

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

Matheus Braga Bovareto de Oliveira

Diagnose de Falhas em Plataformas Veiculares
com Excitação pela Base Através da
Metodologia dos Observadores de Estado

Ilha Solteira

2019

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JULIO DE MESQUITA FILHO"
FACULDADE DE ENGENHARIA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA

Matheus Braga Bovareto de Oliveira

**Diagnose de Falhas em Plataformas Veiculares com Excitação
pela Base Através da Metodologia dos Observadores de Estado**

Dissertação apresentada ao Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
como parte dos requisitos necessários para
obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Gilberto Pechoto de Melo

Ilha Solteira

2019

FICHA CATALOGRÁFICA

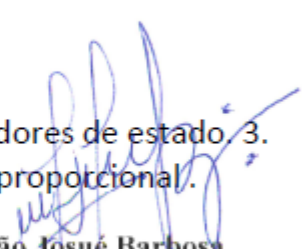
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

O48d Oliveira, Matheus Braga Bovareto de.
Diagnose de falhas em plataformas veiculares com excitação pela base através da metodologia dos observadores de estado / Matheus Braga Bovareto de Oliveira. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2019
98 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Mecânica dos Sólidos, 2019

Orientador: Gilberto Pechoto de Melo
Inclui bibliografia

1. Monitoramento de integridade estrutural. 2. Observadores de estado. 3. Posicionamento ótimo de sensores. 4. Amortecimento não proporcional.


João Josué Barbosa

Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação
Diretor Técnico
CRB 8-5642

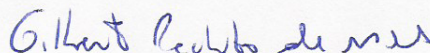
CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

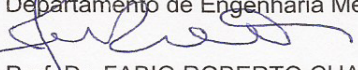
TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Diagnose de falhas em plataformas veiculares com excitação pela base através da metodologia dos observadores de Estado

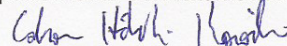
AUTOR: MATHEUS BRAGA BOVARETO DE OLIVEIRA

ORIENTADOR: GILBERTO PECHOTO DE MELO

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em ENGENHARIA MECÂNICA, área de conhecimento: Mecânica dos Sólidos pela Comissão Examinadora:


Prof. Dr. GILBERTO PECHOTO DE MELO
Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP


Prof. Dr. FABIO ROBERTO CHAVARETTE
Departamento de Matemática / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP


Prof. Dr. EDSON HIDEKI KOROISHI
Departamento de Engenharia Mecânica / Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

Ilha Solteira, 18 de dezembro de 2019

Agradecimentos

Agradeço, acima de tudo a Deus, por me conceder oportunidades e a possibilidade de atingir sucessivas conquistas pessoais e profissionais.

Aos meus pais, pelo suporte incondicional.

Ao meu orientador Prof. Dr. Gilberto Pechoto de Melo pela confiança, orientação e conhecimento transmitido.

Ao demais professores do Departamento de Engenharia Mecânica da Unesp-Feis, em especial ao Prof. Dr. João Antônio Pereira, pelas contribuições.

Aos meus amigos, Pedro Zanolli, Luis Paulo Lima, Frederico Ribeiro, Renan Sanchez, Lucas Zanetti, Oscar Scussel, Vinícius Germano e João Francisco Silva Trentin, pela amizade, conhecimentos trocados, e companheirismo, que tornaram o trajeto mais leve.

Ao CNPq pelo apoio ao projeto 133982/2018-1.

Resumo

O uso da metodologia de observadores de estado para detecção de dano requer a análise da observabilidade do modelo físico-matemático do sistema e aponta para a necessidade de posicionar sensores de forma otimizada. Visto que plataformas veiculares podem se apresentar como sistemas com amortecimento não proporcional, é apresentada uma metodologia para o cálculo de índices de posicionamento H_2 para este tipo de sistema. Para a plataforma veicular analisada com amortecimento proporcional, índices de posicionamento H_2 são comparados com índices grammianos, sendo demonstrado que ambos resultam em uma mesma configuração ótima de sensores. A análise da observabilidade é conduzida a partir dos principais modos de vibrar, sendo utilizada a norma H_2 para definição de quais modos devem ser retidos no modelo reduzido. Observadores robustos, atuando em paralelo com o sistema, são utilizados para localização e quantificação da severidade do dano. É mostrado que, para plataformas veiculares excitadas pela base com deslocamentos do tipo degrau, um índice de dano que compara as saídas medidas e estimadas permite alcançar este objetivo.

Palavras-chave: Monitoramento de integridade estrutural. Observadores de Estados. Posicionamento ótimo de sensores. Amortecimento não proporcional.

Abstract

The use of state observer's methodology for damage detection requires the observability analysis of the physical–mathematical model of the system and points to the need of positioning sensors optimally. Since vehicle platforms can be presented as systems with non-proportional damping, a methodology for calculating H_2 positioning indices for this type of system is presented. For the vehicle platform analyzed with proportional damping, H_2 positioning indices are compared with Grammian indices, showing that both result in the same optimal sensor configuration. The observability analysis is conducted from the main modes of vibration, using the H_2 norm to define which modes should be retained in the reduced model. Robust observers acting in parallel with the system are used to locate and quantify the severity of the damage. It is shown that, for vehicle platforms stimulated by the base with step-type displacements, a damage index that compares the measured and estimated outputs reaches this goal.

Keywords: Structural health monitoring. State Observers. Sensors optimal placement. Non-proportional damping.

Lista de Figuras

1	Plataforma Veicular	27
2	Elemento de placa de Kirchoff	28
3	Placa discretizada	31
4	Observador de estados de ordem plena	39
5	Valor estimado e medido de uma variável de estado	41
6	Excitação devido à massa desbalanceada	57
7	Sistema massa-mola-amortecedor excitado pela base	57
8	Excitação degrau pela base	58
9	Fluxuograma para seleção de modos e posicionamento de sensores	60
10	Banco de observadores para monitoramento da integridade estrutural	62
11	Modos com maior norma H_2	65
12	Índices de posicionamento H_2 para o primeiro modo	66
13	Índices de posicionamento H_2 para o segundo modo	66
14	Índices de posicionamento H_2 para o terceiro modo	67
15	Índices de posicionamento H_2 para o quinto modo	67
16	Índices de posicionamento H_2 para o sétimo modo	68
17	Índices de posicionamento H_2 para o modelo reduzido	69
18	Coefficiente correlação entre o nó 23 e os demais	70
19	Coefficiente correlação entre o nó 21 e os demais	71
20	Resposta medida no nó 25 para perda de 25% em k_8	72
21	Índices da dano para perda de 25% em k_8	73
22	Resposta medida no nó 21 perda de 10% em c_6	74

23	Índices de dano para perda de 10% em c_6	74
24	Índices H_2 do primeiro modo para plataforma com amortecimento não proporcional	75
25	Índices H_2 do segundo modo para plataforma com amortecimento não proporcional	76
26	Índices H_2 do terceiro modo para plataforma com amortecimento não proporcional	76
27	Índices H_2 do quarto modo para plataforma com amortecimento não proporcional	77
28	Índices H_2 do quinto modo para plataforma com amortecimento não proporcional	77
29	Índices H_2 do modelo reduzido para plataforma com amortecimento não proporcional	78
30	Índices de correlação do nó 23 com os demais para plataforma com amortecimento não proporcional	79
31	Resposta medida no nó 21 para perda de 15% em h_1 considerando amortecimento não proporcional	80
32	Índices de dano para perda de 15% em h_1 considerando amortecimento não proporcional	81
33	Resposta medida no nó 23 para perda de 20% em h_{16} considerando amortecimento não proporcional	81
34	Índices de dano para perda de 20% em h_{16} considerando amortecimento não proporcional	82
35	Primeiro modo de vibrar da placa	89
36	Segundo modo de vibrar da placa	90
37	Terceiro modo de vibrar da placa	90
38	Quinto modo de vibrar da placa	91
39	Sétimo modo de vibrar da placa	91
40	Índices grammianos para o primeiro modo	92

41	Índices grammianos para o segundo modo	93
42	Índices grammianos para o terceiro modo	93
43	Índices grammianos para o quinto modo	94
44	Índices grammianos para o sétimo modo	94
45	Índices grammianos para modelo reduzido	95
46	Coeficiente de correção entre o nó 23 e os demais utilizando índices gram- mianos	96
47	Coeficiente de correção entre o nó 21 e os demais utilizando índices gram- mianos	97

Lista de Tabelas

1	Dados da plataforma veicular	28
2	Validação do modelo	63
3	Norma H_2 para os dez primeiros modos	64
4	Posições com os maiores índices H_2 para cada modo	68
5	Posicionamento de sensores via índice H_2	71
6	Posições com os maiores índices H_2 para plataforma com amortecimento não proporcional	78
7	Posicionamento de sensores via índice H_2 para plataforma com amortecimento não proporcional	79

Lista de Símbolos

$\mathbf{A}$	- Matriz dinâmica
$\mathbf{A}_d$	- Matriz dinâmica danificada
$\mathbf{A}_m$	- Matriz dinâmica em coordenadas modais
$\mathbf{A}_{mi}$	- Matriz dinâmica do i —ésimo modo de vibrar
$\mathbf{B}$	- Matriz de entradas
$\mathbf{B}_m$	- Matriz de entradas em coordenadas modais
$\mathbf{B}_{mi}$	- Matriz de entradas do i —ésimo modo de vibrar
$\mathbf{B}_o$	- Matriz de posicionamento das entradas
$\mathbf{B}_{om}$	- Matriz de posicionamento das entradas em coordenadas modais
$\mathbf{C}$	- Matriz de amortecimento da plataforma veicular
$\mathbf{C}_{np}$	- Matriz de amortecimento não proporcional
$\mathbf{C}_m$	- Matriz de saídas em coordenadas modais
$\mathbf{C}_{mi}$	- Matriz de saídas do i —ésimo modo
$\mathbf{C}_{mki}$	- Matriz de saídas do i —ésimo modo com o k —ésimo sensor
$\mathbf{C}_{mp}$	- Matriz de amortecimento em coordenadas modais
$\mathbf{C}_{mq}$	- Matriz de saídas de deslocamentos em coordenadas modais
$\mathbf{C}_{mv}$	- Matriz de saídas de velocidades em coordenadas modais
$\mathbf{C}_{oq}$	- Matriz de saídas de deslocamentos em coordenadas físicas
$\mathbf{C}_{ov}$	- Matriz de saídas de velocidades em coordenadas físicas
$\mathbf{C}_p$	- Matriz de amortecimento proporcional
$\mathbf{C}_s$	- Matriz de saídas
E	- Módulo de elasticidade longitudinal
$\mathbf{e}(t)$	- Vetor de erro
$\ G\ _2$	- Norma H_2 do sistema
$\ G_i\ _2$	- Norma H_2 do i —ésimo modo
$\ G_{ki}\ _2$	- Norma H_2 do i —ésimo modo com o k —ésimo sensor
$\ G_r\ _2$	- Norma H_2 do modelo reduzido
h	- Espessura da placa de alumínio
$\mathbf{I}$	- Matriz identidade
$\mathbf{I}_d$	- Índice de dano

J	- Índice de desempenho
$\mathbf{K}$	- Matriz de rigidez da plataforma veicular
$\mathbf{K}_c$	- Ganho do controlador
$\mathbf{K}_e$	- Matriz de rigidez do elemento de placa de Kirchhoff
$\mathbf{K}_g$	- Matriz global de rigidez da placa que simula o chassi
$\mathbf{K}_m$	- Matriz de rigidez modal
$\mathbf{L}$	- Ganho do observador
m	- Massa das rodas
m_c	- Massa concentrada que simula a massa do motor
$\mathbf{M}$	- Matriz de massa da plataforma veicular
$\mathbf{M}_c$	- Matriz de controlabilidade
$\mathbf{M}_e$	- Matriz de massa do elemento de placa de Kirchhoff
$\mathbf{M}_g$	- Matriz global de massa da placa que simula o chassi
$\mathbf{M}_m$	- Matriz de massa modal
$\mathbf{M}_o$	- Matriz de observabilidade
n	- número de variáveis de estados em coordenadas físicas
n_d	- número de graus de liberdade
n_m	- número de modos de vibrar do sistema
n_r	- número de modos de vibrar retidos
N_m	- número de variáveis de estados em coordenadas modais
$\mathbf{P}$	- Matriz que satisfaz a equação matricial reduzida de Ricatti
$\mathbf{q}(t)$	- Vetor de coordenadas físicas
$\mathbf{q}_m(t)$	- Vetor de coordenadas modais
$\mathbf{Q}$	- Matriz do método LQR
Q_i	- Força generalizada
$\mathbf{Q}_x$	- Vetor contendo amplitude de resposta
r	- Número de saídas
r_{ik}	- Coeficiente de correlação
R	- Número de posições candidatas a receberem um sensor
$\mathbf{R}$	- Matriz do método LQR
s	- Número de entradas
t	- Instante de tempo
T	- Energia cinética
$\mathbf{u}(t)$	- vetor de entradas
V	- Energia potencial

w_{ci}	-	fator de controlabilidade modal do i-ésimo modo
w_{oi}	-	fator de observabilidade modal do i-ésimo modo
$\mathbf{W_c}$	-	Grammiano de controlabilidade
$\mathbf{W_o}$	-	Grammiano de observabilidade
$\mathbf{x}(t)$	-	Vetor de estados em coordenadas físicas
$\hat{\mathbf{x}}(t)$	-	Vetor de estados estimado
$\mathbf{x_m}(t)$	-	Vetor de estados em coordenadas modais
$\mathbf{y}(t)$	-	Vetor de saídas
$\hat{\mathbf{y}}(t)$	-	Vetor de saídas estimado

Letras Gregas

α	-	Fator de proporcionalidade
β	-	Fator de proporcionalidade
ζ_i	-	Razão de amortecimento do i-ésimo modo de vibrar
ρ	-	Densidade do alumínio
σ_{2ki}	-	Índice H_2 de posicionamento de sensores
σ_{gki}	-	Índice grammiano de posicionamento de sensores
σ_{2s}	-	Vetor H_2 de posicionamento de sensores
σ_{gs}	-	Vetor grammiano de posicionamento de sensores
Σ_2	-	Matriz H_2 de posicionamento de sensores
Σ_g	-	Matriz grammiana de posicionamento de sensores
ϕ_i	-	i-ésimo modo de vibrar
Φ	-	Matriz modal para sistema com amortecimento proporcional
Ψ	-	Matriz modal para sistema com amortecimento não proporcional
ω_i	-	i-ésima frequência natural
Ω	-	Matriz de frequências naturais

Sumário

1	Introdução	17
1.1	Objetivos do Trabalho	23
1.2	Contribuição do Trabalho	24
1.3	Organização do Trabalho	24
2	Fundamentação Teórica	26
2.1	Modelagem Estrutural	26
2.1.1	<i>Modelagem da Plataforma Veicular por Elementos Finitos</i>	26
2.1.2	<i>Espaço de Estados em Coordenadas Físicas</i>	34
2.1.3	<i>Modelagem do Dano Estrutural</i>	35
2.2	Observadores de Estados	36
2.2.1	<i>Observabilidade e controlabilidade</i>	36
2.2.2	<i>Observadores de Estados de Ordem Plena</i>	38
2.2.3	<i>Ganho do Observador</i>	41
2.3	Posicionamento ótimo de sensores	43
2.3.1	<i>Representação em Coordenadas Modais</i>	43
2.3.2	<i>Espaço de Estados em Coordenadas Modais</i>	46
2.3.2.1	<i>Sistemas com Amortecimento Proporcional</i>	46
2.3.2.2	<i>Sistemas com Amortecimento não Proporcional</i>	47
2.3.3	<i>Norma do Sistema H_2</i>	49
2.3.4	<i>Redução de Modelo</i>	51
2.3.5	<i>Índices de Posicionamento de sensores</i>	52

2.3.5.1	Índice H_2	52
2.3.5.2	Índice grammiano	54
3	Metodologia	56
3.1	Forças de Excitação	56
3.1.1	<i>Excitação Devido à Massa Desbalanceada</i>	56
3.1.2	<i>Excitação pela base</i>	57
3.2	Seleção dos Modos Retidos e Posicionamento Ótimo de Sensores	58
3.3	Monitoramento de Integridade Estrutural por Observadores de Estados . . .	60
4	Resultados e Discussões	63
4.1	Validação do Modelo	63
4.2	Sistema com Amortecimento Proporcional	64
4.3	Sistema com Amortecimento Não Proporcional	75
5	Considerações Finais	83
5.1	Sugestões para Trabalhos Futuros	84
	Referências	85
	Anexo A – Modos de Vibrar Retidos	89
	Anexo B – Posicionamento Ótimo de Sensores via Índices Gram- mianos	92

1 Introdução

A detecção e localização de falhas em sistemas tem sido objeto de estudos desde o século passado, motivadas não somente por fatores econômicos mas também devido a sérios acidentes envolvendo falhas catastróficas em estruturas (CAVALINI Jr, 2009). Nesse contexto, surge o desenvolvimento das técnicas de monitoramento de integridade estrutural, do inglês *Structural Health Monitoring* (SHM), com o objetivo de garantir que as estruturas operem em condições seguras, identificando danos antes que estes se tornem falhas. O conceito de dano e falha é descrito em Worden e Dulieu-Barton (2004), sendo definida como falha uma alteração que resulta em uma operação inaceitável do sistema, enquanto o termo dano é definido como uma alteração que retira o sistema de suas condições ideais de operação, porém sendo ainda mantido em condições aceitáveis.

O objetivo de monitorar a integridade de estruturas é de interesse comum das comunidades de engenharia mecânica, civil e aeroespacial e encontra importantes aplicações também na indústria petrolífera (BROWNJOHN, 2007; DOEBLING *et al.*, 1998). Segundo Melo (1998), entre os aspectos econômicos que motivam o desenvolvimento de tais técnicas, pode-se citar a necessidade cada vez maior das indústrias em manter seus equipamentos em funcionamento, livre de paradas abruptas, uma vez que distúrbios em condições normais de operação levam a uma deterioração da performance do sistema. Worden e Dulieu-Barton (2004) citam que, caso as técnicas de monitoramento fossem suficientemente avançadas, haveria a possibilidade de utilizar fatores de segurança menos conservativos em estruturas, diminuindo consideravelmente seu custo. Balageas, Fritzen e Güemes (2010) frisam a importância do uso de técnicas de SHM para reduzir custos de manutenção, substituindo as inspeções periódicas por inspeções baseadas no desempenho da estrutura monitorada, obtendo custo de manutenção e confiabilidade constantes, ao contrário do que usualmente ocorre em estruturas convencionais, onde os custos de manutenção aumentam e a confiabilidade cai ao longo do tempo.

Balageas, Fritzen e Güemes (2010) traçam um paralelo entre as técnicas de SHM e de ensaios não destrutivos. A principal diferença entre estas duas metodologias reside

no fato de, em SHM, o objetivo ser o de monitorar a estrutura em tempo real através de uma rede de sensores, enquanto os ensaios não destrutivos são, em geral, realizados após determinado tempo de uso, com base no conhecimento de onde os danos possam estar localizados. Estas características tornam a metodologia de SHM especialmente útil em estruturas e aeronaves (WORDEN; DULIEU-BARTON, 2004). SHM pode ser considerada uma tecnologia emergente que surge integrando medições feitas em tempo real, análise estatística dos dados coletados e algoritmos computacionais. A estrutura, então, passa a ser considerada parte de um sistema mais amplo, envolvendo todos os demais subsistemas necessários ao monitoramento (BALAGEAS; FRITZEN; GÜEMES, 2010).

As técnicas de SHM podem ser classificadas em passivas e ativas, sendo consideradas ativas quando usarem atuadores para excitar a estrutura e passivas caso não utilizem (RAGHAVAN, 2007; IHN; CHANG, 2008). A extração de informações sobre a saúde estrutural pode ocorrer através do monitoramento de vibrações e propriedades modais, uso de ondas acústicas seguido da análise do sinal de resposta, ou mesmo processamento de imagens obtidas de câmeras (FENG D.; FENG, 2018; INMAN *et al.*, 2005; WEVERS M.; LAMBRIGHS, 2008; DOEBLING *et al.*, 1998). O dano estrutural, por sua vez, pode ser classificado em linear ou não linear. Para o primeiro caso, assume-se que a estrutura continua a responder linearmente após o dano, enquanto no último, esta consideração não pode ser feita. A análise pode ser conduzida então com o suporte de um modelo físico-matemático que represente o comportamento do sistema, o que geralmente é feito considerando-se o modelo de dano linear (DOEBLING *et al.*, 1998).

Outra forma de classificar as metodologias de SHM consiste em determinar quatro níveis a serem atingidos sucessivamente (RYTTER, 1993; DOEBLING *et al.*, 1998; WORDEN K.; MANSON, 2007):

Nível 1: Detecção do dano

Nível 2: Localização do dano

Nível 3: Quantificação da severidade do dano

Nível 4: Predição da vida útil remanescente da estrutura

O primeiro nível deve ser atingido com confiabilidade, visto que uma mudança medida do comportamento da estrutura pode não significar necessariamente um dano, além disso, a presença de incertezas tanto no modelo quanto nas fontes de excitação e a complexidade geométrica das estruturas devem também ser levadas em conta (MATTEI, 2019;

WORDEN; MANSON; FIELLER, 2000). Em regimes lineares, com o uso de modelos físico-matemáticos do sistema que sejam capazes de simular o comportamento com dano, é possível atingir até o nível 3, sendo possível também atingi-lo com o uso de redes neurais treinadas para o reconhecimento de padrões caso a rede possa ser alimentada com dados do sistema danificado (DOEBLING *et al.*, 1998; WORDEN K.; MANSON, 2007).

Entre as técnicas de monitoramento estrutural baseadas em modelos matemáticos, podem ser destacados os observadores de estado (MELO, 1998; MONTE ALEGRE, 2009; RIBEIRO, 2015). Tal ferramenta permite estimar respostas dinâmicas em locais de interesse a partir das respostas medidas e do conhecimento da excitação aplicada, desde que seja garantida a observabilidade do sistema (OGATA, 1998; O'REILLY, 1983). Esta metodologia permite contornar o problema de obter as respostas dinâmicas em regiões onde não possam ser feitas medidas diretamente, sendo possível também determinar a localização e quantificar a severidade do dano a partir destas respostas estimadas. Além disso, esta metodologia pode ser utilizada na identificação de sistemas como em Oliveira (2015). Outra utilização dos observadores de estado ocorre em sistemas de controle que necessitam de realimentação do vetor de estados completo, o que muitas vezes não pode ser obtido somente através dos estados medidos (O'REILLY, 1983). A detecção do dano e sua localização ocorrem em virtude da comparação entre as respostas medidas através de sensores e aquelas estimadas através do observador, resultando em um resíduo a ser analisado. A ideia consiste em montar um banco de observadores que atue em paralelo com o sistema, sendo cada observador projetado para um tipo específico de dano estrutural a uma dada severidade (ARAÚJO, 2005; KOROISHI, 2009; MONTE ALEGRE, 2009).

A teoria dos observadores de estados foi estudada inicialmente em Kalman (1959), Kalman (1960) e Kalman e Bucy (1961) para casos estocásticos em que se desejava projetar um sistema de controle onde haviam estados indisponíveis para realimentação. Estes trabalhos também apresentam os conceitos de observabilidade e controlabilidade ¹, além de relacioná-los através do princípio da dualidade. Em Luenberger (1964), Luenberger (1966) e Luenberger (1971) novos avanços são alcançados com a demonstração de que o vetor de estados reconstruídos pode ser utilizado para realimentação em sistemas de controle sem perda de estabilidade. As contribuições de Luenberger também incluem apresentar a metodologia para reconstrução de estados utilizando observadores, introduzindo tópicos a respeito de observadores tipo identidade, observadores de ordem reduzida e critérios de estabilidade para os mesmos. De acordo com Melo (1998), um dos fatores que inicialmente limitaram o uso de observadores em detecção de falhas para aplicações

¹Os conceitos de controlabilidade, observabilidade e vetor de estados são discutidos no Capítulo 2

industriais foi o elevado tempo em regime transiente e os erros elevados durante o regime permanente, que poderiam resultar em falsos alarmes e até mesmo em desligamento do sistema. O projeto de observadores se dava, na época, através da alocação de pólos do sistema e objetivava reduzir o tempo em transiente e melhorar a convergência em regime permanente, além de garantir estabilidade.

Desde então, o uso de observadores de estado para detecção de danos foi amplamente aprimorado e aplicado por diversos pesquisadores. [Melo \(1998\)](#) utiliza o conceito de banco de observadores para detecção e localização de danos em mesas vibratórias, levando em consideração o caso em que há ruído de medida. [Cavalini Jr \(2009\)](#) propõe o uso dos observadores de estado modais, a fim de analisar qual modo de vibrar é mais afetado por danos modelados como perdas de rigidez em placas de alumínio. [Koroishi \(2009\)](#) aplica a metodologia dos observadores de estados para detectar e localizar falhas em sistemas rotativos submetidos a excitações desconhecidas. [Ribeiro \(2015\)](#) faz uso dos observadores de estado para de detecção de danos em uma placa apoiada sobre molas e acoplada a um absorvedor dinâmico de vibrações. O dano é considerado como uma perda de rigidez nas molas localizadas entre o suporte e a placa. [Mattei \(2019\)](#) implementa o método de redundância analítica para detecção de dano em vigas engastadas, dispondo apenas do observador de estado projetado com base no sistema saudável.

Para utilização da metodologia dos observadores de estado é necessário um modelo físico-matemático que represente a dinâmica do sistema suficientemente bem. Usualmente, tais modelos são derivados do método dos elementos finitos, *Finite Element Method* (FEM) em inglês. Este método consiste em discretizar a geometria de sistemas sólidos contínuos de geometria arbitrária e sujeitos a ações externas em elementos de análise simplificada, chamados elementos finitos, a fim de obter o estado de tensão e de deformação deste sistema ([AZEVEDO, 2003](#)). A partir deste procedimento, são obtidas as matrizes de massa e rigidez do elemento, que podem ser agrupadas, através da equação de Euler-Lagrange, em uma matriz de massa global e outra de rigidez global, representando a estrutura como um todo.

O resultado é a obtenção de um modelo nodal, que descreve o comportamento do sistema através de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. Devido ao grande número de elementos finitos que podem ser necessários para descrever o sistema, estes modelos apresentam um elevado custo computacional ([GAWRONSKI, 2004](#)). Outra desvantagem em sistemas assim descritos consiste na dificuldade do cálculo da matriz de observabilidade ², dificultando a análise sobre a observabilidade, o que pode limitar o uso

²Maiores detalhes sobre a matriz de observabilidade são apresentados no Capítulo 2.

dos observadores de estado na reconstrução de estados não medidos.

Em estruturas de maior porte, outro problema a ser contornado é o fato de que nem sempre são evidentes as posições onde devem ser feitas as medidas que alimentarão o observador de estados. O mesmo problema é encontrado em modelos nodais obtidos via FEM, devido ao alto número de posições candidatas. Surge então a necessidade de se obter metodologias que forneçam o posicionamento ótimo dos sensores, uma vez que seria dispendioso do ponto de vista econômico manter um número demasiadamente grande de sensores ou tê-los em posições que não representem devidamente a dinâmica do sistema (GÜNEY; ESKINAT, 2008). O controle ativo de vibrações, onde forças secundárias são aplicadas à estrutura através de controladores, requer, por sua vez, metodologias para o posicionamento ótimo dos controladores. Este controle é exercido com base nas medidas obtidas a partir da estrutura, de forma que o posicionamento de atuadores e sensores é uma tarefa que deve ser levada em conjunto.

Mirza e Niekerk (1999) enfatizam o interesse em posicionar os controladores em pontos onde seja possível maximizar o controle sobre os modos de vibrar. Igualmente, destacam a necessidade de que os sensores sejam posicionados onde possam captar, da melhor forma, as informações sobre a dinâmica da estrutura. A fim de exemplificar, os autores citam que sensores posicionados próximos a pontos que permanecem estacionários durante a vibração em determinado modo não são capazes de medir razoavelmente a resposta daquele determinado modo. Igualmente, os atuadores que se encontrarem nesta situação serão incapazes de exercer controle efetivo sobre o sistema, ou requererão aplicação de forças excessivas para isso.

Neste contexto, o uso dos grammianos de observabilidade e de controlabilidade são de grande valia. Por fornecerem uma estimativa qualitativa da observabilidade e controlabilidade do sistema, podem ser utilizados para avaliar a relevância de uma posição candidata a receber um sensor ou um controlador (NESTOROVIĆ; TRAJKOV, 2013). Outra forma de avaliar o posicionamento de sensores e atuadores pode ser realizada através do uso de normas do sistema, que funcionam como métricas sobre o comportamento dinâmico da estrutura (GÜNEY; ESKINAT, 2008). Uma importante ferramenta em questão é a transformação do modelo de coordenadas físicas para o modelo em coordenadas modais, onde os índices de posicionamento podem ser gerados para cada modo de vibrar individualmente e posteriormente combinados para realizar esta avaliação na estrutura como um todo.

A construção de um modelo em coordenadas modais a partir do modelo em coorde-

nadas físicas é obtida através da análise modal da estrutura, de tal forma que se torna possível a construção de um modelo analítico que não utiliza diretamente os parâmetros físicos de massa e rigidez do sistema, sendo baseado nas frequências naturais, amortecimentos modais e modos de vibrar. Os estudos nesta área vem se intensificando desde a década de 70 (EWINS, 1984; SCHWARTZ B. J. ; RICHARDSON, 1990; SILVA; MAIA, 1997). Esta metodologia é denominada análise modal analítica quando, partindo do modelo físico caracterizado pelas matrizes de massa, rigidez e amortecimento, são obtidos os parâmetros que compõe o modelo modal ³. Em contrapartida, pode-se obter um modelo modal a partir das respostas extraídas de medidas feitas na estrutura, obtendo os parâmetros modais através das funções de resposta em frequência, do inglês *Frequency Response Function* (FRF). Este procedimento é denominado análise modal experimental (EWINS, 1984; IGLESIAS, 2000).

As vantagens de se utilizar um modelo modal consistem no fato de que as coordenais modais são independentes, resultando em um conjunto de equações desacopladas, além de ser a dimensão de um modelo modal tipicamente menor do que aquela do modelo nodal de segunda ordem que o originou. Pode-se citar também que enquanto as matrizes de massa e rigidez são obtidas, usualmente, através do método dos elementos finitos, o amortecimento estrutural geralmente é desconhecido e precisa ser estimado através da excitação da estrutura, sendo esta estimativa mais precisa em coordenadas modais (GAWRONSKI, 2004).

Os modelos de segunda ordem baseados nas matrizes de massa, rigidez e amortecimento são muitas vezes convertidos em modelos modais a fim de reduzir as dimensões do sistema analisado (GAWRONSKI, 2004). É possível reduzir ainda o modelo modal, mantendo a análise focada nos modos que representem de forma mais expressiva a dinâmica do sistema, diminuindo assim o custo computacional envolvido. Diversos autores utilizam este procedimento em seus trabalhos: Mattei (2019) utiliza a redução de modelo em uma viga engastada a fim de detectar dano através da metodologia dos observadores de estado, Gawronski (2004) propõe técnicas de redução de modelo via truncamento envolvendo o uso de normas estruturais como critério, Chaturantabut e Sorensen (2010) discutem técnicas de redução de modelo em sistemas não lineares, enquanto Stykel (2004) discute o uso de grammianos para este fim. Quanto à estabilidade, modelos reduzidos a partir de sistemas estáveis sempre resultam em modelos estáveis, visto que os pólos do modelo reduzido formam um subconjunto dos pólos do modelo original (GAWRONSKI, 2004).

³Este procedimento é explicado com maiores detalhes no Capítulo 2.

Em um sistema descrito em coordenadas modais, é possível avaliar a observabilidade de cada modo, além de calcular normas para dado modo específico e relacioná-las às normas da estrutura como um todo. Esta possibilidade, aliada à redução do modelo em coordenadas modais, abre espaço para traçar estratégias de posicionamento ótimo de sensores para cada modo considerado isoladamente, além de permitir obter uma métrica para quantificar a importância de uma determinada posição candidata a receber um sensor, levando em consideração todos os modos mantidos no modelo reduzido (GÜNEY; ESKINAT, 2008; GAWRONSKI, 2004). Obtido o posicionamento ótimo dos sensores, as saídas medidas podem então ser utilizadas para alimentar o observador de estados e gerar o resíduo a ser analisado na detecção do dano. Também pode-se obter quais modos são mais afetados por determinado dano através da utilização de observadores de estado modais (CAVALINI Jr *et al.*, 2008).

Este procedimento, porém, é comumente realizado considerando-se a matriz de amortecimento como proporcional à matriz de rigidez e/ou de massa. Em sistemas nos quais esta premissa não pode ser adotada, surgem novas complicações, visto que as equações em coordenadas modais permanecem acopladas pela matriz de amortecimento modal ⁴. Gawronski (2004) sugere desprezar termos fora da diagonal principal da matriz de amortecimento modal, porém Hasselman (1972) frisa que este procedimento pode ser inadequado em alguns casos, visto que tais termos podem possuir a mesma ordem daqueles da diagonal principal. Desta forma, surge o interesse em se discutir o posicionamento ótimo de sensores também para sistemas com amortecimento não proporcional.

1.1 Objetivos do Trabalho

O principal objetivo deste trabalho é detectar danos em sistemas de plataformas veiculares utilizando a metodologia dos observadores de estado, definindo um posicionamento ótimo de sensores que leve a este fim.

São, também, objetivos específicos:

- Obter o posicionamento ótimo dos sensores para os principais modos de vibrar, assim como para estes em conjunto, a partir de um modelo reduzido que seja representativo;
- Avaliar o uso de um banco de observadores em paralelo para detectar dano no sistema através de excitação pela base com deslocamento do tipo degrau.

⁴Maiores detalhes são apresentados no Capítulo 2

1.2 Contribuição do Trabalho

Algumas contribuições alcançadas são listadas a seguir.

- Definição do posicionamento ótimo de sensores em sistemas com amortecimento não proporcional, visando a detecção de dano em plataformas veiculares modeladas por elementos de placa de Kirchhoff;
- Definição da observabilidade do sistema a partir da redução nos seus primeiros modos de vibrar, permitindo contornar o problema de observabilidade para modelos de elementos finitos com muitos graus de liberdade;
- Análise da eficácia de banco de observadores em paralelo para a detecção de danos em plataformas veiculares;
- Comparação do resultado obtido para o posicionamento ótimo de sensores através de índices grammianos e dos índices obtidos a partir da norma H_2 em sistemas com amortecimento proporcional.

1.3 Organização do Trabalho

Capítulo 1 : este capítulo aborda um breve resumo sobre as técnicas de SHM. São abordados também os observadores de estado como recurso para monitorar e diagnosticar danos e o método dos elementos finitos como forma de obtenção de um modelo físico-matemático do sistema. A importância de se posicionar corretamente os sensores é explicitada e são descritos os principais objetivos e contribuições do trabalho.

Capítulo 2 : este capítulo descreve a fundamentação teórica utilizada. O procedimento de modelagem estrutural é descrito, assim como a teoria dos observadores de estados e o conceito de observabilidade. É exibida a transformação do domínio físico para o modal e a subsequente redução do modelo modal. Os índices de posicionamento de sensores são então definidos para cada modo de vibrar e para o modelo reduzido.

Capítulo 3 : apresenta a metodologia utilizada. São descritas as forças de excitação e as posições onde são aplicadas ao sistema, assim como os tipos de dano empregados. As estratégias de posicionamento ótimo de sensores e de seleção dos modos retidos no modelo reduzido são explicadas. É apresentada a metodologia de detecção e localização de dano via observadores de estados.

Capítulo 4 : exhibe os resultados obtidos das simulações computacionais e validação do modelo utilizado. O posicionamento ótimo de sensores é definido para plataformas veiculares com amortecimento não proporcional e proporcional. São comparados os resultados obtidos via índices grammianos e H_2 para sistemas com amortecimento proporcional. A eficácia do uso de observadores de estados na detecção e localização do dano é discutida.

Capítulo 5 : são feitas as considerações finais e apresentadas sugestões de trabalhos futuros.

Anexo A : exhibe os modos de vibrar retidos na plataforma veicular com amortecimento proporcional.

Anexo B : apresenta o posicionamento ótimo de sensores obtido via índices de posicionamento grammianos para plataforma veicular com amortecimento proporcional.

2 Fundamentação Teórica

2.1 Modelagem Estrutural

Rao (2008) define o conceito de grau de liberdade como o número mínimo de coordenadas independentes necessárias para descrever o comportamento do sistema em determinado instante de tempo. Sistemas contínuos são caracterizados por necessitarem de infinitos graus de liberdade para sua descrição. Tais sistemas são típicos de estruturas flexíveis, comumente encontradas em aplicações de engenharia. Os métodos analíticos para tratar de sistemas contínuos são, no entanto, limitados a uma pequena gama de problemas. Sistemas discretos, por sua vez, podem ser descritos com um número finito de graus de liberdade e os métodos envolvidos na resolução deste tipo de problema são, em geral, mais conhecidos.

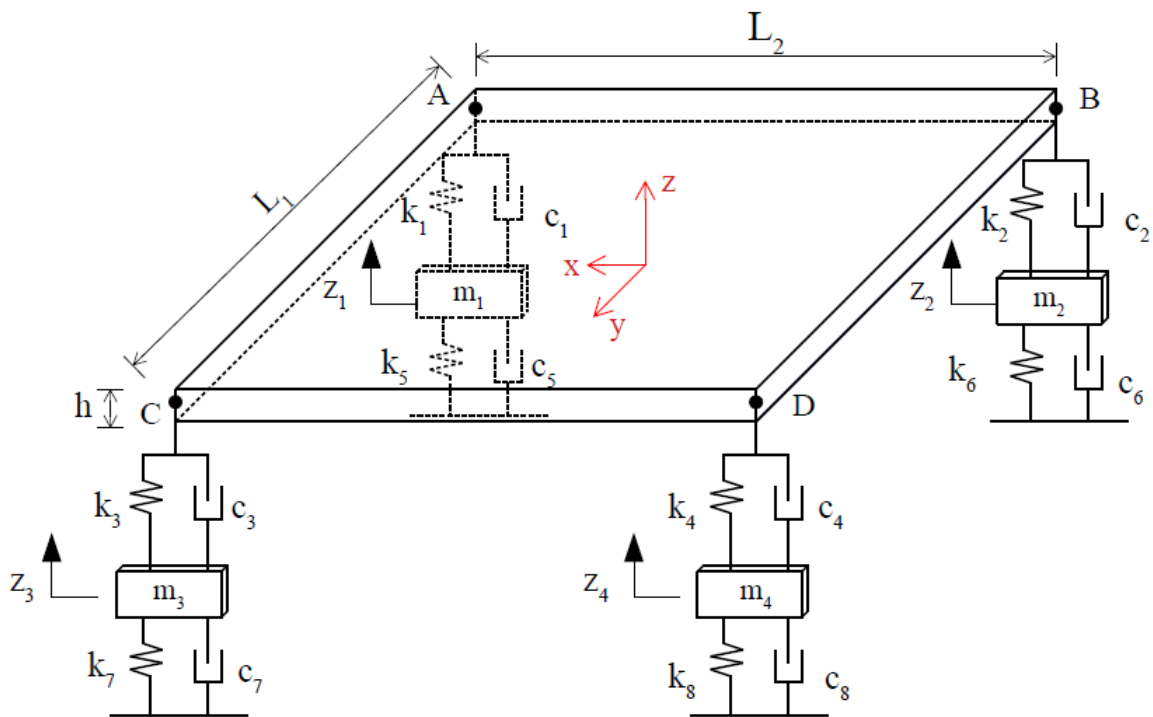
Azevedo (2003) cita a dificuldade em se resolver problemas relacionados a meios contínuos. Antes do desenvolvimento dos métodos dos elementos finitos, era necessária a solução de um conjunto de equações diferenciais parciais, onde se tornava comum recorrer a séries de Fourier. Este procedimento moroso e complexo limitava a resolução de sistemas contínuos a meios homogêneos e de geometria simplificada. Tais inconvenientes tornavam muito atrativa a substituição do problema real por outro semelhante. Com o grande desenvolvimento do FEM e o maior acesso a recursos computacionais, o método dos elementos finitos passou a ser amplamente utilizado para solucionar o problema de meios contínuos através de sua representação em sistemas discretos. Esta ferramenta tornou corrente a análise de estruturas de geometrias complexas, constituídas por múltiplos materiais e sujeitas a qualquer tipo de carregamento.

2.1.1 *Modelagem da Plataforma Veicular por Elementos Finitos*

Este trabalho visa a detecção de danos em plataformas veiculares que simulem um automóvel. Para este fim, o chassi é representado por uma placa que, por se tratar de

um meio contínuo, é discretizada via elementos finitos de placas de Kirchhoff. As rigidezes e amortecimentos dos elementos da suspensão são representados, respectivamente, por $k_1, \dots, k_4$ e $c_1, \dots, c_4$, conforme pode ser visto na figura (1). As massas das rodas são representadas por $m_1, \dots, m_4$, enquanto suas rigidezes e amortecimentos por $k_5, \dots, k_8$ e $c_5, \dots, c_8$, respectivamente. O procedimento para a obtenção do modelo matemático apresentado neste capítulo segue o descrito em [Azevedo \(2003\)](#), [Bathe \(2016\)](#) e [Dawe \(1984\)](#).

Figura 1 – Plataforma Veicular



Fonte: Adaptado de [Monte Alegre \(2009\)](#)

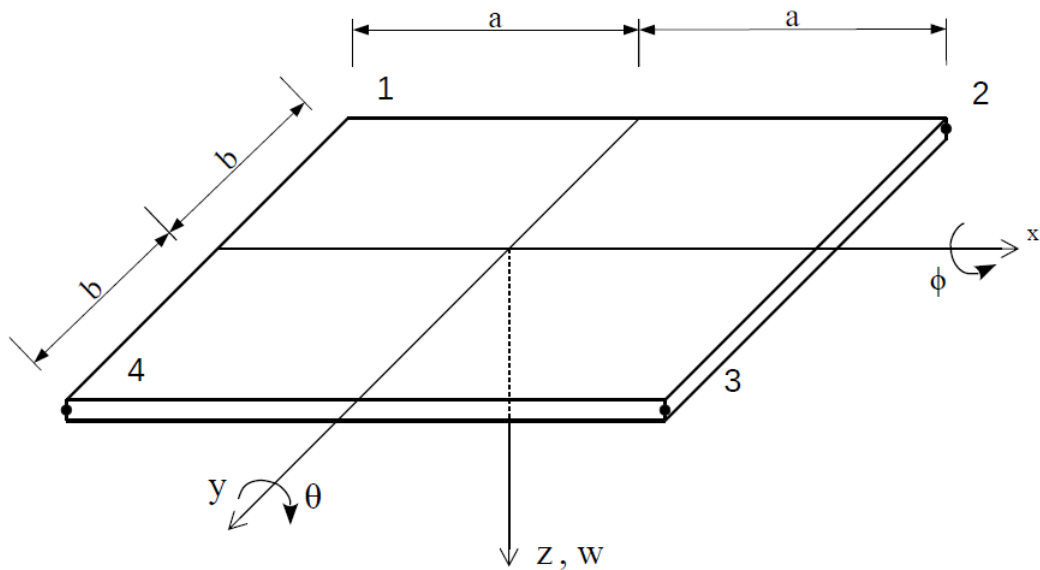
A tabela (1) apresenta as dimensões geométricas da placa e as propriedades do material da mesma, além de incluir os valores das massas, rigidezes e amortecimentos que compõem a suspensão e simulam as rodas. É possível observar que o uso do elemento de placa de Kirchhoff se torna justificável, uma vez que a relação entre a espessura e a menor dimensão lateral é inferior a 0,05.

Tabela 1 – Dados da plataforma veicular

Densidade da placa de alumínio (ρ)	2770 kg/m^3
Módulo de elasticidade (E)	69 GPa
Coefficiente de Poisson (ν)	$0,3$
$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$	$1,5 \text{ kg}$
$k_1 = k_2 = \dots = k_4 = k_s$	80 kN/m
$k_5 = k_6 = \dots = k_8 = k_p$	50 kN/m
$c_1 = c_2 = \dots = c_4 = c_s$	80 N.s/m
$c_5 = c_6 = \dots = c_8 = c_p$	50 N.s/m
L_1	0.5 m
L_2	0.8 m
h	0.01 m

É importante frisar que estes dados não intentam representar nenhum modelo de carro comercial. O elemento de placa de Kirchhoff utilizado é exibido na figura (2). Este elemento é caracterizado por possuir 4 nós, cada um com 3 graus de liberdade, totalizando 12 graus de liberdade por elemento. Cada um dos nós pode apresentar deslocamento vertical (z) e rotação em torno dos eixos x (ϕ) e y (θ).

Figura 2 – Elemento de placa de Kirchhoff



Fonte: Adaptado de [Dawe \(1984\)](#)

Para utilização deste elemento, são necessárias as seguintes considerações:

- A espessura da placa é pequena em comparação com as dimensões laterais
- Tensões desprezíveis no plano médio da placa
- Regime de pequenas deformações e pequenos deslocamentos
- Linhas retas normais à superfície média permanecem normais à mesma após sofrerem deformação.

Levando em conta tais considerações, a partir do princípio dos trabalhos virtuais (PVT) ¹ e da teoria da tensão-deformação, é possível obter as matrizes de massa e rigidez para os elementos de placa de Kirchoff (MONTE ALEGRE, 2009). Estas matrizes são apresentadas em Dawe (1984), sendo a matriz de massa dada pela equação (1).

$$\mathbf{M}_e = \frac{\rho \cdot h \cdot a \cdot b}{6300} \cdot \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} m_{1,1} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{1,1} \\ m_{4,2} & m_{5,2} & m_{5,3} & m_{2,1} & m_{2,2} \\ -m_{4,3} & -m_{5,3} & m_{6,3} & -m_{3,1} & -m_{3,2} & m_{3,3} & \text{Sim.} \\ m_{7,1} & m_{7,2} & m_{7,3} & m_{10,1} & m_{10,2} & -m_{10,3} & m_{1,1} \\ -m_{7,2} & m_{8,2} & m_{8,3} & m_{11,1} & m_{11,2} & -m_{11,3} & -m_{2,1} & m_{2,2} \\ -m_{7,3} & m_{8,3} & m_{9,3} & -m_{12,1} & -m_{12,2} & m_{12,3} & -m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \\ m_{10,1} & m_{10,2} & m_{10,3} & m_{7,1} & m_{7,2} & -m_{7,3} & m_{4,1} & -m_{4,2} & -m_{4,3} & m_{1,1} \\ -m_{10,2} & m_{11,2} & m_{11,3} & m_{8,1} & m_{8,2} & -m_{8,3} & -m_{5,1} & m_{5,2} & m_{5,3} & -m_{2,1} & m_{2,2} \\ m_{10,3} & -m_{11,3} & m_{12,3} & -m_{9,1} & -m_{9,2} & m_{9,3} & -m_{6,1} & m_{6,2} & m_{6,3} & m_{3,1} & -m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix}$$

sendo que o primeiro dos subíndices indica a linha em que o elemento está localizado, e o segundo indica a coluna. ρ é a densidade do material, h a espessura da placa e a e b representam as dimensões do elemento como na figura (2). O valor dos demais elementos da matriz é dado por $m_{1,1} = 3454$, $m_{2,1} = 922b$, $m_{2,2} = 320b^2$, $m_{3,1} = 920a$, $m_{3,2} = 252ab$, $m_{3,3} = 320a^2$, $m_{4,1} = 1226$, $m_{4,2} = 398b$, $m_{4,3} = 548a$, $m_{5,2} = 160b^2$, $m_{5,3} = 168ab$, $m_{6,3} = -240a^2$, $m_{7,1} = 394$, $m_{7,2} = 232b$, $m_{7,3} = 232a$, $m_{8,2} = -120b^2$,

¹Estabelece que o trabalho interno de deformação é igual ao trabalho das forças externas aplicadas (AZEVEDO, 2003)

$$m_{8,3} = -112ab, m_{9,3} = -120a^2, m_{10,1} = 1226, m_{10,2} = 548b, m_{10,3} = 398a, m_{11,2} = -240b^2, m_{11,3} = -168ab, m_{12,3} = 160a^2.$$

A matriz de rigidez é dada pela equação (2) :

$$\mathbf{K}_e = \frac{D}{60ab} \cdot \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} k_{1,1} & & & & & & & & & & & \\ k_{2,1} & k_{2,2} & & & & & & & & & & \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} & & & & & & & & & \\ k_{4,1} & k_{4,2} & k_{4,3} & k_{1,1} & & & & & & & & \\ k_{4,2} & k_{5,2} & 0 & k_{2,1} & k_{2,2} & & & & & & & \\ -k_{4,3} & 0 & k_{6,3} & -k_{3,1} & -k_{3,2} & k_{3,3} & & & & & & \text{Sim.} \\ k_{7,1} & k_{7,2} & k_{7,3} & k_{10,1} & k_{10,2} & -k_{10,3} & k_{1,1} & & & & & \\ -k_{7,2} & k_{8,2} & 0 & k_{11,1} & k_{11,2} & -k_{11,3} & -k_{2,1} & k_{2,2} & & & & \\ -k_{7,3} & 0 & k_{9,3} & -k_{12,1} & -k_{12,2} & k_{12,3} & -k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} & & & \\ k_{10,1} & k_{10,2} & k_{10,3} & k_{7,1} & k_{7,2} & -k_{7,3} & k_{4,1} & -k_{4,2} & -k_{4,3} & k_{1,1} & & \\ -k_{10,2} & k_{11,2} & 0 & k_{8,1} & k_{8,2} & -k_{8,3} & -k_{5,1} & k_{5,2} & k_{5,3} & -k_{2,1} & k_{2,2} & \\ k_{10,3} & 0 & k_{12,3} & -k_{9,1} & -k_{9,2} & k_{9,3} & -k_{6,1} & k_{6,2} & k_{6,3} & k_{3,1} & -k_{3,2} & k_{3,3} \end{bmatrix}$$

sendo $k_{1,1} = 60p + 60p^{-1} + 42 - 12\nu$, $k_{2,1} = b(60p + 6 + 24\nu)$, $k_{2,2} = b^2(80p + 16 - 16\nu)$, $k_{3,1} = a(60p^{-1} + 6 + 24\nu)$, $k_{3,2} = 60\nu ab$, $k_{3,3} = a^2(80p^{-1} + 16 - 16\nu)$, $k_{4,1} = 30p - 60p^{-1} - 42 + 12\nu$, $k_{4,2} = b(30p - 6 - 24\nu)$, $k_{4,3} = a(-60p^{-1} - 6 + 6\nu)$, $k_{5,2} = b^2(40p - 16 + 16\nu)$, $k_{6,3} = a^2(40p^{-1} - 4 + 4\nu)$, $k_{7,1} = -30p - 30p^{-1} + 42 - 12\nu$, $k_{7,2} = b(-30p + 6 - 6\nu)$, $k_{7,3} = a(-30p^{-1} + 6 - 6\nu)$, $k_{8,2} = b^2(20p + 4 - 4\nu)$, $k_{9,3} = a^2(20p^{-1} + 4 - 4\nu)$, $k_{10,1} = -60p + 30p^{-1} - 42 + 12\nu$, $k_{10,2} = b(-60p - 6 + 6\nu)$, $k_{10,3} = a(30p^{-1} - 6 - 24\nu)$, $k_{11,2} = b^2(40p - 4 + 4\nu)$, $k_{12,3} = a^2(40p^{-1} - 16 + 16\nu)$, $p = \left(\frac{a}{b}\right)^2$, $D = \frac{E.h^3}{12(1-\nu^2)}$. E denota o módulo de elasticidade do material da placa e ν seu coeficiente de Poisson.

O procedimento descrito por Dawe (1984) para o caso em que há mais de um elemento consiste em agrupar as matrizes dos elementos em matrizes globais, de acordo com as equações (3) e (4).

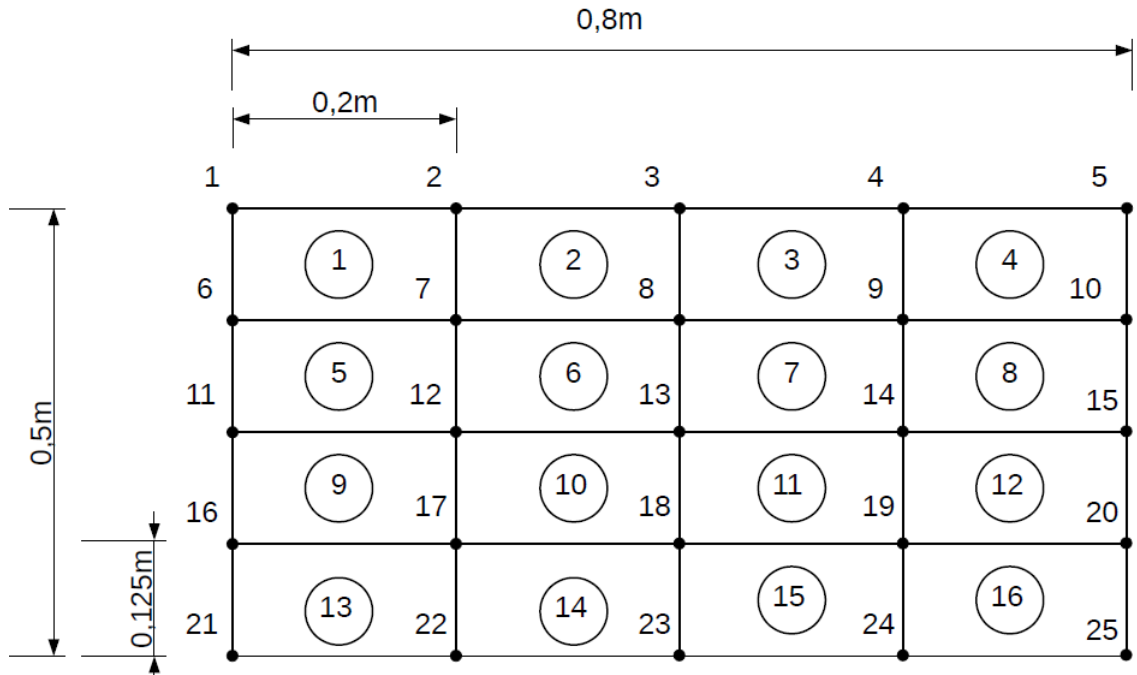
$$\mathbf{M}_g = \sum_{j=1}^{n_e} \overline{\mathbf{M}}_e \quad (3)$$

$$\mathbf{K}_g = \sum_{j=1}^{n_e} \overline{\mathbf{K}}_e \quad (4)$$

sendo que $\mathbf{M}_g$ e $\mathbf{K}_g$ representam as matrizes de massa global e rigidez global da placa,

respectivamente. n_e e n_d denotam o número de elementos e de graus de liberdade utilizados, respectivamente. $\bar{\mathbf{M}}_e$ e $\bar{\mathbf{K}}_e$ representam as matrizes expandidas das equações (1) e (2), com dimensões $n_d \times n_d$, tendo cada um dos seus elementos sido alocado em seu grau de liberdade correspondente. A placa que simula o chassi é modelada neste trabalho utilizando-se 16 elementos de Kirchhoff, totalizando 25 nós e 75 graus de liberdade, conforme mostra a figura (3). Ao nó 17, é acrescentada uma massa concentrada $m_c = 1,5 \text{ kg}$, visando simular o peso do motor.

Figura 3 – Placa discretizada



Fonte: Próprio Autor

Por fim, as equações de movimento são obtidas através da equação de Euler–Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial E_d}{\partial \dot{q}_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, n_d \quad (5)$$

Sendo T a energia cinética e V a energia potencial. E_d representa função de dissipação de Rayleigh. q_i é a i -ésima coordenada generalizada e Q_i a força generalizada aplicada (BALACHANDRAN; MAGRAB, 2011).

A massa m_c adicionada ao nó 17, acrescenta ao sistema uma energia cinética dada pela equação (6). As massas concentradas $m_1, \dots, m_4$ adicionam ao sistema quatro graus de liberdade, representados por $z_1, \dots, z_4$ na figura (1). A energia cinética devido a tais

massas é dada pela equação (7). A energias potenciais e dissipativas que envolvem movimentos relativos entre a placa e as massas das rodas são dadas pelas equações (8) e (9), respetivamente. Por fim, as rigidezes e amortecimentos das rodas adicionam ao sistema as energias potenciais e dissipativas dadas pelas equações (10) e (11), respetivamente.

$$T_{mc} = \frac{1}{2} m_c \dot{w}_{17}^2 \quad (6)$$

$$T_{ms} = \sum_{j=1}^4 \frac{1}{2} m \dot{z}_j^2 \quad (7)$$

$$V_s = \sum_{j=1}^4 \frac{1}{2} k_s (w_j - z_j)^2 \quad (8)$$

$$Ed_s = \sum_{j=1}^4 \frac{1}{2} c_s (\dot{w}_j - \dot{z}_j)^2 \quad (9)$$

$$V_p = \sum_{j=1}^4 \frac{1}{2} k_p z_j^2 \quad (10)$$

$$Ed_p = \sum_{j=1}^4 \frac{1}{2} c_p \dot{z}_j^2 \quad (11)$$

sendo que z_j representa o movimento da j -ésima roda e w_j , o movimento vertical do correspondente nó da placa ao qual tal roda está conectada.

A adição das massas das rodas confere ao modelo 79 graus de liberdade, sendo 75 relativos a placa e 4 relativos às massas em si. O vetor contendo todos os graus de liberdade pode então ser escrito de acordo com a equação (12).

$$\mathbf{q} = \{w_1 \ \phi_1 \ \theta_1 \ \dots \ w_{25} \ \phi_{25} \ \theta_{25} \ z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4 \}^t \quad (12)$$

As energias potenciais, cinéticas e dissipativas do sistema como um todo são, então, dadas pelas Equações (13) e (14) (15), respetivamente.

$$V = \sum_{j=1}^{n_e} \frac{1}{2} \mathbf{q}^t \bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{q} + V_s + V_p \quad (13)$$

$$T = \sum_{j=1}^{n_e} \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^t \bar{\mathbf{M}}_e \dot{\mathbf{q}} + T_{mc} + T_{ms} \quad (14)$$

$$E_d = Ed_s + Ed_p \quad (15)$$

Substituindo estes resultados na equação (5) e resolvendo-a na sua forma matricial, chega-se na equação de movimento do sistema, descrita pela Equação (16).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (16)$$

$\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{K}$ possuem dimensão $n_d \times n_d$ e são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do sistema, respectivamente. $\mathbf{F}$ é um vetor $n_d \times 1$ contendo as forças que excitam o sistema. Esta expressão, porém, considera como energia dissipativa somente aquela advinda dos amortecimentos concentrados, desconsiderando qualquer amortecimento na placa. Para contornar este problema, a matriz de amortecimento $\mathbf{C}$ é substituída por uma matriz proporcional à matriz de rigidez, sendo denotada por $\mathbf{C}_p$, conforme na Equação (17). O fator de proporcionalidade utilizado foi de $\alpha = 10^{-3}$, a fim de manter a proporcionalidade entre as rigidezes e amortecimentos que compõe a suspensão. A equação do movimento é então reescrita, resultando na equação (18).

$$[\mathbf{C}_p] = \alpha [\mathbf{K}] \quad (17)$$

$$[\mathbf{M}] \{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{C}_p] \{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}] \{\mathbf{q}\} = [\mathbf{B}_o] \{\mathbf{u}\} \quad (18)$$

sendo $\mathbf{B}_o$ é uma matriz $n_d \times s$, $\mathbf{u}$ o vetor de entradas de dimensão $s \times 1$ e s o número de entradas no sistema.

O amortecimento, assim descrito, pode ser considerado apenas uma aproximação, visto que uma única constante de proporcionalidade multiplica toda a matriz de rigidez global do sistema. A fim de obter uma formulação mais geral, uma matriz de amortecimento pode ser obtida ao se considerar uma constante de proporcionalidade para os elementos que compõem $\mathbf{K}_g$ e outra para os demais elementos da matriz de rigidez global. Este procedimento é descrito pela equação (19).

$$[\mathbf{C}_{np}] = \beta [\mathbf{K}_g] + \alpha [\mathbf{K} - \mathbf{K}_g] \quad (19)$$

A constante β utilizada vale 3×10^{-3} . $\mathbf{C}_{np}$ é uma matriz de amortecimento não proporcional. As formulações apresentadas no domínio do tempo podem ser utilizadas substituindo $\mathbf{C}_p$ por $\mathbf{C}_{np}$. Ao se trabalhar com coordenadas modais, no entanto, as formulações se diferem para sistemas com amortecimento proporcional e não proporcional.

2.1.2 Espaço de Estados em Coordenadas Físicas

A representação em espaço de estados permite que um conjunto de equações diferenciais de segunda ordem, como na equação (18), seja rearranjado de forma que se torne um conjunto de equações de primeira ordem. O estado de um sistema dinâmico é definido como o menor número de variáveis² de forma que seja possível determinar o comportamento do sistema para qualquer instante $t \geq t_0$, a partir do conhecimento destas variáveis em $t = t_0$ e do sinal de entrada para $t \geq t_0$. Se as n variáveis de estados utilizadas para descrever um sistema são arranjadas em um vetor de dimensão $n \times 1$, este é chamado vetor de estados. Por outro lado, o espaço n -dimensional formado por $x_1, x_2, \dots, x_n$ recebe o nome de espaço de estados, de forma que qualquer estado pode ser representado como um ponto no espaço de estados (OGATA, 1998).

Definem-se o vetor de estados e sua derivada primeira como nas equações (20) e (21), respectivamente.

$$\mathbf{x}(t) = \left\{ \mathbf{q}(t) \quad \dot{\mathbf{q}}(t) \right\}^t \quad (20)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \left\{ \dot{\mathbf{q}}(t) \quad \ddot{\mathbf{q}}(t) \right\}^t \quad (21)$$

O vetor de estados, assim definido, possui dimensão $n \times n$, sendo $n = 2n_d$. Isolando-se $\ddot{\mathbf{q}}$ na equação (18) e substituindo em (21), obtém-se:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_o\mathbf{u}(t) - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_p\dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{q}(t) \end{array} \right\} \quad (22)$$

A equação (22) pode ser escrita como:

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}(t) \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_p \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{array} \right\} + \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_o \end{array} \right] \mathbf{u}(t) \quad (23)$$

por fim, a equação (23) é reescrita no formato da equação (24).

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (24)$$

A equação (23) está na forma da representação em espaço de estados para sistemas lineares e invariantes no tempo. $\mathbf{A}$ é denominada matriz dinâmica do sistema, de dimensão $n \times n$. $\mathbf{B}$ é a matriz de entrada, de dimensão $n \times s$.

²Denominadas variáveis de estado

O vetor de saídas do sistema possui dimensão $r \times 1$, sendo dado pela equação (25), em que r representa o número de saídas do sistema.

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_s \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{oq} & \mathbf{C}_{ov} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (25)$$

sendo que $\mathbf{C}_s$ representa a matriz de saídas, de dimensão $r \times n$. $\mathbf{C}_{oq}$ e $\mathbf{C}_{ov}$ possuem dimensão $r \times n_d$.

2.1.3 Modelagem do Dano Estrutural

A localização do dano e a quantificação de sua severidade dependem de modelos que simulem o dano na localidade e severidade desejada. É uma tarefa complexa cobrir todos os possíveis tipos de dano, em todas as possíveis localidades e em severidades variadas através de modelos matemáticos. O mais razoável neste caso é que o projetista utilize da sua experiência para modelar os danos mais comuns ou prováveis de acontecer.

Em automóveis, os elementos de suspensão são geralmente de difícil acesso, enquanto danos no chassi são de visualização mais fácil. Por este motivo, os danos simulados neste trabalho são modelados como perdas de rigidez permanentes nos elementos $k_1, \dots, k_8$ e perdas de amortecimento permanentes em $c_1, \dots, c_8$. Isto é feito considerando uma porcentagem de perda de rigidez ou amortecimento no elemento em questão.

A fim de também simular danos no chassi, são implementados modelos com perdas de espessura em elementos específicos. Os elementos 1, 4, 6, 7, 10, 11, 13 e 17 da figura (3) são escolhidos para gerar modelos danificados. Uma porcentagem de perda de espessura é simulada em cada um destes elementos, o que modifica as matrizes dadas pelas equações (1) e (2).

Os modelos danificados podem ser representados em espaço de estados ao substituir a matriz dinâmica da equação (23) por outra, com dano. A equação (26) explicita este procedimento. Diversas matrizes dinâmicas danificadas são então geradas a fim de criar observadores robustos a tais danos.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \quad (26)$$

sendo $\mathbf{A}_d$ uma matriz dinâmica com dano.

2.2 Observadores de Estados

2.2.1 *Observabilidade e controlabilidade*

Os conceitos de observabilidade e controlabilidade são de fundamental importância na teoria de controle moderno, baseada na representação em espaço de estados. Tais conceitos podem determinar a existência de soluções completas para sistemas de controle. Sistemas não controláveis podem não possuir solução, enquanto sistemas não observáveis podem limitar a retroalimentação de estados em sistemas de controle, visto que dificilmente todos estados são medidos diretamente. Embora, muitos sistemas físicos sejam observáveis e controláveis, seus modelos matemáticos podem não apresentar estas características (OGATA, 1998).

Gawronski (2004) cita que uma estrutura flexível é controlável se os atuadores posicionados excitam todos os modos, ou de forma equivalente, são capazes de causar movimentos arbitrários em cada modo. Também é dito que uma estrutura é observável se os sensores detectam o movimento de todos os modos, ou seja, o sinal de saída contém informação sobre cada um dos modos. Estas definições são vagas e não se aplicam a outros tipos de sistemas, de forma que é necessária uma definição mais rigorosa.

Esta definição é obtida em Ogata (1998), onde é dito que um sistema é completamente observável se qualquer vetor de estado $\mathbf{x}(t_0)$ puder ser determinado a partir da observação do vetor de saída durante um intervalo de tempo finito $t_0 \leq t \leq t_f$. Ou seja, um sistema é completamente observável se toda transição de estado afeta cada um dos elementos do vetor de saídas. Para o caso de sistemas lineares invariantes no tempo, pode ser considerado $t_0 = 0$, sem perda de generalidade. Se houverem estados não observáveis, porém estes forem estáveis, então o sistema é dito detectável. Estes conceitos são especialmente úteis no processo de reconstrução de variáveis de estados não mensuráveis a partir das mensuráveis (OGATA, 1998).

Considere o sistema descrito pelas equações (24) e (25), segundo O'Reilly (1983), a observabilidade completa deste sistema ocorre quando a matriz de observabilidade, de

dimensões $r.n \times n$ e definida pela equação (27), possui posto completo, ou seja igual a n .

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s \\ \mathbf{C}_s \mathbf{A} \\ \mathbf{C}_s \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_s \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Gawronski (2004) cita que esta definição possui duas desvantagens que limitam seu uso. A primeira consiste no fato de que este resultado fornece apenas a resposta sobre o sistema ser completamente observável ou não. Outra desvantagem consiste no fato de que o uso desta matriz se limita a sistemas com pequenas dimensões. Para sistemas de dimensão elevada, como ocorre no caso de modelos gerados por FEM, é necessário o cálculo de elevadas potências da matriz $\mathbf{A}$, o que comumente resulta em problemas numéricos. O uso do grammiano de observabilidade, uma matriz não negativa que fornece informação qualitativa sobre a observabilidade do sistema, é dado pela equação (28) e permite contornar o problema de erros numéricos para sistemas de dimensão elevada.

$$\mathbf{W}_o(t) = \int_0^t e^{(\mathbf{A}^t \tau)} \mathbf{C}_s^t \mathbf{C}_s e^{(\mathbf{A} \tau)} d\tau \quad (28)$$

Alternativamente, pode-se obter o grammiano de observabilidade através de uma equação diferencial, como na equação (29):

$$\dot{\mathbf{W}}_o(t) = \mathbf{A}^t \mathbf{W}_o(t) + \mathbf{W}_o(t) \mathbf{A} + \mathbf{C}_s^t \mathbf{C}_s \quad (29)$$

sendo $\mathbf{W}_o(t)$ uma matriz variante no tempo. Para sistemas estáveis, pode-se resolver a equação (29) considerando $\dot{\mathbf{W}}_o(t) = 0$, obtendo a solução invariante no tempo, como é dada pela equação (30).

$$\mathbf{A}^t \mathbf{W}_o + \mathbf{W}_o \mathbf{A} + \mathbf{C}_s^t \mathbf{C}_s = 0 \quad (30)$$

Considerando o mesmo sistema descrito pelas equações (24) e (25), este é dito completamente controlável se é possível transferir qualquer estado inicial a um estado final desejado através de um sinal de controle não restrito, em um intervalo de tempo finito $t_0 \leq t \leq t_f$. A controlabilidade completa de um sistema ocorre quando a matriz de controlabilidade dada pela equação (31), de dimensões $n \times s.n$, possui posto completo, ou

seja, igual a n (OGATA, 1998).

$$\mathbf{M}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (31)$$

Esta análise da controlabilidade apresenta os mesmos problemas que aquela de observabilidade quando é feito o uso da matriz $\mathbf{M}_o$. Pode ser feito, então, uso do grammiano de controlabilidade, uma matriz não negativa capaz de fornecer informação qualitativa sobre a controlabilidade do sistema, sendo definido pela equação (32) ou, de forma equivalente, pela equação (33). Para sistemas estáveis, a solução invariante no tempo é dada pela equação (34).

$$\mathbf{W}_c(t) = \int_0^t e^{(\mathbf{A}\tau)} \mathbf{B} \mathbf{B}^t e^{(\mathbf{A}^t\tau)} d\tau \quad (32)$$

$$\dot{\mathbf{W}}_c(t) = \mathbf{A} \mathbf{W}_c(t) + \mathbf{W}_c(t) \mathbf{A}^t + \mathbf{B} \mathbf{B}^t \quad (33)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{W}_c + \mathbf{W}_c \mathbf{A}^t + \mathbf{B} \mathbf{B}^t = \mathbf{0} \quad (34)$$

2.2.2 Observadores de Estados de Ordem Plena

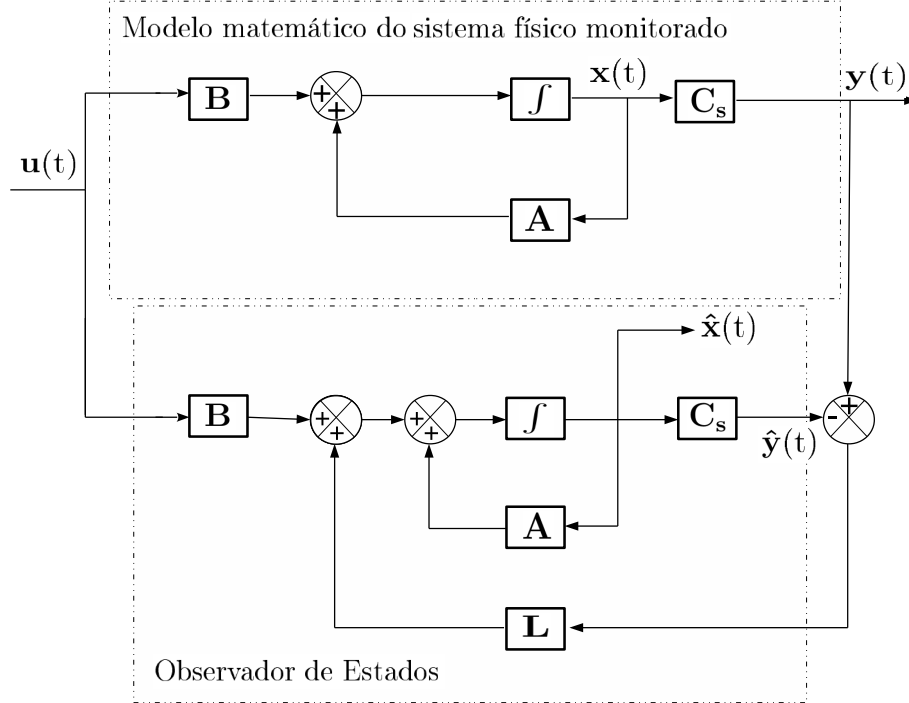
O uso de observadores de estados encontra grande parte de sua importância na necessidade de se retroalimentar sistemas de controles onde nem todas as variáveis de estado podem ser medidas (O'REILLY, 1983). A partir dos trabalhos de Luenberger, ficou demonstrado que os estados não medidos de sistemas determinísticos podiam ser estimados através do conhecimento de suas entradas e saídas, desde que o sistema fosse observável ou, ao menos, detectável. A estimação destas variáveis é comumente chamada de observação, e o dispositivo, ou programa de computador, que as observa é denominado observador de estados, ou simplesmente observador (OGATA, 1998).

Se um observador de estados estima todas as variáveis do sistema, independente destas estarem sendo medidas ou não, é chamado observador de estados de ordem plena. Caso observe um número m de variáveis de estados, onde $m < n$, sendo n a dimensão do vetor de estados, é chamado observador de estados de ordem reduzida. Quando o número de variáveis observadas é o menor possível, recebe o nome de observador de estados de ordem mínima (OGATA, 1998).

O processo de observação das variáveis de estados é feito com base na medida das variáveis de entrada e de saída. O observador de estados atua, então, como um sistema auxiliar, em paralelo com o sistema físico, sendo submetido às mesmas entradas e tendo suas saídas comparadas com as do sistema monitorado. A figura (4) exhibe o diagrama de

blocos deste processo, representando um observador de estado de ordem plena.

Figura 4 – Observador de estados de ordem plena



Fonte: Adaptado de (OGATA, 1998)

O observador de estados de ordem plena é definido, matematicamente, pelas equações (35) e (36).

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)) \quad (35)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}_s \hat{\mathbf{x}}(t) \quad (36)$$

sendo que $\hat{\mathbf{x}}(t)$ representa o vetor de estados reconstruído, $\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t)$ sua derivada primeira e $\mathbf{L}$ é uma matriz de dimensões $n \times r$, denominada ganho do observador. A saída do observador é designada por $\hat{\mathbf{y}}(t)$. A comparação da equação (24) com as equações (35) e (36) permite perceber que o observador, assim descrito, é uma cópia do sistema original, exceto pelo último termo do lado direito na equação (35). Segundo (OGATA, 1998), este é um termo de correção que envolve o valor medido, $\mathbf{y}(t)$, e o estimado do vetor de saída, $\mathbf{C}_s \hat{\mathbf{x}}(t)$. É citado ainda que este termo ajuda a reduzir os efeitos da diferença entre o sistema real e o modelo dinâmico (observador de estados) quando há diferenças nas matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ utilizadas, ou seja, quando o observador não é uma cópia fiel do sistema físico monitorado.

O vetor de erro é definido como a diferença entre o vetor de estados medido e o

estimado, sendo dada pela equação (37):

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \quad (37)$$

derivando a equação (37) e substituindo os valores de $\dot{\mathbf{x}}(t)$ e $\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t)$ dados pelas equações (24) e (35), obtém-se a equação (38), que descreve o comportamento dinâmico do vetor de erro.

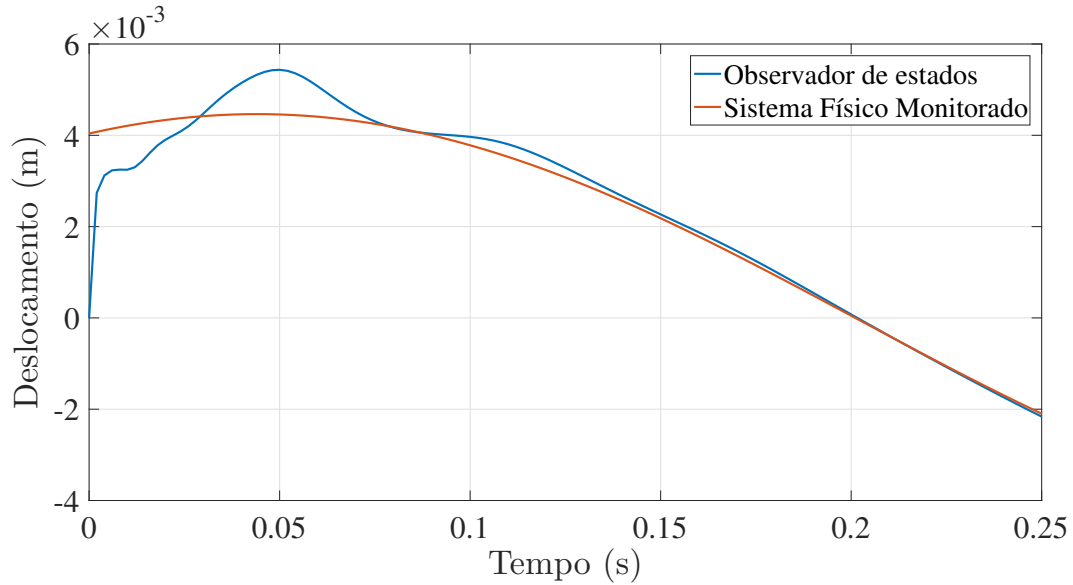
$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{LC}_s) (\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)) \quad (38)$$

O comportamento dinâmico do erro de estimação, então, é regido pelos autovalores da matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{LC}_s)$. Se tal matriz for estável, ou seja, tiver todos os seus autovalores com parte real negativa, o erro convergirá a zero, para qualquer que seja seu valor inicial $\mathbf{e}(0)$. Para sistemas observáveis, é possível alocar tais autovalores arbitrariamente, de forma que a convergência do erro seja suficientemente rápida, e o vetor de estados estimado tenda para o vetor de estados medido em uma velocidade adequada (OGATA, 1998).

O'Reilly (1983) ressalta que definir $\hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}(0)$ resultaria em $\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t)$ para todo instante de tempo $t \geq t_0$, qualquer que fosse o ganho $\mathbf{L}$ e o vetor de entradas $\mathbf{u}(t)$. Isto significaria uma reconstrução de estados perfeita. Na prática, porém, $\mathbf{x}(0)$ é desconhecido, sendo necessário garantir que o erro seja assintoticamente reduzido a zero através da escolha adequada da matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{LC}_s)$.

Neste trabalho, para simular as condições iniciais desconhecidas do sistema físico durante o monitoramento, este é excitado, partindo de condições iniciais nulas antes do monitoramento, com uma força senoidal de 600 N de módulo e 10 rad/s de frequência, aplicada no nó 17 por 2 segundos. O estado do sistema monitorado após esta excitação passa a ser considerado $\mathbf{x}(0)$ a partir de então e é assumido $\hat{\mathbf{x}}(0)$ um vetor nulo. A figura (5) exhibe o comportamento do sistema e do observador assim descritos, para o caso em que é medido e estimado o deslocamento do nó 1 da placa enquanto, o nó 17 é submetido à excitação senoidal. É possível observar o valor estimado tendendo para o valor medido em um tempo adequadamente curto.

Figura 5 – Valor estimado e medido de uma variável de estado



Fonte: Próprio autor

2.2.3 Ganho do Observador

Neste trabalho, a matriz de ganho é obtida através da minimização de uma função quadrática de desempenho para controladores. Este método é pertencente à teoria do controle ótimo, sendo denominado regulador linear quadrático ou, em inglês, *Linear Quadratic Regulator* (LQR). Segundo Ogata (1998), um sistema assim projetado é estável, a menos que não seja controlável. Calculado o ganho ótimo do controlador, o ganho do observador é obtido com base no uso do seu sistema dual.

Considere o sistema descrito pela equação (24) e o índice de desempenho dado pela equação (39).

$$J = \int_0^{\infty} G(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt \quad (39)$$

tal índice de desempenho, sendo $G(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ uma função quadrática, ou hermitiana, de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{u}$ conduz a leis de controles lineares (OGATA, 1998). Isto significa que o vetor de entradas possui a forma da equação (40).

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_c \mathbf{x}(t) \quad (40)$$

sendo $\mathbf{K}_c$ uma matriz de dimensões $s \times n$. Um índice de desempenho a ser minimizado,

segundo Ogata (1998), é dado pela equação (41).

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^t(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^t(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)) dt \quad (41)$$

O segundo termo do lado direito da equação (41) designa o dispêndio de energia dos sinais de controle. $\mathbf{Q}$ é uma matriz hermitiana ou real simétrica e definida positiva (ou semidefinida positiva), que representa a importância relativa do erro. Por outro lado, $\mathbf{R}$ é uma matriz hermitiana ou real simétrica e definida positiva, que representa a importância relativa do dispêndio de energia. Admite-se que o vetor $\mathbf{u}(t)$ não possui restrições. Substituir a equação (40) em (41), resulta em:

$$J = \int_0^\infty \mathbf{x}^t(t) (\mathbf{Q} + \mathbf{K}_c^t \mathbf{R} \mathbf{K}_c) \mathbf{x}(t) dt \quad (42)$$

O problema da minimização do índice de desempenho é dado então pela equação (43).

$$\mathbf{x}^t(t) (\mathbf{Q} + \mathbf{K}_c^t \mathbf{R} \mathbf{K}_c) \mathbf{x}(t) = -\frac{d}{dt} (\mathbf{x}^t(t) \mathbf{P} \mathbf{x}(t)) \quad (43)$$

onde $\mathbf{P}$ é uma matriz hermitiana ou real simétrica e definida positiva. Define-se uma matriz não singular $\mathbf{T}$, que atenda a relação da equação (44). Então o ganho ótimo é definido pela equação (45).

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}^t \mathbf{T} \quad (44)$$

$$\mathbf{K}_c = \mathbf{T}^{-1} (\mathbf{T}^t) \mathbf{B}^t \mathbf{P} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^t \mathbf{P} \quad (45)$$

sendo $\mathbf{P}$ uma matriz que satisfaz a equação matricial reduzida de Ricatti, dada pela equação (46).

$$\mathbf{A}^t \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P}^t \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^t \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (46)$$

Considerando o sistema descrito pelas equações (24) e (25), seu sistema dual é definido, pelas equações (47) e (48). De acordo com Ogata (1998), a observabilidade de um sistema pode ser analisada através da controlabilidade de seu sistema dual.

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}^t \mathbf{z}(t) + \mathbf{C}_s^t \mathbf{v}(t) \quad (47)$$

$$\mathbf{n}(t) = \mathbf{B}^t \mathbf{z}(t) \quad (48)$$

Caso este sistema seja completamente controlável, é possível determinar um ganho $\mathbf{K}_c$ de forma que os autovalores da matriz $\mathbf{A}^t - \mathbf{C}_s^t \mathbf{K}_c$ possam ser arbitrariamente alocados. Notando que os autovalores de $\mathbf{A}^t - \mathbf{C}_s^t \mathbf{K}_c$ são idênticos aos de $\mathbf{A} - \mathbf{K}_c^t \mathbf{C}_s$, pode ser

determinado o ganho do observador de acordo com a equação (49).

$$\mathbf{L} = \mathbf{K}_c^t \quad (49)$$

Este trabalho utiliza $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{R} = 10^{-2}\mathbf{I}$, sendo $\mathbf{I}$ a matriz identidade.

2.3 Posicionamento ótimo de sensores

A utilização de observadores de estados para monitoramento de integridade estrutural envolve os estados medidos e estimados da estrutura. A fim de obter medidas que caracterizem da melhor forma a dinâmica do sistema, é implementada uma metodologia de posicionamento ótimo de sensores, apresentando os índices baseados nos gramianos de observabilidade e na norma estrutural H_2 . A análise do sistema em coordenadas modais apresenta uma grande vantagem para este fim. O sistema é, então, reduzido de forma a garantir observabilidade completa dos modos retidos através do uso da matriz de observabilidade.

2.3.1 *Representação em Coordenadas Modais*

Os modelos de segunda ordem em coordenadas modais são, em geral, obtidos dos modelos gerados por FEM através de uma transformação, também sendo comumente obtidos em procedimentos de identificação de parâmetros. Tais modelos são representados em coordenadas modais e, em geral, são utilizados em dimensões inferiores ao do correspondente modelo nodal (GAWRONSKI, 2004). Também é possível determinar índices de posicionamento de sensores para cada modo, sendo este procedimento parte da estratégia traçada neste trabalho para obtenção do posicionamento ótimo.

Considerando o sistema descrito pela equação (18) sem excitação e amortecimento, ou seja, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{C}_p = \mathbf{0}$, a equação de movimento então é reescrita como na equação (50).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (50)$$

Admitindo solução dada pela equação (51) e substituindo-a na equação (50), obtém-se um conjunto de equações homogêneas dado pela equação (52), cuja solução não trivial

existe se o determinante expresso na equação (53) for igual a zero.

$$\mathbf{q} = \phi \mathbf{e}^{j\omega t} \quad (51)$$

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \phi \mathbf{e}^{j\omega t} = \mathbf{0} \quad (52)$$

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (53)$$

Segundo [Gawronski \(2004\)](#), equação (53) é satisfeita por um conjunto de n_m valores de frequência ω , denotados por $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n_m}$. ω_i é denominada a i -ésima frequência natural do sistema, e seu autovetor correspondente, ϕ_i , corresponde ao i -ésimo modo de vibrar da estrutura. Define-se então a matriz de frequências naturais e a matriz modal, dadas nas equações (54) e (55).

$$\mathbf{\Omega} = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n_m}) \quad (54)$$

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_{n_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} & \dots & \phi_{n_m 1} \\ \phi_{12} & \phi_{22} & \dots & \phi_{n_m 2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{1n_d} & \phi_{2n_d} & \dots & \phi_{n_m n_d} \end{bmatrix} \quad (55)$$

sendo que as matrizes dadas pelas equações (54) e (55) possuem dimensões $n_m \times n_m$ e $n_d \times n_m$, respectivamente, e ϕ_{ij} representa o j -ésimo deslocamento relativo ao i -ésimo modo. Através da matriz modal $\mathbf{\Phi}$, é possível diagonalizar as matrizes de massa e rigidez, segundo as equações (56) e (57).

$$\mathbf{M}_m = \mathbf{\Phi}^t \mathbf{M} \mathbf{\Phi} \quad (56)$$

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{\Phi}^t \mathbf{K} \mathbf{\Phi} \quad (57)$$

As matrizes obtidas das equações (56) e (57) são chamadas matriz de massa modal e matriz de rigidez modal, respectivamente. Caso seja considerada uma matriz de amortecimento proporcional à de rigidez e/ou de massa, como na equação (17), o mesmo procedimento pode ser então feito, resultando na matriz diagonal de amortecimento modal, dada pela equação (58).

$$\mathbf{C}_{mp} = \mathbf{\Phi}^t \mathbf{C}_p \mathbf{\Phi} \quad (58)$$

Sem essa consideração, não é possível garantir que a matriz $\mathbf{C}_{mp}$ seja diagonal ([GAWRONSKI, 2004](#)). Desta forma, esta abordagem não se torna aplicável para sistemas com amortecimento não proporcional, uma vez que as equações permanecem acopladas pela

matriz de amortecimento modal. A transformação que introduz o uso das coordenadas modais, agrupadas no vetor $\mathbf{q}_m(t)$, é dada pela equação (59).

$$\mathbf{q}(t) = \Phi \mathbf{q}_m(t) \quad (59)$$

Fazendo esta substituição em (18) e (25), multiplicando todos os termos por Φ^t pelo lado esquerdo e fazendo as devidas substituições, são obtidas as equações (60) e (61).

$$\Phi^t \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{q}}_m(t) + \Phi^t \mathbf{C}_p \Phi \dot{\mathbf{q}}_m(t) + \Phi^t \mathbf{K} \Phi \mathbf{q}_m(t) = \Phi^t \mathbf{B}_o \mathbf{u}(t) \quad (60)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_{oq} \Phi \mathbf{q}_m(t) + \mathbf{C}_{ov} \Phi \dot{\mathbf{q}}_m(t) \quad (61)$$

Estas equações podem ser reescritas na forma:

$$\ddot{\mathbf{q}}_m(t) + 2 \mathbf{Z} \Omega \dot{\mathbf{q}}_m(t) + \Omega^2 \mathbf{q}_m(t) = \mathbf{B}_{om} \mathbf{u}(t) \quad (62)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_{mq} \mathbf{q}_m(t) + \mathbf{C}_{mv} \dot{\mathbf{q}}_m(t) \quad (63)$$

sendo Ω definida pela equação (64). $\mathbf{Z}$ é a matriz que contem as razões de amortecimento modal, sendo dada pela equação (65). As matrizes $\mathbf{B}_{om}$, $\mathbf{C}_{mq}$ e $\mathbf{C}_{mv}$ são definidas pelas equações (66), (67) e (68), respectivamente.

$$\Omega = \mathbf{M}_m^{-1} \mathbf{K}_m \quad (64)$$

$$\mathbf{Z} = \text{diag}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n_m}) = 0,5 \mathbf{M}_m^{-1} \mathbf{C}_{mp} \Omega^{-1} \quad (65)$$

$$\mathbf{B}_{om} = \mathbf{M}_m^{-1} \Phi^t \mathbf{B}_o \quad (66)$$

$$\mathbf{C}_{mq} = \mathbf{C}_{oq} \Phi \quad (67)$$

$$\mathbf{C}_{mv} = \mathbf{C}_{ov} \Phi \quad (68)$$

Estas equações representam um conjunto de equações desacopladas. Desse modo, podem ser escritas de forma equivalente pelas equações (69), (70) e (71).

$$\ddot{q}_{mi}(t) + 2 \zeta_i \omega_i \dot{q}_{mi}(t) + \omega_i^2 q_{mi}(t) = \mathbf{b}_{omi} \mathbf{u}(t) \quad (69)$$

$$y_i(t) = \mathbf{c}_{mqi} q_{mi}(t) + \mathbf{c}_{mvi} \dot{q}_{mi}(t) \quad (70)$$

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^{n_m} \mathbf{y}_i(t) \quad (71)$$

sendo $\mathbf{b}_{omi}$ a i -ésima linha de $\mathbf{B}_{om}$. $\mathbf{c}_{mqi}$ e $\mathbf{c}_{mvi}$ são a i -ésima coluna de $\mathbf{C}_{mq}$ e $\mathbf{C}_{mv}$, respectivamente. ζ_i é denominado amortecimento modal do i -ésimo modo. ω_i , ζ_i , $\mathbf{b}_{omi}$ e $\mathbf{c}_{mi}$ representam, então, propriedades do i -ésimo modo. A equação (71) fornece a resposta do sistema, $\mathbf{y}(t)$, como a soma das respostas de cada modo, $\mathbf{y}_i(t)$. Esta é uma

propriedade fundamental dos modelos descritos em coordenais modais (GAWRONSKI, 2004).

2.3.2 Espaço de Estados em Coordenadas Modais

2.3.2.1 Sistemas com Amortecimento Proporcional

Definindo o vetor de estados como na equação (72), a representação em espaços de estados com coordenadas modais pode ser escrita, então, de acordo com as equações (73) e (74).

$$\mathbf{x}(t) = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{\Omega} \mathbf{q}_m(t) & \mathbf{Z} \mathbf{\Omega} \mathbf{q}_m(t) + \dot{\mathbf{q}}_m(t) \end{matrix} \right\}^t \quad (72)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\mathbf{Z} \mathbf{\Omega} & \mathbf{\Omega} \\ -\mathbf{\Omega} - \mathbf{Z}^2 \mathbf{\Omega} & -\mathbf{Z} \mathbf{\Omega} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{om} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (73)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{mq} \mathbf{\Omega}^{-1} - \mathbf{C}_{mv} \mathbf{Z} & \mathbf{C}_{mv} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (74)$$

sendo que a equação (73) apresenta a forma da equação (23), tendo $\mathbf{x}(t)$ dimensão $N_m \times 1$, sendo $N_m = 2n_m$. A matriz dinâmica possui, neste caso, dimensões $N_m \times N_m$, a matriz de entradas, $N_m \times s$ e a matriz de saídas, $r \times N_m$. O termo $\mathbf{Z}^2$ pode ser desconsiderado para pequenos amortecimentos modais (GAWRONSKI, 2004). O vetor de estados, pode então ser reescrito de forma que cada deslocamento seja acompanhado de sua respectiva velocidade, como exibido na equação (75).

$$\mathbf{x}_m = \left\{ \begin{matrix} \omega_1 \mathbf{q}_{m1} & \zeta_1 \omega_1 \mathbf{q}_{m1} + \dot{\mathbf{q}}_{m1} & \cdots & \omega_{n_m} \mathbf{q}_{mn_m} & \zeta_{n_m} \omega_{n_m} \mathbf{q}_{mn_m} + \dot{\mathbf{q}}_{mn_m} \end{matrix} \right\}^t \quad (75)$$

O vetor de estados, assim definido, permite escrever as equações, em espaço de estados, com o formato das equações (76) e (77).

$$\dot{\mathbf{x}}_m(t) = \mathbf{A}_m \mathbf{x}_m(t) + \mathbf{B}_m \mathbf{u}(t) \quad (76)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_m \mathbf{x}_m(t) \quad (77)$$

sendo:

$$\mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{m1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{m2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_{mn_m} \end{bmatrix} \quad (78)$$

$$\mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{m1} & \mathbf{B}_{m2} & \cdots & \mathbf{B}_{mn_m} \end{bmatrix}^t \quad (79)$$

$$\mathbf{C}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{m1} & \mathbf{C}_{m2} & \cdots & \mathbf{C}_{mn_m} \end{bmatrix} \quad (80)$$

$\mathbf{A}_{mi}$ é uma matriz 2×2 definida pela equação (81) para $i = 1, \dots, n_m$. $\mathbf{B}_{mi}$ e $\mathbf{C}_{mi}$ são matrizes com dimensões $2 \times s$ e $r \times 2$, respectivamente, dadas pelas equações (82) e (83).

$$\mathbf{A}_{mi} = \begin{bmatrix} -\zeta_i \omega_i & \omega_i \\ -\omega_i & -\zeta_i \omega_i \end{bmatrix} \quad (81)$$

$$\mathbf{B}_{mi} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{b}_{mi} \end{bmatrix}^t \quad (82)$$

$$\mathbf{C}_{mi} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{mqi} & -\mathbf{c}_{mvi} \zeta_i & \mathbf{c}_{mvi} \\ \omega_i & & \end{bmatrix} \quad (83)$$

Com esta notação, cada modo é representado em espaço de estados por $\mathbf{A}_{mi}$, $\mathbf{B}_{mi}$ e $\mathbf{C}_{mi}$. Alternativamente, podem ser escritas as equações (84), (85) e (86), que demonstram que a resposta do sistema é dada pela soma das respostas de cada de modo.

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{A}_{mi} \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B}_{mi} \mathbf{u}(t) \quad (84)$$

$$\mathbf{y}_i(t) = \mathbf{C}_{mi} \mathbf{x}_i(t) \quad (85)$$

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^{n_m} \mathbf{y}_i(t) \quad (86)$$

2.3.2.2 *Sistemas com Amortecimento não Proporcional*

Segundo [Silva e Maia \(1997\)](#), para este tipo de sistema, uma abordagem mais conveniente em espaço de estados é descrita pela equação (87).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{np} & \mathbf{M} \\ -\mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (87)$$

A equação (87) pode ser escrita como:

$$\mathbf{A}_{np} \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}_{np} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (88)$$

Admitindo solução, no instante t , dada pela equação (89), em que $\mathbf{Q}_x$ é um vetor complexo representando a amplitude de resposta e s um número complexo, chega-se no problema de autovalor e autovetor da equação (90).

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_x \\ s \mathbf{Q}_x \end{Bmatrix} e^{st} = \mathbf{X} e^{st} \quad (89)$$

$$(s \mathbf{A}_{np} + \mathbf{B}_{np}) \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (90)$$

Este problema engloba N_m autovalores que ou ocorrem em complexos conjugados ou são reais. Para os modos subamortecidos, os autovalores se apresentam na forma de números complexos conjugados como na equação (91).

$$s_{i1,2} = \zeta w_i \pm i w_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} \quad (91)$$

sendo $s_{i1,2}$ os autovalores do i -ésimo modo. A transformação que introduz as coordenadas modais é, então, apresentada na equação (92).

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Psi} \mathbf{x}_m(t) \quad (92)$$

Sendo $\mathbf{\Psi}$ a matriz modal contendo, em suas colunas, os autovetores do sistema. É importante frisar que estas coordenadas modais são distintas das obtidas para o sistema com amortecimento proporcional, uma vez que $\mathbf{\Psi}$ possui autovetores complexos e dimensão $N_m \times N_m$.

Adicionando o vetor de entradas na equação (87), utilizando a transformação dada pela equação (92) e multiplicando todos os termos por $\mathbf{\Psi}^t$ pelo lado esquerdo, obtém-se a equação (93).

$$\mathbf{\Psi}^t \mathbf{A}_{np} \mathbf{\Psi} \dot{\mathbf{x}}_m(t) + \mathbf{\Psi}^t \mathbf{B}_{np} \mathbf{\Psi} \mathbf{x}_m(t) = \mathbf{\Psi}^t \begin{Bmatrix} \mathbf{B}\mathbf{o} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (93)$$

A equação (93) pode ser reescrita como a equação (94).

$$\mathbf{a}_{np} \dot{\mathbf{x}}_m(t) + \mathbf{b}_{np} \mathbf{x}_m(t) = \mathbf{\Psi}^t \begin{Bmatrix} \mathbf{B}\mathbf{o} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (94)$$

sendo $\mathbf{a}_{np}$ e $\mathbf{b}_{np}$ matrizes diagonais, resultando em conjunto de N_m equações desacopladas.

A fim de escrever as matrizes utilizadas posteriormente para o cálculo de normas, procede-se isolando o vetor $\dot{\mathbf{x}}_m(t)$ na equação (94), como na equação (95).

$$\dot{\mathbf{x}}_m(t) = -\mathbf{a}_{np}^{-1} \mathbf{b}_{np} \mathbf{x}_m(t) + \mathbf{a}_{np}^{-1} \mathbf{\Psi}^t \begin{Bmatrix} \mathbf{B}\mathbf{o} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (95)$$

Reescrevendo-se a equação (95), obtém-se uma formulação no mesmo formato da equação (76), porém com $\mathbf{A}_m$ e $\mathbf{B}_m$ sendo dados pelas equações (96) e (97) respectivamente.

$$\mathbf{A}_m = -\mathbf{a}_{np}^{-1} \mathbf{b}_{np} \quad (96)$$

$$\mathbf{B}_m = \mathbf{a}_{np}^{-1} \Psi^t \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_o \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (97)$$

A matriz $\mathbf{C}_m$, para sistemas com amortecimento não proporcional, é obtida a partir da equação (25) ao se introduzir a transformação dada pela equação (92).

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_s \mathbf{x}(t) = \mathbf{C}_s \Psi \mathbf{x}_m(t) = \mathbf{C}_m \mathbf{x}_m(t) \quad (98)$$

Por fim, reorganiza-se o vetor de estados $\mathbf{x}_m$, como na equação (99), de forma que cada deslocamento modal seja seguido de sua respectiva velocidade.

$$\mathbf{x}_m = \left\{ \mathbf{q}_{m1} \quad \dot{\mathbf{q}}_{m1} \quad \cdots \quad \mathbf{q}_{mn_m} \quad \dot{\mathbf{q}}_{mn_m} \right\}^t \quad (99)$$

Esta reorganização do vetor de estados exige o mesmo rearranjo das matrizes $\mathbf{A}_m$, $\mathbf{B}_m$ e $\mathbf{C}_m$. Em $\mathbf{A}_m$, são organizadas linhas e colunas, em $\mathbf{B}_m$, as linhas e, em $\mathbf{C}_m$, as colunas.

Podem então ser extraídos as matrizes $\mathbf{A}_{mi}$, $\mathbf{B}_{mi}$ e $\mathbf{C}_{mi}$, como feito para sistemas com amortecimento proporcional. Obter uma expressão analítica para estes matrizes, porém, não é tarefa tão direta como no caso de sistemas com amortecimento proporcional

2.3.3 Norma do Sistema H_2

Normas do sistema são utilizadas como medidas da intensidade de sua resposta. Tal uso permite a comparação entre diferentes sistemas, sendo empregadas, de acordo com [Bueno \(2007\)](#), em análise de sistemas de controle, redução de modelos, posicionamento de sensores e atuadores, localização de falhas estruturais, entre outros.

Entre as diversas normas empregadas, a norma H_2 pode ser interpretada como um ganho médio do sistema, obtido ao longo de todas frequências. Em estruturas flexíveis, tal norma corresponde à área sob a FRF ([GAWRONSKI, 2004](#)). Considere o sistema descrito pela equações (24) e (25). Sua função de transferência é dada pela equação

(100), enquanto a norma H_2 deste sistema é definida pela equação (101)

$$\mathbf{G}(\omega) = \mathbf{C}_s (j\omega \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \quad (100)$$

$$\|G\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}(\mathbf{G}^*(\omega) \mathbf{G}(\omega)) d\omega \quad (101)$$

De forma mais conveniente, esta norma pode ser calculada, para o sistema como um todo, através da equação (102).

$$\|G\|_2 = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{C}_s^t \mathbf{C}_s \mathbf{W}_c)} = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{B} \mathbf{B}^t \mathbf{W}_o)} \quad (102)$$

A função de transferência do i -ésimo modo é dada pela equação (103) e sua norma H_2 é dada, aproximadamente, pela equação (104).

$$\mathbf{G}_i(\omega) = \mathbf{C}_{mi} (j\omega \mathbf{I} - \mathbf{A}_{mi})^{-1} \mathbf{B}_{mi} \quad (103)$$

$$\|G_i\|_2 \cong \frac{\|\mathbf{B}_{mi}\|_2 \|\mathbf{C}_{mi}\|_2}{2\sqrt{\zeta_i \omega_i}} \quad (104)$$

sendo:

$$\|\mathbf{B}_{mi}\|_2 = (\text{tr}(\mathbf{B}_{mi} \mathbf{B}_{mi}^t))^{\frac{1}{2}} \quad (105)$$

$$\|\mathbf{C}_{mi}\|_2 = (\text{tr}(\mathbf{C}_{mi} \mathbf{C}_{mi}^t))^{\frac{1}{2}} \quad (106)$$

A equação (104) pode ser utilizada com as matrizes $\mathbf{B}_{mi}$ e $\mathbf{C}_{mi}$ obtidas tanto para sistemas com amortecimento proporcional como não proporcional. Após ser obtida a norma H_2 para cada modo individualmente, estas podem ser relacionadas com a norma do sistema através da equação (107).

$$\|\mathbf{G}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_m} \|\mathbf{G}_i\|_2^2} \quad (107)$$

A análise da norma de cada modo permite identificar quais modos são mais significativos para representar a dinâmica do sistema. Este procedimento é utilizado posteriormente para redução do modelo do sistema monitorado.

A norma do i -ésimo modo de uma estrutura com r sensores pode, então, ser relacionada com a norma deste modo levando em consideração cada sensor individualmente. Tal procedimento permite a análise de quais sensores captam melhor a dinâmica dos modos em questão. Considere a matriz $\mathbf{C}_m$ dada pela equação (80), onde seu i -ésimo elemento,

$\mathbf{C}_{mi}$, pode ser escrito como na equação (108).

$$\mathbf{C}_{mi} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{m1i} & \mathbf{C}_{m2i} & \cdots & \mathbf{C}_{mri} \end{bmatrix}^t \quad (108)$$

sendo $\mathbf{C}_{mi}$ a matriz de saída do i -ésimo modo e $\mathbf{C}_{mki}$ uma matriz 1×2 relativa à k -ésima saída do i -ésimo modo. A norma H_2 de um modo pode ser escrita de forma aproximada como a soma RMS das normas H_2 considerando cada sensor individualmente, como na equação (109).

$$\|\mathbf{G}_i\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^r \|\mathbf{G}_{ki}\|_2^2} \quad i = 1, \dots, n_m \quad (109)$$

sendo:

$$\|\mathbf{G}_{ki}\|_2 \cong \frac{\|\mathbf{B}_{mi}\|_2 \|\mathbf{C}_{mki}\|_2}{2\sqrt{\zeta_i \omega_i}} \quad (110)$$

em que $\mathbf{G}_i$ denota a norma do i -ésimo modo com todos os sensores e $\mathbf{G}_{ki}$, a norma do i -ésimo modo com o k -ésimo sensor.

2.3.4 Redução de Modelo

A redução de modelo é amplamente utilizada em projeto de sistemas de controle que se baseiam no modelo matemático da planta, isto porque a complexidade de tal sistema depende diretamente da ordem do modelo. O grande número de graus de liberdade em modelos obtidos através de análises estáticas também ocasiona problemas numéricos em análises dinâmicas, além do alto custo computacional que pode estar envolvido (GAWRONSKI, 2004).

O objetivo de reduzir um modelo de estruturas flexíveis consiste em obter um modelo com menores dimensões que seja representativo do modelo original. Diversas técnicas de redução de modelo foram propostas na literatura, algumas delas visando obter resultados otimizados. Outros métodos mais simples, porém, fornecem resultados próximo aos obtidos de forma otimizada, entre eles a redução via truncamento de estados (GAWRONSKI, 2004).

Considere um sistema representado em espaço de estados pelo trio $(\mathbf{A}_m, \mathbf{B}_m, \mathbf{C}_m)$ e pelo vetor de estados $\mathbf{x}_m$, que é, então, particionado como exibido na equação (111).

$$\mathbf{x}_m = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_{mr} \\ \mathbf{x}_{mt} \end{Bmatrix} \quad (111)$$

sendo que $\mathbf{x}_{mr}$ representa o vetor de estados retidos e $\mathbf{x}_{mt}$, o vetor de estados truncados. Considerando $n_r < n_m$ modos retidos, $\mathbf{x}_{mr}$ possui dimensão $2n_r \times 1$ e $\mathbf{x}_{mt}$, $2(n_m - n_r) \times 1$. As matrizes $\mathbf{A}_m$, $\mathbf{B}_m$, e $\mathbf{C}_m$ também são divididas em matrizes a serem retidas e truncadas:

$$\mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{mr} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{mt} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{mr} & \mathbf{B}_{mt} \end{bmatrix}^t \quad \mathbf{C}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{mr} & \mathbf{C}_{mt} \end{bmatrix} \quad (112)$$

O modelo reduzido é obtido então ao se desconsiderar as últimas $2(n_m - n_r)$ linhas de $\mathbf{A}_m$ e $\mathbf{B}_m$ e as últimas $2(n_m - n_r)$ colunas de $\mathbf{A}_m$ e $\mathbf{C}_m$. Matematicamente, este procedimento é dado por:

$$\mathbf{A}_{mr} = \mathbf{L}_r \mathbf{A}_m \mathbf{L}_r^t, \quad \mathbf{B}_{mr} = \mathbf{L}_r \mathbf{B}_m, \quad \mathbf{C}_{mr} = \mathbf{C}_m \mathbf{L}_r^t \quad (113)$$

sendo $\mathbf{L}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2n_r} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$.

A questão que surge, então, é quais modos devem ser retidos e quais devem ser truncados.

[Gawronski \(2004\)](#) sugere o uso de normas do sistema para definir quais modos devem ser retidos. O procedimento consiste em escolher uma norma como critério e manter os modos cujas normas apresentam os maiores valores. Este trabalho faz uso deste método, sendo a norma H_2 utilizada como critério para retenção dos modos.

Outra motivação de se reduzir o modelo em coordenadas modais, neste trabalho, é permitir o uso da matriz de observabilidade sem que seja necessário calcular elevadas potências da matriz $\mathbf{A}$, evitando assim problemas numéricos. Ou seja, garante-se a completa observabilidade apenas dos modos retidos, que são determinados em um total de 5. Desta forma, é necessário garantir que os modos retidos representem a dinâmica do sistema da melhor forma possível.

2.3.5 Índices de Posicionamento de sensores

2.3.5.1 Índice H_2

Definido $\mathbf{G}_{ki}(\omega)$ como a função de transferência do i -ésimo modo com o k -ésimo sensor, e $\mathbf{G}_r(\omega)$ a função de transferência do modelo reduzido, pode ser escrito o índice de posicionamento dado pela equação (114).

$$\sigma_{2ki} = w_{2ki} \frac{\|\mathbf{G}_{ki}\|_2}{\|\mathbf{G}_r\|_2} \quad k = 1, \dots, R \quad i = 1, \dots, n_m \quad (114)$$

sendo σ_{2ki} é o índice de posicionamento que avalia o k -ésimo sensor no i -ésimo modo com uso da norma H_2 . $\|\mathbf{G}_{ki}\|_2$ é definida na equações (110). $\|\mathbf{G}_r\|_2$ é dada pela soma RMS da norma dos modos retidos no modelo reduzido. w_{2ki} representa o peso para o k -ésimo modo e i -ésimo sensor e possui valor unitário neste trabalho. R indica o número de posições candidatas a receberem um sensor.

Agrupando estes índices de posicionamento em uma matriz, esta recebe o nome matriz de posicionamento de sensores, sendo dada pela equação (115).

$$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} \sigma_{211} & \sigma_{212} & \cdots & \sigma_{21k} & \cdots & \sigma_{21R} \\ \sigma_{221} & \sigma_{222} & \cdots & \sigma_{22k} & \cdots & \sigma_{22R} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{2i1} & \sigma_{2i2} & \cdots & \sigma_{2ik} & \cdots & \sigma_{2iR} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{2n_m1} & \sigma_{2n_m2} & \cdots & \sigma_{2n_mk} & \cdots & \sigma_{2n_mR} \end{bmatrix} \quad (115)$$

em que a k -ésima coluna contém os índices do k -ésimo sensor para cada modo. Analogamente, a i -ésima linha exibe os índices do i -ésimo modo para todos as posições candidatas. Cada coluna, então, representa a importância do correspondente sensor para cada modo, enquanto cada linha representa a importância do modo correspondente para cada sensor (GAWRONSKI, 2004).

Define-se então o vetor de índices de posicionamento dado pela equação (116).

$$\sigma_{2s} = \begin{bmatrix} \sigma_{2s1} & \sigma_{2s2} & \cdots & \sigma_{2sR} \end{bmatrix}^t \quad (116)$$

sendo, o k -ésimo elemento deste vetor é dado por:

$$\sigma_{2sk} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_m} \sigma_{2ik}^2} \quad k = 1, \dots, R \quad (117)$$

A equação (117) define que, ao se utilizar a norma H_2 , o índice de posicionamento de um sensor é a soma RMS dos seus índices para cada modo individualmente. Através da matriz de posicionamento de sensores e da equação (116) é possível traçar uma análise sobre quais posicionamentos de sensores são mais representativos dos modos retidos durante o procedimento de redução de modelo.

2.3.5.2 Índice grammiano

Considere um sistema com pequenos amortecimentos modais, ou seja, $\zeta \ll 1$ para $\zeta = \max(\zeta_i), i = 1, \dots, n_m$. Em coordenadas modais definidas pela equação (75), os grammianos de observabilidade e controlabilidade se apresentam como matrizes diagonalmente dominantes (GAWRONSKI, 2004). As equações (118) e (119) expressam esta propriedade matematicamente. Com o uso das coordenadas definidas pela equação (92) não foi avaliada esta propriedade dos grammianos, de forma que os índices grammianos são gerados, neste trabalho, apenas para os sistemas com amortecimento proporcional.

$$\mathbf{W}_o \cong \text{diag}(w_{oi} \mathbf{I}_2) \quad (118)$$

$$\mathbf{W}_c \cong \text{diag}(w_{ci} \mathbf{I}_2) \quad (119)$$

sendo $w_{oi} > 0$ e $w_{ci} > 0$ os fatores de observabilidade e controlabilidade modais do i -ésimo modo, respectivamente, para $i = 1, \dots, n_m$. Estes fatores são dados pelas equações (120) e (121).

$$w_{oi} = \frac{\|\mathbf{C}_{mi}\|_2^2}{4\zeta_i\omega_i} \quad (120)$$

$$w_{ci} = \frac{\|\mathbf{B}_{mi}\|_2^2}{4\zeta_i\omega_i} \quad (121)$$

De forma similar ao índice apresentado utilizando a norma H_2 , um outro índice proposto faz uso da matriz grammiana de observabilidade. O índice é dado pela equação (122) e envolve os fatores de observabilidade dos modos descritos pela equação (120).

$$\sigma_{gki} = \frac{w_{oki}}{W_g} \quad k = 1, \dots, R \quad i = 1, \dots, n_m \quad (122)$$

Sendo w_{oki} o fator de observabilidade modal o i -ésimo modo com o k -ésimo sensor, e W_g dado pela equação (123).

$$W_g = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_m} w_{oi}^2} \quad (123)$$

Desta forma, é criada a matriz de posicionamento de sensores usando índices gram-

mianos, dada pela equação (124).

$$\Sigma_g = \begin{bmatrix} \sigma_{g11} & \sigma_{g12} & \cdots & \sigma_{g1k} & \cdots & \sigma_{g1R} \\ \sigma_{g21} & \sigma_{g22} & \cdots & \sigma_{g2k} & \cdots & \sigma_{g2R} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{gi1} & \sigma_{gi2} & \cdots & \sigma_{gik} & \cdots & \sigma_{giR} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{gn_m1} & \sigma_{gn_m2} & \cdots & \sigma_{gn_mk} & \cdots & \sigma_{gn_mR} \end{bmatrix} \quad (124)$$

Novamente, a k -ésima coluna contém os índices do k -ésimo sensor para cada modo. Similarmente, a i -ésima linha exhibe os índices do i -ésimo modo para todas as possíveis posições candidatas.

O vetor de índices de posicionamento é, então, dado pela equação (125).

$$\sigma_{gs} = \left[\sigma_{gs1} \quad \sigma_{gs2} \quad \cdots \quad \sigma_{gsR} \right]^t \quad (125)$$

sendo, o k -ésimo elemento deste vetor dado por:

$$\sigma_{gsk} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_m} \sigma_{gik}^2} \quad k = 1, \dots, R \quad (126)$$

Desta forma, os índices apresentados no vetor dado pela equação (125) são dados pela soma RMS dos índices da k -ésima coluna da matriz dada pela equação (124), e representam a importância do k -ésimo sensor para todos os modos em questão.

3 Metodologia

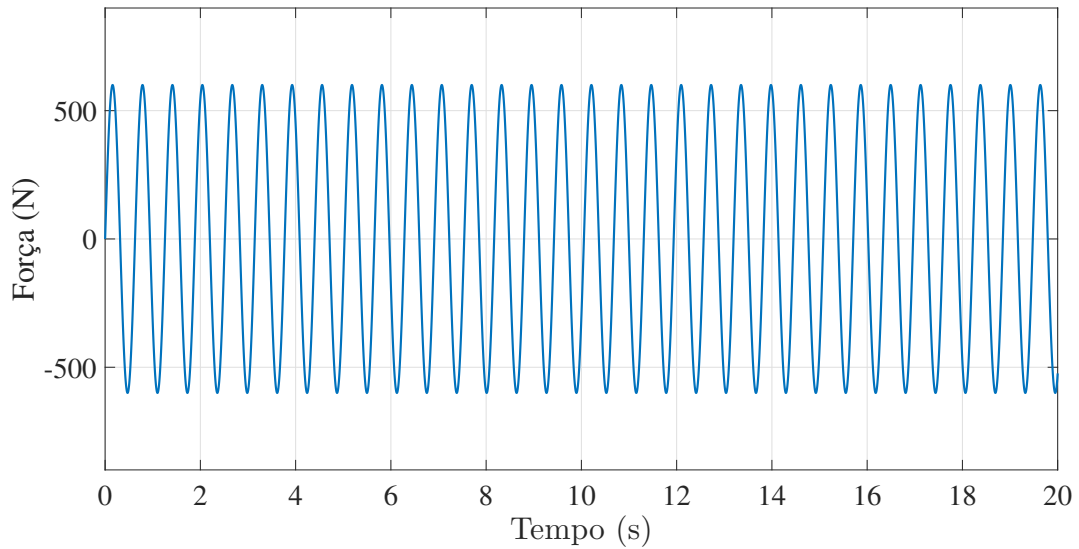
Este capítulo apresenta a sequência de procedimentos adotados visando a detecção de dano. O sistema de plataforma veicular é abordado possuindo amortecimento proporcional e, posteriormente, não proporcional. São abordadas as forças de excitação que agem sobre o sistema e suas respectivas posições de atuação. As estratégias de seleção de modos retidos e posicionamento ótimo de sensores são explicitadas. É introduzido o índice de detecção de dano obtido da comparação entre a resposta medida e a estimada por observadores de estados.

3.1 Forças de Excitação

3.1.1 *Excitação Devido à Massa Desbalanceada*

De acordo com [Rao \(2008\)](#), o desbalanceamento de uma massa aplica ao sistema uma força senoidal, cuja amplitude é dada por $m_d e \omega_d$, sendo m_d o valor da massa desbalanceada, e a excentricidade e ω_d a frequência de rotação. Considerando duas massas girando em sentido oposto, a componente horizontal da força de desbalanceamento é cancelada e a componente vertical duplicada. Uma excitação vertical é, então, aplicada ao nó 17 da placa a fim de simular o efeito do motor sobre o sistema. Esta força é exibida na figura (6), sendo uma senóide de módulo igual a 600 N e frequência de 10 rad/s .

Figura 6 – Excitação devido à massa desbalanceada

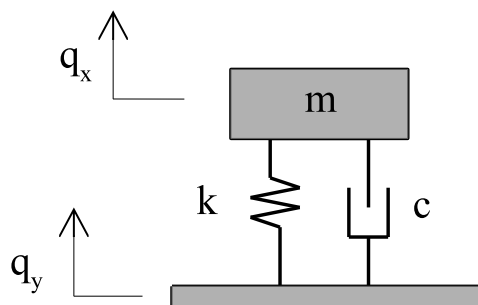


Fonte: Próprio Autor

3.1.2 *Excitação pela base*

As excitações as quais um automóvel geralmente se encontra submetido são provenientes do deslocamento dos pneus. O movimento relativo entre a base (solo) e as massas das rodas provoca forças nestas que são proporcionais ao deslocamento e à velocidade da base. Considere o sistema massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade, representado pela figura (7).

Figura 7 – Sistema massa-mola-amortecedor excitado pela base



Fonte: Próprio Autor

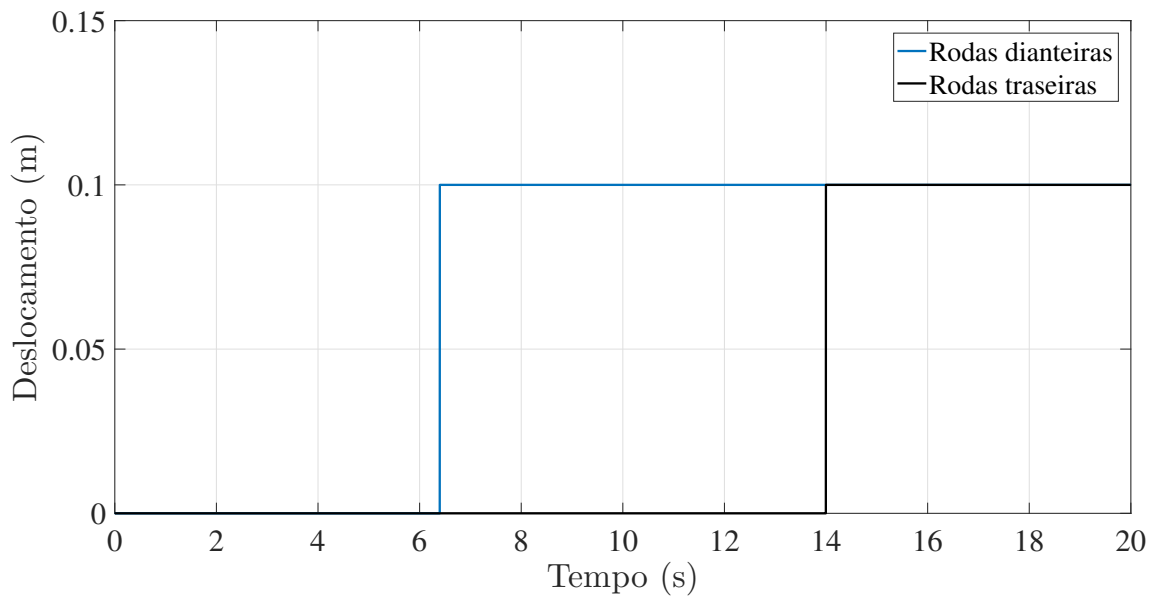
De acordo com (RAO, 2008), o sistema é descrito pela equação (127), em que o lado

direito representa a força que é aplicada à massa devido ao movimento da base.

$$m \ddot{q}_x + c \dot{q}_x + k q_x = c \dot{q}_y + k q_y \quad (127)$$

A figura (8) exhibe o deslocamento da base para a plataforma veicular. As massas m_1 e m_3 , representando as rodas dianteiras, sofrem o deslocamento antes das massas m_2 e m_4 , que representam as rodas traseiras, a fim de simular o movimento do veículo.

Figura 8 – Excitação degrau pela base



Fonte: Próprio Autor

O deslocamento da base, neste trabalho, é simulado como um degrau. A força que este deslocamento exerce nas massas concentradas da suspensão é expressa pelo lado direito da equação (127). Tal força é, então, adicionada ao vetor de entradas, $\mathbf{u}(t)$.

3.2 Seleção dos Modos Retidos e Posicionamento Ótimo de Sensores

Gawronski (2004) sugere o uso de normas do sistema para determinar modos retidos e posicionamento ótimo de sensores. Entre as normas, são apresentadas a norma H_2 e H_∞ . A norma H_2 , porém, é dita ser uma medida mais sensível na determinação do posicionamento de sensores e atuadores. Isto ocorre pois os índices de posicionamento

H_2 para o modelo reduzido são definidos por uma soma RMS dos índices de cada modo, enquanto o índice H_∞ é dado pelo valor máximo dos índices de cada modo. Desta forma, a norma H_2 é escolhida para definir o posicionamento ótimo de sensores e os modos que irão compor o modelo reduzido.

A seleção dos modos retidos visa garantir que a norma de sistema do modelo reduzido seja a mais próxima possível daquela do modelo original. Para isso, são selecionados os modos com maior norma H_2 , calculada a partir da equação (104). É possível observar que esta equação envolve a matriz $\mathbf{C}_{mi}$, dependente da posição dos sensores. Desta forma, a seleção dos modos retidos e o posicionamento ótimo de sensores é um processo iterativo. Neste trabalho, objetiva-se manter o máximo número de modos no modelo reduzido, sem produzir problemas numéricos no cálculo da matriz de observabilidade.

Quanto ao posicionamento de sensores, considera-se que seria inviável adicioná-los nos elementos da suspensão, de forma que as posições candidatas concentram-se apenas na placa e são definidas como os nós do modelo, exibidos na figura (3). Desta forma, existe um total de 25 posições candidatas a receberem sensores, ou seja, $R = 25$. A estratégia de posicionamento traçada segue, então, uma adaptação daquela proposta em [Bueno \(2007\)](#). São adotados os seguintes passos:

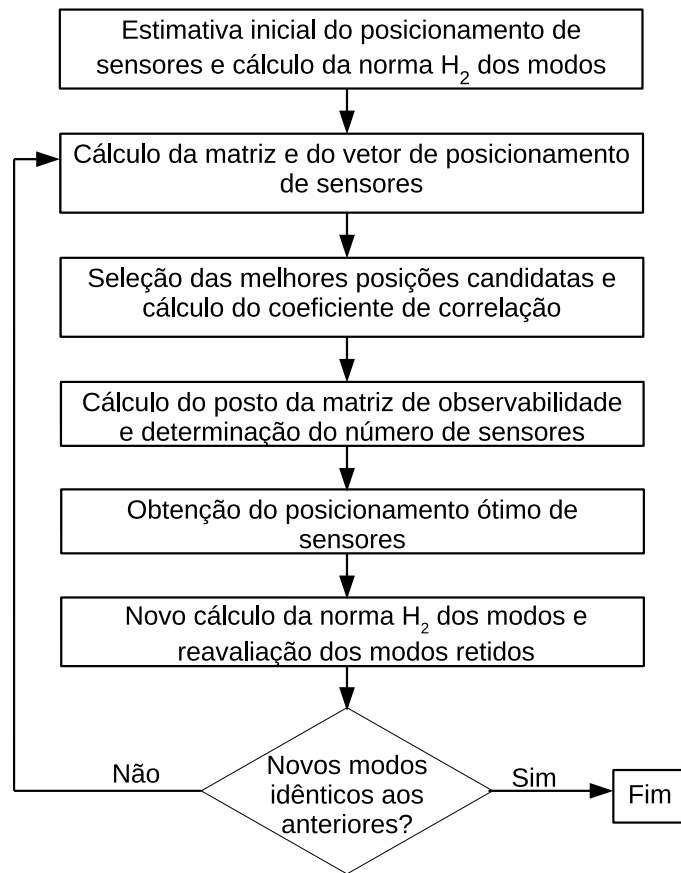
1. Para cada modo (i) e localização (k), determinam-se os índices de posicionamento do sensor, σ_{2ik} e σ_{gik} .
2. Para observar um modo específico, são selecionadas as posições mais importantes, ou seja, que possuem maiores σ_{2sk} e σ_{gsk} .
3. Para observar um número n_m de modos, determinar os índices σ_{2sk} e σ_{gsk} para cada posição candidata ($k = 1, \dots, R$), dados pelas equações (117) e (126). Definem-se, assim, os vetores dados pelas equações (116) e (125). Por fim, deve-se obter o número de sensores necessários de tal forma que os n_m modos sejam observáveis.
4. Para posições com índices semelhantes, é analisado o coeficiente de correlação. Se um sensor posicionado na j -ésima posição é altamente correlacionado com um outro sensor posicionado na k -ésima posição, o coeficiente de correlação, dado pela equação (128), se aproxima de 1. Caso $r_{ik} > 0,95$, o sensor com o menor índice é descartado, enquanto o outro é mantido.

$$r_{ik} = \frac{\mathbf{g}_j^t \mathbf{g}_k}{\|\mathbf{g}_j\|_2 \|\mathbf{g}_k\|_2} \quad j = 1, \dots, r \quad k = 1, \dots, R \quad (128)$$

sendo $\mathbf{g}_j$ é um vetor $n_m \times 1$, formado pelos elementos da j -ésima coluna da matriz de posicionamento de sensores elevados ao quadrado.

Novamente, é importante lembrar que os índices grammianos são calculados apenas para o sistema com amortecimento proporcional. O procedimento de seleção de modos retidos e posicionamento ótimo de sensores é ilustrado na figura (9).

Figura 9 – Fluxuograma para seleção de modos e posicionamento de sensores



Fonte: Próprio autor

3.3 Monitoramento de Integridade Estrutural por Observadores de Estados

Um observador de estados que corresponde a uma cópia exata do sistema físico sem danos, como representado pela equação (35), é denominado observador de estados global. Este observador é responsável por acusar a presença de dano no sistema, ou seja, é responsável pela detecção. Isto pode ser obtido ao comparar a resposta do observador global com a do sistema através de alguma métrica que permita analisar a diferença entre as

duas respostas. Um observador, assim construído, não é capaz de localizar o dano, nem determinar sua severidade.

A fim de localizar o dano e quantificar sua severidade, é necessária a criação de observadores robustos a tais danos, atuando em paralelo com o sistema físico monitorado e formando um banco de observadores. Desta forma, cada observador robusto é projetado a um dano específico e a uma severidade específica. Caso o sistema esteja submetido ao dano de determinado observador robusto, suas respostas serão muito próximas.

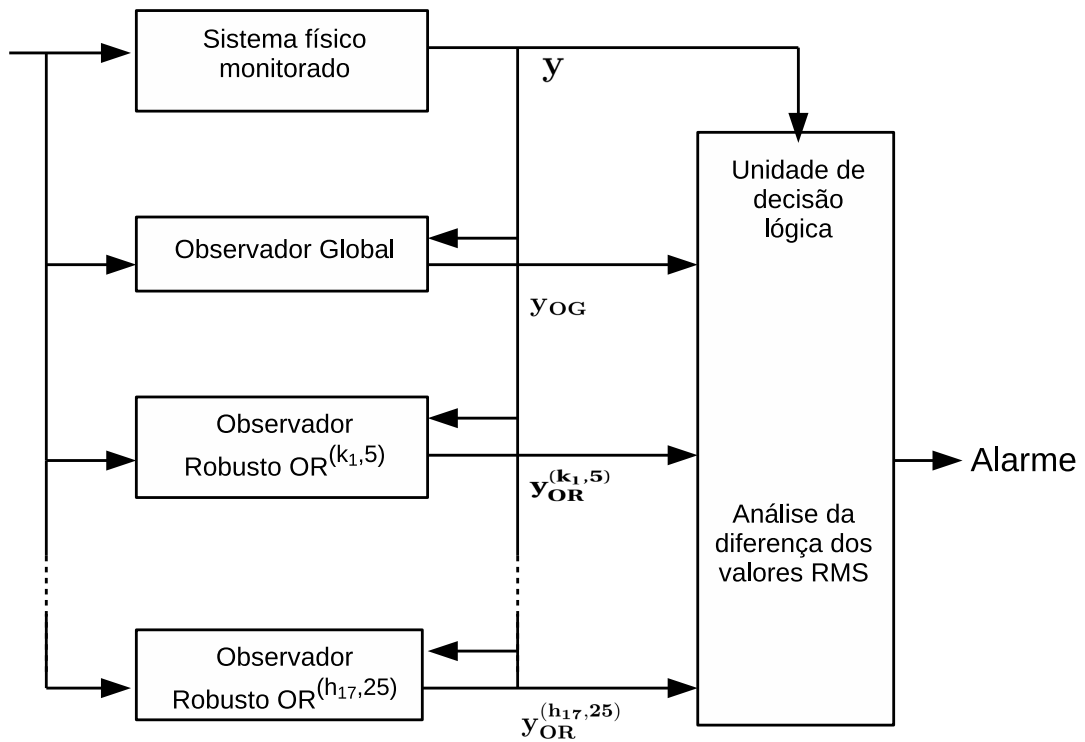
Logo, a metodologia consiste em projetar um observador global para detecção, e um banco de observadores robustos para localização e quantificação da severidade do dano. A métrica utilizada para comparar as respostas do sistema físico e dos observadores é uma adaptação daquela apresentada nos trabalhos de [Monte Alegre \(2009\)](#), [Koroishi \(2009\)](#) e [Ribeiro \(2015\)](#). Nestes trabalhos, o inverso do valor RMS da diferença entre as duas respostas é utilizado. Para permitir a análise com mais de um par de respostas comparadas, é introduzido o índice de dano, dado pela equação (129).

$$I_d = \sqrt{\sum_{i=1}^r \left(\frac{1}{RMS(\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_{iOR})} \right)^2} \quad (129)$$

sendo I_d o índice de dano, r o número de sensores (ou de saídas), $\mathbf{y}_i$ o vetor contendo a i -ésima saída medida do sistema monitorado, e $\mathbf{y}_{iOR}$ o vetor contendo a correspondente saída estimada do observador robusto.

A diferença RMS entre a resposta do sistema monitorado com dano e do observador robusto àquele dano específico é um valor muito pequeno se comparado com o dos demais observadores. Desta forma, seu inverso será um valor elevado, que permitirá distinguir qual o dano presente no sistema. Para mais de um sensor, o índice de dano é proposto como a soma RMS envolvendo cada par de medidas comparadas. O observador robusto com maior índice de dano, então, é aquele cuja resposta mais se aproxima da resposta do sistema monitorado. A figura (10) exhibe uma representação esquemática da metodologia.

Figura 10 – Banco de observadores para monitoramento da integridade estrutural



Fonte: Adaptado de Koroishi (2009)

O primeiro índice sobrescrito associado ao observador indica o elemento danificado, e o segundo, porcentagem de dano. Assim, $y_{OR}^{(k_1,10)}$ indica o observador robusto projetado a 10% de dano na rigidez k_1 . Neste trabalho, são gerados observadores robustos de 0 a 25% para cada dano analisado, variando de 5 em 5%.

4 Resultados e Discussões

Este capítulo apresenta os resultados obtidos nas simulações feitas visando monitorar plataformas veiculares via observadores de estados. Primeiramente, são definidos os modos retidos e o posicionamento ótimo de sensores que servirão de entrada para os observadores. Por fim, são apresentadas as simulações envolvendo o banco de observadores robustos.

4.1 Validação do Modelo

Para validação do modelo, os resultados obtidos com a equação (53), implementada no *software* Octave, para as dez primeiras frequências naturais foram comparados com aqueles extraídos do *software* comercial ANSYS®¹. A comparação é exibida na tabela (2), sendo possível observar a proximidade dos resultados.

Tabela 2 – Validação do modelo

Modos	Frequência (Hz)	
	Octave	ANSYS®
1ºmodo	13.3477	13.306
2ºmodo	20.5796	20.457
3ºmodo	21.5051	21.496
4ºmodo	38.3291	38.256
5ºmodo	42.9668	42.787
6ºmodo	54.7357	54.330
7ºmodo	57.6077	57.421
8ºmodo	95.8674	95.488
9ºmodo	104.6651	103.28
10ºmodo	200.8794	199.25

¹Licença estudantil, disponível gratuitamente

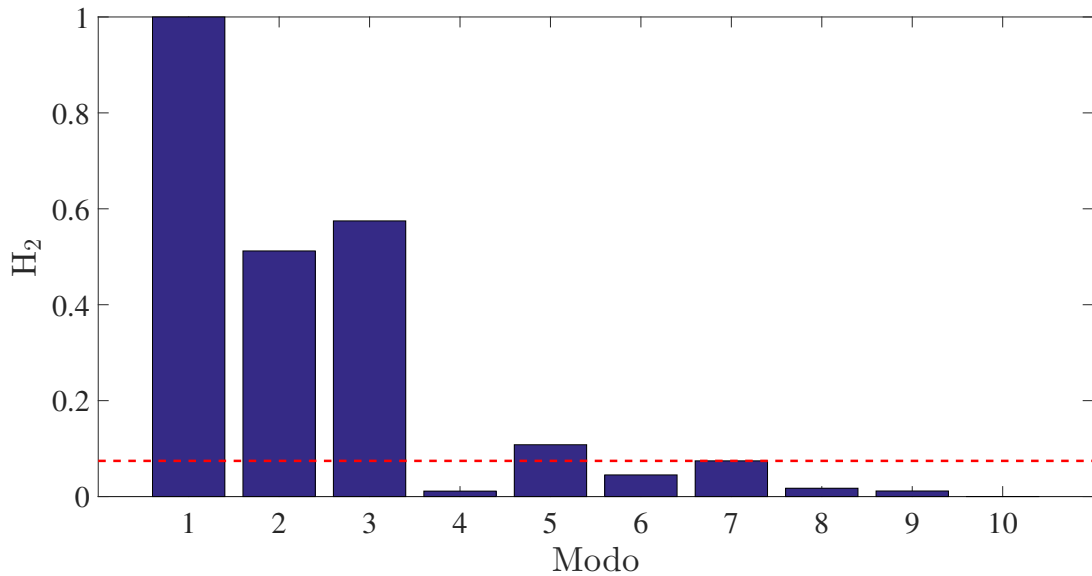
4.2 Sistema com Amortecimento Proporcional

As propriedades dos 10 primeiros modos são exibidas na (3), incluindo $\|\mathbf{B}_{mi}\|_2$, $\|\mathbf{C}_{mi}\|_2$ e a norma H_2 .

Tabela 3 – Norma H_2 para os dez primeiros modos

Modos	$\ \mathbf{B}_{mi}\ _2$	$\ \mathbf{C}_{mi}\ _2 \times 10^{-2}$	ζ_i	$\ G_i\ _2 \times 10^{-3}$
1 ºmodo	0.5046	0.5397	0.0419	1.0270
2 ºmodo	0.5506	0.3906	0.0647	0.5260
3 ºmodo	0.5917	0.4263	0.0676	0.5903
4 ºmodo	0.0730	0.1219	0.1204	0.0117
5 ºmodo	1.0452	0.0907	0.1350	0.1110
6ºmodo	0.4537	0.1111	0.1720	0.0464
7 ºmodo	0.7511	0.1166	0.1810	0.0765
8 ºmodo	0.2606	0.1304	0.3012	0.0178
9 ºmodo	0.1912	0.1299	0.3288	0.0119
10 ºmodo	0.0046	0.1097	0.6311	0.0001

A figura (11) exhibe o graficamente o valor da norma H_2 de cada modo após ser normalizada pelo maior valor, relativo ao primeiro modo. A linha tracejada em vermelho, relativa à norma H_2 do sétimo modo, delimita os modos a serem retidos. Ao seleccionar os cinco modos com maiores normas, mantém-se os modos 1, 2, 3, 5 e 7 no modelo reduzido. Os demais modos, situados abaixo da linha vermelha, são desconsiderados para o procedimento de posicionamento de sensores.

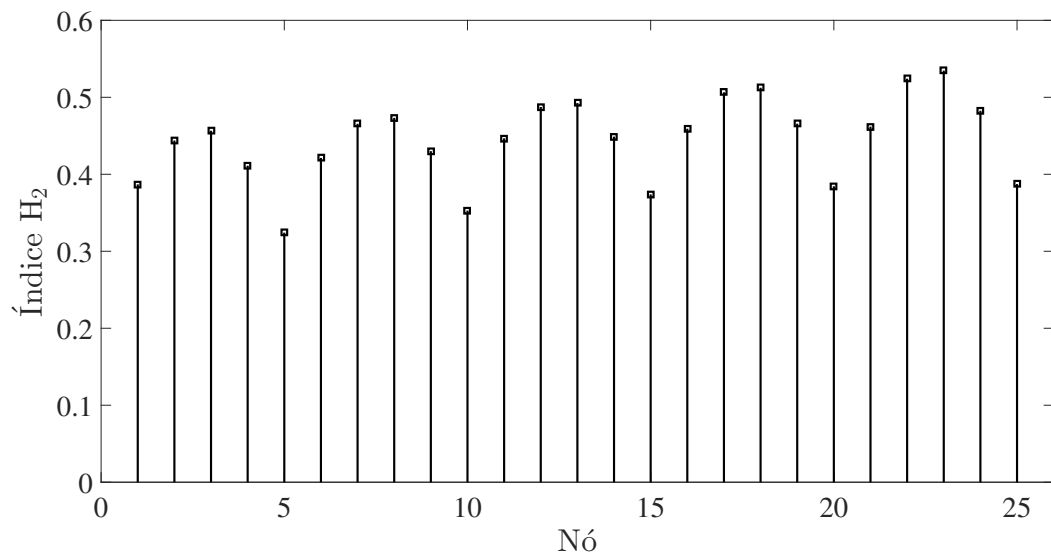
Figura 11 – Modos com maior norma H_2 

Fonte: Próprio autor

Calculando a norma H_2 do modelo reduzido, através da equação (107), obtém-se o valor de 1.3016×10^{-3} . Para o modelo completo, contendo todos os modos, esta norma possui o valor de 1.3041×10^{-3} . Isto significa que a norma H_2 do modelo reduzido equivale a 99,8 % do modelo completo. Este é um valor elevado, e seria razoável utilizar um menor número de modos, por exemplo, apenas os três primeiros. Porém, 5 modos são retidos a fim de manter o máximo número de modos que possibilite o cálculo da matriz de observabilidade sem problemas numéricos.

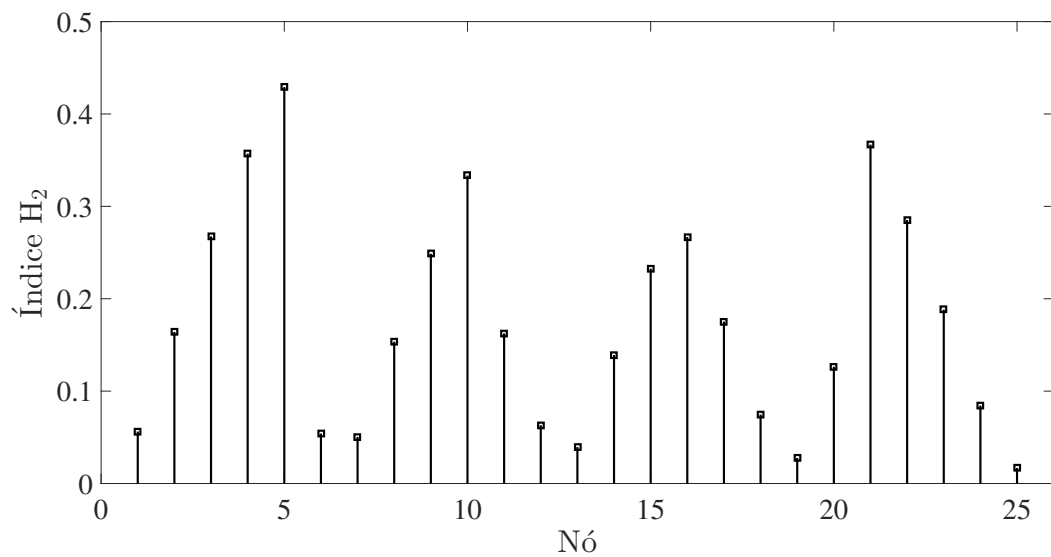
Os modos de vibrar da placa são exibidos no anexo A. Definido os modos retidos, a análise da matriz de posicionamento de sensores se reduz a cinco linhas, relativas a esses modos. As figuras (12), (13), (14), (15) e (16) exibem os índices de posicionamento H_2 para cada modo individualmente.

Figura 12 – Índices de posicionamento H_2 para o primeiro modo



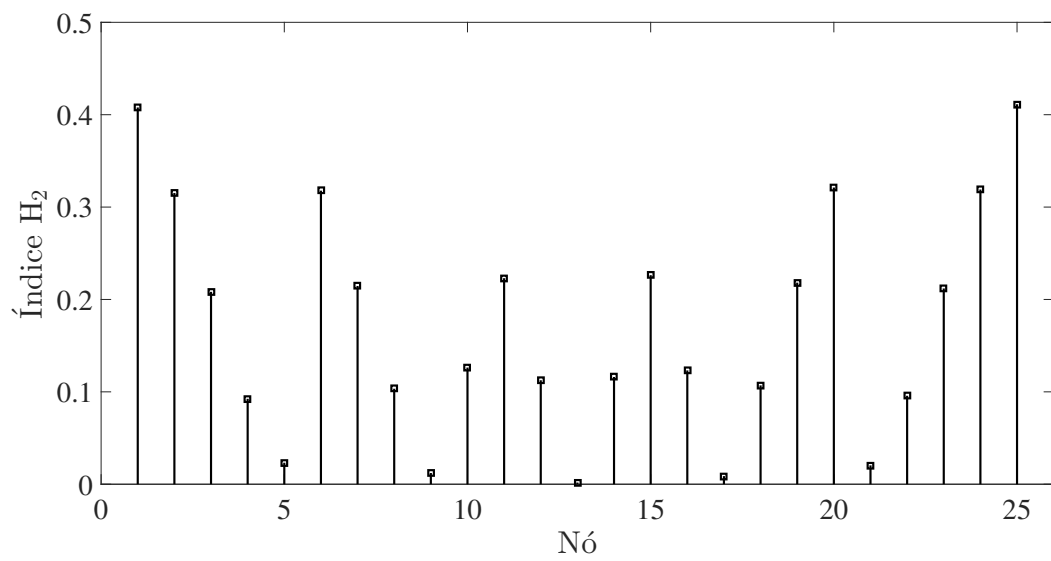
Fonte: Próprio autor

Figura 13 – Índices de posicionamento H_2 para o segundo modo



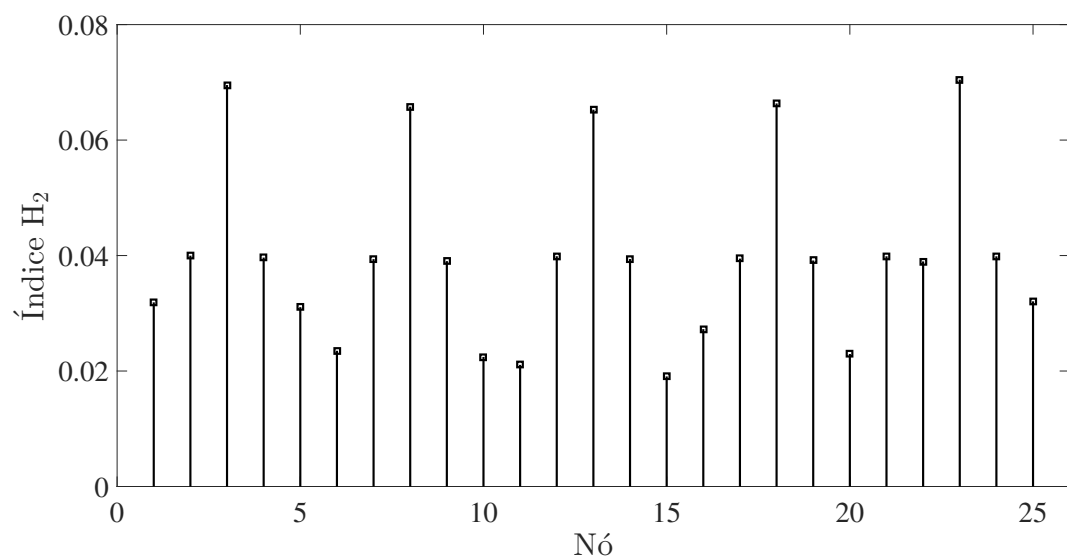
Fonte: Próprio autor

Figura 14 – Índices de posicionamento H_2 para o terceiro modo

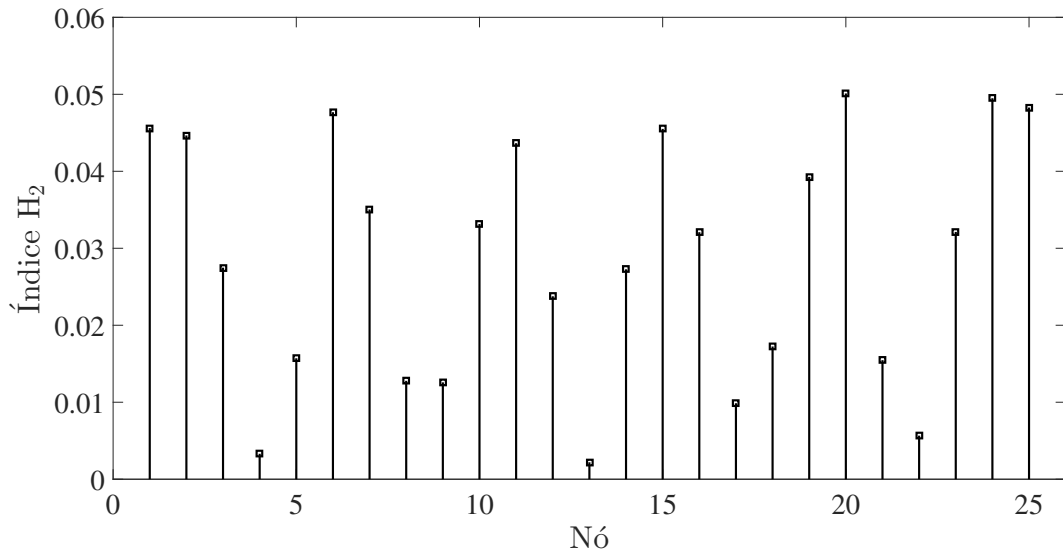


Fonte: Próprio autor

Figura 15 – Índices de posicionamento H_2 para o quinto modo



Fonte: Próprio autor

Figura 16 – Índices de posicionamento H_2 para o sétimo modo

Fonte: Próprio autor

A comparação entre os índices obtidos e as figuras do anexo A leva a informações interessantes. O primeiro modo possui a menor variação de índices ao longo dos nós. O segundo e terceiro modo privilegiam as posições localizadas nas laterais da placa. O quarto modo apresenta maiores deslocamento nos nós localizados ao longo do eixo y . Por fim, o sétimo modo apresenta um movimento de torção que privilegia posições opostas nas laterais da placa.

A tabela (4) apresenta as melhores posições candidatas para cada modo, sem considerar, no entanto se sensores alocados em tais posições estão altamente correlacionados.

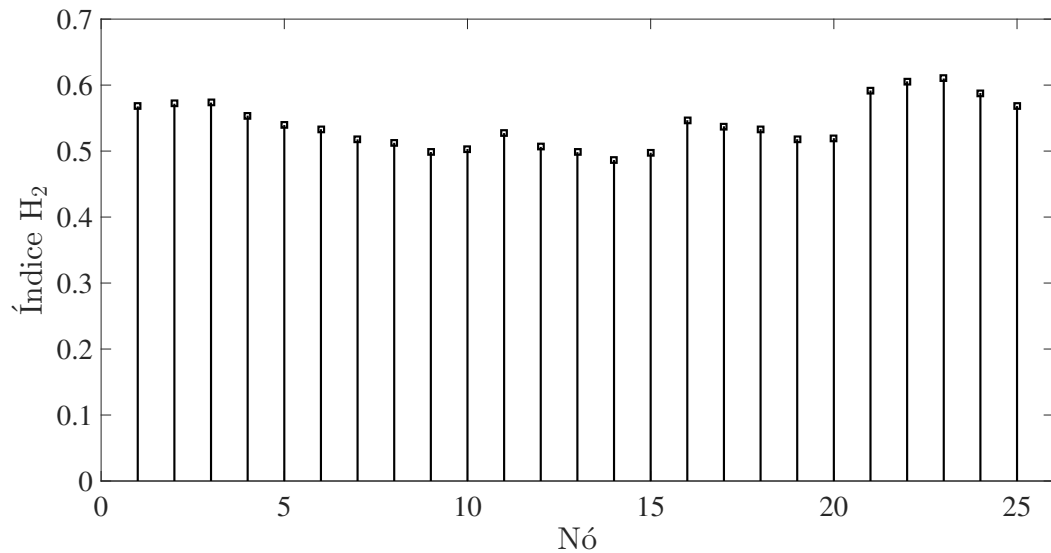
Tabela 4 – Posições com os maiores índices H_2 para cada modo

Modos	Posições (Nós)
1 ºmodo	17, 18, 22, 23
2 ºmodo	4, 5, 10, 21 22
3 ºmodo	1, 2, 6, 20, 24, 25
5 ºmodo	3, 8, 13, 18, 23
7 ºmodo	1, 2, 6, 20, 24, 25

É importante notar que os índices de posicionamento para os três primeiros modos

são maiores que para os dois últimos. Este fato faz com que os três primeiros modos sejam mais determinantes no posicionamento de sensores do modelo reduzido. Os índices H_2 obtidos a partir do vetor de posicionamento de sensores são apresentados na figura (17).

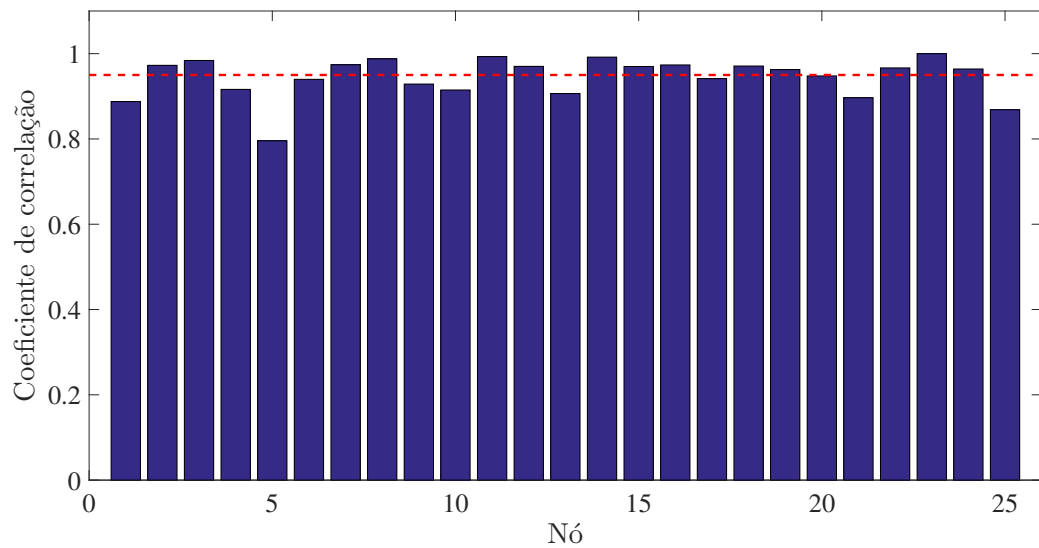
Figura 17 – Índices de posicionamento H_2 para o modelo reduzido



Fonte: Próprio autor

O nó 23 apresenta o maior índice. A fim de eliminar sensores em posições altamente correlacionados com essa, são calculados os coeficientes de correlação. A figura (18) exibe tais coeficientes entre o nó 23 e as demais posições.

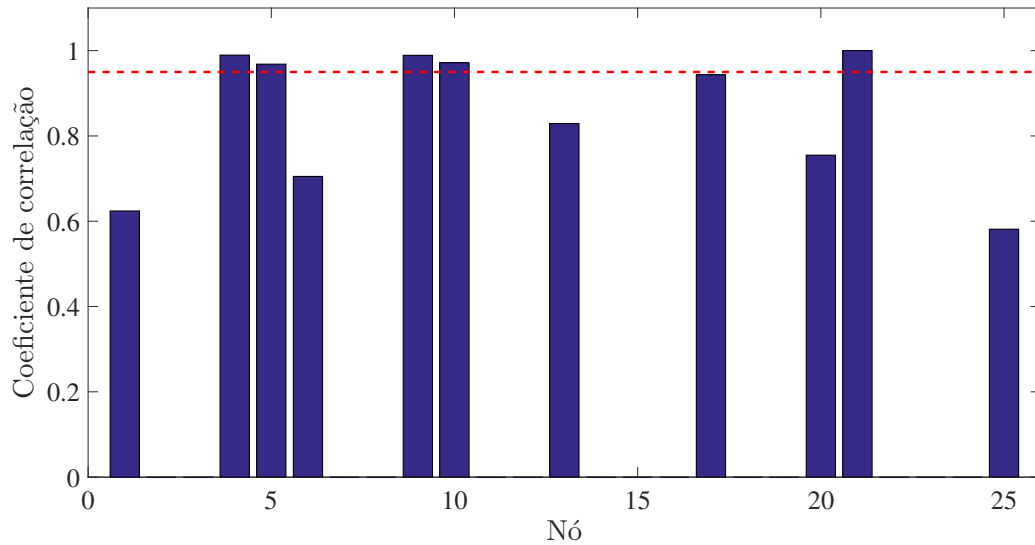
Figura 18 – Coeficiente correlação entre o nó 23 e os demais



Fonte: Próprio autor

Coeficientes de correlação maiores que 0,95, delimitados pela linha vermelha, representam posições altamente correlacionadas com o nó 23. Por possuir maior índice de posicionamento, o sensor no nó 23 é mantido e os demais são descartados. É possível observar na figura (17) que a posição com maior índice H_2 e não correlacionada é aquela do nó 21, que é então selecionada. A figura (19) exhibe o coeficiente de correlação entre o nó 21 e as demais posições, exibindo valor nulo para as posições anteriormente descartadas.

Figura 19 – Coeficiente correlação entre o nó 21 e os demais



Fonte: Próprio autor

Excluindo-se as posições altamente correlacionadas com os nós 21 e 23, o nó 25 se apresenta com maior índice H_2 . A tabela (5) exhibe o posto da matriz de observabilidade utilizando 1, 2 e 3 sensores posicionados nos nós 21, 23 e 25.

Tabela 5 – Posicionamento de sensores via índice H_2

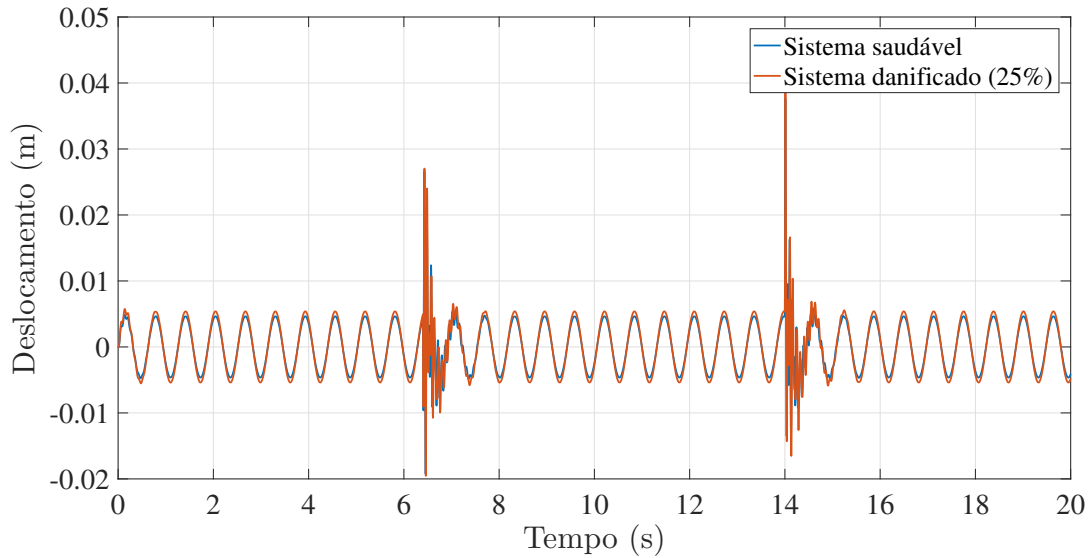
Número de sensores	Posições (Nós)	Posto de $\mathbf{M}_o$
3	21, 23, 25	10
2	21, 23	9
1	23	6

A fim de garantir observabilidade completa do modelo reduzido, são necessários, então, 3 sensores posicionados nos nós 21, 23 e 25.

O posicionamento obtido via índices grammianos é exibido no anexo B. O uso de índices grammianos leva ao mesmo posicionamento ótimo de sensores obtidos com o uso de índices H_2 para a estrutura avaliada.

Posicionados os sensores, é introduzido um dano de 25% na rigidez k_8 . A resposta do sistema medida no nó 25 é exibida na figura (20).

Figura 20 – Resposta medida no nó 25 para perda de 25% em k_8

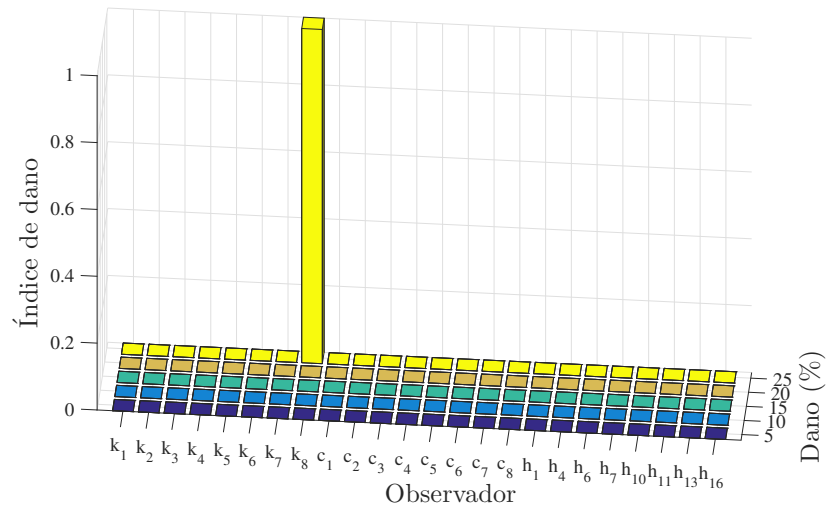


Fonte: Próprio autor

É possível observar a resposta senoidal do sistema ocorrendo devido à excitação da massa desbalanceada. Nos instantes $t = 6.4s$ e $t = 14s$, o sistema recebe excitação pelas bases dianteiras e traseiras, respectivamente. Visto que a resposta exibida é medida no nó 25, posicionado mais próximo das rodas traseiras, o deslocamento nesta base é mais perceptível na resposta do sistema.

Visualmente, é difícil distinguir perfeitamente as curvas do sistema intacto e danificado, sendo também difícil distinguir qual dano se apresenta no sistema. A fim de diagnosticar o dano presente, os observadores robustos geram índices de dano que são comparados e exibidos na figura (21). Tais índices, neste trabalho, são exibidos normalizados pelo maior valor, de forma que este apresenta valor unitário.

Figura 21 – Índices da dano para perda de 25% em k_8

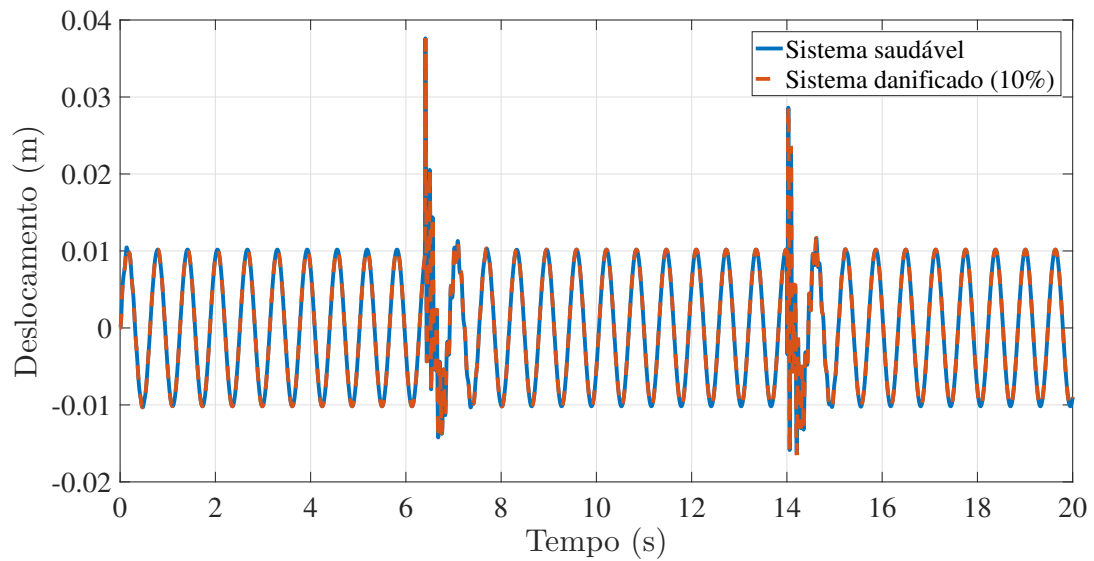


Fonte: Próprio autor

O índice de dano do observador robusto projetado a 25% de falha em k_8 se mostra muito superior aos demais. Desta forma, utilizando o banco de observadores robustos, é possível localizar e quantificar este dano.

A fim de verificar a eficácia dos observadores de estados para outros tipos de dano, o sistema é danificado com uma perda de amortecimento de 10% no elemento c_6 da suspensão. A figura (22) exhibe a resposta do sistema medida no nó 21. É possível perceber que a resposta à excitação da massa desbalanceada apresenta maior amplitude, uma vez que o nó 21 está mais próximo desta fonte de excitação que o nó 25. Também é visível que a excitação pela base dianteira é mais perceptível devido à maior proximidade deste nó com as rodas dianteiras do que com as traseiras.

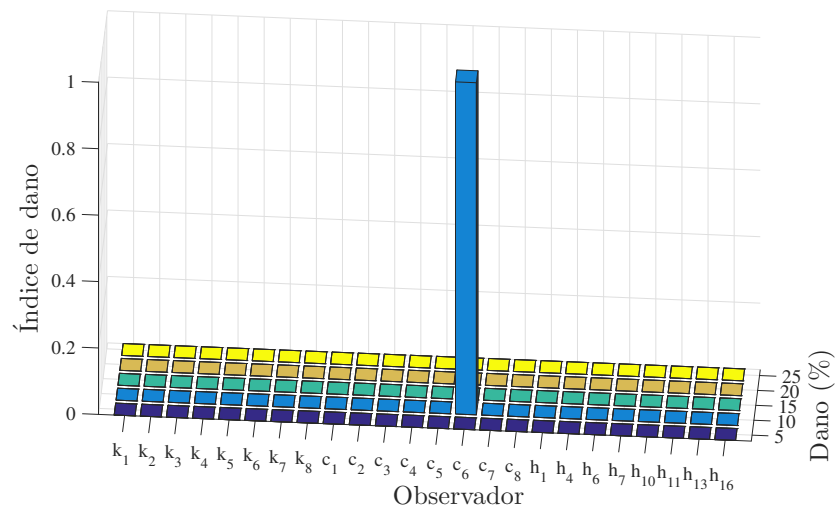
Figura 22 – Resposta medida no nó 21 perda de 10% em c_6



Fonte: Próprio autor

Novamente, não é possível distinguir com clareza as curvas do sistema danificado e intacto apenas através da resposta no tempo. A figura (23) exibe os índices de dano calculados para os observadores robustos. Percebe-se que o índice de dano do observador projetado para 10% de dano em c_6 se sobrepõe aos demais, permitindo localizar o dano e identificar sua severidade.

Figura 23 – Índices de dano para perda de 10% em c_6

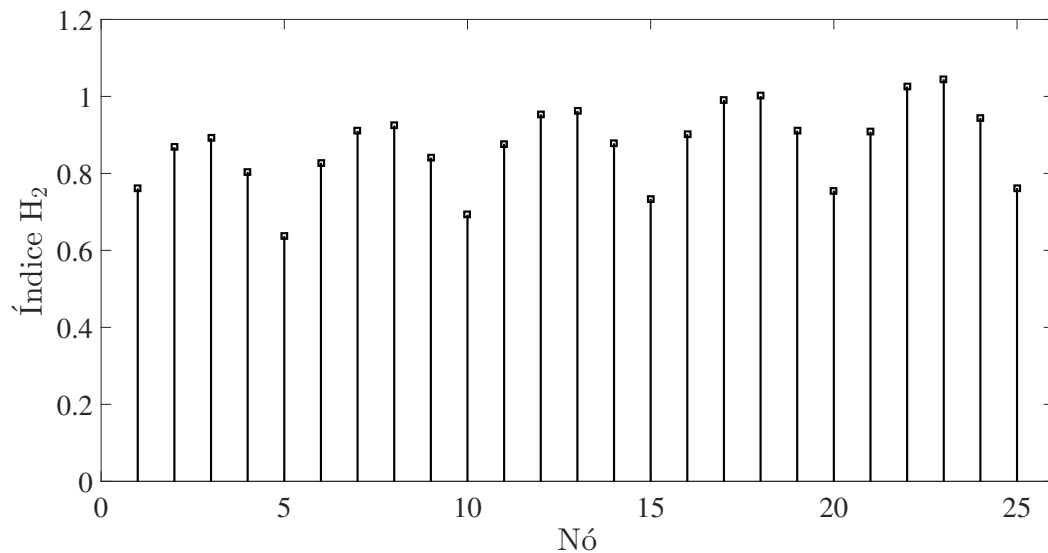


Fonte: Próprio autor

4.3 Sistema com Amortecimento Não Proporcional

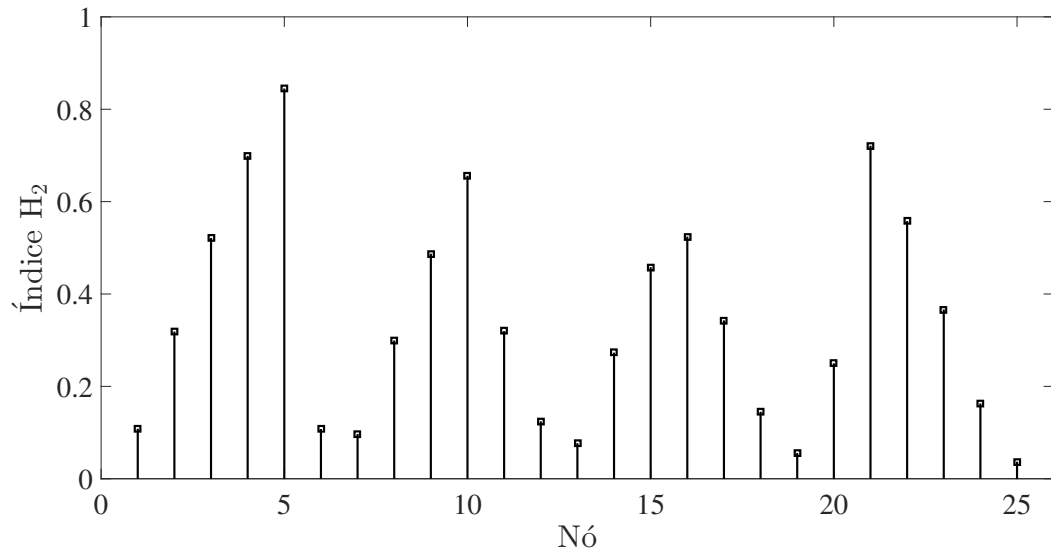
Avaliando o sistema com amortecimento não proporcional, apenas os cinco primeiros modos se mostram subamortecimentos. A análise dos modos superamortecidos foge do escopo deste trabalho, de forma que os cinco primeiros modos são mantidos e analisados no modelo reduzido. As figuras (24), (25), (26), (27) e (28) exibem os índices de posicionamento H_2 para estes modos.

Figura 24 – Índices H_2 do primeiro modo para plataforma com amortecimento não proporcional



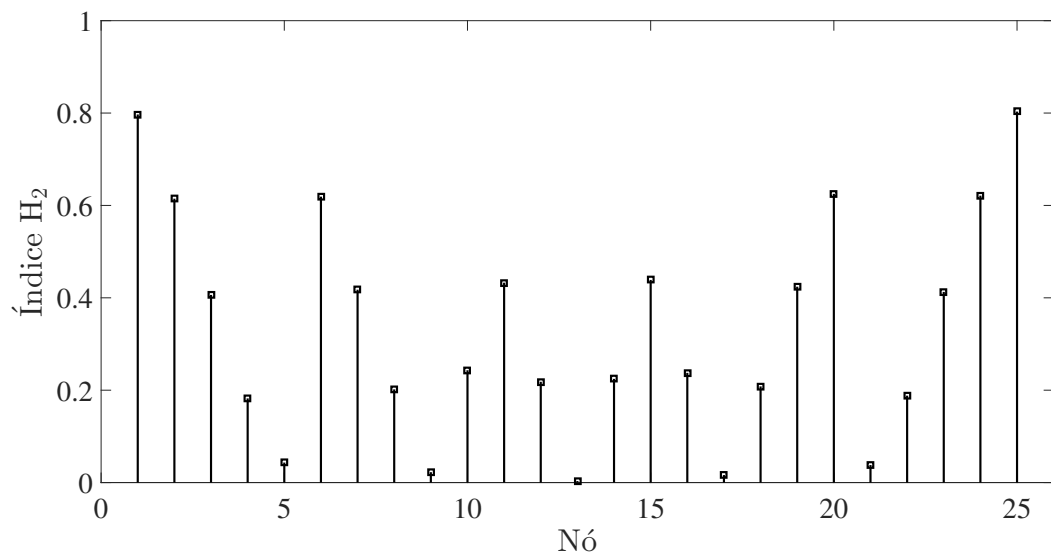
Fonte: Próprio autor

Figura 25 – Índices H_2 do segundo modo para plataforma com amortecimento não proporcional



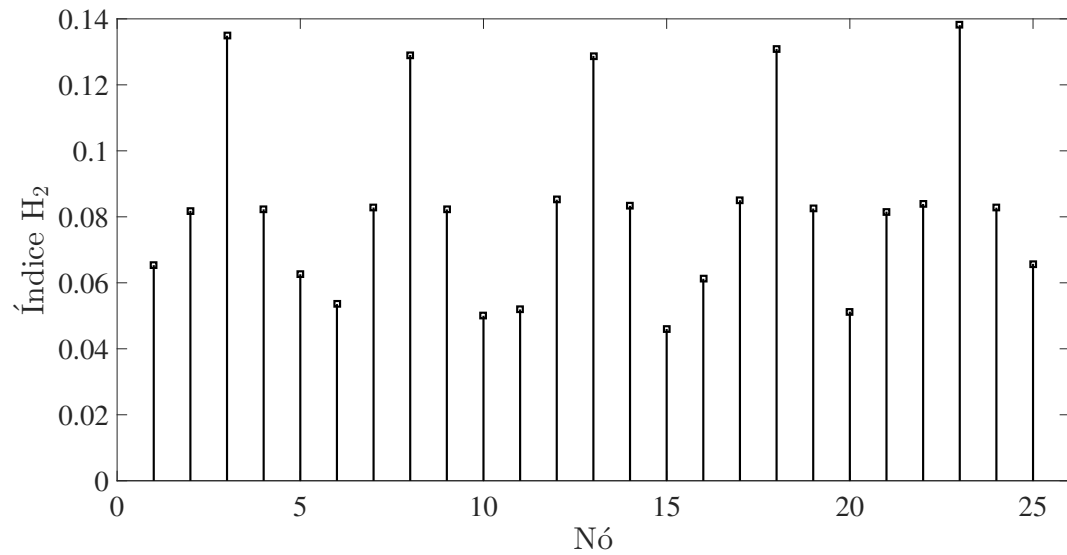
Fonte: Próprio autor

Figura 26 – Índices H_2 do terceiro modo para plataforma com amortecimento não proporcional



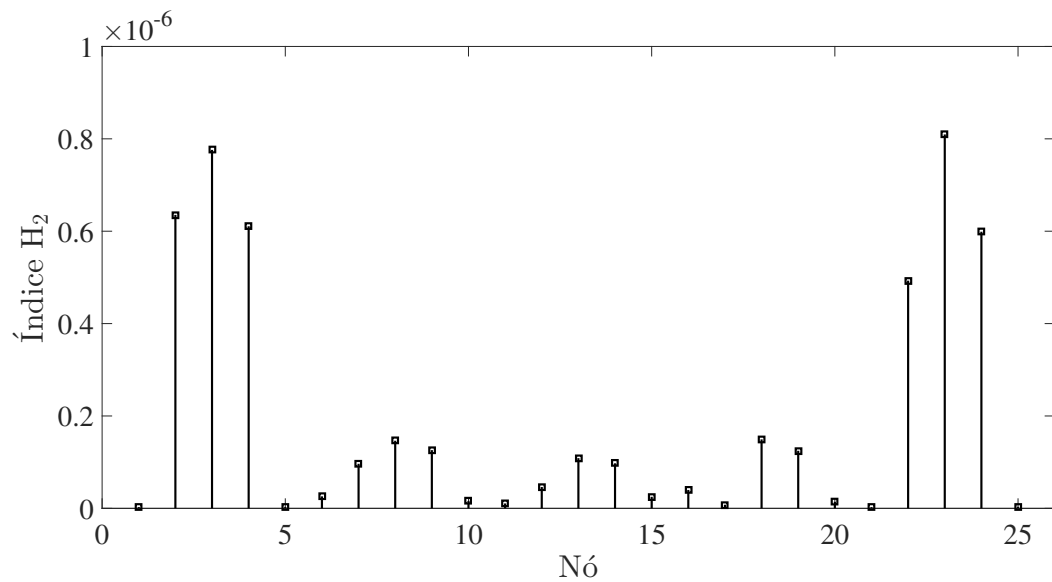
Fonte: Próprio autor

Figura 27 – Índices H_2 do quarto modo para plataforma com amortecimento não proporcional



Fonte: Próprio autor

Figura 28 – Índices H_2 do quinto modo para plataforma com amortecimento não proporcional



Fonte: Próprio autor

É importante frisar que estes modos são complexos e se diferem daqueles obtidos com o sistema possuindo amortecimento proporcional, que são reais. Os índices de posicio-

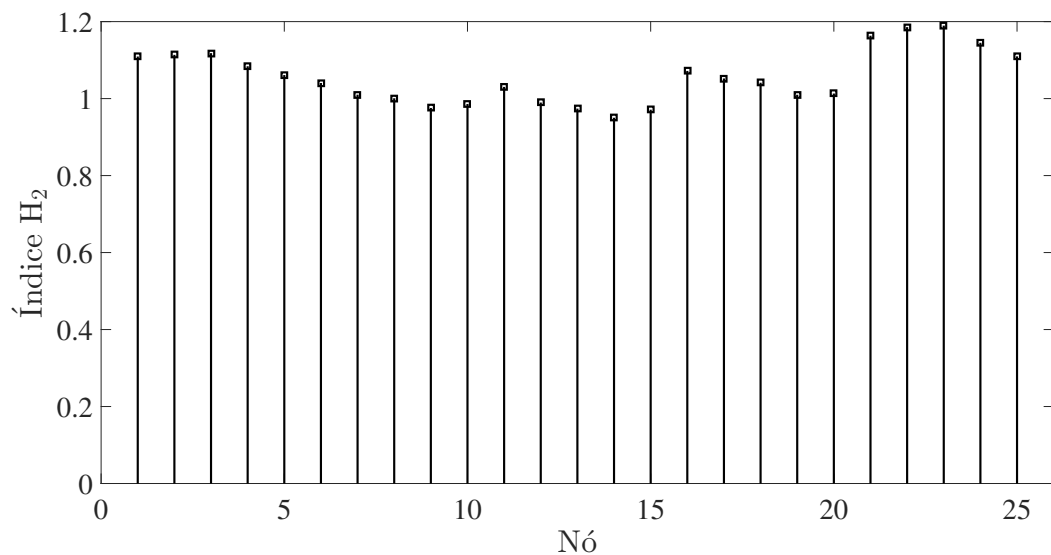
namento do quinto modo caem drasticamente em comparação com os demais, indicando que este modo participa pouco da dinâmica do sistema. A tabela (6) exhibe as melhores posições candidatas para cada modo.

Tabela 6 – Posições com os maiores índices H_2 para plataforma com amortecimento não proporcional

Modos	Posições (Nós)
1 ºmodo	17, 18, 22, 23
2 ºmodo	4, 5, 10, 21 22
3 ºmodo	1, 2, 6, 20, 24, 25
4 ºmodo	3, 8, 13, 18, 23
5 ºmodo	2, 3, 4, 22, 23, 24

A figura (29) exhibe os índices H_2 de posicionamento de sensores para o modelo reduzido, obtidos a partir do vetor de posicionamento de sensores.

Figura 29 – Índices H_2 do modelo reduzido para plataforma com amortecimento não proporcional

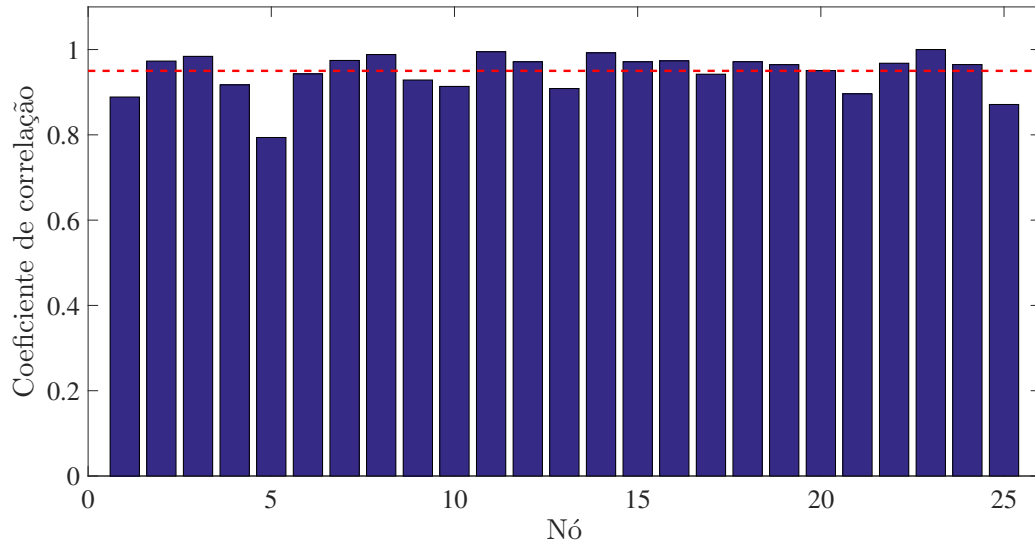


Fonte: Próprio autor

O nó 23 apresenta maior índice de posicionamento. O coeficiente de correlação deste nó com os demais é apresentado na figura (30), em que a linha vermelha delimita o limiar

de 0,95.

Figura 30 – Índices de correlação do nó 23 com os demais para plataforma com amortecimento não proporcional



Fonte: Próprio autor

Eliminando as posições altamente correlacionadas com o nó 23, o nó 21 é a posição que apresenta maior índice H_2 de posicionamento para o modelo reduzido. A tabela (7) exhibe o posto da matriz de observabilidade utilizando sensores nessas posições.

Tabela 7 – Posicionamento de sensores via índice H_2 para plataforma com amortecimento não proporcional

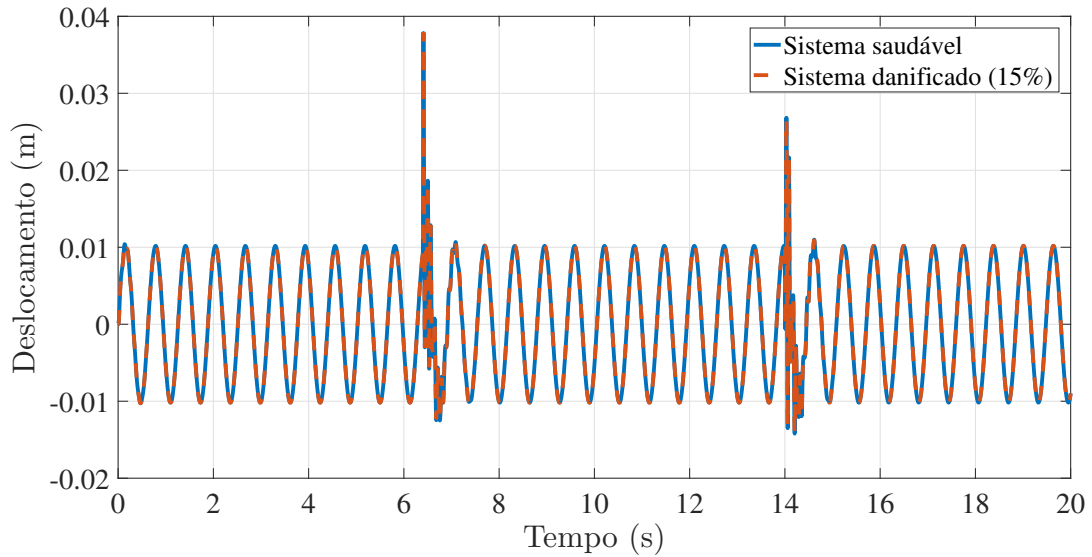
Número de sensores	Posições (Nós)	Posto de $\mathbf{M}_o$
2	21, 23	10
1	23	7

Desta forma, para garantir observabilidade completa dos cinco primeiros modos, bastam dois sensores posicionados nos nós 21 e 23. Este comportamento ocorre devido à baixa participação do quinto modo na dinâmica do sistema, que acaba por diminuir o número de sensores necessários para observar todos os cinco modos.

A fim de avaliar a eficácia dos bancos de observadores robustos para a plataforma com amortecimento não proporcional, são introduzidos danos simulando perda de espessura

nos elementos de placa de Kirchoff. A figura (31) exibe a resposta medida no sistema no nó 21, para o caso em que há perda de 15% da espessura no elemento 1 (ver figura (3)).

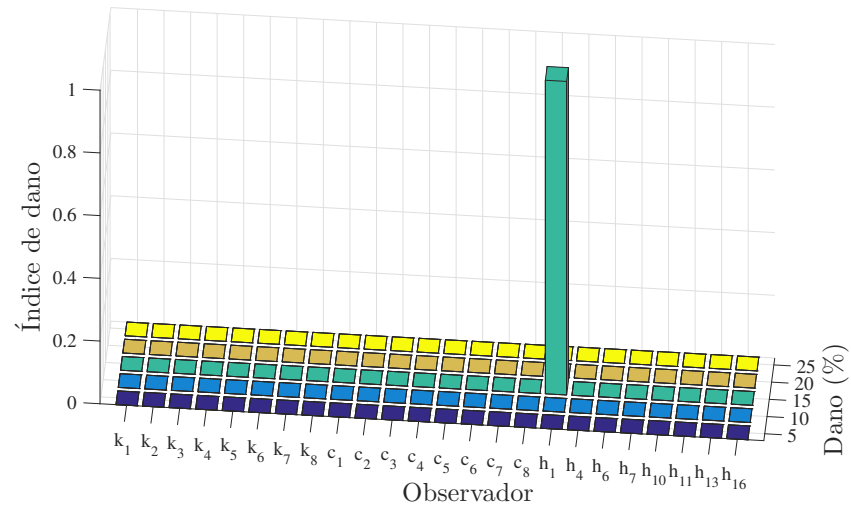
Figura 31 – Resposta medida no nó 21 para perda de 15% em h_1 considerando amortecimento não proporcional



Fonte: Próprio autor

Para localizar e quantificar a severidade do dano, são calculados os índices de dano para os observadores robustos. A figura (32) exibe tais índices, sendo possível observar que aquele do observador projetado para perda de 15% de espessura em h_1 é bem superior aos demais. Isto indica que este observador foi projetado para o mesmo dano contido no sistema monitorado.

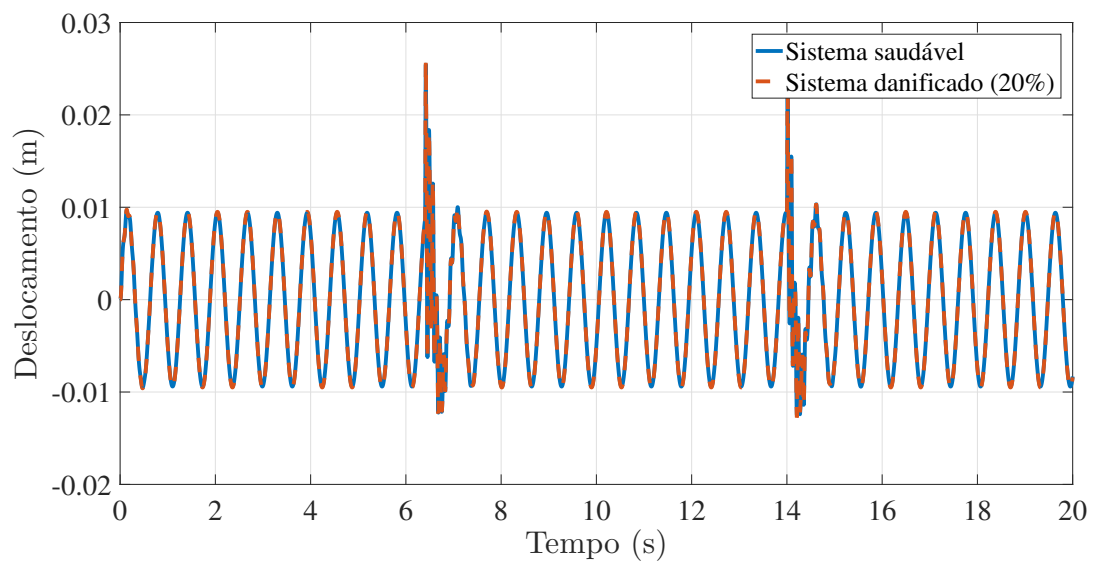
Figura 32 – Índices de dano para perda de 15% em h_1 considerando amortecimento não proporcional



Fonte: Próprio autor

A figura (33) exibe a resposta do nó 23 com o sistema contendo dano de 20% na espessura do elemento 16.

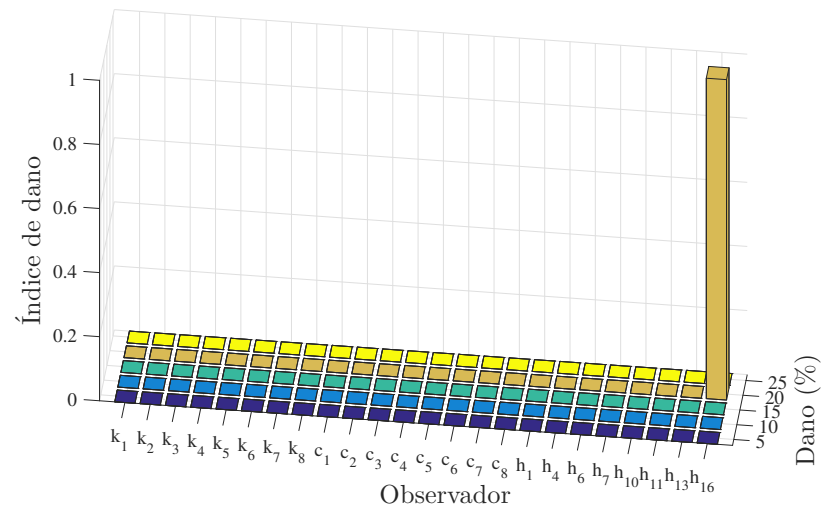
Figura 33 – Resposta medida no nó 23 para perda de 20% em h_{16} considerando amortecimento não proporcional



Fonte: Próprio autor

Avaliando os índices de dano, mais uma vez é possível localizar e quantificar a severidade do dano. Isto porque, conforme visto na figura (34), o índice de dano do observador robusto projetado para 20% em h_{16} é muito superior aos demais.

Figura 34 – Índices de dano para perda de 20% em h_{16} considerando amortecimento não proporcional



Fonte: Próprio autor

5 Considerações Finais

O uso de técnicas de monitoramento de integridade estrutural apresenta grande importância em aplicações voltadas para estruturas. O posicionamento de sensor deve ser então cuidadosamente escolhido, a fim de obter informações que serão utilizadas no monitoramento. Para este fim, é empregada uma metodologia de posicionamento ótimo de sensores, fazendo uso de índices H_2 e índices grammianos de posicionamento.

Para sistemas com amortecimento não proporcional, as equações em coordenadas modais permanecem acopladas pela matriz de amortecimento modal. Usualmente, o procedimento utilizado consiste em desprezar os termos fora da diagonal principal desta matriz, o que pode acarretar em erros. Uma vez que plataformas veiculares podem se apresentar como sistemas contendo amortecimento não proporcional, é apresentada uma metodologia para obtenção dos índices H_2 de posicionamento para este tipo de sistema, sem a necessidade de desprezar os termos fora da diagonal principal da matriz de amortecimento modal. Esta metodologia permite análise da norma H_2 dos modos subamortecidos em sistemas que contenham uma matriz de amortecimento não proporcional.

O uso da representação em espaços de estados em coordenadas modais se demonstra especialmente útil por suas características matemáticas. A análise dos modos predominantes e seus índices de posicionamento oferece uma ferramenta adequada para elaboração de estratégias de posicionamento ótimo de sensores.

Nessa representação, o grammiano de observabilidade se torna uma matriz diagonal dominante para sistemas com amortecimento proporcional, e os elementos de sua diagonal servem como índices de posicionamento adequados. O posicionamento ótimo, assim determinado, leva às mesmas posições definidas com índices H_2 para o modelo reduzido da plataforma veicular analisada. Sensores no nós 21, 23 e 25 garantem os melhores índices de posicionamento e a observabilidade completa dos modos retidos para o sistema com amortecimento proporcional. Ao se considerar amortecimento não proporcional, sensores posicionados nos nós 21 e 23 são suficientes para tal.

Ao reduzir o modelo e analisar os principais modos, é possível garantir observabilidade completa, o que é inviável para o modelo completo em coordenadas físicas. A comparação entre a norma H_2 do modelo reduzido e do modelo completo indica que a representatividade dos modos retidos é alta (99,98%) para o sistema com amortecimento proporcional. Considerando-se amortecimento não proporcional, apenas os cinco primeiros modos se mostram subamortecidos, sendo então retidos no modelo reduzido. Caso existissem mais modos para avaliação, seria necessário repetir o procedimento de seleção dos modos retidos via norma H_2 . Os três primeiros modos se apresentam como mais significativos, em todos os casos, para o posicionamento de sensores. No cálculo de índices grammianos para sistemas com amortecimento proporcional e de índices H_2 para sistemas com amortecimento não proporcional, estes modos são ainda mais significativos. O quinto modo no modelo com amortecimento não proporcional participa muito menos da dinâmica do sistema, o que permite que dois sensores sejam o suficientes para observabilidade completa do modelo reduzido.

Os observadores de estados robustos, por sua vez, apresentam-se como uma valiosa ferramenta de monitoramento de integridade estrutural. As simulações exibem que o índice de dano para o observador robusto com mesmo dano do sistema é bastante elevado se comparado com os demais índices. Através destes índices, é possível determinar onde o dano se localiza e qual sua severidade.

5.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

São apresentadas as seguintes sugestões para trabalhos futuros:

1. Verificação da influência das matrizes $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ no tempo em regime transiente dos observadores;
2. Desenvolvimento de novas coordenadas modais para sistemas com amortecimento não proporcional visando o posicionamento ótimo de sensores;
3. Análise dos índices grammianos de posicionamento para sistemas com amortecimento não proporcional;
4. Aplicação desta metodologia considerando incertezas nos parâmetros, e ruído nos sinais de entrada e saída.

Referências

- ARAÚJO, M. A. C. **Utilização de modelos de falhas na metodologia dos observadores de estado para detecção de trincas em sistemas contínuos**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2005.
- AZEVEDO, A. F. M. **Método dos elementos finitos**. [Porto]: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2003.
- BALACHANDRAN, B.; MAGRAB, E. B. **Vibrações mecânicas**. São Paulo: Cengage Learning, 2011.
- BALAGEAS, D.; FRITZEN, C. P.; GÜEMES, A. **Structural health monitoring**. New York: John Wiley & Sons, 2010.
- BATHE, K. J. **Finite element procedures**. 2. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2016.
- BROWNJOHN, J. M. W. Structural health monitoring of civil infrastructure. **Philosophical Transactions of The Royal Society A: Mathematical, Physical & Engineering Sciences**, v. 365, n. 1851, p. 589 622, 2007.
- BUENO, D. D. **Controle ativo de vibrações e localização ótima de sensores e atuadores piezelétricos**. 2007. 230f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica)- Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2007.
- CAVALINI Jr, A. A. **Monitoramento da integridade estrutural de sistemas mecânicos via observadores de estado modal**. 2009. 206 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, 2009.
- CAVALINI Jr, A. A. *et al.* Noise influence on damage detection through modal state observers methodology. **Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**, v. 9, n. 2, p. 195 – 204, 2008.
- CHATURANTABUT, S.; SORENSEN, D. Nonlinear model reduction via discrete empirical interpolation. **Journal on Scientific Computing, Philadelphia**, v. 32, n. 5, p. 2737 2764, 2010.
- DAWE, D. **Matrix and finite element displacement analysis of structures**. Oxford: Clarendon, 1984.
- DOEBLING, S. W. *et al.* A summary review of vibration-based damage identification methods. **Shock and Vibration Digest**, Washington, v. 30, n. 2, p. 91 105, 1998.

EWINS, D. J. **Modal testing: theory and practice**. Taunton: Research Studies Press Letchworth, 1984.

FENG D.; FENG, M. Q. Computer vision for shm of civil infrastructure: from dynamic response measurement to damage detection - a review. **Engineering Structures**, Oxford, v. 156, p. 105-117, 2018.

GAWRONSKI, W. **Advanced structural dynamics and active control of structures**. New York: Springer Science & Business Media, 2004.

GÜNEY, M.; ESKINAT, E. Optimal actuator and sensor placement in flexible structures using closed-loop criteria. **Journal of Sound and Vibration**, London, v. 312, n. 1/2, p. 210-233, 2008.

HASSELMAN, T. K. Method for constructing a full modal damping matrix from experimental measurements. **AIAA Journal**, Reston, v. 10, p. 526-526, 1972.

IGLESIAS, A. M. **Investigating various modal analysis extraction techniques to estimate damping ratio**. 2000. 126 f. Dissertation (Master Degree Mechanical Engineering) - Virginia Polytechnic Institute, Blacksburg, 2000.

IHN, J. B.; CHANG, F. K. Pitch-catch active sensing methods in structural health monitoring for aircraft structures. **Structural Health Monitoring**, London, v. 7, n. 1, p. 5 19, 2008.

INMAN, D. J. et al. **Damage prognosis: for aerospace, civil and mechanical systems**. New York: John Wiley & Sons, 2005.

KALMAN, R. On the general theory of control systems. **IRE Transactions on Automatic Control**, Piscataway, v. 4, n. 3, p. 481 492, 1959.

KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. **Journal of Basic Engineering**, American Society of Mechanical Engineers, New York, v. 82, n. 1, p. 35 45, 1960.

KALMAN, R. E.; BUCY, R. S. New results in linear filtering and prediction theory. **Journal of Basic Engineering**. American Society of Mechanical Engineers, New York, v. 83, n. 1, p. 95 108, 1961.

KOROISHI, E. H. **Diagnose de Falhas em sistemas rotativos com excitações desconhecidas, através da metodologia dos observadores de estado**. 2009. 158 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia, Ilha Solteira, 2009.

LUENBERGER, D. An introduction to observers. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Piscataway, v. 16, n. 6, p. 596 - 602, 1971.

LUENBERGER, D. Observers for multivariable systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Piscataway, v. 11, n. 2, p. 190-197, 1966.

LUENBERGER, D. G. Observing the state of a linear system. **IEEE Transactions on Military Electronics**, Piscataway, v. 8, n. 2, p. 74 - 80, 1964.

- MATTEI, R. D. **Detecção de danos em sistemas mecânicos via observadores de estado de ordem plena em paralelo**. 2019. 105 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2019.
- MELO, G. P. de. **Detecção e Localização de Falhas via Observadores de Estado de Ordem Reduzida**. 1998. 125 f. Tese (Doutorado) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998.
- MIRZA, M. A.; NIEKERK, J. L. V. Optimal actuator placement for active vibration control with known disturbances. **Journal of Vibration and Control**, New York, v. 5, p. 709-724, 1999.
- MONTE ALEGRE, D. **Metodologia dos Observadores de Estado para diagnose de falhas em sistemas contendo elementos finitos de placas de Kirchoff**. 2009. 131 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2009.
- NESTOROVIC, T.; TRAJKOV, M. Optimal actuator and sensor placement based on balanced reduced models. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 35, n. 2, p. 271-289, 2013.
- OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. Rio de Janeiro: LTC, 1998.
- OLIVEIRA, L. R. **Identificação de parâmetros em sistemas rotativos utilizando funções de otimização e observadores de estado**. 2015. 79 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2015.
- O'REILLY, J. **Observer for linear systems**. New York: Academic Press, 1983.
- RAGHAVAN, A. **Guided-wave structural health monitoring**. 2007. Thesis (Doctorate Degree) - University of Michigan, Michigan, 2007.
- RAO, S. S. **Vibrações mecânicas**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.
- RIBEIRO, V. H. **Diagnose de falhas utilizando observadores de estado em placas de Kirchoff com absorvedores dinâmicos de vibração**. 2015. 87 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2015.
- RYTTER, A. **Vibrational based inspection of civil engineering structures**. 1993. (Doctorate Degree) - Dept. of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg University, Aalborg, 1993.
- SCHWARTZ B. J. ; RICHARDSON, M. H. **Experimental modal analysis**. Jamestown: CSI, 1990.
- SILVA, J. Montalvão e; MAIA, N. M. **Theoretical and experimental modal analysis**. Taunton: Research Studies Press, 1997.
- STYKEL, T. Gramian-based model reduction for descriptor systems. **Mathematics of Control, Signals and Systems**, London, v. 16, p. 297 - 319, 2004.

WEVERS M.; LAMBRIGHS, K. Applications of acoustic emission for shm: a review. In: **ENCYCLOPEDIA of Structural Health Monitoring**. New York: 2008.

WORDEN, K.; DULIEU-BARTON, J. M. An overview of intelligent fault detection in systems and structures. **Structural Health Monitoring**, London, v. 3, n. 1, p. 85 98, 2004.

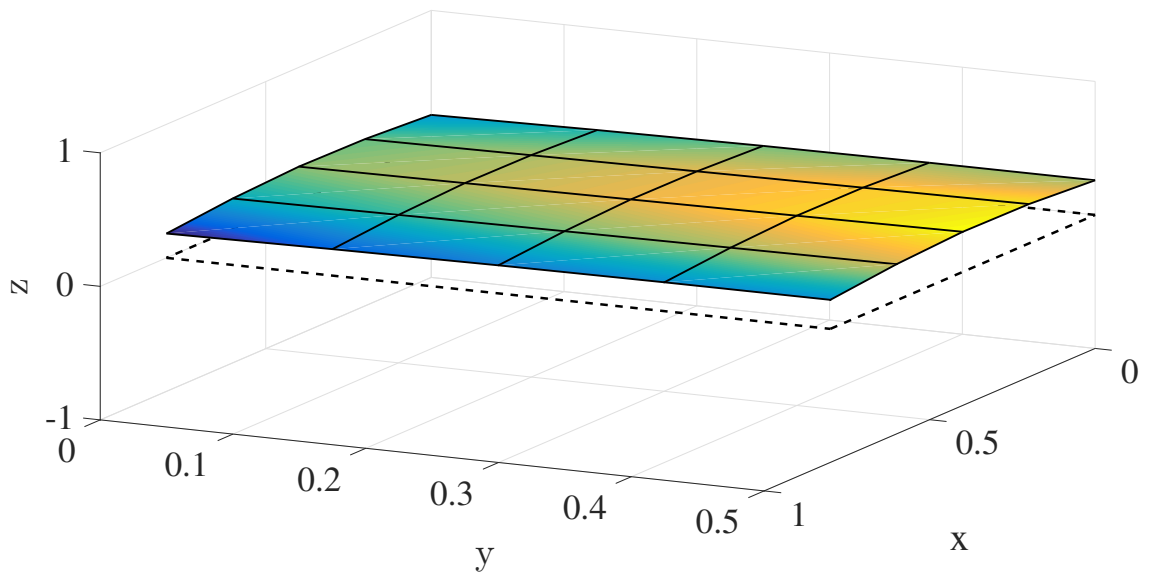
WORDEN, K.; MANSON, G.; FIELLER, N. R. Damage detection using outlier analysis. **Journal of Sound and Vibration**, London, v. 229, n. 3, p. 647 667, 2000.

WORDEN K.; MANSON, G. The application of machine learning to structural health monitoring. **Philosophical Transactions of The Royal Society A: Mathematical, Physical & Engineering Sciences**, London, v. 365, p. 515 537, 2007.

ANEXO A – Modos de Vibrar Retidos

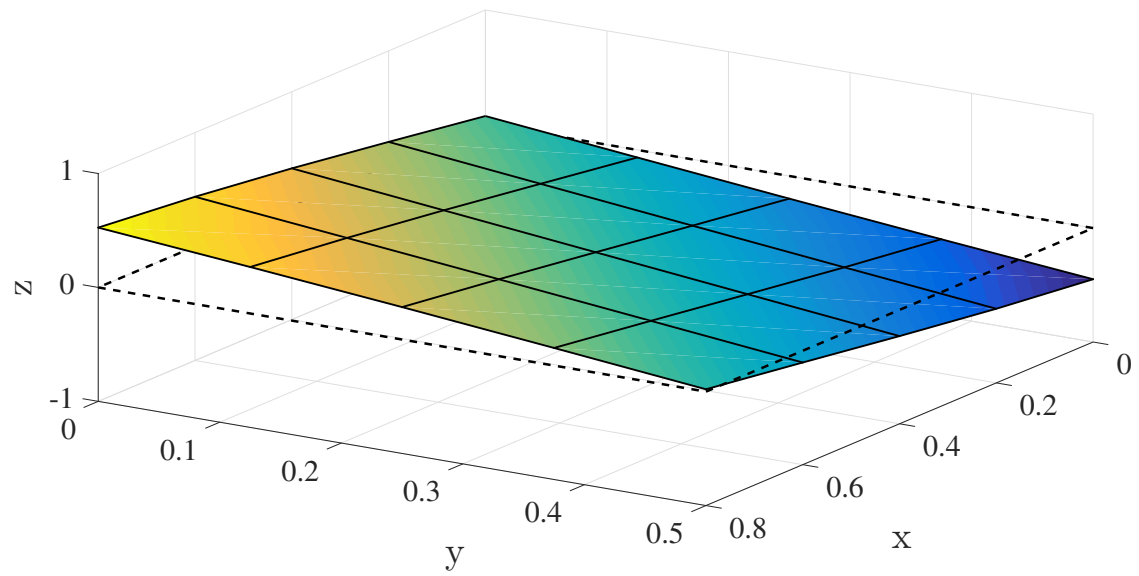
Este anexo contém os modos de vibrar para o modelo com amortecimento proporcional. As figuras (35) a (39) exibem os modos de vibrar da placa que são mantidos no modelo reduzido. É possível observar que os três primeiros modos compõem os movimentos predominantes em plataformas veiculares. Os demais modos envolvem movimentos que flexionam ou torcionam a placa, sendo menos participativos da dinâmica do sistema e apresentando norma H_2 notavelmente inferior aos três primeiros.

Figura 35 – Primeiro modo de vibrar da placa



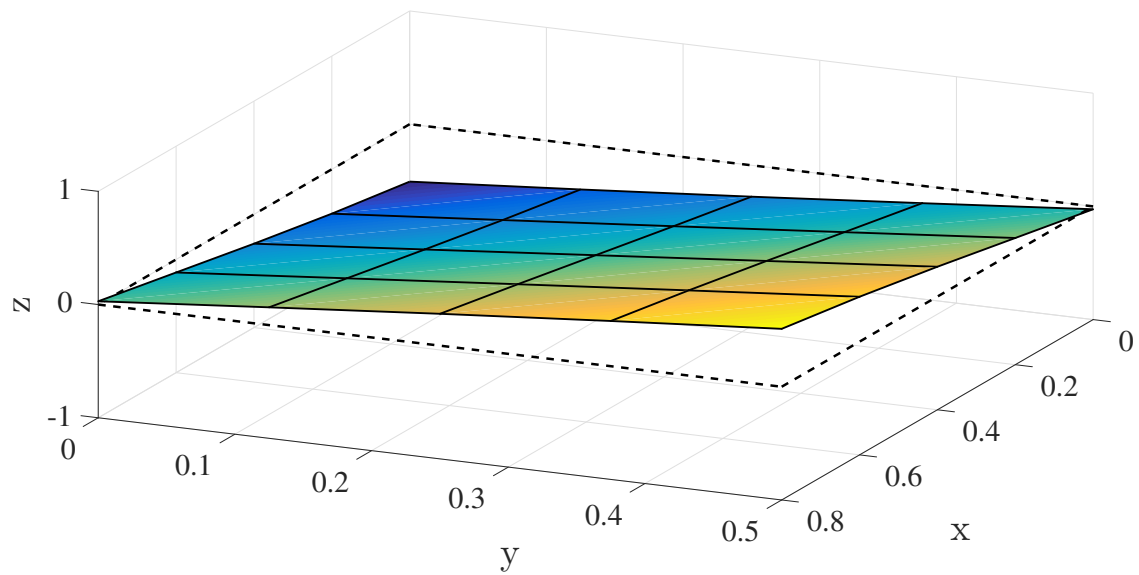
Fonte: Próprio autor

Figura 36 – Segundo modo de vibrar da placa



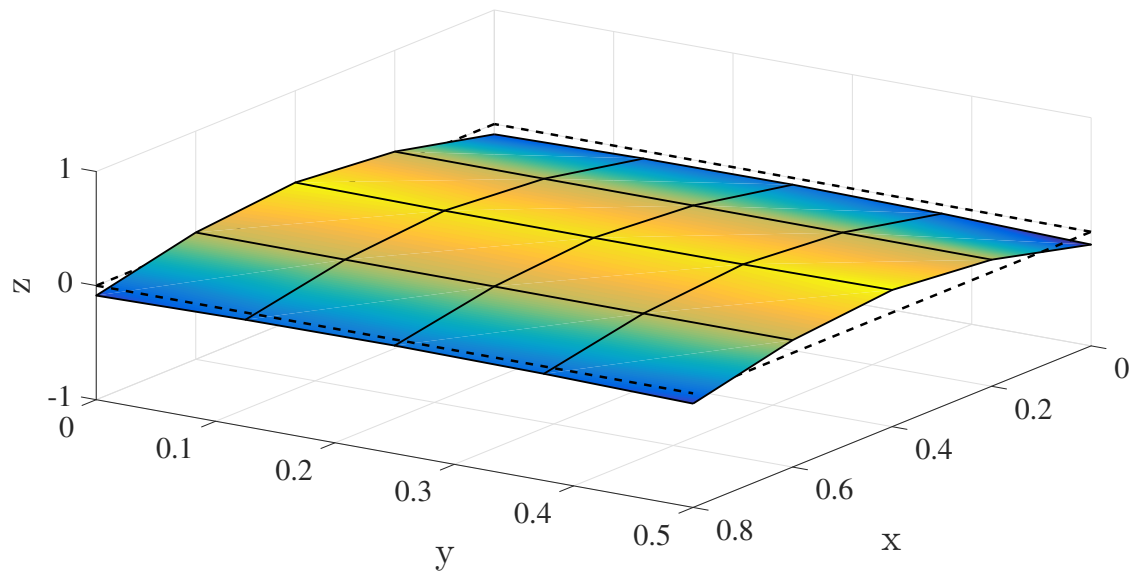
Fonte: Próprio autor

Figura 37 – Terceiro modo de vibrar da placa



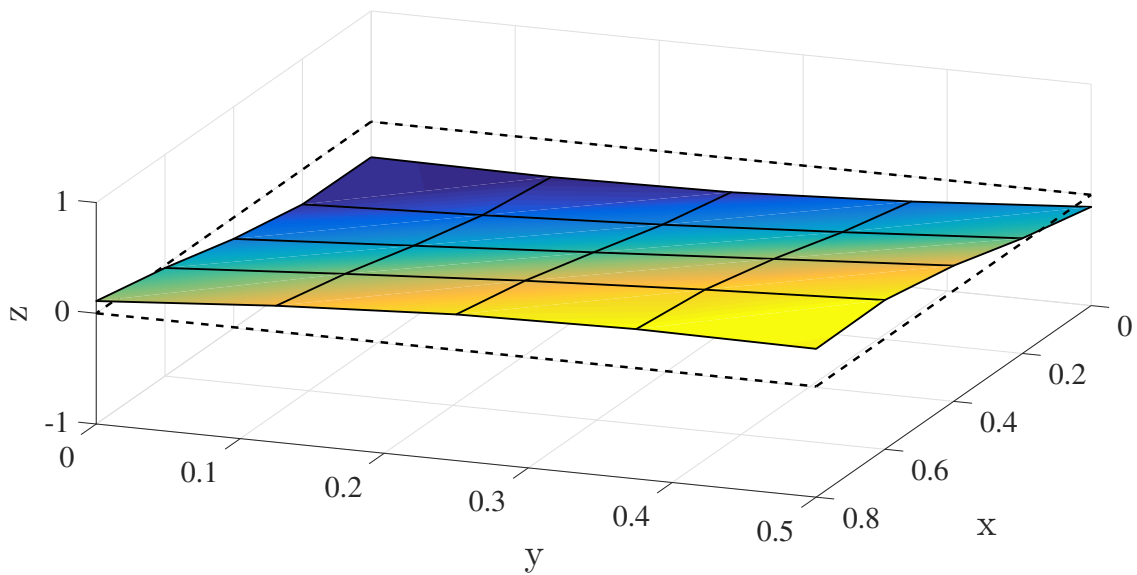
Fonte: Próprio autor

Figura 38 – Quinto modo de vibrar da placa



Fonte: Próprio autor

Figura 39 – Sétimo modo de vibrar da placa

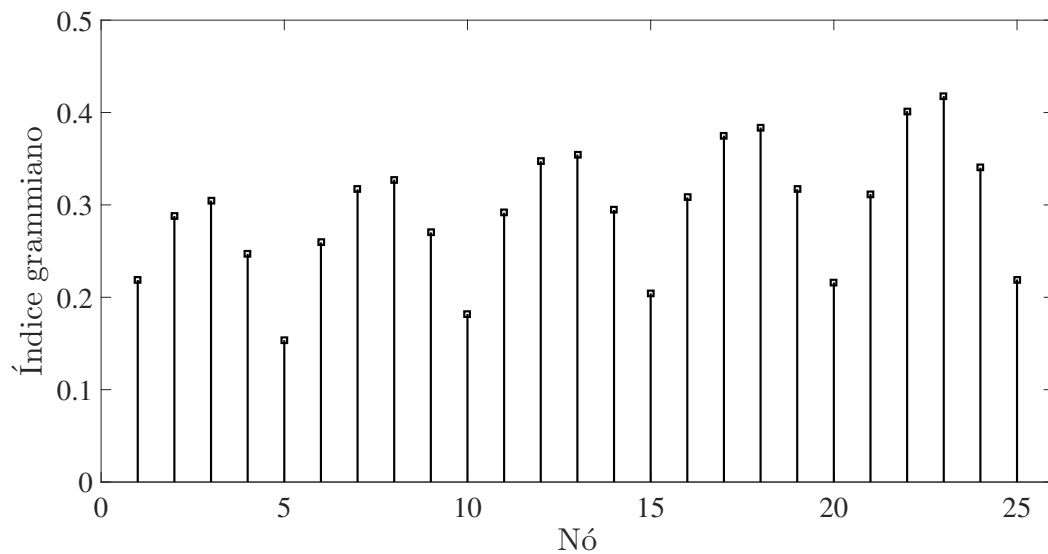


Fonte: Próprio autor

ANEXO B – Posicionamento Ótimo de Sensores via Índices Grammianos

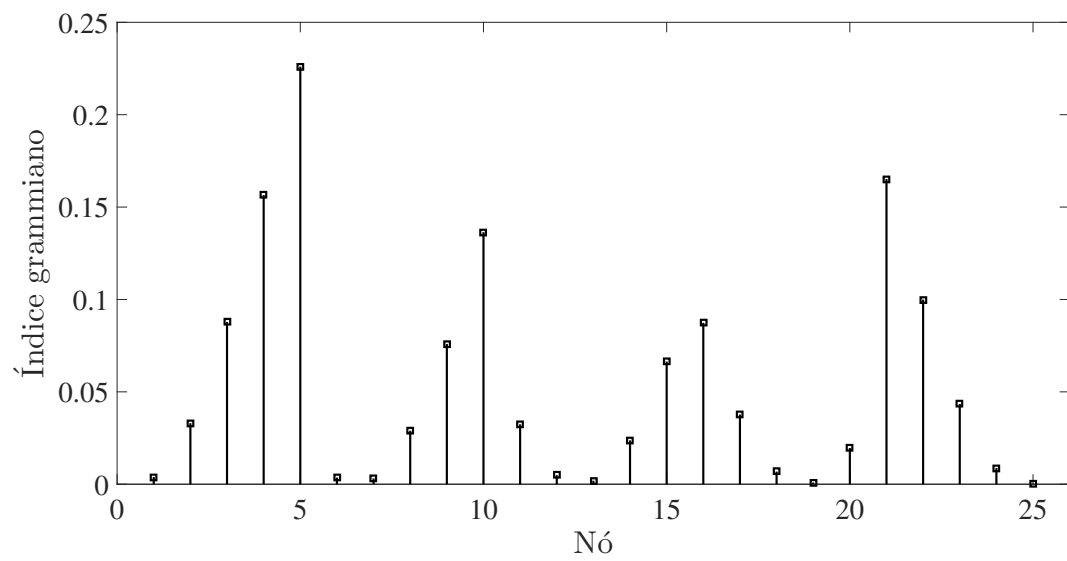
Este apêndice apresenta os índices de posicionamento grammianos para a plataforma veicular analisada com amortecimento proporcional. As figuras (40), (41), (42), (43) e (44) apresentam tais índices para os modos retidos no modelo reduzido.

Figura 40 – Índices grammianos para o primeiro modo



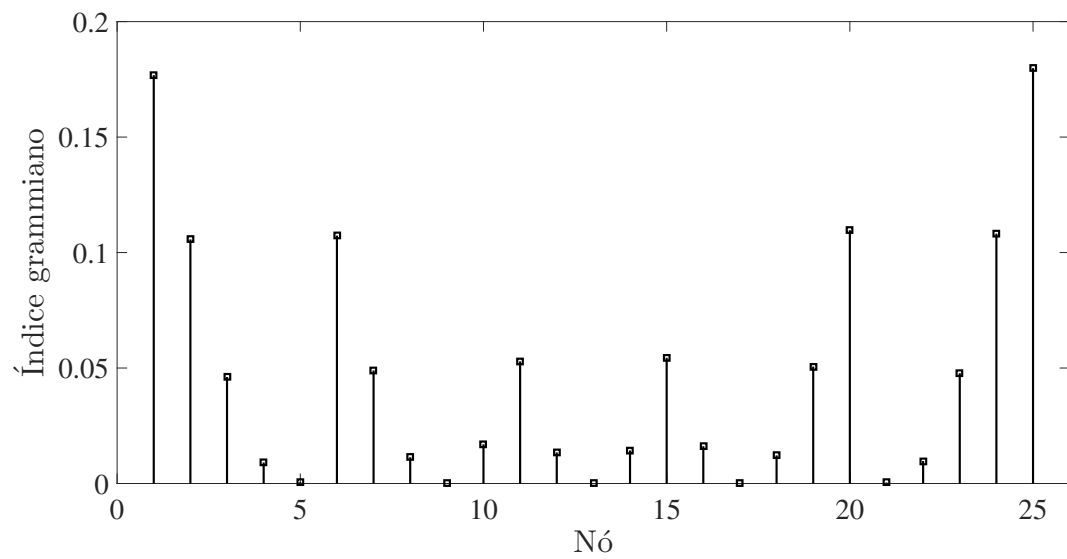
Fonte: Próprio autor

Figura 41 – Índices grammianos para o segundo modo



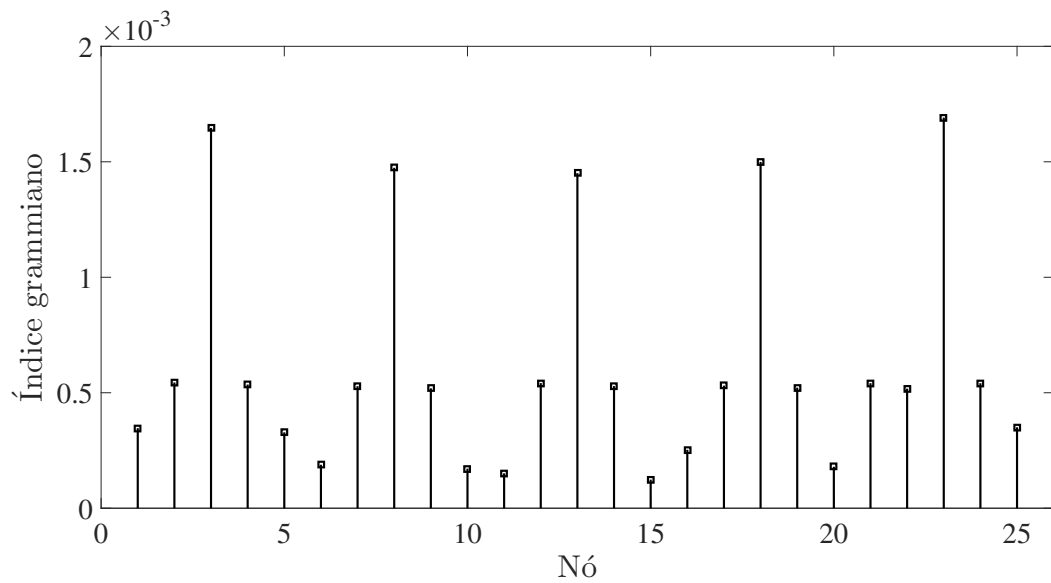
Fonte: Próprio autor

Figura 42 – Índices grammianos para o terceiro modo



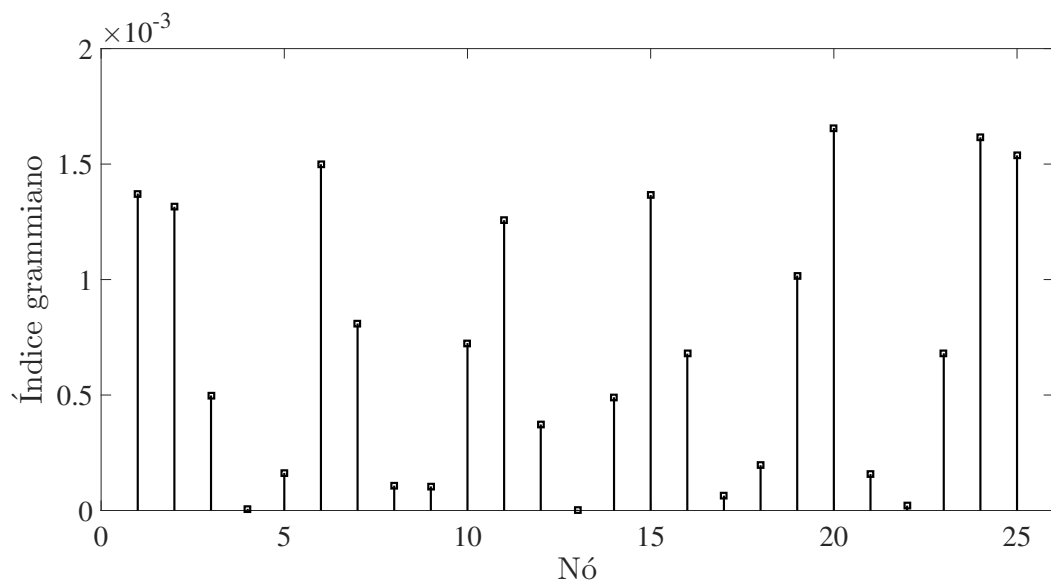
Fonte: Próprio autor

Figura 43 – Índices grammianos para o quinto modo



Fonte: Próprio autor

Figura 44 – Índices grammianos para o sétimo modo

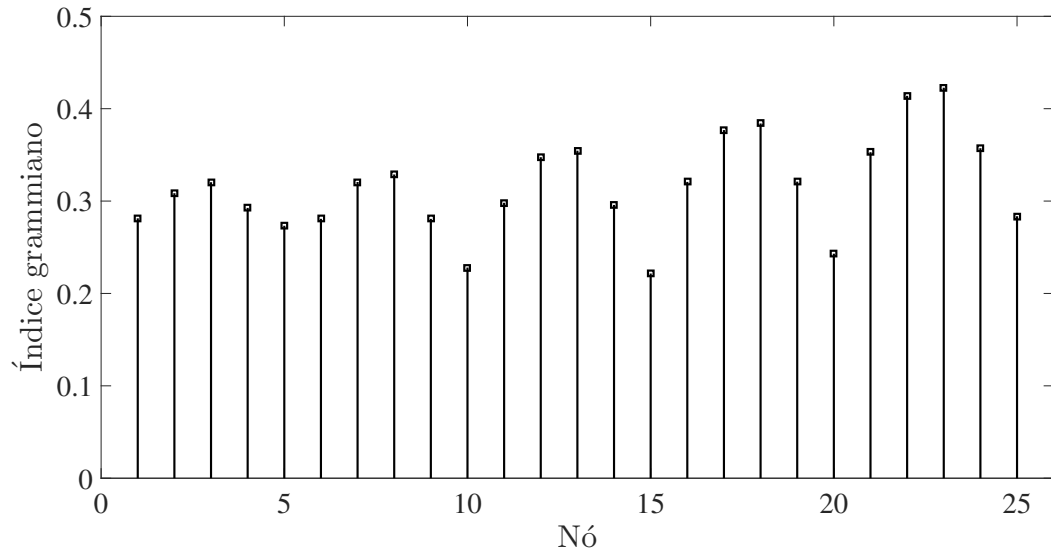


Fonte: Próprio autor

É possível observar que os índices dos últimos dois modos caem mais drasticamente se comparado com os três primeiros. Este fato faz com que os três primeiros modos sejam ainda mais significativos no posicionamento de sensores utilizando índices grammi-

anos quando comparados com os índices H_2 . A figura (45) exhibe os índices grammianos para o modelo reduzido.

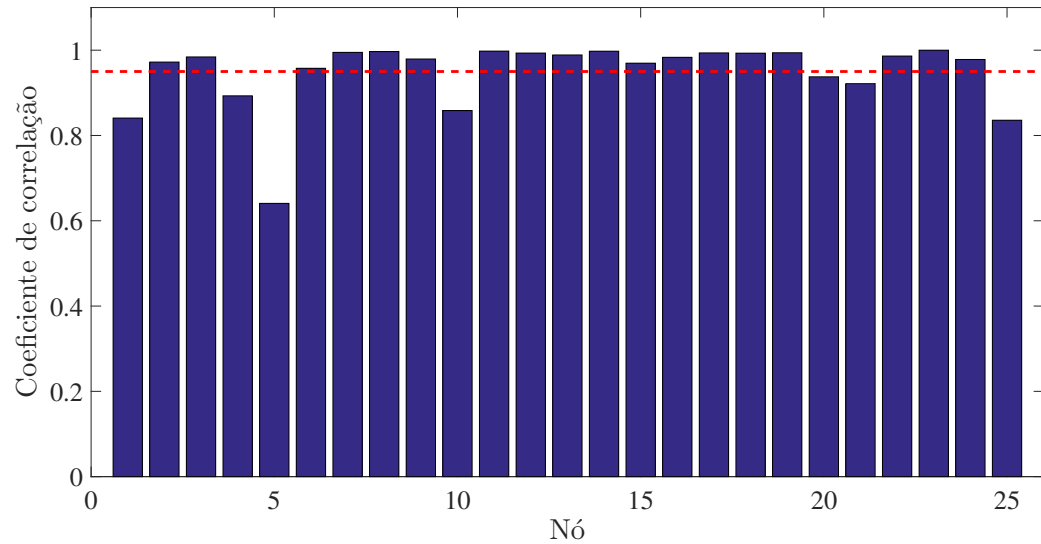
Figura 45 – Índices grammianos para modelo reduzido



Fonte: Próprio autor

O nó 23 apresenta o maior índice de posicionamento. A figura (46) avalia o coeficiente de correlação desse nó com os demais. Aqueles situados acima da linha vermelha, com valor superior a 0,95, são eliminados por serem altamente correlacionados com o nó de maior índice de posicionamento.

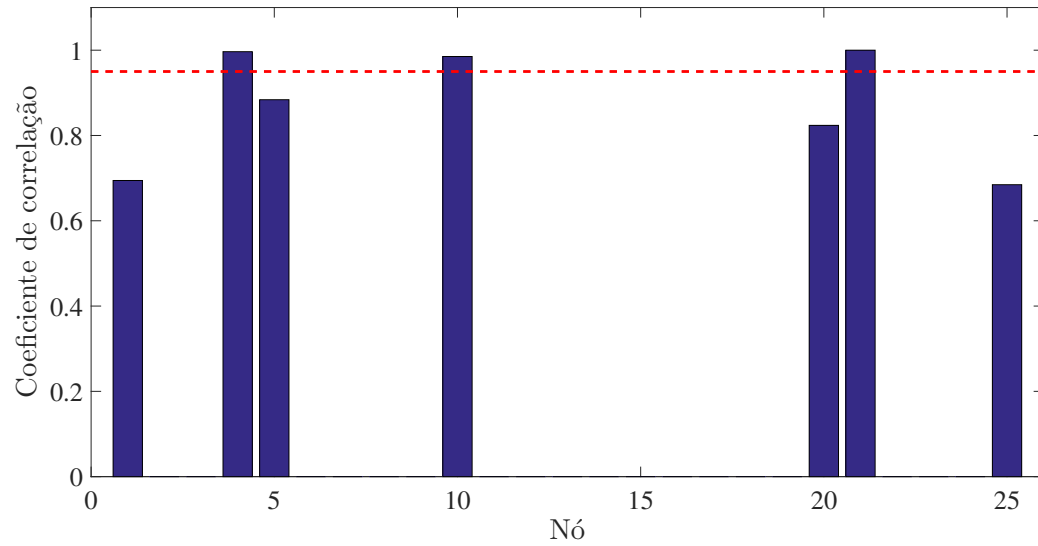
Figura 46 – Coeficiente de correção entre o nó 23 e os demais utilizando índices grammianos



Fonte: Próprio autor

Eliminando as posições altamente correlacionadas, a próxima com maior índice de posicionamento é aquela situada no nó 21. A figura (47) exhibe o índice de correlação do nó 21 com os demais, exibindo valor nulo para as posições anteriormente descartadas.

Figura 47 – Coeficiente de correção entre o nó 21 e os demais utilizando índices grammianos



Fonte: Próprio autor

Excluindo-se as posições altamente correlacionadas com os nós 21 e 23, o nó 25 se apresenta com maior índice grammiano. A tabela (5) indica que são necessários 3 sensores posicionados nestes nós para garantir posto completo da matriz de observabilidade.