



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.008/10

**Modelagem Estocástica de Opções de Câmbio no Brasil:
Aplicação de Transformada Rápida de Fourier e Expansão
Assintótica ao Modelo de Heston**

André Borges Catalão

Orientador

Prof. Dr. Rogério Rosenfeld

Outubro de 2010

*To achieve greatness, start where you are,
use what you have, do what you can.*

Arthur Ashe

Aos meus avós, Ida e Álvaro,
e à minha esposa, Silvana.

Agradecimentos

Agradeço inicialmente aos meus familiares e amigos, em especial minha esposa, Silvana, pelo constante apoio e carinho.

Agradeço também aos professores e colegas do IFT pelos ensinamentos e pelas agradáveis discussões de física e de ciência em geral.

Agradeço especialmente ao professor Rogério Rosenfeld pela excelente orientação, pela atenção e pela constante disposição em ensinar.

Resumo

Neste trabalho estudamos a calibração de opções de câmbio no mercado brasileiro utilizando o processo estocástico proposto por Heston [Heston, 1993], como uma alternativa ao modelo de apreçamento de Black e Scholes [Black e Scholes, 1973], onde as volatilidades implícitas de opções para diferentes preços de exercícios e prazos são incorporadas *ad hoc*. Comparamos dois métodos de apreçamento: o método de Carr e Madan [Carr e Madan, 1999], que emprega transformada rápida de Fourier e função característica, e expansão assintótica para baixos valores de volatilidade da variância. Com a finalidade de analisar o domínio de aplicabilidade deste método, selecionamos períodos de alta volatilidade no mercado, correspondente à crise *subprime* de 2008, e baixa volatilidade, correspondente ao período subsequente. Adicionalmente, estudamos a incorporação de *swaps* de variância para melhorar a calibração do modelo.

Palavras-Chaves: volatilidade estocástica; processos estocásticos; modelo de Heston; modelo de Black e Scholes; expansão assintótica; função característica; transformada rápida de Fourier; *swap* de variância.

Área do conhecimento: Processos estocásticos; Finanças.

Abstract

In this work we study the calibration of forex call options in the Brazilian market using the stochastic process proposed by Heston [Heston, 1993], as an alternative to the Black and Scholes [Black e Scholes, 1973] pricing model, in which the implied option volatilities related to different strikes and maturities are incorporated in an *ad hoc* manner. We compare two pricing methods: one from Carr and Madan [Carr e Madan, 1999], which uses fast Fourier transform and characteristic function, and asymptotic expansion for low values of the volatility of variance. To analyze the applicability of this method, we select periods of high volatility in the market, related to the subprime crisis of 2008, and of low volatility, correspondent to the following period. In addition, we study the use of variance swaps to improve the calibration of the model.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Introdução	1
1.2	Conceitos de mercado de opções	3
1.3	Conceitos de Processos Estocásticos	5
2	O Modelo de Black e Scholes	11
2.1	Introdução	11
2.2	As hipóteses de Black e Scholes	11
2.2.1	O Processo log-normal	12
2.2.2	A Equação de Black e Scholes	13
2.2.3	Função Característica de Black e Scholes	15
2.2.4	Desvios do Modelo de Black e Scholes	17
3	O Modelo de Heston	20
3.1	Introdução	20
3.2	Modelo de Volatilidade Estocástica	20
3.3	Equação Diferencial para Função Característica	21
3.4	Função Característica	23
3.4.1	Equação para D	25
3.4.2	Equação para C	27
4	Apreçamento de Opções via Funções Características	30
4.1	Introdução	30
4.2	O Formalismo de Carr e Madan	30
4.3	Método de Gauss-Legendre	33
4.3.1	Aplicação do Formalismo de Carr e Madan ao Modelo de Black e Scholes	33

5	Expansões Assintóticas em Heston	35
5.1	Introdução	35
5.2	Equações Envolvidas	35
5.2.1	Equação Diferencial	36
5.2.2	Equação Diferencial Modificada	40
5.3	Expansão Assintótica	42
5.3.1	Resumo das Equações Diferenciais	50
5.3.2	Solução da equação para $\tilde{C}^{(0)}$	51
5.3.3	O Modelo de Heston (Raiz Quadrada)	52
5.4	Comparação Entre o Método de Transformada Rápida de Fourier e o Método de Expansão Assintótica	58
6	<i>Swaps</i> de Variância	61
6.1	Introdução	61
6.2	<i>Swaps</i> de Variância: Definição	61
6.3	Modelo Log-normal	63
6.3.1	Replicação Estática de Log-Contrato	64
6.3.2	Preço do Contrato de Variância	66
6.4	Modelo de Heston	66
7	Calibração	69
7.1	Introdução	69
7.2	Descrição de Dados	69
7.3	Procedimento de Calibração	70
7.4	Resultados de calibrações	74
7.4.1	Calibração Pelo Procedimento Carr e Madan de Apreçamento	75
7.4.2	Calibração Pelo Método de Expansão Assintótica de Apreçamento	90
7.4.3	Gráficos de Superfície de Volatilidade Calibrados	104
7.4.4	Aplicação de Parâmetros Calibrados a Pontos Fora da Amostra	114
7.4.5	Aplicação do Método FFT ao Modelo de Black e Scholes . . .	116
8	Conclusões	120
9	Apêndices	123

Capítulo 1

Introdução

1.1 Introdução

Em 1973, Black e Scholes [Black e Scholes, 1973] apresentaram seu trabalho seminal, que passou a ser referência para o apreamento de contratos denominados de opções *vanillas*. Merton [Merton, 1973] também realizou contribuições ao modelo e, em 1997, por seus trabalhos em teoria de apreamento de opções, dividiu o Prêmio Nobel de Economia com Scholes. Desde a publicação do modelo de Black e Scholes, vários trabalhos foram desenvolvidos levando em conta modificações das hipóteses deste modelo para incorporar fatos estilizados do mercado.

Essencialmente, o modelo de Black e Scholes incorpora características de processos estocásticos inerentes à Física ao comportamento de ativos financeiros, através da adoção do processo log-normal. Dentre as hipóteses de Black e Scholes, aquela que damos particular atenção neste trabalho é a que pressupõe a adoção de uma única volatilidade de ativo para quaisquer preços de exercício e prazos de vencimento da opção. Notamos que o mercado de opções utiliza diferentes valores de volatilidades para diferentes preços de exercício e prazos. Rubinstein [Rubinstein, 1994] aponta que durante a crise da bolsa de 1987 as opções de venda com preços de exercício menores eram mais caras que as de preço de exercício maior, revelando a necessidade de diferentes volatilidades implícitas no modelo. A incorporação de diferentes volatilidades implícitas para diferentes preços de exercício e prazos leva à definição de uma superfície de volatilidade implícita (preço de exercício x prazo x volatilidade), conhecida como “sorriso”, ou *smile*.

A forma de se incorporar esta dependência da volatilidade com preços de exercício e prazo é a modificação do processo do ativo sob o qual a opção é apreçada, que no modelo de Black e Scholes é tomado como log-normal. Uma das

possibilidades é a introdução de saltos, ou *jumps*, onde podemos citar o trabalho de Merton [Merton, 1976] e Cox e Ross [Cox e Ross, 1975]. Uma segunda possibilidade é o uso de modelos de volatilidade estocástica. Nesta classe de modelos, um processo estocástico para volatilidade é adotado. Neste sentido, podemos citar os trabalhos de Heston [Heston, 1993], Stein e Stein [Stein e Stein, 1991], e Hull e White [Hull e White, 1987 e 1988]. Tanto Heston quanto outros trabalhos, como, por exemplo, Bakshi [Bakshi et al. 1997] e Bates [Bates, 1996], empregam transformada de Fourier para avaliar opções¹. No mercado brasileiro, Nobrega [Nobrega, 2003] calibra opções de dólar para os períodos 2002-2003; Cunha e Lemgruber [Cunha e Lemgruber, 2003] utilizam taxas de juros estocásticas. Além disso, Caticha *et al* [Caticha et al. 2005] apresentam um estudo para o índice IBOVESPA a respeito da aplicabilidade do modelo de Heston para várias escalas de tempo.

Neste trabalho empregamos o modelo de Heston em calibrações de opções de câmbio (FX) no mercado brasileiro no período da crise *subprime* de 2008 e período posterior, em 2009. Nosso intuito é empregar o procedimento de Carr e Madan [Carr e Madan, 1999] para a avaliação de opções de compra européias de câmbio através de transformada de Fourier e comparar os resultados com um segundo procedimento: expansão assintótica para baixos valores de volatilidade da variância. A vantagem da possibilidade de utilizar este método advém do fato de apresentar solução analítica fechada, mais rápida que os métodos de transformada de Fourier ou Monte Carlo. Uma outra novidade neste trabalho foi a introdução de *swaps* de variância na calibração, com o intuito de estabilizar os parâmetros obtidos no processo de calibração. Para tanto, como o mercado brasileiro não tem liquidez suficiente para estes ativos, geramos preços de *swaps* sinteticamente através do modelo de Demeterfi *et al* [Demeterfi et al, 1999].

Iniciamos o estudo apresentando, ainda neste capítulo, conceitos básicos do mercado de opções e o alguns conceitos de cálculo estocástico, tais como o lema de Ito e a definição de martingal. Em seguida, no capítulo 2, discutimos alguns aspectos do modelo de Black e Scholes, descrevendo suas hipóteses e apontando a necessidade de se introduzir a superfície de volatilidade, o que motiva a introdução de modelos alternativos, como os de volatilidade estocástica.

Passamos, então, no capítulo 3, ao modelo de Heston de volatilidade estocástica. Começamos descrevendo o processo do ativo e da volatilidade e deduzimos a equação diferencial para a função característica e sua solução. No capítulo 4, empregamos o

¹Referências adicionais, inclusive a revisões sobre trabalhos na área, podem ser encontradas em [Fouque et al., 2000], pg. 56-57.

método de Carr e Madan para obter a solução do modelo de Heston a partir da função característica. Tal solução apresenta-se na forma de uma integral, que pode ser resolvida por transformada rápida de Fourier. No capítulo 5, introduzimos o método de expansão assintótica, inicialmente de forma geral - possibilitando inclusive solução para os modelos de Hull e White [Hull e White, 1987] e Stein e Stein - e depois particularizando para o modelo de Heston. Neste capítulo também deduzimos a equação diferencial para uma opção apreçada sob o modelo de Heston.

No capítulo 6 estudamos os *swaps* de variância sob o modelo de Demeterfi *et al*, que incorpora as hipóteses de Black e Scholes, e depois sob volatilidade estocástica sob o modelo de Heston, com o intuito de utilizá-los na calibração, no capítulo 7. Neste capítulo comparamos resultados sob o procedimento de Carr e Madan e sob expansão assintótica. Também mostramos a aplicabilidade do procedimento de Carr e Madan ao modelo de Black e Scholes. O capítulo 8 conclui. O capítulo 9 apresenta apêndices com desenvolvimentos a serem utilizados na expansão assintótica, no *swap* de variância; além de conceitos sobre funções *affine* (empregadas na solução da equação diferencial da função característica).

1.2 Conceitos de mercado de opções

Nesta seção introduzimos alguns conceitos referentes ao mercado de derivativos, a serem utilizados ao longo deste trabalho².

- contrato derivativo: ativo cujo preço depende do valor de outro (ativo-base, ou ativo-objeto, ou *underlying*) em determinada data. Exemplos são contratos futuros e opções;
- contrato futuro: contrato derivativo onde o comprador *obrigatoriamente* compra em uma data futura (T) o ativo-base a um preço pré-estabelecido (S_T) na data de negociação. O resultado em T é dado por:

$$Futuro(T) = (S_T - S(T)), \quad (1.1)$$

onde $S(t)$ é o valor do ativo no instante t .

O valor estimado hoje (t) de uma cotação futura de moeda é dada por:

²Para maiores detalhes, o leitor pode consultar Hull [Hull, 1993].

$$F_t = S_t \frac{f_{doméstico}(T)}{f_{estrangeiro}(T)}, \quad (1.2)$$

onde $f_{doméstico}(T)$ é o fator de juros referente ao mercado local e $f_{estrangeiro}(T)$ é o fator de juros referente à moeda estrangeira, ambos para o vencimento (T) .

- opção de compra vanilla (*call option*): contrato derivativo que dá ao detentor o direito (não o dever) de comprar do emissor numa determinada data T um ativo-base (S_T) por um preço de exercício (ou *strike*, K) caso o preço do ativo-base esteja maior que o preço de exercício nesta data. O resultado do contrato é dado por:

$$Call(T) = \max(S_T - K, 0). \quad (1.3)$$

- opção de venda vanilla (*put option*): contrato derivativo que dá ao detentor o direito (não o dever) de vender ao emissor numa determinada data T um ativo-base (S_T) por um preço de exercício (ou *strike*, K) caso o preço do ativo-base esteja menor que o preço do ativo-base nesta data. O resultado do contrato é dado por:

$$Put(T) = \max(K - S_T, 0). \quad (1.4)$$

- exercício: ato de executar o direito sobre uma opção;
- opções européias: opções cujo exercício só pode ocorrer no vencimento T ;
- opções americanas: opções cujo exercício pode ocorrer em qualquer momento até o vencimento T ;
- opções dentro do dinheiro (*in the money*): diz-se de uma opção em situação que há possibilidade de exercício. Para uma *call* (*put*), corresponde a momentos em que $S > K$ ($S < K$), ou delta, dado pela equação (7.2), maior (menor) que cinquenta;
- opções fora do dinheiro (*out of the money*): diz-se de uma opção em situação que não há possibilidade de exercício. Para uma *call* (*put*), corresponde a momentos em que $S < K$ ($S > K$), ou delta, dado pela equação (7.2), menor (maior) que cinquenta;

- opções no dinheiro (*at the money*): diz-se de uma opção em situação $S = K$, ou delta, dado pela equação (7.2), igual a cinquenta.

A seguir apresentamos alguns conceitos sobre Cálculo Estocástico.

1.3 Conceitos de Processos Estocásticos

Apresentamos nesta seção alguns conceitos de Cálculo Estocástico. Iniciamos com uma introdução sobre processos de Wiener³. Em seguida, definimos o conceito de martingal. Finalmente, introduzimos o lema de Ito para uma função dependente de uma variável estocástica e, em seguida, generalizamos para o caso de várias variáveis.

Processos de Wiener

Um processo de Wiener é um tipo de processo estocástico de Markov (onde somente o valor presente da variável é relevante para definir o passo seguinte) cujo comportamento pode ser entendido ao se considerar suas variações em pequenos intervalos de tempo.

Considere o intervalo de tempo Δt e a variação Δz de uma variável que segue o processo de Wiener. Suas propriedades são:

- Propriedade 1

Δz relaciona-se com Δt por

$$\Delta z = \epsilon \sqrt{\Delta t}, \quad (1.5)$$

onde ϵ é uma variável aleatória normal padrão. Logo,

$$\epsilon \sim N(0, 1). \quad (1.6)$$

- Propriedade 2

³Vide, por exemplo, [Hull, 1993]

Os valores de Δz para quaisquer intervalos de tempo curtos são independentes. Assim, num período de tempo $[0, T]$, com $N = T/\Delta t$,

$$z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^N \epsilon_i \sqrt{\Delta t}. \quad (1.7)$$

A média, a variância e o desvio-padrão, respectivamente, são dados por:

$$\langle z(T) - z(0) \rangle = 0 \quad (1.8)$$

$$Var(z(T) - z(0)) = N\Delta t = T \quad (1.9)$$

$$\sigma(z(T) - z(0)) = \sqrt{Var(z(T) - z(0))} = \sqrt{T}. \quad (1.10)$$

Para um processo

$$dx = adt + b dz \quad (1.11)$$

temos:

$$\langle dx \rangle = adt \quad (1.12)$$

$$Var(dx) = b^2 dt \quad (1.13)$$

$$\sigma(dx) = b\sqrt{dt}. \quad (1.14)$$

Considere agora a integral estocástica:

$$\int b dz = 0. \quad (1.15)$$

Diante da equação 1.8, concluímos que seu valor esperado é zero:

$$\langle \int b dz \rangle = 0. \quad (1.16)$$

Martingal e Mercados Completos

Considere o processo estocástico $X = (X_t, t \geq 0)$ sobre um espaço de probabilidade Ω e suponha que a informação, representada pela filtração $\mathcal{F}_s$, seja conhecida no instante s^4 .

O processo estocástico $X = (X_t, t \geq 0)$ é chamado de Martingal em tempo contínuo com respeito à filtração $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ (escrevemos $(X, (\mathcal{F}_t))$ se

- $E[X_t] < \infty$ para qualquer $t \geq 0$;
- X é adaptado a $(\mathcal{F}_t)^5$;
- $E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$ para qualquer $0 \leq s \leq t$.

A última condição significa que X_s é a melhor predição de X_t , dado $\mathcal{F}_s$. Não é difícil verificar que

$$E(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n) = 0 \quad (1.17)$$

com

$$Y_{n+1} = X_{n+1} - X_n, \quad (1.18)$$

onde $n = 0, 1, \dots$

Associada ao processo martingal, uma medida martingal equivalente (MME) sobre a filtração $\mathcal{F}_T$ é requerida para assegurar que possamos replicar uma carteira ou proteger um derivativo unicamente sob não arbitragem. Neste caso, o mercado é completo (existem ativos-contingentes, que pagam uma unidade monetária para cada estado possível da natureza em T) e estamos sob a condição risco-neutra. Em um mercado incompleto, a condição de não-arbitragem não é suficiente para apreçar um derivativo unicamente e, conseqüentemente, vários preços são possíveis. Adicionalmente, o teorema de Girsanov mostra que sob a condição risco-neutra, a tendência do processo de um ativo é a taxa livre de risco⁶.

⁴Definições mais precisas sobre os conceitos aqui expostos podem ser encontradas em Mikosch [Mikosch, 1998].

⁵Intuitivamente, um processo $X = (X_t, t \geq 0)$ é adaptado a uma filtração $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ se os subconjuntos do espaço de probabilidade que possibilitam a realização do processo estão contidos na filtração $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$.

⁶Veja, por exemplo, [Björk, 2004].

Lema de Ito

Sejam:

- x : variável aleatória;
- dx : pequena mudança sobre a variável aleatória x ;
- G : função contínua, diferenciável da variável x ;
- dG : pequena variação da função G .

Gostaríamos de escrever G como um processo estocástico na forma (1.11), ou seja:

$$dG = (.)dt + (.)dz. \quad (1.19)$$

Sabemos da expansão de Taylor:

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(dx)^2 + \dots \quad (1.20)$$

e, se G depende de x e y :

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{\partial G}{\partial y}dy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(dy)^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}(dx dy) + \dots \quad (1.21)$$

Um derivativo é uma função de uma variável (ativo-base) que segue um processo estocástico. Queremos estender (1.21) para abranger tais funções. Suponha que a variável x siga um processo de Ito:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz. \quad (1.22)$$

e G é uma função de x e t . Por (1.21), temos:

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{\partial G}{\partial t}dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(dt)^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t}(dx dt) + \dots \quad (1.23)$$

O processo (1.22) pode ser escrito como

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)\epsilon\sqrt{dt}. \quad (1.24)$$

Logo,

$$(dx)^2 = b^2\epsilon^2dt + \mathcal{O}(dt). \quad (1.25)$$

Então, o termo em dx^2 tem uma dependência em dt que tem que ser considerada quando computamos (1.23) ao considerar termos que permitam escrevê-la na forma de um processo do tipo (1.19). Desta forma,

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2 + \frac{\partial G}{\partial t} \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x}bdz. \quad (1.26)$$

Generalização do Lema de Ito

Podemos generalizar o resultado (1.26) para uma função G que dependa de várias variáveis estocásticas do tipo (1.22). Indexando tais variáveis por i :

$$dx_i = a_i dt + b_i dz_i, \quad (1.27)$$

ou ainda,

$$dx_i = a_i dt + b_i \epsilon \sqrt{dt}. \quad (1.28)$$

A expansão de Taylor é

$$dG = \sum_i \frac{\partial G}{\partial x_i} dx_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 G}{\partial x_j \partial x_i} (dx_j dx_i)^2 + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial t} dt dx_i + \dots \quad (1.29)$$

Para (1.28), temos

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta x_i)^2 = b_i^2 dt \quad (1.30)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta x_i \Delta x_j) = \rho_{ij} b_i b_j dt, \quad (1.31)$$

o que nos leva à

$$dG = \left(\sum_i \frac{\partial G}{\partial x_i} a_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 G}{\partial x_j \partial x_i} \rho_{ij} b_i b_j + \frac{\partial G}{\partial t} \right) dt + \sum_i \frac{\partial G}{\partial x_i} b_i dz_i. \quad (1.32)$$

No próximo capítulo descrevemos o modelo de Black e Scholes.

Capítulo 2

O Modelo de Black e Scholes

2.1 Introdução

Em 1973, Merton, Black e Scholes apresentaram uma equação diferencial para o preço de derivativos dependentes de ações que não pagassem dividendos, resultando em fórmulas fechadas para o apreamento de opções européias de compra e venda sobre ações. Tal modelo aplica-se também às opções sobre moedas, mais precisamente descrito na formulação de Garman e Kohlhagen [Garman e Kohlhagen, 1983]. Iniciamos este capítulo enumerando as hipóteses do modelo e apresentamos, em seguida, de forma sucinta, o modelo de Black e Scholes para o apreamento de contratos de opções européias de compra e venda. Apresentamos também a função característica para o modelo, a ser utilizada posteriormente no procedimento de Carr e Madan para apreçar opções de compra européias (além do que faremos para o modelo de Heston). Depois, enfatizamos a necessidade de se introduzir uma superfície de volatilidade de forma *ad-hoc* caso as hipóteses sobre o processo sejam mantidas, abrindo caminho para o modelo de Heston, onde esta superfície surge naturalmente.

2.2 As hipóteses de Black e Scholes

As hipóteses sob as quais o modelo de Black e Scholes é formulado são:

1. O ativo-base segue um processo log-normal;
2. A venda a descoberto de ativos é permitida;
3. Não há custos de transações e os ativos são negociáveis em qualquer volume;

4. Não há dividendos pagos pelo ativo-base durante o período de vigência do contrato derivativo;
5. Não há oportunidades de arbitragem;
6. A negociação e o *hedge* são contínuos;

2.2.1 O Processo log-normal

A primeira hipótese sob o modelo de Black e Scholes é a de que o ativo-base S segue um processo log-normal, com tendência constante μ e volatilidade constante σ . Ou seja,

$$dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma dW_t, \quad (2.1)$$

onde W_t é um processo de Wiener¹.

Aplicando o lema Ito para uma variável $x_t = \ln S_t$, o processo é² :

$$dx_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t. \quad (2.2)$$

Assim, a mudança em x_t entre hoje (t) e o vencimento (T) é normalmente distribuído com média $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t)$ e variância $\sigma^2 (T - t)$. De outra maneira, a mudança de $\ln S_t$ para $\ln S_T$ no intervalo $T - t$ segue

$$\ln S_T - \ln S_t \sim N \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t), \sigma \sqrt{(T - t)} \right), \quad (2.3)$$

ou

$$\ln S_T \sim N \left(\ln S_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t), \sigma \sqrt{(T - t)} \right). \quad (2.4)$$

Desta maneira, a incerteza sobre $\ln S$ depende da raiz quadrada do tempo ao vencimento em consideração.

¹Veja a introdução sobre processos de Wiener, martingais e lema de Ito no capítulo 1.

²Veja equação 6.7 para esta dedução.

2.2.2 A Equação de Black e Scholes

A equação diferencial de Black e Scholes deve ser satisfeita para o preço de qualquer derivativo f sobre um ativo-base (ações ou câmbio, por exemplo) que não pague dividendos. Em uma de suas possíveis derivações, uma carteira Π (*portfolio*) sem risco é constituída a partir de uma posição no derivativo f e uma posição Δ no ativo-base (S), que será o responsável por tornar a carteira livre de risco. Matematicamente, temos³:

$$\Pi = f + \Delta S. \quad (2.5)$$

Se tanto o ativo-base quanto o derivativo estão sob influência das mesmas fontes de incertezas, o retorno de tal carteira sem risco iguala-se à taxa de retorno livre de risco da economia, para que não haja arbitragem. Tal equação é:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf.$$

Conforme mencionado, a variação do preço do ativo-base segue a equação (2.1). Já o derivativo, dependente do ativo-base (S) e do tempo (t), tem uma variação dada pelo lema de Ito⁴:

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} (dS)^2 + \mathcal{O}(dt^2) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S} \mu S dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dW_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} (\sigma S)^2 dt + \mathcal{O}(dt^2) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} (\sigma S)^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dW_t + \mathcal{O}(dt^2). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Assim, ao impor que a carteira dada pela equação (2.5) seja livre de risco, queremos que sua variação resulte em uma renda fixa, isto é, em um investimento que rende juros livres de risco. Do contrário, poderíamos criar uma estratégia onde financiar-nos-íamos em renda fixa (se esta estiver a um preço menor que a carteira) e compraríamos a carteira livre de risco, e vice-versa. Então, dado um redimento à taxa de juros livre de risco em moeda doméstica r para um ativo denominado em

³O leitor interessado pode consultar, por exemplo, [Hull, 1993], seção 10.7.

⁴Apresentamos o lema de Ito no Capítulo 1, segundo [Hull, 1993].

moeda local (como é o caso da opção) e um rendimento dado pelo diferencial de taxas $r - r_f$ para um ativo denominado em moeda estrangeira, resulta:

$$d\Pi = rf dt + (r - r_f)\Delta S dt. \quad (2.7)$$

Por outro lado,

$$d\Pi = df + \Delta dS, \quad (2.8)$$

onde df é dado por (2.6) e dS é dado por (2.1), de forma que, juntando (2.7) e (2.8), e preservando os termos de primeira ordem em dt , temos:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} (\sigma S)^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dW_t + \Delta (S_t \mu dt + S \sigma dW_t) \\ & = rf dt + (r - r_f) \Delta S dt \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} \mu S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} (\sigma S)^2 + \Delta S \mu - rf - \Delta(r - r_f)S \right) dt + \\ & \left(\frac{\partial f}{\partial S} \sigma S + \Delta \sigma S \right) dW_t = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Para eliminar o risco, expresso no termo dW_t , determinamos a quantidade Δ :

$$\Delta = -\frac{\partial f}{\partial S}. \quad (2.11)$$

Assumindo que estamos na medida livre de risco, a tendência do processo dado pela equação (2.1) é dado por $\mu = r - r_f$. Resta, então, após substituir esta quantidade no termo dt em (2.10):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} (\sigma S)^2 + \frac{\partial f}{\partial S} (r - r_f) S - rf = 0. \quad (2.12)$$

Esta é a equação diferencial de Black e Scholes para um derivativo, dentro das hipóteses enumeradas acima. Ela pode ser transformada numa equação do calor da Física, onde S é análogo ao espaço⁵.

⁵A sequência de transformações pode ser encontrada em [Wilmott, 1998].

Considere, portanto, como derivativo f a ser apreçado uma opção de compra européia C de strike K , que no seu vencimento paga

$$C_T = \max(S_T - K, 0). \quad (2.13)$$

Neste caso, (2.13) é vista como uma condição inicial para a equação (2.12). A solução da equação é:

$$C_t = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2), \quad (2.14)$$

onde N é a função acumulada normal, d_1 e d_2 são dados por

$$d_1 = \frac{\ln(F/K) + \frac{\sigma^2(T-t)}{2}}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (2.15)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}, \quad (2.16)$$

e o futuro do ativo S_t é dado por $F = S_te^{(r-r_f)(T-t)}$, com r a taxa doméstica contínua e r_f a taxa estrangeira contínua⁶. Para a opção de venda, que paga no vencimento

$$P_T = \max(K - S_T, 0), \quad (2.17)$$

a solução da equação é:

$$P_t = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1). \quad (2.18)$$

2.2.3 Função Característica de Black e Scholes

De forma geral, a função característica é a transformada de Fourier da função densidade de probabilidade da distribuição. Nesta seção deduzimos a função característica do modelo de Black e Scholes com o intuito de aplicar o formalismo de Carr e Madan para apreçar opções de compra européias sob este modelo, além da aplicação que faremos para o modelo de Heston.

Considere uma função $\phi(x, t)$ (com $T > t$):

⁶A função acumulada normal é dada por $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$

$$\phi(x, t) = E [g(x(T)) \mid x(t)], \quad (2.19)$$

onde a esperança é tomada na medida risco-neutra. Assim, consideramos $\mu = r - r_f$ na equação 2.2 e aplicamos o Lema de Ito, coletando termos em primeira ordem em dt :

$$\begin{aligned} d\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial t} dt + \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} (dx)^2 \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial t} dt + (r - r_f - \frac{1}{2} \sigma^2) \frac{\partial \phi}{\partial x} dt + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dt + \sigma \frac{\partial \phi}{\partial x} dW_t. \end{aligned} \quad (2.20)$$

ϕ é um martingal pela lei das expectativas iteradas, isto é:

$$E[\phi[x_t, t] \mid \mathcal{F}_s] = E\{E[g(x(T)) \mid \mathcal{F}_t] \mid \mathcal{F}_s\} = E[g(x(T)) \mid \mathcal{F}_s]. \quad (2.21)$$

Então $d\phi$ também é martingal e devemos ter

$$E[d\phi] = 0. \quad (2.22)$$

Tomando a esperança em 2.20, chegamos à equação diferencial para a função característica:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (r - r_f - \frac{1}{2} \sigma^2) \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0. \quad (2.23)$$

Sob a condição terminal:

$$\phi(x_T, T) = g(x). \quad (2.24)$$

Podemos escolher a função g como:

$$g(x) = e^{iux}. \quad (2.25)$$

Isto torna $\phi(x, t)$ a transformada de Fourier da função de densidade de probabilidade. Considerando que o processo 2.2 é *affine*, podemos escolher a solução na forma⁷:

⁷Veja o Apêndice C no Capítulo 9.

$$\phi(x, \tau; u) = \exp(C(\tau; u) + iux), \quad (2.26)$$

com $\tau = T - t$. Tomando todas as derivadas em 2.23:

$$\phi_x = iu\phi$$

$$\phi_{xx} = -u^2\phi$$

$$\phi_\tau = -C_\tau\phi.$$

Substituindo estes resultados em 2.23, e dividindo por ϕ obtemos a equação diferencial:

$$i(r - r_f - \frac{\sigma^2}{2})u - \frac{\sigma^2}{2}u^2 - \frac{dC}{d\tau} = 0, \quad (2.27)$$

com

$$C(\tau = 0) = 0. \quad (2.28)$$

A solução desta equação é

$$C(\tau) = iu(r - r_f)\tau - \frac{1}{2}(u^2 + iu)\tau\sigma^2. \quad (2.29)$$

Assim, a função característica de Black e Scholes é:

$$\phi(x, \tau; u) = \exp(iu(r - r_f)\tau + iux - \frac{1}{2}(u^2 + iu)\tau\sigma^2). \quad (2.30)$$

O preço da opção de compra européia pode ser calculado pelas equações 4.8 e 4.10, conforme descrito no capítulo 4.

2.2.4 Desvios do Modelo de Black e Scholes

Muitos derivativos são negociados e, portanto, apreçados, no mercado. Chama-se *preço de mercado* o preço obtido nesta situação e, adicionalmente, sempre que o preço de um derivativo é conhecido, pode-se computar a *volatilidade implícita* do modelo

de Black e Scholes. Verifica-se que há desvios entre os preços de mercado e os preços obtidos pelo modelo de Black e Scholes, levando à adoção de modificações no modelo. Nesta seção discutimos algumas delas, relativas à taxa de juros e volatilidade, sendo que, para esta última, procuramos motivar a adoção do modelo de Heston como uma possível solução do problema.

Inicialmente, notamos na solução da equação de Black e Scholes (2.14) que as variáveis taxa de juros r e volatilidade σ são constantes. Contudo, usualmente adota-se a dependência temporal nestas variáveis, podendo ser de forma determinística ou estocástica. Enquanto as formulações estocásticas adotam um processo *ad-hoc* para a variável em questão, as formulações determinísticas procuram meios alternativos para ajustar as variáveis a dados de mercado.

No caso da formulação determinística da taxa de juros, emprega-se a estrutura a termo da taxa de juros⁸. Já no caso da volatilidade, para incorporar a dependência temporal de forma determinística, utiliza-se a superfície de volatilidade, obtida *implicitamente* a partir de preços de mercado, conhecida como *smile*. Uma característica adicional sobre a volatilidade, presente no *smile*, é que, além da dependência temporal, há uma dependência com relação ao preço de exercício (*strike*, denotado por K). Assim, o *smile* é uma superfície $\sigma(K, T)$ com uma forma em geral diferente de uma reta, prevista pelo modelo original de Black e Scholes (vide figura 1).

Rubinstein apresenta exemplos de *smiles* de volatilidade para o índice de ações S&P500 da bolsa americana em 1987:

“One is tempted to hypothesize that the stock market crash of October 1987 changed the way market participants viewed index options. Out-of-the-money puts ... became valued much more highly, eventually leading to the ... situation where low striking price options had significantly higher implied volatilities than the high striking price options. The market’s pricing of options since the crash seems to indicate an increasing “crash-o-phobia”...”

Vemos que, num mercado pessimista, a crença de que havia uma tendência de queda de preços de ações levou à procura por opções de venda (*puts*) fora do dinheiro (*out-of-the-money*), que correspondem a valores de preços de exercício baixos.

Portanto, a superfície de volatilidade surge como uma forma de fazer a solução de Black e Scholes corresponder a dados de mercado. Como mencionamos, uma

⁸No Brasil representada pela curva de juros pré-fixados advinda dos futuros de DI.

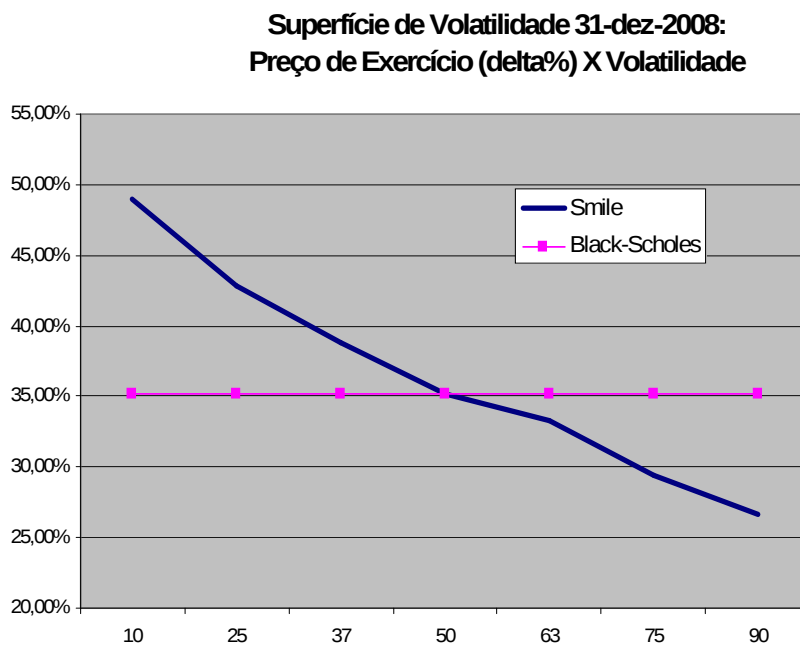


Figura 2.1: Superfície de volatilidade: comparação entre aquela prevista por Black e Scholes e a praticada pelo mercado.

outra forma de se obter uma volatilidade que dependa do preço do exercício e do tempo é introduzir um processo estocástico, tal como no procedimento adotado no modelo de Heston, ao qual nos voltamos no próximo capítulo.

Capítulo 3

O Modelo de Heston

3.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos a formulação do modelo de Heston e sua representação em termos da função característica. Partimos das dinâmicas de preço e variância, construímos a equação diferencial de Kolmogorov avançada (ou de Fokker-Planck) através do lema de Ito e, aplicando a transformada de Fourier, chegamos à função característica.

3.2 Modelo de Volatilidade Estocástica

O modelo de Heston assume para o ativo à vista, S_t , um processo log-normal no instante t :

$$dS_t = S_t \mu dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^1, \quad (3.1)$$

onde dW_t^1 é um processo de Wiener e μ é a tendência (*drift*). Para o processo de volatilidade, $\sqrt{v_t}$, o modelo assume um processo do tipo Ornstein-Uhlenbeck:

$$d\sqrt{v_t} = -\beta \sqrt{v_t} dt + \delta dW_t^2, \quad (3.2)$$

onde dW_t^2 é um processo de Wiener que apresenta correlação ρ com dW_t^1 , de forma que

$$E[dW_t^1 dW_t^2] = \rho dt. \quad (3.3)$$

Pode-se substituir a equação (3.2) por uma referente ao processo de variância $v = g(t, W_t^2)^2$, com $g = \sqrt{v_t}(t, W_t^2)$, aplicando o lema de Ito, colecionando termos de ordem não superiores a dt :

$$\begin{aligned}
dv &= 2g(t, W_t^2) \left(\frac{\partial g}{\partial t} dt + \frac{\partial g}{\partial W_t^2} dW_t^2 \right) + \\
&\frac{1}{2} \left\{ \left[2 \left(\frac{\partial g}{\partial t} \right)^2 + 2g \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \right] \underbrace{(dt)^2}_{O(dt^2)} + 2 \left[2 \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial W_t^2} + 2g \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial W_t^2} \right] \underbrace{dt dW_t^2}_{>O(dt)} \right. \\
&\quad \left. + \left[2 \left(\frac{\partial g}{\partial W_t^2} \right)^2 + 2g \frac{\partial^2 g}{\partial (W_t^2)^2} \right] \underbrace{(dW_t^2)^2}_{O(dt)} \right\} \quad (3.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dv &= 2 \times \sqrt{v} \left(\frac{\partial \sqrt{v}}{\partial t} dt + \frac{\partial \sqrt{v}}{\partial W_t^2} dW_t^2 \right) + \frac{1}{2} \left[2 \left(\frac{\partial \sqrt{v}}{\partial W_t^2} \right)^2 + 2 \times \underbrace{\sqrt{v} \frac{\partial^2 \sqrt{v}}{\partial (W_t^2)^2}}_{zero} \right] (dW_t^2)^2 \\
&= 2 \times \sqrt{v} \left(-\beta \sqrt{v} dt + \delta dW_t^2 \right) + \delta^2 dt \quad (3.5)
\end{aligned}$$

$$dv = (\delta^2 - 2\beta v) dt + 2\sqrt{v}\delta dW_t^2. \quad (3.6)$$

Reescrevemos esta equação na forma:

$$dv = \kappa (\theta - v) dt + \varepsilon \sqrt{v} dW_t^2, \quad (3.7)$$

onde κ é a velocidade de reversão à média, θ é a variância de longo prazo e ε é a volatilidade do processo de variância, comumente chamada de volatilidade da volatilidade. As equações (3.1) e (3.7) descrevem, portanto, um processo log-normal no ativo-base, S_t , e um processo de variância que reverte à uma média de longo prazo, θ .

3.3 Equação Diferencial para Função Característica

Antes de prosseguir com a dedução da equação diferencial para uma função dependente de S_t e v_t , definimos $x_t = \ln S_t$ e, aplicando o lema de Ito em 3.1, temos (colecionando os termos que gerarão ordens de dt):

$$dx = \frac{\partial x}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} (dS)^2 = \frac{1}{S} dS - \frac{1}{2} \frac{1}{S^2} (\sqrt{v} S dW_t)^2 = (\mu - \frac{v}{2}) dt + \sqrt{v} dW_t^1. \quad (3.8)$$

Dado que x_t segue um processo risco-neutro, $\mu = r - r_f$, e escrevemos

$$dx = (r - r_f + u_1 v) dt + \sqrt{v} dW_t^1. \quad (3.9)$$

Também reescrevemos 3.7:

$$dv = (a - bv) dt + \varepsilon \sqrt{v} dW_t^2, \quad (3.10)$$

onde $u_1 = -1/2$, $a = \kappa\theta$, $b = \kappa$.

Considere uma função $\phi(x, v, t)$ dada por (para um $T > t$):

$$\phi(x, v, t) = E [g(x(T), v(T)) \mid x(t), v(t)]. \quad (3.11)$$

Nosso objetivo agora é chegar à equação diferencial para $\phi(x, v, t)$ e achar sua solução. Aplicando o lema de Ito a 3.11, temos:

$$\begin{aligned} d\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial t} dt + \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial v} dv + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} (dx)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} (dv)^2 + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial v} dx dv \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial t} dt + (r - r_f + u_1 v) \frac{\partial \phi}{\partial x} dt + \sqrt{v} \frac{\partial \phi}{\partial x} dW_t^1 + \\ &\quad (a - bv) \frac{\partial \phi}{\partial v} dt + \varepsilon \sqrt{v} \frac{\partial \phi}{\partial v} dW_t^2 + \\ &\quad \frac{1}{2} (r - r_f + u_1 v)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} (dt)^2 + 2 \frac{1}{2} (r - r_f + u_1 v) \sqrt{v} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dt dW_t^1 + \frac{1}{2} v \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} (dW_t^1)^2 + \\ &\quad \frac{1}{2} (a - bv)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} (dt)^2 + 2 \frac{1}{2} (a - bv) \varepsilon \sqrt{v} \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} dt dW_t^2 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 v \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} (dW_t^2)^2 + \\ &\quad \varepsilon v \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial v} dW_t^1 dW_t^2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

ϕ é um martingal pela lei das expectativas iteradas, isto é:

$$E[\phi[x_t, v_t, t] | \mathcal{F}_s] = E\{E[g(x(T), v(T)) | \mathcal{F}_t] | \mathcal{F}_s\} = E[g(x(T), v(T)) | \mathcal{F}_s]. \quad (3.13)$$

Então $d\phi$ também é martingal e devemos ter

$$E[d\phi] = 0. \quad (3.14)$$

Tomando esperança em 3.12 (coleccionando termos de primeira ordem em dt):

$$E(d\phi) = \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + (r - r_f + u_1 v) \frac{\partial \phi}{\partial x} + (a - bv) \frac{\partial \phi}{\partial v} + \frac{1}{2} v \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 v \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} + \rho \varepsilon v \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial v} \right] dt. \quad (3.15)$$

O argumento de dt deve ser zero para termos 3.14. Então,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (r - r_f + u_1 v) \frac{\partial \phi}{\partial x} + (a - bv) \frac{\partial \phi}{\partial v} + \frac{1}{2} v \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 v \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} + \rho \varepsilon v \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial v} = 0. \quad (3.16)$$

Esta é a equação de avançada de Kolmogorov. A condição final é:

$$\phi(x_T, v_T, T) = g(x, v). \quad (3.17)$$

3.4 Função Característica

Se fizermos em 3.11

$$g(x, v) = e^{iux}, \quad (3.18)$$

então ϕ é a definição de função característica, pois esta é a transformada de Fourier da distribuição de probabilidade do processo, ou o valor médio de e^{iux} . Além disso,

a solução da equação 3.16 é a função característica. Devido ao fato de os processos 3.9 e 3.10 serem *affine*, podemos propor o formato da solução de 3.16 na forma¹:

$$\phi(x, v, \tau; u) = \exp(C(\tau; u) + D(\tau; u)v + iux), \quad (3.19)$$

com $\tau = T - t$. Tomando todas as derivadas em 3.16²:

$$\phi_x = iu\phi$$

$$\phi_{xx} = -u^2\phi$$

$$\phi_v = D\phi$$

$$\phi_{vv} = D^2\phi$$

$$\phi_{xv} = iuD\phi$$

$$\phi_t = (C_t + vD_t)\phi.$$

Substituindo estes resultados em 3.16 e dividindo por ϕ :

$$(C_t + vD_t) + iu(r - r_f + u_1v) + (a - bv)D - \frac{1}{2}vu^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2vD^2 + \rho\varepsilon viuD = 0. \quad (3.20)$$

Reagrupando em dois termos, um dependente e outro independente de v :

$$v(-\frac{1}{2}u^2 + i\rho\varepsilon Du + \frac{1}{2}\varepsilon^2D^2 + u_1iu - bD + D_t) + (i(r - r_f)u + aD + C_t) = 0. \quad (3.21)$$

Cada termo deve se anular. Desta forma, obtemos as equações diferenciais de Riccati:

¹Vide apêndice 9 para a definição de processos *affine*.

²Aqui os sub-índices são derivadas.

$$-\frac{1}{2}u^2 + i\rho\varepsilon uD + \frac{1}{2}\varepsilon^2 D^2 + iu_1u - bD + \frac{dD}{dt} = 0 \quad (3.22)$$

$$i(r - r_f)u + aD + \frac{dC}{dt} = 0 \quad (3.23)$$

Utilizando $\tau = T - t$, obtemos:

$$\frac{1}{2}\varepsilon^2 D^2 + (i\rho\varepsilon u - b)D + \left(iu_1u - \frac{1}{2}u^2\right) = \frac{dD}{d\tau} \quad (3.24)$$

$$i(r - r_f)u + aD = \frac{dC}{d\tau}, \quad (3.25)$$

sujeitas às condições

$$C(0) = 0 \quad (3.26)$$

$$D(0) = 0. \quad (3.27)$$

3.4.1 Equação para D

De 3.24,

$$\frac{dD}{\frac{1}{2}\varepsilon^2 D^2 + D(i\rho\varepsilon u - b) + (iu_1u - \frac{1}{2}u^2)} = d\tau. \quad (3.28)$$

Reescrevemos o denominador, separando-o em dois termos. Para tanto, usamos as raízes advindas da equação de segundo grau associada ao denominador:

$$\begin{aligned} D &= \frac{-(i\rho\varepsilon u - b) \pm \sqrt{(i\rho\varepsilon u - b)^2 - 4\frac{1}{2}\varepsilon^2(iu_1u - \frac{1}{2}u^2)}}{\varepsilon^2} \\ &= \frac{(b - i\rho\varepsilon u) \pm \sqrt{(i\rho\varepsilon u - b)^2 - \varepsilon^2(2iu_1u - u^2)}}{\varepsilon^2}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Definamos

$$\hat{\phi} = \sqrt{(i\rho\varepsilon u - b)^2 - \varepsilon^2(2iu_1u - u^2)} \quad (3.30)$$

$$X^+ = \frac{(b - i\rho\varepsilon u) + \hat{\phi}}{\varepsilon^2} \quad (3.31)$$

$$X^- = \frac{(b - i\rho\varepsilon u) - \hat{\phi}}{\varepsilon^2} \quad (3.32)$$

$$\hat{g} = \frac{X^+}{X^-}. \quad (3.33)$$

Então:

$$\frac{dD}{(D - X^+)(D - X^-)} = \frac{1}{2}\varepsilon^2 d\tau. \quad (3.34)$$

Separando esta equação em frações parciais:

$$\frac{A}{D - X^+} + \frac{B}{D - X^-} = \frac{1}{(D - X^+)(D - X^-)}$$

$$\Rightarrow A(D - X^-) + B(D - X^+) = 1$$

$$(A + B)D - (AX^- + BX^+) = 1$$

$$\Rightarrow A = -B$$

$$e A(X^- - X^+) = -1$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{X^+ - X^-}.$$

Das definições de 3.31 e 3.32,

$$X^+ - X^- = \frac{(b - i\rho\varepsilon u) + \hat{\phi}}{\varepsilon^2} - \frac{(b - i\rho\varepsilon u) - \hat{\phi}}{\varepsilon^2} = \frac{2\hat{\phi}}{\varepsilon^2}, \quad (3.35)$$

e de A e B :

$$A = \frac{\varepsilon^2}{2\hat{\phi}} \quad (3.36)$$

$$B = -\frac{\varepsilon^2}{2\hat{\phi}}. \quad (3.37)$$

A equação 3.34 pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon^2 dD}{2\hat{\phi}(D - X^+)} - \frac{\varepsilon^2 dD}{2\hat{\phi}(D - X^-)} &= \frac{1}{2}\varepsilon^2 d\tau \\ \Rightarrow \frac{dD}{D - X^+} - \frac{dD}{D - X^-} &= \hat{\phi} d\tau. \end{aligned}$$

Portanto, integrando:

$$\ln(D - X^+) - \ln(D - X^-) = \hat{\phi}\tau + k, \quad (3.38)$$

onde k é uma constante que pode ser determinada mediante 3.27:

$$k = \ln(-X^+) - \ln(-X^-) = \ln\left(\frac{X^+}{X^-}\right) = \ln(\hat{g}).$$

Em 3.38,

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{D - X^+}{D - X^-}\right) &= \hat{\phi}\tau + \ln \hat{g} \\ \frac{D - X^+}{D - X^-} &= \hat{g}e^{\hat{\phi}\tau} \\ \Rightarrow D\left(1 - \hat{g}e^{\hat{\phi}\tau}\right) &= X^+ - \frac{X^+}{X^-}e^{\hat{\phi}\tau}X^-. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$D(\tau; u) = X^+ \frac{1 - e^{\hat{\phi}\tau}}{1 - \hat{g}e^{\hat{\phi}\tau}}. \quad (3.39)$$

3.4.2 Equação para C

Prosseguimos agora com a solução de 3.25, sujeita a 3.27. Iniciamos substituindo 3.39 em 3.25:

$$\frac{dC}{d\tau} = i(r - r_f)u + aX^+ \frac{1 - e^{\hat{\phi}\tau}}{1 - \hat{g}e^{\hat{\phi}\tau}} \quad (3.40)$$

$$dC = i(r - r_f)ud\tau + aX^+ \frac{1 - e^{\hat{\phi}\tau}}{1 - \hat{g}e^{\hat{\phi}\tau}} d\tau. \quad (3.41)$$

Integremos primeiro o segundo termo de 3.41 fazendo a substituição $x = e^{\hat{\phi}\tau}$ com $dx = \hat{\phi}x d\tau$

$$\frac{1 - e^{\hat{\phi}\tau}}{1 - \hat{g}e^{\hat{\phi}\tau}} d\tau \rightarrow \frac{1 - x}{\hat{\phi}x(1 - \hat{g}x)} dx. \quad (3.42)$$

Separando em frações parciais:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{(1 - \hat{g}x)} = \frac{1 - x}{x(1 - \hat{g}x)}$$

$$A(1 - \hat{g}x) + Bx = 1 - x$$

$$\therefore A = 1 \quad (3.43)$$

$$-\hat{g} + B = -1 \Rightarrow B = \hat{g} - 1. \quad (3.44)$$

Assim, integrando 3.42:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hat{\phi}} \int \frac{1 - x}{x(1 - \hat{g}x)} dx &= \frac{1}{\hat{\phi}} \int \left(\frac{1}{x} + \frac{\hat{g} - 1}{1 - \hat{g}x} \right) dx = \frac{1}{\hat{\phi}} \left(\ln x - \left(\frac{\hat{g} - 1}{\hat{g}} \right) \ln(1 - \hat{g}x) + l \right) \\ &= \tau - \frac{\hat{g} - 1}{\hat{g}\hat{\phi}} \ln(1 - \hat{g}e^{\hat{\phi}\tau}) + \hat{l}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

onde l e $\hat{l}$ são constantes. Integrando o primeiro termo de 3.41 e juntando 3.45:

$$C = i(r - r_f)u\tau + aX^+ \left(\tau - \frac{\hat{g} - 1}{\hat{g}\hat{\phi}} \ln(1 - \hat{g}e^{\hat{\phi}\tau}) \right) + m, \quad (3.46)$$

onde m é uma constante que determinaremos utilizando 3.27:

$$C(0) = -aX^+ \frac{\hat{g} - 1}{\hat{g}\hat{\phi}} \ln(1 - \hat{g}) + m = 0$$

$$\therefore m = aX^+ \frac{\hat{g} - 1}{\hat{g}\hat{\phi}} \ln(1 - \hat{g}).$$

Em 3.46,

$$C = i(r - r_f)u\tau + aX^+ \left(\tau - \frac{\hat{g} - 1}{\hat{g}\hat{\phi}} \ln(1 - \hat{g}e^{\hat{\phi}\tau}) \right) + aX^+ \frac{\hat{g} - 1}{\hat{g}\hat{\phi}} \ln(1 - \hat{g})$$

$$C = i(r - r_f)u\tau + aX^+ \left(\tau - \frac{\hat{g} - 1}{\hat{g}\hat{\phi}} \ln \left(\frac{1 - \hat{g}e^{\hat{\phi}\tau}}{1 - \hat{g}} \right) \right).$$

Simplifiquemos o termo $X^+ \frac{\hat{g}-1}{\hat{g}\hat{\phi}}$ considerando 3.33 e 3.35:

$$X^+ \frac{\hat{g} - 1}{\hat{g}\hat{\phi}} = X^+ \frac{\frac{X^+}{X^-} - 1}{\frac{X^+}{X^-}} \frac{1}{\hat{\phi}} = \frac{X^+ - X^-}{\hat{\phi}} = \frac{1}{\hat{\phi}} \frac{2\hat{\phi}}{\varepsilon^2} = \frac{2}{\varepsilon^2}.$$

Desta forma,

$$C(\tau; u) = i(r - r_f)u\tau + a \left(X^+ \tau - \frac{2}{\varepsilon^2} \ln \left(\frac{1 - \hat{g}e^{\hat{\phi}\tau}}{1 - \hat{g}} \right) \right). \quad (3.47)$$

As equações 3.39 e 3.47 em 3.19 compõem a função característica do modelo de Heston. No próximo capítulo mostraremos como empregar tal função ao apreçamento de uma opção de compra sob o formalismo de Carr e Madan.

Capítulo 4

Apreçamento de Opções via Funções Características

4.1 Introdução

Iniciamos este capítulo apresentando o formalismo de Carr e Madan para o apreçamento de opções de compra, dada uma função característica. Chega-se à representação do preço da opção por uma integral. A seção seguinte mostra como calcular a integral utilizando o método de Gauss-Legendre. Apresentamos também uma aplicação ao modelo de Black e Scholes.

4.2 O Formalismo de Carr e Madan

Seja uma opção de compra (*call option*) de *strike* K , cujo preço (*payoff*) pago no vencimento T é dado por:

$$C(T) = \max(S_T - K, 0). \quad (4.1)$$

Definamos, como na seção 3.3, o log-preço no vencimento, $x_T = \ln S_T$. Adicionalmente, temos, para o *strike*, $k = \ln K$. Seja $q_T(x)$ a distribuição risco-neutra do log-preço no vencimento. A transformada de Fourier desta distribuição representa a função característica:

$$\phi_T(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} q_T(x) dx. \quad (4.2)$$

O preço presente ($t = 0$) de uma opção de compra com vencimento T , em termos de log-preços, é dado pela integral:

$$C_T(k) = \int_k^\infty e^{-rT}(e^x - e^k)q_T(x)dx, \quad (4.3)$$

sob o limite

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} C_T(k) = x_0. \quad (4.4)$$

Para poder integrar 4.3, definamos um preço de opção modificado:

$$C_{\sim T}(k) = e^{\alpha k} C_T(k), \quad (4.5)$$

com $\alpha > 0$ ¹. Definamos $\psi_T(\nu)$ a transformada de Fourier de $C_{\sim T}(k)$:

$$\psi_T(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu k} C_{\sim T}(k) dk. \quad (4.6)$$

Assim, o preço da opção de compra é (aplicando transformada inversa em 4.6):

$$C_T(k) = e^{-\alpha k} C_{\sim T}(k) = \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\nu k} \psi_T(\nu) d\nu. \quad (4.7)$$

A função $C_T(k)$ é real. Desta forma, $\psi_T(\nu)$ é ímpar na parte imaginária, o que zera a integral, e par na parte real, o que não zera a integral. Assim,

$$C_T(k) = \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{-i\nu k} \psi_T(\nu) d\nu. \quad (4.8)$$

Além disso, considerando 4.6 e 4.5:

¹Este parâmetro terá um caráter de controle de estabilidade em integrações. De fato, para que o preço da opção de compra $C_T(k)$ seja integrável quadraticamente, ela deve decair rapidamente em 4.3 quando $k \rightarrow -\infty$. Contudo, quando $k \rightarrow -\infty$ em 4.3, vemos que a função tende a $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} e^x q_T(x) dx$, que é o valor médio do preço do ativo-objeto em T , descontado pela taxa de juros, o que resulta no ativo-objeto em $t = 0$, ou seja, S_0 . Assim, para tornar a integral nula quando $k \rightarrow -\infty$, definimos $C_{\sim T}(k)$.

$$\psi_T(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu k} C_T(k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu k} \int_k^{\infty} e^{\alpha k} e^{-rT} (e^x - e^k) q_T(x) dx dk. \quad (4.9)$$

Mudamos os extremos de integração e resolvemos a integral em k :

$$\begin{aligned} \psi_T(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} q_T(x) \int_{-\infty}^x (e^{x+\alpha k} - e^{(1+\alpha)k}) e^{i\nu k} dk dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} q_T(x) \left[\frac{e^{x+\alpha k+i\nu k}}{\alpha + i\nu} - \frac{e^{(\alpha+1+i\nu)k}}{1 + \alpha + i\nu} \right]_{-\infty}^x dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} q_T(x) \left[\frac{e^{x(1+\alpha+i\nu)}}{\alpha + i\nu} - \frac{e^{(\alpha+1+i\nu)x}}{1 + \alpha + i\nu} \right] dx \\ &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} q_T(x) \left[\frac{e^{x(1+\alpha+i\nu)}}{(\alpha + i\nu)(1 + \alpha + i\nu)} \right] dx \\ &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} q_T(x) \left[\frac{e^{x(1+\alpha+i\nu)}}{(\alpha^2 + 2\alpha\nu i - \nu^2 + \alpha + i\nu)} \right] dx \\ &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} q_T(x) \left[\frac{e^{x(1+\alpha+i\nu)}}{(\alpha^2 + \alpha - \nu^2 + i\nu(2\alpha + 1))} \right] dx \\ &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} q_T(x) \left[\frac{e^{ix(-i(1+\alpha)+\nu)}}{(\alpha^2 + \alpha - \nu^2 + i\nu(2\alpha + 1))} \right] dx \\ &\therefore \psi_T(\nu) = e^{-rT} \frac{\phi_T(\nu - i(1 + \alpha))}{(\alpha^2 + \alpha - \nu^2 + i\nu(2\alpha + 1))}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

O valor da opção de compra é calculado usando 4.10 em 4.8. No caso do modelo de Heston, a função característica ϕ_T é dada por 3.19 com 3.39 e 3.47. Na próxima subseção apresentamos o método de Gauss-Legendre para calcular a integral 4.8 e obter o preço da opção de compra.

4.3 Método de Gauss-Legendre

O método de Gauss-Legendre permite calcular a integral de uma função $f(t)$ no intervalo $[-1, 1]^2$. Para tanto, a integral é aproximada por uma soma, ponderada com pesos w_k , da função $f(t)$, calculada em certos pontos, tomados como raízes de uma classe de polinômios - no caso, polinômios de Legendre de ordem n - no intervalo:

$$\int_{-1}^1 f(t)dt = \sum_{k=1}^n w_k f(t_k). \quad (4.11)$$

Para cada n , o polinômio tem n raízes no intervalo $[-1, 1]$. Uma integral definida no intervalo $[x_1, x_2]$ pode ser realizada no intervalo $[-1, 1]$ através da transformação

$$y = \frac{2t - x_1 - x_2}{x_2 - x_1}. \quad (4.12)$$

Desta forma,

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt = \int_{-1}^1 \frac{x_2 - x_1}{2} f\left(\frac{x_2 - x_1}{2}y + \frac{x_2 + x_1}{2}\right)dy. \quad (4.13)$$

Portanto, trabalharemos com este integrando para calcular o preço da opção de compra descrito na equação 4.8, com $x_1 = 0$ e x_2 arbitrariamente grande. Para o parâmetro α , utilizamos o valor sugerido em Carr e Madan, $\alpha = 1,65$.

4.3.1 Aplicação do Formalismo de Carr e Madan ao Modelo de Black e Scholes

No capítulo 7 descreveremos os dados empregados neste trabalho. Nesta subseção apresentaremos um exemplo de aplicação do formalismo apresentado neste capítulo à função característica 2.30, referente ao processo log-normal do modelo de Black e Scholes, comparando com a solução do modelo de Black e Scholes 2.14.

Consideremos o prazo de 12 meses (252 dias úteis), taxa de juros doméstica e estrangeira de 9,18% e 1,81%, respectivamente, em base anual (252 dias úteis), na composição contínua; preço do ativo à vista de 1.750,00 e preços de exercício correspondentes a deltas 25, 35, 50, 65, 75 e 85. Os dados estão nas tabelas das

²Uma descrição do método pode ser encontrada em [Press et al, 1992].

figuras 4.1 e 4.2. Nesta tabela estão os cálculos referentes aos preços de exercício relativos aos deltas e às respectivas volatilidades.

A tabela da figura 4.3 mostra a comparação dos valores de preços de opções de compra européias de mercado, obtidos pela solução do modelo de Black e Scholes (equação 2.14), com os preços calculados pelas equações 4.8 e 4.10 sob a função característica 2.19³. Nota-se a proximidade de ambos os métodos.

dados	
vencimento (dias úteis)	252
taxa de juros local (a.a., base 252, contínua)	9,18%
taxa de juros estrangeira (a.a., base 252, contínua)	1,81%
ativo à vista	1.750,00

Figura 4.1: Dados utilizados na comparação entre o apreamento pelo método de transformada rápida de Fourier e pela solução do modelo de Black e Scholes.

dados						
delta	25,00	35,00	50,00	65,00	75,00	85,00
preços de exercício	2282,07	2104,23	1928,36	1795,55	1709,27	1609,22
volatilidades	23,75%	21,67%	19,49%	18,27%	17,90%	17,82%

Figura 4.2: Dados utilizados na comparação entre o apreamento pelo método de transformada rápida de Fourier e pela solução do modelo de Black e Scholes.

Prazo (meses)	Conjunto	Preços de Opções de Compra						(Erro Quadrático)^0.5 x 1E5
		delta						
		25,00	35,00	50,00	65,00	75,00	85,00	
12	Mercado	53,09	76,35	115,66	166,60	213,29	279,75	8,72
	FFT	53,09	76,34	115,66	166,59	213,28	279,74	

Figura 4.3: Comparação entre o apreamento pelo método de transformada rápida de Fourier e pela solução do modelo de Black e Scholes (pontos de mercado).

No próximo capítulo, apresentaremos o método de expansão assintótica como uma forma alternativa, analítica, para apreçar a opção de compra sob o modelo de Heston quando a volatilidade da volatilidade (ε) for pequena.

³O erro é computado segundo a equação 7.4

Capítulo 5

Expansões Assintóticas em Heston

5.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos um método de expansão assintótica para o preço de uma opção europeia de compra sob o modelo de Heston, para pequenos valores de volatilidade da volatilidade (ε), ou seja, pouco *smile*. A utilidade desta expansão é obter formas analíticas que não envolvam cálculos de integrais e, portanto, agilizam o processo de calibração. Seguimos o procedimento de Lipton [Lipton, 2001].

Inicialmente apresentamos as equações do processo de Heston, a equação diferencial para o preço da opção de compra e redefinimos variáveis. Em seguida, trabalhamos a expansão.

5.2 Equações Envolvidas

Seja o futuro de moeda S com vencimento em T :

$$F_t = S_t e^{(r-r_f)(T-t)}; \quad (5.1)$$

calculemos dF utilizando 3.1 sob a condição risco-neutra, isto é, $\mu = r - r_f$:

$$\begin{aligned} dF &= dS e^{(r-r_f)(T-t)} - S(r-r_f)e^{(r-r_f)(T-t)}dt \\ &= S(r-r_f)e^{(r-r_f)(T-t)}dt - S(r-r_f)e^{(r-r_f)(T-t)}dt + S\sqrt{v}e^{(r-r_f)(T-t)}dW_t^1 \end{aligned}$$

$$= S\sqrt{v}e^{(r-rf)(T-t)}dW_t^1. \quad (5.2)$$

Assim, escrevemos no lugar do processo 3.1:

$$dF_t = F_t\sqrt{v_t}dW_t^1, \quad (5.3)$$

e de forma mais geral que em 3.7, escrevemos o processo da variância:

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \varepsilon v_t^\xi dW_t^2. \quad (5.4)$$

Adicionalmente, vale 3.3.

Há várias especializações de 5.4: $\xi = 1/2$ refere-se ao modelo de Heston, $\xi = 0$ refere-se ao modelo de Stein [Stein e Stein, 1991] e $\xi = 1$ ao modelo de Hull-White [Hull e White, 1987]. Na próxima subseção apresentamos a equação diferencial, relacionada ao preço de uma opção, base para realizarmos nossa expansão.

5.2.1 Equação Diferencial

Nesta subseção utilizamos argumentos de não-arbitragem e proteção (*hedging*) para chegar à equação diferencial do preço de uma opção de compra sob volatilidade estocástica.

Seja o preço de uma opção de compra $C(S_t, v_t, T - t)$ em termos do ativo à vista S_t , da variância v_t e do tempo ao vencimento $T - t$. Aplicando o lema de Ito em vista de 3.1 e de 5.4, e coletando termos em primeira ordem em dt :

$$\begin{aligned} dC = & -\frac{\partial C}{\partial \tau}dt + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(dW_t^1)^2 + \varepsilon Sv^{\frac{1}{2}+\xi}\frac{\partial^2 C}{\partial S\partial v}(dW_t^1dW_t^2) + S\mu\frac{\partial C}{\partial S}dt \\ & + \frac{1}{2}\varepsilon^2v^{2\xi}\frac{\partial^2 C}{\partial v^2}(dW_t^2)^2 + S\sqrt{v}\frac{\partial C}{\partial S}dW_t^1 + \kappa(\theta - v)\frac{\partial C}{\partial v}dt + \varepsilon v^\xi\frac{\partial C}{\partial v}dW_t^2. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Agora, em uma carteira com uma opção há duas fontes de incerteza: o ativo-base, S_t , e a variância, v_t . Assim, para montar uma carteira π com uma opção C que resulte em uma renda fixa, protegida destes dois riscos, temos que incluir o ativo-base e, como a variância não é um ativo diretamente negociável, uma outra opção

$V(S_t, v_t, T - t)$ de mesmo vencimento, cujo preço também depende da variância. Sejam Δ e Δ_1 as quantidades destes dois ativos. Então, o valor da carteira em um instante t é dado por:

$$\pi_t = C_t - \Delta \cdot S_t - \Delta_1 \cdot V. \quad (5.6)$$

A variação da carteira deve resultar numa renda fixa¹:

$$d\pi = (rC - \Delta \cdot (r - r_f) \cdot S - \Delta_1 \cdot r \cdot V)dt. \quad (5.7)$$

A variação do preço da opção V deve obedecer uma equação análoga à 5.5. Desta forma,

$$\begin{aligned} d\pi &= dC - \Delta \cdot dS - \Delta_1 \cdot dV \\ &= -\frac{\partial C}{\partial \tau}dt + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(dW_t^1)^2 + \varepsilon Sv^{\frac{1}{2}+\xi}\frac{\partial^2 C}{\partial S\partial v}(dW_t^1dW_t^2) + S\mu\frac{\partial C}{\partial S}dt + \frac{1}{2}\varepsilon^2v^{2\xi}\frac{\partial^2 C}{\partial v^2}(dW_t^2)^2 \\ &\quad + S\sqrt{v}\frac{\partial C}{\partial S}dW_t^1 + \kappa(\theta - v)\frac{\partial C}{\partial v}dt + \varepsilon v^\xi\frac{\partial C}{\partial v}dW_t^2 - \Delta \cdot S\sqrt{v}dW_t^1 - \Delta \cdot S\mu dt \\ &\quad - \Delta_1\left[-\frac{\partial V}{\partial \tau}dt + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(dW_t^1)^2 + \varepsilon Sv^{\frac{1}{2}+\xi}\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial v}(dW_t^1dW_t^2) + S\mu\frac{\partial V}{\partial S}dt \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\varepsilon^2v^{2\xi}\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}(dW_t^2)^2 + S\sqrt{v}\frac{\partial V}{\partial S}dW_t^1 + \kappa(\theta - v)\frac{\partial V}{\partial v}dt + \varepsilon v^\xi\frac{\partial V}{\partial v}dW_t^2\right]. \quad (5.8) \end{aligned}$$

Agrupando termos e considerando 3.3:

$$\left[-\frac{\partial C}{\partial \tau} + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \rho\varepsilon Sv^{\frac{1}{2}+\xi}\frac{\partial^2 C}{\partial S\partial v} + \frac{1}{2}\varepsilon^2v^{2\xi}\frac{\partial^2 C}{\partial v^2} + \kappa(\theta - v)\frac{\partial C}{\partial v} + S\mu\frac{\partial C}{\partial S}\right]dt$$

¹O ativo dólar rende ao diferencial de taxas, ao passo que a parte em reais rende à taxa interna.

$$-\Delta \cdot S_\mu dt$$

$$\begin{aligned} & -\Delta_1 \left[-\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho \varepsilon S v^{\frac{1}{2}+\xi} \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 v^{2\xi} \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + \kappa(\theta - v) \frac{\partial V}{\partial v} + S_\mu \frac{\partial V}{\partial S} \right] dt \\ & + \left[S\sqrt{v} \frac{\partial C}{\partial S} - \Delta \cdot S\sqrt{v} - \Delta_1 \cdot S\sqrt{v} \frac{\partial V}{\partial S} \right] dW_t^1 + \left[\varepsilon v^\xi \frac{\partial C}{\partial v} - \Delta_1 \cdot \varepsilon v^\xi \frac{\partial V}{\partial v} \right] dW_t^2 \\ & = (rC - \Delta \cdot (r - r_f) \cdot S - \Delta_1 \cdot r \cdot V) dt. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Para a parte do *hedging* com relação ao ativo-base, impõe-se:

$$\frac{\partial C}{\partial S} - \Delta - \Delta_1 \cdot \frac{\partial V}{\partial S} = 0. \quad (5.10)$$

Para eliminar o risco devido à variância:

$$\frac{\partial C}{\partial v} - \Delta_1 \cdot \frac{\partial V}{\partial v} = 0. \quad (5.11)$$

Desta forma,

$$\Delta_1 = \frac{\frac{\partial C}{\partial v}}{\frac{\partial V}{\partial v}} \text{ e } \Delta = \frac{\partial C}{\partial S} - \frac{\frac{\partial C}{\partial v}}{\frac{\partial V}{\partial v}} \cdot \frac{\partial V}{\partial S}. \quad (5.12)$$

Substituindo Δ_1 e Δ em ambos os lados de 5.9,

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{\partial C}{\partial \tau} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \rho \varepsilon S v^{\frac{1}{2}+\xi} \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 v^{2\xi} \frac{\partial^2 C}{\partial v^2} + \kappa(\theta - v) \frac{\partial C}{\partial v} + S_\mu \frac{\partial C}{\partial S} \right] \\ & - \frac{\frac{\partial C}{\partial v}}{\frac{\partial V}{\partial v}} \left[-\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho \varepsilon S v^{\frac{1}{2}+\xi} \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 v^{2\xi} \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + \kappa(\theta - v) \frac{\partial V}{\partial v} + S_\mu \frac{\partial V}{\partial S} \right] \\ & - \left(\frac{\partial C}{\partial S} - \frac{\frac{\partial C}{\partial v}}{\frac{\partial V}{\partial v}} \cdot \frac{\partial V}{\partial S} \right) \cdot S_\mu = \end{aligned}$$

$$rC - (r - r_f) \cdot \frac{\partial C}{\partial S} \cdot S + (r - r_f) \cdot \frac{\frac{\partial C}{\partial v}}{\frac{\partial V}{\partial v}} \cdot \frac{\partial V}{\partial S} \cdot S - r \cdot \frac{\frac{\partial C}{\partial v}}{\frac{\partial V}{\partial v}} \cdot V.$$

Reagrupando,

$$\frac{(r - r_f) \frac{\partial C}{\partial S} \cdot S - \frac{\partial C}{\partial \tau} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \rho \varepsilon S v^{\frac{1}{2} + \xi} \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 v^{2\xi} \frac{\partial^2 C}{\partial v^2} + \kappa (\theta - v) \frac{\partial C}{\partial v} - rC}{\frac{\partial C}{\partial v_t}} =$$

$$\frac{(r - r_f) \frac{\partial V}{\partial S} \cdot S - \frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho \varepsilon S v^{\frac{1}{2} + \xi} \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 v^{2\xi} \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + \kappa (\theta - v) \frac{\partial V}{\partial v} - rV}{\frac{\partial V}{\partial v}}.$$
(5.13)

Para esta equação ser válida para quaisquer opções C e V , deve ser igual à uma constante λ , chamada de *preço de risco da volatilidade*. Chega-se à:

$$(r - r_f) \cdot \frac{\partial C}{\partial S} \cdot S - rC - \frac{\partial C}{\partial \tau} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \rho \varepsilon S v^{\frac{1}{2} + \xi} \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial v} +$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon^2 v^{2\xi} \frac{\partial^2 C}{\partial v^2} + [\kappa (\theta - v) - \lambda] \frac{\partial C}{\partial v} = 0.$$
(5.14)

[Heston, 1993] considera para calibrações $\lambda = 0$. Na realidade, por λ e $\kappa\theta$ em $[\kappa (\theta - v) - \lambda]$ serem constantes, podemos juntá-los, definindo um novo preço de risco λ' que se relaciona com λ através de $\lambda = \kappa\lambda'$, de forma a termos $[\kappa (\theta - \lambda' - v)]$. Estaremos calibrando, portanto, a contante $\theta - \lambda'$. Podemos, então, fixar $\lambda = 0$ e absorver em θ o efeito. Fazendo isto, temos a equação para o preço de uma opção de compra:

$$(r - r_f) \cdot \frac{\partial C}{\partial S} \cdot S - rC - \frac{\partial C}{\partial \tau} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \rho \varepsilon S v^{\frac{1}{2} + \xi} \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial v} +$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon^2 v^{2\xi} \frac{\partial^2 C}{\partial v^2} + [\kappa (\theta - v)] \frac{\partial C}{\partial v} = 0.$$
(5.15)

Conforme [Lipton, 2001], escrevemos uma equação análoga à 5.15 em termos do futuro 5.1 e da variável $\tilde{C}(\tau, F_t)$, relacionada à $C(\tau, S_t)$ por

$$C(\tau, S_t) = e^{-r\tau} \tilde{C}(\tau, F_t).$$
(5.16)

A dedução procede como naquela que levou à 5.15 mas, ao usarmos a variável F_t , devido à equação 5.3 não ter o termo de tendência (μ), na dedução desta nova equação diferencial o termo $\mu = r - r_f$ não comparece. Adicionalmente, temos:

$$\frac{\partial}{\partial S}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial F}(\cdot) \frac{\partial F}{\partial S} = e^{(r-r_f)\tau} \frac{\partial}{\partial F}(\cdot) = \frac{F}{S} \frac{\partial}{\partial F}(\cdot) \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial S^2}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial S} \left[\frac{\partial}{\partial F}(\cdot) \frac{\partial F}{\partial S} \right] \frac{\partial F}{\partial S} = e^{2(r-r_f)\tau} \frac{\partial^2}{\partial F^2}(\cdot) = \frac{F^2}{S^2} \frac{\partial^2}{\partial F^2}(\cdot) \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = -re^{-r\tau} \tilde{C}(\tau, F_t) + e^{-r\tau} \frac{\partial \tilde{C}(\tau, F_t)}{\partial \tau}, \quad (5.19)$$

de forma que

$$-\frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tau} + \frac{1}{2}vF^2 \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial F^2} + \rho\varepsilon F v^{\frac{1}{2}+\xi} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial F \partial v} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 v^{2\xi} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial v^2} + [\kappa(\theta - v)] \frac{\partial \tilde{C}}{\partial v} = 0. \quad (5.20)$$

$$\tilde{C}(0, F, v) = \max(F - K, 0). \quad (5.21)$$

Tendo em vista 5.20, na próxima subseção definimos novas variáveis de modo a expressar a equação 5.20 numa forma conveniente a desenvolver a expansão assintótica para pequenos valores de volatilidade da variância (ε).

5.2.2 Equação Diferencial Modificada

Iniciamos esta parte definindo algumas variáveis e escrevemos 5.20 em termos das mesmas. Primeiro, introduzimos

$$\vartheta = \alpha v + \beta \quad (5.22)$$

$$v = \frac{\vartheta - \beta}{\alpha}, \quad (5.23)$$

onde α e β são dependentes do tempo. A equação que define o processo $d\vartheta$ é dada por (usando a notação $' = d/dt$):

$$\begin{aligned}
d\vartheta &= v\alpha' dt + \beta' dt + \alpha dv \\
&= v\alpha' dt + \beta' dt + \alpha[\kappa(\theta - v_t)dt + \varepsilon v_t^\xi dW_t^2] \\
&= \frac{\vartheta\alpha' - \beta\alpha'}{\alpha} dt + \beta' dt + \alpha\kappa\theta dt - \alpha\kappa\frac{(\vartheta - \beta)}{\alpha} dt + \alpha\varepsilon\left(\frac{\vartheta - \beta}{\alpha}\right)^\xi dW_t^2 \\
\therefore d\vartheta &= \left[\left(\frac{\alpha'}{\alpha} - \kappa\right)\vartheta + \frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{\alpha} + \kappa\theta\alpha + \kappa\beta \right] dt + \alpha^{1-\xi}\varepsilon(\vartheta - \beta)^\xi dW_t^2. \quad (5.24)
\end{aligned}$$

Escolhemos α e β de forma que a tendência é anulada e tornamos a variável ϑ em uma variável martingal:

$$\alpha' - \kappa\alpha = 0; \quad \alpha(T) = 1$$

$$\beta' + \kappa\theta\alpha = 0; \quad \beta(T) = 0 \quad (5.25)$$

$$d\vartheta = \alpha^{1-\xi}\varepsilon(\vartheta - \beta)^\xi dW_t^2. \quad (5.26)$$

De 5.3 e 5.23,

$$\frac{dF}{F} = \alpha^{-1/2}(\vartheta - \beta)^{1/2} dW_t^1. \quad (5.27)$$

Reescrevemos 5.20 em termos de F e ϑ . Para tanto, podemos inicialmente aplicar o lema de Ito à $C(\tau, S, \vartheta)$. Isto levará à uma equação semelhante à 5.15, sem o último termo $[\kappa(\theta - v)]\frac{\partial C}{\partial v}$, pois este advinha de dt do processo 5.4, o qual não existe em 5.26. Além disso, os fatores em frente das derivadas são modificados, de forma a resultar em:

$$\begin{aligned}
(r - r_f) \cdot \frac{\partial C}{\partial S} \cdot S - rC - \frac{\partial C}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\alpha^{-1}(\vartheta - \beta)S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \rho\varepsilon S\alpha^{\frac{1}{2}-\xi}(\vartheta - \beta)^{\xi+\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 C}{\partial S\partial\vartheta} + \\
+ \frac{1}{2}\varepsilon^2\alpha^{2-2\xi}(\vartheta - \beta)^{2\xi}\frac{\partial^2 C}{\partial\vartheta^2} = 0. \quad (5.28)
\end{aligned}$$

Ao escrever para a variável $\tilde{C}(\tau, F, \vartheta_t) = e^{r\tau}C(\tau, F, \vartheta)$, passa-se por um desenvolvimento semelhante ao das equações 5.17 a 5.19. Chega-se à:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\alpha^{-1}(\vartheta - \beta)F^2\frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial F^2} + \rho\varepsilon F\alpha^{\frac{1}{2}-\xi}(\vartheta_t - \beta)^{\xi+\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial F\partial \vartheta} + \\ + \frac{1}{2}\varepsilon^2\alpha^{2-2\xi}(\vartheta - \beta)^{2\xi}\frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial \vartheta^2} = 0. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Tendo em vista 5.29, na próxima subsecção apresentamos a expansão do preço de uma opção de compra para pequenos valores de volatilidade da variância (ε).

5.3 Expansão Assintótica

Tomando por base a equação 5.29, nesta secção apresentamos a expansão assintótica do preço de uma opção de compra para pequenos valores de volatilidade da variância (ε) até segunda ordem:

$$\tilde{C} = \tilde{C}^{(0)} + \varepsilon\tilde{C}^{(1)} + \varepsilon^2\tilde{C}^{(2)}. \quad (5.30)$$

O termo $\tilde{C}^{(0)}$, como veremos adiante, é a solução de Black e Scholes com coeficientes dependentes do tempo deterministicamente.

Definamos os seguintes operadores:

$$D = F\partial_F \quad (5.31)$$

$$\mathcal{L}^{(0)} = \partial_\tau - \frac{1}{2}\alpha^{-1}(\vartheta - \beta)D(D-1) \quad (5.32)$$

$$\mathcal{L}^{(1)} = -\rho\alpha^{1/2-\xi}(\vartheta - \beta)^{1/2+\xi}D\partial_\vartheta \quad (5.33)$$

$$\mathcal{L}^{(2)} = -\frac{1}{2}\alpha^{2-2\xi}(\vartheta - \beta)^{2\xi}\partial_\vartheta^2, \quad (5.34)$$

onde, de 5.31:

$$D(D-1) = F\partial_F(F\partial_F - 1) = F^2\partial_{FF} + F\partial_F - F\partial_F = F^2\partial_{FF}. \quad (5.35)$$

Substituindo 5.30 em 5.29 e colecionando termos de potências de ε , obtemos²:

$$\mathcal{L}^{(0)}\tilde{C}^{(0)} = 0, \quad \tilde{C}^{(0)}(0) = \max(F - K, 0) \quad (5.36)$$

$$\mathcal{L}^{(0)}\tilde{C}^{(1)} + \mathcal{L}^{(1)}\tilde{C}^{(0)} = 0, \quad \tilde{C}^{(1)}(0) = 0 \quad (5.37)$$

$$\mathcal{L}^{(0)}\tilde{C}^{(2)} + \mathcal{L}^{(1)}\tilde{C}^{(1)} + \mathcal{L}^{(2)}\tilde{C}^{(0)} = 0, \quad \tilde{C}^{(2)}(0) = 0. \quad (5.38)$$

Apresentamos agora duas relações de comutação a serem utilizadas, cujas demonstrações podem ser encontradas no apêndice . A primeira é³

$$[D, \mathcal{L}^{(0)}] = D\mathcal{L}^{(0)} - \mathcal{L}^{(0)}D = 0. \quad (5.39)$$

A outra relação é

$$[\partial_\vartheta, \mathcal{L}^{(0)}] = \partial_\vartheta\mathcal{L}^{(0)} - \mathcal{L}^{(0)}\partial_\vartheta = -\frac{1}{2}\alpha^{-1}D(D-1). \quad (5.40)$$

A idéia é, conhecendo $\tilde{C}^{(0)}$, expressar em termos de $\tilde{C}^{(0)}$ e derivadas $D\tilde{C}^{(0)}$, etc., os valores de $\tilde{C}_\vartheta^{(0)}$ e $\tilde{C}_{\vartheta\vartheta}^{(0)}$, bem como de $\tilde{C}^{(1)}$ e $\tilde{C}^{(2)}$. Para o caso das derivadas $\tilde{C}_\vartheta^{(0)}$ e $\tilde{C}_{\vartheta\vartheta}^{(0)}$, utilizaremos as relações de comutação, enquanto que para os termos $\tilde{C}^{(1)}$ e $\tilde{C}^{(2)}$ empregaremos as equações 5.37 e 5.38.

Começemos com $\tilde{C}_\vartheta^{(0)}$. Da equação 5.40,

$$[\partial_\vartheta\mathcal{L}^{(0)} - \mathcal{L}^{(0)}\partial_\vartheta] \tilde{C}^{(0)} = -\frac{1}{2}\alpha^{-1}D(D-1)\tilde{C}^{(0)},$$

pela equação 5.36,

$$\mathcal{L}^{(0)}\partial_\vartheta\tilde{C}^{(0)} - \frac{1}{2}\alpha^{-1}D(D-1)\tilde{C}^{(0)} = 0. \quad (5.41)$$

²As condições de contorno abaixo advêm de $\tilde{C}(0) = \tilde{C}^{(0)}(0) + \varepsilon\tilde{C}^{(1)}(0) + \varepsilon^2\tilde{C}^{(2)}(0) = \max(F - K, 0)$.

³Esta relação significa que se $\tilde{C}$ é solução de $\mathcal{L}^{(0)}\tilde{C} = 0$, então sua derivada com relação a F também é solução.

Propomos o *ansatz*

$$\tilde{C}_{\vartheta}^{(0)} = h_1 D(D-1) \tilde{C}^{(0)}, \quad (5.42)$$

onde h_1 depende somente da variável τ : $h_1(\tau)$. Pela substituição de 5.42 em 5.41, achamos a equação para h_1 . De fato, considerando que o operador $\mathcal{L}^{(0)}$ atravessa os operadores D e só $\partial\tau$ atua em h_1 , temos, usando 5.32:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(0)} \tilde{C}_{\vartheta}^{(0)} - \frac{1}{2} \alpha^{-1} D(D-1) \tilde{C}^{(0)} &= \mathcal{L}^{(0)} \left[h_1 D(D-1) \tilde{C}^{(0)} \right] - \frac{1}{2} \alpha^{-1} D(D-1) \tilde{C}^{(0)} \\ &= (\mathcal{L}^{(0)} h_1) D(D-1) \tilde{C}^{(0)} + h_1 \mathcal{L}^{(0)} \left(D(D-1) \tilde{C}^{(0)} \right) - \frac{1}{2} \alpha^{-1} D(D-1) \tilde{C}^{(0)} \\ &= \left[(\partial_{\tau} h_1) - \frac{h_1}{2} \alpha^{-1} (\vartheta - \beta) D(D-1) \right] D(D-1) \tilde{C}^{(0)} \\ &\quad + \underbrace{h_1 \mathcal{L}^{(0)} \left(D(D-1) \tilde{C}^{(0)} \right)}_{\left(D(D-1) \underbrace{\mathcal{L}^{(0)} \tilde{C}^{(0)}}_0 = 0 \right)} - \frac{1}{2} \alpha^{-1} D(D-1) \tilde{C}^{(0)}. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Agrupando termos em $D(D-1) \tilde{C}^{(0)}$:

$$\partial_{\tau} h_1 - \frac{1}{2} \alpha^{-1} = 0 \quad (5.44)$$

$$h_1(0) = 0.$$

Passemos para $\tilde{C}_{\vartheta\vartheta}^{(0)}$. Temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(0)} \tilde{C}_{\vartheta\vartheta}^{(0)} - \alpha^{-1} D(D-1) \tilde{C}_{\vartheta}^{(0)} &= \underbrace{(\mathcal{L}^{(0)} \partial_{\vartheta})}_{\text{comutação 2}} \tilde{C}_{\vartheta}^{(0)} - \alpha^{-1} D(D-1) \tilde{C}_{\vartheta}^{(0)} \\ &= \left[\partial_{\vartheta} \mathcal{L}^{(0)} + \frac{1}{2} \alpha^{-1} D(D-1) \right] \tilde{C}_{\vartheta}^{(0)} - \alpha^{-1} D(D-1) \tilde{C}_{\vartheta}^{(0)} \end{aligned}$$

$$= \partial_{\vartheta} \underbrace{\left(\mathcal{L}^{(0)} \tilde{C}_{\vartheta}^{(0)} \right)}_{= \frac{1}{2} \alpha^{-1} D(D-1) \tilde{C}^{(0)}} + \frac{1}{2} \alpha^{-1} D(D-1) \tilde{C}_{\vartheta}^{(0)} - \alpha^{-1} D(D-1) \tilde{C}_{\vartheta}^{(0)} = 0,$$

onde na terceira passagem utilizamos a equação 5.41. Portanto,

$$\mathcal{L}^{(0)} \tilde{C}_{\vartheta\vartheta}^{(0)} - \alpha^{-1} D(D-1) \tilde{C}_{\vartheta}^{(0)} = 0. \quad (5.45)$$

Utilizando o *ansatz* anterior e sabendo que h_1 não depende de ϑ , podemos escrever:

$$\tilde{C}_{\vartheta\vartheta}^{(0)} = \partial_{\vartheta}(\tilde{C}_{\vartheta}^{(0)}) = \partial_{\vartheta}(h_1 D(D-1) \tilde{C}^{(0)}) = h_1 D(D-1) \partial_{\vartheta} \tilde{C}^{(0)}$$

$$\therefore \tilde{C}_{\vartheta\vartheta}^{(0)} = [h_1 D(D-1)]^2 \tilde{C}^{(0)}. \quad (5.46)$$

Achemos a equação para $\tilde{C}^{(1)}$. Da equação 5.37, substituindo 5.33:

$$\mathcal{L}^{(0)} \tilde{C}^{(1)} - \rho \alpha^{1/2-\xi} (\vartheta - \beta)^{1/2+\xi} D \partial_{\vartheta} \tilde{C}^{(0)} = 0. \quad (5.47)$$

Utilizando 5.42,

$$\mathcal{L}^{(0)} \tilde{C}^{(1)} - \rho \alpha^{1/2-\xi} (\vartheta - \beta)^{1/2+\xi} h_1 D^2 (D-1) \tilde{C}^{(0)} = 0. \quad (5.48)$$

Propomos o *ansatz*:

$$\tilde{C}^{(1)} = f_1^{(1)} D^2 (D-1) \tilde{C}^{(0)}. \quad (5.49)$$

Passagens semelhantes àsquelas feitas em 5.43 levam, ao colecionar termos em $D^2 (D-1) \tilde{C}^{(0)}$, à equação:

$$\partial_{\tau} \left(f_1^{(1)} \right) - \rho \alpha^{1/2-\xi} (\vartheta - \beta)^{1/2+\xi} h_1 = 0 \quad (5.50)$$

$$f_1^{(1)}(0) = 0, \quad \text{para} \quad \tilde{C}^{(1)}(0) = 0. \quad (5.51)$$

Computemos $\tilde{C}_\vartheta^{(1)}$. Derivemos o lado esquerdo da equação 5.37 com relação à ϑ e utilizemos 5.40 no primeiro termo e 5.33 no segundo:

$$\begin{aligned} \partial_\vartheta \left(\mathcal{L}^{(0)} \tilde{C}_\vartheta^{(1)} \right) + \partial_\vartheta \left(\mathcal{L}^{(1)} \tilde{C}_\vartheta^{(0)} \right) &= 0 \Rightarrow \left[\mathcal{L}^{(0)} \partial_\vartheta - \frac{1}{2} \alpha^{-1} D(D-1) \right] \tilde{C}_\vartheta^{(1)} \\ &+ \partial_\vartheta \left(-\rho \alpha^{1/2-\xi} (\vartheta - \beta)^{1/2+\xi} D \partial_\vartheta \tilde{C}_\vartheta^{(0)} \right). \end{aligned}$$

Utilizando 5.42 no último termo e 5.49 no segundo:

$$\begin{aligned} &= \left[\mathcal{L}^{(0)} \tilde{C}_\vartheta^{(1)} - \frac{1}{2} \alpha^{-1} D(D-1) f_1^{(1)} D^2(D-1) \tilde{C}_\vartheta^{(0)} \right] \\ &+ \partial_\vartheta \left(-\rho \alpha^{1/2-\xi} (\vartheta - \beta)^{1/2+\xi} D^2 h_1(D-1) \tilde{C}_\vartheta^{(0)} \right) \\ &= \left[\mathcal{L}^{(0)} \tilde{C}_\vartheta^{(1)} - \frac{1}{2} \alpha^{-1} f_1^{(1)} D^3(D-1)^2 \tilde{C}_\vartheta^{(0)} \right] \\ &- \rho \alpha^{1/2-\xi} (1/2 + \xi) (\vartheta - \beta)^{-1/2+\xi} D^2 h_1(D-1) \tilde{C}_\vartheta^{(0)} \\ &- \left(\rho \alpha^{1/2-\xi} (\vartheta - \beta)^{1/2+\xi} D^2 h_1(D-1) \tilde{C}_\vartheta^{(0)} \right). \end{aligned}$$

Novamente empregando 5.42 no último termo:

$$\begin{aligned} &= \left[\mathcal{L}^{(0)} \tilde{C}_\vartheta^{(1)} - \frac{1}{2} \alpha^{-1} f_1^{(1)} D^3(D-1)^2 \tilde{C}_\vartheta^{(0)} \right] \\ &- \rho \alpha^{1/2-\xi} (1/2 + \xi) (\vartheta - \beta)^{-1/2+\xi} h_1 D^2(D-1) \tilde{C}_\vartheta^{(0)} \\ &- \left(\rho \alpha^{1/2-\xi} (\vartheta - \beta)^{1/2+\xi} h_1^2 D^3(D-1)^2 \tilde{C}_\vartheta^{(0)} \right) = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}^{(0)} \tilde{C}_\vartheta^{(1)} - \left[\rho \alpha^{1/2-\xi} (\vartheta - \beta)^{1/2+\xi} h_1^2 + \frac{1}{2} \alpha^{-1} f_1^{(1)} \right] D^3(D-1)^2 \tilde{C}_\vartheta^{(0)} \\ &- \rho \alpha^{1/2-\xi} (1/2 + \xi) (\vartheta - \beta)^{-1/2+\xi} h_1 D^2(D-1) \tilde{C}_\vartheta^{(0)} = 0, \end{aligned} \tag{5.52}$$

onde $\mathcal{L}^{(0)}$ é dado por 5.32. Escolhemos o *ansatz* para $\tilde{C}_\vartheta^{(1)}$:

$$\tilde{C}_\vartheta^{(1)} = h_3 D^3 (D-1)^2 \tilde{C}^{(0)} + h_2 D^2 (D-1) \tilde{C}^{(0)}. \quad (5.53)$$

Substituindo em 5.52, aplicando 5.32 e 5.36 e agrupando termos:

$$\begin{aligned} & \left[\partial_\tau h_3 - \rho \alpha^{1/2-\xi} (\vartheta - \beta)^{1/2+\xi} h_1^2 - \frac{1}{2} \alpha^{-1} f_1^{(1)} \right] D^3 (D-1)^2 \tilde{C}^{(0)} \\ & + h_3 D^3 (D-1)^2 \underbrace{\mathcal{L}^{(0)} \tilde{C}^{(0)}}_{zero} + h_2 D^2 (D-1) \underbrace{\mathcal{L}^{(0)} \tilde{C}^{(0)}}_{zero} \\ & + \left[\partial_\tau h_2 - \rho \alpha^{1/2-\xi} (1/2 + \xi) (\vartheta - \beta)^{-1/2+\xi} h_1 \right] D^2 (D-1) \tilde{C}^{(0)} = 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \left[\partial_\tau h_3 - \rho \alpha^{1/2-\xi} (\vartheta - \beta)^{1/2+\xi} h_1^2 - \frac{1}{2} \alpha^{-1} f_1^{(1)} \right] D^3 (D-1)^2 \tilde{C}^{(0)} \\ & + \left[\partial_\tau h_2 - \rho \alpha^{1/2-\xi} (1/2 + \xi) (\vartheta - \beta)^{-1/2+\xi} h_1 \right] D^2 (D-1) \tilde{C}^{(0)} = 0. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Agrupando termos em $D^3(D-1)^2$ e $D^2(D-1)$, podemos escrever:

$$\partial_\tau h_2 - \rho \alpha^{1/2-\xi} (1/2 + \xi) (\vartheta - \beta)^{-1/2+\xi} h_1 = 0, \quad h_2(0) = 0 \quad (5.55)$$

$$\partial_\tau h_3 - \rho \alpha^{1/2-\xi} (\vartheta - \beta)^{1/2+\xi} h_1^2 - \frac{1}{2} \alpha^{-1} f_1^{(1)} = 0 \quad h_3(0) = 0, \quad (5.56)$$

onde, por 5.53, vê-se que as condições iniciais sobre h_2 e h_3 preservam $\tilde{C}_\vartheta^{(1)} = 0$.

Voltemo-nos agora para $\tilde{C}^{(2)}$. De 5.38, utilizando 5.33 e 5.34, temos:

$$\mathcal{L}^{(0)} \tilde{C}^{(2)} - \rho \alpha^{1/2-\xi} (\vartheta - \beta)^{1/2+\xi} D \partial_\vartheta \tilde{C}^{(1)} - \frac{1}{2} \alpha^{2-2\xi} (\vartheta - \beta)^{2\xi} \partial_\vartheta^2 \tilde{C}^{(0)} = 0. \quad (5.57)$$

Utilizando 5.53 e 5.46:

$$\mathcal{L}^{(0)} \tilde{C}^{(2)} - \rho \alpha^{1/2-\xi} (\vartheta - \beta)^{1/2+\xi} h_3 D^4 (D-1)^2 \tilde{C}^{(0)}$$

$$\begin{aligned}
& -\rho\alpha^{1/2-\xi}(\vartheta-\beta)^{1/2+\xi}h_2D^3(D-1)\tilde{C}^{(0)} \\
& -\frac{1}{2}\alpha^{2-2\xi}(\vartheta-\beta)^{2\xi}[h_1D(D-1)]^2\tilde{C}^{(0)}=0.
\end{aligned} \tag{5.58}$$

Propomos o *ansatz*:

$$\tilde{C}^{(2)} = f_3^{(2)}D^4(D-1)^2\tilde{C}^{(0)} + f_2^{(2)}D^3(D-1)\tilde{C}^{(0)} + f_1^{(2)}D^2(D-1)^2\tilde{C}^{(0)}. \tag{5.59}$$

Em seguida, aplicamos 5.32 em 5.59 e usamos 5.36 e também o fato de que $f_3^{(2)}$, $f_2^{(2)}$ e $f_1^{(2)}$ dependem só de τ , de forma que a atuação de $\mathcal{L}^{(0)}$ sobre os mesmos resulta na aplicação de ∂_τ . Além disso, como já mencionamos, o operador $\mathcal{L}^{(0)}$ atravessa os operadores D e só atua em $\tilde{C}^{(0)}$, onde usamos 5.32:

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\mathcal{L}^{(0)}\left(f_3^{(2)}\right)}_{\partial_\tau f_3^{(2)}}D^4(D-1)^2\tilde{C}^{(0)} + \underbrace{\mathcal{L}^{(0)}\left(f_2^{(2)}\right)}_{\partial_\tau f_2^{(2)}}D^3(D-1)\tilde{C}^{(0)} \\
& + \underbrace{\mathcal{L}^{(0)}\left(f_1^{(2)}\right)}_{\partial_\tau f_1^{(2)}}D^2(D-1)^2\tilde{C}^{(0)} + f_3^{(2)}D^4(D-1)^2\underbrace{\mathcal{L}^{(0)}\left(\tilde{C}^{(0)}\right)}_0 \\
& + f_2^{(2)}D^3(D-1)\underbrace{\mathcal{L}^{(0)}\left(\tilde{C}^{(0)}\right)}_0 + f_1^{(2)}D^2(D-1)^2\underbrace{\mathcal{L}^{(0)}\left(\tilde{C}^{(0)}\right)}_0 \\
& -\rho\alpha^{1/2-\xi}(\vartheta-\beta)^{1/2+\xi}h_3D^4(D-1)^2\tilde{C}^{(0)} \\
& -\rho\alpha^{1/2-\xi}(\vartheta-\beta)^{1/2+\xi}h_2D^3(D-1)\tilde{C}^{(0)} \\
& -\frac{1}{2}\alpha^{2-2\xi}(\vartheta-\beta)^{2\xi}[h_1D(D-1)]^2\tilde{C}^{(0)}=0.
\end{aligned} \tag{5.60}$$

Agrupando termos segundo as potências de $D^4(D-1)^2$, $D^3(D-1)$ e $D^2(D-1)^2$ concluímos que

$$\partial_\tau f_3^{(2)} - \rho\alpha^{1/2-\xi}(\vartheta-\beta)^{1/2+\xi}h_3 = 0, \quad f_3^{(2)}(0) = 0 \tag{5.61}$$

$$\partial_\tau f_2^{(2)} - \rho \alpha^{1/2-\xi} (\vartheta - \beta)^{1/2+\xi} h_2 = 0, \quad f_2^{(2)}(0) = 0 \quad (5.62)$$

$$\partial_\tau f_1^{(2)} - \frac{1}{2} \alpha^{2-2\xi} (\vartheta - \beta)^{2\xi} h_1^2 = 0, \quad f_1^{(2)}(0) = 0, \quad (5.63)$$

onde, diante de 5.59, estas condições iniciais implicam em $\tilde{C}^{(2)} = 0$.

Agora, notamos que vale a relação:

$$f_3^{(2)} = \frac{1}{2} \left(f_1^{(1)} \right)^2. \quad (5.64)$$

De fato, de 5.61,

$$-\rho \alpha^{1/2-\xi} (\vartheta - \beta)^{1/2+\xi} = \frac{\partial_\tau f_3^{(2)}}{h_3}, \quad (5.65)$$

e de 5.50,

$$-\rho \alpha^{1/2-\xi} (\vartheta - \beta)^{1/2+\xi} = \frac{\partial_\tau f_1^{(1)}}{h_1} \quad (5.66)$$

$$\therefore \frac{\partial_\tau f_3^{(2)}}{h_3} = \frac{\partial_\tau f_1^{(1)}}{h_1}. \quad (5.67)$$

Utilizando 5.66 no segundo termo de 5.56 e 5.44 no terceiro termo de 5.56:

$$\partial_\tau h_3 - \left(\partial_\tau f_1^{(1)} \right) h_1 - (\partial_\tau h_1) f_1^{(1)} = 0$$

$$\therefore \partial_\tau h_3 - \partial_\tau \left(f_1^{(1)} h_1 \right) = 0.$$

Diante das condições iniciais de 5.44 e 5.56, conclui-se que

$$h_3 = f_1^{(1)} h_1. \quad (5.68)$$

Em 5.67,

$$\partial_\tau f_3^{(2)} = f_1^{(1)} \partial_\tau f_1^{(1)}, \quad (5.69)$$

e diante das condições iniciais de 5.61 e 5.50, chegamos a

$$f_3^{(2)} = \frac{1}{2} \left(f_1^{(1)} \right)^2. \quad (5.70)$$

A seguir apresentamos um resumo das equações diferenciais a serem resolvidas.

5.3.1 Resumo das Equações Diferenciais

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \tau} + \kappa \alpha = 0; \quad \alpha(0) = 1 \quad (5.71)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \tau} - \kappa \theta \alpha = 0; \quad \beta(0) = 0 \quad (5.72)$$

Note que as derivadas estão em τ e não em t nas equações 5.71 e 5.72.

$$\partial \tau h_1 - \frac{1}{2} \alpha^{-1} = 0 \quad (5.73)$$

$$h_1(0) = 0.$$

$$\partial_\tau \left(f_1^{(1)} \right) - \rho \alpha^{1/2-\xi} (\vartheta - \beta)^{1/2+\xi} h_1 = 0 \quad (5.74)$$

$$f_1^{(1)}(0) = 0, \quad \text{para} \quad \tilde{C}^{(1)}(0) = 0. \quad (5.75)$$

$$\partial_\tau h_2 - \rho \alpha^{1/2-\xi} (1/2 + \xi) (\vartheta - \beta)^{-1/2+\xi} h_1 = 0, \quad h_2(0) = 0 \quad (5.76)$$

$$\partial_\tau h_3 - \rho \alpha^{1/2-\xi} (\vartheta - \beta)^{1/2+\xi} h_1^2 - \frac{1}{2} \alpha^{-1} f_1^{(1)} = 0 \quad h_3(0) = 0 \quad (5.77)$$

$$\partial_\tau f_3^{(2)} - \rho \alpha^{1/2-\xi} (\vartheta - \beta)^{1/2+\xi} h_3 = 0, \quad f_3^{(2)}(0) = 0 \quad (5.78)$$

$$\partial_\tau f_2^{(2)} - \rho \alpha^{1/2-\xi} (\vartheta - \beta)^{1/2+\xi} h_2 = 0, \quad f_2^{(2)}(0) = 0 \quad (5.79)$$

$$\partial_\tau f_1^{(2)} - \frac{1}{2} \alpha^{2-2\xi} (\vartheta - \beta)^{2\xi} h_1^2 = 0, \quad f_1^{(2)}(0) = 0 \quad (5.80)$$

$$f_3^{(2)} = \frac{1}{2} \left(f_1^{(1)} \right)^2. \quad (5.81)$$

Dada a equação 5.81, se $f_1^{(1)}$ já tiver sido obtido, a equação 5.78 para $f_3^{(2)}$ não precisa ser resolvida. Como h_3 seria obtido para resolvê-la, via 5.77, esta equação também não precisa ser resolvida. Então, são sete equações diferenciais a serem resolvidas.

5.3.2 Solução da equação para $\tilde{C}^{(0)}$

A equação 5.36 é uma equação de Black e Scholes com coeficientes dependentes do tempo, com solução na forma $\tilde{C}^{(0)}(\tau, F, \vartheta) = \tilde{C}(\tau, F, K, \sigma_{t,T}^{(0)})^4$. A volatilidade $\sigma_{t,T}^{(0)}$ é dada pela integral em $[t, T]$ do coeficiente $\alpha^{-1}(\vartheta - \beta)$ da equação:

$$\sigma_{t,T}^{(0)} = \sqrt{\frac{\int_t^T \alpha^{-1}(\vartheta - \beta) ds}{T - t}}. \quad (5.82)$$

Dada 5.71,

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = -\kappa d\tau \quad \alpha(0) = 1$$

$$\int_{\alpha}^{\alpha(0)} \frac{d\alpha}{\alpha} = -\kappa \int_{\tau}^0 d\tau'$$

$$\ln \alpha(0) - \ln \alpha = -\kappa(0 - \tau)$$

$$\alpha = e^{-\kappa\tau}. \quad (5.83)$$

De 5.72, utilizando 5.83:

$$d\beta = \kappa\theta\alpha d\tau$$

$$= \kappa\theta e^{-\kappa\tau} d\tau$$

⁴ $\tilde{C}^{(0)}$ será escrita explicitamente mais adiante.

$$\int_{\beta}^{\beta(0)} d\beta = \int_{\tau}^0 \kappa \theta e^{-\kappa \tau'} d\tau'$$

$$\beta(0) - \beta = \kappa \theta \frac{(1 - e^{-\kappa \tau})}{\kappa}$$

$$\beta = \theta(1 - e^{-\kappa \tau}). \quad (5.84)$$

Usando 5.83 e 5.84 na integral de 5.82:

$$\begin{aligned} \int_t^T \alpha^{-1}(\vartheta - \beta) ds &= \int_t^T e^{\kappa(t-s)} (\vartheta - \theta(1 - e^{-\kappa(T-s)})) ds \\ &= \int_t^T e^{\kappa(t-s)} (\vartheta - \theta) + \theta ds \\ &= \left[-e^{\kappa(t-s)} (\vartheta - \theta) \frac{1}{\kappa} + \theta s \right]_t^T \\ &= (\vartheta - \theta) \left[-\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa} e^{\kappa(T-t)} \right] + \theta(T-t) = (\vartheta - \theta) \frac{1}{\kappa} (e^{\kappa \tau} - 1) + \theta \tau. \end{aligned}$$

Assim,

$$\sigma_{t,T}^{(0)} = \sqrt{\frac{\int_t^T \alpha^{-1}(\vartheta - \beta) ds}{T-t}} = \sqrt{(\vartheta - \theta) \frac{1}{\kappa \tau} (e^{\kappa \tau} - 1) + \theta}. \quad (5.85)$$

Na próxima subseção resolveremos as equações diferenciais para o caso do processo sob raiz quadrada ($\xi = 1/2$), correspondente ao modelo de Heston.

5.3.3 O Modelo de Heston (Raiz Quadrada)

Particularizamos agora as equações para o caso $\xi = 1/2$. Inicialmente, valem as equações 5.83 e 5.84. Deste modo, resolvemos as equações apresentadas na seção 5.3.1.

- Solução de h_1 .

Dada a equação 5.73:

$$\begin{aligned}\frac{dh_1}{d\tau} &= \frac{1}{2}e^{\kappa\tau}, & h_1(0) &= 0 \\ \int_{h_1(\tau)}^{h_1(0)} dh_1 &= \left[\frac{1}{2}e^{\kappa\tau} \frac{1}{\kappa} \right]_{\tau}^0 \\ h_1 &= \frac{1}{2} (e^{\kappa\tau} - 1) \frac{1}{\kappa}.\end{aligned}\tag{5.86}$$

- Solução de $f_1^{(1)}$.

A equação 5.74 para $\xi = 1/2$ é dada por

$$\partial_{\tau} \left(f_1^{(1)} \right) = \rho(\vartheta - \beta)h_1,\tag{5.87}$$

$$f_1^{(1)}(0) = 0.\tag{5.88}$$

Substituindo 5.86 e 5.84:

$$\partial_{\tau} \left(f_1^{(1)} \right) = \rho(\vartheta - \theta(1 - e^{-\kappa\tau})) \frac{1}{2} (e^{\kappa\tau} - 1) \frac{1}{\kappa},$$

chegamos à integral

$$\int_{f_1^{(1)}(\tau)}^{f_1^{(1)}(0)} df_1^{(1)} = \int_{\tau}^0 \rho\vartheta \frac{1}{2} (e^{\kappa\tau} - 1) \frac{1}{\kappa} - \rho\theta \frac{1}{2} (e^{\kappa\tau} - 1) \frac{1}{\kappa} + \rho\theta \frac{1}{2} (1 - e^{-\kappa\tau}) \frac{1}{\kappa} d\tau.$$

Resolvendo sob a condição 5.88 e definindo $g_1^{(1)}$:

$$f_1^{(1)} = \rho\vartheta \frac{1}{2} (e^{\kappa\tau} - 1 - \kappa\tau) \frac{1}{\kappa^2} - \rho\theta \frac{1}{2} (e^{\kappa\tau} - e^{-\kappa\tau} - 2\kappa\tau) \frac{1}{\kappa^2} \equiv \rho g_1^{(1)}.\tag{5.89}$$

- Solução de h_2 .

Em seguida, a equação 5.76 para $\xi = 1/2$, levando em conta 5.84 e 5.86 é:

$$\partial_\tau h_2 = \rho h_1 = \rho \frac{1}{2\kappa} (e^{\kappa\tau} - 1) \quad (5.90)$$

$$h_2(0) = 0, \quad (5.91)$$

o que leva à integral

$$\int_{h_2(\tau)}^{h_2(0)} dh_2 = \int_\tau^0 \rho \frac{1}{2\kappa} (e^{\kappa\tau} - 1) d\tau.$$

A integração sob a condição 5.91 nos dá $h_2(\tau)$:

$$h_2(\tau) = \rho \frac{1}{2\kappa^2} (e^{\kappa\tau} - 1 - \kappa\tau). \quad (5.92)$$

- Solução de $f_1^{(2)}$.

Sob $\xi = 1/2$, a equação 5.80 pode ser escrita como

$$\partial_\tau f_1^{(2)} = \frac{1}{2} \alpha (\vartheta - \beta) (h_1)^2 \quad (5.93)$$

$$f_1^{(2)}(0) = 0. \quad (5.94)$$

Substituindo 5.83, 5.84 e 5.86, temos:

$$\begin{aligned} \partial_\tau f_1^{(2)} &= \frac{1}{2} e^{-\kappa\tau} [\vartheta - \theta(1 - e^{-\kappa\tau})] \left[\frac{1}{2} (e^{\kappa\tau} - 1) \frac{1}{\kappa} \right]^2 \\ &= \frac{\vartheta}{8\kappa^2} (e^{\kappa\tau} - 2 + e^{-\kappa\tau}) - \frac{\theta}{8\kappa^2} (e^{\kappa\tau} - 2 + e^{-\kappa\tau} - 1 + 2e^{-\kappa\tau} - e^{-2\kappa\tau}). \end{aligned} \quad (5.95)$$

Integrando sob 5.94:

$$\int_{f_1^{(2)}(\tau)}^{f_1^{(2)}(0)} df_1^{(2)} = \left[\frac{\vartheta}{8\kappa^3} (e^{\kappa\tau} - 2\kappa\tau - e^{-\kappa\tau}) - \frac{\theta}{16\kappa^3} (2e^{\kappa\tau} - 6\kappa\tau - 6e^{-\kappa\tau} + e^{-2\kappa\tau}) \right]_\tau^0, \quad (5.96)$$

resultando em

$$f_1^{(2)} = \frac{\vartheta}{8\kappa^3} (e^{\kappa\tau} - 2\kappa\tau - e^{-\kappa\tau}) - \frac{\theta}{16\kappa^3} (2e^{\kappa\tau} - 6\kappa\tau - 6e^{-\kappa\tau} + e^{-2\kappa\tau} + 3). \quad (5.97)$$

- Solução de $f_2^{(2)}$.

Sob $\xi = 1/2$, e utilizando 5.84 e 5.92, a equação 5.79 torna-se:

$$\begin{aligned} \partial_\tau f_2^{(2)} &= \rho [\vartheta - \theta(1 - e^{-\kappa\tau})] \left[\rho \frac{1}{2\kappa^2} (e^{\kappa\tau} - 1 - \kappa\tau) \right] \\ &= \frac{\rho^2 \vartheta}{2\kappa^2} (e^{\kappa\tau} - 1 - \kappa\tau) - \frac{\rho^2 \theta}{2\kappa^2} (e^{\kappa\tau} - 2 - \kappa\tau + e^{-\kappa\tau} + \kappa\tau e^{-\kappa\tau}). \end{aligned} \quad (5.98)$$

$$f_2^{(2)}(0) = 0. \quad (5.99)$$

Integramos sob 5.99:

$$\begin{aligned} \int_{f_2^{(2)}(\tau)}^{f_2^{(2)}(0)} df_2^{(2)} &= \int_\tau^0 \frac{\rho^2 \vartheta}{2\kappa^2} (e^{\kappa\tau} - 1 - \kappa\tau) - \frac{\rho^2 \theta}{2\kappa^2} (e^{\kappa\tau} - 2 - \kappa\tau + e^{-\kappa\tau} + \kappa\tau e^{-\kappa\tau}) d\tau \\ f_2^{(2)} &= \left\{ \frac{\rho^2 \vartheta}{4\kappa^3} (2e^{\kappa\tau} - 2\kappa\tau - \kappa^2 \tau^2) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\rho^2 \theta}{4\kappa^3} (2e^{\kappa\tau} - 4\kappa\tau - \kappa^2 \tau^2 - 2e^{-\kappa\tau}) \right\}_\tau^0 \\ &\quad - \frac{\rho^2 \theta}{4\kappa^3} \int_\tau^0 \kappa\tau e^{-\kappa\tau} 2\kappa d\tau. \end{aligned} \quad (5.100)$$

Integrando por partes esta última integral, obtemos:

$$\int_\tau^0 \kappa\tau e^{-\kappa\tau} 2\kappa d\tau = 2\kappa\tau e^{-\kappa\tau} - 2 + 2e^{-\kappa\tau}. \quad (5.101)$$

Inserindo em 5.100, chegamos à equação para $f_2^{(2)}$ e definimos $g_2^{(2)}$:

$$\begin{aligned}
f_2^{(2)} &= \left\{ \frac{\rho^2 \vartheta}{4\kappa^3} (2e^{\kappa\tau} - 2\kappa\tau - \kappa^2\tau^2 - 2) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\rho^2 \theta}{4\kappa^3} (2e^{\kappa\tau} - 4\kappa\tau - \kappa^2\tau^2 + 2 - 2(2 + \kappa\tau)e^{-\kappa\tau}) \right\} \\
&\equiv \rho^2 g_2^{(2)}.
\end{aligned} \tag{5.102}$$

- Solução para $f_3^{(2)}$.

De 5.81 e 5.89, podemos escrever a solução para $f_3^{(2)}$:

$$f_3^{(2)} = \frac{1}{2}(f_1^{(1)})^2 \equiv \frac{1}{2}\rho^2 \left(g_1^{(1)}\right)^2. \tag{5.103}$$

- $\sigma_{t,T}^{(0)}$ em termos de ν .

Consideremos 5.22, 5.83 e 5.84 em 5.85:

$$\begin{aligned}
\vartheta &= e^{-\kappa\tau}\nu + \theta(1 - e^{-\kappa\tau}) \\
\therefore \sigma_{t,T}^{(0)} &= \sqrt{(\vartheta - \theta)\frac{1}{\kappa\tau}(e^{\kappa\tau} - 1) + \theta} \\
&= \sqrt{(e^{-\kappa\tau}\nu - \theta e^{-\kappa\tau})\frac{1}{\kappa\tau}(e^{\kappa\tau} - 1) + \theta} \\
\sigma_{t,T}^{(0)} &= \sqrt{(\nu - \theta)\frac{1}{\kappa\tau}(1 - e^{-\kappa\tau}) + \theta}
\end{aligned} \tag{5.104}$$

Definamos:

$$\gamma \equiv (\nu - \theta)\frac{1}{\kappa\tau}(1 - e^{-\kappa\tau}) + \theta \tag{5.105}$$

e

$$d_{\pm} = d_{\pm}(\gamma, F/K) = \frac{\ln(F/K)}{\sqrt{\gamma}} \pm \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{2}} \quad (5.106)$$

$$d_+ = d_- + \sqrt{\gamma}. \quad (5.107)$$

A seguir escrevemos as expressões de $\tilde{C}^{(0)}$, $\tilde{C}^{(1)}$ e $\tilde{C}^{(2)}$ para o processo do tipo $\xi = 1/2$. Empregaremos algumas identidades referentes ao uso do operador D , demonstradas no apêndice A do capítulo 9.

- Expressão para $\tilde{C}^{(0)}$.

Conforme visto na subseção 5.3.2, a equação 5.36 para $\tilde{C}^{(0)}$ é do tipo de Black e Scholes para o caso de coeficientes dependentes do tempo e a volatilidade segue 5.104. Assim, escrevemos explicitamente:

$$\tilde{C}^{(0)}(\tau, F, \nu) = FN(d_+) - KN(d_-), \quad (5.108)$$

onde d_+ e d_- seguem 5.106.

- Expressão para $\tilde{C}^{(1)}$.

Podemos chegar à solução de $\tilde{C}^{(1)}$ a partir da equação 5.49, da equação 5.108 para $\tilde{C}^{(0)}$, e da equação 5.89. De fato,

$$\tilde{C}^{(1)} = f_1^{(1)} D^2(D-1)\tilde{C}^{(0)} \quad (5.109)$$

$$f_1^{(1)} = \rho g_1^{(1)}.$$

Então, do capítulo 9, equação 9.28:

$$\tilde{C}^{(1)} = \frac{-\rho g_1^{(1)} d_-}{\gamma} KN'(d_-). \quad (5.110)$$

- Expressão para $\tilde{C}^{(2)}$.

Passamos agora a escrever a forma de $\tilde{C}^{(2)}$ para o processo $\xi = 1/2$ através do cálculo dos termos que constam na equação 5.59, de forma análoga ao que foi feito para $\tilde{C}^{(1)}$. Os cálculos de tais termos são detalhados no capítulo 9, apêndice A. As expressões para $f_3^{(2)}$, $f_2^{(2)}$ e $f_1^{(2)}$ já foram obtidas em 5.103, 5.102 e 5.97, respectivamente.

$$\tilde{C}^{(2)} = f_3^{(2)} D^4 (D-1)^2 \tilde{C}^{(0)} + f_2^{(2)} D^3 (D-1) \tilde{C}^{(0)} + f_1^{(2)} D^2 (D-1)^2 \tilde{C}^{(0)}$$

De 9.34, 9.30 e 9.29, temos:

$$\begin{aligned} \tilde{C}^{(2)} = & \left[f_3^{(2)} \frac{1}{\gamma^2 \sqrt{\gamma}} (3 - 3d_-^2 - 3d_- d_+ + d_-^3 d_+) \right. \\ & \left. - f_2^{(2)} \frac{1}{\gamma \sqrt{\gamma}} (1 - d_-^2) + f_1^{(2)} \frac{1}{\gamma \sqrt{\gamma}} (d_- d_+ - 1) \right] KN' (d_-). \end{aligned} \quad (5.111)$$

Assim, ao determinar os termos $\tilde{C}^{(0)}$, $\tilde{C}^{(1)}$ e $\tilde{C}^{(2)}$ via, respectivamente, 5.108, 5.110 e 5.111, chegamos à equação da expansão assintótica 5.30. O preço da opção C é obtido de acordo com a definição da variável $\tilde{C}(\tau, F_t, \vartheta_t) = e^{r\tau} C(\tau, F_t, \vartheta_t)$. Implementamos o preço da opção por expansão assintótica num programa *Visual Basic* (VBA).

Na próxima seção apresentamos um teste de comparação entre o método da transformada rápida de Fourier pelo procedimento de Carr e Madan e o método de expansão assintótica.

5.4 Comparação Entre o Método de Transformada Rápida de Fourier e o Método de Expansão Assintótica

Conforme mencionamos neste capítulo, o método de expansão assintótica pressupõe que a volatilidade da variância (ε) seja pequena. Nesta seção apresentamos um exemplo de comparação entre os métodos de transformada rápida de Fourier (FFT) e de expansão assintótica com o intuito de avaliar o comportamento deste método com relação ao parâmetro de volatilidade da variância (ε).

Para tanto, inicialmente, fixamos os dados de mercado (vencimento, preço de exercício, juros e ativo à vista) e os parâmetros de velocidade de reversão à média (κ), variância de longo prazo (θ), correlação (ρ) e variância inicial (v_0)⁵. Em seguida, com estes dados, calculamos os preços das opções de câmbio sob os métodos FFT e de expansão assintótica para os seguintes valores do parâmetro de volatilidade da variância (ε): 0,01, 0,1, 0,5 e 1,0.

Consideremos o prazo de 9 meses (189 dias úteis), preço de exercício de 1.763,91 (correspondente a um delta de 65%) e ativo à vista de 1.750,00. O resumo dos dados e dos valores fixados para os parâmetros encontra-se na figura da tabela 5.1.

dados	
vencimento (dias úteis)	189,00
taxa de juros local (a.a, base 252, contínua)	8,60%
taxa de juros estrangeira (a.a, base 252, contínua)	1,63%
ativo à vista (dolar)	1.750,00
preço de exercício (delta 65%)	1.763,91
Parâmetros fixados	
Volatilidade inicial	0,17110
Variância de longo prazo (θ)	0,25143
velocidade de reversão à média (κ)	0,18076
correlação (ρ)	0,47188

Figura 5.1: Dados utilizados na comparação entre preços calculados pelos métodos de transformada rápida de Fourier (FFT) e expansão assintótica.

A comparação entre os preços obtidos pelos métodos da transformada de Fourier e expansão assintótica está na tabela da figura 5.2. Como esperado, os preços obtidos pelo método da expansão assintótica são tão mais próximos daqueles obtidos pelo método da transformada de Fourier quanto menor for a volatilidade da variância (ε).

volatilidade da variância (ε)	Preço	
	FFT	Expansão Assintótica
0,01	163,09	163,02
0,1	161,79	161,73
0,5	146,33	144,01
1	127,56	94,37

Figura 5.2: Comparação entre preços calculados pelos métodos de transformada rápida de Fourier (FFT) e expansão assintótica.

⁵Calculada como o quadrado da volatilidade inicial.

No próximo capítulo, apresentamos o modelo de apregamento do *swap* de variância, tanto sob o modelo de Demeterfi *et al*, mas utilizando *smile*, como sob o de Heston, para que possamos utilizar este instrumento na calibração.

Capítulo 6

Swaps de Variância

6.1 Introdução

Neste capítulo descrevemos o apreçamento de *swaps* de variância, a serem empregados na calibração. Inicialmente descrevemos o contrato e, em seguida, apresentamos o modelo de Demeterfi *et al*, que utiliza a hipótese de Black e Scholes para a log-normalidade da distribuição de probabilidade do preço do ativo-base, e o modelo a partir do processo do modelo de Heston. No caso do primeiro desenvolvimento, modificá-lo-emos para podermos aplicar a superfície de volatilidade.

6.2 *Swaps* de Variância: Definição

Opções são a forma de um agente se expor ao preço do ativo-base, bem como à sua volatilidade pelo período de existência do contrato. Contudo, são poucas as formas de se obter exposição somente à volatilidade. Uma delas é negociar contratos de volatilidade, propriamente ditos. Outra forma, mais sutil, é investir em contratos de variância.

Swaps de variância permitem ao agente econômico se expor tão somente à variância de um ativo, na medida em que permitem a negociação da variância ocorrida em um determinado período. O *payoff* deste contrato expressa a variância anualizada dos retornos do ativo-base num período de tempo, observando uma certa frequência, por exemplo, diária. O detentor do *swap* de variância recebe N \$ para cada ponto que a variância realizada dos retornos do ativo-base, V_R^2 , exceder a variância fixada no contrato pelo *strike*, K_{Var} . Matematicamente:

$$Payoff = (V_R^2 - K_{Var}) \times N. \quad (6.1)$$

Ou seja, se o agente julga que a variância V_R^2 dos retornos, medida até o vencimento do contrato, em T , será maior (menor) que a estipulada no contrato, K_{Var} , ele compra (vende) tal contrato e recebe um valor positivo. Contratualmente, ao longo do tempo $[0, T]$ observam-se os valores de fechamento, S_j , oficialmente divulgados para os preços do ativo-base, e computa-se¹:

$$V_R^2 T = \sum_{j=1}^T \left[\ln \left(\frac{S_j}{S_{j-1}} \right) \right]^2 = \sum_{j=1}^T [r_j]^2, \quad (6.2)$$

onde $r_j = \ln \left(\frac{S_j}{S_{j-1}} \right)$ é o retorno relativo do período $j - 1$ ao j .

Os contratos de *swaps* de variância podem ser negociados entre clientes diretamente (contratos de balcão, onde as condições do contrato não são padronizadas) ou em bolsa, operando-se um índice padronizado. Por exemplo, o índice VIX (*Volatility Index*) da bolsa de Chicago mostra a expectativa de volatilidade do índice de bolsa S&P500 para um prazo de 30 dias. Um índice deste tipo tem a utilidade de medir o risco de mercado ao representar um “termômetro” de mercado². No Brasil tem-se trabalhado para que um índice semelhante seja introduzido e contratos sejam negociados sobre o mesmo na bolsa de valores.

Para apreçar contratos de *swaps* de variância, estamos tão somente interessados no cômputo do valor esperado de V_R^2 , pois as outras quantidades, incluindo K_{Var} , são conhecidas na data de operação do contrato. De fato, o valor presente do contrato sob uma distribuição risco-neutra é:

$$Valor(t) = E \left[e^{-rT} (V_R^2 - K_{Var}) \times N \right] = e^{-rT} (E[V_R^2] - K_{Var}) \times N. \quad (6.3)$$

O “valor justo” do contrato é o valor do strike K_{var} para o qual o contrato tem valor presente nulo, ou seja,

$$K_{var} = E[V_R^2]. \quad (6.4)$$

¹Para o ativo-base representado pelo dólar, tais valores podem ser a PTAX divulgada pelo Banco Central do Brasil, ou a taxa à vista do dolar comercial.

²*Investor fear gauge*.

A seguir, discutimos como avaliar $E[V_R^2]$, primeiramente sob o modelo de Demeterfi *et al*, que se baseia na hipótese de que a densidade de probabilidade do preço do ativo-base é log-normal, e, em segundo lugar, sob o modelo de Heston³.

6.3 Modelo Log-normal

No desenvolvimento a seguir para o preço de um *swap* de variância, assumimos que o ativo-base, S_t , segue um modelo log-normal de preço, ou seja:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu(t, \cdot)dt + \sigma(t, \cdot)dW_t, \quad (6.5)$$

onde μ , como já vimos, representa a tendência, ou *drift*, do processo e σ representa a variância anualizada. Aqui, tanto μ , quanto σ , são funções arbitrárias de tempo e outros parâmetros.⁴

A variância teórica realizada sob o período $[0, T]$ é dada por

$$V^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2(t, \cdot)dt. \quad (6.6)$$

Pelo lema de Ito, considerando uma função $f(S_t) = \ln S_t$:

$$df = \frac{\partial f}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} (dS_t)^2.$$

Considerando o processo 6.5, e que $E[(dW_t)^2] \sim dt$, da mesma forma que em 3.8, temos:

$$\begin{aligned} d(\ln S_t) &= \frac{1}{S_t} dS_t + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{S_t^2} (dS_t)^2 \right] \\ &= \frac{1}{S_t} (S_t \mu dt + S_t \sigma dW_t) - \frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} S_t^2 \sigma^2 dt \\ &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Subtraindo 6.7 de 6.5:

³Aqui torna-se clara a facilidade de se utilizar *swaps* de variância, ao invés de *swaps* de volatilidade: estes requerem avaliar $E[\sqrt{V_R^2}]$, enquanto que aqueles requerem $E[V_R^2]$.

⁴Esta observação possibilita o uso de *smile* para a função σ e também o uso de modelos de volatilidade local de forma a termos $\sigma(S, t)$, como em Dupire ([Dupire, 1994]).

$$\frac{dS_t}{S_t} - d(\ln S_t) = \frac{\sigma^2}{2} dt. \quad (6.8)$$

Aplicando em 6.6:

$$V^2 = \frac{2}{T} \left[\underbrace{\left(\int_0^T \frac{dS_t}{S_t} \right)}_A - \underbrace{\ln \left(\frac{S_T}{S_0} \right)}_B \right]. \quad (6.9)$$

O termo A corresponde ao rebalanceamento contínuo de uma posição de $1/S_t$ ativos. Já o termo B representa uma posição estática sobre um log-contrato, que paga o logaritmo de um retorno total. O “valor justo” do contrato de swap de variância é dado, então, por:

$$K_{var} = E[V^2] = E \left\{ \frac{2}{T} \left[\left(\int_0^T \frac{dS_t}{S_t} \right) - \ln \left(\frac{S_T}{S_0} \right) \right] \right\}. \quad (6.10)$$

O primeiro termo pode ser calculado resolvendo a integral estocástica sob o processo 6.5⁵:

$$E \left[\int_0^T \frac{dS_t}{S_t} \right] = E \left[\int_0^T \mu dt + \int_0^T \sigma dW_t \right] = E \left[\int_0^T \mu dt \right] = (r - r_f)T. \quad (6.11)$$

Sobre o segundo termo, como o log-contrato não é negociado no mercado, temos que replicá-lo através de uma carteira de opções de compra e venda. É o que faremos na subseção a seguir.

6.3.1 Replicação Estática de Log-Contrato

Inicialmente, notamos que vale a relação:

$$\ln \left(\frac{S_T}{S_0} \right) = \ln \left(\frac{S_T}{S^*} \right) + \ln \left(\frac{S^*}{S_0} \right). \quad (6.12)$$

O segundo termo do lado direito não depende do preço final da opção e, portanto, pode ser tratado como constante. Logo, precisamos nos preocupar com a replicação do primeiro termo. Do Teorema Fundamental do Cálculo, segue a seguinte relação⁶

⁵Consideramos a valoração risco-neutra, onde $\mu = r - r_f$.

⁶Demonstraremos tal relação no Capítulo 9, Apêndice B.

$$f(U) = f(K) + f'(K) \underbrace{[(U - K)^+ - (K - U)^+]}_A + \int_K^\infty f''(z)(U - z)^+ dz + \int_0^K f''(z)(z - U)^+ dz. \quad (6.13)$$

Aplicando esta equação para avaliar $\ln\left(\frac{S_T}{S^*}\right)$, temos:

$$f(z) = -\ln(z)$$

$$\therefore f'(z) = -1/z \quad e \quad f''(z) = 1/z^2. \quad (6.14)$$

Também fazemos $U \rightarrow S_T$ e $K \rightarrow S^*$ em 6.13. O termo A resulta em $(U - K)$, ou, depois da substituição, em $(S_T - S^*)$. Assim,

$$-\ln S_T = -\ln S^* - \frac{1}{S^*}[S_T - S^*] + \int_{S^*}^\infty \frac{1}{z^2}(S_T - z)^+ dz + \int_0^{S^*} \frac{1}{z^2}(z - S_T)^+ dz$$

ou

$$-\ln \frac{S_T}{S^*} = \underbrace{-\frac{1}{S^*}[S_T - S^*]}_A + \underbrace{\int_{S^*}^\infty \frac{1}{z^2}(S_T - z)^+ dz}_B + \underbrace{\int_0^{S^*} \frac{1}{z^2}(z - S_T)^+ dz}_C \quad (6.15)$$

Ao tomar expectativas sobre esta equação, temos as seguintes interpretações para os termos:

- A: posição vendida em um contrato futuro com preço de exercício S^* . Temos o futuro em T dado por $S_T = S_0 e^{(r-r_f)T} \equiv Fwd_T$;
- B: posição comprada de $1/z^2$ opções de compra (*calls*) com preços de exercício (*strike*) entre S^* e ∞ : $\int_{S^*}^\infty \frac{1}{z^2} Call(Fwd_T, strike = z, T, \sigma, r, r_f) dz$;
- C: posição comprada de $1/z^2$ opções de venda (*puts*) com preços de exercício (*strike*) entre 0 e S^* e $\int_0^{S^*} \frac{1}{z^2} Put(Fwd_T, strike = z, T, \sigma, r, r_f) dz$.

Agora voltamos ao preço do contrato de variância.

6.3.2 Preço do Contrato de Variância

Voltando à 6.10, para o “valor justo” do contrato de variância, não descontado, sob 6.11, 6.12 e 6.15, podemos escrever:

$$K_{var} = E[V^2] = \frac{2}{T} \left\{ (r - r_f)T - \left(\frac{S_0 e^{(r-r_f)T}}{S^*} - 1 \right) - \ln \left(\frac{S^*}{S_0} \right) + \right. \\ \left. e^{rT} \left[\int_0^{S^*} \frac{1}{z^2} Put(Fwd_T, strike = z, T, \sigma, r, r_f) dz \right] + \right. \\ \left. e^{rT} \left[\int_{S^*}^{\infty} \frac{1}{z^2} Call(Fwd_T, strike = z, T, \sigma, r, r_f) dz \right] \right\}. \quad (6.16)$$

Sobre a equação 6.16, convém notar alguns pontos:

- Primeiro, as opções de compra (*calls*) e venda (*puts*) são apreçadas segundo Black and Scholes e levam em conta o *smile* e volatilidade;⁷
- A escolha de S^* é arbitrária e fazemos $S^* = Fwd_T$;
- O cômputo das integrais é feito numericamente. Notamos que
 - Ao fazer $S^* = Fwd_T$, estamos lidando com opções de compra e de venda “fora do dinheiro”. Ao lidar com regiões de integração $[0, S^*]$ para *puts* e $[S^*, \infty]$ para *calls*, haverá regiões em que estas opções tendem a zero ($z \rightarrow 0$ para *puts* e $z \rightarrow \infty$ para *calls*);
 - Na proximidade do vencimento, o intervalo de integração onde tais opções têm valor fica significativamente menor, e um melhor refinamento na integração (dz) é requerido.

6.4 Modelo de Heston

Para obter o apreçamento de *swaps* de variância segundo o modelo de Heston, calcularemos o “valor justo” do *swap* sob a dinâmica dada por 3.1, 3.7 e 3.3. Temos:

⁷Na equação 6.16 colocamos o fator de juros e^{rT} pois a equação não está descontada e assume-se na notação $Call(\cdot)$ e $Put(\cdot)$ que os preços são descontados.

$$K_{var} = E[V^2] = \frac{1}{T} \int_0^T E[v_t] dt. \quad (6.17)$$

Precisamos calcular o valor esperado $E[v_t]$ a partir da equação integral advinda do processo 3.7:

$$v_t = v_0 + \kappa \int_0^t (\theta - v_{t'}) dt' + \varepsilon \int_0^t \sqrt{v_{t'}} dW_{t'}^2, \quad (6.18)$$

ou seja, precisamos de

$$E[v_t] = v_0 + \kappa \int_0^t (\theta - E[v_{t'}]) dt'. \quad (6.19)$$

A partir desta equação, podemos achar $E[v_t]$ se montarmos uma equação diferencial para este termo. De fato,

$$\frac{dE[v_t]}{dt} = \kappa(\theta - E[v_t]). \quad (6.20)$$

Resolvendo-a:

$$\frac{dE[v_t]}{(\theta - E[v_t])} = \kappa dt$$

$$u = \theta - E[v_t], \quad du = -dE[v_t]$$

$$-\frac{du}{u} = \kappa dt$$

$$u = e^{-\kappa(t-t_0)} u_0$$

$$\theta - E[v_t] = e^{-\kappa(t-t_0)} (\theta - \underbrace{E[v_0]}_{v_0})$$

$$E[v_t] = e^{-\kappa(t-t_0)} (v_0 - \theta) + \theta. \quad (6.21)$$

Voltando à equação 6.17 para o “preço justo” de um swap de variância:

$$\begin{aligned}
K_{var} &= E[V^2] = \frac{1}{T} \int_0^T E[v_t] dt = \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T e^{-\kappa(t-t_0)}(v_0 - \theta) + \theta dt \\
&= \frac{1 - e^{-\kappa(T-t_0)}}{\kappa T} (v_0 - \theta) + \theta.
\end{aligned} \tag{6.22}$$

Esta equação representa, além do “preço justo”, a fórmula de apuração para um *swap* de variância sob modelo de Heston, ao descontarmos pelo fator de juros.

No próximo capítulo passamos a descrever como obter parâmetros do modelo de Heston a partir do procedimento de calibração de opções, que utilizará o ferramental de *swaps* de variância, exposto nesta seção.

Capítulo 7

Calibração

7.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos o procedimento de calibração dos parâmetros do modelo de Heston usando preços de mercado de opções de câmbio, bem como preços de *swaps* de variância criados sinteticamente através de opções de câmbio de compra e de venda. Começamos apresentando a descrição de dados e, em seguida, passamos ao procedimento propriamente dito. Depois, apresentamos os resultados obtidos. Além da calibração envolvendo o modelo de Heston apresentamos resultados do método FFT para o modelo de Black e Scholes.

7.2 Descrição de Dados

Os dados utilizados no procedimento de calibração envolvem:

1. Cotações de taxa de câmbio comercial R\$/USD de fechamento extraídos do provedor Reuters;
2. Para curva de juros doméstica utilizamos a curva “pré” (taxa x prazo), obtida a partir do fechamento de contratos futuros de DI da BM&F ¹;
3. Para curva de juros estrangeira utilizamos a curva de cupom cambial (taxa x prazo) advinda do mercado de estratégia FRA (*forward rate agreement*) de cupom da BM&F;

¹Os dados BM&F provêm do endereço eletrônico www.bovespa.com.br.

4. Cotações de opções de compra européias de dólar negociadas na BM&F (preço de fechamento, vencimento, preço de exercício);

Trabalharemos com taxas no formato contínuo. Dado um fator de juros (f), a taxa contínua (r) referente ao vencimento T é obtida pela relação:

$$f(T) = e^{r(T-t)}. \quad (7.1)$$

A partir das cotações de opções de compra calculamos volatilidades implícitas com base nos demais dados de mercado: curva de juros pré, cupom e taxa de câmbio.

7.3 Procedimento de Calibração

O objetivo desta seção é descrever como serão obtidos, via calibração, os parâmetros envolvidos no modelo de Heston:

1. ρ : correlação;
2. ε : volatilidade da variância;
3. θ : variância de longo prazo;
4. κ : velocidade de reversão à média;
5. v_0 : variância inicial.

Apresentamos duas propostas de calibração: uma empregando a valoração do modelo de Heston pela formulação de Peter Carr e Madan, com o auxílio da integral (4.8) e de (4.10), aplicando o método de Gauss-Legendre para avaliar a integral; e outra empregando expansão assintótica apresentada em [Lipton, 2001], de acordo com a equação (5.30) e a relação entre C e $\tilde{C}$ (isto é, $\tilde{C}(\tau, F_t, \vartheta_t) = e^{r\tau}C(\tau, F_t, \vartheta_t)$), apresentadas na seção 5.3, particularizadas para o processo de Heston $\xi = 1/2$.

O método de expansão assintótica, em seu domínio de validade ($\varepsilon \rightarrow 0$), por envolver equações fechadas, representa um procedimento de cálculo mais rápido que o método de Carr e Madan, que requer o cálculo numérico da integral (4.8). Comparamos os resultados dos dois métodos em três diferentes situações de mercado, a saber:

1. 10/10/2008;

2. 21/07/2009 e

3. 20/10/2009.

A primeira data representa o auge da crise dos títulos *subprime*, onde esperamos encontrar um regime de alta volatilidade de variância (ε). As duas outras representam períodos de abrandamento de volatilidade após a passagem da crise, com uma menor inclinação da superfície de volatilidade.

Primeiro construímos o conjunto de dados a partir dos quais obteremos os parâmetros. Partimos de preços de fechamento de opções européias de compra (*calls*) de dólar para gerar uma superfície de volatilidade implícita e pontos de preços de *swap* de variância. Mais especificamente, a partir de tais dados de preços de opções, construímos uma superfície de volatilidade implícita (σ) por vencimento (T) e preço de exercício (K) no formato delta ($\Delta(K)$), de forma a termos $\sigma(T, \Delta(K))$. Isto é feito tomando-se os pontos {preço, preço de exercício, vencimento} disponíveis e invertendo a equação de preço de Black e Scholes (2.14) para a obtenção da volatilidade implícita, utilizando taxas pré e cupom com mesmo vencimento dos pontos. A partir destes dados (volatilidade implícita, preço de exercício no formato delta e vencimento), podemos construir a superfície, por interpolação, tanto na dimensão de prazos de vencimento, quanto na dimensão de delta. Quanto aos *swaps* de variância, uma vez em condições de calcular preços de qualquer opção de compra (*call*) e venda (*put*) a partir da superfície de volatilidade implícita, podemos gerar preços “sintéticos” de *swaps* de variância, segundo a equação (6.16). Para um dado vencimento (T) em questão, será de utilidade na calibração dispormos de preços de *swap* de variância para os vencimentos T e $T + 1 \text{ dia}$ ².

Assim, após selecionar um conjunto de prazos de interesse $\{T\}$, o procedimento de construção de dados para calibração resume-se a :

- Fixar um prazo de vencimento T ;
- Coletar dados de mercado de taxas de pré e cupom para este prazo;
- A partir de preços de opções européias de compra de dólar (organizados segundo {preço, preço de exercício, vencimento}) e dados de taxas pré e cupom relativos a este prazo, obter volatilidades implícitas invertendo a equação (2.14)³;

²Porque o *swap* de variância no modelo de Heston depende de κ e θ . Conseqüentemente, trabalhar com dois *swaps* nos fornece dois parâmetros calibrados.

³Isto pode ser feito via Newton-Raphson.

- A partir da volatilidade implícita, convertemos os preços de exercício (K) para o formato delta ($\Delta(K, T)$). Isto é feito com a relação:

$$\Delta(K, T) = \frac{N(d_1)}{f_{cupom}(T)}, \quad (7.2)$$

onde d_1 é dado por (2.15) e $f_{cupom}(T)$ é o fator de cupom cambial para o vencimento T .

- Por interpolação, construir uma superfície de volatilidade implícita ($\sigma(T, \Delta(K))$) para pontos-padrão de delta (25-35-50-65-75-85)⁴;
- Calcular preços $C_{mercado}^i(T)$ de opções européias de compra para os pontos-padrão de delta (25-35-50-65-75-85);
- Calcular o preço *sintético* $P_{mercado}^{VS}(T)$ de um *swap* de variância de vencimento T de acordo com a equação (6.16). Adicionalmente, com a mesma equação, construir o preço *sintético* $P_{mercado}^{VS}(T + 1d)$ de um *swap* de variância com vencimento $T + 1 dia$;
- Repetir o procedimento para outro vencimento do conjunto $\{T\}$.

Com relação ao procedimento de calibração, estabelecemos uma função erro em um problema de minimização que represente a distância quadrática entre pontos de mercado e os pontos calculados pelo modelo de Heston.

Contudo, sabemos que há vários conjuntos possíveis $S = \{\hat{\rho}, \hat{\varepsilon}, \hat{\theta}, \hat{\kappa}, \hat{v}_0\}$ que reproduzem um dado conjunto de preços de mercado dentro de uma margem de tolerância pré-estabelecida, dependendo do conjunto inicial de parâmetros S_0 que inicia a calibração. Ou seja, partindo de um certo conjunto inicial S_0 , podendo chegar a um conjunto calibrado possível S . Tivéssemos partido de outro conjunto S'_0 , poderíamos obter um outro conjunto S' dentro da margem de erro. Em outras palavras, há vários mínimos locais, o que abre a possibilidade de que os conjuntos de calibração sejam instáveis.

Para minimizar esse efeito, notamos que, sob o processo de Heston, o preço do *swap* de variância de vencimento T , dado pela equação (6.22), envolve somente os parâmetros κ e θ . Assim, podemos inicialmente calibrar estes dois parâmetros com dois *swaps* de variância, um com vencimento T e outro com vencimento $T + 1 dia$,

⁴Interpolamos linearmente no tempo e por *spline* entre deltas.

minimizando uma função erro que envolva os preços calculados a partir do modelo de Heston, dados pela equação (6.22), contra os preços dos *swaps* sintéticos gerados no procedimento de construção de dados pela equação (6.16). O envolvimento de dois prazos é necessário pois precisamos de dois pontos para calibrar de forma exata dois parâmetros. Assumimos, pois, que há estabilidade destes parâmetros de um dia para o outro.

Com relação à variância inicial, v_0 , podemos fixá-la como o quadrado da volatilidade de curto prazo (dois dias), advinda da superfície de volatilidade. Para os demais parâmetros, ρ e ε , poderíamos fazer uso de duas opções de compra obtidas da superfície de volatilidade e calibrá-las contra os valores teóricos calculados pela equação (4.8) ou (5.30) tendo fixados κ e θ . Contudo, adotamos o procedimento de considerar os parâmetros calibrados $\hat{\kappa}$ e $\hat{\theta}$, obtidos pela calibração dos *swaps*, como valores iniciais para a calibração envolvendo opções de compra vanilas.

Portanto, o procedimento de calibração pode ser esquematizado da seguinte forma:

- Atribuir à variância inicial (v_0), na maioria dos casos, o valor do quadrado da volatilidade implícita de curto prazo (dois dias), obtido pela superfície construída;
- Fixar um prazo de vencimento T ;
- Estabelecer um conjunto inicial de calibração $s_0 = \{\kappa, \theta\}_0$ para a calibração dos *swaps* de variância;
- Selecionar e fixar preços $P_{mercado}^{VS}(T)$ e $P_{mercado}^{VS}(T + 1d)$ de *swaps* de variância sintéticos, calculados pela equação (6.16), para os prazos T e $T + 1 \text{ dia}$, respectivamente, conforme mencionado no procedimento de geração de dados descrito acima;
- Calcular preços teóricos $P_{teórico}^{VS}(T)$ e $P_{teórico}^{VS}(T + 1d)$ de *swaps* de variância sob o processo do modelo de Heston através da equação (6.22) para os prazos T e $T + 1 \text{ dia}$, respectivamente;
- Através do ajuste de preços teóricos dos *swaps* de variância aos preços fixos de mercado dos mesmos, obter parâmetros calibrados $s^T = \{\hat{\kappa}, \hat{\theta}\}^T$ a partir de⁵

⁵Utilizamos o otimizador do Microsoft Excel, que utiliza o método de Gradiente Reduzido Generalizado (*Generalized Reduced Gradient*).

$$\min_s \left[\left(\frac{P_{mercado}^{VS}(T) - P_{teórico}^{VS}(T)}{P_{mercado}^{VS}(T)} \right)^2 + \left(\frac{P_{mercado}^{VS}(T+1d) - P_{teórico}^{VS}(T+1d)}{P_{mercado}^{VS}(T+1d)} \right)^2 \right]; \quad (7.3)$$

- Estabelecer um conjunto inicial de calibração $S_0 = \{\rho, \varepsilon, \{s\}\}_0$;
- Selecionar e fixar preços de opções de compra, $C_{mercado}^i(T)$, com vencimento no prazo T , para o deltas ($i = 25, 35, 50, 65, 75, 85$), computados segundo o procedimento de geração de dados descrito acima;
- Calcular preços teóricos, $C_{teórico}^i(T)$, de opções de compra com vencimento no prazo T , para o deltas ($i = 25, 35, 50, 65, 75, 85$) segundo o modelo de Heston pela equação (4.8), ou pela equação (5.30) e a relação entre C e $\tilde{C}$, conforme a abordagem for por Carr e Madan ou por expansão assintótica, respectivamente;
- Através do ajuste de preços teóricos das opções de compra aos preços fixos de mercado dos mesmos, obter parâmetros calibrados $S^T = \{\hat{\rho}, \hat{\varepsilon}, \hat{\kappa}, \hat{\theta}\}^T$ a partir de

$$\min_S \left\{ \sum_{i=25, 35, 50, 65, 75, 85} \left[\left(\frac{C_{mercado}^i(T) - C_{teórico}^i(T)}{C_{mercado}^i(T)} \right)^2 \right] \right\}; \quad (7.4)$$

- Repetir o procedimento para outro vencimento do conjunto $\{T\}$.

A seguir apresentamos os resultados obtidos segundo os procedimentos de Carr e Madan e de expansão assintótica.

7.4 Resultados de calibrações

Nesta seção apresentamos os resultados das calibrações. Apresentaremos os resultados em duas sub-seções: uma para o procedimento de Carr e Madan e outra para a expansão assintótica. Em cada caso, apresentamos dados relativos às datas de análise 10/10/2008, 21/07/2009 e 20/10/2009. Apresentamos nas seções 7.4.1 e 7.4.2 tabelas contendo os parâmetros calibrados e comparações de preços

e volatilidades de mercado contra aqueles advindos de calibrações. Na seção 7.4.3 mostramos gráficos de superfície de volatilidade comparando números advindos de dados mercado contra pontos calibrados, representativos das referidas tabelas, para facilitar a visualização. Além disso, graficamos o comportamento de cada parâmetro em função do vencimento. Na seção 7.4.5, aplicamos aos conjuntos 1, 2 e 3 o método FFT sob a função característica do modelo de Black e Scholes (equação 2.19), comparando solução de Black e Scholes (equação 2.14).

7.4.1 Calibração Pelo Procedimento Carr e Madan de Apreçamento

A partir do conjunto de dados de 20/10/2008, com relação ao procedimento sugerido por Carr e Madan, as tabelas das figuras 7.1, 7.2 e 7.3 representam, respectivamente, resultados referentes a preços (sobre os quais as calibrações foram feitas), volatilidades e parâmetros calibrados. Já o gráfico da figura 7.4 apresenta da evolução dos parâmetros calibrados ao longo dos vários prazos calibrados, dispostos na tabela 7.3.

De forma análoga, as tabelas das figuras 7.5, 7.6, 7.7 e o gráfico da figura 7.8 são relativos ao conjunto de dados de 21/7/2009; enquanto as tabelas e gráfico das figuras 7.9, 7.10, 7.11 e 7.12 referem-se ao conjunto de dados de 20/10/2009.

Comparando as tabelas 7.1, 7.5 e 7.9 com respeito aos erros obtidos para diferentes prazos, o conjunto 1 (de 20/10/2008) apresentou, invariavelmente, os maiores valores ao se comparar prazos equivalentes entre os conjuntos. O conjunto 3 (20/10/2009) apresentou os menores erros (com exceção dos pontos de 14 e 21 meses). Isto pode ser notado no exame dos gráficos da seção 7.4.3, que comparam volatilidades de mercado com as calibradas pelos procedimentos: os referentes ao conjunto 1 mostram maior descolamento das superfícies calibradas em relação à superfície de mercado. Nota-se que, além da inclinação elevada (caracterizada por elevados valores de correlação, ρ , conforme a tabela da figura 7.3), as curvas de volatilidades implícitas do conjunto 1 apresentam pontos de inflexão ao redor dos deltas 50 a 65 (vide gráficos das figuras 7.25 a 7.30), não presentes nos demais conjuntos. Aparentemente, a correlação - que é importante para gerar inclinação - num valor limite, isto é, sem liberdade para aumentar, e a superfície com inflexão são limitações à calibração.

Para todos os conjuntos vemos que os parâmetros variam entre os prazos - conforme as tabelas de parâmetros (7.3, 7.7 e 7.11) - contrariando a idéia de que um

conjunto de parâmetros deva ser suficiente para calibrar todos os prazos de opções.

Analisando os três conjuntos, vemos que a velocidade de reversão à média da variância (κ) acompanha a volatilidade da mesma (ε). Além disso, verificamos que a correlação (ρ) decresce com relação aos prazos, exceto para o primeiro conjunto, onde permanece em valores elevados, conforme já mencionado.

No caso do conjunto 1, de 20/10/2008, os valores da volatilidade da variância (ε) foram elevados, variando de 61,77% a.a. à 132,33% a.a.; representando o período da crise *subprime* de elevada volatilidade no mercado. Os elevados valores de volatilidade da variância (ε) também estão refletidos na concavidade da superfície de volatilidade implícita (gráficos das figuras 7.25 ao 7.30). Nota-se, novamente, a elevada inclinação dos *smiles* para os vários prazos, refletida no parâmetro de correlação (ρ) elevado (próximo a 1).

Ainda com respeito ao conjunto 1 de dados, de acordo com o gráfico de parâmetros ao longo do tempo (figura 7.4), a volatilidade da variância decrescente aponta que o mercado apreçava na época uma melhoria num horizonte maior de tempo. Ademais, os valores da variância de longo prazo (θ) obtidos foram menores que os demais conjuntos, muito próximos de zero para todos os prazos calibrados. Já os valores da velocidade de reversão à média (κ) apresentaram-se elevados para os prazos inferiores (7,3337, para três meses), decrescendo no caso de prazos superiores (2,1406, para 2 anos), sendo que, mesmo nestes casos, os valores obtidos foram maiores que aqueles referentes aos demais conjuntos calibrados, conforme pode ser visto comparando-se as tabelas de parâmetros (tabelas das figuras 7.3, 7.7 e 7.11). Em suma, para este período de crise, observamos elevada volatilidade da variância (ε), com reversão à uma média de variância de longo prazo (θ) próxima de zero e elevada velocidade de reversão (κ), enquanto a elevada inclinação do *smile* é representada por elevada correlação (ρ).

No conjunto 2, de 21/07/2009, a volatilidade da variância (ε) e a velocidade de reversão à média (κ) crescem até o prazo de 12 meses, conforme a tabela da figura 7.7 e gráfico 7.8. Padrão semelhante é verificado no conjunto 3, de 20/10/2009, onde os valores máximos destes parâmetros ocorreram no prazo de 14 meses (vide tabela e gráfico das figuras 7.11 e 7.12). Notamos valores de volatilidade da variância (ε) menores para estes conjuntos de dados: o conjunto 1, de 20/10/2008 apresentou média de 82,68%, com valores máximo e mínimo de 128,01% e 61,77%, respectivamente, enquanto o conjunto 2, de 21/07/2009, apresentou valores menores (média de 68,2%, máximo de 82,98% e mínimo de 55,80%), o mesmo se verificando para o conjunto 3, de 20/10/2009 (média de 63,04%, máximo de 91,01% e mínimo de 49%). Semelhantemente, a velocidade de reversão à média (κ) apresentou o mesmo

padrão: no conjunto 1, média de 4,3801, máximo de 7,3337 e mínimo de 2,1406; ao passo que no conjunto 2 observamos também valores menores (média de 1,3645, máximo de 2,1751 e mínimo de 0,5952), idem para o conjunto 3 (média de 0,7180, máximo de 1,8022 e mínimo de 0,0100).

A variância de longo prazo (θ) apresentou valores maiores para os conjuntos 2 e 3 que aqueles referentes ao conjunto 1 (próximo a zero). No caso do conjunto 2, obtivemos média de 6,87%, máximo de 15,94% e mínimo de 5,02%; e no conjunto 3 média de 8,31%, máximo de 12,74% e mínimo de 5,99%.

A correlação (ρ), em comparação com o conjunto 1, onde apresentou valores próximos a 1, conforme já mencionado, decresceu para a região de 0,5 para os conjuntos 2 e 3. Mais precisamente, média de 0,4746, máximo de 0,5229 e mínimo de 0,4034 para o conjunto 2 e média de 0,4295, máximo de 0,5345 e mínimo de 0,3065 para o conjunto 3.

Conjunto 1: 20/10/2008

Prazo (meses)	Conjunto	Preços de Opções de Compra						Preços de Swaps de Variância		(Erro Quadrático) ^{0.5} x 1E5
		delta						VAR SWAP (d)	VAR SWAP (d+1)	
		25	35	50	65	75	85			
3	Mercado	56,58	80,52	122,61	170,83	205,09	253,82	0,10896	0,10779	978,62
	Calibração	55,65	81,92	122,22	169,04	204,99	252,52	0,10948	0,10830	
5	Mercado	61,87	86,05	130,64	175,78	209,79	256,65	0,07708	0,07665	1.966,48
	Calibração	60,70	87,62	126,96	173,14	208,42	254,23	0,07911	0,07846	
6	Mercado	64,21	88,94	134,31	179,72	212,56	258,28	0,06922	0,06889	1.604,65
	Calibração	62,47	91,25	132,23	178,52	212,29	255,00	0,07000	0,06949	
7	Mercado	66,52	94,41	138,77	186,42	219,77	264,88	0,06531	0,06518	933,64
	Calibração	65,44	94,42	138,72	186,08	220,10	261,73	0,06622	0,06580	
8	Mercado	68,65	98,44	143,08	192,45	226,60	271,45	0,06207	0,06191	848,10
	Calibração	68,27	97,73	143,98	192,07	226,30	266,85	0,06272	0,06236	
9	Mercado	70,68	101,56	147,33	197,72	232,30	277,23	0,05930	0,05919	831,96
	Calibração	70,25	100,81	148,63	197,65	232,10	272,24	0,05974	0,05944	
10	Mercado	72,78	104,78	152,09	203,66	239,04	284,53	0,05745	0,05737	849,96
	Calibração	72,36	103,96	153,40	203,73	238,85	279,32	0,05788	0,05761	
11	Mercado	74,58	107,46	155,82	208,60	243,71	288,76	0,05543	0,05532	862,36
	Calibração	74,12	106,63	157,32	208,38	243,57	283,54	0,05583	0,05559	
12	Mercado	76,31	110,02	159,39	212,89	248,77	293,84	0,05372	0,05367	939,38
	Calibração	75,76	109,11	161,00	212,82	248,32	288,13	0,05418	0,05397	
13	Mercado	78,23	112,91	163,72	217,65	255,99	302,81	0,05265	0,05259	2.102,41
	Calibração	77,72	108,68	160,50	215,87	255,68	301,30	0,05422	0,05401	
14	Mercado	80,00	115,56	167,72	222,03	262,49	311,12	0,05158	0,05152	2.243,22
	Calibração	79,46	111,03	164,02	220,74	261,61	308,64	0,05322	0,05302	
15	Mercado	81,63	117,98	171,30	226,13	268,08	318,15	0,05061	0,05056	2.374,76
	Calibração	81,07	113,16	167,20	225,09	266,79	314,91	0,05230	0,05212	
17	Mercado	84,48	122,23	177,35	233,39	277,17	329,10	0,04878	0,04873	2.602,26
	Calibração	83,90	116,83	172,67	232,46	275,34	324,82	0,05056	0,05040	
19	Mercado	87,15	126,17	182,97	240,26	285,66	339,27	0,04698	0,04693	2.896,03
	Calibração	86,45	120,15	177,60	239,13	283,07	333,77	0,04889	0,04875	
21	Mercado	89,42	129,49	187,77	246,07	292,77	347,67	0,04520	0,04518	2.659,95
	Calibração	92,56	124,66	180,45	242,55	288,46	343,21	0,04623	0,04610	
24	Mercado	91,74	132,76	192,46	251,47	299,21	354,81	0,04264	0,04259	2.126,87
	Calibração	94,64	128,38	186,64	250,66	296,79	350,90	0,04328	0,04318	

Figura 7.1: Conjunto 1 (20/10/2008): comparação entre preços obtidos na calibração do modelo de Heston utilizando transformada rápida de Fourier e preços de mercado.

Prazo (meses)	Conjunto	Volatilidades de Opções de Compra					
		delta					
		25	35	50	65	75	85
3	Mercado	40,55%	36,56%	33,03%	29,76%	27,06%	25,08%
		40,71%	36,36%	33,05%	29,91%	27,06%	25,11%
5	Mercado	35,79%	31,48%	28,42%	24,71%	22,40%	20,64%
		35,97%	31,24%	28,58%	24,95%	22,47%	20,71%
6	Mercado	34,60%	30,31%	27,22%	23,56%	21,18%	19,44%
		34,86%	29,95%	27,31%	23,67%	21,19%	19,53%
7	Mercado	33,89%	30,52%	26,62%	23,18%	20,80%	18,97%
		34,02%	30,52%	26,63%	23,20%	20,78%	19,06%
8	Mercado	33,36%	30,41%	26,21%	22,89%	20,53%	18,66%
		33,40%	30,48%	26,14%	22,91%	20,55%	18,79%
9	Mercado	33,00%	30,16%	25,96%	22,64%	20,29%	18,41%
		33,04%	30,23%	25,86%	22,65%	20,30%	18,55%
10	Mercado	32,83%	30,09%	25,94%	22,59%	20,25%	18,36%
		32,87%	30,16%	25,83%	22,58%	20,26%	18,50%
11	Mercado	32,64%	29,95%	25,80%	22,49%	20,08%	18,15%
		32,68%	30,02%	25,68%	22,50%	20,09%	18,28%
12	Mercado	32,53%	29,89%	25,74%	22,40%	20,03%	18,08%
		32,58%	29,96%	25,61%	22,41%	20,06%	18,23%
13	Mercado	32,58%	29,98%	25,86%	22,41%	20,20%	18,31%
		32,62%	30,28%	26,14%	22,50%	20,22%	18,35%
14	Mercado	32,62%	30,07%	25,98%	22,42%	20,35%	18,52%
		32,66%	30,37%	26,29%	22,48%	20,39%	18,59%
15	Mercado	32,67%	30,15%	26,07%	22,44%	20,47%	18,69%
		32,71%	30,45%	26,42%	22,50%	20,52%	18,78%
17	Mercado	32,79%	30,32%	26,24%	22,54%	20,64%	18,93%
		32,83%	30,65%	26,63%	22,59%	20,71%	19,05%
19	Mercado	32,92%	30,49%	26,39%	22,65%	20,80%	19,14%
		32,97%	30,83%	26,85%	22,70%	20,90%	19,29%
21	Mercado	33,05%	30,64%	26,55%	22,76%	20,96%	19,34%
		32,83%	30,91%	27,17%	22,92%	21,11%	19,46%
24	Mercado	33,26%	30,86%	26,78%	22,93%	21,19%	19,62%
		33,06%	31,09%	27,27%	22,97%	21,27%	19,72%

Figura 7.2: Conjunto 1 (20/10/2008): comparação entre volatilidades implícitas obtidas na calibração do modelo de Heston utilizando transformada rápida de Fourier e volatilidades de mercado.

Prazo (meses)	Parâmetros de Heston				
	Volatilidade Inicial	θ	κ	ρ	ε
3	49,70%	-	7,3337	0,8429	128,01%
5	49,70%	0,0012	6,7196	0,8233	132,33%
6	49,70%	-	6,3247	0,9999	100,41%
7	49,70%	0,0018	5,8230	0,9999	94,64%
8	49,70%	0,0028	5,4299	0,9960	81,89%
9	49,70%	0,0038	5,0964	0,9999	77,19%
10	49,70%	0,0044	4,7359	0,9999	74,69%
11	49,70%	0,0053	4,4892	0,9999	73,99%
12	49,70%	0,0063	4,2647	0,9999	74,06%
13	49,70%	-	3,5609	0,9999	74,46%
14	49,70%	-	3,3308	0,9999	71,60%
15	49,70%	-	3,1309	0,9999	69,16%
17	49,70%	-	2,7974	0,9999	65,12%
19	49,70%	-	2,5319	0,9999	61,77%
21	49,70%	-	2,3714	0,8953	77,26%
24	49,70%	-	2,1406	0,9559	66,27%

Figura 7.3: Conjunto 1 (20/10/2008): parâmetros obtidos nas calibrações do modelo de Heston utilizando transformada rápida de Fourier.

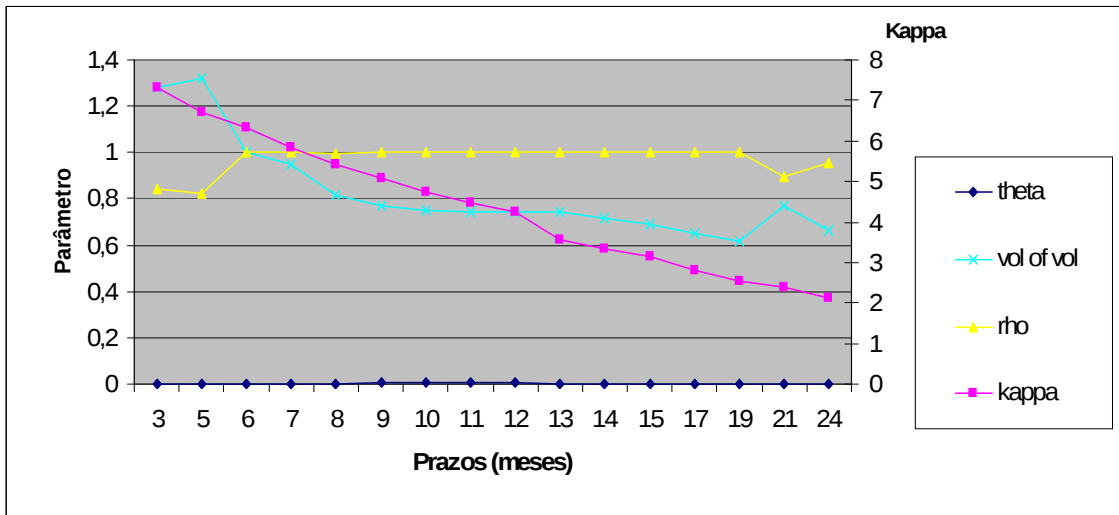


Figura 7.4: Conjunto 1 (20/10/2008): gráfico de evolução temporal dos parâmetros obtidos nas calibrações do modelo de Heston utilizando transformada rápida de Fourier.

Conjunto 2: 21/07/2009

Prazo (meses)	Conjunto	Preços de Opções de Compra						Preços de Swaps de Variância		(Erro Quadrático) ^{0.5} x 1E5
		delta						VAR SWAP (d)	VAR SWAP (d+1)	
		25	35	50	65	75	85			
3	Mercado	29,38	42,33	65,57	95,55	122,89	164,09	0,03859	0,03864	729,21
	Calibração	29,03	42,82	65,58	94,90	122,02	163,14	0,03868	0,03880	
5	Mercado	37,95	54,44	83,95	121,59	155,73	207,16	0,03965	0,03966	616,41
	Calibração	37,57	55,05	83,83	120,90	154,99	206,38	0,03971	0,03979	
6	Mercado	41,39	59,29	91,31	132,06	168,86	224,12	0,03982	0,03983	578,27
	Calibração	41,01	59,94	91,15	131,36	168,19	223,44	0,03987	0,03993	
7	Mercado	43,46	62,21	95,72	138,31	176,70	234,14	0,03988	0,03988	553,17
	Calibração	43,09	62,88	95,53	137,61	176,07	233,53	0,03993	0,03998	
8	Mercado	47,23	67,51	103,75	149,67	190,82	251,96	0,03986	0,03986	524,06
	Calibração	46,85	68,22	103,52	148,96	190,25	251,43	0,03990	0,03994	
9	Mercado	49,76	71,08	109,16	157,31	200,27	263,70	0,03977	0,03976	508,68
	Calibração	49,38	71,82	108,90	156,58	199,74	263,25	0,03981	0,03984	
10	Mercado	52,06	74,32	114,03	164,17	208,66	273,97	0,03963	0,03962	490,02
	Calibração	51,68	75,07	113,76	163,43	208,17	273,55	0,03967	0,03969	
11	Mercado	54,19	77,35	118,60	170,54	216,42	283,41	0,03945	0,03944	468,65
	Calibração	53,82	78,11	118,31	169,82	215,99	283,02	0,03949	0,03950	
12	Mercado	56,16	80,16	122,80	176,33	223,45	291,80	0,03926	0,03925	444,31
	Calibração	55,80	80,91	122,49	175,64	223,06	291,45	0,03929	0,03930	
13	Mercado	58,01	82,74	126,69	181,63	229,92	299,48	0,03904	0,03903	401,21
	Calibração	57,72	83,05	127,00	181,66	228,88	297,25	0,03911	0,03911	
14	Mercado	58,60	83,57	127,93	183,33	231,98	301,93	0,03896	0,03894	664,61
	Calibração	59,19	84,55	127,45	182,34	230,57	300,20	0,03901	0,03902	
15	Mercado	61,35	87,42	133,69	191,14	241,44	313,04	0,03849	0,03847	952,60
	Calibração	61,16	88,54	134,83	192,47	241,66	311,23	0,03794	0,03794	
17	Mercado	64,24	91,46	139,70	199,26	251,14	324,21	0,03787	0,03785	893,90
	Calibração	64,06	92,73	140,65	200,49	251,51	322,93	0,03737	0,03737	
19	Mercado	66,80	95,05	145,01	206,32	259,50	333,67	0,03724	0,03723	270,10
	Calibração	66,59	95,59	144,48	206,23	259,27	333,25	0,03726	0,03726	
21	Mercado	69,01	98,13	149,52	212,22	266,35	341,14	0,03664	0,03663	308,56
	Calibração	68,78	98,78	148,84	212,13	266,31	341,08	0,03665	0,03665	
24	Mercado	71,65	101,79	154,77	218,87	273,69	348,44	0,03574	0,03573	716,68
	Calibração	71,19	101,62	152,37	217,23	272,90	348,80	0,03594	0,03593	

Figura 7.5: Conjunto 2 (21/07/2009): comparação entre preços obtidos na calibração do modelo de Heston utilizando transformada rápida de Fourier e preços de mercado.

Prazo (meses)	Conjunto	Volatilidades de Opções de Compra					
		delta					
		25	35	50	65	75	85
3	Mercado	21,97%	20,05%	18,40%	17,32%	16,89%	16,86%
		Calibração	22,03%	20,00%	18,39%	17,33%	16,90%
5	Mercado	22,49%	20,44%	18,69%	17,51%	17,04%	17,01%
		Calibração	22,55%	20,38%	18,69%	17,53%	17,04%
6	Mercado	22,63%	20,54%	18,76%	17,57%	17,08%	17,05%
		Calibração	22,68%	20,48%	18,76%	17,58%	17,09%
7	Mercado	22,71%	20,60%	18,80%	17,60%	17,11%	17,07%
		Calibração	22,76%	20,54%	18,80%	17,61%	17,11%
8	Mercado	22,83%	20,68%	18,87%	17,65%	17,15%	17,08%
		Calibração	22,88%	20,63%	18,88%	17,67%	17,15%
9	Mercado	22,91%	20,74%	18,91%	17,69%	17,18%	17,09%
		Calibração	22,96%	20,68%	18,92%	17,71%	17,18%
10	Mercado	22,98%	20,80%	18,96%	17,73%	17,20%	17,10%
		Calibração	23,03%	20,74%	18,97%	17,75%	17,21%
11	Mercado	23,05%	20,85%	19,01%	17,77%	17,23%	17,11%
		Calibração	23,09%	20,80%	19,01%	17,78%	17,23%
12	Mercado	23,11%	20,92%	19,06%	17,81%	17,26%	17,12%
		Calibração	23,16%	20,86%	19,07%	17,82%	17,26%
13	Mercado	23,19%	20,97%	19,11%	17,84%	17,29%	17,13%
		Calibração	23,22%	20,95%	19,10%	17,84%	17,30%
14	Mercado	23,21%	20,99%	19,12%	17,85%	17,30%	17,14%
		Calibração	23,15%	20,92%	19,14%	17,87%	17,31%
15	Mercado	23,31%	21,07%	19,19%	17,90%	17,34%	17,16%
		Calibração	23,33%	20,99%	19,16%	17,88%	17,34%
17	Mercado	23,41%	21,15%	19,26%	17,95%	17,38%	17,18%
		Calibração	23,43%	21,07%	19,24%	17,93%	17,38%
19	Mercado	23,51%	21,23%	19,34%	18,00%	17,43%	17,21%
		Calibração	23,53%	21,20%	19,35%	18,00%	17,43%
21	Mercado	23,61%	21,32%	19,41%	18,06%	17,47%	17,24%
		Calibração	23,64%	21,28%	19,43%	18,06%	17,48%
24	Mercado	23,77%	21,46%	19,53%	18,15%	17,55%	17,30%
		Calibração	23,81%	21,47%	19,59%	18,18%	17,55%

Figura 7.6: Conjunto 2 (21/07/2009): comparação entre volatilidades implícitas obtidas na calibração do modelo de Heston utilizando transformada rápida de Fourier e volatilidades de mercado.

Prazo (meses)	Parâmetros de Heston				
	Volatilidade Inicial	θ	κ	ρ	ε
3	17,41%	0,1594	0,5952	0,5229	69,72%
5	17,41%	0,1119	0,6949	0,5067	63,09%
6	17,41%	0,0894	0,8709	0,4984	62,80%
7	17,41%	0,0805	0,9758	0,4924	63,23%
8	17,41%	0,0665	1,2696	0,4845	65,94%
9	17,41%	0,0613	1,4290	0,4787	68,02%
10	17,41%	0,0567	1,6638	0,4740	72,02%
11	17,41%	0,0534	1,9176	0,4698	77,01%
12	17,41%	0,0512	2,1751	0,4661	82,98%
13	17,41%	0,0512	2,0550	0,4708	82,40%
14	17,41%	0,0517	1,9142	0,4815	80,07%
15	17,41%	0,0502	1,7890	0,4913	69,06%
17	17,41%	0,0508	1,4959	0,4800	64,03%
19	17,41%	0,0534	1,1889	0,4402	63,67%
21	17,41%	0,0541	1,0317	0,4325	59,72%
24	17,41%	0,0572	0,7660	0,4034	55,80%

Figura 7.7: Conjunto 2 (21/07/2009): parâmetros obtidos nas calibrações do modelo de Heston utilizando transformada rápida de Fourier.

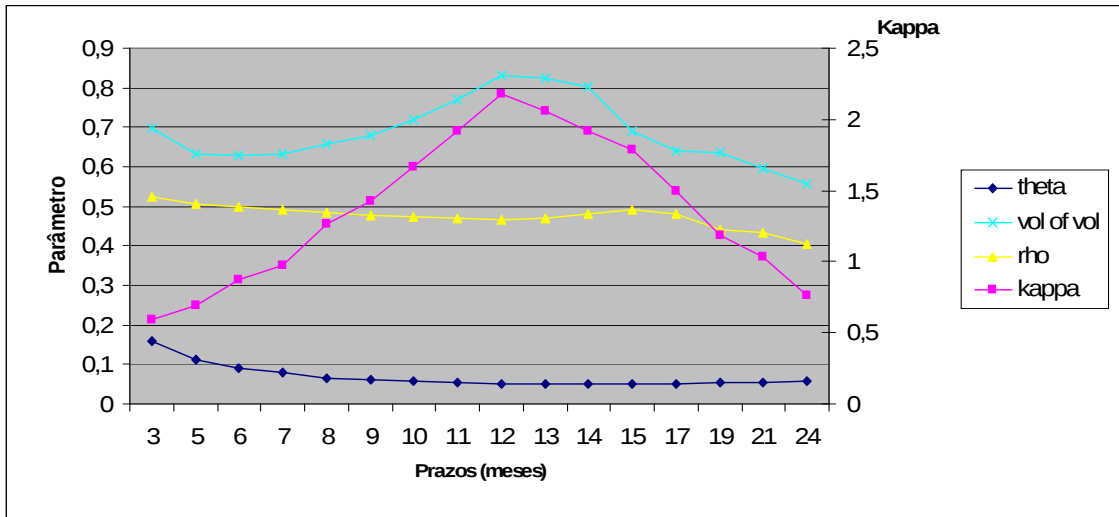


Figura 7.8: Conjunto 2 (21/07/2009): gráfico de evolução temporal dos parâmetros obtidos nas calibrações do modelo de Heston utilizando transformada rápida de Fourier.

Conjunto 3: 20/10/2009

Prazo (meses)	Conjunto	Preços de Opções de Compra						Preços de Swaps de Variância		(Erro Quadrático) ^{0.5} x 1E5
		delta						VAR SWAP (d)	VAR SWAP (d+1)	
		25	35	50	65	75	85			
3	Mercado	26,23	37,96	58,06	84,36	108,61	143,75	0,03589	0,03592	594,73
	Calibração	25,99	38,18	58,29	83,79	107,72	143,19	0,03603	0,03602	
5	Mercado	34,21	49,41	75,26	109,03	140,21	185,57	0,03778	0,03782	425,15
	Calibração	34,00	49,62	75,49	108,44	139,40	185,23	0,03789	0,03788	
6	Mercado	37,63	54,30	82,61	119,51	153,60	203,09	0,03867	0,03872	333,23
	Calibração	37,45	54,49	82,82	118,97	152,89	202,95	0,03876	0,03876	
7	Mercado	40,77	58,80	89,35	129,10	165,76	218,83	0,03955	0,03958	256,15
	Calibração	40,63	58,95	89,55	128,62	165,17	218,89	0,03960	0,03961	
8	Mercado	43,67	62,93	95,52	137,90	176,91	233,18	0,04027	0,04031	202,07
	Calibração	43,57	63,04	95,72	137,48	176,40	233,38	0,04031	0,04032	
9	Mercado	46,37	66,77	101,27	146,08	187,25	246,43	0,04094	0,04097	154,93
	Calibração	46,31	66,83	101,45	145,73	186,85	246,79	0,04097	0,04097	
10	Mercado	48,84	70,26	106,52	153,53	196,68	258,46	0,04146	0,04148	125,64
	Calibração	48,80	70,29	106,69	153,25	196,37	258,97	0,04146	0,04148	
11	Mercado	51,06	73,44	111,29	160,32	205,27	269,45	0,04178	0,04179	112,16
	Calibração	51,05	73,40	111,48	160,12	204,94	269,86	0,04177	0,04180	
12	Mercado	51,95	74,71	113,20	163,07	208,77	273,98	0,04187	0,04188	110,53
	Calibração	51,96	74,64	113,40	162,90	208,48	274,43	0,04187	0,04189	
13	Mercado	54,97	79,01	119,71	172,39	220,70	289,11	0,04225	0,04226	117,47
	Calibração	55,02	78,87	119,91	172,35	220,44	289,59	0,04225	0,04226	
14	Mercado	55,56	79,86	121,00	174,22	223,03	292,04	0,04230	0,04231	871,25
	Calibração	55,04	78,53	119,73	172,98	221,72	292,10	0,04210	0,04211	
15	Mercado	57,20	82,19	124,52	179,22	229,41	300,00	0,04245	0,04245	125,71
	Calibração	57,27	82,03	124,67	179,29	229,17	300,64	0,04243	0,04244	
17	Mercado	60,10	86,30	130,71	187,90	240,31	313,35	0,04250	0,04250	176,16
	Calibração	60,23	86,09	130,76	188,03	240,35	314,48	0,04247	0,04248	
19	Mercado	63,67	91,36	138,34	198,34	253,16	328,64	0,04216	0,04215	239,55
	Calibração	63,86	91,15	138,22	198,68	253,40	330,27	0,04211	0,04211	
21	Mercado	65,80	94,40	142,99	204,51	260,66	337,37	0,04173	0,04173	319,15
	Calibração	66,03	94,15	142,67	205,01	261,31	339,54	0,04167	0,04168	
24	Mercado	68,49	98,22	148,82	212,06	269,59	347,42	0,04101	0,04100	445,95
	Calibração	68,77	97,99	148,15	212,78	270,78	350,47	0,04092	0,04093	

Figura 7.9: Conjunto 3 (20/10/2009): comparação entre preços obtidos na calibração do modelo de Heston utilizando transformada rápida de Fourier e preços de mercado.

Prazo (meses)	Conjunto	Volatilidades de Opções de Compra					
		delta					
		25	35	50	65	75	85
3	Mercado	21,34%	19,57%	17,71%	16,62%	16,22%	16,02%
	Calibração	21,39%	19,55%	17,70%	16,63%	16,23%	16,02%
5	Mercado	22,05%	20,19%	18,20%	17,06%	16,66%	16,53%
	Calibração	22,09%	20,16%	18,19%	17,07%	16,67%	16,53%
6	Mercado	22,38%	20,47%	18,45%	17,27%	16,88%	16,76%
	Calibração	22,40%	20,45%	18,43%	17,28%	16,89%	16,76%
7	Mercado	22,70%	20,76%	18,69%	17,49%	17,10%	16,98%
	Calibração	22,72%	20,74%	18,68%	17,50%	17,10%	16,98%
8	Mercado	22,98%	21,00%	18,89%	17,68%	17,29%	17,17%
	Calibração	22,99%	20,99%	18,88%	17,69%	17,29%	17,17%
9	Mercado	23,25%	21,22%	19,09%	17,87%	17,47%	17,36%
	Calibração	23,25%	21,22%	19,08%	17,87%	17,47%	17,36%
10	Mercado	23,47%	21,41%	19,26%	18,03%	17,63%	17,53%
	Calibração	23,47%	21,41%	19,25%	18,03%	17,64%	17,53%
11	Mercado	23,62%	21,55%	19,38%	18,15%	17,77%	17,67%
	Calibração	23,63%	21,55%	19,37%	18,15%	17,77%	17,67%
12	Mercado	23,68%	21,60%	19,43%	18,20%	17,82%	17,73%
	Calibração	23,68%	21,61%	19,42%	18,20%	17,82%	17,73%
13	Mercado	23,88%	21,78%	19,61%	18,39%	18,04%	17,98%
	Calibração	23,88%	21,79%	19,60%	18,39%	18,04%	17,98%
14	Mercado	23,92%	21,82%	19,64%	18,42%	18,08%	18,02%
	Calibração	23,98%	21,91%	19,69%	18,44%	18,08%	18,02%
15	Mercado	24,03%	21,92%	19,74%	18,53%	18,20%	18,15%
	Calibração	24,03%	21,93%	19,73%	18,53%	18,20%	18,15%
17	Mercado	24,23%	22,09%	19,91%	18,70%	18,40%	18,36%
	Calibração	24,22%	22,10%	19,91%	18,70%	18,40%	18,36%
19	Mercado	24,43%	22,27%	20,10%	18,88%	18,59%	18,57%
	Calibração	24,41%	22,28%	20,11%	18,87%	18,59%	18,57%
21	Mercado	24,52%	22,36%	20,21%	18,96%	18,69%	18,67%
	Calibração	24,50%	22,37%	20,22%	18,96%	18,69%	18,67%
24	Mercado	24,63%	22,47%	20,36%	19,07%	18,80%	18,79%
	Calibração	24,60%	22,48%	20,38%	19,06%	18,80%	18,79%

Figura 7.10: Conjunto 3 (20/10/2009): comparação entre volatilidades implícitas obtidas na calibração do modelo de Heston utilizando transformada rápida de Fourier e volatilidades de mercado.

Prazo (meses)	Parâmetros de Heston				
	Volatilidade Inicial	θ	κ	ρ	ε
3	19,16%	0,0700	0,0100	0,5345	58,38%
5	19,51%	0,1089	0,0772	0,5043	50,82%
6	19,51%	0,1274	0,1055	0,4910	49,28%
7	19,51%	0,1061	0,1834	0,4800	49,00%
8	19,51%	0,0846	0,3165	0,4704	50,02%
9	19,51%	0,0748	0,4578	0,4599	51,96%
10	18,56%	0,0922	0,4826	0,4523	53,90%
11	17,11%	0,0886	0,7308	0,4472	60,58%
12	17,11%	0,0820	0,8344	0,4411	62,81%
13	17,11%	0,0651	1,4063	0,4187	77,11%
14	17,11%	0,0599	1,8022	0,4039	91,01%
15	17,11%	0,0617	1,6452	0,4012	85,46%
17	17,11%	0,0662	1,2648	0,3772	78,07%
19	17,11%	0,0697	0,9988	0,3514	72,04%
21	17,11%	0,0746	0,7805	0,3322	65,77%
24	17,11%	0,0984	0,3921	0,3065	52,37%

Figura 7.11: Conjunto 3 (20/10/2009): parâmetros obtidos nas calibrações do modelo de Heston utilizando transformada rápida de Fourier.

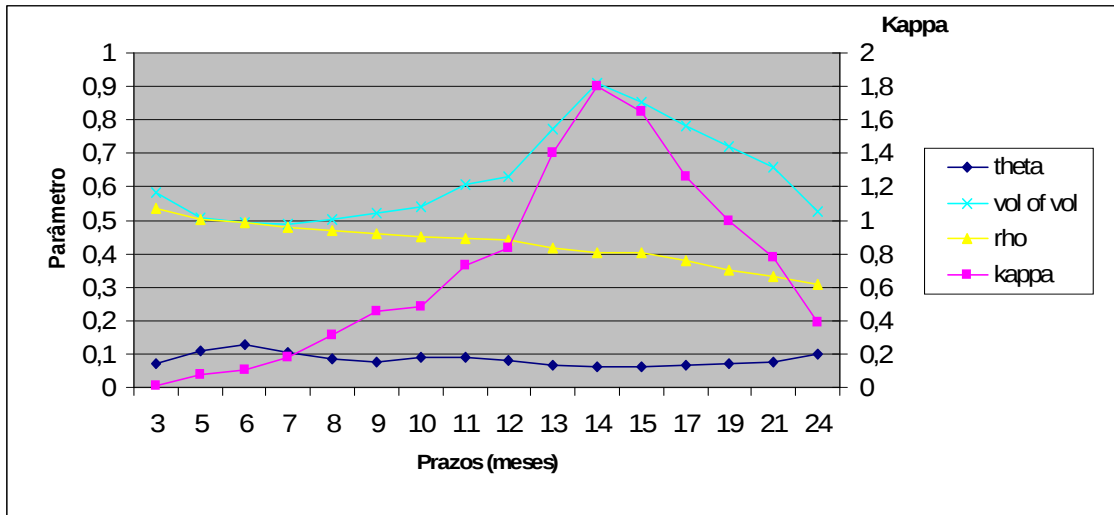


Figura 7.12: Conjunto 3 (20/10/2009): gráfico de evolução temporal dos parâmetros obtidos nas calibrações do modelo de Heston utilizando transformada rápida de Fourier.

7.4.2 Calibração Pelo Método de Expansão Assintótica de Apreçamento

Assim como no caso do método de Carr e Madan, para o método de expansão assintótica, as tabelas das figuras 7.13, 7.14 e 7.15 representam, respectivamente, tabelas com resultados referentes a preços (sobre os quais as calibrações foram feitas), volatilidades e parâmetros calibrados para o conjunto 1, de 20/10/2008. Já o gráfico da figura 7.16 apresenta a evolução dos parâmetros calibrados ao longo dos vários prazos calibrados, dispostos na tabela 7.15.

De forma análoga, as tabelas das figuras 7.17, 7.18, 7.19 e o gráfico da figura 7.20 são relativos ao conjunto de dados de 21/7/2009; enquanto as tabelas 7.21, 7.22, 7.23 e o gráfico 7.24 referem-se ao conjunto de dados de 20/10/2009.

Com respeito aos erros obtidos nas calibrações de preços, assim como no caso do procedimento de Carr e Madan, a comparação das tabelas 7.13, 7.17 e 7.21 mostra que o conjunto 1 de dados, referente a 20/10/2008, apresentou novamente os maiores valores, exceto nos casos de três e sete meses. Os menores valores ocorreram para o conjunto 2, de 21/7/2009 (exceto pelo ponto de três meses). Além dos fatos apontados na seção 7.4.1, apontamos aqui que o método de expansão assintótica pressupõe que a volatilidade da variância (ε) seja pequena, o que não acontece principalmente durante na crise de 2008 dos títulos *subprime*. Como consequência, os erros obtidos na calibração em média foram superiores ao método da seção 7.4.1.

Aqui também verificamos que os parâmetros calibrados variam com relação ao prazo de vencimento, conforme as tabelas das figuras 7.15, 7.19 e 7.23. Também notamos que a velocidade de reversão à média da variância (κ) acompanha a volatilidade da mesma (ε), tal como no caso da seção 7.4.1. Adicionalmente, a correlação (ρ) decresce com relação aos prazos, exceto para o primeiro conjunto, onde permanece em valores elevados.

Para o conjunto 1, de 20/10/2008, tal como nas calibrações da seção 7.4.1, a tabela da figura 7.15 mostra elevados valores de volatilidade da variância (ε) para este período de crise, variando de 48,03% à 231,50%. Neste caso, também obtivemos valores de correlação (ρ) próximos a um e variância de longo prazo (θ) próxima a zero. Os valores da velocidade de reversão à média (κ) também apresentaram-se elevados (partindo de 21,42 para 3 meses) no caso deste conjunto e, reproduzindo os resultados da seção 7.4.1, decrescem ao longo dos prazos, juntamente com aqueles da volatilidade da variância (ε). Novamente, neste conjunto, o valor mínimo da velocidade de reversão à média (κ), 2,1134, foi superior àqueles advindos dos demais conjuntos (vide tabelas das figuras 7.19 e 7.23).

O conjunto 2, de 21/7/2009, apresentou padrão semelhante de decrescimento para os parâmetros de volatilidade da variância (ε) e velocidade de reversão à média da variância (κ), segundo a tabela da figura 7.19 e o gráfico da figura 7.20; enquanto o conjunto 3, de 20/10/2009, apresentou um padrão semelhante àquele do seu análogo no processo de calibração da seção 7.4.1, ou seja, crescimento até 14 meses (vide tabela e gráfico das figuras 7.23 e 7.24, respectivamente).

Para os conjuntos 2 e 3 verificamos também valores menores de volatilidade da variância (ε) em comparação com os obtidos no conjunto 1. De fato, neste conjunto obtivemos média 84,12% e valores máximo e mínimo de 231,50% e 48,03%, respectivamente, ao passo que para o conjunto 2 obtivemos média de 41,91% e valores máximo e mínimo de 63,54% e 29,77%, respectivamente, enquanto no conjunto 3 a média foi de 48,15% e os valores máximo e mínimo foram de 57,41% e 34,51%. Conforme já mencionado, a velocidade de reversão à média (κ) para os conjuntos 2 e 3 apresentou valores menores que a do conjunto 1: este apresentou média de 5,3938 e valor máximo de 21,4216 e mínimo de 2,1134, ao passo que o conjunto 2 apresentou média de 0,1848, valor máximo de 0,2632 e mínimo de 0,1369 e o conjunto 3 média de 0,4823, valor máximo de 1,1297 e mínimo de 0,1105.

Tal como no caso da seção 7.4.1, a variância de longo prazo (θ) apresentou valores maiores para os conjuntos 2 e 3 em comparação com o conjunto 1 (valores próximos a zero). Também com relação ao análogo da seção 7.4.1, os valores relativos ao conjunto 2 foram mais elevados. No caso do conjunto 2, obtivemos média de 19,71%, máximo de 31,45% e mínimo de 11,60%; e no conjunto 3 média de 10,69%, máximo de 22,54% e mínimo de 6,94%.

A correlação (ρ), conforme já mencionado, permaneceu em valores elevados, próximos a 1, para o conjunto 1. Para os conjuntos 2 e 3, este parâmetro oscilou em torno de 0,40, apresentando o mesmo comportamento de queda que o da seção 7.4.1. Para o conjunto 2, de 21/7/2009, observamos média de 0,4252, máximo de 0,5107 e mínimo de 0,3640; enquanto que para o conjunto 3, de 20/10/2009, obtivemos média de 0,3892, máximo de 0,5396 e mínimo de 0,2570.

Conjunto 1: 20/10/2008

Prazo (meses)	Conjunto	Preços de Opções de Compra						Preços de Swaps de Variância		(Erro Quadrático) ^{0.5} x 1E5
		delta						VAR SWAP (d)	VAR SWAP (d+1)	
		25	35	50	65	75	85			
3	Mercado	56,58	80,52	122,61	170,83	205,09	253,82	0,10896	0,10779	613,95
	Calibração	56,10	81,25	122,18	169,86	205,70	251,74	0,10952	0,10901	
5	Mercado	61,87	86,05	130,64	175,78	209,79	256,65	0,07708	0,07665	1.003,89
	Calibração	61,13	87,44	128,78	175,96	210,45	253,56	0,07759	0,07711	
6	Mercado	64,21	88,94	134,31	179,72	212,56	258,28	0,06922	0,06889	1.013,89
	Calibração	63,37	90,54	132,85	180,07	213,75	255,22	0,06958	0,06907	
7	Mercado	66,52	94,41	138,77	186,42	219,77	264,88	0,06531	0,06518	675,85
	Calibração	66,68	93,19	138,48	186,96	221,39	262,66	0,06579	0,06536	
8	Mercado	68,65	98,44	143,08	192,45	226,60	271,45	0,06207	0,06191	1.162,77
	Calibração	69,27	95,65	143,03	193,08	228,59	270,23	0,06262	0,06226	
9	Mercado	70,68	101,56	147,33	197,72	232,30	277,23	0,05930	0,05919	2.226,80
	Calibração	68,86	96,95	147,56	200,99	238,43	281,34	0,05974	0,05944	
10	Mercado	72,78	104,78	152,09	203,66	239,04	284,53	0,05745	0,05737	1.547,96
	Calibração	73,83	100,88	151,16	204,42	241,90	284,80	0,05802	0,05774	
11	Mercado	74,58	107,46	155,82	208,60	243,71	288,76	0,05543	0,05532	1.735,34
	Calibração	75,83	103,06	154,46	208,99	247,10	290,09	0,05602	0,05577	
12	Mercado	76,31	110,02	159,39	212,89	248,77	293,84	0,05372	0,05367	1.901,90
	Calibração	77,70	105,12	157,59	213,34	252,28	295,70	0,05436	0,05414	
13	Mercado	78,23	112,91	163,72	217,65	255,99	302,81	0,05265	0,05259	2.017,73
	Calibração	79,69	107,56	161,41	218,82	259,13	304,16	0,05336	0,05315	
14	Mercado	80,00	115,56	167,72	222,03	262,49	311,12	0,05158	0,05152	2.146,68
	Calibração	81,53	109,79	164,87	223,84	265,34	311,90	0,05235	0,05216	
15	Mercado	81,63	117,98	171,30	226,13	268,08	318,15	0,05061	0,05056	2.273,33
	Calibração	83,25	111,81	167,98	228,34	270,80	318,57	0,05143	0,05125	
17	Mercado	84,48	122,23	177,35	233,39	277,17	329,10	0,04878	0,04873	2.506,83
	Calibração	86,35	115,26	173,30	236,00	279,93	329,33	0,04965	0,04950	
19	Mercado	87,15	126,17	182,97	240,26	285,66	339,27	0,04698	0,04693	2.740,58
	Calibração	89,22	118,41	178,06	242,94	288,22	339,13	0,04795	0,04781	
21	Mercado	89,42	129,49	187,77	246,07	292,77	347,67	0,04520	0,04518	2.975,82
	Calibração	91,69	121,01	181,88	248,63	295,00	347,08	0,04627	0,04615	
24	Mercado	91,74	132,76	192,46	251,47	299,21	354,81	0,04264	0,04259	3.291,05
	Calibração	94,31	123,44	185,11	253,74	301,00	353,80	0,04381	0,04370	

Figura 7.13: Conjunto 1 (20/10/2008): comparação entre preços obtidos na calibração do modelo de Heston utilizando expansão assintótica e preços de mercado.

Prazo (meses)	Conjunto	Volatilidades de Opções de Compra					
		delta					
		25	35	50	65	75	85
3	Mercado	40,55%	36,56%	33,03%	29,76%	27,06%	25,08%
	Calibração	40,63%	36,45%	33,05%	29,84%	27,02%	25,13%
5	Mercado	35,79%	31,48%	28,42%	24,71%	22,40%	20,64%
	Calibração	35,91%	31,27%	28,50%	24,69%	22,36%	20,73%
6	Mercado	34,60%	30,31%	27,22%	23,56%	21,18%	19,44%
	Calibração	34,73%	30,06%	27,29%	23,53%	21,12%	19,52%
7	Mercado	33,89%	30,52%	26,62%	23,18%	20,80%	18,97%
	Calibração	33,87%	30,67%	26,64%	23,14%	20,70%	19,03%
8	Mercado	33,36%	30,41%	26,21%	22,89%	20,53%	18,66%
	Calibração	33,30%	30,68%	26,22%	22,85%	20,41%	18,69%
9	Mercado	33,00%	30,16%	25,96%	22,64%	20,29%	18,41%
	Calibração	33,18%	30,57%	25,95%	22,43%	19,92%	18,31%
10	Mercado	32,83%	30,09%	25,94%	22,59%	20,25%	18,36%
	Calibração	32,73%	30,41%	26,01%	22,54%	20,07%	18,35%
11	Mercado	32,64%	29,95%	25,80%	22,49%	20,08%	18,15%
	Calibração	32,52%	30,29%	25,92%	22,47%	19,85%	18,12%
12	Mercado	32,53%	29,89%	25,74%	22,40%	20,03%	18,08%
	Calibração	32,41%	30,25%	25,90%	22,38%	19,80%	18,04%
13	Mercado	32,58%	29,98%	25,86%	22,41%	20,20%	18,31%
	Calibração	32,45%	30,35%	26,06%	22,34%	20,03%	18,27%
14	Mercado	32,62%	30,07%	25,98%	22,42%	20,35%	18,52%
	Calibração	32,49%	30,45%	26,22%	22,32%	20,22%	18,50%
15	Mercado	32,67%	30,15%	26,07%	22,44%	20,47%	18,69%
	Calibração	32,54%	30,54%	26,35%	22,33%	20,35%	18,67%
17	Mercado	32,79%	30,32%	26,24%	22,54%	20,64%	18,93%
	Calibração	32,65%	30,74%	26,58%	22,41%	20,54%	18,92%
19	Mercado	32,92%	30,49%	26,39%	22,65%	20,80%	19,14%
	Calibração	32,76%	30,93%	26,81%	22,52%	20,71%	19,14%
21	Mercado	33,05%	30,64%	26,55%	22,76%	20,96%	19,34%
	Calibração	32,89%	31,11%	27,05%	22,64%	20,89%	19,35%
24	Mercado	33,26%	30,86%	26,78%	22,93%	21,19%	19,62%
	Calibração	33,09%	31,36%	27,40%	22,84%	21,14%	19,65%

Figura 7.14: Conjunto 1 (20/10/2008): comparação entre volatilidades implícitas obtidas na calibração do modelo de Heston utilizando expansão assintótica e volatilidades de mercado.

Prazo (meses)	Parâmetros de Heston				
	Volatilidade Inicial	θ	κ	ρ	ε
3	49,70%	0,0827	21,4216	0,9998	231,50%
5	49,70%	0,0295	9,7679	0,9908	134,07%
6	49,70%	0,0000	6,3700	0,9650	100,04%
7	49,70%	-	5,7503	0,9999	91,39%
8	49,70%	-	5,2547	0,9999	85,74%
9	49,70%	0,0038	5,0964	0,9999	77,19%
10	49,70%	-	4,4597	0,9999	76,77%
11	49,70%	-	4,1626	0,9999	73,54%
12	49,70%	-	3,8949	0,9999	70,58%
13	49,70%	-	3,6236	0,9999	67,26%
14	49,70%	-	3,3906	0,9999	64,36%
15	49,70%	-	3,1885	0,9999	61,87%
17	49,70%	-	2,8523	0,9999	57,72%
19	49,70%	-	2,5855	0,9999	54,34%
21	49,70%	-	2,3691	0,9999	51,51%
24	49,70%	-	2,1134	0,9999	48,03%

Figura 7.15: Conjunto 1 (20/10/2008): parâmetros obtidos nas calibrações do modelo de Heston utilizando expansão assintótica.

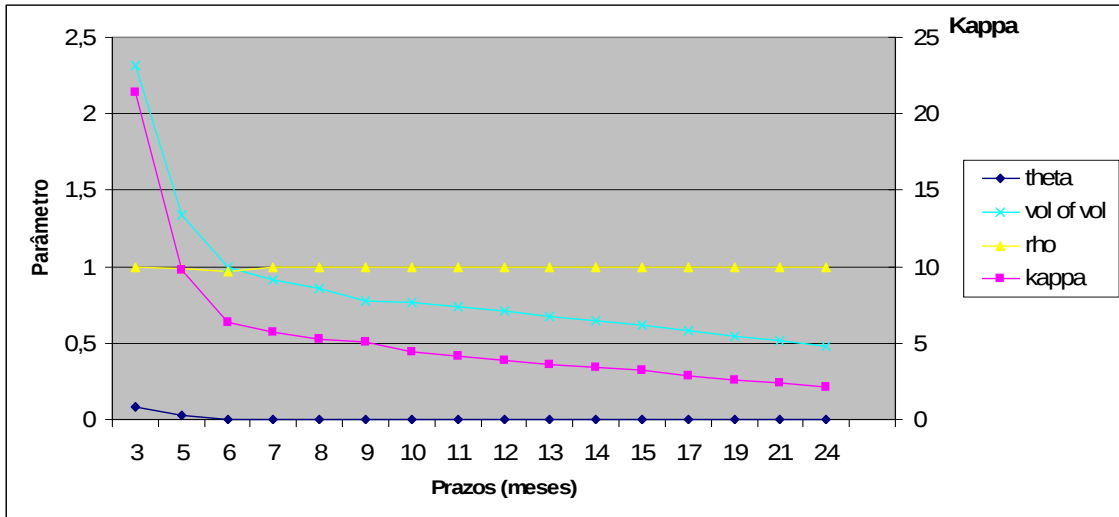


Figura 7.16: Conjunto 1 (20/10/2008): gráfico de evolução temporal dos parâmetros obtidos nas calibrações do modelo de Heston utilizando expansão assintótica.

Conjunto 2: 21/07/2009

Prazo (meses)	Conjunto	Preços de Opções de Compra						Preços de Swaps de Variância		(Erro Quadrático) ^{0.5} x 1E5
		delta						VAR SWAP (d)	VAR SWAP (d+1)	
		25	35	50	65	75	85			
3	Mercado	29,38	42,33	65,57	95,55	122,89	164,09	0,03859	0,03859	873,27
	Calibração	29,05	42,51	65,98	95,51	121,76	161,20	0,03868	0,03880	
5	Mercado	37,95	54,44	83,95	121,59	155,73	207,16	0,03965	0,03965	677,35
	Calibração	37,67	54,54	84,30	121,78	154,77	203,99	0,03972	0,03980	
6	Mercado	41,39	59,29	91,31	132,06	168,86	224,12	0,03982	0,03982	593,82
	Calibração	41,15	59,34	91,63	132,35	168,04	220,98	0,03988	0,03995	
7	Mercado	43,46	62,21	95,72	138,31	176,70	234,14	0,03988	0,03988	542,56
	Calibração	43,26	62,22	96,02	138,67	175,98	231,07	0,03993	0,03999	
8	Mercado	47,23	67,51	103,75	149,67	190,82	251,96	0,03986	0,03986	454,98
	Calibração	47,09	67,46	103,99	150,15	190,34	249,10	0,03989	0,03994	
9	Mercado	49,76	71,08	109,16	157,31	200,27	263,70	0,03977	0,03977	401,62
	Calibração	49,67	70,99	109,35	157,87	199,96	261,03	0,03979	0,03983	
10	Mercado	52,06	74,32	114,03	164,17	208,66	273,97	0,03963	0,03963	359,46
	Calibração	52,01	74,17	114,18	164,81	208,55	271,52	0,03964	0,03967	
11	Mercado	54,19	77,35	118,60	170,54	216,42	283,41	0,03945	0,03945	332,54
	Calibração	54,20	77,15	118,70	171,29	216,54	281,20	0,03945	0,03948	
12	Mercado	56,16	80,16	122,80	176,33	223,45	291,80	0,03926	0,03926	325,64
	Calibração	56,23	79,89	122,85	177,20	223,78	289,83	0,03925	0,03927	
13	Mercado	58,01	82,74	126,69	181,63	229,92	299,48	0,03904	0,03904	329,98
	Calibração	58,12	82,43	126,67	182,63	230,44	297,74	0,03902	0,03904	
14	Mercado	58,60	83,57	127,93	183,33	231,98	301,93	0,03896	0,03896	333,30
	Calibração	58,72	83,25	127,89	184,36	232,56	300,25	0,03893	0,03896	
15	Mercado	61,35	87,42	133,69	191,14	241,44	313,04	0,03849	0,03849	356,19
	Calibração	61,53	87,04	133,54	192,36	242,28	311,65	0,03846	0,03847	
17	Mercado	64,24	91,46	139,70	199,26	251,14	324,21	0,03787	0,03787	396,17
	Calibração	64,48	91,01	139,44	200,66	252,31	323,20	0,03782	0,03784	
19	Mercado	66,80	95,05	145,01	206,32	259,50	333,67	0,03724	0,03724	456,16
	Calibração	67,12	94,52	144,63	207,95	261,05	333,10	0,03718	0,03719	
21	Mercado	69,01	98,13	149,52	212,22	266,35	341,14	0,03664	0,03664	526,56
	Calibração	69,41	97,51	149,01	214,08	268,30	341,04	0,03657	0,03657	
24	Mercado	71,65	101,79	154,77	218,87	273,69	348,44	0,03574	0,03574	652,94
	Calibração	72,17	101,01	154,05	221,05	276,31	349,19	0,03565	0,03565	

Figura 7.17: Conjunto 2 (21/07/2009): comparação entre preços obtidos na calibração do modelo de Heston utilizando expansão assintótica e preços de mercado.

Prazo (meses)	Conjunto	Volatilidades de Opções de Compra					
		delta					
		25	35	50	65	75	85
3	Mercado	21,97%	20,05%	18,40%	17,32%	16,89%	16,86%
		Calibração	22,02%	20,03%	18,38%	17,32%	16,90%
5	Mercado	22,49%	20,44%	18,69%	17,51%	17,04%	17,01%
		Calibração	22,53%	20,43%	18,67%	17,51%	17,05%
6	Mercado	22,63%	20,54%	18,76%	17,57%	17,08%	17,05%
		Calibração	22,66%	20,54%	18,75%	17,56%	17,09%
7	Mercado	22,71%	20,60%	18,80%	17,60%	17,11%	17,07%
		Calibração	22,74%	20,60%	18,79%	17,59%	17,11%
8	Mercado	22,83%	20,68%	18,87%	17,65%	17,15%	17,08%
		Calibração	22,85%	20,69%	18,86%	17,64%	17,15%
9	Mercado	22,91%	20,74%	18,91%	17,69%	17,18%	17,09%
		Calibração	22,92%	20,75%	18,91%	17,68%	17,18%
10	Mercado	22,98%	20,80%	18,96%	17,73%	17,20%	17,10%
		Calibração	22,99%	20,81%	18,95%	17,72%	17,20%
11	Mercado	23,05%	20,85%	19,01%	17,77%	17,23%	17,11%
		Calibração	23,04%	20,87%	19,00%	17,76%	17,23%
12	Mercado	23,11%	20,92%	19,06%	17,81%	17,26%	17,12%
		Calibração	23,11%	20,94%	19,06%	17,80%	17,26%
13	Mercado	23,19%	20,97%	19,11%	17,84%	17,29%	17,13%
		Calibração	23,18%	20,99%	19,11%	17,83%	17,29%
14	Mercado	23,21%	20,99%	19,12%	17,85%	17,30%	17,14%
		Calibração	23,20%	21,01%	19,13%	17,84%	17,29%
15	Mercado	23,31%	21,07%	19,19%	17,90%	17,34%	17,16%
		Calibração	23,29%	21,09%	19,20%	17,88%	17,33%
17	Mercado	23,41%	21,15%	19,26%	17,95%	17,38%	17,18%
		Calibração	23,38%	21,18%	19,27%	17,93%	17,37%
19	Mercado	23,51%	21,23%	19,34%	18,00%	17,43%	17,21%
		Calibração	23,48%	21,27%	19,35%	17,98%	17,42%
21	Mercado	23,61%	21,32%	19,41%	18,06%	17,47%	17,24%
		Calibração	23,58%	21,36%	19,43%	18,03%	17,46%
24	Mercado	23,77%	21,46%	19,53%	18,15%	17,55%	17,30%
		Calibração	23,72%	21,50%	19,55%	18,11%	17,53%

Figura 7.18: Conjunto 2 (21/07/2009): comparação entre volatilidades implícitas obtidas na calibração do modelo de Heston utilizando expansão assintótica e volatilidades de mercado.

Prazo (meses)	Parâmetros de Heston				
	Volatilidade Inicial	θ	κ	ρ	ε
3	17,41%	0,3145	0,2632	0,5107	63,54%
5	17,41%	0,2474	0,2460	0,4815	54,39%
6	17,41%	0,2255	0,2383	0,4678	51,23%
7	17,41%	0,2145	0,2332	0,4583	49,57%
8	17,41%	0,2317	0,1824	0,4446	46,09%
9	17,41%	0,2273	0,1686	0,4355	44,02%
10	17,41%	0,2090	0,1702	0,4274	42,33%
11	17,41%	0,2157	0,1502	0,4211	40,51%
12	17,41%	0,2184	0,1369	0,4156	38,94%
13	17,41%	0,1895	0,1521	0,4097	37,94%
14	17,41%	0,1994	0,1394	0,4084	37,39%
15	17,41%	0,1668	0,1562	0,4017	35,80%
17	17,41%	0,1386	0,1771	0,3939	34,26%
19	17,41%	0,1210	0,1935	0,3853	33,06%
21	17,41%	0,1160	0,1877	0,3773	31,72%
24	17,41%	0,1182	0,1618	0,3640	29,77%

Figura 7.19: Conjunto 2 (21/07/2009): parâmetros obtidos nas calibrações do modelo de Heston utilizando expansão assintótica.

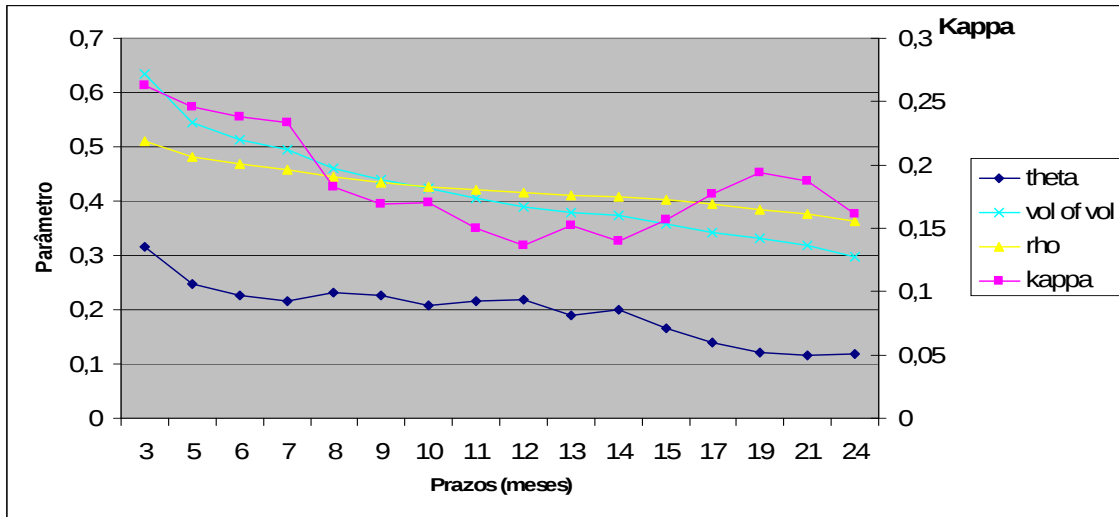


Figura 7.20: Conjunto 2 (21/07/2009): gráfico de evolução temporal dos parâmetros obtidos nas calibrações do modelo de Heston utilizando expansão assintótica.

Conjunto 3: 20/10/2009

Prazo (meses)	Conjunto	Preços de Opções de Compra						Preços de Swaps de Variância		(Erro Quadrático) ^{0.5} x 1E5
		delta						VAR SWAP (d)	VAR SWAP (d+1)	
		25	35	50	65	75	85			
3	Mercado	26,23	37,96	58,06	84,36	108,61	143,75	0,03589	0,03592	950,61
	Calibração	26,00	37,88	58,75	84,49	107,43	141,08	0,03604	0,03604	
5	Mercado	34,21	49,41	75,26	109,03	140,21	185,57	0,03778	0,03782	831,34
	Calibração	34,06	49,12	76,09	109,42	139,03	182,47	0,03790	0,03790	
6	Mercado	37,63	54,30	82,61	119,51	153,60	203,09	0,03867	0,03872	773,29
	Calibração	37,54	53,89	83,46	120,07	152,53	200,00	0,03878	0,03877	
7	Mercado	40,77	58,80	89,35	129,10	165,76	218,83	0,03955	0,03958	733,84
	Calibração	40,76	58,27	90,23	129,83	164,86	215,85	0,03962	0,03962	
8	Mercado	43,67	62,93	95,52	137,90	176,91	233,18	0,04027	0,04031	708,23
	Calibração	43,74	62,29	96,41	138,79	176,18	230,36	0,04031	0,04033	
9	Mercado	46,37	66,77	101,27	146,08	187,25	246,43	0,04094	0,04097	692,55
	Calibração	46,52	66,00	102,14	147,14	186,75	243,86	0,04095	0,04098	
10	Mercado	48,84	70,26	106,52	153,53	196,68	258,46	0,04146	0,04148	698,12
	Calibração	49,07	69,38	107,37	154,78	196,43	256,19	0,04144	0,04148	
11	Mercado	51,06	73,44	111,29	160,32	205,27	269,45	0,04178	0,04179	719,35
	Calibração	51,37	72,43	112,12	161,75	205,28	267,50	0,04173	0,04177	
12	Mercado	53,09	76,35	115,66	166,60	213,29	279,75	0,04187	0,04188	743,92
	Calibração	53,46	75,24	116,50	168,17	213,44	277,94	0,04182	0,04185	
13	Mercado	54,97	79,01	119,71	172,39	220,70	289,11	0,04225	0,04226	785,38
	Calibração	55,42	77,78	120,50	174,18	221,18	287,80	0,04218	0,04220	
14	Mercado	56,72	81,50	123,48	177,74	227,53	297,65	0,04230	0,04231	803,64
	Calibração	57,21	80,19	124,25	179,67	228,12	296,52	0,04222	0,04224	
15	Mercado	58,36	83,83	127,00	182,72	233,84	305,50	0,04245	0,04245	844,61
	Calibração	58,92	82,42	127,74	184,84	234,69	304,73	0,04235	0,04237	
17	Mercado	60,10	86,30	130,71	187,90	240,31	313,35	0,04250	0,04250	899,39
	Calibração	60,74	84,77	131,40	190,24	241,47	313,02	0,04239	0,04241	
19	Mercado	63,67	91,36	138,34	198,34	253,16	328,64	0,04216	0,04215	1.002,42
	Calibração	64,44	89,60	138,87	201,15	254,95	329,10	0,04201	0,04203	
21	Mercado	65,80	94,40	142,99	204,51	260,66	337,37	0,04173	0,04173	1.085,32
	Calibração	66,67	92,50	143,33	207,71	262,96	338,46	0,04158	0,04159	
24	Mercado	68,49	98,22	148,82	212,06	269,59	347,42	0,04101	0,04100	1.214,74
	Calibração	69,48	96,11	148,84	215,81	272,68	349,45	0,04083	0,04084	

Figura 7.21: Conjunto 3 (20/10/2009): comparação entre preços obtidos na calibração do modelo de Heston utilizando expansão assintótica e preços de mercado.

Prazo (meses)	Conjunto	Volatilidades de Opções de Compra					
		delta					
		25	35	50	65	75	85
3	Mercado	21,34%	19,57%	17,71%	16,62%	16,22%	16,02%
	Calibração	21,39%	19,59%	17,67%	16,61%	16,23%	16,03%
5	Mercado	22,05%	20,19%	18,20%	17,06%	16,66%	16,53%
	Calibração	22,08%	20,21%	18,16%	17,05%	16,67%	16,53%
6	Mercado	22,38%	20,47%	18,45%	17,27%	16,88%	16,76%
	Calibração	22,39%	20,51%	18,40%	17,26%	16,89%	16,76%
7	Mercado	22,70%	20,76%	18,69%	17,49%	17,10%	16,98%
	Calibração	22,70%	20,80%	18,64%	17,48%	17,10%	16,98%
8	Mercado	22,98%	21,00%	18,89%	17,68%	17,29%	17,17%
	Calibração	22,97%	21,05%	18,85%	17,67%	17,29%	17,17%
9	Mercado	23,25%	21,22%	19,09%	17,87%	17,47%	17,36%
	Calibração	23,23%	21,29%	19,05%	17,85%	17,47%	17,36%
10	Mercado	23,47%	21,41%	19,26%	18,03%	17,63%	17,53%
	Calibração	23,44%	21,48%	19,22%	18,01%	17,64%	17,53%
11	Mercado	23,62%	21,55%	19,38%	18,15%	17,77%	17,67%
	Calibração	23,59%	21,63%	19,35%	18,13%	17,77%	17,67%
12	Mercado	23,75%	21,67%	19,49%	18,27%	17,90%	17,82%
	Calibração	23,71%	21,75%	19,46%	18,25%	17,90%	17,82%
13	Mercado	23,88%	21,78%	19,61%	18,39%	18,04%	17,98%
	Calibração	23,84%	21,87%	19,58%	18,37%	18,04%	17,97%
14	Mercado	24,00%	21,89%	19,71%	18,50%	18,17%	18,11%
	Calibração	23,95%	21,98%	19,68%	18,48%	18,16%	18,11%
15	Mercado	24,11%	21,99%	19,81%	18,60%	18,28%	18,24%
	Calibração	24,06%	22,08%	19,78%	18,57%	18,28%	18,24%
17	Mercado	24,23%	22,09%	19,91%	18,70%	18,40%	18,36%
	Calibração	24,17%	22,19%	19,89%	18,68%	18,39%	18,36%
19	Mercado	24,43%	22,27%	20,10%	18,88%	18,59%	18,57%
	Calibração	24,35%	22,38%	20,08%	18,85%	18,59%	18,57%
21	Mercado	24,52%	22,36%	20,21%	18,96%	18,69%	18,67%
	Calibração	24,44%	22,48%	20,20%	18,93%	18,68%	18,67%
24	Mercado	24,63%	22,47%	20,36%	19,07%	18,80%	18,79%
	Calibração	24,54%	22,59%	20,36%	19,03%	18,80%	18,79%

Figura 7.22: Conjunto 3 (20/10/2009): comparação entre volatilidades implícitas obtidas na calibração do modelo de Heston utilizando expansão assintótica e volatilidades de mercado.

Prazo (meses)	Parâmetros de Heston				
	Volatilidade Inicial	θ	κ	ρ	ε
3	18,96%	0,0900	0,1199	0,5396	57,41%
5	19,47%	0,0900	0,1200	0,4980	48,94%
6	19,68%	0,0996	0,1105	0,4783	46,50%
7	19,40%	0,1164	0,1769	0,4628	45,72%
8	19,17%	0,0981	0,3084	0,4467	45,99%
9	18,41%	0,0991	0,4449	0,4307	47,34%
10	17,25%	0,1164	0,4662	0,4159	48,06%
11	17,11%	0,0858	0,7739	0,3956	51,59%
12	17,11%	0,0809	0,8308	0,3816	51,78%
13	17,11%	0,0716	1,0797	0,3563	56,01%
14	17,11%	0,0694	1,1297	0,3437	56,70%
15	17,11%	0,0766	0,8702	0,3306	52,50%
17	17,11%	0,0871	0,6402	0,3170	48,37%
19	17,11%	0,1110	0,3728	0,2938	42,18%
21	17,11%	0,1935	0,1559	0,2801	36,87%
24	17,11%	0,2255	0,1160	0,2570	34,51%

Figura 7.23: Conjunto 3 (20/10/2009): parâmetros obtidos nas calibrações do modelo de Heston utilizando expansão assintótica.

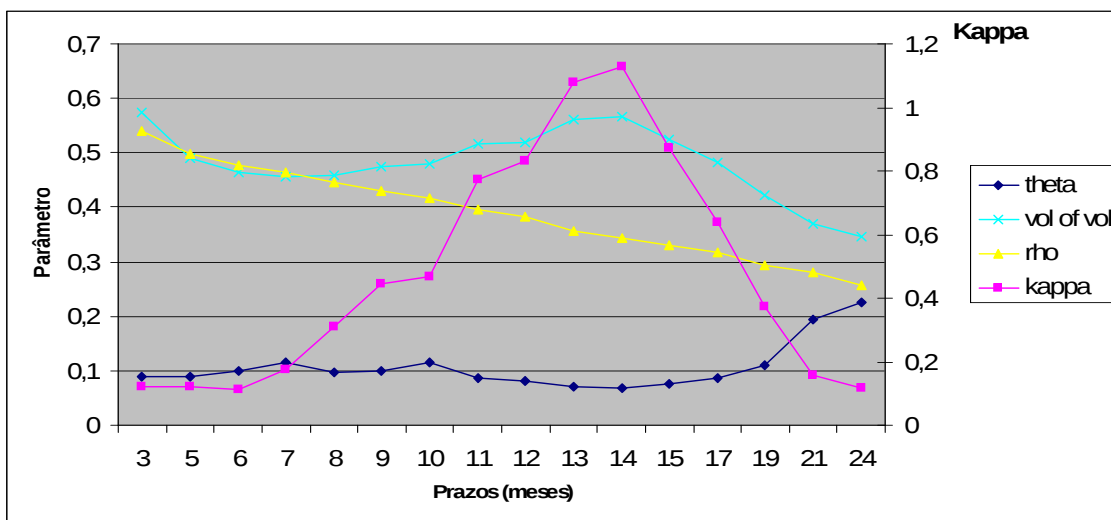


Figura 7.24: Conjunto 3 (20/10/2009): gráfico de evolução temporal dos parâmetros obtidos nas calibrações do modelo de Heston utilizando expansão assintótica.

7.4.3 Gráficos de Superfície de Volatilidade Calibrados

Nesta seção apresentamos gráficos da superfície de volatilidade comparativos entre dados de mercado, calibração pelo apreçamento Carr e Madan e calibração pelo apreçamento assintótico. Para os conjuntos 20/10/2008, 21/07/2009 e 20/10/2009, os gráficos reproduzem as tabelas de volatilidade das duas seções anteriores para 3 meses, 6 meses, 9 meses, 12 meses, 19 meses e 24 meses.

Conjunto 20/10/2008

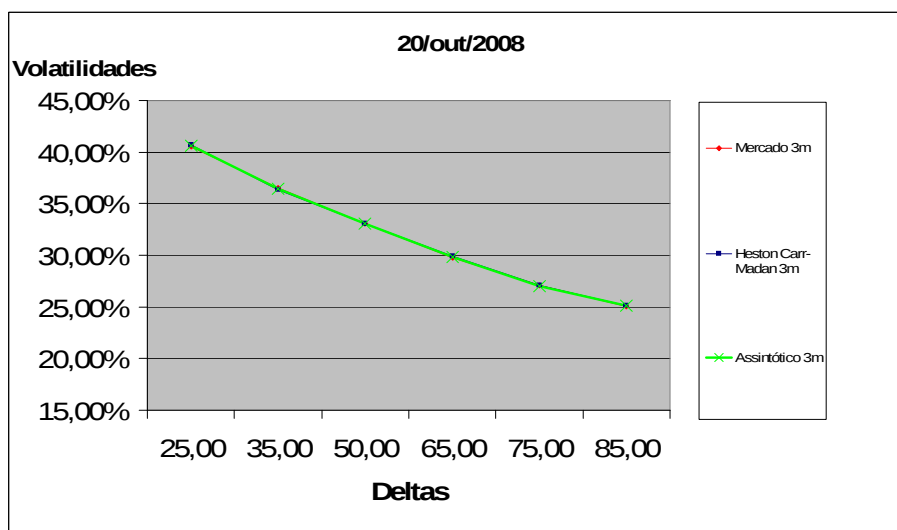


Figura 7.25: Conjunto 1 (20/10/2008): comparação entre *smile* (i) de mercado, (ii) calibrado por transformada rápida de Fourier e (iii) calibrado por expansão assintótica para 3 meses.

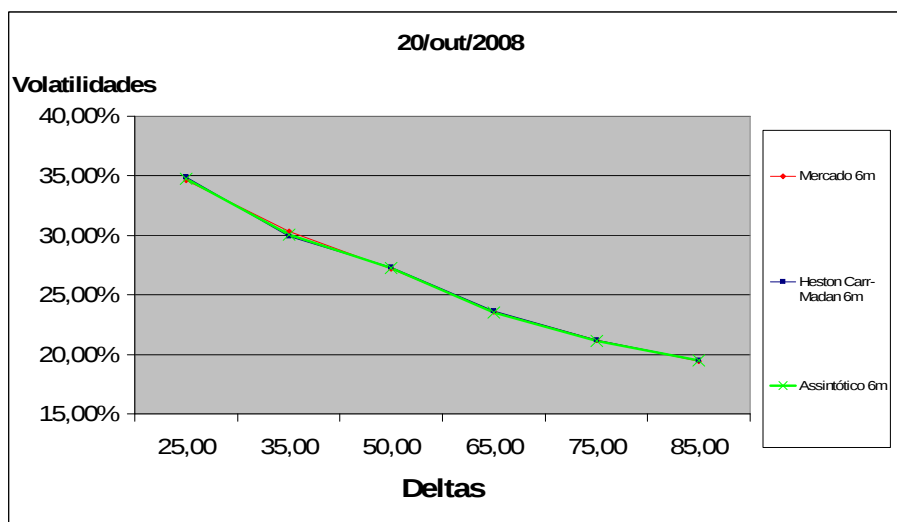


Figura 7.26: Conjunto 1 (20/10/2008): comparação entre *smile* (i) de mercado, (ii) calibrado por transformada rápida de Fourier e (iii) calibrado por expansão assintótica para 6 meses.

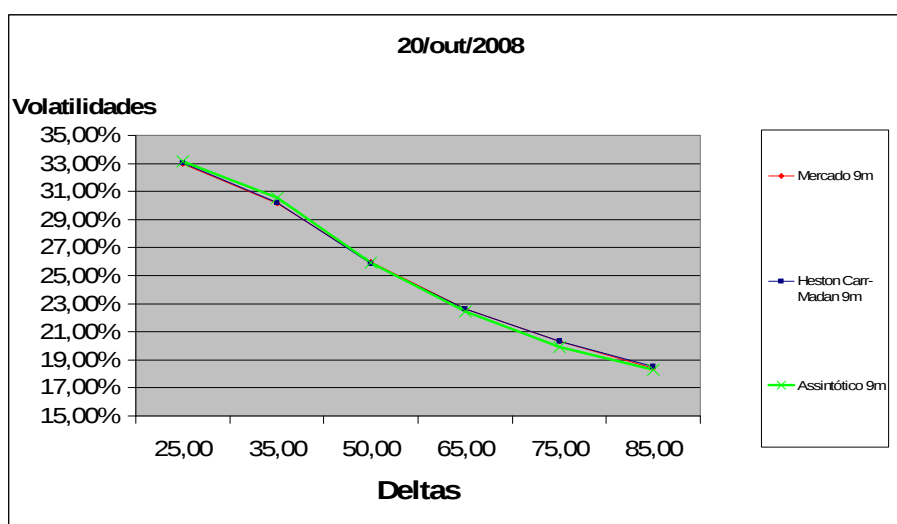


Figura 7.27: Conjunto 1 (20/10/2008): comparação entre *smile* (i) de mercado, (ii) calibrado por transformada rápida de Fourier e (iii) calibrado por expansão assintótica para 9 meses.

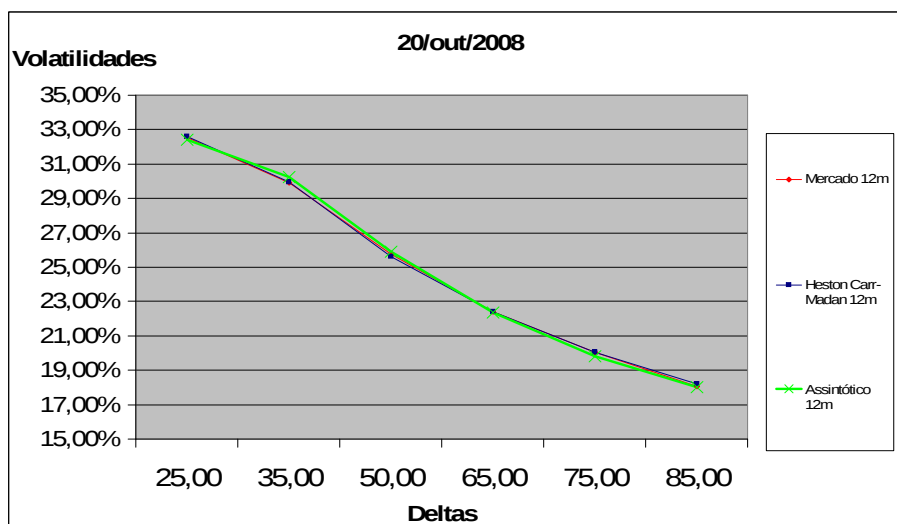


Figura 7.28: Conjunto 1 (20/10/2008): comparação entre *smile* (i) de mercado, (ii) calibrado por transformada rápida de Fourier e (iii) calibrado por expansão assintótica para 12 meses.

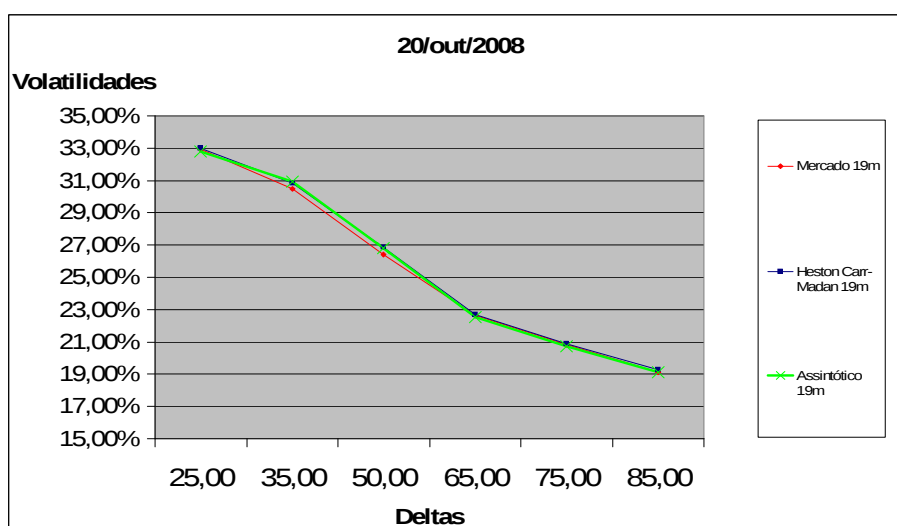


Figura 7.29: Conjunto 1 (20/10/2008): comparação entre *smile* (i) de mercado, (ii) calibrado por transformada rápida de Fourier e (iii) calibrado por expansão assintótica para 19 meses.

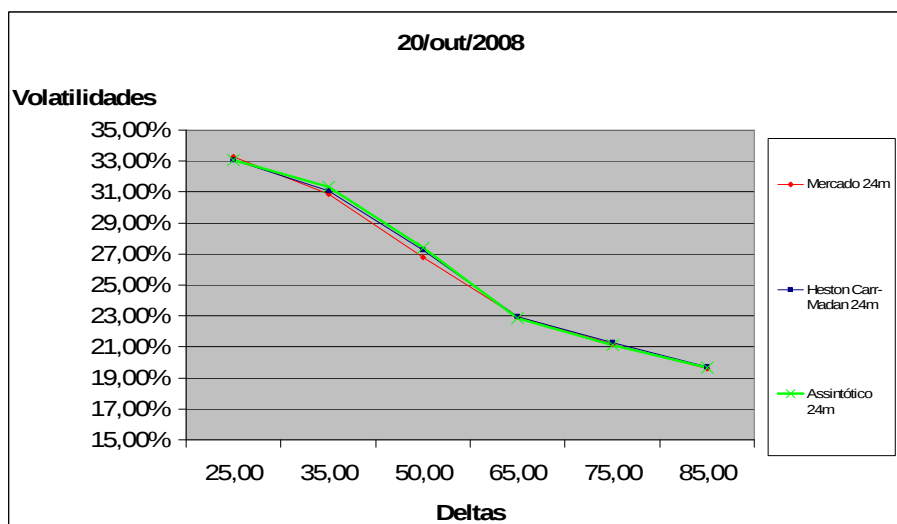


Figura 7.30: Conjunto 1 (20/10/2008): comparação entre *smile* (i) de mercado, (ii) calibrado por transformada rápida de Fourier e (iii) calibrado por expansão assintótica para 24 meses.

Conjunto 21/07/2009

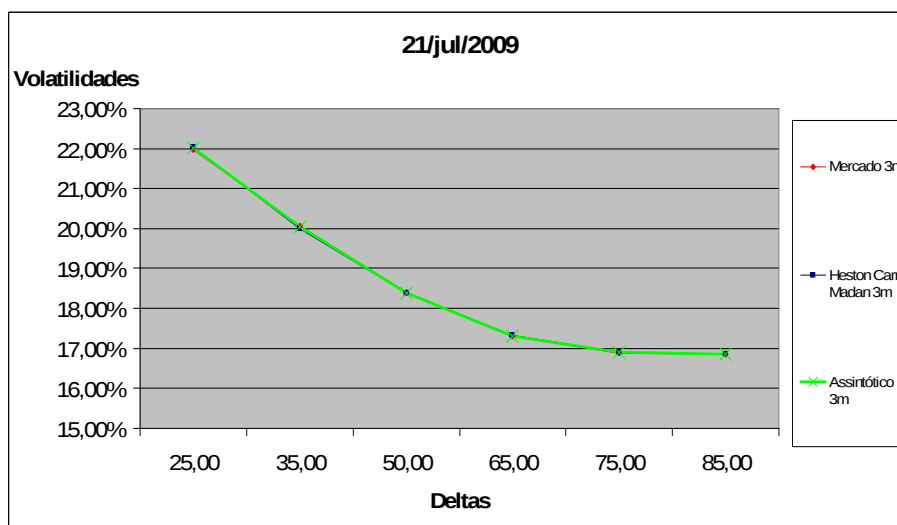


Figura 7.31: Conjunto 2 (21/07/2009): comparação entre *smile* (i) de mercado, (ii) calibrado por transformada rápida de Fourier e (iii) calibrado por expansão assintótica para 3 meses.

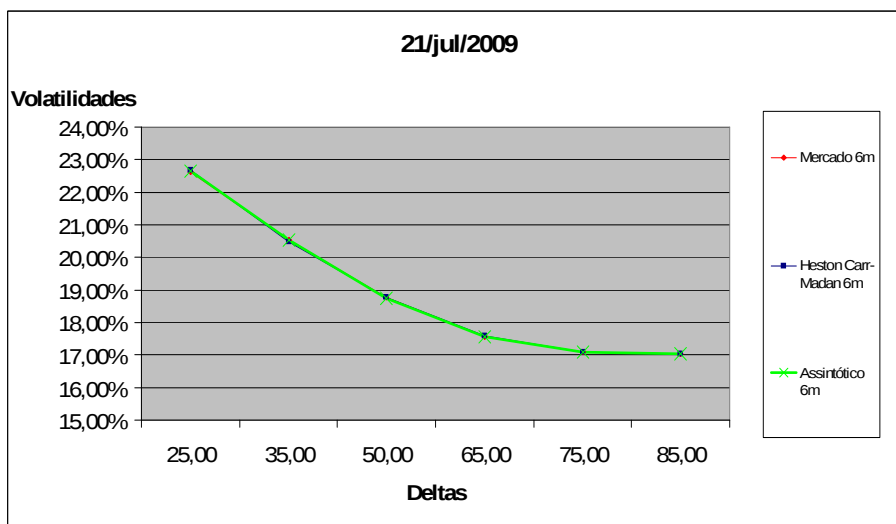


Figura 7.32: Conjunto 2 (21/07/2009): comparação entre *smile* (i) de mercado, (ii) calibrado por transformada rápida de Fourier e (iii) calibrado por expansão assintótica para 6 meses.

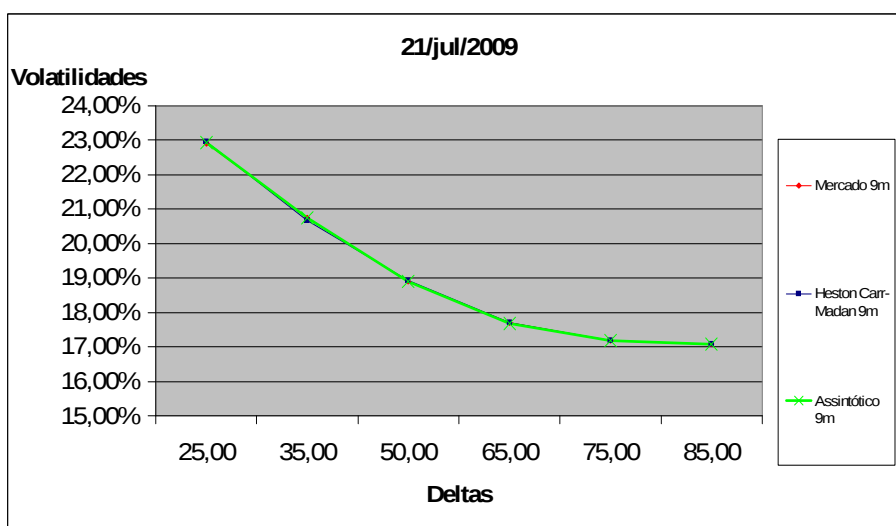


Figura 7.33: Conjunto 2 (21/07/2009): comparação entre *smile* (i) de mercado, (ii) calibrado por transformada rápida de Fourier e (iii) calibrado por expansão assintótica para 9 meses.

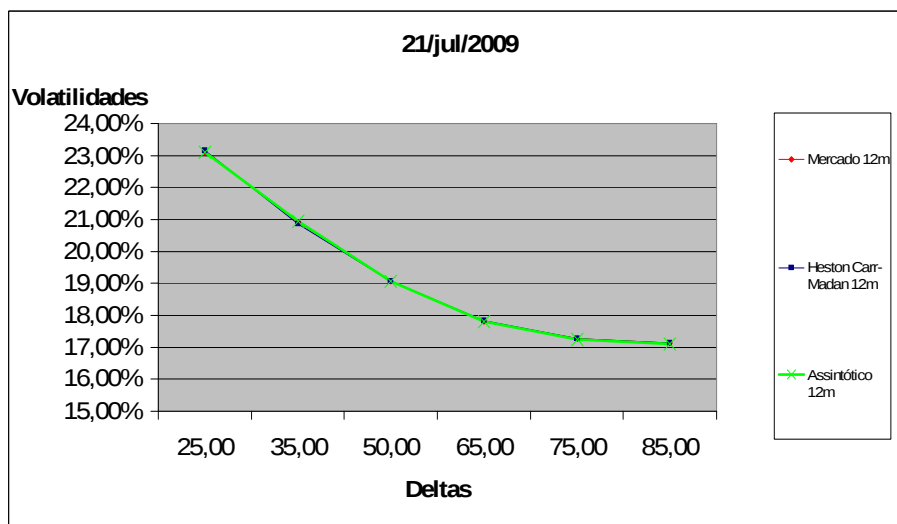


Figura 7.34: Conjunto 2 (21/07/2009): comparação entre *smile* (i) de mercado, (ii) calibrado por transformada rápida de Fourier e (iii) calibrado por expansão assintótica para 12 meses.

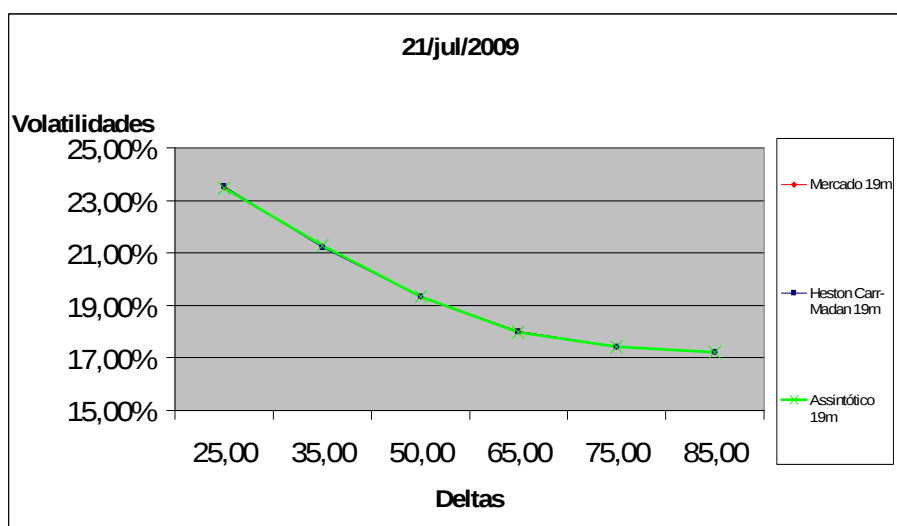


Figura 7.35: Conjunto 2 (21/07/2009): comparação entre *smile* (i) de mercado, (ii) calibrado por transformada rápida de Fourier e (iii) calibrado por expansão assintótica para 19 meses.

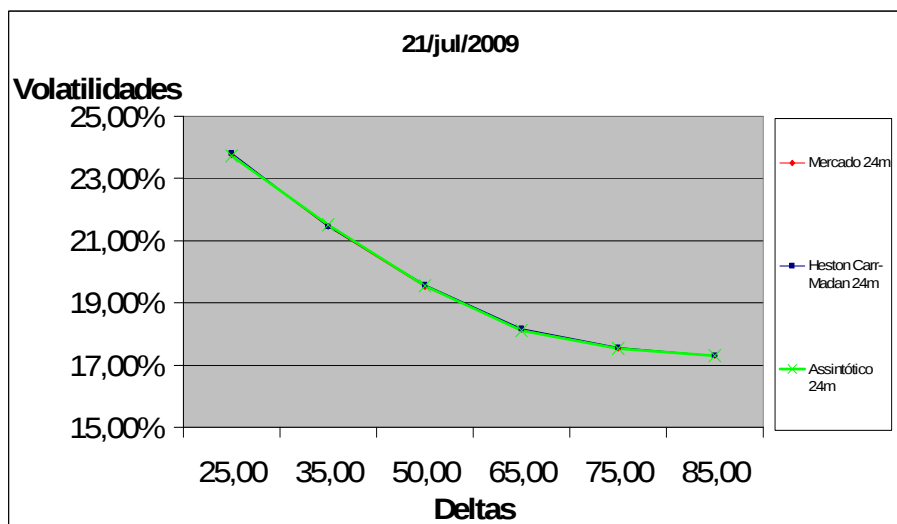


Figura 7.36: Conjunto 2 (21/07/2009): comparação entre *smile* (i) de mercado, (ii) calibrado por transformada rápida de Fourier e (iii) calibrado por expansão assintótica para 24 meses.

Conjunto 20/10/2009

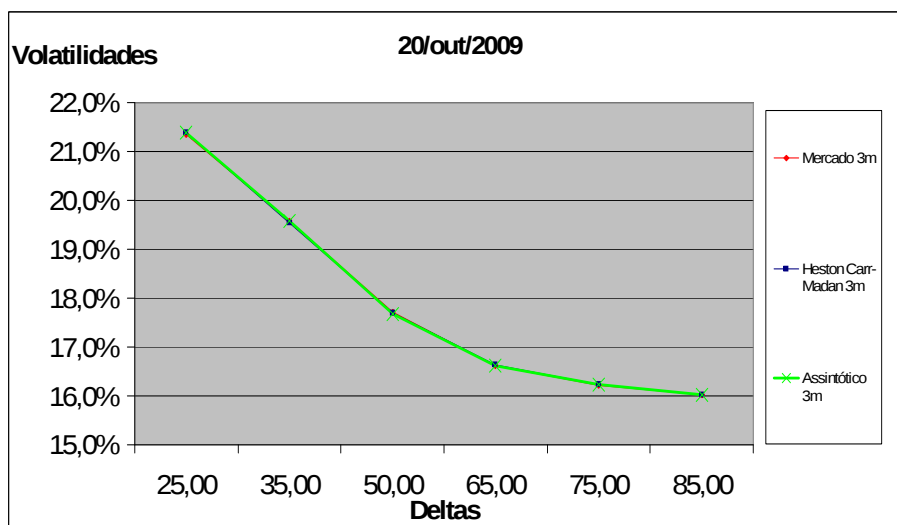


Figura 7.37: Conjunto 3 (20/10/2009): comparação entre *smile* (i) de mercado, (ii) calibrado por transformada rápida de Fourier e (iii) calibrado por expansão assintótica para 3 meses.

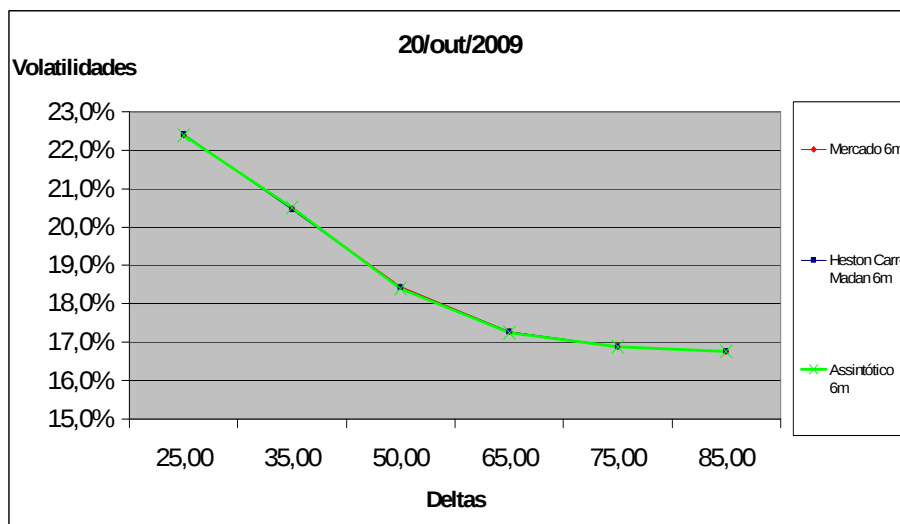


Figura 7.38: Conjunto 3 (20/10/2009): comparação entre *smile* (i) de mercado, (ii) calibrado por transformada rápida de Fourier e (iii) calibrado por expansão assintótica para 6 meses.

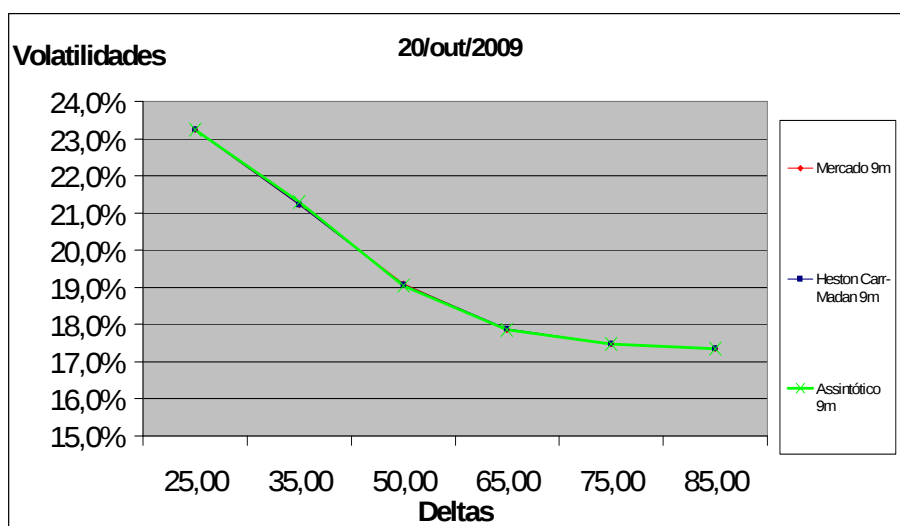


Figura 7.39: Conjunto 3 (20/10/2009): comparação entre *smile* (i) de mercado, (ii) calibrado por transformada rápida de Fourier e (iii) calibrado por expansão assintótica para 9 meses.

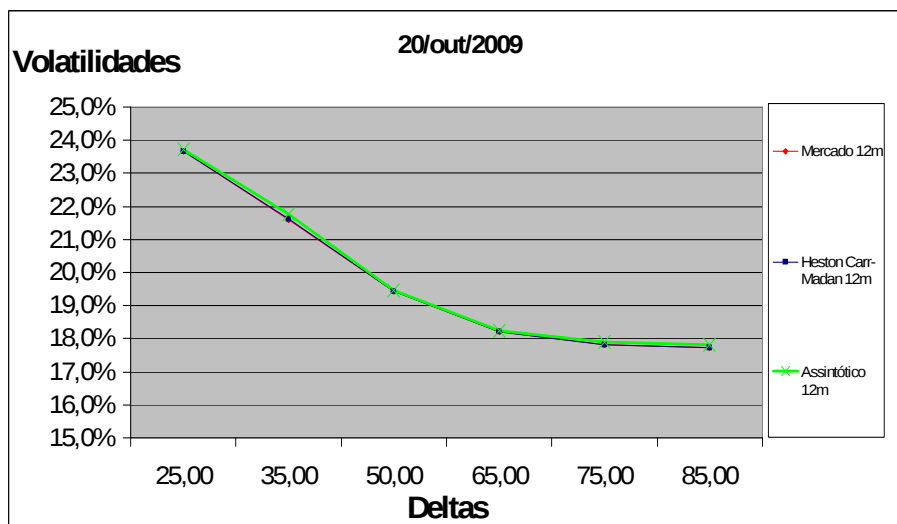


Figura 7.40: Conjunto 3 (20/10/2009): comparação entre *smile* (i) de mercado, (ii) calibrado por transformada rápida de Fourier e (iii) calibrado por expansão assintótica para 12 meses.

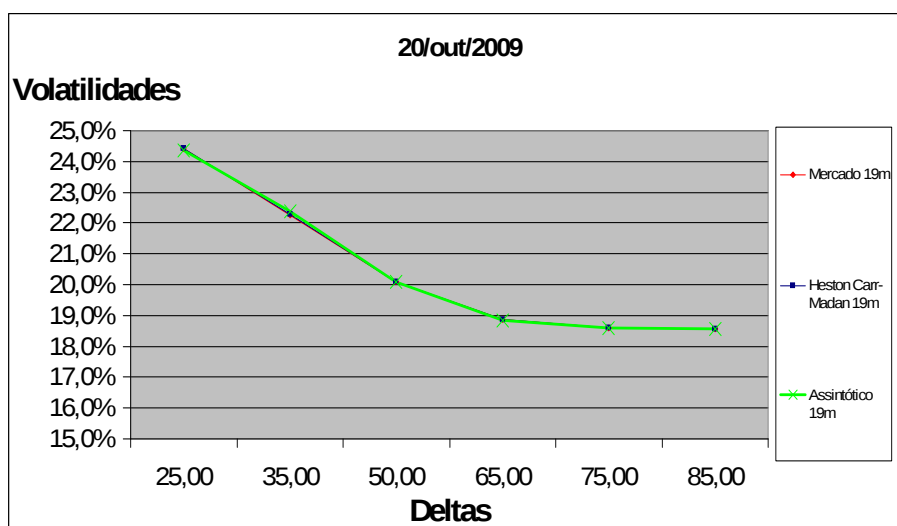


Figura 7.41: Conjunto 3 (20/10/2009): comparação entre *smile* (i) de mercado, (ii) calibrado por transformada rápida de Fourier e (iii) calibrado por expansão assintótica para 19 meses.

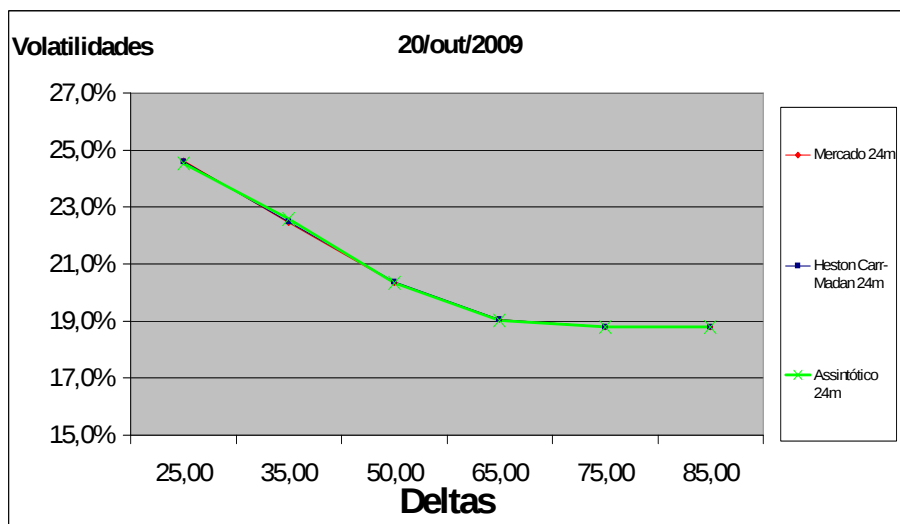


Figura 7.42: Conjunto 3 (20/10/2009): comparação entre *smile* (i) de mercado, (ii) calibrado por transformada rápida de Fourier e (iii) calibrado por expansão assintótica para 24 meses.

7.4.4 Aplicação de Parâmetros Calibrados a Pontos Fora da Amostra

Dados os conjuntos de parâmetros calibrados que apresentados nas seções 7.4.1 e 7.4.2, apresentamos agora resultados de aplicações de tais conjuntos ao cálculo de preços referentes a pontos da superfície de volatilidade que não participaram das calibrações.

Para cada conjunto de calibração (20/10/2008, 21/07/2009 e 20/10/2009), selecionamos dois prazos (9 e 12 meses) e preços de exercício correspondentes a dois deltas que não participaram das calibrações (deltas 30 e 70). Aplicando a estes conjuntos de dados, prazos e deltas os parâmetros calibrados correspondentes, apresentados nas seções 7.4.1 e 7.4.2, calculamos preços para opções de compra européias através do método de transformada rápida de Fourier (FFT) e do método de calibração assintótica, obtendo erros de forma semelhante à equação 7.4⁶:

$$Erro(i, T) = \frac{C_{mercado}^i(T) - C_{teórico}^i(T)}{C_{mercado}^i(T)}, \quad (7.5)$$

onde $C_{mercado}^i(T)$ e $C_{teórico}^i(T)$ são, respectivamente, os preços de mercado e teórico (métodos FFT ou assintótico) para os deltas $i = 30, 70$ e prazos (em meses) $T = 9, 12$.

Os resultados relativos aos métodos de transformada rápida de Fourier e assintótico estão nas tabelas das figuras 7.43 e 7.44, respectivamente. A última coluna de cada tabela refere-se aos erros médios obtidos nos procedimentos de calibração, calculados dividindo-se os erros de calibração apresentados nas seções 7.4.1 e 7.4.2 por $\sqrt{6}$ afim de comparar com o erros individuais relacionados aos pontos fora da amostra, uma vez que os erros de calibração foram calculados como a raiz quadrada de *soma* quadrática de desvios envolvendo 6 pontos de calibração (6 opções).

Os erros obtidos no método de transformada de Fourier em geral foram menores que aqueles obtidos no método de expansão assintótica. Somente os casos de preços de exercício relativos ao delta 30 para os prazos de 9 e 12 meses referentes ao conjunto 2 e o delta 70 para o prazo de 9 meses no conjunto 3 apresentaram maiores erros advindos do método FFT. Contudo, nestes casos, a razão entre erros obtidos nos dois métodos ficou menor do que nos casos onde os erros obtidos na expansão assintótica foram maiores⁷. Ou seja, onde os erros relacionados ao método FFT

⁶Aqui também apresentamos multiplicados por um fator 1E5.

⁷Consideramos o maior erro dividido pelo menor erro.

foram maiores, isto ocorreu em proporção superior aos casos em que o método de expansão assintótica apresentou maiores erros.

No caso do método de transformada rápida de Fourier, nos prazos considerados, os erros obtidos para os pontos fora da amostra de calibração foram superiores aos erros dos pontos que participaram da calibração, em pelo menos um dos deltas. Na maior parte dos casos, foi para o caso relativo ao delta 30. Já no caso do método de expansão assintótica, comparação semelhante pode ser feita, contudo sob erros absolutos maiores.

Conjunto de Calibração	Prazo (meses)	Conjunto	Preços		Erro X 1E5		Erro médio Calibração
			delta		delta		
			30,00	70,00	30,00	70,00	
Conjunto 1	9	Mercado FFT	86,05 85,41	214,87 214,70	743,17	79,49	339,65
Conjunto 1	12	Mercado FFT	92,98 92,43	231,06 230,53	586,54	231,64	383,50
Conjunto 2	9	Mercado FFT	200,27 199,74	263,70 263,25	261,97	172,73	207,67
Conjunto 2	12	Mercado FFT	223,45 223,06	291,80 291,45	175,30	120,68	181,39
Conjunto 3	9	Mercado FFT	56,39 56,39	165,08 164,57	5,81	310,16	63,25
Conjunto 3	12	Mercado FFT	64,51 65,03	188,18 188,25	807,43	36,49	45,12

Figura 7.43: Apreçamento de opções de compra pelo método da transformada rápida de Fourier (FFT) para preços de exercício relativos a deltas fora dos pontos de calibração.

Conjunto de Calibração	Prazo (meses)	Conjunto	Preços		Erro X 1E5		Erro médio Calibração
			delta		delta		
			30,00	70,00	30,00	70,00	
Conjunto 1	9	Mercado FFT	86,05 82,05	214,87 219,57	4.639,89	2.184,09	909,09
Conjunto 1	12	Mercado FFT	92,98 90,41	231,06 232,74	2.755,62	723,70	776,45
Conjunto 2	9	Mercado FFT	200,27 199,96	263,70 261,03	151,80	1.012,71	163,96
Conjunto 2	12	Mercado FFT	223,45 223,78	291,80 289,83	147,73	674,39	132,94
Conjunto 3	9	Mercado FFT	56,39 55,75	165,08 165,50	1.129,21	255,68	282,73
Conjunto 3	12	Mercado FFT	64,51 63,72	188,18 189,20	1.225,70	545,28	303,71

Figura 7.44: Apreçamento de opções de compra pelo método de expansão assintótica para preços de exercício relativos a deltas fora dos pontos de calibração.

7.4.5 Aplicação do Método FFT ao Modelo de Black e Scholes

Apresentamos nesta subseção os resultados da aplicação do método de Carr e Madan, representado pelas equações (4.8) e (4.10), ao modelo de Black e Scholes, sob a função característica (2.19), estendendo a comparação realizada na seção 4.3.1. Utilizamos o mesmo valor de α que na calibração de Heston, ou seja, 1,65. Comparamos os resultados com os valores de mercado, obtidos pela equação (2.14). Os erros quadráticos médios são calculados da mesma forma que em (7.4). Os resultados para os dados de 20/10/2008 (conjunto 1), 21/7/2009 (conjunto 2) e 20/10/2009 (conjunto 3) estão dispostos nas tabelas das figuras 7.45, 7.46 e 7.47, respectivamente. Em média, os menores erros quadráticos ocorreram para o conjunto 1, de 20/10/2008, seguido pelo conjunto 2, de 21/7/2009 e pelo conjunto 3, de 20/10/2009. Ressaltamos que esta aplicação não envolve calibração, mas simples aplicação de fórmula.

Prazo (meses)	Conjunto	Preços de Opções de Compra						(Erro Quadrático) ^{0.5} x 1E5
		delta						
		25	35	50	65	75	85	
3	Mercado	56,58	80,52	122,61	170,83	205,09	253,82	7,91
	FFT	56,58	80,52	122,61	170,83	205,08	253,81	
5	Mercado	61,87	86,05	130,64	175,78	209,79	256,65	6,15
	FFT	61,87	86,05	130,64	175,78	209,78	256,65	
6	Mercado	64,21	88,94	134,31	179,72	212,56	258,28	5,12
	FFT	64,21	88,94	134,31	179,71	212,56	258,27	
7	Mercado	66,46	94,17	138,64	186,17	219,50	264,71	4,44
	FFT	66,45	94,17	138,64	186,16	219,49	264,70	
8	Mercado	68,65	98,44	143,08	192,45	226,60	271,45	4,11
	FFT	68,65	98,44	143,08	192,45	226,60	271,45	
9	Mercado	70,68	101,56	147,33	197,72	232,30	277,23	4,76
	FFT	70,68	101,55	147,33	197,72	232,29	277,23	
10	Mercado	72,78	104,78	152,09	203,66	239,04	284,53	5,35
	FFT	72,78	104,78	152,08	203,66	239,03	284,52	
11	Mercado	74,58	107,46	155,82	208,60	243,71	288,76	5,24
	FFT	74,58	107,46	155,82	208,60	243,70	288,75	
12	Mercado	76,31	110,02	159,39	212,89	248,77	293,84	5,38
	FFT	76,31	110,02	159,39	212,88	248,76	293,83	
13	Mercado	78,23	112,91	163,72	217,65	255,99	302,81	5,67
	FFT	78,23	112,90	163,71	217,65	255,98	302,81	
14	Mercado	79,82	115,29	167,32	221,57	261,83	310,27	6,32
	FFT	79,82	115,28	167,31	221,56	261,82	310,26	
15	Mercado	81,63	117,98	171,30	226,13	268,08	318,15	6,10
	FFT	81,63	117,98	171,30	226,13	268,07	318,14	
17	Mercado	84,45	122,19	177,28	233,34	277,10	329,03	6,11
	FFT	84,45	122,19	177,28	233,33	277,10	329,02	
19	Mercado	87,15	126,17	182,97	240,26	285,66	339,27	6,45
	FFT	87,15	126,16	182,97	240,25	285,66	339,26	
21	Mercado	89,42	129,49	187,77	246,07	292,77	347,67	7,18
	FFT	89,42	129,49	187,77	246,06	292,76	347,66	
24	Mercado	91,74	132,76	192,46	251,47	299,21	354,81	8,53
	FFT	91,73	132,75	192,46	251,46	299,20	354,80	

Figura 7.45: Conjunto 1 (20/10/2008): comparação entre preços de opções de compra utilizando transformada rápida de Fourier (FFT) e preços de mercado para o modelo de Black e Scholes.

Prazo (meses)	Conjunto	Preços de Opções de Compra delta						(Erro Quadrático) ^{0.5} x 1E5
		25,00	35,00	50,00	65,00	75,00	85,00	
3	Mercado	29,38	42,33	65,57	95,55	122,89	164,09	410,72
	FFT	29,39	42,41	65,73	95,59	122,72	163,74	
5	Mercado	37,95	54,44	83,95	121,59	155,73	207,16	37,29
	FFT	37,95	54,45	83,96	121,58	155,69	207,12	
6	Mercado	41,39	59,29	91,31	132,06	168,86	224,12	12,10
	FFT	41,39	59,30	91,32	132,06	168,84	224,12	
7	Mercado	44,32	63,42	97,53	140,88	179,90	238,21	6,29
	FFT	44,32	63,42	97,54	140,88	179,90	238,22	
8	Mercado	47,23	67,51	103,75	149,67	190,82	251,96	6,69
	FFT	47,23	67,52	103,75	149,67	190,82	251,97	
9	Mercado	49,76	71,08	109,16	157,31	200,27	263,70	6,72
	FFT	49,76	71,08	109,16	157,31	200,27	263,71	
10	Mercado	52,06	74,32	114,03	164,17	208,66	273,97	6,23
	FFT	52,06	74,32	114,03	164,17	208,66	273,97	
11	Mercado	54,19	77,35	118,60	170,54	216,42	283,41	5,78
	FFT	54,19	77,35	118,60	170,55	216,43	283,41	
12	Mercado	56,16	80,16	122,80	176,33	223,45	291,80	4,79
	FFT	56,16	80,16	122,80	176,34	223,46	291,81	
13	Mercado	58,01	82,74	126,69	181,63	229,92	299,48	3,46
	FFT	58,01	82,74	126,69	181,64	229,92	299,49	
14	Mercado	59,56	84,91	129,93	186,03	235,25	305,73	2,47
	FFT	59,56	84,91	129,94	186,03	235,25	305,74	
15	Mercado	61,35	87,42	133,69	191,14	241,44	313,04	1,59
	FFT	61,35	87,42	133,69	191,14	241,44	313,04	
17	Mercado	64,19	91,40	139,61	199,15	251,02	324,11	0,40
	FFT	64,19	91,40	139,61	199,15	251,02	324,11	
19	Mercado	66,80	95,05	145,01	206,32	259,50	333,67	2,74
	FFT	66,80	95,05	145,00	206,32	259,50	333,66	
21	Mercado	69,01	98,13	149,52	212,22	266,35	341,14	4,60
	FFT	69,01	98,13	149,52	212,22	266,35	341,13	
24	Mercado	71,65	101,79	154,77	218,87	273,69	348,44	7,43
	FFT	71,65	101,79	154,76	218,87	273,68	348,43	

Figura 7.46: Conjunto 2 (21/07/2009): comparação entre preços de opções de compra utilizando transformada rápida de Fourier (FFT) e preços de mercado para o modelo de Black e Scholes.

Prazo (meses)	Conjunto	Preços de Opções de Compra						(Erro Quadrático)^0.5 x 1E5
		delta						
		25,00	35,00	50,00	65,00	75,00	85,00	
3	Mercado	26,23	37,96	58,06	84,36	108,61	143,75	538,19
	FFT	26,24	38,05	58,25	84,42	108,43	143,33	
5	Mercado	34,21	49,41	75,26	109,03	140,21	185,57	49,74
	FFT	34,22	49,41	75,27	109,02	140,17	185,52	
6	Mercado	37,63	54,30	82,61	119,51	153,60	203,09	15,33
	FFT	37,63	54,30	82,62	119,50	153,58	203,08	
7	Mercado	40,77	58,80	89,35	129,10	165,76	218,83	4,99
	FFT	40,77	58,80	89,35	129,10	165,76	218,83	
8	Mercado	43,67	62,93	95,52	137,90	176,91	233,18	2,37
	FFT	43,67	62,93	95,52	137,90	176,90	233,17	
9	Mercado	46,37	66,77	101,27	146,08	187,25	246,43	3,32
	FFT	46,37	66,77	101,27	146,08	187,25	246,42	
10	Mercado	48,84	70,26	106,52	153,53	196,68	258,46	5,48
	FFT	48,84	70,26	106,52	153,52	196,67	258,45	
11	Mercado	51,06	73,44	111,29	160,32	205,27	269,45	6,90
	FFT	51,06	73,43	111,28	160,32	205,27	269,44	
12	Mercado	53,09	76,35	115,66	166,60	213,29	279,75	8,72
	FFT	53,09	76,34	115,66	166,59	213,28	279,74	
13	Mercado	54,97	79,01	119,71	172,39	220,70	289,11	9,82
	FFT	54,97	79,01	119,71	172,38	220,69	289,10	
14	Mercado	56,72	81,50	123,48	177,74	227,53	297,65	11,09
	FFT	56,72	81,50	123,47	177,73	227,52	297,64	
15	Mercado	58,36	83,83	127,00	182,72	233,84	305,50	12,67
	FFT	58,36	83,83	126,99	182,72	233,83	305,49	
17	Mercado	61,16	87,79	132,95	191,01	244,16	317,99	15,76
	FFT	61,15	87,79	132,94	191,00	244,15	317,97	
19	Mercado	63,67	91,36	138,34	198,34	253,16	328,64	17,31
	FFT	63,66	91,36	138,33	198,32	253,14	328,62	
21	Mercado	65,80	94,40	142,99	204,51	260,66	337,37	19,47
	FFT	65,80	94,39	142,98	204,49	260,64	337,34	
24	Mercado	68,49	98,22	148,82	212,06	269,59	347,42	21,63
	FFT	68,48	98,21	148,81	212,04	269,57	347,39	

Figura 7.47: Conjunto 3 (20/10/2009): comparação entre preços de opções de compra utilizando transformada rápida de Fourier (FFT) e preços de mercado para o modelo de Black e Scholes.

Capítulo 8

Conclusões

Iniciamos este trabalho apresentando as características inerentes ao modelo de Black e Scholes que divergem das práticas de mercado para o apreamento de opções européias *vanillas*. Notamos que este apreça opções adotando diferentes valores de volatilidade para diferentes valores de preços de exercícios (*strikes*), através das chamadas superfícies de volatilidades implícitas, ou *smiles*. A partir deste fato estilizado, perguntamo-nos como esta dependência com preços de exercícios pode surgir dentro da teoria, e não de forma *ad-hoc*. Como proposta utilizamos o modelo de Heston, descrito no capítulo 3, que introduz modificações no processo log-normal do modelo de Black e Scholes para comportar volatilidade estocástica, incorporando reversão à média da mesma.

Conforme vimos, o modelo de Heston não apresenta solução fechada para opções *vanillas*, e adotamos o procedimento de Carr e Madan [Carr e Madan, 1999], que envolve o método de transformada rápida de Fourier, ou *fast Fourier transform* (FFT). Para tanto, mostramos como chegar à função característica no modelo de Heston. Como procedimento alternativo para a implementação do modelo de Heston, estudamos expansão assintótica para o limite de baixa volatilidade da variância (ε).

Prosseguindo em nosso estudo, no capítulo 7 descrevemos o procedimento de calibração de preços para os parâmetros do modelo. Para analisar o comportamento do modelo de Heston em diferentes condições, selecionamos três conjuntos de dados: o primeiro deles, de 20/10/2008, situado na crise de títulos *subprime*, onde o mercado apresentou maior volatilidade; enquanto o segundo, de 21/07/2009, e o terceiro, de 20/10/2009, estão relacionados a um período subsequente de menor volatilidade. Cada conjunto era composto de opções de compra *vanillas* de diferentes preços de exercícios (deltas de 25 à 85) e prazos de vencimentos (de 3 à 24 meses).

Uma novidade neste trabalho foi que, para gerar estabilidade nas calibrações, além de utilizar opções de compra, introduzimos *swaps* de variância. Tais produtos, apreçados no modelo de Heston, dependem de dois parâmetros: a velocidade de reversão à média (κ) e variância de longo prazo (θ). Como a liquidez destes *swaps* no mercado brasileiro não é razoável, para gerar preços dos mesmos, em cada prazo de calibração, utilizamos dois *swaps*, criados sinteticamente sob o modelo de Demeterfi *et al*, com carteiras de opções de compra e venda sob *smile*. Assim, a utilização dos *swaps* de variância na calibração ajuda a balizar dois importantes parâmetros: a velocidade de reversão à média (κ) e variância de longo prazo (θ).

Inicialmente calibramos preços de opções e *swaps* de variância utilizando o procedimento de Carr e Madan (seção 7.4.1) e depois utilizando expansão assintótica (seção 7.4.2), para os vários vencimentos, dentro de cada conjunto de calibração. Em todos os conjuntos notamos que os parâmetros variam de acordo com prazos de vencimento, contrariando a idéia de que um conjunto de parâmetros deva servir a todos os prazos de vencimento. Notamos também que a velocidade de reversão à média (κ) acompanha a volatilidade da variância (ε). Além disso, a correlação (ρ), mais elevada para superfícies mais inclinadas na direção dos deltas, decresce ao longo dos prazos, com exceção do conjunto 1, de 20/10/2008, onde permanece em valores elevados. Os prazos mais curtos e deltas muito no dinheiro (*in the money*) e fora do dinheiro (*out of the money*) representam maior dificuldade de calibração. Este fato foi notado também em Fouque e Lorig [Fouque e Lorig, 2009], ao passo que Nóbrega aponta opções fora do dinheiro como aquelas de maior dificuldade de calibração.

No conjunto 1, de 20/10/2008, referente a um período de volatilidade elevada na crise *subprime*, além de elevados valores de correlação (ρ), como já mencionamos, observamos altos valores de volatilidade da variância (ε) e velocidade de reversão à média (κ), porém decrescentes ao longo dos prazos, sinalizando uma melhoria nas condições do mercado. Neste sentido, o conjunto 1 apresentou valores menores que os demais para a variância de longo prazo (θ). Nos dois procedimentos (FFT e expansão assintótica), os maiores erros de calibração ocorreram para este conjunto, em parte devido a elevados valores de correlação (ρ), limitando a margem para variação de parâmetros e em parte devido à superfície apresentar inflexão. No caso da expansão assintótica, acrescenta-se o fato de estarmos num regime de alta volatilidade de variância (ε), contrariando a hipótese de baixo valor para este parâmetro.

Nos conjuntos 2 (de 21/07/2009) e 3 (de 20/10/2009), observamos valores menores para os parâmetros de volatilidade da variância (ε), velocidade de reversão à média (κ) e correlação (ρ) que aqueles observados no conjunto 1. Contudo,

com exceção do método de expansão assintótica para o segundo conjunto, os dois primeiros parâmetros tiveram comportamento crescente ao longo dos prazos, até 12 a 14 meses, decrescendo novamente em seguida. Num período de menos turbulência, como nestes conjuntos 2 e 3, o mercado apreçava maior estresse nestes prazos.

Em seguida, calculamos preços de opções utilizando o modelo de Heston a pontos fora da amostra de calibração utilizando o método de transformada rápida de Fourier (FFT) e de expansão assintótica. No método de expansão assintótica obtivemos erros em geral superiores àqueles da calibração, enquanto no método FFT, houve pontos cujos erros ficaram abaixo dos erros relativos à calibração.

Adicionalmente, aplicamos o método FFT ao modelo de Black e Scholes. Os erros quadráticos, por não envolver calibração, foram menores, em comparação àqueles obtidos na calibração do modelo de Heston.

Diante destes resultados, podemos sugerir futuros métodos a serem aplicados. Primeiro, com relação à variabilidade dos parâmetros observada, pode-se admitir que os parâmetros de fato variam, mas adotariamos um processo por pedaços (*piecewise*), onde cada parâmetro é constante em um intervalo até o vencimento. Neste caso, ao invés de valores iniciais nulos em 3.26 e 3.27, teríamos o final de cada período determinando condições iniciais ao subsequente. Com relação à utilização do método de expansão assintótica para altos valores de volatilidade da variância (ε), poderíamos utilizar uma expansão sob a hipótese de $1/\varepsilon$. Finalmente, o sentido deste trabalho de calibração sobre opções *vanillas* reside na utilização dos parâmetros calibrados em opções exóticas, tais como opções com barreiras e *swaps* de volatilidade.

Capítulo 9

Apêndices

Apêndice A

Iniciamos este apêndice demonstrando as relações de comutação 5.39 e 5.40. Com respeito à relação 5.39, temos:

$$[D, \mathcal{L}^{(0)}] = D\mathcal{L}^{(0)} - \mathcal{L}^{(0)}D = 0. \quad (9.1)$$

Demonstração:

$$[D, \mathcal{L}^{(0)}] = F\partial_F \mathcal{L}^{(0)} - \mathcal{L}^{(0)}(F\partial_F)$$

$$= F\partial_F \left[\check{\partial}_\tau - \frac{1}{2}\alpha^{-1}(\vartheta - \beta)F^2\partial_{FF} \right] - \left[\check{\partial}_\tau - \frac{1}{2}\alpha^{-1}(\vartheta - \beta)F^2\partial_{FF} \right](F\partial_F).$$

Como

$$F\partial_F(F^2\partial_{FF}) = F(2F\partial_{FF} + F^2\partial_{FFF}) = 2F^2\partial_{FF} + F^3\partial_{FFF} \quad (9.2)$$

e

$$F^2\partial_{FF}(F\partial_F) = F^2\partial_F[\partial_F(F\partial_F)] = F^2\partial_F(\partial_F + F\partial_{FF}) = F^2\partial_{FF} + F^2\partial_{FF} + F^3\partial_{FFF}$$

$$= 2F^2\partial_{FF} + F^3\partial_{FFF}, \quad (9.3)$$

então

$$\begin{aligned} [D, \mathcal{L}^{(0)}] &= -\frac{1}{2}\alpha^{-1}(\vartheta - \beta) [F\partial_F(F^2\partial_{FF}) - F^2\partial_{FF}(F\partial_F)] \\ &= -\frac{1}{2}\alpha^{-1}D(D-1) [2F^2\partial_{FF} + F^3\partial_{FFF} - (2F^2\partial_{FF} + F^3\partial_{FFF})] = 0. \end{aligned}$$

cqd.

Com relação à relação 5.40, temos:

$$[\partial_\vartheta, \mathcal{L}^{(0)}] = \partial_\vartheta \mathcal{L}^{(0)} - \mathcal{L}^{(0)} \partial_\vartheta = -\frac{1}{2}\alpha^{-1}D(D-1). \quad (9.4)$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} [\partial_\vartheta, \mathcal{L}^{(0)}] &= \partial_\vartheta \mathcal{L}^{(0)} - \mathcal{L}^{(0)} \partial_\vartheta \\ &= \partial_\vartheta \partial_\tau^\vee - \frac{1}{2}\alpha^{-1} \{ \partial_\vartheta [(\vartheta - \beta)D(D-1)] \} - \partial_\vartheta \partial_\tau^\vee + \frac{1}{2}\alpha^{-1} \{ [(\vartheta - \beta)D(D-1)] \} \partial_\vartheta \\ &= -\frac{1}{2}\alpha^{-1}D(D-1) - \frac{1}{2}\alpha^{-1}(\vartheta - \beta)\partial_\vartheta [D(D-1)] + \frac{1}{2}\alpha^{-1} \{ [(\vartheta - \beta)D(D-1)] \} \partial_\vartheta. \end{aligned}$$

Como as derivadas em F e ϑ comutam, temos, no terceiro termo,

$$\frac{1}{2}\alpha^{-1} \{ [(\vartheta - \beta)D(D-1)] \} \partial_\vartheta = \frac{1}{2}\alpha^{-1}(\vartheta - \beta)\partial_\vartheta [D(D-1)].$$

Assim,

$$[\partial_\vartheta, \mathcal{L}^{(0)}] = -\frac{1}{2}\alpha^{-1}D(D-1) - \frac{1}{2}\alpha^{-1}(\vartheta - \beta)\partial_\vartheta [D(D-1)] + \frac{1}{2}\alpha^{-1}(\vartheta - \beta)\partial_\vartheta [D(D-1)]$$

$$= -\frac{1}{2}\alpha^{-1}D(D-1).$$

cqd.

A seguir demostramos algumas identidades necessárias às deduções apresentadas na seção 5.3, empregando a definição 5.31. A expressão para $D(D-1)$ foi deduzida em 5.35.

- $D^2(D-1)$

Utilizando 5.35:

$$\begin{aligned} D^2(D-1) &= D[D(D-1)] = F\partial_F(F^2\partial_{FF}) = F(2F)\partial_{FF} + F^3\partial_{FFF} = \\ &= 2F^2\partial_{FF} + F^3\partial_{FFF} \equiv 2F^2\partial_F^2 + F^3\partial_F^3. \end{aligned} \quad (9.5)$$

- $N'(x)$

Dada a definição da função acumulada normal, $N(x)$, a derivada com relação ao argumento é dada por:

$$N'(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (9.6)$$

- $N''(x)$

Dada a derivada , $N'(x)$, da função acumulada normal, a segunda derivada com relação ao argumento é dada por:

$$N''(x) = -xN'(x). \quad (9.7)$$

- $d_+^2, d_-d_+^2$ e $d_-d_+^3$

Dadas as definições em 5.106,

$$d_+^2 = (d_- + \sqrt{\gamma})^2 = d_-^2 + 2d_- \sqrt{\gamma} + \gamma \quad (9.8)$$

$$d_- d_+^2 = d_- (d_-^2 + 2d_- \sqrt{\gamma} + \gamma) = d_-^3 + 2d_-^2 \sqrt{\gamma} + \gamma d_- \quad (9.9)$$

$$d_- d_+^3 = d_- (d_-^3 + 3d_-^2 \sqrt{\gamma} + 3d_- \gamma + \gamma \sqrt{\gamma}). \quad (9.10)$$

- $\partial_F(d_+)$ e $\partial_F(d_-)$

$$\partial_F(d_+) = \partial_F(d_-) = \frac{1}{F\sqrt{\gamma}}. \quad (9.11)$$

- $\partial_F N(d_+)$ e $\partial_F N(d_-)$

Inicialmente, notamos que

$$N'(d_-) = \frac{F}{K} N'(d_+). \quad (9.12)$$

Utilizando a definição 5.106 e 9.11:

$$\partial_F N(d_+) = N'(d_+) \frac{d(d_+)}{dF} = N'(d_+) \frac{1}{F\sqrt{\gamma}} \quad (9.13)$$

$$\partial_F N(d_-) = N'(d_-) \frac{d(d_-)}{dF} = N'(d_-) \frac{1}{F\sqrt{\gamma}} = N'(d_+) \frac{1}{K\sqrt{\gamma}}, \quad (9.14)$$

onde usamos 9.12.

- $\partial_F N'(d_+)$ e $\partial_F^2 N'(d_+)$

De 9.11 e 9.7, temos:

$$\partial_F N'(d_+) = \frac{\partial N'(d_+)}{\partial d_+} \frac{\partial d_+}{\partial F} = -d_+ N'(d_+) \frac{1}{F\sqrt{\gamma}}. \quad (9.15)$$

Em seguida, empregamos 9.15 e 9.13 para calcular

$$\begin{aligned}\partial_F^2 N'(d_+) &= -\frac{\partial_F(d_+)N'(d_+)}{F\sqrt{\gamma}} - \frac{d_+\partial_F(N'(d_+))}{F\sqrt{\gamma}} + d_+N'(d_+)\frac{1}{F^2\sqrt{\gamma}} \\ &= -\frac{N'(d_+)}{F^2\gamma} + \frac{d_+^2N'(d_+)}{F^2\gamma} + d_+N'(d_+)\frac{1}{F^2\sqrt{\gamma}}.\end{aligned}\quad (9.16)$$

- $\partial_F(d_+d_-)$

De 5.107 e 9.11:

$$\begin{aligned}\partial_F(d_+d_-) &= \partial_F((d_+ - \sqrt{\gamma})d_-) = \partial_F d_+^2 - \sqrt{\gamma}\partial_F d_+ = 2d_+\partial_F d_+ - \sqrt{\gamma}\partial_F d_+ = \\ &= \frac{2d_+}{F\sqrt{\gamma}} - \frac{1}{F}.\end{aligned}\quad (9.17)$$

- $\partial_F^2(d_+d_-)$

De 9.17 e 9.11:

$$\begin{aligned}\partial_F^2(d_+d_-) &= \partial_F(\partial_F(d_+d_-)) = \partial_F\left(\frac{2d_+}{F\sqrt{\gamma}} - \frac{1}{F}\right) \\ &= \frac{2\partial_F d_+}{F\sqrt{\gamma}} - \frac{2d_+}{F^2\sqrt{\gamma}} + \frac{1}{F^2} = \frac{2}{F^2\gamma} - \frac{2d_+}{F^2\sqrt{\gamma}} + \frac{1}{F^2}.\end{aligned}\quad (9.18)$$

- $\partial_F^2(F\partial_F)$

$$\partial_F^2(F\partial_F) = \partial_F(\partial_F(F\partial_F)) = \partial_F(\partial_F + F\partial_F^2) = \partial_F^2 + \partial_F^2 + F\partial_F^3 = 2\partial_F^2 + F\partial_F^3. \quad (9.19)$$

- $\partial_F^3(F\partial_F)$

De 9.19,

$$\partial_F^3(F\partial_F) = \partial_F(\partial_F^2(F\partial_F)) = \partial_F(2\partial_F^2 + F\partial_F^3) = 2\partial_F^3 + \partial_F^3 + F\partial_F^4 = 3\partial_F^3 + F\partial_F^4. \quad (9.20)$$

- $D^2(D-1)^2$

De 9.5, 9.19 e 9.20:

$$\begin{aligned} D^2(D-1)^2 &= D^2(D-1)(D-1) \\ &= (2F^2\partial_F^2 + F^3\partial_F^3)(F\partial_F - 1) \\ &= 2F^2\partial_F^2(F\partial_F) - 2F^2\partial_F^2 + F^3\partial_F^3(F\partial_F) - F^3\partial_F^3 \\ &= 2F^2(2\partial_F^2 + F\partial_F^3) - 2F^2\partial_F^2 + 3F^3\partial_F^3 + F^4\partial_F^4 - F^3\partial_F^3 \\ &= 2F^2\partial_F^2 + 4F^3\partial_F^3 + F^4\partial_F^4. \end{aligned} \quad (9.21)$$

- $D^3(D-1)$

$$\begin{aligned} D^3(D-1) &= D^3D(D-1) \\ &= F\partial_F(F\partial_F(F^2\partial_F^2)) \\ &= F\partial_F(F(2F\partial_F^2 + F^2\partial_F^3)) = F\partial_F(2F^2\partial_F^2 + F^3\partial_F^3) \\ &= F(4F\partial_F^2 + 2F^2\partial_F^3 + 3F^2\partial_F^3 + F^3\partial_F^4) \\ &= 4F^2\partial_F^2 + 5F^3\partial_F^3 + F^4\partial_F^4. \end{aligned} \quad (9.22)$$

- D^2

$$D^2 = F\partial_F(F\partial_F) = F(\partial_F + F\partial_F^2) = F\partial_F + F^2\partial_F^2. \quad (9.23)$$

Calculemos $\partial_F\tilde{C}^{(0)}$, $\partial_F^2\tilde{C}^{(0)}$, $\partial_F^3\tilde{C}^{(0)}$ e $\partial_F^4\tilde{C}^{(0)}$ a partir de 5.108 e das equações 9.12, 9.13 e 9.14:

- $\partial_F\tilde{C}^{(0)}$

$$\begin{aligned} \partial_F\tilde{C}^{(0)} &= N(d_+) + F\partial_F(N(d_+)) - K\partial_F(N(d_-)) \\ &= N(d_+) + F\partial_F(N(d_+)) - K\partial_F(N(d_-)) = N(d_+). \end{aligned} \quad (9.24)$$

- $\partial_F^2\tilde{C}^{(0)}$

$$\partial_{FF}\tilde{C}^{(0)} = \partial_F(\partial_F\tilde{C}^{(0)}) = \partial_F(N(d_+)) = N'(d_+)\frac{1}{F\sqrt{\gamma}}. \quad (9.25)$$

- $\partial_F^3\tilde{C}^{(0)}$

$$\partial_F^3\tilde{C}^{(0)} = \partial_F(\partial_F^2\tilde{C}^{(0)}) = N''(d_+)\left(\frac{1}{F\sqrt{\gamma}}\right)^2 + N'(d_+)\left(-\frac{1}{F^2}\right)\frac{1}{\sqrt{\gamma}}.$$

Devido à 9.7:

$$\partial_F^3\tilde{C}^{(0)} = -d_+N'(d_+)\left(\frac{1}{F\sqrt{\gamma}}\right)^2 - N'(d_+)\left(\frac{1}{F^2}\right)\frac{1}{\sqrt{\gamma}}. \quad (9.26)$$

- $\partial_F^4\tilde{C}^{(0)}$

$$\partial_F^4\tilde{C}^{(0)} = \partial_F(\partial_F^3\tilde{C}^{(0)}) = -\frac{\partial d_+}{\partial F}N'(d_+)\frac{1}{F^2}\frac{1}{\gamma} + 2d_+N'(d_+)\frac{1}{F^3}\frac{1}{\gamma} +$$

$$\begin{aligned}
& -d_+ \frac{1}{F^2} \frac{1}{\gamma} \left(-d_+ N'(d_+) \frac{\partial d_+}{\partial F} \right) + d_+ \frac{N'(d_+)}{F\sqrt{\gamma}} \frac{1}{F^2} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} + 2N'(d_+) \frac{1}{F^3} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} = \\
& = -\frac{1}{F^3} \frac{1}{\gamma\sqrt{\gamma}} N'(d_+) + 3\frac{1}{F^3} \frac{1}{\gamma} d_+ N'(d_+) + \frac{d_+^2}{F^3} \frac{1}{\gamma\sqrt{\gamma}} N'(d_+) + 2\frac{1}{F^3} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} N(d_+), \quad (9.27)
\end{aligned}$$

onde usamos 9.7.

- $D^2(D-1)\tilde{C}^{(0)}$

Partindo de 9.5 e utilizando 9.25, 9.26 e 5.107:

$$\begin{aligned}
D^2(D-1)\tilde{C}^{(0)} &= (2F^2\partial_F^2 + F^3\partial_F^3) \tilde{C}^{(0)} \\
&= 2F^2 N'(d_+) \frac{1}{F\sqrt{\gamma}} - F^3 d_+ N'(d_+) \left(\frac{1}{F\sqrt{\gamma}} \right)^2 - F^3 N'(d_+) \left(\frac{1}{F^2} \right) \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \\
&= F N'(d_+) \frac{1}{\sqrt{\gamma}} - d_+ N'(d_+) \frac{F}{\sqrt{\gamma}} = N'(d_+) \frac{F}{\gamma} (\sqrt{\gamma} - d_+) \\
&= -N'(d_+) \frac{F}{\gamma} d_- = -N'(d_-) \frac{K}{\gamma} d_-. \quad (9.28)
\end{aligned}$$

- $D^2(D-1)^2\tilde{C}^{(0)}$

Aplicamos 9.21 à $\tilde{C}^{(0)}$, tendo em vista 9.25, 9.26 e 9.27. Em seguida, utilizamos as relações 5.107 e 9.8 para agrupar os termos.

$$\begin{aligned}
D^2(D-1)^2\tilde{C}^{(0)} &= (2F^2\partial_F^2 + 4F^3\partial_F^3 + F^4\partial_F^4) \tilde{C}^{(0)} = \\
&= \frac{F}{\gamma\sqrt{\gamma}} N'(d_+) (d_- d_+ - 1) \equiv \Lambda. \quad (9.29)
\end{aligned}$$

- $D^3(D-1)\tilde{C}^{(0)}$

Da mesma forma que procedemos para chegar a 9.29, aplicamos 9.22 à $\tilde{C}^{(0)}$:

$$\begin{aligned} D^3(D-1)\tilde{C}^{(0)} &= (4F^2\partial_F^2 + 5F^3\partial_F^3 + F^4\partial_F^4)\tilde{C}^{(0)} = \\ &= -\frac{F}{\gamma\sqrt{\gamma}}N'(d_+)(1-d_-^2). \end{aligned} \quad (9.30)$$

$$\bullet D^4(D-1)^2\tilde{C}^{(0)}$$

De 9.29 e 9.23, temos:

$$\begin{aligned} D^4(D-1)^2\tilde{C}^{(0)} &= D^2(D^2(D-1)^2\tilde{C}^{(0)}) = D^2\left(\frac{F}{\gamma\sqrt{\gamma}}N'(d_+)(d_-d_+-1)\right) = D^2(\Lambda) \\ &= F\partial_F(\Lambda) + F^2\partial_F^2(\Lambda). \end{aligned} \quad (9.31)$$

Calculemos cada um dos termos desta equação:

$$\begin{aligned} \partial_F(\Lambda) &= \frac{F}{\gamma\sqrt{\gamma}}(\partial_F N'(d_+))(d_-d_+-1) + \frac{1}{\gamma\sqrt{\gamma}}N'(d_+)(d_-d_+-1) \\ &\quad + \frac{F}{\gamma\sqrt{\gamma}}N'(d_+)\partial_F(d_-d_+). \end{aligned}$$

De 9.17 e 9.15:

$$\begin{aligned} \partial_F(\Lambda) &= \frac{F}{\gamma\sqrt{\gamma}}(-d_+N'(d_+)\frac{1}{F\sqrt{\gamma}})(d_-d_+-1) + \frac{1}{\gamma\sqrt{\gamma}}N'(d_+)(d_-d_+-1) + \\ &\quad + \frac{F}{\gamma\sqrt{\gamma}}N'(d_+)\left(\frac{2d_+}{F\sqrt{\gamma}} - \frac{1}{F}\right) = \\ &= \frac{d_+}{\gamma^2}N'(d_+) - \frac{d_+(d_-d_+)}{\gamma^2}N'(d_+) - \frac{1}{\gamma\sqrt{\gamma}}N'(d_+) + \frac{(d_-d_+)}{\gamma\sqrt{\gamma}}N'(d_+) + \\ &\quad + \frac{2d_+}{\gamma^2}N'(d_+) - \frac{1}{\gamma\sqrt{\gamma}}N'(d_+) = \end{aligned}$$

$$= 3 \frac{d_+}{\gamma^2} N'(d_+) - \frac{d_+(d_-d_+)}{\gamma^2} N'(d_+) - 2 \frac{1}{\gamma\sqrt{\gamma}} N'(d_+) + \frac{(d_-d_+)}{\gamma\sqrt{\gamma}} N'(d_+). \quad (9.32)$$

$$\begin{aligned} \partial_F^2(\Lambda) &= \partial_F(\partial_F(\Lambda)) = \\ &= \partial_F \left[\frac{F}{\gamma\sqrt{\gamma}} (\partial_F N'(d_+)) (d_-d_+ - 1) + \frac{1}{\gamma\sqrt{\gamma}} N'(d_+) (d_-d_+ - 1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{F}{\gamma\sqrt{\gamma}} N'(d_+) \partial_F(d_-d_+) \right] = \\ &= \frac{F}{\gamma\sqrt{\gamma}} (\partial_F^2 N'(d_+)) (d_-d_+ - 1) + \frac{1}{\gamma\sqrt{\gamma}} (\partial_F N'(d_+)) (d_-d_+ - 1) + \\ &\quad + \frac{F}{\gamma\sqrt{\gamma}} (\partial_F N'(d_+)) \partial_F(d_-d_+) + \frac{1}{\gamma\sqrt{\gamma}} \partial_F(N'(d_+)) (d_-d_+ - 1) + \\ &\quad + \frac{1}{\gamma\sqrt{\gamma}} N'(d_+) \partial_F(d_-d_+) + \frac{1}{\gamma\sqrt{\gamma}} N'(d_+) \partial_F(d_-d_+) + \\ &\quad + \frac{F}{\gamma\sqrt{\gamma}} \partial_F(N'(d_+)) \partial_F(d_-d_+) + \frac{F}{\gamma\sqrt{\gamma}} N'(d_+) \partial_F^2(d_-d_+). \end{aligned}$$

Utilizamos 9.18, 9.17, 9.15 e 9.16, resultando em:

$$\begin{aligned} \partial_F^2(\Lambda) &= -5 \frac{d_+^2 N'(d_+)}{F\gamma^2\sqrt{\gamma}} - \frac{(d_-d_+) N'(d_+)}{F\gamma^2\sqrt{\gamma}} + \frac{d_+^2 N'(d_+)(d_-d_+)}{F\gamma^2\sqrt{\gamma}} + \\ &\quad + 3 \frac{N'(d_+)}{F\gamma^2\sqrt{\gamma}} + 5 \frac{d_+ N'(d_+)}{F\gamma^2} - \frac{d_- d_+^2 N'(d_+)}{F\gamma^2} - \\ &\quad - \frac{N'(d_+)}{F\gamma\sqrt{\gamma}}. \end{aligned} \quad (9.33)$$

Voltamos à equação 9.31. Usamos 9.33 e 9.32 e, para simplificar termos, empregamos 9.10, 9.9, 9.12 e 5.107, de forma que podemos finalmente escrever:

$$D^4(D-1)^2 \tilde{C}^{(0)} = \frac{N'(d_-)K}{\gamma^2\sqrt{\gamma}} [3 - 3d_-^2 - 3d_-d_+ + d_-^3 d_+]. \quad (9.34)$$

Apêndice B

Nesta seção apresentamos a demonstração da relação 6.13:

$$f(U) = f(K) + f'(K)[(U - K)^+ - (K - U)^+] + \\ \int_K^\infty f''(z)(U - z)^+ dz + \int_0^K f''(z)(z - U)^+ dz.$$

Demonstração

Do teorema fundamental do cálculo:

$$f(S) = f(K) + 1_{S>K} \int_K^S f'(u) du - 1_{S<K} \int_S^K f'(u) du \\ = f(K) + 1_{S>K} \int_K^S \left[f'(K) + \int_K^u f''(v) dv \right] du - 1_{S<K} \int_S^K \left[f'(K) - \int_u^K f''(v) dv \right] du. \quad (9.35)$$

Aplicando Fubini:

$$f(S) = f(K) + 1_{S>K} f'(K)(S - K) + 1_{S>K} \int_K^S \left[\int_K^u f''(v) dv \right] du \\ - 1_{S<K} f'(K)(K - S) + 1_{S<K} \int_S^K \left[\int_u^K f''(v) dv \right] du \\ = f(K) + f'(K) [(S - K)^+ - (K - S)^+] + 1_{S>K} \int_K^S \left[\int_K^u f''(v) dv \right] du \\ + 1_{S<K} \int_S^K \left[\int_u^K f''(v) dv \right] du. \quad (9.36)$$

Mudança de ordem de integração:

$$\int_K^S \left[\int_K^u (.) dv \right] du = \int_K^S \left[\int_v^S (.) du \right] dv \quad (9.37)$$

$$\int_S^K \left[\int_u^K (.) dv \right] du = \int_S^K \left[\int_S^v (.) du \right] dv. \quad (9.38)$$

Então,

$$\begin{aligned} f(S) = f(K) + f'(K) [(S - K)^+ - (K - S)^+] + 1_{S > K} \int_K^S \left[\int_v^S f''(v) du \right] dv \\ + 1_{S < K} \int_S^K \left[\int_S^v f''(v) du \right] dv. \end{aligned} \quad (9.39)$$

Integrando em u :

$$\begin{aligned} f(S) = f(K) + f'(K) [(S - K)^+ - (K - S)^+] + 1_{S > K} \int_K^S f''(v)(S - v) dv \\ + 1_{S < K} \int_S^K f''(v)(v - S) dv. \end{aligned} \quad (9.40)$$

Reescrevemos as integrais da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(S) = f(K) + f'(K) [(S - K)^+ - (K - S)^+] + \int_K^\infty f''(v)(S - v)^+ dv \\ + \int_0^K f''(v)(v - S)^+ dv. \end{aligned} \quad (9.41)$$

Na primeira integral, v pode variar de K até ∞ , pois o integrando automaticamente zera quando $v > S$. Analogamente, na segunda integral, v pode

variar de 0 até K , pois o integrando também zera quando $v < S$.

Apêndice C

A seguir definimos processos *affine*, a partir de Singleton [Singleton, 2001] e Duffie *et al.* [Duffie et al, 2000].

Suponha que há um processo de Markov Y_t em um subconjunto D de $\mathbb{R}^N$ satisfazendo a equação diferencial estocástica

$$dY_t = \mu(Y_t, t)dt + \sigma(Y_t, t)dW_t, \quad (9.42)$$

onde $\mu : D \rightarrow \mathbb{R}^N$ e $\sigma : D \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$. A difusão Y_t é “*affine*” se

$$\mu(y) = \theta + \kappa y \quad (9.43)$$

$$\sigma(y)\sigma(y') = h + \sum_{j=1}^N y_j H^{(j)}, \quad (9.44)$$

onde θ é $N \times 1$, κ é $N \times N$ e h e $H^{(j)}$ são $N \times N$ e simétricos. A função característica do processo Y_T condicionada à informação presente e passada é dada por

$$\phi_t(\tau, u) = E[e^{iu'Y_T} | Y_t], \quad u \in \mathbb{R}^N,$$

com $\tau = T - t$. Duffie *et al.* [Duffie et al, 2000] provam que para um processo *affine*, a função característica tem a forma:

$$\phi_t(\tau, u) = e^{\alpha_t(u) + \beta_t'(u)Y_t}, \quad (9.45)$$

onde α e β satisfazem equações de Riccati:

$$\dot{\beta}(t) = -\kappa' \beta_t - \frac{1}{2} \beta_t H \beta_t \quad (9.46)$$

$$\dot{\alpha}(t) = -\theta' \beta_t - \frac{1}{2} \beta_t h \beta_t, \quad (9.47)$$

sujeitos a $\beta_T(u) = 0$ e $\alpha_T(u) = 0$.

Referências Bibliográficas

- [Black e Scholes,1973] Black, F. & Scholes, M. (1973). 'The Pricing of Options and Corporate Liabilities', *Journal of Political Economy* **81** (3): 637–654.
- [Bakshi et al. 1997] Bakshi, G, Cao C., Chen Z. (1997). 'Empirical performance of alternative option pricing models', *Journal of Finance* **52**, 2003-2049.
- [Bates, 1996] Bates, D. (1996), 'Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutschemark Options', *Review of Financial Studies* **9**, 69-108.
- [Björk, 2004] Björk, T. (2004), 'Arbitrage Theory in Continuous Time', second edition, Oxford University Press, Oxford.
- [Carr e Madan, 1999] Carr, P., Madan, D. B. (1999), 'Option Valuation Using the Fast Fourier Transform', *Journal of Computational Finance* **2**, 61-73.
- [Caticha et al. 2005] Caticha, N., Leite, V., Toledo, C., Vicente, R. (2005), 'Underlying Dynamics of Typical Fluctuations of an Emerging Market Price Index: The Heston Model from Minutes to Months', arXiv:physics/0506101v1 [physics.soc-ph], http://arxiv.org/PS_cache/physics/pdf/0506/0506101v1.pdf
- [Cox e Ross, 1975] Cox, J., Ross, S. (1975), 'The Pricing of Options for Jump Processes', Working Paper no. 2-75, Rodney L. Center for Financial Research, University of Pennsylvania, April 1975.
- [Cunha e Lemgruber, 2003] Cunha, D., Lemgruber, E. F. (2002), 'Opções de Dólar no Brasil com Taxas de Juro e

de Cupom Estocásticos', Working Paper, Risktech.
<http://www.risktech.com.br/Artigos/ArtigosCient%C3%ADficos.asp>

[Demeterfi et al, 1999] Demeterfi, K., Derman, E., Kamal, M., Zou, J. (1999), 'More Than You Ever Wanted to Know About Volatility Swaps', *Quantitative Strategies Research Notes*. Goldman Sachs.

[Duffie et al, 2000] Due, D., Pan, J., Singleton, K. (2000). 'Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-Diffusions'. *Econometrica* **68**, 1343-1376.

[Dupire, 1994] Dupire, B. (1994), 'Pricing with a Smile', *Risk* **7** (1), 18-20.

[Fouque et al., 2000] Fouque, J.P., Papanicolau, G., Sircar, K. (2000), *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility*, first edition, Cambridge University Press, New York, NY.

[Fouque e Lorig, 2009] Fouque, J., Lorig, M. (2009), 'A Fast Mean-Reverting Correction to Heston's Stochastic Volatility Model', Apresentação na WCMF 2009.
<http://www.pstat.ucsb.edu/WCMF/slides/LorigWCMF.pdf>

[Garman e Kohlhagen, 1983]

[Heston, 1993] Heston, S. L. (1993), 'A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options', *The Review of Financial Studies* **6** (2), 327-343.

[Hull e White, 1987] Hull, J., White, A. (1987), 'The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities', *Journal of Finance* **42**, 281-300.

[Hull e White, 1988] Hull, J., White, A. (1988), 'An Analysis of the Bias in Option Pricing Caused by a Stochastic Volatility', *Advances in Futures and Options Research* **3**, 29-61.

[Hull, 1993] Hull, J. (1993), *Options, Futures, and Others Derivatives*, second edition, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

[Lipton, 2001] Lipton, A. (2001), *Mathematical Methods for Foreign Exchange*, first edition, World Scientific Publishing Co., Singapore.

[Merton, 1973] Merton, R. (1973), 'The Theory of rational Option Pricing', *Bell Journal of Economics and Management Science* **4** (1), 141-183.

- [Merton, 1976] Merton, R. (1976), 'Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous', *Journal of Financial Economics* **3** (1-2), 125-144.
- [Mikosch, 1998] Mikosch, T. (1998), *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*, first edition, World Scientific Publishing Co., River Edge, New Jersey.
- [Nobrega, 2003] Nobrega, M. (2003), 'Derivativos de Câmbio: Implementação do Modelo de Heston para o Mercado Brasileiro', Dissertação de Mestrado em Modelagem Matemática em Finanças - FEA/IME - USP.
- [Press et al, 1992] Flannery, B.P., Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W. T. (1992), *Numerical Recipes in C: the art of scientific computing*, second edition, Cambridge University Press, Cambridge. <http://www.nrbook.com/a/bookcpdf.php>.
- [Rubinstein, 1994] Rubinstein, M. (1994), 'Implied Binomial Trees', *Journal of Finance* **69** (3), 771-818.
- [Singleton, 2001] Singleton, K. (2001), 'Estimation of Affine Asset Pricing Models Using the Empirical Characteristic Function', Stanford University working paper e NBER.
- [Stein e Stein, 1991] Stein, E. M., Stein J. C. (1991), 'Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytical Approach', *Review of Financial Studies* **4**, 727-752
- [Wilmott, 1998] Wilmott, P. (1998), *Derivatives: The Theory and Practice of Financial Engineering*, first edition, John Wiley & Sons Ltd., Chichester.