

Fernando Gomes de Andrade

Controlabilidade para sistemas de equações diferenciais

São José do Rio Preto

2014

Fernando Gomes de Andrade

Controlabilidade para sistemas de equações diferenciais

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Equações Diferenciais Parciais, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus São José do Rio Preto.

Orientadora: Profa. Dra. Andréa Cristina Prokopczyk Arita

Coorientador: Prof. Dr. Luís Antônio Fernandes Oliveira

São José do Rio Preto

2014

Fernando Gomes de Andrade

Controlabilidade para sistemas de equações diferenciais

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Equações Diferenciais Parciais, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Andréa Cristina Prokopczyk Arita
Professor Assistente Doutor
UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Profa. Dra. Michelle Fernanda Pierri Hernandez
Professor Doutor
USP - Ribeirão Preto

Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos
Professor Adjunto
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 21 de março de 2014.

À minha família,
dedico.

Agradecimentos

Agradeço à Deus, pela permissão de chegar até aqui.

Agradeço também a minha família, por todo apoio com meus estudos. Sem eles a concretização desse trabalho não seria possível.

À Profa. Dra. Andréa Cristina Prokopczyk Arita, pela imensurável colaboração na realização deste trabalho, por toda a paciência durante os seminários, e por toda ajuda prestada. Agradeço à Deus a permissão de ter conhecido e trabalhado com ela.

Aos professores do Departamento de Matemática da FEIS, por motivarem-me a seguir em frente e nunca desistir. Em especial, agradeço ao Prof. Dr. Luís Antônio Fernandes Oliveira pelos anos de orientação, desde a Iniciação Científica durante a graduação até as sugestões como co-orientador deste trabalho.

Aos professores Michelle e Waldemar por aceitarem o convite para compor a banca examinadora.

As minhas amigas de graduação Aldine e Fernanda pelas horas de conversa e brincadeiras, pelas confidências e que, mesmo longe, torcem por mim. Às companheiras de estudo Marta e Jucilene, agradeço a ajuda no início deste trabalho. Ao Luís Carlos, amigo de todas as horas, agradeço pelo apoio e pelos conselhos nas horas difíceis.

À CAPES pelo apoio financeiro.

*“Devemos aprender durante toda a
vida, sem imaginar que a sabedoria
vem com a velhice.”*

(Platão)

Resumo

Esta dissertação é um estudo sobre a controlabilidade de sistemas de controle descritos por equações diferenciais abstratas. Primeiramente, são apresentados alguns resultados de controlabilidade para sistemas lineares e sem retardo. Em seguida, é estabelecido um critério para a controlabilidade aproximada de sistemas lineares com retardo, através da comparação entre o conjunto atingível destes sistemas com o conjunto atingível dos sistemas sem retardo. Por fim, é apresentada uma generalização do resultado anterior para sistemas do tipo neutro com retardo.

Palavras-chave: Semigrupos analíticos, Potências fracionárias, Equações diferenciais abstratas, Controlabilidade.

Abstract

This dissertation is a study on the controllability of control systems described by abstract differential equations. First, some results of controllability for linear systems without delay are presented. Then, a criterion for the approximate controllability of linear systems with delay is established by comparing the reachable set of these systems with the reachable set of the systems without delay. Finally, a generalization of the previous result for systems of neutral type with delay is presented.

Keywords: *Analytic semigroups, Fractional powers, Abstract differential equations, Controllability.*

Sumário

Introdução	10
1 Semigrupos de operadores lineares limitados	13
1.1 Semigrupos uniformemente contínuos	13
1.2 Semigrupos fortemente contínuos	15
1.3 Operador espectral de Riesz	20
1.4 Semigrupos analíticos	22
1.5 Potências fracionárias de operadores lineares fechados	49
2 Existência de solução para equações diferenciais funcionais	64
2.1 Problema de Cauchy abstrato não homogêneo	64
2.2 Existência de solução para equações diferenciais funcionais neutras	69
3 Controlabilidade	90
3.1 Sistemas de controle linear	90
3.2 Sistema de controle linear com retardo	98
3.3 Sistemas de controle do tipo neutro com retardo	106
A Resultados Auxiliares	114

Introdução

A presente dissertação é um estudo sobre a controlabilidade de algumas classes de sistemas de controle descritos de forma abstrata, o que nos permite usar a Teoria de semigrupos de operadores lineares limitados como ferramenta.

Na literatura, a controlabilidade de sistemas lineares em espaços de dimensão finita tem sido extensivamente estudada. Em particular, podemos citar os livros de O'Reilly [23], Wonham [32] e Dragan e Halanay [8]. Assim, vários autores têm estendido o conceito de controlabilidade para sistemas em espaços de dimensão infinita. Neste caso, podemos citar, por exemplo, [1, 20, 21, 22, 28, 30].

A abordagem em grande parte dos trabalhos sobre controlabilidade em sistemas de dimensão infinita é através de teoremas de ponto fixo. Porém, em [20], Naito usa a decomposição do espaço onde estão as funções controle para comparar a controlabilidade de um sistema semi-linear com a controlabilidade do sistema linear associado a ele. O mesmo é feito em [25] por Hernández, Henríquez e Prokopczyk-Arita para sistemas com retardo.

Outros tipos de sistemas que têm recebido muita atenção nos últimos anos são os sistemas do tipo neutro. O interesse por estes tipos de sistemas se deve ao fato de que eles aparecem em muitas áreas da matemática aplicada. Entre os muitos trabalhos existentes, citamos o livro de Hale e Verduyn-Lunel [16] e o artigo de Hernández e Henríquez [13], uma vez que o primeiro trata de um livro clássico e o segundo aborda o problema de existência de solução para o caso neutro usando a teoria de semigrupos.

Com relação a controlabilidade dos sistemas do tipo neutro, a maioria dos trabalhos existentes resolvem o problema usando teoremas de ponto fixo e exibindo um controle apropriado, veja por exemplo [2, 11, 19]. Mesmo em [19], cuja proposta é usar a controlabilidade do sistema linear para garantir a controlabilidade do sistema neutro, a técnica usada ainda consiste em exibir um controle específico. Já em [14], Hernández e Henríquez usam as ideias de [20, 25] para um sistema do tipo neutro, porém de segunda ordem.

Dessa forma, o objetivo inicial deste trabalho é estudar alguns resultados apresentados em [6] sobre

a controlabilidade do sistema linear descrito por

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$x(0) = x^0 \in X, \quad (2)$$

onde $x(t) \in X$ e $u(t) \in U$ para todo $t \geq 0$, X é o espaço dos estados, U é o espaço de controle e ambos espaços de Hilbert, $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ e $B : U \rightarrow X$ é um operador linear limitado.

Na sequência, estudaremos os resultados em [25] que comparam a controlabilidade do sistema linear (1)-(2) com a controlabilidade do sistema com retardo

$$x'(t) = Ax(t) + L(t)(x_t) + Bu(t), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$x(0) = \varphi, \quad (4)$$

onde, além das mesmas condições do problema acima, $x_t : [-r, 0] \rightarrow X$ é definida por $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ para $\theta \in [-r, 0]$, $\varphi \in C([-r, 0], X)$ e $L : [0, \tau] \rightarrow \mathcal{L}(C([-r, 0], X), X)$ é fortemente contínua.

Por último, motivados pela falta de um resultado que compare a controlabilidade do sistema linear (1)-(2) com um sistema do tipo neutro, procuramos generalizar o resultado obtido em [25] para este caso.

Convém observar ainda que, da literatura sobre controlabilidade, sabe-se que muitos problemas reais, que podem ser descritos por sistemas de controle da forma abstrata, não podem ser exatamente controláveis. Diante desse fato, iremos considerar a controlabilidade aproximada.

Organizamos esta dissertação da seguinte forma: no primeiro capítulo, introduzimos as ferramentas necessárias para nosso estudo. Mais especificamente, apresentamos na seções 1.1 e 1.2 os resultados clássicos sobre semigrupos uniformemente contínuos e fortemente contínuos. Na seção 1.3, apresentamos o conceito de operador espectral de Riesz com o intuito de considerar um exemplo clássico de semigrupo gerado pelo operador “derivada segunda”. Já nas seções 1.4 e 1.5, apresentamos os semigrupos analíticos e as potências fracionárias de um operador linear fechado. Ressaltamos que nas três primeiras seções deste capítulo não faremos a demonstração de nenhum resultado, visto que nosso foco principal é nas duas últimas seções, cujos resultados serão utilizados nos Capítulos 2 e 3.

O capítulo 2 é dedicado ao estudo de existência de solução para dois problemas distintos. Primeiramente, na seção 2.1, consideramos o problema de Cauchy abstrato não homogêneo. Já na seção 2.2, tratamos de uma equação do tipo neutro com retardo finito.

No último capítulo, fazemos um estudo da controlabilidade dos sistemas estudados no capítulo anterior. Na seção 3.1, analisamos a controlabilidade exata e aproximada do sistema linear sem retardo (1)-(2). Na seção 3.2, passamos a estudar o sistema com retardo finito (3)-(4) e a relação existente entre o conjunto atingível deste sistema com o conjunto atingível do sistema linear e sem retardo (1)-(2). Por fim, na seção 3.3, estudamos o caso neutro, apresentando um resultado semelhante ao da seção 3.2.

Finalizamos esta dissertação com o Apêndice, onde apresentamos resultados importantes, tais como o Princípio da Limitação Uniforme, o Teorema do ponto fixo de Banach, dentre outros que são relevantes para desenvolvimento deste trabalho.

Semigrupos de operadores lineares limitados

Neste capítulo vamos estudar os principais resultados da Teoria de semigrupos de operadores lineares limitados, que será a ferramenta básica para o desenvolvimento dos próximos capítulos.

Inicialmente vamos apenas enunciar os principais conceitos e resultados referentes aos semigrupos uniformemente contínuos e aos semigrupos fortemente contínuos, deixando os detalhes para as seções 1.4 e 1.5, onde apresentaremos os semigrupos analíticos e as potências fracionárias de um operador linear fechado, respectivamente. Optamos por essa escolha uma vez que esses dois últimos tópicos constituem as ferramentas que usaremos para o estudo da equação neutra nos Capítulos 2 e 3.

Assumiremos por todo este capítulo que X é um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$, $\mathcal{L}(X)$ é o espaço das transformações lineares limitadas de X em X e $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.

1.1 Semigrupos uniformemente contínuos

Nesta seção vamos definir um semigrupo uniformemente contínuo e destacar algumas de suas principais propriedades. As demonstrações dos resultados não serão apresentadas aqui, porém deixaremos indicada uma referência de sua demonstração para o leitor interessado.

Definição 1.1. *Uma família a um parâmetro $(T(t))$, com $0 \leq t < +\infty$, de operadores lineares limitados em X é um semigrupo de operadores lineares limitados em X se:*

(i) $T(0) = I$, onde I denota o operador identidade em X ;

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \in \mathbb{R}_+$.

Definição 1.2. Um semigrupo de operadores lineares $(T(t))_{t \geq 0}$ é uniformemente contínuo se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\| = 0.$$

Definição 1.3. Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um semigrupo de operadores lineares limitados. O operador $A : D(A) \subset X \rightarrow X$, definido por

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \left. \frac{d^+}{dt} T(t)x \right|_{t=0}, \text{ para } x \in D(A),$$

onde $D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$, é o gerador infinitesimal do semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$.

Observação: Se $(T(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo, então a função $t \mapsto T(t)$ é contínua em $[0, +\infty)$.

Teorema 1.4. Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo se, e somente se, A é um operador linear limitado.

Demonstração. Parte desse resultado segue pois, como A é limitado, a série de operadores lineares $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$ é convergente e então, podemos definir $T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$.

Para maiores detalhes veja [24, Theorem 1.2, pág. 2].

Pelas definições e pelo resultado anterior, segue que:

- 1-) Um semigrupo tem um único gerador infinitesimal.
- 2-) Se $(T(t))_{t \geq 0}$ é uniformemente contínuo, então seu gerador é um operador linear limitado.
- 3-) Todo operador linear limitado A é gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo.

O próximo resultado nos diz que, se dois semigrupos tem o mesmo gerador infinitesimal, então eles são iguais.

Teorema 1.5. Sejam $(T(t))_{t \geq 0}$ e $(S(t))_{t \geq 0}$ semigrupos de operadores lineares limitados. Se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t) - I}{t} = A = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t) - I}{t},$$

então $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$.

Demonstração. [24, Theorem 1.3, pág. 3].

Teorema 1.6. *Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um semigrupo de operadores lineares limitados uniformemente contínuo. Então:*

- a) existe um único operador linear limitado A tal que $T(t) = e^{tA}$, para todo $t \geq 0$;*
- b) existe uma contante $\omega \geq 0$ tal que $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$, para todo $t \geq 0$;*
- c) o operador A do item (a) é o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t \geq 0}$;*
- d) a função $t \mapsto T(t)$ é diferenciável em norma e*

$$\frac{d}{dt}T(t) = AT(t) = T(t)A.$$

Demonstração. [24, Corollary 1.4, pág. 3].

1.2 Semigrupos fortemente contínuos

Nesta seção vamos enunciar o conceito de semigrupo fortemente contínuo e suas propriedades básicas. Como na seção anterior, deixaremos apenas uma referência para a demonstração dos resultados citados.

Definição 1.7. *Um semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ de operadores lineares limitados em X é fortemente contínuo se*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x, \text{ para todo } x \in X,$$

ou equivalentemente,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)x - x\| = 0, \text{ para todo } x \in X.$$

Um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados em X será chamado *semigrupo de classe C_0* ou *C_0 -semigrupo*.

Teorema 1.8. *Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo. Então existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Demonstração. Essa demonstração segue do Princípio da limitação uniforme e pode ser encontrada em [24, Theorem 2.2, pág. 4].

Corolário 1.9. *Se $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo então, para todo $x \in X$, $t \mapsto T(t)x$ é uma aplicação contínua de $[0, +\infty)$ em X .*

Demonstração. [24, Corollary 2.3, pág. 4].

Teorema 1.10. *Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo e A seu gerador infinitesimal. Então:*

- a) para $x \in X$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \, ds = T(t)x$;
- b) para $x \in X$, $\int_0^t T(s)x \, ds \in D(A)$ e $A \left(\int_0^t T(s)x \, ds \right) = T(t)x - x$;
- c) para $x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ e $\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$;
- d) para $x \in D(A)$, $T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\rho)Ax \, d\rho = \int_s^t AT(\rho)x \, d\rho$.

Demonstração. [24, Theorem 2.4, págs. 4-5].

Corolário 1.11. *Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$, então $D(A)$ é denso em X e A é um operador linear fechado.*

Demonstração. [24, Corolary 2.5, págs. 5-6].

Teorema 1.12. *Sejam $(T(t))_{t \geq 0}$ e $(S(t))_{t \geq 0}$ dois C_0 -semigrupos de operadores lineares limitados com geradores infinitesimais A e B , respectivamente. Se $A = B$, então $T(t) = S(t)$, para todo $t \geq 0$.*

Demonstração. [24, Theorem 2.6, pág. 6].

Teorema 1.13. *Seja A o gerador infinitesimal do C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$. Se $D(A^n)$ é o domínio de A^n , $n \in \mathbb{N}$, então $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ é denso em X .*

Demonstração. [24, Theorem 2.7, págs. 6-7].

Nosso próximo objetivo é enunciar o Teorema de Hille-Yosida, que é um dos principais resultados da Teoria de semigrupos de operadores lineares fortemente contínuos. Este teorema é importante pois nos fornece uma condição para que um determinado operador linear seja o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo. Porém, antes de apresentarmos este resultado precisamos de algumas definições preliminares.

Definição 1.14. *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear (não necessariamente limitado) e considere o operador $(\lambda I - A)$, onde $\lambda \in \mathbb{C}$ e I é o operador identidade definido em $D(A)$. Se $(\lambda I - A)^{-1}$ existe e é limitado, chamamos-o de operador resolvente de A .*

Definição 1.15. *O conjunto*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \exists (\lambda I - A)^{-1} \text{ e } (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}$$

é chamado conjunto resolvente de A .

Quando $\lambda \in \rho(A)$, denotaremos o operador resolvente de A associado a λ por $R(\lambda : A)$.

Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo. Pelo Teorema 1.8, sabemos que existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, para todo $t \geq 0$. Quando $\omega = 0$, dizemos que o *semigrupo é uniformemente limitado*. Se, além disso, $M = 1$, o chamamos *C_0 -semigrupo de contração*.

Lema 1.16. *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear fechado com $\overline{D(A)} = X$, $\mathbb{R}_+ \subset \rho(A)$ e $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$, $\forall \lambda > 0$. Então*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda : A)x = x, \text{ para todo } x \in X.$$

Demonstração. [24, Lemma 3.2, pág. 9].

Definição 1.17. *Para todo $\lambda \in \rho(A)$, definimos a aproximação de Yosida do operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ por*

$$A_\lambda = \lambda A R(\lambda : A) = \lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I.$$

Lema 1.18. *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear fechado com $\overline{D(A)} = X$, $\mathbb{R}_+ \subset \rho(A)$ e $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$, $\forall \lambda > 0$. Se A_λ é a aproximação de Yosida de A , então*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = Ax, \text{ para } x \in D(A).$$

Demonstração. [24, Lemma 3.3, pág. 10].

Lema 1.19. *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear fechado com $\overline{D(A)} = X$, $\mathbb{R}_+ \subset \rho(A)$ e $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$, $\forall \lambda > 0$. Se A_λ é a aproximação de Yosida de A , então A_λ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contração uniformemente contínuo $(e^{tA_\lambda})_{t \geq 0}$. Além disso, para todo $x \in X$ e $\lambda, \mu > 0$, temos*

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|.$$

Demonstração. [24, Lemma 3.4, pág. 10].

Teorema 1.20 (Teorema de Hille-Yosida). *Um operador linear A (não necessariamente limitado) é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contração $(T(t))_{t \geq 0}$ se, e somente se,*

(i) *A é fechado e $\overline{D(A)} = X$;*

(ii) *$\rho(A)$ contém $\mathbb{R}_+$ e, para todo $\lambda > 0$, $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$.*

Demonstração. [24, Theorem 3.1, págs. 8-11].

Corolário 1.21. *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contração $(T(t))_{t \geq 0}$ e A_λ a aproximação de Yosida de A , então $T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x$, para todo $x \in X$.*

Demonstração. [24, Corollary 3.5, pág. 11].

Corolário 1.22. *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contração $(T(t))_{t \geq 0}$. O conjunto resolvente de A contém o semiplano direito aberto, isto é,*

$$\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \lambda > 0\} \subseteq \rho(A) \text{ e } \|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda}, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \text{ com } \operatorname{Re} \lambda > 0.$$

Demonstração. [24, Corollary 3.6, pág. 11].

Corolário 1.23. *Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo satisfazendo $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$, para algum $\omega \geq 0$, se, e somente se,*

(i) *A fechado e $\overline{D(A)} = X$;*

(ii) *$\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} \lambda = 0, \lambda > \omega\} \subset \rho(A)$ e $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega}, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \text{ com } \operatorname{Im} \lambda = 0 \text{ e } \lambda > \omega$.*

Demonstração. [24, Corollary 3.8, pág. 12].

O próximo exemplo é um exemplo clássico da Teoria de semigrupos e é chamado de semigrupo translação, pois envolve a translação de funções.

Exemplo 1.24. *Seja X o espaço das funções $f : [0, +\infty) \rightarrow Y$ limitadas e uniformemente contínuas de $[0, +\infty)$ em um espaço de Banach Y qualquer, e considere em X a norma*

$$\|f\| = \sup_{s \geq 0} \|f(s)\|.$$

Observe que com essa norma, X é um espaço de Banach.

Para todo $t \geq 0$, definimos o operador $T(t) : X \rightarrow X$ por

$$(T(t)f)(s) = T(t)f(s) = f(t + s), \forall s \geq 0.$$

Vejamos algumas propriedades para o operador que acabamos de definir:

1. *Para todo $t \geq 0$ fixo, $T(t)$ é linear.*
2. *Para toda $f \in X$, $\|T(t)f\| \leq \|f\|$, o que implica que $T(t)$ é limitado. Assim, temos $T(t) \in \mathcal{L}(X)$.*
3. *$T(0)f = f$ e $T(t + w)f = T(t)T(w)f$, para todo $t, w \geq 0$, o que garante que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo.*
4. *Pela continuidade uniforme da f , segue que a função $t \mapsto T(t)f$ é contínua, ou seja, $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo.*

5. Pelo item 2, $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo de contração.
6. O gerador infinitesimal $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ do semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ é dado por

$$(Af)(s) = f'(s), \forall s \geq 0,$$

com $D(A) = \{f \in X; f' \in X\}$.

Na próxima seção mostraremos que o operador “derivada segunda” também é o gerador de um semigrupo.

Além dos C_0 -semigrupos e dos semigrupos uniformemente contínuos, que apresentamos nessas duas primeiras seções, existem outras classes de semigrupos, como por exemplo, os semigrupos analíticos, que serão estudados na seção 1.4, os semigrupos compactos e os diferenciáveis, que estão definidos a seguir.

Definição 1.25. Um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ é chamado compacto para $t > t_0$ se $T(t)$ é um operador compacto para todo $t > t_0$. Se $t_0 = 0$, $(T(t))_{t \geq 0}$ é chamado C_0 -semigrupo compacto.

Observe que se $T(t)$ é compacto para $t = 0$ então, como $T(0) = I \in \mathcal{L}(X)$, segue que o espaço X tem dimensão finita.

Definição 1.26. Um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ é chamado diferenciável para $t > t_0$ se, para todo $x \in X$, a função $t \mapsto T(t)x$ é diferenciável para $t > t_0$. Caso $t_0 = 0$, dizemos apenas que $(T(t))_{t \geq 0}$ é diferenciável.

Vejamos agora alguns resultados sobre semigrupos diferenciáveis.

Proposição 1.27. Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo diferenciável para $t > t_0$ e seja A o seu gerador infinitesimal. Então:

- (a) Para $t > nt_0$, $n = 1, 2, \dots$, $T(t) : X \rightarrow D(A^n)$ e $T^{(n)}(t) = A^n T(t)$ é um operador linear limitado.
- (b) Para $t > nt_0$, $n = 1, 2, \dots$, $T^{(n-1)}(t)$ é contínua na topologia do operador uniforme.

Demonstração. [24, Lemma 4.2, pág. 52].

Proposição 1.28. Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo diferenciável e A o seu gerador infinitesimal. Então

$$T^{(n)}(t) = \left(AT \left(\frac{t}{n} \right) \right)^n = \left(T' \left(\frac{t}{n} \right) \right)^n, \quad n=1, 2, \dots$$

Demonstração. [24, Lemma 4.5, pág. 53].

1.3 Operador espectral de Riesz

O objetivo desta seção é estudar o operador “derivada segunda”, isto é, $Ah = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$. Mais especificamente, definidos os espaços $D(A)$ e X , iremos mostrar, através da teoria do operador espectral de Riesz, que A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$. Vamos inclusive dar a representação de $T(t)$.

Como nas seções anteriores, vamos apenas enunciar os resultados.

Ao longo de toda esta seção, Z será um espaço de Hilbert.

Definição 1.29. *Uma sequência de vetores $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em Z forma uma base de Riesz para Z se as seguintes condições são satisfeitas:*

(a) $\overline{\text{span}_{n \geq 1} \{\phi_n; n \geq 1\}} = Z$, isto é, o fecho do conjunto gerado por $\{\phi_n; n \geq 1\}$ é todo o Z ;

(b) existem constantes positivas m e M tais que, para $N \in \mathbb{N}$ arbitrário e escalares α_n , $n = 1, \dots, N$, temos

$$m \sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2 \leq \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n \phi_n \right\|^2 \leq M \sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2.$$

Desta definição segue que uma base ortonormal é uma base de Riesz e, além disso, pode ser mostrado que toda base de Riesz pode ser obtida de uma base ortonormal por uma transformação linear limitada invertível.

Definição 1.30. *Duas sequências $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em Z são biortogonais se, para todo $n, m \in \mathbb{N}$,*

$$\langle \phi_n, \psi_m \rangle = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{se } m = n, \\ 0, & \text{se } m \neq n. \end{cases}$$

Definição 1.31. *Suponha que A seja um operador linear fechado em Z , com autovalores simples $\{\lambda_n; n \geq 1\}$ e cujos autovetores correspondentes $\{\phi_n; n \geq 1\}$ formam uma base de Riesz para Z . Se $\overline{\{\lambda_n; n \geq 1\}}$ é totalmente desconexo, então chamamos A de operador espectral de Riesz.*

Observação: Por totalmente desconexo queremos dizer que dois pontos quaisquer $\lambda, \mu \in \overline{\{\lambda_n; n \geq 1\}}$ não podem ser unidos por um segmento inteiramente contido em $\overline{\{\lambda_n; n \geq 1\}}$.

Teorema 1.32. *Suponha que A seja um operador espectral de Riesz com autovalores $\{\lambda_n; n \geq 1\}$ e autovetores correspondentes $\{\phi_n; n \geq 1\}$. Sejam $\{\psi_n; n \geq 1\}$ os autovetores do operador adjunto A^* , tais que $\langle \phi_n, \psi_m \rangle = \delta_{mn}$. Então A satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \inf_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n - \lambda| > 0\}$, $\sigma(A) = \overline{\{\lambda_n; n \geq 1\}}$ e, para $\lambda \in \rho(A)$, o resolvente de A é dado

por

$$(\lambda I - A)^{-1}z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n, \forall z \in Z;$$

(b) *A tem a representação*

$$Az = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle z, \psi_n \rangle \phi_n, \forall z \in D(A),$$

$$e D(A) = \left\{ z \in Z; \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |\langle z, \psi_n \rangle|^2 < \infty \right\};$$

(c) *A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo se, e somente se, $\sup_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{Re}(\lambda_n) < +\infty$ e $T(t)$ é dado por*

$$T(t)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n, \forall z \in Z.$$

Demonstração. [6, Theorem 2.3.5, págs. 41-45].

Exemplo 1.33. *Seja $Z = L^2([0, 1]) = \left\{ f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; \int_0^1 |f(x)|^2 dx < +\infty \right\}$ com a norma*

$\|f\|_{L^2[0,1]} = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ e considere o operador $A : D(A) \subset Z \rightarrow Z$ definido por $Ah = \frac{d^2 h}{dx^2}$, com

$$D(A) = \left\{ \begin{array}{l} h \in L^2([0, 1]); \ h \text{ e } \frac{dh}{dx} \text{ são absolutamente contínuas, } \frac{d^2 h}{dx^2} \in L^2([0, 1]) \\ e \frac{d}{dx} h(0) = 0 = \frac{d}{dx} h(1) \end{array} \right\}.$$

A seguir, vamos listar algumas propriedades do operador A .

(1) *A é um operador linear fechado.*

(2) *A é um operador auto-adjunto.*

(3) *Visto que os autovalores de A são dados por $\lambda_n = -n^2 \pi^2$, $n \in \mathbb{N}$, e tomando $\phi_0(t) = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$, quando $n = 0$, e $\phi_n(t) = \sqrt{2} \cos(n\pi t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, obtemos que $\{1, \sqrt{2} \cos(n\pi t); n \geq 1\}$ é uma base ortonormal para $L^2([0, 1])$ e, em particular, é uma base de Riesz para $L^2([0, 1])$. Além disso, como este conjunto é totalmente desconexo, concluímos que A é um operador espectral de Riesz.*

Logo, do Teorema 1.32, aliado ao fato de A ser auto adjunto, concluímos que

$$D(A) = \left\{ z \in L^2([0, 1]); \sum_{n=1}^{\infty} 2n^4 \pi^4 |\langle z, \cos(n\pi \cdot) \rangle|^2 < \infty \right\}$$

e, dado $z \in D(A)$ e $t \in [0, 1]$,

$$Az(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -2n^2\pi^2 \langle z(t), \cos(n\pi t) \rangle \cos(n\pi t).$$

Mais ainda, A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo dado por

$$T(t)z = \langle z(\cdot), 1 \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} 2e^{-n^2\pi^2 t} \langle z(\cdot), \cos(n\pi \cdot) \rangle \cos(n\pi \cdot), \quad z \in Z.$$

1.4 Semigrupos analíticos

Nesta seção vamos estudar os semigrupos analíticos, que consistem em uma generalização dos C_0 -semigrupos para um setor do plano complexo. Como dito anteriormente, este tipo de semigrupo será usado no estudo das equações diferenciais do tipo neutro, nosso foco no último capítulo deste trabalho, e por isso, os resultados desta seção estão mais detalhados, ao contrário das seções anteriores.

Seja X um espaço de Banach e $0 < \alpha \leq \pi$. Considere o seguinte setor do plano complexo

$$\Delta(\alpha) = \{z \in \mathbb{C}; \quad z \neq 0, |\arg z| < \alpha\}.$$

Definição 1.34. Dizemos que uma família $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ de operadores lineares limitados, com $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, é um semigrupo analítico em $\Delta(\alpha)$ se:

- (i) $T(0) = I$;
- (ii) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$, para todo $z_1, z_2 \in \Delta(\alpha)$;
- (iii) $\lim_{z \rightarrow 0} T(z)x = x$, para todo $x \in X$, $z \in \Delta(\alpha)$;
- (iv) $z \mapsto T(z)$ é analítica em $\Delta(\alpha)$.

Observe que um semigrupo analítico, quando restrito ao semi-eixo positivo $[0, +\infty)$, é um C_0 -semigrupo. Vejamos agora a relação inversa, isto é, quando um C_0 -semigrupo pode ser estendido a um semigrupo analítico.

Porém, antes de respondermos a esta questão, vejamos um resultado de limitação para um semigrupo analítico.

Proposição 1.35. Se $(T(t))_{t \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ é um semigrupo analítico em $\Delta(\alpha)$, com $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, então existem constantes $M \geq 1$ e $\omega \geq 0$ tais que

$$\|T(z)\| \leq Me^{\omega \operatorname{Re} z}, \quad \forall z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}.$$

Demonstração. A demonstração deste resultado segue de maneira similar a demonstração do Teorema 1.8 e por isso será omitida, podendo ser encontrada em [7, Theorem 2.2.6, pág. 31].

Teorema 1.36. *Para que um C_0 -semigrupo admita uma extensão analítica em um setor $\Delta(\alpha)$, para algum α tal que $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, é necessário e suficiente que esse semigrupo seja diferenciável e exista uma constante $N \geq 1$ tal que*

$$\|tAT(t)\| \leq N, \quad 0 < t \leq 1. \quad (1.1)$$

Demonstração. Suponha inicialmente que $(T(t))_{t \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ seja um semigrupo analítico em $\Delta(\alpha)$, para algum α tal que $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, e seja A o gerador infinitesimal da restrição de $(T(t))_{t \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ ao semi-eixo $[0, +\infty)$.

Dado $t > 0$, o círculo de centro t e raio $r = t \sin \varphi$, onde $0 < \varphi < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, está contido na região $\Delta(\alpha)$ em que $(T(t))_{t \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ é analítico, como mostra a Figura 1.1.

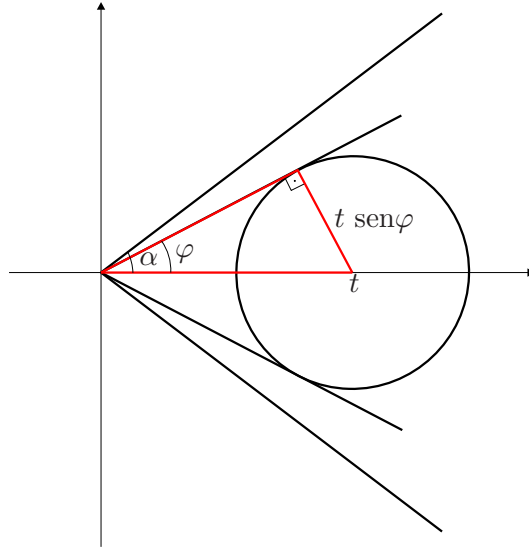


Figura 1.1: Região onde T é analítico.

Portanto, pela Fórmula integral de Cauchy, temos

$$AT(t) = \frac{d}{dt}T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-t|=t \sin \varphi} \frac{T(z)}{(z-t)^2} dz. \quad (1.2)$$

Por outro lado, pela Proposição 1.35, existem constantes $M \geq 1$ e $\omega \geq 0$ tais que $\|T(z)\| \leq Me^{\omega \operatorname{Re} z}$, para todo $z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}$. Assim, se $0 < t \leq 1$, de (1.2), segue que

$$\|AT(t)\| = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-t|=t \sin \varphi} \frac{T(z)}{(z-t)^2} dz \right\|$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{T(t + t \operatorname{sen}(\varphi) e^{i\theta})}{(t \operatorname{sen}(\varphi) e^{i\theta})^2} t \operatorname{sen}(\varphi) i e^{i\theta} d\theta \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{T(t + t \operatorname{sen}(\varphi) e^{i\theta})}{t \operatorname{sen}(\varphi) e^{i\theta}} d\theta \right\| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\|T(t + t \operatorname{sen}(\varphi) e^{i\theta})\|}{t \operatorname{sen}(\varphi)} d\theta \\
&\leq \frac{M}{2\pi t \operatorname{sen}(\varphi)} \int_0^{2\pi} e^{\omega t(1 + \operatorname{sen} \varphi \cos \theta)} d\theta \\
&\leq \frac{M e^{\omega 2t}}{2\pi t \operatorname{sen}(\varphi)} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{M e^{2\omega t}}{t \operatorname{sen}(\varphi)},
\end{aligned}$$

ou seja, $\|tAT(t)\| \leq \frac{M e^{2\omega t}}{\operatorname{sen}(\varphi)}$, para todo $t > 0$.

Portanto, existe $N = \frac{M e^{2\omega}}{\operatorname{sen}(\varphi)} \geq 1$ tal que $\|tAT(t)\| \leq N$, para todo $0 < t \leq 1$.

Reciprocamente, seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo, diferenciável e que satisfaz a desigualdade (1.1), com $N \geq 1$.

Como $t \mapsto T(t)$ é diferenciável, pelas Proposições 1.27 e 1.28, segue que $T^{(n)}(t) = A^n T(t)$ para $t > 0$, e

$$T^{(n)}(t) = \left[AT\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n = \left[T^{(n)}\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n.$$

Além disso, de (1.1) temos $\|rAT(r)\| \leq N$, para todo $0 < r < 1$. Em particular, para $r = \frac{t}{n}$, com $t \leq n$, obtemos

$$\left\| \frac{t}{n} AT\left(\frac{t}{n}\right) \right\| \leq N$$

e então, $\left\| AT\left(\frac{t}{n}\right) \right\| \leq N \frac{n}{t}$.

Assim,

$$\|A^n T(t)\| = \|T^{(n)}(t)\| = \left\| \left[AT\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n \right\| \leq \left\| AT\left(\frac{t}{n}\right) \right\|^n \leq N^n \left(\frac{n}{t}\right)^n$$

e mais,

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{(z-t)^n}{n!} A^n T(t) \right\| &\leq \frac{|z-t|^n}{n!} \cdot N^n \frac{n^n}{t^n} \\
&= \frac{|z-t|^n}{t^n} N^n \frac{n^n}{n!} \\
&\leq \frac{|z-t|^n}{t^n} N^n e^n \\
&= \left(\frac{|z-t|}{\frac{t}{Ne}} \right)^n.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Logo, se $|z-t| < \frac{t}{Ne}$, então $\frac{|z-t|}{\frac{t}{Ne}} < 1$ e a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-t)^n}{n!} A^n T(t)$ converge. Em outras palavras,

a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-t)^n}{n!} A^n T(t)$ é convergente para todo z no círculo de centro t e raio $\frac{t}{Ne}$, representado na figura a seguir, onde θ é o ângulo formado pela reta que passa pela origem e é tangente ao círculo dado.

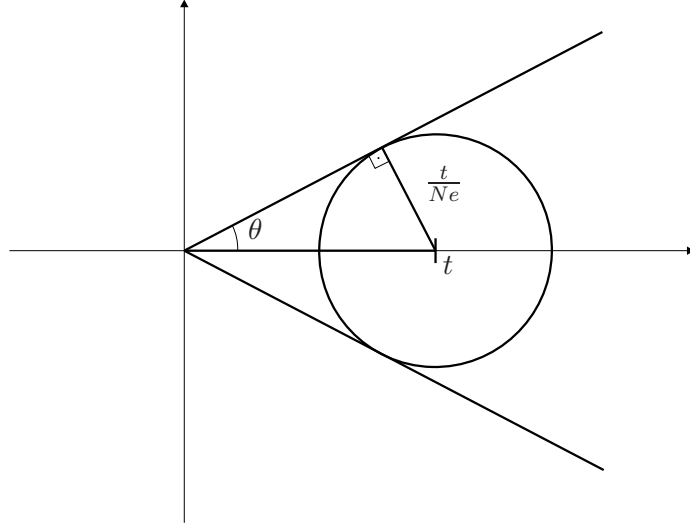


Figura 1.2: Círculo de convergência da série.

Note que, para que z esteja na região setorial da Figura 1.2 devemos ter $\sin|\arg z| < \frac{1}{Ne} = \sin \theta$, ou seja, $|\arg z| < \arcsen \frac{1}{Ne}$.

Dessa forma, tomando $\alpha = \arcsen \frac{1}{Ne}$ e $z \in \Delta(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0 \text{ e } |\arg z| < \arcsen \frac{1}{Ne} \right\}$, definamos o operador $\tilde{T}(z)$ seguindo os passos a seguir.

Tomemos a reta que passa por z e é perpendicular a reta de ângulo $\arg z$ passando pela origem.

Seja t o ponto de interseção entre esta perpendicular e o eixo positivo. Assim, temos

$$t = \frac{|z|}{\cos(\arg z)} \quad \text{e} \quad |z - t| = t \sin(\arg z).$$

Mais ainda, como $|\arg z| < \arcsen \frac{1}{Ne}$, $|z - t| \leq \frac{t}{Ne}$, isto é, z pertence ao círculo de centro em t e raio $\frac{t}{Ne}$, garantindo assim a convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-t)^n}{n!} A^n T(t)$.

Logo, definamos o operador $\tilde{T}(z) : X \rightarrow X$ por

$$\tilde{T}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-t)^n}{n!} A^n T(t).$$

Note que se $z \in (0, +\infty)$, então $z = t$ e $\tilde{T}(z) = T(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t-t)^n}{n!} A^n T(t) = T(t)$, ou seja, $(\tilde{T}(z))_{z \in \Delta(\alpha)}$ é uma extensão de $(T(t))_{t \geq 0}$. Tomemos ainda $\tilde{T}(0) = I$ e mostremos que $(\tilde{T}(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$

é um semigrupo analítico.

Observe inicialmente que $z \mapsto \tilde{T}(z)$ é analítica em $\Delta(\alpha)$, pois $\tilde{T}(z)$ é uma série de potências. Logo, o item (iv) da Definição 1.34 é satisfeito.

Por outro lado, pela Proposição 1.27, temos $T^{(n)}(t) = A^n T(t) \in \mathcal{L}(X)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e cada $t > 0$. Assim, $\tilde{T}(z)$, $z \in \Delta(\alpha)$, é o limite uniforme de uma sequência de elementos de $\mathcal{L}(X)$ e, por $\mathcal{L}(X)$ ser um espaço de Banach, segue que $\tilde{T}(z) \in \mathcal{L}(X)$, $\forall z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}$. Consequentemente, $(\tilde{T}(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ é uma família de operadores lineares limitados em X , com o item (i) da Definição 1.34 satisfeito.

Agora, se $|z_1 - t_1| \leq \frac{t_1}{Ne}$ e $|z_2 - t_2| \leq \frac{t_2}{Ne}$, isto é, z_1 e z_2 pertencem aos círculos de convergência de $\tilde{T}(\cdot)$ de centro t_1 e t_2 , respectivamente, então

$$|z_1 + z_2 - t_1 - t_2| \leq |z_1 - t_1| + |z_2 - t_2| \leq \frac{t_1}{Ne} + \frac{t_2}{Ne} = \frac{t_1 + t_2}{Ne},$$

ou seja, $z_1 + z_2$ pertence ao círculo de convergência de $\tilde{T}(\cdot)$ de centro $t_1 + t_2$. Além disso, como

$$\frac{(z_1 + z_2 - t_1 - t_2)^p}{p!} = \sum_{\substack{m+n=p \\ m \in \mathbb{N} \\ n \in \mathbb{N}}} \frac{(z_1 - t_1)^n}{n!} \cdot \frac{(z_2 - t_2)^m}{m!},$$

concluimos que

$$\begin{aligned} \tilde{T}(z_1 + z_2) &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{((z_1 + z_2) - (t_1 + t_2))^p}{p!} A^p T(t_1 + t_2) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{\substack{m+n=p \\ m \in \mathbb{N} \\ n \in \mathbb{N}}} \frac{(z_1 - t_1)^n}{n!} \cdot \frac{(z_2 - t_2)^m}{m!} A^{n+m} T(t_1) T(t_2) \\ &= T(t_1) T(t_2) + \left[(z_1 - t_1) A T(t_1) T(t_2) + T(t_1) (z_2 - t_2) A T(t_2) \right] + \\ &\quad + \left[\frac{(z_1 - t_1)^2}{2!} A^2 T(t_1) T(t_2) + (z_1 - t_1)(z_2 - t_2) A T(t_1) T(t_2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(z_2 - t_2)^2}{2!} T(t_1) A^2 T(t_2) \right] + \dots \\ &= \left[T(t_1) + (z_1 - t_1) A T(t_1) + \frac{(z_1 - t_1)^2}{2!} A^2 T(t_1) + \dots \right] \cdot \left[T(t_2) + \right. \\ &\quad \left. + (z_2 - t_2) A T(t_2) + \frac{(z_2 - t_2)^2}{2!} A^2 T(t_2) + \dots \right] \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 - t_1)^n}{n!} A^n T(t_1) \right] \cdot \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z_2 - t_2)^m}{m!} A^m T(t_2) \right] \\ &= \tilde{T}(z_1) \tilde{T}(z_2) \end{aligned}$$

e, portanto, a condição (ii) da Definição 1.34 também está satisfeita.

Mais ainda, como $z \mapsto \tilde{T}(z)$ é analítica em $\Delta(\alpha)$, se $z_0 \in \Delta(\alpha)$, então

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \tilde{T}(z) = \tilde{T}(z_0). \quad (1.4)$$

Em particular, para todo $t > 0$, $\lim_{z \rightarrow 0} \tilde{T}(z + t) = \tilde{T}(t) = T(t)$ e assim,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \tilde{T}(z)T(t) = \lim_{z \rightarrow 0} \tilde{T}(z + t) = T(t), \text{ para todo } t > 0, \quad (1.5)$$

sendo os limites em (1.4) e (1.5) tomados no sentido da topologia uniforme de $\mathcal{L}(X)$.

Dessa forma, podemos concluir que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \tilde{T}(z)T(t)x = T(t)x, \text{ para todo } x \in X \text{ e } t > 0.$$

Logo, $\lim_{z \rightarrow 0} \tilde{T}(z)y = y$, para todo $y \in X_0 = \bigcup_{0 < t \leq 1} T(t)X$.

Para provarmos o item (iii) da Definição 1.34, precisamos estender o limite acima para todo $x \in X$. Para isso, mostraremos que X_0 é denso em X e $z \mapsto \tilde{T}(z)$ é limitada em uma região $\Sigma(v) \subset \Delta(\alpha)$. Com relação a densidade de X_0 , dado $x \in X$, observe que $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x$, pois $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo. Assim, x é o limite de uma família de elementos em X_0 . Dessa forma, $X \subset \overline{X_0}$. Como a inclusão contrária é sempre válida, concluímos que $\overline{X_0} = X$.

Vejamos agora a limitação de $z \mapsto \tilde{T}(z)$ no conjunto $\Sigma(v)$ definido por

$$\Sigma(v) = \left\{ z \in \mathbb{C}; 0 < \operatorname{Re} z < \frac{(Ne)^2 - v^2}{(Ne)^2}, |\arg z| < \arcsen \frac{v}{Ne}, 0 < v < 1 \right\}.$$

Dado $z \in \Delta(\alpha)$, da construção geométrica usada para definir $\tilde{T}(z)$, temos $t = \frac{|z|}{\cos(\arg z)}$ e $\frac{|z - t|}{t} = \operatorname{sen}(\arg z)$. Em particular, se $z \in \Sigma(v)$, então $\arg z < \arcsen \frac{v}{Ne}$ e consequentemente, $\frac{|z - t|}{t} < \frac{v}{Ne}$, ou ainda,

$$\frac{|z - t|}{t} Ne < v. \quad (1.6)$$

Por outro lado, $\operatorname{sen}(\arg z) < \frac{v}{Ne}$ também implica em

$$\operatorname{sen}^2(\arg z) < \frac{v^2}{(Ne)^2},$$

o que equivale a $1 - \cos^2(\arg z) < \frac{v^2}{(Ne)^2}$. Portanto, temos

$$\cos^2(\arg z) > \frac{(Ne)^2 - v^2}{(Ne)^2}.$$

Além disso, visto que $\operatorname{Re} z = |z| \cos(\arg z) = t \cos^2(\arg z)$,

$$t = \frac{\operatorname{Re} z}{\cos^2(\arg z)} \leq \frac{\operatorname{Re} z}{\frac{(Ne)^2 - v^2}{(Ne)^2}} \leq 1.$$

Logo, por (1.3) e (1.6), temos

$$\left\| \frac{(z-t)^n}{n!} A^n T(t) \right\| \leq \left(\frac{|z-t|}{t} Ne \right)^n \leq v^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}(z)\| &\leq \|T(t)\| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|z-t\|^n}{n!} \|A^n T(t)\| \\ &< m + \sum_{n=1}^{\infty} v^n \\ &= m + \frac{v}{1-v} = M(v), \end{aligned}$$

onde $m = \sup_{0 \leq t \leq 1} \|T(t)\|$.

Finalmente, dado $x \in X$, existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X_0 tal que $x_n \rightarrow x$, quando $n \rightarrow +\infty$ isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \varepsilon$, para todo $n > n_0$.

Tomando $n_1 > n_0$ fixo, como $x_{n_1} \in X_0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $0 < z < \delta$ então $\|\tilde{T}(z)x_{n_1} - x_{n_1}\| < \frac{\varepsilon}{M(v) + 2}$ e assim,

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}(z)x - x\| &\leq \|\tilde{T}(z)x - \tilde{T}(z)x_{n_1}\| + \|\tilde{T}(z)x_{n_1} - x_{n_1}\| + \|x_{n_1} - x\| \\ &\leq \|\tilde{T}(z)\| \|x - x_{n_1}\| + \|\tilde{T}(z)x_{n_1} - x_{n_1}\| + \|x_{n_1} - x\| \\ &\leq M(v) \frac{\varepsilon}{M(v) + 2} + \frac{\varepsilon}{M(v) + 2} + \frac{\varepsilon}{M(v) + 2} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

garatindo que $\lim_{z \rightarrow 0} \tilde{T}(z)x = x$, para todo $x \in X$.

Portanto, o item (iii) da Definição 1.34 também está provado, o que completa a demonstração do teorema. $\square$

Definição 1.37. *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear. Dizemos que A é de classe (θ, M) , onde $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ e $M > 0$, e escrevemos $A \in (\theta, M)$, se:*

(i) *A é fechado e seu domínio é denso em X ;*

(ii) $\Delta(\theta) = \{z \in \mathbb{C}; |\arg z| < \theta\} \subset \rho(A)$;

(iii) $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|}$, para todo $\lambda \in \Delta(\theta)$.

Seja $A \in (\theta, M)$. Escolha $\varepsilon > 0$ tal que $0 < 2\varepsilon < \theta - \frac{\pi}{2}$ e seja Γ uma curva no plano complexo composta pelos arcos

$$re^{i(\theta-\varepsilon)} \text{ e } re^{-i(\theta-\varepsilon)}, \quad 1 \leq r < +\infty,$$

e pelos segmentos que ligam os pontos $e^{i(\theta-\varepsilon)}$ e $e^{-i(\theta-\varepsilon)}$ ao ponto $z = 1$, orientada de $-\infty e^{i(\theta-\varepsilon)}$ para $+\infty e^{-i(\theta-\varepsilon)}$. Veja a Figura 1.3.

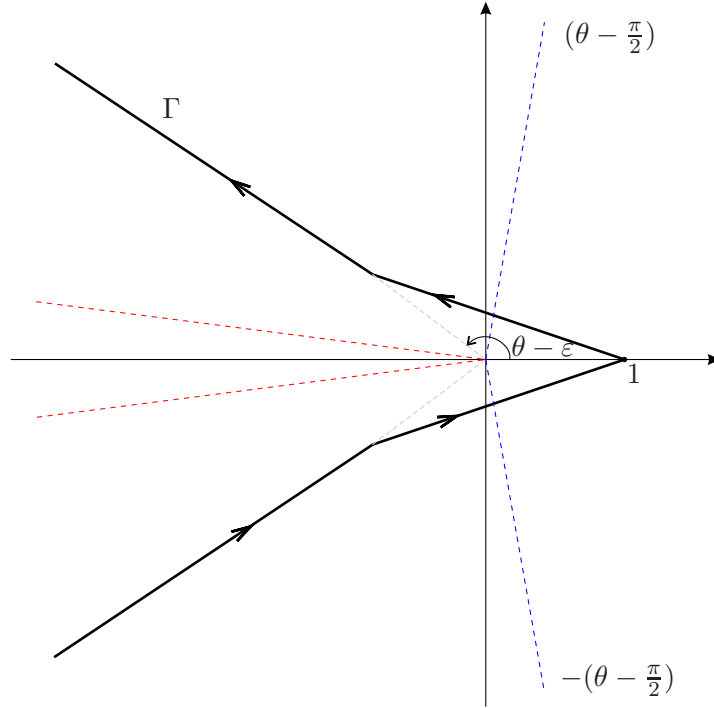


Figura 1.3: Curva Γ .

Considere ainda $\alpha = \theta - \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon$, $0 < \alpha < \pi$, e $\Delta(\alpha) = \{z \in \mathbb{C}; |\arg z| < \alpha\}$. Assim, $\Delta(\alpha) \subset \Delta(\theta)$ e, por (ii) da Definição 1.37, $\Delta(\alpha) \subset \rho(A)$.

Além disso, se definirmos $\Gamma_r = \{\lambda \in \Gamma; |\lambda| < r, r \geq 1\}$, então $\Gamma_r \subset \Delta(\theta) \subset \rho(A)$ e as aplicações $\lambda \mapsto e^{\lambda z}$, $z \in \Delta(\alpha)$, e $\lambda \mapsto R(\lambda : A)$ são contínuas para $\lambda \in \Gamma_r$. Esta última afirmação ocorre pois, dados $\lambda, \mu \in \Gamma_r$, temos

$$R(\lambda : A) - R(\mu : A) = (\mu - \lambda)R(\lambda : A)R(\mu : A).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|R(\lambda : A) - R(\mu : A)\| &\leq |\mu - \lambda| \|R(\lambda : A)\| \|R(\mu : A)\| \\ &\leq |\mu - \lambda| \frac{M}{|\lambda|} \frac{M}{|\mu|}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Tomando o limite em (1.7) quando $\mu \rightarrow \lambda$, segue a continuidade da aplicação.

Então, para cada r podemos definir uma família de operadores $T_r(z)$, $z \in \Delta(\alpha)$, pela integral

$$T_r(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda, \quad z \in \Delta(\alpha). \quad (1.8)$$

Dessa forma, para cada $z \in \Delta(\alpha)$ fixo, a aplicação $T_r(z) : X \rightarrow X$, dada por

$$T_r(z)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x d\lambda, \quad x \in X,$$

é um operador linear. Mais ainda, mostraremos que $T_r(z)$ é limitado, ou seja, existe uma constante $C > 0$ tal que $\|T_r(z)x\| \leq C\|x\|$, $\forall x \in X$.

Para provarmos esse fato, observe inicialmente que:

- (i) $\|e^{\lambda z} R(\lambda : A)x\| \leq |e^{\lambda z}| \|R(\lambda : A)\| \|x\| = \frac{e^{\operatorname{Re}(\lambda z)} M \|x\|}{|\lambda|}, \forall x \in X, \forall \lambda \in \Delta(\theta)$.
- (ii) $\lambda z = (|\lambda| e^{i \arg \lambda})(|z| e^{i \arg z}) = |\lambda| |z| e^{i(\arg \lambda + \arg z)}$ e então,

$$\operatorname{Re}(\lambda z) = |\lambda| |z| \cos(\arg \lambda + \arg z) \leq |\lambda| |z|, \quad \forall \lambda, z \in \mathbb{C}.$$

Analisemos agora $\|T_r(z)x\|$. Para isso, vamos dividir a curva Γ_r em 4 partes, que denotaremos por $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ e γ_4 , de tal forma que

$$\begin{aligned} T_r(z)x &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_1} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x d\lambda + \int_{\gamma_2} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x d\lambda + \int_{\gamma_3} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x d\lambda \right. \\ &\quad \left. + \int_{\gamma_4} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x d\lambda \right). \end{aligned}$$

- (1) Seja $\bar{\gamma}_1 : [1, r] \rightarrow \Gamma_r$ definida por $\bar{\gamma}_1(t) = te^{-i(\theta-\varepsilon)}$ e considere γ_1 como sendo $\bar{\gamma}_1$ percorrida no sentido contrário, isto é, de $re^{-i(\theta-\varepsilon)}$ para $e^{-i(\theta-\varepsilon)}$.

Então,

$$\left\| \int_{\gamma_1} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x d\lambda \right\| = \left\| - \int_{\bar{\gamma}_1} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x d\lambda \right\|$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \int_1^r e^{(te^{-i(\theta-\varepsilon)})z} R(te^{-i(\theta-\varepsilon)} : A) x e^{-i(\theta-\varepsilon)} dt \right\| \\
&\leq \int_1^r \|e^{(te^{-i(\theta-\varepsilon)})z} R(te^{-i(\theta-\varepsilon)} : A) x\| |e^{-i(\theta-\varepsilon)}| dt \\
&\leq \int_1^r \frac{e^{\operatorname{Re}(te^{-i(\theta-\varepsilon)})z} M \|x\|}{|te^{-i(\theta-\varepsilon)}|} dt \\
&\leq \int_1^r \frac{e^{t|z|} M \|x\|}{|t|} dt \leq M \|x\| \int_1^r e^{t|z|} dt \\
&= M \|x\| \left(\frac{e^{r|z|} - e^{|z|}}{|z|} \right) \\
&= C_1 \|x\|,
\end{aligned}$$

onde $C_1 = \frac{M(e^{r|z|} - e^{|z|})}{|z|}$.

(2) Para descrevermos a curva γ_2 , analisemos a figura abaixo.

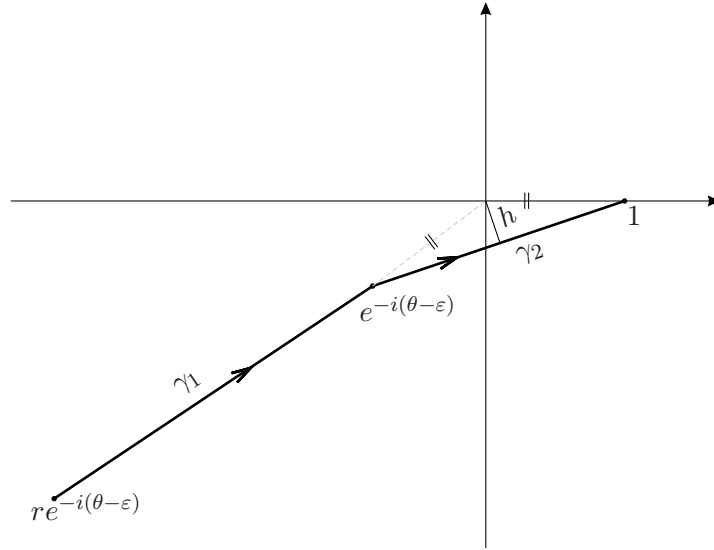


Figura 1.4: Curva γ_2 .

Seja λ um ponto de γ_2 . Então, $\lambda = |\lambda|e^{i \arg(\lambda)}$. Note que $h \leq |\lambda| \leq 1$, onde h é a altura do triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $e^{-i(\theta-\varepsilon)}$. Logo, segue que

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{\gamma_2} e^{\lambda z} R(\lambda : A) x d\lambda \right\| &\leq \int_{\gamma_2} \|e^{\lambda z} R(\lambda : A) x\| d|\lambda| \leq \int_{\gamma_2} \frac{e^{\operatorname{Re}(\lambda z)} M \|x\|}{|\lambda|} d|\lambda| \\
&\leq M \|x\| \int_{\gamma_2} \frac{e^{|\lambda||z|}}{|\lambda|} d|\lambda| \leq M \|x\| \int_{\gamma_2} \frac{e^{|z|}}{h} d|\lambda| \\
&= \frac{M e^{|z|} \|x\|}{h} \int_{\gamma_2} d|\lambda| \\
&= C_2 \|x\|,
\end{aligned}$$

onde $C_2 = \frac{Me^{|z|}|\gamma_2|}{h}$ e $|\gamma_2|$ denota o comprimento da curva γ_2 .

(3) De modo análogo, para γ_3 temos a situação descrita pela figura a seguir.

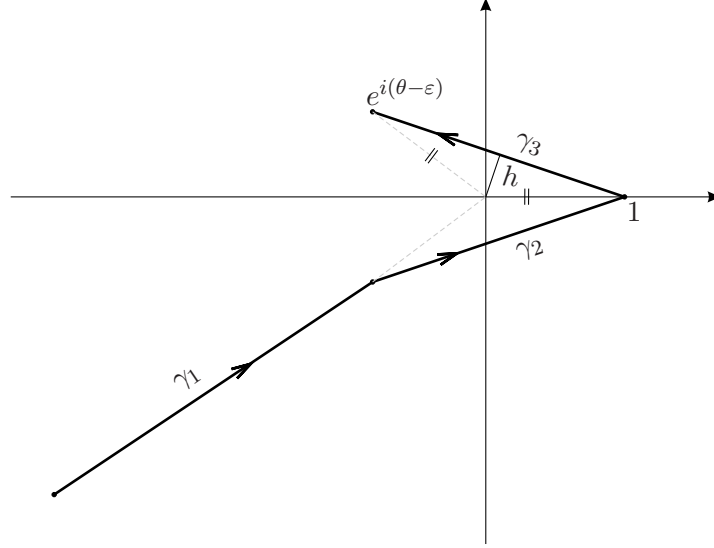


Figura 1.5: Curva γ_3 .

Assim, se $\lambda \in \gamma_3$, então $\lambda = |\lambda|e^{i\arg(\lambda)}$, com $h \leq |\lambda| \leq 1$, onde h é a altura do triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $e^{i(\theta-\epsilon)}$. Observe que, devido a simetria, o valor de h é o mesmo que o do triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $e^{-i(\theta-\epsilon)}$.

Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\gamma_3} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x \, d\lambda \right\| &\leq \int_{\gamma_3} \|e^{\lambda z} R(\lambda : A)x\| \, d|\lambda| \leq \int_{\gamma_3} \frac{e^{\operatorname{Re}(\lambda z)} M\|x\|}{|\lambda|} \, d|\lambda| \\ &\leq M\|x\| \int_{\gamma_3} \frac{e^{|\lambda||z|}}{|\lambda|} \, d|\lambda| \leq \frac{M\|x\|e^{|z|}}{h} \int_{\gamma_3} d|\lambda| \\ &= C_3\|x\|, \end{aligned}$$

onde $C_3 = \frac{Me^{|z|}|\gamma_3|}{h}$ e $|\gamma_3|$ é o comprimento da curva γ_3 .

(4) A curva $\gamma_4 : [1, r] \rightarrow \Gamma_r$ é dada por $\gamma_4(t) = te^{i(\theta-\epsilon)}$. Então,

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\gamma_4} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x \, d\lambda \right\| &\leq \int_1^r \|e^{(te^{i(\theta-\epsilon)})z} R(te^{i(\theta-\epsilon)} : A)x\| |e^{i(\theta-\epsilon)}| \, dt \\ &\leq \int_1^r \frac{e^{t|z|} M\|x\|}{|t|} \, dt \leq M\|x\| \int_1^r e^{t|z|} \, dt \\ &= M\|x\| \left(\frac{e^{r|z|} - e^{|z|}}{|z|} \right) \\ &= C_4\|x\|, \end{aligned}$$

onde $C_4 = \frac{M(e^{r|z|} - e^{|z|})}{|z|}$.

Portanto, de (1)-(4), concluímos que

$$\|T_r(z)x\| \leq C\|x\|, \forall x \in X,$$

onde $C = \max \left\{ \frac{C_i}{2\pi}; i = 1, 2, 3, 4 \right\}$, ou seja, $T_r(z) \in \mathcal{L}(X)$, para todo $z \in \Delta(\alpha)$.

Considere agora a família de operadores $T(z)$, $z \in \Delta(\alpha)$, definidos por

$$T(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda, \quad z \in \Delta(\alpha),$$

e $T(0) = I$.

Observe que $T(z) = \lim_{r \rightarrow \infty} T_r(z)$, para $z \in \Delta(\alpha)$. Assim, como $T_r(z) \in \mathcal{L}(X)$, para todo $r \geq 1$ e a convergência acima é uniforme, concluímos que $T(z) \in \mathcal{L}(X)$.

Nosso próximo passo é mostrar que a família $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ é um semigrupo analítico. Porém, para isso, precisamos de alguns resultados.

Lema 1.38. *Sejam $z \in \Delta(\alpha)$, $A \in (\theta, M)$ e Γ como descrita anteriormente, então:*

- (i) $\int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda = 0$, para todo λ' situado à direita de Γ ;
- (ii) $\int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} d\lambda = 2\pi i$;
- (iii) $\int_{\Gamma} e^{\lambda z} d\lambda = 0$;
- (iv) $\int_{\Gamma} \frac{R(\lambda : A)}{\lambda} d\lambda = 0$;
- (v) $\int_{|z|\Gamma} \frac{e^{\lambda \eta}}{|z|} R\left(\frac{\lambda}{|z|} : A\right) d\lambda = \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda \eta}}{|z|} R\left(\frac{\lambda}{|z|} : A\right) d\lambda$, onde $\eta = \frac{z}{|z|}$.

Demonstração. (i) Dado $r \geq 1$, sejam Γ_r descrita como anteriormente, $\lambda_r = re^{i(\theta-\varepsilon)}$, $\bar{\lambda}_r = re^{-i(\theta-\varepsilon)}$ e

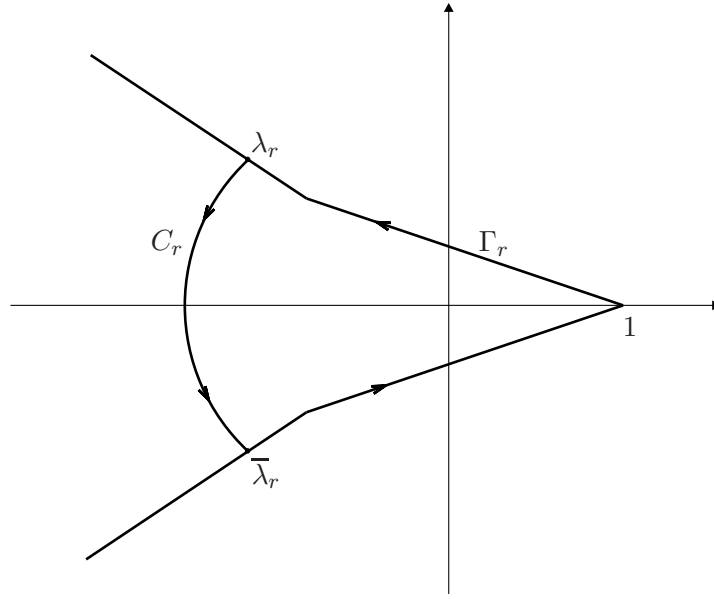
$$C_r = \{\eta \in \mathbb{C}; |\eta| = r, \text{ com } \eta \text{ à esquerda de } \Gamma_r \text{ e com extremos } \lambda_r \text{ e } \bar{\lambda}_r\},$$

como ilustrado na Figura 1.6.

Como a aplicação $\lambda \mapsto f(\lambda) = \frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda}$ é analítica sobre Γ_r e na região à esquerda de Γ_r , pelo Teorema de Cauchy, temos

$$\int_{\Gamma_r \cup C_r} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda = 0,$$

o que implica, $\int_{\Gamma_r} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda = - \int_{C_r} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda$.

Figura 1.6: Curva $\Gamma_r \cup C_r$.

Por outro lado, como $z \in \Delta(\alpha)$, temos $-\alpha \leq \arg z \leq \alpha$. Além disso, se $\lambda \in C_r$, então $\lambda = re^{i\varphi}$, com $\theta - \varepsilon \leq \varphi \leq 2\pi - (\theta - \varepsilon)$. Dessa forma, visto que $\arg(\lambda z) = \arg \lambda + \arg z = \varphi + \arg z$, temos

$$\theta - \varepsilon - \alpha \leq \varphi + \arg z \leq 2\pi - \theta + \varepsilon + \alpha$$

e, assim, como $\alpha = \theta - \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon$,

$$\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leq \varphi + \arg z \leq \frac{3\pi}{2} - \varepsilon$$

e, portanto, $\cos(\varphi + \arg z) \leq 0$. Mais ainda, pela simetria da função cosseno, temos

$$\cos(\varphi + \arg z) \leq \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(\varepsilon) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}(\varepsilon) = -\operatorname{sen}(\varepsilon),$$

com $-\operatorname{sen}(\varepsilon) \leq 0$.

Logo, considerando ainda que $m_r = \inf_{\lambda \in C_r} |\lambda - \lambda'|$, temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_r} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda - \lambda'} d\lambda \right| &= \left| \int_{\theta-\varepsilon}^{2\pi-(\theta-\varepsilon)} \frac{e^{(re^{i\varphi})z} r i e^{i\varphi}}{(re^{i\varphi} - \lambda')} d\varphi \right| \\ &\leq \int_{\theta-\varepsilon}^{2\pi-(\theta-\varepsilon)} \frac{|e^{(re^{i\varphi})z}| r |i| |e^{i\varphi}|}{|(re^{i\varphi} - \lambda')|} d\varphi \\ &\leq \int_{\theta-\varepsilon}^{2\pi-(\theta-\varepsilon)} \frac{e^{\operatorname{Re}(re^{i\varphi}z)} r}{m_r} d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\theta-\varepsilon}^{2\pi-(\theta-\varepsilon)} \frac{re^{r|z|\cos(\varphi+\arg z)}}{m_r} d\varphi \\
&\leq \int_{\theta-\varepsilon}^{2\pi-(\theta-\varepsilon)} \frac{re^{-r|z|\sin\varepsilon}}{m_r} d\varphi \\
&= \frac{2r(\pi - (\theta - \varepsilon))}{m_re^{r|z|\sin\varepsilon}}.
\end{aligned}$$

Observe que, quando $r \rightarrow \infty$, $m_r \rightarrow \infty$ e então, $\frac{1}{m_r} \rightarrow 0$. Além disso, $\frac{2r(\pi - (\theta - \varepsilon))}{e^{r|z|\sin\varepsilon}}$ também converge para zero quando $r \rightarrow \infty$, o que nos permite concluir que $\int_{C_r} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda - \lambda'} d\lambda \rightarrow 0$, quando $r \rightarrow \infty$.

Portanto,

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_r} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda = 0.$$

(ii) Seja R a região limitada por $\Gamma_r \cup C_r$, como ilustrado na Figura 1.6. Então, a aplicação $\lambda \mapsto e^{\lambda z}$ é analítica em R e, pela Fórmula integral de Cauchy,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r \cup C_r} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} d\lambda = e^{\lambda \cdot 0} = 1,$$

ou seja,

$$\int_{\Gamma_r} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} d\lambda = 2\pi i - \int_{C_r} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} d\lambda.$$

Observe que

$$\left| \int_{C_r} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} d\lambda \right| \leq \left| \int_{\theta-\varepsilon}^{2\pi-(\theta-\varepsilon)} \frac{e^{(re^{i\varphi})z} r i e^{i\varphi}}{re^{i\varphi}} d\varphi \right| \leq \int_{\theta-\varepsilon}^{2\pi-(\theta-\varepsilon)} re^{\operatorname{Re}(re^{i\varphi}z)} d\varphi$$

e então, pelas mesmas estimativas feitas para demonstrar o item (i), concluimos que $\int_{C_r} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} d\lambda \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$.

Portanto,

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} d\lambda = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_r} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} d\lambda = 2\pi i.$$

(iii) A aplicação $\lambda \mapsto e^{\lambda z}$ é analítica na região R considerada no item anterior e ilustrada na Figura 1.6. Então, pelo Teorema de Cauchy, $\int_{C_r \cup \Gamma_r} e^{\lambda z} d\lambda = 0$, o que implica que $\int_{\Gamma_r} e^{\lambda z} d\lambda = - \int_{C_r} e^{\lambda z} d\lambda$.

Assim, como

$$\left| \int_{C_r} e^{\lambda z} d\lambda \right| = \left| \int_{\theta-\varepsilon}^{2\pi-(\theta-\varepsilon)} e^{re^{i\varphi}z} r i e^{i\varphi} d\varphi \right| \leq \int_{\theta-\varepsilon}^{2\pi-(\theta-\varepsilon)} r |e^{(re^{i\varphi})z}| d\varphi \leq \int_{\theta-\varepsilon}^{2\pi-(\theta-\varepsilon)} re^{\operatorname{Re}(re^{i\varphi}z)} d\varphi,$$

onde a última integral é a mesma que aparece nos itens (i) e (ii), concluímos que $\int_{C_r} e^{\lambda z} d\lambda \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$.

Logo,

$$\int_{\Gamma} e^{\lambda z} d\lambda = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_r} e^{\lambda z} d\lambda = 0.$$

(iv) Considere agora a região R_r delimitada pelo trecho de Γ_r que vai de $\bar{\lambda}_r$ até λ_r e pelo arco D_r , que percorre a circunferência de centro na origem e raio r do ponto λ_r até $\bar{\lambda}_r$, como na Figura 1.7.

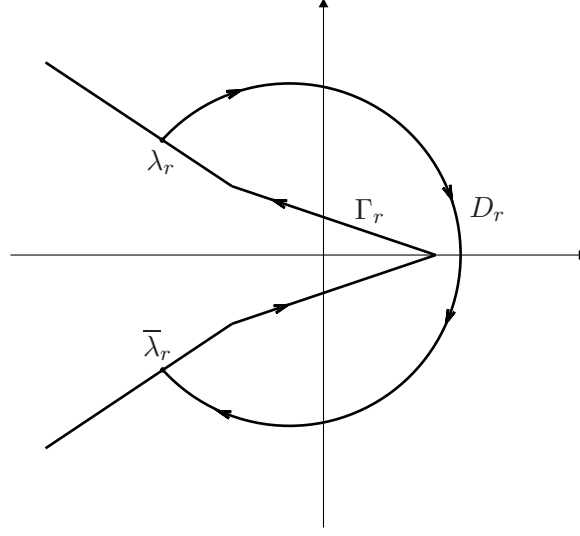


Figura 1.7: Região R_r .

A aplicação $\lambda \mapsto \frac{R(\lambda : A)}{\lambda}$ é analítica em R_r , pois, como $A \in (\theta, M)$, A satisfaz as condições do Teorema de Hille-Yosida e portanto,

$$R(\lambda : A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt, \quad \forall x \in X,$$

sendo $(T(t))_{t \geq 0}$ o C_0 -semigrupo gerado por A . Assim $\lambda \mapsto R(\lambda : A)$ é n -vezes diferenciável. Novamente pelo Teorema de Cauchy, temos $\int_{D_r \cup \Gamma_r} \frac{R(\lambda : A)}{\lambda} d\lambda = 0$ e então,

$$\int_{\Gamma_r} \frac{R(\lambda : A)}{\lambda} d\lambda = - \int_{D_r} \frac{R(\lambda : A)}{\lambda} d\lambda.$$

Logo, como

$$\begin{aligned} \left| \int_{D_r} \frac{R(\lambda : A)}{\lambda} d\lambda \right| &= \left| \int_{2\pi - (\theta - \varepsilon)}^{\theta - \varepsilon} \frac{R(re^{i\varphi} : A)rie^{i\varphi}}{re^{i\varphi}} d\varphi \right| \\ &\leq \int_{\theta - \varepsilon}^{2\pi - (\theta - \varepsilon)} \|R(re^{i\varphi} : A)\| |i| d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{\theta-\varepsilon}^{2\pi-(\theta-\varepsilon)} \frac{M}{|re^{i\varphi}|} d\varphi \\
&= \frac{2M}{r}(\pi - (\theta - \varepsilon))
\end{aligned}$$

e $\frac{2M(\pi - (\theta - \varepsilon))}{r} \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$, concluímos que $\int_{D_r} \frac{R(\lambda : A)}{\lambda} d\lambda \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$.

Portanto, segue que

$$\int_{\Gamma} \frac{R(\lambda : A)}{\lambda} d\lambda = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_r} \frac{R(\lambda : A)}{\lambda} d\lambda = 0.$$

(v) Seja $z \in \Delta(\alpha)$ tal que $|z| > 1$. Assim, a curva $|z|\Gamma$ é a união da curva $|z|\Gamma_1$, cujos extremos são os pontos $\lambda_{|z|} = |z|e^{i(\theta-\varepsilon)}$ e $\bar{\lambda}_{|z|}e^{-i(\theta-\varepsilon)}$, com as duas semirretas obtidas de $\Gamma \setminus \Gamma_{|z|}$, como ilustrado na figura abaixo.

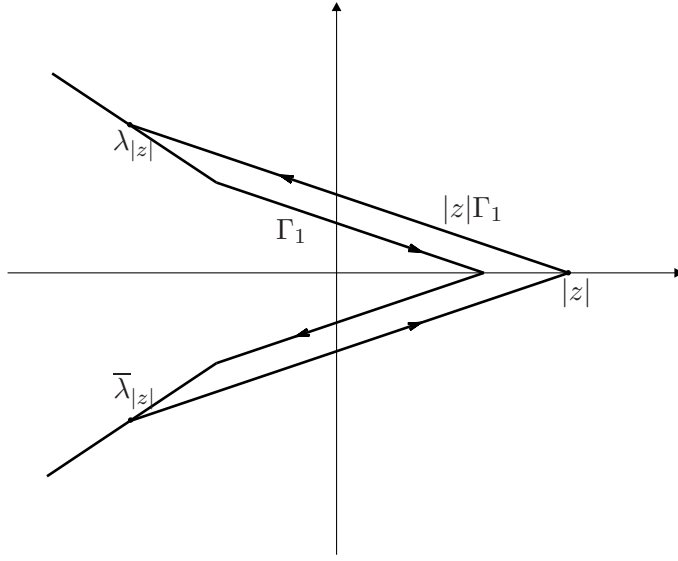


Figura 1.8: Curva $|z|\Gamma$.

Então, $\Gamma_{|z|} \cup |z|\Gamma_1$ é um contorno fechado simples e a aplicação $\lambda \mapsto \frac{e^{\lambda\eta}}{|z|} R\left(\frac{\lambda}{|z|} : A\right)$, onde $\eta = \frac{z}{|z|}$, é analítica sobre o contorno e no interior de $\Gamma_{|z|} \cup |z|\Gamma_1$. Então, do Teorema de Cauchy, temos

$$\int_{\Gamma_{|z|} \cup |z|\Gamma_1} \frac{e^{\lambda\eta}}{|z|} R\left(\frac{\lambda}{|z|} : A\right) d\lambda = 0,$$

ou ainda,

$$\int_{\Gamma_{|z|}} \frac{e^{\lambda\eta}}{|z|} R\left(\frac{\lambda}{|z|} : A\right) d\lambda = - \int_{|z|\Gamma_1} \frac{e^{\lambda\eta}}{|z|} R\left(\frac{\lambda}{|z|} : A\right) d\lambda.$$

Mas, por outro lado,

$$\begin{aligned}
 \int_{|z|\Gamma} \frac{e^{\lambda\eta}}{|z|} R\left(\frac{\lambda}{|z|} : A\right) d\lambda &= \int_{|z|\Gamma_1} \frac{e^{\lambda\eta}}{|z|} R\left(\frac{\lambda}{|z|} : A\right) d\lambda + \int_{\Gamma \setminus \Gamma_{|z|}} \frac{e^{\lambda\eta}}{|z|} R\left(\frac{\lambda}{|z|} : A\right) d\lambda \\
 &= \int_{\Gamma_{|z|}} \frac{e^{\lambda\eta}}{|z|} R\left(\frac{\lambda}{|z|} : A\right) d\lambda + \int_{\Gamma \setminus \Gamma_{|z|}} \frac{e^{\lambda\eta}}{|z|} R\left(\frac{\lambda}{|z|} : A\right) d\lambda \\
 &= \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda\eta}}{|z|} R\left(\frac{\lambda}{|z|} : A\right) d\lambda.
 \end{aligned}$$

Quando $|z| = 1$ o resultado é trivial e, quando $|z| < 1$, o resultado segue de modo análogo ao que foi feito acima. Portanto, o item (v) também está provado e a demonstração do lema está concluída. $\square$

Lema 1.39. *Dado $\delta > 0$, seja Γ' a curva no plano complexo definida por*

$$\Gamma' = \{\lambda' \in \mathbb{C}; \lambda' = \lambda + \delta, \lambda \in \Gamma\}$$

com a orientação induzida por Γ . Então, para todo $z \in \Delta(\alpha)$, temos:

- (i) $\int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda = \int_{\Gamma'} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda;$
- (ii) $\int_{\Gamma'} \frac{e^{\lambda' z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' = 2\pi i e^{\lambda z},$ para todo λ situado à esquerda de Γ' .

Demonstração. (i) Assim como os pontos λ_r e $\bar{\lambda}_r$ e a curva Γ_r , que foram definidos no Lema 1.38, sejam Γ'_r a curva contida em Γ' de extremos $\bar{\lambda}_r + \delta$ e $\lambda_r + \delta$. Consideremos também os segmentos de reta L_r , de extremos λ_r e $\lambda_r + \delta$, e $\bar{L}_r$, de extremos $\bar{\lambda}_r$ e $\bar{\lambda}_r + \delta$ e seja R_r o contorno formado por $\Gamma_r \cup L_r \cup \Gamma_r'^- \cup \bar{L}_r$, onde $\Gamma_r'^-$ denota a curva Γ'_r percorrida no sentido contrário ao estabelecido inicialmente, como ilustrado na figura a seguir.

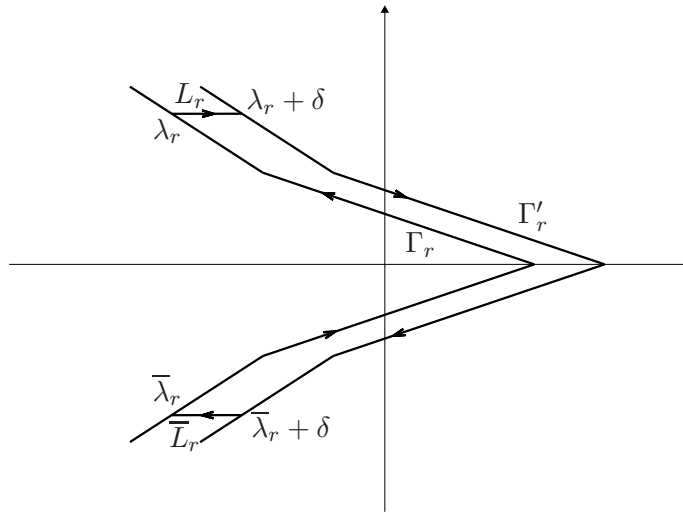


Figura 1.9: Curvas Γ , Γ' e R_r .

Note que a aplicação $\lambda \mapsto e^{\lambda z} R(\lambda : A)$ é analítica em R_r e então, pelo Teorema de Cauchy, $\int_{R_r} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda = 0$, o que implica que

$$\int_{\bar{L}_r} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda + \int_{\Gamma_r} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda = - \int_{L_r} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda + \int_{\Gamma'_r} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda. \quad (1.9)$$

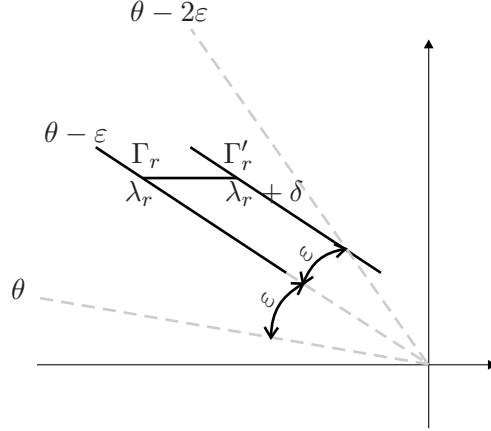


Figura 1.10: Curvas Γ_r e Γ'_r com r suficientemente grande.

Observando ainda a Figura 1.10, note que, para r suficientemente grande, $\operatorname{Re}(\lambda_r + \delta) < 0$, $|\lambda| \geq |\lambda_r + \delta|$ e $\theta - 2\varepsilon \leq \arg \lambda \leq \theta - \varepsilon$, $\forall \lambda \in L_r$. Assim, como $\alpha = \theta - \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon$ e $\theta - \varepsilon < \pi$, temos

$$\frac{\pi}{2} < \arg \lambda + \arg z = \arg(\lambda z) < \frac{3\pi}{2} - \varepsilon < \frac{3\pi}{2},$$

para todo $\lambda \in L_r$, quando r é suficientemente grande.

Logo, como $\int_{L_r} d|\lambda|$ é o comprimento de L_r , que é igual a δ , obtemos que

$$\begin{aligned} \left\| \int_{L_r} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda \right\| &\leq \int_{L_r} |e^{\lambda z}| \|R(\lambda : A)\| d|\lambda| \leq \int_{L_r} e^{\operatorname{Re}(\lambda z)} \frac{M}{|\lambda|} d|\lambda| \\ &\leq \int_{L_r} e^{|\lambda||z|\cos(\arg(\lambda z))} \frac{M}{|\lambda_r + \delta|} d|\lambda| \leq \frac{M}{|\lambda_r + \delta|} \int_{L_r} d|\lambda| \\ &= \frac{M\delta}{|\lambda_r + \delta|}, \end{aligned}$$

pois $\cos(\arg(\lambda z)) \leq 0$, $\forall \lambda \in L_r$.

Dessa forma, como $\lambda_r = re^{i(\theta - \varepsilon)}$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M\delta}{|\lambda_r + \delta|} = 0$ e então, $\int_{L_r} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda = 0$.

Analogamente, mostra-se que $\int_{\bar{L}_r} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda = 0$. Portanto, de (1.9), concluímos que

$$\int_{\Gamma'} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda = \int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda.$$

(ii) Dado λ a esquerda de Γ' , escolha $r > 0$ suficientemente grande para que λ esteja situado no interior da curva fechada $R_r = \Gamma'_r \cup L_r \cup C_r \cup \bar{L}_r$, onde L_r e $\bar{L}_r$ são as curvas descritas no item (i) e C_r é o arco da circunferência de centro na origem e raio r que vai de λ_r até $\bar{\lambda}_r$.

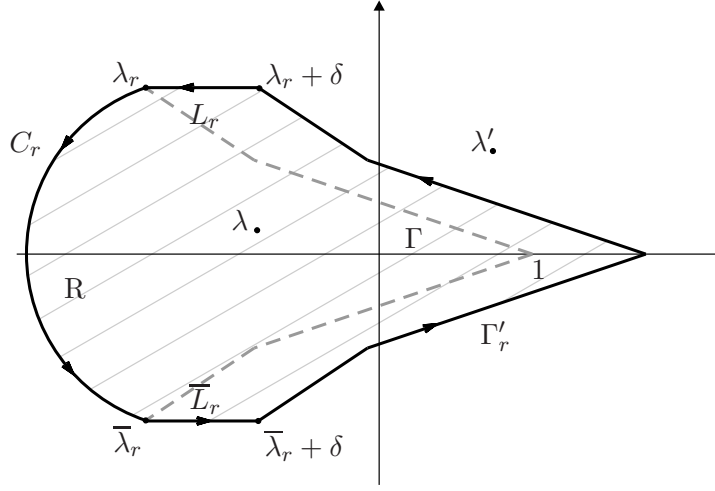


Figura 1.11: Região R delimitada pela curva R_r .

Desse modo, a aplicação $\lambda' \mapsto e^{\lambda'z}$ é analítica na região hachurada R da Figura 1.11 e, pela Fórmula integral de Cauchy,

$$\int_{R_r} \frac{e^{\lambda'z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' = 2\pi i e^{\lambda z}.$$

Agora, seja $m_r = \inf\{|\lambda' - \lambda|; \lambda' \in L_r\}$. Então, $\frac{1}{m_r} \geq \frac{1}{|\lambda' - \lambda|}$, para todo $\lambda' \in L_r$, e assim, procedendo como na demonstração do item anterior temos

$$\left\| \int_{L_r} \frac{e^{\lambda'z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' \right\| \leq \int_{L_r} \frac{e^{\operatorname{Re}(\lambda'z)}}{|\lambda' - \lambda|} d|\lambda'| \leq \frac{1}{m_r} \int_{L_r} e^{\operatorname{Re}(\lambda'z)} d|\lambda'| \leq \frac{1}{m_r} \int_{L_r} d|\lambda'| = \frac{\delta}{m_r}.$$

Logo, $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{L_r} \frac{e^{\lambda'z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' = 0$. Analogamente, mostra-se que $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\bar{L}_r} \frac{e^{\lambda'z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' = 0$. Portanto, como

$$\begin{aligned} 2\pi i e^{\lambda z} &= \int_{R_r} \frac{e^{\lambda'z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' \\ &= \int_{C_r} \frac{e^{\lambda'z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' + \int_{\bar{L}_r} \frac{e^{\lambda'z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' + \int_{\Gamma'_r} \frac{e^{\lambda'z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' + \int_{L_r} \frac{e^{\lambda'z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' \end{aligned}$$

e $\int_{C_r} \frac{e^{\lambda'z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$, pois podemos usar como argumentação semelhante à a

demonstração do item (i) do Lema 1.38, obtemos que

$$\begin{aligned} 2\pi i e^{\lambda z} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\int_{C_r} \frac{e^{\lambda' z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' + \int_{\bar{L}_r} \frac{e^{\lambda' z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' + \int_{\Gamma'_r} \frac{e^{\lambda' z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' + \int_{L_r} \frac{e^{\lambda' z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' \right) \\ &= \int_{\Gamma'} \frac{e^{\lambda' z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda', \end{aligned}$$

isto é, $\int_{\Gamma'} \frac{e^{\lambda' z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' = 2\pi i e^{\lambda z}$, para qualquer que seja λ situado à esquerda de Γ' . $\square$

O próximo teorema é o principal resultado desta seção e nos fornece condições para que um operador A seja o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico.

Teorema 1.40. *Seja $A \in (\theta, M)$. Então, para cada $\varepsilon > 0$ tal que $2\varepsilon < \theta - \frac{\pi}{2}$, A é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico de classe C_0 no setor $\Delta(\theta - \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon)$.*

Demonstração. Vamos mostrar que a família $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ dada por

$$\begin{cases} T(0) = I \\ T(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda, \quad z \in \Delta(\alpha), \end{cases} \quad (1.10)$$

onde $\alpha = \theta - \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon$ e Γ é a curva descrita na página 29 e representada na Figura 1.3, é um semigrupo analítico de classe C_0 e A é o seu gerador infinitesimal.

Como observado anteriormente, $T(z) \in \mathcal{L}(X)$ para todo $z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}$. Além disso, mostraremos que a família $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ é uniformemente limitada em $\Delta(\alpha) \cup \{0\}$. Antes, porém, mostraremos que $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ satisfaz as propriedades de semigrupo.

Obviamente, pela definição, temos $T(0) = I$. Agora, para $\rho \in \Delta(\alpha)$, do item (i) do Lema 1.39, concluímos que

$$T(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda \rho} R(\lambda : A) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} e^{\lambda' \rho} R(\lambda' : A) d\lambda'.$$

Assim, para $z, \eta \in \Delta(\alpha)$ e todo $x \in X$, temos

$$\begin{aligned} T(z)T(\eta)x &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda : A) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} e^{\lambda' \eta} R(\lambda' : A)x d\lambda' \right) d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} e^{\lambda z} R(\lambda : A) e^{\lambda' \eta} R(\lambda' : A)x d\lambda' d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} e^{\lambda z} e^{\lambda' \eta} \left(\frac{R(\lambda : A) - R(\lambda' : A)}{(\lambda' - \lambda)} \right) x d\lambda' d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda : A) \int_{\Gamma'} \frac{e^{\lambda' \eta}}{\lambda' - \lambda} x d\lambda' d\lambda \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma'} e^{\lambda' \eta} R(\lambda' : A) \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda} x \, d\lambda \, d\lambda'.$$

Novamente pelo Lema 1.39, mas agora pelo item (ii), segue que $\int_{\Gamma'} \frac{e^{\lambda' z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' = 2\pi i e^{\lambda z}$, já que $\lambda \in \Gamma$ e por isso está à esquerda de Γ' . Mais ainda, do item (i) do Lema 1.38, segue também que $\int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda = 0$. Logo, obtemos que

$$\begin{aligned} T(z)T(\eta)x &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda : A) \, 2\pi i e^{\lambda \eta} x \, d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda(z+\eta)} R(\lambda : A) x \, d\lambda \\ &= T(z + \eta)x, \end{aligned}$$

para todo $x \in X$, isto é, $T(z + \eta) = T(z)T(\eta)$, para todos $z, \eta \in \Delta(\alpha)$.

Agora, façamos em (1.10) a mudança de variável $\mu = |z|\lambda$, com $z \in \Delta(\alpha)$. Com isto a curva Γ será transformada na curva $|z|\Gamma$ e, pelo Lema 1.38, item (v),

$$T(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|\Gamma} \frac{e^{\mu \eta}}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu \eta}}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) d\mu,$$

sendo $\eta = \frac{z}{|z|} = e^{i \arg z}$.

Por outro lado, como $A \in (\theta, M)$, temos

$$\left\| R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) \right\| \leq \frac{M|z|}{\mu}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|T(z)\| &\leq \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{|e^{\mu \eta}|}{|z|} \left\| R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) \right\| |d\mu| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^{\operatorname{Re}(\mu \eta)} M|z|}{|z| |\mu|} |d\mu| \\ &= \frac{M}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{e^{\operatorname{Re}(\mu \eta)}}{|\mu|} |d\mu| + \frac{M}{2\pi} \int_{\Gamma \setminus \Gamma_1} \frac{e^{\operatorname{Re}(\mu \eta)}}{|\mu|} |d\mu|, \end{aligned} \tag{1.11}$$

onde Γ_1 é a curva descrita na página 29 quando $r = 1$.

Observe que para $\mu \in \Gamma_1$, $|\mu| \leq 1$ e assim,

$$\operatorname{Re}(\mu \eta) = |\mu||\eta| \cos(\arg(\mu \eta)) \leq 1.$$

Dessa forma, se $r_0 = \inf\{|\lambda|; \lambda \in \Gamma_1\}$, então

$$\frac{M}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{e^{\operatorname{Re}(\mu\eta)}}{|\mu|} |d\mu| \leq \frac{M}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{e^1}{r_0} |d\mu| = \frac{Me}{2\pi r_0} |\Gamma_1|, \quad (1.12)$$

onde $|\Gamma_1| = \int_{\Gamma_1} |d\mu|$ é o comprimento da curva Γ_1 .

Além disso, a curva $\Gamma \setminus \Gamma_1$ é formada pelos caminhos σ_1 e σ_2 , que são duas semirretas. Mais especificamente, $\sigma_1(r) = re^{i(\theta-\varepsilon)}$, com $1 \leq r < +\infty$, e σ_2 é a curva $\bar{\sigma}_2(r) = re^{-i(\theta-\varepsilon)}$, $1 \leq r < +\infty$, percorrida no sentido contrário. Então,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma \setminus \Gamma_1} \frac{e^{\operatorname{Re}(\mu\eta)}}{|\mu|} |d\mu| &= \int_{\sigma_1} \frac{e^{\operatorname{Re}(\mu\eta)}}{|\mu|} |d\mu| + \int_{\sigma_2} \frac{e^{\operatorname{Re}(\mu\eta)}}{|\mu|} |d\mu| \\ &= \int_{\sigma_1} \frac{e^{\operatorname{Re}(\mu\eta)}}{|\mu|} |d\mu| - \int_{\bar{\sigma}_2} \frac{e^{\operatorname{Re}(\mu\eta)}}{|\mu|} |d\mu| \\ &= \int_1^\infty \frac{e^{\operatorname{Re}(re^{i(\theta-\varepsilon)}\eta)}}{r} |e^{i(\theta-\varepsilon)}| dr - \int_1^\infty \frac{e^{\operatorname{Re}(re^{-i(\theta-\varepsilon)}\eta)}}{r} |e^{-i(\theta-\varepsilon)}| dr \\ &= \int_1^\infty \frac{e^{\operatorname{Re}(re^{i(\theta-\varepsilon)}\eta)}}{r} dr - \int_1^\infty \frac{e^{\operatorname{Re}(re^{-i(\theta-\varepsilon)}\eta)}}{r} dr. \end{aligned}$$

Na primeira integral, observe que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(re^{i(\theta-\varepsilon)}\eta) &= |re^{i(\theta-\varepsilon)}||\eta| \cos((\theta-\varepsilon) + \arg \eta) \\ &= r \cos((\theta-\varepsilon) + \arg z), \end{aligned}$$

com $-\alpha < \arg z < \alpha$, $\alpha = \theta - \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon$ e $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$. Desse modo, temos

$$\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leq \theta - \varepsilon + \arg z \leq \frac{3\pi}{2} - 3\varepsilon \leq \frac{3\pi}{2} - \varepsilon,$$

o que nos permite concluir que $\operatorname{Re}(re^{i(\theta-\varepsilon)}\eta) \leq r \cos(\frac{\pi}{2} + \varepsilon)$, com $\cos(\frac{\pi}{2} + \varepsilon) < 0$. Além disso, observe que $\frac{1}{r} \leq 1$ e assim, segue que

$$\int_1^\infty \frac{e^{\operatorname{Re}(re^{i(\theta-\varepsilon)}\eta)}}{r} dr \leq \int_1^\infty e^{r \cos(\frac{\pi}{2} + \varepsilon)} dr = -\frac{e^{\cos(\frac{\pi}{2} + \varepsilon)}}{\cos(\frac{\pi}{2} + \varepsilon)}.$$

Analogamente, para a segunda integral, temos

$$\operatorname{Re}(re^{-i(\theta-\varepsilon)}\eta) = r \cos((-\theta + \varepsilon) + \arg z),$$

com

$$-\frac{3\pi}{2} + \varepsilon \leq -\frac{3\pi}{2} + 3\varepsilon \leq -\theta + \varepsilon + \arg(z) \leq -\frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

Assim, como $-\frac{1}{r} \leq 0 < 1$, obtemos que

$$-\int_1^\infty \frac{e^{\operatorname{Re}(re^{-i(\theta-\varepsilon)}\eta)}}{r} dr \leq \int_1^\infty e^{r \cos(-\frac{\pi}{2}-\varepsilon)} dr = \int_1^\infty e^{r \cos(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)} dr.$$

Consequentemente,

$$\int_{\Gamma \setminus \Gamma_1} \frac{e^{\operatorname{Re}(\mu\eta)}}{|\mu|} |d\mu| \leq -\frac{2e^{\cos(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)}}{\cos(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)}. \quad (1.13)$$

Finalmente, de (1.11), (1.12) e (1.13), concluímos que

$$\|T(z)\| \leq \frac{Me}{2\pi r_0} |\Gamma_1| + \frac{Me^{\cos(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)}}{\pi(-\cos(\frac{\pi}{2}+\varepsilon))} = M_0, \quad \forall z \in \Delta(\alpha),$$

ou seja, $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ é uniformemente limitado em $z \in \Delta(\alpha)$.

Mostremos agora que (1.10) é fortemente contínuo, isto é, $\lim_{z \rightarrow 0} T(z)x = x$, para todo $x \in X$. Para isto, observe primeiramente que

$$\begin{aligned} R(\lambda : A)(\lambda I - A) &= I \Leftrightarrow \lambda R(\lambda : A) - R(\lambda : A)A = I \\ &\Leftrightarrow \lambda R(\lambda : A) - I = R(\lambda : A)A \\ &\Leftrightarrow R(\lambda : A) - \lambda^{-1}I = \frac{R(\lambda : A)A}{\lambda}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Seja $z \in \Delta(\alpha)$, com $|z| < 1$, e $x \in D(A)$. Pela igualdade (1.14) e pelo item (ii) do Lema 1.38, obtemos que

$$\begin{aligned} T(z)x - x &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x \, d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} x \, d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} (R(\lambda : A) - \lambda^{-1}I)x \, d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} R(\lambda : A)Ax \, d\lambda, \end{aligned}$$

com o integrando limitado por

$$\left\| \frac{e^{\lambda z} R(\lambda : A)}{\lambda} Ax \right\| \leq \frac{|e^{\lambda z}|}{|\lambda|} \|R(\lambda : A)\| \|Ax\| \leq \frac{e^{\operatorname{Re}(\lambda z)}}{|\lambda|} \cdot \frac{M}{|\lambda|} \|Ax\| \leq \frac{M}{|\lambda|^2} \|Ax\|$$

e função $\lambda \mapsto \frac{M}{\lambda^2} \|Ax\|$ integrável sobre a curva Γ .

Dessa forma, o Teorema da convergência cominada e o item (iv) do Lema 1.38 nos garantem que

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} (T(z)x - x) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z} R(\lambda : A)}{\lambda} Ax \, d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{\lambda z} R(\lambda : A)}{\lambda} Ax \, d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{R(\lambda : A)}{\lambda} Ax \, d\lambda = 0. \end{aligned}$$

Logo, $\lim_{z \rightarrow 0} T(z)x = x$, para todo $x \in D(A)$.

No que se segue, veremos como fica o caso geral. Seja $y \in X$. Como $\overline{D(A)} = X$, existe uma sequência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X tal que $y_n \rightarrow y$ quando $n \rightarrow \infty$, isto é, dado $\xi > 0$ qualquer, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|y_n - y\| < \frac{\xi}{2(M_0 + 1)}$, $\forall n > n_0$.

Além disso, para $n_1 \in \mathbb{N}$ com $n_1 > n_0$, temos $y_{n_1} \in D(A)$ e assim, $\lim_{z \rightarrow 0} T(z)y_{n_1} - y_{n_1} = 0$. Desse modo, existe $\delta > 0$ tal que, se $0 < |z| < \delta$, então $\|T(z)y_{n_1} - y_{n_1}\| < \frac{\xi}{2}$. Logo, para $0 < |z| < \delta$, temos

$$\begin{aligned} \|T(z)y - y\| &\leq \|T(z)\| \|y - y_{n_1}\| + \|T(z)y_{n_1} - y_{n_1}\| + \|y_{n_1} - y\| \\ &\leq M_0 \frac{\xi}{2(M_0 + 1)} + \frac{\xi}{2} + \frac{\xi}{2(M_0 + 1)} \\ &= \xi. \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{z \rightarrow 0} T(z)x = x$, para todo $x \in X$.

Mostraremos também que $z \mapsto T(z)$ é uma função analítica em $\Delta(\alpha)$.

Fazendo novamente a mudança de variável $\mu = |z|\lambda$ em (1.10), com $z \in \Delta(\alpha)$, pondo $\eta = \frac{z}{|z|}$ e tomando $r \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda : A) \, d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|\Gamma} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) \, d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) \, d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) \, d\mu + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma \setminus \Gamma_r} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) \, d\mu. \end{aligned}$$

Dessa forma, escrevendo $\Gamma \setminus \Gamma_r = \sigma_1 \cup \sigma_2$, onde $\sigma_1(\rho) = \rho e^{i(\theta - \varepsilon)}$, $r \leq \rho < +\infty$, e σ_2 é a curva $\bar{\sigma}_2(\rho) = \rho e^{-i(\theta - \varepsilon)}$, $r \leq \rho < +\infty$, percorrida no sentido contrário, temos

$$\left\| T(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) \, d\mu \right\| = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma \setminus \Gamma_r} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) \, d\mu \right\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left| \frac{1}{2\pi i} \right| \left(\left\| \int_{\sigma_1} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) d\mu \right\| + \left\| \int_{\sigma_2} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) d\mu \right\| \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\left\| \int_r^\infty \frac{e^{\rho e^{i(\theta-\varepsilon)}\eta} e^{i(\theta-\varepsilon)}}{|z|} R\left(\frac{\rho e^{i(\theta-\varepsilon)}}{|z|} : A\right) d\rho \right\| \right. \\
&\quad \left. + \left\| - \int_r^\infty \frac{e^{\rho e^{-i(\theta-\varepsilon)}\eta} e^{-i(\theta-\varepsilon)}}{|z|} R\left(\frac{\rho e^{-i(\theta-\varepsilon)}}{|z|} : A\right) d\rho \right\| \right) \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \left(\int_r^\infty \frac{e^{\operatorname{Re}(\rho e^{i(\theta-\varepsilon)}\eta)}}{|z|} \frac{M|z|}{\rho} d\rho + \int_r^\infty \frac{e^{\operatorname{Re}(\rho e^{-i(\theta-\varepsilon)}\eta)}}{|z|} \frac{M|z|}{\rho} d\rho \right) \\
&\leq \frac{M}{2\pi} \left[\int_r^\infty e^{\rho \cos(\theta-\varepsilon+\arg z)} d\rho + \int_r^\infty e^{\rho \cos(-\theta+\varepsilon+\arg z)} d\rho \right] \\
&\leq \frac{M}{2\pi} \left[\int_r^\infty e^{\rho \cos(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)} d\rho + \int_r^\infty e^{\rho \cos(-\frac{\pi}{2}-\varepsilon)} d\rho \right] \\
&= \frac{M}{\pi} \int_r^\infty e^{\rho \cos(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)} d\rho = \frac{M}{\pi} \frac{e^{r \cos(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)}}{[-\cos(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)]} \\
&= \frac{M}{\pi} \frac{e^{-r \operatorname{sen}(\varepsilon)}}{\operatorname{sen}(\varepsilon)}. \tag{1.15}
\end{aligned}$$

Tomando o limite em (1.15) quando $r \rightarrow +\infty$, segue que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| T(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{e^{\mu\omega}}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) d\mu \right\| = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M}{\pi} \frac{e^{-r \operatorname{sen}(\varepsilon)}}{\operatorname{sen}(\varepsilon)} = 0.$$

Consequentemente, $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda$ converge para $T(z)$, para todo $z \in \Delta(\alpha)$. Observe ainda que essa convergência é uniforme em $\Delta(\alpha)$.

Mais ainda, como Γ_r é uma curva simples de classe C^1 e a função $\lambda \mapsto e^{\lambda z} R(\lambda : A)$ é analítica em $\Delta(\theta)$, a função $z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda$ é analítica em $\Delta(\alpha)$, para todo $r \geq 1$.

Assim, $z \mapsto T(z)$ é o limite uniforme de funções analíticas e portanto, $z \mapsto T(z)$ é analítica em $\Delta(\alpha)$.

Pelo que foi feito até agora, podemos concluir que $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ é um semigrupo analítico.

Resta mostrarmos que A é o gerador infinitesimal de $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ quando nos restringirmos ao intervalo $[0, +\infty)$.

Seja $x \in D(A)$. Das igualdades em (1.14) e do item (iii) do Lema 1.38, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} T(z)x &= \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x d\lambda \right] \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d}{dz} (e^{\lambda z} R(\lambda : A)x) d\lambda
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} \lambda R(\lambda : A) x \, d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} (R(\lambda : A) A + I) x \, d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda : A) A x + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} x \, d\lambda \\
&= T(z) A x,
\end{aligned}$$

isto é, $\frac{d}{dz} T(z)x = T(z)Ax$, para todo $x \in D(A)$. Assim,

$$\frac{1}{h} \int_0^h T(t) A x \, dt = \frac{T(t)x}{h} \Big|_0^h = \frac{T(h)x - x}{h}. \quad (1.16)$$

Como $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ restrito a $[0, +\infty)$ é um C_0 -semigrupo, denotemos por $B : D(B) \subset X \rightarrow X$ seu gerador infinitesimal. Mostraremos que $B = A$.

Voltando à igualdade (1.16) e tomando o limite quando $h \rightarrow 0^+$, temos

$$A x = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h T(t) A x \, dt = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} = Bx.$$

Como esse resultado é válido para todo $x \in D(A)$, concluímos que $D(A) \subset D(B)$ e $A = B$ em $D(A)$. Para mostrarmos a outra inclusão, observe que, como $\rho(A) \cap \rho(B) \neq \emptyset$, existe $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$. Seja $x \in D(B)$ e considere $y = (\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - B)x$. Então, $y \in D(A)$ e

$$(\lambda I - A)y = (\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - B)x = (\lambda I - B)x,$$

o que implica que

$$(\lambda I - B)(y - x) = 0,$$

e então $x = y$, pois $(\lambda I - B)$ é injetor.

Logo, $D(B) \subset D(A)$ e podemos concluir que $A = B$, finalizando a demonstração do resultado. $\square$

Corolário 1.41. *Seja $A \in (\theta, M)$. O semigrupo analítico $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ obtido no teorema anterior e gerado por A , com $\alpha = \theta - \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon$, satisfaz as seguintes condições:*

(i) *Para todo $n \geq 1$, $T(z)x \in D(A^n)$, para todo $x \in X$ e todo $z \in \Delta(\alpha)$.*

(ii) *Para todo $n \geq 1$ existe uma constante $M_n(\varepsilon)$, que só depende de ε , tal que*

$$\|A^n T(z)\| \leq \frac{M_n(\varepsilon)}{|z|^n}, \text{ para todo } z \in \Delta(\alpha).$$

Demonstração. (i) Observe inicialmente que, para $x \in X$, $z \in \Delta(\alpha)$ e $h \in (0, +\infty)$,

$$\frac{T(h) - I}{h} T(z)x = \frac{T(h+z)x - T(z)x}{h}.$$

Além disso, fazendo $v = h + z$ e $h \rightarrow 0^+$, obtemos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(h) - I}{h} T(z)x = \lim_{v \rightarrow z} \frac{T(v)x - T(z)x}{v - z}. \quad (1.17)$$

Como $z \mapsto T(z)$ é analítica em $\Delta(\alpha)$, o limite em (1.17) existe e, portanto, $T(z)x \in D(A)$, para todo $x \in X$ e todo $z \in \Delta(\alpha)$. Mais ainda,

$$A^n T(z) = A^n T\left(\frac{z}{n} + \frac{z}{n} + \dots + \frac{z}{n}\right) = A^n \left[T\left(\frac{z}{n}\right)\right]^n = \left[AT\left(\frac{z}{n}\right)\right]^n, \quad \forall n \geq 1.$$

Assim, $T(z)x \in D(A^n)$, para todo $x \in X$, $z \in \Delta(\alpha)$ e $n \geq 1$.

(ii) Como visto na demonstração do teorema anterior, para $z \in \Delta(\alpha)$,

$$T(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) d\mu,$$

onde $\eta = \frac{z}{|z|}$. Além disso, por (1.14) e pelo fato de A ser fechado, segue que

$$AT(z)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} AR\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} \left[\frac{\mu}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) - I\right] d\mu,$$

para todo $z \in \Delta(\alpha)$. Logo,

$$\begin{aligned} \|AT(z)x\| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^{\operatorname{Re}(\mu\eta)}}{|z|} \left[\left|\frac{\mu}{|z|}\right| \left\|R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right)\right\| + \|I\|\right] d|\mu| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^{\operatorname{Re}(\mu\eta)}}{|z|} \left[\left|\frac{\mu}{|z|}\right| \cdot \frac{M|z|}{|\mu|} + 1\right] d|\mu| \\ &= \frac{(M+1)}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^{\operatorname{Re}(\mu\eta)}}{|z|} d|\mu| \\ &= \frac{(M+1)}{2\pi|z|} \left[\int_{\Gamma_1} e^{\operatorname{Re}(\mu\eta)} d|\mu| + \int_{\Gamma \setminus \Gamma_1} e^{\operatorname{Re}(\mu\eta)} d|\mu|\right] \\ &\leq \frac{(M+1)}{2\pi|z|} \left[e|\Gamma_1| + \frac{2e^{-\operatorname{sen}(\varepsilon)}}{\operatorname{sen}(\varepsilon)}\right] \\ &= \frac{M_1(\varepsilon)}{|z|}, \quad \forall z \in \Delta(z), \end{aligned}$$

onde $M_1(\varepsilon) = \frac{(M+1)}{2\pi} \left[e|\Gamma_1| + \frac{2e^{-\sin(\varepsilon)}}{\sin(\varepsilon)} \right]$ o que prova o item (ii) para $n = 1$.

Agora, para $n \geq 1$ qualquer, usando o item (i) já provado, temos

$$\begin{aligned} \|A^n T(z)\| &= \left\| \left[AT\left(\frac{z}{n}\right) \right]^n \right\| \leq \left\| AT\left(\frac{z}{n}\right) \right\|^n \\ &\leq \left(\frac{M_1(\varepsilon)}{\left|\frac{z}{n}\right|} \right)^n = \frac{n^n M_1(\varepsilon)^n}{|z|^n} \\ &= \frac{M_n(\varepsilon)}{|z|^n}, \quad \forall z \in \Delta(\alpha), \end{aligned}$$

com $M_n = n^n M_1(\varepsilon)$, finalizando a demonstração do item (ii). $\square$

1.5 Potências fracionárias de operadores lineares fechados

Nesta seção vamos estudar as potências fracionárias de um operador linear fechado e densamente definido A . Veremos as principais propriedades dessas potências e também a relação que elas possuem com o semigrupo, quando A é o gerador infinitesimal de um semigrupo. Este conceito será usado como ferramenta no estudo de existência de solução para equações diferenciais neutras, como veremos no Capítulo 2.

Para a teoria que será desenvolvida nesta seção, fixemos a seguinte condição:

Condição 1.42. *Seja A um operador linear fechado e densamente definido, isto é, $\overline{D(A)} = X$ para o qual*

$$\Sigma_\omega^+ \cup V \subset \rho(A)$$

e $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{1+|\lambda|}$, para todo $\lambda \in \Sigma_\omega^+$, onde $\Sigma_\omega^+ = \{\lambda \in \mathbb{C}; 0 < \omega < |\arg \lambda| \leq \pi\}$ e V é uma vizinhança de zero.

No que se segue, seja A um operador que satisfaz a Condição 1.42 com $M = 1$ e $\omega = \frac{\pi}{2}$. Então, $\Sigma_{\frac{\pi}{2}}^+ = \{\lambda \in \mathbb{C}; \frac{\pi}{2} < |\arg \lambda| \leq \pi\}$. Além disso, se $\lambda \in \Sigma_{\frac{\pi}{2}}^+$, então $(\lambda I - A)^{-1}$ existe e pertence $\mathcal{L}(X)$. Mais ainda, note que

$$(\lambda I - A)^{-1} = ((-1)(A - \lambda I))^{-1} = -(\mu I - (-A))^{-1}, \quad \text{com } \mu = -\lambda.$$

Assim, se $\lambda \in \rho(A)$, então $\mu \in \rho(-A)$. Logo, como $(-\infty, 0) \subset \Sigma_{\frac{\pi}{2}}^+ \subset \rho(A)$, $\mathbb{R}_+ \subset \rho(-A)$. Observe também que

$$R(\lambda : A) = -R(\mu : -A)$$

e então, para $\mu > 0$, $\|R(\mu : -A)\| = \|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{|\lambda|} = \frac{1}{\mu}$.

Dessa forma, visto que $D(-A) = D(A)$ e $-A$ também é fechado, o Teorema de Hille-Yosida garante que $-A$ é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo.

Agora fixe $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$, tome $\theta = \pi - \omega$ e considere $\Delta(\theta) = \{z \in \mathbb{C}; |\arg z| < \theta\}$.

Se $\lambda \in \Sigma_\omega^+$, então $0 < |\arg(-\lambda)| < \pi - \omega$ e assim, $-\lambda \in \Delta(\theta)$. Além disso, como $\Sigma_\omega^+ \subset \rho(A)$ e $(\lambda I - A)^{-1} = -(\mu - (-A))^{-1}$, $\forall \lambda \in \Sigma_\omega^+$, com $\mu = -\lambda$, podemos concluir que $\Delta(\theta) \subset \rho(-A)$ e

$$\|R(\mu : -A)\| = \|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{|\mu|}, \text{ para todo } \mu \in \Delta(\theta).$$

Logo, $-A \in (\theta, M)$ e, pelo Teorema 1.40, para cada $\varepsilon > 0$ com $2\varepsilon < \theta - \frac{\pi}{2}$, $-A$ é gerador o infinitesimal de um semigrupo analítico no setor $\Delta(\theta - \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon) = \Delta(\frac{\pi}{2} - \omega - 2\varepsilon)$.

Para um operador A satisfazendo a Condição 1.42 e $\alpha > 0$ definimos

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \lambda^{-\alpha} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda,$$

onde C é o caminho contido no conjunto resolvente de A dado por $C = \bar{\gamma}_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, onde $\bar{\gamma}_1$ é a curva $\gamma_1(\rho) = \rho e^{-i\psi}$, $1 \leq \rho < +\infty$, percorrida no sentido contrário, $\gamma_2(\varphi) = e^{i\varphi}$, com $-\psi \leq \varphi \leq \psi$, e $\gamma_3(\rho) = \rho e^{i\psi}$, $1 \leq \rho < +\infty$, com $0 < \psi < \theta$, como ilustra a Figura 1.12.

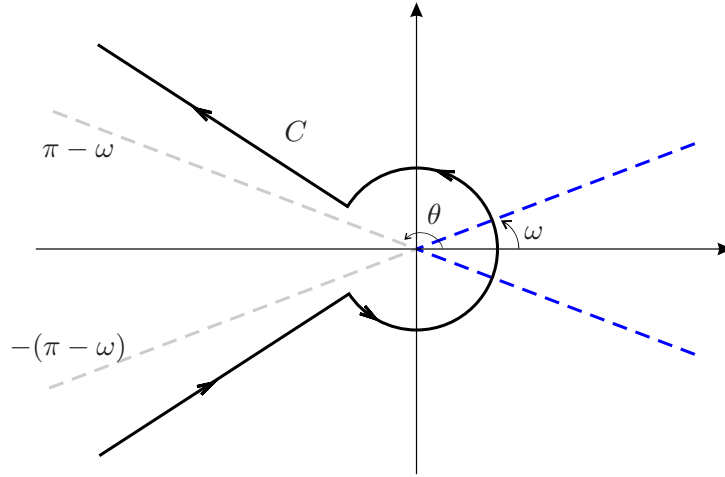


Figura 1.12: Caminho C .

Mostraremos a seguir que, para $\alpha > 0$, a integral que define $A^{-\alpha}$ é uniformemente convergente e então, $A^{-\alpha}$ é um operador linear limitado.

Para isso, fixemos $r > 1$ e consideremos o caminho C_r formado pela parte da curva C que vai de

$re^{-i\psi}$ até $re^{i\psi}$. Então,

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \lambda^{-\alpha} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{C \setminus C_r} \lambda^{-\alpha} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda.$$

Assim, se $\gamma_{1,r}(\rho) = \rho e^{-i\psi}$ e $\gamma_{2,r}(\rho) = \rho e^{i\psi}$, $r \leq \rho < +\infty$, então

$$\begin{aligned} \left\| A^{-\alpha} - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \lambda^{-\alpha} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda \right\| &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{C \setminus C_r} \lambda^{-\alpha} (A - \lambda I)^{-1} dz \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{1,r}} \lambda^{-\alpha} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{2,r}} \lambda^{-\alpha} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda \right\| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_r^\infty |\rho^{-\alpha} e^{i\alpha\psi}| \|(A - \rho e^{-i\psi} I)^{-1}\| d\rho \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_r^\infty |\rho^{-\alpha} e^{-i\alpha\psi}| \|(A - \rho e^{i\psi} I)^{-1}\| d\rho \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_r^\infty \rho^{-\alpha} e^{\operatorname{Re}(i\alpha\psi)} \frac{M}{1+\rho} d\rho + \frac{1}{2\pi} \int_r^\infty \rho^{-\alpha} e^{\operatorname{Re}(-i\alpha\psi)} \frac{M}{1+\rho} d\rho \\ &= \frac{M}{2\pi} \int_r^\infty \rho^{-\alpha} e^0 \frac{\rho}{1+\rho} \cdot \frac{1}{\rho} d\rho + \frac{M}{2\pi} \int_r^\infty \rho^{-\alpha} e^0 \frac{\rho}{1+\rho} \cdot \frac{1}{\rho} d\rho \\ &\leq \frac{M}{\pi} \int_r^\infty \rho^{-(\alpha+1)} d\rho \\ &= \frac{M}{\pi} \frac{1}{\alpha r^\alpha}. \end{aligned}$$

Logo, $\left\| A^{-\alpha} - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \lambda^{-\alpha} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda \right\| \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$. Observe ainda que, para cada $r > 1$, $\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \lambda^{-\alpha} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda$ é um operador linear limitado.

Portanto, como a convergência acima é uniforme, podemos concluir que $A^{-\alpha}$ é um operador linear limitado.

Considere agora $\alpha = n$, com $n \in \mathbb{N}$. Como A satisfaz a Condição 1.42, a função $\lambda \mapsto (A - \lambda I)^{-1}$ é analítica em uma vizinhança de zero.

Por outro lado, a identidade resolvente

$$R(\lambda : A) - R(\mu : A) = (\mu - \lambda)R(\lambda : A)R(\mu : A), \forall \lambda, \mu \in \rho(A),$$

e um processo indutivo garante que

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda : A) = (-1)^n n! R(\lambda : A)^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, visto que $(A - \lambda I)^{-1} = R(-\lambda : -A)$, a série de Taylor de $\lambda \mapsto (A - \lambda I)^{-1}$ em torno de zero é dada por

$$(A - \lambda I)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k! R(0 : -A)^{k+1}}{k!} (-\lambda - 0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (A^{-1})^{k+1} \lambda^k.$$

Logo,

$$\lambda^{-n} (A - \lambda I)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (A^{-1})^{k+1} \lambda^{k-n} = \frac{(A^{-1})}{\lambda^n} + \frac{(A^{-1})^2}{\lambda^{n-1}} + \dots + \frac{(A^{-1})^n}{\lambda} + (A^{-1})^{n+1} + (A^{-1})^{n+2} \lambda + \dots$$

é a série de Laurent da função $\lambda \mapsto \lambda^{-n} (A - \lambda I)^{-1}$, cujo coeficiente do índice -1 é $(A^{-1})^n$.

Além disso, como $\lambda \mapsto \lambda^{-n} (A - \lambda I)^{-1}$ é analítica em $B_r(0) - \{0\} = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| \leq r\}$, para algum $r > 0$. Sendo $\lambda = 0$ a única singularidade da função neste conjunto, podemos aplicar o Teorema dos Resíduos para qualquer curva fechada Λ em $B_r(0) - \{0\}$. Assim, temos

$$\int_{\Lambda} \lambda^{-n} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda = 2\pi i \operatorname{res}(\lambda^{-n} (A - \lambda I)^{-1}) = 2\pi i (A^{-1})^n.$$

Observe ainda que a integral sobre a curva C pode ser transformada na integral de uma curva fechada em torno da origem, o que no permite concluir que

$$A^{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \lambda^{-n} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda = (A^{-1})^n,$$

isto é, para $\alpha = n \in \mathbb{N}$, A^{-n} é a n -ésima iterada de A^{-1} .

Outro caso especial é quando $0 < \alpha < 1$. Nessa condição, da definição de $A^{-\alpha}$, temos

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{\gamma}_{1,r}} \lambda^{-\alpha} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{2,r}} \lambda^{-\alpha} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{3,r}} \lambda^{-\alpha} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda,$$

onde $\bar{\gamma}_{1,r}$ é a curva $\gamma_{1,r}(\rho) = \rho e^{-i\varphi}$, com $r \leq \rho < +\infty$, percorrida no sentido contrário, $\gamma_{2,r}(\varphi) = r e^{i\varphi}$, com $-\psi \leq \varphi \leq \psi$, $\gamma_{3,r}(\rho) = \rho e^{i\psi}$, com $r \leq \rho < +\infty$.

Vamos analisar separadamente cada uma das integrais acima. Para a primeira integral, temos

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\gamma}_{1,r}} \lambda^{-\alpha} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda &= - \int_r^\infty (\rho e^{-i\psi})^{-\alpha} (A - \rho e^{-i\psi})^{-1} e^{-i\psi} d\rho \\ &= - \int_r^\infty \rho^{-\alpha} e^{i\psi\alpha} (A - \rho e^{-i\psi})^{-1} e^{-i\psi} d\rho. \end{aligned}$$

Observe que, quando $\omega \rightarrow 0$, $\psi \rightarrow \pi$, pois $0 < \psi < \pi - \omega$, então

$$\rho^{-\alpha} e^{i\psi\alpha} (A - \rho e^{-i\psi}) e^{-i\psi} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \rho^{-\alpha} e^{i\pi\alpha} (A - \rho e^{-i\pi}) e^{-i\pi} = -\rho^{-\alpha} e^{i\pi\alpha} (A + \rho I)^{-1}.$$

Além disso

$$\begin{aligned} \left\| \rho^{-\alpha} e^{i\psi\alpha} (A - \rho e^{-i\psi}) e^{-i\psi} \right\| &\leq |\rho^{-\alpha}| |e^{i\psi\alpha}| \|(A - \rho e^{-i\psi})\| \\ &\leq \rho^{-\alpha} \frac{M}{1 + \rho} = g(\rho), \end{aligned}$$

com $g(\rho)$ integrável em $(r, +\infty)$. Logo, pelo Teorema da convergência dominada,

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \int_r^\infty (\rho^{-\alpha} e^{-i\psi})(A - \rho e^{-i\psi})^{-1} e^{-i\psi} d\rho = \int_r^\infty -\rho^{-\alpha} e^{i\pi\alpha} (A + \rho I)^{-1} d\rho.$$

Analogamente,

$$\int_{\gamma_{3,r}} \lambda^{-\alpha} (A - \lambda I)^{-1} dz = \int_r^\infty \rho^{-\alpha} e^{-i\psi\alpha} (A - \rho e^{i\psi})^{-1} e^{i\psi} d\rho,$$

com $\rho^{-\alpha} e^{-i\psi\alpha} (A - \rho e^{i\psi})^{-1} e^{i\psi} \rightarrow -\rho^{-\alpha} e^{-i\pi\alpha} (A + \rho)^{-1}$, quando $\omega \rightarrow 0$, e

$$\|\rho^{-\alpha} e^{-i\psi\alpha} (A - \rho e^{i\psi})^{-1} e^{i\psi}\| \leq \rho^{-\alpha} \frac{M}{1 + \rho} = g(\rho).$$

Então, pelo Teorema da convergência dominada, temos

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \int_r^\infty \rho^{-\alpha} e^{-i\psi\alpha} (A - \rho e^{i\psi})^{-1} e^{i\psi} d\rho = \int_r^\infty -\rho^{-\alpha} e^{-i\pi\alpha} (A + \rho I)^{-1} d\rho.$$

Ainda, como

$$\begin{aligned} \left\| (re^{i\varphi})^{-\alpha} (A - re^{i\varphi})^{-1} r i e^{i\varphi} \right\| &\leq |r^{-\alpha}| |e^{-i\varphi\alpha}| \|(A - re^{i\varphi})^{-1}\| |r| |i| |e^{i\varphi}| \\ &\leq r^\alpha \frac{M}{1 + r} r \\ &\leq \frac{M}{1 + r} r \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $r \rightarrow 0$, e

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} \int_{\gamma_{2,r}} \lambda^{-\alpha} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \int_{-\psi}^{\psi} (re^{i\varphi})^{-\alpha} (A - re^{i\varphi})^{-1} r i e^{i\varphi} d\varphi \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (re^{i\varphi})^{-\alpha} (A - re^{i\varphi})^{-1} r i e^{i\varphi} d\varphi, \end{aligned}$$

pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} (re^{i\varphi})^{-\alpha} (A - re^{i\varphi}) r i e^{i\varphi} d\varphi = 0.$$

Logo, fazendo $\omega \rightarrow 0$, temos

$$\begin{aligned} A^{-\alpha} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_r^\infty -\rho^{-\alpha} e^{i\pi\alpha} (A + \rho I)^{-1} d\rho + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^\pi (re^{i\varphi})^{-\alpha} (A - re^{i\varphi})^{-1} r i e^{i\varphi} d\varphi \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_r^\infty -\rho^{-\alpha} e^{-i\pi\alpha} (A + \rho I)^{-1} d\rho. \end{aligned}$$

Assim, fazendo $r \rightarrow 0$, obtemos

$$\begin{aligned} A^{-\alpha} &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \rho^{-\alpha} e^{i\pi\alpha} (A + \rho I)^{-1} - \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \rho^\alpha e^{-i\pi\alpha} (A + \rho I)^{-1} d\rho \\ &= \left(\frac{e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}}{2\pi i} \right) \int_0^\infty \rho^{-\alpha} (A + \rho I)^{-1} d\rho \\ &= \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty \rho^{-\alpha} (A + \rho I)^{-1} d\rho. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Para o restante desta seção, assumiremos que $\omega < \frac{\pi}{2}$. Assim, se A satisfaz a Condição 1.42 então, $-A$ gera um semigrupo analítico $(T(z))_{z \in \Delta(\theta) \cup \{0\}}$. Além disso, existe uma constante $\delta > 0$ tal que $-A + \delta I$ é o gerador infinitesimal do semigrupo analítico $S(t) = T(t)e^{\delta t}$, $t \geq 0$. Assim, tendo em vista o Corolário 1.41, para $t \geq 0$, temos

$$\|T(t)\| \leq M e^{-\delta t}, \tag{1.19}$$

$$\|AT(t)\| \leq M_1 t^{-1} e^{-\delta t}, \tag{1.20}$$

$$\|A^n T(t)\| \leq M_n t^{-n} e^{-\delta t}. \tag{1.21}$$

Agora, de (1.19) sabemos que

$$R(\rho : -A) = (\rho I + A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\rho s} T(s) ds \tag{1.22}$$

converge uniformemente para $\rho \geq 0$ na topologia do operador uniforme. Assim, substituindo (1.22) em (1.18) e usando o Teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned} A^{-\alpha} &= \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty \rho^{-\alpha} \left(\int_0^\infty e^{-\rho s} T(s) ds \right) d\rho \\ &= \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty T(s) \int_0^\infty \rho^{-\alpha} e^{\rho s} d\rho ds. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Além disso, fazendo a mudança de variável $u = \rho s$ em (1.23), segue que

$$A^{-\alpha} = \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty T(s) \left(\int_0^\infty (us^{-1})^{-\alpha} e^{-u} s^{-1} du \right) ds$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty s^{\alpha-1} T(s) \left(\int_0^\infty u^{-\alpha} e^{-u} du \right) ds \\
&= \frac{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \left(\int_0^\infty u^{-\alpha} e^{-u} du \right) \left(\int_0^\infty s^{\alpha-1} T(s) ds \right).
\end{aligned}$$

Como $\int_0^\infty u^{-\alpha} e^{-u} du = \Gamma(1-\alpha)$ e $\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi\alpha)} = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$, concluímos que

$$\begin{aligned}
A^{-\alpha} &= \frac{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \left(\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi\alpha} \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right) \int_0^\infty s^{\alpha-1} T(s) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty s^{\alpha-1} T(s) ds.
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Note ainda que

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^\infty s^{\alpha-1} T(s) ds \right\| &\leq \int_0^\infty s^{\alpha-1} \|T(s)\| ds \leq M \int_0^\infty \left(\frac{u}{\delta} \right)^{\alpha-1} e^{-u} \delta^{-1} du \\
&= M \delta^{1-\alpha} \delta^{-1} \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du \\
&= M \delta^{-\alpha} \Gamma(\alpha),
\end{aligned}$$

e portanto, a integral em (1.24) converge na topologia do operador uniforme, para todo $\alpha > 0$.

Desse modo, quando $-A$ é o gerador de um C_0 -semigrupo analítico, podemos definir $A^{-\alpha}$ da seguinte forma:

$$A^{-\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty s^{\alpha-1} T(s) ds, & \alpha > 0, \\ I, & \alpha = 0. \end{cases}$$

Lema 1.43. Para $\alpha, \beta \geq 0$, vale $A^{-(\alpha+\beta)} = A^{-\alpha} \cdot A^{-\beta}$.

Demonstração. Sejam $\alpha, \beta \geq 0$, então

$$\begin{aligned}
A^{-\alpha} A^{-\beta} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} T(t) A^{-\beta} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} T(t) \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty s^{\beta-1} T(s) ds \right) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \int_0^\infty s^{\beta-1} T(t+s) ds dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \int_t^\infty (u-t)^{\beta-1} T(u) du dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty \left(\int_0^u t^{\alpha-1} (u-t)^{\beta-1} dt \right) T(u) du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty \left(\int_0^1 u^{\alpha-1} v^{\alpha-1} u^{\beta-1} (1-v)^{\beta-1} u dv \right) T(u) du
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \left(\int_0^1 v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1} dv \right) \int_0^\infty u^{\alpha+\beta-1} T(u) du.$$

Como $\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1} du$, obtemos

$$A^{-\alpha}A^{-\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^\infty u^{\alpha+\beta-1} T(u) du.$$

□

Lema 1.44. *Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|A^{-\alpha}\| \leq C, \text{ para } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Demonstração. Para $\alpha = 0$, $A^{-\alpha} = I$ e então, $\|A^{-\alpha}\| \leq 1$. Outro caso direto é para $\alpha = 1$ pois, como $0 \in \rho(A)$, $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ e então, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que $\|A^{-1}\| \leq C_1$.

Agora, considere $0 < \alpha < 1$. Então

$$\begin{aligned} \|A^{-\alpha}\| &= \left\| \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \left[\int_0^1 t^{-\alpha}(tI + A)^{-1} dt + \int_1^\infty t^{-\alpha}(tI + A)^{-1} dt \right] \right\| \\ &\leq \left| \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \right| \int_0^1 t^{-\alpha} \|(tI + A)^{-1}\| dt + \left| \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \right| \int_1^\infty t^{-\alpha} \|(tI + A)^{-1}\| dt \\ &\leq \left| \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \right| \int_0^1 t^{-\alpha} \frac{M}{1+t} dt + \left| \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \right| \int_1^\infty t^{-\alpha} \frac{M}{1+t} dt \\ &\leq \left| \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \right| M \left[\int_0^1 t^{-\alpha} dt + \int_1^\infty t^{-\alpha-1} dt \right] \\ &= M \frac{|\sin(\pi\alpha)|}{\pi} \left[\frac{1}{(1-\alpha)} + \frac{1}{\alpha} \right] \\ &= M \left[\frac{|\sin(\pi\alpha)|}{\pi(1-\alpha)} + \frac{|\sin(\pi\alpha)|}{\pi\alpha} \right]. \end{aligned}$$

Note que $\sin(\pi\alpha) = \sin(\pi) \cos(\pi\alpha) - \cos(\pi) \sin(\pi\alpha) = \sin(\pi(1-\alpha))$. Assim, segue que

$$\|A^{-\alpha}\| \leq M \left[\frac{|\sin(\pi(1-\alpha))|}{\pi(1-\alpha)} + \frac{|\sin(\pi\alpha)|}{\pi\alpha} \right].$$

Logo, como a função $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ é limitada em $(0, 1)$, existe $C > 0$, $C = \max \left\{ 1, C_1, \max_{0 < t < 1} \frac{|\sin(t)|}{t} \right\}$, de modo que

$$\|A^{-\alpha}\| \leq C, \text{ para todo } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

□

Lema 1.45. Para todo $x \in X$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} A^{-\alpha}x = x$.

Demonstração. Assuma primeiro que $x \in D(A)$. Como $0 \in \rho(A)$, $x = A^{-1}y$ para algum $y \in X$ e então

$$\begin{aligned} A^{-\alpha}x - x &= A^{-\alpha}(A^{-1}y) - A^{-1}y \\ &= A^{-(\alpha+1)}y - A^{-1}y \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty t^\alpha T(t)y \, dt - \int_0^\infty T(t)y \, dt \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - 1 \right) T(t)y \, dt \\ &= \int_0^k \left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - 1 \right) T(t)y \, dt + \int_k^\infty \left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - 1 \right) T(t)y \, dt, \end{aligned}$$

para todo $k > 0$.

De (1.19), temos $\|T(t)\| \leq Me^{-\delta t}$, para todo $t \geq 0$. Além disso, por [31, Lemma 7.6.4 pág. 174] existe uma constante $C > 0$ tal que, para $\alpha \in [0, 1]$ e $t \geq 1$, $\left| \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - 1 \right| \leq Ct$. Assim,

$$\begin{aligned} \|A^{-\alpha}x - x\| &\leq \int_0^k \left| \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - 1 \right| \|T(t)\| \|y\| \, dt + \int_k^\infty \left| \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - 1 \right| \|T(t)\| \|y\| \, dt \\ &\leq M\|y\| \int_0^k \left| \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - 1 \right| e^{-\delta t} \, dt + MC\|y\| \int_k^\infty t e^{-\delta t} \, dt, \end{aligned}$$

para todo $k > 0$ e $\alpha \in (0, 1)$.

Considere a integral $\int_0^\infty t e^{-\delta t} \, dt$. Note que

$$\int_0^\infty t e^{-\delta t} \, dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{t e^{-\delta t}}{\delta} \Big|_0^b - \int_0^b \frac{e^{-\delta t}}{\delta} \, dt \right] = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{b e^{-\delta b}}{\delta} - \frac{e^{-\delta b}}{\delta^2} + \frac{1}{\delta^2} \right] = \frac{1}{\delta^2}.$$

Logo, pelo critério de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe um $k > 0$ tal que $\int_k^\infty t e^{-\delta t} \, dt < \frac{\varepsilon}{2}$. Além disso, tomando α suficientemente pequeno, temos $\int_0^k \left| \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - 1 \right| e^{-\delta t} \, dt < \frac{\varepsilon}{2}$, pois

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{1}{\Gamma(1)} = 1.$$

Consequentemente, para $x \in D(A)$, temos $\lim_{\alpha \rightarrow 0} A^{-\alpha}x = x$.

Como $D(A)$ é denso em X , dado $x \in X$, existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $D(A)$ tal que $x_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow +\infty$. Então,

$$\begin{aligned} \|A^{-\alpha}x - x\| &\leq \|A^{-\alpha}x - A^{-\alpha}x_n\| + \|A^{-\alpha}x_n - x_n\| + \|x_n - x\| \\ &\leq C\|x - x_n\| + \|A^{-\alpha}x_n - x_n\| + \|x_n - x\|. \end{aligned}$$

Desse modo, fazendo $\alpha \rightarrow 0$ na desigualdade acima, temos $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|A^{-\alpha}x - x\| = 0$, ou seja, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} A^\alpha x = x$, para todo $x \in X$. $\square$

Corolário 1.46. *Se A satisfaz a Condição 1.42 com $\omega < \frac{\pi}{2}$, então $(A^{-t})_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo de operadores lineares limitados.*

Demonstração. Seja $t > 0$. Escolha $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < t - n < 1$. Então, pelo Lema 1.44

$$\begin{aligned} \|A^{-t}\| &= \|A^{-t+n-n}\| = \|A^{-(t-n)}A^{-n}\| \\ &\leq \|A^{-(t-n)}\| \|A^{-n}\| \leq C\|(A^{-1})^n\| \\ &\leq C^{n+1} = C_n, \end{aligned}$$

isto é, A^{-t} é um operador linear limitado para todo $t \geq 0$. Além disso, pelo Lema 1.43, segue que $(A^{-t})_{t \geq 0}$ satisfaz a propriedade de semigrupo e o Lema 1.45 garante que (A^{-t}) é um C_0 -semigrupo. $\square$

Lema 1.47. *O operador $A^{-\alpha}$ é injetor para todo $\alpha \geq 0$.*

Demonstração. Pela Condição 1.42, $0 \in \rho(A)$ e assim, A^{-1} existe e, conseqüentemente, A^{-1} é injetor.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $A^{-n} = (A^{-1})^n$ e então, A^{-n} também é injetor.

Para $\alpha > 0$ qualquer, sejam $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $A^{-\alpha}x = 0$ e $n \geq \alpha$. Então,

$$A^{-n}x = A^{-n+\alpha-\alpha}x = A^{-n+\alpha}A^{-\alpha}x = A^{-n+\alpha}0 = 0.$$

Logo, $x = 0$ e assim, $A^{-\alpha}$ é injetor para todo $\alpha \geq 0$. $\square$

Definição 1.48. *Seja A um operador linear que satisfaz a Condição 1.42 com $\omega < \frac{\pi}{2}$. Para todo $\alpha > 0$, seja $A^\alpha : D(A^\alpha) \subset X \rightarrow X$, definido por*

$$A^\alpha = \begin{cases} (A^{-\alpha})^{-1}, & \alpha \neq 0, \\ I, & \alpha = 0, \end{cases}$$

com $D(A^\alpha) = \mathcal{R}(A^{-\alpha})$, onde $\mathcal{R}(A^{-\alpha})$ é a imagem de $A^{-\alpha}$.

A seguir, vamos estudar algumas propriedades de A^α

Teorema 1.49. *Seja A^α como definido acima. Então:*

(a) A^α é um operador linear fechado;

(b) Se $\alpha \geq \beta > 0$, então $D(A^\alpha) \subseteq D(A^\beta)$;

(c) $\overline{D(A^\alpha)} = X$ para todo $\alpha \geq 0$;

(d) Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então $A^{\alpha+\beta}x = A^\alpha \cdot A^\beta x$, para todo $x \in D(A^\gamma)$, onde $\gamma = \max\{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$.

Demonstração. (a) Se $\alpha \leq 0$, então $\alpha = -\beta$, com $\beta > 0$ e, pelo Corolário 1.46, A^α é limitado, isto é, $A^\alpha \in \mathcal{L}(X)$ e então A^α é fechado.

Se $\alpha > 0$ então, pela Definição 1.48, A^α é invertível e $(A^\alpha)^{-1} = A^{-\alpha}$, com $A^{-\alpha} \in \mathcal{L}(X)$ como já argumentado.

Agora, sejam $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $D(A^\alpha)$ e $u, v \in X$ tais que $u_n \rightarrow u$ e $A^\alpha u_n \rightarrow v$. Observe que, se $w_n = A^\alpha u_n$, então $A^{-\alpha} w_n = u_n$ e assim,

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A^{-\alpha} w_n = A^{-\alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = A^{-\alpha} v,$$

isto é, $u \in \mathcal{R}(A^{-\alpha}) = D(A^\alpha)$. Além disso,

$$\begin{aligned} A^\alpha u &= A^\alpha \left(\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \right) = A^\alpha \left(\lim_{n \rightarrow \infty} A^{-\alpha} w_n \right) \\ &= A^\alpha \left(A^{-\alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} w_n \right) = (A^\alpha A^{-\alpha}) v \\ &= v. \end{aligned}$$

Portanto, A^α é um operador linear fechado.

(b) Sejam $\alpha \geq \beta > 0$. Pelo Lema 1.43, segue que

$$A^{-\alpha} = A^{-\alpha+\beta-\beta} = A^{-\beta} A^{-(\alpha+\beta)}.$$

Consequentemente $\mathcal{R}(A^{-\alpha}) \subseteq \mathcal{R}(A^{-\beta})$ e então $D(A^\alpha) \subseteq D(A^\beta)$.

(c) Pelo Teorema 1.13, temos $\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)} = X$ e então, visto que $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n) \subset D(A^n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, obtemos que $\overline{D(A^n)} = X$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Agora, dado $\alpha \geq 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq \alpha$ e assim, pelo item (b), $D(A^n) \subset D(A^\alpha)$. Consequentemente, $\overline{D(A^\alpha)} = X$, para todo $\alpha \geq 0$.

(d) Para provarmos essa afirmação precisamos analisar alguns casos:

(i) Se $\alpha < 0$ e $\beta < 0$ então, pelo Lema 1.43, $A^{\alpha+\beta}x = A^\alpha A^\beta x$, $\forall x \in X$.

(ii) Se $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e $x \in D(A^\alpha A^\beta)$, então $x \in D(A^\beta)$ e $A^\beta x \in D(A^\alpha)$. Seja $y = A^\alpha A^\beta x$, então

$$A^\beta x = A^{-\alpha} y \text{ e } x = A^{-\beta} A^{-\alpha} y = A^{-(\alpha+\beta)} y.$$

Assim, $x \in \mathcal{R}(A^{-(\alpha+\beta)}) = D(A^{\alpha+\beta})$ e $A^{\alpha+\beta}x = y = A^\alpha A^\beta x$. Portanto, $D(A^\alpha A^\beta) \subset D(A^{\alpha+\beta})$.

Por outro lado, seja $x \in D(A^{\alpha+\beta})$ e $y = A^{\alpha+\beta}x$. Então,

$$x = A^{-(\alpha+\beta)}y = A^{-(\beta+\alpha)}y = A^{-\beta-\alpha}y,$$

ou ainda, $A^\beta x = A^{-\alpha}y$, o que implica que $A^\alpha A^\beta x = y$. Logo, $A^{\alpha+\beta}x = y = A^\alpha A^\beta x$, isto é, $x \in D(A^\alpha A^\beta)$, o que nos permite concluir que $D((A^{\alpha+\beta})) \subset D(A^\alpha A^\beta)$.

Então, $D(A^{\alpha+\beta}) = D(A^\alpha A^\beta)$ e $A^{\alpha+\beta}x = A^\alpha A^\beta x$, $\forall x \in D(A^{\alpha+\beta})$.

(iii) Se $\alpha < 0$ e $\beta > 0$ temos duas possibilidades para a soma: $\alpha + \beta > 0$ ou $\alpha + \beta < 0$.

Caso $\alpha + \beta > 0$, como $-\alpha > 0$, o item (ii) nos garante que

$$A^{-\alpha}A^{-\alpha+\beta}x = A^{-\alpha+(\alpha+\beta)}x = A^\beta x, \text{ para todo } x \in D(A^{-\alpha+\alpha+\beta}) = D(A^\beta).$$

Seja $y = A^{\alpha+\beta}x$, para algum $x \in D(A^\beta)$. Assim, temos

$$A^{-\alpha}y = A^\beta x \text{ e então, } A^\beta x \in \mathcal{R}(A^{-\alpha}) = D(A^\alpha).$$

Logo,

$$A^\alpha A^\beta = A^\alpha A^{-\alpha}y = y = A^{\alpha+\beta}x, \forall x \in D(A^\beta).$$

Para o outro caso, temos $\alpha + \beta < 0$ e $-\beta < 0$ e assim, pelo item (i), segue que $A^{-\beta}A^{\alpha+\beta}x = A^{-\beta+\alpha+\beta}x = A^\alpha x$, $\forall x \in X$.

Seja $y = A^{\alpha+\beta}x$. Então, $A^{-\beta}y = A^\alpha x$, o que implica que $A^\alpha x \in \mathcal{R}(A^{-\beta}) = D(A^\beta)$. Dessa forma, temos

$$A^\beta A^\alpha x = A^\beta A^{-\beta}y = y = A^{\alpha+\beta}x, \forall x \in X.$$

Por fim, se $\gamma = \max\{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$, então $D(A^\gamma)$ está contido em $D(A^\alpha)$, $D(A^\beta)$ e $D(A^{\alpha+\beta})$ e as igualdades em (i), (ii) e (iii) são satisfeitas para todo $x \in D(A^\gamma)$. $\square$

Teorema 1.50. *Seja $0 < \alpha < 1$. Se $x \in D(A)$, então*

$$A^\alpha x = \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty t^{\alpha-1} A(tI + A)^{-1} x \, dt.$$

Demonstração. Com $0 < \alpha < 1$, temos $0 < 1 - \alpha < 1$. Então, para $x \in D(A)$,

$$A^{\alpha-1}x = \frac{\text{sen}(\pi(1-\alpha))}{\pi} \int_0^\infty t^{\alpha-1} (tI + A)^{-1} x \, dt = \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty t^{\alpha-1} (tI + A)^{-1} x \, dt. \quad (1.25)$$

Observe que o integrando em (1.25) está no domínio de A . Além disso, a função $t \mapsto t^{\alpha-1}A(tI + A)^{-1}x$ é integrável em $[0, +\infty)$, pois

$$\begin{aligned} \|t^{\alpha-1}A(tI + A)^{-1}x\| &= \|t^{\alpha-1}AR(t : -A)x\| \\ &= \left\| t^{\alpha-1}A \int_0^\infty e^{-st}T(s)x \, ds \right\| \\ &\leq t^{\alpha-1} \int_0^\infty e^{-st} \|T(s)\| \|Ax\| \, ds \\ &\leq t^{\alpha-1} M \|Ax\| \int_0^\infty e^{-s(t+\delta)} \, ds \\ &= t^{\alpha-1} M \|Ax\| \frac{1}{t+\delta} \end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^\infty t^{\alpha-1}A(tI + A)^{-1}x \, dt \right\| &\leq \int_0^\infty \|t^{\alpha-1}A(tI + A)^{-1}x\| \, dt \\ &\leq \int_0^\infty t^{\alpha-1} M \|Ax\| \frac{1}{t+\delta} \, dt \\ &= M \|Ax\| \left[\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{t+\delta} \, dt + \int_1^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{t+\delta} \, dt \right] \\ &\leq M \|Ax\| \left[\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{\delta} \, dt + \int_1^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{t} \, dt \right] \\ &= M \|Ax\| \left[\frac{1}{\delta\alpha} + \frac{1}{(1-\alpha)} \right] < +\infty. \end{aligned}$$

Voltando a (1.25) e usando o fato de A ser fechado, temos

$$\begin{aligned} A^\alpha x = A(A^{\alpha-1})x &= \left[A \frac{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty t^{\alpha-1}(tI + A)^{-1}x \, dt \right] \\ &= \frac{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty t^{\alpha-1}A(tI + A)^{-1}x \, dt, \text{ para todo } x \in D(A). \end{aligned}$$

□

Teorema 1.51. *Seja $-A$ o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $(T(z))_{z \in \Delta(\theta) \cup \{0\}}$, para algum $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Se $0 \in \rho(A)$, então:*

(a) $T(t) : X \rightarrow D(A^\alpha)$ para todo $t > 0$ e $\alpha \geq 0$;

(b) para $\alpha > 0$ e todo $x \in D(A^\alpha)$, $T(t)A^\alpha x = A^\alpha T(t)x$;

(c) para todo $\alpha > 0$ e $t > 0$, o operador $A^\alpha T(t)$ é limitado e $\|A^\alpha T(t)\| \leq M_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t}$;

(d) sejam $0 < \alpha < 1$ e $x \in D(A^\alpha)$, então

$$\|T(t)x - x\| \leq C_\alpha t^\alpha \|A^\alpha x\|.$$

Demonstração. (a) Como $-A$ é gerador de um semigrupo analítico, a função $t \mapsto T(t)$ é diferenciável para $t > 0$ e então, da Proposição 1.27, segue que $T(t) : X \rightarrow D(A^n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, dado $\alpha \geq 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq \alpha$ e então, pelo item (b) do Teorema 1.49, $D(A^n) \subset D(A^\alpha)$. Logo, $T(t) : X \rightarrow D(A^\alpha)$, $\alpha \geq 0$.

(b) Sejam $\alpha > 0$ e $x \in D(A^\alpha)$. Então, como $D(A^\alpha) = \mathcal{R}(A^{-\alpha})$, $x = A^{-\alpha}y$ para algum $y \in X$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} T(t)x &= T(t)A^{-\alpha}y = T(t) \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty s^{\alpha-1} T(s)y \, ds \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty s^{\alpha-1} T(s)T(t)y \, ds \\ &= A^{-\alpha}T(t)y \\ &= A^{-\alpha}T(t)A^\alpha x, \end{aligned}$$

o que implica que $A^\alpha T(t)x = T(t)A^\alpha x$, para todo $x \in D(A^\alpha)$, $\alpha > 0$.

Observe ainda que vale a igualdade $T(t)A^{-\alpha}y = A^{-\alpha}T(t)y$, para qualquer que seja $y \in X$. Então, segue que $A^{-\alpha}T(t) = T(t)A^{-\alpha}$, $\forall \alpha \geq 0$.

(c) Como A^α é fechado e $T(t) \in \mathcal{L}(X)$ para todo $t \geq 0$, então $A^\alpha T(t)$ é fechado. Pelo item (a), $A^\alpha T(t)$ está definido em todo X e assim, pelo Teorema do gráfico fechado, $A^\alpha T(t)$ é limitado.

Além disso, dado $\alpha > 0$, seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 < \alpha < n$. Então, usando a estimativa (1.21), temos

$$\begin{aligned} \|A^\alpha T(t)\| &= \|A^{\alpha-n} A^n T(t)\| \\ &= \left\| \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty s^{n-\alpha-1} T(s) A^n T(t) \, ds \right\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty s^{n-\alpha-1} \|A^n T(t+s)\| \, ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty s^{n-\alpha-1} M_n (t+s)^{-n} e^{-\delta(t+s)} \, ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty (tu)^{n-\alpha-1} M_n t^{-n} (1+u)^{-n} e^{-\delta t(1+u)} t \, du \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty t^{-\alpha} e^{\delta t} M_n u^{n-\alpha-1} (1+u)^{-n} e^{-\delta tu} \, du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{M_n e^{-\delta t}}{\Gamma(n-\alpha)t^\alpha} \int_0^\infty e^{-\delta t u} u^{n-\alpha-1} (1+u)^{-n} du \\
&\leq \frac{e^{-\delta t}}{t^\alpha} \cdot \frac{M_n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty u^{n-1-\alpha} (1+u)^{-n} du \\
&\leq M_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t},
\end{aligned}$$

onde M_α é uma constante que independe de t .

Logo, $\|A^\alpha T(t)\| \leq M_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t}$, para todo $t > 0$.

(d) Sejam $0 < \alpha \leq 1$ e $x \in D(A^\alpha)$. Então, pelo Teorema 1.10,

$$T(t)x - x = \int_0^t AT(s)x \, ds = \int_0^t A^{1-\alpha+\alpha}T(s)x \, ds = \int_0^t A^{1-\alpha}T(s)A^\alpha x \, ds.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|T(t)x - x\| &\leq \int_0^t \|A^{1-\alpha}T(s)\| \|A^\alpha x\| \, ds \\
&\leq \int_0^t M_{1-\alpha} s^{\alpha-1} e^{-\delta s} \|A^\alpha x\| \, ds \\
&\leq M_{1-\alpha} \|A^\alpha x\| \int_0^t s^{\alpha-1} \, ds \\
&= \frac{M_{1-\alpha}}{\alpha} t^\alpha \|A^\alpha x\| \\
&\leq C_\alpha t^\alpha \|A^\alpha x\|,
\end{aligned}$$

onde $C_\alpha = \frac{M_{1-\alpha}}{\alpha}$.

□

Existência de solução para equações diferenciais funcionais

Neste capítulo vamos estabelecer a existência de solução para uma classe de equações diferenciais funcionais abstratas em duas situações: primeiro, para o problema de Cauchy não homogêneo e depois, o caso neutro com retardo.

Em ambos os casos vamos utilizar a teoria de semigrupos como ferramenta e, no segundo caso, usaremos também teoremas de ponto fixo. Além disso, X denotará um espaço de Banach e as expressões $C([0, \tau], X)$ e $L^1([0, \tau], X)$ representarão os espaços das funções definidas em $[0, \tau]$ e assumindo valores em X que são contínuas e integráveis, respectivamente.

2.1 Problema de Cauchy abstrato não homogêneo

Nesta seção estudaremos o problema de Cauchy dado por

$$x'(t) = Ax(t) + f(t), \quad 0 < t < \tau, \quad (2.1)$$

$$x(0) = x^0, \quad (2.2)$$

onde A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ em X , $x^0 \in X$ e $f : [0, \tau] \rightarrow X$ é uma função apropriada.

Vejamos a seguir o conceito de solução clássica para este problema.

Definição 2.1. *Uma função $x : [0, \tau] \rightarrow X$ é uma solução clássica de (2.1)-(2.2) em $[0, \tau]$ se x é contínua em $[0, \tau]$, continuamente diferenciável em $(0, \tau)$, $x(t) \in D(A)$ para todo $t \in (0, \tau)$ e as*

equações (2.1)-(2.2) são satisfeitas.

Proposição 2.2. *Se $f \in L^1([0, \tau], X)$, então para todo $x^0 \in X$, o sistema (2.1)-(2.2) tem no máximo uma solução clássica. Além disso, essa solução, quando existe, é dada por*

$$x(t) = T(t)x^0 + \int_0^t T(t-s)f(s) ds, \quad 0 \leq t < \tau. \quad (2.3)$$

Demonstração. Suponha que o problema (2.1)-(2.2) tenha uma solução clássica e seja x esta solução. Para $t \in [0, \tau)$ fixo, considere a função $g : [0, t] \rightarrow X$ dada por

$$g(s) = T(t-s)x(s).$$

Assim, g é diferenciável em $(0, \tau)$, com

$$\begin{aligned} g'(s) &= \frac{d}{ds} [T(t-s)]x(s) + T(t-s)x'(s) \\ &= -AT(t-s)x(s) + T(t-s)(Ax(s) + f(s)) \\ &= T(t-s)f(s). \end{aligned}$$

Além disso, como $f \in L^1([0, \tau], X)$, a função $s \mapsto T(t-s)f(s)$ é integrável e então,

$$g(t) - g(0) = \int_0^t g'(s) ds = \int_0^t T(t-s)f(s) ds,$$

o que implica que

$$x(t) = T(t)x^0 + \int_0^t T(t-s)f(s) ds, \quad \forall t \in [0, \tau).$$

□

A expressão (2.3) da proposição acima motiva a seguinte definição, que enfraquece o conceito de solução para o problema (2.1)-(2.2) pois não requer a diferenciabilidade da função.

Definição 2.3. *A função $x \in C([0, \tau], X)$ dada por (2.3) é chamada solução fraca de (2.1)-(2.2) em $[0, \tau)$.*

Observe que o problema (2.1)-(2.2) sempre possui solução fraca, para qualquer que seja $x^0 \in X$. A questão então é: quando a solução fraca também é solução clássica?

Teorema 2.4. *Sejam $f \in L^1([0, \tau], X) \cap C([0, \tau], X)$ e*

$$y(t) = \int_0^t T(t-s)f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq \tau. \quad (2.4)$$

Então, o problema de valor inicial (2.1)-(2.2) tem solução clássica x em $[0, \tau)$ para todo $x^0 \in D(A)$ se uma das seguintes condições são satisfeitas:

(i) y é continuamente diferenciável em $(0, \tau)$.

(ii) $y(t) \in D(A)$ para $0 \leq t < \tau$ e $t \mapsto Ay(t)$ é contínua em $(0, \tau)$.

Por outro lado, se (2.1)-(2.2) tem uma solução em $[0, \tau)$ para algum $x^0 \in D(A)$, então y satisfaz as condições (i) e (ii).

Demonstração. Iniciamos esta demonstração pela segunda parte, ou seja, suponhamos que (2.1)-(2.2) tenha uma solução x para algum $x^0 \in D(A)$. Então, $y(t) = x(t) - T(t)x^0$ para todo $t \in [0, \tau)$ e y é diferenciável em $(0, \tau)$, pois é a diferença de duas funções diferenciáveis. Além disso,

$$y'(t) = x'(t) - T(t)Ax^0$$

é contínua em $(0, \tau)$, pois é a diferença de duas funções contínuas. Logo, a condição (i) é satisfeita.

Mais ainda, como $x^0 \in D(A)$, pelo Teorema 1.10, obtemos que $T(t)x^0 \in D(A)$ para todo $t \geq 0$ e assim $y(t) = x(t) - T(t)x^0 \in D(A)$ para todo $0 \leq t < \tau$. Por fim, note que

$$Ay(t) = Ax(t) - AT(t)x^0 = x'(t) - f(t) - T(t)Ax^0$$

e assim, a função $t \mapsto Ay(t)$ é contínua em $(0, \tau)$. Logo, (ii) também é satisfeita.

Agora, suponha que (i) seja satisfeita e mostremos que (2.1)-(2.2) possui uma solução clássica. Para isso, sejam $t \in (0, \tau)$ e $h > 0$, então

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} y(t) &= \frac{1}{h} \int_0^t T(t+h-s)f(s) ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(t-s)f(s) ds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s) ds - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s) ds \\ &\quad - \frac{1}{h} \int_0^t T(t-s)f(s) ds \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s) ds - \int_0^t T(t-s)f(s) ds \right] \\ &\quad - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s) ds \\ &= \frac{y(t+h) - y(t)}{h} - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s) ds. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Dessa forma, como $y(t)$ é continuamente diferenciável em $(0, \tau)$ e

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s) ds = f(t),$$

temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(h) - I}{h} y(t) = y'(t) - f(t),$$

o que mostra que $y(t) \in D(A)$ para todo $t \in (0, \tau)$ e

$$Ay(t) = y'(t) - f(t), \quad \forall t \in (0, \tau).$$

Assim, tomando $x(t) = T(t)x^0 + y(t)$ concluímos que: x é contínua em $[0, \tau)$, x é continuamente diferenciável em $(0, \tau)$, $x(t) \in D(A)$ para todo $t \in [0, \tau)$, $x(0) = x^0 + y(0) = x^0$ e

$$\begin{aligned} x'(t) &= AT(t)x^0 + y'(t) \\ &= A(T(t)x^0 + y(t)) + f(t) \\ &= Ax(t) + f(t), \quad \forall t \in (0, \tau). \end{aligned}$$

Portanto, x é solução clássica de (2.1)-(2.2) em $[0, \tau)$.

Suponhamos agora que (ii) acontece. Novamente, queremos mostrar que (2.1)-(2.2) possui uma solução clássica. Sendo assim, voltemos a expressão (2.5) obtida anteriormente. Como $y(t) \in D(A)$ para todo $t \in [0, \tau)$, fazendo $h \rightarrow 0^+$, concluímos que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} = Ay(t) + f(t),$$

ou seja, a derivada de y à direita, $D^+y(t) = Ay(t) + f(t)$, é contínua em $(0, \tau)$. Ainda, como y é contínua e admite derivada à direita em $(0, \tau)$, o Lema A.8 garante que y é continuamente diferenciável em $(0, \tau)$. Desta forma, procedendo como no caso anterior, podemos concluir que a função $x : [0, \tau) \rightarrow X$, dada por $x(t) = T(t)x^0 + y(t)$, é uma solução clássica de (2.1)-(2.2). $\square$

No que resta desta seção assumiremos que o semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ é uniformemente limitado, isto é, $\|T(t)\| \leq \widetilde{M}$ para todo $t \geq 0$, e para algum $\widetilde{M} \geq 1$.

Corolário 2.5. *Se f é continuamente diferenciável em $[0, \tau]$, então (2.1)-(2.2) tem uma solução clássica em $[0, \tau)$ para todo $x^0 \in D(A)$.*

Demonstração. Observe que, se mostrarmos que a função y definida em (2.4) é continuamente

diferenciável em $(0, \tau)$ então, o resultado é consequência direta do Teorema 2.4.

Assim, mostremos que y é continuamente diferenciável. Para isto, sejam $t \in (0, \tau)$ e $h > 0$ tais que $t + h \in (0, \tau)$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} &= \frac{1}{h} \int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s) \, ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(t-s)f(s) \, ds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h T(t+h-s)f(s) \, ds + \frac{1}{h} \int_h^{t+h} T(t+h-s)f(s) \, ds \\ &\quad - \frac{1}{h} \int_0^t T(t-s)f(s) \, ds. \end{aligned}$$

Note também que $\int_h^{t+h} T(t+h-s)f(s) \, ds = \int_0^t T(t-s)f(s+h) \, ds$ e assim,

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h T(t+h-s)f(s) \, ds + \int_0^t T(t-s) \left(\frac{f(s+h) - f(s)}{h} \right) \, ds.$$

Pela Desigualdade do valor médio para as funções vetoriais, observe ainda que

$$\begin{aligned} \left\| T(t-s) \left(\frac{f(s+h) - f(s)}{h} \right) \right\| &\leq \frac{\widetilde{M}}{h} \|f(s+h) - f(s)\| \\ &\leq \frac{\widetilde{M}}{h} \|f'(s)\| |s+h-s| \\ &\leq \widetilde{M} \sup_{s \in [0, \tau]} \|f'(s)\|, \end{aligned}$$

já que f é continuamente diferenciável em $[0, \tau]$.

Logo, pelo Teorema da convergência dominada, segue que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_0^t T(t-s) \left(\frac{f(s+h) - f(s)}{h} \right) \, ds = \int_0^t T(t-s)f'(s) \, ds.$$

Além disso,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h T(t+h-s)f(s) \, ds = T(t)f(0),$$

o que nos permite concluir que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} = T(t)f(0) + \int_0^t T(t-s)f'(s) \, ds,$$

ou seja, y possui derivada à direita contínua. Logo, pelo Lema A.8, concluímos que y é continuamente diferenciável em $(0, \tau)$ e então, do Teorema 2.4, obtemos que (2.2)-(2.2) possui uma solução clássica em $[0, \tau)$. $\square$

2.2 Existência de solução para equações diferenciais funcionais neutras

Agora, vamos estudar a existência de solução fraca para equações diferenciais funcionais abstratas do tipo neutro com retardo descritas por

$$\frac{d}{dt}(x(t) + F(t, x_t)) = Ax(t) + G(t, x_t), \quad 0 \leq t < \tau, \quad (2.6)$$

$$x_\sigma = \varphi \in \mathcal{C}, \quad (2.7)$$

onde $\tau > 0$, $\sigma \geq 0$, $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ em X , $\mathcal{C} = C([-r, 0], X)$, $x_t \in \mathcal{C}$ para todo $t \in [0, \tau)$, com $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in [-r, 0]$, e as funções $F, G : [0, \tau] \times \mathcal{C} \rightarrow X$ são funções contínuas.

Para facilitar nossas contas, vamos supor que $\sigma = 0$. Além disso, a fim de usar potências fracionárias do operador A , vamos supor que $0 \in \rho(A)$. Assim, podemos considerar o operador linear fechado $(-A)^\beta$, para $0 < \beta \leq 1$, cujo domínio $D((-A)^\beta)$ é denso em X . Dessa forma, o espaço $X_\beta = (D((-A)^\beta), \|\cdot\|_\beta)$, onde $\|x\|_\beta = \|(-A)^\beta x\|$, $\forall x \in D((-A)^\beta)$, é um espaço de Banach.

Lembremos ainda, do Capítulo 1, que existem constantes $M \geq 1$ e $\omega \geq 0$ tais que

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Em particular existe $\widetilde{M} \geq 1$ tal que $\|T(t)\| \leq \widetilde{M}$, para todo $t \in [0, \tau]$.

Os conceitos de solução clássica e fraca para (2.6)-(2.7) serão definidos em analogia aos conceitos de solução do problema de Cauchy abstrato (2.1)-(2.2), estudados na seção anterior.

Definição 2.6. *Uma função $x : [-r, \tau) \rightarrow X$ é uma solução clássica de (2.6)-(2.7) em $[-r, \tau)$ se x e $t \mapsto F(t, x_t)$ são diferenciáveis quase sempre em $[0, \tau)$, x' e $\frac{d}{dt}F(t, x_t)$ pertencem a $L^1([0, \tau], X)$, $x(t) \in D(A)$ para todo $t \in (0, \tau)$ e as equações (2.6) e (2.7) são satisfeitas.*

Nas condições acima, supondo que x é uma solução clássica de (2.6)-(2.7) e fixando $t \in (0, \tau)$, considere a função $g : [0, t) \rightarrow X$ definida por

$$g(s) = T(t - s)x(s).$$

Então, g é diferenciável e

$$\begin{aligned} g'(s) &= \frac{d}{ds}[T(t - s)]x(s) + T(t - s)x'(s) \\ &= -AT(t - s)x(s) + T(t - s) \left[Ax(s) - \frac{d}{ds}F(s, x_s) + G(s, x_s) \right] \end{aligned}$$

$$= -T(t-s)\frac{d}{ds}F(s, x_s) + T(t-s)G(s, x_s).$$

Como $t \mapsto \frac{d}{dt}F(t, x_t)$ é integrável e $t \mapsto G(t, x_t)$ é contínua, a função $s \mapsto T(t-s)\frac{d}{ds}F(s, x_s) + T(t-s)G(s, x_s)$ é integrável. Assim, obtemos

$$g(t) - g(0) = \int_0^t g'(s) ds = - \int_0^t T(t-s)\frac{d}{ds}F(s, x_s)ds + \int_0^t T(t-s)G(s, x_s) ds. \quad (2.8)$$

Integrando por partes o primeiro termo do lado direito de (2.8), segue que

$$g(t) - g(0) = - \left[T(t-s)F(s, x_s) \Big|_0^t - \int_0^t -AT(t-s)F(s, x_s) ds \right] + \int_0^t T(t-s)G(s, x_s) ds.$$

Logo,

$$\begin{aligned} x(t) &= T(t)x(0) - F(t, x_t) + T(t)F(0, x_0) - \int_0^t AT(t-s)F(s, x_s) ds \\ &\quad + \int_0^t T(t-s)G(s, x_s) ds, \end{aligned}$$

ou seja, x satisfaz a seguinte equação integral

$$\begin{aligned} x(t) &= T(t)[\varphi(0) + F(0, \varphi)] - F(t, x_t) - \int_0^t AT(t-s)F(s, x_s) ds \\ &\quad + \int_0^t T(t-s)G(s, x_s) ds, \text{ para todo } 0 \leq t < \tau. \end{aligned} \quad (2.9)$$

A expressão (2.9) motiva a próxima definição, que é um conceito mais fraco de solução para (2.6)-(2.7).

Definição 2.7. *Uma função $x : (-r, \tau) \rightarrow X$ é uma solução fraca de (2.6)-(2.7) se x é contínua em $[0, \tau)$, para cada $t \in [0, \tau)$ a função $s \mapsto AT(t-s)F(s, x_s)$, com $s \in [0, t)$, é integrável, $x_0 = \varphi$ e a equação integral (2.9) é satisfeita.*

A seguir, apresentaremos um resultado de existência de solução local para (2.6)-(2.7). Convém observar que tal resultado está baseado no trabalho de Hernández e Henríquez [13] porém, diferentemente de [13], trataremos o caso em que o retardo é finito. Sendo assim, nossa demonstração está um pouco simplificada.

Teorema 2.8. *Seja $\varphi \in \mathcal{C}$ e assumamos que valem as seguintes condições:*

(a) *existem constantes $\beta \in (0, 1)$ e $L \geq 0$ tais que a função F assume valores em X_β , $L\|(-A)^\beta\| < 1$*

e

$$\|(-A)^\beta F(t, \psi_1) - (-A)^\beta F(s, \psi_2)\| \leq L(|t - s| + \|\psi_1 + \psi_2\|_C),$$

para todos $s, t \in [0, \tau]$ e $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{C}$.

(b) existem constantes $0 < b_\varphi < \tau$ e $r(\varphi) > 0$ tais que para cada $t \in [0, b_\varphi]$, existe um conjunto compacto $U_t \subset X$ tal que $T(t)G(s, \psi) \in U_t$, para todo $\psi \in B_{r(\varphi)}[\varphi] = \{\psi \in \mathcal{C}; \|\psi - \varphi\|_C \leq r(\varphi)\}$ e todo $s \in [0, b_\varphi]$.

Então, existe uma solução fraca para (2.6)-(2.7) definida em $[-r, b]$, para algum $0 < b \leq \tau$.

Demonstração. Iniciaremos essa demonstração definindo algumas constantes. Para $t \in [0, b_\varphi]$ e $\psi \in B_{r(\varphi)}[\varphi]$, note que

$$\begin{aligned} \|(-A)^\beta F(t, \psi)\| &\leq \|(-A)^\beta F(t, \psi) - (-A)^\beta F(b_\varphi, \varphi)\| + \|(-A)^\beta F(b_\varphi, \varphi)\| \\ &\leq L(|t - b_\varphi| + \|\psi - \varphi\|_C) + \|(-A)^\beta F(b_\varphi, \varphi)\| \\ &\leq L(b_\varphi + r(\varphi)) + \|(-A)^\beta F(b_\varphi, \varphi)\| \\ &\leq C_1, \end{aligned} \tag{2.10}$$

onde $C_1 = L(b_\varphi + r(\varphi)) + \|(-A)^\beta F(b_\varphi, \varphi)\|$. Além disso, da condição (b), segue que existe um compacto $U_0 \subset X$ tal que $G(s, \psi) \in U_0$, para todo $s \in [0, b_\varphi]$ e $\psi \in B_{r(\varphi)}[\varphi]$, o que nos permite dizer que existe uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$\|G(t, \psi)\| \leq C_2,$$

para todo $t \in [0, b_\varphi]$ e toda $\psi \in B_{r(\varphi)}[\varphi]$.

Seja $y : [-r, \tau] \rightarrow X$ a função definida por

$$y(t) = \begin{cases} \varphi(t), & -r \leq t < 0, \\ T(t)\varphi(0), & 0 \leq t \leq \tau. \end{cases} \tag{2.11}$$

Dessa forma, para $\theta \in [-r, 0]$, temos

$$y_t(\theta) = y(t + \theta) = \begin{cases} \varphi(t + \theta), & -r \leq t + \theta < 0, \\ T(t + \theta)\varphi(0), & 0 \leq t + \theta \leq \tau. \end{cases}$$

Além disso, podemos mostrar que a função $t \mapsto y_t$ é contínua em $[0, \tau]$. De fato, como $\varphi \in \mathcal{C}$, φ é uniformemente contínua em $[-r, 0]$ e, como a restrição $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo, a função $t \mapsto T(t)\varphi(0)$ também é uniformemente contínua, porém em $[0, \tau]$. Observe ainda que y é contínua

em $t = 0$, o que nos permite concluir que y é uniformemente contínua. Assim, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|y(t+h) - y(t)\| < \varepsilon, \text{ para } 0 < |h| < \delta \text{ e todo } t \in [-r, \tau].$$

Logo, se $t \in [0, \tau]$ e $0 < |h| < \delta$, então

$$\|y_{t+h} - y_t\|_C = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} \|y_{t+h}(\theta) - y_t(\theta)\| = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} \|y(t+h+\theta) - y(t+\theta)\| < \varepsilon,$$

garantindo que $t \mapsto y_t$ é contínua.

Em particular, esta função é contínua para $t = 0$. Assim, dado $\varepsilon = \frac{r(\varphi)}{2}$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\|y_t - y_0\|_C = \|y_t - \varphi\|_C < \frac{r(\varphi)}{2}, \text{ para todo } 0 \leq t \leq \delta_1.$$

Para simplificar a notação, seja $\rho = \frac{r(\varphi)}{2}$.

Ainda com o intuito de estabelecer algumas desigualdades, fixemos $\eta > 0$ suficientemente pequeno.

Da continuidade das funções $t \mapsto y_t$ e F , segue que existe $\delta_2 > 0$ tal que $\|y_t - \varphi\|_C \leq \eta$, para todo $0 \leq t \leq \delta_2$, e o conjunto $W_1 = \{F(t, y_t); 0 \leq t \leq \delta_1\}$ é um subconjunto compacto de X . Consequentemente, visto que X é um espaço de Banach, W_1 é totalmente limitado e então, existem $F(t_1, y_{t_1}), \dots, F(t_n, y_{t_n}) \in W_1$ tais que

$$W_1 \subset \bigcup_{i=1}^n B_{\frac{\eta}{2(\widetilde{M}+1)}}(F(t_i, y_{t_i})).$$

Além disso, como $t \mapsto T(t)F(t_i, y_{t_i})$ é uniformemente contínua em $[0, \tau]$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$, existem $\delta_{t_i} > 0$ tais que $\|T(t)F(t_i, y_{t_i}) - F(t_i, y_{t_i})\| < \frac{\eta}{2}$, para $0 \leq |t| < \delta_{t_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Seja $\delta_3 = \min\{\delta_1, \delta_{t_i}; i = 1, 2, \dots, n\}$. Para $0 \leq t < \delta_3$, sabemos que existe $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $F(t, y_t) \in B_{\frac{\eta}{2(\widetilde{M}+1)}}(F(t_j, y_{t_j}))$ e assim,

$$\begin{aligned} \|(T(t) - I)F(t, y_t)\| &\leq \|T(t)F(t, y_t) - T(t)F(t_j, y_{t_j})\| + \|T(t)F(t_j, y_{t_j}) - F(t_j, y_{t_j})\| \\ &\quad + \|F(t_j, y_{t_j}) - F(t, y_t)\| \\ &\leq \widetilde{M} \frac{\eta}{2(\widetilde{M}+1)} + \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2(\widetilde{M}+1)} \\ &= \eta. \end{aligned}$$

Logo, existe uma constante $0 < b \leq \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, b_\varphi\}$ tal que as seguintes estimativas são válidas:

$$\|y_t - \varphi\|_C \leq \eta, \quad (2.12)$$

$$\|(T(t) - I)F(t, y_t)\| \leq \eta. \quad (2.13)$$

Além disso,

$$\widetilde{M}(\|(-A)^{-\beta}\|L + C_2)b + (1 + \|(-A)^{-\beta}\|\widetilde{M}L)\eta + \frac{C_1 M_{1-\beta} b^\beta}{\beta} \leq (1 - \|(-A)^\beta L\|)\rho, \quad (2.14)$$

$$L \left(\|(-A)^{-\beta}\| + \frac{M_{1-\beta} b^\beta}{\beta} \right) < 1, \quad (2.15)$$

para todo $0 \leq t \leq b$, onde $M_{1-\beta}$ é a constante que aparece no Teorema 1.51.

Agora, consideremos o conjunto

$$S = S(b, \rho) = \{u \in C([0, b], X); u(0) = 0, \|u(t)\| \leq \rho, 0 \leq t \leq b\}.$$

Vejamos algumas propriedades que o conjuntos S possui:

- (i) S é limitado, pois, para todo $u \in S(b, \rho)$, temos $\|u\|_\infty = \sup\{\|u(t)\|, 0 \leq t \leq b\} \leq \rho$.
- (ii) S é fechado. Para provarmos isto, considere $u \in \overline{S}$ e $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em S com $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$. Então, $u(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(0) = 0$ e

$$\|u(t)\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(t)\| \leq \rho, \text{ para todo } t \in [0, b],$$

o que implica em $u \in S$ e assim, S é fechado.

- (iii) S é convexo. De fato, sejam $u, v \in S$, $k \in [0, 1]$ e $z = (1 - k)u + kv$. Então, $z \in C([0, b], X)$, $z(0) = (1 - k)u(0) + kv(0) = 0$ e

$$\|z(t)\| = \|(1 - k)u(t) + kv(t)\| \leq (1 - k)\|u(t)\| + k\|v(t)\| \leq (1 - k)\rho + k\rho = \rho,$$

para todo $0 \leq t \leq b$, o que implica em $z \in S$ e então, S é convexo.

Além disso, dado $u \in S$, consideremos a extensão $\tilde{u}$ de u para o intervalo $[-r, b]$ dada da seguinte forma

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} 0, & -r \leq t < 0, \\ u(t), & 0 \leq t \leq b. \end{cases}$$

Consideremos ainda duas aplicações $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$, ambas com domínio em S , definidas por

$$(\mathcal{T}_1 u)(t) = T(t)F(0, \varphi) - F(t, \tilde{u}_t + y_t) - \int_0^t AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s) ds, \quad 0 \leq t \leq b,$$

e

$$(\mathcal{T}_2 u)(t) = \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) ds, \quad 0 \leq t \leq b.$$

Nosso próximo passo é mostrar que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$ possui um ponto fixo, o qual fornecerá uma solução para (2.6)-(2.7). Faremos isso através do Teorema do ponto fixo de Sadovskii [29]. Porém, antes de aplicar este teorema ao nosso operador $\mathcal{T}$, precisamos garantir que suas hipóteses são satisfeitas. Por isso, no que se segue, mostraremos que $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ estão bem definidas e assumem valores em $C([0, b], X)$; ambas são contínuas em S ; $\mathcal{T}_1$ é lipschitziana; $\mathcal{T}_2$ é compacta e a imagem do operador $\mathcal{T}$ está contida em S .

Por uma questão didática, vamos dividir os resultados a serem provados em etapas.

Observe primeiramente que, se $u \in S$, então $\tilde{u}_t + y_t \in B_{r(\varphi)}[\varphi]$ para todo $0 \leq t \leq b$. De fato, note que $\tilde{u}|_{[-r, 0]} = 0$ e $\tilde{u}|_{[0, b]} = u$, com $u(0) = 0$, o que implica que $\tilde{u}$ é contínua em $[-r, b]$ e

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}(t)\| &= \sup\{\|\tilde{u}(s)\|; -r \leq s \leq b\} \\ &= \sup\{\|u(s)\|; 0 \leq s \leq b\} \\ &\leq \rho, \end{aligned}$$

para $0 \leq t \leq b$. Então,

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_t + y_t - \varphi\|_C &\leq \|\tilde{u}_t\|_C + \|y_t - \varphi\|_C \\ &\leq \rho + \rho \\ &= r(\varphi). \end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{u}_t + y_t \in B_{r(\varphi)}[\varphi]$ para todo $t \in [0, b]$.

(1) Mostremos que $\mathcal{T}_1$ está bem definida e $\mathcal{T}_1 u \in C([0, b], X)$, para todo $u \in S$.

Mostremos primeiramente que $\mathcal{T}_1$ está bem definida.

Para isso, observe que, como F assume valores em X_β e $(-A)^\beta F$ é Lipschitz contínua, então as funções

$$s \mapsto (-A)^\beta F(s, \tilde{u}_s + y_s) \quad \text{e} \quad s \mapsto F(s, \tilde{u}_s + y_s)$$

são contínuas. Mais ainda, como $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ é um semigrupo analítico, segue da Proposição 1.27 que a função $s \mapsto AT(t-s)$ é contínua em $[0, t)$, na topologia do operador uniforme. Assim, por ser

composta de funções contínuas, a função

$$s \mapsto AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s)$$

também é contínua em $[0, t)$ e, portanto, mensurável.

Por outro lado, aplicando as estimativas do Teorema 1.51 e (2.10), obtemos que

$$\begin{aligned} \|AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s)\| &\leq \|(-A)^{1-\beta}T(t-s)\| \|(-A)^\beta F(s, \tilde{u}_s + y_s)\| \\ &= \frac{M_{1-\beta}C_1}{(t-s)^{1-\beta}}. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \int_0^t \|AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s)\| \, ds &\leq \int_0^t \frac{M_{1-\beta}C_1}{(t-s)^{1-\beta}} \, ds \\ &\leq M_{1-\beta}C_1 \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \, ds \\ &\leq \frac{M_{1-\beta}C_1 t^\beta}{\beta} < +\infty, \end{aligned}$$

e assim, pelo Teorema de Bochner [17, Theorem 3.7.4, pág. 80], $s \mapsto AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s)$ é integrável.

Logo, $\mathcal{T}_1$ está bem definida. Mostremos agora que $\mathcal{T}_1 u$ é contínua em $[0, b]$.

Dado $t \in [0, b]$, seja $h > 0$ tal que $t+h \in [0, b]$. Observe que

$$\|T(t+h)F(0, \varphi) - T(t)F(0, \varphi)\| = \|(T(h) - I)T(t)F(0, \varphi)\|. \quad (2.16)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^{t+h} AT(t+h-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s) \, ds - \int_0^t AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s) \, ds \right\| = \\ &= \left\| \int_0^t AT(t+h-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s) \, ds + \int_t^{t+h} AT(t+h-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s) \, ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t (-A)T(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s) \, ds \right\| \\ &\leq \left\| (T(h) - I) \int_0^t AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s) \, ds \right\| \\ &\quad + \left\| \int_t^{t+h} (-A)^{1-\beta+\beta} T(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s) \, ds \right\| \\ &\leq \left\| (T(h) - I) \int_0^t AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s) \, ds \right\| + \int_t^{t+h} \frac{M_{1-\beta}C_1}{(t-s)^{1-\beta}} \, ds \end{aligned}$$

$$= \left\| (T(h) - I) \int_0^t AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \right\| + \frac{M_{1-\beta} C_1 h^\beta}{\beta}. \quad (2.17)$$

Assim, por (2.16), (2.17), o fato de $(T(t))_{t \geq 0}$ ser um C_0 -semigrupo e $t \mapsto F(t, \tilde{u}_t + y_t)$ ser contínua, temos

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \|(\mathcal{T}_1 u)(t+h) - (\mathcal{T}_1 u)(t)\| \leq \\ & \leq \lim_{h \rightarrow 0} \left(\|T(t+h)F(0, \varphi) - T(t)F(0, \varphi)\| + \|F(t+h, \tilde{u}_{t+h} + y_{t+h}) - F(t, \tilde{u}_t + y_t)\| \right. \\ & \quad \left. + \left\| \int_0^{t+h} AT(t+h-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s) ds - \int_0^t AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \right\| \right) \\ & = 0, \end{aligned}$$

o que mostra a continuidade à direita de $\mathcal{T}_1 u$.

Para a continuidade a esquerda, considere $h > 0$ tal que $t-h \in [0, b]$. Observe que

$$\begin{aligned} \|T(t)F(0, \varphi) - T(t-h)F(0, \varphi)\| &= \|T(t-h+h)F(0, \varphi) - T(t-h)F(0, \varphi)\| \\ &\leq \|T(t-h)\| \| [T(h) - I] F(0, \varphi) \| \\ &\leq \widetilde{M} \|(T(h) - I)F(0, \varphi)\|. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^{t-h} AT(t-h-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s) ds - \int_0^t AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \right\| = \\ &= \left\| \int_h^t AT(t-s)F(s-h, \tilde{u}_{s-h} + y_{s-h}) ds - \int_0^t AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \right\| \\ &= \left\| \int_0^t AT(t-s)F(s-h, \tilde{u}_{s-h} + y_{s-h}) ds - \int_0^h AT(t-s)F(s-h, \tilde{u}_{s-h} + y_{s-h}) ds \right. \\ & \quad \left. - \int_0^t AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \|AT(t-s) [F(s-h, \tilde{u}_{s-h} + y_{s-h}) - F(s, \tilde{u}_s + y_s)]\| ds \\ & \quad + \int_0^h \|AT(t-s)F(s-h, \tilde{u}_{s-h} + y_{s-h})\| ds. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Note também que,

$$\left\| AT(t-s) [F(s-h, \tilde{u}_{s-h} + y_{s-h}) - F(s, \tilde{u}_s + y_s)] \right\| \rightarrow 0$$

quando $h \rightarrow 0^+$, pois a função $s \mapsto AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s)$ é contínua. Além disso,

$$\begin{aligned}
& \|A(t-s)[F(s-h, \tilde{u}_{s-h} + y_{s-h}) - F(s, \tilde{u}_s + y_s)]\| \\
& \leq \|A^{1-\beta}T(t-s)\| \|A^\beta F(s-h, \tilde{u}_{s-h} + y_{s-h}) - A^\beta F(s, \tilde{u}_s + y_s)\| \\
& \leq \frac{M_{1-\beta}}{(t-s)^{1-\beta}} \left(\|A^\beta F(s-h, \tilde{u}_{s-h} + y_{s-h})\| + \|A^\beta F(s, \tilde{u}_s + y_s)\| \right) \\
& \leq \frac{2M_{1-\beta}C_1}{(t-s)^{1-\beta}} = g(s),
\end{aligned}$$

com g integrável em $[0, t]$.

Assim, o Teorema da convergência dominada nos garante que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^t \|AT(t-s)[F(s-h, \tilde{u}_{s-h} + y_{s-h}) - F(s, \tilde{u}_s + y_s)]\| ds = 0. \quad (2.20)$$

Já para o segundo termo de (2.19), temos

$$\begin{aligned}
\int_0^h \|AT(t-s)F(s-h, \tilde{u}_{s-h} + y_{s-h})\| ds & \leq \int_0^h \frac{M_{1-\beta}C_1}{(t-s)^{1-\beta}} ds \\
& = \frac{M_{1-\beta}C_1}{\beta} [-(t-h)^\beta + t^\beta].
\end{aligned} \quad (2.21)$$

Logo, de (2.18), (2.20) e (2.21), juntamente com a continuidade das funções $t \mapsto T(t)F(0, \varphi)$ e $t \mapsto F(t, \tilde{u}_t + y_t)$, concluímos que

$$\begin{aligned}
& \lim_{h \rightarrow 0} \|(\mathcal{T}_1 u)(t-h) - (\mathcal{T}_1 u)(t)\| \leq \\
& \leq \lim_{h \rightarrow 0} \left(\widetilde{M} \|(T(h) - I)F(0, \varphi)\| + \|F(t, \tilde{u}_t + y_t) - F(t-h, \tilde{u}_{t-h} + y_{t-h})\| \right. \\
& \quad + \int_0^t \|AT(t-s)[F(s-h, \tilde{u}_{s-h} + y_{s-h}) - F(s, \tilde{u}_s + y_s)]\| ds \\
& \quad \left. + \frac{M_{1-\beta}C_1}{\beta} [t^\beta - (t-h)^\beta] \right) \\
& = 0,
\end{aligned}$$

garantindo a continuidade de $\mathcal{T}_1 u$ à esquerda. Portanto, $\mathcal{T}_1 u$ é contínua.

(2) Mostremos que $\mathcal{T}_2$ está bem definida e $\mathcal{T}_2 u \in C([0, b], X)$, para todo $u \in S$.

Como $G : [0, \tau] \times \mathcal{C} \rightarrow X$ e $t \mapsto \tilde{u}_t + y_t$ são funções contínuas, e $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ é analítico, segue que $s \mapsto T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)$, é uma função contínua em $[0, t]$ e então, integrável neste intervalo.

Logo, $\mathcal{T}_2$ está bem definida. Além disso, para $h > 0$ tal que $t + h \in [0, b]$, temos

$$\begin{aligned}
\|(\mathcal{T}_2 u)(t + h) - (\mathcal{T}_2 u)(t)\| &= \left\| \int_0^{t+h} T(t + h - s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) ds - \int_0^t T(t - s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \right\| \\
&= \left\| \int_0^t T(h)T(t - s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) ds + \int_t^{t+h} T(t + h - s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \right. \\
&\quad \left. - \int_0^t T(t - s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \right\| \\
&\leq \left\| (T(h) - I) \int_0^t T(t - s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \right\| \\
&\quad + \left\| \int_t^{t+h} T(t + h - s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \right\| \\
&\leq \left\| (T(h) - I) \int_0^t T(t - s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \right\| + \int_t^{t+h} \widetilde{M}C_2 ds \\
&\leq \left\| (T(h) - I) \int_0^t T(t - s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \right\| + \widetilde{M}C_2 h. \tag{2.22}
\end{aligned}$$

Logo, tomando o limite em (2.22) quando $h \rightarrow 0$, obtemos que $\|(\mathcal{T}_2 u)(t + h) - (\mathcal{T}_2 u)(t)\| \rightarrow 0$, o que mostra a continuidade à direita de $(\mathcal{T}_2 u)$.

Por outro lado, seja $h \geq 0$ tal que $t - h \in [0, b]$. Então,

$$\begin{aligned}
\|(\mathcal{T}_2 u)(t - h) - (\mathcal{T}_2 u)(t)\| &= \left\| \int_0^{t-h} T(t - h - s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) ds - \int_0^t T(t - s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \right\| \\
&= \left\| \int_0^{t-h} T(t - h - s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) ds - \int_0^{t-h} T(t - s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \right. \\
&\quad \left. - \int_{t-h}^t T(t - s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \right\| \\
&\leq \int_0^{t-h} \|T(t - h - s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) - T(t - s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)\| ds \\
&\quad + \int_{t-h}^t \|T(t - s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)\| ds.
\end{aligned}$$

Observe que, quando $h \rightarrow 0$, $\|T(t - h - s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) - T(t - s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)\| \rightarrow 0$ e, além disso,

$$\|T(t - h - s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) - T(t - s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)\| \leq 2\widetilde{M}C_2.$$

Assim, pelo Teorema da convergência dominada, temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^t \|T(t - h - s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) - T(t - s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)\| ds = 0.$$

Mais ainda, como

$$\begin{aligned} \int_0^{t-h} \|T(t-h-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) - T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)\| ds &\leq \\ &\leq \int_0^t \|T(t-h-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) - T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)\| ds, \end{aligned}$$

o Teorema do confronto nos permite concluir que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^{t-h} \|T(t-h-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) - T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)\| ds = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \|(\mathcal{T}_2 u)(t-h) - (\mathcal{T}_2 u)(t)\| &\leq \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \left(\int_0^{t-h} \|T(t-h-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) - T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s)\| ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{t-h}^t \|T(t-s)\| \|G(s, \tilde{u}_s + y_s)\| ds \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

o que garante a continuidade à esquerda de $(\mathcal{T}_2 u)$ em $[0, b]$ e, portanto, a continuidade de $(\mathcal{T}_2 u)$ em $[0, b]$.

Isto conclui que $\mathcal{T}$ está bem definida e assume valores em $C([0, b], X)$.

O próximo passo é estimarmos $\|\mathcal{T}_1 u(t)\|$ e $\|\mathcal{T}_2 u(t)\|$ para $t \in [0, b]$, a fim de mostrarmos que $\mathcal{T}(S) \subset S$.

(3) Mostremos que $\mathcal{T}(S) \subset S$.

Dado $u \in S$, pelo que fizemos nas duas etapas anteriores, já temos $\mathcal{T}u \in C([0, b], X)$. Além disso, como

$$(\mathcal{T}u)(0) = (\mathcal{T}_1 u)(0) + (\mathcal{T}_2 u)(0) = F(0, \varphi) - F(0, \tilde{u}_0 + y_0) = F(0, \varphi) - F(0, 0 + \varphi) = 0,$$

resta mostrarmos que $\|\mathcal{T}u(t)\| \leq \rho$, para todo $t \in [0, b]$.

Dado $t \in [0, b]$, para $\mathcal{T}_1$ temos

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{T}_1 u)(t)\| &\leq \|T(t)F(0, \varphi) - T(t)F(t, y_t)\| + \|T(t)F(t, y_t) - F(t, y_t)\| + \|F(t, y_t) \\ &\quad - F(t, \tilde{u}_t + y_t)\| + \left\| \int_0^t AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|(-A)^{-\beta}T(t)[(-A)^{\beta}F(0, \varphi) - (-A)^{\beta}F(t, y_t)]\| + \|(T(t) - I)(F(t, y_t))\| \\
&\quad + \|(-A)^{-\beta}[(-A)^{\beta}F(t, y_t) - (-A)^{\beta}F(t, \tilde{u}_t + y_t)]\| \\
&\quad + \left\| \int_0^t (-A)^{1-\beta}T(t-s)(-A)^{\beta}F(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \right\|
\end{aligned}$$

Desse modo, de (2.10), (2.12) e (2.13), obtemos

$$\begin{aligned}
\|(\mathcal{T}_1 u)(t)\| &\leq \|(-A)^{-\beta}\|\widetilde{M}L(t + \|\varphi - y_t\|_C) + \eta + \|(-A)^{-\beta}\|L\|\tilde{u}_t\|_C + \int_0^t \frac{M_{1-\beta}C_1}{(t-s)^{1-\beta}} ds \\
&\leq \|(-A)^{-\beta}\|L \left[\widetilde{M}(b + \eta) + \rho \right] + \frac{M_{1-\beta}C_1}{\beta} b^\beta + \eta.
\end{aligned}$$

Já para $\mathcal{T}_2$, obtemos

$$\|(\mathcal{T}_2 u)(t)\| \leq \int_0^t \|T(t-s)\| \|G(s, \tilde{u}_s + y_s)\| ds \leq \widetilde{M}C_2 b.$$

Com estas estimativas e (2.14), segue que

$$\begin{aligned}
\|(\mathcal{T}u)(t)\| &\leq \|(-A)^{-\beta}\|L \left[\widetilde{M}(b + \eta) + \rho \right] + \frac{M_{1-\beta}C_1}{\beta} b^\beta + \eta + \widetilde{M}C_2 b \\
&= \widetilde{M} \left(\|(-A)^{-\beta}\|L + C_2 \right) b + \left(1 + \|(-A)^{-\beta}\|L\widetilde{M} \right) \eta + \frac{M_{1-\beta}C_1}{\beta} b^\beta \\
&\quad + \|(-A)^{-\beta}\|L\rho \\
&\leq (1 - \|(-A)^{-\beta}\|L)\rho + \|(-A)^{-\beta}\|L\rho \\
&= \rho,
\end{aligned}$$

o que mostra que $\mathcal{T}u \in S$, para todo $u \in S$.

(4) Mostremos que $\mathcal{T}_1$ é lipschitziana. Para isso, tomemos $u, v \in S$ e $t \in [0, b]$.

Observe inicialmente que

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}_t - \tilde{v}_t\|_C &= \sup_{-r \leq \theta \leq 0} \|\tilde{u}(t + \theta) - \tilde{v}(t + \theta)\| \\
&\leq \sup_{s \in [0, b]} \|u(s) - v(s)\| \\
&= \|u - v\|_\infty,
\end{aligned}$$

pois $\tilde{u}$ e $\tilde{v}$ são nulas em $[-r, 0]$ e são iguais a u e v , respectivamente, em $[0, b]$.

Dessa forma, obtemos que

$$\begin{aligned}
& \|(\mathcal{T}_1 u)(t) - (\mathcal{T}_1 v)(t)\| = \\
& = \left\| T(t)F(0, \varphi) - F(t, \tilde{u}_t + y_t) - \int_0^t AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \right. \\
& \quad \left. - T(t)F(0, \varphi) + F(t, \tilde{v}_t + y_t) + \int_0^t AT(t-s)F(s, \tilde{v}_s + y_s) ds \right\| \\
& \leq \int_0^t \|(-A)^{1-\beta}T(t-s)\| \|(-A)^\beta F(s, \tilde{u}_s + y_s) - (-A)^\beta F(s, \tilde{v}_s + y_s)\| ds \\
& \quad + \|(-A)^{-\beta}\| \|(-A)^\beta F(t, \tilde{u}_t + y_t) - (-A)^\beta F(t, \tilde{v}_t + y_t)\| \\
& \leq \int_0^t \frac{M_{1-\beta}}{(t-s)^{1-\beta}} L \|\tilde{u}_s - \tilde{v}_s\|_C ds + L \|(-A)^{-\beta}\| \|\tilde{u}_t - \tilde{v}_t\|_C \\
& = L \left[\int_0^t \frac{M_{1-\beta}}{(t-s)^{1-\beta}} ds + \|(-A)^{-\beta}\| \right] \|u - v\|_\infty \\
& = L \left[\frac{M_{1-\beta}}{\beta} b^\beta + \|(-A)^{-\beta}\| \right] \|u - v\|_\infty.
\end{aligned}$$

Tomando $L_1 = L \left[\frac{M_{1-\beta}}{\beta} b^\beta + \|(-A)^{-\beta}\| \right]$, de (2.15), segue que $0 < L_1 < 1$. Logo,

$$\|\mathcal{T}_1 u - \mathcal{T}_1 v\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq b} \|\mathcal{T}_1 u(t) - \mathcal{T}_1 v(t)\| \leq L_1 \|u - v\|_\infty,$$

o que implica que $\mathcal{T}_1$ é mais do que Lipschitz, é uma contração em S .

(5) Nesse passo da demonstração, provaremos que $\mathcal{T}_2$ é contínua em S .

Assim, sejam $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em S e $u \in S$ tal que $\|u_n - u\|_\infty \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Então, o conjunto $\{u, u_n; n \in \mathbb{N}\}$ é compacto, pois é sequencialmente compacto. Mais ainda, usando a definição anterior para extensão das funções u e u_n , $n \in \mathbb{N}$, obtemos que o conjunto

$$W_2 = \{(s, \tilde{u}_s + y_s), (s, (\tilde{u}_n)_s + y_s); n \in \mathbb{N}, 0 \leq s \leq b\}$$

também é compacto.

Logo, como G é contínua, G é uniformemente contínua em W_2 , isto é, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $\|G(s, \phi_1) - G(s, \phi_2)\| \leq \frac{\varepsilon}{Mb}$, para todo $(s, \phi_1), (s, \phi_2) \in W_2$.

Agora, usando a convergência da sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ para u , obtemos a existência de um $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\|(s, (\tilde{u}_n)_s + y_s) - (s, \tilde{u}_s + y_s)\| = \|(\tilde{u}_n)_s + y_s - \tilde{u}_s - y_s\|_C \leq \|\tilde{u}_n - \tilde{u}\|_\infty \leq \delta,$$

para todo $n \geq n_0$ e todo $s \in [0, b]$. Logo, para $t \in [0, b]$ e $n \geq n_0$, temos

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{T}_2 u_n)(t) - (\mathcal{T}_2 u)(t)\| &\leq \int_0^t \|T(t-s)\| \|G(s, (\tilde{u}_n)_s + y_s) + G(s, \tilde{u}_s + y_s)\| ds \\ &\leq \int_0^b \widetilde{M} \frac{\varepsilon}{Mb} ds \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\mathcal{T}_2 u_n - \mathcal{T}_2 u\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq b} \|(\mathcal{T}_2 u_n)(t) - (\mathcal{T}_2 u)(t)\| \leq \varepsilon,$$

para todo $n \geq n_0$, implicando que $\mathcal{T}_2$ é contínua em S .

(6) Mostremos também que $\mathcal{T}_2$ é compacta, isto é, $\mathcal{T}_2$ leva subconjuntos limitados de S em subconjuntos relativamente compactos de S . Antes, porém, note que se $A \subset S$ é limitado e $\overline{\mathcal{T}_2(S)}$ é compacto então, como $\overline{\mathcal{T}_2(A)} \subset \overline{\mathcal{T}_2(S)}$, $\overline{\mathcal{T}_2(A)}$ também será compacto. Dessa forma, basta mostramos que $\overline{\mathcal{T}_2(S)}$ é compacto, o que faremos através do Teorema de Arzelá-Ascoli.

Assim, precisamos mostrar que o conjunto $\mathcal{T}_2(S) = \{\mathcal{T}_2 u; u \in S\}$ é equicontínuo e $\mathcal{T}_2(S)(t) = \{(\mathcal{T}_2 u)(t); u \in S\}$ é relativamente compacto em X para todo $t \in [0, b]$.

(6.1) Mostremos que $\mathcal{T}_2(S)$ é equicontínuo.

Considere $t \in [0, b]$ e sejam $h > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que $t + h \in (0, b]$ e $\varepsilon < t$. Da definição de $\mathcal{T}_2$ segue que

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}_2 u)(t + h) - (\mathcal{T}_2 u)(t) &= \int_0^{t+h} T(t+h-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) ds - \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \\ &= \int_0^{t-\varepsilon} T(t+h-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) ds + \int_{t-\varepsilon}^t T(t+h-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \\ &\quad + \int_t^{t+h} T(t+h-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) ds - \int_0^{t-\varepsilon} T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \\ &\quad - \int_{t-\varepsilon}^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) ds. \end{aligned}$$

Então, como

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{T}_2 u)(t + h) - (\mathcal{T}_2 u)(t)\| &= \\ &= \left\| \int_0^{t-\varepsilon} [T(t+h-s) - T(t-s)]G(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{t-\varepsilon}^t [T(t+h-s) - T(t-s)]G(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\| \int_t^{t+h} T(t+h-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \right\| \\
\leq & \left\| \int_0^{t-\varepsilon} [T(t+h-\varepsilon-s)T(\varepsilon) - T(t-\varepsilon-s)T(\varepsilon)]G(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \right\| \\
& + \int_{t-\varepsilon}^t \left[\|T(t+h-s)\| + \|T(t-s)\| \right] \|G(s, \tilde{u}_s + y_s)\| ds \\
& + \int_t^{t+h} \|T(t+h-s)\| \|G(s, \tilde{u}_s + y_s)\| ds \\
\leq & \int_0^{t-\varepsilon} \| [T(t+h-\varepsilon-s) - T(t-\varepsilon-s)]T(\varepsilon)G(s, \tilde{u}_s + y_s) \| ds \\
& + 2\widetilde{M}C_2\varepsilon + \widetilde{M}C_2h.
\end{aligned}$$

Como $(s, \tilde{u}_s + y_s) \in [0, b] \times B_{r(\varphi)}[\varphi]$ para todo $s \in [0, t]$ e $u \in S$, e $b \leq b_\varphi$, pela hipótese (b), sabemos que $T(\varepsilon)G(s, \tilde{u}_s + y_s) \in U_\varepsilon$, com U_ε compacto em X . Assim, como X é um espaço de Banach, U_ε é totalmente limitado, ou seja, dado $\eta = \frac{\varepsilon}{4\widetilde{M}}$, existem $x_1, \dots, x_k \in U_\varepsilon$ tais que $U_\varepsilon \subset \bigcup_{i=1}^k B_\eta(x_i)$.

Além disso, como $t \mapsto T(t)x$ é uniformemente contínua em $[0, b]$, para todo $x \in X$, existem $\tilde{\delta}_i > 0$, $i = 1, \dots, k$, tais que, se $|t_1 - t_2| < \tilde{\delta}_i$, então

$$\|T(t_1)x_i - T(t_2)x_i\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo, para $x \in U_\varepsilon$, existe $x_j \in X$ tal que $x \in B_\eta(x_j)$. Mais ainda, se $|t_1 - t_2| < \tilde{\delta}$, onde $\tilde{\delta} = \min\{\tilde{\delta}_i; i = 1, \dots, k\}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|T(t_1)x - T(t_2)x\| & \leq \|T(t_1)x - T(t_1)x_j\| + \|T(t_1)x_j - T(t_2)x_j\| + \|T(t_2)x_j - T(t_2)x\| \\
& \leq \widetilde{M}\|(x - x_j)\| + \|T(t_1)x_j - T(t_2)x_j\| + \widetilde{M}\|(x_j - x)\| \\
& \leq \widetilde{M}\eta + \frac{\varepsilon}{2} + \widetilde{M}\eta \\
& = \varepsilon,
\end{aligned}$$

ou seja, $\|T(t_1)x - T(t_2)x\| \leq \varepsilon$ para todo $x \in U_\varepsilon$, desde que $|t_1 - t_2| < \tilde{\delta}$. Consequentemente, se $0 < h \leq \min\{\tilde{\delta}, \varepsilon\}$, então

$$\int_0^{t-\varepsilon} \| [T(t+h-\varepsilon-s) - T(t-\varepsilon-s)]T(\varepsilon)G(s, \tilde{u}_s + y_s) \| ds \leq \int_0^{t-\varepsilon} \varepsilon ds \leq \varepsilon(t-\varepsilon) < \varepsilon b.$$

Portanto,

$$\|(\mathcal{T}_2 u)(t+h) - (\mathcal{T}_2 u)(t)\| \leq \varepsilon b + 2\widetilde{M}C_2\varepsilon + \widetilde{M}C_2h \leq (b + 2\widetilde{M}C_2 + \widetilde{M}C_2)\varepsilon,$$

o que mostra que $\{\mathcal{T}_2 u; u \in S\}$ é equicontínuo à direita de t .

Considere agora $h > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que $h + \varepsilon < t$. Assim,

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}_2 u)(t) - (\mathcal{T}_2 u)(t-h) &= \int_0^t T(t-s)G(s, \widetilde{u}_s + y_s) ds - \int_0^{t-h} T(t-h-s)G(s, \widetilde{u}_s + y_s) ds \\ &= \int_0^{t-h-\varepsilon} T(t-s)G(s, \widetilde{u}_s + y_s) ds + \int_{t-h-\varepsilon}^{t-h} T(t-s)G(s, \widetilde{u}_s + y_s) ds \\ &\quad + \int_{t-h}^t T(t-s)G(s, \widetilde{u}_s + y_s) ds - \int_0^{t-h-\varepsilon} T(t-h-s)G(s, \widetilde{u}_s + y_s) ds \\ &\quad - \int_{t-h-\varepsilon}^{t-h} T(t-h-s)G(s, \widetilde{u}_s + y_s) ds. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{T}_2 u)(t) - (\mathcal{T}_2 u)(t-h)\| &= \int_0^{t-h-\varepsilon} \| [T(t-\varepsilon-s) - T(t-h-\varepsilon-s)]T(\varepsilon)G(s, \widetilde{u}_s + y_s) \| ds \\ &\quad + \int_{t-h-\varepsilon}^{t-h} \| [T(t-s) - T(t-h-s)]G(s, \widetilde{u}_s + y_s) \| ds \\ &\quad + \int_{t-h}^t \| T(t-s)G(s, \widetilde{u}_s + y_s) \| ds. \end{aligned}$$

Dessa forma, procedendo de modo análogo ao que fizemos anteriormente, obtemos que $\{\mathcal{T}_2 u; u \in S\}$ também é equicontínuo à esquerda e portanto, o conjunto $\{\mathcal{T}_2 u; u \in S\}$ é equicontínuo.

(6.2) Por fim, mostremos que $\mathcal{T}_2(S)(t)$ é relativamente compacto em X , para todo $t \in [0, b]$.

Para isso, sejam $t > 0$, $0 < \varepsilon < t$ e $u \in S$. Então,

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}_2 u)(t) &= \int_0^t T(t-s)G(s, \widetilde{u}_s + y_s) ds \\ &= \int_0^{t-\varepsilon} T(t-s-\varepsilon)T(\varepsilon)G(s, \widetilde{u} + y_s) ds + \int_{t-\varepsilon}^t T(t-s)G(s, \widetilde{u}_s + y_s) ds. \end{aligned}$$

Pela hipótese (b), existe um compacto $U_\varepsilon \subset X$ tal que $T(\varepsilon)G(s, \widetilde{u}_s + y_s) \in U_\varepsilon$, para toda $u \in S$ e todo $s \in [0, b]$. Além disso, da continuidade da função $s \mapsto T(s)x$, para todo $x \in X$ fixo, concluímos

que o conjunto

$$V_\varepsilon = \{T(s)w; 0 \leq s \leq t - \varepsilon, w \in U_\varepsilon\}$$

é compacto.

Denotemos por $co(V_\varepsilon)$ a envoltória convexa de V_ε . Sabemos que, por V_ε ser compacto, $\overline{co(V_\varepsilon)}$ também é compacto.

Por outro lado, pelo Teorema do valor médio para integrais, temos

$$\int_0^{t-\varepsilon} T(t-s-\varepsilon)T(\varepsilon)G(s, \tilde{u}_s + y_s) ds = (t-\varepsilon)T(t-\xi-\varepsilon)T(\varepsilon)G(\xi, \tilde{u}_\xi + y_\xi),$$

para algum $\xi \in [0, t - \varepsilon]$, ou seja

$$\int_0^{t-\varepsilon} T(t-s-\varepsilon)G(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \in \overline{co(V_\varepsilon)},$$

para toda $u \in S$.

Observe ainda que

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t-\varepsilon}^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \right\| &\leq \int_{t-\varepsilon}^t \|T(t-s)\| \|G(s, \tilde{u}_s + y_s)\| ds \\ &\leq \widetilde{MC}_2 \varepsilon, \quad \forall u \in S, \end{aligned}$$

o que nos permite afirmar que

$$(\mathcal{T}_2 u)(t) = \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \in \overline{co(V_\varepsilon)}, \quad \forall u \in S,$$

para ε suficientemente pequeno.

Logo, a compacidade de $\overline{co(V_\varepsilon)}$ garante que $\mathcal{T}_2(S)(t)$ é relativamente compacto em X , para todo $t \in [0, b]$.

Portanto, pelo Teorema de Arzelá-Ascoli, concluimos que $\mathcal{T}_2(S)$ é relativamente compacto e assim, $\mathcal{T}_2$ é compacta.

Finalmente, de (5) e (6), segue que $\mathcal{T}_2$ é completamente contínua. Mais ainda, por (4) obtemos que $\mathcal{T}_1$ é uma contração. Logo, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$ é um operador condensante em S e, pelo Teorema do ponto fixo de Sadovskii, concluimos que $\mathcal{T}$ possui um ponto fixo $u \in S$.

Dessa forma, definindo $x : [-r, b] \rightarrow X$ por $x(t) = \tilde{u}(t) + y(t)$, temos:

(i) x é contínua em $[0, b]$;

(ii) $x_t = u_t + y_t$, para todo $t \in [0, b]$, e, em particular, $x_0 = u_0 + y_0 = 0 + \varphi = \varphi$;

- (iii) a função $s \mapsto AT(t-s)F(s, x_s)$ é integrável;
- (iv) para $t \in [0, b]$,

$$\begin{aligned}
x(t) &= u(t) + y(t) \\
&= (\mathcal{T}u)(t) + y(t) \\
&= T(t)F(0, \varphi) - F(t, \tilde{u}_t + y_t) - \int_0^t AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \\
&\quad + \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) ds + T(t)\varphi(0) \\
&= T(t)[\varphi(0) + F(0, \varphi)] - F(t, x_t) - \int_0^t AT(t-s)F(s, x_s) ds + \int_0^t T(t-s)G(s, x_s) ds.
\end{aligned}$$

Portanto, x é uma solução fraca de (2.6)-(2.7) em $[-r, b]$, o que completa a prova do teorema. $\square$

O próximo resultado nada mais é do que uma variação do teorema anterior quando modificamos a hipótese (b) que contém a condição de compacidade.

Corolário 2.9. *Seja $\varphi \in \mathcal{C}$ e assumamos que a condição (a) do Teorema 2.8 seja satisfeita. Se o semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ é compacto e a função G leva um conjunto limitado em um conjunto limitado, então existe uma solução fraca de (2.6)-(2.7) em $(-r, b]$, para certo $b > 0$.*

Demonstração. Para provarmos este caso, basta verificarmos que as novas hipóteses sobre o semigrupo e a função G implicam na condição (b) do teorema anterior.

De fato, dados $b_\varphi \in (0, \tau)$ e $r(\varphi) > 0$, como G leva limitado em limitado e $[0, b_\varphi] \times B_{r(\varphi)}[\varphi]$ é um conjunto limitado, segue que

$$\{G(s, \psi); s \in [0, b_\varphi] \text{ e } \psi \in B_{r(\varphi)}[\varphi]\}$$

também é limitado.

Além disso, pelo fato de $(T(t))_{t \geq 0}$ ser compacto para todo $t > 0$, o conjunto

$$\{T(t)G(s, \psi); s \in [0, b_\varphi] \text{ e } \psi \in B_{r(\varphi)}[\varphi]\}$$

é relativamente compacto para todo $t > 0$. Dessa forma, para cada $t \in [0, b_\varphi]$, existe um compacto $U_t \subseteq X$ tal que $T(t)G(s, \psi) \in U_t$, para todo $\psi \in B_{r(\varphi)}[\varphi]$ e $s \in [0, b_\varphi]$. Então, pelo teorema anterior, existe uma solução fraca x do problema (2.6)-(2.7), definida em $(-r, b)$, para algum $0 < b < b_\varphi$. $\square$

Para provar o próximo resultado usaremos o Teorema do ponto fixo de Banach.

Teorema 2.10. *Assuma que a condição (a) do Teorema 2.8 é satisfeita. Se G é contínua e existe $N > 0$ tal que*

$$\|G(t, \phi) - G(t, \psi)\| \leq N\|\phi - \psi\|_{\mathcal{C}},$$

para todo $0 \leq t \leq \tau$ e $\phi, \psi \in \mathcal{C}$, então, para cada $\varphi \in \mathcal{C}$, existe uma única solução fraca x do problema (2.6)-(2.7) em $(-r, b]$, para algum $b > 0$.

Demonstração. Dado $b_\varphi \in (0, \tau)$ e $r(\varphi) = b_\varphi$, procedendo como no início da demonstração do Teorema 2.8, podemos mostrar que existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\|(-A)^\beta F(t, \psi)\| \leq C_1, \quad \forall t \in [0, b_\varphi], \quad \psi \in B_{b_\varphi}[\varphi].$$

Além disso, como G é contínua, a função $t \mapsto G(t, \varphi)$ é contínua no compacto $[0, b_\varphi]$ e então, limitada. Mais ainda,

$$\begin{aligned} \|G(t, \psi)\| &\leq \|G(t, \psi) - G(t, \varphi)\| + \|G(t, \varphi)\| \\ &\leq N\|\psi - \varphi\|_{\mathcal{C}} + \max_{0 \leq t \leq b_\varphi} \|G(t, \varphi)\| \\ &\leq Nb_\varphi + \max_{0 \leq t \leq b_\varphi} \|G(t, \varphi)\| \\ &\leq C_2, \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, b_\varphi]$ e todo $\psi \in B_{b_\varphi}[\varphi]$.

Seja $y : (-r, b] \rightarrow X$ a mesma função definida em (2.11). Então, como já demonstrado, a função $t \mapsto y_t$ é contínua em $[0, \tau]$. Assim, dado $\varepsilon = \frac{b_\varphi}{2} > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\|y_t - \varphi\|_{\mathcal{C}} < \frac{b_\varphi}{2}, \quad \text{para todo } 0 < t < \delta_1.$$

Para simplificar a notação, seja $\rho = \frac{b_\varphi}{2}$.

Ainda procedendo como no Teorema 2.8, existe $\delta_2 > 0$ de modo que

$$\|T(t)F(t, y_t) - F(t, y_t)\| \leq \varepsilon,$$

para todo $0 \leq t \leq \delta_2$.

Logo, fixado $\eta > 0$ suficientemente pequeno, existe $0 < b < \min\{\delta_1, \delta_2, \tau\}$ para o qual valem as seguintes desigualdades

$$\|y_t - \varphi\|_{\mathcal{C}} \leq \eta, \tag{2.23}$$

$$\|T(t)F(t, y_t) - F(t, y_t)\| \leq \eta, \quad (2.24)$$

$$\widetilde{M}\left(\|(-A)^{-\beta}\|L + C_2\right)b + \left(1 + \|(-A)^{-\beta}\|\widetilde{M}L\right)\eta + \frac{C_1M_{1-\beta}}{\beta}b^\beta \leq (1 - \|(-A)^{-\beta}\|L)\rho, \quad (2.25)$$

$$\left(\|(-A)^{-\beta}\|L + \frac{M_{1-\beta}}{\beta}Lb^\beta + \widetilde{M}Nb\right) < 1, \quad (2.26)$$

para todo $0 \leq t \leq \delta$.

Agora, considere o conjunto

$$S = \{u \in C([0, b], X); u(0) = 0, \|u(t)\| \leq \rho, 0 \leq t \leq b\},$$

que é o mesmo conjunto considerado no Teorema 2.8. Então, como já visto, sabemos que S é limitado, fechado e convexo. Mais ainda, como $S \subset C([0, b], X)$ e $C([0, b], X)$ é um espaço de Banach, S também é um espaço de Banach.

Para cada $u \in S$, seja $\tilde{u}$ a mesma extensão de u para o intervalo $[-r, b]$ considerada anteriormente, isto é,

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} 0, & -r \leq t < 0, \\ u(t), & 0 \leq t \leq b, \end{cases}$$

e então, definamos a aplicação $\mathcal{T}$ em S da seguinte forma

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}u)(t) &= T(t)F(0, \varphi) - F(t, \tilde{u}_t + y_t) - \int_0^t AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \\ &\quad + \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) ds, \quad 0 \leq t \leq b. \end{aligned}$$

Observe que esta é mesma aplicação da demonstração do Teorema 2.8. Assim, usando argumentos semelhantes ao caso anterior, podemos afirmar que:

- (i) se $u \in S$, então $\tilde{u}_t + y_t \in B_{b_\varphi}[\varphi]$;
- (ii) $\mathcal{T}$ está bem definida, com valores em $C([0, b], X)$;
- (iii) $\mathcal{T}u \in S$, para toda $u \in S$.

Mais ainda, mostremos que $\mathcal{T}$ é uma contração. Para isso, sejam $u, v \in S$ e $t \in [0, b]$. Então, como já visto, $\|\tilde{u}_t - \tilde{v}_t\|_C \leq \|u - v\|_\infty$ e

$$\|(\mathcal{T}u)(t) - (\mathcal{T}v)(t)\| = \left\| T(t)F(0, \varphi) - F(t, \tilde{u}_t + y_t) - \int_0^t AT(t-s)F(s, \tilde{u}_s + y_s) ds \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{u}_s + y_s) \, ds - T(t)F(0, \varphi) + F(t, \tilde{v}_t + y_t) \\
& + \int_0^t AT(t-s)F(s, \tilde{v}_s + y_s) \, ds - \int_0^t T(t-s)G(s, \tilde{v}_s + y_s) \, ds \Big\| \\
& \leq \left\| (-A)^{-\beta}(-A)^\beta [F(t, \tilde{u}_t + y_t) - F(t, \tilde{v}_t + y_t)] \right\| \\
& + \left\| \int_0^t (-A)^{1-\beta} T(t-s)(-A)^\beta [F(s, \tilde{u}_s + y_s) - F(s, \tilde{v}_s + y_s)] \, ds \right\| \\
& + \left\| \int_0^t T(t-s)[G(s, \tilde{u}_s + y_s) - G(s, \tilde{v}_s + y_s)] \, ds \right\| \\
& \leq \|(-A)^{-\beta}\|L\|\tilde{u}_t - \tilde{v}_t\|_C + \int_0^t \frac{M_{1-\beta}}{(t-s)^{1-\beta}}L\|\tilde{u}_s - \tilde{v}_s\|_C \, ds \\
& + \int_0^t \widetilde{MN}\|\tilde{u}_s - \tilde{v}_s\|_C \, ds \\
& \leq \|(-A)^{-\beta}\|L\|u - v\|_\infty + M_{1-\beta}L\|u - v\|_\infty \frac{t^\beta}{\beta} + \widetilde{MN}\|u - v\|_\infty t \\
& \leq \left(\|(-A)^{-\beta}\|L + \frac{M_{1-\beta}L}{\beta}b^\beta + \widetilde{MN}b \right) \|u - v\|_\infty.
\end{aligned}$$

Tomando $L_1 = \left(\|(-A)^{-\beta}\|L + \frac{M_{1-\beta}L}{\beta}b^\beta + \widetilde{MN}b \right)$, segue de (2.26) que $0 < L_1 < 1$. Logo, como

$$\|(\mathcal{T}u)(t) - (\mathcal{T}v)(t)\| \leq L_1\|u - v\|_\infty, \text{ para todo } t \in [0, b],$$

temos

$$\|\mathcal{T}u - \mathcal{T}v\|_\infty \leq L_1\|u - v\|_\infty, \text{ com } 0 < L_1 < 1.$$

Assim, $\mathcal{T}: S \rightarrow S$ é uma contração, e então, pelo Teorema do ponto fixo de Banach, existe um único $u \in S$ tal que $\mathcal{T}u = u$.

Por fim, se tomarmos a função $x: [-r, b] \rightarrow X$ definida por $x(t) = \tilde{u}(t) + y(t)$, procedendo como no final da demonstração do Teorema 2.8, podemos mostrar que x é a única solução fraca do problema (2.6) – (2.7). $\square$

Controlabilidade

Este capítulo é dedicado ao estudo da controlabilidade para alguns tipos de sistemas de equações diferenciais. Nosso objetivo é relacionar a controlabilidade de um sistema com retardo com a controlabilidade de um sistema sem retardo.

Assim, na primeira seção deste capítulo apresentaremos o conceito de controlabilidade exata e aproximada para um sistema linear, bem como alguns resultados que garantem sua controlabilidade.

Na segunda seção, estudamos um sistema com retardo e estabelecemos uma relação entre a controlabilidade deste último sistema com o sistema anterior, estudado na seção 1.

Para finalizar nosso trabalho, apresentaremos um resultado semelhante ao da seção 2 e que relaciona a controlabilidade de um sistema neutro com retardo com a controlabilidade do sistema estudado na seção 1. Convém ressaltar que, pelo que conhecemos até o momento, este último resultado é inédito na literatura.

3.1 Sistemas de controle linear

Iniciaremos este capítulo estudando o sistema linear e sem retardo dado por

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \geq 0, \quad (3.1)$$

$$x(0) = x^0 \in X. \quad (3.2)$$

onde $x(t) \in X$ e $u(t) \in U$, para todo $t \geq 0$, X é o espaço dos estados, U é o espaço de controle, ambos são espaços de Hilbert, $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ e $B : U \rightarrow X$ é uma aplicação linear contínua.

Assumiremos que X e U são munidos de um produto interno, denotado genericamente por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Para $\tau > 0$, os espaços $L^2([0, \tau], X) = \left\{ f : [0, \tau] \rightarrow X; \int_0^\tau |f(s)|_X^2 ds < +\infty \right\}$ e $L^2([0, \tau], U) = \left\{ f : [0, \tau] \rightarrow U; \int_0^\tau |f(s)|_U^2 ds < +\infty \right\}$ são munidos do produto interno

$$\langle\langle f, g \rangle\rangle = \int_0^\tau \langle f(s), g(s) \rangle ds.$$

Adicionalmente, sejam $S_\tau : L^2([0, \tau]; U) \rightarrow X$ o operador linear dado por

$$S_\tau(u) = \int_0^\tau T(\tau - s)Bu(s)ds$$

e $\widetilde{M} > 0$ tal que $\|T(t)\| \leq \widetilde{M}$, para todo $t \in [0, \tau]$.

O operador S_τ é chamado *operador controlabilidade* de (3.1).

Definição 3.1. O sistema (3.1)-(3.2) é dito *exatamente controlável* em $[0, \tau]$ se a imagem de S_τ é igual a X , isto é, $\mathcal{R}(S_\tau) = X$.

Recordemos que, se existe solução para o sistema (3.1)-(3.2) então ela é dada por

$$x(t, x^0, u) = T(t)x^0 + \int_0^t T(t-s)Bu(s) ds.$$

Assim, dizer que (3.1) é exatamente controlável, significa que para cada estado x^1 dado, tomando a condição inicial $x(0) = 0$, é possível encontrar uma função controle $u \in L^2([0, \tau], U)$ tal que $x(\tau) = x^1$. Mas, observe que cada estado $x^1 \in X$, podemos encontrar um controle $u \in L^2([0, \tau], U)$ tal que $x(\tau, 0, u) = x^1 - x(\tau, x^0, 0)$, isto é, $x(\tau, x^0, u) = x^1$, o que é equivalente a dizer que cada estado x^1 pode ser atingido a partir da condição inicial x^0 .

O próximo resultado fornece uma relação entre a dimensão do espaço X e a controlabilidade exata do sistema (3.1)-(3.2).

Proposição 3.2. Se o operador B é compacto, então o operador controlabilidade S_τ é compacto para todo $\tau > 0$. Em particular, se $\dim X = \infty$, então (3.1)-(3.2) nunca é exatamente controlável em $[0, \tau]$.

Demonstração. Para provar que S_τ é compacto para todo $\tau > 0$, tome $n \in \mathbb{N}$ e $s_k = \frac{k\tau}{n}$, para $k = 0, 1, \dots, n$. Definamos os operadores $\Lambda_n : L^2([0, \tau], U) \rightarrow X$ por

$$\Lambda_n(u) = \sum_{k=1}^n T(s_k)B \int_{s_{k-1}}^{s_k} u(s) ds.$$

Como B é compacto e $T(s_k)$ é linear limitado, para $k = 1, \dots, n$, segue que $T(s_k)B : U \rightarrow X$ é

um operador compacto para $k = 1, \dots, n$. Logo, por ser soma finita de operadores compactos, Λ_n é compacto.

A seguir, vamos mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n = \Lambda$, na norma do espaço $\mathcal{L}(L^2([0, \tau], U), X)$, onde

$$\Lambda(u) = \int_0^t T(s)Bu(s) ds, \quad u \in L^2([0, \tau], U).$$

Porém, primeiramente analisaremos a norma $\|T(s)B - T(s_k)B\|_{\mathcal{L}(U, X)}$, para $s \in [s_{k-1}, s_k]$ e $k = 1, \dots, n$. Por definição,

$$\|T(s)B - T(s_k)B\|_{\mathcal{L}(U, X)} = \sup_{\substack{v \in U \\ \|v\| \leq 1}} \|T(s)Bv - T(s_k)Bv\|.$$

Note que, se $v \in U$ e $\|v\| \leq 1$, então v pertence a bola fechada de centro em zero e raio 1 em U , isto é, $v \in B_1[0]$.

Por outro lado, como $B_1[0]$ é um conjunto limitado e B é um operador compacto, o conjunto $W = B(B_1[0])$ é relativamente compacto e então, $\overline{W}$ é totalmente limitado. Dessa forma, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existem $y_1, \dots, y_m \in \overline{W}$ tais que $\overline{W} \subset \bigcup_{i=1}^m B_{\frac{\varepsilon}{3M}}(y_i)$.

Além disso, como $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo, a função $t \mapsto T(t)x$ é uniformemente contínua em $[0, \tau]$, para todo $x \in X$ fixo. Assim, para cada y_i , $i = 1, \dots, m$, existe $\delta_i > 0$ tal que $\|T(t_1)y_i - T(t_2)y_i\| < \frac{\varepsilon}{3}$, para todo $t_1, t_2 \in [0, \tau]$ com $|t_1 - t_2| < \delta_i$.

Consequentemente, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{\tau}{\delta}$, para $s \in [s_{k-1}, s_k]$, temos

$$|s - s_k| \leq |s_{k-1} - s_k| = \frac{\tau}{n_0} < \delta.$$

Mais ainda, para $v \in B_1[0]$, existe $y_j \in \{y_1, \dots, y_m\}$ de modo que $Bv \in B_\varepsilon(y_j)$ e então, para $s \in [s_{k-1}, s_k]$ e $n > n_0$, segue que

$$\begin{aligned} \|T(s)Bv - T(s_k)Bv\| &\leq \|T(s)Bv - T(s)y_j\| + \|T(s)y_j - T(s_k)y_j\| + \|T(s_k)y_j - T(s_k)Bv\| \\ &\leq \|T(s)\| \|Bv - y_j\| + \|T(s)y_j - T(s_k)y_j\| + \|T(s_k)\| \|y_j - Bv\| \\ &\leq \widetilde{M} \frac{\varepsilon}{3\widetilde{M}} + \frac{\varepsilon}{3} + \widetilde{M} \frac{\varepsilon}{3\widetilde{M}} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

ou seja, $\|T(s)Bv - T(s_k)Bv\| \leq \varepsilon$ para todo $v \in B_1[0]$.

Portanto, se $n > n_0$ e $s \in [s_{k-1}, s_k]$, então

$$\|T(s)B - T(s_k)B\|_{\mathcal{L}(U,X)} \leq \varepsilon.$$

Voltemos agora para as aplicações Λ e Λ_n . Para todo $n > n_0$ e $u \in L^2([0, \tau], U)$, temos

$$\begin{aligned} \|\Lambda_n(u) - \Lambda(u)\| &= \left\| \sum_{k=1}^n T(s_k)B \int_{s_{k-1}}^{s_k} u(s) ds - \int_0^\tau T(s)Bu(s) ds \right\| \\ &= \left\| \sum_{k=1}^n \int_{s_{k-1}}^{s_k} T(s_k)Bu(s) ds - \sum_{k=1}^n \int_{s_{k-1}}^{s_k} T(s)Bu(s) ds \right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{s_{k-1}}^{s_k} \| [T(s_k) - T(s)]B \|_{\mathcal{L}(U,X)} \|u(s)\|_U ds \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{s_{k-1}}^{s_k} \varepsilon \|u(s)\|_U ds \\ &\leq \varepsilon \left(\int_0^\tau 1^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\tau \|u(s)\|_U^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \varepsilon \tau^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2([0,\tau],U)}. \end{aligned}$$

Então,

$$\|\Lambda_n - \Lambda\|_{\mathcal{L}(L^2([0,\tau],U),X)} = \sup_{\substack{u \in L^2([0,\tau],U) \\ \|u\| \leq 1}} \|\Lambda_n(u) - \Lambda(u)\| \leq \varepsilon \tau^{\frac{1}{2}},$$

ou seja, Λ_n converge uniformemente para Λ , o que mostra que Λ é compacto.

Para concluirmos esta demonstração, observe que

$$S_\tau(u) = \int_0^\tau T(\tau - s)Bu(s) ds = \int_0^\tau T(s)Bu(\tau - s) ds = (\Lambda \circ \psi_\tau)(u),$$

onde $\psi_\tau : L^2([0, \tau], U) \rightarrow L^2([0, \tau], U)$ é a aplicação linear dada por $(\psi_\tau u)(s) = u(\tau - s)$. Assim, como ψ_τ é limitada, pois $\|\psi_\tau u\|_{L^2([0,\tau],U)} = \left(\int_0^\tau \|u(\tau - s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^\tau \|u(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} = \|u\|_{L^2([0,\tau],U)}$, e Λ é compacta, $S_\tau = \Lambda \circ \psi_\tau$ é compacto.

Agora, em particular, suponha que (3.1)-(3.2) seja exatamente controlável, isto é, $\mathcal{R}(S_\tau) = X$. Assim, $\mathcal{R}(S_\tau)$ é fechado. Logo, como S_τ é compacto, segue de Teorema A.1 que $\dim \mathcal{R}(S_\tau)$ é finita, ou seja, $\dim X < \infty$, o que conclui a demonstração. $\square$

Com o intuito de enfraquecer o conceito de controlabilidade, já que, como visto no resultado anterior, existem sistemas que nunca são controláveis, apresentamos o conceito de controlabilidade aproximada.

Definição 3.3. O sistema (3.1)-(3.2) é dito aproximadamente controlável em $[0, \tau]$ se a imagem do operador S_τ é densa em X , isto é, $\overline{\mathcal{R}(S_\tau)} = X$.

Note que, (3.1)-(3.2) ser aproximadamente controlável em $[0, \tau]$, significa que para cada estado $x^1 \in X$ e todo $\varepsilon > 0$, existe um controle $u_\varepsilon \in L^2([0, \tau], U)$ tal que $\|x^1 - x(\tau, x^0, u_\varepsilon)\| < \varepsilon$.

No restante desta seção estaremos interessados em encontrar condições para caracterizar o conceito de controlabilidade, tanto exata como aproximada, para o sistema (3.1)-(3.2). Para isso faremos uso do adjunto do operador S_τ , que será calculado no lema seguinte.

Antes, lembremos que, como X e U são espaços de Hilbert, o Teorema de representação de Riesz nos permite identificar X^* e U^* com X e U , respectivamente.

Lema 3.4. O adjunto $S_\tau^* : X \rightarrow L^2([0, \tau], U)$ do operador controlabilidade é dado por

$$(S_\tau^*)x(s) = B^*T^*(\tau - s)x, \text{ para } x \in X, s \in [0, \tau].$$

Demonstração. Como $S_\tau \in \mathcal{L}(L^2([0, \tau], U), X)$ sabemos que S_τ possui adjunto limitado, isto é, $S_\tau^* \in \mathcal{L}(X, L^2([0, \tau], U))$. Além disso, para toda $u \in L^2([0, \tau], U)$, temos

$$\begin{aligned} \langle\langle u, S_\tau^*x \rangle\rangle_{L^2([0, \tau], U)} &= \langle S_\tau(u), x \rangle_X \\ &= \left\langle \int_0^\tau T(\tau - s)Bu(s)ds, x \right\rangle_X \\ &= \int_0^\tau \langle T(\tau - s)Bu(s), x \rangle_X ds \\ &= \int_0^\tau \langle Bu(s), T^*(\tau - s)x \rangle_X ds \\ &= \int_0^\tau \langle u(s), B^*T^*(\tau - s)x \rangle_U ds \\ &= \langle\langle u, B^*T^*(\tau - \cdot)x \rangle\rangle_{L^2([0, \tau], U)} \end{aligned}$$

e, portanto, segue o resultado. □

Para o próximo resultado, e no restante deste capítulo, denotaremos por $\mathcal{N}$ o núcleo de um operador dado.

Teorema 3.5. Considere o sistema (3.1)-(3.2).

(i) Com relação à controlabilidade exata, as seguintes condições são equivalentes:

(a) (3.1)-(3.2) é exatamente controlável em $[0, \tau]$;

(b) existe $\gamma > 0$ tal que $\|x\|_X \leq \gamma \|B^*T^*(\cdot)x\|_{L^2([0, \tau], U)}$, para todo $x \in X$.

(ii) Com relação à controlabilidade aproximada, as seguintes condições são equivalentes:

(a) (3.1)-(3.2) é aproximadamente controlável em $[0, \tau]$;

(b) $\bigcap_{s=0}^{\tau} \mathcal{N}(B^*T^*(s)) = \{0\}$.

Demonstração. Para demonstrarmos as equivalências em (i), considere os operadores $I : X \rightarrow X$, o operador identidade, e $S_\tau : L^2([0, \tau], U) \rightarrow X$, o operador controlabilidade de (3.1)-(3.2).

Por definição, segue que (3.1)-(3.2) é exatamente controlável se, e somente se, $X = \mathcal{R}(S_\tau)$, o que ocorre se, e somente se, $X \subset \mathcal{R}(S_\tau)$.

Além disso, da Proposição A.2, obtemos que $X = \mathcal{R}(I) \subset \mathcal{R}(S_\tau)$ se, e somente se, existe $\gamma > 0$ tal que $\|I^*x\|_X \leq \gamma \|S_\tau^*x\|_{L^2([0, \tau], U)}$ para todo $x \in X$, o que é, pelo Lema 3.4, equivalente a $\|Ix\|_X \leq \gamma \|B^*T^*(\tau - \cdot)x\|_{L^2([0, \tau], U)}$ para todo $x \in X$.

Logo, segue que (3.1)-(3.2) é exatamente controlável se, e somente se, existe $\gamma > 0$ tal que $\|Ix\|_X \leq \gamma \|B^*T^*(\tau - \cdot)x\|_{L^2([0, \tau], U)} = \gamma \|B^*T^*(\cdot)x\|_{L^2([0, \tau], U)}$, para todo $x \in X$.

Para a outra equivalência, consideremos ainda os operadores I e S_τ . Neste caso, sabemos que (3.1)-(3.2) é aproximadamente controlável em $[0, \tau]$ se, e somente se, $X = \overline{\mathcal{R}(S_\tau)}$, o que equivale a dizer que $\overline{\mathcal{R}(I)} \subset \overline{\mathcal{R}(S_\tau)}$.

Agora, pela Proposição A.3 segue que $\overline{\mathcal{R}(I)} \subset \overline{\mathcal{R}(S_\tau)}$ se, e somente se, $\mathcal{N}(S_\tau^*) \subset \mathcal{N}(I) = \{0\}$.

Mostremos também que $\mathcal{N}(S_\tau^*) = \{0\}$ se, e somente se, vale a seguinte propriedade: se $B^*T^*(s)z = 0$ para todo $s \in [0, \tau]$, então $z = 0$.

Seja $z \in X$ tal que $B^*T^*z = 0$ para todo $s \in [0, \tau]$. Assim, por uma mudança de variável, temos

$$(S_\tau^*z)(t) = B^*T^*(\tau - t)z = 0, \text{ para todo } t \in [0, \tau],$$

isto é, $S_\tau^*z = 0$ e então, $z \in \mathcal{N}(S_\tau^*) = \{0\}$, o que implica em $z = 0$.

Por outro lado, para $z \in \mathcal{N}(S_\tau^*)$ temos $S_\tau^*z = 0$ e assim,

$$(S_\tau^*z)(s) = B^*T^*(\tau - s)z = 0, \text{ para todo } s \in [0, \tau].$$

Logo, como $\tau - s$ percorre todo o intervalo $[0, \tau]$ quando s varia em $[0, \tau]$, podemos dizer que $B^*T^*(s)z = 0$, para todo $s \in [0, \tau]$ e então, por hipótese, concluímos que $z = 0$. Portanto, $\mathcal{N}(S_\tau^*) = \{0\}$.

Para finalizar esta demonstração, note que a propriedade “ $B^*T^*(s)z = 0$ para todo $s \in [0, \tau]$ implica em $z = 0$ ” é equivalente a condição $\bigcap_{s=0}^{\tau} \mathcal{N}(B^*T^*(s)) = \{0\}$.

Assim, segue que (3.1)-(3.2) é aproximadamente controlável em $[0, \tau]$ se, e somente se,

$$\bigcap_{s=0}^{\tau} \mathcal{N}(B^*T^*(s)) = \{0\}.$$

□

Outra forma de caracterizarmos o conceito de controlabilidade é através de um subconjunto de X , chamado de conjunto atingível. Essa caracterização será utilizada nas duas últimas seções.

Definição 3.6. *O conjunto atingível, $\mathcal{R}_0(\tau, x^0)$, do sistema (3.1)-(3.2) é o conjunto*

$$\mathcal{R}_0(\tau, x^0) = \left\{ T(\tau)x^0 + \int_0^{\tau} T(\tau-s)Bu(s)ds; \ u \in L^2([0, \tau], U) \right\}.$$

Observe que $\mathcal{R}_0(\tau, x^0)$ é formado pelos valores das soluções fracas de (3.1)-(3.2), quando variamos o controle u , no tempo τ . Note ainda que, como visto na seção 2.1, para qualquer que seja $u \in L^0([0, \tau], U)$ e $x^0 \in X$, (3.1)-(3.2) sempre possui uma solução fraca.

Proposição 3.7. *O sistema (3.1)-(3.2) é aproximadamente controlável em $[0, \tau]$ se, e somente se, o conjunto $\mathcal{R}_0(\tau, x^0)$ é denso em X .*

Demonstração. Suponha, primeiramente, que (3.1)-(3.2) é aproximadamente controlável. Então, $\overline{\mathcal{R}(S_\tau)} = X$. Mostremos que $\overline{\mathcal{R}_0(\tau, x^0)} = X$.

Dado $x \in X$, seja $y = x - T(\tau)x^0$. Assim, $y \in X$ e, como $\overline{\mathcal{R}(S_\tau)} = X$, existe uma sequência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{R}(S_\tau)$, $y_n = S_\tau(u_n) = \int_0^{\tau} T(\tau-s)Bu_n(s) ds$, com $u_n \in L^2([0, \tau], U)$, $n \in \mathbb{N}$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$.

Considere agora a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por

$$\begin{aligned} x_n &= T(\tau)x^0 + y_n \\ &= T(\tau)x^0 + \int_0^{\tau} T(\tau-s)Bu_n(s) ds, \ n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Então, $x_n \in \mathcal{R}_0(\tau, x_0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = T(\tau)x^0 + y = x,$$

o que garante que $\overline{\mathcal{R}_0(\tau, x_0)} = X$.

Reciprocamente, suponha que $\overline{\mathcal{R}_0(\tau, x_0)} = X$. Mostremos que (3.1)-(3.2) é aproximadamente controlável, isto é, $\overline{\mathcal{R}(S_\tau)} = X$.

Então, seja $x \in X$ e considere $z = T(\tau)x^0 + x$. Como $z \in X$, da hipótese, sabemos que existe uma sequência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{R}_0(\tau, x^0)$ tal que $z_n = T(\tau)x^0 + \int_0^{\tau} T(\tau-s)Bu_n(s) ds$, com $u_n \in L^2([0, \tau], U)$, $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$.

Dessa forma, a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por

$$\begin{aligned} x_n &= z_n - T(\tau)x^0 \\ &= \int_0^\tau T(\tau-s)Bu_n(s) ds, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

está em $\mathcal{R}(S_\tau)$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z - T(\tau)x^0 = x$.

Logo, $x \in \overline{\mathcal{R}(S_\tau)}$ e a demonstração está completa. $\square$

Exemplo 3.8. *Considere uma barra de metal de tamanho um e que pode ser aquecida ao longo do seu comprimento de acordo com o sistema*

$$\frac{\partial x}{\partial t}(z, t) = \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(z, t) + u(z, t), \quad (3.3)$$

$$x(z, 0) = x^0(z), \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial x}{\partial z}(0, t) = 0 = \frac{\partial x}{\partial z}(1, t), \quad (3.5)$$

onde $x(z, t)$ é a temperatura na posição z no tempo t , $x^0(z)$ é a temperatura inicial e $u(z, t)$ representa o aumento da temperatura ao longo da barra.

Se tomarmos $X = L^2([0, 1])$ e definirmos $A : D(A) \subset X \rightarrow X$, com

$$D(A) = \left\{ h \in L^2([0, 1]); \ h, \frac{dh}{dz} \text{ são absolutamente contínuas, } \frac{dh^2}{dz^2} \in L^2([0, 1]) \text{ e } \frac{dh}{dz}(0) = 0 = \frac{dh}{dz}(1) \right\},$$

como no Exemplo 1.33, então A será o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ definido em X . Além disso, se tomarmos $B = I$ (operador identidade em X), e $x^0 \in L^2([0, 1])$, então (3.3)-(3.5) pode se reescrito na forma (3.1)-(3.2), e terá solução fraca

$$x(t) = T(t)x^0 + \int_0^t T(t-s)u(s) ds.$$

Se os extremos da barra não sofrem variação de temperatura, então nosso problema pode ser modelado da seguinte forma

$$\frac{\partial x}{\partial t}(z, t) = \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(z, t) + b(z)u(t), \quad (3.6)$$

$$x(z, 0) = x^0(z), \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial x}{\partial t}(0, t) = 0 = \frac{\partial x}{\partial t}(1, 0) \quad (3.8)$$

onde b é a função modelagem em torno de um ponto de controle z_0 , dada por $b(z) = \frac{1}{2\varepsilon} \chi_{[z_0-\varepsilon, z_0+\varepsilon]}(z)$,

sendo $\chi(z)$ a função característica em $[z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon]$. Assim, (3.6)-(3.8) também pode ser escrito na forma (3.1)-(3.2) se tomarmos $X = L^2([0, 1])$, $U = \mathbb{C}$ e $Bu(z) = b(z)u$, com $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}, X)$.

Logo, a controlabilidade desse sistema irá depender das propriedades de $T^*(\cdot)$ e B^* , como visto nos resultados anteriores.

3.2 Sistema de controle linear com retardo

Nesta seção vamos estudar a relação entre a controlabilidade de um sistema com retardo e a controlabilidade do sistema linear sem retardo (3.1)-(3.2), estudado na seção anterior.

Mais especificamente, iremos considerar o sistema

$$x'(t) = Ax(t) + L(t)(x_t) + Bu(t), \quad t \geq 0, \quad (3.9)$$

$$x_0 = \varphi \in \mathcal{C}, \quad (3.10)$$

com $x(t) \in X$, $u(t) \in U$, para todo $t \geq 0$, X é o espaço dos estados, U é o espaço de controle, ambos são espaços de Hilbert, $\mathcal{C} = C([-r, 0], X)$ é o espaço das funções contínuas de $[-r, 0]$ em X , para cada t , $x_t : [-r, 0] \rightarrow X$ é a história de x em t , isto é, $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, para todo $\theta \in [-r, 0]$, $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ em X , $L : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{C}, X)$ é fortemente contínua, isto é, $t \mapsto L(t)\psi$ é contínua para toda $\psi \in \mathcal{C}$ fixa, e $B : U \rightarrow X$ é uma aplicação linear contínua.

O principal resultado desta seção nos fornece condições para que a controlabilidade do sistema sem retardo (3.1)-(3.2) garanta a controlabilidade do sistema com retardo (3.9)-(3.10). Para provarmos tal resultado precisaremos do seguinte lema.

Lema 3.9. *Sejam H um espaço de Hilbert e H_1, H_2 subespaços fechados de H tais que $H = H_1 + H_2$. Então, existe uma projeção linear limitada $P : H \rightarrow H_2$ tal que para cada $x \in H$, $x_1 = x - Px \in H_1$ e $\|x_1\| = \min\{\|y\|; y \in H_1, x = y + z, z \in H_2\}$.*

Demonstração. [25, Lema 2.3.1, pág. 62-63].

Agora, vamos definir o conceito de controlabilidade para o sistema (3.9)-(3.10).

Definição 3.10. *O conjunto atingível de (3.9)-(3.10) é o conjunto definido por*

$$\mathcal{R}_L(\tau, \varphi) = \left\{ T(\tau)\varphi(0) + \int_0^\tau T(\tau-s) [L(s)(x_s) + Bu(s)] ds; \quad u \in L^2([0, \tau], U) \right\}.$$

Observe que o conjunto $\mathcal{R}_L(\tau, \varphi)$ é formado pelos valores das soluções fracas de (3.9)-(3.10), quando o controle u varia em $L^2([0, \tau], U)$, no ponto τ . Para a existência dessas soluções, considere o problema da seção 2.2 com $F \equiv 0$ e $G(t, \varphi) = L(t)(\varphi) + Bu(t)$.

Definição 3.11. Dizemos que o sistema (3.9)-(3.10) é X -aproximadamente controlável em $[0, \tau]$ se $\mathcal{R}_L(\tau, 0)$ é denso em X , isto é, $\overline{\mathcal{R}_L(\tau, 0)} = X$.

No que se segue, M e L_0 são as constantes definidas por

$$M = \sup\{\|T(t)\|; 0 \leq t \leq \tau\} \text{ e } L_0 = \sup\{\|L(t)\|; 0 \leq t \leq \tau\}.$$

Note que M e L_0 estão bem definidas, pois, como $\|T(t)x\|$ e $\|L(t)\psi\|$ são limitados em $[0, \tau]$ para cada $x \in X$, o Princípio da limitação uniforme garante a existência dos supremos. Além disso, observe que M e L_0 dependem de τ .

O conjunto $C_0([0, \tau], X)$ representará o subespaço de $C([0, \tau], X)$ formado pelas funções x tais que $x(0) = 0$. Adicionalmente, definimos as funções $J_1 : L^2([0, \tau], X) \rightarrow C_0([0, \tau], X)$, $J_1^\tau : L^2([0, \tau], X) \rightarrow X$ e $\hat{B} : L^2([0, \tau], U) \rightarrow L^2([0, \tau], X)$ por

$$J_1(x)(t) = \int_0^t T(t-s)x(s)ds, \quad t \in [0, \tau],$$

$$J_1^\tau(x) = \int_0^\tau T(\tau-s)x(s)ds,$$

$$(\hat{B}u)(t) = Bu(t), \quad t \in [0, \tau].$$

Mostremos que J_1 e J_1^τ são operadores lineares limitados, com $\|J_1\| \leq M\tau^{\frac{1}{2}}$ e $\|J_1^\tau\| \leq M\tau^{\frac{1}{2}}$.

A linearidade de J_1 e J_1^τ se justifica por serem composições de operadores lineares. Para a limitação de J_1 , observe que

$$\begin{aligned} \|J_1(x)(t)\| &\leq \int_0^t \|T(t-s)\| \|x(s)\| ds \\ &\leq M \int_0^\tau \|x(s)\| ds \\ &\leq M \left(\int_0^\tau 1^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\tau \|x(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= M\tau^{\frac{1}{2}} \|x\|_{L^2([0, \tau], X)}, \end{aligned}$$

para todo $x \in L^2([0, \tau], X)$ e todo $t \in [0, \tau]$.

Logo,

$$\|J_1(x)\| = \sup_{t \in [0, \tau]} \|J_1(x)(t)\| \leq M\tau^{\frac{1}{2}} \|x\|_{L^2([0, \tau], X)}.$$

Assim,

$$\|J_1\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|J_1(x)\| \leq M\tau^{\frac{1}{2}}.$$

A limitação para J_1^τ pode ser encontrada de maneira análoga.

Também usaremos a notação $\mathcal{N}_1(\tau) = \mathcal{N}_1(J_1^\tau)$.

A seguir, mostraremos que uma modificação na argumentação de [30] pode ser usada para comparar a controlabilidade aproximada dos sistemas (3.9)-(3.10) e (3.1)-(3.2). Antes, porém, precisamos de mais algumas definições.

Para $\varphi \in C([-r, 0], X)$ e $x \in C([0, \tau], X)$ tais que $x(0) = \varphi(0)$, consideremos o operador $\tilde{L} : C_0([0, \tau], X) \rightarrow L^2([0, \tau], X)$ por

$$\tilde{L}(z)(t) = L(t)(z_t + x_t), \quad t \in [0, \tau],$$

onde x_t e z_t são definidas por

$$x_t(\theta) = \begin{cases} x(t + \theta), & t + \theta \geq 0, \\ \varphi(t + \theta), & t + \theta \leq 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

$$z_t(\theta) = \begin{cases} z(t + \theta), & t + \theta \geq 0, \\ 0, & t + \theta \leq 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Note que $\tilde{L}$ é uma função contínua. De fato, dados $z, w \in C([0, \tau], X)$ temos

$$\begin{aligned} \|\tilde{L}(z)(s) - \tilde{L}(w)(s)\| &= \|L(s)(z_s - w_s)\| \\ &\leq \|L(s)\|_{\mathcal{L}(C, X)} \|z_s - w_s\|_C \\ &\leq L_0 \sup_{\theta \in [-r, 0]} \|z(s + \theta) - w(s + \theta)\| \\ &\leq L_0 \sup_{t \in [0, \tau]} \|z(t) - w(t)\| \\ &= L_0 \|z - w\|_{C([0, \tau], X)}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Dessa forma, obtemos

$$\int_0^\tau \|\tilde{L}(z)(s) - \tilde{L}(w)(s)\|^2 ds \leq \int_0^\tau (L_0)^2 \|z - w\|_{C([0, \tau], X)}^2 ds = (L_0)^2 \tau \|z - w\|_{C([0, \tau], X)}^2,$$

e assim,

$$\|\tilde{L}(z) - \tilde{L}(w)\|_{L^2([0, \tau], X)} \leq L_0 \tau^{\frac{1}{2}} \|z - w\|_{C([0, \tau], X)},$$

o que garante a continuidade de $\tilde{L}$.

Agora, assumamos que $\mathcal{N}_1(\tau) + \overline{\mathcal{R}(\tilde{B})} = L^2([0, \tau], X)$ e denotemos por P a projeção construída no

Lema 3.9 com $H_1 = \overline{\mathcal{R}(\tilde{B})}$ e $H_2 = \mathcal{N}_1(\tau)$. Consideremos também o conjunto

$$Z = \{z \in C_0([0, \tau], X); z = J_1(n), n \in \mathcal{N}_1(\tau)\}$$

e a função $\Gamma_1 : \overline{Z} \rightarrow Z$ definida por $\Gamma_1 = J_1 \circ P \circ \tilde{L}$.

Nosso próximo passo é estudar a existência de ponto fixo para Γ_1 . Porém, mostremos primeiramente que Γ_1 está bem definida, isto é, $\Gamma_1 z \in Z$, para todo $z \in \overline{Z}$. Para isto, sejam $z \in Z$, $t \in [0, \tau]$ e $h > 0$ tal que $t + h \in [0, \tau]$, então

$$\begin{aligned} \Gamma_1(z)(t+h) - \Gamma_1(z)(t) &= \int_0^{t+h} T(t+h-s)[P(\tilde{L}(z))](s) ds - \int_0^t T(t-s)[P(\tilde{L}(z))](s) ds \\ &= \int_0^t T(t+h-s)[P(\tilde{L}(z))](s) ds + \int_t^{t+h} T(t+h-s)[P(\tilde{L}(z))](s) ds \\ &\quad - \int_0^t T(t-s)[P(\tilde{L}(z))](s) ds \\ &= (T(h) - I) \int_0^t T(t-s)[P(\tilde{L}(z))](s) ds \\ &\quad + \int_t^{t+h} T(t+h-s)[P(\tilde{L}(z))](s) ds. \end{aligned}$$

Como $\|z_s + x_s\|_C \leq \sup_{t \in [-r, 0]} \|z(t) + x(t)\| + \sup_{t \in [0, \tau]} \|z(t) + x(t)\| = \|\varphi\|_C + \|z + x\|_{C([0, \tau], X)}$, $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo e

$$\begin{aligned} \|\Gamma_1(z)(t+h) - \Gamma_1(z)(t)\| &\leq \left\| (T(h) - I) \int_0^t T(t-s)[P(\tilde{L}(z))](s) ds \right\| \\ &\quad + M\|P\|L_0 (\|\varphi\|_C + \|z + x\|_{C([0, \tau], X)}) h, \end{aligned}$$

podemos afirmar que $\|\Gamma_1(z)(t+h) - \Gamma_1(z)(t)\|$ tende a zero quando $h \rightarrow 0^+$, o que prova a continuidade de $\Gamma_1 z$ à direita de t . De maneira análoga, podemos provar a continuidade de $\Gamma_1 z$ à esquerda de t .

Agora, se $z \in \overline{Z}$, então existe uma sequência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em Z convergindo para z em $C([0, \tau], X)$. Assim, usando (3.13), temos

$$\begin{aligned} \|\Gamma_1(z)(t) - \Gamma_1(z_n)(t)\| &\leq \int_0^t \|T(t-s)P[(\tilde{L}(z))(s) - \tilde{L}(z_n)(s)]\| ds \\ &\leq M\|P\|L_0 \int_0^t \|z - z_n\|_{C([0, \tau], X)} ds \\ &\leq \tau M\|P\|L_0 \|z - z_n\|_{C([0, \tau], X)}, \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, \tau]$, o que implica em

$$\|\Gamma_1(z) - \Gamma_1(z_n)\| = \sup_{t \in [0, \tau]} \|\Gamma_1(z)(t) - \Gamma_1(z_n)(t)\| \leq \tau M \|P\| L_0 \|z - z_n\|_{C([0, \tau], X)},$$

isto é, $\Gamma_1(z_n)$ converge uniformemente para $\Gamma_1(z)$. Consequentemente, $\Gamma_1(z)$ é contínua em $[0, \tau]$. Portanto, $\Gamma_1(\overline{Z}) \subset Z$ e a função Γ_1 está bem definida.

Para o próximo resultado, seja $\gamma_1 = M\|P\|L_0$.

Lema 3.12. *Se $\gamma_1\tau < 1$, então Γ_1 tem um ponto fixo.*

Demonstração. Como $\overline{Z} \subset C([0, \tau], X)$ e $C([0, \tau], X)$ é um espaço de Banach, $\overline{Z}$ também é um espaço de Banach. Assim, para mostrarmos que Γ tem um ponto fixo, basta mostrarmos que Γ_1 é uma contração.

Seja $z \in \overline{Z}$. Para $t \in [0, \tau]$, sejam $\tilde{L}_0(z)(t) = L(t)(z_t)$ e então, consideremos $\Gamma_0 = J_1 \circ P \circ \tilde{L}_0$.

Note que, como J_1 , P e $\tilde{L}_0$ são funções lineares limitadas, Γ_0 também é uma função linear limitada. Além disso, tomando $f = (P \circ \tilde{L}_0)(z)$ e $t \in [0, \tau]$, obtemos que

$$\begin{aligned} \|\Gamma_0(z)(t)\| &= \|(J_1 \circ f)(t)\| \\ &\leq \int_0^t \|T(t-s)\| \|f(s)\| ds \\ &\leq M \left(\int_0^t 1^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|f(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq Mt^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\tau \|f(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq Mt^{\frac{1}{2}} \|P\| L_0 \left(\int_0^\tau \|z_s\|_C^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq M\tau^{\frac{1}{2}} \|P\| L_0 \left(\int_0^\tau \|z\|_{C_0([0, \tau], X)}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \gamma_1 \tau \|z\|_{C_0([0, \tau], X)}, \end{aligned}$$

ou seja, $\|\Gamma_0(z)(t)\| \leq \gamma_1 \tau \|z\|_{C_0([0, \tau], X)}$ para todo $z \in \overline{Z}$ e todo $t \in [0, \tau]$. Logo,

$$\|\Gamma_0(z)(t)\|_{C([0, \tau], X)} = \sup_{t \in [0, \tau]} \|\Gamma_0(z)(t)\| \leq \gamma_1 \tau \|z\|_{C_0([0, \tau], X)}$$

e então, visto que Γ_0 é linear e $\gamma\tau < 1$, podemos concluir que Γ_0 é uma contração.

Analisemos agora a função Γ_1 . Para $z, \tilde{z} \in \overline{Z}$ e $t \in [0, \tau]$, temos

$$\Gamma_1(z)(t) - \Gamma_1(\tilde{z})(t) = (J_1 \circ P \circ \tilde{L})(z)(t) - (J_1 \circ P \circ \tilde{L})(\tilde{z})(t)$$

$$\begin{aligned}
&= (J_1 \circ P)(\tilde{L}(z)(t) - \tilde{L}(\tilde{z})(t)) \\
&= (J_1 \circ P)(L(t)(z_t - \tilde{z}_t)) \\
&= (J_1 \circ P)(\tilde{L}_0(z - \tilde{z})(t)) \\
&= (J_1 \circ P \circ \tilde{L}_0)(z - \tilde{z})(t) \\
&= \Gamma_0(z - \tilde{z})(t),
\end{aligned}$$

e então, pelo que fizemos anteriormente, concluímos que

$$\|\Gamma_1(z)(t) - \Gamma_1(\tilde{z})(t)\| \leq \gamma_1 \tau \|z - \tilde{z}\|_{C_0([0, \tau], X)}, \text{ para todo } t \in [0, \tau].$$

Portanto,

$$\|\Gamma_1(z) - \Gamma_1(\tilde{z})\|_{C_0([0, \tau], X)} \leq \gamma_1 \tau \|z - \tilde{z}\|_{C_0([0, \tau], X)},$$

com $\gamma_1 \tau < 1$, o que implica que Γ_1 é uma contração. Consequentemente, o Teorema do ponto fixo de Banach nos garante que Γ_1 tem um único ponto fixo em $\overline{Z}$. $\square$

O próximo teorema é o resultado principal desta seção e estabelece um critério de comparação para os conjuntos atingíveis dos sistemas (3.1)-(3.2) e (3.9)-(3.10).

Teorema 3.13. *Suponha que $\gamma_1 \tau < 1$ e que $\mathcal{N}_1(\tau) + \overline{\mathcal{R}(\widehat{B})} = L^2([0, \tau], X)$. Então, $\mathcal{R}_0(\tau, \varphi(0)) \subseteq \overline{\mathcal{R}_L(\tau, \varphi)}$ para todo $\varphi \in \mathcal{C}$.*

Demonstração. Seja $\eta \in \mathcal{R}_0(\tau, \varphi(0))$. Então, $\eta = x(\tau)$, onde x é uma solução fraca de (3.1), com condição inicial $x(0) = \varphi(0)$, para algum controle $u \in L^2([0, \tau], U)$. Queremos mostrar que $x(\tau) \in \overline{\mathcal{R}_L(\tau, \varphi)}$.

Pelo Lema 3.12, existe um único ponto fixo $z \in \overline{Z} \subseteq C_0([0, \tau], X)$ de Γ_1 . Assim, $z(0) = 0$ e $z(\tau) = 0$, sendo essa última igualdade válida pois, como $z \in \overline{Z}$, existe uma sequência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em Z tal que $\|z_n - z\|_{C([0, \tau], X)} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Em particular, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n(t) = z(t)$, para todo $t \in [0, \tau]$.

Logo, da definição de Z , $z_n = J_1(k_n)$, para algum $k_n \in \mathcal{N}_1(\tau)$, $n \in \mathbb{N}$, e então,

$$z(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_1(k_n)(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_1^T(k_n) = 0.$$

Por outro lado, do Lema 3.9, com $H_1 = \overline{\mathcal{R}(\widehat{B})}$ e $H_2 = \mathcal{N}_1(\tau)$, $\tilde{L}(z) - P(\tilde{L}(z)) = q \in \overline{\mathcal{R}(\widehat{B})}$.

Agora, definamos a função $y : [-r, \tau] \rightarrow X$ por

$$y(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [-r, 0], \\ z(t) + x(t), & t \in (0, \tau]. \end{cases}$$

Segue das propriedades de x e z que $y(\tau) = x(\tau)$ e, para todo $t \in [0, \tau]$,

$$\begin{aligned}
 y(t) &= z(t) + x(t) \\
 &= \Gamma_1(z)(t) + x(t) \\
 &= \int_0^t T(t-s)[P(\tilde{L}(z))](s)ds + T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s)Bu(s)ds \\
 &= \int_0^t T(t-s)[\tilde{L}(z)(s) - q(s)]ds + T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s)Bu(s)ds \\
 &= \int_0^t T(t-s)[L(s)(z_s + x_s) - q(s)]ds + T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s)Bu(s)ds,
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$y(t) = T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s)[L(s)(y_s) - q(s) + Bu(s)]ds, \quad t \in [0, \tau].$$

Como $q \in \overline{\mathcal{R}(\hat{B})}$, existe uma sequência $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $L^2([0, \tau], U)$ tal que $\hat{B}v_n \rightarrow q$ em $L^2([0, \tau], X)$, quando $n \rightarrow \infty$. Denotemos por y^n a solução fraca do sistema

$$\begin{aligned}
 x'(t) &= Ax(t) + L(t)(x_t) + B(u(t) - v_n(t)), \quad t \geq 0, \\
 x_0 &= \varphi,
 \end{aligned}$$

isto é,

$$y^n(t) = T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s)[L(s)(y_s^n) + B(u(s) - v_n(s))] ds.$$

Note que $y^n(\tau) \in \mathcal{R}_L(\tau, \varphi)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, mostraremos que $y^n(\tau) \rightarrow y(\tau)$, quando $n \rightarrow \infty$. Para isto, dado $t \in [0, \tau]$, observe primeiramente que

$$\begin{aligned}
 y^n(t) - y(t) &= T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s)[L(s)(y_s^n + B(u(s) - v_n(s)))] ds \\
 &\quad - \left[T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s)[L(s)(y_s) + Bu(s) - q(s)] ds \right] \\
 &= \int_0^t T(t-s)L(s)(y_s^n - y_s) ds + \int_0^t T(t-s)(q(s) - Bv_n(s)) ds.
 \end{aligned}$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, da convergência de $\hat{B}v_n$ para q , sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|\hat{B}v_n - q\|_{L^2([0, \tau], X)} \leq \frac{\varepsilon}{M\tau^{\frac{1}{2}}}$, para todo $n \geq N$, e então, tomando $n \geq N$ e usando a Desigualdade de Hölder, segue que

$$\|y^n(t) - y(t)\| \leq \int_0^t \|T(t-s)\| \|L(s)\| \|y_s^n - y_s\|_C ds + \int_0^t \|T(t-s)\| \|Bv_n(s) - q(s)\| ds$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^t ML_0 \|y_s^n - y_s\|_C ds + \int_0^\tau M \|Bv_n(s) - q(s)\| ds \\
&\leq ML_0 \int_0^t \|y_s^n - y_s\|_C ds + M\tau^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\tau \|Bv_n(s) - q(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= ML_0 \int_0^t \|y_s^n - y_s\|_C ds + M\tau^{\frac{1}{2}} \|\widehat{B}v_n - q\|_{L^2([0,\tau],X)} \\
&\leq ML_0 \int_0^t \|y_s^n - y_s\|_C ds + \varepsilon, \text{ para todo } t \in [0, \tau].
\end{aligned}$$

Além disso, como $(y^n)_0 = \varphi = y_0$, segue que, para $n \geq N$,

$$\begin{aligned}
\|y_t^n - y_t\|_C &= \sup_{\theta \in [-r, 0]} \|y_t^n(\theta) - y_t(\theta)\| = \sup_{\theta \in [-r, 0]} \|y^n(t + \theta) - y(t + \theta)\| \\
&\leq \sup_{0 \leq t \leq \tau} \left(ML_0 \int_0^t \|y_s^n - y_s\|_C ds + \varepsilon \right),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|y_t^n - y_t\|_C \leq ML_0 \int_0^\tau \|y_s^n - y_s\|_C ds + \varepsilon,$$

o que implica, pela Desigualdade de Gronwall (Teorema A.5), que

$$\|y_t^n - y_t\|_C \leq \varepsilon e^{M\tau L_0}, \text{ para todo } n \geq N.$$

Dessa forma, concluímos que $y_t^n \rightarrow y_t$, quando $n \rightarrow \infty$, uniformemente para $t \in [0, \tau]$.

Assim, $y^n(\tau) = y^n(\tau + 0) = y_\tau^n(0) \rightarrow y_\tau(0) = y(\tau)$, quando $n \rightarrow +\infty$, e então, $y(\tau) \in \overline{\mathcal{R}_L(\tau, \varphi)}$.

Portanto, visto que $x(\tau) = y(\tau)$, concluímos que

$$\mathcal{R}_0(\tau, \varphi(0)) \subseteq \overline{\mathcal{R}_L(\tau, \varphi)},$$

o que completa a demonstração do teorema. □

Agora, estamos em condições de estabelecer um critério para a controlabilidade do sistema (3.9)-(3.10).

Corolário 3.14. *Suponha que $\gamma_1\tau < 1$, $\mathcal{N}_1(\tau) + \overline{\mathcal{R}(\widehat{B})} = L^2([0, \tau], X)$ e o sistema (3.1)-(3.2), com condição inicial $x_0 = \varphi(0)$, é aproximadamente controlável em $[0, \tau]$. Então, o sistema (3.9)-(3.10) é X -aproximadamente controlável em $[0, \tau]$.*

Demonstração. Seja $\varphi \in C$. Como o sistema (3.1)-(3.2) é aproximadamente controlável em $[0, \tau]$, $\overline{\mathcal{R}_0(\tau, \varphi(0))} = X$.

Por outro lado, visto que $\gamma_1\tau < 1$ e $\mathcal{N}(\tau) + \overline{\mathcal{R}(\widehat{B})} = L^2([0, \tau], X)$, o Teorema 3.13 nos garante que $\mathcal{R}_0(\tau, \varphi(0)) \subset \overline{\mathcal{R}_L(\tau, \varphi)}$ e, conseqüentemente, $\mathcal{R}_L(\tau, \varphi)$ é denso em X , pois

$$X = \overline{\mathcal{R}_0(\tau, \varphi(0))} \subset \overline{\mathcal{R}_L(\tau, \varphi)} \subset X.$$

Em particular, se $\varphi \equiv 0$, segue que $\mathcal{R}_L(\tau, 0)$ é denso em X , e portanto, o sistema (3.9)-(3.10) é X -aproximadamente controlável em $[0, \tau]$. $\square$

Um exemplo de aplicação deste resultado, para a equação do calor, pode ser encontrado em [25].

3.3 Sistemas de controle do tipo neutro com retardo

Nesta seção estudaremos a controlabilidade aproximada de um sistema do tipo neutro descrito por

$$\frac{d}{dt} \left(x(t) + F(t)(x_t) \right) = Ax(t) + L(t)(x_t) + Bu(t), \quad t \geq 0, \quad (3.14)$$

$$x_0 = \varphi \in \mathcal{C}, \quad (3.15)$$

onde x , u , X , U , x_t , $\mathcal{C}$ e L satisfazem as mesmas condições impostas para o problema (3.9)-(3.10) no início da seção 3.2 e, além disso, $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico em X , $X^\beta = (D((-A)^\beta), \|\cdot\|_\beta)$, para algum $\beta \in (\frac{1}{2}, 1)$, é o espaço de Banach definido na página 69, $B : U \rightarrow X^\beta$ é um operador linear limitado e $F : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{C}, X^\beta)$, é fortemente contínua e satisfaz a seguinte condição de Lipschitz

$$\|(-A)^\beta F(t)(\psi_1) - (-A)^\beta F(s)(\psi_2)\| \leq C_0(|t - s| + \|\psi_1 + \psi_2\|_{\mathcal{C}}),$$

para todo $t, s \in [0, \tau]$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{C}$ e alguma constante $C_0 > 0$.

Com essas condições, segue do Teorema 2.8 que o sistema (3.14)-(3.15) possui uma solução fraca para toda $\varphi \in \mathcal{C}$ e todo controle $u \in L^2([0, \tau], U)$.

Nosso objetivo é usar as ideias da seção anterior para obtermos condições para que a controlabilidade do sistema linear sem retardo (3.1)-(3.2) garanta a controlabilidade do sistema neutro com retardo (3.14)-(3.15), o que será feito através da inclusão dos conjuntos atingíveis. Sendo assim, iniciaremos com a definição de controlabilidade para o sistema neutro e então, apresentaremos algumas notações e definiremos alguns operadores.

Definição 3.15. *O conjunto atingível $\mathcal{R}_{L,F}(\tau, \varphi)$ do sistema (3.14)-(3.15) é o conjunto*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{L,F}(\tau, \varphi) = & \left\{ T(\tau)(\varphi(0) + F(0)\varphi) - F(\tau)(x_\tau) - \int_0^\tau AT(\tau-s)F(s)(x_s) ds \right. \\ & \left. + \int_0^\tau T(\tau-s)[L(s)(x_s) + Bu(s)] ds; u \in L^2([0, \tau], U) \right\}. \end{aligned}$$

Definição 3.16. *Diremos que o sistema (3.14)-(3.15) é X -aproximadamente controlável em $[0, \tau]$ se $\mathcal{R}_{L,F}(\tau, 0)$ é denso em X .*

Sejam as constantes M e L_0 como na seção anterior e

$$F_0 = \sup\{\|F(t)\|; 0 \leq t \leq \tau\}.$$

Observe que, assim como M e L_0 , F_0 também depende de τ .

Além disso, para trabalharmos com o caso neutro faremos uso do espaço de Sobolev $H^1([0, \tau], X^\beta) = W^{1,2}([0, \tau], X^\beta)$. Portanto, antes de prosseguirmos com nossas definições, vejamos algumas propriedades deste espaço.

Seja Y um espaço de Banach qualquer. O espaço de Sobolev $W^{1,p}([0, \tau], Y)$, com $1 \leq p < +\infty$, consiste de todas as funções $u \in L^p([0, \tau], Y)$ tais que u' existe no sentido fraco e pertence a $L^p([0, \tau], Y)$. Além disso,

$$\|u\|_{W^{1,p}([0,\tau],Y)} = \left(\int_0^\tau \|u(t)\|^p + \|u'(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Quando $p = 2$, usamos a notação $H^1([0, \tau], Y) = W^{1,2}([0, \tau], Y)$.

Observamos que os espaços de Sobolev são espaços de Banach com a norma definida acima e, em particular, $H^1([0, \tau], Y)$ é um espaço de Hilbert.

Lema 3.17. *Seja $u \in W^{1,p}([0, \tau], X)$ para algum $1 \leq p < +\infty$. Então,*

- (i) $u \in C([0, \tau], X)$ (depois de possivelmente ser redefinida em um conjunto de medidade nula);
- (ii) $u(t) = u(s) + \int_s^t u'(\rho) d\rho$ para todo $0 \leq s \leq t \leq \tau$;
- (iii) Além disso, temos a estimativa

$$\max_{0 \leq t \leq \tau} \|u(t)\| \leq C \|u\|_{W^{1,p}([0,\tau],X)},$$

com a constante $C > 0$ dependendo somente de τ .

Demonstração. [10, Theorem 2, pág. 286].

Baseados em [25] e [14], consideremos agora os operadores J_1 , J_1^T e $\tilde{L}$ definidos na seção anterior

e $J_2 : L^2([0, \tau], X^\beta) \rightarrow C([0, \tau], X)$, $J_2^\tau : L^2([0, \tau], X^\beta) \rightarrow X$ e $\widehat{B} : L^2([0, \tau], U) \rightarrow H^1([0, \tau], X^\beta)$ definidos por

$$J_2(x)(t) = \int_0^t (-A)T(t-s)x(s) ds - x(t), \quad t \in [0, \tau],$$

$$J_2^\tau(x) = \int_0^\tau (-A)T(\tau-s)x(s) ds - x(\tau),$$

$$(\widehat{B}u)(t) = Bu(t), \quad t \in [0, \tau].$$

Observamos que, como exemplo de um operador $\widehat{B}$ que sai de $L^2([0, \tau], U)$ e chega em $H^1([0, \tau], X^\beta)$ podemos pensar em operadores que envolvam integrais.

Usaremos a notação $\mathcal{N}_i(\tau)$ para o núcleo de J_i^τ , $i = 1, 2$, e para $\varphi \in C([-r, 0], X)$ e $x \in C([0, \tau], X)$ tais que $x(0) = \varphi(0)$, tomemos a função $\widetilde{F} : C_0([0, \tau], X) \rightarrow L^2([0, \tau], X^\beta)$ dada por

$$\widetilde{F}(z)(t) = F(t)(z_t + x_t), \quad t \in [0, \tau],$$

onde x_t e z_t são definidas por (3.11) e (3.12) respectivamente.

Observe que, assim como $\widetilde{L}$, $\widetilde{F}$ é contínua.

Agora, assumamos que $H^1([0, \tau], X^\beta) = \overline{\mathcal{R}(\widehat{B})} + \mathcal{N}_1(\tau)$, $H^1([0, \tau], X^\beta) = \overline{\mathcal{R}(\widehat{B})} + \mathcal{N}_2(\tau)$ e P_i é a projeção obtida no Lema 3.9 com $H_1 = \overline{\mathcal{R}(\widehat{B})}$ e $H_2 = \mathcal{N}_i(\tau)$, $i = 1, 2$. Considere também o espaço

$$Z = \{z \in C_0([0, \tau], X), \quad z = J_1(n_1) + J_2(n_2), \quad n_i \in \mathcal{N}_i(\tau), \quad i = 1, 2\}$$

e defina $\Gamma : \overline{Z} \rightarrow C_0([0, \tau], X)$ por

$$\Gamma = J_1 \circ P_1 \circ \widetilde{L} + J_2 \circ P_2 \circ \widetilde{F}.$$

Assim como a aplicação $\Gamma_1 = J_1 \circ P_1 \circ \widetilde{L}$ da seção anterior está bem definida, podemos mostrar que Γ está bem definida, com $\Gamma(\overline{Z}) \subset Z$.

Para os próximos resultados sejam: C a constante obtida no Lema 3.17, $M_{1-\beta}$ a constante obtida no Teorema 1.51, $C_1 = F_0 + M_{1-\beta} \|(-A)^\beta\| F_0 \frac{\tau^\beta}{\beta} + M L_0 \tau$, $C_2 = C + M_{1-\beta} \|(-A)^\beta\| \frac{\tau^{\beta-\frac{1}{2}}}{(2\beta-1)^{\frac{1}{2}}}$, $C_3 = M \tau^{\frac{1}{2}}$ e

$$\gamma = \max \left\{ C_1, \|P_2\| F_0 + M_{1-\beta} \|(-A)^\beta\| \|P_2\| F_0 \frac{\tau^\beta}{\beta} + M \|P_1\| L_0 \tau \right\}.$$

Lema 3.18. *Se $\gamma < 1$, então Γ tem um ponto fixo.*

Demonstração. Para mostrarmos esta propriedade, provemos que Γ é uma contração. Assim, visto que $\overline{Z}$ é um subespaço fechado de um espaço de Banach, $\overline{Z}$ é um espaço completo e podemos aplicar

o Teorema do ponto fixo de Banach.

Sejam $z, \tilde{z} \in \overline{Z}$ e $t \in [0, \tau]$, então

$$\begin{aligned}
 \Gamma(z)(t) - \Gamma(\tilde{z})(t) &= J_2((P_2 \circ \tilde{F})(z))(t) + J_1((P_1 \circ \tilde{L})(z))(t) - J_2((P_2 \circ \tilde{F})(\tilde{z}))(t) \\
 &\quad - J_1((P_1 \circ \tilde{L})(\tilde{z}))(t) \\
 &= \int_0^t (-A)T(t-s)[P_2(F(s)(z_s + x_s))] ds - P_2(F(t)(z_t + x_t)) \\
 &\quad + \int_0^t T(t-s)[P_1(L(s)(z_s + x_s))] ds \\
 &\quad - \int_0^t (-A)T(t-s)[P_2(F(s)(\tilde{z}_s + x_s))] ds + P_2(F(t)(\tilde{z}_t + x_t)) \\
 &\quad - \int_0^t T(t-s)[P_1(L(s)(\tilde{z}_s + x_s))] ds \\
 &= P_2(F(t)(\tilde{z}_t - z_t)) + \int_0^t (-A)T(t-s)[P_2(F(s)(z_s - \tilde{z}_s))] ds \\
 &\quad + \int_0^t T(t-s)[P_1(L(s)(z_s - \tilde{z}_s))] ds
 \end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned}
 \|\Gamma(z)(t) - \Gamma(\tilde{z})(t)\| &\leq \|P_2\| \|F(t)\| \|\tilde{z}_t - z_t\|_{\mathcal{C}} \\
 &\quad + \int_0^t \|(-A)^{1-\beta} T(t-s)\| \|(-A)^\beta\| \|P_2\| \|F(s)\| \|z_s - \tilde{z}_s\|_{\mathcal{C}} ds \\
 &\quad + \int_0^t \|T(t-s)\| \|P_1\| \|L(s)\| \|z_s - \tilde{z}_s\|_{\mathcal{C}} ds \\
 &\leq \|P_2\| F_0 \|\tilde{z}_t - z_t\|_{\mathcal{C}} + \int_0^t \frac{M_{1-\beta}}{(t-s)^{1-\beta}} \|(-A)^\beta\| \|P_2\| F_0 \|z_s - \tilde{z}_s\|_{\mathcal{C}} ds \\
 &\quad + \int_0^t M \|P_1\| L_0 \|z_s - \tilde{z}_s\|_{\mathcal{C}} ds \\
 &\leq \|P_2\| F_0 \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|\tilde{z}(t) - z(t)\| \\
 &\quad + M_{1-\beta} \|(-A)^\beta\| \|P_2\| F_0 \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|z(t) - \tilde{z}(t)\| \int_0^t (t-s)^{\beta-1} ds \\
 &\quad + M \|P_1\| L_0 \int_0^t \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|z(t) - \tilde{z}(t)\| ds \\
 &\leq \left(\|P_2\| F_0 + M_{1-\beta} \|(-A)^\beta\| \|P_2\| F_0 \frac{\tau^\beta}{\beta} + M \|P_1\| L_0 \tau \right) \|z - \tilde{z}\|_{C([0, \tau], X)} \\
 &\leq \gamma \|z - \tilde{z}\|_{C([0, \tau], X)}.
 \end{aligned}$$

Desta última desigualdade obtemos que

$$\|\Gamma_1(z) - \Gamma_1(\tilde{z})\| = \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|\Gamma_1(z)(t) - \Gamma_1(\tilde{z})(t)\|$$

$$\leq \gamma \|z - \tilde{z}\|_{C([0, \tau], X)},$$

ou seja, como $\gamma < 1$, Γ é uma contração, o que conclui a demonstração. $\square$

O próximo resultado estabelece um critério de comparação para os conjuntos atingíveis do sistema neutro e do sistema linear estudado na primeira seção.

Teorema 3.19. *Suponha que $\gamma < 1$ e que $H^1([0, \tau], X^\beta) = \overline{\mathcal{R}(\widehat{B})} + \mathcal{N}_i(\tau)$, $i = 1, 2$. Então, $\mathcal{R}_0(\tau, \varphi(0) + F(0)(\varphi)) \subseteq \overline{\mathcal{R}_{L,F}(\tau, \varphi)}$ para toda $\varphi \in C([-r, 0], X)$.*

Demonstração. Seja $\eta \in \mathcal{R}_0(\tau, \varphi(0) + F(0)(\varphi))$. Então, $\eta = x(\tau)$, onde x é uma solução fraca de (3.1), para algum controle $u \in L^2([0, \tau], U)$, e condição inicial $x(0) = \varphi(0) + F(0)(\varphi)$. Mostraremos que $x(\tau) \in \overline{\mathcal{R}_{L,F}(\tau, \varphi)}$.

Pelo Lema 3.18, sabemos que existe um único ponto fixo $z \in \overline{Z} \subset C_0([0, \tau], X)$ de Γ . Assim, $z(0) = 0$ e existe uma sequência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em Z tal que $\|z_n - z\|_{C([0, \tau], X)} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Em particular, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n(t) = z(t)$, para todo $t \in [0, \tau]$.

Além disso, da definição de Z , temos $z_n = J_1(k_n^1) + J_2(k_n^2)$, com $k_n^i \in \mathcal{N}_i(\tau)$, $i = 1, 2$. Dessa forma, segue que

$$z(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_1(k_n^1)(\tau) + \lim_{n \rightarrow \infty} J_2(k_n^2)(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_1^\tau(k_n^1) + \lim_{n \rightarrow \infty} J_2^\tau(k_n^2) = 0.$$

Definamos agora $y : [-r, \tau] \rightarrow X$ por

$$y(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [-r, 0], \\ z(t) + x(t), & t \in (0, \tau]. \end{cases}$$

Das propriedades de x e z segue que $y(\tau) = x(\tau)$ e

$$\begin{aligned} y(t) &= z(t) + x(t) \\ &= \Gamma(z)(t) + x(t) \\ &= \int_0^t (-A)T(t-s)[P_2(\tilde{F}(z))](s) ds - P_2(\tilde{F}(z))(t) + \int_0^t T(t-s)[P_1(\tilde{L}(z))](s) ds \\ &\quad + T(t)[\varphi(0) + F(0)\varphi] + \int_0^t T(t-s)Bu(s) ds, \quad t \in [0, \tau]. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $H^1([0, \tau], X^\beta) = \overline{\mathcal{R}(\widehat{B})} + \mathcal{N}_i(\tau)$, $i = 1, 2$, o Lema 3.9, com $H_1 = \overline{\mathcal{R}(\widehat{B})}$, nos garante que $\tilde{L}(z) - P_1(\tilde{L}(z)) = q_1 \in \overline{\mathcal{R}(\widehat{B})}$ e $\tilde{F}(z) - P_2(\tilde{F}(z)) = -q_2 \in \overline{\mathcal{R}(\widehat{B})}$. Assim, voltando a $y(t)$,

com $t \in [0, \tau]$, obtemos

$$\begin{aligned} y(t) &= T(t)[\varphi(0) + F(0)(\varphi)] - (F(t)(z_t + x_t) + q_2(t)) \\ &\quad + \int_0^t (-A)T(t-s)[F(s)(z_s + x_s) + q_2(s)]ds + \int_0^t T(t-s)[L(s)(z_s + x_s) - q_1(s) + Bu(s)]ds. \\ &= T(t)[\varphi(0) + F(0)(\varphi)] - (F(t)(y_t) + q_2(t)) \\ &\quad + \int_0^t (-A)T(t-s)[F(s)(y_s) + q_2(s)] ds + \int_0^t T(t-s)[L(s)(y_s) - q_1(s) + Bu(s)] ds. \end{aligned}$$

Como $q_1, q_2 \in \overline{\mathcal{R}(\widehat{B})}$ e $C_0^1([0, \tau], U)$ é denso em $L^2([0, \tau], U)$, existem seqüências $(v_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(v_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ em $L^2([0, \tau], U)$ e $C_0^1([0, \tau], U)$, respectivamente, tais que $Bv_n^1 \rightarrow q_1$ e $Bv_n^2 \rightarrow q_2$ em $H^1([0, \tau], X^\beta)$, quando $n \rightarrow \infty$.

Denotemos por y^n a solução fraca do sistema

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(x(t) + F(t)(x_t) + Bv_n^2(t) \right) &= Ax(t) + L(t)(x_t) + B(u(t) - v_n^1(t)), \quad t \geq 0, \\ x_0 &= \varphi, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} y^n(t) &= T(t)[\varphi(0) + F(0)(\varphi)] - F(t)(y_t^n) - Bv_n^2(t) + \int_0^t (-A)T(t-s)[F(s)(y_s^n) + Bv_n^2(s)] ds \\ &\quad + \int_0^t T(t-s)[L(s)(y_s^n) + Bu(s) - Bv_n^1(s)] ds, \end{aligned}$$

pois $Bv_n^2(0) = 0$.

Observe também que, como B é um operador linear limitado e $(v_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ está em $C_0^1([0, \tau], U)$, o sistema acima é equivalente ao sistema

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(x(t) + F(t)(x_t) \right) &= Ax(t) + L(t)(x_t) + B \left(u(t) - v_n^1(t) - \frac{d}{dt} v_n^2(t) \right), \quad t \geq 0. \\ x_0 &= \varphi. \end{aligned}$$

Logo, $y^n(\tau) \in \mathcal{R}_{L,F}(\tau, \varphi)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Na seqüência, mostraremos que $y^n(\tau) \rightarrow y(\tau)$, quando $n \rightarrow \infty$. De modo geral, para $t \in [0, \tau]$, temos

$$\begin{aligned} y^n(t) - y(t) &= F(t)(y_t - y_t^n) - Bv_n^2(t) + q_2(t) + \int_0^t (-A)T(t-s)F(s)(y_s^n - y_s)ds \\ &\quad + \int_0^t (-A)T(t-s)(Bv_n^2(s) - q_2(s))ds + \int_0^t T(t-s)L(s)(y_s^n - y_s)ds \end{aligned}$$

$$+ \int_0^t T(t-s)(q_1(s) - Bv_n^1(s))ds.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\|y^n(t) - y(t)\| &\leq \|F(t)\| \|y_t - y_t^n\|_C + \|Bv_n^2(t) - q_2(t)\| \\
&+ \int_0^t \|(-A)^{1-\beta} T(t-s)\| \|(-A)^\beta\| \|F(s)\| \|y_s^n - y_s\|_C ds \\
&+ \int_0^t \|(-A)^{1-\beta} T(t-s)\| \|(-A)^\beta\| \|Bv_n^2(s) - q_2(s)\| ds \\
&+ \int_0^t \|T(t-s)\| \|L(s)\| \|y_s^n - y_s\|_C ds + \int_0^t \|T(t-s)\| \|q_1(s) - Bv_n^1(s)\| ds \\
&\leq F_0 \|y_t - y_t^n\|_C + \|Bv_n^2(t) - q_2(t)\| + \int_0^t \frac{M_{1-\beta}}{(t-s)^{1-\beta}} \|(-A)^\beta\| F_0 \|y_s^n - y_s\|_C ds \\
&+ \int_0^t \frac{M_{1-\beta}}{(t-s)^{1-\beta}} \|(-A)^\beta\| \|Bv_n^2(s) - q_2(s)\| ds \\
&+ \int_0^t ML_0 \|y_s^n - y_s\|_C ds + \int_0^t M \|q_1(s) - Bv_n^1(s)\| ds \\
&\leq F_0 \|y - y^n\|_{C([0,\tau],X)} \\
&+ \sup_{t \in [0,\tau]} \|Bv_n^2(t) - q_2(t)\| + M_{1-\beta} \|(-A)^\beta\| F_0 \|y^n - y\|_{C([0,\tau],X)} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{1-\beta}} ds \\
&+ M_{1-\beta} \|(-A)^\beta\| \left(\int_0^t \left(\frac{1}{(t-s)^{1-\beta}} \right)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|Bv_n^2(s) - q_2(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ ML_0 \|y^n - y\|_{C([0,\tau],X)} t + Mt^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|Bv_n^1(s) - q_1(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq F_0 \|y^n - y\|_{C([0,\tau],X)} + C \|Bv_n^2 - q_2\|_{H^1([0,\tau],X^\beta)} \\
&+ M_{1-\beta} \|(-A)^\beta\| F_0 \frac{\tau^\beta}{\beta} \|y^n - y\|_{C([0,\tau],X)} \\
&+ M_{1-\beta} \|(-A)^\beta\| \frac{\tau^{\beta-\frac{1}{2}}}{(2\beta-1)^{\frac{1}{2}}} \|Bv_n^2 - q_2\|_{L^2([0,\tau],X^\beta)} + ML_0 \tau \|y^n - y\|_{C([0,\tau],X)} \\
&+ M\tau^{\frac{1}{2}} \|Bv_n^1 - q_1\|_{L^2([0,\tau],X^\beta)} \\
&= \left(F_0 + M_{1-\beta} \|(-A)^\beta\| F_0 \frac{\tau^\beta}{\beta} + ML_0 \tau \right) \|y^n - y\|_{C([0,\tau],X)} \\
&+ \left(C + M_{1-\beta} \|(-A)^\beta\| \frac{\tau^{\beta-\frac{1}{2}}}{(2\beta-1)^{\frac{1}{2}}} \right) \|Bv_n^2 - q_2\|_{H^1([0,\tau],X^\beta)}
\end{aligned}$$

$$+ M\tau^{\frac{1}{2}}\|Bv_n^1 - q_1\|_{H^1([0,\tau],X^\beta)},$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\|y(t) - y^n(t)\| &= \left(F_0 + M_{1-\beta}\|(-A)^\beta\|F_0\frac{\tau^\beta}{\beta} + ML_0\tau \right) \|y^n - y\|_{C([0,\tau],X)} \\ &\quad + \left(C + M_{1-\beta}\|(-A)^\beta\|\frac{\tau^{\beta-\frac{1}{2}}}{(2\beta-1)^{\frac{1}{2}}} \right) \|Bv_n^2 - q_2\|_{H^1([0,\tau],X^\beta)} \\ &\quad + M\tau^{\frac{1}{2}}\|Bv_n^1 - q_1\|_{H^1([0,\tau],X^\beta)},\end{aligned}$$

para todo $t \in [0, \tau]$.

Logo, podemos concluir que

$$\|y^n - y\|_{C([0,\tau],X)} \leq C_1\|y^n - y\|_{C([0,\tau],X)} + C_2\|Bv_n^2 - q_2\|_{H^1([0,\tau],X^\beta)} + C_3\|Bv_n^1 - q_1\|_{H^1([0,\tau],X^\beta)}.$$

Portanto, como $C_1 < 1$, temos

$$(1 - C_1)\|y^n - y\|_{C([0,\tau],X)} \leq C_2\|Bv_n^2 - q_2\|_{H^1([0,\tau],X^\beta)} + C_3\|Bv_n^1 - q_1\|_{H^1([0,\tau],X^\beta)}$$

e então, visto que $Bv_n^i \rightarrow q_i$ em $H^1([0, \tau], X^\beta)$, quando $n \rightarrow \infty$, $i = 1, 2$, obtemos que $y^n \rightarrow y$ em $C([0, \tau], X)$.

Em particular, $y^n(\tau) \rightarrow y(\tau)$, quando $n \rightarrow \infty$.

Finalmente, como $x(\tau) = y(\tau)$, segue que $x(\tau) \in \overline{\mathcal{R}_{L,F}(\tau, \varphi)}$ e assim, $\mathcal{R}_0(\tau, \varphi(0) + F(0)(\varphi)) \subset \overline{\mathcal{R}_{L,F}(\tau, \varphi)}$. $\square$

Corolário 3.20. *Suponha que $\gamma < 1$ e que $H^1([0, \tau], X^\beta) = \overline{\mathcal{R}(\widehat{B})} + \mathcal{N}_i(\tau)$, $i = 1, 2$. Se o sistema (3.1) com condição inicial $\varphi(0) + F(0)(\varphi)$ for aproximadamente controlável em $[0, \tau]$, então o sistema (3.14)-(3.15) é X - aproximadamente controlável em $[0, \tau]$.*

Resultados Auxiliares

Teorema A.1. *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \rightarrow Y$ um operador linear limitado. Se T é compacto e sua imagem $\mathcal{R}(T)$ é um subespaço fechado de Y , então $\dim(\mathcal{R}(T)) < \infty$.*

Demonstração. [27, Theorem 4.18 (b), pag. 219]

Dados X e Y espaços normados, denotemos por $\mathcal{L}(X, Y)$ o espaço das transformações lineares limitadas de X em Y , e $C(X, Y)$ o espaço de todas as funções contínuas de X em Y .

Proposição A.2. *Sejam X, Y, Z espaços de Banach reflexivos, $S \in \mathcal{L}(X, Z)$ e $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Então, são equivalentes:*

(a) $\mathcal{R}(S) \subset \mathcal{R}(T)$;

(b) existe $\gamma > 0$ tal que $\|S^*z^*\| \leq \gamma\|T^*z^*\|$, para todo $z^* \in Z^*$.

Demonstração. [5, Corollary 3.5, pág. 55]

Proposição A.3. *Sejam X, Y, Z espaços de Banach reflexivos, $S \in \mathcal{L}(X, Z)$ e $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Então, são equivalentes:*

(a) $\mathcal{N}(T^*) \subset \mathcal{N}(S^*)$;

(b) $\mathcal{R}(T) \supset \mathcal{R}(S)$.

Demonstração. [5, Theorem 3.6, pág. 55].

Teorema A.4. *Seja X espaço de Banach e Y um espaço normado qualquer. Se $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência tal que $T_n \in \mathcal{L}(X, Y)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e para cada $x \in X$, existe uma constante $C_x > 0$*

de modo que $\|T_n x\| \leq C_x$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então a sequência $(\|T_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $\mathcal{L}(X, Y)$, ou seja, existe $C > 0$ tal que

$$\|T_n\| \leq C, \quad n = 1, 2, \dots$$

Demonstração. [18, Theorem 4.7-3, pág. 249].

Teorema A.5 (Desigualdade de Grownwall). *Sejam β uma constante real, u e v funções contínuas de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$, com $v(t) \geq 0, \forall t \in [a, b]$, e*

$$u(t) \leq \beta + \int_a^b v(s)u(s) \, ds, \quad t \in [a, b],$$

então

$$u(t) \leq \beta e^{\int_a^b v(s) \, ds}, \quad t \in [a, b].$$

Demonstração. [15, Corollary 6.6, pág. 36]

Teorema A.6 (Teorema do ponto fixo de Banach). *Sejam X um espaço métrico completo e $T : X \rightarrow X$ uma contração em X . Então T tem um único ponto fixo.*

Demonstração. [18, Theorem 5.1-2, pág. 300].

Teorema A.7 (Teorema da convergência dominada de Lebesgue). *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções integráveis convergindo, em quase todo ponto, para uma função real mensurável f . Se existir uma função g tal que $|f_n| \leq g$ para todo n , então f é integrável e*

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$

Demonstração. [3, Theorem 5.6, pág. 44].

Lema A.8 (Lema de Dini). *Se $f : (a, b) \rightarrow X$ é contínua em (a, b) e admite uma derivada à direita, f'_+ , contínua em (a, b) , então f é continuamente diferenciável em (a, b) .*

Demonstração. [12, Lema A.3.2, pág. 149]

Seja R uma região do plano complexo $\mathbb{C}$.

Teorema A.9 (Teorema de Cauchy). *Seja γ uma curva fechada e retificável em R , a qual é homotópica a uma curva constante. Se f é uma função analítica em R , então*

$$\int_{\gamma} f(\lambda) d\lambda = 0.$$

Demonstração. [4, Theorem 4.9, pág. 85].

Teorema A.10 (Fórmula integral de Cauchy). *Se $f : R \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função analítica em R e γ é uma curva fechada retificável em R tal que γ é homotópica à uma curva constante então, para λ_0 no interior de R , temos*

$$f(\lambda_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\lambda)}{\lambda - \lambda_0} d\lambda.$$

Demonstração. [4, Theorem 6.1, pág 91].

Teorema A.11. *Sejam $f : R \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica em R e γ uma curva fechada retificável em R tal que γ é homotópica à uma curva constante então, para λ_0 no interior de R , temos*

$$f^{(n)}(\lambda_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}} d\lambda \text{ para } n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. [4, Theorem 6.2, pág. 92].

Teorema A.12 (Teorema dos resíduos). *Seja $f : R \rightarrow \mathbb{C}$ analítica em R exceto pelas singularidades isoladas $a_1, a_2, \dots, a_n$. Se γ é uma curva fechada e retificável em R , a qual não passa por qualquer uma das singularidades a_i , $i = 1, \dots, n$ e γ é homotópica à uma curva constante, então*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\lambda) d\lambda = \sum_{i=1}^n \text{Res}(f; a_i),$$

onde $\text{Res}(f; a_i)$ denota o resíduo de f em a_i (que é o coeficiente da potência -1) na expansão em série de Laurent de f em torno de a_i).

Demonstração. [4, Theorem 2.2, pág. 108].

Teorema A.13 (Teorema do ponto fixo de Sadovskii). *Sejam T um operador condensante e B um subconjunto convexo, fechado e limitado de X . Se $T(B) \subseteq B$ então existe pelo menos um ponto fixo de T .*

Demonstração. [29]

Teorema A.14 (Arzelá-Ascoli). *Sejam Y um espaço métrico, X um espaço qualquer e $F \subset C(X, Y)$. Assuma que as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) F é equicontínuo em Y .

(ii) $\overline{\{f(y); f \in F\}}$ é compacto para todo $y \in Y$.

Então $\overline{F}$ é compacto.

Demonstração. [9, Theorem 6.4, pág. 267]

Referências Bibliográficas

- [1] BALAKRISHNAN, A. V. *Applied functional analysis*. Springer-Verlag, New York, Berlin, 1976.
- [2] BAGHLI, S., BENCHOHRA, M., EZZINBI, K. *Controllability results for semilinear functional and neutral functional evolution equations with infinite delay*. Surveys in Mathematics and its Applications, vol. 4, 15-39, 2009.
- [3] BARTLE, G. *The elements of integration and Lebesgue measure*. John Wiley & Sons. Inc., 1995.
- [4] CONWAY, J. B. *Functions of one complex variable*. Springer-Verlag, New York, 1973.
- [5] CURTAIN, R. F., PRITCHARD, A. J. *Infinite dimensional linear aystems theory*. Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 8, Springer-Verlag, 1978.
- [6] CURTAIN, R. F., ZWART, H. *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory*. Texts in applied mathematics; 21. Springer-Verlag, New York, Inc., 1995.
- [7] CZAJA, R. *Differential equations with sectorial operator*. UŚ, 2002.
- [8] DRAGAN, V., HALANAY, A. *Stabilization of linear systems*. Birkhäuser, Boston, 1999.
- [9] DUGUNDJI, J. *Topology*. Allyn and Bacon, Inc., 1978.
- [10] EVANS, L.C. *Partial differential equations*. Providence: American Mathematical Society, 1998.
- [11] FU, X. *Controllability of neutral functional differential systems in abstract space*. Applied Mathematics and Computation, 141, 281-296, 2003.
- [12] GOMES, A. M. *Semigrupos de operadores lineares e aplicações às equações de evolução*. 2ª Ed., Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2012.
- [13] HERNÁNDEZ, E., HENRÍQUEZ, H. R. *Existence results for partial neutral functional differential equations with unbounded delay*. Journal of mathematical analysis and applications 221, 452-475, 1998.

-
- [14] HERNÁNDEZ, E., HENRÍQUEZ, H.R. *Approximate controllability of second-order distributed implicit functional systems*. Nonlinear Analysis, 70, 1023-1039, 2009.
 - [15] HALE, J. K. *Ordinary differential equations*. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 1980.
 - [16] HALE, J. K., VERDUYN LUNEL, S. M. *Introduction to functional differential equations*. Applied Mathematical Sciences, vol. 99, Sprimnger-Verlag, New York, 1993.
 - [17] HILLE, E., PHILIPS, R.S. *Functional analysis and semi-groups*. American Mathematical Society. Colloquium Publications, Vol. 31, 1957.
 - [18] KREYSZIG, E. *Introductory functional analisys with applications*. John Wiley & Sons. Inc., 1989.
 - [19] MAHMUDOV, N. I., ZORLU, S. *Approximate controllability of semilinear neutral systems in hilbert spaces*. J. Applied Math. and Stochastic Analysis, 16, 3, 233-242, 2003.
 - [20] NAITO, K. *Controllability of semilinear control systems dominated by the linear part*. SIAM J. Control and Optimization, vol. 25, no. 3, 715-722, 1987.
 - [21] NAITO, K. *On controllability for a nonlinear volterra equation*. Nonlinear Analysis, 18 (1), 99-108, 1992.
 - [22] NAKAGIRI, S., YAMAMOTO, R. *Controllability and observability for linear retarded systems in banach space*. Inter. J. Control, 49, (5), 1489-1504, 1989.
 - [23] O'REILLY, J. *Observers for linear systems*. Academic Press, London, 1983.
 - [24] PAZY, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Applied mathematical sciences; v. 44. Springer-Verlag, New York, Inc., 1983.
 - [25] PROKOPCZYK ARITA, A. C. *Controlabilidade e estabilização de sistemas de controle hereditários distribuídos lineares a tempo-variando*. Tese (Doutorado em Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Matemática - PPGM, ICMC - USP, 2009.
 - [26] ROYDEN, H. L., FITZPATRICK, P. *Real analysis*. Fourth Edition. Pearson Education, Inc., 2010.
 - [27] RUDIN, W. *Functional analysis*. MacGraw-Hill, Inc., 1973.
 - [28] RUSSEL, D. L. *Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations: recent progress and open questions*. SIAM Rev., 20, 639-739, 1978.

-
- [29] SADOVSKII, B. N. *A fixed-point principle*. Journal Functional Analysis and Its Applications, Vol. 1, 151-153, 1967.
 - [30] SUKAVANAM, N. *Approximate controllability of semilinear control systems with growing non-linearity*. Lecture notes in Pure and Applied Mathematics. V. 142, p.353-357. 1993.
 - [31] VRABIE, I. I. *C_0 -semigroups and applications*. North-Holland Mathematics Studies 191, 2003.
 - [32] WONHAM, W. M. *Linear multivariable control: a geometric approach*. Springer- Verlag, Berlin, 1979.