

UNESP
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá

Guaratinguetá
1999



CARO LEITOR NÃO
RISQUE O LIVRO

1110000647



TAMOTSU HIRATA

EFEITO DE IMPACTO EM UM MULTICORPO BIDIMENSIONAL

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia da
Universidade Estadual "Júlio de Mesquita Filho",
Campus de Guaratinguetá, para a obtenção do
título de Livre Docência em Engenharia Mecânica

FEG - UNESP

Guaratinguetá - SP

Setembro/1999

647
E = 647
FACULDADE DE ENGENHARIA
DE GUARATINGUETÁ
BIBLIOTECA



Data: 24/1/07
Valor: R\$ 20,00
C/D/T: D 08A3
110218

Hirata, Tamotsu
H668e Efeito de impacto em um multicorpo bidimensional /
Tamotsu Hirata.- Guaratinguetá : [s.n.], 2006
74 f.: il.
Bibliografia: f. 52-56

Tese (Livre-Docência) – Universidade Estadual Paulista,
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2006

1. Impacto I. Título

CDU 531.124.7

SUMÁRIO

Resumo

Abstract

Lista de figuras

Lista de símbolos

Páginas

1. INTRODUÇÃO

1.1 Descrição da tese	1
1.2 Mecanismo de impacto	2
1.3 Teoria de multicorpos	9
1.4 Impacto em um corpo com grande movimento	12
1.5 Objetivos	14

2. AVALIAÇÃO DO MODELO DE IMPACTO

2.1 Modelo de impacto para corpo rígido	15
2.2 Modelo de impacto para corpo flexível	18
2.3 Efeito de flexibilidade na colisão	21

3. MODELOS DE MULTICORPOS COM COLISÃO

3.1 Descrição do modelo de manipulador multiarticulado	25
3.2 Modelo de multicorpos bidimensionais para corpo rígido	26



3.3 Modelo de multicorpos bidimensionais para corpo flexível	28
3.4 Modelo de multicorpos bidimensionais para corpos rígido-flexíveis	32

Resumo

4. SIMULAÇÃO

4.1 Modelo de colisão com viga engastada	35
4.2 Modelo de colisão com viga - cubo em rotação	41
4.3 Modelo de colisão com viga - corpo rígido em rotação	47

5. CONCLUSÕES	50
---------------------	----

Referências Bibliográficas	52
----------------------------------	----

Apêndice I : Desenvolvimento das equações auxiliares para o corpo rígido	57
--	----

Apêndice II : Desenvolvimento das equações auxiliares para o corpo flexível	63
---	----

Palavras-chave

Mecânica dos corpos rígidos, mecânica dos corpos flexíveis, viga em balanço, colisão, multicorpo bidimensional

Multicorpo bidimensional

Resumo

HIRATA, TAMOTSU, Efeito de impacto em um multicorpo bidimensional, Guaratinguetá, Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, 1999, 74 p, Tese (Livre Docência)

Este trabalho apresenta um estudo teórico do efeito de impacto em uma viga em rotação com característica da viga rígido-flexível. O mecanismo de impacto foi estudado para os dois corpos de aço em colisão, analisando as influências de alguns parâmetros importantes, tais como, rigidez estrutural e rigidez superficial não-linear. O modelo adotado para este trabalho foi um modelo de impacto não-linear, baseado no modelo modificado de Hunt-Clossley. As equações de movimento foram desenvolvidas com base na Teoria de Multicorpo Flexível Bidimensional, utilizando formalismo Lagrangeano. As simulações numéricas do modelo de impacto e do sistema de multicorpo foram realizadas com base no programa MATLAB. Os resultados foram apresentados em forma de variação da trajetória de alguns pontos da viga com relação ao tempo.

Palavras Chave

Mecanismo de impacto, rigidez superficial não-linear, viga em rotação rígido-flexível, sistema multicorpo bidimensional.



LISTA DE FIGURAS

Página

Abstract

HIRATA, TAMOTSU, Impact effect on a two-dimensional multibody system, Guaratinguetá, Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, 1999, 74 p, Tese (Livre Docência)

This work presents an impact analysis of the two-dimensional multibody applying for a rotating flexible multiple section beam. It was focalized for study of the impact mechanism between two steel flexible bodies. The influence of structural stiffness and non linear surface stiffness in the impact mechanism is analysed. The mathematical model for the impact mechanism is based on the energy balance method, specifically on the modified Hunt-Clossley impact model. The equation of motion is written for the two-dimensional flexible Multibody Theory with Lagrangean formulation. The numerical simulation was done by using the MATLAB software. The results are presented in terms of time-displacement history of some points of the rotating beam after collision.

Keywords

impact mechanism, non linear surface stiffness, rotating flexible-rigid beam, two-dimensional multibody system.



LISTA DE FIGURAS

	Páginas
Figura 1.1 - Ilustração das fases de colisão	4
Figura 1.2 - Colisão entre a esfera e a placa	4
Figura 1.3 - Modelos viscoelásticos de colisão	5
Figura 1.4 - Comparação dos modelos de colisão de Hunt-Clossley e Herbert-Mcwhannell ...	6
Figura 1.5 - Esquema da experiência de Igarashi	7
Figura 1.6 - Modelo de impacto com Método de Elementos Finitos (MEF), a) modelo de Wu-Huag, b) modelo de Zu	8
Figura 1.7 - Cadeias do sistema multicorpos, a) cadeia aberta, b) cadeia fechada	9
Figura 1.8 - Aplicações típicas do sistema de multicorpos, a) modelo do corpo humano, b) modelo de manipulador, c) modelo de estrutura espacial	10
Figura 2.1 - Resultados de simulação dos modelos de impacto, a) 1 ^o modelo de Yigit, b) Clossley não-linear	18
Figura 2.2 - Resultados de simulação do 2 ^o modelo de Yigit	20
Figura 2.3 - Esquema do modelo de colisão com flexibilidade	21
Figura 2.4 - Esquema do modelo modificado de colisão com flexibilidade	22
Figura 2.5 - Resultados de simulação do efeito de flexibilidade na colisão para rigidezes de a) $K_1 = K_2 = 3,83E6 [N / m]$ e, b) $K_1 = (1 / 2)K_2 = 1,915E6 [N / m]$	24
Figura 3.1 - Modelo do manipulador multiarticulado com impacto	26
Figura 3.2 - Modelo do corpo rígido com seção uniforme	27
Figura 3.3 - Coordenadas locais de corpos flexíveis	29
Figura 3.4 - Modelo do corpo flexível com seção uniforme	30
Figura 3.5 - Modelo do corpo rígido-flexível	32

Figura 4.1 - Modelo de colisão com uma viga engastada	36
Figura 4.2 - Efeito de rigidez do corpo receptor de colisão no modelo da viga engastada	37
Figura 4.3 - Deslocamentos da viga e do corpo receptor de colisão no modelo da viga engastada para : a) $K_c = 2,67E7[N / m]$, b) $K_c = 2,67E4[N / m]$	38
Figura 4.4 - Histórico da deformação superficial durante a colisão	40
Figura 4.5 - Histórico da força de impacto durante a colisão	40
Figura 4.6 - Modelo de colisão com viga-cubo em rotação	41
Figura 4.7 - Deslocamentos da extremidade livre da viga em rotação para diferentes rigidez do corpo receptor de colisão : a) $K_c = 2,67E7[N / m]$, b) $K_c = 2,67E4[N / m]$	43
Figura 4.8 - Velocidades da extremidade livre da viga em rotação para diferentes rigidezes do corpo receptor de colisão : a) $K_c = 2,67E7[N / m]$, b) $K_c = 2,67E4[N / m]$	44
Figura 4.9 - Deslocamentos da extremidade livre da viga em rotação para diferentes comprimentos da parte flexível com : a) 0,4 m, b) 0,3 m para $K_c = 2,67E4[N / m]$	45
Figura 4.10 - Deslocamentos da extremidade da viga em rotação para diferentes comprimentos da parte flexível com, a) 0,4 m, b) 0,3 m, c) 0,2 m, d) 0,1 m para $K_c = 2,67E4[N / m]$	46
Figura 4.11 - Modelo de viga-corpo rígido multicorpos	47
Figura 4.12 - Deslocamentos da viga do modelo viga-corpo rígido multicorpos em rotação para : a) comparação com modelo rígido e, b) nos diferentes pontos dos corpos rígidos	49



LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

A : matriz de rotação

a : área da viga [m^2]

C_1 : coeficiente de amortecimento do 1º modelo de Yigit [kg/m.s]

C_2 : coeficiente de amortecimento do modelo de Clossley não linear [N.s]

C_3 : : coeficiente de amortecimento do 2º modelo de Yigit [kg/s]

D : parâmetro adimensional que depende da geometria de superfície de contato

E : módulo de elasticidade de Young [Pa]

e : coeficiente de restituição

E_c : energia cinética

E_p : energia potencial

F_c : força de amortecimento do modelo de Clossley não-linear [N]

F_i : força [N]

F_1 : força de amortecimento do 1º modelo de Yigit [N]

F_2 : força de amortecimento do 2º modelo de Yigit [N]

F_e : força externa aplicada ao corpo [N]

f : força generalizada

f_R : força generalizada associada a translação

f_θ : força generalizada associada a rotação

$g(y)$: função característica superficial

GL : grau de liberdade

I : momento de inércia da viga [m^4]



K, K_1, K_2 : rigidez da mola [N/m]

K_c : rigidez do corpo receptor de impacto [N/m]

K_f : rigidez do corpo flexível

k_s : rigidez superficial [N/m]

l_f : comprimento do corpo flexível [m]

l_m : comprimento do corpo rígido [m]

L_f : vetor posição de corpo rígido-flexível com relação à coordenada local

M : matriz de massa

m, m_1, m_2 : massas de corpos utilizadas no mecanismo de impacto [kg]

m_0 : massa do cubo [kg]

m_f : massa do corpo flexível [kg]

m_r : massa do corpo rígido [kg]

m_{RR} : matriz de massa associada ao movimento de translação

$m_{R\theta}, m_{\theta R}$: matriz de massa associada ao movimento de translação e rotação

$m_{\theta\theta}$: matriz de massa associada ao movimento de rotação

n : constante que depende da curvatura superficial

PI : ponto inicial do deslocamento da massa

PF : ponto final do deslocamento da massa

Q_f : força generalizada do corpo flexível

Q_r : força generalizada do corpo rígido

Q_e : força generalizada externa

Q_i : força generalizada de impacto



Q_v : força generalizada quadrática

Q_{vf} : força generalizada quadrática relacionada ao corpo flexível

Q_{vr} : força generalizada quadrática relacionada ao corpo rígido

q_f : coordenada generalizada do corpo flexível

q_{f1}, q_{f4} : deslocamentos axiais do corpo flexível

q_{f2}, q_{f5} : deslocamentos transversais do corpo flexível

q_{f3}, q_{f6} : deslocamentos angulares do corpo flexível

q_r : coordenada generalizada do corpo rígido

R : vetor posição do ponto P em relação à coordenada referencial

R_1, R_2 : componentes do vetor posição R

r : vetor posição em relação à coordenada referencial

S : função de forma

s : distância de uma das extremidades da viga até um certo ponto na direção do comprimento
[m]

T : torque [N.m]

$T_3(\delta)$: função de amortecimento adimensional

u : comprimento adimensional do corpo flexível

U_1, U_2 : componentes da coordenada local do corpo flexível

x : vetor posição da coordenada local do corpo rígido

x_f : vetor posição da coordenada local do corpo flexível

x_c : deslocamento do corpo receptor de impacto [m]

x_1, x_2 : coordenada cartesiana local

X_1, X_2 : coordenada cartesiana referencial



y : deformação relativa [m]

y_1, y_2 : deslocamentos das massas m_1 e m_2

y_{10}, y_{20} : deslocamentos iniciais das massas m_1 e m_2

α : ângulo de inclinação em um ponto da viga com relação à coordenada local [rad]

δW : trabalho virtual

δr : deslocamento virtual

ε : valor arbitrário de deformação superficial

λ : coeficiente de amortecimento relativo do modelo de Clossley não-linear

θ : ângulo de rotação do manipulador [rad]

ω_n : frequência natural [Hz]

$'$, $''$: indicam a 1ª e 2ª derivadas parciais em relação à coordenada x

$\dot{}$, $\ddot{}$: indicam a 1ª e 2ª derivadas em relação ao tempo

CAPÍTULO 1

1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo é tratada a evolução conceitual sobre o mecanismo de impacto, onde a propagação de onda de choque e a pressão gerada no local de contato são discutidas. Posteriormente, o fundamento da teoria de multicorpo é discutida do ponto de vista histórico e da eficiência computacional. Finalmente, uma fusão das teorias de mecanismo de impacto e de multicorpo são tratados, visando à aplicação em um corpo rígido-flexível em rotação.

1.1 Descrição da tese

O presente trabalho está dividido conforme a seguir :

No capítulo 1 são apresentadas as pesquisas bibliográficas referentes ao mecanismo de impacto, teoria de multicorpos e modelos dinâmicos de colisão para um corpo com grande movimento. São apresentados os objetivos do trabalho.

No capítulo 2 é feita uma avaliação do modelo de impacto adequado para a colisão entre as superfícies plana e esférica de aço para um sistema com membros rígido-flexíveis. O modelo selecionado é utilizado na descrição das equações de movimento do sistema de colisão em questão. No capítulo 3 é feito um desenvolvimento das equações de movimento do sistema, composto de uma viga rígido-flexível em rotação, tipo multiarticulado, colidindo com a um corpo flexível. As equações são baseadas na teoria de multicorpos bidimensionais. No capítulo 4 discute-se a validade do modelo proposto através dos resultados da simulação

numérica. Foram avaliados diversos modelos simples antes de analisar o modelo descrito no capítulo 3, visando a uma avaliação sistemática de parâmetros de impacto.

No capítulo 5 são feitos comentários e apresentadas as conclusões finais.

Após o capítulo 5 são apresentadas as referências bibliográficas e os apêndices I e II, que foram utilizados para o desenvolvimento das equações de movimento para o corpo rígido e para o corpo flexível, respectivamente.

1.2 Mecanismo de impacto

O efeito de impacto sobre a característica dinâmica é um assunto importante nos projetos e controles de um sistema mecânico para alcançar a alta precisão de performance. Durante as operações de mecanismos as folgas nas articulações podem ocasionar impactos, Dubowsky (1975). Os mecanismos intermitentes que operam com velocidades descontínuas envolvem forças impulsivas, Wehage (1982). A outra fonte de impacto é o contato com outros corpos durante as operações de manipuladores ou máquinas operatrizes, Parker (1987). Estas pesquisas foram baseadas na análise de impactos em corpos rígidos.

O mecanismo de impacto em termos de resposta do material e da estrutura com relação a cargas impulsivas, em geral, é bastante complexo, não somente pela variedade das cargas, mas também devido a geometria dos corpos e da característica da microestrutura. Esta complexidade aumenta à medida que a intensidade das cargas impulsivas cresce, atingindo a região plástica ou alcançando as grandes deformações até chegar a uma ruptura dos materiais envolvidos. Quando as intensidades de cargas impulsivas aumentam, as deformações superficiais tendem a se localizar em uma pequena região. Neste caso, a influência da



característica da microestrutura do material predomina às respostas de forças de contato do que a variação da geometria dos corpos, Zukas (1982).

A fim de descrever o fenômeno de impacto, a Teoria de Elasticidade indica o uso de propagação de ondas longitudinal ou transversal para um corpo isotrópico. Entretanto, nas colisões reais ocorre um distúrbio da onda pela transferência de uma parte da energia de colisão em forma de calor através do atrito interno das microestruturas. As discussões sobre o assunto encontram-se detalhadas nas referências de Kolsky (1963) e Achenbach (1975).

As experiências baseadas na propagação de ondas em uma barra, unidimensional, ou em uma placa, bidimensional, são tratadas na referência de Goldsmith (1960). Nesta, uma importante constatação sobre a propagação de ondas nos corpos sólidos foi revelada. Uma das revelações é que se a intensidade da carga impulsiva for suficientemente grande ou a duração de impacto for suficientemente pequena, as características do material sólido se assemelharão às do fluido. Neste caso, a onda transversal não deve existir e a onda longitudinal será propagada acompanhada de uma pressão extremamente alta. Experimentos neste regime envolveram tipicamente explosão com ruptura dos materiais, onde a tensão aplicada ao material excedia uma tensão resistiva com ordem de dezenas ou centenas de vezes maiores.

O estudo de colisão em material isotrópico com velocidade de impacto relativamente baixa, que não caracteriza explosão, é baseado na identificação da pressão gerada na superfície da colisão e na determinação da tensão interna correspondente. A figura 1.1 mostra a ilustração das fases de colisão. Em geral, a análise da colisão assume que a colisão seja elástica ou viscoelástica. É assumido também que, a duração do impacto é relativamente longa se comparada com o tempo de transmissão da onda de choque, e ainda mais, que a direção da carga impulsiva é normal à superfície de contato.



Figura 1.1 : Ilustração das fases de colisão

Os parâmetros importantes de colisão, tais como, tempo de contato, área de contato e a pressão gerada na superfície de contato, são objetos de estudo de Goldsmith para analisar as relações entre a força de impacto F_i [N] e a deformação superficial δ [m], como mostram os desenhos ilustrativos da figura 1.2. Neste estudo, foi revelado que a importância das vibrações elásticas dos corpos em colisão cresce à medida que a espessura da placa diminui. Este resultado abriu um caminho de estudo para a colisão de um corpo flexível, pois, até então, o estudo da colisão era focalizado apenas na deformação local dos corpos na região de contato, conhecido pelo modelo de contato de Hertz.

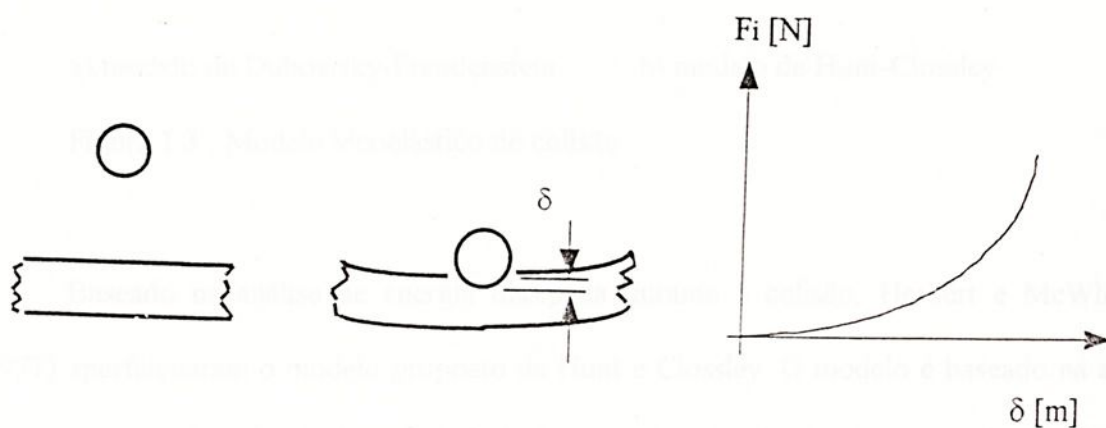
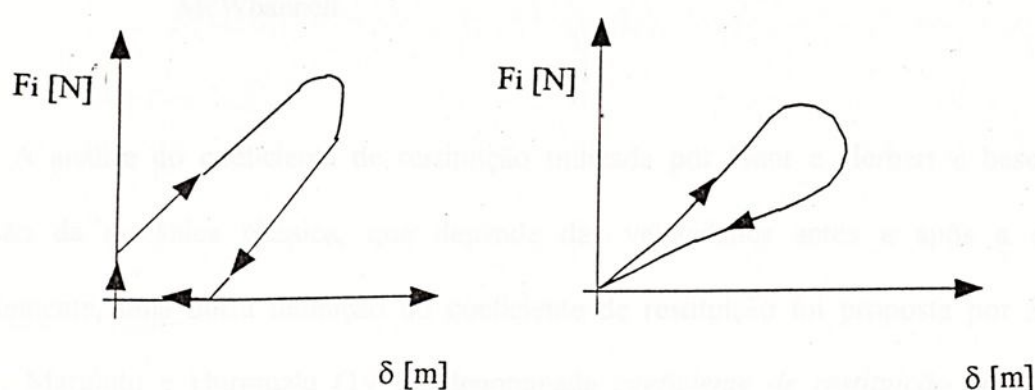


Figura 1.2 : Colisão entre a esfera e a placa

Por outro lado, foi revelado por Hunter (1957) que, no caso dos corpos possuírem alto módulo de elasticidade, como os aços, a deformação local no ponto de contato é predominante

onde o processo de deformação é inelástico. A viscoelasticidade da superfície de contato foi explorada por Hunt e Clossley (1975) através da análise do coeficiente de restituição. O modelo é baseado na viscoelasticidade de Kevin-Voigt e a equação de movimento é formulada através do estudo de energia durante a colisão. O resultado apresentado em forma de gráfico (força de contato / deformação superficial) no caso da colisão entre a esfera e a base plana, de aço, demonstra a coerência do modelo em relação ao modelo proposto por Dubowsky (1971), figura 1.3.



a) modelo de Dubowsky-Freudenstein

b) modelo de Hunt-Clossley

Figura 1.3 : Modelo vicoelástico de colisão

Baseado na análise de energia dissipada durante a colisão, Herbert e McWhannell (1977) aperfeiçoaram o modelo proposto de Hunt e Clossley. O modelo é baseado na análise da resposta em frequência de um sinal de impacto ideal, cuja função é o pulso de delta de Dirac. A energia dissipativa encontrada é significativamente maior se comparada com a do modelo de Hunt e Clossley, como mostra a figura 1.4.

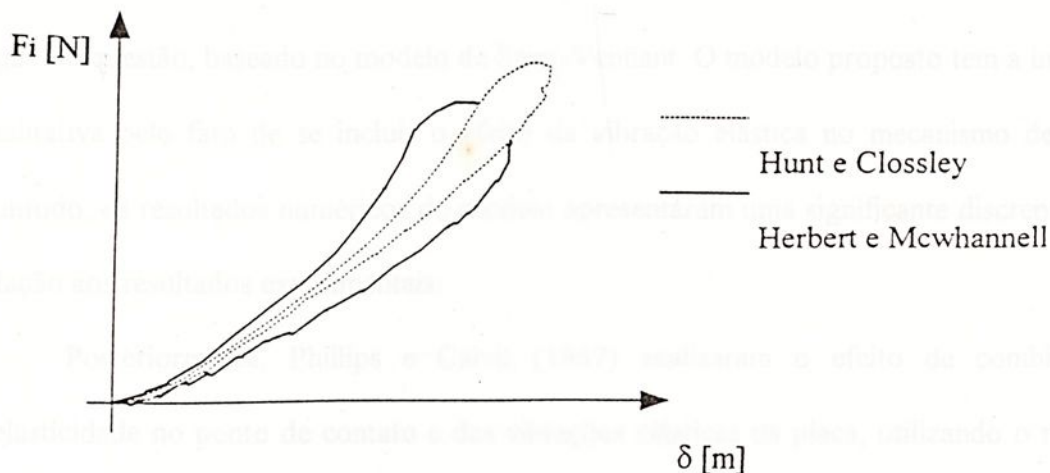


Figura 1.4 : Comparação dos modelos de colisão de Hunt-Clossley e Herbert-McWhannell.

A análise do coeficiente de restituição utilizada por Hunt e Herbert é baseada na definição da mecânica clássica, que depende das velocidades antes e após a colisão. Recentemente, uma outra definição do coeficiente de restituição foi proposta por Stronge (1990), Marghitu e Hurmuzlu (1995), denominada *coeficiente de restituição energético*, baseada na hipótese de amortecimento interno durante a colisão. Esta nova definição surgiu devido a demonstração dos trabalhos de Kane e Levinson (1985), Brach (1989) e Smith (1991), os quais comprovaram que, quando a colisão envolve a fricção, a energia dissipada é alterada de acordo com a magnitude da velocidade na direção tangente à superfície de contato. Consequentemente o valor do coeficiente de restituição dependerá da velocidade na direção normal à superfície de contato.

Na tentativa de analisar o efeito de vibrações elásticas no corpo flexível junto a deformação superficial local, Bannhart e Goldsmith (1957) estudaram as tensões superficiais durante a colisão entre uma esfera e uma viga simplesmente apoiada. Eles consideraram a deformação em redor do ponto de contato como inelástica e, também as vibrações elásticas da

viga em questão, baseado no modelo de Saint-Venant. O modelo proposto tem a importância qualitativa pelo fato de se incluir o efeito da vibração elástica no mecanismo de impacto. Contudo, os resultados numéricos do modelo apresentaram uma significativa discrepância com relação aos resultados experimentais.

Posteriormente, Phillips e Calvit (1967) analisaram o efeito de combinação da inelasticidade no ponto de contato e das vibrações elásticas da placa, utilizando o modelo de placa de Zener (1941) juntamente ao modelo de contato de Hunter. Eles adotaram os parâmetros fáceis de serem medidos nos experimentos, tais como, tempo de contato e coeficiente de restituição. A validade do modelo proposto foi verificada por Igarashi (1985) para a colisão entre a placa de aço e as esferas de diversos materiais, tais como, aço, plástico e borracha, com diâmetros variados. As experiências foram baseadas nas medidas de propagação de ondas após a colisão, utilizando para isto um microfone localizado atrás da placa e um acelerômetro instalado na placa, como mostra a figura 1.5.

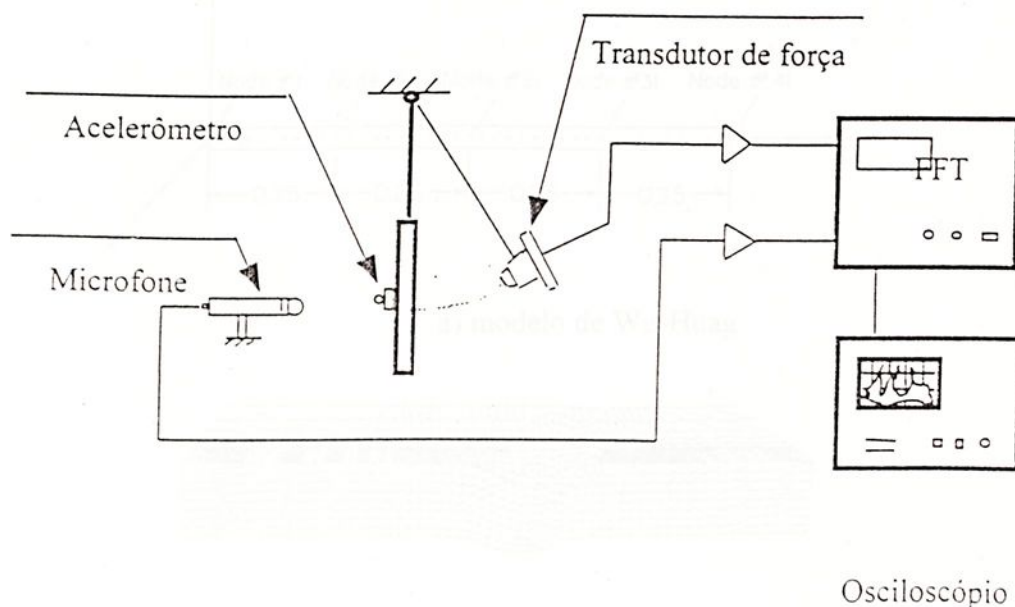
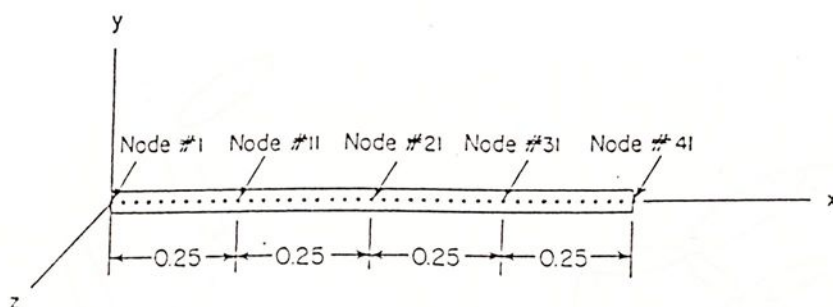


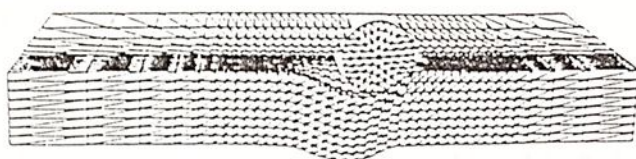
Figura 1.5 : Esquema da experiência de Igarashi

A tentativa de aperfeiçoar o modelo matemático de colisão foi feito por Lee (1983). O modelo incrementa a discretização de massas do corpo de colisão para atender a variação geométrica dos corpos, apresentando a coerência dos resultados numéricos obtidos comparados aos modelos de Timoshenko (1913) e Eringen (1950). Um trabalho semelhante, porém, mais complexo do que o trabalho de Lee, foi apresentado por Lin e Ho (1991) para testar a validade do modelo em termos da limitação da velocidade de colisão, especialmente para aqueles materiais que envolvem as altas pressões de contato durante a colisão. Os resultados em termos da força de contato e deformação superficial apresentaram coerências com relação aos resultados experimentais.

Quanto a eficiência computacional e a precisão nos resultados de simulação, o método de elementos finitos (MEF) foi aplicado para um sistema de colisão com corpo flexível. Alguns destes modelos encontram-se na figura 1.6, respectivamente, Wu e Haug (1990), na figura 1.6a e Zukas (1982), na figura 1.6b.



a) modelo de Wu-Huag



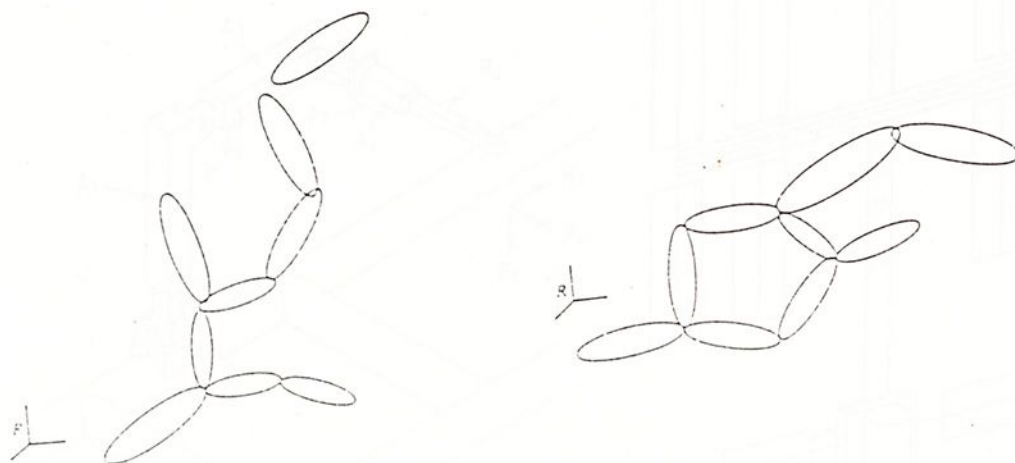
b) modelo de Zukas

Figura 1.6 : Modelos de impacto com método de elementos finitos (MEF)

1.3 Teoria de Multicorpos

A aplicação da teoria de multicorpos cresce a cada dia, em todas as áreas de engenharia, juntamente com o crescimento da área de informática. A atenção recebida pela teoria assemelha-se à introdução do Método de Elementos Finitos, na década de setenta, Shabana (1989).

Um sistema multicorpo é definido por Shabana, e consiste em vários corpos rígidos ou deformáveis interconectados que, em geral, é acompanhado de um grande deslocamento translacional ou rotacional. Portanto, os corpos que formam o sistema multicorpo são interligados e o movimento de um componente é influenciado pelo movimento do outro, criando uma cadeia aberta ou fechada, como mostra a figura 1.7. Com esta definição, muitos sistemas mecânicos ou estruturais, tais como, veículo, estruturas espaciais, manipuladores robóticos, mecanismos, etc. podem ser tratados como multicorpos.

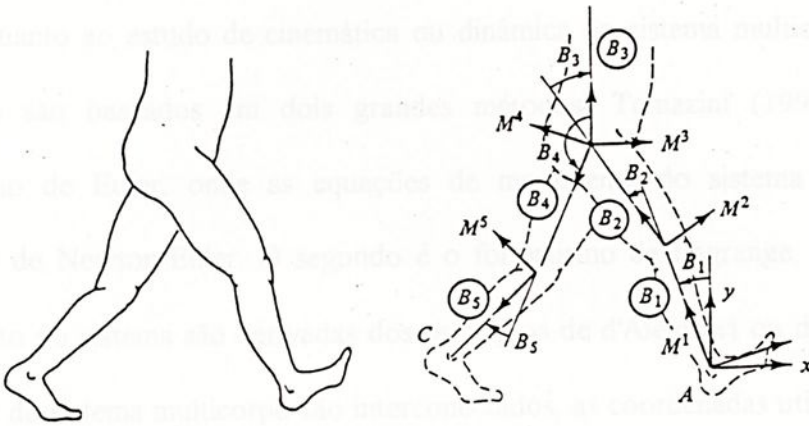


a) cadeia aberta

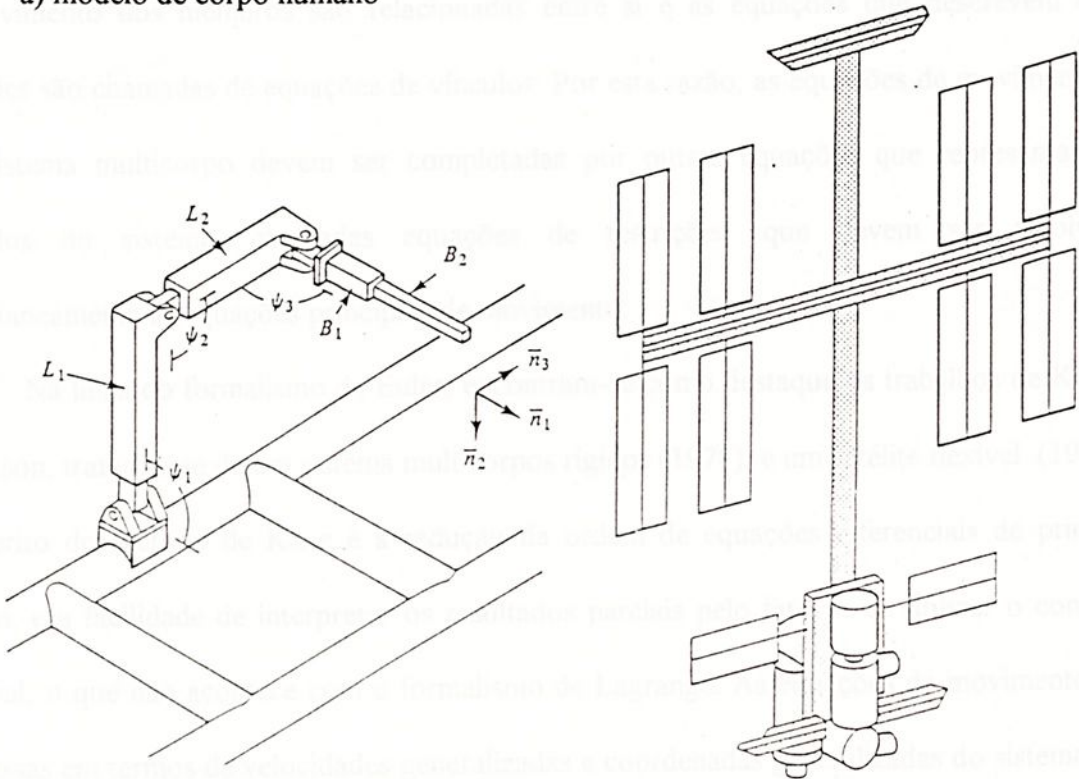
b) cadeia fechada

Figura 1.7 : Cadeias do sistema multicorpo

A crescente evolução da teoria de multicorpos na área de engenharia tem sido motivada pelo grande interesse em projetos e simulações de sistema de grande escala, envolvendo um movimento relativamente grande de seus componentes que, por sua vez, necessitam de milhares de equações diferenciais para descrever os movimentos do sistema. Algumas aplicações típicas do sistema multicorpos são ilustradas na figura 1.8.



a) modelo de corpo humano



b) modelo de manipulador

c) modelo de estrutura espacial

Figura 1.8 : Aplicações típicas do sistema de multicorpo, Amirouch (1992).

Recentemente, tem sido focalizado com grande ênfase o projeto de sistemas com altas velocidades de operação, estruturas leves e de precisão, visando ao aumento da qualidade dos produtos e da produção. Com a tendência do uso das estruturas leves com altas velocidades, o interesse em utilizar o modelo de multicorpo com corpos flexíveis é crescente nas últimas décadas, Amirouch (1992).

Quanto ao estudo de cinemática ou dinâmica do sistema multicorpo, os formalismos utilizados são baseados em dois grandes métodos, Tomazini (1996). O primeiro é o formalismo de Euler, onde as equações de movimento do sistema são deduzidas pelas equações de Newton-Euler. O segundo é o formalismo de Lagrange, onde as equações de movimento do sistema são derivadas dos princípios de d'Alembert ou de Hamilton. Como os membros do sistema multicorpo são interconectados, as coordenadas utilizadas para descrever o movimento dos membros são relacionadas entre si e as equações que descrevem estas relações são chamadas de equações de vínculos. Por esta razão, as equações de movimento de um sistema multicorpo devem ser completadas por outras equações que representam os vínculos do sistema, chamadas equações de restrições, que devem ser resolvidas simultaneamente às equações principais de movimento.

Na linha do formalismo de Euler, encontram-se como destaque os trabalhos de Kane e Levinson, tratando-se de um sistema multicorpos rígidos (1978), e um satélite flexível (1980). O mérito do método de Kane é a redução da ordem de equações diferenciais de primeira ordem, e a facilidade de interpretar os resultados parciais pelo fato de se utilizar o conceito vetorial, o que não acontece com o formalismo de Lagrange. As equações de movimento são expressas em termos de velocidades generalizadas e coordenadas generalizadas do sistema e, o número de equações diferenciais que descrevem o movimento é igual ao número de graus de liberdade (GL) do sistema. Muitos dos trabalhos em multicorpos são baseados nos trabalhos de

Kane, Huston (1979), Kamman (1984), Wang (1988), Ider (1989), Smith (1991), Amirouche (1992), Buffinton (1992), Tomazini (1996).

Na linha do formalismo de Lagrange encontram-se os trabalhos de Shabana (1986a, 1986b, 1989, 1990), utilizando o princípio de d'Alembert junto ao conceito de trabalho virtual e deslocamento virtual. Neste caso, as equações de movimento são expressas em termos de coordenadas generalizadas e forças generalizadas. As equações de vínculos que descrevem as diversas juntas mecânicas são adicionadas ao sistema de equações diferenciais através dos multiplicadores de Lagrange. Quando se tratam de corpos elásticos são, normalmente, discretizados utilizando os métodos clássicos de aproximação, tais como, Rayleigh-Ritz, Galerkin, ou método dos Elementos Finitos. Baseados nos trabalhos de Shabana foram apresentados diversos trabalhos como, Khulief (1986a), Chang (1989), Blajer (1993), Boutaghou (1993), Vukasovic (1993), Fallahi (1995).

1.4 Impacto em um corpo com grande movimento

O efeito de flexibilidade dos corpos envolvidos em colisão tem sido objeto de recentes pesquisas, iniciadas por Dubowsky e Freudenstein (1971), analisando os mecanismos de barras flexíveis com movimentos intermitentes. O trabalho Dubowsky utiliza o modelo de impacto que considera a rigidez superficial linear com amortecimento viscoso e as equações de movimento do sistema foram descritas por formalismo Lagrangeano.

Yigit et al. (1990) analisaram o efeito de impacto em uma viga flexível em rotação, utilizando o modelo de mola-amortecedor para o mecanismo de impacto. Este modelo baseia-se no método da análise de quantidade de movimento, Lee et al., utilizando o coeficiente de



restituição variável de acordo com a flexibilidade da viga e da característica superficial de contato.

A associação da teoria de multicorpos e do mecanismo de impacto é objeto de pesquisas recentes. No trabalho de Khulief e Shabana (1986b,1987) o efeito de impacto é tratado através da introdução do coeficiente de amortecimento, cujo valor é determinado pela relação da balança de energia e as massas efetivas de colisão de um corpo flexível. Neste trabalho, as equações de movimento foram descritas pela coordenada elástica modal associada à coordenada generalizada com base no formalismo Lagrangeano. Os resultados numéricos foram avaliados para um sistema de mecanismo da biela-manivela e trem de pouso.

Com base no trabalho de Khulief e Shabana, Lankarini (1990) desenvolveu um modelo de multicorpo com impacto para as superfícies esféricas de colisão. Neste modelo, o mecanismo de impacto é baseado na teoria de contato de Hertz para estimar a função histerese do amortecimento durante a colisão. É importante revelar que tanto no modelo de Khulief quanto no modelo de Lankarini utilizou-se força de contato contínua associada ao movimento grande de multicorpo. Para isto, o instante da colisão foi determinado de acordo com as condições iniciais do sistema e, durante a colisão, as velocidades e as forças generalizadas foram determinadas para conhecer os movimentos posteriores do sistema.

No trabalho de Tavares (1998) foi proposto um modelo de multicorpos rígidos com colisão, baseado na equação de Maggi-Kane para descrever as equações de movimento. O problema do choque é descrito em termos de impulsos e percussões de modo a se obter uma condição de salto nas velocidades antes e após a colisão. O modelo foi avaliado para o problema da colisão entre o pêndulo duplo e o obstáculo plano. A colisão foi tratada como sendo instantânea, pontual e em um ponto conhecido.



1.5 Objetivos

Os objetivos deste trabalho consistem em :

- desenvolver um modelo dinâmico para um manipulador flexível, tipo multiarticulado com característica dos membros rígido-flexíveis, baseado na teoria de multicorpos bidimensionais ;
- avaliar um mecanismo de impacto adequado para a colisão entre as superfícies plana e esférica, de aço, com velocidade de colisão relativamente baixa que não provoca a deformação plástica ;
- avaliar a validade do modelo proposto através da simulação numérica.

CAPÍTULO 2

2. AVALIAÇÃO DO MODELO DE IMPACTO

Neste capítulo são apresentadas discussões sobre a validade dos modelos de impacto para corpos rígidos e flexíveis. As superfícies de colisão plana-esférica, de aço, são adotadas para a análise.

2.1 Modelo de impacto para corpo rígido

De acordo com os experimentos realizados por Goldsmith, foi esclarecido que a característica superficial do material é o fator predominante para a colisão entre os corpos rígidos com velocidades de impacto relativamente baixas. Em outras palavras, a relação entre a força de impacto e a deformação superficial no local de contato é um parâmetro fundamental para determinar a característica da colisão dos corpos rígidos. Por outro lado, Hunt demonstrou que a colisão envolvendo a alta pressão de contato, como no caso da colisão entre os materiais de aço, apresenta característica superficial não-linear.

De acordo com as pesquisas bibliográficas descritas no capítulo 1, as condições que mais se assemelham a este trabalho são os trabalhos de Yigit, onde se analisam dois modelos de impacto, rígido e flexível. As semelhanças das condições referidas deste trabalho são : a) grande movimento da viga em rotação colidindo com um corpo; b) superfícies de contato são plana-esférica; c) materiais dos corpos de colisão são de aços; d) velocidades de colisão são relativamente baixas. O modelo dinâmico de Yigit , denominado "modelo de mola - amortecimento", é baseado no trabalho de Wang, ou seja na determinação da força de impacto



com coeficiente de amortecimento não-linear e é dividido em dois diferentes modelos de amortecimentos. Os modelos necessitam de dados experimentais do coeficiente de restituição para determinar os parâmetros da função de amortecimento.

O primeiro modelo de Yigit, modelo para corpo rígido, é simples de aplicação, com menor número de parâmetros envolvidos, porém, pode causar instabilidade no sistema, segundo o pesquisador. Neste modelo a força de amortecimento F_1 [N] é definida por

$$F_1 = C_1 \delta \dot{\delta} \quad (2.1)$$

onde, δ é a deformação superficial [m], $\dot{\delta}$ é a velocidade de colisão [m/s], C_1 é o coeficiente de amortecimento com

$$C_1 = 0,75\alpha_1 k_s \text{ [Ns/m}^2\text{]} \quad (2.2)$$

e α_1 depende de dados experimentais [s/m] e é determinado ajustando-se às curvas experimentais do coeficiente de restituição, que depende dos materiais e das velocidades de colisão, k_s é a rigidez superficial [N/m].

Um outro modelo de impacto semelhante ao modelo de Yigit, porém, utilizando menos parâmetros para determinar a força de amortecimento, proposto por Herbert, é denominado modelo de Clossley não-linear. O modelo é baseado no balanço da energia durante a colisão, inicialmente proposto por Hunt e Clossley e modificado por Herbert para atender ao impacto moderado com faixa de velocidade relativamente baixa, menor que 1,5 [m/s]. No modelo de Clossley não-linear a força de amortecimento F_c [N] é definida por

$$F_c = C_2 \delta^n \dot{\delta} \quad (2.3)$$

onde C_2 é o coeficiente de amortecimento e o valor de n depende das superfícies de contato, com $n = 1$ para as superfícies plana-plana, $n = 1,1$ para as superfícies plana-cilíndrica, $n = 1,5$ para as superfícies plana-esférica.

$$C_2 = \frac{3}{4} k_s (1 - e^2) / \dot{\delta} \quad (2.4)$$

$$e = 1 - 0,26 \dot{\delta}^{1/3}$$

e é o coeficiente de restituição, adaptado pelos dados experimentais de Goldsmith para a colisão de aço.

Na figura 2.1 apresentam-se os resultados da simulação numérica dos modelos de impacto, utilizando as seguintes condições :

- materiais : aço
- velocidade de impacto de 1,0 [m/s]

Os dados utilizados são ; massa $m = 0,1$ [kg], $k_s = 3,8 \text{ E}8$ [N/m], $\alpha_1 = 0,08$ [s/m], $C_1 = 5,66 \text{ E}7$ [kg/m.s] com as condições iniciais de $\delta_0 = 0$ [m] e $\dot{\delta}_0 = 1,0$ [m/s]. As integralizações da equação de movimento foram realizadas utilizando o método de Runge-Kutta de 5ª ordem.

Observa-se pelas figuras 2.1a e 2.1b que as curvas para os parâmetros de $n = 1$ e $n = 1,1$ são bem semelhantes, no entanto, para $n = 1,5$, apresentam características diferentes de curvas entre os dois modelos comparados. Principalmente, na fase de relaxamento, compreendida a fase de restauração da deformação superficial, o modelo de Yigit com $n = 1,5$ apresenta a característica bem diferente com relação à fase de compressão, compreendida a fase entre o início de contato até atingir a deformação máxima. É importante revelar que esta característica é típica do modelo com deformação plástica, diferenciando do modelo de

Clossley não-linear que apresenta característica viscoelástica para os valores de n variando de 1 a 1,5. Foi referido que a faixa de velocidade de colisão utilizada na simulação deste trabalho é relativamente baixa (1,0 [m/s]), e os resultados experimentais de Hirata (1988) confirmaram que não foi revelada deformação plástica significativa para as condições de impacto estabelecidas.

As comparações feitas entre os resultados de simulação e os dados experimentais de Hirata apresentaram as seguintes respostas : a) no caso do 1o. modelo de Yigit, a média das deformações máximas alcançadas foi na faixa de 30 % e; b) no caso do modelo de Clossley não-linear, a mesma foi na faixa de 85 %, com os dados de $n = 1,5$. Este fato implica a não adequabilidade do modelo de Yigit para as condições estabelecidas neste trabalho.

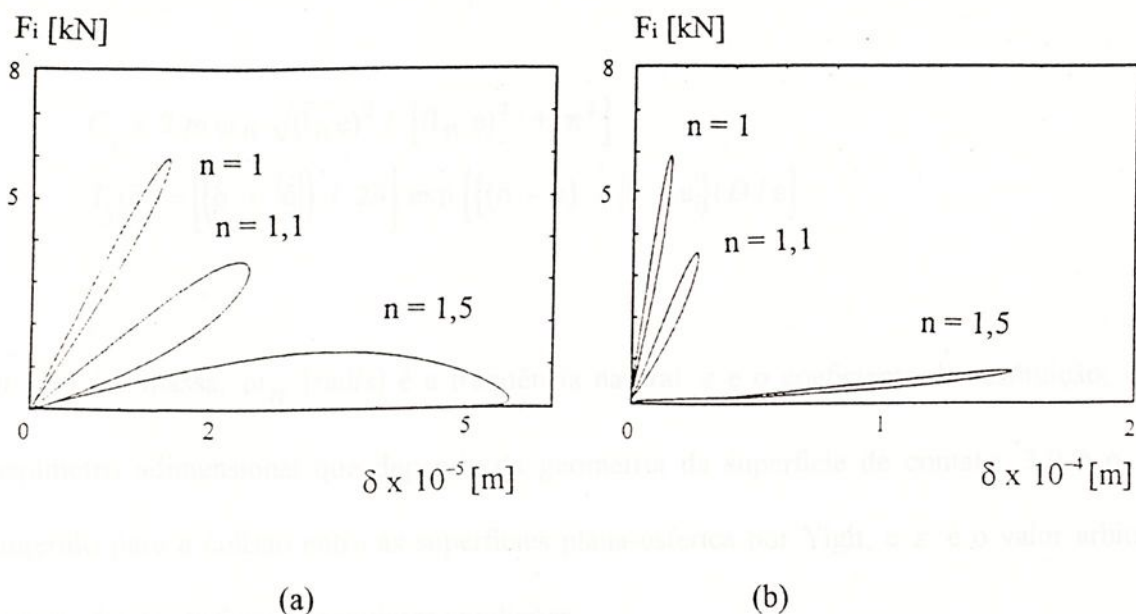


Figura 2.1 : Resultados de simulação dos modelos de impacto para : a) 1o modelo de Yigit; b) Clossley não-linear

2.2 Modelo de impacto para corpo flexível

O segundo modelo de Yigit é proposto para atender aos modelos de colisão para corpos flexíveis e também a fim de eliminar a instabilidade detectada no 1º modelo. O modelo utiliza o coeficiente de amortecimento, que depende da frequência natural dos corpos em colisão.

A força de amortecimento F_2 [N] do segundo modelo de Yigit é definida por

$$F_2 = C_3 T_3(\delta) \dot{\delta} \quad (2.5)$$

onde C_3 [kg/s] é o coeficiente de amortecimento, $T_3(\delta)$ é a função de amortecimento adimensional e são definidos por

$$C_3 = 2 m \omega_n \sqrt{(\ln e)^2 / [(\ln e)^2 + \pi^2]} \quad (2.6)$$

$$T_3(\delta) = \left[(\delta + |\dot{\delta}|) / 2\delta \right] \exp \left[\{(\delta - \varepsilon) - |\delta - \varepsilon|\} (D / \varepsilon) \right]$$

m [kg] é a massa, ω_n [rad/s] é a frequência natural; e é o coeficiente de restituição; D é o parâmetro adimensional que depende da geometria da superfície de contato; 3,0 é o valor sugerido para a colisão entre as superfícies plana-esférica por Yigit, e ε é o valor arbitrário, porém, deve satisfazer as seguintes condições :

$$0 \leq \varepsilon \leq \delta_{max} , \quad C_3 T_3(\delta) \dot{\delta} + k_s \delta^{3/2} \geq 0 \quad (2.7)$$

A fim de comparar os modelos de impacto para corpo rígido descritos na seção 2.1, foi simulado o 2º modelo de Yigit com as mesmas condições de impacto da figura 2.1, exceto os dados de $C_3 = 800 \text{ [kg/s]}$, $D = 3,0$, $\varepsilon = 2E-6 \text{ [m]}$. Na figura 2.2 encontram-se os resultados de simulação do 2º modelo de Yigit, baseados na força de amortecimento da equação 2.5. Lembrando que o 2º modelo de Yigit foi desenvolvido para atender a possível instabilidade no multi-impacto, nesta simulação os dois modelos de Yigit não apresentaram a instabilidade durante a avaliação. Por outro lado, pela figura 2.2 foi constatado que as curvas do 2º modelo de Yigit assemelham-se às do modelo de Dubowsky, porém, mais coerentes com os resultados experimentais de Goldsmith para $n = 1,0$ e $n = 1,1$. Contudo, como foi discutido na seção 2.1 o modelo de Yigit apresenta uma grande deformação plástica para as superfícies de contato plana-esférica. Esta tendência permaneceu também no 2º modelo de Yigit.

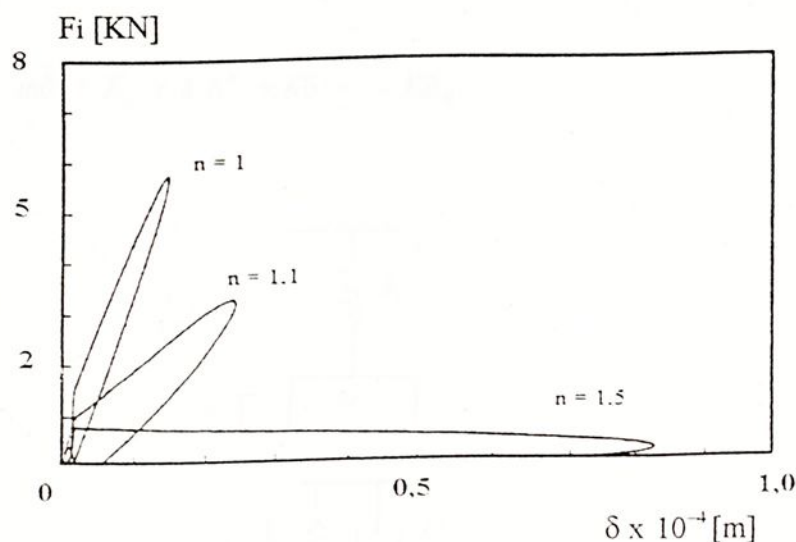


Figura 2.2 : Resultados de simulação do 2º modelo de Yigit

Apesar de o modelo de Clossley não-linear, apresentado na seção 2.1 ser desenvolvido para atender a colisão entre os corpos rígidos, sua utilização para avaliar a colisão entre uma esfera de aço e um disco flexível apresentou resultados satisfatórios, de acordo com os dados de Hirata. As avaliações foram feitas tanto na intensidade da deformação máxima quanto na forma de curva característica das forças de contato com relação às deformações superficiais. Por este motivo, o modelo de Clossley não-linear foi adotado para este trabalho como modelo de impacto ideal para as condições estabelecidas.

2.3 Efeito de flexibilidade na colisão

O efeito de flexibilidade na colisão foi analisado por Yigit com modelo simplificado para verificar a influência do coeficiente de restituição. A figura 2.3 apresenta o esquema do modelo adotado por Yigit.

A equação de movimento para este modelo pode ser escrita

$$m\ddot{\delta} + F_c + k_s \delta^n + K\delta = -K\delta_0 \quad (2.8)$$

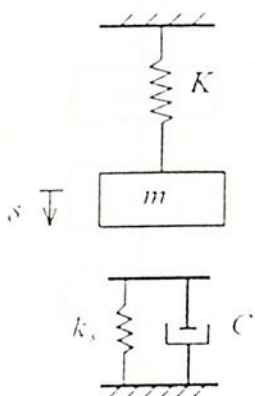


Figura 2.3 : Esquema do modelo de colisão com flexibilidade

onde m [kg] é a massa do corpo flexível; K é a rigidez do corpo flexível; δ [m] é o deslocamento ou deformação superficial da massa; δ_0 [m] é o deslocamento inicial da massa; $\ddot{\delta}$ [m/s²] é a aceleração da massa; F_c [N] é a força de amortecimento da equação 2.3; k_s [N/mⁿ] é a rigidez superficial e o valor de n depende da forma geométrica da superfície de contato.

Para a realização da simulação numérica foram utilizados os mesmos dados da figura 2.1, exceto os seguintes parâmetros : $K = 0,1 k_s$ e $K = 0,01 k_s$. No entanto, como o tempo de contato foi muito curto, aproximadamente 0,48 ms, não foi revelada influência significativa de flexibilidade. Nesta simulação, o coeficiente de restituição inicialmente utilizado de acordo com a equação 2.4 foi comparado ao coeficiente de restituição calculado no final da simulação e quando a diferença era superior ao valor estabelecido, adotava-se o último valor calculado para reiniciar a próxima etapa da simulação.

Por outro lado, o modelo da figura 2.3 não considera a flexibilidade do corpo receptor de colisão, tal como foi idealizado o sistema de colisão para este trabalho, descrito no capítulo 3. O modelo esquemático com influência de flexibilidade do corpo receptor pode ser visto na figura 2.4.

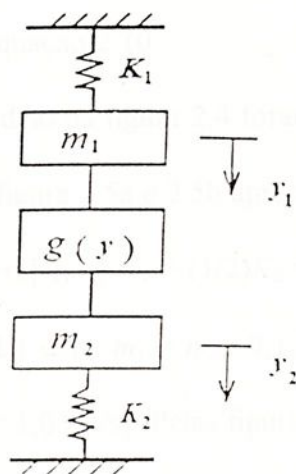


Figura 2.4 : Esquema do modelo modificado de colisão com flexibilidade

As equações de movimento do modelo da figura 2.4 podem ser escritas :

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + g(y_1 - y_2) + K_1 y_1 &= -K_1 y_{1,0} \\ m_2 \ddot{y}_2 + g(y_2 - y_1) + K_2 y_2 &= -K_2 y_{2,0} \\ (y_1 - y_2) &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde m_1 e m_2 [kg] são massas dos corpos flexíveis; y_1 e y_2 [m] são deslocamentos das massas m_1 e m_2 respectivamente; $y_{1,0}$ e $y_{2,0}$ [m] são deslocamentos iniciais das massas m_1 e m_2 respectivamente; K_1 e K_2 [N/m] são rigidezes dos corpos flexíveis e $g(y)$ é a função característica superficial, e pode ser determinada por

$$\begin{aligned} g(y) &= (\lambda \dot{y} + ky) y^n \quad \text{com } y = y_1 - y_2 \text{ (m)} \\ \lambda &= \frac{3}{4} k_s (1 - e^2) / \dot{y}_0 \text{ (Ns/m}^2\text{)} \\ e &= 1 - 0,26 \dot{y}^{1/3} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Como o modelo de colisão de Yigit revelou que não é adequado para as condições deste trabalho, foi adotada uma força de amortecimento da equação 2.3 e a força de impacto determinada então pela equação 2.10.

Para avaliar o modelo da figura 2.4 foram utilizadas as equações 2.9 e 2.10, variando-se rigidez dos corpos. A figura 2.5a e 2.5b apresentam os resultados de simulação para a) $K_1 = K_2 = 0,01k = 3,83E6$ [N/m] e, b) $K_1 = (1/2)K_2 = 1,915E6$ [N/m]. Os demais dados são iguais aos utilizados da figura 2.1 com; $m_1 = m_2 = 0,1$ [kg], $\lambda = 1,02E8$ [Ns/m²] e condições iniciais de $y_1 = y_2 = \dot{y}_2 = 0$, $\dot{y}_1 = 1,0$ [m/s]. Pelas figuras 2.5a e 2.5b pode-se observar que os pontos iniciais (PI) e finais (PF) não coincidem devido a existência de flexibilidade no corpo receptor de impacto. Esta tendência de afastamento de pontos iniciais e finais aumenta à medida que

diminui a rigidez do corpo receptor, o que pode-se observar nitidamente pela comparação das figuras. A consideração desta diferença no modelo é importante não somente para detectar as características da colisão, mas também para obter os movimentos precisos após a colisão. Principalmente, quando se trata de múltiplo impacto onde as colisões sucessivas dependem da posições relativas dos corpos de colisão.

A força de impacto analisada neste capítulo será transformada em força generalizada de impacto, a fim de ser utilizada no modelo dinâmico de multicorpos descrito no capítulo 3.

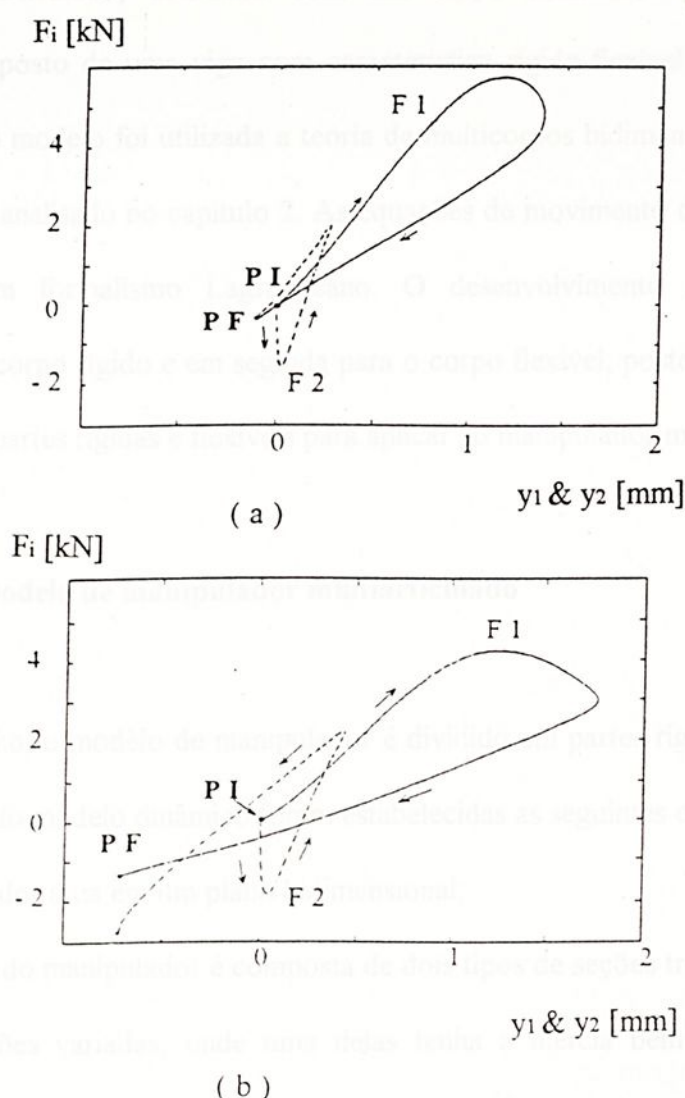


Figura 2.5 : Resultados de simulação do efeito de flexibilidade na colisão para rigidez

de a) $K_1 = K_2 = 3,83E6$ [N/m] e, b) $K_1 = (1/2)K_2 = 1,915E6$ [N/m]

CAPÍTULO 3

3. MODELOS DE MULTICORPOS COM COLISÃO

Neste capítulo são apresentados desenvolvimentos dos modelos dinâmicos de manipulador multiarticulado, colidindo com um corpo sustentado por uma mola. O manipulador é composto de uma viga com característica rígido-flexível em rotação. Para o desenvolvimento do modelo foi utilizada a teoria de multicorpos bidimensionais associada ao modelo de impacto analisado no capítulo 2. As equações de movimento do sistema de colisão foram baseadas em formalismo Lagrangeano. O desenvolvimento do modelo pode inicialmente para o corpo rígido e em seguida para o corpo flexível; posteriormente, o modelo interconectado das partes rígidas e flexíveis para aplicar ao manipulador multiarticulado.

3.1 Descrição do modelo de manipulador multiarticulado

Neste trabalho, o modelo de manipulador é dividido em partes rígidas e flexíveis. Para o desenvolvimento do modelo dinâmico foram estabelecidas as seguintes condições, a saber :

- o manipulador atua em um plano bidimensional;
- a estrutura do manipulador é composta de dois tipos de seções transversais, formando uma viga com seções variadas, onde uma delas tenha a inércia bem superior as outras, caracterizando a viga com partes rígidas e flexíveis;
- as deflexões da viga da parte flexível podem ser consideradas pequenas em comparação ao comprimento da viga;

- as influências de resistência do ar e amortecimento interno estrutural são desprezíveis;
- a influência de gravidade é desprezível;
- o torque é aplicado em uma das extremidades da viga, na parte rígida, denominada cubo;
- o corpo receptor de colisão é sustentado por uma mola.

De acordo com as condições estabelecidas o modelo de manipulador em estudo é idealizado, como mostra a figura 3.1, onde o corpo receptor de colisão é localizado em uma distância que coincide com a extremidade livre da viga.

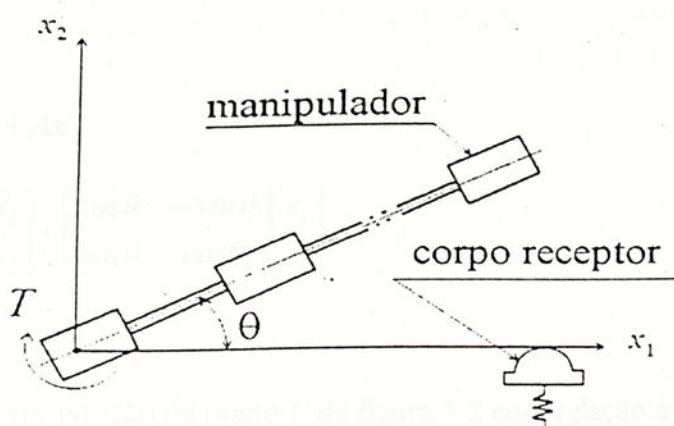


Figura 3.1: Modelo do manipulador multiarticulado com impacto

3.2 Modelo de mult corpos bidimensionais para corpo rígido

Considerando inicialmente uma barra com seção uniforme com massa m_r e um comprimento l_r , em movimentos de translação e rotação, com um torque T aplicado em uma das extremidades, como mostra a figura 3.2, a coordenada (x_1, x_2) da figura 3.2 indica a

coordenada local da barra e (X_1, X_2) é a coordenada de referência. Pela figura, o vetor posição de um ponto qualquer da barra pode ser assim definido :

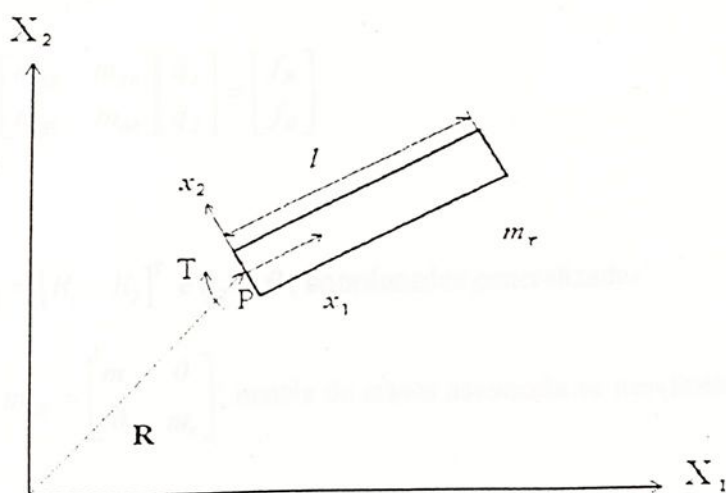


Figura 3.2: Modelo do corpo rígido com seção uniforme

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{A}\mathbf{x}$$

$$= \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{R}$ é o vetor posição do ponto P da figura 3.2 com relação à coordenada de referência, $\mathbf{A}$ é a matriz de rotação e $\mathbf{x}$ é o vetor posição com relação à coordenada local. Definindo a coordenada generalizada q_r como

$$\mathbf{q}_r = [R_1 \quad R_2 \quad \theta]^T \quad (3.2)$$

A equação de movimento do sistema pode ser escrita, (Apêndice-I)

$$[\mathbf{M}][\ddot{\mathbf{q}}_r] = [\mathbf{f}] \quad (3.3)$$

ou ainda,

$$\begin{bmatrix} m_{RR} & m_{R\theta} \\ m_{\theta R} & m_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_R \\ f_\theta \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

onde $q_1 = [R_1 \ R_2]^T$ e $q_2 = \theta$; coordenadas generalizadas.

$$m_{RR} = \begin{bmatrix} m_r & 0 \\ 0 & m_r \end{bmatrix}; \text{ matriz de massa associada ao movimento de translação.}$$

$$m_{R\theta} = \frac{m_r l_r}{2} \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}; \text{ matriz de massa associada aos movimentos de rotação e}$$

translação.

$$m_{\theta R} = m_{R\theta}^T; \text{ matriz de massa associada aos movimentos de rotação e translação.}$$

$$m_{\theta\theta} = \frac{m_r l_r^2}{3}; \text{ matriz de massa associada a rotação}$$

$$f_R = \frac{m_r l_r}{2} \dot{\theta}^2 \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}; \text{ força generalizada associada a translação.}$$

$$f_\theta = T; \text{ força generalizada associada a rotação (torque).}$$

3.3 Modelo de multicorpos bidimensionais para corpo flexível

De acordo com a teoria de elasticidade, os deslocamentos de uma viga podem ser representados pela função de forma S , utilizando-se um termo adimensional $u = s / l_f$, onde l_f é o comprimento da viga e s é a distância de uma das extremidades da viga até um certo ponto, na direção do comprimento :

$$S = \begin{bmatrix} 1-u & 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 1-3u^2+2u^3 & l_f(u-2u^2+u^3) & 0 & 3u^2-2u^3 & l_f(u^3-u^2) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Definindo agora as coordenadas locais de corpos flexíveis q_f como

$$q_f = [q_{f1} \quad q_{f2} \quad q_{f3} \quad q_{f4} \quad q_{f5} \quad q_{f6}]^T \quad (3.6)$$

onde q_{f1} e q_{f4} são deslocamentos axiais

q_{f2} e q_{f5} são deslocamentos transversais

q_{f3} e q_{f6} são deslocamentos angulares.

A figura 3.3 mostra as coordenadas locais de uma viga definida na equação 3.6.

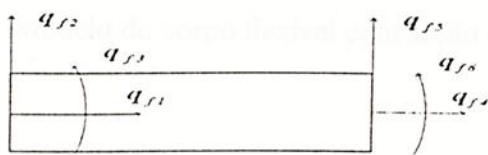


Figura 3.3: Coordenadas locais de corpos flexíveis

Para a aplicação no modelo do manipulador multiarticulado da figura 3.1, considerou-se uma viga engastada do lado esquerdo da figura 3.3, isto é, $q_{f1} = q_{f2} = q_{f3} = 0$. Neste caso, a coordenada generalizada local q_f e a função de forma S podem ser escritas, respectivamente :

$$q_f = [q_{f4} \quad q_{f5} \quad q_{f6}]^T \quad (3.7)$$

$$S = \begin{bmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & 3u^2 - 2u^3 & l_f(u^3 - u^2) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Redefinindo a coordenada local flexível q_f , de acordo com a figura 3.4, como

$$q_3 = q_f = [q_{f4} \quad q_{f5} \quad q_{f6}]^T = [U_1 \quad U_2 \quad \alpha]^T \quad (3.9)$$

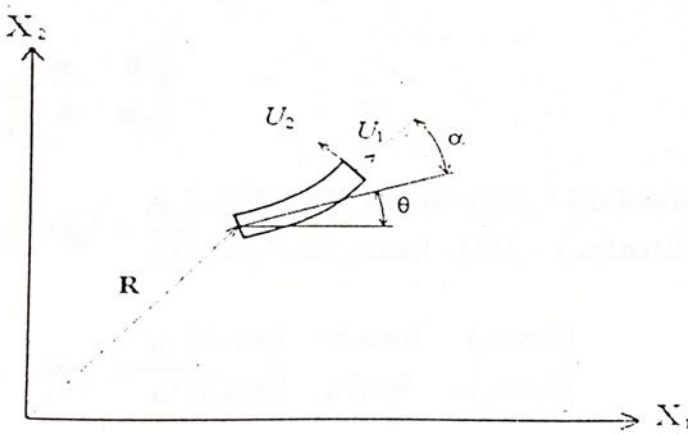


Figura 3.4: Modelo do corpo flexível com seção uniforme

Conforme a definição dos termos da figura 3.4, o vetor posição de um ponto qualquer da viga pode ser escrito

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{R} + \mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{x}_f) \\ &= \mathbf{R} + \mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{S}\mathbf{q}_f) \\ &= \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & 3u^2 - 2u^3 & l_f(u^3 - u^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \alpha \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde $\mathbf{x}$ é o vetor posição de um determinado ponto da viga sem deformação e $\mathbf{x}_f$ é o vetor posição de um determinado ponto da viga em um estado deformado.

As equações de movimentos para o corpo flexível podem ser escritas, (Apêndice II) :

$$\begin{bmatrix} \bar{m}_{RR} & \bar{m}_{R\theta} & \bar{m}_{Rf} \\ \bar{m}_{\theta R} & \bar{m}_{\theta\theta} & \bar{m}_{\theta f} \\ \bar{m}_{fR} & \bar{m}_{f\theta} & \bar{m}_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

onde, $\bar{m}_{RR} = \begin{bmatrix} m_f & 0 \\ 0 & m_f \end{bmatrix}$

$$\bar{m}_{R\theta} = \bar{m}_{\theta R}^T = \frac{m_f}{12} \begin{bmatrix} -(6l_f + 6U_1)\sin\theta - (6U_2 - l_f\alpha)\cos\theta \\ (6l_f + 6U_1)\cos\theta - (6U_2 - l_f\alpha)\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$\bar{m}_{Rf} = \bar{m}_{fR}^T = \frac{m_f}{12} \begin{bmatrix} 6\cos\theta & -6\sin\theta & l_f\sin\theta \\ 6\sin\theta & 6\cos\theta & -l_f\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\bar{m}_{ff} = m_f \begin{bmatrix} \frac{I}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{35} & -\frac{11}{210}l_f \\ 0 & -\frac{11}{210}l_f & \frac{I}{105}l_f \end{bmatrix}$$

$$\bar{m}_{\theta\theta} = m_f \left[\frac{l_f^2}{3} + \frac{2}{3}l_fU_1 + \frac{1}{3}U_1^2 + \frac{13}{35}U_2^2 + \frac{1}{105}l_f^2\alpha^2 - \frac{11}{105}l_fU_2\alpha \right]$$

$$\bar{m}_{\theta f} = \frac{m_f}{20} \begin{bmatrix} -7U_2 + l_f\alpha & 7(l_f + U_1) & -l_f(l_f + U_1) \end{bmatrix}$$

$$k_{ff} = \begin{bmatrix} \frac{Ea}{l_f} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l_f^3} & \frac{6EI}{l_f^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l_f^2} & \frac{4EI}{l_f} \end{bmatrix}$$

$$f_1 = \frac{m_f \dot{\theta}^2}{2} \begin{bmatrix} (l_f + U_1) \cos \theta - (U_2 - \frac{l_f}{6} \alpha) \sin \theta \\ (l_f + U_1) \sin \theta + (U_2 - \frac{l_f}{6} \alpha) \cos \theta \end{bmatrix} - \frac{m_f \dot{\theta}}{6} \begin{bmatrix} -6\dot{U}_1 \sin \theta - (6\dot{U}_2 - l_f \dot{\alpha}) \cos \theta \\ 6\dot{U}_1 \cos \theta - (6\dot{U}_2 - l_f \dot{\alpha}) \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$f_2 = -2\dot{\theta} m_f \left[\left(\frac{l_f + U_1}{3} \right) \dot{U}_1 + \left(\frac{13}{35} U_2 - \frac{11}{210} l_f \alpha \right) \dot{U}_2 + \left(-\frac{11}{210} l_f U_2 + \frac{1}{105} l_f^2 \alpha \right) \dot{\alpha} \right]$$

$$f_3 = m_f \dot{\theta} \begin{bmatrix} \left(\frac{l_f + U_1}{3} \right) \dot{U}_1 + \left(\frac{7}{10} \dot{U}_2 - \frac{l_f}{10} \dot{\alpha} \right) \\ \left(\frac{13}{35} U_2 - \frac{11}{210} l_f \alpha \right) \dot{\theta} - \frac{7}{10} \dot{U}_1 \\ \left(-\frac{11}{210} l_f U_2 + \frac{1}{105} l_f^2 \alpha \right) \dot{\theta} + \left(\frac{l_f}{10} \dot{U}_1 \right) \end{bmatrix}$$

3.4 Modelo de multicorpos bidimensionais para corpos rígido-flexíveis com colisão

De acordo com a definição do manipulador multiarticulado da figura 3.1, um conjunto do corpo rígido e flexível é idealizado, como mostra a figura 3.5.

Considerando cada corpo formado por um elemento rígido-flexível, apresentado na figura 3.5, as restrições cinemáticas podem ser escritas :

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{R} + \mathbf{A}(\mathbf{l}_r + \mathbf{S}\mathbf{q}_f) \quad (3.12)$$

onde $\mathbf{l}_{rf} = \begin{bmatrix} l_r + l_f \\ 0 \end{bmatrix}$; l_r : comprimento da parte rígida; l_f : comprimento da parte flexível

Neste caso, as equações que governam o sistema podem ser escritas :

$$\begin{bmatrix} m_{rr} & m_{rf} \\ m_{fr} & m_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{q}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_r \\ q_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_r \\ Q_f \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

onde índice "r" refere-se ao corpo rígido e "f" ao corpo flexível; q_r e q_f são coordenadas relativas aos corpos rígidos e flexíveis respectivamente; Q_r e Q_f são as forças generalizadas dos corpos rígido e flexível, respectivamente e k_{ff} é a rigidez da parte flexível.

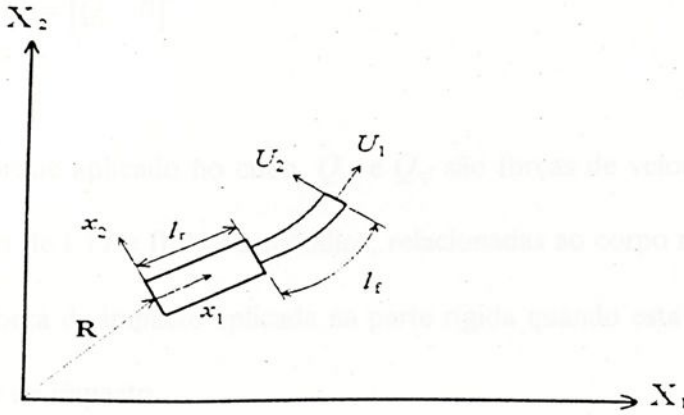


Figura 3.5 : Modelo do corpo rígido-flexível

É importante revelar que os componentes da matriz de massas m_{rf} e m_{fr} indicam os termos de influência da parte rígida à parte flexível ou vice-versa, isto é, os movimentos da parte rígida dependem da deformação da parte flexível. No estudo de Shabana foi comprovado que o efeito de acoplamento dos movimentos da parte flexível à parte rígida torna-se importante à medida que aumenta a velocidade de operação ou se utiliza um mecanismo composto de componentes com menor inércia.

Agora, retornando ao manipulador da figura 3.1, onde o sistema de colisão é composto de uma viga em rotação e um corpo receptor de colisão sustentado por uma mola; neste caso, as forças generalizadas são compostas de forças externas Q_e , forças quadráticas Q_v , forças de impacto Q_i , e podem ser escritas :

$$Q = \begin{bmatrix} Q_r \\ Q_f \end{bmatrix} = Q_e + Q_v + Q_i \quad (3.14)$$

onde :

$$Q_e = [T \quad 0]^T$$

$$Q_v = [Q_{vr} \quad Q_{vf}]^T$$

$$Q_i = [Q_i \quad 0]^T$$

T é o torque aplicado no cubo, Q_{vr} e Q_{vf} são forças de velocidades quadráticas baseadas nas equações de I.17 e II.24 de apêndice, relacionadas ao corpo rígido e flexível, respectivamente. Q_i é a força de impacto aplicada na parte rígida quando esta estiver em contato com o corpo receptor de impacto.

A força de impacto é determinada, baseada na equação 2.10, com as seguintes condições :

$$Q_i = \begin{cases} Q_i & \text{para } Q_i > 0 \\ 0 & \text{para } Q_i \leq 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

e, para o corpo receptor de colisão com a massa m_c , rigidez da mola K_c com o deslocamento de x_c , a equação de movimento pode ser escrita na forma :

$$m_c \ddot{x}_c + K_c x_c = -Q_i \quad (3.16)$$

Esta equação de movimento deve ser resolvida simultaneamente à equação 3.12, respeitando as restrições cinemáticas da equação 3.11.

CAPÍTULO 4

4. SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Neste capítulo são apresentados os resultados de simulação dos modelos de multicorpos referidos no capítulo 3. Nos modelos de multicorpos foram avaliados diversos modelos simples antes de analisar o modelo de multicorpo do manipulador multiarticulado da figura 3.1, visando uma avaliação sistemática de parâmetros. Entretanto, para todos os casos, as análises são restritas para os corpos com seção uniforme, tanto da parte rígida quanto da parte flexível. Os modelos analisados possuem os corpos em movimentos de rotação e a colisão é simulada com um corpo externo sustentado pela mola, considerado como corpo receptor de colisão. As influências de impacto foram avaliadas através da trajetória de um determinado ponto da viga e do corpo receptor de colisão. Para a simulação numérica foram utilizadas softwares baseados em programa MATLAB de Mathworks, com um microcomputador tipo PC.

4.1 Modelo de colisão com viga engastada

O modelo inicialmente avaliado é composto de uma viga engastada com seção uniforme, colidindo com um corpo apoiado pela mola localizada na extremidade desta viga, estacionário antes da colisão. Este modelo foi escolhido como o primeiro para avaliação devido ao problema de vibração relativamente bem conhecido.



A figura 4.1 apresenta um esquema do primeiro modelo de colisão avaliado.

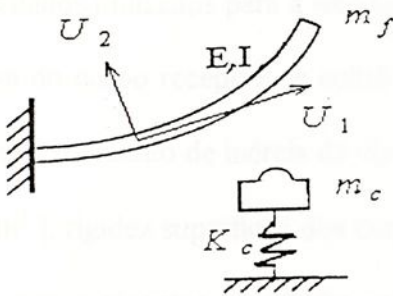


Figura 4.1 : Modelo de colisão com uma viga engastada

A viga engastada da figura 4.1 possui momentos de inércia I , módulo de elasticidade E , massa m_f e comprimento l_f . O corpo receptor de impacto localizado em uma das extremidades da viga, inicialmente estacionário, possui a massa m_c com a rigidez de k_c .

Na primeira avaliação foram analisados os efeitos de alguns parâmetros, tais como, rigidez da mola do corpo receptor de colisão e velocidades de colisão.

Para a simulação do sistema foi utilizada a equação de movimento da viga baseada na equação 3.11, considerando $q_1 = q_2 = 0$, $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ e acrescentando a força de impacto Q_i . Portanto, a equação de movimento da viga baseada na teoria de multicorpos pode ser escrita :

$$m_f \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{35} & -\frac{11}{210}l_f \\ 0 & -\frac{11}{210}l_f & \frac{1}{105}l_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U}_1 \\ \ddot{U}_2 \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{Ea}{l_f} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l_f^3} & -\frac{6EI}{l_f^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l_f^2} & \frac{4EI}{l_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Q_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

e a equação de movimento do corpo receptor é utilizada na equação 3.14, mantendo a restrição da força de impacto da equação 3.13a.

Os dados utilizados para a simulação da equação 4.1 foram : massa da viga $m_f = 0,585$ [kg]; massa do corpo receptor de colisão $m_c = 0,046$ [kg]; módulo de elasticidade $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ [N/m²]; momento de inércia da viga $I = 3,125 \cdot 10^{-10}$ [m⁴]; área de seção transversal $a = 1,5 \cdot 10^{-4}$ [m²]; rigidez superficial dos corpos $K_s = 3,83 \cdot 10^8$ [N/m^{3/2}]. Para avaliar o efeito da rigidez do corpo receptor de colisão os valores de K_c foram variados : $K_c \rightarrow \infty$, $K_c = 2,67 \cdot 10^7$ [N/m], $K_c = 2,67 \cdot 10^4$ [N/m] .

Os resultados da simulação em termos de deslocamentos da extremidade da viga com relação ao tempo encontram-se na figura 4.2, onde as curvas representam : curva I : $K_c \rightarrow \infty$; curva II : $K_c = 2,67 \cdot 10^7$ [N/m]; curva III : $K_c = 2,67 \cdot 10^4$ [N/m]. É importante revelar que as velocidades iniciais de colisão são iguais para as três curvas apresentadas.

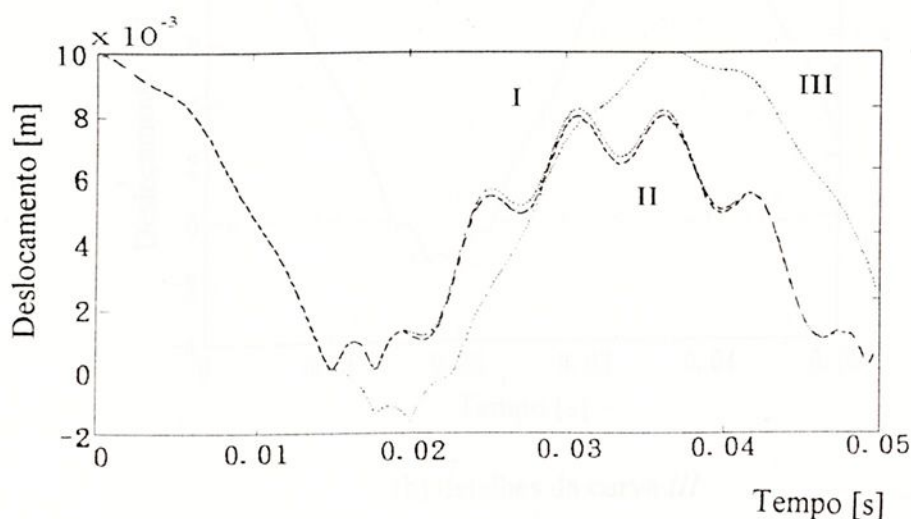
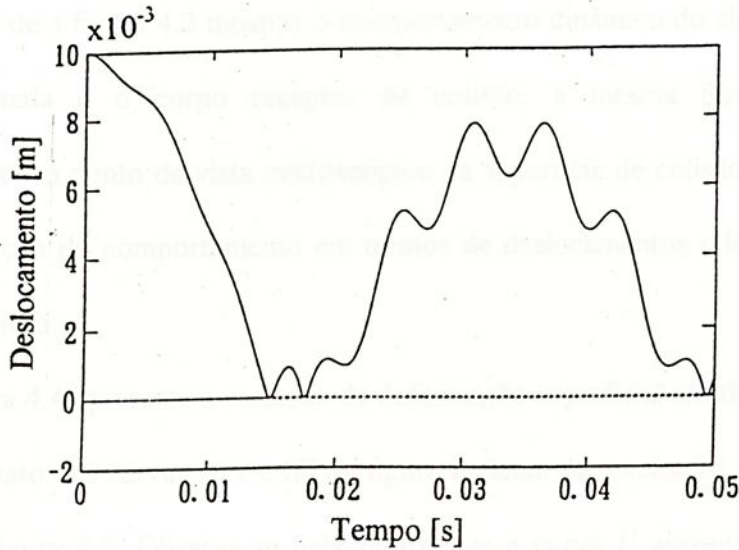
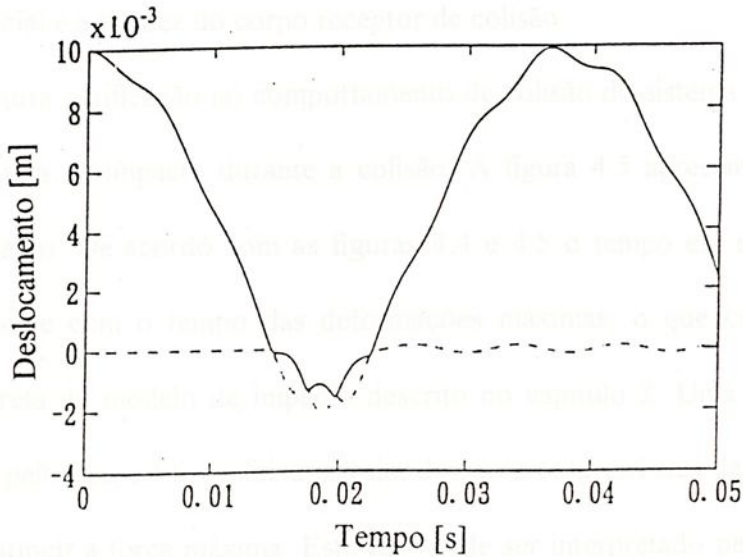


Figura 4.2 : Efeito de rigidez do corpo receptor de colisão no modelo da viga engastada

Observa-se pela figura 4.2 que a curva *III* apresenta comportamento bem distinto em relação às curvas *I* e *II*, mostrando o movimento da viga acompanhando o deslocamento do corpo receptor após a colisão.



(a) detalhes da curva *II*



(b) detalhes da curva *III*

Figura 4.3 : Deslocamentos da viga (—) e do corpo receptor de colisão (.....)

no modelo da viga engastada para : (a) $K_c = 2,67 \cdot 10^7$ [N/m]; (b) $K_c =$

$2,67 \cdot 10^4$ [N/m]

Este movimento de acompanhamento pode ser visto claramente na figura 4.3a e 4.3b, onde apresentam as trajetórias da extremidade livre da viga junto com o movimento do corpo receptor de colisão, referentes às curvas *II* e *III* da figura 4.2, respectivamente.

Apesar de a figura 4.2 mostrar o comportamento dinâmico do sistema de colisão entre a viga engastada e o corpo receptor de colisão, a mesma figura não esclarece o comportamento no ponto de vista microscópico da superfície de colisão. Por este motivo, foi feita a verificação do comportamento em termos de deslocamentos relativos durante o curto período de colisão.

A figura 4.4 apresenta a variação de deformação superficial relativa ao corpo de colisão durante o contato. As curvas *I*, *II* e *III* da figura indicam os resultados de diferentes rigidezes avaliadas na figura 4.2. Observa-se pela figura que a curva *II* apresenta o maior tempo de contato. A razão deste maior tempo de contato é causada pela proximidade de rigidez entre a rigidez superficial e a rigidez do corpo receptor de colisão.

Uma outra verificação no comportamento de colisão do sistema foi feita em termos de variação da força de impacto durante a colisão. A figura 4.5 apresenta diferentes níveis de forças de impacto. De acordo com as figuras 4.4 e 4.5 o tempo em que ocorrem as forças máximas coincide com o tempo das deformações máximas, o que comprova, em parte, a utilização correta do modelo de impacto descrito no capítulo 2. Uma outra observação que pode ser feita pela figura 4.5 é a faixa estreita da curva característica das forças de impacto na iminência de atingir a força máxima. Este fato pode ser interpretado pela diferença de rigidez da viga e do corpo receptor de colisão, onde a fase suave das curvas proporciona a deformação ou deflexão da viga e a fase estreita da curva é caracterizada pela deformação superficial em conjunto com o deslocamento do corpo receptor de colisão. Muitas das simulações da estrutura ou do mecanismo em movimento que envolvem a colisão desprezam o

tempo de contato, em razão da comparação com o tempo da análise de movimento dos mesmos. No entanto, foi demonstrado nesta seção que dependendo da rigidez superficial dos corpos em colisão ou da rigidez dos corpos, alteram-se o tempo de contato, a força de contato e consequentemente o comportamento dinâmico, influenciando os movimentos pré-estabelecidos dos componentes do mecanismo ou da estrutura. Esta alteração no comportamento não deve ser ignorada no caso do mecanismo de precisão, manipulador, tal como analisado neste trabalho.

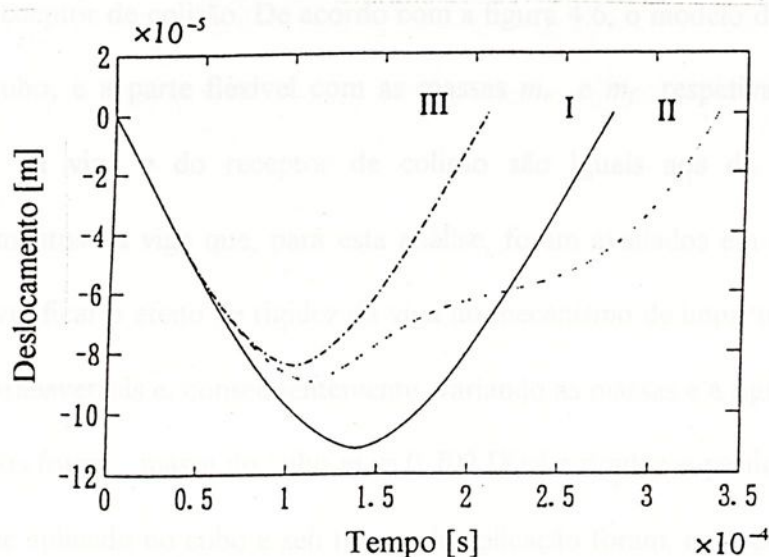


Figura 4.4 : Histórico da deformação superficial durante a colisão

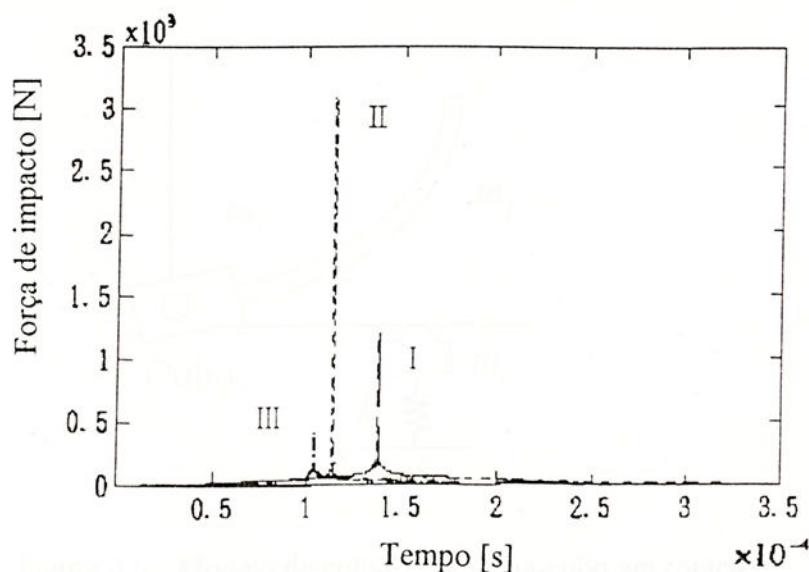


Figura 4.5 : Histórico da força de impacto durante a colisão

4.2 Modelo de colisão com viga-cubo em rotação

Este modelo aproxima-se bastante o modelo de manipulador em rotação, cujo torque é aplicado na parte do corpo rígido, denominado cubo. O modelo possui um grande movimento de rotação, ao contrário da viga engastada ilustrada na figura 4.1, onde os movimentos da viga se resumem em um pequeno movimento oscilatório.

A figura 4.6 apresenta o esquema do modelo da viga-cubo em rotação, colidindo com o corpo receptor de colisão. De acordo com a figura 4.6, o modelo da viga é composto de parte rígida, cubo, e a parte flexível com as massas m_r e m_f respectivamente. Os dados da parte flexível da viga e do receptor de colisão são iguais aos da da figura 4.1, exceto os comprimentos da viga que, para esta análise, foram avaliados em quatro diferentes valores a fim de verificar o efeito de rigidez da viga no mecanismo de impacto, mantendo, entretanto, as seções transversais e, conseqüentemente, variando as massas e a rigidez. Para o cubo, os dados atribuídos foram : massa do cubo $m_r = 0,702$ [Kg] e rigidez superficial $K_s = 3,83.10^8$ [N/m^{1,5}]. O torque aplicado no cubo e seu tempo de aplicação foram, respectivamente, 1,5 [Nm] e 0,01 [s].

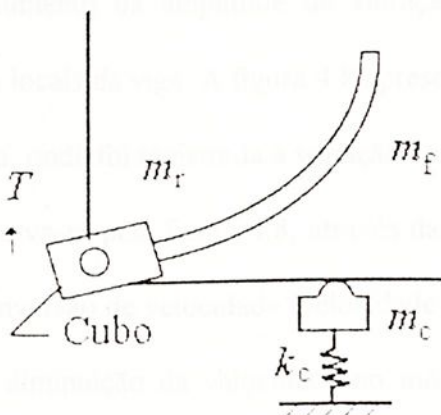


Figura 4.6 : Modelo de colisão com viga-cubo em rotação

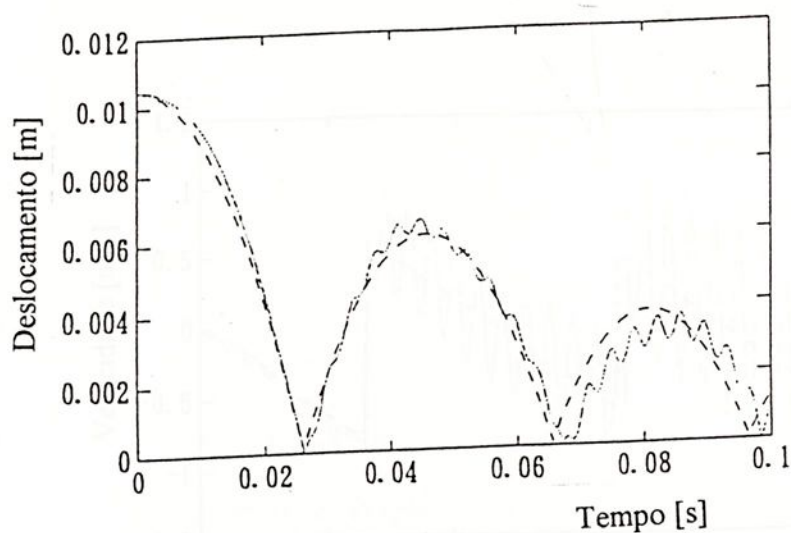
Para a simulação do sistema da figura 4.6 foi utilizada a equação de movimento da viga baseada na equação 3.12. No entanto, o acoplamento de matrizes de massas para os corpos rígido e flexível foi desprezado nesta análise pelo fato de a velocidade de operação da viga ser relativamente baixa se comparada com a inércia da mesma, diminuindo a influência da parte flexível no movimento da parte rígida. Portanto, para a análise considerou-se $m_{rf} = m_{fr}^T = 0$.

Os resultados de simulação do modelo da figura 4.6 encontram-se na figura 4.7, em termos da variação de trajetória da extremidade livre da viga para a rigidez do corpo de colisão de $2,7 \cdot 10^7$ [N/m], figura 4.7a, e de $2,7 \cdot 10^4$ [N/m], figura 4.7b. As linhas tracejadas das figuras representam os resultados do modelo da viga considerando-a perfeitamente rígida (corpo rígido), a fim de comparar aos resultados do modelo da viga flexível. Na figura 4.7 podemos observar também os sinais de pequenas oscilações após o impacto, como foram observados na figura 4.2, e sua intensidade cresce com o aumento do número de colisões. Como era esperado, a maior rigidez da mola no corpo receptor, da figura 4.7a com rigidez de $2,67 \cdot 10^7$ [N/m], apresentou amplitude de vibração maior. Pode-se observar também que as amplitudes de vibrações crescem com as sucessivas colisões. A desconsideração do amortecimento interno da viga em questão no modelo matemático contribuiu para aumentar este fato.

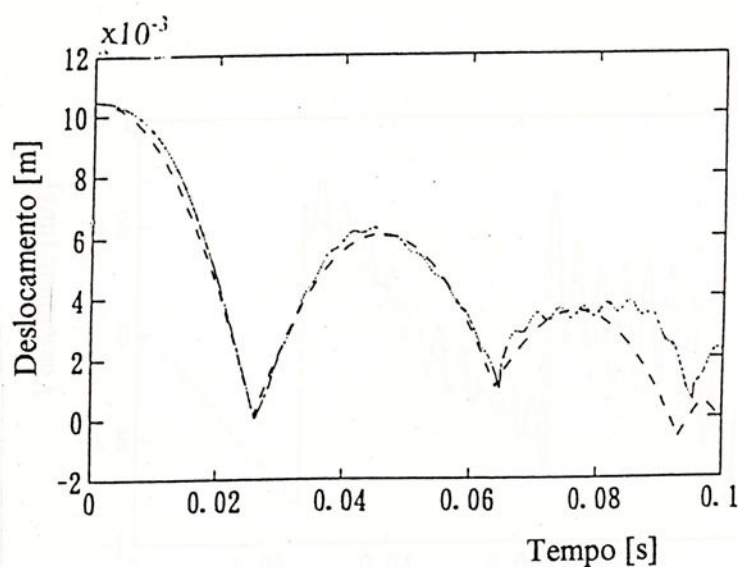
O aumento da amplitude de vibração após a colisão pode ser visto também nas velocidades locais da viga. A figura 4.8 apresenta as variações das velocidades na extremidade livre da viga, onde foi registrada a variação de trajetória na figura 4.7.

Observa-se pela figura 4.8, através das linhas tracejadas (corpo rígido) que, durante a colisão há inversão de velocidade (velocidade negativa a velocidade positiva), e ainda, pode-se observar a diminuição da velocidade no módulo antes e após a colisão. Este fato está de acordo com o modelo de coeficiente de restituição variável adotado para este trabalho.



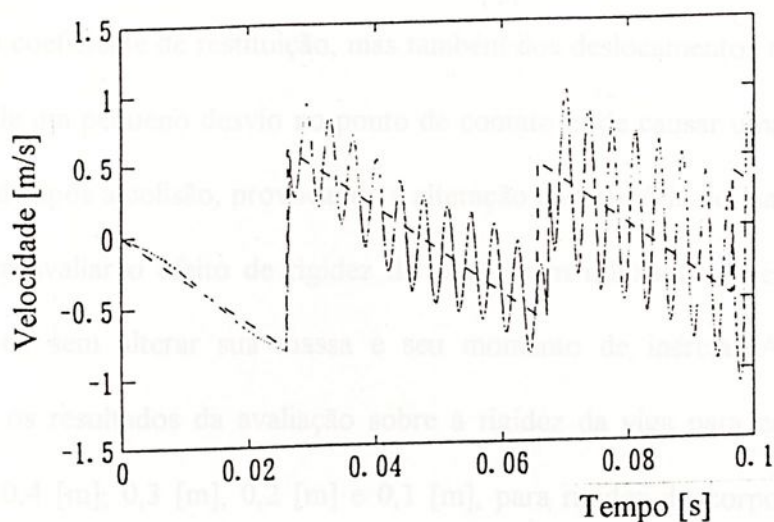


(a)

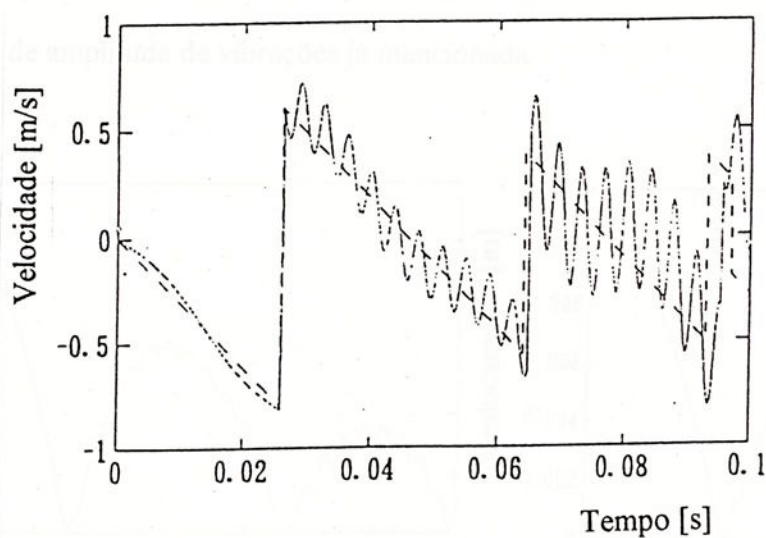


(b)

Figura 4.7 : Deslocamentos da extremidade livre da viga em rotação para diferentes rigidezes do corpo receptor de colisão : a) $K_c = 2,67 \cdot 10^7$ [N/m]; b) $K_c = 2,67 \cdot 10^4$ [N/m]; — modelo rígido; modelo flexível



(a)



(b)

Figura 4.8 : Velocidades da extremidade livre da viga em rotação para diferentes rigidezes do copro receptor de colisão : a) $K_c = 2,67.10^7$ [N/m]; b) $K_c = 2,67.10^4$ [N/m] ; — modelo rígido; modelo flexível

É importante revelar, ainda, que a magnitude de velocidade após a colisão não depende somente do coeficiente de restituição, mas também dos deslocamentos relativos dos corpos de colisão, onde um pequeno desvio no ponto de contato pode causar uma diferença significativa na velocidade após a colisão, provocando a alteração da trajetória do manipulador.

Para avaliar o efeito de rigidez da viga foram utilizados diversos comprimentos da parte flexível, sem alterar sua massa e seu momento de inércia. As figuras 4.9 e 4.10 apresentam os resultados da avaliação sobre a rigidez da viga para comprimentos da parte flexível em 0,4 [m], 0,3 [m], 0,2 [m] e 0,1 [m], para rigidez do corpo receptor de $2,74 \cdot 10^7$ [N/m] e $2,74 \cdot 10^4$ [N/m], respectivamente. Pelas figuras 4.9 e 4.10 pode-se observar que, com a alteração da rigidez do corpo receptor, os tempos de 2º e 3º impactos foram alterados e, consequentemente, as variações significantes da trajetória na extremidade livre da viga, além da variação de amplitude de vibrações já mencionada.

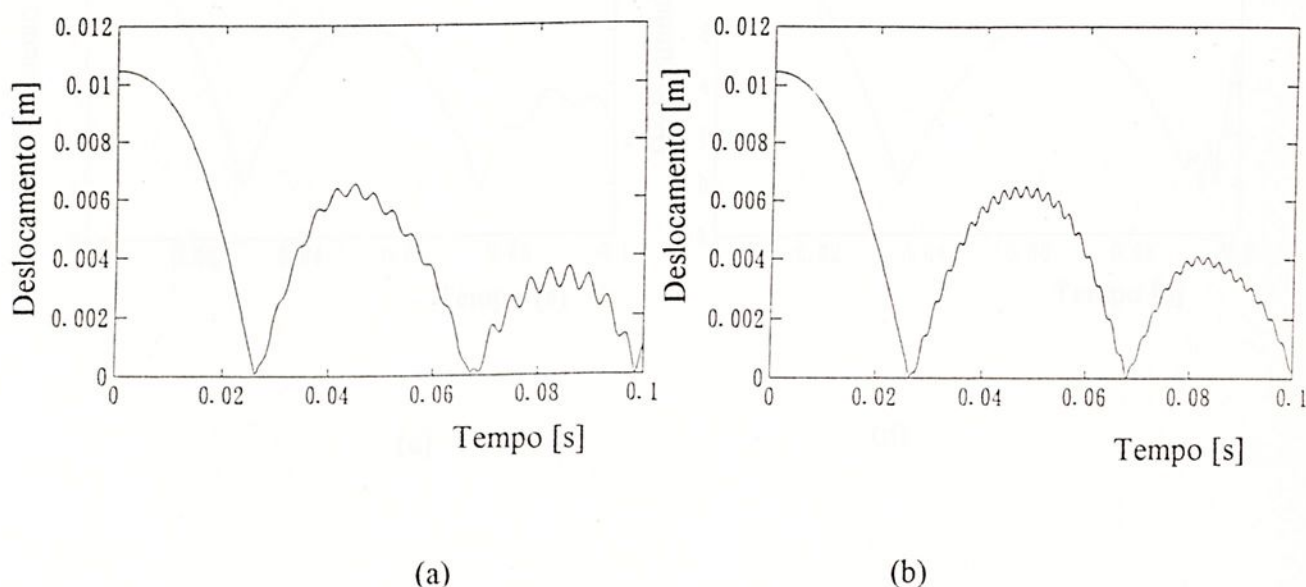
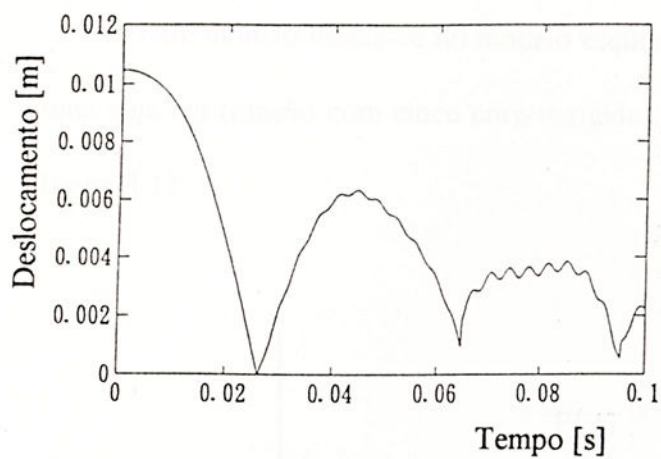
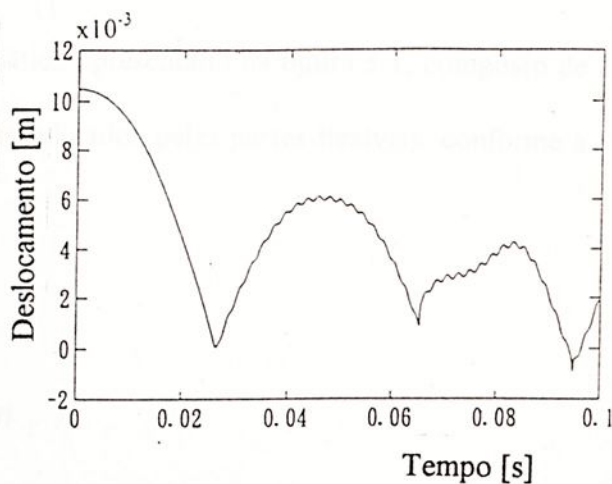


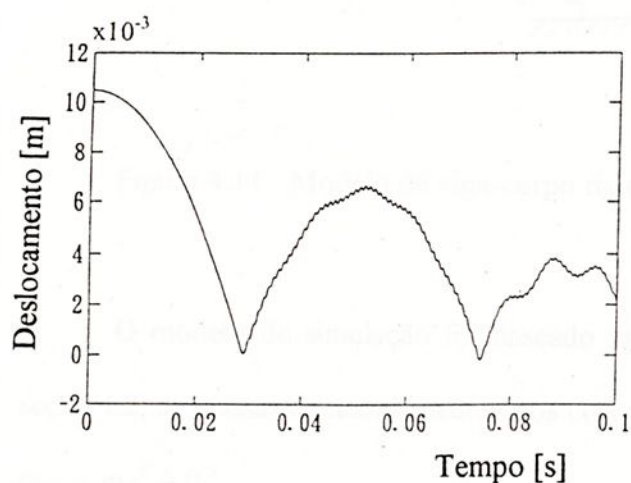
Figura 4.9 : Deslocamentos da extremidade livre da viga em rotação para diferentes comprimentos da parte flexível com a) 0,4 [m] e b) 0,3 [m] com $K_c = 2,67 \cdot 10^7$ [N/m]



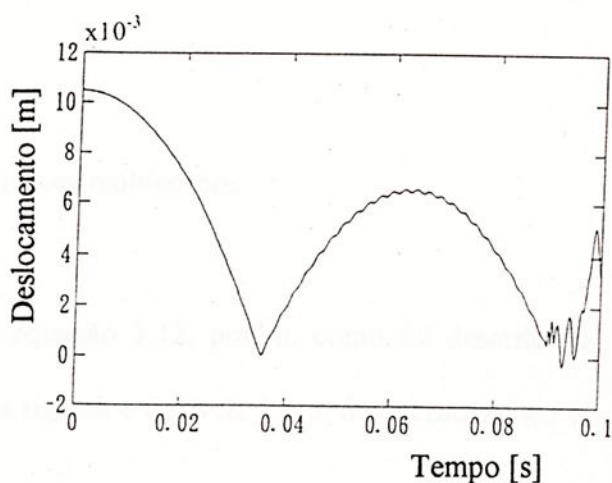
(a)



(b)



(c)



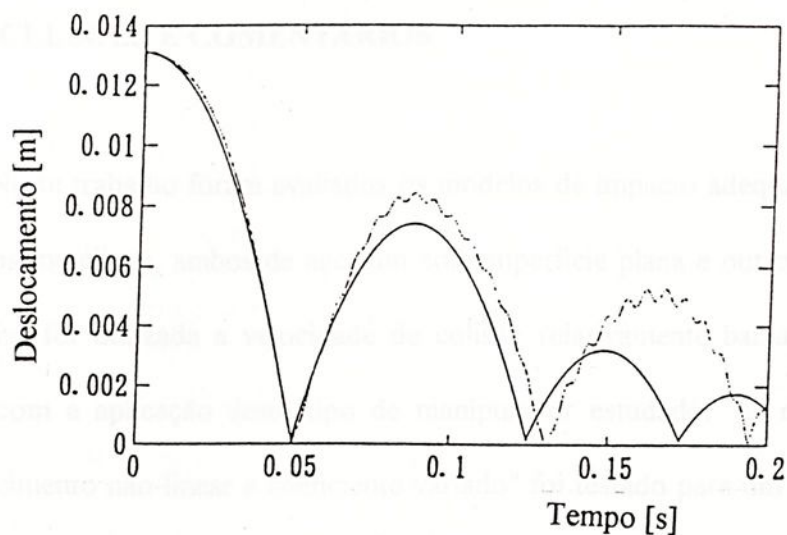
(d)

Figura 4.10 : Deslocamentos da extremidade livre da viga em rotação para diferentes comprimentos da parte flexível com : a) 0,4 [m]; b) 0,3 [m]; c) 0,2 [m] e d) 0,1 [m], com $K_c = 2,67 \cdot 10^4$ [N/m]

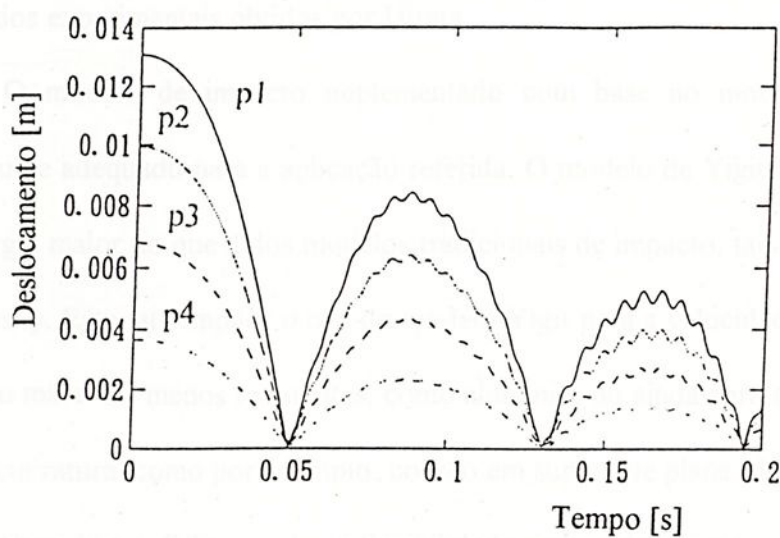
Os dados utilizados para a simulação do modelo foram : massa do cubo $m_0 = 0,175$ [kg]; massa do corpo rígido $m_r = 0,143$ [kg]; massa do corpo flexível $m_f = 0,152$ [kg]; comprimento do cubo $l_0 = 0,013$ [m]; torque aplicado no cubo $T = 1,5$ [Nm]; rigidez do corpo receptor de colisão $K_b = 2,67 \cdot 10^7$ (N/m); tempo de aplicação do torque $t_m = 0,1$ [s]. Os dados restantes utilizados são iguais aos usados na seção 4.2.

A figura 4.12 apresenta os resultados de simulação do modelo da figura 4.11. A curva representada com a linha cheia da figura 4.12a indica a trajetória da extremidade da viga, parte rígida, considerando as partes flexíveis da viga como sendo rígidas para o efeito de comparação. Observa-se pela figura 4.12a que o modelo de viga flexível, linha tracejada, atrasa substancialmente o tempo de 2º e 3º impactos. Este fato implica que a parte da energia de colisão não foi repassada ao corpo receptor de colisão, retendo uma parte daquela antes da colisão em movimento vibratório da viga.

A figura 4.12b apresenta as curvas de trajetórias de quatro pontos P_1 , P_2 , P_3 e P_4 do modelo da figura 4.11. Pela figura 4.12b pode-se observar a intensidade de vibração da viga nos diferentes pontos da viga composta de partes rígidas e flexíveis. Pode-se observar também que, com o aumento de número de colisões, a intensidade de vibrações da viga cresce, de acordo com a magnitude da colisão.



(a)



(b)

Figura 4.12 : Deslocamentos da viga do modelo viga-corpo rígido com multicorpos em rotação para : a) comparação com modelo rígido e b) nos diferentes pontos dos corpos rígidos

CAPÍTULO 5

5. CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS

Neste trabalho foram avaliados os modelos de impacto adequados para a colisão entre os corpos metálicos, ambos de aço, um com superfície plana e outro com superfície esférica. Na análise foi utilizada a velocidade de colisão relativamente baixa, abaixo de 1,5 m/s, de acordo com a aplicação deste tipo de manipulador estudado. O modelo de impacto com "amortecimento não-linear e coeficiente variado" foi testado para um modelo de manipulador, composto de uma viga em rotação com partes flexíveis e rígidas. A avaliação deu-se através da simulação numérica dos modelos de impacto, cuja dimensão geométrica é semelhante aos resultados experimentais obtidos por Hirata.

O modelo de impacto implementado com base no modelo proposto de Herbert, mostrou-se adequado para a aplicação referida. O modelo de Yigit apresentou uma dissipação de energia maior do que a dos modelos tradicionais de impacto, tais como, modelos de Hunt e Dubowsky. Este fato implica o uso do modelo Yigit para a velocidade de colisão relativamente baixa ou materiais menos resistentes, como alumínio, ou ainda para a superfície de colisão com menor curvatura, como por exemplo: colisão em superfície plana-plana ou plana-cilíndrica.

Quando a colisão envolve a flexibilidade em um dos corpos, os resultados da simulação mostram que a velocidade após a colisão e a trajetória do movimento posterior à colisão são alteradas significativamente, de acordo com o grau de flexibilidade. Esta tendência aumenta à medida que a ordem de grandeza da rigidez superficial de contato se aproxima da rigidez de um dos corpos.

647

FACULDADE DE ENGENHARIA
DE GUARATINGUETÁ
BIBLIOTECA



A influência da flexibilidade no modelo de manipulador estudado foi revelada pela variação da trajetória do mesmo após a colisão. Neste modelo foram consideradas as flexibilidades dos corpos tanto no manipulador, composto de quatro corpos rígidos interligados, com as partes flexíveis e um cubo, quanto no corpo receptor de colisão.

Os resultados da simulação mostraram que a trajetória do manipulador foi alterada significativamente, prejudicando a precisão da trajetória pré-estabelecida. Quando há um múltiplo impacto, como no caso da operação de embutimento que recebe periodicamente a força de impacto, a precisão da trajetória é bastante prejudicada.

O uso da teoria de multicorpos bidimensionais para a análise de impacto em um corpo com grande movimento, como no caso do manipulador estudado, mostrou-se eficiente na análise de trajetória de diversos pontos do mesmo. Embora a teoria de multicorpos utilizada apresente grande eficiência no estudo dinâmico, como análise de tensões de um corpo em grande movimento, a mesma teoria serviu para analisar a parte cinemática, a qual pode ser aproveitada para controlar a trajetória com precisão.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Amirouch, F.M.L. (1992), Computational methods in multibody dynamics, *Prentice-Hall International Ed.*, New Jersey.
- Achenbach, J.D. (1975), Wave propagation in elastic solids, *American elsevier*, New York.
- Banhart, K.E. and Goldsmith, W. (1957), Stress in beams during transverse impact, *J. Applied Mechanics*, Trans ASME, pp440-446.
- Blajer, W., Schiehlen, W., Schirm, W. (1993), Dynamic analysis of constrained multibody systems using inverse kinematic, *Mech. and Machine Theory*, vol.28(3), pp397-405.
- Boutaghou, Z.E., Erdman, A.G. (1993), On various non-linear rod Theories for the dynamic analysis of multibody systems, part 1: formulation, vol.164(2), pp207-223.
- Brach, R.M. (1989), Rigid body collisions, *J. Applied Mechanics*, Trans. ASME, vol.56, pp133-138.
- Buffinton, K.W. (1992), Dynamics of elastic manipulators with prismatic joints, *J. Dyn. sys. meas. control*, vol.114, pp41-49.
- Chang, J.L. (1989), A new Lagrangian formulation of dynamics for robots manipulators, *J. Dyn. Sys. Meas. Control*, vol. 111, pp559-567.
- Dubowsky, S. and Freudenstein, F. (1971), Dynamic analysis of mechanical systems with clearances, Part 1: formulation of dynamic model, Part 2: dynamic response, *J. Engineering for Industry*, Trans. ASME, vol.93(B), pp305-316.
- Dubowsky, S. and Gardner, T.N. (1975), Dynamic Interactions of link elasticity and clearance connections in planar mechanical systems, *J. Engineering for Industry*, Trans. ASME, vol.97(B), pp652-661.



- Eringen, A.C. (1950), Transverse impact on beams and plates, *J. Applied Mechanics*, Trans. ASME, vol. 72, pp461-468.
- Fallahi, B., Lai, S. and Venkat, C. (1995), A finite element formulation of a flexible slider crank mechanism using local coordinates, *J. Dyn. Sys. Meas. Control*, Trans. ASME, vol. 117, pp329-335.
- Goldsmith, W. (1960), Impact, *Edward Arnold Pub.*, New York.
- Herbert, R.G. and McWhannell, D.C. (1977), Shape and frequency composition of pulses from an impact pair, *J. Eng. for Industry*, Trans. ASME, pp513-518.
- Hirata, T. e Scieszko, J.L. (1989), Influência da base nos parâmetros de colisão, *Rev. Bras. Ciênc. Mec.*, vol. XI, No. 1, p1-15.
- Hunt, K.H. and Crossley, F.R.E. (1975), Coefficient of restitution interpreted as damping in vibro-impact, *J. Applied Mechanics*, Trans. ASME, pp440-445.
- Hunter, S.C. (1957), Energy absorbed by elastic waves during impact, *J. Mech. & Physics of Solids*, vol. 5, pp162-171.
- Huston, R.L. and Passerello, C. (1979), On multi-rigid-body system dynamics, *Computers & Structures*, pp439-446.
- Ider, S.K. and Amirouch, F.M.L. (1989), On the constraint violations in the dynamics simulation of multibody systems, *J. Dynamic Systems, Meas. Control*, vol. 111, p238-243.
- Igarashi, T., Goto, M. and Kawasaki, A. (1985), Studies on impact sound: The sound generated by a ball colliding with a plate, *Bull. JSME*, vol. 28, No. 235, pp148-154.
- Kamman, J.W. and Huston, R.L. (1984), Dynamics of constraint multibody systems, *J. Applied Mechanics*, vol. 51, p899-903.
- Kane, T.R. and Levinson, D.A. (1978), Multibody dynamics, *J. Applied Mechanics*, Trans. ASME, vol. 50, pp1.071-1.078.

- Kane, T.R. and Levinson, D.A. (1980), Formulation of equation for complex spacecraft, *J. Guidance and Control*, vol.3(2), pp99-112.
- Kane, T.R. and Levinson, D.A. (1985), *Dynamics: Theory and Applications*, McGraw-Hill, New York.
- Khulief, Y.A. and Shabana, A.A. (1986a), Dynamic analysis of constrained system of rigid and flexible bodies with intermittent motion, *J. Mech., Transm. and Automation in Design, Trans. ASME*, vol.108, p38-45.
- Khulief, Y.A. and Shabana, A.A. (1986b), Impact response of multibody systems with consistent and lumped masses, *J. Sound and Vibration*, vol.104(2), p187-207.
- Khulief, Y.A. and Shabana, A.A. (1987), A continuous force model for the impact analysis of flexible multibody systems, *Mech. Machine Theory*, vol.22(3), p213-224.
- Kolsky, H. (1963), *Stress waves in solids*, New York.
- Lankarini, H.M. and Nikavesh, P.E. (1990), A contact force model with hysteresis damping for impact analysis of multibody systems, *J. Mech. Design*, vol.112, p369-376.
- Lee, Y., Hamilton, J.F. and Sullivan, J.W. (1983), The lumped parameter method for elastic impact problems, *J. Applied Mechanics, Trans. ASME*, p823-827.
- Lin, Z.C. and Ho, C.Y. (1991), An investigation of elastic impact problems on beam and plates, *J. Sound and Vibration*, vol.148(2), p293-306.
- Marghitu, D.B. and Hurmuzlu, Y. (1995), Three dimensional rigid body collisions with multiple contact points, *J. Applied Mechanics, Trans. ASME*, vol.62, p725-732.
- Parker, J.K. and Paul, F.M. (1987), Controlling impact forces in pneumatic robot hand design, *J. Dynamic Systems, Meas., Trans. ASME*, vol.109, p328-334.

- Shabana,A.A (1986a), Dynamic of inertia variant flexible systems using experimentally identified parameters, *J. Mech.Transm. and Autom. in Design*, TransASME,vol.108,p358-366.
- Shabana,A.A. (1986b), Transient analysis of flexible multibody systems,Part I; Dynamics of flexible bodies, *Computer methods in Applied Mechanics and Engineering*,vol.54,p75-91.
- Shabana,A.A. et. al. (1987), Vibration control of flexible multibody aircraft during touchdown impacts, *J. Vib., Acoust., Stress and Reliability in Design*, Trans.ASME,vol.109,p270-276.
- Shabana,A.A. (1989), *Dynamics of multibody systems*, John Wiley & Sons., New York.
- Shabana,A.A (1990), On the use of the finite element method and classical approximation techniques in the non-linear dynamics of multibody systems, *Int. J. Non-linear Mechanics*,vol.25(213),p153-162.
- Smith,C.E. (1991), Predicting Rebounds using rigid body dynamics, *J. Applied Mechanics*, Trans.ASME,vol.58,p754-758.
- Stronge,W.J. (1990), Rigid body collisions with friction, *Proc. Royal Society*, London, vol.A431,p169-181.
- Tavares,H.M. e Sampaio,R. (1998), Colisão em sistema de multicorpo rígido, *J. Braz.Soc.Mech.Sciences*,vol.20(1),p116-125.
- Timoshenko,S. (1913),Zur Frage der Wirkung eines Stosses auf einer Balken, *Zaitschrift fur Mathematik and Physik*,vol.62,p198-209.
- Tomazini,J.E. (1996), O modelo multicorpo aplicado a um manipulador : modelo rígido e flexível, *Tese D.Sc.*, USP, S.Carlos.

- Vukasovic,N.,Celigueta,J.T. and Jalón,J.G. (1993), Flexible mltibody dynamics based on a fully cartesian system of support coordinates, *J. Mech. Design*, Trans.ASME,vol.115,p294-299.
- Wang,A.C. and Lee,T.W. (1983), On the dynamics of inetrmitent motion mechanisms, *J. Mech. Transm. Aut. Design*, Trans.ASME,vol.104,p778-785.
- Wang,J.T. and Huston,R.L. (1987), Kane's equations with undetermined multipliers application to constrained multibody systems, *J. Applied Mech.*,vol.54,p424-429.
- Wehage,R.A. and Haug,E.J. (1982), Dynamic analysis of mechanical systems with inetrmitent motion, *J. Machine Design*, Trans.ASME,vol.104,p778-785.
- Wu,S.C. and Haug,E.J. (1990), A substructure technique for dydnamics of flexible mechanical systems with contact impact, *J. Mech. Design*, Tran.ASME,vol.112.p390-398.
- Yigit,A.,Scott,R.A. and Ulsoy,A.G. (1990a), Dynamics of a radially rotating beam with impact, Part 1: Theoretical and computational model, Part 2: Experimental and simulation results, *J. Sound and Vib.*,vol.112,p65-70(part 1), p71-77(part 2).
- Yigit,A.,Scott,R.A. and Ulsoy,A.G. (1990b), Spring-Dashpot models for the dynamics of a radially rotating beam with impact, *J. Siund and Vib.*,vol.142(3)p515-525.
- Zenner,C. (1941), The intrinsic inelasticity of large plate, *Physical Review*,vol.59,p669.
- Zukas,J.A. (1982), Impact dynamics, *John Wiley and Sons.*,New York.



APÊNDICE I

Desenvolvimento das equações auxiliares para o corpo flexível

De acordo com a definição do vetor posição da equação 3.1, o vetor velocidade pode ser escrita como :

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{A}}\mathbf{x} \quad (\text{I.1})$$

Pois, $\dot{\mathbf{x}} = 0$ para o corpo rígido.

Por outro lado,

$$\dot{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{A}\mathbf{x}) \right] \dot{\theta} = \mathbf{B}_i \dot{\theta} \quad (\text{I.2})$$

Substituindo a equação I.2 em equação I.1 tem-se,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{B}_i \dot{\theta} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{B}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \mathbf{L}_i \dot{\mathbf{q}}_r \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade 2x2 e,

$$L_l = [I \quad B_l] \quad \text{e} \quad \dot{q}_r = \begin{bmatrix} \dot{R} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (\text{I.4})$$

Agora, a energia cinética E_c do corpo rígido pode ser escrita,

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \int_v \rho \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} \, dv \\ &= \frac{1}{2} \int_v \rho L_l^T \dot{q}_r^T L_l \dot{q}_r \, dv \\ &= \frac{1}{2} \dot{q}_r^T \left[\int_v \rho L_l^T L_l \, dv \right] \dot{q}_r \\ &= \frac{1}{2} \dot{q}_r^T \mathbf{m}_r \dot{q}_r \end{aligned} \quad (\text{I.5})$$

onde $\mathbf{m}_r$ é a matriz de massas do corpo rígido e definida por

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_r &= \int_v \rho L_l^T L_l \, dv \\ &= \int_v \rho [I \quad B_l]^T [I \quad B_l] \, dv \\ &= \begin{bmatrix} m_{RR} & m_{R\theta} \\ m_{\theta R} & m_{\theta\theta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

no qual, os componentes de matriz de massas são,

m_{RR} : matriz de massa associada ao movimento de translação

$m_{R\theta}$ e $m_{\theta R}$: matriz de massa associada aos movimentos de translação e rotação

$m_{\theta\theta}$: matriz de massa associada ao movimento de rotação

Estes componentes são determinados por

$$m_{RR} = \int_v \rho I dv = \begin{bmatrix} m_r & 0 \\ 0 & m_r \end{bmatrix} \quad (I.7)$$

onde ρ é a densidade volumétrica do corpo, I é a matriz identidade, m_r é a massa do corpo rígido e v é o volume, considerando o corpo rígido com seção transversal constante com comprimento l_r .

$$m_{R\theta} = m_{\theta R}^T = A_\theta I_r = \frac{m_r l_r}{2} \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \quad (I.8)$$

Com,

$$A_\theta = \begin{bmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial\theta} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (I.9)$$

$$I_r = \int_v \rho u_r dv = m_r l_r \int_0^1 \begin{bmatrix} u_r & 0 \end{bmatrix}^T du = \frac{m_r l_r}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

onde u_r é o comprimento adimensional e definido por $u_r = x / l_r$, x é a distância de uma das extremidades da viga como referência.

$$m_{\theta\theta} = \int_v \rho u_r^T u_r dV = \int_0^1 \rho \begin{bmatrix} x & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} a dx = \frac{m_r l_r^2}{3} \quad (I.10)$$

onde a é a seção transversal da viga.

As forças generalizadas Q associadas às coordenadas generalizadas podem ser divididas em forças externas generalizadas Q_e e forças de velocidades quadráticas Q_v , como

$$Q = Q_e + Q_v \quad (\text{I.11})$$

No caso do manipulador multiarticulado a força externa generalizada é o torque aplicado no cubo e a força de impacto recebido na extremidade livre do manipulador. É importante revelar que a força gravitacional é desprezada neste trabalho, conforme descrita na seção 3.1. A força de velocidade quadrática contém componentes giroscópicos e coriolis.

A seguir, apresenta-se o desenvolvimento das forças generalizadas.

As forças externas generalizadas são determinadas pelo princípio de trabalho virtual, como mostra a equação I.10 para o corpo rígido.

$$\delta W = F_e^T \delta r \quad (\text{I.12})$$

onde, δW é o trabalho virtual, F_e é a força externa aplicada ao corpo e δr é o deslocamento virtual, definido por

$$\begin{aligned} \delta r &= \delta (R + Ax) \\ &= \delta R + A_{\theta} x \delta \theta \\ &= \begin{bmatrix} I_2 & A_{\theta} x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta R \\ \delta \theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{I.13})$$

Substituindo a equação I.11 pela equação I.10, tem-se

$$\begin{aligned}
 \delta W &= \mathbf{F}_e^T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{A}_\theta \mathbf{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{R} \\ \delta \theta \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_e^T & \mathbf{F}_e^T \mathbf{A}_\theta \mathbf{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{R} \\ \delta \theta \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{Q}_e^T \delta \mathbf{q}_r
 \end{aligned} \tag{I.14}$$

onde,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}_e &= [(\mathbf{Q}_e)_r \quad (\mathbf{Q}_e)_\theta]^T \\
 (\mathbf{Q}_e)_r &= \mathbf{F}_e^T \\
 (\mathbf{Q}_e)_\theta &= \mathbf{F}_e^T \mathbf{A}_\theta \mathbf{x} \\
 \delta \mathbf{q}_r &= [\delta \mathbf{R} \quad \delta \theta]^T
 \end{aligned} \tag{I.15}$$

Na equação I.12, $(\mathbf{Q}_e)_r$ é a força generalizada externa associada à translação e $(\mathbf{Q}_e)_\theta$ é a força generalizada externa associada à rotação. No caso do modelo da figura 3.2, a única força externa atuante é o torque T aplicado em uma das extremidades do corpo rígido, ou seja, $(\mathbf{Q}_e)_r = 0$ e $(\mathbf{Q}_e)_\theta = T$.

As forças generalizadas de velocidades quadráticas $\mathbf{Q}_v$ são determinadas pela equação de Lagrange, como mostra a equação I.16 para o corpo rígido.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\mathbf{q}}_r} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \mathbf{q}_r} = \mathbf{Q}_v \tag{I.16}$$

De acordo com a expressão da energia cinética da equação I.5, a $\mathbf{Q}_v$ é facilmente obtida

$$\begin{aligned}
 Q_v &= \left[(Q_v)_R \quad (Q_v)_\theta \right]^T \\
 &= \left[\dot{\theta}^2 A I_r \quad 0 \right]^T \\
 &= \left[\frac{m_r l_r}{2} \dot{\theta}^2 \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad 0 \right]^T
 \end{aligned} \tag{I.17}$$

Finalmente, fazendo

$$f_R = (Q_v)_R$$

$$f_\theta = (Q_e)_\theta = T$$

Portanto, a força generalizada Q para o corpo rígido da equação I.11 pode ser escrita

como :

$$\begin{aligned}
 Q &= Q_e + Q_v \\
 &= [f_R \quad f_\theta]^T
 \end{aligned} \tag{I.18}$$

APÊNDICE II

Desenvolvimento das equações auxiliares para o corpo flexível

Análogo ao desenvolvimento referido no Apêndice I, o vetor velocidade do corpo flexível pode ser escrito, de acordo com o vetor posição da equação 3.11, como :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\dot{\bar{\mathbf{x}}} \\ &= \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\mathbf{S}\dot{\mathbf{q}}_f\end{aligned}\tag{II.1}$$

Na equação II.1 o vetor velocidade da viga sem deformação é considerado nulo, isto é,

$\dot{\mathbf{x}} = 0$ e conseqüentemente, $\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{S}\dot{\mathbf{q}}_f$,

Agora, fazendo $\mathbf{B}_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}(\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}})$ e equação II.1 pode ser escrita :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{B}_2\dot{\theta} + \mathbf{A}\mathbf{S}\dot{\mathbf{q}}_f \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\mathbf{q}}_f \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{L}_2 \dot{\mathbf{q}}\end{aligned}\tag{II.2}$$

onde, I é a matriz identidade 2×2 e,

$$L_2 = [I \quad B_2 \quad AS] \quad e \quad \dot{q} = [\dot{R} \quad \dot{\theta} \quad \dot{q}_f]^T \quad (\text{II.3})$$

Então, a energia cinética E_c do corpo flexível será :

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \int_v \rho \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} dv \\ &= \frac{1}{2} \int_v \rho L_2^T \dot{\mathbf{q}}^T L_2 \dot{\mathbf{q}} dv \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left[\int_v \rho L_2^T L_2 dv \right] \dot{\mathbf{q}} \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{m}_f \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

onde v é o volume, $\mathbf{m}_f$ é a matriz de massa do corpo flexível e é definida por :

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_f &= \int_v \rho L_2^T L_2 dv \\ &= \int_v \rho \begin{bmatrix} I \\ B_2^T \\ (AS)^T \end{bmatrix} [I \quad B_2 \quad AS] dv \\ &= \begin{bmatrix} \bar{m}_{RR} & \bar{m}_{R\theta} & \bar{m}_{Rf} \\ \bar{m}_{\theta R} & \bar{m}_{\theta\theta} & \bar{m}_{\theta f} \\ \bar{m}_{fR} & \bar{m}_{f\theta} & \bar{m}_{ff} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Os componentes da matriz da massa $\mathbf{m}_f$ são determinados a seguir,

$$\bar{m}_{RR} = \int_v \rho I dv = \begin{bmatrix} m_f & 0 \\ 0 & m_f \end{bmatrix} \quad (\text{II.6})$$

onde m_f é a massa do corpo flexível.

$$\bar{m}_{R\theta} = \bar{m}_{\theta R}^T = A_\theta [I_f + \bar{S} q_f] \quad (\text{II.7})$$

Considerando o corpo flexível na forma de uma viga com comprimento l_f , I_f e $\bar{S}$ da equação II.7, tem-se

$$I_f = \int_v \rho u_f dv = m_f l_f \int_0^1 [u \quad 0]^T du = \frac{m_f l_f}{2} [1 \quad 0]^T \quad (\text{II.7a})$$

$$\bar{S} = \int_v \rho S dv = m_f \int_0^1 S du = m_f \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{l_f}{12} \end{bmatrix} \quad (\text{II.7b})$$

Substituindo as equações II.7a e II.7b em II.7 tem-se

$$\begin{aligned} \bar{m}_{R\theta} &= \begin{bmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix} \left\{ \frac{m_f l_f}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + m_f \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{l_f}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \alpha \end{bmatrix} \right\} \\ \bar{m}_{R\theta} &= \frac{m_f}{12} \begin{bmatrix} -(6l_f + 6U_1)\sin\theta - (6U_2 - l_f\alpha)\cos\theta \\ (6l_f + 6U_1)\cos\theta - (6U_2 - l_f\alpha)\sin\theta \end{bmatrix} \quad (\text{II.8}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{m}_{Rf} &= A\bar{S} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} m_f \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{l_f}{12} \end{bmatrix} \\ &= \frac{m_f}{12} \begin{bmatrix} 6\cos\theta & -6\sin\theta & l_f\sin\theta \\ 6\sin\theta & 6\cos\theta & -l_f\cos\theta \end{bmatrix} \quad (\text{II.9}) \end{aligned}$$

onde U_1 , U_2 e α são coordenadas do corpo flexível.

$$\begin{aligned}
 \bar{m}_{ff} &= \int_v \rho S^T S dv = m_f \int_0^1 S^T S du \\
 &= m_f \int_0^1 \begin{bmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & 3u^2 - 2u^3 & l_f(u^3 - u^2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & 3u^2 - 2u^3 & l_f(u^3 - u^2) \end{bmatrix} du \\
 &= m_f \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{35} & -\frac{11}{210}l_f \\ 0 & -\frac{11}{210}l_f & \frac{1}{105}l_f \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{II.10}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{m}_{\theta\theta} &= \int_v \rho B_2^T B_2 dv = \int_v \rho \bar{x}^T \bar{x} dv = \int_v \rho [x + x_f]^T [x + x_f] dv \\
 &= \int_v \rho [x^T x + 2x^T x_f + x_f^T x_f] dv \\
 &= \int_v \rho x^T x dv + 2 \int_v \rho x^T x_f dv + \int_v \rho x_f^T x_f dv \\
 &= (\bar{m}_{\theta\theta})_1 + (\bar{m}_{\theta\theta})_2 + (\bar{m}_{\theta\theta})_3
 \end{aligned}
 \tag{II.11}$$

onde

$$(\bar{m}_{\theta\theta})_1 = \int_v \rho x^T x dv = \int_0^{l_f} \rho \begin{bmatrix} x & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} a dx = \frac{m_f l_f^2}{3}
 \tag{II.11a}$$

Na equação II.11a, x é a distância de uma das extremidade da viga e a é a seção transversal, considerando ainda o comprimento adimensional para o corpo flexível

$$U_f = x / l_f.$$

$$\begin{aligned}
 (\bar{m}_{\theta\theta})_2 &= 2 \int_v \rho \mathbf{x}^T \mathbf{x}_f dv = 2 \left[\int_v \rho \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{q}_f dv \right] \\
 &= 2 \int_0^1 m_f \begin{bmatrix} x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_f & 0 \\ 0 & 3u_f^2 - 2u_f^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \alpha \end{bmatrix} du_f \quad (\text{II.11b}) \\
 &= \frac{2}{3} m_f l_f U_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\bar{m}_{\theta\theta})_3 &= \int_v \rho \mathbf{x}_f^T \mathbf{x}_f dv = \int_v \rho \mathbf{q}_f^T \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{q}_f dv \\
 &= \mathbf{q}_f^T \left[\int_v \rho \mathbf{S}^T \mathbf{S} dv \right] \mathbf{q}_f = \mathbf{q}_f^T \bar{\mathbf{m}}_{ff} \mathbf{q}_f \\
 &= \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & \alpha \end{bmatrix} m_f \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{35} & -\frac{11}{210} l_f \\ 0 & -\frac{11}{210} l_f & \frac{1}{105} l_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \alpha \end{bmatrix} \\
 &= m_f \left(\frac{1}{3} U_1^2 + \frac{13}{35} U_2^2 + \frac{1}{105} l_f^2 \alpha^2 - \frac{11}{105} l_f U_2 \alpha \right) \quad (\text{II.11c})
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\bar{m}_{\theta\theta} = m_f \left(\frac{1}{3} l_f^2 + \frac{2}{3} l_f U_1 + \frac{1}{3} U_1^2 + \frac{13}{35} U_2^2 + \frac{1}{105} l_f^2 \alpha^2 - \frac{11}{105} l_f U_2 \alpha \right) \quad (\text{II.11d})$$

$$\bar{\mathbf{m}}_{\theta f} = \int_v \rho \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{S} dv = \int_v \rho \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}_0^T \mathbf{A} \mathbf{S} dv = \int_v \rho \left[\mathbf{x} + \mathbf{x}_f \right]^T \mathbf{A}_0^T \mathbf{A} \mathbf{S} dv \quad (\text{II.12})$$

Por outro lado,

$$A_{\theta}^T A = \begin{bmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{I}$$

então, $\bar{m}_{\theta_f}$ pode ser assim escrita

$$\bar{m}_{\theta_f} = (\bar{m}_{\theta_f})_1 + (\bar{m}_{\theta_f})_2 \quad (\text{II.12a})$$

onde

$$\begin{aligned} (\bar{m}_{\theta_f})_1 &= \int_v \rho \mathbf{x}^T \tilde{I} S \, dv \\ &= \int_0^1 m_f \begin{bmatrix} l_f u_f & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_f & 0 & 0 \\ 0 & 3u_f^2 - 2u_f^3 & l_f(u_f^3 - u_f^2) \end{bmatrix} du_f \\ &= m_f l_f \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{20} & -\frac{1}{20} l_f \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.12b})$$

$$\begin{aligned} (\bar{m}_{\theta_f})_2 &= \int_v \rho \mathbf{x}_f^T \tilde{I} S \, dv = \mathbf{q}_f^T \int_v \rho \mathbf{S}^T \tilde{I} S \, dv \\ &= \mathbf{q}_f^T \left\{ m_f \int_0^1 \begin{bmatrix} u_f & 0 & 0 \\ 0 & 3u_f^2 - 2u_f^3 & l_f(u_f^3 - u_f^2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_f & 0 & 0 \\ 0 & 3u_f^2 - 2u_f^3 & l_f(u_f^3 - u_f^2) \end{bmatrix} du_f \right\} \\ &= [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2 \quad \alpha] \frac{m}{20} \begin{bmatrix} 0 & 7 & -l_f \\ -7 & 0 & 0 \\ l_f & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{m}{20} \begin{bmatrix} -7\mathbf{U}_2 + l_f \alpha & 7\mathbf{U}_1 & -l_f \mathbf{U}_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.12c})$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\bar{m}_\theta &= m_f l_f \left[0 \quad \frac{7}{20} \quad -\frac{I}{20} l_f \right] + \frac{m_f}{20} \begin{bmatrix} -7U_2 + l_f \alpha & 7U_1 & -l_f U_1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{m_f}{20} \begin{bmatrix} -7U_2 + l_f \alpha & 7(l_f + U_1) & -l_f(l_f + U_1) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (\text{II.12d})$$

A rigidez do corpo flexível é determinada através da análise da energia potencial

U da viga e pode ser escrita como:

$$U = \frac{I}{2} \int_0^{l_f} \left[EI \left(x_{f2}'' \right)^2 + E a \left(x_{f1}' \right)^2 \right] dx \quad (\text{II.13})$$

onde E é o módulo de elasticidade, I é o momento de inércia, $(')$ indica a derivada parcial com relação à coordenada x e x_f é definida por

$$\begin{aligned}x_f &= S q_f = \begin{bmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & 3u^2 - 2u^3 & l_f(u^3 - u^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u U_1 \\ (3u^2 - 2u^3) U_2 + l_f(u^3 - u^2) \alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_{f1} \\ x_{f2} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (\text{II.14})$$

Por outro lado a equação II.13 será :

$$U = \frac{I}{2} \int_0^{l_f} \begin{bmatrix} x_{f1}' & x_{f2}'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E a & 0 \\ 0 & E I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{f1}' \\ x_{f2}'' \end{bmatrix} dx \quad (\text{II.15})$$

Lembrando que $u = x/l_f$, x_{f1}' e x_{f2}'' podem ser escritas

$$x_{f1}' = \frac{\partial}{\partial x}(uU_1) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{l_f}U_1\right) = \frac{U_1}{l_f}$$

$$x_{f2}'' = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x_{f2})\right) = \left(\frac{6}{l_f^2} - \frac{12x}{l_f^3}\right)U_2 + l_f\left(\frac{6x}{l_f^3} - \frac{2}{l_f^2}\right)\alpha$$

Então,

$$\begin{bmatrix} x_{f1}' \\ x_{f2}'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{l_f} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{6}{l_f^2} - \frac{12x}{l_f^3}\right) & l_f\left(\frac{6x}{l_f^3} - \frac{2}{l_f^2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (\text{II.16})$$

$$= \mathbf{D} \mathbf{q}_f$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{l_f} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{6}{l_f^2} - \frac{12x}{l_f^3}\right) & l_f\left(\frac{6x}{l_f^3} - \frac{2}{l_f^2}\right) \end{bmatrix}$$

Substituindo a equação II.16 para a equação II.15, tem-se

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{l_f} \mathbf{q}_f^T \mathbf{D}^T \mathbf{E} \mathbf{D} \mathbf{q}_f dx \quad (\text{II.17})$$

onde

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} Ea & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix}$$

ou ainda na forma compacta com a matriz de rigidez K_f ,

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{l_f} \mathbf{q}_f^T \mathbf{K}_f \mathbf{q}_f dx \quad (\text{II.18})$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_f &= \mathbf{D}^T \mathbf{E} \mathbf{D} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{Ea}{l_f} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l_f^3} & -\frac{6EI}{l_f^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l_f^2} & \frac{4EI}{l_f} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

Conforme descritas no Apêndice I, as forças generalizadas externas para corpo flexível podem ser determinadas pelo princípio de trabalho virtual, de acordo com a equação II.20.

$$\begin{aligned} \delta W &= \mathbf{F}_e^T \begin{bmatrix} I_2 & A_0 & AS \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta R \\ \delta \theta \\ \delta \mathbf{q}_f \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{Q}_e \delta \mathbf{q} \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_e &= [(\mathbf{Q}_e)_R \quad (\mathbf{Q}_e)_\theta \quad (\mathbf{Q})_f] \\ (\mathbf{Q}_e)_R &= \mathbf{F}_e^T \\ (\mathbf{Q}_e)_\theta &= \mathbf{F}_e^T A_0 \mathbf{x} \\ (\mathbf{Q})_f &= \mathbf{F}_e^T AS \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

Entretanto, as forças externas como torque e força de impacto são aplicadas apenas na parte rígida do manipulador em questão, conforme descrito na seção 3.1. Portanto, para o corpo flexível, as forças externas são nulas, $Q_e = 0$.

E as forças generalizadas de velocidades quadráticas Q_v para o corpo flexível podem ser determinadas pela equação de Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q} = Q_v \quad (\text{II.22})$$

De acordo com as equações II.1 e II.4 da energia cinética, Q_v pode ser escrita

$$Q_v = \left[(Q_v)_R \quad (Q_v)_\theta \quad (Q_v)_f \right] \quad (\text{II.23})$$

$$\begin{aligned} (Q_v)_R &= \dot{\theta}^2 A (\bar{S} q_f + I_f) - 2 \dot{\theta} A_\theta \bar{S} \dot{q}_f \\ &= \frac{m_f \dot{\theta}^2}{2} \begin{bmatrix} (l_f + U_1) \cos \theta - \left(U_2 - \frac{l_f}{6} \alpha \right) \sin \theta \\ (l_f + U_1) \sin \theta + \left(U_2 - \frac{l_f}{6} \alpha \right) \cos \theta \end{bmatrix} \\ &\quad - \frac{m_f \dot{\theta}}{6} \begin{bmatrix} -6 \dot{U}_1 \sin \theta - (6 \dot{U}_2 - l_f \dot{\alpha}) \cos \theta \\ 6 \dot{U}_1 \cos \theta - (6 \dot{U}_2 - l_f \dot{\alpha}) \sin \theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.23a})$$

$$\begin{aligned}
(Q_v)_\theta &= -2\dot{\theta}\dot{q}_f^T(m_{ff}q_f + I_o) \\
&= -2\dot{\theta}\dot{q}_f^T m_{ff}q_f - 2\dot{\theta}\dot{q}_f^T I_o \\
&= -2\dot{\theta}m_f \left[\frac{1}{3}U_1\dot{U}_1 + \left(\frac{13}{35}U_2 - \frac{11}{210}l_f\alpha \right)\dot{U}_2 + \left(-\frac{11}{210}l_fU_2 + \frac{1}{105}l_f^2\alpha \right)\dot{\alpha} \right] \\
&\quad - 2\dot{\theta} \left(\frac{1}{3}m_f l_f \dot{U}_1 \right) \\
&= -2\dot{\theta}m_f \left[\frac{1}{3}(l_f + U_1)\dot{U}_1 + \left(\frac{13}{35}U_2 - \frac{11}{210}l_f\alpha \right)\dot{U}_2 + \left(-\frac{11}{210}l_fU_2 + \frac{1}{105}l_f^2\alpha \right)\dot{\alpha} \right]
\end{aligned}$$

(II.23b)

onde

$$\begin{aligned}
I_o &= \int_v \rho S^T x dV \\
&= \int_0^l m_f \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & 3u^2 - u^3 \\ 0 & l_f(u^3 - u^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_f u \\ 0 \end{bmatrix} du \\
&= \frac{m_f}{3} [l_f \quad 0 \quad 0]^T
\end{aligned}$$

$$(Q_v)_f = \dot{\theta}^2(m_{ff}q_f + I_o) + 2\dot{\theta}\tilde{S}\dot{q}_f \quad \text{(II.23c)}$$

na qual a matriz anti-simétrica $\tilde{S}$ é definida por,

$$\begin{aligned}
 \tilde{S} &= \int_v \rho S^T \tilde{I} S dv \\
 &= m_f \int_0^1 \begin{bmatrix} u_f & 0 \\ 0 & 3u_f^2 - u_f^3 \\ 0 & l_f(u_f^3 - u_f^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_f & 0 & 0 \\ 0 & 3u_f^2 - u_f^3 & l_f(u_f^3 - u_f^2) \end{bmatrix} du_f \\
 &= \frac{m_f}{20} \begin{bmatrix} 0 & 7 & -l_f \\ -7 & 0 & 0 \\ l_f & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 (Q_v)_f &= m_f \dot{\theta}^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(l_f + U_1) \\ \frac{13}{35}U_2 - \frac{11}{210}l_f\alpha \\ -\frac{11}{210}l_fU_2 + \frac{1}{105}l_f^2\alpha \end{bmatrix} + \frac{m_f \dot{\theta}}{10} \begin{bmatrix} 7\dot{U}_2 - l_f\dot{\alpha} \\ -7\dot{U}_1 \\ l_f\dot{U}_1 \end{bmatrix} \\
 &= m_f \dot{\theta} \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(l_f + U_1)\dot{\theta} + \left(\frac{7}{10}\dot{U}_2 - \frac{1}{10}l_f\dot{\alpha}\right) \\ \left(\frac{13}{35}U_2 - \frac{11}{210}l_f\alpha\right)\dot{\theta} - \frac{7}{10}\dot{U}_1 \\ \left(-\frac{11}{210}l_fU_2 + \frac{1}{105}l_f^2\alpha\right)\dot{\theta} + \frac{1}{10}l_f\dot{U}_1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.23d})
 \end{aligned}$$

Finalmente, fazendo,

$$f_1 = (Q_v)_R$$

$$f_2 = (Q_v)_\theta$$

$$f_3 = (Q_v)_f$$

A força generalizada Q para corpo flexível pode ser escrita,

$$\begin{aligned}
 Q &= Q_e + Q_v \\
 &= [f_1 \quad f_2 \quad f_3]^T \quad (\text{II.24})
 \end{aligned}$$

