unesp UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

FACULDADE DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS – CAMPUS DE MARÍLIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

OSVALDO AUGUSTO CHISSONDE MAME

O MOVIMENTO UNIVERSAL, PARTICULAR E SINGULAR EXISTENTE ENTRE AS SIGNIFICAÇÕES ARITMÉTICAS, GEOMÉTRICAS E ALGÉBRICAS: UM ESTUDO COM ENFOQUE NO ENSINO FUNDAMENTAL

MARÍLIA/SP

2021

OSVALDO AUGUSTO CHISSONDE MAME

O MOVIMENTO UNIVERSAL, PARTICULAR E SINGULAR EXISTENTE ENTRE AS SIGNIFICAÇÕES ARITMÉTICAS, GEOMÉTRICAS E ALGÉBRICAS: UM ESTUDO COM ENFOQUE NO ENSINO FUNDAMENTAL

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Faculdade de Filosofia e Ciências da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutor em Educação.

Orientador: Prof. Dr. José Carlos Miguel

MARÍLIA/SP

2021

M264m

Mame, Osvaldo Augusto Chissonde

O movimento universal, particular e singular existente entre as significações aritméticas, geométricas e algébricas: Um estudo com enfoque no ensino fundamental / Osvaldo Augusto Chissonde Mame. -- Marília, 2021

187 p.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Filosofia e Ciências, Marília

Orientadora: José Carlos Miguel

1. Aritmética. 2. Geometria. 3. Álgebra. 4. Ensino Fundamental. 5. Sistema Elkonin-Davidov-Repkin.. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de Filosofia e Ciências, Marília. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Marília

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA TESE: O MOVIMENTO UNIVERSAL, PARTICULAR E SINGULAR EXISTENTE ENTRE AS SIGNIFICAÇÕES ARITMÉTICAS, GEOMÉTRICAS E ALGÉBRICAS: UM ESTUDO COM ENFOQUE NO ENSINO FUNDAMENTAL

AUTOR: OSVALDO AUGUSTO CHISSONDE MAME
ORIENTADOR: JOSÉ CARLOS MIGUEL

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Doutor em EDUCAÇÃO, pela Comissão Examinadora:

Prof(a). Dr(a). JOSÉ CARLOS MIGUEL (Participaçao Virtual)
Departamento de Didática / Unesp, Faculdade de Filosofia e Ciências, Marília

Prof(a). Dr(a). VANDEI PINTO DA SILVA (Participaçao Virtual)
Departamento de Didática / Unesp, Faculdade de Filosofia e Ciências, Marília

Prof(a). Dr(a). MARIA SILVIA ROSA SANTANA (Participaçao Virtual)
Programa de Pós-Graduação em Educação / Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Paranaíba

Prof(a). Dr(a). MARIA LÚCIA PANOSSIAN (Participaçao Virtual)
Departamento Acadêmico de Matemática / Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof(a). Dr(a). ADEMIR DAMÁZIO (Participaçao Virtual)
Programa de Pós-Graduação em Educação / Universidade do Extremo Sul Catarinense

Marília, 11 de junho de 2021

GZAbdian
Profa. Dra. Graziela Zambao Abdian
Coordenadora do PPG em Educação

DEDICATÓRIA

Á minha mãe Maria Fernanda Ulo, fonte de toda inspiração e luta.
À Neusa Mame (minha esposa) e aos nossos filhos Elzany, Osvalneusio e Neuvalda Mame, pela coragem em suportarem as minhas constantes ausências por conta da formação doutoral.
Aos meus irmãos, sobrinhos e primos, pela dedicação e companheirismo que existe em nossa família.
Ao Professor Doutor José Carlos Miguel pela curiosidade e sensibilidade em me receber como orientador, por sua paciência, sabedoria, generosidade e ensinamentos e por não ter desistido de mim no percurso do doutorado em função das minhas idas e vindas entre Brasil e Angola.

AGRADECIMENTO

"O trabalho é, antes de tudo, um processo entre o homem e a natureza, processo este em que o homem, por sua própria ação, medeia, regula e controla seu metabolismo com a natureza." (MARX, 2013, p. 255)

A chegada ao estágio atual desta tese só foi possível graças ao contributo de pessoas comprometidas com o processo de humanização e alfabetização do ser humano. Estas – com simplicidade, ética e generosidade – foram me ajudando a enxergar o mundo sob um ângulo diferente daquele que eu estava acostumado, isto é, de acordo com o próprio contexto.
Assim, ao terminar mais uma etapa da minha formação humana, a qual em verdade marca o início de outra etapa, resta-me agradecê-los e, também, incluir todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para que este fato acontecesse.

Desse modo, meus agradecimentos são dirigidos especialmente aos Professores José Carlos Miguel, orientador desta tese e ao Professor Ademir Damazio, Líder do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: Uma Abordagem Histórico-Cultural, do qual faço parte desde o ano de 2012.

Aos Professores Doutores Vandei Pinto da Silva, líder do Grupo de Pesquisa sobre Formação de Educadores (GPFORME); Sueli Mendonça, Líder do Grupo de Pesquisa Implicações Pedagógicas da THC; Josélia Euzébio da Rosa, Líder do TEDMAT; e Stella Miller, por proporcionarem reflexões relevantes durante reuniões e conversas paralelas ao longo da constituição do meu objeto de estudo.

Aos Professores Doutores, Ademir Damazio, Vandei Pinto da Silva, Maria Lúcia Panossian e Maria Silvia Rosa Santana, por examinarem este trabalho e proporcionarem reflexões relevantes para o seu enriquecimento durante a banca de qualificação.

Aos meus familiares, amigos e colegas, pelo companheirismo ao longo dos dois últimos anos.

Aos integrantes do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: uma Abordagem Histórico-Cultural (GPEMAHC), do Grupo de Pesquisa Sobre Formação do Educador, - Grupo de Pesquisa Teoria do Ensino Desenvolvimental na Educação Matemática (TEDMAT) e do Grupo de Pesquisa Implicações Pedagógicas da (THC-GPITHC) pelo acolhimento e pelos momentos de estudo, reflexões durante a investigação e materiais bibliográficos disponibilizados e de forma muito particular, à amiga Silmara.

Aos Professores do Programa de Pós-Graduação em Educação (PPGE) da UNESP, pelas contribuições e discussões nas disciplinas cursadas.

À Direção do INAGBE – Instituto Nacional de Gestão de Bolsas de Estudo e da Faculdade de Economia da Universidade José Eduardo do Santos e Instituto Superior Politécnico da Caála pela dispensa e auxílio financeiro para que eu pudesse frequentar o Doutorado.

"Se eles (os professores) querem ter êxitos no seu trabalho educativo e de ensino devem observar como tem lugar o desenvolvimento da criança" (Leontiev, 1903 – 1979)

RESUMO

A presente tese tem por objetivo analisar o contexto peculiar quanto à organização do ensino de matemática – concepção angolana e do sistema Elkonin-Davidov-Repkin em que ocorre o movimento universal-particular-singular entre as significações aritméticas, algébricas e geométricas. A hipótese apresentada é de que a investigação sobre uma proposta dirigida ao ensino de matemática, da educação escolar primária, subsidie as decisões e a efetivação de ações para evitar os problemas com os quais os alunos se defrontam, atualmente, no processo de educação e ensino em Angola. Trata-se de uma investigação qualitativa, de base bibliográfica e de análise documental, que tem como referência duas obras que expressam a objetivação e orientação do sistema Elkonin-Davídov-Repkin e uma que explicita o modo de organização do ensino de matemática em Angola. Traz como fundamentos, mais especificamente, a psicologia pedagógica de base teórica histórico-cultural, porém sem perder de vista sua matriz, o Materialismo Histórico e Dialético. Os resultados da tese demonstram que, em termos pedagógicos, na proposição do sistema Elkonin-Davidov-Repkin, todas as tarefas anunciam a articulação entre as significações aritméticas, algébricas e geométricas, de forma articulada ao movimento universal, particular e singular. Em contrapartida, a mesma articulação não é verificada nas proposições angolanas, uma vez que suas tarefas, além de não explicitar a articulação entre as significações aritméticas, geométricas e algébricas, também não apresentam o movimento universal, particular e singular. Além disso, promove o ensino baseado na observação para constituição da ideia conceitual, isto é, voltado à promoção de aprendizagem de conteúdos apenas empíricos.

Palavras-Chave: Aritmética. Geometria. Álgebra. Ensino Fundamental. Matemática. Sistema Elkonin-Davidov-Repkin.

ABSTRACT

This thesis aims to analyze the peculiar context of the organization of mathematics teaching – Angolan conception and the Elkonin-Davidov system – Repkin in which there is the universal-particular-singular movement between arithmetic, algebraic and geometric meanings. The hypothesis presented is that the investigation of a proposal aimed at teaching mathematics, primary school education, subsidize decisions and implementation of actions to avoid the problems that students are currently facing in the education and teaching process in Angola. This is a qualitative research, bibliographically based and documental analysis, which has as reference two works that express the objectification and orientation of the Elkonin-Davídov – Repkin system and one that explains the way of organizing the teaching of mathematics in Angola. Its foundations are, more specifically, the pedagogical psychology of a cultural-historical theoretical basis, but without losing sight of its matrix, Historical and Dialectical Materialism. The results of the thesis demonstrate that, in pedagogical terms, in the proposition of the Elkonin-Davidov-Repkin system, all tasks announce the articulation between arithmetic, algebraic and geometric meanings, bringing together the universal, particular and singular movement. On the other hand, the same articulation is not verified in the Angolan propositions, since their tasks, in addition to not making explicit the articulation between arithmetic, geometric and algebraic meanings, also do not present the universal, particular and singular movement. In addition, it promotes observation-based teaching to build the conceptual idea, that is, aimed at promoting empirical content learning.

Keywords: Arithmetic. Geometry. Algebra. Elementary School. Mathematics. Elkonin-Davidov-Repkin system.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LBSE - Lei de Bases do Sistema de Educação

LBSEE - Lei de Bases do Sistema de Educação e Ensino

GP FORME - Grupo de Pesquisa Sobre Formação do Educador

GPEMAHC - Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: uma Abordagem Histórico-Cultural

TEDMAT - Grupo de Pesquisa Teoria do Ensino Desenvolvimental na Educação Matemática

GPITHC - Grupo de Pesquisa Implicações Pedagógicas da Teoria Histórico-Cultural.

INAGBE – Instituto Nacional de Gestão de Bolsas de Estudo

UJES – Universidade José Eduardo dos Santos

ISPC - Instituto Superior Politécnico da Caála

FEc- Faculdade de Economia

UNESC - Universidade do Extremo Sul Catarinense

UNESP - Universidade Estadual Paulista

PREPA - Projeto de Formadores de Professores para o Ensino Primário em Angola

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Vale dizer que a temática e o objeto de estudo desta tese se constituíram em uma ampliação das pesquisas iniciadas em 2012, no âmbito do mestrado realizado no Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade do Extremo Sul Catarinense (UNESC). Até então, o pesquisador não conhecia as proposições do sistema Elkonin-Davídov-Repkin, bem como as percepções de seus colaboradores e continuadores sobre a educação, mais especificamente, de Matemática e seu ensino. Ao adotarmos a teoria Histórico-Cultural, para o desenvolvimento dos estudos, nossa opção foi para geometria.

O estudo foi desenvolvido no Laboratório de Pesquisa em Educação Matemática: Professor Doutor Ademir Damazio, seguindo a linha de pesquisa estabelecida pelo Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: Uma Abordagem Histórico-Cultural – GPEMAHC. A referida investigação analisou o contexto – matemático e pedagógico – em que ocorre o desenvolvimento de conceitos geométricos nos primeiros anos do Ensino Fundamental, no modo de organização de ensino de Davýdov e seus colaboradores.

Inicialmente, a hipótese que norteou a pesquisa foi a de que a investigação sobre uma nova proposta dirigida ao ensino de matemática, da educação escolar primária, subsidiasse decisões para efetivação de ações para evitar os problemas com os quais os alunos angolanos se defrontam, quando ingressam no ensino superior. Tratou-se de uma investigação qualitativa, de base bibliográfica, que teve como referência quatro obras que expressam a objetivação e orientação do modo davydoviano de organização do ensino de matemática e, por extensão, de geometria.

Conclui-se, no final da pesquisa, que o modo de organização do ensino, elaborado e adotado por Davýdov, expresso no conjunto de tarefas particulares voltadas à geometria, possibilita que as crianças entrem em atividade de estudo, desde que o professor consiga atender a todas as orientações e criar novas, caso seja necessário. Outras minúcias conceituais de referência foram as unidades constituídas por ponto, reta e segmento, elementos conceituais científicos da geometria – trazidos à tona desde Euclides – que são apropriados pelas crianças, não como algo estático e independente, mas interligados e em movimento.

Isso porque cada tarefa se apresentou com novas significações em processo de apropriação que, simultaneamente, explicitavam os conceitos elaborados e acenavam para a necessidade de outros. Ademais, ficou evidente que partindo das unidades ponto, linhas (abertas, fechadas e curvas) e segmentos, desenvolvem-se outros conceitos geométricos, tais como: quadriláteros (paralelogramo, retângulos, quadrados e losango), triângulos, ângulo, círculo, circunferência paralelepípedo, pentágono, hexágono e heptágono. Em termos pedagógicos, conclui-se que a proposta atende aos princípios de uma educação integral, desenvolvimental, ao sugerir que o objetivo da educação escolar, hoje, não seja apenas entregar mais conhecimentos aos alunos, mas sim ajudá-los a encontrar seu próprio caminho para a formação científica e outros tipos.

A volta para o Brasil, no ano de 2017, concretamente para a Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” reacendeu meus anseios trazidos para cá já em 2012, o que possibilitou o alargamento dos estudos, não mais sobre o ensino de geometria, mas sim sobre o movimento universal, particular e singular existente entre as significações aritméticas, geométricas e algébricas: um estudo com enfoque no ensino fundamental. O foco do pesquisador continua ser o de criar possibilidades, de uma educação desenvolvedora, neste nível de escolaridade, como premissa de um ensino de qualidade, aquele que não permite lacunas aos estudantes quando chegam ao ensino universitário, que constitui a atividade principal do pesquisador. Importa lembrar que o despertamento dessas premissas surgem no âmbito da imersão em leituras e reflexões compartilhadas – propiciadas pelas ações curriculares do PPGE/UNESC e PPGE/UNESP –, tanto no passado como no presente contexto, as quais contribuíram para a formulação de questionamentos que o direcionaram ao estudo da organização do ensino nas séries iniciais do Ensino Fundamental.

Nossa imersão em estudos sobre a proposta do sistema Elkonin-Davídov-Repkin, e participação nas discussões dos grupos de pesquisa: GPEMAHC, GP-FORME, TEDMAT e Grupo de Pesquisa Implicações Pedagógicas da THC contribuíram para tal decisão, no caso para a escolha do objeto de investigação para a obtenção do grau de Doutor em Educação.

Para tanto, organizou-se a tese em 5 capítulos. O primeiro trata da contextualização e problematização do objeto e problema de pesquisa, bem como das indicações referentes à metodologia. O segundo centra-se nos fundamentos teóricos, filosóficos e metodológicos da proposição do sistema Elkonin-Davídov-Repkin. O terceiro capítulo trata do movimento do universal, particular e o singular: sua materialização no campo da matemática. O quarto se destina à análise de tarefas do sistema Elkonin-Davídov-Repkin e angolanas de Nascimento – António – M´Fuansuka que trazem na gênese o movimento universal, particular e singular entre as significações aritméticas, geométricas e algébricas. Por fim, o quinto capítulo faz a síntese da tese e relata as contribuições para a implementação de uma educação humana e desenvolvedora no contexto angolano.

1 CONTEXTO DE CONSTRUÇÃO DA TESE

O presente capítulo, intitulado *Contexto de construção da tese*, tem como objetivo discutir sobre o processo educativo em Angola; justificar a escolha do objeto de pesquisa; e, por fim, tratar dos encaminhamentos teóricos e procedimentais para o desenvolvimento da tese.

1.1 O processo educativo em Angola e a justificativa da escolha do objeto de pesquisa

Na presente secção, o foco será voltado para a apresentação do processo educativo em Angola, bem como de explicitar os motivos que levaram a escolha do objeto de pesquisa. Nesta secção, também, apresentar-se-ão os elementos metodológicos como: a definição do problema científico, objetivo geral, hipótese e tese.

Em relação ao processo educativo em Angola, importa dizer que este processo data do período pré-colonial. Na época, a principal via pela qual os nativos se apropriavam da cultura produzida pelos seus antepassados era a oralidade, método que permitiu que as pessoas preservassem os valores culturais como, por exemplo, as línguas nacionais (SILVA NETO, 2005). A educação oral das tribos, de acordo com a autora, estava implícita nos contos, nos provérbios, nas histórias, nos mitos e ritos, na música e na dança; em todas as manifestações culturais dos membros da tribo (SILVA NETO, 2005, p. 56).

Importa destacar que a modalidade educacional mencionada por Silva Neto realizava-se em locais onde não existiam escolas, nem um modelo de ensino formal propriamente dito como se conhece hoje. Isso porque cada grupo cultural e social possuía um modelo característico, fruto das vivências e valores dos ancestrais, que permitia a passagem destes conhecimentos de geração a geração, de tal forma que o indivíduo pudesse se inserir na sociedade.

O período de 1482 a 1974 é marcado pela invasão, colonização e dominação portuguesa em Angola. Neste período, foram implementados, em Angola, vários modelos e sistemas educacionais que contribuíram para o processo de secundarização da educação dos nativos e o desfasamento de toda sua história e cultura.

O primeiro sistema educacional colonizador foi proposto pela Igreja Católica, por intermédio da Companhia de Jesus (Padres Jesuítas), braço religioso da ação colonialista. O projeto jesuíta foi implementado de 1482 a 1791. Centrou-se, na sua fase inicial, na catequese, espaço de grande concentração de nativos, considerados ateus pelos portugueses, e que precisavam tornar-se cristãos no intuito de aumentar o número de servidores da fé católica, em Angola. Com esse propósito, deu-se aos nativos a educação colonial jesuíta. Segundo a autora, esse duplo objetivo (colonização e catolicismo) tinha como elemento comum a crença no ensino da escrita e leitura como condição para o conhecimento dos textos e do catolicismo (SILVA NETO, 2005). A autora comenta que:

> O eixo na educação catequética era de carácter pedagógico, uma vez que os jesuítas consideravam ser a primeira alternativa de conversão e convencimento que implicava práticas pedagógicas institucionais (escolas). Com o tempo, a educação jesuíta se diversificou: para os nativos, se tornou uma educação voltada para fé e para servidão; para os filhos dos colonizadores, uma educação que se expandia para além dos rudimentos da leitura e escrita da escola elementar. Nesse período, os jesuítas pretendiam apenas instruir os filhos da elite e promover a catequese para aos nativos; mas, percebendo a possibilidade de realizar educação, para fins lucrativos, pois eram os únicos educadores da época e contavam com apoio real, fundaram as escolas que incluíam os filhos dos colonos. (SILVA NETO, 2005, p. 102)

Vale salientar que este projeto de formação dos filhos dos colonos portugueses alastrou-se tão rapidamente, que provocou, na época, a criação de um plano de estudo que promovesse a uniformização de todas as escolas mantidas e dirigidas pelos jesuítas. O plano de estudo atendia a diversidade de interesse e de capacidades, bem como o ensino português e a doutrina cristã. A esse projeto de estudo foi dado o nome de *Ratio Studiorum* (SILVA NETO, 2005).

O *Ratio Studiorum* tinha suas bases assentes na filosofia de Tomás de Aquino e apresentava uma característica universalista e elitista, dando primazia aos filhos dos colonos, e secundarizando os filhos dos nativos. Quanto ao seu método de ensino, as aulas eram dadas de forma expositiva, sendo as recapitulações fundamentais. Em relação aos pressupostos pedagógicos, as suas linhas se caracterizavam por uma visão em que o homem é concebido como uma essência universal imutável. Nesse pressuposto, a educação cumpria a missão de moldar a existência particular e real de cada educando, inculcando-lhe a essência universal e ideal que o define enquanto ser humano. Em consequência, o homem deveria se empenhar em atingir a perfeição humana, na vida natural para fazer por merecer a dádiva da vida sobrenatural (SILVA NETO, 2005).

O modelo educacional universalista e elitista proposto pela Companhia de Jesus foi abolido em 1759, por via de um alvará assinado por Marquês de Pombal (Sebastião José de Carvalho e Melo). Segundo Silva Neto (2005), os motivos apontados foram o de ser um modelo conservador, precário, além de ser considerado um empecilho na conservação da unidade cristã e da sociedade civil. A justificativa era de que detinha um poder econômico que deveria ser devolvido ao governo e, também, porque educava o cristão a se colocar a serviço da ordem religiosa, e não dos interesses do País.

Com a abolição do modelo educacional jesuíta, entrou em vigor, entre os anos de 1759 a 1792, a educação pombalina. Esta proposta era contrária ao teor religioso na educação e tinha por base as ideias laicas, inspiradas no iluminismo, além de instituir o privilégio do estado português sobre a educação. O modelo pombalino se inseriu no quadro das reformas modernizantes, que visava colocar Portugal à altura do século XVIII caracterizado pelo Iluminismo. Segundo Samules (1970), Pombal instituiu a lei de educação pública, providenciada pelo Estado. A lei fez três previsões para a criação de escolas em cada centro local: "estabelece oficialmente a educação primária, a liberdade de educação privada com intuito de promover melhorias através da competição e a inspeção escolar" (SAMULES, 1970, p. 17).

As reformas, implementadas por Pombal, tinham por objetivo abrir o conteúdo do ensino para as ciências experimentais, como algo prático e utilitário. Também, trazia a preocupação em despertar um maior número de interessados no ensino superior e diminuir a influência da igreja na educação. O plano educacional pombalino começou a ser implementado, no ano de 1764, em que ocorreu a nomeação de D. Francisco Inocêncio de Souza Coutinho, para governador de Angola (SILVA NETO, 2005). A autora considera que foi obra desse governo a introdução, pela primeira vez, das aulas de geometria e fortificação, fundada na mira de formação de engenheiros, que provessem as obras de engenharia militar.
De acordo com Almeida (1978, p. 439), "a primeira referência histórica que se tem em relação ao ensino das ciências é de uma escola que tinha a finalidade de ministrar (sistematicamente) conhecimentos profissionais aos seus membros aconteceu no ano de 1764, a escola de ensino técnico". A partir deste pressuposto, a educação dos nativos ficou limitada ao treinamento para exercer ofícios básicos, como pedreiro, sapateiro, alfaiate e outros. Porém, como a realidade bem comprovou, o que aconteceu, na educação em Angola, após a expulsão dos jesuítas, continuou sendo idêntico à educação jesuíta, fator que demonstrou a ineficiência das reformas pombalinas (SILVA NETO, 2005).

O fracasso da reforma Pombalina precipitou o surgimento de uma nova visão educacional, que vigorou no período de 1792 a 1845, denominada educação Joanina. Esta surge num período de instabilidade política e estabelecimento da República em Portugal. Nesse período, iniciou-se também a abolição da escravatura. Segundo Silva Neto (2005, p. 112), "nenhuma política educacional se desenvolveu. A educação portuguesa apresentou um retrocesso semelhante ao do período anterior 1772”. Porém, apesar do retrocesso da educação em Portugal, mesmo assim, na base da reforma Joanina, foi implementada a primeira escola oficial de ensino primário, em Benguela (cidade do litoral, localizada na região central da colônia), assinalando um marco importante na difusão da educação em Angola (ALMEIDA, 1978)

Vale destacar que, no mesmo período, foram igualmente implementadas as aulas de matemática e, também, a promoção do ensino secundário e superior, em detrimento de planos para a instrução primária. Tal conduta “servia a uma burguesia possessiva e interessada em ascender na hierarquia social, por intermédio da instrução e da cultura” (SILVA NETO, 2005, p. 113). De igual modo, neste período, sobretudo, na primeira metade dos anos oitocentos, destacaram-se os decretos de setembro de 1835, do então Ministro do reino, Rodrigo da Fonseca, regulamentando a instrução primária e criando o Conselho Superior da Instrução Pública. No decreto geral, faz-se já a referência à gratuidade deste grau de ensino em todas as escolas públicas, o que não aconteceu mais tarde na legislação setembrista do governador Passos Manuel. O decreto estipulava a criação de uma ampla rede de escolas que abrangia todo o país, a cargo dos municípios e com auxílio financeiro do Estado (SILVA NETO, 2005)

Em relação ao impacto dos decretos de Rodrigo da Fonseca e Passos Manuel na educação em Angola, Gonçalves (1995) citado por Silva Neto (2005) pontua o seguinte:

> O que é importante observar nesse decreto de Rodrigo da Fonseca é o diagnóstico ao ensino nacional onde já apontava seu excesso carácter especulativo, com desprezo quase total pela componente prática, com efeitos na formação de quadros para indústria, referindo-se em parte à inexistência de operários qualificados. Tanto nesta reforma como na de Passos Manuel, não há referência expressa e declarada à obrigatoriedade do ensino primário. Nas vésperas da proclamação de República, o estado deste nível de ensino não era de todo animador, não obstante algumas iniciativas legislativas que vão ser aproveitadas pela própria ação do governo Republicano, concretamente no que concerne ao Ultramar. As intenções do governo parecem não ter encontrado campo de aplicação prática debatendo-se com obstáculos de cariz econômico e de mentalidade. No entanto, inverte-se a tendência dos governos liberais, já que se passou a dar mais relevância ao ensino primário enquanto meio imprescindível para formar cidadãos da República, Ou seja, este grau de ensino passa, então a ser encarado enquanto habilitador indispensável ao exercício responsável da cidadania. Não era somente o ensino, sem o qual não podemos ser administrados os outros. Era um fim em si e não um mero preparatório para outros cursos. (GONÇALVES, 1995, p. 89)

Foi na base do exposto anteriormente que as autoridades da época instituíram uma nova reforma na educação, concretamente no período de 1845 a 1926. A referida reforma passou a ser denominada de Falcão e de Rebelo da Silva, que por via de um decreto de 14 de agosto de 1845, organizou o ensino primário nas escolas em todas as colônias estabelecendo um conselho inspetor em cada uma delas. De acordo com Samules (1970, p. 21) "o decreto publicado pelo ministro Falcão condenava, pela primeira vez, o tipo de educação das províncias". E, nessa altura, passou-se a reconhecer dois níveis de ensino primário. Um nível inicial semelhante ao de Portugal e um nível primário superior, que também era o último nível de educação em Angola. Este sistema era semelhante em todas as colônias portuguesas. Essa educação tinha por objetivo específico "formar rapazes para assumirem posições de liderança na área comercial e de prestação de serviços" (SAMULES, 1970, p. 21).

De acordo com Silva Neto (2005), os decretos de 1845 do então ministro do ultramar Joaquim José Falcão e, posteriormente a 1869, do governador Rebelo da Silva foram fundamentais para regulamentação do ensino primário nas colônias, quer pela primazia, quer pela flexibilidade de que estavam imbuídos. Nesta época, Rebelo da Silva, aproveitando dos princípios do decreto de 1845, completam-no através do decreto de 30 de Novembro de 1869, dividindo-o em primário, secundário e superior, alargando o número de escolas e impondo novos métodos pedagógicos (DIAS, 1934, p. 11).

Em Angola, os decretos provocaram o ajustamento da instrução primária, permitindo sua divisão em primeiro e segundo graus, cada um com duas séries. Outro fato importante, promovido pelos decretos de Falcão e Rebelo da Silva, está relacionado com a participação das igrejas protestantes na educação, iniciadas em 1878 (SILVA NETO, 2005). Vale salientar que tal participação iniciou-se com o ensino bíblico, uma vez que as escolas funcionavam aos domingos, por isso, passaram a chamar-se de escolas dominicais. O ensino bíblico praticado pelos protestantes, segundo Silva Neto (2005), tinha por objetivo facilitar a educação religiosa.

Porém, com o evoluir do sistema educacional dentro das missões, outros níveis foram implementados como, por exemplo, a educação infantil, primária, secundária, normal, bíblica, técnico rudimentar e profissional. Nesse contexto, a "educação infantil, embora praticada em pequena escala, foi bem acolhida pelos nativos" (SILVA NETO, 2005, p. 118).
Vale mencionar que a ação protestante na educação não serviu somente para a expansão do cristianismo. Teve, também, uma participação no resgate da cidadania, na restauração dos hábitos e costumes dos nativos, resgate da suas línguas, sem perder de vista a língua portuguesa, pois esta foi uma condição importante na relação estabelecida entre os protestantes e o Estado Português, para a expansão das atividades missionárias. Foi a partir da ação protestante na educação, que foram introduzidos no sistema educativo temas como

liberdade, democracia, tendo em vista que a base ideológica protestante era a liberdade de consciência, usada como instrumento de proselitismo. Ideologicamente, a escola protestante foi vista como propagadora das ideias liberais, oriundas dos países europeus de onde os missionários vinham. Ela foi corresponsável pela educação da elite, em Angola (SILVA NETO, 2005). Essa contribuição da educação dos protestantes – realizadas em suas missões maioritárias localizadas na altura em zonas rurais, associada a uma ala progressista da igreja católica – permitiu a emancipação dos povos nativos, da qual deu-se os primeiros sinais da luta de libertação Nacional, conforme afirma Serrano (1988, p. 32):

> A ação educativa tanto dos protestantes quanto de uma ala progressista católica possível, sobretudo na igreja católica pós-concilhar, conduzem à possibilidade de surgirem determinados nacionalistas educados nas missões protestantes ou em seminários católicos que aderiram desde o início à luta de libertação Nacional. Parece-nos que uma certa lealdade religiosa no que se refere às três principais correntes protestantes em Angola contribuíram para uma divisão tripartida entre três movimentos nacionais durante a luta de libertação Nacional.

Do exposto, fica clara a preocupação das missões protestantes e católicas (não jesuítas), no processo de educação. Apesar disso, o ensino tanto em Angola quanto na metrópole não conheceu muitos avanços e continuou sem abranger a maioria dos nativos. Essas e outras questões de relevo político, econômico e social e, sobretudo de denominação, obrigou o Estado Português a mudar de perspectivas no setor educacional – com a abolição do modelo Falcão e Rebelo da Silva – para a implantação do modelo educacional salazarista, no período de 1926 a 1961 (SILVA NETO, 2005).

A implementação da educação salazarista deu-se por via do Decreto 518 de Abril de 1927, que reorganizou o ensino primário na colônia de Angola. A reorganização do ensino primário em moldes modernos, de acordo Dias (1934), foi assentada sobre "o princípio de coeducação, que unificado as escolas, facilitou a sua disseminação. Pela primeira vez foram estabelecidas por lei as escolas infantis, cuja instalação se tenta realizar gradualmente por intermédio das classes preparatórias [...]" (DIAS, 1934, p. 13).

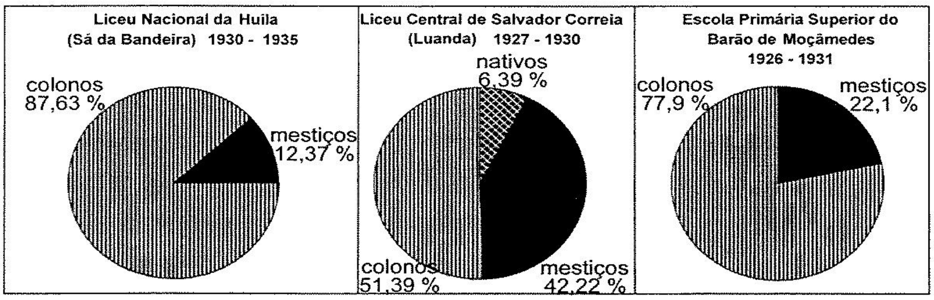
Foi igualmente a partir da reforma salazarista que se reorganizou o ensino secundário, tendo o mesmo sido ministrado em dois estabelecimentos oficiais: no liceu (colégio) Salvador Correia e no liceu Diogo Cão, localizados em Luanda e em Sá da Bandeira (atual Benguela), respetivamente. Em tal contexto, segundo Dias (1934, p. 13):

> Fundaram-se escolas primárias superiores em Sá da Bandeira (Benguela) e Moçandides (Namibe), a primeira das quais foi transformada em 1929 em liceu nacional da Huíla, pelo Comissário Filomeno da Cámara. Ao mesmo se deve a criação do liceu central

Salvador Correia de Luanda, estabelecimento de mais elevada categoria da colônia.

Vale lembrar que, apesar do elevado esforço das elites colonizadoras na implementação de várias reformas, o acesso à educação para os nativos ainda era quase que impossível, mentia-se o descaso do colonizador para com os angolanos, conforme podemos constatar no quadro, a seguir.

Quadro 1: Frequência Escolar a Etnia



Fonte: DIAS, 1934, p. 246.

Como se pode observar no quadro 1, é notável a ausência de nativos e a predominância branca sobre os mestiços. Nota-se que os nativos, no caso 6, 39% dos estudantes da época, tiveram acesso à educação diferenciada oferecida nos liceus, implementados na época salazarista. Tal fato só aconteceu em Luanda, no Liceu Central de Salvador Correia, no período entre 1927 a 1930, sobretudo, porque Luanda era considerada uma zona de maior concentração populacional e local de decisão política e econômica. Logo, fazia-se necessário manter a cota para os nativos como forma demonstrativa de integração social. Vale salientar que parte dos nativos, que frequentaram o Liceu Central de Salvador Correia, eram oriundos das missões protestantes, tipo de modalidade de ensino mencionado anteriormente.

O descaso pelos nativos foi igualmente demonstrado no investimento que se fazia na educação. “As despesas com a educação para brancos eram incomparavelmente maiores que em escolas para nativos negros” (SILVA NETO, 2005, p. 125). Importa realçar que a educação para os nativos estava reservada ao técnico profissional (escolas oficinas), abrangia as escolas comerciais, escolas industriais e as escolas agrícolas. O referido ensino possuía uma qualidade bastante rudimentar e era praticado, em caráter oficial, pelas missões católicas (SILVA NETO, 2005).

Segundo Dias (1934, p. 25), “ o objetivo das escolas oficinas é prover o aperfeiçoamento e moralização dos hábitos e caráter das populações indígenas, disseminando o ensino de profissões manuais, de educação moral e da língua portuguesa, como necessárias e graduais etapas do seu progresso para civilização mais perfeita". O professor deveria possuir especiais qualidades de ponderação, de bondade, espírito de justiça e simpatia comunicativa, virtudes que, imediatamente, geraria na alma simples do negro um sentimento de respeito e subordinação, sem o qual as escolas dificilmente poderão progredir.

O afrouxamento do descaso, na educação dos nativos negros, aconteceu graças à intervenção dos protestantes que, em confrontação com sistema católico e salazarista, implementaram o sistema mais elevado dentro das suas missões. Além do ensino geral, "os protestantes se preocupavam com o ensino técnico-profissional" (SILVA NETO, 2005, p. 126).

Essa condição de superação da educação oferecida pelos protestantes, em confrontação com aquela inadequada proposta pelos colonos, colocava Portugal muito mal-avaliado diante das suas elites, entre eles especialistas em educação e economistas.

Bernder (1980, p. 321) afirma que "a inadequação da educação em Angola era reconhecida pelos próprios planificadores educacionais e economistas portugueses". Foi na base das críticas internas entre as elites sobre a inadequação do ensino, aliados ao grande índice de analfabetismo (99% da população nativa), que obrigou a mudança de postura dos colonizadores a ponto de elaborarem uma nova proposta educacional, que vigorou entre o ano de 1961 a 1974. Essa proposta foi implementada em um momento em que estava em curso o processo de desintegração do sistema colonial português na África, particularmente em Angola. Em tal contexto havia a necessidade de se oferecer um modelo educacional mais voltado para os nativos.

O resultado do processo de desintegração foi o surgimento de vários movimentos nacionalistas para independência política de Angola, pois crescia a tomada de consciência nacional dos nativos de que a educação era, na sua essência, desestruturada do ponto de vista social e científico (SILVA NETO, 2005). Neste período, de acordo com Silva Neto (2005), existia na rede pública um número reduzido de estudantes matriculados em escolas secundárias e em instituições educacionais superiores, situação que comprometia a elevação do nível educativo dos nativos de Angola. A capacidade do sistema educativo era limitada para preparar um número significativo de nativos, além de ter baixa qualidade (SILVA NETO, 2005, p. 128).

Salienta-se que para além de um ensino de baixa qualidade, o modelo educacional promovido no período de 1961 a 1974 não se desfez na totalidade dos problemas conjunturais, promovidos pelos sistemas educacionais anteriores. Estes estavam relacionados com a colocação dos nativos numa condição de submissão aos colonos. O modelo trouxe consigo a divisão intelectual, a promoção de preconceitos quanto aos valores étnicos e culturais. Também, promoveu a rivalidades entre reinos e tribos para além de dividir os nativos entre assimilados e não assimilados, legitimando a superioridade racial pregada em contextos anteriores. Para tal legitimação, a partir dos primeiros anos de escolarização, as crianças deparavam-se com um modelo educacional sem referências de sua identidade cultural em detrimento das referências e valores portugueses. Nas brincadeiras escolares, as canções recreativas ensinadas pelos professores apresentavam um caráter subordinativo à cultura portuguesa, ao ponto de associar a negritude a um ser gentil, besta, macaco de cauda comprida, caso não fosse batizado, e mesmo depois era representado como macaco com cauda cortada (SILVA NETO, 2005).

Além da baixa qualidade da educação oferecida aos nativos, conforme mencionado anteriormente, os ensinos primário, secundário e a preparação técnica profissional era precária. Os nativos de Angola, além de sofrerem com a discriminação racial, enfrentavam também restrição no acesso ao ensino. Os portugueses não se preocuparam em discernir as distinções entre raça e cultura. "O branco encontrava-se indissociavelmente ligado à cultura portuguesa, ao passo que os negros eram residualmente encarados como parte de uma cultura ignóbil e indiferenciada" (SILVA NETO, 2005, p. 129-130).

A autora ainda pontua que se de um lado a educação dos nativos era débil, por outro o próprio desenvolvimento do estado colonial português, alicerçado nas colônias, implicava a necessidade de um número cada vez maior de nativos instruídos para ajudar na administração da colônia de Angola e para agir como intermediários entre brancos e os demais nativos. Assim, diz Silva Neto (2005, p. 130) que "aparece uma pequena minoria, a quem os portugueses ofereceram não uma vida nova, mas uma vida paralela e artificial". Aos nativos, cuja vida paralela e artificial foi oferecida pelos portugueses, recebem o nome de assimilados, "uma categoria cujo único objetivo era ensinar aos angolanos a melhor maneira de serem úteis aos portugueses" (SILVA NETO, 2005, p. 130).

De acordo com a autora, a política de assimilados foi oficializada a partir do pronunciamento do governador Marcelo Caetano (1953/1954) e começou a ser implementado a partir do recenseamento português de 1960. Dessa forma, tal perspectiva tinha como objetivo provocar a discórdia e complexos entre os nativos de Angola que, segundo o colonizador português, eram primitivos e com necessidades rudimentares. Essa classificação social entre assimilados e não assimilados (indígenas), visava justificar a necessidade de um povoamento europeu branco para dirigir e orientar, salvaguardando os interesses portugueses no território. Logo, a assimilação era uma retórica da premissa da colonização, ou seja, moldar o outro de tal maneira que possa melhor dominá-lo, anulando-o ideologicamente (SILVA NETO, 2005).

Esse pensamento do colonizador foi abolido graças à proclamação da independência de Angola, que ocorreu em 11 de novembro de 1975, "motivada pelas reformas ocorridas em 1961 e anos seguintes que estimularam os angolanos a lutar pela sua liberdade" (SILVA NETO, 2005, p. 133).

Após a independência, programou-se um sistema educacional voltado para os angolanos. O referido sistema tinha como bandeira a equidade de oportunidade entre os nativos, o respeito pelos hábitos e costumes, o respeito pelas línguas regionais, como também a abolição das classes sociais (assimilados e indígenas). Porém, tendo a língua portuguesa como língua de unidade nacional, dada a herança de mais de 400 anos de dominação e colonização. Foi nesta base que, em 1976, programou-se a primeira reforma pós-independência, "cuja organização partiu da necessidade de mudança do sistema de educação que Angola herdou do colonialismo português – classificado de ineficiente, limitado e, em termos mais cultural, mais voltado ao domínio cultural de Portugal" (NGULUVE, 2006, p. 78).

O plano de reforma trazia, nos primeiros anos da sua implementação, a preocupação de estimular toda a sociedade (operários, famílias, militares, camponeses, etc.) a participarem do processo de luta pelo analfabetismo, grosseiramente herdado da política excludente dos iluminados da metrópole, conforme já mencionado anteriormente ao analisar a educação oferecida de 1942 a 1974. A constatação de mobilização do novo Estado (criado no âmbito da proclamação da independência, em 1975) para com a educação é verificada em Nguluve (2006) ao afirmar que:

> O plano nacional de educação nos primeiros, que se seguiram à independência, procurou estimular as famílias a participarem nas atividades escolar dos filhos, na luta pela redução do analfabetismo, através da organização de salas de aulas, não apenas espaços escolares, mas também em fábricas, nos quartéis militares, em cooperativas agrícolas e nos bairros para alfabetização de adultos. (NGULUVE, 2006, p. 84)

O plano nacional de educação, apontado por Nguvule (2006), surgiu no âmbito da necessidade de baixar os altos índices de analfabetismo, que afetavam em grande escala a população angolana, cujas estatísticas rondavam em cerca de 90% dos nativos. Esses altos índices de analfabetismo são resultados explícitos da política educacional precária, segregacionista, elitista, promovida pelo Estado português e aliados, principalmente, pela igreja católica, que durante os anos de colonização, serviu de braço do descaminho de toda herança cultural dos nativos. Vale destacar que, apesar de existir na época uma vontade dos líderes do novo Estado, em desfazer-se de toda herança portuguesa, sobretudo o analfabetismo e o descaso das línguas regionais (Kikongo, Kimbundo, Cokwé, Umbundo Oxikwanyama, Fiote, Nganguela, Nhaneka, Ngoia, etc), a implementação da reforma tinha um viés político e ideológico de perpetuação de poder, pelas novas elites angolanas, muitas delas oriundas da categoria de assimilados, ao tempo dos colonos.

O plano da reforma tinha, na sua essência, o aumento de oportunidades educativas, gratuidade do ensino de base (primeira à quarta classe), obrigatoriedade de frequentar o primeiro nível e o aperfeiçoamento pedagógico do seu corpo docente estruturado em: Ensino pré-escolar – com três etapas (Creche, Jardim de Infância e Iniciação); Ensino Básico –, três níveis (o primeiro, da 1ª à 4ª classe; o segundo, da 5ª à 6ª classe e o terceiro, da 7ª à 8 classe); Ensino Médio (dividido em técnico e normal); Ensino Superior (bacharelato até terceiro ano e licenciatura até ao quarto ou quinto ano, dependendo do curso); Ensino e Alfabetização de adultos. A referida estruturação do sistema educacional angolano estava amparada no âmbito do Decreto 40/80 de 14 de maio. Em termos filosóficos, tinha suas bases no socialismo, mais concretamente na corrente marxista-leninista.

Importa destacar que "a educação pré-escolar para as crianças, apesar de constar no organograma, não foi vista como uma preocupação vital do Estado, mas sim da sociedade e mais concretamente das famílias" (NGULUVE, 2006, p. 92). De acordo com o autor, o que mais se proliferou até início dos anos mil novecentos e noventa foi a iniciação, mas devido à falta de vagas ou escolas perto, muitas crianças acabaram fazendo a iniciação aos seis ou sete anos. Por outro lado, a situação de conflitos que se propagou pelo país inviabilizava quaisquer iniciativas de organização de programas públicos de atendimento às crianças em idade de pré-escola.

Primeiro, porque as atenções estavam voltadas ao investimento no material militar[1], isto é, à potencialização das forças de defesa; segundo, porque o deslocamento

[1] A necessidade do investimento do Estado na compra de material militar decorreu do conflito armado engendrado pelos partidos políticos (UNITA, FNLA, MPLA). Isto no âmbito dos desentendimentos entre estas forças após a proclamação da independência, concretamente 1976. A ideia inicial antes da independência foi a de partilha do poder, em função dos acordos de Alvor assinados em Janeiro de 1975 que resultaram na criação do governo de transição formado após a saída dos colonialistas. A ambição pelo poder trouxe para os angolanos uma das piores guerras que a humanidade conheceu ao longo do século XX e XXI. Tais conflitos foram promovidos pela divisão tribal e regional em nível interno e em nível externo, dando continuidade à Guerra Fria entre os blocos socialistas e capitalistas.

constante das famílias, em função desta guerra, impedia-as de reunir condições necessárias para as crianças frequentarem a pré-escola. Essa situação fez com que, nos anos subsequentes à guerra, existissem muitas crianças sem condições para ingressar nas classes preparatórias (primeiro nível). Em relação ao ensino básico, dada a caraterísticas das crianças afetadas com este nível de escolaridade, ele aconteceu sem muitos problemas. Tinha por objetivo, atingir a formação integral do cidadão, através de uma série de conhecimentos gerais, preparando o jovem para continuação de sua formação a nível médio e superior ou permitindo a aquisição de habilidades e saberes necessários à convivência social e à sua inserção na vida ativa da sociedade (NGULUVE, 2006).

Importa salientar que a classe de iniciação, no decorrer do ajustamento da reforma em função dos conflitos, passou a ser integrada de forma prática ao ensino básico, embora em formas estruturais, continuasse no ensino pré-escolar. Esse nível de escolaridade visava adaptar as crianças ao ambiente escolar, preparando-as para maior interação com seus semelhantes e um melhor desempenho na primeira classe. Nesta classe, diferentemente das outras, a avaliação não tinha pendor de reprovação. Nela, os docentes tinham apenas a missão de fazer um acompanhamento da criança "para que ela consiga reunir requisitos a que esta classe se propõe – uma fase de preparação para a primeira classe" (NGULUVE, 2006, p. 96).

Em relação ao ensino médio e técnico, Nguvule (2006) afirma que este nível estava organizado ou subdividido em pré-universitário, com três anos de duração (9ª a 11ª classe), ensino médio normal (9ª à 12ª classe) e ensino médio técnico (9ª a 12ª classe), ambos com quatro anos de duração. O ensino pré-universitário visava preparar os jovens para a universidade. O ensino médio técnico tinha como finalidade propiciar uma formação técnica qualificada para aqueles que pretendiam se incorporar ao mercado de trabalho, dependendo da área de formação. O ensino médio normal visava à formação daqueles que desejavam trabalhar como professores do ensino de base (1ª à 6ª classe). O ensino superior tinha a missão de formar quadros de nível superior com conhecimentos comprovados, a fim de contribuir, da melhor forma à sociedade, nas diferentes áreas de conhecimentos. A alfabetização e ensino de adultos visavam à aquisição de competência de leitura, escrita, interpretação e cálculo, bem como para a satisfação das necessidades pessoais e sociais (NGULUVE, 2006).

Esse modelo educacional, apesar de seguir um plano curricular diferente da estrutura portuguesa, também apresentou seus vícios, entre os quais a perpetuação das elites, das ideologias coloniais repaginadas, mas com forte pendor tribal. Também apresentou muitas dificuldades, entre as quais, a falta de meios materiais suficientes para a produção de novos manuais de ensino e material didático suficiente para o país. Além disso, não teve um programa eficiente de formação dos professores, que pudesse colocar em prática as medidas traçadas com o objetivo de serem implementadas em Angola (NGULUVE, 2006).

Esta dificuldade decorre do fato de que a maior parte dos professores da época – herdados do sistema colonial e que assumiu o sistema educacional do novo estado – possuía uma fraca formação que não se ajustava ao novo pensamento educacional. A maioria deles tinha habilitações literárias até a 4ª classe. O 4º ano, naquele contexto, era que os habilitava como monitores. Conforme afirma Nguluve (2006, p. 57), citando Perteson (2003):

> Durante os últimos anos da colonização portuguesa (1960-1974), a formação de um monitor (conteúdo das disciplinas que constituíam sua grade curricular) com idade mínima de 18 anos, se limitava à 4ª classe. Constava do seu currículo as seguintes disciplinas: práticas pedagógicas; português; portugalidade; aritmética e geometria; primeiros socorros; formação rural; ciências geográficas–naturais; legislação; canto e formação feminina. Os cursos de monitores de 1º ano preparavam professores para o pré-primário; os do 2º ano, para 1ª classe; os do 3º ano, para 2ª classe e os do 4º ano para a 3ª classe; num ambiente quase de simulação de aulas.

Vale destacar que nesta altura existiam alguns docentes com formação que iam do 5º ao 7º ano. Porém, muito insignificantes diante do maior grupo do qual foi mencionado acima. A maior parte destes cidadãos nacionais também era cotada não só para o sistema educacional, mas também para o sistema governativo do próprio país. A melhoria deste quadro docente se deu com abertura das escolas de formação de professores em nível médio, cujos primeiros finalistas datam de 1990/1-2. Isso coincide com o período em que Angola começou a registar um crescimento de alunos com frequência do ensino médio. Nessas alturas já se fazia sentir a intervenção cubana, russa e búlgara no sistema educativo angolano. Apesar de que esta intervenção era mais explorativa do que contributiva para o país. Além destes fatores relacionados à capacitação dos professores, outra dificuldade dizia respeito à centralização do sistema educativo em Luanda. Por decorrência, deixavam-se as demais áreas territoriais à mercê.

Acresce-se ainda a não existência de recursos financeiros capazes de dar prosseguimento à produção de materiais. Essas questões, acrescidas aos conflitos armados, contribuíram significativamente para o atraso do plano da reforma. Isso obrigou o governo a repensar a implementação de outro sistema que pudesse contribuir para o desenvolvimento do país. As primeiras reflexões, nesse sentido, iniciaram depois da realização de um diagnóstico realizado no ensino básico, em 1986.

O diagnóstico apontou vários aspectos negativos do ensino escolar, concernente ao fraco aproveitamento dos alunos nos diferentes níveis de ensino e localidades do país, e do pouco preparo dos docentes que atuavam nas escolas (NGULUVE, 2006). Segundo o autor, o diagnóstico indicou as fraquezas do ensino básico como um dos fatores de estrangulamento do sistema educacional. Dentre elas, ressaltava-se que o sistema de educação sofreu sobremaneira os efeitos da guerra e enfermava de profundas distorções nos seus principais dispositivos, tais como: currículos, processo de ensino e aprendizagem, corpo docente, corpo discente, administração e gestão, recursos materiais.

Ainda, segundo Nguluve (2006), o mesmo relatório do diagnóstico apontava que as distorções derivavam dos erros de concepção e implementação das mudanças (reformas), que pretendiam conduzir à extinção do Sistema de Ensino Colonial. Igualmente, o referido relatório apontava que os objetivos do sistema educacional, implementado em 1978, pretendia alcançar em menos tempo, eram demasiados ambiciosos. Isso porque, dada as condições em que o país se encontrava, em termos de desenvolvimento econômico, político, social e cultural, sobretudo dos recursos que os Estado destinava ao setor administrativo e de gestão (NGULUVE, 2006).

Os aspectos apontados – acima, associados à entrada do sistema político multipartidarismo no país (decorrente do término dos conflitos armados, em 1992, e consequente realizações das 1ª eleições gerais no país) – promoveram a realização de uma mesa redonda, em 1993. Dela, saíram contribuições relevantes para a implementação e consequente aprovação do projeto ***Lei 13/01 de 31 de Dezembro***, denominada ***Reforma Educativa*** ou simplesmente ***- Lei de Bases do Sistema de Educação*** - LBSE, que regula as novas normas do sistema educativo em Angola. A mesma foi implementada na vigência ministerial de António Burity da Silva Neto – que exerceu o cargo de Ministro da Educação por duas vezes, entre os anos os de 1992 a 1993 e 1996 a 2010 – do então Vice-Ministro da Educação para Reforma Educativa (entre anos de 1997 a 2010) e Ministro da Educação (entre os anos de 2010 a 2017) Pinta Simão.

A reforma educativa de Burity da Silva e Pinta Simão foi elaborada numa visão pautada nos princípios de: unidade nacional, democracia e liberdade política e cultural. Ela visa atender, fundamentalmente à escolarização das crianças, reduzir o analfabetismo de jovens e adultos e aumentar a eficácia educacional. Com isso, dar resposta às mudanças profundas do sistema econômico angolano que estava pautado numa economia fechada, socialista, e precisava relançar-se para a economia do mercado – capitalista. Também visa atender à política de educação para todos, proposta pela UNESCO, como um dos objetivos do milênio e contribuir para a melhoria do Índice de Desenvolvimento Humano (IDH).

A reforma Burity da Silva e Pinta Simão (Lei de Bases do Sistema de Educação) está estruturada em três níveis fundamentais: 1) Educação Pré-Escolar; 2) Ensino Geral, Subdividido em Primário e Secundário; e 3) Ensino Superior.

A educação pré-escolar abarca a Creche e o Jardim de Infância. Conta com a classe de iniciação de um ano de duração e visa, de acordo com o Art. 12, ao seguinte:

a) Promover o desenvolvimento intelectual, físico, moral, estético e afetivo da criança, garantindo-lhe um estado sadio, de forma a facilitar a sua entrada no subsistema de ensino geral;
b) Permitir uma melhor integração e participação de crianças através da observação e compreensão do meio natural, social e cultural que a rodeia;
c) Desenvolver as capacidades de expressão, de comunicação, de imaginação criadora e estimular a atividade lúdica da criança (Ministério da Educação, LBSE, 2001).

A formação geral, que corresponde ao ensino primário e secundário constitui segundo o Art. 14 da LBSE, o "fundamento do sistema de educação para conferir uma educação integral, harmoniosa e uma base sólida e necessária à continuação de estudos em sistemas subsequentes" (Ministério da Educação, LBSE, 2001). De acordo com Art. 15 da mesma lei, constituem objetivos fundamentais e gerais deste subsistema de ensino geral o seguinte:

> 1) Conceder a formação integral e homogênea que permite o desenvolvimento harmonioso das capacidades intelectuais, físicas, morais e cívicas;
> 2) Desenvolver os conhecimentos e as capacidades que favorecem a autoformação para um saber-fazer eficazes que se adaptem às novas exigências;
> 3) Educar a juventude e outras camadas sociais de forma a adquirirem hábitos e atitudes necessários ao desenvolvimento da consciência nacional;
> 4) Promover na jovem geração e noutras camadas sociais o amor ao trabalho e potenciá-la para uma atividade laboral socialmente útil e capazes de melhorar as suas condições de vida.
>
> Os objetivos educacionais trazem, em sua essência, a ideia de uma educação comprometida com desenvolvimento, conforme espelham os objetivos 1 e 2 do Art. 15 da LBSE. No entanto, sua aplicação prática é bastante débil e apresenta

> muitas lacunas como, por exemplo, a pobreza dos conteúdos e seus métodos de ensino, voltados à memorização, em maior parte das disciplinas. Além disso, permite que, nas classes iniciais do ensino primário (1ª à 4ª classe), a aprovação seja feita de forma automática, isto quer dizer que as crianças não reprovam.

Acresce-se, ainda, o cumprimento do sistema de monodocência, que obriga ao professor a lecionar todas as disciplinas. Essa premissa contrasta com tipo de formação possuída pelos professores, sobretudo, no que incide ao ensino da leitura, escrita, do cálculo e das bases das ciências e tecnologias, objetivos específicos do ensino primário, conforme constam da *Lei nº 32/20 de 12 agosto*, no seu artigo Art. 29. Vale referir que a Lei 32/20 surge no âmbito da alteração da *Lei nº 17/16 de 7 de Outubro*, Lei de Bases do Sistema de Educação e Ensino, que substituiu a *Lei 13/01 de 31 de Dezembro.* Com essas alterações, retira-se o Sistema do Ensino Superior da alçada do Ministério da Educação, passando para o Ministério do Ensino Superior, Ciência, Tecnologia e Inovação, e mantendo toda redação anterior da *Lei 13/01 de 31 de Dezembro.*

A reforma educativa, no âmbito das leis referenciadas, coloca o sistema de educação angolano numa maré de muitos desafios, sendo que um deles está relacionado com o próprio ensino da Matemática, em todos os níveis do seu sistema de ensino. Esse processo que envolve a transmissão e apropriação dos conceitos matemáticos, em situação escolar, tem trazido angústias e preocupações que apontam para a necessidade de pesquisa – basicamente inexistente no âmbito acadêmico e governamental do país – para o entendimento, em nível científico, das razões desses problemas. Além da inexistência de pesquisa, um dos motivos que compromete o sistema educacional – sobretudo na área de conhecimento em que se insere a presente pesquisa, no caso ensino da matemática em Angola – está relacionado com a fraca preparação dos professores que atuam nas classes iniciais. Como consequência, as crianças dessas classes pouco sabem de matemática apesar de ser um dos objetivos fundamentais da reforma.

Devemos salientar que isso decorre do fato de que, nos cursos de formação de professores que atuam nos respectivos anos do ensino fundamental, em Pedagogia, em que seus currículos de licenciatura não se aborda de forma específica os conteúdos matemáticos. A eleição, na formação do pedagogo, é por disciplinas relacionadas às ciências humanas, sociais e do comportamento. A exclusividade é dedicada, cerca de 120 horas letivas à Língua Estrangeira (inglês e francês), com igual número de horas letivas da Língua Portuguesa, lecionadas em dois semestres. Os conteúdos matemáticos são desenvolvidos nas disciplinas de Lógica Matemática, Práticas das Metodologias Educativas, Estatística Aplicada à Educação e Metodologia do Ensino da Matemática; esta última encontrada em apenas alguns currículos.

Outra constatação feita para fundamentar o exposto, anteriormente, foi no currículo de licenciatura em Matemática para professores, oferecido pelos Institutos Superiores de Ciências e Educação (ISCED). Nele, durante os 4 anos de licenciatura, o candidato a professor tem contacto com conteúdos matemáticos voltados para o ensino superior, por exemplo: Cálculo Diferencial e Integral (em três semestres), Álgebra, as Geometrias (analítica, descritiva, etc), Estatísticas (em dois semestres), Análise Funcional, etc. Essas disciplinas, de certa forma, dão alguma condição diferente ao candidato a professor de perceber os meandros da matemática. Porém, somente o habilita para atuar no ensino médio e nunca no ensino fundamental. Sobre este último, constata-se que um professor, ao ser colocado a atuar nos anos iniciais do ensino fundamental, ele sempre apresenta dificuldades em lidar com a formação de conceitos próprios para aquele contexto de ensino. Aliás, não tem como ser melhor, porque, inclusive seu estágio docente, é realizado nas escolas do ensino secundário e nunca nas escolas do ensino fundamental.

É por decorrência dessa formação docente, que surge uma das principais razões que proporciona o empobrecimento das crianças em termos de apropriação de conhecimentos científicos, em particular da Matemática. Isso traz consequência no prosseguimento dos seus estudos, tanto na continuidade do ensino fundamental, quanto do ensino médio. Aqueles que chegam aos cursos universitários apresentam grandes dificuldades nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra, Geometria, entre outras (TIAGO, 2014).

Associado a esse fenômeno, está o material didático utilizado nas escolas, cujos conteúdos apresentam-se dicotomizados com supervalorização dos conceitos aritméticos e algébricos e secundarização dos geométricos (MAME, 2014). Por sinal, esse abandono da geometria não ocorre somente em Angola, pois já fora anunciado por Pavanello (1993) que também era um feito do sistema de ensino brasileiro e mundial. Isso ocorreu, segundo a autora, como consequência do movimento da matemática moderna que vigorou com ênfase, sobretudo, na década de 1960 e 1970. Na ocasião, esse movimento provocou mudanças significativas nas práticas escolares, por atribuir maior importância à axiomatização, às estruturas algébricas, à lógica e aos conjuntos (PAVANELLO, 1993; LORENZATO, 1995).

Tal mudança, anunciada pelos autores supracitados, procurou agrupar as significações aritméticas (Cálculo), algébricas e geométricas em uma só disciplina que hoje é denominada por Matemática. Ela vigora como uma das disciplinas principais associada à Ciências Naturais e Língua Portuguesa nos anos iniciais do ensino fundamental, nas escolas angolanas. Isso também ocorre em escolas equiparadas a este nível de alguns países como, por exemplo, no Brasil.

As insipiências pertinentes ao ensino da Matemática e seus reflexos na aprendizagem dos estudantes, em especial dos angolanos, remete-nos a uma reflexão sobre as necessidades emergentes para a superação de tais dificuldades no contexto educacional. No entanto, não nos referimos a qualquer superação. Para tanto, inspiramo-nos nos fundamentos da abordagem histórico-cultural, mais especificamente no modo de organização de ensino desenvolvimental do sistema Elkonin-Davídov-Repkin, ao dizer que, qualquer mudança educativa, só faz sentido se tocar profundamente no método e no conteúdo de ensino. Isso diz respeito à organização do ensino fundamentada, sob as bases do materialismo histórico e dialético, cujo conteúdo a ser apropriado permita o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes (DAVÝDOV, 1982).

O referido sistema leva em conta que o pensamento teórico reflete o objeto no aspecto das relações internas e leis do seu movimento, que são cognoscíveis por meio da elaboração racional dos dados do conhecimento empírico. Quanto à sua forma lógica, o pensamento teórico é constituído pelo sistema de abstrações que explica o objeto (KOPNIN, 1978 apud MAME, 2014, p. 45).

A forma lógica do empírico é constituída pelo juízo tomado isoladamente, que constata o fato, ou por certo sistema deles, que descreve um fenômeno. A aplicação prática do conhecimento empírico é restrita e, no sentido científico, trata-se de um ponto de partida qualquer para a construção da teoria (KOPNIN, 1978).

Este tipo de pensamento, de acordo com Davídov (1988) citado por Mame (2014, p. 44), surge da influência da lógica formal e se efetiva com a ajuda das abstrações e generalizações em nível empírico. Desse modo, uma das particularidades do pensamento empírico é a universalidade abstrata baseada no princípio da repetitividade. Sendo assim, constitui-se como forma transformada e expressada verbalmente da atividade dos órgãos dos sentidos, ligados à vida real. Deriva, pois, diretamente das características visuais do objeto, extraídas pelas pessoas (DAVÍDOV, 1988).

Davídov (1988) entende que o pensamento empírico tem um caráter direto. No entanto, concorda com Naúmenko, que diz:

> O empírico não é só o conhecimento direto da realidade, mas sim também o que é mais importante, o conhecimento do imediato na realidade, justamente do aspecto que se expressa por categoria de existência, existência presente, de quantidade, qualidade, propriedade e medida. (DAVÍDOV, 1988, p. 123).

No que se refere aos seus níveis, o empírico vincula-se à imediatez da experiência sensorial, conteúdo primeiro do pensamento. A sua racionalidade está na forma de conhecimento e nos conceitos implícitos na linguagem, em que são expressos os resultados do conhecimento pertinente a ele. Por sua vez, o teórico se atrela ao conhecimento com característica realmente universal e procura explicitar o conteúdo da verdade buscada em toda a concreticidade e objetividade (KOPNIN, 1978).

Quanto ao conteúdo, as duas formas de pensamento se diferenciam, uma vez que o pensamento empírico se apresenta verbalmente como resultado das observações sensoriais. Destas, extrai-se uma classe de dependências que se repetem nos objetos, distintas umas das outras. As diferenças e a classificação se apresentam como funções de representações gerais dos conceitos. Por sua vez, no pensamento teórico, o conceito reúne as coisas dissemelhantes, multifacetadas, não coincidentes e assinala seu peso específico. Como consequência, " o conteúdo específico do conceito teórico traz a relação objetiva do universal e do singular, caracterizadora do diferente" (DAVÍDOV, 1988, apud MAME, 2014, p. 50).

Para uma melhor contribuição ao entendimento deste fenômeno, na presente investigação científica, elegemos como objeto de estudo o movimento universal/singular/particular existente entre as significações aritméticas, algébricas e geométricas. Para tanto, temos como base de análise as proposições angolanas e o sistema Elkonin-Davídov-Repkin para o ensino de Matemática. Durante a análise, faremos um estudo comparativo sobre as duas proposições, de forma a se constatar e superar as lacunas existentes no sistema do qual se insere a problemática anteriormente mencionada, isto é, o sistema de ensino angolano, especialmente no ensino fundamental em que a disciplina de Matemática é uma das principais, do currículo escolar.

A indicação do sistema de ensino Elkonin-Davídov-Repkin, como categoria de análise em comparação com as proposições angolanas, ocorre por conta de que é considerada por alguns pesquisadores, a mais atual e proporciona aos estudantes a assimilação de conceitos teóricos. Portanto, não prioriza a assimilação de conceitos empíricos como enfatizam os sistemas educacionais em vigor que, como consequência, são as causadoras das fragilidades mencionadas anteriormente que os estudantes apresentam ao iniciar o ensino superior. De acordo com Libâneo (2013, p. 323):

> Davýdov não apenas aprimorou a teoria pedagógica dentro da teoria histórico-cultural como levou a consequências práticas a relação entre educação e desenvolvimento formulado por Vygotsky. Seus biógrafos reconhecem seu papel determinante na criação de um sistema singular de educação para o desenvolvimento, conhecido como sistema Elkonin-Davídov-Repkin, posto em prática em escolas russas com sua supervisão direta, até sua morte.

Outro pressuposto do sistema Elkonin-Davídov-Repkin que despertou nossa atenção é a adoção, pelos autores, da visão vigotskiana ao afirmar que o verdadeiro ensino é aquele que se adianta para o futuro (VYGOTSKY, 2013). Tal visão levou os autores do sistema de ensino desenvolvimental e colaboradores a proporem a estruturação de um modo de organizar os métodos e conteúdos no sentido de proporcionar aos alunos o desenvolvimento do pensamento teórico, por via dos conceitos científicos, em vez do pensamento empírico. Isto quer dizer, de acordo com Rosa (2012), que ao entrar na escola, a criança deve sentir-se em um ambiente novo que a ela é proporcionado, caracterizado pelo teor científico dos conceitos em processo de apropriação. Ou seja, leva o estudante à percepção da diferença do lugar que ocupa em relação à experiência pré-escolar.

Ao tratar da mudança de conteúdos, Davídov (1988) estabelece como uma das tarefas essenciais da escola que os conceitos matemáticos sejam apropriados pelos alunos desde os primeiros anos de escolaridade, com ideia de número real que tem como fundamento o conceito de grandeza. E, quanto ao método, propõe e organiza o ensino por meio de tarefas, que requerem determinadas ações, cada qual desenvolvida por um conjunto de tarefas particulares, cuja execução demanda algumas operações, isto é, procedimentos de execução.

Vale salientar que esse modo de organização do ensino demanda que as tarefas particulares possibilitem a explicitação das múltiplas relações entre grandezas. Os estudantes identificam e representam as referidas relações por meio de modelos nas formas objetal, gráfica e literal. Tais representações têm algo em comum: trazem a ideia de medida – relação de comparação entre grandezas de mesma espécie – caracterizadora do conceito de número real e base geométrica dos conceitos teóricos matemáticos, para os quais necessariamente se volta o ensino escolar.

De acordo com Rosa (2012), a proposta de Davýdov e seus colaboradores supera o divórcio existente entre aritmética, álgebra e geometria no ensino escolar de matemática. A autora afirma que Davýdov, em concordância com Vygotsky, entende que o domínio da álgebra eleva ao nível superior o pensamento matemático, o que possibilita uma visão mais livre, abstrata e generalizada. A álgebra liberta o pensamento da criança das dependências numéricas empíricas e o eleva a um nível generalizado teórico.

No entanto, o ensino que segue o movimento da aritmética para a álgebra corresponde às "etapas fundamentais da história empírica" da matemática. Segue, pois, o seguinte movimento: "no princípio, os números eram o objeto fundamental (aritmética), depois as transformações idênticas e as equações (álgebra), mais tarde veio o cálculo diferencial (análise matemática), seguido das operações de conjuntos e as estruturas matemáticas" (DAVÝDOV, 1982, p. 109-110, apud ROSA e DAMAZIO, 2012, p. 83). A adoção dessa ordem no sistema de ensino, conforme o autor, gera a convivência com o risco de pôr em supremacia o desenvolvimento, por parte dos estudantes, apenas do pensamento empírico.

O exposto até o momento mostra que o processo de mais de quatrocentos anos de uma educação de inculcação colonial, acrescida de reformas pós-independência direcionaram a educação dos angolanos por bases do desenvolvimento empírico. Por consequência, colocaram-nos em compromisso com uma pesquisa que, no mínimo, apontasse para uma nova possibilidade de organização de ensino de matemática. Neste caso, a referência é o sistema Elkonin-Davídov-Repkin que estabelece como conteúdo da escola o conhecimento científico teórico.

Essas precauções, acrescidas da nossa identificação com a base teórica histórico-cultural, subsidiaram-nos na definição do seguinte problema de pesquisa: **Em que contexto epistemológico e pedagógico – das proposições angolanas e do sistema Elkonin-Davídov-Repkin – ocorre o movimento universal/singular/particular do pensamento conceitual, que interliga as significações aritméticas, geométricas e algébricas?**

Outro argumento, que justifica a definição do problema de estudo, é a indicação de Davýdov (1982) de que sua proposta de ensino evita a tricotomia entre as três áreas que caracterizam o conhecimento matemático. Também, na preocupação de vários estudos, entre eles (ROSA, 2012; MAME, 2014; MATOS, 2017) que aferem a dissociação entre as significações dos referidos campos matemáticos (aritmética, álgebra e geometria). Aleksandrov (1976) afirma que a inter-relação entre essas áreas não só se aplica entre elas, como é fonte de método, ideias e teorias gerais. Ela é a raiz que proporcionou o crescimento de toda a matemática, por influência mútua, desde suas origens. O simples ato de medir uma linha traduz a fusão da concepção geométrica com a aritmética.

Tomamos como exemplo, a medição da longitude de um objeto que requer uma unidade de medida e significa determinar quantas vezes é possível repetir esta operação. Nesse ato humano, o primeiro passo (aplicação) tem um caráter geométrico, por sua vez, o cálculo expressa seu caráter aritmético. Essa inter-relação entre geometria e aritmética é de grande importância para a formação dos diversos conceitos de número: reais, negativos e complexos (ALEKSANDROV, 1978). Sua representação em modelo generalizador a/b = n é expressão do caráter algébrico (DAVÝDOV, 1982), tendo-se ***a, b e n*** como números reais, sendo ***b = 0***.

Para tanto, estabelecemos como **objetivo geral:** Analisar o contexto peculiar à organização do ensino de matemática – angolana e do sistema Elkonin-Davídov-Repkin em que ocorre o movimento universal-particular-singular entre as significações aritméticas, algébricas e geométricas. Partimos da **hipótese** de que a investigação sobre uma proposta dirigida ao ensino de matemática, da educação escolar primária, subsidie as decisões e a efetivação de ações para evitar os problemas com os quais os alunos se defrontam, atualmente, no processo de educação e ensino em Angola.

E como **tese**, defendemos que, na proposição do sistema Elkonin-Davídov-Repkin, todas as tarefas anunciam a articulação entre as significações aritméticas, algébrica e geométricas, trazendo de forma articulada o movimento universal, particular e singular. Em contrapartida, a mesma articulação não é verificada nas proposições angolanas, uma vez que suas tarefas, além de não explicitarem a articulação entre as significações aritméticas, geométricas e algébricas, também não apresentam o movimento universal, particular e singular. Além disso, promove o ensino baseado na observação para constituição da ideia conceitual, isto é, voltado apenas à promoção de aprendizagem de conteúdos empíricos.

1.2 Encaminhamentos teóricos e procedimentais para o desenvolvimento da tese

Em termos de encaminhamentos teóricos e procedimentais, partimos do pressuposto de que o estudo voltado à análise do movimento conceitual interliga aritmética, geometria e álgebra no contexto da organização do ensino e do sistema Elkonin-Davídov-Repkin. Por isso, requer a busca por algo que explicite sua objetivação, a fim de extrairmos os elementos necessários para a análise do objeto de estudo. Dadas as condições que se apresentam, tomaremos como base de análise os livros didáticos e de orientação aos professores adotados em escolas da Rússia que aderem à proposta do sistema Elkonin-Davídov-Repkin e o livro de de matemática da 1ª classe da proposição angolana:

1. O livro didático dos alunos do primeiro ano: Математика: Учебник для 2 класса начальной школы – Livro didático e de exercícios para os estudantes da primeira série.
2. O livro de orientação ao professor: Обучение математике. 1 класс: Пособие для учителей начальной школы - Livro do professor para o primeiro ano do ensino fundamental.
3. O livro de matemática da 1ª classe da proposição proposto no âmbito da LBSE por - Isabel Ferreira do Nascimento - Alberto Antonio - José Kiala M´Fuansuka.

As fontes russas estão disponíveis no Grupo de Pesquisa do qual participo, no Brasil. Ainda, recorremos a autores que explicitam os fundamentos da matemática (CARAÇA, 1946; ALEKSANDROV, *et al.*, 1976; POGORÉLOV, 1974). Também, debruçamo-nos nos estudos de base filosófica, dentre eles: Kopnin (1978), Rosental e Straks (1958); acrescem-se aqueles referentes à educação matemática e à pedagogia. Além disso, foi imprescindível o estudo das obras de Davýdov e dos demais autores da Psicologia Histórico-Cultural e Teoria da Atividade (Vygotski, Leontiev, entre tantos).

Das produções brasileiras, nessa perspectiva teórica, incluiremos em nossos estudos as produções, necessariamente, do líder do Grupo Pesquisa em Atividade Pedagógica (GPAPe/USP), Manoel Oriosvado de Moura, do líder do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: Uma Abordagem Histórico-Cultural (GPEMAHC), da Unesc, Ademir Damazio e membros, bem como da líder do Grupo Teoria do Ensino Desenvolvimental na Educação Matemática da Unisul, Josélia Euzébio da Rosa e demais membros. Além disso, recorremos às proposições desenvolvidas pelo GP FORME, da Unesp. Importa salientar que, no processo da análise, traremos em forma de comparação com a proposta em estudo nesta tese, as proposições angolanas para o ensino da matemática no ensino fundamental de autoria de Isabel Ferreira do Nascimento, Alberto Antonio e José Kiala M´Fuansuka, cuja obra foi publicada pela Editora Moderna, no ano de 2018. O respectivo manual de matemática da 1ª classe é parte de um grupo de livros de matemática selecionado pelo Ministério da Educação, para o subsistema de ensino geral.

Desse modo, a pesquisa se apresenta com característica qualitativa, por estabelecer um diálogo entre a base teórica e os livros didáticos que expressam a objetivação (ДАВЫДОВА, В.В; *et al.*, 2012) e orientação (ГОРБОВС. *et al.*, 2009)[2] do modo de

[2] Esses livros foram traduzidos da língua russa para o português e serão disponibilizados ao público.

organização do ensino de matemática do sistema Elkonin-Davidov-Repkin e do sistema angolano (Nascimento, António e M´Fuansuka). Na análise, o focalizou-se a interligação entre a aritmética, a geometria e a álgebra, bem como sua caracterização quanto às categorias universal, singular e particular.

Ao se voltar ao sistema Elkonin-Davídov-Repkin, o estudo se afilia aos pressupostos do ensino desenvolvimental preconizada pela Psicologia Pedagógica de base teórica Histórico-Cultural. Por consequência, não perde de vista a sua matriz, o materialismo histórico e dialético. Esta tem como precursor Karl Marx (1818-1883), que coloca a dialética com “os pés no chão”, em alusão à concepção hegeliana. O materialismo dialético “reconhece como essência do mundo a matéria que, de acordo com as leis do movimento, se transforma que a matéria é anterior à consciência e que a realidade objetiva e suas leis são cognoscíveis” (TRIVIÑOS, 1987, p. 22-23).

O materialismo histórico e dialético compreende o homem como ser eminentemente social, sem negar sua base biológica, mas cada vez menos dependente dela. De acordo com a teoria marxiana, o indivíduo se constitui ser histórico e social no processo de apropriação das objetivações produzidas pela humanidade ao longo dos tempos. Esse desenvolvimento histórico-social caracteriza a formação de sua personalidade que, consequentemente, proporciona suas idiossincrasias na compreensão do que seja o homem, o mundo e a sociedade (DUARTE, 1993). Dentre as categorias do Materialismo Histórico, nossa referência é quanto às relações entre o histórico e o lógico, o abstrato e o concreto e, necessariamente, o movimento universal/singular/particular.

O método, segundo Kopnin (1978), é um meio de obtenção de determinados resultados no conhecimento e na prática. Todo o método compreende o conhecimento das leis objetivas. As categorias histórico e lógico são de grande importância para a compreensão da essência do conhecimento, a fim de captar o processo do conhecimento da realidade e abordar, em profundidade, alguns problemas lógicos (ROSENTAL; STRAKS, 1958, p. 324).

Por histórico, de acordo com Kopnin (1978), subtendem-se o processo de mudança do objeto, as etapas de seu surgimento e desenvolvimento. Atua como objeto do pensamento, o reflexo do histórico, como conteúdo. O lógico é o meio pelo qual o pensamento realiza essa tarefa, mas é o reflexo do histórico em forma teórica, ou seja, a reprodução da essência do objeto e da história do seu desenvolvimento no sistema de abstrações. O histórico é primário em relação ao lógico; este, porém, reflete os principais períodos da história (KOPNIN, 1978, p. 183-184).

Quanto às categorias abstratas e concretas, Straks e Rosental (1958, p. 298) consideram sê-las importantes, enquanto teoria e lógica do conhecimento. O abstrato e o concreto surgem da necessidade de compreender profundamente o processo de conhecimento, pois permitem que captemos a dialética do reflexo da realidade na consciência humana.

Essas categorias estão intimamente vinculadas com outras peculiares à dialética e em particular com as de essência e fenômeno, análise e síntese, bem como o sensível e racional. “O concreto no conhecimento reflete o fato objetivo de que os fenômenos e objetos da realidade existem numa unidade, como um todo composto de diferentes aspectos, qualidades e relações” (ROSENTAL; STRAKS, 1958, p. 298). O abstrato, segundo os autores, pode dar-se no conhecimento, porque os diferentes aspectos, propriedades e relações dos objetos e fenômenos possuem uma relativa autonomia. Eles se distinguem entre si e se acham em uma distinta relação com a essência. Pelo abstrato do conhecimento, podem-se separar uns aspectos ou propriedades do objeto para a abstração de outros.

Nosso pressuposto é de que as categorias da dialética materialista, para o desenvolvimento desta pesquisa, proporcionam o entendimento da lógica da organização do ensino que promova o desenvolvimento do pensamento teórico do aluno, bem como para o desenvolvimento da sua personalidade e, por extensão, do homem. Além disso, permitem a promoção de valores como o coletivismo, a solidariedade e a criatividade. Enfim, promovem o desenvolvimento humano em nível do que mais atual foi produzido pela humanidade. Assim, no próximo capítulo, abordaremos mais detalhadamente os fundamentos teóricos e metodológicos do sistema Elkonin-Davídov-Repkin.

2 OS FUNDAMENTOS TEÓRICOS, FILOSÓFICOS E METODOLÓGICOS DO SISTEMA ELKONIN – DAVIDOV- REPKIN.

No presente capítulo, tratar-se-á dos fundamentos teóricos, filosóficos e metodológicos do sistema Elkonin-Davídov-Repkin. Importa salientar que o objeto da pesquisa é analisar, no sistema Elkonin-Davídov-Repkin em articulação com o que propõe um livro didático angolano, as manifestações do movimento universal, particular e singular existentes entre as significações aritméticas, geométricas e algébricas, no ensino fundamental.

Nesse sentido, convém salientar que Vasily Vasilyevich Davýdov – um dos líderes e estudioso da teoria da Atividade de Estudo e da organização do ensino desenvolvimental – nasceu no ano de 1930, em Moscou, e morreu em 1998, aos 68 anos de idade. Cursou Filosofia e Psicologia no Departamento de Psicologia da Faculdade de Filosofia da Universidade Estadual de Moscou, onde começou a sua carreira como pesquisador no campo da psicologia pedagógica. Entre os importantes resultados de suas pesquisas, destaca-se a formulação da teoria do ensino desenvolvimental como desdobramento e aplicação pedagógica da teoria histórico-cultural (LIBÂNEO e FREITAS, 2013).

No entanto, ao se inserir no contexto da Psicologia Histórico-Cultural, adota como matriz teórica o Materialismo Histórico e Dialético. Nesse âmbito, admite que as reformas educacionais só faziam sentido se elas levassem em conta o papel desenvolvimental do ensino e da educação no processo de formação da personalidade da criança. Também que estejam orientadas para a busca dos meios psicopedagógicos que ajudarão a exercer uma influência substancial, tanto no desenvolvimento mental geral das crianças quanto no desenvolvimento de suas capacidades especiais. Fosse, pois, um sistema de ensino escolar que, se **organizado corretamente** “com novos métodos e conteúdos” criasse na criança a necessidade de entrar em **atividade de estudo**, fundamento universal para apropriação de conhecimentos teóricos produzidos historicamente pela humanidade.

No capítulo em causa, serão focadas, inicialmente, as premissas básicas referentes à categoria atividade de estudo e sua contribuição para o desenvolvimento do pensamento intelectual da criança, em situação escolar. Posteriormente, abordaremos as bases da organização da proposta de ensino do sistema Elkonin-Davidov- Repkin.

2.1 Categoria atividade de estudo: sua contribuição para o desenvolvimento do pensamento intelectual da criança em situação escolar

Pesquisas no campo da educação (Elkonin, 1987; Davýdov, 1982; Davídov, 1988, 1999; Davídov & Márkova, 1987; Latíshina, 1984; Damazio, 2006; Leontiev, 2010; Rosa, 2012) têm se voltado para a discussão dos problemas que afligem essa área do conhecimento, bem como em definir linhas educativas que promovam o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes nos diferentes níveis de escolaridade, em particular da criança. Compreendemos que, ao se apropriar de conhecimento científico e sistematizado, o ser humano viabiliza condições imprescindíveis para a vida em sociedade. É por meio da educação, concebida em sua principal dimensão de transmissão cultural entre as diferentes gerações, que o indivíduo se faz humano, ou seja, apropria-se da experiência humana.

É a escola a instância principal para difusão cultural e para o advento do processo de apropriação, forma exclusivamente humana de aprendizagem, capaz de provocar mudanças qualitativas na constituição psíquica do sujeito. Isso tem por consequência novas formações tais como: a percepção, a atenção voluntária, a concentração, a representação, a imaginação, a memória lógica, o raciocínio lógico, a linguagem, o pensamento teórico e a resolução de problemas. Trata-se de funções intelectuais superiores, componentes fundamentais nos processos de ensino e de aprendizagem.

A teoria histórico-cultural tem sua origem nos trabalhos de L. S. Vigotski e seu grupo de estudos e pesquisas, entre os quais incluo dois outros teóricos de destaque: A. N. Leontiev e A. R. Luria. Do ponto de vista de Lompscher & Hedegaard (1999, p. 11, tradução nossa)[3],

> Um dos tópicos centrais na teoria histórico-cultural é a relação entre desenvolvimento psíquico e aprendizagem, as causas, condições, leis e regularidades de desenvolvimento das funções psíquicas superiores (humanas), e o papel e os potenciais da aprendizagem e da escolaridade nesses processos. Nesse contexto, a aprendizagem é considerada como uma atividade especial.

Essa atividade especial é denominada atividade de estudo, que caracteriza o desenvolvimento das crianças que ingressam na escola e se dedicam ao processo de aprendizagem dos conceitos das diversas áreas do conhecimento. Ela é antecedida por outras atividades principais (brincadeira, manipulatórias do objeto e da comunicação emocional),

[3] One of the central topics in cultural-historical theory is the relationship between psychic development and learning, the causes, conditions, laws and regularities of development of higher (human) psychic functions, and the role and potentials of learning and schooling in these processes. In this context, learning is considered as a special activity.

não espontaneamente, mas pelo fato de a criança ter alterada a situação social de seu desenvolvimento com seu ingresso na escola. Afinal, as relações sociais de que participa se modificam, colocando-lhe novas atribuições próprias de sua condição de escolar (LOMPSHER & HEDEGAARD, 1999).

Como um escolar, a criança passa a resolver questões próprias de sua atividade principal, a atividade de estudo, explicitada por Lompsher e Hedegaard como:

> [...] um tipo especial de atividade dirigida para a aquisição do conhecimento social e habilidades pela sua reprodução individual por meio de ações especiais de estudo sobre objetos de estudo (métodos de conteúdo e conhecimento). Confrontados com certa área de conteúdo, os aprendizes podem adquirir habilidade e conhecimento dentro de uma área de conteúdo apenas atuando ativamente com o material de acordo com sua substância e estrutura (conteúdo e métodos). [...] Apesar de a aprendizagem ocorrer nos indivíduos e mudar suas qualidades psíquicas e cognitivas, motivacionais e outras, os aprendizes estão sempre atuando em inter-relações culturais que estão imbricadas em estruturas e condições sociais – as imediatas e as mediatas. A coordenação, comunicação e cooperação entre aprendizes, e com outras pessoas, é uma das características mais essenciais da atividade de estudo. A formação e a qualidade desse aspecto determinam, em grande medida, os resultados concretos de aprendizagem. (1999, p. 12, tradução nossa)[4]

Como resultante do processo de apropriação dos conhecimentos científicos e de desenvolvimento de novas habilidades e capacidades, o escolar desenvolve o pensamento teórico que o capacita à superação da percepção imediata dos fenômenos de modo a enxergar o mundo em suas diferentes dimensões e relações.

Em outros termos, a atividade de estudo devidamente desenvolvida no escolar, situa-se nos limites do que denominamos ensino desenvolvimental: um processo que põe em relação à atividade de estudo do educando em conjunto com pessoas mais experientes do que ele, notadamente o professor, e o seu processo de desenvolvimento.

Nesse contexto é que se apresentam as perguntas: como ocorre o desenvolvimento psíquico da criança? Qual é o papel da atividade de estudo nesse processo? Qual a relação entre atividade de estudo e pensamento teórico? Objetivamos encontrar as respostas a essas questões nos trabalhos dos autores da teoria histórico-cultural, conforme exposto ao longo deste estudo.

---

[4] [...] a special kind of activity directed towards the acquisition of societal knowledge and skills through their individual re-production by means of special learning actions upon learning objects (subject matter methods and knowledge). Confronted with a certain subject matter area, learners can acquire skill and knowledge within a subject area only by actively acting with the material according to its substance and structure (content and methods). […] Though learning occurs in individuals and changes their cognitive, motivational, and other psychic qualities, learners are always acting in social interrelations that are embedded in social structures and conditions – immediate as well as mediated ones. The coordination, communication and cooperation between learners, and with other people, is one of the most essential features of learning activity. The formation and quality of that aspect determines the concrete learning results to a great extent.

2.2 Atividade humana consciente e desenvolvimento psíquico

Um dos problemas fundamentais da psicologia é o estudo da origem e do processo de formação da atividade consciente do homem. Para a psicologia histórico-cultural, a atividade consciente do homem resulta de sua participação em processos interativos e comunicacionais com outros sujeitos no mundo da cultura, no interior dos quais se torna efetivo o seu desenvolvimento psíquico superior, de modo que “Vigotski encontrou no conceito de atividade produtiva – o trabalho – o plano real que dá origem à consciência humana [...]” (SHUARE, 2017, p. 76). Com efeito, todos os tipos de atividade material e espiritual do homem são derivados do trabalho e carregam em si um traço principal: a transformação criativa da realidade e, concomitantemente, do próprio homem (DAVYDOV, 1999a).

Historicamente, o trabalho é um processo com um fim determinado que se desenvolve sobre a natureza. Por meio dele, os homens transformam a natureza segundo sua necessidade e, nesse processo, ao transformá-la, modifica também a si mesmo. O trabalho é, como afirma Leontiev (1978), o fator primeiro e principal pelo qual se formou o homem e sua consciência.

Desse ponto de vista, o trabalho é um processo que se desenvolve com a natureza, em que o homem, por sua própria ação, estabelece mediações, regula e controla seu metabolismo por meio dela. Ele se confronta com a matéria natural com base em uma dada potência. Nesse contexto interativo, há a apropriação da matéria natural de uma forma útil para a sua própria vida. Para tanto, o homem põe em movimento as forças naturais pertencentes à sua corporeidade (braços, pernas, cabeça e mãos). Nesse movimento, é que a ação humana modifica a natureza externa e, simultaneamente, transforma a si próprio (MARX, 2013).

De acordo com Mame (2014), o posicionamento de Marx (2013), Leontiev (1978), Davídov (1988) e Davydov (1999a) sobre o aparecimento da consciência é também abordado por Cheptulin (2004, p. 88), que diz o seguinte:

> O aparecimento da consciência é condicionado pelo desenvolvimento do sistema nervoso, do cérebro. Entretanto, esse desenvolvimento nunca é insuficiente para que apareça a consciência. O aparecimento da consciência está ligado a fatores exteriores à fisiologia da atividade nervosa superior. Como propriedade da matéria altamente organizada, a consciência é, ao mesmo tempo, o produto humano, o resultado do desenvolvimento social. Um sistema nervoso altamente desenvolvido cria apenas a possibilidade real do aparecimento da consciência; mas, a transformação dessa possibilidade em realidade está ligada ao trabalho. Visto que foi precisamente sob ação do trabalho que a forma psíquica do reflexo, própria aos ancestrais animais do

> homem, transformou-se progressivamente em consciência, em reflexo consciente da realidade.

Nesse modo de pensar, o corolário que se pode estabelecer é que a evolução histórica da conduta humana se faz pela unidade entre dois planos distintos. Um deles é o da realidade externa ao homem, que contempla a esfera da cultura e das relações sociais entre sujeitos históricos. O segundo é o das propriedades internas de seu psiquismo, das "peculiaridades constitutivas" (VIGOTSKI, 2010) de cada sujeito da atividade. Trata-se dos princípios preconizados pela teoria histórico-cultural, que defende a natureza sócio-histórica do homem, consolidando a tese do caráter social e racional da natureza humana.

Nessa perspectiva, compreendemos que o desenvolvimento da psique humana se constitui mediante o processo de interiorização das funções psíquicas superiores (FPS). Estas são essencialmente humanas como, por exemplo, a atenção voluntária e o raciocínio lógico, que ocorre pela transformação do interpsíquico – da atividade coletiva – em intrapsíquico, no limite das atividades individuais. Tal interiorização é compreendida não como "simples passagem da função do exterior ao interior, mas que implica a transformação da estrutura da função, a constituição da própria função psíquica superior" (SHUARE, 2017, p. 66).

Torna-se imperioso considerar, portanto, que a imagem mental, ou seja, o conteúdo da consciência, é produzida dialeticamente pela atividade humana, transformando o objetivo em subjetivo. Ou seja, o desenvolvimento da consciência, forma superior de manifestação da psique é, de fato, uma atividade real que relaciona o sujeito com a realidade. Como afirma Davídov (1988, p. 12, tradução nossa)[5],

> A reprodução, pelo homem, da imagem ideal de sua atividade e da representação ideal nela das posições das outras pessoas pode ser chamada consciência. Não se pode examinar a consciência separadamente do ideal e da atividade; encontram-se em uma unidade indissolúvel, tendo esta última importância predominante.

De igual modo, com base na teoria marxiana sobre a relação homem-trabalho, Leontiev (1978a) concebe a consciência como produto das relações sociais empreendidas pelos homens, que "[...] se realizam só por meio de seu cérebro, de seus órgãos dos sentidos e de seus órgãos de ação. Nos processos engendrados por essas relações é onde se concebem os

---

[5] La reproducción, por el hombre, de la imagen ideal de su actividad y de la representación ideal en ella de las posiciones de las otras personas puede ser llamada conciencia. No se puede examinar la conciencia separadamente de lo ideal y de la actividad; se encuentran en una unidad indisoluble, teniendo esta última importancia predomínate.

objetos como imagens subjetivas dos mesmos na mente humana, como consciência" (p. 28, tradução nossa)[6].

Com base nessas referências, Davídov (1988) defende o princípio do caráter objetal de toda atividade humana que "[...] constitui o núcleo da teoria psicológica da atividade" (p. 28, tradução nossa)[7]. Nesse contexto, o objeto da atividade humana não é compreendido como tendo existência em si mesmo, como algo que atua sobre o sujeito, mas, em vez disso, "[...] como 'aquilo a que está dirigido o ato..., quer dizer, como algo com que o ser vivo se relaciona, como *o objeto da sua atividade,* seja esta externa ou interna" (LEONTIEV, *apud* DAVÍDOV, 1988, p. 28, grifo no original, tradução nossa)[8]. Portanto, seja ela uma atividade objetal primária, externa, ou uma atividade secundária, interna, formada no processo de interiorização da atividade objetal externa.

Dentro do marco teórico da Teoria da Atividade de Leontiev, podemos afirmar que, tanto a atividade externa como a interna, possuem a mesma estrutura: ela responde a uma necessidade do sujeito que, para satisfazê-la busca um objeto; uma vez encontrado o objeto, este se transforma no motivo de realização de ações dirigidas por objetivos e realizadas por meio de operações condizentes com as condições disponíveis, visando ao fim último da atividade.

Para Leontiev (1978a), a primeira condição de toda a atividade é uma necessidade. As necessidades do homem, subjetivamente, manifestam-se como desejos e tendências que, simultaneamente, assinalam o aparecimento ou o anúncio de que uma delas foi satisfeita. Dito em outros termos, elas regulam a atividade do homem, o que motiva a aparição e o crescimento ou o desaparecimento das mesmas.

Entretanto, a existência de uma necessidade e sua manifestação na forma de desejo ou tendência não é a garantia para a realização de uma atividade. Isso porque é indispensável um objeto correspondente que a estimule a atuar numa direção concreta, um fim. Portanto, a necessidade em si não determina a orientação concreta de uma atividade, pois é somente no objeto que ela encontra a sua determinação. Por esse fato, o objeto se caracteriza como um elemento da atividade de crucial importância para seu entendimento, pois "[...] o que distingue uma atividade da outra, é a diferença de seus objetos, já que é o objeto da

[6] [...] se realizan solo por medio de su cerebro, de sus órganos de los sentidos y de sus órganos de acción. En los procesos engendrados por estas relaciones es donde se conciben los objetos como imágenes subjetivas de los mismos en la mente humana, como conciencia.
[7] [...] constituye el núcleo de la teoría psicológica da actividad.
[8] [...] como "aquello a lo que está dirigido el acto…, es decir, como algo con lo que el ser vivo se relaciona, como *el objeto de su actividad*, sea ésta externa o interna".

atividade o que lhe confere determinada orientação" (LEONTIEV, 1978a, p. 82, tradução nossa)[9].

Nessa confluência entre necessidade e objeto é que se apresenta o motivo da atividade, aquilo que estimula o sujeito a agir. Leontiev (1978a) define o motivo da atividade como aquilo que reflete no cérebro do homem e tanto instiga-lhe como dirige-o para atuar em busca da satisfação de uma necessidade.

Existe uma variedade de motivos que acicata o sujeito a agir e que se diferenciam uns dos outros: 1) pelos tipos de necessidades que lhe correspondem e são divididos em naturais e superiores (histórico-culturais), entre os quais há os materiais e os espirituais; 2) pela forma que se manifesta o seu conteúdo, isto é, imagem, conceito, pensamento, ideia, etc. Além disso, eles apresentam distinta relação com a possibilidade de realização da atividade que os origina. Para que um motivo gere realmente uma atividade e resulte efetivo, é necessária a existência das condições que permitam, ao sujeito, a apresentação do fim correspondente e a atuação para alcançá-lo (LEONTIEV, 1978).

Como podemos observar, "[...] *o conceito de atividade está necessariamente unido ao conceito de motivo*" (LEONTIEV, 1978a, p. 82, grifo no original, tradução nossa)[10], que cumpre a função de impulso para a realização de ações no interior da atividade. Em outros termos, a própria existência da atividade depende da existência de um motivo, pois ele está na base de qualquer forma de agir humano. Como diz Leontiev (1978a, p. 82, tradução nossa)[11],"[...] não há atividade sem motivo;" há sempre algo – um motivo – que impulsiona o sujeito a agir.

A ação que executa uma atividade refere-se "[...] ao processo subordinado à representação que se tem do resultado que deve lograr-se, isto é, ao processo subordinado a um fim consciente" (LEONTIEV, 1978a, p. 82, tradução nossa)[12], que cumpre a função de orientação da ação, ou seja, de seu direcionamento a uma determinada finalidade.

Há, pois, na relação estabelecida entre os motivos e a realização das ações, uma especificidade de funções. Se por um lado o motivo fornece o impulso necessário ao agir humano, introduzindo o sujeito em determinada atividade, por outro, as ações dão início à realização da atividade e a executam por inteiro direcionadas pelo fim último que a governa.

---

[9] [...] lo que distingue una actividad de otra, es la diferencia de sus objetos, ya que es el objeto de la actividad que le confiere determinada orientación.

[10] [...] *el concepto de actividad está necesariamente unido al concepto de motivo*.

[11] [...] No hay actividad sin motivo;

[12][...] al proceso subordinado a la representación que se tiene del resultado que debe lograrse, es decir, al proceso subordinado a un fin conciente (sic).

Essa “[...] delimitação de ações orientadas a um fim como componentes do conteúdo de atividades concretas coloca, como é natural, o problema das relações internas que as vinculam” (LEONTIEV, 1978a, p. 83, tradução nossa)[13]. Como executoras da atividade, as ações têm uma dinâmica que as caracteriza como um todo coordenado, em que cada uma delas é dirigida por um objetivo específico que nem sempre coincide diretamente com o fim último da atividade. Mas, em seu conjunto, constituem uma cadeia de ações destinadas à obtenção desse fim. Elas não existem, portanto, como uma simples somatória de ações, como um processo aditivo de unidades separadas umas das outras, mas como um conjunto coordenado de ações guiadas por aquilo que motivou a atividade, ligada a um fim último da atividade.

As ações ocorrem sempre dentro de uma situação objetiva. Para que elas se efetivem, são necessárias algumas condições que as orientem. Relacionadas a essas condições, são executadas certas operações que as põem em movimento. Em outras palavras, “[...] além de seu aspecto intencional (*o que* deve ser alcançado), a ação tem também seu aspecto operacional (*como*, por que meio pode ser alcançado) o que é definido não pelo fim em si mesmo, mas pelas condições objetivo-materiais que se requerem para alcançá-lo” (LEONTIEV, 1978a, p. 85, tradução nossa)[14].

Nesse entendimento, ações e operações não são coincidentes: “[...] as ações estão correlacionadas aos fins, as operações às condições” (LEONTIEV, 1978a, p. 85, tradução nossa)[15]. No caso de uma alteração nas condições de realização de uma ação, ou seja, de alteração em seu aspecto operacional, se o fim permanece o mesmo, a ação continua a mesma, alterando-se apenas a operação pela qual se realiza. Isso não quer dizer, entretanto, que a operação seja algo separado da ação e, da mesma forma, que a ação é desvinculada da atividade. Como afirma Leontiev:

> [...] na torrente geral da atividade que configura a vida humana em suas manifestações superiores, mediatizadas pelo reflexo psíquico, a análise delimita, primeiro, algumas atividades (especiais), segundo o critério dos motivos que as impulsionam. Logo se delimitam as ações ou processos que obedecem a fins conscientes. Por último, estão as operações que dependem

---

[13] [...] delimitación de acciones orientadas hacia un fin como componentes del contenido de actividades concretas plantea, como es natural, el problema de las relaciones internas que las vinculan.

[14] [...] además de su aspecto intencional (*qué* debe ser logrado), la acción tiene también su aspecto operacional (*cómo*, por qué medio puede ser logrado) el que es definido no por el fin en sí mismo, sino por las condiciones objetivo-materiales que se requieren para lograrlo.

[15] [...] las acciones están correlacionadas con los fines, las operaciones con las condiciones.

> diretamente das condições requeridas para o alcance do fim concreto (1978a, p. 87, tradução nossa)[16].

Davídov (1999) e seus colaboradores, ao tomarem os princípios de organização da atividade em geral para proporem a atividade de estudo, destinada a escolares de menor idade, consideraram, inicialmente, todos os componentes estruturais acima citados: necessidades, motivos, objetivos, ações e operações. Entretanto, tempos depois, introduziram mais um componente: o desejo. Nas palavras de Davydov (1999a, p. 41, tradução nossa)[17]:

> Em meu ponto de vista, nada pode ser dito sobre a atividade a menos que se entenda o desejo espiritual ou o orgânico e como ele se transforma em uma necessidade. [...] Eu acredito que o desejo deveria ser considerado como um elemento da estrutura da atividade. [...] Necessidades e desejos constituem a base sobre a qual funcionam as emoções.

Para Davydov (1999a), as emoções não se separam da necessidade. Por isso, ao enumerar os elementos estruturais da atividade, ele cita: "[...] desejos, necessidades, emoções, tarefas, ações, motivos da ação, meios usados para as ações, planos (perceptual, mnemônico, de pensamento, criativo) – todos esses relativos à cognição e também à vontade". Esta última, aqui entendida como aquilo que ajuda o sujeito da ação a atingir seu objetivo realizando uma dada tarefa (DAVYDOV, 1999a, p. 43, tradução nossa)[18].

A Teoria da Atividade de Leontiev foi um dos suportes teóricos para a proposição da atividade de estudo, desde o seu início, quando Elkonin, já anteriormente influenciado pelas ideias de Vigotski a respeito das relações entre desenvolvimento e aprendizagem (conviveu quatro anos com Vigotski, no início da década de 1930), começou a trabalhar, em seu próprio laboratório com seu grupo (final da década de 1950). Na sequência, integrado também por Davídov, desencadeou-se experimentalmente um processo de elaboração de um modelo de ensino que pudesse pôr em prática tais ideias e proporcionar uma educação que gerasse o desenvolvimento dos alunos em níveis mais complexos do que aqueles presentes nas escolas de sua época, em seu país.

---

[16] [...] en la torrente general de la actividad que configura la vida humana em sus manifestaciones superiores, mediatizadas por el reflejo psíquico, el análisis delimita, primero, algunas actividades (especiales), segundo el criterio de los motivos que las impulsan. Luego se delimitan das acciones o procesos que obedecen a fines concientes (sic). Por último, están las operaciones que dependen directamente de las condiciones requeridas para el logro del fin concreto.

[17] In my view nothing can be said about activity unless one understands spiritual or organic desire and how it is transformed into a need. […] I believe that the desire should be considered as an element of activity structure. […] Needs and desires make the basis on which emotions function.

[18] [...] desires, needs, emotions, tasks, actions, action motives, means used for actions, planes (perceptual, mnemonic, thinking, creative) – all those refer to cognition and also will.

Foi quando iniciaram as pesquisas para a elaboração de uma proposta de organização de ensino que propiciasse o desenvolvimento da atividade de estudo. Categoria fundamental do processo de desenvolvimento intelectual das crianças, em particular daquelas que se encontram em situação escolar, cuja discussão se apresentará na secção abaixo.

2.3 Atividades de estudo

A categoria filosófica atividade de estudo, no Brasil, é objeto de investigação de diversos pesquisadores (MARINO FILHO, 2011; ASBAHR, 2013; MAME, 2014; DA SILVA CLARINDO & MILLER, 2016; MAME et al, 2020), oriundos do campo da educação, apesar das suas especificidades na abordagem. Por isso, retomamos a discussão do tema pela centralidade e importância que tem permeado nas pesquisas, sobretudo no entendimento sobre a forma pela qual o ser humano se apropria da riqueza histórica produzida por milhares de anos, pela humanidade. Para tanto, é nos fundamentos de Davýdov (1982) que encontramos o cerne do debate ao afirmar que a base de todo o conhecimento humano é a atividade objetal-prática, produtiva: o trabalho. Por isso, a análise da origem e do desenvolvimento do pensamento começa, necessariamente, pelas particularidades da vida laboral humana. Leontiev (1978) defende que o pensamento, na criança, surge da estreita ligação com a atividade prática: os atos racionais iniciais se manifestam nos primeiros contactos da criança com objetos disponíveis em seu entorno.

Em cada fase do desenvolvimento, há uma forma distinta de relação da criança com o objeto, dependendo de qual seja a sua atividade principal, ou seja, aquela que "governa as mudanças mais importantes nos processos psíquicos e nos traços psicológicos da personalidade da criança, em um certo estágio de seu desenvolvimento" (LEONTIEV, 2010, p. 65).

No início de seu desenvolvimento, a criança manipula os objetos que pode alcançar e, com isso, desenvolve suas funções e a coordenação sensorial. Na interação com os adultos, aos poucos, aprende os significados culturais dos objetos e assimila as funções que eles cumprem na vida das pessoas. Quando a criança começa a atribuir significados lúdicos aos objetos, ela dá início a um processo que culmina com o seu envolvimento nas brincadeiras de papéis sociais (ELKONIN, 2009).

A brincadeira de papéis é, então, a atividade principal da criança em idade pré-escolar. Nesse momento, ela amplia o mundo objetivo no qual se insere e supera os limites da simples manipulação de objetos, para os quais atribui uma função simbólica que a capacita reproduzir, em seus jogos lúdicos, as ações humanas características dos adultos, que ainda não pode realizar como ações reais.

Nesse seu envolvimento com o lúdico e com outras atividades próprias desse período, surgem novas necessidades, dentre elas a de aprender. Em outra etapa de desenvolvimento se abre: “[...] a transição do período pré-escolar da infância para o estágio subsequente do desenvolvimento da vida psíquica ocorre em conexão com a presença da criança na escola” (LEONTIEV, 2010, p. 61). Novas relações com o mundo objetivo são propiciadas pela escola, e:

> [...] o ponto essencial é que agora não existem apenas deveres para com os pais e os professores, mas que há objetivamente obrigações para com a sociedade. Estes são deveres de cujo cumprimento dependerá sua situação na vida, suas funções e papéis sociais e, por isso, o conteúdo de toda a sua vida futura. (LEONTIEV, 2010, p. 61)

Durante o período escolar, a criança se insere em processos de ensino e de aprendizagem: “[...] com o ingresso na escola, a criança começa a assimilar os rudimentos das formas mais desenvolvidas da consciência social, ou seja, a ciência, a arte, a moral, o direito, os que estão ligados com a consciência e o pensamento teórico das pessoas” (DAVÍDOV, 1988, p. 158, tradução nossa)[19]. Para a assimilação desses conteúdos, a atividade adequada é a de estudo.

> No processo de estudo, como atividade principal da idade escolar inicial, as crianças reproduzem não só os conhecimentos e habilidades correspondentes aos fundamentos das formas da consciência social acima assinaladas, como também as capacidades, surgidas historicamente, que estão na base da consciência e pensamento teóricos: a reflexão, a análise, o experimento mental (DAVIDOV, 1988, p. 158, tradução nossa).[20]

Para Davídov & Slobódchikov (1991), citado por Rosa, (2012, p. 41), se a atividade de estudo for devidamente organizada, “propicia aos estudantes as bases de todas as formas da consciência e, consequentemente, o desenvolvimento multilateral da personalidade criativa”. O potencial criador do homem e sua capacidade de resolver com autonomia os problemas que se apresentam em sua vida são imprescindíveis para a formação de sua personalidade. Essas são possibilidades presentes na proposta de atividade de estudo feita pelo grupo de Elkonin-Davídov.

---

[19] [...] con el ingreso a la escuela, el niño comienza a asimilar los rudimentos de las formas más desarrolladas de la conciencia social, o sea, la ciencia, el arte, la moral, el derecho, los que están ligados con la conciencia y el pensamiento teóricos de las personas.

[20] En el proceso de estudio, como actividad rectora en la edad escolar inicial, los niños reproducen no sólo los conocimientos y habilidades correspondientes a los fundamentos de las formas de la conciencia social arriba señaladas, sino también las capacidades, surgidas históricamente, que están en la base de la conciencia y el pensamiento teóricos: la reflexión, el análisis, el experimento mental.

Segundo Davídov (1988), a organização da atividade de estudo das crianças requer a elaboração e a introdução de novas formas e meios para realizá-la. Não bastam os hábitos culturais gerais de leitura, escrita e cálculo, mas também a preparação para um prolongado estudo. Isto significa que as crianças precisam da obtenção do indispensável desenvolvimento psíquico geral e uma boa capacidade para estudar.

Rosa (2012), ao se referir à atividade de estudo, afirma que ela não é inata, ou seja, ela é uma atividade que as crianças aprendem a realizar quando estão inseridas em um processo de apropriação intencional e previamente organizado. Por meio dessa atividade, as crianças assimilam os conhecimentos teóricos – conteúdo da atividade de estudo –, o que implica o desenvolvimento de abstrações e generalizações substanciais. Isso ocorre no processo de apropriação de conceitos que revelam esse conteúdo em sua essência. Por consequência, supera o conhecimento lógico-formal adquirido pela via de abstrações e generalizações empíricas, decorrentes da análise das características sensoriais do objeto de estudo.

Porém, para que os estudantes possam entrar em atividade de estudo, tal como advogam Davídov & Markova (1987), é necessário que os professores apresentem tarefas de estudos bem estruturadas e organizadas. A tarefa de estudo – outro componente da estrutura da atividade de estudo - contempla a "[...] unidade do objetivo da ação e das condições para alcançá-lo" (DAVÍDOV,1988, p. 178, tradução nossa)[21].

Davídov (1988) diferencia essencialmente a tarefa de estudo das diversas tarefas particulares de diferentes tipos. Para a solução de tarefas particulares, são utilizados procedimentos também particulares, caso a caso. Para que os estudantes cheguem a uma generalização do processo de resolução dessas tarefas, eles precisam de muito envolvimento em tarefas que possibilitem a formação de um procedimento pela via da passagem do pensamento de particular ao geral. De acordo com Davídov (1988, p. 179, tradução nossa)[22], [...] quando os escolares resolvem a tarefa de estudo, eles dominam inicialmente o procedimento geral de solução de tarefas particulares. A solução da tarefa escolar é importante não só para o caso particular dado, mas para todos os casos do mesmo tipo, movendo-se o pensamento, desta feita, do geral ao particular.[...]

---

[21] [...] unidad del objetivo de la acción y de las condiciones para alcanzarlo.

[22] [...] cuando los escolares resuelven la tarea de estudio, ellos dominan inicialmente el procedimiento general de solución de tareas particulares. La solución de la tarea escolar es importante no sólo para el caso particular dado, sino para todos los casos del mismo tipo.

Para o ensino da matemática, por exemplo, Davídov (1988) define quatro tarefas principais para os primeiros anos do Ensino Fundamental que se propõem a levar às crianças a se apropriarem do conhecimento científico, seguindo o movimento do geral ao particular. Mais especificamente, essas tarefas referem-se ao trabalho introdutório do ensino de matemática que lida com o conceito de magnitude, geneticamente inicial para a compreensão de todos os tipos de número real.

Cada uma das tarefas traz o indicativo de sua finalidade em contexto no qual devem inserir-se o estudante, bem como o conceito a ser formado por ele, conforme quadro, a seguir, por nós elaborado:

Quadro 2: Tarefas de Estudo

TAREFAS DE ESTUDO	
Contexto de inserção do estudante	**Conceito a formar**
Criação de situação propícia ao estabelecimento de relações entre as grandezas matemáticas.	Grandeza matemática
Demonstração de relação entre grandezas como a forma geral de número.	Número (como relação múltipla das grandezas)
Introdução dos diferentes tipos de números (naturais, fracionários e negativos).	Números naturais, fracionários e negativos (como manifestações da relação múltipla geral das grandezas em condições concretas)
Demonstração do caráter unívoco estrutural da operação matemática (ao se conhecer o valor dos elementos da operação é possível determinar o valor do terceiro elemento).	Operação matemática (como inter-relação dos elementos em ações aritméticas fundamentais)

Fonte: MAME (2014,) adptado de Davídov, 1988.

Cada uma das tarefas organiza-se em um contexto específico em que os alunos são inseridos na realização das ações de estudo voltadas para a apropriação de certo conceito. Como estabelecido, o quadro revela o conceito a ser apropriado e o contexto da tarefa de estudo que objetiva a sua assimilação.

De acordo com Rosa (2012), na proposição de Davídov (1988) para a atividade de estudo, a relação que há entre a tarefa de estudo, as ações a serem realizadas para cumpri-la e as tarefas particulares a serem resolvidas pelo procedimento aprendido é o ponto fundamental na organização do ensino. Em sua proposta de organização do ensino, Davídov (1988) estabelece, para cada tarefa de estudo, seis ações de estudo, a seguir explicitadas.

A *primeira ação* é a *transformação dos dados da tarefa* com a finalidade de explicitar a relação universal do objeto em estudo. O problema dado ao aluno passa pela análise de seus dados concretos com o objetivo de se encontrar – na relação entre as particularidades que o constituem – uma ideia geral que o organiza, ou seja, uma relação na base da qual se encontra o procedimento geral de sua resolução.

A *segunda ação* é a *modelação da relação universal* por meio de três formas: objetal, gráfica e literal. Tem como objetivo fixar a relação universal encontrada com a primeira ação, para que se possa fazer, na sequência, uma análise substancial do objeto em estudo. Esta é uma ação crucial para a formação da atividade de estudo no aluno, pois "[...] os modelos de estudo constituem o elo internamente imprescindível no processo de assimilação dos conhecimentos teóricos e dos procedimentos generalizados de ação" (DAVÍDOV, 1988, p. 182, tradução nossa)[23].

A *terceira ação* refere-se à *transformação do modelo* com vistas ao estudo da propriedade da relação universal que foi separada inicialmente. Nesse momento da atividade de estudo, está em jogo o desvelamento do objeto pela análise da propriedade da relação universal que no modelo torna-se mais visível. Portanto, é diferente do que ocorre na análise inicial do objeto em que tal propriedade pode parecer oculta em meio às várias particularidades que caracterizam o objeto. "O trabalho com esse modelo aparece como o processo pelo qual se estudam as propriedades da abstração substancial da relação universal" (DAVÍDOV, 1988, p. 183, tradução nossa)[24]. Esta ação é de fundamental importância para a apropriação dos conhecimentos teóricos, pois "[...] permite aos alunos compreender a especificidade da orientação em um plano ideal peculiar (o modelo é uma expressão objetal-semiótica do ideal)" (DAVÍDOV, 1988, p. 213, tradução nossa)[25].

A *quarta ação* consiste na *dedução e elaboração de um sistema de tarefas particulares*, cuja resolução requer um procedimento geral que foi assimilado durante o desenvolvimento das ações anteriores. Pondo em prática esta ação, o aluno realiza o trânsito do geral ao particular, trânsito esse que "[...] se realiza como estruturação autêntica do concreto a partir do abstrato sobre a base das regularidades estabelecidas" (DAVÍDOV, 1988, p. 215, tradução nossa)[26].

---

[23] [...] los modelos de estudio constituyen el eslabón internamente imprescindible en el proceso de asimilación de los conocimientos teóricos y de los procedimientos generalizados de acción.

[24] El trabajo con este modelo aparece como el proceso por el cual se estudian las propiedades de la abstracción sustancial de la relación universal.

[25] [...] permite a los alumnos comprender la especificidad de la orientación en un plano ideal peculiar (el modelo es una expresión objetal-semiótica de lo ideal.

[26] [...] se realiza como estructuración auténtica de lo concreto a partir de lo abstracto sobre la base de las regularidades establecidas.

A *quinta ação* diz respeito ao *controle* do processo de desenvolvimento das ações anteriores. “O controle consiste em determinar a correspondência de outras ações de estudo às condições e exigências da tarefa de estudo [...] e assegura a requerida plenitude na composição operacional das ações e a forma correta de sua execução” (DAVÍDOV, 1988, p. 184, tradução nossa)[27]. Ele é, portanto, imprescindível para que o aluno possa resolver de forma adequada as diferentes tarefas particulares que fazem parte de um determinado estudo.

A *sexta ação* é a *avaliação* referente à apropriação do procedimento geral obtido como consequência do desenvolvimento da tarefa de estudo dada. Ligada estreitamente ao controle, a avaliação mostra se o aluno de fato assimilou e, em que medida, deu-se o procedimento de solução de sua tarefa de estudo, isto é, cumpriu-se ou não o objetivo da tarefa. Em outros termos, a avaliação consiste “[...] no exame qualitativo substancial do resultado da assimilação (do procedimento geral da ação e do conceito correspondente), em sua confrontação com a finalidade. É justamente a avaliação que ‘informa’ aos escolares se resolveram ou não a tarefa de estudo dada” (DAVÍDOV, 1988, p. 184, tradução nossa, grifo no original)[28].

Cada uma dessas ações requer um sistema de tarefas particulares detalhadamente planejadas pelo professor e desenvolvidas de modo ativo pelos estudantes. Deste modo, seguindo os pressupostos davidovianos, entende-se que a implantação correta das quatro primeiras ações de estudos e, posteriormente, a aplicação das demais, proporcionará a aquisição dos conceitos científicos e o desenvolvimento do pensamento teórico. Caso contrário, a tendência é que as crianças estejam vulneráveis ao pensamento totalmente empírico.

Importa deixar claro que tanto o pensamento empírico como o teórico são níveis do movimento do pensamento. A diferença entre eles se explicita pela maneira e pelo aspecto em que neles é dado o objeto. Também, pelo modo que é alcançado o conteúdo básico do conhecimento, o que serve de forma lógica da sua expressão; ainda, pela sua importância prática e teórica. Como afirma Kopnin (1978, p. 152), o pensamento teórico reflete o objeto no aspecto das relações internas e leis do movimento deste, cognoscíveis por meio da elaboração racional dos dados do conhecimento empírico. Sua forma lógica é constituída pelo

---

[27] El control consiste en determinar la correspondencia de otras acciones de estudio a las condiciones y exigencias de la tarea de estudio. […] asegura la requerida plenitud en la composición operacional de las acciones y la forma correcta de su ejecución.

[28][...] en el examen cualitativo substancial del resultado de la asimilación (del procedimiento general de la acción y del concepto correspondiente), en su confrontación con la finalidad. Es justamente la evaluación la que “informa” a los escolares si han resuelto o no la tarea de estudio dada.

sistema de abstrações que explica o objeto. A aplicação prática do conhecimento teórico é quase ilimitada.

Isso porque, no processo de formação do pensamento teórico, o aluno desenvolve novas capacidades como a análise, a reflexão e a planificação de ações mentais. Estas permitem-lhe, diante de um novo objeto, desvendar, por meio dessas capacidades, os nexos internos que o organizam. Assim, chega ao seu conhecimento de forma a vê-lo em sua essência. E, portanto, supera a visão empírica do objeto que o compreende em suas características externas, como representações gerais resultantes da atividade objetal-sensorial.

Não se nega, com isso, o valor do pensamento empírico, pois ele "assegura às pessoas um amplo campo na discriminação e designação das propriedades dos objetos e suas relações, inclusive as que em um momento determinado não são observáveis, mas que se deduzem indiretamente sobre a base de raciocínios" (DAVÍDOV, 1988, p. 124, tradução nossa)[29]. O que se põe de relevo é a necessidade de superar esse pensamento, para expressar um dado objeto sob a forma de um conceito, isto é, compreendê-lo em sua essência. Deste modo, em gesto de finalização da discussão. Pode-se dizer que o desenvolvimento psíquico das crianças se faz mediante o seu envolvimento em atividades realizadas sobre objetos, em interação com outros sujeitos de seu meio. Essas atividades, nos diferentes momentos de sua vida, diversificam-se na condução das principais mudanças em seu psiquismo.

Na idade escolar, como vimos, a principal atividade da criança é a atividade de estudo, pela qual a criança vai assimilar conhecimentos que fazem parte do acervo cultural da humanidade, constituído histórica e socialmente pelos sujeitos que a antecederam.

A função do ensino escolar é formar, por meio da atividade de estudo, o pensamento teórico dos estudantes, envolvendo-os em um sistema de transformações objetais, que conduzem à reflexão sobre os meios com que se realizam as transformações para que surja a auto-organização dos processos intelectuais mais produtivos.

A atividade de estudo supõe, em sua estrutura, "componentes tais como a necessidade e os motivos escolares cognoscitivos, a tarefa de estudo, as correspondentes ações e operações", e, no processo de solução da tarefa de estudo, "[...] as crianças vão

[29] Asegura a las personas un amplio campo en la discriminación y designación de las propiedades de los objetos y sus relaciones, incluso las que en un momento determinado no son observables, sino que se deducen indirectamente sobre la base de razonamientos.

dominando o procedimento geral de todas as tarefas particulares de uma determinada classe" (DAVÍDOV, 1988, p. 243, tradução nossa)[30].

Como se vê, a solução das tarefas de estudo de qualquer ordem se reveste de extrema importância, pois elas são responsáveis para que o pensamento do escolar se mova do geral ao particular, conduzindo-o de forma a que o sujeito consiga explicar aquilo que ainda desconhece e se aproprie de novos conceitos e procedimentos de ação.

O desenvolvimento do pensamento teórico nos escolares "[...] significa o desenvolvimento de estratégias estruturais profundas, a compreensão crescente das crianças das características e relações básicas que estão não na superfície do material de estudo, mas que demandam abstração do fenômeno e penetração na substância" (LOMPSCHER &HEDEGAARD, 1999, p. 13, tradução nossa)[31]. E isso pode ser atingido com a adequada organização da atividade de estudo e sua realização pelos estudantes no processo de ensino e de aprendizagem levado a efeito em sala de aula.

O exposto nesta secção será foco de reflexão no próximo capítulo, em que a discussão se voltará para o movimento do universal, particular e singular, bem como sua materialização no campo da matemática. A organização do capítulo, seguirá dois momentos. No primeiro trataremos das correntes filosóficas que marcaram a discussão sobre as categorias universal, singular e particular. No segundo momento, faremos uma discussão sobre a relação existente entre o universal, particular e singular e sua materialização na matemática.

[30] [...] los niños van dominando el procedimiento general de solución de todas las tareas particulares de una detelrminada clase.

[31] [...] means the development of deep structural strategies, the children's growing understanding of basic features and relationships lying not at the surface of learning material, but demanding abstraction from the phenomena and penetrating into the substance.

3. O MOVIMENTO DO UNIVERSAL, PARTICULAR E O SINGULAR: SUA MATERIALIZAÇÃO NO CAMPO DA MATEMÁTICA.

Neste capítulo, discutiremos o movimento do universal, particular e singular, bem como sua materialização no campo da matemática. Em um primeiro momento, abordaremos as correntes filosóficas que marcaram a discussão sobre as referidas categorias. Em um segundo momento, faremos uma discussão sobre a relação existente entre o universal, particular e singular e sua materialização no campo da matemática. Assim, dada a importância dos estudos no campo da filosofia sobre as categorias mencionadas, importa, mesmo que de forma sucinta, o esclarecimento sobre entendimento que se tem acerca do conceito de movimento.

A discussão deste conceito, enquanto forma universal do ser da matéria foi analisada pelos pensadores, logo no começo do desenvolvimento da filosofia, como forma particular da consciência social (CHEPTULIN, 2004). De acordo com o autor, entre os primeiros filósofos gregos o movimento desempenhou o papel de princípio inicial, a partir do qual procurou-se explicar todos os fenômenos observados na realidade ambiente. Ainda sobre o movimento, Cheptulin (2004, p. 158) diz que:

> Tomando como princípio primeiro uma ou outra substância concreta, eles mostraram que todas as formas do ser observadas no mundo aparecem em decorrência de certas transformações dessa substância (princípio primeiro) e que, organicamente ligadas, passando uma pela outra e pelo princípio inicial.

Assim sendo, se o princípio primeiro a ser tomado for o ápeiron, uma matéria indeterminada, a título de exemplo Anaximando, citado por Cheptulin, dizia que:

> O infinito é o princípio primeiro do existente, porque é dele que tudo nasce e nele tudo se destrói. É dele que se desligaram os céus e os mundos em geral, cujo número é infinito e eles todos parecem depois que um tempo bastante considerável tenha decorrido desde seu aparecimento; e todos eles executam um movimento circular desde tempos imemoriais (CHEPTULIN, 2004, p. 158).

Importa salientar que outras substâncias como, por exemplo, o ar, o fogo, a água, a terra, etc. poderiam ser trazidas sobre o princípio primeiro das coisas e forma do ser delas. Porém, como não é foco do presente trabalho, finalizaremos este esclarecimento trazendo a contribuição dos fundadores do materialismo dialético, em particular, Engels. De acordo com este autor, citado por Cheptulin (2004 p.162), "o movimento aplicado à matéria, é a modificação em geral". Em tal afirmação, o autor inclui todas as mudanças e todos os processos que se produzem no universo, desde a mais simples do lugar até o pensamento. Uma outra conceituação científica considera que o movimento é um atributo da matéria, ou seja, sua propriedade fundamental.

É por isso que ele está indissoluvelmente ligado a ela. Não houve, não há e não pode haver matéria sem movimento, nem movimento sem matéria. Dito de outra forma, a matéria sem movimento é tão inconcebível quanto o movimento sem matéria. O movimento é, portanto, tão impossível de ser criado e destruído quanto à própria matéria (CHEPTULIN, 2004).

Na próxima seção, a discussão será sobre as correntes filosóficas, em torno das categorias universal, particular e singular. Importa destacar que estas categorias são parte de um conjunto de categorias da dialética materialista.

3.1 Correntes filosóficas em torno das categorias universal, particular e singular

As categorias universal, particular e singular, da dialética materialista refletem a realidade objetiva do mundo como resultado de múltiplas determinações e caracterizam aspectos essenciais do conhecimento produzido historicamente pela humanidade. Importa destacar que na presente seção, trataremos do geral e do universal como sinônimos. Assumimos esta posição em decorrência da tese de Cheptulin (2004) e Rosental & Straks (1958).

O estudo destas categorias surge ao mesmo tempo com a filosofia, e foi centro de variados debates por diferentes correntes, entre elas as realistas e nominalistas (CHEPTULIN, 2004, p. 191).

Cheptulin (2004), ao descrever o pensamento da primeira corrente, afirma que os realistas defendiam que o geral, universal, existe de forma autônoma, independentemente do singular. De acordo com o autor, entre os defensores da primeira corrente alguns consideravam que o geral, "universal", por sua própria natureza, existe sob forma de ideias, de essências, enquanto que outros declaravam-no matéria, existindo fora e independentemente da consciência.

Vale salientar que os defensores da primeira corrente declaravam o singular como fenômeno inexistente ou secundário, dependente do geral e por ele engendrado, isto de um lado. De outro, consideravam como um fenômeno temporário, transitório, surgido sob influência direta do geral "universal" e desaparecendo em condições correspondentes. Por sua vez, o geral "universal" era constante, imutável, eterno (CHEPTULIN, 2004).

A segunda corrente, no caso os nominalistas, afirmava que não é o geral "universal", mas sim o singular que possui existência real. Para eles, o geral "universal" é produto da atividade do pensamento dos homens e existe apenas em suas consciências sobre forma de nomes gerais, designando objetos singulares. Em relação ao singular, os representantes da corrente nominalista afirmam que “existe sob forma de objetos materiais isolados, sensações, nômades, átomos espirituais únicos em seu gênero” (CHEPTULIN, 2004, p. 193).

A discussão descrita anteriormente, entre as correntes realistas e nominalistas citadas por Cheptulin, apresenta inúmeras lacunas por omitir as características reais e essenciais das categorias filosóficas geral, “universal”, e do singular, pois exclui a categoria particular que, na relação entre o universal e o singular, assume o papel de mediação. A superação da lacuna é creditada às teses marxianas e discutidas por vários seguidores de sua corrente. Importa destacar que a relação dos entes filosóficos em discussão – no caso a relação entre universal-particular-singular – é extremamente fundamental porque explicita os movimentos específicos que constituem a dinamicidade da realidade como um todo, os quais são representados em nosso pensamento por meio de categorias (OLIVEIRA 2015).

Isto quer dizer que, ao fazer-se juízos da realidade objetiva, mesmo ao analisar os fenômenos da natureza, seu movimento e desenvolvimento, não é possível de forma separada ou isolada. Trata-se de uma unidade, no caso em totalidade, que em movimento avança do concreto real, ponto de partida, para o concreto pensado como ponto de chegada, a síntese de muitas determinações, isto é, a unidade do múltiplo (LUKÁCS, 1970).

De acordo com o mesmo autor, citado por Pasqualini e Martins (2015), a dialética entre singular-particular-universal é uma propriedade objetiva dos fenômenos. Por essa razão, a lógica e a epistemologia que pretendem apreender a realidade em suas conexões essenciais e básicas devem orientar-se pela perspectiva de revelar a interpenetração dialética entre singularidade, particularidade e universalidade.

Rosental e Straks (1958), defensores da corrente marxista, ao se debruçarem sobre as referidas categorias, afirmam que o universal é todo ato que apresenta repetitividade e está intimamente relacionado com a lei, na medida em que expressa o vínculo estável, essencial, interno e reiterado entre os fenômenos. De igual modo, afirmam os autores que se denomina universal ou geral ao grupo de classe de objetos, caracterizados por possuir notas comuns a todos eles. “O universal se reflete no conhecimento sob a forma de conceitos gerais, de juízos universais e das leis da ciência” (ROSENTAL & STRAKS, 1958, p. 257).

Neste âmbito, pode-se afirmar que todas as propriedades, ligações, fenômenos, que se repetem em seus acontecimentos (coisas, objetos e processos) constituem o universal. Podemos tomar como exemplo os conflitos armados enquanto processos que se registram de tempo em tempo na humanidade. Todos provocam mortes, dissolução das famílias, destruição de cidades, de economias, do tecido humano e de forma recorrente incitados pelas grandes potências ocidentais em nome de uma falsa expansão democrática mundial. Na verdade, o interesse maior é de perpetuação de suas economias, de dominação e subordinação aos seus países. Um outro exemplo é o homem sendo ele, um ser vivo, que vive em sociedade, cuja essência é determinada pelas relações de produção correspondentes. Ele é dotado de uma consciência, reflete o mundo ambiente por meio de um sistema de imagens e ideias, possui uma família (CHEPTULIN, 2004, 194).

Quanto ao singular, os defensores das teses marxianas (CHEPTULIN, 2004; ROSENTAL & STRAKS, 1958) afirmam ser um fenômeno ou objetos determinados, um processo ou fato que se dá na natureza e na sociedade de forma não repetível. De igual modo, pode-se denominar singular ou individual o conceito de um fato ou acontecimento real único, isto é, pensamento que abarca fato singular. Em relação à sua vinculação, "o singular ou individual está intimamente relacionado com a casualidade e fenômeno" (ROSENTAL & STRAKS, 1958, p. 259).

Para Cheptulin (2004), constituem o singular as propriedades e ligações que são próprias apenas a uma formação dada (coisa, objeto, processo) e que não existem em outras formações materiais. De acordo com o autor, o singular para cada coisa é, por exemplo, o fato de que ela ocupa um lugar dado no espaço, que é constituída justamente de moléculas dadas e que, exposta a uma alta temperatura, ela emite fótons dados (CHEPTULIN, 2004, 194).

Podemos aqui retomar, a título de exemplo, os conflitos armados e suas resoluções como processos para explicitar fenômenos singulares. O continente africano é palco recorrente de luta pelo poder entre as elites políticas e tribais. Tal fato, no caso a ascendência pelo poder tem motivado o surgimento de conflitos armados, muitas vezes apoiados e patrocinados pelas potências ocidentais. Esta, por sua vez, via "Nações Unidas" voltam para os países em conflitos internos na condição de mediadores de paz.

Angola, um desses países, viveu uma guerra cruel sob patrocínio dos blocos ocidentais, durante longos 26 anos de conflitos. Recebeu, neste período, diversos mediadores e observadores de paz de várias nacionalidades, incluindo africanos a serviço das Nações

Unidas, União África, entre outras. Porém, nenhuma delas foi capaz de estabelecer uma paz efetiva neste país africano, ocorrendo somente pequenos acordos de trégua com duração temporária. A paz efetiva que este país vive, passados 18 anos, é resultado de um entendimento interno entre os militares envolvidos no teatro de guerra.

Portanto, não dependeu da classe política e nem tribal angolana e tampouco das potências ocidentais e organizações de manutenção de paz. Este fato angolano, por ser único e irrepetível no mundo e em particular em África é, sem dúvidas, o ato singular, único. Com o exposto, concluímos que o singular é sempre um objeto concreto, ou seja, um fenômeno individual.

Segundo Rosental & Straks (1958), denomina-se particular a um grupo de objetos, fenômenos ou fatos que, sendo gerais, formam parte ao mesmo tempo de outro grupo mais geral, dentro deste grupo. O particular se apresenta como singular ou individual, isto é, como parte de um todo mais amplo. De igual modo, compreende um conjunto de objetos que numa relação se apresenta como universal e em outra como individual ou singular. O particular é, portanto, uma forma universal da existência da matéria, questão que permite um relacionamento dos conceitos de corpo, coisa e de objetos (CHEPTULIN, 2004).

No mundo real, o particular assume-se como o elo que une o singular e o universal e no conhecimento o particular se expressa em forma de conceitos e juízos “particulares”, que são passos do conhecimento em seu desenvolvimento do singular e do universal (ROSENTAL & STRAKS, 1958).

Para Santana e Ferreira (2016), o particular é um fato intermediário que mediatiza a relação do singular e do universal e vice-versa, tanto na realidade, quanto no pensamento que capta o movimento, a estrutura. Em suma, o particular é o campo de mediações. A partir deste pressuposto pode-se considerar como exemplo, de particular no contexto do conflito armado angolano, dois cenários: o primeiro é fato de que a apesar de serem os militares os artífices dos acordos de paz, o ato foi formalizado em sede da Assembleia Nacional de Angola, na presença das organizações internacionais e políticos que, ao longo dos vários anos, buscavam a todo custo o estabelecimento de uma paz definitiva em solo angolano. Um outro cenário em que podemos enquadrar o particular é fato de que no âmbito do conflito armado angolano existiu um militar de nível superior (general), que combateu em ambos os lados do conflito armado, o que lhe granjeou a possibilidade de ser o articulador (mediador) para a assinatura dos referidos acordos de paz.

3.2 Relações existentes entre o universal, o particular e o singular: de suas concepções à materialização no campo da matemática

Tal como anteriormente anunciamos, a presente seção aborda a relação existente entre o universal, particular e singular, bem como a sua materialização no campo da matemática. Para tanto, três questões são levantadas: o que é uma relação? Em que contexto do pensamento humano é discutida a relação entre o universal, particular e singular? E como se efetiva a relação universal, singular e particular no campo da matemática?

Segundo Cheptulin (2004), a categoria relação foi seguida e desenvolvida por Kant para quem "a relação compreende ao mesmo tempo a ligação e a separação".
De acordo com o autor mencionado, a ligação é a relação entre os objetos da realidade. Dito de outra forma, ela é existente entre dois fenômenos, cuja modificação de um pressupõe a transformação do outro (CHEPTULIN, 2004, p. 176).

No sentido de melhor elucidar a categoria relação, Cheptulin toma como exemplo o corpo e a massa. Para o autor, o movimento do corpo está organicamente ligado à massa, já que a modificação do primeiro acarreta necessariamente a modificação da segunda. Outro exemplo para a explicitação da categoria relação, a ter em conta, poderia ser o homem e a natureza, cuja modificação do primeiro, passa necessariamente pela transformação do segundo e vice-versa. Importa destacar que, neste último, existe uma categoria que serve de mediação entre homem e natureza, no caso, a categoria trabalho, cuja discussão foi tratada no capítulo dois desta investigação.

Quanto à separação (isolamento), Cheptulin (2004, p. 176) afirma ser uma relação entre os fenômenos da realidade feita de tal forma que as mudanças de um deles não afetam os outros fenômenos e não acarretam mudanças nestes últimos. O autor toma como exemplo os princípios morais da sociedade e a natureza exterior que, no seu entender, estão em estado de isolamento. Para ele, as modificações dos princípios morais não acarretam uma mudança da natureza e vice-versa. As mudanças na natureza não modificam os princípios morais. Prosseguindo, afirma Cheptulin, que os fenômenos como natureza biológica do homem e a luta de classes, as jazidas de carvão e de ferro etc. não estão ligados entre si. "Uma modificação de um não acarreta uma modificação do outro" (CHEPTULIN, 2004, p. 176).

Partindo da discussão anterior, é possível apresentar a relação e os nexos constantes entre o universal, o particular e o singular, categorias da dialética materialista trazidas por diferentes autores seguidores e continuadores do marxismo.

De acordo com Lukács (1978), a relação entre universal, particular e singular constitui um antiquíssimo problema do pensamento humano. O autor aponta que Lênin já havia se pronunciado sobre a preocupação de Aristóteles ao observar o perigo ideológico de uma autonomização do universal. Vale destacar que o comentário exposto por Lênin se limita à relação dialética entre o universal e o singular, apesar de criar possibilidade de extensão para o particular, dando ênfase maior à questão em relação ao exposto por Aristóteles.

Partindo do pressuposto dos opostos (singular e universal), Lukács considera-os idênticos e diz que:

> O singular só existe na ligação que conduz ao universal. O universal só existe no singular, através do singular. Todas as coisas singulares são (de um ou de outro lado) universais. Cada coisa universal é uma parte ou um lado, ou a essência do singular. Qualquer universal abarca apenas aproximadamente todos os objetos singulares. Qualquer elemento singular só entra incompletamente no universal. (LUKÁCS, 1978, p. 6)

O perigo da autonomização do universal, percebido por Aristóteles, está vinculado ao tratamento gnosiológico dado por Platão, a universalidade, e aprofunda-se na filosofia medieval com o realismo conceitual. Porém, a componente importante deste perigo, de acordo com Lukács (1978), é a não apreensão da singularidade, da particularidade e universalidade como determinações da realidade. Essa precaução deve ocorrer inclusive nas relações dialéticas recíprocas de umas com as outras e ao contrário. O cuidado é para que uma só dessas categorias passe a ser considerada como a mais real em confronto com as outras, ou até como única real, a única objetiva, ao passo que nas outras se reconhece somente uma importância subjetiva (LUKÁCS, 1978).

Apesar do debate sobre a relação do universal, do particular e do singular, ser objeto de estudo de vários teóricos, como Kant e Schelling, etc., Lukács (1978, p. 37), citado por Masson (2018, p. 32-33), considera Hegel como, “o primeiro pensador a colocar no centro da lógica a questão das relações entre singularidade, particularidade e universalidade.” A autora pontua que, para Hegel, o particular não é um estado intermediário estável entre o universal e o singular, pois essas categorias são consideradas tanto como processo quanto como resultado, estando todas em um mesmo nível da realidade (MASSON, 2018).

Lukács (1978, p.70) explica que com a inevitável mediação do particular ocorre o movimento do singular ao universal e vice-versa, ou seja, o movimento da universalidade abstrata à concreta, da universalidade inferior à superior, o que transforma a universalidade precedente numa particularidade, bem como da singularidade puramente imediata à mediatizada etc. Importa mencionar que a partir deste movimento, pela primeira vez na lógica, colocou-se a particularidade como sendo um insuprimível membro da mediação entre a singularidade e a universalidade, em ambas as direções do movimento (LUKÁCS, 1978).

De acordo com Rosental e Straks (1958), a unidade do singular, particular e universal se expressa nas leis que regem o desenvolvimento da natureza. Para a elucidação desta tese, os autores partem, a título de exemplo, da lei de gravitação enquanto lei universal que rege em todos os corpos materiais.

Segundo Dias *et al.* (2004, p.20), esta lei de Isaac Newton, foi publicada na obra Princípios Matemáticos da Filosofia Natural, em meados 1687, e explicita que "dois corpos quaisquer se atraem mutuamente com uma força que é diretamente proporcional ao produto das massas e inversamente ao quadrado das distâncias".

Para Rosental e Straks (1958), esta lei universal atua por meio de uma série de leis menos gerais, quer dizer, pelas leis particulares (por exemplo, através das leis de Kepler, que dão razão ao movimento dos planetas ao redor do sol, através da lei de queda livre dos corpos). E estas leis "particulares se manifestam no movimento singular, concreto, de um planeta dado" (ROSENTAL; STRAKS, 1958, p. 268). Segundo os autores, a mesma interdependência real, objetiva entre o singular, o particular e o universal encontra-se nos fenômenos sociais. Para explicitação da afirmação, Rosental e Straks tomam como exemplo a categoria trabalho por apresentar a unidade entres estes três momentos: universal, singular e particular, uma vez que, o trabalho por sua natureza universal mantém em todos os momentos a forma de organização social, econômica (ROSENTAL; STRAKS, 1958).

O trabalho, enquanto processo, é a atividade orientada a um fim, que consiste na produção de valores de uso-apropriação do elemento natural para satisfação das necessidades humanas. É condição "universal do metabolismo entre homem e natureza, perpétua condição natural da vida humana e, por conseguinte, independente de qualquer forma particular dessa vida, ou melhor, comum a todas as suas formas sociais" (MARX, 2013, p. 261).

De acordo com Rosental e Straks (1958), o trabalho, para além da sua essência universal, apresenta suas características específicas. Os autores adiantam que:

> O que é universal no trabalho – a produção dos bens necessários para a existência – se manifesta através do particular, sob uma certa forma histórica e concreta. Por exemplo, a particularidade do trabalho assalariado, baseia-se no fato de que o trabalhador que trabalha ao serviço do capitalista, que é o dono dos meios de produção e se apropria do produto do trabalho do trabalhador. O trabalho assalariado, como qualquer tipo de trabalho, só existe em processos singulares de trabalho, na forma de trabalho singular e concreto (ROSENTAL; STRAKS, 1958, p. 268, tradução nossa)[32]

Segundo esses dois autores, outros fatos sobre a vida social que confirmam a unidade entre o singular e o universal poderiam ser apresentados. Um deles é as contradições internas inerentes a todos os fenômenos sociais e naturais. Na explicitação acerca das contradições, Rosental e Straks (1958) citam Mao Tse-Tung, ao afirmarem que a relação existente entre o caráter universal e o caráter específico da contradição é a relação entre o universal e o singular. Eles explicam que o universal existe por meio do singular e sem este não pode dar-se o universal. Da mesma forma, o singular não existe à margem de seus nexos com o universal e que o universal só existe por meio do singular. Prosseguindo a discussão sobre a interdependência existente entre o singular e o universal, os autores citam a afirmação de Lênin de que todo o universal é também uma parte, um aspecto ou a essência do singular. O universal existe no singular que faz parte do universal. Assim, "o nexo indissolúvel que une a estes contrários constitui a característica fundamental da dialética" (ROSENTAL; STRAKS, 1958, p. 269).

Dessa forma, concorda-se com Lênin, citado por Rosental e Straks (1958), ao afirmar que "todo o singular forma parte, de modo incompleto do universal". Em tal fato reside a insuficiência do universal. Porém, de forma recíproca, o singular é considerado insuficiente, pois só existe efetivamente na relação com o universal. Esta relação demonstra que a verdadeira imagem do mundo, tal como se apresenta na realidade, é uma unidade dialética destes dois contrários: universal e singular (ROSENTAL; STRAKS, 1958). Apesar desta unidade dialética representar a verdadeira imagem do mundo, não se pode deixar à parte a correlação do singular e do universal no particular e nem tão pouco do universal e particular no singular.

---

32 [...] lo que en el trabajo hay de universal - la produccio de los bienes necesarios para la existencia - se manifesta a través de lo particular, bajo una determinada forma histórica y concreta. Así, por ejemplo, la particularidad del trabajo asalariado estriba en que el obrero trabaja al servicio del capitalista, que es el propietario de los medios de producción y se apropia del producto del trabajo del obrero. El trabajo asalariado, como cualquier tipo de trabajo, sólo existe en los procesos singulares del trabajo, bajo la forma de un trabajo singular, concreto.

Quanto à primeira, no caso a correlação do singular e do universal no particular, Cheptulin, (2004) afirma que ela se manifesta como aspectos únicos em seu gênero, que são próprios apenas a uma formação material dada e a aspectos que se repetem nesse ou naquele grupo de outras formações materiais, isto de um lado. De outro, é manifestação do singular no universal e vice-versa, no processo de movimento e do desenvolvimento das formações materiais (CHEPTULIN, 2004).

Ainda sobre o singular e o particular, enquanto categorias que se correlacionam, o autor afirma que se o singular se apresenta como uma propriedade que não se repete o que é próprio de uma formação material (coisa objeto e processo), o particular assume-se como a própria formação material, a própria coisa, o próprio objeto, o próprio processo. O particular é simplesmente o singular, mas é igualmente o geral (universal). Ademais, considera que a correlação do particular e do universal (geral) representa uma correlação do todo e da parte, sendo que o particular é todo e o universal (geral) é parte.

Assim sendo, uma parte do particular "todo o geral (universal) engloba, apenas aproximadamente, todos os objetos particulares" e "todo particular entra de maneira incompleta no universal" (geral). Afinal, ele possui o singular ao lado do geral (universal) e que, ao lado das propriedades únicas em seu gênero, são próprias exclusivamente dele (CHEPTULIN, 2004, p. 196).

A segunda correlação, no caso a do universal e do particular no singular, encontra- se em Lukács (2012), no âmbito da discussão da ontologia de Hegel e suas determinações de reflexão. Neste estudo, Lukács relata que as categorias universalidade, particularidade e singularidade aparecem como conceitos novos na lógica do conceito. O conteúdo filosófico delas é extremamente importante e rico de consequências para o conjunto da imagem hegeliana do mundo. Mas, também, ele aparece encoberto pelo discurso lógico, na medida em que as aplicações decisivas dessas categorias são incorporadas na teoria do conceito – juízo – silogismo (LUKÁCS, 2012, p. 276).

Segundo o autor, na lógica do conceito, a singularidade aparece como posta pela particularidade, a qual, por sua vez, não é mais do que a universalidade determinada. Mas adiante, Lukács afirma que:

> A universalidade e a particularidade manifestam-se [...] como momentos do devir da singularidade [...]. O Particular, pela mesma razão, por ser apenas o universal determinado, é ao mesmo tempo também um singular; e vice-versa dado que o singular é o universal determinado, ele é do mesmo modo particular. (LUKÁCS, 2012, p. 276)

Essa afirmação lukacsiana leva-nos ao entendimento de que – a depender do fenômeno ou problema social, econômico ou político a ser analisado – ele pode apresentar-se como universal em um dado momento e, em outro, como uma singularidade, bem como uma particularidade. Mais uma vez apresentamos como exemplo o fenômeno do conflito armado e sua forma de resolução já anunciada anteriormente. Ele é um fenômeno que acontece de tempo em tempo no mundo, como consequência de disputas do poder entre as elites políticas. Porém, a duração do mesmo e as formas de resolução assumem, em alguns momentos, características repetíveis e noutros irrepetíveis, isto é, diferentes. Um outro exemplo importante é o da palmeira, planta tropical oriunda principalmente de países da África, América Latina e Sul da Ásia. Em todas as localidades de seu plantio ela assume um nome comum e repetível, o de palmeira, o que a torna universal. Sua singularidade é denotada de um lado no clima e período do plantio e noutro na forma de crescimento. Algumas espécies podem atingir até quarenta metros de altura. A particularidade é observada na forma de plantio sendo que umas podem ser plantadas em vasos ou canteiros, em área externa ou interna, a depender das espécies.

Vale destacar que, no âmbito do conhecimento humano, a relação entre as categorias universal, particular e singular se expressa no juízo.

Segundo Kopnin (1978, p. 198), juízo "é toda ideia relativamente acabada, que reflete as coisas, os fenômenos do mundo material, as propriedades, as conexões e relações destes". O autor cita Hegel para quem o juízo é construído de acordo com a forma: o singular é o universal (o sujeito é o predicado), isto é, por um lado o singular é universal (o sujeito é o predicado) por outro o singular não é o universal (o sujeito não é o predicado), uma vez que cada um deles apresenta-se como é (o singular é singular, o universal é universal) e se distingue do outro. Essa unidade e diferença entre o singular e o universal (sujeito e predicado) no juízo se "constitui na fonte do desenvolvimento, do movimento do juízo" (KOPNIN, 1978, p. 199).

A tese hegeliana do juízo como unidade do singular e o universal, anteriormente apresentada, foi reelaborada pelo marxismo-leninismo, com base nos pressupostos do modo materialista. De acordo com Kopnin (1978, p. 199), Lênin observa que, na oração (juízo) há a dialética da relação entre o singular e o universal, que reflete a dialética objetiva nas mesmas qualidades (transformação do particular em geral, do casual em necessário, as transformações, irisações, a mútua conexão dos contrários). Para a elucidação da tese de Lênin sobre os juízos que estabelecem a relação entre o singular e o

universal, Kopnin toma como exemplo, as sentenças: ouro é um metal; trigo é um vegetal gramíneo. Segundo o autor, nesses juízos se estabelece a existência de propriedades comuns nas coisas singulares ou inclui-se o singular entre as classes das coisas, sendo que, essa relação existe no mundo objetivo e o juízo a reflete (KOPNIN, 1978, p. 199-200).
Vale salientar que a discussão sobre juízo como unidade do singular e universal, assim como do particular no campo do materialismo, não se esgota em Lênin, uma vez que Engels, outro estudioso do materialismo, pronunciou-se a respeito ao dividir todos os juízos em juízos da singularidade, particularidade e universalidade.

Para Engels, citado por Kopnin (1978, p. 203), "no juízo da singularidade registra-se um fato qualquer". Para a justificação da afirmação, o autor toma como exemplos: "o atrito produz o calor"; "elementos isolados são capazes de desintegrar-se em componentes mais simples". Enquanto que, no juízo da particularidade, Engels estabelece que certa forma especial de movimento da matéria revela a propriedade de transformar-se noutra forma de movimento sob determinadas condições. Como exemplo, Engels diz que "o movimento mecânico se transforma em calor"; "todo um grupo especial dos elementos mais pesados por nós conhecidos possui a propriedade da radiatividade natural".

Ao terminar as teses de Engels, Kopnin (1978) apresenta a característica do juízo universalidade, que expressa a lei universal do movimento dos fenômenos: "toda forma de movimento da matéria é capaz de transformar-se em qualquer outra forma de movimento"; "sob determinadas condições cada elemento pode ser transformado em qualquer outro elemento". Para Kopnin, essa classificação dos juízos engloba todo o processo de seus movimentos: do conhecimento dos fenômenos ao conhecimento da essência (KOPNIN, 1978).

A partir do exposto, no caso o juízo enquanto unidade do singular e universal pode-se concluir que o movimento do juízo, que vai desde o singular ao universal por meio do particular, é uma lei específica do pensamento. É, pois, um ato constante e estável deste que reflete uma lei da natureza, o fato real de que em todo fenômeno singular há características universais e particulares (ROSENTAL & STRAKS, 1958, p. 278).

Até ao momento procuramos trazer respostas relacionadas com o contexto no pensamento humano, em que é discutida a relação entre o universal, o particular e o singular. Tendo por base as discussões dos diferentes pesquisadores do marxismo, conclui-se que o singular, apesar de ser um fenômeno não repetível (único), pode aparecer no pensamento no âmbito dos fenômenos repetíveis, ou seja, do universal. Este, por sua vez, também pode transformar-se ou assumir características singulares e vice-versa.

Quanto ao particular, para além de ser o elo que une o singular ao universal, também pode assumir-se como singular; ou seja, como o próprio fenômeno, coisa, objeto ou processo, isto de um lado. Por outro, pode assumir-se como universal a depender do contexto em que o fato ou fenômeno for apresentado ou analisado.

Nos parágrafos subsequentes, iremos apresentar a discussão sobre o contexto em que se efetiva a relação universal, singular e particular no campo da matemática. Para tal, urge a necessidade de remeter-se, *a priori,* à gênese de todo conhecimento humano: atividade prática. Ela constitui um dos fatores determinantes do conhecimento.

De acordo com Cheptulin (1978), o conhecimento começa precisamente com a prática, que funciona e se desenvolve nesta base e, por ele, a mesma se realiza. É precisamente com base na prática que se "formam as categorias nas quais são refletidas e são fixadas as ligações e as formas universais do ser" (CHEPTULIN, 1978, p. 57). Para o autor, o conhecimento que se desenvolve com base na prática representa um processo histórico, no decorrer do qual o homem penetra de forma mais profunda no mundo dos fenômenos.

Neste sentido, Rosental e Straks (1958) afirmam que a significação das categorias singular, particular e universal para atividade prática está determinada, antes de tudo, ao fato de que a consideração do singular e do universal em sua unidade e diferenças, responde a um dos princípios fundamentais da dialética: ao abordar de modo histórico e concreto os fenômenos, quer dizer, responde ao princípio da verdade concreta (ROSENTAL; STRAKS, 1958, p. 287).

Partindo dos pressupostos anteriormente descritos, é possível afirmar que os conhecimentos matemáticos que se conhecem até hoje foram adquiridos pelos homens desde as primeiras etapas do desenvolvimento humano, trazendo a influência da atividade prática diária, isto é, da necessidade de contar, de medir a capacidade dos recipientes, de medir o tempo, de confeccionar planos para a edificação de casas e divisão de terras para o exercício de atividades agricultáveis.

A fundamentação dessa afirmação pode-se ser encontrada em Ribnikov (1987), para quem as matemáticas surgiram da atividade produtiva dos homens e que seus novos conceitos e métodos foram fundamentalmente formulados sob influência das ciências naturais exatas. Neste sentido, vale destacar que existiram diferenças, por parte dos povos, para o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos. Porém, apesar das distintas vias de seu desenvolvimento, é comum para todos os povos, que os conceitos básicos das matemáticas – número, figura, área, prolongação infinita da série natural, etc. – surgiram da prática e atravessaram um longo período de aperfeiçoamento (RIBNIKOV, 1987, p. 20).

Como exemplo do exposto, toma-se o próprio conceito de número que surgiu como consequência da necessidade prática de contar os objetos, pois, no princípio, a contagem valia-se da ajuda dos meios disponíveis como: dedos, pedras, etc.

A este respeito, Davýdov (1982) entende que a atividade laboral, experimental, por sua essência permite aos homens a revelação das conexões indispensáveis e universais dos objetos. O autor aprofunda esta discussão citando Engels, para quem a forma da universalidade é, de um lado, a da perfeição interna. Por outro lado, a forma da universalidade na natureza é uma lei. Estas afirmações são justificadas com o exemplo do cloro e do hidrogênio. Sobre estes entes, Engels, citado por Davýdov (1982, p. 283-4), diz o seguinte:

> Quando o homem sabe que o cloro e hidrogênio sob ação da luz e a uma determinada temperatura e pressão se unem na forma de gás e originam uma explosão, ele também sabe por isso mesmo que acontecerá sempre e em todas as partes em que se conjuguem ditas condições. Este conhecimento não depende se o evento ocorrerá uma vez ou repetirá milhões de vezes, não importa em quais corpos celestes.

O exemplo apresentado por Engels, citado por Davydov, traz consigo a ideia do conhecimento e ascensão do singular para o particular e, depois, para o universal. No entanto, fica claro que as condições indicadas, aperfeiçoadoras internamente do processo, foram encontradas no experimento prático como forma especial da atividade produtiva (DAVYDOV, 1982, p. 284).

Desse modo, entende-se que a universalidade da atividade prática e a capacidade de transformação da natureza pelo homem, por meio do experimento, constituíram a base de todas as formas de conhecimento teórico. Conforme Davydov, com base em Lênin, “a prática é superior ao conhecimento teórico, pois possui não apenas a virtude da universidade, mas também a realidade imediata” (DAVYDOV, 1982, p. 285-286).

Neste sentido, vale destacar que a matemática como ciência é uma das formas da consciência social dos homens. Por isso, apesar da conhecida singularidade qualitativa, as leis que regem seu desenvolvimento fundamentalmente, são gerais para todas as formas de consciência social (RIBNIKOV, 1987, p. 15).

Segundo Engels, citado por Ribnikov (1987), constitui objeto da matemática as relações quantitativas e formas espaciais do mundo real. As diferentes ciências matemáticas têm a ver com as formas particulares, individuais destas relações quantitativas e formas espaciais ou se distinguem pela singularidade de seus métodos.
Neste sentido, entende-se a Matemática como uma totalidade constituída de diferentes partes como (Aritmética, Geometria, Álgebra, etc.). Estas partes do todo, que é matemática, assumem posições de singularidade, em um dado momento e em outros de particularidade. Da mesma forma, constituem-se em universalidade a depender do contexto e do processo de investigação. Estas partes, cuja gênese é atividade prática, estão unidas pelo mesmo objeto de estudo, daí que sua relação universal se materializa no âmbito das relações entre grandezas.

De acordo com Costa (1866, p. 9), chama-se “grandeza tudo quanto é suscetível de aumento ou diminuição, por exemplo: a extensão, o tempo, o peso e o movimento”. As grandezas distinguem-se em incomensuráveis e comensuráveis (quantidades). Estas são objeto das ciências matemáticas, que podem ser: contínuas (aumentam ou diminuem por graus tão pequenos quanto possível, como a extensão) e descontínuas (não permitem o aumento e diminuição por graus tão pequenos quanto se queira). É com base em grandezas descontínuas que se chega à ideia de número (COSTA, 1866).

Dito de outra forma, as relações entre grandezas são a base principal e primeira para o surgimento do conceito de número real, como também serve de base genética dos conceitos teóricos matemáticos, para os quais se voltam o ensino escolar (MAME, 2014). Este pensamento está em concordância com Rosa (2012), para quem as grandezas constituem-se em elemento central do processo de formação do pensamento teórico da matemática. Razão pela qual se dá ênfase, em Davýdov (1982), sua afirmação de que no processo de formação do pensamento existe a possibilidade de as crianças assimilarem com bastante detalhes os conhecimentos sobre as grandezas. Para tal, faz-se necessária a presença dos objetos físicos, não para explicitar as características externas, mas de modo que permitam a familiarização e apropriação de suas propriedades fundamentais (MAME, 2014, p. 76).

A concretização destas premissas serão verificadas e enfatizadas durante o estudo das grandezas no contexto das tarefas particulares propostas no sistema Elkonin-Davídov-Repkin e proposições angolanas. A referência será a introdução das significações aritméticas, geométricas e algébricas, no primeiro ano do ensino fundamental. Também, terá como pressuposto de análise os conceitos de adição, subtração, multiplicação, divisão, com foco no processo de movimento do pensamento de ascensão do abstrato ao concreto. Estas duas categorias da dialética marxista são importantes e surgem da necessidade de compreender com profundidade o processo do conhecimento e permite captar a dialética do reflexo da realidade na consciência humana.

De acordo com Rosental e Straks (1958), o concreto e o abstrato estão intimamente ligados com outras categorias da dialética, particularmente com a essência e fenômeno, lei, análise e síntese, o lógico e histórico, o sensível e o racional.

O concreto no conhecimento reflete o fato objetivo de que os fenômenos e objetos da realidade existem em uma unidade, como um todo composto de diferentes aspectos, qualidades e relações. O abstrato pode dar-se no conhecimento porque os diferentes aspectos e as diversas propriedades e relações dos objetos e fenômenos possuem uma relativa autonomia, que se distinguem entre si, se dão em uma distinta relação com a essência. Por ele, no conhecimento, se pode separar alguns aspectos ou propriedades dos objetos, abstraindo-se de todos (ROSENTAL E STRAKS 1958, p. 298).

A percepção destas categorias da dialética marxista, associada ao movimento universal, particular e singular existente entre as significações aritméticas, geométricas e algébricas será verificada nos capítulos 4 e 5 desta tese.

No capítulo 4, o foco será a discussão sobre o objeto de estudo das significações aritméticas, geométricas e algébricas e sua interligação. E no capítulo 5, faremos a análise do modo de organização do ensino de matemática do sistema Elkonin-Davidov-Repkin e do sistema angolano (Nascimento, António e M´Fuansuka). A análise terá como foco a interligação entre a aritmética, a geometria e a álgebra e sua caracterização quanto às categorias universal, singular e particular.

4. CONTEXTO HISTORICO E OBJETO DE ESTUDO DAS SIGNIFICAÇÕES ARITMÉTICAS, GEOMÉTRICAS E ALGÉBRICAS E SUA INTERLIGAÇÃO

Tal como anunciamos acima, no presente capítulo, abordaremos o contexto histórico e objeto de estudo das significações aritméticas, geométricas e algébricas e sua interligação. A discussão seguirá a seguinte ordem: 1) Abordagem do contexto histórico e objeto de estudo da aritmética; 2) Abordagem do contexto histórico e objeto de estudo da geometria; 3) Abordagem do contexto histórico e objeto de estudo da álgebra; 4) A interligação entre as significações aritméticas, geométricas e algébricas.

A escolha não tem por objetivo fragmentar as significações matemáticas em estudo, porém, hierarquizá-las em função da sua evolução histórica. Importa destacar que, no decorrer da discussão, apresentaremos a interligação existente entre as significações do ponto de vista teórico.

4.1 Contexto histórico e objeto de estudo da aritmética

Tal como anunciamos, nesta seção abordaremos o contexto histórico e o objeto de estudo da aritmética. Importa destacar que não trataremos sobre os conceitos e operações relacionadas à aritmética, uma vez que este estudo será feito no capítulo 5. Nela, para além do estudo comparativo entre as proposições davydovianas e angolanas – também por meio dos conceitos de adição, subtração, multiplicação e divisão – analisaremos a relação universal, particular e singular existente entre as significações que compõem o objeto de estudo.

A palavra aritmética, que significa "arte de calcular", deriva do adjetivo grego "aritmética", formado a partir do substantivo "arithmos", que significa número (ALEXANDROV, 1976).

Segundo Eves (2011, p. 25), o conceito de número e o processo de contar desenvolveram-se tão antes dos primeiros registros históricos (há evidências arqueológicas de que o homem, há uns 50 mil anos, era capaz de contar) que, a maneira como ocorreram, é largamente conjectural. O autor entende que a espécie humana, mesmo nas épocas mais primitivas, tinha algum senso numérico, pelo menos ao ponto de reconhecer mais e menos quando se acrescentavam ou retiravam alguns objetos de uma coleção pequena. A justificativa para tal afirmação é de que estudos mostram que alguns animais são dotados desse senso (EVES, 2011).

Alexandrov (1976) entende que a elaboração deste conceito – hoje conhecido de número – aconteceu lentamente. Segundo o autor, o fato constata-se no modo de contar das diferentes raças que, até em tempos muito recentes, permaneceram em um nível relativamente primitivo de vida social. Importa destacar que, para algumas dessas raças, os números maiores que dois ou três não tinham nome; outras foram um pouco mais longe, mas terminavam após alguns números; as restantes diziam simplesmente “muitos” e “incontáveis”. Apesar disso, gradualmente, os povos acumularam um conjunto de nomes claramente distintos de números (ALEXANDROV, 1976).

A necessidade dos homens de época distantes de conhecerem situações mais específicas – quantos membros constituem sua tribo, quantos são seus inimigos e a necessidade de saber se seus rebanhos aumentavam ou diminuiam, associada à comparação e distinção de coleções de objetos – serviram de base para que Alexandrov (1976) conceituasse o número como:

> Um número (tal como “ dois”, “cinco” etc.) é aquela propriedade das coleções de objetos que é comum a todas as coleções cujos objetos podem colocar-se em correspondência biunívoca uns com os outros, e que é diferente naquelas coleções para as quais tal correspondência é impossível. (ALEXANDROV, 1976, p. 26)

Alexandrov (1976), com base em Newton em sua obra “Aritmética General”, define igualmente o número como sendo não apenas uma coleção de unidades, mas sim como um quociente abstrato de uma certa grandeza a outra, tomada como unidade. De acordo com o autor, este número (quociente), pode ser “inteiro, racional, ou se a grandeza dada for incomensurável com a unidade, irracional” (ALEXANDROV, 1976, p. 47).

Costa (1866) considera a aritmética como uma parte das ciências matemáticas, cujos objetos são os números, considerados particularmente. Segundo o autor, por consideração particular devemos entender a que se aplica sobre as individualidades, ou sobre os fatos dos números. Enquanto por consideração geral, pelo contrário, é a que se aplica sobre as propriedades comuns a todos os números, ou a que respeita às leis que regem as quantidades numéricas.

Os números, considerados em geral, são o objeto da parte das ciências matemáticas que se chama álgebra (questão que trataremos mais tarde); considerados particularmente, são objeto da aritmética (COSTA, 1866, p. 11). O autor entende que aritmética, como parte elementar das ciências dos números, tem por finalidade: ensinar a representar os números, a compô-los e decompô-los, e a compará-los. Ainda de acordo com o autor, os números são considerados como abstratos e concretos. São concretos quando se nomeia a espécie das unidades que os compõem. No entanto, quando tal nomeação não ocorre, chama-se número abstrato. Por exemplo, ao enunciarmos o número três, sem o aplicarmos a nenhuma coleção de objetos, neste caso três é número abstrato; mas, se dizemos: três colunas ou três horas, três é número concreto (COSTA 1866, p. 11).

Os números concretos e abstratos são a base para divisão da aritmética em duas partes: pura e aplicada. Segundo Costa (1866), aritmética pura tem por objeto os números abstratos, enquanto a aritmética aplicada trata dos números concretos. Os números concretos, falando propriamente, não são números, são quantidades.

Neste sentido, vale destacar que a reunião de todas as operações aritméticas para a geração tanto dos números abstratos como para a dos concretos, constitui o cálculo aritmético (COSTA, 1866).

Essa discussão leva-nos a concordar com Alexandrov (1976), ao considerar que os números não aparecem como entidades separadas, mas sim como um sistema com suas relações mútuas e suas regras, que constituem o objeto da aritmética. Ou seja, o objeto da aritmética são as relações entre números. Mas estas relações, conforme o autor, são imagens abstratas das relações quantitativas reais entre coleções de objetos.

Deste último, conclui-se que a aritmética é a ciência das relações quantitativas reais consideradas abstratas, isto é, simplesmente como relações. Assim, cai por terra todas as teses que consideram que a aritmética surge de um pensamento puro, uma vez que ela é reflexo de propriedades definidas das coisas reais e surge de uma longa experiência prática de muitas gerações (ALEXANDROV, 1976).

Até o momento, debruçamo-nos sobre o contexto histórico e o objeto de estudo da aritmética. Na sequência, apresentaremos as bases que serviram de alicerce para o surgimento da geometria e seus objetos de estudo.

4.2 Contexto histórico e objeto de estudo da Geometria

Antes de abordar esta seção, importa destacar que a geometria, concretamente os seus conceitos, é objeto de estudo de diversos pesquisadores (POGORÉLOV, 1974; ALEXANDROV, 1976; MAME 2014; CANDIOTTO, 2016, etc.). No entanto, nesta subseção não se pretende trazer de volta essas discussões, tampouco aprofundá-las. Antes pelo contrário, apegar-se-á em alguns dos seus conceitos e pontos de vista para fundamentar seu contexto histórico e seu objeto de estudo, dada a necessidade de explicitar o objeto de estudo da presente investigação.

Segundo Pogorolov (1974, p. 17), geometria, palavra grega, significa medição da terra. É a ciência que trata das propriedades das figuras geométricas empregadas para a medição de extensões. Sua origem apresenta semelhanças à história da aritmética e é creditada aos egípcios, em virtude da necessidade prática de fazer medidas de terras, após cada inundação anual no vale do rio Nilo (BOYER, 1974).

Smogorzhevski (1978) considera que a pátria da geometria é os países do Antigo Oriente, onde – durantes vários milênios e devido às necessidades da agrimensura, arquitetura e astronomia – foram elaborados importantes princípios de aspectos práticos para a medição de: ângulos, áreas de algumas figuras e volumes dos corpos mais simples. Segundo o autor, estes princípios se elaboraram empiricamente (por meios práticos) e, aparentemente, transmitidos oralmente. Nos textos matemáticos que chegaram até nós, frequentemente, encontramos aplicações de princípios geométricos, mas sem evidências de tentativas de formulá-los (SMOGORZHEVSKI, 1978, p. 6).

Essas tentativas de formulação dos princípios geométricos ocorreram com a ampliação do número de objetos com pendor fortemente geométrico, disponíveis naquele contexto histórico. Isso permitiu que a geometria passasse dos conceitos concretos para os conceitos abstratos. Estes últimos são constatáveis, em Smogorzhevski (1978), ao dizer que:

> Con el tiempo, cuando se amplió el círculo de objetos a los que se aplicaban los conocimientos geométricos adquiridos, se puso en claro la necesidad de formular los principios geométricos en su forma más general, hecho que determinó el paso en la geometría de conceptos concretos a conceptos abstractos. Así, por ejemplo, el princípio elaborado para medir el área de una parcela rectangular de tierra resultó ser apto para medir el área de una alfombra, la superficie de una pared, etc., y, como resultado, surgió la noción abstracta de rectangulo. De este modo se constituyó el sistema de conocimientos que obtuvo el nombre de geometría. En la primera fase de su desarrollo, la geometría era una ciênciaempírica, es decir, una ciencia en la que todos los resultados se deducendirectamente en la práctica. (SMOGORZHEVSKI, 1978, p. 6)

A origem da geometria, foi de igual modo objeto de estudo de Alexandrov (1976). Ele também afirma que a geometria teve sua origem nas atividades práticas e nos problemas da vida cotidiana. Para a justificação de sua afirmativa Alexandrov (1976) cita Eudemo de Rodas ao dizer que:

> A geometria foi descoberta pelos egípcios como resultado das medidas de suas terras. Estas medidas eram necessárias devido às inundações do Nilo, que constantemente apagavam as fronteiras. (ALEXANDROV, 1976, p. 39 tradução nossa)[33]

[33] [...] La geometría fue descubierta por los egipcios como resultado de las medidas de sus tierras, y estas medidas eran necesarias debido a las inundaciones del Nilo, que constantemente borraban las fronteras.

Candiotto (2016) considera que as medições de terras são uma especificidade do desenvolvimento dessa ciência, que revelam um elemento particular na satisfação das necessidades humanas: a propriedade privada.

Para o autor, a referida vinculação se apresenta no contexto histórico do Egito Antigo, em que “as relações comerciais e territoriais ganhavam força, ainda distante da propriedade privada na forma atual” (CANDIOTTO, 2016, p. 29). Como Boyer (1974) e Alexandrov (1978), Casanova (1965), outro teórico da matemática afirma que a geometria surge das necessidades, que tinham os egípcios de medir seus campos inundados periodicamente pelo Nilo. Isso ocorreu por duas razões: “para exigir uma redução de impostos, como afirma Heródoto, escritor grego do século V antes da nossa era, e para restabelecer os limites de suas propriedades, como sustenta Proclus em seu comentário sobre Euclides” (CASANOVA, 1965, p. 1).

Alexandrov (1976) afirma que os conceitos geométricos mais antigos da qual se tem notícias também pertencem aos tempos pré-históricos e são consequência, igualmente, das atividades práticas. Este fato acontece quando o homem entra em contato com a natureza, não só para satisfação das suas necessidades diárias, mas também como reflexo do processo de transformação da própria natureza.

Esta constatação foi analisada por Mame (2014), ao recorrer a Aleksandrov (1976), quando diz que os primeiros homens chegaram às formas geométricas por meio da natureza. Nela, porém, os olhos raramente encontram linhas autenticamente retas, nem com triângulos ou quadrados perfeitos.

Para o referido autor, a principal razão que levou o homem a conceber, gradualmente, as figuras foi a sua observação ativa da natureza, no sentido de satisfazer suas necessidades. Isso lhe exigia a manufaturação de objetos cada vez mais regulares em sua forma (ALEXANDROV, 1976, apud MAME, 2014, p. 59).

Vale destacar que a origem da geometria não se resume apenas na medição de terras, como condição para a redução de impostos ou para restabelecimento dos limites. Segundo Alexandrov (1976), os antigos formaram ideias sobre a geometria, partindo de fragmentos que relatavam os problemas dos antigos egípcios e babilônios. De acordo com o autor, um dos textos egípcios mais antigos é anterior ao ano 1700 a.C. Trata-se de um manual de instrução para secretários (funcionários reais), escrito por um tal de Ahmes, que contém uma coleção de problemas sobre o cálculo de capacidades dos recipientes e armazéns, de áreas de porções de terras, de dimensões de aterros, etc (ALEXANDROV, 1976, p. 39).

As exposições referenciadas demonstram que tanto os egípcios quanto os babilônios e outras civilizações antigas da época possuíam os conhecimentos geométricos, a partir das necessidades diárias. À medida que estas necessidades se ampliaram, tomaram novas formas, sentidos e significados, deu-se lugar ao desenvolvimento dos conceitos, axiomas e propriedades que fazem da geometria, no contexto atual, uma ciência. Na atualidade, sua preocupação é trabalhar com os corpos geométricos e figuras, bem como estudar suas relações mútuas, desde o ponto de vista das suas magnitudes, posições, bem como das formas espaciais.

Neste sentido, concorda-se com Ovtchinnikov (1955), citado por Candiotto (2016, p. 33), ao afirmar que "a análise das formas espaciais constitui o conteúdo da geometria, que considera as relações espaciais entre as coisas, abstraindo-se das próprias coisas". A geometria, como ciência que estuda as relações espaciais das coisas do mundo exterior, resulta de um prolongado trabalho de abstração do pensamento humano (OVTCHINNIKOV, 1955, p. 249 apud CANDIOTTO 2016, p. 33).

Partindo de Mame (2014), com base em Alexandrov (1976), pode-se afirmar que, constitui objeto de estudo da geometria as formas espaciais e as relações dos corpos reais, desde que se eliminem deles as restantes propriedades e considere-os de um ponto de vista puramente abstrato. Este nível de abstração permite "a distinção da geometria de outras ciências que também se ocupam das formas espaciais e das relações com os corpos" (ALEXANDROV, 1976, p. 41).

4.3 Contexto histórico e objeto de estudo da Álgebra

Na presente seção, abordaremos o contexto histórico e o objeto de estudo da álgebra. Nela, apresentaremos de forma sintética o processo evolutivo da álgebra, sem aprofundar suas particularidades enquanto campo de conhecimento, que teve grande contribuição no surgimento de outras áreas que compõem a matemática como um todo.

De acordo com Alexandrov (1976) e Ribnikov (1987), a palavra álgebra surge do nome de um tratado do matemático e astrônomo Mahommed ibn Musa al-Kharizmi que viveu no século IX. Este tratado levava o título de Al-jebr *w´al-muqabala* que significa: transposição e eliminação (ALEXANDROV, 1976, p. 62). De acordo com o autor, por transposição (al-jebr) se entende a transferência de termo ao outro membro da equação e, por eliminação (al-muqabala), a cancelação de termos iguais em ambos os membros (ALEXANDROV, 1976, p. 62).

O significado do tratado sobre a álgebra, apresentado por Alexandrov (1976), está de acordo com a idéia de Ribnikov (1987), ao afirmar que:

> El título traducido significa: libro sobre operaciones jabr (restablecimiento) e qabala (reducción). La primera de las operaciones cuyo nombre sirvió de denominación para el álgebra, y sirve aún en nuestra época, consiste en el traslado de términos de una ecuación de un lado a otro. La segunda es la operación de reducción de términos semejantes de la ecuación. (RIBNIKOV 1987, p. 113)

Vale destacar que com o desenvolvimento do processo histórico, a palavra árabe *al-jabr* se converteu em (álgebra) ao ser transcrita do latim, enquanto que *al-muqabala* foi descartada. A conversão da palavra *al-jabr* para álgebra, expressão usada até os dias atuais, corresponde ao conteúdo real científico desta área de conhecimento.

De acordo com Alexandrov (1976, p. 62), álgebra é na essência a doutrina das operações matemáticas consideradas formalmente do ponto vista geral, com abstrações dos números concretos. Seus problemas estão relacionados fundamentalmente com as regras formais para as transformações de expressões e a solução de equações. O autor aprofunda a definição citando Omar Khayyam para quem a álgebra é a ciência para resolução de equações. Esta definição teve, na perspetiva de Alexandrov (1976), um significado até finais do século XIX, quando a álgebra, junto com as teorias das equações, tomou novas instruções, por consequência da modificação essencial de seu caráter. No entanto, não alterou o aspecto de generalidade que possui como ciência das operações formais (ALEXANDROV, 1976).
A álgebra caracteriza-se, em primeiro lugar, pelos seus métodos, que implicam o uso de letras e expressões literais, sobre as quais se realizam operações com propriedades dadas. Nela, as letras denotam números ordinários. Portanto, “as operações gerais têm por base as leis gerais das operações com números” (DELONE, 1976, p. 315).

O conceito de número, quantidade e grandezas constitui a base das investigações algébricas. Neste sentido, a generalidade e o campo de aplicações dos métodos algébrico-literais são determinados pela generalidade do conceito de número (RIBNIKOV, 1987).

O autor considera a álgebra como uma arte científica, cujo objeto são os números absolutos e as grandezas mensuráveis, que são desconhecidas, mas se referem a qualquer coisa conhecida de tal forma que podem ser determinadas. Para Ribnikov (1987), essa coisa conhecida é uma quantidade ou relação determinada individualmente, que é obtida pela análise das condições do problema. Nesta arte, diz o autor, buscam-se as relações que ligam as grandezas dadas no problema com o desconhecido, que constituem o objeto da álgebra. Assim sendo, “o aperfeiçoamento desta arte consiste no conhecimento dos métodos matemáticos, com os quais se pode fazer a referida determinação, tanto das incógnitas numéricas como geométricas" (RIBNIKOV, 1987, p. 112).

Assim como a aritmética e a geometria, a álgebra como parte da matemática, percorreu um longo período para o seu desenvolvimento. Os séculos XVIII a XIX são considerados como o período do auge de todas as transformações do pensamento algébrico, até chegar aos dias atuais em que ela possui problema científico próprio. De acordo com Ribnikov (1987), os caminhos do desenvolvimento da álgebra foram determinados no começo do século XVIII, quando no ano de 1707 se viu à luz da "Aritmética Universal" de I. Newton. Em tal contexto, "a álgebra foi colocada em estreita conexão com o desenvolvimento dos métodos de cálculo como uma fase superior da aritmética; deixando as questões geométricas no domínio das aplicações" (RIBNIKOV 1987, p. 311). Para o autor, desde o começo, Newton apresenta as operações tanto como expressões simbólicas-literais como números (inteiros e fracionários).

Ainda, de acordo com Ribnikov (1987), Newton ao apresentar as técnicas das transformações algébricas idênticas, ele igualmente referencia os métodos de resolução de equações. Para tanto, toma um grande número de exemplos da geometria, mecânica e de outras ciências. Também, demonstra a redução do problema da formação de uma equação algébrica, cuja raiz é a solução do problema.

No prosseguimento da sua análise sobre a evolução histórica sobre a álgebra, Ribnikov (1987) afirma que a temática, em relação à álgebra da "Aritmética Universal", esteve no centro de atenção de muitos eminentes matemáticos do século XVIII. Considera como os mais destacados: Hallley, Lagrange, Mouraille e Fourier que elaboraram os procedimentos para a resolução numérica das equações (tanto exatas, como aproximadas).

Depois da "Aritmética Universal" de Newton, surgiu uma série de monografias que continham uma construção sistemática da álgebra. De acordo com Ribnikov (1987), uma delas é o tratado sobre álgebra de Maclaurin (1748), que foi preferencialmente um comentário do livro de Newton, no qual citava as demonstrações. A subsequente obra, com maior particularidade, foi a famosa "Aritmética Universal" de Euler, em que a álgebra, como ciência independente, destacava-se ainda mais precisamente.

A "Aritmética Universal" de Euler, reeditada em diferentes idiomas (latim, francês e holandês), teve uma grande influência na determinação do problema científico da álgebra e na estrutura do curso de álgebra nas universidades. A natureza monográfica deste livro e os objetivos que seu autor levantou perante seus pares permitiram que seu conteúdo julgasse o estado da álgebra, na segunda metade do século XVIII (RIBNIKOV, 1987). A álgebra, no decurso de sua história e desenvolvimento, conheceu outras mudanças qualitativas. Uma delas está situada na primeira metade do século XIX, quando surgiram novas teorias que levaram a mudanças em seu caráter e a uma extensão de seu objeto e campo de aplicação (ALEXANDROV, 1976).

Vale salientar que, em sua forma original, a álgebra tratava de operações matemáticas com números, considerados desde um ponto de vista formal, com abstração de números concretos dados. Esta abstração encontrou sua expressão no fato de que, na álgebra, as grandezas são representadas por letras, para as quais os cálculos são feitos de acordo com regras formais estabelecidas (ALEXANDROV, 1976).

De acordo com o autor referido, a álgebra contemporânea mantém essa base, mas a estende consideravelmente. No contexto atual, ela considera as grandezas de natureza muito mais geral do que a dos números. Nessas grandezas, a álgebra contemporânea estuda operações que são bastante análogas, em suas propriedades formais, às operações aritméticas: adição, subtração, multiplicação e divisão. Alexandrov (1976) toma como exemplo as grandezas vetoriais, que podem ser adicionadas pela conhecida regra do paralelogramo. Mas, a generalização contemporânea é tal que, mesmo o termo grandezas, muitas vezes, perde o seu significado e fala-se de forma mais geral de "elementos" sobre os quais é possível realizar operações semelhantes às operações algébricas usuais. Por exemplo, dois movimentos executados um após o outro são evidentemente equivalentes a certo movimento único, que é a soma dos dois. Duas transformações algébricas de uma fórmula podem ser equivalentes a uma única transformação que produz o mesmo resultado, etc. Assim, é possível falar da adição característica de movimentos ou transformações. Tudo isso e muito mais é estudado de forma abstrata e geral na álgebra contemporânea (ALEXANDROV, 1976, p. 82).

Portanto, a álgebra se desenvolveu no período do século XVIII ao século XIX. Isso ocorreu graças às investigações de um conjunto de estudiosos matemáticos da época. Entre eles, destacam-se as premissas de criação da teoria de Galois, matemático francês, e a teoria de grupos. Importa salientar que os conceitos, métodos e resultados da álgebra encontram importantes aplicações em análise matemática, geometria, física e cristalografia (ALEXANDROV, 1976, p. 82).

Enfim, dada a extensão dos estudos sobre a álgebra, importa terminar a discussão tomando os argumentos de Boyer (1974) e Eves (1995) ao afirmarem que a álgebra, ao longo do seu processo histórico, conheceu três estágios de desenvolvimento tais como:

a) O primitivo ou retórico, em que tudo é completamente escrito em palavras;
b) Um estágio intermédio, sincopado, em que são adotadas algumas abreviações;
c) Um estágio simbólico ou final.
d) De acordo Boyer (1974, p. 132), “uma tal divisão arbitrária do desenvolvimento da álgebra em três estágios é naturalmente uma simplificação excessiva; mas serve como primeira aproximação ao que aconteceu”.

O exposto acima, no caso, a discussão sobre a álgebra encerra o debate do contexto histórico e objeto de estudo das significações aritméticas, geométricas e algébricas. Na próxima seção, apresentar-se-á a interligação entre as significações aritméticas, geométricas e algébricas.

4.4 A interligação entre as significações aritméticas, geométricas e algébricas

Até o momento, procuramos apresentar o contexto histórico e o objeto de estudo das significações aritméticas, geométricas e algébricas. Apresentamo-las de forma isolada, porém sem a intenção de fragmentá-las, enquanto partes constituintes da matemática. Estes entes matemáticos estão unidos ao mesmo objeto de estudo, que são as relações quantitativas e as formas espaciais do mundo real, conforme anunciamos na parte inicial deste capítulo. Estas diferentes áreas matemáticas têm ligação com as formas particulares, individuais, destas relações quantitativas e formas espaciais ou se distinguem pela singularidade de seus métodos (RIBNIKOV, 1987).

Segundo Alexandrov (1976, p. 43) “a interligação das teorias matemáticas leva a avanços da própria matemática e, também, descobre um rico corpo de relações mútuas no mundo real que sustentam essas teorias”.

A interligação entre aritmética, geometria e álgebra constitui as bases pelas quais foram elaboradas todas as investigações sobre a matemática, como demonstraremos nos parágrafos subsequentes. Para tal, teremos como base os argumentos de Alexandrov e Ribnikov.

Quanto à interligação entre aritmética e a geometria, Alexandrov (1976) considera que ambas não apenas se aplicam uma à outra, como também são fontes de outros métodos, ideias e teorias gerais. Em última análise, a aritmética e a geometria são as duas raízes pelas quais toda a matemática avançou. Sua influência mútua é sentida desde o momento de seu nascimento (ALEXANDROV, 1976). De acordo com o autor, a simples medição de uma linha representa uma fusão de geometria e aritmética. Para medir o cumprimento de um objeto, aplica-se a este uma unidade de comprimento e calculam-se quantas vezes é possível repetir esta operação. A primeira etapa (aplicação) é de natureza geométrica, a segunda (cálculo) é aritmética. O autor prossegue com a sua visão de unidade entre a geometria e aritmética ao afirmar que "quem conta seus passos ao caminhar já está aderindo a estas duas operações" (ALEXANDROV, 1976, p. 43).

Salientamos que, no geral, a medição de qualquer grandeza associa o cálculo com alguma operação específica que é característica desta grandeza. Para tal, sugere-se a medição de um líquido em um recipiente graduado ou de um intervalo de tempo pela contagem do número de oscilações de um pêndulo. Porém, pode existir a probabilidade de que, no processo de medição, a unidade escolhida não contenha um número inteiro de vezes na grandeza a ser medida, fazendo com que seja insuficiente o cálculo do número de unidades.

Neste âmbito, a alternativa será dividir a unidade de medida para expressar a grandeza com maior precisão em partes da unidade, isto é, não por números inteiros, mas por meio de frações. Esta última, surge da ação mútua entre a aritmética e a geometria, concretamente no processo de divisão e comparação de grandezas, isto é, das medições. As primeiras grandezas a serem medidas foram de caráter geométrico: comprimentos, superfícies, volumes, como nos demonstra Alexandrov (1976, p. 43-44):

> En general, a medición de cualquer magnitude combina el cálculo com alguna operación específica que es característica de esta magnitude. Basta mencionar la medida de un líquido en un recipiente graduado o la de un intervalo de tiempo contando el número de oscilaciones de un péndulo. Pero en processo de medida generalmente ocurre que la unidad elegida no está contenida un número entero de veces en la magnitude a medir, por lo que el simples cálculo del número de unidades no es suficiente. Surge entonces la necessidad de fraccionar la unidad de medida para poder expresar a magnitude com mayor exactitud en partes de la unidad; esto es, no mediante números enteros sino por medio de fracciones. Fue asi como surgieron realmente las fracciones, hecho que se ha demostrado por el análisis de datos historicos y de otros tipos. Surgieron de la división y comparación de las magnitudes contiunuas; en otras palabras, de las mediciones. Las primeras magnitudes que se medieron fueron de carácter geométrico: longitudes, superfícies de labranza y volúmenes de líquidos ou materiales desmenuzables, por lo que ya en la primera aparición de las fracciones se observa la acción mútua de la geométria y aritimética.

Além das frações, a ação mútua da aritmética e geometria contribui para o surgimento dos intervalos incomensuráveis. Importa destacar que dois intervalos são chamados de incomensuráveis se não houver um dos quais que possa ser aplicado a cada um deles um número inteiro de vezes. Em outras palavras, se seu quociente não puder ser expresso por uma fração ordinária "um quociente de números inteiros" (ALEXANDROV 1976, p. 44).

Um outro contributo da interligação da aritmética e geometria foi o surgimento do número real. Este, em seu sentido original, nada mais é do que o quociente de uma grandeza para outra tomada como uma unidade. Em casos particulares, é um quociente de intervalos, mas também pode ser um quociente de áreas, pesos, etc. Portanto, um número real é em geral um quociente de grandeza, em que sua natureza concreta foi abstraída. Assim como os inteiros abstratos têm interesse matemático em seus relacionamentos mútuos, os reais abstratos apenas adquirem conteúdo e se tornam um objeto de interesse matemático, quando se relacionam uns com os outros dentro do sistema de números reais (ALEXANDROV 1976, p. 47).

A interação da geometria e da aritmética serviu para algo mais que formar o conceito de número real. Esta mesma interação da geometria com a aritmética (ou mais concretamente, com a álgebra), diz Alexandrov (1976, p. 55), também influenciou a formação dos números negativos e dos complexos, isto é, número na forma $a + b\sqrt{-1}$. Vale destacar que os números negativos representam-se por pontos de uma linha reta situados à esquerda do ponto correspondente a zero. Foi exatamente esta representação geométrica que proporcionou aos números imaginários seu posto seguro nas ciências matemáticas, uma vez que não haviam sido compreendidos. No entanto, da interação, surgiram novos conceitos, como por exemplo, os vetores, que estão representados por segmentos de reta orientados, e os tensores, cuja generalidade é ainda maior. Neste caso, a álgebra é novamente associada à geometria (ALEXANDROV, 1976).

Importa salientar que a interação da álgebra com a aritmética, de um lado, conserva a composição de métodos numéricos. De outro lado, tinha lugar uma interpenetração muito estreita dos métodos e problemas de álgebra e a teoria dos números, principalmente, no domínio relativo à análise diofântica.

Do exposto, fica claro que a união de várias teorias matemáticas, sobretudo aquelas que constituem objeto da nossa investigação, desempenharam um papel decisivo no desenvolvimento da matemática. Elas contribuíram para o surgimento de outras áreas como: a geometria analítica e descritiva, cálculo diferencial integral, teorias de números, teorias de funções de variáveis complexas, análise funcional, etc. Trata-se de matemáticas superiores que os estudantes terão contacto no nível universitário, cuja base deve ser bem alicerçada nas classes iniciais do ensino fundamental.

No próximo capítulo a discussão se volta para a análise do modo de organização do ensino de matemática das proposições do sistema Elkonin-Davídov-Repkin e do sistema angolano (Nascimento, António e M´Fuansuka). A análise terá como foco a interligação entre a aritmética, a geometria e a álgebra e sua caracterização quanto às categorias universal, singular e particular.

5 ANÁLISE DAS PROPOSIÇÕES O SISTEMA ELKONIN-DAVÍDOV-REPKIN E ANGOLANAS QUE EXPLICITAM O OBJETO DE INVESTIGAÇÃO.

Tal como foi anunciado anteriormente, no presente capítulo, a análise se volta para o modo de organização do ensino de matemática a partir das proposições do sistema Elkonin-Davidov-Repkin e do sistema angolano (Nascimento, António e M´Fuansuka). A análise terá como foco a interligação entre a aritmética, a geometria e a álgebra, bem como sua caracterização quanto às categorias universal, singular e particular. Dada a complexidade do estudo, assim como a existência de inúmeras tarefas que explicitam os entes que constituem o objeto de estudo, delimitaremos a investigação para análise dos conceitos de adição, subtração, multiplicação e divisão. Partimos do pressuposto de que nestes conceitos encontraremos a interligação necessária para a objetivação da tese tal como foi sempre anunciado no decorrer dos capítulos anteriores.

O capítulo será dividido em duas subsecções, sendo a que a primeira abordará as proposições do sistema Elkonin-Davídov-Repkin do primeiro ano do ensino fundamental que explicitam o objeto de estudo, e a segunda sobre as proposições angolanas (Nascimento, António e M´Fuansuka) para o primeiro ano do ensino fundamental que também explicitam o objeto de estudo.

5.1 Proposições do sistema Elkonin-Davídov-Repkin do primeiro ano do ensino fundamental que explicitam o objeto de estudo

Na presente subseção, analisaremos as proposições do sistema Elkonin-Davídov-Repkin que explicitam a interligação entre as significações aritméticas, geométricas e algébricas, e seu movimento universal, particular e singular. Dado que existe um conjunto de possibilidades conceituais para o estabelecimento do objeto de estudo, elegemos os conceitos de adição, subtração, multiplicação e divisão. Para tal, selecionamos tarefas do primeiro ano do ensino fundamental que apresentam tais conceitos.

5.1.1 Comparação de grandezas, Linha reta e Igualdade e Desigualdade

Uma das particularidades da teoria histórico-cultural, cujo objeto de estudo se insere, é o seu caráter ativo no ato de ensinar. Ou seja, nas diversas investigações desta corrente defende-se a organização do ensino de tal forma que ele promova o desenvolvimento das funções mentais das crianças, a partir da sala de situações de aprendizagem, isto é, da educação escolar.

Esta afirmação se respalda em Longarezi e Puentes (2013), ao afirmarem que, para a teoria marxista, a psicologia histórico-cultural e a didática desenvolvimental concebem como verdadeiro papel da escola criar um tipo específico de orientação pedagógica que permita desenvolver no aluno aquilo que fora dela não teria condições de desenvolver: o pensamento teórico. Dito de outro modo, "a função da escola é desenvolver no aluno as funções mentais superiores que o tornam humano, tendo como foco o pensamento teórico, pela via da formação dos conceitos científicos e das ações mentais" (LONGAREZI; PUENTES, 2013, p. 10). Esse desenvolvimento das funções mentais irá depender da participação da escola, sobretudo na comunicação das crianças com os adultos e com os colegas, da ação conjunta, da natureza do conteúdo, do tipo de estrutura e da especificidade da atividade (PUENTES, 2013).

A afirmação de Puentes está em concordância com Vigotski (1993, p. 183) quando diz que:

> El desarrolo del concepto científico de carácter social se produce en las condiciones del proceso de instrucción, que constituye una forma singular de cooperación sistemática del pedagogo com el niño. Durante el desarrolo de esta cooperación maduran las funciones psíquicas superiores del niño com la ayuda y participación del adulto. La singular cooperación entre el niño y el adulto es el aspecto crucial del proceso de instrucción, junto con los conocimientos que le son transmitidos al niño según un determinadosistema. Estos factores explican la maduración temperana de los conceptos científico y también el hecho de que el nivel de su desarrollo intervenga como una zona de posibilidades muy proximas a los conceptos cotidianos, abriéndoles el camino y preparando su desarrollo.

Com base nessas premissas, Davýdov (1982) entende que o melhor ensino é aquele que promove o desenvolvimento do pensamento teórico, nos estudantes, em nível contemporâneo, o que requer métodos e conteúdos de ensino adequados.

A visão de Vigotski e Davydov requer que o estudante tenha diante de si um ensino bem-estruturado e organizado de modo que lhe proporcione a assimilação de conhecimento que sirva de base para o seu desenvolvimento psíquico. Esta organização caberá à escola e aos adultos de modo que eleve a criança para uma zona diferente em relação à que ela trouxe ao chegar na escola.

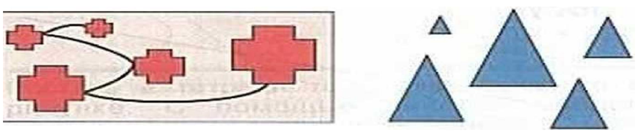
Puentes (2013) debruça-se sobre a questão organizativa do processo de educação e ensino como condição para que a criança assimile a cultura e, por consequência, permita o seu desenvolvimento psíquico. Nesse sentido, afirma que a apropriação (assimilação) da cultura, como fonte do desenvolvimento psíquico, tem lugar, segundo Zaporozhets, no processo de educação e ensino realizado pelo adulto que organiza a vida da criança. O autor considera que a afirmação de Zaporozhets retoma a tese vigotskiana do papel ativo da educação e do ensino em relação ao desenvolvimento (PUENTES, 2013, p. 177).

Mais adiante, Puentes cita Vigotski afirmando que o ensino mais adequado é aquele que se dirige para a zona de desenvolvimento possível, levando em consideração, como ponto de partida, o desenvolvimento efetivo ou real, pois, como ele mesmo indicara: o único bom ensino é aquele que se adianta ao desenvolvimento. E acrescenta que a pedagogia não deve orientar-se em direção ao passado, mas para o futuro (do amanhã) do desenvolvimento da criança (VIGOSTSKI, 2010, p. 114).

É com base nos pressupostos da teoria histórico-cultural que Elkonin-Davídov-Repkin e colaboradores organizam o ensino da matemática do primeiro ano do ensino fundamental, tendo como base a promoção da atividade investigativa das crianças. Prestam maior atenção nas possibilidades das crianças para que elas elaborem perguntas boas, a fim de que, aos poucos, ajam de forma independente. Para tal, Davydov e colaboradores propõem tarefas que propiciam a fala sobre as figuras e objetos. Para isso, utilizam-se da análise para identificar a **igualdade** ou **diferença** de formas de figuras que imitam objetos (xícara, brinquedos, entre outros). Também, desencadeiam o processo de comparação do tamanho de duas formas para indicar se são **iguais**, ou **maiores**/**menores** em relação a uma determinada forma, tamanho de um determinada grandeza. Estas tarefas são premissas para no futuro introduzir aquelas em que se manifestarão as operações de **adição**, **subtração**, **multiplicação**, **divisão** para citar alguns conceitos.

Neste sentido, é apresentada a figura número 1, que expõe uma ordem crescente de tamanhos.

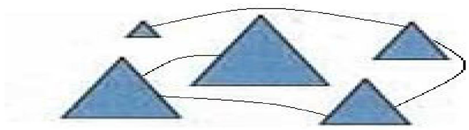
Figura 1-Tarefa que expõe uma ordem crescente de tamanhos



Fonte:Давыдов, В. В. *et al.*, 2011.

Para a análise da tarefa, o professor promove a ação investigativa fazendo o seguinte questionamento: como foram interligadas estas figuras? Faça ligação igual entre os triângulos usando a vara. A intenção é que, no ato de investigação, os estudantes indaguem-se e levantem várias possibilidades para que, no final, cheguem à conclusão de que as figuras foram interligadas em ordem crescente, da menor para a maior. Assim, a ligação entre triângulos será apresentada da seguinte forma:

Figura 2-Ligação entre Triângulos será:



Fonte: Давыдов, В. В. et al., 2011.

Vale salientar que o professor não tem a obrigação de apresentar, nesse estágio da organização do ensino, o conceito de triângulo, uma vez que este conceito geométrico é apresentado no segundo ano do ensino fundamental. Porém, se manifestar a curiosidade, por parte dos estudantes, o professor dirá que em breve ele será desenvolvido, o que requer o trânsito por outros conceitos. Vale mencionar que a primeira ideia a ser elaborada do conceito de triângulo, no segundo ano, é de que se trata de uma figura fechada quebrada, composta de três pontos unidos por três segmentos não colineares, cujos ângulos internos são agudos (MAME, 2014). Vale destacar que neste ato curioso de antecipação do conceito de triângulo, o professor não deve anunciar suas particularidades, deixando-as para o ano subsequente.

A tarefa da figura 3 propõe o desenho de uma linha reta; nela, marcar dois pontos e destacar, com lápis de outra cor, a parte entre eles, com a indicação que tal parte chama-se segmento. Suas extremidades são os pontos ou traços verticais (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2008).

Figura 3-Linha reta, ponto e segmento.

Fonte: Давыдов, В. В. *et al.* (2011).

A organização das tarefas permite a formação de conceitos geométricos e a adoção de procedimentos para a análise de problemas disponíveis no cotidiano dos estudantes. Pressupõe o domínio do sistema de conceitos e o desenvolvimento de capacidades peculiares, como a demonstração (BUTKIN, 2001) que, no início da escolaridade, não se trata da aplicação formal do método axiomático de provar um teorema com base na sua hipótese e tese. Em vez disso, a criança expressa as articulações do sistema conceitual (VIGOTSKI, 2001). Assim, o segmento não se apresenta isolado, mas pela existência da reta, na indicação de dois pontos e do intervalo que o define. No caso, a demonstração elucida as condições de existência do conceito, sem explicitar a distinção se necessária ou suficiente (MAME, 2014, p. 76).

Matos (2017) afirma que os segmentos têm seus elementos entre aqueles que compõem a reta numérica. Durante o processo de desenvolvimento das tarefas ele se constituirá em um dos elementos de um esquema de interpretação de problemas. É nesse sentido que, na próxima tarefa, eles se apresentarão na representação da relação entre volumes de líquido. Estes são imprescindíveis no movimento orientado do geral (que nos conceitos teóricos da matemática é a *relação entre grandezas*) como base para a ulterior identificação de suas manifestações particulares nas situações-problema diversas (DAVÝDOV, 1982, apud MATOS 2017, p. 41-42).

A próxima tarefa (Figura 4) exigirá a participação intelectual ativa das crianças para contemplar a unidade de um sistema conceitual constituído pelo ponto, como determinante para definir o segmento (origem e extremidade); a linha reta e as noções sobre finito e infinito. O professor solicitará para que marquem dois pontos e, em seguida, una-os com um segmento. A orientação é para pegar uma régua e prolongar o segmento em ambos os sentidos. Isso induz as perguntas: Qual o tipo de linha? O quanto ela pode ser estendida? Ela teria fim ou não? Para Горбов, Микулина e Савельева (2008), o debate é decisivo para que as crianças percebam que é possível continuar a linha ilimitadamente, porém impossível sua representação na folha de papel e no quadro, pelas limitações de suas extensões. Também, estabelece algumas diferenças em termos conceituais do tipo: a linha reta não tem extremos determinados, porque é sempre possível continuá-la passando por todos os seus pontos. O segmento, como sendo uma parte da linha reta, é limitado por dois de seus pontos.

Figura 4-Distinção entre Segmento e Reta

Fonte: Rosa (2012, p. 89).

A ação com os objetos – no caso das tarefas com o uso da régua, lápis, folhas – requer forças intelectuais, cognoscitivas e físicas, peculiares ao gênero humano. Para Elkonin (1987), as circunstâncias para aprendizagem da criança e do adulto se apresentam como ampliação da esfera e elevação do nível de domínio das ações com objetos. Isso ocorrerá se a organização do ensino os colocar em atividade de estudo, com destaque para duas características do objeto do ensino: a apropriação de conhecimentos e sua direção. Há tarefas que parecem quebrar esse vínculo. Porém, apresentam-se como algo necessário, como um componente a ser incluído no sistema de conceito, tornando as elaborações mais complexas (MAME, 2014).

Apresentar-se-ão, em seguida, essas articulações (relação entre grandezas e conceitos geométricos) não explícitas, com tarefas voltadas à medida de comprimento. Para Горбов, Микулина e Савельева (2008), o comprimento é a primeira especificação da ideia de tamanho. Rosa (2012), com base em Freudenthal (1975) e Eves (2007), afirma que o comprimento é a mais matemática das grandezas e um dos conceitos fundamentais da geometria.

Nas tarefas subsequentes, os estudantes são submetidos à análise conceitual de comprimento, área, volume e massa atreladas às primeiras abstrações: igualdade, desigualdade e quantidade. Isso significa que, aos poucos, a universalidade, o geral, dos conceitos matemáticos (relação entre grandezas) vão se explicitando – às vezes, singularmente como também particularmente – nas tarefas. Assim como nas tarefas anteriores, nestas promove-se a ação investigativa por meio de perguntas. Nas primeiras tarefas, o objetivo será o de analisar a igualdade entre os objetos, tendo por base o comprimento e a massa. Para a respectiva comparação, usar-se- ão os segmentos como auxílio de verificação (figura 5).

Figura 5-Igualdade entre os objetos.

Fonte: ДАВЫДОВ, В. В. *et al.* (2011).

Para a ação investigativa, o professor questiona os estudantes: Qual é a característica que torna estes objetos iguais? Os estudantes analisam cada uma das características conhecidas (se for necessário o professor faz as comparações, colocando os corpos um contra o outro de modos diferentes). Depois de várias possibilidades, chega-se à conclusão de que os objetos se diferenciam, respectivamente pela altura e pela massa, conforme a figura 6.

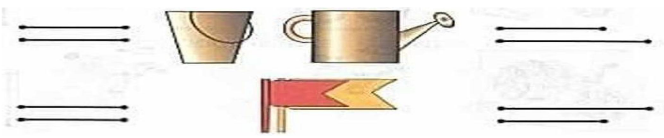
Figura 6-Demonstração da igualdade pela altura e pela massa.

Fonte: Aptação de ДАВЫДОВ, B. B. *et al.* (2011).

No sistema Elkonin-Davidov-Repkin, é criteriosa a postura de contemplar os pressupostos do método materialista histórico e dialético. Observa-se que as tarefas particulares – como estas analisadas – partem de algo que caracteriza uma atividade prática, mas não fica nela em si, o que caracterizaria um processo de apropriação empírica de conceito. É para evitar tal tipo de assimilação que a tarefa propõe uma representação geométrica por meio de segmentos (aí está a explicação da necessidade da tarefa anterior que envolveu ponto, reta e segmento). Além disso, há os primeiros indícios da ação de modelação de duas formas: modelo objetal (figuras referências de análise) e gráfica (segmentos). Também, é manifestação da transição da gênese do conhecimento matemático (atividade prática) com as primeiras manifestações de registros gráficos.

Uma tarefa, semelhante à anterior, é colocada à disposição dos estudantes, que promovem a análise das caraterísticas que indicarão objetos iguais e desiguais (figura 7).

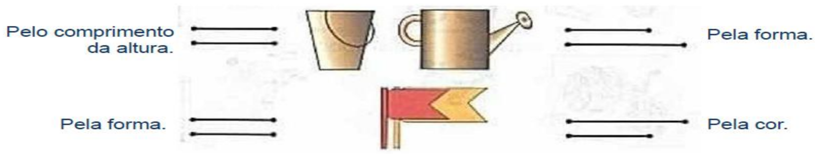
Figura 7-Igualdade e desigualdade de objetos.



Fonte: ДАВЫДОВ, B. B. et al. (2011).

Para a ação investigativa, o professor instiga os estudantes com a seguinte questão: Qual é a característica que torna estes objetos iguais? E qual os torna desiguais? Uma vez que os objetos apresentam características diferentes, a probabilidade é que durante a discussão os estudantes cheguem a conclusões diversas acerca da questão. Neste caso, o professor incita-os a repensarem as suas posições e valorizarem os conhecimentos aprendidos nas tarefas anteriores. No caso, usando os segmentos como elementos mediadores para o alcance das respostas pertinentes às tarefas. Finda a discussão entre estudantes e com apoio do professor, chega-se à conclusão de que, na primeira situação, os objetos apresentam igualdade no comprimento da altura e desigualdade na forma. Enquanto os subsequentes são iguais na forma e desiguais na cor (figura 8).

Figura 8-Demonstração de Igualdade e desigualdade, na forma, altura e cor.



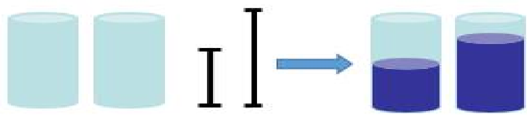
Fonte: GPMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008).

Nesta tarefa, nota-se a utilização de segmentos de tamanhos iguais e diferentes, podendo ser algo que sirva de introdução à igualdade ou não de valores. Nas tarefas subsequentes, a análise se voltará para alteração dos valores.

No final da execução das tarefas, os estudantes devem ter a noção matemática de soma (aumento) e diferença (diminuição). Importa lembrar que ainda não estará em causa a discussão das operações matemáticas com números, porém o foco será na operação entre grandezas.

É neste âmbito que o professor coloca sob sua mesa dois recipientes iguais e no quadro dois segmentos de comprimentos diferentes (Figura 9). O professor explica que os segmentos representam o volume de água a ser colocado, pelos estudantes, dentro dos recipientes. Ele sugere que, primeiramente, seja preenchido o volume indicado por este segmento (mostra o segmento menor), e só depois colocar a água no outro recipiente (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Figura 9-Medida de Volume a partir da indicação de segmentos.



Fonte: GPMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008).

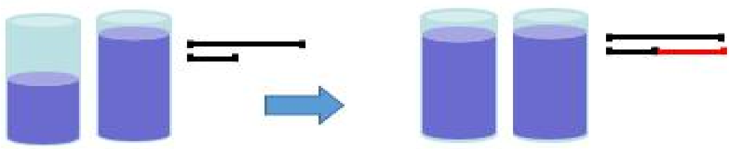
Para o cumprimento das orientações, no decorrer da ação investigativa, a tarefa estabelece que dois estudantes, um após o outro, dirijam-se até a mesa do professor para a execução das manipulações necessárias, colocando o líquido no recipiente conforme estabelecem os segmentos. Enquanto decorre esse processo, os demais estudantes observam atentamente se a manipulações estão sendo realizadas corretamente. Na ação investigativa, eles descobrem que o importante não é a quantidade de líquido colocado em cada um dos recipientes, mas sim a condição dada pelo cumprimento de dois segmentos: que o volume de líquido no primeiro recipiente seja menor que no segundo (MAME, 2014).

De acordo com Mame (2014, p. 102), “a tarefa coloca o pensamento dos estudantes em movimento, não mais dado diretamente, mas pela situação em si de lidar com líquido e os recipientes, a fim de elaborar conclusões sobre o maior ou menor volume e, por extensão, a capacidade”. Agora, para atingir tal finalidade, é apresentado um elemento mediador eminentemente geométrico – os segmentos –, o que dá um teor abstrato na orientação da execução da tarefa. Ou seja, a essência do desenvolvimento da tarefa é determinada pelo comprimento dos segmentos.

A tarefa, a seguir (Figura 10), apresenta o mesmo teor da anteriormente analisada, porém com objetivo de investigar a igualdade de valores. Outra vez, o professor coloca sobre sua mesa dois recipientes iguais, mas com diferentes volumes de líquido. Os estudantes notam a diferença existente pelo volume do líquido e representam por meio de segmentos, tanto no quadro, quanto nos cadernos. Feita a observação, o professor explica aos estudantes, recomendando que o volume de líquido do recipiente menor se iguale ao recipiente de maior volume de líquido (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

No decorrer da ação investigativa, as crianças dizem que basta adicionar uma quantidade de líquido, o que é executado. Mas, a questão primordial da tarefa é a representação dessa operação no segmento. Há, pois, um vínculo entre o ato de lidar com o líquido e o do uso dos segmentos. Para tanto, há uma referência ao maior, tanto em relação ao recipiente quanto em relação ao segmento, que não sofre ação direta na grandeza do volume (recipiente) como no comprimento (segmento). Por sua vez, essas mesmas grandezas se alteram ao se considerar a menor, de modo que se estabeleça uma igualdade em relação às duas situações. Isso significa que o aumento do volume acarreta na necessidade de acréscimo no segmento. Porém, não é algo aleatório nem indicado verbalmente pelo professor ou algum estudante, mas determinado pelo segmento de referência (MAME, 2014, p. 103).

Figura 10-Igualdade de volume pelo aumento de uma situação.



Fonte: GPMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008).

Para Mame (2014), a percepção dessa determinação pelos estudantes só ocorre por consequência do modo de organização do ensino, que os levam às apropriações necessárias. Essa premissa está em concordância com Puentes (2013), ao afirmar que a educação e o ensino precisam levar em consideração um aspecto fundamental: a criação de melhores modos de organizar os processos e práticas educativas. Modos esses que possibilitem a aquisição das habilidades e as condutas em um sistema harmonioso no qual cada parte sirva de base e premissa para assimilação de outros sistemas, em vez de aspectos separados uns dos outros, como acontece ainda hoje, em currículos baseados em disciplinas estanques (PUENTES, 2013, p.178).

Este pressuposto de melhor organização de ensino verifica-se no processo de análise das figuras, isto é, aquilo em que uma determinada tarefa era ação para apropriação de uma determinada ideia conceitual, em outra se constitui em operação para novas elaborações (LEONTIEV, 1978, apud MAME, 2014). Esse processo transformativo faz com que o teor geométrico de segmento e volume cada vez mais incorpore ou conclame por significado aritmético.

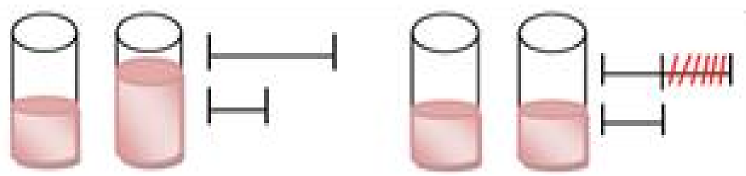
Para Alves e Damazio (2019), a tarefa acima apresentada, trata igualmente de elementos conceituais, tais como: a medição, o aspecto quantitativo (aumentar o volume) e a representação do resultado da medição. Para os autores, os direcionamentos do professor colocam o pensamento das crianças em movimento, na busca da explicitação da relação universal todo-partes, peculiar ao conceito teórico de adição e subtração. Tal fato ocorre pelo trânsito dos estudantes por dois tipos de representações: objetal (recipientes e líquido) e gráfica (segmentos). Ainda, segundo autores, haveria duas possibilidades de solução: aumentar e diminuir o volume de líquido de um ou de outro recipiente e do respectivo segmento. Porém, a tarefa direciona para a ideia de aumentar. No entanto, isso só é possível com a presença do outro recipiente e do segmento, que possibilitam a comparação (ALVES; DAMAZIO, 2019, p. 458 - 459).

No prosseguimento da análise, Alves e Damazio (2019, p. 459) consideram que a tarefa, implicitamente, configura-se em outra ideia central do sistema conceitual em foco que é a relação de igualdade e desigualdade. Ora, se é preciso aumentar, significa que se está diante de uma desigualdade que, conceitualmente, demanda um movimento que leve à igualdade, o que requer uma referência, no caso, o recipiente com maior volume. Nessa circunstância de aumento, configura-se o prenúncio de outra ideia caracterizadora do sistema conceitual: se há uma parte, é necessário o acréscimo de outra para atingir o todo.

De acordo com Gorbov, Mikulina, Savieliev (2008), citados por Alves e Damazio (2019), nessas duas representações, há uma ideia peculiar ao sistema conceitual: determinar a diferença. Tem-se uma parte conhecida, referência que cria a necessidade de identificação da outra, o que ocorre com a determinação da diferença. Alves e Damazio observam igualmente que a tarefa traz ideias e abstrações com um teor anunciativo, uma vez que elas se apresentam no contexto da primeira ação de estudo do modo davydoviano de organização de ensino. E afirmam que a atenção não está somente na manipulação dos objetos, mas no movimento que incita o surgimento de elementos conceituais que se configurarão na representação gráfica que a situação propõe. Tal fato, ocorre na relação entre dois segmentos de retas, em que um deles (o mais curto) precisa ser aumentado até se igualar ao de maior comprimento, concomitantemente, à ação objetal de acrescentar líquido no recipiente. Assim sendo, "a relação todo-partes se inicia no âmbito conceitual das abstrações de igualdade e desigualdade, representadas por duas grandezas distintas: a objetal, que tratou do volume, e a gráfica (representação geométrica), reveladora da grandeza comprimento" (ALVES; DAMAZIO, 2019, p. 459)

O exposto é indício para buscar formas de dizer o quanto aumenta ou diminui e as operações necessárias, ou seja, número e operações de adição e subtração. Esta é prenunciada na tarefa (Figura 11), que se diferencia da anterior por prever que se iguale o valor maior ao menor. Isso implicará na diminuição do líquido ou material do recipiente com maior volume; bem como em relação ao segmento (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2018, apud MAME, 2014).

Figura 11-Igualdade do volume pela diminuição de uma situação.



Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008).

Na análise da tarefa, recomenda-se a diminuição do valor maior por meio da subtração ou eliminação da diferença. No segmento maior, a demonstração será feita com riscos verticais em uma parte até atingir o comprimento do menor (Горбов, Микулина, Савельева, 2008 apud MAME, 2014). Importa salientar que a demonstração das relações existentes entre os volumes e a capacidade, por meio de tiras e segmentos, marca o início da modelação das relações entre grandezas que, gradativamente, serão reproduzidas na forma gráfica e literal (ROSA, 2012). Tais relações se convertem em "*objeto das ações*" das crianças e suas leis em objeto de apropriação (GALPERIN *et al.*, 1987, p. 311).

Segundo Matos (2017, p. 41) "as relações entre grandezas, na especificidade da tarefa em análise, volume, constituem o caráter geral da proposição davydoviana". Com base nelas, são introduzidos os conceitos matemáticos concernentes à educação básica (DAVÝDOV, 1982).

A execução da tarefa anterior (Figura 11), por exemplo, requer operação com a grandeza volume e análise da equivalência. A relação entre as duas grandezas é representada geometricamente por meio de dois segmentos de reta.

Segundo Davídov (1988), tal procedimento é um processo necessário para a transformação dos dados obtidos, por meio da contemplação e da representação, em tarefa do pensamento teórico que precisa elaborá-los em forma de conceito. Por isso, requer a reprodução integral do sistema de conexões internas que lhe deram origem, por meio da relação todo-partes (MATOS, 2017, p. 42).

A síntese da análise, que se pode fazer sobre as tarefas anteriores apresentadas (figuras 5 a 11), é que explicitam as relações entre grandezas com a utilização dos segmentos, como elemento mediador, para a indicação da igualdade e desigualdade entre objetos: pela altura, forma, volume, etc., no âmbito do aumento ou diminuição de uma situação. O não menos importante é que, também, trazem a gênese do pensamento algébrico, no seu primeiro estágio, isto é, a álgebra retórica ou verbal. Neste estágio, os argumentos da resolução de um problema são descritos sem abreviações ou símbolos específicos (BONADIMAN, 2007).

Sousa (2004, p. 104) considera que, a fase retórica se constituiu na primeira tentativa do homem em representar o desconhecido das quantidades. A linguagem retórica da álgebra é definida por Fraile (1998, p. 11), citado por Sousa (2004, p. 106), como "a ferramenta inicial, mas básica, a linguagem ordinária". Para a autora, é com essa linguagem retórica que, após uma depuração e precisão dos termos para que se evitem ambiguidades, se faz maravilhas "se reflete, se constroem teoria". Para a fundamentação do anteriormente descrito, Sousa (2004) toma como exemplo a lógica aristotélica que serve não apenas para se comunicar, mas sim como "ferramenta de pensamento" (SOUSA, 2004, p. 106).

Ainda sobre a álgebra retórica, Sousa (2004), com base (Kieram, 1994; Lins & Gimenez, 1997 e Eves 1997) afirma que:

> A álgebra retórica, quando estudada do ponto de vista dos estágios, pertence ao período que antecede Diofanto. Nesse estágio, há o uso de descrições em linguagem comum para resolver tipos particulares de problemas e pela falta de símbolos ou sinais especiais para representar incógnitas. Há uso apenas das palavras. Nesse estágio, os argumentos da resolução de um problema são descritos em prosa pura, sem abreviações ou símbolos específicos.

O exposto na citação, atrelado ao desenvolvimento das tarefas analisadas, evidencia que se está diante de um pensamento algébrico. Isso ocorre no ato da manipulação de objetos para determinação da igualdade ou desigualdade entre eles (pela altura, forma, volume), com o aumento ou diminuição de uma situação. Porém, em sua fase inicial conceitual, tendo que neste estágio é predominante apenas o uso de palavras (LINS & GIMENEZ, 1997).

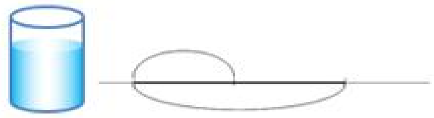
Vale destacar que, para além da álgebra retórica, também evidenciam-se, nas tarefas, as primeiras manifestações da álgebra geométrica, elaborada pelos gregos em um contexto onde predominava a "degradação do número, o horror ao infinito e o horror ao movimento" (CARAÇA, 1908, p. 78, apud SOUSA, 2004, p. 108). Para Sousa (2004), nesta fase, a geometria estava descolada da aritmética e, em tal contexto, as verdades eram representadas a partir das formas. Há o primado da figura em relação ao número. Este estágio se distingue pelos esforços de criar, a partir das necessidades da investigação científica, uma teoria matemática geral adequada para números e grandezas irracionais. No entanto, assim que os irracionais foram aceitos, descobriu-se que a coleção de quantidades geométricas era mais completa do que o conjunto de números racionais. Por consequência, era apropriado construir um cálculo mais geral em uma forma geométrica. O cálculo criado recebeu o nome de álgebra geométrica (RIBNIKOV, 1987, p. 54).

Neste sentido, consideram-se os segmentos de reta como elementos primários da álgebra geométrica e é a partir deles que foram definidas todas as operações do cálculo: a adição, subtração, multiplicação e divisão. A soma, em tal contexto, interpretava-se como a adição de segmentos; a diferença como eliminação de uma parte de segmento igual ao segmento subtraendo. A multiplicação de segmentos conduzia a construção de representação bidimensional e o produto das medidas dos segmentos ***a*** e ***b*** representava a medida da área de um retângulo com lados ***a*** e ***b***. O produto de três segmentos formava o volume de um paralelepípedo. O produto de um número maior de fatores, em álgebra geométrica, não se podia levar em consideração. Assim também, a divisão só se realizaria sob a condição de que a dimensão do dividendo fosse maior do que a dimensão do divisor. Na álgebra geométrica, também se incluía o conjunto de proposições geométricas que interpretavam as identidades algébricas (RIBNIKOV, 1987, p. 54 -55).

Nesse contexto de análise, novas tarefas, com características similares às anteriores, são apresentadas aos estudantes. Porém, trazem alguma novidade: o uso de segmentos representando valores expressos por letras. Vale lembrar que, até o momento, não foram utilizados algarismos para representar a variação de quantidades. Foi avaliada a diferença entre as figuras que as tarefas apresentam, pelas grandezas da área, volume, massa, comprimento, entre outras.

Neste sentido, a tarefa, a seguir (Figura 12), propõe que o professor apresente um recipiente com líquido. No decorrer da análise, ele relata que os alunos da outra sala alteraram o volume de líquido do recipiente e demonstraram o que fizeram no desenho. As crianças são convidadas a adivinhar qual foi o procedimento efetuado pelos alunos da outra sala e executá-lo. Eles descobrem que não se pode dizer algo a partir deste desenho, isto é, se o volume foi aumentado ou diminuído. Há dois volumes, mas não tem como descobrir qual deles era o inicial e qual deles surgiu depois (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

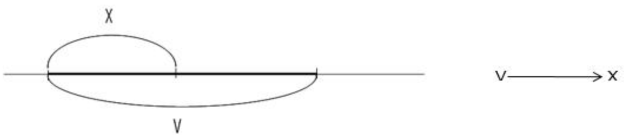
Figura 12-Representação do valor das medidas por meio de arcos



Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008).

Na sequência da análise, o professor propõe que os estudantes apresentem alguma sugestão do procedimento usado pelos estudantes de outra sala. Tendo por base as diferentes sugestões, os estudantes concluirão, com apoio do professor, que não existem informações suficientes para constatar se o volume aumentou ou diminuiu. É neste sentido que o professor revela que sabe qual foi o procedimento realizado. Logo, acrescenta alguns elementos (letras e seta) na representação (figura 13) e propõe-lhes uma nova análise (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008; ДАВЫДОВ *et al.*, 2012, apud MATOS, 2017).

Figura 13-Representação do valor das medidas por meio de letras.



Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008).

Após a análise da tarefa, os estudantes, com apoio do professor, concluem que a letra *V* representa a medida do volume maior e *X* corresponde ao volume menor. Logo, a seta indica o movimento que vai do volume inicial *V* ao final *X*. Isto quer dizer que houve retirada do líquido. Na sequência, o professor relata que, em matemática, os valores quando desconhecidos, geralmente, são representados pelas letras; sugere a escolha das letras e reescrita do registro. Para demonstrar que a escolha de letras tem caráter livre, escrevendo no quadro mais de uma variante de registro, conforme apresentado na (Figura 14).

Figura 14-Representação de letras e de seta.

Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008).

A representação do procedimento adotado com o volume – em sua abrangência literal – subsidiará a elaboração do modelo universal, concernente à interpretação de problemas sobre as operações de adição e subtração. As letras marcam a introdução das significações algébricas. Segundo Slovin e Venenciano (2008), citados por Rosa (2012), esta primeira utilização de letras expressa o geral ao invés de quantidades específicas. Nesse processo, de acordo com a autora, baseando-se nos pressupostos de Angle (2009), introduzem-se os elementos da álgebra abstrata de forma significativa. Nesta etapa conceitual, os valores aritméticos das medidas são desconhecidos, por isso a representação é genérica. Tal sequência atende ao princípio didático que prevê o movimento de abstração e generalização orientado do abstrato ao concreto (MATOS, 2017).

Vale destacar que o abstrato e concreto são duas categorias importantes da dialética materialista, que surgem da necessidade de compreender profundamente o processo do conhecimento, bem como permitem captar a dialética do reflexo da realidade na consciência humana (ROSENTAL & STRAKS, 1958).

Estas categorias, no caso o abstrato e concreto, estão intimamente vinculadas com outras categorias da dialética e, em particular com a essência e o fenômeno, lei, análise e síntese, o lógico e histórico, o sensível e o racional. O "abstrato e o concreto, como outras categorias epistemológicas, têm um conteúdo objetivo, isto é, refletem as leis objetivas pelas quais os fenômenos da natureza e da sociedade são regidos" (ROSENTAL; STRAKS, 1958, p. 298).

O abstrato e o concreto são categorias da dialética materialista elaboradas para refletir a mudança da imagem cognitiva tanto no que concerne à multilateralidade da abrangência do objeto nessa imagem, quanto à profundidade da penetração na essência dele. Eles "expressam as leis da mudança que se operam no conteúdo do conhecimento ao longo de toda sua evolução" (KOPNIN, 1978, p. 154).

Além de Rosental e Straks (1958) e Kopnin (1978), Davýdov (1982, p. 332), outro estudioso da dialética materialista afirma que se entende por "concreto o objeto solto sensorialmente perceptível ou sua imagem gráfica". Por abstrato, compreende-se as reiteradas e similares propriedades soltas de um conjunto de objetos mentalmente dos mesmos consideradas independemente. Davýdov (1982) considera o abstrato e o concreto como dois momentos no colapso do próprio objeto, da própria realidade refletida na consciência e, graças a isso, são momentos derivados da atividade mental. A afirmação da objetividade desses dois é uma particularidade essencial da dialética. Para justificação da afirmativa, o autor cita Lênin que afirma ser a natureza algo abstrato e concreto. O "abstrato intervém apenas como momento da realidade material em constante mudança" (DAVÝDOV, 1982, p. 340-341).

Kopnin (1978, p. 154) considera o abstrato como uma separação, o isolamento de alguma propriedade sensorialmente acessível do objeto. O autor afirma que "a tarefa da abstração não é de separar uns dos outros indícios sensorialmente perceptíveis, mas através deles descobrir novos aspectos no objeto que traduzam as relações de essência" (KOPNIN, 1978, p. 161). O abstrato, em geral, possui várias características: é algo simples, isento de diferenças, fragmentário e subdesenvolvido. Tudo isso nada mais é do que a "designação das facetas do abstrato real como certa parte de todo constituído de forma independente, que existe com relativa independência de tudo ou mais" (DAVÝDOV, 1982, p. 340).

Vale lembrar que o abstrato pode ocorrer no conhecimento porque os diferentes aspectos e as várias propriedades e relações de objetos e fenômenos têm uma autonomia relativa. Eles se distinguem uns dos outros e estão em uma relação diferente com a essência. Por este motivo, no conhecimento, alguns aspectos ou propriedades do objeto podem ser separados, abstraindo-os de outros. Em relação ao conhecimento, "o concreto reflete o fato objetivo de que os fenômenos e objetos da realidade existem em uma unidade, como um todo composto de diferentes aspectos, qualidades e relações. Enquanto que o abstrato pode apresentar-se" (ROSENTAL; STRAKS, 1958, p. 298).

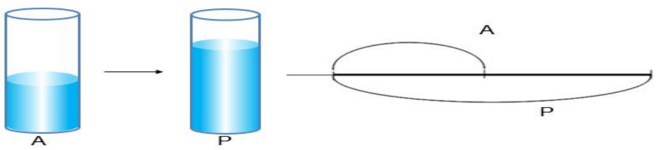
No entanto, Kosik (2002) citado por Sousa (2004, p. 65), afirma que o concreto se torna compreensível pela mediação do abstrato, o todo é mediado pela parte. Para a dialética materialista, o concreto é considerado como "ponto de partida e chegada do conhecimento" (KOPNIN, 1978, p. 157).

O concreto no pensamento, ponto de chegada, é o conhecimento mais profundo e substancial dos fenômenos da realidade, pois que reflete com o seu conteúdo não as definições exteriores do objeto em relação imediata, acessível à contemplação viva, mas diversos aspectos substanciais, conexões, relações em sua vinculação interna necessária. De igual modo, o autor considera que o concreto no pensamento fundamenta a conexão do singular com o universal, fornece não uma simples unidade de aspectos diversos, mas a identidade dos contrários. Ademais, o concreto no pensamento é a negação do abstrato, mas o concreto mental não é a retomada do concreto inicial, sensorial, mas o resultado da ascensão a um novo, mais substancial (KOPNIN, 1978, p. 162).

O autor afirma que na ascensão do abstrato ao concreto verifica-se não simplesmente um processo de totalização, de urdidura de uma abstração após outra, mas uma síntese de abstrações que corresponde às relações no objeto. Para a explicitação da afirmação, Kopnin (1978) defende que não se pode imaginar o processo de transição do abstrato ao concreto pensando que no princípio surgem abstrações isoladas, independentes umas das outras, que se unificam em seguida. Se tal fato acontecesse, o concreto seria a soma mecânica de abstrações isoladas internamente desconexas, fora da realidade. Tudo porque, no processo de formação do concreto, uma abstração surge como continuação da lógica e contemplação da outra. A ligação entre abstrações, de acordo com Kopnin (1978), é determinada pelas ligações no objeto, enquanto sua unificação – em certo conjunto, ou melhor, totalidade – ocorre a partir de uma ideia que traduz a lei fundamental no movimento do objeto (KOPNIN, 1978, p. 163).

Para finalizar a discussão, o professor apresenta uma nova tarefa (figura 15) aos estudantes para, em ação investigativa, concluírem que o volume foi aumentado. Pela discussão focada no desenho, os estudantes descobrem que, inicialmente, havia o volume A, depois foi obtido o volume P. As respectivas letras são marcadas no desenho, caderno e quadro.

Figura 15-Demonstração de aumento do volume.

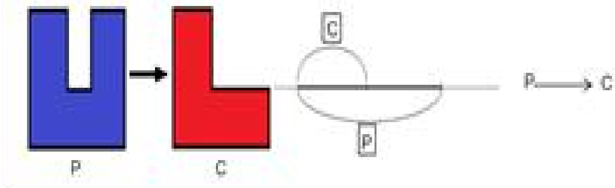


Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008).

Feita a demonstração, sugere-se a indicação com a flecha dos segmentos que representam os volumes A e P. Para tal, chama-se atenção de que este tipo de demonstração deve ser praticado com frequência. No trabalho com os arcos e letras, algumas crianças passam a considerar que os dois são as representações do valor, e não o segmento. Por exemplo, respondendo à solicitação de indicar o valor P, eles mostram o arco ou a letra (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008; ДАВЫДОВ *et al.*, 2012).

Em seguida, o professor coloca uma nova tarefa, cuja execução é idêntica à anterior. Tem como objetivo a análise da forma correta referentes às áreas P e C (Figura 16). Aos estudantes, solicita-se que marquem, no esquema, a representação apropriada para as respectivas áreas.

Figura 16-Demonstração de diminuição de uma área em relação a outra.



Fonte: Autor, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008).

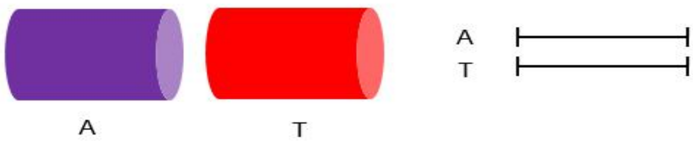
Tendo como base de análise o desenho, os estudantes identificam o valor correspondente marcado com a letra, nos dois casos, isto é, das quantidades. Feito isso, destacam o outro valor indicado no desenho. Além disso, descrevem o procedimento necessário para obtê-lo do valor inicial. Executa-se o respectivo procedimento, cortam-se ou adicionam-se figuras novas no desenho. No caderno, registra-se o procedimento, com uso da letra, que representa o valor inicial, seguido pela seta e outra letra que representa o valor obtido (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008; ДАВЫДОВ *et al.*, 2012).

Vale lembrar que, nas proposições davydovianas, existem mais tarefas, que exploram a conservação de quantidades, composição e decomposição de figuras, que podem manter, aumentar ou diminuir as áreas. Toda a representação ocorre conforme as duas tarefas anteriores: uso de segmentos, arcos e letras, Trata-se, pois, da expressão da inter-relação entre as significações algébricas e geométricas que, por sua vez, manifesta o movimento de apropriação conceitual a partir do geral.

As próximas tarefas trazem como base a introdução dos símbolos matemáticos de igualdade, diferença, maior e menor ($=$, $\neq$, $>$ e $<$). Isso significa mais um componente de articulação entre álgebra e geometria, isto é, o movimento do geral para o particular. Chama-nos a atenção que tal interconexão antecede a apresentação de conceitos eminentemente aritméticos, como é comum nos sistemas de ensino denominados por Davídov (1988) de ‘tradicional’. Em tais sistemas, o primeiro contato das crianças com a matemática, nas escolas, é com a escrita dos signos numéricos e com a contagem.

No sistema Elkonin-Davidov- Repkin, os símbolos pertinentes à igualdade e desigualdade se apresentam no âmbito da comparação entre grandezas. É nesse contexto que se propõe a próxima tarefa (figura 17), em que são entregues para dois estudantes, dois objetos diferentes (por exemplo, dois pedaços de massinha de cor diferentes). Com ajuda do professor, os estudantes discutem sobre quais seriam as características a serem observadas para comparação destes objetos. Entre outras, escolhe-se a massa. Cada aluno escolhe e informa que letra usará para designar a massa do seu objeto, as quais são registradas no quadro (por exemplo, A e T). A pergunta que se apresenta é: Como comparar estas massas? Entre as respostas possíveis, pode-se recorrer à balança, que demonstrará que elas são iguais. Como podemos demonstrar o resultado da comparação? As tarefas anteriores foram essenciais para que as crianças, agora, recorram ao desenho, conforme a figura 17 (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008)

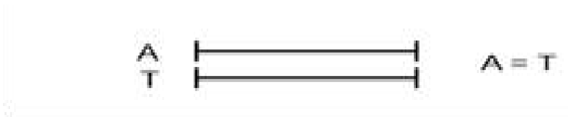
Figura 17-Introdução do sinal de igualdade, com auxílio da comparação de grandezas.



Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008).

No decorrer da ação investigativa, o professor explica que, geralmente em matemática, o resultado da comparação é registado em forma de letras e de símbolos especiais. Ele escreve entre as letras o sinal de "igual" e lê o registro: *"Massa A é igual à massa T"*. Neste processo, é normal o surgimento de alguma dúvida, tendo em conta que em momentos anteriores os valores iguais eram marcados pelas letras iguais. O comentário ou informação necessários é de que as letras eram escolhidas antes de começar a comparar e, agora, a igualdade é demonstrada por meio de sinal (figura 18).

Figura 18-Demonstração do sinal de igualdade, por meio de segmentos.



Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008).

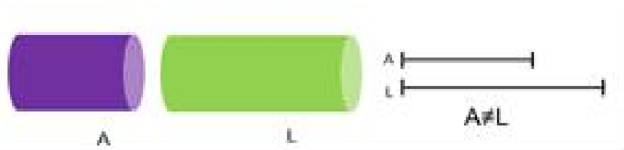
No decorrer do desenvolvimento da tarefa, outro estudante recebe uma massa. Ele escolhe a letra para marcá-la (por exemplo, L). Sugere-se comparar sua massa com outros pedaços. Elas não são iguais. O "dono" da massinha lembra a letra que designa sua massa. Faz o registro: ***A ≠ L***. As crianças leem: *"Massa **A** não é igual à massa **L**."*

Figura 19-Introdução do sinal de diferença, por meio de grandeza e com auxílio de segmentos.

Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008).

Na sequência, o professor sugere que as crianças adivinhem qual será o resultado de comparação do outro pedaço de massinha com o peso (Figura 20)? Essa questão provoca bastante inquietação entre os estudantes, que apresentam sugestões e são verificadas com ajuda da balança. Eles compõem e leem o registro da desigualdade, ***T≠ L***, e completam no desenho.

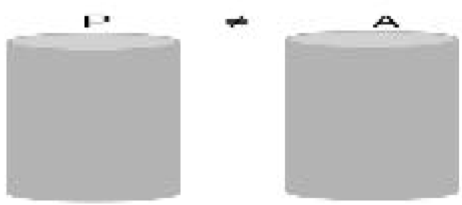
Figura 20-Comparação de grandezas, mantendo o sinal diferente



Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008).

Nesta etapa, de acordo com Горбов *et al.*, (2008), é importante que cada registro (por exemplo, ***T ≠ L***) seja precedido da respectiva leitura, para evitar que as crianças passem a entendê-lo equivocadamente como: "*letra A não é igual a letra L.*" Na tarefa, a seguir, novamente o professor dispõe sobre a mesa dois recipientes opacos de forma igual. No quadro, está o registro referente ao volume de líquido: ***T ≠ L***. Os estudantes fazem a leitura com a indicação do valor (grandeza). Conforme a figura 21.

Figura 21-Comparação de volume de líquido entre os recipientes.

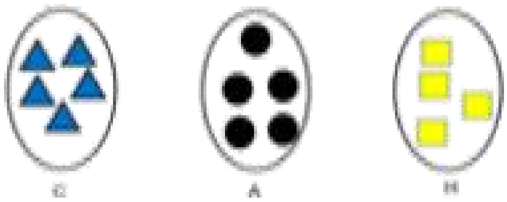


Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008).

Para a ação investigativa, o professor instiga os estudantes a fazerem perguntas do tipo: Como podemos fazer com que o segundo recipiente tenha a mesma quantidade de água que o primeiro? O questionamento fará com que eles desenvolvam a curiosidade de olhar dentro dos recipientes para descobrirem qual deles contém mais líquido.

No entanto, o professor não deixará, mas fará outro registro que deve esclarecer a situação: $P > A$ Os estudantes não percebem. O professor informa que os adultos iriam entender logo, o que deveriam fazer, porque sabem ler o sinal novo – é o sinal “maior”. Descobre-se o meio de igualar, mas define-se uma tarefa (Figura 22), que é aprender a ler e a escrever sinais novos. Para tanto, perguntas se apresentam, dentre elas: *Provavelmente, existe também o sinal “menor”?* O professor sugere procurar nas “janelas”, na figura 22, os sinais: “igual”, “não é igual”, “maior”, “menor”. Os estudantes notam que os sinais “maior” e “menor” são parecidos, com a peculiaridade de apenas voltados para os lados diferentes. Acentua-se que sinal sempre aponta para o valor menor.

Figura 22-Demonstração de igualdade, desigualdade, menor e maior.



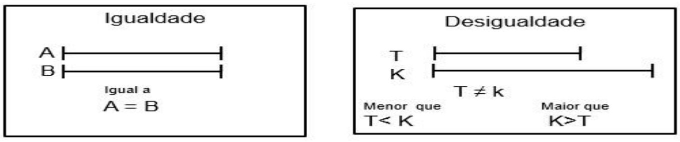
Fonte: Горбов; Микулина; Савельева (2008).

De acordo com Rosa (2012, p. 132), o princípio interno de igualdade e desigualdade entre as grandezas é reconstruído, sob a forma de conceito teórico, na tarefa desenvolvida coletivamente pelas crianças e o professor, que a dirige. A interação criança/objeto implica mediações simbólicas, inicialmente, na forma objetal, depois na forma gráfica e, finalmente, na forma literal. Esse movimento de reprodução das relações gerais entre as grandezas, mediado pelos símbolos, promove, segundo Davidov (1988), a reestruturação e desenvolvimento do pensamento teórico e das ações mentais (abstração, generalização, etc).

Ainda, segundo a autora, os sistemas simbólicos são meios para estabelecer os padrões na relação entre grandezas e na passagem destes para o plano mental. A revelação e a expressão em símbolos, das relações essenciais entre grandezas, permitirão, mais tarde, sua reprodução teórica por meio do modelo geral (lei). Ou seja, uma abstração produzida com a ajuda das fórmulas literais. Quanto mais as tarefas adentram na essência das relações entre grandezas, mais abstratas são as formas de expressão de tais relações e, consequentemente, mais concretas e plenas de conteúdo teórico (ROSA, 2012, p. 132).

Vale destacar que, nas proposições davydovianas, existem diversas tarefas que trazem a ideia de comparação de grandezas, em que são analisados os sinais de igualdade, diferença, maior e menor. Neste sentido, a fim de concluirmos e delimitarmos o estudo destas proposições para dar lugar às demais – cuja análise nos levarão à fundamentação do objeto de estudo – apresentaremos uma última tarefa. Ela tem por objetivo comparar as quantidades, tendo por referência os símbolos matemáticos (=, ≠, > e <) . A recomendação, a que se propõe a tarefa, é que os estudantes coloquem um sinal mais preciso, caso exista necessidade (figura 23)

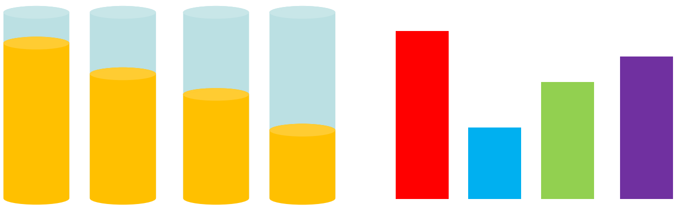
Figura 23-Comparação de quantidades por meio dos sinais de igualdade.



Fonte: Горбов; Микулина; Савельева (2008).

As próximas tarefas a serem estudadas explicitam séries de valores. Para a ação investigativa, o professor apresenta, para as crianças, quatro recipientes de diferentes volumes (que podem ser notados de pronto). As crianças têm quatro tiras de vários comprimentos e várias cores (o fato de ter cores diferentes facilitará a troca de opiniões). As crianças irão adotar, com as tiras, os mesmos procedimentos que o professor fará com os recipientes. Os recipientes são colocados na ordem decrescente dos seus volumes (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

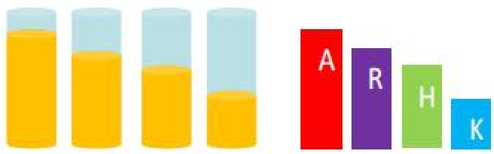
Figura 24-Ordem das grandezas.



Fonte: Горбов; Микулина; Савельева (2008).

Na sequência é estabelecido um diálogo entre o professor e os alunos do tipo: O que foi feito? questiona o professor. Em resposta, os alunos dizem que os recipientes foram colocados na ordem. O professor concorda com a resposta e afirma que foi feita uma série ordenada. Em seguida, questiona: qual foi a característica usada para ordenar os recipientes? A resposta a ser elaborada é de que foi o volume. Novamente, o professor concorda com a resposta e solicita que os alunos representem esta ordem com ajuda das suas tiras. Depois, as crianças escrevem as letras nas tiras, que caracterizam as marcas dos volumes dos recipientes, pois as tiras substituem os recipientes. Fica, por exemplo, uma série assim: A,R,H,K (Figura 25)

Figura 25-Ordem das grandezas com a inclusão de letras.



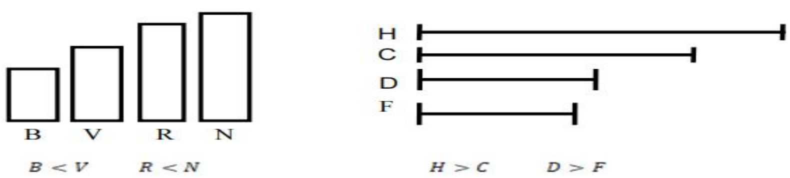
Fonte: Горбов; Микулина; Савельева (2008).

No decorrer da ação investigativa, sob orientação do professor Горбов; Микулина; Савельева (2008), sugere-se que as crianças indiquem o maior volume e o menor volume. Para tal, são dirigidas perguntas do tipo:

1) Qual volume é menor que o volume K? (Resposta a elaborar: Não tem);
2) Qual volume é maior que o volume A? (Resposta a elaborar: Não tem);
3) Qual volume é maior que o volume R? (Resposta a elaborar: O volume A);
4) Qual volume é menor que o volume R? (Resposta a elaborar: Os volumes H e K);
5) Qual foi o volume que eu pensei se ele é maior que o K, mas é menor que o R? (Resposta a elaborar: O volume H);
6) Qual foi o volume que eu pensei sendo ele maior que o H, e menor que o A? (Resposta a elaborar: O volume R).

Apresentamos uma nova tarefa (figura 26), traz a ideia de ordenação das grandezas e explicitadas por via de segmentos. Ela sugere, às crianças, a identificação de qual é a diferença entre as duas séries ordenadas de valores (áreas e comprimentos).

Figura 26-Ordem das grandezas com a inclusão de letras e segmentos.



Fonte: Aptadação nossa de Горбов; Микулина; Савельева (2008).

Após a identificação da diferença entre as séries ordenadas de valores, o professor ajuda as crianças, com a introdução dos termos novos: os valores são colocados na ordem **crescente** e **decrescente,** sem necessidade de repetição dos termos pelas crianças. O importante, neste caso, é que as crianças os compreendam (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008). A tarefa pressupõe uma resolução teórica (ROSA, 2010). Para Rubinstein (1960, p. 211), citado por Rosa (2010, p.134) “resolver um problema no plano teórico significa resolvê-lo não só para o caso concreto dado, mas também para todos os casos da mesma natureza”. A resolução da tarefa não serve apenas para o caso particular dos volumes, pois se expande para todos os casos sobre a ordem crescente e decrescente, independentemente do tipo de grandeza e da sua propriedade numérica (ROSA, 2010).

Nas tarefas (figuras 13 a 25) anteriormente apresentadas, são introduzidos novos elementos: a letra e os símbolos matemáticos **(=, ≠, > e <)** que, juntos dos segmentos (geometria), servem de base para análise das tarefas. As letras e os sinais são elementos que contribuem para alicerçar o pensamento algébrico, cujo início se deu com a apresentação das figuras de 5 a 11. Pode-se dizer que as letras se tratavam de sinais que à espera de um número, devendo ocupar "o lugar de um ou de vários algarismos, por vir, como zero ocupa lugar de uma ordem de potência sem conteúdo" (SOUZA, 2004, p. 113). Ribnikov (1987) considera que "o cálculo com letras recebe o nome de logística especial, da palavra espécies que é o fim da uma expressão matemática" (RIBNIKOV, 1978, p. 133).

De acordo com Sousa (2004, p. 113), as letras não tratam de "um mero artifício da forma. O uso da letra alfabética para designar um parâmetro ou uma incógnita, libertou definitivamente a álgebra da escravidão do verbo". Segundo a autora, antes da notação literal, toda proposição geral continha a ambiguidade das linhas humanas e "qualquer afirmação levava ao domínio das interpretações sujeitas a todo tipo de variação" porque não passava de palavrório. A letra permite que os raciocínios sejam abreviados e sistematizados, permitindo que o acesso ao abstrato seja muito fácil (IFRAH, 1998, p. 337 apud SOUSA, 2004, p. 113). As letras e os sinais **(=, ≠, > e <)** correspondem ao segundo e terceiro estágio do processo histórico da álgebra, apontados por Boyer e Eves; trata-se dos estágios, intermédio ou sincopado e do simbolismo. O simbolismo algébrico é "a forma adequada ao conteúdo da álgebra" (ALEXANDROV, 1976, p. 63).

Sousa (2004, p. 109), com base em Fraile (1998, p.12), considera o estágio sincopado como passo intermediário entre a resolução retórica – com a língua ordinária, dos problemas – e a utilização de símbolos precisos e de aceitação universal. A autora considera que tal linguagem, sincopada, encontra-se muito próxima da linguagem simbólica. Existe alguma notação especial, em particular palavras abreviadas (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 92). É uma fase intermediária entre a expressão retórica e a escrita simbólica atual (SOUSA, 2004, p. 109).

Eves (1997, p. 206), ao referir-se sobre o estágio sincopado, afirma que, na álgebra sincopada "se adotam abreviações para algumas das quantidades e operações que se repetem mais frequentemente". A sincopação da álgebra considera os estudos do matemático grego Diofanto que, por sua vez, constitui em nexos conceituais, as figuras e imagens que auxiliam o pensamento, na elaboração de abstrações e na resolução de equações, características próprias da matemática grega. “A difusão da escrita sincopada coincide com o desenvolvimento da imprensa” (FRAILE, 1998, p. 28 apud SOUSA, 2004, p. 111).

Em relação ao último estágio do pensamento algébrico, no caso o simbolismo, Sousa (2004) com base em Ifrah (1998, p. 337), considera que o simbolismo algébrico criou uma espécie de língua internacional compreendida sem equívocos pelos matemáticos do mundo inteiro. Por meio dos símbolos, a álgebra pode manejar toda classe de problemas em um só episódio de raciocínio (KLINE, 1998 apud SOUSA, 2004, p. 114). Na álgebra simbólica, “as resoluções se expressam numa espécie de taquigrafia matemática formada de símbolos que aparentemente nada têm a ver com os entes que representam” (EVES, 1997, p. 206).

Sousa (2004) afirma que, do ponto de vista de Kline (1998), pode-se considerar que a notação simbólica chegou à álgebra, tarde, nos séculos XVI e XVII. Segundo a autora, a ideia de utilizar símbolos não era nova e, nesse período, as outras ciências estavam fazendo pressão para que a matemática aumentasse a sua eficiência. Assim, os matemáticos foram estimulados a estender a aplicação do simbolismo e rapidamente adotaram (SOUSA, 2004, p. 115).

O surgimento do cálculo algébrico literal constitui uma das facetas do fenômeno mais geral e profundo da história das matemáticas que é o surgimento da álgebra como uma ciência geral sobre as equações algébricas (RÍBNIKOV, 1987, p. 133). A álgebra, de acordo com Rosa (2012) é a doutrina das operações matemáticas consideradas formalmente do ponto de vista geral, com abstração dos números concretos, e que seus problemas estão relacionados, fundamentalmente, com as regras formais para a transformação de expressões e a solução de equações. Para a autora, o simbolismo algébrico é a forma adequada ao conteúdo da álgebra. Rosa (2012) afirma que, assim como foi necessário criar símbolos para operar aritmeticamente com números. Também, foi para operar algebricamente e dar regras gerais para seu uso (ALEKSANDROV, 1976).

No entanto, de acordo com Davydov (1982, p. 433-434), citado por Damazio *et al.* (2011), “o simbolismo literal, as correspondentes fórmulas literais e a interconexão das mesmas, consolidativo das propriedades fundamentais das grandezas, são inteiramente acessíveis às crianças”, mesmo antes de conhecer “as características numéricas dos objetos”.

Em gesto de síntese, importa destacar que as tarefas analisadas até ao momento explicitam as representações: objetal, gráfica, literal, e se enquadram no âmbito da primeira e segunda ação de estudo do sistema Elkonin-Davídov-Repkin, já anunciadas no capítulo dois (2) desta tese. De igual modo, as tarefas, na sua essência, explicitam as relações entre grandezas, bem como criam a possibilidade para a interligação entres as significações aritméticas, geométricas e algébricas, desde a mais tenra idade, quando a criança entra em contacto com o processo de escolarização. Este fato é demonstrado com a introdução dos segmentos que possibilitam a comparação entre os objetos, a análise do aumento e a diminuição, bem como o estudo de expressão matemática igual, diferente, maior e menor, assim como com a introdução das letras e sinais, elementos do pensamento algébrico.

Importa salientar que as tarefas (1 a 26) analisadas apresentam uma interligação entre as significações aritméticas, geométricas e algébricas. No entanto, apesar de serem tarefas introdutórias, elas explicitam a relação universal, singular e particular, isso em função das relações entre grandezas. Nestas tarefas, é notável a geometria aparecer em todo momento como elemento mediador entre a significação aritmética e algébrica.

Vale destacar que, nas proposições até agora analisadas, verifica-se que as tarefas estão organizadas e estruturadas de forma a permitirem, aos estudantes, conhecerem as características externas e internas dos objetos, seguindo o processo de pensamento de ascensão do abstrato ao concreto. Este processo verifica-se tão logo os estudantes tomam contato com os objetos que, a priori, aparecem como um vislumbrar de abstrações, mas depois de generalizados atingem a concretude do conceito.

Este pensamento corrobora com Libâneo e Freitas (2013), ao explicitar que, para se chegar ao conceito do objeto, o pensamento do aluno segue o caminho da abstração e generalização. Seu pensamento, dizem os autores, precisa realizar o trânsito e as transformações do objeto desde sua manifestação abstrata até sua manifestação concreta, desde seu caráter generalizado ao seu caráter singular. Ainda, de acordo com os autores, neste trânsito, “o processo de generalização conceitual desempenha uma função básica: permite ao aluno conhecer o objeto percebendo como seu aspecto geral (universal) também aparece em cada caso particular” (LIBÂNEO; FREITAS, 2013, p. 335).

Davidov (1982), citado por Libâneo e Freitas (2013 p. 336), considera que, quanto mais abstrata for à generalização primária, inicial, mais os alunos poderão lidar com o objeto, com aplicação do conceito para a resolução de problemas em casos particulares da realidade concreta. Neste processo de compreensão racional do objeto na realidade concreta, surgem dois aspectos diferentes e estreitamente ligados: o aspecto imediato, direto e externo, ligado à existência empírica do objeto, com o qual atua o pensamento empírico; e o aspecto mediatizado, interno, ligado à essência do objeto com o qual atua o pensamento teórico.

Após o estudo da série de valores em ordem crescente e decrescente, o sistema Elkonin–Davídov-Repkin apresenta tarefas que tratam da introdução do número. Inicialmente, são retomadas tarefas com o uso de tiras de papel para medição de comprimento e área das figuras – algo com que os estudantes já estão familiarizados. Para análise das tarefas, a eleição recaiu para situações em que os métodos de comparação direta dos valores, que já foram vistos, não servem, por exemplo, quando os objetos estão distantes no tempo ou no espaço ou possuem formas diferentes. Para resolver tais situações, é preciso recorrer a um outro valor – medida (uma unidade condicional), que se repete no valor dado um certo número de vezes (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008, p. 32-33).

Importa destacar que, ao terminar o estudo, as crianças devem aprender o significado do número como operador: o número é um instrumento que permite deduzir um valor a partir do outro valor. De igual modo, apresentar-se-ão vários métodos de registro dos passos do processo de formação (medição) do valor e formas de representação de números respectivos a eles: com ajuda das marcas (a forma mais antiga na história do número), com ajuda da série ordenada das palavras-numerais e os sinais-números que os substituem (contagem), a preocupação é que, no final, se revele o novo significado do número – a quantidade, quando o número representa o resultado da medição do valor (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

As tarefas, que concorrem para o exposto anteriormente, não serão apresentadas, uma vez que não é foco da presente pesquisa o aprofundamento de tais tarefas, apesar de as mesmas concorrerem para o entendimento dos conceitos de adição e subtração e, posteriormente, de multiplicação e divisão. Reafirmamos que as tarefas – que introduzem o conceito de número no sistema Elkonin-Davídov-Repkin, colaboradores e continuadores – foram objeto de estudo de Rosa (2012). A autora dedica sua análise em 14 tarefas das 45 do referido, que demonstram o processo de desenvolvimento do conceito de número.

Neste sentido, as próximas tarefas centram-se na introdução da reta numérica, e sua utilização para o estabelecimento das operações aritméticas de adição e subtração, bem como para a determinação do significado do todo e as partes. As referências se vinculam ao conceito de grandeza (comprimento, área e volume), com componente aritmético. Na separação entre as significações aritméticas, geométricas e algébrica uma contribui para apropriação da outra. As representações como segmento e arcos são elementos de expressão do resultado de uma medição. A reta constitui-se, conceitualmente, uma "construção geométrica específica" (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2008).

5.1.2 Reta numérica, sua utilização para o estabelecimento da operação aritmética da adição, subtração e determinação significado do todo e as partes

Tal como anunciamos, as tarefas dão base para a discussão sobre o melhor modo de apresentação da propriedade numérica da grandeza. Isso só se efetiva porque os estudantes atingiram o nível conceitual de número traduzido no modelo universal na relação de multiplicidade: $\boldsymbol{a = nc}$ (**a** é a grandeza que se quer medir, **c** a unidade pré-determinada e $\boldsymbol{n}$ o número de vezes que **c** cabe em **a**) (DAVÝDOV, 1982).

Nessas circunstâncias, condição ao desenvolvimento do pensamento teórico matemático, a reta se adjetiva como numérica, o lugar geométrico dos números, inicialmente, naturais. Sua apresentação ocorre sem o zero[34]; em seu lugar, uma bandeira, "[...] o que induz à ideia de uma referência e, por extensão, de possibilidade para existência de números que também possam situá-los antes dela e não só depois como, até então, tem ocorrido" (SOUSA, 2013, p. 206).

A reta assume significação numérica por ser a base da representação do resultado de uma medição que estabelece três condições: a opção por ponto inicial, a determinação da direção e a escolha da unidade. Ela é o elemento geométrico mediador que expressa duas significações do número, referentes aos aspectos: ordinal, como ponto; e qualitativo, um segmento da reta. A base de apresentação às crianças é um esquema (segmento) produzido em situação de medição, em que se estabeleceu uma unidade de medida, o passo. A referência é os segmentos – representativos dos passos, mas, a sua construção explicita o seu ponto inicial (origem), a direção e o sentido (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2008).

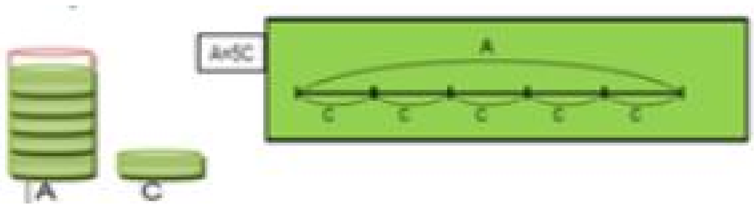
São essas as orientações para a ação investigativa da tarefa que se apresenta aos estudantes. Na mesa do professor, há um recipiente com água e mais um recipiente vazio que será usado como unidade de medida. No quadro, está o registro: A = 5C. O professor informa que A é o volume da água a ser colocado no recipiente, mas Vitor já colocou certa quantidade e só é preciso completar. As crianças se defrontam com a necessidade da identificação da quantidade de medidas da água colocadas no recipiente. A situação ainda é problematizada

---

[34]O zero será acrescido à reta no contexto do estudo das operações, mais especificamente de subtração sucessiva. Para tal, sugere-se a leitura de Rosa (2012) e Sousa (2013).

pela informação do professor: *"também não sei o que Vitor fez."* E alerta que é diferente de quando se mede a área ou o comprimento. A decisão é medir outra vez a água. O professor questiona: "*Como tornar 'visível' a medida dentro do recipiente?"* A sugestão é marcar com caneta ou elástico e registrar (esquema) no quadro (Figura 27). Para evidenciar que o lugar de um número na reta depende do tamanho do segmento unidade, o professor apresenta no quadro outro passo (segmento) diferente do primeiro. As crianças perceberão a diferença e farão a correção, identificando que no recipiente há apenas três medidas.

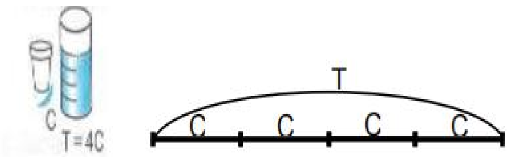
Figura 27-Introdução da reta numérica.



Fonte: Mame 2014, adaptado de Горбов, Микулина, Савельева (2008).

Para a consolidação da ação investigativa, uma nova tarefa semelhante à anterior é apresentada para as crianças, em que a análise centra-se no desenho do livro. A intenção da tarefa é fazer com que as crianças descubram quantas medidas são colocadas no recipiente no desenho do quadro. A partir do estudo, nota-se que graças às marcas – risquinhos no recipiente – isso pode ser feito sem precisar medir novamente. O respectivo volume de água é marcado no desenho com o arco e com a letra T. Conforme a figura 28, que faz referência ao que foi desenvolvido por Nicolas que, enquanto colocava água no recipiente, fazia marcação no vidro usando como unidade medida C.

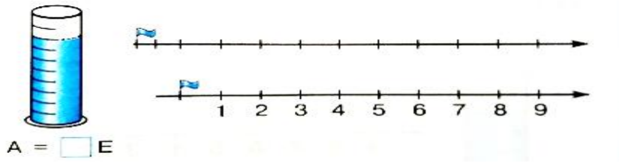
Figura 28-Nova referência a introdução da reta numérica, tomando C como unidade de medida.



Fonte: Горбов, Микулина, Савельева (2008).

A próxima tarefa traz a nomenclatura "reta numérica", com a simulação de que Olga e Paulo marcam a quantidade de água do recipiente (Figura 29). As crianças contarão e concluirão que A = 8E. Resta indicar quem fez a melhor representação na reta: Olga, autora da reta superior, ou a reta inferior de Paulo.

Figura 29-Introdução da reta numérica com os numerais.

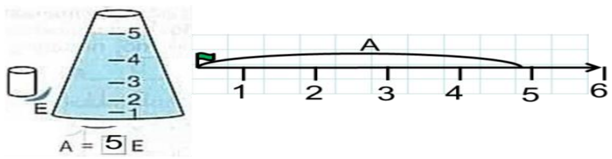


Fonte: Давыдова *et al.* (2012, p. 51).

O professor acrescenta que a menina tomou a iniciativa e foi a primeira a desenhar. O menino fez acréscimos de unidades bem definidas e, a cada uma delas, o respectivo numeral. Para evidenciar a vantagem da representação de Paulo, solicita que uma criança marque o valor de A no desenho (reta) superior e um colega faça o mesmo no inferior. A interação professor e crianças, mediada pelos desenhos no quadro, torna-se argumento de que a representação de Paulo seria a melhor referência, pois os numerais mostram o valor sem recorrer à contagem dos passos. Além do professor, a própria tarefa explicita que uma reta com os numerais é chamada de reta numérica (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2008 apud MAME, 2014).

Para garantir a assimilação da composição da reta numérica, novas tarefas são apresentadas às crianças. Entre elas a figura 30, em que o professor solicita que as crianças expliquem como foram feitas as marcas no vidro. A recomendação é que a análise continue sendo feita na reta numérica.

Figura 30-Reta numérica com os numerais.



Fonte: Давыдова *et al.*, (2012, p. 53).

Importa destacar que, a cada marcação do vidro, corresponde a uma medida E, a mais depositada. É preciso intervenções e questionamentos para levar os alunos à percepção de que, apesar de as marcas no recipiente estarem numa distância diferente uma da outra, cada uma delas marca o mesmo volume – a mesma medida. Por isso, no desenho, os passos devem ser iguais (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2008).

Segundo Mame (2014, p. 108), a caracterização da reta – como lugar geométrico é o melhor modo de apresentação dos numerais – dá condições para manter o vínculo da propriedade numérica de uma grandeza, sem colocar a contagem das unidades no patamar de procedimento empírico. O número, nela situado, é síntese extraída de um modelo que expressa a relação universal entre as grandezas (estas também têm um componente geométrico), que articula ideias de multiplicidade e divisibilidade.

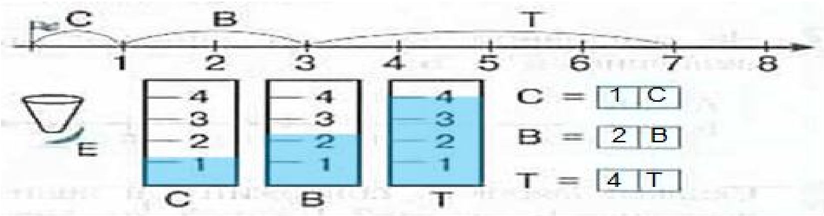
Matos (2017, p. 44) afirma que o sentido da reta é marcado com a seta. A autora considera que, no início, a reta encontra-se do lado contrário; e a contagem é feita por meio de correspondência entre segmentos e números. Daí que, Galperin; Zaporózhets e Elkonin consideram que o conceito de número é formado “como relação algébrica de uma grandeza com respeito à outra, tomada como unidade” (GALPERIN; ZAPORÓZHETS; ELKONIN, 1987, p. 306, apud MATOS 2017, p. 44).

Ainda, de acordo com Matos (2017), a interconexão do movimento realizado, até a presente tarefa, traduz a unidade das significações geométricas (reta, segmentos) e aritméticas (os algarismos) do conceito de número, possível a partir das relações algébricas (letras) entre as grandezas. A autora parte de Costa (1866, p. 9) para afirmar que, “medir uma grandeza é determinar quantas vezes ela contém a grandeza da sua espécie, que serve de unidade de medida. Por consequência, os números são expressões de medida das grandezas”. Essa compreensão difere do ensino tradicional, que faz corresponder objetos soltos a números. A ênfase é apenas na grandeza discreta, em detrimento das grandezas contínuas (volume, massa, comprimento, etc.) (DAVÝDOV, 1982, apud MATOS, 2017, p. 44).

O estudo sobre a reta numérica continua com a introdução de novas tarefas que explicitam a forma de representação nela. Neste tipo de tarefa, as crianças são levadas a entender que qualquer número é composto por uma certa quantidade de unidades, que é representada numa reta numérica, por uma certa quantidade de passos. Por isso, é possível mostrar o significado do valor (resultado da sua medição) na reta, começando por qualquer ponto, não somente pelo início, apesar disso não ser tão cômodo (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2008).

Para a próxima tarefa, o estudo centra-se na representação de valores na reta numérica. De acordo com ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА (2008), para que ação investigativa aconteça, deve-se colocar um certo volume de água em cada recipiente (Figura 31). De igual modo, orienta-se para o registro de cada volume por uma igualdade e pintar no desenho, “comprimento”. Depara-se que, durante o processo de análise, os valores não são iguais, uma vez que contêm quantidade diferente de medidas. Diante desta situação, as crianças são confrontadas a mostrarem os volumes C, B, T no desenho e fazerem as respectivas anotações (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2008).

Figura 31-Representação dos valores na reta numérica com auxílio de volumes.

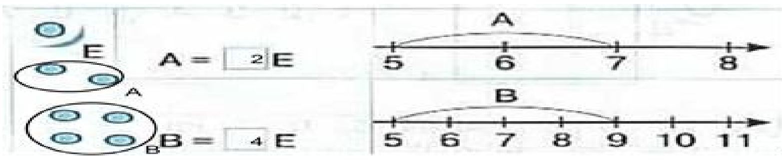


Fonte: Давыдова *et al*. (2012, p. 56).

Da análise, a conclusão dos estudantes é de que, respectivamente, volumes: C apresenta uma medida de comprimento, B duas e T. Além disso, registram as respectivas anotações na parte lateral esquerda dos volumes.

Na sequência, introduz-se uma tarefa em que dois valores são representados nas retas numéricas pelos segmentos do mesmo comprimento. Os valores não apresentam características iguais, tendo em vista que contêm quantidade diferente de medidas. A pergunta norteadora para a ação investigativa é: Quantas medidas E constituem valores marcados com os arcos? Construa estes valores. A análise da questão concorre para a elaboração da conclusão, pelos estudantes, que na primeira reta numérica a medida E apresenta dois valores, enquanto que na segunda a medida E apresenta quatro valores (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2008).

Figura 32-Reta numérica com os numerais com auxílio da medida.



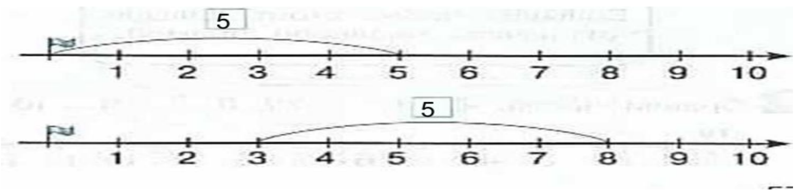
Fonte: Давыдова *et al*. (2012, p. 56).

A próxima tarefa centra-se igualmente na representação de valores na reta numérica. De acordo com a reta numérica (figura 32), a orientação é de colocar um certo volume de água em cada recipiente. De igual modo, orienta-se para que os estudantes registrem cada volume por uma igualdade e pintar no desenho,"comprimento". Depara-se que, durante o processo de análise, os valores não são iguais, uma vez que contêm quantidade diferente de medidas. Diante desta situação, as crianças são confrontadas a mostrarem os volumes C, B, T, no desenho, e fazerem as respectivas anotações (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2008).

As tarefas 27 a 32 demonstram a inter-relação entre as significações aritméticas-geométricas-algébricas. Dito de outra maneira, a reta representa a significação geométrica, as letras a significação algébrica, enquanto a unidade de medida, no caso ao contar quantas vezes um certo líquido cabe no recipiente, traduz a significação aritmética. Na relação entre a geometria e a álgebra, a significação aritmética assume o papel de elemento mediador. Sendo assim, assume as condições particulares.

Uma nova tarefa é apresentada, cuja preocupação consiste em colocar um número em cima dos arcos. Durante a análise, nota-se que o número é o mesmo. Logo, abre-se uma discussão no sentido de se saber qual foi o caso que permitiu a indicação do número com maior facilidade. Depois de diálogos, movidos por questionamento, o grupo de estudante, conforme Горбов, Микулина, Савельева (2008), os estudantes descobrem que é quando a contagem começa pelo início da reta numérica. Em seguida, o professor questiona: Quais são os números que temos que colocar em cima dos arcos? Depois da análise, eles concluem que é o número 5, conforme a figura 33.

Figura 33-Reta numérica com a colocação do número acima do arco.



Fonte: Давыдова *et al*. (2012, p. 57).

Горбов, Микулина, Савельева (2008) sugerem que, no final da análise das tarefas, os alunos devem aprender:

> 1) a compor a reta numérica, com a escolha do início, da direção e do passo (a unidade); achar o ponto para um numeral dado e identificar o número que corresponde ao ponto dado;
> 2) compreender o princípio de posicionamento sequencial dos numerais na reta: cada próximo numeral está a um passo do anterior;
> 3) saber representar os numerais e os valores por meio dos segmentos da reta numérica.
> Vale dizer que essas tarefas permitem que o estudante assimile a relação existente entre as significações aritméticas, algébricas e geométricas. Elas deixam, igualmente, claro o processo de relações entre grandezas, que constituem a forma universal da matemática. Também importa destacar que as referidas tarefas se apresentam de forma sistematizada, de tal forma que, no processo da atividade de estudo, seja promovida na criança o desenvolvimento do pensamento teórico concernente a conceitos matemáticos.

O exposto terá sua razão de ser, se existir, da parte da educação institucionalizada e de seus atores, um compromisso de não mais fornecer conhecimentos e saberes que promovam o pensamento empírico. Em vez disso, uma organização de ensino que promova o desenvolvimento do pensamento teórico.

Essa nossa retomada à discussão sobre pensamento teórico e empírico se justifica em função da sua centralidade e contribuição em vários estudos fundamentados na perspectiva Histórico-Cultural (MOURA, *et al.*, 2010; ROSA, 2012; MAME, 2014; MATOS, 2017: ALVES & DAMAZIO, 2019), cuja preocupação é pautada na organização do ensino que promova no estudante a formação conceitual e teórica.

De acordo com Moura *et al.* (2010, p. 86), para a formação do pensamento teórico do estudante, faz-se necessário organizar o ensino de modo que realize tarefas adequadas para atingir tal finalidade. Os autores citam Davydov (1982), que defende a necessidade de se partir das teses gerais da área do saber e não dos casos particulares, buscando a célula dos conceitos, sua gênese e essência. Isso só se consegue por meio da operação de construir e transformar um objeto mentalmente. Explicitam que, para Davýdov (1982), o método que permite que se reproduzam teoricamente as formas de representação e contemplação sensorial, o concreto real, é o método de ascensão do abstrato ao concreto (MOURA *et al.,* 2010, p. 86).

Uma outra consideração importante para que se garanta o desenvolvimento do pensamento teórico é a atividade de ensino do professor, que segundo Moura *et al.* (2010, p. 90), deve gerar e promover a atividade do estudante. Para os autores, ela deve criar, entre os estudantes, um motivo especial para a sua atividade: estudar e aprender teoricamente sobre a realidade. É com esta intenção que o professor planeja a sua própria atividade e suas ações de orientação, organização e avaliação. De igual modo, consideram que a formação do pensamento teórico e da conduta cultural só é possível como resultado da própria atividade do homem. Decorre que, tão importante quanto a atividade de ensino do professor, é atividade de aprendizagem que o estudante desenvolve (MOURA *et al.*, 2010, p. 86).

Prosseguindo com a discussão em relação ao papel que deve desempenhar a educação institucionalizada, no caso aquela realizada pela escola, Moura *et al.* (2010, p. 86) defendem que:

> O ensino realizado nas escolas pelos professores deve ter a finalidade de aproximar os estudantes de um determinado conhecimento, Daí a importância de que os professores tenham compreensão sobre seu objeto de ensino, que deverá se transformar em objeto de aprendizagem para os estudantes. Além disso, é fundamental que, no processo de ensino, o objeto a ser ensinado seja compreendido pelos estudantes como objeto de aprendizagem. Para a teoria histórica – cultural, isso só é possível se esse mesmo objeto se constituir

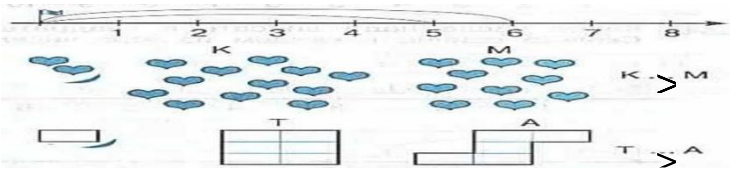
> como uma necessidade para eles. Assim, os conhecimentos teóricos são ao mesmo tempo objeto e necessidade na atividade de aprendizagem.

O exposto na citação também é centralidade no sistema de ensino Elkonin-Davídov-Repkin e colaboradores. É nesta base, que apresentaremos a seguir outras tarefas, cuja gênese garante a formação do pensamento teórico dos estudantes.

As tarefas trazem a ideia de comparação de numerais. Neste sentido, no decorrer da atividade de ensino e de aprendizagem, identifica-se que, quanto mais adiante está o número numa série numérica ou numa reta numérica, maior é o valor por ele medido. Neste caso, a relação "maior e menor" passa a valer para os números. Isso permite a comparação dos valores pelos seus significados numerais, sob a condição de que eles são comparados pela mesma medida. Por conta da necessidade de medir os valores pela mesma medida, serão introduzidas unidades-padrão de medição (por enquanto apenas as unidades de comprimento e de contagem das quantidades). Também, ao longo das tarefas que tratam da reta numérica, é estudada a posição dos valores, os antecessores e sucessores de determinado número, e as suas posições em relação ao início da reta numérica, que pode ser da direita para esquerda, ou da esquerda para a direita (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2008).

O início do estudo da tarefa (Figura 34) proposta por Горбов, Микулина, Савельева (2008), é marcado com a apresentação de dois pares distintos de objetos, pelo professor. A análise dos objetos levará os alunos a descobrirem que, no primeiro caso, trata-se da quantidade e, no segundo, da área. Após a descoberta, o professor sugere que se faça a comparação entre os valores. Alerta que a sua operacionalização pode ser feita ao executar a medição e ao representar seus resultados na reta numérica. Partindo do pressuposto de que os dois valores são comparados e representados na reta numérica, o professor dirige, aos alunos, o questionamento: Quais são esses valores? Dada a preocupação de apresentarem uma resposta ótima, é proposto a medição de valores K e M, na primeira situação, e T e a A na segunda. Por decorrência, os estudantes descobrem que os arcos marcados na reta numérica correspondem aos resultados da medição. Nota-se que, pelo comprimento do segmento da reta, um valor é maior que o outro, e se faz necessário completar o registro, colocando o sinal. Os valores referenciados são: 6 > 5 (T > A) e K > M, conforme a figura 34.

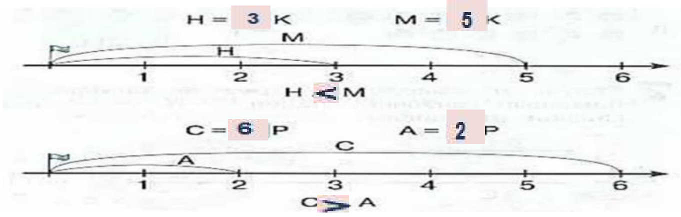
Figura 34-Comparação de numerais numa reta numérica.



Fonte: Давыдова *et al*. (2012, p. 58).

Na sequência, a nova tarefa é introduzida. Os estudantes são solicitados a descobrirem, com ajuda da reta numérica, os resultados da medição e de comparação de valores (Figura 35).

Figura 35-Comparação de valores concretos a partir da reta numérica.



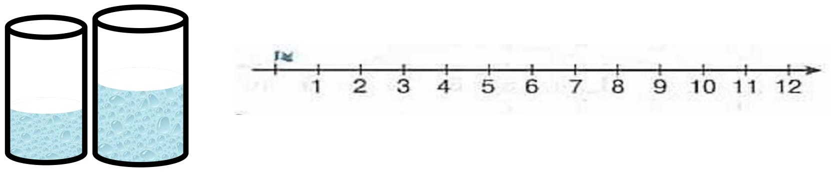
Fonte: Давыдова *et al*. (2012, p. 61).

O processo de análise da tarefa promove a conclusão de que, na primeira reta numérica, o M = 5K é maior que H = 3k, dito de outra forma H < M. Por sua vez, na segunda reta numérica, a constatação é de que C = 6P é maior que A = 2P, ou seja, C > A. Importa salientar que o ato de comparação de grandezas não é uma novidade para os estudantes, uma vez que tal relação foi estudada, em momento anteriores, quando as tarefas traziam a preocupação da comparação de quantidade, entre os volumes. Vale destacar, também, que as relações entre as grandezas são uma das características do pensamento algébrico (ROSA, 2010). Elas foram tratadas no primeiro momento no âmbito da primeira ação, em que a preocupação do estudo era a de analisar: igualdade, diferença, maior e menor (=, ≠, > e <). No contexto atual, utiliza-se números concretos para a análise das relação entre grandezas com mediação de uma unidade de medida. Tal procedimento se enquadra na terceira ação de estudo, proposta pelo sistema Elkonin-Davídov-Repkin e colaboradores.

As próximas tarefas, a serem analisadas, explicitam a comparação de valores pela diferença. Nelas, é tratada com mais detalhes a relação de desigualdade de valores. Destaca-se, nas mesmas, a diferença, isto é, o valor que caracteriza o grau de desigualdade entre os valores. Esta relação é representada na reta numérica, o que permite introduzir as operações de adição e de subtração para os números, na forma de acréscimo e desconto de passos. De igual modo, analisam-se os registros que descrevem estas operações e introduzem o número (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2008).

A primeira tarefa (Figura 36) a ser estudada, com tal finalidade, explicita a diferença entre números. Para tal, o professor coloca em sua mesa dois recipientes de tamanhos diferentes e com volume de água diferente dentro deles. Além disso, no quadro, desenha a reta numérica. No decorrer da análise, os estudantes identificam que o volume de água no primeiro recipiente é menor que no segundo (os recipientes são de tal forma e o volume de água é de tal aparência que dá para perceber logo).

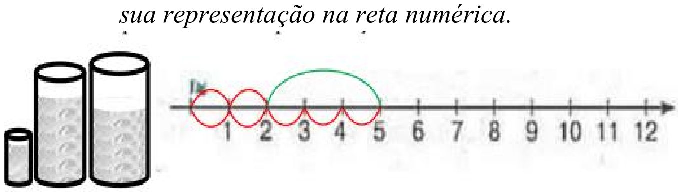
Figura 36-Demonstração da diferença de números entre dois recipientes.



Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008).

A partir da identificação, pelos estudantes, o professor sugere igualar os volumes dos recipientes. Deixa a critério dos estudantes a escolha de qualquer um dos métodos para igualar, por exemplo, acrescentar água no primeiro recipiente. Porém, desta vez não pode orientar-se pelo nível de água no recipiente. Como vamos determinar o volume de água que temos que acrescentar no primeiro recipiente? De acordo com Горбов, Микулина, Савельева (2008), as crianças propõem executar a medição. O professor providencia uma medida (um copinho). Uma das crianças mede a água no primeiro recipiente e marca o resultado (2 medidas) na reta numérica. Em seguida, outro aluno mede o volume de água no outro recipiente e marca o seu resultado (5 medidas) na reta numérica. O professor sugere mostrar a diferença na reta. As crianças as destacam com arco de outra cor (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2008), como mostra a figura 37.

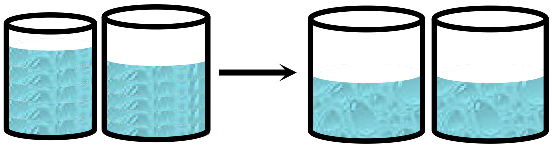
Figura 37-Demonstração da medição de volume que explicita a diferença de números entre dois recipientes e sua representação na reta numérica.



Fonte:GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008).

Em seguida, o professor pergunta para as crianças: *"E agora, vocês podem igualar o volume de água nos recipientes?"* Uma pronta resposta é dada pelas crianças: *"Podemos, sim."* Temos que acrescentar 3 medidas no primeiro recipiente.As crianças efetuam a operação de igualar. Para verificar se tudo foi feito corretamente, a água destes recipientes é transferida para outros dois iguais pela forma e pelo tamanho. As orientações fazem com que as crianças consigam, pela reta numérica, determinar quantas medidas **a mais** tinha no segundo recipiente, bem como quantas medidas **a menos** havia no primeiro recipiente.

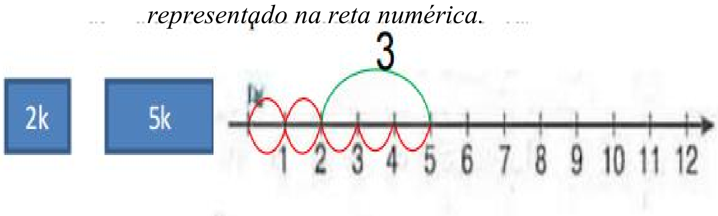
Figura 38-Demonstração de igualdade de volume.



Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008).

Em seguida, o professor mostra dois retângulos e diz que suas áreas foram medidas pela medida K. A área do primeiro é 2K, e a do segundo 5K. Sugere-se que as crianças adivinhem, quanto a área de um é maior que a área do outro. *"Será que é preciso fazer um outro desenho para isso?"* Uma das propostas é de que a diferença pode ser identificada pelo desenho antigo, cujo valor é 3 medidas K. Isso é observado na reta numérica, isto é, o número 5 tem 3 unidades a mais que o número 2. Em cima do arco, que marca a diferença, registra-se o número 3 (Figura 39).

Figura 39-Demonstração da diferença de números entre dois recipientes e registro do valor acima do arco representado na reta numérica.



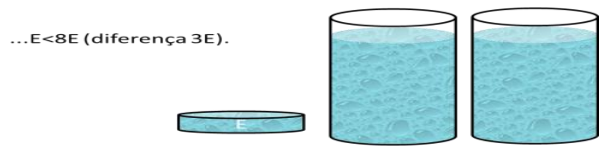
Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008).

Após a representação do valor acima do arco, o professor ajuda as crianças a escreverem e a lerem os seguintes registros: 5 >2 (diferença 3) e 2 < 5 (diferença 3).

Rosa (2010), parte de Davídov e Slobódchikov (1991), para afirmar que são as necessidades e os motivos de estudo, que orientam as crianças a obterem o conhecimento como resultado da sua própria atividade transformadora. A transformação do material de estudo possibilita a revelação das relações internas, cujo exame permite que o estudante siga a origem de todas as manifestações externas do material a apropriar. A necessidade de estudo é a necessidade de a criança experimentar, com um ou outro objeto (real ou mentalmente), a fim de separar, nele, os aspectos gerais essenciais e particulares externos e suas inter-relações (ROSA, 2010, p. 190).

Para terminar a análise da comparação de números, pela diferença, uma nova tarefa é apresentada. Ela tem como objetivo encontrar o significado de um valor a partir do significado de outro e a diferença. O professor apresenta dois recipientes de mesma forma, sendo que um deles tem água. A análise se volta para o registro: 5E < 8E (diferença 3E). A partir dele, observa-se que a água foi medida pela unidade E (o professor mostra a medida) e que o volume desconhecido é 3 medidas menor. É neste âmbito que se apresenta o questionamento aos estudantes: Como podemos colocar o volume que falta? Depois de analisada a questão, as crianças levantam algumas hipóteses. Uma delas é a sugestão de colocar o mesmo volume, depois tirar 3 medidas (Figura 40).

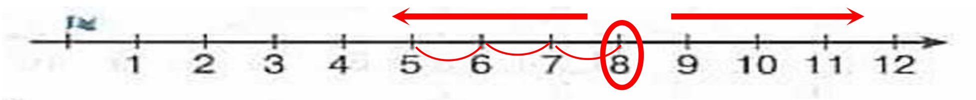
Figura 40-Demonstração de encontrar o significado de um valor a significado de outro valor e a diferença.



Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008).

O professor concorda com a sugestão, com a informação que é o caminho correto. Porém, questiona se não existe a possibilidade de descobrir quantas medidas devem ser colocadas dentro do segundo recipiente sem ter que colocar e tirar a água. E acrescenta: *"Pode ser que a reta numérica nos ajude."* As crianças procuram a resposta na reta numérica, orientadas por perguntas do professor, por exemplo: *"Qual é o número que deve ser encontrado, maior ou menor? Para que lado devemos nos deslocar pela reta numérica a partir do número conhecido? Quantos passos devem ser dados?"* Em resposta aos questionamentos, com ajuda do professor, os estudantes concluem que o número a ser encontrado deve ser menor. Para tanto, o deslocamento na reta numérica deve ser realizado pela esquerda, dando 3 passos, a partir do número conhecido. O registro é completado pelo número obtido: 5E < 8E (diferença 3E). Consequentemente, as crianças acrescentam volume de água necessário com ajuda da medida. O volume foi determinado ao adotar os números na reta.

Figura 41-Demonstração de encontrar o significado de um valor a significado de outro valor e a diferença na reta numérica.



Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008).

Os questionamentos, apresentados para análise da tarefa, remetem os estudantes para a atividade de investigação. Como consequência, eles conhecem e manejam a matemática de forma rigorosa (TORANZOS, 1963). É possível observar que as tarefas não se propõem, conforme expressão do autor, a *mortificar a mentalidade* das crianças. Isso porque a rigorosidade em matemática é um objetivo a alcançar com o tempo, como consequência do desenvolvimento das capacidades intelectuais dos estudantes, finalidade a que se propõe o ensino desenvolvimental na perspectiva Histórico-Cultural. Este pressuposto é defendido por Vygotski (1993), citado por Mame (2014), quando afirma que o ensino deve orientar-se não para o ontem, mas sim para o amanhã do desenvolvimento infantil. Para o autor, “o ensino é unicamente válido quando precede ao desenvolvimento” (VYGOTSKI, 1993, p. 243).

No entanto, Mame (2014) considera que para a materialização desse desígnio, exige-se dos professores uma organização do ensino que contemple as tarefas de estudo com um caráter problemático, isto é, com teor investigativo. Isto quer dizer que as tarefas devem ser elaboradas de forma que instigam os alunos a estarem em permanente atividade de estudo. Esta aponta para a apropriação de conhecimentos em processo de solução autônoma das tarefas, desde que permita que as crianças identifiquem as condições de origem do conhecimento (DAVÍDOV, 1988 apud MAME, 2014, p. 55).

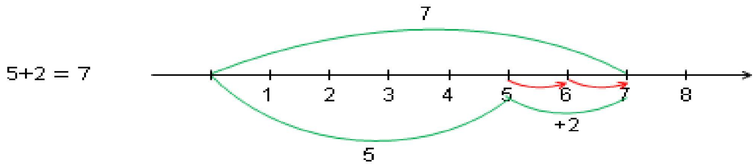
Se de um lado advoga-se a boa organização do ensino, do outro há de se pensar em tarefas que colocam os estudantes permanentemente ativos. O caráter ativo do processo de apropriação da experiência socialmente significativa é condição essencial para o surgimento das neoformações do desenvolvimento intelectual em todos os níveis de ensino (Fundamental, Médio e, posteriormente, Ensino Superior). Só assim, o estudante passa das transformações objetais à análise ativa de sua experiência prática, o que proporciona a assimilação das relações entre os fins, os meios e as condições da atividade (DAVÍDOV; MÁRKOVA, 1987, p. 189 apud MAME, 2014, p. 61).

É com base no caráter ativo, condição essencial para o surgimento das neoformações do desenvolvimento intelectual em todos os níveis de ensino que as próximas tarefas são apresentadas aos estudantes. As mesmas tratam da adição e subtração de números. Vale destacar que este tipo de pensamento matemático, já foi apresentado aos estudantes no âmbito do estudo de tarefas que tratam da igualdade do volume pelo aumento e diminuição de uma situação, bem como pela mediação da reta numérica (ROSA, 2010; ALVES, DAMAZIO, ROSA, 2013; MATOS, 2017).

A introdução das operações de adição e subtração ocorre na proposição de Elkonin-Davídov-Repkin, com a determinação de um valor desconhecido, tendo como base dois valores já conhecidos, a partir da reta numérica. Segundo Rosa (2010, p. 196), a adição e a subtração são introduzidas, respectivamente, como contagem para frente ou para trás, na reta numérica. Posteriormente, são registradas como sentenças e, gradualmente, elevadas ao plano mental. Razão pela qual, a tarefa é apresentada com base na reta na numérica, para que os estudantes completem o seguinte registro: __ > 5. Com a condição de que a diferença seja de duas (2) unidades (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Esse pressuposto leva o professor a sugerir que os estudantes encontrem, na reta numérica, o número 5. Direciona a continuação do desenvolvimento da tarefa com questionamentos do tipo: *"O número desconhecido é maior ou é menor que 5? Para que lado devemos prosseguir pela reta numérica de acordo com a seta (se distanciando do início) ou para o lado contrário da seta (para o início)? Quantos passos temos que dar a partir do número 5?"* A análise dos questionamentos leva os estudantes a concluírem que serão 2 unidades ao lado oposto da origem, porque o número procurado é maior que 5 e a diferença é 2 unidades. O registro da operação realizada é apresentado no quadro pelo professor (5 + 2), conforme figura 42. E explica: *"Partimos do 5; estamos à procura de um número maior, por isso vamos para o lado contrário do início e marcamos com o sinal de "adição"; no final, colocamos quantas unidades são deslocadas, a partir do 5. O resultado será: 2+5=7.* Este registro pode ser lido de várias maneiras, como por exemplo, "cinco mais dois dá sete", "se acrescentar dois ao cinco, vai dar sete" (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

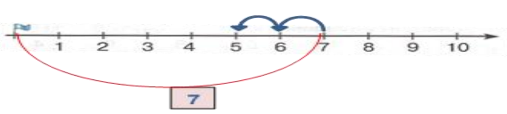
Figura 42-Representação geométrica da adição de um número.



Fonte: Rosa (2012, p. 197).

A operação de subtração é apresentada por meio de um procedimento análogo à adição. Porém, com deslocamento na reta numérica em sentido contrário, pois elas são inversas entre si (ROSA; DAMAZIO; ALVES, 2013, apud MATOS, 2017, p. 45). Gradativamente, a linguagem matemática é introduzida, por exemplo, com destaque, pelo professor, do número 7 na reta numérica e os estudantes registram-no (7). Em seguida, desloca-se para a esquerda (este movimento é representado pelo sinal de menos) em duas unidades (Figura 43). Pronuncia-se o número encontrado (5). Para finalizar, procede-se à leitura da operação realizada: sete menos dois igual a cinco: 7 – 5 = 2 (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Figura 43-Representação geométrica da subtração de um número.



Fonte: Elaboração com base de Давыдова *et al.* (2012, p. 61).

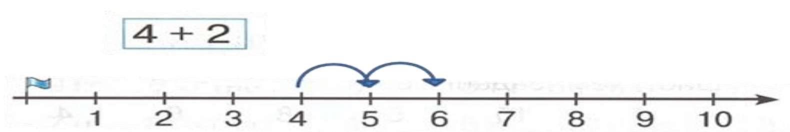
As tarefas apresentadas no âmbito das operações da adição e subtração reforçam a tese de que, nas proposições do sistema Elkonin-Davídov-Repkin, o ensino de matemática é organizado de forma que contemple a inter-relação entre as significações matemáticas, por meio da relação entre seus diversos conceitos, sistema conceitual (VYGOTSKY, 1993). Uma peculiaridade a destacar é que nessas significações, além do sistema conceitual e seu nexos, trazem vinculações entre aritmética, geometria e álgebra, partes constituintes de um todo que é a matemática, cujo objetos de estudos foram abordados no capítulo anterior. Como temos anunciado, ao longo desta tese, as proposições do sistema Elkonin-Davídov-Repkin trazem um número de tarefas que pela sua diversidade e complexidade contribui para o desenvolvimento do pensamento teórico matemático dos estudantes. Nisso está a manifestação de que a relação universal/singular/particular é uma de suas peculiaridades. Neste âmbito de reflexão e de argumentação da referida afirmação, apresentaremos outras tarefas que trazem o mesmo propósito sobre as operações aritméticas de adição e subtração e, posteriormente, apresentaremos questões relacionadas à relação todo-parte.

A tarefa estabelece que o professor sugere, aos estudantes, que adivinhem nas duas sentenças, a seguir, a forma de lê-las:

1. 4 mais 2 ou aumentar 4 juntando 2;
2. 4 menos 2 ou diminuir 4 tirando 2.

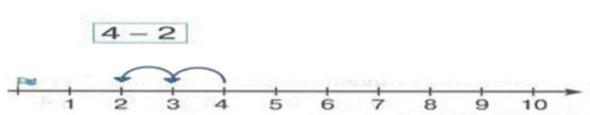
Em seguida, a representação em forma de operações, respectivamente, 4 + 2 e 4 – 2, bem como na reta numérica (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008). Assim, da ação investigativa, os estudantes sob estrita observação e orientação do professor apresentam seguintes respostas, evidenciadas nas figuras 44 e 45:

Figura 44-Representação geométrica de 4 mais 2 ou aumentar 4 juntando 2.



Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008).

Figura 45-Representação geométrica de 4 menos 2 ou encontrar a diferença entre 4 e 2.



Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008).

As sentenças apresentadas nas figuras (42, 43, 44, 45) são lidas de dois modos: usando as palavras mais, menos e em seguida adicionamos, diminuímos. Feito isso, o professor informa que a operação de aumento de um número pelo outro chama-se adição e a diminuição, ou ação de encontrar a diferença, chama-se subtração (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

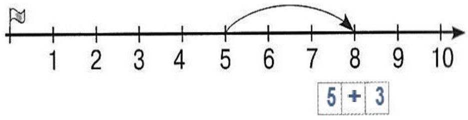
Sobre a adição, Caraça (1946) considera ser a operação mais simples e da qual todas as outras dependem. Para o autor, a ideia de adicionar ou somar já está incluída na própria noção de número natural. Trata-se da operação elementar de passagem de um número ao seguinte, isto é, somar uma unidade. Pois bem, somar a um número ***a*** dado, outro número ***b***, é efetuar, a partir de a, b passagens sucessivas pela operação elementar. Ao número ***a,*** dá-se o nome de adicionando; a ***b*** o de adicionador; aos dois em conjunto o de parcelas. A soma de ***a*** com ***b*** representa-se por $\boldsymbol{a+b}$. Na soma, o adicionando representa um papel passivo; o adicionador, um papel ativo (CARAÇA, 1946, p. 27).

Em relação à operação de subtração, o autor parte do pressuposto da inversibilidade. A inversão consiste em: dada a soma e uma das parcelas, determinar a outra. Deveria haver duas operações inversas, conforme se pedisse o *adicionando* ou o *adicionador,* $a \geq b$ mas, em virtude da *propriedade comutativa* da adição, os papéis das duas parcelas podem trocar-se, e as duas inversas fundem-se numa só, que se chama *subtração* (CARAÇA, 1951, p. 30). Para o autor, a subtração é a operação pela qual se determina um número ***c*** que, somando com ***b***, dá ***a***:***a-b*= *c*** ← ***c*+*b*=*a***. Ao número ***a*** dá-se o nome de diminuendo ou aditivo; a ***b*** o de diminuidor ou subtractivo a ***c*** o resto ou diferença. No entanto, para que a operação seja possível, é necessário que ao *aditivo* seja maior que o *subtractivo* ou, pelo menos, igual a ele:
(ibidem, p. 31).

Observaremos que essa síntese de teor científico teórico elaborada por Caraça (1951), caracteriza as duas novas tarefas que, também, propiciam o processo de consolidação de assimilação das operações aritméticas de adição e subtração. As mesmas trazem a ideia de igualdade, e a ação investigativa ocorre pela mediação da reta numérica, com a possibilidade da contagem para frente ou para trás, conforme as tarefas anteriormente estudadas. Neste caso, a contagem para frente representará a adição e, para trás, a subtração. Na primeira tarefa, os estudantes são confrontados pelo seguinte questionamento do professor: *"Expliquem como foi encontrado o número? E anotem a sentença."*

Da análise, os estudantes concluem que foi feita a contagem: três passos para frente partindo do número 5 (Figura 46).

Figura 46-Representação geométrica da igualdade.



Fonte: Давыдова *et al*. (2012, p. 61).

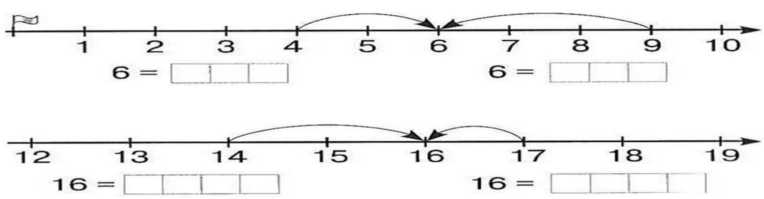
Na sequência são feitas as operações com os números e seus resultados são anotadas na forma de igualdade:

$$5 + 3 = 8 \qquad 7 - 2 = 5$$
$$8 = 5 + 3 \qquad 5 = 7 - 2$$

Posteriormente, informa-se que o resultado da operação, na reta numérica, é registrado pela igualdade 5 + 3 = 8. Este registro pode ser lido de várias maneiras: “cinco mais três igual a oito”, “cinco mais três dá oito”, “se acrescentar 3 ao cinco vai dar oito” (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Como anunciado, uma nova tarefa será apresentada. Ela surge como um ato conclusivo das ações realizadas pelos estudantes, sob olhar do professor, cujas tarefas particulares são organizadas de forma a permitir que os estudantes se apropriem de toda experiência e de todos os conhecimentos científicos produzidos pela humanidade ao longo de séculos. Para análise da tarefa, o professor sugere que os estudantes completem as igualdades, (figura 47).

Figura 47-Representação da igualdade de forma incompleta (adição e subtração).

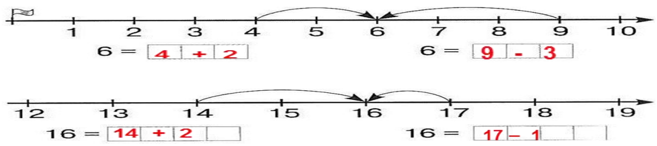


Fonte: Давыдова *et al.* (2012, p. 79).

Nota-se que a tarefa em causa é do tipo que os estudantes são convidados a completar dados. Para tanto, a base de análise é as retas numéricas que trazem, respectivamente, os números 6 e 16 como elementos principais, pois são simultaneamente resultado de uma adição e de uma subtração. A leitura desse duplo resultado significado é possível pelos arcos sobre a reta numérica, que se constituem em elementos mediadores na interpretação da tarefa. Eles indicam que a contagem deve ser feita com passo para frente (adição) e passos para trás (subtração). Importa salientar que a impressão de inacabamento da tarefa – isto é, a ideia de há algo incompleto – constitui-se numa das premissas do sistema de ensino Elkonin-Davídov-Repkin. Isso porque esta perspectiva teórica é contra a apresentação de tarefas prontas, conforme pregam os modelos tradicionais de ensino (ROSA, 2010; MOURA *et al.*, 2010; MAME, 2014).

O modo de apresentação da tarefa, promove a ação investigativa, de tal sorte que os estudantes consigam a partir do esquema, encontrarem os números que faltam para completar as sentenças e, ao mesmo tempo, criarem as bases necessárias para desenvolvimento do pensamento teórico. Assim, como resultada da ação investigativa, os estudantes, de acordo com Горбов; Микулина; Савельева (2008) resolvem a tarefa, isto é, completam os espaços solicitados com: *6= 4+2; 6=9-3 e que 16= 14+2; 16=17-1* (Figura 48).

Figura 48-Representação da igualdade de forma completa (adição e subtração).



Fonte: Давыдова *et al.* (2012, p. 79).

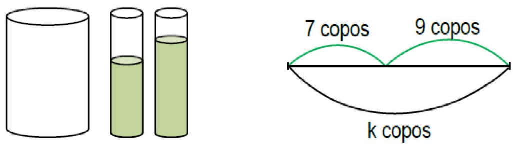
As operações aritméticas de adição e subtração constantes na reta numérica se constituem em uma manifestação singular da significação algébrica e das propriedades que se apresentam na transformação do modelo geral peculiar das referidas operações, a partir das igualdades: $\boldsymbol{c = a + b; a = c - b; b = c - a,}$ no contexto relação essencial todo-partes. Davýdov e colaboradores consideram a relação todo-partes, entre grandezas, como fundamental para subsidiar a interpretação de problemas envolvendo adição e subtração (MATOS, 2017, p. 45).

Горбов *et al.* (2008) recomendam que ao analisar a relação entre todo e as partes, deve-se começar do conhecimento que as crianças possuem sobre a possibilidade de compor os valores (e o número) de várias partes. De igual modo, sugerem a criação de condições pedagógicas que possam levar os estudantes a aprenderem a descobrir o significado numérico de valores que estão correlacionados com o todo e as partes. Os autores consideram que, ao se executar as operações na reta numérica, as crianças devem ser levadas a descobrir os caminhos no qual encontrarão o significado de que o todo e a parte são distintos. Conhecendo as características de relação entre o todo e as partes, é possível criar e resolver os problemas-textos que visam encontrar qualquer os componentes da adição ou subtração (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

É com o explicitado nestes pressupostos, que estudiosos da teoria histórico-cultural – concretamente das proposições do sistema de ensino Elkonin-Davídov-Repkin (ROSA, 2012; ROSA, DAMAZIO, ALVES, 2013; DORIGON, 2013; MATOS, 2017) – apresentam as tarefas que explicitam e teorizam a relação todo-partes.

Uma dessas tarefas (figura 49), a referência é dois recipientes com líquido e um terceiro, vazio, maior que os dois primeiros. O professor informa que tem 7 copos de líquido no primeiro recipiente e 9 no outro. Os números são anotados no quadro. Também, diz que, inicialmente, todo líquido estava no terceiro recipiente que agora está vazio. Desse modo, 7 e 9 copos são as partes que compõem o todo *k* copos. Ou seja, o todo (k) é composto por duas partes: 7 mais 9 copos. A relação entre o todo e as partes é representada por meio de esquema, conforme a figura 49 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Figura 49-Relação entre o todo e as partes.



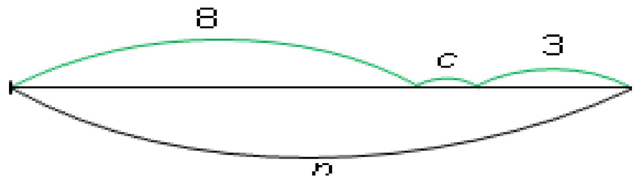
Fonte: Rosa (2012, p. 207).

A representação geométrica, conforme propõe o sistema Elkonin-Davídov-Repkin, dá margem para a identificação de que para, se encontrar valor do todo (o desconhecido), há que aplicar a operação da adição, ou seja: 7 + 9 = 16. Mas, para isso, a orientação da proposição davydoviana é de que, inicialmente, seja desenvolvida na reta numérica e, posteriormente, atingir o plano mental. Deste modo, os procedimentos realizados objetalmente (por meio da relação entre grandezas) são idealizados (MATOS, 2017).

Rosa (2012) e Matos (2017) alertam que, na referida tarefa (figura 49), o todo apresentou-se fragmentado em partes, o que incide na operação de adição. Esse fato permite à análise de uma nova tarefa que apresenta um movimento inverso. Trata-se da apresentação do todo composto a partir das partes que caracterizará uma nova operação (MATOS, 201, p. 46). Este pensamento conceitual se explicita na tarefa (figura 50), proposta por горбов; Микулина; Савельева (2008) e ДАВЫДОВ *et al.* (2012).

Neste sentido, para execução da tarefa, sugere-se estender uma corda de um poste para outro. Para tal, existem três rolos de corda com os seguintes comprimentos: 8, *c* e 3 metros. A medida do comprimento da distância entre um poste e outro equivale à medida do comprimento dos três rolos de corda juntos. Ao estudante compete a representação da situação em um esquema, conforme a figura 50 (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008; ДАВЫДОВ *et al.*, 2012, apud MATOS, 2017).

Figura 50-Relação entre o todo e as partes – movimento inverso.



Fonte: Rosa (2012, p. 208).

De acordo com Matos (2017, p. 47), a construção do esquema com a devida análise propicia a conclusão, pelos estudantes e com a orientação do professor, de que *n* metros é o todo composto por três partes (8, *c* e 3)”. Ainda, diz a autora, que eles estabelecem as seguintes relações: $n > 8, n > c, n > 3 \; e \; n = 8 + c + 8, ou \; n = 11 + c$. O todo é maior que as partes isoladamente, porém é igual à soma das partes. O desenvolvimento dessa tarefa encontra respaldo em Kalmykova (1991, p. 09), ao afirmar que, para a formação de “conceitos matemáticos mais abstratos, é necessário intensificar as operações de abstração e generalização. Um meio para chegar a este fim consiste em exprimir o texto de um problema em termos matemáticos mais generalizados”. O conteúdo da tarefa analisada caracteriza-se pelo avanço, “no processo de abstração e generalização na singularidade da relação todo-partes, ao exprimi-la na unidade das significações aritméticas (8 e 3), algébricas (*c* e *n*) e geométricas (esquema)” (MATOS 2017, p. 47).

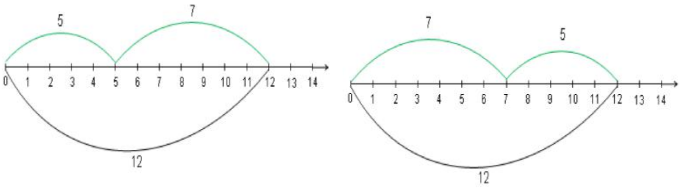
A tarefa a seguir – um problema acrescido de uma ilustração (figura 51) – traz a sugestão de determinar o significado do todo. Para tanto, aos estudantes, é apresentado o problema: Uma dona de casa tinha 7 kg de frutas na caixa e mais 5kg na cesta (desenho no quadro). Ela resolve fazer o doce, para isso é preciso comprar a mesma quantidade de açúcar. Como descobrir, quantos quilos de frutas no total a dona tem? O filho da dona sugeriu colocar todas as maçãs na balança e assim descobrir sua massa. E a filha disse que este número pode ser descoberto com ajuda da reta numérica. Como fazê-lo?

Figura 51-Ilustração do problema.

Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008).

Partindo da resolução das tarefas anteriores, a probabilidade é que os estudantes sugiram a operação da adição por meio da reta numérica (7 + 5). O que surpreende o professor, porém, é próprio do sistema Elkonin-Davídov-Repkin, a resolução de tarefas, de forma investigativa. Por isso, o professor interfere com a seguinte questão: porque a operação de adição? Em nenhum momento, foi dito que o valor desconhecido é maior do que os valores apresentados no problema. O direcionamento para a análise, por meio do questionamento, ocorre porque o valor desconhecido é o todo, maior que as partes. Portanto, o todo é determinado pela soma das partes (7 quilos e 5 quilos), independentemente, da ordem em que os números são operados (5 + 7 ou 7 + 5), conforme a figura 46 (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008)

Figura 52-Determinação do significado do todo.



Fonte: Rosa (2012, p. 208).

O problema em causa reflete uma situação particular vivenciada por uma dona de casa. Porém, a sua interpretação é realizada com base na relação universal própria do conceito da adição e subtração, isto é, todo e partes. Isso é o que possibilita, ao estudante, encontrar o todo (açúcar) tendo como referência distintas partes (frutas) que, apesar de se tratar de mesma grandeza (massa) com diferentes referências visuais, não causa desvio de atenção. A operação é realizada com números referentes a uma quantidade específica de massa (grandeza). "Esses números resultam da medição por meio de uma mesma unidade de medida (quilo), o que não ocorrerá na próxima tarefa, em que as unidades são diferentes" (MATOS, 2017, p. 48).

Na tarefa a seguir, são expostos dois recipientes. Num deles o professor coloca duas xícaras grandes de água, no outro, um copo pequeno. No quadro, anota-se os números 2 e 1 (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Na sequência, toda água é transferida para o terceiro recipiente. Dada a preocupação de se determinar o volume do terceiro recipiente, os estudantes são submetidos ao seguinte questionamento: *"Quantas medidas tem?"* Também, outro questionamento de caráter reflexivo: *"Podemos determinar o terceiro volume sem medi-lo, usando apenas os números apresentados no quadro?"* Em resposta, possivelmente alguns estudantes irão afirmar que há três medidas no recipiente. Porém, ao medi-lo novamente com a xícara, chegam à conclusão de que a afirmação não é verdadeira. Cria-se a hipótese de medir com copo pequeno. Porém, neste caso, dará mais de 3 copos, o que infere na existência de um erro, pois os estudantes somaram os números que foram obtidos como resultados da medição de medidas diferentes (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Neste sentido, obtém resultado do tipo $2x + 1c$, que não é igual a $3xc$. Existem duas unidades x (xícara) e mais uma unidade c (copo). Como são unidades de medidas diferentes, torna-se impossível a operação com agregação de ambas (MATOS, 2017, p.49).

A tarefa, portanto, atende ao pressuposto do sistema Elkonin-Davídov- Repkin, que remetem os estudantes em múltiplas possibilidades de solução de situações problemas. Em tais situações, nem sempre os estudantes terão a possibilidade de responder positivamente, razão pela qual existirá a necessidade de o professor criar, do ponto de vista metodológico, condições que respondam a impossibilidade de solução. O caminho para a criação de tais condições consiste na direção e organização do ensino. Nele, existe a possibilidade de o professor, por via de múltiplos questionamentos, remeter o estudante a repensar o procedimento adotado para a resolução da tarefa. Esse procedimento pedagógico é igualmente defendido por Talizina (1987), ao afirmar que, quando um estudante não consegue resolver um problema, geralmente, o professor mostra como fazê-lo ou, simplesmente, aconselha-o a pensar melhor.

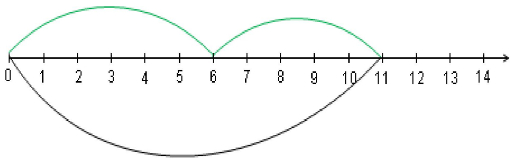
Segundo Matos (2017), com base em Oliveira (1999), cumprir esta orientação nem sempre é possível. A criança pode não conseguir pensar sobre o problema e. Justamente, por isso não foi resolvido, e "nem sempre a escola ajuda a pensar melhor" (OLIVEIRA, 1999, p. 94 apud MATOS, 2017, p. 49), ou ensina a interpretar um problema (MATOS, 2017, p. 49). Isso se confirma, pontua Matos (2017), com a afirmação de Davídov (1988) que a escola, historicamente, não se preocupou em desenvolver o pensamento dos seus estudantes referente ao processo de interpretação. Em vez disso, centra-se na representação empírica, sensorial, da situação apresentada no problema. Atende, pois, ao princípio do caráter visual direto ou intuitivo, em vez do caráter objetal (DAVÍDOV, 1987 apud MATOS, 2017, p. 49).

A próxima tarefa a ser analisada, traz como referência a determinação das variantes dos significados das partes do todo. A preocupação das tarefas é de elucidar, aos estudantes, que o conhecimento sobre as interconexões da relação todo-partes possibilita a resolução dos problemas-textos, que visam determinar qualquer um dos componentes por meio da adição ou subtração (ROSA, 2012).

Para execução da tarefa, é proposto que os estudantes utilizem dois grupos de figuras colocadas no envelope: um com 6 rosas e outro com 5 margaridas. O professor questiona sobre a possibilidade de determinar a quantidade de figuras que constam no envelope, com a utilização da reta numérica. Os estudantes realizam a operação $6 + 5 = 11$

(Figura 53). O resultado para a outra variante (5 + 6) deve ser obtido sem a reta numérica (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

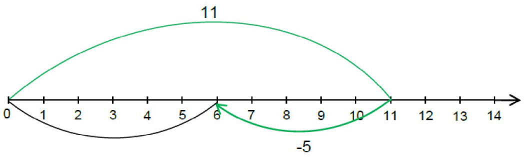
Figura 53-Representação introdutória das variantes dos significados das partes do todo.



Fonte: Rosa (2012, p. 213).

Na sequência, o professor tira do envelope 3 rosas e 2 margaridas e questiona: *"Quantas flores ficaram no envelope?"* É provável que os estudantes não respondam à questão. Essa situação, obrigará a participação do professor para sugerir-lhes o uso da reta numérica, onde as partes estão marcadas com os arcos. Ao final, registra-se a operação: 11 – 5 = 6 (figura 54) (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Figura 54-Representação das variantes dos significados das partes com recurso da operação de subtração.

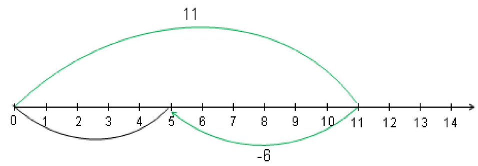


Fonte: Rosa (2012, p. 214).

Rosa (2012) considera que esta tarefa cria a possibilidade de recorrer a diversos procedimentos. De acordo com a autora, um deles é que, primeiramente, os estudantes somarão 3 (rosas) + 2 (margaridas), o que leva à obtenção da quantidade de flores a retirar. Na sequência, farão a representação de 11 – 5. Outro modo é fazer, inicialmente: as duas subtrações 6 (rosas) – 3 (rosas) = 3 (rosas restantes no envelope) e 5 (margaridas) – 2 (margaridas) = 3 (margaridas restantes). Posteriormente, "as quantidades de flores de cada espécie que permanecem: 3 + 3 = 6" (ROSA, 2012, p. 214).

Para finalizar a análise da tarefa, novamente todas as figuras são colocadas dentro do envelope. Em seguida, tira-se 3 rosas e 3 margaridas. Os estudantes são orientados pelo professor com o seguinte questionamento: Quantas figuras ficaram dentro do envelope? A análise da questão é feita, assim como nas tarefas anteriores, na reta numérica e, depois, o registro do resultado da seguinte forma: ***11- 6 = 5*** (figura 55)**.**

Figura 55-Representação das variantes dos significados partes com recurso a operação de subtração.



Fonte: Rosa (2012, p. 214).

Rosa (2012, p. 214) entende que desse modo “desenvolve-se o método geral de análise das condições do problema, da produção do esquema e do plano de resolução. Os problemas de adição e subtração aparecem de forma interconectada na relação todo-partes”. Tal compreensão é respaldada em Cheptulin (2004) que entende a *parte* como objeto (processos, fenômenos, relação), que entra na composição de um outro objeto (processo, fenômeno, relação), e se manifesta na qualidade de momento de seu conteúdo. Por sua vez, o todo representa, para o autor, o objeto (processo e fenômeno), incluindo em si, na qualidade de parte constitutiva, outros objetos organicamente ligados entre eles (fenômenos, processos, relações). Possui propriedades que não se reduzem às propriedades das partes que o constituem (CHEPTULIN, 2004, p. 270-271).

Além da interconexão, como anunciado, as tarefas estão organizadas, de tal forma, que atendem ao princípio da generalização das ações, que consiste na análise, na abstração e na síntese (RUBINSHETÉIN, 1958, apud TALÍZINA, 1988, p. 75). No entanto, vale destacar que a generalização é entendida por Rubinshetéin (1958), citado por Talazina (1988, p. 76), como um dos principais processos do pensamento. De acordo com a autora, a abordagem da psique, a partir da atividade, requer a especificação, como “processo fundamental do pensamento”, para determinar seu lugar no sistema da atividade. A autora pontua que, na teoria da formação por etapas das ações mentais, a generalização é considerada como uma das características fundamentais de qualquer ação.

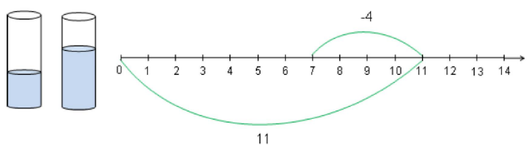
Entretanto, a generalização não se limita na esfera do pensamento (TALÍZINA, 1988, p.75). De igual modo, a autora afirma que, para formar ações cognoscitivas com uma medida dada de generalização é importante saber o seu mecanismo psicológico: a dependência, da generalização com respeito às partes estruturais e funcionais da ação. No entanto, “o processo de generalização depende do carácter das ações orientadoras dirigidas aos objetos generalizado” (ZAPORÓZHETS, 1964; PODIÁKOV, 1977, apud TALÍZINA, 1988, p. 76).

Enfim, a generalização constitui o eixo principal na formação do conceito. Dominar um conceito significa “dominar a totalidade de conhecimentos sobre os objetos a que se refere o conceito dado” (DAVYDOV, 1982, p. 31 apud CEDRO, *et al.*, p. 430).

É neste âmbito que uma nova tarefa é apresentada para os alunos. Ela traz como preocupação a análise do procedimento de busca do significado da parte, a partir do todo.

Para a execução da tarefa, sugere-se colocar sobre a mesa dois recipientes com líquido e, no quadro, o esquema com os arcos na reta em que fica explícito a existência de 4 medidas de líquido no primeiro recipiente; os dois juntos possuem 11 medidas. Parte-se da ideia de que os estudantes já sabem que o líquido do segundo recipiente pode ser medido. Porém, compete-lhes que determinem o volume sem tocar no líquido, mas com procedimentos pertinentes aos números, na reta numérica. O professor esclarece sobre a necessidade de saber o tipo de número: o todo ou a parte. Conclui-se que o número desconhecido é, obrigatoriamente, menor que o 11, em 4 unidades, portanto é uma das partes. Comprova-se o resultado obtido com ajuda da reta numérica, por meio de medição do líquido. O professor lembra que a operação para determinar o número menor chama-se subtração: 11 – 4 = 7 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008)**.** Neste caso, procura-se o significado da parte a partir do todo. Dito de outra forma, sendo o todo 11 e 4 a parte, procura-se a outra parte que é 7, seguindo o modelo algébrico ***c - a = b***, em que: ***c =11, a = 4*** e valor a ser encontrado, no caso a outra parte ***b =7*** (figura 56).

Figura 56-Representação geométrica do significado.



Fonte: Rosa (2012, p. 216).

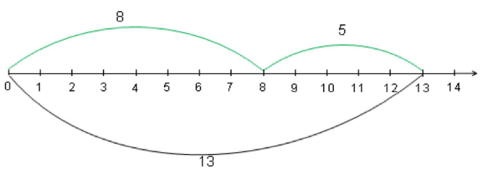
A operação aritmética de subtração, segundo Costa (1866, p. 29), “é uma operação, que tem por fim – decompor um número dado em duas partes, das quais uma é conhecida; ou é uma operação, que tem por – diminuir de um número dado quantas unidades contém outro número também dado”. Ao resultado se chama resto, excesso ou diferença. A definição condiz com a de Caraça (1946). Também, deixa em evidência que o processo da subtração se deduz facilmente do da adição, porque a primeira, das duas, “é inversa da segunda” (COSTA, 1866, p. 29).

Em termos práticos, essas operações podem ser expressas na forma algébrica, ou por via da representação geométrica e, no caso da tarefa, pela reta numérica. A importância da reta numérica para a determinação do todo ou da parte a partir do todo – tendo como fundamento as operações aritméticas de adição e subtração – foi objeto de estudos de vários pesquisadores, além do sistema Elkonin - Davídov-Repkin. Por exemplo, Rosa (2012) cita estudos desenvolvidos por Banzatto (2003), que investigou os procedimentos utilizados pelos estudantes da antiga sétima série, atual oitavo ano[35], na resolução de problemas com números negativos. De acordo com a respectiva investigação, os estudantes que mais obtiveram êxito utilizaram a reta numérica. De outra parte, aqueles com menos êxito seguiram a ordem em que os dados apareciam no enunciado para escrever as operações de adição e subtração. Segundo Rosa (2012, p. 216), os dados obtidos por Banzatto (2003) confirmam a importância de se considerar, no ensino, a reta numérica, bem como a ideia do inteiro e das partes e como estes interferem na ordem dos elementos, durante a elaboração das operações de adição e subtração. A referência positiva é para o que se faz nas proposições davydovianas que na presente tese adotou-se como terminologia de sistema Elkonin-Davídov-Repkin.

Dada a importância de os estudantes saberem como determinar o todo e as partes, com a utilização de outras possibilidades para aprendizagem que não seja apenas pela reta numérica, a próxima tarefa insere outro procedimento de ação: um instrumento novo, a calculadora.

A análise da tarefa é realizada com base no que está colocado no quadro: duas figuras de dois maços, respectivamente com 8 e 5 maçãs. A sugestão, aos estudantes, é que determinem o todo, com a indicação da medida como sendo a unidade. A discussão se remete às possibilidades e, por consequência, com ajuda da reta numérica, é indicada a solução: 8 + 5 = 13 (figura 57) (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Figura 57-Representação geométrica da determinação do todo, com a indicação de que a medida é a unidade – uso da calculadora.



Fonte: Rosa (2012, p. 217).

Em seguida, o professor explica ser bastante trabalhoso realizar a operação na reta numérica quando os valores são altos e apresenta a calculadora para as crianças. O resultado da calculadora é o mesmo obtido por meio do uso da reta. Isso deve ser demonstrado, obrigatoriamente, para confirmar que o aparelho (máquina) opera desde que usada

[35] A antiga sétima série, que é o atual oitavo ano, que refere Rosa (2012) sobre estudos de Banzatto (2003), está relacionada ao Ensino Fundamental, do Sistema de Ensino Brasileiro.

corretamente. É importante dizer que a calculadora realiza tanto a adição como a subtração. Porém, não pode escolher a operação por conta própria – é um ser humano que faz isso, o aparelho apenas faz a conta.

A análise da tarefa nos leva a recorrer a Kalmykova (1991, p. 09) para quem a "solução de problemas exige, o conhecimento de uma vasta gama de conceitos concretos e abstratos que refletem as relações quantitativas entre os objetos". Esse pressuposto é observado nas tarefas apresentadas do sistema de organização de ensino de Elkonin-Davídov-Repkin, colaboradores e continuadores, pois também ficou evidente tal interconexão em todas as tarefas. De igual modo, o conjunto das das tarefas atendem o processo de ascensão do abstrato ao concreto que é "um dos princípios didáticos necessários a uma organização do ensino que possibilite a formação do pensamento teórico" (CEDRO *et al.*, 2010, p. 433).

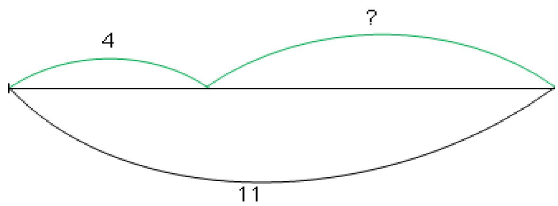
Também da análise das tarefas, mais uma vez demonstra a interligação existente entre as significações arítimeticas-algébricas-geométricas, como elementos singulares da matemática caracterizada: pela comparação de grandezas (igualdade e desigualdade); pelo uso de letras e símbolos, segmentos, da reta numérica; bem como pela referência do modelo algébrico, a partir da igualdade***: c = a + b; c = a - b; a + b = c.*** E, com base nas operações aritméticas de adição e subtração, é notória a correlação entre todo e as partes. Essa correlação, segundo Cheptulin, (2004), se exprime em particular na dependência da qualidade do todo da natureza específica de suas partes constitutivas, e na dependência das qualidades das partes da natureza específica do todo. Isso é consequência de uma certa correlação das partes em seu conjunto, que forma a estrutura do todo. É exatamente a correlação desses ou daqueles elementos que condiciona o aparecimento do todo e sua transformação em partes constitutivas deste último. Sem a estrutura não existe todo. Ela é a condição primordial para a existência do todo (CHEPTULIN, 2004, p. 272).

Dito de outra forma, as tarefas analisadas cumpriram com os pressupostos do sistema Elkonin-Davýdov-Repkin de que, para assimilação dos conceitos matemáticos do primeiro ano – na especificidade das operações de adição e subtração – acontece: a partir do esquema pré-determinado do todo e as partes; escolha da operação de busca de significado do todo e da parte, tendo em mãos dois outros significados pré-determinados pelo esquema e, por fim, correlacionar a situação concreta e um desenho sobre relação entre o todo e a parte (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

As próximas tarefas trazem a preocupação do estudo de problemas-textos. As tarefas apresentam um nível de complexidade nos seus enunciados, cuja solução dependerá do auxílio de desenhos. Estes ajudarão na resolução de problemas, porque permitem a determinação rápida de um número, caso eles forem o todo ou a parte, respectivamente, escolher a operação adequada. No desenvolvimento das tarefas, ocorre orientações para que os estudantes percebam que as operações (concretas, descritas no enunciado de um problema e aritméticas), muitas vezes, não combinam. A discussão das tarefas deve, igualmente, proporcionar condições para a interpretação da diferença dos textos dos problemas e das histórias, ao ponto de gerar o entendimento de que os princípios de criação do problema têm por base a história.

A análise da tarefa se centra na decisão da operação a ser adotada para a resolução do seguinte problema: Mamãe trouxe 11 pepinos. 4 deles eram compridos, os restantes eram curtos. Quantos pepinos curtos mamãe trouxe? O problema é narrado rapidamente e existe a possibilidade de os estudantes não conseguirem lembrar. O professor admite a dificuldade da percepção do problema e aguarda por sugestões e, também, propõe a utilização do esquema. A leitura do problema é feita novamente e de forma pausada, enquanto os estudantes representam o esquema (nos cadernos e no quadro), conforme figura 58 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Figura 58-Representação geométrica do problema.



Fonte: Rosa (2012, p. 219).

Como decorrência do processo de análise da tarefa, a conclusão é que o valor desconhecido no esquema é uma das partes. Para identificá-la, subtrai-se a parte conhecida do todo (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008; ДАВЫДОВ et al., 2012). Adota-se, pois, o método universal de análise das condições do problema, da produção do esquema e do plano de resolução. Este procedimento, ao ser generalizado, eleva substancialmente o desenvolvimento do pensamento ao nível teórico, diferentemente do que ocorre no ensino fundamentado nos princípios didáticos da escola tradicional (ROSA, 2012; MATOS, 2017).

Vale destacar que a forma de apresentação do problema expressa a premissa do sistema Elkonin-Davídov-Repkin qual seja: a organização do ensino é de tal modo que os estudantes não se apropriem de conceitos prontamente elaborados, desconectados e sem ligação com a objetivação da situação concreta a ser estudada, mas sim em situações problemáticas, por via da ação investigativa sobre os nexos necessários para a solução dos problemas. Esta forma de apresentação do problema e seu modo de solução exigem do estudante um pensamento ativo e generalizado. Este princípio é defendido por Kalmykova (1991, p. 23), ao afirmar que "quanto mais ativa for a atividade intelectual, tanto mais fácil lhes será descobrir as conexões e tanto mais estáveis estas serão". O caráter ativo é uma das particularidades mais importantes do processo de assimilação de qualquer conceito. Trata-se, pois, da "aprendizagem como um tipo específico de atividade" (NÚÑEZ , 2009, p. 140).

No caso da matemática, para além do caráter ativo, também é recomendável que ao se formar "conceitos matemáticos mais abstratos, é necessário intensificar os exercícios de abstração e generalização. Um meio para chegar a esse fim consiste em exprimir o texto de um problema em termos matemáticos mais generalizados" (KALMYKOVA, 1991, p. 09).

No esquema do sistema Elkonin-Davídov-Repkin, apresentado na figura 58 são verificáveis os pressupostos acima referenciados. Também, para resolução de problemas de adição e subtração, a análise é mediada pela objetivação da situação, idealizada ou desenhada, mas no plano teórico. Observa-se que não existe uma representação direta. Em vez disso, esta é mediada pelo esquema, que reflete as relações essenciais e suficientes para que o problema seja resolvido. Trata-se de uma expressão concreta, em imagem, das relações essenciais, mas que não captadas de forma elementar e primariamente sensorial (ROSA, 2012, p. 220).
O esquema pressupõe a recorrência aos conhecimentos teóricos e da experiência acumulada durante os sistemas de tarefas anteriores. Também está ligado ao caráter visual que, com um conteúdo específico, reflete as relações internas, e não apenas as propriedades externamente observáveis dos dados do problema (ROSA, 2012, p. 220).

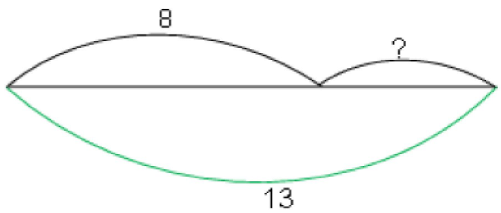
A tarefa, a seguir (figura 59), proporciona aos estudantes a diferenciação entre problema e história. A narração da história se incide sobre três significados de valores que podem ser transformados em três problemas, em que cada um dos significados fica desconhecido. Vale lembrar que a resolução da tarefa exigirá novamente a observância do caráter ativo. O objetivo primordial é a elevação do nível de compreensão dos estudantes sobre as operações aritméticas de adição e subtração, por via da apresentação de problemas, que carecem de análise antes de se efetuar a operação. Outro objectivo é o de salientar a compreensão referente ao significado do todo, a partir das partes, bem como do significado da parte.

A análise da tarefa é marcada com a sugestão do professor para resolver o problema com auxílio do esquema. O enunciado do problema traz o seguinte questionamento:

"Yuri tinha 13 nozes. Quando ele comeu 8 nozes, restou 5. Quantas nozes o Yuri tinha inicialmente?" A tarefa estabelece que os estudantes façam o esquema no caderno no decorrer da leitura. Os estudantes identificam que a resposta do problema se encontra no próprio enunciado. Todos os números são dados. Conclui-se que não é um problema e sim uma história com os números (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008). Neste sentido, sugere-se que o texto seja mudado de modo a permitir que o mesmo se transforme em três problemas (Figuras 59, 60, 61). Surge o questionamento de como seria possível fazê-lo? O professor orienta as ações dos estudantes no sentido de seguirem seu raciocínio, que tem por objetivo escolher o valor, cujo significado será desconhecido. O valor desconhecido será representado, no esquema, com o sinal de interrogação (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008; ДАВЫДОВ *et al.*, 2012):

Primeiro problema: Yuri tinha 13 nozes. E comeu 8 delas, restando-lhe algumas nozes. Diga quantas nozes restaram a Yuri?

Figura 59-Representação geométrica do problema 1.

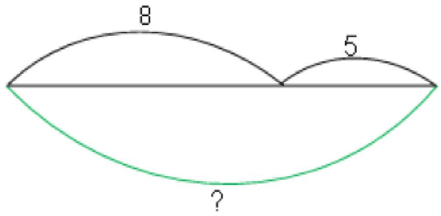


Fonte: Rosa (2012, p. 222).

Provavelmente, os estudantes responderam que estamos diante da relação todo-partes, referente à igualdade, em que: do todo, *treze*, subtrai-se a *parte*, oito, e resulta no valor da outra parte, cinco. Esse pressuposto pode ser apresentado na igualdade: $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$. Nessa igualdade algébrica $\boldsymbol{c}$ é o todo*, que corresponde ao valor* aritmético *(13);* $\boldsymbol{b}$ assume a parte, que corresponde ao valor aritmético (*8);* $\boldsymbol{a}$ o valor desconhecido, no caso o valor aritmético *(5),* relacionado a quantas nozes restaram de Yuri, após ter comido *oito (8)* das *trezes (13)* nozes. Todo esse movimento de resolução do problema é apresentado pelo professor, aos estudantes, da seguinte forma: *13 – 8=5.*

Segundo problema: Yuri tinha algumas nozes. Comeu 8 nozes, restara-lhe 5. Quantas nozes o Yuri tinha inicialmente?

Figura 60-Representação geométrica do problema 2.

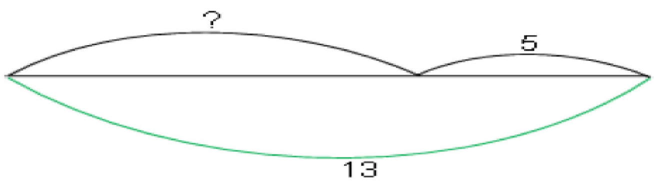


Fonte: Rosa (2012, p. 222).

A análise da segunda pergunta do problema remete-nos a uma nova situação: saber quantas nozes tinha, inicialmente, Yuri. Na busca do valor desconhecido, é essencial perceber a relação entre as partes e o todo da igualdade. O valor aritmético do *todo* ***c*** é desconhecido. Os valores aritméticos das *partes* ***(a e b)*** são, respectivamente, *cinco (5) e oito (8).* Neste caso, ao invés de subtrair, conforme no problema anterior, a operação aritmética é a adição, seguindo a igualdade: ***a + b = c***. Assim, na referida igualdade algébrica: ***a*** corresponde ao valor aritmético *cinco (5*), ***b*** corresponde ao valor aritmético *oito (8)* e a expressão algébrica ***c*** tem como valor aritmético desconhecido, *treze (13*). A representação aritmética, pelos estudantes, é*: 5+8=13.*

a) Problema 3: Yuri tinha 13 nozes. Restaram 5 nozes. Quantas ele comeu?

Figura 61-Representação geométrica do problema 3.



Fonte: Rosa (2012, p. 222).

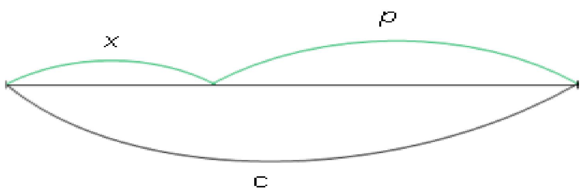
Importa observar que os valores aritméticos oito (8) e cinco (5) são as partes que compõem o todo, valor aritmético treze (13). A operação aritmética a ser realizada consiste em: do *todo* (13), subtrai-se a *parte* conhecida (5) e resulta na outra *parte*, desconhecida (8), conforme representação geométrica do problema (Figura 61). Esse desenvolvimento operacional resulta do pressuposto da igualdade: ***c - a = b***. No caso, ***c*** é o *todo, que corresponde ao valor* aritmético *(13),* ***a,*** a parte que corresponde ao valor aritmético (*5)* e ***b*** o valor desconhecido, no caso o valor aritmético *(8),* relacionado a quantas nozes comeu Yuri, das *trezes (13)* nozes que tinha, após terem-lhe restado 5 nozes. Seu registro é: *13 – 5=8.*

Segundo Горбов *et al.* (2008) e Давыдов *et al.* (2012), a análise da localização do ponto de interrogação, no esquema, auxilia os estudantes na formulação da pergunta e do enunciado do problema. Neste sentido, de uma situação particular, são produzidos três problemas singulares (MATOS, 2017). Importa salientar que as articulações, promovidas pelas tarefas por via dos três questionamentos, traduzem a confluência das significações geométricas, aritméticas e algébricas, no ato da resolução do problema. Também, manifestam objetivamente a concepção das operações de adição e subtração como alicerçada na relação todo/partes (MAME, 2014).

Para finalizar o processo de análise das tarefas que envolvem as operações da adição e subtração – com a explicitação de seus fundamentos na relação parte todo – apresentaremos uma nova tarefa que, no sistema Elkonin-Davýdov-Repkin, expressa o modelo universal.

A mesma será analisada tendo como base o seguinte texto: Os estudantes estavam jogando bola. A eles se juntaram mais ***p*** estudantes, então ficaram ***c*** estudantes jogando bola (Figura 62). O professor lembra, aos estudantes, que os números podem ser marcados por letras e questiona: quantos problemas podem ser formulados com base na história anterior? Dadas às apreensões anteriores e o modo que o professor orienta, os estudantes concluem que há três possibilidades de formulação de problemas, porque são três números e cada um deles pode ser considerado o valor desconhecido, a ser determinado por meio do cálculo (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Figura 62-Representação do modelo universal.



Fonte: Rosa (2012, p. 222).

Da representação (Figura 62), observa-se que o modelo universal, possibilita diversas interpretações como, por exemplo: a partir da soma das partes, determinamos o *todo:* $\boldsymbol{x + p = c}$, bem como a subtração do *todo* por uma *parte* conhecida determina a outra *parte* desconhecida: $\boldsymbol{c - x = p}$ e $\boldsymbol{c - p = x}$ (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008; ДАВЫДОВ *et al.*, 2012). Assim, temos “a representação da relação universal para a resolução de problemas, modelada geometricamente (esquema) e algebricamente (por meio de letras) ” (MATOS, 2017, p. 53).

Matos (2017), cita Rubinstein (1960), para afirmar que, tal nível de abstração e generalização. Na especificidade do esquema em referência, “para todos os casos de adição e subtração envolvendo a relação entre partes e o todo” (MATOS, 2017, p. 53).

O exposto é referência em todo sistema Elkonin–Davídov-Repkin, principalmente, nas tarefas analisadas no presente estudo. Seus fundamentos matemáticos são a base para que Davýdov (1982, p. 431) defendesse que, o objetivo do ensino de Matemática, desde o primeiro escolar, "é criar nos alunos de uma concepção circunstanciada e válida de número real a partir do conceito de grandeza". Além disso, as tarefas do sistema em causa propõem uma análise mediada pelos símbolos matemáticos. Revelar "e expressar em símbolos o ser mediatizado das coisas, sua generalidade, é efetuar a passagem para a produção teórica da realidade" (DAVÝDOV, 1982, p. 303).

Rosa *et al.* (2013) consideram que a situação em referência é uma das razões pelas quais os símbolos matemáticos são contemplados nas tarefas de Davýdov e seus colaboradores, desde o primeiro ano do Ensino Fundamental. Os autores afirmam que os estudos de Davýdov (1982, p. 433-434) mostram que o "simbolismo literal, as correspondentes fórmulas literais e a interconexão das mesmas, consolidativos das propriedades fundamentais das grandezas, são inteiramente acessíveis às crianças". É daí que o sistema Elkonin-Davýdov-Repkin apresenta o conceito de adição interconectado com a subtração, a partir da análise da relação entre grandezas e na inter-relação das significações aritméticas, algébricas e geométricas.

Até ao momento, procuramos demonstrar como se apresenta a inter-relação das significações aritméticas, algébricas e geométricas, no sistema Elkonin-Davídov-Repkin. As tarefas explicitam que tal relação surge no âmbito da medição de grandezas, linha reta, igualdade e desigualdade, reta numérica, uso das operações aritméticas da adição, subtração e na determinação do significado do *todo* e as *partes*. Na próxima seção, abordaremos sobre as operações de multiplicação e divisão, que assim como a operações da adição e subtração, refletem conexões reais entre distintas grandezas (ALEXANDROV, 1976). Vale lembrar que no sistema Elkonin-Davýdov-Repkin, estes conceitos são abordados no segundo ano do Ensino Fundamental. Por esta razão, na presente tese, não discutiremos as tarefas, apenas trataremos de forma geral, dada a importância de apresentar o modelo universal, destes conceitos. Entendemos que este anúncio indicará as possibilidades de os estudantes se apropriarem teoricamente dos referidos conceitos.

Ao terminar a discussão sobre adição e subtração, como tendo a relação essencial todo-partes, vale destacar que as tarefas (30-56) explicitam, *a priori,* a relação existente entre as entre as significações aritméticas, geométricas e algébricas e, *a posteriori,* o objeto central desta de pesquisa, que é a relação universal – singular-particular.

No processo de sua análise, fica igualmente notável, que álgebra (a partir das expressões algébricas $\boldsymbol{a + b = c}$; $\boldsymbol{c = b - c}$ ou vice-versa) serviu de elemento medidor (particular) entre a significação geométrica (por via da reta) e a significação aritmética (pela unidade de medida e, consequentemente, pela introdução dos números da reta).

5.1.3 Operação aritmética de multiplicação e divisão no sistema de ensino Elkonin-Davídov-Repkin

Conforme foi anunciado, na presente seção, a discussão centrar-se-á nas operações aritméticas da multiplicação e divisão, bem como no sistema de ensino Elkonin-Davýdov-Repkin. Portanto, não trataremos de seus conceitos com profundidade por serem conteúdos específicos para o segundo ano de escolaridade.

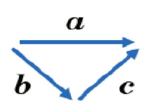
Nesta proposição, as operações aritméticas de multiplicação e divisão são tratadas no primeiro ano de escolaridade, antes da introdução do conceito de número. Esta afirmação é comprovada nos estudos de Rosa (2012); Rosa; Damazio & Crestani (2014); Mame (2014) Hobold (2014); Freitas (2016). No entendimento de Rosa, Damazio e Crestani, (2014, p. 169) "a introdução do conceito de divisão e multiplicação, em Davydov, é realizada a partir de uma representação fundamental do conceito de número, a reta numérica". Segundo os autores, as tarefas revelam o movimento interno e as relações entre os conceitos de divisão e multiplicação (ROSA; DAMAZIO E CRESTANI, 2014, p. 169).

Os autores pontuam que a operação da divisão, nas tarefas davydovianas, é realizada a partir de uma representação geométrica fundamental em Matemática, a reta numérica. Assim, o "quociente é determinado a partir da inter-relação entre as significações aritméticas e geométricas, além de propiciar a revelação do conceito científico de divisão" (ROSA *et al.*, 2014 p. 175).

Com base no exposto da seção anterior, a construção da reta assume a sua significação numérica por constituir a base para a representação do resultado de uma medição. Além disso, se constitui como elemento mediador para expressar as significações do número: aspecto ordinal, como ponto; bem como seu aspecto qualitativo, um segmento da reta. As tarefas (24, 25, 26, 27, 28, 29) da seção anterior, oferecem condições para discussão sobre o melhor modo de apresentação da propriedade numérica da grandeza. Tal fato conhecerá sua efetivação, levando em consideração, o nível conceitual de número traduzido no modelo universal da relação de multiplicidade: $\boldsymbol{a = nc}$ (**a** é a grandeza que se quer medir, **c** a unidade pré-determinada e $\boldsymbol{n}$ o número de vezes que **c** cabe em **a**) (DAVÝDOV, 1982).

De acordo com Rosa, Damazio e Crestani (2014), os possíveis nexos conceituais da divisão, na proposição de ensino de Davýdov e colaboradores, se realizam na inter-relação com o conceito de multiplicação. É a partir deste pressuposto que Freitas (2016) apresenta o modelo universal para o conceito de multiplicação e divisão (Figura 63).

Figura 63-Modelo Universal: multiplicação e divisão.



Em que,
a representa o total de medidas básicas;
b representa a medida intermediária;
c representa a quantidade de vezes que *b* se repete para obter *a* ou a quantidade de vezes que *b* cabe em *a*.

Fonte: Freitas (2016) com base em Rosa, Damazio e Crestani (2014).

Freitas (2016) considera o modelo como uma elaboração dos estudantes durante a resolução de diversas tarefas particulares. Isso significa dizer que é no processo de resolução das tarefas, juntamente com a orientação do professor, que os estudantes abstraem as relações entre as grandezas – unidades de medida básica, “unidade de medida intermediária e total de medidas básicas – e fixam no esquema os nexos essenciais que possibilitam a generalização do referido modelo universal” (FREITAS, 2016, p. 89-90).

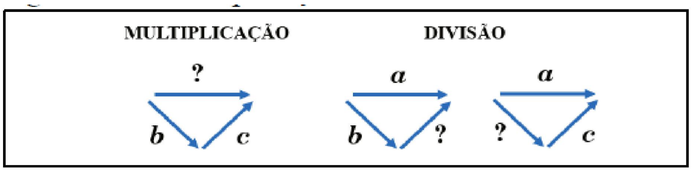
Para Rosa, Damazio e Crestani (2014), citados por Freitas (2016, p. 90), o essencial do conceito de multiplicação consiste em verificar, no processo de medição, a quantidade de vezes (c) que a unidade intermediária (b) se repete para obtenção do total de unidades básicas (a). Diz Freitas (2016):

> [...] o número ***b***, que se repete, chama-se multiplicando (unidade de medida intermediária); o número ***c***, que representa a quantidade de vezes que b se repete, chama-se multiplicador, e o resultado (***a***) é chamado produto (total de unidades básicas). (ROSA; DAMAZIO; CRESTANI, 2014, p. 182 apud FREITAS, 2016, p. 90)

Na divisão, de acordo com Freitas (2016), a relação essencial consiste em verificar a quantidade de vezes (***c)*** que a unidade de medida intermediária (***b***) cabe no total de medidas básicas (***a***) (ROSA; DAMAZIO; CRESTANI, 2014). Freitas (2016) parte dos pressupostos das seis ações da proposição do sistema Elkonin-Davýdov–Repkin (apresentadas na presente tese nas páginas 52-54), para esclarecer que esse sistema, ao ter como finalidade o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes, estrutura a organização do ensino de modo que passe pelo processo de modelação. “O modelo é a representação que traduz a inter-relação essencial de um determinado conceito em nível científico, base incondicional para o desenvolvimento do pensamento teórico” (FREITAS, 2016, p. 90).

Neste sentido, Caraça (1946, p. 32), afirma que, o número ***a*** chama-se dividendo; ao número ***b***, divisor; ao número ***c***, quociente. A divisão é, portanto, a operação pela qual, dados o dividendo e o divisor, se determina um terceiro número, quociente, que multiplicado pelo divisor dá o dividendo. Conforme o autor, para que a operação seja possível, o dividendo deve ser múltiplo do divisor; caso contrário, não existe número inteiro ***c*** que satisfaça a ***c. b* = *a***. Considera a divisão como operação inversa da multiplicação, uma vez que conhecido o produto e um dos fatores, determina-se o outro fator (CARAÇA, 2002, apud FREITAS, 2016). A figura 64 explicita a multiplicação e divisão no modelo abstrato, conforme Freitas (2016).

Figura 64-Multiplicação e Divisão no modelo abstrato.



Fonte: Freitas (2016) com base em Rosa, Damazio e Crestani (2014).

A explicitação desta figura espelha o modelo da relação geral multiplicação e divisão que ocorre no segundo do ensino fundamental, conforme apresentamos no início desta breve discussão.

Na próxima seção, o estudo se volta para análise das proposições angolanas para o ensino fundamental.

5.2 Proposições angolanas para o primeiro ano do ensino fundamental que explicitam do objeto de estudo

Na presente seção, abordaremos sobre as proposições angolanas para o ensino da matemática. Entre elas, nossa análise centra-se no sistema de ensino de matemática proposto por Isabel Ferreira do Nascimento - Alberto Antonio - José Kiala M´Fuansuka para o primeiro ano do ensino fundamental, no caso primeira classe no sistema angolano.

Vale dizer que a referida proposição não anuncia as bases filosóficas e psicopedagógicas em que se assenta, para expressar a percepção de visão de mundo, homem e sociedade que se pretende formar. Pressupomos que a mesma traz, na sua gênese, os pressupostos da reforma educativa Burity da Silva e Pinta Simão, amparadas pela Lei de Bases do Sistema de Educação - Lei 13/01 de 31, de dezembro, e pela Lei de Bases do Sistema de Educação e Ensino - Lei 17/16, de 7 de outubro.

Conforme anunciamos, estas leis foram elaboradas em substituição ao sistema de ensino que vigorou de 1976 a 2000, isto é, período após a proclamação da independência até a entrada do multipartidarismo, que permitiu as realizações das primeiras eleições em Angola. Antes disso, o sistema de educação angolano se assentava nos pressupostos socialistas, sobretudo na visão marxista-leninista, dado o alinhamento do país com o bloco socialista. Esse alinhamento fez com que a Angola se beneficiasse de acordos no campo da educação com a antiga URSS e Cuba, países que serviram de assessores para o modelo educacional anterior, centrado no professor, porém com alguma riqueza em seus conteúdos.

Nascimento, Antonio e M´Fuansuka, para a elaboração das proposições matemáticas para o Ensino Fundamental (Ensino Primário), partem do seguinte pressuposto: “a matemática é uma disciplina indispensável na formação geral do homem com vista a desenvolver no aluno capacidades de raciocínio, de comunicação, bem como as capacidades de resolver problemas matemáticos e da vida e com vista a estimular o gosto por esta disciplina”. Partindo deste pensamento, os autores estruturam o manual de matemática, voltado para o primeiro ano do Ensino Fundamental – 1ª classe do Ensino Primário no sistema educacional angolano, por três capítulos, sendo:

1. Geometria;
2. Números e Operações;
3. Grandezas e Medidas.

a) No primeiro capítulo, os autores discutem sobre ***Geometria***, onde apresentam temas como:
b) Relações Espaciais, em que são discutidas questões de vocabulário: à frente – atrás – entre; em cima, em baixo, mais alto e mais abaixo, direita esquerda à direita à esquerda, itinerário;
c) Sólidos geométricos;
d) Figuras geométricas planas, em que são discutidos conceitos geométricos de superfícies planas e superfícies curvas;
e) Linhas abertas, linhas fechadas, região interior e exterior de linhas fechadas, linhas retas, linhas curvas, interior e exterior à linha fechada.

No segundo capítulo, a discussão centra-se sobre os ***Números e Operações***, em que é apresentada às crianças noções sobre:

a) Estudos dos números até 5, para tanto, as crianças são estimuladas a fazer a leitura e escrita desses números, a realização da adição com números até 5, e a comparação de números;
b) Estudos dos números até 10, tendo como subtemas, a leitura e escrita dos números de 6 até 9; adição e subtração dos números de 6 até 9;
c) Conjunto, estuda-se neste tema: tantos como, mais que e menos que;

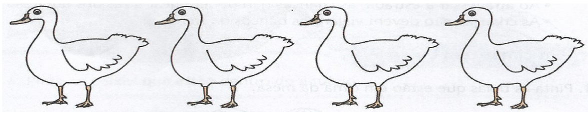
d) Estudo do número 10 com dezena;
e) Estudo dos números até 20, com abordagem de temas relacionados à adição e subtração; comparação e ordenação desses números; multiplicação;
f) Estudo dos números até 50, no qual são abordados temas como: leitura e escrita dos números de 21 até 50; agrupamento de objetos em dezenas; adição e subtração; comparação e ordenação;
g) Estudo dos números até 100, cuja abordagem se refere à leitura e escrita dos números; adição e subtração; composição e decomposição dos números em parcelas e comparação e ordenação.
a) No terceiro capítulo, a discussão é focalizada no estudo das ***Grandezas e Medidas***. Neste capítulo, as crianças entram em contato com os conteúdos a seguir relacionados.
b) Conservação, comparação e ordenação de grandezas, para tal estudam a noção de comprimento, peso e massa, e noção de capacidade;
c) Relações temporais, em que é dado a conhecer, às crianças, conteúdos sobre: hoje, ontem, amanhã, agora, antes, depois, muito tempo, pouco tempo, ao mesmo tempo, dias da semana;
d) Dinheiro, neste subtema as crianças temas crianças têm contato com aprendizagem sobre a moeda angolana, valores faciais da moeda angolana até Kz 100. 00 e, por fim, sobre moedas e notas.

5.2.1 Geometria nas Proposições Angolanas do Primeiro Ano do Ensino Fundamental

Nascimento *et al.* (2018), ao introduzirem as noções matemáticas no 1º ano do ensino primário (ensino fundamental), sugerem que se comece com as noções de relações espaciais com uso do vocabulário: à frente, atrás e entre. A preocupação em estudar as relações espaciais, nas proposições angolanas, está relacionada com a ideia de despertar a posição espacial que se encontra um determinado o objeto ou corpo a ser analisado. Porém, importa lembrar que não é a primeira vez que as crianças entrarão em contato com estas noções geométricas. Elas se iniciam, enquanto bebê, se aprimoram na Educação Infantil e sua consolidação se expressa no 1º ano do Ensino Fundamental. Sobre este último, Hohmann e Waikart (2009, p. 748) afirmam que "a experiência da criança com as relações espaciais e a compreensão que faz delas começar nos primeiros tempos de vida, quando o bebé segue visualmente os caminhos das pessoas objetos". Assim, desde bebé se começa a "desenvolver essa noção de espaço envolvente e no qual está inserido, de forma a perceber e interagir com que está à sua volta, sendo esta forma de explorar o mundo" (REIS, 2014, p. 14).

Esse pensamento é reforçado por Breda *et al.*, (2011, p. 13) ao afirmarem que "quando as crianças chegam à escola possuem já muitos conceitos rudimentares de forma e espaço que devem constituir a base para o conhecimento geométrico e raciocínio espacial a desenvolver ao longo da escolaridade". É neste sentido, que é sugerido para as crianças pintarem o pato localizado em frente de todos (Figura 65).

Figura 65-Introdução às relações espaciais, uso do vocabulário à frente.



Fonte: Nascimento *et al.* (2018, p. 9).

Na sequência são solicitadas para que completem os espaços em branco, conforme questões abaixo:

a) O_____ Pintando vai à ______ de todos.

b) Os restantes _____ patos vão ____ do pato pintado.

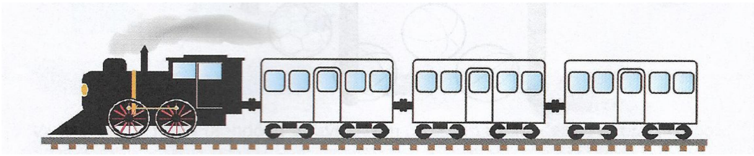
Espera-se que, após a análise, as crianças concluam que o pato pintado encontra-se à frente de todos e os restantes três patos encontram-se atrás daquele. A colocação destas questões desafiadoras permitem que os estudantes adquiram os conhecimentos das noções espaciais de forma contextualizada e de forma gradativa. Essa premissa de aprendizagem deve acontecer com o estrito apoio do professor, a quem cabe a missão de selecionar os exercícios das tarefas do cotidiano das crianças. Tal fato contribuirá não só no desenvolvimento logico-matemático das crianças, como também as colocará diante de uma situação que as leve a perceber o sentido espacial de cada, dela mesmo diante do objeto ou entre um objeto com o outro. A justificativa é de que o raciocínio das relações espaciais – por via das imagens desenhadas ou de objetos que estejam a frente ou atrás de outros objetos – constituem as primeiras noções para o entendimento da geometria e de outras noções matemáticas.

Breda *et al.* (2011), ao se debruçarem sobre as relações espaciais, que denominaram de sentido espacial, afirmam que:

> o sentido espacial é fundamental para elaborar e usar representações de modo a registar ideias matemáticas. A capacidade de raciocínio desenvolvida pelos alunos permite-lhes investigar problemas geométricos de crescente complexidade e, ao mesmo tempo, desenvolver clareza na descrição das propriedades das figuras geométricas a par com o desenvolvimento da comunicação matemática. (BREDA *et al.*, 2011, p. 15)

É com este pensamento de usar representações para o desenvolvimento das ideias matemáticas, com maior particularidade às noções geométricas, que um novo exercício (Figura 66) é apresentado para as crianças. Nela, os estudantes são solicitados a pintar a carruagem do meio, com as cores da bandeira de Angola (figura 66).

Figura 66-Sugestão de pintura da carruagem que se encontra no meio de outras duas.



Fonte: Nascimento *et al.* (2018, p. 9).

A tarefa indica que a carruagem sugerida para a pintura encontra-se entre as outras duas. Essa tarefa, para além de indicar a relação espacial, demonstra a noção aritmética de sucessor e antecessor, isto é, a carruagem que se encontra posicionada no centro é sucedida pela que se encontra fixada na locomotiva (parte frontal) e antecedida pela carruagem fixada nela mesma. A tarefa expressa os conceitos de lateralização e lateralidade, habilidades geométricas que devem ser desenvolvidas nos anos iniciais de escolarização, cujo início se observa na educação infantil. Esses conceitos foram objeto de estudos de Pires, Curi e Campos e adotados por Tortora e Pirola (2012, p. 223), ao considerarem a lateralização como sendo as relações que a criança estabelece com o próprio corpo como ponto de referência. Para fundamentação do exposto, os autores tomam como exemplo a necessidade das crianças em dizerem se um objeto está atrás delas ou à sua frente, ou quando precisam escolher uma das mãos (direita ou esquerda). Em ambos os casos, utilizam o próprio corpo como referência.

Essa “lateralização”, de acordo Pires, Curi, Campos (2000, p. 54) citados por Tortora e Pirola (2012), precisa evoluir pois à “esquerda” de uma pessoa que está a sua frente, olhando para ela, coincide com a sua “direita”. Quando isso acontece, pode-se dizer que a criança conhece sua lateralidade. Esta é construída a partir do momento em que outros pontos de referência são adotados. Por exemplo, “a criança deve entender que a esquerda de uma pessoa que está à sua frente, olhando para ela, coincide com a sua direita (PIROLA, 2006, p. 198 apud TORTORA; PIROLA, 2012, p. 224).

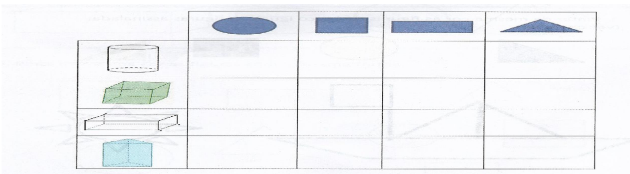
Reis (2014) considera que abordar a questão da orientação espacial é de extrema importância, pois é a partir da orientação que a criança compreende que seu posicionamento difere consoante à posição do observador, ou seja, torna-se pertinente fazê-la perceber que tem de ter uma referência. Em relação ao ponto de referência, Breda *et al.* (2011, p. 23) dizem o seguinte:

> Sobre os conceitos de posição e localização, nos primeiros anos, os alunos devem compreender que a posição de algo está, muitas vezes, relacionada com a posição do observador e com um dado sistema de referência, podendo este ser definido de acordo com regras que se se estabeleçam num determinado contexto ou podendo usar-se um sistema de referência convencional.

O exposto explicita claramente a importância do estudo das relações espaciais, pois elas permitem que a criança entre, desde muito cedo, em contato com os conceitos geométricos, cujos fundamentos são aprimorados em nível de escolaridade. Essa aprimoração deve acontecer sob olhar do professor a quem compete a organização do ensino de maneira intencional e sistematizada, de forma a garantir que a apropriação de tais noções matemáticas contribuam para o desenvolvimento intelectual da criança.

Vale lembrar que este fato não acontecerá caso a criança se limite a pintar as figuras, conforme sugerem as proposições angolanas. É preciso que o professor vá além desta atividade, sobretudo na colocação de tarefas que permitam a exploração contínua dos objetos e retirar suas características essenciais e fundamentais, que venha servir de elemento conectivo para resolução de outros problemas não de âmbito geométrico, de forma particular, mas sim em outros campos da matemática. Para continuação dos estudos, Nascimento *et al.* (2018) apresentam novos exercícios. As mesmas se inserem no estudo das figuras geométricas planas. Entre elas, selecionamos uma na qual sugere-se que os estudantes assinalem com *x,* na tabela, a superfície plana existente em cada um dos sólidos (Figura 67).

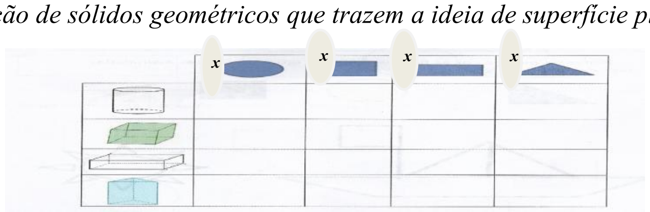
Figura 67-Demonstração de sólidos geométricos que trazem a ideia de superfície plana.



Fonte: Nascimento *et al.* (2018, p. 19).

A expectativa que se cria é que, ao concluir a análise, os estudantes, com o apoio do professor, assinalem que na tabela existem figuras geométricas de superfície planas como: o círculo, o quadrado, retângulo e o triângulo (Figura 68).

Figura 68-Demonstração de sólidos geométricos que trazem a ideia de superfície plana com marcação x.



Fonte: Autor, adaptado de Nascimento *et al.* (2018, p. 19).

Dada a ausência de um conceito sobre figuras geométricas de superfície planas, nas proposições angolanas, faz-se necessário que o professor, em sala de aulas, apresente aos estudantes como sendo, a geometria plana ou euclidiana, aquela parte da matemática que estuda as figuras que não possuem volume, ou seja, aquelas figuras que possuem comprimento e largura, cuja configuração é bidimensional. De acordo com Santos *et al.* (2015), essa classificação das figuras planas deve ser feita com base no número de lados ou quanto à medida de seus ângulos. Vale igualmente destacar que, além da consideração apresentada, existem outros conceitos de grande importância para o entendimento da geometria plana como: ponto, reta, segmento de reta, área, plano, ângulo e perímetro. A convivência imediata dos estudantes com os conceitos "ponto, linha reta, etc", ao iniciarem o ensino da geometria, é de grande importância porque é a condição necessária para que o aluno mais tarde tenha acesso ao estudo de um sistema de conceitos relacionados com diferentes tipos de objetos geométricos (linhas, ângulos e triângulos, etc.).

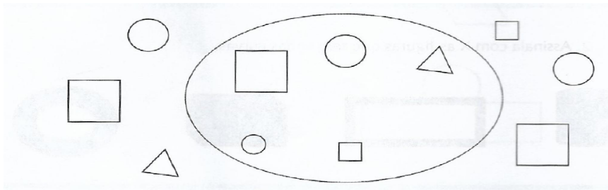
No decorrer da investigação, existe a possibilidade de uma das crianças questionarem sobre as figuras não planas que constam da tabela, cuja confrontação não foi feita. Neste âmbito, deverá o professor esclarecer que elas são figuras geométricas de superfície espacial. E, em seguida definir geometria espacial como sendo, a parte da matemática responsável pelos estudos das figuras geométricas espaciais, Dito de outro modo, são sólidos geométricos que ocupam espaço, em decorrência de sua característica tridimensional (altura, largura e comprimento), tal como as figuras expostas na tabela: cilindro, cubo, prisma, paralelepípedo que, também são chamados de poliedros (SANTOS *et al.*, 2015).

Segundo Polya (1995), as figuras geométricas servem de auxílio como objetos de problemas geométricos. É nesta base que Batista (2017), considera que o uso das figuras como recurso facilita a resolução, tanto mentalmente como na manipulação material delas. A partir desta consideração evidente que a Geometria Plana e Espacial terá como auxílio nas soluções de seus problemas as formas geométricas, representadas mesmo que num esboço no papel, reafirmando a importância do desenho geométrico, medidas e valores.

No seguimento do estudo sobre geometria, Nascimento *et al.* (2018) sugerem a introdução de novas tarefas, que explicitam outros conceitos. Segundo Davídov (1988), a introdução de novos conceitos e ideias, no ensino primário, pressupõem a elevação do papel dos conhecimentos teóricos de modo tal, que permite a racionalização e, em parte, a aceleração do estudo, a fim de promover a função da educação geradora de desenvolvimento.

Nesta nova tarefa, os estudantes são solicitados a pintarem os quadrados que estão na região exterior à linha (Figura 69).

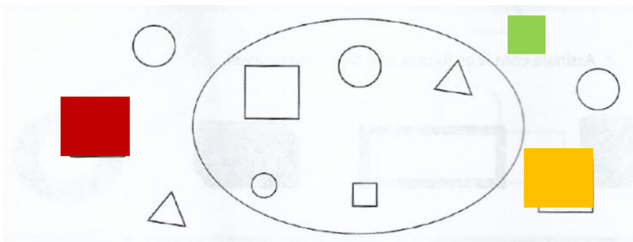
Figura 69-Demonstração de regiões de figuras no interior e exterior.



Fonte: Nascimento *et al.* (2018, p. 28).

Existe a possibilidade de os estudantes identificarem as figuras antes de realizarem a pintura. Espera-se que da referida identificação os alunos concluam que existe, no exterior à linha, três figuras quadradas. E, posteriormente, pintarem conforme na ilustração (Figura 70).

Figura 70-Demonstração de quadrados pintados que estão na região exterior à linha.



Fonte: Autor, adaptado de Nascimento *et al.* (2018, p. 28).

Vale destacar que, além da identificação das figuras e sua a pintura, o professor deve levar ao conhecimento dos estudantes, que a figura pintada, é uma linha quebrada fechada composta por quatro (4) segmentos. E, em seguida, informar que a tarefa traz ideias essenciais do conceito de quadrado, isto é, como uma região interna delimitada por uma linha quebrada constituída de quatro segmentos, porém ainda é um quadrado, visto "o quadrado pode ser definido como um retângulo, formado por quatro pontos e quatro segmentos iguais que definem os seus lados. Assim como o retângulo, no quadrado, os pontos representam os vértices, os segmentos, seus lados e todos os seus ângulos são retos" (MAME, 2014, p. 146).
A intervenção do professor na formalização do conceito de quadrado, evita que os estudantes se prendam às percepções empíricas e as adotem como referência para a elaboração do conceito das figuras planas. Por essa razão, recomenda-se que durante o processo de apropriação de conhecimentos, o professor deve apresentá-los, de modo que permita o desenvolvimento intelectual dos estudantes e, consequentemente, a formação conceitual – no caso em estudo, de conceitos matemáticos "geométricos" –, torna-se importante a análise de

vários procedimentos que possam contribuir para a solução ampla dos problemas matemáticos que estiverem disponíveis no dia a dia dos alunos (MAME 2014).

Para tanto se deve ter em conta que a assimilação da geometria pressupõe não só o domínio de sistemas de conceitos geométricos senão, também, de uma série de habilidades diferentes que são peculiares do pensamento matemático, como, por exemplo, a demonstração (BUTKIN, 2001, p. 151). Esta, no início da escolaridade, não se trata da aplicação formal do método axiomático de provar um determinado teorema em consideração à sua hipótese e tese. Em vez disso, a criança expressa as articulações de um conceito com os demais do sistema conceitual. Em outras palavras, a demonstração diz respeito à elucidação das condições de existência do conceito, porém sem a explicitação da distinção se necessária ou suficiente (MAME, 2014, p. 82).

Importa destacar que abordar os conceitos geométricos e suas construções, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, é de grande importância para o entendimento de outros conteúdos do Ensino Médio e Ensino Superior, uma vez que contribuem para o entendimento de outras áreas do conhecimento, como por exemplo: na trigonometria, na geometria espacial e analítica, no cálculo integral e diferencial, na álgebra entre outras das diferentes áreas de ensino.

A geometria serve igualmente de base de clarificação dos "conceitos, propriedades e questões aritméticas ou algébricas" (LORENZATO, 1995). Lindquist (1994, p. 50) apela para que, no ensino de ensino, a geometria não sirva apenas como elemento matemático de exemplificação. O autor considera que, se o aluno não visualizar e não entender os significados do que está vendo, será desnecessária a ilustração geométrica. Além disso, não atinge o objetivo que é fazer a inter-relação entre os conteúdos, pois nossa questão principal, então, é libertar a geometria elementar de seu papel tradicional de servir como introdução geral à estrutura axiomática da matemática.

Vale destacar que a proposição de Nascimento *et al.* (2018) coloca o ensino da geometria em primeiro plano, diferentemente das demais proposições, sobretudo a proposta da matemática moderna, conforme tem apontado as diferentes pesquisas da matemática (KLINE, 1976; MAME, 2014). Porém ela peca, por ser tão reducionista ao colocar o estudante a uma ideia simplesmente visual em relação às formas e superfícies geométricas, deixando para trás os conceitos propriamente ditos. Também, em seus exercícios, a proposição de Nascimento et al (2018) omite a relação da geometria com as demais áreas do conhecimento como aritmética e a álgebra. Além disso, não proporciona um movimento que permita, aos estudantes, desenvolver o pensamento teórico, condição primeira e fundamental para o desenvolvimento intelectual da criança em situação escolar (MAME *et al.,* 2020). Apesar da sua precariedade, existe a necessidade de continuar a análise como condição para seu entendimento para, posteriormente, sugerir mudanças concretas. Na próxima seção, o estudo centra-se no ensino de números e operações.

5.2.2 Números e operações nas proposições angolanas do primeiro ano do ensino fundamental

Nos dias atuais, é consensual que os alunos desenvolvam uma compreensão global sobre os números e as operações, que ultrapassa o conhecimento básico associado aos números e aos algoritmos. Esse entendimento vem se generalizando entre os diferentes pesquisadores que como deve ser desenvolvido, ao longo de toda a escola primária (ensino fundamental), com a inclusão de aspectos diversificados relacionados com um conhecimento profundo sobre os números e as operações.

Segundo Ministério da Educação de Angola- PREPA (2010), a aprendizagem dos números e operações está frequentemente associada ao conhecimento elementar sobre os números e sobre os algoritmos das várias operações aritméticas. Sarama e Clements (2009, p. 28) também afirmam que "a aprendizagem dos números e das operações ocupa uma posição central no currículo de matemática, nos primeiros anos de escolaridade, podendo ser entendida como a área mais importante da aprendizagem matemática".

Segundo o modelo apresentado por McIntosh *et al.* (1992), o sentido de número inclui os seguintes aspectos:

a) O conhecimento e a destreza com os números;
b) O conhecimento e a destreza com as operações;
c) A aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações em situações de cálculo.

Segundo o Ministério de Educação de Angola - PREPA (2010, p. 1), "o conhecimento e a destreza com os números incluem o sentido das suas regularidades, as múltiplas representações, o sentido da grandeza relativa e absoluta e o uso de sistemas de referência". São eles que permitem avaliar uma resposta ou arredondar um número para facilitar o cálculo. O conhecimento e a destreza com as operações incluem a compreensão do efeito das operações, das suas propriedades e das relações entre elas.

A aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações em situações de cálculo, também, incluem: a compreensão para relacionar o contexto e os cálculos, a consciencialização da existência de múltiplas estratégias, a apetência para usar representações eficazes e a sensibilidade para rever os dados e o resultado. O desenvolvimento do sentido de número é um processo longo e complexo, que deve ser ancorado em experiências significativas dos alunos, partindo de contextos reais e próximos destes, de modo a permitir o aprofundamento das suas múltiplas componentes (MINISTÉRIO DE EDUCAÇÃO DE ANGOLA- PREPA, 2010, p. 1)

É neste âmbito que se apresentam as operações de adição e subtração, multiplicação e divisão nas proposições angolanas.

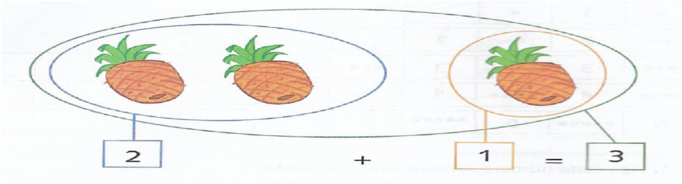
5.2.3 Adição e subtração nas proposições angolanas do primeiro ano do ensino fundamental

Segundo Maciel *et al.* (2013), a adição é a operação mais natural na vida da criança, porque está presente nas experiências infantis desde muito cedo. Além disso, envolve apenas um tipo de situação, a de juntar ou acrescentar que é afetivamente prazerosa. Importa mencionar que ao apresentar estas operações aos estudantes, deve-se efetuar por via de situações problemas, de forma a permitir que os estudantes desenvolvam sua capacidade de interpretação e solução dos problemas. O pressuposto é que as situações problemas "contribuem para que os estudantes construam os resultados das adições com todas as combinações dos números naturais de zero a 9" (SILVA, 2014, p. 26). Essas situações devem, igualmente, ajudar o aluno a descobrir as propriedades como, a comutativa e associativa ou fato de o zero funcionar como elemento neutro na adição (MACIEL *et al.*, 2013).

Apesar da maior parte da literatura sugerir a introdução das operações aritméticas de adição e subtração nos primeiros anos do ensino fundamental (ensino primário), por via de situações-problema, a proposição angolana, passa à margem das referidas teses. Isso se explicita tendo em vista que a maior parte dos exercícios são apresentados de forma incompleta, colocando os estudantes em uma apreciação visual da imagem para determinar o tipo de operação a usar. Essa realidade é observada no material em uso para o presente estudo, conforme podemos verificar nos exercícios que se seguem (Figuras 71 e 72).

O estudo das operações da adição na proposição angolana inicia com apresentação da tarefa 71. A mesma traz como sugestão a adição de dois abacaxis por outro, conforme figura 71.

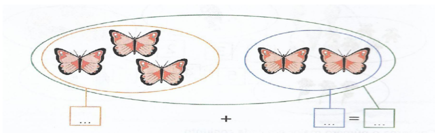
Figura 71-Representação da adição na proposição angolana.



Fonte: Nascimento *et al.* (2018, p. 36).

Na sequência, é colocado um novo exercício, nele sugere-se que os alunos completem o esquema, o mesmo tem por base completar o que está em falta. Nota-se que a mesma é composta de três borboletas no interior de um círculo e duas no interior de outro (Figura 72).

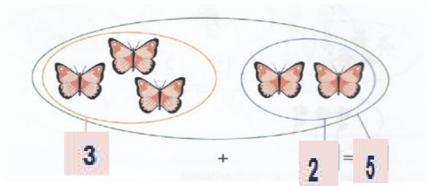
Figura 72-Representação incompleta sobre adição de borboletas na proposição angolana.



Fonte: Nascimento *et al.* (2018, p. 36).

Espera-se, com a análise da tarefa, que os alunos concluam que os números em falta na tarefa são 3 e 2, que adicionados (juntados, acrescidos), um pelo outro resulta em 5 (Figura 73).

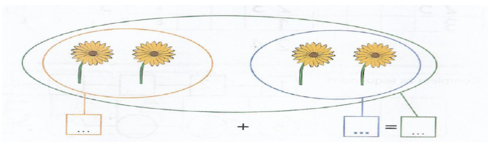
Figura 73-Representação completa sobre adição de borboletas na proposição angolana.



Fonte: Autor, adaptado de Nascimento *et al.* (2018, p. 36).

Uma outra tarefa com a mesma preocupação é colocada à disposição da análise dos estudantes. Também, traz a ideia de complementar os espaços vazios de acordo com a sugestão da figura, que indica a existência de quatro flores de cada lado do interior de um círculo (Figura 74).

Figura 74-Representação incompleta sobre adição flores na proposição angolana.

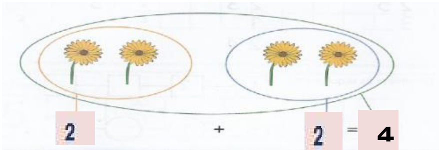


Fonte: Nascimento *et al.* (2018, p. 36).

Visualmente, essa tarefa traz implicitamente a relação todo-parte, o que daria para desencadear uma ação investigativa. Isso porque traz ideia de inclusão por diagramas. Porém a forma como as proposições angolanas se apresentam fica difícil tanto para o professor, quanto para o aluno vislumbrar tal realidade, uma vez que as tarefas são propostas, para os estudantes de forma não dialogante, não investigativa, aliás as tarefas não se propõem a remeter o estudante em uma ação investigativa.

Tal como na tarefa anterior, nesta a análise segue o mesmo padrão, que consiste em completar os espaços vazios da figura, com o registro que o número em falta é 2 em cada um dos subconjuntos, que adicionados um pelo outro resulta em 4 (Figura 76).

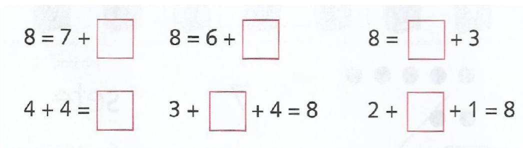
Figura 75-Representação completa sobre adição flores na proposição angolana.



Fonte: Autor, adaptado de Nascimento *et al*. (2018, p. 36).

A próxima tarefa remete os estudantes a encontrarem o valor desconhecido e completarem o espaço em branco. Para a execução, Nascimento *et al.* (2018) sugerem a da figura 76.

Figura 76-Representação incompleta sobre a determinação do valor desconhecido todo a partir das parcelas e vice-versa na proposição.



Fonte: Nascimento *et al.* (2018, p. 36).

Como anteriormente foi anunciado, a preocupação da tarefa é levar os estudantes a identificarem e completarem os números em falta na figura para que a operação de adição se concretize. Com um olhar movido pelos pressupostos do ensino desenvolvimental do sistema Elkonin-Davídov-Repkin, a expectativa – mas não atingida – era de que a tarefa introduziria o estudo do *todo* e as *partes*, bem como a partir das *partes* para se encontrar o *todo*. Por exemplo, para se encontrar *o todo* número *oito (8)* existe a necessidade de adicionar a *parte sete (7)* com uma outra *parte um (1),* logo a expressão numérica terá a seguinte configuração *8=7+1*. Noutro caso, o número *oito (8) é o todo* e as *partes* são o número *seis (6)* que já se encontra na figura e a outra *parte* desconhecida é número *um (1).* De igual modo, sucede com número *oito (8)* enquanto *todo*, número *três (3)* a *parte* conhecida e *parte* desconhecida ser obtida, por via da análise, o número *cinco (5*). Noutras tarefas sucede o contrário, as partes compõem o todo, por exemplo, ***4+4 = 8; 3+1+4 = 8; 2+5+1 = 8*** (figura 77).

Figura 77-Representação incompleta sobre a determinação do valor desconhecido todo a partir das parcelas e vice-versa na proposição.

$8 = 7 + \boxed{1}$ $\quad 8 = 6 + \boxed{2}$ $\quad 8 = \boxed{5} + 3$

$4 + 4 = \boxed{8}$ $\quad 3 + \boxed{1} + 4 = 8$ $\quad 2 + \boxed{5} + 1 = 8$

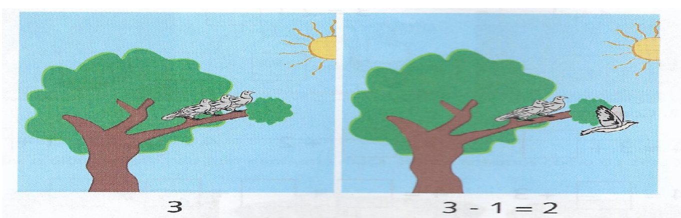
Fonte: Autor, adaptado de Nascimento *et al.* (2018, p. 36).

O estudo sobre as operações continua com a introdução da subtração no primeiro ano do ensino fundamental. A subtração é apresentada na proposição angolana por meio de um procedimento análogo à adição. Ela consiste na diminuição ou perda de um número. Segundo Maciel (2013), citado por Silva (2014), a subtração tem aspectos positivos e negativos. Para o autor, os aspectos positivos são definidos pelo resultado da ação, percepção e cognição, enquanto os aspectos negativos como o inverso e recíproco só são construídos com mais tempo. Ainda diz o autor: “a subtração envolve ideias bastante diferentes entre si, como tirar, comparar e completar” (SILVA, 2014, p. 27).

Neste sentido, entendemos que se faz necessário o apelo para que, no ato de ensinar este conceito nos anos iniciais do ensino fundamental, o professor deve prestar melhor atenção nos seus processos e métodos. Além disso, requer-lhe mais dedicação e criatividade para que os estudantes não adquiram conhecimentos com precariedade e com bastante incidência empírica.

O exposto é verificável na proposição angolana dada, forma de apresentação das tarefas, que remete os estudantes ao conceito de subtração numa perspectiva eminentemente empírica, como pode-se verificar na figura 78. Nessa tarefa introdutória, os estudantes são colocados a observar: uma árvore contendo três pássaros e, numa outra, três, mais dois no galho da árvore e um terceiro a voar.

Figura 78-Representação introdutória sobre a subtração. na proposição angolana.



Fonte: Nascimento *et al.* (2018, p. 37).

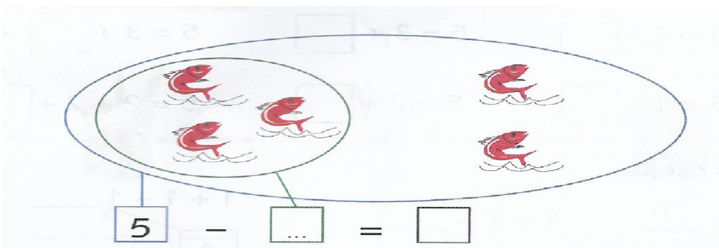
É possível verificar que a tarefa apresenta numa extremidade uma árvore contendo três pássaros, e noutra extremidade uma árvore que com os mesmo três pássaros, porém com um deles voar. O fato de um dos pássaros sair do galho em que estava constitui, para a proposição angolana, o motivo suficiente para introdução do conceito de subtração.

Essa ideia reducionista compromete a aprendizagem dos estudantes, bem como cria constrangimentos para o entendimento de outras matérias relacionadas à matemática em níveis subsequentes. É uma clara demonstração de promoção de conceitos empíricos. Este requer apenas a representação do objeto pelas suas relações e manifestações exteriores acessíveis à contemplação viva.

Vale lembrar que a forma lógica do empírico é constituída pelo juízo tomado isoladamente, que constata o fato, ou por certo sistema deles que descreve um fenômeno. A aplicação prática do conhecimento empírico é restrita e, no sentido científico, constitui um ponto de partida qualquer para a construção da teoria (KOPNIN, 1978). Este tipo de pensamento, de acordo Davídov (1988), surge da influência da lógica formal e se efetiva com a ajuda das abstrações e generalizações empíricas. Desse modo, uma das particularidades do pensamento empírico é a universalidade abstrata baseada no princípio da repetitividade. Sendo assim, constitui-se como forma transformada e expressada verbalmente da atividade dos órgãos dos sentidos, ligados à vida real. Deriva, pois, diretamente da atividade objetal-sensorial das pessoas (DAVÍDOV, 1988). Davídov (1988) entende que o pensamento empírico tem um caráter direto. No entanto, concorda com Naúmenko ao afirmar que "empírico não é só o conhecimento direto da realidade, mas sim também o que é mais importante, o conhecimento do imediato na realidade, justamente do aspecto que se expressa por categoria de existência, existência presente, de quantidade, qualidade, propriedade e medida" (DAVÍDOV, 1988, p. 123 apud MAME, 2014).

A seguir, outra tarefa sugestiva ao uso da subtração é apresentada aos estudantes. Nela, é solicitado para eles que completem os espaços vazios existentes. Aqui, é também uma anunciação do estudo *de todo* e as *partes* que poderia ser explorado na proposição angolana, envolvendo a subtração.

Figura 79-Representação incompleta sobre subtração na proposição angolana.

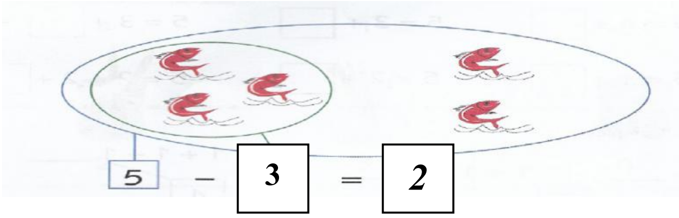


Fonte: Nascimento *et al.* (2018, p. 37).

Como pode se verificar, a figura apresenta 5 peixes, pela demonstração presume-se que foram extraídos 3 peixes. Espera-se que, após a análise, os estudantes cheguem à conclusão de que o resultado da operação de subtração seja 2 peixes, como ilustra a figura 80.

Neste sentido, faltam dois números para completar a operação. Se fosse no sistema Elkonin-Davido-Repkin, os alunos considerariam que o número *cinco (5) é o todo* e as *partes* em falta são os números *três (3) e* o número *dois (2).* No modo angolano, basta completar os espaços com 3 e 2.

Figura 80-Representação completa sobre subtração na proposição angolana.



Fonte: Autor, adaptado de Nascimento *et al*. (2018, p. 37).

No seguimento do estudo, nova tarefa é colocada aos estudantes (Figura 81). Para análise da mesma, sugere-se que as crianças completem a tabela.

Figura 81-Representação incompleta sobre Subtração número até 20.

-	8	10	11	15
15				
20				

Fonte: Nascimento *et al.* (2018, p. 55).

Como se pode verificar na tabela, a sugestão é que se utilize dos números 15 e 20, como minuendos, localizados colunas para subtrair com os números (subtraendos) 8, 10 , 11 e 15, encontrados na primeira linha. A tarefa anuncia, tal como as anteriores, a relação do todo e as partes, embora que de forma muito intuitiva. Dada a complexidade da tarefa, exige-se a participação ativa dos estudantes, de forma a obter os resultados (Figura 82).

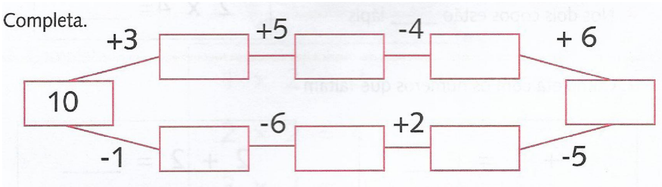
Figura 82-Representação resolvida sobre subtração de número até 20.

-	8	10	11	15
15	7	5	4	0
20	12	10	9	5

Fonte: Autor, adaptado de Nascimento *et al.* (2018, p. 55).

Para consolidação do estudo da operação de adição e subtração de números até 20, Nascimento *et al.* (2018) sugerem uma nova tarefa (Figura 83).

Figura 83-Representação incompleta sobre Adição e Subtração até 20.



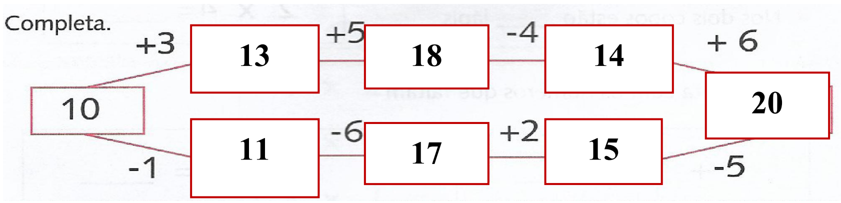
Fonte: Nascimento *et al.* (2018, p. 55).

Dada a complexidade que apresenta a tarefa, existe a possibilidade de os alunos levantarem alguns questionamentos sobre como resolvê-la, pois ela permite a utilização das operações da adição e subtração. Nestes casos, a intervenção do professor é fundamental. Por exemplo, escolher alguns estudantes que possam levantar hipóteses da forma de resolução e submetidas à aprovação ou não dos demais colegas. Essa estratégia deve alcançar um maior grupo possível de estudantes. A busca de uma solução, no coletivo, colocará os estudantes em movimento de reflexão e de desenvolvimento das suas funções psíquicas superiores.

A idéia de utilização do coletivo em processos complexos de aprendizagem é defendida por Moura *et al.* (2010), ao citarem Rubtsov, que ao tratar da aprendizagem ressalta o papel do coletivo quando afirma: “as pesquisas dos psicólogos mostraram que a aptidão para a aprendizagem é na verdade, resultado de uma determinada interiorização, de maneira que a atividade de aprendizagem se apresenta, essencialmente, sob a forma de uma atividade realizada em comum” (RUBTSOV, 1996, p. 134). Ao adotar essa estratégia, o professor precisa prestar atenção ao tipo de questões a serem levantadas pelos estudantes em função das suas limitações e do nível de entendimento da questão em estudo. Esse cuidado, de âmbito pedagógico, é fundamental para que dirija o processo de ensino e aprendizagem. Deve-se levar em conta que as intervenções dos estudantes podem contribuir para o avanço rigoroso do processo de ensino e aprendizagem.

Em relação à observação do professor de matemática, quanto às limitações dos estudantes, Lorenzato afirma o seguinte: “o professor ao propor o ensino da matemática precisa observar as limitações das crianças e respeitar suas capacidades já existentes, pois cada uma se desenvolve de forma diferente e vinda, também, do auxílio dos pais num primeiro momento” (LORENZATO, 2006). Somente seguindo estes pressupostos que, no final da ação investigativa, os alunos chegarão à conclusão de que a solução – no caso da tarefa em estudo – com base na utilização simultânea das operações de adição e subtração, é a da figura 84.

Figura 84-Representação completa sobre Adição e Subtração até 20.

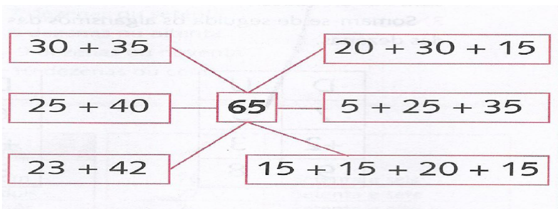


Fonte: Autor, adaptado de Nascimento *et al.* (2018, p. 55).

As próximas tarefas da proposição de Nascimento *et al.* (2018) tratam da composição e decomposição de números em parcelas. No caso, trazem – em sua subjacência sem explicitá-las – a relação do *todo e as partes,* bem como a determinação das *partes a partir do todo.* Neste caso, o conceito (aqui entendido como número) será decomposto em parcelas qualitativamente isoladas, e a análise delas " conduz à necessidade de colocar tarefa em evidência as leis de sua correlação mútua com o todo" (CHEPTULIN, 2004, p. 270). Essas leis – correlação das parcelas isoladas com o total que as contém – refletem-se nas categorias de "todo" e de "parte", as leis da correlação das partes entre elas, no quadro do todo, refletem-se na categoria de "elementos" e "estrutura"

A primeira tarefa incide na decomposição do número 65 (total) em diferentes parcelas (Figura 85).

Figura 85-O total de uma soma constituído de diferentes parcelas.

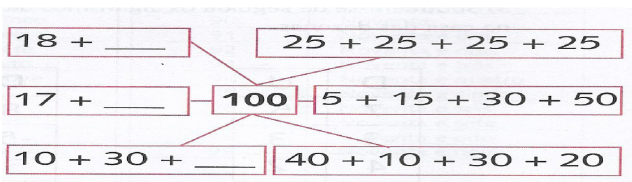


Fonte: Nascimento *et al.* (2018, p. 64).

Nesta tarefa, verifica-se que o número 65 foi decomposto em várias parcelas, que adicionadas em duas, três ou mesmo quatro *delas* resultam no referido valor.

Outra tarefa com mesmo teor, porém com número diferente, é colocada à disposição para aos estudantes (Figura 86)

Figura 86-O total em relação com diferentes parcelas com uma delas a ser encontrada.

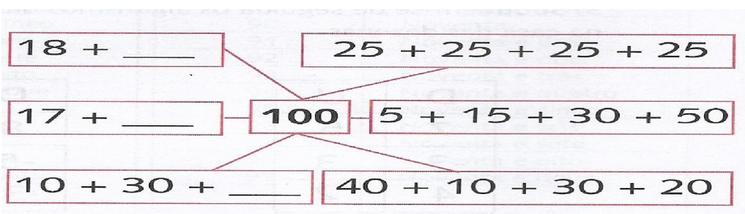


Fonte: Nascimento *et al.* (2018, p. 64).

Tal como na anterior, na presente tarefa, verifica-se a decomposição do número 100 (*total*) em, mais de quatro *parcelas*, que adicionadas resultam em 100. A tarefa traz uma novidade, que consiste na determinação de uma das parcelas que compõem o *total*. Diante desta situação, o professor deve confrontar os estudantes com questionamentos relacionados ao objeto de estudo, no sentido de motivá-los a entrarem em atividade investigativa. Só assim, existe a possibilidade de os estudantes levantarem muitas hipóteses, que devem ser confirmadas como certas ou erradas por todos estudantes, sob apoio do professor a quem cabe a responsabilidade de elaborar tarefas que proporcionam a assimilação conceitual. A assimilação ou apropriação é o processo de aquisição, por parte do homem, da experiência da espécie, mas não só da experiência filogenética de seus antepassados animais, e sim experiência humana, ou seja, a experiência sociocultural das gerações precedentes, dos produtos da atividade social objetivados na cultura. “Esse processo é por natureza educativo” (NÚÑES, 2009, p. 67).

É neste sentido que a escola deve ter como responsabilidade oferecer possibilidades para que o processo de assimilação aconteça de forma eficaz e significativa. Em decorrência dos questionamentos, os alunos concluem que para a tarefa ficar completa deve-se encontrar os números desconhecidos no caso outras *parcelas* que somadas as conhecidas igualem o valor *total estipulado*. Assim, para completar a primeira ilustração, será necessário somar o número existente *18* a uma *outra parcela* desconhecida *82*; no caso 18+82 =100 . Na segunda ilustração, a soma acontecerá entres os números *17 e 83,* representada pela sentença: 17+83=100 . Na última ilustração, existe a necessidade de encontrar a parcela desconhecida, no caso o número 60 que somado às outras , no caso os números *10* e *30,* dará o total, conforme a operação 10+30+60 = 100 . Por consequência, a figura 87 apresenta o seguinte formato:

Figura 87-O total, as parcelas e a determinação da parcela na proposição angolana – Completa.



Fonte: Autor, adaptado de Nascimento *et al.* (2018, p. 64).

Uma análise, à luz da teoria do ensino desenvolvimental, mostra que a tarefa é demonstrativa de que o todo é maior do que as partes. Segundo Prado (2021), todo é concebido como um sistema, ou seja, como conjunto de elementos estruturalmente interligados; esses elementos são vistos então como partes do todo. As partes formam o todo e este é distinguível concretamente porque possui propriedades sistêmicas, as quais emergem da interação das partes (PRADO, 2021, p. 2).

Ainda, o autor pontua que os elementos podem ser separados do todo sem que percam suas identidades. Eles se mantêm como coisas plenamente distinguíveis no todo e fora dele. Na separação, só o todo é destruído; os elementos são conservados enquanto tais. Na formação do todo, como simples constituintes, eles se unem, se articulam, se organizam de certos modos. Diz-se, por isso, que o todo é uma composição (o que tem de ser ainda mais bem explicado). Nesse caso, mesmo sendo decomponível, o todo não é mais redutível às partes. Ele resulta da interação das partes – e não simplesmente delas mesmas (PRADO, 2021, p. 2).

O exposto, é verificado na decomposição do número 100. Nota-se que ele pode ser decomposto em número de partes, ao ponto de ser destruído, porém sua regeneração acontece na união das partes que a compõem, um exemplo além do já demonstrado na a figura pode ser: ***100 = 20 +10+ 15+ 5+ 25+25***. Observa-se que o 100 e as referidas parcelas têm algo em comum, geral, um valor posicional que se manifesta numa singularidade: decimal. Como pode ser verificado, o 100 foi decomposto em 6 parcelas de diferentes valores. Percebe-se que as parcelas são, pois, separáveis entre si e em relação ao total. Para caracterizar esse tipo de relação, diz-se, às vezes, que há uma relação de linearidade entre as partes e o todo. Nesse caso, como o todo é algo que advém da atividade das partes elementares que o compõem, diz-se, usualmente, que o todo emerge delas. Portanto, resulta de um processo de emergência. Por isso mesmo, diz-se, também, que as suas propriedades não se reduzem às propriedades das partes. Menciona-se, às vezes, que prevalece a relação de não linearidade entre as partes e o todo (PRADO, 2021).

A tarefa encerra a discussão sobre as operações da adição e subtração na proposição de Nascimento *et al.* (2018), em que parte das tarefas são apresentadas sem movimento, e sem interconexão. Outra referência é que elas não possibilitam uma articulação entre as três áreas que compõem o objeto de estudo da presente pesquisa, tampouco explicitam a relação universal, singular e particular.

Na próxima seção, o estudo será voltado para o conceito aritmético da multiplicação na proposição angolana, de Nascimento, Antonio e M´Fuansuka.

5.2.4 Multiplicação nas proposições angolanas do primeiro ano do ensino fundamental

Conforme anunciado anteriormente, na presente secção o estudo estará voltado para a multiplicação, nas proposições angolanas do primeiro ano do ensino fundamental.

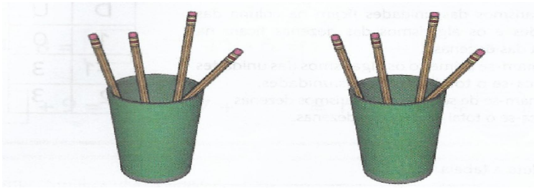
Nessa proposição, “a multiplicação é a operação aritmética que consiste na resolução de contagem, adição de parcelas iguais e oferece um dos primeiros contatos com a noção de proporcionalidade, uma das mais poderosas ideias matemáticas” (SILVA, 2014, p. 28). O autor considera que, tal como acontece na subtração, a multiplicação se apresenta como uma operação complexa, que requer uma atenção da maior parte dos alunos. Neste sentido, os professores de matemática precisam ficar mais atentos para ensinar os diferentes conteúdos das multiplicação (SILVA, 2014).

Seibert (2013, p.5), com base em Vergnaud (1991), afirma: o que é verdade para adição e subtração, isto é, que as operações sobre as representações escritas dos números são diferentes das operações sobre os números, mas, sem dúvida, se apoiam nelas, servem também para a multiplicação e divisão. Isto quer dizer que, a partir de um material ‘concreto’ para ensinar a multiplicação, significa introduzir esse conceito como adição sucessiva de uma mesma quantidade e, por consequência, fazer do multiplicando uma medida e do multiplicador um simples operador sem dimensão física (SEIBERT, 2013).

De acordo com Vergnaud (1991) apud Seibert (2013), no início dos processos multiplicativos, se podem utilizar no multiplicando números de vários algarismos, mas que no multiplicador convém utilizar somente operadores simples de um algarismo. O autor pontua que a comutatividade da multiplicação, no plano numérico, permite inverter o papel do multiplicador e do multiplicando. Porém, requer certa precaução pedagógica para que as crianças aceitem a comutatividade, pois terão que fazer a abstração do que representam os números. Por outra parte, a distributividade da multiplicação, em relação à adição, é necessária a partir do momento que se introduz a multiplicação por um número de dois algarismos.

Nas proposições angolanas, é notável essa preocupação, ao apresentarem para os estudantes a operação aritmética da multiplicação dos números por dois. A tarefa introdutória sugere que as crianças indiquem quantos lápis estão em dois copos (Figura 88).

Figura 88-introdução do conceito de multiplicação.



Fonte: Nascimento *et al.* (2018, p. 56).

Em seguida, apresentam o esquema:

Figura 89-Representação introdutória incompleta da Multiplicação na proposição angolana.

4 + 4= ______

ou

2 x 4= ______

Fonte: Nascimento *et al.* (2018, p. 56).

Nascimento *et al.* (2018, p. 56), após apresentação da tarefa, sugerem que se faça a explicitação de que o sinal ***x*** indica uma multiplicação.

Da análise da tarefa, espera-se que os estudantes concluam que nos dois copos existem 8 lápis que podem ser apresentados pelo somatório de 4+4 =8 ou pela expressão multiplicativa ***2 x 4=8,*** conforme a figura 90.

Figura 90-Representação introdutória completa da Multiplicação na proposição angolana.

4 + 4= **8** ___

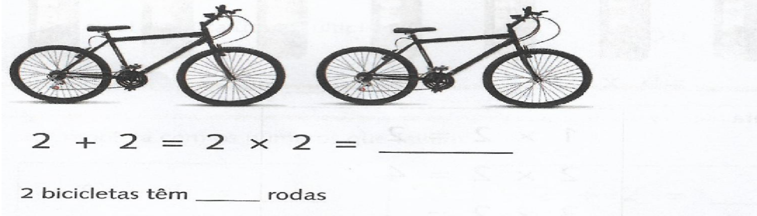
ou

2 x 4= **8** _

Fonte: Autor, adaptado de Nascimento *et al.* (2018, p. 64).

Para continuação do estudo, uma nova tarefa é colocada aos estudantes. A tarefa sugere que os estudantes observem a imagem e completem o espaço indicado (Figura 91).

Figura 91-Multiplicação de números por 2 na proposição.

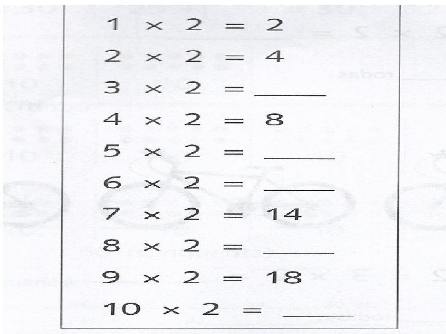


Fonte: Nascimento *et al.* (2018, p. 58).

Como se pode observar, a operação da multiplicação, nesta tarefa, é efetuada a partir das rodas das suas bicicletas e espera-se que, no final do processo de análise, as crianças concluam que as suas bicicletas têm quatro (4) rodas ao total. Isso pode ser determinado por via do somatório ou pela multiplicação de duas vezes as duas rodas de cada uma bicicleta. Esse processo poderia continuar com a apresentação de diferentes métodos de forma a permitir a assimilação desse conceito aritmético, por parte dos estudantes. Uma das sugestões é o uso da tabuada. Esse pressuposto é notado em estudos de Maciel (2013), citado por Silva (2014), ao afirmar que, para conseguir uma aprendizagem significativa, os professores precisam utilizar recursos que facilitem a resolução de problemas que envolvam a multiplicação, principalmente, a tabuada. Esta se caracteriza como tabelas prontas para a agilidade no raciocínio lógico das crianças.

Essa preocupação de busca de outros métodos de aprendizagem é verificável na proposição angolana para o primeiro ano do ensino fundamental proposta por Nascimento *et al.* (2018). Mas, isso ocorre de forma menos instigante, como na apresentação da tarefa (Figura 92) que é algo recorrente em todo manual de matemática elaborado por estes autores e utilizado no sistema educacional angolano. Vale destacar que, como é de praxe nas tarefas elaboradas nas proposições angolanas, a tarefa da tabuada também é apresentada ao estudante com a sugestão de observarem e completarem.

Figura 92-Representação da tabuada de números por 2 na proposição angolana.


1 × 2 = 2
2 × 2 = 4
3 × 2 = _____
4 × 2 = 8
5 × 2 = _____
6 × 2 = _____
7 × 2 = 14
8 × 2 = _____
9 × 2 = 18
10 × 2 = _____

Fonte: Nascimento *et al.* (2018, p. 58).

Em síntese, importa dizer que a tabela de tabuada, encerra a discussão sobre as proposições angolanas para o ensino fundamental.

Nesta proposição, os estudantes aprendem a lidar com as ideias iniciais de um certo conceito, por via da observação, ao serem solicitados a completar uma tarefa que lhes é apresentada de forma incompleta ou a pintarem uma determinada figura, para a explicitação de um certo conceito a ser aprendido pelo aluno. Esse tipo de aprendizagem, baseado na identificação de uma figura e consequente solicitação para que seja pintada, atrasa o estudante ao não permitir, por parte dele, a aquisição de conhecimentos teóricos, que são o princípio primeiro e fundamental para o seu desenvolvimento intelectual.

Vale salientar que as tarefas, nesta proposição, não apresentam uma articulação entre as significações que constituem o objeto de estudo na presente pesquisa. Também, não se observa um movimento para que se identifique a ideia universal, particular e singular entre elas. De igual modo, é notório que suas tarefas promovem uma aprendizagem empírica dos conceitos, situação que dificulta em grande parte os estudantes e a se emanciparem, com base no que mais há de produção histórica científica. Isso contribuem para o não desenvolvimento das funções psíquicas superiores. Tudo porque todas as tarefas, desde a geometria até a multiplicação, não trazem questões problematizadoras, o que compromete a garantia de uma aprendizagem mais significativa, isto é, aquela que se bem oferecida pela escola contribui para o processo de humanização dos estudantes.

SÍNTESE DA TESE E AS CONTRIBUIÇÕES PARA A IMPLEMENTAÇÃO DE UMA EDUCAÇÃO HUMANA E DESENVOLVEDORA NO CONTEXO ANGOLANO.

No presente capítulo, a atenção se volta para a elaboração de uma síntese das proposições de ensino analisadas, como forma de concretização da pesquisa.

Tal síntese é elaborada a partir do problema de pesquisa, qual seja: *Em que contexto epistemológico e pedagógico – das proposições angolanas e do sistema Elkonin-Davídov – Repkin ocorre o movimento universal/singular/particular do pensamento conceitual, que interliga as significações aritméticas, geométricas e algébricas?*

Durante a exposição da pesquisa, procuramos promover a discussão sobre pontos de confluências e divergências das duas proposições, bem como a possibilidade de contribuir para a formação integral e humana dos estudantes.

De início, embora de modo não tão explícito, trouxemos elementos históricos para aqui poder dizer que as proposições foram elaboradas e aplicadas em contexto similares, que é preocupação com a formação de um novo homem, que atendesse os desafios de seu país. A primeira proposição analisada, no caso a proposição do sistema Elkonin-Davídov-Repkin, foi elaborada no âmbito das reformas curriculares realizadas pela União Soviética – década de 1960 do século XX. Tinha como finalidade a formação de um homem novo que estivesse à altura dos novos desafios da sociedade, naquele contexto. Essa proposta considerava que o novo pensamento pedagógico teria por essência e finalidade o envolvimento ativo como um dos fatores para o desenvolvimento das capacidades gerais, genéricas do homem, bem como a aquisição de procedimentos universais da atividade. O propósito é o desenvolvimento da personalidade e da criatividade social, a preparação para a vida coletiva e para o trabalho; bem como para a participação na gestão democrática e responsabilidade pelos destinos do país (DAVÍDOV E SLOBÓDOCHIKOV, 1991 apud MAME, 2014, p. 49).

Em termos de perspectivas teórica-filosófica-pedagógica, a proposição do sistema Elkonin-Davydov-Repkin afilia-se aos pressupostos do ensino desenvolvimental, preconizados pela Psicologia Pedagógica de base teórica Histórico-Cultural, tendo como matriz, o materialismo histórico e dialético.

A proposição angolana de Nascimento, Antonio, M´Fuansuka foi elaborada no âmbito da reforma educativa levada em curso em Angola, entre os anos de 1970 e 2000 dos séculos XX e XXI, respectivamente. A reforma surge da preocupação de formação de um homem novo, despido de todas as crenças acumuladas no âmbito da colonização portuguesa, isto de um lado. De outro, da necessidade de baixar os altos índices de analfabetismo, que afetavam em grande escala a população angolana, cujas estatísticas rondavam em cerca de 90% entre os nativos. Sua meta era: o aumento de oportunidades educativas, gratuidade do ensino de base (primeira à quarta classe), obrigatoriedade de frequentar o primeiro nível e o aperfeiçoamento pedagógico do seu corpo docente. A referida estruturação do sistema educacional angolano estava amparada a priori pelo Decreto de 40/80 de 14 de maio, alicerçada, filosoficamente, nas bases do socialismo, mais concretamente na corrente marxista-leninista. E, *a posteriori*, pela ***Lei 13/01 de 31 de dezembro***, denominada ***Reforma Educativa*** ou simplesmente ***- Lei de Bases do Sistema de Educação*** – LBSE, com uma visão liberalista, inspirada no relatório para UNESCO da Comissão Internacional sobre educação para o século XXI, denominado Relatório Jacques Delors.

Ambas as proposições trazem a preocupação do ensino da matemática, a partir dos primeiros anos do ensino fundamental, de forma a desenvolver nas crianças a capacidade de raciocínio, consequentemente, o desenvolvimento intelectual. Para tal, propõem que se ensine, a partir dos anos iniciais, conceitos relacionados às significações aritméticas, geométricas e algébricas. Apesar da confluência existente entre os seus conteúdos, elas divergem na forma de organização de ensino. Essa divergência é constatada nas tarefas analisadas na presente tese. Por exemplo, na proposição do sistema Elkonin-Davídov- Repkin, as tarefas apresentam uma interligação entre as significações aritméticas, geométricas e algébricas, bem como explicitam o movimento universal, particular e singular, entre as significações que constituem o objeto da pesquisa. Também é verificado que no sistema Elkonin-Davídov-Repkin que suas tarefas são apresentadas, aos estudantes, de forma problematizada e articuladas uma das outras. Ou seja, em movimento, criando uma aprendizagem significativa por promover o desenvolvimento do pensamento teórico, que é um dos pressupostos para uma educação que se pretende desenvolvimental, assente na psicologia pedagógica, teoria que coloca no descobrimento de condições que melhor asseguram o desenvolvimento multilateral de uma personalidade harmônica (DAVÍDOV e MÁRKOVA, 1987, p. 332).

Nessa proposição, é notória a garantia da assimilação de conhecimentos, por parte dos estudantes, sem a necessidade da memorização de conteúdos como tem pregado algumas modalidades de ensino tradicionais. Em vez disso, a preocupação é com o desenvolvimento da memória, por via da apropriação dos conceitos científicos em seu nível teórico. Importa dizer que assimilação (apropriação) é o processo de reprodução, pelo indivíduo, dos procedimentos historicamente formados a partir da transformação dos objetos da realidade circundante, dos tipos relações entre objetos, do processo de conversão dos padrões socialmente elaborados em forma de subjetividade individual (DAVÍDOV e MÁRKOVA, 1987).

Enfim, o desenvolvimento que se prega, nas proposições do sistema Elkonin-Davídov-Repkin se "realiza através da assimilação (apropriação) do indivíduo da experiência histórico social" (DAVÍDOV e MÁRKOVA, 1987, p. 321).

A proposição angolana defende igualmente a promoção de ensino que se compromete em garantir o desenvolvimento integral e harmonioso das crianças, em situação escolar. Apesar desta premissa, este modelo peca no modo de organização de ensino, com maior particularidade no ensino da matemática. As tarefas propostas no manual do primeiro ano do ensino fundamental, apresentadas na presente investigação, não espelham uma relação entre as significações aritméticas, geométricas e algébricas. Pelo contrário, há uma tricotomização estancada, pois a prova está na estruturação do livro em que: a primeira parte é dedicada à geometria, a segunda para aritmética e a terceira para as grandezas. A álgebra nem é mencionada. Da mesma forma, não é verificável o movimento universal, particular e singular, entre as significações, uma vez que suas tarefas são apresentadas de forma isolada e com conceitos já concebidos. Nesta proposição, os alunos não são conduzidos a uma aprendizagem com pendor problemático. Os conceitos são apropriados pela observação visual das figuras, que indicam o tipo de ação a realizar. Ela promove a assimilação de conteúdos matemáticos, porém de forma muito precária, de forma empírica, comprometendo o desenvolvimento das crianças. Reafirmamos que a proposição angolana promove o pensamento empírico, em função das seguintes características: comparação, observação por via das representações visuais. Essas características e outras que são apresentadas não se comprometem com a missão essencial da escola que consiste em proporcionar aos estudantes a apropriação de conhecimentos mais ricos, produzidos e elaborados historicamente pela humanidade (DAVÍDOV, 1988).

O exposto se constitui em argumento de defesa da nossa tese apresentada no primeiro capítulo de que, *na proposição do Sistema Elkonin-Davídov-Repkin,* todas as tarefas anunciam a articulação entre as significações aritméticas, algébricas e geométricas, trazem de forma articulada o movimento universal, particular e singular. Em contrapartida, a mesma articulação não é verificada nas proposições angolanas, uma vez que suas tarefas, para além de não explicitarem a articulação entre as significações aritméticas, geométricas e algébricas, também não apresentam o movimento universal, particular e singular. Além disso, promove o ensino baseado na observação para constituição da ideia conceitual, isto é, voltado à promoção de aprendizagem de conteúdos empíricos.

Diante desta realidade, faz-se necessário um novo reajuste curricular, em Angola, a fim de que se cumpra o compromisso apontado nos documentos legais da Reforma. Esse reajustamento deve incidir, em grande parte, em métodos e conteúdos, fazendo com que os programas escolares estejam organizados para atender a demanda que concorre para o desenvolvimento, por parte dos alunos, dos conceitos genuinamente teóricos. Estes são elementos indispensáveis para tornar os estudantes ativos e participantes da política social de seu país. Os conteúdos e métodos devem atender os preceitos de uma educação matemática, cujos conceitos estejam articulados e interligados de forma que o aluno a aprender matemática, nos iniciais, que – por meio da relação entre as significações aritméticas, geométricas e algébricas – entre em movimento de pensamento de ascensão do abstrato ao concreto, caracterizado pela relação universal, singular e particular, Desse modo é que se vislumbra a possibilidade de que, nas classes precedentes, os estudantes tenham certa autonomia para estabelecer as suas próprias tarefas de estudo, conforme preconiza Davídov (1988). Este avanço encontra uma possibilidade de acontecer ao adotar os pressupostos da teoria histórico-cultural, concretamente, o sistema Elkonin-Davídov-Repkin.

Enfim, de que forma isso vai acontecer na prática? Como as autoridades angolanas deverão elaborar programas educacionais que concorrem para uma educação desenvolvimental e revolucionária, dada a inexistência de pesquisa em educação matemática? Que interpretação terão autoridades angolanas dos princípios didáticos da Teoria Histórico-Cultural subjacentes às proposições para o ensino da matemática seguindo o movimento universal, particular e singular existente entre as significações aritméticas, geométricas e algébricas?

REFERÊNCIAS

ALEKSANDROV, A. D. Visión General de la Matemática. In: ALEKSANDROV, A. D.; KOLMOGOROV, A. N.; LAURENTIEV, M. A. **La matemática: su contenido, métodos y significado**. Madrid: Alianza Editorial, p. 17-91, 1976.

ALMEIDA, P. R. **História do colonialismo português em África.** Lisboa: Estampa, 1978.

ANGOLA. Ministério da Educação. Comissão de Acompanhamento das Acções da Reforma Educativa. **Relatório sobre indicadores e eficácia da Reforma Educativa**. Luanda: Ministério da Educação, 2012.

ANGOLA. Universidade José Eduardo dos Santos. **Relatório Acadêmico Anual**. Huambo: Universidade José Eduardo dos Santos, 2012, 2013 e, 2014.

ANGOLA. Ministério da Educação. **Metodologia do Ensino da Matemática**: Números e Operações. Projecto de Formadores de Professores para o Ensino Primário em Angola, 2010.

BERNDER, G. J. **Angola sob o domínio português**: mitos e realidade. Lisboa: Livraria Sá da Costa, 1980.

BOYER, C. B. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BREDA, A; SERRAZZIRA, L; MENEZZES, L; SOUSA, H; OLIVEIRA, P. Geometria e medidas no ensino básico. Lisboa: Ministério da Educação de Portugal. Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular, 2011

BUTKIN, G. A. La formación de las habilidades que se encuentran en la base de la demostración geométrica. In: TALIZINA, N. F. **La formación de las habilidades del pensamiento matemático**. México: Editorial Universitária Pososina, p. 151-194, 2001.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.

CARDOSO, F. C. O ensino da Geometria e os registros de Representação sob um enfoque epistemológico. **Anais** IX Seminário de Pesquisa em Educação da Região Sul. Caxias do Sul, RS: UCS, 2012.

CHEPTULIN, A. **A dialética materialista**. São Paulo: Alfa-Omega, 2004.

COSTA, J. M. C. **Tratado de arithmetica**. Lisboa: Imprensa Nacional, 1866.

CRESTANI, S. **Organização do ensino de Matemática na perspectiva do desenvolvimento do pensamento teórico**: uma reflexão a partir do conceito de divisão. 2016. 123 f. Dissertação (Mestrado em Educação) -Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2016.

DAMAZIO, A**;** GUIMARA**,** A. L da S; CARDOSO. E. F. M**;** ROSA. J. E**;** DARÓS M**.** Significações geométricas, algébricas e aritméticas do conceito de número: uma possibilidade didática para as séries iniciais do ensino fundamental a partir da teoria de Davidov. In: II - Congresso Nacional de Educação Matemática e IX Encontro Regional de Educação Matemática, 2011, Iují. **Revista CNEM,** 2011.

DAMAZIO, A. Elaboração de conceitos matemáticos: Abordagem histórico-cultural. GT: Educação Matemática n.19, 2006. Disponivel em: http://29reuniao.anped.org.br/trabalhos/trabalho/GT19-2125--Int.pdf. Acesso em: 20 Jul. 2019.

DALMOLIN, B. A. S. **A tricotomização entre aritmética, álgebra e geometria nos erros apresentados por estudantes da disciplina de cálculo diferencial integral I**. 2015. 105. Dissertação (Mestrado em Educação) -Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2015.
DIAS, P.M.C; Santos, W. M. S; Souza, M. T. M. A gravitação universal: um texto para o ensino médio. **Revista Brasileira de Ensino de Física,** v. 26, n. 3, p. 257-271, 2004.

DAVÍDOV*,* V. V. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico***:* Investigación psicológica teórica y experimental. Moscú: Editorial Progreso, 1988.

DAVÍDOV, V. V.; MÁRKOVA, A. El desarrollo del pensamiento en la edad escolar. In: SHUARE, Marta (Org.). **La Psicología Evolutiva y Pedagógica en la URSS:** Antología (p. 316-337). Moscú: Editorial Progreso, p. 316-337, 1987.

DAVÝDOV, V. V. **Tipos de generalización en la enseñanza**. 3. ed. Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1982.

DAVIDOV, V. V. O que é atividade de estudo**. Revista "Escola inicial***"*, n.7, 1999.

DAVÍDOV, V. V.; Slobódchikov, V. I. **La enseñanza que desarrolla en la escuela del desarrollo; en La educación y la enseñanza**: una mirada al futuro. Moscú: Progreso, 1991.

DAVYDOV, V.V. A new approach to the interpretation of activity structure and content. In: Seth Chaiklin; Hedegard, Mariane, & Jensen, Uffe Jull. **Activity theory and social practice: cultural-historical approaches.** Aarhus (Dinamarca): Aarhus University Press, p. 39-50, 1999a.

DIAS, G. S. **O Ensino em Angola**. Delegação do Governo de Angola à 1ª Exposição Colonial Portuguesa. Luanda: Imprensa Nacional, 1934.

DUARTE, Newton. **A individualidade para-si**: contribuição a uma teoria histórico-social da formação do indivíduo. Campinas, SP: Autores Associados, 1993.

ELKONIN, D. B. Sobre El problema de La periodización del desarrollo psíquico en la infancia. In: SHUARE, M. (Org.). **La Psicologia Evolutiva y Pedagógica em la URSS***:* Antología. Moscú: Editorial Progresso, p. 104-124, 1987.

ELKONIN, Daniil B. (2009). **Psicologia do jogo**. 2 ed. São Paulo: Martins Fontes.
KOPNIN, P.V. (1978). *A dialética como lógica e teoria do conhecimento*. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Unicamp, 2007.

FREUDENTHAL, H. **Mathematics as an educational task**. Dordrecht, The Netherlands: Reidel, 1975.

FREITAS, D. **O movimento do pensamento expresso nas tarefas particulares proposta por Davýddov e colaboradores para aproprriação do sistema conceitual de fração**. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Programa de Pós-graduação em Educação - PPGE, Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2016.

GALPERIN, P. Y.; ZAPORÓZETS, A. V.; ELKONIN, D. B. Los problemas de la formación de conocimientos Y capacidade em los escolares y los nuevos métodos de enseñanza em la escuela. In: SHUARE, M. (Org.). **La Psicologia Evolutiva y Pedagógica em la URSS**: Antología. Moscú: Progresso, p. 300-315, 1987.

GIARDINETTO, J. R. B. A processualidade histórica do desenvolvimento da matemática na dialética do singular-particular-universal: Um déficit teórico no ideário multicultural. **Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática** ISSN 2178-034X, 2016. p. 1-12

GONÇALVES, P.F. **Considerações sobre o ensino primário em Portugal e no Ultramar durante o séc XIX até a proclamação da república**. O caso de Angola, Porto, 1995.

KALMYKOVA, Z. I. Pressupostos psicológicos para uma melhor aprendizagem da resolução de problemas aritméticos. In: LURIA, A. R. et al. **Pedagogia e Psicologia II**. Lisboa: Estampa, 1991. p. 9 - 26.

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

LATÍSHINA, D. **La escuela primaria soviética**: problemas de La enseňanza y La educación. Mosc: Editorial Progresso, 1984.

LEONTIEV, A. N. **Actividad, conciencia y personalidad**. Buenos Aires: Ediciones Ciencia Del Hombre, 1978a.

LEONTIEV, A. N. **O desenvolvimento do psiquismo**. Lisboa: Livros Horizontes. 1978b.

LEONTIEV, A. N. Uma contribuição à teoria do desenvolvimento e aprendizagem**.** In: Vigotskii, Luria, Leontiev. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. São Paulo: Ícone. 2010.

LIBÂNEO, J. C.; FREITAS, R. A. M. M. Vasily Vasilyevich Davýdov: a escola e a formação do pensamento teórico-científico. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (Orgs.). **Ensino Desenvolvimental**: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. Uberlândia, MG: EDUFU, p. 315-350, 2013.

LOMPSHER & HEDEGAARD. Introduction. In: Hedegaard, Mariane & Lompsher, Joachim (ed.). **Learning activity and development**. Aarhus (Dinamarca): Aarhus University Press. 1999, p. 10-21.

LONGAREZI, A, M. **Apresentação do dossiê Formação de professores e sistemas didáticos na perspectiva histórico-cultural da atividade**: panorama histórico-conceitual. **Obutchénie**, v.2, n.3, p.571-590, set./dez., 2018.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? **Educação Matemática em Revista,** n. 4, primeiro semestre de 95, p. 3-13, 1995.

_____. **Para aprender matemática**. Campinas, SP: Editora Autores Associados (Coleção Formação de Professores), 2006.
MARX, K. **O capital livro I**: o processo de produção do capital. Tradução de Rubens Enderle. São Paulo: Boitempo, 2013

MAME, O. A C. **Os conceitos Geométricos nos dois anos iniciais do Ensino Fundamental na Proposição de Davýdov**. 2014. 163 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Programa de Pós-graduação em Educação - PPGE, Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2014.

MAME, O. A. C.; MIGUEL, J. C.; MILLER, S. Atividade de estudo: sua contribuição para o desenvolvimento do pensamento teórico da criança em situação escolar. **Acta Scientiarum. Education**, vol. 42, Editora da Universidade Estadual de Maringá – EDUEM, 2020.

MASSON, G. A categoria da particularidade como mediação para a produção do conhecimento: contribuições de György Lukács. **Cadernos do GPOSSHE On-line**, *1*(1), 29-48.https://nbnresolving.org/urn:nbn:de:0168-ssoar-60962-6.México: Grijalbo. 1958. Tradução de Adolfo Sanchez Vazquez e Wenceslao Roces, 2018.

MATOS, C. F. **Modo de organização do ensino de matemática em cursos de pedagogia**: Uma reflexão a partir dos fundamentos da teoria histórico – cultural. 2017f (Dissertação de (Mestrado) – Universidade do sul de Santa Catarina, Tubarão, 2017.

MENESES, R. S. **Uma história da Geometria Escolar no Brasil***:* de disciplina a conteúdo de ensino. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

MOYA, P. T. **Princípios para a organização do ensino de matemática no primeiro ano do ensino fundamental**. 2015. 167 f. Dissertação (Mestrado em Educação) –Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2015.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de (org.). **A atividade pedagógica na teoria Histórico-Cultural**. Brasília: Liber livro, 2010. 178 p.

NASCIMENTO, C. P. A organização de pesquisas em psicologia e educação na teoria histórico-cultural: o ensino e a formação do pensamento teórico. IN: **X Congresso nacional De Psicologia Escolar E Educacional** – CONPE, 2011, Anais. Maringá, 2011.

NASCIMENTO, I.; ANTÓNIO, A.; MFUASUKA, J. **Matemática 1ª Classe**: Manual do Aluno, Luanda, Àrvore do Saber, 2018.

NGULUVE, A. K. **Política educacional angolana (1976-2005)**: organização, desenvolvimento e perspecttivas (Disserttação de Mestrado) - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, 2006.

OLIVEIRA, G. M.; OLIVEIRA A. T. C. C. A matemática na formação inicial de professores dos anos iniciais: reflexões a partir de uma análise de teses e dissertações defendidas entre 2005 e 2010 no Brasil. **Em Teia** – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, Recife-PE, v. 4, n. 1, 2013.

OLIVEIRA, M. K. Organização conceitual e escolarização. In: OLIVEIRA, M. B. de; OLIVEIRA, M. K. (Orgs.). **Investigações cognitivas**: conceitos, linguagem e cultura. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999. p. 81- 99.

PASQUALINI, J. C.; MARTINS, L. M. Dialética singular-particular-universal: implicaçõesdo método materialista dialético para a psicologia. **Psicologia & Sociedade**, v. 27, n. 2, p.362-371.

PASSOS, C. L. B. Formação matemática de professores dos anos iniciais. In: XI **Encontro Nacional De Educação Matemática**, 2013, Curitiba. Anais Guarapuava: SBEM/PR, 2013. v. 1. p. 1-13.

PAVANELLO, R.M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Revista Zetetiké**, Ano 1, n˚1, p. 01-17, 1993.

PAVANELLO, R M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Revista Zetetiké**, Ano 1, n.1, p. 01-17, 1993.

POGORÉLOV, A. V. **Geometría Elemental.** Moscú: Editorial Mir, 1974.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas:** um novo aspecto do método matemático. Tradução de Heitor Lisboa de Araujo. 2ª Reimpressão. Rio de Janeiro, 1995.

PRADO, E. F. O todo e as partes: a quesstão da emergência. *Disponivel em http:// eleuterioprado. Wordpress.com.* Acesso em Maio de 2021, publicado em 2010.

PUENTES, R. V. Vida, Pensamento e obra de A. V. ZAPOROZHERTS: um estudo introdutório. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (Org.). **Ensino Desenvolvimental:** vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. Uberlândia, MG: EDUFU, 2013.

PUENTES, R. V. Vida, pensamento e obra de A. V. ZAPOROZHETS: Um estudo introdutório. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (Orgs.). **Ensino Desenvolvimental:** vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. Uberlândia, MG: EDUFU, p. 163-201, 2013.

ROSA, J. E. **Proposições de Davydov para o Ensino de Matemática no primeiro ano Escolar:** Inter-Relações dos Sistemas de Significações Numéricas. (Tese de Doutorado em Educação). Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

ROSA, J. E.; Damazio, A. O ensino do conceito de número: uma leitura com base em Davýdov. **Revista Ibero-americana de Educación matemática**. 30, ISSN 1815-0640. 2012, pp. 81-100.

ROSENTAL, M. M.; STRAKS, G.M. **Categorías del Materialismo Dialéctico**. Tradução de Adolfo Sanchez Vazquez e Wenceslao Roces. México: Grijalbo, 1960. p. 257-297.

REPKIN, V. V. O ensino desenvolvente e a atividade de estudo. **Ensino em Re-vista**, v. 21, n. 1, p. 85-99, jan./jun.2014.

REIS, C.P. O. **Desenvolvimento do sentido espacial no pré-escolar** (Dissertação de Mestrado) – Escola Superior de Educação e Ciências Sociais do Instituto Superior Politécnico de Leiria, 2014.

SARAMA, J; CLEMENTS, D. **Early childhood mathematics education research**: Learning trajectories for young children. New York: Routledge, 2009

SAMULES, M. A. Education. In: Angola, New York, 1970.

SCHMITTAU, J.; MORRIS, A. The development of algebra in Davydov's elementary curriculum, the mathematics V. V Davydov. **The Mathematics Educator**, p. 60-87, 2004.

SERANO, C. M. H. Angola nasce uma nova nação (Tese de Doutorado) na USP, São Paulo, 1988.

SFORNI, M. S. de F; GALUCH, M. T. B. Aprendizagem conceitual nas séries iniciais do ensino fundamental. **Educar**, Curitiba, Editora UFPR, n. 28, p. 217-229, 2006.

SHUARE, M. **A psicologia soviética**: meu olhar. São Paulo: Terracota, 2017.

SILVA NETO, T. J. A. **Contribuição da história da educação e cultura de Angola**: Grupos nativos, colonização e independência (Tese de Doutorado) Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, 2004.

SILVA, R. W.S. **O ensino aprendizagem das quatros operações com números naturais no 5º ano do ensino fundamental**: um estudo na EEMEF "Arnoud Dantas do Nascimento". Guarabira: UEPB, 2014.

SMOGORZHEVSKI, A. S. **Acerca de la geometría de Lobachevski**. Moscú: Mir, 1978.

SOUSA, M. B. **O ensino do conceito de número***:* objetivações nas proposições davydovianas e formalista moderna. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2013.

STERNIN, A. O. O singular, o particular e o universal. In: ROSENTAL, M. M.; STRAKS, G.M. **Categorías del Materialismo Dialéctico**. Tradução de Adolfo Sanchez Vazquez e Wenceslao Roces. México: Grijalbo, 1960. p. 257-297.

STRUIK, D. J. **História concisa das matemáticas**. Lisboa: Gradiva, 1989.

TALÍZINA, N. F. ***La formación de la actividad cognoscitiva de los escolares.*** Moscú: Editorial Progresso, 1987.

_______. **La *formación de las habilidades del pensamiento matemático***. México: Editorial Universitária Pososina, 2001.

TORTORA, E; PIROLA, N. A. O desenvolvimento de habilidades geometricas na educação infantil. Actas do XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática. ISBN: 978-972-8768-53-9, p.224. Lisboa, outubro de 2012.

TRIVIÑOS, Augusto Nibaldo Silva. **Introdução à pesquisa em ciências sociais**: a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo: Atlas, 1987.

VILLIERS, M. Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. ***Educação Matemática Pesquisa***, v. 12, n. 3, p. 400-431, 2010.

VYGOTSKI, L. S. ***Obras Escogidas II****:* Incluye Pensamiento y Lenguaje, Conferencias sobre Psicología. Madrid: Visor Distribuciones, 1993.

VIGOTSKI, L. S**. *Psicologia Pedagógica*.** São Paulo: Martins Fontes, 2010.

VIGOTSKI, L. S. **A construção do pensamento e linguagem.** São Paulo, SP: Martins Fontes, 2001.

UNESCO. **The Dakar Framework for Action: Education for All- Meeting our Collective Commitments (Including Six Regional Frameworks for Action)**. Adopted by the World Education. Dakar, 26-28 April: UNESCO, 2000.

WIELEWSKI, G. D. **Aspectos do pensamento matemático na resolução de problemas: uma apresentação contextualizada da obra de Krutetskii.** 2005. 407 f. Tese (Doutorado em
Educação Matemática) -Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

ZANKOV, L. **La enseñanza y el desarrollo. Investigación pedagógica experimental.** Moscú: Editorial Progreso, 1984.

ГОРБОВ С. Ф., МИКУЛИНА Г. Г., САВЕЛЬЕВА О. В. ***математике*:** Учебник для - класса начальной. Москва: ВИТА-ПРЕССб, 2008.

ДАВЫДОВА, В. В., ГОРБОВ, С. Ф.,МИКУЛИНА, Г. Г., САВЕЛЬЕВА, О. В. ***Математика*:** Учебникдля 1 классначальнойшколы. Москва: ВИТА-ПРЕСС, 2012.