RESSALVA

Atendendo a solicitação do autor, o texto completo desta tese será disponibilizado somente a partir de 11/08/2022.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Campus de Ilha Solteira

Marco Antonio Travassos

Controle de Sistemas Periódicos Variantes no Tempo via Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno e Transformação Lyapunov-Floquet

Ilha Solteira
2022

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Ilha Solteira

Marco Antonio Travassos

Controle de Sistemas Periódicos Variantes no Tempo via Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno e Transformação Lyapunov-Floquet

Tese de doutorado apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual Paulista, campus de Ilha Solteira.

Área de Conhecimento: Automação.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Cardim

Ilha Solteira
2022

FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

T779c

Travassos, Marco Antonio.
Controle de sistemas periódicos variantes no tempo via modelos Fuzzy Takagi-Sugeno e transformação Lyapunov-Floquet / Marco Antonio Travassos. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2022
109 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2022

Orientador: Rodrigo Cardim
Inclui bibliografia

1. Sistemas periódicos variantes no tempo. 2. Transformação Lyapunov-Floquet. 3. Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno. 4. Desigualdades Matriciais Lineares.

Raiane da Silva Santos
Raiane da Silva Santos
Supervisora Técnica de Seção
Seção Técnica de Referência, Atendimento ao usuário e Documentação
Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação
CRB/8 - 9999

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Ilha Solteira

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA TESE: Controle de Sistemas Periódicos Variantes no Tempo via Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno e Transformação Lyapunov-Floquet

AUTOR: MARCO ANTONIO TRAVASSOS

ORIENTADOR: RODRIGO CARDIM

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Doutor em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: Automação pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. RODRIGO CARDIM (Participaçao Virtual)
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof. Dr. MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA (Participaçao Virtual)
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO (Participaçao Virtual)
Departamento de Engenharia Eletrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof. Dr. WALLYSONN ALVES DE SOUZA (Participaçao Virtual)
Coordenação de Ciências Matemáticas e Naturais / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins - IFTO

Prof. Dr. UILIAM NELSON LENDZION TOMAZ ALVES (Participaçao Virtual)
Departamento de Eixo de Controle e Processos Industriais / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná - IFPR

Ilha Solteira, 11 de fevereiro de 2022

*Dedico este trabalho à minha família,
com especial carinho para minha esposa
Natalia e à minhã mãe Adenivia.*

Agradecimentos

Primeiramente a Deus que me capacitou, deu me saúde e forças para que tudo isso fosse possível.

À minha melhor amiga e esposa amada Natalia pelo companheirismo, paciência e carinho que ela teve para comigo durante esse trabalho.

Aos meus pais amados, Adenivia e Orlando, que sempre acreditaram em mim e aos meus demais familiares.

À minha saudosa vó Alaide por todo amor e carinho que me deu.

Aos professores Dr. Rodrigo Cardim e Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira por aceitarem me orientar nesse trabalho, pelos ensinamentos, por compartilhar comigo seus conhecimentos acadêmicos, pela paciência, pelas sugestões a esse trabalho, por acreditarem em mim e no meu potencial e tornar esse trabalho um aprendizado prazeroso. Se cheguei até aqui foi porque tive pessoas iguais a você que acreditaram em mim.

A Sonia Maria Delai Pardo por acreditar naquele menino travesso, que sempre aprontava na escola onde ela era diretora, mas ao invés das broncas, dizia que ele era um bom menino e que acreditava nele.

A todos os professores que fizeram parte da minha formação, em especial ao Prof. Dr. Fernando Pereira de Souza e ao Prof. Dr. Antonio Carlos Tamarozzi por me apresentarem a matemática nos meus primeiros anos de graduação, por sempre me incentivar a continuar meus estudos, sem eles, com certeza seria mais difícil chegar até aqui.

Ao Prof. Dr. Marcos Roberto Teixeira Primo pela parceria durante meu mestrado e me incentivar a continuar meus estudos.

A todos os meus amigos que tive a oportunidade de conhecer durante a minha vida acadêmica, por terem me motivado a prosseguir, dividirem comigo seus conhecimentos e tornarem essa jornada mais alegre e prazerosa.

À CAPES pelo apoio financeiro.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"Se eu vi mais longe, foi por
estar sobre ombros de gigantes."
(Isaac Newton)

Resumo

Este trabalho aborda a técnica de controle *fuzzy* Takagi-Sugeno (T-S) assim como a técnica de controle via transformação Lyapunov-Floquet (L-F) e suas aplicações em sistemas lineares variantes no tempo. Na literatura, a técnica de controle *fuzzy* T-S e a técnica de controle via transformação L-F são comumente utilizadas para controlar sistemas não lineares invariantes no tempo e sistemas lineares variantes no tempo, respectivamente. Neste trabalho, é mostrado que a técnica *fuzzy* T-S também pode ser aplicada a sistemas lineares variantes de tempo, assim, cada uma das técnicas é aplicada no controle de um sistema linear variante e seus desempenhos são comparados. Um método híbrido de controle envolvendo ambas as técnicas de controle é proposto. A estabilidade assintótica do sistema em malha fechada no método proposto é provada matematicamente. Comparado com o método *fuzzy* T-S, o método híbrido reduz o conservadorismo de sistemas lineares variantes no tempo e periódicos quando este possui dois ou mais termos variantes no tempo combinados com incertezas na matriz de entrada de controle. Finalmente, uma aplicação do método híbrido é apresentada considerando restrição na entrada e incertezas na matriz de entrada de controle, bem como taxa de decaimento. Neste exemplo é possível observar a eficiência da técnica do controle híbrido para reduzir o conservadorismo quando comparada com a técnica de controle *fuzzy* T-S.

Palavras-chave: Sistemas Periódicos Variantes no Tempo; Transformação Lyapunov-Floquet; Modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno; Desigualdades Matriciais Lineares.

Abstract

This thesis approaches the Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy control technique as well as the control technique via Lyapunov-Floquet (L-F) transformation and their applications in linear time-varying systems. In the literature, the T-S fuzzy control technique and the control technique via L-F transformation are commonly used to control nonlinear time-invariant systems and linear time-varying systems, respectively. In this work, it is shown that the T-S fuzzy technique can also be applied to linear time-varying systems, thus, each of the techniques is applied in the control of a linear time-varying system and their performances are compared. A hybrid control method involving both control techniques is proposed. The asymptotic stability of the closed loop system in the proposed method is mathematically proved. Compared with the T-S fuzzy method, the hybrid method reduces the conservatism of linear time-varying periodic systems when it has two or more time-varying terms combined with uncertainties in the control input matrix. Finally, an application of the hybrid method is presented considering input constraints and uncertainties in the control input matrix, as well as the specification of the decay rate. In this example, it is possible to observe the efficiency of the hybrid control technique to reduce conservatism when compared to the T-S fuzzy control technique.

Keywords: Time-Varying Periodic Systems; Lyapunov-Floquet Transformation; Takagi-Sugeno Fuzzy Models; Linear Matrix Inequalities (LMIs).

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

STM	State Transition Matrix
FTM	Floquet Transition Matrix
MATLAB	Matrix Laboratory
EDO	Equação Diferencial Ordinária
LTV	Linear Time-Varying
L–F	Lyapunov Floquet
T–S	Takagi Sugeno

Lista de símbolos

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}_+$	Conjunto dos números reais não negativos
$\mathbb{R}^n$	Espaço dos vetores coluna de dimensão n com entradas reais
$\mathbb{R}^{n\times m}$	Espaço das matrizes de dimensão n por m com entradas reais
$\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$	Conjunto das funções vetoriais continuas
$\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$	Conjunto das funções reais continuamente diferenciáveis
I_n	Matriz Identidade de ordem n
m	Número de termos da expansão em polinômios de Chebyshev alterados
p	Número de aproximações no método das aproximações sucessivas
G	Matriz Operacional de Integração
Q_d	Matriz Operacional do Produto
T	Período principal de $A(t)$
$T_r^*(t)$	Polinômio de Chebyshev alterado de grau r
$\widehat{T}(t)$	Matriz Polinomial de Chebyshev
$\Phi(t)$	Matriz de Transição de Estados
$\Phi^{(p,\,m)}(t)$	Matriz de Transição de Estados aproximada
$\Phi(T)$	Matriz de Transição de Floquet
$\Psi(t)$	Matriz Fundamental
λ_i's	Expoentes característicos
ρ_i's	Multiplicadores de Floquet
$P(t)$	Transformação de Equivalência
$Q(t)$	Transformação de Lyapunov–Floquet $2T$-periódica
R	Sistema Lyapunov equivalente após a aplicação da transformação $Q(t)$
$\mathcal{A}$	Espaço vetorial das soluções de um sistema LTV

$\Re(z)$	Parte real do número complexo z
$x(t)$	Vetor de estados
$u(t)$	Lei de controle
$z(t)$	Vetor premissa
r	Número de termos variantes da matriz $A(t)$
$N = 2^r$	Número de modelos locais *fuzzy*
$\alpha_i(t)$'s	Funções de pertinência
$V(x)$	Função de Lyapunov

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Sistemas lineares variantes no tempo (LTV, do inglês *Linear Time-Variyng*) estão presentes em muitos problemas físicos e de engenharia, como o oscilador de Duffing (PERUZZI, 2005), sistemas de coleta de energia (DAQAQ et al., 2009), sistemas microeletromecânicos (PERUZZI et al., 2016) etc. Esses sistemas possuem uma dependência explícita da variável temporal, tornando a análise de estabilidade bem como o projeto do controlador mais complexos. Por exemplo, a condição de todos os autovalores da matriz do sistema possuírem parte real negativa não é suficiente para garantir a estabilidade assintótica do sistema (SLOTINE; LI, 1991; CHEN, 1998). Para sistemas LTV e periódicos, a estabilidade pode ser caracterizada em termos da Matriz de Transição de Estado (STM, do inglês *State Transition Matrix*) (SINHA; HENRICHS; RAVINDRA, 2000; PERUZZI et al., 2016).

A STM de um sistema LTV e periódico pode ser escrita como um produto de uma transformação, chamada transformação Lyapunov-Floquet, e uma matriz exponencial. Como consequência desse resultado, aplicando uma mudança de variáveis envolvendo a transformação Lyapunov-Floquet, obtém-se um sistema linear invariante equivalente ao sistema variante original (YAKUBOVICH; STARZHINSKII, 1975; SINHA; JOSEPH, 1994; MEIROVITCH, 2010). Assim, estudar o comportamento das soluções de um sistema LTV e periódico equivale a estudar as soluções de um sistema linear invariante.

Sinha e Joseph (1994) propuseram uma técnica de controle para sistemas LTV e periódicos com base na transformação Lyapunov-Floquet (L-F). Posteriormente, essa técnica foi estendida para sistemas não lineares (SINHA; HENRICHS; RAVINDRA, 2000). No entanto, para analisar a estabilidade desses sistemas ou projetar controladores via transformação L-F, a STM do sistema deve ser obtida. A menos que o sistema seja comutativo (LUKES, 1982), obter a STM analiticamente não é uma tarefa simples. Sinha e Butcher (1997) propuseram um método numérico para obter a STM de um sistema LTV e periódico. Esse método usa a técnica de iterações de Picard e a expansão de funções em polinômios de Chebyshev alterados. Nesta abordagem, matrizes operacionais (de Chebyshev, Integração e Produto) são utilizadas para obter uma aproximação da STM por meio de multiplicações e adições de matrizes, possibilitando a implementação computacional desse método.

Embora o método de controle via transformação L-F (SINHA; JOSEPH, 1994; SINHA; HENRICHS; RAVINDRA, 2000) seja eficiente para controlar sistemas periódicos variantes no tempo (SHERRILL et al., 2015; KIRKLAND; SINHA, 2016; PERUZZI et al., 2016), ele não garante a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada. Deshmukh e Sinha (2004) propuseram uma técnica de controle que usa a transformação L-F, bem como a transformação *Backstepping*. Neste método, a estabilidade assintótica é garantida.

No entanto, essa técnica não permite considerar algumas limitações do projeto tais como restrição na entrada do sistema, taxa de decaimento ou incertezas.

Takagi e Sugeno (1985) propuseram uma técnica de controle para uma classe de sistemas não lineares que consiste na descrição do modelo não linear como uma combinação de modelos lineares, também chamados de modelos locais *fuzzy* . Inicialmente, essa descrição foi feita de forma aproximada. Posteriormente, Taniguchi et al. (2001), usando a mesma técnica, propuseram a descrição do modelo não linear como uma combinação convexa de modelos locais *fuzzy*, obtidos a partir dos termos não lineares do sistema.

A técnica de controle *fuzzy* Takagi-Sugeno (T-S) é geralmente aplicada em sistemas não lineares invariantes no tempo. Neste trabalho, ela será aplicada a sistemas periódicos lineares variantes no tempo. No entanto, será visto que se o sistema tiver dois ou mais termos variantes combinados com incertezas, a técnica de controle *fuzzy* T-S poderá fornecer um resultado conservador.

Este trabalho apresenta uma técnica de controle híbrida que envolve o controle via transformação Lyapunov-Floquet e controle *fuzzy* T-S. Neste método, a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada é garantida matematicamente. Este método permite considerar restrições na entrada do sistema, taxa de decaimento e incertezas na matriz de entrada de controle. A proposta deste método é obter um novo sistema equivalente ao sistema original onde o número de termos variantes no tempo deste novo sistema seja menor, reduzindo assim o número de modelos locais e, consequentemente, o conservadorismo do projeto.

Esse trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2 são apresentados fundamentos teóricos dos sistemas variantes, como por exemplo o conceito de sistemas Lyapunov equivalentes, que permite transferir o estudo da estabilidade de um sistema LTV para o estudo da estabilidade de um sistema invariante no tempo. Também são abordadas algumas matrizes importantes desta análise de estabilidade, como por exemplo as matrizes STM e FTM (do inglês, *Floquet Transition Matrix*) de um sistema LTV e periódico, assim como a transformação L-F.

No Capítulo 3 é exibido o método numérico proposto por Sinha e Butcher (1997) para obter tanto a STM bem como a transformação L-F, que são importantes na análise de estabilidade e projeto do controlador, respectivamente. Também são mostrados alguns resultados que validam o método numérico.

O Capítulo 4 aborda as técnicas de controle via transformação Lyapunov-Floquet e a técnica de controle *fuzzy* T-S. Condições de estabilidade para ambas as técnicas são exibidas. Para a técnica de controle *fuzzy* T-S são apresentadas condições LMIs (do inglês, *Linear Matrix Inequalities*) para estabilidade, estabilidade com taxa de decaimento e restrições na entrada de controle. São abordados exemplos ilustrando ambas as técnicas e seus desempenhos são comparados.

O Capítulo 5 introduz a técnica de controle híbrido proposto neste trabalho. É apresentada a síntese do controlador híbrido bem como o teorema que garante a estabilidade assintótica do método proposto. Por fim, é exibido um exemplo numérico em que pode-se ver a eficiência do controlador híbrido quando se deseja controlar sistemas LTV e periódicos que apresentam dois ou mais termos variantes combinados com incertezas na matriz de entrada de controle.

O Capítulo 6 apresenta as conclusões deste trabalho e propostas para trabalhos futuros e o Apêndice A exibe alguns lemas técnicos relacionados ao método numérico apresentado no Capítulo 3.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em geral, estudar a estabilidade de sistemas LTV não é tão simples quanto estudar a estabilidade de sistemas invariantes no tempo. A condição de que a matriz do sistema tenha autovalores com parte real negativa não é suficiente para garantir a estabilidade do sistema (CHEN, 1998). Uma forma de estudar a estabilidade de sistemas LTV é por meio da STM, ou seja, o comportamento da STM determina a estabilidade do sistema, como foi visto na Seção 2.1.4. Infelizmente, obter tal matriz de forma analítica só é possível quando o sistema é comutativo e, por isso, métodos numéricos como o método descrito em (SINHA; BUTCHER, 1997) foram desenvolvidos para obter tal matriz numericamente. Conforme validado na Subseção 3.5, o método proposto por Sinha e Butcher (1997) se mostrou eficiente. Foi visto que se o sistema é LTV e periódico existe uma transformação, chamada de transformação Lyapunov–Floquet que transforma o sistema LTV e periódico em um sistema linear invariante no tempo, além disso, tal transformação preserva a estabilidade dos sistemas. Assim, estudar a estabilidade de um sistema LTV e periódico é equivalente a estudar a estabilidade de um sistema linear invariante.

Também, foi visto que a técnica de controle proposta por Sinha e Joseph (1994) e generalizada por Sinha, Henrichs e Ravindra (2000) se mostrou eficiente para controlar sistemas LTV e periódicos, lineares e não lineares. A técnica foi eficiente para controlar o sistema comutativo, considerando tanto a lei de controle exata quanto a aproximada. A técnica também se mostrou eficiente para controlar o pêndulo com excitação vertical no suporte, que é um sistema não linear, tanto para conduzir os estado para a origem quanto para conduzi-los para uma órbita desejada. Entretanto, a estabilidade assintótica não é matematicamente garantida. A técnica proposta por Deshmukh e Sinha (2004) garante a estabilidade assintótica do sistema, no entanto, não é possível adicionar algumas limitações no projeto do controlador, tais como restrição de entrada, taxa de decaimento ou incertezas.

Neste trabalho pode-se ver que a técnica de controle *fuzzy* T-S pode ser aplicada em sistemas lineares variantes de tempo. No entanto, foi visto que se o sistema tiver dois ou mais termos variantes e incertezas na matriz do do controlador, o controle *fuzzy* T-S pode fornecer resultados conservadores.

Neste trabalho foi proposta uma técnica de controle híbrida, que combina a técnica *fuzzy* T-S com o controle via transformação L-F. A técnica híbrida se mostrou eficiente para controlar sistemas LTV e periódicos. A estabilidade assintótica do sistema em malha fechada ficou garantida matematicamente. O método proposto também permitiu adicionar no projeto algumas limitações do sistema, como restrição de entrada, taxa de decaimento e incertezas na matriz do controlador. Além disso, quando o sistema possui dois ou mais termos variantes combinados com incertezas na matriz do controlador, o método proposto forneceu resultados menos conservadores para a estabilidade do sistema quando comparado com o controle *fuzzy* T-S.

Uma vez que incertezas são inseridas no sistema, o método hibrido não poderia ser implementado na prática, pois a lei de controle proposta depende do valor da incerteza em cada instante de tempo. Entretanto, esse problema pode ser superado implementando o controle chaveado proposto em (SOUZA et al., 2013).

REFERÊNCIAS

BOGHIU, D.; SINHA, S. C.; MARGHITU, D. B. Stability and control of a parametrically excited rotating system. part ii: Controls. *Dynamics and control*, Amsterdam, v. 8, n. 1, p. 19–35, 1998.

CHEN, C.-T. *Linear system theory and design*. 3. ed. New York: Oxford University Press, Inc., 1998. ISBN 0-19-511777-8.

COELHO, F. U.; LOURENCO, M. L. *Um Curso de Álgebra Linear*. 2. ed. São Paulo: Edusp, 2013. ISBN 978-85-314-0594-5.

DAQAQ, M. F.; STABLER, C.; QAROUSH, Y.; SEUACIUC-OSÓRIO, T. Investigation of power harvesting via parametric excitations. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, London, v. 20, n. 5, p. 545–557, 2009.

DESHMUKH, V. S.; SINHA, S. C. Control of dynamic systems with time-periodic coefficients via the lyapunov-floquet transformation and backstepping technique. *Journal of Vibration and Control*, Thousand Oaks, v. 10, n. 10, p. 1517–1533, 2004.

FOX, L.; PARKER, I. B. *Chebyshev polynomials in numerical analysis*. London: Oxford University Press, 1968.

KIM, E.; LEE, H. New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Piscataway, v. 8, n. 5, p. 523–534, 2000.

KIRKLAND, W. G.; SINHA, S. C. Symbolic computation of quantities associated with time-periodic dynamical systems. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, New York, v. 11, n. 4, p. 041022, 2016.

KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications*. Canada: John Wiley & Sons, 1978. ISBN 0-471-50731-8.

LIMA, E. L. *Álgebra Linear*. 8. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2012. Coleção Matemática Universitária. ISBN 978-85-244-0089-6.

LOFBERG, J. Yalmip : a toolbox for modeling and optimization in matlab. In: *2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation (IEEE Cat. No.04CH37508)*. New Orleans: [s.n.], 2004. p. 284–289.

LUKES, D. L. *Differential equations: classical to controlled*. London: Academic Press, Inc., 1982. v. 162. Mathematics In Science and Engineering. ISBN 0-12-459980-X.

MEIROVITCH, L. *Methods of analytical dynamics*. New York: McGraw-Hill, Inc., 2010.

PERUZZI, N.; CHAVARETTE, F. R.; BALTHAZAR, J. M.; TUSSET, A. M.; PERTICARRARI, A. L. P. M.; BRASIL, R. The dynamic behavior of a parametrically excited time-periodic mems taking into account parametric errors. *Journal of Vibration and Control*, London, v. 22, n. 20, p. 4101–4110, 2016.

PERUZZI, N. J. *Dinâmica não linear e controle de sistemas ideais e não-ideais periódicos*. 2005. 200 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Facultade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Campinas, 2005.

SHARMA, A.; SINHA, S. C. An approximate analysis of quasi-periodic systems via floquét theory. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, New York, v. 13, n. 2, 2017.

SHERRILL, R. E.; SINCLAIR, A. J.; SINHA, S. C.; LOVELL, T. A. Lyapunov-Floquet control of satellite relative motion in elliptic orbits. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Piscataway, v. 51, n. 4, p. 2800–2810, 2015.

SINHA, S. C.; BUTCHER, E. A. Symbolic computation of fundamental solution matrices for linear time-periodic dynamical systems. *Journal of Sound and Vibration*, London, v. 206, n. 1, p. 61–85, 1997.

SINHA, S. C.; HENRICHS, J. T.; RAVINDRA, B. A general approach in the design of active controllers for nonlinear systems exhibiting chaos. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Singapore, v. 10, n. 01, p. 165–178, 2000.

SINHA, S. C.; JOSEPH, P. Control of general dynamic systems with periodically varying parameters via liapunov-floquet transformation. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, New York, v. 116, n. 4, p. 650–658, 1994.

SLOTINE, J.-J. E.; LI, W. *Applied nonlinear control*. New Jersey: Prentice Hall, Inc., 1991. ISBN 0-13-040890-5.

SNYDER, M. A. *Chebyshev methods in numerical approximation*. [S.l.]: Prentice-Hall, Inc., 1966. Series in Automatic Computation.

SOTOMAYOR, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979. Projeto Euclides.

SOUZA, W. A. D.; TEIXEIRA, M.; SANTIM, M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. On switched control design of linear time-invariant systems with polytopic uncertainties. *Mathematical Problems in Engineering*, London, v. 2013, 2013.

STURM, J. F. Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization methods and software*, Abingdon, v. 11, n. 1-4, p. 625–653, 1999.

TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics*, Piscataway, n. 1, p. 116–132, 1985.

TANAKA, K.; WANG, H. O. *Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach*. New York: John Wiley & Sons, 2001. ISBN 0-471-32324-1.

TANIGUCHI, T.; TANAKA, K.; OHTAKE, H.; WANG, H. O. Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of takagi-sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Piscataway, v. 9, n. 4, p. 525–538, 2001.

YAKUBOVICH, V. A.; STARZHINSKII, V. M. *Linear differential equations with periodic coefficients*. New York: John Wiley & Sons, 1975. ISBN 0-470-96953-9.

Lema 18. *Sejam m um inteiros positivos e $\widehat{T}(t)$ a matriz de Chebyshev. Então*

$$D(\alpha)\widehat{T}(t)\widehat{T}(t)' \approx \widehat{T}(t)'\widehat{Q}_D, \quad \textit{onde } \widehat{Q}_D = \sum_{i=1}^{s} \bar{A}_i(\alpha) \otimes Q_{d_i}.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
D(\alpha)\widehat{T}(t)\widehat{T}(t)' &= \left(\sum_{i=1}^{s} \bar{A}_i(\alpha) \otimes d_i'\right)(I \otimes T^*(t))\,(I \otimes T^*(t)') \\
&\overset{(\text{Lema }12)}{=} \left(\sum_{i=1}^{s} \bar{A}_i(\alpha) \otimes d_i'\right)(I \otimes (T^*(t)T^*(t)')) \\
&= \sum_{i=1}^{s} \left\{\left(\bar{A}_i(\alpha) \otimes d_i'\right)(I \otimes (T^*(t)T^*(t)'))\right\} \\
&\overset{(\text{Lema }10)}{=} \sum_{i=1}^{s} \left\{\left(\bar{A}_i(\alpha) I\right) \otimes (d_i' T^*(t)T^*(t)')\right\} \\
&\overset{(33)}{\approx} \sum_{i=1}^{s} \left\{\left(I \bar{A}_i(\alpha)\right) \otimes (T^*(t)'Q_{d_i})\right\} \\
&\overset{(10)}{=} \sum_{i=1}^{s} \left\{(I \otimes T^*(t)')\left(\bar{A}_i(\alpha) \otimes Q_{d_i}\right)\right\} \\
&= (I \otimes T^*(t)')\left\{\sum_{i=1}^{s}\left(\bar{A}_i(\alpha) \otimes Q_{d_i}\right)\right\} \\
&= \widehat{T}(t)'\widehat{Q}_D.
\end{aligned}$$

□