

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE SÃO JOÃO DA BOA VISTA

GUILHERME PARREIRA MOIA

Estruturas aeroespaciais conectadas por cabos – *Space tethers*

São João da Boa Vista

2022

Guilherme Parreira Moia

Estruturas aeroespaciais conectadas por cabos – *Space tethers*

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Engenharia Aeronáutica do Campus de São João da Boa Vista, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Engenharia Aeronáutica .

Orientador: Profº Dr. Denilson Paulo Souza dos Santos

São João da Boa Vista

2022

M712e Moia, Guilherme Parreira
Estruturas aeroespaciais conectadas por cabos – Space tethers /
Guilherme Parreira Moia. -- São João da Boa Vista, 2022
46 p.

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Engenharia
Aeronáutica) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de
Engenharia, São João da Boa Vista
Orientador: Denilson Paulo Souza dos Santos

1. Engenharia aeroespacial. 2. Sistemas dinâmicos diferenciais. 3.
Lagrange, Equações de. 4. Satélites artificiais Órbitas. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de
Engenharia, São João da Boa Vista. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE SÃO JOÃO DA BOA VISTA
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA AERONÁUTICA**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

ESTRUTURAS AEROESPACIAIS CONECTADAS POR CABOS – SPACE TETHERS

Aluno: Guilherme Parreira Moia

Orientador: Prof. Dr. Denilson Paulo Souza dos Santos

Banca Examinadora:

- Denilson Paulo Souza dos Santos (Orientador)
- Priscilla Andressa de Souza Silva (Examinadora)
- Crystopher Cardoso de Brito (Examinador)

A ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no prontuário do aluno (Expediente nº 003/2022)
--

São João da Boa Vista, 23 de setembro de 2022

Dedico este trabalho aos meus pais, familiares e amigos que estiveram presentes ao longo desta trajetória.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais, Juliane e André, por todo o apoio e esforço que permitiram a conclusão dessa etapa, e aos meus familiares que estiveram presentes e contribuíram com essa trajetória.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Denilson Paulo Souza dos Santos por compartilhar o seu conhecimento ao longo de todos esses anos de graduação e de iniciação científica, sendo responsável por promover e incentivar a participação em projetos e eventos acadêmicos, os quais contribuíram para o meu desenvolvimento pessoal.

Agradeço também aos professores do curso de Engenharia Aeronáutica da UNESP de São João da Boa Vista por toda a dedicação e conhecimento transmitido.

Por fim, gostaria de agradecer aos meus amigos que fizeram parte dessa minha trajetória, em especial ao Guilherme Marcos Neves por todo o apoio e companheirismo.

Este trabalho contou com o apoio da seguinte entidade:

Processo nº 2019/11225-0, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

“Que os nossos esforços desafiem as impossibilidades. Lembrai-vos de que as grandes proezas da história foram conquistas daquilo que parecia impossível.”
(Charles Chaplin)

RESUMO

Neste trabalho foram analisadas duas configurações de sistemas formadas por nanossatélites em órbita terrestre. Estes sistemas, conhecidos como *tether systems*, foram modelados como massas pontuais conectadas por cabo ao longo dos eixos cartesianos, sendo o primeiro sistema formado por dois corpos e o segundo formado por seis corpos. Os cabos foram considerados com massas desprezáveis e de comprimento variável. Os movimentos são descritos a partir da posição do centro de massa de cada sistema em órbita kepleriana ao redor de um corpo primário (referencial inercial). As equações de movimento foram derivadas partindo das equações de Lagrange para um sistema conservativo utilizando das energias potencial e cinética, desconsiderando a ação de forças externas e perturbações. As coordenadas generalizadas utilizadas na modelagem foram os ângulos de rotação no plano orbital dos *tethers*. Foram analisados os comportamentos oscilatórios dos sistemas em função da anomalia verdadeira, assim como as variações das energias potencial e cinética do sistema e da força de tração. Como resultados foram encontrados valores de excentricidade orbital para que o sistema permaneça em equilíbrio e regiões ao longo do período orbital em que o *tether* não se mantém tracionado, caracterizando uma instabilidade estrutural.

PALAVRAS-CHAVE: Tether Systems. Estruturas Aeroespaciais. Dinâmica Orbital.

ABSTRACT

In this Bachelor's thesis, two configurations of systems formed by nanosatellites in Earth orbit were analyzed. These systems, known as tether systems, were modeled as point masses connected by cable along Cartesian axes, the first system being formed by two bodies and the second formed by six bodies. The cables were considered to have negligible masses and variable length. The movements are described from the center of mass position of each system in keplerian orbit around a primary body (inercial reference). The equations of motion were derived from Lagrange's equations for a conservative system using potential and kinetic energies, disregarding the action of external forces and perturbations. The generalized coordinates used in the modeling were the rotation angles of the tethers. The oscillatory behaviors of the systems as a function of the true anomaly were analyzed, as well as the variations of the potential and kinetic energies of the system and the tensile force. As a result, orbital eccentricity values were found for the system to remain in equilibrium and regions throughout the orbital period in which the tether does not remain in tension, characterizing a structural instability.

KEYWORDS: Tether Systems. Aerospace Structures. Orbital Dynamics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	<i>Tether system</i> escalador.	16
Figura 2	<i>Tether system</i> elevador espacial.	16
Figura 3	<i>Tether system</i> para posicionamento de carga em órbita.	17
Figura 4	<i>Tether system</i> sonda atmosférica.	17
Figura 5	<i>Tether system</i> arpão para captura.	18
Figura 6	Sistema de referência equatorial.	24
Figura 7	Elementos orbitais clássicos.	24
Figura 8	Sistema orbital local.	25
Figura 9	Representação do sistema do tipo haltere em órbita terrestre.	26
Figura 10	Esquema do <i>tether system</i> estudado - Tipo haltere.	27
Figura 11	Representações da constelação de nanossatélites formada por seis corpos.	31
Figura 12	Esquema do sistema estudado - constelação de nanossatélites.	32
Figura 13	Energia potencial em função da anomalia verdadeira para o modelo do tipo haltere. Condição de $\psi = 0$ e $\varphi_0 = 0$, $p = 7200 km$	37
Figura 14	Variação das energias cinética e total em função da anomalia verdadeira para o modelo do tipo haltere. Condição de $\psi = 0$ e $\varphi_0 = 0$, $p = 7200 km$	38
Figura 15	Variação do comprimento do <i>tether</i> em função da anomalia verdadeira para o modelo do tipo haltere. Condição de $\psi = \pi/2$ e $\varphi_0 = 0$, $p = 7200 km$	39
Figura 16	Comportamento de φ de equilíbrio em função da anomalia verdadeira para valores de excentricidade.	40
Figura 17	Energia potencial em função da anomalia verdadeira para o modelo de constelação. Condição de $\psi = 0$ e $\varphi_0 = 0$, $p = 7200 km$	41
Figura 18	Variação das energias cinética e total em função da anomalia verdadeira para o modelo de constelação. Condição de $\psi = \pi/2$ e $\varphi_0 = 0$, $p = 7200 km$	42
Figura 19	Variação do comprimento do <i>tether</i> em função da anomalia verdadeira para o modelo de constelação. Condição de $\psi = \pi/2$ e $\varphi_0 = 0$, $p = 7200 km$	43

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Missões espaciais realizadas com experimentos de <i>space tethers</i>	15
--	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
UNESP	Universidade Estadual Paulista
LEO	Órbita terrestre baixa (<i>Low Earth Orbit</i>)
GTO	Órbita de transferência geoestacionária (<i>Geostationary Transfer Orbit</i>)

LISTA DE SÍMBOLOS

e	Excentricidade orbital
h	Momento angular
a	Semi-eixo maior
θ, ν	Anomalia verdadeira
Ω	Longitude do nó ascendente
i	Inclinação do plano
ω	Argumento do perigeu
m_i	Massa do i-ésimo corpo
C	Centro de massa do sistema
x_i, y_i, z_i	Coordenadas do i-ésimo corpo
ρ	Distância do centro de massa até ao corpo primário
p	<i>Semi-latus rectum</i>
l_i	Comprimento do i-ésimo <i>tether</i>
l	Comprimento total do <i>tether</i>
L	Lagrangiano
T	Energia cinética
V	Energia potencial
q_j	Coordenada generalizada
v_i	Velocidade do i-ésimo corpo
M	Massa corpo primário
Q_j	Força generalizada
ω	Velocidade de rotação
φ_0	Condição inicial de rotação

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Principais aplicações dos <i>Tether Systems</i>	15
1.2	Motivação	18
1.3	Objetivo	18
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	19
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	24
3.1	Sistema de referência	24
4	DESENVOLVIMENTO	26
4.1	Sistema formado por duas massas - Tipo haltere	26
4.1.1	Definição e modelagem do sistema	26
4.1.2	Formulação energética	28
4.1.3	Pontos de equilíbrio	30
4.1.4	Força de tração no tether	31
4.2	Sistema formado por 6 massas - Constelação de nanossatélites	31
4.2.1	Definição e modelagem do sistema	31
4.2.2	Formulação energética	33
4.2.3	Pontos de equilíbrio	35
5	RESULTADOS	36
5.1	Sistema formado por duas massas - Tipo haltere	36
5.1.1	Energia potencial e cinética	36
5.1.2	Variação do comprimento do <i>tether</i>	39
5.1.3	Pontos de equilíbrio	39
5.2	Sistema formado por seis massas - Constelação de nanossatélites	40
5.2.1	Energia potencial e cinética	41
5.2.2	Variação do comprimento do <i>tether</i>	43
6	CONCLUSÃO	44
	REFERÊNCIAS	45

1 INTRODUÇÃO

O número de investimentos para o desenvolvimento de projetos na área aeroespacial está crescendo nos últimos anos e vêm impulsionando inovações nos campos da tecnologia, materiais, sistemas, entre outros. Aliado ao uso de tecnologias mais eficientes, e com a finalidade de reduzir os custos de missões espaciais, há um grande potencial para a utilização de nanossatélites para missões específicas, dado que o uso de satélites convencionais envolve um alto investimento em sua construção e operação.

Tether systems são sistemas formados por objetos rígidos ligados entre si por cabos flexíveis e de elevado comprimento, conhecidos como *tethers*. Esses sistemas possuem um grande potencial para o transporte eficiente de cargas ao espaço sem o uso de propelentes e para geração de eletricidade (CARTMELL; MCKENZIE, 2008).

Lorenzini (1986) atribui que qualquer formação com mais de duas massas conectadas por cabos no espaço, em uma configuração estável, é classificada como *tethered constellation*. A força de estabilização do sistema pode ser gerada por meio do gradiente de gravidade vertical, forças eletrodinâmicas, forças centrífugas ou por arrasto diferencial.

Constelações de nanossatélites possuem a capacidade de embarcar uma grande quantidade de sensores distribuídos entre os corpos, podendo ter aplicações em diversas áreas como medição do campo magnético e da pressão de radiação solar; aerodinâmica, com a coleta de dados atmosféricos; e eletrodinâmica, com a geração de energia e empuxo por meio da interação com a ionosfera (COSMO; LORENZINI, 1997).

O conceito de *space tethers* teve seu início com o cientista russo Konstantin Tsiolkovsky em 1895, o qual estava idealizando a criação de gravidade artificial a partir da rotação ao redor do centro de massa de um sistema composto por um veículo espacial conectado a um contrapeso por meio de correntes, e que essa gravidade gerada influenciava na atitude do sistema. Posteriormente, o uso dessas correntes evoluiu para o uso de cabos flexíveis. Tsiolkovsky, inspirado na torre Eiffel, foi um dos primeiros a imaginar uma “torre” em que a base se situa sobre a superfície terrestre e seu topo estaria em uma órbita geoestacionária, foi baseada nesta ideia em que surgiu o conceito de elevador espacial (BELETSKI; LEVIN, 1993).

Na década de 1960, deu-se início aos estudos sobre o controle da atitude de sistemas espaciais por meio da variação da distribuição de massa. Esses estudos consideraram perturbações no movimento devido ao arrasto atmosférico, pressão de radiação solar e perturbações originadas pelo mecanismo de liberação do *tether* (SANTOS et al., 2015). Nesta década, também tiveram início os primeiros experimentos do uso de *tether systems* para a movimentação de cargas entre órbitas. Para esses experimentos, é necessário levar em conta o movimento do centro de massa do sistema, conseguir prever situações anormais e realizar um estudo do movimento caótico do veículo espacial causado por oscilações (ASLANOV; LEDKOV, 2012).

Os primeiros experimentos ocorreram em 1966 durante as missões Gemini 11 e Gemini 12 com o objetivo de estudar a viabilidade da formação de *tether systems*, para isso foi conectado um veículo espacial ao último estágio do veículo lançador Agena.

Na missão Gemini 12 foi realizado um experimento para executar a estabilização pelo gradiente gravitacional do sistema. Apesar do sistema de controle do veículo não ter funcionado, o problema de orientação da liberação do *tether* foi solucionado.

Desde então, outras missões utilizando o conceito de *tether systems* foram realizadas. Na Tabela 1 são apresentadas todas as missões realizadas, o tipo de órbita, o ano em que foi realizada e as informações sobre os comprimentos dos *tethers* utilizados.

Tabela 1 – Missões espaciais realizadas com experimentos de *space tethers*.

Missão	Órbita	Ano de implementação	Comprimento total do <i>tether</i>	Comprimento do <i>tether</i> liberado
GEMINI-11	LEO	1966	36 m	36 m
GEMINI-12	LEO	1966	36 m	36 m
TPE-1	Suborbital	1980	400 m	38 m
TPE-2	Suborbital	1981	400 m	103 m
CHARGE-1 (TPE-3)	Suborbital	1983	418 m	418 m
CHARGE-2 (TPE-4)	Suborbital	1984	426 m	426 m
OEDIPUS-A	Suborbital	1989	958 m	958 m
CHARGE-2B	Suborbital	1992	426 m	426 m
TSS-1	LEO	1992	20 km	268 m
SEDS-1	LEO	1993	20 km	20 km
PMG	LEO	1993	500 m	500 m
SEDS-2	LEO	1994	20 km	20 km
OEDIPUS-C	Suborbital	1995	1174 m	1174 m
TSS-1R	LEO	1996	19,7 km	19,7 km
TiPS	LEO	1996	4 km	4 km
YES	GTO	1997	35 km	-
ATE _x	LEO	1998	6,05 km	22 m
PICOSAT 1	LEO	2000	30 m	30 m
PICOSAT 1.1	LEO	2000	30 m	30 m
YES2	LEO	2007	31,7 km	29 km
T-REX	Suborbital	2010	300 m	300 m

fonte: Traduzido de (ASLANOV; LEDKOV, 2012)

1.1 PRINCIPAIS APLICAÇÕES DOS *TETHER SYSTEMS*

O conceito de *tether systems* possui uma vasta área de aplicação, podendo ser aplicado desde o transporte de cargas no espaço até a geração de gravidade artificial. Aslanov e Ledkov (2012) apresentam várias aplicações do conceito, porém foram selecionadas as principais aplicações para apresentar neste trabalho.

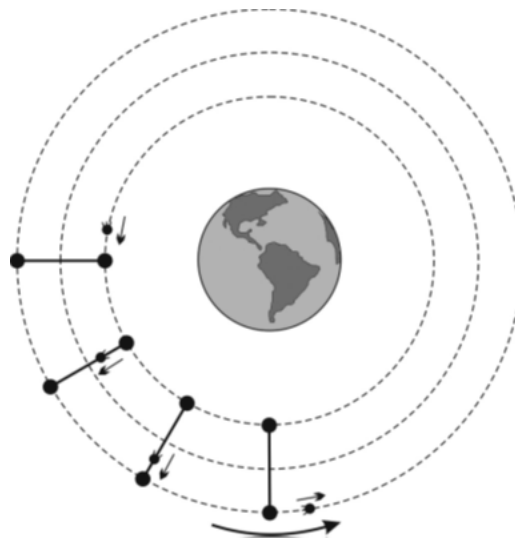
A criação de gravidade artificial foi uma das primeiras aplicações idealizadas para o conceito de *tethers* por meio da força centrífuga gerada a partir da rotação de dois corpos. A magnitude dessa força é proporcional ao comprimento do cabo e ao quadrado da velocidade de rotação do sistema. Um *tether* de 10 km de comprimento permite uma gravidade artificial de $10^{-2} m/s^2$, enquanto que para gerar uma aceleração da magnitude da gravidade terrestre é preciso de um *tether* com comprimento de $10^7 m$ (ASLANOV; LEDKOV, 2012).

A aplicação em transporte de cargas para o espaço pode ser realizada de duas maneiras distintas.

Primeiramente, utilizando o conceito de escalador, mostrado na Figura 1, a carga é conectada em uma das extremidades do *tether*, o qual realiza a movimentação entre órbitas (movimento ascendente ou descendente) e, em seguida, é desconectado e continua seu movimento. É necessário levar em conta a massa da carga e a velocidade do transporte, pois podem influenciar na efetividade do transporte.

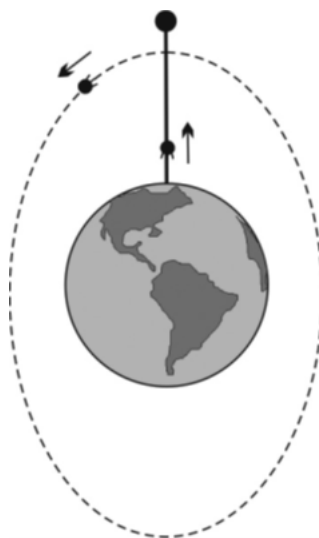
O segundo conceito é o elevador espacial, mostrado na Figura 2. A principal diferença em relação ao conceito do escalador é que o elevador espacial está conectado à superfície terrestre. O movimento de subida ou descida ocorre conectando a carga e elevando a sua altitude. A principal vantagem desse tipo de transporte é a menor energia necessário para colocar uma carga em órbita, quando comparada ao uso de foguetes espaciais (ASLANOV; LEDKOV, 2012).

Figura 1 – *Tether system* escalador.



fonte: (ASLANOV; LEDKOV, 2012)

Figura 2 – *Tether system* elevador espacial.

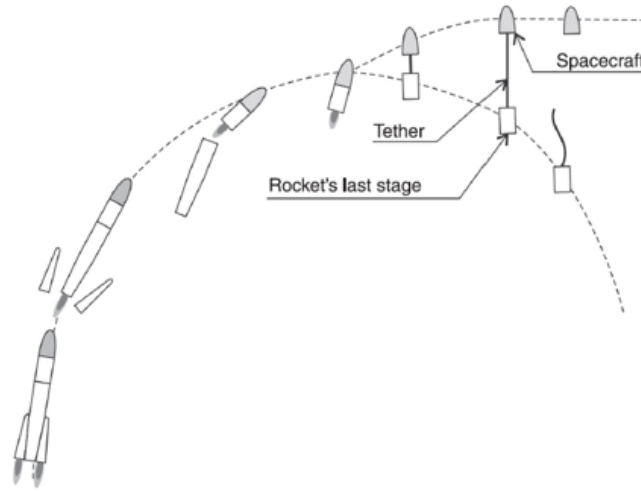


fonte: (ASLANOV; LEDKOV, 2012)

Uma outra aplicação de *tether systems* para colocar uma carga em órbita é o uso do *tether* no último estágio de um veículo lançador, assim como representado na Figura 3. A ideia é utilizar do movimento

de queda do último estágio do lançador, após o consumo total de combustível, e realizar a liberação do *tether* continuando o movimento ascendente da carga para uma órbita mais elevada (ASLANOV; LEDKOV, 2012).

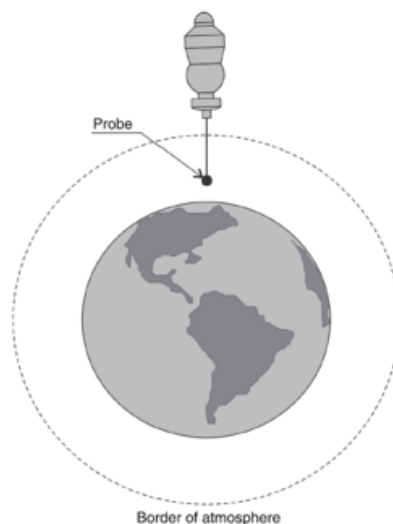
Figura 3 – *Tether system* para posicionamento de carga em órbita.



fonte: (ASLANOV; LEDKOV, 2012)

A utilização de sondas atmosféricas conectadas por cabos em veículos espaciais ou satélites possibilita o estudo da atmosfera em altitudes próximas de 150 km é representada na Figura 4. Porém, pela sonda estar em uma altitude menor ela terá uma arrasto maior, fator que pode diminuir o tempo de caimento orbital, sendo necessário executar correções via propulsores.

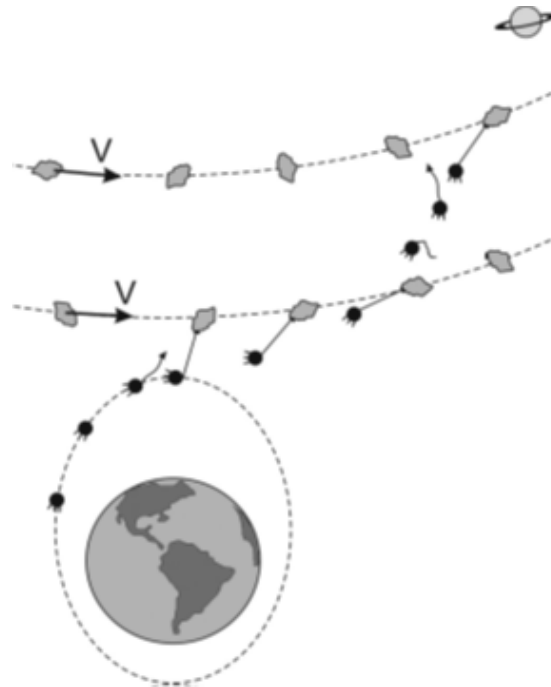
Figura 4 – *Tether system* sonda atmosférica.



fonte: (ASLANOV; LEDKOV, 2012)

Um outro conceito bastante estudado atualmente é o uso de arpões e redes de captura para remoção de detritos espacial. No entanto, a dinâmica é semelhante ao uso de arpões para coleta de amostras de cometas e asteroides apresentada na Figura 5. Para esse método ser eficiente é necessária uma precisão para ancorar o *tether* no asteroide que será estudado (ASLANOV; LEDKOV, 2012).

Figura 5 – *Tether system* arpão para captura.



fonte: (ASLANOV; LEDKOV, 2012)

1.2 MOTIVAÇÃO

Assim como apresentado, o uso de *tether systems* em diversas áreas com objetivos específicos distintos, caracteriza um grande potencial para o desenvolvimento de novas tecnologias e modelos que melhor descrevam os sistemas.

Atualmente grandes empresas estão investindo em missões espaciais e procurando novas formas de reduzir os custos operacionais, assim como a empresa *SpaceX* que desenvolveu sistemas para reaproveitar o uso de seus veículos lançadores.

Nos últimos anos, além de grandes empresas privadas, universidades desenvolveram seus próprios nanossatélites e colocaram em órbita para coleta de dados e realização de experimentos.

1.3 OBJETIVO

O objetivo deste trabalho é analisar duas configurações de *tether systems*, formadas respectivamente por duas e seis massas pontuais conectadas por cabo ao longo dos eixos cartesianos, em órbitas keplerianas ao redor de um corpo primário (referencial inercial).

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- estudo do estado da arte no campo das estruturas espaciais ligados por cabo;
- modelagem de sistemas ligados por cabos: dinâmica orbital e estabilidade do sistema;
- análise da dinâmica de rotação e aplicação de leis de controle para o cabo;
- alteração de configurações nos sistemas e verificar seus respectivos comportamentos.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Contribuições sobre o assunto de *space tethers*, em específico sobre análises dinâmicas, estabilidade e controle de sistemas foram estudadas e contribuíram para o entendimento e modelagem do conceito. Nas últimas décadas, esse tópico atraiu a atenção de muitos pesquisadores e ganhou um grande número de publicações sobre as abordagens analíticas, numéricas e experimentais.

Apresentando o conceito de *space tethers*, Beletski e Levin (1993) abordam as aplicações e demonstram uma formulação matemática, descrevendo a dinâmica dos sistemas apresentados. Além de ser apresentada as restrições de massa e de tensões, juntamente com uma tabela com os possíveis materiais a serem utilizados na fabricação do *tether*, são abordados sistemas com *tether* massivos, *tether* com massa desprezável e movimentos pendulares. São analisadas condições de estabilidade e de equilíbrio em um campo newtoniano. Em alguns casos há a simplificação do problema a fim de obter soluções parciais, como a adoção de um sistema livre de perturbações, movimentos estacionários e *tethers* com pequenas curvaturas ao longo do comprimento.

Um campo de estudo da aplicação de *tether systems* é relacionado aos detritos espaciais em órbita. Estudos foram realizados abordando a captura e remoção desses detritos, podendo ser utilizado sondas, redes de captura ou braços robóticos. Outros estudos apresentam o comportamento dos sistemas após a ruptura do *tether* causada por detritos espaciais.

Zhang e Huang (2016) propõem uma nova solução para a captura de detritos baseado no uso de redes de captura. A modelagem do sistema foi realizada considerando a elasticidade longitudinal do *tether* e incertezas do ambiente, tratadas como perturbações. As condições iniciais utilizadas no problema foram o padrão de dobra da rede de captura, a velocidade e o ângulo de liberação da rede. O autor projeta um controle adaptativo para garantir a estabilidade do sistema, validando o resultado por meio de simulações numéricas e garantindo a estabilidade do sistema durante a missão.

Por sua vez, Peters et al. (2018) analisaram o controle sobre um sistema com o objetivo de retirar um detrito espacial de sua órbita. A missão se inicia com a manobra de encontro entre o veículo espacial e o detrito alvo, podendo utilizar de arpões, redes ou braços robóticos para realizar a captura. Neste trabalho é abordada a dinâmica nas fases de estabilização do sistema após a captura, queima de propelente para decaimento da órbita e estabilização para passagem na atmosfera. É demonstrada a importância de conhecer a atitude do alvo para evitar colisões ou gerar um entrelaçamento no *tether* e também que o uso de *tether* elástico deve ser evitado por ser mais difícil realizar o controle por adicionar oscilações no sistema. O uso de *tether* rígido é recomendado para esse tipo de missão, por apresentar controlabilidade na rigidez do cabo, facilitando na estabilização do sistema.

Aslanov et al. (2013) realizaram um estudo da dinâmica de um *tether* após a ruptura de um elevador espacial devido à uma colisão com um fragmento no espaço. Foi considerado que a ruptura se deu em uma órbita geoestacionária, levando em conta a ação de forças gravitacionais, inerciais e aerodinâmicas. Foi descoberto que alguns fragmentos chegaram até a superfície terrestre com uma velocidade considerável.

Em um outro artigo, Aslanov, Misra e Yudinsev (2017) abordam um movimento caótico de

um sistema formado por um rebocador (tug-debris) de baixo empuxo, causado pelos efeitos da excentricidade da órbita e pelo valor do empuxo exercido. Considerou-se o sistema como duas massas pontuais conectadas por um *tether* de massa desprezável. Obteve-se uma equação geral para o movimento, a fim de analisar os efeitos causados pela excentricidade e pela perturbação gerada pelo movimento fora do plano de referência.

O conceito de *tether system* também pode ser aplicado à ancoragem de veículos espaciais em corpos ou asteróides, podendo ser utilizado para a captura dos veículos ou para auxiliar em alguma manobra espacial.

Burov et al. (2018) analisam a dinâmica e a estabilidade de um veículo espacial conectado por um *tether* à superfície de um asteroide para duas situações, a primeira para uma conhecida posição de “ancoragem” do *tether*; e a segunda para uma dada posição do veículo espacial. O sistema foi modelado como um pêndulo e as condições de equilíbrio e estabilidade do sistema foram obtidas utilizando o método de Routh.

Um estudo sobre “portal de captura” capaz de alterar o movimento de um veículo espacial foi realizado por Ferreira et al. (2018) com o objetivo de analisar uma manobra “estilingue” sem gasto de combustível. Esta manobra consiste em um *tether* fixo na superfície de um corpo enquanto a outra extremidade possui uma rede, que será utilizada para captura ou escape de um veículo espacial em relação ao corpo principal. A modelagem dessa missão utilizou-se do problema restrito de três corpos, considerando um *tether* inextensível de massa desprezável. Foram encontrados pontos de equilíbrio na superfície do corpo para a fixação do *tether*, sendo possível ocorrer a captura para vários valores de ângulo de aproximação. O uso desta manobra promove um maior ganho (ou perda) de energia em relação a manobras gravitacionais assistidas.

Abordando o tema de constelações de satélites, abrangendo conceitos da geometria das formações e da dinâmica de múltiplos corpos conectados, destacam-se alguns trabalhos.

Lorenzini (1987) descreve um sistema formado por um laboratório de microgravidade, representado por uma massa pontual, anexado à estação espacial. Dois modelos foram considerados, o primeiro utilizando da formulação lagrangiana para se obter as equações de equilíbrio, e o segundo utilizando das variáveis no sistema cartesiano. Foi estudado o comportamento oscilatório do sistema durante sua liberação, onde essas oscilações estão associadas aos graus de liberdade do sistema e para corrigi-las, amortecedores laterais e longitudinais foram analisados e implementados.

Um sistema composto por n-corpos em um movimento tridimensional foi analisado por Keshmiri, Misra e Modi (1996) com o objetivo de modelar a dinâmica não linear do sistema utilizando da formulação lagrangiana. As equações obtidas são válidas para o movimento de libração e para o comprimento variável do *tether*, além disso, foram consideradas a flexibilidade e a massa do *tether* na formulação. Para a análise da estabilidade, foram realizadas simplificações analíticas nas equações de movimento para a aplicação de um controle do tipo linear sobre o sistema. A resposta transiente do sistema foi obtida considerando dois casos: comprimento constante e comprimento variável.

Uma constelação formada por n-satélites, conectados por *tethers*, com controle em relação à força de tensão e do comprimento do *tether* é apresentado por Mori, Matunaga e Waeda (2000). Em seu trabalho, o autor analisa a dinâmica e propõe métodos de controle da tensão e atitude dos satélites,

desconsiderando a massa do *tether* e os momentos de flexão do cabo. Simulações numéricas foram realizadas considerando dois satélites e foi estabelecido métodos de controle de amortecimento para os movimentos de translação e rotação, juntamente com testes em solo realizados.

Bainum e Tan (2002) descrevem uma constelação de satélites ligadas por *tethers* para uma missão de observação da aurora com o objetivo de medir o campo magnético da Terra. Algumas formações para a constelação foram propostas, quatro corpos em formação linear; formação de três corpos formando um triângulo; quatro ou cinco corpos formando um tetraedro simples ou duplo, respectivamente. Foi estudada a estabilidade para cada uma das formações propostas, além do controle necessário para que a missão seja executada. Para os casos de formação 2D, foram apresentados um modelo para o sistema de controle dos comprimentos dos *tethers*, enquanto que para as configurações 3D o sistema se mantém estabilizado devido ao gradiente gravitacional e à força centrífuga.

Williams (2006) analisa a liberação e o recolhimento de uma formação triangular formada por três satélites conectados por *tethers* em um movimento rotacional. O objetivo é de obter trajetórias ótimas usando um controle de tensão no cabo e aplicar um controle ótimo para as fases de liberação e recolhimento da constelação de satélites. Para a modelagem matemática, os corpos foram tratados como massas pontuais, os *tethers* foram considerados inelásticos, além disso foi considerado a ação do gradiente gravitacional e do efeito coriolis para a condição de órbita baixa. Foram analisados dois casos, comprimento do *tether* variável e comprimento fixo, e três manobras foram realizadas, tempo mínimo de reorientação, liberação e recolhimento. Os resultados mostraram que o controle ótimo se dá com a desaceleração da rotação durante as manobras sob a ação do gradiente gravitacional.

Mori e Matunaga (2007) também contribuíram para os estudos acerca de constelações de satélites conectados por *tethers*. O problema analisado utiliza de controle ativo da tensão no cabo e no comprimento através do uso de braços robóticos, possibilitando recolher ou liberar o *tether* para manter o sistema em uma condição de equilíbrio ou para correção da atitude. Para a modelagem do sistema foram considerados n satélites e como resultado foram obtidas as condições de equilíbrio para casos que a formação alterava seu tamanho, porém mantendo o seu formato. Por fim, simulações numéricas foram realizadas a fim de verificar os métodos de controles propostos.

Na área de estudo de *tethers* eletrodinâmicos e da interação com o campo magnético, Voevodin e Zabolotnov (2019) apresentam algoritmos para a estabilização do *tether*. O sistema considerado é formado por dois veículos conectados por um *tether* e projetado para modificar os parâmetros orbitais através da interação com o campo magnético terrestre. Um algoritmo de estabilização em relação ao eixo vertical local utilizando controle por feedback da flexão do *tether* é proposto a fim de evitar falhas catastróficas da estrutura. É mostrado que na presença de pequenas perturbações é possível garantir a estabilidade dos transientes para órbitas equatoriais e inclinadas. Esta conclusão é confirmada pelos resultados da modelagem matemática segundo um modelo com parâmetros distribuídos, levando em consideração o alongamento e a massa do *tether*. O controle ótimo proposto fornece uma redução nas amplitudes de oscilação e da vibração longitudinal.

No estudo das etapas de liberação e recolhimento do *tether*, em que ocorre a variação de seu comprimento e consequentemente influencia em seu comportamento dinâmico, é necessário conhecer as características de estabilidade e controle dos sistemas a fim de propor leis de controle e sistemas

para a estabilização.

Chen et al. (2014) abordam esse problema em cinco etapas: modelagem do sistema dinâmico; análise da liberação e recolhimento do *tether*; controle da trajetória; atitude e controle do *tether*; e controle de vibração e simulações numéricas. O sistema estudado é do tipo haltere formado por duas massas e considerado um modelo tridimensional com movimento de libração e vibrações longitudinal e transversal. O controle de trajetória é planejado considerando um movimento planar com auxílio de câmeras e outros satélites, as trajetórias são calculadas de modo a produzir os caminhos mais curtos e otimizados.

Zhu e Murugathasan (2015) abordam a dinâmica do sistema durante a liberação de um *tether system* utilizando controle ótimo e ajustando o ganho em relação à lei de controle para a tensão no *tether*. O sistema é modelado como um haltere não linear e manteve a simplicidade das leis de controle, sendo utilizado o critério de Routh para verificar a estabilidade do sistema. Segundo o autor, é recomendado que a liberação do *tether* ocorra na direção vertical local, ou seja, na direção radial à órbita. A abordagem utilizada neste trabalho obteve menores ângulos de libração planar e uma liberação mais rápida do *tether*.

Kim e Hall (2004) parte das equações de movimento obtidas a partir da formulação de Lagrange, em seguida é identificado o equilíbrio relativo do sistema. Foram estudados cenários de missões, juntamente com o desenvolvimento de leis de controle por feedback. O resultado dos controladores foram validados para os diferentes cenários, e então estimou-se o impulso total necessário para a missão ser realizada. Entre os cenários abordados estão: estabilização do equilíbrio relativo, liberação e recolhimento do *tether*. Os resultados foram comparados com valores de simulações e este modelo prevê a influência de parâmetros do sistema na entrada do sistema de controle.

Kojima, Sugimoto e Furukawa (2011) analisam o movimento de libração de uma sonda que se move ao longo do *tether* e elabora um esquema de controle do transiente da aceleração ótima da sonda minimizando a integral do quadrado do transiente da aceleração. Foram impostas restrições no ângulo fina do *tether*, na posição da sonda e na velocidade. Simulações foram realizadas para analisar as relações entre o transiente e o movimento de libração e validar o esquema proposto. Pelos resultados experimentais é possível dizer que para aplicações avançadas, o esquema de controle pode ser utilizado para controlar os movimentos caóticos e de libração, principalmente para órbitas elípticas e nas fases de liberação e recolhimento do *tether*.

Ainda no ramo de estudo de estabilidade e controle, Zanardi, Prado e Baroni (2020) desenvolvem um sistema de controle limitando o movimento do subsatélite em um dado plano orbital do satélite principal. Para isso é implementado um controle do tipo linear quadrático, o qual é um controle ótimo de feedback e prevê a linearização das equações do modelo calculando o ganho necessário pela equação de Riccati. Os resultados mostraram um controle efetivo, onde o movimento do *tether* corresponde somente à sua elongação longitudinal. No entanto foi necessário utilizar um torque adicional, podendo este ser gerado por propulsores a gás.

Misra, Amier e Modi (1988) estudaram a dinâmica de um sistema formado por três corpos conectados por *tether*, modelado como um pêndulo duplo, e analisaram dois casos considerando o comprimento do *tether* fixo e variável a fim de obter condições de equilíbrio do sistema. Para obter

as equações de movimento do sistema foi utilizado da formulação lagrangiana e para isso foram utilizadas quatro coordenadas generalizadas: comprimento dos dois *tethers* e dois ângulos formados entre cada *tether* e o plano de referência. Para obter as forças generalizadas utilizou-se do princípio do trabalho virtual. Como resultado foram obtidas as respostas dinâmicas do sistema durante o processo de liberação dos corpos.

Santos et al. (2015) analisam as condições de equilíbrio para um sistema do tipo haltere, composto por duas massas pontuais conectadas por um cabo de massa desprezável. A órbita elíptica planar é descrita a partir do centro de massa do sistema e as equações de movimento foram obtidas através da formulação Lagrangiana considerando as energias cinética e potencial do sistema. Foram obtidas leis de controle para o ângulo de rotação ao redor do centro de massa e utilizou-se da teoria de Floquet para adquirir as condições de estabilidade. O resultado mostrou que pequenas perturbações não afetam o comportamento do sistema e regiões de estabilidade para valores de excentricidade para rotações uniformes foram encontradas.

Em outra publicação, Santos e Ferreira (2015) abordam um sistema composto do tipo haltere em movimento tridimensional e fora do plano de referência. Foram analisados dois casos, o primeiro para o comprimento do *tether* dependente da excentricidade, anomalia verdadeira e de seu comprimento inicial; já no segundo caso foi considerado um *tether* de comprimento constante.

Os primeiros elementos orbitais necessários são a excentricidade (e) e momento angular (h). A partir desses dois parâmetros é possível obter o semi-eixo maior (a), a energia específica e o período.

Para localizar um ponto na órbita é necessário um terceiro parâmetro, a anomalia verdadeira (θ).

A linha de interseção entre o plano orbital e o plano equatorial é chamado de linha de nodo. O nó ascendente é o ponto na linha de nodo em que a órbita cruza de baixo para cima.

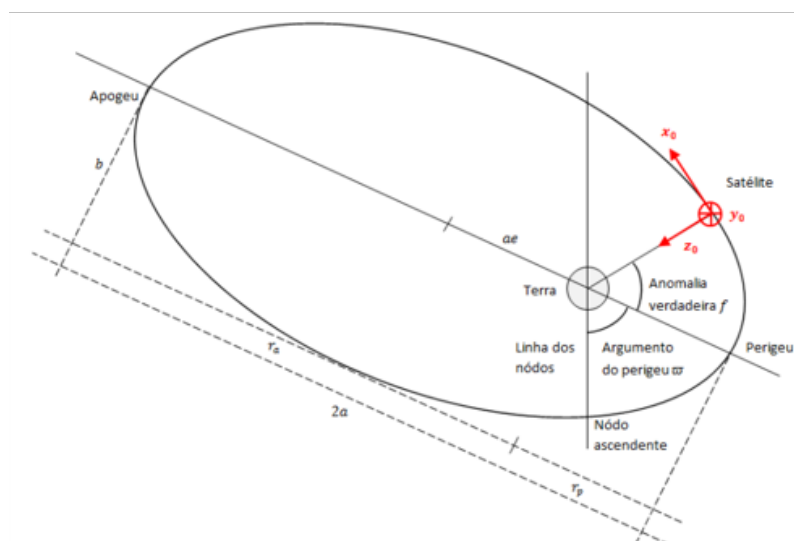
O ângulo entre a eixo X e a linha de nodo é o primeiro ângulo de Euler, longitude do nó ascendente (Ω).

O ângulo formado entre o plano equatorial e o plano orbital é a inclinação do plano (i). A inclinação é um número positivo entre 0° e 180° .

O terceiro ângulo, argumento do perigeu (ω), é o ângulo formado entre o vetor da linha de nodo e o vetor da excentricidade. Esse ângulo é um número positivo entre 0° e 360° .

Uma representação do plano orbital é mostrada na Figura 8, sendo possível identificar os elementos orbitais anomalia verdadeira e argumento do perigeu. Também é representada a posição instantânea do satélite e seu sistema de coordenadas local, dado por (x_0, y_0, z_0) .

Figura 8 – Sistema orbital local.



fonte: (SILVA, 2016)

4 DESENVOLVIMENTO

No presente trabalho foi realizada a modelagem e análise de duas configurações de *tether system*, formadas respectivamente por duas e seis massas conectadas.

O processo de análise para cada uma das configurações foi dividido nas seguintes etapas:

- definição e modelagem do sistema;
- desenvolvimento das equações de movimento por formulação energética;
- obtenção dos pontos de equilíbrio.

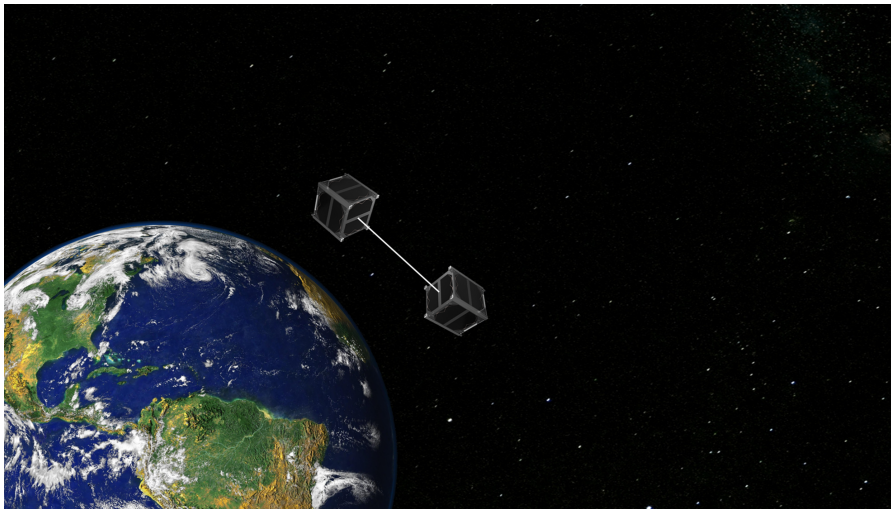
Em específico para o sistema formado por duas massas, uma quarta etapa foi realizada referente à obtenção da equação da força atuante sobre o *tether* ao longo de sua órbita.

4.1 SISTEMA FORMADO POR DUAS MASSAS - TIPO HALTERE

4.1.1 Definição e modelagem do sistema

O primeiro sistema estudado é formado por duas massas pontuais (m_1 e m_2) conectadas entre si por um cabo de massa desprezável, caracterizando um sistema do tipo haltere. Uma representação do sistema em órbita terrestre é mostrada na Figura 9.

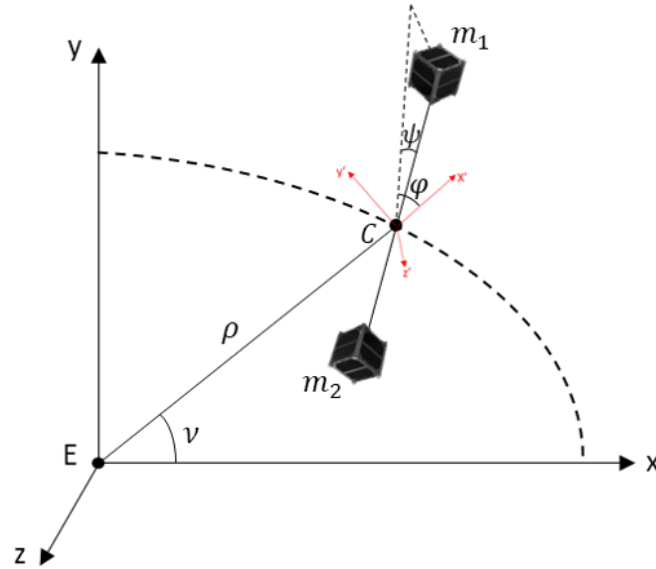
Figura 9 – Representação do sistema do tipo haltere em órbita terrestre.



fonte: Produção do próprio autor.

O movimento do sistema é descrito a partir da posição do centro de massa e que por sua vez é descrito por uma órbita kepleriana ao redor de um corpo primário no plano cartesiano XYZ . Na Figura 10 é exibido o esquema utilizado na modelagem do sistema estudado.

Figura 10 – Esquema do *tether system* estudado - Tipo haltere.



fonte: Produção do próprio autor.

A posição do centro de massa do sistema, representado por C , cujas coordenadas são denotadas por (x_0, y_0, z_0) , pode ser descrita em função dos parâmetros orbitais ν e ρ no sistema de eixos XYZ .

Embora o movimento do *tether* seja modelado tridimensionalmente, foi considerado que o movimento do centro de massa se restringe ao plano XY , em que o ângulo de inclinação foi considerado nulo. Essa restrição é necessária para que seja possível obter uma órbita equatorial do sistema. As coordenadas do centro de massa são dadas por:

$$\begin{cases} x_0 = \rho \cos(\nu) \\ y_0 = \rho \sin(\nu) \\ z_0 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

onde ρ é a distância do centro de massa até ao corpo primário E , o ângulo ν é denominado anomalia verdadeira, o *semi-latus rectum* é denotado por p e a excentricidade orbital é dada por e .

Assim, é possível calcular o parâmetros ρ :

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos(\nu)} \quad (2)$$

para o caso de órbitas circulares, que apresentam o valor de excentricidade $e = 0$, ρ é o equivalente ao raio da órbita.

As coordenadas no sistema local $X'Y'Z'$, para cada uma das duas massas, m_1 e m_2 , são obtidas por meio de coordenadas esféricas. Escrevendo as coordenadas no sistema de eixos XYZ parte-se da posição do centro de massa do sistema (x_0, y_0, z_0) e das relações angulares para o *tether* retiradas da Figura 10, assim

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + l_1 \cos(\nu + \varphi) \cos \psi \\ y_1 = y_0 + l_1 \sin(\nu + \varphi) \cos \psi \\ z_1 = l_1 \sin \psi \\ x_2 = x_0 - l_2 \cos(\nu + \varphi) \cos \psi \\ y_2 = y_0 - l_2 \sin(\nu + \varphi) \cos \psi \\ z_2 = -l_2 \sin \psi \end{cases} \quad (3)$$

em que φ é o ângulo formado entre a projeção do *tether* no plano XY e ρ , representando o movimento planar. ψ é o ângulo de elevação em relação ao plano XY , representa o movimento fora do plano.

Os comprimentos parciais do *tether*, definidos por l_1 e l_2 , são calculados como sendo as distâncias de m_1 e m_2 até o centro de massa, respectivamente, e são obtidos por

$$l_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \quad (4)$$

$$l_2 = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2} \quad (5)$$

onde l é o comprimento total do *tether* dado por $l = l_1 + l_2$.

4.1.2 Formulação energética

Para obter as equações de movimento do sistema utilizou-se da formulação lagrangiana, equações que relacionam as energias potencial e cinética e suas coordenadas generalizadas, uma vez que não é necessário conhecer todas as forças atuantes no sistema. A sua equação geral é dada por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j \quad (6)$$

onde L é o lagrangiano dado por $L = T - V$, onde T é a energia cinética e V é a energia potencial do sistema. q_j é a coordenada generalizada e Q_j é a força generalizada que age sobre o sistema.

As equações das energias cinética e potencial são dadas respectivamente por:

$$T = \sum \frac{m_i \cdot v_i^2}{2} \quad (7)$$

$$V = \sum -\frac{\mu_0 \cdot m_i}{||\vec{r}_i||} \quad (8)$$

onde T é a energia cinética e V é a energia potencial. m_i e v_i são a massa e a velocidade do i -ésimo corpo. μ_0 é uma constante dada por $\mu_0 = GM$, onde G é a constante gravitacional e M é a massa do corpo primário. $\vec{r}_i$ é o vetor posição do i -ésimo corpo.

Para a modelagem deste sistema, foi definido que o mesmo é conservativo, no qual não existe a ação de forças externas perturbativas. Assim, o termo de força generalizada é nulo ($Q_j = 0$). As

coordenadas generalizadas utilizadas para este modelo foram os ângulos φ e ψ , obtendo assim duas equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0 \quad (9)$$

As equações das energias cinética e potencial do sistema foram desenvolvidas com auxílio computacional e são dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2}m \left((\mu - 1)^2 (l' \sin(\psi) + l\psi' \cos(\psi))^2 + ((\mu - 1)l' \cos(\psi) \cos(\nu + \varphi) \right. \\ & + \frac{\nu'(p \sin(\nu) - (\mu - 1)l \cos(\psi)(e \cos(\nu) + 1)^2 \sin(\nu + \varphi))}{(e \cos(\nu) + 1)^2} - (\mu - 1)l(\varphi' \cos(\psi) \sin(\nu + \varphi) \\ & + \psi' \sin(\psi) \cos(\nu + \varphi))^2 + ((\mu - 1)l' \cos(\psi) \sin(\nu + \varphi) + \nu'((\mu - 1)l \cos(\psi) \cos(\nu + \varphi) \\ & - \frac{p(e + \cos(\nu))}{(e \cos(\nu) + 1)^2}) + (\mu - 1)l \cos(\psi) \cos(\nu + \varphi))\nu' + (\mu - 1)l(\varphi' \cos(\psi) \cos(\nu + \varphi) \\ & - \psi' \sin(\psi) \sin(\nu + \varphi))^2 + 1 - \mu((\mu l' \sin(\psi) + \mu l\psi' \cos(\psi))^2 + \frac{1}{(e \cos(\nu) + 1)^4}(\mu l' \cos(\psi) \\ & (e \cos(\nu) + 1)^2 \cos(\nu + \varphi) + \nu'(p \sin(\nu) - \mu l \cos(\psi)(e \cos(\nu) + 1)^2 \sin(\nu + \varphi)) \\ & - \mu l(e \cos(\nu) + 1)^2(\varphi' \cos(\psi) \sin(\nu + \varphi) + \psi' \sin(\psi) \cos(\nu + \varphi)))^2 + (-\mu l' \cos(\psi) \sin(\nu + \varphi) \\ & + \frac{\nu'(p(e + \cos(\nu)) - \mu l \cos(\psi)(e \cos(\nu) + 1)^2 \cos(\nu + \varphi))}{(e \cos(\nu) + 1)^2} + \mu l(\psi' \sin(\psi) \sin(\nu + \varphi) \\ & - \varphi' \cos(\psi) \cos(\nu + \varphi))^2 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} V = & -\frac{\mu_0 m(e \cos(\nu) + 1)}{p} + \frac{1}{16p^3} ((\mu - 1)\mu\mu_0 m l^2 (e \cos(\nu) + 1)^3 (3 \cos(2(\varphi - \psi)) \\ & + 3 \cos(2(\varphi + \psi)) + 6 \cos(2\varphi) + 6 \cos(2\psi) - 2) \end{aligned} \quad (11)$$

onde T é a energia cinética e V é a energia potencial. $m = m_1 + m_2$ é a massa total do sistema, $\mu = \frac{m_1}{m}$ é o parâmetro de massa e $\mu_0 = GM$, onde G é a constante gravitacional e M é a massa do corpo primário. p é o *semi-latus rectum*, e é a excentricidade da órbita e l é o comprimento total do *tether*.

Utilizando os resultados das equações de energia 10 e 11 e substituindo nas equações 9, realiza-se a conversão da variável independente tornando-a função da anomalia verdadeira ν , independente do tempo. As equações obtidas estabelecem uma relação entre os ângulos φ e ψ e o comprimento l do *tether*. Sabendo-se que $(\cdot)' = \frac{d}{d\nu}$, as equações de movimento são dadas por:

$$\begin{aligned} & \cos(\psi) (4(e \cos(\nu) + 1)l' (\varphi' + 1) \cos(\psi) + l (2(e \cos(\nu) + 1)\varphi'' \cos(\psi) - 4(e \cos(\nu) + 1) \\ & (\varphi' + 1) \psi' \sin(\psi) + \cos(\psi) (3 \sin(2\varphi) - 4e \sin(\nu) (\varphi' + 1))) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$8(e \cos \nu + 1)l'\psi' + l(2(e \cos \nu + 1)\varphi'(\varphi' + 2)\sin(2\psi) + \sin(2\psi)(2e \cos(\nu) + 3 \cos(2\varphi) + 5) + 4e \cos(\nu)\psi'' - 8e \sin(\nu)\psi' + 4\psi'' = 0 \quad (13)$$

Sabendo que as equações 12 e 13 foram obtidas respectivamente considerando φ e ψ como coordenadas generalizadas, desse modo é escolhido fixar um valor para ψ somente a primeira das equações será utilizada para verificar o comportamento do sistema.

Assim, foi adotada uma rotação uniforme para φ fixando um valor para ψ ,

$$\varphi = \nu\omega + \varphi_0 \quad \psi = 0 \quad (14)$$

onde ω é a velocidade angular, ν é a variável anomalia verdadeira e φ_0 é a condição inicial do movimento.

Substituindo a equação 14 em 12 é obtida a equação de movimento:

$$l(4e(1 + \omega) \sin \nu - 3 \sin(2\nu\omega)) - 4l'(1 + \omega)(1 + e \cos \nu) = 0 \quad (15)$$

Readequando a equação 15 e isolando o termo l'/l ,

$$\frac{l'}{l} = \frac{e \sin \nu}{(1 + e \cos \nu)} - \frac{3 \sin(2\nu\omega)}{4(1 + \omega)(1 + e \cos \nu)} \quad (16)$$

Desse modo, a equação 16 representa o comportamento da variação do comprimento do *tether* ao longo de sua órbita, em função da anomalia verdadeira e dependente da excentricidade orbital em que o sistema está inserido.

4.1.3 Pontos de equilíbrio

Para encontrar os pontos de equilíbrio do sistema, foram substituídos os termos $\varphi' = 0$, $l' = 0$ e $\psi' = 0$ nas equações 12 e 13, obtendo as equações referentes às segundas derivadas das coordenada generalizadas:

$$\varphi'' = \frac{4e \sin \nu - 3 \sin(2\varphi)}{2(1 + e \cos \nu)} \quad (17)$$

$$\psi'' = -\frac{\sin(2\psi)(5 + 2e \cos \nu + 3 \cos(2\varphi))}{4(1 + e \cos \nu)} \quad (18)$$

As condições de equilíbrio são obtidas para $\varphi'' = 0$ e $\psi'' = 0$, desse modo tem-se que as condições de equilíbrio que são dadas por:

$$\psi = \frac{k\pi}{2} \quad \sin(2\varphi) = \frac{4}{3}e \sin \nu \quad (19)$$

onde $k = 0, 1, 2, \dots$

4.1.4 Força de tração no tether

É possível calcular a força atuante no *tether* ao longo de sua órbita partindo da equação da segunda lei de Newton e considerando as parcelas referentes à aceleração da gravitação do corpo primário e à aceleração devido ao movimento acelerado.

Partindo da segunda lei de Newton,

$$\vec{F} = \sum \left[m_i \left(\ddot{\vec{r}}_i + \frac{\mu_0 \vec{r}_i}{r_i^3} \right) \right] \quad (20)$$

Sabendo que no sistema estudado está presente um único *tether*, a força de tração deve ser a mesma ao longo de todo o cabo, assim $\tau_1 = \tau_2$. Desse modo, a expressão da força de tração atuante é dada por:

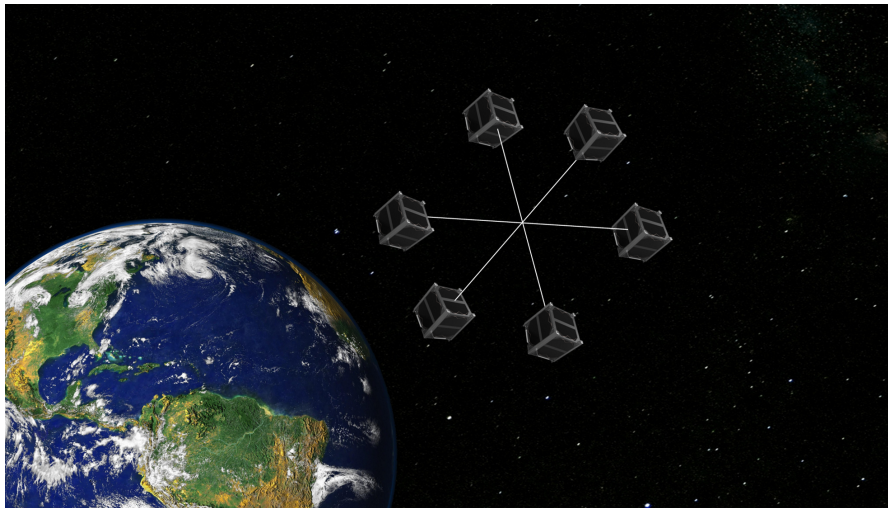
$$\vec{\tau} = m_1 \left(\ddot{\vec{r}}_1 + \frac{\mu_0 \vec{r}_1}{r_1^3} \right) = \vec{\tau} = m_2 \left(\ddot{\vec{r}}_2 + \frac{\mu_0 \vec{r}_2}{r_2^3} \right) \quad (21)$$

4.2 SISTEMA FORMADO POR 6 MASSAS - CONSTELAÇÃO DE NANOSSATÉLITES

4.2.1 Definição e modelagem do sistema

O segundo caso é apresentado como uma constelação de nanossatélites, conectando seis massas pontuais por *tethers* de massa desprezável. Uma representação do sistema é mostrado na Figura 11.

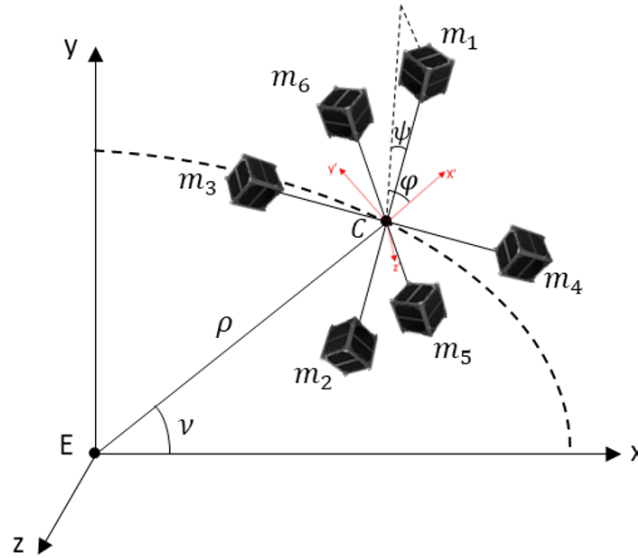
Figura 11 – Representações da constelação de nanossatélites formada por seis corpos.



fonte: Produção do próprio autor.

O movimento do sistema é descrito a partir da posição do centro de massa e que por sua vez é descrito por órbitas keplerianas ao redor de um corpo primário no plano XYZ .

Figura 12 – Esquema do sistema estudado - constelação de nanossatélites.



fonte: Produção do próprio autor.

As coordenadas do centro de massa do sistema (x_0, y_0, z_0) são as mesmas apresentadas na equação 1.

As coordenadas no sistema local $X'Y'Z'$, para cada uma das duas massas são obtidas por meio de coordenadas esféricas. Escrevendo as coordenadas no sistema de eixos XYZ parte-se da posição do centro de massa do sistema (x_0, y_0, z_0) e das relações angulares para o *tether* retiradas da Figura 12.

Assim, as coordenadas de cada uma das seis massas pontuais e as respectivas distâncias entre cada massa e a posição do centro de massa são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l}
x_1 = x_0 + l_1 \cos(\nu + \varphi) \cos \psi \\
y_1 = y_0 + l_1 \sin(\nu + \varphi) \cos \psi \\
z_1 = l_1 \sin \psi \\
\\
x_2 = x_0 - l_2 \cos(\nu + \varphi) \cos \psi \\
y_2 = y_0 - l_2 \sin(\nu + \varphi) \cos \psi \\
z_2 = -l_2 \sin \psi \\
\\
x_3 = x_0 - l_3 \sin(\nu + \varphi) \cos \psi \\
y_3 = y_0 + l_3 \cos(\nu + \varphi) \cos \psi \\
z_3 = l_3 \sin \psi \\
\\
x_4 = x_0 + l_4 \sin(\nu + \varphi) \cos \psi \\
y_4 = y_0 - l_4 \cos(\nu + \varphi) \cos \psi \\
z_4 = -l_4 \sin \psi \\
\\
x_5 = x_0 - l_5 \cos(\nu + \varphi) \sin \psi \\
y_5 = y_0 - l_5 \sin(\nu + \varphi) \sin \psi \\
z_5 = l_5 \cos \psi \\
\\
x_6 = x_0 + l_6 \cos(\nu + \varphi) \sin \psi \\
y_6 = y_0 + l_6 \sin(\nu + \varphi) \sin \psi \\
z_6 = -l_6 \cos \psi
\end{array} \right. \quad (22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
l_1 = \frac{m_1 l_X}{m_1 + m_2} \\
l_2 = \frac{m_2 l_X}{m_1 + m_2} \\
l_3 = \frac{m_3 l_Y}{m_3 + m_4} \\
l_4 = \frac{m_4 l_Y}{m_3 + m_4} \\
l_5 = \frac{m_5 l_Z}{m_5 + m_6} \\
l_6 = \frac{m_6 l_Z}{m_5 + m_6}
\end{array} \right. \quad (23)$$

onde φ é o ângulo formado entre a projeção do *tether* no plano XY e ρ , representando o movimento planar. ψ é o ângulo de elevação em relação ao plano XY , representa o movimento fora do plano. E definindo que os comprimentos dos *tether* em cada direção são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l}
l_X = l_1 + l_2 \\
l_Y = l_3 + l_4 \\
l_Z = l_5 + l_6
\end{array} \right. \quad (24)$$

Para a análise deste sistema será necessário realizar algumas considerações com a finalidade de simplificar o modelo apresentado. As massas serão consideradas iguais e os *tethers* com mesmo comprimento.

$$\left\{ \begin{array}{l}
m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = m_6 = m \\
l_X = l_Y = l_Z = l
\end{array} \right. \quad (25)$$

4.2.2 Formulação energética

Para a obtenção das equações de movimento para o sistema de constelação de nanossatélites também será utilizada da formulação Lagrangiana, dada pela equação 6.

Seguindo as mesmas etapas apresentadas no exemplo anterior e utilizando das simplificações mostradas em 25, foi considerado que o sistema é conservativo, onde não existe a ação de forças

externas perturbativas, e as coordenadas generalizadas utilizadas para este modelo foram os ângulos φ e ψ .

Assim, as energias cinética e potencial para esse sistema estudado são dadas respectivamente por:

$$T = \frac{1}{8}m \left((\nu')^2 \left(\frac{24p^2 (e^2 + 2e \cos(\nu) + 1)}{(e \cos(\nu) + 1)^4} + l^2 (\cos(2\psi) + 3) \right) + 6(l')^2 + 2l^2 \nu' \varphi' (\cos(2\psi) + 3) + l^2 (\varphi'^2 (\cos(2\psi) + 3) + 6\psi'^2) \right) \quad (26)$$

$$V = -\frac{6\mu_0 m (e \cos(\nu) + 1)}{p} + \frac{3\mu_0 m l^2 \sin^2(\varphi) \sin^2(\psi) (e \cos(\nu) + 1)^3}{4p^3} \quad (27)$$

onde T é a energia cinética e V é a energia potencial. $m = m_1 + m_2$ é a massa total do sistema, $\mu = \frac{m_1}{m}$ é o parâmetro de massa e $\mu_0 = GM$, onde G é a constante gravitacional e M é a massa do corpo primário. p é o *semi-latus rectum*, e é a excentricidade da órbita e l é o comprimento total do *tether*.

Utilizando dos resultados das equações de energia 26 e 27 e substituindo nas equações 9, tornando-a função da anomalia verdadeira ν , independente do tempo, em que $(\cdot)' = \frac{d}{d\nu}$. Assim, são obtidas as equações de movimento, as quais estabelecem uma relação entre os ângulos φ e ψ e o comprimento l do *tether*, dadas por:

$$\begin{aligned} &\mu_0 (e \cos(\nu) + 1)^3 (2(e \cos(\nu) + 1)l' (\varphi'(\nu + 1) (\cos(2\psi) + 3) + l (-2(e \cos(\nu) + 1) \\ &(\varphi' + 1) \psi' \sin(2\psi) + (\cos(2\psi) + 3) ((e \cos(\nu) + 1)\varphi'' - 2e \sin(\nu) (\varphi' + 1)) \\ &+ 3 \sin(2\varphi) \sin^2(\psi) = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} &\mu_0 (e \cos(\nu) + 1)^3 (12(e \cos(\nu) + 1)l' \psi' + l (\sin(2\psi) ((e \cos(\nu) + 1)\varphi' (\varphi' + 2) \\ &+ e \cos(\nu) + 1 + 3 \sin^2(\varphi) + 6 ((e \cos(\nu) + 1)\psi'' - 2e \sin(\nu)\psi') = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

As equações 28 e 29 foram obtidas considerando φ e ψ como coordenadas generalizadas, desse modo foi adotada uma condição de rotação uniforme para φ fixando um valor para ψ ,

$$\varphi = \nu\omega + \varphi_0 \quad \psi = \frac{\pi}{2} \quad (30)$$

onde ω é a velocidade angular, ν é a variável anomalia verdadeira e φ_0 é a condição inicial do movimento.

Assim, como no caso anterior, será utilizada a primeira equação de movimento dada por 28, e substituindo a equação 30, tem-se:

$$l(4e(1 + \omega) \sin \nu - 3 \sin(2\nu\omega)) - 4l'(1 + \omega)(1 + e \cos \nu) = 0 \quad (31)$$

É possível reescrever a equação 31 isolando o termo l'/l ,

$$\frac{l'}{l} = \frac{e \sin \nu}{(1 + e \cos \nu)} - \frac{3 \sin(2\nu\omega)}{4(1 + \omega)(1 + e \cos \nu)} \quad (32)$$

Desse modo, a equação 32 representa a variação do comprimento do *tether* ao longo de sua órbita,

em função da anomalia verdadeira.

Percebe-se que com as simplificações utilizadas em 25 e as condições adotadas em 30, obteve-se a mesma equação para o comportamento do *tether* apresentada no caso anterior, dada pela equação 16.

4.2.3 Pontos de equilíbrio

Para encontrar os pontos de equilíbrio do sistema, os termos $\varphi' = 0$, $l' = 0$ e $\psi' = 0$ foram substituídos nas equações 28 e 29, obtendo as equações referentes às segundas derivadas das coordenadas generalizadas:

$$\varphi'' = \frac{6e \sin \nu + 2e \cos(2\psi) \sin \nu - 3 \sin(2\varphi) \sin^2(\psi)}{(1 + e \cos \nu)(3 + \cos(2\psi))} \quad (33)$$

$$\psi'' = -\frac{(1 + e \cos \nu + 3 \sin^2 \varphi) \sin(2\psi)}{6(1 + e \cos \nu)} \quad (34)$$

As condições de equilíbrio são obtidas para $\varphi'' = 0$ e $\psi'' = 0$, para um movimento uniforme, dadas por:

$$\psi = \frac{k\pi}{2} \quad \sin(2\varphi) = \frac{6e \sin \nu + 2e \cos(2\psi) \sin \nu}{3 \sin^2(\psi)} \quad (35)$$

onde $k = 0, 1, 2, \dots$

Para esse caso existe uma indeterminação quando $3 \sin^2(\psi) = 0$. Sendo assim, tem-se que o ângulo ψ não poderá apresentar valores pares para k . Reescrevendo a condição para o ângulo ψ ,

$$\psi = \frac{(2k+1)\pi}{2} \quad \sin(2\varphi) = \frac{6e \sin \nu + 2e \cos(2\psi) \sin \nu}{3 \sin^2(\psi)} \quad (36)$$

onde $k = 0, 1, 2, \dots$

Logo, para obtermos a posição de equilíbrio para φ , é preciso definir primeiramente uma condição para ψ . Adotando $k = 0$, obtém-se a mesma condição de equilíbrio apresentada no caso anterior,

$$\psi = \frac{\pi}{2} \quad \sin(2\varphi) = \frac{4}{3}e \sin \nu \quad (37)$$

5 RESULTADOS

5.1 SISTEMA FORMADO POR DUAS MASSAS - TIPO HALTERE

Para ser possível resolver as equações desenvolvidas ao longo da seção 4.1 para o sistema formado por duas massas pontuais, é necessário fixar valores para excentricidade e velocidade de rotação, assim como determinar os parâmetros da órbita de estudo.

Desse modo, foram atribuídos parâmetros para o sistema a fim de obter os resultados referentes à variação das energias potencial e cinética, à variação do comprimento do *tether* ao longo da órbita e dos pontos de equilíbrio.

Os valores para cada parâmetro utilizados nas simulações são apresentados na sequência.

Os dados atribuídos à órbita ao redor da Terra foram:

$$p = 7200 \text{ km} \quad \mu_0 = 398600 \text{ km}^3 \text{s}^{-2};$$

A massas dos corpos considerada foi baseada na configuração 1U dos nanossatélites, assim

$$m_1 = m_2 = m = 1,33 \text{ kg}$$

Como condição inicial do movimento rotacional foi atribuído

$$\varphi_0 = 0 \text{ rad}$$

Para as simulações foram considerados os seguintes valores de excentricidade orbital:

$$e = \{0,01; 0,2; 0,5; 0,9\}$$

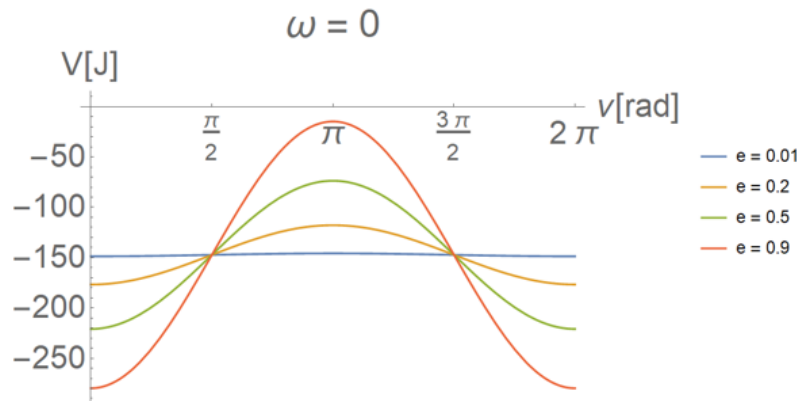
Para as velocidades angulares consideraram-se os valores

$$\omega = \{0; 1/2; 1,3/2\} \text{ rad/s}$$

5.1.1 Energia potencial e cinética

O gráfico da energia potencial do sistema, considerando a equação 11 desenvolvida e os parâmetros do sistema apresentados, pode ser visto na Figura 13.

Figura 13 – Energia potencial em função da anomalia verdadeira para o modelo do tipo haltere. Condição de $\psi = 0$ e $\varphi_0 = 0$, $p = 7200km$.

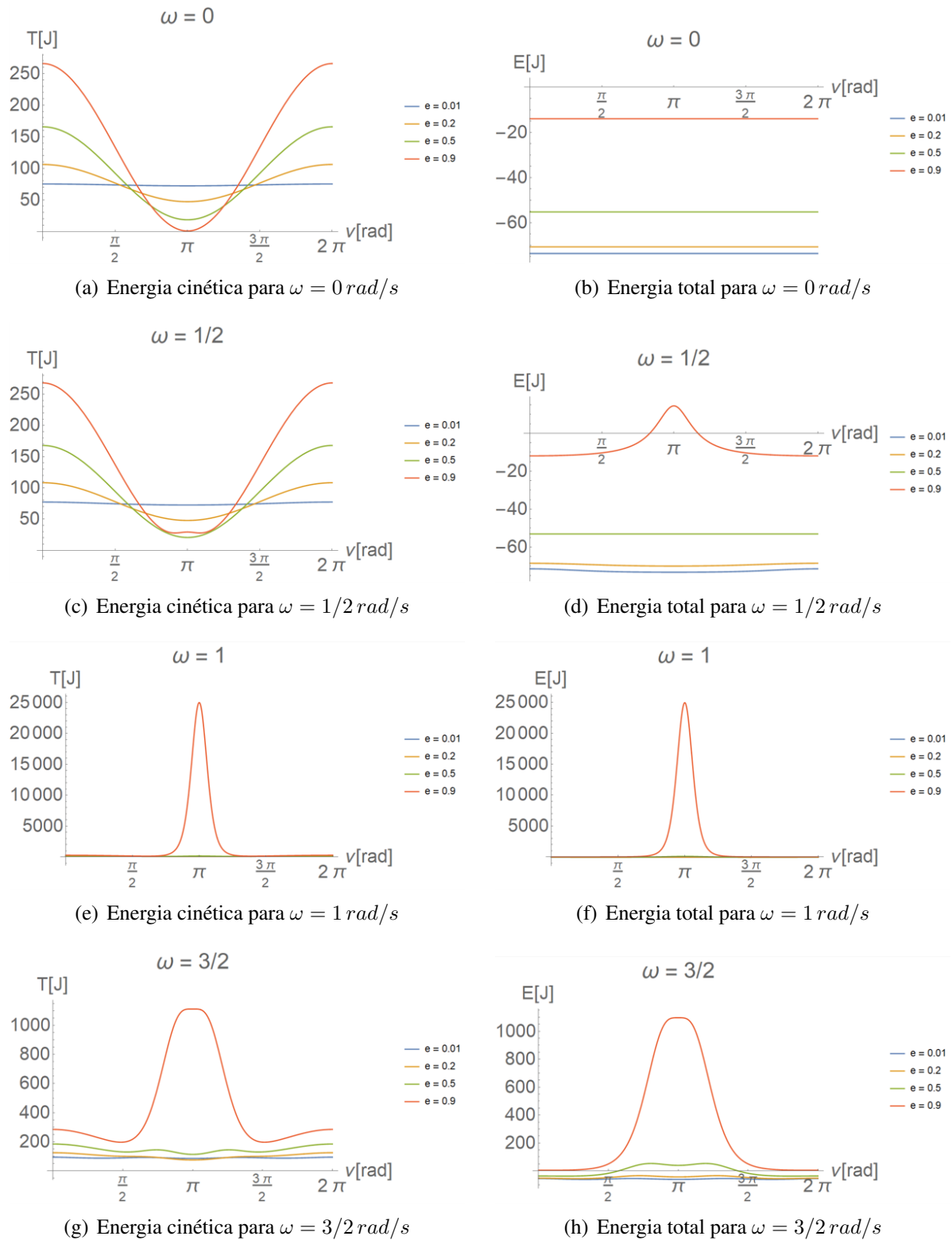


fonte: Produção do próprio autor.

Diferentemente dos gráficos de energia cinética que serão apresentados, para todos os valores de velocidade de rotação considerados, o comportamento da energia potencial permaneceu o mesmo, uma vez que é independente das velocidades de rotação.

Na Figura 14 são apresentados os gráfico das energias cinética e total do sistema para as diferentes velocidades de rotação consideradas, com base na equação 10. Os gráficos da energia total do sistema são gerados da soma das energias potencial e cinética em cada ponto da órbita descrita.

Figura 14 – Variação das energias cinética e total em função da anomalia verdadeira para o modelo do tipo haltere. Condição de $\psi = 0$ e $\varphi_0 = 0$, $p = 7200km$.



fonte: Produção do próprio autor.

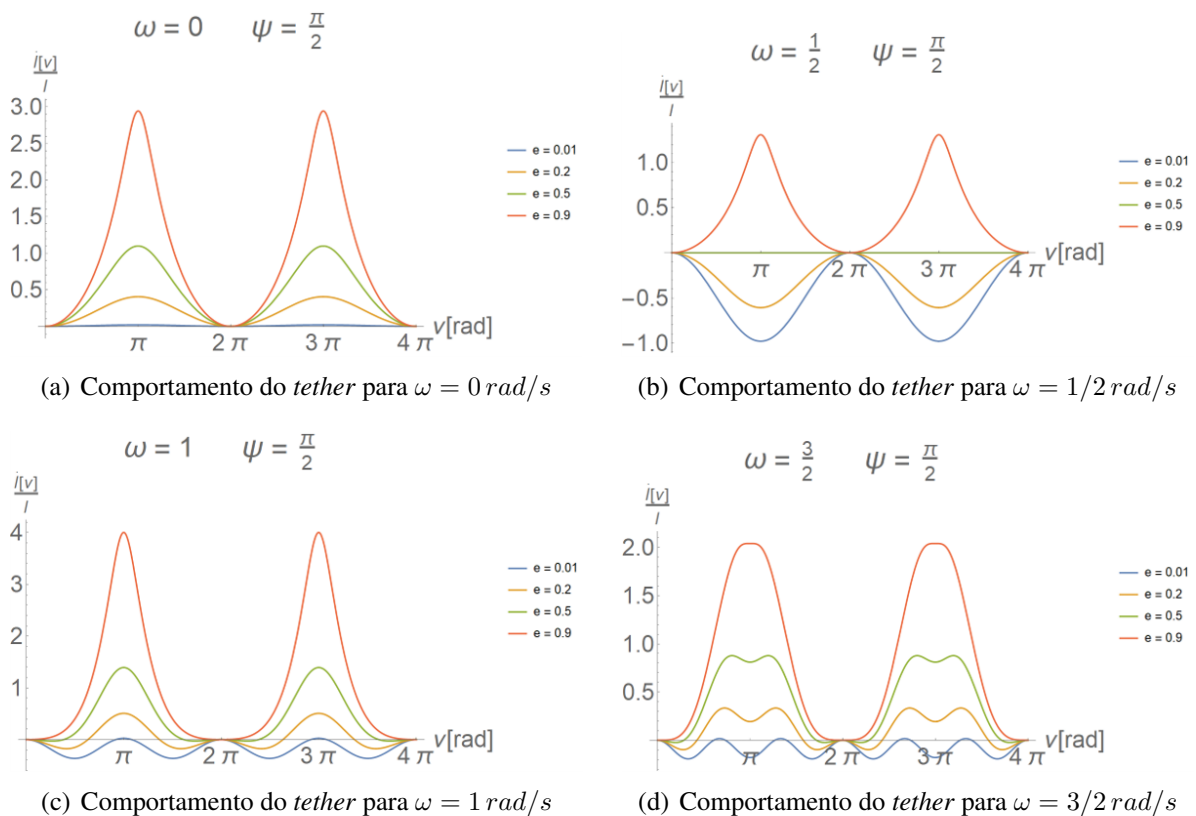
Analisando os gráficos das energias apresentados na Figura 13 e na Figura 14, é possível perceber que apresentam um caráter oscilatório e periódico. Nas proximidades da posição da anomalia verdadeira $\nu = \pi$, nota-se um pico de energia cinética e o menor valor, em módulo, da energia potencial. Esse fato pode ser explicado pois $\nu = \pi$ representa o *periapsis* da órbita, ponto de maior velocidade na

órbita e maior proximidade ao corpo primário.

5.1.2 Variação do comprimento do *tether*

Partindo da equação 16, obtida para a variação do comprimento do *tether* ao longo do movimento orbital e construindo o gráfico para dois períodos orbitais, $0 \leq \nu \leq 4\pi$, os resultados são exibidos na Figura 15 para cada um dos valores de ω definidos. Assim como demonstrado no desenvolvimento da equação, a equação plotada se refere à uma condição ortogonal, $\psi = \pi/2$.

Figura 15 – Variação do comprimento do *tether* em função da anomalia verdadeira para o modelo do tipo haltere. Condição de $\psi = \pi/2$ e $\varphi_0 = 0$, $p = 7200km$.



fonte: Produção do próprio autor.

A variável representada também apresenta um caráter oscilatório e periódico, com picos nas posições $\nu = k\pi$ com $k = 0, 1, 2, \dots$, ou seja, na posição de maior velocidade do movimento.

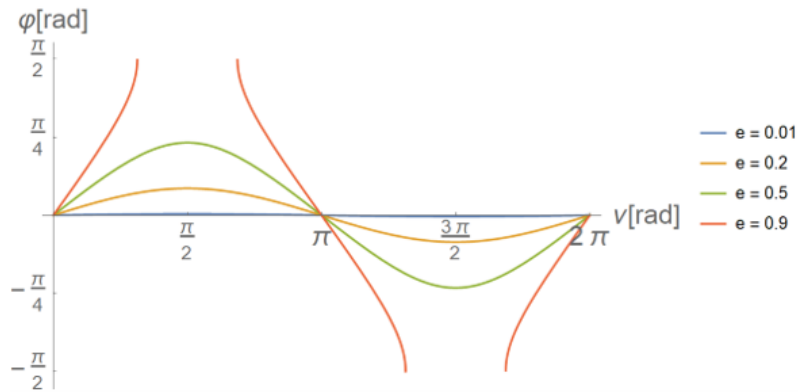
Na Figura 15 percebe-se que a variação do comprimento do *tether* está relacionado com a força de tração agindo sob o *tether* para valores positivos de l'/l .

Para valores negativos, ocorre a tendência de comprimir o *tether*, algo que não ocorre em cabos, caracterizando uma instabilidade estrutural. Para ser possível manter o sistema tracionado ao longo de toda a órbita, relação l'/l positiva, é necessário o uso de sistemas de controle da tração ao longo do *tether*.

5.1.3 Pontos de equilíbrio

Plotando a equação 19 referente à variável φ para diferentes valores de excentricidade orbital, obtém-se o gráfico apresentado na Figura 16.

Figura 16 – Comportamento de φ de equilíbrio em função da anomalia verdadeira para valores de excentricidade.



fonte: Produção do próprio autor.

Percebe-se que para baixas excentricidades, ou seja, para órbitas mais circulares, o ângulo planar φ obedece um comportamento periódico e definido. Conforme ocorre o aumento da excentricidade, o módulo de φ também aumenta, até o limite de $e = 0.75$. Para valores maiores de excentricidade, a equação 19 se torna inválida pois implica em $\sin(2\varphi) > 0$, logo é uma solução impossível.

5.2 SISTEMA FORMADO POR SEIS MASSAS - CONSTELAÇÃO DE NANOSSATÉLITES

Para ser possível resolver as equações desenvolvidas ao longo da seção 4.2 para o sistema formado por seis massas pontuais, é necessário fixar valores para excentricidade e velocidade de rotação, assim como determinar os parâmetros da órbita de estudo.

Desse modo, foram atribuídos os mesmos parâmetros do caso anterior para fins de comparação dos resultados gerados referentes à variação das energias potencial e cinética, à variação do comprimento do *tether* ao longo da órbita e dos pontos de equilíbrio. Os valores para cada parâmetro utilizados nas simulações são apresentados na sequência.

Os dados atribuídos à órbita ao redor da Terra foram:

$$p = 7200 \text{ km} \quad \mu_0 = 398600 \text{ km}^3 \text{s}^{-2};$$

A massas dos corpos considerada foi baseada na configuração 1U dos nanossatélites, assim

$$m_1 = m_2 = \dots = m_i = m = 1,33 \text{ kg}$$

Como condição inicial do movimento rotacional foi atribuído

$$\varphi_0 = 0 \text{ rad}$$

Para as simulações foram considerados os seguintes valores de excentricidade orbital:

$$e = \{0,01; 0,2; 0,5; 0,9\}$$

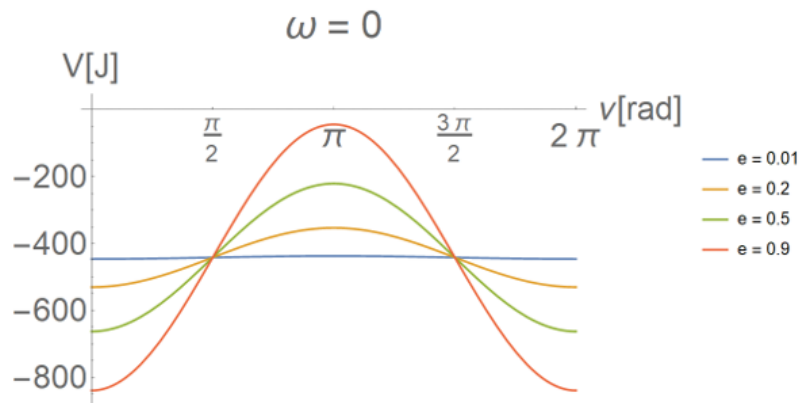
Para as velocidades angulares consideraram-se os valores

$$\omega = \{0; 1/2; 1, 3/2\} \text{ rad/s}$$

5.2.1 Energia potencial e cinética

O gráfico da energia potencial do sistema, considerando a equação 27 e os parâmetros do sistema, pode ser visto na Figura 17.

Figura 17 – Energia potencial em função da anomalia verdadeira para o modelo de constelação. Condição de $\psi = 0$ e $\varphi_0 = 0$, $p = 7200 \text{ km}$.

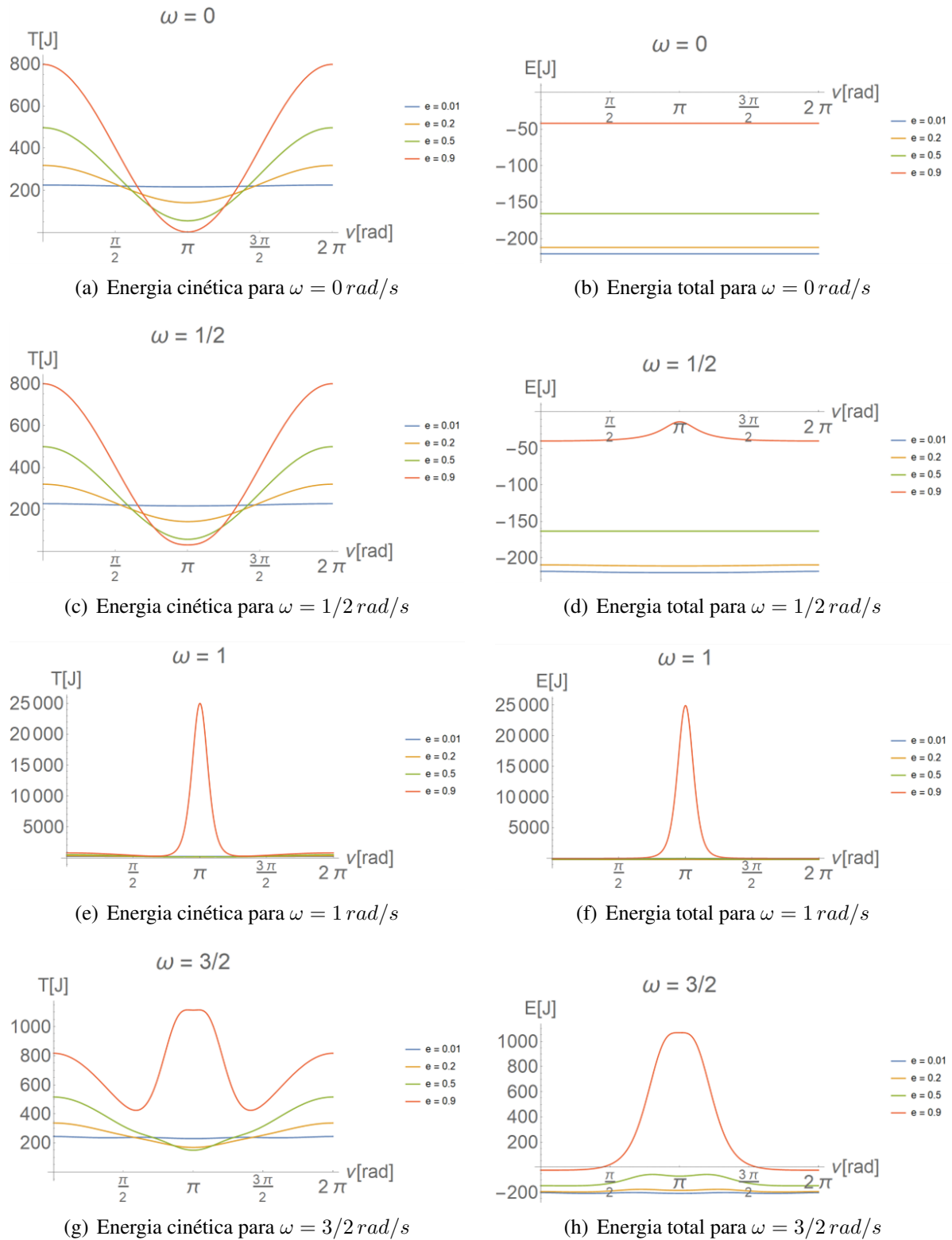


fonte: Produção do próprio autor.

Para todos os valores de velocidade de rotação considerados, o comportamento da energia potencial permaneceu o mesmo, uma vez que é independente das velocidades de rotação.

Na Figura 18 são apresentados os gráfico das energias cinética e total do sistema para as diferentes velocidades de rotação consideradas, com base na equação 26. Os gráficos da energia total do sistema são a soma das energias potencial e cinética em cada ponto da órbita descrita.

Figura 18 – Variação das energias cinética e total em função da anomalia verdadeira para o modelo de constelação. Condição de $\psi = \pi/2$ e $\varphi_0 = 0$, $p = 7200 \text{ km}$.



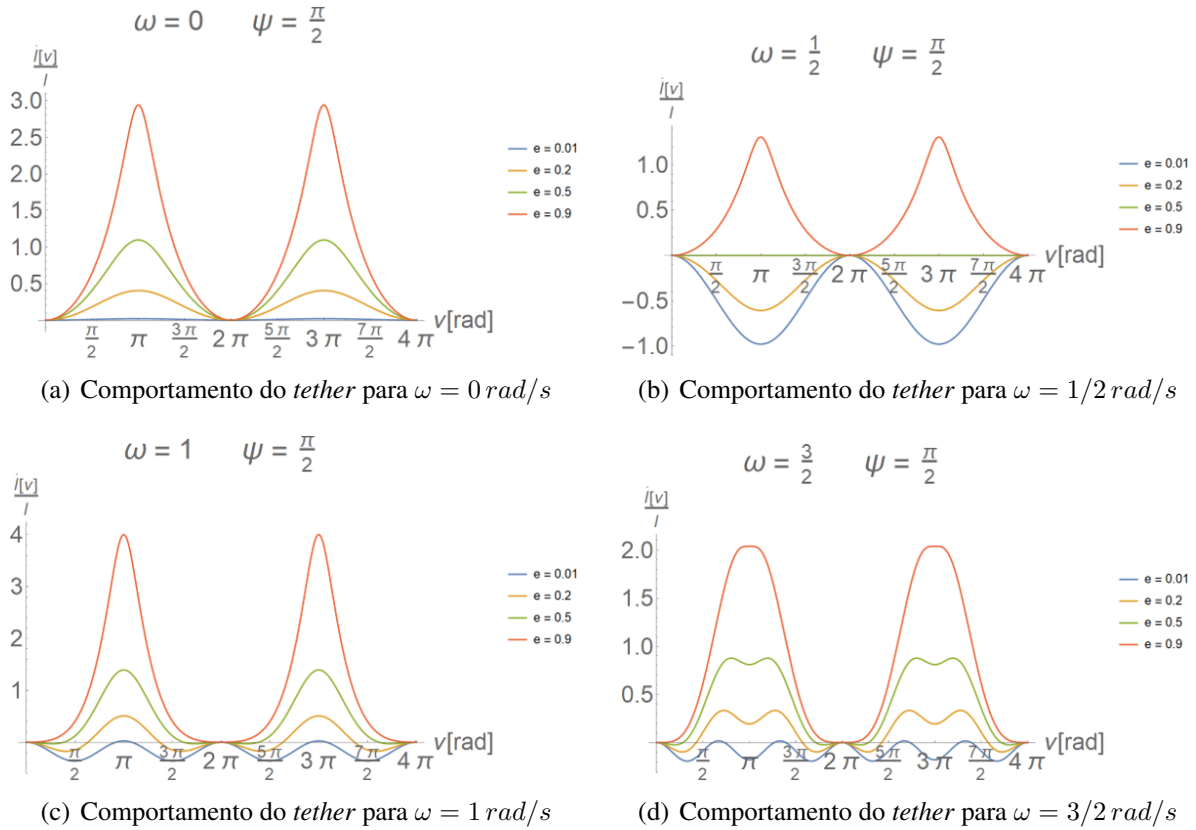
fonte: Produção do próprio autor.

Neste caso também é possível perceber na Figura 18 o caráter oscilatório e periódico e a ocorrência de um pico da energia cinética na posição de periapsis da órbita, $\nu = \pi$, ponto de maior velocidade na órbita.

5.2.2 Variação do comprimento do *tether*

O gráfico da variação do comprimento do *tether* em função da anomalia verdadeira, considerando a equação 32 e os parâmetros do sistema, é apresentado na Figura 19. Assim como demonstrado no desenvolvimento da equação, a equação plotada se refere à uma condição ortogonal, $\psi = \pi/2$.

Figura 19 – Variação do comprimento do *tether* em função da anomalia verdadeira para o modelo de constelação. Condição de $\psi = \pi/2$ e $\varphi_0 = 0$, $p = 7200 \text{ km}$.



fonte: Produção do próprio autor.

A variável representada também possui um caráter oscilatório e periódico, com picos nas posições $\nu = k\pi$ com $k = 0, 1, 2, \dots$, ou seja, na posição de maior velocidade do movimento. Na Figura 19 tem-se que a variação do comprimento do *tether* está relacionado com a força de tração agindo sob o *tether* para valores positivos de l'/l . Para valores negativos, ocorre a tendência de comprimir o *tether*, algo que não ocorre em cabos, caracterizando uma instabilidade estrutural.

6 CONCLUSÃO

No trabalho foram apresentadas as diversas aplicações para o conceito de *tether system*, tema com grande potencial para reduzir custos e viabilizar futuras missões espaciais, visto que no passado foram realizadas missões para validação do conceito e atualmente pesquisadores continuam criando modelos e experimentos.

Nas análises realizadas para o *tether system* do tipo haltere e para o *tether system* representado por uma constelação de nanossatélite, é necessário que sejam atribuídas condições para o comportamento dos ângulos ao longo do movimento, para ser possível obter as equações de movimento. Nos casos analisados optou-se por considerar rotações uniformes.

Apesar da diferença no número de corpos e *tether* conectados e por terem sido considerados os mesmos parâmetros nos dois casos, com exceção da massa total do sistema, percebe-se uma semelhança nos resultados obtidos. A energia potencial permaneceu com o mesmo perfil ao longo da órbita, variando somente o módulo e as mesmas ocorrências de picos de energia cinética apareceram em $\nu = \pi$ por conta da maior velocidade no *periapsis*.

Por conta das considerações impostas para a constelação de nanossatélites, mesma massa para todos os corpos e mesmo comprimento do *tether*, foram obtidas as mesmas equações nos dois casos estudados para representar a variação do comprimento do *tether*.

No quesito de estabilidade, ambos sistemas se mostraram estáveis para excentricidades orbitais inferiores à 0,75 para os parâmetros orbitais utilizados na análise.

Por meio do estudo realizado sobre o comportamento do *tether* ao longo da órbita e conhecendo as limitações estruturais no uso dos cabos, por conta da tendência de compressão, é possível propor um controle sobre o sistema para que o *tether* se mantenha tracionado durante todo o período orbital, evitando os fenômenos de instabilidade. A análise realizada pode ser expandida para o controle das fases de liberação e recolhimento do *tether* em missões de coleta de detritos espaciais, por exemplo.

O trabalho desenvolvido conseguiu cumprir com os objetivos estipulados de analisar o comportamento dinâmico dos sistemas, aplicando as etapas de modelagem para dois sistemas distintos e obtendo as energias dos sistemas.

REFERÊNCIAS

- ASLANOV, V.; LEDKOV, A. **Dynamics of tethered satellite systems**. [S.l.]: Elsevier, 2012.
- ASLANOV, V. S. et al. Dynamics of space elevator after tether rupture. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 36, n. 4, p. 986–992, 2013.
- ASLANOV, V. S.; MISRA, A. K.; YUDINTSEV, V. V. Chaotic attitude motion of a low-thrust tug-debris tethered system in a keplerian orbit. **Acta astronautica**, Elsevier, v. 139, p. 419–427, 2017.
- BAINUM, P.; TAN, Z. Tethered satellite constellations in auroral observation missions. In: **AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit**. [S.l.: s.n.], 2002. p. 4640.
- BELETSKI, V. V.; LEVIN, E. M. **Dynamics of Space Tether Systems**. [S.l.]: Univelt Incorporated, 1993. v. 83.
- BUROV, A. A. et al. Tethered spacecraft in asteroid gravitational environment. **Acta astronautica**, Elsevier, v. 143, p. 126–132, 2018.
- CARTMELL, M.; MCKENZIE, D. A review of space tether research. **Progress in Aerospace sciences**, Elsevier, v. 44, n. 1, p. 1–21, 2008.
- CHEN, Y. et al. Dynamical modelling and control of space tethers: a review of space tether research. **Nonlinear Dynamics**, Springer, v. 77, n. 4, p. 1077–1099, 2014.
- COSMO, M. L.; LORENZINI, E. C. **Tethers in space handbook**. [S.l.], 1997.
- CURTIS, H. **Orbital mechanics for engineering students**. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2013.
- FERREIRA, A. et al. Using tethers to build a “capture portal” for the planets”. **Advances in the Astronautical Sciences, AAS**, p. 3821–3840, 2018.
- KESHMIRI, M.; MISRA, A.; MODI, V. General formulation for n-body tethered satellite system dynamics. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 19, n. 1, p. 75–83, 1996.
- KIM, M.; HALL, C. D. Control of a rotating variable-length tethered system. **Journal of guidance, control, and dynamics**, v. 27, n. 5, p. 849–858, 2004.
- KOJIMA, H.; SUGIMOTO, Y.; FURUKAWA, Y. Experimental study on dynamics and control of tethered satellite systems with climber. **Acta Astronautica**, Elsevier, v. 69, n. 1-2, p. 96–108, 2011.
- LORENZINI, E. Tethered constellations. In: PERGAMMON PRESS LTD. **NASA, Washington Applications of Tethers in Space: Workshop Proceedings, Volume 1**. [S.l.], 1986.
- LORENZINI, E. C. A three-mass tethered system for micro-g/variable-g applications. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 10, n. 3, p. 242–249, 1987.
- MISRA, A.; AMIER, Z.; MODI, V. Attitude dynamics of three-body tethered systems. **Acta Astronautica**, Elsevier, v. 17, n. 10, p. 1059–1068, 1988.
- MORI, O.; MATUNAGA, S. Formation and attitude control for rotational tethered satellite clusters. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 44, n. 1, p. 211–220, 2007.

- MORI, O.; MATUNAGA, S.; WAEDA, N. Research and development of tethered satellite cluster systems. In: IEEE. **Proceedings. 2000 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS 2000)**(Cat. No. 00CH37113). [S.l.], 2000. v. 3, p. 1834–1840.
- PETERS, T. et al. Attitude control analysis of tethered de-orbiting. **Acta Astronautica**, Elsevier, v. 146, p. 316–331, 2018.
- SANTOS, D. P. S. dos et al. Stability solutions of a dumbbell-like system in an elliptical orbit. In: IOP PUBLISHING. **Journal of Physics: Conference Series**. [S.l.], 2015. v. 641, n. 1, p. 012004.
- SANTOS, D. P. S. dos; FERREIRA, A. Three-dimensional two-body tether system—equilibrium solutions. In: IOP PUBLISHING. **Journal of Physics: Conference Series**. [S.l.], 2015. v. 641, n. 1, p. 012009.
- SILVA, W. **Filtro H Infinito Estendido de Segunda Ordem e Filtro de Partículas Regularizado com "Roughening" Aplicados na Estimção de Atitude de Satélites Artificiais**. Tese (Doutorado), 01 2016.
- VOEVODIN, P.; ZABOLOTNOV, Y. M. On stability of the motion of electrodynamic tether system in orbit near the earth. **Mechanics of Solids**, Springer, v. 54, n. 6, p. 890–902, 2019.
- WILLIAMS, P. Optimal deployment/retrieval of a tethered formation spinning in the orbital plane. **Journal of spacecraft and rockets**, v. 43, n. 3, p. 638–650, 2006.
- ZANARDI, M. C.; PRADO, P. da R.; BARONI, L. Control for the space tether system motion. **Journal of Aerospace Technology and Management**, v. 12, 2020.
- ZHANG, F.; HUANG, P. Releasing dynamics and stability control of maneuverable tethered space net. **IEEE/ASME Transactions on Mechatronics**, IEEE, v. 22, n. 2, p. 983–993, 2016.
- ZHU, Z. H.; MURUGATHASAN, L. Dynamic control of space tether deployment. **International Journal of Space Science and Engineering**, Inderscience Publishers (IEL), v. 3, n. 2, p. 113–128, 2015.