

UNESP
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá

Guaratinguetá
1992



1110000216



ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE UM MANIPULADOR FLEXÍVEL

OSVALDO PRADO DE REZENDE

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO
TÍTULO DE "MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA"

ESPECIALIDADE: ENGENHARIA MECÂNICA - ÁREA DE CONSTRUÇÃO DE MÁQUINAS E
PROJETOS E MATERIAIS - APROVADA EM 1984
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DINÂMICO
DE UM MANIPULADOR FLEXÍVEL

BANCA EXAMINADORA:

216

Osvaldo Prado de Rezende

22

T621.8(043)
R 467a

000216

FACULDADE DE ENGENHARIA
DE GUARATINGUETÁ
BIBLIOTECA

ANALISE DO COMPORTAMENTO DINAMICO DE UM MANIPULADOR FLEXIVEL

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

CAMPUS DE GUARATINGUETA - FACULDADE DE ENGENHARIA

Departamento de Mecânica

OSVALDO PRADO DE REZENDE

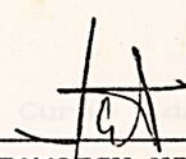
ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO
TITULO DE "MESTRE EM ENGENHARIA MECANICA"

ANALISE DO COMPORTAMENTO DINAMICO DE UM MANIPULADOR FLEXIVEL

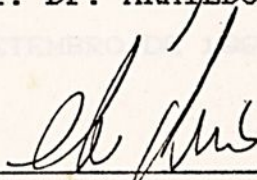
ESPECIALIDADE: ENGENHARIA MECANICA, AREA DE CONCENTRAÇÃO EM
PROJETOS E MATERIAIS - APROVADA EM SUA FORMA
FINAL PELO PROGRAMA DE POS-GRADUAÇÃO

Osvaldo Prado de Rezende

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. TAMOTSU HIRATA


Prof. Dr. ARAILDO LIMA DA SILVA


Prof. Dr. OTAVIO DOS SANTOS CUPERTINO DURA

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ - FACULDADE DE ENGENHARIA
Departamento de Mecânica

ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE UM MANIPULADOR FLEXÍVEL

Osvaldo Prado de Rezende

Trabalho apresentado ao Conselho de Curso da área de
concentração Projetos e Materiais do Curso de Pós-Graduação da
Faculdade de Engenharia, Campus de Guaratinguetá, para a
obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

GUARATINGUETÁ - SETEMBRO DE 1992



Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Tadamasa Hirata, pela orientação e incentivos recebidos.

Aos Professores Dr. Arnaldo Lima da Silva e João Alberto de Oliveira pela acolhida no Departamento, apoio e sugestões recebidos.

Aos Professores, Técnicos e Secretárias do Departamento de Mecânica pelo apoio e incentivos recebidos.

Dedico este trabalho à minha esposa Gorete
e aos meus filhos, Cibele, Renato e Cíntia.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Tamotsu Hirata, pela orientação e incentivos recebidos.

Aos Professores Dr. Araildo Lima da Silva e João Alberto de Oliveira pela acolhida no Departamento, apoio e sugestões recebidos.

Aos Professores, Técnicos e Secretárias do Departamento de Mecânica pelo apoio e incentivos recebidos.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma análise dinâmica , teórica e experimental de um manipulador flexível. No modelo teórico, o braço do manipulador foi substituído por uma viga (viga de Bernoulli-Euler) engastada em um cubo com movimento de rotação e uma massa concentrada na extremidade livre. As equações do movimento foram obtidas através do Princípio de Hamilton Extendido e o Critério de Galerkin foi aplicado para minimizar os erros decorrentes da solução assumida. Resultados numéricos obtidos através de análise paramétrica, mostraram a influência do movimento da parte rígida sobre o movimento da parte flexível do manipulador.

No modelo experimental, o braço foi substituído por um disco com movimento oscilatório onde são fixadas lâminas de aço com massas concentradas nas extremidades. O disco foi acionado por um mecanismo de quatro barras ligado a um motor de corrente contínua. Resultados dos testes realizados, mostraram a influência da variação, tanto da rotação do motor como também da massa concentrada, no comportamento dinâmico do manipulador.

ABSTRACT

This work shows a theoretical and experimental dynamics analysis of a flexible manipulator. In theoretical model, the manipulator arm was replaced by a Bernoulli- Euler cantilever beam, fixed in rotatory hub and a concentrated mass in free end. Extended Hamilton's Principle and Galerkin Criterion was applied to obtain, the equations of movement and to minimize the errors of assumed solution, respectively. Parametrical analysis was realized and results showed the influence of rigid body movement over flexible arm.

In the experimental model, the arm was replaced by a rotatory rigid disc, where flexibles steel beams with concentrated mass in free end, were fixed. The rigid disc was put in oscillatory movement by a four bars mechanism linked a DC motor. Experimental results showed the influence of motor rotation wheel as the concentrated mass, in dynamic behavior of the flexible manipulator.



ÍNDICE

CAPÍTULO I	INTRODUÇÃO.....	01
1.1	A Importância da Robótica.....	01
1.2	Objetivo do Presente Trabalho.....	02
1.3	Pesquisas Bibliográficas.....	02
1.4	Etapas do Presente Trabalho.....	06
CAPÍTULO II	EQUAÇÃO DO MOVIMENTO.....	07
2.1	Modelo do Manipulador.....	07
2.2	Aplicação do Princípio de Hamilton Extendido....	08
CAPÍTULO III	ANÁLISE QUALITATIVA PRELIMINAR.....	16
CAPÍTULO IV	SIMULAÇÃO.....	23
4.1	Objetivo da Simulação.....	23
4.2	Definição de Parâmetros Adimensionais.....	23
4.3	Dados de Simulação.....	25
4.4	Análise das Frequências Naturais.....	26
4.5	Análise dos deslocamentos e Acelerações.....	31
CAPÍTULO V	MODELO EXPERIMENTAL.....	36
5.1	Manipulador Flexível.....	36
5.2	Sistema de Medição.....	40
5.3	Sensores.....	41
5.4	Medidores de Vibração.....	43

5.5	Aquisição e Tratamento de Dados.....	43
5.6	Análise dos Resultados Experimentais.....	43
5.7	Comparação entre os Resultados Teórico e Experimental.....	52
CAPÍTULO VI CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....		57
6.1	Conclusões.....	57
6.2	Recomendações.....	59
REFERÊNCIAS.....		60
APÊNDICES.....		62
A	RESULTADOS INTERMEDIÁRIOS DO CAPÍTULO II.....	62
B	CÁLCULOS INTERMEDIÁRIOS DO CAPÍTULO III.....	66
C	INSTRUMENTAÇÃO.....	69
D	LÂMINAS.....	74

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1.1. A Importância da Robótica

A indústria contemporânea necessita cada vez mais de robôs para executarem as mais diversas tarefas. Robôs são empregados para desempenharem trabalhos perigosos com o mínimo de participação humana, trabalhos repetitivos e ainda em qualquer tipo de tarefa onde possa superar com perfeição os limites do ser humano.

A análise do comportamento dinâmico de manipuladores robóticos com elementos rígidos tem sido estudado nas últimas décadas por vários pesquisadores. Tais pesquisas são necessárias para o projeto de manipuladores robóticos (dimensionamento de juntas, elos e acionadores), geração e controle de trajetória e ainda controle de posicionamento.

Quando se necessita que um robô manipulador execute tarefas que exigem rapidez e precisão elevada, problemas com vibração residual aparecem no braço do manipulador. As amplitudes dessas vibrações são acentuadas com

as variações bruscas de velocidades tais como a inversão rápida do movimento ou uma parada repentina. As operações que requerem um posicionamento rápido e preciso, tais como microsoldas e encaixes com pequenas folgas, são as mais afetadas pelas vibrações residuais, principalmente quando o manipulador possui um longo braço e baixa rigidez.

A tendência atual na fabricação automatizada indica a necessidade de manipuladores robóticos de pequeno peso operando em alta velocidade e com alta precisão de posicionamento. Para estes manipuladores, os efeitos da flexibilidade devem ser considerados no projeto dos mesmos.

1.2. Objetivo do Presente Trabalho

Este trabalho de pesquisa visa estabelecer critérios de avaliação de projetos de manipuladores de alta velocidade e simples configuração, identificando e analisando os principais parâmetros que possam influenciar nas amplitudes das vibrações residuais e conseqüentemente, nas precisões de posicionamento.

1.3. Pesquisas Bibliográficas

Várias pesquisas na área de manipuladores flexíveis foram publicadas recentemente. YIGIT et al [11], analisaram o comportamento dinâmico de um manipulador flexível, consistindo de uma viga (Bernoulli-Euler) engastada em um eixo rígido com movimento de rotação, conforme a figura 1.1. Os autores visavam comparar os resultados da simulação do sistema dinâmico linearizado e não linearizado. As equações do movimento foram obtidas através do Princípio de Hamilton Extendido e o critério de Galerkin foi utilizado para suprimir a dependência espacial

da deflexão da viga. Os mesmos autores analisaram o efeito dos termos de acoplamento das equações sobre a vibração que resulta da aplicação de um determinado perfil de torque. Essa análise foi realizada através de uma linearização do sistema de equações do movimento e também por simulação numérica. Concluíram que, para pequenos valores da razão entre os momentos de inércia do eixo rígido e da parte flexível da viga, o desacoplamento das equações pode levar a resultados errôneos, principalmente quanto a determinação das frequências naturais.

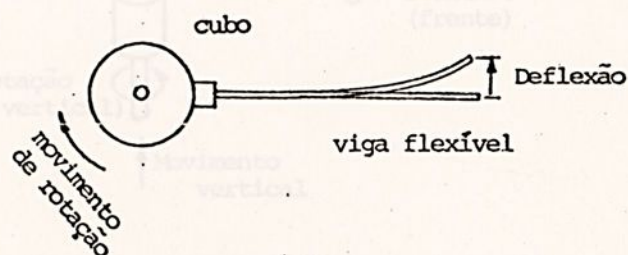


Figura 1.1. Esquema do manipulador flexível utilizado por YIGIT et al [11].

KRISHNAMURTHY [3], realizou o modelamento dinâmico de um manipulador flexível consistindo de uma viga cilíndrica (Bernoulli-Euler) com movimento de rotação e translação, conforme a figura 1.2. O objetivo da pesquisa era de projetar controladores de posicionamento através do modelo dinâmico do manipulador. As equações do movimento foram desenvolvidas utilizando o Princípio de Hamilton Extendido. O Critério de Galerkin foi aplicado, para se obter um conjunto de equações diferenciais ordinárias, que regem o comportamento da deflexão

de um ponto genérico da viga em relação ao tempo. Resultados de simulação demonstraram que a vibração do braço do manipulador, induzida pelo movimento deve ser considerada e que, a vibração da cauda pode causar apreciável erro de posição. Os resultados indicaram a necessidade de projetos de sofisticados controladores, para amortecer a vibração induzida pelo movimento, para que uma específica manobra, possa ser executada com eficiência.

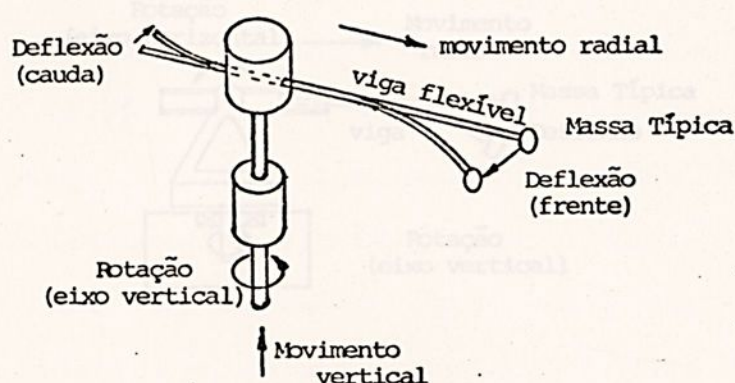


Figura 1.2. Esquema do modelo de manipulador flexível utilizado por KRISHNAMURTHY [3].

PAN et al [7] e [8], realizaram uma análise do comportamento dinâmico de um manipulador flexível com duas juntas de revolução e uma prismática, como mostra a figura 1.4. O modelo consiste de uma viga (Bernoulli-Euler) com movimento de translação e rotação em dois eixos. A pesquisa visava desenvolver uma abordagem geral para se obter o modelos dinâmicos de manipuladores flexíveis com juntas prismáticas e de revolução. As equações do movimento foram obtidas através do Formalismo de Lagrange e a discretização, para a obtenção da deformação elástica da viga, foi realizada baseado no Método

dos Elementos Finitos. Através de um modelo experimental, realizou-se a comparação entre os resultados experimentais e os obtidos por solução numérica. Para manobras bidimensionais, o modelo dinâmico foi validado e os resultados demonstraram a influência do movimento na vibração da parte flexível do manipulador.

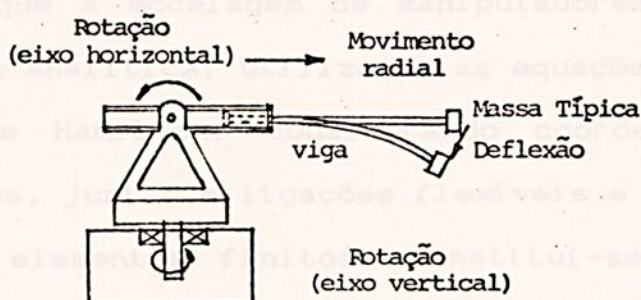


Figura 1.3. Esquema simplificado do modelo experimental utilizado por PAN et al [7] e [8].

FORCELLINE et al [2], realizaram um estudo sobre a modelagem dinâmica de manipuladores flexíveis, onde apresentam uma revisão das principais metodologias bem como a complexidade, eficiência e representatividade de cada uma delas na modelagem de robôs flexíveis. Os autores destacam as possíveis formas de modelagem de manipuladores flexíveis através de uma tabela reproduzida a seguir, onde aparece as várias formulações associadas à Mecânica Analítica e Vetorial, bem como as técnicas de modelagem de sistemas contínuos comuns a todas elas.

Tabela 1.1. Possíveis formas de modelagem de manipuladores flexíveis.

---Sistema---	-Procedimento-	----Formulações----	--Técnicas--
Manipuladores	. Mecânica	. Eq. de Lagrange	. Modos
	. Analítica	. Eq. de Hamilton	. Assumidos
	.	. Princ. de Hamilton	. Elementos
	.	. Eq. de Appel	. Finitos
Flexíveis	. Mecânica	. Newton-Euler	. Transfor.
	. Vetorial	. Eq. de Kane	. Homogênea
	.	.	.
	.	.	.

Concluíram que a modelagem de manipuladores flexíveis, feita via Mecânica Analítica, utilizando as equações de Lagrange ou o princípio de Hamilton, considerando coordenadas linearmente independentes, juntas e ligações flexíveis e ainda utilizando a técnica de elementos finitos, constitui-se no caminho mais adequado para a obtenção de resultados representativos, razoável facilidade computacional, boa eficiência numérica e bastante genérico.

1.4. Etapas do presente Trabalho

O modelo de manipulador flexível, a aplicação do Princípio de Hamilton Extendido e o Critério de Galerkin, utilizados para se obter as equações do movimento são apresentados no capítulo II. No capítulo III, é realizada uma análise qualitativa no sentido de se validar os coeficientes da equação do movimento. Resultados de simulações numéricas em microcomputador são apresentados e analisados no capítulo IV. O modelo experimental do manipulador, o mecanismo de acionamento, o sistema de medição e os resultados experimentais, são apresentados no capítulo V. A conclusão e sugestões para futuros trabalhos são apresentados no capítulo VI.

CAPÍTULO II

EQUAÇÃO DO MOVIMENTO

2.1. Modelo do Manipulador

O modelo do manipulador flexível adotado neste trabalho, consiste de uma viga, de seção constante e material homogêneo, engastada num cubo conforme a figura 2.1. O cubo possui movimento de rotação em torno do eixo vertical z . Na extremidade livre da viga existe uma massa concentrada denominada massa típica que faz o papel de uma carga a ser movimentada pelo braço do manipulador.

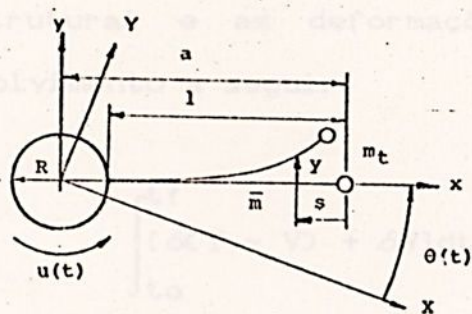


Figura 2.1. Modelo do manipulador flexível

As seguintes notações serão adotadas:

a distância entre a massa típica e o centro do cubo ao

- longo da viga não deformada; m
- l comprimento da viga; m
- m_t massa típica; kg
- $\bar{m}$ massa da viga por unidade de comprimento; kg/m
- R raio do cubo; m
- s distância ao longo da linha neutra da configuração da viga não deformada; m
- t tempo; s
- $OXYZ$ sistema inercial de eixos com origem no centro do cubo
- $Oxyz$ sistema móvel de eixos com origem no centro do cubo e o eixo dos x coincidente com a direção da viga não deformada
- $y(s,t)$ deformação elástica de um elemento da viga a uma distância s em um dado instante t ; m
- $\theta(t)$ deslocamento angular da viga não deformada; (rad)
- $u(t)$ torque externo relativo ao eixo z ; Nm

2.2. Aplicação do Princípio de Hamilton Extendido

A equação do movimento foi obtida através da aplicação do princípio de Hamilton Extendido, considerando desprezíveis o amortecimento estrutural e as deformações axiais da viga, conforme o desenvolvimento a seguir:

$$\int_{t_0}^{t_f} [\delta(T - V) + \delta W] dt = 0$$

Na equação acima, t_0 e t_f são dois instantes arbitrários, T é a energia cinética do sistema dinâmico (viga, massa típica e cubo), V é a energia potencial elástica da viga no plano XY e δW é o

trabalho virtual das forças externas. Substituindo $T - V$ por L , onde L é o Lagrangeano do sistema, a equação anterior torna-se:

$$\int_{t_0}^{t_f} (\delta L + \delta W) dt = 0 \quad (2.1)$$

O trabalho virtual das forças externas δW realizado pelo torque $u(t)$ durante o deslocamento virtual $\delta\theta$ é igual a

$$\delta W = u(t) \delta\theta \quad (2.2)$$

e a variação Lagrangeana δL é determinada considerando-se apenas o movimento de corpo rígido e a deformação elástica transversal da viga no plano XY. A energia cinética é obtida então, a partir da rotação do cubo e da velocidade de um elemento da viga com relação ao sistema inercial OXYZ da seguinte forma:.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^1 m \{ [(a - s)\dot{\theta} + y']^2 + y^2 \dot{\theta}^2 \} ds + \frac{1}{2} I_c \dot{\theta}^2$$

onde, $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$; $y' = \frac{\partial y}{\partial t}$; $m = \bar{m} + m\delta(s)$, $\delta(s)$ é a função espacial Delta de Dirac dada por:

$$\delta(s) = 0 \text{ para } s \neq 0 \quad \text{e} \quad \int_0^1 \delta(s) ds = 1$$

I_c é o momento de inércia do cubo com relação ao eixo Z (kgm^2). Para pequenas deformações elásticas, $y^2 \dot{\theta}^2$ pode ser considerado desprezível com relação a $[(a - s)\dot{\theta}]^2$, desta forma

a expressão da energia cinética torna-se:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m[(a - s)\dot{\theta} + y']^2 ds + \frac{1}{2} I_c \dot{\theta}^2 \quad (2.3-a)$$

Sendo o material que constitui a viga homogêneo e isotrópico e ainda considerando apenas pequenas deformações elásticas no plano XY (viga de Bernoulli-Euler), a energia potencial pode ser escrita,

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI(y'')^2 ds \quad (2.3-b)$$

onde EI é a rigidez flexional da viga (Nm^2) e $y'' = \partial^2 y / \partial s^2$.

Utilizando as equações (2.3-a,b) determina-se o Lagrangeano do sistema,

$$L = \frac{1}{2} \int_0^l m[(a - s)\dot{\theta} + y']^2 ds + \frac{1}{2} I_c \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} \int_0^l EI(y'')^2 ds \quad (2.4)$$

Sendo $L = L(\dot{\theta}, y', y'')$, a variação δL pode ser obtida da seguinte forma:

$$\delta L = (\partial L / \partial \dot{\theta}) \delta \dot{\theta} + (\partial L / \partial y') \delta y' + (\partial L / \partial y'') \delta y'' \quad (2.5)$$

Resolvendo a equação (2.5), δL pode ser escrito (apêndice A),

$$\delta L = [p\dot{\theta} + \int_0^l m(a - s)y' ds] \delta \dot{\theta} + [q\theta + \int_0^l m y' ds] \delta y' - \left(\int_0^l EI y'' ds \right) \delta y'' \quad (2.6)$$

onde, $p = \int_0^l m(a - s)^2 ds + I_c$ e $q = \int_0^l m(a - s) ds$

Substituindo as equações (2.2) e (2.6) na equação (2.1) , após cálculos (vide apêndice A) obtém-se:

$$\int_{t_0}^{t_f} \left\{ -[p\ddot{\theta} + \int_0^1 m(a-s)y''ds - u(t)]\delta\theta - [q\ddot{\theta} + \int_0^1 (my'' + EIy^{IV})ds]\delta y \right\} dt = 0 \quad (2.7)$$

As coordenadas $\theta(t)$ e $y(s,t)$ que aparecem na equação (2.7) são independentes, logo para que a integral seja nula os integrandos devem ser nulos.

$$p\ddot{\theta} + \int_0^1 m(a-s)y''ds - u(t) = 0$$

$$q\ddot{\theta} + \int_0^1 (my'' + EIy^{IV})ds = 0$$

As equações anteriores juntamente com as condições de contorno (viga com uma extremidade fixa e a outra livre), formam um sistema de equações diferenciais parciais que regem o movimento da viga com movimento de rotação, que são:

$$p\ddot{\theta} + \int_0^1 m(a-s)y''ds - u(t) = 0 \quad (2.8-a)$$

$$m[(a-s)\ddot{\theta} + y''] + EIy^{IV} = 0 \quad (2.8-b)$$

$$y(1,t) = y^I(1,t) = y^{II}(0,t) = y^{III}(0,t) = 0 \quad (2.8-c)$$

onde, $y^I = \partial y / \partial s$ e $y^{III} = \partial^3 y / \partial s^3$

Adotando um parâmetro adimensional α definido por,

$$\alpha \triangleq s/l$$

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

e reescrevendo então as equações (2.8-a,b,c), obtem-se:

$$p\ddot{\theta} + \int_0^1 m l (a - l\alpha) y'' d\alpha - u(t) = 0 \quad (2.9-a)$$

$$m l [(a - l\alpha)\ddot{\theta} + y''] + (EI/l^3) y^{IV} = 0 \quad (2.9-b)$$

$$y(1,t) = y^I(1,t) = y^{II}(0,t) = y^{III}(0,t) = 0 \quad (2.9-c)$$

onde, y agora é, $y(\alpha,t)$ e $y^I, y^{II} \dots = \partial y / \partial \alpha, \partial^2 y / \partial \alpha^2 \dots$

O sistema de equações (2.9-a,b,c) pode ser convertido num sistema de equações diferenciais ordinárias assumindo que:

$$y(\alpha,t) = \sum_{j=1}^n \phi_j(\alpha) q_j(t) \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.10)$$

onde $\phi_j(\alpha)$ é uma função espacial que pode ser assumida como sendo o j -ésimo modo natural de vibração da viga sem o movimento de rotação, isto é, com as condições de contorno dadas pela equação (2.9-c). De acordo com MEIROVITCH [6],

$$\phi_j(\alpha) = \frac{c}{c_1} \{ c_1 [\sin \beta_{j,1} (1 - \alpha) - \sinh \beta_{j,1} (1 - \alpha)] + c_2 [\cos \beta_{j,1} (1 - \alpha) - \cosh \beta_{j,1} (1 - \alpha)] \} \quad (2.11-a)$$

onde, c é uma constante que depende das condições iniciais,

$$c_1 = \sin \beta_{j,1} - \sinh \beta_{j,1} \quad (2.11-b)$$

$$c_2 = \cos \beta_{j,1} + \cosh \beta_{j,1} \quad (2.11-c)$$

$\beta_{j,1}$ é a raiz da equação

$$\cos \beta_{j,1} \cosh \beta_{j,1} = -1 \quad (2.11-d)$$

e $q_j(t)$ é a coordenada generalizada dependente do tempo.

O erro $\varepsilon(\alpha, t)$ que se comete ao assumir a equação (2.10) como solução do sistema (2.9-a,b) pode ser minimizado aplicando-se o critério de Galerkin (conforme MEIROVITCH [5]) a seguir :

$$\int_0^1 \varepsilon(\alpha, t) \phi_i(\alpha) d\alpha = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.12)$$

A função peso $\phi_i(\alpha)$ deve satisfazer as condições de contorno do problema em questão, logo pode ser assumida igual a $\phi_j(\alpha)$, bastando para isto, trocar o índice j por i nas equações (2.11-a, b, c e d). Substituindo então a solução $y(\alpha, t)$ dada pela equação (2.10) no sistema formado pelas equações (2.9-a,b), obtem-se os respectivos erros $\varepsilon_a(\alpha, t)$ e $\varepsilon_b(\alpha, t)$ que são:

$$\varepsilon a(\alpha, t) = \sum_{j=1}^n [\ddot{q}_j(t) \int_0^1 m l (a - \alpha l) \phi_j(\alpha) d\alpha] + p\ddot{\theta} - u(t)$$

$$\varepsilon b(\alpha, t) = \sum_{j=1}^n [\ddot{q}_j(t) m l \phi_j(\alpha) + (EI/l^3) \phi_j^{IV}(\alpha) q_j(t)] + m l (a - \alpha l) \ddot{\theta}$$

Pela substituição de cada uma das expressões anteriores na equação (2.12) obtém-se:

$$\sum_{j=1}^n Q_j \ddot{q}_j(t) + p\ddot{\theta} = u(t) \quad (2.13-a)$$

$$\sum_{j=1}^n S_{ij} \ddot{q}_j(t) + (EI/l^3) \sum_{j=1}^n R_{ij} q_j(t) + Q_i \ddot{\theta} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.13-b)$$

$$\text{onde, } S_{ij} = \int_0^1 m l \phi_i(\alpha) \phi_j(\alpha) d\alpha \quad (2.14-a)$$

$$R_{ij} = \int_0^1 \phi_i(\alpha) \phi_j^{IV}(\alpha) d\alpha \quad (2.14-b)$$

$$Q_i = \int_0^1 m l (a - \alpha l) \phi_i(\alpha) d\alpha \quad (2.14-c)$$

$$Q_j = \int_0^1 m l (a - \alpha l) \phi_j(\alpha) d\alpha \quad (2.14-d)$$

As integrais (2.14-a,b,c,d) estão resolvidas no apêndice A.

Na forma matricial o sistema formado pelas equações (2.13-a,b) pode ser escrito,

$$M\ddot{X} + KX = F(t) \quad (2.15)$$

onde M e K são as matrizes $(n + 1) \times (n + 1)$ de massa e rigidez respectivamente; $F(t)$ é a matriz $(n + 1) \times 1$ de força e X é o vetor deslocamento dado por

$X = [q_1(t) \quad q_2(t) \quad \dots \quad q_n(t) \quad \theta(t)]^T$, onde r significa transposta da matriz.

No sentido de se obter uma melhor visualização da equação do movimento (2.15), as matrizes de massa e rigidez foram determinadas para $n = 2$ e a equação resultante é apresentada a seguir:

$$\begin{bmatrix} \bar{m}l A_1 + mB_{11} & mB_{12} & \bar{m}l^2 D_1 \\ mB_{12} & \bar{m}l A_2 + mB_{22} & \bar{m}l^2 D_2 \\ \bar{m}l^2 D_1 & \bar{m}l^2 D_2 & p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{Bmatrix} +$$

$$(EI/l^3) \begin{bmatrix} (\beta_1 l)^4 A_1 & 0 & 0 \\ 0 & (\beta_2 l)^4 A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u(t) \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

Assim, através da equação (2.15), pode-se realizar uma análise dinâmica do manipulador flexível.

CAPÍTULO III

ANÁLISE QUALITATIVA PRELIMINAR

Foi realizado neste capítulo uma análise do comportamento dinâmico do modelo do manipulador flexível através da solução analítica das equações (2.13-a,b). Verificou-se a validade dos coeficientes S_{ij} , R_{ij} , Q_i e Q_j das mesmas equações, comparando os resultados obtidos da solução analítica com os fornecidos por MEIROVITCH [6] e BEER [11].

Considerando n igual a 1 e o torque $u(t)$ igual a uma constante u_0 , nas equações (2.13-a,b), obtém-se :

$$\begin{bmatrix} \bar{m}lA_1 + m\bar{t}B_1 & \bar{m}l^2D_1 \\ \bar{m}l^2D_1 & p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{Bmatrix} + (EI/l^3) \begin{bmatrix} (\beta_1 l)^4 A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ u_0 \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

Considerando, agora, as condições iniciais

$$q_1(0) = \dot{q}_1(0) = \theta(0) = \dot{\theta}(0) = 0,$$

a solução completa da equação (3.1) pode ser escrita da seguinte forma: (conforme apêndice B)

$$q_1(t) = q_0(1 - \cos \omega_1 t) \quad (3.2-a)$$

$$\theta(t) = -[(\bar{m}l^2 D_1 q_0)/p](1 - \cos \omega_1 t) + \frac{1}{2} \frac{u_0}{p} t^2 \quad (3.2-b)$$

$$\text{onde, } q_0 = -(\bar{m}l^2 D_1 u_0/p)/[A_1(\beta_1 l)^4 EI/l^3] \quad (3.2-c)$$

$$\omega_1^2 = \frac{A_1(\beta_1 l)^4 EI/l^3}{\bar{m}l A_1 + m l B_{11} - (\bar{m}l^2 D_1)^2/p} \quad (3.2-d)$$

Uma vez determinada a coordenada $q_1(t)$, o deslocamento $y(\alpha, t)$ de um ponto da viga pode ser determinado através da equação (2.10). Considerando então n igual a 1 e α igual a zero nesta equação, obtem-se o deslocamento da extremidade da viga.

$$y(0, t) = \phi_1(0) q_1(t) = y_0(1 - \cos \omega_1 t) \quad (3.3)$$

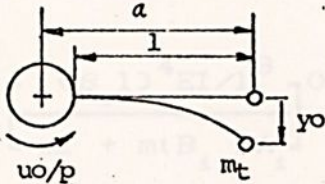
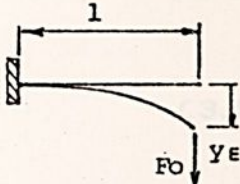
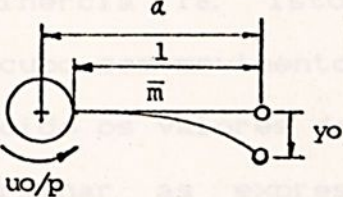
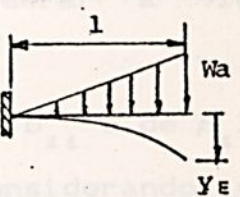
$$\text{onde, } y_0 = -\left[\frac{\phi_1(0)}{A_1(\beta_1 l)^4}\right] D_1 \left[\frac{\bar{m}l^2 u_0/p}{EI/l^3}\right] \quad (3.4)$$

O primeiro fator da equação (3.4) depende somente das condições de contorno enquanto o terceiro depende das propriedades elásticas, inerciais e do torque constante u_0 . O segundo fator, de acordo com a equação (A.1-b), depende das condições de contorno e dos quocientes a/l e $m/\bar{m}l$.

O deslocamento y_0 tem o significado de valor médio, isto é, a extremidade da viga oscila em torno de y_0 com a frequência ω_1 , ao se aplicar um torque constante u_0 no cubo do manipulador. Como este deslocamento médio y_0 pode ser obtido estáticamente, pode-se então, através de uma apropriada interpretação do resultado encontrado neste trabalho, realizar uma comparação com o resultado disponível na literatura. Desta

forma a tabela 3.1 mostra, na terceira coluna as expressões determinadas para o deslocamento médio y_0 , considerando em primeiro lugar, somente a massa concentrada na extremidade e em segundo, somente a massa da viga. Na quarta coluna mostra o resultado da interpretação do terceiro fator da equação (3.4) e na quinta coluna aparece o mesmo deslocamento obtido estaticamente, conforme BEER [1].

Tabela 3.1. Deslocamento médio y_0 da extremidade do manipulador

$\bar{m}l$	m_t	y_0 ($a/l = 1$)	F	y_E
		$-0,9697 \frac{m_t a u_0/p}{3EI/l^3}$		$\frac{F_0}{3EI/l^3}$
0	m_t		$F_0 = m_t a u_0/p$	
$\bar{m}l$	0	$-1,003 \frac{11 \bar{m} a (u_0/p) l^4}{120EI}$		$\frac{11 W a l^4}{120EI}$
			$W a = \bar{m} a u_0/p$	

F Força de inércia

y_E Deslocamento estático

A diferença percentual entre o deslocamento médio y_0 da extremidade da viga e o mesmo deslocamento determinado estaticamente y_E é de 3%, quando se considera nula a massa da

viga e é de 0,3%, quando se considera nula a massa típica. Este resultado, de certa forma valida os coeficientes A_i , D_i e B_{ij} , que aparecem nas equações (A.1-a,b,c) do apêndice A.

Como n foi considerado igual a 1 nas equações (2.13-a,b), tem-se portanto duas frequências naturais do sistema dinâmico (viga, massa típica e cubo), sendo uma delas nula (movimento de corpo rígido) e a outra dada pela equação (3.2-d). Analisando esta equação, verifica-se que a medida que aumenta o momento de inércia p do sistema com relação ao eixo Z, diminui a influência do mesmo sobre a frequência ω_1 . Para valores elevados do momento de inércia I_c do cubo, o que implica em valores elevados do momento de inércia p do conjunto, o cubo pode então ser considerado fixo, isto é, sem o movimento de rotação. Desta forma então, a frequência natural do sistema passa a ser:

$$\omega_1^+ = \left[\frac{(\beta_1 l)^4 EI / l^3}{\bar{m}l + m(B_{11}/A_1)} \right]^{0,5} \quad (3.5)$$

A frequência ω_1^+ pode ser interpretada como sendo a frequência natural do manipulador para o caso do mesmo possuir um elevado momento de inércia I_c . Isto significa considerar a viga engastada no cubo sem movimento de rotação.

Conhecido os valores dos coeficientes A_1 e B_{11} e de $\beta_1 l$, pode-se determinar as expressões para ω_1^+ considerando em primeiro lugar apenas a massa da viga, e em segundo lugar apenas a massa típica. A tabela 3.2 tem este propósito, além de mostrar o resultado da comparação destas frequências com as mesmas (ω_1^{++}) extraídas de MEIROVITCH [6].

Tabela 3.2. Frequência natural do manipulador sem o movimento de rotação.

$\bar{m}l$	m_t	ω_1^+	ω_1^{++}	$\Delta(\%)$
$\bar{m}l$	0	$(\beta_{11})^2 \left(\frac{EI}{\bar{m}l^4} \right)^{0,5}$	$(\beta_{11})^2 \left(\frac{EI}{\bar{m}l^4} \right)^{0,5}$	0
0	m_t	$1,015 \left(\frac{3EI/l^3}{m_t} \right)^{0,5}$	$\left(\frac{3EI/l^3}{m_t} \right)^{0,5}$	1.5

ω_1^+ Frequência natural do manipulador considerando o cubo fixo.

ω_1^{++} Frequência natural da viga com uma extremidade fixa e a outra livre conforme MEIROVITCH [6].

Δ Diferença percentual entre ω_1^+ e ω_1^{++} .

A tabela 3.2 mostra que ocorreu um erro de 1,5% entre as frequências obtida no presente trabalho e a mesma fornecida por MEIROVITCH [6], quando se considera nula a massa da viga. Para efeito de verificação dos coeficientes envolvidos (A_1 e B_{11}), a diferença percentual obtida, para o caso da massa típica nula, não deve ser considerada, uma vez que estes são anulados na equação (3.5). Neste caso então, o resultado obtido vem a validar, com uma margem de erro de 1,5%, os coeficientes A_1 e B_{11} .

Com a finalidade de analisar o comportamento da frequência natural, com a variação do momento de inércia p do manipulador, definiu-se:

I_c (momento de inércia do cubo) como sendo o momento de inércia da parte rígida .

I_f (momento de inércia da viga e da massa típica) como sendo o momento de inércia da parte flexível, todos com relação ao eixo Z.

Desta forma o momento de inércia p pode ser escrito da seguinte forma:

$$p = \int_0^1 m(a - s)^2 ds + I_c = I_f + I_o \quad (3.6)$$

Resolvendo a equação (3.6), obtém-se:

$$I_f = \frac{m\bar{l}}{3}(1^2 + 3R1 + 3R^2) + ma^2 \quad (3.7)$$

onde, $R = a - 1$

Finalizando então a análise da frequência natural, a figura 3.1 mostra o comportamento da razão R_f , entre as frequências ω_1 e ω_1^+ , com a variação da razão I_c/I_f , entre os momentos de inércia da parte rígida e da parte flexível do manipulador. Para isto, considerou-se m nulo e $a = 1$ nas equações (3.2-d), (3.5) e (3.7).

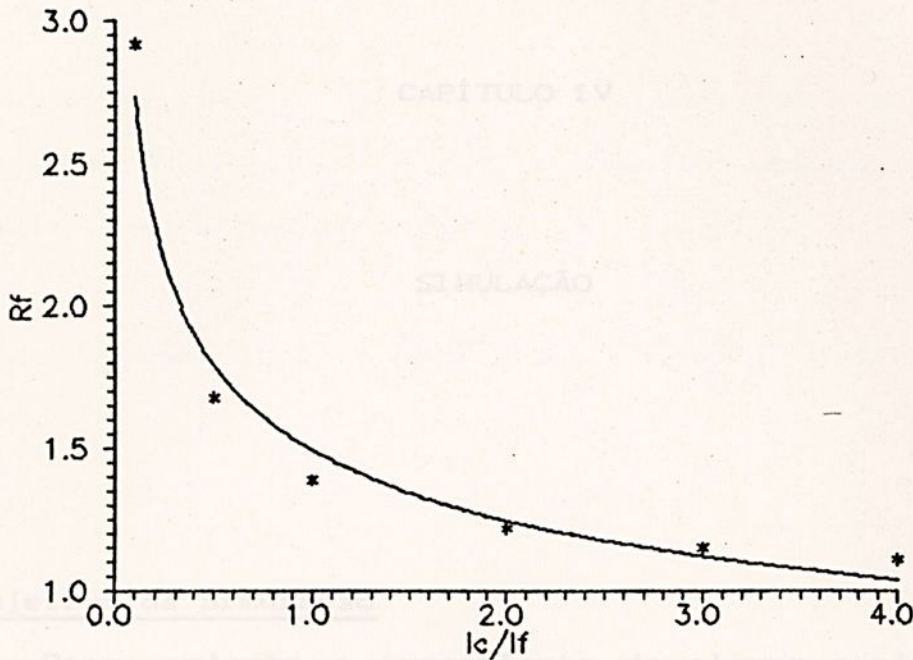


Figura 3.1. Comportamento de $R_f = \omega_1/\omega_1^+$ com a variação de I_c/I_f , considerando $m_1 = 0$ e $a = 1$.

Observa-se na figura anterior que o aumento da razão I_c/I_f , faz com que a frequência natural do manipulador se aproxime cada vez mais da frequência da viga engastada no cubo sem o movimento de rotação. Portanto, para uma dada viga, quanto maior for o momento de inércia da parte rígida do manipulador, menor será a sua influência na variação da frequência natural do mesmo.

CAPÍTULO IV

SIMULAÇÃO

4.1. Objetivo da Simulação

Para explorar a importância de alguns parâmetros que possam caracterizar o comportamento dinâmico do manipulador, foi realizada uma análise numérica do modelo descrito no capítulo II. Analisou-se em primeiro lugar as frequências naturais e depois, através da aplicação de um torque pré-estabelecido, analisou-se tanto o deslocamento da extremidade da viga como a aceleração angular do cubo do manipulador.

4.2. Definição de Parâmetros Adimensionais

A fim de facilitar a análise foram introduzidos alguns parâmetros adimensionais como:

$$R_m = m_l / \bar{m}_l \quad \text{razão de massa}$$

$$R_c = a / l \quad \text{razão de comprimento}$$

$$R_i = I_c / I_f \quad \text{razão de inércia}$$

portanto, o momento de inércia p da equação (3.6), pode ser

escrito:

$$p = Ir(1 + Rr)$$

e as equações (2.13-a,b) , com a inclusão dos resultados das integrais (2.14-a,b,c,d) e dos parâmetros adimensionais, podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\bar{m}_l \left[\sum_{j=1}^n (A_{ij} \delta_{ij} + Rm B_{ij}) \ddot{q}_j(t) + 1 D_i \ddot{\theta} \right] + (EI/l^3) \sum_{j=1}^n (\beta_j l)^4 A_{ij} \delta_{ij} q_j(t) = 0$$

$$\text{com } i = 0, 1, \dots, n \quad (4.1-a)$$

$$\bar{m}_l \sum_{j=1}^n D_j \ddot{q}_j(t) + Ir(1 + Rr) \ddot{\theta} = u(t) \quad (4.1-b)$$

Os coeficientes A_i , B_{ij} dependem somente das condições de contorno e são dados respectivamente pelas equações (A.1-a,c) .

D_i por sua vez, além de depender das condições de contorno, depende também dos parâmetros Rm e Rc .

$$D_i = \frac{2cc_2}{\beta_i l c_1} \left[(Rc - 1) \frac{c_1}{c_2} - \frac{1}{\beta_i l} + Rm Rc \beta_i l \cotg \beta_i l \sinh \beta_i l \right] \quad (4.2)$$

Fixando a rigidez flexional EI , foi organizado um conjunto de 16 vigas denominado $\{L_{cm}\}$, com $c, m = 1, 2, 3$ e 4 visando a simulação. O índice c indica a razão de comprimento enquanto o índice m a razão de massa. Assim, L_{cm} refere-se a viga cujas razões de comprimento e massa valem respectivamente Rc e Rm .

A tabela 4.1 a seguir mostra os valores adotados neste trabalho para os parâmetros Rc e Rm e ainda denomina cada uma

das vigas.

Tabela 4.1. Identificação das vigas utilizadas na simulação.

Rc	Rm			
	0,22	0,40	0,60	0,80
1,15	L11	L12	L13	L14
1,11	L21	L22	L23	L24
1,08	L31	L32	L33	L34
1,07	L41	L42	L43	L44

4.3. Dados de Simulação

Para realizar a simulação numérica foram utilizados os seguintes dados:

$$EI = 5,48 \cdot 10^{-2} \text{ Nm}^2$$

$$Rc = 1,08$$

$$\bar{m} = 0,099 \text{ kg/m}$$

$$Rm = 0,22; 0,40; 0,60 \text{ e } 0,80$$

$$l = 0,430 \text{ m}$$

$$Rr = 1; 2; 10 \text{ e } 100$$

A variação do parâmetro Rr implica na variação da frequência natural do manipulador conforme a figura 3.1. Com a faixa escolhida para Rr (1 a 100), espera-se observar a influência da

vibração da parte flexível sobre o movimento da parte rígida. A variação da razão de massa R_M na faixa de 0,22 a 0,80, também provoca uma variação da frequência natural do manipulador, porém numa faixa mais estreita, que a faixa de frequência que se obtém com a variação da razão de inércia R_I . Em ambos os casos, espera-se observar a influência destes parâmetros no deslocamento da extremidade livre do manipulador, e para isto, o torque escolhido está representado na figura 4.1 a seguir:

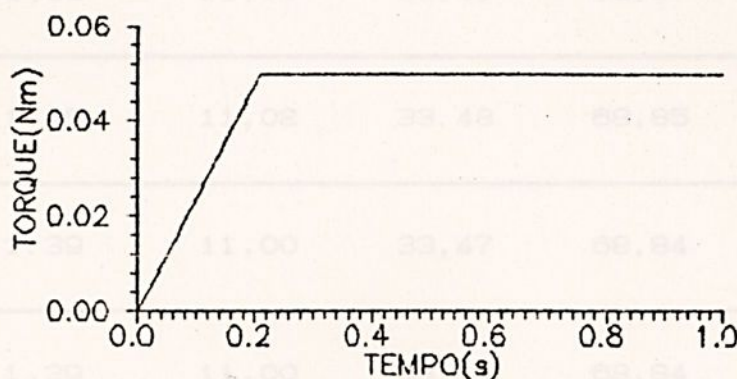


Figura 4.1. Torque $u(t)$ aplicado ao cubo do manipulador.

4.4. Análise das Frequências Naturais

Para analisar a influência dos parâmetros R_I e R_M na frequência natural do manipulador, foi utilizado o método de Jacoby (de acordo com PAZ [9]) para o cálculo.

A tabela 4.2 mostra as cinco primeiras frequências naturais não nulas da viga L_{32} ($I_f = 6,972 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$) para a faixa de R_I pré-definida no item 4.3. Para verificação da sensibilidade da resposta, utilizou-se também um valor muito alto de R_I , indicado na tabela como >100 .

Tabela 4.2. Frequências naturais não nulas da viga L_{32}

F R E Q U Ê N C I A N A T U R A L (H z)					
R_I	1º	2º	3º	4º	5º
1	1,93	11,15	33,54	68,89	118,80
2	1,69	11,08	33,51	68,87	118,78
10	1,45	11,02	33,48	68,85	118,76
100	1,39	11,00	33,47	68,84	118,75
>100	1,39	11,00	33,47	68,84	118,75

Observa-se na tabela anterior o decréscimo da frequência natural com o aumento da razão de inércia R_I . Observa-se também, que as frequências dos modos mais altos são menos sensíveis às variações de R_I que os mais baixos. $R_I > 100$ implica num momento de inércia I_c do cubo muito maior que o momento de inércia da parte flexível I_f do manipulador, significando neste caso, a viga engastada em um cubo fixo. Assim, as frequências que aparecem na última linha da tabela anterior, podem ser comparadas, conforme a tabela 4.3, com as mesmas frequências naturais obtidas por LAURA et al [4], que considera a viga com uma extremidade engastada e com uma massa

concentrada na extremidade livre.

Tabela 4.3. Comparação entre as frequências naturais da viga L_{32} obtidas neste trabalho (F_j) e as calculadas por LAURA et al [4] (F_j^*).

F R E Q U Ê N C I A N A T U R A L (Hz)			
j	F_j	F_j^*	$\Delta(\%)$
1º	1,39	1,38	0,7
2º	11,00	10,97	0,3
3º	33,47	33,26	0,6
4º	68,84	68,02	1,2
5º	118,75	115,35	2,9

Δ variação percentual entre F_j e F_j^*

Utilizando os dados de KRISHINAMURTHY [3], que são

$EI = 194,64 \text{ Nm}^2$, $l = 0,6287 \text{ m}$, $a = 0,7112 \text{ m}$, $\bar{m} = 0,3735 \text{ kg/m}$,
 $m_t = 0,68 \text{ kg}$, $I_c = 0,1129 \text{ kgm}^2$ e $R_I = 0,29$,

foram obtidas as frequências naturais do manipulador em questão



através do modelo desenvolvido no presente trabalho. As comparações entre estas frequências e as determinadas pelo próprio KRISHINAMURTHY [3], que considera não só a rotação como também a translação do manipulador, são mostradas na tabela 4.4 a seguir:

Tabela 4.4. Comparação entre as frequências naturais determinadas neste trabalho (F_j) e as calculadas por KRISHINAMURTHY [3] (F_j^{**}).

F R E Q U Ê N C I A N A T U R A L (Hz)

j	F_j	F_j^{**}	$\Delta(\%)$
1º	18,60	18,58	0,11
2º	146,98	146,91	0,05
3º	466,74	465,60	0,24
4º	974,23	972,33	0,20
5º	1695,73	1677,07	1,11

Δ variação percentual entre F_j e F_j^{**}

As comparações realizadas (tabelas 4.3 e 4.4), demonstram uma variação de menos de 3%, com relação ao trabalho de LAURA et al [4] e 2%, em relação ao trabalho de KRISHINAMURTHY [3].

Fixando agora a razão de inércia R_I e a razão de comprimento R_c , pode-se determinar a frequência natural do manipulador para a faixa de razão de massa definida no item 4.3. Desta forma a tabela 4.5 mostra as cinco primeiras frequências naturais das vigas L_{31} , L_{32} , L_{33} e L_{34} cujas razões de massa são respectivamente, 0,22; 0,40; 0,60 e 0,80, considerando a razão de inércia $R_I = 2$.

Tabela 4.5. Frequências naturais das vigas L_{31} , L_{32} , L_{33} e L_{34} , considerando $R_I = 2$.

F R E Q U Ê N C I A N A T U R A L (H z)					
R_M	1º	2º	3º	4º	5º
0,22	1,98	11,66	34,29	69,69	119,46
0,40	1,69	11,08	33,51	68,87	118,78
0,60	1,47	10,76	33,11	68,48	118,47
0,80	1,32	10,58	32,90	68,27	118,30

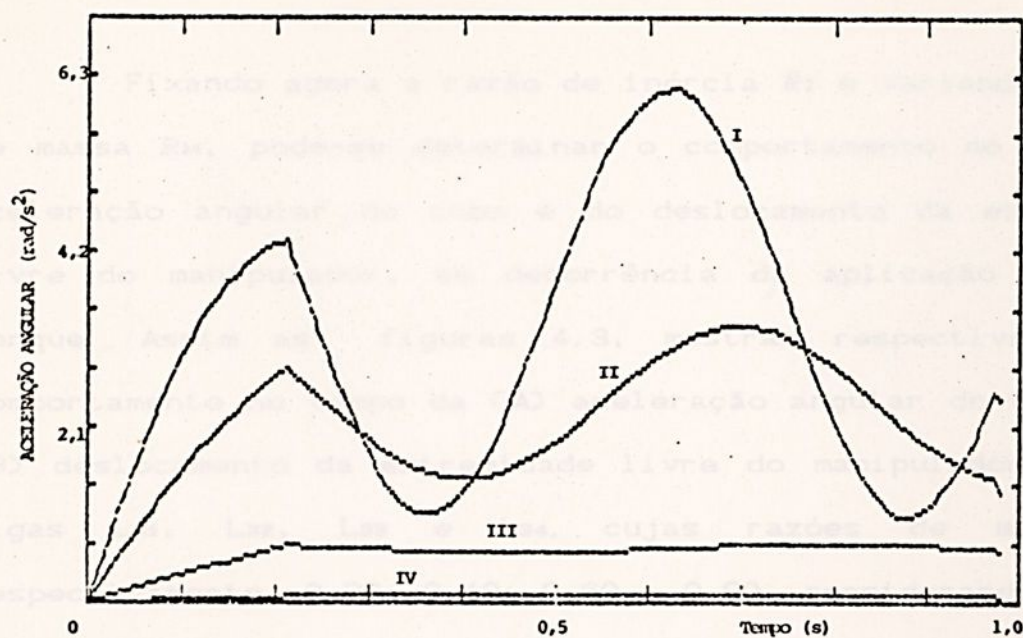
Observa-se na tabela anterior um decréscimo da frequência natural com o aumento da razão de massa, o que é natural, uma vez que aumentando a razão de massa ocorre um aumento na inércia do manipulador. Nota-se também que as frequências

naturais correspondentes aos modos mais altos são menos sensíveis às variações da razão de massa R_m do que as dos modos mais baixos.

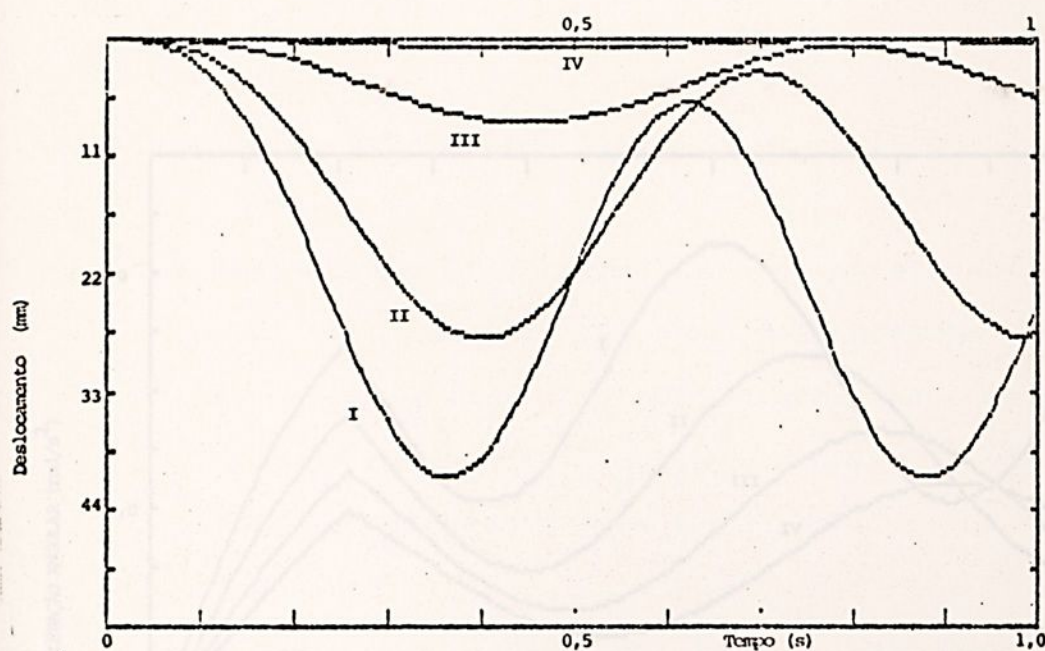
4.5. Análise dos Deslocamentos e Acelerações

Conhecendo as características do sistema dinâmico (matrizes de massa e rigidez) e o torque como entrada de dados, a aceleração angular do cubo e o deslocamento da extremidade da viga podem ser determinados. Para isto foi utilizado um programa para microcomputador extraído de PAZ [9], que utiliza o método de integração passo a passo; n foi considerado igual a dois no sistema de equações (4.1-a,b).

As figuras 4.2-A e B mostram respectivamente, o comportamento no tempo da aceleração angular $\ddot{\theta}(t)$ do cubo e do deslocamento $y(0,t)$ da extremidade da viga L_{a2} , em resposta ao torque $u(t)$ da figura 4.1, para os seguintes valores de razão de inércia R_r : I, 1; II, 2; III, 10 e IV, 100. Observa-se em ambas figuras uma diminuição da frequência natural (1º modo) com o acréscimo da razão de inércia R_r . Isto acontece em razão do aumento do momento de inércia do cubo I_c , uma vez que neste caso, o momento de inércia da parte flexível I_f se mantém constante. Nota-se também, uma diminuição da intensidade da vibração, tanto na aceleração angular como no deslocamento com o aumento de R_r . Este comportamento se deve ao fato que o valor médio da aceleração angular diminui com o aumento do momento de inércia do cubo, acarretando então numa menor excitação da viga, o que faz diminuir sua intensidade e conseqüentemente a sua influência no movimento da parte rígida.



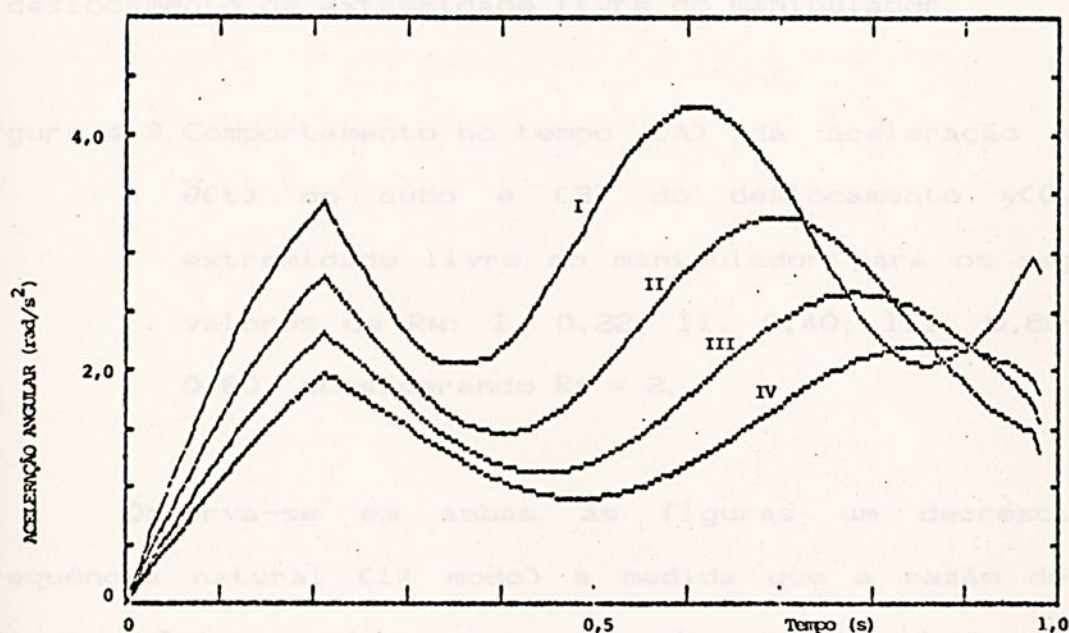
A. aceleração angular do cubo



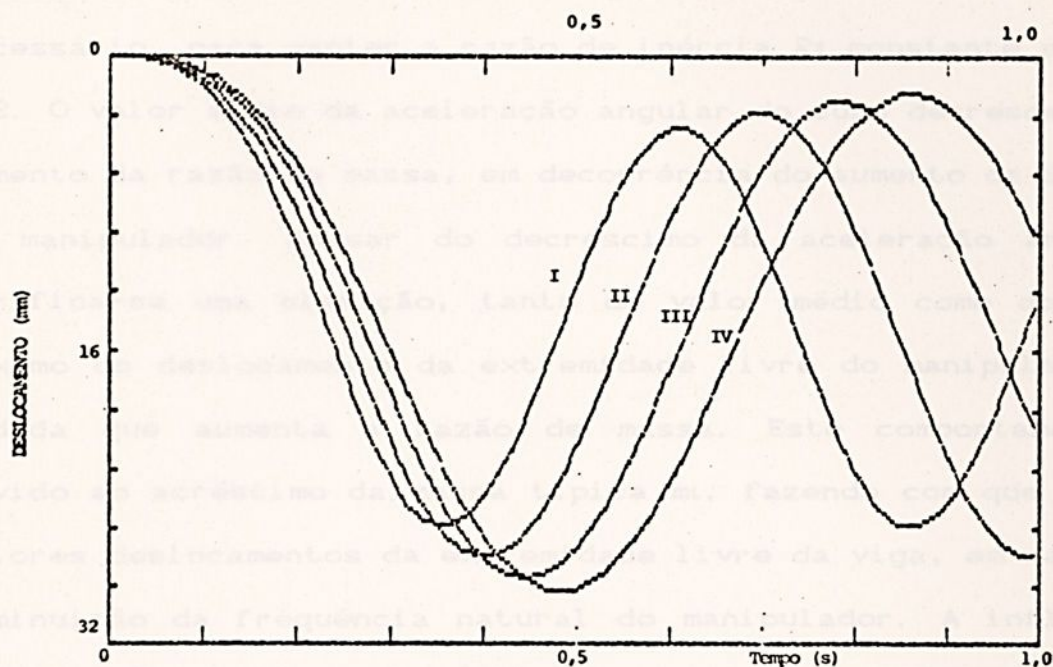
B. deslocamento da extremidade do manipulador

Figura 4.2. Comportamento no tempo (A) da aceleração angular do cubo e (B) do deslocamento da extremidade livre do manipulador para os seguintes valores de R_r : I, 1; II, 2; III, 10 e IV, 100, para $R_m=0,40$ e $R_c=1,08$.

Fixando agora a razão de inércia R_I e variando a razão de massa R_M , pode-se determinar o comportamento no tempo da aceleração angular do cubo e do deslocamento da extremidade livre do manipulador, em decorrência da aplicação do mesmo torque. Assim as figuras 4.3, mostram respectivamente, o comportamento no tempo da (A) aceleração angular do cubo e do (B) deslocamento da extremidade livre do manipulador para as vigas L_{31} , L_{32} , L_{33} e L_{34} , cujas razões de massa são respectivamente, 0,22; 0,40; 0,60 e 0,80, considerando a razão de inércia R_I igual a 2.



A. aceleração angular do cubo.



B. deslocamento da extremidade livre do manipulador.

Figura 4.3. Comportamento no tempo (A) da aceleração angular $\ddot{\theta}(t)$ do cubo e (B) do deslocamento $y(0,t)$ da extremidade livre do manipulador para os seguintes valores de R_m : I, 0,22; II, 0,40; III, 0,60 e IV, 0,80, considerando $R_r = 2$.

Observa-se em ambas as figuras um decréscimo da frequência natural (1º modo) à medida que a razão de massa aumenta. Isto acontece em razão do aumento do momento de inércia ($p = I_c + I_f$) do manipulador que neste caso aumenta, não só pelo acréscimo da massa típica m_t ($R_m = m_t/\bar{m}_l$, $\bar{m}_l$ é constante) como também, pelo aumento do momento de inércia do cubo. O aumento do momento de inércia do cubo I_c se faz

necessário, para manter a razão de inércia R_i constante e igual a 2. O valor médio da aceleração angular do cubo decresce com o aumento da razão de massa, em decorrência do aumento da inércia do manipulador. Apesar do decréscimo da aceleração angular, verifica-se uma elevação, tanto do valor médio como do valor máximo do deslocamento da extremidade livre do manipulador, à medida que aumenta a razão de massa. Este comportamento é devido ao acréscimo da massa típica m_t , fazendo com que ocorra maiores deslocamentos da extremidade livre da viga, em razão da diminuição da frequência natural do manipulador. A influência da vibração da viga sobre o movimento do cubo, diminui com o aumento da razão de massa, conforme se pode observar na figura 4.3-A. Neste caso isto ocorre, em consequência do aumento do momento de inércia do cubo, fazendo com que o mesmo oscile com menor intensidade de aceleração angular.

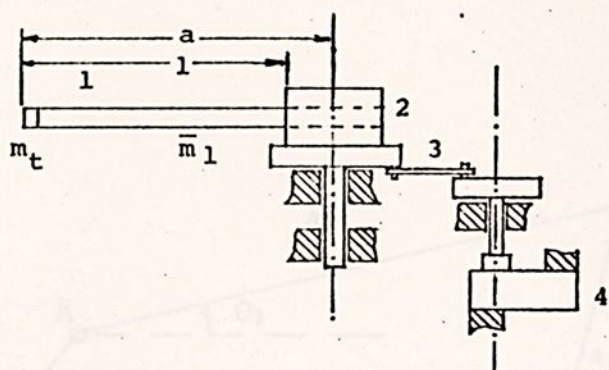


CAPÍTULO V

MODELO EXPERIMENTAL

5.1. Manipulador Flexível

A figura 5.1 representa um esquema simplificado do manipulador flexível que foi utilizado neste trabalho. O conjunto é formado por uma lâmina de aço 1, fixa em um cubo 2, acionado por um mecanismo de quatro barras 3, ligado ao motor elétrico de corrente contínua. O cubo é composto de duas chapas em forma de "L" para fixar a lâmina 1 através de parafusos e um disco oscilante (maior) suspenso por um conjunto de eixo e rolamento de esfera. O movimento do disco maior é comandado pelo mecanismo de quatro barras acoplado em um sistema de acionamento, composto de um disco menor, eixo, rolamentos e um motor elétrico de corrente contínua.



000216

Figura 5.1. Esquema simplificado do manipulador flexível :
 1 - lâmina de aço, 2 - cubo, 3 - mecanismo de quatro barras e 4 - motor elétrico.

Para a verificação da influência de alguns parâmetros importantes de um manipulador flexível em rotação, proposto neste trabalho, foi utilizado um conjunto de 4 lâminas de aço de mesma seção transversal com diferentes comprimentos e 4 diferentes massas adicionais (massa típica), totalizando com isto 16 lâminas de teste. Com uma extremidade fixa no cubo e a outra livre, a lâmina se comporta como uma viga em balanço. Na extremidade livre de cada lâmina foi fixado uma massa típica de valor previamente determinado para se obter 4 diferentes razões de massa, conforme os dados da tabela 4.1.

O movimento de rotação do manipulador flexível foi obtido pelo mecanismo de quatro barras, figura 5.2, onde r_2 e r_4 são respectivamente, os raios dos disco motor e do disco oscilante (disco movido), r_3 é o comprimento da haste acopladora, r_1 a distância entre os eixos dos dois discos e o_1 e o_2 são os centros dos discos menor e maior, respectivamente. Os valores de r_1 , r_2 , r_3 e r_4 em milímetros, são respectivamente, 79, 30, 73 e 43.

FACULDADE DE ENGENHARIA
 DE GUARATINGUETÁ
 BIBLIOTECA

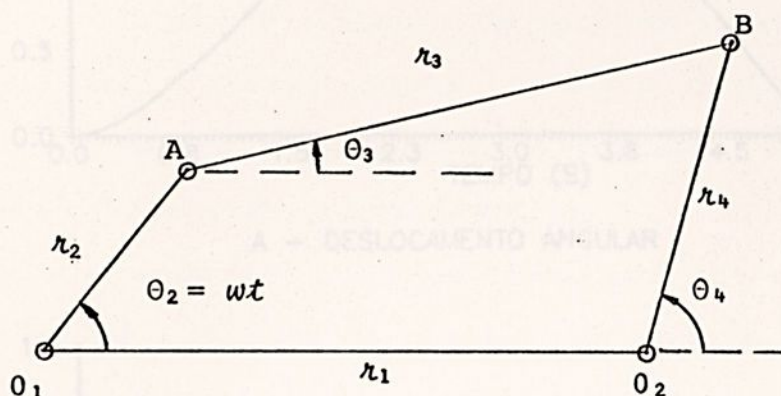
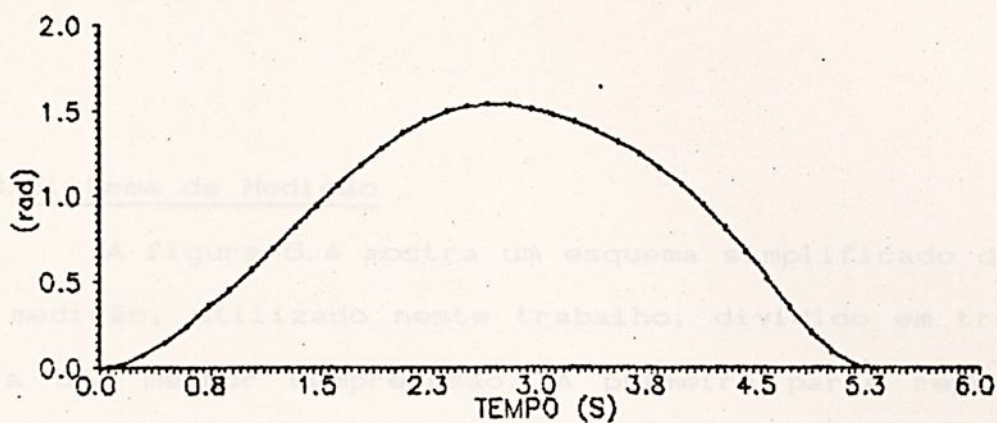


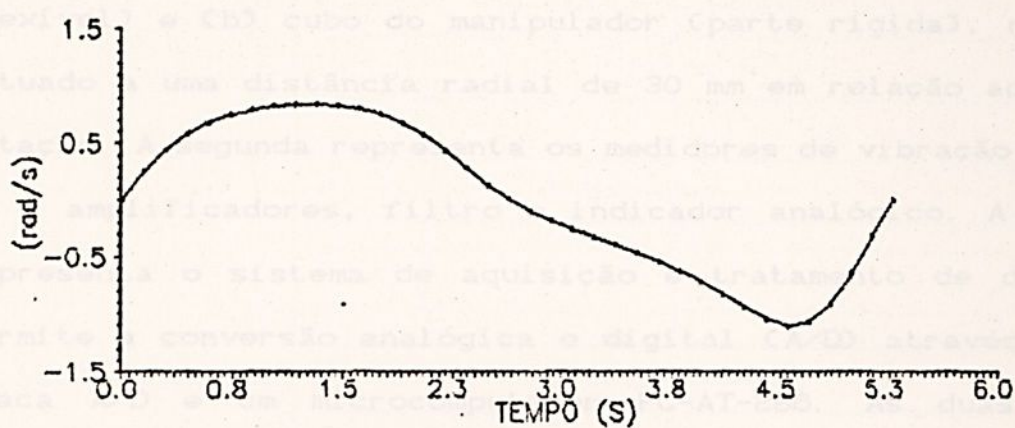
Figura 5.2. Mecanismo de quatro barras utilizado para o acionamento do manipulador.

θ_2 , θ_3 e θ_4 representam respectivamente os deslocamentos angulares do disco menor r_2 , com velocidade angular constante ω , da haste acopladora r_3 e do disco maior r_4 .

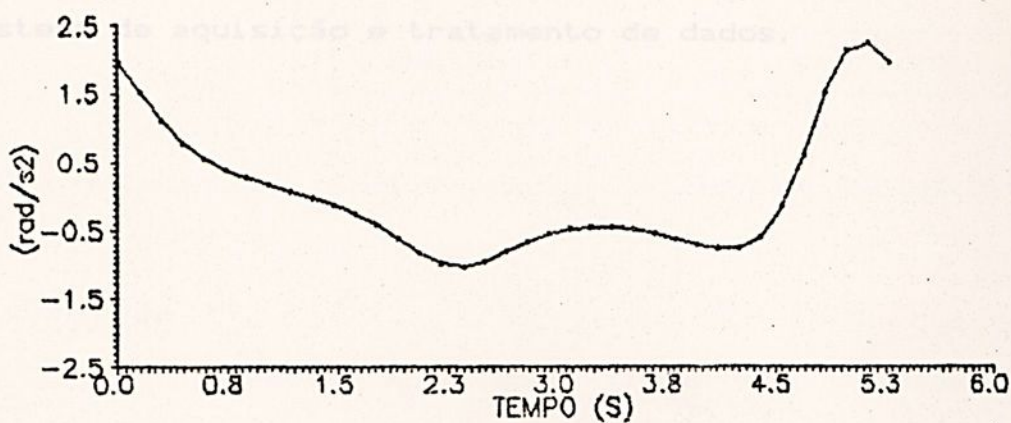
Neste trabalho foram testados tres diferentes velocidades angulares ω da barra r_2 , com os valores de 1,19; 1,95 e 2,83 rad/s. As figuras 5.3, A, B e C mostram respectivamente, o deslocamento, a velocidade e a aceleração angulares em função do tempo da barra r_4 . As curvas foram geradas, utilizando-se as equações cinemáticas desenvolvidas por SHIGLEY [10], partir dos dados do mecanismo considerando a rotação de 1,19 rad/s.



A - DESLOCAMENTO ANGULAR



B - VELOCIDADE ANGULAR



C - ACELERAÇÃO ANGULAR

Figura 5.3. A - deslocamento, B - velocidade e C - aceleração angulares em função do tempo da barra r4

5.2. Sistema de Medição

A figura 5.4 mostra um esquema simplificado do sistema de medição, utilizado neste trabalho, dividido em tres partes para uma melhor compreensão. A primeira parte representa os sensores inerciais, acelerômetros 1 e 2, que foram fixados respectivamente em ; (a) extremidade livre da lâmina (parte flexível) e (b) cubo do manipulador (parte rígida), num ponto situado a uma distância radial de 30 mm em relação ao eixo de rotação. A segunda representa os medidores de vibração composto de ; amplificadores, filtro e indicador analógico. A terceira representa o sistema de aquisição e tratamento de dados que permite a conversão analógica e digital (A/D) através de; uma placa A/D e um microcomputador PC-AT-286. As duas saídas, monitor e impressora juntamente com a utilização de um "software" especializado (LYNKS - AQDADOS/SISDIN), completam o sistema de aquisição e tratamento de dados.

Figura 5.4. Esquema simplificado do Sistema de Medição

5.3. Sensores

Fixados com cera, dois acelerômetros piezoelétricos foram utilizados para medir as acelerações da parte flexível (ponto (a)) e da parte rígida (ponto (b)) do manipulador. A figura 5.5, mostra a localização destes pontos no manipulador e mostra também a disposição dos respectivos cabos coaxiais.

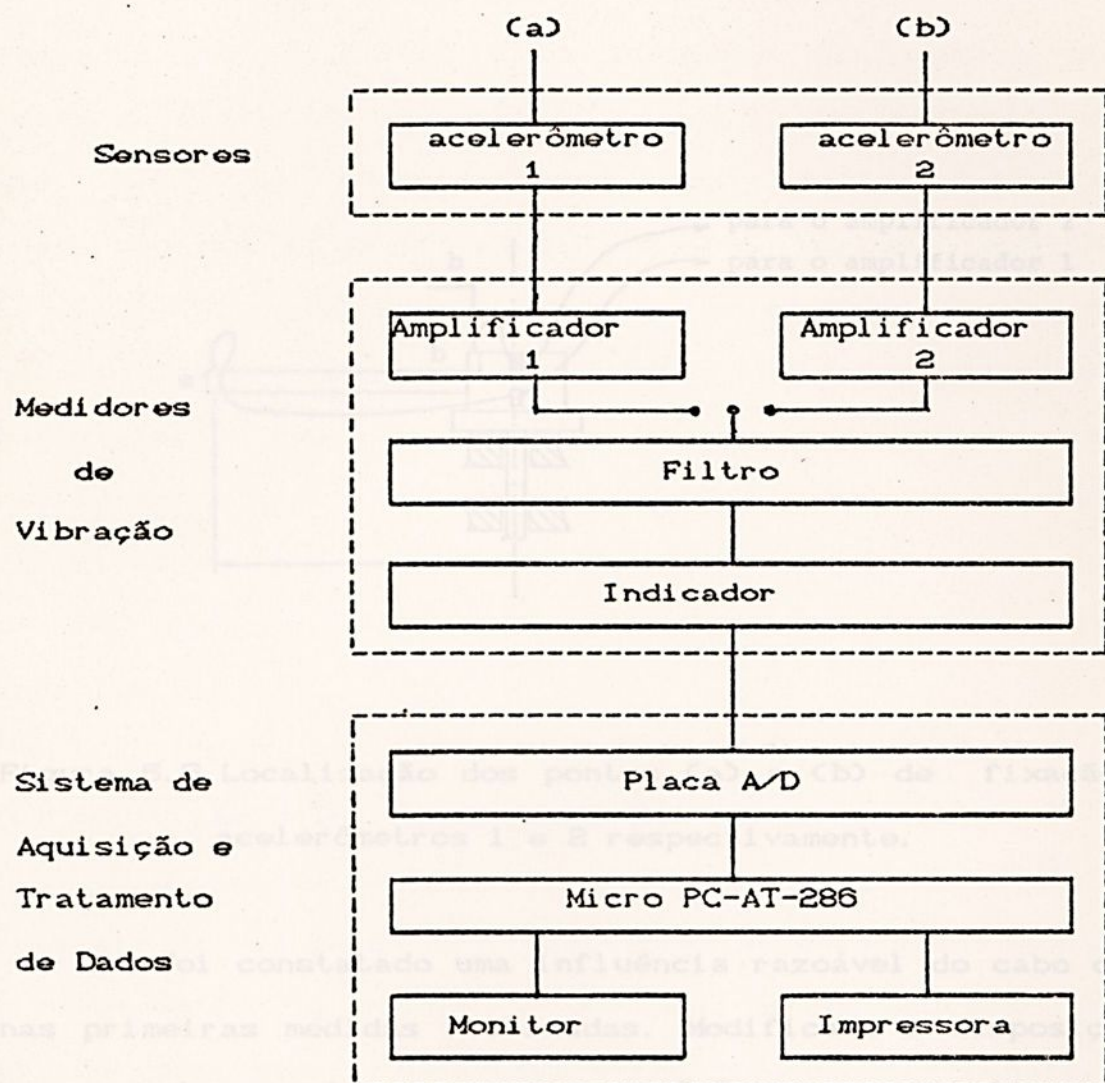


Figura 5.4. Esquema simplificado do Sistema de Medição

5.3. Sensores

Fixados com cera, dois acelerômetros piezoelétricos foram utilizados para medir as acelerações da parte flexível (ponto (a)) e da parte rígida (ponto (b) do manipulador). A figura 5.5, mostra a localização destes pontos no manipulador e mostra também a disposição dos respectivos cabos coaxiais.

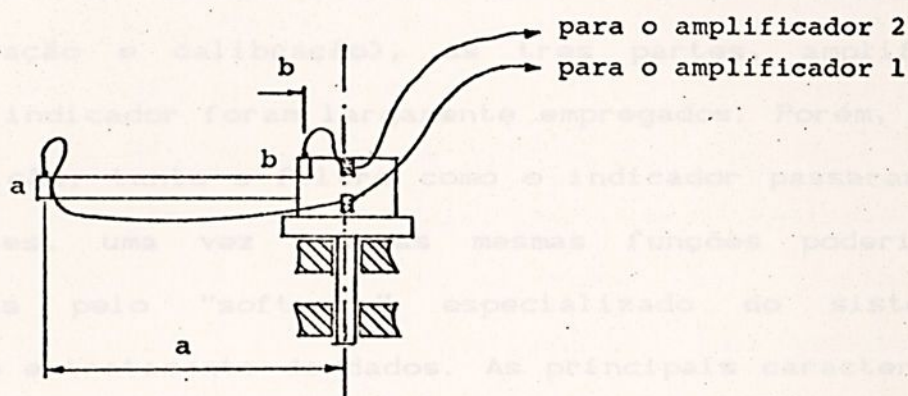


Figura 5.5. Localização dos pontos (a) e (b) de fixação dos acelerômetros 1 e 2 respectivamente.

Foi constatado uma influência razoável do cabo coaxial nas primeiras medidas realizadas. Modificado a disposição dos mesmos, de acordo com a figura 5.5, a repetibilidade das mesmas foi garantida dentro de uma faixa aceitável de 5%. O cabo coaxial do acelerômetro 1 foi fixado com cera na estrutura do próprio acelerômetro, de onde segue paralelo à lâmina até o cubo do manipulador, onde os dois cabos foram presos com fita adesiva. O apêndice C mostra as principais características dos acelerômetros piezoelétricos utilizados no sistema de medição.

5.4. Medidores de Vibração

Para cada acelerômetro foi utilizado um amplificador enquanto que um filtro e um indicador de leituras atendiam ambos os sinais de aceleração. No início das medições, que era uma fase de reconhecimento dos sinais (visualização, identificação e calibração), as tres partes, amplificador, filtro e indicador foram largamente empregados. Porém, na fase de aquisição, tanto o filtro como o indicador passaram a ser redundantes, uma vez que as mesmas funções poderiam ser realizadas pelo "software" especializado do sistema de aquisição e tratamento de dados. As principais características do amplificador, filtro e indicador de leitura constam no apêndice C.

5.5. Aquisição e Tratamento de Dados

O sistema de Aquisição e Tratamento de dados utilizado, consiste de uma placa A/D, "software" especializado que permite o tratamento de dados e de um microcomputador com os periféricos, monitor de vídeo e impressora. Dois canais, de um total de quinze, do sistema de aquisição foram utilizados para analisar e armazenar os dados adquiridos. Com os sinais armazenados, foi possível a análise dos mesmos, tanto no domínio do tempo como no da frequência.

5.6. Análise dos Resultados Experimentais

Os resultados experimentais foram levantados através das medidas da aceleração linear dos pontos (a), parte flexível e (b), parte rígida do manipulador.



A variação do parâmetro razão de comprimento R_c , na faixa de 1,07 a 1,15, fez com que as frequências naturais do primeiro modo natural de vibração do manipulador, com razão de massa, $R_m = 0,22$, variassem de 1,17 a 5,86 Hz. Esta variação provoca diferentes comportamentos dinâmicos no manipulador.

De todos os ensaios realizados, os resultados das lâminas L_{11} , L_{12} , L_{13} e L_{14} , foram selecionados para apresentação neste trabalho.

Com o objetivo de identificar as frequências naturais, foram levantados os dados da figura 5.6, que mostra a vibração livre (evolução no tempo e espectro de frequência) de cada uma das lâminas citadas anteriormente. Nesta figura, os gráficos A, C, E e G, apresentam a aceleração do ponto (a) do manipulador com relação ao tempo e B, D, F e H, apresentam as frequências naturais correspondentes. Como se pode observar, a frequência natural correspondente ao primeiro modo de cada uma das lâminas, está situada na faixa de 4.03 (L_{14} , $R_m = 0,80$) à 5,64 Hz (L_{11} , $R_m = 0,22$). Estes resultados, com a precisão apresentada, não foram extraídos dos gráficos da figura 5.6 e sim, de uma tabela de valores fornecida pelo "software" utilizado.

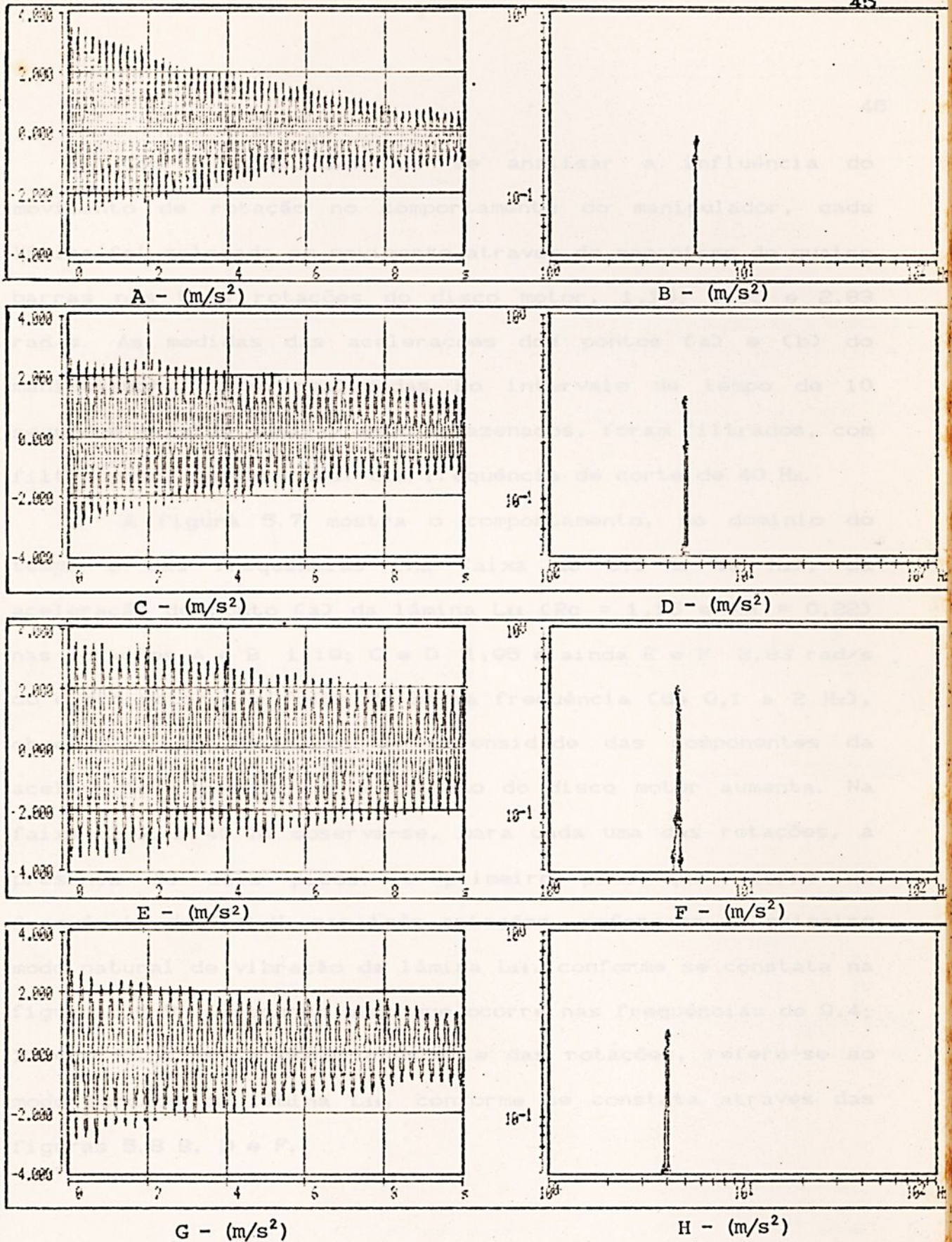


Figura 5.6. Vibração livre das lâminas de $R_c = 1,15$ e R_m : A e B, 0,22; C e D, 0,40; E e F, 0,60 e ainda G e H, 0,80.

Com a finalidade de se analisar a influência do movimento de rotação no comportamento do manipulador, cada lâmina foi colocada em movimento através do mecanismo de quatro barras nas três rotações do disco motor, 1,19; 1,95 e 2,83 rad/s. As medidas das acelerações dos pontos (a) e (b) do manipulador, foram realizadas no intervalo de tempo de 10 segundos e estes sinais, após armazenados, foram filtrados, com filtro passa baixo, ideal com frequência de corte de 40 Hz.

A figura 5.7 mostra o comportamento, no domínio do tempo e das frequências (na faixa de 0,1 a 40 Hz), da aceleração do ponto (a) da lâmina L11 ($R_c = 1,15$ e $R_m = 0,22$) nas rotações A e B 1,19; C e D 1,95 e ainda E e F 2,83 rad/s do disco motor. Na faixa de baixa frequência (de 0,1 a 2 Hz), observa-se um acréscimo de intensidade das componentes da aceleração à medida que a rotação do disco motor aumenta. Na faixa de 2 a 40 Hz observa-se, para cada uma das rotações, a presença de dois picos. O primeiro pico que ocorre na frequência de 5,9 Hz nas três rotações, refere-se ao primeiro modo natural de vibração da lâmina L11, conforme se constata na figura 5.6 B. O segundo pico que ocorre nas frequências de 9,4; 16,4 e 23,4 Hz na ordem crescente das rotações, refere-se ao modo forçado da lâmina L11, conforme se constata através das figuras 5.8 B, D e F.

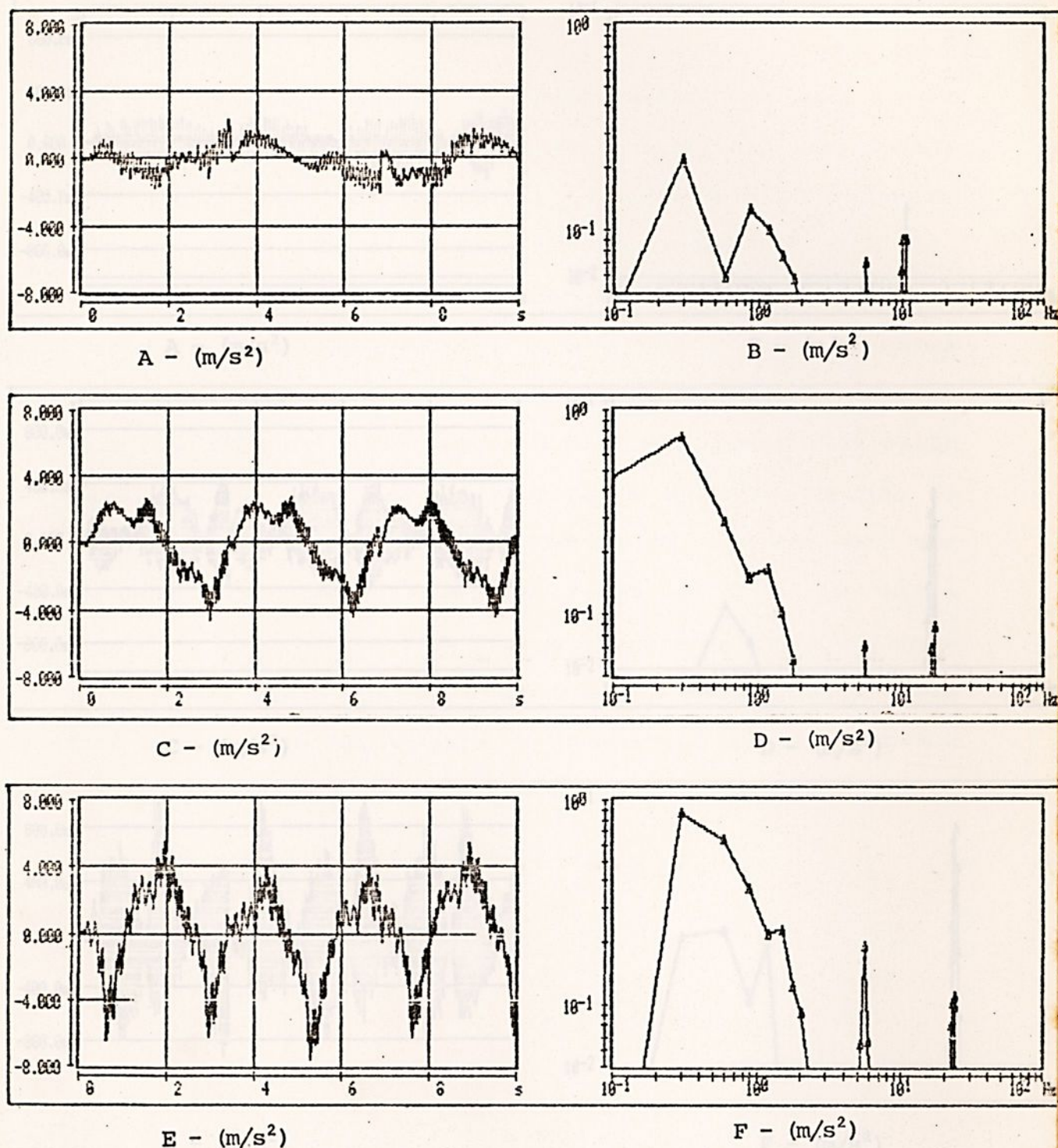


Figura 5.7. Aceleração no domínio do tempo e das frequências do ponto (a) da lâmina L11 ($R_c = 1,15$ e $R_m = 0,22$) nas rotações: A e B, 1,19; C e D, 1,95 e ainda E e F, 2,83 rad/s do disco motor.

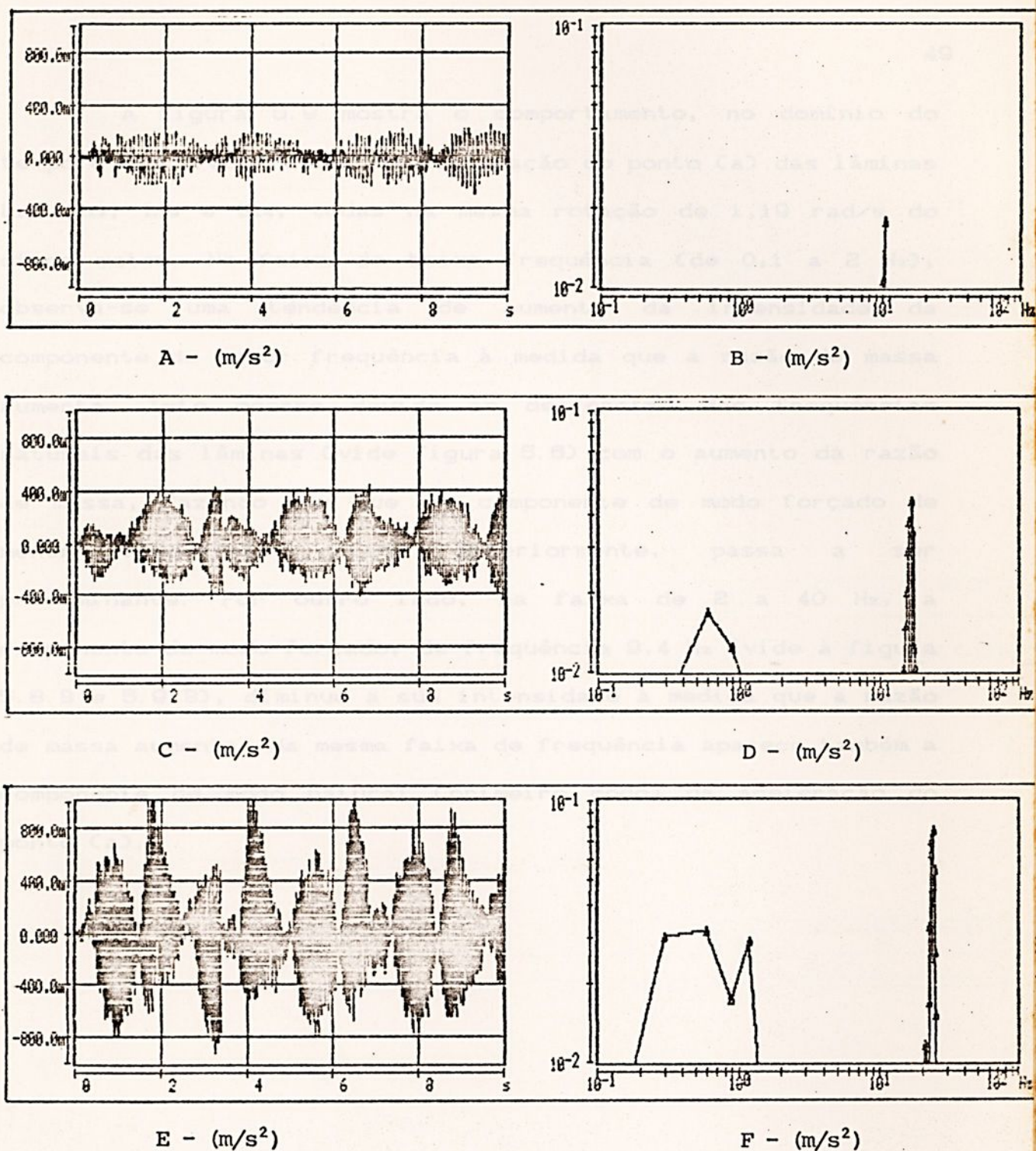
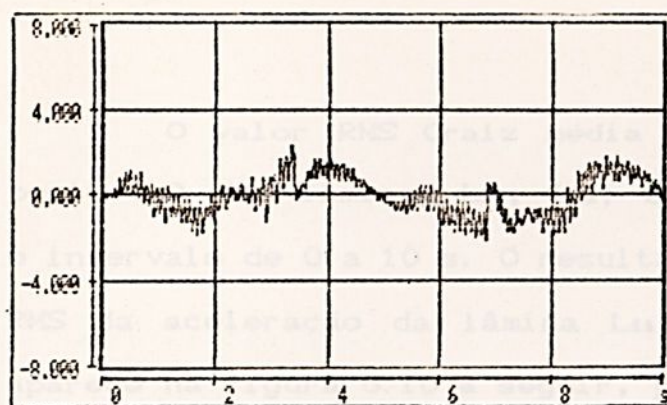
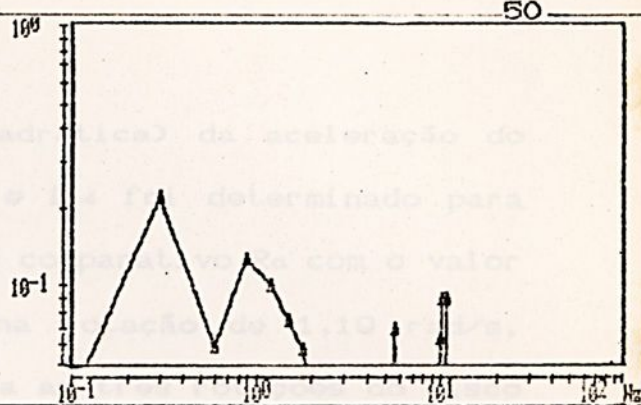


Figura 5.8. Aceleração no domínio do tempo e das frequências do ponto (b) (somente a parte rígida) nas rotações: A e B, 1,19; C e D, 1,95 e ainda E e F, 2,83 rad/s do disco motor.

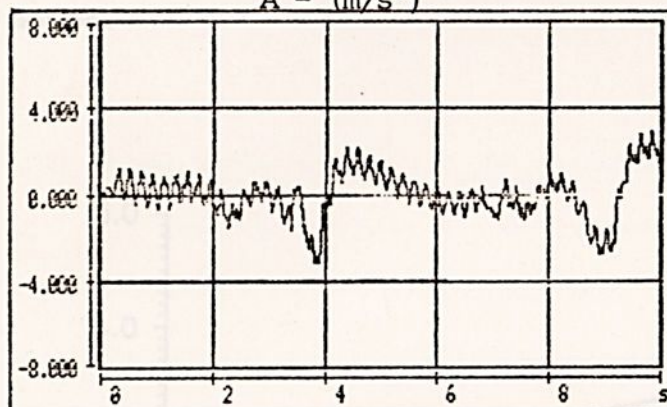
A figura 5.9 mostra o comportamento, no domínio do tempo e das frequências, da aceleração do ponto (a) das lâminas L11, L12, L13 e L14, todas na mesma rotação de $1,19 \text{ rad/s}$ do disco motor. Na faixa de baixa frequência (de $0,1$ a 2 Hz), observa-se uma tendência de aumento da intensidade da componente de menor frequência à medida que a razão de massa aumenta. Isto ocorre devido ao decréscimo das frequências naturais das lâminas (vide figura 5.6) com o aumento da razão de massa, fazendo com que a componente de modo forçado de menor frequência citada anteriormente, passa a ser predominante. Por outro lado, na faixa de 2 a 40 Hz , a componente de modo forçado, de frequência $9,4 \text{ Hz}$ (vide a figura 5.8 B e 5.9 B), diminui a sua intensidade à medida que a razão de massa aumenta. Na mesma faixa de frequência aparece também a componente de modo natural (primeiro modo) da aceleração do ponto (a).



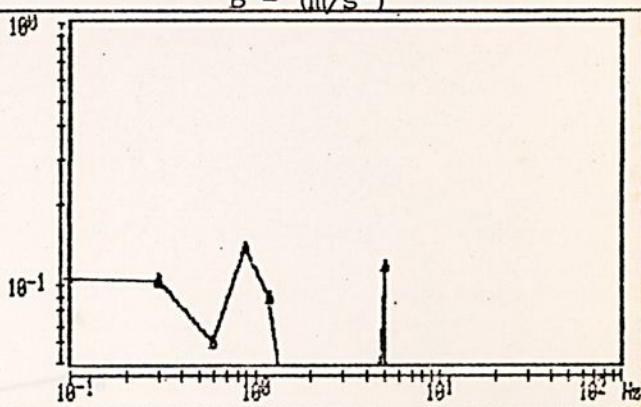
A - (m/s^2)



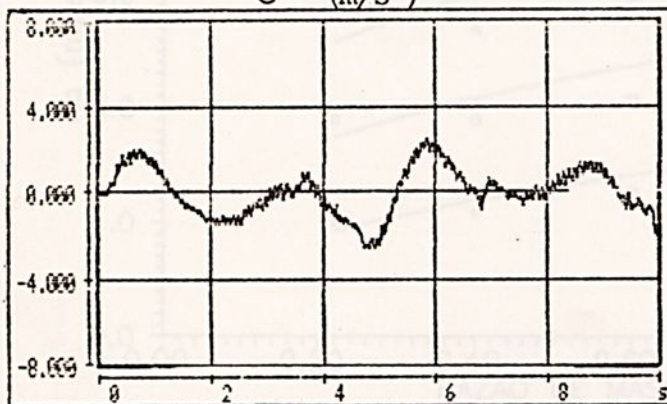
B - (m/s^2)



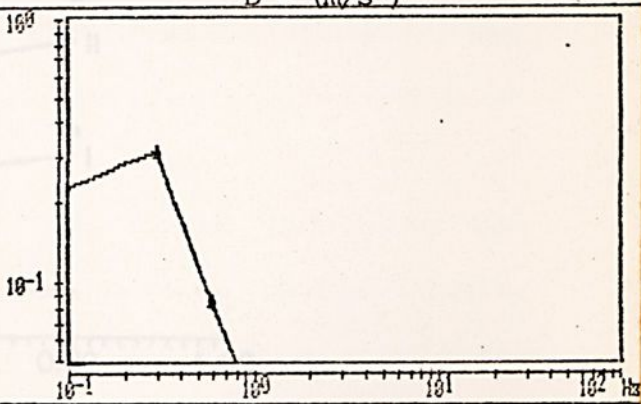
C - (m/s^2)



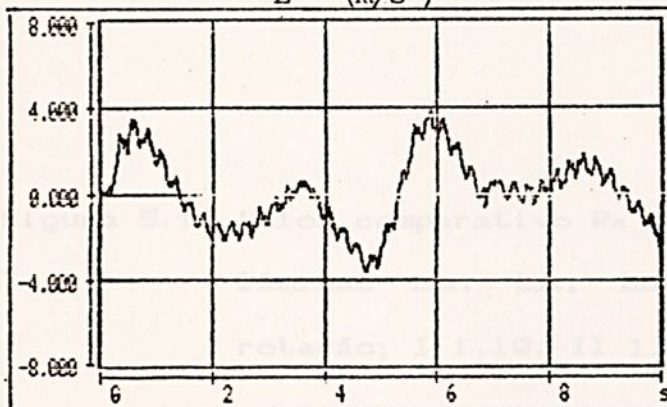
D - (m/s^2)



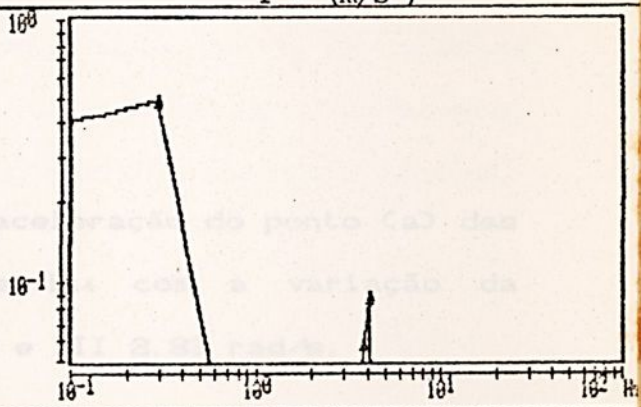
E - (m/s^2)



F - (m/s^2)



G - (m/s^2)



H - (m/s^2)

Figura 5.9. Aceleração do ponto (a), lâminas: A e B, L11; C e D, L12; E e F, L13 e G e H, L14, rotação de 1,19 rad/s.

O valor RMS (raiz média quadrática) da aceleração do ponto (a) das lâminas L11, L12, L13 e L14 foi determinado para o intervalo de 0 a 10 s. O resultado comparativo Ra com o valor RMS da aceleração da lâmina L11, na rotação de 1,19 rad/s, aparece na figura 5.10 a seguir, para as tres rotações do disco motor.

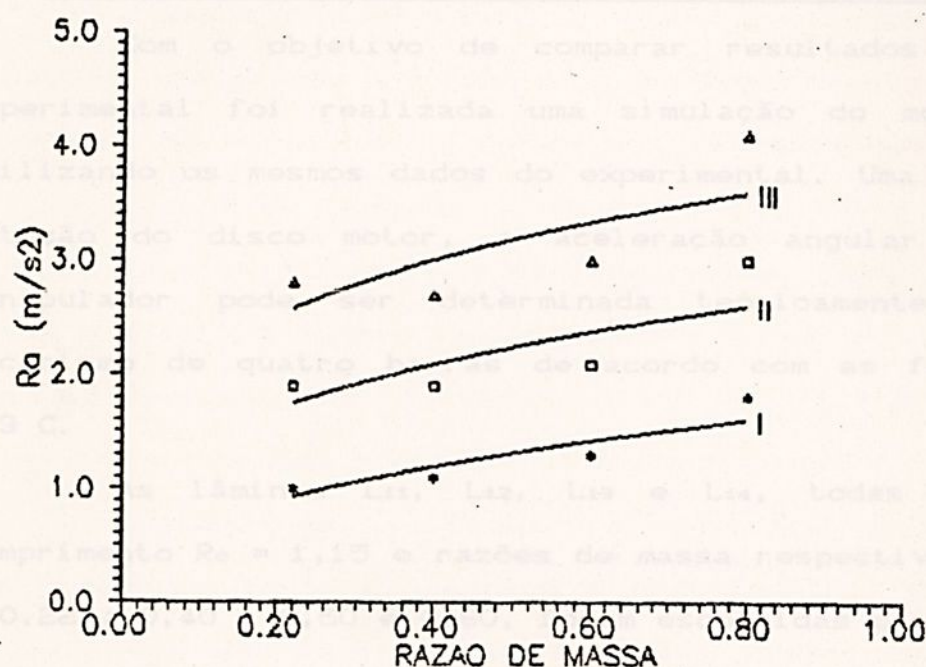


Figura 5.10. Valor comparativo Ra da aceleração do ponto (a) das lâminas L11, L12, L13 e L14 com a variação da rotação; I 1,19, II 1,95 e III 2,83 rad/s.

Observa-se na figura 5.10 a elevação do valor comparativo RMS da aceleração do ponto (a) com o aumento da

razão de massa. Neste caso ($R_c = 1,15$ e $R_m = 0,22 ; 0,40 ; 0,60$ e $0,80$), a frequência natural da lâmina está aproximando-se gradativamente das frequências que compõem a vibração forçada, situada na faixa de $0,2$ a 2 Hz (vide figura 5.8), fazendo com que a influência destas sejam predominantes. Em consequência disto, o valor RMS da aceleração tende a aumentar.

5.7. Comparação entre os Resultados Teórico e Experimental

Com o objetivo de comparar resultados teórico com experimental foi realizada uma simulação do modelo teórico utilizando os mesmos dados do experimental. Uma vez fixada a rotação do disco motor, a aceleração angular do cubo do manipulador pode ser determinada teóricamente através do mecanismo de quatro barras de acordo com as figuras 5.2 e 5.3 C.

As lâminas L_{11} , L_{12} , L_{13} e L_{14} , todas de razão de comprimento $R_c = 1,15$ e razões de massa respectivamente iguais a $0,22 ; 0,40 ; 0,60$ e $0,80$, foram escolhidas para a simulação em questão. Tal escolha deve-se ao fato que estas possuem a maior rigidez, o que favorece a comparação entre os modelos teóricos e experimental; uma vez que o primeiro considera pequenas deflexões. O torque de entrada $u(t)$ para cada lâmina, foi obtido então da seguinte forma:

$$u(t) = p \ddot{\theta}_4(t)$$



O valor de p na equação anterior, foi calculado através da equação (3.2-d) para cada uma das lâminas, para reproduzir com um erro de 5%, a mesma frequência natural (primeiro modo) que se obtém considerando fixo o cubo do manipulador. Considerando então $n = 2$ nas equações (4.1,a,b), foi determinado o deslocamento da extremidade de cada uma das lâminas, citadas anteriormente.

O mesmo deslocamento foi obtido por dupla integração do sinal da aceleração gravado na fase experimental. Através de filtragem do sinal, eliminou-se a influência das frequências, abaixo e acima da frequência natural do primeiro modo, sobre o deslocamento da extremidade de cada lâmina. Isto foi necessário pois, enquanto o modelo teórico separa a deformação elástica da viga do movimento de rotação, o sinal do acelerômetro, carrega ambos os movimentos e ainda os ruídos provenientes do motor.

Desta forma, a figura 5.11 mostra o comportamento dos deslocamentos máximos, teórico e experimental, da extremidade de cada uma das lâminas ($R_m = 0,22$; $0,40$; $0,60$ e $0,80$), ambos na rotação de $1,19$ rad/s do disco motor.



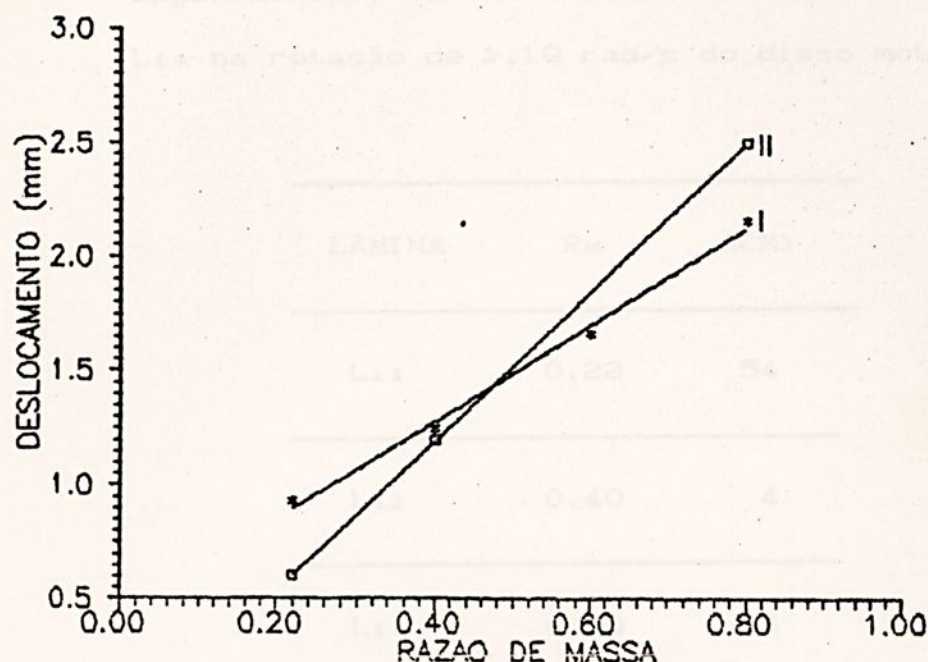


Figura 5.11..Deslocamentos máximos da extremidade das lâminas, L11, L12, L13 e L14 na rotação de 1,19 rad/s do disco motor; I teórico, II experimental.

Observa-se na figura anterior um alinhamento dos quatro pontos teóricos e de tres pontos experimentais. Não considerando o ponto experimental desalinhado (0,60 ; 1,0 mm), a diferença percentual Δ , entre os pontos teóricos e experimentais, encontram-se na tabela 5.1 a seguir:

Tabela 5.1. Comparação entre os deslocamentos máximos, teórico e experimental, da extremidade das lâminas L₁₁, L₁₂ e L₁₄ na rotação de 1,19 rad/s do disco motor.

LÂMINA	R _m	ΔC%
L ₁₁	0,22	54
L ₁₂	0,40	4
L ₁₄	0,80	14

A faixa de 0,40 a 0,50 de razão de massa fornece uma diferença máxima de aproximadamente 5% entre os deslocamentos teórico e experimental. Assim, o modelo teórico do manipulador desenvolvido neste trabalho, fica restrito à faixa de razão de massa de 0,40 a 0,50, para o cálculo do deslocamento da extremidade livre do mesmo, na rotação de 1,19 rad/s do disco motor.

As discrepâncias observadas na figura, podem ser interpretadas pelos fatos de, a) linearização do modelo dinâmico apresentado, b) função peso inadequada utilizada no Critério de Galerkin e c) dupla integração numérica do sinal da aceleração na fase de tratamento de dados experimentais.

A tabela 5.2, mostra as frequências naturais (primeiro modo) de cada uma das lâminas, L_{11} , L_{12} , L_{13} e L_{14} , teórica e experimental. Mostra também a diferença percentual (Δ) entre a primeira e a segunda.

Tabela 5.2. Frequências naturais (primeiro modo), F_t teórica e F_e experimental do manipulador, considerando as lâminas, L_{11} , L_{12} , L_{13} e L_{14} .

LÂMINA	R_m	$F_t(\text{Hz})$	$F_e(\text{Hz})$	$\Delta(\%)$
L_{11}	0,22	6,00	5,64	6,4
L_{12}	0,40	5,09	4,91	3,7
L_{13}	0,60	4,44	4,47	0,7
L_{14}	0,80	4,00	4,03	0,7

O resultado anterior, demonstra um bom desempenho do modelo teórico para o cálculo das frequências naturais do manipulador flexível, na faixa de razão de massa considerada.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

6.1. Conclusões

O modelo teórico do manipulador flexível desenvolvido no presente trabalho, consiste de uma viga (viga de Bernoulli-Euler) engastada num cubo com movimento de rotação. Uma massa concentrada na extremidade livre (massa típica), como se fosse uma carga a ser movimentada, completa o modelo teórico do manipulador. As equações do movimento foram obtidas através do princípio de Hamilton Extendido e o critério de Galerkin foi aplicado para minimizar os erros decorrentes da solução assumida.

Na simulação do modelo teórico do manipulador, verificou-se a diminuição da frequência natural com o aumento da relação entre os momentos de inércia da parte rígida e flexível e também, com o aumento da relação entre as massas típica e a da viga. Para um torque em forma de rampa-degrau e uma relação constante entre as massas típica e a da viga, observou-se uma diminuição, tanto na intensidade do

deslocamento da extremidade livre como também, da influência da vibração (de modo natural) da parte flexível sobre a rígida, à medida que a relação entre os seus momentos de inércia aumenta. Para o mesmo torque e uma relação constante entre os momentos de inércia da parte rígida e flexível, verificou-se um aumento na intensidade do deslocamento da extremidade livre e uma diminuição da influência da vibração da parte flexível sobre a parte rígida, à medida que se aumenta a relação entre as massas típica e a da viga.

O modelo experimental desenvolvido neste trabalho, consiste de um disco com movimento oscilatório, onde se pode fixar lâminas de aço com massas concentradas nas extremidades. O disco é acionado por um mecanismo de quatro barras ligado a um motor elétrico de corrente contínua.

No modelo experimental, verificou-se o aumento da intensidade da aceleração da extremidade de cada uma das lâminas de ensaio, tanto pelo aumento da rotação do motor quanto pelo aumento da relação entre as massas típica e a da viga, na faixa considerada neste trabalho. A influência das vibrações provenientes do mecanismo de quatro barras (harmônicos do torque de excitação), do motor (ruídos) e da estrutura que suporta o modelo experimental, tende a crescer à medida que as frequências destas vibrações se aproximam da frequência natural da lâmina de ensaio. As inversões de velocidade que ocorrem durante o movimento oscilatório do disco móvel, excitam os modos naturais de vibração da lâmina, influenciando desta forma, na aceleração da extremidade do manipulador.



Comparando resultados teóricos com experimentais, verificou-se um bom desempenho do modelo teórico na determinação das frequências naturais. O mesmo desempenho não aconteceu na determinação do deslocamento da extremidade livre do manipulador, restringindo então sua aplicação, para uma menor faixa de razão de massa na rotação utilizada para o disco motor.

6.2. Recomendações

Para aperfeiçoamento do presente trabalho, recomenda-se: a inclusão do termo não linear $(y\ddot{\theta})^2$ na equação (2.3-a) do modelo teórico, no sentido de se obter uma menor diferença entre os resultados teóricos e experimentais; A substituição do motor elétrico utilizado no modelo experimental, por outro que permita a programação do torque de entrada e do posicionamento do manipulador (manobras programadas), para assegurar as mesmas condições iniciais de movimento para cada lâmina ensaiada; A inclusão da rigidez flexional EI como um parâmetro a ser explorado na simulação do sistema dinâmico.

REFERÊNCIAS

- [1] BEER, P. F. e JOHNSTON, E. R.; Resistência dos Materiais; MacGraw-Hill, São Paulo, 1989.
- [2] FORCELINE, F. A., BACK, N. e SELKE, C. A. C.; Um Estudo sobre a Modelagem Dinâmica de Manipuladores Robóticos Flexíveis; Anais do II Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste, 1992.
- [3] KRISHINAMURTHY, K.; Dynamic Modelling of a Flexible Cylindrical Manipulator; Journal of Sound and Vibration, 132(1), 143-154, 1989.
- [4] LAURA, P. A. A., POMBO, J. L. AND SUSEMIHL, E. A.; A Note on the Vibration of a Clamped-Free Beam With a Mass on the Free End; Journal of Sound and Vibration, 37(2), 161-168, 1974.
- [5] MEIROVITCH, L.; Analytical Methods in vibrations; MacMillan Publishing co., New york, 1967.
- [6] MEIROVITCH, L.; Elements of Vibration Analysis; MacGraw-Hill, Tokio, Japan, 1975.
- [7] PAN, Y. C., SCOTT, R. A. e ULISOY, A. G.; Dynamic Modeling and Simulation of Flexible Robots With Prismatic Joints; ASME Journal of Mechanical Design, vol.112, sept.,

307-314, 1990.

- [8] PAN, Y. C., SCOTT, R. A. e ULISOY, A. G.; Experimental Model Validation for a Flexible Robot With a Prismatic Joint; ASME Journal of Mechanical Design, vol.112, sept., 315-323, 1990.
- [9] PAZ, M.; Microcomputer-Aided Engineering, Structural Dynamics ; Van Nostrand Reinhold co., New York, 1986.
- [10] SHIGLEY, J. E.; Theory of Machines and Mechanisms; MacGraw-Hill, Tokio, Japan, 1981.
- [11] YIGIT, A., SCOTT, R. A. and ULISOY, A. G.; Flexural motion of a Radially Rotating Beam Attached to a Rigid Body; Journal of Sound and Vibration, 121(2), 201-210, 1988.

A.1. Derivadas Parciais

APÊNDICE A

RESULTADOS INTERMEDIÁRIOS DO CAPÍTULO II

A.1. Derivadas Parciais

$$\partial L / \partial \dot{\theta} = \left[\int_0^1 m(a-s)^2 ds + I_0 \right] \dot{\theta} + \int_0^1 m(a-s)y' ds$$

$$\partial L / \partial y' = \left[\int_0^1 m(a-s) ds \right] \dot{\theta} + \int_0^1 m y' ds$$

$$\partial L / \partial y'' = - \int_0^1 E I y'' ds$$

A2. Integração por Partes

$$\int_{t_0}^{t_f} [p\dot{\theta} + \int_0^1 m(a-s)y' ds] \delta\dot{\theta} dt = - \int_{t_0}^{t_f} [p\ddot{\theta} + \int_0^1 m(a-s)y'' ds] \delta\theta dt$$

$$\int_{t_0}^{t_f} (q\dot{\theta} + \int_0^1 my' ds) \delta y' dt = - \int_{t_0}^{t_f} (q\ddot{\theta} + \int_0^1 my'' ds) \delta y dt$$

$$\int_{t_0}^{t_f} (\int_0^1 EI y'' ds) \delta y'' dt = \int_{t_0}^{t_f} (\int_0^1 EI y'''' ds) \delta y dt$$

A3. Integrais S_{ij} , R_{ij} , Q_i e Q_j

Sabendo-se que $m = \bar{m} + m\delta(s)$ e que $\alpha = s/l$,
as integrais S_{ij} , R_{ij} , Q_i e Q_j são escritas,

$$S_{ij} = \bar{m}l A_{ij} + mB_{ij}$$

$$R_{ij} = (\beta_j l)^4 A_{ij}$$

$$Q_i = \bar{m}l^2 D_i$$

$$Q_j = \bar{m}l^2 D_j$$

onde

$$A_{ij} = \int_0^1 \phi_i(\alpha) \phi_j(\alpha) d\alpha$$

$$B_{ij} = \int_0^1 \phi_i(\alpha) \phi_j(\alpha) 1 \delta(\alpha) d\alpha$$

$$D_i = \int_0^1 \left(\frac{a}{l} - \alpha \right) \phi_i(\alpha) d\alpha + (m_l / \bar{m} l) \int_0^1 (a - \alpha l) \phi_i(\alpha) \delta(\alpha) d\alpha$$

D_j é obtido a partir de D_i trocando-se o índice i por j .

A4. Coeficientes A_{ij} , D_i e B_{ij}

Lembrando que as funções $\phi_i(\alpha)$ e $\phi_j(\alpha)$, correspondem ao i -ésimo e j -ésimo modo natural de vibração da viga (viga em balanço), pode-se então utilizar a condição de ortogonalidade destes modos para determinar a integral A_{ij} .

$$A_{ij} = \left[\int_0^1 \phi_i(\alpha) \phi_j(\alpha) d\alpha \right] \delta_{ij}$$

onde δ_{ij} é a função Delta de Kronecker, isto é, $\delta_{ij} = 1$ para $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Definindo

$$A_i \triangleq \int_0^1 \phi_i^2(\alpha) d\alpha,$$

APENDICE B

o coeficiente A_{ij} pode ser escrito da seguinte forma:

$$A_{ij} = A_i \delta_{ij}.$$

As integrais A_i , B_{ij} e D_i foram resolvidas e são escritas,

$$A_i = \frac{c^2}{\beta_{i1}} \left(\frac{c_{2i}}{c_{1i}} \right)^2 \left\{ \beta_{i1} - c_{1i} c_{2i} + \left[3 + \left(\frac{c_{1i}}{c_{2i}} \right)^2 \right] [(\sin 2\beta_{i1})/4] - \left[1 + \left(\frac{c_{1i}}{c_{2i}} \right)^2 \right] [(\sinh 2\beta_{i1})/4] - 2 \cos \beta_{i1} \sinh \beta_{i1} \right\} \quad (\text{A.1-a})$$

$$D_i = \frac{2cc_{2i}}{\beta_{i1}c_{1i}} \left[\left[\left(\frac{a}{l} - 1 \right) \frac{c_{1i}}{c_{2i}} - \frac{1}{\beta_{i1}} + (m_1 a / \bar{m} l^2) \beta_{i1} \cot g \beta_{i1} \sinh \beta_{i1} \right] \right] \quad (\text{A.1-b})$$

$$B_{ij} = \frac{4c^2}{c_{1i}c_{1j}} \sin \beta_{i1} \sinh \beta_{i1} \sin \beta_{j1} \sinh \beta_{j1} \quad (\text{A.1-c})$$

APÊNDICE B

CÁLCULOS INTERMEDIÁRIOS DO CAPÍTULO III

B.1. Frequências e Modos Naturais de Vibração do Manipulador

As frequências e os modos naturais de vibração do manipulador são obtidos através dos autovalores e autovetores da equação (3.1). A tabela B.1 mostra as frequências e os respectivos modos naturais do manipulador em questão.



Tabela B.1. Frequências e os r-ésimos modos naturais de vibração do manipulador.

r	ω_r	q_{1r}/θ_r
modo de corpo rígido		
0	0	0
1	$\left[\frac{A_1(\beta_1 l)^4 EI/l^3}{\bar{m}l A_1 + m l B_{11} - (\bar{m}l^2 D_1)^2/p} \right]^{0,5}$	$-\frac{p}{\bar{m}l^2 D_1}$

Uma vez determinadas as frequências e os respectivos modos naturais, as coordenadas $q_1^h(t)$ e $\theta^h(t)$ podem ser obtidas pela superposição de seus respectivos modos. O índice "h" indica que se trata da solução homogênea da equação (3.1).

$$q_1^h(t) = \sum_{r=0}^1 q_{1r} \sin(\omega_r t + \psi_r) \quad (\text{B.1-a})$$

$$\theta^h(t) = \sum_{r=0}^1 \theta_r \sin(\omega_r t + \psi_r) \quad (\text{B.1-b})$$

onde q_{1r} , θ_r e ψ_r , $r = 0, 1$, são constantes que dependem das condições iniciais que se dá ao manipulador. As relações entre q_{1r} e θ_r para cada modo, junto com as condições iniciais, completam o número de equações necessárias para o cálculo das constantes.

B.2. Solução Geral da Equação (3.1)

Sendo o torque $u(t)=u_0$ constante, a solução geral da equação (3.1) pode ser escrita da seguinte forma:

$$q_1(t) = q_1^h(t) + q_1^p \quad (\text{B.2-a})$$

$$\theta(t) = \theta^h(t) + \theta^p(t) \quad (\text{B.2-b})$$

O índice p que aparece nas equações anteriores, está indicando a solução particular da equação (3.1). Fazendo então,

$$q_1^p = q_0 \quad (\text{B.3-a})$$

$$\theta^p(t) = a_1 t^2 + a_2 t + a_3 \quad (\text{B.3-b})$$

onde, q_0 , a_1 , a_2 , e a_3 são constantes a serem determinadas, através da substituição das equações (B.2-a,b) na equação (3.1), a solução geral pode então ser escrita:

$$q_1(t) = q_1^h(t) + q_0 \quad (\text{B.4-a})$$

$$\theta(t) = \theta^h(t) + \frac{1}{2} \frac{u_0}{p} t^2 \quad (\text{B.4-b})$$

onde

$$q_0 = - \frac{\bar{m} l^2 D_1 u_0 / p}{A_1 (\beta_1 l)^4 EI / l^3} \quad (\text{B.4-c})$$

APÊNDICE C

Tabela C.1: Acelerômetros INSTRUMENTAÇÃO

Algumas características da instrumentação utilizada neste trabalho, estão descritas nas seguintes tabelas;

C.1. Acelerômetros, C.2. Amplificador, C.3. Filtro e C.4. Indicador de leitura.

a-acelerômetro piezoeletrico transversal, marca VEB METRA H&S;
 s-sensibilidade de voltagem; C-capacitância com 1,5 m de cabo;
 C_c-capacitância do cabo de 1,5 m; f_r-frequência de ressonância

Tabela C.1. Acelerômetros

a	tipo	s mV/ms ⁻²	C nF	Cc nF	ω_r KHz
1	KB 10 Nr 03360	1,22	1,50	0,14	10
2	KB 10 Nr 6115	1.10	0,64	0,15	15

a-acelerômetro piezoelétrico transversal, marca VEB METRA Meß;
s-sensitividade de voltagem; C-capacitância com 1,5 m de cabo;
Cc-capacitância do cabo de 1,5 m; ω_r -frequência de ressonância

Tabela C.2. Amplificador

Marca e modelo	VEB ROBOTRON, 00028 Amplificador Integrador
----------------	---

Faixa de frequência utilizada	(0,5 Hz - 15 KHz) $\pm$ 3 dB
-------------------------------	------------------------------

Faixa de aceleração utilizada	(0,032 - 32) ms ⁻²
-------------------------------	-------------------------------

dB-decibel

Tabela C.3. Filtro

Marca e modelo	VEB ROBOTRON, 01013; Filtro de banda estreita
Faixa de Frequência	(0,2 - 2000) Hz
Largura da Banda	de 1,5 a 24%
Ganho	de -30 a +10 dB

Tabela C.4. Indicador de Leitura

Marca e Modelo	VEB ROBOTRON, 02036; Indicador
----------------	--------------------------------

Faixa de Frequência	(0,5 Hz - 22KHz) $\pm$ 0,5 dB
---------------------	-------------------------------

	Fundo de escala(mV)	Ganho(dB)
Faixa de	1000	100
Medição	100	20
	10	40

APÊNDICE D

LÂMINAS

Dados referentes ao Conjunto de Lâminas de Aço utilizado neste Trabalho

Material: lâmina de aço especial utilizado em portas de aço dobradiças

$$E = 2,069 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

espessura $e = 0,50 \text{ mm}$

$$\mu = 7,8 \text{ g/cm}^3$$

largura $h = 25,40 \text{ mm}$

Comprimentos:

Lâmina	L(mm)	l(mm)
L1	300	230
L2	400	330
L3	500	430
L4	600	530

L comprimento total; l comprimento da parte flexível



