

GABRIEL BRANDÃO DE GRACIA

REDUÇÃO DIMENSIONAL DE PARTÍCULAS SEM MASSA DE SPIN  
 $S = 0$ ,  $S = 1$  E  $S = 2$  VIA MECANISMO DE KALUZA-KLEIN

Guaratinguetá  
2015

GABRIEL BRANDÃO DE GRACIA

REDUÇÃO DIMENSIONAL DE PARTÍCULAS SEM MASSA DE SPIN  
 $S = 0$ ,  $S = 1$  E  $S = 2$  VIA MECANISMO DE KALUZA-KLEIN

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Bacharelado em Física da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Bacharelado em Física.

Orientador  
Prof. Dr. Denis Dalmazi

Guaratinguetá  
2015

G731r Gracia, Gabriel Brandão de  
Redução dimensional de partículas de spin  $s=0, s=1$  e  $s=2$  via  
mecanismo de Kaluza-Klein / Gabriel Brandão de Gracia –  
Guaratinguetá : [s.n], 2014.  
78 f. : il.  
Bibliografia : f. 63-65  
Trabalho de Graduação em Bacharelado em Física – Universidade  
Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2014.  
Orientador: Prof. Dr. Denis Dalmazi


1. Teoria de Campos (Física) 2. Kaluza-Klein, Teorias de I. Título

CDU 530.145

**GABRIEL BRANDÃO DE GRACIA**

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO  
PARTE DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE  
"GRADUADO EM FÍSICA BACHARELADO"

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE  
GRADUAÇÃO EM FÍSICA BACHARELADO.

  
Prof. Dr. DENIS DALMAZI  
Coordenador

**BANCA EXAMINADORA:**

  
Prof. Dr. DENIS DALMAZI  
Orientador/UNESP-FEG

  
Prof. Dr. SAULO HENRIQUE PEREIRA  
UNESP-FEG

  
Prof. Dr. ELIAS LEITE MENDONÇA

UNESP-FEG

## AGRADECIMENTOS

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, ao meu pai, meus avós, Amira, minha mãe e o Edney, minha família, e meus amigos de Taubaté (Só os loucos sabem...).

Agradeço a Denis Dalmazi pela orientação.

E também a todos os professores e amigos de Guaratinguetá.

À CNPq pelo suporte financeiro.

GRACIA, G. B. **Redução dimensional de partículas sem massa de spin  $S = 0$ ,  $S = 1$  e  $S = 2$  via mecanismo de Kaluza-Klein.** 2015. 78 f. Trabalho de Graduação (Graduação em Bacharelado em Física) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2015.

## RESUMO

Neste trabalho de graduação vamos realizar a redução dimensional de partículas de spin  $s=0$ ,  $s=1$  e  $s=2$  via mecanismo de Kaluza-Klein.

O método da redução dimensional Kaluza-Klein é introduzido pela redução dimensional de  $D$  para  $D - 1$  dimensões da ação que descreve uma partícula de spin 0 sem massa, da ação de Maxwell e da ação de Einstein Hilbert linearizada. As ações obtidas em  $D - 1$  dimensões são analisadas pelo ponto de vista clássico e quântico.

No capítulo 5 usamos esse método para obter uma eletrodinâmica massiva invariante por simetria de gauge em  $D = 1 + 1$  dimensões a partir da redução dimensional do termo K linearizado da "New massive gravity" em  $D = 2 + 1$  dimensões. No capítulo 6 as ações TDiff e WTDiff são apresentadas e fazemos as suas reduções dimensionais. Nos capítulos 7 e 8 fazemos a redução dimensional do limite de massa nula das ações  $S_{a1}$  e  $S_{nFP}$  respectivamente.

**Palavras chave:** Dimensões. Kaluza-Klein. Redução Dimensional. Ação.

GRACIA, G. B. **Dimensional reduction of particles of spin  $s=0$ ,  $s=1$  and  $s=2$  via Kaluza Klein mechanism.** 2015. 78 f. Graduate Work (Graduate in BS in Physics) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2015.

## ABSTRACT

In this graduate work we will perform the dimensional reduction of particles of spin  $s=0$ ,  $s=1$  and  $s=2$  via Kaluza Klein mechanism.

The method of Kaluza-Klein dimensional reduction is introduced by the dimensional reduction from  $D$  to  $D - 1$  dimensions of the action that describes a massless spin 0 particle, the Maxwell action and the Linearized Einstein Hilbert action. The actions obtained in  $D - 1$  dimensions by this procedure are analyzed by the classical and the quantum point of view.

On the chapter 5 we use this method to obtain a gauge invariant massive eletrodynamics in  $D = 1 + 1$  dimensions from the dimensional reduction of the linearized K-term of the "New massive gravity" in  $D = 2 + 1$  dimensions. On the chapter 6 the actions TDiff and WTDiff are presented and we perform its dimensional reductions. On the chapters 7 and 8 we perform the dimensional reduction of the massless limit of the  $S_{a1}$  and  $S_{nFP}$  actions respectively.

**Keywords:** Dimensions. Kaluza-Klein. Dimensional Reduction. Action.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>REDUÇÃO DIMENSIONAL DO CAMPO ESCALAR SEM MASSA EM <math>D</math> DIMENSÕES</b>	<b>11</b>
2.1	ANÁLISE DE UNITARIEDADE	12
<b>3</b>	<b>REDUÇÃO DIMENSIONAL DA AÇÃO DE MAXWELL EM <math>D</math> DIMENSÕES</b>	<b>13</b>
3.1	ANÁLISE DE UNITARIEDADE	15
3.2	CONTAGEM DE GRAUS DE LIBERDADE DO MODELO DE MAXWELL-PROCA VIA ALGORITMO DE DIRAC-BERGMANN	17
<b>4</b>	<b>REDUÇÃO DIMENSIONAL DA AÇÃO DE EINSTEIN-HILBERT LINEARIZADA EM <math>D</math> DIMENSÕES</b>	<b>20</b>
4.1	PRESCRIÇÃO MÍNIMA PARA A REDUÇÃO DIMENSIONAL	23
4.2	UNITARIEDADE DO MODELOS DE FIERZ-PAULI	25
4.3	CONTAGEM DE GRAUS DE LIBERDADE VIA ALGORITMO DE DIRAC-BERGMANN	26
<b>5</b>	<b>REDUÇÃO DIMENSIONAL DE <math>D = 2 + 1</math> PARA <math>D = 1 + 1</math> DO TERMO <math>K</math> LINEARIZADO DA NEW MASSIVE GRAVITY</b>	<b>30</b>
5.1	ELETRODINÂMICA MASSIVA INVARIANTE DE GAUGE EM $D = 1 + 1$	33
5.2	ANÁLISE DE UNITARIEDADE	35
<b>6</b>	<b>REDUÇÃO DIMENSIONAL DOS MODELOS TDiff E WTDiff E A APRESENTAÇÃO DE FAMÍLIAS MASSIVAS DE SPIN 2</b>	<b>38</b>
6.1	O MODELO TDiff	39
6.2	REDUÇÃO DIMENSIONAL DO MODELO TDiff	39
6.3	ANÁLISE DE CONSISTÊNCIA DO MODELO TDiff REDUZIDO	41
6.4	O MODELO WTDiff	42
6.5	REDUÇÃO DIMENSIONAL DO MODELO WTDiff	43
6.6	ANÁLISE DE CONSISTÊNCIA DO MODELO WTDiff REDUZIDO	44
6.7	FAMÍLIAS DE SPIN 2 MASSIVAS VIA TENSOR NÃO SIMÉTRICO	46
<b>7</b>	<b>REDUÇÃO DIMENSIONAL DO LIMITE DE MASSA NULA DA AÇÃO <math>S_{a_1}</math></b>	<b>49</b>
7.1	REDUÇÃO DIMENSIONAL DO LIMITE DE MASSA NULA DA AÇÃO $S_{a_1}$ VIA AÇÃO MESTRA	54
<b>8</b>	<b>REDUÇÃO DIMENSIONAL DO LIMITE DE MASSA NULA DA AÇÃO <math>S_{nFP}</math></b>	<b>56</b>

8.1	REDUÇÃO DIMENSIONAL DO LIMITE DE MASSA NULA DA AÇÃO $S_{nFP}$ VIA AÇÃO MESTRA . . . . .	58
9	CONCLUSÃO . . . . .	62
	REFERÊNCIAS . . . . .	63
	APÊNDICE A - IDEIA ORIGINAL DA REDUÇÃO DIMENSIO- NAL DE KALUZA-KLEIN . . . . .	66
	APÊNDICE B - PROJETORES E SUAS RELAÇÕES . . . . .	70
	PROJETORES DE SPIN 1 . . . . .	70
	PROJETORES DE SPIN 2 . . . . .	70
	APÊNDICE C - DECOMPOSIÇÃO ADM . . . . .	72
	APÊNDICE D - REDUÇÃO DIMENSIONAL DE UM MODELO SEM GRAUS DE LIBERDADE . . . . .	74

## 1 INTRODUÇÃO

O tema da redução dimensional Kaluza-Klein (KK) pode ser explorado em diversos âmbitos como por exemplo em teoria de cordas, em modelos de branas (KALOPEL et al., 2000), em teorias que visam a grande unificação das interações ou usada como um mecanismo para obtenção de termos de massa a partir de modelos não massivos (KHOUDEIR; MONTEMAYOR; URRUTIA, 2008). O presente trabalho se foca neste último objetivo, e portanto não será feita uma defesa da redução dimensional como modelo fenomenológico do universo, e sim como um mecanismo para se obter de forma consistente versões massivas de modelos bosônicos em  $D - 1$  dimensões a partir de suas versões sem massa em  $D$  dimensões. O trabalho consistirá na aplicação dessa técnica e na posterior análise clássica e quântica dos modelos massivos obtidos em  $D - 1$  dimensões.

A redução dimensional Kaluza-Klein teve sua origem na idéia de se unificar o eletromagnetismo com a gravitação fazendo uso de um espaço de 5 dimensões (KALUZA, 1921; KLEIN, 1926). Theodor Kaluza envia suas idéias a Einstein em 1919 e elas são publicadas em 1921 (PAIS, 1982). A métrica 5-dimensional tem 15 componentes, 10 das quais identificadas com a métrica em  $D = 3 + 1$ , quatro componentes são ligados ao potencial vetor eletromagnético  $A_\mu$  e uma componente ligada a um campo escalar que é conhecido como rádion. Em 1926 Oskar Klein (KLEIN, 1926) propõe uma interpretação quântica para a idéia de Kaluza e introduz a idéia de que a quinta dimensão era compacta e microscópica (KLEIN, 1926). A redução dimensional usada nesse caso parte do princípio de que os campos em  $D = 4 + 1$  não tem dependência na quinta dimensão  $G^{AB}(x, y) = G^{AB}(x)$ <sup>1</sup> e que a grosso modo o potencial vetor eletromagnético é dado por  $A^\mu(x) = G^{\mu,4}(x)$  sendo que os índices com letras gregas denotam o espaço reduzido com quatro dimensões. A métrica quadridimensional é dada por  $G^{\mu\nu}(x) = g^{\mu\nu}(x)$ , e ainda sobra um grau de liberdade escalar que é o rádion  $G^{(4,4)}(x) = \phi(x)$ . Ao assumir essas condições é possível obter em  $D = 3 + 1$  dimensões a partir da ação de Einstein-Hilbert em  $D = 4 + 1$  a ação de Maxwell acoplada ao rádion e à métrica  $g_{\mu\nu}(x)$ , um termo cinético que garante a propagação desse rádion e o modelo quadridimensional de Einstein-Hilbert.

A teoria KK caiu em desuso devido a sua falha em explicar a origem de outras interações, como a força fraca e a forte, além de problemas de interpretação quântica. No entanto, ela voltou a tona mais recentemente no contexto da teoria de cordas, modelos de branas, e geração de modelos massivos que é o caso que será abordado nesta monografia (KHOUDEIR; MONTEMAYOR; URRUTIA, 2008). Desse modo, nesse trabalho será feita uma extensão do mecanismo de redução dimensional, será assumida uma dimensão extra compacta o que está ligado ao fato de que os campos podem assumir uma dependên-

---

<sup>1</sup>  $y$  denota a dependência com a quinta dimensão e os índices maiúsculos e latinos correm de 0 até 4, usaremos índices gregos para o espaço reduzido.

cia nas coordenadas do espaço em  $D$  dimensões que pode ser fatorada em termos de uma dependência nas variáveis no espaço em  $D - 1$  dimensões e da dependência da  $D$ -ésima dimensão. A condição de compactificação é a seguinte:

$$T^{\alpha,\beta,\dots}(x, y) = T^{\alpha,\beta,\dots}(x, y + L) \quad (1.1)$$

Onde  $L$  é o comprimento da circunferência correspondente a  $D$ -ésima dimensão  $y$ .

Um Ansatz que incorpore essas características é dado, por exemplo, por:

$$\phi(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} \phi(x) \cos my \quad (1.2)$$

Para satisfazer (1.1) a massa  $m$  é dada por  $m = \frac{2\pi}{L}$ . Nota-se que derivadas em relação a dimensão extra gerarão termos que serão interpretados como termos de massa.

A dependência dos campos na dimensão extra deve ser dada de acordo com o seu comportamento sob a transformação  $y \rightarrow -y$ , ou seja campos com um número ímpar de índices na dimensão extra terão sua dependência na dimensão extra expressa por senos e aqueles com número par de índices nessa dimensão terão sua dependência na dimensão extra expressa por meio de cossenos. A constante  $\sqrt{\frac{m}{\pi}}$  é um fator normalizador que cancela o surgimento de um termo oriundo da integração na dimensão extra. Foi usado um campo escalar como exemplo mas a ideia é imediatamente generalizada para tensores de rank arbitrário.

Algo que irá permear todo o trabalho é o fato de que uma partícula não massiva com um dado spin em  $D$  dimensões tem o mesmo número de graus de liberdade de uma partícula massiva com esse mesmo spin em  $D - 1$  dimensões. Por exemplo, uma partícula de massa nula em  $D = 3 + 1$  tem quadrimomento dado num certo referencial  $P^A = (h, h, 0, 0)$  ( $h$  é uma constante qualquer.) que respeita o fato de que para partículas sem massa  $P^A P_A = 0$ , ou seja, temos simetria residual de Lorentz pelo grupo  $SO(2)$ . Se a redução dimensional for usada como um processo para obtenção de massa para essa partícula poderemos ir para o referencial de repouso em  $D = 2 + 1$  dimensões. Assim,  $P^\mu = (mc, 0, 0)$  que respeita,  $P^\mu P_\mu = -m^2 c^2$  e novamente temos simetria residual de Lorentz pelo grupo  $SO(2)$ <sup>2</sup>. É essa conservação dos graus de liberdade na redução de  $D$  para  $D - 1$  dimensões que guiará de certa forma o trabalho, sendo que ela tem uma forte ligação com as simetrias de gauge de cada modelo analisado, as quais podem permitir a eliminação, por exemplo, de graus de liberdade ligados a campos de Stueckelberg oriundos do processo de redução dimensional. Além disso, se temos uma teoria não massiva com graus de liberdade propagantes numa dada dimensão pode-se esperar que ela apresente o

---

<sup>2</sup>A métrica  $(-, +, +, \dots, +)$  será usada ao longo deste trabalho.

mesmo número de graus de liberdade em sua versão massiva numa dimensão abaixo. Em cada modelo analisado será feita a verificação da conservação desses graus de liberdade numa dimensão abaixo via vínculos de Fierz-Pauli, análise de unitariedade e, em certos capítulos, o algoritmo de Dirac-Bergmann para constatar a conservação dos graus de liberdade via análise de vínculos hamiltonianos.

Os capítulos 2, 3 e 4 serão uma espécie de introdução ao mecanismo da redução dimensional nos quais serão estudadas as reduções dimensionais dos modelos de spin 0 sem massa, modelo de Maxwell e modelo de Einstein-Hilbert, respectivamente. No capítulo 5 vamos apresentar a redução dimensional do termo  $K$  da "New massive gravity"(BIAZOTTI; DALMAZI; GRACIA, 2013), no capítulo 6 vamos analisar as consequências da inclusão de termos de massa via redução dimensional nos modelos TDiff e WTDiff e nos capítulos 7 e 8 serão feitas as reduções dimensionais dos limites de massa nula dos modelos  $S_{a_1}$  e  $S_{nFP}$ .

O trabalho além de fazer uso da métrica  $(-, +, +, \dots, +)$  considera na maior parte dos capítulos  $\hbar = c = 1$ .

## 2 REDUÇÃO DIMENSIONAL DO CAMPO ESCALAR SEM MASSA EM $D$ DIMENSÕES

A ação que descreve um campo escalar, ou seja de spin 0, sem massa, em  $D$  dimensões é dada pelo modelo (2.1). Como o trabalho é feito assumindo  $\hbar = 1 = c$  e se sabe que toda ação tem dimensão de energia vezes tempo, tem-se que  $[S] = [\hbar] = L^0$  ou seja a ação é adimensional. As derivadas tem dimensão  $L^{-1}$  ( $L$  denota comprimento.) e  $[d^D x] = L^D$ . Assim, para termos uma ação quadrática nos campos e adimensional, tem-se que  $[\phi] = L^{2-D}$  (vide (GOLDSTEIN, 1966; RUBAKOV, 2002)):

$$S = \int d^D x \left\{ -\frac{1}{2} \partial_A \phi \partial^A \phi \right\} \quad (2.1)$$

Ao minimizar a ação acima obtemos a equação de movimento em  $D$  dimensões  $\square \phi = 0$ .

Pode-se separar a integração na dimensão extra que suporemos compacta e nas dimensões do espaço reduzido:

$$S = \int_0^{\frac{2\pi}{m}} dy \int d^{(D-1)} x \left\{ -\frac{1}{2} \partial_A \phi \partial^A \phi \right\} \quad (2.2)$$

O comprimento  $L$  da dimensão extra é definido por  $\frac{2\pi}{m}$ .

A partir de uma dimensão extra compacta ( $\phi(x, 0) = \phi(x, L)$ ) o Ansatz que representa a dependência explícita do campo na  $D$ -ésima dimensão será dado por:

$$\phi(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} \phi(x) \cos my \quad (2.3)$$

Ao substituir esse Ansatz na ação e integrar na dimensão extra usando que  $\int_0^{\frac{2\pi}{m}} \cos^2 my \, dy = \frac{\pi}{m}$ , obtemos em  $D - 1$  dimensões:

$$S = \int d^{(D-1)} x \left\{ \frac{1}{2} \phi(x) (\square - m^2) \phi(x) \right\} \quad (2.4)$$

Pode-se obter a equação de movimento para o modelo massivo em  $D - 1$  dimensões ao minimizar a ação (2.4):

$$(\square - m^2) \phi(x) = 0 \quad (2.5)$$

## 2.1 ANÁLISE DE UNITARIEDADE

Ao adicionar fontes à ação (2.4) podemos escrevê-la numa forma geral como:

$$S = \int d^{(D-1)}x \left\{ \frac{1}{2} \phi(x) G \phi(x) - J\phi(x) \right\} \quad (2.6)$$

Qualquer modelo quadrático nos campos pode ser escrito da maneira acima numa forma geral. O operador  $G = (\square - m^2)$  é o operador diferencial que age nos campos, e é característico de cada modelo. O seu inverso é dado por  $G^{-1} = \frac{1}{(\square - m^2)}$ .

Pode-se analisar a unitariedade de um modelo ao avaliar o sinal da parte imaginária do resíduo da amplitude saturada nas fontes que é dada no espaço dos momentos, por (MENDONÇA, 2009; SANTOS, 2012):

$$A(k) = J(k)^* \langle \phi(k)\phi(-k) \rangle J(k) = -\frac{i}{2} J(k)^* \hat{G}^{-1}(i\partial_\mu \rightarrow ik_\mu) J(k), \quad (2.7)$$

onde  $J(k) = (2\pi)^{\frac{1-D}{2}} \int d^{D-1}x e^{-ik_\mu x^\mu} J(x)$ .

A amplitude  $A(k)$  é dada por:

$$A(k) = \frac{iJ(k)^* J(k)}{2(k^2 + m^2)} \quad (2.8)$$

Para analisar a unitariedade do modelo é preciso avaliar o sinal da parte imaginária do resíduo da amplitude de dois pontos saturada. Esse resíduo no espaço dos momentos é dado por:

$$ResA(k) = \lim_{(k^2 \rightarrow -m^2)} (k^2 + m^2) i \frac{J(k)^* J(k)}{2(k^2 + m^2)} \quad (2.9)$$

Pela expressão acima se nota facilmente que o sinal desse resíduo será positivo o que implica em nossa análise que se tem uma teoria unitária. O modelo de Klein-Gordon massivo é unitário, como já se sabe.

$$ImResA(k) > 0 \quad (2.10)$$

A conservação dos graus de liberdade nesse caso é trivial pois antes da redução dimensional se tinha um campo escalar <sup>1</sup> propagante em  $D$  dimensões e após o processo de redução dimensional tem-se um grau de liberdade escalar em  $D - 1$  dimensões.

---

<sup>1</sup>Mais precisamente, um grau de liberdade em cada ponto do espaço-tempo. Neste trabalho o número de graus de liberdade mencionado será sempre por ponto no espaço-tempo.

### 3 REDUÇÃO DIMENSIONAL DA AÇÃO DE MAXWELL EM $D$ DIMENSÕES

A ação de Maxwell em  $D$  dimensões que descreve uma partícula de spin 1 sem massa é dada por (LEMOS, 2007):

$$S = \int d^D x \left\{ -\frac{1}{4} F_{CB} F^{CB} \right\} \quad (3.1)$$

Pode-se separar a integração nas variáveis da dimensão extra e do espaço reduzido:

$$S = \int_0^{\frac{2\pi}{m}} dy \int d^{(D-1)} x \left\{ -\frac{1}{4} F_{CB} F^{CB} \right\} \quad (3.2)$$

Os índices maiúsculos correm de 0 à  $D - 1$  e o tensor  $F_{CB}$  é dado por:

$$F_{CB} = \partial_C A_B - \partial_B A_C \quad (3.3)$$

Pela definição do tensor acima não é difícil notar que a ação é invariante pela transformação local:

$$\delta A^B(x, y) = \partial^B \bar{\lambda}(x, y), \quad (3.4)$$

onde  $\bar{\lambda}(x, y)$  é um parâmetro de simetria escalar e local.

Ao variar a ação com relação ao campo  $A^B(x, y)$  tem-se as equações de movimento do modelo em  $D$  dimensões:

$$\frac{\delta S}{\delta A_B} = 0 \rightarrow \partial_C F^{CB} = \square A^B - \partial^B \partial_C A^C = 0 \quad (3.5)$$

É possível fixar a condição de transversalidade  $\partial_C A^C(x, y) = 0$ . Ao usarmos essa condição nas equações de movimento (3.5) concluímos que  $\square A^B(x, y) = 0$ .

A condição de transversalidade é invariante sob transformações de gauge residuais  $\delta(\partial_C A^C(x, y)) = \square \bar{\lambda} = 0$ . Assim, ainda há uma transformação de simetria residual de gauge que é dada através de um parâmetro que obedeça a equação de Klein-Gordon sem massa e tanto  $A^B(x, y)$  como  $\bar{\lambda}(x, y)$  pertencem ao espaço de funções que são soluções da equação de onda, o que permite retirar mais um grau de liberdade escalar do campo  $A^B(x, y)$  fixando  $\bar{\lambda}(x, y)$ . Pode-se tomar, por exemplo,  $A_0 = 0$  o que faz com que ao todo dois graus de liberdade sejam retirados. Tem-se que em  $D$  dimensões a ação de Maxwell propaga um campo com  $D - 2$  graus de liberdade e no caso de  $D = 4$  tem-se um campo

com 2 graus de liberdade, o número correto para uma partícula não massiva de spin 1 (duas helicidades do fóton).

Para proceder com a redução dimensional usa-se o seguinte Ansatz<sup>1</sup>:

$$A_\mu(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} A_\mu(x) \cos my ; \mu = 0, 1, \dots, D - 2 \quad (3.6)$$

A  $D - 1$ -ésima componente do campo  $A_{D-1}(x, y)$  vai gerar um campo de Stueckelberg no espaço reduzido:

$$A_{(D-1)}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} \phi(x) \sin my \quad (3.7)$$

O parâmetro de gauge é uma função que depende do espaço tempo e por isso admite o mesmo tipo de expansão que os campos:

$$\bar{\lambda}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} \lambda(x) \cos my \quad (3.8)$$

As transformações de simetria em  $D - 1$  dimensões são deduzidas de (3.4) e assumem a forma:

$$\delta A_\mu(x) = \partial_\mu \lambda(x) \quad (3.9)$$

$$\delta \phi(x) = -m \lambda(x) \quad (3.10)$$

Ao substituir os Ansätze na ação e integrar na dimensão extra obtemos a ação:

$$S = \int d^{(D-1)}x \left\{ \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (mA_\mu + \partial_\mu \phi)(mA^\mu + \partial^\mu \phi) \right] \right\} \quad (3.11)$$

O campo  $\phi(x)$  é chamado de campo de Stueckelberg (ou campo compensador). No presente caso seria interessante eliminar esse campo escalar e obter finalmente a ação de Proca. Se analisarmos as transformações de simetria no espaço reduzido notamos que o campo  $\phi(x)$ , que é um escalar, possui uma transformação dada através do uso de um parâmetro escalar (vide (3.10)), logo sempre podemos fixar esse parâmetro de transformação de simetria de modo a eliminá-lo ( $\lambda(x) = \frac{1}{m} \phi(x)$ ). A campos com esse tipo de transformação de simetria dá-se o nome de "puro gauge" e pode-se fixar  $\phi(x) = 0$ . Como o parâmetro de simetria foi fixado para eliminar o campo de Stueckelberg, a teoria

---

<sup>1</sup>Como sempre será adotado nesse trabalho, índices gregos denotam o espaço  $D - 1$  dimensional e índices latinos minúsculos denotam a parte espacial do espaço-tempo.

reduzida já não mais apresentará nenhuma simetria, já que o termo de massa de  $A_\mu$  quebra a simetria  $U(1)$ . Assim, de (3.11) com  $\phi(x) = 0$  obtemos a ação em  $D - 1$  dimensões que é o modelo de Proca (LEMOS, 2007):

$$S = \int d^{(D-1)}x \left\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}m^2 A^\mu A_\mu \right\} \quad (3.12)$$

A equação de movimento em  $D - 1$  dimensões é obtida ao minimizar a ação acima :

$$\frac{\delta S}{\delta A_\nu} = 0 \rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} - m^2 A^\nu = 0 \quad (3.13)$$

Ao aplicar  $\partial_\nu$  na equação acima obtemos  $\partial_\nu A^\nu = 0$  que é um vínculo escalar. Ao substituir isso na equação de movimento original conclui-se que (GOLDSTEIN, 1966; LEMOS, 2007):

$$(\square - m^2)A^\nu = 0 \quad (3.14)$$

Temos um vetor em  $D - 1$  dimensões e um vínculo  $\partial_\mu A^\mu = 0$ . Por fim há  $D - 2$  graus de liberdade, o mesmo número de graus de liberdade da teoria não massiva em  $D$  dimensões. Assim, verifica-se a conservação do número de graus de liberdade de um dado modelo quando se aplica o mecanismo de redução dimensional Kaluza-Klein com um único modo massivo.

### 3.1 ANÁLISE DE UNITARIEDADE

Para a análise de unitariedade do modelo de Proca (MENDONÇA, 2009) será utilizado o mesmo formalismo do caso escalar, com a diferença de que o operador diferencial que se encontra entre os campos é um operador matricial e sua inversão não é trivial. Esse operador diferencial pode ser escrito em termos de uma base  $\omega_{\mu\nu}$  e  $\theta_{\mu\nu}$ , os quais são definidos no apêndice B. Temos que a ação é dada por <sup>2</sup>:

$$S = \int d^{(D-1)}x \left\{ \frac{1}{2}A_\mu G^{\mu\nu} A_\nu + J_\mu A^\mu \right\} \quad (3.15)$$

---

<sup>2</sup> Onde fizemos um acoplamento com a fonte  $J_\mu(k)$ .

O operador diferencial sandwichado pelos campos  $A_\mu(x)$  é dado de (3.12) por:

$$G_{\mu\nu} = (\square - m^2)\theta_{\mu\nu} - m^2\omega_{\mu\nu} \quad (3.16)$$

De acordo com a definição do apêndice B o inverso do operador diferencial  $G_{\mu\nu}$  é dado por:

$$G_{\mu\nu}^{-1} = \frac{1}{(\square - m^2)}\theta_{\mu\nu} - \frac{1}{m^2}\omega_{\mu\nu} \quad (3.17)$$

Tendo esses resultados em mãos pode-se calcular a amplitude saturada já no espaço dos momentos:

$$A(k) = J^{\mu*} \langle A_\mu(k)A_\nu(-k) \rangle J^\nu = \frac{-i}{2} J^{*\mu}(k) \left[ -\frac{1}{(k^2 + m^2)}\theta_{\mu\nu} - \frac{1}{m^2}\omega_{\mu\nu} \right] J^\nu(k), \quad (3.18)$$

onde  $J_\mu(k) = (2\pi)^{\frac{1-D}{2}} \int d^{D-1}x e^{-ik_\mu x^\mu} J_\mu(x)$ .

Toma-se o resíduo dessa amplitude na qual se nota que há um pólo no setor de spin 1, o que significa, como já era esperado, que há uma partícula massiva com esse spin no espectro da teoria:

$$Res.A(k) = \lim_{(k^2 \rightarrow -m^2)} (k^2 + m^2) \frac{-i}{2} J^{*\mu}(k) \left[ -\frac{1}{(k^2 + m^2)}\theta_{\mu\nu} - \frac{1}{m^2}\omega_{\mu\nu} \right] J^\nu(k) \quad (3.19)$$

O operador  $\theta_{\mu\nu}$  faz uma projeção num espaço com os graus de liberdade de spin 1 enquanto que  $\omega_{\mu\nu}$  projeta num espaço com um grau de liberdade, ou seja com os graus de liberdade de spin 0.

Primeiramente vamos analisar a forma da fonte. Ela pode ser decomposta numa componente ao longo do momento e numa componente perpendicular a ele  $J_\mu^t$ :

$$J_\mu(k) = J_\mu^t + k_\mu J \quad (3.20)$$

Para o caso de uma partícula massiva em  $D - 1$  dimensões podemos ir para o seu referencial de repouso:

$$k^\mu = (m, 0, 0, \dots) \quad (3.21)$$

A partir da relação  $k^\mu J_\mu^t = 0$  e ao se utilizar  $k^\mu$  no referencial de repouso temos:

$$mJ_0^t = 0 \rightarrow J_0^t = 0 \quad (3.22)$$

Assim, ao se utilizar os vínculos da fonte na expressão do resíduo obtemos o resultado:

$$ImRes.A(k) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{(D-2)} |J_i^t(k)|^2 > 0 \quad (3.23)$$

O resultado acima significa que o modelo obtido via redução dimensional, modelo de Proca, é unitário e propaga uma partícula de spin 1, haja visto que o pólo da amplitude saturada se encontrava no setor referente a esse spin.

### 3.2 CONTAGEM DE GRAUS DE LIBERDADE DO MODELO DE MAXWELL-PROCA VIA ALGORITMO DE DIRAC-BERGMANN

A quantidade de graus de liberdade do modelo de Proca pode ser calculada ao se usar o algoritmo de Dirac-Bergmann (DIRAC, 1964; SANTOS, 2012). Primeiramente partimos da densidade de lagrangiana do modelo em  $D - 1$  dimensões:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}m^2 A^\mu A_\mu \quad (3.24)$$

A fim de se obter uma análise hamiltoniana, é conveniente separar explicitamente os termos nos quais ocorre derivada temporal <sup>3</sup>:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} + \frac{1}{2}[\dot{A}_i^2 + 2\partial^i A_0 \dot{A}_i + (\partial_i A_0)^2] - \frac{1}{2}m^2(A^i A_i - A_0^2), \quad (3.25)$$

onde  $\dot{A}_i = \frac{\partial A_i}{\partial X^0}$ .

A partir da densidade de lagrangeana acima pode-se definir o momento canônico:

$$\pi^j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_j} = \dot{A}^j + \partial^j A_0 \quad (3.26)$$

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0 \quad (3.27)$$

e  $\phi = \pi^0 \approx 0$  é um vínculo primário. O símbolo de igualdade fraca  $\approx$  significa que uma dada relação é verdadeira apenas na hipersuperfície de vínculos gerada no espaço de fase (HENNEAUX; TEITELBOIM, 1992).

---

<sup>3</sup>Os índices minúsculos latinos denotam quantidades espaciais.

A densidade de hamiltoniana canônica é definida por:

$$\mathcal{H}_c = \pi_\mu \dot{A}^\mu - \mathcal{L} \quad (3.28)$$

A hamiltoniana primária se define ao levar em conta os vínculos primários:

$$H_p = \int d^{(D-2)}x [\mathcal{H}_c + \lambda(x)\phi] = \int \left\{ \frac{1}{2} \pi_i \pi^i + \pi^i \partial_i A_0 + \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} + \frac{1}{2} m^2 (-A_0^2 + A_i^2) + \lambda(x)\phi \right\} d^{(D-2)}x \quad (3.29)$$

Os parênteses de Poisson fundamentais são definidos como:

$$\{A_\mu(x), \pi^\nu(y)\} = \delta_\mu^\nu \delta(x-y) \quad (3.30)$$

Para iniciar o procedimento do algoritmo de Dirac-Bergmann vamos partir de um espaço com  $2(D-1)$  graus de liberdade no espaço de fase,  $D-1$  graus para o campo  $A_\mu(x)$  e mais  $D-1$  graus de liberdade ligados ao momento canônico  $\pi^\nu(x)$ . Aplicamos agora a condição de conservação temporal desse vínculo, utilizando os parênteses de Poisson fundamentais:

$$\dot{\phi} = \dot{\pi}^0 = \{\phi, H_p\} = (\partial_i \pi^i + m^2 A_0) \approx 0 \quad (3.31)$$

Como a condição acima não foi idênticamente satisfeita, ela levou a ocorrência de novo vínculo:

$$\psi = (\partial_i \pi^i + m^2 A_0) \approx 0 \quad (3.32)$$

Para continuar o processo analisemos a condição de consistência do novo vínculo:

$$\dot{\psi} = \{\psi, H_c\} + \int d^{(D-2)}x [\psi, \phi] \lambda(x) = m^2 (\lambda - \partial_i A^i) \approx 0 \quad (3.33)$$

Através da expressão acima é possível determinar o multiplicador de Lagrange  $\lambda$  devido ao fato de que  $\{\psi(x), \phi(x)\} \neq 0$ . O fato dos vínculos não terem parênteses de Poisson nulos significa que não há simetria de gauge no modelo, e a condição (3.33) caracteriza os chamados vínculos de segunda classe (DIRAC, 1964). Assim,  $\psi(x)$  e  $\phi(x)$  são um par de vínculos de segunda classe.

Partimos de um espaço de fase com  $2(D - 1)$  graus de liberdade e nossa análise demonstrou que existem dois vínculos escalares de segunda classe na teoria. Por fim, temos  $2(D - 1) - 2 = 2(D - 2)$  graus de liberdade no espaço de fase. Agora ao voltarmos ao espaço de configuração tem-se a metade destes graus de liberdade, que são  $D - 2$  que correspondem exatamente à análise feita anteriormente via equações de movimento e que são os graus de liberdade de uma partícula de spin 1 sem massa em  $D$  dimensões ou massiva em  $D - 1$  dimensões. Desse modo a conservação dos graus de liberdade de um modelo através da aplicação do mecanismo de redução dimensional foi obtida mais uma vez, agora sob o viés da análise de vínculos hamiltonianos.

Ao utilizar os vínculos na forma forte obtemos a hamiltoniana explicitamente não negativa:

$$H_p = \int \left\{ \frac{1}{2} \pi_i \pi^i + \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} + \frac{1}{2} m^2 (A_0^2 + A_i^2) \right\} d^{(D-2)}x \quad (3.34)$$

#### 4 REDUÇÃO DIMENSIONAL DA AÇÃO DE EINSTEIN-HILBERT LINEARIZADA EM $D$ DIMENSÕES

Neste capítulo será feita a redução dimensional da ação linearizada de Einstein-Hilbert que descreve uma partícula não massiva de spin 2 em  $D$  dimensões. A ação de Einstein-Hilbert linearizada em  $D$  dimensões já com a dependência na dimensão extra separada na integral é dada por (KHOUEIR; MONTEMAYOR; URRUTIA, 2008):

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2\pi}{m}} dy \int d^{(D-1)}x \left\{ h^{MN} \square h_{MN} + 2\partial_M h^{MN} \partial^A h_{AN} - 2\partial_M h^{MN} \partial_N h - h \square h \right\} \quad (4.1)$$

O modelo acima possui simetria pela seguinte transformação local:

$$\delta h^{MN} = \partial^M \epsilon^N + \partial^N \epsilon^M \quad (4.2)$$

Antes de mais nada vamos obter suas equações de movimento em  $D$  dimensões, para tal vamos fixar o gauge de De-Donder que nos ajudará a simplificá-las:

$$\partial_A h^{AB} = \frac{1}{2} \partial^B h \quad (4.3)$$

Essa escolha possui uma transformação de simetria residual da forma (4.2) onde  $\square \epsilon^B = 0$ . A equação de movimento é dada por:

$$\frac{\delta S}{\delta h^{AB}} = \square h_{AB} - \partial_A \partial^V h_{VB} - \partial_B \partial^V h_{VA} + \eta_{AB} \partial_C \partial_D h^{CD} + \partial_A \partial_B h - \eta_{AB} \square h = 0 \quad (4.4)$$

Usando a condição de De-Donder na equação acima concluímos:

$$\square h_{AB} - \frac{1}{2} \eta_{AB} \square h \equiv \square \bar{h}_{AB} = 0 \quad (4.5)$$

Tomando o traço da equação acima, temos:

$$\square \bar{h} = 0 \quad (4.6)$$

Assim, a condição de De Donder nos diz que  $\partial_A \bar{h}^{AB} = 0$ , o que nos leva a um vínculo vetorial. Ainda resta liberdade para fixar mais um vetor que seja solução da equação de onda devido a simetria residual  $\square \epsilon^A = 0$ , que poderia ser, por exemplo  $\bar{h}^{A0} = 0$ , o que é mais uma restrição vetorial. Partimos de um modelo via tensor simétrico com  $\frac{D(D+1)}{2}$  graus de liberdade e possuímos 2 vínculos vetoriais que retiram  $2D$  graus de liberdade, temos por fim,  $\frac{D(D-3)}{2}$  graus de liberdade. O resultado para  $D = 4$  é de 2 graus de

liberdade, típico de uma partícula sem massa de spin 2. Assim, temos um campo que obedece a equação de onda com os vínculos discutidos acima (HINTERBICHLER, 2012) ou seja, a equação de Klein-Gordon sem massa:

$$\square \bar{h}_{AB} = 0 \quad (4.7)$$

Para proceder com a redução dimensional do modelo, vamos admitir as seguintes dependências na dimensão extra para os campos:

$$h_{\mu\nu}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} h_{\mu\nu}(x) \cos(my) \quad (4.8)$$

$$h_{(D-1),(D-1)}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} H(x) \cos(my) \quad (4.9)$$

$$h_{(D-1),\nu}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} a_\nu(x) \sin(my) \quad (4.10)$$

Os parâmetros de simetria são dados por:

$$\epsilon_\mu(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} \epsilon_\mu(x) \cos(my) \quad (4.11)$$

$$\epsilon_{(D-1)}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} \epsilon(x) \sin(my) \quad (4.12)$$

As transformações de simetria no espaço com  $D - 1$  dimensões são deduzidas de (4.2) e tomam a forma:

$$\delta h_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \epsilon_\nu(x) + \partial_\nu \epsilon_\mu(x) \quad (4.13)$$

$$\delta a_\mu(x) = \partial_\mu \epsilon(x) - m \epsilon_\mu(x) \quad (4.14)$$

$$\delta H(x) = 2m \epsilon(x) \quad (4.15)$$

Antes de apresentar o resultado da integração da dimensão extra, vamos fazer a seguinte redefinição motivada pela simetria escalar em (4.14) e (4.15), vide (KHOUDEIR; MONTEMAYOR; URRUTIA, 2008):

$$\bar{a}_\mu = a_\mu - \frac{1}{2m} \partial_\mu H \quad (4.16)$$

A ação, ainda levando em conta os campos de Stueckelberg, toma a forma:

$$S = \frac{1}{2} \int d^{(D-1)}x \left\{ h^{\mu\nu} \square h_{\mu\nu} + 2\partial_\mu h^{\mu\nu} \partial^\alpha h_{\alpha\nu} - 2\partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\nu h \right. \\ \left. - h \square h - m^2 \left[ (h_{\mu\nu} + \frac{1}{m} (\partial_\mu \bar{a}_\nu + \partial_\nu \bar{a}_\mu))^2 - (h + \frac{2}{m} \partial^\nu \bar{a}_\nu)^2 \right] \right\} \quad (4.17)$$

A combinação  $\bar{a}_\mu$  se transforma como  $\delta \bar{a}_\mu = -m \epsilon_\mu$ , assim podemos fixar um gauge no qual  $\bar{a}_\mu$  é nulo (com  $\epsilon_\mu = \frac{1}{m} \bar{a}_\mu$ ). Assim, obtemos a ação de Fierz-Pauli:

$$S = \frac{1}{2} \int d^{(D-1)}x \left\{ h^{\mu\nu} \square h_{\mu\nu} + 2\partial_\mu h^{\mu\nu} \partial^\alpha h_{\alpha\nu} - 2\partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\nu h - h \square h - m^2 [(h_{\mu\nu})^2 - (h)^2] \right\} \quad (4.18)$$

As equações de movimento são dadas por:

$$\frac{\delta S}{\delta h^{\mu\nu}} = \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\beta h_\nu^\beta - \partial_\nu \partial_\beta h_\mu^\beta + \eta_{\mu\nu} \partial_\beta \partial_\alpha h^{\beta\alpha} + \partial_\mu \partial_\nu h - \eta_{\mu\nu} \square h - m^2 (h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} h) = 0 \quad (4.19)$$

Ao aplicar um  $\partial^\mu$  na equação acima obtemos

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} - \partial_\nu h = 0 \quad (4.20)$$

Ao usar esse resultado na equação de movimento tem-se:

$$\square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h - m^2 (h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} h) = 0 \quad (4.21)$$

Ao tomar o traço da equação (4.21) obtemos que  $m^2 (D-2)h = 0$ , ou seja temos traço nulo

$$h = 0 \quad (4.22)$$

Assim, fazendo uso dessa condição em (4.20) obtemos a transversalidade  $\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0$ . Ao

fazer uso desses resultados podemos deduzir de (4.20) que:

$$(\square - m^2)h_{\mu\nu} = 0 \quad (4.23)$$

Partiu-se de um campo simétrico em  $D - 1$  dimensões, ou seja, tínhamos de início  $\frac{D(D-1)}{2}$  graus de liberdade e foram obtidos um vínculo escalar ( $h = 0$ ) e um vínculo vetorial ( $\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0$ ), retirando ao todo  $D$  graus de liberdade do modelo. Restam assim,  $\frac{D(D-3)}{2}$  graus de liberdade para esse modelo, os mesmos que foram calculados para a partícula sem massa de spin 2 mas numa dimensão acima. Ou seja, a partícula massiva de spin 2 em  $(D - 1)$  dimensões tem o mesmo número de graus de liberdade que a de spin 2 sem massa em  $D$  dimensões.

#### 4.1 PRESCRIÇÃO MÍNIMA PARA A REDUÇÃO DIMENSIONAL

A experiência adquirida nas reduções dimensionais de modelos de spin 0, spin 1 e spin 2 nos permitiu elaborar uma prescrição mínima (ARAGONE; DESER; YANG, 1987) que pode ser usada para simplificar a redução dimensional de alguns modelos<sup>1</sup>.

Essa prescrição mínima está ligada ao truque de Stueckelberg. Desse modo vamos fazer uma rápida digressão sobre esse truque para em seguida obtermos as prescrições mínimas da redução dimensional.

O truque de Stueckelberg consiste basicamente em se introduzir campos não dinâmicos num dado modelo massivo que em geral não possui simetria de gauge. Os campos de Stueckelberg possuem um determinado tipo de transformação que permite que o campo dinâmico da teoria massiva apresente a mesma transformação de simetria que teria no caso sem massa, por isso os campos de Stueckelberg são chamados de campos compensadores.

Vamos analisar o exemplo do modelo de Maxwell-Proca estudado no capítulo 3 que não possui simetria de gauge e é descrito pelo campo vetorial  $A_\mu$ . Introduzimos um campo de Stueckelberg escalar  $\phi(x)$ .

$$\mathcal{L}_{Proca} = \frac{1}{2}\tilde{A}^\mu [(\square - m^2)\eta_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu]\tilde{A}^\nu \quad (4.24)$$

O campo  $\tilde{A}^\mu$  é uma combinação formada por  $A_\mu$  e  $\phi$ . Temos que  $\tilde{A}_\mu = A_\mu + \frac{1}{m}\partial_\mu\phi$ . O modelo (4.24) é análogo a (3.11). É interessante notar que essa combinação tem a forma da transformação de simetria do modelo sem massa. A combinação é invariante pelas

---

<sup>1</sup>Funciona para alguns modelos mas não tem validade geral

transformações abaixo:

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \lambda \quad (4.25)$$

$$\delta \phi = -m \lambda \quad (4.26)$$

Note que o campo escalar de Stueckelberg é puro gauge e portanto não dinâmico. A transformação de simetria do campo escalar permite que o campo vetorial apresente a mesma transformação de simetria que ele teria no modelo de Maxwell (limite de massa nula) (HINTERBICHLER, 2012).

Esse truque permite que se faça uma transição suave do ponto de vista dos graus de liberdade do modelo massivo para seu limite de massa nula. Por exemplo, se tomarmos  $D = 4$ , o modelo de Proca, como vimos, propagaria 3 graus de liberdade que estão todos contidos no campo vetorial, pois o escalar seria não dinâmico. Ao tomar o limite de massa nula <sup>2</sup>, nota-se de (4.26) que o campo escalar deixa de ser puro gauge, ele se torna dinâmico. No limite de massa nula obteríamos o modelo de Maxwell que propaga 2 graus de liberdade (2 helicidades do fóton) e mais um campo escalar. Observa-se que o caso massivo e o limite de massa nula do modelo propagaria os mesmos graus de liberdade.

No caso do modelo de Fierz-Pauli massivo, pode-se fazer um procedimento análogo.

$$\mathcal{L}_{FP(m \neq 0)} = \frac{1}{4} [\bar{h}^{\mu\nu} (\square - m^2) \bar{h}_{\mu\nu} - \bar{h} (\square - m^2) \bar{h}] + \frac{1}{2} \partial^\alpha \bar{h}_{\alpha\mu} (\partial_\beta \bar{h}^{\beta\mu} - \partial^\mu \bar{h}) \quad (4.27)$$

O campo  $\bar{h}^{\mu\nu}$  é uma combinação formada por:

$$\bar{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} + \frac{1}{m} (\partial^\mu a^\nu + \partial^\nu a^\mu) - \frac{1}{m^2} \partial^\mu \partial^\nu H \quad (4.28)$$

Pode-se notar que essa combinação é invariante pelas transformações (4.13), (4.14) e (4.15), sendo que o campo tensorial apresenta a mesma transformação que ele teria no caso sem massa. A densidade de lagrangeana (4.27) é idêntica a (4.17). <sup>3</sup>

Dessa maneira podemos comparar a ação de Maxwell em  $D$  dimensões com a de Maxwell-Proca escrita em termos da combinação  $\tilde{A}_\mu$  em  $D - 1$  dimensões e a ação de Fierz Pauli sem massa (modelo de Einstein-Hilbert) com a de Fierz-Pauli massivo escrita

---

<sup>2</sup>O fato de haver um termo de massa que seria aparentemente divergente no limite de massa nula na combinação  $\tilde{A}_\mu$  não impede que se tome esse limite pois esse termo é cancelado na ação (4.24) (HINTERBICHLER, 2012).

<sup>3</sup>Para notar que as expressões (4.27) e (4.17) são idênticas é preciso levar em conta a definição de  $\bar{a}_\mu$  dada em (4.16)

em termos de  $\bar{h}_{\mu\nu}$  em  $D - 1$  dimensões :

$$\mathcal{L}_{Maxwell}^D = \frac{1}{2} A^M (\square \eta_{MN} - \partial_M \partial_N) A^N \quad , \quad (4.29)$$

$$\mathcal{L}_{Proca}^{D-1} = \frac{1}{2} \tilde{A}^\mu [(\square - m^2) \eta_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu] \tilde{A}^\nu \quad . \quad (4.30)$$

$$\mathcal{L}_{FP(m=0)}^D = \frac{1}{4} [h^{MN} \square h_{MN} - h \square h] + \frac{1}{2} \partial^A h_{AM} (\partial_B h^{BM} - \partial^M h) \quad (4.31)$$

$$\mathcal{L}_{FP(m \neq 0)}^{D-1} = \frac{1}{4} [\bar{h}^{\mu\nu} (\square - m^2) \bar{h}_{\mu\nu} - \bar{h} (\square - m^2) \bar{h}] + \frac{1}{2} \partial^\alpha \bar{h}_{\alpha\mu} (\partial_\beta \bar{h}^{\beta\mu} - \partial^\mu \bar{h}) \quad (4.32)$$

Como (4.32) pode ser obtido da redução dimensional de (4.31) e (4.30) pode ser obtido de (4.29), nota-se que é possível fazer uma prescrição mínima que pode ser usada em alguns casos para o processo de redução dimensional (BIAZOTTI; DALMAZI; GRACIA, 2013):

$$\square_D \rightarrow \square_{D-1} - m^2 \quad ; \quad A_M \rightarrow \tilde{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu \phi / m \quad (4.33)$$

$$\square_D \rightarrow \square_{D-1} - m^2 \quad ; \quad h_{MN} \rightarrow \bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + (\partial_\mu a_\nu + \partial_\nu a_\mu) / m - \partial_\mu \partial_\nu H / m^2 \quad (4.34)$$

## 4.2 UNITARIEDADE DO MODELOS DE FIERZ-PAULI

O inverso do operador diferencial da ação de Fierz-Pauli será calculado particularizando  $D = 4$ , esse procedimento não tira a generalidade da análise, apenas facilita os cálculos. O operador diferencial agora é uma entidade de quatro índices e é escrito numa base que possui essa mesma quantidade de índices (vide apêndice B). De (4.18), temos:

$$G_{\mu\nu\gamma\beta}^{-1} = 2 \left\{ - \frac{2}{(k^2 + m^2)} P_{ss}^{(2)} - \frac{2}{m} P_{ss}^{(1)} + \frac{4}{3m^2} P_{ww}^{(0)} + \frac{2}{\sqrt{3}m^2} (P_{sw}^{(0)} + P_{ws}^{(0)}) \right\}_{\mu\nu\gamma\beta} \quad (4.35)$$

Podemos escrever a amplitude de dois pontos saturada <sup>4</sup>(SANTOS, 2012):

$$A(k) = -\frac{i}{2} T^{*\mu\nu}(k) G_{\mu\nu\gamma\beta}^{-1} T^{\gamma\beta}(k), \quad (4.36)$$

---

<sup>4</sup>Nesse momento adicionamos fontes ao sistema

onde  $T^{\mu\nu}(k) = (2\pi)^{\frac{1-D}{2}} \int d^{D-1}x e^{-ik_\mu x^\mu} T^{\mu\nu}(x)$ .

Pode-se notar que há um pólo massivo no setor de spin 2. O resíduo é calculado como :

$$ResA(k) = \lim_{k^2 \rightarrow -m^2} (k^2 + m^2)A(k) \quad (4.37)$$

A fonte pode ser decomposta da seguinte maneira (MENDONÇA, 2009; SANTOS, 2012) (o índice  $tt$  significa sem traço e transverso):

$$T_{\mu\nu}(k) = T_{\mu\nu}^{tt}(k) + k_\mu T_\nu(k) + k_\nu T_\mu(k) + \eta^{\mu\nu} \bar{T}(k) \quad (4.38)$$

Apenas a contribuição do termo com pólo do inverso do operador diferencial será não nula, assim como o projetor de spin 2 é transverso e sem traço, apenas as componentes da fonte com essa característica são selecionados:

$$Res. = 2iT_{\mu\nu}^{*tt}(k)T_{tt}^{\mu\nu}(k) \quad (4.39)$$

Como se trata de partícula massiva podemos ir para o referencial de repouso  $k_\mu = (m, 0, 0, \dots)$  e usar o vínculo:

$$k_\mu T_{tt}^{\mu\nu}(k) = 0 \quad (4.40)$$

Esse vínculo nos leva à:

$$mT_{tt}^{0\nu}(k) = 0 \quad (4.41)$$

Assim, o resíduo é dado por:

$$Res. = 2i \sum_{ij} |T_{tt}^{ij}|^2 \quad (4.42)$$

A parte imaginária do resíduo é maior que zero. O modelo é unitário.

### 4.3 CONTAGEM DE GRAUS DE LIBERDADE VIA ALGORITMO DE DIRAC-BERGMANN

Nesta subseção será feita a análise do modelo de Fierz-Pauli via algoritmo de Dirac-Bergmann. Para tal partimos de sua densidade de lagrangeana em  $D$  dimensões (sendo que no final faremos  $D \rightarrow D - 1$  para checarmos a conservação dos graus de liberdade via redução dimensional.):

$$\mathcal{L}_{FP} = \frac{1}{2} \left\{ h^{\mu\nu} \square h_{\mu\nu} + 2\partial_\mu h^{\mu\nu} \partial^\alpha h_{\alpha\nu} - 2\partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\nu h - h \square h - m^2 [(h_{\mu\nu})^2 - (h)^2] \right\} \quad (4.43)$$

A partir da expressão (4.43), após integrações por partes, observa-se que os campos  $h_{oo}$  e  $h_{i0}$  surgem sem derivadas temporais e são meras variáveis auxiliares (HINTERBICHLER, 2012). Vamos considerar os graus de liberdade dinâmicos como os do campo  $h_{ij}$  e seus momentos conjugados, ou seja partimos de  $D(D-1)$  graus de liberdade no espaço de fase. Pode-se definir os momentos canônicos como (HENNEAUX; TEITELBOIM, 1992; MARZBAN; WHITTING; DAM, 1989):

$$\pi_{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}_{FP}}{\partial \dot{h}_{ij}} \quad (4.44)$$

$$\pi_{ij} = \dot{h}_{ij} - \dot{h}_k^k \delta_{ij} + 2\partial_k h_{0k} \delta_{ij} - 2\partial_{(i} h_{j)0} \quad (4.45)$$

onde  $\partial_{(i} h_{j)0} = \frac{1}{2}(\partial_i h_{j0} + \partial_j h_{i0})$ .

Com esta definição pode-se escrever as velocidades em termos dos momentos (HINTERBICHLER, 2012):

$$\dot{h}_{ij} = \pi_{ij} - \frac{1}{(D-2)} \pi_k^k \delta_{ij} + 2\partial_{(i} h_{j)0} \quad (4.46)$$

A hamiltoniana é definida por:

$$\mathcal{H} = \pi_{ij} \dot{h}^{ij} - \mathcal{L} \quad (4.47)$$

A hamiltoniana toma a seguinte forma explícita:

$$H = \int d^{(D-1)}x \left\{ \frac{1}{2} \pi_{ij}^2 - \frac{1}{2(D-2)} (\pi_k^k)^2 + \frac{1}{2} (\partial_k h_{ij})^2 - \partial_i h_{jk} \partial^j h^{ik} + \partial_i h^{ij} \partial_j h_k^k - \frac{1}{2} (\partial_i h_k^k)^2 + \frac{1}{2} m^2 (h_{ij}^2 - h_k^k{}^2) + 2h_{0i} \partial_j \pi^{ji} + m^2 h_{0i}^2 + h_{00} (\nabla^2 h_k^k - m^2 h_k^k - \partial^i \partial^j h_{ij}) \right\} \quad (4.48)$$

Ao completar quadrado em  $h_{0i}$  temos :

$$H = \int d^{(D-1)}x \left\{ \frac{1}{2} \pi_{ij}^2 - \frac{1}{2(D-2)} (\pi_k^k)^2 + \frac{1}{2} (\partial_k h_{ij})^2 - \partial_i h_{jk} \partial^j h^{ik} + \partial_i h^{ij} \partial_j h_k^k \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (\partial_i h_k^k)^2 + \frac{1}{2} m^2 (h_{ij}^2 - h_k^k{}^2) + \frac{1}{m^2} (\partial_j \pi^{ji})^2 + h_{00} (\nabla^2 h_k^k - m^2 h_k^k - \partial^i \partial^j h_{ij}) \right\} \quad (4.49)$$

Da expressão acima se nota que deve haver uma descontinuidade no limite de massa nula. Da hamiltoniana (4.49) nota-se que  $h_{00}$  surge como um multiplicador de Lagrange gerando o vínculo:

$$\phi = (\nabla^2 h_k^k - m^2 h_k^k - \partial^i \partial^j h_{ij}) \approx 0 \quad (4.50)$$

Os parênteses de Poisson fundamentais são:

$$\{h_{\mu\nu}(x), \pi^{\sigma\beta}(y)\} = \delta_{(\mu}^{\sigma} \delta_{\nu)}^{\beta} \delta(x-y) \quad (4.51)$$

Vamos agora analisar a evolução temporal do vínculo (4.50):

$$\dot{\phi} = \{\phi, H\} = \partial_i \partial_j \pi^{ij} + \frac{m^2}{(D-2)} \pi_i^i \approx 0 \quad (4.52)$$

A evolução temporal de  $\phi$  gerou mais um vínculo:

$$\alpha \equiv \partial_i \partial_j \pi^{ij} + \frac{m^2}{(D-2)} \pi_i^i \approx 0 \quad (4.53)$$

A evolução temporal de  $\alpha$  gera:

$$\dot{\alpha} = \{\alpha, H\} = (2m^2 \nabla^2 - \frac{m^4(D-1)}{(D-2)}) h_{00} - (m^4 h_k^k + \frac{m^2}{(D-2)} \nabla^2 h_k^k) \approx 0 \quad (4.54)$$

que não é um novo vínculo<sup>5</sup>.

O multiplicador de Lagrange  $h_{00}$  foi determinado, o que significa que o algoritmo chegou ao fim e que se trata de uma teoria sem simetria de gauge. Temos ao todo 2

---

<sup>5</sup> A determinação dos multiplicadores de Lagrange está ligada à ausência da simetria de gauge (DIRAC, 1964).

vínculos escalares de segunda classe:

$$\{\alpha, \lambda\} = (2m^2 \nabla^2 - \frac{m^4(D-1)}{(D-2)})\delta(x-y) \neq 0 \quad (4.55)$$

Assim, temos ao todo  $D(D-1) - 2$  graus de liberdade no espaço de fase em  $D$  dimensões. Para se checar a conservação dos graus de liberdade via redução dimensional da teoria de Einstein Hilbert sem massa em  $D$  dimensões, deve-se tomar  $D \rightarrow D-1$ . Temos então  $D(D-3)$  graus de liberdade no espaço de fase os quais correspondem a  $\frac{D(D-3)}{2}$  graus de liberdade no espaço de configuração em  $D-1$  dimensões. Esse número é exatamente a quantidade de graus de liberdade de uma partícula sem massa de spin 2 em  $D$  dimensões o que comprova a conservação dos graus de liberdade via redução dimensional.

## 5 REDUÇÃO DIMENSIONAL DE $D = 2 + 1$ PARA $D = 1 + 1$ DO TERMO $K$ LINEARIZADO DA NEW MASSIVE GRAVITY

Nesta seção será feita a redução dimensional do termo  $K$  linearizado da New massive Gravity (vide (BERGSHOEFF; HOHM; TAWNSEND, 2009; BIAZOTTI; DALMAZI; GRACIA, 2013; DESER, 2009)). Essa redução deve ser feita de  $D = 2 + 1$  dimensões para  $D = 1 + 1$  dimensões haja visto que esse termo  $K$  é consistente em  $D = 2 + 1$  e possui o mesmo número de graus de liberdade do modelo de Maxwell, assim, pela conservação dos graus de liberdade via redução dimensional espera-se obter um modelo com o mesmo número de graus de liberdade de uma eletrodinâmica massiva em  $D = 1 + 1$  dimensões.

Trabalharemos com os índices  $:(M, N = 0, 1, 2)$  e  $(\mu, \nu = 0, 1)$ . A teoria é linearizada e obtida supondo que a métrica está num background Minkowskiano com perturbações dinâmicas  $h_{MN}$ :

$$g_{MN} = \eta_{MN} + h_{MN} \quad (5.1)$$

Partimos do termo  $K$  não linear e o expandimos até segunda ordem em  $h_{MN}$ . Nota-se que a ação é escrita em termos do quadrado das curvaturas (escalar e tensor de Ricci.) e que cada uma dessas curvaturas é de segunda ordem em derivadas. Desse modo, temos um modelo de quarta ordem em derivadas. Devido a esse fato, o modelo tem a característica de diminuir divergências no ultravioleta (momentos altos). A ação tem a forma:

$$S_K = \int d^3 x \sqrt{-g} \left( R_{MN} R^{MN} - \frac{3}{8} R^2 \right)_{hh} \quad (5.2)$$

$$= \frac{1}{4} \int d^3 x \left[ (\square \theta_{AN} h^{NM}) (\square \theta_{MB} h^{BA}) - \frac{(\square \theta_{MN} h^{MN})^2}{2} \right] \quad (5.3)$$

$$= \frac{1}{4} \int d^3 x h^{AB} (\square^2 P_{TT}^{(2)})_{ABCD} h^{CD}, \quad (5.4)$$

onde  $R_{MN}$  e  $R$  são o tensor e o escalar de Ricci, respectivamente.

A definição dos projetores que aparecem na ação acima pode ser encontrada no apêndice  $B$ . A ação  $S_k$  possui simetria por reparametrizações linearizadas e também simetria por transformação de Weyl linearizada:

$$\delta h_{AB} = \partial_A \xi_B + \partial_B \xi_A + \eta_{AB} \Lambda \quad (5.5)$$

A ação em  $2 + 1$  dimensões pode ser escrita (já separando a integração na dimensão

extra) como:

$$S_K = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi R} dy \int d^2x \left\{ h_{AB} \square^2 h^{AB} + 2 \partial_A h^{AB} \square \partial^C h_{CB} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\partial_A \partial_B h^{AB})^2 - \frac{1}{2} h \square^2 h + \partial_A \partial_B h^{AB} \square h \right\}, \quad (5.6)$$

onde  $R = \frac{1}{m}$ .

A redução dimensional será feita usando um Ansatz análogo ao caso da redução do modelo linearizado de Einstein-Hilbert. O ansatz é o seguinte:

$$h_{\mu\nu}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} h_{\mu\nu}(x) \cos(my) \quad ; \quad h_{\mu,2}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} \phi_\mu(x) \sin(my) \quad , \quad (5.7)$$

$$h_{22}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} H(x) \cos(my) \quad , \quad (5.8)$$

Ao substituir esses campos na ação e efetuar a redução dimensional tem-se:

$$S_{2D} = \frac{1}{4} \int d^2x \left[ m^4 (h_{\nu\mu} h^{\nu\mu} - h^2/2) - 2m^3 (2\partial^\mu h_{\mu\lambda} \phi^\lambda + \partial_\beta \phi^\beta h) \right. \\ + m^2 (-2h_{\nu\mu} \square h^{\nu\mu} - 2\phi^\nu \square \phi_\nu - 2\partial^\mu h_{\nu\mu} \partial_\beta h^{\nu\beta} - 2\partial_\nu \partial_\mu h^{\nu\mu} H + H \square h - \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} h + h \square h) \\ + 2m (-\partial^\mu \phi_\mu \square H + 2\partial^\mu h_{\nu\mu} \square \phi^\nu + \partial_\nu \partial_\mu h^{\nu\mu} \partial_\alpha \phi^\alpha + \partial_\beta \phi^\beta \square h) \\ + 2\phi^\nu \square^2 \phi_\nu + \frac{1}{2} H \square^2 H + 2\square \partial^\mu h_{\nu\mu} \partial_\beta h^{\nu\beta} + \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial_\mu h^{\nu\mu})^2 \\ \left. - \frac{1}{2} h \square^2 h - H \square^2 h + \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} \square h + \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} \square H + 2(\partial_\mu \phi^\mu) \square (\partial_\nu \phi^\nu) + h_{\mu\nu} \square^2 h^{\mu\nu} \right] \quad (5.9)$$

Como os parâmetros de simetria  $\xi_A$  e  $\Lambda$  são locais, ou seja, são dependentes do espaço tempo, eles também se decompõem numa dependência na dimensão extra e no espaço reduzido (KHOUEIR; MONTEMAYOR; URRUTIA, 2008):

$$\xi_\mu(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} \xi_\mu(x) \cos(my) \quad ; \quad \xi_2(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} \Omega(x) \sin(my) \quad (5.10)$$

$$\Lambda(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} \Lambda(x) \cos(my) \quad (5.11)$$

As transformações de simetria em  $D = 1 + 1$  dimensões podem ser obtidas de (5.5), (5.7), (5.8), (5.10) e (5.11) e tem a forma:

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu + \eta_{\mu\nu} \Lambda \quad (5.12)$$

$$\delta \phi_\mu = -m \xi_\mu + \partial_\mu \Omega \quad (5.13)$$

$$\delta H = \Lambda + 2m \Omega \quad (5.14)$$

A ação (5.9) é invariante sob (5.12), (5.13) e (5.14).

A idéia agora é mostrar que o processo de redução dimensional do termo K pode ser reobtido usando a prescrição mínima dada no capítulo 4, o que leva a uma grande simplificação de (5.9) que a princípio parece complicada pois possui muitos termos. A ação (5.9) pode ser escrita como:

$$S_{2D}[\tilde{h}_{\mu\nu}] = \frac{1}{4} \int d^2 x \left[ \left( K_{\alpha\nu} \tilde{h}^{\nu\mu} \right) \left( K_{\mu\beta} \tilde{h}^{\beta\alpha} \right) - \frac{\left( K_{\mu\nu} \tilde{h}^{\mu\nu} \right)^2}{2} \right] \quad (5.15)$$

onde  $\tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + (\partial_\mu \phi_\nu + \partial_\nu \phi_\mu)/m - \partial_\mu \partial_\nu H/m^2$  é o mesmo de (4.28).

O modelo em  $D = 2 + 1$  dimensões (5.6) pode ser escrito em termos de um operador  $K_{MN}$  que tem a forma:

$$K_{MN} = \square \eta_{MN} - \partial_M \partial_N \quad (5.16)$$

Ao usar a prescrição mínima tem-se que o operador  $K_{\mu\nu}$  que figura na ação  $S_{2D}[\tilde{h}_{\mu\nu}]$  em  $D = 1 + 1$  é dado por

$$K_{\mu\nu} = (\square - m^2) \eta_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu \quad (5.17)$$

Nota-se que a ação está escrita em termos de um campo  $\tilde{h}_{\mu\nu}$  que é escrito em termos da contribuição vetorial e escalar da dimensão extra, ou seja os campos de Stueckelberg. Como dito anteriormente deve-se construir um campo com a característica de invariância  $\delta \tilde{h}_{\mu\nu} = 0$  pelas transformações do campo  $h_{\mu\nu}$  e pelas transformações dos campos de Stueckelberg dadas de (5.12) à (5.14). Se ignorarmos a transformação de Weyl podemos usar a mesma definição (4.28) usada para o caso da redução do modelo de Fierz-Pauli não massivo, pois os modelos teriam o mesmo tipo de simetria. Mas é impossível construir uma combinação invariante de gauge se considerarmos a transformação de simetria de Weyl. O melhor que se pode fazer é manter a mesma definição que no caso de Fierz-Pauli, como fizemos em (5.15). Assim, o campo  $\bar{h}_{\mu\nu}$  teria uma transformação sob (5.12) a (5.14) dada por:

$$\delta \bar{h}_{\mu\nu} = \left( \eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{m^2} \right) \Lambda \quad (5.18)$$

Essa transformação é exatamente  $\delta\bar{h}_{\mu\nu} = K_{\mu\nu}^{-1}\Lambda'$  com  $\Lambda' = (\square - m^2)\Lambda$ . Desse modo fica fácil de notar que a ação reduzida (5.15) é invariante por tal transformação. Assim, o fato do campo redefinido  $\bar{h}_{\mu\nu}$  não ser invariante de gauge requer que a ação reduzida seja invariante pela transformação mostrada acima! Esse é um caso um tanto quanto raro em que uma teoria massiva possui uma simetria de gauge que não está ligada aos campos de Stueckelberg. O campo redefinido não está definido univocamente porém o modelo reduzido é tal que não "enxerga" a variação do campo. Isso caracteriza uma simetria de gauge. Nas próximas seções notar-se-á que o operador diferencial  $G_{\mu\nu\alpha\beta}$  do modelo não possui inversa o que é mais uma característica de sistema com simetria local. Quanto aos campos de Stueckelberg, como vimos, eles podem ser absorvidos na definição de  $\bar{h}_{\mu\nu}$  e não figurarão na ação reduzida.

### 5.1 ELETRODINÂMICA MASSIVA INVARIANTE DE GAUGE EM $D = 1 + 1$

Vamos analisar a dinâmica clássica do modelo  $S_{2D}[h_{\mu\nu}]$ . Suas equações de movimento são dadas por:

$$(\square - m^2) \left[ \partial_\mu V_\nu + \partial_\nu V_\mu - \eta_{\mu\nu} \frac{\partial_\gamma V^\gamma}{2} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu h}{2} - (\square - m^2)(h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \frac{h}{2}) \right] = \frac{\partial_\mu \partial_\nu (\partial_\beta V^\beta)}{2} \quad (5.19)$$

Na qual o campo vetorial é definido como:

$$V_\mu \equiv \partial^\nu h_{\mu\nu} \quad . \quad (5.20)$$

Do traço da equação (5.19) temos:

$$(2m^2 - \square)\partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu} + \square(\square - m^2)h = 0 \quad . \quad (5.21)$$

A fim de simplificar as equações de movimento adota-se a condição de gauge escalar abaixo já que dispomos de uma transformação de simetria dada por um parâmetro escalar (vide 5.18):

$$K^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = \partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu} - (\square - m^2)h = 0 \quad . \quad (5.22)$$

Essa condição ainda possui simetria residual (5.18) dada por um parâmetro que obedeça:

$$(\square - m^2)\Lambda = 0 \quad (5.23)$$

Ao considerar as duas equações escalares obtidas (5.21) e (5.22), concluímos que:

$$\partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu} = \partial \cdot V = 0 \quad , \quad (5.24)$$

$$(\square - m^2)h = 0 \quad . \quad (5.25)$$

Em particular tem-se que a combinação vetorial se transforma como:

$$\delta V_\mu = (m^2 - \square)\partial_\mu \Lambda = 0 \quad . \quad (5.26)$$

Podemos usar a transformação residual de gauge para eliminar o traço uma vez que ele e o parâmetro de simetria ( que é um escalar) estão no espaço de funções que são soluções da equação de Klein-Gordon:

$$\delta h = (2m^2 - \square)\Lambda = m^2\Lambda \quad (5.27)$$

Podemos eliminar o traço:

$$h = 0 \quad . \quad (5.28)$$

Ao aplicar uma derivada  $\partial^\mu$  na equação de movimento (5.19) tem-se:

$$(\square - m^2)V_\mu = 0 \quad , \quad (5.29)$$

$$(\square - m^2)^2 h_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad (5.30)$$

Sabe-se que em  $D = 1 + 1$  não há graus de liberdade no setor de spin 2, um exemplo disso é o fato de que a ação de Fierz-Pauli que descreve uma partícula de spin 2 massiva não tem graus de liberdade nessa dimensão. Assim, tem-se a identidade:

$$\square h_{\mu\nu} + (\partial_\mu \partial_\nu - \square \eta_{\mu\nu})h - \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu + \eta_{\mu\nu} \partial \cdot V = 0 \quad . \quad (5.31)$$

Essa não é uma equação dinâmica pois suas componentes zeram indenticamente. Esse fato nos leva a concluir que nessa dimensão ( $D = 1 + 1$ ) não há projeção no setor de spin 2 cujos graus de liberdade devem ser expressos por um tensor de rank 2. Assim, como não temos projeção no setor de spin 2, os graus de liberdade desse modelo podem ser expressos por meio de um vetor e não necessariamente por um tensor. Estes fatos estão ligados a baixa dimensionalidade do espaço. Ao considerar os vínculos (5.24), (5.28), (5.29) e (5.31), a equação (5.30) se torna:

$$h_{\mu\nu} = \frac{\partial_\mu V_\nu + \partial_\nu V_\mu}{m^2} . \quad (5.32)$$

Assim, pode-se considerar que  $(\square - m^2)V_\mu = 0$  e  $\partial \cdot V = 0$  são nossas equações dinâmicas primárias e tomar  $V_\mu$  como o campo vetorial fundamental. Tem-se assim o mesmo espectro que a teoria de Proca. Essa análise prova ao menos a nível clássico que houve conservação dos graus de liberdade via mecanismo de redução dimensional pois a teoria de partida possuía, como dito anteriormente, os mesmos graus de liberdade que o modelo de Maxwell.

## 5.2 ANÁLISE DE UNITARIEDADE

Nesta seção cabe dizer que o termo fantasma se refere em geral a uma partícula com problemas de unitariedade, ou seja, partículas cujo resíduo da amplitude saturada não é maior que zero. Como diz o título desta seção o objetivo é mostrar que o modelo  $S_{2D}$  de (5.15) não possui esse tipo de problema apesar de ser de quarta ordem em derivadas. Como lidamos com uma teoria quadrática nos campos podemos escrever a ação como um operador diferencial sanduichado por 2 campos:

$$S_{2D}[h_{\mu\nu}] = \int d^2x [h_{\mu\nu} G^{\mu\nu\alpha\beta} h_{\alpha\beta} + T^{\mu\nu} h_{\mu\nu}] \quad (5.33)$$

Esse modelo possui simetria de gauge (5.18) e devido a esse fato a obtenção do inverso do seu operador diferencial não é tão trivial pois esse modelo admite um campo que não está univocamente determinado.

Assim, para obtermos o inverso do seu operador diferencial é preciso adicionar um termo na ação que quebre tal simetria. Esse termo é o quadrado da condição de gauge (5.22). Esse procedimento está ligado intimamente ao mecanismo de Fadeev-Popov <sup>1</sup> Assim, quadrando a condição de gauge (5.22) temos:

$$\mathcal{L}_{GF} = \lambda [\partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu} + (m^2 - \square)h]^2 . \quad (5.34)$$

Como este termo quebra a simetria de gauge é possível obter o inverso do operador diferencial que tem a forma (suprimindo os quatro índices):

$$\begin{aligned} G^{-1} &= \frac{4 P_{TT}^{(2)}}{(k^2 + m^2)^2} + \frac{4 P_{SS}^{(1)}}{m^2(k^2 + m^2)} + \frac{(2\lambda + 1)}{\lambda(k^2 + m^2)^2} P_{TT}^{(0)} \\ &+ \frac{(2\lambda + 1)}{\lambda m^4} P_{WW}^{(0)} + \frac{(1 - 2\lambda)}{\lambda m^2(k^2 + m^2)} [P_{TW}^{(0)} + P_{WT}^{(0)}] \end{aligned} \quad (5.35)$$

---

<sup>1</sup>Vide capítulo 4 de (FAGUNDES, 2008).

Assim, a amplitude de dois pontos saturada toma a seguinte forma no espaço dos momentos:

$$A(k) = -i (T^{\mu\nu})^*(k) G_{\mu\nu\alpha\beta}^{-1} T^{\alpha\beta}(k) \quad . \quad (5.36)$$

Como a ação possui simetria de gauge, o termo de fonte deve possuir algum tipo de vínculo para que a ação como um todo seja invariante pela transformação de simetria do campo dinâmico. Como a transformação de simetria de gauge é dada por um parâmetro escalar, o vínculo nas fonte também deve ser escalar. Assim, o termo de fonte é dado por  $S_{fonte} = \int d^2x h_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$  e para termos  $\delta S_{fonte} = 0$  sob (5.18) a fonte deve obedecer o seguinte vínculo no espaço dos momentos (simetria de gauge está ligada à vínculos nas fontes):

$$k_\mu k_\nu T^{\mu\nu} = -m^2 T \quad (5.37)$$

onde  $T = \eta_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = -T_{00} + T_{11}$ .

O vínculo nas fontes deve ser levado em conta ao se calcular a amplitude saturada. Abaixo constam as saturações de cada um dos projetores com as fontes:

$$T^* P_{TT}^{(2)} T = T_{\mu\nu}^* T^{\mu\nu} - \frac{2}{k^2} (k^\mu T_{\mu\alpha}^*) (k_\beta T^{\beta\alpha}) - \frac{k^2 + 2m^2}{k^2} |T|^2 \quad , \quad (5.38)$$

$$T^* P_{SS}^{(1)} T = 2 \left[ \frac{(k^\mu T_{\mu\alpha}^*) (k_\beta T^{\beta\alpha})}{k^2} - \frac{m^4}{k^4} |T|^2 \right] \quad , \quad (5.39)$$

$$T^* P_{TT}^{(0)} T = \frac{(k^2 + m^2)^2}{k^4} |T|^2 \quad ; \quad T^* P_{WW}^{(0)} T = \frac{m^4}{k^4} |T|^2 \quad , \quad (5.40)$$

$$T^* \left( P_{WT}^{(0)} + P_{TW}^{(0)} \right) T = -\frac{2m^2(k^2 + m^2)}{k^4} |T|^2 \quad . \quad (5.41)$$

A amplitude de dois pontos saturada toma a forma:

$$A(k) = -4i \frac{[T_{\mu\nu}^* T^{\mu\nu} + |T|^2 + 2(k^\mu T_{\mu\alpha}^*) (k_\beta T^{\beta\alpha})/m^2]}{(k^2 + m^2)^2} \quad (5.42)$$

É interessante notar que o parâmetro arbitrário  $\lambda$  de  $\mathcal{L}_{GF}$  é cancelado e não influencia na física do sistema. Isso já era esperado pois a sua função era de apenas fixar um determinado gauge e como o setor de gauge não é físico, o cancelamento desse parâmetro devia de fato ocorrer. O cancelamento dos pólos não massivos em  $k^2 = 0$  que existem dentro dos projetores  $P_{IJ}^{(s)}$  também ocorre mas há aparentemente um pólo duplo perigoso em  $k^2 = -m^2$ . Em geral pólos duplos indicam fantasmas (vide (NIEUWENHUIZEN, 1973)).

Para calcularmos a parte imaginária do resíduo deve se levar em conta os vínculos nas fontes. Além disso vamos usar um sistema de coordenadas que se encontra infinitesimalmente perto do referencial de repouso da partícula  $k_\mu = (m, \epsilon)$  o que implica que temos

$k^2 + m^2 = \epsilon^2$ . Assim a parte imaginária do resíduo pode ser calculada fazendo:

$$I_{-m^2} = \text{Im} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 A(k) \quad (5.43)$$

Para efetuar o cálculo devemos avaliar o numerador de  $A(k)$  até a ordem  $\epsilon^2$ . Ao utilizar o vínculo (5.37) nas fontes podemos eliminar  $T^{11} = -2\epsilon T^{01}/m + \mathcal{O}(\epsilon^3)$ . Deve-se analisar agora qual é a forma explícita dos termos que figuram na amplitude saturada até segunda ordem:

$$\frac{2(k^\mu T_{\mu\alpha}^*)(k_\beta T^{\beta\alpha})}{m^2} = 2 \left[ \left(1 - \frac{5\epsilon^2}{m^2}\right) |T^{01}|^2 - |T^{00}|^2 - \frac{\epsilon}{m} (T_{00}^* T^{01} - T^{00} T_{01}^*) \right] + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad . \quad (5.44)$$

$$T_{\mu\nu}^* T^{\mu\nu} + |T|^2 = 2 \left[ \left(\frac{4\epsilon^2}{m^2} - 1\right) |T^{01}|^2 + |T^{00}|^2 \frac{\epsilon}{m} (T_{00}^* T^{01} - T^{00} T_{01}^*) \right] + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad . \quad (5.45)$$

Dessa maneira, podemos usar esse resultado para extrairmos um resultado finito para o resíduo da amplitude saturada:

$$I_{-m^2} = \text{Im} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \left( \frac{8i\epsilon^2 |T^{01}|^2}{m^2 \epsilon^4} \right) = \frac{8}{m^2} |T^{01}|^2 > 0 \quad . \quad (5.46)$$

O resultado acima demonstra que o modelo é unitário e o pólo em  $k^2 = -m^2$  que parecia ser duplo é na verdade um pólo simples. Concluimos que o modelo  $S_{2D}$  em (5.15) é unitário e contém apenas uma partícula física massiva no seu espectro.

## 6 REDUÇÃO DIMENSIONAL DOS MODELOS TDiff E WTDiff E A APRESENTAÇÃO DE FAMÍLIAS MASSIVAS DE SPIN 2

Nesse capítulo vamos primeiramente analisar o resultado da redução dimensional dos modelos de spin 2 sem massa apresentadas em (TEMIÑO, 2008) . Essas teorias possuem simetria por transformação de Weyl e simetria por reparametrizações transversas num dado caso específico e apenas por reparametrizações transversas no caso mais geral apresentado. Elas são conhecidas por WTDiff e TDiff respectivamente<sup>1</sup>. Na tese citada acima é feita uma análise dos modelos de spin 2 de segunda ordem em derivadas, com tensor simétrico, que possuem consistência tanto pelo viés quântico (unitariedade) quanto pelo viés clássico através da análise hamiltoniana.

Nosso objetivo é fazer a redução dimensional Kaluza Klein dessas teorias, as quais originalmente são não massivas e finalmente analisar as consequências da inclusão de um termo de massa através dessa redução (KHOUDEIR; MONTEMAYOR; URRUTIA, 2008) nos modelos Tdiff e WTdiff, baseando-se na idéia de que como estas teorias não massivas das quais partimos possuem graus de liberdade propagantes para spin 2 em  $D$  dimensões (a teoria TDiff pode propagar uma partícula de spin 2 caso haja um ajuste adequado dos seus coeficientes arbitrários) poderia haver a possibilidade de suas versões massivas possuírem consistência física numa dimensão abaixo.

Assim, para avaliarmos a consistência das teorias massivas obtidas via redução dimensional, calcularemos primeiramente o inverso dos seus operadores diferenciais e analisaremos em seguida as patologias que podem surgir ao se adicionar os termos de massa nesses modelos, como por exemplo pólos tachiônicos e "ghosts" de modo análogo à análise feita em (BIAZOTTI; DALMAZI; GRACIA, 2013).

Desse modo pode-se analisar o porquê de parecer não haver alternativas ao modelo de Fierz-Pauli quando se trata de descrever uma partícula massiva de spin 2 via tensor simétrico e modelo de segunda ordem em derivadas. Essa dificuldade pode ser superada ao se utilizar tensores de rank 2 sem simetria nos índices. Existem duas famílias de modelos massivos de spin 2 via tensor não-simétrico, as ações  $S_{a_1}$  e a  $S_{nFP}$  vide (DALMAZI, 2013a, 2013b).

Na última parte serão apresentados e analisados classicamente (via equação de movimento) as famílias citadas acima. Será demonstrado que elas decrevem um campo que satisfaz todas as exigências que uma partícula massiva de spin 2 deve obedecer.

---

<sup>1</sup>TDiff indica difeomorfismos transversos , vide (6.2) enquanto que W indica a existência de simetria de Weyl

## 6.1 O MODELO TDiff

Na introdução citamos o trabalho (TEMIÑO, 2008) no qual é apresentado uma densidade de lagrangiana escrita em termos de um tensor simétrico de rank 2, de segunda ordem em derivadas e com dois coeficientes arbitrários, cuja ação é invariante por difeomorfismos transversos. Um caso particular desse modelo é a densidade de lagrangeana de Fierz-Pauli sem massa. O modelo TDiff possui simetria por reparametrizações transversas ou seja:

$$\delta h_{AB} \rightarrow \partial_A \epsilon_B + \partial_B \epsilon_A \quad (6.1)$$

Como se trata de reparametrizações transversas temos o vínculo:

$$\partial^A \epsilon_A = 0 \quad (6.2)$$

O modelo TDiff em  $D$  dimensões é dado pela seguinte densidade de lagrangeana:

$$\mathcal{L}_{TDiff} = \frac{1}{4} h_{AB} \square h^{AB} + \frac{1}{2} \partial_A h^{AB} \partial^C h_{CB} - \frac{b}{4} h \square h + \frac{a}{2} \partial_A \partial_B h^{AB} h, \quad (6.3)$$

com  $a$  e  $b$  sendo constantes reais arbitrárias e  $h = \eta_{AB} h^{AB}$ .

O modelo TDiff possui como conteúdo físico uma partícula de spin 2 além de uma partícula de spin 0, ambas sem massa. É possível fixar seus coeficientes para obter uma teoria que descreva apenas uma partícula de spin 2.

A ação em  $D$  dimensões é dada por:

$$S_{TDiff} = \int d^D x \mathcal{L}_{TDiff} \quad (6.4)$$

## 6.2 REDUÇÃO DIMENSIONAL DO MODELO TDiff

O modelo TDiff está escrito em  $D$  dimensões (letras latinas) com  $A = (0, 1, 2, \dots, D-1)$ . Vamos então proceder com a redução dimensional desse modelo para  $D-1$  dimensões (letras gregas) a fim de obtermos um modelo massivo cujo ajuste dos coeficientes "a" e "b" possa levar a uma possível descrição de um modelo massivo de spin 2. A  $D$ -ésima dimensão será denotada por "y" para se distinguir das coordenadas "x" do espaço em  $D-1$  dimensões:

$$h^{\mu\nu}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} h^{\mu\nu}(x) \cos(my) \quad (6.5)$$

$$h^{\mu(D-1)}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} \phi^\mu(x) \sin(my) \quad (6.6)$$

$$h^{(D-1)(D-1)}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} H(x) \cos(my) \quad (6.7)$$

$$\epsilon_\mu(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} \epsilon_\mu(x) \cos(my) \quad (6.8)$$

$$\epsilon_{(D-1)}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} \epsilon(x) \text{sen}(my) \quad (6.9)$$

$$S_{TDiff} = \int_0^{2\pi R} dy \int d^{D-1}x \mathcal{L}_{TDiff}(x, y) \quad (6.10)$$

Essa ação é a (6.4) com a integração na dimensão extra escrita explicitamente.

Esses Ansätze para os campos e para os parâmetros de simetria se devem ao fato, assim como foi feito em alguns casos anteriores, de que supomos a dimensão extra compactada num círculo de raio  $R = \frac{1}{m}$  e a escolha de seno ou cosseno é feita de acordo com o comportamento do campo sob a transformação  $y \rightarrow -y$ . O coeficiente  $\sqrt{\frac{m}{\pi}}$  é um fator de normalização que surge para cancelar uma constante resultante da integração da dimensão extra na ação, vide (KHOUEIR; MONTEMAYOR; URRUTIA, 2008).

Vamos agora analisar como os campos acima se transformam em  $D - 1$  dimensões, de (6.5), (6.6) e (6.7) temos:

$$\delta h^{\mu\nu}(x) \rightarrow \partial^\mu \epsilon^\nu + \partial^\nu \epsilon^\mu \quad (6.11)$$

$$\delta H(x) \rightarrow 2m\epsilon \quad (6.12)$$

$$\delta \phi_\mu \rightarrow \partial_\mu \epsilon - m\epsilon_\mu \quad (6.13)$$

Dentre todos os campos acima, aqueles que são de Stuckelberg  $H$  e  $\phi^\nu$  são "puro gauge (calibre)" e logo são elimináveis. A ação em  $D - 1$  dimensões tem a forma:

$$\mathcal{L}_{TDiff} = \frac{1}{4} h_{\mu\nu} (\square - m^2) h^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu h^{\mu\nu} \partial^\rho h_{\rho\nu} - \frac{b}{4} h (\square - m^2) h + \frac{a}{2} \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} h \quad (6.14)$$

A fim de analisar as transformações de simetria, devemos levar em conta que em  $D$  dimensões tínhamos:

$$\partial^A \epsilon_A = 0 \quad (6.15)$$

Essa relação vai gerar um vínculo entre os parâmetros de gauge dos campos em  $D - 1$  dimensões, usando (6.8) e (6.9) temos :

$$\partial^\mu \epsilon_\mu + m \epsilon = 0 \quad (6.16)$$

### 6.3 ANÁLISE DE CONSISTÊNCIA DO MODELO TDiff REDUZIDO

Vamos obter o inverso do operador diferencial para o modelo TDiff massivo, fazendo uso dos projetores para teorias de rank 2 de modo similar ao que é feito em (BIAZOTTI; DALMAZI; GRACIA, 2013) . O inverso do operador diferencial do modelo TDiff é dado por:

$$(G^{-1})^{\mu\nu\sigma\beta} = \left\{ \frac{4P_{ss}^{(2)}}{\square - m^2} - \frac{4P_{ss}^{(1)}}{m^2} + \frac{P_{ww}^{(0)}(\square - m^2)}{4Z} [1 + (2-D)b] + \frac{P_{ss}^{(0)}}{4Z} [(b-1)m^2 - \square(1+b-2a)] + \frac{P_{sw}^{(0)} + P_{ws}^{(0)}}{4Z} \sqrt{D-2} [(b-a)\square - bm^2] \right\}^{\mu\nu\sigma\beta} \quad (6.17)$$

O denominador  $Z$  é dado por:

$$Z = \frac{1}{16} \left\{ [(b-1)m^2 - \square(1+b-2a)](\square - m^2)[1 + (2-D)b] - (D-2)[(b-a)\square - bm^2]^2 \right\} \quad (6.18)$$

Podemos ver claramente que há um pólo massivo no setor de spin 2 no denominador de  $P_{ss}^{(2)}$ . O setor de spin 1 não apresenta pólos, logo a teoria reduzida não pode descrever uma partícula com tal spin. No setor de spin 0 pode haver pólos de acordo com a forma do denominador  $Z$ . Não é possível que haja cancelamento simultâneo de  $Z$  com os operadores diferenciais dos coeficientes dos setores  $P_{ww}^{(0)}$ ,  $P_{ss}^{(0)}$ ,  $P_{sw}^{(0)}$  e  $P_{ws}^{(0)}$  de (6.17), assim, a ocorrência de pólos no setor de spin 0 depende apenas da forma do denominador  $Z$  que figura no setor de spin 0 .

Se o inverso do operador diferencial no espaço das posições tiver apenas um pólo da forma dada em (6.17) no setor de spin 2, teríamos um modelo unitário e que descreve uma partícula massiva de spin 2.

Como não possuímos nenhum vínculo nas fontes <sup>2</sup>, caso existirem pólos no setor de spin 0, os seus resíduos terão sinal indeterminado já que não disporemos de vínculos para nos auxiliar a escrevê-los como uma expressão positivo definida. Assim, vamos analisar quais condições sobre os parâmetros arbitrários  $a$  e  $b$  devem ser usadas de modo a termos um  $Z$  que não leve a ocorrência de pólos no setor escalar.

Precisamos eliminar do  $Z$  qualquer termo que possa levar a um pólo. Para tal, será preciso fixar  $a = b$  para eliminarmos termos com  $\square$  na expressão (6.18). Agora ficamos com uma constante indeterminada que será fixada para eliminar todo  $\square^2$  que estiver na

<sup>2</sup>Devido ao fato da teoria reduzida não ter simetria local, o que se pode notar pelo fato de ser possível obter o inverso do operador diferencial do modelo obtido em  $D - 1$  dimensões.

expressão. Para tal,  $b$  deve obedecer:

$$0 = -1 + (D - 1)b + (2 - D)b^2 \quad (6.19)$$

Assim, temos como solução:

$$a = b = 1 \quad (6.20)$$

$$\text{ou } a = b = \frac{1}{D - 2} \quad (6.21)$$

O resultado pode ser interpretado da seguinte maneira. Primeiramente, em (TEMIÑO, 2008) foi demonstrado que a menos que se trate da densidade de lagrangeana de Fierz-Pauli, a teoria não-massiva original não admite termos adicionais massivos nos quais  $h^2$  e  $h_{\mu\nu}h^{\mu\nu}$  apresentem massas iguais. Assim, como o processo de redução dimensional KK gera termos de massas iguais para ambos os termos, devemos ter caído de algum modo na teoria massiva de Fierz-Pauli.

A solução com  $a = b = 1$  é a própria densidade lagrangeana de Fierz-Pauli. Pode-se fazer uma redefinição no campo  $h^{\mu\nu}$  da seguinte forma:

$$h^{\mu\nu} \rightarrow h^{\mu\nu} + \lambda h \eta^{\mu\nu} \quad (6.22)$$

Assim, a solução com  $a = b = \frac{1}{D-2}$  pode ser atingida por essa redefinição partindo-se da teoria de Fierz-pauli massivo com  $a = b = 1$ . Desse modo com  $\lambda = -\frac{1}{D-2}$ , partimos de Fierz-Pauli massiva e obtemos a sua versão redefinida, o que está de acordo com a análise feita em (TEMIÑO, 2008) quanto à inclusão de um termo de massa na teoria TDiff. Ou seja, ambos os casos (6.21) e (6.12) correspondem a teoria de Fierz-Pauli.

#### 6.4 O MODELO WTDiff

Podemos obter uma teoria com simetria adicional de Weyl, ainda em  $D$  dimensões, se fizermos uma transformação do tipo  $h^{AB} \rightarrow h^{AB} + \lambda h \eta^{AB}$  na ação TDiff, porém com  $\lambda = -\frac{1}{D}$ . Essa transformação não pode ser interpretada como uma redefinição do campo  $h^{AB}$  pois ela não é inversível. Vamos denotar o campo transformado como  $\tilde{h}^{AB}$ :

$$\tilde{h}^{AB} = h^{AB} - \frac{1}{D} h \eta^{AB} \quad (6.23)$$

$$\eta_{AB} \tilde{h}^{AB} \equiv \tilde{h} = 0 \quad (6.24)$$

Podemos ver que  $\tilde{h}^{AB}$  é invariante por uma transformação de Weyl, a qual tem a forma:

$$\delta h_{AB} \rightarrow \eta_{AB} \Lambda \quad (6.25)$$

Assim, a teoria WTDiff, que é uma teoria que possui simetria por reparametrizações transversas e também por transformação de Weyl, pode ser obtida a partir da TDiff (6.3) através da transformação (6.24). A densidade de lagrangeana WTDiff é dada por:

$$\mathcal{L}_{WTDiff} = \frac{1}{4}\tilde{h}^{AB}\square\tilde{h}_{AB} + \frac{1}{2}\partial_A\tilde{h}^{AC}\partial^B\tilde{h}_{BC} \quad (6.26)$$

Podemos escrever  $\mathcal{L}_{WTDiff}$  em termos de  $h^{AB}$  e  $h$ :

$$\mathcal{L}_{WTDiff} = \frac{1}{4}h_{AB}\square h^{AB} - \frac{D+2}{4D^2}h\square h + \frac{1}{2}\partial_A h^{AC}\partial^B h_{BC} + \frac{1}{D}\partial_A\partial_B h^{AB}h \quad (6.27)$$

Note que há coeficientes dependentes da dimensão nesse modelo.

A ação em  $D$  dimensões é dada por:

$$S_{WTDiff} = \int d^D x \mathcal{L}_{WTDiff} \quad (6.28)$$

Tal modelo possui simetria pelas transformações:  $\delta h_{AB} \rightarrow \partial_A \epsilon_B + \partial_B \epsilon_A + \eta_{AB} \Lambda$  com  $\partial^A \epsilon_A = 0$ .

Pode-se mostrar que essa ação descreve uma partícula não massiva de spin 2, vide (TEMIÑO, 2008).

## 6.5 REDUÇÃO DIMENSIONAL DO MODELO WTDiff

Vamos proceder com a redução dimensional da teoria WTDiff (6.28) assim como fizemos no caso da TDiff. Teremos então, em  $D - 1$  dimensões:

$$h^{\mu\nu}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} h^{\mu\nu}(x) \cos(my) \quad (6.29)$$

$$h^{\mu(D-1)}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} \phi^\mu(x) \sin(my) \quad (6.30)$$

$$h^{(D-1)(D-1)}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} H(x) \cos(my) \quad (6.31)$$

$$\epsilon_\mu(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} \epsilon_\mu(x) \cos(my) \quad (6.32)$$

$$\epsilon_{(D-1)}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} \epsilon(x) \sin(my) \quad (6.33)$$

$$\Lambda(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} \Lambda(x) \cos(my) \quad (6.34)$$

$$S_{WTDiff} = \int_0^{2\pi R} dy \int d^{D-1}x \mathcal{L}_{WTDiff}(x, y) \quad (6.35)$$

Quanto às transformações de simetria em  $D - 1$  dimensões, temos:

$$\delta h^{\mu\nu}(x) \rightarrow \partial^\mu \epsilon^\nu + \partial^\nu \epsilon^\mu + \eta^{\mu\nu} \Lambda \quad (6.36)$$

$$\delta H(x) \rightarrow 2m\epsilon + \Lambda \quad (6.37)$$

$$\delta \phi^\nu \rightarrow \partial_\mu \epsilon - m\epsilon_\mu \quad (6.38)$$

Temos também o vínculo:

$$\partial^\mu \epsilon_\mu + m\epsilon = 0 \quad (6.39)$$

Novamente os campos auxiliares de Stuckelberg  $H$  e  $\phi^\nu$  são "puro gauge(calibre)", e podem ser eliminados, pois a ação é simétrica sob essas transformações.

Assim a densidade de lagrangeana para a teoria massiva em  $D - 1$  é dada por:

$$\mathcal{L}_{WTDiff} = \frac{1}{4} h_{\mu\nu} (\square - m^2) h^{\mu\nu} - \frac{D+2}{4D^2} h (\square - m^2) h + \frac{1}{2} \partial_\mu h^{\mu\sigma} \partial^\nu h_{\nu\sigma} + \frac{1}{D} \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} h \quad (6.40)$$

É interessante notar que mesmo estando em  $D - 1$  dimensões,  $\mathcal{L}_{WTDiff}$  contém os mesmos coeficientes dependentes da dimensão que estavam presentes na teoria não reduzida em (6.28). Assim, se tomássemos o limite de massa nula em  $D - 1$  dimensões não obteríamos uma partícula de spin 2 sem massa nessa dimensão. Para tal seria preciso fazer uma mudança nos coeficientes tal que  $D \rightarrow D - 1$ .

## 6.6 ANÁLISE DE CONSISTÊNCIA DO MODELO WTDiff REDUZIDO

Para fazermos a análise do modelo WTDiff massivo vamos proceder de modo análogo ao que foi feito no caso da TDiff massiva. Assim, temos o inverso do operador diferencial do modelo WTDiff:

$$(G^{-1})^{\mu\nu\sigma\beta} = \left\{ \frac{4P_{ss}^{(2)}}{\square - m^2} - \frac{4P_{ss}^{(1)}}{m^2} + (\square - m^2) \frac{P_{ww}^{(0)}}{D^2 Z} - \frac{P_{ss}^{(0)}}{4D^2 Z} [m^2(D+1)(D-2) + \square(D-2)(D-1)] \right. \\ \left. - \frac{(P_{sw}^{(0)} + P_{ws}^{(0)})}{4D^2 Z} \sqrt{(D-2)[(D-2)\square + (D+2)m^2]} \right\}^{\mu\nu\sigma\beta} \quad (6.41)$$

Ao analisarmos o inverso do operador diferencial do modelo WTDiff, notamos que os termos no setor de spin 1 e spin 2 são idênticos aos do inverso do operador diferencial do modelo TDiff massivo. Logo, há uma partícula de spin 2 e nenhuma partícula de spin 1 (não há pólos nesse setor.). Já no setor de spin 0 precisamos conhecer o denominador  $Z$  do setor de spin 0 para analisarmos se há pólos neste setor.

O valor de  $Z$  é dado por:

$$Z = \frac{(2-D)}{16D^2}(\square + m^2)^2 \quad (6.42)$$

Temos então problemas. O primeiro é que a existência de pólos no setor de spin 0 e a ausência de vínculo nas fontes<sup>3</sup> pode levar a um resíduo de sinal indefinido. Além disso, temos um pólo duplo, e isso está ligado à ocorrência de fantasmas no modelo. Um outro problema advém do fato de que esse é um pólo tachiônico. Neste trabalho estamos fazendo uso da métrica  $(-, +, +, +, \dots, +)$  e temos um pólo do tipo  $\frac{1}{(\square+m^2)^2}$ . Assim, no espaço do momentos com  $c = 1$ , vamos ter:

$$k_\mu k^\mu = -m^2[1 - v^2] = m^2 \quad (6.43)$$

Trata-se de uma partícula com  $v^2 > 1$ , ou seja um táquion, um modelo que não estaria de acordo com um dos princípios fundamentais da relatividade restrita.

A conclusão a que chegamos é que nossos resultados concordam novamente com a análise presente em (TEMIÑO, 2008) na qual se conclui (fazendo uma análise de graus de liberdade hamiltonianos) que o modelo WTDiff não pode admitir termos de massa sem que haja inconsistências hamiltonianas. Assim, nosso objetivo nesse caso foi analisar sob o viés da unitariedade como se dá essa perda de consistência. O resultado da seção anterior (análise da redução do modelo TDiff) aliado aos resultados desta presente seção parecem indicar que ao se fazer uso de uma ação de segunda ordem em derivadas e com campo propagante simétrico para spin 2 massivo teríamos apenas o modelo de Fierz-Pauli como teoria consistente. Essa dificuldade pode ser superada em  $D = 3$  no caso da New massive gravity (nesse caso é usado um modelo de quarta ordem em derivadas) ou então ao se usar tensores de rank 2 sem simetria nos índices, como acontece nas famílias  $S_{a_1}$  e  $S_{nFP}$  que serão introduzidas na próxima subseção e que são descrições alternativas ao modelo de Fierz-Pauli e que mantém a mesma ordem em derivadas (DALMAZI, 2013a, 2013b).

---

<sup>3</sup> O modelo WTDiff massivo não tem mais simetria de gauge.

## 6.7 FAMÍLIAS DE SPIN 2 MASSIVAS VIA TENSOR NÃO SIMÉTRICO

No trabalho (DALMAZI, 2013b) são apresentadas duas famílias de modelos de spin 2 massivo. Dá-se o nome de família devido ao fato de que elas possuem um parâmetro livre definindo assim toda uma "família" de modelos. O modelo  $S_{a_1}$  em  $D$  dimensões é dado por:

$$S_{a_1} = \int \left\{ \frac{1}{2} e_{(\mu\nu)} \square e^{(\mu\nu)} - (a_1 + \frac{1}{4}) e \square e + 2(a_1 + \frac{1}{4}) \partial_\mu \partial_\nu e^{(\mu\nu)} e + (\partial_\nu e^{(\nu\mu)})^2 + (a_1 - \frac{1}{4}) (\partial_\beta e^{\beta\gamma})^2 - \frac{m^2}{2} [e_{\mu\nu} e^{\mu\nu} - e^2] \right\} d^D x \quad (6.44)$$

onde  $e = \eta^{\mu\nu} e_{\mu\nu}$ .

Para verificarmos que de fato essa ação possui os graus de liberdade de uma partícula de spin 2 vamos analisar as suas equações de movimento em  $D$  dimensões:

$$\square e^{(\mu\nu)} - (2a_1 + \frac{1}{2}) [\eta^{\mu\nu} (\square e - \partial^\beta \partial^\alpha e_{\beta\alpha}) - \partial^\mu \partial^\nu e] = \partial^{(\mu} \partial^\alpha e_{\alpha}^{\nu)} + 2a_1 \partial^\mu \partial^\alpha e_{\alpha}^{\nu} + \frac{1}{2} \partial^\nu \partial^\beta e_{\beta}^{\mu} - m^2 (\eta^{\mu\nu} e - e^{\nu\mu}) \quad (6.45)$$

Ao aplicarmos  $\partial_\nu$  na equação acima obtemos:

$$\partial_\nu e^{\nu\mu} = \partial^\mu e \quad (6.46)$$

Ao usar esse resultado na equação (6.46) conclui-se que:

$$e_{[\mu\nu]} = 0 \quad (6.47)$$

Ao tomar o traço da equação (6.46) e usando a relação (6.47) obtemos traço nulo:

$$e = 0 \quad (6.48)$$

Se usarmos esse resultado e (6.47) é possível demonstrar a transversalidade da parte simétrica:

$$\partial_\mu e^{\mu\nu} = \partial_\nu e^{\mu\nu} = 0 \quad (6.49)$$

Assim, com todos esses vínculos aplicados na equação (6.46) podemos mostrar que :

$$(\square - m^2) e^{(\mu\nu)} = 0 \quad (6.50)$$

Assim se prova que ao menos classicamente (on-shell) o modelo descreve uma partícula de spin 2 massiva de modo consistente pois foi demonstrado traço nulo, transversalidade, e

propagação da parte simétrica obedecendo a equação de Klein-Gordon com sinal correto no termo de massa (sem "táquions"). Para maiores informações sobre a obtenção do modelo bem como de sua consistência quântica consultar (DALMAZI, 2013a, 2013b).

Há ainda mais uma família que descreve uma partícula de spin 2 massiva e cujo termo de massa não tem o "tunning" de Fierz-Pauli. É a ação não-Fierz-Pauli, ou  $S_{nFP}$ :

$$S_{nFP} = \int \left\{ \frac{1}{2} e_{(\mu\nu)} \square e^{(\mu\nu)} - \frac{1}{2(D-1)} e \square e + \frac{1}{(D-1)} \partial_\beta \partial_\alpha e^{\beta\alpha} e \right. \\ \left. + (\partial_\mu e^{(\mu\nu)})^2 - \frac{(D-2)}{2(D-1)} (\partial_\beta e^{\beta\nu})^2 - \frac{1}{2} m^2 (e^{\mu\nu} e_{\nu\mu} - c e^2) \right\} d^D x \quad (6.51)$$

As equações de movimento em  $D$  dimensões são dadas por:

$$\square e^{(\mu\nu)} - \frac{1}{(D-1)} \square \eta^{\mu\nu} e + \frac{1}{(D-1)} \partial^\mu \partial^\nu e + \frac{1}{(D-1)} \partial_\beta \partial_\gamma e^{\beta\gamma} \eta^{\mu\nu} \\ - \partial^\mu \partial_\beta e^{(\beta\nu)} - \partial^\nu \partial_\gamma e^{\gamma\mu} + 2 \frac{(D-2)}{2(D-1)} \partial^\mu \partial_\beta e^{\beta\nu} + m^2 (c \eta^{\mu\nu} e - e^{\mu\nu}) = 0 \quad (6.52)$$

Ao aplicar uma derivada  $\partial_\nu$  na equação (6.53) obtemos:

$$c \partial^\mu e = \partial_\beta e^{\beta\mu} \quad (6.53)$$

Usando a relação (6.54) e tomando o traço da equação de movimento (6.53), temos que:

$$e = 0 \quad (6.54)$$

O fato do traço ser nulo implica que:

$$\partial_\beta e^{\beta\nu} = 0 \quad (6.55)$$

Ao usar todas esses vínculos na equação de movimento (6.53) obtemos que a parte antissimétrica do campo é nula:

$$e_{[\mu\nu]} = 0 \quad (6.56)$$

Assim, ao fazer uso de (6.57) e (6.55) em (6.54) conclui-se que temos transversalidade na parte simétrica do campo:

$$\partial_\beta e^{(\beta\nu)} = 0 \quad (6.57)$$

Desse modo, ao aplicar todos os vínculos deduzidos anteriormente na equação (6.53), mostra-se que a parte simétrica do campo  $e_{(\mu\nu)}$  obedece a equação :

$$(\square - m^2) e_{(\mu\nu)} = 0 \quad (6.58)$$

Concluimos que este modelo descreve um campo propagante que possui transversalidade, traço nulo e obedece a equação de Klein-Gordon, ou seja o modelo descreve uma partícula massiva de spin 2. A sua consistência quântica pode ser checada em (DALMAZI, 2013a, 2013b).

## 7 REDUÇÃO DIMENSIONAL DO LIMITE DE MASSA NULA DA AÇÃO $S_{a_1}$

Nesta seção será feita a redução dimensional do limite de massa nula da ação  $S_{a_1}$  (DALMAZI; MENDONÇA; SANTOS, 2015) a qual, como vimos antes, é descrita por um campo tensorial de rank 2 sem simetria nos índices. O limite de massa nula de  $S_{a_1}$  possui em seu espectro uma partícula de spin 2 e uma partícula de spin 0, ambas sem massa. O objetivo é saber se a redução dimensional deste modelo nos levará a obter o mesmo termo de massa de sua versão massiva numa dimensão abaixo, ou se então surgirá um termo de massa com características diferentes daquele. Como nos casos anteriores letras latinas maiúsculas representam os índices do espaço-tempo em  $D$  dimensões e as gregas representam os índices no espaço-tempo reduzido. A ação em  $D$  dimensões é dada por:

$$S_{a_1} = \int_0^{2\pi R} \int \left\{ \frac{1}{2} e_{(AB)} \square e^{(AB)} - (a_1 + \frac{1}{4}) e \square e + 2(a_1 + \frac{1}{4}) \partial_A \partial_B e^{(AB)} e + (\partial_A e^{(AB)})^2 + (a_1 - \frac{1}{4}) (\partial_C e^{CD})^2 \right\} d^{D-1} x dy \quad (7.1)$$

A ação acima possui a seguinte simetria de gauge:

$$\delta e_{AB}(x, y) = \partial_B \epsilon_A(x, y) + \partial^C \Lambda_{[ABC]} \quad (7.2)$$

Neste trabalho, os colchetes designam antissimetria nos índices.

Para proceder com a redução dimensional a dependência dos campos na dimensão extra será escrita novamente em termos de senos ou cossenos, com a escolha a depender do comportamento do campo através da transformação de paridade na dimensão extra. Assim, os campos são dados por:

$$e_{\mu\nu}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} e_{\mu\nu}(x) \cos(my) \quad (7.3)$$

$$e_{(D-1)\nu}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} A_\nu(x) \sin(my) \quad (7.4)$$

$$e_{\nu(D-1)}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} B_\nu(x) \sin(my) \quad (7.5)$$

$$e_{(D-1),(D-1)}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} H(x) \cos(my) \quad (7.6)$$

A dependência dos parâmetros de simetria local com relação a dimensão extra é ex-

plicitada abaixo:

$$\epsilon_\mu(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} \epsilon_\mu(x) \cos(my) \quad (7.7)$$

$$\epsilon_{(D-1)}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} \epsilon(x) \sin(my) \quad (7.8)$$

$$\Lambda_{[\mu\nu(D-1)]}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} \bar{\Lambda}_{[\mu\nu]}(x) \sin(my) \quad (7.9)$$

$$\Lambda_{[\mu\nu\beta]}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} \bar{\Lambda}_{[\mu\nu\beta]}(x) \cos(my) \quad (7.10)$$

A partir das definições acima, as transformações no espaço em  $D - 1$  dimensões são dadas por:

$$\delta e_{\mu\nu}(x) = \partial_\nu \epsilon_\mu(x) + \partial^\beta \bar{\Lambda}_{[\mu\nu\beta]}(x) + m \bar{\Lambda}_{[\mu\nu]}(x) \quad (7.11)$$

$$\delta A_\nu(x) = \partial_\nu \epsilon(x) - \partial^\mu \bar{\Lambda}_{[\mu\nu]}(x) \quad (7.12)$$

$$\delta B_\nu(x) = -m \epsilon_\nu(x) + \partial^\mu \bar{\Lambda}_{[\mu\nu]}(x) \quad (7.13)$$

$$\delta H(x) = m \epsilon(x) \quad (7.14)$$

As transformações de simetria no espaço em  $D - 1$  são tais que nem todos os campos de Stueckelberg podem ser eliminados por fixação de gauge. Desse modo pode-se eliminar, por exemplo, o campo  $A_\nu(x)$  pois ele apresenta uma transformação no setor longitudinal e por um segundo parâmetro que atua no setor transversal  $\partial^\nu (\partial^\mu \bar{\Lambda}_{\mu\nu} = 0)$ . Essas transformações de simetria em conjunto podem ser usadas para se eliminar todo um vetor. O campo  $H(x)$  também pode ser eliminado se fixarmos  $\epsilon(x)$ , mas desse modo o campo vetorial  $A_\nu(x)$  deixa de ser puro gauge. Assim, um desses campos será puro gauge e o outro não. Vale dizer que o campo  $B_\nu(x)$  é puro gauge. Neste trabalho vamos usar as transformações de simetria de modo a eliminar  $H(x)$  e  $B_\nu(x)$  (Poderíamos ter eliminado  $A_\nu(x)$  e  $B_\nu(x)$ , porém não optamos por esse caminho.). Assim, temos em  $D - 1$ :

$$\begin{aligned}
S_{a_1} = \int \left\{ \frac{1}{2} [e^{(\mu\nu)}(\square - m^2)e_{(\mu\nu)} + \frac{1}{2}A_\mu(\square - m^2)A^\mu - 2(a_1 + \frac{1}{4})e(\square - m^2)e] \right. \\
\left. + 2(a_1 + \frac{1}{4})[\partial_\mu\partial_\nu e^{\mu\nu} + m\partial_\mu A^\mu]e + (\partial_\nu e^{\nu\mu}) + \frac{m}{2}A^\mu)^2 + (\partial_\mu A^\mu)^2 + (a_1 - \frac{1}{4})(\partial_\mu e^{\mu\nu} + mA^\nu)^2 \right\} d^{D-1}x
\end{aligned} \tag{7.15}$$

Vamos tratar o campo  $A_\nu$  que não é puro gauge como um campo auxiliar cuja dependência na ação nós gostaríamos de integrar gaussianamente. Para tal, é interessante eliminar da ação termos do tipo  $A_\nu \square A^\nu$ . Para isso é preciso fazer uma redefinição do campo  $e_{\mu\nu}$  que tem uma forma análoga a da transformação de simetria no espaço em  $D$  dimensões:

$$e_{\mu\nu} \rightarrow e_{\mu\nu} - \frac{1}{m}\partial_\nu A_\mu \tag{7.16}$$

A ação assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
S_{a_1} = \int \left\{ d [(\partial_\nu A^\nu)^2 + m^2 A_\nu A^\nu] + 2m d \partial^\alpha e_{(\alpha\beta)} A^\beta + \mathcal{L}_{F.P} \right. \\
\left. - d e(\square - m^2)e + d(\partial_\mu e^{\mu\nu})^2 + 2d\partial_\mu\partial_\nu e^{\mu\nu}e - m d e_{[\mu\nu]}F_A^{\mu\nu} \right\} d^{D-1}x
\end{aligned} \tag{7.17}$$

Na expressão acima  $d = (a_1 - \frac{1}{4})$ ,  $F_A^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$  e  $\mathcal{L}_{F.P}$  se refere a lagrangeana massiva de Fierz-Pauli (vide (4.18)). Agora será introduzido um campo vetorial não dinâmico  $C_\mu$  (campo espectador vide (DALMAZI, 2013b)) que nos permite reescrever a ação como:

$$\begin{aligned}
S_{a_1} = \int \left\{ d [(\partial_\nu A^\nu)^2 + m^2 A_\nu A^\nu] + 2m d \partial^\alpha e_{(\alpha\beta)} A^\beta + \mathcal{L}_{F.P} - d e(\square - m^2)e \right. \\
\left. - d m^2 C_\mu C^\mu - 2m d C^\mu \partial^\nu e_{(\nu\mu)} - 2d \partial_\mu\partial_\nu e^{\mu\nu}e - m d e_{[\mu\nu]}(F_A^{\mu\nu} - F_C^{\mu\nu}) \right\} d^{D-1}x
\end{aligned} \tag{7.18}$$

A parte antissimétrica do campo  $e_{[\mu\nu]}$  pode ser entendida classicamente como um multiplicador de Lagrange, e quanticamente pode-se integrá-la gerando um delta de Dirac

funcional que gera o vínculo:

$$F_A^{\mu\nu} - F_C^{\mu\nu} = 0 \quad (7.19)$$

A solução geral para a equação acima é dada por:

$$C^\mu - A^\mu = \frac{1}{m} \partial^\mu \phi, \quad (7.20)$$

onde  $\phi$  é um campo escalar qualquer.

Podemos agora substituir essa solução na ação e eliminar  $C_\mu$ :

$$S_{a_1} = \int \left\{ 2d \partial_\mu \partial_\nu e^{\mu\nu} (e + \phi) - d e (\square - m^2) e + d \phi \square \phi + \mathcal{L}_{F.P} \right\} d^{D-1}x + S_A, \quad (7.21)$$

onde a ação  $S_A$  é dada por:

$$S_A = \int \left\{ -d [A^\mu \square \omega_{\mu\nu} A^\nu + 2A^\mu (m \partial_\mu \phi)] \right\} d^{D-1}x \quad (7.22)$$

Por essa expressão se nota que o campo possui uma simetria no setor transverso  $\delta A_\nu = \partial_\alpha \Lambda_{\alpha\nu}$  com  $\Lambda_{\alpha\nu} = -\Lambda_{\nu\alpha}$ , como analisamos anteriormente. Essa simetria se manteve pois ela não foi fixada para eliminar nenhum campo. Para integrar de forma Gaussiana a dependência no campo  $A_\mu$  faz-se a redefinição:

$$A'_\mu \rightarrow A_\mu - O_{\mu\nu}^{-1} (m \partial^\nu \phi) \quad (7.23)$$

O termo  $O_{\mu\nu}^{-1}$  se refere ao inverso do operador diferencial que se encontra sanduichado pelo campo  $A_\mu$ . Como dissemos anteriormente há simetria no setor de spin 1 (transverso) no termo cinético da ação  $S_A$ . Desse modo, para inverter esse operador deve-se adicionar um termo de fixação de gauge do tipo  $\lambda F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$  para quebrarmos a simetria do modelo e assim inverter o operador. Desse modo, a sua inversa é dada por:

$$O_{\mu\nu}^{-1} = \frac{1}{\lambda \square} \theta_{\mu\nu} + \frac{1}{\square} \omega_{\mu\nu} \quad (7.24)$$

Assim, ao substituir (7.23) na ação temos:

$$S_A = \int \left\{ -d[A'_\mu O^{\mu\nu} A'_\nu + m^2 \phi^2] \right\} d^{D-1}x \quad (7.25)$$

A dependência em  $A'_\mu$  em  $S_A$  pode ser integrada de modo gaussiano e ocorre a geração de um termo de massa para o campo escalar. A ação toma a forma:

$$S_{a_1} = \int \left\{ 2d \partial_\mu \partial_\nu e^{\mu\nu} (e + \phi) - d e(\square - m^2)e + d \phi(\square - m^2)\phi + \mathcal{L}_{F.P} \right\} d^{D-1}x \quad (7.26)$$

Para diagonalizarmos a ação devemos fazer duas redefinições nos campos e assim separar as contribuições escalar e tensorial:

$$\phi \rightarrow \psi - e \quad (7.27)$$

$$e_{\mu\nu} \rightarrow e_{\mu\nu} - \frac{2d}{D-2} (\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} \partial_\mu \partial_\nu) \psi \quad (7.28)$$

A ação diagonalizada tem a forma:

$$S_{a_1} = \int \left\{ \mathcal{L}_{F.P} + d(2d \frac{(D-1)}{(D-2)} + 1) \psi(\square - m^2)\psi \right\} d^{D-1}x \quad (7.29)$$

Pela forma da ação acima fica fácil notar que temos uma contribuição de spin 2 (modelo de Fierz-Pauli massivo  $\mathcal{L}_{F.P}$ ) e uma contribuição escalar massiva. Para que o campo escalar tenha uma contribuição unitária seu coeficiente deve ser positivo. Isso implica que ( $d = a_1 - \frac{1}{4}$ ):

$$a_1 \leq -\frac{(D-3)}{4(D-1)} \text{ ou } a_1 \geq \frac{1}{4} \quad (7.30)$$

A análise acima está totalmente em acordo com a análise em  $D$  dimensões do limite de massa nula de  $S_{a_1}$  que foi feita em (DALMAZI; MENDONÇA; SANTOS, 2015). O intervalo de valores nos quais  $S_{a_1}$  é unitário é o mesmo em  $D$  e em  $D-1$  dimensões o que evidencia mais uma vez o fato de que o mecanismo de geração de massa via Kaluza-Klein conserva graus de liberdade e a unitariedade.

## 7.1 REDUÇÃO DIMENSIONAL DO LIMITE DE MASSA NULA DA AÇÃO $S_{a_1}$ VIA AÇÃO MESTRA

Nesta seção abordaremos a redução dimensional do limite de massa nula da família  $S_{a_1}$  a partir do viés da ação mestra. Pela análise feita na subseção anterior, podemos notar que existe uma dualidade entre o limite de massa nula de  $S_{a_1}$  e as ações de Fierz Pauli sem massa e do campo escalar sem massa. Desse modo deve haver uma ação mestra que as interpole. A existência de uma ação mestra está ligada a equivalência quântica entre os dois modelos (Veja casos similares em (MENDONÇA, 2009; SANTOS, 2012)). Uma ação que faria o papel de ação mestra em  $D$  dimensões é a seguinte ( $d = a_1 - \frac{1}{4}$ ):

$$S_{master} = \int_0^{2\pi R} \int \left\{ \mathcal{L}_0 - d(C_A C^A + 2C_A \partial_B e^{BA}) \right\} d^{D-1} x dy \quad (7.31)$$

Na ação acima  $\mathcal{L}_0$  representa o limite de massa nula de  $S_{a_1}$  a menos do termo  $c(\partial_A e^{AB})^2$ :

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2} \partial_M e_{(AB)} \partial^M e^{(AB)} + (a_1 + \frac{1}{4}) [\partial_M e \partial^M e - 2\partial_M e \partial_N e^{(MN)}] + \partial_M e^{(MN)} \partial^L e_{(LN)} \quad (7.32)$$

As transformações de simetria da ação mestra  $D$  dimensional são as seguintes:

$$\delta e_{MN} = \partial_N \epsilon_M + \partial^C \Lambda_{[MNC]} \quad (7.33)$$

$$\delta C_M = -\partial_M (\partial^N \epsilon_N) \quad (7.34)$$

De acordo com (DALMAZI; MENDONÇA; SANTOS, 2015) sabe-se que ao integrar no campo auxiliar  $C_A$  obtém-se  $S_{a_1}$   $m \rightarrow 0$  ao passo que ao integrar no campo antissimétrico  $e_{[AB]}$  obtém-se a ação de Fierz-Pauli sem massa mais um campo escalar também não massivo. Essa é uma característica de ação mestra, ou seja, ela interpola entre dois modelos duais. Assim vamos proceder com a redução dimensional dessa ação mestra a fim de obtermos sua versão  $D - 1$  dimensional, usaremos os mesmos Ansätze para os campos que na seção anterior e para o campo  $C_A$  usaremos :

$$C_\mu(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} C_\mu(x) \cos(my) \quad (7.35)$$

$$C_{(D-1)}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} G(x) \sin(my) \quad (7.36)$$

As suas transformações de simetria no espaço reduzido são:

$$\delta C_\mu = -\partial_\mu [\partial^\nu \epsilon_\nu(x) + m \epsilon(x)] \quad (7.37)$$

$$\delta G(x) = m [\partial^\nu \epsilon_\nu(x) + m \epsilon(x)] \quad (7.38)$$

Ao eliminarmos os campos  $B_\nu$  e  $H(x)$  que são puro gauge (vide seção anterior) obtemos (fizemos  $C^\mu \rightarrow mC^\mu$ ):

$$S_{master} = \int \left\{ \mathcal{L}_m - d[C_\mu C^\mu m^2 + 2mC_\mu (\partial_\nu e^{\nu\mu} + mA^\mu)] \right\} d^{(D-1)}x \quad (7.39)$$

O termo  $\mathcal{L}_m$  é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m = & \frac{1}{2} [e^{(\mu\nu)} (\square - m^2) e_{(\mu\nu)} + \frac{1}{2} A_\mu (\square - m^2) A^\mu - 2(a_1 + \frac{1}{4}) e (\square - m^2) e] \\ & + 2(a_1 + \frac{1}{4}) [\partial_\mu \partial_\nu e^{\mu\nu} + m \partial_\mu A^\mu] e + (\partial_\nu e^{\nu\mu} + \frac{m}{2} A^\mu)^2 + (\partial_\mu A^\mu)^2 \end{aligned} \quad (7.40)$$

Nosso objetivo é recuperar os mesmos resultados que os da seção anterior e assim mostrar que eles podem ser obtidos via redução dimensional da ação mestra. Se fizermos a redefinição  $C_\mu \rightarrow C_\mu - A_\mu$  obtemos:

$$S_{master} = \int \left\{ \mathcal{L}_m - d[C_\mu C^\mu m^2 + 2mC_\mu \partial_\nu e^{\nu\mu}] + cm^2 A_\mu A^\mu + 2dmA^\mu \partial^\nu e_{\nu\mu} \right\} d^{(D-1)}x \quad (7.41)$$

Para eliminar termos do tipo  $A_\mu \square A^\mu$  deve-se fazer  $e_{\mu\nu} \rightarrow e_{\mu\nu} - \frac{1}{m} \partial_\nu A_\mu$  que é uma redefinição idêntica à da seção anterior seguida de  $C^\mu \rightarrow C^\mu + \frac{1}{m^2} \partial^\mu (\partial^\nu A_\nu)$ . Dessa maneira obtemos uma ação que pode ser posta na mesma forma que a ação (7.17). Desse modo para prosseguirmos com a redução dimensional basta adotarmos os mesmos passos que os adotados na seção anterior a partir da equação (7.17). Assim, demonstra-se que é possível fazer a redução dimensional do modelo para  $D - 1$  dimensões a partir de uma ação mestra em  $D$  dimensões.

## 8 REDUÇÃO DIMENSIONAL DO LIMITE DE MASSA NULA DA AÇÃO $S_{nFP}$

Nesse capítulo será feita a redução dimensional do limite de massa nula do modelo  $S_{nFP}$  de  $D$  para  $D - 1$  dimensões, vide (DALMAZI; MENDONÇA; SANTOS, 2015). O limite de massa nula de  $S_{nFP}$  possui uma partícula de spin 2 sem massa em seu espectro. A ação em  $D$  dimensões tem a forma:

$$S_{nFP} = \int_0^{2\pi R} \int \left\{ \frac{1}{2} e_{(AB)} \square e^{(AB)} - \frac{1}{2(D-1)} e \square e + \frac{1}{(D-1)} \partial_A \partial_B e^{AB} e + (\partial_A e^{(AB)})^2 - \frac{(D-2)}{2(D-1)} (\partial_C e^{CA})^2 \right\} d^{D-1} x dy \quad (8.1)$$

Essa ação é invariante pela transformação:

$$\delta e_{AB}(x, y) \rightarrow \partial_B \epsilon_A(x, y) + \eta_{AB} \phi(x, y) + \partial^C \bar{\Lambda}_{[ABC]} \quad (8.2)$$

A transformação de simetria vetorial é a mesma encontrada no limite de massa nula do modelo  $S_{a_1}$  e a transformação de simetria via parâmetro escalar é a de Weyl. Para obtermos a redução dimensional desse modelo vamos utilizar o mesmos Ansätze para a expansão dos campos que no caso de  $S_{a_1}$ . Assim, o parâmetro de Weyl que agora surge tem sua dependência na dimensão extra dada por:

$$\phi(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} \phi(x) \cos(my) \quad (8.3)$$

As transformações de simetria no espaço reduzido são dada por:

$$\delta e_{\mu\nu}(x) = \partial_\nu \epsilon_\mu(x) + \partial^\beta \bar{\Lambda}_{[\mu\nu\beta]}(x) + m \bar{\Lambda}_{[\mu\nu]}(x) + \eta_{\mu\nu} \phi(x) \quad (8.4)$$

$$\delta e_{D-1,\nu} \equiv \delta A_\nu(x) = \partial_\nu \epsilon(x) - \partial^\mu \bar{\Lambda}_{[\mu\nu]}(x) \quad (8.5)$$

$$\delta e_{\nu,D-1} \equiv \delta B_\nu(x) = -m \epsilon_\nu(x) + \partial^\mu \bar{\Lambda}_{[\mu\nu]}(x) \quad (8.6)$$

$$\delta e_{D-1,D-1} \equiv \delta H(x) = m \epsilon(x) + \phi(x) \quad (8.7)$$

Pela análise das transformações de simetria acima se nota que os campos são todos puro gauge, a inclusão da simetria de Weyl possibilitou que isso ocorresse. Apesar disso,

será conveniente mantermos o campo vetorial  $A_\mu(x)$  como um campo auxiliar pois assim teremos um desenvolvimento bem similar ao do caso do capítulo anterior. Assim, devido ao fato de não termos eliminado esse campo surge uma simetria em  $D - 1$  dada por:

$$\delta e_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}\lambda \quad (8.8)$$

$$\delta A_\mu = -\frac{1}{m}\partial_\mu\lambda \quad (8.9)$$

A origem de tal simetria poderá ser melhor entendida ao se fazer a redução dimensional via ação mestra no próximo capítulo. A ação em  $D - 1$  dimensões tem a seguinte forma:

$$S_{nFP} = \int \left\{ \mathcal{L}_{F.P} + \frac{(D-2)}{2(D-1)}[e(\square - m^2)e - 2\partial_\mu\partial_\nu e^{\mu\nu}e] + \frac{1}{4}(A_\mu\square A^\mu + (\partial_\nu A^\nu)^2) + \frac{m}{(D-1)}e\partial_\nu A^\nu - \frac{(D-2)}{2(D-1)}[m^2 A_\mu A^\mu - 2\partial_\mu e^{\mu\nu}A_\nu - (\partial_\mu e^{\mu\nu})^2] + m\partial^\nu e_{(\nu\mu)}A^\mu \right\} d^{D-1}x \quad (8.10)$$

Para que possamos integrar  $A_\mu(x)$  de modo gaussiano, devemos eliminar termos do tipo  $A_\mu\square A^\mu$  através da redefinição  $e_{\mu\nu} \rightarrow e_{\mu\nu} - \frac{1}{m}\partial_\nu A_\mu$ . A ação redefinida em  $D - 1$  dimensões é dada por:

$$S_{nFP} = \int \left\{ \mathcal{L}_{F.P} + \alpha[e(\square - m^2)e - 2\partial_\mu\partial_\nu e^{\mu\nu}e - m^2 A_\mu A^\mu - (\partial_\mu A^\mu)^2 + m^2 C_\mu C^\mu - 2m\partial^\nu e_{(\nu\mu)}A^\mu + 2m\partial^\mu e_{(\mu\nu)}C^\nu + m e_{[\mu\nu]}(F_A^{\mu\nu} - F_C^{\mu\nu})] \right\} d^{D-1}x \quad (8.11)$$

Na expressão acima fizemos uso de um campo não dinâmico  $C_\mu$  a fim de reescrevermos o termo  $-\alpha(\partial^\mu e_{\mu\nu})^2$  com  $\alpha = \frac{(D-2)}{2(D-1)}$ . Ao integrar no campo  $e_{[\mu\nu]}$  obtém-se o vínculo:

$$F_A^{\mu\nu} - F_C^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}(A - C) = 0 \quad (8.12)$$

A solução desse vínculo é dada por campos que obedeçam:

$$A^\mu - C^\mu = \frac{1}{m}\partial^\mu\phi \quad (8.13)$$

Ao substituir esse vínculo na ação obtemos:

$$S_{nFP} = \int \left\{ \alpha[2\partial_\mu\partial_\nu e^{\mu\nu}(-e + \phi) + e(\square - m^2)e - \phi\square\phi] + \mathcal{L}_{F.P} \right\} d^{D-1}x + \bar{S}_A \quad (8.14)$$

A ação  $\bar{S}_A$  se refere aos termos da ação que dependem de  $A_\mu$ :

$$\bar{S}_A = \int \left\{ -\alpha[(\partial_\mu A^\mu)^2 + 2mA^\mu(\partial_\mu\phi)] \right\} d^{D-1}x \quad (8.15)$$

A integração gaussiana de  $A_\mu$  é feita da mesma maneira que no caso de  $S_{a_1Red}$  e acaba por gerar um termo de massa para  $\phi$ . A ação apresenta assim, a seguinte forma:

$$S_{nFP} = \int \left\{ \alpha[2\partial_\mu\partial_\nu e^{\mu\nu}(-e + \phi) + e(\square - m^2)e - \phi(\square - m^2)\phi] + \mathcal{L}_{F.P} \right\} d^{D-1}x \quad (8.16)$$

Para diagonalizarmos a ação e separarmos seu conteúdo de partícula fazemos as seguintes redefinições:

$$\phi \rightarrow \phi + e \quad (8.17)$$

$$e_{\mu\nu} \rightarrow \bar{e}_{\mu\nu} + \frac{1}{(D-1)} \left[ \frac{(D-2)}{2m^2} \partial_\mu\partial_\nu - n_{\mu\nu} \right] \phi \quad (8.18)$$

A ação obtida tem a forma:

$$S_{nFP} = \int d^{D-1}x \left\{ \mathcal{L}_{F.P}[\bar{e}_{(\mu\nu)}] \right\} \quad (8.19)$$

O resultado obtido está totalmente de acordo com a análise de (DALMAZI; MENDONÇA; SANTOS, 2015) e descreve uma partícula de spin 2 massiva.

## 8.1 REDUÇÃO DIMENSIONAL DO LIMITE DE MASSA NULA DA AÇÃO $S_{nFP}$ VIA AÇÃO MESTRA

Vamos mostrar nesta seção que os resultados obtidos para a redução dimensional de  $S_{nFP}$   $m \rightarrow 0$  podem ser reobtidos a partir da redução de uma ação mestra em  $D$  dimensões.

A ação mestra tem a forma:

$$S_{master} = \int_0^{2\pi R} \int \left\{ \mathcal{L}_0 + \alpha [C_M C^M + 2C^M \partial^N e_{NM}] \right\} d^{D-1} x dy \quad (8.20)$$

onde  $\alpha = \frac{(D-2)}{2(D-1)}$

De acordo com (DALMAZI; MENDONÇA; SANTOS, 2015), ao integrarmos em  $C_M$  obtemos a ação  $S_{nFP \ m \rightarrow 0}$  e ao integrarmos no campo  $e_{[\mu\nu]}$  obtemos o modelo de Fierz-Pauli sem massa. O termo  $\mathcal{L}_0$  tem a forma:

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2} \partial_M e^{(GN)} \partial^M e_{(GN)} + \frac{1}{2(D-1)} \partial_M e \partial^M e + \partial_M e^{(MN)} \partial^L e_{(LN)} - \frac{1}{(D-1)} \partial_M e \partial_N e^{(NM)} \quad (8.21)$$

A ação é invariante pelas transformações:

$$\delta e_{MN}(x, y) = \partial_N \epsilon_M(x, y) + \eta_{MN} \phi(x, y) + \partial^C \bar{\Lambda}_{[MNC]}(x, y) \quad (8.22)$$

$$\delta C_M(x, y) = -\partial_M [\partial^N \epsilon_N(x, y)] + \partial_M \phi(x, y) \quad (8.23)$$

Para procedermos com a redução dimensional da ação vamos usar as mesmas dependências que foram usadas na seção anterior para os campos e parâmetros de simetria com relação à dimensão extra. Os campos  $C^M(x, y)$  possuem a seguinte dependência:

$$C_\mu(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} C_\mu(x) \cos(my) \quad (8.24)$$

$$C_{(D-1)}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} G(x) \sin(my) \quad (8.25)$$

Dessa maneira no espaço em  $D - 1$  dimensões temos as transformações (os campos dinâmicos possuem as transformações dadas no capítulo anterior):

$$\delta C_\mu(x) = -\partial_\mu [\partial^\nu \epsilon_\nu(x) + m \epsilon_z(x)] + \partial_\mu \phi(x) \quad (8.26)$$

$$\delta G(x) = m \phi(x) + m [\partial^\nu \epsilon_\nu(x) + m \epsilon_z(x)] \quad (8.27)$$

Apesar do campo  $A_\mu$  ser puro gauge vamos mantê-lo como um campo auxiliar. Assim, resta uma espécie de simetria  $U(1)$  para  $C^\mu$ . Ao integrar na dimensão extra obtemos (fizemos  $C^\mu \rightarrow mC^\mu$ ):

$$S_{master} = \int \left\{ \mathcal{L}_m + \alpha [m^2 C^\mu C_\mu + 2m C^\mu (\partial^\nu e_{\nu\mu} - mA_\mu)] \right\} d^{(D-1)}x \quad (8.28)$$

O termo  $\mathcal{L}_m$  é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m = \mathcal{L}_{F.P} + \frac{(D-2)}{2(D-1)} [e(\square - m^2)e - 2\partial_\mu \partial_\nu e^{\mu\nu} e] \\ + \frac{1}{4} (A_\mu \square A^\mu + (\partial_\nu A^\nu)^2) + \frac{m}{(D-1)} e \partial_\nu A^\nu + m \partial^\nu e_{(\nu\mu)} A^\mu \end{aligned} \quad (8.29)$$

Devido ao fato do campo  $C^\mu$  possuir uma transformação do tipo  $\delta C^\mu = \partial^\mu \phi$ , para que toda a ação seja invariante é preciso que

$$\delta[\partial^\nu e_{\nu\mu} - mA_\mu] = -m \partial_\mu \phi \quad (8.30)$$

Esse fato pode ser visto como uma explicação para o aparecimento da simetria que existe entre  $A_\mu$  e  $e_{\mu\nu}$  como foi discutido anteriormente. Uma solução para a relação acima é que os campos possuam uma transformação do tipo que foi apresentada em (8.8) e (8.9).

Para obter uma ação que possa ser posta numa forma análoga à (8.11) deve-se fazer a redefinição  $C^\mu \rightarrow C^\mu - A^\mu$  e assim obter:

$$S_{master} = \int \left\{ \mathcal{L}_m + \alpha [m^2 C^\mu C_\mu + 2m C^\mu (\partial^\nu e_{\nu\mu} - mA_\mu)] - \alpha [m^2 A_\mu A^\mu + 2A^\mu \partial^\nu e_{\nu\mu}] \right\} d^{(D-1)}x \quad (8.31)$$

Para eliminarmos termos do tipo  $A_\mu \square A^\mu$  deve-se fazer as seguintes redefinições:

$$C^\mu \rightarrow C^\mu + \frac{1}{m^2} \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) \quad (8.32)$$

$$e^{\mu\nu} \rightarrow e^{\mu\nu} - \frac{1}{m} \partial_\nu A_\mu \quad (8.33)$$

A ação obtida por esse procedimento é igual à (8.11). Desse modo, se seguirmos o procedimento usado no capítulo anterior a partir desse ponto, obteremos a redução dimensional do modelo. Mostra-se assim que a redução dimensional de  $S_{nFP}$  pode ser

reobtida via redução de uma ação mestra em  $D$  dimensões.

## 9 CONCLUSÃO

As reduções dimensionais Kaluza-Klein dos modelos de spin  $s = 0, 1, 2$  foram feitas com sucesso. Para proceder com essas reduções foi preciso conhecer as simetrias locais dos modelos não massivos de partida em  $D$  dimensões para assim ser possível determinar o equivalente dessas simetrias em  $D - 1$  dimensões.

O conhecimento dessas simetrias no espaço reduzido é fundamental para se conhecer quais são os campos que de fato serão dinâmicos em  $D - 1$  dimensões e assim eliminar os campos oriundos da dimensão extra através da fixação de gauge. Nem sempre a eliminação é total como, por exemplo, no caso da redução dimensional do modelo  $S_{a_1} \rightarrow 0$ .

Nos capítulos 2, 3, 4, 5 foram feitas as reduções dimensionais e os modelos massivos obtidos foram analisados primeiramente pelo viés clássico, ou seja, através dos vínculos de Fierz-Pauli, obtidos das equações de movimento, e também em alguns casos (capítulos 3 e 4.) através da análise hamiltoniana via algoritmo de Dirac-Bergmann.

Quanto à análise quântica, ela consistiu em avaliar os sinais dos resíduos das amplitudes de dois pontos saturadas desses modelos. Para tal foi preciso saber como obter o inverso dos operadores diferenciais em cada caso. Um caso interessante foi o da redução dimensional da linearização do termo  $K$  da New massive gravity em  $D = 2 + 1$ , no qual há uma nova simetria no modelo massivo em  $D = 1 + 1^1$  e é preciso recorrer a fixação de gauge para que se obtenha o inverso do seu operador diferencial.

O capítulo que trata da redução dimensional dos modelos WTdiff e Tdiff faz uso da redução dimensional como ferramenta para se obter uma teoria de spin 2 massiva porém acaba-se por concluir que aparentemente apenas o modelo de Fierz-Pauli pode descrever tal partícula se é feito uso de tensores simétricos de posto 2. A redução dimensional dessas famílias não conservou os seus graus de liberdade mas a conclusão que obtemos está de acordo com (TEMIÑO, 2008). Assim, logo em seguida apresenta-se as famílias  $S_{a_1}$  e  $S_{nFP}$  que utilizam tensores sem simetria e também podem descrever uma partícula massiva de spin 2. Nos capítulos seguintes (capítulos 7 e 8.) foram feitas as reduções dimensionais dos limites de massa nula dessas famílias do modo convencional e através de uma ação mestra mostrando que os resultados são equivalentes.

---

<sup>1</sup>Essa nova simetria persiste mesmo com a eliminação dos campos de Stueckelberg via fixação de gauge

## REFERÊNCIAS

- ARAGONE, C.; DESER, S.; YANG, Z. Massive higher spin from dimensional reduction of gauge fields. **Annals of physics**. v. 179, p. 76, 1987.
- BERGSHOEFF, E.; HOHM, O.; TOWNSEND, P.K. Massive Gravity in three dimensions **Physical Review Letters**. v. 102, p. 201301, 2009.
- BIAZOTTI, H.A.; DALMAZI, D.; GRACIA, G.B. Dimensional reduction of the massless limit of the linearized "New massive Gravity". **European Journal of Physics C**. v. 74, p. 2747, 2013.
- DALMAZI, D. A note on the nonuniqueness of the massive Fierz-Pauli theory and spectator fields. **Physical Review D**. v. 88, p. 045003, 2013.
- DALMAZI, D. Massive spin 2 particle from a rank 2 tensor. **Physical Review D**. v. 87, p. 125027, 2013.
- DALMAZI, D.; MENDONÇA, E. L.; SANTOS, A. L. R. Massive "spin 2" theories in  $D \geq 3$ . **Annals of Physics**. v. 354, p. 385, 2015.
- DESER, S. Ghost-Free, Finite, Fourth-Order D=3 Gravity. **Physical Review Letters**. v. 103, p. 101302, 2009.
- DIRAC, P.M. **Lectures on Quantum Mechanics**. 1 ed. Nova York: Yeshiva University Lectures, 1964. 87 p.
- FAGUNDES, F. N. **Efeitos das condições de contorno de Neumann na eletrodinâmica escalar**. 2008. 114 f. Tese (Mestrado em Física), Universidade federal do Espírito Santo, Vitória, 2008.
- GOLDSTEIN, H. **Mecanica Clasica**. 1 ed. Madrid: Aguilar, 1966. 456 p.
- HENNEAUX, M.; TEITELBOIM, C. **Quantization of Gauge Systems**. 1ed. Princeton: Princeton university Press, p.200, 1992.
- HINTERBICHLER, K. Theoretical aspects of massive gravity. **Review of Modern Physics**. v.10, p. 1103, 2012.

KALOPEL, N. et al. Compact Hyperbolic Extra Dimensions: Branes, Kaluza-Klein Modes, and Cosmology. **Physical Review Letters**. v. 85, p. 298, 2000.

KALUZA, T. Zum Unitätsproblem der Physik. **Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften**. v. 1921, p. 966, 1921.

KHOUDEIR, A.; MONTEMAYOR, R.; URRUTIA, L. F. Dimensional Reduction as a method to obtain dual theories for massive spin 2 in arbitrary dimensions. **Physical Review D**. v. 78, p. 065041, 2008.

KLEIN, O. Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie. **Zeitschrift für Physik A**. v. 37, p. 895, 1926.

LACQUANITTI, V. **Dynamics of fields and particles in a 5-dimensional scenario: problems and perspectives of Kaluza Klein Theory**. 2009, 143 f. Tese (Doutorado em Física), University of Rome, Roma, 2009.

LEMOES, N. A. **Mecânica analítica**. 2 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007. 386 p.

MARZBAN, C.; WHITTING, B.F.; DAM, V. Hamiltonian reduction for massive fields coupled to sources. **Journal of mathematical physics**. v.30, p.1892, 1989.

MENDONÇA, E. L. **Teorias duais massivas de spin 2 em  $D = 2 + 1$  via ação mestra e imersão de Noether**. 2009. 80 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2009.

NIEUWENHUIZEN, P.V. On ghost-free tensor Lagrangians and linearized gravitation. **Nuclear Physics B**. v. 60, p. 478, 1973.

PAIS, A. **Subtle is the Lord, the Science and the Life of Albert Einstein**. 1. ed. Oxford: Oxford University Press, 1982. 330 p.

RUBAKOV, V. **Classical theory of gauge fields**. 1 ed. Princeton: Princeton University Press, 2002. 456 p.

SANTOS, R.C. **Partículas de spin 1 em  $D$  dimensões via tensor simétrico**. 2012. 82 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2012.

TEMIÑO, D.B. **Aspects of infrared modification of gravity**. 2008. 158 f. Tese (Doutorado em física), Universitat de Barcelona, Barcelona, 2008.

## APÊNDICE A - IDEIA ORIGINAL DA REDUÇÃO DIMENSIONAL DE KALUZA-KLEIN

A idéia original da redução dimensional foi a tentativa de se unificar o campo eletromagnético e o campo gravitacional numa mesma descrição. Kaluza notou que ao se adicionar uma dimensão extra no modelo da gravitação surgem termos que podem ser interpretados como novos campos numa dimensão abaixo (KALUZA, 1921; KLEIN, 1926). Assim, o campo eletromagnético surgiria como uma espécie de componente da métrica  $5D$ . Na presente dedução vamos partir da ação gravitacional em  $D$  dimensões e obter sua versão reduzida em  $D - 1$  dimensões. A ação gravitacional em  $D$  dimensões toma a forma <sup>2</sup> :

$$S = \frac{m_p^{D-2}}{2} \int d^D x \sqrt{-g} R_D \quad (1)$$

A ação possui a seguinte transformação de simetria infinitesimal:

$$\delta g_{AB} = \nabla_A \epsilon_B + \nabla_B \epsilon_A \quad (2)$$

Nesta seção vamos fazer uso da decomposição ADM (supondo hipersuperfícies ortogonais a dimensão extra e não ao tempo, o formalismo é análogo em ambos os casos (LACQUANITTI, 2009).) que nada mais é que considerar o espaço-tempo foliado em infinitas hipersuperfícies ortogonais a dimensão extra. Desse modo a decomposição ADM da métrica nos permite obter a forma da métrica induzida nessas hipersuperfícies  $D - 1$  dimensionais (ver apêndice C):

$$g_{(D-1),(D-1)}(x, y) = -N^2(x, y) + A_\mu A^\mu(x, y) \quad (3)$$

$$g_{\mu,(D-1)} = A_\mu(x, y) \quad (4)$$

$$g_{\mu\nu}(x, y) = g_{\mu\nu}(x, y) \quad (5)$$

Para se proceder com a redução dimensional vamos adotar o seguinte Ansatz, que nada mais é que se tomar apenas o modo zero da expansão quando não se tem mais nenhuma dependência na coordenada extra:

---

<sup>2</sup> $m_p$  é a massa de Planck reduzida em  $D$  dimensões

$$A_\mu(x, y) = A_\mu(x) \quad (6)$$

$$N(x, y) = e^{2\alpha\phi(x)} \quad (7)$$

$$g_{\mu\nu}(x, y) = \bar{g}_{\mu\nu}(x)e^{-2\beta\phi(x)} \quad (8)$$

<sup>3</sup> As transformações de simetria em  $D - 1$  são dadas por:

$$\delta A_\mu = \nabla_\mu \epsilon_D \quad (9)$$

$$\delta g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \epsilon_\nu + \nabla_\nu \epsilon_\mu \quad (10)$$

A ação escrita em termos da decomposição ADM se divide numa espécie de ação de Einstein-Hilbert em  $D - 1$  dimensões e num termo construído a partir da curvatura extrínseca  $K^{\mu\nu}$  :

$$S = \frac{m_p^{D-2}}{2} \int_0^L dy \int d^{(D-1)}x \sqrt{-\bar{g}} N \left\{ R_{(D-1)}(g) + K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} \right\} \quad (11)$$

A curvatura extrínseca escrita nas variáveis ADM toma a seguinte forma:

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2N} (\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu) \quad (12)$$

Ao integrar na dimensão extra e substituir os ansätze adotados para o procedimento de redução dimensional tem-se (Considerando que  $\sqrt{-g} = \sqrt{-\bar{g}} e^{-(D-1)\beta\phi}$  e também levando

---

<sup>3</sup>  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros arbitrários

em conta a mudança do escalar de Ricci via transformação conforme.):

$$S = \frac{m_p^{D-2}}{2} L \int d^{(D-1)}x \sqrt{-\bar{g}} e^{[2\alpha - (D-1)\beta]\phi(x)} \left\{ e^{2\beta\phi(x)} [R_{(D-1)}(\bar{g}) + 2\beta(D-2)\square\phi - (D-2)(D-3)\beta^2(\partial_\mu\phi)^2] - \frac{1}{4}e^{-4\alpha\phi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right\} \quad (13)$$

A fim de simplificar a ação podemos eliminar o termo  $\square\phi$  pois se trata de uma derivada total. Podemos também fixar os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  como:

$$\alpha = \frac{(D-3)}{2}\beta \quad (14)$$

e

$$\beta^2 = \frac{1}{2(D-2)(D-3)} \quad (15)$$

Assumida essa escolha de parâmetros obtemos a ação de Einstein-Hilbert, a ação de Maxwell acoplada a um campo escalar e um termo dinâmico para esse escalar ( $\bar{m}_p$  é a massa reduzida de Planck em  $D-1$  dimensões):

$$S = \frac{\bar{m}_p^{D-3}}{2} \int d^{(D-1)}x \sqrt{-\bar{g}} \left\{ [R_{(D-1)} - \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2] - \frac{1}{4}e^{-2\beta(D-2)\phi(x)} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right\} \quad (16)$$

As equações de movimento são dadas por:

$$R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2}R = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)^2) + \frac{1}{2}e^{-2\beta(D-2)\phi}(F_{\mu\gamma}F_\nu^\gamma - \frac{1}{4}F_{\omega\gamma}F^{\omega\gamma}g_{\mu\nu}) \quad (17)$$

$$\square\phi = -\frac{1}{2}\beta(D-2)e^{-\beta(D-2)\phi}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \quad (18)$$

$$\nabla^\mu(e^{-2\beta(D-2)\phi}F_{\mu\nu}) = 0 \quad (19)$$

É interessante notar que na equação (A.17) o tensor de energia momento do campo eletromagnético surge naturalmente como fonte para a gravitação.

Para que o campo  $A_\mu$  possa de fato ser associado ao campo eletromagnético é preciso fazer um rescalonamento com uma constante de conversão  $A_\mu \rightarrow kA_\mu$  ((KLEIN, 1926)). Essa constante  $k$  é dada por  $k = \frac{8\pi G}{c^4\mu_0}$  quando trabalhamos com  $c \neq 1$ .

A geodésica  $D$  dimensional para as componentes das velocidades  $D-1$  dimensionais

pode ser escrita como:

$$\frac{dU^\nu}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu U^\alpha U^\beta + 2\Gamma_{(D-1)\beta}^\nu U^{(D-1)} U^\beta + \Gamma_{(D-1)(D-1)}^\nu (U^{(D-1)})^2 = 0 \quad (20)$$

Ao escrever as conexões acima em função da métrica ADM tem-se:

$$\frac{dU^\nu}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu U^\alpha U^\beta + [g^{\nu(D-1)} \partial_\beta g_{(D-1),(D-1)} + k g^{\nu\rho} F_{\beta\rho}] U^\beta U^{(D-1)} + \Gamma_{(D-1)(D-1)}^\nu (U^{(D-1)})^2 = 0 \quad (21)$$

Na expressão acima há um termo que pode ser identificado com a força de Lorentz. Para isso deve-se definir  $kU^{(D-1)} \rightarrow \frac{q}{mc}$ . Onde  $q$  é a carga da partícula e  $m$  é sua massa. Esse desenvolvimento final esteve intimamente ligado à contribuição de Oskar Klein ao modelo (KLEIN, 1926).

Partindo de considerações quânticas e da conservação do momento associado a velocidade  $U^{(D-1)}$  ele pode criar uma teoria que explicasse o porquê das cargas serem quantizadas se fosse suposta uma dimensão extra compacta. Além disso foi possível fazer uma estimativa da ordem de grandeza dessa dimensão extra, ela é da ordem de  $0.8 \times 10^{-30} cm$  o que explicaria a sua não observação experimental.

## APÊNDICE B - PROJETORES E SUAS RELAÇÕES

### PROJETORES DE SPIN 1

Todo campo vetorial em  $D$  dimensões pode ser expandido numa base dada por (vide apêndice de (BIAZOTTI; DALMAZI; GRACIA, 2013). ):

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \quad , \quad \theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \quad , \quad (22)$$

$$\eta^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} = 1 \quad (23)$$

o traço de um projetor fornece a dimensão do espaço em que ele projeta. Assim,  $\omega_{\mu\nu}$  projeta no setor de spin 0, como:

$$\eta^{\mu\nu} \theta_{\mu\nu} = D - 1 \quad (24)$$

Podemos concluir que  $\theta_{\mu\nu}$  projeta num espaço com o número de dimensões igual ao número de graus de liberdade de uma partícula de spin 1 massiva.

Esses projetores obedecem uma de relação de ortonormalidade:

$$\omega^{\mu\nu} \theta_{\mu\beta} = 0 \quad (25)$$

$$\omega^{\mu\nu} \omega_{\mu\beta} = \omega_{\beta}^{\nu} \quad (26)$$

$$\theta_{\nu}^{\beta} \theta_{\mu\beta} = \theta_{\nu\mu} \quad (27)$$

Essa característica permite que se escreva um operador diferencial tensorial de 2 índices em termos desses projetores que formam uma base. Além disso, temos uma relação de completudeza  $\eta_{\mu\nu} = \theta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}$ . Essas relações podem ser usadas para se inverter um operador.

### PROJETORES DE SPIN 2

Os projetores para um modelo com campo tensorial de rank 2, também conhecidos como projetores de Barnes-Rivers, são dados por:

$$\left( P_{SS}^{(2)} \right)_{\alpha\beta}^{\lambda\mu} = \left( P_{TT}^{(2)} \right)_{\alpha\beta}^{\lambda\mu} = \frac{1}{2} \left( \theta^{\lambda}_{\alpha} \theta^{\mu}_{\beta} + \theta^{\mu}_{\alpha} \theta^{\lambda}_{\beta} \right) - \frac{\theta^{\lambda\mu} \theta_{\alpha\beta}}{D-1} \quad , \quad (28)$$

Ele projeta tensores simétricos de 2 índices no espaço de spin 2 .

$$\left(P_{SS}^{(1)}\right)_{\alpha\beta}^{\lambda\mu} = \frac{1}{2} \left( \theta^\lambda_\alpha \omega^\mu_\beta + \theta^\mu_\alpha \omega^\lambda_\beta + \theta^\lambda_\beta \omega^\mu_\alpha + \theta^\mu_\beta \omega^\lambda_\alpha \right) \quad , \quad (29)$$

Ele projeta no espaço de spin 1, enquanto que

$$\left(P_{SS}^{(0)}\right)_{\alpha\beta}^{\lambda\mu} = \frac{1}{(D-1)} \theta^{\lambda\mu} \theta_{\alpha\beta} \quad , \quad \left(P_{WW}^{(0)}\right)_{\alpha\beta}^{\lambda\mu} = \omega^{\lambda\mu} \omega_{\alpha\beta} \quad , \quad (30)$$

$$\left(P_{SW}^{(0)}\right)_{\alpha\beta}^{\lambda\mu} = \frac{1}{\sqrt{D-1}} \theta^{\lambda\mu} \omega_{\alpha\beta} \quad , \quad \left(P_{WS}^{(0)}\right)_{\alpha\beta}^{\lambda\mu} = \frac{1}{\sqrt{D-1}} \omega^{\lambda\mu} \theta_{\alpha\beta} \quad , \quad (31)$$

projetam num espaço de spin 0. Eles satisfazem a relação:

$$\left[ P_{SS}^{(2)} + P_{SS}^{(1)} + P_{TT}^{(0)} + P_{WW}^{(0)} \right]_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{\eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta} \eta_{\nu\alpha}}{2} \quad . \quad (32)$$

Além disso os projetores obedecem a seguinte álgebra:

$$P_{\mu\nu}^s \cdot P_{\beta\gamma}^{s'} = \delta^{ss'} \delta_{\nu\beta} P_{\mu\gamma}^{s=s'} \quad (33)$$

Essas relações podem ser usadas para se encontrar, por exemplo, o inverso de um operador.

## APÊNDICE C - DECOMPOSIÇÃO ADM

Vamos considerar a decomposição ADM da métrica (vide capítulo 2 de (LACQUA-NITTI, 2009)). Para tal vamos considerar o espaço foliado em hipersuperfícies espaciais com tempo constante  $X^\alpha(t_c, y^a)$  e ortogonais à direção de máxima variação do tempo, o vetor  $y^a$  se encontra nessa hipersuperfície.

A métrica induzida nessa hipersuperfície é dada por:

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + N_\mu N_\nu \quad (34)$$

Onde  $N_\mu$  é a normal à hipersuperfície.

Desse modo  $N_\mu$  está na direção de  $\nabla_\mu t$  que é a direção de máxima variação de  $t$  e obedece  $N_\mu N^\mu = -1$ .

Definindo o operador que leva um vetor contido numa hipersuperfície espacial para o espaço tempo (índices latinos minúsculos representam quantidades na hipersuperfície espacial):

$$E_b^\alpha = \frac{\partial X^\alpha}{\partial y^b} \quad (35)$$

E definindo:

$$(\partial_t)^\alpha = \frac{\partial X^\alpha}{\partial t} \quad (36)$$

A diferencial de qualquer vetor no espaço-tempo pode ser escrita em termos desses operadores:

$$dX^\alpha = E_a^\alpha dy^a + (\partial_t)^\alpha dt \quad (37)$$

Sendo  $\gamma^a$  ("shift vector") um vetor que reside na hipersuperfície espacial, podemos escrever  $(\partial_t)^\alpha$  como um vetor escrito em termos de uma componente na direção de sua máxima variação e uma componente na hipersuperfície espacial ortogonal a ela. O campo  $N(x)$  é chamado de Lapse funtion:

$$(\partial_t)^\alpha = N(x, t)N^\alpha(x, t) + E_b^\alpha(x, t)\gamma^b(x, t) \quad (38)$$

Pode-se escrever o intervalo invariante em termos dessas quantidades:

$$ds^2 = dX^\alpha dX^\beta g_{\alpha\beta} = -N^2 dt^2 + h_{ab}(dy^a + \gamma^a dt).(dy^b + \gamma^b dt) \quad (39)$$

Na expressão acima é feito uso do operador  $E_a^\alpha$  para se projetar a métrica do espaço tempo na métrica induzida na hipersuperfície espacial:

$$h_{ab} = E_a^\alpha E_b^\beta g_{\alpha\beta} \quad (40)$$

Através dessa definição pode-se obter os componentes da métrica em termos dessas quantidades:

$$g_{tt} = -N^2 + h_{ab}\gamma^b\gamma^a \quad (41)$$

$$g_{at} = \gamma_a \quad (42)$$

$$g_{ab} = h_{ab} \quad (43)$$

O determinante da métrica é dado por  $\sqrt{-g} = N\sqrt{-h}$ .

## APÊNDICE D - REDUÇÃO DIMENSIONAL DE UM MODELO SEM GRAUS DE LIBERDADE

Uma partícula de spin 0 massiva pode ser descrita por meio de um vetor a partir da ação abaixo (ver (SANTOS, 2012)):

$$S = \int d^D x \frac{1}{2} \left\{ (\partial^C A_C(x))^2 + m^2 A_C(x) A^C(x) \right\} \quad (44)$$

As equações de movimento deste modelo são:

$$-\partial^C (\partial^B A_B(x)) + m^2 A^C(x) = 0 \quad (45)$$

Podemos aplicar um  $\partial_C$  na equação acima e obter:

$$(\square - m^2) \partial^C A_C(x) = 0 \quad (46)$$

Assim, temos um grau de liberdade  $\partial^C A_C(x)$  que obedece a equação de Klein-Gordon, ou seja, isso indica que possivelmente temos uma partícula de spin 0 massiva.

Podemos agora analisar os graus de liberdade desse modelo através do algoritmo de Dirac Bergmann, a partir da ação acima temos os momentos canônicos:

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{A}_0)} = \dot{A}^0 + \partial^i A_i \quad (47)$$

$$\pi^i = 0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{A}_i)} \quad (48)$$

Os parênteses de Poisson fundamentais são dados por:

$$\{A_\mu(x), \pi^\nu(y)\} = \delta_\mu^\nu \delta(x - y) \quad (49)$$

A hamiltoniana canônica é dada por:

$$H_c = \int d^{D-1} x \left\{ \frac{1}{2} (\pi_0)^2 - \pi^0 (\partial^i A_i) - \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu \right\} \quad (50)$$

A hamiltoniana primária é escrita abaixo onde  $\lambda^i$  são multiplicadores de Lagrange

para os vínculos obtidos da definição dos momentos canônicos (D.5):

$$H_p = H_c + \int d^{D-1}x \lambda^i \pi_i \quad (51)$$

Usando os parênteses de Poisson fundamentais obtemos a condição de consistência dos vínculos primários:

$$\dot{\pi}^i = \{\pi^i, H_p\} = -\partial^i \pi^0 - m^2 A^i \approx 0 \quad (52)$$

A condição acima nos levou a obter um vínculo secundário  $\phi^i = -\partial^i \pi^0 - m^2 A^i$ . A evolução desse vínculo fornece:

$$\dot{\phi}^i = \{\phi^i, H_p\} = -m^2 \partial^i A_0 - m^2 \lambda^i \approx 0 \quad (53)$$

Dessa maneira todos os multiplicadores de lagrange foram determinados, o que é característica de um sistema sem simetria de gauge (DIRAC, 1964). Além disso, sabemos que partimos de  $2D$  graus de liberdade e obtivemos  $2(D-1)$  vínculos de segunda classe que retiraram ao todo mais  $2(D-1)$  graus de liberdade restando-nos assim 2 graus de liberdade, um grau de liberdade ligado ao momento canônico e outro ligado ao campo. Isso corresponde no espaço de configurações a 1 grau de liberdade, ou seja de fato esse modelo descreve uma partícula escalar através de um vetor. Agora fica a pergunta, será que se fizermos a redução dimensional do seu limite de massa nula obteríamos novamente esse mesmo modelo em  $D-1$  dimensões? A resposta é não mas vamos ver melhor o porquê.

Vamos analisar agora a ação que é o limite de massa nula do modelo de spin 0 via vetor. Ela é dada por:

$$S = \int d^D x \frac{1}{2} \left\{ (\partial^C A_C(x))^2 \right\} \quad (54)$$

Esse modelo possui simetria de gauge pois está projetado totalmente no setor de spin 0. A densidade de lagrangeana é dada por:

$$\mathcal{L} = -A^C \square \omega_{CB} A^B \quad (55)$$

Essa ação possui simetria por transformações no setor transversal, ou seja

$$\delta A_B \rightarrow \partial^C T_{[CB]} \quad (56)$$

Agora vamos analisar a estrutura de vínculos hamiltonianos do modelo. Assim pri-

meiramente vamos obter os momentos canônicos:

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{A}_0)} = \dot{A}^0 + \partial^i A_i \quad (57)$$

$$\pi^i = 0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{A}_i)} \quad (58)$$

temos um vínculo primário  $\pi^i \approx 0$ .

Os parênteses de Poisson fundamentais são os mesmos que utilizamos na análise da versão massiva do modelo. A hamiltoniana canônica é dada por:

$$H_c = \int d^{D-1}x \left\{ \frac{1}{2}(\pi_0)^2 - \pi^0(\partial^i A_i) \right\} \quad (59)$$

A hamiltoniana primária é escrita abaixo onde  $\lambda^i$  são multiplicadores de Lagrange para o vínculo obtido da definição dos momentos canônicos (D.15) que tem a mesma forma que aquele obtido na versão massiva do modelo:

$$H_p = H_c + \int d^{D-1}x \lambda^i \pi_i \quad (60)$$

Vamos obter agora a evolução temporal desse vínculo:

$$\dot{\pi}^i = \{\pi^i, H_p\} = -\partial^i \pi^0 \approx 0 \quad (61)$$

A partir do resultado acima obtemos agora um vínculo secundário:

$$\gamma^i = \partial^i \pi^0 \approx 0 \quad (62)$$

A sua evolução temporal fornece:

$$\dot{\gamma}^i = \{\gamma^i, H_p\} \approx 0 \quad (63)$$

A relação de consistência acima é identicamente satisfeita e o algoritmo termina aqui. Assim, não ocorreu determinação dos multiplicadores de Lagrange  $\lambda^i$ , algo que é característico de sistemas com simetria de gauge como é o presente caso. Os vínculos (D.15) e (D.19) são de primeira classe. Ao analisar os vínculos deve-se levar em conta que o vínculo secundário de primeira classe revela o fato de que (ao considerar que os campos vão a zero no infinito)  $\pi^0 = f(t)$ . Essa é uma condição escalar. Assim, tem-se  $D - 1$  vínculos de (D.15) mais um vínculo escalar (D.19), ambos de primeira classe. Eles retiram ao todo  $2D$  graus de liberdade do sistema no espaço de fase. Assim como no caso massivo parte-se

de  $2D$  graus de liberdade devido ao fato de que se usa um vetor para descrever o modelo. Assim, o modelo não massivo possui 0 graus de liberdade.

Agora vamos proceder com a redução dimensional desse modelo não massivo de  $D$  dimensões para  $D - 1$  dimensões. A dependência dos campos na dimensão extra é dada por<sup>4</sup>:

$$A_\mu(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} A_\mu(x) \cos(my) \quad (64)$$

$$A_{(D-1)(x,y)} = \sqrt{\frac{m}{\pi}} \phi(x) \text{sen}(my) \quad (65)$$

O parâmetro de simetria é escrito como:

$$T_{[\mu(D-1)]}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} \bar{T}_{[\mu]} \text{sen}(my) \quad (66)$$

$$T_{[\mu\nu]}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} \bar{T}_{[\mu\nu]}(x) \cos(my) \quad (67)$$

As transformações de simetria no espaço reduzido são dadas por:

$$\delta A_\mu(x) \rightarrow m \bar{T}_\mu(x) + \partial^\beta T_{[\beta\mu]}(x) \quad (68)$$

$$\delta \phi(x) = 0 \quad (69)$$

O campo  $\phi(x)$  não é puro gauge. O campo  $A_\mu(x)$  também não é puro gauge devido ao fato de que os parâmetros vetoriais de sua transformação de simetria serem transversos (o que é deduzido imediatamente da transformação D.13 em  $D$  dimensões. ), o que significa que eles não podem ser usados para retirar todos os graus de liberdade de  $A_\mu(x)$ . A ação em  $D - 1$  dimensões, supondo que integramos a dependência na dimensão extra num espaço compacto, como estamos fazendo ao longo desse trabalho, é dada por:

$$S = \int d^{D-1}x \left\{ [\partial^\mu A_\mu(x) + m\phi(x)]^2 \right\} \quad (70)$$

Na ação acima notamos que  $\phi$  é não dinâmico e que após a redefinição  $\phi \rightarrow \phi - \frac{1}{m} \partial^\nu A_\nu$

---

<sup>4</sup>( Seguiremos o mesmo modelo de redução dimensional que vem sendo usada na maioria dos capítulos anteriores.)

obtemos:

$$S = \int d^{D-1}x \left\{ m^2 \phi^2(x) \right\} \quad (71)$$

O modelo acima não possui nenhum conteúdo físico. Isso já era esperado pois como tal modelo não possui graus de liberdade em  $D$  dimensões sua redução dimensional deveria levar a um modelo em  $D - 1$  dimensões que também seja desprovido de graus de liberdade já que o mecanismo de Kaluza-Klein os conserva.