoria dos sistemas dinâmicos lineares, tais como hiperciclicidade, transitividade topológica e hiperbolicidade, entre outras, estabelecendo-se algumas relações entre esses conceitos. Será apresentada também uma importante classe estudada em dinâmica linear, a saber: a dos deslocamentos (*shifts*). As referências padrão para o que foi exposto no capítulo são [5] e [20].

1.1 Dinâmica Topológica

Definição 1.1. Um *sistema dinâmico topológico* é um par (X, T), no qual X é um espaço métrico e $T : X \longrightarrow X$ é uma aplicação contínua.

Definição 1.2. Seja (X, T) um sistema dinâmico topológico. Para cada $x \in X$, o conjunto

$$O(x, T) = \{T^n x; \quad n \geq 0\},$$

em que $T^0 = I$ (I é a identidade em X) e $T^n = T \circ \ldots \circ T$ (n vezes), é chamado *órbita de x por meio de T*.

Caso a aplicação T seja inversível, define-se a órbita negativa de modo natural.

Definição 1.3. Sejam (Y, S) e (X, T) sistemas dinâmicos. Diz-se que T é *quaseconjugado* a S se existe uma aplicação contínua $\phi : Y \longrightarrow X$ com imagem densa tal que $T \circ \phi = \phi \circ S$. Se a aplicação ϕ for ainda um homeomorfismo, então S e T são conjugados.

Definição 1.4. Seja (X, T) um sistema dinâmico. Um subconjunto $U \subset X$ é *T-invariante* (ou invariante por meio de T) se $T(U) \subset U$.

Definição 1.5. Seja (X,T) um sistema dinâmico. Um ponto $x \in X$ é um *ponto fixo de* T se $T(x) = x$. Se $T^n(x) = x$, para algum $n \in \mathbb{N}$, então x é denominado *ponto periódico de* T e o conjunto dos pontos periódicos de T é denotado por $Per(T)$.

Definição 1.6. Seja (X,T) um sistema dinâmico. Diz-se que:

a) T é *topologicamente transitivo* se, dados quaisquer dois subconjuntos abertos U e V de X, existe um número natural n tal que

$$T^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

b) T é *misturador* (mixing) se, para qualquer par (U,V) de subconjuntos abertos de X, existe um número natural N tal que

$$T^n(U) \cap V \neq \emptyset, \forall n \geq N.$$

c) T é *fracamente misturador* (weakly mixing) se $T \times T$ é topologicamente transitivo.

Observação 1.7. Para qualquer sistema dinâmico,

$$\text{mistura} \Rightarrow \text{mistura fraca} \Rightarrow \text{transitividade topológica}.$$

O resultado seguinte, devido a Furstenberg [18], implica que se $T \times T$ é topologicamente transitivo, então $T \times \cdots \times T$ também o é.

Teorema 1.8. ***(Furstenberg)*** *Seja $T : X \longrightarrow X$ um sistema dinâmico fracamente misturador. Então o n-uplo produto $T \times \cdots \times T$ é fracamente misturador para cada $n \geq 2$.*

Em 1989, Devaney [15] propôs uma definição de caos, a qual mostrou-se muito satisfatória. Sua definição reflete a imprevisibilidade de sistemas caóticos porque a definição contém uma dependência das condições iniciais. Mais precisamente:

Definição 1.9. Seja (X,d) um espaço métrico sem pontos isolados. Então um sistema dinâmico $T : X \longrightarrow X$ tem *dependência das condições iniciais* se existe alguma constante $\delta > 0$ tal que, para cada $x \in X$ e $\epsilon > 0$, existe algum y em X de modo que $d(x,y) < \epsilon$, mas para algum $n \geq 0$, $d(T^n(x), T^n(y)) > \delta$.

Definição 1.10. (Devaney) Seja (X,d) um espaço métrico sem pontos isolados. Então um sistema dinâmico $T : X \longrightarrow X$ é *caótico* (no sentido de Devaney) se satisfaz às condições seguintes:

i) T depende das condições iniciais;

ii) T é topologicamente transitivo;

iii) T tem um conjunto denso de pontos periódicos.

No entanto, Banks et al. [3] e Silverman [30] mostraram, independentemente, em 1992 que a condição de dependência das condições iniciais pode ser omitida da definição de caos, pois é obtida como consequência das outras duas condições.

Teorema 1.11. *(Banks et al.; Silverman) Seja (X, d) um espaço métrico sem pontos isolados. Se um sistema dinâmico $T : X \longrightarrow X$ é topologicamente transitivo e tem um conjunto denso de pontos periódicos, então T depende das condições iniciais com respeito a qualquer métrica definindo a topologia de X.*

Para os sistemas dinâmicos lineares, o espaço subjacente deve ainda contar com uma estrutura linear, tal como no caso dos espaços de Hilbert e de Banach. É fato que exemplos interessantes de sistemas dinâmicos lineares são definidos em espaços ainda mais gerais: os espaços de Fréchet. No entanto, as definições das noções apresentadas serão estabelecidas apenas em espaços de Banach, pois os resultados obtidos neste trabalho foram considerados apenas para estes espaços.

Definição 1.12. Sejam X e Y espaços de Banach. O espaço dos operadores lineares e limitados $T : X \longrightarrow Y$ é denotado por $L(X, Y)$. Se $Y = X$, então denota-se $L(X, X) = L(X)$. Um *sistema dinâmico linear* é um par (X, T), em que X é um espaço de Banach e T é um operador linear limitado em T.

Lembremos que um operador linear T definido em um espaço normado X é *limitado* se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que, para todo $x \in X$,

$$\|Tx\| \leq \alpha \|x\|.$$

Assim, define-se a norma de T como

$$\|T\| = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

O principal interesse da Dinâmica Linear tem sido os sistemas dinâmicos lineares com uma órbita densa. Tais sistemas mostram a riqueza da Dinâmica Linear e, muitas vezes, apresentam resultados contraintuitivos àqueles correspondentes da dinâmica diferenciável em dimensão finita. Por isso, os operadores com tais propriedades recebem um nome específico: operadores hipercíclicos.

1.2 Operadores hipercíclicos

Definição 1.13. Seja (X, T) um sistema dinâmico linear, no qual X é um espaço de Banach separável. Então o operador T é *hipercíclico* se existe algum vetor $x \in X$ cuja órbita é densa em X. Neste caso, x é denominado vetor hipercíclico e o conjunto dos vetores hipercíclicos de T é indicado por $HC(T)$.

Convém frisar que essa noção só faz sentido se o espaço X for separável. Sabe-se que não há operadores hipercíclicos em espaços não nulos de dimensão finita (veja [5], Proposição 1.1) e que a hiperciclicidade é preservada por quaseconjugação ([20], Proposição 1.19).

O resultado seguinte, provado por G. D. Birkhoff [8], relaciona hiperciclicidade com transitividade topológica.

Teorema 1.14 (Teorema de Birkhoff da transitividade)**.** *Sejam X um espaço de Banach separável e $T : X \longrightarrow X$ um operador linear limitado. As afirmações seguintes são equivalentes:*

a) T é hipercíclico;

b) T é topologicamente transitivo. Nesse caso, o conjunto dos vetores hipercíclicos de T, $HC(T)$, é um subconjunto G_δ denso de X.

Como consequência, segue que um operador inversível T é hipercíclico se, e somente se, T^{-1} também o é.

De acordo com Grosse-Erdmann e Peris Manguillot [20], os primeiros exemplos de operadores hipercíclicos foram obtidos por G.D. Birkhoff (1929), G.R. Maclane (1952) e S. Rolewicz (1969).

Exemplo 1.15. (Operadores de Birkhoff, Exemplo 1.4 em [5]) Seja $H(\mathbb{C})$ o espaço das funções inteiras em $\mathbb{C}$, dotada da topologia da convergência uniforme nas partes compactas. Para qualquer número complexo não nulo a, seja $T_a : H(\mathbb{C}) \longrightarrow H(\mathbb{C})$ o operador translação, definido por $T_a(f)(z) = f(z+a)$. Então T_a é hipercíclico em $H(\mathbb{C})$.

Exemplo 1.16. (Operador de MacLane, Exemplo 1.8 em [5]) O operador derivação $D : f \longmapsto f'$ é hipercíclico em $\mathbb{C}$.

Exemplo 1.17. (Operador de Rolewicz, Exemplo 1.9 em [5]) Seja $B : \ell_2(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell_2(\mathbb{N})$ dado por $B((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = ((x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}})$, o operador deslocamento unilateral para a esquerda. Então o operador λB é hipercíclico para qualquer escalar λ, com $|\lambda| > 1$.

Em 1991, Godefroy e Shapiro [19] adotaram a definição de Devaney para caos linear, a qual, tendo em vista o Teorema (1.14), pode ser assim formulada.

Definição 1.18. Um operador linear limitado $T : X \longrightarrow X$ é *caótico* (no sentido de Devaney) se:

i) T é hipercíclico;

ii) T tem um conjunto denso de pontos periódicos.

Proposição 1.19. *Se T é um operador hipercíclico, então T depende das condições iniciais com respeito a qualquer métrica invariante por translação definindo a topologia de X.*

Os três exemplos de operadores hipercíclicos apresentados acima são também caóticos. Vejamos, por exemplo, como provar que os operadores de Rolewicz são caóticos. A fim de ver que os operadores de Birkhoff e de MacLane são caóticos seriam necessários mais alguns resultados auxiliares, fugindo do escopo do texto.

Exemplo 1.20. (Operadores de Rolewicz) Seja $T = \lambda B$, $|\lambda| > 1$, o operador de Rolewicz em $X = \ell_p(\mathbb{N})$, $(1 \leq p < \infty)$, ou $X = c_0(\mathbb{N})$. Verifica-se que $x \in X$ é um ponto periódico se, e somente se, existem $N \in \mathbb{N}$ e $x_k \in \mathbb{K}$, $k = 1, \ldots, N$, tal que

$$x = (x_1, \ldots, x_N, \lambda^{-N} x_1, \ldots, \lambda^{-N} x_N, \lambda^{-2N} x_1, \ldots, \lambda^{-2N} x_N, \ldots).$$

Para ver que o conjunto dos pontos periódicos é denso em X basta aproximar qualquer sequência finita $y = (y_1, \ldots, y_n, 0, \ldots)$. Escolha um ponto periódico, com período $N \geq n$ tal que as primeiras N coordenadas coincidem com as de y. Então,

$$\|x - y\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|^{-iN} \|y\| \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad N \to +\infty.$$

Portanto, os operadores de Rolewicz são caóticos.

1.3 Critérios de hiperciclicidade

Lembre-se que o Teorema de Birkhoff da transitividade [Teorema 1.14] reduz a hiperciclicidade à geralmente mais simples condição de transitividade topológica. No entanto, nem sempre é possível verificar esta condição para um dado operador. Existem critérios para verificar quando um operador é caótico, misturador, ou fracamente misturador e, em particular, hipercíclico. Estes critérios podem ser encontrados, por exemplo, no terceiro capítulo da referência [20]. Limitamo-nos a apresentar a seguir um critério de hiperciclicidade para um operador.

Teorema 1.21. ***(Critério de Hiperciclicidade)*** *Seja $T : X \longrightarrow X$ um operador linear limitado. Se existem subconjuntos densos $X_0, Y_0 \subset X$, uma sequência crescente $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de inteiros positivos e aplicações $S_{n_k} : Y_0 \longrightarrow X$, $k \geq 1$, tais que, para quaisquer $x \in X_0$ e $y \in Y_0$,*

i) $T^{n_k}x \longrightarrow 0$,

ii) $S_{n_k}y \longrightarrow 0$,

iii) $T^{n_k}S_{n_k}y \longrightarrow y$, *quando* $k \to +\infty$

então T é fracamente misturador e, em particular, hipercíclico.

Observação 1.22. Se no teorema acima tem-se $n_k = k$, então o operador T é misturador.

1.4 Expansividade e hiperbolicidade

Seja $\mathbb{S}^1$ o círculo unitário no plano complexo, isto é, $\mathbb{S}^1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. Além disso, sejam X um espaço de Banach complexo, S_X a *esfera unitária* de X, isto é, $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$, e T um operador linear limitado, definido em X. O *espectro* de T no espaço de Banach complexo X é o conjunto

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \quad \text{não é inversível}\}.$$

Sabe-se que $\sigma(T)$ é um subconjunto não vazio ([23], Teorema 7.5-4) e compacto ([10], Proposição 6.7) de $\mathbb{C}$. Se T é um operador linear e limitado, definido em um espaço de Banach real, então seu espectro é igual ao espectro de sua complexificação, isto é, $\sigma(T) = \sigma(T_{\mathbb{C}})$. E mais, o espectro de T pode ser decomposto em três conjuntos disjuntos, a saber:

- o *espectro pontual*:

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \ \text{ não é injetor}\};$$

- o *espectro contínuo*:

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \ \text{ é injetor, não sobrejetor e } \ (T - \lambda I)(X) \ \text{ é denso em } \ X\};$$

- o *espectro residual*:

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \ \text{ é injetor, mas } \ (T - \lambda I)(X) \ \text{ não é denso em } \ X\}.$$

Há também o *espectro pontual aproximado* de T, denotado por $\sigma_a(T)$, e definido como:

$$\sigma_a(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists \ \text{ uma sequência } \ (x_n) \ \text{ em } \ X, \ \text{ com } \ \|x_n\| = 1 \ \text{ e } \ \|\lambda x_n - Tx_n\| \longrightarrow 0 \ \text{ quando } \ n \to +\infty\}.$$

É sabido ainda (veja [16]) que

$$\partial\sigma(T) \subset \sigma_a(T) \subset \sigma(T), \quad \sigma(T) = \sigma_r(T) \cup \sigma_a(T) \ \text{ e } \ \sigma_r(T) \subset \sigma_p(T^*),$$

em que $\partial\sigma(T)$ é a fronteira de $\sigma(T)$ e T^* é o operador adjunto de T atuando no espaço dual X' de X. E mais, se um operador T é hipercíclico, então $\sigma_p(T^*) = \emptyset$ (Veja [20], Lema 2.53).

Definição 1.23. Seja T um operador linear limitado definido em um espaço de Banach X. Diz-se que T é *expansivo* (*positivamente expansivo*) se existir uma constante $c > 1$, de modo que para cada $z \in S_X$, exista um número inteiro (natural) n tal que

$$\|T^n z\| \geq c.$$

Definição 1.24. Seja T um operador linear limitado definido em um espaço de Banach X. Diz-se que T é *uniformemente expansivo* (*uniforme e positivamente expansivo*) se existirem uma constante $c > 1$ e um número inteiro (natural) n tais que se $z \in S_X$, então

$$\|T^n z\| \geq c \ \text{ ou } \ \|T^{-n} z\| \geq c$$

(se $z \in S_X$ então $\|T^n z\| \geq c$).

Ressalte-se que nas definições de expansividade e de expansividade uniforme é necessário que o operador T seja inversível.

Definição 1.25. Um operador linear T definido em um espaço de Banach X é *hiperbólico* se $\sigma(T) \cap \mathbb{S}^1 = \emptyset$.

Sabe-se ([5], Teorema 1.18) que um operador hipercíclico não pode ser hiperbólico e (veja, por exemplo, [17], Lema 1) que um operador linear limitado T definido em X é hiperbólico se, e somente, se existem uma norma equivalente à norma $\|\cdot\|$ em X e uma decomposição

$$X = X_s \oplus X_u, \quad T = T_s \oplus T_u,$$

em que X_s e X_u são subespaços fechados de X e T-invariantes; $T_s = T\mid_{X_s}$ é uma contração própria, isto é, $\|T_s\| < 1$; e $T_u = T\mid_{X_u}$ é inversível e uma dilatação própria, ou seja, $\|T_u^{-1}\| < 1$.

Também é conhecido o fato ([17], Teorema 1) que um operador inversível T é uniformemente expansivo se, e somente se,

$$\sigma_a(T) \cap \mathbb{S}^1 = \emptyset.$$

Portanto, todo operador inversível e hiperbólico é uniformemente expansivo.

1.5 Deslocamentos (*shifts*)

O conjunto dos números inteiros positivos é usualmente denotado por $\mathbb{N}$, enquanto que o conjunto dos inteiros não negativos é denotado por $\mathbb{N}_0$.

Para cada número real $p \in [1, \infty)$, denota-se por $\ell_p(\mathbb{Z})$ ao espaço de Banach de todas as sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de escalares tais que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^p < \infty$, dotado com a norma

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Observe que, em particular, $\ell_2(\mathbb{Z})$ é um espaço de Hilbert com respeito ao produto interno

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \overline{y_n}.$$

Define-se ainda $\ell_\infty(\mathbb{Z})$ como o conjunto de todas as sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de escalares que são limitadas. Este espaço é um espaço de Banach quando dotado da norma

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|. \tag{1.1}$$

Além disso, $c_0(\mathbb{Z})$ denota o espaço de Banach de todas as sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tais que $\lim_{n\to\pm\infty} x_n = 0$, dotado com a mesma norma descrita em (1.1).

Analogamente, definem-se os espaços $\ell_p(\mathbb{N})$ ($p \in [1,\infty]$) e $c_0(\mathbb{N})$.

Definição 1.26. Seja $X = \ell_p(\mathbb{Z})$ ($p \in [1,\infty]$) ou $X = c_0(\mathbb{Z})$ e $w = (w_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ uma sequência limitada de escalares. O operador linear $B_w : X \longrightarrow X$, definido por $B_w((x_n)_n) = (w_{n+1}x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$, é denominado *deslocamento ponderado bilateral para a esquerda.* A sequência $w = (w_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é a *sequência de pesos.* Se $w_n = 1$, para todo n, então B_w é denotado simplesmente por B e é denominado *deslocamento bilateral para a esquerda.*

Observe que B_w é inversível se, e somente se, $\inf_{n\in\mathbb{Z}} |w_n| > 0$.

No caso em que $X = \ell_p(\mathbb{N})$ ($p \in [1,\infty]$) ou $X = c_0(\mathbb{N})$, podem ser definidos os deslocamentos *unilaterais para a esquerda* e *ponderados unilaterais para a esquerda*, dados, respectivamente por:

$$B : X \longrightarrow X, \quad B(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (x_2, x_3, x_4, \cdots)$$

e

$$B_w : X \longrightarrow X, \quad B_w(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (w_2x_2, w_3x_3, w_4x_4, \cdots).$$

É possível verificar que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|B_w^n\| = \sup_k |w_k w_{k+1} \cdot \ldots \cdot w_{k+n-1}|.$$

Sabe-se (veja [9]) que o espectro de um deslocamento ponderado unilateral para a esquerda ou de um deslocamento ponderado bilateral para a esquerda não inversível é dado por:

$$\sigma(B_w) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r(B_w)\},$$

em que $r(B_w)$ é o *raio espectral* do operador B_w, isto é, $r(B_w) = \lim_{n\to\infty} \|B_w^n\|^{\frac{1}{n}}$. No caso em que B_w é um deslocamento ponderado bilateral para a esquerda inversível, prova-se que

$$\sigma(B_w) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \frac{1}{r(B_w^{-1})} \leq |\lambda| \leq r(B_w)\}.$$

Observação 1.27. ([6], Observação 35) (a) Seja $X = \ell_p(\mathbb{Z})$ ($1 \leq p < \infty$) ou $X = c_0(\mathbb{Z})$ e $w = (w_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, com $\inf_{n\in\mathbb{Z}} |w_n| > 0$. Segue que o deslocamento ponderado bilateral para a esquerda é hiperbólico se, e somente se, $\sigma(B_w) \subset \mathbb{D}$ ou $\sigma(B_w^{-1}) \subset \mathbb{D}$, em que $\mathbb{D}$ é o disco aberto unitário, o que, por sua vez, equivale a

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{Z}} |w_k w_{k+1} \cdot \ldots \cdot w_{k+n-1}|^{\frac{1}{n}} < 1 \quad \text{ou} \quad \lim_{n\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{Z}} |w_k w_{k+1} \cdot \ldots \cdot w_{k+n-1}|^{-\frac{1}{n}} < 1.$$

(b) Seja $A = \mathbb{N}$ ou $A = \mathbb{Z}$, $X = \ell_p(A)$ $(1 \leq p < \infty)$ ou $X = c_0(A)$, e $w = (w_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ uma sequência de pesos. Seja ainda $B_w : X \longrightarrow X$ um deslocamento ponderado para a esquerda não inversível. Nestas condições B_w é hiperbólico se, e somente se, $\sigma(B_w) \subset \mathbb{D}$, que equivale a

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k\in A} |w_k w_{k+1} \cdot \ldots \cdot w_{k+n-1}|^{\frac{1}{n}} < 1.$$

Para finalizar, um resultado que fornece condições de verificar se um deslocamento ponderado é hipercíclico ou não.

Proposição 1.28. *Seja B_w um deslocamento ponderado unilateral para a esquerda, definido em $\ell_p(\mathbb{N})$ $(1 \leq p < \infty)$. Nestas condições, B_w é hipercíclico se, e somente se,*

$$\limsup_{n\to\infty}(w_1 w_2 \cdot \ldots \cdot w_n) = \infty.$$

Demonstração. Veja [5], Corolário 1.39, Teorema 1.40 e Observação 1.41. □

Observação 1.29. ([5], Observação após a demonstração do Corolário 1.39) Caso B_w seja um deslocamento ponderado bilateral para a esquerda inversível, então B_w é hipercíclico se, e somente se,

$$\liminf_{n\to\infty} \max\{(w_1 w_2 \cdot \ldots \cdot w_n)^{-1}, (w_{-1} w_{-2} \cdot \ldots \cdot w_{-n})\} = 0.$$

Capítulo 2

Transitividade por cadeia

Neste capítulo, é introduzida a transitividade por cadeia. Inicialmente, é feita uma compilação de alguns resultados já conhecidos. A seguir, são apresentados resultados por nós obtidos no âmbito da Dinâmica Linear, a saber: toda componente conexa do espectro de um operador transitivo por cadeia intersecta o círculo unitário. Investigamos a recíproca desse resultado em dimensão finita. Então, introduzimos a transitividade por cadeia em média e provando que a classe de operadores com essa propriedade contém a classe dos operadores hiperbólicos e a dos transitivos por cadeia. Finaliza-se o capítulo analisando as transformações esféricas com respeito à transitividade por cadeia.

2.1 Definições, exemplos e algumas propriedades

Definição 2.1. Sejam (M, d) um espaço métrico e $f : M \longrightarrow M$ uma aplicação contínua. Dado $\epsilon > 0$, uma *ϵ-cadeia* de x até y é uma sequência $\{x_0 = x, x_1, ..., x_n = y\}$ tal que

$$d(f(x_i), x_{i+1}) < \epsilon \text{ para } i = 0, 1, ..., n-1.$$

Ou seja, uma ϵ-cadeia entre dois pontos é uma sequência finita de pontos tais que o iterado do ponto anterior está próximo do ponto seguinte dessa sequência.

Definição 2.2. Uma aplicação contínua $f : M \longrightarrow M$, definida em um espaço métrico M, é *transitiva por cadeia* se para qualquer $\epsilon > 0$ e para quaisquer $x, y \in X$, existe uma ϵ-cadeia de x até y.

A noção de transitividade topológica diz respeito a qualquer ponto x no espaço M alcançar um ponto y nesse espaço por meio da órbita real de um ponto nas proximidades de x. Já a noção de transitividade por cadeia generaliza a primeira noção, pois, nesse caso, quaisquer pares de pontos no espaço M podem ser conectados através de uma pseudo-órbita finita com um erro tão pequeno quanto se desejar.

Definição 2.3. Sejam (M, d) um espaço métrico e $h : M \longrightarrow M$ um homeomorfismo. Diz-se que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma *δ-pseudo-órbita* de h se

$$d(h(x_n), x_{n+1}) \leq \delta \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

O homeomorfismo h tem a *propriedade de sombreamento* se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que toda δ-pseudo-órbita é ϵ-sombreada por uma órbita real de h, isto é, existe $x \in M$ tal que

$$d(x_n, h^n(x)) \leq \epsilon \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Observação 2.4. Se $h : M \longrightarrow M$ é um aplicação contínua em um espaço métrico M, então pode-se falar em *sombreamento positivo* simplesmente substituindo o conjunto $\mathbb{Z}$ por $\mathbb{N}_0$, em que $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, na definição de sombreamento. Se h admite inversa, então define-se também sombreamento negativo.

Definição 2.5. Sejam (M, d) um espaço métrico e $h : M \longrightarrow M$ um homeomorfismo. O homeomorfismo h tem a *propriedade de sombreamento limite* se para toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ em M com

$$\lim_{|n|\longrightarrow\infty} d(h(x_n), x_{n+1}) = 0,$$

existe $x \in M$ tal que

$$\lim_{|n|\longrightarrow\infty} d(x_n, h^n(x)) = 0.$$

Em dinâmica topológica, a transitividade por cadeia tem sido estudada em associação com a noção de sombreamento e de sombreamento limite. Por exemplo, quando (M, d) é um espaço métrico compacto e $f : M \longrightarrow M$ um homeomorfismo, Lee ([25], Lema) provou que se f tem sombreamento limite, então f também é transitivo por cadeia. Dastjerdi & Hosseini [14] estudaram as relações entre sombreamento, transitividade por cadeia, equicontinuidade e sensibilidade; Li [26] introduziu a noção de sensibilidade ergódica e estabeleceu relação entre esta noção e as de sombreamento e transitividade por cadeia. Além disso, Barwell et al. [4] estudaram relações entre a transitividade por cadeia e a ocorrência de conjuntos invariantes e ω-limite.

Um exemplo (bastante elementar) de operador transitivo por cadeia é dado a seguir.

Exemplo 2.6. O operador identidade definido em um espaço vetorial normado X é transitivo por cadeia. De fato, dado $\epsilon > 0$, tome x e y quaisquer em X. Considere o segmento de extremidades x e y. Sobre esse segmento, escolha $n+1$ pontos, digamos $x_0 = x$, x_1,..., $x_n = y$, tais que

$$\|x_i - x_{i+1}\| < \epsilon, \quad \text{para todo} \quad i \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

A sequência formada por esses pontos é uma ϵ-cadeia de x até y.

Uma classe importante de operadores transitivos por cadeia é dada no resultado clássico abaixo.

Proposição 2.7. *Se M é um espaço métrico e $f : M \longrightarrow M$ é uma aplicação contínua e topologicamente transitiva, então f é transitivo por cadeia.*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, sejam x e y dois pontos quaisquer de M. Seja U a bola aberta de centro x e raio ϵ e seja V a bola aberta de centro y e raio ϵ. Pela transitividade de f, existe um número natural k_1 tal que

$$f^{k_1}(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Logo, existe $u_1 \in U$ tal que $f^{k_1}(u_1) \in V$. Seja U_1 a bola de centro $f(x)$ e raio ϵ e V_1 a bola aberta de centro $f^{k_1-1}(u_1)$. Uma vez mais, a transitividade de f implica a existência de um número natural k_2 tal que $f^{k_2}(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$, ou seja, existe $v \in U_1$ tal que $f^{k_2}(v) \in V_1$. Assim, a sequência $(x_k)_{k=0}^{n}$, em que

$$x_0 = x, v, f(v), \dots, f^{k_2-1}(v), f^{k_1-1}(u_1), x_n = y$$

é uma ϵ-cadeia. Portanto, f é transitivo por cadeia. $\square$

Assim, se (M, d) é um espaço métrico separável, segue do Teorema (1.14) que todo operador hipercíclico é transitivo por cadeia. Em particular, se um deslocamento ponderado para a esquerda satisfaz uma das condições descritas na Proposição (1.28), então ele é transitivo por cadeia.

Uma pergunta natural que surge é se vale a recíproca da Proposição (2.7). A resposta é não, pois o operador identidade (Exemplo 2.6) não é topologicamente transitivo. Isto, por sua vez, suscita a questão: sob quais condições um operador transitivo por cadeia é topologicamente transitivo?

Uma resposta é dada logo no resultado seguinte.

Proposição 2.8. *Seja $f : M \longrightarrow M$ uma aplicação contínua e inversível, definida em um espaço métrico M. Se f é transitiva por cadeia e tem a propriedade de sombreamento então f é topologicamente transitiva.*

Demonstração. Dados os abertos U e V em M, considere um ponto x em U e um ponto z em V. Tome $\epsilon > 0$ de modo que a bola de centro x e raio ϵ esteja contida em U e a bola aberta de centro z e raio ϵ esteja em V. Seja δ dado pelo sombreamento para esse ϵ.

Como f é transitiva por cadeia, existe uma δ-cadeia começando em x e terminando em z, digamos $\{x_0 = x, x_1, ..., x_n = z\}$. Logo, a sequência

$$(..., f^{-2}(x), f^{-1}(x), x, x_1, x_2, ..., x_n = z, f(z), f^2(z), ...)$$

é uma δ-pseudo-órbita. Então, o sombreamento assegura a existência de um ponto u que ϵ-sombreia esta pseudo-órbita.

Assim, u está ϵ-próximo de x e, então, pertence a U e um iterado $f^n(u)$ está ϵ-próximo de z; logo pertence a V.

Visto que U e V são conjuntos abertos arbitrários, resulta que f é topologicamente transitiva. □

Observação 2.9. No caso em que X é um espaço de Banach separável, usando a mesma prova da Proposição (2.8) e levando em conta o Teorema (1.14) demonstra-se que se um operador $T : X \longrightarrow X$ linear e limitado é transitivo por cadeia e possui a propriedade de sombreamento, então T é hipercíclico.

Pergunta 2.10. Será que existe que um critério (análogo ao da hiperciclicidade) que garanta quando um operador é transitivo por cadeia?

Pergunta 2.11. Será que existe alguma caracterização espectral de um operador T transitivo por cadeia (mas não topologicamente transitivo) que tenha alguma implicação sobre o espectro pontual do operador adjunto T^*?

2.2 Transitividade por cadeia na dinâmica linear

Na década de 1980, Kitai [22] provou que toda componente conexa do espectro de um operador hipercíclico T intersecta o círculo unitário. Por conseguinte, um operador compacto não pode ser hipercíclico. O resultado abaixo mostra que essa afirmação ainda é verdadeira se hipercíclico for substituído por transitivo por cadeia e, mais adiante, será demonstrado por que um operador compacto não pode ser transitivo por cadeia.

Teorema 2.12. *Sejam X um espaço de Banach complexo e $T : X \longrightarrow X$ um operador linear, limitado e transitivo por cadeia. Então, toda componente conexa do espectro de T intersecta o círculo unitário.*

A fim de mostrar o Teorema (2.12) serão necessários alguns resultados auxiliares, entre os quais a proposição abaixo, que é um caso particular do referido teorema.

Proposição 2.13. *Seja $T : X \longrightarrow X$ um operador linear e limitado, definido em um espaço de Banach X, com norma $\| \;\; \|$. Se T é transitivo por cadeia, então o espectro de T intersecta o círculo unitário, ou seja, T não é hiperbólico.*

A demonstração da Proposição (2.13), por sua vez, também requer um resultado auxiliar.

Lema 2.14. *Se $T : X \longrightarrow X$ é um operador linear e limitado, T não nulo, definido em um espaço de Banach X e tal que $\|T\| < 1$ (ou $\|T^{-1}\| < 1$, caso T seja inversível), então T não é transitivo por cadeia.*

Demonstração. Suponha que T seja transitivo por cadeia e $\|T\| < 1$. Dado $\epsilon > 0$, sejam $u, v \in X$ tais que

$$\|v\| > \|u\| + D\epsilon, \quad \text{em que} \quad D = \frac{1}{1 - \|T\|}. \tag{2.1}$$

Então, existe uma sequência finita $x_0 = u, \ldots, x_n = v$ tal que

$$\|x_{k+1} - Tx_k\| < \epsilon \quad \text{para} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Fazendo $c_j = x_j - Tx_{j-1}, j \in \{1, \ldots, n\}$, temos

$$x_n = T^n x_0 + T^{n-1} c_1 + T^{n-2} c_2 + \ldots + Tc_{n-1} + c_n.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\|v\| = \|x_n\| &\leq \|T\|^n\|x_0\| + \|T\|^{n-1}\|c_1\| + \ldots + \|T\|\|c_{n-1}\| + \|c_n\| \\ &\leq \|T\|^n\|x_0\| + D\epsilon,\end{aligned}$$

o que é absurdo por (2.1). Portanto, T não é transitivo por cadeia.

Agora, suponha que T seja inversível, transitivo por cadeia e $\|T^{-1}\| < 1$. Dado $0 < \epsilon < 1$, escolha u e v em X tais que

$$\|v\| < \|u\| - \frac{\|T^{-1}\|}{1 - \|T^{-1}\|}.$$

Então, existem um inteiro positivo n e uma sequência finita $(x_k)_{k=0}^n$, com $x_0 = u$ e $x_n = v$, para a qual

$$\|Tx_i - x_{i+1}\| < \epsilon, \quad i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Defina $c_i = Tx_i - x_{i+1}$, $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Temos:

$$\begin{aligned}v = v_n &= T^n x_0 - (T^{n-1}c_0 + \ldots + Tc_{n-1} + c_n) \\ &= T^n(u - T^{-1}c_0 - \ldots - T^{-n}c_n)\end{aligned}$$

e, assim,

$$\|v\| = \|T^n(u - T^{-1}c_0 - \ldots - T^{-n}c_n)\| \geq \frac{1}{\|T^{-1}\|^n}\|u - T^{-1}c_0 - \ldots - T^{-n}c_n)\|, \tag{2.2}$$

pois como $\|x\| \leq \|T^{-1}\|\|Tx\|$, para todo $x \in X$, resulta $\|Tx\| \geq \frac{\|x\|}{\|T^{-1}\|}$ e disto conclui-se, por indução, que

$$\|T^n x\| \geq \frac{\|x\|}{\|T^{-n}\|} \geq \frac{\|x\|}{\|T^{-1}\|^n}.$$

Da desigualdade (2.2) segue que

$$\|v\| \geq \frac{1}{\|T^{-1}\|^n}\left(\|u\| - \frac{\epsilon\|T^{-1}\|}{1 - \|T^{-1}\|}\right) > \|u\| - \frac{\|T^{-1}\|}{1 - \|T^{-1}\|},$$

o que é absurdo, porque contraria a escolha de u e v. □

Lema 2.15. ***([10], Teorema 2.10)*** *Seja X um espaço de Banach e suponha que M e N são dois subespaços fechados de X tais que $M + N$ é fechado. Então existe uma constante $\alpha > 0$ tal que cada $z \in M + N$ admite uma decomposição da forma $z = x + y$, com $x \in M$, $y \in N$, $\|x\| \leq \alpha\|z\|$ e $\|y\| \leq \alpha\|z\|$.*

Demonstração. Considere o espaço produto $M \times N$ com a norma $\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$ e o espaço $M + N$ com a norma de X. A aplicação

$$T : M \times N \longrightarrow M + N, \quad T(x,y) = x + y,$$

é contínua, linear e sobrejetiva. Pelo Teorema da Aplicação Aberta, existe uma constante positiva C tal que todo $z \in M + N$, com $\|z\| < C$, pode ser escrito como

$$z = x + y, \quad x \in M, \quad y \in N \ \text{ e } \ \|x\| + \|y\| < 1.$$

Por homogeneidade, cada $z \in M + N$ pode ser escrito como $z = x + y$, com $x \in M$, $y \in N$ e $\|x\| + \|y\| < \frac{1}{C}\|z\|$. □

Lema 2.16. *Seja T um operador em um espaço de Banach X. Suponha que $X = M \oplus N$, em que M e N são subespaços fechados de X e T-invariantes. Se T é transitivo por cadeia, então $T|_M$ e $T|_N$ também são transitivos por cadeia.*

Demonstração. Pelo Lema (2.15), existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$\|u\| \leq \alpha\|x\| \ \text{ e } \ \|v\| \leq \alpha\|x\|$$

sempre que $x = u + v$, com $u \in M$ e $v \in N$. Suponha T transitivo por cadeia e sejam $u_1, u_2 \in M$. Dado $\epsilon > 0$, existe uma sequência finita $w_0 = u_1, \ldots, w_n = u_2$ em X tal que

$$\|Tw_k - w_{k+1}\| < \frac{\epsilon}{\alpha}, \quad \text{para} \ \ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Como $w_k = u_{k,M} + v_{k,N}$, com $u_{k,M} \in M$, $v_{k,N} \in N$, $u_{0,M} = u_1, v_{0,M} = 0, u_{n,N} = u_2$ e $v_{n,N} = 0$, tem-se pela invariância de T:

$$\|Tu_{k,M} - u_{k+1,M}\| \leq \alpha\|Tw_k - w_{k+1}\| < \epsilon, \quad \text{para todo} \ \ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Logo, u_1 e u_2 são ligados por uma ϵ-cadeia que está em M. Analogamente, mostra-se que $T|_N$ é transitivo por cadeia. □

Demonstração da Proposição 2.13. Suponha T hiperbólico. Então, (veja final da Seção 1.4) existe uma norma $|\ \ |$, equivalente à norma $\|\ \ \|$ em X, e uma decomposição $X = X_s \oplus X_u$, em que X_s e X_u são subespaços fechados de X e T-invariantes, com

$$|T|_{X_s}| < 1 \ \text{ e } \ |T^{-1}|_{X_u}| < 1.$$

Como T é transitivo por cadeia, segue do Lema 2.16 que $T\mid_{X_s}$ e $T\mid_{X_u}$ também são transitivos por cadeia, o que é absurdo, pois contradiz o Lema 2.14. □

A fim de demonstrar o Teorema 2.12, precisamos dos próximos três lemas.

Lema 2.17. ***(Teorema de Riesz da Decomposição) ([29], Teorema 2.10)*** *Seja T um operador linear e limitado, definido em um espaço de Banach X, e suponha que o espectro de T, $\sigma(T)$, possa ser decomposto como $\sigma(T) = \sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_N$, em que os conjuntos σ_i são fechados e dois a dois disjuntos. Então, pode-se escrever $X = X_1 \oplus \ldots \oplus X_N$ em que cada X_i é um subespaço fechado, T-invariante e $\sigma(T\mid_{X_i}) = \sigma_i$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$.*

Lema 2.18. ***([5], Lema 1.21)*** *Seja K um subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ e seja C uma componente conexa de K. Suponha que C esteja contida em algum aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Então, pode-se encontrar um subconjunto σ aberto e fechado de K tal que $C \subset \sigma \subset \Omega$.*

Lema 2.19. ***([1], Proposição 3.2)*** *Sejam X um espaço de Banach complexo com norma $\|\ \|$ e $T : X \longrightarrow X$ um operador linear e limitado. As condições seguintes são equivalentes:*

1. *o raio espectral de T é estritamente menor que 1;*
2. *existe uma norma $|\ |$, equivalente a $\|\ \|$, para a qual $|T| < 1$;*
3. *existem $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$ tais que $\|T^n x\| \leq C\lambda^n \|x\|$, para todo $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração do Teorema 2.12. Suponha que alguma componente conexa C_1 do espectro de T não intersecte o círculo unitário e, assim, $C_1 \subset \mathbb{D}$ ou $C_1 \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Pelo Lema 2.18, pode-se achar um conjunto aberto e fechado

$$\sigma_1 \subset \sigma(T), \quad \text{tal que} \quad C_1 \subset \sigma_1 \subset \mathbb{D} \quad \text{ou} \quad C_1 \subset \sigma_1 \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}.$$

Pelo Lema 2.17, aplicado a σ_1 e $\sigma_2 = \sigma(T) \setminus \sigma_1$, podemos escrever $T = T_1 \oplus T_2$, em que $\sigma(T_i) = \sigma_i, i \in \{1, 2\}$. Do Lema 2.16, T_1 é transitivo por cadeia. Temos, pois, dois casos a considerar:

Primeiro caso: $\sigma_1 \subset \mathbb{D}$. Então, o raio espectral de T_1 é estritamente menor que 1. Do Lema 2.19, existe uma norma $|\ |$ para a qual $|T_1| < 1$, acarretando, de acordo com o Lema 2.14 que T_1 não é transitivo por cadeia, o que é absurdo.

Segundo caso: $\sigma_1 \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Neste caso, T_1 é inversível e hiperbólico e, portanto, não transitivo por cadeia (de acordo com a Proposição 2.13), o que também é absurdo.

Isto conclui a demonstração. $\square$

Corolário 2.20. *Se $X \neq \{0\}$ é um espaço de Banach complexo de dimensão infinita e $T : X \longrightarrow X$ um operador linear compacto, então T não é transitivo por cadeia.*

Demonstração. Seja T um operador compacto. Então, o espectro de T é enumerável e contém zero. Como qualquer subconjunto enumerável de $\mathbb{C}$ é totalmente desconexo, segue que $\{0\}$ é uma componente conexa de $\sigma(T)$. Portanto, pelo Teorema 2.12, T não é transitivo por cadeia. $\square$

Corolário 2.21. *Seja $T : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, um operador linear limitado. Se T é transitivo por cadeia, então $\sigma(T) \subset \mathbb{S}^1$.*

Pode-se indagar ainda se vale a recíproca do Corolário 2.21. O próximo resultado mostra que há casos em que a resposta é afirmativa.

Proposição 2.22. *A aplicação $f : \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{C}^d$, $d \geq 1$, dada por*

$$f(z_1, \dots, z_d) = (e^{i\theta_1} z_1, \dots, e^{i\theta_d} z_d),$$

em que $\theta_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, d\}$, é transitiva por cadeia.

Demonstração. Inicialmente, a demonstração será feita para o caso $d = 1$. Dado $\epsilon > 0$, sejam $x, y \in \mathbb{C}$ e L o segmento de extremidades x e y. Temos três casos a considerar:

Primeiro caso: $\theta = 0$, ou seja, $f(z) = z$. Então basta escolher N natural de modo que a sequência $(x_0 = x, x_1, \dots, x_N = y)$ de pontos de L satisfaça a condição

$$\|x_k - x_{k+1}\| < \epsilon, \quad \text{com} \quad k \in \{0, 1, \dots, N-1\}. \tag{2.3}$$

Segundo caso: θ é tal que $\frac{\theta}{\pi}$ é um número racional. Logo, existe um número inteiro positivo k para o qual $f^k(z) = z$. Escolha uma sequência $(x_0 = x, x_1, \dots, x_N = y)$ exatamente como no caso anterior. Vamos construir uma ϵ-cadeia de x até y como segue: tome $u_0 = x, u_1 = f(x), \dots, u_{k-1} = f^{k-1}(x), u_k = x_1, u_{k+1} = f(x_1), \dots, u_{2k-1} = f^{k-1}(x_1), u_{2k} = x_2, \dots, u_{3k-1} = f^{k-1}(x_2), u_{3k} = x_3, \dots, u_{(N-1)K} = x_{N-1}, \dots, u_{Nk-1} = f^{k-1}(x_{N-1}), u_{Nk} = y$. Assim,

$$\big(u_0 = x, \dots, u_{k-1} = f^{k-1}(x), u_k = x_1, \dots, u_{2k} = x_2, \dots, u_{Nk} = y\big)$$

é uma ϵ-cadeia do tipo desejado.

Terceiro caso: θ é tal que $\frac{\theta}{\pi}$ é um número irracional. Neste caso, f não é periódica. Tome a sequência finita $\{x_0 = x, x_1, \ldots, x_N = y\}$ descrita como no primeiro caso. Seja $v_0 = x$ e seja m_1 um número natural tal que $|f^{m_1}(x) - x_1| < \epsilon$ (isto é possível, porque a sequência $(f^j(x))_{j=1}^{\infty}$ é densa no círculo de raio $|x|$). Logo, basta escolher $v_0 = x, v_1 = f(x), \ldots, v_{m_1-1} = f^{m_1-1}(x), v_{m_1} = x_1$. Agora, escolha $v_{m_1+1} = f(x_1), v_{m_1+2} = f^2(x_1), \ldots, v_{m_1+m_2-1} = f^{m_2-1}(x_1)$, em que $m_2 \in \mathbb{N}$ é tomado de modo a satisfazer $|f^{m_2}(x_1) - x_2| < \epsilon$. Então, faça $v_{m_1+m_2} = x_2$. Prosseguindo com o raciocínio, construímos uma ϵ-cadeia de x até y:

$$(v_0 = x, \ldots, v_{m_1} = x_1, \ldots, v_{m_1+m_2} = x_2, \ldots, v_{m_1+m_2+\ldots+m_N} = x_N).$$

A seguir, o resultado será demonstrado para $d = 2$. Será considerado o espaço $\mathbb{C}^2$ dotado da norma da soma. Dado $\epsilon > 0$, tome (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em $\mathbb{C}^2$. Denote por $\mathbf{L}$ o segmento de extremidades (x_1, y_1) e (x_2, y_2). Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que os pontos $(u_0, v_0) = (x_1, y_1)$,(u_1, v_1),...,$(u_N, v_N) = (x_2, y_2)$ sobre $\mathbf{L}$ satisfaçam

$$\|(u_i, v_i) - (u_{i+1}, v_{i+1})\| < \frac{\epsilon}{2}, \quad i \in \{0, 1, \ldots, N-1\}.$$

Considere os casos abaixo.

Primeiro caso: $(1, \frac{\theta_1}{\pi}, \frac{\theta_2}{\pi})$ é $\mathbb{Q}$-linearmente independente (um conjunto $\{\theta_1, \ldots, \theta_d\}$ de números reais é $\mathbb{Q}$-linearmente independente quando a relação $c_1\theta_1 + \ldots + c_d\theta_d = 0$, com coeficientes inteiros c_1,...,c_d e $\theta_i \neq \theta_j$, se $i \neq j$, vale apenas se todos os coeficientes c_i forem nulos). Então existem números naturais n_1,...,n_{N-1} tais que

$$f^{n_{j+1}}(u_j, v_j) \in S_{(u_j,v_j)} \cap B_{\frac{\epsilon}{2}}((u_j, v_j)) \cap B_{\frac{\epsilon}{2}}((u_{j+1}, v_{j+1})),$$

em que $S_{(u_j,v_j)}$ denota o círculo de centro na origem e raio $\|(u_j, v_j)\|$ e $B_\epsilon((u_j, v_j))$ é a bola aberta de centro (u_j, v_j) e raio ϵ, $j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Então uma ϵ-cadeia de (x_1, y_1) até (x_2, y_2) é dada por:

$$((u_0, v_0), f(u_0, v_0), \ldots, f^{n_1-1}(u_0, v_0), (u_1, v_1), f(u_1, v_1), \ldots, f^{n_2-1}(u_1, v_1), \ldots,$$
$$(u_{N-1}, v_{N-1}), f(u_{N-1}, v_{N-1}), \ldots, f^{n_N-1}(u_{N-1}, v_{N-1}), (x_2, y_2)).$$

Segundo caso: $\theta_1 = \theta_2 = \theta$. Faça $a = e^{i\theta}$. Se $a^m = 1$, para algum $m \in \mathbb{N}$, então uma ϵ-cadeia de (x_1, y_1) até (x_2, y_2) é

$$((u_0, v_0), f(u_0, v_0), \ldots, f^{m-1}(u_0, v_0), (u_1, v_1), f(u_1, v_1), \ldots, f^{m-1}(u_1, v_1), \ldots,$$
$$(u_{N-1}, v_{N-1}), f(u_{N-1}, v_{N-1}), \ldots, f^{m-1}(u_{N-1}, v_{N-1}), (x_2, y_2)).$$

No entanto, se $a^k \neq 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$, isto é, se $\frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, então sejam $n_1, \ldots, n_{N-1}$ números naturais tais que

$$|a^{n_{j+1}} - 1| < \min\{\frac{\epsilon}{4|u_j|}, \frac{\epsilon}{4|v_j|}\}, \quad j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}.$$

Assim,

$$\| (a^{n_{j+1}} u_j, a^{n_{j+1}} v_j) - (u_{j+1}, v_{j+1}) \| \leq |a^{n_{j+1}} u_j - u_j| + |a^{n_{j+1}} v_j - v_j| +$$
$$\| (u_j, v_j) - (u_{j+1}, v_{j+1}) \| < \epsilon$$

e uma ϵ-cadeia de (x_1, y_1) até (x_2, y_2) é obtida como no caso anterior.

Terceiro caso: $(1, \frac{\theta_1}{\pi}, \frac{\theta_2}{\pi})$ é $\mathbb{Q}$-linearmente dependente. Logo, existem naturais m e n tais que $m\theta_1 + n\theta_2 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e isto acarreta $a^m b^n = 1$, em que $a = e^{i\theta_1}$ e $b = e^{i\theta_2}$. Se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a^{n_0} = 1$, então

$$(a^m b^n)^{n_0} = 1 \Rightarrow a^{mn_0} b^{nn_0} = 1 \Rightarrow b^{nn_0} = 1.$$

Mas se, para todo $n \in \mathbb{N}$, $a^n \neq 1$ e $b^n \neq 1$, com $\frac{\theta_1}{\pi}$ e $\frac{\theta_2}{\pi}$ irracionais, sabe-se que existe n_0 natural de modo que $a^{n_0} \sim 1$ e isto implica $a^{mn_0} \sim 1$, o que, por sua vez, acarreta $b^{nn_0} \sim 1$, pois

$$|b^{nn_0} - 1| = |(a^m b^n)^{n_0} - a^{mn_0}| = |1 - a^{mn_0}| < \frac{\epsilon}{2}.$$

De qualquer forma, uma ϵ-cadeia de (x_1, y_1) até (x_2, y_2) é dada por:

$$((u_0, v_0), f(u_0, v_0), \ldots, f^{mnn_0-1}(u_0, v_0), (u_1, v_1), f(u_1, v_1), \ldots, f^{mnn_0-1}(u_1, v_1), \ldots,$$
$$(u_{N-1}, v_{N-1}), f(u_{N-1}, v_{N-1}), \ldots, f^{mnn_0-1}(u_{N-1}, v_{N-1}), (u_N, v_N)).$$

A demonstração do caso $d > 2$ é feita empregando as ideias expostas acima. $\square$

Corolário 2.23. *Uma transformação linear $T : \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{C}^d$, $d > 1$, cuja matriz seja semelhante à matriz diagonal $B = diag(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \ldots, e^{i\theta_d})$ é transitiva por cadeia.*

Demonstração. É uma aplicação do Lema 2.26. $\square$

Pergunta 2.24. Seja $T : \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{C}^d$, um operador linear não diagonalizável tal que $\sigma(T) \subset \mathbb{S}^1$. Será que T é transitivo por cadeia?

Proposição 2.25. *Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um operador linear. Se $\sigma(T) \subset \mathbb{S}^1$, então T é transitivo por cadeia.*

Para a demonstração da Proposição 2.25, serão necessários alguns resultados auxiliares.

Lema 2.26. *Seja (M, d) um espaço métrico.*

a) Suponha que para dois sistemas dinâmicos ϕ e ψ em M exista um homeomorfismo $H : M \longrightarrow M$ tal que $\phi \circ H = H \circ \psi$ e tanto H quanto H^{-1} são lipschitzianas. Nestas condições, ϕ é transitivo por cadeia se, e somente se, ψ também é.

b) Seja $f : X \longrightarrow X$ uma aplicação contínua. Se f^k é transitiva por cadeia para algum inteiro $k > 1$, então f também é.

Demonstração. a) Dado $\epsilon > 0$, sejam $x, y \in M$ e suponha que ϕ seja transitivo por cadeia. Considerando $\frac{\epsilon}{K} > 0$, em que K é a constante de Lipschitz de H^{-1}, $H(x), H(y) \in M$, então existe uma sequência finita $\{\xi_0 = H(x), \ldots, \xi_m = H(y)\}$ tal que

$$d(\phi(\xi_k), \xi_{k+1}) < \frac{\epsilon}{K}, \quad \text{para} \quad k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

A seguir, dada a sequência $\{x_0 = H^{-1}(\xi_0), \ldots, x_m = H^{-1}(\xi_m)\}$, temos:

$$\begin{aligned} d(\psi(x_k), x_{k+1}) = d(\psi(H^{-1}(\xi_k)), H^{-1}(x_{k+1})) &= d(H^{-1}(\phi(\xi_k)), H^{-1}(\xi_{k+1})) \\ &\leq K d(\phi(\xi_k), \xi_{k+1}) < \epsilon, \quad \text{para} \quad k = 0, 1, \ldots, M-1. \end{aligned}$$

Logo, ψ é transitiva por cadeia. Para mostrar a recíproca, tome $\frac{\epsilon}{L} > 0$ (L é a constante de Lipschitz de H) e obtenha uma $\frac{\epsilon}{L}$-cadeia $\{\xi_0 = H^{-1}(x), \ldots, \xi_n = H^{-1}(y)\}$ por ψ e use este fato para mostrar que $\{x_k\}_{k=1}^{n}$, em que $x_k = H(\xi_k)$ é uma ϵ-cadeia de x até y por ϕ.

b) Seja dado $\epsilon > 0$ e sejam $x, y \in X$. Como f^k é transitivo por cadeia, existe uma sequência finita $\{y_0 = x, \ldots, y_N = y\}$ tal que $d(f^k(y_i), y_{k+1}) < \epsilon$, para $i = 0, 1, \ldots, N-1$. O resultado segue observando-se que a sequência

$$\{x_i\}_{i=0}^{Nk} = \{x_0 = x, \ldots, f^{k-1}(x_0), y_1, \ldots, f^{k-1}(y_1), \cdots, y_{N-1}, \cdots, f^{k-1}(y_{N-1}), x_{Nk} = y_N\}$$

é uma ϵ-cadeia de x até y. $\square$

Lema 2.27. *Seja T um operador linear e limitado, definido em um espaço de Banach X.*

a) Se T é transitivo por cadeia, então o operador $-T$ também o é.

b) Se T é um operador inversível, então T é transitivo por cadeia se, e somente, o operador T^{-1} também o é.

Demonstração. a) Dado $\epsilon > 0$, tome $u, v \in X$. Segue da hipótese que existe uma sequência finita $\{x_0 = u, x_1, \dots, x_n = v\}$ tal que

$$\|Tx_k - x_{k+1}\| < \epsilon, \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Construa a sequência $(y_k)_{k=0}^n$ fazendo $y_0 = x_0$, $y_1 = -x_1$, $y_2 = x_2, \dots$, $y_{n-1} = -x_{n-1}$, $y_n = x_n$. Então, para todo $k \in \{0, 1, \dots, n\}$,

$$\| - Ty_k - y_{k+1}\| < \epsilon.$$

b) Suponha T transitivo por cadeia. Logo, dados $\epsilon > 0$ e $u, v \in X$, existe uma $\frac{\epsilon}{\|T^{-1}\|}$-cadeia de v até u, a qual será denotada por $(x_0 = v, x_1, \dots, x_n = u)$. Considere a sequência $(y_k)_{k=0}^n$, definida por $y_k = x_{n-k}$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Então $(y_k)_{k=0}^n$ é uma ϵ-cadeia de u até v para T^{-1}, pois, para cada $k \in \{0, 1, \dots, n\}$,

$$\|T^{-1}y_k - y_{k+1}\| = \|T^{-1}(Ty_{k+1} - y_k)\| \leq \|T^{-1}\|\|Tx_{n-k-1} - x_{n-k}\| < \epsilon.$$

A recíproca é provada analogamente, trocando-se T por T^{-1} na parte anterior. □

Demonstração da Proposição 2.25. Seja B a matriz do operador T. Então, a matriz B é semelhante a uma das matrizes abaixo:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A_6 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, A_7 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad a^2 + b^2 = 1.$$

Assim, se provarmos que cada uma das matrizes acima é transitiva por cadeia, o resultado segue mediante a aplicação do Lema 2.26-a). As matrizes A_1 e A_7 correspondem, respectivamente, ao operador identidade e à rotação em $\mathbb{R}^2$, os quais já sabemos ser transitivos por cadeia. Se a matriz de T for A_2, então o resultado seguirá do Lema 2.27. Caso a matriz seja A_3, tem-se $A_3^2 = A_1$ e, assim, basta aplicar o Lema 2.26. No caso em que a matriz seja A_4 o resultado segue do fato que $A_4 = -A_3$ ou $A_4^2 = A_1$.

Suponha que a matriz de T seja A_5. Dados $\epsilon > 0$ e $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, basta mostrar que existe uma ϵ-cadeia de $(0,0)$ até v e uma de v até $(0,0)$. Inicialmente, suponha $|x| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Como todo ponto da forma $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$, é um ponto fixo de T, então é possível escolher $n-1$ pontos sobre o eixo y, digamos $u_1, \ldots, u_{n-1}$ de modo que

$$u_0 = (0,0), u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n = (0, y - x)$$

satisfaçam

$$\|Tu_i - u_{i+1}\| < \epsilon, \quad i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}. \tag{2.4}$$

A seguir, faça $u_{n+1} = (x, y - x)$ e $u_{n+2} = (x, y)$. Assim,

$$u_0, \ldots, u_n, u_{n+1}, u_{n+2}$$

é uma ϵ-cadeia de $(0,0)$ até (x, y), com $x \leq \frac{\epsilon}{2}$. Agora suponha $x > \frac{\epsilon}{2}$. Então seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $|\frac{(m-1)\epsilon}{2} - x| < \epsilon$. Obtenha $n-1$ pontos sobre o eixo y, digamos, $u_1,\ldots,u_{n-1}$, a fim de que

$$u_0 = (0,0), u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n = \left(0, y - \frac{\epsilon}{2}\sum_{j=1}^{m-1} j\right)$$

satisfaçam (2.4). Para conseguir uma ϵ-cadeia de $(0,0)$ até (x, y), faça

$$u_{n+k} = \left(\frac{k\epsilon}{2}, y - \frac{\epsilon}{2}\sum_{j=k}^{m-1} j\right), \quad k = 1, \ldots, m-1$$

e $u_{n+m} = (x, y)$. Por fim, seja $x < -\frac{\epsilon}{2}$. Tome $p \in \mathbb{N}$ tal que $|\frac{(p-1)\epsilon}{2} + x| < \epsilon$ e obtenha $q-1$ pontos sobre o eixo y, os quais denotamos por $u_1,\ldots,u_{q-1}$, a fim de que

$$u_0 = (0,0), u_1, \ldots, u_{q-1}, u_q = \left(0, y + \frac{\epsilon}{2}\sum_{j=1}^{p-1} j\right)$$

satisfaçam (2.4). Construa uma ϵ-cadeia de $(0,0)$ até (x, y), fazendo

$$u_{q+k} = \left(-\frac{k\epsilon}{2}, y + \frac{\epsilon}{2}\sum_{j=k}^{m-1} j\right), \quad k = 1, \ldots, p-1$$

e $u_{q+p} = (x, y)$. Assim, sempre é possível encontrar uma ϵ-cadeia de $(0,0)$ a qualquer outro ponto em $\mathbb{R}^2$. O próximo passo é mostrar que há uma uma ϵ-cadeia de (x, y) até

$(0,0)$. Para fixar as ideias, considere $x < 0$ e tome $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x + \frac{m\epsilon}{2}| < \epsilon$. Então faça

$$u_k = \left(x + \frac{k\epsilon}{2}, kx + y + \delta_k\right), \quad k = 0, 1, \ldots, m,$$

em que $\delta_0 = \delta_1 = 0$, $\delta_2 = \frac{\epsilon}{2}$ e $\delta_k = \delta_{k-1} + \frac{(k-1)\epsilon}{2}$, se $2 < k \leq m$. Observe que

$$Tu_k - u_{k+1} = \left(-\frac{\epsilon}{2}, 0\right), \quad \forall k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}.$$

Além disso,

$$\|Tu_m - (0, (m+1)x + y + \delta_{m+1})\| < \epsilon.$$

Logo, tome $u_{m+1} = (0, (m+1)x + y + \delta_{m+1})$. Usando novamente o fato que os pontos sobre o eixo y são fixos, escolha $n - 1$ pontos sobre esse eixo, $u_{m+2}, \ldots, u_{m+n}$ de modo que

$$\|u_{m+k} - u_{m+k+1}\| < \epsilon, \quad k \in \{1, \ldots, n\},$$

com $u_{m+n+1} = (0,0)$. Por conseguinte, uma ϵ-cadeia de (x, y) até $(0,0)$ é dada por

$$\begin{aligned} u_0 = (x, y), u_1, \ldots, u_m, u_{m+1} = (0, (m+1)x + y + \delta_{m+1}), \\ u_{m+2}, \ldots, u_{m+n}, u_{m+n+1} = (0,0). \end{aligned}$$

O caso $x > 0$ é análogo. Por fim, suponha que a matriz de T seja A_6. Note que $A_6^{-1} = -A_5$. Neste caso, a conclusão segue do Lema 2.27. Já a transformação cuja matriz é A_7 é isomorfa à aplicação $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = e^{i\theta}z$, com θ real, a qual é transitiva por cadeia. Isto completa a demonstração. $\square$

Pergunta 2.28. Os deslocamentos (*shifts*) constituem uma importante classe de operadores em dinâmica linear. Será que o deslocamento para a esquerda é transitivo por cadeia?

Esta pergunta é respondida no caso unilateral a partir do próximo resultado.

Proposição 2.29. *Seja $X = c_0(\mathbb{N})$ ou $X = \ell_p(\mathbb{N})$, com $1 \leq p < \infty$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada de números positivos e $B_w : X \longrightarrow X$ o deslocamento ponderado unilateral para a esquerda. Se*

$$\lim_{n\to+\infty} \inf_{q\in\mathbb{N}\setminus\{1\}} \sum_{j=q}^{n+q-2} w_q \cdot \ldots \cdot w_j = +\infty,$$

então B_w é transitivo por cadeia.

Demonstração. Suponha inicialmente $X = c_0(\mathbb{N})$. Dado $\epsilon > 0$, tome $x = (a_1, a_2, \ldots)$ e $y = (c_1, c_2, \ldots)$ quaisquer em $c_0(\mathbb{N})$. Queremos encontrar um número natural n e uma sequência finita $\{x_0 = x, \ldots, x_n = y\}$ satisfazendo

$$\|B_w(x_i) - x_{i+1}\| < \epsilon, \quad \text{para todo} \;\; i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Vamos construir uma ϵ-cadeia de x até y da forma

$$x_0 = x, \quad x_i = B_w(x_{i-1}) + \xi^{(i)}, \forall i = 1, \cdots, n-1, \quad x_n = y, \tag{2.5}$$

de modo que $\|\xi^{(i)}\| < \epsilon$, para $i \in \{1, \cdots, n-1\}$. Para isto, considere $\xi^{(i)} = (\xi_j^{(i)})_{j=0}^{\infty}$, definido por

$$\xi_j^{(i)} = 0, \;\; \text{se} \;\; 1 \leq j \leq n-i \;\; \text{e} \;\; \xi_j^{(i)} = r_{j+i} \;\; \text{se} \;\; j \geq n-i+1,$$

em que cada r_k será determinado de forma conveniente. Como a norma de $B_w(x_{n-1}) - y$ deve ser menor que ϵ, vamos olhar para suas coordenadas a fim de obter cada r_k. Denote por z_i a i-ésima coordenada de $B_w(x_{n-1}) - y$. Temos:

$$z_i = w_{i+1} \cdot \ldots \cdot w_{n+i} a_{n+i} + r_{n+i-1} \sum_{j=i+1}^{n+i-1} w_{i+1} \cdot \ldots \cdot w_j - c_i, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Impondo que cada z_i seja nula, obtemos

$$r_n = \frac{c_1 - w_2 \cdot \ldots \cdot w_{n+1} a_{n+1}}{\sum_{j=2}^{n} w_2 \cdot \ldots \cdot w_j}, r_{n+1} = \frac{c_2 - w_3 \cdot \ldots \cdot w_{n+2} a_{n+2}}{\sum_{j=3}^{n+1} w_3 \cdot \ldots \cdot w_j},$$
$$r_{n+2} = \frac{c_3 - w_4 \cdot \ldots \cdot w_{n+3} a_{n+3}}{\sum_{j=4}^{n+2} w_4 \cdot \ldots \cdot w_j}, \ldots$$

O próximo passo é encontrar um natural n, a fim de que ocorra $\|\xi^{(i)}\| < \epsilon$, para $i \in \{1, \cdots, n-1\}$. Defina $c = \max\{\|y\|, 1\}$. Por hipótese, existe um número natural n tal que

$$\frac{1}{\inf_{q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}} \sum_{j=q}^{n+q-2} w_q \cdot \ldots \cdot w_j} < \frac{\epsilon}{4c} \;\; \text{e} \;\; w_k |a_k| < \frac{\epsilon}{4}, \forall k \geq n. \tag{2.6}$$

Usando (2.6), tem-se $\sup_{k \geq n} |r_k| < \epsilon$. Logo, uma ϵ-cadeia de x até y é dada por (2.5). Vejamos agora o caso em que $X = \ell_p(\mathbb{N})$, com $1 \leq p < \infty$. Note que $\|B_w^n(x)\| < \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, seja $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{\inf_{q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}} \sum_{j=q}^{n+q-2} w_q \cdot \ldots \cdot w_j} (\|y\| + \|B_w^n(x)\|) < \epsilon.$$

Novamente defina a sequência $(r_k)_{k\geq n}$ como no caso anterior. Como

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty}|r_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{\inf_{q\in\mathbb{N}\setminus\{1\}}\sum_{j=q}^{n+q-2} w_q\cdot\ldots\cdot w_j}\|y-B_w^n(x)\|<\epsilon,$$

uma ϵ-cadeia de x até y pode ser descrita exatamente como acima. □

Pergunta 2.30. Se ocorrer

$$\inf_{q\in\mathbb{N}\setminus\{1\}}\sum_{j=q}^{+\infty} w_q\cdot\ldots\cdot w_j=+\infty$$

então B_w é transitivo por cadeia?

Corolário 2.31. *Seja $X=c_0(\mathbb{N})$ ou $X=\ell_p(\mathbb{N})$, com $1\leq p\leq\infty$. O deslocamento (shift) unilateral para a esquerda, B, definido em X é transitivo por cadeia.*

Observação 2.32. Seja $X=c_0(\mathbb{Z})$ ou $X=\ell_p(\mathbb{Z})$, com $1\leq p\leq\infty$ e $B:X\longrightarrow X$ é o deslocamento bilateral para a esquerda. Adaptando-se a ideia da Proposição 2.29, prova-se que B é transitivo por cadeia.

Observação 2.33. A partir da Proposição 2.29 é possível obter vários exemplos de operadores transitivos por cadeia que não são hipercíclicos.

Exemplo 2.34. Seja $X=c_0(\mathbb{N})$ ou $X=\ell_p(\mathbb{N})$, com $1\leq p<\infty$, $w=(w_n)_{n\mathbb{N}}$ a sequência de pesos dada por $w_{2n}=2$ e $w_{2n-1}=\frac{1}{2}$, $n\in\mathbb{N}$ e seja $B_w:X\longrightarrow X$ o deslocamento ponderado unilateral para a esquerda. B_w não é hipercíclico, pois

$$w_1\cdot\ldots\cdot w_n=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar,}\\ 1, & \text{se } n \text{ é par}\end{cases}$$

e $\limsup_{n\to\infty}(w_1\cdot\ldots\cdot w_n)<\infty$ (Proposição 1.28). No entanto, para todo q natural maior que 1,

$$\sum_{j=q}^{n+q-2} w_q\cdot\ldots\cdot w_j=\begin{cases}2+1+2+1+\ldots+1 \text{ ou}\\ 2+1+2+1+\ldots+2 \text{ ou}\\ \frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+\ldots+1 \text{ ou}\\ \frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}\end{cases}$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\inf_{q\in\mathbb{N}\setminus\{1\}}\sum_{k=q}^{n+q-2} w_q\cdot\ldots\cdot w_j=\infty,$$

acarretando que B_w é transitivo por cadeia, pela Proposição 2.29.

O resultado seguinte fornece uma condição necessária para que uma determinada classe de deslocamentos ponderados unilaterais para a esquerda sejam transitivos por cadeia.

Proposição 2.35. *Seja $X = c_0(\mathbb{N})$ ou $X = \ell_p(\mathbb{N})$, com $1 \leq p < \infty$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada de números positivos e $B_w : X \longrightarrow X$ o deslocamento ponderado unilateral para a esquerda. Se B_w é transitivo por cadeia, então*

$$\forall q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \quad \sum_{j=q}^{+\infty} w_q \cdot \ldots \cdot w_j = +\infty.$$

Demonstração. Suponha que B_w seja transitivo por cadeia e, dado $\epsilon > 0$, tome $x = (a_1, a_2, \ldots)$ e $y = (c_1, c_2, \ldots)$ quaisquer em X. Então, existe uma sequência finita $(x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y)$ tal que

$$\|B_w(x_i) - x_{i+1}\| < \epsilon, \quad i \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \tag{2.7}$$

Da relação (2.7), segue que:

$$x_{i+1} = B_w(x_i) + r^{(i)}, \quad \text{com} \quad \|r^{(i)}\| < \epsilon \;\; \text{e} \;\; i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Assim,

$$y = B_w(x_{n-1}) + r^{(n-1)} = B_w^n(x) + B_w^{n-1}(r^{(0)}) + \ldots + B_w(r^{(n-2)}) + r^{(n-1)}.$$

Supondo $r^{(i)} = (r_1^{(i)}, r_2^{(i)}, \ldots)$, $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, podemos escrever a primeira coordenada de y, por exemplo, do seguinte modo:

$$c_1 = w_2 \cdot \ldots \cdot w_{n+1} a_{n+1} + w_2 \cdot \ldots \cdot w_n r_n^{(0)} + w_2 \cdot \ldots \cdot w_{n-1} r_{n-1}^{(1)} + \ldots + w_2 r_2^{(n-2)} + r_1^{(n-1)}.$$

Logo,

$$|c_1 - w_2 \cdot \ldots \cdot w_{n+1} a_{n+1}| < \epsilon + (w_2 \cdot \ldots \cdot w_n + w_2 \cdot \ldots \cdot w_{n-1} + \ldots + w_2 + 1)\epsilon,$$

o que permite concluir que

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{|c_1 - w_2 \cdot \ldots \cdot w_{n+1} a_{n+1}|}{\sum_{j=2}^{n} w_2 \cdot \ldots \cdot w_j + 2} = 0$$

e

$$\liminf_{n\to+\infty} \left(\frac{|c_1| - w_2 \cdot \ldots \cdot w_{n+1} |a_{n+1}|}{\sum_{j=2}^{n} w_2 \cdot \ldots \cdot w_j + 2} \right) \leq 0.$$

Assim, como

$$\frac{|c_1|}{\sum_{j=2}^{n} w_2 \cdot \ldots \cdot w_j + 2} - w_{n+1}|a_{n+1}| \leq \frac{|c_1| - w_2 \cdot \ldots \cdot w_{n+1}|a_{n+1}|}{\sum_{j=2}^{n} w_q \cdot \ldots \cdot w_j + 2}$$

e $\liminf(-w_{n+1}|a_{n+1}|) = 0$, segue que

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{|c_1|}{\sum_{j=2}^{n} w_2 \cdot \ldots \cdot w_j + 2} = 0 \text{ e isto implica } \limsup_{n\to+\infty} \sum_{j=2}^{n} w_2 \cdot \ldots \cdot w_j = \infty.$$

Analogamente, mostra-se que, para todo q natural maior que 2,

$$\limsup_{n\to+\infty} \sum_{j=q}^{n+q-2} w_q \cdot \ldots \cdot w_j = +\infty.$$

$\square$

Observação 2.36. Em [7], se $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada de escalares tem-se a seguinte relação:

$$r(B_w) = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} |w_k \cdot \ldots \cdot w_{k+n}|^{\frac{1}{n}} < 1 \iff \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n=0}^{+\infty} |w_k \cdot \ldots \cdot w_{k+n}| < +\infty,$$

em que $r(B_w)$ denota o raio espectral do deslocamento unilateral ponderado para a esquerda.

Pergunta 2.37. Será que se $r(B_w) \geq 1$, então B_w é transitivo por cadeia?

Exemplo 2.38. Seja $X = c_0(\mathbb{N})$ ou $X = \ell_p(\mathbb{N})$, com $1 \leq p < \infty$, $w = (w_n)_{n\mathbb{N}}$ a sequência de pesos dada por $w_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ e seja $B_w : X \longrightarrow X$ o deslocamento ponderado unilateral para a esquerda. Como

$$\limsup_{n\to\infty}(w_1 \cdot \ldots \cdot w_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$$

segue da Proposição (1.28) que B_w não é hipercíclico. Além disso,

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \sum_{j=2}^{n} w_2 \cdot \ldots \cdot w_j &= \limsup_{n\to\infty}(w_2 + w_2 w_3 + \ldots + w_2 w_3 \cdot \ldots \cdot w_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{2 \cdot \ldots \cdot n} \right) = e - 2,
\end{aligned}$$

e isso significa que B_w também não é transitivo por cadeia.

Com base no foi provado acerca dos deslocamentos unilaterais à esquerda, pode-se formular a

Pergunta 2.39. Será que um deslocamento, cujo espectro contenha o disco $D(0,1)$, é transitivo por cadeia?

Pode ser provado que se $T \times S$ é um operador linear definido no espaço de Banach $X \times Y$, munido com a norma $\| \quad \| = \max\{\| \quad \|_X, \| \quad \|_Y\}$, $(T \times S)(x,y) = (Tx, Sy)$, é transitivo por cadeia, então T e S também são. Isto suscita naturalmente a seguinte pergunta:

Pergunta 2.40. Se X e Y são espaços de Banach e $T : X \longrightarrow X$ e $S : Y \longrightarrow Y$ são operadores lineares transitivos por cadeia, será que $T \times S$ também é?

O exemplo a seguir mostra que a resposta é afirmativa em alguns casos.

Exemplo 2.41. Sejam $X = \ell_\infty(\mathbb{N})$ e $Y = \ell_p(\mathbb{N})$, $(1 \leq p < \infty)$. Se $B : X \longrightarrow X$ e $S : Y \longrightarrow Y$ são deslocamentos unilaterais para a esquerda, então $B \times S$ é transitivo por cadeia.

De fato, dado $\epsilon > 0$, sejam $((x_i),(y_i)), ((u_i),(v_i)) \in X \times X$. Tome um número natural n tal que:

$$\frac{|x_i - u_j|}{n} < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall i, j \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \frac{1}{n}\left(\|(y_i)\|_p + \|(v_i)\|_p\right) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Defina $d_{n+k} = u_{k+1} - x_{n+k}$ e $r_{n+k} = v_{k+1} - y_{n+k}$, $(k \geq 0)$. Uma ϵ-cadeia de $((x)_i,(y)_i)$ até $((u_i),(v_i))$ é obtida exatamente como no exemplo anterior.

2.3 Transitividade por cadeia em média

Algumas vezes, ao fixar um erro $\delta > 0$, não é tão simples encontrar uma δ-pseudo-órbita finita, mas pode ser mais fácil obter uma δ-pseudo-órbita em média finita. Isto motivou os autores de [13] a introduzirem o conceito de transitividade por cadeia em média.

Definição 2.42. Seja (M,d) um espaço métrico e $f : M \longrightarrow M$ uma aplicação contínua. Dados $\epsilon > 0$ e $x, y \in M$, uma *ϵ-cadeia transitiva em média* de f de x até y com comprimento $n \in \mathbb{N}$ é uma sequência finita $\{x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y\}$ para a qual existe $N \in \mathbb{N}$, $N \leq n$, tal que, para todo $N \leq m \leq n$,

$$\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1} d(f(x_i), x_{i+1}) < \epsilon.$$

Definição 2.43. Uma aplicação contínua $f : M \longrightarrow M$, definida em um espaço métrico (M, d), é *transitiva por cadeia em média* se para qualquer $\epsilon > 0$ e para quaisquer $x, y \in M$ existe uma ϵ-cadeia transitiva em média de f de x até y.

Das & Garg [13] provaram, entre outras coisas, que dado um sistema dinâmico (M, f), se f^k é transitivo por cadeia em média para algum $k > 1$, então f também o é e se f é totalmente transitivo por cadeia em média (isto é, f^k é transitivo por cadeia em média, para todo $k > 1$), então $f \times f$ é transitivo por cadeia em média.

No entanto, a definição de ϵ-cadeia média formulada acima não é muito útil no caso linear, pois acarretaria que todo operador linear é transitivo por cadeia em média. De fato, dado $\epsilon > 0$, tome $x, y \in X$ arbitrários. Considere uma cadeia da forma

$$(x_n)_{n=0}^{k+1} = (x, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k \text{ vezes}}, y).$$

Temos

$$\frac{1}{k+1} \sum_{n=0}^{k} \|Tx_i - x_{i+1}\| = \frac{\|Tx\| + \|y\|}{k+1}.$$

Claramente podemos fazer este número tão pequeno quanto queiramos, bastando tomar k suficientemente grande. Assim sendo, propomos uma ligeira alteração na definição de cadeia média, como descrita abaixo.

Definição 2.44. Seja X um espaço de Banach $T : X \longrightarrow X$ um operador linear limitado. Dados $\epsilon > 0$ e $x, y \in M$, uma *ϵ-cadeia transitiva em média* de T de x até y com comprimento $n \in \mathbb{N}$ é uma sequência finita $\{x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y\}$, com

$$0 \neq x_i \;\text{ para todo }\; 1 \leq i \leq n - 1,$$

caso $0 \neq x$ e $0 \neq y$, para a qual existe $N \in \mathbb{N}$, $N \leq n$, tal que, para todo $N \leq m \leq n$,

$$\frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \|Tx_i - x_{i+1}\| < \epsilon.$$

Observe que todo operador linear transitivo por cadeia também é transitivo por cadeia em média. No entanto, a recíproca é falsa como será demonstrado mais adiante.

Proposição 2.45. *Seja T um operador linear e limitado, definido em um espaço de Banach X, o qual pode ser escrito como $X = M \oplus N$, em que M e N são subespaços de X, fechados e T-invariantes. Se T é transitivo por cadeia em média, então $T|_M$ e $T|_N$ também o são.*

Demonstração. É obtida adaptando o argumento contido na demonstração do Lema 2.16. □

Teorema 2.46. *Seja T um operador linear, limitado e inversível, definido em um espaço de Banach X. Suponha que $X = M \oplus N$, em que M e N são subespaços fechados de X, com $T(M) \subset M$, $T^{-1}(N) \subset N$, $\sigma(T\mid_M) \subset \mathbb{D}$ e $\sigma(T^{-1}\mid_N) \subset \mathbb{D}$. Então T é transitivo por cadeia em média.*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, sejam $x, y \in X$. Logo, x e y podem ser escritos de maneira única como $x = x^{(M)} + x^{(N)}$ e $y = y^{(M)} + y^{(N)}$, com $x^{(M)}, y^{(M)} \in M$ e $x^{(N)}, y^{(N)} \in N$. Além disso, há uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$\|u^{(M)}\| \leq \alpha\|u\| \ \text{ e } \ \|u^{(N)}\| \leq \alpha\|u\|, \quad \forall u \in X.$$

Como $\sigma(T\mid_M) \subset \mathbb{D}$ e $\sigma(T^{-1}\mid_N) \subset \mathbb{D}$, então $r(T\mid_M) < 1$ e $r(T^{-1}\mid_N) < 1$; assim, podemos escolher $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\max\{r(T\mid_M), r(T^{-1}\mid_N)\} < \lambda < 1.$$

A partir da fórmula do raio espectral, garante-se a existência de uma constante $K \geq 1$ tal que

$$\|(T\mid_M)^n\| < K\lambda^n \ \text{ e } \ \|(T^{-1}\mid_N)^n\| < K\lambda^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Escolha um número natural n tal que

$$\frac{\alpha}{n}\left(K\lambda^n\|x\| + \|y\|\right) < \frac{\epsilon}{2} \ \text{ e } \ \frac{\|T\mid_N\|\alpha}{n}\left(\|x\| + K\lambda^n\|y\|\right) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sejam $(u_k^{(M)})_{k=0}^n$ e $(v_k^{(N)}))_{k=0}^n$ sequências finitas em M e N, respectivamente, definidas por:

$$u_k^{(M)} = T^k x^{(M)} \ \ (0 \leq k < n), \quad u_n^{(M)} = y^{(M)},$$

$$v_0^{(N)} = x^{(N)} \ \ e \ \ v_k^{(N)} = T^{-n+k}y^{(N)} \ \ (1 \leq k \leq n).$$

Para $N = n$, vale:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|Tu_k^{(M)} - u_{k+1}^{(M)}\| = \frac{1}{n}\|(T\mid_M)^n x^{(M)} - y^{(M)}\| \leq \frac{\alpha}{n}\left(K\lambda^n\|x\| + \|y\|\right) < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\text{e} \ \ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|Tv_k^{(N)} - v_{k+1}^{(n)}\| \leq \frac{\alpha\|T\mid_N\|}{n}\left(\|x\| + K\lambda^n\|y\|\right) < \frac{\epsilon}{2}.$$

A demonstração é concluída observando-se que a sequência finita $(x_k)_{k=0}^n$ em X, definida por $x_k = u_k^{(M)} + v_k^{(N)}$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, é uma ϵ-cadeia média para T de x até y. □

Corolário 2.47. *Seja X um espaço de Banach e $T : X \longrightarrow X$ um operador linear, limitado e inversível. Se T é hiperbólico, então T é transitivo por cadeia em média.*

Observação 2.48. O Corolário 2.47 continua válido para operadores hiperbólicos não inversíveis. De fato, basta usar o fato que o espaço pode ser decomposto em soma direta de dois subespaços fechados e não-invariantes, e que a restrição do operador a cada um desses subespaços é transitiva por cadeia em média.

Observação 2.49. A partir da Proposição 2.22 e do Corolário 2.47, conclui-se que toda aplicação $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, dada por $f(z) = az$, com $a \neq 0$, é transitiva por cadeia em média.

O Teorema 2.46 também fornece exemplos de operadores não hiperbólicos que possuem transitividade por cadeia em média, conforme nos mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 2.50. *([7], Teorema 17)* Seja $X = \ell_p(\mathbb{Z})$ $(1 \leq p < \infty)$ ou $X = c_0(\mathbb{Z})$, $(w_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ uma sequência limitada de escalares com $\inf_{n\in\mathbb{Z}} |w_n| > 0$ e $B_w X :\longrightarrow X$ o deslocamento bilateral ponderado à esquerda. Suponha ainda que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} |w_{-k} \cdot w_{-k-1} \cdot \ldots \cdot w_{-k-n}|^{\frac{1}{n}} < 1 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} |w_k \cdot w_{k+1} \cdot \ldots \cdot w_{k+n}|^{\frac{1}{n}} > 1. \tag{2.8}$$

(Por exemplo, $w_n = \frac{1}{2}$ se $n < 0$ e $w_n = 2$ se $n \geq 0$.) Nestas condições, B_w é transitivo por cadeia em média, mas não é hiperbólico. De fato, os conjuntos

$$M = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} : x_n = 0, \ \text{ para todo } \ n > 0\} \ \text{ e } \ N = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} : x_n = 0, \ \text{ para todo } \ n \leq 0\}$$

são subespaços fechados de X, tais que $X = M \oplus N$, $B_w(M) \subset M$ e $B_w^{-1}(N) \subset N$. Da condição (2.8) tem-se $\sigma(B_w |_M) \subset \mathbb{D}$ e $\sigma(B_w^{-1} |_N) \subset \mathbb{D}$. Então, pelo Teorema 2.46, B_w é transitivo por cadeia em média. □

Proposição 2.51. *Seja T um operador linear limitado em um espaço de Banach X, tal que $X = M \oplus N$, em que M e N são subespaços fechados de X com as propriedades seguintes:*

a) $T(M) \subset M$ *e* $\sigma(T |_M) \subset \mathbb{D}$;

b) $T |_N : N \longrightarrow T(N)$ *é bijetora,* $T(N)$ *é fechado,* $N \subset T(N)$ *e* $\sigma((T |_N)^{-1} |_N) \subset \mathbb{D}$.

Nestas condições, T é transitivo por cadeia em média.

Demonstração. É idêntica à do Teorema 2.46. □

A partir da Proposição 2.51 também podemos obter exemplos de operadores que sejam transitivos por cadeia em média, mas não hiperbólicos.

Exemplo 2.52. *([7], Proposição 20)* Seja $X = \ell_p(\mathbb{N})$ $(1 \leq p < \infty)$ ou $X = c_0(\mathbb{N})$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada de escalares não nulos e $B_wX :\longrightarrow X$ o deslocamento unilateral ponderado à esquerda. Além disso, suponha que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} |w_k \cdot w_{k+1} \cdot \ldots \cdot w_{k+n}|^{\frac{1}{n}} > 1. \tag{2.9}$$

Então B_w é um operador não inversível, não hiperbólico, mas que possui transitividade por cadeia em média. De fato, que B_w não é hiperbólico decorre do fato que seu raio espectral é maior que 1. Note que os conjuntos

$$M = \{(x_1, 0, 0, \cdots) : x_1 \in \mathbb{K}\} \;\text{ e }\; N = \{(0, x_2, x_3, \cdots) : (x_2, x_3, \cdots) \in X\},$$

em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, são subespaços fechados de X, tais que $X = M \oplus N$, $B_w(M) = \{0\} \subset M$ e $\sigma(B_w|_M) = \{0\} \subset \mathbb{D}$. A condição (2.9) acarreta $\inf_{n\in\mathbb{N}} |w_n| > 0$; logo $B_w|_N \colon N \longrightarrow B_w(N)$ é bijetor. Ainda da condição (2.9), tem-se $\sigma((B_w|_N)^{-1}|_N) \subset \mathbb{D}$. Então, segue da Proposição 2.51 que B_w é transitivo por cadeia em média. □

Pergunta 2.53. Quão grande é a classe dos operadores transitivos por cadeia em média?

Foi visto que os operadores hiperbólicos e os transitivos por cadeia são transitivos por cadeia em média. A seguir será mostrado um exemplo de um operador linear que não é hiperbólico e tampouco é transitivo por cadeia, mas que é transitivo por cadeia em média.

Exemplo 2.54. Seja $T : \ell_2(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell_2(\mathbb{N})$ o operador linear dado por

$$Tx = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots, \frac{x_n}{n}, \ldots\right)$$

em que $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$. Este operador é compacto. De fato, para cada número natural n defina $T_n : \ell_2(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell_2(\mathbb{N})$ por

$$T_nx = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots, \frac{x_n}{n}, 0, 0, 0, \ldots\right).$$

Cada T_n é um operador linear, limitado, compacto e, além disso:

$$\|(T - T_n)x\|^2 \leq \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{j=n+1}^{\infty} |x_j|^2 \leq \frac{\|x\|^2}{(n+1)^2},$$

o que, por sua vez, acarreta

$$\|T - T_n\| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Portanto, $\|T - T_n\| \longrightarrow 0$ e isto implica por ([23], Teorema 8.1-5) que T é compacto. Como consequência, T não é transitivo por cadeia. Além disso, como $Te_1 = e_1$, $e_1 = (1, 0, 0, \ldots)$, então $1 \in \sigma(T)$ e, assim, T não é hiperbólico. No entanto, T é transitivo por cadeia em média. De fato, dado $\epsilon > 0$, sejam $x, y \in \ell_2(\mathbb{N})$ e escolha $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n}\left(\|x\| + \|y\|\right) < \epsilon.$$

A seguir, faça

$$u_0 = x, u_1 = Tx, u_2 = T^2x, \ldots, u_{n-1} = T^{n-1}x, u_n = y.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\|x_i - x_{i+1}\| \leq \frac{1}{n}\left(\|T^n x\| + \|y\|\right) \leq \frac{1}{n}\left[\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{|x_j|^2}{j^{2n}}\right)^{\frac{1}{2}} + \|y\|\right] \\ < \frac{1}{n}\left(\|x\| + \|y\|\right) < \epsilon.\end{aligned}$$

Pergunta 2.55. Será que existe algum operador linear que não seja transitivo por cadeia em média?

2.4 Transformações esféricas

Considere o espaço $\mathbb{R}^{n+1}$ com coordenadas $x = (x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})$. Seja $\mathbb{S}^n$ a esfera unitária,

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}.$$

Denote por d a distância canônica em $\mathbb{S}^n$. Tome uma matriz A real inversível $(n+1) \times (n+1)$, ou seja, A é um elemento de $GL(n+1, \mathbb{R})$.

Definição 2.56. A transformação esférica em $\mathbb{S}^n$ correspondente à matriz A é a aplicação

$$\phi : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n, \quad \phi(x) = \frac{Ax}{\|Ax\|}.$$

Observe que ϕ é um difeomorfismo de $\mathbb{S}^n$. Denote os autovalores da matriz A por $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$.

Em [28], a transformação esférica foi completamente caracterizada no que diz respeito à propriedade de sombreamento (a definição encontra-se no próximo capítulo). Mais especificamente, tem-se:

Teorema 2.57. ***([28], Teorema 3.2.2).*** *Seja ϕ a transformação esférica em $\mathbb{S}^n$. Nestas condições, ϕ possui a propriedade de sombreamento se, e somente se, $|\lambda_i| \neq |\lambda_j|$, sempre que $i \neq j$.*

Uma questão que nos propusemos é se também é possível caracterizar as transformações esféricas em termos de transitividade por cadeia.

Proposição 2.58. *Sejam A uma matriz em $GL(2, \mathbb{R})$, λ_1, λ_2 os autovalores de A e ϕ a transformação esférica em $\mathbb{S}^1$ correspondente a A. Então, ϕ é transitiva por cadeia se, e somente se, $|\lambda_1| = |\lambda_2|$.*

Com o propósito de provar a Proposição 2.58, serão provados dois resultados auxiliares.

Lema 2.59. *A transformação esférica ϕ em $\mathbb{S}^1$, correspondente à matriz*

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

com $|\lambda_1|, |\lambda_2| \in \mathbb{R}^*$ e $|\lambda_1| \neq |\lambda_2|$ não é topologicamente transitiva.

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor $|\lambda_1| < |\lambda_2|$. Dado $(x, y) \in \mathbb{S}^1$, temos:

$$\phi^n(x, y) = \frac{(\lambda_1^n x, \lambda_2^n y)}{\sqrt{\lambda_1^{2n} x^2 + \lambda_2^{2n} y^2}}.$$

Se $y = 0$, então:

$$\phi^n(x, y) = \left(\frac{\lambda_1^n x}{|\lambda_1^n x|}, 0 \right)$$

e, caso $y \neq 0$,

$$\phi^n(x, y) \sim \left(0, \frac{\lambda_2^n y}{|\lambda_2^n y|} \right), \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

Se o conjunto $\{\phi^n(x, y) : n \in \mathbb{N}\}$ é denso em $\mathbb{S}^1$, para algum ponto $(x, y) \in \mathbb{S}^1$, então existem duas sequências $(n_k)_{k \geq 0}$ e $(m_k)_{k \geq 0}$ tais que

$$\phi^{n_k}(x, y) \longrightarrow (0, 1) \;\text{ e }\; \phi^{m_k}(x, y) \longrightarrow (1, 0),$$

o que é absurdo. $\square$

Lema 2.60. *Suponha que a matriz A tenha uma das formas abaixo:*

$$A_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad ou \quad A_3 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix},$$

com $\lambda \in \mathbb{R}^*$ e $a, b \in \mathbb{R}$, tais que $a^2 + b^2 \neq 0$. Então a transformação esférica ϕ correspondente à matriz A é transitiva por cadeia.

Demonstração. As matrizes A_1 e A_2 geram difeomorfismos do círculo $\mathbb{S}^1$. Caso ϕ corresponda a A_1, então, para todo (x, y) em $\mathbb{S}^1$, tem-se:

$$\phi(x, y) = \frac{\lambda}{|\lambda|}(x, y).$$

Se $\lambda > 0$, então $\phi = Id$ e, portanto, é transitiva por cadeia; se $\lambda < 0$, então $\phi = -Id$ e, assim, ϕ^2 é transitiva por cadeia, acarretando que ϕ também o é (Lema 2.26-b)). No caso de A_2, ϕ reduz-se à rotação em $\mathbb{S}^1$; se $\alpha \in [0, 2\pi)$ é a coordenada angular em $\mathbb{S}^1$ e se $a + ib = \rho e^{i\theta}$, então

$$\phi(\alpha) = \alpha + \theta \pmod{2\pi}.$$

Se o número $\frac{\theta}{\pi}$ é racional, então existe um natural m tal que $\phi^m = Id$ em $\mathbb{S}^1$ e, por conseguinte, é transitiva por cadeia. Mas se $\frac{\theta}{\pi}$ é irracional, então ϕ possui órbita densa em $\mathbb{S}^1$, acarretando a transitividade por cadeia.

Passemos a considerar A_3. Podemos supor $\lambda > 0$. Note que, para $c > 0$, as matrizes A e cA induzem a mesma transformação esférica. Podemos supor ainda $\lambda = 1$. Dado $\epsilon > 0$, seja $(x, y) \in \mathbb{S}^1$. Basta provar que existe uma ϵ-cadeia de (x, y) a $(0, 1)$ e uma ϵ-cadeia de $(0, 1)$ a (x, y). Para todo n natural,

$$\phi^n(x, y) = \frac{1}{\|(x, nx + y)\|}(x, nx + y).$$

Logo, se $x > 0$, temos:

$$\phi^n(x, y) \longrightarrow (0, 1) \text{ quando } n \to +\infty.$$

Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(\phi^{n_0}(x, y), (0, 1)) < \epsilon$$

e uma ϵ-cadeia de (x, y) a $(0, 1)$ é dada por

$$\{(x, y), \phi(x, y), \ldots, \phi^{n_0 - 1}(x, y), (0, 1)\}.$$

Caso $x < 0$, segue que

$$\phi^n(x, y) \longrightarrow (0, -1) \text{ quando } n \to +\infty$$

e, deste modo, existe um inteiro positivo n_1 tal que

$$d(\phi^{n_1}(x, y), (0, -1)) < \epsilon.$$

Observe que $(0, -1)$ é um ponto fixo de ϕ. Escolha um ponto (u, v) em $\mathbb{S}^1$, com $u > 0$, tal que $d((0, -1), (u, v)) < \epsilon$. Como consequência, existe uma ϵ-cadeia de (u, v) a $(0, 1)$ e obtém-se uma ϵ-cadeia de (x, y) a $(0, 1)$ concatenando as ϵ-cadeias de (x, y) a $(0, -1)$ e de (u, v) a $(0, 1)$.

O próximo passo é mostrar que existe uma ϵ-cadeia de $(0, 1)$ até (x, y). Note que ϕ é uniformemente contínua. Logo, existe $\delta > 0$ tal que

$$u, v \in \mathbb{S}^1, \quad d(u, v) < \delta \Longrightarrow d(\phi(u), \phi(v)) < \epsilon.$$

Procedendo como anteriormente, é possível construir uma δ-cadeia para ϕ^{-1} de (x, y) até $(0, 1)$. Denotemos essa δ-cadeia para ϕ^{-1} por

$$(u_0 = (x, y), u_1, \ldots, u_n = (0, 1)).$$

Considere a sequência $(v_k)_{k=0}^n$, definida por:

$$v_k = u_{n-k}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Então, para todo $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$,

$$d(\phi(v_k), v_{k+1}) = d(\phi(v_k), \phi(\phi^{-1}(v_{k+1}))) = d(\phi(u_{n-k}), \phi(\phi^{-1}(u_{n-k-1}))) \leq \epsilon,$$

ou seja, $(v_k)_{k=0}^n$ é uma ϵ-cadeia para ϕ de $(0, 1)$ até (x, y). Isto conclui a demonstração. $\square$

Demonstração da Proposição 2.58. Suponha que ϕ seja transitivo por cadeia e $|\lambda_1| \neq |\lambda_2|$. Então, pelo Teorema 2.57, ϕ tem a propriedade de sombreamento. Por conseguinte, a transformação esférica ϕ é topologicamente transitiva (pois toda aplicação contínua inversível que tenha a propriedade de sombreamento e é transitiva por cadeia é topologicamente transitiva), o que é absurdo, pois contraria o Lema 2.59. Para provar a recíproca, observe que se $A, B \in GL(2, \mathbb{R})$ e ϕ, ψ são as correspondentes aplicações esféricas em $\mathbb{S}^1$, então é possível provar que o sistema $\phi \circ \psi$ é a transformação esférica relativa ao produto de matrizes AB. Como para qualquer matriz $M \in GL(2, \mathbb{R})$, a transformação esférica correspondente é um homeomorfismo de $\mathbb{S}^1$, segue do Lema 2.26 que podemos considerar A em sua forma de Jordan. Portanto, a conclusão segue do Lema 2.60. □

Proposição 2.61. *Seja $A \in GL(n, \mathbb{R})$, com $n \geq 3$. Suponha ainda que A seja diagonalizável e que seus autovalores sejam números reais. Então a transformação esférica ϕ induzida por A é transitiva por cadeia se os módulos dos autovalores são todos iguais. Além disso, se os autovalores possuem módulos dois a dois distintos, então ϕ não é transitiva por cadeia.*

Demonstração. A prova é similar à prova do caso $n = 2$. Basta supor

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Se $|\lambda_i| = |\lambda_j|$, para todo $1 \leq i, j \leq n$, então

$$\begin{aligned} \phi(x_1, \cdots, x_n) &= \left(\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|} x_1, \frac{\lambda_2}{|\lambda_2|} x_2, \cdots, \frac{\lambda_n}{|\lambda_n|} x_n \right) \\ &= (\epsilon_1 x_1, \epsilon_2 x_2, \cdots, \epsilon_n x_n), \end{aligned}$$

em que $\epsilon_i = 1$ se $\lambda_i > 0$ e $\epsilon_i = -1$ se $\lambda_i < 0$. Logo, existe um número natural k tal que $\phi^k = Id$. Portanto, ϕ é transitiva por cadeia. A seguir, podemos supor, sem perda de generalidade que

$$|\lambda_1| < |\lambda_2| < \ldots < |\lambda_n|$$

e que ϕ seja topologicamente transitiva. Então existe um conjunto residual de pontos $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{S}^{n-1}$ tal que o conjunto

$$\left\{ \phi^k(x_1, x_2, \ldots, x_n) : k \in \mathbb{N} \right\}$$

é denso em $\mathbb{S}^{n-1}$. Podemos ainda supor $x_n \neq 0$. Logo

$$\phi^k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim \left(0, 0, \ldots, \frac{\lambda_n}{|\lambda_n^k x_n|} x_n \right), \quad \text{quando} \quad k \to +\infty.$$

Logo, ϕ não pode ser topologicamente transitiva. Supomos que ϕ seja transitiva por cadeia. Como ϕ também possui sombreamento, deduzimos que ϕ é topologicamente transitiva, o que é absurdo. □

Pergunta 2.62. Se a matriz $A \in GL(n, \mathbb{R})$, com $n \geq 3$, é tal que existem índices $i \neq j$ de modo que $|\lambda_i| \neq |\lambda_j|$ e existe um índice $k \neq i$ satisfazendo $|\lambda_i| = |\lambda_k|$, será que ϕ é transitiva por cadeia?

Proposição 2.63. *Seja X um espaço de Banach, S_X a esfera unitária de X e $\phi_{Id} : S_X \longrightarrow S_X$ a aplicação definida por $\phi_{Id}(x) = x$. Então ϕ_{Id} é transitiva por cadeia.*

Demonstração. Dados $x, y \in S_X$, defina $\gamma : [0, 1] \longrightarrow S_X$ por

$$\gamma(t) = \frac{(1-t)x + ty}{\|(1-t)x + ty\|}.$$

Observe que γ é uma função contínua que define um caminho de x até y. Seja $\epsilon > 0$. Como γ é uniformemente contínua, existe $\delta > 0$ de modo que

$$|z - t| < \delta \Longrightarrow d(\gamma(z), \gamma(t)) < \epsilon.$$

Sejam $t_0 = 0, t_1, \ldots, t_k = 1 \in [0, 1]$ tais que

$$|t_i - t_{i+1}| < \delta, \quad \text{para todo } \; i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}.$$

Então,

$$d(\phi(\gamma(t_i)), \gamma(t_{i+1})) = d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) < \epsilon, \quad \text{para todo } \; i \in \{0, 1, \ldots, k-1\},$$

ou seja, $(\gamma(t_i))_{i=0}^{k}$ é uma ϵ-cadeia de x até y em S_X. □

Pergunta 2.64. Seja $A : \ell_2(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell_2(\mathbb{N})$ o operador

$$(x_1, x_2, \ldots) \longmapsto (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots).$$

Será que ϕ_A é transitiva por cadeia sempre que $|\lambda_i| = |\lambda_j|$, para quaisquer i, j? Será que ϕ_A tem sombreamento se, e somente se, $|\lambda_i| \neq |\lambda_j|$, para todo $i \neq j$?

Capítulo 3

Sombreamento

Neste capítulo, foi apresentada uma compilação de alguns resultados sobre sombreamento no contexto da Dinâmica Topológica e então são apresentados os resultados da nossa investigação no âmbito dos operadores lineares. Entre outras coisas, foi provado que hiperbolicidade implica sombreamento médio, sendo equivalentes em dimensão finita; que expansividade uniforme e sombreamento médio implicam sombreamento; que operadores expansivos em média que possuem sombreamento médio são uniformemente expansivos e hiperbólicos.

3.1 Sombreamento e sombreamento limite

Definição 3.1. Sejam (M, d) um espaço métrico e $h : M \longrightarrow M$ um homeomorfismo. Diz-se que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma *δ-pseudo-órbita* de h se

$$d(h(x_n), x_{n+1}) \leq \delta \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

O homeomorfismo h tem a *propriedade de sombreamento* se para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que toda δ-pseudo-órbita é ϵ-sombreada por uma órbita real de h, isto é, existe $x \in M$ tal que

$$d(x_n, h^n(x)) \leq \epsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Observação 3.2. Se $h : M \longrightarrow M$ é um aplicação contínua em um espaço métrico M, então pode-se falar em *sombreamento limite positivo* simplesmente substituindo o conjunto $\mathbb{Z}$ por $\mathbb{N}_0$, em que $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, na definição de sombreamento. Se h admite inversa, então define-se também sombreamento negativo.

Definição 3.3. Sejam (M, d) um espaço métrico e $h : M \longrightarrow M$ um homeomorfismo. O homeomorfismo h tem a *propriedade de sombreamento limite* se para toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ em M com

$$\lim_{|n|\longrightarrow\infty} d(h(x_n), x_{n+1}) = 0,$$

existe $x \in M$ tal que

$$\lim_{|n|\longrightarrow\infty} d(x_n, h^n(x)) = 0.$$

Observação 3.4. De modo natural, pode ser definido a propriedade de sombreamento limite positivo e, caso a aplicação seja inversível, a propriedade de sombreamento negativo.

Sejam (M, d) um espaço métrico compacto e $f : M \longrightarrow M$ um homeomorfismo. Sabe-se, por exemplo, que: se f é expansivo (isto é, existe um número $c > 0$ tal que $x \neq y$ implica a existência de um número inteiro n tal que $d(f^n(x), f^n(y)) > c$) e possui a propriedade de sombreamento, então f tem tanto a propriedade de sombreamento limite positivo quanto negativo ([11], Lema 2.1); se f é expansivo e possui as propriedades de sombreamento e de especificação, então f também tem sombreamento limite ([11], Lema 2.2); se f é transitivo por cadeia e tem a propriedade de sombreamento limite, então f também possui sombreamento ([24], Teorema 7.3); se f tem a propriedade de sombreamento limite, então f é caótico no sentido de Li-Yorke ([25], Teorema 4.6); se f tem sombreamento limite e é minimal (isto é, para cada $x \in M$, $\omega(x) = M$, em que $\omega(x)$ denota o conjunto ω-limite de x), então f é caótico no sentido de Devaney ([25], Teorema 4.9).

A noção de especificação citada acima é a mesma considerada em [11], a saber: sejam M um conjunto e $f : M \longrightarrow M$ uma bijeção. Uma *especificação* (τ, P) consiste de uma coleção finita $\tau = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ de intervalos finitos $I_i \subset \mathbb{Z}$ e uma aplicação $P : \bigcup_{i=1}^n I_i \longrightarrow M$ tal que para cada $t_1, t_2 \in I \in \tau$ tem-se $f^{t_2-t_1}(P(t_1)) = P(t_2)$. Além disso, (τ, P) é *L-espaçada* se $a_{i+1} \geq b_i + L$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. E mais, (τ, P) é *ϵ-sombreada* por $y \in M$ se

$$d(f^m(y), P(m)) < \epsilon, \quad \text{para todo } \ m \in \bigcup_{i=1}^n I_i.$$

Assim, se M é um espaço métrico, diz-se que um homeomorfismo $f : M \longrightarrow M$ tem a *propriedade de especificação* se para todo $\epsilon > 0$ existe $L_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que toda especificação L_ϵ-espaçada é ϵ-sombreada.

Recorde ainda que se (M,d) é um espaço métrico, então um sistema dinâmico (M,f) é *caótico no sentido de Li-Yorke* se possui um conjunto embaralhado (*scrambled set*) não enumerável, sendo que um conjunto $A \subset M$ é *embaralhado* se, dados quaisquer dois pontos $x, y \in A$, tem-se

$$\liminf_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0 \quad \text{e} \quad \limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > 0.$$

(M,f) é *caótico no sentido de Devaney* se f é topologicamente transitivo e possui um conjunto denso de pontos periódicos.

A seguir, vamos mostrar um exemplo de um operador linear limitado inversível que não possui a propriedade de sombreamento nem a de sombreamento limite.

Exemplo 3.5. Seja $X = \ell_1(\mathbb{Z})$ e seja o operador $T : X \longrightarrow X$ dado por $Tx = x$. Escolha $0 \neq v_0 \in X$. Logo, $\|v_0\| = \delta > 0$. Considere a sequência de pontos $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que $x_0 = (\ldots, 0, 0, 0, \ldots)$ e $x_{k+1} = x_k + \frac{v_0}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Tal sequência é uma δ-pseudo-órbita de T. Tome $\epsilon = \frac{1}{3}$. Então, para toda δ-pseudo-órbita de T e todo ponto $y \in X$ temos:

$$\|T^n y - x_n\| = \|y - x_n\| \geq \|x_n\| - \|y\| = \frac{n}{2}\|v_0\| - \|y\| > \frac{1}{3}, \quad \text{para algum} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, T não possui a propriedade de sombreamento.

A fim de ver que T não possui a propriedade de sombreamento limite, considere a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dada por $x_k = (\ldots, 0, 0, 0, \ldots)$, para $k \leq 0$, e $x_k = x_{k-1} + \frac{1}{k}e_1$, para $k > 0$, em que e_1 possui a primeira coordenada igual a 1 e as demais são nulas. Esta sequência é uma pseudo-órbita limite de T. Contudo, para todo $y \in X$ e todo x_n, tem-se:

$$\|T^n y - x_n\| \geq |(x_n - T^n y)_1| = |\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - x_1| \longrightarrow \infty \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Portanto, T também não tem a propriedade de sombreamento limite.

Por outro lado, sabe-se que todo operador linear limitado inversível e hiperbólico possui a propriedade de sombreamento [27] e a de sombreamento limite [6].

Proposição 3.6. *Seja $T : X \longrightarrow X$ um operador linear limitado, definido em um espaço de Banach X. Se T é positivamente expansivo e tem a propriedade de sombreamento positivo, então T também possui a propriedade de sombreamento limite positivo.*

Observação 3.7. Bernardes e Messaoudi provaram em ([7], Proposição 5) que um operador linear limitado T é positivamente expansivo e possui sombreamento positivo se, e somente se, T é hiperbólico com $\sigma(T) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.

Demonstração da Proposição 3.6. Dado $\epsilon > 0$, seja $\delta > 0$ tal que toda δ-pseudo-órbita seja $\frac{\epsilon}{2}$-sombreada. Além disso, seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ uma pseudo-órbita limite positiva, isto é,

$$\|Tx_n - x_{n+1}\| \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Então, existe um número natural N tal que

$$n \geq N \text{ implica } \|Tx_n - x_{n+1}\| < \delta.$$

A propriedade de sombreamento garante que existe um $y \in X$, $y = y(N)$, tal que

$$n \geq N \text{ implica } \|T^n y - x_n\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Para completar a demonstração, é necessário provar que y não depende de N. De fato, seja $M > N$ e $y_1 = y_1(M)$ de modo que

$$n \geq M \text{ implica } \|T^n y_1 - x_n\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Usando a desigualdade triangular, temos:

$$\|T^n y - T^n y_1\| \leq \|T^n y - x_n\| + \|T^n y_1 - x_n\| < \epsilon \text{ para todo } n \geq M.$$

Da expansividade positiva de T, segue que $y = y_1$, pois, por ([6], Proposição 5), se T é expansivo positivamente, então $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T^n x\| = \infty$, para todo $0 \neq x \in X$. Isto conclui a demonstração. □

Observação 3.8. Prova-se também que se T é um operador linear definido em um espaço de Banach X, limitado, inversível e com a propriedade de sombreamento negativo, tal que T^{-1} seja positivamente expansivo, então T possui a propriedade de sombreamento limite negativo. A demonstração é análoga à da Proposição 3.6.

Observação 3.9. Segue de ([7], Teorema 1) que se um operador linear limitado inversível T é expansivo e possui a propriedade de sombreamento, então T é hiperbólico e, portanto, por ([6], Corolário 34) possui sombreamento limite.

Proposição 3.10. *Seja X um espaço de Banach separável e $T : X \longrightarrow X$ um operador linear limitado inversível. Se T tem a propriedade de sombreamento e é hipercíclico, então T não pode ser expansivo.*

Demonstração. Inicialmente, suponha que T tenha a propriedade de sombreamento e seja $\delta > 0$ a constante que aparece na definição dessa propriedade correspondente a $\epsilon = 1$. Como T é hipercíclico, então $\sigma_p(T^*)$ é vazio. Além disso, sabe-se que $\sigma_r(T) \subset \sigma_p(T^*)$ e $\sigma(T) = \sigma_r(T) \cup \sigma_a(T)$. Logo, $\sigma(T) = \sigma_a(T)$ (a respeito dessas afirmações sobre o espectro de um operador, consulte a Seção 1.4). Ainda da hiperciclicidade tem-se $\sigma_a(T) \cap \mathbb{S}^1$ não vazio. Tome λ nesta intersecção. Então, existe $x_0 \in X$ tal que

$$\|x_0\| = 1 \text{ e } \|\lambda x_0 - Tx_0\| < \frac{\delta}{2}.$$

Seja $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ a sequência dada por $y_n = 2\lambda^n x_0$. Note que $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma δ-pseudo-órbita. A propriedade de sombreamento acarreta a existência de $y \in X$ tal que $\|T^n y - y_n\| < 1$, para todo n inteiro. Assim,

$$1 < \|T^n y\| < 3, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}$$

e, portanto, T não pode ser expansivo. □

Observação 3.11. Em ([7], Teorema 1), foi provado que um operador linear limitado inversível T é expansivo e tem sombreamento se, e somente se, é hiperbólico. Logo, T não pode ser hipercíclico.

Observação 3.12. Existe um operador linear T, definido em um espaço de Banach X, que é hipercíclico e possui a propriedade de sombreamento. Uma classe de operadores nessas condições foi obtida por ([6], Teorema D). Tais operadores também são transitivos por cadeia em média.

Pergunta 3.13. Todo operador linear com a propriedade de sombreamento é transitivo por cadeia em média?

Conforme demonstrado abaixo, a resposta é sim no caso dos deslocamentos ponderados bilaterais para a esquerda.

Proposição 3.14. *Seja $X = \ell_p(\mathbb{Z})$ $(1 \le p < \infty)$ ou $X = c_0(\mathbb{Z})$, $(w_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ uma sequência limitada de escalares com $\inf_{n\in\mathbb{Z}} |w_n| > 0$ e seja $B_w : X \longrightarrow X$ o deslocamento ponderado bilateral para a esquerda. Se B_w possui a propriedade de sombreamento, então B_w é transitivo por cadeia em média.*

Demonstração. Por [7], B_w possui sombreamento se, e somente se, uma das condições seguintes ocorre:

a) $\lim_{n\to\infty}\sup_{k\in\mathbb{Z}}|w_k\cdot\ldots\cdot w_{k+n}|^{\frac{1}{n}}<1$;

b) $\lim_{n\to\infty}\inf_{k\in\mathbb{Z}}|w_k\cdot\ldots\cdot w_{k+n}|^{\frac{1}{n}}>1$;

c) $\lim_{n\to\infty}\sup_{k\in\mathbb{N}}|w_{-k}w_{-k-1}\cdot\ldots\cdot w_{-k-n}|^{\frac{1}{n}}<1$ e $\lim_{n\to\infty}\inf_{k\in\mathbb{N}}|w_k w_{k+1}\cdot\ldots\cdot w_{k+n}|^{\frac{1}{n}}>1$.

As duas primeiras condições descrevem o caso em que B_w é hiperbólico ([6], Observação 19.a)). Logo, pelo Corolário 2.47, B_w é transitivo por cadeia em média. Resta, pois, verificar que a condição c) acarreta a transitividade por cadeia em média. Para isto, será empregado um argumento contido em ([7], Teorema 17). Sejam

$$M=\{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in X : x_n=0 \ \text{ se } \ n>0\} \ \text{ e } \ N=\{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in X : x_n=0 \ \text{ se } \ n\leq 0\}.$$

Note que M e N são subespaços fechados de X, tais que $X=M\oplus N$, $B_w(M)\subset M$ e $B_w^{-1}(N)\subset N$. Uma vez que, para todo natural n,

$$\|(B_w\,|_M)^n\|=\sup_{k\in\mathbb{N}_0}|w_{-k}w_{-k-1}\cdot\ldots\cdot w_{-k-n+1}|$$

e

$$\|(B_w^{-1}\,|_N)^n\|=\sup_{k\in\mathbb{N}_0}|w_{k+1}w_{k+2}\cdot\ldots\cdot w_{k+n}|$$

então a condição c) descrita acima corresponde a afirmar que

$$\sigma(B_w\,|_M)\subset\mathbb{D} \ \text{ e } \ \sigma(B_w^{-1}\,|_N)\subset\mathbb{D}.$$

Portanto, pelo Teorema 2.46, B_w é transitivo por cadeia em média. □

Observação 3.15. Na classe dos operadores normais inversíveis, hiperbolicidade e sombreamento são equivalentes ([6], Corolário 42). Logo, os operadores normais inversíveis com a propriedade de sombreamento são transitivos por cadeia em média.

Observação 3.16. No caso de operadores inversíveis em geral, foi provado em ([7], Teorema 1) que um operador inversível é hiperbólico se, e somente se, é expansivo e possui a propriedade de sombreamento. Assim, um operador expansivo com a propriedade de sombreamento é transitivo por cadeia em média.

Pergunta 3.17. Todo operador linear com a propriedade de sombreamento positivo é transitivo por cadeia em média?

De acordo com o resultado abaixo, obtém-se resposta afirmativa no caso dos deslocamentos ponderados unilaterais para a esquerda.

Proposição 3.18. *Seja* $X = \ell_p(\mathbb{N})$ $(1 \leq p < \infty)$ *ou* $X = c_0(\mathbb{N})$, $(w_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *uma sequência limitada de escalares não nulos e seja* $B_w : X \longrightarrow X$ *o deslocamento ponderado unilateral para a esquerda. Se* B_w *possui a propriedade de sombreamento positivo, então* B_w *é transitivo por cadeia em média.*

Demonstração. É feita de maneira análoga a da Proposição 3.14, mas a incluímos para a conveniência do leitor. Por ([7], Proposição 20), B_w tem sombreamento positivo se, e somente se, uma das condições abaixo se verifica:
a) $\lim_{n\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} |w_k \cdot \ldots \cdot w_{k+n}|^{\frac{1}{n}} < 1$;
b) $\lim_{n\to\infty} \inf_{k\in\mathbb{N}} |w_k \cdot \ldots \cdot w_{k+n}|^{\frac{1}{n}} > 1$.
Se a condição a) for válida, então B_w será hiperbólico ([6], Observação 19.b)) e, assim, é transitivo por cadeia em média. Caso a condição válida seja a b), então será provado que B_w tem a propriedade requerida adaptando-se um argumento de ([7], Proposição 20). Seja

$$M = \{(x_1, 0, 0, \ldots) : x_1 \in \mathbb{K}\} \ \text{ e } \ N = \{(0, x_2, x_3, \ldots) : (x_2, x_3, \ldots) \in X\}.$$

Tem-se $B_w(M) = \{0\} \subset M$ e $\sigma(B_w \mid_M) = \{0\} \subset \mathbb{D}$. Além disso, segue da condição b) que $\inf_{n\in\mathbb{N}} > 0$ e isto acarreta que $B_w \mid_N : N \longrightarrow B_w(N)$ é um operador bijetor. E mais, como

$$r((B_w \mid_N)^{-1} \mid_N) = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq 3} |w_k \cdot \ldots \cdot w_{k+n-1}|^{-\frac{1}{n}},$$

a condição b) também acarreta $\sigma((B_w \mid_N)^{-1} \mid_N) \subset \mathbb{D}$. Portanto, pela Proposição 2.51, B_w é transitivo por cadeia. $\square$

Observação 3.19. Sabe-se que se T é um operador compacto definido em um espaço de Banach X, então hiperbolicidade é equivalente a sombreamento positivo ([7], Teorema 46). Por conseguinte, todo operador compacto com sombreamento positivo também é transitivo por cadeia em média.

Observação 3.20. Em ([7], Proposição 5), foi provado que se um operador T é positivamente expansivo e tem a propriedade de sombreamento positivo, então T também é hiperbólico e, portanto, transitivo por cadeia em média.

3.2 Sombreamento médio

Definição 3.21. Sejam (X, d) um espaço métrico e $f : X \longrightarrow X$ uma aplicação contínua. Dado $\delta > 0$, dizemos que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ é uma *δ-pseudo-órbita de f na média* (ou, simplesmente, uma *δ-média-pseudo-órbita positiva de f*) se existe um número inteiro $N > 0$ tal que, para todo $n \geq N$ e $k \geq 0$, vale

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} d(f(x_{i+k}), x_{i+k+1}) < \delta.$$

Definição 3.22. Sejam (X, d) um espaço métrico e $f : X \longrightarrow X$ uma aplicação contínua. Dados $\epsilon > 0$ e $y \in X$, dizemos que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ é *ϵ-sombreada positivamente em média* por y se

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} d(f^i(y), x_i) < \epsilon.$$

Definição 3.23. Sejam (X, d) um espaço métrico e $f : X \longrightarrow X$ uma aplicação contínua. Dizemos que f tem a *propriedade de sombreamento positivo médio* se, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que toda δ-média-pseudo-órbita é ϵ-sombreada em média por algum ponto $x \in X$.

De acordo com Kulczycki et al. [24], esse tipo de sombreamento, descrito acima, foi introduzido por M. L. Blank (no contexto de sistemas dinâmicos compactos), no final da década de 1980. Ainda em [24], os autores estabeleceram relações entre quase especificação (*almost specification*) (grosso modo, f tem quase especificação se existe um ponto cuja parte de sua órbita está próxima, com no máximo uma quantidade finita de erros, das órbitas de um conjunto finito de pontos) e a sombreamento positivo médio em sistemas dinâmicos topológicos. Já em [12] foi provado que se um homeomorfismo f, definido em um espaço métrico M compacto, tem a propriedade de sombreamento limite, então f é topologicamente misturador, tem a propriedade de especificação e sombreamento médio positivo.

No caso linear, adaptando-se as demonstrações de ([6], Teorema E e Lema 45) é possível provar que, em dimensão finita, o sombreamento positivo médio e a hiperbolicidade são equivalentes. Além disso, adaptando a demonstração de ([6], Teorema 46), conseguimos provar que, para operadores compactos em espaços de dimensão infinita, sombreamento positivo médio e hiperbolicidade também são equivalentes

Ao invés de trabalhar com essa definição, será introduzida uma variação a fim de permitir que sejam considerados iterados negativos nas médias.

Definição 3.24. Sejam (X, d) um espaço métrico e $f : X \longrightarrow X$ uma aplicação contínua e inversível. Dado $\delta > 0$, dizemos que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma *δ-pseudo-órbita de f na média* (ou, simplesmente, uma *δ-média-pseudo-órbita de f*) se existe um número inteiro $N > 0$ tal que, para todo $n \geq N$ e $k \in \mathbb{Z}$, vale

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n} d(f(x_{i+k}), x_{i+k+1}) < \delta.$$

Definição 3.25. Sejam (X, d) um espaço métrico e $f : X \longrightarrow X$ uma aplicação contínua e inversível. Dados $\epsilon > 0$ e $y \in X$, dizemos que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é *ϵ-sombreada em média* por y se

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n} d(f^i(y), x_i) < \epsilon.$$

Definição 3.26. Sejam (X, d) um espaço métrico e $f : X \longrightarrow X$ uma aplicação contínua e inversível. Dizemos que f tem a *propriedade de sombreamento médio* se, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que toda δ-média-pseudo-órbita é ϵ-sombreada em média por algum ponto $x \in X$.

Convém observar ainda que há operadores que não possuem a propriedade de sombreamento médio, conforme ilustra o exemplo abaixo.

Exemplo 3.27. Em $X = \ell_1(\mathbb{Z})$, seja $T : X \longrightarrow X$ o operador identidade. Este operador não tem sombreamento médio. De fato, tome $0 \neq v_0 \in X$. Logo, $\|v_0\| = \delta > 0$. Seja $0 < \epsilon < \frac{\delta}{4}$. A sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, definida por

$$x_0 = (\ldots, 0, 0, 0, \ldots) \ \text{ e } \ x_{k+1} = x_k + \frac{v_0}{2}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

é uma δ-média-pseudo-órbita. No entanto, para todo $y \in X$ e para todo n natural maior que 1,

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n} \|T^i y - x_i\| \geq \frac{1}{2n+1}\left(\|x_{n-1}\| - \|y\|\right) = \frac{1}{2n+1}\left(\frac{(n-1)\|v_0\|}{2} - \|y\|\right)$$

e $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{(n-1)\|v_0\|}{2} - \|y\|\right) = \frac{\|v_0\|}{4} > \epsilon$.

Proposição 3.28. *Seja T um operador linear limitado inversível definido em um espaço de Banach X, tal que $X = M \oplus N$, em que M e N são subespaços fechados de X e T-invariantes. Nestas condições, T tem a propriedade de sombreamento médio se, e somente se, $T\mid_M$ e $T\mid_N$ também são.*

Demonstração. Pelo Lema 2.15, existe uma constante $\beta > 0$ tal que

$$\|u\| \leq \beta\|x\| \text{ e } \|v\| \leq \beta\|x\|,$$

sempre que $x = u + v$, com $u \in M$ e $v \in N$. Seja $x = u + v$ e $x_n = u_n + v_n$, $n \in \mathbb{Z}$, em que $u, u_n \in M$ e $v, v_n \in N$. A implicação direta segue das inequações

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}\|u_n - (T\mid_M)^n u\| \leq \beta\frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}\|x_n - T^n x\|$$

e

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}\|v_n - (T\mid_N)^n v\| \leq \beta\frac{1}{n}\sum_{i=-n}^{n}\|x_n - T^n x\|,$$

enquanto que a recíproca segue das inequações

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}\|(T\mid_M)u_{i+k} - u_{i+k+1}\| \leq \beta\frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}\|Tx_{i+k} - x_{i+k+1}\|,$$

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}\|(T\mid_N)v_{i+k} - v_{i+k+1}\| \leq \beta\frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}\|Tx_{i+k} - x_{i+k+1}\|$$

e

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}\|x_n - T^n x\| \leq \frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}\|u_n - (T\mid_M)^n u\| + \frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}\|v_n - (T\mid_N)^n v\|.$$

□

Teorema 3.29. *Seja T um operador linear, limitado e inversível, definido em um espaço de Banach X. Suponha que $X = M \oplus N$, em que M e N são subespaços fechados de X, com $T(M) \subset M$ e $T^{-1}(N) \subset N$. Se $\sigma(T\mid_M) \subset \mathbb{D}$ e $\sigma(T^{-1}\mid_N) \subset \mathbb{D}$, então T tem a propriedade de sombreamento médio.*

Corolário 3.30. *Se T é um operador linear, limitado, hiperbólico e inversível, então T possui a propriedade de sombreamento médio.*

Lema 3.31. *Um operador T linear, limitado e inversível, definido em um espaço de Banach X tem a propriedade de sombreamento médio se, e somente se, existe uma constante*

$K > 0$ tal que se $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência em X para a qual tem-se $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitada, com $w_n = \left(\sup_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}\|z_{i+k}\|\right)$, então existe uma sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}_0}$ em X satisfazendo

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}\|y_i\| \leq K \limsup_{n\to\infty}\|w_n\| \tag{3.1}$$

e

$$y_{n+1} = Ty_n + z_n \quad \textit{para todo} \quad n \in \mathbb{Z} \tag{3.2}$$

Demonstração. Suponha que T tenha a propriedade de sombreamento médio e seja $\delta > 0$ a constante que aparece na definição de sombreamento em média associada a $\epsilon = 1$. Considere uma sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ como na hipótese e seja $L = \limsup_{n\to\infty}\|w_n\|$. Seja $x_0 \in X$ e defina $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ pondo $x_{n+1} = Tx_n + \frac{\delta_1}{L}z_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, em que $0 < \delta_1 < \delta$. Então, $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma δ-média-pseudo-órbita positiva de T. Por hipótese, existe $x \in X$ tal que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}\|T^i x - x_i\| < 1.$$

Faça $y_n = \frac{L}{\delta_1}(x_n - T^n x)$. Não é difícil provar que (3.1) ocorre, com $K = \frac{1}{\delta_1}$, e (3.2) ocorre. Reciprocamente, seja dado $\epsilon > 0$ e tome $\delta = \frac{\epsilon}{2K}$ e seja $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ uma δ-média-pseudo-órbita de T. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, faça $z_n = Tx_n - x_{n+1}$. Logo, a sequência $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $w_n = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}\|z_{i+k}\|$, é limitada. Observe ainda que $\limsup_{n\to\infty}\|w_n\| \leq \delta$. Segue da hipótese que (3.1) e (3.2) valem. Como $x_{n+1} - y_{n+1} = T(x_n - y_n)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, segue que $x_n - y_n = T^n(x_0 - y_0)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}\|x_i - T^i(x_0 - y_0)\| = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}\|y_i\| &\leq K \limsup_{n\to\infty} w_n \\ &\leq K\delta < \epsilon.\end{aligned}$$

□

Demonstração do Teorema 3.29. Para cada $x \in X$, existe uma única decomposição $x = x^{(1)} + x^{(2)}$, em que $x^{(1)} \in M$ e $x^{(2)} \in N$. Além disso, há uma constante $\beta > 0$ tal que

$$\|x^{(1)}\| \leq \beta\|x\| \ \text{ e } \ \|x^{(2)}\| \leq \beta\|x\|, \ \text{ qualquer que seja } \ x \in X.$$

As relações $\sigma(T\mid_M) \subset \mathbb{D}$ e $\sigma(T^{-1}\mid_N) \subset \mathbb{D}$ implicam $r(T\mid_M) < 1$ e $r(T^{-1}\mid_N) < 1$. Escolha $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\max\{r(T\mid_M), r(T^{-1}\mid_N)\} < \lambda < 1.$$

Segue da fórmula do raio espectral que existe uma constante $C \geq 1$ tal que

$$\|(T\,|_M)^n\| \leq C\lambda^n \;\text{ e }\; \|(T^{-1}\,|_N)^n\| \leq C\lambda^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Considere uma sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $w_n = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n} \|z_{i+k}\|$ seja limitada. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, defina:

$$y_n^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k z_{n-k-1}^{(1)} \in M, \quad y_n^{(2)} = -\sum_{k=1}^{\infty} T^{-k} z_{n+k-1}^{(2)} \in N$$

e

$$y_n = y_n^{(1)} + y_n^{(2)} \in X.$$

Com alguns cálculos, verifica-se que

$$y_{n+1} = Ty_n + z_n$$

e, como

$$\|y_n^{(1)}\| \leq C\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \|z_{n-k-1}^{(1)}\| \;\text{ e }\; \|y_n^{(2)}\| \leq C\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k |z_{n+k-1}^{(2)}\|,$$

tem-se

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n} \|y_i\| \leq 2\beta C\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k\right) \sup_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n} \|z_{i+k}\| = \frac{2\beta C}{1-\lambda} w_n,$$

o que, por sua vez, acarreta

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n} \|y_i\| \leq \left(\frac{2\beta C}{1-\lambda}\right) \limsup_{n\to\infty} w_n.$$

Portanto, o Lema 3.31 assegura que T possui sombreamento médio. □

Corolário 3.32. *Seja $X = \ell_q(\mathbb{Z})$, $1 \leq q < \infty$, ou $X = c_0(\mathbb{Z})$. Então existe um deslocamento ponderado bilateral para a direita inversível que satisfaz o critério de hiperciclicidade frequente (e, portanto, não hiperbólico) e que possui a propriedade de sombreamento médio.*

Demonstração. É o mesmo exemplo apresentado em Bernardes et al. [6], Teorema D. Vamos apresentá-lo aqui para a conveniência do leitor. Tome um número real $c > 1$ e seja F_w o deslocamento ponderado bilateral à direita, definido em X, cuja sequência de pesos $(w_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é dada por $w_n = c$ se $n < 0$ e $w_n = \frac{1}{c}$ se $n \geq 0$. A conclusão segue mediante a aplicação do Teorema 3.29, com

$$M = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} : x_n = 0 \;\text{ se }\; n < 0\}$$

e

$$N = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} : x_n = 0 \ \text{ se } \ n \geq 0\}.$$

$\square$

Corolário 3.33. *Seja T um operador linear limitado, definido em um espaço de Banach X. Se T é hiperbólico, então T tem a propriedade de sombreamento em média.*

Proposição 3.34. *Se T é um operador inversível definido em um espaço de Banach de dimensão finita X, então as afirmações seguintes são equivalentes:*

1. *T é hiperbólico;*

2. *T tem a propriedade de sombreamento positivo médio.*

Demonstração. Suponha que T não seja hiperbólico. Devemos, pois, mostrar que (2) é falsa. Observe que se T tem a propriedade de sombreamento médio, então λT também possui esta propriedade, sempre que $|\lambda| = 1$. Assim, podemos supor $1 \in \sigma(T)$. Pela Proposição 3.28 e a forma canônica de Jordan, basta considerar os casos em que T é um operador em $\mathbb{C}^k$ (com a norma euclidiana) cuja forma canônica seja

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tome $\delta > 0$ e seja $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ em $\mathbb{C}^k$ dada por $x_n = (0, 0, \ldots, 0)$ para $n \leq 0$ e

$$x_{n+1} = ((n+1)\delta, (Tx_n)_2, \ldots, (Tx_n)_k) \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Então $\|Tx_n - x_{n+1}\| < \delta$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, acarretando que $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma δ-média-pseudo-órbita positiva, a qual não pode ser sombreada positivamente em média pela órbita real de qualquer ponto $x \in \mathbb{C}^k$, pois

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}\|x_i - T^i x\| &\geq \frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}|(x_i - T^i x)_1| = \frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}|i\delta - (x)_1| \\ &\geq \frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}|i\delta| - |(x)_1| = \frac{\delta}{2n+1}\sum_{i=0}^{n-1} i - |(x)_1| \\ &= \frac{\delta n(n-1)}{2(2n+1)} - |(x)_1| \to \infty \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Portanto, T não tem a propriedade de sombreamento médio. $\square$

O resultado a seguir relaciona sombreamento e sombreamento médio.

Teorema 3.35. *Seja T um operador linear, limitado e inversível, definido em um espaço de Banach X. Se T possui a propriedade de sombreamento médio e é uniformemente expansivo, então T tem a propriedade de sombreamento.*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, seja $\delta > 0$ a constante da definição de sombreamento médio correspondente a ϵ e seja $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ uma δ-pseudo-órbita de T. Então $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ também é uma δ-média-pseudo-órbita de T e, assim, existe $y \in X$ tal que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{i=-n}^{n} \|T^i y - x_i\| < \epsilon.$$

A seguir, será provado que y também ϵ-sombreia essa pseudo-órbita. De fato, suponha que exista $i_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\|T^{i_0} y - x_{i_0}\| \geq \epsilon$. Como T é uniformemente expansivo, existe um número natural n_0, tal que, para todo $n \geq n_0$ ocorre

$$\|T^n(T^{i_0} y - x_{i_0})\| > C^n \|T^{i_0} y - x_{i_0}\| \geq C^n \epsilon \tag{3.3}$$

ou

$$\|T^{-n}(T^{i_0} y - x_{i_0})\| > C^n \|T^{i_0} y - x_{i_0}\| \geq C^n \epsilon, \tag{3.4}$$

em que $C > 1$ é uma constante positiva a ser determinada posteriormente.

Suponha que ocorra (3.3). Então, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\|T^{n+i_0} y - x_{n+i_0}\| &\geq \|T^{n+i_0} y - T^n x_{i_0}\| - \|T^n x_{i_0} - x_{n+i_0}\| \geq C^n \epsilon - \|T^n x_{i_0} - x_{n+i_0}\| \\
&\geq C^n \epsilon - [\|T^n x_{i_0} - T^{n-1} x_{i_0+1}\| + \|T^{n-1} x_{i_0+1} - T^{n-2} x_{i_0+2}\| \\
&\qquad + \cdots + \|T x_{n+i_0-1} - x_{n+i_0}\|] \\
&\geq C^n \epsilon - (\|T\|^{n-1} + \|T\|^{n-2} + \cdots + 1)\delta.
\end{aligned}$$

Escolha C suficientemente grande a fim de que $C^n \epsilon - (\|T\|^{n-1} + \|T\|^{n-2} + \cdots + 1)\delta > 2\epsilon$, para todo $n \geq 1$. Logo,

$$\|T^{n+i_0} y - x_{n+i_0}\| \geq 2\epsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, com $n > n_0 + i_0$, tem-se:

$$\frac{1}{2n+1} \sum_{i=-n}^{n} \|T^i y - x_i\| \geq \frac{1}{2n+1} \sum_{i=n_0+i_0}^{n} \|T^i y - x_i\| \geq \frac{2\epsilon}{2n+1}(n - n_0 - i_0 + 1)$$

e, por conseguinte,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{i=-n}^{n} \|T^i - x_i\| \geq \epsilon,$$

o que é absurdo. No caso em que ocorre (3.4), procede-se da mesma forma, também chegando a um absurdo. □

Observação 3.36. Se um operador linear T é uniformemente expansivo e tem a propriedade de sombreamento, então T também é hiperbólico, conforme foi provado em ([7], Teorema 1).

Definição 3.37. Seja X um espaço de Banach e $T : X \longrightarrow X$ um operador linear limitado e inversível. Dizemos que T é *expansivo em média* se

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2n+1} \sum_{i=-n}^{n} \|T^i x\| = \infty, \forall x \neq 0.$$

Observação 3.38. Note que se um operador T é expansivo em média, então existe uma constante $c > 1$ tal que, para cada $0 \neq x \in X$, existe um inteiro $n > 0$ para o qual

$$\frac{1}{2n+1} \sum_{i=-n}^{n} \|T^i x\| > c\|x\|. \tag{3.5}$$

Como consequência, todo operador expansivo em média é expansivo, pois se ocorre (3.5), então, em particular, para cada $x \in X$, com $\|x\| = 1$, existe um índice i de modo que $\|T^i x\| > c$.

A seguir, é dada uma caracterização para os deslocamentos ponderados bilaterais à esquerda que são expansivos em média.

Proposição 3.39. *Seja $X = \ell_p(\mathbb{Z})$ $(1 \leq p < \infty)$ ou $X = c_0(\mathbb{Z})$, $w = (w_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ uma sequência limitada de escalares, com $\inf_{n\in\mathbb{Z}} |w_n| > 0$ e $B_w : X \longrightarrow X$ o deslocamento ponderado bilateral para a esquerda. Nestas condições, B_w é expansivo em média se, e somente se,*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2n+1} \sum_{i=-n}^{n} \|B_w^i(e_k)\| = \infty, \forall k \in \mathbb{Z}, \tag{3.6}$$

em que e_k é o vetor que tem a coordenada k igual a um e as demais são nulas.

Demonstração. Se B_w é expansivo em média, então (3.6) é consequência direta da definição de expansividade média. Reciprocamente, se a relação (3.6) vale, então seja $x = (x_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ qualquer vetor não nulo em X e escolha $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x_k \neq 0$. Logo,

$$\begin{aligned}\sup_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2n+1} \sum_{i=-n}^{n} \|B_w^i(x)\| &\geq \sup_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2n+1} \sum_{i=-n}^{n} \|B_w^i(x_k e_k)\| \\ &= |x_k| \sup_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2n+1} \sum_{i=-n}^{n} \|B_w^i(e_k)\| = \infty.\end{aligned}$$

Portanto, B_w é expansivo em média. $\square$

Com o auxílio da proposição anterior, é possível obter exemplos de operadores que não são expansivos em média.

Exemplo 3.40. Seja $X = \ell_2(\mathbb{Z})$, $w = (w_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ a sequência de pesos definida por $w_n = 2$ se $n \geq 0$ e $w_n = \frac{1}{2}$ se $n < 0$ e $B_w : X \longrightarrow X$ o deslocamento bilateral ponderado para a esquerda. Então B_w não é expansivo em média. De fato, vamos provar a afirmação mostrando que, para todo, $n \in \mathbb{N}$, a média

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}\|B_w^i(e_1)\|$$

é limitada. Observe que, para cada n natural,

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{i=0}^{n}\|B_w^{-i}(e_1)\| = \frac{1}{2n+1}\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{w_1\cdots w_i}\right) \leq \frac{n+1}{2n+1} \leq 1.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2n+1}\sum_{i=1}^{n}\|B_w^i(e_1)\| &= \frac{1}{2n+1}\left(w_1 + w_0w_1 + w_{-1}w_0w_1 + \cdots + w_{-n+2}\cdot\ldots\cdot w_{-1}w_0w_1\right)\\ &\leq \frac{1}{2n+1}\left(2+2^2+2+\frac{1}{2}\cdots+\frac{1}{2^{n-4}}\right) \longrightarrow 0 \ \text{ quando } \ n\to+\infty.\end{aligned}$$

Portanto, B_w não é expansivo em média.

A seguir, apresentamos um exemplo de um operador expansivo, mas não expansivo em média.

Exemplo 3.41. Seja $X = \ell_2(\mathbb{Z})$ e $w = (w_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ a sequência de pesos definida por $w_n = 1$ se $n \geq 0$ e

$$(w_{-1}, w_{-2}, \cdots) = (2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, 2, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, 2, 2, 2, 2, \cdots),$$

ou seja, os blocos de pesos iguais a $\frac{1}{2}$ têm comprimento $2, 2^2, 2^3, \cdots$, enquanto que os blocos de pesos iguais a 2 têm comprimentos $2^0, 2^1+1, 2^2+1, \cdots$. Se $B_w : X \longrightarrow X$ é o deslocamento ponderado bilateral para a esquerda, então B_w é expansivo, mas não expansivo em média. De fato, para ver que B_w é expansivo, para cada $k \in \mathbb{N}$, definamos $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ por

$$n_1 = 1 \ \text{ e } \ n_k = n_{k-1} + 2^k + 1 \ \text{ se } \ k \geq 2.$$

Prova-se por indução que

$$w_{-n_k}\cdot\ldots\cdot w_{-1} = 2^k \ \text{ para todo } \ k \in \mathbb{N},$$

o que nos permite concluir que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}(w_n \cdot \ldots \cdot w_{-1}) = +\infty$$

e, assim por [[6], Proposição 15-a], B_w é positivamente expansivo. Como $\inf_{n\in\mathbb{N}} w_n > 0$, temos B_w inversível e, portanto, B_w também é expansivo. Antes de provar que B_w não é expansivo em média, observemos que:

i) Para cada natural $k \geq 2$, vale:

$$n_k = 2^k + \cdots + 2^3 + 2^2 + k \tag{3.7}$$

e

$$\begin{aligned}\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} \|B_w^i(e_1)\| &= 2^{k-1} + (2^k + 2^{k-1} + \cdots + 2 + 1) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{2^k-k}}) \\ &\quad +(\frac{1}{2^{2^k-k-1}} + \cdots + \frac{1}{2}) + (1 + 2 + \cdots + 2^{k-1}) \\ &\leq 2^{k-1} + (2^{k+1} - 1) + 1 + 1 + (2^k - 1) \leq n_{k+1}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

ii) Como $2^{k-1} + 2^k + 2^{k+1} \leq 2^{k+2}$, para todo k natural, prova-se por indução sobre k que

$$\sum_{i=1}^{n_k} \|B_w^i(e_1)\| \leq n_{k+1}. \tag{3.9}$$

Agora estamos em condições de provar que B_w não é expansivo em média. Para isto, é suficiente mostrar que a média

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n} \|B_w^i(e_1)\|$$

é limitada, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{i=0}^{n} \|B_w^{-i}(e_1)\| = \frac{1}{2n+1}\left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{w_1 \cdot \ldots \cdot w_i}\right) < 1, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N},$$

basta mostrar que

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{i=1}^{n} \|B_w^i(e_1)\|$$

é limitada. Suponha, por absurdo, que

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1}\sum_{i=1}^{n} \|B_w^i(e_1)\| = +\infty.$$

Logo, para qualquer constante $c > 1$, existe um número natural n_0 tal que

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{i=1}^{n}\|B_w^i(e_1)\| > 1, \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0. \tag{3.10}$$

No entanto, afirmamos que

$$\frac{1}{2n_k+1}\sum_{i=1}^{n_k}\|B_w^i(e_1)\| < 1, \quad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Provemos a afirmação por indução sobre k. Para $k = 1$, a afirmação é claramente verdadeira. Suponhamos

$$\frac{1}{2n_k+1}\sum_{i=1}^{n_k}\|B_w^i(e_1)\| < 1, \quad \text{para algum} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Logo, segue de (3.8) e (3.9) que

$$\sum_{i=1}^{n_{k+1}}\|B_w^i(e_1)\| = \sum_{i=1}^{n_k}\|B_w^i(e_1)\| + \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}}\|B_w^i(e_1)\| < 2n_k + 1,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2n_k+1}\sum_{i=1}^{n_k}\|B_w^i(e_1)\| < 1, \quad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N},$$

o que é absurdo, pois contraria (3.10). Portanto, B_w não é expansivo em média.

Proposição 3.42. *Seja X um espaço de Banach e $T : X \longrightarrow X$ um operador linear limitado e inversível. Se T é expansivo em média e possui a propriedade de sombreamento médio, então T é uniformemente expansivo e, em particular, hiperbólico.*

Demonstração. Tendo em vista os resultados provados nesta seção, basta mostrar que T é uniformemente expansivo. Dado $\epsilon > 0$, seja $\delta > 0$ a constante da definição de sombreamento médio associada a ϵ. Suponha que T não seja uniformemente expansivo. Logo, a intersecção $\sigma_a(T) \cap \mathbb{S}^1$ é não vazia. Tome λ nesta intersecção e seja $x_0 \in X$, com $\|x_0\| = 1$, tal que

$$\|Tx_0 - \lambda x_0\| < \frac{\delta}{\epsilon}.$$

Construa uma sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ fazendo $y_i = \epsilon\lambda^i x_0$. Esta sequência é uma δ-média-pseudo-órbita. Pelo sombreamento médio, existe $z \in X$ tal que

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}\|T^i z - y_i\| < \epsilon.$$

Assim, existe um número natural n_0 de modo que

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}\|T^i z - y_i\| < \epsilon, \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0,$$

o que, por sua vez, acarreta:

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}\|T^i z\| \leq \frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}\|T^i z - y_i\| + \frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}\|y_i\| < 2\epsilon,$$

para todo $n \geq n_0$. Consequentemente,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}\|T^i z\| < \infty,$$

e, portanto, T não é expansivo em média, o que é absurdo. $\square$

Pergunta 3.43. Será que expansividade uniforme implica expansividade em média? Caso a resposta seja negativa, é possível obter um operador expansivo em média que não seja uniformemente expansivo?

Proposição 3.44. *Seja $T : X \longrightarrow X$ um operador linear limitado e inversível, definido em um espaço de Banach separável X. Se T possui a propriedade de sombreamento médio e é hipercíclico, então T não pode ser expansivo em média.*

Demonstração. Seja $\delta > 0$ a constante que aparece na definição de sombreamento médio correspondente a $\epsilon = 1$. Como T é hipercíclico, tem-se $\sigma(T) = \sigma_a(T)$ e $\sigma_a(T)\cap\mathbb{S}^1 \neq \emptyset$. Tome λ em $\sigma_a(T)\cap\mathbb{S}^1$. Logo, existe $x_0 \in X$ tal que

$$\|x_0\| = 1, \quad \text{e} \quad \|\lambda x_0 - Tx_0\| < \frac{\delta}{2}.$$

A sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dada por $y_n = 2\lambda^n x_0$ é uma δ-média-pseudo-órbita. O sombreamento médio implica a existência de $y \in X$ tal que

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}\|T^i y - y_n\| < 1$$

e, assim, existe um número natural n_0 tal que

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}\|T^i y\| < 3, \forall n \geq n_0.$$

Portanto, T não pode ser expansivo em média. $\square$

Observação 3.45. A demonstração da Proposição 3.44 pode ser obtida de outro modo. De fato, se um operador T é expansivo em média e possui sombreamento médio, então segue da Proposição 3.42 que T é hiperbólico e, portanto, não é hipercíclico.

Observação 3.46. Em ([6], Exemplo 18) é fornecida uma classe de deslocamentos bilaterais inversíveis ponderados à esquerda que são expansivos e hipercíclicos (e, portanto, não hiperbólicos).

Considerações finais

Como vimos no Capítulo 2, a noção de transitividade por cadeia é mais geral que a de hiperciclicidade, pois esta só faz sentido para operadores definidos em espaços separáveis, enquanto que a primeira também pode ser considerada em espaços não separáveis, sendo o deslocamento para a esquerda definido em $\ell_\infty(\mathbb{N})$ um exemplo de um tal operador. Além disso, o Teorema 2.12 generaliza um resultado devido a Kitai [22], o qual afirma que toda componente conexa do espectro de um operador hipercíclico intersecta o círculo unitário $\mathbb{S}^1$ e, portanto, não pode ser hiperbólico. Como consequência, todo operador compacto, definido em um espaço de Banach de dimensão infinita, não pode ser transitivo por cadeia. Por outro lado, para operadores em espaços de dimensão finita, deve-se ter seu espectro contido em $\mathbb{S}^1$. Naturalmente, pode-se indagar se a recíproca desta última afirmação é válida, o que foi respondido parcialmente na Proposição 2.25. Foi visto ainda um critério de transitividade por cadeia para uma classe de deslocamentos ponderados unilaterais à esquerda. Há, entanto, várias questões para responder no que diz respeito à transitividade por cadeia, por exemplo:

- Se T é um operador transitivo por cadeia, então $T \times T$ é transitivo por cadeia? No caso particular em que T é uma rotação, a resposta é afirmativa (veja Proposição 2.22).

- Se $T \times T$ é transitivo por cadeia, então $T \times \cdots \times T$ é transitivo por cadeia? É sabido que se $T \times T$ topologicamente transitivo implica $T \times \cdots \times T$ topologicamente transitivo (veja [20], Teorema 1.51).

- É possível caracterizar os deslocamentos ponderados à esquerda que possuem transitividade por cadeia?

- Vale a recíproca do Corolário 2.21 para operadores definidos em $\mathbb{C}^n$ Esta questão foi respondida parcialmente pela Proposição 2.22.

- Será que existe que um critério (análogo ao da hiperciclicidade) que garanta que um operador é transitivo por cadeia?

- Será que existe alguma caracterização espectral de um operador T transitivo por cadeia (mas não topologicamente transitivo) que tenha alguma implicação sobre o espectro pontual do operador adjunto T^*?

Ainda no Capítulo 2, foi considerada a noção de transitividade por cadeia em média e, tal como foi definido, segue todo operador transitivo por cadeia também é transitivo por cadeia em média. E mais, provamos (Corolário 2.47) que um operador hiperbólico também pode possuir transitividade por cadeia em média e foi apresentado ainda um exemplo de um operador que tem essa propriedade, embora não seja transitivo por cadeia e nem hiperbólico. Duas perguntas importantes a serem consideradas nesse caso são:

- Existe algum operador que não seja transitivo por cadeia em média?

- Quão grande é a classe dos operadores transitivos por cadeia em média?

No que se refere às transformações esféricas, há algumas questões interessantes:

- A Proposição 2.58 permanece válida para aplicações esféricas em $\mathbb{S}^n$?

- Existe alguma caracterização para aplicações esféricas induzidas por operadores lineares definidos em espaços de Banach de dimensão infinita?

Por fim, no Capítulo 3 discorremos sobre a noções de sombreamento, sombreamento limite e sombreamento médio. Sabe-se que um operador inversível que seja expansivo e tenha sombreamento também tem sombreamento limite, pois é hiperbólico (veja [7], Teorema 1) e todo operador hiperbólico tem sombreamento limite [6]. Vimos ainda que se um deslocamento inversível ponderado para a esquerda tem a propriedade de sombreamento, então é transitivo por cadeia em média (Proposição 3.14). Foi provado ainda que em hiperbolicidade implica sombreamento médio e que em dimensão finita essas propriedades, bem como a propriedade de sombreamento, coincidem. Do mesmo modo, provamos que se um operador é uniformemente expansivo e possui sombreamento médio, então ele possui sombreamento. Assim, os resultados obtidos conduzem a alguns questionamentos, por exemplo:

- Quais são as relações entre sombreamento, sombreamento limite e sombreamento médio? Existe algum operador que possui sombreamento, mas não sombreamento limite ou médio? E vice-versa?

- Quando um operador T é normal, então sombreamento médio equivale à hiperbolicidade?

- Um operador que tenha sombreamento médio e seja expansivo também é hiperbólico?

- Sombreamento implica transitividade por cadeia em média? A resposta para esta pergunta é afirmativa no caso de deslocamentos ponderados à esquerda, como consequência dos resultados obtidos em [6] que caracterizam quais desses deslocamentos possuem sombreamento.

Referências

[1] Alves, J. Ferreira. *Hyperbolic isomorphisms in Banach spaces.* Disponível em: www.fc.up.pt/pessoas/jfalves/pub/senegal.pdf. Acesso em 10 jan. 2020, 08:45.

[2] Aoki, N.; Hiraide, K. *Topological Theory of Dynamical Systems - Recent Advances*, North-Holland, Amsterdam, 1994.

[3] Banks, J.; Brooks, J.; Cairns, G.; Davis, G.; Stacey, P. *On Devaney's definition of chaos*, Amer. Math. Monthly **99** (1992), no. 4, 332-334.

[4] Barwell, A. D.; Good, C.; Oprocha, P.; Raines, B. *Shadowing, expansivity, chain transitivity and ω-limit sets*, (2019), (arXiv:1701.05383v2).

[5] Bayart, F.; Matheron, É. *Dynamics of Linear Operators,* Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[6] Bernardes Jr, N. C.; Cirilo, P. R.; Darji, U. B.; Messaoudi, A.; Pujals, E. R. *Expansivity and shadowing in linear dynamics*, J. Math. Anal. Appl. **461** (2018), no. 1, 796-816.

[7] Bernardes Jr, N. C.; Messaoudi, A. *Shadowing and structural stability for operators*, Ergodic Theory and Dynamical Systems (2020)

[8] Birkhoff, G. D. *Surface transformations and their dynamical applications,* Acta Math., **43** (1922), 1 - 119.

[9] Bourhim, A. *Bounded point evaluations and local spectral theory,* Dissertation, Trieste, 2000 (arXiv:math/0008197v1).

[10] Brezis, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations,* Springer, New York, Dordrecht, Heidelberg and London, 2011.

[11] Carvalho, B. *Hyperbolicity, transitivity and the two-sided shadowing property*, Proceedings of the American Mathematical Society **143** (2015), no. 2, 657-666.

[12] Carvalho, B.; Kwietniak, D. *On homeomorphisms with the two-limit shadowing property*, J. Math. Anal. Appl. **420** (2014), no. 1, 801-813.

[13] Das, R.; Garg, M. *Average chain transitivity and the almost average shadowing property*, Commun. Korean Math. Soc. **32** (2017), no. 1, 201-214.

[14] Dastjerdi, D. A.; Hosseini, M. *Shadowing with chain transitivity*, Topology and its applications **156** (2009), 2193-2195.

[15] Devaney, R. L. *An introduction to chaotic dynamical systems*, second edition, Addison-Wesley Studies in Nonlinearity, Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1989.

[16] Dowson, H.R *Spetral theory of linear operators,* Academic Press, London, New York and San Francisco, 1978.

[17] Eisenberg, M.; Hedlund, J.H. *Expansive automorphisms of Banach spaces*, Pacific Journal of Mathematics **34** (1970), no. 3, 647-656.

[18] Furstenberg, H. *Disjointness in ergodic theory, minimal sets and a problem of Diophantine approximation*, Math. Systems Theory. **1** (1967), 1-49.

[19] Godefroy, G; Shapiro, J. H. *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds*, J. Funct. Anal. **98** (1991), no. 2, 229-269.

[20] Grosse-Erdmann, K.; Peris Manguillot, A. *Linear Chaos,* Springer-Verlag, London, 2011.

[21] Hirsch, M.; Smith, H.L.; Zhao, X.Q. *Chain transitivity, attractivity and strong repellors for semidynamical systems*, J. Dynam. Differential Systems **13** (2001), no. 1, 107-131.

[22] Kitai, C. *Invariant closed sets for linear operators*, Ph.D. thesis, University of Toronto, Toronto, 1982.

[23] Kreyszig, E. *Introductory functional analysis with applications,* John Wiley & Sons, 1989.

[24] Kulczycki, M.; Kwietniak, D.; Oprocha, P. *On almost specification and average shadowing properties*, Fundamenta Mathematicae **224** (2014), no. 3, 241-278.

[25] Lee, M. *The limit shadowing property and Li-Yorke's chaos*, Asian-European Journal of Mathematicas **9** (2016), no. 1, 7 pages (DOI: 10.1142/S1793557116500078).

[26] Li, R. *A note on shadowing with chain transitivity*, Commun. Nonlinear Sci. Num. Simulat. **17** (2012), 2815-2823.

[27] Ombach, J. *The shadowing lemma in the linear case*, Univ. Iagel. Acta Math. **31** (1994), 69-74.

[28] Pilyugin, S. Yu. *Shadowing in Dyanamical Systems,* Lecture Notes in Mathemtics, vol. 1706, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[29] Radjavi, H.; Rosenthal, P. *Invariant subspaces,* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[30] Silverman, S. *On maps with dense orbits and the definition of chaos*, Rocky Mountain Journal of Mathematics **22** (1992), no. 1, 353-375.

[31] Walters, P. *An Introduction to Ergodic Theory,* Springer-Verlag, Berlin, New York, 1982.