

Trabalho de Conclusão de Curso

Curso de Graduação em Física

**INICIAÇÃO AO ESTUDO DA DINÂMICA DE ROTAÇÃO DE UM SATÉLITE EM
VARIÁVEIS DE ANDOYER**

Gabriella Aureliano Braz

Prof. Dr. Tadashi Yokoyama

Rio Claro (SP)

2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Câmpus de Rio Claro

GABRIELLA AURELIANO BRAZ

INICIAÇÃO AO ESTUDO DA DINÂMICA DE ROTAÇÃO DE
UM SATÉLITE EM VARIÁVEIS DE ANDOYER

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Instituto de Geociências e
Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro, da
Universidade Estadual Paulista Júlio de
Mesquita Filho, para obtenção do grau de
Bacharel em Física.

Rio Claro - SP

2016

520 Braz, Gabriella Aureliano
B826i Iniciação ao estudo da dinâmica de rotação de um satélite
em variáveis de Andoyer / Gabriella Aureliano Braz. - Rio
Claro, 2016
31 f. : il., figs., forms.

Trabalho de conclusão de curso (bacharelado - Física) -
Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e
Ciências Exatas
Orientador: Tadashi Yokoyama

1. Astronomia. 2. Transformação canônica. 3. Potencial
perturbador. 4. Problema de dois corpos. I. Título.

GABRIELLA AURELIANO BRAZ

INICIAÇÃO AO ESTUDO DA DINÂMICA DE ROTAÇÃO DE
UM SATÉLITE EM VARIÁVEIS DE ANDOYER

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Instituto de Geociências e
Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro, da
Universidade Estadual Paulista Júlio de
Mesquita Filho, para obtenção do grau de
Bacharel em Física.

Comissão Examinadora

_____ (Orientador)

Rio Claro, ____ de _____ de ____.

Assinatura do(a) aluno(a) _____

Assinatura do(a) orientador(a) _____

Dedico esse trabalho à minha família, pelo amor incondicional, por todo apoio e compreensão, que tornou mais serena essa jornada.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades.

A esta universidade, seu corpo docente, direção e administração que possibilitou o meu ingresso e me auxiliou ao longo de minha formação.

Ao meu orientador, Tadashi Yokoyama, pelo direcionamento ao longo de toda pesquisa, por colocar-se sempre à disposição para assistir, pela paciência e atenciosidade.

A minha mãe, Maria José Ivo Aureliano Braz, que exerceu grande influência no início de meus estudos, sempre me incentivando e encorajando com apoio total. Seu amparo tem me sido de fundamental importância.

A meu pai, Luiz Justino Braz, pelos momentos de descontração, que tornaram os dias mais difíceis, amenos, além de todo auxílio prestado que me foi essencial.

A minha irmã, Elizângela Maria Aureliano Braz, pela compreensão, por todo carisma, estímulo e pela indispensável colaboração.

Ao meu mentor, querido amigo e ilustre professor, José Carlos Rocha Vieira Júnior, cujos ensinamentos transcenderam qualquer programa de ensino e me tem sido de grande valia me ajudando a ampliar os horizontes.

A minha querida amiga e professora, Clarice Engler Cury Conforti, por todo apoio e prestimosa.

A toda minha família maravilhosa, pelo entusiasmo.

Ao meu companheiro, Marlon Ivan Valerio Cuadros pela condescendência e força, pelas indicações extra, pelo apreço e por todo carinho.

Aos meus amigos e amigas, que me acompanharam no decorrer do tempo, pela confiança, prestatividade e pelos bons momentos de distração. Agradeço em especial à Bruna Carvalho, Cintia Minori, Dimas Claudino, Dulce Ferreira, Fernanda Bertuluci, Gabriela Marques, Giovanna Sella, Helen Destefano, Jonathan Fagnello, Letícia Ramos, Marina Siqueira, Melissa Carolina, Sabrina Galatti, Sérgio Kakazu e Vinicius Gomes.

Aos meus colegas de turma que junto a mim sempre estiveram na torcida.

E a todos que direta ou indiretamente contribuíram para minha formação.

*"If you can't explain it simply, you don't
understand it well enough."*

- Albert Einstein

RESUMO

A dinâmica de rotação de um satélite é um velho e clássico problema da mecânica, principalmente em variáveis de Euler.

No entanto, nestas variáveis, mesmo no caso de ausência total de torques, a integrabilidade do problema de rotação não é óbvia, principalmente quando os três momentos de inércia são desiguais. Há ainda uma outra desvantagem das variáveis de Euler, quando algumas inclinações são nulas ou próximas de zero, ocasião em que os nodos ficam indeterminados.

Neste trabalho, propomos o uso das modernas variáveis de Andoyer. Estas formam um conjunto canônico e por isso oferecem significativas vantagens em métodos de perturbações. Por outro lado, a integrabilidade do problema livre de torques fica óbvia, assim como o sistema é reduzido a um problema de um grau de liberdade. A eliminação das singularidades mencionadas acima, podem ser resolvidas facilmente com mais uma transformação canônica (canônicas polares de Poincaré).

Então neste trabalho, introduzimos as variáveis de Andoyer e montamos o potencial perturbador para o caso de um satélite perturbado por um planeta. No caso onde $A = B$ e pelo fato das coordenadas serem canônicas, a obtenção do sistema médio é bastante trivial, através de simples integrações.

Palavras-chave: Variáveis de Andoyer. Transformação Canônica. Dinâmica de Rotação. Potencial Perturbador. Problema de Dois Corpos.

ABSTRACT

The dynamics of the rotation of a satellite is an old and classical problem, specially in the Euler formalism.

However, with these variables, even in torque free motion problem, the integrability of the system is far from trivial, mainly when the three moments of the inertia are not equal. Another disadvantage occurs when the inclinations between some plans are null or close to zero, so the nodes become undetermined.

In this work, we propose the use of modern Andoyer's variables. These are a set of canonical variables and therefore some significant advantages can be obtained when dealing with perturbation methods. On other the hand, the integrability of the torque free motion becomes very clear, as the system is reduced to a problem of one degree of freedom. The elimination of the singularities mentioned above, can be solved very easily, with Pincaré-type variables.

In this work we give the background concepts of the Andoyer's variables and the disturbing potential is obtained for the rotational dynamics of a satellite perturbed by a planet. In the case when $A = B$ (moments of inertia) and due to the current variables, the averaged system is trivially obtained through very simple integrations.

Keywords: Andoyer's Variables. Canonical Transformation. Rotation Dynamics. Disturbing Potential. 2-Body Problem.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	9
2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS	10
3. VARIÁVEIS DE ANDOYER E DINÂMICA DE ROTAÇÃO	11
3.1. Tranformação Canônica e Variáveis de Andoyer	11
3.2. Potencial Perturbador	17
3.3. Análises e Valor Médio	21
4. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS	22
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	23
APÊNDICE A - Sobre a transformação do momento p_θ das antigas variáveis .	25
APÊNDICE B - Do problema de dois corpos às coordenadas de posição	26
APÊNDICE C - Sobre a transformação canônica polar de Poincaré	31

1. INTRODUÇÃO

Geralmente, os satélites artificiais possuem instrumentos para observação ou interação com outros, como por exemplo, satélites para fins meteorológicos, de telecomunicação, sensoria-mento remoto, científico, ambientais, entre outros. É necessário então que estejam devidamente posicionados em direções específicas pré-determinadas para que todos os parâmetros possam ser bem conhecidos, tais como o campo magnético ao qual está submetido, que depende da posição e orientação espacial deste, a quantidade de radiação incidente sobre ele ou o controle de seus movimentos e posições utilizando torques ambientais entre outros e assim obter um melhor aproveitamento, minimizando os custos e otimizando o tempo de operação das missões. Para isso, muitas pesquisas são dedicadas a analisar detalhadamente o movimento rotacional dos satélites sujeitos à interação com outros corpos.

É necessário então, conhecer a órbita deste satélite (posição e velocidade de translação) e também sua atitude (orientação e velocidade de rotação ao redor de seu centro de massa). Esta última, é definida por um conjunto de parâmetros que num instante de tempo pode correlacio-nar um sistema de coordenadas fixo ao satélite (que acompanha seus movimentos de translação e rotação) a outro sistema inercial, que é usualmente relacionado ao planeta. Existem muitas formas de se representar a atitude (que se refere ao movimento de rotação), por exemplo, utili-zando os ângulos de Euler que é bem difundido. Aqui porém, vamos usar as modernas variáveis canônicas de Andoyer, por terem significado físico de fácil aplicação em métodos de teoria de perturbação, o que permitirá uma abordagem analítica do movimento, possibilitando estudos mais detalhados da interação dos corpos.

Esse trabalho de conclusão de curso tem por objetivo principal obter as equações do mo-vimento de rotação de um sólido, livre de torques externos, usando as variáveis de Andoyer, as quais, são definidas usando a metodologia do (DEPRIT, 1967), através de uma conveniente transformação canônica para um sistema Hamiltoniano conservativo.

Em seguida faremos uma aplicação a um problema realista, onde obteremos o potencial médio da dinâmica de rotação de um satélite perturbado por um planeta.

Considera-se então um satélite de massa m_s , com os momentos principais de inércia dis-tintos A , B e C inicialmente arbitrários, que orbita um planeta esférico de massa M_p em cujo centro temos um sistema inercial $OXYZ$, sendo o equador deste, um plano inercial. E a massa do satélite, é muito pequena se comparada a do planeta.

Um outro sistema de eixos $Oxyz$, é definido no centro de massa do satélite. Obviamente devido os torques sofridos pelo satélite, este sistema $Oxyz$ é móvel e o nosso estudo está voltado para a dinâmica de rotação deste sistema. Hipoteticamente, os eixos principais de inércia do satélite são supostos coincidentes com os do sistema $Oxyz$.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

A órbita de um satélite é a trajetória que ele percorre em seu movimento de translação ao redor de um planeta. O movimento em órbita dos satélites resultam em uma elipse cujo tamanho e excentricidade podem variar ao longo do tempo. Mas as órbitas podem possuir também, formato de parábola, hipérbole e até mesmo uma linha reta.

Entende-se por determinação de uma órbita, o cálculo da magnitude, da forma, da orientação da órbita de um corpo celeste no espaço, e a especificação da posição do corpo em sua órbita num dado instante.

Caso o movimento orbital não fosse perturbado, o satélite permaneceria em sua órbita indefinidamente. No entanto, a real existência de perturbações, devido uma série de forças que agem no satélite faz com que este se afaste de sua órbita inicial, estas podem ser perturbações seculares, de curto período ou longo período, que exigem correções nos parâmetros orbitais. Para manter o satélite numa órbita definida previamente e dependendo dos objetivos da missão às vezes é necessário transferir um satélite de uma órbita para outra executando o que se define por manobras orbitais (KUGA, 2011).

As perturbações seculares são aquelas que em geral, variam linearmente no tempo e são as mais importantes porque tem efeito drástico na órbita. As perturbações de curto período são aquelas cujo período de variação é da ordem ou menor do que um período orbital e as de longo período, referem-se aquelas cujo período é maior do que o período orbital (PRADO, 2001).

As principais forças que causam perturbações são originadas pela não esfericidade da distribuição de massa ou pelo achatamento do planeta, pelo arrasto produzido pela atmosfera, pela atração gravitacional de um terceiro corpo e pela pressão de radiação dentre outras forças.

Existem ainda outras perturbações como aquelas geradas pela ressonância de movimentos médios, causadas por outros perturbadores (3º corpo) ou mais. Uma ressonância interessante que está associada ao movimento rotacional é a chamada spin-órbita, que relaciona o período de rotação do satélite em torno de seu próprio eixo de rotação, com o período de translação em torno do planeta (SANCHEZ, 2009). Uma excelente review é dada em: PEALE, S. J.: *annu. Rev. Ast. Astrophys.* 1999, 37, p. 533 - 602.

3. VARIÁVEIS DE ANDOYER E DINÂMICA DE ROTAÇÃO

3.1. Transformação Canônica e Variáveis de Andoyer

Nesta seção, vamos exibir uma transformação canônica do problema de rotação livre (sem torques) tal que a Hamiltoniana se reduz a um problema de um único grau de liberdade, portanto, totalmente integrável.

Seja XYZ um sistema inercial, segundo as leis Newtonianas, centrado no corpo de massa M_p e xyz um sistema de eixos móveis que acompanha o movimento do corpo de massa m_s . No entanto representamos xyz na mesma origem do sistema XYZ , fixo em M_p , conforme a figura seguinte. Notemos também que os eixos x e y estão no plano equatorial de M_p e z é perpendicular ao equador.

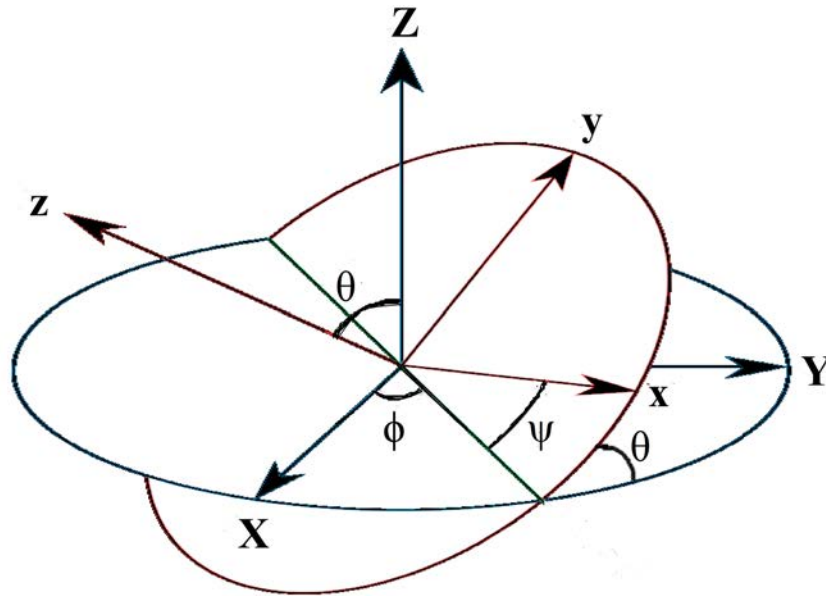


Figura 1: Plano de referência.

Introduzindo os ângulos de Euler ϕ , θ e ψ que posicionam xyz em relação a XYZ , podemos definir a atitude ou dinâmica de rotação de m_s , conforme a Mecânica Clássica (HALLIDAY, 2012, Tipler, 2009, etc.), pelas equações também conhecidas como equações geométricas de Euler.

$$\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi = w_1, \quad (1)$$

$$\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi = w_2, \quad (2)$$

$$\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} = w_3. \quad (3)$$

Onde (w_1, w_2, w_3) é o vetor velocidade angular de m_s . E as equações dinâmicas:

$$A\dot{w}_1 + (C - B)w_2w_3 = 0, \quad (4)$$

$$B\dot{w}_2 + (A - C)w_1w_3 = 0, \quad (5)$$

$$C\dot{w}_3 + (B - A)w_1w_2 = 0. \quad (6)$$

Estas últimas são iguais a zero, pois estamos considerando apenas o movimento livre.

A princípio, a integração desse sistema não é perceptível devido sua complexidade, principalmente se $A \neq B \neq C$. Além disso, como poderíamos tratar casos especiais de singularidades como, θ sendo igual a zero? Dessa forma, definir-se-á um novo conjunto de elementos.

Consideremos a Figura 2, onde N é o ponto de intersecção entre o plano fundamental inercial e o plano equatorial, ϕ será o ângulo entre XON, ψ , o ângulo NOx e θ a inclinação do plano Oxy no plano OXY. Deste modo, ϕ , θ e ψ são os ângulos Eulerianos que determinam a atitude do plano Oxyz com respeito ao plano OXYZ. E consideremos ainda os três momentos p_ϕ , p_θ e p_ψ conjugados.

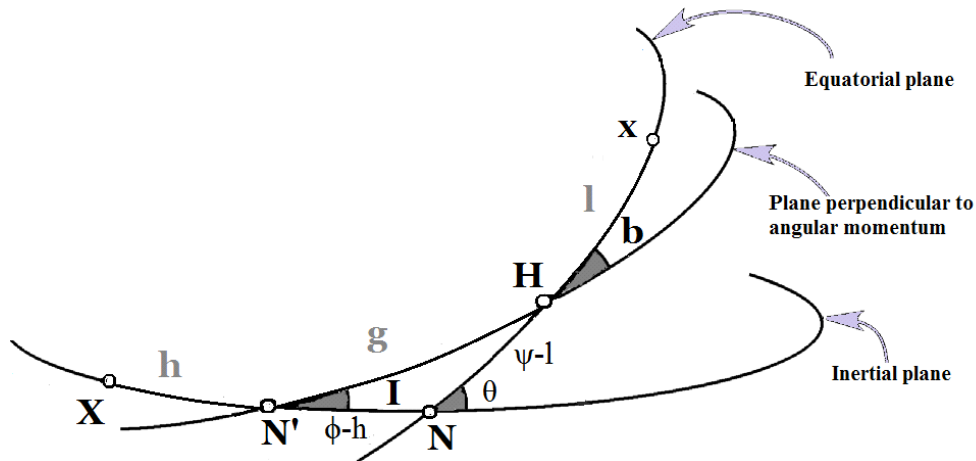


Figura 2: Ângulos de Euler e variáveis de Andoyer.

Usamos ainda (p, q, r) no lugar de (w_1, w_2, w_3) que é o vetor velocidade angular do corpo de massa m_s e introduzimos alguns ângulos auxiliares: b, l, g, h .

Sendo G o módulo do momento angular de rotação de m_s , $G = I.w$, onde I = momento principal de inércia com respeito ao centro de massa e w = velocidade angular de rotação, vamos introduzir L e H :

$$H = G \cos(I), \quad (7)$$

$$L = G \cos(b). \quad (8)$$

Onde H e L são projeções do momento angular de m_s , nos eixos OZ e Oz respectivamente. Dinamicamente falando, L, G e H fixa as inclinações do plano intermediário ON'H nos planos OXY e Oxy através dos ângulos implícitos I e b.

Considerando que o satélite rotaciona livremente, a Lagrangiana ou Hamiltoniana serão dadas apenas pela energia cinética de rotação (não $\exists$ energia potencial).

$$L = \mathbf{H} = T_c = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2). \quad (9)$$

Onde, como já dito, A, B e C são os momentos de inércia do corpo m_s no sistema Oxyz e p, q e r, as componentes no sistema Oxyz do vetor velocidade angular de rotação do corpo de massa m_s com respeito ao sistema OXYZ.

Considerando as equações geométricas de Euler, obtemos os momentos conjugados através das derivadas parciais da Lagrangiana em relação a derivada primeira dos ângulos Eulerianos.

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = Ap \frac{\partial p}{\partial \dot{\phi}} + Bq \frac{\partial q}{\partial \dot{\phi}} + Cr \frac{\partial r}{\partial \dot{\phi}} = (Ap \sin \psi + Bq \cos \psi) \sin \theta + Cr \cos \theta, \quad (10)$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = Ap \cos \psi - Bq \sin \psi, \quad (11)$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = Cr. \quad (12)$$

A partir das quais pode-se determinar Ap, Bq e Cr:

$$Ap = [(p_\phi - p_\psi \cos \theta) / \sin \theta] \sin \psi + p_\theta \cos \psi, \quad (13)$$

$$Bq = [(p_\phi - p_\psi \cos \theta) / \sin \theta] \cos \psi - p_\theta \sin \psi, \quad (14)$$

$$Cr = p_\psi. \quad (15)$$

Seja o triângulo a seguir:

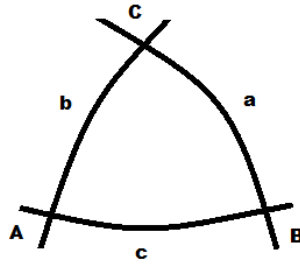


Figura 3: Trigonometria Esférica.

Da trigonometria esférica, temos 3 relações clássicas:

I. Lei dos cossenos:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \quad (16)$$

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B, \quad (17)$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \quad (18)$$

II. Lei dos senos:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \rightarrow \sin a \sin B = \sin b \sin A, \quad (19)$$

$$\sin a \sin C = \sin c \sin A, \quad (20)$$

$$\sin b \sin C = \sin c \sin B. \quad (21)$$

III. Uma outra forma clássica e outra similar é obtida combinando as leis dos cossenos:

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A, \quad (22)$$

$$\sin a \cos C = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A. \quad (23)$$

Com um pouco de cálculos elementares de geometria diferencial (BOCZKO, 1984; GRUNERT, 1837; HARLE, 1973), obtemos facilmente:

$$da = \cos Cdb + \cos Bdc + \sin c \sin B dA, \quad (24)$$

$$db = \cos Adc + \cos Cda + \sin a \sin c dB. \quad (25)$$

Da Figura 2, temos o triângulo $N'HN$ e comparando com o triângulo esférico ABC anterior:

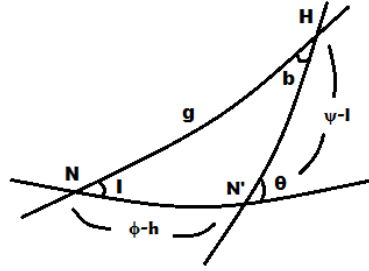


Figura 4: Triângulo $N'HN$.

E usando a Equação (25), obtemos:

$$dg = \cos Id(\phi - h) + \cos bd(\psi - l) + \sin(\psi - l) \sin bd(180 - \theta), \quad (26)$$

$$dg = -\sin(\psi - l) \sin bd\theta + \cos bd(\psi - l) + \cos Id(\phi - h). \quad (27)$$

Agora, seja a expressão: $Ldl + Gdg + Hdh$, onde acabamos de encontrar dg :

$$Ldl + G[-\sin(\psi - l) \sin bd\theta + \cos bd(\psi - l) + \cos Id(\phi - h)] + Hdh. \quad (28)$$

Considerando as Equações (7) e (8) após alguns cálculos, obtemos simplesmente que:

$$Ldl + Gdg + Hdh = G \sin b \sin(l - \psi) d\theta + G \cos bd\psi + G \cos Id\phi. \quad (29)$$

Sabemos que uma condição suficiente para que uma transformação $(\phi, \theta, \psi, p_\phi, p_\theta, p_\psi) \rightarrow (l, g, h, L, G, H)$ seja canônica é que:

$$Ldl + Gdg + Hdh = p_\phi d\phi + p_\theta d\theta + p_\psi d\psi. \quad (30)$$

Esta é denominada, condição de Jacob-Poincaré, que é o caso mais elementar da transformação de forma que é canônica.

Para que a Equação (30) seja satisfeita (vide anexo A), necessariamente temos que ter:

$$G \cos l = H = p_\phi, \quad (31)$$

$$G \sin b \sin(l - \psi) = p_\theta, \quad (32)$$

$$G \cos b = L = p_\psi. \quad (33)$$

Logo, l , g e h vistos na Figura 2 e L , G e H definidos implicitamente nas Equações (31), (32) e (33) formam um conjunto de variáveis canônicas decorrentes da transformação.

Substituindo as Equações (31), (32) e (33) em Ap , Bq e Cr dadas nas Equações (13), (14) e (15), chegamos em:

$$Ap = G \sin b \sin l, \quad (34)$$

$$Bq = G \sin b \cos l, \quad (35)$$

$$Cr = p_\psi = L. \quad (36)$$

Logo,

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \frac{1}{A}(Ap)^2 + \frac{1}{B}(Bq)^2 + \frac{1}{C}(Cr)^2. \quad (37)$$

E com um pouco mais de cálculos obtemos a nova Hamiltoniana em termos das coordenadas canônicas, que são as variáveis de Andoyer.

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B} \right) (G^2 - L^2) + \frac{L^2}{2C}. \quad (38)$$

Nota-se que três variáveis são ignoráveis em $\mathbf{H}$: g , h e H . Então G , H e h são constantes, como podemos observar a partir da Equação (39) a seguir. Pode-se concluir que a inclinação I do plano perpendicular ao momento angular, no plano de referência fixado OXYZ é constante, o que se pode observar na Equação (7) e interpretamos que o plano ON'H, perpendicular ao momento angular do corpo é invariável, e portanto fixado no espaço. Então, apesar de g também depender do tempo t (vide Equação (39)), podemos resolver l e L independente de g , (vide Equação (39) novamente) e portanto o problema se reduz a um único grau de liberdade, pois $\mathbf{H}$ = Hamiltoniana conservativa = constante. No caso em que o corpo de massa m_s tem simetria axial, isto é, quando $A = B$, l desaparece na Equação (38), ficando ignorável, por conseguinte L será constante também, como podemos observar a partir da Equação (38).

Isto mostra como as variáveis de Andoyer, (l, g, h, L, G, H) são eficientes e uma vez obtidas, podem ser facilmente convertidas nas variáveis de Euler, por simples cálculo de geometria esférica. As equações que governam o movimento de rotação livre são dadas como sendo:

$$\frac{d}{dt}(L, G, H) = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial (l, g, h)}, \quad \frac{d}{dt}(l, g, h) = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial (L, G, H)}. \quad (39)$$

Uma outra vantagem do uso das variáveis de Andoyer, é que as singularidades, quando I ou b são iguais a zero, facilmente podem ser resolvidas com a mesma técnica que se usa no caso das variáveis de Delaunay, com mais uma transformação canônica, simples de ser executada - canônicas polares de Poincaré - (vide apêndice C).

3.2. Potencial Perturbador

Já conhecemos então a dinâmica de rotação livre, dada pelas Equações (39). Desejamos agora, saber como seria a dinâmica de rotação de um satélite de massa m_s , perturbado por um planeta de massa M_p , em torno do qual orbita.

Agora, o referencial inercial XYZ, será fixado no equador do planeta e o referencial móvel, xyz, fixado no equador do satélite perturbado. Podemos escrever o potencial perturbador ao qual o satélite de massa m_s está sujeito, devido à presença do planeta perturbador de massa M_p , (HENRARD, 2005; NOYELLES, 2008;) como sendo:

$$V = -\frac{3G_0M_p}{2d^3}m_sr_s^2\{J_2(x^2 + y^2) + 2C_{22}(x^2 - y^2)\}. \quad (40)$$

Onde (x, y, z) são as coordenadas do planeta M_p vistas do sistema móvel fixado no satélite, G_0 é a constante gravitacional universal, r_s é o raio equatorial do corpo perturbado de massa m_s , x , y e z são os componentes do vetor unitário que aponta a partir de um referencial fixo no corpo perturbado de massa m_s , ao corpo perturbador de massa M_p e designamos a distância entre os centros de massa de m_s e M_p como sendo d . Representamos por J_2 e C_{22} os coeficientes clássicos que definem o achatamento genérico do satélite, que são funções de A , B e C , (NOYELLES, 2008):

$$J_2 = \frac{2C - A - B}{2m_s R^2}; \quad C_{22} = \frac{B - A}{4m_s R^2}. \quad (41)$$

Notemos que em V , todos os termos que não influenciam na rotação do satélite, foram desprezados, portanto, a princípio, o potencial do achatamento como é conhecido classicamente tem alguns termos a mais.

Para corpos oblatos, com simetria axial $A = B$, em que o eixo equatorial é maior que o polar, o termo C_{22} é nulo, o que resulta na inexistência de termos ressonantes, indicando a ausência de ressonância spin-órbita. Entretanto, podemos por ora assumir $A \neq B \neq C$, e o problema se mantém ainda geral.

Como dito antes, V está escrito em termos das coordenadas cartesianas (x, y, z) . Como vamos realizar médias nas variáveis angulares (pois queremos obter um sistema médio) devemos escrever x, y, z e d em termos dos elementos orbitais do satélite. Para tanto, sempre que necessário faremos expansões em séries de potências da excentricidade da órbita do satélite. Vamos então supor que esta seja suficientemente pequena de forma que potências de ordem superior a e^4 sejam desprezíveis. Em alguns casos, as médias podem ser calculadas analiticamente sem usarem desenvolvimento em série de potências, porém em especial quando se deseja selecionar alguns termos ressonantes "spin-órbita", os desenvolvimentos acabam sendo necessários. De certa forma faremos um processo semi-analítico, sempre usando processadores algébricos, e expansões em séries são realizadas sempre que necessário. Utilizamos a formulação mais moderna possível, ou seja, as variáveis de Andoyer estudadas anteriormente que substituem de modo favorável, os ângulos de Euler, principalmente se tratando de singularidades e processos perturbativos.

Redefinindo o plano de referência, apenas com as variáveis de Andoyer ilustradas temos a seguinte figura:

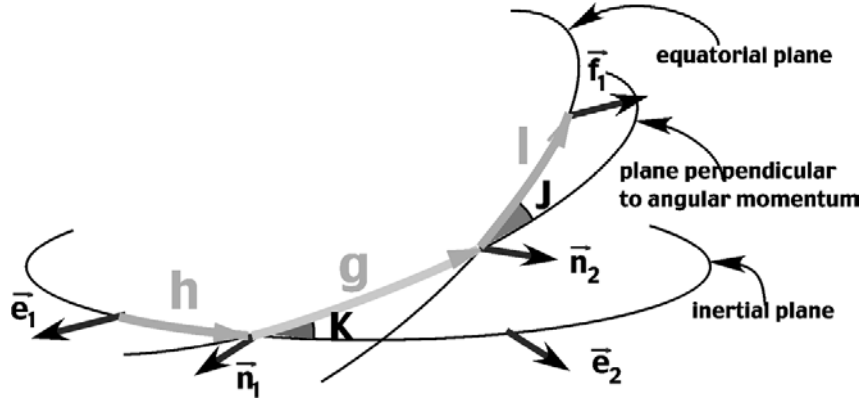


Figura 5: As variáveis de Andoyer (HENRARD, 2005a).

A princípio então, seja o versor (x_u, y_u, z_u) que determina a posição do corpo m_s , relativo ao corpo M_p , partindo de M_p em direção à m_s (vide anexo B), (BROUWER - CLEMENCE, 1961):

$$x_u = \cos(\Omega)[\cos(f)\cos(\omega) - \sin(f)\sin(\omega)] - \cos(I)\sin(\Omega)[\sin(f)\cos(\omega) + \cos(f)\sin(\omega)], \quad (42)$$

$$y_u = \sin(\Omega)[\cos(f)\cos(\omega) - \sin(f)\sin(\omega)] + \cos(I)\cos(\Omega)[\sin(f)\cos(\omega) + \cos(f)\sin(\omega)], \quad (43)$$

$$z_u = \sin(I)[\sin(f)\cos(\omega) + \cos(f)\sin(\omega)]. \quad (44)$$

Onde Ω representa a longitude do nodo ascendente, f é a anomalia verdadeira, ω é o argumento do periastro do corpo m_s e I é a inclinação do plano da órbita de m_s em relação ao inercial de M_p .

Efetuamos então 5 rotações que relacionam o sistema de referência fixo em m_s com o sistema (fixo) inercial em M_p . Definimos então os versores (x, y, z) que são componentes cartesianas que apontam do corpo perturbado ao perturbador e serão utilizados no potencial V adiante, da seguinte forma:

$$xyz = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (45)$$

E as matrizes de rotação:

$$R3h = \begin{bmatrix} \cos(h) & \sin(h) & 0 \\ -\sin(h) & \cos(h) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Sendo h , ângulo de Andoyer. Prosseguimos usando K para indicar o ângulo de obliquidade da eclíptica e J ilustrado na Figura 5.

$$R1K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(K) & \sin(K) \\ 0 & -\sin(K) & \cos(K) \end{bmatrix}, \quad (47)$$

$$R3g = \begin{bmatrix} \cos(g) & \sin(g) & 0 \\ -\sin(g) & \cos(g) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (48)$$

$$R1J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(J) & \sin(J) \\ 0 & -\sin(J) & \cos(J) \end{bmatrix}. \quad (49)$$

Entendemos por l , o ângulo de Andoyer.

$$R3l = \begin{bmatrix} \cos(l) & \sin(l) & 0 \\ -\sin(l) & \cos(l) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (50)$$

Dessa forma, os versores (x, y, z) se conectam com (x_u, y_u, z_u) do sistema inercial, através de:

$$xyz = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R3(-l) * R1(-J) * R3(-g) * R1(-K) * R3(-h) * \begin{bmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{bmatrix}. \quad (51)$$

Realizando as 5 rotações e substituindo x_u, y_u, z_u na equação anterior, obtemos então o potencial desejado. Entretanto, não convém expressá-lo neste trabalho, pois chegamos a uma expressão imensa.

No caso em que se considera um satélite com simetria axial segundo o eixo polar, consideramos apenas o termo J_2 , para análise, na Equação (40). Neste caso, os cálculos mostram que o potencial V , não dependerá do ângulo l (Andoyer). Logo, se $A = B$, temos também que l não aparece na Equação (38), o que significa que $L = \text{cte}$.

3.3. Análises e Valor Médio

Ao realizarmos todos os cálculos da expressão do potencial, verificamos que a parcela que multiplica o termo J_2 não depende da coordenada l , de Andoyer, então esta não contribuirá com termos ressonantes responsáveis pela comensurabilidade spin-órbita.

Todavia, a parcela que multiplica C_{22} dependerá de l , o que significa que para termos a ressonância spin-órbita, devemos considerar $A \neq B$.

Como estamos trabalhando no formalismo canônico, a Hamiltoniana média no caso quando $b = 0$, foi obtida simplesmente tomando:

$$\langle \mathbf{H} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{H}(g, h, l, G, H, L, q_k, p_k) d\theta. \quad (52)$$

Onde (q_k, p_k) são as variáveis canônicas do problema kepleriano (translação) e θ pode ser qualquer variável de curto período, tanto no conjunto rotacional quanto translacional.

Nota-se que esta integração é explícita e pode ser feita analiticamente, facilmente com qualquer processador algébrico.

O volume de termos é muito grande e a apresentação explícita dos cálculos intermediários não é feita aqui.

Realizamos então médias em g e selecionamos à parte, todos os cossenos que envolvem a combinação ressonante "spin-órbita". De maneira resumida obtivemos:

$$\langle V \rangle = \langle V(J_2) \rangle + \langle V(C_{22}) \rangle. \quad (53)$$

Onde na primeira parcela à direita, só temos termos seculares e de longo período, ao passo que as combinações ressonantes só ocorrem em $\langle V(C_{22}) \rangle$. Todos os demais termos não ressonantes de curto período são desprezados.

4. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS

Fazemos menção ao fato que cumprimos o plano proposto, apresentando algumas análises valiosas que foram realizadas ao longo desse estudo.

Foi feito um estudo introdutório da dinâmica de rotação onde definimos as variáveis canônicas de Andoyer. Apresentamos a integrabilidade do problema no caso de rotação livre e ainda apresentamos o tratamento do caso quando temos um perturbador externo que afeta a rotação livre. Mostramos a vantagem das variáveis de Andoyer e também a facilidade de obter a Hamiltoniana média do sistema.

Quanto às perspectivas de trabalhos futuros, seguindo a mesma linha de pesquisa, podemos estudar situações mais gerais a serem definidas em casos onde o ângulo b não é nulo, porém pequeno tal que possa ser considerado apenas uma perturbação.

Nestas condições, o termo na Equação (38): $\frac{1}{2} \left(\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B} \right) (G^2 - L^2)$ sendo suficientemente pequeno, podemos considerá-lo da mesma ordem dos termos fatorados por J_2 . Isto possibilita escrever a Hamiltoniana na forma geral: $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$, onde $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$ representam os termos de perturbação canônica, onde $\mathbf{H}_0$ é completamente integrável e além disso, os momentos L , G , e H passam a ser ações. Esta é a situação onde as elegantes técnicas de perturbação podem ser empregadas de forma bastante eficiente, já que o sistema está escrito em termos de variáveis ação-ângulo. Isto não seria possível no caso de variáveis não canônicas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARROW - GREEN, J. *Poincaré and the Tree Body Problem*. Rhode Island: American Mathematical Society, 1997. V. 11, 272 p.

BATE, R. R.; MUELLER, D. D.; WHITE, J. E. *Fundamentals of Astrodynamics*. New York: General Publishing Company, 1971. 455 p.

BEAUVALET, L. et al. Dynamical parameter determinations in Pluto's system*: Expected constraints from the New Horizons mission to Pluto. *Astronomy & Astrophysics*, V. 540, A65, p.1-9, 2012.

BOCZKO, R. *Conceitos de Astronomia*. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1984. 429 p.

BROUWER, D.; CLEMENCE, G. M. *Methods of Celestial Mechanics*. New-York Academic Pres, 1961. V.1, 598 p.

BRÜNNOW, F. *Spherical Astronomy*. Berlin: Ferd. Dümmler, 1864. 559 p.

CABETTE, R. E. S. *Estabilidade do movimento rotacional de satélites artificiais*. 2006. 232 p. Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos - SP. 2006.

DANJON, A. *Astronomie Générale*. J. & R. Sennac, Paris, 1959.

DERIGLAZOV, A. A.; FIGUEIRAS, J. G. *Formalismo hamiltoniano e transformações canônicas em mecânica clássica*. 1A. São Paulo: Livraria da Física, 2009. 204 p.

DEPRIT, A. Free rotation of a rigid body studied in the phase plane. *American Journal of Physics*, Seattle, p. 424 - 428, 9 jan. 1967.

D'HOEDT, S.; LAMAÎTRE, A. The spin-orbit resonant rotation of Mercury: a two degree of freedom hamiltonian model. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Netherlands, 89, p. 267 - 283, 2004.

GIACAGLIA, G. E. O. *Mecânica analítica*. Rio de Janeiro: Almeida Neves, 1978. V.1, 279 p.

GOLDSTEIN, H. *Classical mechanics*. 2ª edição. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1980. 672 p.

GRUNERT, J. A. *Elemente der Differential - und Integralrechnung zum Gebrauche bei Vorlesungen*. Leipzig. Nabu Press. 1837, V.1, 328 p.

HALLIDAY, D. et al. *Fundamentos de Física*. 4ª edição. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1984. V.1., 309 p.

HARLE, C. E. *Geometria Diferencial*. 9º Colóquio Brasileiro de Matemática. Poços de Caldas. 1973.

HENRARD, J. The rotation of Io. *Icarus*, 178, p. 144 - 153, 2005.

KINOSHITA, H. First - Order Perturbations of the two Finite Body Problem. *Astrodinamical Society of Japan*, Japão, V.24, p. 423 - 457, 1972.

KUGA, H. K.; RAO, K. R.; CARRARA, V. *Satélites Artificiais - Movimento Orbital*. São José dos Campos - SP: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2011. 96 p.

MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. *Solar System Dynamics*. United States of America: Cambridge University Press, 1999. 603 p.

LANCZOS, C. *The variational principles of mechanics*. 4º edição. Toronto: University of Toronto Press, 1970. V.1, 407 p.

NOYELLES, B. Expression of Cassini's third law for Callisto, and theory of its rotation. *Icarus*, 202, p. 225 - 239, 2009.

NOYELLES, B.; LAMAÎTRE, A.; VIENNE, A. Titan's rotation. *Astronomy & Astrophysics*, 478, p. 959 - 970, 2008.

PEALE, S. J. Origin and Evolution of the Natural Satellites. *Astronomy & Astrophysics*, 37, p. 533 - 602, 1999.

PRADO, A. F. B de A.; KUGA, H. K. *Fundamentos de Tecnologia Espacial*. São José dos Campos - SP: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2001. 220 p.

RAMBAUX, N.; BOIS, E. Theory of the Mercury's spin - orbit motion and analysis of its main librations. *Astronomy & Astrophysics*, 413, p. 381 - 393, 2004.

SANCHEZ, D. M. *Dinâmica Ressonante de Alguns Satélites Artificiais Terrestres no Sistema Terra-Lua-Sol*. 2009. 92 p. Dissertação de Mestrado - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro - SP. 2009.

TIPLER, P. A.; MOSCA, G. *Física para Cientistas e Engenheiros*. 6º edição. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2009. V.1.

YOKOYAMA, T. Tópicos Elementares do Problema de Dois Corpos. 1998. Apostila: Ministrada na 2º Escola de Verão em Dinâmica Orbital e Planetologia. UNESP - Guaratinguetá.

YOKOYAMA, T.; Frouard, J. H.; Deienno, R. *Effects of High Inclined and Eccentric Disturbances on the Dynamics of the Equator of an Axy - Symmetric Body*. 44th Annual meeting of the Division on Dynamical Astronomy of the American Astronomical Society. DDA 2013.

APÊNDICE A - Sobre a transformação do momento p_θ das antigas variáveis

Na página 16, Equação (32), a relação apresentada é a seguinte:

$$p_\theta = G \sin(b) \sin(l - \psi). \quad (54)$$

A qual, envolve b e l que não fazem parte do conjunto canônico inicial de partida. No entanto, podemos mostrar como resolver isto no triângulo esférico $N'HN$ da Figura 2.

Sabe-se que $(\phi - h, \psi - l, g)$ podem ser completamente resolvidos em termos de (I, θ, b) e vice-versa (DANJON, 1959). Assim, podemos escrever

$$G = f(p_\theta, I, b). \quad (55)$$

E como

$$\cos(I) = \frac{p_\theta}{G} \quad (56)$$

e

$$\cos(b) = \frac{p_\psi}{G}; \quad (57)$$

logo:

$$G = f\left(p_\theta, I\left(\frac{p_\phi}{G}\right), \theta, b\left(\frac{p_\psi}{G}\right)\right) = F(p_\theta, p_\phi, p_\psi, G, \theta), \quad (58)$$

ou seja, invertendo tudo temos:

$$G = \tilde{G}(p_\theta, p_\phi, p_\psi, \theta). \quad (59)$$

Dessa forma, G fica escrito como função apenas das velhas variáveis e eliminamos b e l .

Na realidade esta inversão, na prática nunca seria necessária, já que a nova Hamiltoniana sempre pode ser obtida explicitamente em função apenas do novo par canônico mostrado nas páginas 16 e 17.

APÊNDICE B - Do problema de dois corpos às coordenadas de posição

Em princípio, sabemos que a equação do movimento de dois corpos no sistema cartesiano (BROUWER - CLEMENCE, 1961) é dada por:

$$F = m.a = k^2 \frac{m_a m_b}{r^2} \hat{r}. \quad (60)$$

Onde k^2 é a constante de gravitação universal, a é a aceleração, conforme a 2ª lei de Newton e a distância de separação entre os corpos m_a e m_b posicionados num sistema inercial de coordenadas cartesianas é dada por:

$$r^2 = (\xi_a - \xi_b)^2 + (\eta_a - \eta_b)^2 + (\zeta_a - \zeta_b)^2. \quad (61)$$

Sendo (ξ_a, η_a, ζ_a) e (ξ_b, η_b, ζ_b) as coordenadas de m_a e m_b respectivamente. E decompondo a força nas componentes que atuam em m_a e m_b nas direções (ξ, η, ζ) separadamente, obtemos um sistema de equações diferenciais não lineares de segunda ordem:

$$m_a \ddot{\xi}_a = k^2 m_a m_b \frac{\xi_b - \xi_a}{r^3}, \quad (62)$$

$$m_a \ddot{\eta}_a = k^2 m_a m_b \frac{\eta_b - \eta_a}{r^3}, \quad (63)$$

$$m_a \ddot{\zeta}_a = k^2 m_a m_b \frac{\zeta_b - \zeta_a}{r^3}, \quad (64)$$

$$m_b \ddot{\xi}_b = k^2 m_a m_b \frac{\xi_a - \xi_b}{r^3}, \quad (65)$$

$$m_b \ddot{\eta}_b = k^2 m_a m_b \frac{\eta_a - \eta_b}{r^3}, \quad (66)$$

$$m_b \ddot{\zeta}_b = k^2 m_a m_b \frac{\zeta_a - \zeta_b}{r^3}. \quad (67)$$

E a solução dessas equações nos levaria a determinação de 12 constantes de integração. Essa é obtida através de manipulações algébricas das equações e com o auxílio das integrais primeiras do movimento.

Sabemos ainda que as coordenadas (ξ_g, η_g, ζ_g) do centro de massa do sistema de duas partículas de massas m_a e m_b são dadas por:

$$\xi_g = \frac{m_a \xi_a + m_b \xi_b}{m_a + m_b}, \quad (68)$$

$$\eta_g = \frac{m_a \eta_a + m_b \eta_b}{m_a + m_b}, \quad (69)$$

$$\zeta_g = \frac{m_a \zeta_a + m_b \zeta_b}{m_a + m_b}. \quad (70)$$

Fixando agora um novo sistema referencial com a origem coincidindo como centro de massa de m_a e m_b definimos:

$$x_a = \xi_a - \xi_g, \quad y_a = \eta_a - \eta_g, \quad z_a = \zeta_a - \zeta_g, \quad (71)$$

$$x_b = \xi_b - \xi_g, \quad y_b = \eta_b - \eta_g, \quad z_b = \zeta_b - \zeta_g. \quad (72)$$

E com algumas manipulações destas equações obtemos as equações do movimento, agora num sistema referencial de coordenadas móveis, com a origem no centro de massa de m_a e m_b .

$$m_a \ddot{x}_a = k^2 m_a m_b \frac{x_b - x_a}{r^3}, \quad (73)$$

$$m_a \ddot{y}_a = k^2 m_a m_b \frac{y_b - y_a}{r^3}, \quad (74)$$

$$m_a \ddot{z}_a = k^2 m_a m_b \frac{z_b - z_a}{r^3}, \quad (75)$$

$$m_b \ddot{x}_b = k^2 m_a m_b \frac{x_a - x_b}{r^3}, \quad (76)$$

$$m_b \ddot{y}_b = k^2 m_a m_b \frac{y_a - y_b}{r^3}, \quad (77)$$

$$m_b \ddot{z}_b = k^2 m_a m_b \frac{z_a - z_b}{r^3}. \quad (78)$$

Onde a distância entre os corpos é dada por:

$$r^2 = (x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2 \quad (79)$$

E as coordenadas do centro de massa nesse novo sistema de referência, isto é, substituindo as Equações (71) e (72) nas Equações (68), (69) e (70), são obtidas como:

$$m_a x_a + m_b x_b = 0, \quad (80)$$

$$m_a y_a + m_b y_b = 0, \quad (81)$$

$$m_a z_a + m_b z_b = 0. \quad (82)$$

Da Equação (80), temos trivialmente: $x_a = \frac{-m_b x_b}{m_a}$ daí $x_b - x_a$ se escreve:

$$\begin{aligned} x_b - x_a &= x_b - \left(\frac{-m_b x_b}{m_a} \right) = \frac{m_a x_b + m_b x_b}{m_a}, \\ x_b - x_a &= \left(\frac{m_a + m_b}{m_a} \right) x_b. \end{aligned} \quad (83)$$

De maneira similar, se isolarmos x_b na Equação (80) temos semelhantemente:

$$\begin{aligned} x_b &= - \left(\frac{-m_a x_a}{m_b} \right), \\ x_b - x_a - \left(\frac{m_a x_a}{m_b} \right) - x_a &= \frac{-m_a x_a - m_b x_a}{m_b}, \\ x_b - x_a &= - \left(\frac{m_a + m_b}{m_b} \right) x_a. \end{aligned} \quad (84)$$

Analogamente obtemos $y_b - y_a, z_b - z_a, \dots$ etc, que substituindo nas Equações (73... 78) resultam em:

$$\ddot{x}_a = -\mu_a \frac{x_a}{r_a^3}, \quad \ddot{x}_b = -\mu_b \frac{x_b}{r_b^3}, \quad (85)$$

$$\ddot{y}_a = -\mu_a \frac{y_a}{r_a^3}, \quad \ddot{y}_b = -\mu_b \frac{y_b}{r_b^3}, \quad (86)$$

$$\ddot{z}_a = -\mu_a \frac{z_a}{r_a^3}, \quad \ddot{z}_b = -\mu_b \frac{z_b}{r_b^3}. \quad (87)$$

Onde,

$$\mu_a = k^2 \frac{m_b^3}{(m_a + m_b)^2}, \quad r_a^2 = x_a^2 + y_a^2 + z_a^2; \quad (88)$$

$$\mu_b = k^2 \frac{m_a^3}{(m_a + m_b)^2}, \quad r_b^2 = x_b^2 + y_b^2 + z_b^2; \quad (89)$$

Porém a inexistência de um método para obtenção da solução analítica deste sistema de equações, persiste, dessa forma, deslocamos o sistema referencial tal que a origem fica centrada em m_a e assim definimos a posição de m_b em relação a m_a .

$$x = x_b - x_a, \quad y = y_b - y_a, \quad z = z_b - z_a. \quad (90)$$

E também,

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad (91)$$

$$\mu = k^2(m_a + m_b). \quad (92)$$

Calculamos a derivada de segunda ordem das Equações (90) em relação a t e em seguida, subtraímos as Equações (73), (74) e (75) das Equações (76), (77) e (78), substituindo nestas, as Equações (90) e suas derivadas de segunda ordem e obtivemos então:

$$\ddot{x} = -\mu \frac{x}{r^3}, \quad \ddot{y} = -\mu \frac{y}{r^3}, \quad \ddot{z} = -\mu \frac{z}{r^3}. \quad (93)$$

Estas são as equações clássicas do problema de dois corpos no caso em que se usa um referencial relativo (sistema móvel, fixo em uma das massas). A integração e a solução é muito bem conhecida nos textos clássicos de mecânica: a órbita é uma cônica, e no caso da elipse, as coordenadas cartesianas (x, y, z) da massa em estudo se escrevem:

$$x = r[\cos \Omega \cos(f + \omega) - \cos I \cos \Omega \sin(f + \omega)], \quad (94)$$

$$y = r[\sin \Omega \cos(f + \omega) + \cos I \cos \Omega \sin(f + \omega)], \quad (95)$$

$$z = r \sin I \sin(f + \omega), \quad (96)$$

Onde f = anomalia verdadeira, $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, ω = argumento do pericentro e Ω = longitude do nodo ascendente.

A Figura (6) a seguir, ilustra a geometria:

Observamos então que os vektres (x_u, y_u, z_u) nas Equações (42, 43, 44) são exatamente os mesmos de (x, y, z) acima dados.

No caso em que a trajetória é uma elipse ($e < 1$), é comum o uso de expansões em série de potências de e , em r e f . Por exemplo, (vide BROUWER - CLEMENCE, 1961):

$$f = l + \left(2e - \frac{1}{4}e^3\right) \sin l + \frac{5}{4}e^2 \sin 2l + \frac{13}{12}e^3 \sin 3l + \dots \quad (97)$$

$$r = a \left\{ 1 + \frac{1}{2}e^2 + \left(-e + \frac{3}{8}e^3\right) \cos l - \frac{1}{2}e^2 \cos 2l - \frac{3}{8}e^3 \sin 3l + \dots \right\}. \quad (98)$$

Onde termos de ordem ≥ 4 , foram ignorados.

Estas expansões, portanto, foram usadas, sempre que necessárias em $V(x, y, z)$ dado na Equação (40), para podermos efetuar as médias.

Neste apêndice, apenas algumas manipulações algébricas e passagens matemáticas específicas ou muito detalhadas, foram omitidas com o objetivo de simplificar a descrição do método de obtenção das coordenadas de posição do satélite. Estas porém podem ser encontradas nas

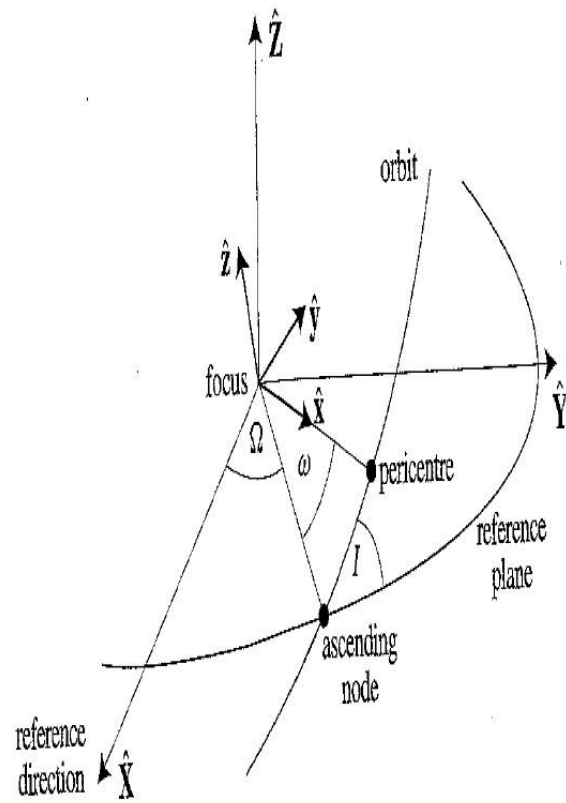


Figura 6: "Reproduzida de MURRAY - DERMOTT, 1999".

referências indicadas no apêndice.

APÊNDICE C - Sobre a transformação canônica polar de Poincaré

Para o caso de singularidades, a simples transformação polar de Poincaré resolve o problema.

A exemplo do que ocorre nas variáveis de Euler, notemos na Figura 2 que se $I = 0$, então o ângulo h (de Andoyer) não é definido. Então, sabemos da Mecânica Analítica que a transformação $(h, H) \rightarrow (z_1, z_2)$, onde:

$$z_1 = -\sqrt{2(G-H)} \sin h, \quad (99)$$

$$z_2 = +\sqrt{2(G-H)} \cos h, \quad (100)$$

é suficiente para contornar o problema pois z_1 e z_2 estão sempre definidos para qualquer h variando em $[0^\circ, 360^\circ]$. Além disso, é fácil provar que $(h, H) \rightarrow (z_1, z_2)$ é uma transformação canônica, o que é importante pois desejamos sempre manter o formalismo canônico.

No caso quando $J = 0$ ou $b = 0$ também temos singularidade, porém um artifício similar resolve o problema.