UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

HELDER LUIZ DE OLIVEIRA

Aspectos de teorias duais de spin alto

Guaratinguetá
2021

Helder Luiz de Oliveira

Aspectos de teorias duais de spin alto

Tese de doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, para a obtenção do Título de Doutor em Física na área de Partículas e Campos.

Orientador: Prof. Dr. Elias Leite Mendonça

Guaratinguetá
2021

Oliveira, Helder Luiz de
O48a Aspectos de teorias duais de spin alto / Helder Luiz de Oliveira – Guaratinguetá, 2021
75 f .: il.
Bibliografia: f. 58

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2021.
Orientador: Prof. Dr. Elias Leite Mendonça

1. Teorema de Noether. 2. Teoria de campos (Física). 3. Campos de calibre (Física). I. Título.

CDU 530.145(043)

Luciana Máximo
Bibliotecária-CRB-8/3595

unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

HELDER LUIZ DE OLIVEIRA

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
"DOUTOR EM FÍSICA"

PROGRAMA: FÍSICA
CURSO: DOUTORADO

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

Prof. Dr. Konstantin Georgiev Kostov
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:

PROF. DR. ELIAS LEITE MENDONÇa
Orientador / UNESP/FEG
participou por videconferência

PROF. DR. SAULO HENRIQUE PEREIRA
UNESP/FEG
participou por videconferência

PROF. DR. DENIS DALMAZI
UNESP/FEG
participou por videconferência

PROF. DR. GABRIEL FLORES HIDALGO
Universidade Federal de Itajubá
participou por videconferência

PROF. DR. WAYNE LEONARDO DA SILVA DE PAULA
Instituto Tecnológico de Aeronáutica
participou por videconferência

Março de 2021

DADOS CURRICULARES

HELDER LUIZ DE OLIVEIRA

NASCIMENTO 10/08/1986 - Itajubá / MG

FILIAÇÃO Luiz Hiltair de Oliveira
Silvana Costa Oliveira

1994 / 1997 Ensino Fundamental I
Escola Estadual Dr. Carlos Ribeiro Filho - Pedralva - MG - Brasil
Escola Estadual Professor Arcádio do Nascimento Moura - Pedralva - MG - Brasil

1998 / 2004 Ensino Fundamental II e Ensino Médio
Escola Estadual Comendador Mário Goulart Santiago - Pedralva - MG - Brasil

2007 / 2011 Graduação em Física Licenciatura
Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI - Itajubá - MG - Brasil

2014 / 2016 Mestrado em Física e Matemática Aplicada
Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI - Itajubá - MG - Brasil

2016 / 2021 Doutorado em Física
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Campus de Guaratinguetá - Guaratinguetá - SP - Brasil

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me oferecer tudo que preciso para continuar sempre batalhando.

Aos meus pais Luiz e Silvana que não mediram esforços para cuidar de mim, para dar carinho, educação e ensinar a enfrentar de frente os obstáculos que a vida impõe.

À minha irmã e amiga por poder sempre contar com seu apoio incondicional.

À minha eterna amada Cláudia que me escutou, apoiou, foi conselheira, parceira de momentos triste e felizes, enfim a mulher que está e estará sempre ao meu lado.

Aos meus professores da UNIFEI, em especial ao Fabrício Barone e Gabriel Flores que sempre estão dispostos a ajudar. Aos professores da UNESP pelo apoio e dedicação.

À CAPES pelo apoio financeiro nesses quatro anos de doutorado.

Aos meus colegas de doutorado, especialmente, ao Dr. Alessandro pela grande ajuda nos debates sobre os tópicos dessa tese, à grandiosa Dra. Hemily pelas horas e horas de conversa sobre física e afins, ao Mateus Henrique e Luiz Borges pelas conversas, cervejas e as parcerias nas viagens Guaratinguetá -Itajubá e ao Dr. Marlon Marques que sempre entendeu-me a mão quando necessitei.

Aos meus amigos e primos Lilian Vilela, Rômulo Consiglio, Lidiane Vilela, Thiago Marcondes, Erica Prudente e Renan Pagliarini pelas risadas e momentos de imensa alegria.

Aos meus amigos pedralvenses Junio César, Diego Oliveira, Edivaldo Costa e Natanael Oliveira que sempre me ajudaram, direta e indiretamente, a alcançar meus objetivos.

Ao meu orientador Elias Leite Mendonça por ter confiado a mim esse trabalho. Sua dedicação, paciência, amizade e compreensão em todos os momentos foram fundamentais para execução dessa tese.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coodernação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior- Brasil (CAPES) - código de financiamento 001.

RESUMO

As descrições de partículas de spin alto são feitas através de um tensor de rank S simétrico e o aumento de interesse em estudar tais partículas se dá pela teoria de cordas, que é uma teoria promissora à solucionar o problema de renormalização oriundo da tentativa de descrever uma teoria quântica para a gravitação. Uma das maneiras de estudar as partículas de spin alto é pela teoria de calibre, que é o foco desta tese. Neste trabalho foi apresentada uma maneira sistemática de implementar transformações de calibre através da Imersão de Calibre de Noether (I.C.N) em partículas de spin 3/2, 5/2 e 4. Para as partículas de spin 3/2, foi utilizada a técnica da ação mestra e foi encontrada uma ação que interpola entre os modelos de primeira, segunda e terceira ordem. Essa ação mestra permitiu mostrar a equivalência quântica entre os modelos comparando suas funções de correlação. Para spin 5/2 partiu-se do modelo de primeira ordem e utilizando o processo de I.C.N foi encontrado um modelo de segunda e terceira ordem nas derivadas. Para o spin 4, descrito por um tensor parcialmente simétrico e também utilizando o processo de I.C.N, foi encontrado um modelo de segunda e terceira ordem nas derivadas. Os resultados de Deser e Yang foram reproduzidos quando o tensor utilizado para descrever a partícula de spin 4 foi simetrizado.

PALAVRAS-CHAVE: Spin alto. Ação mestra. Teorias de calibre.

ABSTRACT

The descriptions of higher spin particles are made through a symmetric rank tensor of S and the increased interest in study such particles is given by string theory, which is a promising theory to solve the problem of renormalization from the attempt to describe quantum theory for gravitation. One of the ways to study the higher spin particles is by the gauge theory, which is the focus of this thesis. In this paper is also presented a systematic way to implement gauge symmetries through Noether Gauge Immersion (NGI) in spin 3/2, 5/2 and 4 particles. For the spin 3/2, it used the master action technique and it found an action that interpolate between first, second and third order models. This action master allows show the quantum equivalence between the models comparing their correlation functions. For spin 5/2, it was started from a first order model using the IGN process and it was found a second and third order model in derivatives. For spin 4, described by a partially symmetric tensor and also using the IGN process, it was found a second and third model order in derivatives. Deser and Yang results were reproduced when the tensor used to describe the spin 4 particles was symmetrized.

KEYWORDS: Higher spin. Master action. Gauge theory.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 10

2 TEORIAS MASSIVAS DE SPIN 3/2 16

2.1 A ideia da ação mestra 16

2.2 A introdução de fontes 17

2.3 Interpolando com um novo modelo 19

2.4 Introduzindo fontes na ação mestra 21

2.5 Ação mestra de dubletos massivos de partículas de spin 3/2 23

2.6 A notação Ω para os modelos de spin 3/2 25

2.6.1 O caso dos singletos 25

2.6.2 O caso dos dubletos 29

3 MODELOS AUTO-DUAIS DE SPIN 5/2 32

3.1 Modelo de primeira ordem de spin 5/2 32

3.2 Modelo de segunda ordem de spin 5/2 37

4 MODELOS AUTO-DUAIS DE SPIN 4 41

4.1 I.C.N - Do modelo $AD(1) \rightarrow AD(2)$ 41

4.2 I.C.N do modelo $AD(2) \rightarrow AD(3)$ 45

4.3 Estabelecendo a notação Ω para os modelos de spin 4 49

4.4 Notação totalmente simétrica para os termos de spin 4 52

5 CONCLUSÃO 56

REFERÊNCIAS 58

ANEXO A – VÍNCULOS DE PRIMEIRA ORDEM PARA TEORIA DE SPIN 3/2 61

A.1 Condições de consistência para os vínculos primários 62

A.2 Condições de consistência para os vínculos secundários 63

ANEXO B – ANÁLISE HAMILTONIANO DO TERMO DE SEGUNDA ORDEM DE SPIN $3/2$ 65

B.1 Condições de consistência para os vínculos primários 66

B.2 Condições de consistência para os vínculos secundários 67

ANEXO C – RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO PARA O MODELO DE PRIMEIRA ORDEM DA TEORIA DE SPIN 5/2 70

ANEXO D – NOTAÇÃO Ω E GEOMETRIA **72**

1 INTRODUÇÃO

Até o momento, a física não consegue descrever a gravitação como sendo uma teoria quântica de campos devido aos problemas de renormalização. Na tentativa de contornar tais problemas, utiliza-se a introdução de parceiros super-simétricos, derivadas de ordem superior, entre outras técnicas. Dentre os candidatos que tentam montar uma teoria quântica da gravitação, a teoria de cordas aparenta ser a mais promissora. Nessa teoria há um parâmetro livre α (coeficiente na equação de Nambu-Goto) onde ao tomarmos $\alpha \to \infty$ teremos que a teoria de cordas se assemelha à teoria de spin alto [1]. Com isso, vemos que a teoria mais promissora para sanar os problemas da quantização da gravitação, traz consigo um espectro infinito de partículas, as chamadas partículas de spin alto. A existência dessa cadeia infinita de partículas é crucial para a ausência da divergência ultravioleta. Como outro exemplo de teoria que contempla a existência de partículas de spin-alto temos a teoria de Vasiliev, que consiste de uma teoria de campos que contém em seu espectro partículas de spin alto sem massa com interações consistentes em espaços com curvatura constante em dimensões arbitrárias. Contudo, tal teoria não possui uma escala de energia associada, sendo então um "toy model"para teorias fundamentais além da escala de Plank. Uma motivação experimental em se estudar partículas de spin alto se dá pelo fato de existirem partículas carregadas cujas ressonâncias hadrônicas são bem definidas [2] e com isso, uma formulação teórica de partículas de spin alto poderia descrever a dinâmica dessas partículas compostas. Uma das maneiras de trabalhar com tais partículas são pelas teorias de calibre e, através delas, conseguimos descrever partículas de spin alto massivas, que por sua vez, são os modos propagantes da teoria de cordas. Por esse caminho de estudo surgiram resultados interessantes como a possibilidade de descrever as ações de partículas de spin alto em termos de objetos que são semelhantes aos objetos geométricos da relatividade geral: tensor de Ricci, tensor de Weyl, tensor de Cotton, tensor de Riemann, tensor de Einstein entre outros como mostram os trabalhos [2], [3], [21], [30]. Um exemplo disso é que, para partículas de spin 3 em $D = 2 + 1$ dimensões, aparecem tensores de rank 3 que possuem propriedades análogas às do tensor de Einstein, vide trabalhos [4], [15] e [21].

O primeiro trabalho sobre a descrição de partículas de spin alto foi de Fierz e Pauli em 1939 [5], onde os autores construíram uma série de equações que descrevem campos de spins arbitrários. Esses resultados são conhecidos como as condições de Fierz-Pauli e, para campos bosônicos, são dadas pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned}
\varphi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} &= \varphi_{(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)},\\
\left(\Box - m^2\right)\varphi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} &= 0,\\
\partial^{\alpha_1}\varphi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} &= 0,\\
\eta^{\alpha_1\alpha_2}\varphi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} &= 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

A primeira equação acima nos diz que os índices que representam os campos de partículas de spin altos são simétricos entre si. Já a segunda é a generalização da equação de Klein-Gordon para partículas de spin qualquer, a terceira é a condição de transversalidade e a última equação nos diz que o campo possui traço nulo. Para campos fermiônicos, as condições de Fierz Pauli são:

$$\begin{aligned}
\big(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\big)\psi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} &= 0, \\
\partial^{\alpha_1}\psi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} &= 0, \\
\gamma^{\alpha_1}\psi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} &= 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

onde a primeira equação é a generalização da equação de Dirac para spin fracionário qualquer, a segunda é a condição de transversalidade e a terceira condição nos mostra que o tensor espinor deve ser nulo quando o multiplicarmos por uma matriz γ (conhecida como γ-transverso). O primeiro trabalho tratando de campos massivos de spin arbitrário foi elaborado por Singh and Hagen [9] em 1974, onde os autores introduziram campos auxiliares de spin menores, S-2, S-3,. . ., 0 todos se tornando nulos quando as condições de Fierz-Pauli forem satisfeitas. Esses campos auxiliares são necessários para a eliminação de graus de liberdade extras na teoria.

As partículas de spin +S ou -S em $D = 2 + 1$ podem ser descritas em termos de modelos lagrangeanos massivos, quadráticos nos campos e de ordem mais baixa nas derivadas. Esses modelos são os chamados modelos tipo Chern-Simons e o termo de massa quebra a invariância de calibre por reparametrização dada por $\delta\varphi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = \partial^{\alpha_1}\xi_{\alpha_2\ldots\alpha_n}$. Podemos conferir essa simetria ao modelo através do mecanismo de Imersão de Calibre de Noether (ICN) apresentada pelos trabalhos [3], [4], [12], [13] e, ao implentá-la, obtemos um modelo de ordem superior nas derivadas. As simetrias inseridas através do mecanismo de ICN são as chamadas transformações de calibre, ao passo que quando conseguimos uma teoria invariante sob um número maior de simetrias de calibre isso nos confere um importante guia para a introdução de interações fundamentais, de onde vem a importância deste método de imersão. O trabalho [3] trata da implementação de simetrias para partículas de spin 2, onde os modelos encontrados foram escritos em termos de objetos geométricos e menos dependentes dos campos auxiliares. Esperamos que ao implementar simetrias de calibre em modelos de spins altos, os modelos se tornarão mais simétricos, podendo serem escritos em termos de objetos geométricos e menos dependentes de campos auxiliares. Consequentemente teremos uma inconveniência, pois ao implementar a simetria trabalharemos com modelos de ordem mais alta nas derivadas mas esperamos que as equações de movimentos tornem mais evidente a descrição da partícula estudada.

Podemos encontrar um conjunto de teorias massivas conferindo simetrias às teorias não simétricas. A busca por encontrar tais conjuntos norteou trabalhos como [3], [4], [16], [17], [18], [19] e [20] a encontrar novos modelos teóricos, de ordem mais alta, de spins altos. Em especial, o trabalho [4] trata da imersão de calibre em teorias de spin 1, 2 e 3 através do método de ICN que descrevem singletos de paridade + ou - S. Esses modelos recebem o nome de auto-duais. Por conveniência, padronizaremos a nomenclatura dos modelos auto-duais

$$S^{\#\ Spin}_{AD(\#\ \ ordem\ \ das\ \ derivadas)}, \tag{3}$$

onde, por exemplo, ${S^2}_{AD(3)}$ nos diz que a partícula estudada é de spin 2 e o modelo é de terceira ordem nas derivadas.

Para partículas de spin 1 temos que o modelo de primeira ordem é dado por:

$${S^1}_{AD(1)} = \int d^3x \left[\frac{m^2}{2} A^\mu A_\mu - \frac{m}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha \partial_\beta A_\gamma \right], \tag{4}$$

onde m é a massa da partícula. O termo de massa da equação acima quebra a invariância de calibre dada pela transformação $\delta A^\mu = \partial^\mu \xi$ e, ao conferirmos essa simetria ao modelo, obteremos um segundo modelo de segunda ordem nas derivadas dado por:

$${S^1}_{AD(2)} = \int d^3x \left[-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{m}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha \partial_\beta A_\gamma \right], \tag{5}$$

onde $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. O modelo acima é conhecido como modelo de Maxwell Chern-Simons. Esquematicamente temos:

$${S^1}_{AD(1)} \overset{\delta A^\mu = \partial^\mu \xi}{\longrightarrow} {S^1}_{AD(2)}. \tag{6}$$

Como não houveram mais simetrias a serem implantadas, obtivemos a cadeia de teorias que descrevem partículas de spin 1 e neste caso temos somente os modelos de primeira e segunda ordem nas derivadas.

Para descrevermos uma partículas de spin 2 utilizamos o tensor $f^{\mu\nu}$ arbitrário. O modelo de primeira ordem nas derivadas é dado por

$${S^2}_{AD(1)} = \int d^3x \left[\frac{m^2}{2} \Big(f^2 - f^{\mu\nu} f_{\mu\nu} \Big) - \frac{m}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha} f_{\mu\beta} \partial_\nu {f_\alpha}^\beta \right], \tag{7}$$

onde m é a massa da partícula e f é o traço do campo $f^{\mu\nu}$ ($\eta_{\mu\nu} f^{\mu\nu} = f$). O termo de massa desse modelo quebra a invariância de calibre dada pela transformação $\delta f^{\mu\nu} = \partial^\mu \xi^\nu$ e ao implementarmos essa simetria obteremos um modelo de segunda ordem nas derivadas. Por sua vez, no modelo de segunda ordem encontrado, o termo de primeira ordem nas derivadas quebra a invariância de calibre dada pela transformação $\delta f_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\alpha} \Lambda^\alpha$ e, ao conferir essa simetria, encontra-se um modelo de terceira ordem nas derivadas. No modelo de terceira ordem nas derivadas, o termo de segunda ordem não é invariante sob a transformação $\delta f_{\mu\nu} = \varphi \eta_{\mu\nu}$, e ao implementá-la, encontramos um modelo de quarta ordem. Esse último modelo é invariante sob todas as simetrias implementadas anteriormente.

Esquematicamente temos:

$$S^2{}_{AD(1)} \overset{\delta f^{\mu\nu}=\partial^\mu\xi^\nu}{\longrightarrow} S^2{}_{AD(2)} \overset{\delta f_{\mu\nu}=\epsilon_{\mu\nu\alpha}\Lambda^\alpha}{\longrightarrow} S^2{}_{AD(3)} \overset{\delta f_{\mu\nu}=\varphi\eta_{\mu\nu}}{\longrightarrow} S^2{}_{AD(4)}. \tag{8}$$

Com isso, como não houveram mais simetrias a serem implantadas, encontrou-se um conjunto de teorias massivas de spin 2 e todas as quatro ações são classicamente equivalentes entre si. Para teorias de spin 3, a ação de primeira ordem vem dada por

$$\begin{aligned} S^3{}_{AD(1)} &= \int d^3x \Big[\frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha}\omega_{\mu(\beta\gamma)}\partial_\nu\omega_\alpha{}^{(\beta\gamma)} - \frac{m^2}{6}\epsilon^{\mu\nu\alpha}\epsilon^{\beta\gamma\rho}\eta_{\mu\beta}\omega_{\nu(\gamma\delta)}\omega_{\alpha(\rho}{}^{\delta)} \\ &+ m^2\omega_\mu A^\mu - 9m\epsilon^{\mu\nu\alpha}A_\mu\partial_\nu A_\alpha - 9m^2A^\mu A_\mu + m\varphi\partial_\mu A^\mu + \frac{m^2}{48}\varphi^2\Big], \end{aligned} \tag{9}$$

onde o tensor $\omega_{\mu(\beta\gamma)}$ é um tensor de rank - 3, simétrico e sem traço em relação aos índices entre parênteses e sem simetria definida com o outro índice. Já os tensores A_μ e φ são campos auxiliares de rank 1 e zero respectivamente e têm como objetivo eliminar graus de liberdade extras na teoria, fazendo com que a ação proposta propague somente partícula de spin 3. Na ação acima, o termo de massa quebra a invariância de calibre dada pela transformação $\delta\omega_{\mu(\beta\gamma)} = \partial_\mu\xi_{(\beta\gamma)}$ onde o parâmetro $\xi_{(\beta\gamma)}$ é simétrico e sem traço com respeito aos índices entre parênteses. Ao implementá-la, obteve-se uma ação de segunda ordem nas derivadas. O resultado obtido não é invariante sob a simetria $\delta\omega_{\mu(\beta\gamma)} = \epsilon_{\mu\beta}{}^\rho\Phi_{(\rho\gamma)} + \epsilon_{\mu\gamma}{}^\rho\Phi_{(\rho\beta)}$ e ao implementá-la obtém-se uma nova ação de terceira ordem. Novamente a ação obtida quebra a invariância de calibre dada por:

$$\delta\omega_{\lambda(\beta\gamma)} = \partial_{(\lambda}\xi_{\beta\gamma)} + \frac{1}{4}\eta_{\lambda\beta}(\partial_\gamma\xi + 2\partial^\alpha\xi_{\alpha\gamma}) + \frac{1}{4}\eta_{\lambda\gamma}(\partial_\beta\xi + 2\partial^\alpha\xi_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2}\eta_{\gamma\beta}(\partial_\lambda\xi + 2\partial^\alpha\xi_{\alpha\lambda}). \tag{10}$$

Ao implementar a simetria acima na ação de terceira ordem obteve-se um modelo de quarta ordem nas derivadas e o resultado é invariante sob todas as transformações de calibre implementadas anteriormente. Na referência [4] mostra-se com detalhes o processo de implementação das transformações acima citadas. Portanto, para spin 3 temos:

$$S^3{}_{AD(1)} \overset{\delta_\Lambda\omega_{\mu(\beta\gamma)}}{\longrightarrow} S^3{}_{AD(2)} \overset{\delta_\Phi\omega_{\mu(\beta\gamma)}}{\longrightarrow} S_{AD(3)} \overset{\delta_\xi\omega_{\mu(\beta\gamma)}}{\longrightarrow} S^3{}_{AD(4)}, \tag{11}$$

onde definimos:

$$\delta_\Lambda\omega_{\mu(\beta\gamma)} \equiv \delta\omega_{\mu(\beta\gamma)} = \partial_\mu\Lambda_{(\beta\gamma)}; \quad \delta_\Phi\omega_{\mu(\beta\gamma)} \equiv \delta\omega_{\mu(\beta\gamma)} = \epsilon_{\mu\beta}{}^\rho\Phi_{(\rho\gamma)} + \epsilon_{\mu\gamma}{}^\rho\Phi_{(\rho\beta)} \tag{12}$$

e $\delta_\xi\omega_{\mu(\beta\gamma)}$vem dado pela equação (10).

Para férmions, o trabalho de [20] apresenta uma ação, tipo Chern-Simons, que descreve uma partícula de spin 3/2. Essa ação é composta por um espinor de Majorana, $\bar{\psi}^\mu$ e seu adjunto ψ^μ, em

$D = 2 + 1$ dimensões. A ação de partida é de primeira ordem nas derivadas e vem dada por:

$$S^{3/2}_{AD(1)} = \int d^3x(-\epsilon^{\mu\nu\alpha}\bar{\psi}_\mu\partial_\nu\psi_\alpha + m\epsilon^{\mu\nu\alpha}\bar{\psi}_\mu\gamma_\nu\psi_\alpha), \tag{13}$$

onde m é a massa da partícula, as matrizes γ são reais cujas componentes são dadas em termos das matrizes de Pauli ($\gamma^0 = i\sigma_2$, $\gamma^1 = \sigma_1$ e $\gamma^2 = \sigma_3$) e satisfazem a álgebra $\gamma_\mu\gamma_\nu = \eta_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu\alpha}\gamma^\alpha$ e $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}$. Podemos perceber que o modelo acima é semelhante aos modelos bosônicos de spin 1, 2 e 3 apresentados anteriormente, pois ambos apresentam um termo semelhante ao de Chern-Simons somado com um termo de massa. O termo de massa do modelo acima quebra a invariância de calibre por reparametrização dada por $\delta\bar{\psi}^\mu = \partial^\mu\bar{\xi}$ e $\delta\psi^\mu = \partial^\mu\xi$ onde $\bar{\xi}$ e seu adjunto são parâmetros espinoriais arbitrário. Ao implementar essa transformação de calibre no modelo 13, usando a técnica de ICN, os autores encontraram uma ação de segunda ordem nas derivadas. Esse resultado por sua vez, não é invariante sob a transformação de calibre dada por $\delta\bar{\psi}^\mu = \bar{\Lambda}\gamma^\mu$ e $\delta\psi^\mu = \gamma^\mu\Lambda$ e novamente, ao implementá-la, os autores obtiveram um modelo de terceira ordem nas derivadas. Esquematicamente temos:

$$S^{3/2}_{AD(1)} \overset{\delta\psi^\mu=\partial^\mu\xi}{\longrightarrow} S^{3/2}_{AD(2)} \overset{\delta\psi^\mu=\gamma^\mu\Lambda}{\longrightarrow} S^{3/2}_{AD(3)}. \tag{14}$$

A equivalência entre os modelos de singletos de spin +S ou -S pode ser explorada através do método da ação mestra. A ação mestra consiste em um único modelo capaz de interpolar entre todos os modelos auto-duais encontrados na teoria de spin qualquer. No caso do spin 2, o trabalho [3] mostra que a ação mestra entre os modelos encontrados anteriormente através da implementação de transformações de calibre é:

$$\begin{aligned} S_M &= \int \left[\frac{m}{2}f.df + \frac{m^2}{2}(f)^2_{FP} - \frac{m}{2}(f-A).d(f-A)\right. \\ &- \left.\frac{1}{4}(h-A).d\Omega(h-A) + \frac{1}{4m}\Omega(h-g).d\Omega(h-g) + j_{\mu\nu}f^{\mu\nu}\right], \end{aligned} \tag{15}$$

onde foram definidas as seguintes quantidades:

$$\begin{aligned} \int (f^2)_{FP} &\equiv \int d^3x(f^2 - f_{\mu\nu}f^{\mu\nu}), \\ \int f.df &\equiv \int d^3x\ \ \epsilon^{\mu\nu\alpha}f_{\mu\beta}\partial_\nu f_\alpha{}^\beta, \\ \int f.d\Omega(f) &\equiv \int d^3x\ \ \epsilon^{\mu\nu\alpha}f_{\mu\beta}\partial_\nu\Omega_\alpha{}^\beta(f), \\ \Omega^\nu{}_\mu(f) &= \epsilon^{\nu\beta\gamma}[\partial_\mu f_{\gamma\beta} - \partial_\beta(f_{\gamma\mu} + f_{\mu\gamma})]. \end{aligned} \tag{16}$$

A ação mestra dada pela equação (15) contém três termos de mistura compostos pelos campos auxiliares h, A e g. Esses termos não possuem conteúdo físico e ao fazermos mudanças específicas nos campos auxiliares encontraremos os modelos de primeira, segunda, terceira e quarta ordem nas derivadas. Dada à ação mestra, podemos encontrar a equivalência quântica entre os quatro modelos de spin 2 comparando as funções de correlação oriundas da derivação do funcional gerador em relação as fontes. As referências [3] e [10] apresentam de forma detalhada os cálculos mostrando a equivalência quântica entre os modelos auto-duais de spin-2. Na referência [4], os autores construíram ações mestras para os modelos de spin 3 encontrados através da imersão de simetrias e mostraram que eles são quanticamente equivalentes entre si.

Esse trabalho é focado no estudo da equivalência entre modelos que descrevem singletos de paridade de partículas massivas de spin alto em $D = 2 + 1$ dimensões. Para avaliar a equivalência entre os modelos, usamos o método de Imersão de Calibre de Noether e o método da ação mestra (ambos utilizados com sucesso no caso do estudo da equivalência entre modelos bosônicos e fermiônicos de spin mais baixo). Os desafios dessa tese consistem na elaboração de uma ação mestra que conecte e demonstre a equivalência quântica entre os modelos de spin 3/2, onde são apresentados os cálculos no segundo capítulo. Para partículas de spin 5/2 utilizamos o método de Imersão de Calibre de Noether para a obtenção do maior número possível de modelos auto-duais sem levar em conta os campos auxiliares e os termos de fontes da teoria. Partindo de um modelo de primeira ordem, encontramos mais dois modelos, que são de segunda e terceira ordem respectivamente. Esses cálculos são mostrados no terceiro capítulo. Para partículas de spin 4, nós também usamos o método de imersão de calibre e, partindo do modelo de primeira ordem nas derivadas, encontramos dois novos modelos, que são de segunda e terceira ordem nas derivadas. Mostramos também que ao simetrizarmos o campo $\omega^{\rho(\alpha\beta\gamma)}$, tensor utilizado para a descrição do modelo inicial, recuperamos o resultado obtido por Deser e Yang no trabalho [32]. Apresentamos uma notação simplética para teoria de spin 4, partindo da ação de segunda ordem encontrada e indicamos como serão os acoplamentos com os campos auxiliares para que o modelo de terceira ordem não contenham fantasmas. Finalizamos com uma discussão sobre os problemas e resultados. Ao longo do texto usaremos a métrica $(-,+,+)$ e $\epsilon^{012} = 1$.

2 TEORIAS MASSIVAS DE SPIN 3/2

2.1 A IDEIA DA AÇÃO MESTRA

Neste capítulo estudaremos modelos lagrangeanos massivos que descrevem partículas de spin 3/2. Esses modelos diferem entre si pela ordem das derivadas, onde um deles é de primeira e o outro de segunda ordem. O modelo de primeira ordem nas derivadas foi proposto por [21] e vem dado por:

$$-iS^{3/2}_{AD(1)} = \int d^3x \big[-\epsilon^{\mu\alpha\beta}\bar{\psi}_\mu \partial_\alpha \psi_\beta + m\epsilon^{\mu\alpha\beta}\bar{\psi}_\mu \gamma_\alpha \psi_\beta \big], \tag{1}$$

onde $\bar{\psi}_\mu$ e ψ_μ são matrizes cujas componentes são espinores de Majorana e o parâmetro m é a massa da partícula. Os índices gregos são as componentes do espaço-tempo (0, 1 e 2) e os campos espinoriais obedecem a relação $\bar{\psi}_\mu = (\psi_\mu)^\dagger \gamma^0$. As matrizes γ_μ são reais cujas componentes são dadas em termos das matrizes de Pauli ($\gamma^0 = i\sigma_2$, $\gamma^1 = \sigma_1$ e $\gamma^2 = \sigma_3$) e satisfazem a álgebra $\gamma_\mu\gamma_\nu = \eta_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu\alpha}\gamma^\alpha$.

O trabalho [20] mostra que na ação (1) o termo de massa quebra a invariância de calibre dada pela transformação de reparametrização $\delta\psi_\mu = \partial_\mu \xi$ e $\delta\bar{\psi}_\mu = \partial_\mu \bar{\xi}$ e, ao implementá-la, os autores obtiveram um modelo de segunda ordem nas derivadas dado por:

$$-iS^{3/2}_{AD(2)} = \int d^3x \Big[-\epsilon^{\mu\alpha\beta}\bar{\psi}_\mu \partial_\alpha \psi_\beta - \frac{1}{2m}\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha \bar{\psi}_\beta \gamma_\nu \gamma_\mu \epsilon^{\nu\rho\lambda}\partial_\rho \psi_\lambda \Big]. \tag{2}$$

Vemos que a ação acima é invariante sob a transformação de calibre implantada e o termo de massa que quebrava essa simetria foi cancelado nos cálculos durante o processo de implementação. Podemos encontrar uma única ação que interpole entre esses modelos e, a essa ação, chamamos de *ação mestra*. Para construir tal ação mestra, lançaremos mão de campos auxiliares onde, fazendo somente uma mudança nos campos, recuperamos os modelos de primeira e segunda ordem acima citados. Para essa interpolação, propomos a seguinte ação:

$$-iS_M = \int d^3x \Big[-\epsilon^{\mu\alpha\beta}\bar{\psi}_\mu \partial_\alpha \psi_\beta + m\epsilon^{\mu\alpha\beta}\bar{\psi}_\mu \gamma_\alpha \psi_\beta + \epsilon^{\mu\alpha\beta}(\bar{\psi}_\mu - \bar{\chi}_\mu)\partial_\alpha(\psi_\beta - \chi_\beta) \Big], \tag{3}$$

onde a equação acima é composta pelo campo principal $\bar{\psi}$ e seu adjunto e por um termo de mistura composto pelo campo auxiliar $\bar{\chi}$ e adjunto, onde estes possuem as mesmas características que os campos principais.

Com essa proposta vemos que, se fizermos a mudança no campo auxiliar tal que:

$$\bar{\chi}_\mu \to \bar{\psi}_\mu + \bar{\chi}_\mu, \quad \chi_\beta \to \psi_\beta + \chi_\beta, \tag{4}$$

recuperaremos o modelo lagrangeano de spin 3/2 de primeira ordem dado pela ação (1). Após as mudanças de variáveis acima, teremos um termo tipo Chern-Simons com os campos $\bar{\chi}_\mu$ e χ_μ, o qual

está completamente desacoplado da teoria. Esse termo não possui conteúdo físico, conforme mostrado no anexo I e, portanto, podemos desprezá-lo. Dessa forma, podemos afirmar que a equação (3) se reduz à equação (1). Agora, ao efetuarmos o produto do terceiro termo da equação (3) teremos:

$$-iS_M = \int d^3x \left[m\epsilon^{\mu\alpha\beta}\bar{\psi}_\mu\gamma_\alpha\psi_\beta - \epsilon^{\mu\alpha\beta}\bar{\psi}_\mu\partial_\alpha\chi_\beta - \epsilon^{\mu\alpha\beta}\bar{\chi}_\mu\partial_\alpha\psi_\beta + \epsilon^{\mu\alpha\beta}\bar{\chi}_\mu\partial_\alpha\chi_\beta \right]. \tag{5}$$

Fazendo as seguintes mudanças nos campos:

$$\psi_\beta \to \psi_\beta - \frac{1}{2m}\epsilon^{\rho\tau\lambda}\gamma_\rho\gamma_\beta\partial_\tau\chi_\lambda \;\; ; \;\; \bar{\psi}_\mu \to \bar{\psi}_\mu - \frac{1}{2m}\epsilon^{\sigma\theta\nu}\partial_\theta\bar{\chi}_\sigma\gamma_\mu\gamma_\nu, \tag{6}$$

e as substituindo em (5) teremos:

$$-iS_M = \int d^3x \left[\epsilon^{\mu\alpha\beta}\bar{\psi}_\mu\partial_\alpha\psi_\beta - \frac{1}{2m}\epsilon^{\sigma\rho\lambda}\partial_\rho\bar{\psi}_\lambda\gamma_\mu\gamma_\sigma\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha\psi_\beta \right]. \tag{7}$$

O resultado acima é o modelo de segunda ordem da teoria de spin 3/2 em $D = 2 + 1$ dimensões dada pela ação (2) . Portanto, a ação dada pela equação (3) interpola entre os modelos de primeira e segunda ordem através de mudanças específicas nos campos. A ação mestra apresentada pela equação (3) foi primeiramente proposta pelos autores Deser e Kay no trabalho [21]. Da forma como estamos prestes a sistematizar nesta tese, a construção da ação mestra seguirá a seguinte lógica: identificaremos no modelo auto-dual de mais baixa ordem nas derivadas o termo invariante pelo maior número de simetrias de calibre e checaremos que esse termo por si só é livre de conteúdo físico, o que pode ser feito, por exemplo, através da análise de vínculos canônica e em seguida, usamos esse termo como termo de mistura na construção da ação mestra. No modelo auto-dual de primeira ordem dada pela equação (1), isso é precisamente o termo tipo Chern-Simons. No anexo I apresentamos ao leitor a análise de vínculos deste termo explicitamente.

2.2 A INTRODUÇÃO DE FONTES

A introdução de fontes no processo de construção de ações mestras permitirá o mapeamento dual entre as equações de movimento, bem como a comparação das funções de correlação como veremos a seguir. Vamos fazer agora uma primeira generalização dos resultados do trabalho de Deser e Kay, [21]. Introduzindo fontes para os campos $\bar{\psi}_\mu$ e seu adjunto, teremos o seguinte modelo de primeira ordem nas derivadas:

$$-iS^{3/2}_{AD(1)} = \int d^3x \Big[-\epsilon^{\mu\alpha\beta}\bar{\psi}_\mu\partial_\alpha\psi_\beta + m\epsilon^{\mu\alpha\beta}\bar{\psi}_\mu\gamma_\alpha\psi_\beta + \bar{\psi}_\mu J^\mu + \bar{J}^\mu\psi_\mu \Big], \tag{8}$$

onde $\bar{J}^\mu$ e seu adjunto são termos de fonte. Novamente, o termo de massa da equação acima quebra a invariância de calibre por reparametrização e os autores do trabalho [20] mostraram que, ao implementá-la, obtiveram um modelo de segunda ordem nas derivadas dado por:

$$-iS^{3/2}_{AD(2)} = \int d^3x \left[\frac{1}{2m}\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha\bar{\chi}_\mu\gamma_\sigma\gamma_\beta\epsilon^{\sigma\nu\rho}\partial_\nu\chi_\rho + \epsilon^{\mu\alpha\beta}\bar{\chi}_\mu\partial_\alpha\chi_\beta + \bar{J}^\beta F_\beta - \bar{F}_\tau J^\tau \right.$$

$$- \quad \frac{1}{2m}\bar{J}^{\nu}\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}J^{\mu}\Big], \tag{9}$$

onde definiu-se os termos $F_{\beta} = \frac{1}{2m}\gamma_{\rho}\gamma_{\beta}\epsilon^{\rho\tau\lambda}\partial_{\tau}\chi_{\lambda}$ e $\bar{F}_{\tau} = \frac{1}{2m}\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_{\alpha}\bar{\chi}_{\mu}\gamma_{\tau}\gamma_{\beta}$. Dessa forma propomos a seguinte ação mestra que interpola entre os modelos de primeira e segunda ordem com fontes acima citados:

$$\begin{aligned} -iS_M &= \int d^3x\Big[-\epsilon^{\mu\alpha\beta}\bar{\psi}_{\mu}\partial_{\alpha}\psi_{\beta} + m\epsilon^{\mu\alpha\beta}\bar{\psi}_{\mu}\gamma_{\alpha}\psi_{\beta} + \epsilon^{\mu\alpha\beta}(\bar{\psi}_{\mu} - \bar{\chi}_{\mu})\partial_{\alpha}(\psi_{\beta} - \chi_{\beta}) \\ &+ \bar{\psi}_{\mu}J^{\mu} + \bar{J}^{\mu}\psi_{\mu}\Big], \end{aligned} \tag{10}$$

onde introduzimos um termo de mistura composto pelo campo auxiliar $\bar{\chi}$ e seu adjunto. Com exceção dos termos de fonte, a equação acima é idêntica à equação (3). Ao fazermos a mudança nos campos auxiliares dada pela equação (4) recuperamos o modelo lagrangeano de spin 3/2 de primeira ordem com fontes dado pela ação (8). Agora, se fizermos a multiplicação do terceiro termo na ação acima e tomarmos a mudança nos campos dada pela equação (6) obteremos:

$$\begin{aligned} -iS_M &= \int d^3x\ \Big[m\epsilon^{\mu\alpha\beta}\bar{\psi}_{\mu}\gamma_{\alpha}\psi_{\beta} + \epsilon^{\mu\alpha\beta}\bar{\chi}_{\mu}\partial_{\alpha}\chi_{\beta} - \frac{1}{2m}\epsilon^{\sigma\rho\lambda}\partial_{\rho}\bar{\chi}_{\lambda}\gamma_{\mu}\gamma_{\sigma}\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_{\alpha}\chi_{\beta} \\ &+ \bar{J}^{\beta}\Big[\psi_{\beta} - \frac{1}{2m}\epsilon^{\rho\tau\lambda}\gamma_{\rho}\gamma_{\beta}\partial_{\tau}\chi_{\lambda}\Big] + \Big[\bar{\psi}_{\mu} - \frac{1}{2m}\epsilon^{\sigma\theta\nu}\partial_{\theta}\bar{\chi}_{\sigma}\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}\Big]J^{\mu}\Big]. \end{aligned} \tag{11}$$

No resultado acima percebemos que embora os campos χ e ψ tenham se desacoplado ainda, existem termos de acoplamento envolvendo as fontes fazendo-se necessário uma nova mudança de variáveis dada por:

$$\psi_{\beta} \to \psi_{\beta} - \frac{1}{2m}\gamma_{\nu}\gamma_{\beta}J^{\nu}\ ;\ \ \bar{\psi}_{\mu} \to \bar{\psi}_{\mu} - \frac{1}{2m}\bar{J}^{\sigma}\gamma_{\mu}\gamma_{\sigma}, \tag{12}$$

e quando as substituirmos na equação (11) obteremos:

$$\begin{aligned} -iS_M &= \int d^3x\ \Big[\frac{1}{2m}\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_{\alpha}\bar{\chi}_{\mu}\gamma_{\sigma}\gamma_{\beta}\epsilon^{\sigma\nu\rho}\partial_{\nu}\chi_{\rho} + \epsilon^{\mu\alpha\beta}\bar{\chi}_{\mu}\partial_{\alpha}\chi_{\beta} + \bar{J}^{\beta}F_{\beta} - \bar{F}_{\tau}J^{\tau} \\ &- \frac{1}{2m}\bar{J}^{\nu}\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}J^{\mu}\Big]. \end{aligned} \tag{13}$$

Os termos $\bar{F}_{\tau}$ e F_{β} são conhecidos como *duais* e permitem a obtenção das equações de movimento do modelo auto-dual de primeira ordem, dada pela equação (1), a partir do modelo de segunda ordem, dada pela equação (2) e o trabalho [20] traz com detalhes essa demonstração. Notemos também que $\bar{F}_{\tau}$ e F_{β} são invariantes pela transformação de calibre por reparametrização ($\delta\chi_{\mu} = \partial_{\mu}\xi$ e $\delta\bar{\chi}_{\mu} = \partial_{\mu}\bar{\xi}$). Desta forma vemos que a ação mestra proporciona o mapeamento entre os objetos invariantes de calibre:

$$\bar{\psi}_\mu \longrightarrow \bar{F}^\mu(\bar{\chi}); \;\; \psi_\mu \longrightarrow F^\mu(\chi) \tag{14}$$

Vemos também que um termo quadrático nas fontes surge durante o processo. Adiante mostraremos que eles dão origem aos chamados termos de contato na comparação entre as funções de correlação no estudo da equivalência quântica.

Portanto, o resultado acima é o modelo de segunda ordem da teoria de spin 3/2 com fontes em $D = 2 + 1$ dimensões como o obtido pelos autores no trabalho [20] . Notemos que o acoplamento das fontes agora se dá com a derivada do campo. Os campos ψ e seu adjunto aparecem somente no termo $m\epsilon^{\mu\alpha\beta}\bar{\psi}_\mu\gamma_\alpha\psi_\beta$ e este está completamente desacoplado do restante da ação e, portanto, podemos ignorá-lo por não possuir conteúdo físico como mostra o anexo A.

2.3 INTERPOLANDO COM UM NOVO MODELO

Na seção anterior estudamos a equivalência entre as ações de primeira e segunda ordem nas derivadas e encontramos uma ação mestra que interpola entre eles. Notemos que no modelo de segunda ordem nas derivadas, o termo tipo Chern-Simons quebra a invariância de calibre do tipo γ-Weyl ($\delta\psi_\mu = \gamma_\mu\Lambda$; $\delta\bar{\psi}_\mu = \bar{\Lambda}\gamma_\mu$). A referência [20] nos mostra que ao implementar essa simetria no modelo de segunda ordem, obtém-se um modelo de ordem mais alta (de terceira ordem) que também é invariante pela transformação de calibre por reparametrização implementada anteriormente. Queremos encontrar uma ação mestra que interpola entre o modelo de segunda ordem nas derivadas, trabalhado na seção anterior (modelo sem fontes) e o modelo de terceira ordem obtido pelo trabalho [20]. Então os modelos que trabalharemos serão:

$$-iS^{3/2}_{AD(2)} = \int d^3x \Big[\epsilon^{\mu\alpha\beta}\bar{\chi}_\mu\partial_\alpha\chi_\beta - \frac{1}{2m}\epsilon^{\sigma\rho\lambda}\partial_\rho\bar{\chi}_\lambda\gamma_\mu\gamma_\sigma\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha\chi_\beta\Big], \tag{15}$$

e o modelo de terceira ordem é dado por

$$-iS^{3/2}_{AD(3)} = \int d^3x \;\; \left[\frac{1}{2m}\epsilon^{\sigma\rho\lambda}\partial_\rho\bar{\chi}_\lambda\gamma_\mu\gamma_\sigma\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha\chi_\beta - \frac{1}{4m^2}\epsilon^{\mu\alpha\beta}\epsilon^{\rho\tau\kappa}\epsilon^{\nu\lambda\sigma}\bar{\chi}_\mu\gamma_\rho\gamma_\beta\gamma_\nu\gamma_\kappa\partial_\alpha\partial_\tau\partial_\lambda\chi_\sigma\right]. \tag{16}$$

Para interpolar entre esses modelos, propomos a seguinte ação mestra:

$$\begin{aligned} -iS_M &= \int d^3x \left[\epsilon^{\mu\alpha\beta}\bar{\chi}_\mu\partial_\alpha\chi_\beta - \frac{1}{2m}\epsilon^{\sigma\rho\lambda}\partial_\rho\bar{\chi}_\lambda\gamma_\mu\gamma_\sigma\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha\chi_\beta\right. \\ &+ \left.\frac{1}{2m}\epsilon^{\sigma\rho\lambda}\partial_\rho(\bar{\chi}_\lambda - \bar{\Psi}_\lambda)\gamma_\mu\gamma_\sigma\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha(\chi_\beta - \Psi_\beta)\right], \end{aligned} \tag{17}$$

onde acrescentamos um termo de mistura composto pelos campos auxiliares $\bar{\Psi}$ e seu adjunto, sendo que estes possuem as mesmas características dos campos originais $\bar{\chi}$ e seu adjunto. Vejam que traçamos

exatamente a mesma lógica usada anteriormente, ou seja, gostaríamos de provar a equivalência entre as ações dada pelas equações (15) e (16) respectivamente, indo ao modelo de ordem mais baixa nas derivadas, equação (15), e identificamos o termo com mais simetrias (o termo de segunda ordem). Em seguida checamos que ele é livre de conteúdo físico pelo método da análise de vínculos e então o usamos como termo de mistura na construção da ação mestra, dada pela equação (17), introduzindo campos auxiliares.

Com essa proposta vemos que se tomarmos a seguinte mudança nos campos auxiliares dadas por:

$$\bar{\Psi}_\lambda \to \bar{\chi}_\lambda + \bar{\Psi}_\lambda; \;\; \Psi_\beta \to \chi_\beta + \Psi_\beta, \tag{18}$$

recuperaremos o modelo lagrangeano de spin 3/2 de segunda ordem dada pela equação (15). Novamente notemos que o termo de segunda ordem nas derivadas composto pelos campos $\bar{\Psi}$ e seu adjunto pode ser negligenciado por não possuir conteúdo físico e se encontra completamente desacoplado do restante da ação. Agora, se efetuarmos o produto do terceiro termo de (17) teremos:

$$\begin{aligned} -iS_M &= \int d^3x \left[\epsilon^{\mu\alpha\beta}\bar{\chi}_\mu\partial_\alpha\chi_\beta - \frac{1}{2m}\epsilon^{\sigma\rho\lambda}\partial_\rho\bar{\chi}_\lambda\gamma_\mu\gamma_\sigma\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta \right. \\ &- \left. \frac{1}{2m}\epsilon^{\sigma\rho\lambda}\partial_\rho\bar{\Psi}_\lambda\gamma_\mu\gamma_\sigma\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha\chi_\beta + \frac{1}{2m}\epsilon^{\sigma\rho\lambda}\partial_\rho\bar{\Psi}_\lambda\gamma_\mu\gamma_\sigma\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha\Psi_\beta\right]. \end{aligned} \tag{19}$$

Ao reescrevermos a equação acima na seguinte forma

$$\begin{aligned} -iS_M &= \int d^3x \left[\bar{\chi}_\mu + \frac{1}{2m}\epsilon^{\theta\tau\pi}\partial_\tau\bar{\Psi}_\pi\gamma_\mu\gamma_\theta\right]\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha\left[\chi_\beta + \frac{1}{2m}\gamma_\sigma\gamma_\beta\epsilon^{\sigma\rho\lambda}\partial_\rho\Psi_\lambda\right] \\ &- \frac{1}{4m^2}\epsilon^{\theta\tau\pi}\partial_\tau\bar{\Psi}_\pi\gamma_\mu\gamma_\theta\gamma_\sigma\gamma_\beta\epsilon^{\mu\alpha\beta}\epsilon^{\sigma\rho\lambda}\partial_\alpha\partial_\rho\Psi_\lambda + \frac{1}{2m}\epsilon^{\sigma\rho\lambda}\partial_\rho\bar{\Psi}_\lambda\gamma_\mu\gamma_\sigma\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha\Psi_\beta, \end{aligned} \tag{20}$$

vemos que, quando fizermos as seguintes mudanças nos campos:

$$\bar{\chi}_\mu \to \bar{\chi}_\mu - \frac{1}{2m}\epsilon^{\theta\tau\pi}\partial_\tau\bar{\Psi}_\pi\gamma_\mu\gamma_\theta \; ; \;\; \chi_\beta \to \chi_\beta - \frac{1}{2m}\gamma_\sigma\gamma_\beta\epsilon^{\sigma\rho\lambda}\partial_\rho\Psi_\lambda, \tag{21}$$

iremos obter:

$$\begin{aligned} -iS_M &= \int d^3x \left[\bar{\chi}_\mu\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha\chi_\beta - \frac{1}{4m^2}\epsilon^{\theta\tau\pi}\partial_\tau\bar{\Psi}_\pi\gamma_\mu\gamma_\theta\gamma_\sigma\gamma_\beta\epsilon^{\mu\alpha\beta}\epsilon^{\sigma\rho\lambda}\partial_\alpha\partial_\rho\Psi_\lambda \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2m}\epsilon^{\sigma\rho\lambda}\partial_\rho\bar{\Psi}_\lambda\gamma_\mu\gamma_\sigma\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha\Psi_\beta\right]. \end{aligned} \tag{22}$$

A ação acima é composta pelos campos $\bar{\chi}$ e $\bar{\Psi}$ e seus respectivos adjuntos. O campo $\bar{\chi}$ está presente somente o termo $\bar{\chi}_\mu\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha\chi_\beta$ e, esse termo isolado, não possui conteúdo físico como mostra o anexo A e por isso podemos desprezá-lo. Dessa forma ficamos:

$$
\begin{aligned}
-iS_M &= \int d^3x \Big[-\frac{1}{4m^2}\epsilon^{\theta\tau\pi}\partial_\tau\bar{\Psi}_\pi\gamma_\mu\gamma_\theta\gamma_\sigma\gamma_\beta\epsilon^{\mu\alpha\beta}\epsilon^{\sigma\rho\lambda}\partial_\alpha\partial_\rho\Psi_\lambda \\
&+ \frac{1}{2m}\epsilon^{\sigma\rho\lambda}\partial_\rho\bar{\Psi}_\lambda\gamma_\mu\gamma_\sigma\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha\Psi_\beta \Big]. \qquad (23)
\end{aligned}
$$

O resultado acima é o modelo de terceira ordem obtido pelos autores do trabalho [20] e é idêntico à equação (16). Portanto, a ação mestra proposta, equação (17), interpola entre os modelos de segunda e terceira ordem para teorias sem fontes.

2.4 INTRODUZINDO FONTES NA AÇÃO MESTRA

Trabalhando com a ação de segunda ordem nas derivadas contendo os termos de fonte, queremos encontrar uma ação mestra que interpola entre os modelos de segunda e terceira ordem. O modelo de terceira ordem com fontes foi encontrado pelos autores do trabalho [20] e vem dado por:

$$
\begin{aligned}
-iS^{3/2}_{AD(3)} &= \int d^3x \ \Big[\frac{1}{2m}\bar{f}^\mu(\bar{\psi})\gamma_\nu\gamma_\mu f^\nu(\psi) - \frac{1}{4m^2}\epsilon^{\alpha\lambda\beta}\bar{f}^\mu(\bar{\psi})\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\beta\partial_\lambda f^\nu(\psi) \\
&+ \bar{G}_\mu J^\mu + \bar{J}^\mu G_\mu \Big], \qquad (24)
\end{aligned}
$$

onde definiu-se os termos $\bar{f}^\mu(\bar{\psi}) = \epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha\bar{\psi}_\beta$, $f^\nu(\psi) = \epsilon^{\nu\alpha\beta}\partial_\alpha\psi_\beta$, $\bar{G}_\mu \equiv \frac{1}{4m^2}\epsilon^{\nu\alpha\beta}\partial_\alpha\bar{f}^\sigma(\bar{\psi})\gamma_\beta\gamma_\sigma\gamma_\mu\gamma_\nu$ e $G_\mu \equiv \frac{1}{4m^2}\epsilon^{\beta\alpha\nu}\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\sigma\gamma_\beta\partial_\alpha f^\sigma(\psi)$. Para fazermos a interpolação entre os modelos, propomos a seguinte ação mestra:

$$
\begin{aligned}
-iS_M &= \int d^3x \ \Big[\epsilon^{\mu\alpha\beta}\bar{\chi}_\mu\partial_\alpha\chi_\beta - \frac{1}{2m}\epsilon^{\sigma\rho\lambda}\partial_\rho\bar{\chi}_\lambda\gamma_\mu\gamma_\sigma\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha\chi_\beta \\
&+ \frac{1}{2m}\epsilon^{\sigma\rho\lambda}\partial_\rho(\bar{\chi}_\lambda - \bar{\Psi}_\lambda)\gamma_\mu\gamma_\sigma\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha(\chi_\beta - \Psi_\beta) \\
&- \bar{F}_\tau(\bar{\chi})J^\tau + \bar{J}^\tau F_\tau(\chi) - \frac{1}{2m}\bar{J}^\tau\gamma_\mu\gamma_\tau J^\mu \Big]. \qquad (25)
\end{aligned}
$$

Os termos de mistura são compostos pelos campos auxiliares $\bar{\Psi}$ e seu adjunto, onde eles apresentam as mesmas características que os campos originais $\bar{\chi}$ e seu adjunto. Percebam que fizemos a introdução dos termos de fontes acoplados com os duais invariantes de calibre $\bar{F}^\mu(\bar{\chi})$ e $F^\mu(\chi)$. Vemos que, se fizermos as seguintes mudanças nos campos auxiliares dado pela equação (18) recuperaremos o modelo lagrangeano de spin 3/2 de segunda ordem com fontes dada pela equação (13).

Agora, se efetuarmos o produto do terceiro termo da ação acima, conseguimos reescrever a ação mestra da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
-iS_M &= \int d^3x \left[\bar{\chi}_\mu + \frac{1}{2m}\epsilon^{\theta\tau\pi}\partial_\tau\bar{\Psi}_\pi\gamma_\mu\gamma_\theta\right]\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha\left[\chi_\beta + \frac{1}{2m}\gamma_\sigma\gamma_\beta\epsilon^{\sigma\rho\lambda}\partial_\rho\Psi_\lambda\right] \\
&- \frac{1}{4m^2}\epsilon^{\theta\tau\pi}\partial_\tau\bar{\Psi}_\pi\gamma_\mu\gamma_\theta\gamma_\sigma\gamma_\beta\epsilon^{\mu\alpha\beta}\epsilon^{\sigma\rho\lambda}\partial_\alpha\partial_\rho\Psi_\lambda \\
&+ \frac{1}{2m}\epsilon^{\sigma\rho\lambda}\partial_\rho\bar{\Psi}_\lambda\gamma_\mu\gamma_\sigma\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha\Psi_\beta - \frac{1}{2m}\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha\bar{\chi}_\mu\gamma_\tau\gamma_\beta J^\tau \\
&+ \frac{1}{2m}\bar{J}^\tau\gamma_\mu\gamma_\tau\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha\chi_\beta - \frac{1}{2m}\bar{J}^\tau\gamma_\mu\gamma_\tau J^\mu, \qquad (26)
\end{aligned}
$$

vemos que, se tomarmos a mudança nos campos dado por:

$$
\bar{\chi}_\mu \to \bar{\chi}_\mu - \frac{1}{2m}\epsilon^{\theta\tau\pi}\partial_\tau\bar{\Psi}_\pi\gamma_\mu\gamma_\theta \;;\;\; \chi_\beta \to \chi_\beta - \frac{1}{2m}\gamma_\sigma\gamma_\beta\epsilon^{\sigma\rho\lambda}\partial_\rho\Psi_\lambda, \qquad (27)
$$

e a substituirmos em (26), veremos que essa primeira mudança de variáveis tem como objetivo o desacoplamento entre os campos originais $\bar{\chi}$ e seu adjunto dos campos auxiliares $\bar{\Psi}$ e seu adjunto. Portanto teremos:

$$
\begin{aligned}
-iS_M &= \int d^3x \Bigg\{ \bar{\chi}_\mu\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha\chi_\beta - \frac{1}{4m^2}\epsilon^{\theta\tau\pi}\partial_\tau\bar{\Psi}_\pi\gamma_\mu\gamma_\theta\gamma_\sigma\gamma_\beta\epsilon^{\mu\alpha\beta}\epsilon^{\sigma\rho\lambda}\partial_\alpha\partial_\rho\Psi_\lambda \\
&+ \frac{1}{2m}\epsilon^{\sigma\rho\lambda}\partial_\rho\bar{\Psi}_\lambda\gamma_\mu\gamma_\sigma\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha\Psi_\beta - \frac{1}{2m}\bar{J}^\tau\gamma_\mu\gamma_\tau J^\mu \\
&- \frac{1}{2m}\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha\left[\bar{\chi}_\mu - \frac{1}{2m}\epsilon^{\theta\rho\pi}\partial_\rho\bar{\Psi}_\pi\gamma_\mu\gamma_\theta\right]\gamma_\tau\gamma_\beta J^\tau \\
&+ \frac{1}{2m}\bar{J}^\tau\gamma_\mu\gamma_\tau\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha\left[\chi_\beta - \frac{1}{2m}\gamma_\sigma\gamma_\beta\epsilon^{\sigma\rho\lambda}\partial_\rho\Psi_\lambda\right]\Bigg\}. \qquad (28)
\end{aligned}
$$

Na equação anterior, os termos de fontes estão acoplados com os campos χ e Ψ e para os desacoplarmos, manipularemos os termos acima de tal forma a reescrevê-los da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
-iS_M &= \int d^3x \left[\bar{\chi}_\mu + \frac{1}{2m}\bar{J}^\tau\gamma_\mu\gamma_\tau\right]\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha\left[\chi_\beta + \frac{1}{2m}\gamma_\lambda\gamma_\beta J^\lambda\right] - \frac{1}{4m^2}\bar{J}^\tau\gamma_\mu\gamma_\tau\gamma_\lambda\gamma_\beta\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha J^\lambda \\
&- \frac{1}{2m}\bar{J}^\tau\gamma_\mu\gamma_\tau J^\mu + \frac{1}{4m^2}\epsilon^{\beta\alpha\mu}\epsilon^{\theta\tau\pi}\partial_\tau\bar{\Psi}_\pi\gamma_\mu\gamma_\theta\gamma_\lambda\gamma_\beta\partial_\alpha J^\lambda + \frac{1}{4m^2}\partial_\alpha\bar{J}^\tau\gamma_\mu\gamma_\tau\gamma_\sigma\gamma_\beta\epsilon^{\mu\alpha\beta}\epsilon^{\sigma\rho\lambda}\partial_\rho\Psi_\lambda \\
&- \frac{1}{4m^2}\epsilon^{\theta\tau\pi}\partial_\tau\bar{\Psi}_\pi\gamma_\mu\gamma_\theta\gamma_\sigma\gamma_\beta\epsilon^{\mu\alpha\beta}\epsilon^{\sigma\rho\lambda}\partial_\alpha\partial_\rho\Psi_\lambda + \frac{1}{2m}\epsilon^{\sigma\rho\lambda}\partial_\rho\bar{\Psi}_\lambda\gamma_\mu\gamma_\sigma\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha\Psi_\beta. \qquad (29)
\end{aligned}
$$

Dessa forma, podemos promover uma segunda mudança de variáveis que desacopla os campos das fontes, dada por:

$$
\bar{\chi}_\mu \to \bar{\chi}_\mu - \frac{1}{2m}\bar{J}^\tau\gamma_\mu\gamma_\tau \;;\;\; \chi_\beta \to \chi_\beta - \frac{1}{2m}\gamma_\lambda\gamma_\beta J^\lambda, \qquad (30)
$$

e com isso obteremos:

$$
\begin{aligned}
-iS_M &= \int d^3x \bar{\chi}_\mu \epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha\chi_\beta - \frac{1}{4m^2}\bar{J}^\tau\gamma_\mu\gamma_\tau\gamma_\lambda\gamma_\beta\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha J^\lambda - \frac{1}{2m}\bar{J}^\tau\gamma_\mu\gamma_\tau J^\mu \\
&+ \frac{1}{4m^2}\epsilon^{\beta\alpha\mu}\epsilon^{\theta\tau\pi}\partial_\tau\bar{\Psi}_\pi\gamma_\mu\gamma_\theta\gamma_\lambda\gamma_\beta\partial_\alpha J^\lambda + \frac{1}{4m^2}\partial_\alpha\bar{J}^\tau\gamma_\mu\gamma_\tau\gamma_\sigma\gamma_\beta\epsilon^{\mu\alpha\beta}\epsilon^{\sigma\rho\lambda}\partial_\rho\Psi_\lambda \\
&- \frac{1}{4m^2}\epsilon^{\theta\tau\pi}\partial_\tau\bar{\Psi}_\pi\gamma_\mu\gamma_\theta\gamma_\sigma\gamma_\beta\epsilon^{\mu\alpha\beta}\epsilon^{\sigma\rho\lambda}\partial_\alpha\partial_\rho\Psi_\lambda + \frac{1}{2m}\epsilon^{\sigma\rho\lambda}\partial_\rho\bar{\Psi}_\lambda\gamma_\mu\gamma_\sigma\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha\Psi_\beta. \qquad (31)
\end{aligned}
$$

Na equação acima vemos que a dependência nos campos $\bar{\chi}$ e seu adjunto aparece somente no primeiro termo e, como esse termo não possui conteúdo físico conforme mostrado no anexo A, podemos desprezá-lo. Dessa forma temos:

$$
\begin{aligned}
-iS_M &= \int d^3x \frac{1}{2m}\epsilon^{\sigma\rho\lambda}\partial_\rho\bar{\Psi}_\lambda\gamma_\mu\gamma_\sigma\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha\Psi_\beta - \frac{1}{4m^2}\epsilon^{\theta\tau\pi}\partial_\tau\bar{\Psi}_\pi\gamma_\mu\gamma_\theta\gamma_\sigma\gamma_\beta\epsilon^{\mu\alpha\beta}\epsilon^{\sigma\rho\lambda}\partial_\alpha\partial_\rho\Psi_\lambda \\
&- \bar{G}_\lambda(\bar{\Psi})J^\lambda - \bar{J}^\tau G_\tau(\Psi) - \frac{1}{4m^2}\bar{J}^\tau\gamma_\mu\gamma_\tau\gamma_\lambda\gamma_\beta\epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha J^\lambda - \frac{1}{2m}\bar{J}^\tau\gamma_\mu\gamma_\tau J^\mu. \qquad (32)
\end{aligned}
$$

Percebemos que $\bar{G}_\lambda(\bar{\Psi})$ e $G_\tau(\Psi)$ são os duais acoplados às fontes, os quais são invariantes pelas transformações tanto por reparametrização quanto por γ-Weyl. Com os novos duais podemos concluir que existe o seguinte mapeamento dual entre os modelos auto-duais de primeira, segunda e terceira ordem:

$$
\begin{aligned}
&\bar{\psi} \longrightarrow \bar{F}; \quad \psi \longrightarrow F; \\
&\bar{F} \longrightarrow \bar{G}; \quad F \longrightarrow G, \qquad (33)
\end{aligned}
$$

o que nos revela uma possibilidade de existir uma única ação mestra interpolando entre os modelos. Veremos que isso é de fato possível mais adiante. Antes, porém, fugiremos ligeiramente do foco dessa tese e apresentaremos uma ação mestra que interpola entre os modelos de dubletos de spin 3/2.

2.5 AÇÃO MESTRA DE DUBLETOS MASSIVOS DE PARTÍCULAS DE SPIN 3/2

Nesta seção estudaremos ações que descrevem dubletos massivos de partículas de spin 3/2, isto é, os modelos descrevem ambas helicidades $+3/2$ e $-3/2$. A ação de partida é um modelo de segunda ordem nas derivadas apresentado pela referência [20] e vem dado por:

$$
-iS^{3/2}_{AD(2)} = \int d^3x \Big[-\frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\nu\bar{\psi}_\alpha\gamma_\nu\gamma_\mu\epsilon^{\nu\rho\lambda}\partial_\rho\psi_\lambda - \frac{m^2}{2}\epsilon^{\mu\nu\beta}\bar{\psi}_\mu\gamma_\nu\psi_\beta + \bar{\psi}_\beta J^\beta + \bar{J}^\beta\psi_\beta \Big], \quad (34)
$$

onde m é a massa da partícula, $\bar{J}^{\mu}$ e seu adjunto são fontes externas. O termo de massa do modelo acima quebra a invariância de calibre dada pela transformação por reparametrização. Os autores do trabalho [20] implementaram essa simetria e obtiveram um modelo de quarta ordem nas derivadas dado por:

$$\begin{aligned} -iS^{3/2}_{AD(4)} &= \int d^3x \Big[-\frac{1}{16m}\epsilon^{\mu\psi\kappa}\partial_{\psi}\partial_{\lambda}\bar{\psi}_{\kappa}\epsilon^{\lambda\nu\alpha}\gamma_{\nu}\gamma_{\mu}\gamma_{\sigma}\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta}\gamma_{\rho}\epsilon^{\rho\theta\sigma}\partial_{\theta}\epsilon^{\beta\varpi\varsigma}\partial_{\varpi}\psi_{\varsigma} \\ &+ \frac{1}{4}\epsilon^{\mu\lambda\beta}\partial_{\lambda}\bar{\psi}_{\beta}\gamma_{\nu}\gamma_{\mu}\epsilon^{\nu\sigma\rho}\partial_{\sigma}\psi_{\rho} + \frac{1}{2m}\bar{J}_{\mu}\epsilon^{\rho\theta\sigma}\partial_{\theta}\gamma_{\sigma}\gamma^{\mu}\gamma_{\beta}\gamma_{\rho}\epsilon^{\beta\kappa\alpha}\partial_{\kappa}\psi_{\alpha} \\ &- \frac{1}{2m}\epsilon^{\lambda\nu\alpha}\partial_{\lambda}\epsilon^{\mu\rho\theta}\partial_{\rho}\bar{\psi}_{\theta}\gamma_{\nu}\gamma_{\mu}\gamma_{\sigma}\gamma_{\alpha}J^{\sigma}\Big]. \end{aligned} \tag{35}$$

Procuraremos uma ação mestra que interpola entre os dois modelos de dubletos acima citados. Iremos acrescentar um termo de mistura de segunda ordem nas derivadas contendo os campos auxiliares $\bar{\chi}$ e seu adjunto da seguinte forma:

$$\begin{aligned} -iS_M &= \int d^3x \Big[-\frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_{\nu}\bar{\psi}_{\alpha}\gamma_{\beta}\gamma_{\mu}\epsilon^{\beta\rho\lambda}\partial_{\rho}\psi_{\lambda} - \frac{m^2}{2}\epsilon^{\mu\nu\beta}\bar{\psi}_{\mu}\gamma_{\nu}\psi_{\beta} + \bar{\psi}_{\beta}J^{\beta} + \bar{J}^{\beta}\psi_{\beta} \\ &+ \frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_{\nu}(\bar{\psi}_{\alpha} - \bar{\chi}_{\alpha})\gamma_{\beta}\gamma_{\mu}\epsilon^{\beta\rho\lambda}\partial_{\rho}(\psi_{\lambda} - \chi_{\lambda})\Big]. \end{aligned} \tag{36}$$

Na ação acima, se tomarmos os campo auxiliares como $\bar{\chi}_{\alpha} \to \bar{\psi}_{\alpha} + \bar{\chi}_{\alpha}$ e $\chi_{\alpha} \to \psi_{\alpha} + \chi_{\alpha}$ recuperaremos a ação dada pela equação (34). Agora, se fizermos a distributiva no último termo de (36), obteremos:

$$\begin{aligned} -iS_M &= \int d^3x \Big[-\frac{m^2}{2}\epsilon^{\mu\nu\beta}\bar{\psi}_{\mu}\gamma_{\nu}\psi_{\beta} + \bar{\psi}_{\beta}J^{\beta} + \bar{J}^{\beta}\psi_{\beta} - \frac{1}{4}\epsilon^{\alpha\lambda\mu}\partial_{\lambda}\bar{\psi}_{\mu}\gamma_{\nu}\gamma_{\alpha}\epsilon^{\nu\rho\lambda}\partial_{\rho}\chi_{\lambda} \\ &- \frac{1}{4}\epsilon^{\mu\lambda\alpha}\partial_{\lambda}\bar{\chi}_{\alpha}\gamma_{\nu}\gamma_{\mu}\epsilon^{\nu\rho\lambda}\partial_{\rho}\psi_{\lambda} + \frac{1}{4}\epsilon^{\mu\lambda\alpha}\partial_{\lambda}\bar{\chi}_{\alpha}\gamma_{\nu}\gamma_{\mu}\epsilon^{\nu\rho\lambda}\partial_{\rho}\chi_{\lambda}\Big]. \end{aligned} \tag{37}$$

Ao fazermos as seguintes mudanças nos campos:

$$\psi_{\tau} \to \psi_{\tau} - \frac{1}{4m^2}\gamma_{\mu}\gamma_{\tau}\gamma_{\nu}\gamma_{\alpha}\epsilon^{\alpha\lambda\mu}\partial_{\lambda}\epsilon^{\nu\rho\beta}\partial_{\rho}\chi_{\beta} + \frac{1}{m^2}\gamma_{\mu}\gamma_{\tau}J^{\mu} \tag{38}$$

e

$$\bar{\psi}_{\tau} \to \bar{\psi}_{\tau} - \frac{1}{4m^2}\epsilon^{\alpha\lambda\mu}\partial_{\lambda}\epsilon^{\nu\rho\beta}\partial_{\rho}\bar{\chi}_{\beta}\gamma_{\alpha}\gamma_{\nu}\gamma_{\tau}\gamma_{\mu} + \frac{1}{m^2}\bar{J}^{\mu}\gamma_{\tau}\gamma_{\mu} \tag{39}$$

e as substituirmos em (37), desacoplaremos ao mesmo tempo os campos originais tanto dos campos auxiliares quanto dos termos de fonte, obtendo o seguinte resultado:

$$
\begin{aligned}
-iS_M &= \int d^3x \Bigg[\frac{1}{16m^2}\epsilon^{\nu\psi\lambda}\partial_\psi\epsilon^{\mu\kappa\alpha}\partial_\kappa\bar{\chi}_\alpha\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\theta\gamma_\lambda\gamma_\epsilon\gamma_\varsigma\epsilon^{\varsigma\eta\theta}\partial_\eta\epsilon^{\epsilon\pi\gamma}\partial_\pi\chi_\gamma \\
&- \frac{1}{4}\epsilon^{\alpha\lambda\mu}\partial_\lambda\bar{\chi}_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha\epsilon^{\nu\rho\lambda}\partial_\rho\chi_\lambda + \frac{1}{2m^2}\epsilon^{\alpha\lambda\mu}\partial_\lambda\epsilon^{\nu\kappa\beta}\partial_\kappa\bar{\chi}_\beta\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\theta\gamma_\mu J^\theta \\
&+ \frac{1}{2m^2}\bar{J}^\theta\gamma_\tau\gamma_\theta\gamma_\nu\gamma_\alpha\epsilon^{\alpha\lambda\tau}\partial_\lambda\epsilon^{\nu\kappa\beta}\partial_\kappa\chi_\beta \Bigg]. \qquad (40)
\end{aligned}
$$

O resultado acima é o mesmo obtido pela referência [20] para o modelo de quarta ordem. Notemos que o campo $\bar{\psi}$ e seu adjunto aparece somente no termo $\epsilon^{\mu\alpha\beta}\epsilon^{\nu\lambda\sigma}\partial_\alpha\bar{\psi}_\beta\gamma_\nu\gamma_\mu\partial_\lambda\psi_\sigma$. Esse termo não possui conteúdo físico conforme o anexo B e por isso podemos ignorá-lo na ação acima. Portanto, a ação mestra dada pela equação (36) interpola entre os modelos de segunda e terceira ordem de dubletos massivos de spin 3/2.

2.6 A NOTAÇÃO Ω PARA OS MODELOS DE SPIN 3/2

2.6.1 O caso dos singletos

Na seção anterior, encontramos ações mestras para os modelos de singletos e dubletos de partículas spin 3/2 com e sem fontes. Essas tais ações mestras nos permitem mostrar a equivalência quântica entre os modelos interpolados, uma vez que classicamente esses modelos já são equivalentes entre si devido à equação de movimento da ação de ordem mais baixa estar contida no modelo de ordem superior via os mapeamentos duais. Para mostrar a equivalência quântica, vamos inserir uma notação simplética para as ações anteriormente encontradas. Assim definimos os termos:

$$
\begin{aligned}
\int d^3x \;\; \epsilon^{\mu\nu\alpha}\bar{\psi}_\mu\gamma_\nu\psi_\alpha &\equiv \int(\bar{\psi}\psi), \\
\int d^3x \;\; \epsilon^{\mu\nu\alpha}\bar{\psi}_\mu\partial_\nu\psi_\alpha &\equiv \int \bar{\psi}.d\psi, \qquad (41)
\end{aligned}
$$

onde $\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\nu \equiv (.d)^{\mu\alpha}$. Seguindo com as definições, vamos introduzir o operador de segunda ordem nas derivadas $\Omega_\mu(\psi)$ dado por:

$$
\Omega_\mu(\psi) = \gamma_\nu\gamma_\mu f^\nu(\psi). \qquad (42)
$$

Logo, o termo de segunda ordem nas derivadas fica escrito da seguinte forma:

$$
\int d^3x \;\; \bar{f}^\mu(\psi)\gamma_\nu\gamma_\mu f^\nu(\psi) = \int d^3x \;\; \epsilon^{\tau\beta\mu}\bar{\psi}_\tau\partial_\beta\Omega_\mu(\psi) \equiv \int \;\; \bar{\psi}.d\Omega(\psi). \qquad (43)
$$

Essa notação estabelece uma uniformidade entre as teorias de calibre de spin 2, 3 e 3/2 e ainda mais, observemos que o operador Ω é auto-adjunto, ou seja:

$$\int \bar{A} d\Omega(B) = \int \bar{B} d\Omega(A), \tag{44}$$

o que facilita as operações de integração das ações estudadas. Veremos que no caso de uma teoria com alta proliferação do número de índices, como é o caso do spin 4, essa notação será particularmente interessante. Com essas definições em mãos, podemos reescrever as ações trabalhadas anteriormente da seguinte maneira:

$$-iS^{3/2}_{AD(1)} = \int \big[-\bar{\psi}.d\psi + m(\bar{\psi}\psi)\big], \tag{45}$$

sendo esta a ação de primeira ordem nas derivadas dada pela equação (1). Já a ação (2) é escrita na forma:

$$-iS^{3/2}_{AD(2)} = \int \Big[-\frac{1}{2m}\bar{\psi}.d\Omega(\psi) + \bar{\psi}.d\psi\Big]. \tag{46}$$

A ação de terceira ordem dada pela equação (16) será:

$$-iS^{3/2}_{AD(3)} = \int \left[\frac{1}{4m^2}\bar{\Omega}(\bar{\psi}).d\Omega(\psi) + \frac{1}{2m}\bar{\psi}.d\Omega(\psi)\right]. \tag{47}$$

Dessa forma, reescrevemos os modelos anteriormente trabalhados para a obtenção das ações mestras em uma forma compacta. Para encontrarmos a equivalência quântica entre os modelos, sugerimos uma única ação mestra tripla e com fontes que interpole entre os modelos de singletos, (45), (46) e (47). Para tal objetivo propomos a seguinte ação:

$$\begin{aligned} S_M &= -\int \bar{\psi}.d\psi + m\int(\bar{\psi}\psi) + \int(\bar{\psi}-\bar{\chi}).d(\psi-\chi) \\ &+ \frac{1}{2m}\int(\bar{\phi}-\bar{\chi}).d\Omega(\phi-\chi) + \int d^3x(\bar{J}^\mu\psi_\mu + \bar{\psi}^\mu J_\mu), \end{aligned} \tag{48}$$

onde introduzimos dois termos de misturas compostos pelos campos auxiliares $\bar{\chi}$, $\bar{\phi}$ e seus respectivos adjuntos. O campo $\bar{\chi}$ e seu adjunto está acoplado por uma relação de primeira ordem nas derivadas com o campo original $\bar{\psi}$ e seu adjunto, como mostra o terceiro termo da equação acima. Já o campo $\bar{\phi}$ e seu adjunto se acoplam com o campo auxiliar χ por uma relação de segunda ordem nas derivadas dado pelo quarto termo da equação acima. Já os termos de fontes $\bar{J}^\mu$ com seu adjunto se acoplam com os campos originais $\bar{\psi}^\mu$ e seu adjunto. Para encontrarmos a equivalência quântica entre os modelos, devemos encontrar a equivalência entre as funções de correlação entre a ação mestra e os modelos de primeira, segunda e terceira ordem nas derivadas dadas pelas equações (45), (46) e (47). Para

mostrarmos isso, introduzimos o funcional gerador para a ação mestra dado por:

$$W[\bar{J},J]=\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\chi}\mathcal{D}\chi\mathcal{D}\bar{\phi}\mathcal{D}\phi\; e^{i\left[S_M+\int d^3x(\bar{J}^\mu\psi_\mu+\bar{\psi}^\mu J_\mu)\right]}. \tag{49}$$

Ao fazermos as seguintes mudanças nos campos auxiliares na equação acima, onde $\bar{\phi}\rightarrow\bar{\phi}+\bar{\chi}$, $\phi\rightarrow\phi+\chi$, $\bar{\chi}\rightarrow\bar{\chi}+\bar{\psi}$ e $\chi\rightarrow\chi+\psi$, teremos que os termos de mistura serão desacoplados e assim poderemos integrá-los funcionalmente. Essa integração pode ser feita, pois o termo dependente tanto do campo $\bar{\chi}$ e $\bar{\phi}$ são sem conteúdo físico mostrado pelos anexos A e B e discutidos nas seções anteriores. Portanto, fazendo as integrações funcionais obtemos:

$$W[\bar{J},J]=\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{i\left[-iS^{3/2}_{AD(1)}+\int d^3x(\bar{J}^\mu\psi_\mu+\bar{\psi}^\mu J_\mu)\right]}. \tag{50}$$

Podemos obter as funções de correlação derivando os funcionais (49) e (50) respectivamente com respeito as fontes e mostrar que, em primeira ordem, o modelo auto-dual (45) é equivalente a ação mestra (48). Fazendo as derivações teremos:

$$\begin{aligned}\langle\psi_{\mu 1}(x_1)...\psi_{\mu N}(x_N)\rangle_{S_M}&=\langle\psi_{\mu 1}(x_1)...\psi_{\mu N}(x_N)\rangle_{-iS^{3/2}_{AD(1)}};\\ \langle\bar{\psi}_{\mu 1}(x_1)...\bar{\psi}_{\mu N}(x_N)\rangle_{S_M}&=\langle\bar{\psi}_{\mu 1}(x_1)...\bar{\psi}_{\mu N}(x_N)\rangle_{-iS^{3/2}_{AD(1)}},\end{aligned} \tag{51}$$

onde, nas equações acima, mostram que a função de N pontos para a ação mestra é a mesma que a obitida para a ação de primeira ordem. No entanto, ao trabalharmos o terceiro termo da ação mestra (48), podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$S_M=m\int(\bar{\psi}\psi)+\int(\bar{\psi}_\mu\mathcal{U}^\mu+\bar{\mathcal{U}}^\mu\psi_\mu)+\frac{1}{2m}\int(\bar{\phi}-\bar{\chi}).d\Omega(\phi-\chi), \tag{52}$$

onde definimos o termo $\bar{\mathcal{U}}^\mu=\bar{f}(\bar{\chi})^\mu+\bar{J}^\mu$ e $\mathcal{U}^\mu=f(\chi)^\mu+J^\mu$. Podemos desacoplar o campo ψ e seu adjunto fazendo a seguinte mudança nos campos:

$$\bar{\psi}_\mu\rightarrow\bar{\psi}_\mu-\frac{1}{2m}\bar{\mathcal{U}}^\nu\gamma_\mu\gamma_\nu\;;\;\;\psi_\mu\rightarrow\psi_\mu-\frac{1}{2m}\gamma_\nu\gamma_\mu\mathcal{U}^\nu, \tag{53}$$

onde ao substituirmos as mudanças acima na equação (52) obteremos um desacoplamento do termo de massa. Esse termo não possui conteúdo físico e podemos integrá-lo obtendo:

$$W[\bar{J},J]\;\;=\;\;\int\mathcal{D}\bar{\chi}\mathcal{D}\chi\mathcal{D}\bar{\phi}\mathcal{D}\phi\;\;exp\;\;i\left[-iS^{3/2}_{AD(2)}+\frac{1}{2m}\int(\bar{\phi}-\bar{\chi}).d\Omega(\phi-\chi)\right.$$

$$+ \quad \int d^3x\Big(\bar{J}^\mu F_\mu(\chi) + \bar{F}^\mu(\bar{\chi})J_\mu + \frac{1}{2m}\bar{J}^\mu\gamma_\nu\gamma_\mu J^\nu\Big)\Bigg]. \tag{54}$$

Na equação acima vemos que podemos desacoplar o termo de mistura, que é composto pelos campos ϕ e χ, fazendo as mudanças nos campos ϕ tais que $\bar{\phi} \to \bar{\phi} + \bar{\chi}$ e $\phi \to \phi + \chi$. Com essas mudanças o termo que restará será sem conteúdo físico e poderemos integrá-lo encontrando o seguinte resultado:

$$W[\bar{J}, J] = \int \mathcal{D}\bar{\chi}\mathcal{D}\chi \;\; exp \;\; i\Bigg[- iS^{3/2}_{AD(2)} + \int d^3x\Big(\bar{J}^\mu F_\mu(\chi) + \bar{F}^\mu(\bar{\chi})J_\mu + \frac{1}{2m}\bar{J}^\mu\gamma_\nu\gamma_\mu J^\nu\Big)\Bigg]. \tag{55}$$

As funções de correlação são obtidas fazendo a derivação funcional da equação acima com respeito às fontes e elas são:

$$\begin{aligned}
\big\langle\psi_{\mu 1}(x_1)...\psi_{\mu N}(x_N)\big\rangle_{-iS^{3/2}_{AD(1)}} &= \langle F_{\mu 1}(\chi)...F_{\mu N}(\chi)\rangle_{-iS^{3/2}_{AD(2)}} + T.C; \\
\langle\bar{\psi}_{\mu 1}(x_1)...\bar{\psi}_{\mu N}(x_N)\rangle_{-iS^{3/2}_{AD(1)}} &= \langle\bar{F}_{\mu 1}(\bar{\chi})...\bar{F}_{\mu N}(\bar{\chi})\rangle_{-iS^{3/2}_{AD(2)}} + T.C,
\end{aligned} \tag{56}$$

onde $T.C$ é chamado de termo de contato e vem dado pelo termo quadrático nas fontes. Esse termo é proporcional à $\delta_{\mu\nu}\delta(x-y)$ e pode ser desprezado nos cálculos, pois ele não será nulo somente quando $x = y$ e $\mu = \nu$, ou seja, existe apenas locais específicos no espaço para que esse termo seja diferente de zero. Observemos que nós obtemos um mapeamento dual do termo F_μ, que são invariantes de calibre, coincidindo precisamente com o que obtivemos no nível clássico dado:

$$\bar{\psi}_\nu \leftrightarrow \bar{F}_\nu = \frac{\bar{\Omega}_\nu(\bar{\chi})}{2m} \;\; ; \;\; \psi_\nu \leftrightarrow F_\nu = \frac{\Omega_\nu(\bar{\chi})}{2m}. \tag{57}$$

Por fim, podemos mostrar a equivalência quântica para a ação de terceira ordem reescrevendo o funcional gerador dado pela equação (54), sem nenhuma mudança nos campos. Trabalhando com o segundo termo do funcional gerador podemos escrever, depois de algumas manipulações, a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
W[\bar{J}, J] \;\; &= \;\; \int \mathcal{D}\bar{\chi}\mathcal{D}\chi\mathcal{D}\bar{\phi}\mathcal{D}\phi \;\; exp \;\; i\Bigg[\int\Big(\bar{\chi} - \frac{\bar{\Omega}(\bar{\phi})}{2m}\Big).d\Big(\chi - \frac{\Omega(\phi)}{2m}\Big) \\
&- \;\; \frac{1}{4m^2}\int\bar{\Omega}(\bar{\phi}).d\Omega(\phi) + \frac{1}{2m}\int(\bar{\phi} - \bar{\chi}).d\Omega(\phi - \chi) + \int d^3x\Big(\bar{J}^\mu F_\mu(\chi) \\
&+ \;\; \bar{F}^\mu(\bar{\chi})J_\mu + \frac{1}{2m}\bar{J}^\mu\gamma_\nu\gamma_\mu J^\nu\Big)\Bigg].
\end{aligned} \tag{58}$$

Para chegarmos ao resultado acima, usamos a propriedade $\int\bar{\phi}.d\Omega(\chi) = \int\bar{\Omega}.d(\bar{\chi})$. Tomando as

seguintes mudanças nos campos:

$$\bar{\chi} \to \bar{\chi} + \frac{\bar{\Omega}(\bar{\chi})}{2m}; \quad \chi \to \chi + \frac{\Omega(\chi)}{2m}, \tag{59}$$

e as substituindo na equação (58), teremos que os campos χ e ϕ serão desacoplados. Após essa mudança, devemos desacoplar o campo χ das fontes fazendo:

$$\bar{\chi}_\mu \to \bar{\chi}_\mu + \frac{\bar{J}^\nu \gamma_\mu \gamma_\nu}{2m}; \quad \chi_\mu \to \chi_\mu + \frac{\gamma_\nu \gamma_\mu J^\nu}{2m}. \tag{60}$$

O termo resultante, dependente do campo χ, é sem conteúdo físico e portanto, podemos integrá-lo funcionalmente obtendo o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} W[\bar{J}, J] &= \int \mathcal{D}\bar{\phi}\mathcal{D}\phi \ exp\ i\Bigg[- iS^{3/2}_{AD(3)} + \int d^3x \Big[\bar{J}^\mu F_\mu\Big(\frac{\Omega(\phi)}{2m}\Big) + \bar{F}^\mu\Big(\frac{\bar{\Omega}(\bar{\phi})}{2m}\Big) J_\mu \\ &+ \frac{1}{2m}\bar{J}^\mu \gamma_\nu \gamma_\mu J^\nu \Big] \Bigg]. \end{aligned} \tag{61}$$

Derivando em relação às fontes as equações (58) e (61) teremos que a equivalência quântica entre os modelos de segunda e terceira ordem nas derivadas é dada pelas funções de correlação como seguem:

$$\begin{aligned} \big\langle F_{\mu 1}(\chi)...F_{\mu N}(\chi)\big\rangle_{-iS^{3/2}_{AD(2)}} &= \left\langle F_{\mu 1}\left(\frac{\Omega(\phi)}{2m}\right)...F_{\mu N}\left(\frac{\Omega(\phi)}{2m}\right)\right\rangle_{-iS^{3/2}_{AD(3)}} + T.C; \\ \big\langle \bar{F}_{\mu 1}(\bar{\chi})...\bar{F}_{\mu N}(\bar{\chi})\big\rangle_{-iS^{3/2}_{AD(2)}} &= \left\langle \bar{F}_{\mu 1}\left(\frac{\bar{\Omega}(\bar{\phi})}{2m}\right)...\bar{F}_{\mu N}\left(\frac{\bar{\Omega}(\bar{\phi})}{2m}\right)\right\rangle_{-iS^{3/2}_{AD(3)}} + T.C. \end{aligned} \tag{62}$$

Com os resultados acima concluímos que podemos estender a equivalência das ações que interpolam entre os modelos de primeira, segunda e terceira ordem nas derivadas de partículas de spin 3/2 em $D = 2 + 1$ dimensões para o nível quântico.

2.6.2 O caso dos dubletos

As ações que descrevem dubletos são dadas pelas equações (34), que é um modelo de segunda ordem nas derivadas e a equação (35) que é um modelo de quarta ordem nas derivadas. Reescrevendo-as na notação compacta que trabalhamos anteriormente teremos:

$$-iS^{3/2}_{AD(2)} = \int \Big[-\frac{1}{4}\bar{\psi}.d\Omega(\psi) + \frac{m^2}{2}(\bar{\psi}\psi)\Big], \tag{63}$$

sendo o modelo acima de segunda ordem nas derivadas. Já o modelo de quarta ordem será dado por:

$$-iS^{3/2}_{AD(4)} = \int \Big[-\frac{1}{4m}\bar{\Omega}(\bar{\psi}).d\Omega(\Omega) + \frac{1}{2m}\bar{\psi}.d\Omega(\psi)\Big]. \tag{64}$$

Dessa forma, propomos a segunte ação mestra que faz a interpolação entre os modelos acima:

$$S_M = \int \Big[-\frac{1}{4}\bar{\psi}.d\Omega(\psi) + \frac{m^2}{2}(\bar{\psi}\psi) + \frac{1}{4}(\bar{\psi}-\bar{\chi}).d\Omega(\psi-\chi) + \bar{\psi}_\mu J^\mu + \bar{J}^\mu\psi_\mu\Big]. \tag{65}$$

Notemos que o termo de mistura adicionado na ação mestra é de segunda ordem nas derivadas e composta pelo campo $\bar{\chi}$ e seu adjunto. De forma análoga ao que fizemos na seção anterior, compararemos as funções de correlação inserindo no funcional gerador as ações acima e encontrando as funções de correlação. Dessa forma teremos:

$$W[\bar{J},J] \;\; = \;\; \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\chi}\mathcal{D}\chi \;\; exp \;\; i\Big[S_M + \int d^3x(\bar{J}^\mu\psi_\mu + \bar{\psi}^\mu J_\mu)\Big]. \tag{66}$$

Ao tomarmos as seguintes mudanças nos campos auxiliares tais que $\bar{\chi} \to \bar{\chi} - \bar{\psi}$ e $\chi \to \chi - \psi$, teremos o desacoplamento dos termos de mistura. O termo composto pelo campo $\bar{\chi}$ e seu adjunto é sem conteúdo físico e, portanto, podemos integrá-lo funcionalmente obtendo:

$$W[\bar{J},J] \;\; = \;\; \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \;\; exp \;\; i\Big[-iS^{3/2}_{AD(2)} + \int d^3x(\bar{J}^\mu\psi_\mu + \bar{\psi}^\mu J_\mu)\Big]. \tag{67}$$

Agora, se trabalharmos o último termo da equação (65), podemos reescrever a ação mestra da seguinte forma:

$$S_M = \int \frac{m^2}{2}(\bar{\psi}\psi) + \int d^3x(\bar{\psi}_\mu\mathcal{V}^\mu + \bar{\mathcal{V}}^\mu\psi_\mu) + \frac{1}{4}\int \bar{\chi}.d\Omega(\chi) + \int d^3x(\bar{\psi}_\mu J^\mu + \bar{J}^\mu\psi_\mu), \tag{68}$$

onde definimos $\bar{\mathcal{V}}^\mu = -\frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\nu\bar{\Omega}_\alpha + \bar{J}^\mu$ e $\mathcal{V}^\mu = -\frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\nu\Omega_\alpha + J^\mu$. Para desacoplarmos o campo ψ com $\mathcal{V}$ faremos as seguintes mudanças:

$$\bar{\psi}_\mu \to \bar{\psi}_\mu - \frac{1}{m^2}\bar{\mathcal{V}}^\nu\gamma_\mu\gamma_\nu \;\; ; \;\; \psi_\mu \to \psi_\mu - \frac{1}{m^2}\gamma_\nu\gamma_\mu\mathcal{V}^\nu. \tag{69}$$

Substituindo-as na equação (68) e fazendo as devidas manipulações, os campos ψ são desacoplados de $\mathcal{V}$. O termo dependente do campo $\bar{\psi}$ e seu adjunto é sem conteúdo físico e podemos integrá-lo funcionalmente. Dessa forma teremos:

$$W[\bar{J},J] \;\; = \;\; \int \mathcal{D}\bar{\chi}\mathcal{D}\chi \;\; exp \;\; i\Big\{ -iS^{3/2}_{AD(4)} + \int d^3x[\bar{J}^\mu G_\mu(\chi) + \bar{G}^\mu(\bar{\chi})J_\mu$$

$$+ \quad \mathcal{O}(J^2)]\Big\}, \tag{70}$$

onde $\mathcal{O}(J^2)$ se refere aos termos quadráticos nas fontes. O mapeamento dual neste caso, é dado pelo espinor vetor $G_\mu(\chi)$ que é invariante sob uma transformação local do tipo reparametrização e γ-Weyl. De forma explicita:

$$\bar{\psi}_\mu \leftrightarrow \bar{G}_\mu = \frac{\bar{\Omega}(\bar{\Omega}(\bar{\chi}))}{4m^2}; \;\; \psi_\mu \leftrightarrow G_\mu = \frac{\Omega(\Omega(\chi))}{4m^2}. \tag{71}$$

As funções de correlação são obtidas derivando funcionalmente, com respeito as fontes, as equações (67) e (70). Assim, teremos que:

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{\mu 1}(x_1)...\psi_{\mu N}(x_N)\rangle_{-iS^{3/2}_{AD(2)}} &= \langle G_{\mu 1}(\chi)...G_{\mu N}(\chi)\rangle_{-iS^{3/2}_{AD(4)}} + T.C, \\
\langle \bar{\psi}_{\mu 1}(x_1)...\bar{\psi}_{\mu N}(x_N)\rangle_{-iS^{3/2}_{AD(2)}} &= \langle \bar{G}_{\mu 1}(\bar{\chi})...\bar{G}_{\mu N}(\bar{\chi})\rangle_{-iS^{3/2}_{AD(4)}} + T.C.
\end{aligned} \tag{72}$$

Observemos que, uma vez que temos termos quadráticos na fonte, a equivalência será satisfeita na presença de termos de contato. Além disso, pode-se verificar que as teorias de quarta ordem bem como os mapas duais são invariantes sob reparametrizações, enquanto o termo de quarta ordem é invariante sob a transformação do tipo γ-Weyl. A interpretação dos resultados obtidos no estudo da equivalência das teorias de spin 3/2 em termos da notação Ω, além de uniformizar com os casos bosônicos de spin 2 e 3, também permite a identificação de objetos de natureza "geométrica", onde veremos isso no caso das teorias de spin 4. Por ora vale ressaltar que os resultados obtidos neste capítulo, ações mestras e equivalência quântica entre os modelos de spin 3/2, podem ser encontrados na versão publicada em [24].

3 MODELOS AUTO-DUAIS DE SPIN 5/2

3.1 MODELO DE PRIMEIRA ORDEM DE SPIN 5/2

Neste capítulo estudaremos modelos lagrangeanos massivos que descrevem partículas de spin 5/2 em $D = 2 + 1$ dimensões. Os campos apresentados para a descrição dessas partículas são espinores tensoriais de rank 2 representados por $\bar{\chi}^{\mu\nu}$ e seu adjunto $\chi^{\mu\nu}$. Esses campos não possuem simetria definida entre os índices μ e ν e são γ-transverso com respeito ao segundo índice. Com a utilização somente desses campos espinorias, há um excesso de graus de liberdade na teoria e para eliminá-los são utilizado campos auxiliares, espinores de rank zero, acoplados com os campos de rank 2. No modelo de singleto de primeira ordem nas derivadas, o termo de massa quebra a invariância dada pela trasformação por reparametrização, $\delta\chi^{\mu\nu} = \partial^{\mu}\xi^{\nu}$ e $\delta\bar{\chi}^{\mu\nu} = \partial^{\mu}\bar{\xi}^{\nu}$, e o nosso objetivo é implementar essa simetria encontrando um novo modelo invariante sob tal transformação. Para fazermos isso, utilizamos a técnica da Imersão de Calibre de Noether (ICN) que consiste em fornecer simetrias à teorias que não são invariantes. A ação do modelo auto-dual massivo de primeira ordem da teoria de spin 5/2 proposto por [27] é:

$$\begin{aligned} S^{5/2}_{AD(1)} &= \int d^3x \ \Big[i\bar{\chi}_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\lambda\rho}\partial_{\lambda}\chi_{\rho}{}^{\nu} - i\mu\bar{\chi}_{\mu\alpha}\epsilon^{\mu\lambda\rho}\gamma_{\rho}\chi_{\lambda}{}^{\alpha} + 2i\bar{\varphi}\epsilon^{\mu\lambda\rho}\partial_{\lambda}\chi_{\mu\rho} \\ &+ 2ia\mu\bar{\chi}\varphi - ip(a)\bar{\varphi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\varphi + iq(a)\mu\bar{\varphi}\varphi \Big], \end{aligned} \tag{1}$$

onde o termo μ é a massa do campo espinorial, a é uma constante, $p(a) \equiv 3a^2 + 10a + 9$ e $q(a) \equiv 15a^2 + 54a + 45$. Os campos $\bar{\varphi}$ e seu adjunto são campos espinoriais de rank zero, cuja função é eliminar os graus de liberdade extras da teoria. Os campos $\bar{\chi}^{\mu\nu}$ e seu adjunto são campos tensoriais-espinoriais de Majorana e satisfazem as seguintes restrições:

$$\bar{\chi}_{\mu\nu}\gamma^{\nu} = 0; \ \ \gamma^{\nu}\chi_{\mu\nu} = 0. \tag{2}$$

Essa condição é chamada de *tensor-espinor γ-transverso de Majorana* e através dela são eliminados 6 graus de liberdade na teoria. Para os cálculos seguintes usamos a convenção:

- O campo $\bar{\chi}^{\mu\nu} = (\chi^{\mu\nu})^{\dagger}\gamma^{0}$;
- $(\gamma^{0})^{\dagger} = -\gamma^{0}$ e $(\gamma^{\mu})^{\dagger} = \gamma^{0}\gamma^{\mu}\gamma^{0}$;
- As matrizes γ_{α} são reais e obedecem a relação $\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta} = \eta^{\alpha\beta} + \epsilon^{\alpha\beta\mu}\gamma_{\mu}$;
- As componentes das matrizes γ^{α} são dadas em termos das matrizes de Pauli sendo $\gamma^{0} = i\sigma_{2}$, $\gamma^{1} = \sigma_{1}$ e $\gamma^{2} = \sigma_{3}$.
- a identidade $\epsilon^{\alpha\beta\theta} = \gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\gamma^{\theta} + \eta^{\alpha\theta}\gamma^{\beta} - \eta^{\alpha\beta}\gamma^{\theta} - \eta^{\beta\theta}\gamma^{\alpha}$ é frequentemente utilizada nos cálculos.

Para a obtenção dos resultados a seguir não foi levado em conta os termos de acoplamento com os campos auxiliares (φ e $\bar{\varphi}$) apresentados na ação (1) e consideramos que os campos $\chi^{\mu\nu}$ e seu

adjunto são variáveis de Grassmann. Assim, tomando a variação da ação (1) em relação aos campos tensoriais-espinoriais $\bar{\chi}_{\mu\alpha}$ e $\chi_{\rho\alpha}$ teremos:

$$\begin{aligned}\delta S^{5/2}_{AD(1)} &= \int d^3x \quad \delta\bar{\chi}_{\mu\alpha}[i\epsilon^{\mu\lambda\rho}\partial_\lambda\chi_\rho{}^\alpha - i\mu\epsilon^{\mu\lambda\rho}\gamma_\rho\chi_\lambda{}^\alpha] \\ &+ \quad [i\epsilon^{\mu\lambda\rho}\partial_\lambda\chi_\mu{}^\alpha + i\mu\bar{\chi}_\mu{}^\alpha\epsilon^{\mu\rho\lambda}\gamma_\lambda]\delta\chi_{\rho\alpha}. \end{aligned} \tag{3}$$

Na equação acima, os termos entre colchetes estão multiplicados por $\delta\bar{\chi}_{\mu\alpha}$ e $\delta\chi_{\rho\alpha}$ respectivamente. Esses termos são γ-transversos e, portanto, os termos entre colchetes também deverão apresentar essa característica. Dessa forma, definindo os termos entre colchetes como:

$$\begin{aligned} K^{\mu\alpha} &= i\epsilon^{\mu\lambda\rho}\partial_\lambda\chi_\rho{}^\alpha - i\mu\epsilon^{\mu\lambda\rho}\gamma_\rho\chi_\lambda{}^\alpha; \\ \bar{K}^{\rho\alpha} &= i\epsilon^{\mu\lambda\rho}\partial_\lambda\bar{\chi}_\mu{}^\alpha + i\mu\bar{\chi}_\mu{}^\alpha\epsilon^{\mu\rho\lambda}\gamma_\lambda, \end{aligned} \tag{4}$$

verificamos que a multiplicação matricial entre γ_α e $K^{\mu\alpha}$, apresenta o seguinte resultado:

$$\gamma_\alpha K^{\mu\alpha} = -i\mu\gamma_\alpha\epsilon^{\mu\lambda\rho}\gamma_\rho\chi_\lambda{}^\alpha. \tag{5}$$

A equação acima mostra que o tensor $K^{\mu\alpha}$ não é γ-transverso. O mesmo acontece para $\bar{K}^{\rho\alpha}$ quando multiplicamos pela direita a matriz γ_α. Para torná-los γ transversos, acrescentaremos o seguinte termo:

- Para $K^{\mu\alpha}$

$$\frac{i\mu}{3}\gamma^\alpha\gamma^\beta\epsilon^{\mu\rho\lambda}\gamma_\lambda\chi_{\rho\beta}. \tag{6}$$

- Para $\bar{K}^{\rho\alpha}$

$$\frac{-i\mu}{3}\bar{\chi}_{\mu\beta}\epsilon^{\mu\rho\lambda}\gamma_\lambda\gamma^\beta\gamma^\alpha. \tag{7}$$

Dessa forma, a equação (4) se torna:

$$\begin{aligned} K^{\mu\alpha} &= i\epsilon^{\mu\lambda\rho}\partial_\lambda\chi_\rho{}^\alpha - i\mu\epsilon^{\mu\lambda\rho}\gamma_\rho\chi_\lambda{}^\alpha + \frac{i\mu}{3}\gamma^\alpha\gamma^\beta\epsilon^{\mu\rho\lambda}\gamma_\lambda\chi_{\rho\beta}; \\ \bar{K}^{\rho\alpha} &= i\epsilon^{\mu\lambda\rho}\partial_\lambda\bar{\chi}_\mu{}^\alpha + i\mu\bar{\chi}_\mu{}^\alpha\epsilon^{\mu\rho\lambda}\gamma_\lambda - \frac{i\mu}{3}\bar{\chi}_{\mu\beta}\epsilon^{\mu\rho\lambda}\gamma_\lambda\gamma^\beta\gamma^\alpha. \end{aligned} \tag{8}$$

Essas equações satisfazem a condição de um tensor γ-transverso e é a equação de movimento oriunda da variação da ação (1) com relação aos campos $\bar{\chi}_{\mu\alpha}$ e seu adjunto. Notemos que a ação inicial

não é invariante sob a transformação de calibre por reparametrização dada por:

$$\delta\bar{\chi}^{\mu\alpha} = \partial^{\mu}\bar{\xi}^{\alpha} \quad \delta\chi^{\mu\alpha} = \partial^{\mu}\xi^{\alpha}, \tag{9}$$

pois o termo de massa da ação (1) quebra a transformação de calibre acima citada. Para implantar a essa trasnformação e obter uma nova ação, propomos um processo de iteração que se inicia com a introdução de campos auxiliares acoplados aos tensores de Euler. Como são conhecidos os tensores $\bar{K}$ e K temos que o modelo proposto vem dado por:

$$\tilde{S} = S^{5/2}_{AD(1)} + \int d^3x[\bar{K}^{\rho\alpha}a_{\rho\alpha} - \bar{a}_{\mu\alpha}K^{\mu\alpha}], \tag{10}$$

onde $\tilde{S}$ é a ação proposta, $S^{5/2}_{AD(1)}$ é a ação inicial dada por (1), $\bar{K}^{\rho\alpha}$ e $K^{\mu\alpha}$ são as equações de movimento dadas pela equação (4), $\bar{a}_{\mu\alpha}$ e $a_{\rho\alpha}$ são campos auxiliares de mesmas características dos campos originais $\bar{\chi}_{\mu\alpha}$ e $\chi_{\rho\alpha}$.

Tomando a variação da ação (10) obtemos que:

$$\delta\tilde{S} = \delta S^{5/2}_{AD(1)} + \int d^3x[\delta\bar{K}^{\rho\alpha}a_{\rho\alpha} - \bar{K}^{\rho\alpha}\delta a_{\rho\alpha} - \delta\bar{a}_{\mu\alpha}K^{\mu\alpha} + \bar{a}_{\mu\alpha}\delta K^{\mu\alpha}]. \tag{11}$$

Como:

$$\delta S^{5/2}_{AD(1)} = \int d^3x[\delta\bar{\chi}_{\mu\alpha}K^{\mu\alpha} + \bar{\chi}^{\rho\alpha}\delta\chi_{\rho\alpha}], \tag{12}$$

então (11) ficará

$$\delta\tilde{S} = \int d^3x[\delta\bar{\chi}_{\mu\alpha}K^{\mu\alpha} + \bar{\chi}^{\rho\alpha}\delta\chi_{\rho\alpha} + \delta\bar{K}^{\rho\alpha}a_{\rho\alpha} - \bar{K}^{\rho\alpha}\delta a_{\rho\alpha} - \delta\bar{a}_{\mu\alpha}K^{\mu\alpha} + \bar{a}_{\mu\alpha}\delta K^{\mu\alpha}]. \tag{13}$$

Implementando a transformação (9) na equação acima teremos:

$$\begin{aligned}\delta\tilde{S} &= \int d^3x[(\partial_{\mu}\bar{\xi}_{\alpha})K^{\mu\alpha} + \bar{K}^{\rho\alpha}(\partial_{\rho}\xi_{\alpha}) + \delta\bar{K}^{\rho\alpha}a_{\rho\alpha} - \bar{K}^{\rho\alpha}\delta a_{\rho\alpha} \\ &- \delta\bar{a}_{\mu\alpha}K^{\mu\alpha} + \bar{a}_{\mu\alpha}\delta K^{\mu\alpha}].\end{aligned} \tag{14}$$

Observemos que, se escolhermos a variação dos campos auxiliares como:

$$\delta a_{\rho\alpha} = \partial_{\rho}\xi_{\alpha}; \;\; \delta\bar{a}_{\mu\alpha} = \partial_{\mu}\bar{\xi}_{\alpha}, \tag{15}$$

obteremos:

$$\delta\tilde{S} = \int d^3x[\delta\bar{K}^{\rho\alpha}a_{\rho\alpha} + \bar{a}_{\mu\alpha}\delta K^{\mu\alpha}]. \tag{16}$$

A equação acima mostra que a variação da ação proposta ($\delta\tilde{S}$) é dada pelas variações das equações de movimento, dada pela equação (8), multiplicada pelos campos auxiliares $\bar{a}^{\mu\nu}$ e seu adjunto. Dessa

forma, calculando $\delta\bar{K}^{\rho\alpha}$ e $\delta K^{\mu\alpha}$ teremos:

$$\delta\bar{K}^{\rho\alpha} = i\epsilon^{\mu\lambda\rho}\partial_\lambda\delta\bar{\chi}_\mu{}^\alpha + i\mu\delta\bar{\chi}_\mu{}^\alpha\epsilon^{\mu\rho\lambda}\gamma_\lambda - \frac{i\mu}{3}\delta\bar{\chi}_{\mu\beta}\epsilon^{\mu\rho\lambda}\gamma_\lambda\gamma^\beta\gamma^\alpha,$$
$$\delta K^{\mu\alpha} = i\epsilon^{\mu\lambda\rho}\partial_\lambda\delta\chi_\rho{}^\alpha - i\mu\epsilon^{\mu\rho\lambda}\gamma_\lambda\delta\chi_\rho{}^\alpha + \frac{i\mu}{3}\gamma^\alpha\gamma^\beta\epsilon^{\mu\rho\lambda}\gamma_\lambda\delta\chi_{\rho\beta}. \quad (17)$$

Substituindo a transformação de calibre dada por (9) nas equações acima, observaremos que os primeiros termos dessas equações serão nulos. Usando a equação (15), quando necessário, teremos que:

$$\delta\bar{K}^{\rho\alpha} = +i\mu\delta\bar{a}_\mu{}^\alpha\epsilon^{\mu\rho\lambda}\gamma_\lambda - \frac{i\mu}{3}\delta\bar{a}_{\mu\beta}\epsilon^{\mu\rho\lambda}\gamma_\lambda\gamma^\beta\gamma^\alpha,$$
$$\delta K^{\mu\alpha} = -i\mu\epsilon^{\mu\rho\lambda}\gamma_\lambda\delta a_\rho{}^\alpha + \frac{i\mu}{3}\gamma^\alpha\gamma^\beta\epsilon^{\mu\rho\lambda}\gamma_\lambda\delta a_{\rho\beta}. \quad (18)$$

Dessa forma, substituindo o resultado acima na equação (16) teremos:

$$\delta\tilde{S} = \int d^3x \ \big[- i\mu\bar{a}_{\mu\alpha}\epsilon^{\mu\lambda\rho}\gamma_\rho\delta a_\lambda{}^\alpha + i\mu\delta\bar{a}_\mu{}^\alpha\epsilon^{\mu\lambda\rho}\gamma_\rho a_{\lambda\alpha}\big]$$
$$\delta\tilde{S} = \int d^3x \ \ \delta[i\mu\bar{a}_{\mu\alpha}\epsilon^{\mu\lambda\rho}\gamma_\rho a_\lambda{}^\alpha], \quad (19)$$

ou seja

$$\delta\Big[\tilde{S} - \int d^3x(i\mu\bar{a}_{\mu\alpha}\epsilon^{\mu\lambda\rho}\gamma_\rho a_\lambda{}^\alpha)\Big] \equiv \delta[S^{5/2}_{AD(2)}] = 0, \quad (20)$$

onde definiremos:

$$S^{5/2}_{AD(2)} = \tilde{S} - \int d^3x(i\mu\bar{a}_{\mu\alpha}\epsilon^{\mu\lambda\rho}\gamma_\rho a_\lambda{}^\alpha). \quad (21)$$

A equação acima é nossa ação com a transformação de calibre implantada em termos dos campos auxiliares $\bar{a}_{\mu\alpha}$ e seu adjunto. Os campos originais $\bar{\chi}^{\mu\nu}$ e seu adjunto estão presentes no primeiro termo da equação acima. Agora, devemos eliminar os campos auxiliares com a ajuda de suas equações de movimento. Então, tomando a variação da ação acima com respeito aos campos auxiliares teremos:

$$\delta S^{5/2}_{AD(2)} = \int d^3x \ \ [-\bar{K}^{\rho\alpha} + i\mu\bar{a}_\mu{}^\alpha\epsilon^{\mu\rho\lambda}\gamma_\lambda]\delta a_{\rho\alpha} + \delta\bar{a}_{\mu\alpha}[-K^{\mu\alpha} - i\mu\epsilon^{\mu\rho\lambda}\gamma_\lambda a_\rho{}^\alpha]. \quad (22)$$

Como $\delta S^{5/2}_{AD(2)} = 0$, $\delta a_{\rho\alpha}$ e $\delta\bar{a}_{\mu\alpha}$ são arbitrários, os termos entre colchetes são nulos. Atentemo-nos que devemos tornar esses termos γ-transversos. Fazendo isso obteremos:

$$-\bar{K}^{\rho\alpha}+i\mu\bar{a}_{\mu}{}^{\alpha}\epsilon^{\mu\rho\lambda}\gamma_{\lambda}-\frac{i\mu}{3}\bar{a}^{\mu\beta}\epsilon^{\mu\rho\lambda}\gamma_{\lambda}\gamma_{\beta}\gamma^{\alpha}=0,$$

$$-K^{\mu\alpha}-i\mu\epsilon^{\mu\sigma\lambda}\gamma_{\lambda}a_{\sigma}{}^{\alpha}+\frac{i\mu}{3}\gamma^{\alpha}\gamma_{\beta}\epsilon^{\mu\sigma\lambda}\gamma_{\lambda}a_{\sigma\beta}=0. \tag{23}$$

Devemos expressar os campos auxiliares na equação acima em termos das equações de movimentos (4) e (8). Fazendo essa inversão teremos:

$$\bar{a}^{\rho\alpha}=\frac{1}{i\mu}\Big[-\bar{K}^{\rho\alpha}+\frac{3}{2}\bar{K}^{\nu\alpha}\gamma_{\nu}\gamma^{\rho}-\bar{K}^{\nu\rho}\gamma_{\nu}\gamma^{\alpha}+\frac{7}{5}\bar{K}\gamma^{\rho}\gamma^{\alpha}-\frac{6}{5}\bar{K}\eta^{\alpha\rho}\Big],$$

$$a^{\rho\alpha}=\frac{1}{i\mu}\Big[K^{\rho\alpha}-\frac{3}{2}\gamma^{\rho}\gamma_{\nu}K^{\nu\alpha}+\gamma^{\alpha}\gamma_{\nu}K^{\nu\rho}-\frac{7}{5}\gamma^{\alpha}\gamma^{\rho}K+\frac{6}{5}K\eta^{\alpha\rho}\Big]. \tag{24}$$

Os resultados acima mostram como os campos auxiliares são dados em termos dos campos originais da teoria e os detalhes dessa inversão estão presentes no anexo C. Com esses resultados em mãos, os substituiremos na ação proposta (21) e fazendo as simplificações necessárias, obteremos o seguinte modelo:

$$S^{5/2}_{AD(2)}=S^{5/2}_{AD(1)}+\int d^3x\ \Big[\frac{1}{i\mu}\bar{K}^{\rho\alpha}K_{\rho\alpha}-\frac{3}{2i\mu}\bar{K}^{\rho\alpha}\gamma_{\rho}\gamma^{\sigma}K_{\sigma\alpha}+\frac{6}{5i\mu}\bar{K}K\Big]. \tag{25}$$

Por fim, basta substituirmos as equações de movimento dadas por (8) na equação acima e obteremos a ação $S^{5/2}_{AD(2)}$ em termos dos campos originais. Portanto:

$$\begin{aligned}S^{5/2}_{AD(2)} &= \int d^3x\Big[-i\bar{\chi}_{\mu\alpha}E^{\mu\rho}\chi_{\rho}{}^{\alpha}+\frac{i}{2\mu}E^{\rho\mu}\bar{\chi}_{\mu\alpha}E_{\rho\sigma}\chi^{\sigma\alpha}+\frac{3i}{2\mu}E^{\rho\mu}\bar{\chi}_{\mu}{}^{\alpha}\Gamma_{\rho\sigma}E^{\sigma\theta}\chi_{\theta\alpha}\\ &- \frac{6i}{5\mu}E^{\rho\mu}\bar{\chi}_{\mu\rho}E_{\alpha\sigma}\chi^{\sigma\alpha}\Big],\end{aligned} \tag{26}$$

onde definimos por conveniência os termos:

$$E^{\mu\nu}\equiv\epsilon^{\mu\beta\nu}\partial_{\beta}\qquad\Gamma^{\mu\nu}\equiv\epsilon^{\mu\nu\alpha}\gamma_{\alpha}. \tag{27}$$

A equação acima é nossa ação com a transformação de calibre implantada. Observemos que partimos de uma ação de primeira ordem nas derivadas e obtivemos um modelo de segunda ordem. O termo de primeira ordem é mantido, mas com o sinal contrário à ação (1) e o termo de massa que quebrava a transformação de calibre foi cancelado durante o procedimento de imersão. No trabalho [26] os autores obtiveram os termos de segunda ordem do setor de spin 5/2 dado por:

$$S^{(2)}=\frac{i}{m}\int d^3x\Big[\frac{1}{2}\bar{f}^{\mu\nu}f_{\mu\nu}-\frac{6}{5}\bar{f}^{\mu\mu}f_{\mu\mu}+\frac{3}{2}\bar{f}^{\mu\alpha}\gamma_{\mu\nu}f_{\nu\alpha}\Big], \tag{28}$$

onde $f^{\mu\alpha} \equiv \epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu\psi_{\rho\alpha}$ e $\gamma_{\mu\nu} \equiv \epsilon^{\alpha\beta\nu}\gamma_\nu$. Observemos que o resultado apresentado pela equação (26) mostra que obtemos os mesmos termos, com os mesmos coeficientes que os autores do trabalho [26], onde os termos semelhantes são:

$$\begin{aligned}
&\frac{i}{2\mu}E^{\rho\mu}\bar{\chi}_{\mu\alpha}E_{\rho\sigma}\chi^{\sigma\alpha} = \frac{1}{2}\bar{f}^{\mu\nu}f_{\mu\nu},\\
&\frac{3i}{2\mu}E^{\rho\mu}\bar{\chi}_{\mu}{}^{\alpha}\Gamma_{\rho\sigma}E^{\sigma\theta}\chi_{\theta\alpha} = \frac{3}{2}\bar{f}^{\mu\alpha}\gamma_{\mu\nu}f_{\nu\alpha},\\
&\frac{6i}{5\mu}E^{\rho\mu}\bar{\chi}_{\mu\rho}E_{\alpha\sigma}\chi^{\sigma\alpha} = \frac{6}{5}\bar{f}^{\mu\mu}f_{\mu\mu}.
\end{aligned} \tag{29}$$

Portanto, temos que pelo processo de implementação de simetria encontramos um modelo de segunda ordem nas derivadas cujos termos são exatamente os termos propostos pelos autores do trabalho [26], fortalecendo o processo sistemático de implementação de simetria para modelos fermiónicos de spin alto.

3.2 MODELO DE SEGUNDA ORDEM DE SPIN 5/2

No modelo de segunda ordem obtido na seção anterior, equação (26), o termo de primeira ordem nas derivadas quebra a invariância de calibre dada pela transformação:

$$\delta\chi_{\mu\alpha} = \frac{1}{3}(2\eta_{\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha\beta})\gamma_\mu\Theta^\beta(x), \tag{30}$$

onde o espinor $\Theta^\beta(x)$ é um vetor espinor dependente da posição e γ-transverso com respeito ao seu índice ($\gamma_\beta\Theta^\beta(x) = 0$). Queremos construir uma nova teoria de partículas de spin $5/2$ que seja invariante sob as transformações de calibre dadas pelas equações (9) e (30). Para isso precisamos das equações de movimento da ação (26) e elas são dadas por:

$$\begin{aligned}
\delta S^{5/2}_{AD(2)} &= \int d^3x\ \ \delta\bar{\chi}_{\mu\alpha}\Big[\frac{i}{2\mu}E^{\rho\mu}E_{\rho\sigma}\chi^{\sigma\alpha} + \frac{3i}{2\mu}\Gamma_{\rho\sigma}E^{\rho\mu}E^{\sigma\theta}\chi_\theta{}^{\alpha} - \frac{6i}{5\mu}E^{\alpha\mu}E_{\rho\sigma}\chi^{\sigma\rho}\\
&- iE^{\mu\rho}\chi_\rho{}^{\alpha}\Big] + \Big[-\frac{i}{2\mu}E_{\rho\sigma}E^{\rho\mu}\bar{\chi}_{\mu\alpha} - \frac{3i}{2\mu}E^{\rho}{}_{\sigma}E^{\theta\mu}\bar{\chi}_{\mu\alpha}\Gamma_{\theta\rho}\\
&+ \frac{6i}{5\mu}E_{\alpha\sigma}E_{\rho\mu}\bar{\chi}^{\mu\rho} + iE^{\mu}{}_{\sigma}\bar{\chi}_{\mu\alpha}\Big]\delta\chi^{\sigma\alpha},
\end{aligned} \tag{31}$$

onde denominaremos os termos entre colchetes como

$$\begin{aligned}
K^{\mu\alpha} &= \frac{i}{2\mu}E^{\rho\mu}E_{\rho\sigma}\chi^{\sigma\alpha} + \frac{3i}{2\mu}\Gamma_{\rho\sigma}E^{\rho\mu}E^{\sigma\theta}\chi_\theta{}^{\alpha} - \frac{6i}{5\mu}E^{\alpha\mu}E_{\rho\sigma}\chi^{\sigma\rho} - iE^{\mu\rho}\chi_\rho{}^{\alpha},\\
\bar{K}_{\sigma\alpha} &= -\frac{i}{2\mu}E_{\rho\sigma}E^{\rho\mu}\bar{\chi}_{\mu\alpha} - \frac{3i}{2\mu}E^{\rho}{}_{\sigma}E^{\theta\mu}\bar{\chi}_{\mu\alpha}\Gamma_{\theta\rho} + \frac{6i}{5\mu}E_{\alpha\sigma}E_{\rho\mu}\bar{\chi}^{\mu\rho} + iE^{\mu}{}_{\sigma}\bar{\chi}_{\mu\alpha}.
\end{aligned} \tag{32}$$

Observemos que na equação (31) as variações dos campos que multiplicam os termos em colchetes são γ-transversos e portanto as equações (32) devem satisfazer essa condição. Assim, tornando-as γ-transversas obteremos:

$$\begin{aligned}
K^{\mu\alpha} &= \frac{i}{2\mu}E^{\rho\mu}E_{\rho\sigma}\chi^{\sigma\alpha} + \frac{3i}{2\mu}\Gamma_{\rho\sigma}E^{\rho\mu}E^{\sigma\theta}\chi_{\theta}{}^{\alpha} - \frac{6i}{5\mu}E^{\alpha\mu}E_{\rho\sigma}\chi^{\sigma\rho} \\
&- iE^{\mu\rho}\chi_{\rho}{}^{\alpha} - \frac{i}{2\mu}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\Gamma_{\rho\sigma}E^{\rho\mu}E^{\sigma\theta}\chi_{\theta\beta} + \frac{2i}{5\mu}\gamma^{\alpha}\gamma_{\beta}E^{\beta\mu}E_{\rho\sigma}\chi^{\sigma\rho}, \\
\bar{K}_{\sigma\alpha} &= -\frac{i}{2\mu}E_{\rho\sigma}E^{\rho\mu}\bar{\chi}_{\mu\alpha} - \frac{3i}{2\mu}E^{\rho}{}_{\sigma}E^{\theta\mu}\bar{\chi}_{\mu\alpha}\Gamma_{\theta\rho} + \frac{6i}{5\mu}E_{\alpha\sigma}E_{\rho\mu}\bar{\chi}^{\mu\rho} \\
&+ iE^{\mu}{}_{\sigma}\bar{\chi}_{\mu\alpha} + \frac{i}{2\mu}E^{\rho}{}_{\sigma}E^{\theta\mu}\bar{\chi}_{\mu\beta}\Gamma_{\theta\rho}\gamma^{\beta}\gamma_{\alpha} - \frac{2i}{5\mu}E_{\beta\sigma}E^{\rho\mu}\bar{\chi}_{\mu\rho}\gamma^{\beta}\gamma_{\alpha}.
\end{aligned} \tag{33}$$

Com esses resultados, poderemos reescrever a variação da ação $S^{5/2}_{AD(2)}$ da seguinte forma:

$$\delta S^{5/2}_{AD(2)} = \int d^3x \left[\delta\bar{\chi}^{\mu\alpha}K_{\mu\alpha} + \bar{K}^{\beta\rho}\delta\chi_{\beta\rho}\right]. \tag{34}$$

Proporemos uma nova ação que seja invariante à transformação de calibre dada por (30) da seguinte forma:

$$\hat{S} = S^{5/2}_{AD(2)} + \int d^3x \ \left[\bar{K}_{\mu\alpha}a^{\mu\alpha} - \bar{a}^{\beta\rho}K_{\beta\rho}\right]. \tag{35}$$

Procederemos a implementação da transformação de calibre de forma análoga ao que foi descrito na seção anterior. Tomando a variação da equação acima e implementando a simetria dada pela equação (30) obteremos:

$$\delta\hat{S} = \int d^3x \left[\delta\bar{K}_{\sigma\alpha}a^{\sigma\alpha} + \bar{a}^{\mu\alpha}K_{\mu\alpha}\right]. \tag{36}$$

Nesse ponto devemos calcular as variações das equações de movimento, substituir as variações dos campos por suas respectivas transformações de calibre e escolher a variação do campo auxiliar sendo dada por $\delta a_{\mu\alpha} = \frac{1}{3}(2\eta_{\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha\beta})\gamma_{\mu}\Theta^{\beta}(x)$. Esse procedimento é idêntico aos passos que foram dados na seção anterior obtendo as equações (18) e (19). Após esses cálculos obtemos:

$$\begin{aligned}
\delta\hat{S} &= \int d^3x \ \left[iE^{\mu\sigma}\delta\bar{a}_{\mu\alpha}a_{\sigma}{}^{\alpha} - i\bar{a}_{\mu\alpha}E^{\mu\rho}\delta a_{\rho}{}^{\alpha}\right], \\
\delta\hat{S} &= \int d^3x \ \ \delta[i\bar{a}_{\mu\alpha}E^{\mu\rho}\delta a_{\rho}{}^{\alpha}], \\
0 &= \delta[\hat{S} - \int d^3x \ \ i\bar{a}_{\mu\alpha}E^{\mu\rho}\delta a_{\rho}{}^{\alpha}].
\end{aligned} \tag{37}$$

Com o resultado acima, identificamos que o termo entre colchetes é a ação de terceira ordem com a

simetria implantada em termos dos campos auxiliares $\bar{a}_{\mu\alpha}$ e seu adjunto. De forma explícita

$$S^{5/2}_{AD(3)} = S^{5/2}_{AD(2)} + \int d^3x \ \left[i\bar{K}_{\mu\alpha}a^{\mu\alpha} - i\bar{a}^{\beta\rho}K_{\beta\rho} - i\bar{a}_{\mu\alpha}E^{\mu\sigma}a_{\sigma}{}^{\alpha}\right]. \tag{38}$$

Devemos eliminar os campos auxiliares na equação acima e, para fazermos isso, vamos fatorar um termo "$E^{\mu\nu}$"nas equações de movimento. Por conveniência definiremos que

$$\varsigma^{\rho\alpha} = E^{\rho\beta}\chi_{\beta}{}^{\alpha}; \ \ \bar{\varsigma}^{\rho\alpha} = E^{\rho\beta}\bar{\chi}_{\beta}{}^{\alpha}. \tag{39}$$

Fatorando o termo em questão e fazendo a mudança acima teremos:

$$\begin{aligned} K^{\mu\alpha} &= E^{\rho\mu}\Big[\frac{i}{2\mu}\varsigma_{\rho}{}^{\alpha} + \frac{3i}{2\mu}\Gamma_{\rho\sigma}\varsigma^{\sigma\alpha} - \frac{6i}{5\mu}\eta^{\alpha}{}_{\rho}\varsigma + i\chi_{\rho}{}^{\alpha} - \frac{i}{2\mu}\gamma^{\alpha}\gamma_{\beta}\Gamma_{\rho\sigma}\varsigma^{\sigma\beta} + \frac{2i}{5\mu}\gamma^{\alpha}\gamma_{\rho}\varsigma\Big]; \\ \bar{K}_{\sigma\alpha} &= E_{\rho\sigma}\Big[-\frac{i}{2\mu}\bar{\varsigma}^{\rho}{}_{\alpha} - \frac{3i}{2\mu}\bar{\varsigma}_{\theta\alpha}\Gamma^{\theta\rho} + \frac{6i}{5\mu}\eta_{\alpha}{}^{\rho}\bar{\varsigma} + i\bar{\chi}^{\rho}{}_{\alpha} + \frac{i}{2\mu}\bar{\varsigma}_{\theta\beta}\Gamma^{\theta\rho}\gamma^{\beta}\gamma_{\alpha} - \frac{2i}{5\mu}\bar{\varsigma}\gamma^{\rho}\gamma_{\alpha}\Big]. \end{aligned} \tag{40}$$

Dessa forma podemos escrever a equação (40) da seguinte maneira

$$K^{\mu\alpha} = E^{\rho\mu}\tilde{K}_{\rho}{}^{\alpha}; \quad \bar{K}_{\sigma\alpha} = E_{\rho\sigma}\tilde{\bar{K}}^{\rho}{}_{\alpha}. \tag{41}$$

Com esses resultados, a ação $S^{5/2}_{AD(3)}$ é escrita da seguinte forma:

$$S^{5/2}_{AD(3)} = S^{5/2}_{AD(2)} + \int d^3x \ \left[iE_{\rho\mu}\tilde{\bar{K}}^{\rho}{}_{\alpha}a^{\mu\alpha} - i\bar{a}^{\beta\rho}E_{\sigma\beta}\tilde{K}^{\sigma}{}_{\rho} - i\bar{a}_{\mu\alpha}E^{\mu\sigma}a_{\sigma}{}^{\alpha}\right]. \tag{42}$$

Manipulando a equação acima, podemos reescrevê-la da seguinte maneira:

$$S^{5/2}_{AD(3)} = S^{5/2}_{AD(2)} - \int d^3x \ \left[i(\bar{a}^{\beta\rho} - \tilde{\bar{K}}^{\beta\rho})E_{\beta}{}^{\sigma}(a_{\sigma\rho} - \tilde{K}_{\sigma\rho}) + i\tilde{\bar{K}}^{\beta\rho}E_{\beta}{}^{\sigma}\tilde{K}_{\sigma\rho}\right], \tag{43}$$

e fazendo uma mudança no campo auxiliar tal que

$$\bar{a}^{\beta\rho} \to \tilde{\bar{a}}^{\beta\rho} + \tilde{\bar{K}}^{\beta\rho}; \ \ a_{\sigma\rho} \to \tilde{a}_{\sigma\rho} + \tilde{K}_{\sigma\rho}, \tag{44}$$

teremos

$$S^{5/2}_{AD(3)} = S^{5/2}_{AD(2)} - \int d^3x \ \left[i\tilde{\bar{a}}^{\beta\rho}E_{\beta}{}^{\sigma}a_{\sigma\rho} + i\tilde{\bar{K}}^{\beta\rho}E_{\beta}{}^{\sigma}\tilde{K}_{\sigma\rho}\right]. \tag{45}$$

O segundo termo da equação acima está desacoplado dos os outros termos da teoria, em outras palavras, o campo $\tilde{\bar{a}}^{\beta\rho}$ e seu adjunto somente aparecem nesse termo. Essa estrutura desacoplada da teoria não apresenta conteúdo físico e pode ser desprezado. Com isso ficamos:

$$S^{5/2}_{AD(3)} = S^{5/2}_{AD(2)} + \int d^3x \ \left[i\tilde{\bar{K}}^{\beta\rho}E_{\beta}{}^{\sigma}\tilde{K}_{\sigma\rho}\right], \tag{46}$$

que é a ação de terceira ordem expressa em termos dos campos originais da teoria inicial. Substituindo as equações de movimento dada pela equação (40) na ação acima e fazendo as devidas simplificações teremos:

$$
\begin{aligned}
S^{5/2}_{AD(3)} &= \int d^3x \left[\frac{-i}{2\mu}\bar{\varsigma}^{\rho\alpha}\varsigma_{\rho\alpha} - \frac{3i}{2\mu}\bar{\varsigma}^{\rho\alpha}\Gamma_{\rho\sigma}\varsigma^{\sigma}{}_{\alpha} + \frac{6i}{5\mu}\bar{\varsigma}\varsigma + \frac{i}{4\mu^2}\bar{\varsigma}_{\rho}{}^{\alpha}E^{\mu\rho}\varsigma_{\mu\alpha} - \frac{3i}{2\mu^2}\bar{\varsigma}_{\beta\alpha}\Gamma^{\beta\rho}E_{\rho\lambda}\varsigma^{\lambda\alpha}\right. \\
&- \frac{9i}{4\mu^2}\bar{\varsigma}^{\beta}{}_{\alpha}\Gamma_{\beta\rho}\Gamma_{\lambda\sigma}E^{\rho\lambda}\varsigma^{\sigma\alpha} + \frac{18i}{5\mu^2}\bar{\varsigma}^{\beta}{}_{\alpha}\Gamma_{\beta\rho}E^{\rho\alpha}\varsigma + \frac{6i}{5\mu^2}\bar{\varsigma}_{\rho\alpha}E^{\rho\alpha}\varsigma - \frac{6i}{5\mu^2}\bar{\varsigma}_{\beta\alpha}\Gamma^{\beta\rho}E_{\rho\lambda}\gamma^{\alpha}\gamma^{\lambda}\varsigma \\
&+ \left.\frac{3i}{4\mu^2}\bar{\varsigma}_{\beta\alpha}\Gamma^{\beta\rho}E_{\rho\lambda}\gamma^{\alpha}\gamma^{\theta}\Gamma^{\lambda\sigma}\varsigma_{\sigma\theta} + \frac{12i}{25\mu^2}\bar{\varsigma}E_{\alpha\lambda}\gamma^{\alpha}\gamma^{\lambda}\varsigma\right]. \qquad (47)
\end{aligned}
$$

A equação acima é nossa ação em termos dos campos originais $\chi_{\mu\nu}$ e seu adjunto. Vemos que o termos de segunda ordem tem o sinal contrário à ação (26) e o termo de primeira ordem, que quebra a transformação de calibre dada por (30), é cancelado no decorrer dos cálculos. Partimos de uma teoria de segunda ordem nas derivadas, implementamos a simetria (30) e obtivemos um modelo de terceira ordem nas derivadas. Devido à quantidade de termos de terceira ordem nas derivadas, não prosseguimos com novas implementações de simetrias. O resultado acima é, por construção, invariante sob a simetria implantada e também é invariante sob a simetria de reparametrização. Faz-se necessária a checagem explicita de que realmente os termos de terceira ordem são invariantes sob a simetria dada pela equação (30). Não há na literatura ações de terceira ordem descrevendo partículas de spin 5/2 e o resultado acima é preliminar de um trabalho ainda em andamento com o orientador dessa tese.

4 MODELOS AUTO-DUAIS DE SPIN 4

4.1 I.C.N - DO MODELO $AD(1) \rightarrow AD(2)$

Nesse capítulo estudaremos modelos teóricos para a descrição de singletos de spin 4 em $D = 2+1$ dimensões. Para descrever tais partículas usamos o tensor de rank 4 ($\omega^{\nu(\alpha\beta\gamma)}$) onde os índices entre parêntese são simétricos entre si e possuem traço nulo, ou seja, são invariantes sob uma permutação e $\eta^{\alpha\beta}\omega_{\nu(\alpha\beta\gamma)} = \eta^{\alpha\gamma}\omega_{\nu(\alpha\beta\gamma)} = \eta^{\gamma\beta}\omega_{\nu(\alpha\beta\gamma)} = 0$. Já o outro índice não tem simetria definida com relação aos outros três e, ao tomarmos o traço desse último com qualquer um dos outros índices, obtemos um tensor de rank 2, ou seja, $\eta^{\nu\alpha}\omega_{\nu(\alpha\beta\gamma)} = \omega^{\alpha}{}_{(\alpha\beta\gamma)}$, onde definimos $\omega^{\alpha}{}_{(\alpha\beta\gamma)} \equiv \omega_{(\beta\gamma)}$. De forma análoga, $\eta^{\nu\beta}\omega_{\nu(\alpha\beta\gamma)} = \omega_{(\alpha\gamma)}$ e $\eta^{\nu\gamma}\omega_{\nu(\alpha\beta\gamma)} = \omega_{(\alpha\beta)}$. Partindo do modelo apresentado pela referência [28], implementaremos transformação de calibre através do mecanismo de Imersão de Calibre de Noether e obteremos modelos de ordem superior. O modelo lagrangeano no qual iniciaremos a implementação de simetria é dado:

$$S^{4}_{AD(1)} = S^{4+2}_{AD(1)} + S^{2+1}_{AD(1)} + S^{1+0}_{AD(1)}, \tag{1}$$

onde:

$$\begin{aligned} S^{4+2}_{AD(1)} &= \int d^3x \left[\frac{\mu}{2}\omega_{\rho(\alpha\beta\gamma)}\epsilon^{\rho\mu\nu}\partial_\mu\omega_\nu{}^{(\alpha\beta\gamma)} - \frac{\mu^2}{2}\epsilon^{\rho\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta}{}_{\gamma}\eta_{\rho\alpha}\omega_{\mu(\beta\varsigma\lambda)}\omega_\nu{}^{(\gamma\varsigma\lambda)} + j^{\rho(\alpha\beta\gamma)}\omega_{\rho(\alpha\beta\gamma)}\right. \\ &+ \left.\mu^2\omega_{\alpha\beta}B^{\alpha\beta}\right], \end{aligned} \tag{2}$$

é ação do campo de spin 4 ($\omega_{\rho(\alpha\beta\gamma)}$) acoplado com um campo auxiliar de rank 2 ($B^{\alpha\beta}$) e um termo de fonte dado por $j^{\rho(\alpha\beta\gamma)}$. Já,

$$\begin{aligned} S^{2+1}_{AD(1)} &= \int d^3x \left[\frac{\alpha\mu}{2}B_{\rho\alpha}\epsilon^{\rho\mu}{}_{\nu}\partial_\mu B^{\nu\alpha} + \frac{\beta\mu^2}{2}\epsilon^{\rho\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\eta_{\rho\alpha}B_{\mu\beta}B_{\nu\gamma} - \frac{8\mu}{9}h_\mu\epsilon^{\mu\nu\beta}\partial_\nu h_\beta\right. \\ &- \left.\frac{9\mu}{20}v_\mu\epsilon^{\mu\nu\beta}\partial_\nu v_\beta + \frac{32\mu^2}{9}h_\mu h^\mu - \frac{9\mu^2}{5}v_\mu v^\mu + \mu^2 h^\mu v_\mu\right], \end{aligned} \tag{3}$$

é a ação do campo auxiliar de rank 2 ($B^{\alpha\beta}$) acoplado com outro campo auxiliar de rank 1 (v_μ). Por fim,

$$S^{1+0}_{AD(1)} = \int d^3x \left[-\frac{9\mu}{5}B\partial_\mu v^\mu + \frac{22\mu^2}{5}B^2\right], \tag{4}$$

é a ação do campo auxiliar de rank 1 (v_μ) acoplado com o traço do campo auxiliar B.

Os parâmetros α e β apresentados na equação (3) são constantes, μ é a massa do campo, B

é definido como o traço do campo $B^{\alpha\beta}$, h^{μ} é a parte antissimétrica do campo de spin 2 ($B^{[\alpha\beta]} = \epsilon^{\mu\alpha\beta}B_{\alpha\beta} \equiv h^{\mu}$), sendo que essa relação é válida somente em $D = 2+1$ dimensões e v_{μ} é um campo vetorial. Notemos que é possível integrar funcionalmente sobre os campos escalares B de forma a eliminá-los da ação (1). No entanto, nosso enfoque será o setor de spin 4 e, portanto, não preocuparemos com os campos auxiliares no momento.

Faz-se necessário a utilização dos campos auxiliares para eliminar os graus de liberdade extras na teoria. O nosso interesse está em fazer a implementação da simetria de Noether somente nos campos de spin 4 e portanto, nos cálculos a seguir não levaremos em conta as ações dos campos auxiliares e os termos de fontes e portanto, trabalharemos com os seguintes termos da ação (1):

$$S^{4}_{AD(1)} = \int d^{3}x \left[\frac{\mu}{2}\omega_{\rho(\alpha\beta\gamma)}\epsilon^{\rho\mu\nu}\partial_{\mu}\omega_{\nu}{}^{(\alpha\beta\gamma)} - \frac{\mu^{2}}{2}\epsilon^{\rho\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta}{}_{\gamma}\eta_{\rho\alpha}\omega_{\mu(\beta\varsigma\lambda)}\omega_{\nu}{}^{(\gamma\varsigma\lambda)}\right]. \tag{5}$$

Tomamos a variação da ação acima com respeito ao campo $\omega_{\rho(\alpha\beta\gamma)}$ e, substituindo a transformação de calibre

$$\delta\omega_{\rho(\alpha\beta\gamma)} = \partial_{\rho}\xi_{(\alpha\beta\gamma)}, \tag{6}$$

observamos que o termo de massa, segundo termo da equação (5), quebra a invariância de calibre dada pela transformação (6) e o nosso objetivo é tornar a ação (5) invariante sob essa transformação de calibre.

Primeiramente, calcularemos a variação da ação (5) e teremos:

$$\delta S^{4}_{AD(1)} = \int d^{3}x \;\; \delta\omega_{\rho(\alpha\beta\gamma)}\left[\mu\epsilon^{\rho\mu\nu}\partial_{\mu}\omega_{\nu}{}^{(\alpha\beta\gamma)} - \mu^{2}\epsilon_{\sigma}{}^{\rho\nu}\epsilon^{\sigma\alpha}{}_{\lambda}\omega_{\nu}{}^{(\lambda\beta\gamma)}\right]. \tag{7}$$

Observemos na equação acima que $\delta\omega_{\rho(\alpha\beta\gamma)}$ é simétrico em sem traço com respeito aos índices α, β e γ e portanto, o termo entre colchetes também deverá apresentar essas mesmas características. Tornando os termos entre colchetes simétricos e sem traço com respeito aos índices α, β e γ obteremos:

$$\delta S^{4}_{AD(1)} = \int d^{3}x \; \delta\omega_{\rho(\alpha\beta\gamma)}\left[\mu\epsilon^{\rho\mu\nu}\partial_{\mu}\omega_{\nu}{}^{(\alpha\beta\gamma)} - \frac{\mu^{2}}{3}\eta^{\rho\bar{\alpha}}\omega^{\bar{\beta}\bar{\gamma}} + \frac{\mu^{2}}{3}\omega^{\bar{\alpha}(\rho\bar{\beta}\bar{\gamma})}\right], \tag{8}$$

onde definimos, por conveniência, que os índices que possuem acima deles uma barra são simétricos entre si, ou seja:

$$\eta^{\rho\bar{\alpha}}\omega^{\bar{\beta}\bar{\gamma}} \equiv \eta^{\rho\alpha}\omega^{\beta\gamma} + \eta^{\rho\beta}\omega^{\gamma\alpha} + \eta^{\rho\gamma}\omega^{\alpha\beta}, \tag{9}$$

sendo este o mesmo critério aplicado aos outros termos. Dessa forma, os termos entre colchetes na equação acima serão dados pelo tensor $K^{\rho(\alpha\beta\gamma)}$ da seguinte forma:

$$K^{\rho(\alpha\beta\gamma)} = \mu\epsilon^{\rho\mu\nu}\partial_\mu\omega_\nu{}^{(\alpha\beta\gamma)} - \frac{\mu^2}{3}\eta^{\rho\bar{\alpha}}\omega^{\bar{\beta}\bar{\gamma}} + \frac{\mu^2}{3}\omega^{\bar{\alpha}(\rho\bar{\beta}\bar{\gamma})}, \tag{10}$$

e portanto, a equação (8) será escrita da seguinte maneira:

$$\delta S^4_{AD(1)} = \int d^3x \left[\delta\omega_{\rho(\alpha\beta\gamma)}K^{\rho(\alpha\beta\gamma)}\right]. \tag{11}$$

Para implementarmos a transformação de calibre dada pela equação (6), propomos uma nova ação S' tal que

$$S' = S^4_{AD(1)} - \int d^3x \ \left[a_{\rho(\alpha\beta\gamma)}K^{\rho(\alpha\beta\gamma)}\right], \tag{12}$$

onde $a_{\rho(\alpha\beta\gamma)}$ é um campo auxiliar que contém as mesmas características que o campo original $\omega_{\rho(\alpha\beta\gamma)}$. Agora, tomando a variação de S' teremos:

$$\begin{aligned}\delta S' &= \delta S^4_{AD(1)} - \int d^3x \ \left[\delta a_{\rho(\alpha\beta\gamma)}K^{\rho(\alpha\beta\gamma)} + a_{\rho(\alpha\beta\gamma)}\delta K^{\rho(\alpha\beta\gamma)}\right] \\ &= \int d^3x \ \left[\delta\omega_{\rho(\alpha\beta\gamma)}K^{\rho(\alpha\beta\gamma)} - \delta a_{\rho(\alpha\beta\gamma)}K^{\rho(\alpha\beta\gamma)} - a_{\rho(\alpha\beta\gamma)}\delta K^{\rho(\alpha\beta\gamma)}\right].\end{aligned} \tag{13}$$

Nesse ponto, vamos implementar a transformação de calibre dada pela equação (6). Para isso, basta substituir (6) na equação acima e obteremos:

$$\delta S' = \int d^3x \ \left[\partial_\rho\xi_{(\alpha\beta\gamma)}K^{\rho(\alpha\beta\gamma)} - \delta a_{\rho(\alpha\beta\gamma)}K^{\rho(\alpha\beta\gamma)} - a_{\rho(\alpha\beta\gamma)}\delta K^{\rho(\alpha\beta\gamma)}\right]. \tag{14}$$

Notemos que, ao escolhermos a variação do campo auxiliar na equação acima como sendo

$$\delta a_{\rho(\alpha\beta\gamma)} = \partial_\rho\xi_{(\alpha\beta\gamma)}, \tag{15}$$

teremos o cancelamento entre o primeiro e o segundo termo da equação (14) e ficaremos com o seguinte resultado:

$$\delta S' = \int d^3x \ \left[-a_{\rho(\alpha\beta\gamma)}\delta K^{\rho(\alpha\beta\gamma)}\right]. \tag{16}$$

Calculando $\delta K^{\rho(\alpha\beta\gamma)}$ e usando as igualdades $\delta\omega_{\rho(\alpha\beta\gamma)} = \partial_\rho\xi_{(\alpha\beta\gamma)} = \delta a_{\rho(\alpha\beta\gamma)}$ quando necessário, teremos:

$$\delta S' = \int d^3x \ \ \delta\left[\frac{\mu^2}{2}\left(a^{\beta\gamma}a_{\beta\gamma} - a^{\beta(\rho\alpha\gamma)}a_{\rho(\alpha\beta\gamma)}\right)\right]. \tag{17}$$

E dessa forma, por construção teremos:

$$\delta\left[S' - \int d^3x \;\; \frac{\mu^2}{2}\left(a^{\beta\gamma}a_{\beta\gamma} - a^{\beta(\rho\alpha\gamma)}a_{\rho(\alpha\beta\gamma)}\right)\right] = 0. \tag{18}$$

Da equação acima podemos enxergar que o termo entre colchetes é uma nova ação que a denominaremos de $S^4_{AD(2)}$. Usando a equação (12) expressaremos os elementos de $S^4_{AD(2)}$ que são:

$$S^4_{AD(2)} = S^4_{AD(1)} - \int d^3x \;\; K^{\rho(\alpha\beta\gamma)}a_{\rho(\alpha\beta\gamma)} - \frac{\mu^2}{2}(a^{\beta\gamma}a_{\beta\gamma} - a^{\beta(\rho\alpha\gamma)}a_{\rho(\alpha\beta\gamma)}). \tag{19}$$

A nova ação $S^4_{AD(2)}$ acima, que é invariante sob a simetria implantada, depende dos campos originais $\omega^{\rho(\alpha\beta\gamma)}$ e dos campos auxiliares $a_{\rho(\alpha\beta\gamma)}$. Para eliminar o campo auxiliar $a_{\rho(\alpha\beta\gamma)}$ na ação acima, utilizaremos sua equação de movimento. Assim, calculando-a teremos:

$$- \quad K^{\rho(\alpha\beta\gamma)} - \frac{\mu^2}{3}(\eta^{\rho\alpha}a^{\beta\gamma} + \eta^{\rho\beta}a^{\gamma\alpha} + \eta^{\rho\gamma}a^{\alpha\beta}) + \frac{\mu^2}{3}(a^{\alpha(\rho\beta\gamma)} + a^{\beta(\rho\gamma\alpha)} + a^{\gamma(\rho\alpha\beta)}) = 0. \tag{20}$$

O primeiro termo da equação acima depende somente dos campos originais $\omega^{\rho(\alpha\beta\gamma)}$ e os demais termos dependem do campo auxiliar $a^{\beta(\rho\gamma\alpha)}$. Separando-os temos:

$$K^{\rho(\alpha\beta\gamma)} = \frac{\mu^2}{3}(a^{\alpha(\rho\beta\gamma)} + a^{\beta(\rho\gamma\alpha)} + a^{\gamma(\rho\alpha\beta)} - \eta^{\rho\alpha}a^{\beta\gamma} - \eta^{\rho\beta}a^{\gamma\alpha} - \eta^{\rho\gamma}a^{\alpha\beta}). \tag{21}$$

Devemos expressar $a^{\rho(\alpha\beta\gamma)}$ em termos de $K^{\rho(\alpha\beta\gamma)}$. Para fazermos isso, tomaremos o traço na equação acima:

$$\begin{aligned} \eta_{\rho\alpha}K^{\rho(\alpha\beta\gamma)} &= \frac{\mu^2}{3}\eta_{\rho\alpha}(a^{\alpha(\rho\beta\gamma)} + a^{\beta(\rho\gamma\alpha)} + a^{\gamma(\rho\alpha\beta)} - \eta^{\rho\alpha}a^{\beta\gamma} - \eta^{\rho\beta}a^{\gamma\alpha} - \eta^{\rho\gamma}a^{\alpha\beta}) \\ K^{\beta\gamma} &= -\frac{4\mu^2}{3}a^{\beta\gamma}. \end{aligned} \tag{22}$$

A equação acima mostra a relação entre o traço do campo auxiliar $a^{\alpha(\rho\beta\gamma)}$ com respeito ao traço de $K^{\rho(\alpha\beta\gamma)}$.

Agora devemos encontrar a relação entre o campo auxiliar $a^{\alpha(\rho\beta\gamma)}$ com respeito a $K^{\rho(\alpha\beta\gamma)}$. Para fazermos isso, chamaremos a equação (21) de:

$$\Theta^{\rho(\alpha\beta\gamma)} = K^{\rho(\alpha\beta\gamma)} - \frac{\mu^2}{3}(a^{\alpha(\rho\beta\gamma)} + a^{\beta(\rho\gamma\alpha)} + a^{\gamma(\rho\alpha\beta)} - \eta^{\rho\alpha}a^{\beta\gamma} - \eta^{\rho\beta}a^{\gamma\alpha} - \eta^{\rho\gamma}a^{\alpha\beta}). \tag{23}$$

Assim, se calcularmos a seguinte relação:

$$2\Theta^{\rho(\alpha\beta\gamma)} - \Theta^{\alpha(\rho\beta\gamma)} - \Theta^{\gamma(\alpha\beta\rho)} - \Theta^{\rho(\alpha\beta\gamma)} = 0, \tag{24}$$

e usando o resultado dado pela equação (22) quando necessário, encontraremos a relação entre o campo auxiliar $a^{\rho(\alpha\beta\gamma)}$ em termos de $K^{\rho(\alpha\beta\gamma)}$ que vem dada por:

$$\begin{aligned} a^{\rho(\alpha\beta\gamma)} &= \frac{1}{4\mu^2}\Big(\eta^{\rho\alpha}K^{\beta\gamma}+\eta^{\rho\beta}K^{\gamma\alpha}+\eta^{\rho\gamma}K^{\alpha\beta}-2\eta^{\alpha\beta}K^{\gamma\rho}-2\eta^{\alpha\gamma}K^{\rho\beta} \\ &- 2\eta^{\beta\gamma}K^{\alpha\rho}\Big)-\frac{1}{\mu^2}\Big(K^{\rho(\alpha\beta\gamma)}-K^{\alpha(\rho\beta\gamma)}-K^{\beta(\alpha\rho\gamma)}-K^{\gamma(\alpha\beta\rho)}\Big). \end{aligned} \tag{25}$$

Percebam que o tensor $a^{\rho(\alpha\beta\gamma)}$ é simétrico e sem traço com respeito aos índices entre parênteses e o lado direito da equação acima também apresenta essas características. Voltando o resultado da equação acima, junto com o resultado da equação (22) em (19), teremos que:

$$\begin{aligned} S^4_{AD(2)} &= S^4_{AD(1)}+\int d^3x\ \Big[\frac{1}{2\mu^2}\Big(2K^{\rho(\alpha\beta\gamma)}K_{\rho(\alpha\beta\gamma)}-3K^{\rho(\alpha\beta\gamma)}K_{\alpha(\rho\beta\gamma)}\Big) \\ &- \frac{3}{8\mu^2}K^{\beta\gamma}K_{\beta\gamma}\Big]. \end{aligned} \tag{26}$$

Assim, substituindo a equação (10) na equação acima e fazendo as manipulações necessárias, obteremos:

$$\begin{aligned} S^4_{AD(2)} &= \int d^3x\ \Big[E^{\rho\nu}\omega_{\nu}{}^{(\alpha\beta\gamma)}E_{\rho\lambda}\omega^{\lambda}{}_{(\alpha\beta\gamma)}-\frac{3}{2}E^{\rho\nu}\omega_{\nu}{}^{(\alpha\beta\gamma)}E_{\alpha\lambda}\omega^{\lambda}{}_{(\rho\beta\gamma)} \\ &- \frac{3}{8}E_{\rho\nu}\omega^{\nu(\rho\beta\gamma)}E^{\tau\theta}\omega_{\theta(\tau\beta\gamma)}-\frac{\mu}{2}\omega^{\alpha(\rho\beta\gamma)}E_{\alpha\nu}\omega^{\nu}{}_{(\rho\beta\gamma)}\Big]. \end{aligned} \tag{27}$$

A ação acima é de segunda ordem nas derivadas e invariantes sob a simetria implantada. Notemos que, temos três termos de segunda ordem nas derivadas e um único termo de primeira ordem, sendo este, a menos de uma troca de sinal, idêntico ao que tínhamos na ação de partida e o termo que quebrava a simetria foi cancelado durante os cálculos.

4.2 I.C.N DO MODELO $AD(2) \to AD(3)$

Nessa seção mostraremos a implementação da transformação de calibre na ação de segunda ordem encontrada anteriormente dada pela equação (65), sem levar em conta os termos de acoplamento e fontes. O termo de primeira ordem nas derivadas não é invariante sob a seguinte transformação de calibre:

$$\delta\omega_{\nu(\alpha\beta\gamma)} = \epsilon_{\nu\alpha}{}^{\rho}\Lambda_{(\rho\beta\gamma)}+\epsilon_{\nu\beta}{}^{\rho}\Lambda_{(\rho\gamma\alpha)}+\epsilon_{\nu\gamma}{}^{\rho}\Lambda_{(\rho\alpha\beta)}. \tag{28}$$

Notemos que no lado esquerdo da equação acima, os índices entre parênteses são simétricos e sem traço e o lado direito também apresenta essas mesmas características. O termo $\Lambda_{(\rho\alpha\beta)}$ é um tensor de

rank 3 e simétrico com relação aos índices entre parênteses. A fim de facilitar a notação definiremos:

$$\delta\omega_{\nu(\alpha\beta\gamma)} = \epsilon_{\nu\bar{\alpha}}{}^{\rho}\Lambda_{(\rho\bar{\beta}\bar{\gamma})}, \tag{29}$$

onde os índices α, β e γ ganharam uma barra sobre eles indicando que são simétricos. O termo que quebra a simetria dada pela equação (29) é o termo de primeira ordem nas derivadas da ação (27) e os termos de segunda ordem são invariantes sob a simetria (29). A ação encontrada foi

$$\begin{aligned} S^4_{AD(2)} &= \int d^3x \ \Big[E^{\rho\nu}\omega_{\nu}{}^{(\alpha\beta\gamma)}E_{\rho\lambda}\omega^{\lambda}{}_{(\alpha\beta\gamma)} - \frac{3}{2}E^{\rho\nu}\omega_{\nu}{}^{(\alpha\beta\gamma)}E_{\alpha\lambda}\omega^{\lambda}{}_{(\rho\beta\gamma)} \\ &- \frac{3}{8}E_{\rho\nu}\omega^{\nu(\rho\beta\gamma)}E^{\tau\theta}\omega_{\theta(\tau\beta\gamma)} - \frac{\mu}{2}\omega^{\alpha(\rho\beta\gamma)}E_{\alpha\nu}\omega^{\nu}{}_{(\rho\beta\gamma)}\Big]. \end{aligned} \tag{30}$$

Tomando a variação da ação acima teremos

$$\begin{aligned} \delta S^4_{AD(2)} &= \int d^3x \ \Big[-2E^{\rho\lambda}E_{\rho\nu}\omega_{\lambda(\alpha\beta\gamma)} + 3E^{\rho}{}_{\nu}E_{\alpha\lambda}\omega^{\lambda}{}_{(\rho\beta\gamma)} \\ &+ \frac{3}{4}E_{\alpha\nu}E^{\tau\theta}\omega_{\theta(\tau\beta\gamma)} - \mu E_{\nu\lambda}\omega^{\lambda}{}_{(\alpha\beta\gamma)}\Big]\delta\omega^{\nu(\alpha\beta\gamma)}. \end{aligned} \tag{31}$$

Dadas as características do tensor $\omega^{\nu(\alpha\beta\gamma)}$, o termo entre colchetes também deverá ter simetria e traço nulo com respeito aos índices α, β e γ. Assim, tornado os termos entre colchetes simétricos e sem traço com respeito aos índices anteriormente citados, teremos:

$$\begin{aligned} \delta S^4_{AD(2)} &= \int d^3x \ \Big[-2E^{\rho\lambda}E_{\rho\nu}\omega_{\lambda(\alpha\beta\gamma)} + E^{\rho}{}_{\nu}E_{\bar{\alpha}\lambda}\omega^{\lambda}{}_{(\rho\bar{\beta}\bar{\gamma})} + \frac{1}{4}E_{\bar{\alpha}\nu}E^{\tau\theta}\omega_{\theta(\tau\bar{\beta}\bar{\gamma})} \\ &- \mu E_{\nu\lambda}\omega^{\lambda}{}_{(\alpha\beta\gamma)} - \frac{1}{2}\eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}E^{\rho}{}_{\nu}E^{\sigma}{}_{\lambda}\omega^{\lambda}{}_{(\rho\sigma\bar{\gamma})}\Big]\delta\omega^{\nu(\alpha\beta\gamma)}. \end{aligned} \tag{32}$$

Definindo o termo entre colchetes na equação acima como:

$$\begin{aligned} K_{\nu(\alpha\beta\gamma)} &= -2E^{\rho\lambda}E_{\rho\nu}\omega_{\lambda(\alpha\beta\gamma)} + E^{\rho}{}_{\nu}E_{\bar{\alpha}\lambda}\omega^{\lambda}{}_{(\rho\bar{\beta}\bar{\gamma})} + \frac{1}{4}E_{\bar{\alpha}\nu}E^{\tau\theta}\omega_{\theta(\tau\bar{\beta}\bar{\gamma})} \\ &- \mu E_{\nu\lambda}\omega^{\lambda}{}_{(\alpha\beta\gamma)} - \frac{1}{2}\eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}E^{\rho}{}_{\nu}E^{\sigma}{}_{\lambda}\omega^{\lambda}{}_{(\rho\sigma\bar{\gamma})}, \end{aligned} \tag{33}$$

podemos escrever que:

$$\delta S^4_{AD(2)} = \int d^3x \ \big[\delta\omega^{\nu(\alpha\beta\gamma)}K_{\nu(\alpha\beta\gamma)}\big]. \tag{34}$$

Para fazermos a implementação da transformação de calibre propomos a seguinte ação:

$$\hat{S} = S^4_{AD(2)} - \int d^3x \ [b^{\nu(\alpha\beta\gamma)} K_{\nu(\alpha\beta\gamma)}], \tag{35}$$

onde $b^{\nu(\alpha\beta\gamma)}$ é um campo auxiliar de mesmas características que o campo original $\omega^{\nu(\alpha\beta\gamma)}$. Tomando a variação da ação proposta acima teremos:

$$\begin{aligned} \delta\hat{S} &= \delta S^4_{AD(2)} - \int d^3x \ [\delta b^{\nu(\alpha\beta\gamma)} K_{\nu(\alpha\beta\gamma)} + b^{\nu(\alpha\beta\gamma)} \delta K_{\nu(\alpha\beta\gamma)}] \\ \delta\hat{S} &= \int d^3x \ \delta[\omega^{\nu(\alpha\beta\gamma)} K_{\nu(\alpha\beta\gamma)} - \delta b^{\nu(\alpha\beta\gamma)} K_{\nu(\alpha\beta\gamma)} - b^{\nu(\alpha\beta\gamma)} \delta K_{\nu(\alpha\beta\gamma)}]. \end{aligned} \tag{36}$$

Com esse resultado, implementando a transformação de calibre dada pela equação (29), obtemos que:

$$\delta\hat{S} = \int d^3x \ [\epsilon_{\nu\bar{\alpha}}{}^{\rho} \Lambda_{(\rho\bar{\beta}\bar{\gamma})} K_{\nu(\alpha\beta\gamma)} - \delta b^{\nu(\alpha\beta\gamma)} K_{\nu(\alpha\beta\gamma)} - b^{\nu(\alpha\beta\gamma)} \delta K_{\nu(\alpha\beta\gamma)}]. \tag{37}$$

Observemos que se escolhermos a variação do campo auxiliar $b^{\nu(\alpha\beta\gamma)}$ sendo:

$$\delta b^{\nu(\alpha\beta\gamma)} = \epsilon^{\nu\bar{\alpha}}{}_{\rho} \Lambda^{(\rho\bar{\beta}\bar{\gamma})}, \tag{38}$$

teremos que

$$\delta\hat{S} = \int d^3x \ [-b^{\nu(\alpha\beta\gamma)} \delta K_{\nu(\alpha\beta\gamma)}]. \tag{39}$$

Neste ponto, devemos calcular $\delta K_{\nu(\alpha\beta\gamma)}$. Fazendo os cálculos obtemos:

$$\begin{aligned} \delta K_{\nu(\alpha\beta\gamma)} &= -2E^{\rho\lambda} E_{\rho\nu} \delta\omega_{\lambda(\alpha\beta\gamma)} + E^{\rho}{}_{\nu} E_{\bar{\alpha}\lambda} \delta\omega^{\lambda}{}_{(\rho\bar{\beta}\bar{\gamma})} + \frac{1}{4} E_{\bar{\alpha}\nu} E^{\tau\theta} \delta\omega_{\theta(\tau\bar{\beta}\bar{\gamma})} \\ &- \frac{1}{2} \eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} E^{\rho}{}_{\nu} E^{\sigma}{}_{\lambda} \delta\omega^{\lambda}{}_{(\rho\sigma\bar{\gamma})} - \mu E_{\nu\lambda} \delta\omega^{\lambda}{}_{(\alpha\beta\gamma)}. \end{aligned} \tag{40}$$

Como $\delta\omega_{\nu(\alpha\beta\gamma)} = \epsilon_{\nu\bar{\alpha}}{}^{\rho} \Lambda_{(\rho\bar{\beta}\bar{\gamma})}$, podemos substituir essa igualdade na equação acima. Fazendo isso, temos que os três primeiros termos de segunda ordem na equação acima são nulos, pois eles são invariantes sob essa simetria e assim ficamos:

$$\delta K_{\nu(\alpha\beta\gamma)} = -\mu E_{\nu}{}^{\lambda} \epsilon_{\lambda\bar{\alpha}}{}^{\rho} \Lambda_{(\rho\bar{\beta}\bar{\gamma})} - \frac{1}{2} \eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} E_{\rho\nu} E^{\sigma}{}_{\lambda} \epsilon^{\nu\tilde{\rho}\theta} \Lambda_{(\theta\tilde{\sigma}\tilde{\gamma})}. \tag{41}$$

Para indicar que os índices ρ, σ e γ são simétricos entre si colocamos ($\tilde{}$) sobre eles. Escolhendo que $\epsilon_{\lambda\bar{\alpha}}{}^{\rho} \Lambda_{(\rho\bar{\beta}\bar{\gamma})} = \delta b_{\lambda(\alpha\beta\gamma)}$ e substituindo-a na equação acima teremos:

$$\delta K_{\nu(\alpha\beta\gamma)} = -\mu E_{\nu}{}^{\lambda} \delta b_{\lambda(\alpha\beta\gamma)} - \frac{1}{2} \eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} E^{\rho}{}_{\nu} E^{\sigma}{}_{\lambda} \delta b^{\lambda}{}_{(\rho\sigma\bar{\gamma})}. \tag{42}$$

Esse resultado expressa a variação do tensor $K_{\nu(\alpha\beta\gamma)}$ em termos do tensor auxiliar $b_{\lambda(\alpha\beta\gamma)}$. Substituindo a equação (42) na equação (39) e fazendo as manipulações necessárias obteremos:

$$\delta\hat{S} = \int d^3x \ -\frac{\mu}{2}\delta\Big[E_\nu{}^\lambda b_{\lambda(\alpha\beta\gamma)}b^{\nu(\alpha\beta\gamma)}\Big]$$
$$\delta\Big[\hat{S} + \int d^3x \ \frac{\mu}{2}E_\nu{}^\lambda b_{\lambda(\alpha\beta\gamma)}b^{\nu(\alpha\beta\gamma)}\Big] = 0. \tag{43}$$

O termo entre colchetes pode ser interpretado como uma nova ação invariante sob a simetria (29) que a chamaremos de $S^4_{AD(3)}$. De forma explícita

$$S^4_{AD(3)} = S^4_{AD(2)} - \int d^3x \ \big[b^{\nu(\alpha\beta\gamma)}K_{\nu(\alpha\beta\gamma)} + \frac{\mu}{2}b_{\lambda(\alpha\beta\gamma)}E_\nu{}^\lambda b^{\nu(\alpha\beta\gamma)}\big]. \tag{44}$$

Esse resultado mostra como a ação $S^4_{AD(3)}$ é dada em função de $K_{\nu(\alpha\beta\gamma)}$, que por sua vez depende do campo original $\omega^{\nu(\alpha\beta\gamma)}$. A ação acima também depende do campo auxiliar $b^{\nu(\alpha\beta\gamma)}$ e para o eliminarmos, fatoramos o termo $E_{\rho\nu}$ na equação (40), cujo resultado é:

$$\begin{aligned} K_{\nu(\alpha\beta\gamma)} &= E^\rho{}_\nu\Big[-2E_\rho{}^\lambda\omega_{\lambda(\alpha\beta\gamma)} + E_{\bar{\alpha}\lambda}\omega^\lambda{}_{(\rho\bar{\beta}\bar{\gamma})} + \frac{1}{4}\eta_{\rho\bar{\alpha}}E^{\tau\theta}\omega_{\theta(\tau\bar{\beta}\bar{\gamma})} + \mu\omega_{\rho(\alpha\beta\gamma)} \\ &- \frac{1}{2}\eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}E^\sigma{}_\lambda\omega^\lambda{}_{(\rho\sigma\bar{\gamma})}\Big]. \end{aligned} \tag{45}$$

Definindo o termo entre colchetes na equação acima como:

$$\tilde{K}_{\rho(\alpha\beta\gamma)} = -2E_\rho{}^\lambda\omega_{\lambda(\alpha\beta\gamma)} + E_{\bar{\alpha}\lambda}\omega^\lambda{}_{(\rho\bar{\beta}\bar{\gamma})} + \frac{1}{4}\eta_{\rho\bar{\alpha}}E^{\tau\theta}\omega_{\theta(\tau\bar{\beta}\bar{\gamma})} + \mu\omega_{\rho(\alpha\beta\gamma)} - \frac{1}{2}\eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}E^\sigma{}_\lambda\omega^\lambda{}_{(\rho\sigma\bar{\gamma})}, \tag{46}$$

conseguimos expressar $K_{\nu(\alpha\beta\gamma)}$ da seguinte forma:

$$K_{\nu(\alpha\beta\gamma)} = E^\rho{}_\nu\tilde{K}_{\rho(\alpha\beta\gamma)}. \tag{47}$$

Substituindo a equação (47) em (44) teremos:

$$\begin{aligned} S^4_{AD(3)} &= S^4_{AD(2)} - \int d^3x \ \big[b^{\nu(\alpha\beta\gamma)}E^\rho{}_\nu\tilde{K}_{\rho(\alpha\beta\gamma)} - \frac{\mu}{2}b_{\lambda(\alpha\beta\gamma)}E_\nu{}^\lambda b^{\nu(\alpha\beta\gamma)}\big] \\ S^4_{AD(3)} &= S^4_{AD(2)} + \int d^3x \ \Big[\frac{\mu}{2}\Big(b^{\nu(\alpha\beta\gamma)} - \frac{\tilde{K}^{\nu(\alpha\beta\gamma)}}{\mu}\Big)E_{\rho\nu}\Big(b^\rho{}_{(\alpha\beta\gamma)} - \frac{\tilde{K}^\rho{}_{(\alpha\beta\gamma)}}{\mu}\Big) \\ &- \frac{1}{2\mu}\tilde{K}^{\nu(\alpha\beta\gamma)}E_{\rho\nu}\tilde{K}^\rho{}_{(\alpha\beta\gamma)}\Big]. \end{aligned} \tag{48}$$

Na equação acima, ao escolhermos a seguinte transformação para o campo auxiliar dada por:

$$b^\rho{}_{(\alpha\beta\gamma)} \to \tilde{b}^\rho{}_{(\alpha\beta\gamma)} + \frac{\tilde{K}^\rho{}_{(\alpha\beta\gamma)}}{\mu}, \tag{49}$$

conseguiremos desacoplar o campo auxiliar na equação (48) tornando-a:

$$S^4_{AD(3)} = S^4_{AD(2)} - \int d^3x \ \frac{\mu}{2}\tilde{b}^{\nu(\alpha\beta\gamma)}E_{\rho\nu}\tilde{b}^{\rho}{}_{(\alpha\beta\gamma)} - \frac{1}{2\mu}\tilde{K}^{\nu(\alpha\beta\gamma)}E_{\rho\nu}\tilde{K}^{\rho}{}_{(\alpha\beta\gamma)}. \tag{50}$$

O segundo termo da equação acima não possui conteúdo físico e, portanto, podemos descartá-lo da nossa teoria. Dessa forma ficamos:

$$S^4_{AD(3)} = S^4_{AD(2)} - \int d^3x \ \Big[- \frac{1}{2\mu}\tilde{K}^{\nu(\alpha\beta\gamma)}E_{\rho\nu}\tilde{K}^{\rho}{}_{(\alpha\beta\gamma)}\Big]. \tag{51}$$

A ação acima é expressa em termos das equações (46) e (40) e substituindo-as teremos:

$$\begin{aligned} S^4_{AD(3)} \ = \ & \int d^3x \Bigg[- E^{\rho\nu}\omega_{\nu}{}^{(\alpha\beta\gamma)}E_{\rho\lambda}\omega^{\lambda}{}_{(\alpha\beta\gamma)} + \frac{3}{2}E^{\rho\nu}\omega_{\nu}{}^{(\alpha\beta\gamma)}E_{\alpha\lambda}\omega^{\lambda}{}_{(\rho\beta\gamma)} + \frac{3}{8}E_{\rho\nu}\omega^{\nu(\rho\beta\gamma)}E^{\tau\theta}\omega_{\theta(\tau\beta\gamma)} \\ & - \frac{2}{\mu}E^{\nu\sigma}\omega_{\sigma}{}^{(\alpha\beta\gamma)}E_{\rho\nu}E^{\rho\theta}\omega_{\theta(\alpha\beta\gamma)} + \frac{6}{\mu}E^{\nu\sigma}\omega_{\sigma}{}^{(\alpha\beta\gamma)}E^{\rho}{}_{\nu}E_{\alpha}{}^{\theta}\omega_{\theta(\rho\beta\gamma)} \\ & + \frac{9}{4\mu}E^{\nu\sigma}\omega_{\sigma}{}^{(\alpha\beta\gamma)}E_{\alpha\nu}E^{\psi\theta}\omega_{\theta(\psi\beta\gamma)} - \frac{3}{2\mu}E^{\alpha\sigma}\omega_{\sigma}{}^{(\nu\beta\gamma)}E^{\rho}{}_{\nu}E_{\alpha}{}^{\theta}\omega_{\theta(\rho\beta\gamma)} \\ & - \frac{3}{\mu}E^{\alpha\sigma}\omega_{\sigma}{}^{(\nu\beta\gamma)}E^{\rho}{}_{\nu}E_{\beta\theta}\omega^{\theta}{}_{(\rho\gamma\alpha)} + \frac{33}{16\mu}E^{\sigma\mu}\omega_{\mu(\sigma\beta\gamma)}E^{\rho\beta}E^{\psi\theta}\omega_{\theta(\rho\psi}{}^{\gamma)}\Bigg] \end{aligned} \tag{52}$$

.

O resultado acima mostra a ação de terceira ordem nas derivadas invariante sob as transformações de calibre (29) e (6). O termo de primeira ordem nas derivadas que quebrava a simetria (29) foi cancelado durante os cálculos e os termos de segunda ordem tiveram os sinais trocados. A ação acima é equivalente (no que diz respeito a ordem das derivadas) aos modelos topológicos de spin 2 mostrados no trabalho [23]. No entanto, na forma como está apresentada (forma explicita) é difícil extrair qualquer similaridade de natureza "geométrica"com os exemplos já conhecidos de spins mais baixos como mostram [3] e [4]. Explorando diferentes notações, trabalharemos o resultado acima a fim de extrair termos semelhantes aos objetos geométricos da relatividade geral. Ressaltamos que até o momento não conhecemos um modelo auto-dual de terceira ordem nas derivadas na literatura. Obtivemos, até o momento, um mapeamento do setor principal das teorias de primeira, segunda e terceira ordem nas derivadas via um processo sistemático de imersão de simetria.

4.3 ESTABELECENDO A NOTAÇÃO Ω PARA OS MODELOS DE SPIN 4

A ideia nesta seção é montar um processo totalmente equivalente ao que foi construído no trabalho [4] de uma notação simplética, no nosso caso será para os modelos de spin 4. Começamos pela definição do operador de primeira ordem nas derivadas

$$\xi^{\alpha(\mu\beta\gamma)} \equiv E^{\alpha}{}_{\nu}\omega^{\nu(\mu\beta\gamma)}. \tag{53}$$

Notemos que, da forma como definimos, tal operador possui as mesmas características do campo $\omega^{\nu(\mu\beta\gamma)}$, isto é, ele é simétrico e seu traço é nulo em relação aos índices entre parênteses. Dessa forma, o termo tipo Chern-Simons da ação de primeira ordem nas derivadas será:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(1)} &= \frac{\mu}{2}\omega_{\mu(\beta\gamma\lambda)}\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_{\nu}\omega_{\alpha}{}^{(\beta\gamma\lambda)}, \\
\mathcal{L}^{(1)} &= \frac{\mu}{2}\omega_{\mu(\beta\gamma\lambda)}\xi^{\mu(\beta\gamma\lambda)}
\end{aligned} \tag{54}$$

Com essa notação, podemos reescrever o termo de segunda ordem nas derivadas apresentada pela equação (27)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(2)} &= E^{\rho\nu}A_{\nu}{}^{(\alpha\beta\gamma)}E_{\rho\lambda}A^{\lambda}{}_{(\alpha\beta\gamma)} - \frac{3}{2}E^{\rho\nu}A_{\nu}{}^{(\alpha\beta\gamma)}E_{\alpha\lambda}A^{\lambda}{}_{(\rho\beta\gamma)} - \frac{3}{8}E_{\rho\nu}A^{\nu(\rho\beta\gamma)}E^{\tau\theta}A_{\theta(\tau\beta\gamma)}, \\
\mathcal{L}^{(2)} &= \xi^{\rho(\alpha\beta\gamma)}\xi_{\rho(\alpha\beta\gamma)} - \frac{3}{2}\xi^{\rho(\alpha\beta\gamma)}\xi_{\alpha(\rho\beta\gamma)} - \frac{3}{8}\xi^{(\beta\gamma)}\xi_{(\beta\gamma)}.
\end{aligned} \tag{55}$$

Notemos que, na equação acima, um termo ξ pode ser fatorado em toda a expressão:

$$\mathcal{L}^{(2)} = \xi^{\rho(\alpha\beta\gamma)}\Big[\xi_{\rho(\alpha\beta\gamma)} - \frac{3}{2}\xi_{\alpha(\rho\beta\gamma)} - \frac{3}{8}\eta_{\rho\alpha}\xi_{(\beta\gamma)}\Big]. \tag{56}$$

Dadas as características de simetria e traço nulo do termo $\xi^{\rho(\alpha\beta\gamma)}$ com respeito aos índices entre parênteses, o termo entre colchetes deverá apresentar essas mesmas características com respeito a esses mesmos índices. Assim, simetrizando e tornando o traço nulo no termo entre colchetes, teremos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(2)} &= \xi^{\rho(\alpha\beta\gamma)}\Big[\xi_{\rho(\alpha\beta\gamma)} - \frac{1}{2}\Big(\xi_{\alpha(\rho\beta\gamma)} + \xi_{\beta(\rho\alpha\gamma)} + \xi_{\gamma(\rho\beta\alpha)}\Big) \\
&- \frac{1}{8}\Big(\eta_{\rho\alpha}\xi_{(\beta\gamma)} + \eta_{\rho\beta}\xi_{(\alpha\gamma)} + \eta_{\rho\gamma}\xi_{(\beta\alpha)}\Big) + \frac{1}{4}\Big(\eta_{\beta\alpha}\xi_{(\rho\gamma)} + \eta_{\gamma\beta}\xi_{(\alpha\rho)} + \eta_{\alpha\gamma}\xi_{(\beta\rho)}\Big)\Big].
\end{aligned} \tag{57}$$

Com esse resultado, definimos o termo:

$$\begin{aligned}
\Omega_{\rho(\alpha\beta\gamma)}(\xi) &\equiv \xi_{\rho(\alpha\beta\gamma)} - \frac{1}{2}\Big(\xi_{\alpha(\rho\beta\gamma)} + \xi_{\beta(\rho\alpha\gamma)} + \xi_{\gamma(\rho\beta\alpha)}\Big) - \frac{1}{8}\Big(\eta_{\rho\alpha}\xi_{(\beta\gamma)} + \eta_{\rho\beta}\xi_{(\alpha\gamma)} + \eta_{\rho\gamma}\xi_{(\beta\alpha)}\Big) \\
&+ \frac{1}{4}\Big(\eta_{\beta\alpha}\xi_{(\rho\gamma)} + \eta_{\gamma\beta}\xi_{(\alpha\rho)} + \eta_{\alpha\gamma}\xi_{(\beta\rho)}\Big).
\end{aligned} \tag{58}$$

Dessa forma, o termo de segunda ordem será dado por:

$$\mathcal{L}^{(2)} = \xi^{\rho(\alpha\beta\gamma)}\Omega_{\rho(\alpha\beta\gamma)}(\xi), \tag{59}$$

no qual está em completa analogia com os resultados obtidos para as teorias de spin 3. Podemos também obter o termo de terceira ordem escrito na notação Ω na qual obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(3)} &= -\frac{2}{\mu}E^{\nu\sigma}\omega_{\sigma}{}^{(\alpha\beta\gamma)}E_{\rho\nu}E^{\rho\theta}\omega_{\theta(\alpha\beta\gamma)} + \frac{6}{\mu}E^{\nu\sigma}\omega_{\sigma}{}^{(\alpha\beta\gamma)}E^{\rho}{}_{\nu}E_{\alpha}{}^{\theta}\omega_{\theta(\rho\beta\gamma)} \\
&+ \frac{9}{4\mu}E^{\nu\sigma}\omega_{\sigma}{}^{(\alpha\beta\gamma)}E_{\alpha\nu}E^{\psi\theta}\omega_{\theta(\psi\beta\gamma)} - \frac{3}{2\mu}E^{\alpha\sigma}\omega_{\sigma}{}^{(\nu\beta\gamma)}E^{\rho}{}_{\nu}E_{\alpha}{}^{\theta}\omega_{\theta(\rho\beta\gamma)} \\
&- \frac{3}{\mu}E^{\alpha\sigma}\omega_{\sigma}{}^{(\nu\beta\gamma)}E^{\rho}{}_{\nu}E_{\beta\theta}\omega^{\theta}{}_{(\rho\gamma\alpha)} + \frac{33}{16\mu}E^{\sigma\mu}\omega_{\mu(\sigma\beta\gamma)}E^{\rho\beta}E^{\psi\theta}\omega_{\theta(\rho\psi}{}^{\gamma)}, \\
\mathcal{L}^{(3)} &= -\frac{2}{\mu}\Omega_{\rho(\alpha\beta\gamma)}(\xi)E^{\rho}{}_{\nu}\Omega^{\nu(\alpha\beta\gamma)}(\xi)
\end{aligned} \tag{60}$$

A notação acima facilita a manipulação dos resultados anteriores e é útil para a construção de ações mestras como foi feita no caso dos modelos de spin 3/2. Ela é especialmente conveniente para a obtenção dos resultados completos, isto é, levando em conta os campos auxiliares bem como os termos de fontes. Em um trabalho ainda em andamento, em colaboração com o orientador dessa tese, estamos reescrevendo estes resultados em termos dessa notação. Apresentamos abaixo as ações dos modelos de primeira, segunda e terceira ordem nas derivadas com campos auxiliares e fontes usando a notação Ω:

$$\begin{aligned}
S^4_{AD(1)} &= \int d^3x \ \Big[\frac{\mu}{2}\omega_{\rho(\alpha\beta\gamma)}\xi^{\rho(\alpha\beta\gamma)}(\omega) - \frac{\mu^2}{2}\epsilon^{\rho\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta}{}_{\gamma}\eta_{\rho\alpha}\omega_{\mu(\beta\varsigma\lambda)}\omega_{\nu}{}^{(\gamma\varsigma\lambda)} + j^{\rho(\alpha\beta\gamma)}\omega_{\rho(\alpha\beta\gamma)} \\
&+ \mu^2\omega_{\alpha\beta}B^{\alpha\beta} + \frac{\alpha\mu}{2}B_{\rho\alpha}\xi^{\rho\alpha}(B) + \frac{\beta\mu^2}{2}\epsilon^{\rho\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\eta_{\rho\alpha}B_{\mu\beta}B_{\nu\gamma} - \frac{8\mu}{9}h_{\mu}\xi^{\mu}(h) - \frac{9\mu}{20}v_{\mu}\xi^{\mu}(v) \\
&+ \frac{32\mu^2}{9}h_{\mu}h^{\mu} - \frac{9\mu^2}{5}v_{\mu}v^{\mu} + \mu^2h^{\mu}v_{\mu} - \frac{9\mu}{5}B\partial_{\mu}v^{\mu} + \frac{22\mu^2}{5}B^2\Big],
\end{aligned} \tag{61}$$

$$\begin{aligned}
S^4_{AD(2)} &= \int d^3x \ \Big[-\xi(\omega)\Omega(\xi) - \frac{\mu}{2}\omega\xi(\omega) + \frac{2\mu}{3}\xi(\omega)\Omega(f) + \frac{2}{\mu}\xi(\omega)\Omega(j) \\
&- \frac{\mu^2}{9}f(B)\Omega(f) - \frac{2}{3}f(B)\Omega(j) - \frac{1}{\mu^2}j\Omega(j)\Big] + S^{2+1}_{AD(1)} \\
&+ S^{1+0}_{AD(1)}
\end{aligned} \tag{62}$$

onde:

$$f^{\mu(\beta\gamma\lambda)}(B) = \eta^{\mu\beta}B^{(\gamma\lambda)} + \eta^{\mu\gamma}B^{(\beta\lambda)} + \eta^{\mu\lambda}B^{(\gamma\beta)} - \frac{2}{5}\Big[\eta^{\gamma\beta}B^{(\mu\lambda)} + \eta^{\beta\lambda}B^{(\mu\gamma)} + \eta^{\gamma\lambda}B^{(\mu\beta)}\Big]. \tag{63}$$

E por fim

$$S^4_{AD(3)} = \int d^3x \ \Big[\xi\Omega(\xi) - \frac{2}{\mu}\Omega(\xi)E\Omega(\chi) + \frac{8m}{3}\Omega(\xi)E\Omega(B) + 8m\Omega(\xi)E\Omega(J) + \frac{4m^2}{3}\Omega(B)E\Omega(J)\Big] + S_{aux} + \frac{4m^2}{9}\int d^3x \ \Omega(B)E\Omega(B) + O(J^2). \quad (64)$$

Notemos que assim como ocorre nas teorias de spin mais baixo, os termos de fonte vão se acoplando passo a passo com as combinações invariantes de calibre chamados de duais. As ações auxiliares que não estamos explicitando vão sendo corrigidas pelo processo de imersão da transformação de calibre. Isso foi verificado também para os modelos de spin mais baixo.

4.4 NOTAÇÃO TOTALMENTE SIMÉTRICA PARA OS TERMOS DE SPIN 4

Temos na literatura trabalhos como [32] que apresentam modelos lagrangeanos de segunda ordem nas derivadas para descrever partículas de spin 4. Os tensores de rank 4 utilizados em tais modelos são totalmente simétricos e possuem duplo traço nulo, ou seja, $\eta^{\alpha\beta}\eta^{\rho\mu}\omega_{\alpha\beta\rho\mu} = 0$. Nessa seção, vamos comparar o termo de segunda ordem obtido através da implementação da simetria por reparametrização, dada pela equação (27), decompondo o campo $\omega^{\rho(\alpha\beta\gamma)}$ em um tensor totalmente simétrico, com o resultado obtido pelos autores do trabalho [32]. Dessa forma, o termo de segunda ordem que trabalharemos será:

$$\mathcal{L}^{(2)} = E^{\rho\nu}\omega_\nu{}^{(\alpha\beta\gamma)}E_{\rho\lambda}\omega^\lambda{}_{(\alpha\beta\gamma)} - \frac{3}{2}E^{\rho\nu}\omega_\nu{}^{(\alpha\beta\gamma)}E_{\alpha\lambda}\omega^\lambda{}_{(\rho\beta\gamma)} - \frac{3}{8}E_{\rho\nu}\omega^{\nu(\rho\beta\gamma)}E^{\tau\theta}\omega_{\theta(\tau\beta\gamma)} \quad (65)$$

Explicitando os termos acima, teremos que:

$$\mathcal{L}^{(2)} = -\frac{7}{8}\omega_{\mu(\beta\gamma\lambda)}\Box\,\omega^\lambda{}_{(\alpha\beta\gamma)} - \frac{3}{2}E^{\rho\nu}\omega_\nu{}^{(\alpha\beta\gamma)}E_{\alpha\lambda}\omega^\lambda{}_{(\rho\beta\gamma)} - \frac{3}{8}E_{\rho\nu}\omega^{\nu(\rho\beta\gamma)}E^{\tau\theta}\omega_{\theta(\tau\beta\gamma)} \quad (66)$$

Através de uma decomposição irredutível do campo $\omega_{\mu(\beta\gamma\lambda)}$ podemos escrevê-lo em termos de um campo totalmente simétrico. Para isso, utilizamos:

$$\begin{aligned}\omega_{\mu(\beta\gamma\lambda)} &= a\mathcal{W}_{\mu\beta\gamma\lambda} + b(\eta_{\mu\beta}\mathcal{W}_{\gamma\lambda} + \eta_{\mu\gamma}\mathcal{W}_{\beta\lambda} + \eta_{\mu\lambda}\mathcal{W}_{\gamma\beta}) \\ &+ c(\eta_{\gamma\beta}\mathcal{W}_{\mu\lambda} + \eta_{\beta\lambda}\mathcal{W}_{\mu\gamma} + \eta_{\gamma\lambda}\mathcal{W}_{\mu\beta}) \\ &+ d(\epsilon_{\mu\beta}{}^\rho\Lambda_{\rho\gamma\lambda} + \epsilon_{\mu\gamma}{}^\rho\Lambda_{\rho\beta\lambda} + \epsilon_{\mu\lambda}{}^\rho\Lambda_{\rho\beta\gamma}),\end{aligned} \quad (67)$$

onde o tensor $\mathcal{W}_{\mu\beta\gamma\lambda}$ é totalmente simétrico e duplo traço nulo, $\eta^{\mu\beta}\eta^{\gamma\lambda}\mathcal{W}_{\mu\beta\gamma\lambda} = 0$. Já $\mathcal{W}_{\gamma\lambda} = \eta^{\mu\beta}\mathcal{W}_{\mu\beta\gamma\lambda}$ e o tensor de rank 3 $\Lambda_{\rho\gamma\lambda}$ é simétrico e sem traço. Notemos que o termo proporcional a

constante d é a parte antissimétrica do tensor $\omega_{\mu(\beta\gamma\lambda)}$. A ação de segunda ordem nas derivadas dada pela equação (65) é invariante sob uma transformação de calibre dada por termo proporcional à d. Para determinarmos as constantes a, b, c e d tomaremos:

$$\begin{aligned}\eta^{\beta\gamma}\omega_{\mu(\beta\gamma\lambda)} &= \eta^{\beta\gamma}\Big[a\mathcal{W}_{\mu\beta\gamma\lambda} + b(\eta_{\mu\beta}\mathcal{W}_{\gamma\lambda} + \eta_{\mu\gamma}\mathcal{W}_{\beta\lambda} + \eta_{\mu\lambda}\mathcal{W}_{\gamma\beta}) \\ &+ c(\eta_{\gamma\beta}\mathcal{W}_{\mu\lambda} + \eta_{\beta\lambda}\mathcal{W}_{\mu\gamma} + \eta_{\gamma\lambda}\mathcal{W}_{\mu\beta}) \\ &+ d(\epsilon_{\mu\beta}{}^{\rho}\Lambda_{\rho\gamma\lambda} + \epsilon_{\mu\gamma}{}^{\rho}\Lambda_{\rho\beta\lambda} + \epsilon_{\mu\lambda}{}^{\rho}\Lambda_{\rho\beta\gamma})\Big], \qquad (68)\end{aligned}$$

de onde temos a restrição

$$0 = a\mathcal{W}_{\mu\lambda} + 2b\mathcal{W}_{\mu\lambda} + 5c\mathcal{W}_{\mu\lambda}. \qquad (69)$$

Da equação acima, temos a seguinte relação entre os coeficientes:

$$a = -2b - 5c. \qquad (70)$$

Da mesma forma, tomando:

$$\begin{aligned}\eta^{\mu\beta}\omega_{\mu(\beta\gamma\lambda)} &= \eta^{\mu\beta}\Big[a\mathcal{W}_{\mu\beta\gamma\lambda} + b(\eta_{\mu\beta}\mathcal{W}_{\gamma\lambda} + \eta_{\mu\gamma}\mathcal{W}_{\beta\lambda} + \eta_{\mu\lambda}\mathcal{W}_{\gamma\beta}) \\ &+ c(\eta_{\gamma\beta}\mathcal{W}_{\mu\lambda} + \eta_{\beta\lambda}\mathcal{W}_{\mu\gamma} + \eta_{\gamma\lambda}\mathcal{W}_{\mu\beta}) \\ &+ d(\epsilon_{\mu\beta}{}^{\rho}\Lambda_{\rho\gamma\lambda} + \epsilon_{\mu\gamma}{}^{\rho}\Lambda_{\rho\beta\lambda} + \epsilon_{\mu\lambda}{}^{\rho}\Lambda_{\rho\beta\gamma})\Big] \\ \omega_{\gamma\lambda} &= a\mathcal{W}_{\gamma\lambda} + 5b\mathcal{W}_{\gamma\lambda} + 2c\mathcal{W}_{\gamma\lambda} \\ \omega_{\gamma\lambda} &= (a + 5b + 2c)\mathcal{W}_{\gamma\lambda}, \qquad (71)\end{aligned}$$

e utilizando o resultado da equação (2) na equação acima obtemos que

$$\omega_{\gamma\lambda} = 3(b - c)\mathcal{W}_{\gamma\lambda}. \qquad (72)$$

A partir de agora, vamos fixar os valores dos parâmetros a, b e c tal que $a = 1$, $b = 1/3$ e $c = -1/3$. Assim, teremos que:

$$\omega_{\gamma\lambda} = 3(b - c)\mathcal{W}_{\gamma\lambda} \leftrightarrow \omega_{\gamma\lambda} = 2\mathcal{W}_{\gamma\lambda}. \qquad (73)$$

Dessa forma, o tensor parcialmente simétrico será:

$$\begin{aligned}\omega_{\mu(\beta\gamma\lambda)} &= \mathcal{W}_{\mu\beta\gamma\lambda}+\frac{1}{3}(\eta_{\mu\beta}\mathcal{W}_{\gamma\lambda}+\eta_{\mu\gamma}\mathcal{W}_{\beta\lambda}+\eta_{\mu\lambda}\mathcal{W}_{\gamma\beta})\\ &- \frac{1}{3}(\eta_{\gamma\beta}\mathcal{W}_{\mu\lambda}+\eta_{\beta\lambda}\mathcal{W}_{\mu\gamma}+\eta_{\gamma\lambda}\mathcal{W}_{\mu\beta})\\ &+ d(\epsilon_{\mu\beta}{}^{\rho}\Lambda_{\rho\gamma\lambda}+\epsilon_{\mu\gamma}{}^{\rho}\Lambda_{\rho\beta\lambda}+\epsilon_{\mu\lambda}{}^{\rho}\Lambda_{\rho\beta\gamma}). \end{aligned} \tag{74}$$

A constante d pode assumir qualquer valor pois os termos de segunda ordem são invariantes ao termo proporcional a ele. Com esses resultados, iremos substituir a equação (74) em (66). Fazendo as devidas simplificações obteremos que:

$$\mathcal{L}^{(2)} = \int d^3x \; -\Big[-\frac{1}{2}\mathcal{W}_4\Box\mathcal{W}_4+3\mathcal{W}_2\Box\mathcal{W}_2-3(\partial\mathcal{W}_2)^2-6(\mathcal{W}_2\partial^2\mathcal{W}_4)-2(\partial\mathcal{W}_4)^2\Big], \tag{75}$$

onde, no termo $\mathcal{W}_4$, o número 4 significa que esse tensor é de rank quatro. Dessa forma, o termo $\mathcal{W}_4\Box\mathcal{W}_4 \equiv \mathcal{W}^{\mu\beta\gamma\lambda}\Box\mathcal{W}_{\mu\beta\gamma\lambda}$, ou seja, os tensores de rank 4 se acoplam entre si (a mesma análise se faz para os outros termos). A equação acima é idêntica ao resultado do trabalho de Deser e Yang [32], mais especificamente a equação (4.2). De fato, a escolha específica dos coeficientes a, b e c que originaram a equação (73) nos permitiu obter essa equivalência entre o resultado acima e o de Deser e Yang. Ressaltamos que, de maneira semelhante, o trabalho [4] estabeleceu uma equivalência entre o termo de segunda ordem de spin 3 (notação parcialmente simétrica) e o termo de segunda ordem de spin 3 obtido pelos autores Deser e Damour no trabalho [31] na versão totalmente simétrica. Notamos que, ao aplicarmos a redefinição do campo $\omega_{\mu(\nu\alpha\beta)}$ para a versão totalmente simétrica, equação (74), ao termo de massa iremos obter:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_m &= -\frac{\mu^2}{2}\epsilon^{\rho\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta}{}_{\gamma}\eta_{\rho\alpha}\omega_{\mu(\beta\varsigma\lambda)}\omega_{\nu}{}^{(\gamma\varsigma\lambda)}\\ &= -\frac{\mu^2}{2}\Big[\mathcal{W}_4^2-\frac{8}{3}\mathcal{W}_2^2\Big]-m^2\tilde{\Lambda}^2, \end{aligned} \tag{76}$$

onde notamos que o termo de massa não coincide com o termo de massa obtido por Deser e Yang no trabalho [32]. Além disso, obtemos um termo totalmente desacoplado, termo $m^2\tilde{\Lambda}^2$, o qual não tem relevância na teoria. A diferença de coeficientes numéricos observada na comparação dos resultados já foi notada para o caso das teorias de spin 3, vide o trabalho [4] e ela está associada a escolha dos campos auxiliares como foi verificada no trabalho. Em relação ao resultado que obtivemos, essa divergência ainda está sendo investigada. Notemos também que ao utilizar a definição dada pela equação (74) no termo de terceira ordem nas derivadas encontramos o seguinte resultado:

$$\mathcal{L}^{(3)} = -\frac{3}{4}\mathcal{W}_4\Box E\mathcal{W}_4-\frac{29}{18}\mathcal{W}_2\Box E\mathcal{W}_2-\frac{3}{4}\mathcal{W}_4E\partial^2\mathcal{W}_4+\frac{5}{3}\mathcal{W}_4E\partial^2\mathcal{W}_2-\frac{3}{8}\mathcal{W}_2E\partial^2\mathcal{W}_2. \tag{77}$$

Uma vez que temos o setor de spin 4 descritos por um tensor totalmente simétrico, vale notar que podemos obter termos "geométricos", semelhantes aos termos geométricos da relatividade geral, para a teoria de spin 4. Para um exemplo de como esses termos surgem, convidamos o leitor a verificar o apêndice (IV), onde apresentamos o termo de segunda ordem nas derivadas em termos do que nos permitimos chamar de tensor de Einstein.

5 CONCLUSÃO

Nesta tese investigamos um ramo das teorias de spin alto usando as teorias de calibre em $D = 2+1$ dimensões. Em particular, nossa atenção esteve voltada aos chamados modelos de singletos massivos, aqueles que descrevem somente um modo propagante massivo de spin $+S$ ou $-S$. Dessa forma, investigamos as formulações teóricas de singletos dos modelos auto duais de partículas de spin 3/2, 5/2 e 4. Contribuimos para uma generalização de resultados anteriores da literatura, tanto do ponto de vista estatístico (extensões fermiônicas e bosônicas) quanto do ponto de vista de ordem em derivadas, obtendo modelos de ordem superior até o ponto onde foi tecnicamente possível.

No primeiro capítulo, apresentamos o passo a passo para os resultados das construções das ações mestras. Dessa forma generalizamos os resultados obtidos por [20] e provamos a equivalência quântica entre os modelos de singletos (e também dois de dubletos). Mostramos que é possível a unificação através de uma notação que aqui chamamos de simplética, que consiste na definição de operadores ξ e Ω de primeira e segunda ordem nas derivadas respectivamente, os quais foram utilizadas no caso das teorias de spin 2 e spin 3 nos trabalhos [3] e [4].

No segundo capítulo estudamos as teorias fermiônicas de spin 5/2. Aqui, por dificulade técnica, escolhemos trabalhar somente com os setores principais das ações auto-duais, negligenciando os campos auxiliares. Com isso foi possível obter uma sequência de três modelos auto-duais de primeira, segunda e terceira ordem nas derivadas, sendo que o modelo de terceira ordem é um resultado original desta tese. Conseguimos verificar que o termo de segunda ordem nas derivadas obtido por nós, de maneira sistemática e construtiva, é exatamente o termo apresentado na literatura pelos autores Deser e Kay no trabalho [21]. No momento estamos trabalhando para encontrar uma notação simplética em termos de ξ e Ω para estes modelos. Da observação da literatura, vemos que, com a introdução dessa notação simplética, talvez seja possível a introdução dos campos auxiliares (para a correta descrição do espectro) e a obtenção de modelos de quarta e quinta ordem nas derivadas.

No capítulo 4 estudamos os modelos auto-duais de spin 4 e novamente por dificuldades técnicas optamos por não carregar os campos auxiliares para a obtenção dos resultados. Obtivemos uma sequência de três modelos auto-duais de primeira, segunda e terceira ordem nas derivadas, sendo que este último é um resultado original deste trabalho. Esta sequência de três modelos auto-duais de spin 4 está muito aquém à almejada pois, supostamente podemos obter 8 modelos de ordem superior. Pelas dificuldades técnicas em razão do rank dos tensores, simetrias e quantidade de campos auxiliares não progredimos para a obtenção de mais modelos. No entanto, podemos notar que estamos no caminho correto quando verificamos que, ao fazermos uma decomposição irredutível dos campos e a substituirmos nos termos obtidos do modelo auto-dual de segunda ordem, obtemos o resultado já conhecido na literatura com o trabalho de Deser e Yang [32]. Isso nos permitiu uma verificação, ainda que tímida, do surgimento da chamada geometria de spin 4, vide por exemplo o apêndice IV, onde fazemos uma breve revisão geral de geometria para os casos bosônicos. Estabeleceu-se uma notação simplética para estes modelos o que tem no momento ajudado na inclusão dos campos auxiliares.

Nossas perspectivas para o futuro desses cálculos nos mantém empolgados pois acreditamos que

com a sistematização das notações sejam possíveis a conclusão dos trabalhos de spin 5/2 e a obtenção de mais modelos de spin 4 de ordem superior.

REFERÊNCIAS

[1] VULKOVIC, I.; **Higher spin theory.** Dissertação (Mestrado em física) - University of Rijeka, Rijeka - Croácia, 2017.

[2] RAKIBUR, M.R.; **Interacting massive higher spin fields**. Tese (Doutorado em física teórica) - New York University, New York - Estados Unidos, 2009.

[3] MENDONÇA, E.L.; **Teorias duais massivas de spin-2 em D=2+1 via ação mestra e imersão de Noether.** Dissertação (Mestrado em física de partículas e campos) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Guaratinguetá - Brasil, 2009.

[4] MENDONÇA, E.L.; **Teorias duais massivas de spin-3 em D=2+1.** Tese (Doutorado em física de partículas e campos) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Guaratinguetá - Brasil, 2013.

[5] FIERZ, M.; PAULI, W.; On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field. **Proceedings of the Royal Society of London**. Series A, Mathematical and Physical Sciences p. 211-232, 1939. Disponível em: https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspa.1939.0140. Acesso em: 02 fev. 2021.

[6] BOUATTA, N.; COMPÈRE, G.; SAGNOTTI, A. An introduction to free higher-spin fields. **Lectures presented at the First Solvay Workshop on Higer-Spin Gauge theories**, p. 79-99, 2004. Disponível em: https://arxiv.org/abs/hep-th/0409068. Acesso em: 12 jan. 2021.

[7] DESER, S.; Fun in 2+1. **Physics Letters B**, v. 140, P. 321-323, 1984.

[8] VASILIEV, M.A.; Higher-Spin Gauge Theories in Four, three and two dimensions. **arXiv**:het-th/9611.04v2, 1996. Disponível em: https://arxiv.org/abs/hep-th/9611024. Acesso em 25 de fev. de 2021.

[9] SINGH, L.P.S.; HAGEN, C.R.; Lagrangian formulation for arbitrary spin: the boson case. **Physical Review D**, 1974. Disponível em: https://inspirehep.net/literature/91804. Acesso em: 13 dez. 2020.

[10] DALMAZI, D.; MENDONÇA, E.L.; Dual descriptions of spin two massive particles in D=2+1 via master actions e a new spin-2 self-dual model in D=2+1. **Physical Review D**, v. 79, n. 4, p. 7, 2009.

[11] DAMOUR, T.; DESER, S.; "Geometry"of spin 3 gauge theories. **Annales de l'Institut Henri Poincaré- Physique théorique**, v. 47 p.227-307, 1987.

[12] ANACLETO, M.A.; ILHA, A.; NASCIMENTO, J.R.S.; RIBEIRO, R.F.; WOTZASEK, C.; Dual equivalence between selfdual and Maxwell-Chern-Simons models coupled to dynamical U(1) charged matter. **Physical Letters B**, p.268-274, 2001.

[13] BAZEIA, D.; MENEZES, R.; NASCIMENTO, J.R.; RIBEIRO, R.F.; WOTZASEK, C.; Dual equivalence in models with higher order derivatives. **Jornal Physics**, 2003. Disponível em https://arxiv.org/abs/hep-th/0210311. Acesso em: 15 jan. 2021.

[14] MISHRA, L.; **Theories of massive gravity in 2+1 dimensions**. Dissertação (Mestrado em física) - Albert Ludwigs University of Freiburg, Freiburg - Alemanha, 2018.

[15] DALMAZI. D.; MENDONÇA. E. L.; A New spin-2 self-dual model in D=2+1. **Journal of High Energy Physics**, 2009. Disponível em: https://inspirehep.net/files/7cabc0124f052f3072a25f3ea2799799. Acesso em: 19 dez. 2020.

[16] CNOCKAERT. S.; Higher spin gauge field theories: aspects of dualities and interactions. **arxiv** hep-th/0606121, 2006. Disponível em: https://arxiv.org/abs/hep-th/0606121. Acesso em: 15 nov. 2020.

[17] CAMPOLEONI. A.; FRANCIA. D.; MOURAD. J.; SAGNOTTI. A.; Unconstrained higher spins of mixed symmetry: Bose fields. **arXiv**:0810.4350, 2008. Disponível em: https://arxiv.org/abs/0810.4350. Acesso em: 30 jan. 2021.

[18] DESER. S.; Self interaction and gauge invariance. **General Relativity Gravity** v.1, p.9-18, 1970.

[19] FERRARA. S.; FREEDMAN. D.; NIEUWENHUIZEN. P.; Scalar multiplet coupled to supergravity. **Physics Review D** v.15, 1977. Disponível em: https://inspirehep.net/literature/109863. Acesso em: 27 jan. 2021.

[20] MENDONÇA, E.L.; DOS SANTOS, A.L.R.; LIMA, D.S.; Massive spin 3/2 models in D=2+1. **arXiv**:het-th/1910.04670v1, 2019. Disponível em: https://arxiv.org/abs/2003.03242. Acesso em: 06 fev. 2021.

[21] DESER, S.; KAY, J.H.; Topologically massive supergravity. **Physics Letters B**, v. 120, p. 97-100, 1983.

[22] DESER, S.; Massive spin 3/2 Theories in 3 dimensions. **Physics Letters B**, v. 140, p. 321-323, 1984.

[23] DESER, S.; JACKIW, R.; TEMPLETON, S.; Topologically massive gauge theories. **Annals of Physics**, v. 140, p.372-411, 1982

[24] MENDONÇA, E. L.; DE OLIVEIRA, H. L.; NOGUEIRA, P. H. F.; Duality and unitarity of massive spin-3/2 models in D=2+1. **The European Physical Journal Plus**, v. 135, p. 321-327, 2020.

[25] ARAGONE, C.; STEPHANY, J.; Dreibein massive spin 5/2. **Iopscience-Classical and Quantum Gravity**, v. 265, p. 265-274, 1983.

[26] ARAGONE, C.; DESER, S.; Topologically massive spin 5/2 theory. **Iopscience-Classical and Quantum Gravity**, v. 331, p. 331-337, 1983.

[27] ARAGONE, C.; Equivalence of 3D massive spin 5/2 theories. **Iopscience-Classical and Quantum Gravity**, v. 331, p. L25-L28, 1985.

[28] ARAGONE, C.; KHOUDEIR, A.; Self-Dual spin-3 and spin-4. **arXiv**:het-th/9307004v1, 1993. Disponível em: https://arxiv.org/abs/hep-th/9307004. Acesso em: 26 jan. 2021.

[29] BERGHOEFF, E. A.; KOVACEVIC, M.; ROSSEEL, J.; TOWNSEND, P.K.; YIN, Y.; A Spin-4 of 3D massive gravity. **arXiv**:het-th/1109.0382v2, 2011. Disponível em: https://arxiv.org/abs/1109.0382. Acesso em: 19 fev. 2021.

[30] KOVACEVIC, M.; **Aspects of three dimensional gravity**. Tese (Doutorado em física) - University of Groningen, Groningen - Netherlands, 2017.

[31] DAMOUR, T.; DESER, S.; "Geometry"of spin 3 gauge theories. **Annales de I'Institut Henri Poincaré**, v. 47, p. 277-307, 1987.

[32] ARAGONE, C.; DESER, S.; YANG Z.; Massive higher spin from dimensional reduction of gauge fields. **Annals of Physics**, v. 179, p. 76-96, 1987.

[33] LEONARD, A.; **Aspects of higher spin hamiltonian dynamics: conformal geometry, duality and charges**. Tese (Doutorado em física) - Université Llibre de Bruxelles, Bruxelas - Bélgica, 2017.

[34] RAHMAN. M. R.; **Interacting massive higher spins fields**. Tese (Doutorado em física) - New York University, Nova York - EUA, 2009.

[35] GAITAN. R.; **On the coupling problem of higher spin fields in 2+1 dimension**. Tese (Doutorado em física) - Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela, Caracas - Venezuela, 2007.

[36] GOMES. M. O. C.; MALACARNE. L. C.; SILVA A. J.; On the equivalence of the selfdual and Maxwell-Chern-Simons models coupled to fermions. **Physical Letters B** v.439, p. 137-141, 1998. Disponível em: https://arxiv.org/abs/hep-th/9711184. Acesso em: 03 nov. 2020.

[37] CHANG. S. J.; Lagrange formulation for systems with higher spin. **Physics Review D** v.161, 1967. Disponível em: https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.161.1308. Acesso em: 27 nov. 2020.

[38] de WIT. B.; FREEDMAN. D. Z.; Systematic of higher spins gauge fields. **Phys. Rev.D** v.21 p.263-268, 1980.

[39] FOTOPOULOS. A.; TSULAIA. M.; Gauge invariant lagrangians for free and interacting higher spin fields. A Review of the BRST formulation. **International Journal of Modern Physics** v.24 p.1-60, 2009.

[40] BINEGAR. B.; Relativistic field theories in three dimensions. **Journal of Mathematical Physics** v.23, p.1511-1517, 1982.

[41] DESER.S.; TEKIN.B.; Massive, topologically massive, models. **Classical and Quantum Gravity.** v.19, L97-L100, 2002.

ANEXO A – VÍNCULOS DE PRIMEIRA ORDEM PARA TEORIA DE SPIN 3/2

Ao estudarmos as teorias massivas de spin 3/2 encontramos ações mestras que interpola entre os modelos de primeira, segunda e terceira ordem nas derivadas. Para obtermos esses resultados, utilizamos o argumento de que o termo tipo Chern-Simons isolado não possui conteúdo físico e ele pode ser desprezado nos cálculos. Utilizando a teoria de vínculos, vamos mostrar que esse termo é sem conteúdo físico fazendo a análise de vínculos desse termo. Seja o termo de primeira ordem nas derivadas abaixo:

$$\mathcal{L} = \epsilon^{\mu\nu\alpha}\bar{\psi}_\mu\partial_\nu\psi_\alpha. \tag{1}$$

Separando os índices espaciais dos índices temporais do termo acima teremos:

$$\mathcal{L} = \epsilon^{0ij}\bar{\psi}_0\partial_i\psi_j - \epsilon^{0ij}\bar{\psi}_i\dot{\psi}_j + \epsilon^{0ij}\bar{\psi}_i\partial_j\psi_0. \tag{2}$$

Logo, os momentos canônicos são:

$$\begin{aligned} \pi^0 &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\bar{\psi}}_0} = 0; \quad \bar{\pi}^0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}_0} = 0; \\ \pi^i &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\bar{\psi}}_i} = 0; \quad \bar{\pi}^i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}_i} = -\epsilon^{0ij}\bar{\psi}_j. \end{aligned} \tag{3}$$

Dessa forma, os vínculos primários serão:

$$\begin{aligned} \varphi^0 &= \pi^0 \approx 0, \\ \bar{\varphi}^0 &= \bar{\pi}^0 \approx 0, \\ \varphi^i &= \pi^i \approx 0, \\ \bar{\varphi}^i &= \bar{\pi}^i + \epsilon^{0ij}\bar{\psi}_j \approx 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Com esses resultados, a densidade hamiltoniana da equação (1), em termos dos momentos é dada por:

$$\mathcal{H}_c = -\epsilon^{0ij}\bar{\psi}_0\partial_i\psi_j - \epsilon^{0ij}\bar{\psi}_i\partial_j\psi_0. \tag{5}$$

Agora, com os vínculos primários já calculados, escrevemos uma hamiltoniana primária como se segue:

$$\mathcal{H}_p = \int d^2x[\mathcal{H}_c + \bar{\lambda}_0\varphi^0 + \bar{\varphi}^0\lambda_0 + \bar{\lambda}^i\varphi_i + \bar{\varphi}^i\lambda_i], \tag{6}$$

onde $\bar{\lambda}_0$, λ_0, $\bar{\lambda}^i$ e λ_i são os multiplicadores de Lagrange. A equação acima é expressa em termos dos vínculos primários e para encontrá-los devemos determinar os multiplicadores de Lagrange acima.

A.1 CONDIÇÕES DE CONSISTÊNCIA PARA OS VÍNCULOS PRIMÁRIOS

Podemos encontrar os multiplicadores de Lagrange que aparecem na equação (6) através das condições de consistência dos vínculos primários. Para que as condições de consistência dos vínculos primários sejam satisfeitas devemos ter que:

$$\dot{\varphi}^i(y) = 0. \tag{7}$$

Para calcular a derivada temporal acima, tomamos os parênteses de Poisson com cada um dos termos da hamiltoniana primária dada pela equação (7). Dessa forma teremos:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}^i(y) \;\approx\; & \int d^2x\Big[\{\varphi^i(y),\mathcal{H}(x)\} - \bar{\lambda}_0\{\varphi^i(y),\varphi^0(x)\} + \{\varphi^i(y),\bar{\varphi}^0(x)\}\lambda_0 \\ - \;& \bar{\lambda}_j\{\varphi^i(y),\varphi^j(x)\} + \{\varphi^i(y),\bar{\varphi}^j(y)\}\lambda_j\Big].\end{aligned} \tag{8}$$

Da equação acima, os únicos parênteses de Poisson que não serão nulos são o primeiro e o último. Logo:

$$\{\varphi^i(y),\mathcal{H}(x)\} = \epsilon^{0ik}\partial_k\psi_0\delta^2(x-y); \tag{9}$$

e

$$\{\varphi^i(y),\bar{\varphi}^j(x)\} = \epsilon^{0ij}\delta^2(x-y). \tag{10}$$

Com esse resultado, alimentamos (8) e fazendo a integração, teremos:

$$\lambda_k \approx -\partial\psi_0. \tag{11}$$

A equação acima mostra que o multiplicador de Lagrange λ_k foi determinado.

Agora, tomando os mesmos passos anteriores, calcularemos $\dot{\varphi}^i(y) = 0$. Fazendo os cálculos

teremos:

$$\bar{\lambda}_k \approx -\partial\bar{\psi}_0. \tag{12}$$

A equação acima mostra que o multiplicador $\bar{\lambda}_k$ foi totalmente determinado. Ao fazermos a substituição das equações (11) e (12) em (6) teremos:

$$\mathcal{H}'_p = \int d^2x[-\epsilon^{0ij}\bar{\psi}_0\partial_i\psi_j + \partial_i\bar{\psi}_0\pi^i - \bar{\pi}^i\partial_i\psi_0 + \bar{\lambda}_0\varphi^0 + \bar{\varphi}^0\lambda_0]. \tag{13}$$

A equação acima mostra, depois de determinado alguns vínculos, a densidade hamiltoniana do sistema. Vemos que ainda falta calcular os multiplicadores de Lagrange $\bar{\lambda}_0$ e λ_0. Para isso tomaremos a evolução temporal do vínculo $\varphi^0(y)$ nulo. Dessa forma teremos:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}^0(y) &\approx \int d^2x\Big[\{\varphi^0(y),\mathcal{H}'(x)\} - \bar{\lambda}_0\{\varphi^0(y),\varphi^0(x)\} \\ &+ \{\varphi^0(y),\bar{\varphi}^0(x)\}\lambda_0\Big].\end{aligned} \tag{14}$$

O único parêntese de Poisson não nulo na equação acima é o primeiro. O calculando teremos:

$$\{\varphi^0(y),\mathcal{H}'(x)\} = \epsilon^{0ij}\partial_i\psi_j\delta^2(x-y) + \partial_i\pi^i\delta^2(x-y). \tag{15}$$

Substituindo o resultado acima em (14) e fazendo as manipulações necessárias encontraremos um vínculo secundário dado por:

$$\chi = \epsilon^{0ij}\partial_i\psi_j + \partial_i\pi^i \approx 0. \tag{16}$$

Da mesma forma, tomando a variação temporal nula do vínculo $\bar{\varphi}^0$ e trilhando os mesmos passos anteriores, encontraremos o seguinte vínculo secundário dado por:

$$\bar{\chi} = \partial_i\bar{\pi}^i \approx 0. \tag{17}$$

Os multiplicadores de Lagrange relacionados aos índices temporais, $\bar{\lambda}_0$ e λ_0, são indeterminados, ou seja, ainda possuem vínculos na nossa teoria. Esses vínculos são chamados de vínculos secundários.

A.2 CONDIÇÕES DE CONSISTÊNCIA PARA OS VÍNCULOS SECUNDÁRIOS

Temos que os vínculos secundários são dados por χ e $\bar{\chi}$. Tomando a variação temporal dos vínculos nula, temos que:

$$\dot{\bar{\chi}}(y) \approx \int d^2x[\{\bar{\chi}(y), \mathcal{H}'(x)\} - \bar{\lambda}_0\{\bar{\chi}(y), \varphi^0(0)\} + \{\bar{\chi}(y), \bar{\varphi}^0(x)\}\lambda_0]. \tag{18}$$

O único parêntese de Poisson não nulo na equação acima é o primeiro. Calculando-o teremos:

$$\{\bar{\chi}(y), \mathcal{H}'(x)\} = -\epsilon^{0ji}\partial_{(y)_i}\bar{\psi}_0\partial_{(x)_j}\delta^2(x-y). \tag{19}$$

Substituindo o resultado acima em (18) e fazendo as manipulações necessárias teremos que o resultado da integração será igual a ZERO. Dessa forma, temos que a evolução temporal do vínculo é identicamente satisfeita. O mesmo acontecerá para a evolução temporal do vínculo χ, onde teremos que sua evolução temporal será identicamente satisfeita. Portanto não há mais vínculos na teoria e os multiplicadores de Lagrange $\bar{\lambda_0}$ e λ_0 mantém-se indeterminados.

Com esses resultados, temos que os vínculos primários φ^0 e $\bar{\varphi}$ são de primeira classe e possuem 8 componentes no total. Os vínculos primários φ^i e $\bar{\varphi}^i$ são de segunda classe e também possuem 8 componentes no total. Por fim, os vínculos secundários χ e $\bar{\chi}$ são de primeira classe e possuem 8 componentes no total. Os espinores que representam a teoria têm exatamente 24 componentes e temos o mesmo número de vínculos. Portanto, não temos nenhum modo propagante para o termo representado em 1.

ANEXO B – ANÁLISE HAMILTONIANO DO TERMO DE SEGUNDA ORDEM DE SPIN 3/2

No estudo de teorias de spin 3/2, ao encontrarmos a ação mestra que interpola entre o modelo de segunda e terceira ordem, negligenciamos o termo de segunda ordem nas derivadas, contendo os campos auxiliares, por ser sem conteúdo físico e se encontrava desacoplado com o restante da ação. Mostraremos pela análise de vínculos que esse termo não possui conteúdo físico fazendo a contagem dos modos propagantes. Sendo assim, o termo de segunda ordem nas derivadas é dado por:

$$\mathcal{L} = \epsilon^{\mu\alpha\beta}\epsilon^{\nu\lambda\sigma}\partial_\alpha\bar{\psi}_\beta\gamma_\nu\gamma_\mu\partial_\lambda\psi_\sigma. \tag{1}$$

Separando os índices espaciais dos índices temporais do termo acima teremos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\dot{\bar{\psi}}_i\gamma_j\gamma_i\dot{\psi}_j + \partial_i\bar{\psi}_0\gamma_j\gamma_i\dot{\psi}_j + \dot{\bar{\psi}}_i\gamma_j\gamma_i\partial_j\psi_0 \\
&- \dot{\bar{\psi}}_i\gamma_0\gamma_j\partial_i\psi_j - \partial_i\bar{\psi}_j\gamma_j\gamma_0\dot{\psi}_i - \partial_i\bar{\psi}_0\gamma_j\gamma_i\partial_j\psi_0 + \partial_i\bar{\psi}_j\partial_i\psi_j - \partial_i\bar{\psi}_j\partial_j\psi_i \\
&- \partial_i\bar{\psi}_0\gamma_0\gamma_j\partial_j\psi_i + \partial_i\bar{\psi}_0\gamma_0\gamma_j\partial_i\psi_j - \partial_i\bar{\psi}_j\gamma_i\gamma_0\partial_j\psi_0 + \partial_i\bar{\psi}_j\gamma_j\gamma_0\partial_i\psi_0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Logo, os momentos canônicos são:

$$\begin{aligned}
\pi^0 &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\bar{\psi}}_0} = 0; \quad \bar{\pi}^0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}_0} = 0; \\
\pi^i &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\bar{\psi}}_i} = -\gamma_j\gamma_i\dot{\psi}_j + \gamma_j\gamma_i\partial_j\psi_0 - \gamma_0\gamma_j\partial_i\psi_j; \\
\bar{\pi}^i &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}_i} = \dot{\bar{\psi}}_j\gamma_i\gamma_j - \partial\bar{\psi}_0\gamma_i\gamma_j + \partial_i\bar{\psi}_j\gamma_j\gamma_0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\gamma_i\pi^i &= -\gamma_i\gamma_0\gamma_j\partial_i\psi_j; \\
\bar{\pi}^i\gamma_i &= \partial_i\bar{\psi}_j\gamma_j\gamma_0\gamma_i.
\end{aligned} \tag{4}$$

Dessa forma, os vínculos primários serão:

$$\varphi^0 = \pi^0 \approx 0,$$

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}^0 &= \bar{\pi}^0 \approx 0 \\ \chi &= \gamma_i\pi^i + \gamma_i\gamma_0\gamma_j\partial_i\psi_j \approx 0, \\ \bar{\chi} &= \bar{\pi}^i\gamma_i - \partial_i\bar{\psi}_j\gamma_j\gamma_0\gamma_i \approx 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Com esses resultados, a densidade hamiltoniana da equação (1), em termos dos momentos é dada por:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_c &= \frac{1}{2}\bar{\pi}^i\pi^i - \frac{1}{2}\bar{\pi}^i\gamma_j\gamma_i\partial_j\psi_0 + \frac{1}{2}\bar{\pi}^i\gamma_0\gamma_j\partial_i\psi_j + \frac{1}{2}\partial_i\bar{\psi}_0\gamma_j\gamma_i\pi^j - \frac{1}{2}\partial_i\bar{\psi}_j\gamma_j\gamma_0\pi^i \\ &+ \partial_i\bar{\psi}_j\partial_j\psi_i - \frac{1}{2}\partial_i\bar{\psi}_j\gamma_k\gamma_j\partial_i\psi_k - \frac{1}{2}\partial_i\bar{\psi}_0\gamma_i\gamma_j\gamma_0\gamma_k\partial_j\psi_k \\ &+ \partial_i\bar{\psi}_0\gamma_0\gamma_j\partial_j\psi_i - \frac{1}{2}\partial_i\bar{\psi}_j\gamma_j\gamma_0\gamma_i\gamma_k\partial_k\psi_0 + \partial_i\bar{\psi}_j\gamma_i\gamma_0\partial_j\psi_0. \end{aligned} \tag{6}$$

Agora, com os vínculos primários já calculados, escrevemos uma hamiltoniana primária como se segue:

$$\mathcal{H}_p = \int d^2x[\mathcal{H}_c + \bar{\lambda}_0\varphi^0 + \bar{\varphi}^0\lambda_0 + \bar{\lambda}^i\chi_i + \bar{\chi}^i\lambda_i], \tag{7}$$

onde $\bar{\lambda}_0$, λ_0, $\bar{\lambda}^i$ e λ_i são os multiplicadores de lagrange. A equação acima é expressa em termos dos vínculos primários φ e χ e para encontrá-los, devemos determinar os multiplicadores de lagrange na equação acima determinando as condições de consistência dos vínculos primários.

B.1 CONDIÇÕES DE CONSISTÊNCIA PARA OS VÍNCULOS PRIMÁRIOS

Podemos encontrar os multiplicadores de lagrange que aparecem na equação (7) através das condições de consistência dos vínculos primários. Para que as condições de consistência dos vínculos primários sejam satisfeitas devemos ter que:

$$\dot{\varphi}^0(y) = 0. \tag{8}$$

Para calcular a derivada temporal acima, tomamos o parênteses de Poisson com cada um dos termos da hamiltoniana primária dada pela equação (7). Dessa forma teremos:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}^0(y) &\approx \int d^2x\Big[\{\varphi^0(y), \mathcal{H}(x)\} - \bar{\lambda}_0\{\varphi^0(y), \varphi^0(0)\} + \{\varphi^0(y), \bar{\varphi}^0(x)\}\lambda_0 \\ &- \bar{\lambda}\{\varphi^0(y), \chi(x)\} + \{\varphi^0(y), \bar{\chi}(y)\}\lambda\Big]. \end{aligned} \tag{9}$$

Da equação acima, o único parêntese de Poisson que não é nulo é o primeiro. Logo:

$$\{\varphi^0(y),\mathcal{H}(x)\} = -\frac{1}{2}\gamma_j\gamma_i\pi^j\partial_i(x)\delta^2(x-y)+\frac{1}{2}\gamma_i\gamma_j\gamma_0\gamma_k\partial_j\psi_k\partial_i(x)\delta^2(x-y)$$
$$- \gamma_0\gamma_j\partial_j\psi_i\partial_i(x)\delta^2(x-y). \tag{10}$$

Com esse resultado, alimentamos 9 e fazendo a integração, obteremos um vínculo secundário que é:

$$\xi = \frac{1}{2}\gamma_j\gamma_i\partial_i\pi^j + \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_i\gamma_k\gamma_j\partial_i\partial_j\psi_k. \tag{11}$$

Agora, tomando os mesmos passos anteriores, calcularemos $\dot{\varphi}^0(y)=0$. O resultado também é um vínculo secundário que será dado por:

$$\bar{\xi} = \frac{1}{2}\partial_j\bar{\pi}^i\gamma_j\gamma_i - \frac{1}{2}\partial_i\partial_j\bar{\psi}_k\gamma_i\gamma_k\gamma_j\gamma_0. \tag{12}$$

Ambas as equações (11) e (12) mostram que a condição de consistência não é satisfeita gerando novos vínculos.

Para os vínculos χ que compõem os últimos termos de (7), devemos ter que:

$$\dot{\chi}(y)=0;\;\; \dot{\bar{\chi}}=0, \tag{13}$$

e ao seguirmos os mesmos passos dados anteriormente, encontraremos que a variação temporal dos vínculos $\bar{\chi}$ e χ serão proporcionais aos vínculos secundários $\bar{\xi}$ e ξ anteriormente determinados, ou seja:

$$\dot{\bar{\chi}}(y) = -\bar{\xi}\gamma_0 = 0 \;\; \dot{\chi}(y) = -\gamma_0\xi = 0, \tag{14}$$

ou seja, ela é identicamente satisfeita e portanto devemos encontrar as condições de consistência dos vínculos secundários.

B.2 CONDIÇÕES DE CONSISTÊNCIA PARA OS VÍNCULOS SECUNDÁRIOS

Temos que os vínculos secundários são dados por ξ e $\bar{\xi}$. Para calcularmos a variação temporal dos vínculos temos que:

$$\dot{\xi}(y) \approx \int d^2x[\{\xi(y),\mathcal{H}(x)\} - \bar{\lambda}_0\{\xi(y),\varphi^0(0)\} + \{\xi(y),\bar{\varphi}^0(x)\}\lambda_0$$
$$- \bar{\lambda}\{\xi(y),\chi(x)\} + \{\xi(y),\bar{\chi}(y)\}\lambda]. \tag{15}$$

Queremos que a evolução temporal do vínculo secundário acima não evolua no tempo, ou seja, $\dot{\xi}(y)=0$. Portanto, calculando a equação acima obteremos:

$$
\begin{aligned}
0 \;&\approx\; -\frac{1}{2}\gamma_i\gamma_j\partial_j(y)\int d^2x\left[\frac{1}{2}\gamma_i\gamma_0\partial_k\pi^k + \partial_i\partial_k\psi_k - \frac{1}{2}\gamma_l\gamma_i\nabla^2\psi_l\right.\\
&- \left.\frac{1}{2}\gamma_i\gamma_0\gamma_k\gamma_l\partial_k\partial_l\psi_0 + \gamma_k\gamma_0\partial_i\partial_k\psi_0\right]\delta^2(x-y) \qquad (16)
\end{aligned}
$$

Resolvendo a integral acima teremos:

$$
0 \approx -\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_i\partial_i\xi \qquad (17)
$$

Vemos que a evolução temporal do vínculo secundário é proporcional ao vínculo primário. Então, temos que a evolução temporal do vínculo secundário é identicamente satisfeita e isso não nos leva a um novo vínculo (terciário). Da mesma forma, fazendo a evolução temporal de $\bar{\xi}$ obtemos:

$$
0 \approx -\frac{1}{2}\partial_j\bar{\xi}\gamma_j\gamma_0 \qquad (18)
$$

Esse resultado não nos leva a um novo vínculo.
Com esses resultados, podemos fazer a contagem dos graus de liberdade do termo analisado. Os vínculos primários são:

$$
\begin{aligned}
\varphi^0 \;&=\; \pi^0 \approx 0 \qquad\qquad 2\ componentes,\\
\bar{\varphi}^0 \;&=\; \bar{\pi}^0 \approx 0 \qquad\qquad 2\ componentes,\\
\chi \;&=\; \gamma_i\pi^i + \gamma_i\gamma_0\gamma_j\partial_i\psi_j \approx 0 \quad 2\ componentes,\\
\bar{\chi} \;&=\; \bar{\pi}^i\gamma_i - \partial_i\bar{\psi}_j\gamma_j\gamma_0\gamma_i \approx 0 \quad 2\ componentes. \qquad (19)
\end{aligned}
$$

Os vínculos secundários são:

$$
\begin{aligned}
\xi \;&=\; \frac{1}{2}\gamma_j\gamma_i\partial_i\pi^j + \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_i\gamma_k\gamma_j\partial_i\partial_j\psi_k \qquad\qquad 2\ componentes,\\
\bar{\xi} \;&=\; \frac{1}{2}\partial_j\bar{\pi}^i\gamma_j\gamma_i - \frac{1}{2}\partial_i\partial_j\bar{\psi}_k\gamma_i\gamma_k\gamma_j\gamma_0 \quad 2\ componentes. \qquad (20)
\end{aligned}
$$

Como todos os vínculos são de primeira classe eles representam 12 componentes. Como estamos no espaço de fase, esses vínculos representam o dobro de componentes, ou seja, representam 24 componentes. Mas temos que os espinores que representam a teoria, tem exatamente 24 componentes.

Sendo assim, não temos nenhum modo propagante para o termo representado em 1.

ANEXO C – RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO PARA O MODELO DE PRIMEIRA ORDEM DA TEORIA DE SPIN 5/2

No estudo das teorias de spin 5/2, implementamos a transformação de calibre por reparametrização no modelo de primeira ordem nas derivadas afim de encontrar um modelo invariante sob tal simetria. No decorrer dos cálculos, com a introdução dos campos auxiliares $\bar{a}^{\mu\nu}$ e $a^{\mu\nu}$, é necessário expressar os campos auxiliares em termos das equações de movimento da ação de primeira ordem dada por $\bar{K}^{\rho\alpha}$ e $K^{\mu\alpha}$, ou seja, devemos fazer a inversão das equações:

$$\begin{aligned} -\bar{K}^{\rho\alpha} + i\mu\bar{a}_{\mu}{}^{\alpha}\epsilon^{\mu\rho\lambda}\gamma_{\lambda} - \frac{i\mu}{3}\bar{a}^{\mu\beta}\epsilon^{\mu\rho\lambda}\gamma_{\lambda}\gamma_{\beta}\gamma^{\alpha} = 0; \\ -K^{\mu\alpha} - i\mu\epsilon^{\mu\sigma\lambda}\gamma_{\lambda}a_{\sigma}{}^{\alpha} + \frac{i\mu}{3}\gamma^{\alpha}\gamma_{\beta}\epsilon^{\mu\sigma\lambda}\gamma_{\lambda}a_{\sigma\beta} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Resolveremos a primeira delas e os passos que faremos serão os mesmos para a solução da outra. Portanto, seja a equação:

$$-\bar{K}^{\rho\alpha} + i\mu\bar{a}_{\mu}{}^{\alpha}\epsilon^{\mu\rho\lambda}\gamma_{\lambda} - \frac{i\mu}{3}\bar{a}^{\mu\beta}\epsilon^{\mu\rho\lambda}\gamma_{\lambda}\gamma_{\beta}\gamma^{\alpha} = 0. \tag{2}$$

Tomando o traço na equação acima obteremos o seguinte resultado:

$$\bar{a} = -\frac{3}{5i\mu}\bar{K}. \tag{3}$$

Multiplicando pela direita a equação (2) por γ_{ρ} teremos:

$$-\bar{K}^{\rho\alpha}\gamma_{\rho} + i\mu\bar{a}_{\mu}{}^{\alpha}\epsilon^{\mu\rho\lambda}\gamma_{\lambda}\gamma_{\rho} - \frac{i\mu}{3}\bar{a}_{\mu\beta}\epsilon^{\mu\rho\lambda}\gamma_{\lambda}\gamma^{\beta}\gamma^{\alpha}\gamma_{\rho} = 0. \tag{4}$$

Manipulando a equação acima e usando o resultado (3), quando necessário, obteremos:

$$\bar{a}^{\mu\alpha}\gamma_{\mu} = \frac{3}{2i\mu}\left[\bar{K}^{\rho\alpha}\gamma_{\rho} - \frac{2}{5}\bar{K}\gamma^{\alpha}\right]. \tag{5}$$

O resultado acima nos mostra como se dá o acoplamento da matriz γ com o primeiro índice de $\bar{a}^{\mu\alpha}$. Com as identidades:

$$\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta} = \eta^{\alpha\beta} + \epsilon^{\alpha\beta\theta}\gamma_{\theta}; \quad \epsilon^{\alpha\beta\theta} = \gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\gamma^{\theta} + \eta^{\alpha\theta}\gamma^{\beta} - \eta^{\alpha\beta}\gamma^{\theta} - \eta^{\beta\theta}\gamma^{\alpha}, \tag{6}$$

conseguimos escrever a equação (2) da seguinte maneira:

$$-\bar{K}^{\rho\alpha} - i\mu\bar{a}^{\rho\alpha} + i\mu\bar{a}^{\mu\alpha}\gamma_{\mu}\gamma^{\rho} + \frac{2i\mu}{3}\bar{a}\gamma^{\rho}\gamma^{\alpha} - \frac{2i\mu}{3}\bar{a}^{\mu\rho}\gamma_{\mu}\gamma^{\alpha} = 0. \tag{7}$$

Substituindo os resultados vindos das equações (3) e (5) e fazendo as manipulações necessárias teremos:

$$\bar{a}^{\rho\alpha} = \frac{1}{i\mu}\Big[- \bar{K}^{\rho\alpha} + \frac{3}{2}\bar{K}^{\mu\alpha}\gamma_\mu\gamma^\rho - \bar{K}^{\mu\rho}\gamma_\mu\gamma^\alpha + \frac{7}{5}\bar{K}\gamma^\rho\gamma^\alpha - \frac{6}{5}\bar{K}\eta^{\alpha\rho}\Big] \tag{8}$$

A equação acima é γ-transverso. Se tomarmos o traço da equação acima obteremos a equação (3) e multiplicando pela direita por γ_ρ obteremos a equação (5).

Seguindo os mesmos passos acima mostrados, conseguiremos a solução da segunda igualdade da (1) cujo resultado é:

$$a^{\rho\alpha} = \frac{1}{i\mu}\Big[K^{\rho\alpha} - \frac{3}{2}\gamma^\rho\gamma_\nu K^{\nu\alpha} + \gamma^\alpha\gamma_\nu K^{\nu\rho} - \frac{7}{5}\gamma^\alpha\gamma^\rho K + \frac{6}{5}K\eta^{\alpha\rho}\Big] \tag{9}$$

Essa equação é γ-transverso com respeito ao segundo índice e possui as mesmas condições que a equação (8). Portanto, conseguimos resolver as equações de movimento da teoria apresentada sem considerarmos os termos de acoplamento com os campos auxiliares da teoria.

ANEXO D – NOTAÇÃO Ω E GEOMETRIA

Segundo a literatura, vide por exemplo o trabalho de Amaury Leonard página 9 [33], o tensor de Fronsdal para spin S é dado por:

$$\mathcal{F}_{\mu_1,\ldots,\mu_S} = \Box h_{\mu_1,\ldots,\mu_S} - S\partial_{(\mu_1}\partial^{\nu} h_{\mu_2,\ldots,\mu_S)\nu} + \frac{S(S-1)}{2}\partial_{(\mu_1}\partial_{\mu_2} h'_{\mu_3,\ldots,\mu_S)}. \tag{1}$$

Já o tensor de Eisntein

$$\mathcal{G}_{\mu_1,\ldots,\mu_S} = \mathcal{F}_{\mu_1,\ldots,\mu_S} - \frac{S(S-1)}{4}\eta_{(\mu_1\mu_2}\mathcal{F}'_{\mu_3,\ldots,\mu_S)}, \tag{2}$$

com $h_{\mu_1,\ldots,\mu_S}$ totalmente simétrico. O traço de $h_{\mu_1,\ldots,\mu_S}$ é dado por:

$$h'_{\mu_3,\ldots,\mu_S)} = \eta^{\mu_1\mu_2} h_{\mu_1,\ldots,\mu_S}. \tag{3}$$

Com essas definições para spin S vejamos alguns casos específicos:

- Spin 1:
  Pela expressão (2) vemos que:
  $$\mathcal{G}_{\mu} = \mathcal{F}_{\mu}, \tag{4}$$
  ou seja, o tensor de Einstein é igual ao tensor de Fronsdal. Notemos que o termo de segunda ordem invariante pela simetria de reparametrização ($\delta_\xi h_\mu = \partial_\mu \xi$) é dado por:
  $$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}h_\mu \mathcal{G}^{\mu}(h), \tag{5}$$
  onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu h_\nu - \partial_\nu h_\mu$ e $\mathcal{G}^{\mu}(h) = \mathcal{F}^{\mu}(h) = \Box h_\mu - \partial_\mu\partial_\nu h_\nu$

- Spin 2:
  Pela expressão (2) temos que:
  $$\mathcal{G}_{\mu\nu} = \mathcal{F}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\mathcal{F} \tag{6}$$
  Sendo que:
  $$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \Box h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial^{\beta} h_{\beta\nu} - \partial_\nu\partial^{\beta} h_{\beta\mu} + \partial_\mu\partial_\nu h. \tag{7}$$
  A equação acima é o tensor de Ricci linearizado, logo:
  $$\mathcal{F} = 2\Box h - 2\partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu}, \tag{8}$$

é o escalar de curvatura linearizado. Com os resultados acima temos que:

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = \Box h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial^\beta h_{\beta\nu} - \partial_\nu \partial^\beta h_{\beta\mu} + \partial_\mu \partial_\nu h - \Box h + \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu}, \tag{9}$$

que é o tensor de Einstein linearizado. Notemos que a ação invariante por reparametrização $\delta_\xi h_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu$ é dada por:

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \mathcal{G}^{\mu\nu}(h) = \tag{10}$$

- Spin 3:
  Pela expressão (2) temos que:

$$\mathcal{G}_{\mu\nu\alpha} = \mathcal{F}_{\mu\nu\alpha} - \frac{1}{2}\big(\eta_{\mu\nu}\mathcal{F}_\alpha + \eta_{\mu\alpha}\mathcal{F}_\nu + \eta_{\nu\alpha}\mathcal{F}_\mu\big), \tag{11}$$

  onde:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu\alpha} = \Box h_{\mu\nu\alpha} - \partial_\mu \partial^\beta h_{\beta\nu\alpha} - \partial_\nu \partial^\beta h_{\beta\mu\alpha} - \partial_\alpha \partial^\beta h_{\beta\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu h_\alpha + \partial_\mu \partial_\alpha h_\nu + \partial_\nu \partial_\alpha h_\mu. \tag{12}$$

  A equação acima é o tensor de Ricci apresentada por Deser e Damour no trabalho [31]. O traço do tensor acima é dado por:

$$\mathcal{F}_\alpha = 2\Box h_\alpha - 2\partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu\alpha} + \partial_\alpha \partial^\beta h_\beta. \tag{13}$$

  Notemos que a ação de segunda ordem nas derivadas é invariante sob a simetria de reparametrização $\delta_{\tilde{\xi}} h_{\mu\nu\lambda} = \partial_{(\mu}\tilde{\xi}_{\nu\lambda)}$ onde $\tilde{\xi}^\nu{}_\nu = 0$. Portanto a lagrangiana de segunda ordem é dada por:

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{1}{2} h_{\mu\nu\lambda} \mathcal{G}^{\mu\nu\lambda}(h). \tag{14}$$

  O termo $\mathcal{G}^{\mu\nu\lambda}$ é dado por:

$$\mathcal{G}_{\mu\nu\alpha} = \Box h_{\mu\nu\alpha} - \partial_{(\mu}\partial^\beta h_{\beta\nu\alpha)} - \Box \eta_{(\mu\nu} h_{\alpha)} + \eta_{(\mu\nu}\partial^\beta \partial^\gamma h_{\beta\gamma\alpha)} - \frac{1}{2}\eta_{(\mu\nu}\partial_{\alpha)}\partial^\beta h_\beta. \tag{15}$$

- Spin 4:
  Pela expressão (2) temos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mu\nu\alpha\beta} &= \mathcal{F}_{\mu\nu\alpha\beta} - \frac{1}{2}\big(\eta_{\mu\nu}\mathcal{F}_{\alpha\beta} + \eta_{\mu\alpha}\mathcal{F}_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\mathcal{F}_{\nu\alpha} + \eta_{\nu\alpha}\mathcal{F}_{\mu\beta} \\ &+ \eta_{\nu\beta}\mathcal{F}_{\mu\alpha} + \eta_{\beta\alpha}\mathcal{F}_{\mu\nu}\big), \end{aligned} \tag{16}$$

onde:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mu\nu\alpha\beta} &= \Box h_{\mu\nu\alpha\beta} - \partial_\mu\partial^\gamma h_{\gamma\nu\alpha\beta} - \partial_\nu\partial^\gamma h_{\gamma\mu\alpha\beta} - \partial_\alpha\partial^\gamma h_{\gamma\mu\nu\beta} - \partial_\beta\partial^\gamma h_{\gamma\mu\nu\alpha} \\ &+ \partial_\mu\partial_\nu h_{\alpha\beta} + \partial_\mu\partial_\alpha h_{\nu\beta} + \partial_\mu\partial_\beta h_{\nu\alpha} + \partial_\nu\partial_\alpha h_{\mu\beta} + \partial_\nu\partial_\beta h_{\mu\alpha} + \partial_\beta\partial_\alpha h_{\mu\nu}. \qquad (17)\end{aligned}$$

O traço do tensor acima vem dado pela equação:

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta} = 2\Box h_{\alpha\beta} - 2\partial^\mu\partial^\nu h_{\mu\nu\alpha\beta} + \partial_\alpha\partial^\gamma h_{\gamma\beta} + \partial_\beta\partial^\gamma h_{\gamma\alpha} + \partial_\alpha\partial_\beta h. \qquad (18)$$