



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE ILHA SOLTEIRA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

**INCLUSÃO DE PILARES NUMA FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO PARA ANÁLISE LINEAR DE
PAVIMENTOS DE EDIFÍCIOS**

Eng. Civil Guido José Denipotti

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia
de Ilha Solteira – UNESP, como parte dos requisitos
para obtenção do título de Mestre em Engenharia
Civil.

Orientador: Prof^ª. Dr^ª. Gabriela Rezende Fernandes

Co-orientador: Prof. Dr. Rogério de Oliveira Rodrigues

ILHA SOLTEIRA

2007



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE ILHA SOLTEIRA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

**INCLUSÃO DE PILARES NUMA FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO PARA ANÁLISE LINEAR DE
PAVIMENTOS DE EDIFÍCIOS**

Eng. Civil Guido José Denipotti

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia
de Ilha Solteira – UNESP, como parte dos requisitos
para obtenção do título de Mestre em Engenharia
Civil.

Orientador: Prof^ª. Dr^ª. Gabriela Rezende Fernandes

Co-orientador: Prof. Dr. Rogério de Oliveira Rodrigues

ILHA SOLTEIRA

2007

À Giovana Leandro Denipotti, motivo e
inspiração de toda minha luta.

AGRADECIMENTOS

A DEUS, ser infinito, supremo, criador de Universo, onipotente e onipresente, principalmente em momentos onde estou desprovido de serenidade.

Aos meus pais, Luiz Roberto Denipotti e Maria Lucia Ricardo Denipotti, que proporcionaram-me uma vida muito melhor da que eles realmente poderiam ter dado, fazendo com que nesses últimos anos minha única preocupação fosse os crescimentos intelectual, profissional e espiritual. Ensinando-me, assim, da melhor e mais difícil maneira de como se deve criar um filho: com o exemplo.

Ao meu irmão, Adriano Ricardo Denipotti, que exulta, com júbilo maior que o meu, cada vitória que conquisto. Além, de ter dado-me a imensa alegria de ser tio.

À minha esposa Rozeilda Alves Leandro, cúmplice.

Aos meus professores: Irani Barreto, professora da terceira série do ensino fundamental; Arlindo Epifânio e Osvaldão, também do ensino fundamental; Dr. Renato Leão Rego e Dr. Rafael Alves de Souza, professores do curso de engenharia civil da Universidade Estadual de Maringá, e finalmente os professores do Departamento de Engenharia Civil da Unesp de Ilha Solteira, Dr. Jairo Salim Pinheiro de Lima, Dr. Antonio Anderson da S. Segantini; Dr. Jorge Luís Akasaki; Dr. Sergio Augusto Mello da Silva; Dr. Haroldo de Mayo Bernardes; Dr. Jefferson Sidney Camacho; Dr. José Antonio Matthiesen; Dr. José Luiz Pinheiro Melges; Dr. Renato Bertolino Júnior; Dr. Adriano Souza; Dr. José Augusto de Lollo; Dr. Paulo César Lodi; Dr. Edson Pereira Tangerino; Dr. Geraldo de Freitas Maciel; Dr. Jair Camacho e Dra. Luzenira Alves Brasileiro.

Aos meus orientadores: Dra. Gabriela Rezende Fernandes e Dr. Rogério Oliveira Rodrigues, pessoas dotadas de singular paciência e sabedoria.

Aos funcionários de DEC da Unesp de Ilha Solteira: José Carlos de Oliveira; Sandra Regina Arantes Medeiros; José Aldir Pereira; Renato Alves de Souza; Cícera da Paixão Ferreira e Admir.

Aos funcionários da Unesp de Ilha Solteira, em especial, João Josué Barbosa, Maria Nilda Ofego Otoboni e Rosemeire Cantão Paris.

Aos meus amigos: Rodrigo Marçal Depintor; Ricardo Cestari; Wagner Duarte; Luciano Rojo Salvino; Michelle Sartório Bughi; Valter Calsavara Júnior; Silvia Sônia Silva; Fabiane Corrêa Dallazen; Alexandre Leslão Garcia; Miriam Kamikawa, Gisele Fernanda Pegoraro; Anderson Luiz Venâncio; Simone Esgalha de Araújo; Victor Marcuz de Moraes; Ana Flávia da Silva; Mauro Mitsuuichi Tashima; Domício Júnior; Domingos Jorge Ferreira da Silva; Odilon Martins; Wilson José da Silva; Marcela Jodas; Bárbara Gonçalves Logullo; Danilo Konda; Mário; Ana Paula Fugi; Herivelto Alves Valente e Mrta Dib Fava.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo – FAPESP, que apoiou o desenvolvimento desta pesquisa.

À IMESUL Metalúrgica Ltda que com investimento e incentivo possibilitou a finalização deste trabalho.

À Nossa Senhora Aparecida.

Aprendo para ensinar e
ensino para aprender.

RESUMO

DENIPOTTI, G. J. (2007). *Inclusão de pilares numa formulação do Método dos Elementos de Contorno para análise linear de pavimentos de edifícios*. Ilha Solteira. 153p. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista.

Este trabalho trata da inclusão de pilares numa formulação do Método dos Elementos de Contorno para análise linear de pavimentos de edifícios. Inicialmente é apresentada a formulação para análise do pavimento sujeito à flexão simples, onde o pavimento é modelado por uma placa composta por sub-regiões de diferentes rigidezes, sendo cada sub-região a representação de uma viga ou laje. Nesse modelo as forças de superfície são eliminadas das interfaces e todas as sub-regiões são representadas por suas superfícies médias. Então, a fim de reduzir o número de graus de liberdade do problema, aproximam-se os deslocamentos ao longo da largura da viga, obtendo-se um novo modelo em que as variáveis ficam definidas ao longo dos eixos das vigas ao invés de seus contornos. Em seguida, introduz-se o efeito de membrana nessa formulação para que se possa fazer a análise do pavimento sujeito à flexão composta, isto é, representando todas as sub-regiões por uma mesma superfície de referência. Nesse modelo considera-se aproximação linear para as forças de membrana ao longo da largura das vigas. Finalmente, estendem-se essas formulações para análise de pavimentos de edifícios com pilares, através da inclusão de pontos do domínio com carregamentos prescritos, que são escritos em termos das reações do pilar sobre a placa. Os esforços de flexão do pilar sobre a placa são escritos em termos da tensão uniformemente distribuída sobre a seção transversal do pilar e os esforços de membrana são escritos em termos de linhas de carga atuando na seção transversal do pilar.

Palavras-chave: Método dos elementos de contorno, análise linear, flexão de placas.

ABSTRACT

DENIPOTTI, G. J. (2007). *Inclusion of columns in a formulation of the Boundary Element Method for linear analysis of building floors structures*. Ilha Solteira. 153p. Dissertation (Mestrado) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista.

This work deals with the inclusion of columns in a formulation of the Boundary Element Method (BEM) for linear analysis of building floors structures. Initially it is presented the BEM formulation for analyzing building floors subjected to simple bending, where the floor is modeled by a plate divided into sub-regions of different rigidities, being each sub-region the representation of either a beam or slab. In this model the tractions are eliminated on the interfaces and all the sub-regions are represented by their middle surfaces. Then, in order to reduce the number of degrees of freedom, some approximations for the displacements are adopted along the beam width, leading to a model where the values are defined on the beam axis, instead of its boundaries. Then the membrane effects are introduced into this formulation in order to represent all sub-regions by a same reference surface. In this model are assumed linear approximation for the in-plane tractions along the beam cross section. Finally, those formulations are extended in order to consider columns in the plate domain. This is done by considering domain points with prescribed loadings which are written in terms of the column reactions on the plate. The columns bending reactions are written in terms of a stress uniformly distributed over the column cross section and the membrane forces are written in terms of loading lines acting in the column cross section.

Key words: Boundary Elements, Building floor structures, Plate bending.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Elemento Bidimensional de Placa	22
Figura 2.2 - Deslocamento de um Ponto Situado sobre uma Normal ao Plano Médio da Placa.....	23
Figura 2.3 – Deslocamentos u_1 e u_2 de um Ponto de Cota x_3	25
Figura 2.4 – Tensões em um Elemento de Placa.....	27
Figura 2.5 – Esforços em um Elemento de Placa.....	28
Figura 2.7 – Esforços no Elemento abc.....	31
Figura 2.8 – Momentos Volventes em um Canto i da Placa.....	32
Figura 3.1 – Pavimento com 2 Lajes e 1 Viga	38
Figura 3.2 – Placa Enrijecida com Duas Vigas	40
Figura 3.3 – Tipos de Cantos na Placa com Sub-regiões	44
Figura 3.4 – Sistema de Coordenadas Cilíndricas.....	45
Figura 3.5 – Contorno Circular Acrescido a um ponto S de um Canto da Placa	48
Figura 3.6 – Coincidente com um Canto do tipo c_2	52
Figura 3.7 – O Ponto Q Coincide com um Canto do tipo c_1	53
Figura 3.8 – Placa Subdividida em Sub-regiões.....	57
Figura 3.9 – Ponto Q sobre um contorno externo.....	67
Figura 3.10 – Modelo de Pavimento com Representação da Viga pelo seu Eixo Médio	71
Figura 3.11 – Decomposição de Forças nas Faces de uma Viga.....	78
Figura 4.1 – Discretização de um Contorno Qualquer.....	81
Figura 4.2 – Geometria do Elemento	82
Figura 4.3 – Funções de Forma com Aproximação Quadrática das Variáveis	84
Figura 4.4 – Elementos Descontínuos.....	86
Figura 4.5 – Integração ao longo de Contorno da Região Carregada	91
Figura 4.6 – Pontos de Colocação.....	95
Figura 4.7 – Placa Enrijecida com Duas Vigas Externas	98
Figura 4.8 – Representação da Discretização do Primeiro Exemplo	99
Figura 4.9 – Deslocamento no Eixo A	100
Figura 4.10 – Momento Fletor no Eixo A.....	100
Figura 4.11 – Deslocamento no Eixo B	100
Figura 4.12 – Momento Fletor no Eixo B	101
Figura 4.13 – Pavimento Composto por 5 vigas e 2 Lajes.....	102
Figura 4.14 – Representação da Discretização em 22 Elementos de um Pavimento	102
Figura 4.15 – Gráfico do Deslocamento w para 3 Malhas – Flexão Simples	103
Figura 4.16 – Gráfico do Momento M_s para 3 Malhas – Flexão Simples	103
Figura 4.17 – Gráfico do Deslocamento w na Viga Interna para Diferentes Análises.....	104
Figura 4.18 – Gráfico do Momento M_s na Viga Interna para Diferentes Análises.....	104
Figura 4.19 – Placa Apoiada em Vigas Elásticas.....	105
Figura 4.20 – Placa Apoiada em Vigas Elásticas.....	106
Figura 5.1 – Associação de uma Estrutura Qualquer com uma Placa com um sub-domínio.....	109
Figura 5.2 – Associação da Placa com uma Estrutura Qualquer.....	111
Figura 5.3 – Sistema Local de Coordenadas Coincidentes com as Direções Principais no Pilar.....	115
Figura 5.4 – Seção do Pilar Sujeita à Ação do Momento M_x	116
Figura 5.5 – Seção do Pilar sujeita à ação do momento M_y	117
Figura 5.6 - Conjunto placa-pilar nas Posições Inicial e Deformada	117
Figura 5.7 - Distribuição de Tensão no Pilar e na Placa	118
Figura 5.8 – Pilar Isolado Para o Cálculo da Matriz de Rigidez	119
Figura 5.9 - Cargas uniformemente distribuídas ao longo das linhas de carga	125
Figura 5.10 – Distribuição do Carregamento $b\bar{x}$ e $b\bar{y}$ ao longo do Contorno do Pilar	128

Figura 5.11 – Placa Apoiada no Contorno e em Pontos do Domínio	131
Figura 5.12 – Placa Apoiada no Contorno e em Pontos do Domínio	132
Figura 5.13 – Deslocamento w no eixo A-A.....	132
Figura 5.14 – Momento Fletor M_x no Eixo A-A	132
Figura 5.15 – Momento Fletor M_y no Eixo A-A	133
Figura 5.16 – Deslocamento w no Eixo B-B.....	133
Figura 5.17 – Momento Fletor M_x no Eixo B-B.....	133
Figura 5.18 – Momento Fletor M_y no Eixo B-B.....	133
Figura 5.19 – Vista em Planta da Placa.....	134
Figura 5.20 – Discretização Utilizada no ANSYS	135
Figura 5.21 – Discretização da Primeira Malha	135
Figura 5.22 – Deslocamento w ao longo do eixo A para flexão simples	136
Figura 5.23 – Momento Fletor ao longo do eixo A para Flexão Simples	136
Figura 5.24 – Deslocamento w ao longo do eixo da viga para Flexão Simples.....	136
Figura 5.25 – Momento Fletor ao longo do eixo da viga para Flexão Simples	137
Figura 5.26 – Deslocamento w ao longo do eixo A, comparação com o ANSYS	137
Figura 5.27 – Momento Fletor ao longo do eixo A, comparação com o ANSYS.....	138
Figura 5.28 – Deslocamento w ao longo do eixo da viga, comparação com o ANSYS	138
Figura 5.29 – Momento Fletor ao longo do eixo da viga, comparação com o ANSYS.....	138
Figura 5.30 – Deslocamento w ao longo do eixo A para flexão composta.....	139
Figura 5.31 – Deslocamento w ao longo do eixo da viga para flexão composta	139
Figura 5.32 – Momento fletor ao longo do eixo da viga para flexão composta.....	140
Figura 5.33 – Momento fletor ao longo do eixo A para flexão composta.....	140
Figura 5.34 – Deslocamento w ao longo do eixo A, comparação entre as análises de flexão simples e composta	140
Figura 5.35 – Deslocamento w ao longo do eixo da viga, comparação entre as análises de flexão simples e composta	141
Figura 5.36 – Momento fletor ao longo do eixo da viga, comparação entre as análises de flexão simples e composta	141
Figura 5.37 –Momento fletor ao longo do eixo A, comparação entre as análises de flexão simples e composta	141
Figura 5.38 – Representação em Planta do Pavimento	142
Figura 5.39 – Representação Arquitetônica do Pavimento	142
Figura 5.40 – Representação da primeira discretização	143
Figura 5.41 – Deslocamento w no eixo A, para Flexão Simples	144
Figura 5.42 – Momento Fletor M_x no eixo A, para Flexão Simples.....	144
Figura 5.43 – Deslocamento w no eixo B, para Flexão Simples.....	144
Figura 5.44 – Momento Fletor M_x no eixo B, para Flexão Simples.....	145
Figura 5.45 – Deslocamentos ao longo do eixo A para flexão composta	145
Figura 5.46 – Deslocamentos ao longo do eixo B para flexão composta.....	146

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Valores de $K(Q)$	54
Tabela 3.2 – Valores de $K_k(Q)$ para a Equação de deslocamento de chapa.....	76
Tabela 4.1 – Valores dos Deslocamentos em Um Ponto Interno	106

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MEF – Método dos Elementos Finitos

MDF – Método das Diferenças Finitas

MEC – Método dos Elementos de Contorno

LISTA DE SÍMBOLOS

Γ : coordenada que percorre o contorno externo da placa;
 $\Gamma_{s/vigas}$: coordenada que percorre o contorno externo da placa sem vigas;
 Γ_i : coordenada que percorre o contorno externo ou interface da sub-região i ;
 Γ_{ij} : coordenada que percorre a interface do sub-domínio Ω_i com o subdomínio Ω_j ;
 Γ_∞ : contorno infinito;
 Ω : coordenada de domínio;
 Ω_g : área do carregamento transversal distribuído;
 Ω_b : área do carregamento distribuído no plano da placa;
 Ω_∞ : domínio infinito;
 β_c : ângulo no canto da placa;
 $\delta(q, p)$: delta de Dirac;
 ε_{ij} : tensor das deformações devido à flexão simples da placa;
 ε_{ij}^{2D} : tensor das deformações relativo ao problema bidimensional;
 ν : coeficiente de Poisson;
 ν' : $\nu' = \nu/(1 + \nu)$;
 θx_1 e θx_2 : rotações em torno dos eixos x_1 e x_2 ;
 r, θ : sistema de coordenadas polares;
 σ_{ij} : tensor das tensões devido ao carregamento;
 σ_{ij}^{2D} : tensor das tensões devido à flexão simples da placa;
 ξ : coordenada adimensional do ponto onde se calcula a equação integral;
 a_i : comprimento do sub-elemento i ;
 A : área da seção transversal;
 b_i : carregamento no plano da placa, na direção i ;
 E : módulo de elasticidade longitudinal do material;
 E_{pa} : E da sub-região adjacente;
 g : carregamento transversal uniformemente distribuído;
 g^* : carregamento fundamental, geralmente é o delta de Dirac;
 G : módulo de elasticidade transversal;
 I : momento de inércia da viga;
 L_j : comprimento do elemento j ;
 M_i : momento na direção i , em uma superfície de normal n_j ;
 m_{ij} : tensor dos momentos;
 M_n : momento de flexão, por unidade de comprimento, na direção normal ao contorno;
 M_{ns} : momento volvente por unidade de comprimento;
 n_i : co-senos diretores da normal em relação ao eixo i ;
 N_{ij} : tensor das forças normais;
 N_g : número de pontos de Gauss;

p_i : força normal na direção i , em uma superfície de normal n_j ;
 p_n e p_s : forças de superfície nas direções n e s do contorno ou interface da placa;
 q : ponto onde se aplica a solução fundamental;
 R_c : reação de canto;
 R : raio de curvatura do contorno no ponto P ;
 r : distância de onde se aplicou o carregamento unitário ao ponto onde se deseja obter a força ou deslocamento na solução fundamental;
 s : vetor unitário tangente ao contorno no plano da placa;
 T : tensor de tensão;
 u_1, u_2, u_3 : componentes de deslocamentos no sistema cartesiano x_1, x_2, x_3 ;
 u_s, u_n : deslocamentos no plano da placa, nas direções n e s do contorno ou interface;
 $u_{s,n}, u_{n,n}$: rotações relativas ao problema bidimensional;
 u_i^P : deslocamento na direção i devido à carga P ;
 u_i^M : deslocamento na direção i devido ao momento M ;
 U : vetor dos deslocamentos em todos os nós;
 $\tilde{U}^N$: vetor dos deslocamentos nodais de um elemento;
 $\tilde{U}_{\sim 2D}$: vetor dos deslocamentos, em todos os nós, do problema bidimensional;
 $\tilde{U}_{\sim F}$: vetor dos deslocamentos, em todos os nós, do problema de flexão;
 V_n : força cortante equivalente por unidade de comprimento;
 w : deslocamento na direção do eixo x_3 ;
 $w_{,ij}$: curvaturas;
 w_c : deslocamento do canto da placa;
 $\partial w / \partial x_2$: rotação em torno do eixo x_1 ;
 $\partial w / \partial x_1$: rotação em torno do eixo x_2 ;
 $\partial w / \partial n$: rotação normal ao contorno;
 $\partial w / \partial s$: rotação tangencial ao contorno;
 x_1, x_2, x_3 : sistema de coordenadas cartesianas.

SUMÁRIO

RESUMO	7
ABSTRACT	8
LISTA DE FIGURAS	9
LISTA DE TABELAS	11
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS	12
LISTA DE SÍMBOLOS	13
1. APRESENTAÇÃO.....	17
1.1 Objetivos e Justificativas	17
1.2 Material, Método e Forma de Análise dos Resultados	18
1.3 Revisão Bibliográfica	18
1.4 Conteúdo do trabalho	21
2. ELASTICIDADE BIDIMENCIONAL E PLACAS DELGADAS	22
2.1 Placas Delgadas	22
2.1.1 Tensores de Tensão e Deformação	23
2.1.2 Momentos e Esforços Cortantes.....	27
2.1.3 Equação Diferencial de Placas	29
2.1.4 Força de Superfície	30
2.1.5 Força Cortante Equivalente.....	31
2.1.6 Reação de Canto.....	32
2.1.7 Condições de Contorno	32
2.2 Chapas Delgadas	33
2.2.1 Tensores de Deformação e Tensão	33
2.2.2 Esforços Normais	34
2.2.3 Forças de Superfície.....	34
2.2.4 Equação Diferencial	35
3. FORMULAÇÃO DO MEC PARA ANÁLISE DO PAVIMENTO DE EDIFÍCIO	37
3.1 Equações Integrais de Placas Sujeitas à Flexão Simples para Domínios Compostos	37
3.1.1 Equação Integral de Deslocamento	38
3.1.2 Solução Fundamental de Placas	45
3.1.3 Equação Integral do Deslocamento para um Ponto do Contorno Externo ou Coincidente com um Canto.....	48
3.1.4 Equação Integral da Rotação para um Ponto do Domínio	54
3.1.5 Equação Integral do Deslocamento para um Ponto Externo	56
3.2 Equações Integrais de Placas Sujeitas à Flexão Composta para Domínios Compostos	56
3.2.1 Relações Básicas	56
3.2.2 Equações Integrais de Deslocamento no Domínio.....	58
3.2.3 Solução Fundamental de Membrana	65

3.2.4	Equação Integral do Deslocamento w para um Ponto sobre o Contorno Externo da Placa	66
3.2.5	Equação Integral da Rotação $u_{i,k}$ para um Ponto Interno	69
3.3	Modelos Alternativos: Variáveis Definidas nos Eixos das Vigas	71
3.3.1	Modelo para Análise de Flexão Simples	71
3.3.2	Modelo para Análise de Flexão Composta	75
4.	MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	81
4.1	Discretização do Contorno e Interfaces	81
4.2	Aproximação das Variáveis	83
4.3	Transformação das Equações Integrais em Equações Algébricas	86
4.4	Integração Numérica	89
4.5	Transformação das Integrais de Domínio em Integrais de Contorno	91
4.6	Sistema de Equações	93
4.6.1	Sistema de Equações para Análise de Placas Sujeitas à Flexão Simples	93
4.6.2	Sistema de Equações para Análise de Placas Sujeitas à Flexão Composta	94
4.7	Exemplos Numéricos	98
5.	CONSIDERAÇÃO DE PILARES NA FORMULAÇÃO DO PAVIMENTO SUJEITO À FLEXÃO COMPOSTA	108
5.1	Associação da Placa com uma Estrutura Qualquer	108
5.2	Inclusão de Pilares no Modelo de Flexão Simples	114
5.2.1	Tensão Normal na Interface Placa-Pilar	114
5.2.2	Sistema de Equações	121
5.3	Inclusão de Pilares no Modelo em Flexão Composta	122
5.4	Exemplos Numéricos	130
6.	CONCLUSÕES	147
7.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	149
8.	BIBLIOGRAFIAS CONSULTADAS	153

1. APRESENTAÇÃO

1.1 Objetivos e Justificativas

Este trabalho tratará da análise linear de pavimentos de edifícios utilizando formulações do Método dos Elementos de Contorno (MEC). Método este que, diferentemente dos outros, não tem a necessidade de discretização de todo o domínio da estrutura analisada linearmente, mas sim apenas do contorno simplificando com isto a malha da estrutura e facilitando eventuais modificações além de diminuir o tempo de processamento dos cálculos.

Serão utilizadas as formulações desenvolvidas na tese de doutorado de Fernandes (2003), sendo essas modificadas a fim de possibilitar também a consideração de pilares no pavimento.

No caso de existir pilares no domínio da placa, haverá condições de vinculação nas interfaces placa-pilar, ou seja, carregamentos ou deslocamentos prescritos. Dentro deste contexto, pretende-se considerar os pilares através da inclusão na formulação de pontos ou regiões do domínio com carregamentos prescritos. Os pilares serão introduzidos em duas formulações para análise do pavimento sujeito à flexão, sendo uma para análise de flexão simples e a segunda para análise de flexão composta. A formulação para análise do pavimento sujeito à flexão composta é obtida, considerando-se que além das ações transversais podem agir na placa ações coplanares, ou seja, acoplam-se os problemas de placa e de membrana.

No caso da análise linear de placas, por exemplo, as representações integrais de deslocamentos, momentos e forças cortantes são exatas; o erro introduzido é devido à aproximação dos valores das variáveis nos elementos definidos ao longo do contorno da placa (FERNANDES, 2003, p01).

Este método dispensa a necessidade de discretização do domínio da estrutura analisada, para análise linear, necessitando apenas da discretização do contorno. Isto simplifica a malha da estrutura e facilita possíveis intervenções, diminuindo também o tempo de processamento de cálculo. Este método pode ser utilizado para diferentes problemas em engenharia, porém ele é mais indicado em casos de concentração de tensão (ou outro tipo de

variável), como o que ocorre na consideração de pilares em pavimentos, fruto de pesquisa deste trabalho.

1.2 Material, Método e Forma de Análise dos Resultados

Será feito inicialmente um estudo teórico sobre flexão de placas e das formulações do MEC para análise de flexão de pavimentos de edifícios propostas em Fernandes (2003), além de consultas em outras teses e dissertações. Em seguida será desenvolvida uma modificação a ser introduzida nessas formulações a fim de possibilitar a consideração de pilares no pavimento. E finalmente, verificar-se-á a potencialidade dessas formulações, através de exemplos numéricos existentes na literatura.

A programação dos algoritmos será feita em linguagem FORTRAN para microcomputadores e o método empregado será o MEC direto baseado em colocação.

1.3 Revisão Bibliográfica

Na engenharia, assim como em outros tantos segmentos, é preciso, para as resoluções de problemas, analisar o método de solução juntamente com o resultados obtidos. Na maioria dos casos, resultados exatos são impossíveis de serem atingidos. Complexidades em geometria e/ou materiais são os principais fatores que impedem as soluções analíticas em problemas de engenharia, utilizando-se, assim, métodos numéricos onde são feitas simplificações nas leis constitutivas dos materiais e em sua geometria obtendo soluções aproximadas.

Três métodos numéricos são bastante utilizados, sendo dois deles denominados métodos de domínio – Método das Diferenças Finitas (MDF) e Método dos Elementos Finitos (MEF) – que associam pontos no domínio e no contorno do problema e o terceiro, e também o mais recente, o Método dos Elementos de Contorno (MEC), formulado com equacionamento integral ao longo do contorno do domínio analisado.

O Método das Diferenças Finitas teve seu início com o trabalho de Southwell (1946), já o Método dos Elementos Finitos, que é atualmente o mais utilizado, teve seu marco com trabalhos desenvolvidos por Turner et al. (1956) e Argyris e Kelset (1960).

A formulação do MEC é baseada em equações integrais, que são conhecidas há bastante tempo. Foi Abel (1823) quem primeiro deduziu uma equação integral para a solução de um problema físico, a do pêndulo isócrono. Liouville (1837) transformou um problema de valor inicial em uma equação integral e resolveu-a usando aproximações sucessivas. Segundo Foltran (1999), em 1886 Somigliana apresentou a equação integral que estabelece a relação entre as forças e deslocamentos no contorno de um corpo e seus deslocamentos internos, esta relação é conhecida como identidade de Somigliana. Contudo, a primeira investigação rigorosa das equações integrais deve-se a Fredholm (1903). No entanto, a primeira formulação indireta do MEC, indireta por sua solução ser obtida em termos de fontes fictícias aplicadas ao contorno, e que após sua determinação, permite o cálculo das variáveis físicas do problema, surgiu apenas nos anos 60, sendo de autoria de Kupradze (1965). Logo depois, com a publicação do primeiro artigo sobre a formulação direta do método das equações integrais de contorno, de autoria Rizzo (1967), é que os métodos integrais começam a despertar interesse na comunidade científica, inclusive na área de engenharia.

Somente em 1978, com a publicação do livro *The Boundary Element Method for engineers*, de autoria de Brebbia (1978), é que o método passa a ser conhecido como Método dos Elementos de Contorno.

No Brasil, um dos pólos de pesquisa do MEC é a Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, onde vem sendo desenvolvidos, desde meados dos anos 80, diversos trabalhos, sendo a maioria deles voltada para a análise de placas como a tese de doutorado de Paiva (1987), onde foi feita a análise linear de pavimentos de edifícios através da associação do MEC com MEF; e a tese de doutorado de Fernandes (2003), onde foi desenvolvida uma nova formulação não-linear para análise de pavimentos de edifícios utilizando-se apenas o MEC.

Podem-se ainda mencionar diversos outros trabalhos baseados em formulações do MEC para placas, dentre eles destacam-se: Silva (1988), que estudou placas sobre fundação elástica; Tejerina (1991), que tratou do mesmo tema e introduziu aproximações alternativas para a integral de domínio; Manzoli (1992), ainda sobre fundação elástica, que considerou uma solução fundamental própria; Oliveira Neto (1991) que analisou procedimentos para a melhoria de valores de contorno; Ribeiro (1992), que desenvolveu formulação de placas com as hipóteses de Reissner considerando não-linearidade física; Chueiri (1994), que

implementou formulação elasto-plástica, com modelos particulares de concreto armado, considerando-se as hipóteses de Kirchhoff; Fernandes (1998), que complementou a formulação desenvolvida em Chueiri (1994), considerando outros modelos para o concreto; Chaves (1997), que desenvolveu e implementou a formulação do MEC para placas de espessura variável; Oliveira Neto (1998), que utilizou uma formulação com três parâmetros nodais em deslocamentos para placas delgadas; Agostinho (1998), que fez uma associação de chapas considerando enrijecedores e crack coesivo combinando o MEC com o MEF; Bacarji (2001), que utilizou uma formulação para a análise de pavimentos de edifícios dando ênfase para lajes cogumelo feita com a incorporação da não-linearidade física e Wutzow (2003), que empregou a formulação linear do MEC para a análise de chapas com domínios.

O presente trabalho tratará da análise linear de pavimentos de edifícios – placas enrijecidas - com a utilização do Método dos Elementos de Contorno. De acordo com Mendonça (2005) o estudo de placas teve seu principal desenvolvimento entre os anos de 1870 e 1920 por pesquisadores como Poisson, Kirchhoff, Thompson, Tait e Kelvin, porém seu marco inicial foi com as teorias de Kirchhoff (1850), adotadas às placas delgadas com pequenos deslocamentos. Hoje essa teoria é conhecida como Teoria Clássica. Posteriormente, Reissner (1944) apresentou uma formulação que considera o efeito das deformações por cisalhamento transversal, o que não foi considerado por Kirchhoff. Baseado nas equações de equilíbrio da teoria tridimensional da elasticidade, Mindlin (1951) apresentou uma teoria semelhante à de Reissner, considerando o cisalhamento transversal. De acordo com Bacarji (2001), uma outra versão para a teoria de Reissner para placas homogêneas e isotrópicas foi proposta por Ladevéze & Pecastaings (1988), porém com alteração na consideração do fator de deformabilidade por cisalhamento transversal. Neste trabalho, de análise de pavimentos de edifícios através do MEC, trabalhar-se-á apenas com a Teórica Clássica.

1.4 Conteúdo do trabalho

Inicia-se este trabalho com um breve estudo sobre a teoria de elasticidade particularizada para os casos do estado plano de tensão (problemas de chapas ou membrana) e placas delgadas governadas pelas hipóteses de Kirchhoff (1850). Considera-se o estado plano acoplado ao problema de flexão simples de placas, permitindo assim a obtenção da formulação de placas com flexão composta sendo mostrados as relações de equilíbrio, as deformações, as tensões e os esforços relativos aos dois problemas.

No capítulo seguinte são mostradas as deduções das equações integrais para o problema de flexão simples de placas enrijecidas por vigas e em seguida as equações integrais para o problema de flexão composta, ou seja, considerando-se a presença de esforços de membrana. A partir dessa formulação obtém-se um outro modelo para análise de pavimentos de edifícios, onde as variáveis são definidas apenas nas linhas médias das vigas ao invés de considerá-las ao longo de todo o contorno das mesmas, resultando em uma significativa redução do número de graus de liberdade do problema.

No capítulo 4 o Método dos Elementos de Contorno é aplicado às equações integrais desenvolvidas no capítulo 3, sendo apresentados os resultados obtidos através da análise de deslocamentos e momentos de um pavimento, sendo estes comparados com os obtidos com a utilização do ANSYS.

No capítulo 5 é feita a inclusão dos pilares nas formulações apresentadas anteriormente, transformando as reações do pilar na placa em carregamentos atuantes na interface placa-pilar, sendo apresentados alguns exemplos numéricos, cujos resultados são comparados com outros modelos numéricos existentes na literatura.

2. ELASTICIDADE BIDIMENCIONAL E PLACAS DELGADAS

Como mencionado no capítulo 1, o elemento de placa é sujeito apenas a carregamento transversal, desenvolvendo, portanto, deformações de flexão simples. Frequentemente, em adição à flexão, as placas também suportam carregamentos coplanares, denominados comportamentos de membrana, sendo esse o caso a ser tratado nesse trabalho. Portanto, neste capítulo é feito um breve estudo sobre a teoria de elasticidade particularizada para os casos do estado plano de tensão (problemas de chapas ou membrana) e placas delgadas governadas pelas hipóteses de Kirchhoff (1850). São apresentadas as relações de equilíbrio, as deformações, as tensões e os esforços relativos aos dois problemas.

2.1 Placas Delgadas

Placas são elementos estruturais simétricos em relação a um plano médio, cuja dimensão normal a esse plano, chamada espessura, é pequena, apresentando uma relação " t/a " da ordem de $1/5$ a $1/100$, sendo " t " a espessura e " a " o menor dos vãos da placa, e cuja ação na mesma é transversal à sua superfície.

A representação geométrica adotada para a placa é bidimensional, sendo os eixos cartesianos X_1 e X_2 definidos em sua superfície média, como mostrado na figura a seguir.

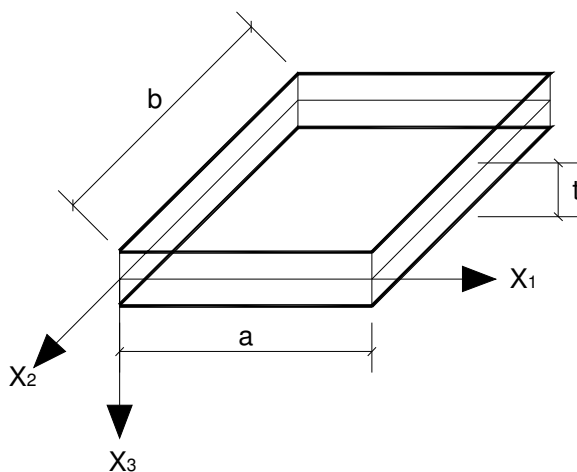


Figura 2.1 – Elemento Bidimensional de Placa

Neste trabalho adotar-se-á a teoria de Kirchhoff, amplamente conhecida como Teoria Clássica, aplicável no estudo da flexão de placas delgadas com pequenos deslocamentos. Para isto, são adotadas algumas hipóteses básicas, as quais são mostradas a seguir:

- Os deslocamentos transversais são pequenos quando comparados com a espessura t da placa;
- Não há deformação da superfície média da placa, sob o efeito de cargas transversais;
- As seções transversais permanecem planas após a flexão, sofrendo apenas rotação em relação aos eixos neutros, como mostra a figura (2.2);
- As tensões normais na direção transversal da placa (σ_3) são desprezadas.

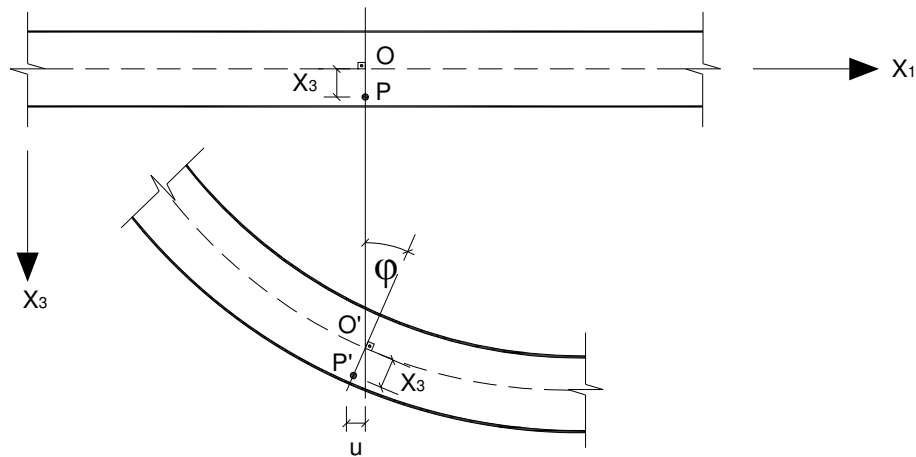


Figura 2.2 - Deslocamento de um Ponto Situado sobre uma Normal ao Plano Médio da Placa

Sendo a componente de tensão σ_3 desprezada, a deformação ϵ_3 não será considerada na formulação do problema, pois a resultante do produto $\sigma_3 \cdot \epsilon_3$ será sempre nula.

2.1.1 Tensores de Tensão e Deformação

Considerando-se que a placa esteja sujeita a pequenos deslocamentos e rotações, tem-se o seguinte tensor de deformação:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad i, j = 1, 2 \quad (2.1)$$

Para o caso plano de tensão, considerando a lei de Hooke obtém-se:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

Escrevendo a equação (2.2) na forma indicial:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{1-\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (2.3)$$

onde: G é o módulo de elasticidade transversal do material e é dado por: $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$; ν é o coeficiente de Poisson do material e E é o módulo de elasticidade longitudinal do material.

Considera-se que as componentes do vetor deslocamento de um ponto qualquer da placa são dadas pelos deslocamentos u_1 , u_2 e u_3 respectivamente nas direções X_1 , X_2 e X_3 , e pelas rotações θ_{x1} e θ_{x2} em relação às direções X_1 e X_2 .

Para os pontos pertencentes à superfície média da placa, tem-se que:

$$u_1 = u_2 = 0 \quad \text{e} \quad u_3 = w$$

sendo w o deslocamento vertical e denominado flecha da placa.

Devido ao fato da placa ser definida pela superfície média, apenas a flecha fará parte da formulação do problema. Para os pontos que não pertencem à superfície média, pode-se conhecer u_1 e u_2 a partir de $w(x_1, x_2)$. Como mostra as figuras (2.3), onde estão indicados os sentidos positivos de α_1 e α_2 , segundo a regra da mão direita.

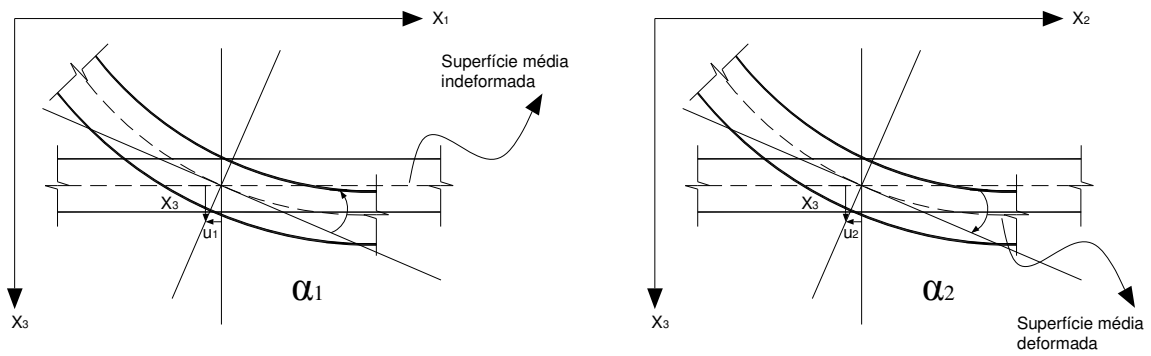


Figura 2.3 – Deslocamentos u_1 e u_2 de um Ponto de Cota x_3

Na figura (2.3) $\alpha_2 = \theta_{x1} = \partial w / \partial x_2$ é a inclinação em x_1 da deformada, ou seja, a rotação em torno de x_2 e $\alpha_1 = \theta_{x2} = -\partial w / \partial x_1$ é a inclinação em x_2 da deformada, ou seja, a rotação em torno de x_1 .

Assim, os deslocamentos u_1 e u_2 podem ser escritos em função da cota x_3 :

$$u_1 = x_3 \cdot \text{tg} \alpha_1 \quad (2.4a)$$

$$u_2 = -x_3 \cdot \text{tg} \alpha_2 \quad (2.4b)$$

Em pequenas deformações, os ângulos α_1 e α_2 se confundem com o valor de suas tangentes, portanto pode-se dizer que:

$$u_1 = x_3 \cdot (-\partial w / \partial x_1) \quad (2.5a)$$

$$u_2 = -x_3 \cdot (\partial w / \partial x_2) \quad (2.5b)$$

Escrevendo-se as equações (2.5) na forma indicial:

$$u_i = -x_3 \cdot w_{,i} \quad (2.6)$$

Portanto, as rotações na placa são dadas por:

$$\theta_{x1} = w_{,2} \quad (2.7)$$

$$\theta_{x2} = -w_{,1} \quad (2.8)$$

O tensor de deformação resulta em:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

Considerando-se a equação (2.6) o tensor de deformações pode ser escrito na seguinte forma:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \\ -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \\ -2x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

Escrevendo-se a equação (2.10) na forma indicial, tem-se:

$$\varepsilon_{ij}^F = -x_3 \cdot w_{,ij} \quad (2.11)$$

Onde:

- $w_{,ij}$ é o tensor das curvaturas, sendo $w_{,13}$ sua componente num plano paralelo ao $x_1 x_3$ e $w_{,22}$ sua componente num plano paralelo ao $x_2 x_3$;
- $\varepsilon_{12} = \gamma_{12} / 2$.

E, levando-se em conta a mesma equação (2.6), o tensor de tensão pode ser escrito da seguinte forma:

$$\sigma_{ij}^F = \frac{Ex_3}{(1-\nu^2)} \left[w_{,kk} \delta_{ij} + (1-\nu) w_{,ij} \right] \quad (i, j, k = 1, 2) \quad (2.12)$$

Note que o índice F utilizado nas equações (2.11) e (2.12) será adotado para indicar que os tensores são relativos à flexão simples da placa.

2.1.2 Momentos e Esforços Cortantes

A figura (2.4) ilustra as tensões que agem em um elemento de placa de dimensões (dx_1, dx_2, dx_3) . As tensões σ_{ii} ($i=1,2$) variam linearmente em X_3 e causam os momentos fletores M_{ii} ($i=1,2$), já as tensões τ_{ij} ($i, j=1,2$), que também variam linearmente em X_3 , causam os momentos torçores M_{ij} ($i, j=1,2$). Os esforços cortantes são causados pelas tensões τ_{i3} ($i=1,2$).

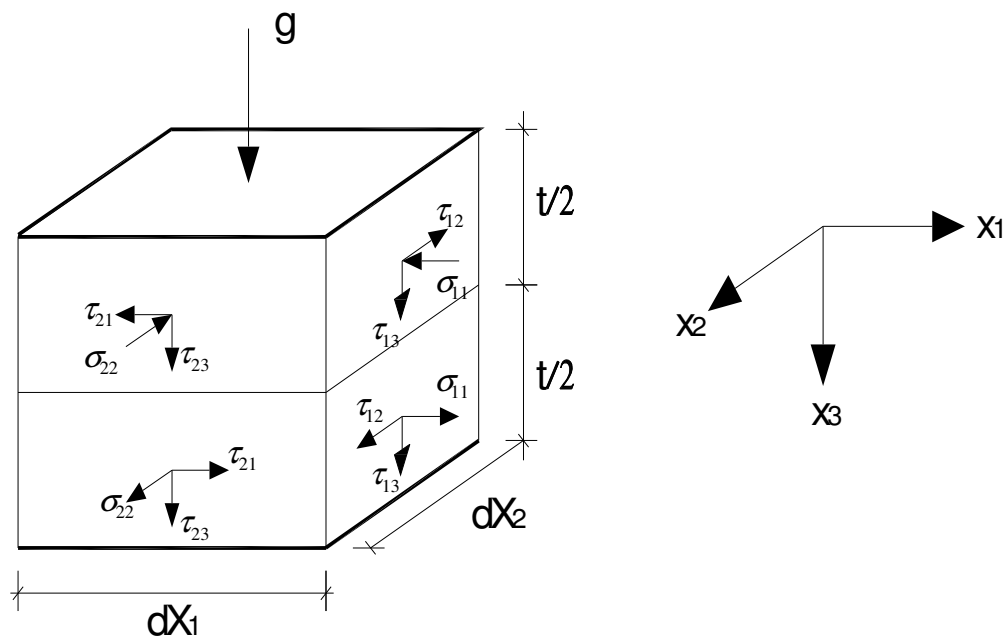


Figura 2.4 – Tensões em um Elemento de Placa

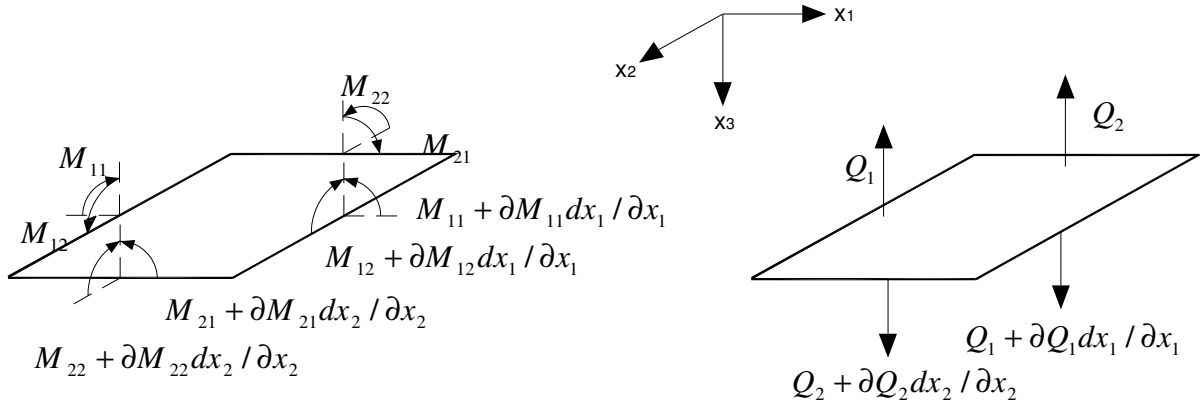


Figura 2.5 – Esforços em um Elemento de Placa

Sendo M_{ii} os momentos fletores e M_{ij} os momentos torçores.

Os momentos são obtidos integrando-se as tensões, dadas em (2.12), ao longo da espessura x_3 , da placa, ou seja:

$$m_{11} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{11} x_3 dx_3 = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} x_3^2 dx_3 = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \quad (2.13)$$

onde $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$, representa a rigidez da placa.

De forma análoga obtêm-se os momentos m_{22} e m_{12} .

E escrevendo na forma indicial:

$$m_{ij} = -D \left[\nu w_{,kk} \delta_{ij} + (1-\nu) w_{,ij} \right] \quad (i, j, k = 1, 2) \quad (2.14)$$

Os esforços cortantes, dados por unidade de comprimento, são obtidos a partir de:

$$q_i = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{i3} dx_3 \quad (i, j = 1, 2) \quad (2.15)$$

Note que nas hipóteses de Kirchhoff desprezam-se as deformações de cisalhamento transversal, ou seja, $\gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$ e, portanto, as componentes de tensão τ_{13} e τ_{23} também são desprezadas. Por tal motivo, os esforços cortantes são obtidos através das equações de equilíbrio do elemento.

Considerando-se um carregamento distribuído " g " e fazendo-se o equilíbrio das forças verticais e dos momentos em torno de x_1 e x_2 , obtem-se as relações de equilíbrio:

$$q_{i,i} + g = 0 \quad (i, j = 1, 2) \quad (2.16)$$

$$m_{ij,i} - q_j = 0 \quad (i, j = 1, 2) \quad (2.17)$$

2.1.3 Equação Diferencial de Placas

Diferenciando-se a equação (2.17) em relação à x_j e considerando a equação (2.16), obtém-se a equação diferencial de placas em função dos momentos:

$$m_{ij,ij} + g = 0 \quad (i, j = 1, 2) \quad (2.18)$$

Para a determinação da equação diferencial de placas em função dos deslocamentos transversais, parte-se das equações (2.14) e (2.17) obtendo a equação:

$$q_j = m_{ij,i} = -Dw_{,kkj} \quad (i, j, k = 1, 2) \quad (2.19)$$

Derivando-se esta última e considerando a equação (2.18), obtém-se:

$$w_{,kkll} = \frac{g}{D} \quad (k, l = 1, 2) \quad (2.20)$$

Na forma explícita a equação (2.20) é dada por:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = \frac{g}{D} \quad (2.21)$$

2.1.4 Força de Superfície

Seja uma superfície qualquer da placa. As forças de superfície em um determinado ponto p da mesma são dadas pelo esforço cortante Q_n e os momentos, M_1 e M_2 nas direções x_1 e x_2 , dados por:

$$Q_n(p) = q_i(p)n_i \quad (i = 1, 2) \quad (2.22)$$

$$M_i(p) = m_{ij}(p)n_j \quad (i, j = 1, 2) \quad (2.23)$$

sendo n_i ($i = 1, 2$), a direção normal à superfície.

No entanto, nos problemas com placas é usual escrever os momentos segundo as direções normal n e tangencial s ao contorno da placa. Para isso, seja a figura (2.7), onde tem-se a representação do plano médio de um elemento de placa onde o sistema ns é adotado. Fazendo a rotação de eixos, tem-se:

$$M_n = M_i n_i \quad (i = 1, 2) \quad (2.24)$$

$$M_{ns} = M_i s_i \quad (i = 1, 2) \quad (2.25)$$

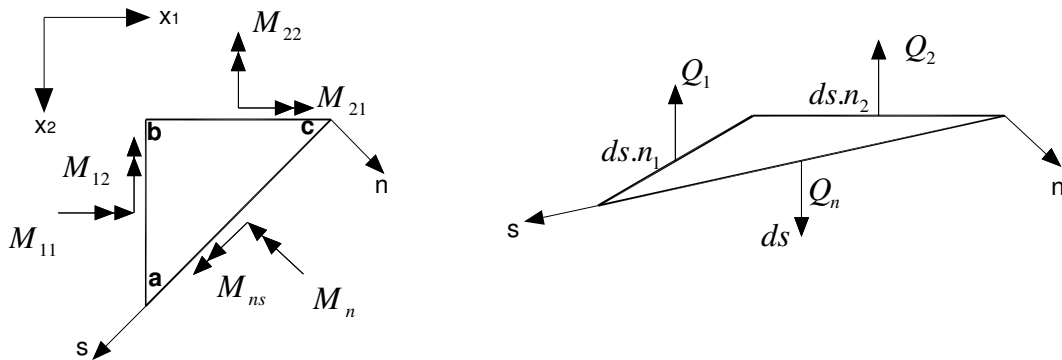


Figura 2.7 – Esforços no Elemento abc

2.1.5 Força Cortante Equivalente

Têm-se no contorno três ações: Q_n , M_n e M_{ns} , podendo-se definir três deslocamentos associados a essas ações, sendo eles o deslocamento transversal w e as rotações $\partial w / \partial n$ e $\partial w / \partial s$. Contudo, como a equação diferencial (2.20) é de quarta ordem, deve-se eliminar uma ação e um deslocamento. Como existe dependência entre as variáveis, este processo de eliminação se faz possível. De acordo com Mendonça (2002), Kirchhoff mostrou que em placas cuja deformação por cortante é desprezada, as condições de contorno relativas aos esforços Q_n e M_{ns} podem ser agrupadas em uma única condição chamada de cortante equivalente, isto é:

$$V_n = Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \quad (2.26)$$

2.1.6 Reação de Canto

Na dedução do esforço cortante equivalente fazem-se algumas substituições de forças no elemento infinitesimal de comprimento ds , que acarretam o aparecimento de forças concentradas nos cantos. Essas forças de valor M_{nsi}^+ ou M_{nsi}^- geram as reações de cantos. Os sinais, positivo e negativo, indicam o valor de M_{nsi} posterior e anterior ao canto i , respectivamente, como mostra a figura (2.8). A reação R_c em um canto i da placa é dada por:

$$R_{ci} = M_{nsi}^+ - M_{nsi}^- \quad (2.27)$$

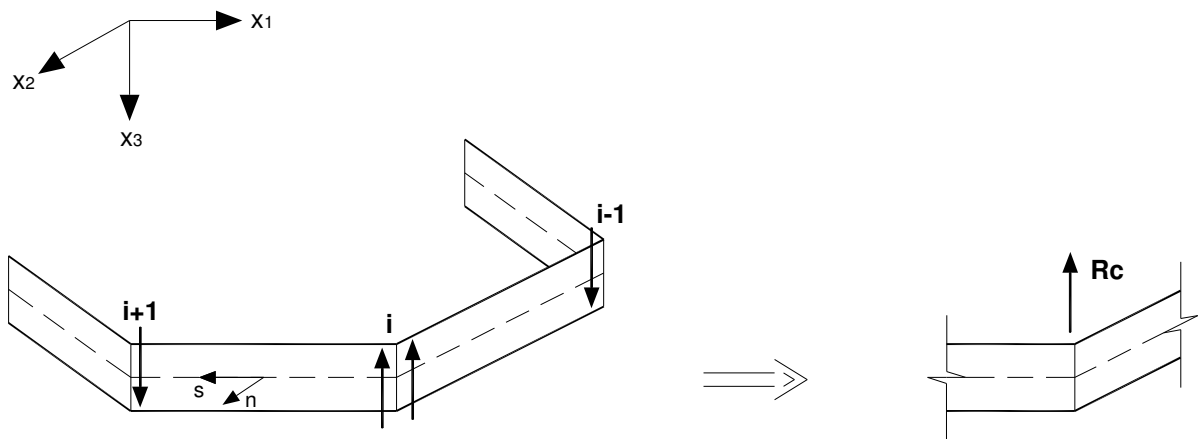


Figura 2.8 – Momentos Volventes em um Canto i da Placa

2.1.7 Condições de Contorno

Na Teoria Clássica de placas, tem-se para cada ponto do contorno da placa 4 (quatro) variáveis, sendo elas: o deslocamento vertical w , a rotação w_n , o esforço cortante V_n e o momento fletor M_s . As condições de contorno consistem em determinar quais dessas

variáveis nodais têm valores conhecidos deixando-se, assim, de serem incógnitas no problema.

Para uma placa simplesmente apoiada ao longo de uma borda, sem momento externo aplicado, os momentos fletores e os deslocamentos serão nulos ao longo de toda a borda. Ou seja: $w=0$ e $M_n=0$, e consequentemente as outras duas variáveis incógnitas.

Já para uma borda engastada, tem-se que além do deslocamento vertical, a rotação também será nula: $w=0$ e $\partial w/\partial n=0$.

E, finalmente, para uma borda livre, assume-se que ao longo dessa borda os momentos fletores e esforços cortantes serão conhecidos. No caso de não ter forças de superfícies aplicadas, seus valores são nulos, ou seja: $V_n=0$ e $M_n=0$.

2.2 Chapas Delgadas

O que diferencia a placa da membrana é que esta última é sujeita apenas a ações segundo as direções x_1 e x_2 , paralelas ao seu plano. Como as ações atuantes no contorno devem ser uniformemente distribuídas, pode-se admitir que as tensões σ_{33} , τ_{23} e τ_{13} sejam pequenas quando comparadas com as demais. Isso caracteriza um estado plano de tensão na chapa, e além disso, pode-se admitir que as componentes σ_{11} , τ_{12} e σ_{22} sejam função apenas de x_1 e x_2 . Logo:

$$u_1 = u_1(x_1, x_2) \quad (2.28)$$

$$u_2 = u_2(x_1, x_2) \quad (2.29)$$

2.2.1 Tensores de Deformação e Tensão

Os tensores de deformação e tensão apresentarão o índice $2D$ para indicar que são relativos à membrana. Considerando-se o caso de pequenas deformações e estado plano de tensão, eles são dados por:

$$\varepsilon_{ij}^{2D} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad i, j = 1, 2 \quad (2.30)$$

$$\sigma_{ij}^{2D} = \frac{E}{(1-\nu^2)} [\nu \varepsilon_{kk}^{2D} \delta_{ij} + (1-\nu) \varepsilon_{ij}^{2D}] \quad (i, j, k = 1, 2) \quad (2.31)$$

2.2.2 Esforços Normais

Para se obterem os esforços normais integram-se as tensões ao longo da espessura, ou seja:

$$N_{ij} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{ij}^{2D} . 1 . dx_3 = \frac{\bar{E}}{(1-\nu^2)} [\nu \varepsilon_{kk}^{2D} \delta_{ij} + (1-\nu) \varepsilon_{ij}^{2D}] \quad (2.32)$$

sendo $\bar{E} = tE$.

2.2.3 Forças de Superfície

As forças de superfície nas direções x_1 e x_2 em uma determinada superfície de normal n_j são definidas como:

$$p_i = N_{ij} n_j \quad (2.33)$$

No capítulo 3 será mostrada uma formulação de placas sujeitas à flexão composta, por isto, é conveniente escreverem-se as variáveis nas direções normal (n) e tangencial (s) ao contorno. Com isso, as forças de superfície e os deslocamentos no contorno da chapa são:

$$p_n = p_i n_i \quad (2.34.a)$$

$$p_s = p_i s_i \quad (2.35.a)$$

$$u_n = u_i n_i \quad (2.34.b)$$

$$u_s = u_i s_i \quad (2.35.b)$$

2.2.4 Equação Diferencial

Impondo as condições de equilíbrio em um elemento infinitesimal, representado pelo ponto p , de um sólido tridimensional elástico linear, obtém-se a seguinte equação diferencial:

$$\sigma_{ij,i}(p) + f_i(p) = 0 \quad (i, j = 1, 3) \quad (2.36)$$

onde $f_i(p)$ é o vetor das forças volumétricas.

Substituindo-se a equação (2.30) no tensor de tensões, para o caso geral, chegam-se às tensões expressas em função dos deslocamentos, que é dada por:

$$\sigma_{ij} = G[u_{i,j} + u_{j,i}] + \frac{2G\nu}{1-2\nu} u_{k,k} \delta_{ij} \quad (2.37)$$

Note que para estado plano de tensão deve-se substituir na equação (2.37) ν por $\nu' = \nu/(1+\nu)$.

Derivando-se a equação (2.37) em relação à j , e substituindo-a na equação diferencial (2.34), chega-se à equação diferencial do problema elástico em termos de deslocamentos:

$$u_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu} u_{j,ij} + \frac{f_i}{G} = 0 \quad (2.38)$$

A equação de equilíbrio do elemento infinitesimal em função dos esforços normais é obtida integrando-se a equação diferencial (2.36) ao longo da espessura:

$$N_{ij,j}(p) + b_i(p) = 0 \quad (2.39)$$

Para obter-se a expressão das forças normais em função dos deslocamentos, basta substituir o tensor de deformações na equação (2.32) dos esforços normais:

$$N_{ij} = \bar{G} [u_{i,j} + u_{j,i}] + \frac{2G\nu'}{1-2\nu'} u_{k,k} \delta_{ij} \quad (2.40)$$

sendo $\bar{G} = Gt$.

Derivando-se a equação (2.40) em relação à j e substituindo-a na (2.39), obtém-se a equação diferencial:

$$u_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu'} u_{j,ij} + \frac{b_i}{\bar{G}} = 0 \quad (2.41)$$

3. FORMULAÇÃO DO MEC PARA ANÁLISE DO PAVIMENTO DE EDIFÍCIO

Com a finalidade de representar um pavimento de um edifício sujeito à flexão, considerando-se a presença de esforços de membrana, neste capítulo é apresentada a formulação linear do MEC para flexão de placas compostas de sub-regiões de diferentes rigidezes e definidas em diferentes planos. Para isto, fez-se, como já mencionado no capítulo anterior, um acoplamento das teorias de chapa e placa delgada.

Inicialmente são mostradas as deduções das equações integrais para o problema de flexão simples de placas. Em seguida são mostradas as deduções das equações integrais para o problema de flexão composta, ou seja, considerando-se a presença de esforços de membrana.

É apresentada também uma outra formulação para o cálculo de pavimentos sujeitos à flexão composta, através do Método dos Elementos de Contorno. Essa formulação é obtida a partir das apresentadas nos dois primeiros itens, porém ao invés de serem consideradas variáveis ao longo de todo o contorno das vigas, consideram-se apenas nas linhas médias das mesmas, reduzindo-se assim o número de graus de liberdade.

3.1 Equações Integrais de Placas Sujeitas à Flexão Simples para Domínios Compostos

Neste item são mostradas as deduções das equações integrais para o problema de flexão de placas. A formulação destina-se à análise linear de um pavimento sujeito à flexão simples. São levados em consideração pavimentos compostos por lajes e vigas de diferentes rigidezes e espessuras, onde cada domínio é a representação de uma viga ou laje, estas representadas por domínios e intituladas por sub-regiões como mostrado na figura (3.1), onde os domínios Ω_1 , Ω_2 e Ω_3 representam as lajes 1 e 2 e a viga, respectivamente.

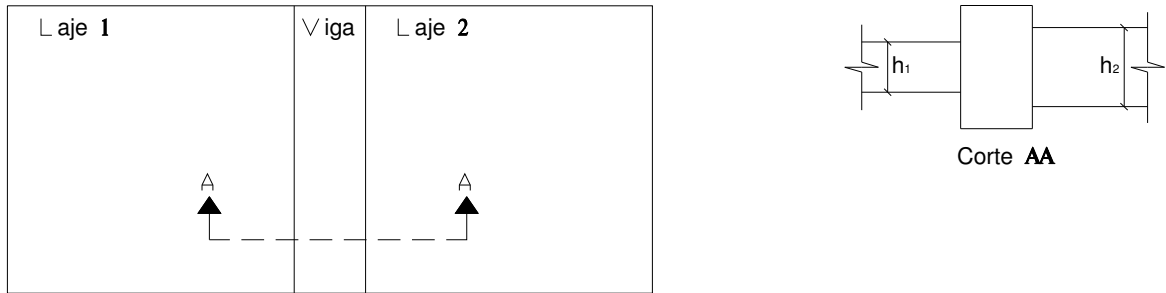


Figura 3.1 – Pavimento com 2 Lajes e 1 Viga

3.1.1 Equação Integral de Deslocamento

Neste trabalho, assim como em Chaves (1997), Oliveira Neto (1998), Bacarji (2001), Fernandes (2003), dentre vários outros, a solução do problema da placa com sub-regiões é obtida a partir do primeiro teorema de Betti (1872). Ele relaciona dois problemas distintos que podem existir em um domínio Ω . Neste caso, relacionará dois estados distintos de tensão e deformação existentes num sólido de domínio finito, causados por dois carregamentos não simultâneos. O estado (1) de tensões aplicadas σ_{ij}^1 dará origem a um conjunto de deformações ϵ_{ij}^1 , e o estado (2) de tensões aplicadas σ_{ij}^2 dará origem a um conjunto de deformações ϵ_{ij}^2 . Em uma sub-região qualquer da placa de volume V , o teorema é dado por:

$$\int_V \sigma_{ij}^1 \epsilon_{ij}^2 dv = \int_V \sigma_{ij}^2 \epsilon_{ij}^1 dv \quad (3.1)$$

Adota-se como estado 1 aquele relacionado ao problema fundamental e como estado 2 aquele relacionado ao problema real. Por razões de praticidade a equação (3.1) será escrita da seguinte forma:

$$\int_V \sigma_{ij}^* \epsilon_{ij} dv = \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^* dv \quad (3.2)$$

Sendo os termos em * relativos ao problema fundamental e os outros decorrentes do carregamento real da placa.

Utilizando os tensores de tensão e deformação escritos em função das curvaturas $w_{,ij}$, dados respectivamente pelas equações (2.11) e (2.12), substituindo-os na equação (3.2) e integrando-se ao longo da espessura, em uma sub-região de domínio Ω_s o teorema pode ser escrito da seguinte forma:

$$\int_{\Omega_s} w_{,ij}^{*(s)} m_{ij} d\Omega = \int_{\Omega_s} w_{,ij} m_{ij}^* d\Omega \quad (3.3)$$

Os estados de tensão e deformação relativos ao problema fundamental são provocados por uma carga transversal unitária g^* definida através da distribuição delta de Dirac (ver equações 3.4 e 3.5). Essa carga é aplicada em um ponto qualquer q , denominado ponto de carregamento ou ponto fonte, do domínio infinito, designado domínio fundamental. Ressalta-se que sendo essa carga aplicada em um ponto qualquer do domínio infinito a mesma pode ser aplicada no domínio finito, pois este último está contido no primeiro. O ponto p onde são calculados os deslocamentos e esforços provocados pelo carregamento é denominado ponto deslocamento ou ponto campo.

A função delta de Dirac é denotada por $\delta(q, p)$, e tem as seguintes propriedades:

$$g^* = \delta(q, p) = \begin{cases} 0 & \text{para } p \neq q \\ \infty & \text{para } p \equiv q \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\int_{\Omega_\infty} \phi(p) \delta(q, p) d\Omega_\infty = \phi(q) \quad (3.5)$$

onde ϕ é uma função contínua qualquer.

Das propriedades acima conclui-se que a resultante do carregamento definido por $\delta(q, p)$ sobre o domínio infinito é uma força unitária aplicada em q .

$$\int_{\Omega_\infty} \delta(q, p) d\Omega_\infty = 1 \quad (3.6)$$

O problema real é aquele relativo a uma ação g qualquer distribuída em uma área de domínio Ω_g , contida no domínio Ω da placa finita.

A fim de exemplificar, seja o caso particular da placa enrijecida com duas vigas definida na figura (3.2), onde Γ_1 , Γ_2 e Γ_3 são, respectivamente, os contornos externos das sub-regiões Ω_1 , Ω_2 e Ω_3 ; Γ_{jk} representa a interface entre as sub-regiões adjacentes Ω_j e Ω_k . A espessura de uma sub-região Ω_j é dada por t_j (ver figura 3.2). Como neste item são deduzidas as equações integrais da placa sujeita à flexão simples, esta é representada por sua superfície média (ver figura 3.2b).

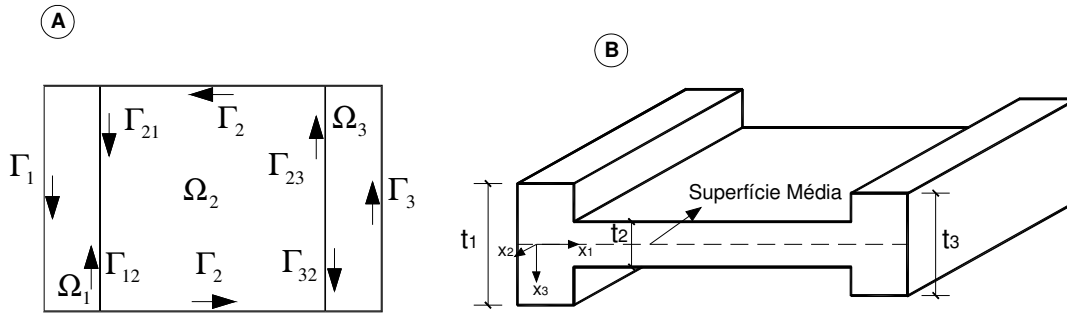


Figura 3.2 – Placa Enrijecida com Duas Vigas

As sub-regiões Ω_1 , Ω_2 e Ω_3 são de diferentes rigidezes, sendo assim, as expressões $w_{,ij}^{*(1)}$; $w_{,ij}^{*(2)}$ e $w_{,ij}^{*(3)}$ são escritas em função de $1/D_1$; $1/D_2$ e $1/D_3$ respectivamente. Contudo, a expressão de m_{ij}^* não muda nas sub-regiões, pois essa não é função da rigidez da sub-região.

De acordo com Fernandes (2003), é conveniente escrever a expressão de $w_{,ij}^{*(s)}$ em função de uma determinada curvatura fundamental, pois isso simplifica a formulação, além de possibilitar a eliminação das forças de superfície ao longo das interfaces, como será visto adiante. Escrevendo-se $w_{,ij}^{*(s)}$ em função da curvatura fundamental $w_{,ij}^*$ da sub-região onde está o ponto de colocação, tem-se:

$$w_{,ij}^{*(s)} = \frac{D}{D_s} w_{,ij}^* \quad (3.7)$$

onde D é a rigidez da placa onde se situa o ponto de colocação.

Para se obter a equação de uma placa em sub-regiões basta somar as equações integrais de cada sub-região. Portanto, para a placa da figura (3.2), de domínio $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3$, obtém-se a expressão:

$$\int_{\Omega} w_{,ij}^* m_{ij} d\Omega = \frac{D_1}{D} \int_{\Omega_1} w_{,ij} m_{ij}^* d\Omega + \frac{D_2}{D} \int_{\Omega_2} w_{,ij} m_{ij}^* d\Omega + \frac{D_3}{D} \int_{\Omega_3} w_{,ij} m_{ij}^* d\Omega \quad (3.8)$$

Para o caso em que se tenham N_s sub-regiões, pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} w_{,ij}^* m_{ij} d\Omega = \sum_{s=1}^{N_s} \frac{D_s}{D} \int_{\Omega_s} w_{,ij} m_{ij}^* d\Omega_s \quad (3.9)$$

A fim de simplificar a dedução da equação integral, considere o caso particular em que se tenham apenas duas sub-regiões. Assim, a equação (3.9) é escrita como:

$$\int_{\Omega} w_{,ij}^* m_{ij} d\Omega = \frac{D_1}{D} \int_{\Omega_1} w_{,ij} m_{ij}^* d\Omega_1 + \frac{D_2}{D} \int_{\Omega_2} w_{,ij} m_{ij}^* d\Omega_2 \quad (3.10)$$

Denominando o segundo membro da equação acima por U , tem-se:

$$U = \frac{D_1}{D} \int_{\Omega_1} w_{,ij} m_{ij}^* d\Omega_1 + \frac{D_2}{D} \int_{\Omega_2} w_{,ij} m_{ij}^* d\Omega_2 \quad (3.11)$$

Fazendo-se agora a integração por partes da equação (3.11) em relação à x_j , onde a integração por partes é dada por: $\int_{\Omega} u dv d\Omega = \int_{\Gamma} u v n_j d\Gamma - \int_{\Omega} v du d\Omega$, tem-se que:

$$U = \frac{D_1}{D} \int_{\Gamma_1 + \Gamma_{12}} w_{,i} n_j m_{ij}^* d\Gamma - \frac{D_1}{D} \int_{\Omega_1} w_{,i} m_{ij}^*{}_{,j} d\Omega_1 + \frac{D_2}{D} \int_{\Gamma_2 + \Gamma_{21}} w_{,i} n_j m_{ij}^* d\Gamma + \\ - \frac{D_2}{D} \int_{\Omega_2} w_{,i} m_{ij}^*{}_{,j} d\Omega_2 \quad (3.12)$$

Na interface que separa os dois sub-domínios, tem-se $\int_{\Gamma_{12}} d\Gamma = \int_{\Gamma_{21}} d\Gamma$, mas $\int_{\Gamma_{21}} w_{,i} n_j m_{ij}^* d\Gamma = - \int_{\Gamma_{12}} w_{,i} n_j m_{ij}^* d\Gamma$, pois a direção normal Γ_{12} tem sentido contrário à direção normal Γ_{21} . A integração sobre a interface é feita considerando-se o sentido do sub-domínio da laje. Portanto:

$$U = \sum_{s=1}^2 \frac{D_s}{D} \int_{\Gamma_s} w_{,i} n_j m_{ij}^* d\Gamma + \left(\frac{D_1 - D_2}{D} \right) \int_{\Gamma_{12}} w_{,i} n_j m_{ij}^* d\Gamma - \frac{D_1}{D} \int_{\Omega_1} w_{,i} m_{ij}^*{}_{,j} d\Omega_1 +$$

$$- \frac{D_2}{D} \int_{\Omega_2} w_{,i} m_{ij}^*{}_{,j} d\Omega_2 \quad (3.13)$$

Integrando-se novamente por partes em relação à x_i :

$$U = \sum_{s=1}^2 \frac{D_s}{D} \int_{\Gamma_s} w_{,i} n_j m_{ij}^* d\Gamma + \left(\frac{D_1 - D_2}{D} \right) \int_{\Gamma_{12}} w_{,i} n_j m_{ij}^* d\Gamma - \frac{D_1}{D} \int_{\Gamma_1 + \Gamma_{12}} w n_i m_{ij}^*{}_{,j} d\Gamma +$$

$$+ \frac{D_1}{D} \int_{\Omega_1} w m_{ij}^*{}_{,ij} d\Omega_1 - \frac{D_2}{D} \int_{\Gamma_2 + \Gamma_{21}} w n_i m_{ij}^*{}_{,j} d\Gamma + \frac{D_2}{D} \int_{\Omega_2} w m_{ij}^*{}_{,ij} d\Omega_2 \quad (3.14)$$

Admitindo-se que o ponto de colocação esteja no sub-domínio Ω_1 e considerando-se as equações (2.18), (3.4) e (3.5), chega-se a:

$$\frac{D_1}{D} \int_{\Omega_1} w m_{ij}^*{}_{,ij} d\Omega + \frac{D_2}{D} \int_{\Omega_2} w m_{ij}^*{}_{,ij} d\Omega = \frac{D_1}{D} \int_{\Omega_1} w m_{ij}^*{}_{,ij} d\Omega = -w(q) \quad (3.15)$$

Considerando as equações (2.17), (2.22), (2.23) e (3.15), a equação (3.14) se torna:

$$U = \sum_{s=1}^2 \frac{D_s}{D} \int_{\Gamma_s} w_{,i} M_i^* d\Gamma + \left(\frac{D_1 - D_2}{D} \right) \int_{\Gamma_{12}} w_{,i} M_i^* d\Gamma - \sum_{s=1}^2 \frac{D_s}{D} \int_{\Gamma} w Q_n^* d\Gamma +$$

$$- \frac{D_2 - D_1}{D} \int_{\Gamma_{12}} w Q_n^* d\Gamma - w(q) \quad (3.16)$$

Deve-se escrever a rotação $w_{,i}$ em função de suas componentes nas direções normal e tangencial ao contorno. Após isto, levando-se em consideração as equações (2.24), (2.25) e (2.26), pode-se escrever a equação (3.16) da seguinte forma:

$$U = \sum_{j=1}^2 \frac{D_j}{D} \int_{\Gamma_s} (w_{,n} M_n^* - w V_n^*) d\Gamma + \sum_{j=1}^2 \left(\frac{D_i - D_{pa}}{D} \right) \int_{\Gamma_1} (w_{,n} M_n^* - w V_n^*) d\Gamma - \sum_{j=1}^4 \frac{D_j}{D} w_{cj} R_{cj}^* + \sum_{j=1}^4 \frac{(D_j R_{cj}^* + D_{pa} R_{cpa}^*)}{D} w_{cj} - w(q) \quad (3.17)$$

sendo D_i a rigidez do sub-domínio que contém a interface Γ_i e D_{pa} a rigidez do sub-domínio adjacente. O primeiro somatório que envolve as variáveis de cantos é referente aos quatros cantos extremos da placa e o segundo aos cantos internos formados entre duas sub-regiões.

Trabalhando-se agora com o primeiro membro da equação (3.10), denotando-o por U' .

$$U' = \int_{\Omega} w_{,ij}^* m_{ij} d\Omega \quad (3.18)$$

Integrando-se a equação (3.18) por parte em relação à x_j e considerando-se a equação (2.23), obtém-se:

$$U' = \int_{\Gamma_1 + \Gamma_{12}} w_{,i}^* M_i d\Gamma + \int_{\Gamma_2 + \Gamma_{21}} w_{,i}^* M_i d\Gamma - \int_{\Omega_1} w_{,i}^* m_{ij,j} d\Omega_1 - \int_{\Omega_2} w_{,i}^* m_{ij,j} d\Omega_2 \quad (3.19)$$

Fazendo o equilíbrio de forças de superfície nas interfaces, as integrais sobre as interfaces se anulam. Utilizando o procedimento similar ao que foi feito para U , chega-se à:

$$U' = \int_{\Gamma} \left(V_n w^* - M_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^8 R_{ci} w_{ci}^* + \int_{\Omega_g} (g w^*) d\Omega_g \quad (3.20)$$

Igualando-se as equações de U e de U' , e considerando-se um caso genérico em que se tenham N_s sub-regiões, tem-se a seguinte equação de deslocamento transversal de um ponto q do domínio da placa enrijecida com vigas:

$$\begin{aligned}
 w(q) = & \sum_{j=1}^{N_s} \int_{\Gamma} \frac{D_j}{D} (w_{,n}(P) M_n^*(q, P) - w(P) V_n^*(q, P)) d\Gamma + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_s} \int_{\Gamma_j} \left(\frac{D_j - D_{pa}}{D} \right) (w_{,n}(P) M_n^*(q, P) - w(P) V_n^*(q, P)) d\Gamma - \sum_{i=1}^{N_{c3}} \frac{D_i}{D} R_{ci}^*(q, P) w_{ci}(P) + \\
 & - \sum_{i=1}^{N_{c2} + N_{c1}} \left[\frac{D_j}{D} R_c^*(q, P)_{\Omega_i} + \frac{D_{pa}}{D} R_c^*(q, P)_{\Omega_{pa}} \right] w_{ci}(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(q, P) + \\
 & + \int_{\Gamma} \left(V_n(P) w^*(q, P) - M_{nn}(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) d\Gamma + \int_{\Omega_g} (g(p) w^*(q, P)) d\Omega_g \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

onde Γ é o contorno externo da placa, Ω_g é a região em que atua a ação transversal g ; Γ_j é a interface pertencente ao domínio Ω_j , que divide duas sub-regiões e que indica o sentido em que se faz a integração; D_j é a rigidez referente ao domínio Ω_j ; D_{pa} a rigidez do domínio adjacente à Ω_j ; c_1 , c_2 e c_3 são os tipos de cantos definidos na figura (3.3) e o ponto " P " indica um ponto " p " posicionado sobre o contorno ou uma interface.

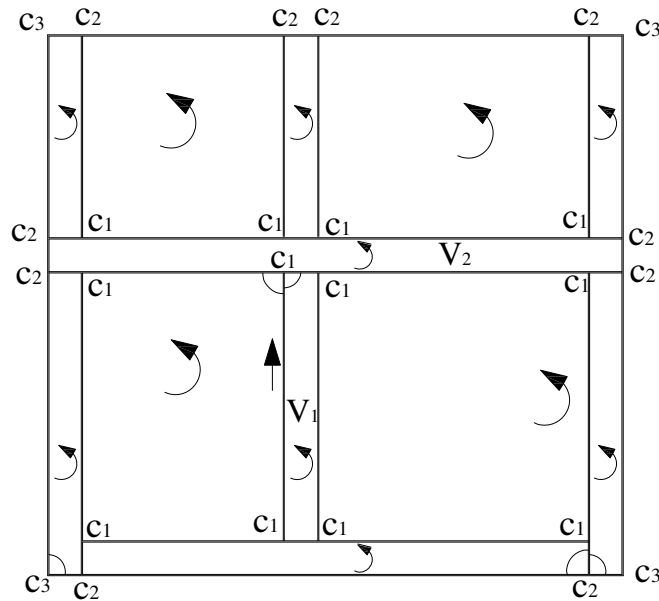


Figura 3.3 – Tipos de Cantos na Placa com Sub-regiões

Na figura (3.3), o canto c_3 envolve apenas uma sub-região e é definido apenas nos quatro cantos extremos da placa enrijecida; o canto c_2 é definido sobre o contorno externo entre duas sub-regiões e o canto c_1 é definido no interior da placa, entre três sub-regiões. Para c_1 , D_{pa} refere-se à viga que é interrompida. Portanto, no encontro das vigas V_1 com V_2 , $D_{pa} = D_{v_1}$.

3.1.2 Solução Fundamental de Placas

Para a obtenção da solução fundamental da placa é utilizada uma placa circular de raio infinito e cujo centro é o ponto q no qual tem-se uma força unitária aplicada. De acordo com Carmo (2001), essa é a maneira clássica de se obter a solução fundamental de placas. Para o caso de representar respostas devido a forças pontuais o sistema de coordenadas cilíndricas é o mais conveniente. Assim, um ponto campo p de coordenadas (x_1, x_2) pode ser definido em função de r e θ , que são a distância do ponto q ao p e o ângulo entre o segmento $\overline{qp}$ e o eixo x_1 como mostra a figura (3.4).

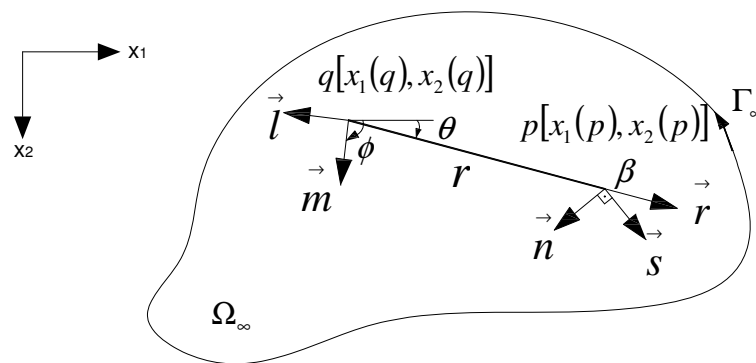


Figura 3.4 – Sistema de Coordenadas Cilíndricas

$$\text{onde } r = \sqrt{[x_1(p) - x_1(q)]^2 + [x_2(p) - x_2(q)]^2} \quad (3.22)$$

A equação diferencial de placas em coordenadas cilíndricas é dada por:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{g}{D} \quad (3.23)$$

Como mencionado no capítulo 2, em problemas de placas é usual escrever os momentos segundo as direções n e s , sendo n a direção normal ao contorno e s a direção tangencial ao contorno (ver equações 2.24, 2.25 e 2.26). Essas ações M_n , M_{ns} e V_n em função de w expresso em coordenadas cilíndricas são dadas por:

$$M_n = -D \left\{ \frac{d^2 w}{dr^2} [\nu + (1-\nu)(r_{,i} n_i)^2] + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} [\nu + (1-\nu)(r_{,i} s_i)^2] \right\} \quad (3.24)$$

$$M_{ns} = -D(1-\nu)(r_{,i} n_i)(r_{,i} s_i) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \quad (3.25)$$

$$V_n = -D(1-\nu)(n_i r_{,i}) \left\{ \left[(s_j r_{,j})^2 + \frac{1}{1-\nu} \right] \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) + \frac{1-4(s_j r_{,j})^2}{r} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right\} + \frac{D(1-\nu)}{R} [1 - 2(s_i r_{,i})^2] \left(\frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \quad (3.26)$$

Como referido anteriormente, a solução fundamental é obtida a partir da solução de uma placa circular de raio infinito. O deslocamento w^* de um ponto p na vizinhança de q é obtido substituindo-se na equação diferencial de placas em coordenadas cilíndricas a ação g pela função delta de Dirac. Assim a equação diferencial é nula para todos os pontos do domínio fundamental, com exceção do ponto q . A expressão de w^* deve satisfazer a seguinte relação de equilíbrio:

$$\frac{d^4 w^*}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w^*}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w^*}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw^*}{dr} = 0 \quad (3.27)$$

Fazendo as integrações, impondo as condições de simetria e adotando sugestões feitas por Danson (1979) e adotadas por Fernandes (2003), chega-se à:

$$w^*(q, p) = \frac{1}{8\pi D} r^2 \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) \quad (3.28)$$

Para obter a solução da equação (3.21), relativa ao deslocamento transversal do ponto q , deve-se ainda conhecer as expressões das ações fundamentais M_n^* , M_{ns}^* e V_n^* , e da derivada direcional do deslocamento transversal fundamental $w_{,n}^*$ para o ponto p . Derivando-se a equação (3.28) e substituindo as derivadas necessárias nas equações (3.24) à (3.26) chega-se à:

$$M_n^*(q, p) = -\frac{1}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln r + (1-\nu)(r_{,i} n_i)^2 + \nu \right] \quad (3.29)$$

$$M_{ns}^*(q, p) = -\frac{1}{4\pi} (1-\nu)(r_{,i} n_i)(r_{,j} s_j) \quad (3.30)$$

$$V_n^*(q, p) = -\frac{r_{,i} n_i}{4\pi} \left[2(1-\nu)(r_{,j} s_j)^2 - 3 + \nu \right] + \frac{1-\nu}{4\pi R} \left[1 - 2(r_{,i} s_i)^2 \right] \quad (3.31)$$

3.1.3 Equação Integral do Deslocamento para um Ponto do Contorno Externo ou Coincidente com um Canto

Se o ponto de colocação pertence ao contorno externo ou coincide com um canto da placa, fica impossível a aplicação da equação (3.21) devido o surgimento de singularidades. Nesse trabalho não é mostrada a dedução da equação integral para pontos sobre a interface porque na montagem do sistema de equações não são considerados pontos de colocação sobre a interface. Contudo, em Fernandes (2003) tem-se a dedução do termo livre para esses pontos. Para eliminar a singularidade da equação integral, deve-se então acrescentar um contorno circular Γ_ξ de raio infinitesimal e centro em Q , que é a designação do ponto q no contorno externo, a fim de torná-lo um ponto de domínio. Após acrescentar o contorno circular deve-se ainda retirar o contorno $\bar{\Gamma}$, que contém a singularidade, resultando em um novo contorno: $\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\xi$, como representado na figura (3.5).

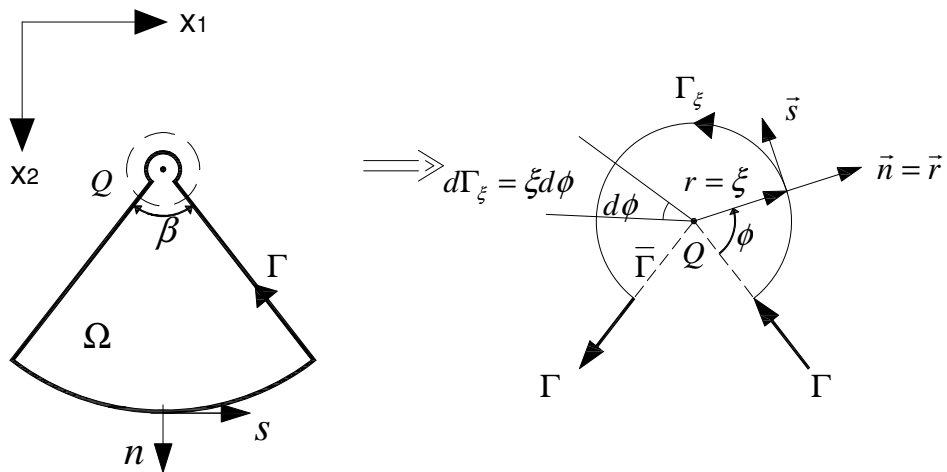


Figura 3.5 – Contorno Circular Acrescido a um ponto S de um Canto da Placa

Da figura (3.5), pode-se definir as seguintes relações:

$$r = \xi \quad (3.32)$$

$$r_{,i} n_i = 1 \quad (3.33)$$

$$r_{,i} s_i = 0 \quad (3.34)$$

$$d\Gamma_\xi(P) = \xi d\phi \quad (3.35)$$

Fazendo-se os limites do raio ξ e do contorno $\bar{\Gamma}$ tenderem a zero, a equação integral relativa a um ponto Q situado sobre o contorno é dada por:

$$\begin{aligned}
K(Q)w(Q) &= \sum_{j=1}^{N_s} \int_{\Gamma} \frac{D_j}{D} (w_{,n}(P)M_n^*(Q, P) - w(P)V_n^*(Q, P)) + \\
&+ \sum_{j=1}^{N_s} \int_{\Gamma_j} \left(\frac{D_j - D_{pa}}{D} \right) (w_{,n}(P)M_n^*(Q, P) - w(P)V_n^*(Q, P)) d\Gamma - \sum_{i=1}^{N_{c3}} \frac{D_i}{D} R_{ci}^*(Q, P) w_{ci}(P) + \\
&- \sum_{i=1}^{N_{c2}+N_{c1}} \frac{(D_j - D_{pa})}{D} R_c^*(Q, P)_{\Omega_i} w_{ci}(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(Q, P) + \\
&+ \int_{\Gamma} \left(V_n(P)w^*(Q, P) - M_{nn}(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) d\Gamma + \int_{\Omega_g} (g(p)w^*(Q, p)) d\Omega_g \quad (3.36)
\end{aligned}$$

onde a constante $K(Q)$ é função da posição do ponto de colocação Q e será determinada nos itens a seguir.

Inicialmente, é feita a eliminação da singularidade para um ponto do contorno externo coincidente com um canto do tipo c_3 (ver figura 3.5). Sua equação integral é dada por:

$$\begin{aligned}
&w(Q) + \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left(V_n^*(Q, P)w(P) - M_{nn}^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \\
&+ \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} \left(V_n^*(Q, P)w(P) - M_{nn}^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma_{\xi}(P) + \lim_{\xi \rightarrow 0} [R_{c\lambda^-}^*(Q, P)w_{c\lambda^-}(P)] + \\
&+ \lim_{\xi \rightarrow 0} [R_{c\lambda^+}^*(Q, P)w_{c\lambda^+}(P)] + \sum_{j=1}^{N_s-1} \int_{\Gamma} \frac{D_j}{D} (w(P)V_n^*(Q, P) - w_{,n}(P)M_n^*(Q, P)) d\Gamma + \\
&+ \sum_{j=1}^{N_{int}} \int_{\Gamma_j} \left(\frac{D_j - D_{pa}}{D} \right) (w(P)V_n^*(Q, P) - w_{,n}(P)M_n^*(Q, P)) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_{c3}-1} \frac{D_i}{D} R_{ci}^*(Q, P)w_{ci}(P) + \\
&+ \sum_{i=1}^{N_{c2}+N_{c1}} \frac{(D_j - D_{pa})}{D} R_c^*(Q, P)_{\Omega_i} w_{ci}(P) = \\
&= \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left(V_n(P)w^*(Q, P) - M_{nn}(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) d\Gamma(P) + \lim_{\xi \rightarrow 0} [R_{c\lambda^+}(P)w_{c\lambda^+}^*(Q, P)] + \\
&+ \sum_{i=1}^{N_c-1} R_{ci}(P)w_{ci}^*(Q, P) + \lim_{\xi \rightarrow 0} [R_{c\lambda^-}(Q, P)w_{c\lambda^-}^*(P)] +
\end{aligned}$$

$$+ \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left(V_n(P) w^*(Q, P) - M_{nn}(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) d\Gamma_\xi(P) + \int_{\Omega_g} (g(P) w^*(Q, P)) d\Omega_g \quad (3.37)$$

Na equação (3.37), para os limites onde $\bar{\Gamma} \rightarrow 0$, obtém-se valores finitos analiticamente:

$$\begin{aligned} \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left(V_n(P) w^*(Q, P) - M_{nn}(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) d\Gamma(P) = \\ = \int_{\Gamma} \left(V_n(P) w^*(Q, P) - M_{nn}(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) d\Gamma(P) \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left(V_n^*(Q, P) w(P) - M_{nn}^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) = \\ = \int_{\Gamma} \left(V_n^*(Q, P) w(P) - M_{nn}^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Para os limites $\xi \rightarrow 0$, a integral sobre o trecho singular Γ_ξ apresenta singularidade do tipo $1/r$ para V_n^* e do tipo $\ln r$, relativa à expressão M_{nn}^* . A singularidade relativa ao esforço fundamental M_{nn}^* se anula quando se faz o limite $\xi \rightarrow 0$. Para eliminar a singularidade do esforço fundamental V_n^* , soma-se e subtrai-se o deslocamento $w(Q)$, ou seja, $(w(P) + w(Q) - w(Q))$. Após isto, assim como em Fernandes (2003), utiliza-se a condição de Hölder (JASWON, MAITI & SYMM, 1967), dada por:

$$|w(P) - w(Q)| \leq C_1 r^{\alpha_i(P, Q)} \quad (3.40)$$

sendo C_1 uma constante e $0 < \alpha_i \leq 1$, com $i = 1, 2$, a parcela $(w(P) - w(Q))$ se anula. Além disso, o valor de $w(Q)$ é um valor do domínio e não varia ao longo do contorno Γ_ξ . Assim, tem-se:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left(V_n^*(Q, P) w(P) - M_{nn}^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma_\xi(P) = w(Q) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} V_n^*(Q, P) d\Gamma_\xi(P) \quad (3.41)$$

Considerando as equações de (3.31) à (3.35), obtém-se, através da equação (3.41), o termo livre:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} V_n^*(Q, P) w(P) d\Gamma_\xi(P) = w(Q) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^{2\pi-\beta} -\frac{1}{2\pi\xi} \xi d\phi = -\frac{2\pi-\beta}{2\pi} w(Q) \quad (3.42)$$

De maneira análoga, conclui-se que a integral da equação (3.37) sobre o contorno Γ_ξ é nula. Considerando a equação (3.28) e (3.32), quando $\xi \rightarrow 0$ a expressão w^* se anula. Assim, a equação (3.37), para um canto do tipo c_3 , tem a constante $K(Q)$ dada por:

$$K(Q) = \frac{\beta}{2\pi} \quad (3.43)$$

No caso de Q não coincidir com um canto, $\beta = \pi$, portanto tem-se que:

$$K(Q) = \frac{1}{2} \quad (3.44)$$

Para um canto do tipo c_2 , considera-se que $D = D_1$. Resolvem-se as integrais sobre os contornos circulares (ver figura 3.6).

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{D_1}{D} \int_{\Gamma_{1\xi}} \left(V_n^*(Q, P) w(P) - M_{nn}^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma_\xi(P) = \\ = \int_0^{2\pi-\beta_2} -\frac{1}{2\pi} w(P) d\phi = \left(\frac{\beta_2}{2\pi} - 1 \right) w(Q) \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{D_2}{D} \int_{\Gamma_{1\xi}} \left(V_n^*(Q, P) w(P) - M_{nn}^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma_\xi(P) = \\ = \frac{D_2}{D} \int_0^\gamma \frac{1}{2\pi} w(P) d\phi = \frac{D_2}{D} \left(\frac{\gamma}{2\pi} \right) w(Q) \end{aligned} \quad (3.46)$$

onde β_2 é o ângulo formado no subdomínio Ω_1 e γ o ângulo formado no subdomínio Ω_2 .

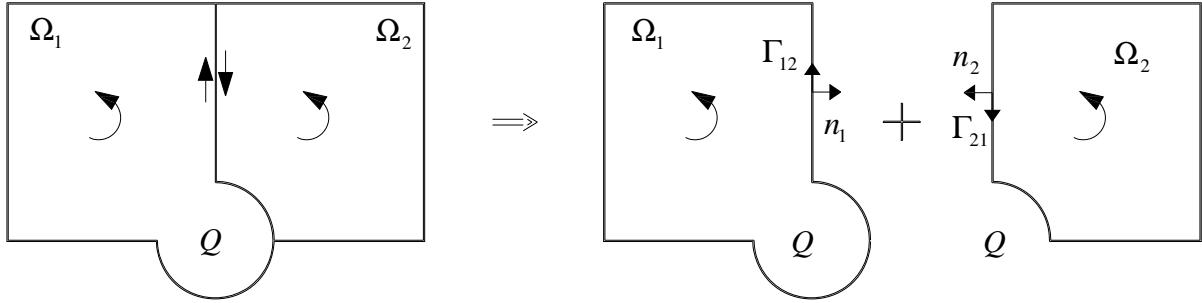


Figura 3.6 – Q Coincidente com um Canto do tipo c_2

Considerando-se as equações (3.45) e (3.46), a constante $K(Q)$ resulta em:

$$K(Q) = 1 - 1 + \frac{\beta_2}{2\pi} + \frac{D_2}{D} \frac{\gamma}{2\pi} = \frac{\beta_2}{2\pi} + \frac{D_2}{D} \frac{\gamma}{2\pi} \quad (3.47)$$

Admitindo-se que $D = D_2$, de maneira análoga chega-se em:

$$K(Q) = 1 - 1 + \frac{D_1}{D} \frac{\beta_2}{2\pi} + \frac{\gamma}{2\pi} = \frac{D_1}{D} \frac{\beta_2}{2\pi} + \frac{\gamma}{2\pi} \quad (3.48)$$

A partir das equações (3.47) e (3.48) chega-se em:

$$K(Q) = \frac{D_{pa}}{D} \frac{\gamma}{2\pi} + \frac{\beta}{2\pi} \quad (3.49)$$

sendo β o ângulo formado no subdomínio de rigidez D e γ no subdomínio adjacente.

Para um canto do tipo c_1 , admitindo-se $D = D_1$, encontra-se a constante $K(Q)$ fazendo-se as integrais sobre os contornos circulares indicados na figura (3.7).

$$\begin{aligned}
\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{D_1}{D} \int_{\Gamma_{1\xi}} \left(V_n^*(Q, P) w(P) - M_{nn}^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma_\xi(P) = \\
= \int_0^{2\pi-\beta} -\frac{1}{2\pi} w(P) d\phi = \left(\frac{\beta}{2\pi} - 1 \right) w(Q)
\end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{D_2}{D} \int_{\Gamma_{1\xi}} \left(V_n^*(Q, P) w(P) - M_{nn}^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma_\xi(P) = \\
= \frac{D_2}{D} \int_0^\pi \frac{1}{2\pi} w(P) d\phi = \frac{D_2}{D} \frac{1}{2} w(Q)
\end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{D_3}{D} \int_{\Gamma_{3\xi}} \left(V_n^*(Q, P) w(P) - M_{nn}^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma_\xi(P) = \\
= \frac{D_3}{D} \int_0^\gamma \frac{1}{2\pi} w(P) d\phi = \frac{D_3}{D} \left(\frac{\gamma}{2\pi} \right) w(Q)
\end{aligned} \quad (3.52)$$

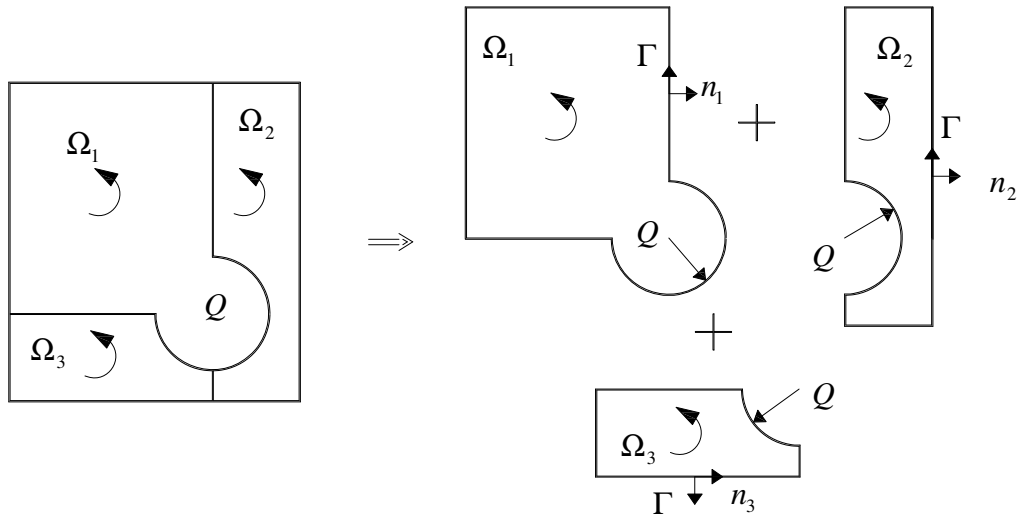


Figura 3.7 – O Ponto Q Coincide com um Canto do tipo c_1

Considerando-se as equações (3.50), (3.51) e (3.52), a constante $K(Q)$ resulta em:

$$K(Q) = \frac{\beta}{2\pi} + \frac{1}{2} \frac{D_2}{D} + \frac{D_3}{D} \left(\frac{\gamma}{2\pi} \right) \quad (3.53)$$

Na tabela abaixo encontram-se os valores de $K(Q)$ para os diferentes casos.

Tabela 3.1 – Valores de $K(Q)$

VALOR DE $K(Q)$	POSIÇÃO DE Q
$K(Q) = 0,5$	Q no contorno externo
$K(Q) = \left(\frac{\beta}{2\pi}\right) + 0,5 \frac{D_2}{D} + \frac{D_3}{D} \left(\frac{\gamma}{2\pi}\right)$	Q do tipo c_1 (fig. 3.3), para $D(Q) = D = D_{laje}$, β é definido na laje e γ na viga (interrompida) de rigidez D_3 .
$K(Q) = \frac{\beta}{2\pi} + \frac{D_{pa}}{D_j} \left(\frac{\gamma}{2\pi}\right)$	Q do tipo c_2 (fig. 3.3), para $D(Q) = D_j$ (D_j e D_{pa} são respectivamente, as rigidezes da placa onde se definem β e γ)
$K(Q) = \beta/2\pi$	Q do tipo c_1 (fig. 3.3)

3.1.4 Equação Integral da Rotação para um Ponto do Domínio

No modelo apresentado neste item, para cada ponto sobre o contorno externo ou sobre a interface têm-se duas incógnitas, sendo assim, são necessárias duas equações nesses pontos para a resolução do sistema. No trabalho de Fernandes (2003) são apresentados exemplos numéricos desse modelo, onde para cada ponto de colocação Q situado sobre a interface escreve-se uma equação de $w(Q)$ e uma da rotação $w_n(Q)$. Portanto, nesse caso deve-se fazer o estudo para eliminar as singularidades que surgem nas equações de $w(Q)$ e de $w_n(Q)$ quando o ponto Q pertence ao elemento que está sendo integrado.

Neste trabalho não é considerado o modelo desenvolvido onde as variáveis são definidas nas interfaces. A implementação dos pilares é feita apenas no segundo modelo desenvolvido em Fernandes (2003), onde as variáveis são definidas nos eixos das vigas. Neste caso, os pontos de colocação se situam nos eixos e não mais sobre as interfaces, não tendo, portanto, nenhum problema de singularidade, já que a integração numérica é feita sobre as interfaces. Assim, é apresentada a seguir apenas a equação de $w_m(q)$, sendo m uma direção qualquer definida no ponto q do domínio da placa. A equação de $w_m(Q)$ de um ponto sobre uma interface pode ser verificada no trabalho de Fernandes (2003).

Segundo Paiva (1987), a equação integral da derivada do deslocamento para pontos do domínio pode ser obtida derivando-se a equação (3.21) do deslocamento w em relação a m , ou seja:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial w(q)}{\partial m} + \sum_{s=1}^{N_s} \int_{\Gamma} \frac{D_s}{D} (w(P) \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(q, P) - w_{,n}(P) \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(q, P)) + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{int}} \int_{\Gamma_j} \left(\frac{D_j - D_{pa}}{D} \right) (w(P) \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(q, P) - w_{,n}(P) \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(q, P)) d\Gamma + \\
& \sum_{i=1}^{N_{c3}} \frac{D_i}{D} \left(\frac{\partial M_{ns}^{*+}}{\partial m}(q, P) - \frac{\partial M_{ns}^{*-}}{\partial m}(q, P) \right) w_{ci}(P) + \sum_{i=1}^{N_{s2} + N_{c1}} \frac{(D_j - D_{pa})}{D} \left(\frac{\partial M_{ns}^{*+}}{\partial m}(q, P) + \right. \\
& \left. - \frac{\partial M_{ns}^{*-}}{\partial m}(q, P) \right) w_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left(V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, P) - M_{nn}(P) \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n} \right) (q, P) \right) d\Gamma + \\
& + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial m}(q, P) + \int_{\Omega_g} \left(g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, P) \right) d\Omega_g
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Onde as expressões fundamentais são dadas por:

$$\frac{\partial w^*}{\partial m} = -\frac{r}{4\pi D} \ln r(r, m_i) \tag{3.55}$$

$$\frac{\partial w_{,n}^*}{\partial m} = -\frac{1}{4\pi D} (r_{,i} n_i r_{,i} n_j m_j + m_i n_i \ln r) \tag{3.56}$$

$$\frac{\partial M_n^*}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r} \{ (1+\nu)(r_{,i} m_i) + 2(1-\nu)(r_{,i} n_i) [(m_j n_j) - (r_{,j} m_j)(r_{,k} n_k)] \} \tag{3.57}$$

$$\frac{\partial M_{ns}^*}{\partial m} = \frac{1-\nu}{4\pi r} \{ (m_i n_i)(r_{,j} n_j) + (m_i s_i)(r_{,j} n_j) - 2(r_{,i} m_i)(r_{,j} n_j)(r_{,k} s_k) \} \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_n^*}{\partial m} = & \frac{1}{4\pi r^2} \{ 2(1-\nu)(r_{,i} s_i) [4(r_{,j} s_j)(r_{,k} m_k)(r_{,l} n_l) - 2(m_j s_j)(r_{,k} n_k) + \\
& - (m_j n_j)(r_{,k} s_k)] + (3-\nu) [(m_i n_i) - 2(r_{,i} m_i)(r_{,j} n_j)] \}
\end{aligned} \tag{3.59}$$

3.1.5 Equação Integral do Deslocamento para um Ponto Externo

Como será visto adiante para completar o número de equações necessárias à solução do problema, são escritas equações de w em pontos de colocação externos, denotados por A . Ao escrever a equação do deslocamento transversal para um ponto externo o seu primeiro termo será nulo, devido as propriedades da função delta de Dirac que foram descritas no item 3.1.1. Assim, a equação integral do deslocamento para um ponto externo é dada por:

$$\begin{aligned}
 0 = & \sum_{j=1}^{N_s} \int_{\Gamma} \frac{D_j}{D} (w_{,n}(P) M_n^*(q, P) - w(P) V_n^*(q, P)) + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_s} \int_{\Gamma_j} \left(\frac{D_j - D_{pa}}{D} \right) (w_{,n}(P) M_n^*(q, P) - w(P) V_n^*(q, P)) d\Gamma - \sum_{i=1}^{N_{c3}} \frac{D_i}{D} R_{ci}^*(q, P) w_{ci}(P) + \\
 & - \sum_{i=1}^{N_{s2} + N_{c1}} \left[\frac{D_j}{D} R_c^*(q, P)_{\Omega_i} + \frac{D_{pa}}{D} R_c^*(q, P)_{\Omega_{pa}} \right] w_{ci}(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(q, P) + \\
 & + \int_{\Gamma} \left(V_n(P) w^*(q, P) - M_{nn}(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) d\Gamma + \int_{\Omega_g} (g(p) w^*(q, P)) d\Omega_g \quad (3.60)
 \end{aligned}$$

3.2 Equações Integrais de Placas Sujeitas à Flexão Composta para Domínios Compostos

3.2.1 Relações Básicas

Na flexão simples, cada sub-região é representada pela superfície média, já no caso da flexão composta, ou seja, considerando também o efeito de membrana, cada sub-região é representada pela superfície de referência do pavimento, como mostra a figura (3.8).

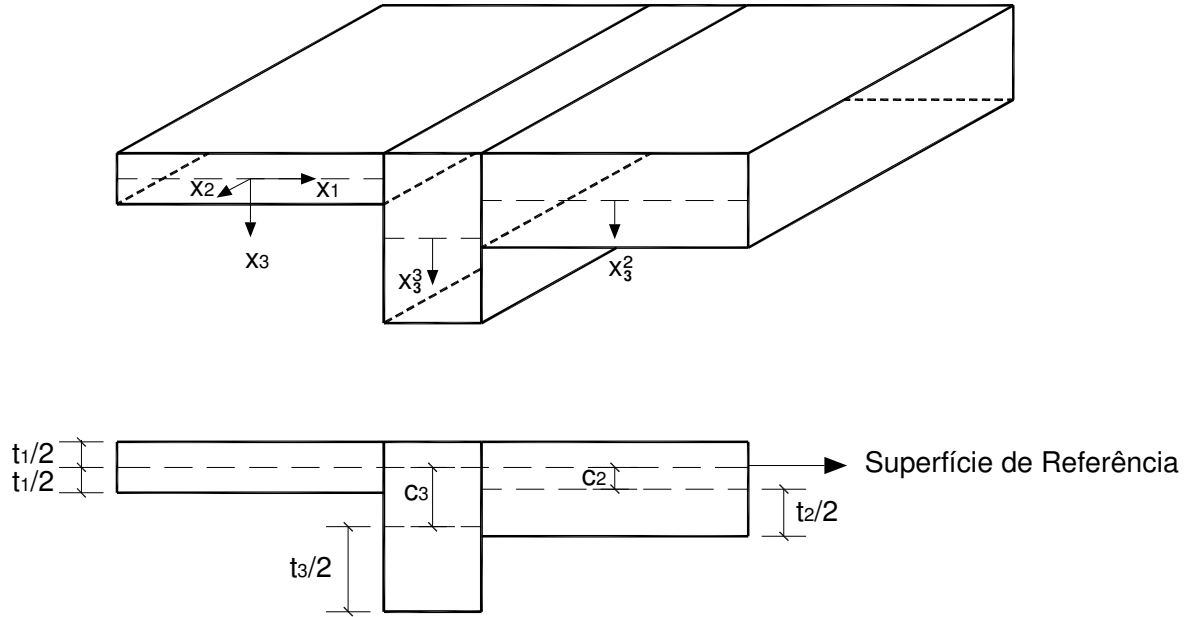


Figura 3.8 – Placa Subdividida em Sub-regiões

onde t_1 , t_2 e t_3 são, respectivamente, as espessuras das sub-regiões Ω_1 , Ω_2 e Ω_3 ; c_2 e c_3 representam a excentricidade da superfície média em questão em relação à superfície de referência, ou seja, nesse caso: $c_2 = t_2/2 - t_1/2$ e $c_3 = t_3/2 - t_1/2$; x_3^2 e x_3^3 são os eixos na direção x_3 tendo como referência as superfícies médias das sub-regiões Ω_2 e Ω_3 e são dados por: $x_3^2 = x_3 - c_2$ e $x_3^3 = x_3 - c_3$.

De acordo com Fernandes (2003), para se obterem os tensores de deformação e de tensão na placa, sujeita à flexão composta, somam-se os problemas de placa e chapa. Desse modo, o tensor de deformações é dado pela expressão:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{2D} + \varepsilon_{ij}^F \quad (3.61)$$

onde as parcelas do problema de chapa é representado pelo índice $2D$ e o problema de flexão simples F .

Da mesma forma o tensor de tensão é dado por:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{2D} + \sigma_{ij}^F \quad (3.62)$$

3.2.2 Equações Integrais de Deslocamento no Domínio

Assim como descrito no item (3.1), as equações integrais podem ser obtidas a partir do primeiro teorema de Betti (1872). Para uma sub-região s qualquer tem-se:

$$\int_{V_s} \sigma_{ij}^{*(s)} \varepsilon_{ij} dV_s = \int_{V_s} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{*(s)} dV_s \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.63)$$

O problema fundamental também pode ser dividido em duas parcelas: de flexão simples e de membrana, como foi feito com o problema real (ver equações 3.61 e 3.62). Assim, acoplando as teorias de chapa e placa delgada, integrando-se a equação (3.63) ao longo da espessura e tratando os problemas de flexão simples e membrana separadamente, chega-se às seguintes equações relativas aos problemas de membrana e flexão simples, respectivamente:

$$\int_{\Omega_s} \varepsilon_{kij}^{*2D(s)} N_{ij} d\Omega_s = \int_{\Omega_s} \varepsilon_{ij}^{2D} N_{kij}^{*(s)} d\Omega_s \quad (3.64)$$

$$\int_{\Omega_s} w_{,ij}^{*(s)} m_{ij} d\Omega_s = \int_{\Omega_s} w_{,ij} m_{ij}^{*(s)} d\Omega_s \quad (3.65)$$

onde k é a direção da força fundamental relativa à chapa e $\varepsilon_{kij}^{*2D(s)}$ é função de $\bar{E}_s$.

As expressões (3.64) e (3.65) se referem aos problemas de chapa e de flexão simples no caso em que os deslocamentos e forças de membrana são calculados na superfície média de Ω_s . Porém, tais deslocamentos e forças devem ser relativos à superfície de referência, pois é onde se faz a compatibilização de deslocamentos e equilíbrio de forças. Com isto, a transferência do ponto de aplicação da carga N_{ij} traz como consequência um acréscimo de deformações ao problema bidimensional e um acréscimo de momentos ao problema de flexão simples. Dados por:

$$\varepsilon_{ij(s)}^{2D} = \varepsilon_{ij}^{2D} - c_s w_{,ij} \quad (3.66)$$

$$m_{ij(s)} = m_{ij} - c_s N_{ij} \quad (3.67)$$

Substituindo-se as equações (3.66) e (3.67) em (3.64) e (3.65), respectivamente, tem-se:

$$\int_{\Omega_s} \epsilon_{kij}^{*(S)2D} N_{ij} d\Omega = \int_{\Omega_s} \epsilon_{ij}^{2D} N_{kij}^* d\Omega - \int_{\Omega_s} c_s w_{,ij} N_{kij}^* d\Omega \quad (3.68)$$

$$\int_{\Omega_s} w_{,ij}^{*(S)} m_{ij} d\Omega - \int_{\Omega_s} c_s w_{,ij}^{*(S)} N_{ij} d\Omega = \int_{\Omega_s} w_{,ij} m_{ij}^* d\Omega \quad (3.69)$$

Para que se possa fazer o equilíbrio dos esforços e deslocamentos nas interfaces, após a integração por partes, é conveniente escrever as equações (3.68) e (3.69) em função das curvaturas $(w_{,ij}^*)$ e deformações (ϵ_{kij}^{*2D}) fundamentais do sub-domínio onde está o ponto de colocação. Para isto, deve-se considerar a equação (3.7) e a seguinte relação:

$$\epsilon_{kij}^{*(S)2D} = \frac{\bar{E}}{E_s} \epsilon_{kij}^{*2D} \quad (3.70)$$

Para se obter a equação integral da placa em sub-regiões para os problemas de flexão simples e membrana, basta somar as expressões de cada sub-região. Considerando-se um caso genérico de uma placa composta de N_s sub-regiões, tem-se:

$$\int_{\Omega} \epsilon_{kij}^{*2D} N_{ij} d\Omega = \sum_{s=1}^{N_s} \frac{\bar{E}_s}{\bar{E}} \left[\int_{\Omega_s} \epsilon_{ij}^{2D} N_{kij}^* d\Omega - \int_{\Omega_s} c_s w_{,ij} N_{kij}^* d\Omega \right] \quad (3.71a)$$

$$\int_{\Omega} w_{,ij}^* m_{ij} d\Omega - \sum_{s=1}^{N_s} \int_{\Omega_s} c_s w_{,ij}^* N_{ij} d\Omega = \sum_{s=1}^{N_s} \frac{D_s}{D} \int_{\Omega_s} w_{,ij} m_{ij}^* d\Omega \quad (3.71b)$$

sendo c_s calculado em relação à sub-região de referência e D e $\bar{E}$ referentes à sub-região onde está o ponto de colocação.

Para a aplicação de Método dos Elementos de Contorno, deve-se fazer a integração por partes das equações (3.71), a fim de escrevê-las em função de integrais ao longo do

contorno externo. Para isto, considera-se inicialmente que a equação (3.71a) seja aplicada à figura (3.8). O primeiro membro da equação é dado por:

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* N_{ij} d\Omega = \int_{\Omega_1} \varepsilon_{kij}^* N_{ij} d\Omega + \int_{\Omega_2} \varepsilon_{kij}^* N_{ij} d\Omega + \int_{\Omega_3} \varepsilon_{kij}^* N_{ij} d\Omega \quad (3.72)$$

Fazendo-se agora a integração por partes da equação (3.72), obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* N_{ij} d\Omega = & \int_{\Gamma_1 + \Gamma_{13}} u_{ki}^* p_i d\Gamma + \int_{\Gamma_3 + \Gamma_{31} + \Gamma_{32}} u_{ki}^* p_i d\Gamma + \int_{\Gamma_2 + \Gamma_{23}} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega_1} u_{ki}^* N_{ij, j} d\Omega + \\ & - \int_{\Omega_2} u_{ki}^* N_{ij, j} d\Omega - \int_{\Omega_3} u_{ki}^* N_{ij, j} d\Omega \quad i, j, k = m, l \end{aligned} \quad (3.73)$$

Considerando-se a definição de força de superfície p_i , dada em (2.33) tem-se que $p_{i(\Gamma_{13})} = -p_{i(\Gamma_{31})}$ e $p_{i(\Gamma_{23})} = -p_{i(\Gamma_{32})}$, pois o valor do co-seno diretor n_j muda de sinal. Tem-se ainda que $\int_{\Gamma_{13}} u_{ki}^* d\Gamma = \int_{\Gamma_{31}} u_{ki}^* d\Gamma$, $\int_{\Gamma_{23}} u_{ki}^* d\Gamma = \int_{\Gamma_{32}} u_{ki}^* d\Gamma$. Sendo assim, ao fazer o equilíbrio das forças de superfície as integrais sobre as interfaces se anulam. Considerando-se agora a equação (2.39) e que as incógnitas são calculadas segundo as direções n e s , ou seja, $u_i = u_n n_i + u_s s_i$ a equação (3.73) resulta em:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* N_{ij} d\Omega = & \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} u_{ki}^* N_{ij, j} d\Omega = \int_{\Gamma} (u_{kn}^* p_i n_i + u_{ks}^* p_i s_i) d\Gamma + \\ & + \int_{\Omega} (u_{kn}^* n_i + u_{ks}^* s_i) b_i d\Omega \end{aligned} \quad (3.74)$$

Substituindo-se ainda as equações (2.34a) e (2.35a) em (3.74) tem-se:

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* N_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma} (u_{kn}^* p_n + u_{ks}^* p_s) d\Gamma + \int_{\Omega_b} (u_{kn}^* b_n + u_{ks}^* b_s) d\Omega_b \quad (3.75)$$

Seja agora o primeiro termo do segundo membro da equação (3.71a) aplicado à figura (3.8) e designado por U_1 :

$$U_1 = \frac{\bar{E}_1}{E} \int_{\Omega_1} \varepsilon_{ij}^{2D} N_{kij}^* d\Omega + \frac{\bar{E}_2}{E} \int_{\Omega_2} \varepsilon_{ij}^{2D} N_{kij}^* d\Omega + \frac{\bar{E}_3}{E} \int_{\Omega_3} \varepsilon_{ij}^{2D} N_{kij}^* d\Omega \quad (3.76)$$

Fazendo a integração por partes da equação (3.76) em relação à x_j , obtém-se:

$$\begin{aligned} U_1 = & \frac{\bar{E}_1}{E} \int_{\Gamma_1+\Gamma_{13}} u_i N_{kij}^* n_j d\Gamma + \frac{\bar{E}_2}{E} \int_{\Gamma_2+\Gamma_{23}} u_i N_{kij}^* n_j d\Gamma + \frac{\bar{E}_3}{E} \int_{\Gamma_3+\Gamma_{31}+\Gamma_{32}} u_i N_{kij}^* n_j d\Gamma + \\ & - \frac{\bar{E}_1}{E} \int_{\Omega_1} u_i N_{kij,j}^* d\Omega - \frac{\bar{E}_2}{E} \int_{\Omega_2} u_i N_{kij,j}^* d\Omega - \frac{\bar{E}_3}{E} \int_{\Omega_3} u_i N_{kij,j}^* d\Omega \end{aligned} \quad (3.77)$$

Considerando-se a definição de força, assim como foi feito no primeiro membro e também que: $u_{i(\Gamma_{13})} = u_{i(\Gamma_{31})}$ e $u_{i(\Gamma_{23})} = u_{i(\Gamma_{32})}$, pode-se escrever a equação (3.77) no sistema (n, s) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} U_1 = & \frac{\bar{E}_1}{E} \int_{\Gamma_1+\Gamma_{13}} (u_n p_{ki}^* n_i + u_s p_{ki}^* s_i) d\Gamma + \frac{\bar{E}_2}{E} \int_{\Gamma_2+\Gamma_{23}} (u_n p_{ki}^* n_i + u_s p_{ki}^* s_i) d\Gamma + \\ & - \frac{\bar{E}_3}{E} \int_{-\Gamma_3+\Gamma_{31}+\Gamma_{32}} (u_n p_{ki}^* n_i + u_s p_{ki}^* s_i) d\Gamma - \frac{\bar{E}_1}{E} \int_{\Omega_1} (u_n N_{kij,j}^* n_i + u_s N_{kij,j}^* s_i) d\Omega + \\ & - \frac{\bar{E}_2}{E} \int_{\Omega_2} (u_n N_{kij,j}^* n_i + u_s N_{kij,j}^* s_i) d\Omega - \frac{\bar{E}_3}{E} \int_{\Omega_3} (u_n N_{kij,j}^* n_i + u_s N_{kij,j}^* s_i) d\Omega \end{aligned} \quad (3.78)$$

A solução fundamental do problema de chapa é obtida a partir da equação de equilíbrio (2.39). Substituindo-se $b_i(p)$ pela função Delta de Dirac, tem-se:

$$N_{kij,j}^* + \delta(q, p) \delta_{ki} = 0 \quad (3.79)$$

Substituindo-se a equação (3.79) em (3.78) e considerando também as equações das forças p_n e p_s , dadas por (2.32a) e (2.33a), obtém-se:

$$U_1 = \frac{\bar{E}_1}{E} \int_{\Gamma_1+\Gamma_{13}} (u_n p_{ki}^* n_i + u_s p_{ki}^* s_i) d\Gamma + \frac{\bar{E}_2}{E} \int_{\Gamma_2+\Gamma_{23}} (u_n p_{ki}^* n_i + u_s p_{ki}^* s_i) d\Gamma +$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\bar{E}_3}{E} \int_{-\Gamma_3+\Gamma_{31}+\Gamma_{32}} (u_n p_{ki}^* n_i + u_s p_{ki}^* s_i) d\Gamma + \frac{\bar{E}_1}{E} \int_{\Omega_1} (u_n \delta(q, p) \delta_{kn} + u_s \delta(q, p) \delta_{ks}) d\Omega + \\
& + \frac{\bar{E}_2}{E} \int_{\Omega_2} (u_n \delta(q, p) \delta_{kn} + u_s \delta(q, p) \delta_{ks}) d\Omega + \frac{\bar{E}_3}{E} \int_{\Omega_3} (u_n \delta(q, p) \delta_{kn} + u_s \delta(q, p) \delta_{ks}) d\Omega \quad (3.80)
\end{aligned}$$

Entretanto, como a função delta de Dirac tem a seguinte propriedade:

$$\int_{\Omega_\infty} \phi(p)_i \delta(q, p) \delta_{ki} d\Omega_\infty = \begin{cases} 0 & \text{se } p \neq q \\ \phi(q)_k & \text{se } p \equiv q \end{cases} \quad (3.81)$$

Pode-se escrever a equação (3.80) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
U_1 &= u_k(q) + \sum_{i=1}^3 \frac{\bar{E}_i}{E} \int_{\Gamma} (u_n p_{kn} + u_s p_s) d\Gamma + \\
& + \frac{\bar{E}_2 - \bar{E}_3}{E} \int_{\Gamma_{23}} (u_n p_{kn} + u_s p_s) d\Gamma + \frac{\bar{E}_1 - \bar{E}_3}{E} \int_{\Gamma_{13}} (u_n p_{kn} + u_s p_s) d\Gamma \quad (3.82)
\end{aligned}$$

E, de uma forma geral:

$$U_1 = u_k(q) + \sum_{i=1}^{N_s} \frac{\bar{E}_i}{E} \int_{\Gamma} (u_n p_{kn} + u_s p_s) d\Gamma + \sum_{j=1}^{N_{\text{int}}} \frac{\bar{E}_j - \bar{E}_{pa}}{E} \int_{\Gamma_j} (u_n p_{kn} + u_s p_s) d\Gamma \quad (3.83)$$

sendo N_s o número de sub-regiões; N_{int} o número de interfaces; $\bar{E}_j$ o $\bar{E}$ da sub-região Ω_j que contem a interface Γ_j no sentido da qual se faz a integração; $\bar{E}_{pa}$ o $\bar{E}$ da sub-região adjacente à Ω_j e Γ o contorno externo da placa.

Seja agora o segundo termo do segundo membro da equação (3.71a) aplicado à figura (3.8) e designado por U_2 :

$$U_2 = \frac{\bar{E}_1 c_1}{E} \int_{\Omega_1} w_{,ij} N_{kij}^* d\Omega + \frac{\bar{E}_2 c_2}{E} \int_{\Omega_2} w_{,ij} N_{kij}^* d\Omega + \frac{\bar{E}_3 c_3}{E} \int_{\Omega_3} w_{,ij} N_{kij}^* d\Omega \quad (3.84)$$

Fazendo a integração por partes em relação à x_j e considerando-se a equação (2.33):

$$\begin{aligned}
 U_2 = & \frac{\bar{E}_1 c_1}{E} \left[\int_{\Gamma_1} p_{ki}^* w_{,i} d\Gamma + \int_{\Gamma_{13}} p_{ki}^* w_{,i} d\Gamma - \int_{\Omega_1} N_{kij}^* w_{,i} d\Omega \right] + \frac{\bar{E}_2 c_2}{E} \left[\int_{\Gamma_2} p_{ki}^* w_{,i} d\Gamma + \int_{\Gamma_{23}} p_{ki}^* w_{,i} d\Gamma + \right. \\
 & \left. - \int_{\Omega_2} N_{kij}^* w_{,i} d\Omega \right] + \frac{\bar{E}_3 c_3}{E} \left[\int_{\Gamma_3} p_{ki}^* w_{,i} d\Gamma + \int_{\Gamma_{31} + \Gamma_{32}} p_{ki}^* w_{,i} d\Gamma - \int_{\Omega_3} N_{kij}^* w_{,i} d\Omega \right] \quad (3.85)
 \end{aligned}$$

Substituindo-se a equação (3.79) em (3.85), levando-se em consideração a equação (3.81), além das relações entre os esforços fundamentais e deslocamentos reais, pode-se escrever a equação (3.85), de uma forma geral, no sistema (n, s) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 U_2 = & c(q) w_{,k}(q) + \sum_{i=1}^{N_s} \frac{\bar{E}_i c_i}{E} \int_{\Gamma} (p_{kn}^* w_{,n} + p_{ks}^* w_{,s}) d\Gamma + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_{int}} \frac{(\bar{E}_j c_j - \bar{E}_{pa} c_{pa})}{E} \int_{\Gamma_j} (p_{kn}^* w_{,n} + p_{ks}^* w_{,s}) d\Gamma_j \quad (3.86)
 \end{aligned}$$

Agora, substituindo-se as equações (3.86), (3.83) e (3.75) em (3.71a), chega-se à expressão para o problema bidimensional de uma placa sujeita à flexão composta:

$$\begin{aligned}
 [-c(q) w_{,k}(q) + u_k(q)] = & - \sum_{i=1}^{N_s} \frac{\bar{E}_i}{E} \int_{\Gamma} (u_n(P) p_{kn}^*(q, P) + u_s(P) p_{ks}^*(q, P)) d\Gamma + \\
 & - \sum_{j=1}^{N_{int}} \frac{(\bar{E}_j - \bar{E}_{pa})}{E} \int_{\Gamma_j} (u_n(P) p_{kn}^*(q, P) + u_s(P) p_{ks}^*(q, P)) d\Gamma_j + \sum_{i=1}^{N_s} \frac{\bar{E}_i}{E} \int_{\Gamma} [c_i p_{kn}^*(q, P) w_{,n}(P) + \\
 & + p_{ks}^*(q, P) w_{,s}(P)] d\Gamma + \sum_{j=1}^{N_{int}} \frac{(\bar{E}_j c_j - \bar{E}_{pa} c_{pa})}{E} \int_{\Gamma_j} [p_{kn}^*(q, P) w_{,n}(P) + p_{ks}^*(q, P) w_{,s}(P)] d\Gamma_j + \\
 & + \int_{\Gamma} (u_{kn}^*(q, P) p_n(P) + u_{ks}^*(q, P) p_s(P)) d\Gamma + \int_{\Omega_b} (u_{kn}^*(q, P) b_n(P) + u_{ks}^*(q, P) b_s(P)) d\Omega \quad (3.87)
 \end{aligned}$$

Desenvolvendo agora a equação relativa ao problema de flexão simples, equação (3.71b). As parcelas que envolvem os momentos real e fundamental já foram desenvolvidas

para o caso de flexão simples (ver equações 3.17 e 3.20). Deve-se integrar por partes duas vezes:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} m_{ij}(p) w_{,ij}^*(q, p) d\Omega = & - \int_{\Gamma} (V_n(p) w_n^*(q, p) - M_n(p) w_{,n}^*(q, p)) d\Gamma(p) + \\ & - \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(p) w_{ci}^*(q, p) - \int_{\Omega_g} (g(p) w^*(q, p)) d\Omega_g(p) \end{aligned} \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{N_s} \frac{D_s}{D} \int_{\Omega_s} m_{ij}^*(q, p) w_{,ij}(p) d\Omega = & -w(q) - \sum_{i=1}^{N_{c3}} \frac{D_i}{D} R_{ci}^*(q, p) w_{ci}(p) + \\ & + \left(\frac{D_j - D_{pa}}{D} \right) \sum_{i=1}^{N_{c1}+N_{c2}} R_{cj}^* w_{ci} + \sum_{i=1}^{N_s} \frac{D_i}{D} \int_{\Gamma} \left(M_n^*(q, p) \frac{\partial w}{\partial n}(p) - V_n^*(q, p) w(p) \right) d\Gamma(p) + \\ & + \sum_{j=1}^{N_{int}} \int_{\Gamma_j} \left(\frac{D_j - D_{pa}}{D} \right) \left(M_n^*(q, p) \frac{\partial w}{\partial n}(p) - V_n^*(q, p) w(p) \right) d\Gamma_j(p) \end{aligned} \quad (3.89)$$

Lembrando-se que os tipos de cantos estão definidos na figura (3.3).

Seja agora o primeiro termo do primeiro membro da equação (3.71b), designado por U , aplicado à figura (3.8) e integrado por partes em relação à x_j :

$$\begin{aligned} U = & \int_{\Gamma_1} c_1 N_{ij} n_j w_{,i}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_{13}} c_1 N_{ij} n_j w_{,i}^* d\Gamma - \int_{\Omega_1} c_1 N_{ij,j} w_{,i}^* d\Omega + \int_{\Gamma_3} c_3 N_{ij} n_j w_{,i}^* d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma_{31}} c_3 N_{ij} n_j w_{,i}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_{32}} c_3 N_{ij} n_j w_{,i}^* d\Gamma - \int_{\Omega_3} c_3 N_{ij,j} w_{,i}^* d\Omega + \int_{\Gamma_2} c_2 N_{ij} n_j w_{,i}^* d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma_{23}} c_2 N_{ij} n_j w_{,i}^* d\Gamma - \int_{\Omega_2} c_2 N_{ij,j} w_{,i}^* d\Omega \end{aligned} \quad (3.90)$$

Considerando-se que na interface tem-se $w_{,i(\Gamma_{13})}^* = w_{,i(\Gamma_{31})}^*$, $w_{,i(\Gamma_{23})}^* = w_{,i(\Gamma_{32})}^*$, $p_{i(\Gamma_{13})} = -p_{i(\Gamma_{31})}$ e $p_{i(\Gamma_{23})} = -p_{i(\Gamma_{32})}$, considerando-se também a equação (2.39) e que as incógnitas são calculadas segundo as direções n e s tem-se:

$$U = \sum_{i=1}^{N_s} c_i \int_{\Gamma_i} [p_n w_{,n}^* + p_s w_{,s}^*] d\Gamma_i + \sum_{i=1}^{N_{int}} (c_i - c_{pa}) \int_{\Gamma_i} [p_n w_{,n}^* + p_s w_{,s}^*] d\Gamma_i +$$

$$- \sum_{i=1}^{N_s} \int_{\Omega_i} c_i (b_n w_{,n}^* + b_s w_{,s}^*) d\Omega_i \quad (3.91)$$

Somando-se os termos (3.91), (3.88) e (3.89), a equação de flexão simples é dada por:

$$\begin{aligned} w(q) = & \sum_{i=1}^{N_s} \int_{\Gamma} \frac{D_i}{D} (w_{,n}(P) M_n^*(q, P) - w(P) V_n^*(q, P)) + \\ & + \sum_{j=1}^{N_{int}} \int_{\Gamma_j} \left(\frac{D_j - D_{pa}}{D} \right) (w_{,n}(P) M_n^*(q, P) - w(P) V_n^*(q, P)) d\Gamma - \sum_{i=1}^{N_{c3}} \frac{D_i}{D} R_{ci}^*(q, P) w_{ci}(P) + \\ & - \sum_{i=1}^{N_{s2} + N_{c1}} \left[\frac{D_j}{D} R_c^*(q, P)_{\Omega_i} + \frac{D_{pa}}{D} R_c^*(q, P)_{\Omega_{pa}} \right] w_{ci}(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(q, P) + \\ & + \int_{\Gamma} \left(V_n(P) w^*(q, P) - M_{nn}(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_s} c_i \int_{\Gamma_i} [p_n(P) w_{,n}^*(q, P) + p_s(P) w_{,s}^*(q, P)] d\Gamma_i + \\ & \sum_{j=1}^{N_s} (c_j - c_{pa}) \int_{\Gamma_j} [p_n(P) w_{,n}^*(q, P) + p_s(P) w_{,s}^*(q, P)] d\Gamma_j + \int_{\Omega_g} (g(p) w^*(q, p)) d\Omega_g + \\ & \sum_{i=1}^{N_s} c_i \int_{\Omega_i} [b_n(p) w_{,n}^*(q, p) + b_s(p) w_{,s}^*(q, p)] d\Omega_i \end{aligned} \quad (3.92)$$

3.2.3 Solução Fundamental de Membrana

Assim como para o problema referente às placas, para o problema de chapas é necessário conhecer as expressões fundamentais para a obtenção das equações integrais. A solução fundamental adotada nesse trabalho, desenvolvida por Lord Kelvin, representa o efeito de uma força concentrada unitária aplicada na direção k em um ponto q de um domínio infinito.

$$u_{ki}^*(q, p) = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[- (3 - 4\nu) \ln r \delta_{ki} + r_{,i} r_{,k} \right] \quad (3.93)$$

Para o estado plano de tensão deve-se substituir nessas expressões ν por $\nu' = \nu/(1 + \nu)$.

Derivando-se a expressão (3.93), considerando-se a equação (2.40) e ainda que a força de superfície fundamental é dada por $p_{ki}^* = N_{kij}^* n_j$, obtém-se:

$$p_{ki}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ [(1-2\nu)\delta_{ik} + 2r_{,i} r_{,k}] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)[n_i r_{,k} - n_k r_{,i}] \right\} \quad (3.94)$$

Considerando-se a equação (2.28), a deformação fundamental é dada por:

$$\varepsilon_{kij}^{*2D} = -\frac{1}{8\pi G(1-\nu)r} \left[(1-2\nu)(r_{,j} \delta_{ki} + r_{,i} \delta_{kj}) - r_{,k} \delta_{ij} + 2r_{,k} r_{,i} r_{,j} \right] \quad (3.95)$$

3.2.4 Equação Integral do Deslocamento w para um Ponto sobre o Contorno Externo da Placa

De maneira similar ao explicado no item (3.1.3), surgirão singularidades para a equação (3.87), quando esta for aplicada em um ponto do contorno externo. Para a eliminação desta, procede-se da mesma maneira descrita no item (3.1.3). A equação (3.87), para este caso, é dada por:

$$\begin{aligned} K_k(Q)u_k(Q) + K_{wk}(Q)w_{,k}(Q) = & -\sum_{i=1}^{N_s} \frac{\bar{E}_i}{E} \int_{\Gamma} (u_n(P)p_{kn}^*(Q,P) + u_s(P)p_{ks}^*(Q,P)) d\Gamma + \\ & -\sum_{j=1}^{N_{int}} \frac{(\bar{E}_j - \bar{E}_{pa})}{\bar{E}} \int_{\Gamma_j} (u_n(P)p_{kn}^*(Q,P) + u_s(P)p_{ks}^*(Q,P)) d\Gamma_j + \sum_{i=1}^{N_s} \frac{\bar{E}_i}{E} \int_{\Gamma} c_i [p_{kn}^*(Q,P)w_{,n}(P) + \\ & + p_{ks}^*(Q,P)w_{,s}(P)] d\Gamma + \sum_{j=1}^{N_{int}} \frac{(\bar{E}_j c_j - \bar{E}_{pa} c_{pa})}{\bar{E}} \int_{\Gamma} [p_{kn}^*(Q,P)w_{,n}(P) + p_{ks}^*(Q,P)w_{,s}(P)] d\Gamma_j + \\ & + \int_{\Gamma} (u_{kn}^*(Q,P)p_n(P) + u_{ks}^*(Q,P)p_s(P)) d\Gamma + \int_{\Omega_b} (u_{kn}^*(Q,p)b_n(p) + u_{ks}^*(Q,p)b_s(p)) d\Omega \quad (3.96) \end{aligned}$$

Serão determinadas as constantes $K_k(Q)$ e $K_{wk}(Q)$ para o caso com aplicação no ponto do contorno externo não coincidente com um canto.

Considerando-se a figura (3.8) e admitindo que $\vec{m} = \vec{n}_1$ e $\vec{l} = \vec{s}_1$.

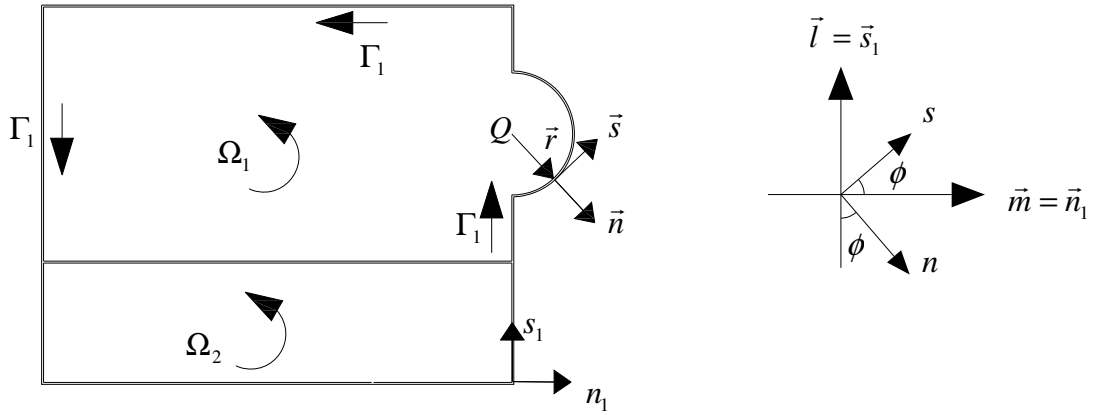


Figura 3.9 – Ponto Q sobre um contorno externo

No contorno circular do subdomínio Ω_1 da figura (3.9) tem-se que $\vec{r} = \vec{n}$, logo $\partial r / \partial n = 1$ e as direções dos vetores n e s em relação ao sistema (n_1, s_1) , são dadas por:

$$\vec{s} = \begin{Bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{Bmatrix} \text{ e } \vec{n} = \begin{Bmatrix} \sin \phi \\ -\cos \phi \end{Bmatrix}.$$

Assim, a expressão (3.94), dos esforços p_{ks}^* e p_{kn}^* , será dada pelas equações:

$$p_{kn}^* = -\frac{(3-2\nu)n_k}{4\pi(1-\nu)\xi} \quad (3.97)$$

$$p_{ks}^* = -\frac{(1-2\nu)s_k}{4\pi(1-\nu)\xi} \quad (3.98)$$

Considerando-se que a direção da carga fundamental k seja igual a m , as expressões dos esforços p_{ks}^* e p_{kn}^* resultam em:

$$p_{kn}^* = -\frac{(3-2\nu)}{4\pi(1-\nu)\xi} \sin \phi \quad (3.99)$$

$$p_{ks}^* = -\frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)\xi} \cos \phi \quad (3.100)$$

Com isso, a integral do contorno circular do subdomínio Ω_1 , denotada por A , é dada por:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\overline{E}_1}{E} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} [(c_1 w_{,n}(P) - u_n(P)) p_{kn}^*(Q, P) + (c_1 w_{,s}(P) - u_s(P)) p_{ks}^*(Q, P)] d\Gamma_\xi = \\ &= -\frac{\overline{E}_1}{E} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[(c_1 w_{,n}(P) - u_n(P)) \frac{(3-2\nu)}{4\pi(1-\nu)\xi} \sin\phi + (c_1 w_{,s}(P) - u_s(P)) \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)\xi} \cos\phi \right] d\Gamma_\xi \end{aligned} \quad (3.101)$$

Substituindo-se na equação (3.101) $w_{,n}(P)$ por $(w_{,n}(P) + w_{,n}(Q) - w_{,n}(Q))$, $w_{,s}(P)$ por $(w_{,s}(P) + w_{,s}(Q) - w_{,s}(Q))$, $u_n(P)$ por $(u_n(P) + u_n(Q) - u_n(Q))$ e $u_s(P)$ por $(u_s(P) + u_s(Q) - u_s(Q))$, a expressão A pode ser escrita:

$$A = -\frac{\overline{E}_1}{E} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[(c_1 w_{,n}(Q) - u_n(Q)) \frac{(3-2\nu)}{4\pi(1-\nu)\xi} \sin\phi + (c_1 w_{,s}(Q) - u_s(Q)) \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)\xi} \cos\phi \right] d\Gamma_\xi \quad (3.102)$$

Escrevendo-se agora as variáveis $w_{,n}$, $w_{,s}$, u_n e u_s em função de suas componentes no sistema (m, l) e do ângulo ϕ , as seguintes relações são obtidas:

$$w_{,n} = n_m w_{,m} + n_l w_{,l} = \sin(\phi) w_{,m} - \cos(\phi) w_{,l} \quad (3.103.a)$$

$$w_{,s} = s_m w_{,m} + s_l w_{,l} = \cos(\phi) w_{,m} + \sin(\phi) w_{,l} \quad (3.103.b)$$

$$u_n = n_m u_m + n_l u_l = \sin(\phi) u_m - \cos(\phi) u_l \quad (3.103.c)$$

$$u_s = s_m u_m + s_l u_l = \cos(\phi) u_m + \sin(\phi) u_l \quad (3.103.d)$$

Substituindo-se as equações (3.103) em (3.102) e considerando-se a equação (3.35), chega-se à:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{\overline{E}_1 c_1}{E 4\pi(1-\nu)} \lim_{\xi \rightarrow 0} \left\{ (3-2\nu) w_{,m} \int_0^\pi \sin^2 \phi d\phi - (3-2\nu) w_{,l} \int_0^\pi \sin \phi \cos \phi d\phi + \right. \\ &\quad \left. + (1-2\nu) w_{,m} \int_0^\pi \cos^2 \phi d\phi + (1-2\nu) w_{,l} \int_0^\pi \sin \phi \cos \phi d\phi + \frac{1}{c_1} \left[- (3-2\nu) u_m \int_0^\pi \sin^2 \phi d\phi + \right. \right. \end{aligned}$$

$$+ (3-2\nu)u_l \int_0^\pi \sin\phi \cos\phi d\phi - (1-2\nu)u_m \int_0^\pi \cos^2\phi d\phi - (1-2\nu)u_l \int_0^\pi \sin\phi \cos\phi d\phi \left. \right\} \quad (3.104)$$

Integrando-se a equação (3.104) em ϕ , chega-se em:

$$A = -\frac{\bar{E}_1 c_1}{\bar{E} 4\pi(1-\nu)} \left\{ (3-2\nu)w_{,m} \frac{\pi}{2} + (1-2\nu)w_{,m} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{c_1} \left[-(3-2\nu)u_m \frac{\pi}{2} - (1-2\nu)u_m \frac{\pi}{2} \right] \right\} \quad (3.105)$$

Chegando-se ainda em:

$$A = -\frac{\bar{E}_1 c_1}{\bar{E}} \left\{ \frac{w_{,m}}{2} + \frac{1}{c_1} \left[\frac{u_m}{2} \right] \right\} \quad (3.106)$$

Considerando-se que $\bar{E} = \bar{E}_1$, as constantes $K_m(Q)$ e $K_{wm}(Q)$ são dadas por:

$$K_{wm}(Q) = -\frac{1}{2}c(Q) \quad (3.107)$$

$$K_m(Q) = \frac{1}{2} \quad (3.108)$$

3.2.5 Equação Integral da Rotação $u_{i,k}$ para um Ponto Interno

A equação integral da rotação para um ponto interno é obtida através da derivação da equação (3.124). Derivou-se a equação em relação a uma coordenada genérica m .

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_k}{\partial m}(q) - c(q) \frac{\partial w_{,k}}{\partial m}(q) = & - \sum_{i=1}^{N_s} \frac{\bar{E}_i}{\bar{E}} \int_{\Gamma_s / \text{viga}} (u_n(P) \frac{\partial p_{kn}^*}{\partial m}(q, P) + u_s(P) \frac{\partial p_{ks}^*}{\partial m}(q, P)) d\Gamma + \\ & - \sum_{j=1}^{N_{vj}} \left[-\frac{(\bar{E}^+ - \bar{E}_j)}{\bar{E}} \int_{\Gamma_j^+} \left[\left(u_{n(j)}(p) + \frac{\partial u_{n(j)}}{\partial n_j}(p) \right) \frac{\partial p_{kn}^*}{\partial m}(q, P) + \left(u_{s(j)}(p) + \frac{\partial u_{s(j)}}{\partial n_j}(p) a_j \right) \frac{\partial p_{ks}^*}{\partial m}(q, P) \right] d\Gamma + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\bar{E}^- - \bar{E}_j)}{\bar{E}} \int_{\Gamma_j} \left[\left(u_{n(j)}(p) - \frac{\partial u_{n(j)}}{\partial n_j}(p) \right) \frac{\partial p_{kn}^*}{\partial m}(q, P) + \left(u_{s(j)}(p) - \frac{\partial u_{s(j)}}{\partial n_j}(p) \right) \frac{\partial p_{ks}^*}{\partial m}(q, P) \right] d\Gamma \Bigg] + \\
& - \sum_{j=1}^{N_{ve}} \left[- \frac{(\bar{E}^+ - \bar{E}_j)}{\bar{E}} \int_{\Gamma_j^-} \left[\left(u_{n(j)}(p) - \frac{\partial u_{n(j)}}{\partial n_j}(p) \right) \frac{\partial p_{kn}^*}{\partial m}(q, P) + \left(u_{s(j)}(p) - \frac{\partial u_{s(j)}}{\partial n_j}(p) a_j \right) \frac{\partial p_{ks}^*}{\partial m}(q, P) \right] d\Gamma + \right. \\
& + \frac{(\bar{E}_j)}{\bar{E}} \int_{\Gamma_e} \left[\left(u_{n(j)}(p) + \frac{\partial u_{n(j)}}{\partial n_j}(p) \right) \frac{\partial p_{kn}^*}{\partial m}(q, P) + \left(u_{s(j)}(p) + \frac{\partial u_{s(j)}}{\partial n_j}(p) a_j \right) \frac{\partial p_{ks}^*}{\partial m}(q, P) \right] d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u_{kn}^*}{\partial m}(q, P) p_n(P) + \frac{\partial u_{ks}^*}{\partial m}(q, P) p_s(P) \right) d\Gamma + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_{kn}^*}{\partial m}(q, p) b_n(p) + \frac{\partial u_{ks}^*}{\partial m}(q, P) b_s(p) \right) d\Omega + \\
& + \sum_{i=1}^{N_s} \frac{\bar{E}_i c_i}{\bar{E}} \int_{\Gamma_s / \text{vigas}} \left(\frac{\partial p_{kn}^*}{\partial m}(q, P) w_{,n}(P) + \frac{\partial p_{ks}^*}{\partial m}(q, P) w_{,s}(P) \right) d\Gamma + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{ve}} \left[\frac{\bar{E}_j c_j}{\bar{E}} \int_{\Gamma_e} \left(\frac{\partial p_{kn}^*}{\partial m}(q, P) w_{,n(j)}(p) + \frac{\partial p_{ks}^*}{\partial m}(q, P) w_{,s(\Gamma_e)}(P) \right) d\Gamma + \right. \\
& + \frac{(\bar{E}^- c^- - \bar{E}_j c_j)}{\bar{E}} \int_{\Gamma_j} \left(\frac{\partial p_{kn}^*}{\partial m}(q, P) w_{,n(j)}(p) + \frac{\partial p_{ks}^*}{\partial m}(q, P) w_{,s(\Gamma_e)}(P) \right) d\Gamma \Bigg] + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{vi}} \left[\frac{(\bar{E}^+ c^+ - \bar{E}_j c_j)}{\bar{E}} \int_{\Gamma_j^+} \left(\frac{\partial p_{kn}^*}{\partial m}(q, P) w_{,n(j)}(p) - \frac{\partial p_{ks}^*}{\partial m}(q, P) w_{,s(\Gamma_j^+)}(P) \right) d\Gamma + \right. \\
& - \frac{(\bar{E}^- c^- - \bar{E}_j c_j)}{\bar{E}} \int_{\Gamma_j^-} \left(\frac{\partial p_{kn}^*}{\partial m}(q, P) w_{,n(j)}(p) + \frac{\partial p_{ks}^*}{\partial m}(q, P) w_{,s(\Gamma_j^-)}(P) \right) d\Gamma \Bigg] \quad k = l, m \quad (3.109)
\end{aligned}$$

As expressões fundamentais da equação (3.109) são obtidas derivando-se as expressões (3.93) e (3.94) em relação à m , quando no sistema (n, s) .

$$\frac{\partial u_{ks}^*}{\partial m} = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)r} \left[(3-4\nu)r_{,j} m_j s_k - r_{,k} (m_i s_i - 2r_{,i} s_i r_{,j} m_j) - m_k r_{,i} s_i \right] \quad (3.110)$$

$$\frac{\partial u_{kn}^*}{\partial m} = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)r} \left[(3-4\nu)r_{,j} m_j n_k - r_{,k} (m_i n_i - 2r_{,i} n_i r_{,j} m_j) - m_k r_{,i} n_i \right] \quad (3.111)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p_{ks}^*}{\partial m} = & - \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2r_{,k} r_{,i} s_i \left[4r_{,j} m_j \frac{\partial r}{\partial n} - m_i n_i \right] + 2(1-2\nu)r_{,j} m_j \left[r_{,i} s_i n_k + \frac{\partial r}{\partial n} s_k \right] + \right. \\
& \left. - 2 \frac{\partial r}{\partial n} [r_{,k} m_i s_i - m_k r_{,i} s_i] - (1-2\nu)[m_i n_i s_k + m_i s_i n_k] \right\} \quad (3.112)
\end{aligned}$$

Nas linhas tracejadas (linhas médias) das vigas, os vetores n_{vi} e n_{ve} representam, respectivamente, os sentidos da normal das vigas internas e externas e os vetores s_{vi} e s_{ve} os sentidos de declaração dos elementos de contorno. Nas linhas contínuas estão indicados os sentidos de integração dos contornos das vigas, que acompanham a orientação do contorno da laje.

Utilizando o pavimento representado pela figura (3.10) os deslocamentos ao longo das interfaces são escritos em função dos seus valores no eixo da seguinte forma:

$$w_{(\Gamma_e)} = w_{(eixo)} + (w, n_{ve})_{(eixo)} a_{ve} \quad (3.114.a)$$

$$w_{(\Gamma_{ve}^-)} = w_{(eixo)} - (w, n_{ve})_{(eixo)} a_{ve} \quad (3.114.b)$$

$$w_{(\Gamma_{vi}^+)} = w_{(eixo)} + (w, n_{vi})_{(eixo)} a_{vi} \quad (3.114.c)$$

$$w_{(\Gamma_{vi}^-)} = w_{(eixo)} - (w, n_{vi})_{(eixo)} a_{vi} \quad (3.114.d)$$

$$(w, n_{ve})_{(eixo)} = w, n_{\Gamma_e} = w, n_{\Gamma_{ve}^-} \quad (3.115.a)$$

$$(w, n_{vi})_{(eixo)} = -w, n_{\Gamma_{vi}^+} = w, n_{\Gamma_{vi}^-} \quad (3.115.b)$$

Como se pode observar, a rotação w, n foi considerada constante ao longo da largura da viga e o deslocamento transversal w foi adotado com aproximação linear. Considerando-se as aproximações definidas em (3.114) e (3.115), a equação (3.21) do deslocamento w para pontos sobre o contorno externo ou eixos de vigas é dada por:

$$\begin{aligned} & K(Q)w(Q) + \sum_{s=1}^{N_s} \frac{D_s}{D} \int_{\Gamma_s / \text{viga}} \left(V_n^*(Q, P)w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \\ & + \sum_{j=1}^{N_{vi}} \left[\int_{\Gamma_j^+} \left(\frac{D^+ - D_j}{D} \right) \left(V_n^*(Q, P)w_j + (V_n^*(Q, P)a_j + M_n^*(Q, P)) \frac{\partial w_j}{\partial n} \right) d\Gamma + \right. \\ & + \left. \int_{\Gamma_j^-} \left(\frac{D^- - D_j}{D} \right) \left(V_n^*(Q, P)w_j - (V_n^*(Q, P)a_j + M_n^*(Q, P)) \frac{\partial w_j}{\partial n} \right) d\Gamma \right] + \\ & + \sum_{j=1}^{N_{ve}} \left[\int_{\Gamma_{ve}^-} \left(\frac{D^- - D_j}{D} \right) \left(V_n^*(Q, P)w_j - (V_n^*(Q, P)a_j + M_n^*(Q, P)) \frac{\partial w_j}{\partial n} \right) d\Gamma + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Gamma_e} \left(\frac{D_j}{D} \right) \left(V_n^*(Q, P) w_j - \left(-V_n^*(Q, P) a_j + M_n^*(Q, P) \right) \frac{\partial w_j}{\partial n} \right) d\Gamma \Bigg] + \sum_{i=1}^{N_{c3}} \frac{D_i}{D} \left(M_{ns}^{*+}(Q, P) + \right. \\
& \left. - M_{ns}^{*-}(Q, P) \right)_i w_{ci}(P) + \sum_{i=1}^{N_{c2}+N_{c1}} \left[\frac{(D_j - D_{pa})}{D} \left(M_{ns}^{*+}(Q, P) - M_{ns}^{*-}(Q, P) \right)_{\Omega_j} \right] w_{ci}(P) = \\
& \int_{\Gamma} \left(V_n(P) w^*(Q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(Q, P) + \\
& + \int_{\Omega_g} (g(p) w^*(Q, p)) d\Omega_g
\end{aligned} \tag{3.116}$$

onde todos os deslocamentos são relativos aos eixos das vigas; $D^- = D(\Omega^-)$ e $D^+ = D(\Omega^+)$, são, respectivamente, a rigidez à esquerda e à direita da viga; para os pontos sobre o contorno externo sem viga ou nos cantos da placa, a constante $K(Q)$ assume os valores indicados na tabela (3.1) e para os pontos dos eixos das vigas tem-se $K(Q) = 1$, pois se trata de pontos internos e para um ponto externo A , $K(A) = 0$.

Deve-se observar que na equação (3.116) a integração dos esforços e deslocamentos fundamentais é feita ao longo das interfaces e do contorno externo da placa, porém o ponto de colocação e os valores nodais estão definidos nos eixos das vigas e no contorno externo sem vigas.

Para obter-se a equação da derivada do deslocamento transversal w , basta derivar a equação (3.116) em relação à direção m . Esta é escrita para os pontos dos eixos das vigas, portanto em pontos de colocação internos, ou seja, o termo livre tem valor unitário nesse caso $K(Q) = 1$ e não há problemas de singularidades.

Os esforços nos pontos internos ou sobre eixos de vigas são calculados a partir das curvaturas, cuja equação é obtida derivando-se duas vezes a equação do deslocamento transversal (3.116), primeiro em relação à x_i e depois em relação à x_j , como se pode ver abaixo:

$$\frac{\partial^2 w(Q)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^{N_s} \frac{D_k}{D} \int_{\Gamma_s/viga} \left(\frac{\partial^2 V_n^*(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} w(P) - \frac{\partial^2 M_n^*(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma +$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{N_{ej}} \left[\int_{\Gamma_k^+} \left(\frac{D^+ - D_k}{D} \right) \left(\frac{\partial^2 V_n^*(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} w_k(P) + \left(\frac{\partial^2 V_n^*(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} a_k + \frac{\partial^2 M_n^*(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{\partial w_k(P)}{\partial n} \right) d\Gamma + \right. \\
& \left. + \int_{\Gamma_k^-} \left(\frac{D^- - D_k}{D} \right) \left(\frac{\partial^2 V_n^*(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} w_k(P) - \left(\frac{\partial^2 V_n^*(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} a_k + \frac{\partial^2 M_n^*(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{\partial w_k(P)}{\partial n} \right) d\Gamma \right] + \\
& \sum_{k=1}^{N_{ve}} \left[\int_{\Gamma_k^-} \left(\frac{D^- - D_k}{D} \right) \left(\frac{\partial^2 V_n^*(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} w_k(P) - \left(\frac{\partial^2 V_n^*(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} a_k + \frac{\partial^2 M_n^*(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{\partial w_k(P)}{\partial n} \right) d\Gamma + \right. \\
& \left. + \int_{\Gamma_e} \left(\frac{D_k}{D} \right) \left(\frac{\partial^2 V_n^*(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} w_k(P) - \left(\frac{\partial^2 V_n^*(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} a_k + \frac{\partial^2 V_n^*(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{\partial w_k(P)}{\partial n} \right) d\Gamma \right] + \\
& + \sum_{k=1}^{N_{c3}} \frac{D_k}{D} \left(\frac{\partial^2 M_{ns}^{*+}(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 M_{ns}^{*-}(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} \right) w_{ck}(P) + \\
& + \sum_{k=1}^{N_{c2} + N_{c1}} \left[\frac{(D_k - D_{pa})}{D} \left(\frac{\partial^2 M_{ns}^{*+}(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 M_{ns}^{*-}(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right] w_{ck}(P) + \sum_{k=1}^{N_c} R_{ck}(P) \frac{\partial^2 w_{ck}^*(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} + \\
& \int_{\Gamma} \left(V_n(P) \frac{\partial^2 w^*(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} - M_n(P) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{\partial w^*(Q, P)}{\partial n} \right) \right) d\Gamma + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial^2 w^*(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} d\Omega_g \quad (3.117)
\end{aligned}$$

Sendo as expressões fundamentais da equação (3.117) dadas por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V_n^*(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{1}{4\pi r^3} \left\{ 2(1-\nu)(r_l s_l)^2 [24r_{,i} r_{,j} (r_k n_k) - 4[r_{,i} n_j + r_{,j} n_i + \delta_{ij}(r_k n_k)]] + \right. \\
&+ 2(1-\nu)(r_l s_l) [2(n_i s_j + n_j s_i) - 8(r_k n_k)(r_i s_j + r_j s_i)] + 4(1-\nu)(r_k n_k)(s_i s_j) + \\
&+ (3-\nu) [2\delta_{ij}(r_k n_k) - 8r_{,i} r_{,j} (r_k n_k) + 2(r_i n_j + r_j n_i)] \left. \right\} \quad (3.118)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 M_n^*(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{1}{4\pi r^2} \left\{ (1-\nu)(\delta_{ij} - 2r_{,i} r_{,j}) + 2(1-\nu)[n_i n_j - 2r_{,i} n_i (r_k n_k) + \right. \\
&- (\delta_{ij} - 2r_{,i} r_{,j})(r_k n_k)^2 - 2r_{,i} (r_k n_k)[n_j - r_{,j} (r_k n_k)] \left. \right\} \quad (3.119)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 M_{ns}^*(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{-(1-\nu)}{4\pi r^2} \left\{ 2(\delta_{ij} + 4r_{,i} r_{,j})(r_l s_l) - 2s_i r_{,j} - 2r_{,i} s_j [r_k n_k) + \right. \\
&- 2(r_{,j} n_i + r_{,i} n_j)(r_l s_l) + n_i s_j + n_j s_i \left. \right\} \quad (3.120)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 w^*(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{4\pi D} (r_{,i} r_{,j} + \delta_{ij} \ln(r)) \quad (3.121)$$

3.3.2 Modelo para Análise de Flexão Composta

Na análise de flexão composta, além das aproximações definidas no item anterior para os deslocamentos de flexão, são adotadas as seguintes aproximações para os deslocamentos de membrana:

$$u_{i(\Gamma_e)} = u_{i(eixo)} + (u_{i,n_{ve}})_{(eixo)} a_{ve} \quad i = n, s \quad (3.122.a)$$

$$u_{i(\Gamma_{ve}^-)} = u_{i(eixo)} - (u_{i,n_{ve}})_{(eixo)} a_{ve} \quad i = n, s \quad (3.122.b)$$

$$u_{i(\Gamma_{vi}^+)} = -[u_{i(eixo)} + (u_{i,n_{vi}})_{(eixo)} a_{vi}] \quad i = n, s \quad (3.122.c)$$

$$u_{i(\Gamma_{vi}^-)} = u_{i(eixo)} - (u_{i,n_{vi}})_{(eixo)} a_{vi} \quad i = n, s \quad (3.122.d)$$

$$(u_{i,k})_{vi} = (u_{i,k})_{\Gamma_{vi}^+} = (u_{i,k})_{\Gamma_{vi}^-} \quad i = n, s \quad (3.123.a)$$

$$(u_{i,k})_{ve} = (u_{i,k})_{\Gamma_e} = (u_{i,k})_{\Gamma_{ve}^-} \quad i = n, s \quad (3.123.b)$$

Nesse caso as rotações $u_{i,k}$ (com $i, k = n, s$) também são adotadas constantes ao longo da largura da viga, enquanto que os deslocamentos u_i são admitidos com aproximação linear.

Substituindo-se as equações (3.122), na equação (3.87) e generalizando para o caso em que se tenha N_{ve} vigas externas e N_{vi} vigas internas, a equação do problema de membrana resulta em:

$$\begin{aligned} K_k(Q)u_k(Q) + K_{wk}(Q)w_{,k}(Q) = & - \sum_{i=1}^{N_s} \frac{\bar{E}_i}{\bar{E}} \int_{\Gamma_s / viga} (u_n(P)p_{kn}^*(Q, P) + u_s(P)p_{ks}^*(Q, P)) d\Gamma + \\ & - \sum_{j=1}^{N_{vi}} \left[- \frac{(\bar{E}_j^+ - \bar{E}_j)}{\bar{E}} \int_{\Gamma_j^+} \left[\left(u_{n(j)}(p) + \frac{\partial u_{n(j)}}{\partial n_j}(p) a_j \right) p_{kn}^*(Q, P) + \left(u_{s(j)}(p) + \frac{\partial u_{s(j)}}{\partial n_j}(p) a_j \right) p_{ks}^*(Q, P) \right] d\Gamma + \right. \\ & \left. + \frac{(\bar{E}_j^- - \bar{E}_j)}{\bar{E}} \int_{\Gamma_j^-} \left[\left(u_{n(j)}(p) - \frac{\partial u_{n(j)}}{\partial n_j}(p) a_j \right) p_{kn}^*(Q, P) + \left(u_{s(j)}(p) - \frac{\partial u_{s(j)}}{\partial n_j}(p) a_j \right) p_{ks}^*(Q, P) \right] d\Gamma \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{j=1}^{N_{ve}} \left[- \frac{(\bar{E}^+ - \bar{E}_j)}{\bar{E}} \int_{\Gamma_j^-} \left[\left(u_{n(j)}(p) - \frac{\partial u_{n(j)}}{\partial n_j}(p) a_j \right) p_{kn}^*(Q, P) + \left(u_{s(j)}(p) - \frac{\partial u_{s(j)}}{\partial n_j}(p) a_j \right) p_{ks}^*(Q, P) \right] d\Gamma + \right. \\
& + \frac{(\bar{E}_j)}{\bar{E}} \int_{\Gamma_e} \left[\left(u_{n(j)}(p) + \frac{\partial u_{n(j)}}{\partial n_j}(p) a_j \right) p_{kn}^*(Q, P) + \left(u_{s(j)}(p) + \frac{\partial u_{s(j)}}{\partial n_j}(p) a_j \right) p_{ks}^*(Q, P) \right] d\Gamma + \\
& + \frac{(\bar{E}_j)}{\bar{E}} \int_{\Gamma_e} \left[\left(u_{n(j)}(p) + \frac{\partial u_{n(j)}}{\partial n_j}(p) a_j \right) p_{kn}^*(Q, P) + \left(u_{s(j)}(p) + \frac{\partial u_{s(j)}}{\partial n_j}(p) a_j \right) p_{ks}^*(Q, P) \right] d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma} (u_{kn}^*(Q, P) p_n(P) + u_{ks}^*(Q, P) p_s(P)) d\Gamma + \int_{\Omega} (u_{kn}^*(Q, p) b_n(p) + u_{ks}^*(Q, p) b_s(p)) d\Omega + \\
& + \sum_{i=1}^N \frac{\bar{E}_i c_i}{\bar{E}} \int_{\Gamma_{s/vigas}} (p_{kn}^*(Q, P) w_{,n}(P) + p_{ks}^*(Q, P) w_{,s}(P)) d\Gamma + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{ve}} \left[\frac{\bar{E}_j c_j}{\bar{E}} \int_{\Gamma_e} (p_{kn}^*(Q, P) w_{,n(j)}(p) + p_{ks}^*(Q, P) w_{,s(\Gamma_e)}(P)) d\Gamma + \right. \\
& + \frac{(\bar{E}^- c^- - \bar{E}_j c_j)}{\bar{E}} \int_{\Gamma_j^-} (p_{kn}^*(Q, P) w_{,n(j)}(p) + p_{ks}^*(Q, P) w_{,s(\Gamma_e)}(P)) d\Gamma + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{ve}} \left[\frac{(\bar{E}^+ c^+ - \bar{E}_j c_j)}{\bar{E}} \int_{\Gamma_j^+} (p_{kn}^*(Q, P) w_{,n(j)}(p) - p_{ks}^*(Q, P) w_{,s(\Gamma_j^+)}(P)) d\Gamma + \right. \\
& \left. - \frac{(\bar{E}^- c^- - \bar{E}_j c_j)}{\bar{E}} \int_{\Gamma_j^-} (p_{kn}^*(Q, P) w_{,n(j)}(p) + p_{ks}^*(Q, P) w_{,s(\Gamma_j^-)}(P)) d\Gamma \right] \quad k = l, m \quad (3.124)
\end{aligned}$$

onde $\bar{E}^- = \bar{E}(\Omega^-)$ e $\bar{E}^+ = \bar{E}(\Omega^+)$ são, respectivamente, o valor de $\bar{E}$ à esquerda e à direita da viga; $u_{n(j)}, u_{s(j)}; u_{n(j)}, u_{s(j)}$ e $w_{n(j)}$ são deslocamentos referentes ao eixo da viga j , ao longo de um contorno ou interface genéricos Γ_i . As constantes $K_k(Q)$ e $K_{wk}(Q)$ são dadas na tabela (3.3) e o contorno $\Gamma_{s/vigas}$ se refere ao contorno externo da placa sem vigas.

Tabela 3.2 – Valores de $K_k(Q)$ para a Equação de deslocamento de chapa

$K_k(Q) = 1, K_{wk}(Q) = -c(q)$	Para ponto interno ou sobre um eixo de viga ($k = m$ ou $k = l$)
$K_k(Q) = 0,5, K_{wk}(Q) = -0,5.c(q)$	Se Q está sobre o contorno externo da placa

Para obter-se a equação da derivada do deslocamento u_i , para o problema de membrana, basta derivar a equação (3.124) em relação à direção m , como mostrado no item (3.2.5), contudo, para as vigas externas, fazendo a integração dos deslocamentos fundamentais sobre o eixo das mesmas, surgirão singularidades do tipo $1/r$. Deve-se então fazer a determinação do termo livre (ver item 4.5). Porém, calculando-se esses termos para um ponto antes do eixo e outro após, observa-se uma discrepância no valor do deslocamento, mas, devido às aproximações feitas nas vigas, considerou-se esse deslocamento sendo constante, fazendo-se com que a carga aplicada seja dividida em cada contorno da viga, eliminando-se assim, a singularidade causada pela carga aplicada sobre o eixo da viga externa.

Para se obter a equação do problema de flexão com o efeito de membrana (equações de w e w_m) onde todas as variáveis ficam definidas nos eixos das vigas, além das aproximações adotadas anteriormente para os deslocamentos w , w_m , u_i , e $u_{i,k}$ ao longo da largura da viga, deve-se também adotar aproximações para as forças de superfície p_n e p_s , já que essas também são definidas ao longo das interfaces. Considerando-se o sistema global (x_1, x_2) , como vê-se na figura (3.11), as forças p_1 e p_2 das interfaces e que atuam na viga são decompostas em duas parcela, uma constante (Δp_i) e outra linear (p_i), que dá resultante no eixo.

$$p_i(\Gamma_e) = \frac{1}{2} p_i - \Delta p_i \quad (3.125)$$

$$p_i(\Gamma_d) = \frac{1}{2} p_i + \Delta p_i \quad (3.126)$$

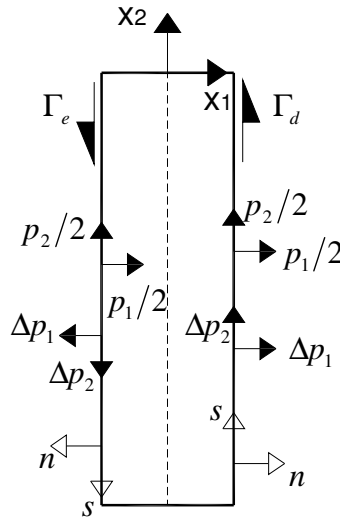


Figura 3.11 – Decomposição de Forças nas Faces de uma Viga

Observe-se que na equação do deslocamento transversal as integrais, envolvendo as forças de superfície em uma viga, serão dadas por:

$$(c_{viga} - c_{laje}) \int_{\Gamma_i} \left[\left(\frac{p_1}{2} - \Delta p_1 \right) w_{,1}^* + \left(\frac{p_2}{2} - \Delta p_2 \right) w_{,2}^* \right] d\Gamma \quad i = e, d \quad (3.127)$$

Deve-se escrever a equação (3.127) utilizando-se o sistema local (n, s) das interfaces. Contudo, os sistemas locais para vigas externas e internas são diferentes devendo-se assim obter a equação (3.127) para vigas externas e internas. Nas interfaces entre viga e laje a integral é calculada segundo o sistema local da laje. No caso da viga externa, como se pode observar na figura (3.9), os sistemas locais no eixo e faces das vigas são idênticos, o mesmo não ocorre com as vigas internas onde os sistemas locais no eixo e na interface Γ_{vi}^- são idênticos, porém diferente da interface Γ_{vi}^+ .

Além disso, as forças Δp_s e Δp_n são substituídas pela Lei de Hooke utilizando-se as equações (2.30), (2.32) e (2.33).

$$p_n = p_i n_i \frac{\bar{E}}{(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial u_n}{\partial n} + \nu \frac{\partial u_s}{\partial s} \right] \quad (3.128)$$

$$p_s = p_i s_i \frac{\bar{E}}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{\partial u_n}{\partial s} \right] \quad (3.129)$$

Obtém-se assim, a equação de w para a flexão composta escrita em função das variáveis dos eixos das vigas. E para se obter a equação integral da derivada do deslocamento w , basta derivá-la em relação à m .

A equação de w para a flexão composta é escrita em função das variáveis dos eixos das vigas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& K(Q)w(Q) + \sum_{s=1}^{N_s} \frac{D_s}{D} \int_{\Gamma_s / \text{viga}} \left(V_n^*(Q, P)w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{vj}} \left[\int_{\Gamma_j^+} \left(\frac{D^+ - D_j}{D} \right) \left(V_n^*(Q, P)w_j(P) + (V_n^*(Q, P)a_j + M_n^*(Q, P)) \frac{\partial w_j}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \right. \\
& + \left. \int_{\Gamma_j^-} \left(\frac{D^- - D_j}{D} \right) \left(V_n^*(Q, P)w_j(P) - (V_n^*(Q, P)a_j + M_n^*(Q, P)) \frac{\partial w_j}{\partial n}(P) \right) d\Gamma \right] + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{ve}} \left[\int_{\Gamma_{ve}^-} \left(\frac{D^- - D_j}{D} \right) \left(V_n^*(Q, P)w_j(P) - (V_n^*(Q, P)a_j + M_n^*(Q, P)) \frac{\partial w_j}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \right. \\
& + \left. \int_{\Gamma_e} \left(\frac{D_j}{D} \right) \left(V_n^*(Q, P)w_j(P) - (-V_n^*(Q, P)a_j + M_n^*(Q, P)) \frac{\partial w_j}{\partial n}(P) \right) d\Gamma \right] + \sum_{i=1}^{N_{e3}} \frac{D_i}{D} (M_{ns}^{*+}(Q, P) + \\
& - M_{ns}^{*-}(Q, P))_i w_{ci}(P) + \sum_{i=1}^{N_{e2}+N_{e1}} \left[\frac{(D_j - D_{pa})}{D} (M_{ns}^{*+}(Q, P) - M_{ns}^{*-}(Q, P))_{\Omega_j} \right] w_{ci}(P) = \\
& \int_{\Gamma} \left(V_n(P)w^*(Q, P) - M_{nn}(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P)w_{ci}^*(Q, P) + \\
& \sum_{i=1}^{N_i} c_i \int_{\Gamma_s / \text{viga}} [p_n(P)w_{,n}^*(Q, P) + p_s(P)w_{,s}^*(Q, P)] d\Gamma_i - \sum_{i=1}^{N_s} \int_{\Omega_i} c_i [b_n(P)w_{,n}^*(Q, P) + b_s(P)w_{,s}^*(Q, P)] d\Omega_i + \\
& - \sum_{j=1}^{N_{vj}} \left\{ (c^+ - c_j) \left[\int_{\Gamma_j^+} \left[\frac{P_{n(j)}(P)w_{,n}^*(Q, P) + P_{s(j)}(P)w_{,s}^*(Q, P)}{2} \right] d\Gamma \right] + \right. \\
& \left. (c^- - c_j) \left[\int_{\Gamma_j^-} \left[\frac{P_{n(j)}(P)w_{,n}^*(Q, P) + P_{s(j)}(P)w_{,s}^*(Q, P)}{2} \right] d\Gamma \right] \right\} + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{vj}} \left\{ (c^+ - c_j) \left[\int_{\Gamma_j^+} \left[\frac{\bar{E}_j}{(1-\nu^2)} (u_{n,n(j)}(P) + u_{s,s(\Gamma_j^+)}(P)) w_{,n}^*(Q, P) + \right. \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\bar{E}_j}{2(I+\nu)} \left(u_{s,n(j)}(P) + u_{n,s(\Gamma_j^+)}(P) \right) w_{,n}^*(Q,P) + \left. d\Gamma \right] + \\
& + (c^- - c_j) \left[\int_{\Gamma_j^-} \left[\frac{\bar{E}_j}{(I-\nu^2)} \left(u_{n,n(j)}(P) + u_{s,s(\Gamma_j^+)}(P) \right) w_{,n}^*(Q,P) + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{\bar{E}_j}{2(I+\nu)} \left(u_{s,n(j)}(P) + u_{n,s(\Gamma_j^+)}(P) \right) w_{,n}^*(Q,P) + \left. d\Gamma \right] \right] \right\} + \\
& + \sum_{j=l}^{N_{ve}} \left\{ (c^- - 2c_j) \left[\int_{\Gamma_{ve}^-} \left[\frac{\bar{E}_j}{(I-\nu^2)} \left(u_{n,n(j)}(P) + u_{s,s(\Gamma_j^+)}(P) \right) w_{,n}^*(Q,P) + \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{\bar{E}_j}{2(I+\nu)} \left(u_{s,n(j)}(P) + u_{n,s(\Gamma_j^+)}(P) \right) w_{,n}^*(Q,P) + \left. d\Gamma \right] \right] + \right. \\
& - \left. (c^-) \left[\int_{\Gamma_{ve}^-} \left[\frac{p_{n(j)}(P)}{2} w_{,n}^*(Q,P) + \frac{p_{s(j)}(P)}{2} w_{,s}^*(Q,P) \right] d\Gamma \right] \right\} + \\
& + (c_j) \left[\int_{\Gamma_{eixo}} \left[p_{n(j)}(P) w_{,n}^*(Q,P) + p_{s(j)}(P) w_{,s}^*(Q,P) \right] d\Gamma \right] \right\} + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q,p) d\Omega \quad (3.130)
\end{aligned}$$

Os deslocamentos $u_{i,s}$ da interface são escritos em função dos deslocamentos u_i , utilizando-se diferenças finitas.

$$\frac{\partial u_i}{\partial s}(Q) = \frac{2}{L} \left\{ \frac{\partial \phi_1(Q)}{\partial \xi} \quad \frac{\partial \phi_2(Q)}{\partial \xi} \quad \frac{\partial \phi_3(Q)}{\partial \xi} \right\} \begin{Bmatrix} u_i^1 \\ u_i^2 \\ u_i^3 \end{Bmatrix} \quad i = n, s \quad (3.131)$$

onde as funções $\frac{\partial \phi_3(Q)}{\partial \xi}$ poderão ser melhor entendidas no próximo capítulo.

Os valores da constante $K(Q)$ são dados na tabela (3.1), enquanto que para um ponto externo A , tem-se $K(Q) = 0$, para um ponto interno ou sobre o eixo de uma viga $K(Q) = 1$.

Para obter-se a equação da derivada do deslocamento transversal w , basta derivar a equação (3.130) em relação à direção m . No caso dessa equação, como ela é escrita apenas para ponto sobre eixos de vigas ou pontos internos, $K_w(Q) = 1$.

4. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Soluções exatas de problemas em engenharia, obtidas através de solução analíticas, estão restritas a poucos casos. Assim, soluções aproximadas são obtidas através de procedimentos numéricos. Os métodos numéricos abundantemente utilizados são os Métodos dos Elementos Finitos e das Diferenças Finitas. Recentemente vem sendo utilizado também o Método Elementos de Contorno trazendo como vantagem a necessidade, para análise linear, de discretização apenas do contorno da estrutura analisada simplificando eventuais modificações na malha além de diminuir o tempo de processamento dos cálculos. Neste capítulo é mostrada a aplicação do MEC às equações integrais deduzidas no capítulo anterior.

4.1 Discretização do Contorno e Interfaces

Como escrito anteriormente, as integrais sobre o contorno externo e interfaces são calculadas de forma aproximada. Para isto, deve-se discretizar o contorno e interfaces em elementos, que podem ter sua geometria aproximada por uma função qualquer, sendo que o número e a forma dos elementos devem ser escolhidos de maneira a representem adequadamente o contorno real. Neste trabalho, optou-se por uma função linear, ou seja, os elementos serão retos. Para isto são necessários apenas dois pontos nodais como representado na figura 4.1.

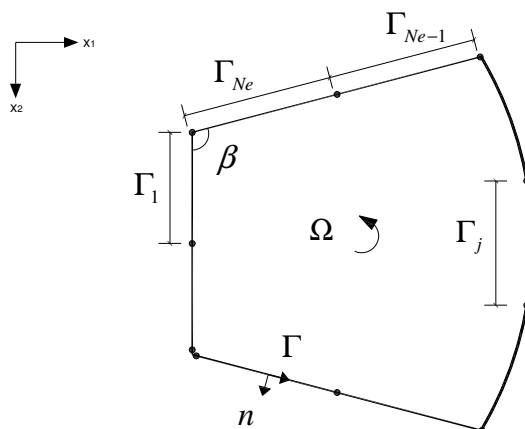


Figura 4.1 – Discretização de um Contorno Qualquer

Além da aproximação geométrica, tem-se também a aproximação das variáveis do problema, e neste trabalho adotou-se uma aproximação quadrática, o que requer elementos com três nós.

Considere o elemento reto da figura 4.2, onde se definem três nós.

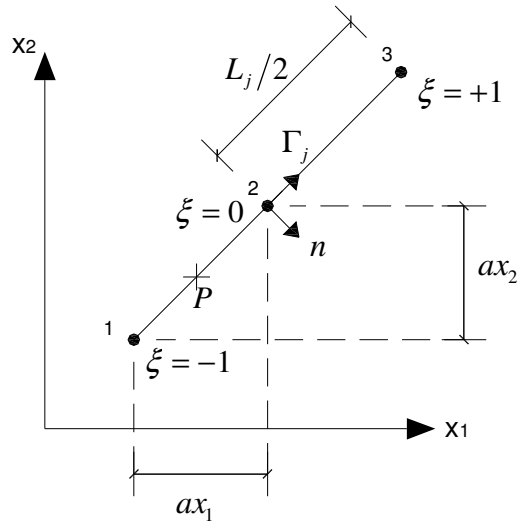


Figura 4.2 – Geometria do Elemento

onde ξ é a coordenada local adimensional; 1 é o nó inicial; 2 o nó do meio; 3 o nó final; L_j é o comprimento do elemento j ; $-1 \leq \xi \leq +1$; $-L_j/2 \leq \Gamma \leq +L_j/2$.

Quando o ponto de colocação não pertencer ao elemento que está sendo integrado, as integrais são resolvidas numericamente, por isso, é conveniente expressar a variável Γ e as coordenadas de cada ponto P em função de coordenadas locais homogêneas ξ . Da figura 4.2 pode-se deduzir que:

$$\Gamma_j = \xi \frac{L_j}{2} \quad (4.1)$$

$$X_1^P = X_1^2 + \xi ax_1 \quad (4.2.a)$$

$$X_2^P = X_2^2 + \xi ax_2 \quad (4.2.b)$$

onde: X_i^P é a coordenada na direção i do ponto P , com $i=1,2$; X_i^2 corresponde a coordenada na direção i do ponto 2 e $ax_i = (X_i^3 - X_i^1)/2$.

Convém escrever as equações (4.2) em uma única equação matricial:

$$\begin{Bmatrix} X_1^P \\ X_2^P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{g1}(P)\phi_{g2}(P) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{g1}(P)\phi_{g2}(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^1 \\ X_1^3 \\ X_2^1 \\ X_2^3 \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

onde ϕ_{gi} são as funções interpoladoras lineares, e são dadas por:

$$\phi_{g1}(P) = 0,5(1 - \xi) \quad (4.4.a)$$

$$\phi_{g2}(P) = 0,5(1 + \xi) \quad (4.4.b)$$

sendo ξ a coordenada local homogênea do ponto P .

Para o cálculo aproximado da integral ao longo do contorno ou interface Γ , faz-se a discretização do trecho em N_e elementos, a mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas homogêneas, que é obtida derivando-se da equação (4.1), e escrevendo-se a função a ser integrada em função de coordenadas homogêneas, como vê-se na equação (4.5).

$$\int_{\Gamma} F(\Gamma) d\Gamma = \sum_{j=1}^{N_e} \int_{-L_j/2}^{+L_j/2} F(\Gamma_j) d\Gamma_j = \sum_{j=1}^{N_e} \frac{L_j}{2} \int_{-1}^1 F(\xi) d\xi \quad (4.5)$$

4.2 Aproximação das Variáveis

As variáveis são aproximadas, neste trabalho, por funções polinomiais quadráticas, sendo assim, serão necessários 3 pontos nodais em cada elemento (ver figura 4.2). As funções de forma ϕ_i são definidas de tal forma que sejam iguais a um para o nó i do elemento e nulas para os demais nós, como mostrado na figura (4.3).

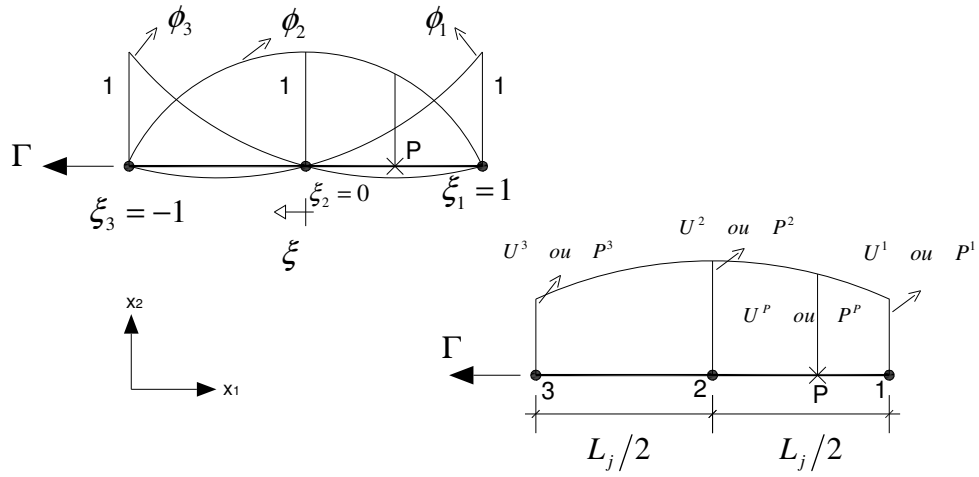


Figura 4.3 – Funções de Forma com Aproximação Quadrática das Variáveis

Expressa-se os vetores de deslocamentos $\tilde{u}$ e de esforços $\tilde{p}$ de um ponto P qualquer do elemento, da seguinte maneira:

$$\tilde{u}(P) = \tilde{\phi}^T(P) \tilde{U}^N \quad (4.6)$$

$$\tilde{p}(P) = \tilde{\phi}^T(P) \tilde{P}^N \quad (4.7)$$

ou, explicitamente:

$$\tilde{u}(P) = \begin{Bmatrix} U_1^P \\ U_2^P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(P) & 0 & \phi_2(P) & 0 & \phi_3(P) & 0 \\ 0 & \phi_1(P) & 0 & \phi_2(P) & 0 & \phi_3(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} U_1^2 \\ U_2^2 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} U_1^3 \\ U_2^3 \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\tilde{p}(P) = \begin{Bmatrix} P_1^P \\ P_2^P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(P) & 0 & \phi_2(P) & 0 & \phi_3(P) & 0 \\ 0 & \phi_1(P) & 0 & \phi_2(P) & 0 & \phi_3(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} P_1^2 \\ P_2^2 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} P_1^3 \\ P_2^3 \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

onde U_i^N e P_i^N são, respectivamente, os deslocamentos e esforços do nó N ; sendo $U_1 = w$; $U_2 = \partial w / \partial n$; $P_1 = V_n$; $P_2 = M_n$ e ϕ_i são as funções de forma quadráticas, que em sua forma geral são dadas por:

$$\phi_1(P) = \frac{\xi(\xi_3 - \xi)}{\xi_1(\xi_3 - \xi_1)} \quad (4.10.a)$$

$$\phi_2(P) = 1 - \frac{\xi_3 + \xi_1}{\xi_1 \xi_3} \xi + \frac{1}{\xi_1 \xi_3} \xi^2 \quad (4.10.b)$$

$$\phi_3(P) = \frac{\xi(\xi_1 - \xi)}{\xi_3(\xi_1 - \xi_3)} \quad (4.10.c)$$

Como mostra a figura (4.2), as coordenadas dos nós nas extremidades (ξ_1 e ξ_3) do elemento são conhecidas, com isso, as equações (4.10) resultam em:

$$\phi_1(P) = -0,5\xi(1 - \xi) \quad (4.11.a)$$

$$\phi_2(P) = 1 - \xi^2 \quad (4.11.b)$$

$$\phi_3(P) = 0,5\xi(1 + \xi) \quad (4.11.c)$$

Para casos em que haja descontinuidade nos valores das variáveis entre dois elementos adjacentes, como ocorrem nos cantos (ver figura 4.4), definem-se nós duplos, que são dois nós definidos com as mesmas coordenadas, porém com valores nodais associados independentes. Uma das maneiras de representar tal descontinuidade é mudando o ponto de colocação de lugar, ou seja, as coordenadas são recalculadas de tal forma que se torne interno ao elemento e não mais coincidente com sua extremidade. O cálculo das coordenadas do nó duplo pode ser feito a partir das equações (4.2). De acordo com Fernandes (1998), deve-se considerar $0,4 \leq |\xi| \leq 0,6$ para que se tenha um afastamento conveniente entre os nós locais do elemento, a fim de evitar problemas de singularidades no sistema de equações.

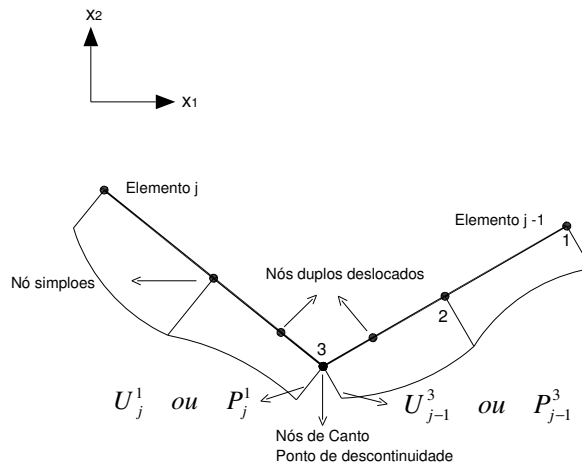


Figura 4.4 – Elementos Descontínuos

4.3 Transformação das Equações Integrais em Equações Algébricas

Através da discretização do contorno externo e interfaces em N_e elementos, nos quais as variáveis são aproximadas, transformam-se as equações integrais em equações algébricas.

Apenas por simplificação é mostrado a transformação da equação integral (3.36) em equação algébrica. A equação (3.36) é relativa ao modelo para análise de flexão simples em que as variáveis são definidas ao longo das interfaces. Para se obter as equações algébricas do modelo em que as variáveis são definidas nos eixos das vigas, o procedimento é análogo.

Para a equação do deslocamento w (equação 3.32), adotando-se:

$$\tilde{u}^*(Q, P) = \left\{ w^*(Q, P) - \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right\} \quad (4.12)$$

$$\tilde{p}^*(Q, P) = \{ V_n^*(Q, P) - M_n^*(Q, P) \} \quad (4.13)$$

$$\tilde{u}^T(P) = \{ U_1^P \quad U_2^P \} = \{ w(P) \quad w_{,n}(P) \} \quad (4.14)$$

$$\tilde{p}^T(P) = \{ P_1^P \quad P_2^P \} = \{ V_n(P) \quad M_n(P) \} \quad (4.15)$$

A mesma pode ser escrita:

$$\begin{aligned}
& K(Q)w(Q) + \sum_{j=1}^{N_s} \int_{\Gamma} \frac{D_j}{D} (p^*(Q, P) u(P)) d\Gamma(P) + \sum_{j=1}^{N_{\text{int}}} \int_{\Gamma_j} \left(\frac{D_j - D_{pa}}{D} \right) (p^*(Q, P) u(P)) d\Gamma(P) + \\
& + \sum_{i=1}^{N_{c3}} \frac{D_i}{D} R_{ci}^*(Q, P) w_{ci}(P) + \sum_{i=1}^{N_{s2}+N_{c1}} \left[\frac{D_j}{D} R_c^*(Q, P)_{\Omega_i} - \frac{D_{pa}}{D} R_c^*(Q, P)_{\Omega_{pa}} \right] w_{ci}(P) = \\
& = \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(Q, P) + \int_{\Gamma} u^*(Q, P) p(P) d\Gamma(P) + \int_{\Omega_g} (g(p) w^*(Q, p)) d\Omega_g \quad (4.16)
\end{aligned}$$

Após a discretização do contorno e substituindo as variáveis por suas aproximações em cada elemento, dadas por (4.6) e (4.7), a equação (4.16) é calculada de forma aproximada, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
& K(Q)w(Q) + \sum_{j=1}^{N_s} \frac{D_j}{D} \sum_{k=1}^{N_e} \int_{\Gamma_k} \left[(p^*(Q, P) \phi^T(P)) d\Gamma_k(P) \right] U_{\sim k}^N + \sum_{i=1}^{N_{c3}} \frac{D_i}{D} R_{ci}^*(Q, P) w_{ci}(P) + \\
& \sum_{j=1}^{N_{\text{int}}} \left(\frac{D_j - D_{pa}}{D} \right) \sum_{k=1}^{N_e} \left[\int_{\Gamma_k} p^*(Q, P) \phi^T(P) d\Gamma_k(P) \right] U_{\sim k}^N + \sum_{i=1}^{N_{s2}+N_{c1}} \frac{D_j - D_{pa}}{D} R_{cj}^*(Q, P) w_{ci}(P) = \\
& = \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(Q, P) + \sum_{k=1}^{N_e} \left[\int_{\Gamma_k} u^*(Q, P) \phi^T(P) d\Gamma(P) \right] P_{\sim k}^N + \int_{\Omega_g} (g(p) w^*(Q, p)) d\Omega_g \quad (4.17)
\end{aligned}$$

Definindo-se os seguintes vetores:

$$h_{\sim}^K(Q) = \int_{\Gamma_k} p^*(Q, P) \phi^T(P) d\Gamma_k \quad (4.18)$$

$$g_{\sim}^K(Q) = \int_{\Gamma_k} u^*(Q, P) \phi^T(P) d\Gamma_k \quad (4.19)$$

$$t(Q) = \int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q, p) d\Omega_g \quad (4.20)$$

Pode-se ainda reescrever a equação (4.17):

$$\begin{aligned}
& K(Q)w(Q) + \sum_{j=1}^{N_s} \frac{D_j}{D} \sum_{k=1}^{N_e} h^k(Q) U_{\sim k}^N + \sum_{i=1}^{N_{c3}} \frac{D_i}{D} R_{ci}^*(Q, P) w_{ci}(P) + \sum_{j=1}^{N_{int}} \left(\frac{D_j - D_{pa}}{D} \right) \sum_{k=1}^{N_e} h^k(Q) U_{\sim k}^N + \\
& + \sum_{i=1}^{N_{s2}+N_{c1}} \frac{D_j - D_{pa}}{D} R_{cj}^*(Q, P) w_{ci}(P) = \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(Q, P) + P_{\sim k}^N + \sum_{k=1}^{N_e} g^k(Q) P_{\sim k}^N \quad (4.21)
\end{aligned}$$

Considerando-se o ponto de colocação em Q , calculam-se os vetores $\{h^k(Q)\}$ e $\{g^k(Q)\}$ de todos os elementos e agrupando-se os coeficientes referentes a um mesmo valor nodal, escreve-se a equação (4.21) matricialmente:

$$\hat{K}(Q)w(Q) + \hat{H}_F(Q)U_F + \hat{H}_c(Q)w_c = \hat{G}_F(Q)P_F + \hat{G}_c(Q)R_c + T(Q) \quad (4.22)$$

onde:

- $U_F^T = \{w^1 \quad w_n^1 \quad \dots \quad w^i \quad w_n^i \quad \dots \quad w^{(N_{noc}+N_{nint})} \quad w_n^{(N_{noc}+N_{nint})}\}$ é o vetor dos valores nodais dos deslocamentos do contorno externo e das interfaces;
- $P_F^T = \{V_n^1 \quad M_n^1 \quad \dots \quad V_n^i \quad M_n^i \quad \dots \quad V_n^{N_{noc}} \quad M_n^{N_{noc}}\}$ é o vetor dos valores nodais dos esforços do contorno externo;
- $w_c^T = \{w_{c_1} \quad \dots \quad w_{c_i} \quad \dots \quad w_{c_{N_c}}\}$ é o vetor dos deslocamentos de canto;
- $R_c^T = \{R_{c_1} \quad \dots \quad R_{c_i} \quad \dots \quad R_{c_{N_c}}\}$ é o vetor das reações de canto;
- $\hat{H}_F(Q)$ é um vetor de dimensão $(1 \times 2.(N_{noc} + N_{nint}))$, $\hat{G}_F(Q)$ tem dimensão $(1 \times 2.N_{noc})$;
- $\hat{H}_c(Q)$ e $\hat{G}_c(Q)$ são vetores de dimensão $(1 \times N_{noc})$.

Sendo N_{noc} o número de nós do contorno externo, N_{nint} o número de nós nas interfaces e N_c o número de cantos.

Soma-se o valor da constante $K(Q)$, dado na tabela (3.1), á coluna referente ao deslocamento $w(Q)$ da matriz $\hat{H}_F(Q)$, se for um nó sobre o contorno externo ou uma

interface, ou à coluna da matriz $\hat{H}_c(Q)$, se for um nó de canto. Se Q for um nó duplo, deve-se escrever $w(Q)$ em função dos deslocamentos nodais através da equação (4.8). Assim, pode-se escrever a equação (4.22):

$$\underset{\sim}{H}_F(Q)\underset{\sim}{U}_F + \underset{\sim}{H}_c(Q)\underset{\sim}{w}_c = \underset{\sim}{G}_F(Q)\underset{\sim}{P}_F + \underset{\sim}{G}_c(Q)\underset{\sim}{R}_c + T(Q) \quad (4.23)$$

4.4 Integração Numérica

Utiliza-se a integração numérica quando o ponto fonte (ponto de colocação) não pertence ao elemento a ser integrado. Isto acontece sempre, por exemplo, nos casos das equações referentes a um ponto interno q ou a um ponto externo A (ver figura 4.6). Quando se escreve a equação num ponto Q sobre o contorno externo ou coincidente com um canto, faz-se integração analítica quando o ponto de colocação pertencer ao elemento a ser integrado. De acordo com Fernandes (1998), pode-se também fazer a integração numérica para casos em que a equação do ponto Q pertencer ao elemento considerado, adotando esquemas particulares de integração.

Para fazer a integração numérica é necessário que a expressão seja escrita em coordenadas homogêneas, como pode ser observado no exemplo abaixo.

Considere a equação (4.18). Fazendo-se a mudança de coordenadas a mesma pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\underset{\sim}{h}^K(Q) = \frac{L_k}{2} \int_{-1}^1 \underset{\sim}{p}^*(Q, P) \underset{\sim}{\phi}^T(P) d\xi \quad (4.24)$$

Tem-se na expressão acima, após a integração, um vetor de dimensão (1×6) , pois cada elemento possui três nós e cada nó possui duas variáveis. Considerando-se apenas um coeficiente da expressão, este é dado por:

$$h_j^{N(k)}(Q) = \frac{L_k}{2} \int_{-1}^1 p_j^*(Q, P) \phi_N(P) d\xi \quad (4.25)$$

sendo N o nó local do elemento ($N = 1, 2, 3$) onde se mede a resposta da carga unitária e j indica a natureza da resposta medida em P . Assim, $p_1^* = V_n^*$ e $p_2^* = M_n^*$, e para a integração numérica da equação (4.19), $u_1^* = w^*$ e $u_2^* = w_{,n}^*$.

Faz-se agora a integração numérica pela fórmula de quadratura de Gauss, dada pela seguinte expressão:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{N_g} f(\xi_i) W_i \quad (4.26)$$

onde:

- $f(\xi)$ é a função a ser integrada, escrita em relação à coordenada ξ ;
- N_g é o número de pontos de integração;
- ξ_i é a coordenada adimensional do ponto i de integração, definida em função do N_g ;
- W_i é o fator ponderador, também definido em função de N_g .

Para a escolha do número de pontos de integração, N_g , devem-se ser considerados quesitos como a distância entre o ponto de carregamento e o elemento a ser integrado e a precisão que se pretende obter. Nesse trabalho utiliza-se a técnica de sub-elementos para melhorar a precisão numérica. Essa técnica consiste em dividir o elemento em sub-elementos de modo que a distância entre o ponto de colocação e o ponto médio do mesmo não seja menor que o seu comprimento. Isto pode ser mais bem verificado em Fernandes (1998).

4.5 Transformação das Integrais de Domínio em Integrais de Contorno

Para a aplicação do Método dos Elementos de Contorno, é conveniente transformar as integrais de domínio $\int_{\Omega}$ em integrais de contorno $\int_{\Gamma}$. Considere um caso particular (figura 4.5) em que o carregamento esteja distribuído em uma região Ω_g , cujo contorno é definido por Γ_g .

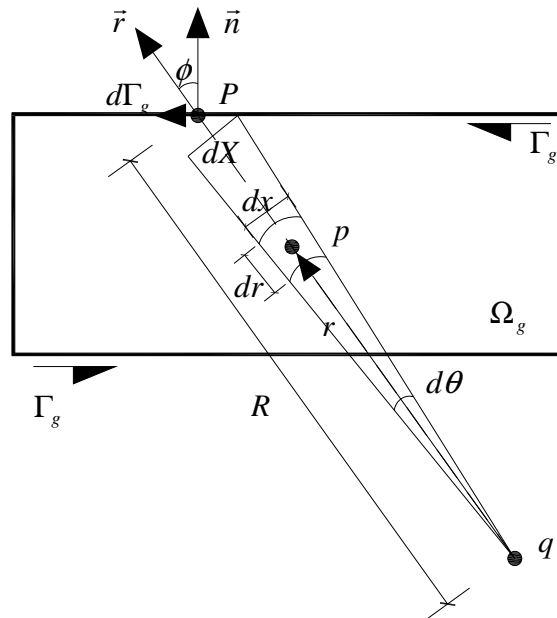


Figura 4.5 – Integração ao longo de Contorno da Região Carregada

Dessa figura, obtemos:

$$d\Omega_g = dr dx = r dr d\theta \quad (4.27)$$

$$d\theta = \frac{dX}{R} = \frac{\cos(\phi) d\Gamma_g}{R} = \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{R} d\Gamma_g \quad (4.28)$$

Relacionando as duas equações acima:

$$d\Omega_g = r dr \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{R} d\Gamma_g \quad (4.29)$$

Aplica-se agora a mudança de coordenadas obtida:

$$\int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q, p) d\Omega_g(p) = \int_{\Gamma_g} \left(\int_0^R g(p) w^*(q, p) r dr \right) \frac{r_i n_i}{R} d\Gamma_g \quad (4.30)$$

Admitindo-se que a carga $g(p)$ varie linearmente (equação 4.31) em Ω_g e considerando-se as relações entre os sistemas de coordenadas cartesianas e polares (equação 4.32), com origem em q (ver figura 3.3), obtém-se a expressão de $g(p)$ em coordenadas cilíndricas (equação 4.33).

$$g(p) = AX_1^p + BX_2^p + C \quad (4.31)$$

$$X_i^p = X_i^q + rr_{,i} \quad (i = 1, 2) \quad (4.32)$$

sendo $r_{,1} = \cos \theta$ e $r_{,2} = \sin \theta$

$$g(p) = A \cos \theta + B \sin \theta + g(q) \quad (4.33)$$

Substituindo-se as equações (4.33) e (3.24) em (4.30) e fazendo-se a integração em relação à r , obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_g} (g(p) \partial w^*(Q, P)) d\Omega_g &= \frac{g(p)}{32\pi D} \int_{\Gamma_g} R^3 \left(\ln R - \frac{3}{4} \right) (r_{,i} n_i) d\Gamma_g + \\ &+ \frac{1}{40\pi D} \int_{\Gamma_g} R^4 \left(\ln R - \frac{7}{10} \right) (A \cos \theta + B \sin \theta) (r_{,i} n_i) d\Gamma_g \end{aligned} \quad (4.34)$$

De maneira análoga, obtém-se a integral sobre a região carregada da equação da derivada de w .

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_g} \left(g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, P) \right) d\Omega_g &= -\frac{g(p)}{12\pi D} \int_{\Gamma_g} R^2 \left(\ln R - \frac{1}{3} \right) (r_{,j} m_j) (r_{,i} n_i) d\Gamma_g + \\ &- \frac{1}{16\pi D} \int_{\Gamma_g} R^3 \left(\ln R - \frac{1}{4} \right) (A \cos \theta + B \sin \theta) (r_{,j} m_j) (r_{,i} n_i) d\Gamma_g \end{aligned} \quad (4.35)$$

Assim, uma integral de domínio que esteja definida em uma equação integral qualquer a ser utilizada deste trabalho é transformada em integral de contorno, de forma análoga às integrais de domínio mostradas neste item.

4.6 Sistema de Equações

A aplicação do método dos elementos de contorno às equações integrais é feita através da transformação das mesmas em equações algébricas. Neste item é feito o sistema de equação para o caso de placas sujeitas à flexão simples e também sujeitas à flexão composta em domínios compostos, em que as variáveis são definidas nos eixos das vigas.

4.6.1 Sistema de Equações para Análise de Placas Sujetas à Flexão Simples

Nos pontos sobre o contorno externo sem vigas e também sobre os eixos das vigas têm-se duas incógnitas por ponto, portanto, para a resolução do problema é necessário escrever duas equações. Para os pontos sobre o contorno externo são escritas duas equações de w , sendo uma para o ponto Q sobre o contorno e outra para o ponto A (ver figura 4.6). Para os pontos sobre os eixos das vigas são escritas uma equação do deslocamento transversal w (equação 3.116) e outra da derivada direcional de w . Nos cantos existe apenas uma incógnita e, por isto, é escrita, para cada canto, uma equação de w .

Transformando as equações integrais em equações algébricas, as equações referentes ao deslocamento transversal w , de um ponto Q , e sua derivada, podem ser escritas de forma aproximada:

$$\begin{bmatrix} H_F(Q) & H_C(Q) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_F \\ \tilde{w}_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_F(Q) & G_C(Q) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_F \\ \tilde{R}_C \end{Bmatrix} + T(Q) \quad (4.36)$$

onde: $T(Q)$ corresponde as forças que atuam na placa; U_F contém os valores nodais dos deslocamentos do contorno externo sem vigas e dos eixos das vigas; P_F é o vetor dos valores nodais dos esforços no contorno externo sem vigas e nos eixos das vigas externas; w_c é o vetor dos deslocamentos nos cantos; R_c é o vetor as reações nos cantos; $H_F(Q)$ é resultante da integração dos esforços fundamentais (V_n^* e M_n^* ou suas derivadas) ao longo do contorno externo e interfaces; $G_F(Q)$ é obtido a partir da integração das funções w^* e $w_{,n}^*$, ou suas derivadas, ao longo do contorno externo ou eixos de vigas externas; $H_c(Q)$ e $G_c(Q)$ são vetores que traz, respectivamente, os termos relativos aos esforços fundamentais (R_c^* ou sua derivada) nos cantos e os termos referentes ao cálculo de w^* ou sua derivada nos cantos.

Escrevendo-se todas as equações necessárias para a solução do problema, obtém-se, de maneira simplificada, o seguinte sistema de equações:

$$[H]\{U\} = [G]\{P\} + \{T\} \quad (4.37)$$

Após a imposição das condições de contorno, o sistema (4.37) pode ser resolvido da seguinte maneira: inicialmente isolam-se todas as incógnitas no vetor U , trocando-se as respectivas colunas das matrizes $[H]$ e $[G]$. Com isto, essas últimas se transformam, respectivamente, em A e $\bar{G}$, e os vetores U e P se tornam, respectivamente, X e $\bar{P}$, sendo X o vetor que contém as incógnitas do problema e $\bar{P}$ aquele que traz os valores prescritos. Faz-se a multiplicação da matriz $\bar{G}$ com o vetor $\bar{P}$ e soma-se a este último o vetor T . Obtendo-se:

$$[A]\{X\} = [B] \quad (4.38)$$

4.6.2 Sistema de Equações para Análise de Placas Sujetas à Flexão Composta

Nos pontos sobre o contorno externo sem vigas, têm-se oito variáveis: u_n ; u_s ; p_n ; p_s ; w ; $w_{,n}$; V_n e M_n . Destas variáveis, quatro são dadas como condições de contorno, isto

implica na necessidade de escreverem-se quatro equações para obter a solução do problema. São elas: duas equações do deslocamento transversal w , sendo uma escrita em Q , e a segunda em A (ver figura 4.6) e uma equação relativa aos deslocamentos u_n e u_s que é obtida substituindo-se as equações (4.24) na equação (4.10).

Pode-se também, além de escreverem-se duas equações do deslocamento transversal w , sendo uma em Q e a segunda em A , escrever uma em A_1 e A_2 , como mostra a figura (4.6).

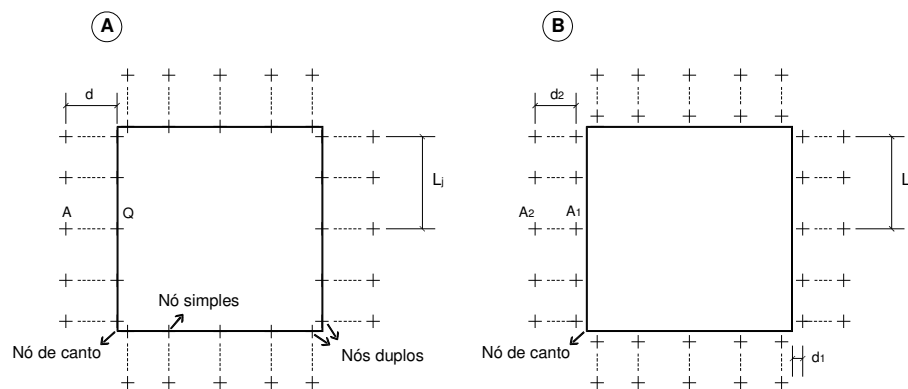


Figura 4.6 – Pontos de Colocação

onde: $d_i = a_i l_m$

Sendo l_m a média dos comprimentos dos elementos concorrentes no nó, ou se o nó for interno ao elemento, é igual ao comprimento do mesmo; $0,0001 \leq a_i \leq 1,5$ para evitar problemas numéricos e L_j o comprimento do elemento j .

Nos pontos sobre os eixos de vigas externas, têm-se dez variáveis: u_n ; u_s ; p_n ; p_s ; w ; $w_{,n}$; V_n ; M_n ; $u_{n,n}$ e $u_{s,n}$. Como nos pontos de contorno externo, quatro destas variáveis são dadas como condição de contorno. Escreve-se neste caso: uma equação do deslocamento transversal w ; uma equação de sua derivada em relação à m ; uma equação relativa aos deslocamentos u_n e u_s e, finalmente, as equações das rotações $u_{n,n}$ e $u_{s,n}$ que são obtidas derivando-se as equações referente aos deslocamentos u_n e u_s .

Para os pontos das vigas internas, têm-se oito variáveis: u_n ; u_s ; p_n ; p_s ; w ; $w_{,n}$; $u_{n,n}$ e $u_{s,n}$. Neste caso todas são incógnitas, necessitando-se escrever: uma equação do deslocamento transversal w ; uma equação relativa aos deslocamentos u_n e u_s ; uma equação

da derivada do deslocamento transversal w ; uma equação das rotações $u_{n,n}$ e $u_{s,n}$ e, ainda, uma equação relativa às forças de superfície p_n e p_s .

Nos cantos têm-se duas variáveis: w e R_c . Como uma delas é prescrita como condição de contorno, deve-se escrever apenas uma equação de w para cada canto.

Transformando as equações integrais em equações algébricas, as equações referentes ao deslocamento transversal w , de um ponto Q , e sua derivada, podem ser escritas de forma aproximada:

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_F(Q) & \tilde{H}_C(Q) & \tilde{H}_{2D}(Q) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U}_F \\ \tilde{w}_c \\ \tilde{U}_{2D} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_F(Q) & \tilde{G}_C(Q) & \tilde{G}_{2D}(Q) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{P}_F \\ \tilde{R}_c \\ \tilde{P}_{2D} \end{Bmatrix} + T_F(Q) \quad (4.39)$$

onde: $T_F(Q)$ corresponde as forças que atuam na placa; U_F contém os valores nodais dos deslocamentos do contorno externo sem vigas e dos eixos das vigas; P_F é o vetor dos valores nodais dos esforços no contorno externo sem vigas e nos eixos das vigas externas; w_c é o vetor dos deslocamentos nos cantos; R_c é o vetor as reações nos cantos; $H_F(Q)$ é resultante da integração dos esforços fundamentais (V_n^* e M_n^* ou suas derivadas) ao longo do contorno externo e interfaces; $G_F(Q)$ é obtido a partir da integração das funções w^* e $w_{,n}^*$, ou suas derivadas, ao longo do contorno externo ou eixos de vigas externas; $H_C(Q)$ e $G_C(Q)$ são vetores que trazem, respectivamente, os termos relativos aos esforços fundamentais (R_c^* ou sua derivada) nos cantos e os termos referentes ao cálculo de w^* ou sua derivada nos cantos; U_{2D} é o vetor dos deslocamentos do problema de membrana nos pontos sobre o contorno externo sem vigas e eixos de vigas; P_{2D} é o vetor das forças de superfície do problema de membrana, dos pontos sobre o contorno externo sem vigas, eixos de vigas externas e internas; $\tilde{H}_{2D}(Q)$ e $\tilde{G}_{2D}(Q)$ são as matrizes que representam a influência do problema de membrana no problema de flexão e cujos termos são obtidos da integração dos deslocamentos fundamentais $w_{,n}^*$ e $w_{,s}^*$ (ou suas derivadas) ao longo das interfaces e ao longo do contorno externo sem vigas e dos contornos longitudinais das vigas externas e internas.

De forma análoga a equação referente aos deslocamentos u_n e u_s , e a equação das rotações $u_{n,n}$ e $u_{s,n}$ podem ser escritas de maneira aproximada:

$$\begin{bmatrix} \overline{H}_F(Q) & 0 & H_{2D}(Q) \\ \sim & \sim & \sim \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_F \\ \tilde{w}_c \\ U_{2D} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & G_{2D}(Q) \\ \sim & \sim & \sim \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_F \\ \tilde{R}_C \\ P_{2D} \end{Bmatrix} + T_{2D}(Q) \quad (4.40)$$

onde: $\{0\}$ é um vetor onde todos os termos são nulos; $H_{2D}(Q)$ é o vetor do problema bidimensional cujos termos são obtidos pela integração das funções p_{kn}^* e p_{ks}^* , ou suas derivadas, ao longo do contorno externo e interfaces; $\overline{H}_F(Q)$ representa a influência do problema de flexão no problema de membrana sendo obtida pela integração das funções p_{kn}^* e p_{ks}^* , ou suas derivadas, ao longo do contorno externo e interfaces; $G_{2D}(Q)$ é o vetor do problema de membrana cujos termos são relativos à integração das funções u_{kn}^* e u_{ks}^* , ou suas derivadas, ao longo do contorno externo sem vigas ou no caso das vigas externas, seus termos são dados pela média daqueles obtidos com a integração das funções ao longo dos dois contornos longitudinais da viga; $T_{2D}(Q)$ é o termo correspondente ao carregamento no plano da placa.

Chega-se ao seguinte sistema de equações, escrevendo as equações necessárias para a resolução do problema. Após a imposição das condições de contorno obtêm-se as incógnitas nos eixos das vigas, nos cantos e no contorno da placa sem viga.

$$\begin{bmatrix} [H]_F & [H]_C & [\overline{H}]_{2D} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ [\overline{H}]_F & [0] & [H]_{2D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\}_F \\ \{w\}_C \\ \{U\}_{2D} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G]_F & [G]_C & [\overline{G}]_{2D} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ [0] & [0] & [G]_{2D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P\}_F \\ \{R\}_C \\ \{P\}_{2D} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{T\}_F \\ \text{---} \\ \{T\}_{2D} \end{Bmatrix} \quad (4.41)$$

ou de maneira simplificada:

$$[H]\{U\} = [G]\{P\} + \{T\} \quad (4.42)$$

Na equação (4.41), a parte superior das matrizes $[H]$ e $[G]$ é referente ao problema de flexão e a parte inferior ao problema de membrana.

Após a imposição das condições de contorno, resolve-se o sistema (4.42) da mesma maneira como explicado no item (4.6.1).

4.7 Exemplos Numéricos

A seguir são apresentados três exemplos numéricos, analisados através da formulação proposta nesse capítulo, desenvolvida por Fernandes (2003). Os resultados numéricos são comparados com aqueles obtidos através do software ANSYS®, onde o método numérico utilizado é o Método dos Elementos Finitos. Na análise com o ANSYS foram utilizados elementos shell para lajes e vigas, tendo sido considerada apenas flexão simples, ou seja, as vigas e placas são representadas por suas superfícies médias.

4.7.1. Placa Enrijecida por Duas Vigas

Este primeiro exemplo consta de uma placa, enrijecida por duas vigas, engastada em um de seus lados e apoiada nos demais, como mostra a figura (4.7). A altura das vigas é de $h_v = 25\text{cm}$ e a da laje é de $h_l = 10\text{cm}$. O carregamento prescrito para a análise dessa placa é dado por $q = 0,4\text{kN/cm}^2$, uniformemente distribuído em todo domínio. Foi adotado um coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$ para a placa e para as vigas. O módulo de elasticidade longitudinal admitido para essa análise foi de $E = 27000\text{kN/cm}^2$.

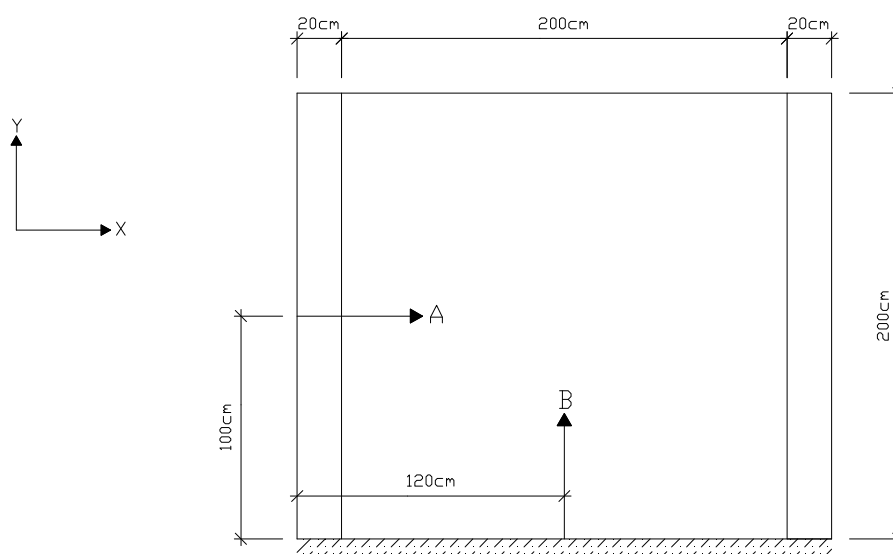


Figura 4.7 – Placa Enrijecida com Duas Vigas Externas

Fizeram-se, para este exemplo, três discretizações, sendo a última delas demonstrada na figura 4.8, onde obteve-se a convergência dos resultados logo na segunda malha. A primeira malha é composta por 16 elementos com 36 ponto nodais, a segunda por 32 elementos com 68 pontos nodais e a terceira por 48 elementos com 100 pontos nodais. Optou-se por não compará-las aqui, pois nos gráficos apresentados ocorreria sobreposição dos resultados. Foram analisados o deslocamento vertical e o momento fletor atuante no eixo *A* e *B*.

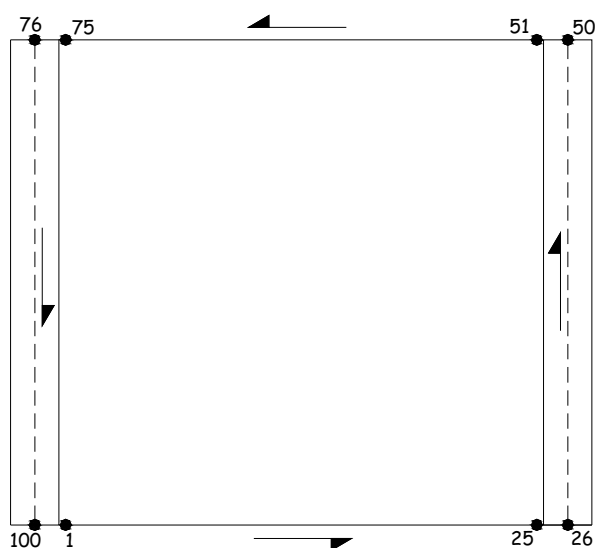


Figura 4.8 – Representação da Discretização do Primeiro Exemplo

Os resultados obtidos estão representados nas figuras (4.9) e (4.11) para o deslocamento vertical, e figuras (4.10) e (4.12) para os momentos nos eixos *A* e *B*, respectivamente. Nesses gráficos são demonstrados os resultados obtidos com a formulação apresentada nesse capítulo, considerando-se flexão simples (FS) e flexão composta (FC) e também aqueles obtidos através do software ANSYS.

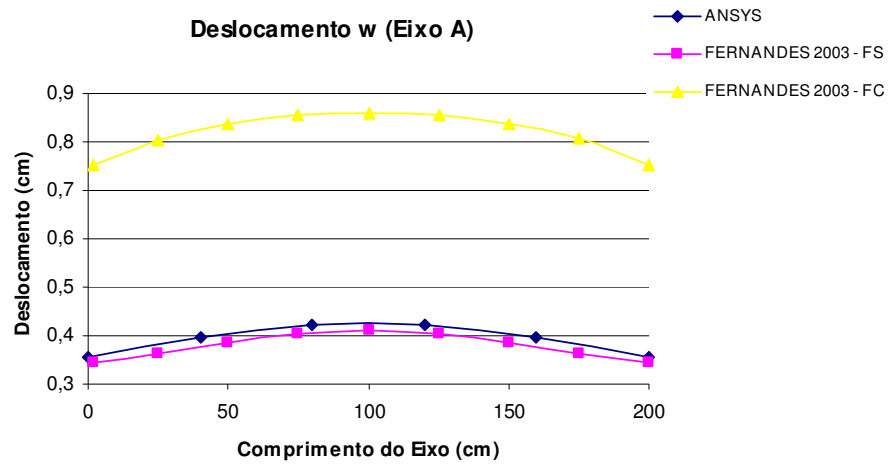


Figura 4.9 – Deslocamento no Eixo A

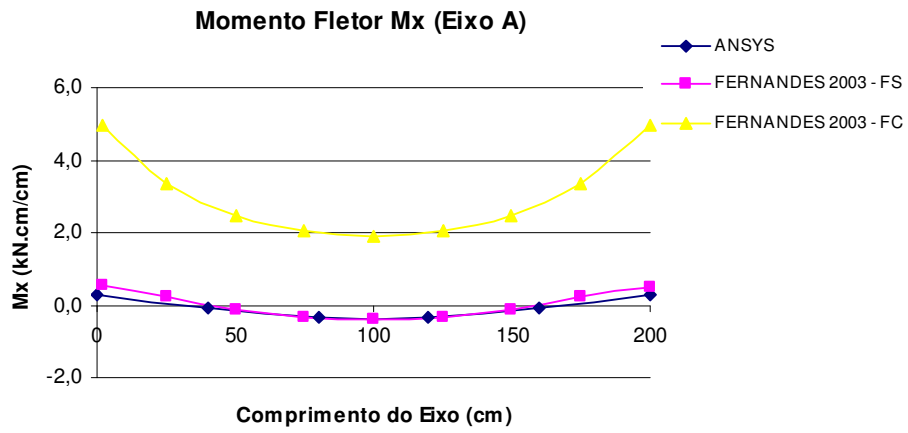


Figura 4.10 – Momento Fletor no Eixo A

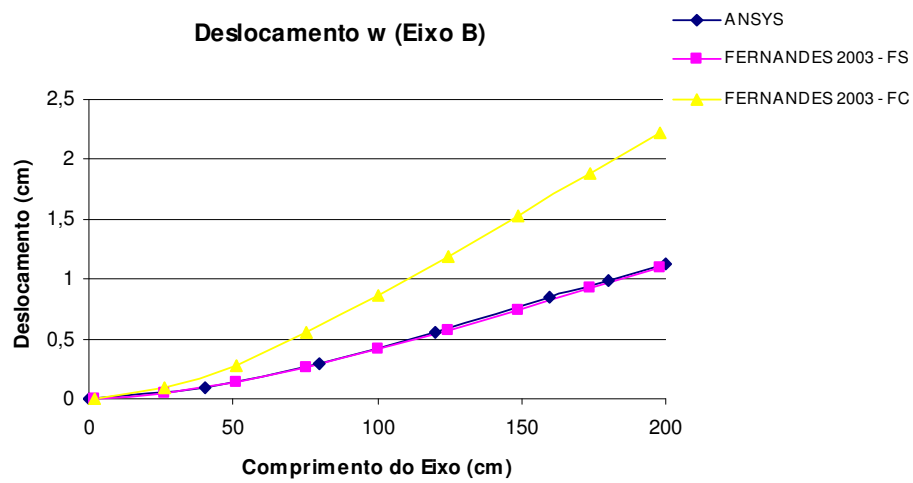


Figura 4.11 – Deslocamento no Eixo B

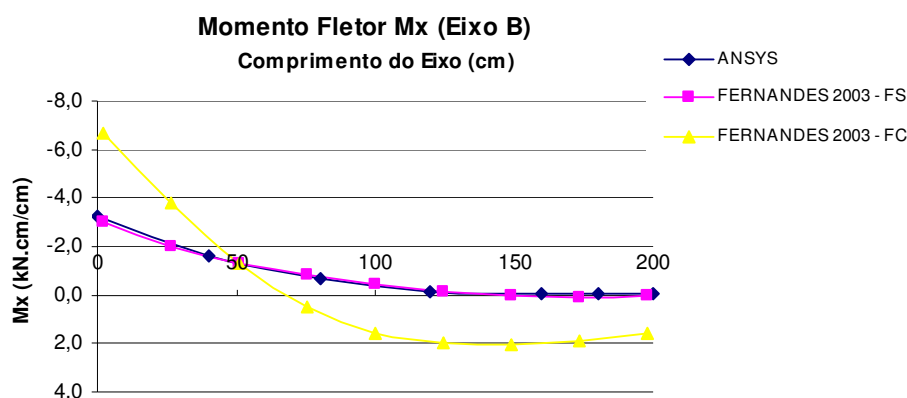


Figura 4.12 – Momento Fletor no Eixo B

Observa-se uma grande aproximação entre os resultados das análises em flexão simples utilizando-se a formulação proposta por Fernandes (2003) e do ANSYS. Devido às condições de contorno, nesse exemplo os deslocamentos da flexão composta foram praticamente o dobro da flexão simples, diferente ao que vai ocorrer no próximo exemplo, onde os deslocamentos obtidos com a flexão composta são bem menores que aqueles da flexão simples.

4.7.2. Placa Composta por 4 Vigas Externas e 1 Viga Interna

Neste exemplo é mostrado inicialmente os resultados para a análise em flexão simples. Feito isto, o pavimento é calculado no mesmo programa, porém fazendo-se uma análise de flexão composta e posteriormente os resultados são comparados com outros obtidos pelo ANSYS onde o método numérico utilizado é o Método dos Elementos Finitos.

O exemplo consta de um pavimento, todos os lados apoiados, composto por cinco vigas, sendo quatro delas externas, e duas lajes. A altura das vigas é $h_v = 20\text{cm}$ e a da laje é de $h_l = 8\text{cm}$. A carga prescrita para a análise dessa placa é dada por $q = 0,03\text{kN/cm}^2$, uniformemente distribuído em todo domínio. Foi adotado um coeficiente de Poisson $\nu = 0,25$

para a placa e para as vigas. O módulo de elasticidade admitido para essa análise foi de $E = 25000kN/cm^2$.

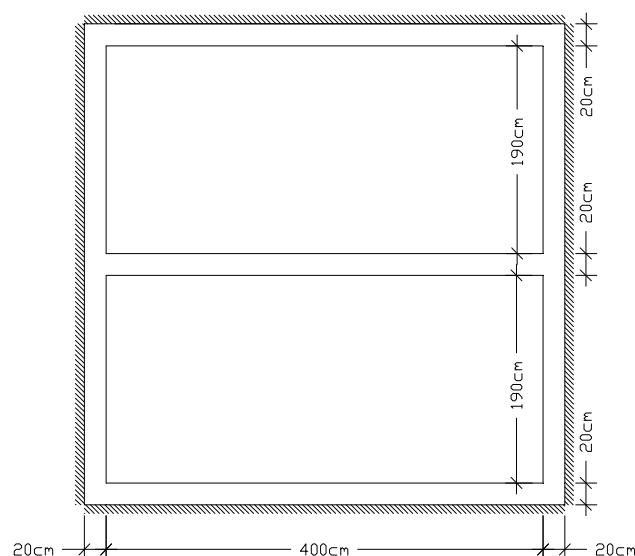


Figura 4.13 – Pavimento Composto por 5 vigas e 2 Lajes

A primeira discretização, representada pela figura (4.14), consta de 53 pontos nodais, resultando em 22 elementos. Fez-se três discretizações, sempre refinando a malha. Na segunda malha o pavimento foi discretizado em 73 pontos nodais, resultando em 32 elementos e, posteriormente, refinando-a ainda mais com 93 pontos nodais e 42 elementos.

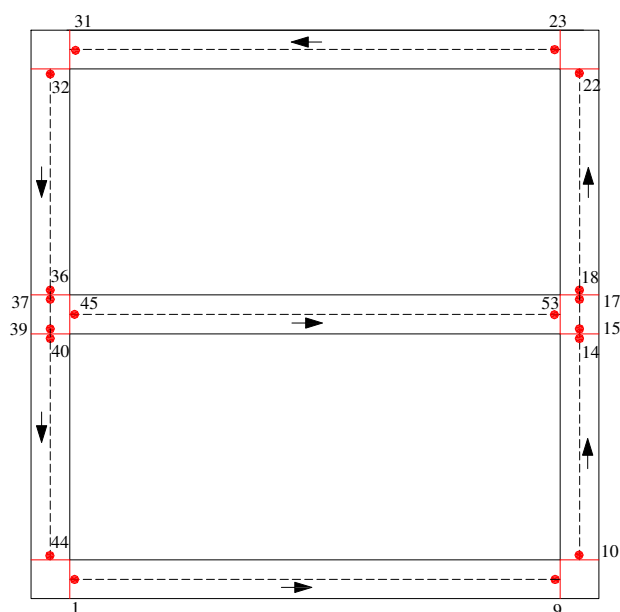


Figura 4.14 – Representação da Discretização em 22 Elementos de um Pavimento

Para este exemplo, são analisados o deslocamento vertical e o momento atuante na viga interna.

Verificou-se a obtenção de resultados satisfatórios logo na primeira malha, pois foi atingida a convergência dos resultados, visto que a diferença de resultados, tanto para deslocamento quanto para momento fletor, entre a primeira e a segunda malha foi da ordem de 1% e entre a segunda e a terceira malha a diferença entre os resultados foi da ordem de 0,2%. Como pode ser observado no gráfico abaixo:

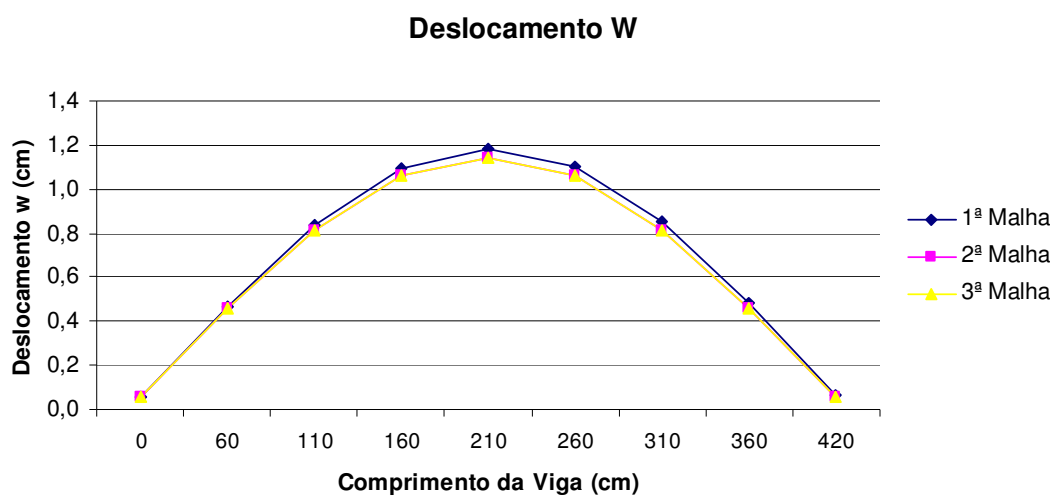


Figura 4.15 – Gráfico do Deslocamento w para 3 Malhas – Flexão Simples

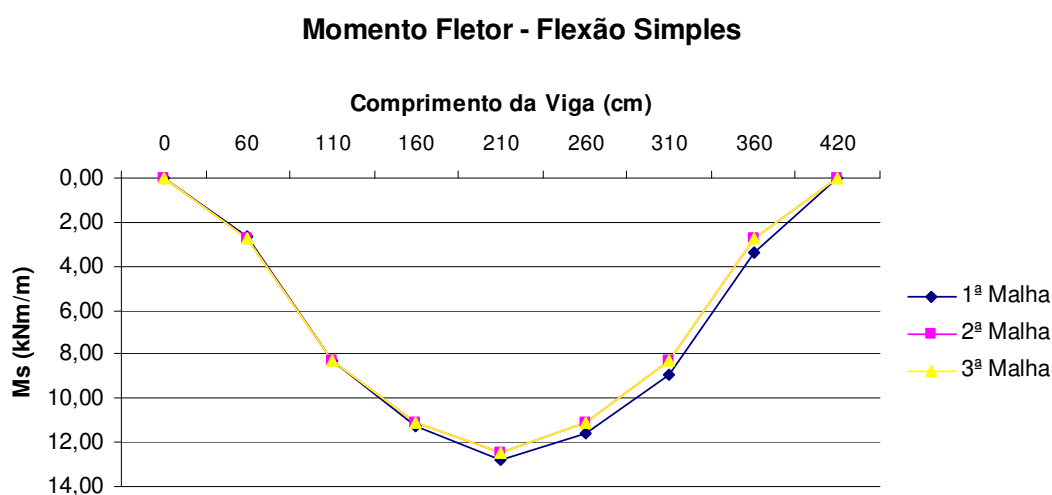


Figura 4.16 – Gráfico do Momento Ms para 3 Malhas – Flexão Simples

Abaixo estão os resultados obtidos com as formulações desenvolvidas por Fernandes (2003) para flexão composta e flexão simples (3ª Malha), sendo também apresentados os resultados de flexão simples utilizando o software ANSYS. Obteve-se, para os cálculos de deslocamento e momento fletor, os seguintes resultados:

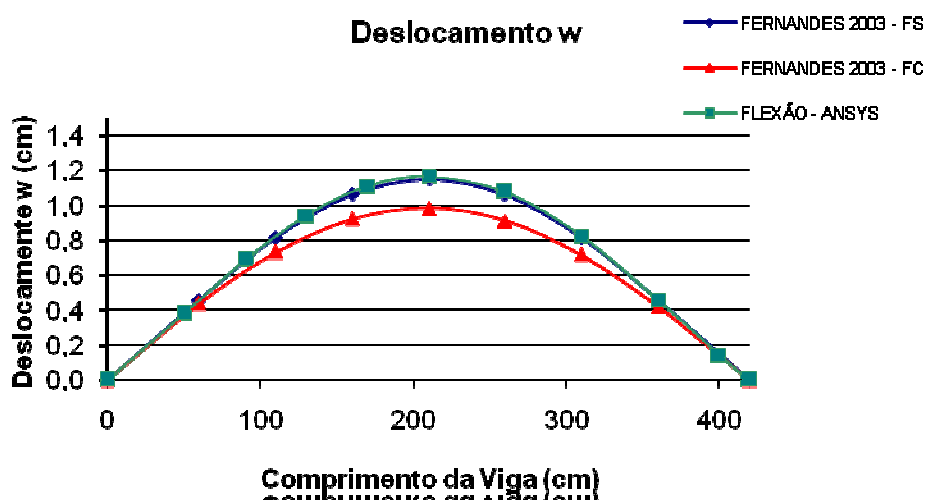


Figura 4.17 – Gráfico do Deslocamento w na Viga Interna para Diferentes Análises

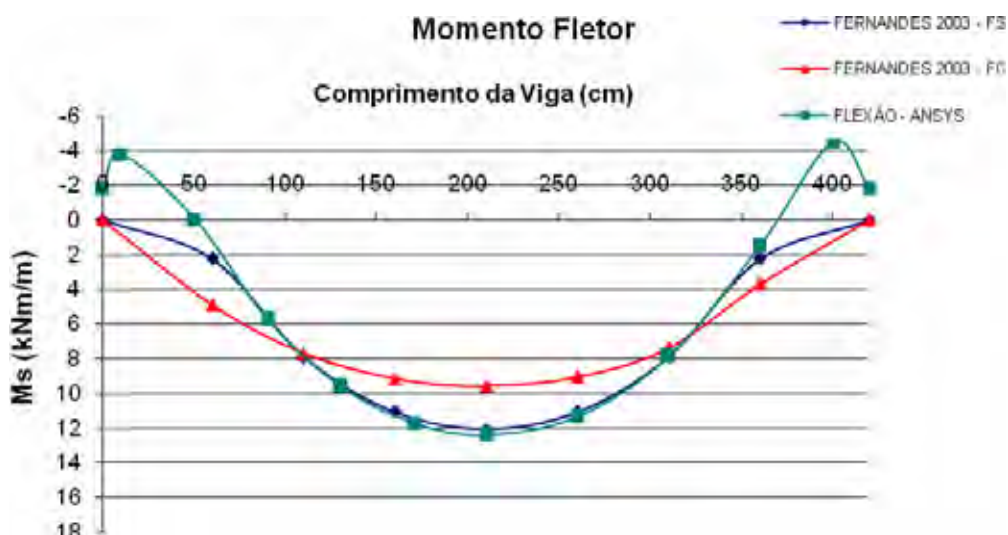


Figura 4.18 – Gráfico do Momento Ms na Viga Interna para Diferentes Análises

Observa-se que para a flexão composta resultados foram menores que os de flexão simples, como era esperado, devido em parte aos momentos que aparecem na viga resultante da multiplicação das forças de membrana com a distância entre a superfície média da viga e a

superfície de referência. Observa-se também a obtenção de resultados próximos em flexão simples, no programa desenvolvido por Fernandes (2003) e pelo ANSYS.

4.7.3. Placa Quadrada Apoiada em seu Contorno

Os principais quesitos da escolha deste exemplo são a comparação com resultados obtidos analiticamente e também com a formulação proposta por Paiva (1987). Ele consiste em uma placa quadrada apoiada, em seu contorno, em vigas elásticas e rigidamente apoiada em seus cantos. Por ter sido apresentado seu resultado obtido analiticamente, Paiva (1987) trabalhou com uma relação em função do comprimento a , de uma placa quadrada, e do carregamento q . Neste trabalho é adotado para este exemplo um comprimento $a = 220\text{cm}$, carregamento $q = 0,20\text{kN/cm}^2$ e $\nu = 0,25$. De acordo com Paiva, deve ser considerado que todas as vigas tenham $I_i = 5a.D/E_v$, sendo D a rigidez da placa e E o módulo de elasticidade da viga. Para os resultados abaixo, foram adotados: altura das vigas $h_v = 0,31\text{m}$; largura das vigas $l_v = 0,20\text{m}$ e o módulo de elasticidade $E = 25000\text{kN/cm}^2$ para lajes e vigas.

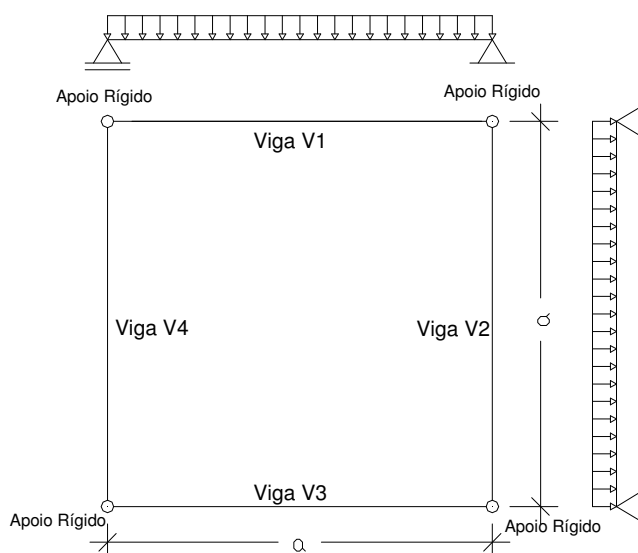


Figura 4.19 – Placa Apoiada em Vigas Elásticas

Os resultados apresentados foram obtidos fazendo um refinamento da malha até uma convergência satisfatória dos mesmos, ou seja, com variação menor que 2%. Para a obtenção

dos resultados finais o pavimento foi discretizado em 84 pontos de contorno resultando em 40 elementos, como mostra a figura (4.20). A primeira malha foi discretizada em 36 pontos de contorno resultando em 16 elementos e a segunda em 68 pontos resultando em 32 elementos.

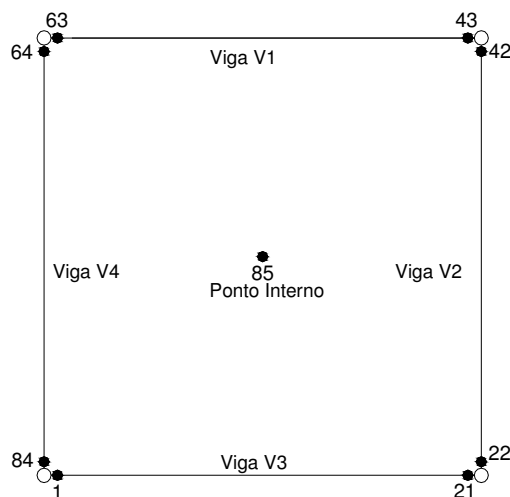


Figura 4.20 – Placa Apoiada em Vigas Elásticas

O objetivo deste item é de, principalmente, comparar os resultados obtidos com as formulações propostas por Fernandes (2003) com outros obtidos analiticamente e/ou com outras formulações.

Para a análise em flexão simples, no ponto interno, obtiveram-se os seguintes resultados:

Tabela 4.1 – Valores dos Deslocamentos em Um Ponto Interno

	Formulação M.E.C PAIVA (1987)	Solução Analítica	FERNANDES (2003)
$w \text{ (cm)}$	0,4775	0,4426	0,5261
$M_x \text{ (kN.m)}$	25,85	23,91	21,40
$M_y \text{ (kN.m)}$	25,85	23,91	21,40

Os valores obtidos são para um ponto interno localizado no centro da placa. De acordo com Paiva (1987), a diferença entre os valores teóricos e os numéricos obtidos por ele, se

deve ao reduzido número de termos da série utilizado para a obtenção dos resultados analíticos.

Pode-se observar uma diferença considerável entre os resultados obtidos por Paiva (1987) e pela formulação de Fernandes (2003). Isso se deve principalmente à diferença de análise onde no primeiro é analisada uma placa de eixo a eixo da viga, e para o segundo a análise é feita considerando as dimensões reais dos elementos, ou seja, as lajes são definidas de face a face de viga. Portanto, não era esperada uma convergência dos resultados para ambos os modelos, contudo observa-se também a coerência dos resultados obtidos, quando comparados com a solução analítica.

5. CONSIDERAÇÃO DE PILARES NA FORMULAÇÃO DO PAVIMENTO SUJEITO À FLEXÃO COMPOSTA

Neste capítulo são feitas as inclusões de pilares nas formulações de um pavimento sujeito à flexão simples e composta. Com a consideração de pilares no domínio da placa em sub-regiões, haverá condições de vinculação nas interfaces placa-pilar. Com isso, as equações integrais serão generalizadas para prever a existência de pontos de domínio, onde se tem prescrição de carregamento. A inclusão dos pilares também poderia ser feita prescrevendo-se deslocamentos nulos na interface placa-pilar (PAIVA 1987), porém esse caso não será considerado nesse trabalho.

Inicialmente é feita a associação de uma placa com uma estrutura qualquer sendo posteriormente, esta, particularizada para uma associação de uma placa com um pilar. Por simplicidade, são mostradas as equações integrais relativas ao problema de flexão em que as variáveis são definidas nas interfaces (ver itens 3.1 e 3.2). Porém, é importante lembrar que nesse trabalho são implementados apenas os modelos alternativos, em que as variáveis são definidas nos eixos das vigas (ver item 3.3). E finalmente serão apresentados alguns exemplos numéricos cujos resultados são comparados com outros modelos existentes na literatura científica.

5.1 Associação da Placa com uma Estrutura Qualquer

5.1.1 Equação integral dos deslocamentos

Para analisar a associação de uma placa com uma estrutura qualquer, além do carregamento transversal g definido no sub-domínio Ω_g e das cargas $(b_n$ e $b_s)$ no plano de uma estrutura definidas no sub-domínio Ω_b , considera-se também que a estrutura esteja sujeita à carga transversal g_p uniformemente distribuída no sub-domínio Ω_p (ver figura 5.1), e às cargas b_{xp} e b_{yp} uniformemente distribuídas ao longo de linhas de carga definidas dentro

do sub-domínio Ω_p , que seriam os sub-domínios referentes às interfaces de contato de uma placa com uma outra estrutura qualquer. A carga b_{xp}^- seria aplicada ao longo do eixo $\bar{y}$ e b_{yp}^- sobre o eixo $\bar{x}$ (ver também, figura 5.9). Essas cargas g_p , b_{xp}^- e b_{yp}^- podem ser interpretadas tanto como carregamentos quaisquer prescritos na estrutura ou como reações incógnitas das interfaces placa-estrutura.

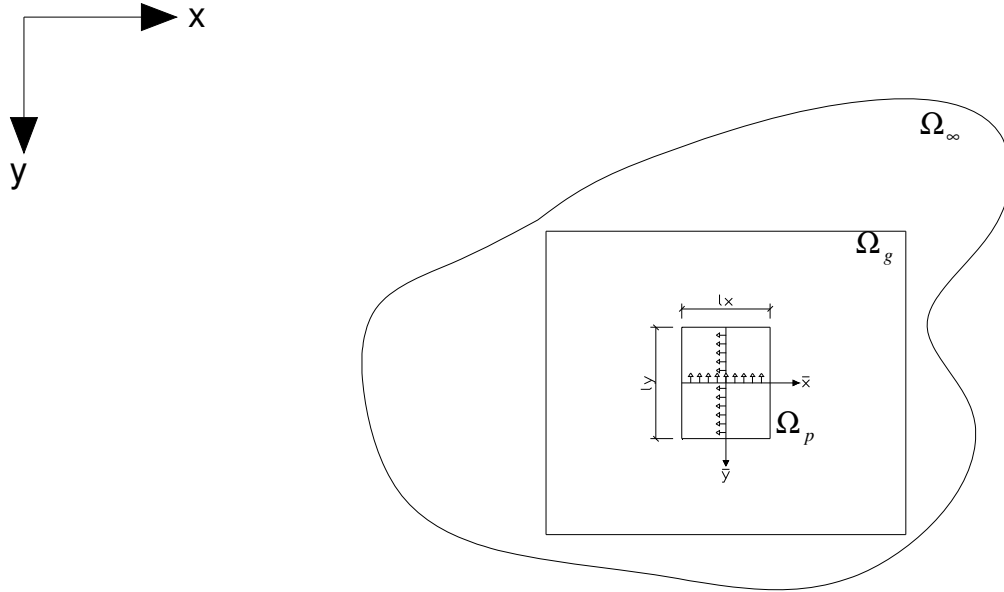


Figura 5.1 – Associação de uma Estrutura Qualquer com uma Placa com um sub-domínio

Seja o problema de flexão simples de uma placa em sub-regiões, cujas equações foram deduzidas no item (3.1). Considerando-se a associação da placa com uma estrutura qualquer, a equação integral de deslocamento para um ponto sobre o contorno (equação 3.36) se torna:

$$\begin{aligned}
 K(Q)w(Q) = & \sum_{i=1}^{N_s} \frac{D_i}{D} \int_{\Gamma_i} \left(M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) - V_n^*(Q, P) w(P) \right) d\Gamma(P) + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_{int}} \int_{\Gamma_{ja}} \left(\frac{D_j - D_a}{D} \right) \left(M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) - V_n^*(Q, P) w(P) \right) d\Gamma_j(P) + \\
 & - \sum_{i=1}^{N_{c3}} \frac{D_i}{D} R_{ci}^*(Q, P) w_{ci}(P) - \left(\frac{D_j - D_a}{D} \right) \sum_{i=1}^{N_{c1} + N_{c2}} R_{cj}^*(Q, P) w_{ci}(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(Q, P) + \\
 & + \int_{\Gamma} \left(V_n(P) w^*(Q, P) - M_{nn}(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_s} c_i \int_{\Gamma_i} [p_n(P) w_{,n}^*(Q, P) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + p_s(P)w_{,s}^*(q,P)]d\Gamma_i + \sum_{j=1}^{N_{\text{int}}} (c_j - c_a) \int_{\Gamma_{ja}} [p_n(P)w_{,n}^*(q,P) + p_s(P)w_{,s}^*(q,P)]d\Gamma_{ja} + \\
& + \int_{\Omega_g} (g(p)w^*(Q,p))d\Omega_g(p) - \sum_{i=1}^{N_s} c_i \int_{\Omega_b} [b_n(p)w_{,n}^*(Q,p) + b_s(p)w_{,s}^*(Q,p)]d\Omega_b \\
& - \sum_{i=1}^{N_p} \int_{\Gamma_y^-} [b_{xpi}^-(p)w_{,x}^*(Q,p)]d\Gamma_{ypi}^- - \sum_{i=1}^{N_p} \int_{\Gamma_x^-} [b_{yp_i}^-(p)w_{,y}^*(Q,p)]d\Gamma_{xpi}^- + \\
& + \sum_{i=1}^{N_p} \int_{\Omega_{pi}} g_{pi}(p)w^*(Q,p)d\Omega_{pi} \tag{5.1}
\end{aligned}$$

onde N_p é o número de sub-domínios com carregamentos g_p , b_{xp}^- e b_{yp}^- prescritos ou no caso a ser tratado aqui, seria o número de pilares; Γ_x^- é a linha de carga definida na direção $\bar{x}$ e sobre a qual está aplicada a carga b_y^- ; Γ_y^- é a linha de carga definida na direção $\bar{y}$ e sobre a qual está aplicada a carga b_x^- .

Tomando-se agora a equação integral de deslocamento para o problema bidimensional (equação 3.96), para a associação de uma placa com uma estrutura qualquer a equação de deslocamento será dada por:

$$\begin{aligned}
& K_k(Q)u_k(Q) + K_{wk}(Q)w_{,k}(Q) = - \sum_{i=1}^{N_s} \frac{\bar{E}_i}{\bar{E}} \int_{\Gamma_i} (u_n(P)p_{kn}^*(Q,P) + u_s(P)p_{ks}^*(Q,P))d\Gamma + \\
& - \sum_{i=1}^{N_{\text{int}}} \frac{(\bar{E}_j - \bar{E}_a)}{\bar{E}} \int_{\Gamma_{ja}} (u_n(P)p_{kn}^*(Q,P) + u_s(P)p_{ks}^*(Q,P))d\Gamma_j + \\
& + \sum_{i=1}^{N_s} \frac{\bar{E}_i}{\bar{E}} \int_{\Gamma_i} (p_{kn}^*(Q,P)w_{,n}(P) + p_{ks}^*(Q,P)w_{,s}(P))d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma} (u_{kn}^*(Q,P)p_n(P) + u_{ks}^*(Q,P)p_s(P))d\Gamma + \int_{\Omega_b} (u_{kn}^*(Q,P)b_n(p) + u_{ks}^*(Q,P)b_s(p))d\Omega_b + \\
& + \sum_{i=1}^{N_{\text{int}}} \frac{(\bar{E}_j c_j - \bar{E}_a c_a)}{\bar{E}} \int_{\Gamma_{ja}} (p_{kn}^*(Q,P)w_{,n}(P) + p_{ks}^*(Q,P)w_{,s}(P))d\Gamma_j + \\
& + \sum_{i=1}^{N_p} \int_{\Gamma_y^-} [b_{xpi}^-(p)u_{kx}^*(Q,p)]d\Gamma_{ypi}^- + \sum_{i=1}^{N_p} \int_{\Gamma_x^-} [b_{yp_i}^-(p)u_{ky}^*(Q,p)]d\Gamma_{xpi}^- \quad K = l, m \tag{5.2}
\end{aligned}$$

5.1.2 Sistema de Equações

Considere que uma estrutura qualquer esteja ligada à uma placa por n pontos discretos, através dos quais é feita a interação entre as duas estruturas. Na figura (5.2a) estão representados os esforços que a estrutura genérica aplica na placa no ponto de ligação i e na figura (5.2b) têm-se os esforços que a placa aplica sobre a estrutura genérica. Interpretando os esforços da interface entre as estruturas, representados na figura (5.2), como carregamentos externos aplicado à placa em sub-regiões, chega-se ao seguinte sistema de equações para flexão composta, considerando-se o modelo alternativo:

$$\begin{bmatrix} [H]_F & [H]_C & [\bar{H}]_{2D} \\ \hline [\bar{H}]_F & [0] & [H]_{2D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\}_F \\ \{w\}_C \\ \{U\}_{2D} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G]_F & [G]_C & [\bar{G}]_{2D} & [G_F]_P & [\bar{G}_{2D}]_P \\ \hline [0] & [0] & [G]_{2D} & [0] & [G_{2D}]_P \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P\}_F \\ \{R\}_C \\ \{P\}_{2D} \\ \{P_F\}_P \\ \{P_{2D}\}_P \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{T\}_F \\ \hline \{T\}_{2D} \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

sendo: $\{P_F\}_P$ o vetor dos esforços de flexão nos pontos de ligação das duas estruturas, sendo eles: m_{xi} , m_{yi} e R_i ; $\{P_{2D}\}_P$ o vetor dos esforços de membrana nos pontos de ligação das duas estruturas, sendo eles: N_{xi} , N_{yi} .

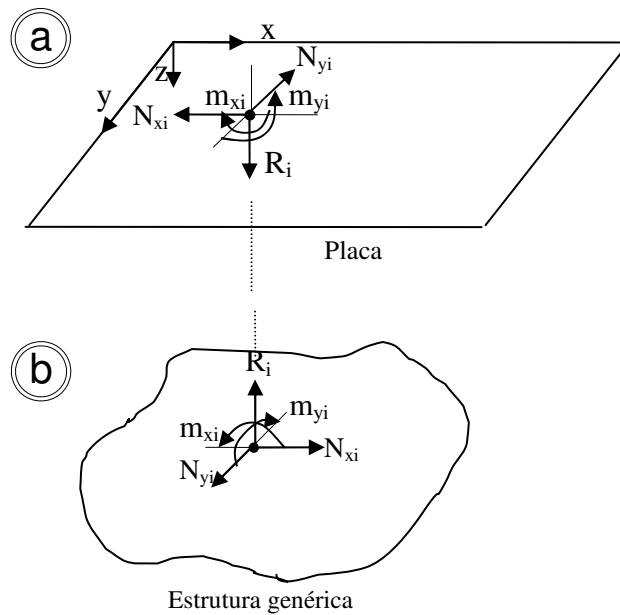


Figura 5.2 – Associação da Placa com uma Estrutura Qualquer

Os esforços $\{P_F\}_P$ e $\{P_{2D}\}_P$ referentes à placa se relacionam com os deslocamentos correspondentes $\{U_F\}_G$ e $\{U_{2D}\}_G$ da estrutura genérica através da seguinte relação:

$$\begin{Bmatrix} \{P_F\}_P \\ \{P_{2D}\}_P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_1]_G & [K_2]_G \\ [K_3]_G & [K_4]_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_F\}_G \\ \{U_{2D}\}_G \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

onde $[K]_G = \begin{bmatrix} [K_1]_G & [K_2]_G \\ [K_3]_G & [K_4]_G \end{bmatrix}$ é a matriz de rigidez desta estrutura genérica.

Como $\{U_F\}_G = \{U_F\}_P$ e $\{U_{2D}\}_G = \{U_{2D}\}_P$, sendo $\{U_F\}_P$ e $\{U_{2D}\}_P$ os deslocamentos nesses pontos referentes à placa, tem-se que:

$$\begin{Bmatrix} \{P_F\}_P \\ \{P_{2D}\}_P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_1]_G & [K_2]_G \\ [K_3]_G & [K_4]_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_F\}_P \\ \{U_{2D}\}_P \end{Bmatrix} \quad (5.5)$$

Substituindo (5.5) em (5.3), chega-se à:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [H]_F & [H]_C & [\bar{H}]_{2D} \\ \hline [\bar{H}]_F & [0] & [H]_{2D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\}_F \\ \{w\}_C \\ \{U\}_{2D} \end{Bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} [G]_F & [G]_C & [\bar{G}]_{2D} & [G_F]_P[K_1]_G + [\bar{G}_{2D}]_P[K_3]_G & [G_F]_P[K_2]_G + [\bar{G}_{2D}]_P[K_4]_G \\ \hline [0] & [0] & [G]_{2D} & [G_{2D}]_P[K_3]_G & [G_{2D}]_P[K_4]_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P\}_F \\ \{R\}_C \\ \{P\}_{2D} \\ \{U_F\}_P \\ \{U_{2D}\}_P \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{Bmatrix} \{T\}_F \\ \hline \{T\}_{2D} \end{Bmatrix} \quad (5.6) \end{aligned}$$

Ou ainda, colocando todos os deslocamentos no primeiro membro da equação (5.6), essa pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} [H]_F & [H]_C & [\bar{H}]_{2D} & -[G_F]_P[K_1]_G - [\bar{G}_{2D}]_P[K_3]_G & -[G_F]_P[K_2]_G - [\bar{G}_{2D}]_P[K_4]_G \\ \hline [\bar{H}]_F & [0] & [H]_{2D} & -[G_{2D}]_P[K_3]_G & -[G_{2D}]_P[K_4]_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\}_F \\ \{w\}_C \\ \{U\}_{2D} \\ \{U_F\}_P \\ \{U_{2D}\}_P \end{Bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} [G]_F & [G]_C & [\bar{G}]_{2D} \\ \hline [0] & [0] & [G]_{2D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P\}_F \\ \{R\}_C \\ \{P\}_{2D} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{T\}_F \\ \{T\}_{2D} \end{Bmatrix} \quad (5.7)
\end{aligned}$$

Porém, para se obterem as incógnitas do problema, deve-se acrescentar ao sistema (5.7) as 5 equações dos deslocamentos que devem ser escritas em cada ponto da interface entre as duas estruturas. Fazendo-se isso, chega-se à equação (5.8), onde a terceira e a quarta linha do sistema são referentes, respectivamente, às equações de flexão e do problema bidimensional, escritas nos pontos da interface entre as duas estruturas.

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} [H]_F & [H]_C & [\bar{H}]_{2D} & -[G_F]_P[K_1]_G - [\bar{G}_{2D}]_P[K_3]_G & -[G_F]_P[K_2]_G - [\bar{G}_{2D}]_P[K_4]_G \\ \hline [\bar{H}]_F & [0] & [H]_{2D} & -[G_{2D}]_P[K_3]_G & -[G_{2D}]_P[K_4]_G \\ \hline [H']_F & [H']_C & [\bar{H}']_{2D} & [I] - [G'_F]_P[K_1]_G - [\bar{G}'_{2D}]_P[K_3]_G & -[G'_F]_P[K_2]_G - [\bar{G}'_{2D}]_P[K_4]_G \\ \hline [\bar{H}']_F & [0] & [H']_{2D} & -[G'_{2D}]_P[K_3]_G & [I] - [G'_{2D}]_P[K_4]_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\}_F \\ \{w\}_C \\ \{U\}_{2D} \\ \{U_F\}_P \\ \{U_{2D}\}_P \end{Bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} [G]_F & [G]_C & [\bar{G}]_{2D} \\ \hline [0] & [0] & [G]_{2D} \\ \hline [G']_F & [G']_C & [\bar{G}']_{2D} \\ \hline [0] & [0] & [G']_{2D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P\}_F \\ \{R\}_C \\ \{P\}_{2D} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{T\}_F \\ \{T\}_{2D} \\ \{T'\}_F \\ \{T'\}_{2D} \end{Bmatrix} \quad (5.8)
\end{aligned}$$

Com a solução do sistema (5.8) são conhecidos todos os valores nodais incógnitos do contorno externo sem vigas, eixos de vigas e cantos, assim como os valores dos deslocamentos nos pontos de interface entre as duas estruturas. Substituindo-se os valores de

$\{U_F\}_p$ e $\{U_{2D}\}_p$ na equação (5.4), obtêm-se os esforços $\{P_F\}_p$ e $\{P_{2D}\}_p$. A partir desses valores pode-se conhecer o valor do deslocamento ou esforço em qualquer ponto interno da placa, sendo que nesse caso as reações nos pontos de interface entre as duas estruturas são consideradas como carregamento externo. O deslocamento $w(q)$ em um ponto interno q é dado por:

$$w(q) = -[H^*]_F \{U\}_F - [H^*]_C \{w\}_C - [\bar{H}^*]_{2D} \{U\}_{2D} + [G^*]_F \{P\}_F + \\ + [G^*]_C \{R\}_C + [\bar{G}^*]_{2D} \{P\}_{2D} + [G_F^*]_p \{P_F\}_p + [\bar{G}_{2D}^*]_p \{P_{2D}\}_p + T^* \quad (5.9)$$

Os deslocamentos no plano da placa, de um ponto interno, são dados por:

$$u_K(q) = -[\bar{H}^*]_F \{U\}_F - [H^*]_{2D} \{U\}_{2D} + [G^*]_{2D} \{P\}_{2D} + [G_{2D}^*]_p \{P_{2D}\}_p + T_{2D}^* \quad (5.10)$$

5.2 Inclusão de Pilares no Modelo de Flexão Simples

Neste item particularizar-se-á a formulação genérica desenvolvida no item (5.1) para o caso da associação da placa com o pilar em problemas de flexão simples.

Neste caso a inclusão de pilares na formulação do MEC para placas em sub-regiões será feita escrevendo-se os esforços de flexão que o pilar causa na placa em termos da tensão normal à seção transversal do pilar. Na equação integral da placa essa tensão normal será então considerada como carregamento transversal externo uniformemente distribuído no sub-domínio de contato do pilar com a placa.

5.2.1 Tensão Normal na Interface Placa-Pilar

No centro de gravidade (CG) da seção do pilar têm-se os seguintes esforços de flexão: o esforço normal e os momentos nas direções x e y . Considere inicialmente que o pilar esteja sujeito apenas aos momentos nas direções x e y . Para que a tensão normal devida aos

momentos (σ_z^M) na seção de contato da placa com o pilar possa ser calculada usando a fórmula de flexão elástica deduzida para barras simétricas, o vetor momento deve ser dirigido segundo as direções dos eixos principais. Assim, definindo-se o sistema local de coordenadas cartesianas ($\bar{x}, \bar{y}$), relativo às direções principais de inércia da seção transversal do pilar (ver figura 5.3) e determinando o vetor momento nesse sistema, o pilar fica sujeito aos seguintes momentos: $M_{\bar{x}}$ e $M_{\bar{y}}$.

Para determinar a distribuição de tensão no pilar devido a esses momentos, admite-se a seguinte hipótese da teoria de flexão: a seção do pilar em contato com a placa, sujeita à ação de um momento M na direção $\bar{x}$ ou $\bar{y}$, permanece plana após a deformação, sofrendo apenas rotações (ver figura 5.4a). Nesse caso, a rotação nessa seção é constante e igual a $w_{P,\bar{x}}$, que corresponde ao valor no CG. Portanto, a deformação de flexão devido ao momento (ε_z^M) na direção z normal à seção transversal, varia linearmente a partir do eixo neutro, o qual deve passar pelo centróide da seção. Consequentemente, a tensão normal de flexão σ_z^M também varia linearmente (ver figura 5.4b, para o caso em que $M = M_{\bar{x}}$). Nesse caso, tem-se que as tensões normais σ_x^M e σ_y^M são nulas, tendo-se apenas $\sigma_z^M \neq 0$.

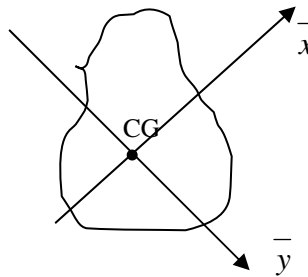


Figura 5.3 – Sistema Local de Coordenadas Coincidentes com as Direções Principais no Pilar

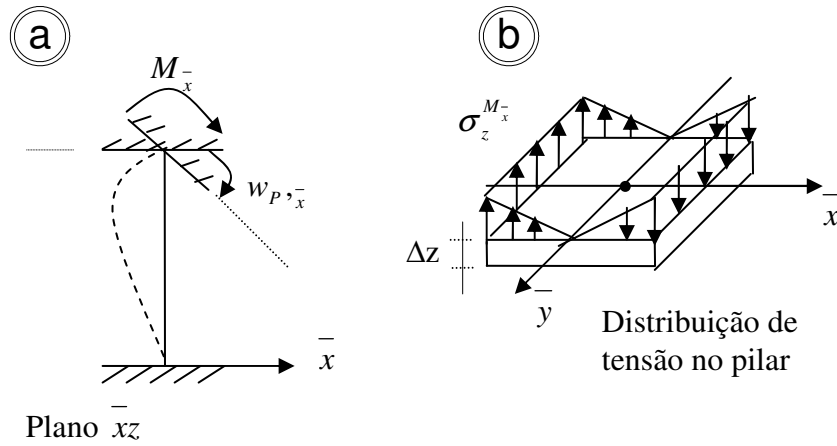


Figura 5.4 – Seção do Pilar Sujeita à Ação do Momento M_x^-

Assim, para o caso em que $M = M_x^-$, a tensão normal $\sigma_z^{M_x^-}$ é dada por:

$$\sigma_z^{M_x^-} = -\frac{M_x^-}{I_y^-} \bar{x} \quad (5.11)$$

onde I_y^- o momento principal de inércia em relação ao eixo $\bar{y}$.

Observe que o valor da tensão $\sigma_z^{M_x^-}$ é negativo, pois causa tração no lado $\bar{x} < 0$ e compressão em $\bar{x} > 0$ do plano $\bar{z}\bar{x}$ do pilar.

Considerando-se agora que exista apenas um momento M_y^- atuando nessa seção (ver figura 5.5), a tensão normal correspondente é:

$$\sigma_z^{M_y^-} = -\frac{M_y^-}{I_x^-} \bar{y} \quad (5.12)$$

onde I_x^- é o momento principal de inércia em relação ao eixo $\bar{x}$.

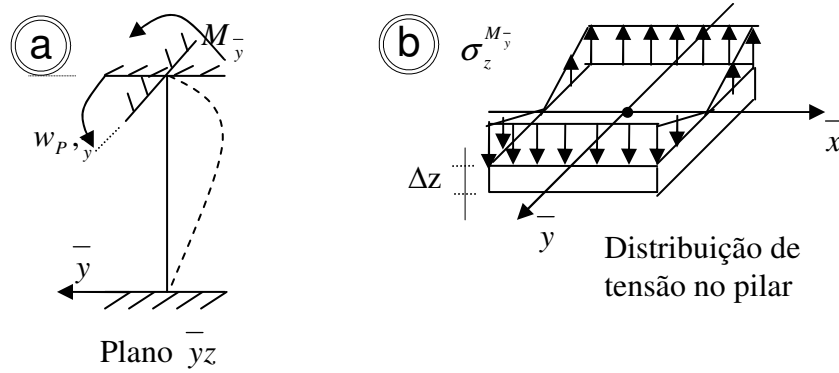


Figura 5.5 – Seção do Pilar sujeita à ação do momento M_y^-

No caso da seção estar sujeita à ação de momentos M_x^- e M_y^- , a distribuição total da tensão normal σ_z^M é obtida fazendo-se a superposição dos dois casos anteriores, resultando em:

$$\sigma_z^M = -\frac{M_y^-}{I_x^-} y - \frac{M_x^-}{I_y^-} x \quad (5.13)$$

Considere-se agora que além dos momentos, o pilar esteja também sujeito à força normal R que atua no CG da seção de interface placa-pilar, conforme mostra a figura (5.6). Essa força provoca também uma tensão normal dada por:

$$\sigma_z^R = -\frac{R}{A_p} \quad (5.14)$$

onde A_p é a área da seção transversal do pilar e o valor da tensão é negativo, pois provoca compressão no pilar.

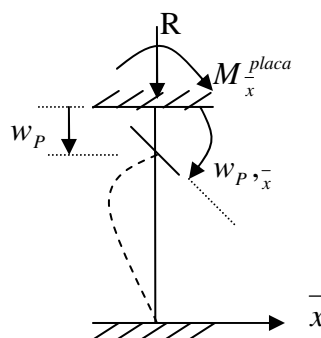


Figura 5.6 - Conjunto placa-pilar nas Posições Inicial e Deformada

A distribuição total da tensão normal σ_z^P na interface placa-pilar é obtida superpondo a distribuição uniforme de tensão, que corresponde ao caso da força normal centrada, com a distribuição linear de tensão, provocada pela flexão dos momentos (ver figura 5.7), ou seja:

$$\sigma_z^P = \sigma_z^R + \sigma_z^M = -\frac{M_y^-}{I_x^-} y - \frac{M_x^-}{I_y^-} x - \frac{R}{A_p} \quad (5.15)$$

Com isso, o carregamento transversal a ser aplicado na placa, na seção de contato da placa com o pilar, é dado pela equação (5.15) e está indicado na figura (5.7a).

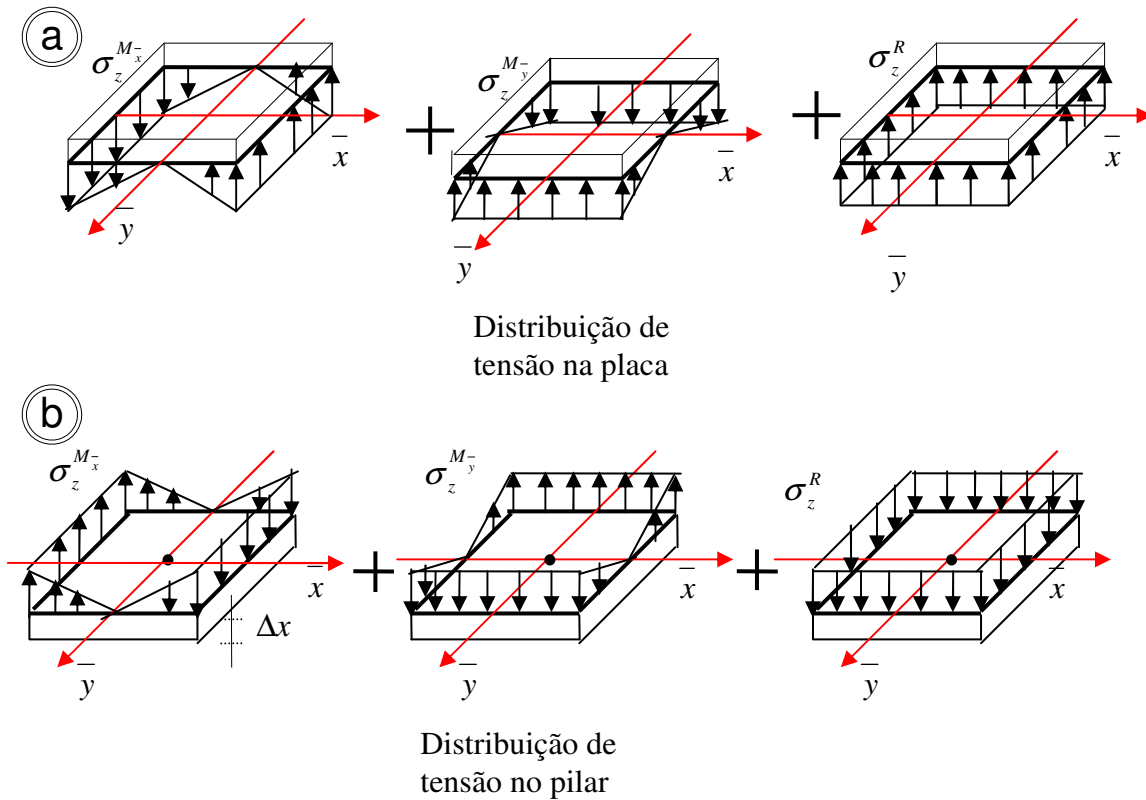


Figura 5.7 - Distribuição de Tensão no Pilar e na Placa

Para que o sistema de equações seja escrito em função dos deslocamentos incógnitos no pilar, deve-se escrever essa tensão normal (equação 5.15) em função dos deslocamentos. Para isto, devem-se determinar as matrizes de rigidez do pilar para os seguintes casos: pilar engastado na base e pilar articulado na base.

Considerando-se as barras indicadas na figura (5.8) para o pilar engastado na base chega-se à seguinte matriz de rigidez, para ambos os casos a e b.

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{4E_p I}{L_p} & -\frac{6E_p I}{L_p^2} & 0 \\ -\frac{6E_p I}{L_p^2} & \frac{12E_p I}{L_p^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_p A_p}{L_p} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

onde E_p e L_p são, respectivamente, o módulo de elasticidade e comprimento do pilar; $I = I_x$ para o caso b e $I = I_y$ para o caso a.

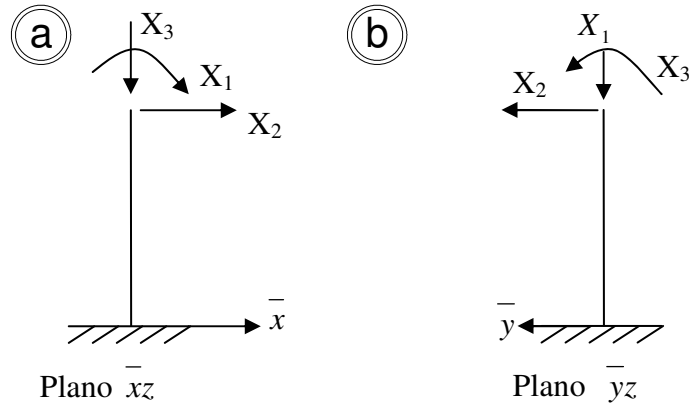


Figura 5.8 – Pilar Isolado Para o Cálculo da Matriz de Rigidez

No caso indicado na figura (5.8), os esforços no pilar se relacionam com os respectivos deslocamentos, através da seguinte matriz de rigidez:

$$\begin{Bmatrix} M_y^- \\ M_x^- \\ R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4E_p I_x}{L_p} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4E_p I_y}{L_p} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_p A_p}{L_p} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_p, \bar{y}^- \\ w_p, \bar{x}^- \\ w_p \end{Bmatrix} \quad (5.17)$$

E no caso de pilar articulado na base:

$$\begin{Bmatrix} M_y^- \\ M_x^- \\ R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3E_p I_x^-}{L_p} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3E_p I_y^-}{L_p} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_p A_p}{L_p} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_p, \bar{y} \\ w_p, \bar{x} \\ w_p \end{Bmatrix} \quad (5.18)$$

Logo, a partir das equações (5.17) e (5.18), obtêm-se:

a) Para pilar articulado na base:

$$M_y^- = \frac{3E_p I_x^-}{L_p} \frac{\partial w_p}{\partial \bar{y}} \quad (5.19a)$$

$$M_x^- = \frac{3E_p I_y^-}{L_p} \frac{\partial w_p}{\partial \bar{x}} \quad (5.19b)$$

$$R = \frac{E_p A_p}{L_p} w_p \quad (5.19c)$$

b) Para pilar engastado na base:

$$M_y^- = \frac{4E_p I_x^-}{L_p} \frac{\partial w_p}{\partial \bar{y}} \quad (5.20a)$$

$$M_x^- = \frac{4E_p I_y^-}{L_p} \frac{\partial w_p}{\partial \bar{x}} \quad (5.20b)$$

$$R = \frac{E_p A_p}{L_p} w_p \quad (5.20c)$$

Agora, substituindo-se (5.19) e (5.20) em (5.15), chega-se à:

$$\sigma_z^p = - \left(\frac{a_p E_p}{L_p} \frac{\partial w_p}{\partial \bar{x}} \right) \bar{x} - \left(\frac{a_p E_p}{L_p} \frac{\partial w_p}{\partial \bar{y}} \right) \bar{y} - \frac{E_p w_p}{L_p} \quad (5.21)$$

onde $a_p = 4$ para pilar engastado na base e $a_p = 3$ para pilar articulado na base.

Os deslocamentos, na posição deformada, relativos à placa são iguais aqueles do pilar na interface de contato.

Interpretando-se σ_z^P (equação 5.21) como carregamento externo atuante na superfície média da placa e lembrando-se que, como a seção deformada permanece plana, os deslocamentos na interface placa-pilar são constantes, chega-se à seguinte equação para o problema de flexão:

$$\begin{aligned}
 K(Q)w(Q) = & \sum_{i=1}^{N_s} \frac{D_i}{D} \int_{\Gamma_i} \left(M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) - V_n^*(Q, P) w(P) \right) d\Gamma(P) + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_{int}} \int_{\Gamma_{ja}} \left(\frac{D_j - D_a}{D} \right) \left(M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) - V_n^*(Q, P) w(P) \right) d\Gamma_j(P) - \sum_{i=1}^{N_{c2}} \frac{D_i}{D} R_{ci}^*(Q, P) w_{ci}(P) + \\
 & - \left(\frac{D_j - D_a}{D} \right) \sum_{i=1}^{N_{c1}+N_{c2}} R_{cj}^*(Q, P) w_{ci}(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(Q, P) + \\
 & + \int_{\Gamma} \left(V_n(P) w^*(Q, P) - M_{nn}(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) d\Gamma(P) + \int_{\Omega_g} (g(p) w^*(Q, p)) d\Omega_g(p) + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_p} \left[\left(-\frac{a_{Pi} E_{Pi}}{L_{Pi}} \frac{\partial w_{pi}}{\partial x_i} \right) \int_{\Omega_{pi}} \bar{x}_i w^*(Q, p) d\Omega_{pi} + \left(-\frac{a_{Pi} E_{Pi}}{L_{Pi}} \frac{\partial w_{pi}}{\partial y_i} \right) \int_{\Omega_{pi}} \bar{y}_i w^*(Q, p) d\Omega_{pi} + \right. \\
 & \left. - \frac{E_{Pi}}{L_{Pi}} w_{pi} \int_{\Omega_{pi}} w^*(Q, p) d\Omega_{pi} \right] \tag{5.22}
 \end{aligned}$$

5.2.2 Sistema de Equações

Tendo-se assim, três novas incógnitas (w_p , $w_{p,\bar{x}}$ e $w_{p,\bar{y}}$) em cada interface placa-pilar, serão escritas nesses pontos três novas equações, que serão aquelas correspondentes às equações desses deslocamentos incógnitos. Assim, escrevendo-se todas as equações necessárias à resolução do problema, chega-se ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{Bmatrix} [H]_F & [H]_C & [H_F]_P \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\}_F \\ \{w\}_C \\ \{U_F\}_P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [G]_F & [G]_C \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P\}_F \\ \{R\}_C \end{Bmatrix} + T(Q) \quad (5.23)$$

A partir da resolução do sistema (5.23), obtêm-se os deslocamentos (w_p , $w_{p,x}$, $w_{p,y}$). Substituindo-se esses valores nas equações (5.19) e (5.20) chega-se aos valores dos esforços, para flexão simples, no pilar.

Os deslocamentos em um ponto interno são obtidos a partir da seguinte equação:

$$w(q) = -[H^*]_F \{U\}_F - [H^*]_C \{w\}_C - [H_F^*]_P \{U_F\}_P + [G^*]_F \{P\}_F + [G^*]_C \{R\}_C + T^* \quad (5.24)$$

5.3 Inclusão de Pilares no Modelo em Flexão Composta

Neste item, assim como no anterior, particularizar-se-á a formulação genérica desenvolvida no item (5.1), porém agora para o caso da associação da placa com o pilar para flexão composta. No centro de gravidade (CG) da seção transversal do pilar em contato com a placa, além dos esforços de flexão: o esforço normal e os momentos nas direções x e y , considera-se também os esforços de membrana N_x^- e N_y^- .

5.3.1 Tensão Normal na Interface Placa-Pilar

Assim como visto no item (5.2.1), os esforços no CG do pilar devem ser transformados em tensão normal uniformemente distribuída sobre a seção do pilar. Fazendo procedimento análogo ao do item (5.2.1), tem-se para o caso indicado na figura (5.8), os esforços relacionados com os deslocamentos através da seguinte matriz de rigidez:

$$\begin{Bmatrix} M_y^- \\ M_x^- \\ N_y^- \\ N_x^- \\ R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4E_p I_x^-}{L_p} & 0 & -\frac{6E_p I_x^-}{(L_p)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4E_p I_y^-}{L_p} & 0 & -\frac{6E_p I_y^-}{(L_p)^2} & 0 \\ -\frac{6E_p I_x^-}{(L_p)^2} & 0 & \frac{12E_p I_x^-}{(L_p)^3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6E_p I_y^-}{(L_p)^2} & 0 & \frac{12E_p I_y^-}{(L_p)^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_p A_p}{L_p} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_p, y^- \\ w_p, x^- \\ u_{y(P)}^- \\ u_{x(P)}^- \\ w_p \end{Bmatrix} \quad (5.25)$$

E no caso de pilar articulado na base:

$$\begin{Bmatrix} M_y^- \\ M_x^- \\ N_y^- \\ N_x^- \\ R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3E_p I_x^-}{L_p} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3E_p I_y^-}{L_p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3E_p I_x^-}{(L_p)^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3E_p I_y^-}{(L_p)^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_p A_p}{L_p} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_p, y^- \\ w_p, x^- \\ u_{y(P)}^- \\ u_{x(P)}^- \\ w_p \end{Bmatrix} \quad (5.26)$$

Logo, a partir das equações (5.25) e (5.26), obtêm-se, para análise de membrana:

a) Para pilar articulado na base:

$$M_y^- = K_{11} \frac{\partial w_p}{\partial y^-} = \frac{3E_p I_x^-}{L_p} \frac{\partial w_p}{\partial y^-} \quad (5.27a)$$

$$M_x^- = K_{22} \frac{\partial w_p}{\partial x^-} = \frac{3E_p I_y^-}{L_p} \frac{\partial w_p}{\partial x^-} \quad (5.27b)$$

$$R = \frac{E_p A_p}{L_p} w_p \quad (5.27c)$$

$$N_x^- = K_{44} u_{x(P)}^- = \frac{3E_p I_y^-}{L_p^3} u_{x(P)}^- \quad (5.28a)$$

$$N_y^- = K_{33} u_{y(P)}^- = \frac{3E_p I_x^-}{L_p^3} u_{y(P)}^- \quad (5.28b)$$

b) Para pilar engastado na base:

$$M_y^- = K_{11} \frac{\partial w_p}{\partial y} + K_{13} u_y^- = \frac{4E_p I_x^-}{L_p} \frac{\partial w_p}{\partial y} - \frac{6E_p I_x^-}{(L_p)^2} u_{y(P)}^- \quad (5.29a)$$

$$M_x^- = K_{22} \frac{\partial w_p}{\partial x} + K_{24} u_x^- = \frac{4E_p I_y^-}{L_p} \frac{\partial w_p}{\partial x} - \frac{6E_p I_y^-}{(L_p)^2} u_{x(P)}^- \quad (5.29b)$$

$$R = \frac{E_p A_p}{L_p} w_p \quad (5.29c)$$

$$N_x^- = K_{42} \frac{\partial w_p}{\partial x} + K_{44} u_{x(P)}^- = -\frac{6E_p I_y^-}{L_p^2} \frac{\partial w_p}{\partial x} + \frac{12E_p I_y^-}{L_p^3} u_{x(P)}^- \quad (5.30a)$$

$$N_y^- = K_{31} \frac{\partial w_p}{\partial y} + K_{33} u_{y(P)}^- = -\frac{6E_p I_x^-}{L_p^2} \frac{\partial w_p}{\partial y} + \frac{12E_p I_x^-}{L_p^3} u_{y(P)}^- \quad (5.30b)$$

Substituindo-se as equações (5.27) e (5.29) em (5.15) tem-se:

$$\sigma_z^p = \left(-\frac{a_p E_p}{L_p} \frac{\partial w_p}{\partial x} + \frac{b_p E_p}{(L_p)^2} u_{x(P)}^- \right) \bar{x} + \left(-\frac{a_p E_p}{L_p} \frac{\partial w_p}{\partial y} + \frac{b_p E_p}{(L_p)^2} u_{y(P)}^- \right) \bar{y} - \frac{E_p w_p}{L_p} \quad (5.31)$$

onde $a_p = 4$ e $b_p = 6$ para pilar engastado na base e $a_p = 3$ e $b_p = 0$ para pilar articulado na base.

Escrevendo-se as equações (5.28) e (5.30) em uma mesma equação:

$$N_x^- = -\frac{d_p E_p I_y^-}{L_p^2} \frac{\partial w_p}{\partial x} + \frac{e_p E_p I_y^-}{L_p^3} u_{x(P)}^- \quad (5.32a)$$

$$N_y^- = -\frac{d_p E_p I_x^-}{L_p^2} \frac{\partial w_p}{\partial y} + \frac{e_p E_p I_x^-}{L_p^3} u_{y(P)}^- \quad (5.32b)$$

onde $d_p = 0$ e $e_p = 3$ para pilar articulado na base; $d_p = 6$ e $e_p = 12$ para pilar engastado na base.

Deve-se agora calcular o carregamento externo $\bar{b}\bar{x}$ e $\bar{b}\bar{y}$ a ser aplicado no plano da placa ao longo das linhas de carga definidas pelos eixos principais (ver figura 5.9). Observe

que essas cargas têm sentido contrário àquelas definidas nas equações (5.32), pois trata-se da reação do pilar na placa.

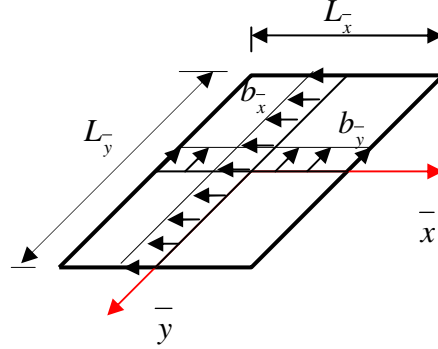


Figura 5.9 - Cargas uniformemente distribuídas ao longo das linhas de carga

Assim, elas são dadas por:

$$b_x = -\frac{N_x}{L_{y(P)}} = \frac{1}{L_{y(P)}} \left[\frac{d_p E_p I_y}{L_p^2} \frac{\partial w_p}{\partial x} - \frac{e_p E_p I_y}{L_p^3} u_{x(P)} \right] \quad (5.33a)$$

$$b_y = -\frac{N_y}{L_{x(P)}} = \frac{1}{L_{x(P)}} \left[\frac{d_p E_p I_x}{L_p^2} \frac{\partial w_p}{\partial y} - \frac{e_p E_p I_x}{L_p^3} u_{y(P)} \right] \quad (5.33b)$$

onde $L_{y(P)}$ e $L_{x(P)}$ são os comprimentos dos lados da seção do pilar paralelos, respectivamente, à $\bar{y}$ e $\bar{x}$.

Deve-se ressaltar que, na posição deformada, os deslocamentos w_p , $w_{p,x}$, $w_{p,y}$, $u_{x(P)}$ e $u_{y(P)}$ relativos à placa são iguais àqueles do pilar na interface de contato.

Interpretando-se σ_z^P (equação 5.31), b_x e b_y (equação 5.33) como carregamentos externos atuante na superfície de referência da placa e lembrando-se que, como a seção deformada permanece plana, os deslocamentos na interface placa-pilar são constantes, chega-se às seguintes equações para o problema de flexão e bidimensional:

$$K(Q)w(Q) = \sum_{i=1}^{N_s} \frac{D_i}{D} \int_{\Gamma_i} \left(M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) - V_n^*(Q, P) w(P) \right) d\Gamma(P) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{N_{int}} \int_{\Gamma_{ja}} \left(\frac{D_j - D_a}{D} \right) \left(M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) - V_n^*(Q, P) w(P) \right) d\Gamma_j(P) - \sum_{i=1}^{N_{c3}} \frac{D_i}{D} R_{ci}^*(Q, P) w_{ci}(P) + \\
& - \left(\frac{D_j - D_a}{D} \right) \sum_{i=1}^{N_{c1} + N_{c2}} R_{cj}^*(Q, P) w_{ci}(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(Q, P) + \\
& + \int_{\Gamma} \left(V_n(P) w^*(Q, P) - M_{nn}(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_s} c_i \int_{\Gamma_i} [p_n(P) w_{,n}^*(Q, P) + \\
& + p_s(P) w_{,s}^*(Q, P)] d\Gamma_i + \sum_{j=1}^{N_{int}} (c_j - c_a) \int_{\Gamma_{ja}} [p_n(P) w_{,n}^*(Q, P) + p_s(P) w_{,s}^*(Q, P)] d\Gamma_{ja} + \\
& + \int_{\Omega_g} (g(p) w^*(Q, p)) d\Omega_g(p) - \sum_{i=1}^{N_s} c_i \int_{\Omega_b} [b_n(p) w_{,n}^*(Q, p) + b_s(p) w_{,s}^*(Q, p)] d\Omega_b + \\
& + \sum_{i=1}^{N_p} \left[\left(-\frac{a_{pi} E_{pi}}{L_{pi}} \frac{\partial w_{pi}}{\partial x_i} + \frac{b_p E_p}{(L_p)^2} u_{x(P)}^- \right) \int_{\Omega_{pi}} x_i w^*(Q, p) d\Omega_{pi} + \right. \\
& + \left. \left(-\frac{a_{pi} E_{pi}}{L_{pi}} \frac{\partial w_{pi}}{\partial y_i} + \frac{b_p E_p}{(L_p)^2} u_{y(P)}^- \right) \int_{\Omega_{pi}} y_i w^*(Q, p) d\Omega_{pi} - \frac{E_{pi}}{L_{pi}} w_{pi} \int_{\Omega_{pi}} w^*(Q, p) d\Omega_{pi} \right] + \\
& - \sum_{i=1}^{N_p} c_i \left[\frac{1}{L_{y(pi)}} \left(\frac{d_p E_{pi} I_{yi}^-}{L_{pi}^2} \frac{\partial w_{pi}}{\partial x} - \frac{e_p E_{pi} I_{yi}^-}{L_p^3} u_{x(pi)}^- \right) \int_{\Gamma_{ypi}^-} w_{,xi}^*(Q, p) d\Gamma_{ypi}^- + \right. \\
& + \left. \frac{1}{L_{x(pi)}} \left(\frac{d_p E_{pi} I_{xi}^-}{L_{pi}^2} \frac{\partial w_{pi}}{\partial y} - \frac{e_p E_{pi} I_{xi}^-}{L_{pi}^3} u_{y(pi)}^- \right) \int_{\Gamma_{xpi}^-} w_{,yi}^*(Q, p) d\Gamma_{xpi}^- \right] \quad (5.34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& K_k(Q) u_k(Q) + K_{wk}(Q) w_{,k}(Q) = - \sum_{i=1}^{N_s} \frac{\bar{E}_i}{E} \int_{\Gamma_i} (u_n(P) p_{kn}^*(Q, P) + u_s(P) p_{ks}^*(Q, P)) d\Gamma + \\
& - \sum_{i=1}^{N_{int}} \frac{(\bar{E}_j - \bar{E}_a)}{\bar{E}} \int_{\Gamma_{ja}} (u_n(P) p_{kn}^*(Q, P) + u_s(P) p_{ks}^*(Q, P)) d\Gamma_j + \\
& + \sum_{i=1}^{N_s} \frac{\bar{E}_i}{E} \int_{\Gamma_i} c_i (p_{kn}^*(Q, P) w_{,n}(P) + p_{ks}^*(Q, P) w_{,s}(P)) d\Gamma +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Gamma} (u_{kn}^*(Q, P) p_n(P) + u_{ks}^*(Q, P) p_s(P)) d\Gamma + \int_{\Omega_b} (u_{kn}^*(Q, p) b_n(p) + u_{ks}^*(Q, p) b_s(p)) d\Omega_b + \\
& + \sum_{i=1}^{N_{int}} \frac{(\bar{E}_j c_j - \bar{E}_a c_a)}{\bar{E}} \int_{\Gamma_{ja}} (p_{kn}^*(Q, P) w_{,n}(P) + p_{ks}^*(Q, P) w_{,s}(P)) d\Gamma_j + \\
& + \sum_{i=1}^{N_p} \left[\frac{1}{L_{y(pi)}} \left(\frac{d_p E_{pi} I_{yi}^-}{L_{pi}^2} \frac{\partial w_{pi}}{\partial \bar{x}} - \frac{e_p E_{pi} I_{yi}^-}{L_p^3} u_{x(pi)}^- \right) \int_{\Gamma_{ypi}} u_{k\bar{xi}}^*(Q, p) d\Gamma_{ypi} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{L_{x(pi)}} \left(\frac{d_p E_{pi} I_{xi}^-}{L_{pi}^2} \frac{\partial w_{pi}}{\partial \bar{y}} - \frac{e_p E_{pi} I_{xi}^-}{L_{pi}^3} u_{y(pi)}^- \right) \int_{\Gamma_{xpi}} u_{k\bar{yi}}^*(Q, p) d\Gamma_{xpi} \right] \quad k = l, m \quad (5.35)
\end{aligned}$$

5.3.2 Solução das Integrais na Interface Placa-Pilar

Para facilitar a resolução através do Método dos Elementos de Contorno, as integrais de domínios na interface placa-pilar, são transformadas em integrais de contorno. Tomando-se como exemplo a integral $\int_{\Omega_{pi}} \bar{x}_i w^*(Q, p) d\Omega_{pi}$, deve-se inicialmente fazer a transformação de coordenadas cartesianas em coordenadas polares, por serem a mais conveniente para o trabalho com o MEC (ver item 4.5). Obtendo-se:

$$d\Omega_p = r dr \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{R} d\Gamma_p \quad (5.36)$$

Utilizando a equação (3.28), equação da solução fundamental da placa, e a equação (5.36) chega-se a:

$$\int_{\Omega_{pi}} \bar{x}_i w^*(Q, p) d\Omega_{pi} = \int_{\Gamma_p} \int_0^R \left[\bar{x} \left(\frac{1}{8\pi D} r^2 \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) \right) \right] r dr \left[\frac{1}{R} \frac{\partial r}{\partial n} \right] d\Gamma_p \quad (5.37)$$

Desenvolvendo a equação:

$$\int_{\Omega_{pi}} \bar{x}_i w^*(Q, p) d\Omega_{pi} = \frac{1}{8\pi D} \int_{\Gamma_p} \int_0^R \left[\cos \theta(x_1(q)) + \sin \theta(x_2(q)) - \bar{x}^{CG} + r(\cos \theta(r_{,1}) + \sin \theta(r_{,2})) \right] \times$$

$$\times r^2 \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) r \left\{ dr \frac{1}{R} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma_p \right. \quad (5.38)$$

sendo q o ponto de colocação e CG o centro de gravidade da seção do pilar, R a distância entre o ponto q e o CG e Γ_p o contorno da seção do pilar.

Desenvolvendo a equação (5.38), chega-se à:

$$\int_{\Omega_{pi}} \bar{x}_i w^*(Q, p) d\Omega_{pi} = \frac{1}{8\pi D} \int_{\Gamma_p} \left\{ \left[\cos \theta(x_1(q)) + \sin \theta(x_2(q)) - \bar{x}^{CG} \right] \frac{R^3}{4} \left[\ln R - \frac{3}{4} \right] + \right.$$

$$\left. + \left[\cos \theta(r_{,1}) + \sin \theta(r_{,2}) \right] \frac{R^4}{5} \left(\ln r - \frac{7}{10} \right) \right\} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma_p \quad (5.39)$$

Ficando a equação acima propícia a resolução numérica através do MEC.

Para calcular o carregamento externo $\bar{b}_x$ e $\bar{b}_y$, definido ao longo das linhas de carga nos eixos principais (ver figura 5.9), em vez de considerar as linhas de cargas passando pelo CG da seção, o que acarretaria em problemas de singularidades quando o ponto de colocação coincidissem com o mesmo, considera-se metade do carregamento em cada contorno do pilar (ver figura 5.10).

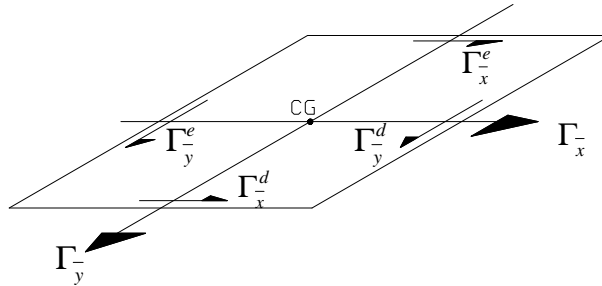


Figura 5.10 – Distribuição do Carregamento $\bar{b}_x$ e $\bar{b}_y$ ao longo do Contorno do Pilar

Portanto as integrais $\int_{\Gamma_{ypi}^-} w_{,xi}^* d\Gamma_{ypi}^-$ e $\int_{\Gamma_{xpi}^-} w_{,yi}^* d\Gamma_{xpi}^-$ devem ser calculadas:

$$\int_{\Gamma_{ypi}^-} w_{,xi}^* d\Gamma_{ypi}^- = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_y^e} w_{,xi}^* d\Gamma_y^e + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_y^d} w_{,xi}^* d\Gamma_y^d \quad (5.40)$$

$$\int_{\Gamma_{xpi}^-} w_{,yi}^* d\Gamma_{xpi}^- = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_x^e} w_{,yi}^* d\Gamma_x^e + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_x^d} w_{,yi}^* d\Gamma_x^d \quad (5.41)$$

5.3.3 Sistema de Equações

Tendo-se agora cinco novas incógnitas (w_p , $w_{p,x}$, $w_{p,y}$, $u_{x(P)}$ e $u_{y(P)}$) em cada interface placa-pilar, serão escritas nesses pontos cinco novas equações, que serão aquelas correspondentes às equações desses deslocamentos incógnitos. Assim, escrevendo-se todas as equações necessárias à resolução do problema, chega-se ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} [H]_F & [H]_C & [\overline{H}]_{2D} & [H_F]_P & [\overline{H}_{2D}]_P \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ [\overline{H}]_F & [0] & [H]_{2D} & [0] & [H_{2D}]_P \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ [H']_F & [H']_C & [\overline{H}']_{2D} & [H'_F]_P & [\overline{H}'_{2D}]_P \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ [\overline{H}']_F & [0] & [H']_{2D} & [0] & [H'_{2D}]_P \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \{U\}_F \\ \{w\}_C \\ \{U\}_{2D} \\ \{U_F\}_P \\ \{U_{2D}\}_P \end{array} \right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} [G]_F & [G]_C & [\overline{G}]_{2D} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ [0] & [0] & [G]_{2D} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ [G']_F & [G']_C & [\overline{G}']_{2D} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ [0] & [0] & [G']_{2D} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \{P\}_F \\ \{R\}_C \\ \{P\}_{2D} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \{T\}_F \\ \text{---} \\ \{T\}_{2D} \\ \text{---} \\ \{T'\}_F \\ \text{---} \\ \{T'\}_{2D} \end{array} \right\} \quad (5.42)$$

A partir da resolução sistema (5.42), obtêm-se os deslocamentos (w_p , $w_{p,x}$, $w_{p,y}$, $u_{x(P)}$ e $u_{y(P)}$). Substituindo-se esses valores nas equações (5.19), (5.20) e (5.29) chega-se aos valores dos esforços no pilar.

Os deslocamentos em um ponto interno são obtidos a partir das seguintes equações:

$$w(q) = -[H^*]_F \{U\}_F - [H^*]_C \{W\}_C - [\bar{H}^*]_{2D} \{U\}_{2D} - [H^*]_P \{U_F\}_P - [\bar{H}^*]_{2D} \{U_{2D}\}_P + \\ + [G^*]_F \{P\}_F + [G^*]_C \{R\}_C + [\bar{G}^*]_{2D} \{P\}_{2D} + T^* \quad (5.43)$$

$$u_K(q) = -[\bar{H}^*]_F \{U\}_F - [H^*]_{2D} \{U\}_{2D} - [H^*]_{2D} \{U_{2D}\}_P + [G^*]_{2D} \{P\}_{2D} + T_{2D}^* \quad (5.44)$$

5.4 Exemplos Numéricos

Para a análise das formulações propostas, são adotados três exemplos numéricos, sendo dois comparados com exemplo obtidos em Paiva (1987), e o último comparado apenas com os resultados obtidos através do ANSYS. Como já mencionado no capítulo anterior, os principais quesitos desta escolha são a comparação com resultados obtidos analiticamente e com a formulação proposta por Paiva (1987) e também com um software conhecido, que neste caso optou-se pelo ANSYS. Na análise com o ANSYS adotaram-se elementos sólidos (solid brick 8node 45) para discretizar as lajes, vigas e pilares. É importante notar que não se espera resultados exatamente iguais aos do ANSYS, pois o modelo numérico adotado no ANSYS é bem diferente do modelo proposto. Como no ANSYS se usam elementos sólidos, se faz uma análise tridimensional, ou seja, todo o sólido é discretizado, já no modelo proposto aqui se faz uma análise bidimensional do pavimento, já que são utilizados elementos de placa para representar o pavimento.

5.4.1 Placa Quadrada Apoiada no Contorno e em Pontos de seu Domínio

Este exemplo consiste em uma placa quadrada simplesmente apoiada no contorno e em seu domínio apoiada em quatro pilares.

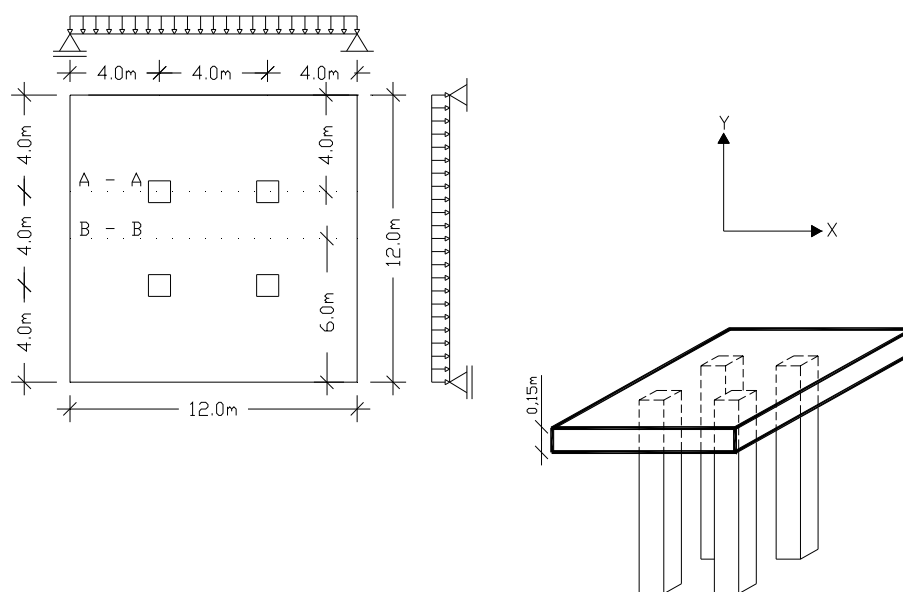


Figura 5.11 – Placa Apoiada no Contorno e em Pontos do Domínio

Este exemplo consiste em uma placa quadrada, cujo comprimento de cada lado é igual a 12m, simplesmente apoiada no contorno e em seu domínio apoiada em quatro pilares (ver figura 5.11). Ao longo de toda sua superfície é aplicada uma carga $g=10\text{kN/m}^2$ uniformemente distribuída. A espessura da placa, seu módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson adotados foram respectivamente: $t_p=0.15\text{m}$, $E=1.5 \times 10^7 \text{kN/m}^2$ e $\nu=0.167$. Para os pilares adotou-se comprimento ($l=3\text{m}$), seções quadradas com lado igual a 1m. e módulo de elasticidade $E_p=2.1 \times 10^7 \text{kN/m}^2$. Além disso, os pilares foram considerados engastados na base.

As dimensões deste exemplo não são usuais. De acordo com Paiva (1987), o interesse em analisá-lo se justifica apenas pelo fato de sua solução exata ser conhecida, permitindo estudos comparativos mais complexos. Assim como na tese de Paiva (1987), o contorno foi discretizado em 40 elementos de igual comprimento, resultando em 84 nós (ver figura 5.12).

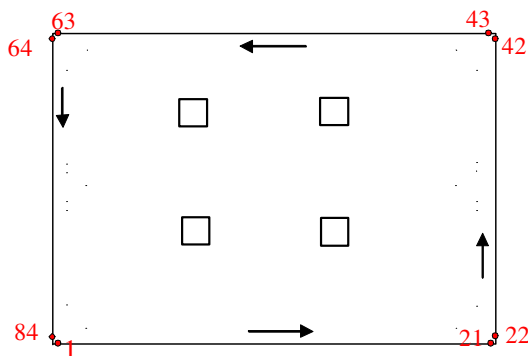


Figura 5.12 – Placa Apoiada no Contorno e em Pontos do Domínio

Em sua tese, Paiva (1987) não demonstrou os resultados analítico e numérico, apenas limitando-se a dizer que para os deslocamentos os valores obtidos por ele são praticamente iguais aos fornecidos pela solução exata e para os momentos houve uma diferença próxima a 2%. O deslocamento transversal e os momentos fletores M_x e M_y ao longo do eixo A-A definido na figura (5.11) estão mostrados, respectivamente, nas figuras (5.13), (5.14) e (5.15). As figuras (5.16), (5.17) e (5.18) mostram esses mesmos valores ao longo do eixo B-B. Como se pode observar, os resultados são bem próximos daqueles apresentados por Paiva (1987).

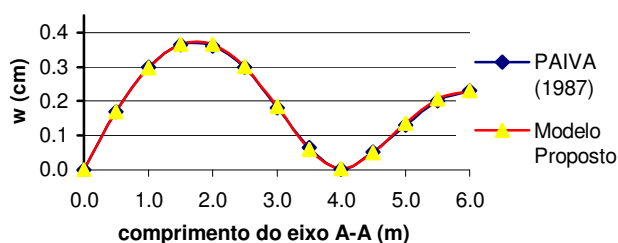


Figura 5.13 – Deslocamento w no eixo A-A

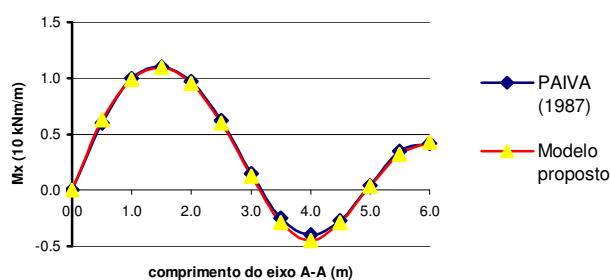


Figura 5.14 – Momento Fletor M_x no Eixo A-A

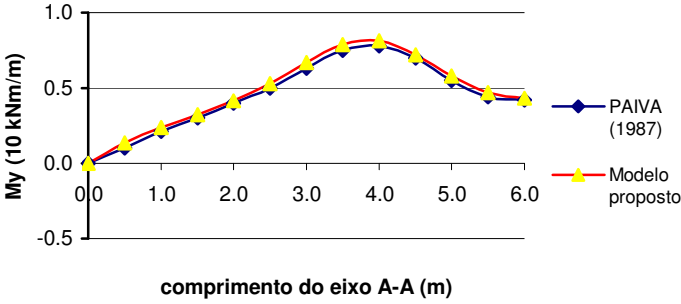


Figura 5.15 – Momento Fletor My no Eixo A-A

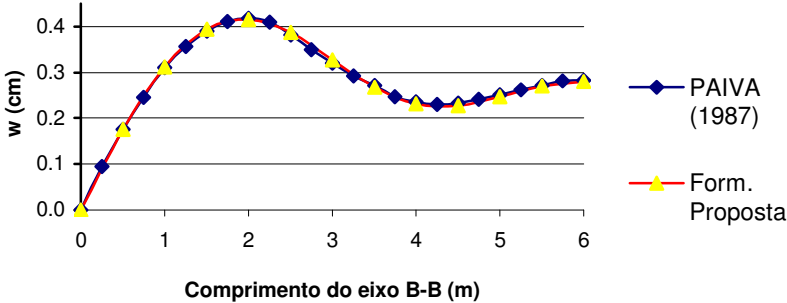


Figura 5.16 – Deslocamento w no Eixo B-B

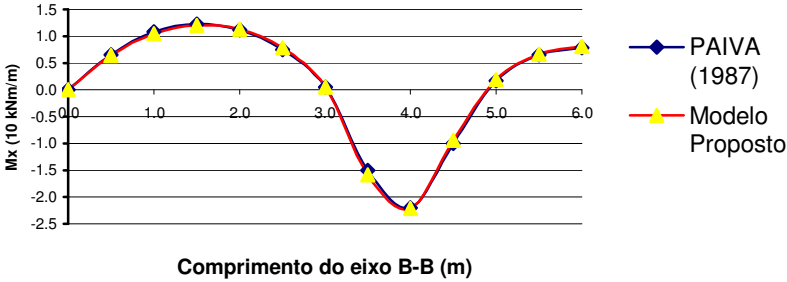


Figura 5.17 – Momento Fletor Mx no Eixo B-B

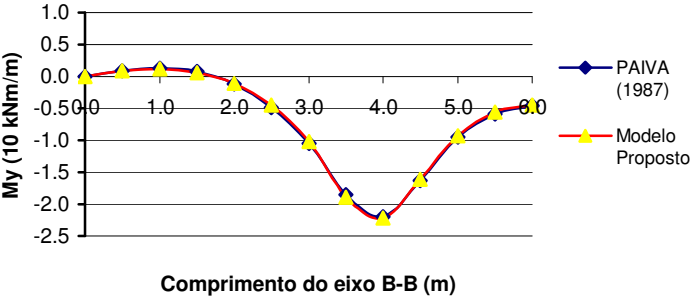


Figura 5.18 – Momento Fletor My no Eixo B-B

5.4.2 Placa Quadrada Apoiada em seu Contorno por Vigas e também por Pilares em suas Extremidades

Este exemplo consiste em uma placa quadrada com dimensões totais de $(4,4 \times 4,4)m^2$, com altura de $0,10m$, apoiada em seu contorno por quatro vigas, com seções transversais de $(0,2 \times 0,3)m^2$ e apoiada em seus cantos por quatro pilares engastados em suas bases, com seção $(0,2 \times 0,2)m^2$ e altura de $3,0m$ (ver figura 5.19). Para todos os elementos estruturais foram adotados coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$ e módulo de elasticidade $E = 250000000kN/m^2$. Está disposto um carregamento uniformemente distribuído de $20kN/m^2$.

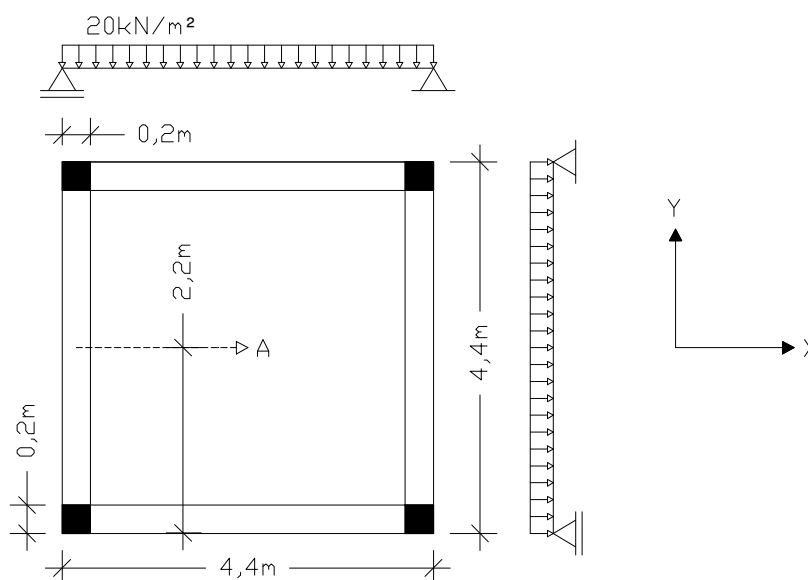


Figura 5.19 – Vista em Planta da Placa

Foram obtidos os resultados do deslocamento transversal e também do momento fletor no eixo A e ao longo do eixo da viga. Ao longo do eixo A o momento é na direção x (direção do eixo A) e na viga os valores apresentados dos momentos são na direção tangencial da viga. Inicialmente fez a discretização da placa em 16 elementos com 36 pontos nodais, a segunda malha consta de 32 elementos com 68 pontos nodais e a terceira malha, 48 elementos com 100 pontos nodais. Para confirmar a convergência dos momentos foi necessário ainda considerar uma quarta malha composta de 96 elementos e 196 nós. Na figura (5.20) tem-se a discretização utilizada no ANSYS, onde adotaram-se elementos sólidos de lados iguais a $10cm$ e na figura (5.21) tem-se a malha menos refinada utilizada para o modelo proposto.

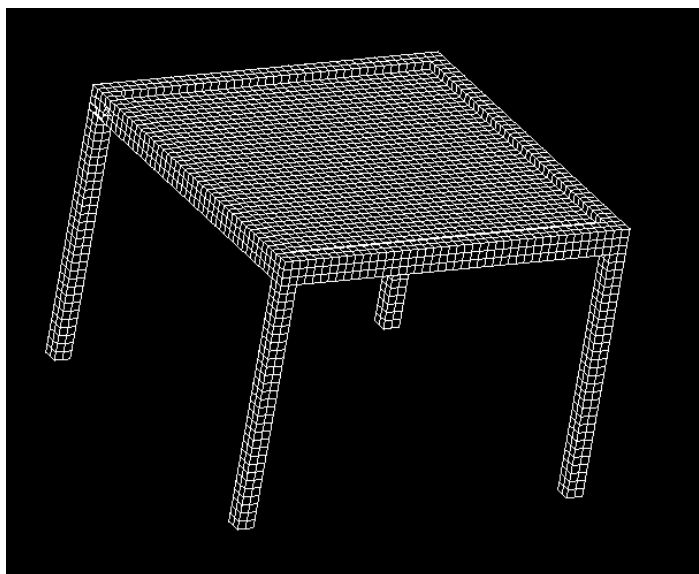


Figura 5.20 – Discretização Utilizada no ANSYS

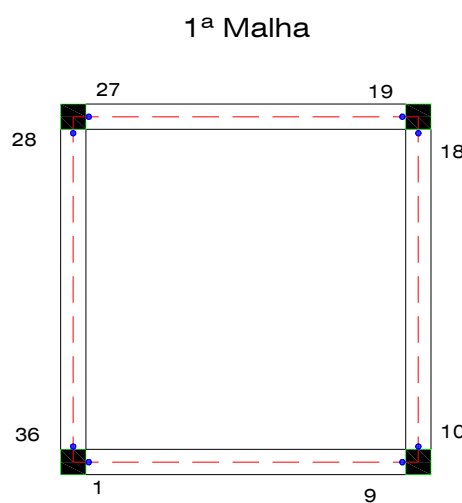


Figura 5.21 – Discretização da Primeira Malha

Os gráficos (5.22) a (5.29) são referentes à análise de flexão simples (que será designada de FS). Inicialmente mostra-se a convergência dos resultados e então comparam-se os resultados obtidos com o modelo proposto considerando-se a malha mais refinada com aqueles obtidos com o ANSYS. Os resultados ao longo eixo A-A estão apresentados nas figuras (5.22) e (5.23) e nas figuras (5.24) e (5.25) têm-se os valores obtidos ao longo do eixo da viga. A comparação com os resultados do ANSYS é feita nas figuras (5.26) a (5.29).

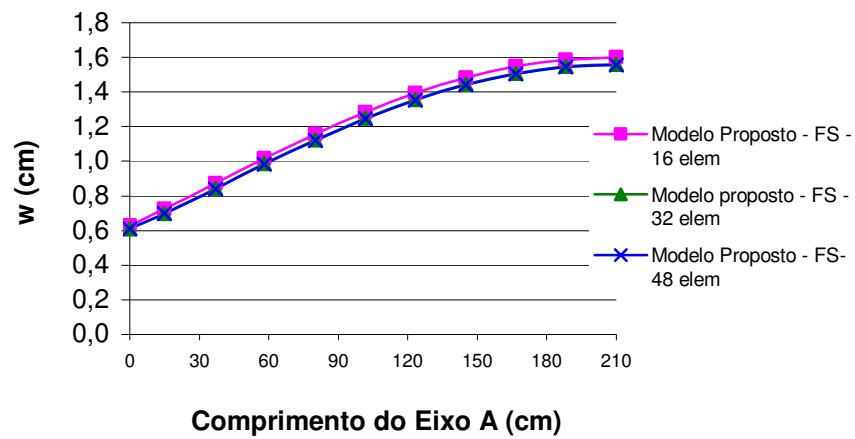


Figura 5.22 – Deslocamento w ao longo do eixo A para flexão simples

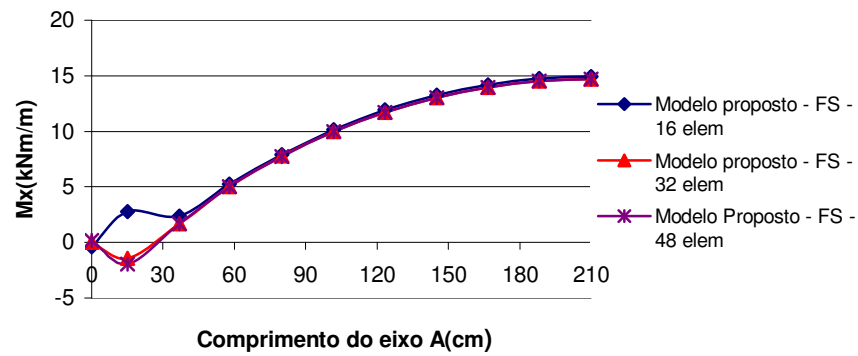


Figura 5.23 – Momento Fletor ao longo do eixo A para Flexão Simples

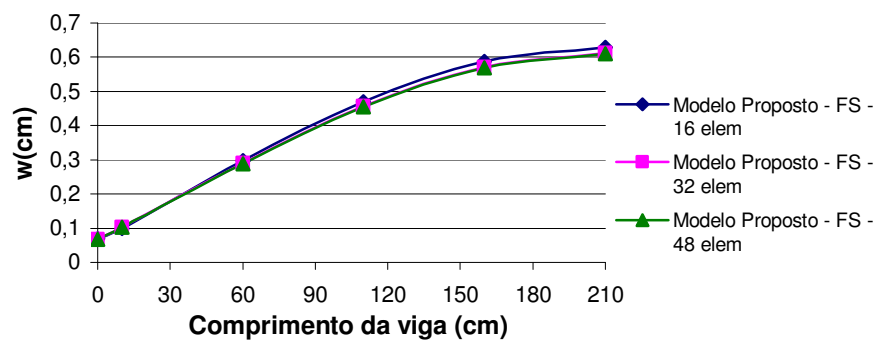


Figura 5.24 – Deslocamento w ao longo do eixo da viga para Flexão Simples

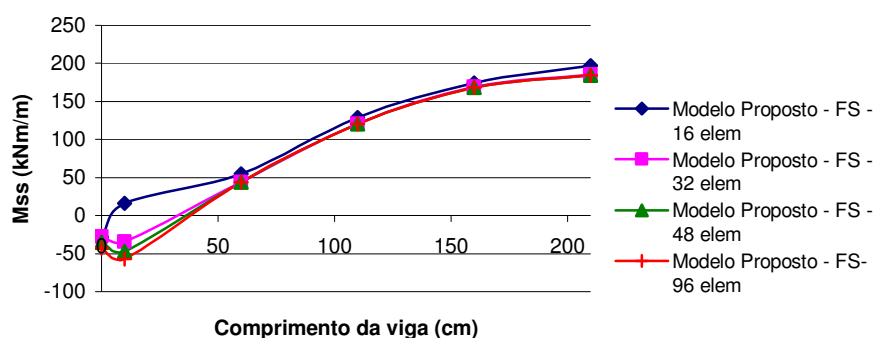


Figura 5.25 – Momento Fletor ao longo do eixo da viga para Flexão Simples

Observa-se nos gráficos anteriores a boa convergência dos resultados à medida que se refina a malha.

Nos gráficos (5.24) a (5.27) têm-se a comparação com os valores obtidos com o ANSYS, onde se observa que as curvas obtidas com os dois modelos têm o mesmo comportamento, porém os valores obtidos com o modelo proposto são menores que aqueles referentes ao ANSYS.

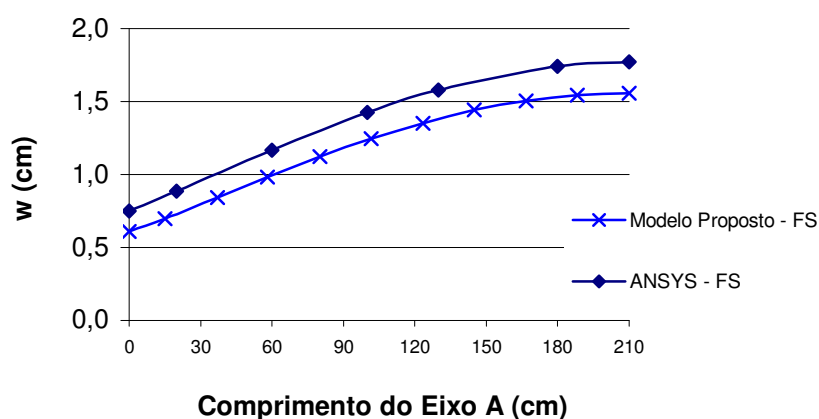


Figura 5.26 – Deslocamento w ao longo do eixo A, comparação com o ANSYS

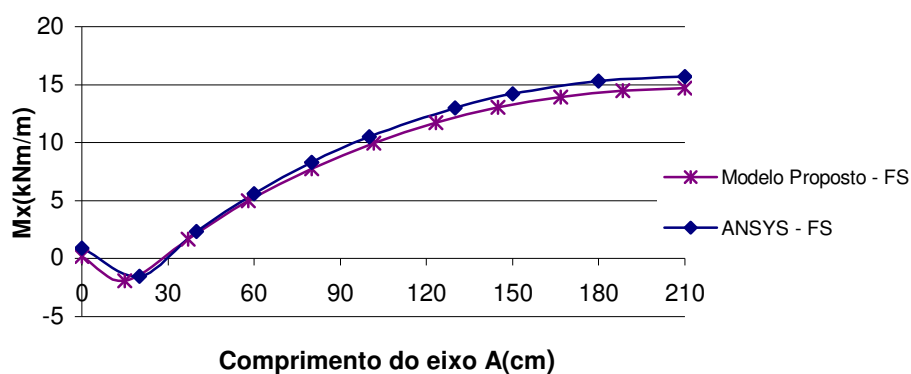


Figura 5.27 – Momento Fletor ao longo do eixo A, comparação com o ANSYS

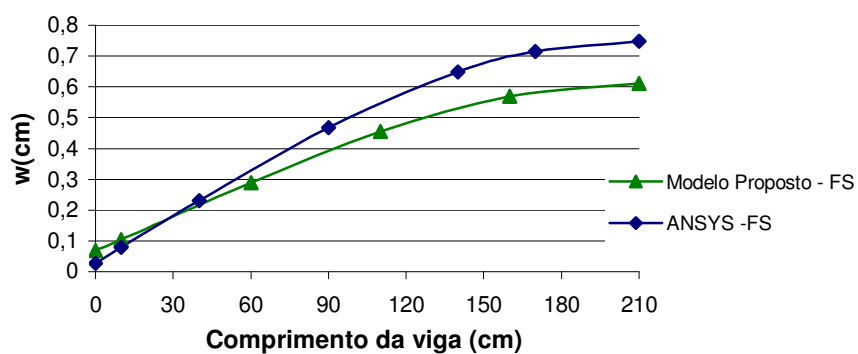


Figura 5.28 – Deslocamento w ao longo do eixo da viga, comparação com o ANSYS

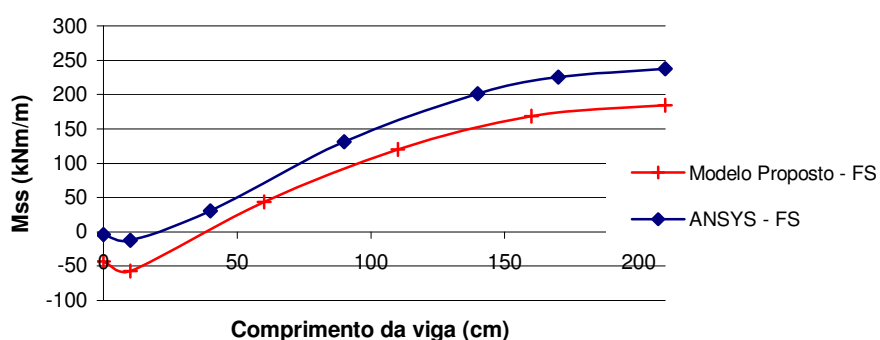


Figura 5.29 – Momento Fletor ao longo do eixo da viga, comparação com o ANSYS

Nas figuras (5.30) a (5.33) mostra-se a convergência dos resultados na análise de flexão composta (designada de FC) e nas figuras (5.34) a (5.37) comparam-se esses últimos com aqueles referentes ao modelo proposto considerando-se flexão simples. Pode-se notar

uma boa convergência dos resultados com o refinamento da malha, sendo os valores referentes à flexão composta menores que aqueles da flexão simples, como era esperado, devido aos efeitos de membrana.

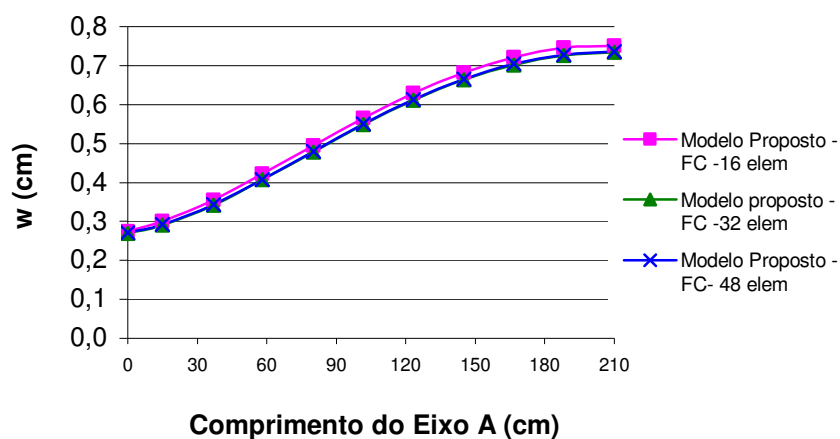


Figura 5.30 – Deslocamento w ao longo do eixo A para flexão composta

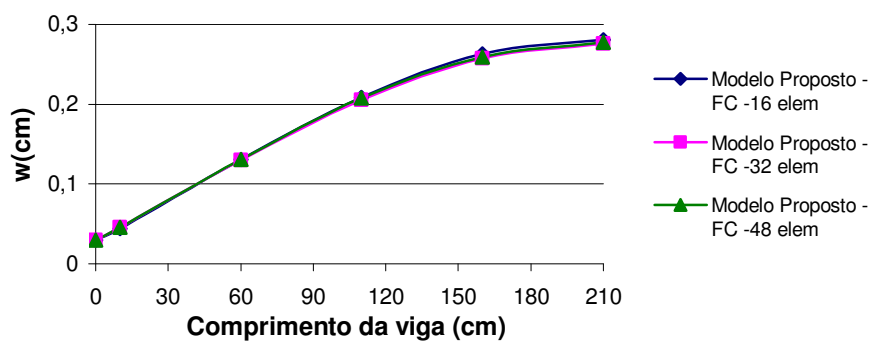


Figura 5.31 – Deslocamento w ao longo do eixo da viga para flexão composta

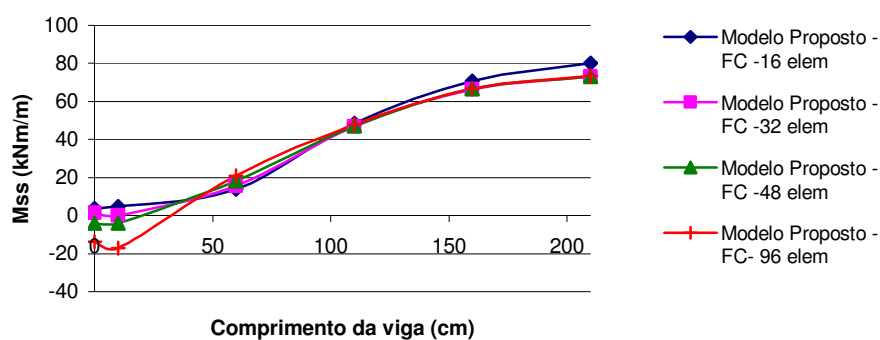


Figura 5.32 – Momento fletor ao longo do eixo da viga para flexão composta

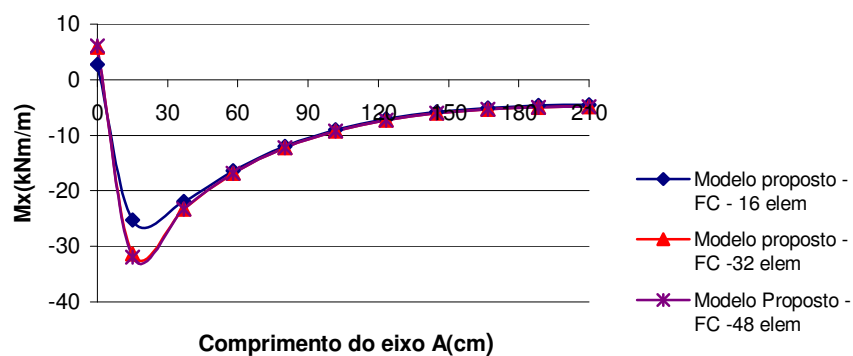


Figura 5.33 – Momento fletor ao longo do eixo A para flexão composta

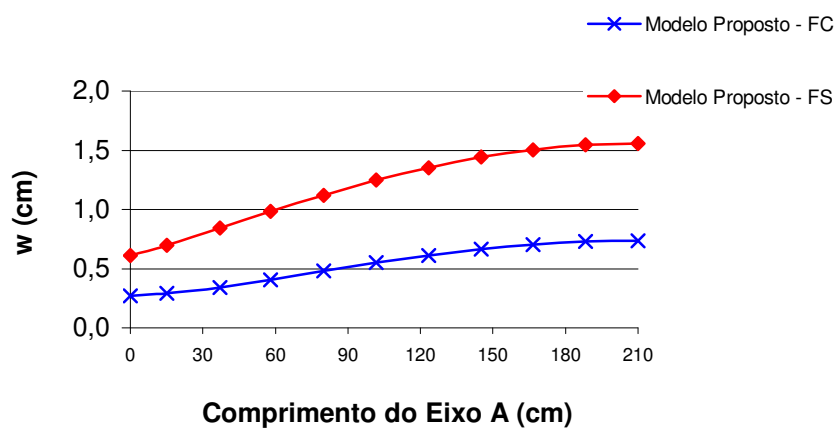


Figura 5.34 – Deslocamento w ao longo do eixo A, comparação entre as análises de flexão simples e composta

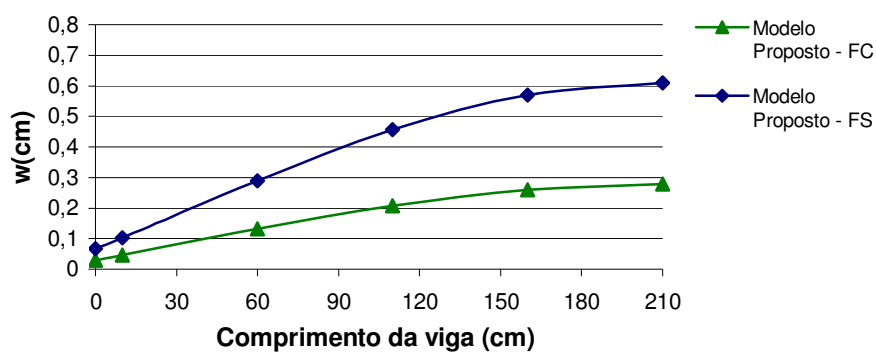


Figura 5.35 – Deslocamento w ao longo do eixo da viga, comparação entre as análises de flexão simples e composta

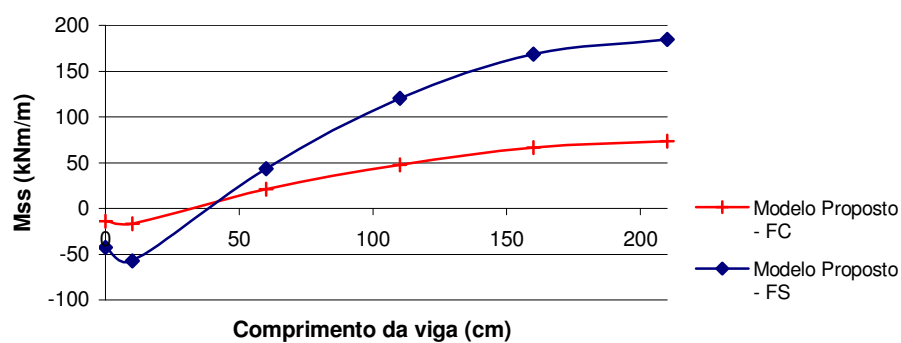


Figura 5.36 – Momento fletor ao longo do eixo da viga, comparação entre as análises de flexão simples e composta

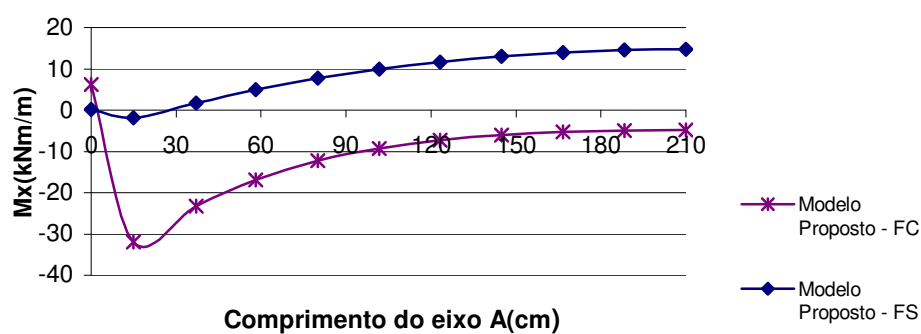


Figura 5.37 – Momento fletor ao longo do eixo A, comparação entre as análises de flexão simples e composta

5.4.3 Pavimento de um Edifício

Este exemplo consiste em um pavimento de um edifício de $9 \times 9m^2$, formado por uma grelha e quatro pilares (ver figura 5.38). As seções transversais são de $0,3 \times 0,8m^2$ para as vigas externas, $0,2 \times 0,8m^2$ para as vigas internas $0,3 \times 0,3m^2$ para os pilares. Foi adotado um coeficiente de Poisson $\nu = 0,167$ e módulo de elasticidade $E = 15000kN/cm^2$.

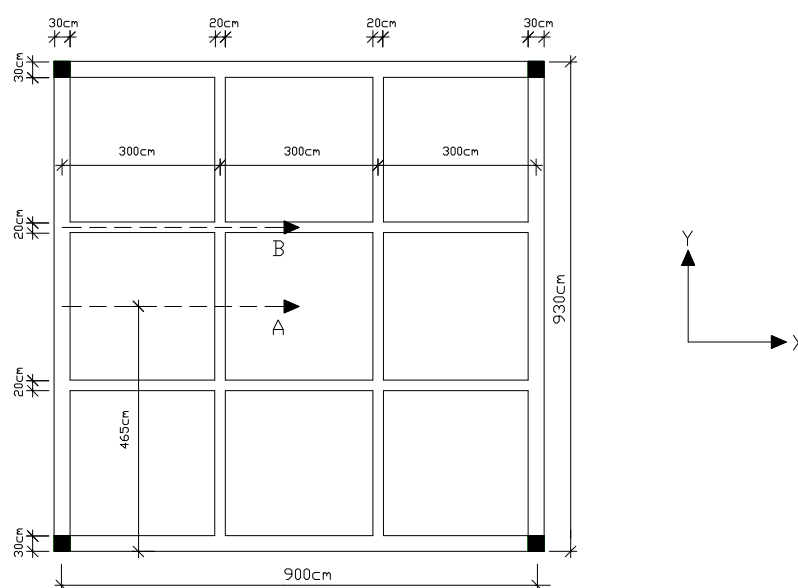


Figura 5.38 – Representação em Planta do Pavimento

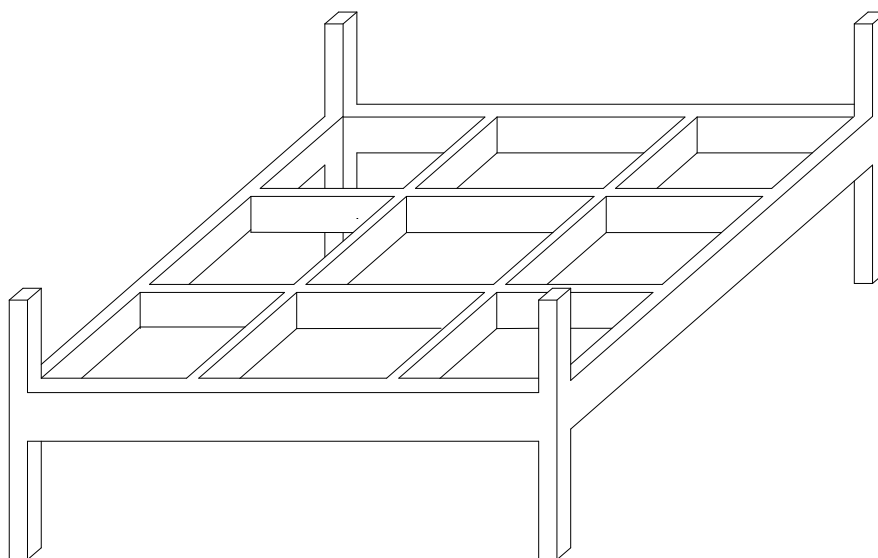


Figura 5.39 – Representação Arquitetônica do Pavimento

Para a análise deste exemplo fez-se 3 vezes a discretização da estrutura, sempre refinando a malha. A primeira discretização é composta por 108 elementos com 132 pontos nodais, a segunda por 204 elementos com 228 pontos nodais e a última por 300 elementos com 324 pontos nodais. Segue abaixo a discretização da primeira malha.

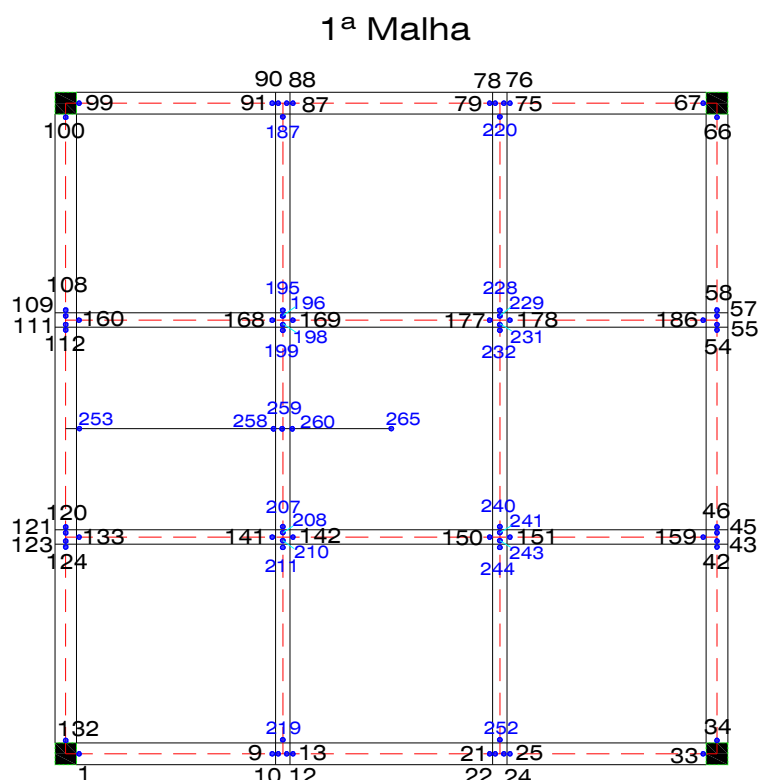


Figura 5.40 – Representação da primeira discretização

Obtevem-se os resultados do deslocamento transversal w e dos momentos fletores para análise em flexão simples e composta. Fez-se isso para os eixos A e B (ver figura 5.38). Em seguida, os resultados são comparados com os obtidos por Paiva (1987).

Seguem os resultados obtidos para a análise de flexão simples, através da formulação proposta, para o eixo A . Os gráficos abaixo mostram, respectivamente, os resultados do deslocamento w , momento fletor M_x e momento fletor M_y .

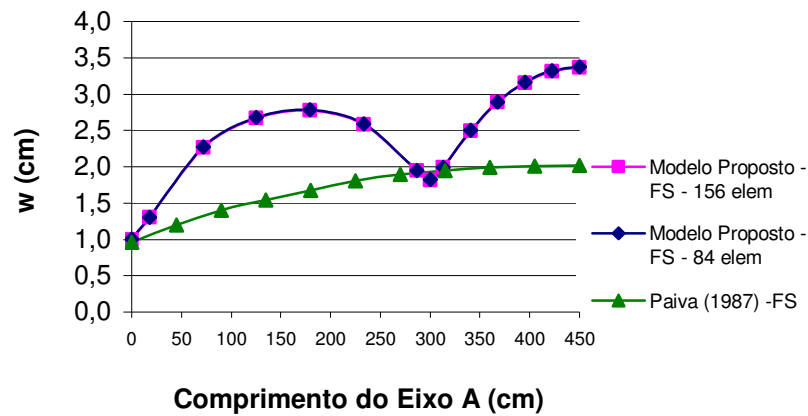


Figura 5.41 – Deslocamento w no eixo A, para Flexão Simples

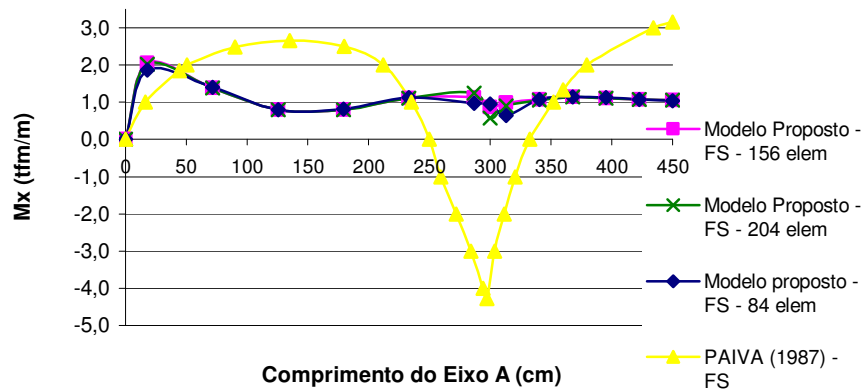


Figura 5.42 – Momento Fletor M_x no eixo A, para Flexão Simples

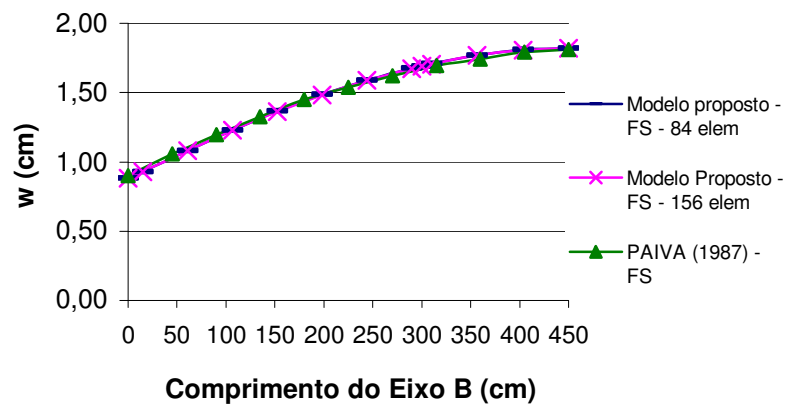


Figura 5.43 – Deslocamento w no eixo B, para Flexão Simples

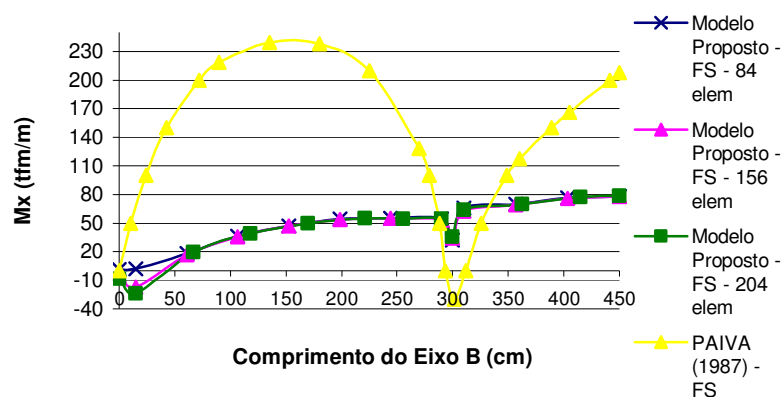


Figura 5.44 – Momento Fletor M_x no eixo B, para Flexão Simples

Observa-se uma boa convergência dos resultados para a análise de flexão simples, sendo os deslocamentos obtidos no eixo B praticamente iguais àqueles apresentados por Paiva (1987). No entanto, os deslocamentos na laje obtidos com o modelo proposto são maiores que os de Paiva (1987), observando uma forte redução dos valores quando se aproxima da viga interna. Como pode-se notar os valores obtidos para os momentos são consideravelmente diferentes daqueles apresentados por Paiva (1987).

Seja agora a análise considerando-se flexão composta (designada de FC). Os deslocamentos ao longo dos eixos A e B encontram-se nas figuras (5.45) e (5.46), onde pode-se observar que os deslocamentos da flexão composta foram bem menores que aqueles da flexão simples, sendo a convergência dos resultados obtida apenas com malhas muito refinadas.

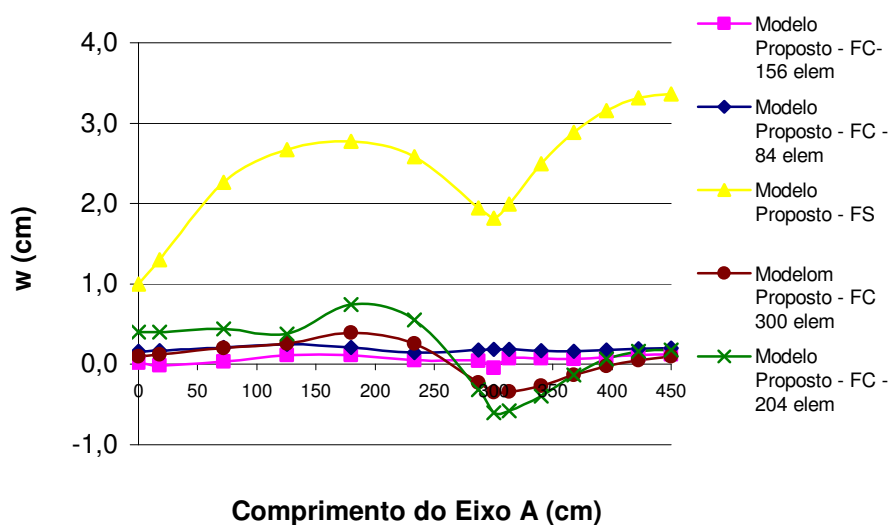


Figura 5.45 – Deslocamentos ao longo do eixo A para flexão composta

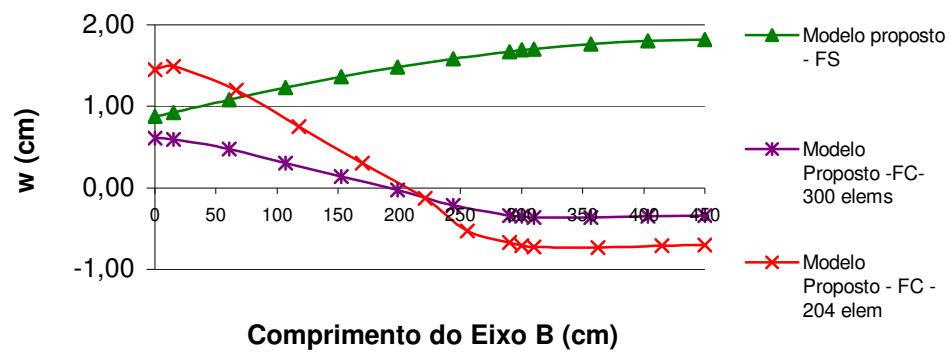


Figura 5.46 – Deslocamentos ao longo do eixo B para flexão composta

6. CONCLUSÕES

Nesse trabalho uma formulação do Método dos Elementos de Contorno para análise linear de flexão de pavimentos de edifícios foi estendida a fim de possibilitar a consideração de pilares no domínio dos mesmos. A inclusão os pilares foi feita em uma formulação para análise de flexão simples, onde as vigas e lajes são representadas por suas superfícies médias e também na formulação para flexão composta, onde essas são representadas por uma mesma superfície de referência. Portanto, nesse segundo caso, teve-se que considerar os efeitos de membrana.

A convergência dos resultados foi comprovada à medida que se refinavam as malhas, sendo eles comparados com aqueles obtidos através do modelo numérico desenvolvido por Paiva (1987) ou através do software ANSYS (versão 9), que é baseado no Método dos Elementos Finitos. Nos dois primeiros exemplos analisados, que eram mais simples, obteve-se a convergência dos resultados com malhas pouco refinadas e os resultados foram próximos daqueles obtidos com outros métodos numéricos. No terceiro exemplo foi analisado um pavimento constituído de vigas externas e internas sendo, portanto, bem mais complexo que os outros dois exemplos anteriores. Nesse caso, para obter a convergência foi necessária uma malha bem refinada. Observou-se ainda que os deslocamentos nas lajes eram bem maiores que aqueles obtidos por Paiva (1987), porém os deslocamentos obtidos nas vigas eram praticamente iguais a esses. Em todos os três exemplos a convergência na análise de flexão simples foi bem mais rápida que na análise de flexão composta, sendo os deslocamentos dessa bem menores que aqueles da flexão simples, como era esperado, devido aos efeitos de membrana. Portanto, o modelo mostrou-se ser estável, produzindo resultados confiáveis.

Como continuação do trabalho, pode-se estender a formulação para considerar diferentes coeficientes de Poisson e módulos de elasticidade nas lajes e vigas, o que possibilitaria o estudo de pavimentos compostos de diferentes materiais. Outra modificação interessante seria estender a formulação para poder considerar variação de espessura ao longo das lajes e vigas. Além disso, a partir desse modelo pode-se desenvolver um outro para análise não-linear de pavimentos de edifícios, através da inclusão e campos de momentos e forças normais iniciais na placa em sub-regiões. Como se pode notar a formulação proposta pode ainda ser bastante modificada a fim de torná-la mais geral e de produzir resultados mais

confiáveis através de uma análise não-linear que pode ser muito importante em determinados casos.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGOSTINHO, P. C. P. **Associação de chapas através da combinação dos métodos dos elementos de contorno e finitos considerando enrijecedores e crack coesivo**. 1998. 172 f. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998.

ARGYRIS, J.H.; KELSET, S. **Energy theorems and structural analysis**. London: Butterworths, 1960.

BACARJI, E. **Aplicação do método dos elementos de contorno à análise de pavimentos de edifícios**. 2001. 131 f. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001..

BETTI, E. **Teoria dell elasticita**. Il Nuovo Ciemento, 1872. p.7-10.

BREBBIA, C. A. **The boundary element method for engineers**. London: Pentech Press, 1978. 189p.

CARMO, R. N. S **Determinação de rigidez de estruturas de pavimentos através dos métodos dos elementos de contorno e finitos**. 2001. 145 f. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001.

CHAVES, E. W. V. **Análise de placas com variação de espessura através do método dos elementos de contorno**. 1997. 171 f. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1997.

CHUEIRI, L. H. M. **Formulação do método dos elementos de contorno para análise elastoplástica de placas**. 1994. 219 f. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1994.

DANSON, D.J. **Analysis of plate bending problems by direct boundary element method**. 1979. Dissertation (Master Science) - University of Southampton, Southampton, 1979.

FERNANDES, G. R. **O Método dos elementos de contorno aplicado à análise não linear de placas**. 1998. 178 f. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998.

FERNANDES, G. R. **Análise não linear de estruturas de pavimento de edifícios através do método dos elementos de contorno**. 2003. 272 f. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

FOLTRAN, C. E. **Análise de problemas planos em regime elasto-plástico pelo método dos elementos de contorno**. 1999. Campinas. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia civil, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1999.

FREDHOLM, I. Sur une classe d'equations fonctionnelles. **Acta Mathematica**, Djursholm, v.27, p. 365-390, 1903.

GIL RODRIGUEZ, J. C. **Sobre o emprego do método dos elementos de contorno em problemas elásticos bidimensionais**. 1986, 131 f. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1986.

KIRCHHOFF, G. Uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scleibe. **Journal Mathematics**, Tokyo, v.40, p.51-58, 1850.

KUPRADZE, V.D. **Potential methods in the theory of elasticity**. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1965.

MANZOLI, O.L. **Formulação do método dos elementos de contorno para placas sobre fundação elástica**. 1992. 141 f. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1992.

MENDONÇA, A. V. **Estudo de estruturas compostas por lâminas planas de espessuras constantes: uma abordagem pelo método dos elementos de contorno**. 2002. 296 f. Tese

(Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2002.

MENDONÇA, P. T. R. **Materiais compostos & estruturas: sanduíche**. Barueri: Manole, 2005. 233 p.

OLIVEIRA NETO, L. **Análise de placas de borda curva pelo método dos elementos de contorno**. 1991. 118 f. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1991.

OLIVEIRA NETO, L. **Uma formulação do método dos elementos de contorno com três parâmetros nodais em deslocamentos para placas delgadas e suas aplicações a problemas de engenharia estrutural**. 1998. 128 f. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998.

PAIVA, J. B. **Formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estruturas**. 1987. 195 f. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1987.

RIBEIRO, G. O. **Sobre a formulação do método dos elementos de contorno de placas usando as hipóteses de Reissner**. 1992. 266 f. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1992.

SOUTHWELL, R.V. **Relaxation methods in theoretical physics**. London: Oxford University Press, 1946.

RIZZO, F. An Integral approach to boundary value problems of classical elastostatics. **Quarterly of Applied Mathematics**, Providence, v.25, n.1, p.83-92, 1967.

SILVA, N. A. **Aplicação do método dos elementos de contorno à análise de placas sobre fundações elásticas**. 1988. 162 f. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1988

TEJERINA CALDERÓN, E. **Uma formulação alternativa para o estudo de placas sobre fundação elástica pelo método dos elementos de contorno.** 1991. 191 f. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1991.

TURNER, M.J. et al. Stiffness and deflection analysis of complex structures.
Journal of Aerosol Science, New York, n.23, p.805-823, 1956.

8. BIBLIOGRAFIAS CONSULTADAS

ANDRADE, M. M. **Introdução à metodologia do trabalho científico**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2003. 174 p.

BEER, F. P. ;JOHNSTON JR. E. R. **Resistência dos materiais**. 3. ed. São Paulo: Makron Books, 1915.

CORRÊA, M.R.S. **Aperfeiçoamento de modelos usualmente empregados no projeto de sistemas estruturais de edifícios**. 1991, 331 f. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1991.

FERNANDES, G.R. **Introdução ao método dos elementos de contorno**. Ilha Solteira: Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, 2005. 122 p. (Material Didático).

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Metodologia do trabalho científico**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2001. 219 p.

SANCHES JUNIOR, F. **Desenvolvimento de modelos numéricos para a análise de pavimentos de edifícios de concreto armado**. 2003. 167 f. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do trabalho científico**. 22. ed. São Paulo: Cortez, 2002. 335 p.

WAIDEMAM, L. **Análise dinâmica de placas delgadas utilizando elementos finitos triangulares e retangulares**. 2004. 153 f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2004.