

Anthony Fluker Cueva

**CONTROLE CHAVEADO $\mathcal{H}_\infty$ SEM CHATTERING DE
SISTEMAS NÃO LINEARES COM INCERTEZAS VIA
MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO E FUNÇÕES DE
LYAPUNOV NÃO QUADRÁTICAS**

Ilha Solteira
2024

Anthony Fluker Cueva

**CONTROLE CHAVEADO $\mathcal{H}_\infty$ SEM CHATTERING DE
SISTEMAS NÃO LINEARES COM INCERTEZAS VIA
MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO E FUNÇÕES DE
LYAPUNOV NÃO QUADRÁTICAS**

Dissertação de mestrado apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual Paulista, Campus de Ilha Solteira.

Área de Conhecimento: Automação.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira

Ilha Solteira
2024

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

F646c Fluker Cueva, Anthony.
Controle chaveado $\mathcal{H}^\infty$ sem chattering de sistemas não lineares com incertezas via modelos Fuzzy Takagi-Sugeno e funções de Lyapunov não quadráticas / Anthony Fluker Cueva. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2024
77 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2024

Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira

Inclui bibliografia

1. Funcional de Lyapunov não quadrático. 2. Controle chaveado. 3. Sem deslizamento. 4. Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno. 5. Desigualdades lineares matriciais.

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

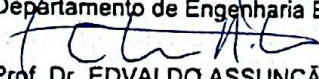
TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: CONTROLE CHAVEADO H SEM CHATTERING DE SISTEMAS NÃO LINEARES COM INCERTEZAS VIA MODELOS FUZZY TS E FUNÇÕES DE LYAPUNOV NÃO QUADRÁTICAS

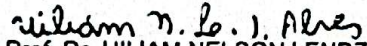
AUTOR: ANTHONY FLUKER CUEVA

ORIENTADOR: MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica, área: Automação pela Comissão Examinadora:


Prof. Dr. MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA (Participação Presencial)
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP


Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO (Participação Presencial)
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP


Prof. Dr. UILIAM NELSON LENDZION TOMAZ ALVES (Participação Virtual)
Departamento de Eixo de Controle e Processos Industriais / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná - IFPR

Ilha Solteira, 07 de fevereiro de 2024

*Dedico este trabalho à minha família,
com especial carinho para minha esposa
Rosangel e à minha mãe Juana.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus que me capacitou, deu-me saúde e forças para que tudo isso fosse possível.

À minha melhor amiga e esposa amada Rosangel pelo companheirismo, paciência e carinho que ela teve para comigo durante esse trabalho.

Aos meus pais amados, Juana e Miguel, que sempre acreditaram em mim e aos meus demais familiares.

Ao professor Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira por aceitar-me orientar nesse trabalho, pelos ensinamentos, por compartilhar comigo seus conhecimentos acadêmicos, pela paciência, pelas sugestões a esse trabalho, por acreditar em mim e no meu potencial e tornar esse trabalho um aprendizado prazeroso. Se cheguei até aqui foi porque tive pessoas iguais a você que acreditaram em mim.

A todos os meus amigos que tive a oportunidade de conhecer durante a minha vida acadêmica, por terem-me motivado a prosseguir, dividirem comigo seus conhecimentos e tornarem essa jornada mais alegre e prazerosa.

À CAPES pelo apoio financeiro.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*"Mas os que esperam em Jeová renovarão as suas forças; subirão com asas como águias;
correrão e não se cansarão, andarão e não se fatigarão."
(Isaías 40:31)*

RESUMO

Esta dissertação propõe o projeto de um método de controle chaveado $\mathcal{H}_\infty$ sem deslizamento para sistemas não lineares com incertezas, descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) baseados em um Funcional de Lyapunov Não Quadrático (em inglês Non-Quadratic Lyapunov Functional (NQLF)) com atraso de tempo, o que permite gerar uma região de factibilidade maior do que a obtida com um controlador baseado em uma Função de Lyapunov Quadrática (em inglês Quadratic Lyapunov Function (QLF)). Além disso, o método de controle proposto gera condições de estabilidade não conservativas e evita o cálculo das Funções de Pertinência (em inglês Members Functions (MF)) correspondentes aos modelos fuzzy T-S. A validação do método proposto neste trabalho será demonstrada matematicamente e também através de simulações.

Palavras-chave: funcional de Lyapunov não quadrático; controle chaveado; sem deslizamento; modelos fuzzy Takagi-Sugeno; desigualdades lineares matriciais.

ABSTRACT

This dissertation proposes the design of a switched $\mathcal{H}_\infty$ method control without chattering for uncertain nonlinear systems, described by Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy models based on a Non-Quadratic Lyapunov Functional (NQLF) with time delay, allowing the generation of a larger feasibility region than that obtained with a controller based on a Quadratic Lyapunov Function (QLF). Additionally, the proposed control method generates non-conservative stability conditions and avoids the computation of the Membership Functions (MF) corresponding to the T-S fuzzy models. The validation of the proposed method in this work will be demonstrated both mathematically and through simulations.

Keywords: non-quadratic Lyapunov functional; switched control; chattering; Takagi-Sugeno fuzzy models; linear matrix inequalities.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Região de factibilidade correspondente ao <i>Teorema 1</i> ($\triangle$, $\circ$, $\times$), <i>Teorema 2</i> ($\triangle$, $\circ$), <i>Teorema 3</i> ($\triangle$).	30
Figura 2 – Comportamento dinâmico do sistema não linear descrito em (17) e (75) com $a = 3$ e $b = -1$, controlado pela lei de chaveamento (14) - (16), considerando uma NQLF com retardo temporal $\varphi = 0,1s$ e as condições LMIs (30).	32
Figura 3 – Variação temporal de $\alpha_i(t)$ correspondente ao sistema não linear descrito em (17) e (75) com $a = 3$ e $b = -1$, controlado pela lei de chaveamento (14) - (16), considerando uma NQLF com retardo temporal (9) e as condições de factibilidade.	33
Figura 4 – Variação temporal da regra de chaveamento σ correspondente ao sistema não linear descrito em (17) e (75) com $a = 3$ e $b = -1$, controlado pela lei de chaveamento (14) - (16), considerando uma NQLF (9) e as condições de factibilidade.	34
Figura 5 – Variação temporal de $h_i(t)$ correspondente ao sistema não linear descrito em (17) e (75) com $a = 3$ e $b = -1$, controlado pela lei de chaveamento (14) - (16), considerando uma NQLF (9) e as condições de factibilidade.	35
Figura 6 – Variação temporal de $h_i^-(t)$ correspondente ao sistema não linear descrito em (17) e (75) com $a = 3$ e $b = -1$, controlado pela lei de chaveamento (14) - (16), considerando uma NQLF (9) e as condições de factibilidade.	35
Figura 7 – Variação temporal de $v_l(t)$ correspondente ao sistema não linear descrito em (17) e (75) com $a = 3$ e $b = -1$, controlado pela lei de chaveamento (14) - (16), considerando uma NQLF (9) e as condições de factibilidade.	36
Figura 8 – Região de factibilidade correspondente ao <i>Teorema 6</i> ($\triangle$), <i>Teorema 5</i> ($\triangle$, $\circ$) e <i>Teorema 4</i> ($\triangle$, $\circ$, $\times$).	46
Figura 9 – Comportamento dinâmico do sistema não linear descrito em (77) com $a = 3$ e $b = -1$, controlado pela lei de chaveamento $\mathcal{H}_\infty$ (14)-(16), considerando uma NQLF com retardo temporal $\varphi = 0,1s$ e as condições de factibilidade.	47
Figura 10 – A variação temporal de $\alpha_i(t)$ é mostrada para o sistema não linear descrito em (77) com $a = 3$ e $b = -1$, controlado pela lei de chaveamento $\mathcal{H}_\infty$ (14)-(16), considerando uma NQLF (9) e as condições de factibilidade.	48

Figura 11 – A variação temporal da regra de chaveamento σ correspondente ao sistema não linear descrito em (77) com $a = 3$ e $b = -1$, controlado pela lei de chaveamento $\mathcal{H}_\infty$ (14)-(16), considerando uma NQLF (9) e as condições de factibilidade.	49
Figura 12 – Variação temporal de $h_i(t)$ correspondente ao sistema não linear descrito em (77) com $a = 3$ e $b = -1$, controlado pela lei de chaveamento $\mathcal{H}_\infty$ (14)-(16), considerando uma NQLF (9) e as condições de factibilidade.	50
Figura 13 – Variação temporal de $h_i^-(t)$ correspondente ao sistema não linear descrito em (77) com $a = 3$ e $b = -1$, controlado pela lei de chaveamento $\mathcal{H}_\infty$ (14)-(16), considerando uma NQLF (9) e as condições de factibilidade.	51
Figura 14 – Variação temporal de $v_i(t)$ correspondente ao sistema não linear descrito em (77) com $a = 3$ e $b = -1$, controlado pela lei de chaveamento $\mathcal{H}_\infty$ (14)-(16), considerando uma NQLF (9) e as condições de factibilidade.	52
Figura 15 – Comparação dos índices de desempenho γ correspondentes ao <i>Teorema 5</i> ($\circ$) e ao <i>Teorema 6</i> ($\triangle$).	53
Figura 16 – Comparação do comportamento dinâmico do sistema não linear descrito em (77) diante de um controlador definido pelo <i>Teorema 5</i> e pelo <i>Teorema 7</i>	59
Figura 17 – Comparação do comportamento dinâmico do sistema não linear descrito em (77) diante de um controlador definido pelo <i>Teorema 5</i> e pelo <i>Teorema 7</i> entre 10 e 20 segundos.	60
Figura 18 – A variação temporal de $\alpha_i(t)$ é mostrada para o sistema não linear descrito em (14), (15) e (120) com $a = 3$ e $b = -1$, controlado pela lei de chaveamento $\mathcal{H}_\infty$ sem chattering, considerando uma NQLF com atraso temporal (9).	61
Figura 19 – Comparação da regra de chaveamento σ e λ do sistema não linear descrito em (77) diante de um controlador definido pelo <i>Teorema 5</i> e pelo <i>Teorema 7</i>	62
Figura 20 – Variação temporal de $h_i(t)$ correspondente ao sistema não linear descrito em (14), (15) e (120) com $a = 3$ e $b = -1$, controlado pela lei de chaveamento $\mathcal{H}_\infty$ sem chattering, considerando uma NQLF com atraso temporal (9).	63
Figura 21 – Variação temporal de $h_i^-(t)$ correspondente ao sistema não linear descrito em (14), (15) e (120) com $a = 3$ e $b = -1$, controlado pela lei de chaveamento $\mathcal{H}_\infty$ sem chattering, considerando uma NQLF com atraso temporal (9).	64

Figura 22 – Variação temporal de $v_l(t)$ correspondente ao sistema não linear descrito em (5) - (7), (75) com $a = 3$ e $b = -1$, controlado pela lei de chaveamento $\mathcal{H}_\infty$ sem chattering, considerando uma NQLF com atraso temporal (9). 65

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

T-S	Takagi-Sugeno
NQLF	Non-Quadratic Lyapunov Functional
QLF	Quadratic Lyapunov Function
MF	Member Function
PDC	Parallel Distributed Compensation
LMI	Linear Matrices Inequalities

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^n$	Espaço dos vetores coluna de dimensão n com entradas reais
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Espaço das matrizes de dimensão n por m com entradas reais
I_n	Matriz Identidade de ordem n
M_z	Matriz com incertezas politópicas
K_r	Conjunto $\{1, 2, \dots, r\}$
d/dt	Operador derivada em relação ao tempo
$x(t)$	Vetor de estado
$u(t)$	Lei de controle
r	Número de termos variantes da matriz $A(t)$
$N = 2^r$	Número de modelos locais <i>fuzzy</i>
$V(x)$	Função de Lyapunov
$\alpha_i(t)$	Funções de pertinência
$h_j(t)$	Lei de chaveamento
σ	Índice de chaveamento
λ	Índice de chaveamento

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	FUNDAMENTOS TEÓRICOS	18
2.1	TÉCNICAS DE PARAMETRIZAÇÃO EM LMIs	18
2.2	REPRESENTAÇÃO GERAL DE UM SISTEMA NÃO LINEAR COM INCERTEZAS PARAMÉTRICAS E PERTURBAÇÕES EXTERNAS	19
2.3	REPRESENTAÇÃO EXATA DE UM SISTEMA NÃO LINEAR COM INCERTEZAS PARAMÉTRICAS E PERTURBAÇÕES EXTERNAS ATRAVÉS DO MODELO FUZZY T-S	19
2.4	FUNCIONAL DE LYAPUNOV NÃO QUADRÁTICO COM ATRASO TEMPORAL	20
2.5	LEI DE CONTROLE CHAVEADO	21
3	CONTROLE CHAVEADO COM ATRASO TEMPORAL EM SISTEMAS NÃO LINEARES FUZZY T-S	22
3.1	PROJETO DE UM CONTROLADOR CHAVEADO EM SISTEMAS NÃO LINEARES FUZZY T-S UTILIZANDO UMA NQLF COM ATRASO TEMPORAL	24
3.2	PROJETO DE UM CONTROLADOR CHAVEADO EM SISTEMAS NÃO LINEARES FUZZY T-S UTILIZANDO UMA QLF	26
3.3	EXEMPLOS	29
4	CONTROLE CHAVEADO $\mathcal{H}_\infty$ EM SISTEMAS NÃO LINEARES FUZZY T-S COM RETARDO TEMPORAL	37
4.1	PROJETO DE UM CONTROLADOR CHAVEADO $\mathcal{H}_\infty$ EM SISTEMAS NÃO LINEARES FUZZY T-S UTILIZANDO NQLF COM RETARDO TEMPORAL	39
4.2	PROJETO DE UM CONTROLADOR CHAVEADO $\mathcal{H}_\infty$ EM SISTEMAS NÃO LINEARES FUZZY T-S UTILIZANDO QLF	42
4.3	EXEMPLOS	45
5	CONTROLE CHAVEADO $\mathcal{H}_\infty$ SEM CHATTERING EM SISTEMAS NÃO LINEARES FUZZY T-S COM RETARDO TEMPORAL	54
5.1	Exemplos	58
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS	66

REFERÊNCIAS	67
APÊNDICE A – RESULTADOS OBTIDOS NO EXEMPLO 2	69
APÊNDICE B – RESULTADOS OBTIDOS NO EXEMPLO 4	73
APÊNDICE C – RESULTADOS OBTIDOS NO EXEMPLO 5	77

1 INTRODUÇÃO

Dentro do projeto de controladores para sistemas não lineares, há várias razões que tornam os modelos fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) são efetivos. Por exemplo, sua representação exata ou aproximada de uma ampla classe de sistemas não lineares em um conjunto compacto do espaço de estados, que se comporta como um conjunto (combinação convexa) de modelos lineares, facilitando a análise da estabilidade e o projeto de controladores utilizando o método direto de Lyapunov (Takagi; Sugeno, 1985). Outra característica é a definição das funções de pertinência (em inglês Members Functions (MF)) (Taniguchi *et al.*, 2001), que permite associar facilmente as não-linearidades comuns em certos modelos independentes. Uma característica adicional é a busca por um controlador adequado por meio de uma Compensação Distribuída em Paralelo (PDC) até atingir certas condições na forma de uma ou várias Desigualdades Lineares Matriciais (em inglês Linear Matrix Inequalities (LMIs)), que são resolvidas por métodos de otimização convexa.

Esses modelos fuzzy T-S foram abordados inicialmente utilizando por uma função de Lyapunov quadrática (em inglês Quadratic Lyapunov Function (QLF)), onde as condições de estabilidade eram suficientes devido à falta de unicidade na construção desses modelos e à maneira como as MF eram consideradas como somas convexas, cuja resolução era feita a partir da definição da função de Lyapunov $V(x)$.

Entendendo a relevância da função de Lyapunov na análise dos modelos fuzzy T-S, neste trabalho testa-se uma função de Lyapunov mais geral, como a função de Lyapunov fuzzy ou também chamada não quadrática, a qual nos permite obter condições globais de estabilidade, apesar de manter a incerteza das derivadas temporais das MF, à custa de impor estruturas restritivas para garantir que a integral de linha seja independente da trajetória. Sobre estas considerações, leva-se em conta a inclusão de um atraso temporal (φ) que permite aumentar sua região de factibilidade, considerando na função de Lyapunov integrais adequadas das MF para obter condições globais e evitar as derivadas temporais das MF no cálculo da derivada com relação ao tempo da função de Lyapunov. A utilização deste procedimento proporciona condições mais relaxadas do que as obtidas com QLF. Este Funcional de Lyapunov Não Quadrático (em inglês Non-Quadratic Lyapunov Functional (NQLF)) foi proposto em (Marquez *et al.*, 2016).

Essas considerações foram levadas em conta em (Buzetti, 2021) que propõe um novo controlador chaveado para sistemas não lineares incertos descritos através de modelos fuzzy T-S sem chattering, baseado em uma NQLF com atraso temporal, evitando assim o cálculo das MF correspondentes aos modelos fuzzy T-S, propriedade herdada do controlador chaveado apresentado em (Souza *et al.*, 2013). No entanto, nesta última proposta, não foram incluídas perturbações externas ao sistema.

Controladores chaveados podem ter chattering (chaveamento em alta frequência,

teoricamente infinita), sendo um problema já que sistemas reais não possuem chaveamento ideal, podendo não ser capaz de chavear com a frequência exigida e podendo também danificar os sistemas controlados (Buzetti, 2021).

Dessa forma, o objetivo deste trabalho é criar um método de controle chaveado $\mathcal{H}_\infty$ sem chattering em sistemas não lineares, descritos por modelos fuzzy T-S cujo controlador está baseado em uma NQLF com atraso temporal, com base no procedimento proposto em (Buzetti, 2021).

Assim, espera-se ao incluir a técnica de controle $\mathcal{H}_\infty$ à metodologia desenvolvida (Buzetti, 2021), reduzir o efeito dessas perturbações na saída do sistema.

Para validar a metodologia de controle proposta, serão utilizados os resultados apresentados em Marquez *et al.* (2016) e (Buzetti, 2021) como referências. As simulações serão realizadas utilizando as ferramentas de otimização matemática (Löfberg, 2004) e (Sturm, 1999) no Matlab.

A seguir, descreve-se a notação que será utilizada ao longo do trabalho: $\mathbb{K}_r = \{1, 2, \dots, r\}$, $r \in \mathbb{N}$. O símbolo $(*)$ denota a transposição dos termos em seu lado esquerdo quando se trata de uma expressão em linha; e no caso de expressões matriciais, denotará a transposição de sua entrada de bloco simétrico. I_n representa uma matriz identidade de ordem n . Finalmente, M_z representa uma matriz com incertezas politópicas que pode ser descrita por uma combinação convexa de N matrizes M_i , onde $N = 2^r$ representa o número de vértices do conjunto politopo e r representa o número de parâmetros incertos distintos para sistemas lineares ou o número de funções não lineares distintas para sistemas não lineares, de forma que:

$$M_z = \sum_{i=1}^r \alpha_i M_i, \quad (1)$$

$$\alpha = [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r]^T \in \Lambda_r = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^r : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1, i \in \mathbb{K}_r \right\}.$$

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Neste capítulo, são apresentados os fundamentos teóricos usados nos próximos capítulos, de modo que possam ser tomados como referência e compreendidos corretamente ao explicar e projetar cada metodologia de controle proposta. O capítulo começa fornecendo uma breve introdução ao modelo matemático de sistemas não lineares afetados por incertezas paramétricas e perturbações externas, que influenciam seu comportamento dinâmico ao longo do tempo, gerando a necessidade de um controlador suficientemente robusto para compensar esses eventos. Em seguida, uma representação exata de um sistema não linear é detalhada através do modelo fuzzy T-S (Takagi; Sugeno, 1985), que servirá como ponto de partida para o desenvolvimento de cada metodologia de controle proposta. Então, é apresentada a definição de uma NQLF (Marquez *et al.*, 2016), que incluirá um atraso temporal para ampliar a região de factibilidade em comparação com controladores mais conservadores baseados em uma QLF (Souza *et al.*, 2013). Finalmente, é apresentada a lei de controle chaveado (Buzetti, 2021), que será responsável por garantir a estabilidade do sistema não linear apesar das incertezas paramétricas e perturbações externas.

2.1 TÉCNICAS DE PARAMETRIZAÇÃO EM LMIs

As seguintes propriedades serão utilizadas para modificar convenientemente as LMIs apresentadas no desenvolvimento do trabalho.

Propriedade 1. Complemento Schur (Boyd *et al.*, 1994). Seja $P \in \mathbb{R}^{m \times m} : P = P^T > 0$, $X \in \mathbb{R}^{m \times m}$ uma matriz de posto completo e $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$, então:

$$\begin{cases} Q - X^T P^{-1} X > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} Q & (*) \\ X & P \end{bmatrix} > 0. \quad (2)$$

Propriedade 2. (Peaucelle *et al.*, 2000). Sejam A, R, L, P e Q matrizes de dimensões conhecidas. Portanto, os seguintes LMIs são equivalentes:

$$A^T P + P A + Q < 0, \quad (3)$$

$$\exists R, L : \begin{bmatrix} A^T L^T + L A + Q & P - L + A^T R \\ P - L^T + R^T A & -R - R^T \end{bmatrix} < 0. \quad (4)$$

2.2 REPRESENTAÇÃO GERAL DE UM SISTEMA NÃO LINEAR COM INCERTEZAS PARAMÉTRICAS E PERTURBAÇÕES EXTERNAS

Considere-se um modelo matemático não linear com incertezas paramétricas e um sinal de controle $u(t)$, sujeito a perturbações externas $w(t)$, descrito por:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f_1(z(x(t)))x(t) + f_2(z(x(t)))u(t) + f_3(z(x(t)))w(t), \\ y(t) &= g_1(z(x(t)))x(t) + g_2(z(x(t)))u(t) + g_3(z(x(t)))w(t),\end{aligned}\tag{5}$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entrada $w(t) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de entrada exógena e $y(t) \in \mathbb{R}^s$ é o vetor de saída. A dinâmica do sistema realimentado não linear é dada pelas funções não lineares $f_1(\cdot) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $f_2(\cdot) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$, $f_3(\cdot) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{n \times p}$. Já a saída do sistema é dada pelas funções não lineares $g_1(\cdot) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{s \times n}$, $g_2(\cdot) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{s \times m}$ e $g_3(\cdot) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{s \times p}$. Sendo que $z(x(t)) \in \mathbb{R}^q$ é um vetor cujos elementos $z_l(x(t))$ representam as variáveis premisas, $l \in \mathbb{K}_q$. Além disso, essas variáveis são consideradas limitadas e suaves (continuamente deriváveis) em uma região de operação Ω do espaço de estados.

2.3 REPRESENTAÇÃO EXATA DE UM SISTEMA NÃO LINEAR COM INCERTEZAS PARAMÉTRICAS E PERTURBAÇÕES EXTERNAS ATRAVÉS DO MODELO FUZZY T-S

Uma ampla classe de sistemas descritos por (5) pode ser representada exatamente por um modelo fuzzy T-S como é descrito em (6) (Taniguchi *et al.*, 2001; Souza *et al.*, 2014; Santim *et al.*, 2012; Alves *et al.*, 2016):

$$\begin{aligned}\text{Regra } i : \quad & SE \ z_1(t) \text{ é } \mu_{i1} \text{ e } \dots \text{ e } z_q(t) \text{ é } \mu_{iq}, \\ \text{ENTÃO} \quad & \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) + E_i w(t) \\ y(t) = C_i x(t) + D_i u(t) + G_i w(t) \end{cases},\end{aligned}\tag{6}$$

sendo que $i \in \mathbb{K}_r$ e $\mu_{il}(z_l(t))$, que aparece em (8) é o peso do conjunto fuzzy μ_{il} associado à variável $z_l(t)$ da regra i . Além disso, considera-se que as seguintes matrizes são conhecidas: $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $E_i \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C_i \in \mathbb{R}^{s \times n}$, $D_i \in \mathbb{R}^{s \times m}$ e $G_i \in \mathbb{R}^{s \times p}$. Portanto, a partir de (Tanaka; Ikeda; Wang, 1998) e das definições em (5) e (6), a equação (6) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + E_i w(t)) = A_z x(t) + B_z u(t) + E_z w(t), \\ y(t) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) (C_i x(t) + D_i u(t) + G_i w(t)) = C_z x(t) + D_z u(t) + G_z w(t),\end{aligned}\tag{7}$$

sendo

$$\alpha_i(z(t)) = \frac{\mu_{i1}(z_1(t)) \times \cdots \times \mu_{iq}(z_q(t))}{\sum_{i=1}^r (\mu_{i1}(z_1(t)) \times \cdots \times \mu_{iq}(z_q(t)))}, \quad (8)$$

$$\alpha_i(z(t)) \geq 0, \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) = 1, i \in \mathbb{K}_r,$$

onde $\alpha_i(z(t))$ é o peso normalizado ou a função de pertinência de cada regra em termos dos parâmetros incertos, correspondentes ao conjunto fuzzy $\mu_{il}, i \in \mathbb{K}_r$ e $l \in \mathbb{K}_q$.

2.4 FUNCIONAL DE LYAPUNOV NÃO QUADRÁTICO COM ATRASO TEMPORAL

Tomando como referência a NQLF apresentada em (Marquez *et al.*, 2016), considere-se a seguinte funcional de Lyapunov:

$$V(x) = x^T P_v^{-1} x = x^T \left(\sum_{i=1}^r v_i(z(t)) P_i \right)^{-1} x, \quad (9)$$

com $P_v = P_v^T > 0$, e

$$v_i(z(t)) = \frac{1}{\varphi} \int_{t-\varphi}^t \alpha_i(z(\tau)) d\tau \geq 0, \varphi > 0. \quad (10)$$

É importante destacar que as funções de pertinência $\alpha_i(z(t))$ são integráveis ao longo das trajetórias da região de operação Ω , pois são suaves e limitadas.

Observe que $v_i(z(t))$ em (10) herda a propriedade da soma convexa da MF definida por $\alpha_i(z(t))$ e pode ser representado também como uma função de pertinência:

$$\sum_{i=1}^r v_i(z(t)) = \frac{1}{\varphi} \int_{t-\varphi}^t \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(z(\tau)) \right) d\tau = 1. \quad (11)$$

Note também que a derivada temporal das funções v_i é dada por:

$$\dot{v}_i(z) = \frac{1}{\varphi} (\alpha_i(z(t)) - \alpha_i(z(t-\varphi))), \quad (12)$$

onde a presença da variável premissa $z(t)$ também é determinada em um intervalo de tempo $[-\varphi, 0]$, conhecido como o espaço de Banach de funções contínuas reais, com um valor máximo de $\max_{t \in [-\varphi, 0]} |z(t)|$ (Gu; Chen; Kharitonov, 2003).

Portanto, a função de pertinência α_k^- é definida a partir da derivada temporal de P_v :

$$\dot{P}_v = \frac{1}{\varphi} \left(\sum_{j=1}^r \alpha_j P_j - \sum_{k=1}^r \alpha_k^- P_k \right) = \frac{1}{\varphi} (P_\alpha - P_{\alpha^-}), \quad (13)$$

$$\alpha_k^- = \alpha_k(z(t-\varphi)).$$

2.5 LEI DE CONTROLE CHAVEADO

No modelo fuzzy T-S descrito em (7), (Buzetti, 2021) define a seguinte lei de controle comutada com base na lei de controle não-PDC apresentada em (Marquez *et al.*, 2016), que introduz um atraso de tempo sobre um funcional de Lyapunov:

$$h_j(t) = h_\sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } j = \sigma, \\ 0 & \text{se } j \neq \sigma, \end{cases} \quad (14)$$

$$\sigma = \arg \min_{j \in \mathbb{K}_r} \left\{ x(t)^T P_v^{-1} \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r h_k^-(t) v_l(t) Q_{jkl} P_v^{-1} x(t) \right\},$$

onde σ representa o valor do índice de comutação, $h_j^-(t)$ representa a função defasada $h_j(t)$, $v_l(t)$ é definida a partir de (10) e $Q_{jkl} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica (Souza *et al.*, 2014):

$$h_j^-(t) = h_j(t - \varphi),$$

$$v_l(t) = \frac{1}{\varphi} \int_{t-\varphi}^t h_l(\tau) d\tau \geq 0, \quad (15)$$

cuja lei de controle é a seguinte:

$$u(t) = u_\sigma(t) = M_{\sigma h-v} P_v^{-1} x(t), \quad (16)$$

onde $M_{\sigma h-v} = \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r h_k^- v_l M_{\sigma kl}$, $M_{\sigma kl} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $P_v = \sum_{k=1}^r v_k P_k$ e $P_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

3 CONTROLE CHAVEADO COM ATRASO TEMPORAL EM SISTEMAS NÃO LINEARES FUZZY T-S

Este capítulo tem como objetivo apresentar o procedimento de projeto de um controlador chaveado para sistemas não lineares com incertezas paramétricas descritos por modelos fuzzy T-S utilizando uma NQLF com atraso temporal, o qual foi desenvolvido por (Buzetti, 2021) com a intenção de manter as vantagens do controlador chaveado que é de parâmetros utilizando a regra de chaveamento útil quando estes parâmetros são desconhecidos ou não mensuráveis e sobretudo, não exigir a disponibilidade das funções de pertinência para o projeto do controlador, o que simplifica seu projeto (Souza *et al.*, 2013). Para validar este método de controle, será realizado primeiro um exemplo comparativo com os dados obtidos em (Marquez *et al.*, 2016), já que este último serve de referência para o desenvolvimento do controlador chaveado utilizando uma NQLF com atraso temporal descrito em (Buzetti, 2021), de tal maneira que se garanta a viabilidade do sistema proposto e se defina sobre quais regiões o sistema de controle continuará funcionando de maneira eficiente. A seguir, com os dados obtidos no Exemplo 1, se projetará um controlador chaveado utilizando uma NQLF com atraso temporal descrito com valores específicos, de tal maneira que se possa visualizar o comportamento das variáveis de estado e das variáveis de controle que serão descritas neste capítulo. Do mesmo modo, neste capítulo não se considera a inclusão de entradas exógenas para o projeto do controlador chaveado ((w(t)=0)). Assim que as equações correspondentes ao sistema não linear descrito por modelos fuzzy T-S em (7) resultam da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_z x(t) + B_z u(t), \\ y(t) &= C_z x(t) + D_z u(t),\end{aligned}\tag{17}$$

onde $u(t)$ representa a lei de controle.

Considerando uma lei de controle não-PDC com um atraso temporal φ do funcional de Lyapunov (9), define-se:

$$u(t) = M_{hh-v} P_v^{-1} x(t),\tag{18}$$

onde $M_{hh-v} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r h_i h_j^- v_k M_{ijk}$ e $P_v = \sum_{k=1}^r v_k P_k$, com $M_{ijk} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $P_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i, j, k \in \{1, 2, \dots, r\}$ sendo matrizes de tamanho apropriado relacionadas com o conceito de ganhos do controlador.

Teorema 1. (Marquez *et al.*, 2016). O modelo T-S (17) sob a lei de controle (18) é globalmente assintoticamente estável se existir um escalar $\varphi > 0$ e matrizes $P_i = P_i^T > 0$, M_{jkl} , $i, j, k, l \in 1, 2, \dots, r$, tais que se satisfaçam as seguintes LMIs (Tuan *et al.*, 2001):

$$\begin{aligned}\Upsilon_{ii}^{kl} &< 0 \\ \frac{2}{r-1} \Upsilon_{ii}^{kl} + \Upsilon_{ij}^{kl} + \Upsilon_{ji}^{kl} &< 0, i \neq j,\end{aligned}\tag{19}$$

onde $\Upsilon_{ij}^{kl} = A_i P_l + B_i M_{jkl} + (*) - \frac{1}{\varphi} (P_j - P_k)$.

Demonstração. Considerando uma NQLF (9), calcula-se sua derivada, resultando em:

$$\dot{V}(x) = x^T(t)P_v^{-1}\dot{x}(t) + (\dot{x}(t))^T P_v^{-1}x(t) + x^T(t) \left(\frac{dP_v^{-1}}{dt} \right) x(t). \quad (20)$$

De (17) e (18), obtém-se:

$$\dot{x}(t) = [A_z + B_z M_{hh-v} P_v^{-1}] x(t), \quad (21)$$

o qual é substituído em (20), resultando na seguinte expressão:

$$\dot{V}(x) = x^T(t) \left[P_v^{-1} A_z + P_v^{-1} B_z M_{hh-v} P_v^{-1} + (*) + \frac{dP_v^{-1}}{dt} \right] x(t). \quad (22)$$

Considerando que $\dot{V}(x)$ deve ser negativa ao longo das trajetórias de estado do sistema, para $x(t) \neq 0$:

$$\dot{V}(x) < 0, \quad (23)$$

substitui-se (22) em (23), obtendo-se a seguinte expressão:

$$x^T(t) [P_v^{-1} A_z + P_v^{-1} B_z M_{hh-v} P_v^{-1} + (*)] x(t) < 0. \quad (24)$$

Agora, sobre a desigualdade (24), considera-se que $x(t) \neq 0$ de forma que seja possível remover os vetores de estado, resultando em:

$$P_v^{-1} A_z + P_v^{-1} B_z M_{hh-v} P_v^{-1} + (*) + \frac{dP_v^{-1}}{dt} < 0. \quad (25)$$

Sobre esta nova desigualdade obtida, multiplicamos convenientemente à direita e à esquerda a matriz P_v , obtendo para todo $x(t) \neq 0$:

$$A_z P_v + B_z M_{hh-v} + (*) + P_v \frac{dP_v^{-1}}{dt} P_v < 0, \quad (26)$$

onde o último fator de (26) pode ser reescrito como:

$$P_v \frac{dP_v^{-1}}{dt} P_v = \frac{d}{dt} (P_v P_v^{-1}) P_v - \dot{P}_v = -\dot{P}_v, \quad (27)$$

resultando em:

$$A_z P_v + B_z M_{hh-v} + (*) - \dot{P}_v < 0. \quad (28)$$

Finalmente de (13) e (28) se obtém:

$$A_z P_v + B_z M_{hh-v} + (*) - \frac{1}{\varphi} (P_\alpha - P_{\alpha-}) < 0. \quad (29)$$

Agora, se as condições apresentadas em (19) forem satisfeitas, a condição em (29) também será satisfeita e a prova deste teorema está concluída. $\square$

3.1 PROJETO DE UM CONTROLADOR CHAVEADO EM SISTEMAS NÃO LINEARES FUZZY T-S UTILIZANDO UMA NQLF COM ATRASO TEMPORAL

Nesta seção, é apresentada uma condição baseada em LMIs que garante a estabilidade assintótica de um sistema não linear com incertezas paramétricas descrito por modelos fuzzy T-S (17), utilizando uma NQLF (9) e um controlador chaveado definido em (14)-(16).

Teorema 2. (Buzetti, 2021). *O modelo T-S (17) sob a lei de controle (14) - (16), é globalmente assintoticamente estável com uma taxa de decaimento $\beta > 0$, se existir um escalar $\varphi > 0$ e se as seguintes LMIs são factíveis:*

$$\begin{aligned} A_i P_l + B_i M_{jkl} + (*) - \frac{1}{\varphi} (P_j - P_k) + 2\beta P_l - Q_{jkl} - Z_{ikl} < 0, \\ Q_{ikl} + Z_{ikl} \leq 0, \end{aligned} \quad (30)$$

onde $i, j, k, l \in \mathbb{K}_r$, em que r representa o número de vértices do conjunto politopo, $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica definida positiva, $Z_{ikl}, Q_{ikl} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são matrizes simétricas e $M_{jkl} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Demonstração. Considerando uma NQLF (9), calcula-se sua derivada, resultando em:

$$\dot{V}(x) = x^T(t) P_v^{-1} \dot{x}(t) + (\dot{x}(t))^T P_v^{-1} x(t) + x^T(t) \left(\frac{dP_v^{-1}}{dt} \right) x(t). \quad (31)$$

De (16) e (17), obtém-se:

$$\dot{x}(t) = [A_z + B_z M_{\sigma h-v} P_v^{-1}] x(t), \quad (32)$$

o qual é substituído em (31), resultando na seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = x^T(t) \left[P_v^{-1} A_z + P_v^{-1} B_z M_{\sigma h-v} P_v^{-1} + A_z^T P_v^{-1} \right. \\ \left. + P_v^{-1} M_{\sigma h-v}^T B_z^T P_v^{-1} + \frac{dP_v^{-1}}{dt} \right] x(t). \end{aligned} \quad (33)$$

Considerando um limite inferior para uma taxa de decaimento do sistema $\beta > 0$ em todas as trajetórias $x(t) \neq 0$ apresentado em (Boyd *et al.*, 1994) como:

$$\dot{V}(x) + 2\beta V(x) < 0, \quad (34)$$

substituindo (33) e (9) em (34), obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} x^T(t) \left[P_v^{-1} A_z + P_v^{-1} B_z M_{\sigma h-v} P_v^{-1} + A_z^T P_v^{-1} + P_v^{-1} M_{\sigma h-v}^T B_z^T P_v^{-1} \right. \\ \left. + \frac{dP_v^{-1}}{dt} \right] x(t) + x^T(t) [2\beta P_v^{-1}] x(t) < 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Note também que, a partir da lei de controle mostrada em (14)-(16), estende-se à seguinte condição:

$$\begin{aligned} \min_{j \in \mathbb{K}_r} \left\{ x(t)^T P_v^{-1} \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r h_k^-(t) v_l(t) Q_{jkl} P_v^{-1} x(t) \right\} &= x^T(t) P_v^{-1} \bar{Q}_{\sigma h-v} P_v^{-1} x(t) \\ &\leq x^T(t) P_v^{-1} \bar{Q}_{\alpha h-v} P_v^{-1} x(t) = x(t)^T P_v^{-1} \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \alpha_i(t) h_k^-(t) v_l(t) Q_{ikl} P_v^{-1} x(t). \end{aligned} \quad (36)$$

Portanto, também definimos convenientemente uma matriz de relaxação $\bar{Z}_{\alpha h-v}$ tal que:

$$x^T(t) P_v^{-1} \bar{Z}_{\alpha h-v} P_v^{-1} x(t) = x^T(t) P_v^{-1} \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \alpha_i(t) h_k^-(t) v_l(t) Z_{ikl} P_v^{-1} x(t). \quad (37)$$

De tal maneira que, se relacionarmos (36) e (37), obtemos:

$$\begin{aligned} x^T(t) P_v^{-1} \bar{Q}_{\sigma h-v} P_v^{-1} x(t) + x^T(t) P_v^{-1} \bar{Z}_{\alpha h-v} P_v^{-1} x(t) &\leq \\ x^T(t) P_v^{-1} \bar{Q}_{\alpha h-v} P_v^{-1} x(t) + x^T(t) P_v^{-1} \bar{Z}_{\alpha h-v} P_v^{-1} x(t). \end{aligned} \quad (38)$$

Analisando as LMIs (35) e (38), se determinam duas novas condições suficientes para a validade da condição dada em (35):

$$\begin{aligned} x^T(t) \left[P_v^{-1} A_z + P_v^{-1} B_z M_{\sigma h-v} P_v^{-1} + A_z^T P_v^{-1} + P_v^{-1} M_{\sigma h-v}^T B_z^T P_v^{-1} + \frac{dP_v^{-1}}{dt} \right] x(t) \\ + x^T(t) [2\beta P_v^{-1}] x(t) - x^T(t) P_v^{-1} \bar{Q}_{\sigma h-v} P_v^{-1} x(t) - x^T(t) P_v^{-1} \bar{Z}_{\alpha h-v} P_v^{-1} x(t) < 0, \end{aligned} \quad (39)$$

$$x^T(t) P_v^{-1} \bar{Q}_{\alpha h-v} P_v^{-1} x(t) + x^T(t) P_v^{-1} \bar{Z}_{\alpha h-v} P_v^{-1} x(t) \leq 0. \quad (40)$$

Sobre estas novas LMIs obtidas, multiplicamos convenientemente à direita e à esquerda pela matriz P_v , obtendo para todo $x(t) \neq 0$:

$$\begin{aligned} x^T(t) \left[A_z P_v + B_z M_{\sigma h-v} + P_v A_z^T + M_{\sigma h-v}^T B_z^T + P_v \frac{dP_v^{-1}}{dt} P_v \right] x(t) \\ + x^T(t) [2\beta P_v] x(t) - x^T(t) \bar{Q}_{\sigma h-v} x(t) - x^T(t) \bar{Z}_{\alpha h-v} x(t) < 0, \end{aligned} \quad (41)$$

$$x^T(t) \bar{Q}_{\alpha h-v} x(t) + x^T(t) \bar{Z}_{\alpha h-v} x(t) \leq 0. \quad (42)$$

Substituindo o fator equivalente (27) em (41):

$$\begin{aligned} x^T(t) \left[A_z P_v + B_z M_{\sigma h-v} + P_v A_z^T + M_{\sigma h-v}^T B_z^T - \dot{P}_v \right] x(t) \\ + x^T(t) [2\beta P_v] x(t) - x^T(t) \bar{Q}_{\sigma h-v} x(t) - x^T(t) \bar{Z}_{\alpha h-v} x(t) < 0, \end{aligned} \quad (43)$$

$$x^T(t) \bar{Q}_{\alpha h-v} x(t) + x^T(t) \bar{Z}_{\alpha h-v} x(t) \leq 0. \quad (44)$$

Agora, sobre as LMIs determinadas em (43) e (44), considera-se que $x(t) \neq 0$ de forma que seja possível remover os vetores de estado, resultando em:

$$A_z P_v + B_z M_{\sigma h-v} + P_v A_z^T + M_{\sigma h-v}^T B_z^T - \dot{P}_v + 2\beta P_v - \bar{Q}_{\sigma h-v} - \bar{Z}_{\alpha h-v} < 0, \quad (45)$$

$$\bar{Q}_{\alpha h^-v} + \bar{Z}_{\alpha h^-v} \leq 0. \quad (46)$$

Sobre esses resultados, uma forma de generalizar (45) e (46), é considerar os valores de definição mostrados em (5), (8), (9), (11), (14), (15), (36) e (37), resultando em:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^r \sum_{l=1}^r \alpha_i v_l A_i P_l + \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \alpha_i h_k^- v_l B_i M_{jkl} + \sum_{i=1}^r \sum_{l=1}^r v_l \alpha_i P_l A_i^T \\ & + \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \alpha_i h_k^- v_l M_{jkl}^T B_i^T - \frac{1}{\varphi} \left(\sum_{i=1}^r h_j P_j - \sum_{k=1}^r h_k^- P_k \right) + 2\beta \sum_{l=1}^r v_l P_l \\ & - \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r h_k^- v_l Q_{jkl} - \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \alpha_i h_k^- v_l Z_{ikl} < 0, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \alpha_i h_k^- v_l Q_{ikl} + \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \alpha_i h_k^- v_l Z_{ikl} \leq 0, \quad (48)$$

em que também é possível incluir convenientemente as seguintes definições $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$, $\sum_{k=1}^r h_j = 1$, $\sum_{k=1}^r h_k^- = 1$ e $\sum_{l=1}^r v_l = 1$, resultando em:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \alpha_i h_j h_k^- v_l \left[A_i P_l + B_i M_{jkl} + (*) - \frac{1}{\varphi} (P_j - P_k) + 2\beta P_l - Q_{jkl} - Z_{ikl} \right] < 0, \quad (49)$$

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \alpha_i h_j h_k^- v_l [Q_{ikl} + Z_{ikl}] \leq 0. \quad (50)$$

Finalmente, dado que $\alpha_i \geq 0$, $h_j \geq 0$, $h_k^- \geq 0$ e $v_l \geq 0$, esses fatores podem ser simplificados nas LMIs (49) e (50), demonstrando assim o *Teorema 2*:

$$A_i P_l + B_i M_{jkl} + (*) - \frac{1}{\varphi} (P_j - P_k) + 2\beta P_l - Q_{jkl} - Z_{ikl} < 0, \quad (51)$$

$$Q_{ikl} + Z_{ikl} \leq 0. \quad (52)$$

□

3.2 PROJETO DE UM CONTROLADOR CHAVEADO EM SISTEMAS NÃO LINEARES FUZZY T-S UTILIZANDO UMA QLF

Nesta seção, é apresentada outra condição baseada em LMIs que também garante a estabilidade assintótica de um sistema não linear com incertezas paramétricas descrito por modelos fuzzy T-S (12). No entanto, ao contrário da seção anterior, consideraremos uma Função de Lyapunov Quadrática (QLF), o que implica que a matriz P_v é considerada constante $P_v = P$, e a lei de controle chaveado será baseada em (Souza *et al.*, 2013):

$$u(t) = u_\sigma(t) = M_\sigma P^{-1} x(t), \quad (53)$$

onde $M_\sigma = M_j$ com $M_\sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $M_\sigma P^{-1}$ representa o ganho do controlador, cujo índice de chaveamento σ é definido por:

$$\sigma = \arg \min_{j \in \mathbb{K}_r} \left\{ x(t)^T P^{-1} Q_j P^{-1} x(t) \right\}. \quad (54)$$

Este estudo é necessário para validar que o método de controle mostrado em (14)-(16) apresenta vantagens relacionadas à sua região de factibilidade, conforme indicado em (Marquez *et al.*, 2016), em comparação com outros métodos de controle mais simples.

Teorema 3. (Buzetti, 2021). O modelo T-S (17) sob a lei de controle (53) e (54), é globalmente assintoticamente estável com uma taxa de decaimento $\beta > 0$, se as seguintes LMIs forem factíveis:

$$\begin{aligned} A_i P + B_i M_j + (*) + 2\beta P - Q_j - Z_i &< 0, \\ Q_i + Z_i &\leq 0, \end{aligned} \quad (55)$$

onde $i, j \in \mathbb{K}_r$, em que r representa o número de vértices do conjunto politopo, $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica definida positiva, $Z_i, Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são matrizes simétricas e $M_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Demonstração. Considerando uma QLF definida por $V(x) = x^T P^{-1} x(t)$ (Boyd *et al.*, 1994), calcula-se sua derivada, resultando em:

$$\dot{V}(x) = x^T(t) P \dot{x}(t) + (\dot{x}(t))^T P x(t). \quad (56)$$

De (17) e (53), obtemos:

$$\dot{x}(t) = [A_z + B_z M_\sigma P^{-1}] x(t), \quad (57)$$

o qual é substituído em (56), resultando na seguinte expressão:

$$\dot{V}(x) = x^T(t) \left[P^{-1} A_z + P^{-1} B_z M_\sigma P^{-1} + A_z^T P^{-1} + P^{-1} M_\sigma^T B_z^T P^{-1} \right] x(t). \quad (58)$$

Considerando um limite inferior para a taxa de decaimento do sistema $\beta > 0$ em todas as trajetórias $x(t)$ apresentadas em (17), substituímos a equação obtida em (58), resultando para $x(t) \neq 0$:

$$\begin{aligned} x^T(t) \left[P^{-1} A_z + P^{-1} B_z M_\sigma P^{-1} + A_z^T P^{-1} + P^{-1} M_\sigma^T B_z^T P^{-1} \right] x(t) \\ + x^T(t) \left[2\beta P^{-1} \right] x(t) < 0. \end{aligned} \quad (59)$$

Note também que, a partir da lei de controle mostrada em (53) e (54), estende-se à seguinte condição:

$$\begin{aligned} \min_{j \in \mathbb{K}_r} \left\{ x(t)^T P^{-1} Q_j P^{-1} x(t) \right\} &= x^T(t) P^{-1} \bar{Q}_\sigma P^{-1} x(t) \\ &\leq x^T(t) P^{-1} \bar{Q} P^{-1} x(t) = x(t)^T P^{-1} \sum_{i=1}^r \alpha_i Q_i P^{-1} x(t), \end{aligned} \quad (60)$$

portanto, também definimos convenientemente uma matriz de relaxamento $\bar{Z}$ tal que:

$$x^T(t)P^{-1}\bar{Z}P^{-1}x(t) = x^T(t)P^{-1}\sum_{i=1}^r\alpha_i(t)Z_iP^{-1}x(t). \quad (61)$$

De tal maneira que, se relacionarmos (60) e (61), obtemos:

$$\begin{aligned} x^T(t)P^{-1}\bar{Q}_\sigma P^{-1}x(t) + x^T(t)P^{-1}\bar{Z}P^{-1}x(t) \leq \\ x^T(t)P^{-1}\bar{Q}P^{-1}x(t) + x^T(t)P^{-1}\bar{Z}P^{-1}x(t). \end{aligned} \quad (62)$$

Analisando as LMIs (59) e (62), obtemos duas novas condições suficientes para a validade da condição dada em (42):

$$\begin{aligned} x^T(t) \left[P^{-1}A_z + P^{-1}B_zM_\sigma P^{-1} + A_z^T P^{-1} + P^{-1}M_\sigma^T B_z^T P^{-1} \right] x(t) \\ + x^T(t) \left[2\beta P^{-1} \right] x(t) - x^T(t)P^{-1}\bar{Q}_\sigma P^{-1}x(t) - x^T(t)P^{-1}\bar{Z}P^{-1}x(t) < 0, \end{aligned} \quad (63)$$

$$x^T(t)P^{-1}\bar{Q}P^{-1}x(t) + x^T(t)P^{-1}\bar{Z}P^{-1}x(t) \leq 0. \quad (64)$$

Sobre essas novas LMIs obtidas, multiplicamos convenientemente à direita e à esquerda pela matriz P , obtendo para todo $x(t) \neq 0$:

$$\begin{aligned} x^T(t) \left[A_z P + B_z M_\sigma + P A_z^T + M_\sigma^T B_z^T \right] x(t) \\ + x^T(t) [2\beta P] x(t) - x^T(t)\bar{Q}_\sigma x(t) - x^T(t)\bar{Z}x(t) < 0, \end{aligned} \quad (65)$$

$$x^T(t)\bar{Q}x(t) + x^T(t)\bar{Z}x(t) \leq 0. \quad (66)$$

Agora, sobre as LMIs determinadas em (65) e (66), consideramos que $x(t) \neq 0$ de forma que possamos os vetores de estado, resultando em:

$$A_z P + B_z M_\sigma + P A_z^T + M_\sigma^T B_z^T + 2\beta P - \bar{Q}_\sigma - \bar{Z} < 0, \quad (67)$$

$$\bar{Q} + \bar{Z} \leq 0. \quad (68)$$

Sobre esses resultados, uma forma de tornar as desigualdades em LMIs é considerando os valores de definição mostrados em (8), (53) e (54):

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i A_i P + \sum_{i=1}^r \alpha_i B_i M_j + \sum_{i=1}^r \alpha_i A_i^T P + \sum_{i=1}^r \alpha_i M_j^T B_i^T + 2\beta P - Q_j - \sum_{i=1}^r \alpha_i Z_i < 0, \quad (69)$$

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i Q_i + \sum_{i=1}^r \alpha_i Z_i \leq 0, \quad (70)$$

onde também é possível incluir convenientemente por definição $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$, resultando em:

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i [A_i P + B_i M_j + (*) + 2\beta P - Q_j - Z_i] < 0, \quad (71)$$

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i [Q_i + Z_i] \leq 0. \quad (72)$$

Finalmente, dado que $\alpha_i \geq 0$, este fator pode ser simplificado das LMIs (71) e (72), o que demonstra o *Teorema 3*:

$$A_i P + B_i M_j + (*) + 2\beta P - Q_j - Z_i < 0, \quad (73)$$

$$Q_i + Z_i \leq 0 \quad (74)$$

□

3.3 EXEMPLOS

Com o objetivo de validar as condições LMIs definidas no *Teorema 1*, *Teorema 2* e *Teorema 3*, nesta seção são apresentados dois exemplos numéricos. No primeiro exemplo numérico, será possível visualizar graficamente as vantagens de considerar um controlador chaveado em sistemas não lineares com incertezas paramétricas utilizando uma NQLF com atraso temporal mostrada no *Teorema 2*, em comparação com um controlador chaveado utilizando uma QLF mostrada no *Teorema 3*; considerando, em ambos os casos, que não há conhecimento das MF do sistema não linear em comparação com o *Teorema 1*. No segundo exemplo numérico, será possível observar o comportamento temporal adotado pelo mesmo sistema não linear com incertezas paramétricas para um ponto de projeto específico baseado no exemplo anterior ao considerar um controlador chaveado utilizando uma NQLF com atraso temporal definido no *Teorema 2*.

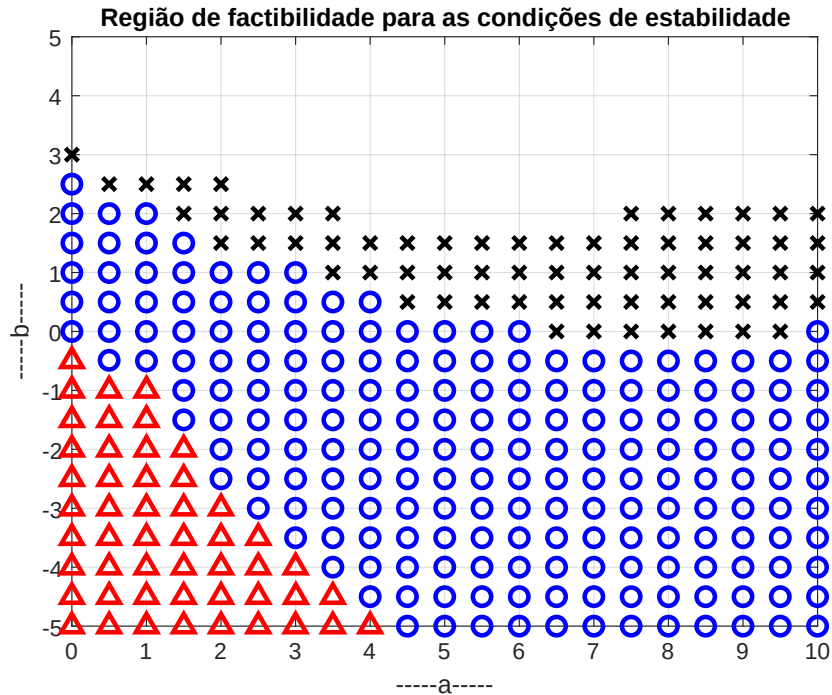
Exemplo 1. *Este exemplo mostra a região de factibilidade correspondente a um sistema não linear com incertezas paramétricas aplicando o Teorema 1, Teorema 2 e Teorema 3; de modo que seja possível visualizar as diferenças entre o uso de cada controlador para esse tipo de sistemas não lineares.*

Tomando como referência os valores numéricos mostrados no Exemplo 1 (Marquez *et al.*, 2016), correspondentes a um sistema não linear com incertezas paramétricas representado pelo modelo fuzzy T-S (17), definem-se as seguintes matrizes e constantes:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 1,59 & -7,29 \\ 0,01 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0,02 & -4,64 \\ 0,35 & 0,21 \end{bmatrix}, \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} -a & -4,33 \\ 0 & 0,05 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0,89 & -5,29 \\ 0,1 & 0 \end{bmatrix}, \\
 B_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} -b+6 \\ -1 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 w_{10} &= \frac{1 - \text{sen}x_1}{2}, w_{20} = \frac{4 - x_2^2}{4}, w_{11} = 1 - w_{10}, w_{21} = 1 - w_{20}, \\
 \alpha_1(t) &= w_{10}w_{20}, \alpha_2(t) = w_{10}w_{21}, \alpha_3(t) = w_{11}w_{20}, \alpha_4(t) = w_{11}w_{21}.
 \end{aligned} \tag{75}$$

Sobre o sistema mostrado, considera-se uma taxa de decaimento nula ($\beta = 0$), um atraso temporal constante ($\varphi = 0,1s$) e uma variação de $a \in [0, 10]$ e $b \in [-5, 5]$ como parâmetros incertos do sistema não linear. Dessa forma, determina-se a região de factibilidade correspondente ao *Teorema 1* ($\triangle$, $\circ$, $\times$), *Teorema 2* ($\triangle$, $\circ$) e *Teorema 3* ($\triangle$), mostrados na *Figura 1*.

Figura 1 – Região de factibilidade correspondente ao *Teorema 1* ($\triangle$, $\circ$, $\times$), *Teorema 2* ($\triangle$, $\circ$), *Teorema 3* ($\triangle$).



Fonte: Elaboração do autor.

Como se pode observar na *Figura 1*, o controlador baseado no *Teorema 1* mostra uma região factível maior do que as obtidas com os *Teoremas 2* e *Teorema 3*. Esse fato ocorre porque o controlador baseado no *Teorema 1* considera a disponibilidade de todas as MF, o que torna sua implementação mais complexa em termos matemáticos e computacionais. Enquanto isso, o *Teorema 2* e o *Teorema 3* não utilizam essas MF no projeto

do controlador. Esse resultado é muito útil ao projetar controladores em sistemas não lineares quando, por alguma razão, não se tem informações suficientes sobre o sistema, limitando a obtenção de detalhes das MF. Nesse caso, os controladores baseados nos *Teoremas 2* e *Teorema 3* são bastante úteis, já que não dependem da forma ou valor que as MF assumem sobre o sistema a cada instante.

Exemplo 2. *Este exemplo mostra o comportamento temporal das variáveis de estado, do sinal de controle e dos sinais de chaveamento do controlador correspondentes a um sistema não linear com incertezas paramétricas sob um controle chaveado utilizando uma NQLF com atraso temporal.*

Considerando os valores numéricos descritos em (75), correspondentes a um sistema não linear com incertezas paramétricas representado pelo modelo fuzzy T-S (17), onde se considera uma taxa de decaimento nula ($\beta = 0$), um retardo temporal constante ($\varphi = 0,1s$), condições iniciais $x_1(0) = 0,7$, $x_2(0) = -0,5$ e cujas incertezas paramétricas são definidas por $a = 3$ e $b = -1$, os quais foram selecionados convenientemente a partir dos resultados obtidos na *Figura 1* com o objetivo de garantir a estabilidade do sistema.

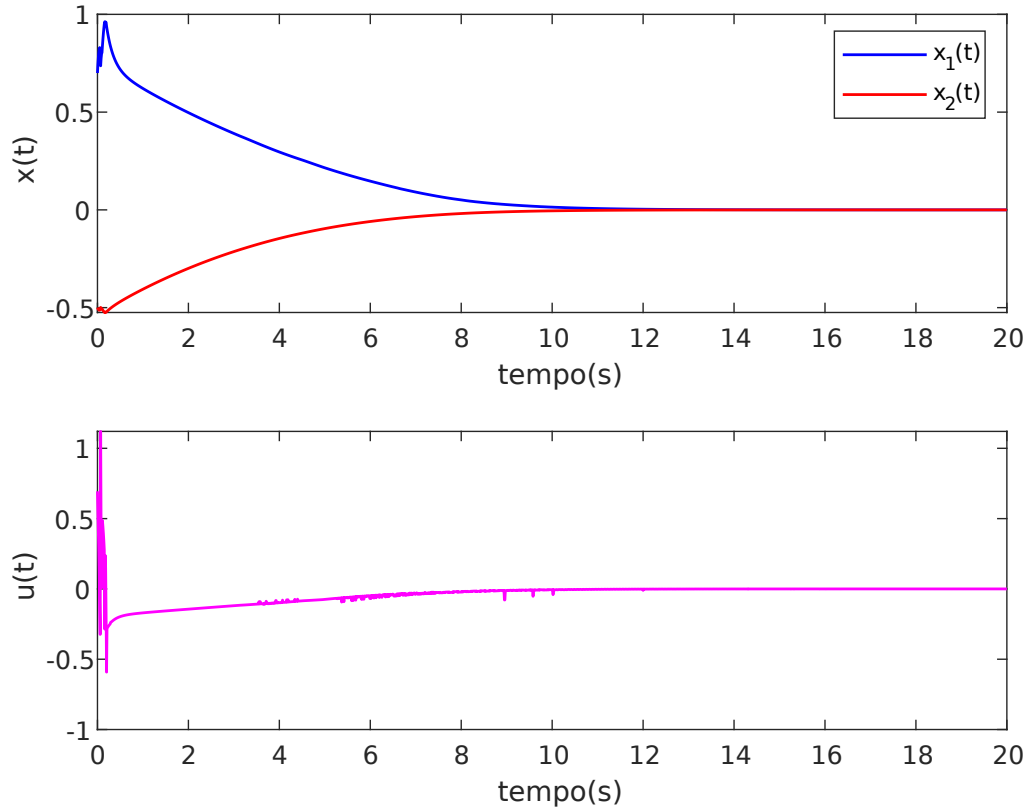
Realizou-se a simulação do sistema não linear com incertezas paramétricas, partindo das LMIs apresentadas no *Teorema 2*, cujos resultados correspondentes às matrizes P_i são mostrados a seguir e os resultados das matrizes M_{jkl} e Q_{ikl} são mostradas no Apêndice A:

$$\begin{aligned} [P_1 \mid P_2] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 0,5309 & -0,0738 & 0,2286 & -0,0489 \\ -0,0738 & 0,0210 & -0,0489 & 0,0209 \end{array} \right], \\ [P_3 \mid P_4] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 0,1856 & -0,0413 & 0,4368 & -0,0638 \\ -0,0413 & 0,0201 & -0,0638 & 0,0208 \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (76)$$

Esses valores calculados nos permitem representar o sistema não linear com incertezas paramétricas na ferramenta de simulação *Simulink*, obtendo o comportamento temporal do sistema controlado. Dessa forma, poderemos visualizar a variação temporal das variáveis de estado, do sinal de controle e dos sinais de chaveamento.

A *Figura 2* mostra o comportamento dinâmico de um sistema não linear descrito em (17), cuja lei de controle chaveado é baseada nas LMIs do *Teorema 2*, as quais garantem que o sistema seja globalmente assintoticamente estável para as condições iniciais consideradas neste exemplo, tanto para as variáveis de estado quanto para o sinal de controle.

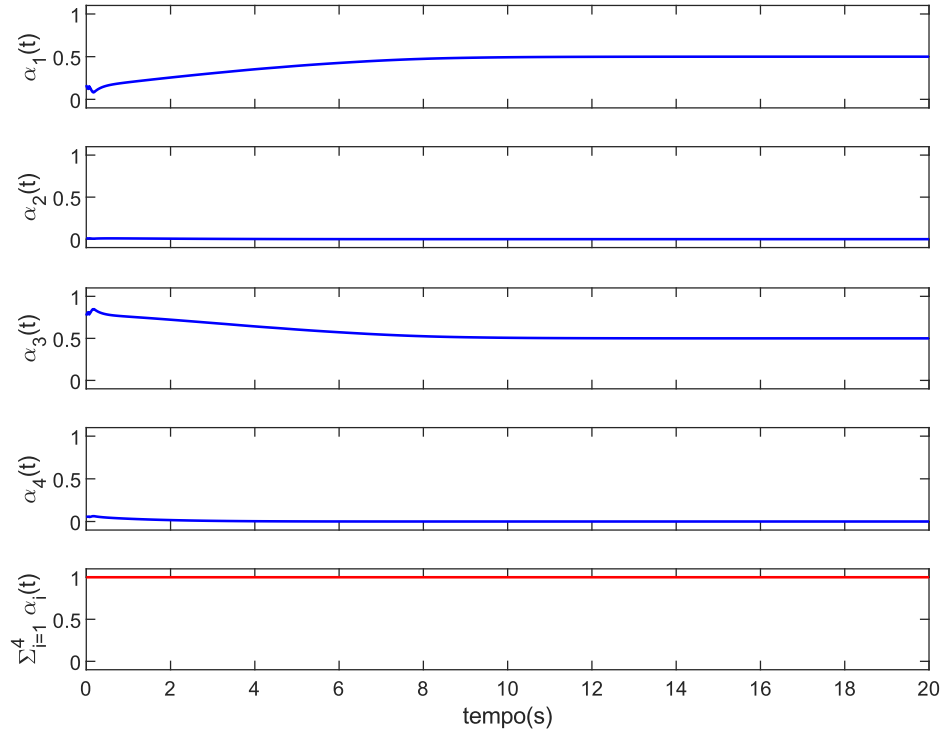
Figura 2 – Comportamento dinâmico do sistema não linear descrito em (17) e (75) com $a = 3$ e $b = -1$, controlado pela lei de chaveamento (14) - (16), considerando uma NQLF com retardo temporal $\varphi = 0,1s$ e as condições LMIs (30).



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 3 mostra o comportamento dinâmico de $\alpha_i(t)$, o qual representa a variação temporal que as funções de pertinência têm, validando que em cada instante se cumpra $\sum_{i=1}^r \alpha_i(t) = 1$, conforme é visualizado no gráfico de cor vermelha. É importante também destacar que essas funções são resultado do controlador chaveado implementado, mas não são necessárias para o projeto do controlador, como foi demonstrado no *Teorema 2*, que permite controlar sistemas com informações desconhecidas.

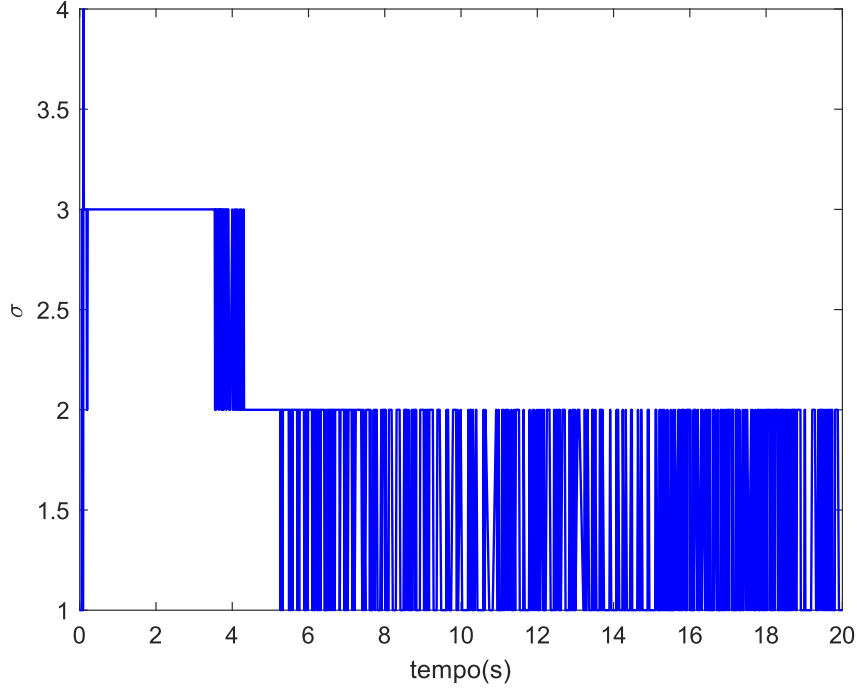
Figura 3 – Variação temporal de $\alpha_i(t)$ correspondente ao sistema não linear descrito em (17) e (75) com $a = 3$ e $b = -1$, controlado pela lei de chaveamento (14) - (16), considerando uma NQLF com retardo temporal (9) e as condições de factibilidade.



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 4 mostra o comportamento dinâmico da regra de chaveamento σ , cuja lei de controle chaveado é definida em (15) e (16). Os valores assumidos pela regra de chaveamento σ são limitados pelo número de vértices do conjunto politopo definido, de modo que o valor máximo que σ pode assumir é 4. Além disso, a matriz Q determina a chave σ , cujos valores definem a seleção da matriz $Q_{\sigma kl}$ e da função h_{σ} .

Figura 4 – Variação temporal da regra de chaveamento σ correspondente ao sistema não linear descrito em (17) e (75) com $a = 3$ e $b = -1$, controlado pela lei de chaveamento (14) - (16), considerando uma NQLF (9) e as condições de factibilidade.

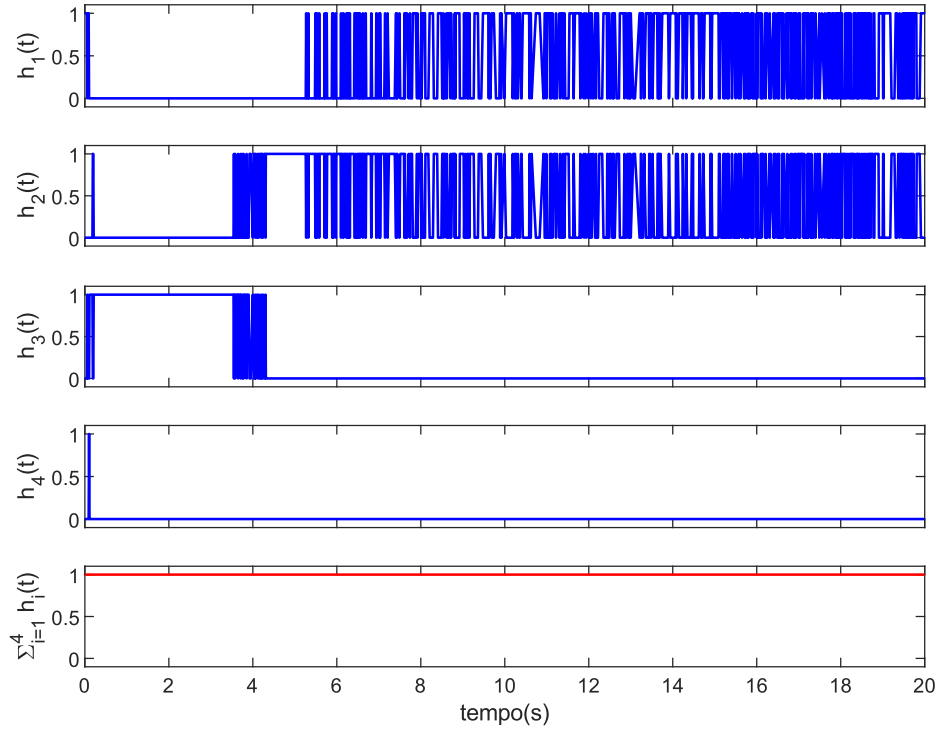


Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 5 mostra o comportamento dinâmico temporal que descreve as variáveis $h_j(t)$ em cada instante de tempo, o qual depende da mudança de estados que existe na regra de chaveamento σ , conforme mostrado na Figura 4. Além disso, podemos verificar que a partir do tempo $t = 6s$, o sistema não linear com incertezas paramétricas se mantém estável apenas alternando entre os estados $\sigma = 1$ e $\sigma = 2$.

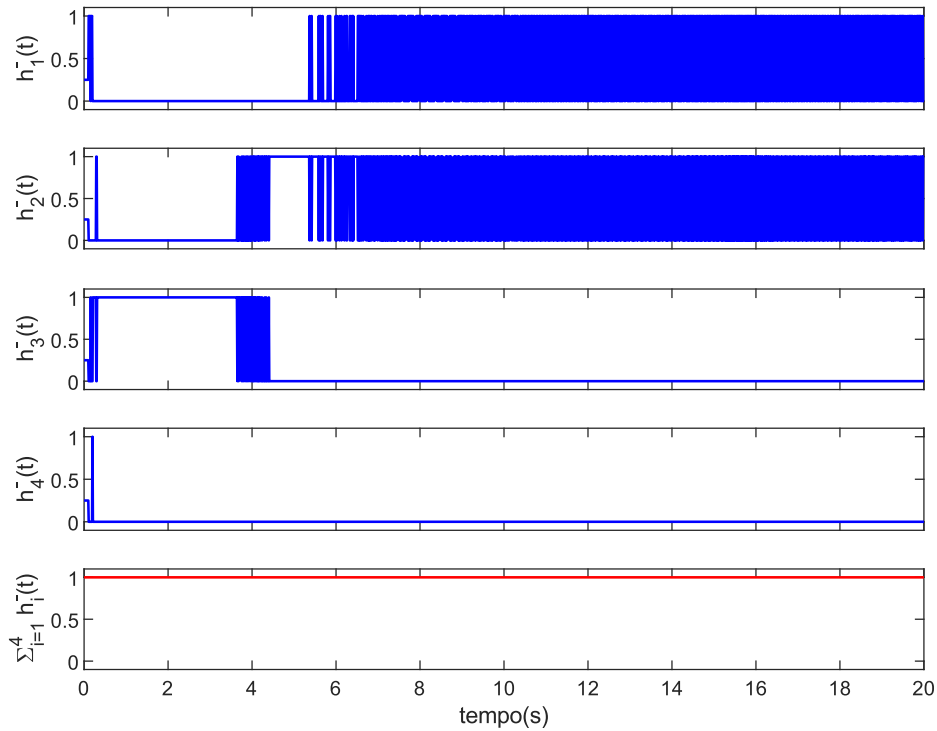
A Figura 6 mostra o comportamento dinâmico temporal que descreve o fator h_j^- , o qual é o mesmo fator $h_j(t)$, mas com um retardo temporal $\varphi = 0.1s$. Além disso, com relação a esse fator com retardo temporal $h_j^-(t)$, é importante mencionar que para o instante $t < 0$, matematicamente não está definido, por esse motivo, considerou-se convenientemente um valor inicial de 0.25 para h_1^-, h_2^-, h_3^- e h_4^- em $t = 0$, uma vez que deve-se manter $\sum_{j=1}^r h_j^-(t) = 1$ e $h_j^-(t) \geq 0$.

Figura 5 – Variação temporal de $h_i(t)$ correspondente ao sistema não linear descrito em (17) e (75) com $a = 3$ e $b = -1$, controlado pela lei de chaveamento (14) - (16), considerando uma NQLF (9) e as condições de factibilidade.



Fonte: Elaboração do autor.

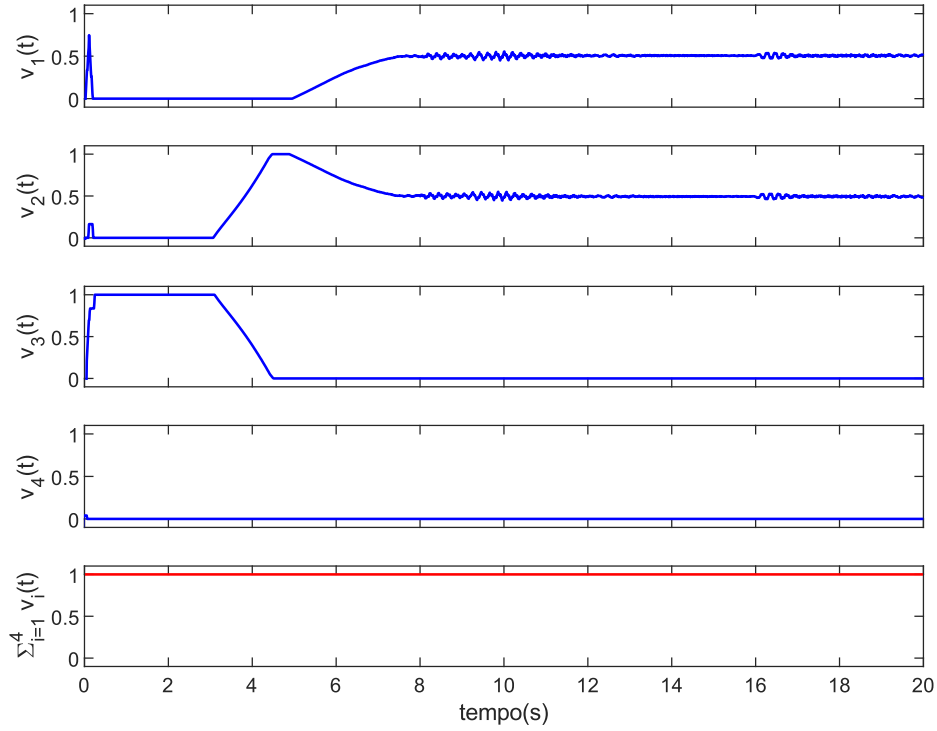
Figura 6 – Variação temporal de $h_i^-(t)$ correspondente ao sistema não linear descrito em (17) e (75) com $a = 3$ e $b = -1$, controlado pela lei de chaveamento (14) - (16), considerando uma NQLF (9) e as condições de factibilidade.



Fonte: Elaboração do autor.

Finalmente, a Figura 7 mostra o comportamento dinâmico temporal que descreve a função $v_l(t) = \frac{1}{\varphi} \int_{t-\varphi}^t h_i(\tau) d\tau$ definida em (10), a qual também depende da variação do fator $h_j(t)$ mostrado na Figura 5, validando também que se cumpre $\sum_{l=1}^r v_l(t) = 1$ e $v_l(t) \geq 0$, herdando a propriedade da soma convexa do fator $h_j(t)$.

Figura 7 – Variação temporal de $v_l(t)$ correspondente ao sistema não linear descrito em (17) e (75) com $a = 3$ e $b = -1$, controlado pela lei de chaveamento (14) - (16), considerando uma NQLF (9) e as condições de factibilidade.



Fonte: Elaboração do autor.

4 CONTROLE CHAVEADO $\mathcal{H}_\infty$ EM SISTEMAS NÃO LINEARES FUZZY T-S COM RETARDO TEMPORAL

No capítulo anterior, foi realizado o projeto de um controlador chaveado para sistemas não lineares com incertezas paramétricas, descritos por modelos fuzzy T-S, utilizando uma NQLF com retardo temporal. Esse controlador propõe as LMIs (30) correspondentes ao *Teorema 2* para garantir que o sistema seja globalmente assintoticamente estável. Essa metodologia tem sua principal vantagem na ampliação da região de factibilidade em relação a outra metodologia mais conservadora que também implementa um controle chaveado, conforme demonstrado no *Teorema 3*, tornando-se interessante em casos onde é necessário um amplo intervalo de operação, apesar das incertezas paramétricas que o sistema possa naturalmente ter. É importante ressaltar que, para o projeto dessa metodologia, não foram consideradas perturbações externas ($w(t) = 0$), portanto, diante de alguma entrada exógena definida ($w(t) \neq 0$), o sistema terá uma influência inesperada no comportamento de sua saída. Agora, dado que essa metodologia tem a vantagem de possuir uma ampla região de factibilidade em relação a outras metodologias conservadoras, considera-se necessário otimizar essa metodologia por meio do projeto de um novo controlador que permita atuar diante desses eventos complementares, de modo a minimizar a influência de alguma entrada exógena definida no comportamento da saída e garantir que o sistema seja globalmente assintoticamente estável. Para alcançar esse objetivo, será utilizada uma metodologia complementar que se baseia em minimizar a norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema não linear, cujo procedimento será descrito neste capítulo como parte do projeto dessa nova metodologia mais robusta.

Para a análise da nova metodologia de controle robusto, são consideradas as equações correspondentes ao sistema não linear descrito por modelos fuzzy T-S em (5)-(7), onde $w(t) \neq 0$, e a lei de controle será definida por (14)-(16), de modo que o seguinte sistema equivalente é obtido:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A_z + B_z M_{\sigma h-v} P_v^{-1})x(t) + E_z w(t), \\ y(t) &= (C_z + D_z M_{\sigma h-v} P_v^{-1})x(t) + G_z w(t). \end{aligned} \quad (77)$$

Além disso, dado que essa nova metodologia de controle robusto busca reduzir o efeito da atenuação na saída do sistema correspondente a alguma entrada exógena, é considerado o seguinte critério de atenuação para $\mathcal{H}_\infty$, onde consideramos que a entrada exógena $w(t) \neq 0$, é um sinal de energia finita, neste caso, estabelecemos a relação:

$$\sup_{\|w(t)\|_2 \neq 0} \frac{\|y(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} \leq \gamma, \quad (78)$$

ou seja, garantindo-se que $\|y(t)\|_2$ seja inferior a $\|w(t)\|_2$ multiplicado por um escalar γ , sendo $\gamma \ll 1$, asseguramos que grandes valores de $w(t)$ provocarão pequenos impactos em $y(t)$, onde o valor mínimo possível deve ser tomado de forma que satisfaça a seguinte

condição: $\gamma > 0$. Além disso, de acordo com (Boyd *et al.*, 1994), a condição (78) é satisfeita, se existe uma função de Lyapunov candidata $V(x)$, de modo que esta função de Lyapunov atenda à seguinte restrição:

$$\dot{V}(x(t)) + \gamma^{-1}y^T(t)y(t) - \gamma w^T(t)w(t) \leq 0. \quad (79)$$

Teorema 4. (Marquez *et al.*, 2016). O modelo T-S (77) sob a lei de controle (18) atende ao critério de atenuação $\mathcal{H}_\infty$ (78) se existir um escalar $\varphi > 0$ e matrizes $P_i = P_i^T > 0$, M_{jkl} , H_{jkl} , R_{jkl} , $i, j, k, l \in 1, 2, \dots, r$, tais que as restrições LMI (19) são satisfeitas com:

$$\Upsilon_{ij}^{kl} = \begin{bmatrix} A_i H_{jkl} + B_i F_{jkl} + (*) - \frac{1}{\varphi} (P_j - P_k) & (*) & (*) & (*) \\ P_l - H_{jkl} + R_{jkl}^T A_i^T & -R_{jkl} - R_{jkl}^T & 0 & 0 \\ E_i^T & 0 & -\gamma I & (*) \\ C_i P_l + D_i F_{jkl} & 0 & G_i & -\gamma I \end{bmatrix}. \quad (80)$$

Demonstração. A condição (79) garantindo (78) pode ser escrita da seguinte forma, uma vez que a proposta NQLF (9) e o modelo T-S (77) sob a lei de controle não-PDC (18) são levados em consideração:

$$\begin{aligned} \dot{V} + \gamma^{-1}y^T y - \gamma w^T w &= x^T P_v^{-1} \left((A_h + B_h F_{hh-v} P_v^{-1}) x + E_h w \right) + (*) \\ &\quad + x^T \dot{P}_v^{-1} x - \gamma w^T w + \gamma^{-1} \left((C_h + D_h F_{hh-v} P_v^{-1}) x \right. \\ &\quad \left. + G_h w \right)^T \left((C_h + D_h F_{hh-v} P_v^{-1}) x + G_h w \right) \\ &= \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}^T \left\{ \Phi + \gamma^{-1} \begin{bmatrix} (C_h + D_h F_{hh-v} P_v^{-1})^T \\ G_h^T \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. \begin{bmatrix} C_h + D_h F_{hh-v} P_v^{-1} & G_h \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \leq 0 \end{aligned} \quad (81)$$

$$\text{com } \Phi = \begin{bmatrix} P_v^{-1} (A_h + B_h F_{hh-v} P_v^{-1}) + (*) + \dot{P}_v^{-1} & (*) \\ E_h^T P_v^{-1} & -\gamma I \end{bmatrix}.$$

Aplicando o complemento de Schur à matriz de blocos no meio da última expressão, pode-se ver que a desigualdade nela está garantida se:

$$\begin{bmatrix} P_v^{-1} (A_h + B_h F_{hh-v} P_v^{-1}) + (*) + \dot{P}_v^{-1} & (*) & (*) \\ E_h^T P_v^{-1} & -\gamma I & (*) \\ C_h + D_h F_{hh-v} P_v^{-1} & G_h & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (82)$$

que, após pré- e pós-multiplicação por (P_v, I, I) em bloco e levando em consideração que $P_v \dot{P}_v^{-1} P_v = -\dot{P}_v$, é equivalente a:

$$\begin{bmatrix} A_h P_v + B_h F_{hh-v} + (*) - \dot{P}_v & (*) & (*) \\ E_h^T & -\gamma I & (*) \\ C_h P_v + D_h F_{hh-v} & G_h & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (83)$$

Como antes, a Propriedade 2 pode ser aplicada à entrada de bloco (1,1) na expressão acima com $A = A_h^T, L = H_{hh-v}^T, R = R_{hh-v}, Q = B_h F_{hh-v} + (*) - \dot{P}_v$, e $\dot{P}_v = \frac{1}{\alpha} (P_h - P_{h-})$, para obter a seguinte desigualdade suficiente:

$$\begin{bmatrix} (A_h H_{hh-v} + B_h F_{hh-v} + (*)) & & & & \\ & -\frac{1}{\varphi} (P_h - P_{h-}) & & & \\ & P_v - H_{hh-v} + R_{hh-v}^T A_h^T & -R_{hh-v} - R_{hh-v}^T & & \\ & E_h^T & 0 & -\gamma I & \\ C_h P_v + D_h F_{hh-v} & & 0 & G_h & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (84)$$

As condições (19) com Υ_{ij}^{kl} definidas como em (80) garantem (84), o que conclui a prova. □

4.1 PROJETO DE UM CONTROLADOR CHAVEADO $\mathcal{H}_\infty$ EM SISTEMAS NÃO LINEARES FUZZY T-S UTILIZANDO NQLF COM RETARDO TEMPORAL

Nesta seção, é apresentada uma condição baseada em LMIs que garante a estabilidade assintótica de um sistema não linear com incertezas paramétricas e perturbações externas, o qual é descrito por modelos fuzzy T-S definidos em (77), utilizando uma NQLF (9) e um controlador chaveado definido em (14)-(16).

Teorema 5. *O modelo T-S (77) sob a lei de controle (14)-(16), atende ao critério de atenuação $\mathcal{H}_\infty$ (78) se existir um escalar $\varphi > 0$ tais que seguintes LMIs forem factíveis:*

min γ^2
sujeito a

$$\begin{bmatrix} B_i M_{jkl} + M_{jkl}^T B_i^T - \frac{1}{\varphi} (P_j - P_k) - Q_{jkl} - Z_{ikl} & (*) & (*) \\ & E_i^T & -\gamma I & (*) \\ & C_i P_l + D_i M_{jkl} & G_i & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (85)$$

$$A_i P_l + P_l A_i^T + Q_{ikl} + Z_{ikl} \leq 0.$$

onde $i, j, k, l \in \mathbb{K}_r$, sendo r o número de vértices do conjunto politopo, $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica definida positiva, $Z_{ikl}, Q_{ikl} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são matrizes simétricas e $M_{jkl} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Demonstração. Considerando uma NQLF (9), calculamos sua derivada e a substituímos

em (79), utilizando o sistema equivalente (77), resultando em:

$$\begin{aligned} & x^T(t)P_v^{-1}\dot{x}(t) + (\dot{x}(t))^T P_v^{-1}x(t) + x^T(t) \left(\frac{dP_v^{-1}}{dt} \right) x(t) \\ & + \gamma^{-1} \left[(C_z + D_z M_{\sigma h-v} P_v^{-1})x(t) + G_z w(t) \right]^T \left[(C_z + D_z M_{\sigma h-v} P_v^{-1})x(t) + G_z w(t) \right] \\ & - \gamma w^T(t)w(t) \leq 0. \end{aligned} \quad (86)$$

Sobre essa desigualdade, substituímos (77), para obter:

$$\begin{aligned} & x^T(t)P_v^{-1} \left[(A_z + B_z M_{\sigma h-v} P_v^{-1})x(t) + E_z w(t) \right] + (*) + x^T(t) \left(\frac{dP_v^{-1}}{dt} \right) x(t) \\ & + \gamma^{-1} \left[(C_z + D_z M_{\sigma h-v} P_v^{-1})x(t) + G_z w(t) \right]^T \left[(C_z + D_z M_{\sigma h-v} P_v^{-1})x(t) + G_z w(t) \right] \\ & - \gamma w^T(t)w(t) \leq 0. \end{aligned} \quad (87)$$

Considerando a extensão correspondente à lei de controle em (36) e a matriz de relaxação definida em (37), analisamos as desigualdades definidas em (38) e (87), de modo a reduzir alguns termos em (87), resultando em duas novas condições suficientes para a validade da condição dada:

$$\begin{aligned} & x^T(t)P_v^{-1} \left[B_z M_{\sigma h-v} P_v^{-1}x(t) + E_z w(t) \right] + (*) + x^T(t) \left(\frac{dP_v^{-1}}{dt} \right) x(t) \\ & + \gamma^{-1} \left[(C_z + D_z M_{\sigma h-v} P_v^{-1})x(t) + G_z w(t) \right]^T \left[(C_z + D_z M_{\sigma h-v} P_v^{-1})x(t) + G_z w(t) \right] \\ & - \gamma w^T(t)w(t) - x^T(t)P_v^{-1}\bar{Q}_{\sigma h-v}P_v^{-1}x(t) - x^T(t)P_v^{-1}\bar{Z}_{\alpha h-v}P_v^{-1}x(t) \leq 0, \end{aligned} \quad (88)$$

$$\begin{aligned} & x^T(t)P_v^{-1}A_zx(t) + x^T(t)A_z^T P_v^{-1}x(t) + x^T(t)P_v^{-1}\bar{Q}_{\alpha h-v}P_v^{-1}x(t) \\ & + x^T(t)P_v^{-1}\bar{Z}_{\alpha h-v}P_v^{-1}x(t) \leq 0. \end{aligned} \quad (89)$$

Dado que existem vários termos comuns em (88), é conveniente realizar uma mudança de variável Φ para facilitar o cálculo, cujo valor está definido por:

$$\Phi = \begin{bmatrix} P_v^{-1}B_z M_{\sigma h-v} P_v^{-1} + (*) + \left(\frac{dP_v^{-1}}{dt} \right) - P_v^{-1}\bar{Q}_{\sigma h-v}P_v^{-1} - P_v^{-1}\bar{Z}_{\alpha h-v}P_v^{-1} & (*) \\ E_z^T P_v^{-1} & -\gamma I \end{bmatrix}, \quad (90)$$

o que nos permite fatorar os termos $x(t)$, $x^T(t)$, $w(t)$ e $w^T(t)$, de modo que, substituindo na desigualdade (88), obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \left\{ \Phi + \gamma^{-1} \begin{bmatrix} (C_z + D_z M_{\sigma h-v} P_v^{-1})^T \\ G_z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_z + D_z M_{\sigma h-v} P_v^{-1} & G_z \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \leq 0, \quad (91)$$

$$\begin{aligned} & x^T(t)P_v^{-1}A_zx(t) + x^T(t)A_z^T P_v^{-1}x(t) + x^T(t)P_v^{-1}\bar{Q}_{\alpha h-v}P_v^{-1}x(t) \\ & + x^T(t)P_v^{-1}\bar{Z}_{\alpha h-v}P_v^{-1}x(t) \leq 0. \end{aligned} \quad (92)$$

A última forma adotada para o bloco matricial central da desigualdade (91) nos permite representá-la convenientemente como um novo bloco matricial através do Complemento

de Schur, de modo que a desigualdade (91) agora seja uma LMI como mostrada a seguir, na qual já é possível excluir os termos $x(t)$, $x^T(t)$, $w(t)$ e $w^T(t)$ de (91) e (92), dado que também foi considerado que $x(t) \neq 0$ e $w(t) \neq 0$, resultando em:

$$\begin{bmatrix} P_v^{-1}B_zM_{\sigma h-v}P_v^{-1} + (*) + \left(\frac{dP_v^{-1}}{dt}\right) - P_v^{-1}\bar{Q}_{\sigma h-v}P_v^{-1} - P_v^{-1}\bar{Z}_{\alpha h-v}P_v^{-1} & (*) & (*) \\ E_z^T P_v^{-1} & -\gamma I & (*) \\ C_z + D_zM_{\sigma h-v}P_v^{-1} & G_z & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (93)$$

$$P_v^{-1}A_z + A_z^T P_v^{-1} + P_v^{-1}\bar{Q}_{\alpha h-v}P_v^{-1} + P_v^{-1}\bar{Z}_{\alpha h-v}P_v^{-1} \leq 0. \quad (94)$$

Agora, considerando uma matriz bloco diagonal P_v^* definida por:

$$P_v^* = \begin{bmatrix} P_v & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad (95)$$

multiplicamos esta matriz à direita e à esquerda na desigualdade (93), enquanto na desigualdade (94) também a multiplicamos à direita e à esquerda por P_v , obtendo a seguinte redução:

$$\begin{bmatrix} B_zM_{\sigma h-v} + (*) - \dot{P}_v - \bar{Q}_{\sigma h-v} - \bar{Z}_{\alpha h-v} & (*) & (*) \\ E_z^T & -\gamma I & (*) \\ C_zP_v + D_zM_{\sigma h-v} & G_z & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (96)$$

$$A_zP_v + P_vA_z^T + \bar{Q}_{\alpha h-v} + \bar{Z}_{\alpha h-v} \leq 0. \quad (97)$$

Sobre esses resultados, uma forma de generalizar as LMIs obtidas é considerando os valores de definição mostrados em (5), (8), (9), (11), (14), (15), (36) e (37), resultando em:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \alpha_i h_k^- v_l B_i M_{jkl} + (*) - \frac{1}{\varphi} \left(\sum_{j=1}^r h_j P_j - \sum_{k=1}^r h_k^- P_k \right) & (*) & (*) \\ - \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r h_k^- v_l Q_{jkl} - \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \alpha_i h_k^- v_l Z_{ikl} & (*) & (*) \\ \sum_{i=1}^r \alpha_i E_i^T & -\gamma I & (*) \\ \sum_{i=1}^r \sum_{l=1}^r \alpha_i v_l C_i P_l + \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \alpha_i h_k^- v_l D_i M_{jkl} & \sum_{i=1}^r \alpha_i G_i & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (98)$$

$$\sum_{i=1}^r \sum_{l=1}^r \alpha_i v_l A_i P_l + \sum_{i=1}^r \sum_{l=1}^r \alpha_i v_l P_l A_i^T + \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \alpha_i h_k^- v_l Q_{ikl} + \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \alpha_i h_k^- v_l Z_{ikl} \leq 0, \quad (99)$$

Finalmente, adicionamos convenientemente os fatores $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$, $\sum_{k=1}^r h_j = 1$, $\sum_{k=1}^r h_k^- = 1$ e $\sum_{l=1}^r v_l = 1$ em (98) e (99), para eliminar os fatores comuns positivos, uma vez que $\alpha_i \geq 0$, $h_j \geq 0$, $h_k^- \geq 0$ e $v_l \geq 0$, comprovando o *Teorema 5*:

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma^2 \\ \text{sujeito a} \quad & \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} B_i M_{jkl} + M_{jkl}^T B_i^T - \frac{1}{\varphi} (P_j - P_k) - Q_{jkl} - Z_{ikl} & (*) & (*) \\ E_i^T & -\gamma I & (*) \\ C_i P_l + D_i M_{jkl} & G_i & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (100)$$

$$A_i P_l + P_l A_i^T + Q_{ikl} + Z_{ikl} \leq 0. \quad (101)$$

□

4.2 PROJETO DE UM CONTROLADOR CHAVEADO $\mathcal{H}_\infty$ EM SISTEMAS NÃO LINEARES FUZZY T-S UTILIZANDO QLF

Assim como foi desenvolvido na Seção 3.2 o caso de um controlador mais conservador baseado em (Souza *et al.*, 2013), onde foi considerada a existência de uma matriz simétrica definida positiva constante $P_v = P$, cuja lei de controle foi definida por (53) e (54), nesta seção também será projetado um caso mais conservador com as condições apresentadas em (77), (78) e (79) para um sistema não linear com incertezas paramétricas e perturbações externas. O objetivo é analisar e comparar os resultados obtidos na seção anterior.

Para o projeto dessa metodologia mais conservadora, também é necessário garantir a estabilidade assintótica de um sistema não linear com incertezas paramétricas e perturbações externas, descrito por modelos fuzzy T-S (77). No entanto, ao contrário da seção anterior, nesta seção será considerada uma QLF, o que implica que a matriz P_v é constante, ou seja, $P_v = P$, e a lei de controle chaveado será baseada em (Souza *et al.*, 2013).

Tudo isso se torna necessário para validar que o método de controle apresentado em (85) possui vantagens relacionadas à sua região de factibilidade, conforme mencionado em (Marquez *et al.*, 2016), em relação a outros métodos de controle mais conservadores.

Teorema 6. *O modelo T-S (5)-(7) sob a lei de controle (53) e (54), atende ao critério de atenuação $\mathcal{H}_\infty$ (78), se seguintes LMIs forem factíveis:*

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma^2 \\ \text{sujeito a} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} B_i M_j + M_j^T B_i^T - Q_j - Z_i & (*) & (*) \\ E_i^T & -\gamma I & (*) \\ C_i P + D_i M_j & G_i & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (102)$$

$$A_i P + P A_i^T + Q_i + Z_i \leq 0.$$

onde $i, j \in \mathbb{K}_r$, sendo r o número de vértices do conjunto politopo, $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica definida positiva, $Z_i, Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são matrizes simétricas, e $M_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Demonstração. Considerando uma QLF definida por $V(x) = x^T P^{-1} x(t)$ (Boyd *et al.*, 1994), sua derivada é calculada e substituída em (79), resultando em:

$$\begin{aligned} & x^T(t) P^{-1} \dot{x}(t) + (\dot{x}(t))^T P^{-1} x(t) \\ & + \gamma^{-1} \left[(C_z + D_z M_\sigma P^{-1}) x(t) + G_z w(t) \right]^{-1} \left[(C_z + D_z M_\sigma P^{-1}) x(t) + G_z w(t) \right] \\ & - \gamma w^T(t) w(t) \leq 0. \end{aligned} \quad (103)$$

Sobre esta desigualdade, substituímos (77) e (79), resultando em:

$$\begin{aligned} & x^T(t) P^{-1} \left[(A_z + B_z M_\sigma P^{-1}) x(t) + E_z w(t) \right] + (*) \\ & + \gamma^{-1} \left[(C_z + D_z M_\sigma P^{-1}) x(t) + G_z w(t) \right]^{-1} \left[(C_z + D_z M_\sigma P^{-1}) x(t) + G_z w(t) \right] \\ & - \gamma w^T(t) w(t) \leq 0. \end{aligned} \quad (104)$$

Considerando a extensão correspondente à lei de controle em (36) e a matriz de relaxamento definida em (37), analisamos as desigualdades definidas em (38) e (104), resultando em duas novas condições suficientes para a validade da condição:

$$\begin{aligned} & x^T(t) P^{-1} \left[B_z M_\sigma P^{-1} x(t) + E_z w(t) \right] + (*) \\ & + \gamma^{-1} \left[(C_z + D_z M_\sigma P^{-1}) x(t) + G_z w(t) \right]^{-1} \left[(C_z + D_z M_\sigma P^{-1}) x(t) + G_z w(t) \right] \\ & - \gamma w^T(t) w(t) - x^T(t) P^{-1} \bar{Q}_\sigma P^{-1} x(t) - x^T(t) P^{-1} \bar{Z}_\alpha P^{-1} x(t) \leq 0, \end{aligned} \quad (105)$$

$$\begin{aligned} & x^T(t) P^{-1} A_z x(t) + x^T(t) A_z^T P^{-1} x(t) + x^T(t) P^{-1} \bar{Q}_\alpha P^{-1} x(t) \\ & + x^T(t) P^{-1} \bar{Z}_\alpha P^{-1} x(t) \leq 0. \end{aligned} \quad (106)$$

Dado que existem vários termos comuns em (105), é conveniente fazer uma mudança de variável Φ para facilitar o cálculo, cujo valor é definido por:

$$\Phi = \begin{bmatrix} P^{-1} B_z M_\sigma P^{-1} + (*) - P^{-1} \bar{Q}_\sigma P^{-1} - P^{-1} \bar{Z}_\alpha P^{-1} & (*) \\ E_z^T P^{-1} & -\gamma I \end{bmatrix}, \quad (107)$$

o que nos permite fatorar os termos $x(t)$, $x^T(t)$, $w(t)$ e $w^T(t)$. Substituindo na desigualdade (105), obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \left\{ \Phi + \gamma^{-1} \begin{bmatrix} (C_z + D_z M_\sigma P^{-1})^T \\ G_z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_z + D_z M_\sigma P^{-1} & G_z \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \leq 0, \quad (108)$$

$$\begin{aligned} & x^T(t) P^{-1} A_z x(t) + x^T(t) A_z^T P^{-1} x(t) + x^T(t) P^{-1} \bar{Q}_\alpha P^{-1} x(t) \\ & + x^T(t) P^{-1} \bar{Z}_\alpha P^{-1} x(t) \leq 0. \end{aligned} \quad (109)$$

Esta última forma que o bloco matricial central da desigualdade (108) adotou nos permite representá-la de forma conveniente como um novo bloco matricial através do Complemento de Schur, de modo que a desigualdade (108) agora se torna uma LMI, conforme mostrado

abaixo. Agora é possível excluir os termos $x(t)$, $x^T(t)$, $w(t)$ e $w^T(t)$ de (108) e (109), pois também consideramos que $x(t) \neq 0$ e $w(t) \neq 0$, resultando em:

$$\begin{bmatrix} P^{-1}B_zM_\sigma P^{-1} + (*) - P^{-1}\bar{Q}_\sigma P^{-1} - P^{-1}\bar{Z}_\alpha P^{-1} & (*) & (*) \\ E_z^T P^{-1} & -\gamma I & (*) \\ C_z + D_zM_\sigma P^{-1} & G_z & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (110)$$

$$P^{-1}A_z + A_z^T P^{-1} + P^{-1}\bar{Q}_\alpha P^{-1} + P^{-1}\bar{Z}_\alpha P^{-1} \leq 0. \quad (111)$$

Agora, considerando uma matriz bloco diagonal P^* definida por:

$$P^* = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad (112)$$

esta matriz diagonal P^* é multiplicada à esquerda e à direita na LMI (110), enquanto na LMI (111) é multiplicada à direita e à esquerda por P_v , resultando na seguinte redução:

$$\begin{bmatrix} B_zM_\sigma + (*) - \bar{Q}_\sigma - \bar{Z}_\alpha & (*) & (*) \\ E_z^T & -\gamma I & (*) \\ C_zP + D_zM_\sigma & G_z & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (113)$$

$$A_zP + PA_z^T + \bar{Q}_\alpha + \bar{Z}_\alpha \leq 0. \quad (114)$$

Sobre esses resultados, uma forma de generalizar as desigualdades obtidas é considerar os valores de definição mostrados em (8), (53) e (54), resultando em:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^r \alpha_i B_i M_j + (*) - Q_j - \sum_{i=1}^r \alpha_i Z_i & (*) & (*) \\ \sum_{i=1}^r \alpha_i E_i^T & -\gamma I & (*) \\ \sum_{i=1}^r \alpha_i C_i P + \sum_{i=1}^r \alpha_i D_i M_j & \sum_{i=1}^r \alpha_i G_i & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (115)$$

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i A_i P + \sum_{i=1}^r \alpha_i P A_i^T + \sum_{i=1}^r \alpha_i Q_i + \sum_{i=1}^r \alpha_i Z_i \leq 0. \quad (116)$$

Finalmente, é conveniente adicionar os fatores $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$ em (115) e (116), para eliminar os fatores comuns positivos, uma vez que $\alpha_i \geq 0$, o que prova o *Teorema 6*:

min γ^2
sujeito a

$$\begin{bmatrix} B_i M_j + M_j^T B_i^T - Q_j - Z_i & (*) & (*) \\ E_i^T & -\gamma I & (*) \\ C_i P + D_i M_j & G_i & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (117)$$

$$A_i P + P A_i^T + Q_i + Z_i \leq 0. \quad (118)$$

□

4.3 EXEMPLOS

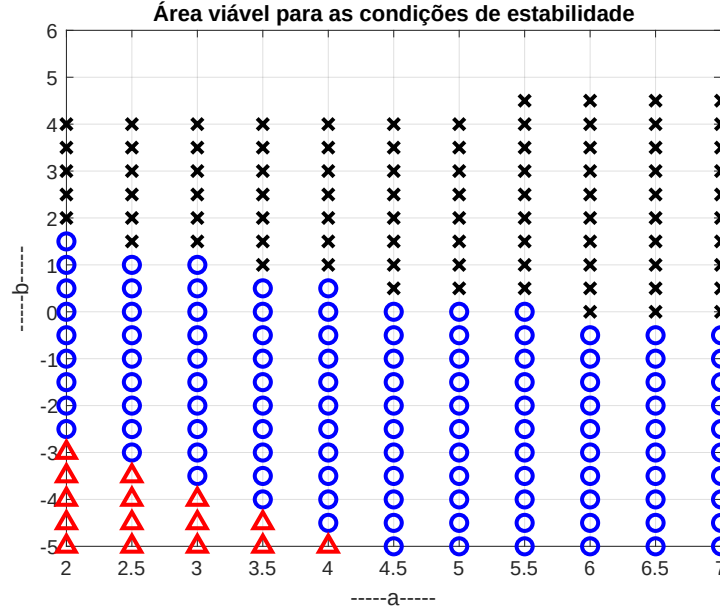
Com o objetivo de validar as condições LMI definidas no *Teorema 4*, *Teorema 5* e no *Teorema 6*, nesta seção apresentamos dois exemplos numéricos. No primeiro exemplo numérico, será possível visualizar graficamente as vantagens de se considerar um controlador chaveado robusto em sistemas não lineares usando uma NQLF com retardo temporal em comparação com um controlador chaveado robusto em sistemas não lineares usando uma QLF. No segundo exemplo numérico, será visualizado o comportamento temporal que o mesmo sistema não linear adota ao usar um controlador chaveado robusto com NQLF com retardo temporal.

Exemplo 3. *Região de factibilidade correspondente a um sistema não linear com incertezas paramétricas e perturbações externas sob um controle chaveado robusto utilizando uma NQLF com retardo temporal, em comparação com um sistema não linear com incertezas paramétricas e perturbações externas sob um controle chaveado utilizando uma QLF.*

Tomando novamente como referência o modelo fuzzy T-S utilizado no Exemplo 1, equação (31), em (Marquez *et al.*, 2016) de um sistema não linear com incertezas paramétricas e perturbações externas representado pelo modelo fuzzy T-S (77), onde se considera um retardo temporal constante ($\varphi = 0,1s$), um parâmetro de valor real $\eta = 0$ (sendo que η foi definido no modelo fuzzy T-S utilizado no Exemplo 1, equação (31), em (Marquez *et al.*, 2016), e uma variação correspondente às incertezas paramétricas definidas por $a \in [2, 5]$ e $b \in [-5, 4]$.

Dessa forma, determina-se a região de factibilidade correspondente ao *Teorema 4* ($\triangle, \bigcirc, \times$), *Teorema 5* ($\triangle, \bigcirc$) e *Teorema 6* ($\triangle$), mostrados na *Figura 8*:

Figura 8 – Região de factibilidade correspondente ao Teorema 6 ($\triangle$), Teorema 5 ($\triangle$, $\circ$) e Teorema 4 ($\triangle$, $\circ$, $\times$).



Fonte: Elaboração do autor.

Portanto, pode-se concluir que a metodologia de controle chaveado robusto $\mathcal{H}_\infty$ utilizando uma NQLF com retardo temporal, conforme definido no Teorema 5, é mais eficiente do que a metodologia de controle chaveado robusto $\mathcal{H}_\infty$ utilizando uma QLF, conforme definido no Teorema 6, para sistemas não lineares.

Exemplo 4. Comportamento temporal das variáveis de estado, sinal de controle, sinal de saída, perturbação externa e sinais de chaveamento correspondentes a um sistema não linear com incertezas paramétricas e perturbações externas sob um controle chaveado robusto $\mathcal{H}_\infty$ utilizando uma NQLF com atraso temporal.

Considerando o modelo fuzzy T-S utilizado no Exemplo 1, equação (31), em (Marquez *et al.*, 2016), correspondentes a um sistema não linear com incertezas paramétricas e perturbações externas representado pelo modelo fuzzy T-S (77), onde é considerado um atraso temporal constante ($\varphi = 0.1s$), condições iniciais $x_1(0) = 0.7, x_2(0) = -0.5$, uma perturbação externa definida por $\eta = 0$, e cujas incertezas paramétricas estão definidas por $a = 3$ e $b = -1$, que foram selecionadas convenientemente a partir dos resultados obtidos na Figura 8 com a finalidade de garantir a estabilidade do sistema.

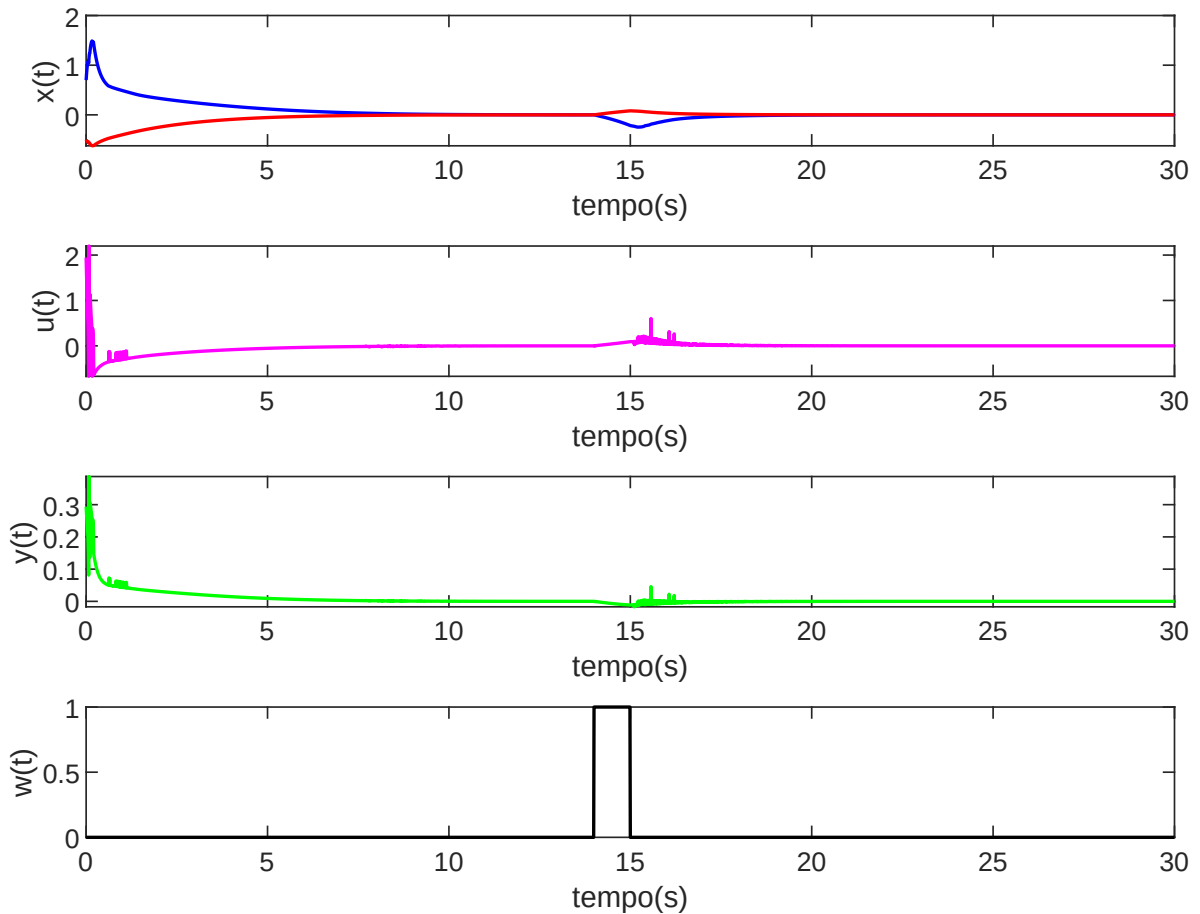
Foi realizada a simulação do sistema não linear com incertezas paramétricas e perturbações externas, com base nas LMIs apresentadas no Teorema 5, cujos resultados correspondentes às matrizes P_i são mostrados a seguir:

$$\begin{aligned} [P_1 \mid P_2] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 2,7045 & -0,3880 & 1,4641 & -0,2746 \\ -0,3880 & 0,0924 & -0,2746 & 0,0927 \end{array} \right], \\ [P_3 \mid P_4] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 1,4803 & -0,2752 & 2,3067 & -0,3385 \\ -0,2752 & 0,0926 & -0,3385 & 0,0912 \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (119)$$

Esses valores calculados nos permitem representar o sistema não linear com incertezas paramétricas e perturbações externas na ferramenta de simulação *Simulink*, obtendo o comportamento temporal do sistema controlado. As matrizes M_{jkl} e Q_{ikl} encontradas são apresentadas no Apêndice A.

A Figura 9 mostra o comportamento dinâmico de um sistema não linear descrito em (77), cuja lei de controle robusto chaveado $\mathcal{H}_\infty$ é baseada nas LMIs do *Teorema 5*, que garantem que o sistema seja globalmente assintoticamente estável para as condições iniciais consideradas neste exemplo, tanto para as variáveis de estado quanto para o sinal de controle.

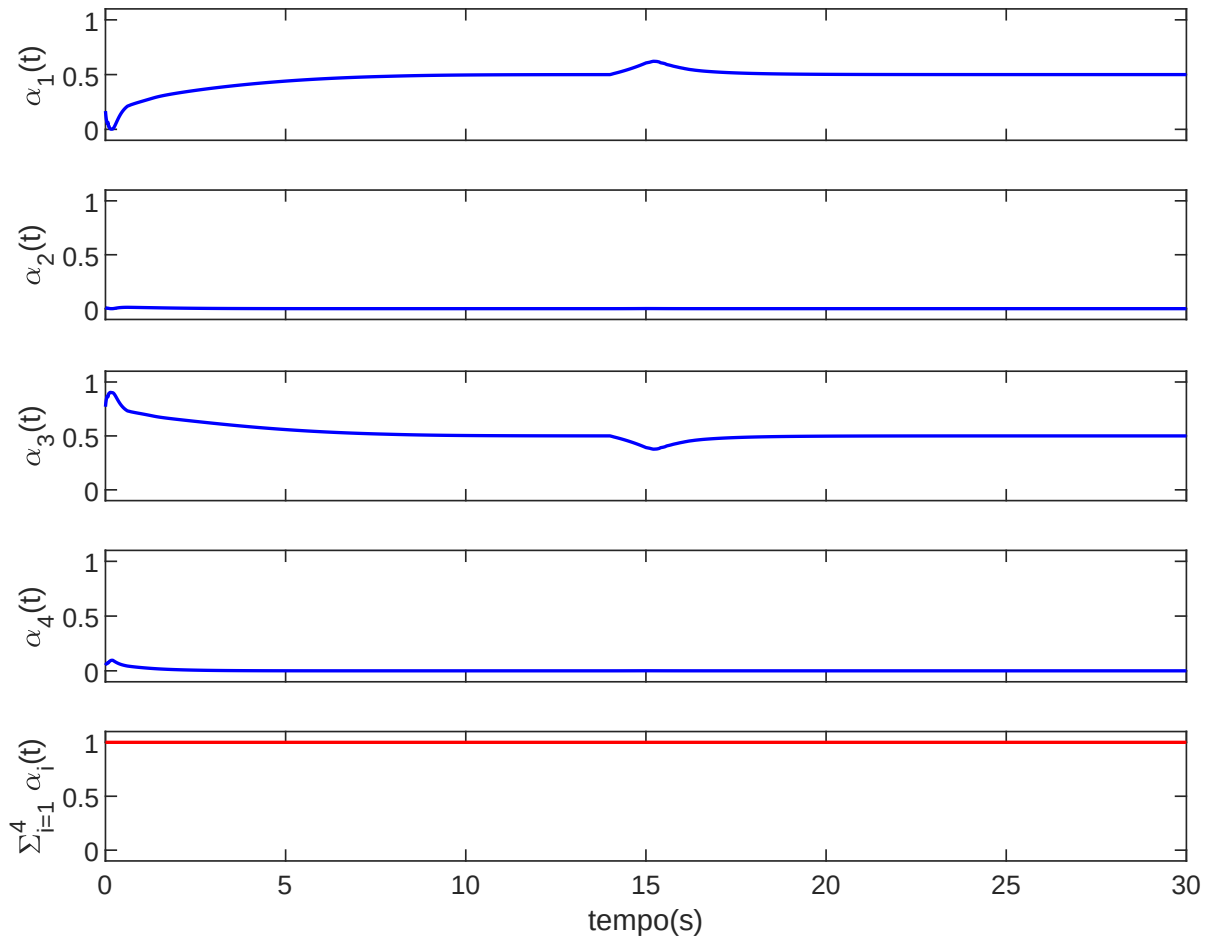
Figura 9 – Comportamento dinâmico do sistema não linear descrito em (77) com $a = 3$ e $b = -1$, controlado pela lei de chaveamento $\mathcal{H}_\infty$ (14)-(16), considerando uma NQLF com retardo temporal $\varphi = 0,1s$ e as condições de factibilidade.



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 10 mostra o comportamento dinâmico de $\alpha_i(t)$, que representa a variação temporal das funções de pertinência (MF). É verificado que em cada instante de tempo, a soma de todas as $\alpha_i(t)$ é igual a 1, conforme visualizado no gráfico na cor vermelha. É importante destacar que essas funções são resultado do controlador chaveado robusto $\mathcal{H}_\infty$ implementado, mas não são necessárias para o projeto do controlador, como demonstrado no *Teorema 5*, o que simplifica o projeto e reduz sua complexidade matemática.

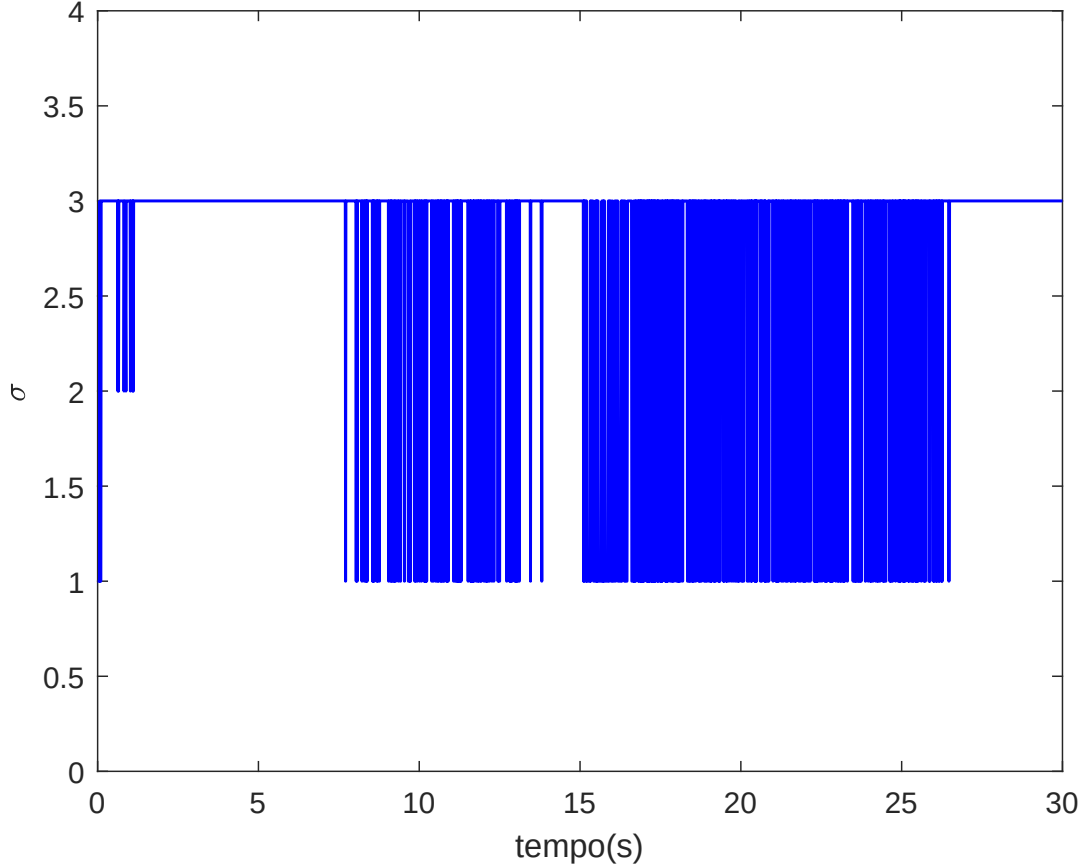
Figura 10 – A variação temporal de $\alpha_i(t)$ é mostrada para o sistema não linear descrito em (77) com $a = 3$ e $b = -1$, controlado pela lei de chaveamento $\mathcal{H}_\infty$ (14)-(16), considerando uma NQLF (9) e as condições de factibilidade.



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 11 mostra o comportamento dinâmico da regra de chaveamento σ , cuja lei de controle chaveado $\mathcal{H}_\infty$ é definida em (14)-(16). Os valores que a regra de chaveamento σ assume são limitados pelo número de vértices do conjunto politopo definido, de modo que o valor máximo que σ pode assumir é 4. Além disso, os valores que a regra de chaveamento σ assume determinam a seleção das matrizes $Q_{\sigma kl}$ e h_j .

Figura 11 – A variação temporal da regra de chaveamento σ correspondente ao sistema não linear descrito em (77) com $a = 3$ e $b = -1$, controlado pela lei de chaveamento $\mathcal{H}_\infty$ (14)-(16), considerando uma NQLF (9) e as condições de factibilidade.

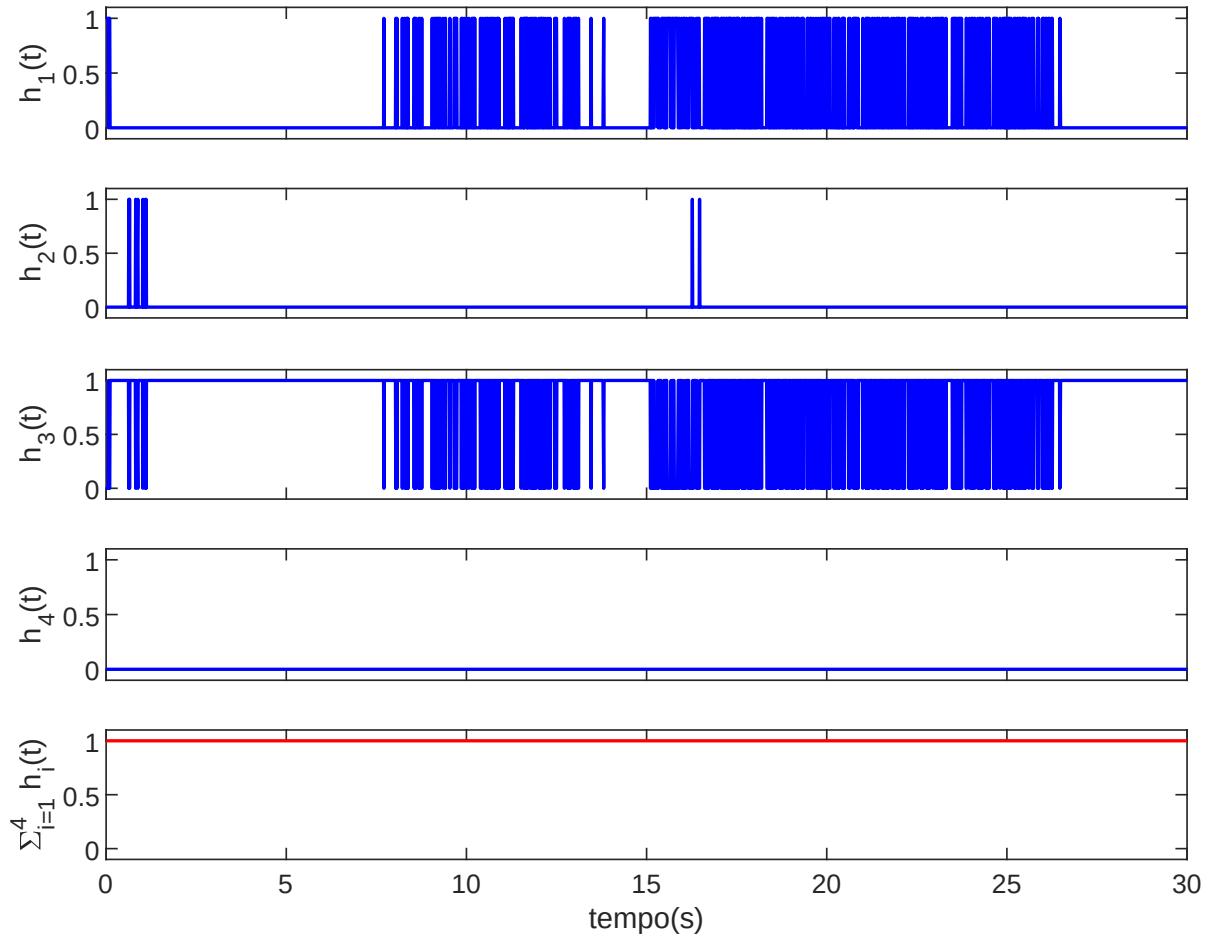


Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 12 mostra o comportamento dinâmico temporal que descreve o fator $h_j(t)$ em cada instante de tempo, o qual depende da mudança de estados que existe na regra de chaveamento σ , conforme mostrado na Figura 11.

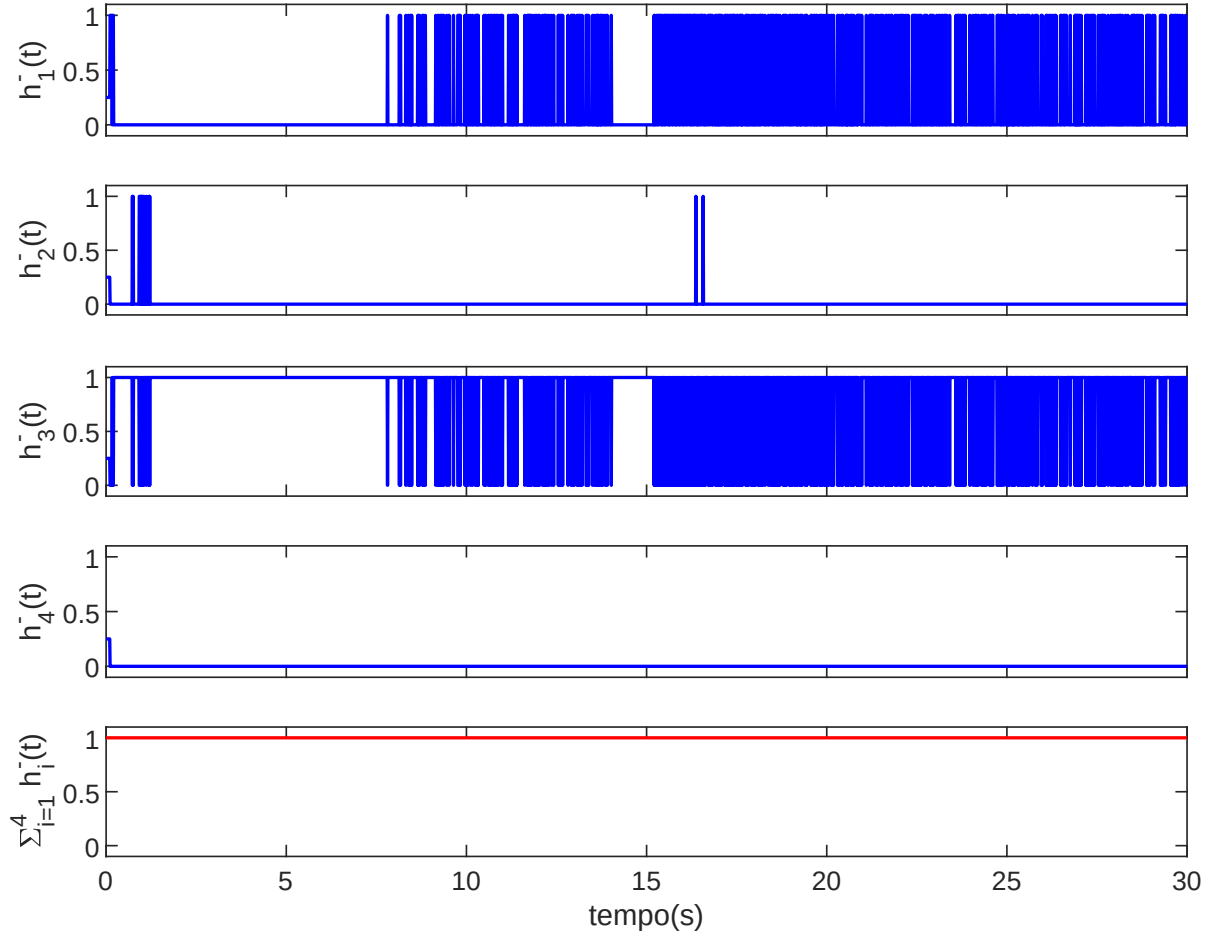
Em consequência do comportamento do fator $h_j(t)$, na Figura 12 é mostrado o comportamento dinâmico temporal que descreve o fator h_j^- , que é o mesmo fator $h_j(t)$, mas com um atraso temporal de $\varphi = 0,1$ s. Além disso, é importante mencionar que para o instante $t < 0$, matematicamente não está definido, por esse motivo, foi convenientemente considerado um valor inicial de 0.25 para h_1^-, h_2^-, h_3^- e h_4^- em $t = 0$, uma vez que se deve manter $\sum_{j=1}^r h_j^-(t) = 1$ e $h_j^-(t) \geq 0$.

Figura 12 – Variação temporal de $h_i(t)$ correspondente ao sistema não linear descrito em (77) com $a = 3$ e $b = -1$, controlado pela lei de chaveamento $\mathcal{H}_\infty$ (14)-(16), considerando uma NQLF (9) e as condições de factibilidade.



Fonte: Elaboração do autor.

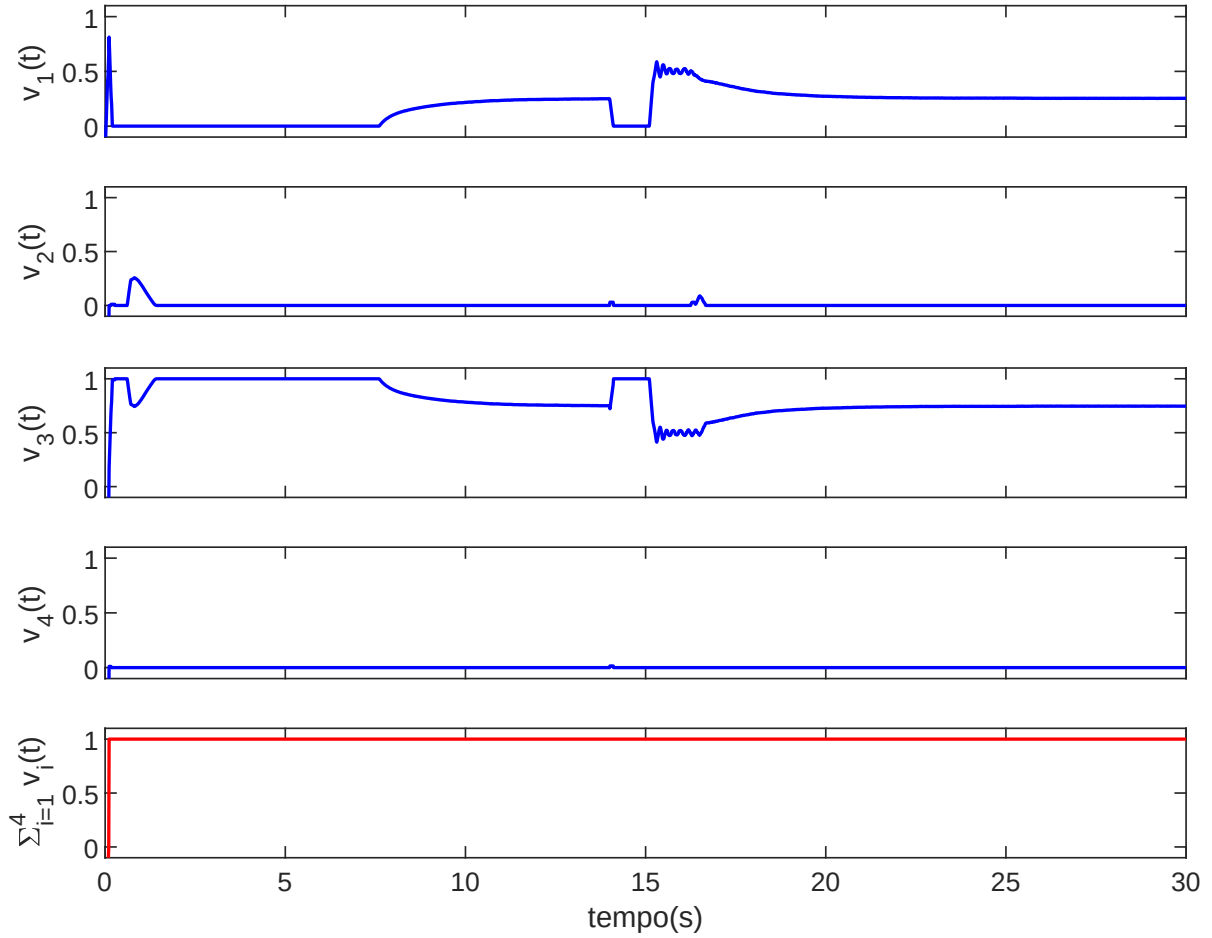
Figura 13 – Variação temporal de $h_i^-(t)$ correspondente ao sistema não linear descrito em (77) com $a = 3$ e $b = -1$, controlado pela lei de chaveamento $\mathcal{H}_\infty$ (14)-(16), considerando uma NQLF (9) e as condições de factibilidade.



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 14 mostra o comportamento dinâmico temporal que descreve a função $v_l(t) = \frac{1}{\varphi} \int_{t-\varphi}^t h_i(\tau) d\tau$ definida em (10), a qual também depende da variação do fator $h_j(t)$ mostrado na Figura 12, validando também que se cumpre $\sum_{l=1}^r v_l(t) = 1$ e $v_l(t) \geq 0$, ao herdar a propriedade da soma convexa do fator $h_j(t)$.

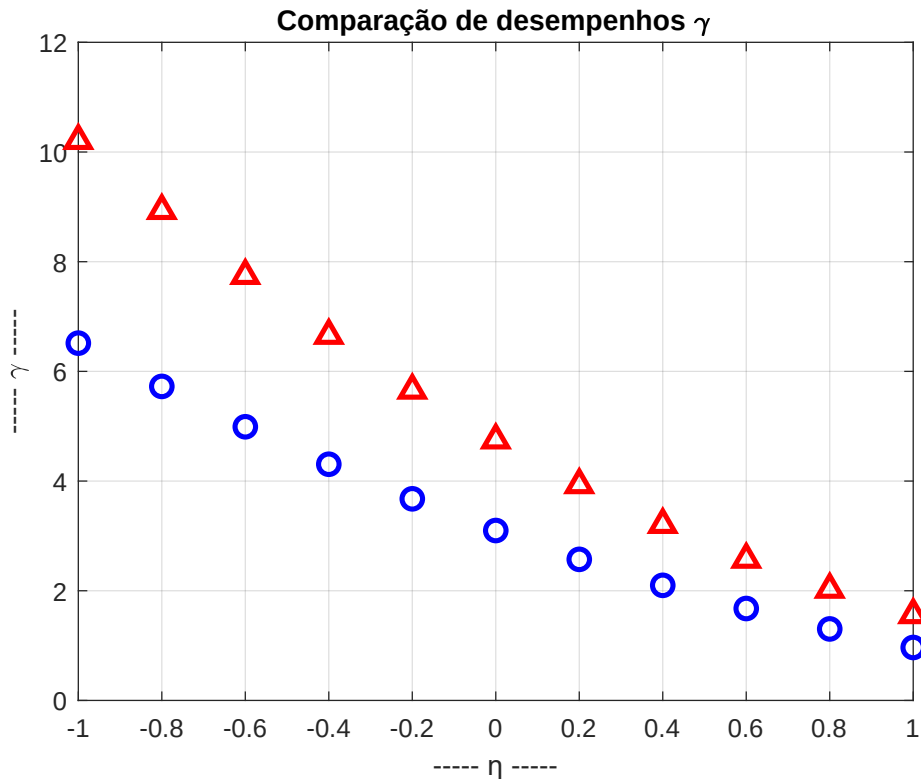
Figura 14 – Variação temporal de $v_i(t)$ correspondente ao sistema não linear descrito em (77) com $a = 3$ e $b = -1$, controlado pela lei de chaveamento $\mathcal{H}_\infty$ (14)-(16), considerando uma NQLF (9) e as condições de factibilidade.



Fonte: Elaboração do autor.

Finalmente, uma vez validados os comportamentos esperados em relação a cada parâmetro definido para chegar ao *Teorema 5*, é apresentada a Figura 15 com o objetivo de ilustrar o comportamento do valor de atenuação γ em relação ao parâmetro que define as perturbações externas η . O valor mínimo de γ é determinado para valores equiespaçados de $\eta \in [-1, 1]$, demonstrando assim a capacidade da nova metodologia proposta no *Teorema 5* em comparação ao *Teorema 6* para alcançar valores mínimos mais baixos para γ .

Figura 15 – Comparação dos índices de desempenho γ correspondentes ao *Teorema 5* ($\circ$) e ao *Teorema 6* ($\triangle$).



Fonte: Elaboração do autor.

5 CONTROLE CHAVEADO $\mathcal{H}_\infty$ SEM CHATTERING EM SISTEMAS NÃO LINEARES FUZZY T-S COM RETARDO TEMPORAL

Neste capítulo será apresentada uma metodologia que utiliza a teoria de controle chaveado $\mathcal{H}_\infty$ em sistemas TS fuzzy não lineares com retardo temporal descrita no Capítulo 4, como base para resolver seu problema de geração de chattering em sinais de controle. Este método foi proposto em (Buzetti, 2021), que visa evitar chattering nos sinais de controle, ou seja, evitar que os ganhos do sistema mudem imediatamente ou em frequências muito altas. Da mesma forma, esta metodologia permite manter a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio do sistema, para uma entrada exógena nula ($w(t) = 0$).

Para a análise desta metodologia são consideradas as equações correspondentes ao sistema não linear descrito pelos modelos fuzzy T-S em (77), e a lei de controle proposta em (Buzetti, 2021) que é definida pela seguinte lei de comutação :

$$\lambda = \begin{cases} \sigma, & \text{em } t = 0, \\ \sigma, & \text{se } x(t)^T P_v^{-1} \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s h_k^-(t) v_l(t) Q_{\sigma kl} P_v^{-1} x(t) \\ & - x(t)^T P_v^{-1} \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s h_k^-(t) v_l(t) Q_{\lambda kl} P_v^{-1} x(t) \\ & + 2\psi x(t)^T P_v^{-1} x(t) \leq 0 \text{ e } t > 0, \\ \text{não muda,} & \text{se } x(t)^T P_v^{-1} \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s h_k^-(t) v_l(t) Q_{\sigma kl} P_v^{-1} x(t) \\ & - x(t)^T P_v^{-1} \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s h_k^-(t) v_l(t) Q_{\lambda kl} P_v^{-1} x(t) \\ & + 2\psi x(t)^T P_v^{-1} x(t) > 0 \text{ e } t > 0. \end{cases} \quad (120)$$

$$u(t) = u_\lambda(t) = M_{\lambda h-v} P_v^{-1} x(t)$$

onde o escalar $\psi > 0$ representa um parâmetro de projeto, sendo empregado para definir o erro máximo que o sistema deve suportar até a transição de $\lambda(t)$. Valores mais elevados de ψ resultarão em uma menor necessidade de comutação do sistema, contudo, isso tornará o projeto de controle mais conservador.

Se $x(t)^T P_v^{-1} Q_\lambda P_v^{-1} x(t) < x(t)^T P_v^{-1} Q_\sigma P_v^{-1} x(t) + 2\psi x(t)^T P_v^{-1} x(t)$, então o ganho não muda. Assim, dado um instante t_n em que $\lambda(t_n) = \sigma(t_n)$, mantém $\lambda(t) = \lambda(t_n) = \sigma(t_n)$ até que o erro $x^T(t_{n+1}) P_v^{-1} (Q_\sigma - Q_\lambda) P_v^{-1} x(t_{n+1}) \leq -2\psi x^T(t_{n+1}) P_v^{-1} x(t_{n+1})$, quando será atualizado o valor de $\lambda(t)$ para $\lambda(t_{n+1}) = \sigma(t_{n+1})$.

Teorema 7. *O modelo T-S (5)-(7), sob a lei de controle (14), (15) e (120), atende ao critério de atenuação $\mathcal{H}_\infty$ (78), se existirem escalares positivos ϕ, ψ, β tais que as seguintes LMIs são factíveis:*

min γ^2
sujeito a

$$\begin{bmatrix} B_i M_{jkl} + M_{jkl}^T B_i^T - \frac{1}{\varphi} (P_j - P_k) - Q_{jkl} - Z_{ikl} + 2(\beta + \psi) P_l & (*) & (*) \\ E_i^T & -\gamma I & (*) \\ C_i P_l + D_i M_{jkl} & G_i & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (121)$$

$$A_i P_l + P_l A_i^T + Q_{ikl} + Z_{ikl} \leq 0,$$

onde $i, j \in \mathbb{K}_r$, sendo r o número de vértices do conjunto politopo, $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica definida positiva, $Z_i, Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são matrizes simétricas, e $M_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$, sendo $P_l \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrizes simétricas positivas definidas, $Z_{ikl}, Q_{jkl} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrizes simétricas, $M_{jkl} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $j, k, l \in \mathbb{K}_r$.

Demonstração. Defina o termo $L(x, \omega) = \dot{V}(x(t)) + \gamma^{-1} y^\top(t) y(t) - \gamma \omega^\top(t) \omega(t) \leq 0$ de modo que (79) é equivalente a impor que $L(x, \omega) \leq 0$. Na prova deste teorema será considerado o novo termo $L_n(x, \omega) = L(x, \omega) + 2(\beta + \psi) x^\top(t) P_v^{-1} x(t)$. Logo, note se $L_n(x, \omega) \leq 0$, então como $2(\beta + \psi) x^\top(t) P_v^{-1} x(t) \geq 0$, tem-se que $L(x, \omega) \leq L_n(x, \omega) \leq 0$ e assim o critério de atenuação (78) é satisfeito.

Considerando uma NQLF (9), calculamos sua derivada e a substituímos em (79), somando-se do lado esquerdo desta desigualdade o termo $2(\beta + \psi) x^\top(t) P_v^{-1} x(t)$, utilizando o sistema equivalente (5)-(7), (14), (15) e (120), resultando em:

$$\begin{aligned} L_n(x, \omega) &= x^T(t) P_v^{-1} \dot{x}(t) + (\dot{x}(t))^T P_v^{-1} x(t) + x^T(t) \left(\frac{dP_v^{-1}}{dt} \right) x(t) \\ &+ \gamma^{-1} \left[(C_z + D_z M_{\lambda h-v} P_v^{-1}) x(t) + G_z w(t) \right]^T \left[(C_z + D_z M_{\lambda h-v} P_v^{-1}) x(t) + G_z w(t) \right] \\ &- \gamma w^T(t) w(t) + 2(\beta + \psi) x^\top(t) P_v^{-1} x(t) \leq 0. \end{aligned} \quad (122)$$

Sobre essa desigualdade, substituímos (7), para obter:

$$\begin{aligned} &x^T(t) P_v^{-1} \left[(A_z + B_z M_{\lambda h-v} P_v^{-1}) x(t) + E_z w(t) \right] + (*) + x^T(t) \left(\frac{dP_v^{-1}}{dt} \right) x(t) \\ &+ \gamma^{-1} \left[(C_z + D_z M_{\lambda h-v} P_v^{-1}) x(t) + G_z w(t) \right]^T \left[(C_z + D_z M_{\lambda h-v} P_v^{-1}) x(t) + G_z w(t) \right] \\ &- \gamma w^T(t) w(t) \leq 0. \end{aligned} \quad (123)$$

Considerando as definições em (36) e (37), tem-se de (121) que (123) é satisfeita se:

$$\begin{aligned} &x^T(t) P_v^{-1} \left[B_z M_{\lambda h-v} P_v^{-1} x(t) + E_z w(t) \right] + (*) + x^T(t) \left(\frac{dP_v^{-1}}{dt} \right) x(t) \\ &+ \gamma^{-1} \left[(C_z + D_z M_{\lambda h-v} P_v^{-1}) x(t) + G_z w(t) \right]^T \left[(C_z + D_z M_{\lambda h-v} P_v^{-1}) x(t) + G_z w(t) \right] \\ &- \gamma w^T(t) w(t) - x^T(t) P_v^{-1} \bar{Q}_{\lambda h-v} P_v^{-1} x(t) - x^T(t) P_v^{-1} \bar{Z}_{\alpha h-v} P_v^{-1} x(t) \\ &+ 2(\beta + \psi) x^\top(t) P_v^{-1} x(t) \leq 0, \end{aligned} \quad (124)$$

$$\begin{aligned} & x^T(t)P_v^{-1}A_zx(t) + x^T(t)A_z^TP_v^{-1}x(t) + x^T(t)P_v^{-1}\bar{Q}_{\alpha h-v}P_v^{-1}x(t) \\ & + x^T(t)P_v^{-1}\bar{Z}_{\alpha h-v}P_v^{-1}x(t) \leq 0. \end{aligned} \quad (125)$$

Dado que existem vários termos comuns em (124), é conveniente realizar uma mudança de variável Φ para facilitar o cálculo, cujo valor está definido por:

$$\Phi = \begin{bmatrix} P_v^{-1}B_zM_{\lambda h-v}P_v^{-1} + (*) + \left(\frac{dP_v^{-1}}{dt}\right) & (*) \\ -P_v^{-1}\bar{Q}_{\lambda h-v}P_v^{-1} - P_v^{-1}\bar{Z}_{\alpha h-v}P_v^{-1} + 2(\beta + \psi)P_v^{-1} & (*) \\ E_z^TP_v^{-1} & -\gamma I \end{bmatrix}, \quad (126)$$

o que nos permite fatorar os termos $x(t)$, $x^T(t)$, $w(t)$ e $w^T(t)$, de modo que, substituindo na desigualdade (124), obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \left\{ \Phi + \gamma^{-1} \begin{bmatrix} (C_z + D_zM_{\lambda h-v}P_v^{-1})^T \\ G_z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_z + D_zM_{\lambda h-v}P_v^{-1} & G_z \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \leq 0, \quad (127)$$

$$\begin{aligned} & x^T(t)P_v^{-1}A_zx(t) + x^T(t)A_z^TP_v^{-1}x(t) + x^T(t)P_v^{-1}\bar{Q}_{\alpha h-v}P_v^{-1}x(t) \\ & + x^T(t)P_v^{-1}\bar{Z}_{\alpha h-v}P_v^{-1}x(t) \leq 0. \end{aligned} \quad (128)$$

Levando em conta esta análise acima, a última forma adotada para o bloco matricial central da desigualdade (127) nos permite representá-la convenientemente como um novo bloco matricial através do Complemento de Schur, de modo que a desigualdade (127) agora seja uma LMI como mostrada a seguir, na qual já é possível excluir os termos $x(t)$, $x^T(t)$, $w(t)$ e $w^T(t)$ de (127) e (128), dado que também foi considerado que $x(t) \neq 0$ e $w(t) \neq 0$, resultando em:

$$\begin{bmatrix} P_v^{-1}B_zM_{\lambda h-v}P_v^{-1} + (*) + \left(\frac{dP_v^{-1}}{dt}\right) - & & \\ P_v^{-1}\bar{Q}_{\lambda h-v}P_v^{-1} - P_v^{-1}\bar{Z}_{\alpha h-v}P_v^{-1} + 2P_v^{-1}(\beta + \psi) & (*) & (*) \\ E_z^TP_v^{-1} & -\gamma I & (*) \\ C_z + D_zM_{\lambda h-v}P_v^{-1} & G_z & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (129)$$

$$P_v^{-1}A_z + A_z^TP_v^{-1} + P_v^{-1}\bar{Q}_{\alpha h-v}P_v^{-1} + P_v^{-1}\bar{Z}_{\alpha h-v}P_v^{-1} \leq 0. \quad (130)$$

Agora, considerando uma matriz bloco diagonal P_v^* definida por:

$$P_v^* = \begin{bmatrix} P_v & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad (131)$$

multiplicamos esta matriz à direita e à esquerda na LMI (129), enquanto na LMI (130) também a multiplicamos à direita e à esquerda por P_v , obtendo a seguinte redução:

$$\begin{bmatrix} B_zM_{\lambda h-v} + (*) - \dot{P}_v - \bar{Q}_{\lambda h-v} - \bar{Z}_{\alpha h-v} + 2(\beta + \psi)P_v & (*) & (*) \\ E_z^T & -\gamma I & (*) \\ C_zP_v + D_zM_{\lambda h-v} & G_z & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (132)$$

$$A_z P_v + P_v A_z^T + \bar{Q}_{\alpha h^- v} + \bar{Z}_{\alpha h^- v} \leq 0. \quad (133)$$

Sobre esses resultados, uma forma de generalizar as desigualdades obtidas é considerando os valores de definição mostrados em (5), (8), (9), (11), (14), (15), (36) e (37), resultando em:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \alpha_i h_k^- v_l B_i M_{jkl} + (*) \\ -\frac{1}{\varphi} \left(\sum_{j=1}^r h_j P_j - \sum_{k=1}^r h_k^- P_k \right) \\ - \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r h_k^- v_l Q_{jkl} - \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \alpha_i h_k^- v_l Z_{ikl} \\ + 2 \sum_{l=1}^r (\beta + \psi) P_l \quad (*) \quad (*) \\ \sum_{i=1}^r \alpha_i E_i^T \quad -\gamma I \quad (*) \\ \sum_{i=1}^r \sum_{l=1}^r \alpha_i v_l C_i P_l + \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \alpha_i h_k^- v_l D_i M_{jkl} \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i G_i \quad -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (134)$$

$$\sum_{i=1}^r \sum_{l=1}^r \alpha_i v_l A_i P_l + \sum_{i=1}^r \sum_{l=1}^r \alpha_i v_l P_l A_i^T + \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \alpha_i h_k^- v_l Q_{ikl} + \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \alpha_i h_k^- v_l Z_{ikl} \leq 0. \quad (135)$$

Adicionamos convenientemente os fatores $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$, $\sum_{k=1}^r h_j = 1$, $\sum_{k=1}^r h_k^- = 1$ e $\sum_{l=1}^r v_l = 1$ em (134) e (135), para eliminar os fatores comuns positivos, uma vez que $\alpha_i \geq 0$, $h_j \geq 0$, $h_k^- \geq 0$ e $v_l \geq 0$, comprovando o *Teorema 7*:

min γ^2
sujeito a

$$\begin{bmatrix} B_i M_{jkl} + M_{jkl}^T B_i^T - \frac{1}{\varphi} (P_j - P_k) - Q_{jkl} - Z_{ikl} + 2(\beta + \psi) P_l \quad (*) \quad (*) \\ E_i^T \quad -\gamma I \quad (*) \\ C_i P_l + D_i M_{jkl} \quad G_i \quad -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (136)$$

$$A_i P_l + P_l A_i^T + Q_{ikl} + Z_{ikl} \leq 0. \quad (137)$$

Observe que desenvolvendo a equação (127), note a presença do termo:

$$-x^\top(t) P_v^{-1} \bar{Q}_{\lambda h v} P_v^{-1} x(t) + 2(\beta + \psi) x^\top(t) P^{-1} x(t). \quad (138)$$

Da lei de comutação (120), note que quando $\lambda = \sigma$ a expressão acima resulta em:

$$\begin{aligned} & -x^\top(t) P_v^{-1} \bar{Q}_{\sigma h^- v} P_v^{-1} x(t) + 2\beta x^\top(t) P_v^{-1} x(t) \leq \\ & -x^\top(t) P_v^{-1} \bar{Q}_{\sigma h^- v} P_v^{-1} x(t) + 2(\beta + \psi) x^\top(t) P_v^{-1} x(t) = \\ & -x^\top(t) P_v^{-1} \bar{Q}_{\lambda h^- v} P_v^{-1} x(t) + 2(\beta + \psi) x(t)^\top P_v^{-1} x(t). \end{aligned} \quad (139)$$

Agora, quando λ é diferente de σ , então de (120) a condição:

$$\begin{aligned} & x^T(t) P_v^{-1} (-\bar{Q}_{\sigma h^- v}) P_v^{-1} x(t) < \\ & x^T(t) P_v^{-1} [-\bar{Q}_{\lambda h^- v} + 2\psi P_v] P_v^{-1} x(t) \end{aligned} \quad (140)$$

é satisfeita. Desta forma, neste caso:

$$\begin{aligned} x^T(t)P_v^{-1} \left[-\bar{Q}_{\sigma h-v} + 2\beta P_v \right] P_v^{-1}x(t) < \\ x^T(t)P_v^{-1} \left[-\bar{Q}_{\sigma h-v} + 2(\psi + \beta) \right] P_v^{-1}x(t). \end{aligned} \quad (141)$$

Logo, tem-se para os dois casos que:

$$\begin{aligned} -x^T(t)P_v^{-1}\bar{Q}_{\sigma h-v}P_v^{-1}x(t) &\leq \\ -x^T(t)P_v^{-1}\bar{Q}_{\sigma h-v}P_v^{-1}x(t) + 2\beta x^T(t)P_v^{-1}x(t) &\leq \\ -x^T(t)P_v^{-1}\bar{Q}_{\lambda h-v}P_v^{-1}x(t) + 2(\psi + \beta) x^T(t)P_v^{-1}x(t). \end{aligned} \quad (142)$$

Assim, para $\beta \geq 0$ note que (134) e (135) implicam na factibilidade de (98) e (99). Desta forma, pelo Teorema 5 a prova está concluída. □

5.1 Exemplos

Com o objetivo de validar as condições LMIs definidas no *Teorema 7* nesta seção apresentamos um exemplo numérico. No exemplo numérico, será visualizado o comportamento temporal que o mesmo sistema não linear adota ao usar um controlador chaveado sem chattering com uma NQLF com retardo temporal.

Exemplo 5. *Comportamento temporal das variáveis de estado, sinal de controle, sinal de saída, perturbação externa e sinais de chaveamento correspondentes a um sistema não linear com incertezas paramétricas e perturbações externas sob um controle chaveado $\mathcal{H}_\infty$ sem chattering utilizando uma NQLF com atraso temporal.*

Considerando os valores numéricos descritos em (75), correspondentes a um sistema não linear com incertezas paramétricas e perturbações externas representado pelo modelo fuzzy T-S (77), onde é considerado um atraso temporal constante ($\varphi = 0,1$ s), condições iniciais $x_1(0) = 0,7$, $x_2(0) = -0,5$, uma perturbação externa definida por $\eta = 0$, e cujas incertezas paramétricas estão definidas por $a = 3$ e $b = -1$, que foram selecionadas convenientemente a partir dos resultados obtidos na *Figura 8* com a finalidade de garantir a estabilidade do sistema. Além disso, consideram-se os valores $\beta = 0,1$ e $\psi = 1$ para a análise e projeto do controlador, de modo a atender aos critérios de desempenho e robustez desejados.

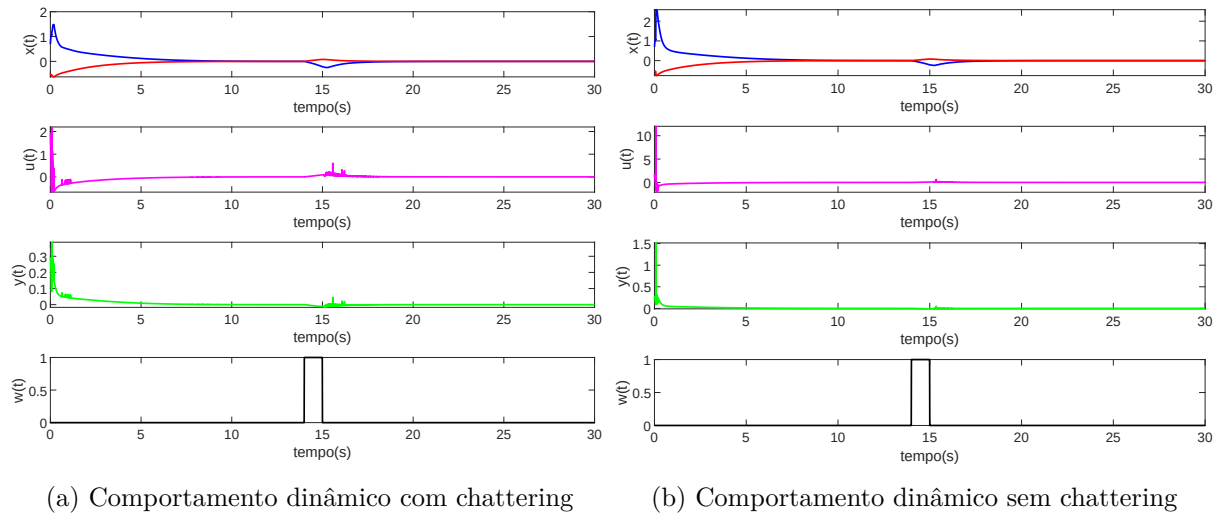
Foi realizada a simulação do sistema não linear com incertezas paramétricas e perturbações externas, com base nas LMIs apresentadas no *Teorema 7*, cujos resultados correspondentes às matrizes P_i são mostrados a seguir:

$$\begin{aligned} [P_1 \mid P_2] &= \begin{bmatrix} 2.7045 & -0.3880 & 1.4641 & -0.2746 \\ -0.3880 & 0.0924 & -0.2746 & 0.0927 \end{bmatrix}, \\ [P_3 \mid P_4] &= \begin{bmatrix} 1.4803 & -0.2752 & 2.3034 & -0.3390 \\ -0.2752 & 0.0926 & -0.3390 & 0.0913 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (143)$$

Esses valores calculados nos permitem representar o sistema não linear com incertezas paramétricas e perturbações externas na ferramenta de simulação *Simulink*, obtendo o comportamento temporal do sistema controlado. As matrizes M_{jkl} e Q_{ikl} encontradas são apresentadas no Apêndice A.

A Figura 16 mostra uma comparação do comportamento dinâmico do sistema não linear descrito em (77) com e sem chattering, onde a Figura 16 (a) é o resultado da implementação do controlador definido no *Teorema 5*, o qual apresenta chattering em momentos específicos devido à influência do controlador chaveado; enquanto a Figura 16 (b) é o resultado da implementação do controlador definido no *Teorema 7*, o qual reduz o chattering em comparação com a implementação do *Teorema 5*.

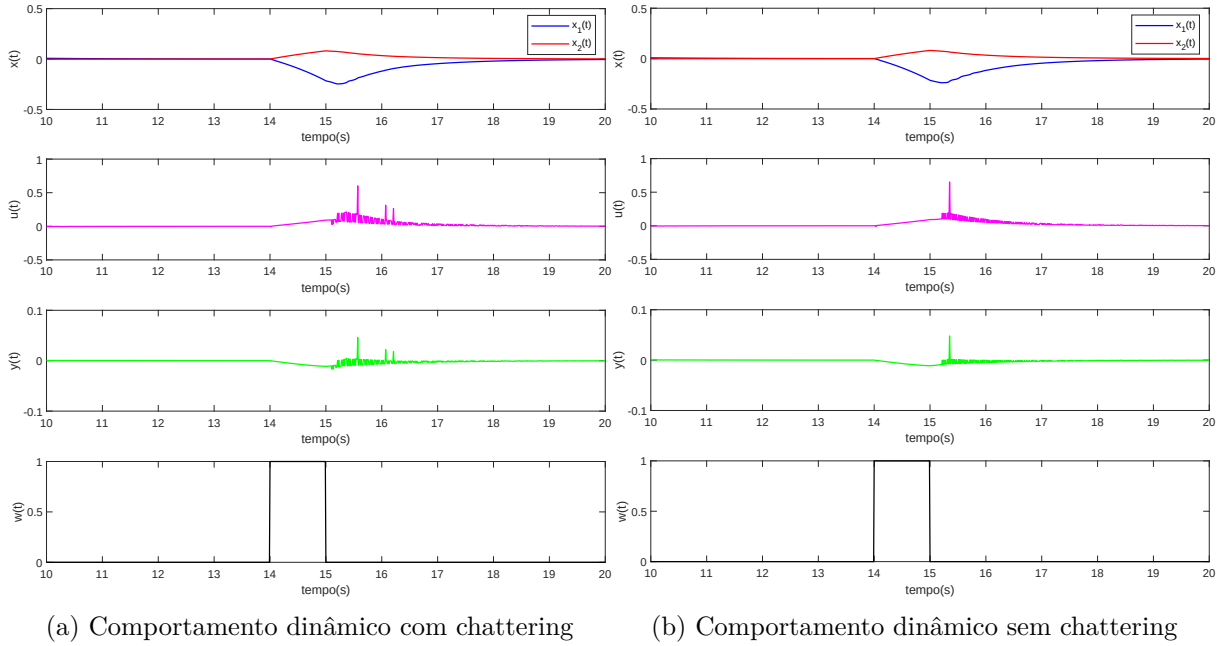
Figura 16 – Comparação do comportamento dinâmico do sistema não linear descrito em (77) diante de um controlador definido pelo *Teorema 5* e pelo *Teorema 7*.



Fonte: Elaboração do autor.

Como a simulação foi realizada no intervalo de 0 a 30 segundos, o efeito do chattering passa despercebido, então a Figura 17 mostra o intervalo de tempo entre 10 e 20 segundos para melhor visualizar a comparação entre a implementação do *Teorema 5* e o *Teorema 7*.

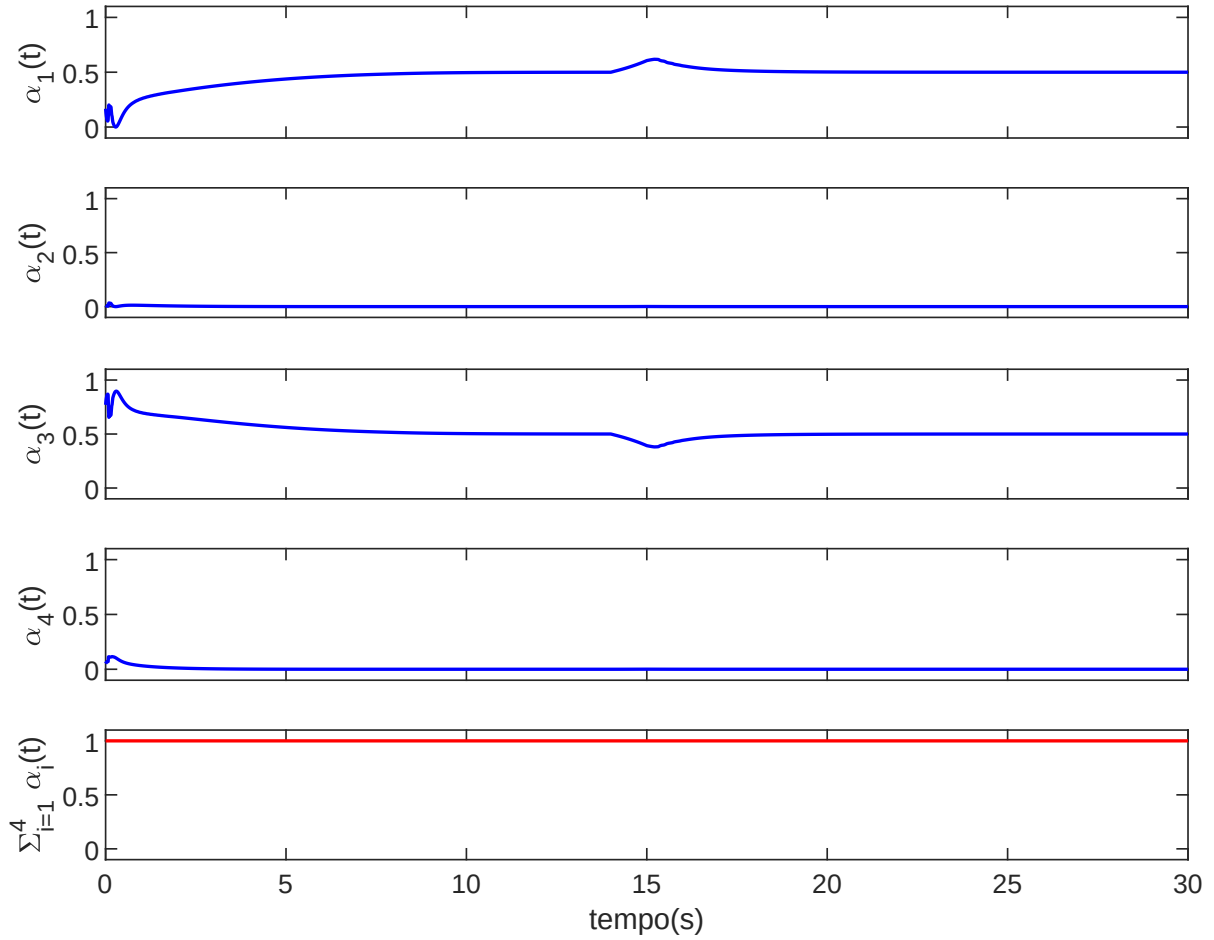
Figura 17 – Comparação do comportamento dinâmico do sistema não linear descrito em (77) diante de um controlador definido pelo *Teorema 5* e pelo *Teorema 7* entre 10 e 20 segundos.



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 18 mostra o comportamento dinâmico de $\alpha_i(t)$, que representa a variação temporal das MF. É verificado que em cada instante de tempo, a soma de todas as $\alpha_i(t)$ é igual a 1, conforme visualizado no gráfico na cor vermelha. É importante destacar que essas funções são resultado do controlador chaveado $\mathcal{H}_\infty$ sem chattering implementado, mas não são necessárias para o projeto do controlador, como demonstrado no *Teorema 6*, o que simplifica o projeto e reduz sua complexidade matemática.

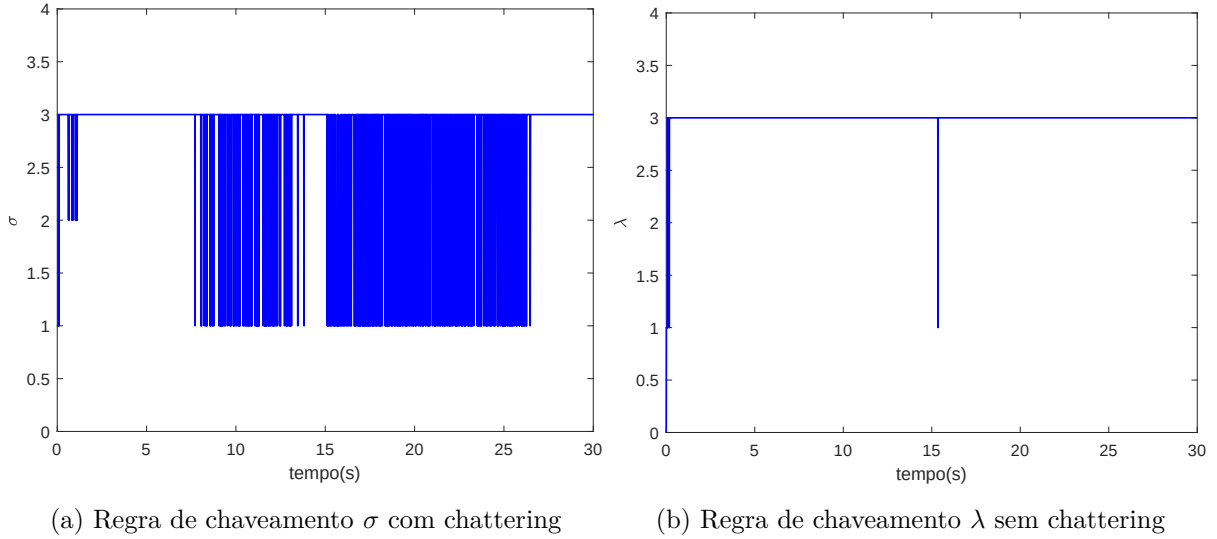
Figura 18 – A variação temporal de $\alpha_i(t)$ é mostrada para o sistema não linear descrito em (14), (15) e (120) com $a = 3$ e $b = -1$, controlado pela lei de chaveamento $\mathcal{H}_\infty$ sem chattering, considerando uma NQLF com atraso temporal (9).



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 19 mostra uma comparação da regra de chaveamento σ e λ , onde a Figura 19 (a) é o resultado da implementação do controlador definido no *Teorema 5*, o qual apresenta chattering; enquanto a Figura 19 (b) é o resultado da implementação do controlador definido no *Teorema 7*, o qual reduz o chattering em comparação com a implementação do *Teorema 5*. Os valores que a regra de chaveamento λ assume são limitados pelo número de vértices do conjunto politopo definido, de modo que o valor máximo que λ pode assumir é 4. Além disso, os valores que a regra de chaveamento λ assume determinam a seleção das matrizes $Q_{\lambda kl}$ e h_j .

Figura 19 – Comparação da regra de chaveamento σ e λ do sistema não linear descrito em (77) diante de um controlador definido pelo *Teorema 5* e pelo *Teorema 7*.

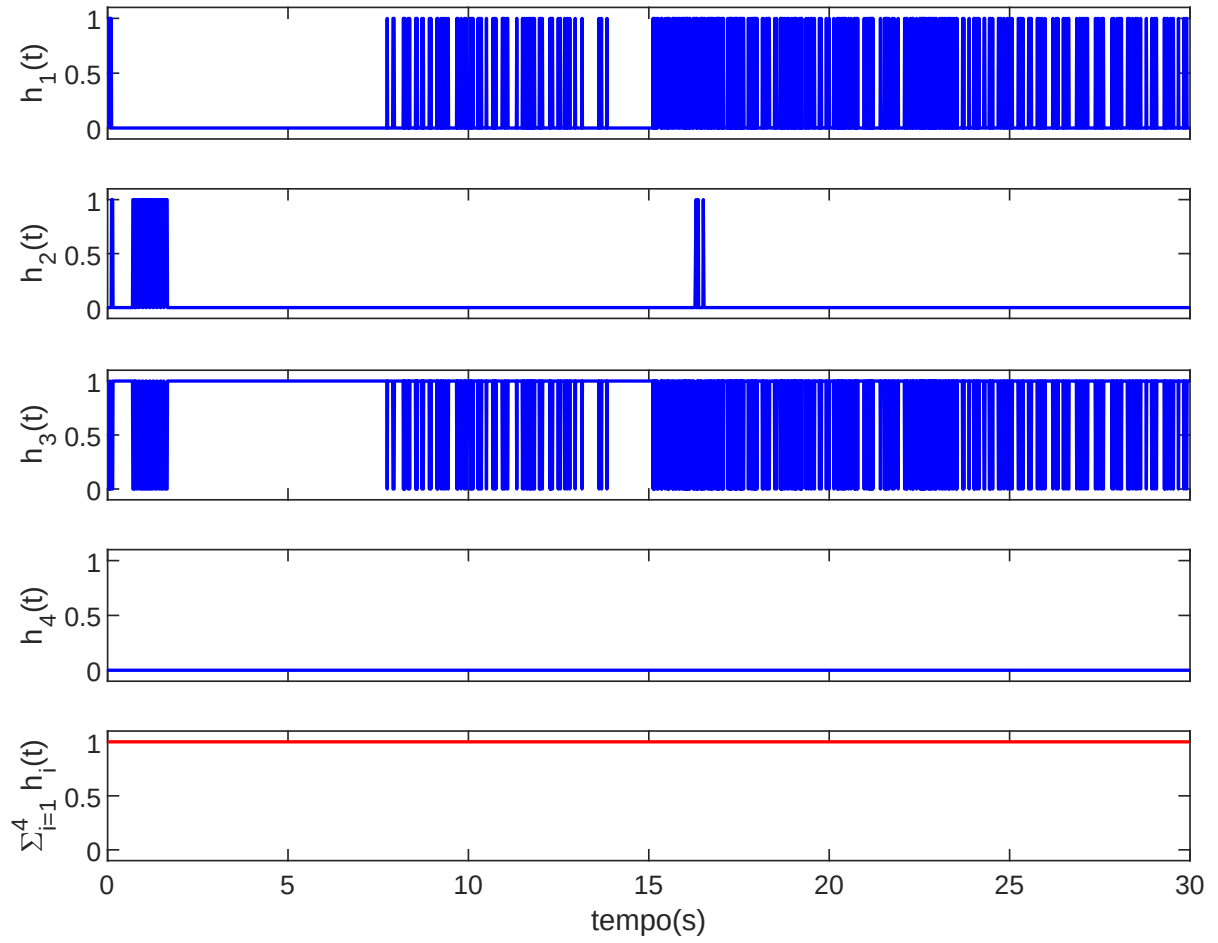


Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 20 mostra o comportamento dinâmico temporal que descreve o fator $h_j(t)$ em cada instante de tempo, o qual depende da mudança de estados que existe na regra de chaveamento σ , conforme mostrado na Figura 11.

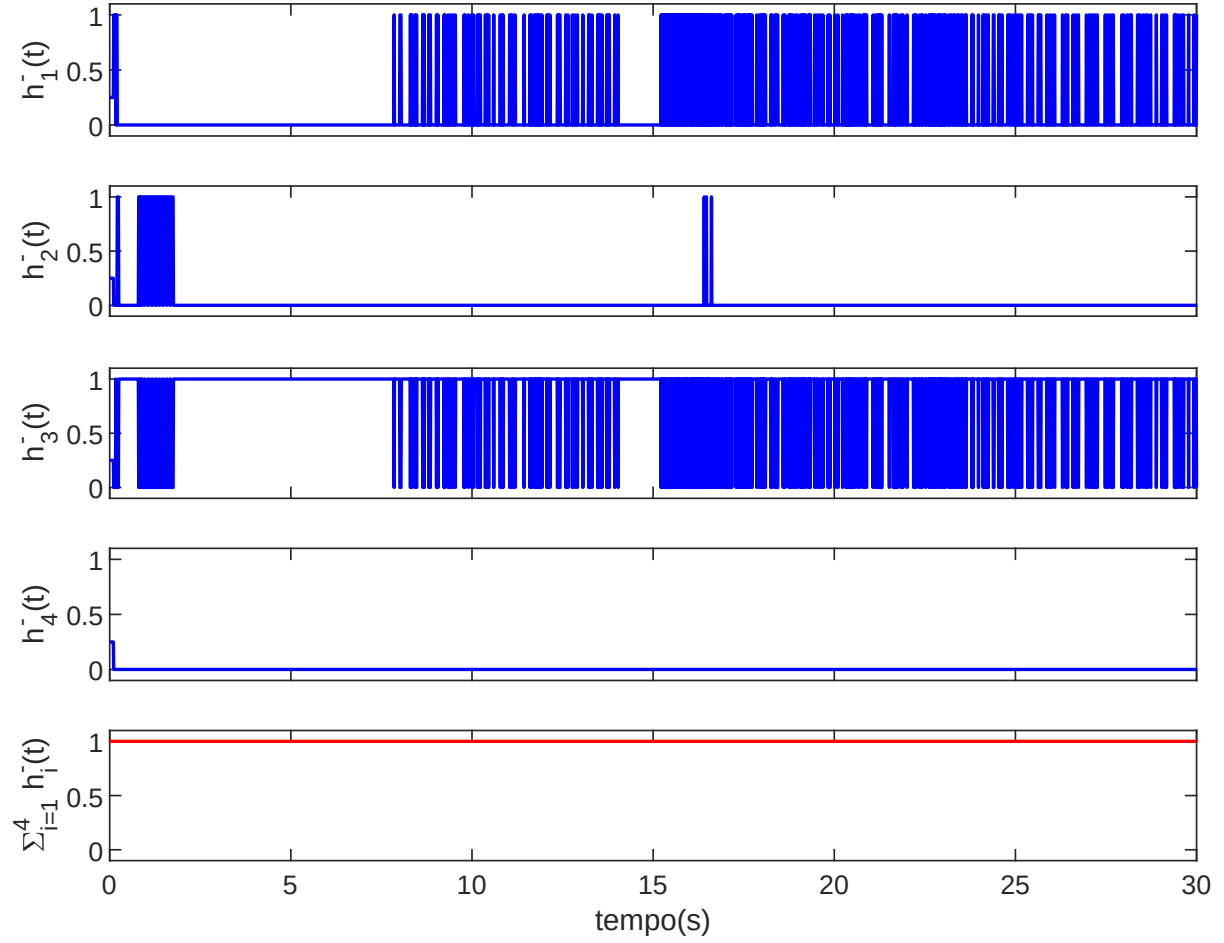
Em consequência do comportamento do fator $h_j(t)$, na Figura 21 é mostrado o comportamento dinâmico temporal que descreve o fator h_j^- , que é o mesmo fator $h_j(t)$, mas com um atraso temporal de $\varphi = 0.1s$. Além disso, é importante mencionar que para o instante $t < 0$, matematicamente não está definido, por esse motivo, foi convenientemente considerado um valor inicial de 0.25 para h_1^-, h_2^-, h_3^- e h_4^- em $t = 0$, uma vez que se deve manter $\sum_{j=1}^r h_j^-(t) = 1$ e $h_j^-(t) \geq 0$.

Figura 20 – Variação temporal de $h_i(t)$ correspondente ao sistema não linear descrito em (14), (15) e (120) com $a = 3$ e $b = -1$, controlado pela lei de chaveamento $\mathcal{H}_\infty$ sem chattering, considerando uma NQLF com atraso temporal (9)



Fonte: Elaboração do autor.

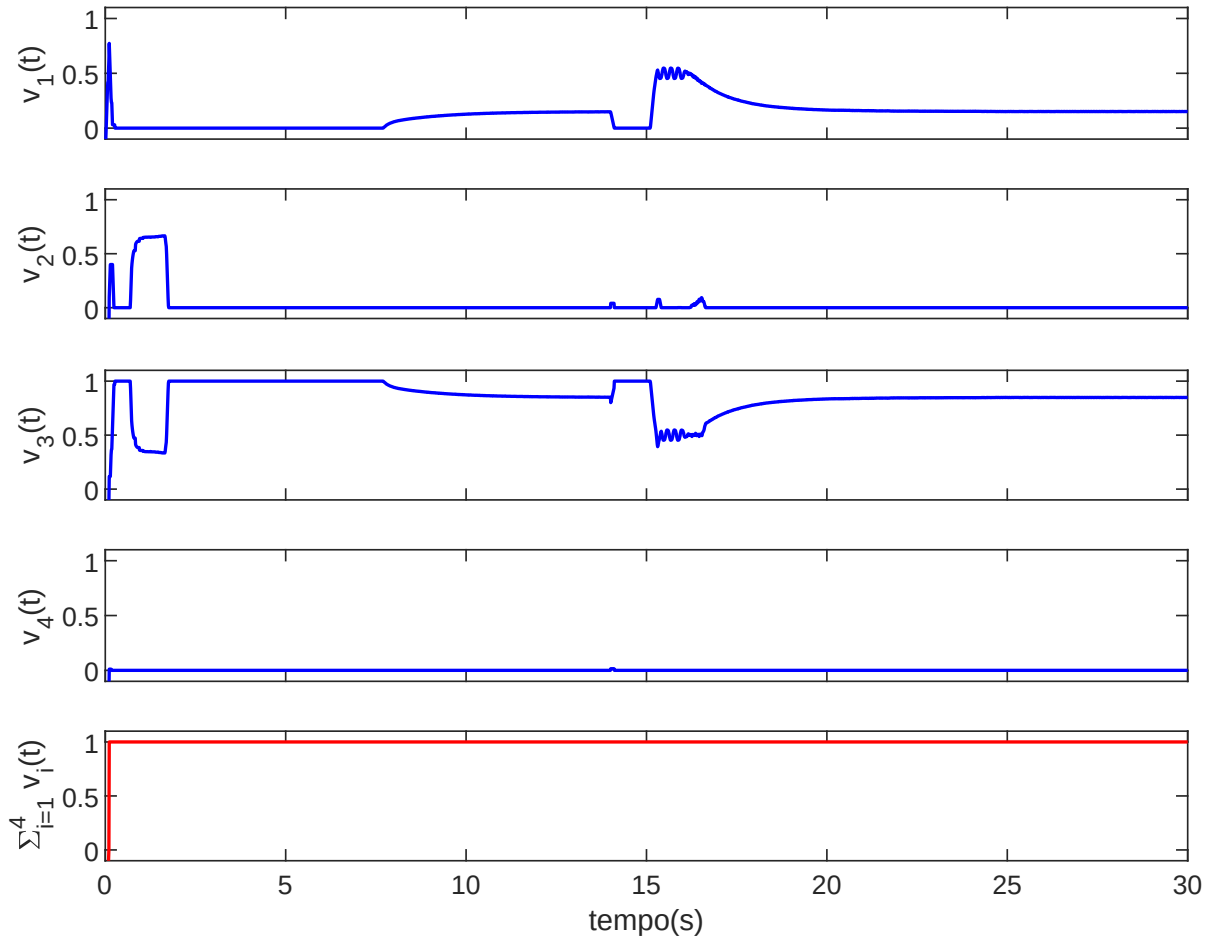
Figura 21 – Variação temporal de $h_i^-(t)$ correspondente ao sistema não linear descrito em (14), (15) e (120) com $a = 3$ e $b = -1$, controlado pela lei de chaveamento $\mathcal{H}_\infty$ sem chattering, considerando uma NQLF com atraso temporal (9).



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 22 mostra o comportamento dinâmico temporal que descreve a função $v_l(t) = \frac{1}{\varphi} \int_{t-\varphi}^t h_i(\tau) d\tau$ definida em (15), a qual também depende da variação do fator $h_j(t)$ mostrado na Figura 19, validando também que se cumpre $\sum_{l=1}^r v_l(t) = 1$ e $v_l(t) \geq 0$, ao herdar a propriedade da soma convexa do fator $h_j(t)$.

Figura 22 – Variação temporal de $v_i(t)$ correspondente ao sistema não linear descrito em (5) - (7), (75) com $a = 3$ e $b = -1$, controlado pela lei de chaveamento $\mathcal{H}_\infty$ sem chattering, considerando uma NQLF com atraso temporal (9).



Fonte: Elaboração do autor.

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho, foi desenvolvida e proposta uma metodologia de controle chaveado $\mathcal{H}_\infty$ sem chattering aplicado a sistemas não lineares com incertezas paramétricas e perturbações externas descritas por modelos fuzzy T-S e uma NQLF com atraso temporal.

A motivação desta pesquisa foi a busca por uma metodologia de controle que nos permita manter uma maior faixa de viabilidade em relação a outras metodologias baseadas em QLF e garantir a estabilidade mesmo na presença de perturbações.

A teoria do controle $\mathcal{H}_\infty$ tem sido amplamente reconhecida por sua capacidade de lidar com problemas de estabilidade e desempenho em sistemas de controle. Neste caso, essa teoria foi utilizada para projetar um controlador chaveado sem chattering que minimize os efeitos adversos gerados por perturbações externas, proporcionando assim uma maior robustez ao sistema.

Para garantir a estabilidade global do sistema, foi utilizada uma NQLF com atraso temporal no projeto do controlador. Essas funções têm se mostrado uma escolha acertada, permitindo ampliar a faixa de viabilidade que um sistema pode abordar em casos reais.

Um dos aspectos mais destacados deste controlador é a sua capacidade de resistir a perturbações externas e variações nos parâmetros do sistema. Essa robustez é um fator crítico na aplicação prática, onde os sistemas frequentemente estão sujeitos a perturbações e variações que podem afetar seu desempenho.

Em conclusão, este trabalho representa um passo significativo em direção ao desenvolvimento de técnicas de controle mais avançadas e efetivas para sistemas não lineares incertos.

REFERÊNCIAS

- ALVES, U. N. L. T.; TEIXEIRA, M. C. M.; OLIVEIRA, D. R.; CARDIM, R.; ASSUNCAO, E.; SOUZA, W. A. Smoothing switched control laws for uncertain nonlinear systems subject to actuator saturation. **International Journal of Adaptive Control and Signal Processing**, Wiley Online Library, v. 30, n. 8-10, p. 1408–1433, 2016.
- BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BELAKRISHNAN, V. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. Philadelphia, USA: SIAM, 1994. (SIAM: Studies In Applied Mathematics).
- BUZETTI, A. S. **Controle Chaveado de Sistemas Não Lineares com Incertezas utilizando Funções de Lyapunov Não Quadráticas**. 2021. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2021.
- GU, K.; CHEN, J.; KHARITONOV, V. L. **Stability of Time-Delay Systems**. [S.l.: s.n.]: Springer, 2003.
- LÖFBERG, J. Yalmip: a toolbox for modeling and optimization in matlab. *In*: IEEE. **Proceedings of the CACSD Conference, Taipei, Taiwan**. [S.l.: s.n.], 2004. p. 284–289.
- MARQUEZ, R.; GUERRA, T.; BERNAL, M.; KRUSZEWSKI, A. A non-quadratic lyapunov functional for $\mathcal{H}_\infty$ control of nonlinear systems via takagi–sugeno models. **Journal of the Franklin Institute**, Elsevier, v. 353, n. 4, p. 781–796, 2016.
- PEAUCELLE, D.; ARZELIER, D.; BACHELIER, O.; BERNUSSOU, J. A new robust d-stability condition for real convex polytopic uncertainty. **Systems & Control Letters**, v. 40, n. 1, p. 21–30, 2000.
- SANTIM, M. P. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; SOUZA, W. A.; ASSUNCAO, E.; CARDIM, R. Design of a takagi-sugeno fuzzy regulator for a set of operation points. **Mathematical Problems in Engineering**, Hindawi, v. 2012, p. 1–17, 2012.
- SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; ASSUNCAO, E. On switched regulator design of uncertain nonlinear systems using takagi-sugeno fuzzy models. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, IEEE, v. 22, n. 6, p. 1720–1727, 2014.
- SOUZA, W. A. d.; TEIXEIRA, M. C. M.; SANTIM, M. P. A.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. On switched control design of linear time-invariant systems with polytopic uncertainties. **Mathematical Problems in Engineering**, Hindawi, v. 2013, p. 10, 2013.
- STURM, J. Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. **Optimization Methods and Software**, v. 11, n. 12, p. 625–653, 1999.
- TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**, IEEE, v. 15, n. 1, p. 116–132, 1985.

TANAKA, K.; IKEDA, T.; WANG, H. O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and lmi-based designs. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, IEEE, v. 6, n. 2, p. 250–265, 1998.

TANIGUCHI, T.; TANAKA, K.; OHTAKE, H.; WANG, H. O. Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of takagi-sugeno fuzzy systems. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, IEEE, v. 9, n. 4, p. 525–537, 2001.

TUAN, H. D.; APKARIAN, P.; NARIKIYO, T.; YAMAMOTO, Y. Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, IEEE, v. 9, n. 2, p. 324–332, 2001.

APÊNDICE A – RESULTADOS OBTIDOS NO EXEMPLO 2

Realizou-se a simulação do sistema não linear com incertezas paramétricas, partindo das LMIs apresentadas no *Teorema 2*, cujos resultados correspondentes às matrizes M_{jkl} e Q_{ikl} são as seguintes:

$$\begin{aligned}
[M_{111} \mid M_{112}] &= \begin{bmatrix} -2,7330 & 0,2072 & -2,4634 & 0,1734 \end{bmatrix}, \\
[M_{113} \mid M_{114}] &= \begin{bmatrix} -2,3713 & 0,1589 & -2,6147 & 0,1926 \end{bmatrix}, \\
[M_{121} \mid M_{122}] &= \begin{bmatrix} -0,2136 & 0,0272 & -0,0998 & 0,0179 \end{bmatrix}, \\
[M_{123} \mid M_{124}] &= \begin{bmatrix} -0,0820 & 0,0141 & -0,1643 & 0,0221 \end{bmatrix}, \\
[M_{131} \mid M_{132}] &= \begin{bmatrix} -0,2021 & 0,0259 & -0,0724 & 0,0154 \end{bmatrix}, \\
[M_{133} \mid M_{134}] &= \begin{bmatrix} -0,0638 & 0,0127 & -0,1534 & 0,0205 \end{bmatrix}, \\
[M_{141} \mid M_{142}] &= \begin{bmatrix} -1,3525 & 0,1243 & -0,8140 & 0,0854 \end{bmatrix}, \\
[M_{143} \mid M_{144}] &= \begin{bmatrix} -0,6689 & 0,0718 & -1,1563 & 0,1080 \end{bmatrix}, \\
[M_{211} \mid M_{212}] &= \begin{bmatrix} -0,3829 & 0,0315 & -0,4012 & 0,0306 \end{bmatrix}, \\
[M_{213} \mid M_{214}] &= \begin{bmatrix} -0,4135 & 0,0286 & -0,3830 & 0,0307 \end{bmatrix}, \\
[M_{221} \mid M_{222}] &= \begin{bmatrix} -0,1768 & 0,0210 & -0,1254 & 0,0178 \end{bmatrix}, \\
[M_{223} \mid M_{224}] &= \begin{bmatrix} -0,1190 & 0,0160 & -0,1549 & 0,0187 \end{bmatrix}, \\
[M_{231} \mid M_{232}] &= \begin{bmatrix} -0,1716 & 0,0202 & -0,1007 & 0,0148 \end{bmatrix}, \\
[M_{233} \mid M_{234}] &= \begin{bmatrix} -0,0972 & 0,0128 & -0,1428 & 0,0166 \end{bmatrix}, \\
[M_{241} \mid M_{242}] &= \begin{bmatrix} -0,3313 & 0,0355 & -0,3006 & 0,0368 \end{bmatrix}, \\
[M_{243} \mid M_{244}] &= \begin{bmatrix} -0,2936 & 0,0358 & -0,3188 & 0,0349 \end{bmatrix}, \\
[M_{311} \mid M_{312}] &= \begin{bmatrix} -0,3645 & 0,0212 & -0,3652 & 0,0196 \end{bmatrix}, \\
[M_{313} \mid M_{314}] &= \begin{bmatrix} -0,3817 & 0,0183 & -0,3626 & 0,0203 \end{bmatrix}, \\
[M_{321} \mid M_{322}] &= \begin{bmatrix} -0,1543 & 0,0218 & -0,1016 & 0,0172 \end{bmatrix}, \\
[M_{323} \mid M_{324}] &= \begin{bmatrix} -0,0981 & 0,0149 & -0,1281 & 0,0186 \end{bmatrix}, \\
[M_{331} \mid M_{332}] &= \begin{bmatrix} -0,1730 & 0,0237 & -0,0804 & 0,0167 \end{bmatrix}, \\
[M_{333} \mid M_{334}] &= \begin{bmatrix} -0,0741 & 0,0133 & -0,1335 & 0,0190 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[M_{341} \mid M_{342}] &= \begin{bmatrix} -0,2747 & 0,0243 & -0,2821 & 0,0252 \end{bmatrix}, \\
[M_{343} \mid M_{344}] &= \begin{bmatrix} -0,2888 & 0,0244 & -0,2722 & 0,0238 \end{bmatrix}, \\
[M_{411} \mid M_{412}] &= \begin{bmatrix} -1,6970 & 0,1565 & -1,6511 & 0,1449 \end{bmatrix}, \\
[M_{413} \mid M_{414}] &= \begin{bmatrix} -1,7057 & 0,1388 & -1,6483 & 0,1495 \end{bmatrix}, \\
[M_{421} \mid M_{422}] &= \begin{bmatrix} -0,2159 & 0,0265 & -0,1193 & 0,0193 \end{bmatrix}, \\
[M_{423} \mid M_{424}] &= \begin{bmatrix} -0,1058 & 0,0164 & -0,1744 & 0,0224 \end{bmatrix}, \\
[M_{431} \mid M_{432}] &= \begin{bmatrix} -0,2029 & 0,0248 & -0,0853 & 0,0157 \end{bmatrix}, \\
[M_{433} \mid M_{434}] &= \begin{bmatrix} -0,0775 & 0,0132 & -0,1578 & 0,0200 \end{bmatrix}, \\
[M_{441} \mid M_{442}] &= \begin{bmatrix} -1,0382 & 0,1019 & -0,7882 & 0,0842 \end{bmatrix}, \\
[M_{443} \mid M_{444}] &= \begin{bmatrix} -0,7411 & 0,0770 & -0,9357 & 0,0931 \end{bmatrix}, \\
\\
[Q_{111} \mid Q_{112}] &= \begin{bmatrix} -1,6066 & 0,1647 & -1,0845 & 0,1194 \\ 0,1647 & -0,0089 & 0,1194 & -0,0065 \end{bmatrix}, \\
[Q_{113} \mid Q_{114}] &= \begin{bmatrix} -0,8850 & 0,1073 & -1,4509 & 0,1491 \\ 0,1073 & -0,0057 & 0,1491 & -0,0079 \end{bmatrix}, \\
[Q_{121} \mid Q_{122}] &= \begin{bmatrix} -1,3997 & 0,1421 & -1,3992 & 0,1177 \\ 0,1421 & -0,0123 & 0,1177 & -0,0086 \end{bmatrix}, \\
[Q_{123} \mid Q_{124}] &= \begin{bmatrix} -1,3970 & 0,1130 & -1,4137 & 0,1351 \\ 0,1130 & -0,0072 & 0,1351 & -0,0109 \end{bmatrix}, \\
[Q_{131} \mid Q_{132}] &= \begin{bmatrix} -1,6545 & 0,1860 & -1,5617 & 0,1537 \\ 0,1860 & -0,0173 & 0,1537 & -0,0130 \end{bmatrix}, \\
[Q_{133} \mid Q_{134}] &= \begin{bmatrix} -1,5787 & 0,1493 & -1,6523 & 0,1769 \\ 0,1493 & -0,0116 & 0,1769 & -0,0157 \end{bmatrix}, \\
[Q_{141} \mid Q_{142}] &= \begin{bmatrix} -1,5022 & 0,1333 & -1,1220 & 0,0864 \\ 0,1333 & -0,0103 & 0,0864 & -0,0082 \end{bmatrix}, \\
[Q_{143} \mid Q_{144}] &= \begin{bmatrix} -1,0094 & 0,0756 & -1,3691 & 0,1169 \\ 0,0756 & -0,0075 & 0,1169 & -0,0095 \end{bmatrix}, \\
[Q_{211} \mid Q_{212}] &= \begin{bmatrix} 6,4196 & -0,4180 & 6,2116 & -0,4214 \\ -0,4180 & -0,0050 & -0,4214 & -0,0032 \end{bmatrix}, \\
[Q_{213} \mid Q_{214}] &= \begin{bmatrix} 6,1870 & -0,4110 & 6,3003 & -0,4149 \\ -0,4110 & -0,0027 & -0,4149 & -0,0042 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[Q_{221} \mid Q_{222}] &= \begin{bmatrix} 2,3053 & -0,2073 & 1,3123 & -0,1499 \\ -0,2073 & 0,0040 & -0,1499 & 0,0001 \end{bmatrix}, \\
[Q_{223} \mid Q_{224}] &= \begin{bmatrix} 1,1661 & -0,1354 & 1,9026 & -0,1806 \\ -0,1354 & -0,0006 & -0,1806 & 0,0023 \end{bmatrix}, \\
[Q_{231} \mid Q_{232}] &= \begin{bmatrix} 2,0842 & -0,1725 & 0,9849 & -0,1086 \\ -0,1725 & 0,0007 & -0,1086 & -0,0033 \end{bmatrix}, \\
[Q_{233} \mid Q_{234}] &= \begin{bmatrix} 0,8588 & -0,0949 & 1,6646 & -0,1445 \\ -0,0949 & -0,0041 & -0,1445 & -0,0010 \end{bmatrix}, \\
[Q_{241} \mid Q_{242}] &= \begin{bmatrix} 5,3021 & -0,3683 & 4,7811 & -0,3578 \\ -0,3683 & -0,0019 & -0,3578 & -0,0008 \end{bmatrix}, \\
[Q_{243} \mid Q_{244}] &= \begin{bmatrix} 4,5628 & -0,3386 & 5,1296 & -0,3631 \\ -0,3386 & -0,0009 & -0,3631 & -0,0013 \end{bmatrix}, \\
[Q_{311} \mid Q_{312}] &= \begin{bmatrix} 7,4024 & -0,7211 & 6,6876 & -0,7207 \\ -0,7211 & 0,0303 & -0,7207 & 0,0313 \end{bmatrix}, \\
[Q_{313} \mid Q_{314}] &= \begin{bmatrix} 6,3897 & -0,6975 & 7,0935 & -0,7094 \\ -0,6975 & 0,0300 & -0,7094 & 0,0300 \end{bmatrix}, \\
[Q_{321} \mid Q_{322}] &= \begin{bmatrix} 3,7871 & -0,3425 & 2,1461 & -0,2657 \\ -0,3425 & 0,0109 & -0,2657 & 0,0086 \end{bmatrix}, \\
[Q_{323} \mid Q_{324}] &= \begin{bmatrix} 1,8699 & -0,2424 & 3,1932 & -0,3055 \\ -0,2424 & 0,0075 & -0,3055 & 0,0091 \end{bmatrix}, \\
[Q_{331} \mid Q_{332}] &= \begin{bmatrix} 3,4093 & -0,2915 & 1,9056 & -0,2155 \\ -0,2915 & 0,0056 & -0,2155 & 0,0026 \end{bmatrix}, \\
[Q_{333} \mid Q_{334}] &= \begin{bmatrix} 1,6610 & -0,1987 & 2,8755 & -0,2572 \\ -0,1987 & 0,0024 & -0,2572 & 0,0037 \end{bmatrix}, \\
[Q_{341} \mid Q_{342}] &= \begin{bmatrix} 7,1327 & -0,6772 & 5,5081 & -0,6117 \\ -0,6772 & 0,0340 & -0,6117 & 0,0351 \end{bmatrix}, \\
[Q_{343} \mid Q_{344}] &= \begin{bmatrix} 5,0458 & -0,5746 & 6,6048 & -0,6474 \\ -0,5746 & 0,0337 & -0,6474 & 0,0333 \end{bmatrix}, \\
[Q_{411} \mid Q_{412}] &= \begin{bmatrix} -0,3335 & -0,0172 & -0,4625 & -0,0181 \\ -0,0172 & -0,0042 & -0,0181 & -0,0020 \end{bmatrix}, \\
[Q_{413} \mid Q_{414}] &= \begin{bmatrix} -0,4835 & -0,0162 & -0,3746 & -0,0182 \\ -0,0162 & -0,0015 & -0,0182 & -0,0033 \end{bmatrix}, \\
[Q_{421} \mid Q_{422}] &= \begin{bmatrix} -0,4711 & 0,0320 & -0,6997 & 0,0251 \\ 0,0320 & -0,0066 & 0,0251 & -0,0046 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[Q_{423} \mid Q_{424}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} -0,7470 & 0,0254 & -0,5602 & 0,0312 \\ 0,0254 & -0,0038 & 0,0312 & -0,0059 \end{array} \right], \\
[Q_{431} \mid Q_{432}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} -0,6990 & 0,0708 & -0,8566 & 0,0604 \\ 0,0708 & -0,0107 & 0,0604 & -0,0087 \end{array} \right], \\
[Q_{433} \mid Q_{434}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} -0,9074 & 0,0601 & -0,7770 & 0,0695 \\ 0,0601 & -0,0079 & 0,0695 & -0,0100 \end{array} \right], \\
[Q_{441} \mid Q_{442}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} -0,2212 & -0,0037 & -0,3229 & -0,0131 \\ -0,0037 & -0,0056 & -0,0131 & -0,0037 \end{array} \right], \\
[Q_{443} \mid Q_{444}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} -0,3416 & -0,0136 & -0,2458 & -0,0071 \\ -0,0136 & -0,0032 & -0,0071 & -0,0049 \end{array} \right],
\end{aligned}$$

APÊNDICE B – RESULTADOS OBTIDOS NO EXEMPLO 4

Realizou-se a simulação do sistema não linear com incertezas paramétricas, partindo das LMIs apresentadas no *Teorema 5*, cujos resultados correspondentes às matrizes M_{jkl} e Q_{ikl} são as seguintes:

$$\begin{aligned}
[M_{111} \mid M_{112}] &= \begin{bmatrix} -2,7330 & 0,2072 & -2,4634 & 0,1734 \end{bmatrix}, \\
[M_{113} \mid M_{114}] &= \begin{bmatrix} -2,3713 & 0,1589 & -2,6147 & 0,1926 \end{bmatrix}, \\
[M_{121} \mid M_{122}] &= \begin{bmatrix} -0,2136 & 0,0272 & -0,0998 & 0,0179 \end{bmatrix}, \\
[M_{123} \mid M_{124}] &= \begin{bmatrix} -0,0820 & 0,0141 & -0,1643 & 0,0221 \end{bmatrix}, \\
[M_{131} \mid M_{132}] &= \begin{bmatrix} -0,2021 & 0,0259 & -0,0724 & 0,0154 \end{bmatrix}, \\
[M_{133} \mid M_{134}] &= \begin{bmatrix} -0,0638 & 0,0127 & -0,1534 & 0,0205 \end{bmatrix}, \\
[M_{141} \mid M_{142}] &= \begin{bmatrix} -1,3525 & 0,1243 & -0,8140 & 0,0854 \end{bmatrix}, \\
[M_{143} \mid M_{144}] &= \begin{bmatrix} -0,6689 & 0,0718 & -1,1563 & 0,1080 \end{bmatrix}, \\
[M_{211} \mid M_{212}] &= \begin{bmatrix} -0,3829 & 0,0315 & -0,4012 & 0,0306 \end{bmatrix}, \\
[M_{213} \mid M_{214}] &= \begin{bmatrix} -0,4135 & 0,0286 & -0,3830 & 0,0307 \end{bmatrix}, \\
[M_{221} \mid M_{222}] &= \begin{bmatrix} -0,1768 & 0,0210 & -0,1254 & 0,0178 \end{bmatrix}, \\
[M_{223} \mid M_{224}] &= \begin{bmatrix} -0,1190 & 0,0160 & -0,1549 & 0,0187 \end{bmatrix}, \\
[M_{231} \mid M_{232}] &= \begin{bmatrix} -0,1716 & 0,0202 & -0,1007 & 0,0148 \end{bmatrix}, \\
[M_{233} \mid M_{234}] &= \begin{bmatrix} -0,0972 & 0,0128 & -0,1428 & 0,0166 \end{bmatrix}, \\
[M_{241} \mid M_{242}] &= \begin{bmatrix} -0,3313 & 0,0355 & -0,3006 & 0,0368 \end{bmatrix}, \\
[M_{243} \mid M_{244}] &= \begin{bmatrix} -0,2936 & 0,0358 & -0,3188 & 0,0349 \end{bmatrix}, \\
[M_{311} \mid M_{312}] &= \begin{bmatrix} -0,3645 & 0,0212 & -0,3652 & 0,0196 \end{bmatrix}, \\
[M_{313} \mid M_{314}] &= \begin{bmatrix} -0,3817 & 0,0183 & -0,3626 & 0,0203 \end{bmatrix}, \\
[M_{321} \mid M_{322}] &= \begin{bmatrix} -0,1543 & 0,0218 & -0,1016 & 0,0172 \end{bmatrix}, \\
[M_{323} \mid M_{324}] &= \begin{bmatrix} -0,0981 & 0,0149 & -0,1281 & 0,0186 \end{bmatrix}, \\
[M_{331} \mid M_{332}] &= \begin{bmatrix} -0,1730 & 0,0237 & -0,0804 & 0,0167 \end{bmatrix}, \\
[M_{333} \mid M_{334}] &= \begin{bmatrix} -0,0741 & 0,0133 & -0,1335 & 0,0190 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[M_{341} \mid M_{342}] &= \begin{bmatrix} -0,2747 & 0,0243 & -0,2821 & 0,0252 \end{bmatrix}, \\
[M_{343} \mid M_{344}] &= \begin{bmatrix} -0,2888 & 0,0244 & -0,2722 & 0,0238 \end{bmatrix}, \\
[M_{411} \mid M_{412}] &= \begin{bmatrix} -1,6970 & 0,1565 & -1,6511 & 0,1449 \end{bmatrix}, \\
[M_{413} \mid M_{414}] &= \begin{bmatrix} -1,7057 & 0,1388 & -1,6483 & 0,1495 \end{bmatrix}, \\
[M_{421} \mid M_{422}] &= \begin{bmatrix} -0,2159 & 0,0265 & -0,1193 & 0,0193 \end{bmatrix}, \\
[M_{423} \mid M_{424}] &= \begin{bmatrix} -0,1058 & 0,0164 & -0,1744 & 0,0224 \end{bmatrix}, \\
[M_{431} \mid M_{432}] &= \begin{bmatrix} -0,2029 & 0,0248 & -0,0853 & 0,0157 \end{bmatrix}, \\
[M_{433} \mid M_{434}] &= \begin{bmatrix} -0,0775 & 0,0132 & -0,1578 & 0,0200 \end{bmatrix}, \\
[M_{441} \mid M_{442}] &= \begin{bmatrix} -1,0382 & 0,1019 & -0,7882 & 0,0842 \end{bmatrix}, \\
[M_{443} \mid M_{444}] &= \begin{bmatrix} -0,7411 & 0,0770 & -0,9357 & 0,0931 \end{bmatrix}, \\
\\
[Q_{111} \mid Q_{112}] &= \begin{bmatrix} -0,5001 & 0,0512 & -0,3013 & 0,0211 \\ 0,0523 & -0,0034 & 0,0205 & -0,0019 \end{bmatrix}, \\
[Q_{113} \mid Q_{114}] &= \begin{bmatrix} -0,4021 & 0,0546 & -0,6054 & 0,0745 \\ 0,0578 & -0,0032 & 0,0721 & -0,0047 \end{bmatrix}, \\
[Q_{121} \mid Q_{122}] &= \begin{bmatrix} -0,5043 & 0,0508 & -0,5091 & 0,0443 \\ 0,0501 & -0,0045 & 0,0432 & -0,0036 \end{bmatrix}, \\
[Q_{123} \mid Q_{124}] &= \begin{bmatrix} -0,5067 & 0,0419 & -0,5024 & 0,0612 \\ 0,0423 & -0,0038 & 0,0627 & -0,0055 \end{bmatrix}, \\
[Q_{131} \mid Q_{132}] &= \begin{bmatrix} -0,6056 & 0,0763 & -0,6048 & 0,0522 \\ 0,0781 & -0,0124 & 0,0539 & -0,0112 \end{bmatrix}, \\
[Q_{133} \mid Q_{134}] &= \begin{bmatrix} -0,6072 & 0,0521 & -0,6097 & 0,0734 \\ 0,0529 & -0,0113 & 0,0725 & -0,0139 \end{bmatrix}, \\
[Q_{141} \mid Q_{142}] &= \begin{bmatrix} -0,6079 & 0,0567 & -0,4065 & 0,0389 \\ 0,0598 & -0,0043 & 0,0371 & -0,0034 \end{bmatrix}, \\
[Q_{143} \mid Q_{144}] &= \begin{bmatrix} -0,4082 & 0,0375 & -0,6014 & 0,0446 \\ 0,0392 & -0,0039 & 0,0441 & -0,0058 \end{bmatrix}, \\
[Q_{211} \mid Q_{212}] &= \begin{bmatrix} 6,2874 & -0,4098 & 6,0187 & -0,4062 \\ -0,4101 & -0,0054 & -0,4078 & -0,0032 \end{bmatrix}, \\
[Q_{213} \mid Q_{214}] &= \begin{bmatrix} 5,9886 & -0,4037 & 6,2547 & -0,4079 \\ -0,4033 & -0,0031 & -0,4082 & -0,0045 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[Q_{221} \mid Q_{222}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 2,3246 & -0,2003 & 1,3167 & -0,1045 \\ -0,2047 & 0,0043 & -0,1018 & 0,0012 \end{array} \right], \\
[Q_{223} \mid Q_{224}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 1,2189 & -0,1056 & 1,9183 & -0,2078 \\ -0,1033 & -0,0007 & -0,2056 & 0,0024 \end{array} \right], \\
[Q_{231} \mid Q_{232}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 1,9974 & -0,2011 & 1,0196 & -0,1042 \\ -0,2047 & 0,0003 & -0,1012 & -0,0034 \end{array} \right], \\
[Q_{233} \mid Q_{234}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 0,8012 & -0,1065 & 1,6034 & -0,1078 \\ -0,1073 & -0,0049 & -0,1058 & -0,0015 \end{array} \right], \\
[Q_{241} \mid Q_{242}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 5,3146 & -0,4056 & 4,8079 & -0,4021 \\ -0,4069 & -0,0012 & -0,4037 & -0,0018 \end{array} \right], \\
[Q_{243} \mid Q_{244}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 4,5048 & -0,3035 & 5,1054 & -0,4087 \\ -0,3058 & -0,0005 & -0,4076 & -0,0017 \end{array} \right], \\
[Q_{311} \mid Q_{312}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 7,4793 & -0,7065 & 6,7058 & -0,7091 \\ -0,7032 & 0,0312 & -0,7089 & 0,0351 \end{array} \right], \\
[Q_{313} \mid Q_{314}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 6,4789 & -0,7023 & 7,0032 & -0,7066 \\ -0,7025 & 0,0331 & -0,7053 & 0,0314 \end{array} \right], \\
[Q_{321} \mid Q_{322}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 3,8093 & -0,3014 & 2,1012 & -0,3025 \\ -0,3023 & 0,0165 & -0,3048 & 0,0199 \end{array} \right], \\
[Q_{323} \mid Q_{324}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 1,9082 & -0,2041 & 3,2021 & -0,3043 \\ -0,2049 & 0,0161 & -0,3012 & 0,0132 \end{array} \right], \\
[Q_{331} \mid Q_{332}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 3,4032 & -0,3031 & 1,9012 & -0,2034 \\ -0,3012 & 0,0063 & -0,2013 & 0,0035 \end{array} \right], \\
[Q_{333} \mid Q_{334}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 1,7023 & -0,2023 & 2,9056 & -0,3054 \\ -0,2043 & 0,0024 & -0,3035 & 0,0043 \end{array} \right], \\
[Q_{341} \mid Q_{342}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 7,1289 & -0,7089 & 5,5067 & -0,6044 \\ -0,7053 & 0,0365 & -0,6022 & 0,0339 \end{array} \right], \\
[Q_{343} \mid Q_{344}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 5,0079 & -0,6059 & 6,6043 & -0,6087 \\ -0,6023 & 0,0361 & -0,6055 & 0,0332 \end{array} \right], \\
[Q_{411} \mid Q_{412}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} -0,3012 & -0,0221 & -0,5076 & -0,0234 \\ -0,0232 & -0,0041 & -0,0212 & -0,0023 \end{array} \right], \\
[Q_{413} \mid Q_{414}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} -0,5067 & -0,0223 & -0,4032 & -0,0219 \\ -0,0224 & -0,0018 & -0,0211 & -0,0035 \end{array} \right], \\
[Q_{421} \mid Q_{422}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} -0,1012 & -0,0123 & -0,2034 & -0,0121 \\ -0,0125 & -0,0034 & -0,0123 & -0,0021 \end{array} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[Q_{423} \mid Q_{424}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} -0,2023 & -0,0119 & -0,1012 & -0,0113 \\ -0,0118 & -0,0029 & -0,0115 & -0,0022 \end{array} \right], \\
[Q_{431} \mid Q_{432}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} -0,1023 & -0,0127 & -0,2012 & -0,0121 \\ -0,0124 & -0,0028 & -0,0123 & -0,0024 \end{array} \right], \\
[Q_{433} \mid Q_{434}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} -0,2012 & -0,0124 & -0,1023 & -0,0119 \\ -0,0126 & -0,0027 & -0,0122 & -0,0023 \end{array} \right], \\
[Q_{441} \mid Q_{442}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} -1,2043 & -0,0678 & -1,4079 & -0,0789 \\ -0,0691 & -0,0046 & -0,0776 & -0,0057 \end{array} \right], \\
[Q_{443} \mid Q_{444}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} -1,4076 & -0,0785 & -1,2023 & -0,0654 \\ -0,0789 & -0,0054 & -0,0678 & -0,0042 \end{array} \right].
\end{aligned}$$

APÊNDICE C – RESULTADOS OBTIDOS NO EXEMPLO 5

Realizou-se a simulação do sistema não linear com incertezas paramétricas, partindo das LMIs apresentadas no *Teorema 7*, cujos resultados correspondentes às matrizes M_{jkl} e Q_{ikl} são as seguintes:

$$\begin{aligned}
[M_{111} \mid M_{112}] &= \begin{bmatrix} -2,7331 & 0,2071 & -2,4633 & 0,1733 \end{bmatrix}, \\
[M_{113} \mid M_{114}] &= \begin{bmatrix} -2,3714 & 0,1588 & -2,6146 & 0,1925 \end{bmatrix}, \\
[M_{121} \mid M_{122}] &= \begin{bmatrix} -0,2137 & 0,0271 & -0,0999 & 0,0178 \end{bmatrix}, \\
[M_{123} \mid M_{124}] &= \begin{bmatrix} -0,0821 & 0,0140 & -0,1644 & 0,0220 \end{bmatrix}, \\
[M_{131} \mid M_{132}] &= \begin{bmatrix} -0,2022 & 0,0258 & -0,0725 & 0,0153 \end{bmatrix}, \\
[M_{133} \mid M_{134}] &= \begin{bmatrix} -0,0639 & 0,0126 & -0,1535 & 0,0204 \end{bmatrix}, \\
[M_{141} \mid M_{142}] &= \begin{bmatrix} -1,3526 & 0,1242 & -0,8141 & 0,0853 \end{bmatrix}, \\
[M_{143} \mid M_{144}] &= \begin{bmatrix} -0,6690 & 0,0717 & -1,1564 & 0,1079 \end{bmatrix}, \\
[M_{211} \mid M_{212}] &= \begin{bmatrix} -0,3830 & 0,0314 & -0,4013 & 0,0305 \end{bmatrix}, \\
[M_{213} \mid M_{214}] &= \begin{bmatrix} -0,4136 & 0,0285 & -0,3831 & 0,0306 \end{bmatrix}, \\
[M_{221} \mid M_{222}] &= \begin{bmatrix} -0,1769 & 0,0209 & -0,1255 & 0,0177 \end{bmatrix}, \\
[M_{223} \mid M_{224}] &= \begin{bmatrix} -0,1191 & 0,0159 & -0,1550 & 0,0186 \end{bmatrix}, \\
[M_{231} \mid M_{232}] &= \begin{bmatrix} -0,1717 & 0,0201 & -0,1008 & 0,0147 \end{bmatrix}, \\
[M_{233} \mid M_{234}] &= \begin{bmatrix} -0,0973 & 0,0127 & -0,1429 & 0,0165 \end{bmatrix}, \\
[M_{241} \mid M_{242}] &= \begin{bmatrix} -0,3314 & 0,0354 & -0,3007 & 0,0367 \end{bmatrix}, \\
[M_{243} \mid M_{244}] &= \begin{bmatrix} -0,2937 & 0,0357 & -0,3189 & 0,0348 \end{bmatrix}, \\
[M_{311} \mid M_{312}] &= \begin{bmatrix} -0,3646 & 0,0211 & -0,3653 & 0,0195 \end{bmatrix}, \\
[M_{313} \mid M_{314}] &= \begin{bmatrix} -0,3818 & 0,0182 & -0,3627 & 0,0202 \end{bmatrix}, \\
[M_{321} \mid M_{322}] &= \begin{bmatrix} -0,1544 & 0,0217 & -0,1017 & 0,0171 \end{bmatrix}, \\
[M_{323} \mid M_{324}] &= \begin{bmatrix} -0,0982 & 0,0148 & -0,1282 & 0,0185 \end{bmatrix}, \\
[M_{331} \mid M_{332}] &= \begin{bmatrix} -0,1731 & 0,0236 & -0,0805 & 0,0166 \end{bmatrix}, \\
[M_{333} \mid M_{334}] &= \begin{bmatrix} -0,0742 & 0,0132 & -0,1336 & 0,0189 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[M_{341} \mid M_{342}] &= \begin{bmatrix} -0,2748 & 0,0242 & -0,2822 & 0,0251 \end{bmatrix}, \\
[M_{343} \mid M_{344}] &= \begin{bmatrix} -0,2889 & 0,0243 & -0,2723 & 0,0237 \end{bmatrix}, \\
[M_{411} \mid M_{412}] &= \begin{bmatrix} -1,6971 & 0,1564 & -1,6512 & 0,1448 \end{bmatrix}, \\
[M_{413} \mid M_{414}] &= \begin{bmatrix} -1,7058 & 0,1387 & -1,6484 & 0,1494 \end{bmatrix}, \\
[M_{421} \mid M_{422}] &= \begin{bmatrix} -0,2160 & 0,0264 & -0,1194 & 0,0192 \end{bmatrix}, \\
[M_{423} \mid M_{424}] &= \begin{bmatrix} -0,1059 & 0,0163 & -0,1745 & 0,0223 \end{bmatrix}, \\
[M_{431} \mid M_{432}] &= \begin{bmatrix} -0,2030 & 0,0247 & -0,0854 & 0,0156 \end{bmatrix}, \\
[M_{433} \mid M_{434}] &= \begin{bmatrix} -0,0776 & 0,0131 & -0,1579 & 0,0199 \end{bmatrix}, \\
[M_{441} \mid M_{442}] &= \begin{bmatrix} -1,0383 & 0,1018 & -0,7883 & 0,0841 \end{bmatrix}, \\
[M_{443} \mid M_{444}] &= \begin{bmatrix} -0,7412 & 0,0769 & -0,9358 & 0,0930 \end{bmatrix}, \\
\\
[Q_{111} \mid Q_{112}] &= \begin{bmatrix} -1,6067 & 0,1646 & -1,0846 & 0,1193 \\ 0,1646 & -0,0090 & 0,1193 & -0,0066 \end{bmatrix}, \\
[Q_{113} \mid Q_{114}] &= \begin{bmatrix} -0,8851 & 0,1072 & -1,4510 & 0,1490 \\ 0,1072 & -0,0058 & 0,1490 & -0,0080 \end{bmatrix}, \\
[Q_{121} \mid Q_{122}] &= \begin{bmatrix} -1,3998 & 0,1420 & -1,3993 & 0,1176 \\ 0,1420 & -0,0124 & 0,1176 & -0,0087 \end{bmatrix}, \\
[Q_{123} \mid Q_{124}] &= \begin{bmatrix} -1,3971 & 0,1129 & -1,4138 & 0,1350 \\ 0,1129 & -0,0073 & 0,1350 & -0,0110 \end{bmatrix}, \\
\\
[Q_{131} \mid Q_{132}] &= \begin{bmatrix} -1,6546 & 0,1859 & -1,5618 & 0,1536 \\ 0,1859 & -0,0174 & 0,1536 & -0,0129 \end{bmatrix}, \\
[Q_{133} \mid Q_{134}] &= \begin{bmatrix} -1,5788 & 0,1492 & -1,6524 & 0,1768 \\ 0,1492 & -0,0117 & 0,1768 & -0,0158 \end{bmatrix}, \\
[Q_{141} \mid Q_{142}] &= \begin{bmatrix} -1,5023 & 0,1332 & -1,1221 & 0,0863 \\ 0,1332 & -0,0104 & 0,0863 & -0,0081 \end{bmatrix}, \\
[Q_{143} \mid Q_{144}] &= \begin{bmatrix} -1,0095 & 0,0755 & -1,3692 & 0,1168 \\ 0,0755 & -0,0076 & 0,1168 & -0,0094 \end{bmatrix}, \\
[Q_{211} \mid Q_{212}] &= \begin{bmatrix} 6,4197 & -0,4179 & 6,2117 & -0,4213 \\ -0,4179 & -0,0051 & -0,4213 & -0,0031 \end{bmatrix}, \\
[Q_{213} \mid Q_{214}] &= \begin{bmatrix} 6,1871 & -0,4109 & 6,3004 & -0,4148 \\ -0,4109 & -0,0028 & -0,4148 & -0,0043 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[Q_{221} \mid Q_{222}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 2,3054 & -0,2072 & 1,3124 & -0,1498 \\ -0,2072 & 0,0041 & -0,1498 & 0,0002 \end{array} \right], \\
[Q_{223} \mid Q_{224}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 1,1662 & -0,1353 & 1,9027 & -0,1805 \\ -0,1353 & -0,0005 & -0,1805 & 0,0024 \end{array} \right], \\
[Q_{231} \mid Q_{232}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 2,0843 & -0,1724 & 0,9850 & -0,1085 \\ -0,1724 & 0,0008 & -0,1085 & -0,0032 \end{array} \right], \\
[Q_{233} \mid Q_{234}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 0,8589 & -0,0948 & 1,6647 & -0,1444 \\ -0,0948 & -0,0040 & -0,1444 & -0,0009 \end{array} \right], \\
[Q_{241} \mid Q_{242}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 5,3022 & -0,3682 & 4,7812 & -0,3577 \\ -0,3682 & -0,0018 & -0,3577 & -0,0007 \end{array} \right], \\
[Q_{243} \mid Q_{244}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 4,5629 & -0,3385 & 5,1297 & -0,3630 \\ -0,3385 & -0,0008 & -0,3630 & -0,0012 \end{array} \right], \\
[Q_{311} \mid Q_{312}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 7,4025 & -0,7210 & 6,6877 & -0,7206 \\ -0,7210 & 0,0304 & -0,7206 & 0,0314 \end{array} \right], \\
[Q_{313} \mid Q_{314}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 6,3898 & -0,6974 & 7,0936 & -0,7093 \\ -0,6974 & 0,0301 & -0,7093 & 0,0301 \end{array} \right], \\
[Q_{321} \mid Q_{322}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 3,7872 & -0,3424 & 2,1462 & -0,2656 \\ -0,3424 & 0,0110 & -0,2656 & 0,0087 \end{array} \right], \\
[Q_{323} \mid Q_{324}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 1,8700 & -0,2423 & 3,1933 & -0,3054 \\ -0,2423 & 0,0076 & -0,3054 & 0,0092 \end{array} \right], \\
[Q_{331} \mid Q_{332}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 3,4094 & -0,2914 & 1,9057 & -0,2154 \\ -0,2914 & 0,0057 & -0,2154 & 0,0027 \end{array} \right], \\
[Q_{333} \mid Q_{334}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 1,6537 & -0,1950 & 3,1575 & -0,3183 \\ -0,1950 & 0,0067 & -0,3183 & 0,0106 \end{array} \right], \\
[Q_{341} \mid Q_{342}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 6,2177 & -0,5253 & 5,3973 & -0,4912 \\ -0,5253 & 0,0154 & -0,4912 & 0,0142 \end{array} \right], \\
[Q_{343} \mid Q_{344}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 4,9836 & -0,4409 & 5,5652 & -0,4981 \\ -0,4409 & 0,0128 & -0,4981 & 0,0152 \end{array} \right], \\
[Q_{411} \mid Q_{412}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} -5,1239 & 0,5372 & -4,7581 & 0,5289 \\ 0,5372 & -0,0148 & 0,5289 & -0,0135 \end{array} \right], \\
[Q_{413} \mid Q_{414}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} -4,7757 & 0,4889 & -4,9230 & 0,5192 \\ 0,4889 & -0,0123 & 0,5192 & -0,0121 \end{array} \right], \\
[Q_{421} \mid Q_{422}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 1,6258 & -0,1552 & 0,9173 & -0,1083 \\ -0,1552 & 0,0032 & -0,1083 & 0,0008 \end{array} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[Q_{423} \mid Q_{424}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 0,8082 & -0,0990 & 1,3731 & -0,1511 \\ -0,0990 & 0,0024 & -0,1511 & 0,0025 \end{array} \right], \\
[Q_{431} \mid Q_{432}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 1,5004 & -0,1476 & 0,8835 & -0,0944 \\ -0,1476 & 0,0030 & -0,0944 & 0,0014 \end{array} \right], \\
[Q_{433} \mid Q_{434}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 0,7252 & -0,0860 & 1,3104 & -0,1315 \\ -0,0860 & 0,0020 & -0,1315 & 0,0016 \end{array} \right], \\
[Q_{441} \mid Q_{442}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} -3,1155 & 0,3252 & -2,3850 & 0,2517 \\ 0,3252 & -0,0076 & 0,2517 & -0,0049 \end{array} \right], \\
[Q_{443} \mid Q_{444}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} -2,4162 & 0,2263 & -2,9515 & 0,2761 \\ 0,2263 & -0,0050 & 0,2761 & -0,0061 \end{array} \right].
\end{aligned}$$