



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

Câmpus de São José do Rio Preto

Isaac Silva Damasceno Sanches

O Método da Média de Primeira Ordem

São José do Rio Preto  
2024

Isaac Silva Damasceno Sanches

## O Método da Média de Primeira Ordem

Dissertação de Mestrado apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Ricardo Alves Gouveia  
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto

Financiadora: CAPES – Código de financiamento 001, n. de processo 88887.625896/2021-00

São José do Rio Preto  
2024

S211m

Sanches, Isaac Silva Damasceno

O Método da Média de Primeira Ordem / Isaac Silva Damasceno  
Sanches. -- São José do Rio Preto, 2024

91 p. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),  
Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio  
Preto

Orientador: Márcio Ricardo Alves Gouveia

1. Matemática. 2. Sistema Hamiltoniano. 3. Sistema Perturbado. 4.  
Sistemas Dinâmicos. 5. Método da Média. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de  
Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Isaac Silva Damasceno Sanches

## O Método da Média de Primeira Ordem

Dissertação de Mestrado apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES – Código de financiamento 001, n. de processo 88887.625896/2021-00

### Comissão Examinadora

---

Prof. Dr. Márcio Ricardo Alves Gouveia  
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto  
Orientador

---

Prof. Dr. Clayton Eduardo Lente da Silva  
UFR – Câmpus de Rondonópolis

---

Prof. Dra. Luci Any Francisco Roberto  
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto

São José do Rio Preto  
02 de fevereiro de 2024

*À minha família e aos meus amigos.*

## AGRADECIMENTOS

Venho expressar a minha gratidão, primeiramente a Deus e à minha família, na figura de minha mãe Marta, meu pai Agnaldo, minha irmã Talita e meu irmão Estevão, que sem dúvida estiveram ao meu lado ao longo de toda essa jornada, compartilhando tanto os momentos felizes quanto os desafiadores. Não posso também deixar de mencionar a alegria proporcionada pelos meus sobrinhos, Cauã e Caíque que tornaram meus fins de semana ainda mais festivos toda vez que eu voltava para minha casa, em Ribeirão Preto.

Remeto ainda minha gratidão a todos os professores que tive, desde o ensino fundamental, os quais contribuíram significativamente para a minha formação, tanto no aspecto educacional quanto no pessoal. Gostaria de destacar meu agradecimento à professora Luci Any Francisco Roberto, não apenas pelas valiosas lições ministradas, mas também pela orientação durante a introdução à pesquisa. Mesmo que por breve período, seu auxílio foi fundamental para o meu desenvolvimento pessoal e acadêmico.

Ao meu orientador, Márcio Ricardo Alves Gouveia, meu sincero agradecimento por sua paciência, dedicação e apoio ao longo deste processo, contribuindo significativamente para meu aprendizado e progresso.

Aos meus amigos de juventude escolar, que acreditaram em mim desde o início e sempre torceram pelo meu sucesso ao longo de todo o percurso. Um agradecimento especial ao meu melhor amigo, Luís Felipe, que ofereceu-me apoio, celebrando cada avanço, por menor que fosse.

Quero agradecer de coração à minha amiga Isabella Barboza, há mais de 15 anos em minha vida, como um raio de sol, me fazendo rir, refletir e acreditar em mim mesmo. É muito importante ter você ao meu lado para compartilhar todos os momentos da minha vida.

Meu profundo agradecimento aos meus amigos de moradia, em especial ao 2C, que me acolheram de maneira tão calorosa, como um membro da família. Agradeço sinceramente ao Igor Andrade, Maurício Rocha, Fernando (Palms), Calel Afonso, Aline Arantes, Lucas Custódio, Viviane Moraes, Alexssandra Soares, Laura Chriarelli e Felipe Mazatti, pelo apoio e pela convivência incrível que compartilhamos.

Aos amigos que fiz durante o meu curso técnico em administração, Lucas Andrade, Caio Lou-

renço, Mariane Cristine, Beatriz Silvino e Gustavo Frezarini, e a minha amiga Victória Laporte do cursinho, agradeço imensamente a cada um de vocês pela companhia, amizade e apoio ao longo desse período. Vocês foram fundamentais para tornar essa jornada ainda mais significativa e enriquecedora.

Aos meus amigos do curso de matemática, Juliana Marques, Marrye (Maria Clara), Mafer (Maria Fernanda), Leone (Gabriel), Murillo Lozano, Neto (José), Isabela Benine, Bruna Mayumi, e à Amandinha (Amanda Dourado), minha amiga do curso de letras, agradeço pelos momentos de conversas e diversão, que tornaram tudo mais leve e feliz. Sem dúvida, este trabalho não estaria concluído sem o apoio de cada um de vocês.

Quero dedicar um agradecimento especial à Juliana Marques, a pessoa que conheci desde o início da minha graduação. Ela esteve presente em todos os momentos, trazendo um toque especial que iluminou meus dias. O carinho que sinto por você é enorme.

A todos os membros da banca, por terem aceitado o convite de participar deste momento tão especial e importante para mim: Prof. Dr. Márcio Ricardo Alves Gouveia, Prof. Dr. Clayton Eduardo Lente da Silva e Prof. Dra. Luci Any Francisco Roberto.

Ao IBILCE (Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas), onde vivi momentos extraordinários e inesquecíveis, e que considero como meu segundo lar. Agradeço não apenas pela educação de excelência, mas também pela oportunidade de participar de atividades como vôlei, teatro, dança e atletismo, tornando meu percurso educacional ainda mais marcante. Expresso minha gratidão a todos os colaboradores do campus, à biblioteca, ao RU (restaurante universitário) e ao departamento de matemática.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de financiamento 001, n. de processo 88887.625896/2021-00.

*Onde estiver, seja lá como for, tenha fé porque até  
no lixão nasce flor.*

Racionais

## RESUMO

Neste estudo, analisamos a quantidade de ciclos limite de uma equação diferencial diante de pequenas perturbações caracterizada por um parâmetro suficientemente pequeno. Empregamos o Método da Média de Primeira Ordem para simplificar a busca por órbitas periódicas em sistemas de equações diferenciais, transformando-a em uma tarefa de encontrar zeros de uma função de dimensão finita sob condições específicas. Além disso, aplicamos esse método a um conjunto de funções bem conhecidas, as funções Hamiltonianas, e utilizamos o Sistema Hamiltoniano de Armburster-Guckenheimer-Kim como exemplo. Ao longo da análise, apresentamos três resultados principais do Método da Média. O primeiro estabelece condições para concluir que as soluções do sistema médio e do sistema perturbado são próximas. O segundo resultado mostra que, sob certas condições, o sistema perturbado possui uma solução  $T$ -periódica. Por fim, o terceiro resultado determina a estabilidade ou instabilidade desta solução. Essa análise aprofundada contribui significativamente para o entendimento da dinâmica dos sistemas estudados, possibilitando avanços na compreensão dos fenômenos observados.

**Palavras-chave:** Ciclo limite. Sistema Hamiltoniano. Método da Média.

## **ABSTRACT**

*In this study, we analyze the number of limit cycles of a differential equation in the face of small perturbations characterized by a sufficiently small parameter. We use the First Order Averaging Method to simplify the search for periodic orbits in systems of differential equations, transforming it into a task of finding zeros of a finite-dimensional function under specific conditions. In addition, we apply this method to a set of well-known functions, the Hamiltonian functions, and use the Armburster-Guckenheimer-Kim Hamiltonian System as an example. Throughout the analysis, we present three main results of the Averaging Method. The first establishes conditions for concluding that the solutions of the averaged system and the perturbed system are close. The second result shows that, under certain conditions, the perturbed system has a  $T$ -periodic solution. Finally, the third result determines the stability or instability of this solution. This in-depth analysis contributes significantly to the understanding of the dynamics of the systems studied, enabling advances in the understanding of the phenomena observed.*

**Keywords:** *Limit cycle. Hamiltonian system. Method of Averaging.*

# Lista de Figuras

3.1	Trajatória no espaço de fase da equação de Van Der Pol $\ddot{x} + x = \epsilon(1 - x^2)\dot{x}$ onde $\epsilon = 0.1$ . . . . .	64
3.2	A solução $x(t)$ da equação $\ddot{x} + x = 2/15\dot{x}^2 \cos(t)$ , $\dot{x}(0) = 1$ . . . . .	76
3.3	Soluções exatas e aproximadas da equação $\ddot{x} + x = \epsilon x$ , $x(0) = 1$ , $\dot{x}(0) = 0$ e $\epsilon = 0.1$ , na escala de tempo $\frac{1}{\epsilon^2}$ . . . . .	78
3.4	Plano de fase para $\ddot{x} + 4\epsilon \cos^2(t)\dot{x} + x = 0$ , $x(0) = 0$ , $\dot{x}(0) = 1$ ; $\epsilon = 0.1$ . . . . .	80
4.1	Retas $L_1 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b + a = 0\}$ e $L_2 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b = 0\}$ para a análise dos parâmetros $(a, b)$ . . . . .	83
4.2	Regiões $R_1 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b - 2a \leq 0, b > 0\} \cup \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b - 2a \geq 0, b < 0\}$ e $R_2 = \mathbb{R}^2 \setminus (\overline{R_1} \cup L_1)$ para a análise dos parâmetros $(a, b)$ . . . . .	84

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>Conceitos Básicos</b>	<b>15</b>
2.1	O problema de valor inicial: existência, unicidade e continuidade . . . . .	16
2.2	Estimativas no caso de atração . . . . .	21
2.3	Aproximação Assintótica . . . . .	22
2.4	Formulação ingênua de problemas de perturbação . . . . .	37
2.5	Forma Padrão . . . . .	39
2.6	A forma padrão no caso quasilinear . . . . .	41
<b>3</b>	<b>O Método da Média</b>	<b>45</b>
3.1	Exemplos e contraexemplos da Média . . . . .	60
3.1.1	Equação de Van der Pol . . . . .	61
3.1.2	Equação de Mathieus . . . . .	64
3.1.3	Importância de Restringir o Intervalo de Tempo . . . . .	72
3.1.4	Soluções limitadas e uma escala de tempo restrita . . . . .	76
3.1.5	Contraexemplo da Média Bruta . . . . .	78
<b>4</b>	<b>Aplicação do Método da Média em um sistema Hamiltoniano</b>	<b>81</b>
4.1	Sistema Hamiltoniano . . . . .	81
4.2	Aplicação no sistema AGK . . . . .	82
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>90</b>
	<b>Referências</b>	<b>91</b>

# 1 Introdução

No século XVIII, os métodos de perturbação em equações diferenciais tornaram-se significativos ao tentar relacionar a teoria da gravitação de Newton às observações do movimento de planetas e satélites. Inicialmente, uma teoria dinâmica do sistema solar, baseada na sobreposição de movimentos de apenas dois corpos (o Sol e um dos planetas), ofereceu um ajuste razoável, embora não muito preciso, às observações. Para explicar as discrepâncias, consideramos diversos efeitos, como a influência de satélites, a interação de grandes planetas, a resistência do éter e outros fatores. Essas considerações levaram à formulação do movimento perturbado de dois corpos e, diante da falta de soluções exatas, ao desenvolvimento da teoria de perturbação.

As primeiras tentativas de abordar o problema envolveram cálculos numéricos dos incrementos nas variáveis de posição e velocidade, utilizando diferenciais ao longo de pequenos intervalos de tempo consecutivos. Os cálculos práticos incluíram expansões dos termos de perturbação para viabilizar o processo. Rapidamente, tornou-se evidente que esse método resultava na criação de tabelas astronômicas, que são tabelas que contêm informações relativas às posições de planetas, estrelas, luas e demais corpos celestes em momentos diversos. Estas tabelas representam recursos significativos para realizar cálculos e prever com precisão eventos celestes ao longo do tempo, porém não necessariamente proporcionava uma compreensão abrangente da dinâmica do problema. Além disso, as tabelas não eram muito precisas, pois a obtenção de alta precisão exigia a utilização de intervalos de tempo extremamente pequenos.

Wilson [10] apresentou um estudo abrangente sobre a teoria inicial de perturbação e a construção de tabelas astronômicas. No final do século XVIII, Clairaut, Lagrange e Laplace trouxeram novas ideias significativas. Lagrange e Laplace desenvolveram e aplicaram amplamente uma técnica para obter soluções aproximadas, especialmente ao discutir a formulação do movimento na dinâmica. Lagrange enfatizou a necessidade de empregar um método, que ele chamou de *variação de parâmetros*, para analisar a influência das perturbações.

Neste trabalho, apresentamos o Método da Média de Primeira Ordem, também conhecido como Método de Averaging. Em linhas gerais, a Teoria da Média simplifica a busca por órbitas periódicas de um sistema de equações diferenciais, sob certas condições convenientes, transformando-a na tarefa de encontrar zeros simples de uma função de dimensão finita. Este método se destaca por sua eficácia em lidar com sistemas dinâmicos complexos, fornecendo uma abordagem que reduz a complexidade do problema ao considerar a evolução de variáveis médias ao longo de um período.

Após enunciar e demonstrar o método, iremos aplicá-lo a um conjunto de funções bem conhecidas, que são as funções Hamiltonianas. Para a aplicação da Teoria da Média, iremos utilizar um sistema Hamiltoniano chamado Sistema Hamiltoniano de Armburster-

Guckenheimer-Kim, que frequentemente tem sido utilizado no estudo da dinâmica de galáxias. A escolha das funções Hamiltonianas para a aplicação prática deste método é especialmente relevante devido à sua importância em sistemas dinâmicos, como aqueles encontrados na mecânica celeste e em problemas relacionados à conservação de energia. Ao empregar o Método da Média de primeira ordem nessas funções Hamiltonianas, pretendemos investigar como as propriedades periódicas desses sistemas são mais bem compreendidas e analisadas, contribuindo para o avanço do entendimento teórico desses fenômenos. Na teoria dos sistemas dinâmicos, os sistemas conservativos, especialmente os Hamiltonianos, têm uma influência significativa. Principalmente em contextos mecânicos, a estrutura fundamental é frequentemente Hamiltoniana, com a inclusão posterior de efeitos dissipativos. A mecânica Hamiltoniana é um campo amplo com raízes na mecânica celeste do século XVIII.

A dissertação está estruturada da seguinte maneira: No primeiro capítulo, apresentamos os conceitos básicos para a teoria, como os conceitos de aproximação assintótica, forma padrão, forma padrão no caso quasilinear, que são definições essenciais para a construção da teoria. Já no segundo capítulo, iniciamos explanando o Método da Média, e neste capítulo apresentamos os três resultados principais. O primeiro é o Teorema da Média de Primeira Ordem, no qual estamos interessados em sistemas que estejam em sua forma padrão, ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \epsilon f(x, t) + \epsilon^2 g(x, t, \epsilon) \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

vamos supor que  $f$  é  $T$ -periódica em  $t$ , e  $\epsilon$  é o parâmetro que caracteriza a perturbação. Definimos a **equação média** dada por

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \epsilon f^0(y) \\ y(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

onde

$$f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T f(y, t) dt.$$

Sob certas condições sobre  $f$ , podemos concluir que a solução do sistema médio está próxima da solução do sistema perturbado. Já o segundo resultado é que, com condições adequadas, o sistema (1.1) admite uma solução  $T$ -periódica com algumas características especiais. Já o terceiro resultado determina a estabilidade ou instabilidade desta solução.

Como foi dito, aplicamos a Teoria da Média em um sistema Hamiltoniano o qual está associado a uma função Hamiltoniana. Essa função é dada por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2) - \frac{a}{4}(x^2 + y^2)^2 - \frac{b}{2}x^2 \cdot y^2, \quad (1.2)$$

e concluimos que o sistema Hamiltoniano correspondente à função Hamiltoniana dada em (1.2), admite órbitas periódicas em todos os níveis de energia positiva, exceto quando os parâmetros  $a$  e  $b$  estão na reta

$$L_1 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b + a = 0\}.$$

Para a construção da teoria, quanto ao conteúdo básico de equações diferenciais ordinárias, empregamos as referências [7], [5] e [8]; já para o estudo da Teoria da Média,

---

utilizamos dois livros, sendo o primeiro o livro "Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems"[6] e o segundo "Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems"[9]. Ao longo da pesquisa, fiz uso das dissertações [2] e [4] como referências complementares. Estes trabalhos foram cruciais para aprofundar minha compreensão acerca do tema em estudo.

O principal propósito deste trabalho é realizar uma análise do Teorema 1 presente no artigo intitulado "Periodic orbits and non-integrability of Armbruster-Guckenheimer-Kim potential", o qual pode ser encontrado em [3].

Em conclusão, a análise desse teorema contribuirá significativamente para a contextualização e aplicação do Método da Média de Primeira Ordem.

## 2 Conceitos Básicos

Primeiramente, estudaremos alguns resultados elementares para a construção da teoria que envolve resultados previamente vistos em Análise e Equações Diferenciais Ordinárias. Consideramos a equação diferencial

$$\dot{x} = f(x, t, \epsilon) \quad (2.1)$$

onde  $\dot{\phantom{x}}$  denota a derivada de  $x$  com relação à variável independente  $t \in (-\infty, +\infty)$ , e  $x$  e  $f(x, t, \epsilon)$  são vetores do  $\mathbb{R}^n$ , com

$$f : D \times [t_0, \infty[ \times ]0, \epsilon_0] \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

com  $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ , e  $D$  sendo um conjunto aberto e limitado. A variável  $t \in \mathbb{R}$  é usualmente chamada *tempo*. Consideramos  $t \geq t_0$  com  $t_0$  constante. A variável  $\epsilon$  caracteriza a magnitude de certas perturbações. Geralmente tomamos  $\epsilon$  de tal forma que  $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$  com  $\epsilon_0$  sendo uma constante, no entanto, podemos considerar limites como  $\epsilon \rightarrow 0$ .

**Definição 2.1.** Uma função diferenciável  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  chama-se solução da equação (2.1), no intervalo  $I$  se:

1. o gráfico de  $\varphi$  em  $I$ , isto é,  $\{(\varphi(t), t); t \in I\}$  está contido em  $D \times \mathbb{R}$  e
2.  $\dot{\varphi} = f(\varphi(t), t)$  para todo  $t \in I$ . Se  $t$  é um ponto extremo do intervalo, a derivada é a respectiva derivada lateral.

Para um vetor  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$  usamos a norma da soma

$$\|u\| = \sum_{i=1}^n |u_i|. \quad (2.2)$$

Para a matriz  $A_{n \times n}$ , com elementos  $a_{ij}$ , sua norma será dada por

$$\|A\| = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|. \quad (2.3)$$

Para estimar funções vetoriais, quase sempre usamos a norma do *sup*. Como, por exemplo, para as funções vetoriais que surgem na equação diferencial, temos:

$$\|f\|_{sup} = \sup_{x \in D, 0 \leq t \leq T, 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0} \|f(t, x, \epsilon)\|, \quad (2.4)$$

no qual  $T$  representa a periodicidade da  $f$ .

## 2.1 O problema de valor inicial: existência, unicidade e continuidade

Verificamos que as funções vetoriais  $f(x, t, \epsilon)$  terão certas propriedades em relação às variáveis  $x$  e  $t$  e ao parâmetro  $\epsilon$ . A definição a seguir, apresenta uma propriedade que a função com relação à variável espacial, irá satisfazer.

**Definição 2.2.** Uma função vetorial  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $G = D \times [t_0, t_0 + T] \times ]0, \epsilon_0]$  é dita ser Lipschitz em  $x$ , com  $\lambda_f > 0$  sendo a constante de Lipschitz se temos

$$\|f(x_1, t, \epsilon) - f(x_2, t, \epsilon)\| \leq \lambda_f \|x_1 - x_2\|,$$

para  $x_1, x_2 \in D$ .

O lema a seguir apresenta condições suficientes para que  $f$  seja Lipschitz na variável  $x$ , em um determinado conjunto.

**Lema 1.** *Suponha que  $f$  seja de classe  $\mathcal{C}^1$  em um conjunto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $D \subset U$  compacto. Então  $f$  é Lipschitz em relação à variável  $x$ , ou seja, em  $D$ .*

*Demonstração.* Pelo fato de o resultado ser em relação à variável  $x$ , suprimos a dependência de  $t$  e  $\epsilon$ . Como  $D$  é compacto,  $D \subset U \subset \mathbb{R}^n$ , e  $f$  é contínua, com relação a  $x$ , então existe  $M > 0$  tal que

$$\|f(x_1, t, \epsilon) - f(x_2, t, \epsilon)\| \leq M,$$

para  $x_1, x_2 \in D$ .

Novamente do fato de  $D$  ser compacto, toda cobertura aberta admite uma subcobertura finita. Consideramos uma cobertura finita de bolas abertas  $B_i$  de centro  $p_i$  e raio  $r_i > 0$  tal que cada  $B_i \subset U$ . Agora, construímos bolas menores  $B'_i$  com centro  $p_i$  e raio  $\frac{r_i}{3}$ , tal que  $\cup B'_i \supset D$ .

Por hipótese,  $f$  é de classe  $\mathcal{C}^1$  em  $U$  e, como  $B_i \subset U$  para cada  $i$ , segue que  $f$  é Lipschitz em  $B_i$ . Portanto, existe  $\lambda_f^i$  constante de Lipschitz para  $f$  em  $B_i$ . Consideramos

$$\lambda_f^0 = \max_i \lambda_f^i,$$

com  $i = 1, \dots, n$ , e seja

$$\delta = \min_i \frac{r_i}{3}.$$

Observe que se  $x_1, x_2 \in D$  temos duas possibilidades

$$1) \|x_1 - x_2\| \leq \delta \text{ ou } 2) \|x_1 - x_2\| > \delta.$$

Se ocorre 1) note que  $x_1$  e  $x_2$  pertencem à mesma bola  $B_i$ . Portanto

$$\|f(x_1, t, \epsilon) - f(x_2, t, \epsilon)\| \leq \lambda_f^0 \|x_1 - x_2\|.$$

Agora, se ocorre 2), seja  $\lambda_f = \max\{\lambda_f^0, \frac{M}{\delta}\}$ . Sabemos que

$$\|f(x_1, t, \epsilon) - f(x_2, t, \epsilon)\| \leq M = \frac{M}{\delta} \delta \leq \lambda_f \delta < \lambda_f \|x_1 - x_2\|.$$

Portanto,

$$\forall x_1, x_2 \in D, \|f(x_1, t, \epsilon) - f(x_2, t, \epsilon)\| \leq \lambda_f \|x_1 - x_2\|$$

com  $\lambda_f$  a constante de Lipschitz. □

A seguir, apresentamos o teorema que estabelece a existência e unicidade de soluções para problemas de valor inicial. Esse teorema é considerado um resultado fundamental no estudo de equações diferenciais ordinárias, pois permite determinar o intervalo na qual a solução se encontra e, como o próprio nome sugere, garante a existência e unicidade da solução para certas condições iniciais impostas a  $f$ .

**Teorema 2.3. Teorema de Existência e Unicidade** Consideramos o problema de valor inicial

$$\dot{x} = f(x, t, \epsilon), \quad x(t_0) = x_0. \quad (2.5)$$

Sejam  $D = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq d\}$ ,  $G = D \times [t_0, t_0 + T] \times ]0, \epsilon_0]$  e  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Suponhamos que

- 1)  $f$  é contínua em  $G$ .
- 2)  $f(x, t, \epsilon)$  satisfaz a condição de Lipschitz com relação à variável  $x$ .

Então o problema (2.3) tem uma única solução para  $t_0 \leq t \leq t_0 + \inf(T, \frac{d}{M})$  onde  $M = \sup_G \|f\| = \|f\|_{sup}$ .

Discutimos agora, as soluções e os intervalos máximos em Sistemas Dinâmicos. Uma solução de um sistema dinâmico é uma função que descreve como as aplicações atuam sobre as variáveis ao longo do tempo, dentro de um intervalo específico, a partir de condições iniciais. Essas soluções podem revelar informações sobre a estabilidade ou instabilidade do sistema, além de identificar padrões como pontos críticos e atratores. Por outro lado, os intervalos máximos são períodos de tempo nos quais as soluções podem ser continuamente estendidas. Esses intervalos podem ser finitos ou infinitos e desempenham um papel crucial para compreender a estabilidade e a presença de comportamentos periódicos nos sistemas dinâmicos.

**Definição 2.4.** Chamamos solução máxima de (2.1) toda solução  $\phi$  definida num intervalo  $I$ , denominado intervalo máximo de  $\phi$  tal que se  $\psi$  é uma outra solução no intervalo  $J$  com  $I \subseteq J$  e  $\phi = \psi|_I$ , então  $I = J$ . Em outras palavras,  $\phi$  é máxima se não admite nenhuma extensão que também é solução de (2.1).

Consideramos o seguinte problema

$$\dot{x} = Ax, \quad (2.6)$$

com  $x \in \mathbb{R}^n$ , e  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ .

Sejam  $\varphi_i(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$ , soluções do problema (2.6) em um intervalo  $I$ . Podemos escrever estas soluções como colunas, isto é,

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) \\ \varphi_{21}(t) \\ \vdots \\ \varphi_{n1}(t) \end{pmatrix}, \dots, \varphi_n(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{1n}(t) \\ \varphi_{2n}(t) \\ \vdots \\ \varphi_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

**Definição 2.5.** O Wronskiano das soluções do sistema (2.6) é o determinante

$$W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)(t) = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(t) & \dots & \varphi_{1n}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \dots & \varphi_{2n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \dots & \varphi_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

Examinamos um teorema que estabelecerá uma relação entre as soluções do problema (2.6) e o seu Wronskiano.

**Teorema 2.6.** *Sejam  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , soluções do problema (2.6) definidas em um intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$ , então temos  $W(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \equiv 0$  em  $I$  ou  $W(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \neq 0$  para todo  $t \in I$ .*

Além disso, apresentamos um corolário o qual irá determinar se o conjunto de soluções será linearmente independente (L.I.) ou linearmente dependente (L.D.).

**Corolário 1.** *Sejam  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , soluções do problema (2.6) definidas em um intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$ . Se existir  $t_0 \in I$  tal que  $W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)(t_0) \neq 0$ , então  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$  é linearmente independente em  $I$ .*

O Teorema a seguir garante a existência de  $n$  soluções Linearmente Independentes para (2.6).

**Teorema 2.7.** *Dado  $t_0 \in \mathbb{R}$ , existem aplicações  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$ , que são soluções da equação diferencial (2.6) com  $t_0 \in I$ , no qual  $I \subset \mathbb{R}$  é um intervalo aberto, tal que  $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)\}$  é um conjunto Linearmente Independente.*

*Demonstração.* Consideramos os problemas de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax \\ x(t_0) &= e_k, \end{aligned} \tag{2.7}$$

onde  $e_k$ , com  $1 \leq k \leq n$ , são vetores da base canônica do  $\mathbb{R}^n$ . Do Teorema 2.3, para cada  $k$ , existe uma única solução  $\varphi_k$ , definida em um intervalo  $I$ , para o problema de valor inicial. Assim, existem aplicações  $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)\}$  soluções do problema (2.7), definidas em um intervalo  $I$  (recorrente do Teorema 2.3) com  $t_0 \in I$ . Portanto,

$$W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)(t_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Assim, pelo corolário anterior temos que  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$  é um conjunto linearmente independente.  $\square$

**Teorema 2.8. (Floquet)** *Consideramos a equação (2.6) com  $A(t)$  uma matriz  $n \times n$  contínua  $T$ -periódica. Cada matriz fundamental da equação (2.6) pode ser escrita como o produto de duas matrizes  $n \times n$*

$$\varphi(t) = P(t)e^{Bt},$$

com  $P(t)$   $T$ -periódica e  $B$  uma matriz constante  $n \times n$ .

**Teorema 2.9.** *Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$  e  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  são os autovalores de  $A$ , cada um com a sua multiplicidade algébrica, então  $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$  são os autovalores de  $A^k$  e  $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$  são os autovalores de  $e^A$ .*

**Definição 2.10.** Considerando  $C = e^{Bt}$ , segue que os autovalores  $\rho$  de  $C$  são chamados de multiplicadores característicos. E cada número complexo  $\lambda = \alpha + \beta i$ , tal que

$$\rho = e^{\lambda T}$$

é chamado de expoente característico.

**Observação 1.** *As partes imaginárias dos expoentes característicos não são determinadas de forma única: podemos adicionar  $2\pi i/T$  a elas. Os multiplicadores característicos são determinados de forma única. Podemos escolher os expoentes  $\lambda$  de forma que coincidam com os autovalores da matriz  $B$ .*

A desigualdade de Gronwall, que é uma importante ferramenta na análise de equações diferenciais e de problemas de valor inicial. Uma das principais razões para a importância da desigualdade de Gronwall é sua versatilidade. Ela pode ser aplicada a uma ampla variedade de problemas, desde sistemas lineares a não lineares.

Em resumo, a desigualdade de Gronwall é uma ferramenta essencial na análise de equações diferenciais e em diversos campos da matemática. Seu uso permite a obtenção de resultados precisos e confiáveis, tornando possível entender e prever o comportamento de sistemas dinâmicos.

**Lema 2. Desigualdade de Gronwall** *Suponha que para  $t_0 \leq t \leq t_0 + T$  temos*

$$\varphi(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^t \beta(s)\varphi(s)ds,$$

onde  $\varphi$  e  $\beta$  são aplicações contínuas e  $\beta(t) > 0, \alpha \in \mathbb{R}$ . Então

$$\varphi(t) \leq \alpha e^{\int_{t_0}^t \beta(s)ds}$$

para  $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ .

*Demonstração.* Seja

$$\Phi(t) = \alpha + \int_{t_0}^t \beta(s)\varphi(s)ds.$$

Então  $\varphi(t) \leq \Phi(t)$  e pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\dot{\Phi}(t) = \beta(t)\varphi(t).$$

Como  $\beta(t) > 0$ , temos

$$\dot{\Phi}(t) = \beta(t)\varphi(t) \leq \beta(t)\Phi(t) \Rightarrow \dot{\Phi}(t) - \beta(t)\Phi(t) \leq 0.$$

Multiplicando ambos os lados por  $e^{-\int_{t_0}^t \beta(s)ds}$ , temos

$$e^{-\int_{t_0}^t \beta(s)ds} [\dot{\Phi}(t) - \beta(t)\Phi(t)] \leq 0.$$

Podemos ver como

$$\frac{d}{dt}(\Phi(t)e^{-\int_{t_0}^t \beta(s)ds}) \leq 0.$$

Integrando de  $t_0$  a  $t$ ,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} \left( \Phi(t)e^{-\int_{t_0}^t \beta(s)ds} \right) d\theta &\leq \int_{t_0}^t 0 d\theta \Rightarrow \Phi(t)e^{-\int_{t_0}^t \beta(s)ds} \Big|_{t_0}^t \leq 0 \\ &\Rightarrow \Phi(t)e^{-\int_{t_0}^t \beta(s)ds} - \Phi(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t_0} \beta(s)ds} \leq 0 \\ &\Rightarrow \Phi(t)e^{-\int_{t_0}^t \beta(s)ds} - \Phi(t_0) \leq 0. \end{aligned}$$

Note que,  $\Phi(t_0) = \alpha$ , obtemos

$$\Phi(t)e^{-\int_{t_0}^t \beta(s)ds} - \alpha \leq 0.$$

Multiplicando por  $e^{\int_{t_0}^t \beta(s)ds}$ , temos

$$\Phi(t) \leq \alpha e^{\int_{t_0}^t \beta(s)ds},$$

e, como  $\varphi(t) \leq \Phi(t)$ ,  $\varphi(t) \leq \alpha e^{\int_{t_0}^t \beta(s)ds}$  para  $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ . □

O lema pode ser generalizado possibilitando que  $\alpha$  dependa de  $t$ , com a condição que  $\alpha$  seja diferenciável e  $\alpha(t) \geq 0, \dot{\alpha} > 0$ . Vejamos agora um caso específico do Lema 2, o qual utilizamos nos próximos capítulos.

**Lema 3. Caso específico da Desigualdade de Gronwall**

*Suponha que para  $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ ,*

$$\dot{\varphi}(t) \leq \delta_2(t - t_0) + \delta_1 \int_{t_0}^t \varphi(s)ds + \delta_3.$$

*Com  $\varphi(t)$  contínua para  $t_0 \leq t \leq t_0 + T$  e constantes  $\delta_1 > 0, \delta_2 \geq 0, \delta_3 \geq 0$  então*

$$\varphi(t) \leq \left(\frac{\delta_2}{\delta_1 + \delta_3}\right)e^{\delta_1(t-t_0)} - \frac{\delta_2}{\delta_1},$$

*para  $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ .*

*Demonstração.* A prova do caso específico é análoga ao caso geral, basta tomar  $\alpha = \frac{\delta_1}{\delta_2 + \delta_3}$  e  $\beta(t) = \delta_1$ . □

Os sistemas dinâmicos são de grande importância em diversas áreas da ciência, como a física, matemática, biologia e engenharia. Esses sistemas podem ser descritos por equações diferenciais que governam a evolução de uma variedade de objetos ao longo do tempo.

Veremos agora definições e resultados que irão nos ajudar a obter determinadas estimativas que nos auxiliarão no desenvolvimento da teoria.

Consideramos o sistema autônomo

$$\dot{x} = f(x), x(t_0) = x_0. \tag{2.8}$$

**Definição 2.11.** Para uma função  $f$  e um ponto  $x$ , a sequência

$$x, f(x), f(f(x)), \dots, f_n(x), \dots$$

se  $f$  não for inversível ou, caso contrário, a sequência

$$\dots, f^{(-1)}(x), x, f(x), \dots$$

é chamada de órbita de  $x$  sob  $f$ . Já um ponto fixo, é um ponto tal que  $f(x) = x$  e um ponto periódico é um ponto  $x$  tal que  $f^n(x) = x$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ . O menor  $n$  é chamado de período de  $x$ .

**Exemplo 1.** Consideremos

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = -x^3. \end{aligned}$$

Segue que 0 é o único ponto fixo,  $\pm 1$  gera uma órbita periódica, ou seja, 1 e  $-1$  são pontos periódicos com período 2.

**Definição 2.12.** Um ponto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  é chamado de ponto de equilíbrio ou ponto crítico da equação (2.8) se

$$f(x_0) = 0.$$

**Definição 2.13.** Sejam  $U$  um aberto de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathcal{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial de classe  $\mathcal{C}^1$ . Uma órbita periódica  $\gamma$  de  $\mathcal{X}$  chama-se ciclo limite se existe uma vizinhança  $V$  de  $\gamma$ , tal que  $\gamma$  é a única órbita fechada de  $\mathbb{X}$  que intercepta  $V$ .

## 2.2 Estimativas no caso de atração

Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t, \epsilon) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.9)$$

para  $t \geq t_0$ ;  $x, x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ . Vamos supor que  $x = 0$  seja uma solução para a equação. Note que, se quisermos estudar uma solução particular  $x = \varphi(t)$ , podemos considerar a equação  $y = x - \varphi(t)$ , onde a equação para  $y$  tem solução trivial.

Vamos falar agora sobre a estabilidade no sentido de Lyapunov, que é um conceito importante em sistemas dinâmicos que descreve a capacidade de um sistema em permanecer próximo a um estado de equilíbrio ou a uma trajetória desejada ao longo do tempo. A estabilidade de Lyapunov é baseada na noção de que pequenas perturbações em um sistema não devem resultar em grandes desvios do estado desejado ao longo do tempo.

**Definição 2.14.** A solução  $x = 0$  da equação (2.9) é dita estável no sentido de Lyapunov se para todo  $\epsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que  $\|x_0\| \leq \delta \Rightarrow \|x(t)\| \leq \epsilon$  para  $t \geq t_0$ . Sendo assim, a solução é dita instável se ela não for estável.

A solução  $x = 0$  pode ter uma propriedade diferente que chamamos de atração, que é um conceito muito importante no estudo de sistemas dinâmicos.

**Definição 2.15.** A solução nula da equação (2.9) é um atrator positivo, se existe um  $\delta > 0$  tal que

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad (2.10)$$

Se a solução satisfaz as duas definições apresentadas, ou seja, além de ser estável é um atrator, teremos um forte tipo de estabilidade que é definida por:

**Definição 2.16.** Se a solução  $x = 0$  da equação (2.9) é estável no sentido de Lyapunov e é um atrator positivo, dizemos que é assintoticamente estável.

Em resumo, um sistema é considerado assintoticamente estável se ele tende a um estado de equilíbrio estável à medida que o tempo passa.

**Teorema 2.17.** *Consideremos a equação*

$$\dot{x} = A(t)x + f(x, t), \quad (2.11)$$

onde  $A(t)$  é uma função matricial contínua em  $t \in \mathbb{R}$ ,  $T$ -periódica; a função vetorial  $f$  é contínua em  $t \in \mathbb{R}$  e  $x \in \mathbb{R}^n$ ; Lipschitz em  $x$  para  $t \in \mathbb{R}$ , e  $x$  em uma vizinhança de  $x = 0$ . Além disso, temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|f(x, t)\|}{\|x\|} = 0,$$

uniformemente em  $t$ . Se a parte real de cada expoente característico da equação periódica linear

$$\dot{y} = A(t)y$$

é negativa, a solução  $x = 0$  da equação (2.11) é assintoticamente estável. Além disso, a atração é exponencial em uma vizinhança de  $x = 0$ .

**Teorema 2.18.** *Consideremos o problema de valor inicial em  $\mathbb{R}^n$*

$$\dot{x} = (A + B(t))x + f(x, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.12)$$

para  $x \in \mathbb{R}^n, t \geq t_0$ ,  $A$  uma matriz constante  $n \times n$  com pelo menos um autovalor com parte real positiva,  $B(t)$  uma matriz  $n \times n$  contínua tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|B(t)\| = 0.$$

A função vetorial  $f$  é contínua em relação a  $t$  e  $x$  e Lipschitz em relação a  $x$  numa vizinhança de  $x = 0$ , mais ainda,

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|f(x, t)\|}{\|x\|} = 0,$$

uniformemente em  $t$ . Então a solução trivial da equação (2.12) é instável.

Depois de apresentar os fundamentos teóricos necessários, abordamos o conceito de aproximações assintóticas para auxiliar na obtenção de soluções por meio de técnicas como o Símbolo de Landau e a ideia de escala de tempo. Existem diversas técnicas matemáticas disponíveis para aproximar soluções, mas nosso estudo se concentrará na teoria das aproximações assintóticas e na apresentação dos conceitos necessários para aplicá-la a problemas específicos.

## 2.3 Aproximação Assintótica

Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t, \epsilon) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.13)$$

onde  $x, x_0 \in \mathbb{R}^n, t \in [t_0, \infty[$  e  $\epsilon \in ]0, \epsilon_0]$ . Se para cada  $\epsilon$  próximo de zero o campo de vetores  $f$  é suficientemente suave em uma vizinhança de  $(x_0, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , o problema de valor inicial tem uma única solução  $x_\epsilon(t)$  em algum intervalo  $[t_0, t[$  para pequenos valores de  $\epsilon$ .

Vejam os dois exemplos que ilustram alguns problemas que surgem no processo de aproximação.

Consideremos a equação diferencial de primeira ordem com o valor inicial dado:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + \epsilon \\ x_\epsilon(0) = 1. \end{cases}$$

A solução é dada por  $x_\epsilon(t) = (1 + \epsilon)e^t - \epsilon$ . Podemos rearranjar essa expressão em torno de  $\epsilon$ , que resultaria em

$$x_\epsilon(t) = e^t + \epsilon(e^t - 1).$$

Ou seja, de alguma forma a função  $e^t$  é uma aproximação para  $x_\epsilon(t)$ , para  $t$  pequeno. Devemos prestar atenção ao domínio de validade da aproximação.

No segundo exemplo, observamos que a dependência em relação ao parâmetro  $\epsilon$  na solução nem sempre é suave.

Consideremos o problema de valor inicial em  $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{-\epsilon x}{\epsilon + t} \\ x_\epsilon(0) = 1, \end{cases}$$

que tem como solução

$$x_\epsilon(t) = \left( \frac{\epsilon}{\epsilon + t} \right)^\epsilon.$$

Como no exemplo anterior, ou seja, rearranjamos essa solução em torno de  $\epsilon$ , considerando  $t \geq 0$ . Porém, temos que dividir  $\mathbb{R}^+$  em diferentes intervalos. Por exemplo, tomando  $t \gg \epsilon$ , podemos expandir a solução para

$$x_\epsilon(t) = 1 + \epsilon \log(\epsilon) - \epsilon \log(t) + O\left(\frac{\epsilon}{t}\right).$$

E, claramente, essa expansão não satisfaz a condição inicial, já que a função  $\log$  não está definida para  $t = 0$ .

Estabelecemos uma categoria de funções que desempenham um papel crucial na definição dos Símbolos de Landau. Essas funções são utilizadas como ponto de referência para compararmos funções.

**Definição 2.19.** Uma função  $\delta$  será chamada **função ordem** se  $\delta$  for contínua e positiva (ou negativa) em  $]0, \epsilon_0]$  e  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta(\epsilon)$  existe.

Em muitas aplicações, costumamos usar o conjunto de funções ordem  $\{\epsilon^n\}_{n=1}^\infty$ . Entretanto, funções ordem da forma  $\epsilon^q$ ,  $q \in \mathbb{Q}$  poderão ser usadas. Para comparar funções ordem usamos o **Símbolo de Landau**.

**Definição 2.20.** Sejam  $\delta_1, \delta_2$  funções ordem. Definimos o **Símbolo de Landau** como  $O(\cdot)$  e  $o(\cdot)$  como segue

(1) Dizemos que  $\delta_1(\epsilon) = O(\delta_2(\epsilon))$  para  $\epsilon \rightarrow 0$  se existe  $K > 0$  tal que

$$|\delta_1(\epsilon)| \leq K|\delta_2(\epsilon)|,$$

quando  $\epsilon \rightarrow 0$ ;

(2)  $\delta_1(\epsilon) = o(\delta_2(\epsilon))$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$  se

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_1(\epsilon)}{\delta_2(\epsilon)} = 0.$$

O Símbolo de Landau é um conceito que permite descrever o comportamento assintótico de uma função quando o argumento tende a um determinado valor. O uso desse símbolo é especialmente relevante em sistemas dinâmicos, que descrevem a evolução temporal de sistemas físicos ou matemáticos.

Em sistemas dinâmicos, é comum que pequenas perturbações iniciais possam levar a grandes diferenças nas soluções no futuro. Por essa razão, é importante entender como a magnitude da perturbação inicial afeta a evolução do sistema ao longo do tempo. É aqui que o Símbolo de Landau desempenha seu papel, permitindo estimar a ordem de magnitude da diferença entre soluções de sistemas dinâmicos próximos.

Vejamos alguns exemplos do uso do Símbolo de Landau.

**Exemplo 2.**  $\epsilon^n = o(\epsilon^m)$  para  $\epsilon \rightarrow 0$  se  $n > m$ .

De fato, da definição (2), tomando  $\delta_1(\epsilon) = \epsilon^n$  e  $\delta_2(\epsilon) = \epsilon^m$ , temos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon^n}{\epsilon^m} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{n-m} = 0,$$

pois  $n - m > 0$

**Exemplo 3.**  $\epsilon \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\epsilon}\right) = O(\epsilon)$  para  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Note que a função seno é limitada, assim da definição (1) tomando  $\delta_1(\epsilon) = \epsilon \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$ , temos

$$\left| \epsilon \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \right| = |\epsilon| \cdot \left| \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \right| \leq |\epsilon|.$$

Portanto, existe  $K = 1$  tal que  $\left| \epsilon \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \right| \leq |\epsilon|$ .

**Exemplo 4.**  $\epsilon^2 \log \epsilon = o(\epsilon^2 \log^2 \epsilon)$  para  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Isso segue da definição (2). Considerando  $\delta_1(\epsilon) = \epsilon^2 \log \epsilon$  e  $\delta_2(\epsilon) = \epsilon^2 \log^2 \epsilon$  em (2) temos:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\epsilon^2 \log \epsilon}{\epsilon^2 \log^2 \epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\log \epsilon} = 0$$

**Exemplo 5.**  $e^{-1/\epsilon} = o(\epsilon^n)$  para  $\epsilon \rightarrow 0$  e  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Considerando  $\delta_1(\epsilon) = e^{-1/\epsilon}$  e  $\delta_2(\epsilon) = \epsilon^n$  temos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{e^{-1/\epsilon}}{\epsilon^n} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{e^{1/\epsilon} \cdot \epsilon^n} = \frac{1}{\lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{1/\epsilon} \cdot \epsilon^n}.$$

Fazendo  $x = \frac{1}{\epsilon}$  e lembrando que  $\epsilon > 0$ , o limite acima se transforma em

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

**Observação 2.** Note que se  $\delta_1(\epsilon) = o(\delta_2(\epsilon)) \Rightarrow \delta_1(\epsilon) = O(\delta_2(\epsilon))$ .

De fato, vejamos que

$$|\delta_1(\epsilon)| \leq K|\delta_2(\epsilon)| \Rightarrow \left| \frac{\delta_1(\epsilon)}{\delta_2(\epsilon)} \right| \leq K, \text{ ou seja } \frac{\delta_1(\epsilon)}{\delta_2(\epsilon)} \text{ é limitada, e temos que}$$

$$\delta_1(\epsilon) = o(\delta_2(\epsilon)) \Rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_1(\epsilon)}{\delta_2(\epsilon)} = 0 \Rightarrow \left| \frac{\delta_1(\epsilon)}{\delta_2(\epsilon)} \right| \leq K, \epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \delta_1(\epsilon) = O(\delta_2(\epsilon)).$$

Por exemplo,  $\epsilon^2 = o(\epsilon)$  e  $\epsilon^2 = O(\epsilon)$  com  $\epsilon \rightarrow 0$ .

De fato,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon^2}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon = 0.$$

Agora, considere  $K = \epsilon_0$ , temos  $0 < \epsilon < \epsilon_0$ , assim

$$|\epsilon^2| = |\epsilon \epsilon| = |\epsilon||\epsilon| \leq \epsilon_0|\epsilon|,$$

portanto,  $\epsilon^2 = O(\epsilon)$ .

**Definição 2.21.** Dizemos que  $\delta_1(\epsilon) = O_S(\delta_2(\epsilon))$  para  $\epsilon \rightarrow 0$  se  $\delta_1(\epsilon) = O(\delta_2(\epsilon))$  e  $\delta_1(\epsilon) \neq o(\delta_2(\epsilon))$  para  $\epsilon \rightarrow 0$ .

**Exemplo 6.** temos  $\epsilon \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\epsilon}\right) = O_S(\epsilon)$  para  $\epsilon \rightarrow 0$ , vimos que  $\epsilon \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\epsilon}\right) = O(\epsilon)$  para  $\epsilon \rightarrow 0$  mas  $\epsilon \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \neq o(\epsilon)$  para  $\epsilon \rightarrow 0$  de fato,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\epsilon}\right),$$

que diverge.

Conforme mencionamos previamente, a variável  $t$  é conhecida como **tempo**, e há também o conceito de **escala de tempo**, que posteriormente é representado por  $\tau = \delta(\epsilon)t$ , onde  $\delta(\epsilon) = O(1)$ , ou seja, limitada. O Símbolo de Landau foi definido para comparar funções ordem, mas também é aplicável a funções que não são necessariamente de ordem. O objetivo é usar esses símbolos para estimar soluções aproximadas de sistemas de equações diferenciais. Com isso, podemos estimar a magnitude de aplicações  $\varphi_\epsilon(t)$  em um intervalo  $I$ , onde  $\epsilon \in ]0, \epsilon_0]$ .

**Definição 2.22.** Seja

$$\begin{aligned} \varphi_\epsilon & : I \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto \varphi_\epsilon(t). \end{aligned}$$

Seja  $\|\cdot\|$  a norma euclidiana do  $\mathbb{R}^n$  e seja  $|\cdot|$  a norma definida por

$$|\varphi_\epsilon| = \sup\{\|\varphi_\epsilon(t)\| : t \in I\}.$$

Note que esta norma depende de  $\epsilon$ . Seja  $\delta(\epsilon)$  uma função ordem, então

$$(1) \varphi_\epsilon = O(\delta(\epsilon)) \text{ em } I, \text{ se } |\varphi_\epsilon| = O(\delta(\epsilon));$$

(2)  $\varphi_\epsilon = o(\delta(\epsilon))$  em  $I$ , se  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{|\varphi_\epsilon|}{\delta(\epsilon)} = 0$ ;

(3)  $\varphi_\epsilon = O_S(\delta(\epsilon))$  em  $I$ , se  $\varphi_\epsilon = O(\delta(\epsilon))$  e  $\varphi_\epsilon \neq o(\delta(\epsilon))$ .

As estimativas assim definidas são **uniformes** ou **uniformemente válidas** em  $I$ . Vimos que existem muitas normas envolvidas, primeiro uma norma para mensurar  $\varphi_\epsilon(t)$ , em cuja geralmente usamos a norma do *sup*, para mensurar  $\varphi_\epsilon$  como foi definido, e finalmente podemos calcular o supremo sobre  $\epsilon$ . Vejamos um exemplo de aplicação desta definição.

**Exemplo 7.** *Desejamos estimar a ordem de grandeza do erro que cometemos ao aproximar  $\text{sen}(t + \epsilon t)$  por  $\text{sen}(t)$  no intervalo  $I$ .*

Se  $I = [0, 2\pi]$ , temos pela diferença das duas funções, usando série de Taylor:

$$\text{sen}(t + \epsilon t) = \text{sen}(t) + R_1, \text{ onde } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{R_1}{\epsilon} = 0.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, 2\pi]} |\text{sen}(t + \epsilon t) - \text{sen}(t)| &= \sup_{t \in [0, 2\pi]} |R_1| \\ \Rightarrow \frac{\sup_{t \in [0, 2\pi]} |\text{sen}(t + \epsilon t) - \text{sen}(t)|}{\epsilon} &= \frac{\sup_{t \in [0, 2\pi]} |R_1|}{\epsilon} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\sup_{t \in [0, 2\pi]} |\text{sen}(t + \epsilon t) - \text{sen}(t)|}{\epsilon} &= \sup_{t \in [0, 2\pi]} \left| \frac{R_1}{\epsilon} \right| \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\sup_{t \in [0, 2\pi]} |\text{sen}(t + \epsilon t) - \text{sen}(t)|}{\epsilon} &\rightarrow 0, \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\sup_{t \in [0, 2\pi]} |\text{sen}(t + \epsilon t) - \text{sen}(t)| = o(\epsilon) \Rightarrow \sup_{t \in [0, 2\pi]} |\text{sen}(t + \epsilon t) - \text{sen}(t)| = O(\epsilon).$$

Em algumas situações, pode ocorrer um problema em que a fronteira do intervalo varia conforme o parâmetro  $\epsilon$ . Isso pode fazer com que o intervalo se torne ilimitado quando  $\epsilon$  tende a zero. Precisamos fazer uma reescala no tempo, para que o intervalo da função não dependa do parâmetro  $\epsilon$ , ou seja,

$$0 \leq t \leq \frac{L}{\delta(\epsilon)} \Rightarrow 0 \leq \delta(\epsilon)t \leq L \Rightarrow 0 \leq \tau \leq L.$$

Por exemplo, se no exemplo acima consideramos o intervalo  $I = \left[0, \frac{2\pi}{\epsilon}\right]$ , pela norma do *sup* temos,

$$|\text{sen}(t + \epsilon t) - \text{sen}(t)| = O_S(1).$$

De fato, suponhamos que  $|\text{sen}(t + \epsilon t) - \text{sen}(t)| = o(1)$ . Temos que  $|\cdot|$  é a norma do *sup*.

Tome  $t = \frac{\pi}{2\epsilon} \in \left[0, \frac{2\pi}{\epsilon}\right]$ . Assim, temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2\epsilon} + \epsilon\frac{\pi}{2\epsilon}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2\epsilon}\right) \right| \leq \left| \operatorname{sen}(t + \epsilon t) - \operatorname{sen}(t) \right| \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 \leq \left| \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2\epsilon} + \frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2\epsilon}\right) \right| \leq \left| \operatorname{sen}(t + \epsilon t) - \operatorname{sen}(t) \right|. \end{aligned}$$

Mas note que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2\epsilon} + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2\epsilon}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2\epsilon}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2\epsilon}\right).$$

Resultando

$$0 \leq \left| \cos\left(\frac{\pi}{2\epsilon}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2\epsilon}\right) \right| \leq \left| \operatorname{sen}(t + \epsilon t) - \operatorname{sen}(t) \right|.$$

Como  $\epsilon \in \mathbb{R}$  e  $\epsilon > 0$ , tome  $\frac{\pi}{2\epsilon} = x$ . Assim, quando  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow +\infty$ .

Logo, como estamos supondo que  $|\operatorname{sen}(t + \epsilon t) - \operatorname{sen}(t)| = o(1)$ , ou seja,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} |\operatorname{sen}(t + \epsilon t) - \operatorname{sen}(t)| = 0,$$

segue, pelo Teorema do Confronto, que temos que ter

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |\cos(x) - \operatorname{sen}(x)| = 0.$$

Mostraremos que isso não ocorre.

Pela definição,  $\forall \epsilon' > 0$ , em particular vale para  $\epsilon' < 1$ ,  $\exists M \in \mathbb{N}$  tal que  $x > M \Rightarrow |\cos(x) - \operatorname{sen}(x)| < \epsilon'$ . Consideremos  $x = 2M\pi + \frac{\pi}{2}$ , assim  $x > M$  e temos

$$\begin{aligned} &\left| \cos\left(2M\pi + \frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(2M\pi + \frac{\pi}{2}\right) \right| = \\ &\left| \cos(2M\pi) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}(2M\pi) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{sen}(2M\pi) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(2M\pi) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| = 1. \end{aligned}$$

Mas como  $\epsilon' < 1$ , temos um absurdo. Portanto, temos a prova da afirmação.

Podemos utilizar diferentes abordagens para estimar funções quando o intervalo de definição depende do parâmetro  $\epsilon$ . Aqui, suponhamos que:  $\delta(\epsilon) = o(1)$  e o nosso objetivo é estimar  $\varphi_\epsilon$  em  $I = \left[0, \frac{L}{\delta(\epsilon)}\right]$ , com  $L$  uma constante independente de  $\epsilon$ . Tal estimativa é dada por  $\varphi_\epsilon = O(\delta_0(\epsilon))$  com  $\epsilon \rightarrow 0$  em  $I$ .

Definimos um conceito para o estudo de aproximações. Com ele, é possível estimar funções em intervalos que dependam de  $\epsilon$ .

**Definição 2.23.** Dizemos que  $\varphi_\epsilon(t) = O(\delta_0(\epsilon))$  com  $\epsilon \rightarrow 0$  na **escala de tempo**  $\delta(\epsilon)^{-1}$ , se a estimativa

$$\sup_t \left\{ \|\varphi_\epsilon(t)\| : 0 \leq t \leq \frac{L}{\delta(\epsilon)} \right\} \leq K|\delta_0(\epsilon)|,$$

é válida para  $0 \leq t \leq \frac{L}{\delta(\epsilon)}$ , onde  $L$  é uma constante independente de  $\epsilon$ , e  $K$  é uma constante positiva dada pela Definição (2.20).

De maneira análoga, dizemos que  $\varphi_\epsilon(t) = o(\delta_0(\epsilon))$  com  $\epsilon \rightarrow 0$ , ou seja,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sup_t \left\{ \|\varphi_\epsilon(t)\| : 0 \leq t \leq \frac{L}{\delta(\epsilon)} \right\}}{\delta_0(\epsilon)} = 0,$$

na **escala de tempo**  $\delta(\epsilon)^{-1}$  se esta estimativa é válida para  $0 \leq t \leq \frac{L}{\delta(\epsilon)}$ , com  $L$  uma constante independente de  $\epsilon$ .

**Exemplo 8.** Seja  $\varphi_\epsilon^1(t) = \epsilon \cdot t \cdot \text{sen}(t)$ . Temos

1.  $\varphi_\epsilon^1(t) = O(\epsilon)$  na escala de tempo 1.

De fato, por definição temos

$$\sup_{t \in I} \{ \|\epsilon \cdot t \cdot \text{sen}(t)\| : 0 \leq t \leq L \} \leq K\epsilon.$$

Basta tomar  $K = L$ . Assim para qualquer  $t \in [0, L]$ , a estimativa será válida.

2.  $\varphi_\epsilon^1(t) = O(1)$  na escala de tempo  $\frac{1}{\epsilon}$ .

De fato, temos

$$\sup_{t \in I} \left\{ \|\epsilon \cdot t \cdot \text{sen}(t)\| : 0 \leq t \leq \frac{L}{\epsilon} \right\} \leq K.$$

Basta tomar  $K = L$ . Assim, essa estimativa é válida para  $t \in \left[0, \frac{L}{\epsilon}\right]$ .

**Exemplo 9.** Seja  $\varphi_\epsilon^2(t) = \epsilon^2 t \text{sen}(t)$ . Notamos que

1.  $\varphi_\epsilon^2(t) = O(\epsilon)$  na escala de tempo  $\frac{1}{\epsilon}$ .

De fato,

$$\sup_t \left\{ \|\epsilon^2 \cdot t \cdot \text{sen}(t)\| : 0 \leq t \leq \frac{L}{\epsilon} \right\} \leq K\epsilon,$$

para  $t \in \left[0, \frac{L}{\epsilon}\right]$ . Novamente basta tomar  $K = L$ .

2.  $\varphi_\epsilon^2(t) = O(\sqrt{\epsilon})$  na escala de tempo  $\epsilon^{3/2}$ , ou seja,

$$\sup_t \left\{ \|\epsilon^2 \cdot t \cdot \text{sen}(t)\| : 0 \leq t \leq \frac{L}{\epsilon^{3/2}} \right\} \leq K\epsilon^{1/2},$$

temos que a estimativa é válida para  $t \in \left[0, \frac{L}{\epsilon^{3/2}}\right]$ .

Com isso, podemos definir o que é uma aproximação assintótica.

**Definição 2.24.** (Aproximação assintótica)

(1) Dizemos que  $\psi_\epsilon(t)$  é uma **aproximação assintótica** de  $\varphi_\epsilon(t)$  no intervalo  $I$  se

$$\varphi_\epsilon(t) - \psi_\epsilon(t) = o(1),$$

quando  $\epsilon \rightarrow 0$  uniformemente para  $t \in I$ .

(2) Dizemos que  $\psi_\epsilon(t)$  é uma **aproximação assintótica** de  $\varphi_\epsilon(t)$  na escala de tempo  $\delta^{-1}(\epsilon)$  se

$$\varphi_\epsilon - \psi_\epsilon = o(1),$$

quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , na escala de tempo  $\delta^{-1}(\epsilon)$ .

A aproximação assintótica é uma técnica utilizada para obter uma solução aproximada para um problema matemático ou físico, quando a solução exata é difícil ou impossível de se obter. Essa técnica é baseada na ideia de que, em certas situações, uma função ou série pode ser aproximada por uma outra função ou série mais simples, que é chamada de aproximação assintótica.

Uma aproximação assintótica é obtida ao analisar o comportamento da função quando um ou mais parâmetros tendem a infinito ou zero. Essa análise permite identificar os termos mais importantes da função e descartar aqueles que são menos importantes, resultando em uma expressão simplificada que descreve o comportamento assintótico da função.

A precisão da aproximação depende da ordem de aproximação escolhida e do valor do parâmetro. Quanto maior a ordem de aproximação, mais termos são considerados e maior é a precisão da aproximação. A aproximação assintótica é amplamente utilizada em diversas áreas da matemática, da física, entre outras.

Quase sempre obtemos como aproximação assintótica séries ou expansões em algum intervalo  $I$ .

Essas séries são da forma

$$\tilde{\varphi}_\epsilon(t) = \sum_{n=1}^m \delta_n(\epsilon) \varphi_{n_\epsilon}(t), \quad (2.14)$$

onde cada  $\delta_n(\epsilon)$  é uma função ordem com  $\delta_{n+1} = o(\delta_n)$ , para todo  $n = 1, \dots, m-1$ , e cada função  $\varphi_{n_\epsilon}$  satisfaz  $\varphi_{n_\epsilon}(t) = O_S(1)$ , em  $I$ . Logo, para uma função  $\varphi_\epsilon(t)$  dada, a série  $\tilde{\varphi}_\epsilon(t) = \sum_{n=1}^m \delta_n(\epsilon) \varphi_{n_\epsilon}(t)$  é uma aproximação assintótica de  $m$ -ésima ordem de  $\varphi_\epsilon(t)$  no intervalo  $I$ , para cada  $m \in \mathbb{N}$ , se

$$\varphi_\epsilon(t) - \tilde{\varphi}_\epsilon(t) = o(\delta_m(\epsilon)),$$

em  $I$ . Ou uma condição mais forte:

$$\varphi_\epsilon(t) - \tilde{\varphi}_\epsilon(t) = O(\delta_{m+1}(\epsilon)),$$

em  $I$ . Essa afirmação é comumente expressa como: o erro é aproximadamente igual à magnitude do primeiro termo que foi omitido.

**Exemplo 10.** Considere  $I = [0, 2\pi]$ .

$$\varphi_\epsilon(t) = \text{sen}(t + \epsilon t),$$

$$\tilde{\varphi}_\epsilon(t) = \text{sen}(t) + \epsilon \cdot t \cdot \cos(t) - \frac{1}{2} \epsilon^2 \cdot t^2 \cdot \text{sen}(t).$$

As funções ordem são  $\delta_n(\epsilon) = \epsilon^{n-1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  e temos

$$\varphi_\epsilon(t) - \tilde{\varphi}_\epsilon(t) = o(\epsilon^2)$$

em  $I = [0, 2\pi]$ .

De fato,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{|\varphi_\epsilon(t) - \tilde{\varphi}_\epsilon(t)|}{\epsilon^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{|\text{sen}(t + \epsilon t) - (\text{sen}(t) + \epsilon \cdot t \cdot \cos(t) - \frac{1}{2}\epsilon^2 \cdot t^2 \cdot \text{sen}(t))|}{\epsilon^2}$$

aplicamos a regra de L'Hôpital

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{|t \cos(t + \epsilon t) - t \cdot \cos(t) + \epsilon \cdot t^2 \cdot \text{sen}(t)|}{2\epsilon}.$$

Como novamente temos uma indeterminação quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , aplicamos novamente a regra de L'Hôpital e obtemos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{|-t^2 \text{sen}(t + \epsilon t) + t^2 \text{sen}(t)|}{2} = 0.$$

Segue que  $\tilde{\varphi}_\epsilon(t)$  é uma aproximação assintótica de terceira ordem de  $\varphi_\epsilon(t)$  em  $I = [0, 2\pi]$ .

Aproximações assintóticas não são únicas. Note que para esse exemplo temos uma outra aproximação assintótica de terceira ordem para  $\varphi_\epsilon(t)$  em  $I$  dada por

$$\psi_\epsilon(t) = \text{sen}(t) + \epsilon \varphi_{2\epsilon}(t) - \frac{1}{2}\epsilon^2 t^2 \text{sen}(t),$$

com  $\varphi_{2\epsilon}(t) = \frac{\text{sen}(\epsilon t) \cos(t)}{\epsilon}$ . As funções  $\varphi_{n\epsilon}$  não são determinadas de maneira única. Para uma determinada função, diferentes aproximações assintóticas podem ser construídas com diferentes conjuntos de funções ordem. Por exemplo, consideremos

$$\varphi_\epsilon(t) = \left(1 - \frac{\epsilon t}{1 + \epsilon}\right)^{-1}$$

com  $I = [0, 1]$ .

Temos as seguintes aproximações assintóticas de  $\varphi_\epsilon(t)$  em  $I$ :

$$\psi_{1\epsilon}(t) = \sum_{n=0}^m \left(\frac{\epsilon}{1 + \epsilon}\right)^n t^n$$

e

$$\psi_{2\epsilon}(t) = 1 + \sum_{n=1}^m \epsilon^n t(t-1)^{n-1}.$$

Ainda que as séries assintóticas em geral não sejam únicas, existem formas especiais de séries assintóticas que podem ser únicas. Uma série da forma

$$\sum_{j=1}^{\infty} \delta_j(\epsilon) \varphi^j(t, \epsilon)$$

com cada  $\varphi^j(t)$  independente de  $\epsilon$  é chamada de **série assintótica de Poincaré**.

**Teorema 2.25.** Se  $\varphi(t, \epsilon)$  tem uma série assintótica de Poincaré com funções ordem  $\delta_1, \delta_2 \dots$  então esta série é única.

*Demonstração.* Primeiramente, consideremos

$$\varphi(t, \epsilon) = \delta_1(\epsilon)\varphi^1(t) + o(\delta_1(\epsilon)).$$

Dividindo por  $\delta_1$  temos

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(t, \epsilon)}{\delta_1(\epsilon)} &= \frac{\delta_1(\epsilon)\varphi^1(t) + o(\delta_1(\epsilon))}{\delta_1(\epsilon)} = \frac{\delta_1(\epsilon)\varphi^1(t)}{\delta_1(\epsilon)} + \frac{o(\delta_1(\epsilon))}{\delta_1(\epsilon)} \\ &= \varphi^1(t) + o\left(\frac{\delta_1(\epsilon)}{\delta_1(\epsilon)}\right) = \varphi^1(t) + o(1) \Rightarrow \frac{\varphi(t, \epsilon)}{\delta_1(\epsilon)} = \varphi^1(t) + o(1). \end{aligned}$$

Fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$ , temos

$$\varphi^1(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(t, \epsilon)}{\delta_1(\epsilon)},$$

o que determina  $\varphi^1(t)$  de maneira única. Agora, vamos considerar

$$\varphi(t, \epsilon) = \delta_1(\epsilon)\varphi^1(t) + \delta_2(\epsilon)\varphi^2(t) + o(\delta_2(\epsilon)).$$

Dividindo por  $\delta_2$  e fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$ , temos

$$\varphi^2(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(t, \epsilon) - \delta_1(\epsilon)\varphi^1(t)}{\delta_2(\epsilon)},$$

no qual determina  $\varphi^2(t)$  unicamente. E assim podemos repetir o processo.

Por conta desse processo, na demonstração anterior, as séries assintóticas de Poincaré são chamadas de **expansões de processo limite**.  $\square$

Vejamos o exemplo discutido por Euler.

**Exemplo 11.** Considere  $\varphi_\epsilon = \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{1 + \epsilon s} ds, \epsilon \in ]0, \epsilon_0]$ . Determinar uma aproximação assintótica para  $\varphi_\epsilon$ .

Primeiramente, mostramos que  $\varphi_\epsilon$  está bem definida. Temos

$$\frac{e^{-s}}{1 + \epsilon s} \leq e^{-s},$$

$\forall s \in [0, \infty[$  e a integral

$$\int_0^\infty e^{-s} ds \longrightarrow 1,$$

isto é, é convergente, de fato,

$$\int_0^\infty e^{-s} ds = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-s} ds = \lim_{t \rightarrow \infty} [-e^{-s}]_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} -e^{-t} + 1 = 1,$$

então pelo critério da comparação, segue que  $\int_0^\infty \frac{e^{-s}}{1 + \epsilon s} ds$  é convergente. Consequentemente está bem definida.

Agora transformamos  $\epsilon s = \tau$ . Temos

$$\epsilon s = \tau \Rightarrow \frac{d(\epsilon s)}{d\tau} = 1 \Rightarrow \frac{\epsilon ds}{d\tau} = 1 \Rightarrow ds = \frac{1}{\epsilon} d\tau.$$

Assim, obtemos

$$\varphi_\epsilon = \frac{1}{\epsilon} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\tau}{\epsilon}}}{1+\tau} d\tau.$$

Integrando por partes:

$$u = \frac{1}{1+\tau} \Rightarrow \frac{du}{d\tau} = \frac{-1}{(1+\tau)^2} \Rightarrow du = -\frac{1}{(1+\tau)^2} d\tau \text{ e } dv = e^{-\tau/\epsilon} \Rightarrow v = -\epsilon e^{-\tau/\epsilon}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \varphi_\epsilon &= \frac{1}{\epsilon} \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{-\epsilon e^{-\tau/\epsilon}}{1+\tau} \Big|_0^t - \epsilon \int_0^t \frac{e^{-\tau/\epsilon}}{(1+\tau)^2} d\tau \right] \\ &= \frac{1}{\epsilon} \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{-\epsilon e^{-t/\epsilon}}{1+t} - \frac{-\epsilon e^{-0/\epsilon}}{1+0} \right] - \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{e^{-\tau/\epsilon}}{(1+\tau)^2} d\tau \\ &= \frac{1}{\epsilon} \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-\epsilon e^{-t/\epsilon}}{1+t} + \epsilon \right] - \int_0^\infty \frac{e^{-\tau/\epsilon}}{(1+\tau)^2} d\tau. \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{-\epsilon e^{-\tau/\epsilon}}{1+\tau} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{-\epsilon}{e^{\tau/\epsilon}(1+\tau)} = 0,$$

temos que

$$\varphi_\epsilon = 1 - \int_0^\infty \frac{e^{-\tau/\epsilon}}{(1+\tau)^2} d\tau. \quad (2.15)$$

Fazendo novamente a integração por partes:

$$u = \frac{1}{(1+\tau)^2} \Rightarrow du = \frac{-2}{(1+\tau)^3}, \text{ e } dv = e^{-\tau/\epsilon} \Rightarrow v = -\epsilon e^{-\tau/\epsilon}.$$

Portanto temos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\tau}{\epsilon}}}{(1+\tau)^2} d\tau &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{e^{-\frac{\tau}{\epsilon}}}{(1+\tau)^2} d\tau \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{1}{(1+\tau)^2} \right) (-\epsilon^{-\tau/\epsilon}) \Big|_0^t - \int_0^t (-\epsilon e^{-\tau/\epsilon}) \left( \frac{-2}{(1+\tau)^3} \right) d\tau \right] \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{-\epsilon e^{-t/\epsilon}}{(1+t)^2} \Big|_0^t - 2\epsilon \int_0^t \frac{e^{-\tau/\epsilon}}{(1+\tau)^3} d\tau \right] \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ -\frac{\epsilon e^{-t/\epsilon}}{(1+t)^2} - \left( -\frac{\epsilon e^0}{(1+0)^2} \right) - 2\epsilon \int_0^t \frac{e^{-\tau/\epsilon}}{(1+\tau)^3} d\tau \right] \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{\epsilon e^{-t/\epsilon}}{(1+t)^2} + \epsilon - 2\epsilon \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{e^{-\tau/\epsilon}}{(1+\tau)^3} d\tau \\
&= \epsilon - 2\epsilon \int_0^\infty \frac{e^{-\tau/\epsilon}}{(1+\tau)^3} d\tau.
\end{aligned}$$

Uma vez que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{\epsilon e^{-t/\epsilon}}{(1+t)^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{\epsilon}{e^{t/\epsilon}(1+t)^2} = 0,$$

segue que

$$\varphi_\epsilon = 1 - \epsilon + 2\epsilon \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\tau}{\epsilon}}}{(1+\tau)^3} d\tau. \quad (2.16)$$

Assim temos

$$\begin{aligned} \varphi_\epsilon &= \tilde{\varphi}_\epsilon + R_{m_\epsilon}, \text{ onde} \\ \tilde{\varphi}_\epsilon &= \sum_{n=0}^m (-1)^n n! \epsilon^n \end{aligned}$$

e

$$R_{m_\epsilon} = (-1)^{(m+1)}(m+1)! \epsilon^m \int_0^\infty \frac{e^{-\tau/\epsilon}}{(1+\tau)^{m+2}} d\tau.$$

De fato, para  $m = 0$ ,

$$\tilde{\varphi}_\epsilon = \sum_{n=0}^m (-1)^n n! \epsilon^n = (-1)^0 0! \epsilon^0 = 1$$

e

$$R_{m_\epsilon} = (-1)^{(0+1)}(0+1)! \epsilon^0 \int_0^\infty \frac{e^{-\tau/\epsilon}}{(1+\tau)^{0+2}} d\tau = - \int_0^\infty \frac{e^{-\tau/\epsilon}}{(1+\tau)^2} d\tau.$$

Portanto temos de (2.15) que

$$\varphi_\epsilon = \tilde{\varphi}_\epsilon + R_{m_\epsilon}.$$

Logo, a afirmação é verdadeira para  $m = 0$ . Agora para  $m = 1$ ,

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_\epsilon &= \sum_{n=0}^m (-1)^n n! \epsilon^n = (-1)^0 0! \epsilon^0 + (-1)^1 1! \epsilon^1 = 1 - \epsilon \\ R_{m_\epsilon} &= (-1)^{(1+1)} (1+1)! \epsilon^1 \int_0^\infty \frac{e^{-\tau/\epsilon}}{(1+\tau)^{1+2}} d\tau = 2\epsilon \int_0^\infty \frac{e^{-\tau/\epsilon}}{(1+\tau)^3} d\tau.\end{aligned}$$

Logo, de (2.16) segue que

$$\varphi_\epsilon = \tilde{\varphi}_\epsilon + R_{m_\epsilon}.$$

Portanto a afirmação é verdadeira para  $m = 1$ .

Suponhamos, por hipótese de indução, que a afirmação é válida para  $m = k$ , ou seja,

$$\tilde{\varphi}_\epsilon = \sum_{n=0}^k (-1)^n n! \epsilon^n$$

e

$$R_{k_\epsilon} = (-1)^{(k+1)} (k+1)! \epsilon^k \int_0^\infty \frac{e^{-\tau/\epsilon}}{(1+\tau)^{k+2}} d\tau.$$

Mostraremos que a afirmação é válida para  $m = k + 1$ , ou seja,

$$\tilde{\varphi}_\epsilon = \sum_{n=0}^{k+1} (-1)^n n! \epsilon^n$$

e

$$R_{k+1_\epsilon} = (-1)^{(k+2)} (k+2)! \epsilon^{k+1} \int_0^\infty \frac{e^{-\tau/\epsilon}}{(1+\tau)^{k+3}} d\tau.$$

Partindo da hipótese de indução, sabemos que

$$\varphi_\epsilon = \sum_{n=0}^k (-1)^n n! \epsilon^n + (-1)^{(k+1)} (k+1)! \epsilon^k \int_0^\infty \frac{e^{-\tau/\epsilon}}{(1+\tau)^{k+2}} d\tau. \quad (2.17)$$

Vamos resolver a integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\tau/\epsilon}}{(1+\tau)^{k+2}} d\tau.$$

Fazendo a integração por partes, consideremos

$$u = \frac{1}{(1+\tau)^{k+2}} \Rightarrow du = \frac{-(k+2)}{(1+\tau)^{k+3}}, \text{ e } dv = e^{-\tau/\epsilon} \Rightarrow v = -\epsilon e^{-\tau/\epsilon}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{e^{-\tau/\epsilon}}{(1+\tau)^{k+2}} d\tau &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{e^{-\tau/\epsilon}}{(1+\tau)^{k+2}} d\tau \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{1}{(1+\tau)^{k+2}} \right) (-\epsilon e^{-\tau/\epsilon}) \Big|_0^t - \int_0^t (-\epsilon e^{-\tau/\epsilon}) \left( \frac{-k-2}{(1+\tau)^{k+3}} \right) d\tau \right] \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{-\epsilon e^{-t/\epsilon}}{(1+t)^{k+2}} \Big|_0^t - (k+2)\epsilon \int_0^t \frac{e^{-\tau/\epsilon}}{(1+\tau)^{k+3}} d\tau \right] \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ -\frac{\epsilon e^{-t/\epsilon}}{(1+t)^{k+2}} - \left( -\frac{\epsilon e^0}{(1+0)^{k+2}} \right) - (k+2)\epsilon \int_0^t \frac{e^{-\tau/\epsilon}}{(1+\tau)^{k+3}} d\tau \right] \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{\epsilon e^{-t/\epsilon}}{(1+t)^{k+2}} + \epsilon - (k+2)\epsilon \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{e^{-\tau/\epsilon}}{(1+\tau)^{k+3}} d\tau \\
&= \epsilon - (k+2)\epsilon \int_0^\infty \frac{e^{-\tau/\epsilon}}{(1+\tau)^{k+3}} d\tau.
\end{aligned}$$

Já que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{\epsilon e^{-t/\epsilon}}{(1+t)^{k+2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{\epsilon}{e^{t/\epsilon}(1+t)^{k+2}} = 0.$$

Agora voltando na equação (2.17) e substituindo a integral encontrada, temos

$$\begin{aligned}
\varphi_\epsilon &= \sum_{n=0}^k (-1)^n n! \epsilon^n + (-1)^{(k+1)} (k+1)! \epsilon^k \left( \epsilon - (k+2)\epsilon \int_0^\infty \frac{e^{-\tau/\epsilon}}{(1+\tau)^{k+3}} d\tau \right) \\
&= \sum_{n=0}^k (-1)^n n! \epsilon^n + (-1)^{(k+1)} (k+1)! \epsilon^{k+1} + (-1)(-1)^{k+1} (k+1)! \\
&\quad \epsilon^{k+1} (k+2) \int_0^\infty \frac{e^{-\tau/\epsilon}}{(1+\tau)^{k+3}} d\tau \\
&= \sum_{n=0}^{k+1} (-1)^n n! \epsilon^n + (-1)^{(k+2)} (k+2)! \epsilon^{k+1} + \epsilon^{k+1} \int_0^\infty \frac{e^{-\tau/\epsilon}}{(1+\tau)^{k+3}} d\tau
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Princípio de Indução Finita, segue que

$$\varphi_\epsilon = \tilde{\varphi}_\epsilon + R_{m_\epsilon}.$$

Fazendo a transformação de  $\tau$  para  $s$ , temos

$$\begin{aligned}
R_{m_\epsilon} &= (-1)^{(m+1)} (m+1)! \epsilon^m \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{(1+\epsilon s)^{m+2}} \epsilon ds \\
&= (-1)^{(m+1)} (m+1)! \epsilon^{m+1} \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{(1+\epsilon s)^{m+2}} ds.
\end{aligned}$$

Observamos que  $R_{m_\epsilon} = O(\epsilon^{m+1})$ , então  $\tilde{\varphi}_\epsilon$  é uma aproximação assintótica de ordem  $m+1$  para  $\varphi_\epsilon$ .

Uma série assintótica convergir não implica que converge para a função estudada. Por exemplo  $\varphi_\epsilon = \text{sen}(\epsilon) + e^{-1/\epsilon}$ . A expansão de Taylor referente à função  $\text{sen}(\epsilon)$  nos dá a seguinte série

$$\tilde{\varphi}_\epsilon = \sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n \epsilon^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

que converge quando  $m \rightarrow \infty$ .

E temos que  $\tilde{\varphi}_\epsilon$  é uma aproximação assintótica de  $\varphi_\epsilon$  com

$$\varphi_\epsilon - \tilde{\varphi}_\epsilon = O(\epsilon^{2m+3}),$$

para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Ou seja,

$$\varphi_\epsilon - \tilde{\varphi}_\epsilon = O(\epsilon^{2m+3}) \iff |\varphi_\epsilon - \tilde{\varphi}_\epsilon| \leq C\epsilon^{2m+3},$$

no qual  $|\cdot|$  é a norma do sup e  $C$  é uma constante independente de  $\epsilon$ . Mostraremos que de fato isso ocorre:

$$\begin{aligned} |\varphi_\epsilon - \tilde{\varphi}_\epsilon| &= \left| \text{sen}(\epsilon) + e^{-1/\epsilon} - \left( \sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n \epsilon^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \right| \\ &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \epsilon^{2n+1}}{(2n+1)!} + e^{-1/\epsilon} - \left( \sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n \epsilon^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \right| \\ &= \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^n \epsilon^{2n+1}}{(2n+1)!} + e^{-1/\epsilon} \right| \\ &= \left| (-1)^{m+1} \epsilon^{2m+3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \epsilon^{2n}}{(2m+2n+3)!} + e^{-1/\epsilon} \right| \\ &\leq \left| (-1)^{m+1} \epsilon^{2m+3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \epsilon^{2n}}{(2m+2n+3)!} \right| + |e^{-1/\epsilon}| \\ &= \epsilon^{2m+3} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \epsilon^{2n}}{(2m+2n+3)!} \right| + e^{-1/\epsilon} \\ &\leq \epsilon^{2m+3} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \epsilon^{2n}}{(2n)!} \right| + e^{-1/\epsilon} \\ &= \epsilon^{2m+3} |\cos(\epsilon)| + e^{-1/\epsilon} \leq \epsilon^{2m+3} + e^{-1/\epsilon} \end{aligned} \tag{2.18}$$

Agora o nosso objetivo é majorar  $e^{-1/\epsilon}$  de tal forma que seja menor ou igual a uma constante vezes  $\epsilon^{2m+3}$ . Temos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^{2m+3}} e^{-1/\epsilon} = 0$$

O que é equivalente a

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^{2m+3} e^{1/t}} &= 0 \iff \forall \epsilon > 0, \text{ em especial para } \epsilon = 1, \exists \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |t| < \delta \\
 &\implies 0 < |t| < \delta \implies \frac{1}{e^{1/t}} < \epsilon t^{2m+3} \\
 &\implies 0 < |t| < \delta \implies \frac{1}{e^{1/t}} < C_1 t^{2m+3}
 \end{aligned}$$

Assim, substituindo na equação (2.18), a desigualdade que encontramos, temos:

$$\begin{aligned}
 |\varphi_\epsilon - \tilde{\varphi}_\epsilon| &\leq \epsilon^{2m+3} + C_1 \epsilon^{2m+3} \\
 &= \epsilon^{2m+3} (1 + C_1).
 \end{aligned}$$

Considerando  $C = 1 + C_1$ , temos

$$|\varphi_\epsilon - \tilde{\varphi}_\epsilon| \leq C \epsilon^{2m+3}.$$

Porém, a série não converge para  $\varphi_\epsilon = \text{sen}(\epsilon) + e^{-1/\epsilon}$  e sim para  $\text{sen}(\epsilon)$ .

Na teoria de equações diferenciais não lineares, a convergência ou não de uma série é de pouca utilidade. Normalmente o cálculo de um ou mais termos de uma determinada expansão é o que precisamos para nossos interesses.

## 2.4 Formulação ingênua de problemas de perturbação

Estamos interessados em estudar problemas de valor inicial do tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t, \epsilon) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.19)$$

com  $x, x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $t, t_0 \in [0, \infty[$  e  $\epsilon \in ]0, \epsilon_0]$  com  $\epsilon_0 >$  suficientemente pequeno.

Considerando a função de vetorial  $f(x, t, \epsilon)$  nas condições do Teorema de Existência e Unicidade, e ainda mais, suponhamos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(x, t, \epsilon) = f(x, t, 0)$$

existe uniformemente em  $D \times I$  com  $I = [t_0, A] \subset [0, \infty[$ . Então podemos associar com o problema de valor inicial um **problema não perturbado**

$$\begin{cases} \dot{y} = f(y, t, 0) \\ y(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (2.20)$$

O nosso objetivo é estabelecer uma relação entre a solução do problema (2.19) com a solução do problema (2.20). Podemos recorrer a técnicas de aproximações assintóticas para realizar esta análise. No entanto, é importante observar que essa abordagem só é necessária quando não podemos calcular diretamente a expressão (2.19) e pudermos resolver a equação (2.20). Essa solução pode não ser trivial, especialmente porque, em geral, o problema não é autônomo, ou seja, depende da variável independente e pode ser não linear.

Vejamos um exemplo.

**Exemplo 12.** Seja  $x_\epsilon(t)$  a solução de

$$\begin{cases} \dot{x} = -\epsilon x \\ x(0) = 1, \end{cases} \quad (2.21)$$

$$x \in [0, 1], t \in [0, \infty[, \epsilon \in ]0, \epsilon_0]$$

Associado a esse sistema, temos o problema não perturbado dado por

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = 0 \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (2.22)$$

Logo, segue que  $x_\epsilon(t) = e^{-\epsilon t}$ ,  $y(t) = 1$  são soluções de (2.21) de (2.22), respectivamente. E temos  $x_\epsilon(t) - y(t) = O(\epsilon)$  na escala de tempo 1. De fato, pela fórmula de Taylor na vizinhança de  $\epsilon = 0$ , temos

$$\begin{aligned} x_\epsilon(t) &= e^{-\epsilon t} = e^{-0t} + \frac{dx_\epsilon(t)}{d\epsilon}(t, 0)\epsilon + \frac{d^2x_\epsilon(t)}{d\epsilon^2}(t, 0)\frac{\epsilon^2}{2!}\dots \\ &= 1 + (-t)\epsilon + \frac{t^2}{2}\epsilon^2 + \dots = 1 + O(\epsilon). \end{aligned}$$

Este é um exemplo da **Teoria de Perturbação Regular** para um sistema autônomo da forma

$$\dot{x} = f(x, \epsilon),$$

com  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Lema 2.26.** Consideremos os problemas de valores iniciais dados por

$$\dot{x} = f(x, t) + \delta(\epsilon)g(x, t, \epsilon), \quad x(t_0) = x_0$$

e

$$\dot{y} = f(y, t), \quad y(t_0) = x_0,$$

no qual  $f$  e  $g$  são funções de Lipschitz na variável  $x \in D \subset \mathbb{R}^n$  e são contínuas em  $(x, t, \epsilon) \in G = D \times [t_0, t_0 + T] \times ]0, \epsilon_0]$ . Como usual,  $\delta(\epsilon)$  é uma função ordem. Se  $g(x, t, \epsilon) = O(1)$  na escala de tempo 1, então

$$x(t) - y(t) = O(\delta(\epsilon)),$$

na escala de tempo 1.

*Demonstração.* Escrevemos os problemas de valor inicial na forma integral

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t (f(x(s), s) + \delta(\epsilon)g(x(s), s, \epsilon))ds, \\ y(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(y(s), s)ds. \end{aligned}$$

A norma da diferença dessas duas funções é dada por:

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t (f(x(s), s) - f(y(s), s) + \delta(\epsilon)g(x(s), s, \epsilon))ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|f(x(s), s) - f(y(s), s)\|ds + \delta(\epsilon) \int_{t_0}^t \|g(x(s), s, \epsilon)\|ds. \end{aligned}$$

Da hipótese  $g(x, t, \epsilon) = O(1)$ , ou seja, limitada, segue que existe uma constante  $M$  tal que  $\|g(x, t, \epsilon)\| \leq M$  em  $G$ . Além disso, como  $f$  é lipschitziana com relação a  $x$  temos

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \lambda_f \int_{t_0}^t \|x(s) - y(s)\| ds + \delta(\epsilon)M(t - t_0),$$

no qual  $\lambda_f$  é a constante de Lipschitz de  $f$ .

Aplicamos o Lema 3 com  $\delta_1(\epsilon) = \lambda_f$ ,  $\delta_2(\epsilon) = M\delta(\epsilon)$ ,  $\delta_3(\epsilon) = 0$ , e temos

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x(t) - y(t)\| &\leq \delta(\epsilon) \frac{M}{\lambda_f} e^{\lambda_f(t-t_0)} - \delta(\epsilon) \frac{M}{\lambda_f} \\ &= \delta(\epsilon) \frac{M}{\lambda_f} (e^{\lambda_f(t-t_0)} - 1). \end{aligned}$$

Desta inequação concluímos que  $y$  é uma aproximação assintótica de  $x$  com erro  $\delta(\epsilon)$  se  $\lambda_f(t - t_0)$  é limitado por uma constante  $C$  que não depende de  $\epsilon$ , assim

$$\|x(t) - y(t)\| \leq K\delta(\epsilon)$$

com  $K = \frac{M}{\lambda_f}(e^C - 1)$ . Portanto

$$x(t) - y(t) = O(\delta(\epsilon)),$$

na escala de tempo 1, pois a constante  $\lambda_f$  é independente de  $\epsilon$ . □

Para ampliar o intervalo de tempo em que uma solução é válida, é necessário utilizar métodos mais avançados. A função  $y$  descrita no lema 2.26 é frequentemente denominada **aproximação formal** de  $x$ .

## 2.5 Forma Padrão

A forma padrão é uma representação comum usada para descrever sistemas dinâmicos em termos de equações diferenciais ordinárias. Essa representação é importante porque muitas técnicas e métodos para a análise de sistemas dinâmicos são mais facilmente aplicáveis quando o sistema está na forma padrão.

O Método da Média é uma técnica usada na análise de sistemas dinâmicos perturbados, que consiste em obter uma solução aproximada do sistema perturbado a partir de uma solução do **sistema médio**. Para aplicar o Método da Média, é necessário reescrever o sistema perturbado na forma padrão, e obter uma solução aproximada do sistema perturbado em termos de soluções do sistema médio.

Portanto, a forma padrão é uma ferramenta importante na análise de sistemas dinâmicos, e é particularmente relevante para o Método da Média, que é uma técnica útil para obter soluções aproximadas de sistemas dinâmicos perturbados.

Considerando o problema com perturbação da forma

$$\dot{x} = f(x, t) + \epsilon g(x, t, \epsilon); \quad x(t_0) = x_0, \tag{2.23}$$

com  $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$  e associado a ele o problema não perturbado

$$\dot{y} = f(y, t); \quad y(t_0) = x_0. \tag{2.24}$$

Assumimos que (2.24) pode ser resolvido explicitamente. Temos que a solução irá depender do valor inicial  $x_0$  e escrevemos  $y(x_0, t)$ . Então, para cada  $z \in \mathbb{R}^n$ , a solução da equação (2.24) depende do tempo e da condição inicial, ou seja,

$$y = y(z, t), \quad y(z, 0) = z, \quad z \in \mathbb{R}^n.$$

Aplicando o método da variação de parâmetros ou variação de constantes, que é dado da seguinte forma

$$x = y(z, t). \tag{2.25}$$

Observemos que a variável  $z$  está sujeita a uma dependência em relação a  $t$ , uma vez que a alteração de  $z$  resulta em um novo problema de valor inicial, e, portanto, para cada valor de  $z$ , teremos um valor correspondente de  $t$ .

Derivando (2.25) com relação a  $t$ , utilizando a regra da cadeia do lado esquerdo e a equação (2.23), temos

$$\frac{\partial y}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial y}{\partial t} = f(y(z, t), t) + \epsilon g(y(z, t), t, \epsilon).$$

Como  $y(z, t)$  satisfaz o problema (2.24), podemos eliminar  $\frac{\partial y}{\partial t}$  com  $f(y(z, t), t)$ , obtendo assim

$$\frac{\partial y}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \epsilon g(y(z, t), t, \epsilon).$$

Assumindo que  $\frac{\partial y(z, t)}{\partial z}$  é não singular, podemos escrever

$$\frac{dz}{dt} = \epsilon \left( \frac{\partial y(z, t)}{\partial z} \right)^{-1} g(y(z, t), t, \epsilon). \tag{2.26}$$

A equação (2.26) junto com a condição inicial  $z(t_0) = x_0$  é chamada de **problema de perturbação na forma padrão**.

Vejamus um exemplo que envolve funções elementares na área da biologia matemática. Consideremos duas espécies vivendo em uma determinada região com restrição de comida e uma pequena interação entre as espécies está afetando suas densidades populacionais  $x_1$  e  $x_2$ . Descrevemos o crescimento populacional pelo modelo

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_1 x_1 - x_1^2 + \epsilon f_1(x_1, x_2); \quad x_1(0) = x_1^0, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_2 x_2 - x_2^2 + \epsilon f_2(x_1, x_2), \quad x_2(0) = x_2^0, \end{aligned}$$

no qual as constantes  $a_i, x_i^0 > 0$  e  $x_i(t) \geq 0$  para  $i = 1, 2$ . Segue que a solução do problema não perturbado:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_1 x_1 - x_1^2, \quad x_1(0) = x_1^0, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_2 x_2 - x_2^2, \quad x_2(0) = x_2^0, \end{aligned}$$

associado ao problema perturbado de valor inicial é dado por:

$$x_i(t) = \frac{a_i}{1 + \frac{a_i - x_i^0}{x_i^0} e^{-t}} = \frac{a_i x_i^0 e^t}{a_i + x_i^0 (e^t - 1)}, \tag{2.27}$$

com

$$x_i(0) = x_i^0.$$

Aplicando a equação (2.26) temos

$$\frac{dz_i}{dt} = \epsilon e^{-t} \left(1 + \frac{z_i}{a_i} (e^t - 1)\right)^2 f_i(.,.); \quad z_i(0) = x_i^0, \quad i = 1, 2, \quad (2.28)$$

no qual abreviamos a expressão para  $f_i$ . Observemos que a expressão do lado direito de (2.28) cresce exponencialmente, mesmo se a função  $f_i$  for constante. Isso faz com que não possamos aplicar o Teorema da Média de Primeira Ordem 3.1 que veremos no próximo capítulo, pois uma de suas hipóteses é que a função

$$e^{-t} \left(1 + \frac{z_i}{a_i} (e^t - 1)\right)^2,$$

seja limitada.

Com isso, poderemos ver nesse exemplo, que colocar na forma padrão nem sempre é prática. Porém, existe uma classe importante de problemas onde essa técnica é muito útil, que estudaremos na próxima seção.

## 2.6 A forma padrão no caso quasilinear

Nesta seção, estudaremos o problema (2.23) em uma situação em que a equação pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\dot{x} = A(t)x + \epsilon g(x, t, \epsilon); \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.29)$$

onde  $A(t)$  é uma matriz  $n$  contínua. Chamaremos essa equação (2.29) de **quasilinear**. O problema não perturbado associado a (2.29) é:

$$\dot{y} = A(t)y, \quad (2.30)$$

que possui  $n$  soluções linearmente independentes, conforme garantido pelo Teorema 2.7. A partir dessas soluções, construiremos a "matriz fundamental"  $\Phi(t)$ , uma matriz de ordem  $n \times n$  cujas colunas formam uma base para o espaço de soluções de (2.30). Escolheremos  $\Phi$  de tal maneira que  $\Phi(t_0) = I_d$ , em que  $I_d$  é a matriz identidade. Com base na teoria de equações diferenciais ordinárias, sabemos que essa matriz  $\Phi(t)$  existe e é única, conforme discutido por Sotomayor em [7].

Com o objetivo de se obter a forma padrão da equação (2.29), faremos o mesmo procedimento da seção anterior, e para isso vamos aplicar o procedimento da variação de parâmetros da seguinte forma, tomamos

$$x = \Phi(t)z,$$

segue de (2.26)

$$\dot{z} = \epsilon \Phi(t)^{-1} g(\Phi(t)z, t, \epsilon). \quad (2.31)$$

Se  $A$  é uma matriz constante segue que a matriz fundamental é dada por

$$\Phi(t) = e^{A(t-t_0)}.$$

E assim a forma padrão se torna nesse caso

$$\dot{z} = \epsilon e^{-A(t-t_0)} g(e^{A(t-t_0)} z, t, \epsilon). \quad (2.32)$$

Note que se os autovalores de  $A$  não são todos imaginários puros, a equação (2.32) pode apresentar alguns problemas mesmo se  $g$  for limitada, pois como mencionamos no exemplo anterior precisamos garantir que a função estudada seja limitada.

**Exemplo 13.** *Ao estudar oscilações não lineares, muitas vezes considera-se o problema de valor inicial perturbado*

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x &= \epsilon g(x, \dot{x}, t, \epsilon) \\ \dot{x}(t_0) &= \alpha; x(t_0) = \beta. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Se tomamos  $y = \dot{x}$ , então a equação diferencial pode ser escrita como um sistema com duas equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} 0 \\ g(x, y, t, \epsilon) \end{pmatrix}, \quad x(t_0) = \alpha, y(t_0) = \beta. \quad (2.34)$$

Considerando o sistema não perturbado, ou seja, quando  $\epsilon = 0$ , temos:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad x(t_0) = \alpha, y(t_0) = \beta. \quad (2.35)$$

com  $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$ . Assim, duas soluções para o sistema não perturbado (2.35) são

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = \cos(\omega(t - t_0)) \\ \varphi_2(t) = \text{sen}(\omega(t - t_0)) \end{cases}.$$

Fazendo o procedimento de variação dos parâmetros, neste caso a solução  $\tilde{X} = (\tilde{x}, \tilde{y})$  para o sistema não perturbado pode ser escrita como  $\tilde{X} = \Phi(t)z$ , com  $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= z_1 \cos(\omega(t - t_0)) + \frac{z_2}{\omega} \text{sen}(\omega(t - t_0)) \\ \tilde{y} &= -z_1 \omega \text{sen}(\omega(t - t_0)) + z_2 \cos(\omega(t - t_0)). \end{aligned} \quad (2.36)$$

E a matriz fundamental  $\Phi$  é dada por (2.37).

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega(t - t_0)) & \frac{1}{\omega} \text{sen}(\omega(t - t_0)) \\ -\omega \text{sen}(\omega(t - t_0)) & \cos(\omega(t - t_0)) \omega \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

com  $\Phi(t_0)$  sendo a matriz identidade de ordem 2. Além disso, podemos ver que a matriz do sistema não perturbado, (2.34) é

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Devemos notar que suas entradas não dependem explicitamente de  $t$ , ou seja, é uma matriz constante, assim da equação (2.32), temos

$$\dot{z} = \epsilon \Phi^{-1}(t) g(\phi(t)z, t, \epsilon).$$

Desde que tenhamos

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega(t-t_0)) & -\frac{1}{\omega} \text{sen}(\omega(t-t_0)) \\ \omega \text{sen}(\omega(t-t_0)) & \cos(\omega(t-t_0)) \end{pmatrix}.$$

Assim, concluímos que

$$\dot{z} = \epsilon \begin{pmatrix} \cos(\omega(t-t_0)) & -\frac{1}{\omega} \text{sen}(\omega(t-t_0)) \\ \omega \text{sen}(\omega(t-t_0)) & \cos(\omega(t-t_0)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ g(*, **, t, \epsilon) \end{pmatrix},$$

ou podemos ver como

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= -\frac{\epsilon}{\omega} \text{sen}(\omega(t-t_0))g(*, **, t, \epsilon), \quad z_1(t_0) = \alpha, \\ \frac{dz_2}{dt} &= \epsilon \cos(\omega(t-t_0))g(*, **, t, \epsilon), \quad z_2(t_0) = \beta. \end{aligned}$$

no qual,  $*, **$  devem ser substituídos por (2.36). As condições iniciais para esse novo sistema são dadas por

$$z_1(t_0) = \alpha, z_2(t_0) = \beta$$

com  $\tilde{X} = \Phi(t)z$ ,  $\Phi(t_0) = I_d$ , nesse caso de ordem 2.

Porém, em certos problemas envolvendo oscilações não lineares, pode ser vantajoso obter informações sobre a variação da **amplitude**  $r$  e da **fase**  $\phi$  da solução do sistema na forma padrão. Neste caso, para facilitar a análise, podemos usar a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{cases} x = r \cos(\omega t + \phi) \\ y = -r\omega \text{sen}(\omega t + \phi), \end{cases} \quad (2.38)$$

que chamamos de **transformação fase-amplitude**. Dessa forma, tal como realizado anteriormente, adotamos  $y = \dot{x}$ , resultando no seguinte sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \ddot{x} = -\omega^2 x + \epsilon g(x, y, t, \epsilon), \end{aligned} \quad (2.39)$$

substituindo em (2.39), temos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos(\omega t + \phi) - r\omega \text{sen}(\omega t + \phi) - r \text{sen}(\omega t + \phi)\dot{\phi} \\ \dot{y} &= -\dot{r}\omega \text{sen}(\omega t + \phi) - r\omega^2 \cos(\omega t + \phi) - r\omega \cos(\omega t + \phi)\dot{\phi}. \end{aligned}$$

Ao multiplicarmos a primeira equação por  $\omega \cos(\omega t + \phi)$  e a segunda equação por  $-\text{sen}(\omega t + \phi)$ , e em seguida realizarmos a adição dos resultados obtidos nesse processo, obtemos o seguinte resultado

$$\omega \cos(\omega t + \phi)\dot{x} - \text{sen}(\omega t + \phi)\dot{y} = \dot{r}\omega \implies \dot{r} = \frac{\omega \cos(\omega t + \phi)\dot{x} - \text{sen}(\omega t + \phi)\dot{y}}{\omega}, \quad (2.40)$$

agora substituindo (2.39) e (2.38) em (2.40) temos

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{-r\omega^2 \cos(\xi)(\text{sen}(\xi) + r\omega^2 \text{sen}(\xi))(r \cos(\xi) - \text{sen}(\xi)\epsilon g(x, y, t, \epsilon))}{\omega} \\ &= -\frac{\text{sen}(\xi)\epsilon g(x, y, t, \epsilon)}{\omega}, \end{aligned}$$

com  $\xi = \omega t + \phi$ . Seguindo um processo similar ao que foi feito anteriormente, porém desta vez com o objetivo de calcular  $\dot{\phi} = d\phi/dt$ , chegamos à forma padrão da equação perturbada, que é dada por

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \frac{-\epsilon}{\omega} \text{sen}(\omega t + \phi)g(*, **, t, \epsilon) \\ \frac{d\phi}{dt} = \frac{-\epsilon}{r\omega} \text{cos}(\omega t + \phi)g(*, **, t, \epsilon), \end{cases} \quad (2.41)$$

onde as condições iniciais são determinadas utilizando a equação (2.38). Note que temos um problema quando a amplitude  $r$  é pequena, pois assim, perdemos a limitação de  $d\phi/dt$ , que é uma das hipóteses do Teorema da Média de Primeira Ordem 3.1.

### 3 O Método da Média

Neste capítulo, discutimos uma versão da Teoria da Média, para o **caso periódico**. Neste cenário, o nosso objetivo é solucionar um problema de perturbação na forma padrão dada pelo problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \epsilon f(x, t) + \epsilon^2 g(x, t, \epsilon) \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

com  $x, y, x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $g : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $G = D \times [t_0, \infty) \times ]0, \epsilon_0]$  e  $f : G' \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $G' = D \times [t_0, t_0 + T]$ .

Suponhamos que  $f$  é  $T$ -periódica em  $t$ . Agora simplificamos a equação fazendo um truncamento, ou seja, eliminaremos o termo  $\epsilon^2$  e faremos a média sobre  $t$  enquanto  $x$  permanece constante. Desta forma obtemos a **equação média** dada por

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \epsilon f^0(y) \\ y(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde

$$f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T f(y, t) dt. \tag{3.3}$$

O resultado básico é que as soluções desses sistemas permanecem próximas (da ordem de  $\epsilon$ ) por um intervalo de tempo de ordem  $\frac{1}{\epsilon}$ , ou seja,

$$\|x(t) - y(t)\| \leq c\epsilon,$$

para todo  $t \in \left[0, \frac{L}{\epsilon}\right]$ , com  $c, L$  sendo constantes positivas. Agora fazendo algumas suposições sobre  $f$ , não todas realmente necessárias, considerando  $\epsilon_0$  uma constante positiva fixada, podemos estabelecer o seguinte resultado:

**Teorema 3.1. Média de Primeira Ordem.**

Consideremos os problemas (3.1) e (3.2) com  $x, y, x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n, t \in [t_0, \infty)$  e  $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ . Sejam  $x(t)$  solução de (3.1) e  $y(t)$  solução de (3.2). Além disso, suponhamos que

- a)  $f, g$  e  $\partial f / \partial x$  estejam bem definidas, são contínuas e limitadas por uma constante  $M$  independente de  $\epsilon$ , em  $D \times [t_0, \infty)$ ;
- b)  $g$  é Lipschitz com respeito à variável  $x \in D$ ;
- c)  $f$  é  $T$ -periódica em  $t$ , onde  $T$  é uma constante independente de  $\epsilon$ ;

d)  $y(t)$  pertence (independente de  $\epsilon$ ) ao interior de um subconjunto de  $D$  na escala de tempo  $\frac{1}{\epsilon}$ ;

Nestas condições temos que

$$x(t) - y(t) = O(\epsilon) \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0 \text{ na escala de tempo } \frac{1}{\epsilon}.$$

**Observação 3.** Podemos verificar que no item (a) é suficiente considerar o conjunto  $[t_0, t_0 + \frac{L}{\epsilon}]$ , com  $L$  sendo uma constante positiva independente de  $\epsilon$ .

*Demonstração.* Inicialmente, as hipóteses (a) e (b) garantem que as soluções dos dois problemas de valor inicial (3.1) e (3.2), respectivamente, existem e são únicas, o que nos permite obter  $x(t)$  e  $y(t)$ . O item (c) indica que não é necessário considerar o tempo variando em  $[0, \infty)$ , mas apenas em um intervalo finito  $[t_0, t_0 + T]$ . Por fim, o item (d) nos informa sobre a existência de soluções em uma escala de tempo  $\frac{1}{\epsilon}$  na variável  $t$ . Depois de esclarecer essas informações sobre as hipóteses, iniciaremos a prova do teorema.

Defina

$$\mu^1(y, t) = \int_{t_0}^t [f(y, s) - f^0(y)] ds. \quad (3.4)$$

Temos que

$$\|\mu^1(y, t)\| \leq 2MT \quad (3.5)$$

em  $D \times [t_0, t_0 + T]$ , no qual  $T$  é a periodicidade de  $f$  e  $M$  é a constante do item a). Mostraremos que de fato ocorre (3.5).

$$\begin{aligned} \|\mu^1(y, t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t [f(y, s) - f^0(y)] ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|f(y, s)\| ds + \int_{t_0}^t \|f^0(y)\| ds \\ &\leq \int_{t_0}^t M ds + \int_{t_0}^t \|f^0(y)\| ds. \end{aligned}$$

Note que temos

$$\|f^0(y)\| \leq \frac{1}{T} \int_0^T \|f(y, t)\| ds \leq \frac{1}{T} \int_0^T M ds = \frac{M}{T} \int_0^T ds = M.$$

Portanto temos que

$$\|\mu^1(y, t)\| \leq 2 \int_{t_0}^t M ds = 2M \int_{t_0}^t ds = 2M(t - t_0).$$

Então, temos duas possibilidades

$$a) (t - t_0) < T$$

ou

$$b) (t - t_0) \geq T$$

Se ocorre a) segue o que queríamos provar,

$$\|\mu^1(y, t)\| \leq 2MT.$$

Se ocorre *b*) temos que  $t \geq T + t_0$ . Assim, existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que

$$0 < mT + t_0 \leq t < (m + 1)T + t_0. \quad (3.6)$$

Primeiro mostraremos que se uma função  $f(s)$  é  $T$ -periódica, segue que

$$\int_{t_0}^{t_0+nT} f(s)ds = \int_0^{nT} f(s)ds, \quad (3.7)$$

de fato, note que

$$\int_{t_0}^{t_0+nT} f(s)ds = \int_{t_0}^{nT} f(s)ds + \int_{nT}^{t_0+nT} f(s)ds$$

e

$$\int_0^{nT} f(s)ds = \int_0^{t_0} f(s)ds + \int_{t_0}^{nT} f(s)ds.$$

Assim, para que ocorra a igualdade, devemos ter

$$\int_0^{t_0} f(s)ds = \int_{nT}^{t_0+nT} f(s)ds,$$

fazendo a mudança de variável para  $\sigma = s - nT$ , temos:

$$\int_0^{t_0} f(s)ds = \int_0^{t_0} f(\sigma)d\sigma.$$

Portanto, segue que de fato ocorre (3.7).

Logo, segue que

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t [f(y, s) - f^0(y)]ds &= \int_{t_0}^{mT+t_0} [f(y, s) - f^0(y)]ds + \int_{mT+t_0}^t [f(y, s) - f^0(y)]ds \\ &= \int_0^{mT} [f(y, s) - f^0(y)]ds + \int_{mT+t_0}^t [f(y, s) - f^0(y)]ds \\ &= m \int_0^T [f(y, s) - f^0(y)]ds + \int_{mT+t_0}^t [f(y, s) - f^0(y)]ds \\ &= \int_{mT+t_0}^t [f(y, s) - f^0(y)]ds, \end{aligned}$$

uma vez que

$$\begin{aligned} \int_0^T [f(y, s) - f^0(y)]ds &= \int_0^T [f(y, s) - \frac{1}{T} \int_0^T f(y, t)dt]ds \\ &= \int_0^T f(y, s)ds - T \cdot \frac{1}{T} \int_0^T f(y, t)dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Agora vamos resolver

$$\int_{mT+t_0}^t [f(y, s) - f^0(y)]ds.$$

Fazendo a mudança de variável para

$$s = \sigma + mT,$$

temos

$$\begin{aligned} \int_{mT+t_0}^t [f(y, s) - f^0(y)] ds &= \int_{t_0}^{t-mT} [f(y, \sigma + mT) - f^0(y)] ds \\ &= \int_{t_0}^{t-mT} [f(y, \sigma) - f^0(y)] ds \\ &= \int_{t_0}^{t-mT} [f(y, s) - f^0(y)] ds. \end{aligned}$$

Assim, subtraindo  $mT$  de todos os membros de (3.6), temos:

$$t_0 \leq t - mT < T + t_0,$$

recaímos no caso inicial e concluímos a prova da afirmação (3.5).

Definimos a equação **quase-identidade** dada por

$$z(t) = y(t) + \epsilon \mu^1(y(t), t) \tag{3.8}$$

que tem o objetivo de estimar a diferença entre as soluções de (3.1) e (3.2).

Temos

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| &\leq \|x(t) - z(t)\| + \|z(t) - y(t)\| \\ &= \|x(t) - z(t)\| + \epsilon \|\mu^1(y(t), t)\| \\ &\leq \|x(t) - z(t)\| + 2\epsilon MT. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\int_{t_0}^t \left( \frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} \right) ds = x(t) - x(t_0) - z(t) + z(t_0) = x(t) - z(t),$$

pois  $z(t_0) = y(t_0) + \epsilon \mu^1(y(t_0), t_0) = y(t_0) = x_0 = x(t_0)$ .

Calculando

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} &= \epsilon f(x(t), t) + \epsilon^2 g(x(t), t) - \frac{dy}{dt} - \frac{\epsilon \partial \mu^1(y(t), t)}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &\quad - \epsilon \frac{\partial \mu^1(y(t), t)}{\partial t} = \epsilon f(x(t), t) - \epsilon f(z(t), t) + R, \end{aligned}$$

com

$$R = \epsilon^2 g(x(t), t, \epsilon) - \epsilon^2 \nabla \mu^1(y(t), t) f^0(y(t)) + \epsilon f(z(t), t) - \epsilon f(y(t), t).$$

Afirmação: existe uma constante  $k \in \mathbb{R}$ , tal que  $\|R\| \leq k\epsilon^2$ . De fato,

$$\begin{aligned} \|R\| &\leq \|\epsilon^2 g(x(t), t, \epsilon)\| + \|\epsilon^2 \nabla \mu^1(y(t), t) f^0(y(t))\| \\ &\quad + \|\epsilon f(z(t), t) - \epsilon f(y(t), t)\| \leq \|\epsilon^2 M\| + \|\epsilon^2 M 2MT\| + L \|\epsilon [z(t) - y(t)]\| \\ &\leq \|\epsilon^2 M\| + \|\epsilon^2 M 2MT\| + L \|\epsilon^2 2MT\| = \epsilon^2 (M + 2M^2T + 2LMT) = \epsilon^2 k, \end{aligned}$$

com  $k = M + 2M^2T + 2LMT$ .

Por fim temos

$$\begin{aligned}
 \|x(t) - z(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \left\| \frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} \right\| ds = \int_{t_0}^t \|\epsilon f(x(s), s) - \epsilon f(z(s), s) + R\| ds \\
 &= \int_{t_0}^t \|\epsilon f(x(s), s) - \epsilon f(z(s), s)\| ds + \int_{t_0}^t \|R\| ds \\
 &\leq \epsilon L \int_{t_0}^t \|x(s) - z(s)\| ds + \int_{t_0}^t \epsilon^2 k ds \\
 &= \epsilon L \int_{t_0}^t \|x(s) - z(s)\| ds + k\epsilon^2(t - t_0) \\
 \Rightarrow \|x(t) - z(t)\| &\leq \epsilon L \int_{t_0}^t \|x(s) - z(s)\| ds + k\epsilon^2(t - t_0).
 \end{aligned}$$

Agora aplicando o Lema 3, considerando  $\delta_1 = \epsilon L$ ,  $\delta_2 = k\epsilon^2$  e  $\delta_3 = 0$ , encontramos

$$\|x(t) - z(t)\| \leq \epsilon \frac{k}{L} e^{\epsilon L(t-t_0)} - \epsilon \frac{k}{L}$$

e como temos  $\|x(t) - y(t)\| - 2\epsilon MT \leq \|x(t) - z(t)\|$  segue que

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \epsilon \left( \frac{k}{L} e^{\epsilon L(t-t_0)} - \frac{k}{L} + 2MT \right).$$

Então, se  $\epsilon L(t - t_0)$  for limitado por uma constante  $D$  independente de  $\epsilon$ , isto é,

$$\epsilon L(t - t_0) \leq D,$$

temos

$$\|x(t) - y(t)\| \leq C\epsilon,$$

no qual  $C = \frac{k}{L} e^D - \frac{k}{L} + 2MT$ . Portanto segue que

$$x(t) - y(t) = O(\epsilon),$$

na escala de tempo  $\frac{1}{\epsilon}$ . □

Este teorema pode ser generalizado, possibilitando erro na condição inicial e também formas mais gerais de funções ordens ao invés das apresentadas  $\epsilon, \epsilon^2$ . Segue tal generalização no seguinte teorema.

**Teorema 3.2. Caso Geral da Média de Primeira Ordem.**

*Consideremos o problema de valor inicial*

$$\frac{dx}{dt} = \delta_1(\epsilon)f(x, t) + \delta_2(\epsilon)g(x, t, \epsilon), x(t_0) = x_0 \tag{3.9}$$

*e associado a este problema*

$$\frac{dy}{dt} = \delta_1(\epsilon)f^0(y), y(t_0) = x_0 + \delta_3(\epsilon), \tag{3.10}$$

$\delta_1, \delta_2$  e  $\delta_3$  são funções ordem,  $\delta_2 = o(\delta_1)$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Considerando as mesmas hipóteses do Teorema 3.1 nos itens a), b), c), d), temos

$$x(t) = y(t) + O\left(\frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3\right),$$

na escala de tempo  $\frac{1}{\delta_1}$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

**Observação 4.** Podemos realizar a operação de média no caso periódico e demonstrar a validade assintótica sob suposições mais fracas, como, por exemplo, no caso em que a função vetorial  $f$  não é diferenciável. Por outro lado, ao adicionar condições às funções vetoriais  $f$  e  $g$ , podemos construir aproximações de segunda ordem e superiores. Uma aproximação de segunda ordem é geralmente caracterizada por um erro  $O(\epsilon^2)$  na escala de tempo  $\frac{1}{\epsilon}$ .

O Teorema a seguir garante que, sob certas condições, os pontos de equilíbrio da função média (3.3) resultam em soluções T-periódicas da equação (3.1).

**Teorema 3.3.** Considere a equação (3.1) e suponha que:

1. as funções vetoriais  $f, g, \partial f/\partial x, \partial^2 f/\partial x^2$  e  $\partial g/\partial x$  são definidas, contínuas e limitadas em  $D \times [t_0, \infty)$  por uma constante  $M$  que não depende de  $\epsilon$ , onde  $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ ;
2.  $f$  e  $g$  são T-periódicas em  $t$  (T independente de  $\epsilon$ ).

Se  $p$  é um ponto crítico da equação média (3.2) e satisfaz

$$\det\left(\frac{\partial f^0(y)}{\partial y}\right)_{y=p} \neq 0, \tag{3.11}$$

então existe uma solução T-periódica  $\varphi(t, \epsilon)$  da equação (3.1) que está próxima a  $p$  e satisfaz

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \varphi(t, \epsilon) = p.$$

*Demonstração.* Seja  $x(t)$  uma solução de (3.1), e consideremos a mudança de variável  $x \rightarrow z$  usando a relação **quase-identidade** (3.8), ou seja,

$$x(t) = z(t) + \epsilon \mu(z(t), t), \tag{3.12}$$

onde

$$\mu(x(t), t) = \int_0^t [f(x, s) - f^0(x)] ds, \tag{3.13}$$

Derivando ambos os lados da equação (3.12) com relação á variável  $t$ , obtemos

$$\dot{x} = \dot{z} + \epsilon \left[ \frac{\partial \mu}{\partial z}(z(t), t) \dot{z} + \frac{\partial \mu}{\partial t}(z(t), t) \right] \tag{3.14}$$

Uma vez que  $x(t)$  é solução de (3.1), isto é, satisfaz a equação  $\dot{x} = \epsilon f(x, t) + \epsilon^2 g(x, t, \epsilon)$ , substituindo a expressão de  $x(t)$  dada por (3.12) em (3.1) obtemos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \epsilon f(z(t) + \epsilon\mu(z(t), t), t) + \epsilon^2 g(z(t) + \epsilon\mu(z(t), t), t, \epsilon) \\ &= \dot{z} + \epsilon \left[ \frac{\partial \mu}{\partial z}(z(t), t) \dot{z} + \frac{\partial \mu}{\partial t}(z(t), t) \right]\end{aligned}\quad (3.15)$$

e com mais alguns cálculos obtemos a equação

$$\dot{z} \left[ I_d + \epsilon \frac{\partial \mu}{\partial z}(z(t), t) \right] = -\epsilon \frac{\partial \mu}{\partial t}(z(t), t) + \epsilon f(z(t) + \epsilon\mu(z(t), t), t) + \epsilon^2 g(z(t) + \epsilon\mu(z(t), t), t, \epsilon).\quad (3.16)$$

Note que,

$$\epsilon \frac{\partial \mu}{\partial t}(z(t), t) = \epsilon f(z, t) - \epsilon f^0(z).\quad (3.17)$$

logo, substituindo (3.17) em (3.16), temos

$$\begin{aligned}\dot{z} \left[ I_d + \epsilon \frac{\partial \mu}{\partial z}(z(t), t) \right] &= -\epsilon f(z, t) + \epsilon f^0(z) + \epsilon f(z(t) + \epsilon\mu(z(t), t), t) \\ &\quad + \epsilon^2 g(z(t) + \epsilon\mu(z(t), t), t, \epsilon).\end{aligned}$$

Considerando

$$R(z, t, \epsilon) = \epsilon f(z(t) + \epsilon\mu(z(t), t), t) + \epsilon^2 g(z(t) + \epsilon\mu(z(t), t), t, \epsilon) - \epsilon f(z, t),$$

de forma semelhante ao realizado na prova do Teorema 3.1, podemos estabelecer a estimativa

$$\|R(z, t, \epsilon)\| \leq C\epsilon^2,$$

com  $C$  uma constante positiva independente de  $\epsilon$ .

De fato,

$$\begin{aligned}\|R(z, t, \epsilon)\| &= \|\epsilon f(z(t) + \epsilon\mu(z(t), t), t) + \epsilon^2 g(z(t) + \epsilon\mu(z(t), t), t, \epsilon) - \epsilon f(z(t), t)\| \\ &\leq \|\epsilon f(z(t) + \epsilon\mu(z(t), t), t)\| + \|\epsilon^2 g(z(t) + \epsilon\mu(z(t), t), t, \epsilon) - \epsilon f(z(t), t)\| \\ &\leq \epsilon \|f(z(t) + \epsilon\mu(z(t), t), t) - f(z(t), t)\| + \epsilon^2 \|g(z(t) + \epsilon\mu(z(t), t), t, \epsilon)\| \\ &\leq \epsilon^2 L_2 M T + \epsilon^2 M = C \cdot \epsilon^2\end{aligned}$$

com  $C = M(2L_2 M T + 1)$ . Assim, temos

$$\dot{z} \left[ I_d + \epsilon \frac{\partial \mu}{\partial z}(z(t), t) \right] = \epsilon f^0(z) + R(z, t, \epsilon).\quad (3.18)$$

Agora note que,

$$\mu(z, t) \text{ e } \frac{\partial \mu}{\partial z}(z, t) = \int_0^t \left[ \frac{\partial f}{\partial z}(z, s) - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) dt \right] ds$$

são uniformemente limitadas, pois como visto na demonstração do Teorema 3.1,  $\|\mu(z, t)\| \leq 2MT$  e por hipótese  $\frac{\partial f}{\partial z}$  é limitada. Expandindo em série de Taylor em torno de  $\epsilon = 0$  temos

$$\left[ I_d + \epsilon \frac{\partial \mu}{\partial z}(z(t), t) \right]^{-1} = I_d - \epsilon \frac{\partial \mu}{\partial z}(z(t), t) + O(\epsilon^2). \quad (3.19)$$

Inserindo a expressão obtida em (3.19) na equação (3.18), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \left[ I_d - \epsilon \frac{\partial \mu}{\partial z}(z(t), t) + O(\epsilon^2) \right] (\epsilon f^0(z) + R(z, t, \epsilon)) \\ &= \epsilon f^0(z) + R(z, t, \epsilon) - \epsilon^2 f^0(z) \frac{\partial \mu}{\partial z}(z, t) + O(\epsilon^3) \\ &= \epsilon f^0(z) + \epsilon f(z(t) + \epsilon \mu(z(t), t), t) + \epsilon^2 g(z(t) + \epsilon \mu(z(t), t), t, \epsilon) \\ &\quad - \epsilon f(z, t) - \epsilon^2 f^0(z) \frac{\partial \mu}{\partial z}(z, t) + O(\epsilon^3) \\ &= \epsilon f^0(z) + \epsilon [f(z(t) + \epsilon \mu(z(t), t), t) - f(z, t)] + \epsilon^2 g(z(t) + \epsilon \mu(z(t), t), t, \epsilon) \\ &\quad - \epsilon^2 f^0(z) \frac{\partial \mu}{\partial z}(z, t) + O(\epsilon^3). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \epsilon f^0(z) + \epsilon [f(z(t) + \epsilon \mu(z(t), t), t) - f(z, t)] + \epsilon^2 g(z(t) + \epsilon \mu(z(t), t), t, \epsilon) \\ &\quad - \epsilon^2 f^0(z) \frac{\partial \mu}{\partial z}(z, t) + O(\epsilon^3). \\ &= \epsilon f^0(z) + \epsilon H(\epsilon) + \epsilon^2 G(\epsilon) - \epsilon^2 f^0(z) \frac{\partial \mu}{\partial z}(z, t) + O(\epsilon^3), \end{aligned} \quad (3.21)$$

com

$$H(\epsilon) = f(z(t) + \epsilon \mu(z(t), t), t) - f(z, t),$$

e

$$G(\epsilon) = g(z(t) + \epsilon \mu(z(t), t), t, \epsilon).$$

Expandindo em Série de Taylor as funções  $G$  e  $H$  em torno de  $\epsilon = 0$  temos

$$\begin{aligned} H(\epsilon) &= H(0) + \epsilon \frac{\partial H}{\partial \epsilon}(0) + \frac{\epsilon^2}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial \epsilon^2}(0) + \dots = 0 + \epsilon \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) \mu(z, t) + O(\epsilon^2). \\ G(\epsilon) &= G(0) + \epsilon \frac{\partial G}{\partial \epsilon}(0) + \frac{\epsilon^2}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial \epsilon^2}(0) + \dots = g(z, t, 0) + O(\epsilon). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Substituindo (3.22) em (3.21), obtemos

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= \epsilon f^0(z) + \epsilon \left[ \epsilon \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) \mu(z, t) + O(\epsilon^2) \right] + \epsilon^2 [g(z, t, 0) + O(\epsilon)] \\
&- \epsilon^2 f^0(z) \frac{\partial \mu}{\partial z}(z, t) + O(\epsilon^3) \\
&= \epsilon f^0(z) + \epsilon^2 \left[ \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) \mu(z, t) + g(z, t, 0) - f^0(z) \frac{\partial \mu}{\partial z}(z, t) + O(\epsilon) \right].
\end{aligned}$$

Assim, a equação para a nova variável  $z$  torna-se

$$\dot{z} = \epsilon f^0(z) + \epsilon^2 \tilde{R}(z, t, \epsilon). \quad (3.23)$$

Com  $\tilde{R}(z, t, \epsilon)$  sendo a seguinte expressão

$$\tilde{R}(z, t, \epsilon) = \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) \mu(z, t) - \frac{\partial \mu}{\partial z}(z, t) f^0(z) + g(z, t, 0) + O(\epsilon);$$

essa expressão é  $T$ -periódica em  $t$  e continuamente diferenciável com respeito à  $z$ . De fato, temos que mostrar que

$$\tilde{R}(z, t, \epsilon) = \tilde{R}(z, t + T, \epsilon),$$

ou seja, devemos mostrar que

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(z, t, \epsilon) &= \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) \mu(z, t) - \frac{\partial \mu}{\partial z}(z, t) f^0(z) + g(z, t, 0) + O(\epsilon) \\
&= \frac{\partial f}{\partial z}(z, t + T) \mu(z, t + T) - \frac{\partial \mu}{\partial z}(z, t + T) f^0(z) + g(z, t + T, 0) + O(\epsilon) \\
&= \tilde{R}(z, t + T, \epsilon).
\end{aligned}$$

Temos que  $g$  é  $T$ -periódica por hipótese, logo temos que mostrar que

$$\begin{aligned}
1) \quad \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) &= \frac{\partial f}{\partial z}(z, t + T); \\
2) \quad \mu(z, t) &= \mu(z, t + T); \\
3) \quad \frac{\partial \mu}{\partial z}(z, t) &= \frac{\partial \mu}{\partial z}(z, t + T).
\end{aligned} \quad (3.24)$$

Vamos mostrar que de fato ocorre 1), de (3.24). Temos que  $f(z, t)$  é  $T$ -periódica em  $t$ , ou seja,

$$f(z, t) = f(z, t + T) \implies \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) = \frac{\partial f}{\partial z}(z, t + T), \quad (3.25)$$

assim, concluímos a primeira afirmação. Verificamos 2 de (3.24)

$$\begin{aligned}
\mu(z, t + T) &= \int_0^{t+T} [f(z, s) - f^0(z)] ds \\
&= \int_0^t [f(z, s) - f^0(z)] ds + \int_t^{t+T} [f(z, s) - f^0(z)] ds \\
&= \int_0^t [f(z, s) - f^0(z)] ds + \left( \int_0^T f(z, s) ds - \int_0^T f^0(z) ds \right) \\
&= \int_0^t [f(z, s) - f^0(z)] ds + f^0(z)T - f^0(z)T \\
&= \int_0^t [f(z, s) - f^0(z)] ds = \mu(z, t).
\end{aligned} \tag{3.26}$$

E por fim, mostramos que ocorre 3), de (3.24). Temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mu}{\partial z}(z, t + T) &= \int_0^{t+T} \left[ \frac{\partial f}{\partial z}(z, s) - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial f}{\partial z}(z, w) dw \right] ds \\
&= \int_0^t \left[ \frac{\partial f}{\partial z}(z, s) - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial f}{\partial z}(z, w) dw \right] ds \\
&\quad + \int_t^{t+T} \left[ \frac{\partial f}{\partial z}(z, s) - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial f}{\partial z}(z, w) dw \right] ds
\end{aligned} \tag{3.27}$$

mostramos que

$$\int_t^{t+T} \left[ \frac{\partial f}{\partial z}(z, s) - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial f}{\partial z}(z, w) dw \right] ds = 0.$$

Utilizando 3.7 temos:

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+T} \left[ \frac{\partial f}{\partial z}(z, s) - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial f}{\partial z}(z, w) dw \right] ds &= \int_0^T \left[ \frac{\partial f}{\partial z}(z, s) - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial f}{\partial z}(z, w) dw \right] ds \\
&= \int_0^T \frac{\partial f}{\partial z}(z, s) ds - T \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial f}{\partial z}(z, w) dw \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Segue de (3.28) substituindo em (3.27) que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mu}{\partial z}(z, t + T) &= \int_0^t \left[ \frac{\partial f}{\partial z}(z, s) - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial f}{\partial z}(z, w) dw \right] ds \\
&= \frac{\partial \mu}{\partial z}(z, t).
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Portanto,  $\tilde{R}(z, t, \epsilon)$  é  $T$ -periódica. Note que, devido a escolha de  $\mu(z(t), t)$  conforme descrito em (3.13), podemos observar que uma solução  $T$ -periódica  $z(t)$  resulta em uma

solução  $T$ -periódica  $x(t)$ . Para isso devemos ter que

$$x(t) = z(t) + \epsilon\mu(z(t), t) = z(t+T) + \epsilon\mu(z(t+T), t+T) = x(t+T).$$

Assim, se a condição

$$z(t) = z(t+T)$$

for satisfeita, juntamente com a conclusão estabelecida em (3.26), então podemos afirmar que, ao encontrar uma solução que seja  $T$ -periódica para o problema mencionado na equação (3.23), conseguiremos encontrar uma solução  $T$ -periódica  $x(t)$  para o problema descrito em (3.1).

Podemos realizar a integração em relação à variável  $t$  da equação (3.23) e expressar a solução  $z(t)$  em sua forma integral, conforme a seguinte expressão:

$$z(t) = z(0) + \epsilon \int_0^t f^0(z(s))ds + \epsilon^2 \int_0^t \tilde{R}(z(s), s, \epsilon)ds. \quad (3.30)$$

A solução  $z(t)$  é  $T$ -periódica se  $z(t+T) = z(t)$  para todo  $t \geq 0$ , daí segue que  $z(T) = z(0)$ , ou seja,

$$z(T) = z(0) + \epsilon \int_0^T f^0(z(s))ds + \epsilon^2 \int_0^T \tilde{R}(z(s), s, \epsilon)ds.$$

que nos leva a seguinte equação

$$h(z(0), \epsilon) = \int_0^T f^0(z(s))ds + \epsilon \int_0^T \tilde{R}(z(s), s, \epsilon)ds = 0. \quad (3.31)$$

Agora o nosso objetivo é encontrar  $z_\epsilon$  tais que

$$z(T) - z_\epsilon = 0,$$

ou equivalentemente,

$$h(z_\epsilon, \epsilon) = 0.$$

Note que, para  $\epsilon = 0$  e  $z(0) = p$ , com  $p$  dado no enunciado, claramente temos

$$h(p, 0) = 0,$$

além disso temos que

$$\left. \frac{\partial h}{\partial z}(z, 0) \right|_{z=p} = \int_0^T \left. \frac{\partial f^0}{\partial z}(z(s)) \right|_{z=p} ds$$

e, por hipótese, temos

$$\det \left( \frac{\partial f^0}{\partial z}(p) \right) \neq 0.$$

Logo, por continuidade temos que para  $z(s)$  próximo de  $p$ ,

$$\det \left( \frac{\partial f^0(z(s))}{\partial z} \right) \neq 0 \implies \det \left( \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial f(z, t)}{\partial z} dt \right) \neq 0 \implies \det \left( \frac{\partial f(z, t)}{\partial z} \right)_{z=p} \neq 0.$$

Portanto, pelo Teorema da Aplicação Implícita, há uma vizinhança  $V_0$  em torno de  $\epsilon = 0$ , na qual para cada  $\epsilon$  pertencente a  $V_0$  existe um único  $z = z_\epsilon$  tal que  $h(z_\epsilon, \epsilon) = 0$ . Dessa forma, para cada  $\epsilon$  pertencente a  $V_0$

$$z(t) = z_\epsilon + \epsilon \int_0^t f^0(z(s))ds + \epsilon^2 \int_0^t \tilde{R}(z(s), s, \epsilon)ds.$$

é uma solução  $T$ -periódica de (3.23). Logo, pela transformação (3.12) temos uma solução  $T$ -periódica do sistema (3.1).

Ao considerarmos  $z(0) = p$ , de acordo com a equação (3.30), temos que  $z(t)$  se aproxima de  $z(0) = p$  quando  $\epsilon$  tende a 0. Portanto, ao considerarmos  $z(t)$  como uma solução  $T$ -periódica da equação (3.23), concluímos que existe uma solução  $x(t)$   $T$ -periódica da equação (3.1). Por meio da relação de quase-identidade, podemos concluir que  $x(t)$  se aproxima de  $p$  quando  $\epsilon$  tende a 0. Com isso, finalizamos a demonstração.  $\square$

Uma dúvida que pode surgir é a respeito da estabilidade da solução encontrada no Teorema 3.3, a qual será esclarecida no próximo teorema.

**Teorema 3.4.** *Consideremos a equação (3.1) e suponhamos que as condições do Teorema 3.3 tenham sido satisfeitas. Se os autovalores do ponto crítico  $y = p$  da equação média (3.2) possuem parte real negativa, a solução periódica correspondente  $\varphi(t, \epsilon)$  da equação (3.1) é assintoticamente estável para  $\epsilon$  suficientemente pequeno. Se um dos autovalores possui parte real positiva,  $\varphi(t, \epsilon)$  é instável.*

*Demonstração.* Primeiramente, linearizando a equação (3.1) em uma vizinhança da solução periódica  $\varphi(t, \epsilon)$  do sistema (3.1), isto é, consideramos a mudança de variável

$$x = z + \varphi(t, \epsilon). \quad (3.32)$$

Ao considerar que (3.32) é uma solução de  $\dot{x} = \epsilon f(x, t) + \epsilon^2 g(x, t, \epsilon)$ , ou seja, satisfaz a equação diferencial mencionada, podemos substituir a expressão de  $x(t)$ , dada por, (3.32) na equação (3.1) e obtemos o seguinte resultado

$$\dot{x} = \epsilon f(z + \varphi(t, \epsilon), t) + \epsilon^2 g(z + \varphi(t, \epsilon), t, \epsilon).$$

No entanto, por (3.32), temos

$$\dot{x} = \dot{z} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \epsilon),$$

e temos

$$\epsilon f(z + \varphi(t, \epsilon), t) + \epsilon^2 g(z + \varphi(t, \epsilon), t, \epsilon) = \dot{z} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \epsilon). \quad (3.33)$$

Mas temos, por hipótese, que  $\varphi(t, \epsilon)$  também é solução de (3.1), logo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \epsilon) = \epsilon f(\varphi(t, \epsilon), t) + \epsilon^2 g(\varphi(t, \epsilon), t, \epsilon). \quad (3.34)$$

Substituindo (3.34) em (3.33), obtemos

$$\begin{aligned} \epsilon f(z + \varphi(t, \epsilon), t) + \epsilon^2 g(z + \varphi(t, \epsilon), t, \epsilon) &= \dot{z} + \epsilon f(\varphi(t, \epsilon), t) + \epsilon^2 g(\varphi(t, \epsilon), t, \epsilon) \\ \implies \dot{z} &= \epsilon f(z + \varphi(t, \epsilon), t) + \epsilon^2 g(z + \varphi(t, \epsilon), t, \epsilon) - [\epsilon f(\varphi(t, \epsilon), t) + \epsilon^2 g(\varphi(t, \epsilon), t, \epsilon)] \\ &= \epsilon [f(z + \varphi(t, \epsilon), t) - f(\varphi(t, \epsilon), t)] + \epsilon^2 [g(z + \varphi(t, \epsilon), t, \epsilon) - g(\varphi(t, \epsilon), t, \epsilon)] \\ &= \epsilon G(z) + \epsilon^2 H(z), \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} G(z) &= f(z + \varphi(t, \epsilon), t) - f(\varphi(t, \epsilon), t); \\ H(z) &= g(z + \varphi(t, \epsilon), t, \epsilon) - g(\varphi(t, \epsilon), t, \epsilon). \end{aligned}$$

Expandindo em série de Taylor as funções  $G$  e  $H$  em torno de  $z = 0$ , e fazendo o truncamento dos termos não lineares de ordem  $O(z^2)$ , temos

$$\begin{aligned} G(z) &= G(0) + z \frac{\partial G}{\partial z}(0) + \frac{z^2}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}(0) + \dots \\ H(z) &= H(0) + z \frac{\partial H}{\partial z}(0) + \frac{z^2}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}(0) + \dots \end{aligned} \tag{3.35}$$

e substituindo o truncamento até  $O(z^2)$  em (3), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \epsilon \left( z \frac{\partial f}{\partial z}(\varphi(t, \epsilon), t) \right) + \epsilon^2 \left( z \frac{\partial g}{\partial z}(\varphi(t, \epsilon), t) \right) \\ &= \epsilon z \frac{\partial}{\partial z} [f(\varphi(t, \epsilon), t) + \epsilon g(\varphi(t, \epsilon), t)], \end{aligned}$$

assim

$$\dot{z} = \epsilon A(t, \epsilon) z,$$

com

$$A(t, \epsilon) = \frac{\partial}{\partial z} [f(\varphi(t, \epsilon), t) + \epsilon g(\varphi(t, \epsilon), t)].$$

Temos que a matriz  $A(t, \epsilon)$  é  $T$ -periódica na variável  $t$ , pois por hipótese temos que  $f, g$  e  $\varphi(t, \epsilon)$  são  $T$ -periódicas em  $t$ .

Portanto, o sistema o (3) é uma linearização, cujos coeficientes são funções periódicas com período  $T$ , do sistema (3.1) em uma vizinhança da solução periódica  $\varphi(t, \epsilon)$ .

Consideramos

$$B(t) = \frac{\partial f}{\partial z}(p, t),$$

com  $p$  sendo o ponto crítico dado no Teorema 3.3,  $B(t)$  é uma matriz  $T$ -periódica, uma vez que,  $f$  é  $T$ -periódica. Do Teorema 3.3 temos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \varphi(t, \epsilon) = p,$$

consequentemente, segue

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} A(t, \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial z} [f(\varphi(t, \epsilon), t) + \epsilon g(\varphi(t, \epsilon), t)] = \frac{\partial}{\partial z} f(p, t) = B(t). \tag{3.36}$$

Considere também as matrizes

$$B^0 = \frac{1}{T} \int_0^T B(t) dt \text{ e } C(t) = \int_0^t [B(s) - B^0] ds. \tag{3.37}$$

Observe que  $B^0$  é a matriz constante da equação média linearizada (3). Mostramos que de fato isso ocorre:

Primeiramente expandimos a função  $f^0(y)$  dada por (3.3) em torno de seu ponto crítico  $p$  consideramos apenas a parte linear, obtendo assim

$$\begin{aligned}
f^0(y) &= f^0(p) + \frac{df^0}{dy}(p)(y-p) + \dots \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial f}{\partial y}(p, t) dt (y-p) \\
&= B^0(y-p).
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Consideramos a translação  $u = y - p$ , com o objetivo de levar o ponto crítico,  $y = p$  para a origem  $u = 0$ . Assim, derivando  $u$  em relação à  $t$ , temos

$$\dot{u} = \dot{y},$$

e de (3.2), juntamente com  $y = u + p$  temos

$$\dot{u} = \epsilon f^0(u+p) = \epsilon B^0(u+p-p) = \epsilon B^0(u).$$

Portanto, obtemos a equação média linearizada dada por

$$\dot{u} = \epsilon B^0(u). \tag{3.39}$$

Segue de (3.38) segue que

$$B^0 = \frac{df^0}{dy}(p).$$

Estamos considerando que todos os autovalores de  $B^0$  possuem parte real negativa, e afirmamos que a matriz  $C(t)$  é  $T$ -periódica e tem média zero.

De fato,

$$\begin{aligned}
C(t+T) &= \int_0^{t+T} [B(s) - B^0] ds \\
&= \int_0^{t+T} B(s) ds - \int_0^{t+T} B^0 ds \\
&= \left( \int_0^t B(s) ds + \int_t^{t+T} B(s) ds \right) - \left( \int_0^t B^0 ds + \int_t^{t+T} B^0 ds \right) \\
&= \int_0^t [B(s) - B^0] ds + \int_0^T B(s) ds - \int_0^T B^0 ds \\
&= \int_0^t [B(s) - B^0] ds + B^0 T - B^0 T \\
&= C(t).
\end{aligned}$$

Já a segunda afirmação diz que  $C(t)$  tem média nula na variável  $t$ , isto é,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T} \int_0^T [B(s) - B^0] ds &= \frac{1}{T} \left[ \int_0^T B(s) ds - \int_0^T B^0 ds \right] \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T B(s) ds - \frac{1}{T} \cdot T B^0 = B^0 - B^0 = 0.
\end{aligned}$$

Considere a transformação quase-identidade  $z \rightarrow y$ ,

$$y = (I_d - \epsilon C(t))z, \quad (3.40)$$

note que, expandindo  $(I_d - \epsilon C(t))z$  em série de Taylor em torno de  $\epsilon = 0$ , temos

$$(I_d - \epsilon C(t))^{-1} = I_d + \epsilon C(t) + \dots \quad (3.41)$$

Derivando (3.40) e  $C(t)$  de (3.37) em relação à  $t$ , obtemos

$$\dot{y} = -\epsilon \dot{C}(t)z + (I_d - \epsilon C(t))\dot{z}, \quad (3.42)$$

e

$$\dot{C}(t) = B(t) - B^0. \quad (3.43)$$

Substituindo (3.43) e (3) em (3.42), obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -\epsilon(B(t) - B^0)z + (I_d - \epsilon C(t))\epsilon A(t, \epsilon)z \\ &= [\epsilon B^0 + \epsilon(A(t, \epsilon) - B(t)) - \epsilon^2 C(t)A(t, \epsilon)]z. \end{aligned} \quad (3.44)$$

De (3.40), temos

$$z = \frac{y}{(I_d - \epsilon C(t))} = y(I_d - \epsilon C(t))^{-1}, \quad (3.45)$$

substituindo (3.45) em (3.44), temos

$$\dot{y} = [\epsilon B^0 + \epsilon(A(t, \epsilon) - B(t)) - \epsilon^2 C(t)A(t, \epsilon)]y(I_d - \epsilon C(t))^{-1}, \quad (3.46)$$

agora substituindo (3.41) em (3.46), temos

$$\begin{aligned} \dot{y} &= [\epsilon B^0 + \epsilon(A(t, \epsilon) - B(t)) - \epsilon^2 C(t)A(t, \epsilon)]y(I_d - \epsilon C(t))^{-1} \\ &= \epsilon B^0 y + \epsilon(A(t, \epsilon) - B(t))y + \epsilon^2 R(t, \epsilon)y, \end{aligned} \quad (3.47)$$

com

$$R(t, \epsilon) = B^0 C(t) + (A(t, \epsilon) - B(t))C(t) - C(t)A(t, \epsilon) - \epsilon C(t)A(t, \epsilon)C(t).$$

A função  $R(t, \epsilon)$  é  $T$ -periódica e limitada, pois temos que  $A(t, \epsilon)$ ,  $B(t)$  e  $C(t)$  são  $T$ -periódicas e contínuas; observamos que como ocorre (3.36), segue que,

$$(A(t, \epsilon) - B(t)) \rightarrow 0$$

quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , e também que os expoentes característicos da equação (3.47) dependem continuamente do pequeno parâmetro  $\epsilon$ , logo, segue da definição 2.10 e do Teorema 2.9 que, para  $\epsilon$  suficientemente pequeno, o sinal da parte real dos expoentes característicos da equação (3.47) é igual ao sinal da parte real dos autovalores da matriz  $B^0$ .

Pela mudança de coordenadas quase identidade dada por (3.40), o sistema 3.47 está próximo do sistema 3, portanto, segue que o sinal da parte real dos expoentes característicos de 3 é igual ao sinal da parte real dos autovalores de  $B^0$ . Como por hipótese os autovalores de  $B^0$  tem parte real negativa, aplicaremos o Teorema 2.17 no sistema 3 com  $f(x, t) \equiv 0$ , assim, temos que a solução nula  $z = 0$  é estável, ou seja,

$$z(t) \rightarrow 0$$

quando  $t \rightarrow \infty$ . Assim, pela mudança (3.32) segue que

$$x(t) \rightarrow \varphi(t, \epsilon),$$

quando  $t \rightarrow \infty$ , portanto temos que a solução periódica do sistema (3.1) é estável.

Suponhamos que pelo menos um dos autovalores do ponto crítico  $y = p$  da equação diferencial média (3.2) possui parte real positiva. Logo, a matriz  $B^0$  possui pelo menos um autovalor com parte real positiva. Como temos

$$(A(t, \epsilon) - B(t)) \rightarrow 0$$

quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , e

$$\frac{\|\epsilon^2 R(t, \epsilon)y\|}{\|y\|} \rightarrow 0$$

quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , aplicamos o Teorema 2.18 no sistema (3.47) e assim concluímos que a solução  $y = 0$  é instável, isto é, temos

$$y(t) \rightarrow 0$$

quando  $t \rightarrow -\infty$ . Pela mudança de variável (3.40) e pelo fato de  $C(t)$  ser  $T$ -periódica, temos que

$$z(t) \rightarrow 0$$

quando  $t \rightarrow -\infty$ , logo pela mudança (3.32), segue que

$$x(t) \rightarrow \varphi(t, \epsilon)$$

quando  $t \rightarrow -\infty$ , o que significa que a solução periódica  $\varphi(t, \epsilon)$  é instável. □

### 3.1 Exemplos e contraexemplos da Média

Nesta seção, apresentaremos alguns exemplos para ilustrar a relevância de certas condições e limitações contidas no Teorema 3.1. Isso nos permitirá compreender melhor como essas hipóteses influenciam os resultados e garantem a validade das conclusões obtidas.

Em equações do tipo  $\ddot{x} + x = \epsilon f(x, \dot{x})$  e em equações autônomas em geral, ao realizar a linearização perto de uma solução periódica, sempre encontramos um expoente característico com parte real igual a zero. No caso específico de equações de segunda ordem, é vantajoso utilizar coordenadas polares e tratar o ângulo como uma variável análoga ao tempo.

Considere a equação

$$\ddot{x} + x = \epsilon f(x, \dot{x}), \tag{3.48}$$

com condições iniciais  $x(0), \dot{x}(0)$  dadas, com  $f$  suficientemente suave em  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Considerando  $y = \dot{x}$  podemos escrever o sistema na forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} 0 \\ f(x, y) \end{pmatrix}, \tag{3.49}$$

e, concluímos que a equação representada por (3.48) é da forma quasilinear, isto é, segue o formato descrito na equação (2.29).

Usamos a transformação fase-amplitude (2.38) para deixa o sistema (3.49), em sua forma padrão, fazendo a seguinte mudança

$$\begin{aligned}x &= r \cos(t + \phi) \\y &= -r \sin(t + \phi),\end{aligned}\tag{3.50}$$

com  $\omega = 1$ . Assim, obtemos o sistema correspondente ao sistema 2.41 dado por

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= -\epsilon \sin(t + \phi) f(r \cos(t + \phi), -r \sin(t + \phi)), r(0) = r_0 \\ \frac{d\phi}{dt} &= -\frac{\epsilon}{r} \cos(t + \phi) f(r \cos(t + \phi), -r \sin(t + \phi)), \phi(0) = \phi_0\end{aligned}\tag{3.51}$$

que está na forma padrão para o sistema (3.48), ou seja,  $\dot{x} = \epsilon f(x, t)$ , com  $x = (r, \phi)$ .

Note que o campo de vetores  $f$  é  $2\pi$ -periódico em  $t$  e se  $f \in C^1$ , podemos aplicar o método da Média apenas se tivermos excluído uma vizinhança da origem, uma vez que, se  $r$  for muito pequeno, o campo de vetores torna-se ilimitado, fazendo com que este sistema não satisfaça as hipóteses do Teorema da Média de Primeira Ordem 3.1.

Para podermos aplicar o Teorema 3.1, precisamos obter a equação média (3.2) correspondente ao sistema (3.51). Assim, calculamos as coordenadas da função média  $f^0$  para (3.51), as quais são dadas por

$$\begin{aligned}f_1(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t + \phi) f(r \cos(t + \phi), -r \sin(t + \phi)) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\theta) f(r \cos(\theta), -r \sin(\theta)) d\theta. \\ f_2(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\theta) f(r \cos(\theta), -r \sin(\theta)) d\theta\end{aligned}\tag{3.52}$$

onde  $\theta = t + \phi$ , assim, temos um novo sistema e uma aproximação assintótica da solução da equação (3.48) pode ser obtida resolvendo-o

$$\begin{cases} \dot{\tilde{r}} = -\epsilon f_1(\tilde{r}) \\ \dot{\tilde{\phi}} = -\frac{\epsilon}{\tilde{r}} f_2(\tilde{r}) \end{cases}\tag{3.53}$$

com  $\tilde{r}(0) = r(0)$  e  $\tilde{\phi}(0) = \phi(0)$ . Agora o problema se reduz a resolver um sistema autônomo de primeira ordem.

### 3.1.1 Equação de Van der Pol

Consideramos utilizando a equação de **Van der Pol** dada por

$$\ddot{x} + x = \epsilon(1 - x^2)\dot{x},\tag{3.54}$$

ou seja, para  $f(x, \dot{x}) = (1 - x^2)\dot{x}$ , utilizamos a mudança de coordenadas (3.50) e assim obtemos

$$f(r \cos(t + \phi), -r \sin(t + \phi)) = (1 - r^2 \cos^2(t + \phi))(-r \sin(t + \phi)).$$

De (3.51) temos

$$\begin{aligned}
 \frac{dr}{dt} &= -\epsilon \operatorname{sen}(t + \phi)(1 - r^2 \cos^2(t + \phi))(-r \operatorname{sen}(t + \phi)) \\
 &= r \cdot \epsilon \cdot \operatorname{sen}^2(t + \phi)(1 - r^2 \cos^2(t + \phi)) \\
 \frac{d\phi}{dt} &= -\frac{\epsilon}{r} \cos(t + \phi)(1 - r^2 \cos^2(t + \phi))(-r \operatorname{sen}(t + \phi)) \\
 &= \epsilon \cdot \cos(t + \phi)(1 - r^2 \cos^2(t + \phi))(\operatorname{sen}(t + \phi)).
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

Porém, para a aplicação dos Teoremas 3.3 e 3.4 vamos considerar  $\theta = t + \phi$  sendo uma variável semelhante ao tempo. Portanto devemos escrever a equação (3.54) em sua forma padrão em relação à  $\theta$ . Primeiramente observamos que fazendo  $\theta = t + \phi$  obtemos

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{dt}{dt} + \frac{d\phi}{dt} = 1 + \frac{d\phi}{dt}$$

ou ainda

$$\dot{\theta} = 1 + \dot{\phi}.$$

Assim, o sistema (3.55) se transforma no sistema

$$\begin{aligned}
 \frac{dr}{dt} &= r \cdot \epsilon \cdot \operatorname{sen}^2(\theta)(1 - r^2 \cos^2(\theta)) \\
 \frac{d\theta}{dt} &= 1 + \epsilon \cdot \cos(\theta)(1 - r^2 \cos^2(\theta))(\operatorname{sen}(\theta)).
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

Considerando  $\theta$  como a nova variável independente e lembrando que

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \implies \frac{dr}{d\theta} = \frac{\frac{dr}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}},$$

de (3.56) obtemos

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r \cdot \epsilon \cdot \operatorname{sen}^2(\theta)(1 - r^2 \cos^2(\theta))}{1 + \epsilon \cdot \cos(\theta)(1 - r^2 \cos^2(\theta))(\operatorname{sen}(\theta))}. \tag{3.57}$$

Denotamos

$$H(\epsilon) = \frac{r \cdot \epsilon \cdot \operatorname{sen}^2(\theta)(1 - r^2 \cos^2(\theta))}{1 + \epsilon \cdot \cos(\theta)(1 - r^2 \cos^2(\theta))(\operatorname{sen}(\theta))},$$

e expandimos  $H(\epsilon)$  em série de Taylor em torno de  $\epsilon = 0$ , obtendo

$$H(\epsilon) = H(0) + \epsilon \frac{\partial H}{\partial \epsilon}(0) + \epsilon^2 \dots = 0 + \epsilon r \cdot \operatorname{sen}^2(\theta)(1 - r^2 \cos^2(\theta)) + \epsilon^2 \dots \tag{3.58}$$

com  $\theta = t + \phi$ . Tomando o truncamento de (3.58) na ordem  $\epsilon^2$  e substituindo em (3.57) obtemos

$$\frac{dr}{d\theta} = \epsilon \cdot r \cdot \operatorname{sen}^2(\theta)(1 - r^2 \cos^2(\theta)),$$

que está na forma padrão.

Logo, a função média é dada por

$$\begin{aligned} f_1(r) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \operatorname{sen}^2(\theta)(1 - r^2 \cos^2(\theta)) d\theta \\ &= -\frac{r}{2} \left(1 - \frac{r^2}{4}\right). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Substituindo (3.59) no sistema (3.53), obtemos então um novo sistema autônomo dado por

$$\frac{d\tilde{r}}{d\theta} = \epsilon \frac{\tilde{r}}{2} \left(1 - \frac{\tilde{r}^2}{4}\right),$$

com  $\tilde{r}(0) = r_0$ . Se o valor inicial  $r_0$  da amplitude for igual à 0 ou 2, a amplitude  $\tilde{r}$  será constante para todo tempo  $t$ . Assim,  $r_0 = 0$  ou  $r_0 = 2$  são pontos críticos da equação média do sistema (3.1.1). Além disso, vamos verificar que o ponto  $r_0 = 0$  é um ponto crítico instável da equação original, e que o ponto  $r_0 = 2$  fornece uma solução periódica estável.

De fato, pelo Teorema 3.3, para termos a existência de uma solução periódica devemos verificar se ocorre (3.11), ou seja, se o determinante da jacobiana da função média aplicada em seus pontos críticos é diferente de 0. Assim,

$$\det \left( \frac{\partial f^0(y)}{\partial y} \right)_{y=0} = \det \left( \frac{df^0(\tilde{r})}{d\tilde{r}} \right)_{\tilde{r}=0} = \left[ \frac{1}{2} - \frac{3\tilde{r}^2}{8} \right]_{\tilde{r}=0} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

com

$$f^0(\tilde{r}) = \frac{\tilde{r}}{2} \left(1 - \frac{\tilde{r}^2}{4}\right).$$

Logo, segue do Teorema 3.3 a existência de uma solução periódica que está próxima de 0. Porém, segue do Teorema 3.4 que  $\frac{1}{2}$  é o autovalor de  $B^0$  (matriz definida na demonstração do Teorema 3.4) associado ao ponto crítico 0, assim,  $r_0 = 0$  é um ponto crítico instável.

Avaliamos  $r_0 = 2$ . Temos que

$$\det \left( \frac{df^0(\tilde{r})}{d\tilde{r}} \right)_{\tilde{r}=2} = \left[ \frac{1}{2} - \frac{3\tilde{r}^2}{8} \right]_{\tilde{r}=2} = -1 \neq 0.$$

Segue, temos do Teorema 3.3 a existência de uma solução periódica do sistema (3.1). Agora do Teorema 3.4,  $-1$  é o autovalor de  $B^0$  correspondente ao ponto crítico  $r_0 = 2$ . Assim, segue do Teorema 3.4 que a solução é assintoticamente estável.

Agora analisando os casos em que  $0 < r_0 < 2$ , temos que  $\frac{d\tilde{r}}{dt} > 0$ , logo  $\tilde{r}(t)$  é crescente, já quando  $r_0 > 2$ , segue que  $\frac{d\tilde{r}}{dt} < 0$ , portanto  $\tilde{r}(t)$  é decrescente, nos dois casos a solução se aproxima da solução periódica (ciclo limite) de raio 2 centrada no ponto singular 0, que é dada por

$$x(t) = 2 \cos(t + \phi_0) + O(\epsilon)$$

na escala de tempo  $\frac{1}{\epsilon}$ , uma vez que

$$\tilde{r}(t) = \frac{r_0 e^{\frac{1}{2}\epsilon t}}{\left(1 + \frac{1}{4}r_0^2(e^{\epsilon t} - 1)\right)^{\frac{1}{2}}} \cos(t + \phi_0),$$

é solução geral do sistema 3.1.1 logo, pelo Teorema 3.1 segue que a solução geral do sistema original é dada por

$$x(t) = \frac{r_0 e^{\frac{1}{2}\epsilon t}}{\left(1 + \frac{1}{4}r_0^2(e^{\epsilon t} - 1)\right)^{\frac{1}{2}}} \cos(t + \phi_0) + O(\epsilon)$$

na escala de tempo  $\frac{1}{\epsilon}$ .

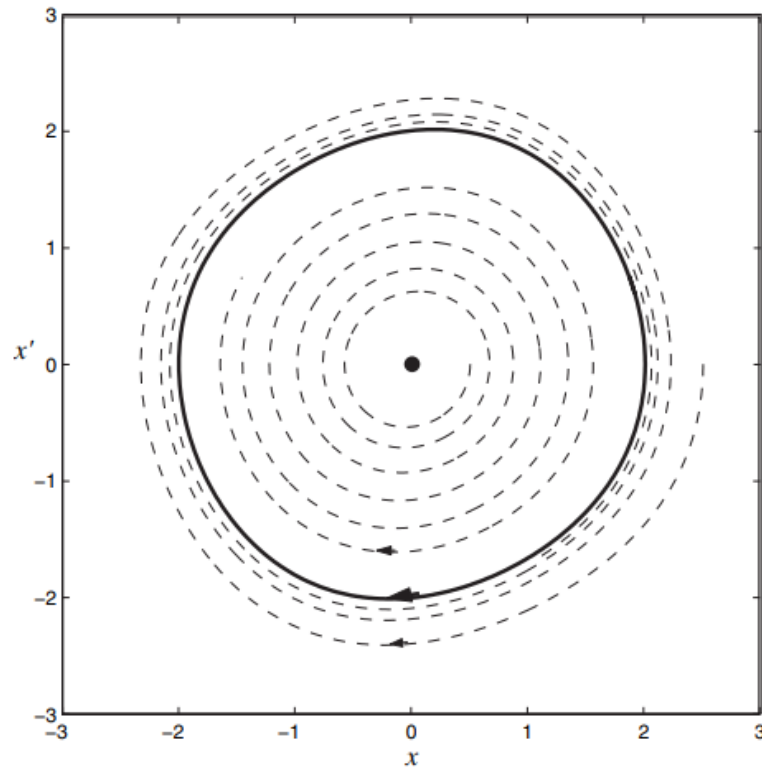


Figura 3.1: trajetória no espaço de fase da equação de Van Der Pol  $\ddot{x} + x = \epsilon(1 - x^2)\dot{x}$  onde  $\epsilon = 0.1$ . A origem é um ponto crítico do fluxo, o ciclo limite (curva fechada) corresponde a uma solução periódica estável. Fonte: [9]

Note que  $\tilde{r}(t)$  é uma aproximação assintótica de  $x(t)$ . Como foi dito, as soluções tendem para a solução periódica e chamaremos sua órbita de **ciclo limite** (órbita fechada).

A seguir, apresentamos um exemplo que ilustra a aplicação do Teorema 3.1, no qual mostramos como a escolha adequada da transformação pode simplificar a análise do problema de perturbação.

### 3.1.2 Equação de Mathieus

Considere

$$\begin{aligned} \ddot{x} + (1 + 2\epsilon \cos(2t))x &= 0; \\ x(0) &= \alpha; \\ \dot{x}(0) &= \beta. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Utilizando o mesmo procedimento descrito no início desta seção, porém iniciando a partir da função  $f(x, \dot{x}, t) = -2 \cos(2t)x$ , ou seja, realizando a mudança de coordenadas

conforme a equação (3.50), obtemos

$$f(r \cos(t + \phi), -r \sin(t + \phi), t) = -2r \cos(t + \phi) \cos(2t).$$

Segue que o sistema (3.60) em sua forma padrão é dado por

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= -\epsilon \sin(t + \phi)(-2r \cos(t + \phi) \cos(2t)) \\ &= 2 \cdot \epsilon \cdot r \cdot \sin(t + \phi) \cos(t + \phi) \cos(2t) \\ \frac{d\phi}{dt} &= -\frac{\epsilon}{r} \cos(t + \phi)(-2r \cos(t + \phi) \cos(2t)) \\ &= 2 \cdot \epsilon \cdot \cos^2(t + \phi) \cos(2t). \end{aligned} \tag{3.61}$$

Note que o lado direito da equação (3.61) é  $2\pi$ -periódico, assim, calculamos as equações médias para o sistema que são dadas por

$$\begin{aligned} f_1(r, \phi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2r \sin(t + \phi) \cos(t + \phi) \cos(2t) dt \\ &= \frac{r}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t + \phi) \cos(t + \phi) \cos(2t) dt. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Da identidade

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)], \tag{3.63}$$

considerando

$$\alpha = 2t \text{ e } \beta = t + \phi,$$

temos

$$\cos(2t) \cos(t + \phi) = \frac{1}{2} [\cos(t - \phi) + \cos(3t + \phi)] \tag{3.64}$$

substituindo (3.64) em (3.62), temos

$$\begin{aligned} f_1(r, \phi) &= \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t + \phi) [\cos(t - \phi) + \cos(3t + \phi)] dt \\ &= \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t + \phi) \cos(t - \phi) dt + \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t + \phi) \cos(3t + \phi) dt. \end{aligned}$$

Primeiramente vamos mostrar que

$$\frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t + \phi) \cos(3t + \phi) dt = 0, \tag{3.65}$$

temos que

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] \tag{3.66}$$

considere então

$$\alpha = t + \phi \text{ e } \beta = 3t + \phi,$$

assim,

$$\operatorname{sen}(t + \phi) \cos(3t + \phi) = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(4t + 2\phi) - \operatorname{sen}(2t)] \quad (3.67)$$

substituindo (3.67) em (3.65), temos

$$\frac{r}{4\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(2(2t + \phi)) dt - \frac{r}{4\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(2t) dt$$

note que

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha,$$

assim, considerando  $\alpha = 2t + \phi$ , temos

$$\frac{r}{4\pi} \int_0^{2\pi} 2 \operatorname{sen}(2t + \phi) \cos(2t + \phi) dt - \frac{r}{4\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(2t) dt.$$

Vamos agora resolver

$$\frac{r}{4\pi} \int_0^{2\pi} 2 \operatorname{sen}(2t + \phi) \cos(2t + \phi) dt$$

considerando

$$u = 2t + \phi \implies du = 2dt$$

assim,  $\phi \leq u \leq 4\pi + \phi$ , logo

$$\frac{r}{4\pi} \int_{\phi}^{4\pi+\phi} \operatorname{sen}(u) \cos(u) du$$

considere

$$s = \cos(u) \implies ds = -\operatorname{sen}(u) du,$$

com  $\cos \phi \leq s \leq \cos(4\pi + \phi)$ , temos então

$$-\frac{r}{4\pi} \int_{\cos(\phi)}^{\cos(4\pi+\phi)} s ds = 0$$

pois  $\cos(4\pi + \phi) = \cos(\phi)$ .

Agora vamos calcular

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(2t) dt$$

considere

$$u = 2t \implies du = 2dt,$$

com  $0 \leq u \leq 4\pi$  assim, temos

$$\frac{1}{2} \int_0^{4\pi} \operatorname{sen}(u) du = \frac{1}{2}[-\cos(4\pi) + \cos(0)] = 0.$$

Portanto mostramos que de fato ocorre (3.65).

Vamos calcular agora

$$\frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(t + \phi) \cos(t - \phi) dt \quad (3.68)$$

utilizando (3.66), temos

$$\operatorname{sen}(t + \phi) \cos(t - \phi) = \frac{1}{2} \quad (3.69)$$

substituindo (3.69) em (3.68), e separando as integrais temos

$$\frac{r}{4\pi} \int_0^{2\pi} \text{sen}(2\phi) dt + \frac{r}{4\pi} \int_0^{2\pi} \text{sen}(2t + 2\phi) dt.$$

Vamos calcular primeiramente

$$\frac{r}{4\pi} \int_0^{2\pi} \text{sen}(2t + 2\phi) dt,$$

considere

$$u = 2t + 2\phi \implies du = 2dt,$$

com  $2\phi \leq u \leq 4\pi + 2\phi$ , assim

$$-\int_{2\phi}^{4\pi+2\phi} \text{sen}(u) du = \frac{r}{8\pi} [-\cos(4\pi + 2\phi) + \cos(2\phi)] = 0,$$

pois  $\cos(4\pi + 2\phi) = \cos(2\phi)$ . Assim, basta calcular

$$\frac{r}{4\pi} \int_0^{2\pi} \text{sen}(2\phi) dt = \frac{1}{2} r \text{sen}(2\phi),$$

portanto, segue que

$$f_1(r, \phi) = \frac{1}{2} r \text{sen}(2\phi).$$

Agora vamos calcular  $f_2(r, \phi)$ .

$$f_2(r, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2 \cos^2(t + \phi) \cos(2t) dt, \quad (3.70)$$

primeiramente, note que

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\alpha), \quad (3.71)$$

considerando  $\alpha = t + \phi$ , temos

$$\cos^2(t + \phi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2(t + \phi)) \quad (3.72)$$

substituindo (3.72) em (3.70), temos

$$\begin{aligned} f_2(r, \phi) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2(t + \phi)) \right) \cos(2t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cos(2t) + \frac{1}{2} \cos(2(t + \phi)) \cos(2t) dt \end{aligned} \quad (3.73)$$

agora utilizando (3.63), temos que

$$\cos(2(t + \phi)) \cos(2t) = \frac{1}{2} [\cos(4t + 2\phi) + \cos(2\phi)], \quad (3.74)$$

substituindo (3.74) em (3.73), temos

$$\begin{aligned} f_2(r, \phi) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cos(2t) + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} [\cos(4t + 2\phi) + \cos(2\phi)] \right] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} [\cos(4t + 2\phi) + \cos(2\phi) + 2 \cos(2t)] dt \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[ \int_0^{2\pi} \cos(4t + 2\phi) dt + \int_0^{2\pi} 2 \cos(2t) dt + \int_0^{2\pi} \cos(2\phi) dt \right]. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Calculamos separadamente cada integral, assim, temos

$$\int_0^{2\pi} \cos(4t + 2\phi) dt = 0.$$

De fato, considerando

$$u = 4t + 2\phi \implies du = 4dt,$$

com  $2\phi \leq u \leq 8\pi + 2\phi$ . Assim, a integral torna-se

$$\frac{1}{4} \int_{2\phi}^{8\pi+2\phi} \cos(u) du = \frac{1}{4} [\text{sen}(8\pi + 2\phi) - \text{sen}(2\phi)] = 0,$$

uma vez que,  $\text{sen}(8\pi + 2\phi) = \text{sen}(2\phi)$ . Agora, afirmamos que

$$\int_0^{2\pi} 2 \cos(2t) dt = 0,$$

de fato, considere

$$u = 2t \implies du = 2dt,$$

com  $0 \leq u \leq 4\pi$ . Logo, a integral após a mudança de variável, ficará

$$\int_0^{4\pi} \cos(u) du = \text{sen}(4\pi) - \text{sen}(0) = 0.$$

Por fim, vamos calcular

$$\int_0^{2\pi} \cos(2\phi) dt = 2\pi \cos(2\phi). \quad (3.76)$$

substituindo (3.76) em (3.75), temos que

$$f_2(r, \phi) = \frac{1}{2} \cos(2\phi).$$

Logo, o sistema médio correspondente a equação (3.61) é dado por

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{r}}{dt} = \frac{1}{2} \epsilon \tilde{r} \text{sen}(2\tilde{\phi}) \\ \frac{d\tilde{\phi}}{dt} = \frac{1}{2} \epsilon \cos(2\tilde{\phi}). \end{cases}$$

Embora seja possível resolver esse sistema, é mais conveniente optar por uma transformação diferente que permita obter o sistema em sua forma padrão que seja mais fácil de ser resolvida. E para isso, escolhemos a seguinte transformação

$$\begin{aligned} x &= z_1 \cos(t) + z_2 \text{sen}(t), \\ \dot{x} &= -z_1 \text{sen}(t) + z_2 \cos(t). \end{aligned}$$

Note que esta transformação é um caso particular da transformação (2.36) tomando  $\omega = 1$  e  $t_0 = 0$ . Daí temos o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= 2\epsilon \text{sen}(t) \cos(2t)(z_1 \cos(t) + z_2 \text{sen}(t)), \\ \frac{dz_2}{dt} &= -2\epsilon \cos(t) \cos(2t)(z_1 \cos(t) + z_2 \text{sen}(t)). \end{aligned}$$

Temos que o lado direito da equação é  $2\pi$ -periódico, assim, vamos calcular suas funções médias que são dadas por

$$\begin{aligned} f_1(z_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{sen}(t) \cos(2t)(z_1 \cos(t) + z_2 \text{sen}(t)) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{2\pi} z_1 \text{sen}(t) \cos(2t) \cos(t) dt + \int_0^{2\pi} z_2 \text{sen}^2(t) \cos(2t) dt \right] \end{aligned} \quad (3.77)$$

vamos calcular separadamente cada integral. Note que

$$\int_0^{2\pi} z_1 \text{sen}(t) \cos(2t) \cos(t) dt = 0.$$

De fato, primeiramente vamos fazer uma mudança de variável, vamos considerar

$$u = t - \pi \implies du = dt,$$

com  $-\pi \leq u \leq \pi$ . Assim,

$$z_1 \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(u) \cos(2(u + \pi)) \cos(u) du,$$

mostramos que

$$f(u) = \text{sen}(u) \cos(2(u + \pi)) \cos(u) \quad (3.78)$$

é uma função ímpar, e para demonstrar isso devemos mostrar que  $f(-u) = -f(u)$ .

Temos

$$f(-u) = \text{sen}(-u) (\cos(2(-u + \pi))) (\cos(-u)),$$

veja que  $\text{sen}(-u) = -\text{sen}(u)$  pois *seno* é uma função ímpar, e temos que  $\cos(-2u + 2\pi) = \cos(-2u)$ . Além disso, note que  $\cos(-u) = \cos(u)$ , uma vez que, *coseno* é uma função par. Assim,

$$f(-u) = -\text{sen}(u) (\cos(2u)) (\cos(u)) = -\text{sen}(u) (\cos(2(u + \pi))) (\cos(u)) = -f(u).$$

Portanto, segue que (3.78) é uma função ímpar. Logo, como o nosso intervalo de integração  $[-\pi, \pi]$  é um intervalo simétrico em relação a origem, segue que a integral é zero.

Agora vamos calcular

$$\int_0^{2\pi} z_2 \text{sen}^2(t) \cos(2t) dt, \quad (3.79)$$

vamos fazer a integração por partes, e para isso considere

$$\begin{aligned} u &= \text{sen}^2(t) \implies du = 2 \text{sen}(t) \cos(t) \\ dv &= \cos(2t) dt \implies v = \frac{1}{2} \text{sen}(2t), \end{aligned}$$

assim, temos

$$\frac{1}{2} \text{sen}^2(t) \text{sen}(2t) \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \text{sen}(2t) \text{sen}(t) \cos(t) dt,$$

note que

$$\frac{1}{2} \text{sen}^2(t) \text{sen}(2t) \Big|_0^{2\pi} = 0$$

logo, basta calcularmos

$$-\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(2t) \operatorname{sen}(t) \cos(t) dt, \quad (3.80)$$

e para isso iremos utilizar a formula

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$

com

$$\alpha = t \text{ e } \beta = 2t.$$

Assim, temos

$$\operatorname{sen}(2t) \operatorname{sen}(t) = \frac{1}{2} [\cos(-t) - \cos(3t)], \quad (3.81)$$

substituindo (3.81) em (3.80), temos

$$\begin{aligned} & -\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} [\cos(-t) - \cos(3t)] \cos(t) dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2(t) - \cos(3t) \cos(t) dt \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt - \int_0^{2\pi} \cos(3t) \cos(t) dt \right], \end{aligned} \quad (3.82)$$

vamos resolver cada integral separadamente. Note que

$$\int_0^{2\pi} \cos(3t) \cos(t) dt = 0, \quad (3.83)$$

de fato, utilizando a equação (3.63), com

$$\alpha = t \text{ e } \beta = 3t,$$

temos

$$\cos(3t) \cos(t) = \frac{1}{2} [\cos(2t) - \cos(4t)], \quad (3.84)$$

substituindo o valor encontrado em (3.84) na integral, temos

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} [\cos(2t) - \cos(4t)] dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^{2\pi} \cos(2t) dt - \int_0^{2\pi} \cos(4t) dt \right] \end{aligned} \quad (3.85)$$

Note que

$$\int_0^{2\pi} \cos(2t) dt = 0, \quad (3.86)$$

considere

$$u = 2t \implies du = 2dt,$$

com  $0 \leq u \leq 4\pi$ . assim,

$$\int_0^{4\pi} \cos(u) du = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(4\pi) - \operatorname{sen}(0)] = 0,$$

de maneira análoga segue que

$$\int_0^{2\pi} \cos(4t) dt = 0.$$

Portanto, segue que a afirmação feita em (3.83) é verdadeira. Vamos calcular agora

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt,$$

utilizando (3.71), temos

$$\cos^2(t) = \frac{1}{2} \cos(2t) + \frac{1}{2}, \quad (3.87)$$

substituindo o valor encontrado em (3.87) na integral, temos

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cos(2t) + \frac{1}{2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cos(2t) dt + \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} dt \end{aligned}$$

e da equação (3.86), segue que basta calcular a integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} dt = \pi.$$

Portanto, segue que

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt = \pi, \quad (3.88)$$

substituindo (3.88) em (3.80), temos

$$- \int_0^{2\pi} \sin(2t) \sin(t) \cos(t) dt = -\frac{\pi}{4\pi} = -\frac{z_1}{4}.$$

Portanto, segue que

$$f_1(z_1, z_2) = -\frac{z_2}{4}.$$

$$f_2(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) \cos(2t) (z_1 \cos(t) + z_2 \sin(t)) dt = \frac{1}{4} z_1.$$

Substituindo (3.77) no sistema correspondente ao (3.53), temos

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{z}_1}{dt} &= 2\epsilon f_1(z_1) = \frac{1}{2}\epsilon \tilde{z}_2, \quad \tilde{z}_1(0) = \alpha \\ \frac{d\tilde{z}_2}{dt} &= -2\epsilon f_2(z_2) = -\frac{1}{2}\epsilon \tilde{z}_1, \quad \tilde{z}_2(0) = \beta, \end{aligned}$$

segue que o sistema médio é dado pelo sistema linear

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{z}_1}{dt} = \frac{1}{2}\epsilon \tilde{z}_2; \\ \frac{d\tilde{z}_2}{dt} = -\frac{1}{2}\epsilon \tilde{z}_1, \end{cases} \quad (3.89)$$

com  $\tilde{z}_1(0) = \alpha$  e  $\tilde{z}_2(0) = \beta$ . Portanto, a solução para o sistema (3.89) é a seguinte:

$$\begin{aligned}\tilde{z}_1(t) &= \frac{1}{2}(\alpha + \beta)e^{-\frac{1}{2}\epsilon t} + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)e^{\frac{1}{2}\epsilon t}, \\ \tilde{z}_2(t) &= -\frac{1}{2}(\alpha + \beta)e^{-\frac{1}{2}\epsilon t} - \frac{1}{2}(\alpha - \beta)e^{\frac{1}{2}\epsilon t}.\end{aligned}$$

Sendo assim, a aproximação assintótica para a solução  $x(t)$  da equação de Mathieus é dada por

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)e^{-\frac{1}{2}\epsilon t}(\cos(t) + \text{sen}(t)) + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)e^{\frac{1}{2}\epsilon t}(\cos(t) - \text{sen}(t)).$$

Agora neste próximo exemplo iremos ver a necessidade de restringir o intervalo de tempo.

### 3.1.3 Importância de Restringir o Intervalo de Tempo

Consideramos a equação

$$\ddot{x} + x = 8\epsilon\dot{x}^2 \cos(t),$$

com  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1$ . Denotamos  $f(\dot{x}, t) = 8\epsilon\dot{x}^2 \cos(t)$ . Utilizamos a transformação fase-amplitude (3.50) para obter a forma padrão, que é dada por

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = -8\epsilon r^2 \text{sen}^3(t + \phi) \cos(t), & r(0) = 1, \\ \frac{d\phi}{dt} = -8\epsilon r \text{sen}^2(t + \phi) \cos(t + \phi) \cos(t), & \phi(0) = -\frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (3.90)$$

Uma vez que o lado direito do sistema (3.90) é  $2\pi$ -periódica, calculamos a função média  $f^0 = (f_1, f_2)$  e assim, obter o sistema médio correspondente

$$\begin{aligned}f_1(r, \phi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -8r^2 \text{sen}^3(t + \phi) \cos(t) dt \\ &= \frac{-4r^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \text{sen}^3(t + \phi) \cos(t) dt,\end{aligned}$$

temos que

$$\text{sen}^3(t + \phi) = \frac{3}{4} \text{sen}(t + \phi) - \frac{1}{4} \text{sen}(3t + 3\phi),$$

assim, temos

$$\begin{aligned}f_1(r, \phi) &= \frac{-4r^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{3}{4} \text{sen}(t + \phi) - \frac{1}{4} \text{sen}(3t + 3\phi) \right] \cos(t) dt \\ &= \frac{-4r^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) \frac{3}{4} \text{sen}(t + \phi) + \frac{4r^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) \frac{1}{4} \text{sen}(3t + 3\phi) dt \\ &= \frac{-3r^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) \text{sen}(t + \phi) + \frac{r^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) \text{sen}(3t + 3\phi) dt.\end{aligned} \quad (3.91)$$

Afirmção

$$\int_0^{2\pi} \cos(t) \operatorname{sen}(3t + 3\phi) = 0,$$

de fato, utilizando (3.66), temos

$$\operatorname{sen}(3t + 3\phi) \cos(t) = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(2t + 3\phi) + \operatorname{sen}(4t + 3\phi)],$$

logo

$$\int_0^{2\pi} \cos(t) \operatorname{sen}(3t + 3\phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(2t + 3\phi) dt + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(4t + 3\phi) dt.$$

Mostraremos que

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(2t + 3\phi) dt = 0. \quad (3.92)$$

Considere

$$u = 2t + 3\phi \implies du = 2dt,$$

com  $3\phi \leq u \leq 4\pi + 3\phi$ , temos então

$$\frac{1}{2} \int_{3\phi}^{4\pi+3\phi} \operatorname{sen}(u) du = \frac{1}{2} [-\cos(4\pi + 3\phi) + \cos(3\phi)] = 0.$$

Analogamente, temos

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(4t + 3\phi) dt = 0.$$

Agora vamos calcular

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(t + \phi) \cos(t) dt,$$

utilizando novamente (3.66), temos

$$\operatorname{sen}(t + \phi) \cos(t) = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(\phi) + \operatorname{sen}(2t + \phi)],$$

logo, temos

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\phi) dt + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(2t + \phi) dt,$$

fazendo o mesmo processo feito para mostrar (3.92), temos

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(2t + \phi) dt = 0,$$

assim, basta calcular

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\phi) dt = \pi \operatorname{sen}(\phi). \quad (3.93)$$

Substituindo (3.93) em (3.91), temos

$$f_1(r, \phi) = \frac{-3r^2}{\pi} [\pi \operatorname{sen}(\phi)] = -3r^2 \operatorname{sen}(\phi).$$

Vamos agora calcular  $f_2$ .

$$\begin{aligned} f_2(r, \phi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -8r \operatorname{sen}^2(t + \phi) \cos(t + \phi) \cos(t) dt \\ &= \frac{-4r}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(t + \phi) \cos(t + \phi) \cos(t) dt \end{aligned}$$

temos de (3.63), que

$$\cos(t + \phi) \cos(t) = \frac{1}{2}[\cos(\phi) + \cos(2t + \phi)]$$

assim, a integral se torna

$$\begin{aligned} & \frac{-4r}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(t + \phi) \frac{1}{2}[\cos(\phi) + \cos(2t + \phi)] dt \\ &= \frac{-2r}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(t + \phi) \cos(\phi) dt - \frac{2r}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(t + \phi) \cos(2t + \phi) dt. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Vamos calcular cada integral separadamente.

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(t + \phi) \cos(\phi) dt = \cos(\phi) \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(t + \phi) dt, \quad (3.95)$$

utilizando

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\alpha), \quad (3.96)$$

segue que

$$\operatorname{sen}^2(t + \phi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2t + 2\phi), \quad (3.97)$$

substituindo (3.97) em (3.95), temos

$$\cos(\phi) \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} dt - \frac{\cos(\phi)}{2} \int_0^{2\pi} \cos(2t + 2\phi) dt.$$

Temos que

$$\frac{\cos(\phi)}{2} \int_0^{2\pi} \cos(2t + 2\phi) dt = 0,$$

assim, segue que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(t + \phi) \cos(\phi) dt &= \cos(\phi) \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} dt \\ &= \pi \cos(\phi). \end{aligned} \quad (3.98)$$

Agora vamos calcular

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(t + \phi) \cos(2t + \phi) dt,$$

utilizando (3.97), temos

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2t + 2\phi) \right) \cos(2t + \phi) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(2t + \phi) dt - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 2\pi \cos(2t + 2\phi) \cos(2t + \phi) dt, \end{aligned} \quad (3.99)$$

note que

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(2t + \phi) dt = 0, \quad (3.100)$$

assim, basta calcular a outra integral que é dada por

$$-\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(2t + 2\phi) \cos(2t + \phi) dt,$$

temos de (3.63) que

$$\cos(2t + 2\phi) \cos(2t + \phi) = \frac{1}{2} [\cos(\phi) + \cos(4t + 2\phi)],$$

substituindo, temos

$$-\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos(\phi) dt + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos(4t + 3\phi) dt,$$

como temos que

$$\int_0^{2\pi} \cos(4t + 3\phi) dt = 0,$$

segue que basta calcular

$$-\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos(\phi) dt = -\frac{\pi}{2} \cos(\phi). \quad (3.101)$$

Portanto, substituindo os valores encontrados em (3.98) e (3.101) em (3.94), temos

$$f_2(r, \phi) = -2r \cos(\phi) + r \cos(\phi) = -r \cos(\phi).$$

portanto o sistema médio é dado por

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{r}}{dt} = -3\epsilon\tilde{r}^2 \operatorname{sen}(\tilde{\phi}) \\ \frac{d\tilde{\phi}}{dt} = -\epsilon\tilde{r} \cos(\tilde{\phi}). \end{cases} \quad (3.102)$$

Integrando o sistema e aplicando os devidos valores iniciais, obtemos

$$x(t) = \frac{\operatorname{sen}(t)}{1 - 3\epsilon t} + O(\epsilon)$$

na escala de tempo  $\frac{1}{\epsilon}$ . Temos uma estimativa semelhante para derivada  $\dot{x}$ . A solução será limitada se  $0 \leq \epsilon t \leq C < \frac{1}{3}$ . Na figura abaixo é mostrado duas soluções, uma obtida por integração numérica e outra é a solução do sistema (3.102).

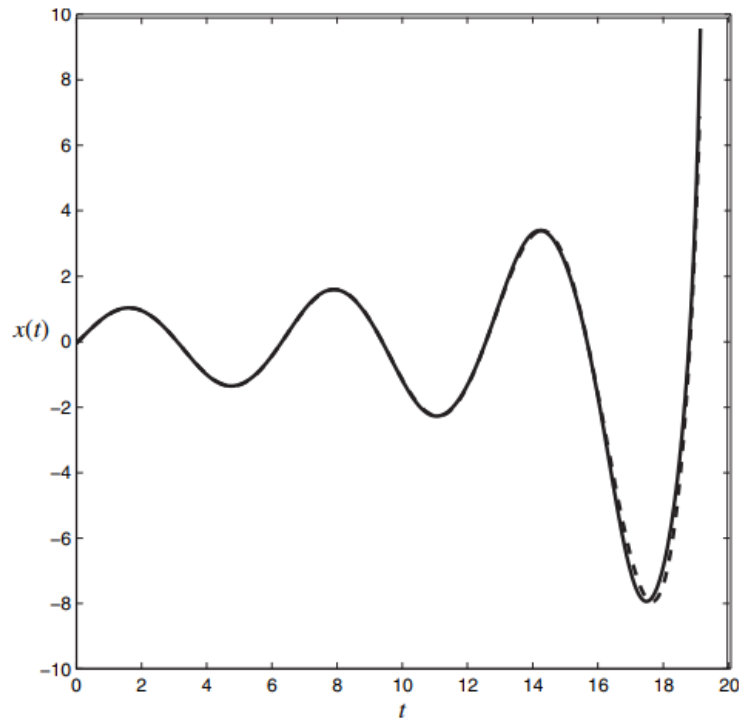


Figura 3.2: A solução  $x(t)$  da equação  $\ddot{x} + x = 2/15x^2 \cos(t)$ ,  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 1$ . A solução obtida por integração numérica foi desenhada com uma linha contínua, enquanto a aproximação assintótica foi indicada pela linha tracejada. Fonte: [9]

Podemos nos perguntar se a restrição da escala de tempo está intrinsecamente ligada à característica das soluções se tornarem ilimitadas, como no exemplo mencionado. No entanto, essa relação não é necessariamente verdadeira, e para ilustrar isso, apresentamos um contraexemplo para essa questão.

### 3.1.4 Soluções limitadas e uma escala de tempo restrita

Considere a equação

$$\begin{aligned} \ddot{x} + x &= \epsilon x \\ x(0) &= 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{aligned} \tag{3.103}$$

Vamos prosseguir com a mesma abordagem apresentada e empregada nesta seção, porém, iremos considerar a função

$$f(x, y) = x,$$

assim, utilizando a transformação fase-amplitude (3.50), temos

$$f(r \cos(t + \phi), -r \sin(t + \phi)) = r \cos(t + \phi),$$

obtemos assim o sistema em sua forma padrão, que é dado por

$$\frac{dr}{dt} = -\epsilon r \sin(t + \phi) \cos(t + \phi)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = -\epsilon \cos^2(t + \phi).$$

Calculamos as funções médias  $f_1$  e  $f_2$ .

$$f_1(r, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \operatorname{sen}(t + \phi) \cos(t + \phi) dt. \quad (3.104)$$

Da identidade

$$\operatorname{sen}(\alpha) \cos(\alpha) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2\alpha), \quad (3.105)$$

obtemos

$$\operatorname{sen}(t + \phi) \cos(t + \phi) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2(t + \phi)). \quad (3.106)$$

Substituindo (3.106) em (3.104), temos

$$\begin{aligned} f_1(r, \phi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2(t + \phi)) dt \\ &= \frac{r}{4\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(2(t + \phi)) dt \end{aligned}$$

Pela regra da substituição

$$f_1(r, \phi) = 0.$$

Calculamos

$$f_2(r, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(t + \phi) dt.$$

De (3.71) temos

$$\cos^2(t + \phi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2t + 2\phi),$$

assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(t + \phi) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2t + 2\phi) \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} dt + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2t + 2\phi) dt, \end{aligned}$$

De (3.100)

$$\int_0^{2\pi} \cos(2t + 2\phi) dt = 0,$$

assim,

$$f_2(r, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2}.$$

Portanto, segue que

$$f_2(r, \phi) = \frac{1}{2}. \quad (3.107)$$

Alcançamos então, o seguinte sistema médio:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{r}}{dt} &= 0, & \tilde{r}(0) &= 1, \\ \frac{d\tilde{\phi}}{dt} &= -\frac{1}{2}\epsilon, & \tilde{\phi}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Temos as seguintes aproximações

$$\tilde{x} = \cos\left(\left(1 - \frac{1}{2}\epsilon\right)t\right),$$

$$\dot{\tilde{x}} = -\text{sen}\left(\left(1 - \frac{1}{2}\epsilon\right)t\right).$$

Temos  $x(t) - \tilde{x}(t) = O(\epsilon)$  na escala de tempo  $\frac{1}{\epsilon}$ , de fato, para mostrar essa afirmação, devemos verificar que

$$\sup_t \left\{ \left| \cos((1 - \epsilon)^{1/2}t) - \cos((1 - 1/2\epsilon)t) \right| : 0 \leq t \leq \frac{L}{\epsilon} \right\} \leq K\epsilon,$$

é válida para  $0 \leq t \leq \frac{L}{\epsilon}$ , onde  $L$  é uma constante independente de  $\epsilon$ , e  $K$  é uma constante positiva dada pela Definição (2.20).

Temos que  $x(t) = \cos((1 - \epsilon)^{1/2}t)$ , é solução do sistema (3.103), assim, temos aqui um exemplo onde a aproximação na escala de tempo  $\frac{1}{\epsilon}$  não é válida na escala de tempo  $\frac{1}{\epsilon^2}$  uma vez que  $x(t) - \tilde{x}(t) = O_S(1)$  na escala de tempo  $1/\epsilon^2$ .

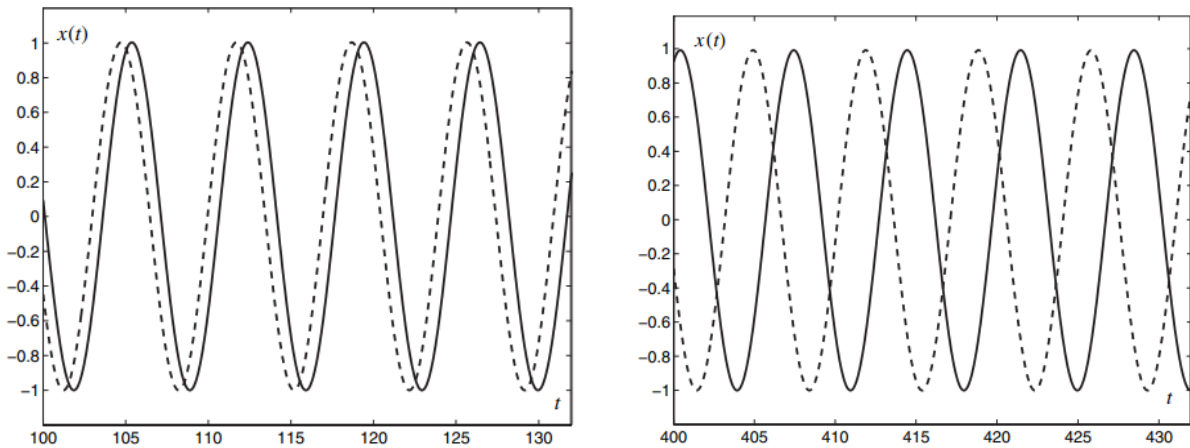


Figura 3.3: Soluções exatas e aproximadas da equação  $\ddot{x} + x = \epsilon x$ ,  $x(0) = 1$ ,  $\dot{x}(0) = 0$  e  $\epsilon = 0.1$ . A solução exata foi desenhada como uma linha contínua, enquanto a aproximação assintótica foi indicada pela linha tracejada. Observe que à esquerda foi plotado o intervalo de 100 a 130 unidades de tempo, enquanto à direita foi plotado o intervalo de 400 a 430. Fonte: [9]

Após essa análise podemos nos perguntar por que a necessidade de aplicar o método da Média após o árduo processo de colocar na forma padrão, por que não aplicar o método da Média direto na equação original? Iremos denominar esse processo de **Média bruta**. Neste próximo exemplo irá mostrar o por que dessa exigência e conseqüentemente desanimar essa ideia.

### 3.1.5 Contraexemplo da Média Bruta

Considere a equação

$$\ddot{x} + 4\epsilon \cos^2(t)\dot{x} + x = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1. \quad (3.108)$$

Essa equação representa um oscilador com amortecimento linear no qual o coeficiente de atrito oscila entre 0 e  $4\epsilon$ . Agora aplicando a média na expressão que representa o atrito, temos

$$f^0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 4 \cos^2(t) dt = \frac{2}{\pi} \pi = 2,$$

portanto, chegamos na seguinte equação

$$\ddot{z} + 2\epsilon\dot{z} + z = 0, \quad z(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = 1, \quad (3.109)$$

que é o que denominamos como sendo a **média bruta**.

Nossa expectativa é de que a solução  $z(t)$  do sistema (3.109) seja uma aproximação da solução  $x(t)$  do sistema (3.108) em alguma escala de tempo. Temos

$$z(t) = \frac{1}{(1 - \epsilon^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\epsilon t} \operatorname{sen}((1 - \epsilon^2)^{\frac{1}{2}} t).$$

No entanto, esse resultado é insatisfatório, e veremos o motivo disso ao empregarmos o método da Média na sua forma padrão, tal como realizado nos exemplos anteriores. Encontramos então

$$\frac{d\tilde{r}}{dt} = -\epsilon\tilde{r}\left(1 - \frac{1}{2}\cos(2\tilde{\phi})\right), \quad \tilde{r}(0) = 1,$$

$$\frac{d\tilde{\phi}}{dt} = -\frac{1}{2}\epsilon\operatorname{sen}(2\tilde{\phi}), \quad \tilde{\phi}(0) = -\frac{\pi}{2}.$$

Temos  $\tilde{r}(t) = e^{-3/2\epsilon t}$ ,  $\tilde{\phi}(t) = -\frac{\pi}{2}$ . Então segue que

$$x(t) = e^{-\frac{3}{2}\epsilon t} \operatorname{sen}(t) + O(\epsilon)$$

na escala de tempo  $\frac{1}{\epsilon}$ . E pode ser verificado através de alguns cálculos que

$$x(t) - z(t) = O_S(1),$$

ou seja,

$$x(t) - z(t) = O(1) \quad \left( x(t) - z(t) \text{ é limitada} \right),$$

mas

$$x(t) - z(t) \neq o(1).$$

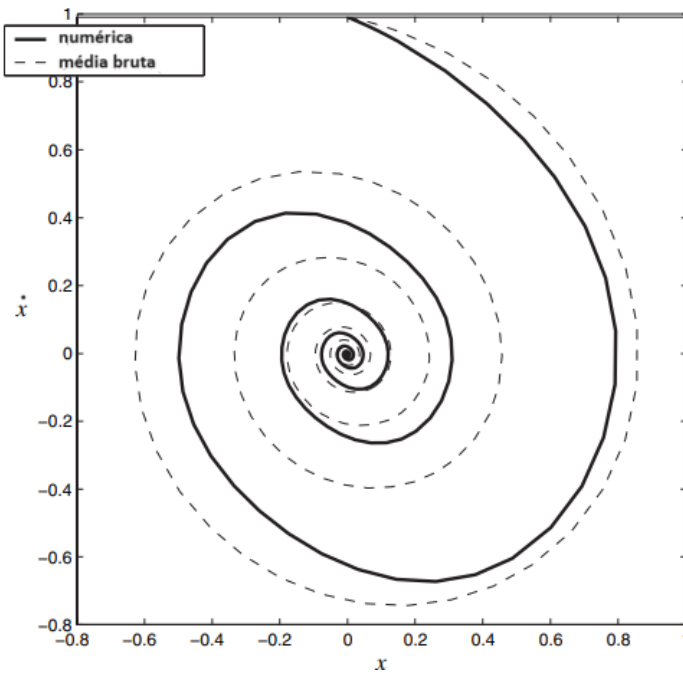


Figura 3.4: Plano de fase para  $\ddot{x} + 4\epsilon \cos^2(t)\dot{x} + x = 0$ ,  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 1$ ;  $\epsilon = 0.1$ . A trajetória no espaço de fase da solução numérica e a aproximação assintótica quase coincidem e foram representadas por uma linha contínua; a aproximação bruta foi indicada por uma linha tracejada. Fonte: [9]

Nós poderíamos ter colocado também  $e^{-\frac{3}{2}\epsilon t} \sin(t)$  mas esta aproximação assintótica coincide bastante com a solução numérica. Sabemos que se  $\epsilon = 0.1$

$$\sup_{t \geq 0} |x(t) - e^{-\frac{3}{2}\epsilon t} \sin(t)| \leq 0.015.$$

Na figura foi ilustrado o comportamento no plano de fase da média bruta e da solução numérica.

# 4 Aplicação do Método da Média em um sistema Hamiltoniano

Neste capítulo, abordarei inicialmente a definição de função Hamiltoniana e aplicarei o Teorema 3.1 em um sistema Hamiltoniano com um grau de liberdade. Em seguida, farei uma aplicação em cima de um sistema Hamiltoniano: o sistema de Armbruster-Guckenheimer-Kim (AGK). Compreender a dinâmica desses sistemas é fundamental para o entendimento de muitos fenômenos físicos, e o uso de funções Hamiltonianas é uma ferramenta poderosa para analisar sua evolução temporal.

O sistema AGK é um exemplo interessante de sistema Hamiltoniano, que possui uma rica dinâmica que pode ser explorada através da análise de sua função Hamiltoniana. Na teoria de sistemas dinâmicos, os sistemas conservativos, especialmente os sistemas Hamiltonianos, possuem uma relevância significativa. Na mecânica, é comum a presença de estruturas Hamiltonianas com adição de efeitos dissipativos. Investigar essa estrutura subjacente é muitas vezes vantajoso. A mecânica Hamiltoniana é um amplo campo que tem suas raízes na mecânica celeste do século XVIII.

## 4.1 Sistema Hamiltoniano

Um sistema de equações diferenciais em  $\mathbb{R}^{2n}$  é chamado de **Sistema Hamiltoniano com n graus de liberdade** se tem a forma

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_i \\ \dot{p}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

onde  $(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$  são as coordenadas em  $\mathbb{R}^{2n}$  e  $\mathcal{H} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função chamada de **Hamiltoniana** para o sistema (4.1). Quando lidamos com sistemas Hamiltonianos, é comum utilizarmos mudanças de coordenadas especiais  $(q, p) \longleftrightarrow (Q, P)$  que preservam a natureza Hamiltoniana do sistema. Essas mudanças de coordenadas transformam um sistema com um Hamiltoniano  $\mathcal{H}(q, p)$  em um sistema equivalente com um Hamiltoniano  $\mathcal{K}(Q, P) = \mathcal{H}(q(Q, P), p(Q, P))$ . Essas mudanças de coordenadas são associadas a mapeamentos simpléticos, e tradicionalmente são conhecidas como transformações canônicas.

Considere então a equação do movimento de um sistema Hamiltoniano com um grau de liberdade, ou seja,  $n = 1$ .

$$\ddot{x} + x = \epsilon f(x). \quad (4.2)$$

Podemos escrever na forma que definimos tomando  $q = x, p = \dot{x}$  e  $\mathcal{H} = \frac{(q^2 + p^2)}{2 - \epsilon F(q)}$  com  $\dot{F} = f$ . Utilizamos em (4.2) a transformação (3.50), para coletar dados sobre a variação da amplitude e fase. Logo, obtemos para a fase e a amplitude as seguintes equações:

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= -\epsilon \operatorname{sen}(t + \phi) f(r \cos(t + \phi)), \\ \frac{d\phi}{dt} &= \epsilon \frac{\cos(t + \phi)}{r} f(r \cos(t + \phi)).\end{aligned}$$

Temos

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(t + \phi) f(r \cos(t + \phi)) dt = 0.$$

De fato, considere

$$u = r \cos(t + \phi) \implies du = -r \operatorname{sen}(t + \phi),$$

com  $r \cos(\phi) \leq u \leq r \cos(2\pi + \phi)$ . Assim, temos

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(t + \phi) f(r \cos(t + \phi)) dt = -\frac{1}{r} \int_{r \cos(\phi)}^{r \cos(2\pi + \phi)} f(u) du = 0,$$

pois  $\cos(2\pi + \phi) = \cos(\phi)$ .

Então a equação média para a amplitude é dada por

$$\frac{d\tilde{r}}{dt} = 0,$$

isto é, na primeira aproximação a amplitude é constante. Isso significa que por mais infínima que seja a perturbação Hamiltoniana do oscilador Harmônico, ela irá produzir soluções com a amplitude constante, mas em geral, o período irá depender desta amplitude, ou seja, dos valores iniciais. Note, que poderíamos ter usado (2.33) porém os cálculos seriam mais complicados.

## 4.2 Aplicação no sistema AGK

Agora, aplicamos o Método da Média a um sistema Hamiltoniano associado à função Hamiltoniana dada por:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2) - \frac{a}{4}(x^2 + y^2)^2 - \frac{b}{2}x^2 \cdot y^2. \quad (4.3)$$

O Hamiltoniano inclui um potencial harmônico bidimensional e também contém termos quárticos adicionais.

Considere o sistema Hamiltoniano correspondente a função Hamiltoniana (4.3):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \partial\mathcal{H}/\partial p_x = p_x \\ \dot{y} &= \partial\mathcal{H}/\partial p_y = p_y \\ \dot{p}_x &= -\partial\mathcal{H}/\partial x = -x + ax(x^2 + y^2) + bxy^2 \\ \dot{p}_y &= -\partial\mathcal{H}/\partial y = -y + ay(x^2 + y^2) + bxy^2.\end{aligned} \quad (4.4)$$

A derivada com respeito a variável independente  $t$  é denotada pelo *ponto*. Temos que o sistema (4.4) é conhecido como o **Sistema de Armburster-Guckenheimer-Kim**, ou simplesmente como **Sistema AGK** que é como iremos nos referir.

No presente estudo, aplicaremos o **Método da Média de Primeira Ordem** para calcular órbitas periódicas, como detalhado no capítulo anterior. Esse método possibilita determinar, de maneira analítica, órbitas periódicas do sistema (4.4) para qualquer valor positivo de energia em função dos parâmetros  $a$  e  $b$ . Em suma, essa abordagem simplifica o desafio de encontrar soluções periódicas de um sistema diferencial para a tarefa de identificar os zeros de alguma função de dimensão finita apropriada.

Para tal análise o plano de parâmetros  $(a, b)$  foi particionado em quatro regiões distintas, sendo duas delas representadas por retas

$$\begin{aligned} L_1 &= \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b + a = 0\} \\ L_2 &= \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b = 0\} \end{aligned}$$

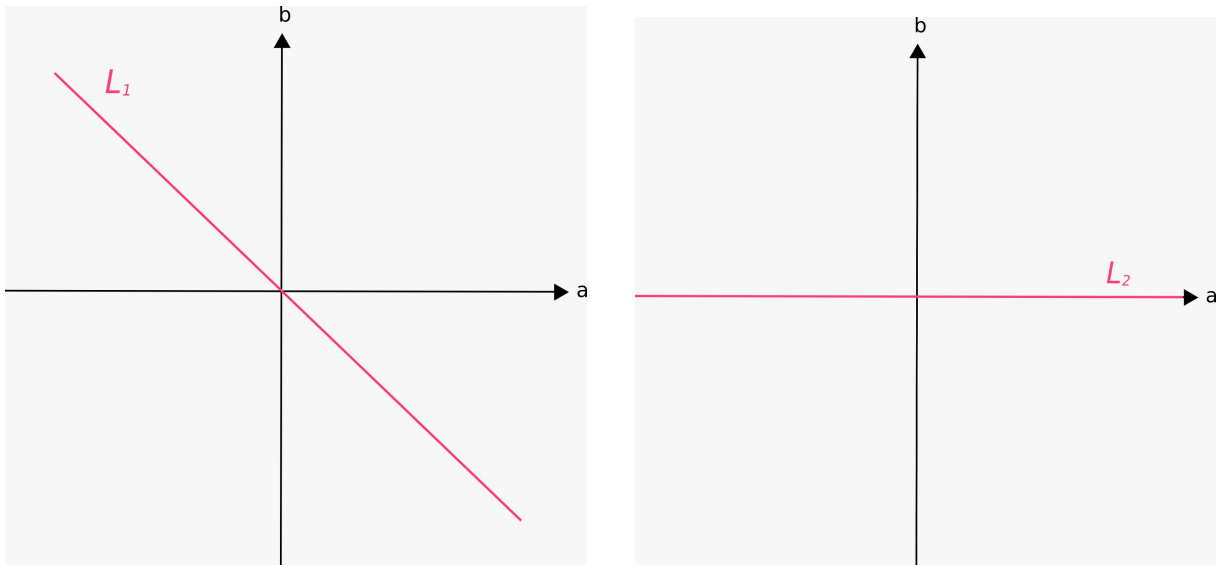


Figura 4.1: Representação geométrica de  $L_1$  e  $L_2$ .

e duas regiões

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b - 2a \leq 0, b > 0\} \cup \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b - 2a \geq 0, b < 0\}, \\ R_2 &= \mathbb{R}^2 \setminus (\overline{R_1} \cup L_1). \end{aligned}$$

Temos que  $\overline{R_1}$  representa o *fecho* de  $R_1$ .

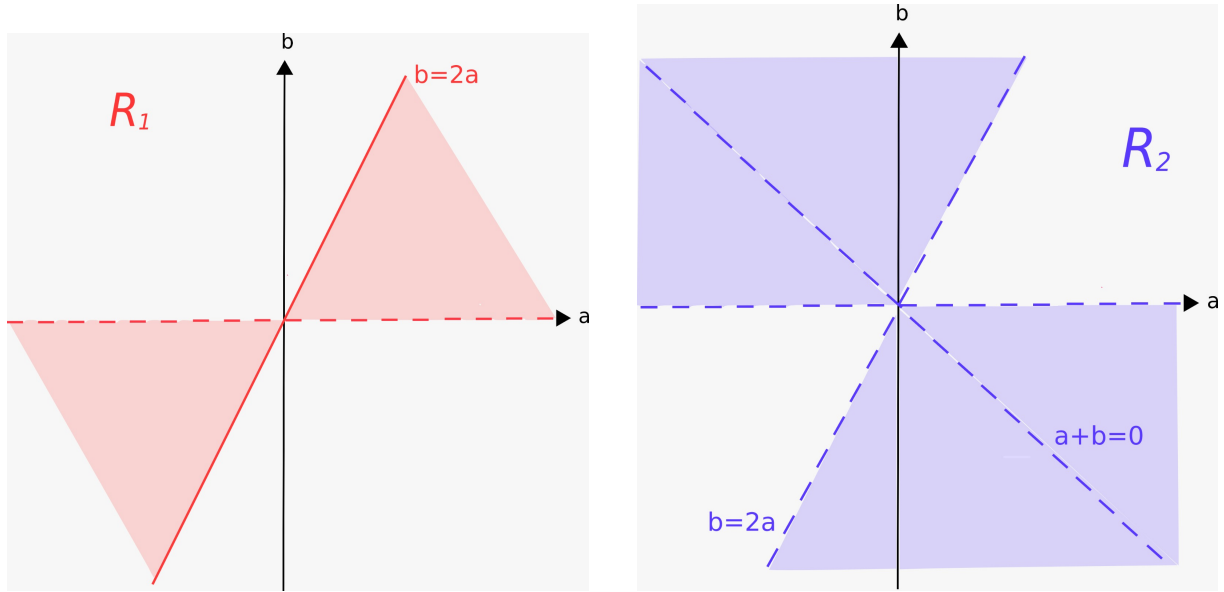


Figura 4.2: Representação geométrica de  $R_1$  e  $R_2$ .

O Teorema que veremos a seguir estabelece propriedades importantes do sistema Hamiltoniano AGK em níveis de energia positivos, dependendo dos valores dos parâmetros  $(a, b)$  do sistema.

**Teorema 4.1.** *Em cada nível de energia positiva, o sistema (4.4) apresenta pelo menos 2 órbitas periódicas se  $(a, b)$  pertence a  $L_2$ , 4 órbitas periódicas se  $(a, b)$  pertence a  $R_2$  e 6 órbitas periódicas se  $(a, b)$  pertence a  $R_1$ .*

Em particular, de acordo com o Teorema 4.1, se  $(a, b)$  não pertencer a  $L_1$ , então o sistema Hamiltoniano apresenta órbitas periódicas em todos os níveis de energia positiva.

*Demonstração.* Para provar o Teorema 4.1 usaremos o Método da Média, ou seja, será necessário aplicar o Teorema 3.3. Em geral, no espaço de fase de um sistema Hamiltoniano com mais de um grau de liberdade, as órbitas periódicas são encontradas em cilindros que são preenchidos por outras órbitas periódicas para mais detalhes veja [1].

A impossibilidade de aplicar diretamente o Teorema 3.1 a um sistema Hamiltoniano ocorre devido à função média correspondente  $f_1$  sempre ser zero no ponto de equilíbrio  $p$ , como ocorreu no exemplo feito no início deste capítulo. Entretanto, a solução para esse problema é estabelecer um nível de energia onde as órbitas periódicas possam ser separadas e analisadas. Para aplicar o Teorema 3.1 será necessário introduzir um parâmetro  $\epsilon$ , e para isso iremos fazer uma mudança de parâmetros dada por

$$(x, p_x, y, p_y) \mapsto (X, p_X, Y, p_Y) = (x/\sqrt{\epsilon}, p_x/\sqrt{\epsilon}, y/\sqrt{\epsilon}, p_y/\sqrt{\epsilon})$$

note que assim, segue que

$$x = X\sqrt{\epsilon}, p_x = p_X\sqrt{\epsilon}, y = Y\sqrt{\epsilon}, p_y = p_Y\sqrt{\epsilon}, \tag{4.5}$$

substituindo (4.5) em (4.3), temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \frac{1}{2}((p_X\sqrt{\epsilon})^2 + (p_Y\sqrt{\epsilon})^2 + (X\sqrt{\epsilon})^2 + (Y\sqrt{\epsilon})^2) \\
&\quad - \frac{a}{4}((X\sqrt{\epsilon})^2 + (Y\sqrt{\epsilon})^2)^2 - \frac{b}{2}(X\sqrt{\epsilon})^2(Y\sqrt{\epsilon})^2 \\
&= \frac{1}{2}(p_X^2\epsilon + p_Y^2\epsilon + X^2\epsilon + Y^2\epsilon) - \frac{a}{4}\epsilon^2(X^2 + Y^2)^2 - \frac{b}{2}\epsilon^2X^2Y^2 \\
&= \frac{1}{2}(p_X^2 + p_Y^2 + X^2 + Y^2) - \frac{a}{4}\epsilon(X^2 + Y^2)^2 - \frac{b}{2}\epsilon X^2Y^2.
\end{aligned}$$

Assim, o sistema (4.4) torna-se

$$\begin{aligned}
\dot{X} &= \partial\mathcal{H}/\partial p_X = p_X, \\
\dot{p}_X &= -\partial\mathcal{H}/\partial X = -X + \epsilon(aX^3 + (a+b)XY^2), \\
\dot{Y} &= \partial\mathcal{H}/\partial p_Y = p_Y, \\
\dot{p}_Y &= -\partial\mathcal{H}/\partial Y = -Y + \epsilon((a+b)X^2Y + aY^3).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Este sistema é um sistema Hamiltoniano com função Hamiltoniana

$$\mathcal{H}_1 = \frac{1}{2}(p_X^2 + p_Y^2 + X^2 + Y^2) - \epsilon\frac{a}{4}(X^2 + Y^2)^2 - \epsilon\frac{b}{2}X^2Y^2. \tag{4.7}$$

Devido ao fato de que a mudança de variáveis é somente uma transformação de escala, o sistema original (4.4) e o transformado (4.6) possuem basicamente o mesmo retrato de fase para todos os valores de  $\epsilon$  diferentes de zero. Além disso, para valores de  $\epsilon$  suficientemente pequenos, o sistema (4.6) se aproxima de um sistema integrável. Note que o sistema (4.6) não está em sua forma padrão, para isso consideramos mudança de variáveis

$$\begin{aligned}
X &= r \cos(\theta), & p_X &= r \sin(\theta) \\
Y &= \rho \cos(\theta + \alpha), & p_Y &= \rho \sin(\theta + \alpha)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

É importante notar que a escolha específica da mudança de variáveis feita no sistema leva à aparição das variáveis periódicas  $\theta$  e  $\alpha$ . Essas variáveis são relevantes para descrever a dinâmica periódica do sistema, e são obtidas quando se impõem as condições  $r > 0$  e  $\rho > 0$  na mudança de variáveis. Posteriormente, passamos  $\theta$  à variável independente para que o sistema seja periódico em  $\theta$ .

Substituindo (4.8) em (4.7) temos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_1 &= \frac{1}{2}((r \operatorname{sen}(\theta))^2 + (\rho \operatorname{sen}(\theta + \alpha))^2 + (r \operatorname{cos}(\theta))^2 + (\rho \operatorname{cos}(\theta + \alpha))^2) \\
 &- \epsilon \frac{a}{4}((r \operatorname{cos}(\theta))^2 + (\rho \operatorname{cos}(\theta + \alpha))^2)^2 - \epsilon \frac{b}{2}(r \operatorname{cos}(\theta))^2(\rho \operatorname{cos}(\theta + \alpha))^2 \\
 &= \frac{1}{2}(r^2 \operatorname{sen}^2(\theta) + \rho^2 \operatorname{sen}^2(\theta + \alpha) + r^2 \operatorname{cos}^2(\theta) + \rho^2 \operatorname{cos}^2(\theta + \alpha)) \\
 &- \epsilon \frac{a}{4}(r^2 \operatorname{cos}^2(\theta) + \rho^2 \operatorname{cos}^2(\theta + \alpha))^2 - \epsilon \frac{b}{2}r^2 \operatorname{cos}^2(\theta)\rho^2 \operatorname{cos}^2(\theta + \alpha) \\
 &= \frac{1}{2}(r^2 + \rho^2) - \frac{1}{4}\epsilon \cdot a(r^2 \operatorname{cos}^2(\theta) + \rho^2 \operatorname{cos}^2(\theta + \alpha))^2 \\
 &- \frac{1}{2}\epsilon \cdot b \cdot r^2 \rho^2 \operatorname{cos}^2(\theta) \operatorname{cos}^2(\theta + \alpha).
 \end{aligned}$$

Portanto, o Hamiltoniano nessas novas variáveis torna-se

$$\mathcal{H}_2 = \frac{1}{2}(r^2 + \rho^2) - \frac{1}{4}\epsilon \cdot a(r^2 \operatorname{cos}^2(\theta) + \rho^2 \operatorname{cos}^2(\theta + \alpha))^2 - \frac{1}{2}\epsilon \cdot b \cdot r^2 \rho^2 \operatorname{cos}^2(\theta) \operatorname{cos}^2(\theta + \alpha),$$

assim, as equações de movimento são dadas por

$$\begin{aligned}
 \frac{dr}{dt} = \dot{r} &= \epsilon r \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{cos}(\theta)(ar^2 \operatorname{cos}^2(\theta) + (a + b)\rho^2 \operatorname{cos}^2(\theta + \alpha)) \\
 \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} &= -1 + \epsilon(ar^2 \operatorname{cos}^4(\theta) + (a + b)\rho^2 \operatorname{cos}^2(\theta) \operatorname{cos}^2(\theta + \alpha)) \\
 \frac{d\rho}{dt} = \dot{\rho} &= \epsilon \rho \operatorname{sen}(\theta + \alpha) \operatorname{cos}(\theta + \alpha)((a + b)r^2 \operatorname{cos}^2(\theta) + a\rho^2 \operatorname{cos}^2(\theta + \alpha)) \\
 \frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha} &= \epsilon(-ar^2 \operatorname{cos}^4(\theta) + (a + b)(r^2 + \rho^2) \operatorname{cos}^2(\theta) \operatorname{cos}^2(\theta + \alpha) + a\rho^2 \operatorname{cos}(\theta + \alpha)).
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

No entanto, as derivadas presentes no lado esquerdo dessas equações são em relação à variável de tempo  $t$ , no qual a função aplicada em  $t$  não é periódica. Como as funções do lado esquerdo do sistema (4.9) são periódicas em  $\theta$ , tomamos  $\theta$  como a variável independente. Denotamos as derivadas com relação a  $\theta$  por "'".

Primeiramente temos que calcular

$$\frac{dr}{d\theta}, \frac{d\rho}{d\theta}, \frac{d\alpha}{d\theta}$$

mas note que

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \implies \frac{dr}{d\theta} = \frac{\frac{dr}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}},$$

de maneira análoga, segue que

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\frac{d\rho}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}} \text{ e } \frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}}$$

Então, o sistema 4.9 é transformado em

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} = r' &= \frac{\epsilon r \sin \theta \cos \theta (ar^2 \cos^2 \theta + (a+b)\rho^2 \cos^2(\theta + \alpha))}{-1 + ar^2 \epsilon \cos^4 \theta + (a+b)\epsilon \rho^2 \cos^2 \theta \cos^2(\theta + \alpha)}, \\ \frac{d\rho}{d\theta} = \rho' &= \frac{\epsilon \rho \sin(\theta + \alpha) \cos(\theta + \alpha) ((a+b)r^2 \cos^2 \theta + a\rho^2 \cos^2(\theta + \alpha))}{-1 + ar^2 \epsilon \cos^4 \theta + (a+b)\epsilon \rho^2 \cos^2 \theta \cos^2(\theta + \alpha)} \\ \frac{d\alpha}{d\theta} = \alpha' &= \frac{\epsilon (-ar^2 \cos^4 \theta + (a+b)(r^2 - \rho^2) \cos^2 \theta \cos^2(\theta + \alpha) + a\rho^2 \cos^4(\theta + \alpha))}{-1 + ar^2 \epsilon \cos^4 \theta + (a+b)\epsilon \rho^2 \cos^2 \theta \cos^2(\theta + \alpha)}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

O sistema agora possui apenas três equações, uma vez que a equação  $\theta$  não é necessária para a resolução do problema. Se expandirmos o sistema (4.10) como uma série de Taylor em termos de potências de  $\epsilon$ , obtemos uma representação alternativa do sistema, que é dada por

$$\begin{aligned} r' &= -\epsilon \cdot r \sin(\theta) \rho^2 \cos(\theta) (a \cdot r^2 \cos^2(\theta) + (a+b)\rho^2 \cos^2(\theta + \alpha)) + O(\epsilon^2), \\ \rho' &= -\epsilon \cdot \rho \cdot \sin(\theta + \alpha) \cos(\theta + \alpha) ((a+b)r^2 \cdot \cos^2(\theta) \\ &\quad + a \cdot \rho^2 \cdot \cos^2(\theta + \alpha)) + O(\epsilon^2), \\ \alpha' &= \epsilon (a \cdot r^2 \cdot \cos^4(\theta) - (a+b)(r^2 - \rho^2) \cos^2(\theta) \cos^2(\theta + \alpha) \\ &\quad - a \cdot \rho^2 \cdot \cos^4(\theta + \alpha)) + O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (4.11)$$

O sistema 4.11 agora é  $2\pi$ -periódico em relação à variável  $\theta$ . Para estudar suas órbitas periódicas, utilizaremos o Teorema 3.3 no nível Hamiltoniano  $\mathcal{H} = h$ , onde  $h > 0$ . Resolvendo a equação  $\mathcal{H} = h$  para  $\rho$ , chegaremos a uma solução dada por

$$\rho = \sqrt{-\frac{\sec^4(\alpha + \theta)A + \epsilon r^2 \cos^2 \theta (a+b) \sec^2(\alpha + \theta)}{a\epsilon}} \quad (4.12)$$

onde

$$A = -1 + [1 + \epsilon \cos^4(\alpha + \theta)(\epsilon b(2a+b)r^4 \cos^4 \theta + 2a(r^2 - 2h)) - 2\epsilon r^2 \cos^2 \theta (a+b) \cos^2(\alpha + \theta)]^{\frac{1}{2}}.$$

Ao substituir  $\rho$  na equação (4.11) e expandir em séries de potência de  $\epsilon$ , conseguimos obter duas equações diferenciais

$$\begin{aligned} r' &= \epsilon \cdot r \cdot \sin(\theta) \cos(\theta) ((a+b)(r^2 - 2h) \cos^2(\alpha + \theta) \\ &\quad - ar^2 \cos^2(\theta)) + O(\epsilon^2) \\ \alpha' &= \epsilon (2(a+b)(h - r^2) \cos^2(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) + a(r^2 - 2h) \cos^4(\alpha + \theta) \\ &\quad + ar^2 \cos^4(\theta) + O(\epsilon^2)) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Podemos ver que o sistema (4.13) satisfaz as hipóteses do Teorema 3.1 e pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \epsilon f(x, t) + \epsilon^2 g(x, t, \epsilon) \\ x(t_0) &= x_0,\end{aligned}\tag{4.14}$$

onde  $f = (F_{11}, F_{12})$ , com

$$\begin{aligned}F_{11} &= r \cdot \text{sen}(\theta) \cos(\theta) ((a + b)(r^2 - 2h) + \cos^2(\alpha + \theta) \\ &\quad - ar^2 \cos^2(\theta)), \\ F_{12} &= 2(a + b)(h - r^2) \cos^2(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) + a(r^2 - 2h) \cos^4(\alpha + \theta) \\ &\quad + a \cdot r^2 \cdot \cos^4(\theta).\end{aligned}$$

Podemos observar que a função  $f$  é  $2\pi$ -periódica na variável  $\theta$ , que é a variável independente do sistema (4.13). Calculamos a função média da equação (4.14) em relação à variável  $\theta$ , obtemos o seguinte resultado:

$$f_1(r, \alpha) = (f_{11}(r, \alpha), f_{12}(r, \alpha)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (F_{11}, F_{12}) d\theta,$$

onde

$$f_{11}(r, \alpha) = -\frac{1}{8}r(a + b)(r^2 - 2h) \text{sen}(2\alpha),$$

e

$$f_{12}(r, \alpha) = \frac{1}{4}(h - r^2)((a + b) \cos(2\alpha) - a + 2b).$$

Precisamos encontrar os valores  $(r^*, \alpha^*)$  no qual  $f_1(r, \alpha)$  aplicado neles seja igual a zero e, em seguida, verificar se ocorre

$$\det \left( \frac{\partial(f_{11}, f_{12})}{\partial(r, \alpha)} \Big|_{(r, \alpha) = (r^*, \alpha^*)} \right) \neq 0,\tag{4.15}$$

ou seja, precisamos encontrar zeros simples da função  $f_1$ . A equação  $f_{11}(r, \alpha) = 0$  nos dá três opções para  $r$  e quatro opções para  $\alpha$ . As soluções  $r = 0$  e  $r = -\sqrt{2h}$  não são aceitáveis, pois  $r$  deve ser maior que zero. Portanto, as soluções válidas para  $f_{11}(r, \alpha) = 0$  são  $r = \sqrt{2h}$  e  $\alpha = 0, \pi/2, -\pi/2, \pi$ . Em seguida, procuramos soluções para  $f_{12}(r, \alpha) = 0$ , que nos dá nove possíveis soluções  $(r^*, \alpha^*)$  com  $r^*$  sendo maior que zero:

$$\begin{aligned}s_1 &= (\sqrt{h}, 0), & s_2 &= (\sqrt{h}, \pi), & s_3 &= (\sqrt{h}, \pi/2), \\ s_4 &= (\sqrt{h}, 3\pi/2) & s_5 &= (\sqrt{2h}, 0), & s_6 &= (\sqrt{2h}, \pi) \\ s_7 &= (\sqrt{2h}, \pi/2) & & & & \\ s_8 &= \left( \sqrt{2h}, \frac{1}{2} \arccos \left( \frac{a - 2b}{a + b} \right) \right), & & & & \\ s_9 &= \left( \sqrt{2h}, 2\pi - \frac{1}{2} \arccos \left( \frac{a - 2b}{a + b} \right) \right).\end{aligned}\tag{4.16}$$

O valor de  $\rho$  dado pela equação (4.12) tende à  $\sqrt{h}$  para as soluções  $s_1, s_2, s_3$  e  $s_4$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$  para cada  $\rho$  correspondente e  $\rho \rightarrow 0$  para as soluções  $s_5, s_6, s_7, s_8$  e  $s_9$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$  para valores de  $\rho$  correspondentes. Temos que em (4.16), para as soluções  $s_8$  e  $s_9$ , assumimos que  $-1 \leq \frac{a-2b}{a+b} \leq 1$ .

As desigualdades são válidas somente em duas regiões delimitadas pelas linhas  $b = 0$  e  $b = 2a$ , com a origem excluída.

De fato, temos

$$-1 \leq \frac{a-2b}{a+b} \Rightarrow -a-b \leq a-2b \Rightarrow b \leq 2a,$$

e temos também

$$\frac{a-2b}{a+b} \leq 1 \Rightarrow a-2b \leq a+b \Rightarrow -3b \leq 0 \Rightarrow b \leq 0.$$

Essas regiões estão localizadas nos quadrantes  $\{(a, b) : a > 0, b > 0\}$  e  $\{(a, b) : a < 0, b < 0\}$  do plano  $(a, b)$ .

Agora vamos calcular (4.15) em cada uma das soluções encontradas considerando a matriz

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(a+b)\pi(2h-3r^2)\text{sen}(2\alpha) & -\frac{1}{2}(a+b)\pi r(r^2-2h)\text{cos}(2\alpha) \\ -\pi r(-a+2b+(a+b)\text{cos}(2\alpha)) & (-a-b)\pi(h-r^2)\text{sen}(2\alpha) \end{pmatrix},$$

assim, obtemos para  $s_1$  e  $s_2$ ,

$$\det(M)_{s_1, s_2} = \frac{3}{8}h^2b(a+b),$$

para  $s_3$  e  $s_4$ , temos

$$\det(M)_{s_3, s_4} = \frac{1}{8}h^2(2a-b)(a+b),$$

para  $s_5, s_6$  e  $s_7$  segue que

$$\det(M)_{s_5, s_6, s_7} = 0,$$

já para  $s_8$  e  $s_9$ , temos

$$\det(M)_{s_8, s_9} = \frac{3}{4}h^2b(b-2a).$$

Podemos notar que o Jacobiano nas soluções  $s_5, s_6$  e  $s_7$  é igual a zero, o que impede a aplicação do Teorema 3.3 para essas soluções. Podemos afirmar que, quando  $h \neq 0$ , o Jacobiano não é igual a zero nas soluções  $s_1$  e  $s_2$  se  $b(a+b) \neq 0$ . Nas soluções  $s_3$  e  $s_4$ , o Jacobiano não é igual a zero se  $(2a-b)(a+b) \neq 0$ . Já nas soluções  $s_8$  e  $s_9$ , o Jacobiano não é igual a zero se  $b(b-2a) \neq 0$ .

Em resumo, de acordo com os Teoremas 3.1, 3.3 e 3.4 as soluções  $s_1$  e  $s_2$  de  $f(r^*, \alpha^*) = 0$  correspondem a duas soluções periódicas do sistema (4.13) e, conseqüentemente, do sistema Hamiltoniano (4.6) no nível de energia  $h > 0$ , se  $b \neq 0$  e  $b = 2a$ . Da mesma forma, se  $a \neq 0$  e  $b = 0$ , as soluções  $s_3$  e  $s_4$  fornecem duas soluções periódicas para o sistema 4.13. Se a condição  $b(a+b)(2a-b) \neq 0$  é satisfeita, então as soluções  $s_1, s_2, s_3, s_4, s_8$  e  $s_9$  de  $f_1 = 0$  fornecem pelo menos seis soluções periódicas para o sistema Hamiltoniano (4.6). Com isso, demonstramos o Teorema 4.1.

Se  $a+b=0$ , não teremos soluções periódicas fornecidas pelas soluções  $s_i$  para  $i$  igual a 1, 2, 3, 4, 8, 9, porque o Jacobiano delas é igual a zero (para  $i$  igual a 1, 2, 3, 4) ou não são definidas (para  $i$  igual a 8, 9).  $\square$

## 5 Conclusão

Com base na pesquisa realizada, podemos concluir que o Método da Média de Primeira Ordem se mostra uma ferramenta eficaz para determinar o número de ciclos limite em um sistema perturbado. A Teoria da Média simplifica a busca por órbitas periódicas em sistemas de equações diferenciais, desde que sejam satisfeitas determinadas condições convenientes, ao transformar essa tarefa em encontrar os zeros simples de uma função de dimensão finita. Além disso, foi apresentado um resultado que possibilita a avaliação da estabilidade ou instabilidade desta solução periódica, o que, em alguns casos, permite a análise qualitativa de determinados fenômenos. Observamos ainda que o método é capaz de identificar soluções próximas por meio do sistema médio, o que pode facilitar a resolução de problemas perturbados.

Realizamos uma análise detalhada do Método da Média de Primeira Ordem, avaliando suas vantagens e limitações. Verificou-se que as aproximações oferecidas por esse método são significativas, especialmente quando o sistema está na sua forma padrão. Portanto, é fundamental garantir que o sistema esteja nessa configuração. Para situações em que o Método da Média de Primeira Ordem não produz resultados satisfatórios, existe a possibilidade de aplicar a teoria do método para ordens superiores, embora seja necessário considerar a hipótese relacionada à derivada da função  $f$ .

# Referências

- [1] ABRAHAMS, R.; MARSDEN, Jerrold E.; RATIU, T. *Foundations of mechanics*. Benjamin/Cummings Publ. co. Reading, Mass. USA, 1978.
- [2] EUZÉBIO, Rodrigo Donizete. *O método do Avering via teoria do grau de Brouwer e aplicações*. 2011.
- [3] LLIBRE, Jaume; ROBERTO, Luci. *Periodic orbits and non-integrability of Armbruster-Guckenheimer-Kim potential*. *Astrophysics and Space Science*, v. 343, n. 1, p. 69-74, 2013.
- [4] OLIVEIRA, Douglas Toseto Marçal de. *Estudo de órbitas periódicas em equações diferenciais não autônomas*. 2014.
- [5] PERKO, Lawrence. *Differential equations and dynamical systems*. Springer Science and Business Media, 2013.
- [6] SANDERS, Jan A.; VERHULST, Ferdinand; MURDOCK, James. *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*. New York: Springer, 2007.
- [7] SOTOMAYOR, Jorge. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1979.
- [8] TENENBAUM, Morris; POLLARD, Harry. *Ordinary differential equations: an elementary textbook for students of mathematics, engineering, and the sciences*. Courier Corporation, 1985.
- [9] VERHULST, Ferdinand. *Nonlinear differential equations and dynamical systems*. Springer Science and Business Media, 2006.
- [10] WILSON, Curtis A. *Perturbations and solar tables from Lacaille to Delambre: The rapprochement of observation and theory, part II*. *Archive for History of Exact Sciences*, p. 189-304, 1980.