



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Soluções para equações quasilineares de Schrödinger através do método Nehari

Jorge Luis Meza Minaya

Orientador: Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, 24 de Junho de 2019

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Soluções para equações quasilineares de Schrödinger através do método Nehari

Jorge Luis Meza Minaya

Orientador: Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, 24 de Junho de 2019

À minha mãe Martha

Agradecimentos

Agradeço a minha mãe, por ter feito o possível para eu chegar ao Brasil e fazer este trabalho. Ela me deu exemplo de força de vontade, generosidade e amor.

Agradeço a meu orientador Prof. Dr. Marcos Tadeu De Oliveira Pimenta, por sua disposição para me atender em minhas dúvidas, além de me dar bons conselhos para minha vida profissional e cotidiana.

Agradeço às pessoas que encontrei nesta cidade de Presidente Prudente, pois seus ânimos e conselhos, me ajudaram a ficar firme.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*"Provamos através da
lógica, mas descobrimos
a partir da intuição."
"Toda a generalização é
uma hipótese."
"A mente usa a
faculdade de criatividade
apenas quando a experiência
a obriga a fazê-lo."
Jules Henri Poincaré*

Resumo

Para uma classe de equações quasilineares de Schrödinger, estabelecemos a existência de soluções positivas e nodais pelo método de Nehari.

Palavras-Chave: *Equações de Schrödinger quasilineares; Soluções nodais; Método de Nehari.*

Abstract

For a class of Schrödinger quasilinear equations, we established the existence of positive and nodal solutions by the Nehari method.

Keywords: *Quasilinear Schrödinger equations; Nodal solutions; Nehari Method.*

Índice de Notações

- $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais;
- $\mathbb{R}^N$ o espaço euclidiano de dimensão N ;
- $|A|$ é a medida de Lebesgue de um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^N$;
- $C^k(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ é continuamente } k \text{ vezes diferenciável}\}$;
- $C_0^k(\Omega) = \{u \in C^k; \text{supp}(u) \text{ é compacto}\}$;
- $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$;
- $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ é mensurável e } \|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}$;
- $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{c \geq 0; |\{x \in \Omega; |u(x)| \leq c\}| > 0\}$;
- $L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ é mensurável e } \|u\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty\}$;
- $W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega) \forall |\alpha| \leq m\}$, onde α é um multi-índice;
- $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^m \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}}$;
- $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$, onde o fecho é tomado com respeito à norma $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$;
- $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$;
- $H_0^m(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$, onde o fecho é tomado com respeito à norma $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$;
- $\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$;
- $2^* = 2N/(N-2)$ para $N \geq 3$;
- $2^* = \infty$ para $N = 1, 2$.

Sumário

Resumo	5
Abstract	7
Índice de Notações	9
Capítulos	
1 Introdução	13
2 Preliminares	15
2.1 Distribuições	15
2.2 Espaços de Sobolev	17
2.3 Imersões contínuas e compactas de Sobolev	19
3 Existência de soluções	21
3.1 Resultados preliminares	22
3.2 Resultados de existência em domínios limitados	26
3.3 Demonstrações dos Teoremas 1 e 2	27
4 Conclusão	35
Referências	35

Introdução

Vamos considerar a seguinte versão modificada da equação não linear de Schrödinger:

$$i\psi_t - \Delta\psi + W(x)\psi - \frac{1}{2}\psi\Delta g(|\psi|^2)g'(|\psi|^2) = f(x, \psi), x \in \mathbb{R}^N$$

onde $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ e $f(x, \psi)$ é um termo não linear. Esta versão não linear da equação não linear de Schrödinger surge em vários modelos de diferentes fenômenos físicos, como no estudo de filmes superfluidos em física de plasma, na teoria da matéria condensada (ver [10], [3], [1], [5], [8], [9], [23], [2], [17], [18]).

Restringindo ao caso $g(\psi) = \psi$, obtemos a equação

$$i\psi_t - \Delta\psi + W(x)\psi - \frac{1}{2}\psi\Delta|\psi|^2 = |\psi|^{p-1}\psi, x \in \mathbb{R}^N.$$

Essa equação foi introduzida em [33], [34] e [31] para estudar um modelo de elétrons auto-aprisionados em redes quadráticas ou hexagonais (ver também [4], [32]).

Do ponto de vista matemático, a existência local para o problema de Cauchy foi considerada pela primeira vez em [22] e [15], sendo posteriormente aprimorada em [20]. Em [20] foi estudada a estabilidade orbital das soluções estacionárias, bem como o fenômeno de blow-up de soluções.

Estamos interessados na existência de ondas estacionárias. Para isso, tomamos $\psi(t) = e^{-i\lambda t}u(x)$ com $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ e, dessa forma, obtemos a seguinte equação quasilinear de Schrödinger

$$-\Delta u + V(x)u - \frac{1}{2}u(\Delta|u|^2) = |u|^{p-1}u, \quad (1.1)$$

Ao longo deste trabalho consideraremos $4 \leq p+1 < 2.2^*$ e o potencial $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes hipóteses:

(V1) $V \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $0 < V_0 = \inf_{\mathbb{R}^N} V(x) \leq V_\infty = \lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) < \infty$.

(V2) Existem constantes positivos M , A e m tais que para todo $|x| \geq M$ temos

$$V(x) \leq V_\infty - \frac{A}{1 + |x|^m}.$$

Como veremos adiante, o espaço de funções adequado para lidar com o problema acima de maneira variacional é $X = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \mid \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 < +\infty\} = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : u^2 \in H^1(\mathbb{R}^N)\}$. Diremos ainda que $u \in X$ é uma solução fraca de (1.1), se para toda $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} [(1 + u^2)\nabla u \cdot \nabla \phi + u|\nabla u|^2\phi + V(x)u\phi - |u|^{p-1}u\phi] = 0. \quad (1.2)$$

Os métodos que descreveremos nesse texto são variacionais, de forma que as soluções fracas do problema (1.1) que obteremos serão pontos críticos do funcional de Euler-Lagrange $I : X \rightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$I(u) = \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 + u^2|\nabla u|^2 \right) - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1}. \quad (1.3)$$

Para $u \in X$ e $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$; a derivada de I na direção ϕ em u , vem dada por

$$\langle I'(u), \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} [(1 + u^2)\nabla u \cdot \nabla \phi + u|\nabla u|^2\phi + V(x)u\phi - |u|^{p-1}u\phi] dx. \quad (1.4)$$

A abordagem descrita nesse texto será baseada no chamado *Método de Nehari*, consistindo esse na definição de um conjunto, chamado de *Conjunto de Nehari*, o qual, por ser um vínculo natural do problema, permite que se encontre pontos críticos do funcional associado, por meio da minimização deste sobre tal conjunto. Tal método foi e ainda é amplamente utilizado na demonstração da existência de problemas elípticos variacionais dos mais diversos tipos.

Os resultados descritos neste texto estão presentes no trabalho [27]. Pretendemos detalhar a demonstração dos seguintes resultados.

Teorema 1 *Seja $4 \leq p+1 < 2.2^*$ e suponha (V1) verdadeira. Então o funcional I assume o seu ínfimo c^0 em S em uma função u , que é uma solução positiva fraca de (1.1).*

Teorema 2 *Seja $4 \leq p+1 < 2.2^*$ e suponha (V1) e (V2) verdadeira. Então o funcional I assume seu ínfimo c^* em S^* em uma função u^* , que é uma solução fraca que muda de sinal de (1.1)*

Além de [27], em muitos outros trabalhos já foram estudadas equações de Schrödinger quasilineares como (1.1). Em [19], os autores, inspirados pela abordagem de [27], lidam com o problema (1.1), porém contemplando também o caso em que $p \in (1, 4)$. Esse caso trás uma dificuldade adicional, devido ao fato de que não é possível utilizar uma argumentação baseada no método de Nehari, uma vez que o funcional pode ser coercivo em determinadas direções radiais. O que os autores demonstram, porém, é que é possível definir um conjunto, cuja definição é inspirada também pela identidade de Pohozaev associada ao problema, o qual consiste também em um vínculo natural do problema. Dessa forma, minimizando o funcional energia associado ao problema sobre esse conjunto, é possível obter soluções fracas de (1.1).

Existe ainda uma outra linha de abordagem que permite estudar o problema (1.1), a qual se baseia em uma mudança de variável, a qual transforma problemas como (1.1), em problemas envolvendo apenas o operador Laplaciano, porém, com termos não-lineares mais complicados que o original. Tal abordagem teve sua gênese no trabalho [6], o qual inspirou e ainda inspira muitos trabalhos envolvendo variações do problema (1.1).

Nessa dissertação, por motivos didáticos, apresentamos no Capítulo 2 um resumo da Teoria das Distribuições e Espaços de Sobolev. No Capítulo 3 descrevemos em detalhes a demonstração dos Teoremas 1 e 2. No Capítulo 4, apresentamos nossas conclusões acerca do trabalho.

Preliminares

Começamos com alguns resultados preliminares. Para mais referencias, ver [7].

2.1 Distribuições

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ .

Definição 1 Chama-se suporte de ϕ ao fecho do conjunto onde ϕ não se anula, denotado por $\text{supp}(\phi)$, isto é,

$$\text{supp}(\phi) = \overline{\{x \in \Omega; \phi(x) \neq 0\}}.$$

Se este conjunto é compacto, então diz-se que ϕ tem suporte compacto.

Definição 2 O espaço das funções ϕ de classe C^∞ com suporte compacto contido em Ω é um espaço vetorial denotado por $D(\Omega)$, cujos elementos chamamos de funções teste.

Agora definimos a convergência de seqüências em $D(\Omega)$.

Definição 3 Uma seqüência de funções $\{\phi_m\}$ em $D(\Omega)$, é dita convergente para 0, se existe um conjunto compacto fixo $K \subset \Omega$ tal que $\text{supp}(\phi_m) \subset K$ para todo m , com ϕ_m e todas suas derivadas convergindo uniformemente para 0 em K .

Definição 4 Seja $T : D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear. T é uma distribuição em Ω se para toda $\phi_m \rightarrow 0$ em $D(\Omega)$, tivermos que $T(\phi_m) \rightarrow 0$.

O espaço das distribuições é denotado por $D'(\Omega)$. Se $\Omega = \mathbb{R}^N$, denotamos $D'(\mathbb{R}^N) = D'$.

Exemplo 1 Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ localmente integrável, isto é, tal que para qualquer conjunto compacto $K \subset \Omega$,

$$\int_K |f| < +\infty.$$

Dada f localmente integrável, então o seguinte funcional linear define uma distribuição

$$T_f : D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$T_f(\phi) = \int_{\Omega} f \phi dx$$

Observação 1 Se $f \in L^p(\Omega)$, $p \geq 1$ então T_f é uma distribuição.

Exemplo 2 (*Distribuição de Dirac*) O funcional linear $\delta : D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $\delta(\phi) = \phi(0)$ é uma distribuição.

Observação 2 A distribuição δ não é gerada por uma função localmente integrável (ver [7] exemplo 1.2.4).

Definição 5 Seja $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. Um multi-índice é uma n -upla de números inteiros não negativos

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$$

Além disso, associado ao multi-índice α , temos os seguintes símbolos

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$$

$$\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_N!$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_N^{\alpha_N}$$

e se α e β são multi-índices, então $\alpha \leq \beta$ se $\alpha_i \leq \beta_i$ para todo $1 \leq i \leq N$. Finalmente denotamos por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$$

Definição 6 Seja $T \in D'(\Omega)$. Para qualquer multi-índice α , definimos a derivada de ordem α de T por:

$$(D^\alpha T)(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi), \text{ para todo } \phi \in D(\Omega).$$

Exemplo 3 Consideremos a função de Heaviside em $\mathbb{R}$

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

a qual é localmente integrável, e portanto define uma distribuição T_H . Seja $\phi \in D$ então

$$\frac{d}{dx} T_H(\phi) = -T_H\left(\frac{d\phi}{dx}\right) = -\int_{\mathbb{R}} H(x) \frac{d\phi}{dx} = -\int_0^{+\infty} \frac{d\phi}{dx} = \phi(0) = \delta(\phi).$$

Assim temos que

$$\frac{d}{dx} T_H = \delta$$

Definição 7 O gradiente da distribuição T , denotado por ∇T , é definido por

$$\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial T}{\partial x_N} \right),$$

e o Laplaciano de T é dado por

$$\Delta T = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2}.$$

Observação 3 No caso em que uma distribuição é gerada por uma função $u \in L^p(\Omega)$, com $p \geq 1$, denotaremos o gradiente da distribuição por:

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right),$$

e seu Laplaciano por

$$\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

2.2 Espaços de Sobolev

Definição 8 Seja $m > 0$ um inteiro e $1 \leq p \leq \infty$. O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é definido por

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ para todo } |\alpha| \leq m\}$$

com a norma

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p &= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \text{ para } 1 \leq p < \infty \\ \|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} &= \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} \text{ para } p = +\infty \end{aligned} \quad (2.1)$$

Observação 4 1. Se $p = 2$ então denotaremos esse espaço como $H^m(\Omega)$. Isto é,

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$$

e para $u \in H^m(\Omega)$, denotaremos sua norma por $\|u\|_{H^m(\Omega)}$, isto é,

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \|u\|_{W^{m,2}(\Omega)}.$$

2. A norma $\|u\|_{H^m(\Omega)}$ no espaço $H^m(\Omega)$ é induzida pelo seguinte produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v, \text{ para } u, v \in H^m(\Omega)$$

3. No espaço $W^{1,p}(\Omega)$ a função

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) \in (L^p(\Omega))^{n+1}$$

é uma isometria.

4. O espaço $(L^p(\Omega))^{n+1}$ tem norma,

$$\|u\| = \sum_{i=1}^{n+1} \|u_i\|_{L^p(\Omega)} \text{ ou } \|u\| = \left(\sum_{i=1}^{n+1} \|u_i\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

para $u = (u_i) \in (L^p(\Omega))^{n+1}$. Com isto obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3 Seja $1 \leq p < \infty$, o espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach. Se $1 < p < \infty$, $W^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo.

Demonstração. Seja (u_m) uma sequência de Cauchy em $W^{1,p}(\Omega)$. Então pela norma definida em (2.1), temos que (u_m) e $(\frac{\partial u_m}{\partial x_i})$ quando $1 \leq i \leq N$ são sequências de Cauchy em $L^p(\Omega)$. Como $L^p(\Omega)$ é completo, então $u_m \rightarrow u$ e $\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \rightarrow v_i$ em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq i \leq N$. A completude do espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é provada se mostramos $\frac{\partial u}{\partial x_i} = v_i$ no sentido das distribuições, pois

$$\|u_m - u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p = \|u_m - u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \rightarrow 0 \text{ quando } m \rightarrow \infty$$

Seja $\phi \in D(\Omega)$. Então como $u_m \in W^{1,p}(\Omega)$, temos

$$\frac{\partial}{\partial x_i} T_{u_m}(\phi) = T_{S_i}(\phi), S_i \in L^p(\Omega).$$

e em seguida considerando $S_i = \frac{\partial u_m}{\partial x_i}$ com $1 \leq i \leq N$, temos

$$-\int_{\Omega} u_m \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \int_{\Omega} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \phi. \quad (2.2)$$

Desde que $\phi \in D(\Omega)$ e $\phi \in L^p(\Omega)$ para todo $1 \leq q \leq \infty$, quando $m \rightarrow +\infty$ em (2.2), temos

$$\frac{\partial}{\partial x_i} T_u(\phi) = -\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \int_{\Omega} v_i \phi = T_{v_i}(\phi)$$

o que significa que $v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ q.t.p. em Ω . Logo $u_m \rightarrow u$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Assim $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço completo.

Agora como $(L^p(\Omega))^{n+1}$ é reflexivo para $1 < p < \infty$ e como $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço completo, imagem de $W^{1,p}(\Omega)$ pela isometria da Observação 4, então é um subespaço fechado de $(L^p(\Omega))^{n+1}$. Logo $W^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo. ■

Agora definimos $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}} \subset W^{m,p}(\Omega)$ e temos o seguinte resultado.

Teorema 4 *Seja $1 \leq p < \infty$. Então para qualquer inteiro $m \geq 0$,*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) = W_0^{m,p}(\mathbb{R}^N).$$

Demonstração.

Passo 1 Seja (ρ_ε) a família de funções regularizantes (ver [7] exemplo 1.2.2). Então se $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, temos $\rho_\varepsilon * u \rightarrow u$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$. Agora seja ϕ um função contínua com suporte compacto tal que

$$\|\phi - u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \frac{\delta}{3}$$

onde δ é um número escolhido (ver [7] Teorema 1.5.6). Em seguida escolhemos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\|\phi * \rho_\varepsilon - \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \frac{\delta}{3}.$$

Assim,

$$\|u - u * \rho_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|u - \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\phi - \rho_\varepsilon * \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\rho_\varepsilon * \phi - u * \rho_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \delta$$

pois $\|(u - \phi) * \rho_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|\rho_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|u - \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \frac{\delta}{3}$

Passo 2 Agora, se $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, então $u * \rho_\varepsilon$ é C^∞ e $D^\alpha(u * \rho_\varepsilon) = D^\alpha u * \rho_\varepsilon = u * D^\alpha \rho_\varepsilon$ para qualquer multi-índice. Pelo Passo 1, $D^\alpha(u * \rho_\varepsilon) = \rho_\varepsilon * D^\alpha u \rightarrow D^\alpha u$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$. Assim $u * \rho_\varepsilon \rightarrow u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Passo 3 Seja ς uma função em $D(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \varsigma \leq 1$ com $\varsigma = 1$ em $B_1(0)$ e $\text{supp}(\varsigma) \subset B_2(0)$. Em seguida consideramos a sequência (ς_k) em $D(\mathbb{R}^N)$, definida por

$$\varsigma_k(x) = \varsigma\left(\frac{x}{k}\right).$$

Agora seja $\varepsilon_k \rightarrow 0$, definimos $u_k = \rho_{\varepsilon_k} * u$ que é infinitivamente diferenciável, e pelo Passo2, temos $u_k \rightarrow u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Logo definimos $\phi_k \in D(\mathbb{R}^N)$ por

$$\phi_k(x) = \varsigma_k u_k(x),$$

e mostramos que $\phi_k \rightarrow u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. De fato, desde que $\varsigma_k = 1$ em $B_k(0)$ temos $u_k = \phi_k$ em $B_k(0)$ e

$$\begin{aligned} \|u_k - \phi_k\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} &= \left(\int_{|x| \geq k} |u_k(x) - \phi_k(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_{|x| \geq k} 2^p \max(|u_k|^p, |\phi_k|^p) dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_{|x| \geq k} |u_k|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

pois, $|\phi_k| = |\varsigma_k u_k| \leq 1|u_k| = |u_k|$. Assim

$$\|u - \phi_k\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|u - u_k\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|u_k - \phi_k\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|u - u_k\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + 2 \left(\int_{|x| \geq k} |u_k|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

e consequentemente $\phi_k \rightarrow u$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Similarmente, desde que $\frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i}$ em $B_k(0)$ e

$$\left| \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{|x| \geq k} \left| \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq 2 \left(\int_{|x| \geq k} \left| \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} \right|^p + \int_{|x| \geq k} \left| \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0,$$

quando $k \rightarrow \infty$. Daí temos que $\frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i}$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$. Por tanto $\phi_k \rightarrow u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. ■

Teorema 5 (*Desigualdade de Poincaré*) Seja Ω um conjunto aberto e limitado em $\mathbb{R}^N$. Então existe $C = C(\Omega, p) > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Em particular $u \mapsto \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ define uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$, a qual é equivalente a $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

2.3 Imersões contínuas e compactas de Sobolev

As imersões contínuas e compactas de Sobolev estabelecem certas desigualdades úteis. Portanto anunciaremos algumas propriedades destas imersões.

Teorema 6 (*Desigualdade de Sobolev*) Seja $1 \leq p < N$, então existe uma constante $C = C(p, N) > 0$, tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}.$$

Em particular, temos a imersão contínua

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N),$$

onde $p^* = \frac{Np}{N-p}$.

Corolário 1 *Se $1 \leq p < N$, então temos a imersão contínua*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \text{ para todo } q \in [p, p^*]$$

Demonstração. Seja $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e $p \leq q \leq p^*$. Então podemos escolher $\alpha \in [0, 1]$ tal que

$$\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p^*}$$

e $|u|^{\alpha q} \in L^{p/\alpha q}(\mathbb{R}^N)$, temos $|u|^{(1-\alpha)q} \in L^{p^*/(1-\alpha)q}(\mathbb{R}^N)$, assim pela Desigualdade de Hölder, temos

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^\alpha \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}^{1-\alpha} \leq \alpha \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + (1-\alpha) \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)},$$

onde também usamos a Desigualdade de Sobolev. Assim $u \in L^q(\mathbb{R}^N)$ com $p \leq q \leq p^*$. ■

Observação 5 *Temos que $H^1(\mathbb{R}^N)$ está imerso continuamente em $L^q(\mathbb{R}^N)$ para todo $q \in [2, 2^*]$.*

Corolário 2 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Então $u \in L^q(\Omega)$ para todo $q \in [p, p^*]$ e existe $C = C(p, N) > 0$ tal que*

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} &\leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \\ \|u\|_{L^q(\Omega)} &\leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \end{aligned}$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 7 (Rellich-Kondrachov) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberta limitado de classe C^1 . Então as seguintes imersões são compactas:*

1. *Se $p < N$, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q < p^*$,*
2. *Se $p = N$, $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$,*
3. *Se $p > N$, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.*

Existência de soluções

Considere a seguinte equação quasilinear de Schrödinger

$$-\Delta u + V(x)u - \frac{1}{2}u\Delta u^2 = |u|^{p-1}u, \text{ em } \mathbb{R}^N \quad (3.1)$$

onde $3 \leq p \leq (3N+2)/(N-2)$ e $V = V(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$ é um potencial satisfazendo:

$$(V1) \quad V \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}), \quad 0 < V_0 = \inf_{\mathbb{R}^N} V(x) \leq V_\infty = \lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) < \infty.$$

Definimos o conjunto

$$X = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \mid \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx < \infty\} = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \mid u^2 \in H^1(\mathbb{R}^N)\}.$$

Uma função $u \in X$ é chamada de solução fraca da equação (3.1), se para toda $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1+u^2) \nabla u \nabla \phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} u |\nabla u|^2 \phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V u \phi = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1} u \phi dx. \quad (3.2)$$

Definimos o funcional I em X dado por

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (1+u^2) |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V u^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx. \quad (3.3)$$

Para $u \in X$ e $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$; a derivada de I na direção ϕ em u , vem dada por

$$\langle I'(u), \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} [(1+u^2) \nabla u \nabla \phi + u |\nabla u|^2 \phi + V u \phi - |u|^{p-1} u \phi] dx. \quad (3.4)$$

Para $u \in X$ definimos

$$\gamma(u) = \langle I'(u), u \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} [(1+2u^2) |\nabla u|^2 + V u^2 - |u|^{p+1}] dx, \quad (3.5)$$

$$S = \{u \in X \mid \gamma(u) = 0, u \neq 0\} \text{ e } S^* = \{u \in S \mid u^+ \in S, u^- \in S\},$$

onde $u^+ = \max(u, 0)$ e $u^- = \max(-u, 0)$. Definimos

$$\begin{aligned} c^0 &= \inf_{u \in S} I(u), \\ c^* &= \inf_{u \in S^*} I(u). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Consideremos ainda a seguinte hipótese em V .

(V2) Existem constantes positivas M , A e m tal que para todo $|x| \geq M$ temos

$$V(x) \leq V_\infty - \frac{A}{1 + |x|^m}.$$

Nossos principais resultados para (3.1) são os seguintes teoremas.

Teorema 1 Seja $4 \leq p+1 < 2.2^*$. Suponha (V1). Então o funcional I assume o seu ínfimo c^0 em S em uma função u , que é uma solução positiva fraca de (3.1).

Teorema 2 Seja $4 \leq p+1 < 2.2^*$. Suponha (V1) e (V2). Então o funcional I assume seu ínfimo c^* em S^* em uma função u^* , que é uma solução fraca de (3.1) que muda de sinal.

3.1 Resultados preliminares

Lema 1 Para $u \in S$, $t \in (0, \infty)$, $t \neq 1$, temos $I(tu) < I(u)$.

Demonstração. Definamos $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(t) = I(tu)$, ou seja,

$$f(t) = \frac{1}{2}t^2 \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + Vu^2)dx + \frac{1}{2}t^4 \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx.$$

Então

$$f'(t) = t \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + Vu^2)dx + 2t^3 \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx - t^p \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx.$$

Como $u \in S$, note que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + u^2)dx + 2 \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx.$$

Substituindo e agrupando, temos que

$$f(t) = (t - t^p) \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + Vu^2)dx + 2(t^3 - t^p) \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx,$$

Por hipótese $4 \leq p+1$, ou seja, $3 \leq p$. Então,

- se $0 < t < 1$, então $t - t^p > 0$ e $t^3 - t^p \geq 0$ e portanto $f'(t) > 0$.
- se $1 < t$, então $t - t^p < 0$ e $t^3 - t^p \leq 0$ e portanto $f'(t) < 0$.

Em ambos os casos, $f(t) < f(1)$, isso é, $I(tu) < I(u)$ para $t \in (0, \infty)$ e $t \neq 1$. ■

Lema 2 Suponha que $u \neq 0$ e $p+1 > 4$ ou $p+1 = 4$ e $2 \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx < \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx$. Então existe um único $t > 0$ tal que $tu \in S$.

Demonstração. Seja f como na prova do lema anterior.

1. Seja $p+1 = 4$. Note que

$$f'(t) = t \left[\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + Vu^2)dx + t^2 \left(2 \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx \right) \right]$$

Denotamos $c_1 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + Vu^2)dx$ e $c_2 = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} - 2 \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx$, onde $c_1 > 0$ e $c_2 > 0$. Então,

- se $0 < t < \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}$, então $c_1 - t^2 c_2 > 0$ e portanto $f'(t) > 0$.
- se $\sqrt{\frac{c_1}{c_2}} < t$, então $c_1 - t^2 c_2 < 0$ e portanto $f'(t) < 0$.

2. Seja $p + 1 > 4$. Observe que

- se $0 < t < 1$, então

$$\begin{aligned} t^p < t^3 &\Rightarrow \\ t^p \left(2 \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx \right) &< t^3 \left(2 \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx \right) \Rightarrow \\ t^p \left(2 \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx \right) &< t^3 \left(2 \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx \right) - t^p \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx \right) \Rightarrow \\ t(c_1 - t^{p-1} c_2) &< f'(t) \end{aligned}$$

Escolhendo $0 < t < \min \left\{ 1, \sqrt[p-1]{\frac{c_1}{c_2}} \right\}$, temos que $c_1 - t^{p-1} c_2 > 0$ e portanto $f'(t) > 0$.

- se $1 < t$, então

$$\begin{aligned} t^3 < t^p &\Rightarrow \\ t^3 \left(2 \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx \right) &< t^p \left(2 \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx \right) \Rightarrow \\ t^3 \left(2 \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx \right) - t^p \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx \right) &< t^p \left(2 \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx \right) \Rightarrow \\ f'(t) &< t(c_1 - t^{p-1} c_2) \end{aligned}$$

Escolhendo $\max \left\{ 1, \sqrt[p-1]{\frac{c_1}{c_2}} \right\} < t$, então $c_1 - t^{p-1} c_2 < 0$ e portanto $f'(t) < 0$.

Assim $f'(t) > 0$ para t suficientemente pequeno e $f'(t) < 0$ para t suficientemente grande. Portanto, existe $t > 0$ tal que $f'(t) = 0$, o que implica que $tu \in S$. A unicidade segue do último lema. ■

Lema 3 *Seja $(u_n) \subset X$ uma sequência tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(u_n) = 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx = c \neq 0$. Então existe uma sequência (t_n) tal que $t_n u_n \in S$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 1$.*

Demonstração. Precisamos apenas provar que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 1$. Seja

$$a_n = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^2 + V u_n^2) dx, b_n = \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 |\nabla u_n|^2 dx, c_n = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx.$$

Note que $c_n \rightarrow c > 0$, e assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\gamma(u_n) + c_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_n + 2b_n] = c > 0$$

Como $a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0$, segue que $a_n \rightarrow a$ e $b_n \rightarrow b$ quando $n \rightarrow \infty$. A partir de $\gamma(u_n) = a_n + 2b_n - c_n \rightarrow 0$, temos $a + 2b - c = 0$. Afirmamos que $a > 0$. De fato, caso contrário, $a_n \rightarrow 0$ e, pelas desigualdades de Hölder e Sobolev temos para $\theta = (p-1)(N-2)/2(N+2)$, que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2(1-\theta)} |u_n|^{22^* \theta} dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2 dx \right)^{1-\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{22^*} dx \right)^\theta \end{aligned}$$

Da continuidade da imersão $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, como $u_n^2 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2 dx \right)^{1-\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{\theta N}{N-2}} \quad (3.7)$$

o que implica que $c_n \rightarrow 0$, uma contradição. Logo $2b < c$ e então pelo Lema 2, podemos encontrar $t_n > 0$ tal que

$$\gamma(t_n u_n) = a_n t_n^2 + 2b_n t_n^4 - c_n t_n^{p+1} = 0.$$

Afirmamos que existem constantes T_1, T_2 tal que $0 < T_1 \leq t_n \leq T_2$. Caso contrário, suponha que $t_n \rightarrow \infty$, então

$$\begin{aligned} a_n t_n^2 + 2b_n t_n^4 - c_n t_n^{p+1} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{a_n}{t_n^{p-1}} + \frac{2b_n}{t_n^{p-3}} - c_n &= 0. \end{aligned}$$

- se $p = 3$, então $2b = c$ quando $n \rightarrow \infty$, uma contradição.
- se $p > 3$, então $c = 0$ quando $n \rightarrow \infty$, uma contradição.

Agora, suponha que $t_n \rightarrow 0$. Então

$$\begin{aligned} a_n t_n^2 + 2b_n t_n^4 - c_n t_n^{p+1} &= 0 \Rightarrow \\ a_n + 2b_n t_n^2 - c_n t_n^{p-1} &= 0 \end{aligned}$$

implicando que $a = 0$, quando $n \rightarrow \infty$, uma contradição. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass existe uma subsequência $t_n \rightarrow t^*$. Passando para o limite em $\gamma(t_n u_n) = 0$ obtemos

$$a(t^*)^2 + 2b(t^*)^4 - c(t^*)^{p+1} = 0.$$

Como a equação $at^2 + 2bt^4 - ct^{p+1} = 0$ tem 1 como a única solução positiva, temos $t^* = 1$ e portanto $t_n \rightarrow 1$. ■

Lema 4 $c^0 > 0$ e $c^* \leq 2c^0$.

Demonstração. Denotemos

$$\rho^2 = \rho^2(u) = \int_{\mathbb{R}^N} (1 + u^2) |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V u^2 dx.$$

Por (3.7) temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx &\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx \right)^{1-\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{\theta N}{N-2}} \\ &\leq C \rho^{2(1-\theta)} \rho^{2\theta \frac{N}{N-2}} \\ &= C \rho^{2 + \frac{2(p-1)}{N+2}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Então

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + u^2) |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V u^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx \\ &\geq \frac{1}{2} \rho^2 - C \rho^{2 + \frac{2(p-1)}{N+2}} \\ &= \rho^2 \left(\frac{1}{2} - C \rho^{\frac{2(p-1)}{N+2}} \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Escolha $\rho^2(u) = \rho_0^2$ tal que $\rho_0^{\frac{2(p-1)}{N+2}} < \frac{1}{2C}$ e consideremos $m = \rho_0^2 \left(\frac{1}{2} - C\rho_0^{\frac{2(p-1)}{N+2}} \right)$. Agora, suponha que $u \in S$. Tome $\lambda > 0$ tal que $\rho^2(\lambda u)$ satisfaz a estimativa acima. De acordo com o Lema 1, $I(u) \geq I(\lambda u) \geq m$ e portanto $c^0 \geq m$. Para qualquer $u \in S^*$, temos $u^+, u^- \in S$, portanto $I(u) = I(u^+) + I(u^-) \geq 2c^0$, e $c^* \geq 2c^0$. ■

Lema 5 *Suponha que $u \in S$ e $I(u) = c^0$ ou $u \in S^*$ e $I(u) = c^*$. Então u é uma solução fraca da eq. (3.1). Além disso, a eq. (3.2) vale para qualquer $\phi \in X$ com a propriedade que $\int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla \phi|^2 dx < \infty$ e $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \phi^2 dx < \infty$.*

Demonstração. Suponhamos por contradição que exista $u \in S^*$ e $I(u) = c^*$, tal que a conclusão do lema não seja verdadeira. Então podemos encontrar uma função $\phi \in X$ com a propriedade que $\int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla \phi|^2 dx < \infty$ e $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \phi^2 dx < \infty$, mas

$$\langle I'(u), \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} [(1 + u^2) \nabla u \nabla \phi + u |\nabla u|^2 \phi + V u \phi - |u|^{p-1} u \phi] dx \leq -1$$

Escolha $\varepsilon > 0$ muito pequeno tal que

$$\langle I'(tu^+ + su^- + \sigma \phi), \phi \rangle \leq -\frac{1}{2}, \quad \forall |t-1| + |s-1| + |\sigma| \leq 3\varepsilon$$

Seja η uma função de corte tal que $\eta(t, s) = 1$, se $|t-1| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$ e $|s-1| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$, $\eta(t, s) = 0$, se $|t-1| \geq \varepsilon$ ou $|s-1| \geq \varepsilon$. Nós estimamos $\sup_{t,s} I(tu^+ + su^- + \varepsilon \eta(t, s) \phi)$. Se $|t-1| \leq \varepsilon$ e $|s-1| \leq \varepsilon$, então

$$\begin{aligned} I(tu^+ + su^- + \varepsilon \eta(t, s) \phi) &= I(tu^+ + su^-) + \int_0^1 \langle I'(tu^+ + su^- + \sigma \varepsilon \eta(t, s) \phi), \varepsilon \eta(t, s) \phi \rangle d\sigma \\ &\leq I(tu^+ + su^-) - \frac{1}{2} \varepsilon \eta(t, s). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Para $|t-1| \geq \varepsilon$ ou $|s-1| \geq \varepsilon$, $\eta(t, s) = 0$ e a estimativa acima é trivial. Agora, desde que $u \in S^*$, para $(t, s) \neq (1, 1)$, de acordo com o Lema 1, $I(tu^+ + su^-) < I(tu^+) + I(su^-) < I(u^+) + I(u^-) = I(u)$, portanto

$$I(tu^+ + su^- + \varepsilon \eta(t, s) \phi) \leq I(tu^+ + su^-) < I(u), \quad \forall (t, s) \neq (1, 1).$$

Para $(t, s) = (1, 1)$

$$I(u^+ + u^- + \varepsilon \eta(t, s) \phi) \leq I(u) - \frac{1}{2} \varepsilon \eta(1, 1) = I(u) - \frac{1}{2} \varepsilon < I(u)$$

Em qualquer caso, temos $I(tu^+ + su^- + \varepsilon \eta(t, s) \phi) < I(u) = c^*$. Em particular

$$\sup_{0 \leq t, s \leq 2} I(tu^+ + su^- + \varepsilon \eta(t, s) \phi) = \tilde{c} < c^*$$

O argumento a seguir é baseada na Teoria do Grau (ver [13] Teorema 3.2, ver [30] Proposição 3.1). Seja

$$\Psi_0(s, t) = (\langle I'(tu^+), u^+ \rangle, \langle I'(su^-), u^- \rangle)$$

e

$$\Psi_1(s, t) = \left(\frac{1}{t} \langle I'(h^+(t, s)), h^+(t, s) \rangle, \frac{1}{s} \langle I'(h^-(t, s)), h^-(t, s) \rangle \right)$$

Onde $h(t, s) = tu^+ + su^- + \varepsilon \eta(t, s) \phi$. Se $(t, s) \in \partial([0, 2] \times [0, 2])$, temos $\eta(t, s) = 0$ e então $\Psi_0(t, s) = \Psi_1(t, s)$. Logo $1 = (-1)(-1) = d(\Psi_0, [0, 2] \times [0, 2], (0, 0)) = d(\Psi_1, [0, 2] \times [0, 2], (0, 0))$. Portanto, existe $(a, b) \in [0, 2] \times [0, 2]$ tal que $\Psi_1(a, b) = (0, 0)$, de modo que $h(a, b) = au^+ + bu^- + \varepsilon \eta(a, b) \phi = \tilde{u} \in S^*$, $I(\tilde{u}) \leq \tilde{c} < c^*$, o que é uma contradição com a definição de c^* . Para o caso, $u \in S$ e $I(u) = c^0$, usamos o mesmo raciocínio. ■

3.2 Resultados de existência em domínios limitados

Nesta seção, consideramos o problema correspondente em domínios limitados. As soluções serão usadas como sequências minimizantes no Capítulo 4. Seja B_R a bola no $\mathbb{R}^N$ centrada em 0 com o raio R . Seja

$$\begin{aligned} S_R &= S \cap H_0^1(B_R), \quad S_R^* = S^* \cap H_0^1(B_R) \\ c_R^0 &= \inf_{u \in S_R} I(u), \quad c_R^* = \inf_{u \in S_R^*} I(u), \end{aligned} \quad (3.11)$$

Lema 6 c_R^0 e c_R^* são ambos decrescentes em R e convergem para c^0 e c^* quando $R \rightarrow \infty$, respectivamente.

Demonstração. É fácil ver que c_R^0 e c_R^* são monótonos em R e $c_R^0 \geq c^0$ e $c_R^* \geq c^*$. Provemos que $c_R^* \rightarrow c^*$. Para $\varepsilon > 0$, seja $u \in S^*$ tal que $I(u) \leq c^* + \varepsilon$. Seja $u_R = \eta_R u$ onde η_R é uma função de corte tal que $\eta_R(x) = 1$ para $|x| \leq \frac{1}{4}R$, $\eta_R(x) = 0$ para $|x| \geq \frac{3}{4}R$. Temos que quando $R \rightarrow \infty$, $u_R^\pm \rightarrow u^\pm$, $\int_{\mathbb{R}^N} |u_R^\pm|^{p+1} dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |u^\pm|^{p+1} dx > 0$ e $\gamma(u_R^\pm) \rightarrow \gamma(u^\pm) = 0$. Pelo Lema 3, $t_R \rightarrow 1$, $s_R \rightarrow 1$ quando $R \rightarrow \infty$, onde $t_R u_R^+ \in S$ e $s_R u_R^- \in S$. Agora $\tilde{u}_R = t_R u_R^+ + s_R u_R^- \in S_R^*$ e

$$\begin{aligned} c_R^* &\leq I(\tilde{u}_R) = I(t_R u_R^+ + s_R u_R^-) \\ &\leq I(t_R u_R^+ + s_R^-) + C \int_{\mathbb{R} \setminus B_{\frac{R}{4}}} [(1 + u^2)|\nabla u|^2 + V u^2 + |u|^{p+1}] dx \\ &\leq I(t_R u^+ + s_R u^-) + o(1) \\ &\leq I(u^+ + u^-) + o(1) \\ &\leq c^* + \varepsilon + o(1). \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde $o(1) \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow \infty$. Como ε é arbitrário provamos que $\lim_{R \rightarrow \infty} c_R^* = c^*$. Da mesma forma, temos $\lim_{R \rightarrow \infty} c_R^0 = c^0$. ■

Lema 7 c_R^0 e c_R^* são alcançados.

Demonstração. Provaremos o lema apenas para c_R^* , haja vista que para c_R^0 os argumentos são análogos. Pela definição de ínfimo, existe $(u_n) \subset S_R^*$ uma sequência minimizante, isto é, $I(u_n) \rightarrow c_R^*$ quando $n \rightarrow \infty$. Pelo Lema 4, $\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx$ e $\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 |\nabla u_n|^2 dx$ são limitados. De fato, $\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx \rightarrow +\infty$ ou $\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 |\nabla u_n|^2 dx \rightarrow +\infty$, devemos ter $I(u_n) \rightarrow +\infty$ por (3.9), o que é absurdo pois a sequência $(I(u_n))$ é limitada. Além disso, $u_n^+, u_n^- \in S_R$. Portanto, $\int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{p+1} dx \geq m$ e $\int_{\mathbb{R}^N} (u_n^-)^{p+1} dx \geq m$ para algum $m > 0$. Como consideramos um domínio limitado aqui, sendo $H_0^1(B_R)$ reflexivo e das imersões de Sobolev, podemos assumir que existe uma subsequência e $u \in H_0^1(B_R)$ tal que $u_n^\pm \rightarrow u^\pm \neq 0$ em $L^{p+1}(B_R)$, $u_n^\pm \rightharpoonup u^\pm$ em $H_0^1(B_R)$ e $\nabla((u_n^\pm)^2) \rightharpoonup \nabla((u^\pm)^2)$ em $L^2(B_R)$. Tomando o limite em n , segue de $\gamma(u_n^\pm) = 0$ que

$$\gamma(u^\pm) = \int_{\mathbb{R}^N} [(1 + 2(u^\pm)^2)|\nabla u^\pm|^2 + V(u^\pm)^2 - |u^\pm|^{p+1}] dx \leq 0.$$

Pelo Lema 2, obtemos $t, s > 0$ tal que $\gamma(tu^+) = \gamma(su^-) = 0$. Seja $\tilde{u} = tu^+ + su^-$. Então $\tilde{u} \in S_R^*$ e

$$c_R^* \leq I(\tilde{u}) \leq \liminf I(tu_n^+ + su_n^-) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I(u_n^+ + u_n^-) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(u_n) = c_R^*. \quad (3.13)$$

Portanto $I(\tilde{u}) = c_R^*$. ■

Lema 8 *Suponha que $u \in S_R$ e $I(u) = c_R^0$, ou $u \in S_R^*$ e $I(u) = c_R^*$. Então u é uma solução fraca da equação quasilinear no domínio limitado B_R com condição de fronteira de Dirichlet, ou seja, para todo $\phi \in C_0^\infty(B_R)$, temos que*

$$\int_{B_R} [(1 + u^2)\nabla u \nabla \phi + u|\nabla u|^2 \phi + V u \phi - |u|^{p-1} u \phi] dx = 0.$$

Além disso, a equação acima vale para qualquer $\phi \in X \cap H_0^1(B_R)$ com a propriedade que $\int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla \phi|^2 dx < \infty$ e $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \phi^2 dx < \infty$.

Demonstração. A prova é a mesma que a do Lema 5. ■

Em seguida, precisamos estudar o funcional limite, definido usando o limite do potencial V no infinito. Para $u \in X$.

$$I^\infty(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + u^2) |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx. \quad (3.14)$$

Nós também definimos

$$\begin{aligned} \gamma^\infty(u) &= \int_{\mathbb{R}^N} (1 + u^2) |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx, \\ S^\infty &= \{u \in X \mid \gamma^\infty(u) = 0, u \neq 0\} \text{ e} \\ c^\infty &= \inf_{u \in S^\infty} I^\infty(u). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Também para os domínios limitados B_R , definimos

$$S_R^\infty = S^\infty \cap H_0^1(B_R), \quad c_R^\infty = \inf_{u \in S_R^\infty} I^\infty(u).$$

Usando a prova do Lema 8, podemos provar que c_R^∞ também é alcançado e tal como demonstrado no Lema 6, c_R^∞ converge para c^∞ , quando $R \rightarrow \infty$.

3.3 Demonstrações dos Teoremas 1 e 2

Nessa seção, vamos demonstrar os dois principais resultados do capítulo. Primeiro precisamos do seguinte lema.

Lema 9 *Seja $u_R \in S_R$ uma solução fraca da eq. (3.1) no domínio limitado B_R , isto é,*

$$\int_{B_R} [(1 + u_R^2)\nabla u_R \nabla \phi + u_R |\nabla u_R|^2 \phi + V u_R \phi - |u_R|^{p-1} u_R \phi] dx = 0 \quad (3.16)$$

para todos $\phi \in X \cap H_0^1(B_R)$ com a propriedade que $\int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla \phi|^2 dx < \infty$ e $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \phi^2 dx < \infty$. Suponha que $\int_{B_R} (1 + u_R^2) |\nabla u_R|^2 dx$, $\int_{B_R} V |u_R|^2 dx$, $\int_{B_R} |u_R|^{p+1} dx$ são todos limitados em R . Suponha ainda que, para uma subsequência $R_n \rightarrow \infty$,

$$\int_{B_{R_n}} |u_n|^{p+1} dx \rightarrow A \in (0, \infty),$$

onde $u_n = u_{R_n}$. Então existe $\beta \in (0, 1]$ e $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$ tal que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $r_\varepsilon > 0$ tal que, para qualquer $r' \geq r \geq r_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B_r(x_n)} |u_n|^{p+1} dx &\geq \beta A - \varepsilon \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{r'}(x_n)} |u_n|^{p+1} dx &\geq (1 - \beta) A - \varepsilon \end{aligned} \quad (3.17)$$

Além disso, se $\beta < 1$, então $\liminf_{n \rightarrow \infty} I(u_n) \geq c^0 + c^\infty$.

Demonstração. A existência de tal número $\beta \in (0, 1]$ vem do Lema de Concentração de Compacidade de Lions (ver [11]), uma vez que (u_n) é limitado em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Agora suponha que $\beta < 1$. Escolha $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e $r'_n \geq r_n \rightarrow \infty$ de tal forma que, a menos de uma subsequência,

$$\begin{aligned} \int_{B_{r_n}(x_n)} |u_n|^{p+1} dx &\geq \beta A - \varepsilon_n \\ \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{r'_n}(x_n)} |u_n|^{p+1} dx &\geq (1 - \beta)A - \varepsilon_n \end{aligned} \quad (3.18)$$

Seja ξ uma função de corte tal que $\xi(s) = 0$ para $s \leq 1$ ou para $s \geq 4$, $\xi(s) = 1$ para $2 \leq s \leq 3$ e $|\xi'(s)| \leq 2$. Tome $\phi(x) = \xi(|x - x_n|/r_n)u_n$ em (3.5), o qual é admissível. Nós obtemos quando $n \rightarrow \infty$, que

$$\int_{B_{3r_n} \setminus B_{2r_n}} (1 + 2u_n^2) |\nabla u_n|^2 + V|u_n|^2 + |u_n|^{p+1} = o(1) \quad (3.19)$$

onde usamos a estimativa (3.17) para $r'_n = 4r_n$. Agora tome outra função de corte η tal que $\eta(s) = 1$ para $s \leq 2$, $\eta(s) = 0$ para $s \geq 3$ e $|\eta'(s)| \leq 2$. Seja

$$w_n(x) = \eta\left(\frac{|x - x_n|}{r_n}\right) u_n(x), \quad v_n(x) = \left(1 - \eta\left(\frac{|x - x_n|}{r_n}\right)\right) u_n(x).$$

Decorre de (3.17) que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{p+1} dx &\geq \beta A - \varepsilon_n, \\ \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p+1} dx &\geq (1 - \beta)A - \varepsilon_n, \\ I(u_n) &= I(w_n) + I(v_n) + o(1). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Além disso, considerando $\phi = w_n$, segue de (3.16) e (3.19) que

$$\gamma(w_n) = \langle I'(u_n), w_n \rangle + o(1) = o(1)$$

Também temos que $\gamma(v_n) = o(1)$. Pelo Lema 3, existem constantes t_n e s_n tais que $t_n \rightarrow 1$ e $s_n \rightarrow 1$, e $\overline{w_n} = t_n w_n \in S$ e $\overline{v_n} = s_n v_n \in S$. Se (x_n) é limitado, então $\liminf_{n \rightarrow \infty} I(\overline{w_n}) \geq c^0$ e $\liminf_{n \rightarrow \infty} I(\overline{v_n}) \geq c^\infty$, uma vez que o suporte de $\overline{v_n}$ está fora da bola B_{R-M} onde $|x_n| \leq M$. Se (x_n) é ilimitado, então $\liminf_{n \rightarrow \infty} I(\overline{w_n}) \geq c^\infty$ e $\liminf_{n \rightarrow \infty} I(\overline{v_n}) \geq c^0$. Assim temos que

$$\begin{aligned} I(u_n) &= I(\omega_n) + I(v_n) + o(1) \\ &= I(t_n \omega_n) + I(s_n v_n) + o(1) \end{aligned} \quad (3.21)$$

e

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} I(u_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} I(t_n \omega_n) + \liminf_{n \rightarrow \infty} I(s_n v_n) \geq c^0 + c^\infty$$

Portanto $\liminf_{n \rightarrow \infty} I(u_n) \geq c^0 + c^\infty$. ■

Lema 10 c^∞ é alcançado e se $I^\infty(u) = c^\infty$ podemos assumir $u(x) > 0$ em $\mathbb{R}^N$.

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência tal que $u_n \in S_n^\infty$, $I^\infty(u_n) = c_n^\infty$, $c_n^\infty \rightarrow c^\infty$, quando $n \rightarrow \infty$. Usando o fato que $I^\infty(u_n)$ é limitado e $\gamma^\infty(u_n) = 0$, temos que

$\int_{B_n} (1 + u_n^2) |\nabla u_n|^2 dx$, $\int_{B_n} V_\infty |u_n|^2 dx$, $\int_{B_n} |u_n|^{p+1} dx$ são todos limitados em n . Pelo lema 9, existe uma sequência (x_n) tal que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $r > 0$, tal que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B_r(x_n)} |u_n|^{p+1} dx \geq A - \varepsilon$$

onde $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx$. Pela invariância do problema por translação, podemos supor que (x_n) é limitado. Portanto, temos que

$$\begin{aligned} (u_n) &\longrightarrow u \neq 0 \text{ em } L^{p+1}(\mathbb{R}^N) \\ u_n &\rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\mathbb{R}^N) \\ \nabla(u_n^2) &\rightharpoonup \nabla(u^2) \text{ em } L^2(\mathbb{R}^N) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Segue de $\gamma^\infty(u_n) = 0$ que

$$\begin{aligned} \gamma^\infty(u) &= \int_{\mathbb{R}^N} [(1 + 2u^2) |\nabla u|^2 + V_\infty u^2 - |u|^{p+1}] \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} [(1 + 2u_n^2) |\nabla u_n|^2 + V_\infty u_n^2 - |u_n|^{p+1}] \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \gamma^\infty(u_n) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Pelo Lema 2, encontramos $t > 0$ tal que $\gamma^\infty(tu) = 0$ e

$$\begin{aligned} c^\infty &\leq I^\infty(tu) \text{ segue de (3.22)} \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I^\infty(tu_n) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} I^\infty(u_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} c_n^\infty = c^\infty \end{aligned}$$

Portanto, $I^\infty(tu) = c^\infty$. A sequência minimizante pode ser tomada como funções não negativas (substitua u_n por $|u_n|$, se necessário), e obtemos $u(x) \geq 0$. De fato $u(x) > 0$ pelo Princípio do Máximo Forte (ver [24]). ■

Demonstração do Teorema 1 Afirmamos que $c^0 < c^\infty$. Seja u a função obtida no Lema 10, tal que $I^\infty(u) = c^\infty$ e $\gamma^\infty(u) = 0$. Como u é positiva, temos que $\int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx < \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u^2 dx$ sempre que $V \neq V_\infty$. Agora

$$\begin{aligned} \gamma(u) &= \int_{\mathbb{R}^N} [(1 + 2u^2) |\nabla u|^2 + V u^2 - |u|^{p+1}] \\ &< \int_{\mathbb{R}^N} [(1 + 2u^2) |\nabla u|^2 + V_\infty u^2 - |u|^{p+1}] \\ &= \gamma^\infty(u) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Pelo Lema 2, encontramos $t > 0$ tal que $\gamma(tu) = 0$. Se $t = 1$, temos que

$$c^0 \leq I(u) < I^\infty(u) = c^\infty$$

Se $t \neq 1$, temos pelo Lema 1, que

$$c^0 \leq I(tu) < I^\infty(tu) < I^\infty(u) = c^\infty. \quad (3.25)$$

Seja (u_n) uma sequência tal que $u_n \in S_n$, $I(u_n) = c_n^0 \rightarrow c^0$ quando $n \rightarrow \infty$. Usando os fatos que $I(u_n)$ é limitado e $\gamma(u_n) = 0$, temos $\int_{B_n} (1 + u_n^2) |\nabla u_n|^2 dx$, $\int_{B_n} V(x) |u_n|^2 dx$, $\int_{B_n} |u_n|^{p+1} dx$ são todos limitados em n . Pelo Lema 9, existe uma sequência (x_n) em $\mathbb{R}^N$ tal que para algum $\varepsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B_r(x_n)} |u_n|^{p+1} dx \geq A - \varepsilon, \quad (3.26)$$

onde $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx$. Então (x_n) deve ser limitado. De fato, caso contrário, se $v_n(x) = u_n(x + x_n)$,

$$\begin{aligned} I(u_n) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + u_n^2) |\nabla u_n|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u_n^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + v_n^2(x - x_n)) |\nabla v_n(x - x_n)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) v_n^2(x - x_n) dx \\ &\quad - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n(x - x_n)|^{p+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + v_n^2(y)) |\nabla v_n(y)|^2 dy + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (V(y + x_n) - V_\infty) v_n^2(y) dy \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty v_n^2(y) dy - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n(y)|^{p+1} dy \\ &= I^\infty(v_n) + o(1) \\ &= I^\infty(u_n) + o(1). \end{aligned}$$

Da mesma forma provamos que $\gamma^\infty(u_n) = \gamma(u_n) + o(1)$. Encontramos t_n tal que $t_n \rightarrow 1$ e $\gamma^\infty(t_n u_n) = 0$. Temos

$$c^\infty \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I^\infty(t_n u_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} I^\infty(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(u_n) = c^0, \quad (3.27)$$

o que contradiz (3.25). Quando (x_n) é limitada, temos que (u_n) converge para u em $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$. Então, podemos seguir a prova do Lema 10 para concluir a prova do Teorema 1.

Para provar o Teorema 2, precisamos do seguinte resultado de regularidade.

Lema 11 *Seja u uma solução fraca de (3.1). Então u e suas derivadas são limitadas e vale o seguinte decaimento exponencial no infinito*

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} (u^2 + |\nabla u|^2) dx \leq C e^{-\delta R},$$

para $C, \delta > 0$.

De fato, u juntamente com suas derivadas tem decaimento exponencial ponto a ponto no infinito, mas a estimativa no Lema 11 é suficiente para nosso propósito aqui. Essencialmente, o Lema 11 segue de [24], onde as equações semilineares foram consideradas.

Agora, seja $u \in S$ com $I(u) = c^0$ e seja $\phi \in S^\infty$ com $I^\infty(\phi) = c^\infty$. Podemos supor que u, ϕ são positivos. Pelo Lema 5, u e ϕ satisfazem as equações quasilineares correspondentes. De acordo com o Lema 11, temos que u e ∇u são limitadas,

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} (u^2 + |\nabla u|^2) dx \leq C e^{-\delta R},$$

e também que ϕ e $\nabla\phi$ são limitados, com

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} (\phi^2 + |\nabla\phi|^2) dx \leq Ce^{-\delta R},$$

para $C, \delta > 0$. Seja $\phi_R(x) = \phi(x + 2Re_1)$ com $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^N$.

Lema 12 $c^* \leq \sup_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2} I(\alpha u + \beta \phi_R) < c^0 + c^\infty$, desde que R seja grande o suficiente.

Demonstração. Nós dividimos a prova em três passos

1. Quando expandimos $I(\alpha u + \beta \phi_R)$, Todos os termos misturados envolvendo u e ϕ_R têm decaimento exponencial. Ou seja, todos os termos como $\int_{\mathbb{R}^N} u \phi_R$, $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u \nabla \phi_R|$, $\int_{\mathbb{R}^N} u |\nabla \phi_R|$, e $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u| \phi_R$ são da ordem $o(e^{-\delta R})$ quando $R \rightarrow \infty$. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} u \phi_R &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} u \phi_R + \int_{B_R} u \phi_R \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} u^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} \phi_R^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{B_R} u^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_R} \phi_R^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} u^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} \phi^2(x + 2Re_1) \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{B_R} u^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_R} \phi^2(x + 2Re_1) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} u^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(2Re_1)} \phi^2(y) \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{B_R} u^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_R(2Re_1)} \phi^2(y) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} u^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \phi^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{B_R} u^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} \phi^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} u^2 \right)^{\frac{1}{2}} + C \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} \phi^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq Ce^{-\delta R} \end{aligned} \tag{3.28}$$

Aqui δ é diferente do que no Lema 11.

2. Existem $R_0 > 0$ e $r_0 > 0$ de tal forma que para todos $R \geq R_0$, para todos $\alpha^2 + \beta^2 = r^2 > r_0^2$, $I(\alpha u + \beta \phi_R) \leq 0$. Seja $\bar{\alpha} = \alpha/r$, $\bar{\beta} = \beta/r$, e $\bar{\omega} = \bar{\alpha}u + \bar{\beta}\phi_R$. Nós primeiro encontramos um $R' > 0$ de tal forma que para todos os $R > R'$ nós temos $\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{\omega}|^2$, $\int_{\mathbb{R}^N} \bar{\omega}^2 |\nabla \bar{\omega}|^2$, $\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{\omega}|^{p+1}$, $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{\omega}|^2$ e $\int_{\mathbb{R}^N} V \bar{\omega}^2$ são todos limitados por cima e por baixo por duas constantes positivas. Também temos

$$I(\alpha u + \beta \phi_R) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + r^2 \bar{\omega}^2) r^2 |\nabla \bar{\omega}|^2 + \frac{1}{2} r^2 \int_{\mathbb{R}^N} V \bar{\omega}^2 - \frac{1}{p+1} r^{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{\omega}|^{p+1}$$

Se $p+1 > 4$, então a afirmação é fácil. Agora suponha que $p+1 = 4$. Como $\gamma(u) = 0$, $\gamma^\infty(\phi_R) = 0$, temos $\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 \leq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} u^4 - a$, $\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_R^2 |\nabla \phi_R|^2 \leq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_R^4 - a$ para algum $a > 0$ (independente de R). Pelo passo (1),

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 = \frac{1}{2} \bar{\alpha}^4 \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \bar{\beta}^4 \int_{\mathbb{R}^N} \phi_R^2 |\nabla \phi_R|^2 + o(e^{-\delta R}), \tag{3.29}$$

$$\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} \bar{\omega}^4 = \frac{1}{4} \bar{\alpha}^4 \int_{\mathbb{R}^N} u^4 + \frac{1}{4} \bar{\beta}^4 \int_{\mathbb{R}^N} \phi_R^4 + o(e^{-\delta R}). \tag{3.30}$$

Portanto, como R grande o suficiente (apenas dependendo de um $a > 0$ acima);

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \bar{\omega}^2 |\nabla \bar{\omega}|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} \bar{\omega}^4 - a_1, \quad \forall \bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2 = 1,$$

para algum $a_1 > 0$. Portanto, $I(\alpha u + \beta \phi_R) \leq 0$ para $\alpha^2 + \beta^2$ o suficientemente grande.

3. Nós damos a estimativa completa de $\sup_{\alpha, \beta} I(\alpha u + \beta \phi_R)$. Pelo passo 2, podemos supor que $\alpha^2 + \beta^2$ é limitado. Então pelo passo 1

$$I(\alpha u + \beta \phi_R) = I(\alpha u) + I(\beta \phi_R) + o(e^{-\delta R})$$

Nós também temos $\gamma(\phi_R) \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow \infty$. Pelo Lema 3, existe $t_R > 0$ tal que $t_R \rightarrow 1$ quando $R \rightarrow \infty$ e $\gamma(t_R \phi_R) = 0$. Então por (V2)

$$\begin{aligned} I(\alpha u + \beta \phi_R) &= I(\alpha u) + I(\beta \phi_R) + o(e^{-\delta R}) \\ &\leq I(\alpha u) + I(t_R \phi_R) + o(e^{-\delta R}) \\ &\leq I(u) + I^\infty(t_R \phi_R) + \frac{t_R^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (V(x) - V_\infty) \phi_R^2 dx + o(e^{-\delta R}) \\ &\leq I(u) + I^\infty(\phi_R) - \frac{1}{2} \int_{B_1(0)} (V_\infty - V(x - Re_1)) (\phi(x))^2 dx + o(e^{-\delta R}) \\ &\leq c^0 + c^\infty - c \int_{B_1(0)} \frac{(\phi(x))^2}{1 + |x - Re_1|^m} dx + o(e^{-\delta R}) \\ &\leq c^0 + c^\infty - \frac{c}{R^m} + o(e^{-\delta R}) \\ &< c^0 + c^\infty, \end{aligned} \tag{3.31}$$

desde R é grande o suficiente. Por um argumento de teorema de grau, existe $\alpha > 0$, $\beta < 0$ tal que $\alpha u + \beta \phi_R \in S^*$. Portanto, $c^* < c^0 + c^\infty$.

■

Demonstração do Teorema 2 Seja (u_n) uma sequência tal que $u_n \in S_n^*$, $I(u_n) = c_n^*$ com $c_n^* \rightarrow c^*$ quando $n \rightarrow \infty$. Pelo Lema 12, $c^* < c^0 + c^\infty$. Usando os fatos que $I(u_n)$ é limitado e $\gamma(u_n) = 0$ temos $\int_{B_n} (1 + u_n^2) |\nabla u_n|^2 dx$, $\int_{B_n} V(x) |u_n|^2 dx$, $\int_{B_n} |u_n|^{p+1} dx$ são todos limitados em n . Pelo Lema 9 e 12, existe uma sequência (x_n) de $\mathbb{R}^N$ tal que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $r > 0$ e

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B_r(x_n)} |u_n|^{p+1} dx \geq A - \varepsilon$$

onde $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx$. Afirmamos que (x_n) deve ser limitado. De outra forma, $\gamma^\infty(u_n^\pm) \rightarrow 0$, $I(u_n^\pm) - I^\infty(u_n^\pm) = o(1)$, quando $n \rightarrow \infty$. Pelo Lema 2, podemos encontrar t_n, s_n tal que $t_n \rightarrow 1$, $s_n \rightarrow 1$ e $\gamma^\infty(t_n u_n^+) = \gamma^\infty(s_n u_n^-) = 0$. Portanto

$$\begin{aligned} c^0 + c^\infty &< 2c^\infty \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I^\infty(t_n u_n^+ + s_n u_n^-) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I^\infty(u_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} I(u_n) \\ &= c^*. \end{aligned}$$

temos $c^0 + c^\infty \leq c^*$, uma contradição. Portanto, (x_n) deve ser limitado e u_n converge para $u \neq 0$ em $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$. Então, usando o mesmo argumento da prova do Lema 10, provamos que c^* é alcançado em algum $u \in S^*$.

Conclusão

1. Em primeiro lugar, esta abordagem nos permite tratar problemas quasilineares muito mais gerais da seguinte forma:

$$-\sum_{i,j=1}^N \partial_j(a_{i,j}(u)\partial_i u) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a'_{i,j}(u)\partial_i u \partial_j u + V(x)u = f(u), \text{ em } \mathbb{R}^N$$

do qual (1.1) é um caso especial e para o qual o método dos trabalhos [28], [25], [26] e [6] não podem ser aplicados diretamente.

2. Soluções de (1.1) estão relacionadas à existência de soluções de ondas estacionárias para equações quasilineares de Schrödinger de forma mais geral

$$i\partial_t z = -\Delta z + V(x)z - f(|z|^2)z - \kappa \nabla h(|z|^2)h'(|z|^2) \quad (4.1)$$

onde $V = V(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$ é um dado potencial, κ é uma constante real e f, h são funções reais. O caso semilinear correspondente $\kappa = 0$ tem sido estudado extensivamente nos últimos anos (ver por exemplo, [12]; [29]; [16]; [21]). As equações quasilineares da forma (4.1) aparecem mais naturalmente na física matemática e têm sido derivadas como modelos de vários fenômenos físicos correspondentes a vários tipos de h . Por exemplo com $\kappa > 0$ as equações surgem na teoria do filme superfluido e na mecânica quântica dissipativa (por exemplo, [5]; [9]; [14]). Para mais motivações físicas e mais referências sobre aplicações, consulte [10], [22] e [28] e suas referências.

Referências

- [1] de Bouard; Hayashi; Saut. Global existence of small solutions to a relativistic nonlinear Schrödinger equation. *Communications in Mathematical Physics*, 189(1):73–105, 1997.
- [2] Makhankov; Fedyanin. Non-linear effects in quasi-one-dimensional models of condensed matter theory. *Physics Reports*, 104(1):1–86, 1984.
- [3] Borovskii; Galkin. Dynamic modulation of an ultrashort high-intensity laser pulse in matter. *JETP*, 77(4):562–573, 1993.
- [4] Brihaye; Hartmann. Solitons on nanotubes and fullerenes as solutions of a modified non-linear Schrödinger equation. *arXiv preprint nlin/0404059*, 2004.
- [5] Hasse. A general method for the solution of nonlinear soliton and kink Schrödinger equations. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, 37(1):83–87, 1980.
- [6] Colin; Jeanjean. Solutions for a quasilinear Schrödinger equation: a dual approach. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 56(2):213–226, 2004.
- [7] Kesavan. Topics in functional analysis and applications. 1989.
- [8] Kosevich; Ivanov; Kovalev. Magnetic solitons. *Physics Reports*, 194(3-4):117–238, 1990.
- [9] Kurihara. Large-amplitude quasi-solitons in superfluid films. *Journal of the Physical Society of Japan*, 50(10):3262–3267, 1981.
- [10] Brüll; Lange. Solitary waves for quasilinear Schrödinger equations. *Expo. Math*, 4:278–288, 1986.
- [11] Lions. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. the locally compact case, part 1. In *Annales de l’Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*, volume 1, pages 109–145. Elsevier, 1984.
- [12] Berestycki; Lions. Nonlinear scalar field equations, i existence of a ground state. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 82(4):313–345, 1983.
- [13] Ambrosetti; Malchiodi. *Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems*, volume 104. Cambridge University Press, 2007.
- [14] Nakamura. Damping and modification of exciton solitary waves. *Journal of the Physical Society of Japan*, 42(6):1824–1835, 1977.
- [15] Poppenberg. On the local well posedness of quasilinear Schrödinger equations in arbitrary space dimension. *Journal of Differential Equations*, 172(1):83–115, 2001.

- [16] Rabinowitz. On a class of nonlinear Schrödinger equations. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 43(2):270–291, 1992.
- [17] Ritchie. Relativistic self-focusing and channel formation in laser-plasma interactions. *Physical Review E*, 50(2):R687, 1994.
- [18] Schott. Stationäre lösungen quasilinearer Schrödinger-Gleichungen diploma thesis Universität Köln. 2002.
- [19] Ruiz; Siciliano. Existence of ground states for a modified nonlinear Schrödinger equation. *Nonlinearity*, 23(1):1221–1233, 2010.
- [20] Colin; Jeanjean; Squassina. Stability and instability results for standing waves of quasi-linear Schrödinger equations. *Nonlinearity*, 23(6):1353, 2010.
- [21] Strauss. Existence of solitary waves in higher dimensions. *Communications in Mathematical Physics*, 55(2):149–162, 1977.
- [22] Lange; Poppenberg; Teismann. Nash Moser methods for the solution of quasilinear Schrödinger equations. *Communications in Partial Differential Equations*, 24(7-8):1399–1418, 1999.
- [23] Lange; Poppenberg; Teismann. Nonlinear singular Schrödinger-type equations. *Chapman and Hall CRC Research Notes in Mathematics*, pages 113–128, 1999.
- [24] Gilbarg; Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. springer, 2015.
- [25] Liu; Wang. Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations 1. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2003.
- [26] Liu; Wang; Wang. Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations 2. *Journal of Differential Equations*, 187(2):473–493, 2003.
- [27] Liu; Wang; Wang. Solutions for quasilinear Schrödinger equations via the Nehari method. *Communications in Partial Differential Equations*, 29(5-6):879–901, 2004.
- [28] Poppenberg; Schmitt; Wang. On the existence of soliton solutions to quasilinear Schrödinger equations. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 14(3):329–344, 2002.
- [29] Floer; Weinstein. Nonspreading wave packets for the cubic Schrödinger equation with a bounded potential. *Journal of Functional analysis*, 69(3):397–408, 1986.
- [30] Bartsch; Weth; Willem. Partial symmetry of least energy nodal solutions to some variational problems. *Journal de Analyse Mathématique*, 96(1):1–18, 2005.
- [31] Hartmann; Zakrzewski; Wojtek. Electrons on hexagonal lattices and applications to nanotubes. *Physical Review B*, 68(18):184302, 2003.
- [32] Brihaye; Hartmann; Zakrzewski. Spinning solitons of a modified nonlinear Schrödinger equation. *Physical Review D*, 69(8):087701, 2004.
- [33] Brizhik; Eremko; Piette; Zakrzewski. Electron self-trapping in a discrete two-dimensional lattice. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 159(1-2):71–90, 2001.
- [34] Brizhik; Eremko; Piette; Zakrzewski. Static solutions of a d-dimensional modified nonlinear Schrödinger equation. *Nonlinearity*, 16(4):1481, 2003.