

Janaina Pedroso Zanchetta

Existência de soluções quase automórficas para equações diferenciais abstratas

São José do Rio Preto

2015

Janaina Pedroso Zanchetta

Existência de soluções quase automórficas para equações diferenciais abstratas

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Equações Diferenciais Parciais, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus São José do Rio Preto.

Orientadora: Profa. Dra. Andréa Cristina Prokopczyk Arita

São José do Rio Preto

2015

Zanchetta, Janaina Pedroso.

Existência de soluções quase automórficas para equações
diferenciais abstratas / Janaina Pedroso Zanchetta. -- São José do Rio
Preto, 2015

91 f. : il.

Orientador: Andréa Cristina Prokopczyk Arita

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de
Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Equações diferenciais. 3. Funções quase
periódicas. 4. Semigrupos. 5. Banach, Espaços de. I. Arita, Andréa
Cristina Prokopczyk. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de
Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas.
III. Título.

CDU – 517.91

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Janaina Pedroso Zanchetta

Existência de soluções quase automórficas para equações diferenciais abstratas

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Equações Diferenciais Parciais, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Andréa Cristina Prokopczyk Arita
Professora Assistente Doutora
UNESP - São José do Rio Preto
Orientadora

Profa. Dra. Juliana Conceição Precioso Pereira
Professora Assistente Doutora
UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. Luis Antônio Fernandes de Oliveira
Professor Assistente Doutor
UNESP - Ilha Solteira

São José do Rio Preto, 11 de fevereiro de 2015.

À minha família
dedico.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me dado a força necessária para chegar até aqui.

Agradeço a toda minha família pelo apoio e incentivo. Aos meus pais por todo amor e cuidado e aos meus irmãos por serem meus exemplos de garra e determinação.

Ao meu namorado Felipe Magalhães de Aguiar, por estar sempre ao meu lado e por todo amor e carinho ao longo desta trajetória.

À Profa. Dra. Andréa Cristina Prokopczyk Arita, por aceitar me orientar neste trabalho, pela paciência durante os seminários, por toda dedicação, ajuda e amizade ao longo deste percurso.

Aos meus professores de graduação e pós graduação, pelos ensinamentos e experiências compartilhadas. Em especial, ao Prof. Dr. Luis Antônio Fernandes de Oliveira, que me acompanha desde a iniciação científica com tamanha sabedoria, confiança e amizade.

Aos professores Juliana e Luis por aceitarem compor a banca examinadora.

Aos meus amigos de Ilha Solteira que, mesmo distantes, sempre me apoiaram e às minhas queridas amigas, Janaina Buzo, Marceli e Natália pelos anos de companheirismo. Ao carinho e amizade dos meus amigos de graduação: Cristina, Jéssica, Neuterlândio, Paulo, Sibeli, Silmara e Thays, que mesmo longe fizeram a diferença nesta jornada. Aos amigos que fiz e aos que reencontrei em São José do Rio Preto durante o mestrado, por tornarem esta trajetória mais leve. Em especial, aos meus amigos, Fernando, Flávio, Luís Carlos, Giane, Mariana e Robson, pelos ótimos momentos juntos e por toda paciência e ajuda durante este período.

Às minhas companheiras de república Mariana e Mayra por tornarem a minha estadia fora de casa mais alegre, os momentos compartilhados foram incríveis.

À CAPES pelo apoio financeiro.

*“O único homem que está isento de
erros, é aquele que não arrisca
acertar.”*

(Albert Einstein)

Resumo

Neste trabalho, estudaremos a existência e a unicidade de solução fraca quase automórfica para a equação diferencial abstrata semi-linear dada por

$$x'(t) = Ax(t) + f(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

onde A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo exponencialmente estável em um espaço de Banach.

Palavras-chave: Semigrupos, funções quase automórficas, equações diferenciais abstratas.

Abstract

In this work, we study the existence and uniqueness of an almost automorphic mild solution to the semilinear abstract differential equation given by

$$x'(t) = Ax(t) + f(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

where A is the infinitesimal generator of an exponentially stable C_0 -semigroup in a Banach space.

Keywords: Semigroups, almost automorphic functions, abstract differential equations.

Sumário

Introdução	10
1 Semigrupos de operadores lineares limitados	12
1.1 Semigrupos uniformemente contínuos de operadores lineares limitados	12
1.2 Semigrupos fortemente contínuos de operadores lineares limitados	22
1.3 O Teorema de Hille-Yosida	33
2 Problema de Cauchy abstrato	48
2.1 Problema de valor inicial homogêneo	48
2.2 Problema de valor inicial não homogêneo	51
2.3 O Problema semi-linear	58
3 Existência e unicidade de soluções fracas quase automórficas para equações diferenciais abstratas semi-lineares	62
3.1 Funções quase automórficas	62
3.2 Soluções fracas quase automórficas para equações diferenciais abstratas semi-lineares .	74
A Resultados Auxiliares	88

Introdução

O comportamento de soluções de equações diferenciais abstratas tem se mostrado um tópico muito atrativo de pesquisa matemática, o que se nota pelo grande número de trabalhos publicados sobre o assunto, como por exemplo [2], [5], [8], [10], [11] e [13]. Tal fato deve-se à imensa aplicabilidade desses temas que, em geral, modelam situações reais que aparecem na física, biologia e engenharia.

Neste trabalho, estudaremos a existência e a unicidade de solução fraca quase automórfica para a equação diferencial semi-linear dada por

$$x'(t) = Ax(t) + f(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

onde A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo exponencialmente estável em um espaço de Banach.

A ferramenta principal que utilizaremos para tal estudo é a teoria de semigrupos de operadores lineares limitados. Esta teoria teve início na primeira metade do século XX, se destacando em 1948 com a generalização do Teorema de Hille-Yosida e tendo seu ápice com a edição do livro “*Semigroups and Functional Analysis*” por E. Hille e R.S Philips.

Além disso, utilizaremos também o estudo de algumas propriedades da classe das funções quase automórficas. Esta classe de funções foi introduzida na literatura por S. Bochner no início dos anos 60. Segundo Bochner, as funções quase automórficas apareceram de forma natural em seus trabalhos sobre geometria diferencial e, do ponto de vista estrutural, receberam atenção especial por serem uma generalização imediata das funções quase periódicas, que foram definidas por H. Bohr no início dos anos 20 para funções a valores numéricos e, mais tarde, estendidas por Bochner para funções com valores em um espaço métrico.

Desta forma, esta dissertação está dividida em três capítulos. No primeiro capítulo, estudamos alguns resultados clássicos da teoria de semigrupos de operadores lineares limitados em espaços de Banach. Mais especificamente, na seção 1.1 apresentamos os semigrupos uniformemente contínuos, na

seção 1.2, os semigrupos fortemente contínuos e na seção 1.3 nos dedicamos ao estudo do Teorema de Hille-Yosida para o caso de semigrupos de contrações. Este teorema é importante pois caracteriza quando um operador linear é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo.

No capítulo 2, estudamos o problema de Cauchy abstrato. Primeiramente, na seção 2.1, consideramos o problema de Cauchy homogêneo. Posteriormente, nas seções 2.2 e 2.3, consideramos o problema de Cauchy não homogêneo e o problema semi-linear, respectivamente.

No último capítulo, baseados em [16], mostramos a existência e a unicidade de solução fraca quase automórfica para uma classe de equações diferenciais abstratas. Para isso, na seção 3.1, apresentamos as funções quase automórficas e estudamos suas propriedades básicas. Já na seção 3.2, primeiramente provamos a existência e a unicidade de solução fraca quase automórfica para a equação diferencial

$$x'(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

onde A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo exponencialmente estável e f é quase automórfica. Em seguida, consideramos a equação (1), onde A tem a mesma propriedade acima, e provamos, sob certas propriedades de f , a existência e a unicidade de uma solução fraca quase automórfica para esta equação.

Finalizamos esta dissertação com um Apêndice, onde apresentamos alguns resultados importantes que utilizamos no decorrer deste trabalho, tais como, o Lema de Dini, o Teorema da convergência dominada de Lebesgue, o Teorema do ponto fixo de Banach, dentre outros.

Semigrupos de operadores lineares limitados

Neste capítulo estudaremos os principais resultados da Teoria de semigrupos de operadores lineares limitados. Para isso, fixemos um espaço de Banach X , munido da norma $\|\cdot\|$.

Denotemos por $\mathcal{L}(X)$ o conjunto de todos os operadores lineares limitados de X em X .

1.1 Semigrupos uniformemente contínuos de operadores lineares limitados

Definição 1.1. *Uma família a um parâmetro $(T(t))_{t \geq 0}$, de operadores lineares limitados em X , é um semigrupo se:*

(i) $T(0) = I$, onde I denota o operador identidade em X ;

(ii) $T(t + s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \in [0, +\infty)$.

Definição 1.2. *Um semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ de operadores lineares limitados em X é uniformemente contínuo se*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\| = 0.$$

Note que o limite acima nos diz que a função $t \mapsto T(t)$, de $[0, +\infty)$ em $\mathcal{L}(X)$, é contínua à direita em $t = 0$. Além disso, quando $(T(t))_{t \geq 0}$ é uniformemente contínuo, obtemos a continuidade desta função à direita para todo $t \in [0, +\infty)$.

De fato, dados $t \in [0, +\infty)$ e $h > 0$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(t+h) - T(t)\| &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(t)T(h) - T(t)\| \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(t)(T(h) - I)\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(t)\| \|T(h) - I\| \\
&= \|T(t)\| \lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(h) - I\| = 0.
\end{aligned}$$

Mais adiante, veremos que a continuidade à esquerda desta função também é válida.

Definição 1.3. O operador $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ definido por

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad \text{quando } x \in D(A) = \{x \in X; \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe}\},$$

é o gerador infinitesimal do semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$.

Observações:

(i) $D(A) \neq \emptyset$ e $D(A)$ é um subespaço vetorial de X .

De fato, $0 \in D(A)$, pois $0 \in X$ e $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)0 - 0}{t} = 0$. Além disso, sejam x e y pertencentes a $D(A)$. Assim $(x + y) \in X$ e

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)(x + y) - (x + y)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x + T(t)y - x - y}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)y - y}{t}.
\end{aligned}$$

Como os limites acima existem, segue que $(x + y) \in D(A)$. Finalmente, dados $x \in D(A)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, temos $\alpha x \in X$ e

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)(\alpha x) - \alpha x}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\alpha T(t)x - \alpha x}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\alpha(T(t)x - x)}{t} = \alpha \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}.
\end{aligned}$$

Visto que o limite acima existe, segue que $\alpha x \in D(A)$. Logo, $D(A)$ é um subespaço vetorial de X .

(ii) Se tomarmos $f : [0, +\infty) \rightarrow X$ definida por $f(t) = T(t)x$, temos

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t} = f'_+(0) = \left. \frac{d^+}{dt}(T(t)x) \right|_{t=0}, \quad \text{para } x \in D(A),$$

onde $f'_+(0)$ denota a derivada à direita de f no ponto $t = 0$.

O próximo resultado nos fornece uma condição necessária e suficiente para que um operador linear A seja o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo. Para prová-lo utilizaremos a Proposição A.2.

Teorema 1.4. *Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo se, e somente se, A é um operador linear limitado em X .*

Demonstração. Suponha inicialmente que $A : X \rightarrow X$ é um operador linear limitado e considere a família

$$T(t) = e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}, \quad t \geq 0.$$

Vamos mostrar que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo com gerador infinitesimal A . Antes, porém, note que $(T(t))_{t \geq 0}$ está bem definido pois,

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{t^n A^n}{n!} \right\| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \|A^n\|}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} = e^{t\|A\|} < +\infty, \quad \forall t \geq 0.$$

Agora vamos mostrar que:

$$(1) \quad T(t) \in \mathcal{L}(X), \quad \forall t \geq 0.$$

De fato, seja

$$s_k = \sum_{n=0}^k \frac{t^n A^n}{n!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Observe que $s_k \in \mathcal{L}(X)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Além disso, para $k, m \in \mathbb{N}$, com $k < m$, temos

$$\|s_m - s_k\| = \left\| \sum_{n=0}^m \frac{t^n A^n}{n!} - \sum_{n=0}^k \frac{t^n A^n}{n!} \right\| = \left\| \sum_{n=k+1}^m \frac{t^n A^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=k+1}^m \frac{t^n \|A^n\|}{n!} \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!}.$$

Dessa forma, como $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} = e^{t\|A\|}$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} < \varepsilon$.

Logo, se $k, m \geq n_0$, então

$$\|s_m - s_k\| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} < \varepsilon,$$

o que implica que $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(X)$ e assim, uma vez que X é um espaço de Banach, $\mathcal{L}(X)$ também é um espaço de Banach e portanto, $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é convergente, com $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = s \in \mathcal{L}(X)$, onde

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = T(t).$$

Portanto, $T(t) \in \mathcal{L}(X)$, para todo $t \geq 0$.

$$(2) \quad (T(t))_{t \geq 0} \text{ é um semigrupo.}$$

De fato:

- (i) $T(0) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^n A^n}{n!} = I + 0A + \frac{0^2 A^2}{2!} + \dots = I.$
(ii) Sejam $t, s \in [0, +\infty)$,

$$\begin{aligned}
T(t+s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t+s)^n A^n}{n!} \\
&= I + (t+s)A + \frac{(t+s)^2 A^2}{2!} + \frac{(t+s)^3 A^3}{3!} + \frac{(t+s)^4 A^4}{4!} + \dots \\
&= I + tA + sA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \frac{2tsA^2}{2!} + \frac{s^2 A^2}{2!} + \frac{t^3 A^3}{3!} + \frac{3! t^2 s A^3}{2! 3!} + \frac{3! ts^2 A^3}{2! 3!} + \frac{s^3 A^3}{3!} + \dots \\
&= I + tA \left(I + sA + \frac{s^2 A^2}{2!} + \frac{s^3 A^3}{3!} + \dots \right) + \frac{t^2 A^2}{2!} \left(I + sA + \frac{s^2 A^2}{2!} + \dots \right) \\
&\quad + \frac{t^3 A^3}{3!} (I + sA + \dots) + \dots + \left(sA + \frac{s^2 A^2}{2!} + \frac{s^3 A^3}{3!} + \dots \right) \\
&= I + tAT(s) + \frac{t^2 A^2 T(s)}{2!} + \frac{t^3 A^3 T(s)}{3!} + \dots + \left(sA + \frac{s^2 A^2}{2!} + \frac{s^3 A^3}{3!} + \dots \right) \\
&= tAT(s) + \frac{t^2 A^2 T(s)}{2!} + \frac{t^3 A^3 T(s)}{3!} + \dots + T(s) \\
&= \left(I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \frac{t^3 A^3}{3!} + \dots \right) T(s) \\
&= T(t)T(s).
\end{aligned}$$

(3) $(T(t))_{t \geq 0}$ é uniformemente contínuo.

Para provarmos este fato, observe que

$$T(t) - I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} - I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = tA \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} A^{n-1}}{n!} \right).$$

Assim,

$$\|T(t) - I\| = \left\| tA \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} A^{n-1}}{n!} \right) \right\| \leq t\|A\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} \|A\|^{n-1}}{n!} \right) \leq t\|A\| \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} \right) = t\|A\|e^{t\|A\|}$$

e então,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\| \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} t\|A\|e^{t\|A\|} = 0.$$

Portanto, $(T(t))_{t \geq 0}$ é uniformemente contínuo.

(4) A é o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t \geq 0}$.

Note que,

$$\frac{T(t) - I}{t} - A = \frac{1}{t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right) - A = A \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} A^{n-1}}{n!} \right) - A$$

$$= A \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{(n+1)!} \right) - A = A \left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{(n+1)!} \right) - I \right].$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| &\leq \|A\| \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{(n+1)!} - I \right\| = \|A\| \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{(n+1)!} \right\| \leq \|A\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{(n+1)!} \right) \\ &\leq \|A\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} \right) = \|A\| (e^{t\|A\|} - 1). \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \|A\| (e^{t\|A\|} - 1) = 0,$$

isto é, $A = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t) - I}{t}$ e, uma vez que essa convergência é em $\mathcal{L}(X)$, temos, em particular, que

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \text{ para todo } x \in X.$$

Portanto, $D(A) = X$ e A é o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t \geq 0}$.

Consequentemente, segue de (1) - (4) que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo com gerador infinitesimal igual a A .

Reciprocamente, suponhamos que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de operadores lineares limitados uniformemente contínuo $(T(t))_{t \geq 0}$ e vamos mostrar que A é limitado.

Pela continuidade uniforme de $(T(t))_{t \geq 0}$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|T(t) - I\| < \varepsilon$, para todo $0 < t < \delta$. Assim,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{t} \int_0^t T(s) ds - I \right\| &= \left\| \frac{1}{t} \int_0^t T(s) ds - \frac{1}{t} \int_0^t Ids \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{t} \int_0^t (T(s) - I) ds \right\| \\ &\leq \frac{1}{t} \int_0^t \|T(s) - I\| ds \\ &\leq \frac{1}{t} \int_0^t \varepsilon ds = \varepsilon, \end{aligned}$$

para $0 < t < \delta$.

Dessa forma, tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}$, existe $\rho > 0$, com $0 < \rho < \delta$, tal que $\left\| \frac{1}{\rho} \int_0^\rho T(s) ds - I \right\| < 1$ e então, tomando $G = -\frac{1}{\rho} \int_0^\rho T(s) ds + I$ no Teorema A.2, segue que $I - G = \frac{1}{\rho} \int_0^\rho T(s) ds$ tem inversa

limitada. Além disso, para $0 < h < \rho$,

$$\begin{aligned}
\frac{T(h) - I}{h} \left(\int_0^\rho T(s) ds \right) &= \frac{1}{h} \int_0^\rho (T(h) - I) T(s) ds \\
&= \frac{1}{h} \left(\int_0^\rho T(h) T(s) ds - \int_0^\rho T(s) ds \right) \\
&= \frac{1}{h} \left(\int_0^\rho T(h+s) ds - \int_0^\rho T(s) ds \right) \\
&= \frac{1}{h} \left(\int_h^{\rho+h} T(s) ds - \int_0^\rho T(s) ds \right) \\
&= \frac{1}{h} \left[\left(\int_h^\rho T(s) ds + \int_\rho^{\rho+h} T(s) ds \right) - \left(\int_0^h T(s) ds + \int_h^\rho T(s) ds \right) \right] \\
&= \frac{1}{h} \left(\int_\rho^{\rho+h} T(s) ds - \int_0^h T(s) ds \right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I}{h} \left(\int_0^\rho T(s) ds \right) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left(\int_\rho^{\rho+h} T(s) ds - \int_0^h T(s) ds \right) \\
&= \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left(\int_\rho^{\rho+h} T(s) ds \right)}_{L_1} - \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left(\int_0^h T(s) ds \right)}_{L_2}.
\end{aligned}$$

Observe que

$$L_2 = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left(\int_0^h T(s) ds \right) = I,$$

pois

$$\left\| \frac{1}{h} \int_0^h T(s) ds - I \right\| \leq \frac{1}{h} \int_0^h \|T(s) - I\| ds \leq \frac{1}{h} \int_0^h \varepsilon ds = \varepsilon,$$

visto que $0 < h < \delta$, e

$$\begin{aligned}
L_1 &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_\rho^{\rho+h} T(s) ds = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h T(s + \rho) ds = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(T(\rho) \frac{1}{h} \int_0^h T(s) ds \right) \\
&= T(\rho) \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{h} \int_0^h T(s) ds \right) = T(\rho).
\end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I}{h} \left(\int_0^\rho T(s) ds \right) = T(\rho) - I,$$

isto é,

$$A \left(\int_0^\rho T(s) ds \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I}{h} \left(\int_0^\rho T(s) ds \right) = T(\rho) - I.$$

Portanto,

$$A = (T(\rho) - I) \left(\int_0^\rho T(s) ds \right)^{-1}$$

e, como o lado direito da igualdade acima é limitado, segue que A é limitado. $\square$

Proposição 1.5. *Se $(T(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo de operadores lineares limitados uniformemente contínuo, então a função $t \mapsto T(t)$ é contínua em $[0, +\infty)$.*

Demonstração. Já vimos que essa função é contínua à direita de t para $t \geq 0$. Agora, vamos mostrar que ela também é contínua à esquerda para $t > 0$.

Seja $t > 0$. Primeiramente mostraremos que $\|T(s)\|$ é limitada em $[0, t + 1]$.

Pela continuidade uniforme de $(T(t))_{t \geq 0}$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|T(s) - I\| < 1, \quad \forall s \in [0, \delta].$$

Logo,

$$\|T(s)\| \leq \|T(s) - I\| + \|I\| < 1 + 1 = 2, \quad \forall s \in [0, \delta].$$

Seja n o primeiro número natural tal que $t + 1 < n\delta$. Assim, se $s \in [0, t + 1]$, então $s = k\delta + \xi$, onde $k \in [0, n]$ e $\xi \in [0, \delta]$, e

$$\|T(s)\| = \|T(k\delta + \xi)\| = \|T(k\delta)T(\xi)\| \leq \underbrace{\|T(\delta) \dots T(\delta)\|}_{K \text{ vezes}} \|T(\xi)\| \leq \|T(\delta)\|^k \|T(\xi)\| < 2^k 2 = 2^{k+1} \leq 2^{n+1},$$

ou seja, temos $\|T(s)\| \leq 2^{n+1}$, $\forall s \in [0, t + 1]$.

Agora, seja $h > 0$ tal que $h < t$. Dessa forma, temos

$$0 < t - h \leq t < t + 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(t - h) - T(t)\| &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(t - h) - T(t - h + h)\| = \lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(t - h) - T(t - h)T(h)\| \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(t - h)\| \|I - T(h)\| \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0^+} 2^{n+1} \|I - T(h)\| = 0, \end{aligned}$$

pois, da continuidade uniforme de $(T(t))_{t \geq 0}$, $\lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(h) - I\| = 0$. Portanto, segue que $t \mapsto T(t)$ é contínua à esquerda para todo $t > 0$ e, consequentemente, $t \mapsto T(t)$ é contínua em $[0, +\infty)$. $\square$

No teorema a seguir, garantiremos a unicidade de um semigrupo uniformemente contínuo com relação ao seu gerador infinitesimal.

Teorema 1.6. *Sejam $(T(t))_{t \geq 0}$ e $(S(t))_{t \geq 0}$ semigrupos uniformemente contínuos. Se*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t) - I}{t} = A = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t) - I}{t},$$

então $T(t) = S(t)$, para todo $t \geq 0$.

Demonstração. Vamos mostrar que, dado $T > 0$, $S(t) = T(t)$, para $0 \leq t \leq T$.

Seja $T > 0$. Como $(T(t))_{t \geq 0}$ e $(S(t))_{t \geq 0}$ são semigrupos uniformemente contínuos, as funções $t \mapsto T(t)$ e $t \mapsto S(t)$ são contínuas em $[0, +\infty)$. Além disso, visto que a função $t \mapsto \|t\|$ também é contínua, obtemos que as funções $t \mapsto \|T(t)\|$ e $t \mapsto \|S(t)\|$ são contínuas em $[0, +\infty)$. Assim, como $[0, T]$ é compacto, existem constantes positivas K_1 e K_2 tais que

$$\|T(t)\| \leq K_1, \forall t \in [0, T], \text{ e } \|S(t)\| \leq K_2, \forall t \in [0, T].$$

Dessa forma, se $K = K_1 K_2$, temos

$$\|T(t)\| \|S(s)\| \leq K, \forall t, s \in [0, T].$$

Mais ainda, da hipótese do teorema, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$\left\| \frac{T(h) - I}{h} - A \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2TK}, \forall 0 < t < \delta_1,$$

e

$$\left\| \frac{S(h) - I}{h} - A \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2TK}, \forall 0 < t < \delta_2.$$

Logo, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e $0 < t < \delta$, segue que ambas as desigualdades acima são válidas. Assim, se $0 < t < \delta$,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T(t)}{t} - \frac{S(t)}{t} \right\| &= \left\| \frac{T(t)}{t} - \frac{I}{t} - A + \frac{I}{t} + A - \frac{S(t)}{t} \right\| \\ &= \left\| \left(\frac{T(t) - I}{t} - A \right) - \left(\frac{S(t) - I}{t} - A \right) \right\| \\ &\leq \left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| + \left\| \frac{S(t) - I}{t} - A \right\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2TK} + \frac{\varepsilon}{2TK} = \frac{\varepsilon}{TK}, \end{aligned}$$

ou seja, $\|T(t) - S(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{TK}t$, se $0 < t < \delta$.

Agora, dado $t \in [0, T]$, tomemos $n > 0$ tal que $\frac{t}{n} < \delta$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|T(t) - S(t)\| &= \left\| T\left(\frac{nt}{n}\right) - S\left(\frac{nt}{n}\right) \right\| \\
&= \left\| T\left(\frac{nt}{n}\right) S(0) - T\left((n-1)\frac{t}{n}\right) S\left(\frac{t}{n}\right) + T\left((n-1)\frac{t}{n}\right) S\left(\frac{t}{n}\right) \right. \\
&\quad \left. - T\left((n-2)\frac{t}{n}\right) S\left(\frac{2t}{n}\right) + T\left((n-2)\frac{t}{n}\right) S\left(\frac{2t}{n}\right) - \dots - T(0)S\left(\frac{t}{n}\right) \right\| \\
&= \left\| \sum_{k=0}^{n-1} T\left((n-k)\frac{t}{n}\right) S\left(k\frac{t}{n}\right) - T\left((n-1-k)\frac{t}{n}\right) S\left((k+1)\frac{t}{n}\right) \right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\left((n-k)\frac{t}{n}\right) S\left(k\frac{t}{n}\right) - T\left((n-1-k)\frac{t}{n}\right) S\left((k+1)\frac{t}{n}\right) \right\| \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\left((n-1-k)\frac{t}{n}\right) \left[T\left(\frac{t}{n}\right) S\left(k\frac{t}{n}\right) - S\left((k+1)\frac{t}{n}\right) \right] \right\| \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\left((n-1-k)\frac{t}{n}\right) \left[T\left(\frac{t}{n}\right) - S\left(k\frac{t}{n}\right) \right] S\left(k\frac{t}{n}\right) \right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\left((n-1-k)\frac{t}{n}\right) \right\| \left\| T\left(\frac{t}{n}\right) - S\left(k\frac{t}{n}\right) \right\| \left\| S\left(k\frac{t}{n}\right) \right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} K_1 \left(\frac{\varepsilon}{TK} \frac{t}{n} \right) K_2 \\
&= nK \frac{\varepsilon}{TK} \frac{t}{n} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{T} T = \varepsilon,
\end{aligned}$$

pois,

(i) $\frac{t}{n} < \delta$;

(ii) para $0 \leq k \leq n-1 < n$, $0 \leq n-1-k \leq n-1 < n$, e então $\frac{(n-1-k)t}{n} < 1t = t \leq T$ e $\frac{kt}{n} < 1t = t \leq T$.

Logo, temos

$$\|T(t) - S(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in [0, T],$$

para qualquer que seja $\varepsilon > 0$.

Portanto, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, concluímos que $T(t) = S(t)$, para todo $t \in [0, T]$. Além disso, fazendo $T \rightarrow \infty$, temos

$$T(t) = S(t), \quad \forall t \geq 0.$$

□

Corolário 1.7. *Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um semigrupo uniformemente contínuo. Então:*

- (i) *Existe um único operador linear A tal que $T(t) = e^{tA}$, $\forall t \geq 0$;*
- (ii) *O operador A é o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t \geq 0}$;*
- (iii) *Existe uma constante $\omega \geq 0$ tal que $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$, $\forall t \geq 0$;*
- (iv) *$t \mapsto T(t)$ é diferenciável e*

$$\frac{d}{dt}T(t) = AT(t) = T(t)A, \quad \forall t \geq 0.$$

Demonstração. (i) Seja A o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t \geq 0}$. Pelo Teorema 1.4 sabemos que A é um operador linear limitado. Mais ainda, sabemos que A também é o gerador infinitesimal do semigrupo $S(t) = e^{tA}$, $t \geq 0$. Assim, pelo teorema anterior, segue que $S(t) = T(t)$, para todo $t \geq 0$, ou seja, $T(t) = e^{tA}$, $t \geq 0$, pois se dois semigrupos tem o mesmo gerador infinitesimal, eles são iguais.

A unicidade do operador A segue da unicidade do gerador infinitesimal.

(ii) A afirmação do item (ii) é consequência direta dos resultados obtidos na demonstração do Teorema 1.4.

(iii) Como A é um operador linear limitado, segue que existe $M > 0$ tal que $\|A\| \leq M$. Seja $\omega \geq 0$, $\omega = \|A\|$. Assim, pelo item (i),

$$\|T(t)\| = \|e^{tA}\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} = e^{t\|A\|} = e^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

(iv) Sejam $t \geq 0$ e $h > 0$, então

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| \frac{T(t+h) - T(t)}{h} - T(t)A \right\| &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| \frac{T(t)T(h) - T(t)}{h} - T(t)A \right\| \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| T(t) \left[\left(\frac{T(h) - I}{h} \right) - A \right] \right\| \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(t)\| \left\| \frac{T(h) - I}{h} - A \right\| \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0^+} e^{\omega t} \left\| \frac{T(h) - I}{h} - A \right\| = 0, \end{aligned}$$

pois A é o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t \geq 0}$. Assim, a função $t \mapsto T(t)$ é diferenciável à direita de t , com $\frac{d^+}{dt}T(t) = T(t)A$. Sabemos também que $t \mapsto T(t)$ é contínua e dessa forma, como $A \in \mathcal{L}(X)$, a função $t \mapsto T(t)A$ é contínua. Logo, pelo Lema de Dini (Lema A.3), segue que $t \mapsto T(t)$ é diferenciável e $\frac{d}{dt}T(t) = \frac{d^+}{dt}T(t) = T(t)A$.

De maneira análoga,

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| \frac{T(t+h) - T(t)}{h} - AT(t) \right\| &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| \frac{T(h+t) - T(t)}{h} - AT(t) \right\| \\
&= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| \frac{T(h)T(t) - T(t)}{h} - AT(t) \right\| \\
&= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| \left[\left(\frac{T(h) - I}{h} \right) - A \right] T(t) \right\| \\
&\leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| \left(\frac{T(h) - I}{h} \right) - A \right\| \|T(t)\| \\
&\leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| \left(\frac{T(h) - I}{h} \right) - A \right\| e^{\omega t} = 0.
\end{aligned}$$

Logo, $\frac{d}{dt}T(t) = AT(t)$ e portanto vale $\frac{d}{dt}T(t) = T(t)A = AT(t)$. $\square$

1.2 Semigrupos fortemente contínuos de operadores lineares limitados

Nesta seção iremos estudar os semigrupos fortemente contínuos, que serão utilizados como ferramenta nos capítulos 2 e 3.

Definição 1.8. *Um semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ de operadores lineares limitados em X é um semigrupo fortemente contínuo se*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x, \text{ para todo } x \in X.$$

Note que neste caso a função $t \mapsto T(t)x$ é contínua em $t = 0$, para todo $x \in X$.

Um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados em X será chamado *semigrupo de classe C_0* ou simplesmente *C_0 -semigrupo*.

O próximo resultado estabelece uma limitação para um C_0 -semigrupo. Essa limitação é de grande utilidade na teoria de semigrupos e será utilizada muitas vezes ao longo deste trabalho.

Teorema 1.9. *Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo. Então existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0.$$

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar que existe $\eta > 0$ tal que $\|T(t)\|$ é limitado para $t \in [0, \eta]$, isto é,

$$\exists \eta > 0 \text{ e } \exists M > 0; \|T(t)\| \leq M, \forall t \in [0, \eta].$$

Para isso, suponhamos, por absurdo, que esse fato não aconteça. Então, para todo $\eta > 0$ e todo

$M > 0$, existe $t_{M,\eta} \in [0, \eta]$ tal que

$$\|T(t_{M,\eta})\| > M.$$

Em particular, tomando $\eta = \frac{1}{n}$ e $M = n$, com $n \in \mathbb{N}$, existe $t_n \in [0, \frac{1}{n}]$ de modo que $\|T(t_n)\| > n$. Assim, conforme variamos n em $\mathbb{N}$, obtemos que $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0 \text{ e } \|T(t_n)\| > n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dessa forma, segue que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \{\|T(t_n)\|\} = \infty$ e consequentemente, pela contra-positiva do Princípio da Limitação Uniforme (Teorema A.5), existe $x_0 \in X$ tal que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \{\|T(t_n)x_0\|\} = \infty$. Logo, existe uma subsequência $(t_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $(\|T(t_{n_k})x_0\|)_{k \in \mathbb{N}}$ é ilimitada.

Porém, uma vez que $(t_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é subsequência de $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, temos $\lim_{k \rightarrow \infty} t_{n_k} = 0$. Mais ainda, como $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo, temos também $\lim_{k \rightarrow \infty} T(t_{n_k})x_0 = x_0$, isto é, $(\|T(t_{n_k})x_0\|)_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada, gerando uma contradição. Portanto, existem $\eta > 0$ e $M > 0$ tais que

$$\|T(t)\| \leq M, \forall t \in [0, \eta].$$

Em particular, para $t = 0$, temos $\|T(0)\| = \|I\| = 1$ e então, $M \geq 1$.

Agora, vamos mostrar que isso é válido para qualquer que seja $t > 0$. Se $t > \eta$, pelo algoritmo da divisão, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $t = n\eta + \delta$, com $\delta \in [0, \eta]$. Logo,

$$\|T(t)\| = \|T(n\eta + \delta)\| = \underbrace{\|T(\eta)T(\eta)\dots T(\eta)\|}_{n\text{-vezes}} \|T(\delta)\| \leq \|T(\eta)\|^n \|T(\delta)\| \leq M^n M \leq M^{\frac{t}{\eta}} M = Me^{\omega t},$$

onde $\omega = \frac{\ln M}{\eta} > 0$, pois $M \geq 1$.

Portanto, $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0$. □

Uma consequência direta deste último teorema é a continuidade da função $t \mapsto T(t)x$, para todo $x \in X$ fixo, como veremos a seguir.

Corolário 1.10. *Se $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo então, para cada $x \in X$, a função $t \mapsto T(t)x$ é contínua de $[0, +\infty)$ em X .*

Demonstração. Sejam $t, h \geq 0$, com $t > h$. Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(t+h)x - T(t)x\| &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(t)T(h)x - T(t)x\| \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(t)\| \|T(h)x - x\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \lim_{h \rightarrow 0^+} M e^{\omega t} \|T(h)x - x\| \\
&= M e^{\omega t} \lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(h)x - x\| \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo. Logo,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(t+h)x - T(t)x\| = 0,$$

ou seja, a função $t \mapsto T(t)x$ é contínua à direita para todo $t \geq 0$.

Agora, por outro lado,

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(t-h)x - T(t)x\| &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(t-h)x - T(t-h)T(h)x\| \\
&= \lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(t-h)x - T(t-h)T(h)x\| \\
&\leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(t-h)\| \|T(h)x - x\| \\
&\leq \lim_{h \rightarrow 0^+} M e^{\omega(t-h)} \|T(h)x - x\| \\
&\leq \lim_{h \rightarrow 0^+} M e^{\omega t} \|T(h)x - x\| \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo. Logo,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(t-h)x - T(t)x\| = 0,$$

isto é, a função $t \mapsto T(t)x$ é contínua à esquerda para todo $t > 0$.

Portanto, $t \mapsto T(t)x$ é uma função contínua para todo $x \in X$. □

O próximo resultado nos fornece propriedades que serão frequentemente usadas nesta dissertação.

Teorema 1.11. *Sejam $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo e A seu gerador infinitesimal. Então:*

$$(i) \text{ Para todo } x \in X \text{ e todo } t \geq 0, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x.$$

$$(ii) \text{ Para todo } x \in X \text{ e todo } t \geq 0, \int_0^t T(s)x ds \in D(A) \text{ e } A \left(\int_0^t T(s)x ds \right) = T(t)x - x.$$

$$(iii) \text{ Para todo } x \in D(A) \text{ e todo } t \geq 0, T(t)x \in D(A) \text{ e } \frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

(iv) Para todo $x \in D(A)$ e $t, s \geq 0$, $T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\xi)Axd\xi = \int_s^t AT(\xi)x d\xi$.

Demonstração. (i) Seja $x \in X$ e $t \geq 0$. Pelo corolário anterior, a função $t \mapsto T(t)x$ é contínua e então, ela é uniformemente contínua em $[0, a]$, com $a > 0$ tal que $t \in [0, a]$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|T(t)x - T(s)x\| < \varepsilon, \text{ se } |t - s| < \delta, \forall t, s \in [0, a].$$

Note que, se $0 < h < \delta$ e $t + h < a$, então

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds - T(t)x \right\| &= \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t)x ds \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x - T(t)x ds \right\| \\ &\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|T(s)x - T(t)x\| ds \\ &\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \varepsilon ds = \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim, $\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds - T(t)x \right\| = 0$, ou seja, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x$.

(ii) Sejam $x \in X$ e $t \geq 0$, mostraremos que $\int_0^t T(s)x ds \in D(A)$, isto é, $\lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{T(h) - I}{h} \right) \left(\int_0^t T(s)x ds \right)$ existe. Para isso, note que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{T(h) - I}{h} \right) \left(\int_0^t T(s)x ds \right) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{T(h)}{h} \int_0^t T(s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)x ds \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left(\int_0^t T(h+s)x ds - \int_0^t T(s)x ds \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left(\int_h^{t+h} T(s)x ds - \int_0^t T(s)x ds \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left(\int_h^t T(s)x ds + \int_t^{t+h} T(s)x ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^h T(s)x ds - \int_h^t T(s)x ds \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)x ds \right). \end{aligned}$$

Pelo item (i), segue que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{T(h)}{h} \int_0^t T(s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)x ds \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds - \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^{0+h} T(s)x ds$$

$$\begin{aligned}
&= T(t)x - T(0)x \\
&= T(t)x - x.
\end{aligned}$$

Portanto, $\int_0^t T(s)x ds \in D(A)$ e

$$A \left(\int_0^t T(s)x ds \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{T(h)}{h} \int_0^t T(s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)x ds \right) = T(t)x - x.$$

(iii) Seja $x \in D(A)$, isto é, $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} = Ax$. Dessa forma, para $t \geq 0$, temos

$$\frac{T(h)(T(t)x) - T(t)x}{h} = \frac{T(h+t)x - T(t)x}{h},$$

logo,

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h+t)x - T(t)x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(t)T(h)x - T(t)x}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0^+} T(t) \left(\frac{T(h)x - x}{h} \right) = T(t) \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{T(h)x - x}{h} \right) = T(t)Ax.
\end{aligned}$$

Assim, segue que, $T(t)x \in D(A)$ e $AT(t)x = T(t)Ax$. Além disso, $\frac{d^+}{dt}T(t)x = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T(t)Ax$.

Agora, mostraremos que $\frac{d^-}{dt}T(t)x = \frac{d^+}{dt}T(t)x$. Para isso, considere $h \in [0, t]$, o que implica que $0 < t - h$. Logo,

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax \right\| &= \left\| \frac{-T(t-h)x + T(t-h+h)x}{h} - T(t)Ax \right\| \\
&= \left\| T(t-h) \left(\frac{-x + T(h)x}{h} \right) - T(t)Ax \right\| \\
&\leq \|T(t-h)\| \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\| + \|T(t-h)Ax - T(t)Ax\| \\
&\leq Me^{\omega(t-h)} \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\| + \|T(t-h)Ax - T(t)Ax\|.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| \frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax \right\| &= \lim_{h \rightarrow 0^+} Me^{\omega(t-h)} \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\| \\
&\quad + \lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(t-h)Ax - T(t)Ax\|
\end{aligned}$$

$$= Me^{\omega t}0 + 0 = 0,$$

ou seja, $\frac{d^-}{dt}T(t)x = T(t)Ax = \frac{d^+}{dt}T(t)x$. Dessa forma,

$$\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x.$$

(iv) Dado $x \in D(A)$, pelo item (iii), temos $T(\xi)Ax = AT(\xi)x, \forall \xi \geq 0$. Assim,

$$\int_s^t T(\xi)Ax d\xi = \int_s^t AT(\xi)x d\xi.$$

Além disso, sabemos que $\frac{d}{d\xi}T(\xi)x = T(\xi)Ax$. Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, segue que,

$$\int_s^t T(\xi)Ax d\xi = \int_s^t \frac{d}{d\xi}T(\xi)x d\xi = T(t)x - T(s)x.$$

□

Corolário 1.12. *Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$, então $D(A)$ é denso em X e $A : D(A) \rightarrow X$ é fechado.*

Demonstração. Vamos mostrar, primeiramente, que $D(A)$ é denso em X , ou seja, $\overline{D(A)} = X$. Para isso, dado $x \in X$, mostraremos que existe uma sequência em $D(A)$ que converge para x .

Pelo item (ii) do teorema anterior, sabemos que $\int_0^t T(s)x ds \in D(A), \forall t \geq 0$. Assim, definindo

$$x_t = \frac{1}{t} \int_0^t T(s)x ds, t \geq 0, \tag{1.1}$$

segue que $x_t \in D(A), \forall t \geq 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)x_t - x_t}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) \left(\frac{1}{t} \int_0^t T(s)x ds \right) - \left(\frac{1}{t} \int_0^t T(s)x ds \right)}{h} \\ &= \frac{1}{t} \left[\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) \left(\int_0^t T(s)x ds \right) - \left(\int_0^t T(s)x ds \right)}{h} \right] \\ &= \frac{1}{t} \left[A \left(\int_0^t T(s)x ds \right) \right] = \frac{1}{t} (T(t)x - x). \end{aligned}$$

Além disso, pelo item (i) do teorema anterior, temos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} x_t = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \left(\int_0^t T(s)x ds \right) = T(0)x = x.$$

Logo, $x \in \overline{D(A)}$ e assim, $X \subset \overline{D(A)}$. Como a outra inclusão é sempre válida, temos $\overline{D(A)} = X$.

Agora, vamos mostrar que o operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é fechado. Assim, seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $D(A)$ que converge para algum $x \in X$ e tal que $(Ax_n)_{n \in \mathbb{N}}$ também é uma sequência em X , que converge para algum $y \in X$. Mostraremos que $x \in D(A)$ e $Ax = y$.

Pelo teorema anterior, item (iv), sabemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $t \geq 0$,

$$T(t)x_n - T(0)x_n = \int_0^t T(\xi)Ax_n d\xi. \quad (1.2)$$

Além disso, uma vez que $x_n \rightarrow x$, quando $n \rightarrow \infty$, e $T(t) \in \mathcal{L}(X)$, segue que $T(t)x_n \rightarrow T(t)x$, quando $n \rightarrow \infty$. Mais ainda,

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t T(\xi)Ax_n d\xi - \int_0^t T(\xi)y d\xi \right\| &\leq \int_0^t \|T(\xi)\| \|Ax_n - y\| d\xi \\ &\leq M e^{\omega t} \int_0^t \|Ax_n - y\| d\xi. \end{aligned}$$

Desse modo, como $Ax_n \rightarrow y$, quando $n \rightarrow \infty$, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t T(\xi)Ax_n d\xi = \int_0^t T(\xi)y d\xi.$$

Logo, tomando o limite em (1.2), quando $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$T(t)x - x = \int_0^t T(\xi)y d\xi$$

e assim, usando o item (i) do Teorema 1.11, concluimos que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^{t+0} T(\xi)y d\xi = T(0)y = y,$$

ou seja, $x \in D(A)$ e

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = y.$$

Portanto, A é fechado. □

Já vimos no Teorema 1.4 que se A é um operador linear limitado, então A gera um único semigrupo

uniformemente contínuo $(T(t))_{t \geq 0}$. O próximo teorema é um resultado similar para C_0 -semigrupos.

Teorema 1.13. *Sejam $(T(t))_{t \geq 0}$ e $(S(t))_{t \geq 0}$ dois C_0 -semigrupos com geradores infinitesimais A e B , respectivamente. Se $A = B$, então $T(t) = S(t)$, para todo $t \geq 0$.*

Demonstração. Suponha $A = B$, assim, $D(A) = D(B)$. Dessa forma, dado $x \in D(A), x \in D(B)$ e as funções $t \mapsto T(t)x$ e $t \mapsto S(t)x$ são diferenciáveis, com

$$\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x \text{ e } \frac{d}{dt}S(t)x = S(t)Bx = BS(t)x.$$

Considere a aplicação $\psi : [0, t] \rightarrow X$, com $t > 0$, definida por

$$\psi(s) = (T(t-s)S(s))x, \text{ para } 0 \leq s \leq t.$$

Logo, a derivada de ψ é dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}T(t-s)S(s)x &= T(t-s) \left(\frac{d}{ds}S(s)x \right) + \left(\frac{d}{ds}T(t-s) \right) S(s)x \\ &= T(t-s)BS(s)x - AT(t-s)S(s)x \\ &= T(t-s)BS(s)x - T(t-s)AS(s)x = 0, \end{aligned}$$

pois $A = B$.

Assim, como ψ' é nula, segue que $\psi(s)$ é constante para $0 \leq s \leq t$. Então, $\psi(t) = \psi(0)$, isto é,

$$\psi(t) = T(t-t)S(t)x = S(t)x = \psi(0) = T(t-0)S(0)x = T(t)x.$$

Portanto, $T(t)x = S(t)x$, para todo $t \geq 0$ e para todo $x \in D(A)$.

Agora, seja $x \in X$. Como $\overline{D(A)} = X$, existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $D(A)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Além disso, pelo que acabamos de provar,

$$T(t)x_n = S(t)x_n, \quad \forall t \geq 0 \text{ e } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mais ainda, como $T(t)$ e $S(t)$ pertencem a $\mathcal{L}(X)$, para todo $t \geq 0$, temos,

$$T(t)x_n \rightarrow T(t)x \text{ e } S(t)x_n \rightarrow S(t)x, \text{ quando } n \rightarrow \infty, \quad \forall t \geq 0.$$

Logo, pela unicidade do limite, segue que

$$T(t)x = S(t)x, \quad \forall t \geq 0.$$

Portanto, como $T(t)x = S(t)x$, $\forall t \geq 0$ e $\forall x \in X$, temos $T(t) = S(t)$, $\forall t \geq 0$. $\square$

A seguir veremos um exemplo clássico da teoria de semigrupos, chamado de semigrupo de translações.

Exemplo 1.14. *Seja $X = \{f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é limitada e uniformemente contínua}\}$ munido da norma da convergência uniforme, isto é,*

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|; x \in [0, +\infty)\}.$$

Para cada $t \geq 0$, defina o operador $T(t) : X \rightarrow X$ da seguinte forma

$$(T(t)f)(s) = T(t)f(s) = f(t + s), \quad \text{para todo } s \in [0, +\infty).$$

Veja a seguir algumas propriedades da família $(T(t))_{t \geq 0}$.

(1) *Para todo $t \geq 0$, $T(t)$ está bem definido, isto é, $T(t)f \in X$ para toda $f \in X$.*

De fato, $T(t)f$ é limitada pois, para $f \in X$, temos

$$\|T(t)f\| = \sup_{s \in [0, +\infty)} \|T(t)f(s)\| = \sup_{s \in [0, +\infty)} \|f(t + s)\| \leq \sup_{s \in [0, +\infty)} \|f(s)\| = \|f\|.$$

Além disso, como f é uniformemente contínua, dados $\varepsilon > 0$ e $s_1, s_2 \in [0, +\infty)$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(s_1) - f(s_2)| < \varepsilon$, sempre que $|s_1 - s_2| < \delta$.

Assim, se $s_1, s_2 \in [0, +\infty)$ e $|s_1 - s_2| < \delta$, então

$$|(T(t)f)(s_1) - (T(t)f)(s_2)| = |f(t + s_1) - f(t + s_2)| < \varepsilon.$$

Logo, $T(t)f$ é uniformemente contínua e então, $T(t)f \in X$.

(2) *$T(t) \in \mathcal{L}(X)$ para todo $t \geq 0$.*

Dados $t \geq 0, f, g \in X, \alpha \in \mathbb{R}$ e $s \in [0, +\infty)$, temos

$$(T(t)(\alpha f + g))(s) = T(t)(\alpha f + g)(s)$$

$$\begin{aligned}
&= (\alpha f + g)(t + s) \\
&= \alpha f(t + s) + g(t + s) \\
&= \alpha T(t)f(s) + T(t)g(s) \\
&= \alpha(T(t)f)(s) + (T(t)g)(s).
\end{aligned}$$

Portanto, $T(t)$ é uma aplicação linear.

Além disso, como visto no item (1),

$$\|T(t)f\| \leq \|f\|, \text{ para todo } f \in X,$$

o que implica que $T(t)$ é limitada.

Consequentemente, $T(t) \in \mathcal{L}(X)$ para todo $t \geq 0$.

(3) $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo em X .

Para verificarmos essa propriedade, sejam $f \in X, t, w \geq 0$. Assim,

(i) $(T(0)f)(s) = f(s)$, para todo $s \in [0, +\infty)$.

(ii) $[(T(t+w)f)](s) = T(t+w)f(s) = f(t+w+s) = T(t)f(w+s) = T(t)T(w)f(s) = [T(t)T(w)f](s)$, para todo $s \in [0, +\infty)$, ou seja, $T(t+w) = T(t)T(w)$, o que implica que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo.

Agora, para a continuidade em $t = 0$, seja $f \in X$. Pela continuidade uniforme de f , dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|f(t+s) - f(s)\| < \varepsilon, \text{ para todo } s \in [0, +\infty) \text{ e todo } t \geq 0 \text{ com } |t| < \delta.$$

Logo, se $|t| < \delta$, temos

$$\|T(t)f - f\| = \sup_{s \in [0, +\infty)} \|T(t)f(s) - f(s)\| = \sup_{s \in [0, +\infty)} \|f(t+s) - f(s)\| \leq \sup_{s \in [0, +\infty)} \varepsilon = \varepsilon.$$

Portanto, $(T(t))_{t \geq 0}$ é C_0 -semigrupo.

(4) $\|T(t)\| \leq 1$, para todo $t \geq 0$.

Pelo que já foi feito anteriormente, para $t \geq 0$, temos

$$\|T(t)\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|T(t)f\| \leq \sup_{\|f\| \leq 1} \|f\| = 1.$$

Logo, como definiremos na próxima seção, $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo de contrações.

(5) $D(A) = \{f \in X; f' \text{ existe e } f' \in X\}$ e $(Af)(s) = f'(s)$, para toda $f \in D(A)$ e $s \in [0, +\infty)$.

Seja $f \in X$ tal que f' existe e $f' \in X$, assim

$$f'(s) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(s+h) - f(s)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(T(h)f)(s) - f(s)}{h}, \forall s \in [0, +\infty).$$

Além disso, pela continuidade uniforme de f' , dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$\|f'(t+s) - f'(s)\| < \varepsilon, \text{ para todo } s \in [0, +\infty) \text{ e } 0 \leq t < \delta.$$

Mais ainda, como f' existe, temos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T(t)f - f}{t} - f' \right\| &= \sup_{s \in [0, +\infty)} \left\{ \left\| \frac{T(t)f(s) - f(s)}{t} - f'(s) \right\| \right\} \\ &= \sup_{s \in [0, +\infty)} \left\{ \left\| \frac{1}{t} \int_s^{s+t} f'(u) du - \frac{1}{t} \int_s^{s+t} f'(s) du \right\| \right\} \\ &= \sup_{s \in [0, +\infty)} \left\{ \frac{1}{t} \int_s^{s+t} |f'(u) - f'(s)| du \right\}. \end{aligned}$$

Logo, se $0 < t < \delta$, então $|f'(u) - f'(s)| < \varepsilon$, para todo $s \in [0, +\infty)$ e $u \in [s, s+t]$, e dessa forma,

$$\left\| \frac{T(t)f - f}{t} - f' \right\| \leq \sup_{s \in [0, +\infty)} \left\{ \frac{1}{t} \int_s^{s+t} \varepsilon du \right\} = \varepsilon.$$

Assim, quando $t \rightarrow 0^+$, $\frac{T(t)f - f}{t} \rightarrow f'$ e então, $f \in D(A)$.

Portanto, segue que $\{f \in X; f' \text{ existe e } f' \in X\} \subset D(A)$.

Agora, seja $f \in D(A) \subset X$. Então, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)f - f}{t}$ existe. Seja $g \in X$ este limite, assim, note que

$$\left| \frac{(T(t)f)(s) - f(s)}{t} - g(s) \right| \leq \left\| \frac{T(t)f - f}{t} - g \right\|, \forall s \in [0, +\infty) \text{ e } t \geq 0,$$

e além disso,

$$\left\| \frac{T(t)f - f}{t} - g \right\| \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow 0^+,$$

o que implica que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(T(t)f)(s) - f(s)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t+s) - f(s)}{t} = g(s)$, para todo $s \in [0, +\infty)$. Por outro lado, para $s \in [0, +\infty)$,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t+s) - f(s)}{t} = f'_+(s),$$

onde $f'_+(s)$ representa a derivada à direita de f em s .

Consequentemente, pela unicidade do limite, temos

$$f'_+(s) = g(s), \forall s \in [0, +\infty).$$

Mais ainda, como $g \in X$, g é uniformemente contínua e então, pelo Lema de Dini (Lema A.3), f' existe e $f' = g$, ou ainda, $f' \in X$.

Portanto, $D(A) \subset \{f \in X; f' \text{ existe e } f' \in X\}$, o que garante a igualdade entre esses conjuntos.

Por fim, dado $f \in D(A)$, temos

$$(Af)(s) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(T(t)f)(s) - f(s)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t+s) - f(s)}{t} = f'(s),$$

para todo $s \in [0, +\infty)$, ou seja, $Af = f'$.

A seguir apresentamos uma generalização do conceito de semigrupo.

Definição 1.15. Uma família a um parâmetro $(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$, de operadores lineares limitados em X , é um grupo fortemente contínuo se

$$\lim_{t \rightarrow 0} T(t)x = x, \text{ para todo } x \in X.$$

Um grupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados em X será chamado grupo de classe C_0 ou simplesmente C_0 -grupo.

1.3 O Teorema de Hille-Yosida

Nosso objetivo nesta seção é estudar o Teorema de Hille-Yosida, que é um dos principais resultados da teoria de semigrupos de operadores lineares limitados fortemente contínuos. Este teorema caracteriza quando um operador linear é o gerador de um C_0 -semigrupo.

Porém, para apresentarmos tal resultado, precisamos de algumas definições e lemas preliminares. Primeiramente, como visto na seção anterior, se $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo, então $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0$, para certas constantes $M \geq 1$ e $\omega > 0$. Esta notação será usada ao longo de toda esta seção.

Definição 1.16. Um C_0 -semigrupo é chamado uniformemente limitado se a constante ω acima é nula, isto é, $\|T(t)\| \leq M$, para todo $t \geq 0$.

Definição 1.17. Um C_0 -semigrupo é chamado semigrupo de contrações quando $M = 1$ e $\omega = 0$, ou seja, $\|T(t)\| \leq 1$, para todo $t \geq 0$.

Definição 1.18. *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear, não necessariamente limitado. O conjunto resolvente de A é o conjunto de todos os números complexos λ para os quais o operador $(\lambda I - A)$ é inversível e limitado, isto é,*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}.$$

O espectro do operador A é o complementar do conjunto resolvente, ou seja, $\sigma(A) = \rho(A)^c$.

Definição 1.19. *A família $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$, para $\lambda \in \rho(A)$, de operadores lineares limitados é chamada de resolvente de A .*

Lema 1.20. *Seja A um operador linear fechado com $\overline{D(A)} = X$. Suponha que $(0, +\infty) \subset \rho(A)$ e $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$, para todo $\lambda > 0$. Então,*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda : A)x = x, \text{ para todo } x \in X.$$

Demonstração. Seja $x \in D(A)$. Assim,

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda : A)x - Ix\| &= \|\lambda R(\lambda : A)x - R(\lambda : A)R(\lambda : A)^{-1}x\| \\ &= \|R(\lambda : A)(\lambda x - R(\lambda : A)^{-1}x)\| \\ &= \|R(\lambda : A)(\lambda x - (\lambda I - A)x)\| \\ &\leq \|R(\lambda : A)\| \|Ax\| \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \|Ax\|. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|\lambda R(\lambda : A)x - x\| \leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\|Ax\|}{\lambda} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda : A)x = x, \text{ para todo } x \in D(A).$$

Agora, sejam $x \in X$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $D(A)$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Logo, para $\lambda \in (0, +\infty)$,

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda : A)x - x\| &= \|\lambda R(\lambda : A)x - \lambda R(\lambda : A)x_n + \lambda R(\lambda : A)x_n - x_n + x_n - x\| \\ &\leq \|\lambda R(\lambda : A)(x - x_n)\| + \|\lambda R(\lambda : A)x_n - x_n\| + \|x_n - x\| \\ &\leq \lambda \|R(\lambda : A)\| \|x - x_n\| + \|\lambda R(\lambda : A)x_n - x_n\| + \|x_n - x\| \\ &\leq \lambda \frac{1}{\lambda} \|x - x_n\| + \|\lambda R(\lambda : A)x_n - x_n\| + \|x_n - x\| \end{aligned}$$

$$\leq 2\|x_n - x\| + \|\lambda R(\lambda : A)x_n - x_n\|, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Além disso, como $x_n \rightarrow x$, quando $n \rightarrow \infty$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $n \geq n_0$. Em particular, para $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > n_0$, temos $\|x_m - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$ e, uma vez que $x_m \in D(A)$, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|\lambda R(\lambda : A)x_m - x_m\| = 0$.

Portanto, voltando a desigualdade anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|\lambda R(\lambda : A)x - x\| &\leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (2\|x_m - x\| + \|\lambda R(\lambda : A)x_m - x_m\|) \\ &\leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(2\frac{\varepsilon}{2} + \|\lambda R(\lambda : A)x_m - x_m\|\right) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Finalmente, fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, segue que $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda : A)x = x$, para todo $x \in X$. $\square$

Definição 1.21. Suponha que $(0, +\infty) \subset \rho(A)$. Dado $\lambda > 0$, definimos a aproximação de Yosida de A por

$$A_\lambda = \lambda A R(\lambda : A) = \lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I.$$

Lema 1.22. Seja A um operador linear fechado com $\overline{D(A)} = X$. Suponha que $(0, +\infty) \subset \rho(A)$ e $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$, para todo $\lambda > 0$. Se A_λ é a aproximação de Yosida de A , então

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = Ax, \text{ para todo } x \in D(A).$$

Demonstração. Primeiro, observe que A e $R(\lambda : A)$ comutam para todo $\lambda \in \rho(A)$, pois

$$I = (\lambda I - A)R(\lambda : A) \Rightarrow AR(\lambda : A) = \lambda R(\lambda : A) - I$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned} I = R(\lambda : A)(\lambda I - A) &= R(\lambda : A)(\lambda I) - R(\lambda : A)A \\ &= \lambda R(\lambda : A) - R(\lambda : A)A, \end{aligned}$$

o que implica que

$$R(\lambda : A)A = \lambda R(\lambda : A) - I.$$

Logo,

$$AR(\lambda : A) = R(\lambda : A)A.$$

Além disso, do lema anterior, sabemos que $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda : A)y = y$, para todo $y \in X$. Assim, em

particular, tomando $y = Ax$, com $x \in D(A)$, temos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda AR(\lambda : A)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda : A)Ax = Ax.$$

□

Lema 1.23. *Seja A um operador linear fechado com $\overline{D(A)} = X$. Suponha que $(0, +\infty) \subset \rho(A)$ e $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$, para todo $\lambda > 0$. Se A_λ é a aproximação de Yosida de A , então A_λ é o gerador infinitesimal do semigrupo de contração uniformemente contínuo $(T_\lambda(t))_{t \geq 0}$, onde $T_\lambda(t) = e^{A_\lambda t}$, $t \geq 0$. Além disso, para todo $x \in X$ e para todos $\lambda, \mu \in (0, +\infty)$, temos*

$$\|T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x\| = \|e^{A_\lambda t}x - e^{A_\mu t}x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|.$$

Demonstração. Note que A_λ é um operador linear limitado pois, para cada $\lambda \in (0, +\infty)$, $A_\lambda = \lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I$. Assim, pelo Teorema 1.4, A_λ é o gerador infinitesimal do semigrupo uniformemente contínuo $(T_\lambda(t))_{t \geq 0}$ dado por

$$T_\lambda(t) = e^{A_\lambda t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA_\lambda)^n}{n!}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Além disso, esse semigrupo é de contração. De fato, para $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|T_\lambda(t)\| &= \|e^{A_\lambda t}\| = \|e^{(\lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I)t}\| \\ &\leq \|e^{\lambda^2 R(\lambda : A)t}\| \|e^{-\lambda I t}\| \\ &\leq e^{(\lambda^2 t)\|R(\lambda : A)\|} e^{(-\lambda t)\|I\|} \\ &\leq e^{\lambda^2 t \frac{1}{\lambda}} e^{-\lambda t} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Agora, antes de prosseguirmos com a demonstração da segunda parte do lema, provaremos algumas propriedades que serão utilizadas posteriormente.

(1) Os operadores $R(\lambda : A)$ e $R(\mu : A)$ comutam para todo $\lambda, \mu \in \rho(A)$.

Para provarmos esse fato, dados $\lambda, \mu \in \rho(A)$, note que

$$R(\lambda : A)R(\mu : A)(\mu I - A)(\lambda I - A) = I.$$

Assim,

$$R(\lambda : A)R(\mu : A)(\mu I - A) = R(\lambda : A).$$

Mais ainda, como $R(\lambda : A)$ e $R(\mu : A)$ comutam com A e μI , temos $(\mu I - A)R(\lambda : A)R(\mu : A) = R(\lambda : A)$ e então $R(\lambda : A)R(\mu : A) = R(\mu : A)R(\lambda : A)$.

(2) Os operadores A_λ e A_μ comutam para todo $\lambda, \mu \in \rho(A)$.

Neste caso, temos $A_\lambda = \lambda AR(\lambda : A)$ e $A_\mu = \mu AR(\mu : A)$. Logo, como A comuta com o resolvente e vale a propriedade de (1) acima, segue que A_λ e A_μ comutam.

(3) Os operadores A_λ e e^{tA_λ} também comutam para todo $t \geq 0$ e $\lambda \in \rho(A)$.

De fato, dados $\lambda \in \rho(A)$ e $t \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} A_\lambda e^{tA_\lambda} &= (\lambda AR(\lambda : A)) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\lambda AR(\lambda : A))^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n (\lambda AR(\lambda : A))^{n+1}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\lambda AR(\lambda : A))^n}{n!} (\lambda AR(\lambda : A)) = e^{tA_\lambda} A_\lambda. \end{aligned}$$

(4) Por último, os operadores A_λ e e^{tA_μ} comutam para todo $t \geq 0, \lambda, \mu \in \rho(A)$.

Neste caso, usando os itens anteriores, temos

$$\begin{aligned} A_\lambda e^{tA_\mu} &= \lambda AR(\lambda : A) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\mu AR(\mu : A))^n}{n!} \right) \\ &= \lambda AR(\lambda : A) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \mu^n A^n R(\mu : A)^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \mu^n R(\mu : A)^n}{n!} \lambda AR(\lambda : A) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\mu AR(\mu : A))^n}{n!} \right) (\lambda AR(\lambda : A)) \\ &= e^{tA_\mu} A_\lambda. \end{aligned}$$

Finalmente, usando a comutatividade dos operadores acima, podemos mostrar que

$$\|T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x\| = \|(e^{tA_\lambda})x - (e^{tA_\mu})x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|, \forall x \in X, \forall t \geq 0 \text{ e } \forall \lambda, \mu > 0.$$

Sejam, $\lambda, \mu > 0, t \geq 0$ e $x \in X$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x &= (e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x) \Big|_{s=1} - (e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x) \Big|_{s=0} \\ &= \int_0^1 \frac{d}{ds} (e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 t A_\lambda e^{st A_\lambda} e^{t(1-s) A_\mu} x + e^{ts A_\lambda} (-t A_\mu) e^{t(1-s) A_\mu} x ds \\
&= \int_0^1 e^{st A_\lambda} t A_\lambda e^{t(1-s) A_\mu} x + e^{ts A_\lambda} e^{t(1-s) A_\mu} (-t A_\mu) x ds \\
&= \int_0^1 e^{st A_\lambda} e^{t(1-s) A_\mu} (t A_\lambda x - t A_\mu x) ds.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|e^{t A_\lambda} x - e^{t A_\mu} x\| &\leq \int_0^1 \|e^{ts A_\lambda}\| \|e^{t(1-s) A_\mu}\| \|t(A_\lambda x - A_\mu x)\| ds \\
&\leq \int_0^1 t \|A_\lambda x - A_\mu x\| ds \\
&= t \|A_\lambda x - A_\mu x\|.
\end{aligned}$$

□

Vejamos a seguir o principal resultado desta seção.

Teorema 1.24 (Teorema de Hille-Yosida). *Um operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $(T(t))_{t \geq 0}$ se, e somente se,*

- (i) *A é fechado e $\overline{D(A)} = X$,*
- (ii) *$(0, +\infty) \subset \rho(A)$ e $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$, para todo $\lambda > 0$.*

Demonstração. Suponha, primeiramente, que o operador A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $(T(t))_{t \geq 0}$ e mostremos que as propriedades (i) e (ii) são satisfeitas.

Note que a propriedade (i) já foi demonstrada no Corolário 1.12. Falta, então, demonstrarmos a propriedade (ii).

Para isso, dado $\lambda \in (0, +\infty)$ e $x \in X$, defina

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-t\lambda} T(t)x dt.$$

Analisemos algumas propriedades de $R(\lambda)$:

- (1) A integral que define $R(\lambda)x$ existe.

De fato, como $(T(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo de contrações, temos $\|T(t)x\| \leq \|x\|$ para todo $t \geq 0$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \right\| &\leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|T(t)\| \|x\| dt \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|x\| dt \\
&= \|x\| \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s e^{-\lambda t} dt = \|x\| \lim_{s \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-\lambda s}}{(-\lambda)} - \frac{e^0}{(-\lambda)} \right] = \frac{\|x\|}{\lambda} < +\infty.
\end{aligned}$$

Portanto, $\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt$ existe e assim, $R(\lambda)x$ está bem definida.

(2) $R(\lambda) : X \rightarrow X$ é um operador linear.

Sejam $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, onde $\mathbb{K}$ é o corpo de X . Então,

$$R(\lambda)(\alpha x + y) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)(\alpha x + y) dt = \alpha \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt + \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)y dt = \alpha R(\lambda)x + R(\lambda)y,$$

pois $T(t) \in \mathcal{L}(X), \forall t \geq 0$.

(3) $R(\lambda)$ é limitado.

Isso ocorre pois, como já estimado no item (1),

$$\|R(\lambda)x\| = \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \right\| \leq \frac{1}{\lambda} \|x\|, \forall x \in X.$$

(4) $R(\lambda)x \in D(A)$, para todo $x \in X$.

Dado $x \in X$, temos

$$\begin{aligned} \left(\frac{T(h) - I}{h} \right) R(\lambda)x &= \frac{T(h)R(\lambda)x - R(\lambda)x}{h} \\ &= \frac{1}{h} \left(T(h) \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(h+t)x dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_h^\infty e^{-\lambda(s-h)} T(s)x ds - \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_h^0 e^{-\lambda s} e^{\lambda h} T(s)x ds + \int_0^\infty e^{-\lambda s} e^{\lambda h} T(s)x ds - \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x ds \right) \\ &= -\frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda s} e^{\lambda h} T(s)x ds + \left(\frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \right) \left(\int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x ds \right). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{T(h) - I}{h} \right) R(\lambda)x &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\left(\frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \right) \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \right) - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^{0+h} e^{-\lambda t} T(t)x dt \right] \\ &= \lambda R(\lambda)x - e^{-\lambda 0} T(0)x \\ &= \lambda R(\lambda)x - Ix. \end{aligned}$$

Logo, $R(\lambda)x \in D(A)$ e, além disso,

$$AR(\lambda)x = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{T(h) - I}{h} \right) R(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - Ix, \text{ para todo } x \in X.$$

Dessa forma, $AR(\lambda) = \lambda R(\lambda) - I$, isto é,

$$(\lambda I - A)R(\lambda) = I.$$

Portanto, $R(\lambda)$ é uma inversa à direita de $(\lambda I - A)$. Vamos mostrar que $R(\lambda)$ também é a inversa à esquerda de $(\lambda I - A)$. Neste caso, considere $x \in D(A)$. Assim,

$$\begin{aligned} R(\lambda)(\lambda I - A)x &= \lambda R(\lambda)x - R(\lambda)Ax = R(\lambda)\lambda x - \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)Axdx \\ &= R(\lambda)(\lambda x) - A \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdx = \lambda R(\lambda)x - AR(\lambda)x = (\lambda I - A)R(\lambda)x = x, \end{aligned}$$

ou seja, $R(\lambda)(\lambda I - A) = I$, onde $I : D(A) \rightarrow D(A)$.

Então, $R(\lambda) \in \mathcal{L}(X)$ é a inversa de $(\lambda I - A)$. Consequentemente, segue que, se $\lambda > 0$, $\lambda \in \rho(A)$ e $R(\lambda) = R(\lambda : A)$. Logo, $(0, +\infty) \subset \rho(A)$ e

$$\|R(\lambda : A)\| = \|R(\lambda)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|R(\lambda)x\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{\|x\|}{\lambda} \leq \frac{1}{\lambda}, \text{ para todo } \lambda > 0.$$

Agora, suponha que A é fechado, $\overline{D(A)} = X$, $(0, +\infty) \subset \rho(A)$ e $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$, para todo $\lambda > 0$. Mostremos que A gera um C_0 -semigrupo de contrações.

Seja A_λ a aproximação de Yosida de A e consideremos o semigrupo $(T_\lambda(t))_{t \geq 0}$, onde $T_\lambda(t) = e^{A_\lambda t}$, para todo $t \geq 0$. Como já vimos, no Lema 1.23, $(T_\lambda(t))_{t \geq 0}$ é uniformemente contínuo e $\|T_\lambda(t)\| \leq 1$, para todo $t \geq 0$ e $\lambda \in (0, +\infty)$. Além disso, A_λ é seu gerador infinitesimal e, se $x \in D(A)$ e $t \in [0, a]$, vale a estimativa

$$\begin{aligned} \|T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x\| &\leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\| \\ &\leq a\|A_\lambda x - Ax\| + a\|A_\mu x - Ax\|. \end{aligned}$$

Mais ainda, pelo Lema 1.22, temos $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = Ax$ e $\lim_{\mu \rightarrow \infty} A_\mu x = Ax$, para todo $x \in D(A)$, e assim, existe $k > 0$ tal que, se $\lambda, \mu > k$, então $\|A_\lambda x - Ax\| < \frac{\varepsilon}{2a}$ e $\|A_\mu x - Ax\| < \frac{\varepsilon}{2a}$, quando $t \neq 0$. Logo, para $\lambda, \mu > k$ e $t \neq 0$,

$$\|T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x\| < a\frac{\varepsilon}{2a} + a\frac{\varepsilon}{2a} = \varepsilon.$$

Em particular, se $t = 0$, note que $\|T_\lambda(0)x - T_\mu(0)x\| = \|x - x\| = 0 < \varepsilon$. Assim, podemos dizer que $(T_\lambda(t)x)_{\lambda \in (0, \infty)}$ é uma “sequência de Cauchy” em X e dessa forma, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(t)x$ existe para todo $t \geq 0$ e $x \in D(A)$.

Defina

$$T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(t)x, \text{ para todo } t \geq 0 \text{ e } x \in D(A).$$

Observe também que essa convergência é uniforme para t em intervalos limitados de $[0, +\infty)$. Esse fato nos permite estender a definição de $T(t)$ para todo $x \in X$.

De fato, como $\overline{D(A)} = X$, dado $x \in X$, existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $D(A)$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Logo, uma vez que $T_\lambda(t) \in \mathcal{L}(X)$, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} T_\lambda(t)x_n = T_\lambda(t)x$ e então, pelo fato da convergência acima ser uniforme, podemos tomar

$$T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(t)x = \lim_{\lambda, n \rightarrow \infty} T_\lambda(t)x_n.$$

Desse modo, obtemos a família $(T(t))_{t \geq 0}$ de operadores lineares. Vejamos, a seguir, algumas propriedades de $(T(t))_{t \geq 0}$.

(1) $T(t) \in \mathcal{L}(X)$, para todo $t \geq 0$.

De fato, dados $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, onde $\mathbb{K}$ é o corpo de X , temos

$$\begin{aligned} T(t)(\alpha x + y) &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(t)(\alpha x + y) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} [\alpha T_\lambda(t)x + T_\lambda(t)y] \\ &= \alpha T(t)x + T(t)y, \end{aligned}$$

pois $T_\lambda(t)$ é um operador linear para todo $\lambda > 0$ e todo $t \geq 0$.

Além disso,

$$\|T(t)x\| = \left\| \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(t)x \right\| = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|T_\lambda(t)x\| \leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|T_\lambda(t)\| \|x\| \leq \|x\|, \forall x \in X.$$

Portanto, $T(t) \in \mathcal{L}(X)$, para todo $t \geq 0$.

(2) $\|T(t)\| \leq 1$, para todo $t \geq 0$.

Isso ocorre pois, usando a desigualdade acima, temos

$$\|T(t)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \{\|T(t)x\|\} \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \{\|x\|\} = 1, \forall t \geq 0.$$

(3) $T(0) = I$.

De fato, como $(T_\lambda(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo,

$$T(0)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(0)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} x = x, \text{ para todo } x \in X.$$

(4) $T(t+s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \in [0, +\infty)$.

Para mostrarmos este fato, sejam $x \in X$ e $t, s \in [0, +\infty)$. Então, visto que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo, temos

$$T(t+s)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(t+s)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(t)T_\lambda(s)x = T(t)T(s)x, \forall x \in X.$$

Note que o último limite ocorre pois,

$$\begin{aligned} \|T_\lambda(t)T_\lambda(s)x - T(t)T(s)x\| &\leq \|T_\lambda(t)T_\lambda(s)x - T_\lambda(t)T(s)x\| + \|T_\lambda(t)T(s)x - T(t)T(s)x\| \\ &\leq \|T_\lambda(t)\| \|T_\lambda(s)x - T(s)x\| + \|T_\lambda(t)y - T(t)y\| \\ &\leq \|T_\lambda(s)x - T(s)x\| + \|T_\lambda(t)y - T(t)y\|, \end{aligned}$$

onde $y = T(s)x$. Assim, como os dois últimos termos da desigualdade acima tendem a zero quando $\lambda \rightarrow \infty$, concluímos que $T_\lambda(t)T_\lambda(s)x \rightarrow T(t)T(s)x$, quando $\lambda \rightarrow \infty$.

Portanto, $T(t+s) = T(t)T(s)$. Pelo que fizemos até agora, segue que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo de contrações.

(5) $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo.

De fato, como as funções $t \mapsto T_\lambda(t)x$, com $\lambda \in (0, +\infty)$ e $x \in X$, são contínuas e $T_\lambda(t)x \rightarrow T(t)x$, quando $\lambda \rightarrow \infty$, uniformemente em $[0, a]$, para algum $a \in (0, +\infty)$, segue que a função $t \mapsto T(t)x$ é contínua em $[0, a]$. Em particular, ela é contínua em zero e dessa forma, $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo.

(6) O operador A é o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t \geq 0}$.

Seja $B : D(B) \subset X \rightarrow X$ o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t \geq 0}$. Vamos mostrar que $D(A) = D(B)$ e $A = B$. Para isso, seja $x \in D(A)$. Assim,

$$\begin{aligned} T(t)x - x &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(t)x - \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(0)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (T_\lambda(t)x - T_\lambda(0)x) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(\int_0^t T_\lambda(s)A_\lambda x ds \right) = \int_0^t \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(s)A_\lambda x ds = \int_0^t T(s)Ax ds. \end{aligned}$$

Observe que a convergência acima ocorre pois $T_\lambda(s)A_\lambda x \rightarrow T(s)Ax$, quando $\lambda \rightarrow \infty$, uniformemente em intervalos limitados de $[0, +\infty)$.

Já que,

$$\begin{aligned} \|T_\lambda(s)A_\lambda x - T(s)Ax\| &\leq \|T_\lambda(s)A_\lambda x - T_\lambda(s)Ax\| + \|T_\lambda(s)Ax - T(s)Ax\| \\ &\leq \|T_\lambda(s)\| \|A_\lambda x - Ax\| + \|T_\lambda(s)z - T(s)z\|, \end{aligned}$$

onde $z = Ax$, e $T_\lambda(s)x \rightarrow T(s)x$, quando $\lambda \rightarrow \infty$, uniformemente em intervalos limitados de $[0, +\infty)$.

Dessa forma,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)Ax ds = T(0)Ax = Ax,$$

o que implica que $x \in D(B)$ e $Bx = Ax$.

Logo, $D(A) \subset D(B)$ e $A = B$ em $D(A)$.

Por outro lado, pela parte já demonstrada do Teorema de Hille-Yosida, sabemos que $(0, +\infty) \subset \rho(B)$. Em particular, $1 \in \rho(B)$ e, por hipótese, também temos $1 \in \rho(A)$. Assim, $(I - A)$ e $(I - B)$ são bijeções e suas inversas são limitadas. Então, $(I - A)D(A) = X$ e, como $D(A) \subset D(B)$ e $A = B$ em $D(A)$, segue que

$$(I - A)D(A) = (I - B)D(A) = X.$$

Consequentemente,

$$D(A) = (I - B)^{-1}(I - B)D(A) = (I - B)^{-1}X = D(B).$$

Portanto, $D(A) = D(B)$ e $A = B$, ou seja, A é o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t \geq 0}$. $\square$

Os próximos resultados são consequências diretas da demonstração do Teorema de Hille-Yosida.

Corolário 1.25. *Seja A o gerador de um C_0 -semigrupo de contrações $(T(t))_{t \geq 0}$. Se A_λ é a aproximação de Yosida de A , então*

$$T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x, \forall t \geq 0, x \in X.$$

Demonstração. Vimos na demonstração do Teorema de Hille-Yosida que a família $(S(t))_{t \geq 0}$, onde $S(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x$, para todo $t \geq 0$ e $x \in X$, é um C_0 -semigrupo de contrações com gerador A . Assim, $(T(t))_{t \geq 0}$ e $(S(t))_{t \geq 0}$ são C_0 -semigrupos de contrações com mesmo gerador A .

Portanto, segue do Teorema 1.13 que $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$. $\square$

Corolário 1.26. *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $(T(t))_{t \geq 0}$. O conjunto resolvente de A contém o semiplano direito aberto, isto é, $\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \lambda > 0\} \subseteq \rho(A)$ e, além*

disso,

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}, \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{C} \text{ com } \operatorname{Re}\lambda > 0.$$

Demonstração. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Considere o operador

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt, \quad x \in X.$$

Observe, primeiramente, que $R(\lambda)$ está bem definido pois,

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \right\| &\leq \int_0^\infty |e^{-\lambda t}| \|T(t)\| \|x\| dt \leq \int_0^\infty e^{-(\operatorname{Re}\lambda)t} \|x\| dt = \|x\| \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-(\operatorname{Re}\lambda)t} dt \\ &= \|x\| \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-(\operatorname{Re}\lambda)a}}{-\operatorname{Re}\lambda} + \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda} \right) = \frac{\|x\|}{\operatorname{Re}\lambda} < +\infty. \end{aligned}$$

Agora, prosseguindo de maneira análoga à demonstração do Teorema de Hille-Yosida, concluímos que,

$$R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda : A).$$

Então, $\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}\lambda > 0\} \subset \rho(A)$ e

$$\|R(\lambda : A)\| = \|R(\lambda)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|R(\lambda)x\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{\|x\|}{\operatorname{Re}\lambda} = \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda},$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re}\lambda > 0$. □

Faremos agora duas observações interessantes:

(1) Primeiramente, olhemos para o semigrupo de translações em $X = \{f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é uniformemente contínua e limitada}\}$ estudado no Exemplo 1.14. Então, $[T(t)f](s) = f(t+s)$, com $t, s \geq 0$, $D(A) = \{f; f' \in X\}$ e $Af = f'$.

Mostremos que $\rho(A)$ não precisa conter mais do que o semi-plano direito aberto.

Seja $\lambda \in \mathbb{C}$. A equação $(\lambda I - A)\varphi_\lambda = 0$ tem solução $\varphi_\lambda(t) = e^{\lambda t}$ pois,

$$(\lambda I - A)\varphi_\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda\varphi_\lambda - A\varphi_\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda\varphi_\lambda - \varphi'_\lambda = 0 \Leftrightarrow \varphi'_\lambda = \lambda\varphi_\lambda.$$

Pelo Corolário 1.26, sabemos que $\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}\lambda > 0\} \subset \rho(A)$. Por outro lado, se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$, então $\|e^{\lambda t}\| = e^{(\operatorname{Re}\lambda)t} \leq 1$, para todo $t \geq 0$, e, pelo Teorema do Valor Médio, temos

$$\|e^{\lambda t} - e^{\lambda s}\| \leq \|\lambda e^{\lambda\theta}(t-s)\| = |\lambda| \|e^{\lambda\theta}\| |t-s| \leq |\lambda| e^{(\operatorname{Re}\lambda)\theta} |t-s| \leq |\lambda| |t-s|,$$

para todo $t, s \geq 0$, e algum $\theta \in (s, t)$. Logo, $\varphi_\lambda(t) = e^{\lambda t}$ é limitada e uniformemente contínua, isto é, $\varphi_\lambda \in X$.

Porém, como $\varphi_\lambda \neq 0$, $(\lambda I - A)$ não é injetora. Portanto, $\lambda \notin \rho(A)$, ou seja, $\lambda \in \rho(A)^c = \sigma(A)$.

(2) Mostremos agora que, se $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo satisfazendo $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$, para todo $t \geq 0$ e algum $\omega > 0$, então a família $(S(t))_{t \geq 0}$, em que $S(t) = e^{-\omega t}T(t)$, $t \geq 0$, é um C_0 -semigrupo de contrações. Além disso, se A é o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t \geq 0}$, então $A - \omega I$ é o gerador infinitesimal de $(S(t))_{t \geq 0}$.

Observe que $S(t) = e^{-\omega t}T(t)$, $t \geq 0$, é um C_0 -semigrupo de contrações pois: $S(t) \in \mathcal{L}(X)$ uma vez que é formado por um escalar, $e^{-\omega t}$ e um operador linear limitado $T(t)$; $S(0) = e^{-\omega 0}T(0) = e^0 I = I$; e

$$S(t+s) = e^{-\omega(t+s)}T(t+s) = e^{-\omega t}e^{-\omega s}T(t)T(s) = e^{-\omega t}T(t)e^{-\omega s}T(s) = S(t)S(s).$$

Além disso, para $x \in X$, temos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t)x = \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-\omega t}T(t)x = e^{-\omega 0}T(0)x = x,$$

isto é, $(S(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo. Mais ainda,

$$\|S(t)\| = \|e^{-\omega t}T(t)\| = e^{-\omega t}\|T(t)\| \leq e^{-\omega t}e^{\omega t} = 1, \forall t \geq 0,$$

e então, $(S(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo de contrações.

Seja A o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t \geq 0}$. Observe que, se $t > 0$ e $x \in D(A)$, então

$$\begin{aligned} \frac{S(t)x - x}{t} &= \frac{e^{-\omega t}T(t)x - x}{t} \\ &= \frac{e^{-\omega t}(T(t)x - x)}{t} + \frac{(e^{-\omega t} - 1)x}{t} \end{aligned}$$

e assim, tomando o limite quando $t \rightarrow 0^+$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(e^{-\omega t} \frac{T(t)x - x}{t} + \frac{e^{-\omega t} - 1}{t} x \right) \\ &= Ax - \omega x = (A - \omega I)x, \end{aligned}$$

garantindo que $A - \omega I$ é o gerador infinitesimal de $(S(t))_{t \geq 0}$.

Analogamente, se A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $(T(t))_{t \geq 0}$, então $A + \omega I$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $(S(t))_{t \geq 0}$ satisfazendo $\|S(t)\| \leq e^{\omega t}$, para todo $t \geq 0$. De fato, considere $S(t) = e^{\omega t}T(t)$, para todo $t \geq 0$. Assim, como $e^{\omega t} \in \mathbb{R}$ e $(T(t))_{t \geq 0}$ é um

C_0 -semigrupo, segue que $(S(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo. Mais ainda, para $x \in D(A)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{S(t)x - x}{t} &= \frac{e^{-\omega t}S(t)x - x}{t} - \frac{(e^{-\omega t} - 1)S(t)x}{t} \\ &= \frac{T(t)x - x}{t} - \frac{(e^{\omega t} - 1)S(t)x}{t}. \end{aligned}$$

Logo, tomando o limite quando $t \rightarrow 0^+$, obtemos que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} - \frac{(e^{-\omega t} - 1)S(t)x}{t} \\ &= Ax - (-\omega x) = (A + \omega I)x, \end{aligned}$$

isto é, o gerador infinitesimal de $(S(t))_{t \geq 0}$ é dado por $A + \omega I$.

Além disso, visto que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo de contrações, temos

$$\|S(t)\| = \|e^{\omega t}T(t)\| \leq e^{\omega t}\|T(t)\| \leq e^{\omega t}, \forall t \geq 0.$$

Portanto, $A + \omega I$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $(S(t))_{t \geq 0}$ satisfazendo $\|S(t)\| \leq e^{\omega t}$, para todo $t \geq 0$.

O corolário a seguir é uma generalização do Teorema de Hille-Yosida e para sua demonstração, usaremos a observação que acabamos de fazer.

Corolário 1.27. *Um operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$, com $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$, para todo $t \geq 0$ e algum $\omega > 0$, se e somente se,*

(i) *A é fechado e $\overline{D(A)} = X$.*

(ii) *$(\omega, +\infty) \subset \rho(A)$ e $\|R(\lambda : A)\| < \frac{1}{\lambda - \omega}$, para todo $\lambda > \omega$.*

Demonstração. Suponha, primeiramente, que A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$, com $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$, para todo $t \geq 0$ e algum $\omega > 0$. Então, pelo Corolário 1.12 segue que a condição (i) é válida, assim basta mostrarmos (ii).

Seja $S(t) = e^{-\omega t}T(t)$, $t \geq 0$, como já vimos na observação anterior, $(S(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo de contrações com gerador infinitesimal $B = A - \omega I$. Logo, pelo Teorema de Hille Yosida, temos $(0, +\infty) \subset \rho(B)$ e $\|R(\lambda : B)\| \leq \frac{1}{\lambda}$, $\forall \lambda > 0$.

Seja $\mu \in (\omega, +\infty)$. Então, $\mu = \omega + \beta$, para algum $\beta > 0$, e

$$(\mu I - A) = (\omega I + \beta I - A) = (\beta I - (A - \omega I)) = (\beta I - B).$$

Dessa forma, visto que $\beta > 0, \beta \in \rho(B)$ e $(\beta I - B)^{-1}$ existe, o que implica que, $(\mu I - A)^{-1}$ existe, isto é, $\mu \in \rho(A)$. Além disso, se $\mu > \omega$,

$$\|R(\mu : A)\| = \|(\mu I - A)^{-1}\| = \|(\beta I - B)^{-1}\| = \|R(\beta : B)\| \leq \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\mu - \omega}.$$

Portanto, a condição (ii) também é válida.

Agora, suponha que as condições (i) e (ii) são satisfeitas. Mostraremos que A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ satisfazendo a condição $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$, para todo $t \geq 0$. Para isso, seja $B = A - \omega I$. Se $\lambda > 0$, então

$$(\lambda I - B) = (\lambda I - A + \omega I) = ((\lambda + \omega)I - A).$$

Desse modo, como $\lambda + \omega > \omega$, $((\lambda + \omega)I - A)^{-1}$ existe e assim, $(\lambda I - B)^{-1}$ existe.

Portanto, $(0, +\infty) \subset \rho(B)$ e, além disso,

$$\|R(\lambda : B)\| = \|(\lambda I - B)^{-1}\| = \|((\lambda + \omega)I - A)^{-1}\| = \|(R(\lambda + \omega) : A)\| \leq \frac{1}{(\lambda + \omega) - \omega} = \frac{1}{\lambda}, \forall \lambda > 0,$$

ou seja, vale a condição (ii) do Teorema de Hille-Yosida. Note ainda que $D(B) = D(A)$ e dessa forma, $\overline{D(B)} = X$. Também temos que B é fechado, visto que A é fechado. Logo, vale a condição (i) do Teorema de Hille Yosida. Então, pelo Teorema de Hille-Yosida, B é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $(S(t))_{t \geq 0}$.

Por fim, seja $T(t) = e^{\omega t} S(t), t \geq 0$. Assim, pela observação anterior, segue que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo com $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$, para todo $t \geq 0$, e com gerador infinitesimal igual a $B + \omega I = (A - \omega I) + \omega I = A$. $\square$

O próximo resultado é o caso mais geral do Teorema de Hille-Yosida e caracteriza o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo qualquer.

Teorema 1.28. *Um operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$, com $\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}$, para todo $t \geq 0$ e certas constantes $M \geq 1$ e $\omega > 0$, se e somente se,*

(i) *A é fechado e $\overline{D(A)} = X$.*

(ii) *$(\omega, +\infty) \subset \rho(A)$ e $\|R(\lambda : A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}$, para todo $\lambda > \omega$ e $n \in \mathbb{N}$.*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [19, Theorem 5.3, pág 8].

Problema de Cauchy abstrato

Neste capítulo, nosso interesse é estudar a existência de soluções para equações diferenciais em espaços de Banach. Para isso, vamos utilizar como ferramenta a teoria de semigrupos de operadores lineares limitados.

No que segue, X é um espaço de Banach e $C([0, a], X)$ e $L^1([0, a], X)$ são os espaços das funções contínuas e integráveis de $[0, a]$ em X , respectivamente.

2.1 Problema de valor inicial homogêneo

Seja $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ um operador linear apropriado. Dado $x_0 \in X$, o problema de Cauchy abstrato para A , com valor inicial x_0 , consiste em encontrar uma solução x para o problema de valor inicial

$$x'(t) = Ax(t), \quad t > 0, \quad (2.1)$$

$$x(0) = x_0. \quad (2.2)$$

A seguir definimos o conceito de solução para (2.1)-(2.2).

Definição 2.1. *Sejam $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ um operador linear e $x_0 \in X$. Uma função $x : [0, \infty) \rightarrow X$ é solução clássica de (2.1)-(2.2) se:*

- (i) x é contínua em $[0, \infty)$;
- (ii) x é continuamente diferenciável em $(0, +\infty)$;
- (iii) $x(t) \in D(A)$ para todo $t > 0$;
- (iv) as equações (2.1)-(2.2) são satisfeitas.

Teorema 2.2. *Sejam A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ de operadores lineares limitados e $x_0 \in D(A)$. Então, o problema de Cauchy (2.1)-(2.2) possui somente uma solução clássica dada por*

$$x(t) = T(t)x_0, t \geq 0,$$

com $x(t) = e^{tA}x_0$, $t \in [0, \infty)$, quando A é limitado.

Demonstração. Se $x(t) = T(t)x_0$, então, uma vez que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo, x é contínua e, como $x_0 \in D(A)$, pelas propriedades de semigrupo, concluímos que x é uma solução clássica de (2.1)-(2.2).

Agora, seja x uma solução clássica de (2.1)-(2.2). Para $0 < s < t$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(T(t-s)x(s)) &= T(t-s)\frac{dx}{ds}(s) - T(t-s)Ax(s) \\ &= T(t-s)[x'(s) - Ax(s)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dessa forma, integrando de 0 a t com relação a s , obtemos

$$T(t-t)x(t) - T(t-0)x(0) = 0,$$

e assim,

$$x(t) = T(t)x(0) = T(t)x_0.$$

□

Exemplo 2.3. *Seja X o espaço das funções uniformemente contínuas e limitadas de $[0, \infty)$ em $\mathbb{R}$ com a norma $\|\cdot\|_\infty$. Sejam também $D(A) = \{f \in X; f' \text{ existe e } f' \in X\}$ e, para $f \in D(A)$, $Af = f'$. Como já vimos no Exemplo 1.14, A é o gerador infinitesimal do C_0 -semigrupo de translações.*

Logo, pelo teorema anterior, se $x_0 \in D(A)$, segue que (2.1)-(2.2) possui uma única solução dada por $x(t) = T(t)x_0$. Assim, para $s > 0$ e $t \geq 0$,

$$x(t)(s) = (T(t)x_0)(s) = x_0(s+t).$$

Note que, se $x_0 \in X$ mas $x_0 \notin D(A)$, o resultado de existência do teorema anterior não é válido.

Teorema 2.4. *Seja $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $D(A)$ convergindo para zero (a função nula) com*

respeito à norma de X e seja x_n , com $n = 1, 2, \dots$, a única solução do problema de Cauchy abstrato

$$\begin{aligned} x'_n(t) &= Ax_n(t), \quad t > 0, \\ x_n(0) &= g_n. \end{aligned}$$

Então, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para zero em qualquer intervalo da forma $[0, t_0]$.

Demonstração. Note, inicialmente, que o Teorema 2.1 nos garante a existência e a unicidade das soluções x_n , com $x_n(t) = T(t)g_n$, para todo $t \geq 0$.

Sabemos também que existem constantes $M \geq 1$ e $\omega \geq 0$ tais que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ para todo $t \geq 0$. Em particular, para $0 \leq t \leq t_0$, temos

$$\|x_n(t)\| \leq \|T(t)\| \|g_n\| \leq Me^{\omega t} \|g_n\| \leq Me^{\omega t_0} \|g_n\|, \quad \text{para todo } n = 1, 2, \dots$$

Mais ainda, como $g_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, segue que para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$,

$$\|g_n - 0\| = \|g_n\| < \frac{\varepsilon}{Me^{\omega t_0}}.$$

Logo, para todo $n \geq n_0$ e $t \in [0, t_0]$, temos

$$\|x_n(t)\| < \varepsilon,$$

o que implica que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = 0$, uniformemente para $t \in [0, t_0]$. □

Corolário 2.5. *Sejam $g_n, g \in D(A)$, $n = 1, 2, \dots$, e x_n e x , $n = 1, 2, \dots$, soluções do problema de Cauchy abstrato (2.1) com condições iniciais g_n e g , respectivamente. Se $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para g quando $n \rightarrow \infty$, então $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para x , sendo essa convergência uniforme em intervalos da forma $[0, t_0]$.*

Demonstração. Sejam $G_n = g_n - g, X_n = x_n - x, n = 1, 2, \dots$. Uma vez que $D(A)$ é um subespaço vetorial, $G_n \in D(A)$ para todo n e, por linearidade, X_n é a única solução de (2.1) com condição inicial G_n , para todo $n \in \mathbb{N}$.

Logo, como G_n converge para zero, o teorema anterior garante que X_n converge uniformemente para zero em intervalos da forma $[0, t_0]$. Assim, segue o resultado. □

2.2 Problema de valor inicial não homogêneo

Nesta seção, estudaremos o problema de Cauchy dado por

$$x'(t) = Ax(t) + f(t), \quad 0 < t < a, \quad (2.3)$$

$$x(0) = x_0, \quad (2.4)$$

onde A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ em X , $x_0 \in X$ e $f : [0, a] \rightarrow X$ é uma função apropriada, para algum $a > 0$.

Começaremos definindo o conceito de solução clássica para este problema.

Definição 2.6. *Uma função $x : [0, a] \rightarrow X$ é uma solução clássica de (2.3)-(2.4) em $[0, a]$ se:*

- (i) x é contínua em $[0, a]$;
- (ii) x é continuamente diferenciável em $(0, a)$;
- (iii) $x(t) \in D(A)$ para todo $t \in [0, a]$;
- (iv) as equações (2.3)-(2.4) são satisfeitas.

Proposição 2.7. *Se $f \in L^1([0, a], X)$, então, para todo $x_0 \in X$, o sistema (2.3)-(2.4) tem no máximo uma solução clássica. Além disso, essa solução, quando existe, é dada por*

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t < a. \quad (2.5)$$

Demonstração. Seja x uma solução clássica do problema (2.3)-(2.4). Para $t \in [0, a]$ fixo, considere a função $g : [0, t] \rightarrow X$ dada por

$$g(s) = T(t-s)x(s).$$

Logo, g é diferenciável em $(0, a)$, com

$$\begin{aligned} g'(s) &= \frac{d}{ds}T(t-s)x(s) + T(t-s)x'(s) \\ &= -AT(t-s)x(s) + T(t-s)(Ax(s) + f(s)) \\ &= T(t-s)f(s). \end{aligned}$$

Além disso, como $f \in L^1([0, a], X)$, a função $s \mapsto T(t-s)f(s)$ é integrável e assim, temos

$$g(t) - g(0) = \int_0^t g'(s)ds = \int_0^t T(t-s)f(s)ds,$$

o que implica que

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \text{ para todo } t \in [0, a].$$

□

A expressão (2.5) da proposição anterior nos motiva a definição a seguir, que enfraquece o conceito de solução clássica para o problema (2.3)-(2.4) por não exigir a diferenciabilidade da função.

Definição 2.8. A função $x \in C([0, a), X)$ dada por (2.5) é chamada *solução fraca* de (2.3)-(2.4) em $[0, a)$.

Observe que, se $f \in L^1([0, a], X)$, o problema (2.3)-(2.4) sempre possui solução fraca, para qualquer que seja $x_0 \in X$. O próximo teorema determina sobre quais condições a solução fraca é também solução clássica. Porém, antes de enunciarmos e provarmos esse resultado, veremos o seguinte lema.

Lema 2.9. Nas condições do problema de Cauchy (2.3)-(2.4), com $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, para todo $t \geq 0$, sejam $f \in L^1([0, a], X)$ e

$$y(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t < a.$$

Então, y é contínua em $[0, a]$.

Demonstração. Mostraremos que y é contínua tanto à direita, quanto à esquerda de $t \in [0, a)$ (no caso em que $t = 0$, a continuidade segue apenas pela direita). Vejamos primeiramente a continuidade à direita de t . Para isso, tomando $h > 0$, note que

$$\begin{aligned} \|y(t+h) - y(t)\| &= \left\| \int_0^{t+h} T((t+h)-s)f(s)ds - \int_0^t T(t-s)f(s)ds \right\| \\ &= \left\| \int_0^t T((t+h)-s)f(s)ds + \int_t^{t+h} T((t+h)-s)f(s)ds - \int_0^t T(t-s)f(s)ds \right\| \\ &\leq \left\| \int_0^t [T(t+h-s) - T(t-s)]f(s)ds \right\| + \left\| \int_t^{t+h} T((t+h)-s)f(s)ds \right\| \\ &\leq \left\| \int_0^t [T(h) - I]T(t-s)f(s)ds \right\| + \int_t^{t+h} \|T(t+h-s)f(s)\|ds \\ &\leq \|(T(h) - I)y(t)\| + \int_t^{t+h} Me^{\omega(t+h-s)}\|f(s)\|ds \\ &\leq \underbrace{\|(T(h) - I)y(t)\|}_{I_1} + \underbrace{Me^{\omega h} \int_t^{t+h} \|f(s)\|ds}_{I_2}. \end{aligned}$$

Vamos estudar I_1 e I_2 separadamente. Como $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo e $y(t)$ independe de h , $I_1 \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$.

Além disso, como $s \mapsto e^{\omega s}$ é uma função contínua e f é integrável, $Me^{\omega h} \rightarrow M$ e $\int_t^{t+h} \|f(s)\| ds \rightarrow 0$, quando $h \rightarrow 0$. Dessa forma, $I_2 \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$.

Portanto, $\|y(t+h) - y(t)\| \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$, isto é, y é contínua à direita de t .

Provaremos agora a continuidade de y à esquerda de t . Tomando $h > 0$ tal que $t-h \in [0, \infty)$, segue que

$$\begin{aligned}
\|y(t-h) - y(t)\| &= \left\| \int_0^{t-h} T((t-h)-s)f(s)ds - \int_0^t T(t-s)f(s)ds \right\| \\
&= \left\| \int_0^{t-h} T((t-h)-s)f(s)ds - \int_0^{t-h} T(t-s)f(s)ds - \int_{t-h}^t T(t-s)f(s)ds \right\| \\
&\leq \left\| \int_0^{t-h} [T(t-h-s) - T(t-s)]f(s)ds - \int_{t-h}^t T(t-s)f(s)ds \right\| \\
&\leq \int_0^{t-h} \| [T(t-h-s) - T(t-s)]f(s) \| ds + \int_{t-h}^t \| T(t-s) \| \| f(s) \| ds \\
&\leq \int_0^{t-h} \| [T(t-h-s) - T(t-s)]f(s) \| ds + \int_{t-h}^t Me^{\omega(t-s)} \| f(s) \| ds \\
&\leq \underbrace{\int_0^{t-h} \| [T(t-h-s) - T(t-s)]f(s) \| ds}_{I_3} + \underbrace{Me^{\omega h} \left(\int_{t-h}^t \| f(s) \| ds \right)}_{I_4}.
\end{aligned}$$

Como no caso anterior, pelo fato de $s \mapsto e^{\omega s}$ ser contínua e f integrável, $I_4 \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$.

Para I_3 , note que

$$\| [T(t-h-s) - T(t-s)]f(s) \| \rightarrow 0,$$

quando $h \rightarrow 0$, pois $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo e t e s estão fixos. Além disso, para $0 \leq s \leq t-h$,

$$\| [T(t-h-s) - T(t-s)]f(s) \| \leq (Me^{\omega(t-h-s)} + Me^{\omega(t-s)}) \| f(s) \| \leq 2Me^{\omega(t-s)} \| f(s) \|,$$

com $g(s) = 2Me^{\omega(t-s)} \| f(s) \|$ uma função finita e integrável em $[0, t]$. Logo, do Teorema da convergência dominada de Lebesgue (Teorema A.4) e pela desigualdade $\int_0^{t-h} \| [T(t-h-s) - T(t-s)]f(s) \| ds \leq \int_0^t \| [T(t-h-s) - T(t-s)]f(s) \| ds$, concluímos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} I_3 = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^{t-h} \| [T(t-h-s) - T(t-s)]f(s) \| ds = 0,$$

o que implica que a função y também é contínua à esquerda de t .

Consequentemente, y é contínua para todo $t \in [0, a)$. □

Teorema 2.10. *Sejam $f \in L^1([0, a], X) \cap C((0, a], X)$ e*

$$y(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t < a. \quad (2.6)$$

Então, o problema de valor inicial (2.3)-(2.4) possui uma solução clássica x em $[0, a]$, para todo $x_0 \in D(A)$, se uma das seguintes condições são satisfeitas:

(i) y é continuamente diferenciável em $(0, a)$.

(ii) $y(t) \in D(A)$, para $0 \leq t < a$, e $t \mapsto Ay(t)$ é contínua em $(0, a)$.

Por outro lado, se (2.3)-(2.4) tem uma solução clássica em $[0, a]$ para algum $x_0 \in D(A)$, então a função y em (2.6) satisfaz as condições (i) e (ii).

Demonstração. Começaremos esta demonstração pela segunda parte, ou seja, suponhamos que (2.3)-(2.4) tenha uma solução clássica x para algum $x_0 \in D(A)$. Assim, da proposição anterior, sabemos que $y(t) = x(t) - T(t)x_0$ para todo $t \in [0, a]$. Além disso, y é diferenciável em $(0, a)$, pois é a diferença de duas funções diferenciáveis. Mais ainda,

$$y'(t) = x'(t) - T(t)Ax_0, \quad 0 < t < a,$$

que é a diferença de duas funções contínuas e, dessa forma, y é continuamente diferenciável em $(0, a)$, o que corresponde a condição (i).

Por outro lado, como $x_0 \in D(A)$, o item (iii) do Teorema 1.11 nos garante que $T(t)x_0 \in D(A)$ para todo $t \geq 0$. Assim, visto que $D(A)$ é um espaço vetorial, $y(t) = x(t) - T(t)x_0 \in D(A)$ para todo $0 \leq t < a$. Finalmente, note que

$$Ay(t) = Ax(t) - AT(t)x_0 = x'(t) - f(t) - T(t)Ax_0$$

e, desse modo, a função $t \mapsto Ay(t)$ é contínua em $(0, a)$. Portanto, (ii) também é satisfeita.

Agora, suponhamos que (i) seja satisfeita e mostremos que (2.3)-(2.4) possui uma solução clássica. Para isso, considere $t \in (0, a)$ e $h > 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} y(t) &= \frac{1}{h} \int_0^t T(t+h-s)f(s)ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(t-s)f(s)ds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(t-s)f(s)ds \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \int_0^t T(t-s)f(s)ds \right] - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds \end{aligned}$$

$$= \frac{y(t+h) - y(t)}{h} - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds.$$

ou seja,

$$\frac{T(h) - I}{h}y(t) = \frac{y(t+h) - y(t)}{h} - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds. \quad (2.7)$$

Desse modo, como y é continuamente diferenciável em $(0, a)$ e

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds = f(t),$$

temos

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I}{h}y(t) = y'(t) - f(t),$$

isto é, $y(t) \in D(A)$ para todo $t \in (0, a)$ e

$$Ay(t) = y'(t) - f(t), \text{ para todo } t \in (0, a).$$

Logo, tomando $x(t) = T(t)x_0 + y(t)$, segue, do Corolário 1.10 e do lema anterior, que x é contínua em $[0, a)$. Além disso, das propriedades de semigrupo, obtemos que x é continuamente diferenciável em $(0, a)$, $x(t) \in D(A)$ para todo $t \in [0, a)$, $x(0) = x_0 + y(0) = x_0$ e

$$\begin{aligned} x'(t) &= AT(t)x_0 + y'(t) \\ &= A(T(t)x_0 + y(t)) + f(t) \\ &= Ax(t) + f(t), \text{ para todo } t \in (0, a). \end{aligned}$$

Portanto, x é solução clássica de (2.3)-(2.4) em $[0, a)$.

Para concluirmos a demonstração do teorema, suponhamos que a condição (ii) vale e, novamente, mostremos que (2.3)-(2.4) possui uma solução clássica. Neste caso, considerando a expressão (2.7) e o fato de $y(t) \in D(A)$ para todo $t \in [0, a)$, fazendo $h \rightarrow 0^+$, obtemos que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} = Ay(t) + f(t),$$

ou seja, a derivada de y à direita, $y'_+(t) = Ay(t) + f(t)$, existe e é contínua em $(0, a)$. Assim, como y é contínua e admite derivada à direita contínua em $(0, a)$, o Lema de Dini (Lema A.3) garante que y é continuamente diferenciável em $(0, a)$.

Dessa forma, tomando $x(t) = T(t)x_0 + y(t)$ e usando o Corolário 1.10 e o lema anterior, concluimos que x é contínua em $[0, a)$. Mais ainda, das propriedades de semigrupo, obtemos que x é continuamente

diferenciável em $(0, a)$, $x(t) \in D(A)$ para todo $t \in [0, a)$, $x(0) = x_0 + y(0) = x_0$ e

$$\begin{aligned} x'(t) &= AT(t)x_0 + y'(t) \\ &= A(T(t)x_0 + y(t)) + f(t) \\ &= Ax(t) + f(t), \text{ para todo } t \in (0, a). \end{aligned}$$

Logo, x é solução clássica de (2.3)-(2.4) em $[0, a)$. $\square$

No que resta desta seção, assumiremos que o semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ é uniformemente limitado, isto é, $\|T(t)\| \leq M$ para todo $t \geq 0$ e para algum $M \geq 1$.

Corolário 2.11. *Se f é continuamente diferenciável em $[0, a]$, então (2.3)-(2.4) tem uma solução em $[0, a)$ para todo $x_0 \in D(A)$.*

Demonstração. Note que, se mostrarmos que a função y definida em (2.6) é continuamente diferenciável em $(0, a)$ então, este resultado será consequência do Teorema 2.10.

Dessa forma, vamos mostrar que y é continuamente diferenciável em $(0, a)$. Para isto, sejam $t \in (0, a)$ e $h > 0$ tais que $t + h \in (0, a)$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} &= \frac{1}{h} \int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(t-s)f(s)ds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h T(t+h-s)f(s)ds + \frac{1}{h} \int_h^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(t-s)f(s)ds. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos também $\int_h^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds = \int_0^t T(t-s)f(s+h)ds$ e assim,

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h T(t+h-s)f(s)ds + \int_0^t T(t-s) \left(\frac{f(s+h) - f(s)}{h} \right) ds.$$

Observe ainda que, pela desigualdade do valor médio para funções vetoriais, temos

$$\begin{aligned} \left\| T(t-s) \left(\frac{f(s+h) - f(s)}{h} \right) \right\| &\leq \frac{M}{h} \|f(s+h) - f(s)\| \\ &\leq \frac{M}{h} \|f'(k)\| |s+h-s| \\ &\leq M \sup_{s \in [0, a]} \|f'(s)\|, \end{aligned}$$

para algum $k \in (s, s+h)$, e com a última desigualdade válida pois f é continuamente diferenciável em $[0, a]$.

Agora, usando o Teorema da convergência dominada de Lebesgue (Teorema A.4), segue que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_0^t T(t-s) \left(\frac{f(s+h) - f(s)}{h} \right) ds = \int_0^t T(t-s) f'(s) ds.$$

Além disso,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h T(t+h-s) f(s) ds = T(t) f(0).$$

Assim,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} = T(t) f(0) + \int_0^t T(t-s) f'(s) ds,$$

ou seja, y possui derivada à direita contínua e, dessa forma, pelo Lema de Dini (Lema A.3), segue que y é continuamente diferenciável em $(0, a)$.

Então, do Teorema 2.10, obtemos que (2.3)-(2.4) possui uma solução clássica em $[0, a)$. $\square$

Exemplo 2.12. Considere a equação diferencial parcial dada por

$$\frac{\partial u(t, s)}{\partial t} = \frac{\partial u(t, s)}{\partial s} + F(t + s), \quad t > 0, s > 0,$$

onde $F \in X = \{g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}; g \text{ é limitada e uniformemente contínua}\}$.

Suponha que $F' \notin X$ e seja $(T(t))_{t \geq 0}$ o semigrupo de translações em X , estudado no Exemplo 1.14. Então, o operador $A : D(A) \subset X \rightarrow X$, com $D(A) = \{g \in X; g' \text{ existe e } g' \in X\}$, definido por $Ag = g'$, é o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t \geq 0}$.

Dessa forma, podemos reescrever a equação acima como o problema de Cauchy abstrato não homogêneo

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + T(t)F, \quad t > 0, \\ x(0) &= 0, \end{aligned}$$

onde $x(t) = u(t, s)$, para $s \geq 0$, é um elemento de X , $f(t) = T(t)F$ e $x_0 = 0$. Assim, pelo que fizemos anteriormente, uma solução deste problema deve ter a forma

$$x(t) = T(t)0 + \int_0^t T(t-s)T(s)F ds = \int_0^t T(t)F ds = tT(t)F.$$

Observe ainda que, como $F' \notin X$, $T(t)F \notin D(A)$, para algum $t_0 > 0$. De fato, suponha, por absurdo

que $T(t)F \in D(A)$ para todo $t > 0$. Então, o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)T(t)F - T(t)F}{h},$$

existe e, além disso, esse limite é $AT(t)f, \forall t > 0$, que é um elemento de X .

Por outro lado, usando que $(T(t))_{t \geq 0}$ é o semigrupo de translações, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)[T(t)F](s) - [T(t)F](s)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)F(t+s) - F(t+s)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(t+s+h) - F(t+s)}{h} = F'(t+s), \text{ para todo } s \geq 0. \end{aligned}$$

Logo, temos $AT(t)F = F'_t$, para todo $t > 0$, onde $F'_t(s) = F'(t+s)$ para todo $s \geq 0$. Assim, segue que $F'_t \in X$, para todo $t > 0$, o que é uma contradição pois, como $F' \notin X$, $F'_{t_0} \notin X$ para algum $t_0 \in (0, +\infty)$.

Portanto, como $T(t_0)F \notin D(A)$ para algum $t_0 > 0$ e a solução do problema de Cauchy acima deve satisfazer $x(t) = tT(t)F$ para todo $t > 0$, concluímos que $x(t) \notin D(A)$ para algum $t_0 > 0$. Consequentemente, x não pode ser solução clássica do problema. Porém, $x(t) = tT(t)F$ é solução fraca.

2.3 O Problema semi-linear

Estudaremos nesta seção o problema de existência e unicidade de soluções para equações diferenciais abstratas da seguinte forma

$$x'(t) = Ax(t) + f(t, x(t)), \quad t > 0, \quad (2.8)$$

$$x(0) = x_0, \quad (2.9)$$

onde $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$, $x_0 \in X$ e $f : [0, +\infty) \times X \rightarrow X$ é uma função contínua.

A próxima definição nos apresenta o conceito de solução clássica para o problema (2.8)-(2.9).

Definição 2.13. Uma função $x : [0, \infty) \rightarrow X$ é dita ser solução clássica de (2.8)-(2.9) em $[0, \infty)$ se:

- (i) x é contínua em $[0, \infty)$;
- (ii) x é continuamente diferenciável em $(0, \infty)$;
- (iii) $x(t) \in D(A)$ para todo $t \in [0, \infty)$;
- (iv) as equações em (2.8)-(2.9) são satisfeitas.

Se x é uma solução clássica de (2.8)-(2.9) em $[0, \infty)$ então, procedendo como na seção anterior, obtemos que x satisfaz a equação integral

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, x(s))ds, \quad t \in [0, \infty). \quad (2.10)$$

Observe que se x é uma função que satisfaz a equação (2.10) então, x é contínua. Porém, apenas com as condições acima, não podemos garantir que x seja continuamente diferenciável. Assim, é natural considerarmos este tipo de função como uma solução fraca.

Definição 2.14. *Uma função contínua $x : [0, \infty) \rightarrow X$ é chamada solução fraca de (2.8)-(2.9) se satisfaz a equação integral (2.10).*

O próximo teorema nos fornece condições para que o problema de valor inicial (2.8)-(2.9) possua uma solução fraca.

Teorema 2.15. *Suponha que A é o gerador de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ e $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ é uma função contínua em $[0, \infty) \times X$ e lipschitziana em x , uniformemente para $t \in [0, \infty)$, isto é, existe $L > 0$ tal que*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \text{para todo } t \in [0, \infty), \text{ e para todo } x, y \in X.$$

Então, o problema de valor inicial (2.8) – (2.9) possui uma única solução fraca em $[0, \infty)$.

Demonstração. Visto que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo, existem $M \geq 1$ e $\omega \geq 0$ tais que

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \in [0, \infty).$$

Vamos provar o resultado para o intervalo $[0, a]$, onde $a > 0$ é arbitrário. Assim, da unicidade de solução e do Teorema da escolha, obtemos uma solução única em $[0, \infty)$.

Dado $a > 0$, consideremos o espaço $C([0, a], X)$ das funções contínuas de $[0, a]$ em X , com a norma

$$\|x\|_{\tilde{L}} = \sup_{t \in [0, a]} e^{-(\tilde{L} + \omega)t} \|x(t)\|, \quad x \in C([0, a], X),$$

onde $\tilde{L} > ML > 0$.

Note que a norma $\|\cdot\|_{\tilde{L}}$ é equivalente a norma $\|\cdot\|_{\infty}$, onde $\|x\|_{\infty} = \sup_{t \in [0, a]} \|x(t)\|$, $x \in C([0, a], X)$.

De fato, como $t \mapsto e^{-(\tilde{L} + \omega)t}$ é decrescente,

$$e^{-(\tilde{L} + \omega)a} \|x(t)\| \leq e^{-(\tilde{L} + \omega)t} \|x(t)\| \leq \|x(t)\|, \quad \text{para todo } t \in [0, a],$$

e assim,

$$\sup_{t \in [0, a]} \{e^{-(\tilde{L}+\omega)a} \|x(t)\|\} \leq \sup_{t \in [0, a]} \{e^{-(\tilde{L}+\omega)t} \|x(t)\|\} \leq \sup_{t \in [0, a]} \|x(t)\|,$$

isto é,

$$e^{-(\tilde{L}+\omega)a} \|x\|_\infty \leq \|x\|_{\tilde{L}} \leq \|x\|_\infty.$$

Dessa forma, $C([0, a], X)$ é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_{\tilde{L}}$.

Agora, consideremos o operador $G : C([0, a], X) \rightarrow C([0, a], X)$ definido por

$$(Gx)(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s, x(s))ds, \quad 0 \leq t \leq a.$$

Primeiramente, mostraremos que G está bem definido, ou seja, G leva um elemento de $C([0, a], X)$ em um elemento $C([0, a], X)$. Para isso, dado $u \in C([0, a], X)$, a função $s \mapsto f(s, u(s))$ é contínua em $[0, a]$ e assim, integrável em $[0, t]$, para todo $t \in (0, a]$. Logo, de maneira análoga a feita no Lema 2.9, concluímos que $t \mapsto \int_0^t T(t-s)f(s, u(s))ds$ é contínua em $[0, a]$. Além disso, visto que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo, $t \mapsto T(t)x$ é contínua em $[0, a]$ e então, Gx é uma função contínua de $[0, a]$ em X .

Portanto, G está bem definido.

Nosso próximo passo é verificar que G é uma contração. Neste caso, dados, $x, y \in C([0, a], X)$ e $t \in [0, a]$, temos

$$\begin{aligned} \|(Gx)(t) - (Gy)(t)\| &= \left\| \int_0^t T(t-s)[f(s, x(s)) - f(s, y(s))]ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \|T(t-s)\| \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| ds \\ &\leq \int_0^t M e^{(t-s)\omega} L \|x(s) - y(s)\| ds \end{aligned}$$

e então,

$$\begin{aligned} e^{-(\tilde{L}+\omega)t} \|(Gx)(t) - (Gy)(t)\| &\leq e^{-(\tilde{L}+\omega)t} \int_0^t M e^{(t-s)\omega} L \|x(s) - y(s)\| ds \\ &= e^{-(\tilde{L}+\omega)t} M L e^{t\omega} \int_0^t e^{-s\omega} \|x(s) - y(s)\| ds \\ &= M L e^{-\tilde{L}t} \int_0^t e^{-s\omega} e^{(\tilde{L}+\omega)s} e^{-(\tilde{L}+\omega)s} \|x(s) - y(s)\| ds \\ &\leq M L e^{-\tilde{L}t} \|x - y\|_{\tilde{L}} \int_0^t e^{(-s\omega)} e^{(\tilde{L}+\omega)s} ds \\ &= M L e^{-\tilde{L}t} \|x - y\|_{\tilde{L}} \int_0^t e^{\tilde{L}s} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= MLe^{-\tilde{L}t}\|x-y\|_{\tilde{L}}\left(\frac{e^{\tilde{L}t}}{\tilde{L}}-\frac{1}{\tilde{L}}\right) \\
&= \frac{ML}{\tilde{L}}(1-e^{-\tilde{L}t})\|x-y\|_{\tilde{L}} \\
&\leq \frac{ML}{\tilde{L}}\|x-y\|_{\tilde{L}}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\max_{t \in [0, a]} \{e^{-(\tilde{L}+\omega)t} \|(Gx)(t) - (Gy)(t)\|\} \leq \frac{ML}{\tilde{L}}\|x-y\|_{\tilde{L}},$$

isto é,

$$\|(Gx) - (Gy)\|_{\tilde{L}} \leq \frac{ML}{\tilde{L}}\|x-y\|_{\tilde{L}},$$

com $\frac{ML}{\tilde{L}} < 1$, pois $\tilde{L}$ foi tomando de modo que $\tilde{L} > ML$.

Logo, G é uma contração e, pelo Teorema do ponto fixo de Banach (Teorema A.7), G tem um único ponto fixo $u \in C([0, a], X)$, ou seja, existe uma única função contínua $u : [0, a] \rightarrow X$ tal que

$$u(t) = Gu(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, u(s))ds, \text{ para todo } t \in [0, a].$$

Portanto, o problema de valor inicial possui uma única solução fraca. □

Existência e unicidade de soluções fracas quase automórficas para equações diferenciais abstratas semi-lineares

Neste capítulo, estudaremos a existência e a unicidade de soluções fracas quase automórficas para equações diferenciais abstratas semi-lineares em um espaço de Banach X e que são escritas na forma

$$x'(t) = Ax(t) + f(t, x(t)), t \in \mathbb{R},$$

onde A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo exponencialmente estável.

3.1 Funções quase automórficas

O propósito desta seção é apresentar o conceito e algumas propriedades das funções quase automórficas que serão essenciais no decorrer deste trabalho.

O conceito de função quase automórfica foi introduzido na literatura por S. Bochner no início da década de 1960. Estas funções receberam atenção especial por serem uma generalização das funções quase periódicas, definidas inicialmente por H. Bohr no início da década de 1920 para funções com valores numéricos e, mais tarde, por S. Bochner, para funções com valores em um espaço métrico. Na sequência, definiremos o conceito e enunciaremos algumas propriedades das funções quase periódicas com o objetivo de compreender melhor essa generalização.

Inicialmente, vamos considerar X como sendo um espaço normado apenas.

Definição 3.1. *Seja l um número real positivo e $P \subset \mathbb{R}$ um conjunto de números reais. Dizemos que P é l -denso em $\mathbb{R}$ se a intersecção $[a, a + l] \cap P$ é não vazia, para todo $a \in \mathbb{R}$.*

Definição 3.2. *O conjunto $P \subset \mathbb{R}$ é relativamente denso em $\mathbb{R}$ se é l -denso para algum $l > 0$.*

Definição 3.3. *Uma função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ é chamada quase periódica se, dado $\varepsilon > 0$, existe um número positivo $l = l(\varepsilon)$ tal que, em qualquer intervalo de comprimento l , existe ξ com a seguinte propriedade*

$$\|f(t + \xi) - f(t)\| \leq \varepsilon, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Denotaremos por $AP(X)$ o espaço das funções quase periódicas de $\mathbb{R}$ em X .

A seguir, enunciaremos algumas propriedades básicas referentes às funções quase periódicas. Para mais detalhes sobre essa classe de funções e a demonstração dos resultados abaixo, consulte [20].

Teorema 3.4. *Assuma que f, f_1 e f_2 são quase periódicas e λ é um escalar qualquer, então vale:*

- (i) $\lambda f, f_1 + f_2$ são quase periódicas,
- (ii) a translação f_a , $a \in \mathbb{R}$, dada por $f_a(t) = f(t + a)$, $t \in \mathbb{R}$, é quase periódica,
- (iii) a função $\tilde{f}$, definida por $\tilde{f}(t) = f(-t)$, $t \in \mathbb{R}$, é quase periódica.

Proposição 3.5. *Se $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ é quase periódica, a função $t \mapsto \|f(t)\|$ é também quase periódica.*

Proposição 3.6. *Se $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ é quase periódica, então f é limitada.*

Proposição 3.7. *Se $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ é quase periódica, então f é uniformemente contínua em toda reta real.*

O próximo teorema consiste em preservar a propriedade de ser quase periódica com relação a convergência uniforme na reta real.

Teorema 3.8. *Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções quase periódicas e $f_n \rightarrow f$ uniformemente em $\mathbb{R}$, quando $n \rightarrow \infty$, então f é quase periódica.*

O teorema a seguir nos diz que, se X é um espaço de Banach, então $AP(X)$ também é um espaço de Banach.

Teorema 3.9. *Se X é um espaço de Banach e $AP(X)$ é munido da norma do supremo*

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|,$$

então $(AP(X), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach.

Veremos agora uma classe de funções equivalente a classe de funções quase periódicas. Essas funções são chamadas de funções normais e também foram definidas por Bochner.

Definição 3.10. *Uma função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ é dita ser uma função normal se, para qualquer sequência de números reais $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, é possível extrair uma subsequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t + s_n)$ existe uniformemente para $t \in \mathbb{R}$.*

A equivalência estabelecida entre funções quase periódicas e normais pode ser usada para provar, de forma mais simples, algumas propriedades elementares das funções quase periódicas.

A seguir definiremos as funções quase automórficas.

Definição 3.11. *Uma função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ é chamada quase automórfica se, para qualquer sequência de números reais $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, podemos extrair uma subsequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t + s_n) = g(t) \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} g(t - s_n) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Representaremos o conjunto das funções quase automórficas de $\mathbb{R}$ em X por $AA(X)$.

Note que, se a convergência acima é uniforme em t , então a função f é quase periódica (para ver isso, basta usar a equivalência citada anteriormente entre funções quase periódicas e funções normais). O conceito da Definição 3.11 é então mais geral que o de funções quase periódicas.

Exemplo 3.12. *A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$f(t) = \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2 + \operatorname{sen}(t) + \operatorname{sen}(\sqrt{2}t)} \right)$$

é um exemplo clássico de função quase automórfica que não é quase periódica.

Seu gráfico pode ser visto a seguir.

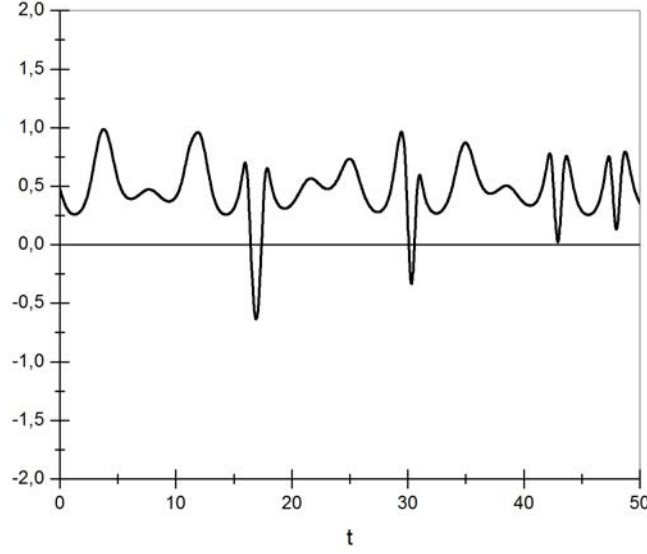


Figura 3.1: Gráfico da função $f(t) = \text{sen} \left(\frac{1}{2 + \text{sen}(t) + \text{sen}(\sqrt{2}t)} \right)$.

Agora, veremos algumas propriedades básicas das funções quase automórficas.

Teorema 3.13. *Assuma que f, f_1 e f_2 são quase automórficas e λ é um escalar qualquer, então vale:*

- (i) $\lambda f, f_1 + f_2$ é quase automórfica,
- (ii) a translação f_a , $a \in \mathbb{R}$, dada por $f_a(t) = f(t + a)$, $t \in \mathbb{R}$, é quase automórfica,
- (iii) a função $\tilde{f}$, definida por $\tilde{f}(t) = f(-t)$, $t \in \mathbb{R}$, é quase automórfica,
- (iv) A imagem Im_f de f é pré-compacta e então, f é limitada.

Demonstração. (i) Suponha que f é quase automórfica. Assim, dada uma sequência de números reais $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, existe uma subsequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t + s_n) = g(t) \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} g(t - s_n) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Logo, para um escalar λ , obtemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda f(t + s_n) = \lambda g(t) \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda g(t - s_n) = \lambda f(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, λf é quase automórfica.

Além disso, sejam f_1 e f_2 funções quase automórficas e $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. Como f_1 é quase automórfica, podemos extrair uma subsequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_1(t + s_n) = g_1(t) \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} g_1(t - s_n) = f_1(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Consideremos agora a sequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, como f_2 também é quase automórfica, existe uma subsequência $(s_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_2(t + s_{n_k}) = g_2(t) \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} g_2(t - s_{n_k}) = f_2(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_1 + f_2)(t + s_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_1(t + s_{n_k}) + \lim_{n \rightarrow \infty} f_2(t + s_{n_k}) = g_1(t) + g_2(t), \forall t \in \mathbb{R},$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (g_1 + g_2)(t - s_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_1(t - s_{n_k}) + \lim_{n \rightarrow \infty} g_2(t - s_{n_k}) = f_1(t) + f_2(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Assim, $f_1 + f_2$ é quase automórfica.

(ii) Dado $a \in \mathbb{R}$, considere a translação f_a dada por $f_a(t) = f(t + a)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Se $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de números reais então, como f é quase automórfica, existe uma subsequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t + s_n) = g(t) \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} g(t - s_n) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Em particular, tomando $t = s + a$, com $s \in \mathbb{R}$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_a(s + s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a + s + s_n) = g(a + s) = g_a(s)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_a(s - s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(s + a - s_n) = f(s + a) = f_a(s).$$

Portanto, f_a também é quase automórfica.

(iii) Seja $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência real qualquer e considere a sequência “oposta” $(-s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Como f é quase automórfica, extraia de $(-s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma subsequência $(-s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t - s_n) = g(t)$ e

$\lim_{n \rightarrow \infty} g(t + s_n) = f(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Dessa forma, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(t + s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(-t - s_n) = g(-t) = \tilde{g}(t), \forall t \in \mathbb{R},$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{g}(t - s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(-t + s_n) = f(-t) = \tilde{f}(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, $\tilde{f}$ é quase automórfica.

(iv) Considere uma sequência $(f(s'_n))_{n \in \mathbb{N}}$ em Im_f . Como f é quase automórfica, podemos extrair uma subsequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(s_n) = g(0),$$

o que nos mostra que a imagem de f é pré-compacta.

Consequentemente, f é limitada em $\mathbb{R}$, pois, caso contrário, existiria uma sequência $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\|f(s'_n)\| \geq n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Porém, como f é quase automórfica, poderíamos extrair uma subsequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(s_n) = g(0),$$

implicando na limitação da sequência $(f(s_n))_{n \in \mathbb{N}}$, o que é uma contradição.

Portanto, f é limitada. □

Note que a função g também é limitada em $\mathbb{R}$. De fato, temos $Im_g \subset \overline{Im_f}$, com $\overline{Im_f}$ compacto em X . Além disso,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|g(t)\| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|.$$

Nosso próximo resultado consiste em preservar a propriedade de ser quase automórfica com relação a convergência uniforme na reta real.

Teorema 3.14. *Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções quase automórficas e $f_n \rightarrow f$ uniformemente em $\mathbb{R}$, quando $n \rightarrow \infty$, então f é quase automórfica.*

Demonstração. Considere uma sequência real arbitrária $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$. A seguir, vamos extrair de $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, usando o método da diagonal de Cantor, uma subsequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_i(t + s_n) = g_i(t), \text{ para cada } i = 1, 2, \dots, \text{ e cada } t \in \mathbb{R}, \text{ e} \quad (3.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_i(t - s_n) = f_i(t), \text{ para cada } i = 1, 2, \dots, \text{ e cada } t \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

Para isso, seja $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência real arbitrária. Como f_1 é quase automórfica, existe uma subsequência $(s_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}} \subset (s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_1(t + s_n^{(1)}) = g_1(t) \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} g_1(t - s_n^{(1)}) = f_1(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Agora, considere a sequência $(s_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$. Como f_2 é quase automórfica, existe uma subsequência $(s_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}} \subset (s_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_2(t + s_n^{(2)}) = g_2(t) \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} g_2(t - s_n^{(2)}) = f_2(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Prosseguindo desta forma, dada a sequência $(s_n^{(i-1)})_{n \in \mathbb{N}}$, como f_i é quase automórfica, existe uma subsequência $(s_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}} \subset (s_n^{(i-1)})_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_i(t + s_n^{(i)}) = g_i(t) \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} g_i(t - s_n^{(i)}) = f_i(t), t \in \mathbb{R}.$$

Assim, considerando a sequência diagonal $(s_n^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, temos $(s_n^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset (s_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}} \subset (s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfazendo os limites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_i(t + s_n^{(n)}) = g_i(t), \forall t \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_i(t - s_n^{(n)}) = f_i(t), \forall t \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots$$

Denotemos a sequência $(s_n^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ por $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, e assim, vale (3.1) e (3.2).

Observemos também que a sequência de funções limitadas $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em relação a convergência uniforme na reta real. De fato, dado $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\|g_i(t) - g_j(t)\| \leq \|g_i(t) - f_i(t + s_n)\| + \|f_i(t + s_n) - f_j(t + s_n)\| + \|f_j(t + s_n) - g_j(t)\|, \forall i, j, n \in \mathbb{N}.$$

Além disso, dado $\varepsilon > 0$, pela convergência uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, podemos encontrar $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $i, j > N$,

$$\|f_i(t + s_n) - f_j(t + s_n)\| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall t \in \mathbb{R}, \forall n = 1, 2, \dots$$

Assim, segue que

$$\|g_i(t) - g_j(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \|g_i(t) - f_i(t + s_n)\| + \|f_j(t + s_n) - g_j(t)\|, \forall t \in \mathbb{R}, \forall n = 1, 2, \dots,$$

quando $i, j \geq N$.

Logo, tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$ em ambos os lados da desigualdade acima, obtemos

$$\|g_i(t) - g_j(t)\| \leq \varepsilon, \forall i, j \geq N,$$

onde t pode ser qualquer número real e N é independente de t . Dessa forma, temos a convergência uniforme da sequência $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ na reta real.

Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow X$ o limite uniforme da sequência $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Vamos provar agora que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t + s_n) = g(t) \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} g(t - s_n) = f(t), \forall t \in \mathbb{R},$$

o que garante que f é uma função quase automórfica.

Para isso, dados $t \in \mathbb{R}$ e s_n na sequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, temos

$$\|f(t + s_n) - g(t)\| \leq \|f(t + s_n) - f_i(t + s_n)\| + \|f_i(t + s_n) - g_i(t)\| + \|g_i(t) - g(t)\|, \forall i = 1, 2, \dots$$

Mais ainda, para $\varepsilon > 0$ arbitrário, podemos encontrar $M = M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f(t + s_n) - f_M(t + s_n)\| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ e } \|g_M(t) - g(t)\| < \frac{\varepsilon}{3},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e $n = 1, 2, \dots$. Desse modo, segue que

$$\|f(t + s_n) - g(t)\| < 2\frac{\varepsilon}{3} + \|f_M(t + s_n) - g_M(t)\|, \forall t \in \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots$$

Agora, para todo $t \in \mathbb{R}$, podemos encontrar algum natural $K = K(t, M)$ tal que

$$\|f_M(t + s_n) - g_M(t)\| < \frac{\varepsilon}{3},$$

para todo $n > K$.

Portanto, se $n > K$, obtemos que

$$\|f(t + s_n) - g(t)\| < \varepsilon,$$

ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t + s_n) = g(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Além disso, para cada $i = 1, 2, \dots$, temos

$$\|g(t - s_n) - f(t)\| \leq \|g(t - s_n) - g_i(t - s_n)\| + \|g_i(t - s_n) - f_i(t)\| + \|f_i(t) - f(t)\|$$

e, como visto anteriormente, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $M = M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|g(t - s_n) - g_M(t - s_n)\| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ e } \|f_M(t) - f(t)\| < \frac{\varepsilon}{3},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $n = 1, 2, \dots$. Assim,

$$\|g(t - s_n) - f(t)\| \leq 2\frac{\varepsilon}{3} + \|g_M(t - s_n) - f_M(t)\|, \forall t \in \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots$$

Em seguida, para todo $t \in \mathbb{R}$, podemos encontrar um número natural $\tilde{K} = \tilde{K}(t, M)$ tal que

$$\|g_M(t - s_n) - f_M(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

para todo $n > K$. Finalmente, concluimos que, se $n > K$, então

$$\|g(t - s_n) - f(t)\| < \varepsilon,$$

isto é, $\lim_{n \rightarrow \infty} g(t - s_n) = f(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Logo, f é quase automórfica. □

O próximo teorema mostra que, quando X é um espaço de Banach, $AA(X)$ também é um espaço de Banach.

Teorema 3.15. *Se X é um espaço de Banach e $AA(X)$ é munido da norma do supremo*

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|,$$

então $(AA(X), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $AA(X)$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n, m \geq n_0$, então

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Em particular, para $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\|f_n(t) - f_m(t)\| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f_n(t) - f_m(t)\| = \|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n, m \geq n_0,$$

isto é, $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em X para cada $t \in \mathbb{R}$. Como X é um espaço de Banach, para cada $t \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$ existe. Dessa forma, podemos definir a função $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ por $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$.

Mostraremos agora que $f_n \rightarrow f$, quando $n \rightarrow \infty$, na norma $\|\cdot\|_\infty$ e que $f \in AA(X)$.

Para isso, observando o que foi feito inicialmente, sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n, m \geq n_0$, então

$$\|f_n(t) - f_m(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Mantendo n fixo, $n \geq n_0$, e fazendo $m \rightarrow +\infty$ na desigualdade acima, obtemos

$$\|f_n(t) - f(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Logo, para $n \geq n_0$,

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f_n(t) - f(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

ou seja, $f_n \rightarrow f$ na norma $\|\cdot\|_\infty$.

Além disso, da definição de $\|\cdot\|_\infty$, segue que $f_n \rightarrow f$ uniformemente em $\mathbb{R}$ e então, como f_n é quase automórfica para todo $n \in \mathbb{N}$, segue do Teorema 3.14 que f é quase automórfica.

Portanto, $(AA(X), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach.

□

A seguir, trataremos de funções de duas variáveis. Mais especificamente, definiremos quando uma função desse tipo é quase automórfica.

Definição 3.16. *Uma função contínua $f : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ é dita ser quase automórfica em $t \in \mathbb{R}$ para cada $x \in X$ se, para cada sequência de números reais $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, existe uma subsequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t + s_n, x) = g(t, x) \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} g(t - s_n, x) = f(t, x), \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \text{ e cada } x \in X.$$

Os resultados seguintes são propriedades de funções de duas variáveis quase automórficas e serão utilizados na próxima seção.

Teorema 3.17. *Se $f : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ é quase automórfica em t para cada $x \in X$ e se f é lipshitziana em x , uniformemente em t , então a função g , limite de f , satisfaz a mesma condição de Lipschitz que a função f .*

Demonstração. Seja $L > 0$ a constante de Lipschitz para a função f , isto é, para cada par $x, y \in X$,

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| < L\|x - y\|,$$

uniformemente para $t \in \mathbb{R}$.

Dados $t \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, de qualquer sequência de números reais $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ podemos extrair uma subsequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\|g(t, x) - f(t + s_n, x)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$\|g(t, y) - f(t + s_n, y)\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para n suficientemente grande. Assim, podemos escrever

$$g(t, x) - g(t, y) = g(t, x) - f(t + s_n, x) + f(t + s_n, x) - f(t + s_n, y) + f(t + s_n, y) - g(t, y).$$

Então, para n suficientemente grande, obtemos

$$\begin{aligned} \|g(t, x) - g(t, y)\| &\leq \|g(t, x) - f(t + s_n, x)\| + \|f(t + s_n, x) - f(t + s_n, y)\| + \|f(t + s_n, y) - g(t, y)\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + L\|x - y\| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon + L\|x - y\|. \end{aligned}$$

Portanto, como ε é arbitrário, concluímos que

$$\|g(t, x) - g(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \forall x, y \in X,$$

isto é, g é lipshitziana em x , uniformemente em t . □

Teorema 3.18. *Seja $f : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ quase automórfica em t para cada $x \in X$ e assuma que f satisfaz uma condição de Lipschitz em x , uniformemente em $t \in \mathbb{R}$. Se $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow X$ é quase automórfica, então a função $F : \mathbb{R} \rightarrow X$, definida por $F(t) = f(t, \varphi(t))$, é quase automórfica.*

Demonstração. Seja $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. Então, podemos extrair uma subsequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t + s_n, x) = g(t, x)$, para cada $t \in \mathbb{R}$ e $x \in X$,
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t + s_n) = \phi(t)$, para cada $t \in \mathbb{R}$,
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} g(t - s_n, x) = f(t, x)$, para cada $t \in \mathbb{R}$ e $x \in X$,
- (iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t - s_n) = \varphi(t)$, para cada $t \in \mathbb{R}$.

Agora, vamos considerar a função $G : \mathbb{R} \rightarrow X$, definida por $G(t) = g(t, \phi(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Mostraremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} F(t + s_n) = G(t)$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} G(t - s_n) = F(t)$, para cada $t \in \mathbb{R}$.

Observe inicialmente que, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$F(t + s_n) - G(t) = f(t + s_n, \varphi(t + s_n)) - f(t + s_n, \phi(t)) + f(t + s_n, \phi(t)) - g(t, \phi(t)).$$

Dessa forma, como f é lipschitziana, com constante de Lipschitz $L > 0$, e valem os limites (i) e (ii), obtemos

$$\begin{aligned} \|F(t + s_n) - G(t)\| &\leq L\|\varphi(t + s_n) - \phi(t)\| + \|f(t + s_n, \phi(t)) - g(t, \phi(t))\| \\ &\leq L\frac{\varepsilon}{2L} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ fixo e $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

Logo, concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(t + s_n) = G(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Similarmente, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, temos

$$G(t - s_n) - F(t) = g(t - s_n, \phi(t - s_n)) - g(t - s_n, \varphi(t)) + g(t - s_n, \varphi(t)) - f(t, \varphi(t)).$$

Além disso, como g é limite de f e f é lipschitziana, o Teorema 3.17 nos garante que g é lipschitziana, digamos que com constante de Lipschitz $K > 0$. Assim, usando a igualdade anterior e os limites (iii) e (iv), obtemos

$$\begin{aligned} \|G(t - s_n) - F(t)\| &\leq \|g(t - s_n, \phi(t - s_n)) - g(t - s_n, \varphi(t))\| + \|g(t - s_n, \varphi(t)) - f(t, \varphi(t))\| \\ &\leq K\|\phi(t - s_n) - \varphi(t)\| + \|g(t - s_n, \varphi(t)) - f(t, \varphi(t))\| \\ &\leq K\frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ fixo e $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Desse modo, segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} G(t - s_n) = F(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Portanto, F é quase automórfica.

□

3.2 Soluções fracas quase automórficas para equações diferenciais abstratas semi-lineares

Nesta seção vamos considerar X um espaço de Banach e a seguinte equação diferencial, definida em X ,

$$x'(t) = Ax(t) + f(t, x(t)), t \in \mathbb{R}, \quad (3.3)$$

onde A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo exponencialmente estável $(T(t))_{t \geq 0}$, o que significa dizer que existem constantes $K > 0$ e $\omega < 0$ tais que

$$\|T(t)\| \leq Ke^{\omega t}, \forall t \geq 0.$$

Suponha que $f : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ satisfaz uma condição de Lipschitz em x , uniformemente em t , isto é, existe uma constante $L > 0$ tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $x, y \in X$.

Nosso objetivo é provar a existência e a unicidade de soluções fracas quase automórficas para a equação (3.3). Mas, primeiramente, provaremos a existência e unicidade de soluções fracas quase automórficas para a equação diferencial

$$x'(t) = Ax(t) + f(t), t \in \mathbb{R}, \quad (3.4)$$

onde f é quase automórfica.

Para isso, vejamos algumas definições e resultados preliminares.

Definição 3.19. *Uma função contínua $x : \mathbb{R} \rightarrow X$ é uma solução fraca sobre $\mathbb{R}$ da equação diferencial (3.4) se a equação integral*

$$x(t) = T(t-a)x(a) + \int_a^t T(t-s)f(s)ds$$

é satisfeita para todo $a \in \mathbb{R}$ e $t \geq a$.

Definição 3.20. Uma função contínua $x : \mathbb{R} \rightarrow X$ é uma solução fraca sobre $\mathbb{R}$ da equação diferencial (3.3) se a equação integral

$$x(t) = T(t-a)x(a) + \int_a^t T(t-s)f(s, x(s))ds$$

é satisfeita para todo $a \in \mathbb{R}$ e $t \geq a$.

Teorema 3.21. Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ o C_0 -semigrupo gerado por A . Assuma que $(T(t))_{t \geq 0}$ é assintoticamente estável, isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(t)x = 0, \text{ para cada } x \in X.$$

Então, se $f \in AA(X)$, cada solução fraca de (3.4), com imagem relativamente compacta em X , está em $AA(X)$.

Demonstração. Seja $x : \mathbb{R} \rightarrow X$ uma solução fraca de (3.4) com imagem relativamente compacta em X . Então, x admitirá a representação

$$x(t) = T(t-a)x(a) + \int_a^t T(t-s)f(s)ds,$$

para cada $a \in \mathbb{R}$ e $t \geq a$, e $\overline{Im\ x}$ é um conjunto compacto. Mostraremos a seguir que x é uma função quase automórfica.

Dada uma sequência de números reais $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, como f é quase automórfica, podemos encontrar uma subsequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t + s_n) = g(t) \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} g(t - s_n) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Suponhamos, agora, que a sequência $(x(t_0 + s_n))_{n \in \mathbb{N}}$ não é convergente para algum $t_0 \in \mathbb{R}$. Então, existe algum $\alpha > 0$ e duas subsequências $(\sigma'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\sigma''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tais que

$$\|x(t_0 + \sigma'_n) - x(t_0 + \sigma''_n)\| > \alpha, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.5)$$

Além disso, como x é solução fraca, para $a \leq t_0$ e $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} x(t_0 + \sigma'_n) - x(t_0 + \sigma''_n) &= T(t_0 + \sigma'_n - a)x(a) + \int_a^{t_0 + \sigma'_n} T(t_0 + \sigma'_n - s)f(s)ds \\ &\quad - T(t_0 + \sigma''_n - a)x(a) - \int_a^{t_0 + \sigma''_n} T(t_0 + \sigma''_n - s)f(s)ds \\ &= T(t_0 - a)T(\sigma'_n)x(a) + \int_a^{a + \sigma'_n} T(t_0 - a + a + \sigma'_n - s)f(s)ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{a+\sigma'_n}^{t_0+\sigma'_n} T(t_0 + \sigma'_n - s)f(s)ds - T(t_0 - a)T(\sigma'_n)x(a) \\
& - \int_a^{a+\sigma''_n} T(t_0 - a + a + \sigma''_n - s)f(s)ds - \int_{a+\sigma''_n}^{t_0+\sigma''_n} T(t_0 + \sigma''_n - s)f(s)ds \\
& = T(t_0 - a) \left[T(a + \sigma'_n - a)x(a) + \int_a^{a+\sigma'_n} T(a + \sigma'_n - s)f(s)ds \right. \\
& \quad \left. - T(a + \sigma''_n - a)x(a) - \int_a^{a+\sigma''_n} T(a + \sigma''_n - s)f(s)ds \right] \\
& + \int_{a+\sigma'_n}^{t_0+\sigma'_n} T(t_0 + \sigma'_n - s)f(s)ds - \int_{a+\sigma''_n}^{t_0+\sigma''_n} T(t_0 + \sigma''_n - s)f(s)ds \\
& = T(t_0 - a)[x(a + \sigma'_n) - x(a + \sigma''_n)] + \int_a^{t_0} T(t_0 - s)f(s + \sigma'_n)ds \\
& - \int_a^{t_0} T(t_0 - s)f(s + \sigma''_n)ds.
\end{aligned}$$

Logo,

$$x(t_0 + \sigma'_n) - x(t_0 + \sigma''_n) = T(t_0 - a)[x(a + \sigma'_n) - x(a + \sigma''_n)] + \int_a^{t_0} T(t_0 - s)[f(s + \sigma'_n) - f(s + \sigma''_n)]ds,$$

para todo $a \leq t_0$ e $n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, uma vez que o semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ é assintoticamente estável, segue que, dado $x \in X$, existe $M_x > 0$ tal que $\|T(t)x\| \leq 1$, para todo $t \geq M_x$, e, pelo fato do semigrupo ser fortemente contínuo, a aplicação $t \mapsto T(t)x$ é contínua em $[0, M_x]$, para cada x , e então, $t \mapsto T(t)x$ é limitada em $[0, M_x]$.

Logo,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|T(t)x\| = A_x < +\infty,$$

para todo $x \in X$.

Assim, pelo Princípio da limitação uniforme (Teorema A.5), concluímos que

$$C = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|T(t)\| < +\infty.$$

Mais ainda, como $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t)x = 0$ para cada $x \in X$, podemos mostrar que $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t)x = 0$ uniformemente para x em um subconjunto compacto de X . De fato, seja Y um subconjunto compacto de X . Logo, Y é totalmente limitado e assim, dado $\frac{\varepsilon}{2C} > 0$, existem $x_1, x_2, \dots, x_n(\frac{\varepsilon}{2C}) \in Y$ tais que $Y \subset \bigcup_{i=1}^n B\left(\frac{\varepsilon}{2C}, x_i\right)$, onde $B\left(\frac{\varepsilon}{2C}, x_i\right)$ denota a bola aberta de centro em x_i e raio $\left(\frac{\varepsilon}{2C}\right)$ em Y .

Note que, para cada $x_i \in Y$, $i = 1, 2, \dots, n$, existe $M_i > 0$ tal que

$$\|T(t)x_i\| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall t \geq M_i,$$

e ainda, para cada $x \in Y$, existe $x_j \in \{x_1, x_2, \dots, x_{n(\frac{\varepsilon}{2C})}\}$ tal que

$$\|x - x_j\| < \frac{\varepsilon}{2C}.$$

Dessa forma, tomando $M = \max\{M_i, i = 1, 2, \dots, n(\frac{\varepsilon}{2C})\}$, para $t \geq M$, temos

$$\begin{aligned} \|T(t)x\| &\leq \|T(t)x + T(t)x_j - T(t)x_j\| \\ &\leq \|T(t)(x - x_j)\| + \|T(t)x_j\| \\ &\leq \|T(t)\|\|x - x_j\| + \|T(t)x_j\| \\ &\leq C\frac{\varepsilon}{2C} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

ou seja, $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t)x = 0$ uniformemente para x no compacto Y .

Agora, denotando por K o fecho da imagem de x , isto é, $K = \overline{\{x(t); t \in \mathbb{R}\}}$. Temos, por hipótese, que K é compacto em X . Desse modo, podemos escolher $a < 0$ tal que

$$\|T(t_0 - a)x(a + \sigma'_n)\| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ e } \|T(t_0 - a)x(a + \sigma''_n)\| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall n = 1, 2, \dots$$

Em seguida, fixe $a \in \mathbb{R}$, $a \leq t_0$, e defina

$$F_n(s) = T(t_0 - s)[f(s + \sigma'_n) - f(s + \sigma''_n)], \text{ com } a \leq s \leq t_0.$$

Como $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(s)\| < \infty$, pois f é quase automórfica, e $\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|T(t)\| < \infty$, já que $(T(t))_{t \geq 0}$ é exponencialmente estável, segue que

$$\|F_n(s)\| \leq \|T(t_0 - s)\|(\|f(s + \sigma'_n)\| + \|f(s + \sigma''_n)\|) \leq L,$$

para alguma constante $L > 0$ e para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $a \leq s \leq t_0$.

Observe também que $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(s) = 0$ para cada $s \in [a, t_0]$, pois, como $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t + s_n)$ existe para cada $t \in \mathbb{R}$ e $(\sigma'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\sigma''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são ambas subsequências de $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal

que, para $n > n_0$,

$$\begin{aligned}\|F_n(s)\| &= \|T(t_0 - s)f(s + \sigma'_n) - T(t_0 - s)f(s + \sigma''_n)\| \leq \|T(t - s)\| \|f(s + \sigma'_n) - f(s + \sigma''_n)\| \\ &\leq C \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Finalmente, note que F_n é mensurável para cada $n \in \mathbb{N}$. Logo, utilizando o Teorema da convergência dominada de Lebesgue (Teorema A.4), temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{t_0} T(t_0 - s)[f(s + \sigma'_n) - f(s + \sigma''_n)]ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{t_0} F_n(s)ds = 0.$$

Isso, juntamente com o que foi feito anteriormente, garante a existência de algum $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x(t_0 + \sigma'_n) - x(t_0 + \sigma''_n)\| < \varepsilon, \text{ se } n > N,$$

o que contradiz (3.5). Consequentemente, deduzimos que a sequência $(x(t + s_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente em X para cada $t \in \mathbb{R}$.

Seja $y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x(t + s_n)$, $t \in \mathbb{R}$. Novamente, usando que x é solução fraca, obtemos que

$$\begin{aligned}x(t + s_n) &= T(t + s_n - a)x(a) + \int_a^{t+s_n} T(t + s_n - s)f(s)ds \\ &= T(t - a)T(s_n)x(a) + \int_a^{a+s_n} T(t - a + a + s_n - s)f(s)ds + \int_{a+s_n}^{t+s_n} T(t + s_n - s)f(s)ds \\ &= T(t - a)T(s_n)x(a) + T(t - a) \int_a^{a+s_n} T(a + s_n - s)f(s)ds + \int_a^t T(t - s)f(s + s_n)ds \\ &= T(t - a) \left[T(a + s_n - a)x(a) + \int_a^{a+s_n} T(a + s_n - s)f(s)ds \right] + \int_a^t T(t - s)f(s + s_n)ds \\ &= T(t - a)x(a + s_n) + \int_a^t T(t - s)f(s + s_n)ds,\end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Logo,

$$x(t + s_n) = T(t - a)x(a + s_n) + \int_a^t T(t - s)f(s + s_n)ds, \forall t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}. \quad (3.6)$$

Dessa forma, tomando o limite em (3.6) e usando o Teorema da convergência dominada de Lebesgue (Teorema A.4), segue que

$$y(t) = T(t - a)y(a) + \int_a^t T(t - s)g(s)ds,$$

para cada $a \in \mathbb{R}$ e $t \geq a$.

Além disso, $Im y = \{y(t); t \in \mathbb{R}\} \subset K$ e, consequentemente, $Im y$ é também relativamente

compacto em X . Desse modo, podemos assumir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y(t - s_n) = u(t), \forall t \in \mathbb{R},$$

com $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sendo, na realidade, uma subsequência da sequência original (usaremos a mesma notação para não sobrecarregar a notação).

Por outro lado, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} y(t - s_n) &= T(t - s_n - a)y(a) + \int_a^{t-s_n} T(t - s_n - s)g(s)ds \\ &= T(t - s_n - a)y(a) + \int_a^{a-s_n} T(t - a + a - s_n - s)g(s)ds + \int_{a-s_n}^{t-s_n} T(t - s_n - s)g(s)ds \\ &= T(t - a + a - s_n - a)y(a) + T(t - a) \int_a^{a-s_n} T(a - s_n - s)f(s)ds \\ &\quad + \int_a^t T(t - s)g(s - s_n)ds \\ &= T(t - a) \left[T(a - s_n - a)y(a) + \int_a^{a-s_n} T(a - s_n - s)f(s)ds \right] + \int_a^t T(t - s)g(s - s_n)ds \\ &= T(t - a)y(a - s_n) + \int_a^t T(t - s)g(s - s_n)ds, \end{aligned}$$

ou seja,

$$y(t - s_n) = T(t - a)y(a - s_n) + \int_a^t T(t - s)g(s - s_n)ds, \forall t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}. \quad (3.7)$$

Assim, tomando o limite em (3.7) e usando o Teorema da convergência dominada de Lebesgue (Teorema A.4), segue que

$$u(t) = T(t - a)u(a) + \int_a^t T(t - s)f(s)ds,$$

para cada $a \in \mathbb{R}$ e $t \geq a$.

Para garantirmos que x é quase automórfica, resta provarmos, que $u(t) = x(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Para isso, note que

$$\begin{aligned} y(t - s_n) - x(t) &= T(t - a)y(a - s_n) + \int_a^t T(t - s)g(s - s_n)ds - T(t - a)x(a) - \int_a^t T(t - s)f(s)ds \\ &= T(t - a)y(a - s_n) - T(t - a)x(a) + \int_a^t T(t - s)[g(s - s_n) - f(s)]ds, \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Assim,

$$y(t - s_n) - x(t) = T(t - a)y(a - s_n) - T(t - a)x(a) + \int_a^t T(t - s)[g(s - s_n) - f(s)]ds, \quad (3.8)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Agora, fixe $t \in \mathbb{R}$ e seja $\varepsilon > 0$. Como K é compacto, $Im\ y \subset K$ e $(T(t))_{t \geq 0}$ é exponencialmente estável, podemos escolher $a < 0$ suficientemente grande tal que

$$\|T(t - a)y(a - s_n)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \in \mathbb{N},$$

e

$$\|T(t - a)x(a)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mais ainda, dado $t \in \mathbb{R}$, fixando $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$, com $a < t$, defina a função $H_n : [a, t] \rightarrow X$ por

$$H_n(s) = T(t - s)(g(s - s_n) - f(s)).$$

É claro que cada $H_n, n \in \mathbb{N}$, é limitada, pois $C = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|T(t)\| < \infty$ e $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|g(t)\| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\| < \infty$. Então, pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue (Teorema A.4), temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^t T(t - s)(g(s - s_n) - f(s))ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^t H_n(s)ds = 0. \quad (3.9)$$

Então, tomando o limite, quando $n \rightarrow \infty$, em (3.8), obtemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y(t - s_n) - x(t)\| = 0,$$

isto é, $\lim_{n \rightarrow \infty} y(t - s_n) = x(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, da unicidade do limite, concluímos que $x(t) = u(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, e então, x é quase automórfica. □

Teorema 3.22. *Seja $(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$ um C_0 -grupo de operadores lineares limitados em X . Assuma que a função $x : \mathbb{R} \rightarrow X$ dada por $x(t) = T(t)x_0, t \in \mathbb{R}$, é quase automórfica para algum $x_0 \in X$. Então,*

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\| > 0 \text{ ou } x(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Suponha que $\inf_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\| = 0$. Então, podemos encontrar uma sequência de números reais $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com a propriedade que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x(s'_n)\| = 0$.

Por outro lado, usando o fato de x ser quase automórfica, existe uma subsequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(t + s_n) = y(t) \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} y(t + s_n) = x(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Observe também que

$$x(t + s_n) = T(t + s_n)x_0 = T(t)T(s_n)x_0 = T(t)x(s_n), \forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto,

$$y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x(t + s_n) = T(t) \lim_{n \rightarrow \infty} x(s_n) = 0, \forall t \in \mathbb{R},$$

e, conseqüentemente, $x(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Assim, $\inf_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\| > 0$ ou, se $\inf_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\| = 0$, $x(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

□

O próximo resultado nos dá as condições necessárias para a existência e a unicidade de uma solução fraca quase automórfica para a equação (3.4).

Teorema 3.23. *Se $f \in AA(X)$, então a equação (3.4) tem uma única solução fraca quase automórfica.*

Demonstração. Primeiramente, provaremos a existência de uma solução quase automórfica. Para isso, considere $u(t) = \int_{-\infty}^t T(t-s)f(s)ds, t \in \mathbb{R}$. Note que

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &= \left\| \int_{-\infty}^t T(t-s)f(s)ds \right\| \\ &\leq \int_{-\infty}^t \|T(t-s)\| \|f(s)\| ds \\ &\leq \int_{-\infty}^t K e^{\omega(t-s)} \|f\|_{\infty} ds \\ &= K e^{\omega t} \|f\|_{\infty} \int_{-\infty}^t e^{-\omega s} ds \\ &= K e^{\omega t} \|f\|_{\infty} \lim_{r \rightarrow -\infty} \int_r^t e^{-\omega s} ds \\ &= K e^{\omega t} \|f\|_{\infty} \lim_{r \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{-\omega s}}{-\omega} \Big|_r^t \right) \\ &= \frac{K}{|\omega|} e^{\omega t} \|f\|_{\infty} \lim_{r \rightarrow -\infty} (e^{-\omega t} - e^{-\omega r}) \\ &= \frac{K}{|\omega|} \|f\|_{\infty}, \end{aligned}$$

ou seja, $u(t)$ é absolutamente convergente, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Agora, seja $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência arbitrária de números reais. Assim, como f é quase automórfica, existe uma subsequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t + s_n) = g(t) \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} g(t - s_n) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dessa forma, temos

$$u(t + s_n) = \int_{-\infty}^{t+s_n} T(t + s_n - s)f(s)ds = \int_{-\infty}^t T(t - \sigma)f(\sigma + s_n)d\sigma = \int_{-\infty}^t T(t - \sigma)f_n(\sigma)d\sigma,$$

onde $f_n(\sigma) = f(\sigma + s_n)$, $\sigma \in \mathbb{R}$ e $n = 1, 2, \dots$, e

$$\|T(t - \sigma)f_n(\sigma)\| \leq Ke^{\omega(t-\sigma)}\|f\|_\infty, \forall \sigma \leq t, n = 1, 2, \dots,$$

com a função $\sigma \mapsto Ke^{\omega(t-\sigma)}\|f\|_\infty$ sendo integrável em $(-\infty, t]$, visto que $\omega < 0$.

Mais ainda, pela continuidade do semigrupo, $T(t - \sigma)f_n(\sigma) \rightarrow T(t - \sigma)g(\sigma)$, quando $n \rightarrow \infty$, para cada $\sigma \in \mathbb{R}$ fixado e qualquer $t \geq \sigma$.

Seja, também

$$v(t) = \int_{-\infty}^t T(t - s)g(s)ds, t \in \mathbb{R}.$$

Note que, assim como no caso da função u , podemos mostrar que a integral acima é absolutamente convergente para cada t , com $\|v(t)\| \leq \frac{K}{|\omega|}\|g\|_\infty, \forall t \in \mathbb{R}$.

Logo, pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue (Teorema A.4), obtemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u(t + s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t T(t - \sigma)f_n(\sigma)d\sigma = \int_{-\infty}^t T(t - \sigma)g(\sigma)d\sigma = v(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

De forma similar, mostraremos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(t - s_n) = u(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

De fato, observe que

$$v(t - s_n) = \int_{-\infty}^{t-s_n} T(t - s_n - s)g(s)ds = \int_{-\infty}^t T(t - \sigma)g(\sigma - s_n)d\sigma = \int_{-\infty}^t T(t - \sigma)g_n(\sigma)d\sigma.$$

onde $g_n(\sigma) = g(\sigma - s_n)$, $\sigma \in \mathbb{R}$ e $n = 1, 2, \dots$, e

$$\|T(t - \sigma)g_n(\sigma)\| \leq Ke^{\omega(t-\sigma)}\|g\|_\infty, \forall \sigma \leq t, n = 1, 2, \dots,$$

com a função $\sigma \mapsto Ke^{\omega(t-\sigma)}\|g\|_\infty$ sendo integrável em $(-\infty, t]$, visto que $\omega < 0$.

Além disso, pela continuidade do semigrupo, temos $T(t-\sigma)g_n(\sigma) \rightarrow T(t-\sigma)f(\sigma)$, quando $n \rightarrow \infty$, para cada $\sigma \in \mathbb{R}$ fixado e qualquer $t \geq \sigma$. Assim, pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue (Teorema A.4), temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(t - s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t T(t - \sigma)g_n(\sigma)d\sigma = \int_{-\infty}^t T(t - \sigma)f(\sigma)d\sigma = u(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Isso nos mostra que $u \in AA(X)$.

Agora, lembrando que

$$u(a) = \int_{-\infty}^a T(a - s)f(s)ds,$$

obtemos que

$$T(t - a)u(a) = \int_{-\infty}^a T(t - a)T(a - s)f(s)ds = \int_{-\infty}^a T(t - s)f(s)ds.$$

Logo, se $t \geq a$, então

$$\begin{aligned} \int_a^t T(t - s)f(s)ds &= \int_{-\infty}^t T(t - s)f(s)ds - \int_{-\infty}^a T(t - s)f(s)ds \\ &= u(t) - T(t - a)u(a), \end{aligned}$$

ou seja, $u(t) = T(t - a)u(a) + \int_a^t T(t - s)f(s)ds$, para todo $t \geq a$.

Portanto, u é uma solução fraca quase automórfica de (3.4).

Finalmente, provaremos a unicidade da solução quase automórfica. Para isso, assuma que x e y são duas soluções quase automórficas de (3.4) e seja $z = x - y$.

Então z é limitada, visto que $z \in AA(X)$, e satisfaz a equação

$$z(t) = T(t - s)z(s), \text{ para todo } s \in \mathbb{R} \text{ e } t \geq s, \quad (3.10)$$

pois,

$$\begin{aligned} z(t) &= x(t) - y(t) \\ &= T(t - a)x(a) + \int_a^t T(t - s)f(s)ds - T(t - a)y(a) - \int_a^t T(t - s)f(s)ds \\ &= T(t - a)x(a) - T(t - a)y(a) \\ &= T(t - a)(x(a) - y(a)) \\ &= T(t - a)z(a), \end{aligned}$$

para todo $a \in \mathbb{R}$ e $t \geq a$.

Logo,

$$\|z(t)\| \leq Ke^{\omega(t-s)}\|z\|_\infty = \widehat{K}e^{\omega(t-s)}, \forall s \in \mathbb{R} \text{ e } t \geq s. \quad (3.11)$$

Agora, tome uma sequência de números reais $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $s'_n \rightarrow -\infty$, quando $n \rightarrow \infty$. Desse modo, para qualquer $t \in \mathbb{R}$ fixado, podemos encontrar uma subsequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $s_n < t$ para todo $n = 1, 2, \dots$, e assim, como $\omega < 0$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z(t)\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{K}e^{\omega(t-s_n)} = 0.$$

Portanto, $z(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, o que nos mostra a unicidade da solução e completa a prova do teorema. $\square$

Agora, provaremos a existência e unicidade de solução fraca quase automórfica para a equação (3.3), para isso precisamos do lema a seguir, onde $C(\mathbb{R}, X)$ representa o conjunto das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em X .

Lema 3.24. *Seja $f : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ uma função quase automórfica em t para cada $x \in X$ e assuma que f satisfaz uma condição de Lipschitz em x , uniformemente em $t \in \mathbb{R}$, isto é, existe $L > 0$ tal que*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \forall x, y \in X, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Sejam também $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$ quase automórfica e $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo exponencialmente estável, com $\|T(t)\| \leq Ke^{\omega t}$, para todo $t \geq 0$ e certas constantes $K \geq 1$ e $\omega < 0$. Se $U : AA(X) \rightarrow C(\mathbb{R}, X)$ é o operador não linear dado por

$$(U\phi)(t) = \int_{-\infty}^t T(t-s)f(s, \phi(s))ds, t \in \mathbb{R},$$

então $U\phi \in AA(X)$.

Demonstração. Inicialmente, note que a função $t \mapsto f(t, \phi(t))$ é quase automórfica, pois estamos na condição do Teorema 3.18. Logo, essa função é limitada e

$$\|(U\phi)(t)\| \leq \int_{-\infty}^t Ke^{\omega(t-s)}\|f(s, \phi(s))\|ds \leq \frac{K}{|\omega|}\|F\|_\infty, \forall t \in \mathbb{R},$$

onde $F : \mathbb{R} \rightarrow X$ é dada por $F(t) = f(t, \phi(t))$, ou seja, a integral que define $U\phi$ existe para todo $t \in \mathbb{R}$.

Além disso, para qualquer sequência $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reais, existe uma subsequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t + s_n, \phi(t + s_n)) = g(t, \varphi(t)), \forall t \in \mathbb{R},$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(t - s_n, \varphi(t - s_n)) = f(t, \phi(t)), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Note também que, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} (U\phi)(t + s_n) &= \int_{-\infty}^{t+s_n} T(t + s_n - s) f(s, \phi(s)) ds \\ &= \int_{-\infty}^t T(t - \sigma) f(\sigma + s_n, \phi(\sigma + s_n)) d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^t T(t - \sigma) f_n(\sigma, \phi(\sigma)) d\sigma, \end{aligned}$$

onde $f_n(\sigma, \phi(\sigma)) = f(\sigma + s_n, \phi(\sigma + s_n))$, $\sigma \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, e

$$\|T(t - \sigma) f_n(\sigma, \phi(\sigma))\| \leq K e^{\omega(t-\sigma)} \|F\|_{\infty}, \forall \sigma \leq t, n \in \mathbb{N},$$

com a função $\sigma \mapsto K e^{\omega(t-\sigma)} \|F\|_{\infty}$ sendo integrável em $(-\infty, t]$, visto que $\omega < 0$.

Mais ainda, pela continuidade do semigrupo, $T(t - \sigma) f_n(\sigma, \phi(\sigma)) \rightarrow T(t - \sigma) g(\sigma, \varphi(\sigma))$, quando $n \rightarrow \infty$, para cada $\sigma \in \mathbb{R}$ fixado e qualquer $t \geq \sigma$.

Agora, seja $V : AA(X) \rightarrow C(\mathbb{R}, X)$ o operador não linear dado por

$$(V\varphi)(t) = \int_{-\infty}^t T(t - s) g(s, \varphi(s)) ds, t \in \mathbb{R}.$$

Observe que a integral acima é absolutamente convergente para cada $t \in \mathbb{R}$, pois

$$\|(V\varphi)(t)\| \leq \frac{K}{|\omega|} \|G\|_{\infty} \leq \frac{K}{|\omega|} \|F\|_{\infty},$$

onde $G : \mathbb{R} \rightarrow X$ é dada por $G(t) = g(t, \varphi(t))$.

Assim, pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue (Teorema A.4), temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (U\phi)(t + s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t T(t - \sigma) f_n(\sigma, \phi(\sigma)) d\sigma = \int_{-\infty}^t T(t - \sigma) g(\sigma, \varphi(\sigma)) d\sigma = (V\varphi)(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

De forma similar, mostraremos a seguir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (V\varphi)(t - s_n) = (U\phi)(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Para isso, dado $t \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, note que

$$\begin{aligned} (V\varphi)(t - s_n) &= \int_{-\infty}^{t-s_n} T(t - s_n - s)g(s, \varphi(s))ds \\ &= \int_{-\infty}^t T(t - \sigma)g(\sigma - s_n, \varphi(\sigma - s_n))d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^t T(t - \sigma)g_n(\sigma, \varphi(\sigma))d\sigma, \end{aligned}$$

onde $g_n(\sigma, \varphi(\sigma)) = g(\sigma - s_n, \varphi(\sigma - s_n))$, $\sigma \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$\|T(t - \sigma)g_n(\sigma, \phi(\sigma))\| \leq Ke^{\omega(t-\sigma)}\|G\|_\infty, \forall \sigma \leq t, n \in \mathbb{N},$$

com a função $\sigma \mapsto Ke^{\omega(t-\sigma)}\|G\|_\infty$ sendo integrável em $(-\infty, t]$, e, pela continuidade do semigrupo, $T(t - \sigma)g_n(\sigma, \varphi(\sigma)) \rightarrow T(t - \sigma)f(\sigma, \phi(\sigma))$, quando $n \rightarrow \infty$, para cada $\sigma \in \mathbb{R}$ fixado e qualquer $t \geq \sigma$. Dessa forma, pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue (Teorema A.4), obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (V\varphi)(t - s_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t T(t - \sigma)g_n(\sigma, \varphi(\sigma))d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^t T(t - \sigma)f(\sigma, \phi(\sigma))d\sigma \\ &= (U\phi)(t), \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Isso nos mostra que $U\phi \in AA(X)$. □

Teorema 3.25. *Assuma que $f : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ satisfaz uma condição de Lipschitz em x , uniformemente em t , isto é, existe $L > 0$ tal que*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \forall x, y \in X, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Se $L < \frac{|\omega|}{K}$ e f é quase automórfica em t para cada $x \in X$, então a equação (3.3) tem uma única solução fraca quase automórfica.

Demonstração. Considere o operador não-linear $G : AA(X) \rightarrow AA(X)$ dado por

$$(G\phi)(t) = \int_{-\infty}^t T(t - s)f(s, \phi(s))ds, t \in \mathbb{R}.$$

Note que, pelo Teorema 3.18 e pelo Lema 3.24, se $\phi \in AA(X)$, então $G\phi \in AA(X)$, garantindo que G está bem definido.

Agora, para $\phi_1, \phi_2 \in AA(X)$, temos

$$\begin{aligned}
\|G\phi_1 - G\phi_2\|_\infty &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \int_{-\infty}^t T(t-s)[f(s, \phi_1(s)) - f(s, \phi_2(s))]ds \right\| \\
&\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^t \|T(t-s)\|L\|\phi_1(s) - \phi_2(s)\|ds \\
&\leq L\|\phi_1 - \phi_2\|_\infty \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^t K e^{\omega(t-s)} ds \\
&= \frac{LK}{|\omega|} \|\phi_1 - \phi_2\|_\infty.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\|G\phi_1 - G\phi_2\|_\infty \leq \frac{LK}{|\omega|} \|\phi_1 - \phi_2\|_\infty,$$

com $\frac{LK}{|\omega|} < 1$, o que implica que G é uma contração.

Logo, pelo Teorema do ponto fixo de Banach (Teorema A.7), existe um único $u \in AA(X)$ tal que $Gu = u$, isto é, $u(t) = \int_{-\infty}^t T(t-s)f(s, u(s))ds$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Dessa forma, visto que $u(a) = \int_{-\infty}^a T(a-s)f(s, u(s))ds$, obtemos que

$$T(t-a)u(a) = \int_{-\infty}^a T(t-a)T(a-s)f(s, u(s))ds,$$

ou ainda,

$$T(t-a)u(a) = \int_{-\infty}^a T(t-s)f(s, u(s))ds.$$

Consequentemente, para $t \geq a$,

$$\begin{aligned}
\int_a^t T(t-s)f(s, u(s))ds &= \int_{-\infty}^t T(t-s)f(s, u(s))ds - \int_{-\infty}^a T(t-s)f(s, u(s))ds \\
&= u(t) - T(t-a)u(a).
\end{aligned}$$

Portanto, $u(t) = T(t-a)u(a) + \int_a^t T(t-s)f(s, u(s))ds$, para todo $a \in \mathbb{R}$ e $t \geq a$, ou seja, u é uma solução fraca da equação (3.3). Além disso, como $u \in AA(X)$, u é uma solução fraca quase automórfica de (3.3).

A unicidade de solução é garantida pelo Teorema 2.15 e pelo fato de u ser solução fraca de (3.3). $\square$

Resultados Auxiliares

Lema A.1. Se $A \in \mathcal{L}(X)$ e $\|A\| < 1$ então $I - A$ é inversível.

Demonstração. O operador $f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$ é linear e limitado em X . Como A comuta com suas potências, então, pela série de potências, obtém-se

$$(I - A)f(A) = f(A)(I - A) = I.$$

Portanto, $I - A$ é inversível e $(I - A)^{-1} = f(A)$. □

Proposição A.2. Seja X um espaço de Banach e $G \in \mathcal{L}(X)$ com $\|G\| < 1$. Então, $I - G$ tem inversa limitada, isto é, $(I - G)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

Demonstração. Este resultado é um caso particular do Lema (A.1). □

Lema A.3. (Lema de Dini). Se $f : (a, b) \rightarrow X$ é contínua em (a, b) e admite derivada à direita, f'_+ , contínua em (a, b) , então f é continuamente diferenciável em (a, b) .

Demonstração. [9, Lema A.3.2, pág. 149] □

Teorema A.4. (Teorema da convergência dominada de Lebesgue). Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções integráveis convergindo, em quase todo ponto, para uma função real mensurável f . Se existir uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Demonstração. [3, Theorem 5.6, pág. 44] □

Teorema A.5. (Princípio da limitação uniforme). *Seja $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de operadores lineares limitados de um espaço de Banach X em um espaço normado Y tal que $(\|T_n x\|)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitado para todo $x \in X$, ou seja,*

$$\|T_n x\| \leq C_x, \quad n = 1, 2, \dots,$$

onde C_x é um número real. Então a sequência $(\|T_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, isto é, existe um C tal que

$$\|T_n\| \leq C, \quad n = 1, 2, \dots$$

Demonstração. [18, Theorem 4.7-3, pág. 249] □

Teorema A.6. *Se K é um subconjunto de um espaço métrico X , as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) K é sequencialmente compacto;*
- (ii) $\overline{K}$ é compacto;*
- (iii) K é totalmente limitado e $\overline{K}$ é completo.*

Demonstração. [7, Theorem 15, pág. 22] □

Teorema A.7. (Teorema do ponto fixo de Banach). *Sejam X um espaço métrico completo e $T : X \rightarrow X$ uma contração em X . Então T tem um único ponto fixo.*

Demonstração. [18, Theorem 5.1-2, pág. 300] □

Referências Bibliográficas

- [1] DE ANDRADE, B. *Uma teoria de periodicidade para certas equações de evolução*. Tese (Doutorado em Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Matemática - PPGM, UFPE, 2010.
- [2] BAHAJ, M., SIDKI, O. *Almost periodic solution of semilinear equations with analytic semigroups in Banach spaces*. Electron. Journal Differential Equations, vol. 2002, n° 98, 1-11, 2002.
- [3] BARTLE, G. *The elements of integration and Lebesgue measure*. John Wiley & Sons. Inc., 1995.
- [4] BREZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer, 2010.
- [5] DIAGANA, T., HENRÍQUEZ, H., HERNÁNDEZ, E. *Almost automorphic mild solutions to some partial neutral functional differential equations and applications*. Nonlinear Anal, 69, 1485-1493, 2008.
- [6] DIAGANA, T. *Almost automorphic type and almost periodic type functions in abstract spaces*. Springer, 2013.
- [7] DUNFORD, N., SCHWARTZ J. T. *Linear Opreators*. Interscience Publishers, INC., New York, 1958.
- [8] FURUMOCHI, T., NAITO, T., VAN MINH, N. *Boundedness and almost periodicity of solutions of partial functional differential equations*. Journal of Differential Equations, vol 2002, 180, 125-152, 2002.
- [9] GOMES, A. M. *Semigrupos de operadores lineares e aplicações às equações de evolução*. 2ª Ed., Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2012.
- [10] HENRÍQUEZ, H. R. *Periodic Solutions of quasi-linear partial functional differential equations with unbounded delay*. Funk. Ekvac, 37, 329-343, 1994.

-
- [11] HERNÁNDEZ, E., PELICER, M. L., SANTOS, J. P. C. *Asymtotically almost periodic and almost periodic solutions for a class of evolution equations*. Electron, Journal Differential Equations, 61, vol 2004, 1-15, 2004.
 - [12] HILLE, E., PHILIPS, R.S. *Functional analysis and semi-groups*. American Mathematical Society. Colloquium Publications, Vol. 31, 1957.
 - [13] MASSERA, J. L. *The existence of periodic solutions of systems of differential equations*. Duke Math. J., 17, 457-475, 1950.
 - [14] MUNKRES, J. R. *Topology*. Prentice Hall, 2000.
 - [15] N'GUÉRÉKATA, G. M. *Almost Automorphic and almost periodic functions in abstract Spaces* Kluwer Academic Plenum Publishers, New York - Boston - Dordrecht - London - Moscow, 2001.
 - [16] N'GUÉRÉKATA, G. M. *Existence and uniqueness of almost automorphic mild solutions to some semilinear abstract differential equations*. Semigroup Forum 69, 2004, 80-86.
 - [17] N'GUÉRÉKATA, G.M. *Topics in almost automorphy*. Springer, New York - Boston - Dordrecht - London - Moscow, 2005.
 - [18] KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley & Sons. Inc., 1989.
 - [19] PAZY, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Applied mathematical sciences; v. 44. Springer-Verlag, New York, Inc., 1983.
 - [20] ZAIDMAM, S. *Almost periodic functions in abstract spaces*. Pitman Advanced Publishing Program, Boston-London-Melbourne, 1985.