



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de Presidente Prudente

MARIANA GABRIELA GUIMARÃES LEAL

**MODELAGEM CONJUNTA DE TEMPERATURA E PRECIPITAÇÃO PLUVIAL
MÁXIMAS EM PRESIDENTE PRUDENTE: APLICAÇÃO DE CÓPULAS**

PRESIDENTE PRUDENTE

2024

MARIANA GABRIELA GUIMARÃES LEAL

**MODELAGEM CONJUNTA DE TEMPERATURA E PRECIPITAÇÃO PLUVIAL
MÁXIMAS EM PRESIDENTE PRUDENTE: APLICAÇÃO DE CÓPULAS**

Relatório Final de Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Estatística da FCT/UNESP para aproveitamento na disciplina Trabalho de Conclusão de Curso.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Antonio Moala.

PRESIDENTE PRUDENTE

2024

L435m

Leal, Mariana Gabriela Guimarães

Modelagem conjunta de temperatura e precipitação pluvial
máximas em Presidente Prudente: aplicação de cópulas. /

Mariana Gabriela Guimarães Leal. -- , 2024

69 p. : tabs., fotos, mapas

Trabalho de conclusão de curso (-) - Universidade Estadual
Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências e Tecnologia,
Presidente Prudente,

Orientador: Fernando Antonio Moala

1. Modelagem conjunta. 2. Temperatura. 3. Precipitação. 4.
Cópula. I. Título.

TERMO DE APROVAÇÃO

Mariana Gabriela Guimarães Leal

MODELAGEM CONJUNTA DE TEMPERATURA E PRECIPITAÇÃO PLUVIAL MÁXIMAS EM PRESIDENTE PRUDENTE: APLICAÇÃO DE CÓPULAS

Relatório de Final de Trabalho de Conclusão de Curso aprovado como requisito para obtenção de créditos na disciplina Trabalho de Conclusão do curso de graduação em Estatística da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Unesp, pela seguinte banca examinadora:

Orientador: _____

Prof. Dr. Fernando Antonio Moala
Departamento de Estatística

Prof. Dr. Manoel Ivanildo Silvestre Bezerra
Departamento de Estatística

Presidente Prudente, 06 de dezembro de 2024.

RESUMO

O estudo visa entender a interdependência entre temperatura e precipitação, que é crucial para prever eventos climáticos extremos e evidenciar seus impactos sociais, econômicos e ambientais. A metodologia empregada incluiu a coleta de dados meteorológicos do site POWER da NASA, na área do Parque do Povo em Presidente Prudente, entre janeiro de 1981 e dezembro de 2023. Esses dados foram analisados utilizando o software estatístico R, que facilitou a visualização e manipulação das informações. Inicialmente, a análise envolveu a seleção dos valores extremos mensais de temperatura e precipitação, seguida da modelagem univariada utilizando a distribuição Valor Extremo (Gumbel) para cada variável separadamente. Os resultados indicaram que a distribuição Gumbel ajustou-se bem aos dados de precipitação e temperatura máximas. Em seguida, utilizou-se a teoria de cópulas, ferramenta ótima para capturar dependências entre variáveis, para construir distribuições bivariadas. Essas distribuições possibilitaram determinar as probabilidades conjunta de ocorrência de níveis máximos de precipitação e temperatura para cada mês, evidenciando uma interdependência mais acentuada durante os meses do verão e da primavera. Contribuindo, assim, para o entendimento de padrões climáticos locais e como suporte a tomadas de decisão em relação a eventos extremos máximos.

Palavras-chave: temperatura; precipitação; cópulas; Presidente Prudente; probabilidade conjunta.

ABSTRACT

The study aims to understand the interdependence between temperature and precipitation, which is crucial for predicting extreme weather events and highlighting their social, economic, and environmental impacts. The methodology involved collecting meteorological data from NASA's POWER website for the area of Parque do Povo in Presidente Prudente, covering the period from January 1981 to December 2023. These data were analyzed using the R statistical software, which facilitated the visualization and manipulation of the information. Initially, the analysis focused on selecting the monthly extreme values of temperature and precipitation, followed by univariate modeling using the Extreme Value (Gumbel) distribution for each variable separately. The results indicated that the Gumbel distribution provided a good fit for both precipitation and maximum temperature data. Subsequently, copula theory, an optimal tool for capturing dependencies between variables, was employed to construct bivariate distributions. These distributions made it possible to determine the joint probabilities of the occurrence of maximum levels of precipitation and temperature for each month, highlighting a more pronounced interdependence during the summer and spring months. This contributes significantly to the understanding of local climate patterns and serves as support for decision-making regarding extreme weather events.

Keywords: temperature; precipitation; copulas; Presidente Prudente; joint probability.

Lista de figuras

Figura 1 - Mapa de Presidente Prudente-SP destacando o Parque do Povo.	12
Figura 2 - Print do site POWER da NASA.	16
Figura 3 - Histogramas da precipitação máxima do Parque do Povo (Presidente Prudente-SP), de todos os meses, no período de janeiro de 1981 a dezembro de 2023.	29
Figura 4: Gráficos do Tempo Total de Teste (TTT) da precipitação máxima do Parque do Povo (Presidente Prudente-SP), de todos os meses, no período de janeiro de 1981 a dezembro de 2023.	32
Figura 5: Gráficos da Função de Distribuição Acumulada (FDA) empírica da precipitação máxima do Parque do Povo (Presidente Prudente-SP), de todos os meses, no período de janeiro de 1981 até dezembro de 2023, comparada com a F.D.A. da distribuição de Gumbel ajustada.	34
Figura 6: Gráficos da Função de Sobrevivência empírica da precipitação máxima do Parque do Povo (Presidente Prudente-SP), de todos os meses, no período de janeiro de 1981 até dezembro de 2023, comparada com a Função de Sobrevivência da distribuição de Gumbel ajustada.	36
Figura 7: Gráficos da Função de Risco da precipitação máxima do Parque do Povo (Presidente Prudente-SP), de todos os meses, no período de janeiro de 1981 até dezembro de 2023, comparando os dados empíricos com a função de risco ajustada da distribuição de Gumbel.	39
Figura 8: Histogramas da temperatura máxima do Parque do Povo (Presidente Prudente-SP) , de todos os meses, no período de janeiro de 1981 até dezembro de 2023.	41
Figura 9: Gráficos do Tempo Total de Teste (TTT) da temperatura máxima do Parque do Povo (Presidente Prudente-SP), de todos os meses, no período de janeiro de 1981 até dezembro de 2023.	43
Figura 10: Gráficos da Função de Distribuição Acumulada (FDA) empírica das temperaturas máximas do Parque do Povo (Presidente Prudente-SP), de todos os meses, no período de janeiro de 1981 até dezembro de 2023, comparada com a FDA da distribuição de Gumbel ajustada.	46

Figura 11: Gráficos da Função de Sobrevivência empírica das temperaturas máximas do Parque do Povo (Presidente Prudente-SP), de todos os meses, no período de janeiro de 1981 até dezembro de 2023, comparada com a Função de Sobrevivência da distribuição de Gumbel ajustada	48
Figura 12: Gráficos da Função de risco da temperatura máxima do Parque do Povo (Presidente Prudente-SP), de todos os meses, no período de janeiro de 1981 até dezembro de 2023, comparando os dados empíricos com a função de risco ajustada da distribuição de Gumbel.....	50
Figura 13: Gráficos de contorno e de perspectiva 3D da densidade conjunta via cópula de Gumbel rotacionada em 90° , para o mês de janeiro (1981 a 2023).	56
Figura 14: Gráficos de contorno e de perspectiva 3D da distribuição conjunta via cópula de Clayton rotacionada em 270° , para o mês de fevereiro (1981 a 2023).....	57
Figura 15: Gráficos de contorno e de perspectiva 3D da distribuição conjunta via cópula de Joe rotacionada em 90° , para o mês de março (1981 a 2023).	58
Figura 16: Gráficos de contorno e de perspectiva 3D da distribuição conjunta via cópula T, para o mês de abril (1981 a 2023).....	58
Figura 17: Gráficos de contorno e de perspectiva 3D da distribuição conjunta via cópula de Joe rotacionada em 270° , para o mês de maio (1981 a 2023).	59
Figura 18: Gráficos de contorno e de perspectiva 3D da distribuição conjunta via cópula de Gumbel rotacionada em 270° , para o mês de junho (1981 a 2023).	59
Figura 19: Gráficos de contorno e de perspectiva 3D da distribuição conjunta via cópula de Joe rotacionada em 90° , para o mês de julho (1981 a 2023).	60
Figura 20: Gráficos de contorno e de perspectiva 3D da distribuição conjunta via cópula T, para o mês de agosto (1981 a 2023).....	61
Figura 21: Gráficos de contorno e de perspectiva 3D da distribuição conjunta via cópula de Clayton rotacionada em 270° , para o mês de setembro (1981 a 2023)....	61
Figura 22: Gráficos de contorno e de perspectiva 3D da distribuição conjunta via cópula T, para o mês de outubro (1981 a 2023).	62
Figura 23: Gráficos de contorno e de perspectiva 3D da distribuição conjunta via cópula de Clayton rotacionada em 270° , para o mês de novembro (1981 a 2023)...	62
Figura 24: Gráficos de contorno e de perspectiva 3D da distribuição conjunta via cópula de Joe rotacionada em 90° , para o mês de dezembro (1981 a 2023).	63

Lista de tabelas

Tabela 1 - Estatísticas descritivas das variáveis.	26
Tabela 2– Inferências da variável precipitação usando a distribuição Gumbel.	27
Tabela 3 - Inferências da variável temperatura usando a distribuição Gumbel.	28
Tabela 4 - Cópulas selecionadas e parâmetros estimados através do pacote “VineCopula”, para cada mês de 1981 a 2023.	53
Tabela 5 – Inferências das cópulas selecionadas para cada mês.	53
Tabela 6 - Probabilidade conjunta (Precipitação máxima > 10mm, Temperatura máxima > 30°C).....	63
Tabela 7 - Probabilidade conjunta (Precipitação máxima > 40mm,	64

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	11
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	13
2.1 Precipitação	13
2.2 Temperatura	13
2.3 Cópulas.....	14
2.4 Distribuição Valor Extremo Univariada	15
3 METODOLOGIA.....	16
4 CÓPULAS	18
4.1 Introdução.....	18
4.2 Teoremas e Propriedades	18
4.3 Distribuição conjunta via cópula	19
4.4 Rotação	20
4.5 Cópulas utilizadas.....	20
4.5.1 Cópula de Clayton.....	21
4.5.2 Cópula de Gumbel	21
4.5.3 Cópula de Joe	21
4.5.4 Cópula t.....	22
5 DISTRIBUIÇÃO VALOR EXTREMO	23
5.1 Introdução.....	23
5.2 Definição e propriedades	23
5.3 Estimação de Máxima Verossimilhança	24
5.3.1 Estimação Pontual	24
5.3.2 Estimação por Intervalos.....	24
6 RESULTADOS	26
6.1 Distribuições marginais.....	26
6.1.1 Estatística descritiva das marginais	26

6.1.2 Inferência das marginais	27
6.1.3 Análise gráfica dos ajustamentos das distribuições marginais.....	29
6.1.3.1 Precipitação máxima	29
6.1.3.2 Temperatura máxima	41
6.2 Distribuições conjuntas via cópula.....	52
6.2.1 Cópulas selecionadas	53
6.2.2 Inferência da distribuição conjunta via cópula.....	53
6.2.3 Visualização gráfica das distribuições conjuntas via cópula	56
6.2.4 Cálculos de probabilidades através das distribuições conjuntas via cópula	63
7 CONCLUSÕES	66
REFERÊNCIAS.....	67

1 INTRODUÇÃO

A precipitação e a temperatura são duas das variáveis meteorológicas mais influentes e sua interação desempenha um papel fundamental na formação de eventos climáticos extremos e suas consequências, como tempestades de granizo, vendavais, ondas de calor, enchentes, secas e deslizamentos de terra, que causam danos significativos à população, aos animais, à vegetação, à economia e à infraestrutura e tem exigido atenção contínua dos órgãos brasileiros de defesa civil nos últimos anos. Outra área bastante afetada é a produção agrícola, que é fortemente suscetível a condições climáticas extremas.

A interdependência entre as variáveis climáticas pode ter um impacto mais severo no clima do que o efeito de cada variável isoladamente, afetando o ecossistema, a agricultura e a sociedade, conseqüentemente. Por exemplo, Mishra et al. (2012) e AghaKouchak et al. (1981) descobriram que os impactos dos eventos de seca e calor nos Estados Unidos aumentaram significativamente quando ocorreram simultaneamente. Devido a isso, faz-se necessário compreender a complexa relação entre essas duas variáveis, para prever e analisar padrões climáticos e suas possíveis evoluções.

Até alguns anos atrás, a interdependência entre temperatura e precipitação era difícil de analisar e simular com precisão o seu comportamento conjunto, uma vez que a modelagem desses eventos é complexa e os recursos computacionais existentes na época para este tipo de análise eram escassos, o que mudou muito após a evolução tecnológica ocorrida recentemente.

Para levar em conta a dependência entre a temperatura e os processos de precipitação, é necessária uma modelagem de distribuição multivariada. Essa modelagem é melhor quando se utiliza cópulas, pois proporcionam maior flexibilidade tanto nas distribuições marginais quanto na estrutura de dependência e podem medir qualquer tipo de dependência (Dzupire, Ngare, Odongo, 2020).

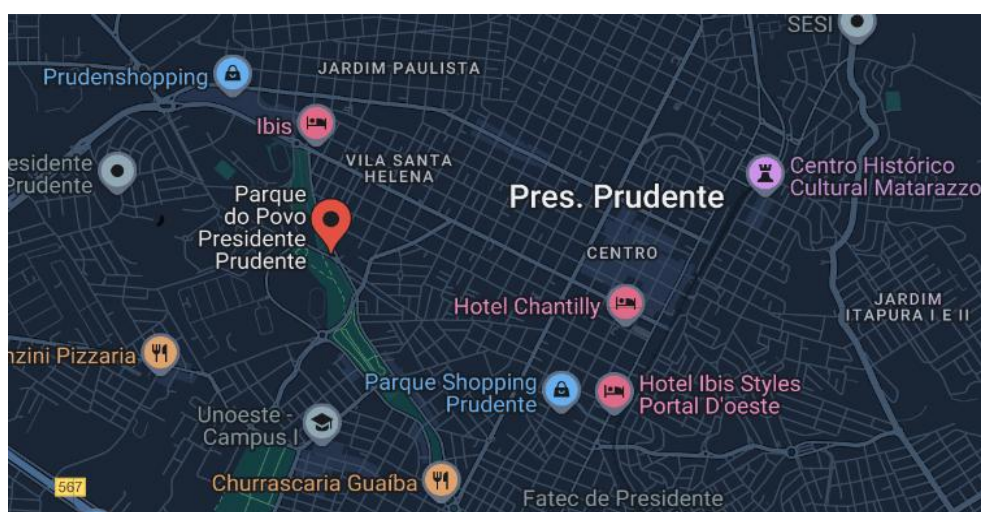
Cópulas são ferramentas ótimas que capturam e modelam as estruturas de dependência entre variáveis, ao combinar suas distribuições marginais, formando assim uma distribuição conjunta. As cópulas têm se tornado um enfoque de interesse na pesquisa de interações entre diversas variáveis hidroclimáticas e na pesquisa de prevenção de desastres.

Esse estudo será feito em Presidente Prudente, considerada polo regional que abriga universidades, dentre as quais a sede da Faculdade de Ciências e Tecnologia/UNESP, serviços de saúde, aeroporto estadual, dentre outras características econômicas e urbanas. Assim, é considerado um município de grande relevância econômica para a região oeste do Estado de São Paulo, sendo classificado como “Capital Regional C”, de acordo com os dados do IBGE (2020).

O objetivo geral deste trabalho é aplicar técnicas estatísticas, como a construção de uma distribuição bivariada baseada na teoria de cópulas, para analisar a variabilidade da temperatura e precipitação pluviométrica, visando a fornecer as probabilidades de ocorrência conjunta de níveis máximos.

Os dados meteorológicos de temperatura e precipitação máximas utilizados no estudo foram obtidos do site do projeto POWER da NASA, do período de janeiro de 1981 a dezembro de 2023. Como é necessário selecionar um ponto da cidade, a análise será focada no Parque do Povo, área verde mais ampla e próxima do centro da cidade, perto de pontos importantes como um shopping center, UNESP e comércios locais, além de ser um ponto turístico da cidade. E, também, por ser uma área que requer atenção em tempo de chuva, por ter histórico de alagamento e inundação, uma vez que é um parque linear ao longo do Córrego do Veado, com trechos com canalização fechada. A Figura 1 ajuda no esclarecimento dos pontos comentados acima.

Figura 1 - Mapa de Presidente Prudente-SP destacando o Parque do Povo.



Fonte: Google Maps, 2024.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesse estudo faz-se necessário entender as duas variáveis meteorológicas envolvidas: precipitação e temperatura, ambas cruciais para compreender a dinâmica climática e meteorológica da Terra. O entendimento dessas variáveis é essencial para diversas aplicações, desde previsões meteorológicas até o planejamento agrícola, gestão de recursos hídricos e estudos de mudanças climáticas, por exemplo.

Além dessas variáveis, iremos abordar também o estudo da distribuição univariada de Valor Extremo (Gumbel) para modelagem de eventos extremos e mais sobre a teoria de cópulas.

2.1 Precipitação

A precipitação ocorre quando a força gravitacional supera a força que mantém a umidade suspensa no ar e, então, essa atinge o solo em forma líquida ou sólida (Torres, Machado, 2011). Ela inclui chuva, neve, granizo, orvalho, entre outros. Medida tipicamente em milímetros, a precipitação é um componente crítico do ciclo hidrológico, influenciando diretamente a disponibilidade de água doce, a umidade do solo, os caudais dos rios e, conseqüentemente, os ecossistemas e a agricultura.

A caracterização da precipitação pluvial constitui um importante elemento de apoio para realização de obras hidráulicas, planejamento e gestão de recursos hídricos e nas atividades da defesa civil e da população em geral. Dentre as características de grande interesse das precipitações está o estudo da distribuição da precipitação pluvial máxima. Com esse conhecimento pode-se planejar e agir para se evitar problemas como: erosão do solo, inundações em áreas rurais e urbanas, queda agrícola, danificações de estradas, prejuízos em projetos de obras hidráulicas, danos em sistemas de drenagem, dentre outros (Vieira et al., 1991).

2.2 Temperatura

A temperatura pode ser definida em termos do movimento de moléculas, de modo que quanto mais rápido o deslocamento mais elevado será a temperatura. Comumente ela é definida em termos relativos tomando-se por base o grau de calor

que um corpo possui (Ayoade, 2007). As variações de temperatura influenciam não apenas a meteorologia diária, mas também os padrões climáticos a longo prazo.

Normalmente medida em graus Celsius ($^{\circ}\text{C}$) ou Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$), a temperatura do ar influencia diversos processos físicos e biológicos na Terra. E suas variações afetam a evaporação da água, os padrões de circulação atmosférica e oceânica e a distribuição de ecossistemas e espécies.

2.3 Cópulas

A modelagem conjunta de temperatura e precipitação pluvial é uma abordagem crucial para compreender as complexas interações entre essas variáveis climáticas e a teoria de cópulas tem se destacado como uma ferramenta poderosa, como em ***A new statistical distribution derived from a Clayton copula for modeling bivariate processes*** (Azad, Poonia, 2023), no qual foi introduzida uma distribuição Teissier exponenciada bivariada, modelada com base na cópula de Clayton. Para a estimação dos parâmetros, utilizaram técnicas de máxima verossimilhança e inferência. Os resultados sugerem que essa técnica é eficaz para modelar processos hidrológicos e estimar probabilidades de eventos climáticos extremos.

Já em ***A copula based bi-variate model for temperature and rainfall processes*** (Dzupire, Ngare, Odongo, 2020), uma abordagem alternativa é adotada para modelar a relação entre chuvas e temperaturas, utilizando a cópula de Frank, da família Arquimediana. Os resultados mostram uma correlação positiva entre temperatura e precipitação, confirmada pelo teste de correlação tau de Kendall. O modelo bivariado desenvolvido foi capaz de simular dados de temperatura média diária e precipitação diária que refletiram o comportamento real dos dados observados.

Em ***The interdependence between rainfall and temperature: copula analyses*** (Brady, Cong, 2012) foi destacada a importância da precipitação e da temperatura na produção agrícola, especialmente diante das mudanças climáticas. Para analisar sua distribuição conjunta, foram utilizados cinco modelos de cópulas, com foco na província agrícola de Scania, na Suécia. Os resultados revelam correlações negativas entre precipitação e temperatura em determinados meses. A cópula t é identificada como a mais adequada e sua aplicação permite simular simultaneamente temperatura e precipitação.

Esses estudos reforçam a importância de usar cópulas para facilitar a modelagem dessas variáveis meteorológicas, comprovando sua eficácia e fornecendo uma base para o presente estudo.

2.4 Distribuição Valor Extremo Univariada

Muitos estudos evidenciam que a distribuição de probabilidade Valor Extremo é a que melhor se ajusta aos fenômenos meteorológicos extremos, como a precipitação pluvial e a temperatura máxima.

Em Ferreira et al. (2005) foi confirmado que a distribuição Gumbel foi bem ajustada para os dados de precipitação máxima em 165 localidades no Estado de São Paulo. Mello e Silva (2005) também ajustaram a distribuição Gumbel à série histórica da precipitação máxima diária anual da região Alto Rio Grande. Eles usaram um modelo de chuva-vazão para analisar como os parâmetros da distribuição de Gumbel afetavam a estimativa da equação de chuvas intensas. Os métodos de estimação utilizados foram máxima verossimilhança e momentos.

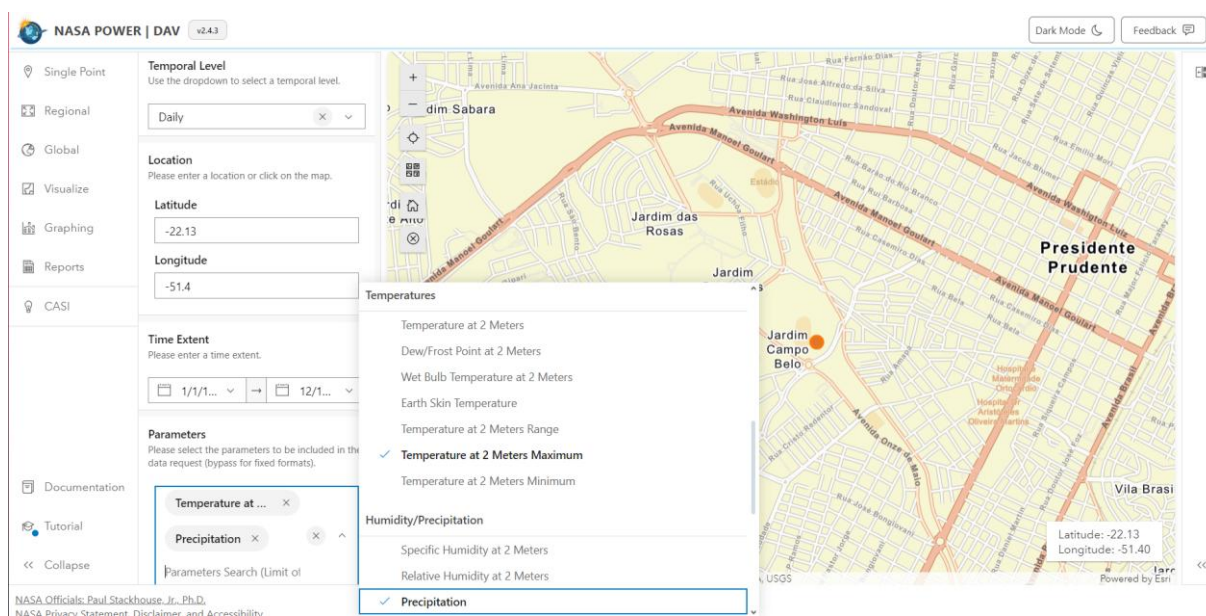
Sansigolo (2008) comparou o ajuste de várias distribuições de probabilidade (Normal, Gumbel, Fréchet, Weibull, Log-Normal e Pearson) aos dados de precipitação máxima diária e temperaturas máximas absolutas coletados na cidade de Piracicaba, SP (1917-2006), e concluiu que a distribuição Gumbel apresentou o melhor ajuste.

3 METODOLOGIA

Inicialmente, foi necessário o estudo da distribuição Valor Extremo Univariada (Gumbel) para modelagem de eventos extremos e da teoria de cópulas e suas aplicações práticas.

Para a obtenção dos dados de temperatura e precipitação máximas foi usado o site <https://power.larc.nasa.gov/beta/data-access-viewer/>, do projeto da NASA chamado POWER (Providing Overviews of World Energy Resources), mostrado na Figura 2.

Figura 2 - Print do site POWER da NASA.



Fonte: POWER(NASA), 2024. Disponível em: <https://power.larc.nasa.gov/beta/data-access-viewer/>. Acesso em: 30 jul. de 2024.

Por meio do site, foi possível selecionar um ponto da cidade desejado para a pesquisa. Neste estudo foi escolhida a localização do Parque do Povo, latitude -22.13 e longitude -51.40, pertencente à cidade de Presidente Prudente, São Paulo, Brasil.

Após selecionar o ponto, foram decididos o nível temporal (diário), os parâmetros (precipitação e temperatura máxima a dois metros) e período desejado (janeiro de 1981 a dezembro de 2023). Os valores diários dos dados meteorológicos são fornecidos em formato de série temporal e são captados através de satélites.

Foi utilizado o software estatístico R para selecionar os valores extremos (máximas) mensais dos dados de precipitação e temperatura constituindo as doze séries mensais estudadas. Após isso, as análises (descritiva, inferencial e gráfica)

univariadas foram realizadas, utilizando-se o pacote “maxLik” para estimar a máxima verossimilhança das distribuições marginais, o que permitiu o uso de métodos de cálculo numérico para obtenção dos estimadores dos parâmetros de forma aproximada.

Após a definição das marginais, foi necessário definir as cópulas. Para selecionar as que melhor se ajustavam para cada mês foi utilizado o pacote “VineCopula”, que estimou os parâmetros das cópulas também.

Em sequência, a distribuição bivariada foi construída e seus parâmetros foram estimados através do comando “optim”, obtendo-se as densidades conjuntas para os dozes meses e determinando algumas probabilidades de ocorrência conjunta de níveis máximos de precipitação e temperatura.

4 CÓPULAS

4.1 Introdução

Cópuas são capazes de capturar muitas estruturas de dependência diferentes de duas ou mais variáveis aleatórias. Uma interpretação simples é pensar em uma cópula como uma "ligação" que une as distribuições marginais de diferentes variáveis aleatórias para formar uma distribuição conjunta. Ela captura a estrutura de dependência entre as variáveis, independentemente das distribuições marginais individuais (Nelsen, 2006).

A teoria de cópuas tem como propósito estudar a relação de dependência removendo todo o efeito de associação da distribuição. Isto é viável assumindo que as distribuições marginais são conhecidas (Hougaard, 2001).

4.2 Teoremas e Propriedades

Teorema 1 (Teorema de Sklar). Seja F uma função de distribuição p -dimensional com marginais F_1, F_2, \dots, F_p . Então existe uma cópula C_α tal que para todo $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^P$:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_p) = C_\alpha[F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_p(x_p)]. \quad (1)$$

Se F_1, F_2, \dots, F_p são contínuas, então a cópula é única. Inversamente, se C_α são uma cópula e F_1, F_2, \dots, F_p são funções de distribuição, então a função F definida acima é uma função de distribuição p -dimensional com marginais F_1, F_2, \dots, F_p .

Teorema 2. Seja C_α definida como uma cópula,

i) C_α satisfaz a condição de Lipschitz:

$$|C_\alpha(u_1, u_2) - C_\alpha(v_1, v_2)| \leq |u_1 - v_1| + |u_2 - v_2|, \text{ para } u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0, 1]. \quad (2)$$

ii) C_α é uniformemente contínua em $[0, 1]^2$.

iii) As derivadas parciais,

$$\frac{\partial}{\partial u_1} C_\alpha(u_1, u_2) \in [0, 1] \text{ e } \frac{\partial}{\partial u_2} C_\alpha(u_1, u_2) \in [0, 1], \quad (3)$$

são limitadas e existem para cada par $(u_1, u_2) \in [0, 1]^2$.

Propriedades

Se o vetor de variáveis aleatórias contínuas (x_1, x_2, \dots, x_p) possui cópula C_α , então estes serão independentes se, e somente se,

$$C_\alpha[F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_p(x_p)] = \prod_{j=1}^p u_j. \quad (4)$$

Se x_1, x_2, \dots, x_p tem cópula C_α e y_1, y_2, \dots, y_p são funções contínuas e crescentes, então $Y(x_1), Y(x_2), \dots, Y(x_p)$ também tem cópula C_α , ou seja, sob transformações contínuas e crescentes das marginais, a estrutura de dependência é invariante.

$$\begin{aligned} & C_\alpha[F_1(Y_1(x_1)), F_2(Y_2(x_2)), \dots, F_p(Y_p(x_p))] \\ &= P[U_1 \leq F_1(Y_1(x_1)), U_2 \leq F_2(Y_2(x_2)), \dots, U_p \leq F_p(Y_p(x_p))] \\ &= P[F_1^{-1}(Y_1(U_1)) \leq x_1, F_2^{-1}(Y_2(U_2)) \leq x_2, \dots, F_p^{-1}(Y_p(U_p)) \leq x_p] \\ &= P[Y_1(X_1) \leq x_1, Y_2(X_2) \leq x_2, \dots, Y_p(X_p) \leq x_p] \\ &= C_\alpha[F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_p(x_p)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Os limites de Fréchet como cópulas para funções de distribuições bivariadas são:

$$\max\{F_1(x_1), +F_2(x_2) - 1\}. \quad (6)$$

em termos de cópulas temos como resultado:

$$\max\{u_1 + u_2 - 1, 0\} \leq C_\alpha\{u_1, u_2\} \leq \min\{u_1, u_2\}; u_1, u_2 \in [0, 1]. \quad (7)$$

isto é verdade, pois:

$$0 \leq P[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2] \leq P[X_j \leq x_j]; j = 1, 2 \quad (8)$$

e também,

$$F_1(x_1, x_2) = S_1(x_1, x_2) + F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1 \geq F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1. \quad (9)$$

4.3 Distribuição conjunta via cópula

Para um caso bivariado, de acordo com o teorema de Sklar, se duas variáveis

aleatórias X e Y seguem funções de distribuição marginal arbitrárias $F_X(x)$ e $F_Y(y)$, respectivamente, então existe uma cópula C que combina essas duas marginais para obter a função de distribuição conjunta $F_{X,Y}(x, y)$, dada por:

$$F_{X,Y}(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y)) \quad (10)$$

A densidade conjunta $f_{(X,Y)}(x, y)$ pode ser escrita em termos da densidade da cópula, que é $c(u_1, u_2) = \frac{d^2 C(u_1, u_2)}{du_1 du_2}$, e das densidades marginais, $f_X(x)$ e $f_Y(y)$, como:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)c(F_X(x), F_Y(y)) \quad (11)$$

Especificar a dependência entre X e Y é o mesmo que especificar a dependência entre U_1 e U_2 , portanto o problema se reduz a especificar uma distribuição bivariada entre duas variáveis uniformes, ou seja, uma cópula.

4.4 Rotação

Para cópulas bivariadas é possível transformar uma ou duas variáveis u, v em $1 - u$ ou $1 - v$, rotacionando a cópula em 90° , 180° ou 270° (Almeida, 2021), o que permite que uma cópula originalmente assimétrica capture dependências específicas tanto na cauda superior como na inferior. Essa abordagem amplia a flexibilidade das cópulas, especialmente as arquimedianas (como Clayton, Gumbel e Joe).

Segundo De Luca e Riviaccio (2023), ao rotacionar uma cópula em 180° , obtém-se a cópula de sobrevivência correspondente ($C^{180}(u, v) = 1 - u - v + C(1 - u, 1 - v)$). As rotações de 90° e 270° permitem modelar dependência negativa e essas cópulas são dadas por:

$$C^{90}(u, v) = v - C(1 - u, v) \text{ e } C^{270}(u, v) = u - C(u, 1 - v) \quad (12)$$

4.5 Cópulas utilizadas

Existem vários tipos diferentes de funções cópula que podem ser usadas para modelar a relação entre precipitação e temperatura. Algumas das funções cópula mais comumente usadas incluem a cópula Gaussiana, a cópula t , a cópula de Clayton e a cópula de Gumbel (De Luca, Riviaccio, 2023).

Abaixo estão as copulas que serão utilizadas nesse estudo, com suas formas utilizando as marginais uniformes $U[0,1]$.

4.5.1 Cópula de Clayton

A cópula de Clayton foi introduzida por David George Clayton (Clayton, 1978) no contexto da análise de sobrevivência, e é uma cópula arquimediana assimétrica, que captura dependência de cauda inferior e não permite dependência negativa entre as distribuições marginais (quando rotacionada permite).

Tem sua forma dada por:

$$C_{\theta}(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}, \theta \in (0, \infty) \quad (13)$$

onde θ é o parâmetro de dependência. Quando $\theta = 0$ temos independência, enquanto $\theta \rightarrow \infty$ implica dependência positiva perfeita.

4.5.2 Cópula de Gumbel

A cópula de Gumbel foi criada por Emil Julius Gumbel (Gumbel, 1960), é amplamente utilizada para modelar eventos climáticos extremos e é ideal para modelar dependência de cauda superior. A forma é dada por:

$$C(u, v) = \exp\left(-\left(\left(-\ln u\right)^{\theta} + \left(-\ln v\right)^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right), \theta \in [1, \infty) \quad (14)$$

onde θ é o parâmetro de dependência e quanto maior o seu valor, mais forte é a dependência entre as variáveis. Se $\theta = 1$ as variáveis são independentes.

4.5.3 Cópula de Joe

A cópula de Joe, introduzida por Harry Joe em 1997, é outra cópula arquimediana que modela dependência de cauda superior. A sua forma é dada por:

$$C(u, v) = 1 - \left[(1-u)^{\theta} + (1-v)^{\theta} - (1-u)^{\theta}(1-v)^{\theta} \right]^{\frac{1}{\theta}}, \theta \in [1, \infty) \quad (15)$$

onde θ é o parâmetro de dependência.

4.5.4 Cópula t

A cópula t ficou mais conhecida após o artigo de Demarta e McNeil (2005), é pertencente à família das cópulas elípticas e possui dependência de cauda, capturando eventos extremos de forma simétrica. E é dada por:

$$C(u, v) = t_{g,p} \left(t_g^{-1}(u), t_g^{-1}(v) \right) \quad (16)$$

onde $t_{g,p}$ é a função de distribuição cumulativa da distribuição t bivariada com g graus de liberdade e coeficiente de correlação p . E t_g^{-1} é a inversa da função de distribuição cumulativa da t univariada com g graus de liberdade.

5 DISTRIBUIÇÃO VALOR EXTREMO

5.1 Introdução

A Distribuição Valor Extremo é amplamente usada em previsões de eventos extremos, tais como: inundação, previsões de terremotos, economia, meteorologia e vários outros.

É também muito utilizada em problemas de confiabilidade e testes de sobrevivência, sendo usada em testes de falhas para produtos manufaturados e circuitos elétricos.

A distribuição Gumbel, também conhecida como distribuição valor extremo, surge como distribuição limite para máximos ou mínimos (valores extremos) de uma amostra de variáveis aleatórias independentes, identicamente distribuídas, quando o tamanho da amostra aumenta.

Existem basicamente duas formas da distribuição valor extremo. A primeira, ou Tipo I, está relacionada com valores mínimos e a segunda, Tipo II, com valores máximos.

Tal distribuição de probabilidade é comumente chamada de distribuição Gumbel, Tipo I ou Tipo II, respectivamente, em homenagem ao alemão Emil Julius Gumbel (1891-1966) que foi pioneiro na aplicação da Teoria do Valor Extremo, particularmente em Climatologia e Hidrologia.

5.2 Definição e propriedades

Seja X uma variável aleatória que represente um comportamento extremo. A distribuição Gumbel (valor extremo Tipo II) para valores máximos tem a função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x|\phi, \varphi) = \frac{1}{\varphi} \exp \left\{ -\frac{x - \phi}{\varphi} - \exp \left\{ -\frac{x - \phi}{\varphi} \right\} \right\} \quad (17)$$

para $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < \phi < +\infty$ e $\varphi > 0$, onde ϕ é o parâmetro de posição e φ é o parâmetro de escala.

A probabilidade P de que ocorra uma precipitação pluvial máxima maior que um certo valor x , que também é a função de sobrevivência da distribuição Gumbel, é dada por:

$$P = P(X > x) = 1 - \exp\left\{-\exp\left\{-\frac{x - \phi}{\varphi}\right\}\right\}, \quad (18)$$

em que x é a precipitação máxima do período e $0 < x < +\infty$.

O nível de retorno associado ao período de retorno T é dado por:

$$x_p = \phi - \varphi \log[-\log(1 - P)]. \quad (19)$$

5.3 Estimação de Máxima Verossimilhança

5.3.1 Estimação Pontual

Considerando uma amostra aleatória x_1, x_2, \dots, x_n obtida da distribuição Gumbel, a função de verossimilhança para os parâmetros ϕ e φ é simplesmente o produto das densidades de cada uma das observações na amostra, dada então por:

$$L(\phi, \varphi | x) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\varphi} \exp\left\{-\frac{x_i - \phi}{\varphi} - \exp\left\{-\frac{x_i - \phi}{\varphi}\right\}\right\} \quad (20)$$

O estimador de máxima-verossimilhança é obtido como segue. A função log-verossimilhança é dada por:

$$l(\phi, \varphi | x) = -n \log \varphi - \frac{n}{\varphi} (\bar{x} - \phi) - \sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{x_i - \phi}{\varphi}\right) \quad (21)$$

estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\phi}$ e $\hat{\varphi}$ são obtidos resolvendo as equações de verossimilhança $\frac{\partial l}{\partial \phi} = 0$ e $\frac{\partial l}{\partial \varphi} = 0$ simultaneamente.

Uma vez que estas equações não podem ser resolvidas analiticamente para $\hat{\phi}$ e $\hat{\varphi}$, um método numérico deve ser utilizado, por exemplo, Método de Newton-Raphson.

5.3.2 Estimação por Intervalos

A estimação com intervalos de confiança para os parâmetros do modelo pode ser obtida pela aproximação normal assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança, isto é:

$$\begin{pmatrix} \hat{\phi} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix} \sim N_2 \left(\begin{pmatrix} \phi \\ \varphi \end{pmatrix}, I^{-1}(\hat{\phi}, \hat{\varphi}) \right) \quad (22)$$

para $n \rightarrow \infty$, onde $I^{-1}(\hat{\phi}, \hat{\varphi})$ é a matriz de Informação de Fisher dada por:

$$I^{-1}(\hat{\phi}, \hat{\varphi}) = \begin{bmatrix} \frac{n}{\varphi^2} & -\frac{n}{\varphi^2} [1 + \psi(1)] \\ -\frac{n}{\varphi^2} [1 + \psi(1)] & \frac{n}{\varphi^2} [1 + \psi(2) + \psi^2(2)] \end{bmatrix} \quad (23)$$

e $\psi(k)$ é a função digama $\psi(k) = \frac{d}{dk} \Gamma(k)$, conforme definido em Lawless (1982).

Assim, as regiões de confiança conjunta aproximadas para ϕ e φ podem ser obtidas. Intervalos de confiança individuais aproximados para os parâmetros ϕ e φ com coeficiente de confiança $100(1 - \alpha)\%$ são dados por:

$$\hat{\varphi} - z_{\alpha/2} \sqrt{\text{Var}(\hat{\varphi})} < \varphi < \hat{\varphi} + z_{\alpha/2} \sqrt{\text{Var}(\hat{\varphi})} \quad (25)$$

6 RESULTADOS

6.1 Distribuições marginais

Neste primeiro momento, tem-se os resultados obtidos para as distribuições marginais, como os estimadores, seus desvios-padrão, intervalos de confiança de 95%, além dos gráficos e dos ajustes da distribuição Gumbel, que está sendo testada como marginal para ambas as variáveis.

6.1.1 Estatística descritiva das marginais

A Tabela 1 apresenta as estatísticas descritivas das variáveis temperatura e precipitação máximas, organizadas mensalmente. Para cada mês, são mostrados valores mínimos, máximos, mediana, média e os quartis, permitindo uma análise inicial da variabilidade e distribuição dos dados. Essas estatísticas oferecem uma visão geral dos padrões climáticos locais, fornecendo uma base sólida para as análises posteriores do estudo.

Tabela 1 - Estatísticas descritivas das variáveis.

Variáveis	Temperatura máxima						Precipitação máxima					
	Valor mínimo	1° Quartil	Mediana	Média	3° Quartil	Valor máximo	Valor mínimo	1° Quartil	Mediana	Média	3° Quartil	Valor máximo
Janeiro	30.26	32.28	33.97	34.24	35.91	39.10	16.30	24.27	30.93	34.38	42.23	66.04
Fevereiro	29.76	31.48	32.62	33.08	33.80	38.58	4.96	17.16	27.30	26.24	32.33	56.76
Março	29.99	31.20	32.05	32.57	33.43	38.30	11.42	19.98	24.89	26.89	30.93	57.25
Abril	29.43	30.38	31.44	31.92	33.25	36.36	1.79	15.46	22.78	24.46	33.13	64.94
Maiο	27.56	29.25	30.23	30.41	31.12	33.82	1.27	13.54	25.84	25.52	32.88	53.57
Junho	25.37	28.07	29.51	29.29	30.65	32.48	0.06	8.67	14.64	19.15	23.82	69.57
Julho	27.29	29.41	30.83	30.69	31.92	34.03	0.00	4.25	10.45	14.69	19.23	66.40
Agosto	30.37	33.29	34.71	34.61	36.15	38.26	0.00	1.74	9.21	13.73	21.86	45.91
Setembro	30.01	35.85	37.47	37.13	38.73	42.43	2.37	13.04	19.43	23.82	29.43	115.05
Outubro	31.80	35.66	37.69	37.41	39.36	43.68	7.78	20.34	28.95	28.88	36.15	62.13
Novembro	31.72	34.37	36.49	36.58	38.41	42.98	6.37	18.43	25.70	29.06	39.48	65.75
Dezembro	29.76	34.02	35.87	35.63	37.15	41.43	14.59	20.46	29.09	31.03	36.12	72.78

Fonte: POWER(NASA), 2024. Organização: Leal (2024). Disponível em: <https://power.larc.nasa.gov/beta/data-access-viewer/>. Acesso em: 30 jul. de 2024.

Observa-se que os meses de maio a agosto apresentam temperaturas máximas mais amenas em comparação aos demais meses, o que está alinhado com

a estação de inverno em Presidente Prudente-SP, onde está localizado o Parque do Povo. Esse comportamento é evidenciado pelos menores valores médios de temperatura máxima, como em junho (29,05°C) e julho (30,06°C), além de valores mínimos registrados, como 25,37°C em junho. Por outro lado, os meses mais quentes, como outubro (média de 37,69°C) e novembro (média de 36,49°C), indicam a proximidade do verão e o aumento na intensidade da radiação solar.

Em relação à precipitação máxima, dezembro e janeiro se destacam como os meses mais chuvosos, com valores máximos que chegam a 66,04 mm e 72,78 mm, respectivamente, refletindo o pico da estação chuvosa. A média de precipitação nesses meses, superior a 30 mm, reforça a alta concentração de chuvas características do verão. Por outro lado, julho e agosto apresentam os menores valores de chuva, com valores mínimos de máximas que já chegaram a zero, ou seja, sem chuva alguma. A análise dos quartis também revela que, nesses meses, a maior parte dos eventos de precipitação ocorre em níveis baixos, evidenciando a baixa variabilidade nas chuvas do inverno.

O comportamento observado na tabela também evidencia a transição entre as estações ao longo do ano. Por exemplo, em abril e setembro, meses de transição entre verão/outono e inverno/primavera, respectivamente, os valores médios de temperatura e precipitação começam a se aproximar dos extremos observados nas estações principais. Esses padrões mensais de temperatura e precipitação refletem as condições climáticas típicas do oeste paulista, caracterizadas por um clima tropical com inverno seco e verão chuvoso.

6.1.2 Inferência das marginais

As Tabelas 2 e 3 mostram os valores dos estimadores, variâncias, desvios-padrão e intervalos de confiança de 95% para os parâmetros de cada distribuição.

Tabela 2– Inferências da variável precipitação usando a distribuição Gumbel.

Variáveis	Parâmetros	Estimador	Desvio Padrão	Intervalo de Confiança
Janeiro	ϕ_p	28.757909	1.515941	[25.786664; 31.72915]
	φ_p	9.521307	1.160668	[7.246399; 11.79622]
Fevereiro	ϕ_p	20.872059	1.562075	[17.810391; 23.93373]
	φ_p	9.975794	1.122228	[7.776227; 12.17536]
Março	ϕ_p	22.044571	1.38955	[19.321052; 24.76809]
	φ_p	8.309561	1.061286	[6.229440; 10.38968]

Variáveis	Parâmetros	Estimador	Desvio Padrão	Intervalo de Confiança
Abril	ϕ_p	18.250267	1.754127	[14.812179; 21.68836]
	φ_p	11.046777	1.318769	[8.461990; 13.63156]
Maio	ϕ_p	18.890887	1.906087	[15.154955; 22.62682]
	φ_p	11.673081	1.450315	[8.830464; 14.51570]
Junho	ϕ_p	18.002639	1.612817	[8.841517; 15.16176]
	φ_p	11.256687	1.384434	[6.534189; 13.97918]
Julho	ϕ_p	8.711708	1.448958	[5.871750; 11.55167]
	φ_p	9.148634	1.141545	[6.911206; 11.38606]
Agosto	ϕ_p	7.727539	1.503731	[4.780227; 10.67485]
	φ_p	9.611978	1.240008	[5.118546; 12.04239]
Setembro	ϕ_p	16.691311	1.772417	[13.217373; 20.16558]
	φ_p	11.135261	1.372908	[8.444360; 13.82616]
Outubro	ϕ_p	23.17412	1.77359	[19.697883; 26.65036]
	φ_p	10.383653	1.230674	[7.971532; 12.79577]
Novembro	ϕ_p	23.038892	1.7446	[19.619475; 26.45831]
	φ_p	10.594255	1.258049	[8.128479; 13.06003]
Dezembro	ϕ_p	24.940941	1.503731	[21.993628; 27.88825]
	φ_p	9.695255	1.240008	[7.264839; 12.12567]

Fonte: POWER(NASA), 2024. Organização: Leal (2024). Disponível em: <https://power.larc.nasa.gov/beta/data-access-viewer/>. Acesso em: 30 jul. de 2024.

Tabela 3 - Inferências da variável temperatura usando a distribuição Gumbel.

Variáveis	Parâmetros	Estimador	Desvio-Padrão	Intervalo de Confiança
Janeiro	ϕ_t	33.10395	0.3247657	[32.46741; 33.74049]
	φ_t	2.018387	0.2403847	[1.547233; 2.489541]
Fevereiro	ϕ_t	32.16746	0.239861	[31.69733; 32.63759]
	φ_t	1.498952	0.1849995	[1.136353; 1.861551]
Março	ϕ_t	31.71273	0.2232852	[31.27509; 32.15037]
	φ_t	1.396688	0.174986	[1.053715; 1.739660]
Abril	ϕ_t	31.01563	0.2324813	[30.55996; 31.47129]
	φ_t	1.452643	0.1848355	[1.090365; 1.814920]
Maio	ϕ_t	29.62623	0.220886	[29.19329; 30.05917]
	φ_t	1.372564	0.16345	[1.052202; 1.692926]
Junho	ϕ_t	28.47474	0.2572745	[27.97048; 28.97899]
	φ_t	1.590219	0.1760862	[1.245090; 1.935348]
Julho	ϕ_t	29.93326	0.2366583	[29.46941; 30.39711]
	φ_t	1.462698	0.1636543	[1.141935; 1.783460]
Agosto	ϕ_t	33.59574	0.3162501	[32.97589; 35.21559]
	φ_t	1.953588	0.2216057	[1.519240; 2.387935]
Setembro	ϕ_t	35.69333	0.4953908	[34.72236; 36.66429]
	φ_t	2.033746	0.3202649	[2.406027; 3.661465]
Outubro	ϕ_t	36.0383	0.428884	[35.19769; 36.87892]
	φ_t	2.645079	0.298469	[2.060080; 3.230078]
Novembro	ϕ_t	35.32466	0.3661316	[34.60704; 36.04228]
	φ_t	2.274066	0.2667342	[1.751267; 2.796865]

Variáveis	Parâmetros	Estimador	Desvio Padrão	Intervalo de Confiança
Dezembro	ϕ_t	34.43031	0.3870282	[33.67173; 35.18888]
	φ_t	2.392435	0.2604648	[1.881924; 2.902946]

Fonte: POWER(NASA), 2024. Organização: Leal (2024). Disponível em: <https://power.larc.nasa.gov/beta/data-access-viewer/>. Acesso em: 30 jul. de 2024.

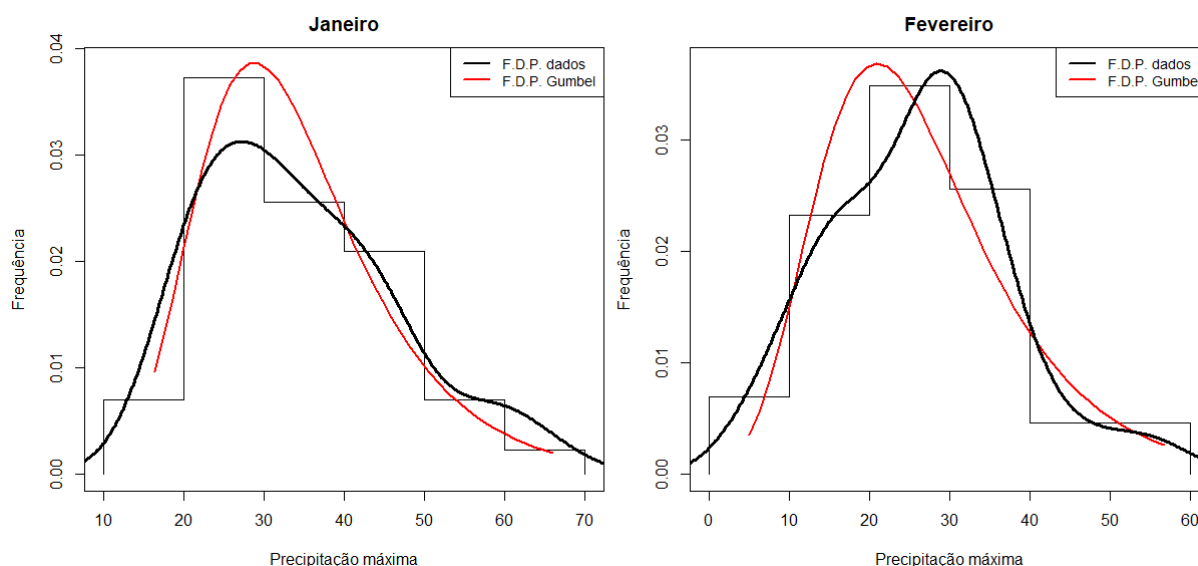
Os estimadores representam as melhores estimativas dos parâmetros com base nos dados, a variância e o desvio-padrão indicam a dispersão dos valores em torno da estimativa, e os intervalos de confiança fornecem uma faixa dentro da qual acreditamos que o verdadeiro valor do parâmetro se encontra com uma probabilidade de 95%. Essas informações são essenciais para entender a precisão e a confiabilidade das estimativas obtidas.

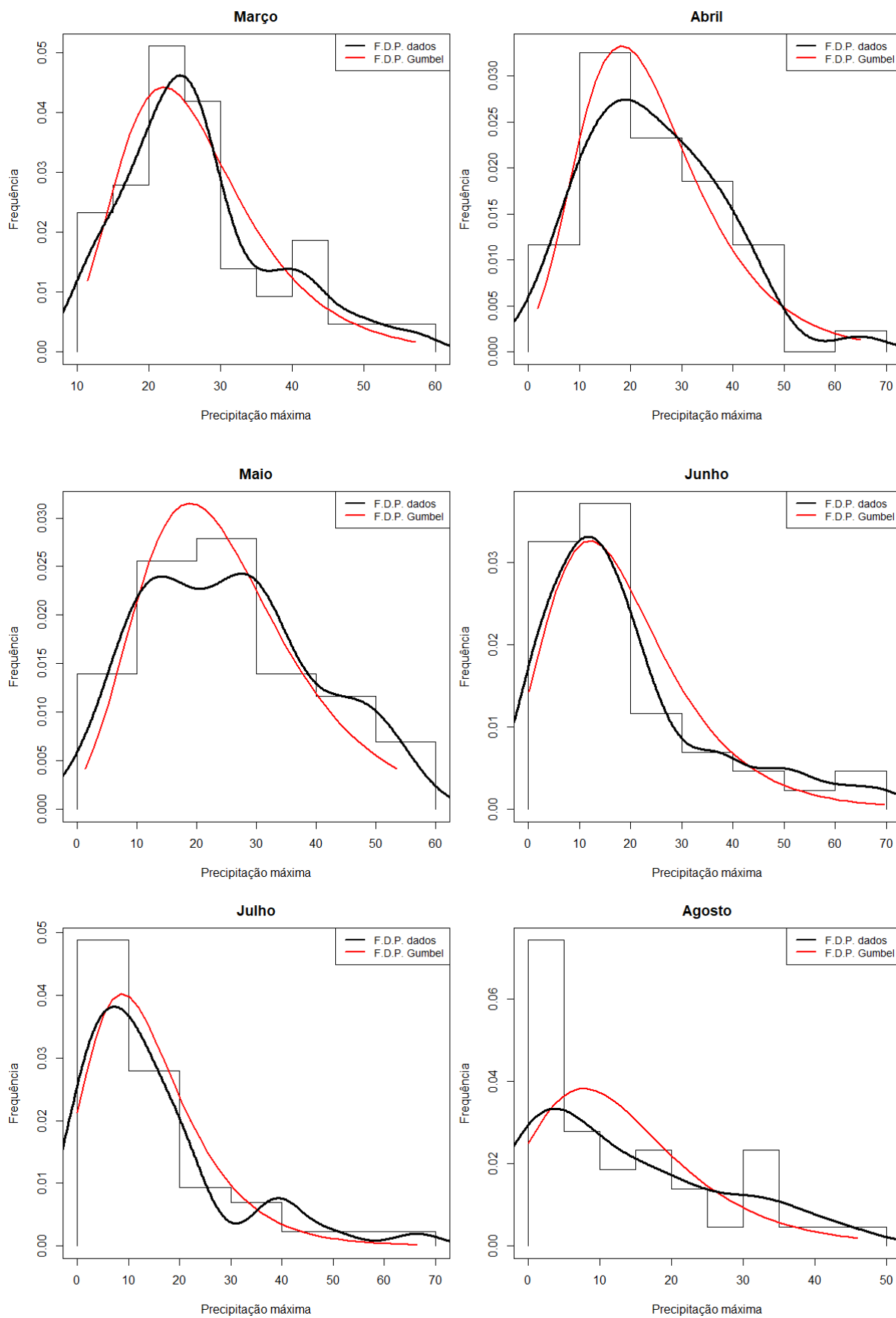
6.1.3 Análise gráfica dos ajustamentos das distribuições marginais

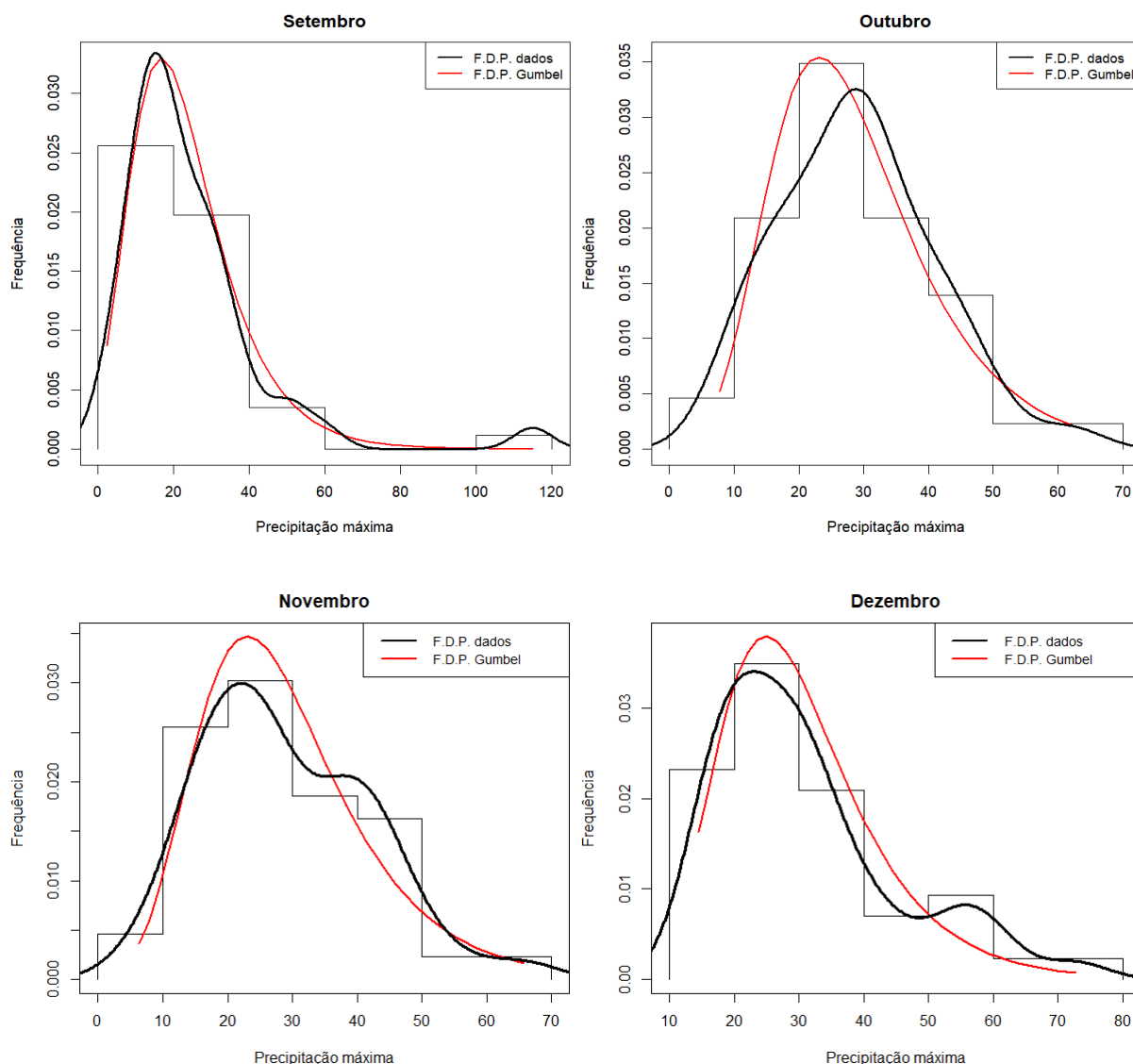
Para verificar o ajuste da distribuição Gumbel como marginal para as duas variáveis separadamente, diferentes gráficos foram gerados (histogramas, função de distribuição acumulada (FDA), função de sobrevivência, o gráfico de tempo total de teste (TTT-Plot) e função de risco) para cada mês, com o auxílio dos pacotes "survival", "muhaz" e "tplot", proporcionando uma visão clara da adequação da Gumbel aos dados.

6.1.3.1 Precipitação máxima

Figura 3 - Histogramas da precipitação máxima do Parque do Povo (Presidente Prudente-SP), de todos os meses, no período de janeiro de 1981 a dezembro de 2023.



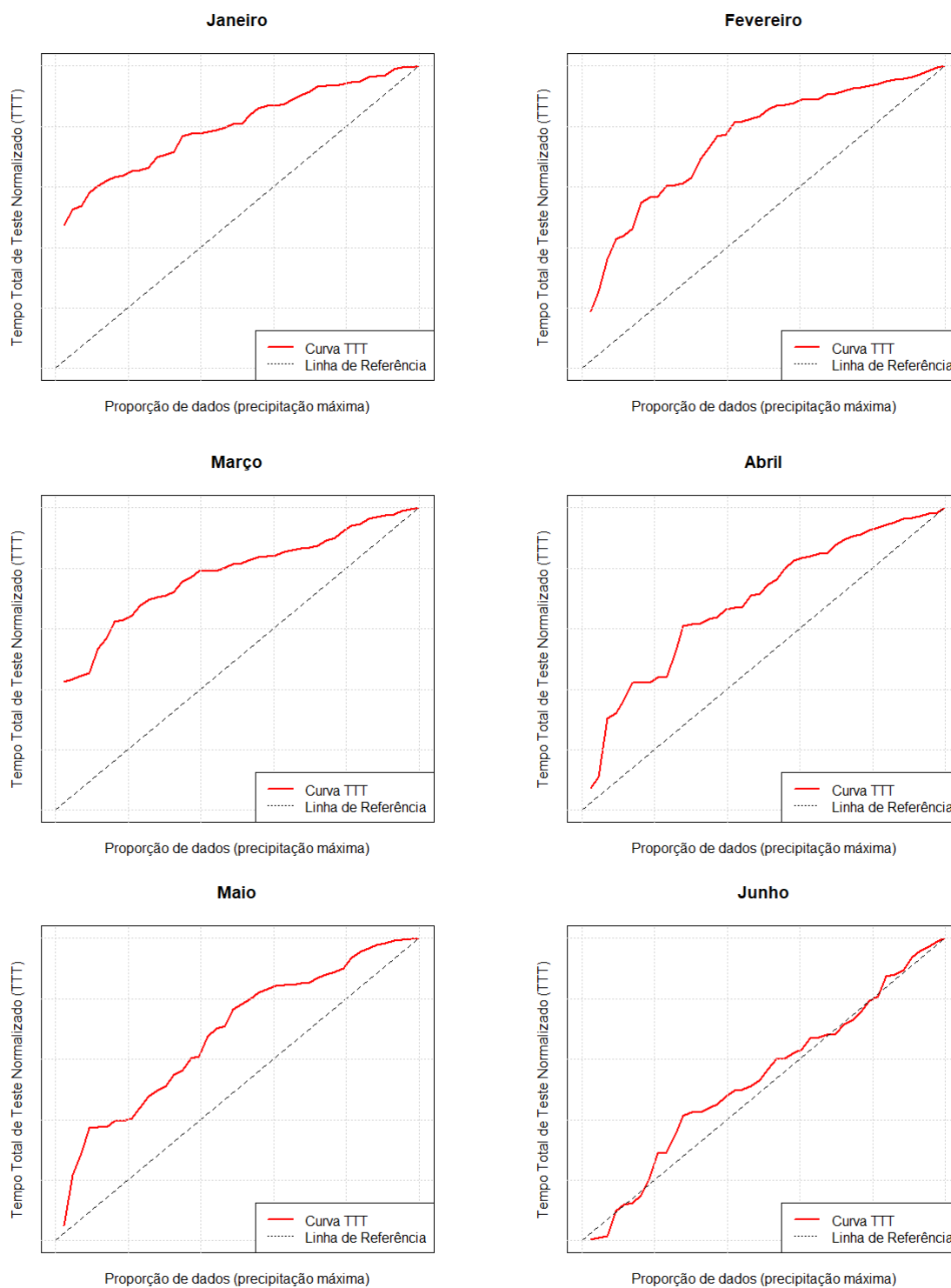


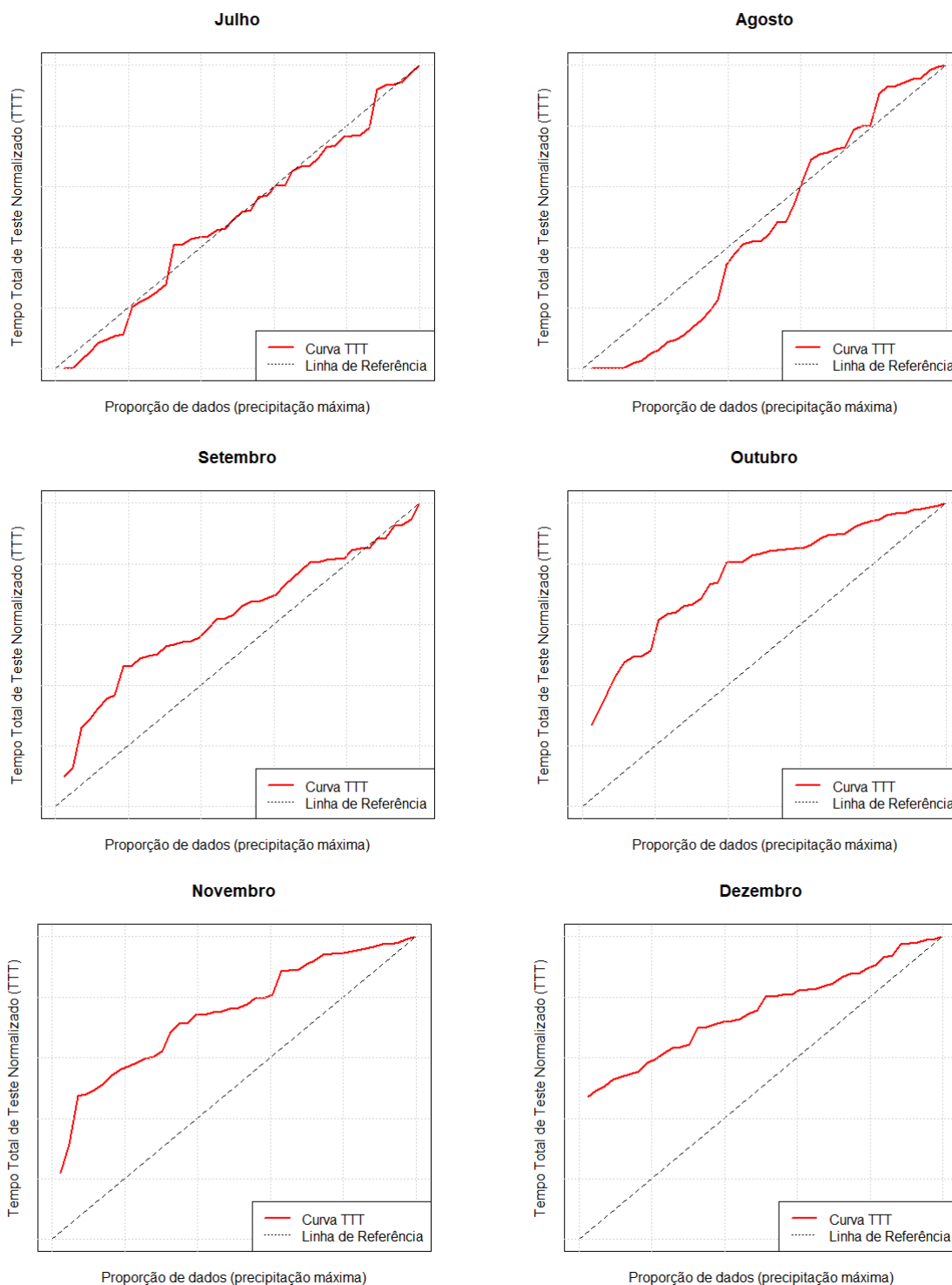


Fonte: POWER(NASA), 2024. Elaboração: Leal (2024). Disponível em: <https://power.larc.nasa.gov/beta/data-access-viewer/>. Acesso em: 30 jul. de 2024.

Os histogramas apresentam as distribuições das precipitações máximas para cada mês no período analisado. A curva de densidade dos dados (na cor preta) mostra a estimativa empírica, enquanto a curva na cor vermelha representa a densidade ajustada pela distribuição de Gumbel. Observa-se que a distribuição de Gumbel ajustou-se bem aos dados empíricos, capturando a tendência geral da precipitação máxima.

Figura 4: Gráficos do Tempo Total de Teste (TTT) da precipitação máxima do Parque do Povo (Presidente Prudente-SP), de todos os meses, no período de janeiro de 1981 a dezembro de 2023.



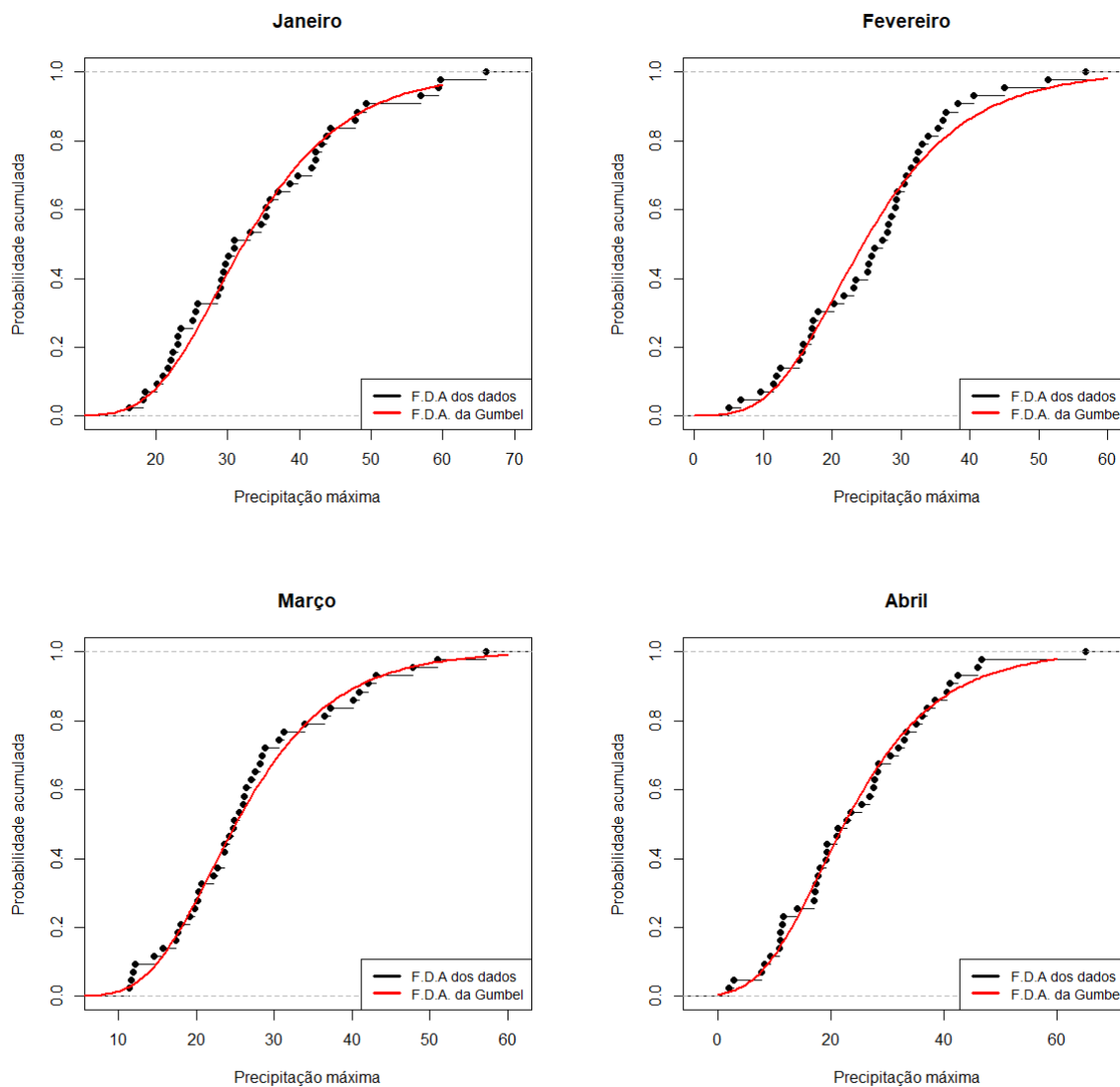


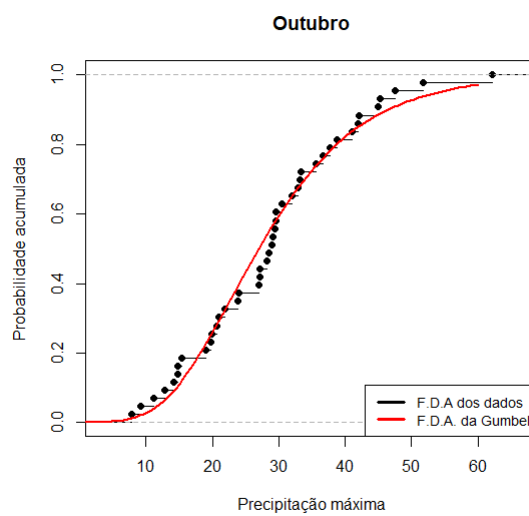
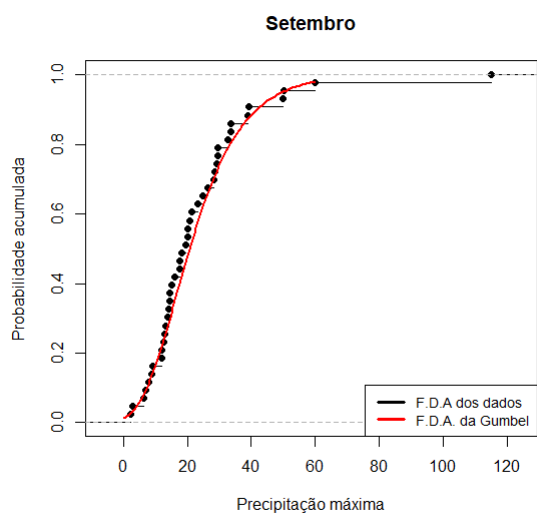
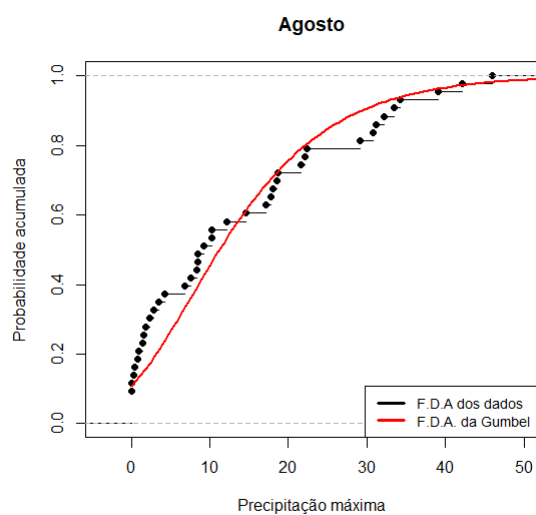
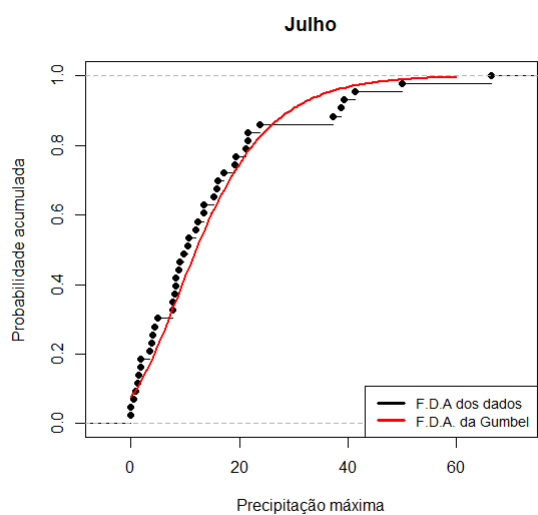
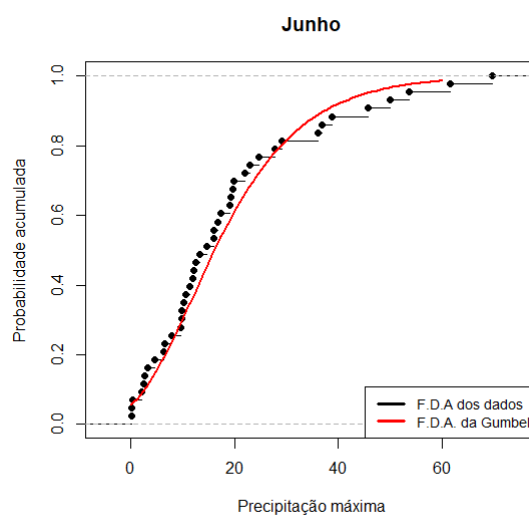
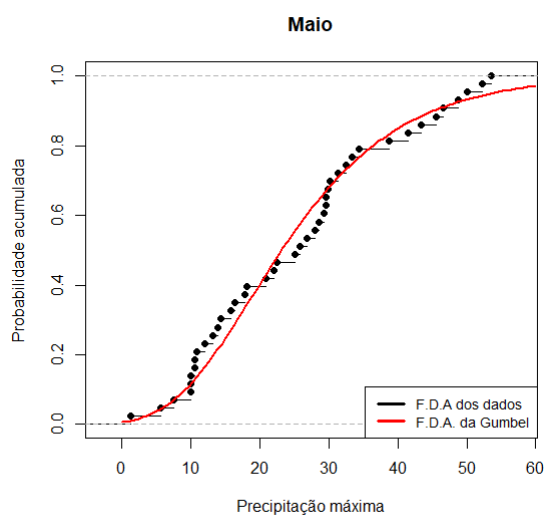
Fonte: POWER(NASA), 2024. Elaboração: Leal (2024). Disponível em: <https://power.larc.nasa.gov/beta/data-access-viewer/>. Acesso em: 30 jul. de 2024.

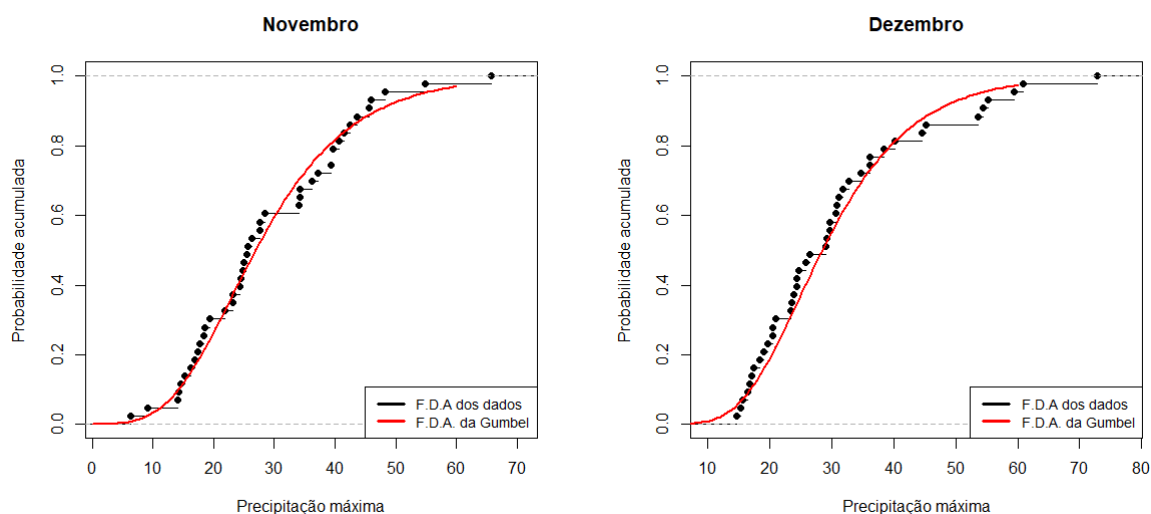
Os gráficos da Figura 4 mostram uma taxa de falha crescente ao longo do tempo, indicada pela curva vermelha acima da linha diagonal, menos para os meses de julho e agosto, que são meses mais secos, nos quais a Gumbel pode não ser a

melhor distribuição, entretanto a função de risco dela reflete bem a tendência observada nos dados dos outros meses.

Figura 5: Gráficos da Função de Distribuição Acumulada (FDA) empírica da precipitação máxima do Parque do Povo (Presidente Prudente-SP), de todos os meses, no período de janeiro de 1981 até dezembro de 2023, comparada com a F.D.A. da distribuição de Gumbel ajustada.



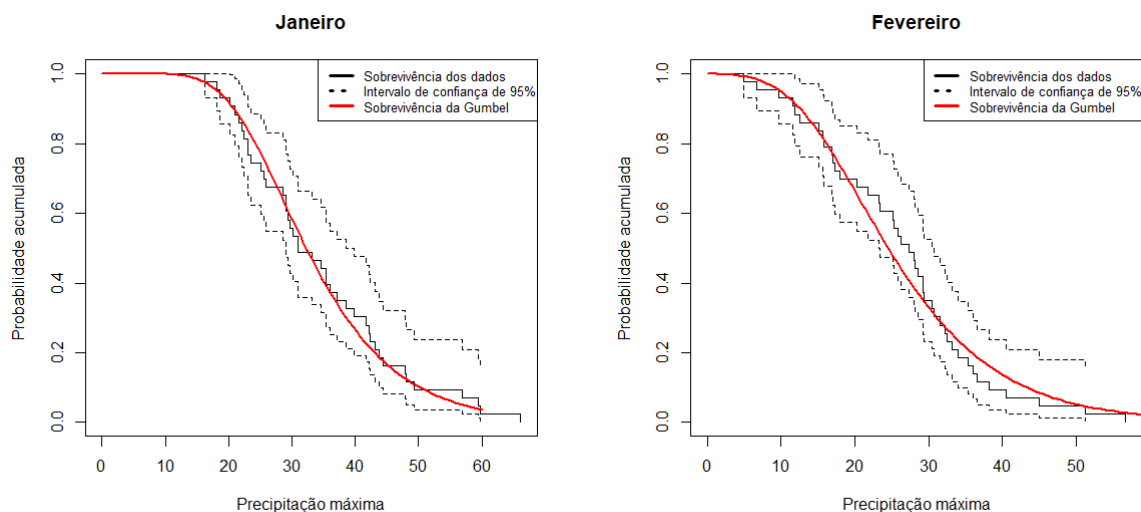


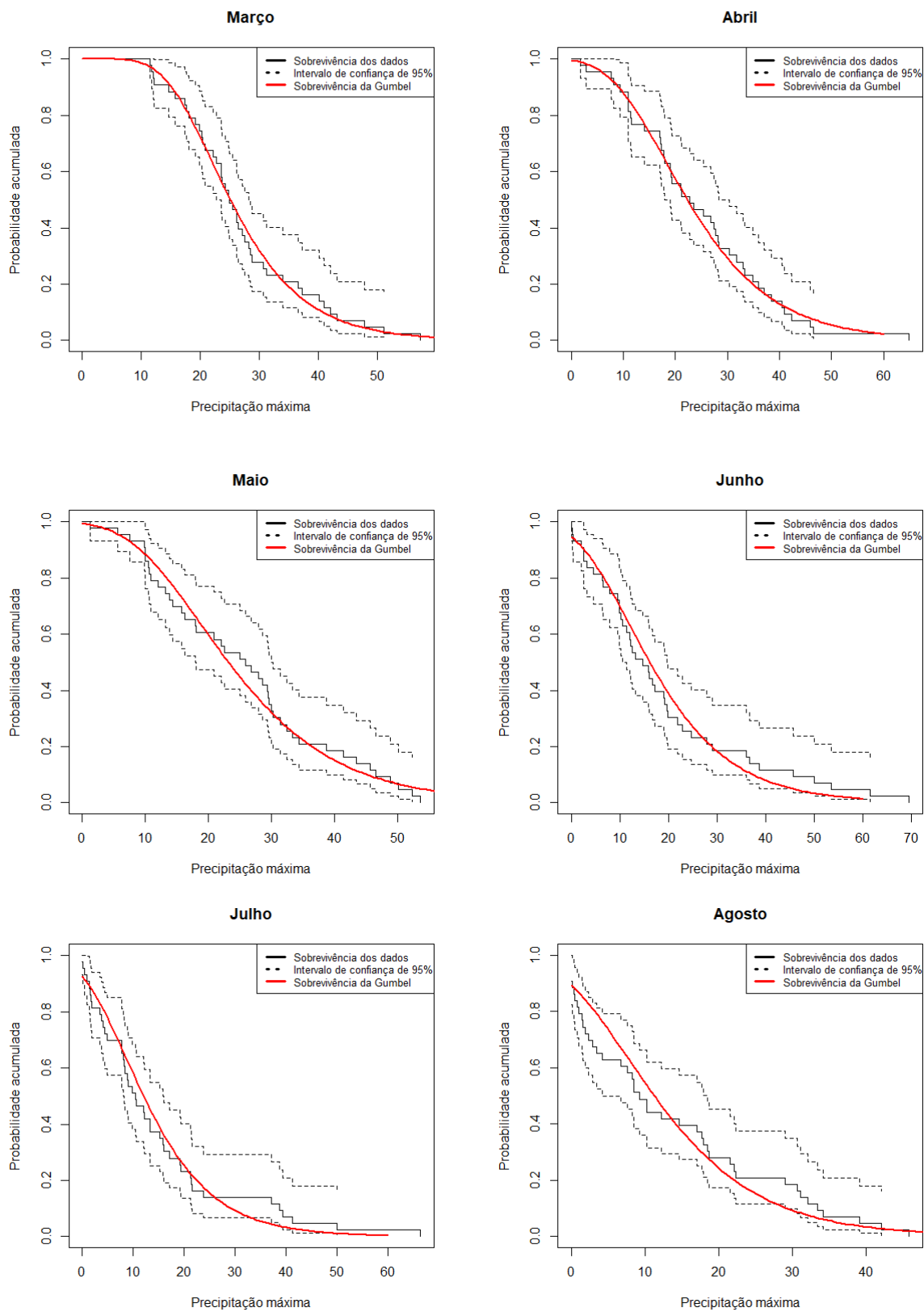


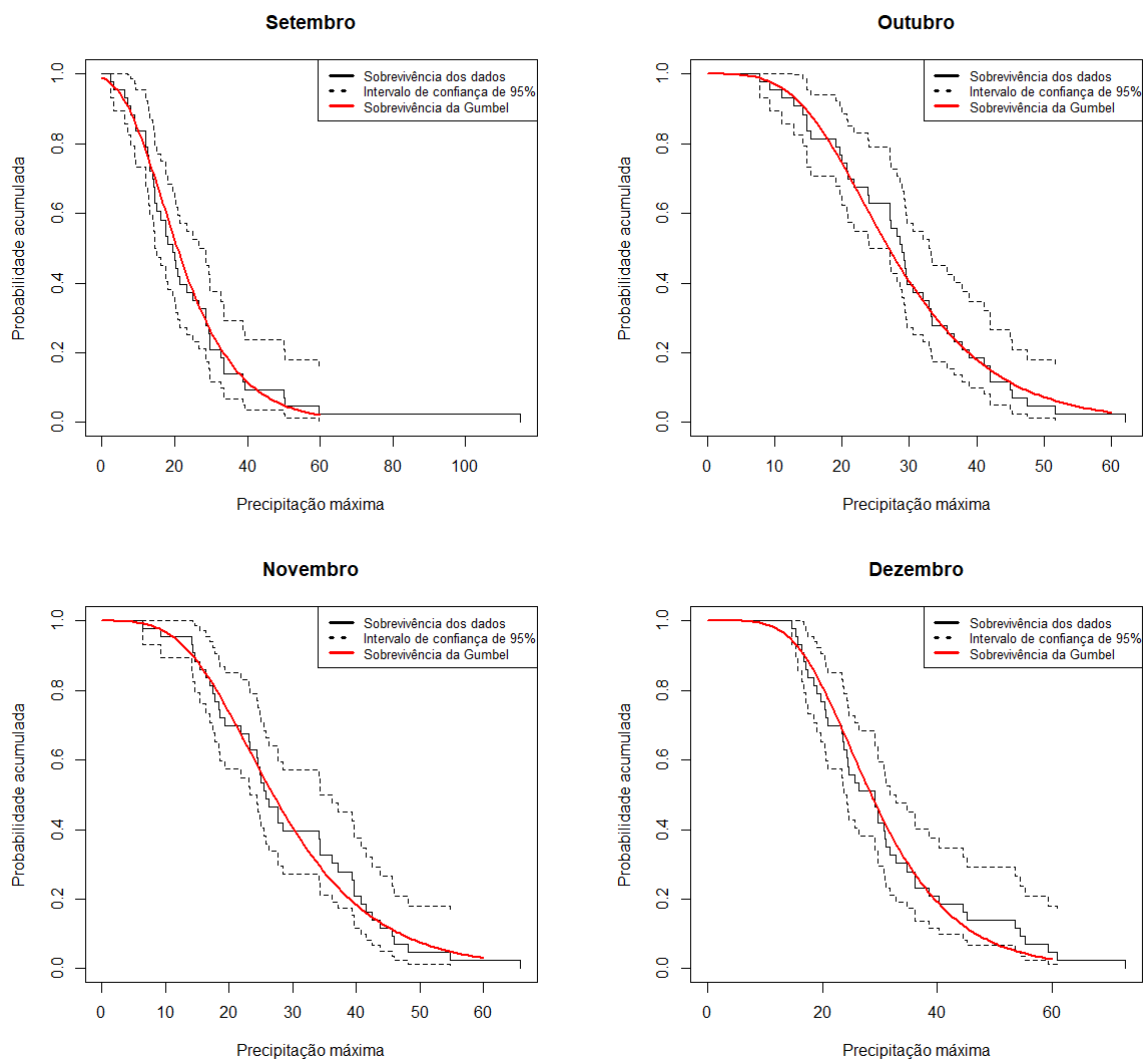
Fonte: POWER(NASA), 2024. Elaboração: Leal (2024). Disponível em: <https://power.larc.nasa.gov/beta/data-access-viewer/>. Acesso em: 30 jul. de 2024.

A curva na cor preta representa a FDA empírica, enquanto a curva na cor vermelha mostra a FDA teórica da distribuição de Gumbel. Observa-se que a distribuição de Gumbel ajusta-se bem aos dados para todos os meses, capturando a tendência geral de acumulação das precipitações máximas ao longo do período analisado. Isso sugere que a distribuição de Gumbel é adequada para modelar os valores extremos de precipitação.

Figura 6: Gráficos da Função de Sobrevivência empírica da precipitação máxima do Parque do Povo (Presidente Prudente-SP), de todos os meses, no período de janeiro de 1981 até dezembro de 2023, comparada com a Função de Sobrevivência da distribuição de Gumbel ajustada.



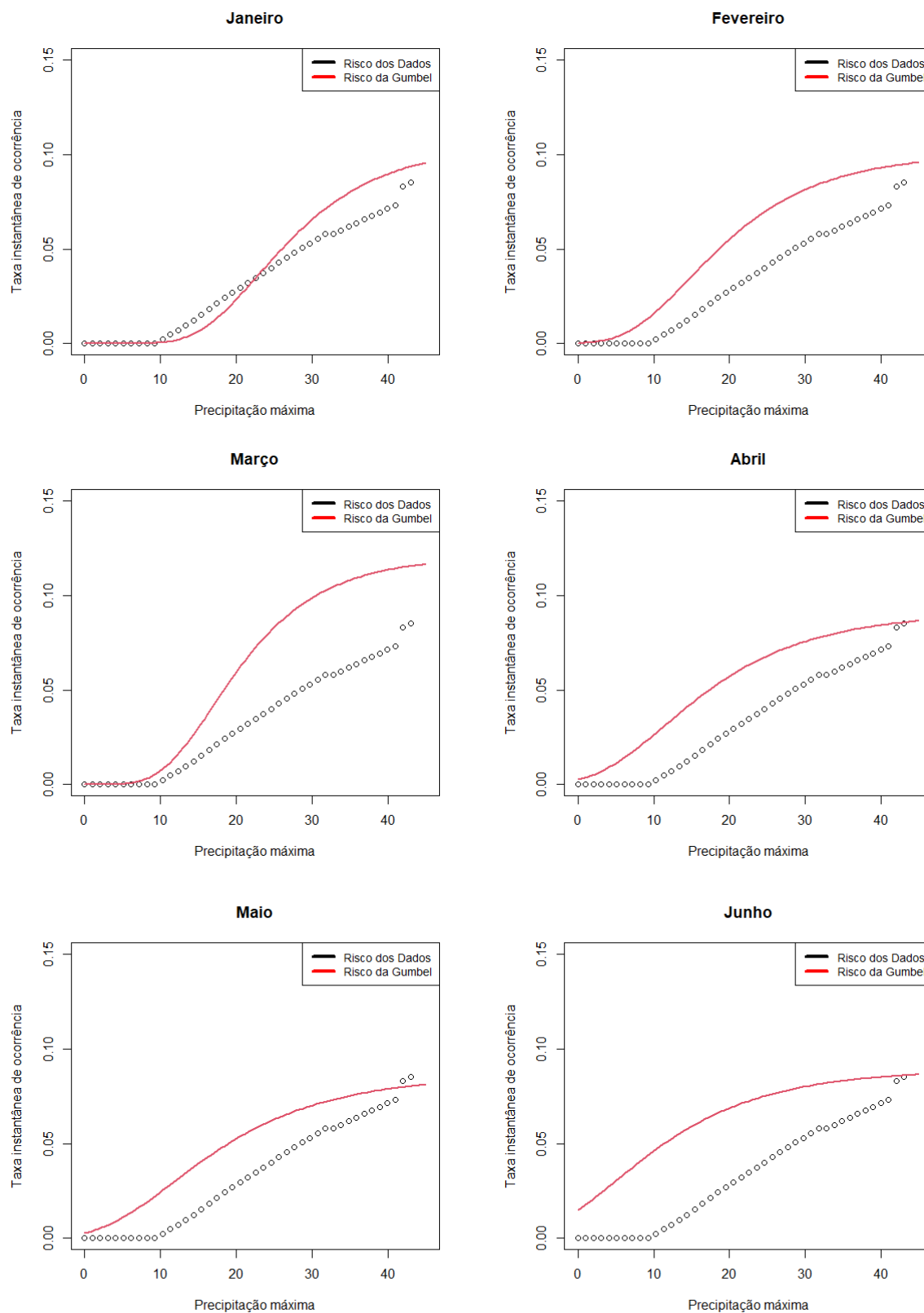


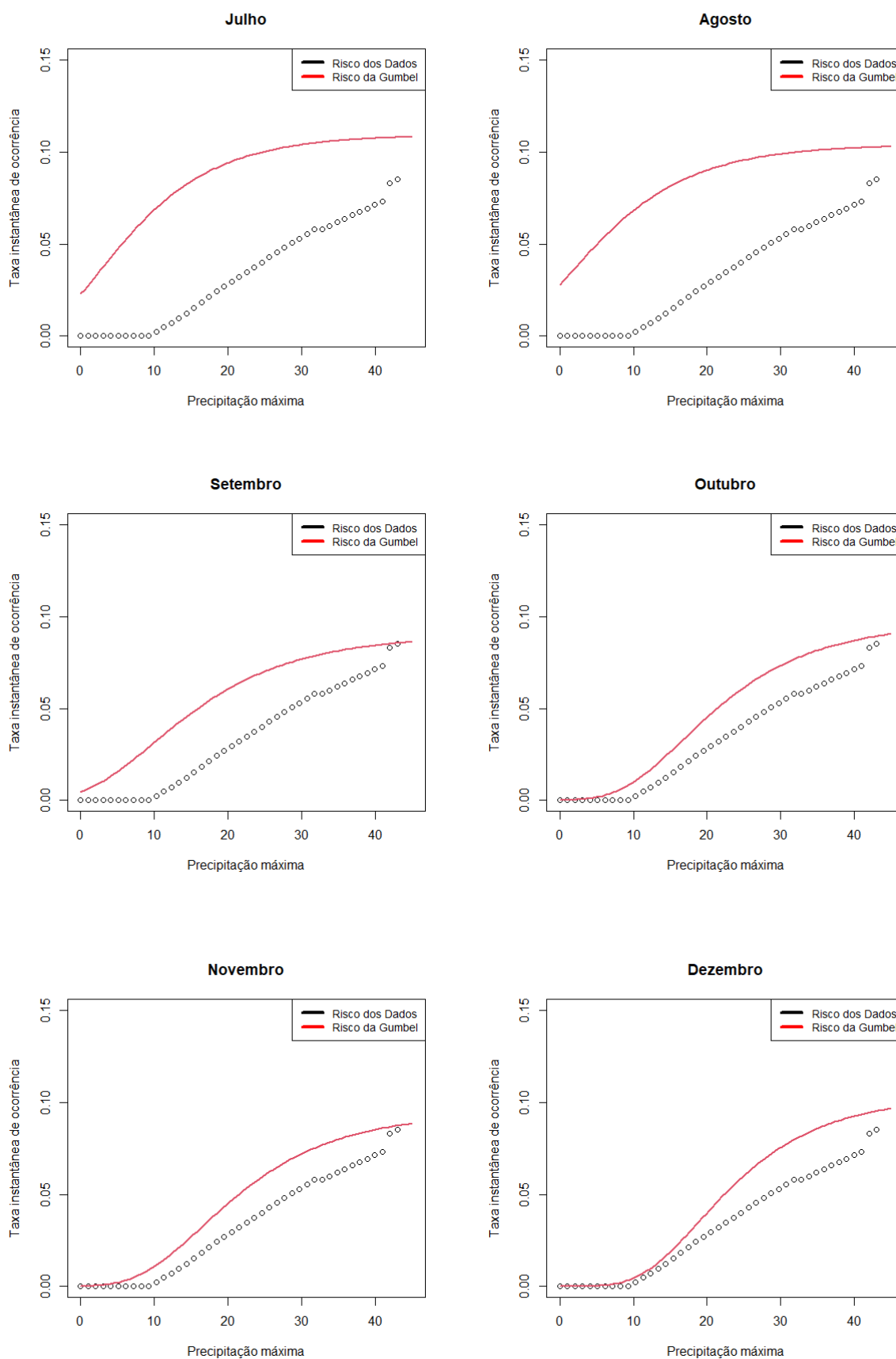


Fonte: POWER(NASA), 2024. Elaboração: Leal (2024). Disponível em: <https://power.larc.nasa.gov/beta/data-access-viewer/>. Acesso em: 30 jul. de 2024.

A curva na cor preta representa a sobrevivência empírica, enquanto a curva na cor vermelha mostra a sobrevivência teórica da distribuição de Gumbel. Observa-se que a distribuição de Gumbel ajusta-se bem aos dados para todos os meses.

Figura 7: Gráficos da Função de Risco da precipitação máxima do Parque do Povo (Presidente Prudente-SP), de todos os meses, no período de janeiro de 1981 até dezembro de 2023, comparando os dados empíricos com a função de risco ajustada da distribuição de Gumbel.



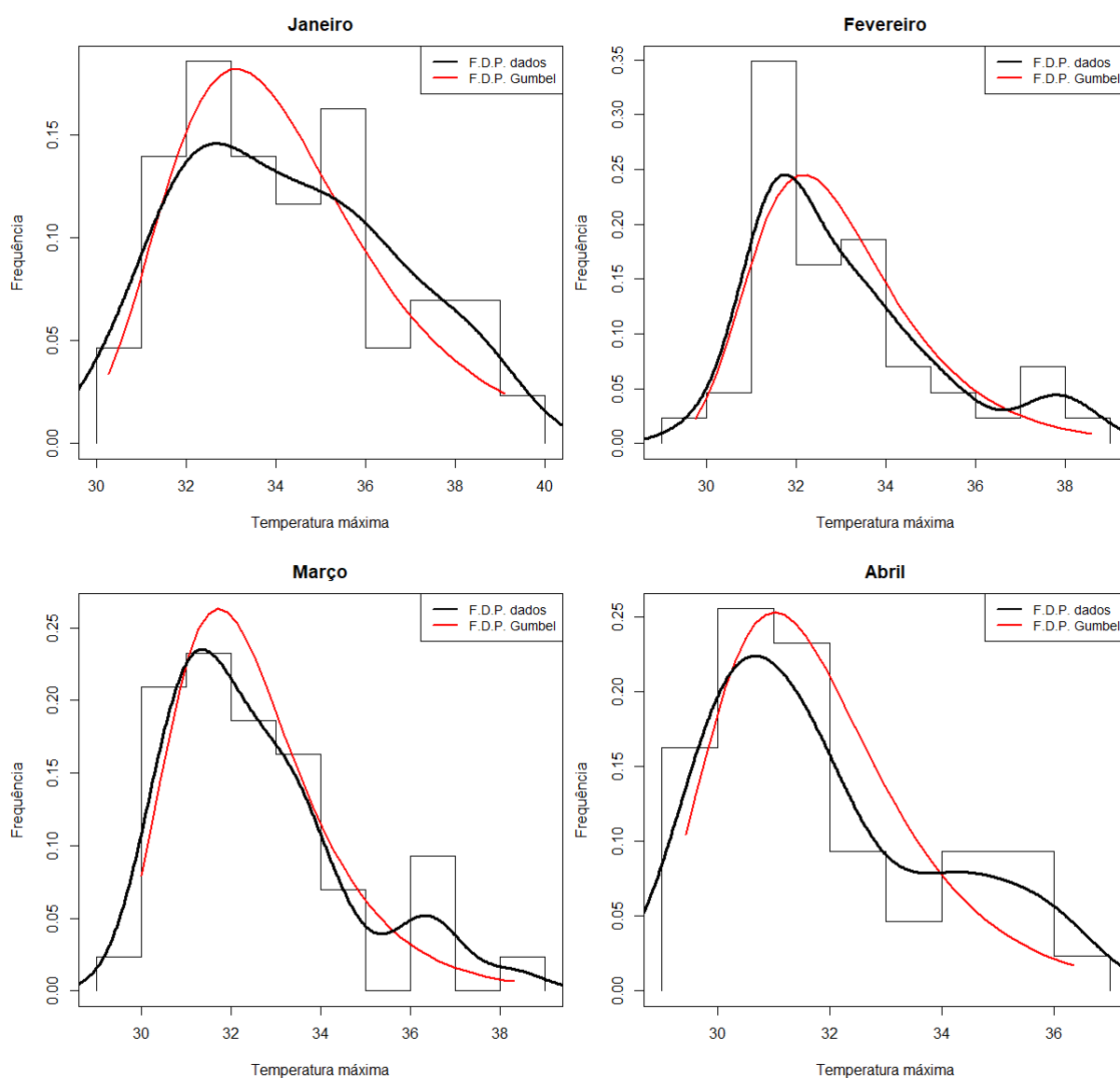


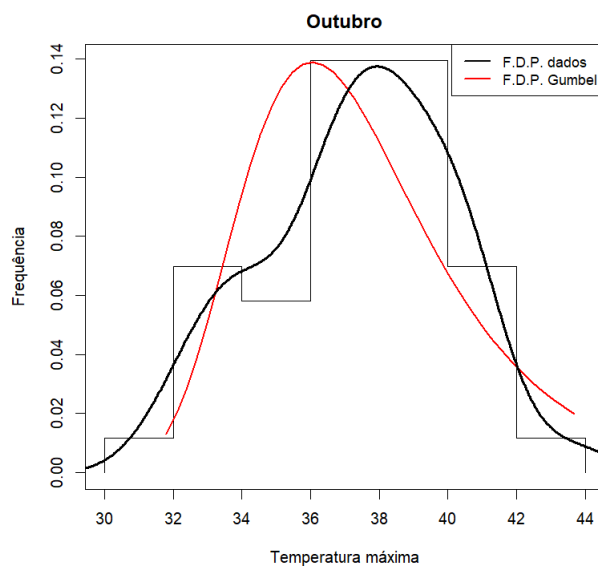
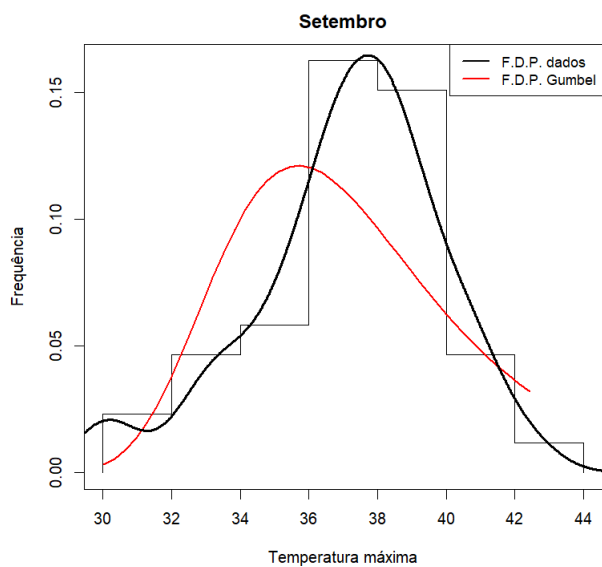
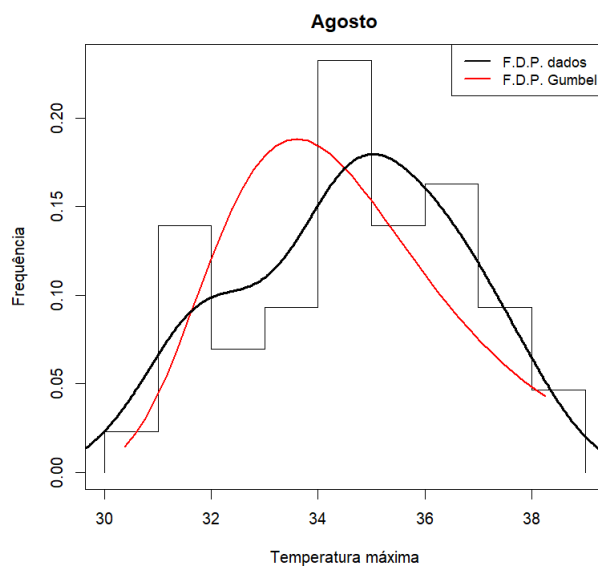
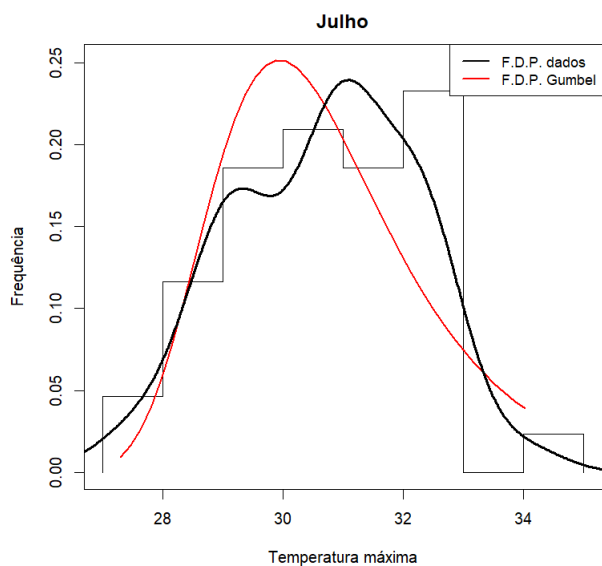
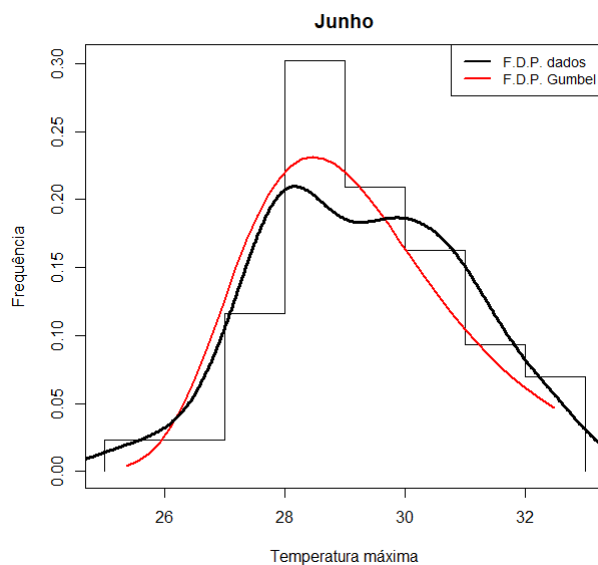
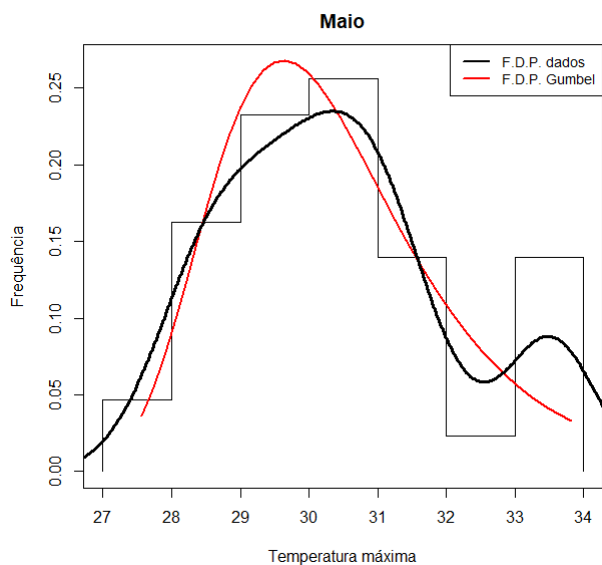
Fonte: POWER(NASA), 2024. Elaboração: Leal (2024). Disponível em: <https://power.larc.nasa.gov/beta/data-access-viewer/>. Acesso em: 30 jul. de 2024.

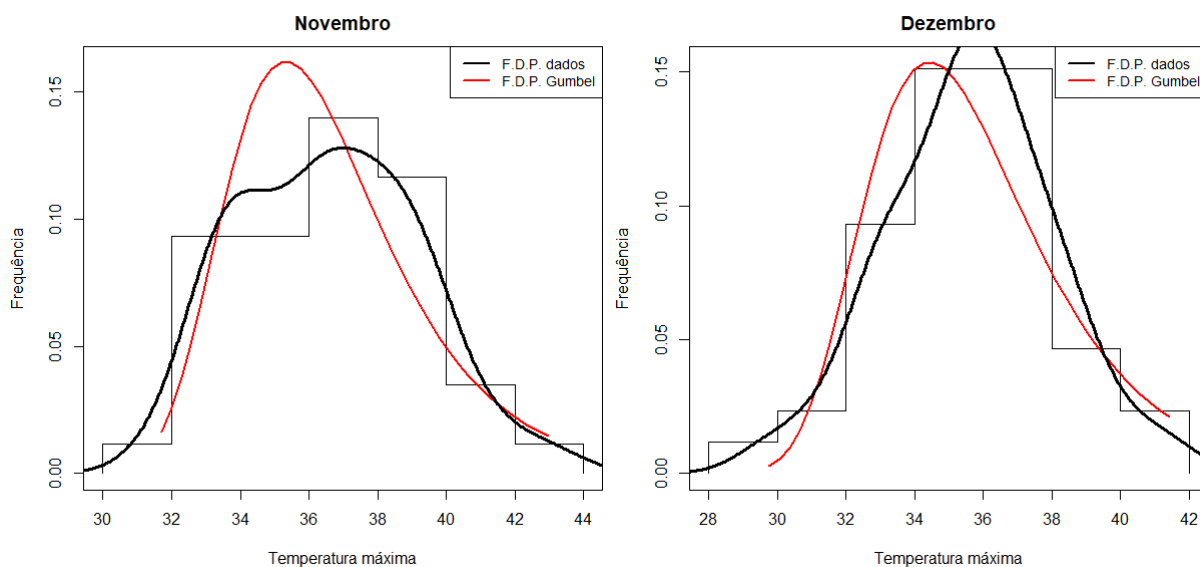
A Figura 7 mostra os gráficos da função de risco das precipitações máximas no período analisado. A curva preta representa o risco empírico dos dados, enquanto a curva vermelha mostra o risco ajustado pela distribuição de Gumbel, que também é crescente demonstrando que se ajusta relativamente bem aos dados.

6.1.3.2 Temperatura máxima

Figura 8: Histogramas da temperatura máxima do Parque do Povo (Presidente Prudente-SP), de todos os meses, no período de janeiro de 1981 até dezembro de 2023.



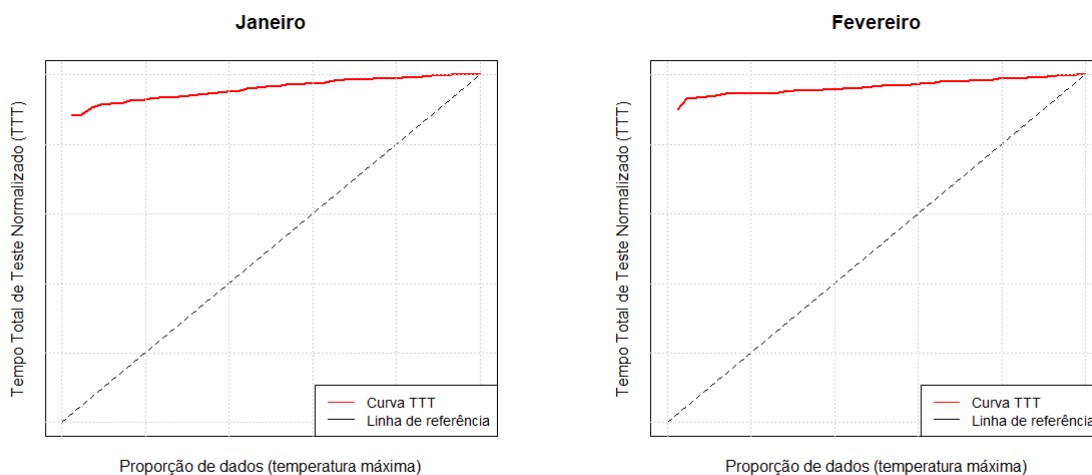




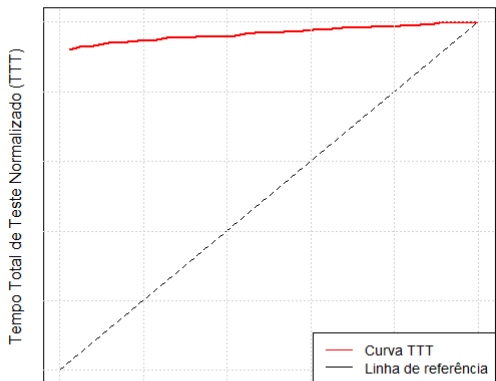
Fonte: POWER(NASA), 2024. Elaboração: Leal (2024). Disponível em: <https://power.larc.nasa.gov/beta/data-access-viewer/>. Acesso em: 30 jul. de 2024.

Os histogramas apresentam as distribuições das temperaturas máximas para cada mês no período analisado. A curva de densidade dos (na cor preta) mostra a estimativa empírica, enquanto a curva na cor vermelha representa a densidade ajustada pela distribuição de Gumbel. Assim, é visto que a distribuição Gumbel ajusta razoavelmente bem os dados, capturando o pico central, mas com discrepâncias nas caudas.

Figura 9: Gráficos do Tempo Total de Teste (TTT) da temperatura máxima do Parque do Povo (Presidente Prudente-SP), de todos os meses, no período de janeiro de 1981 até dezembro de 2023.

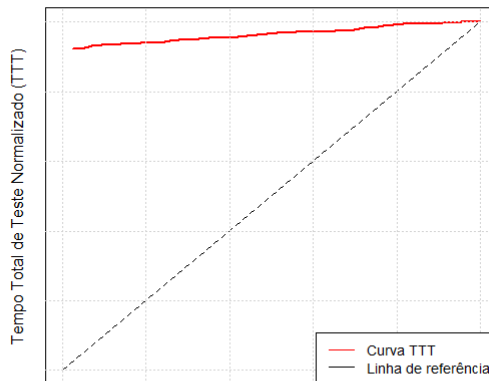


Março



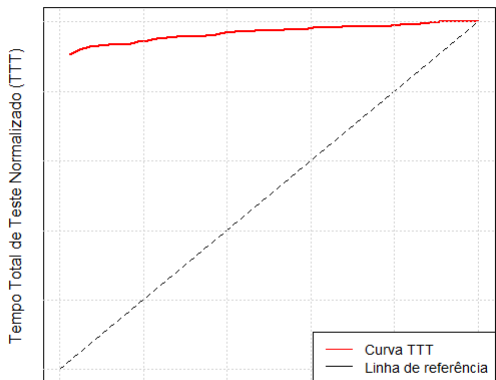
Proporção de dados (temperatura máxima)

Abril



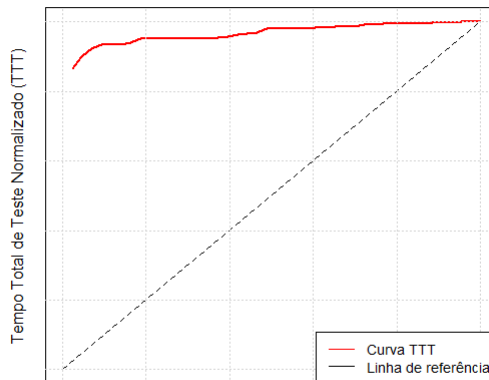
Proporção de dados (temperatura máxima)

Maió



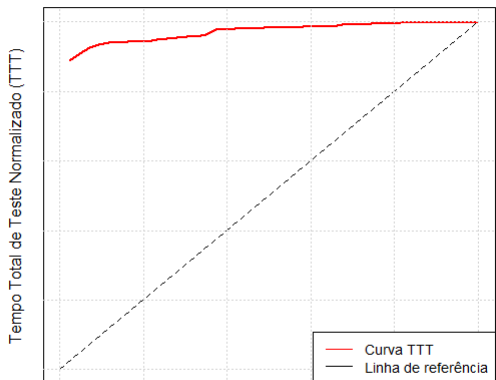
Proporção de dados (temperatura máxima)

Junho



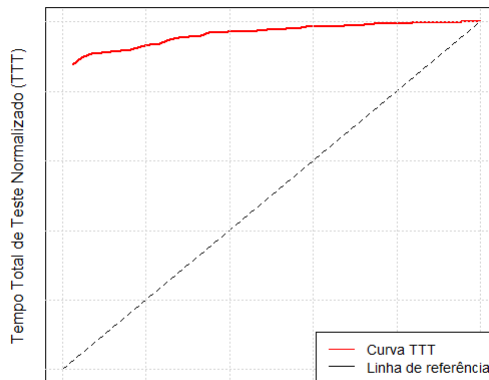
Proporção de dados (temperatura máxima)

Julho

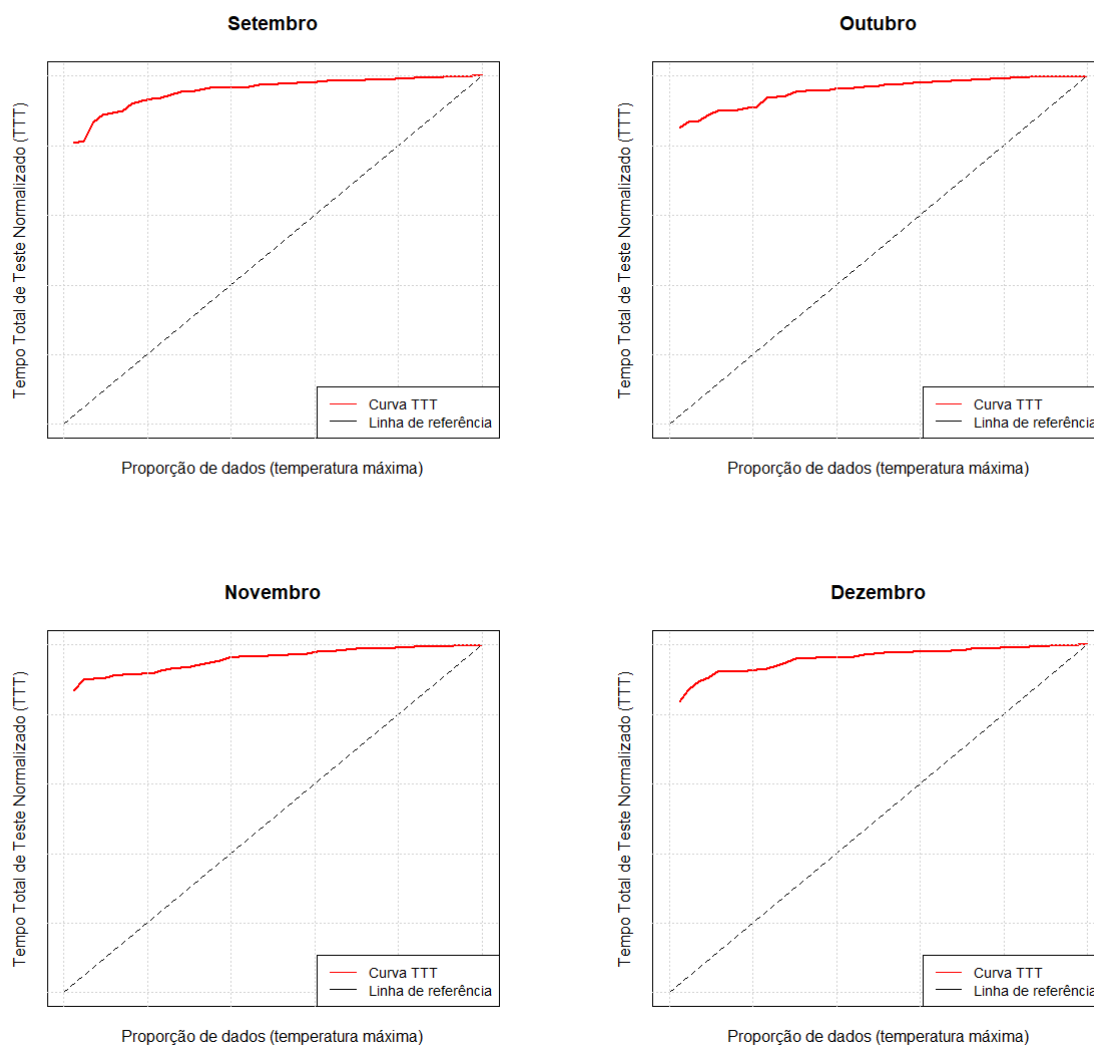


Proporção de dados (temperatura máxima)

Agosto



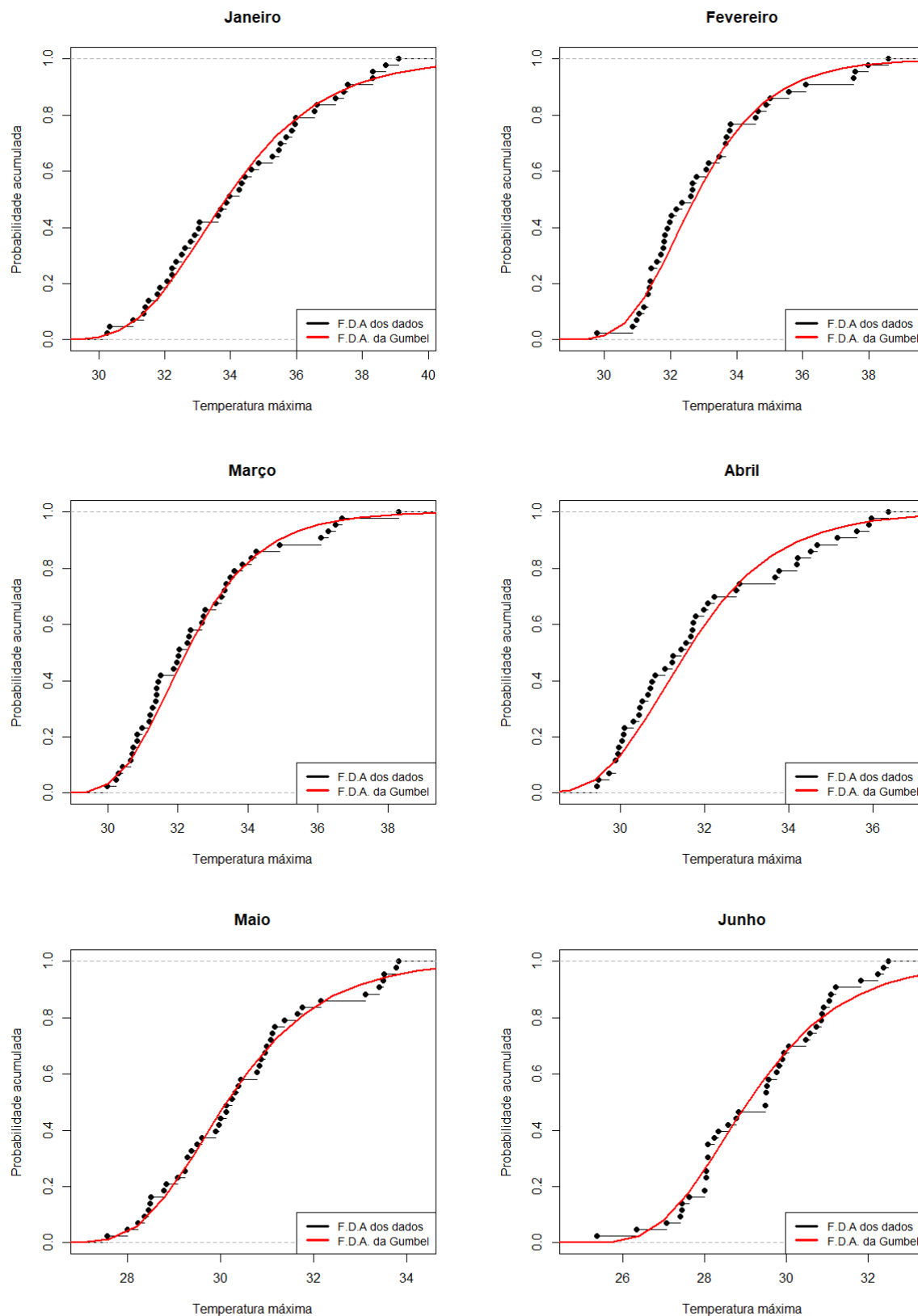
Proporção de dados (temperatura máxima)

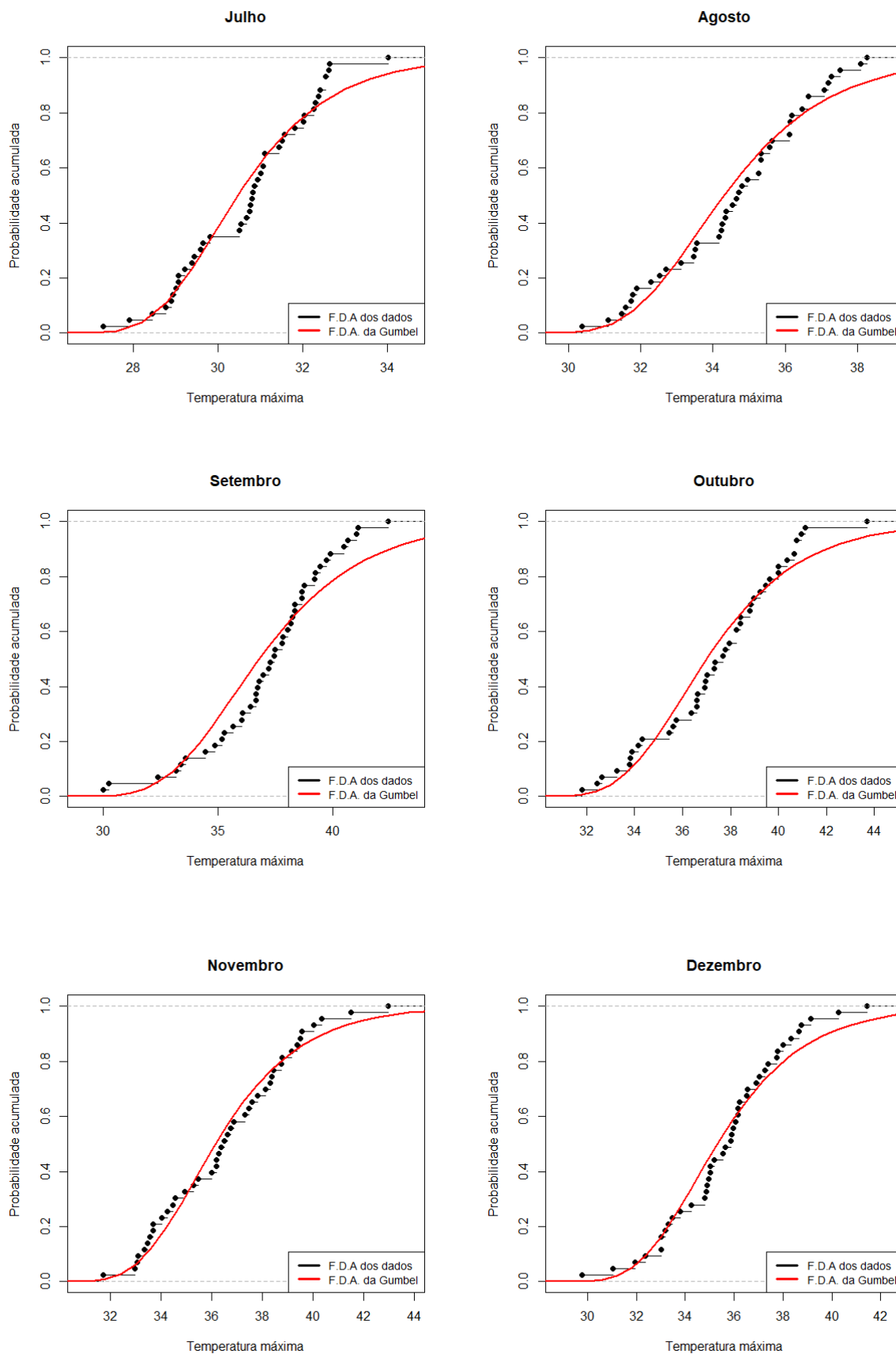


Fonte: POWER(NASA), 2024. Elaboração: Leal (2024). Disponível em: <https://power.larc.nasa.gov/beta/data-access-viewer/>. Acesso em: 30 jul. de 2024.

Os gráficos da Figura 9 mostram uma taxa de falha crescente ao longo do tempo, indicada pela curva vermelha acima da linha diagonal. Isso sugere que as temperaturas extremas são mais frequentes no início do período e se estabilizam posteriormente. A função de risco da Gumbel reflete bem a tendência observada nos dados.

Figura 10: Gráficos da Função de Distribuição Acumulada (FDA) empírica das temperaturas máximas do Parque do Povo (Presidente Prudente-SP), de todos os meses, no período de janeiro de 1981 até dezembro de 2023, comparada com a FDA da distribuição de Gumbel ajustada.

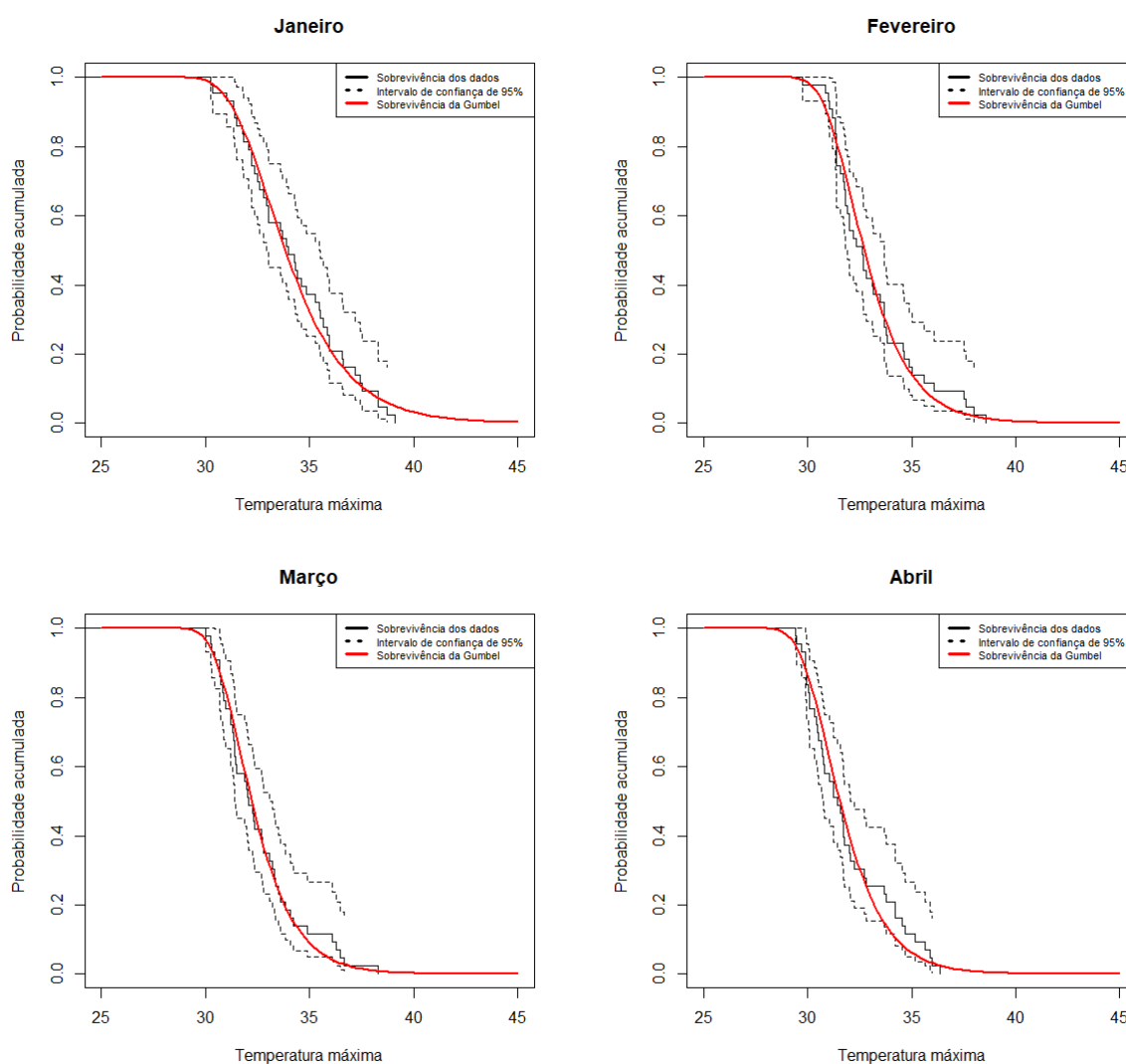


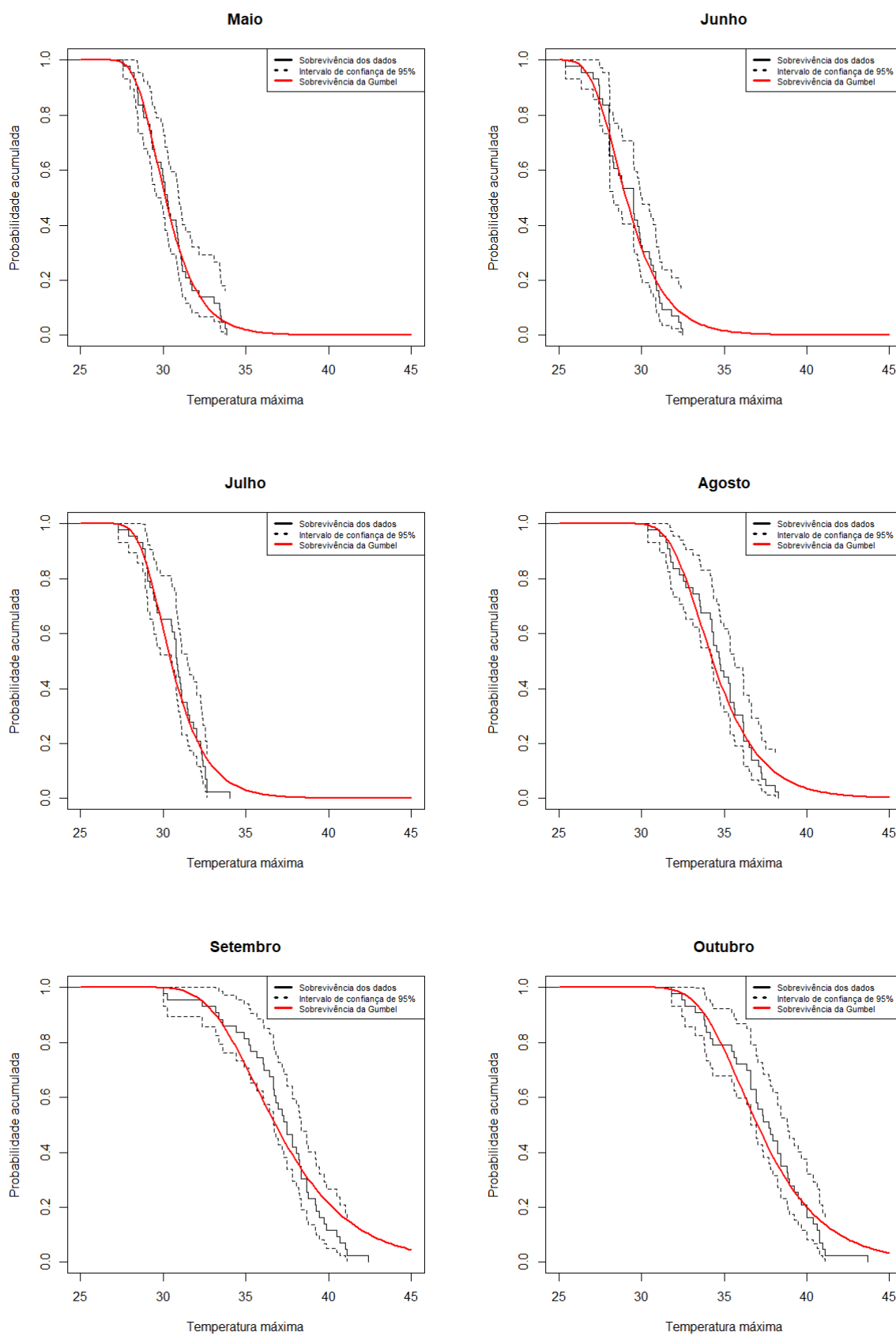


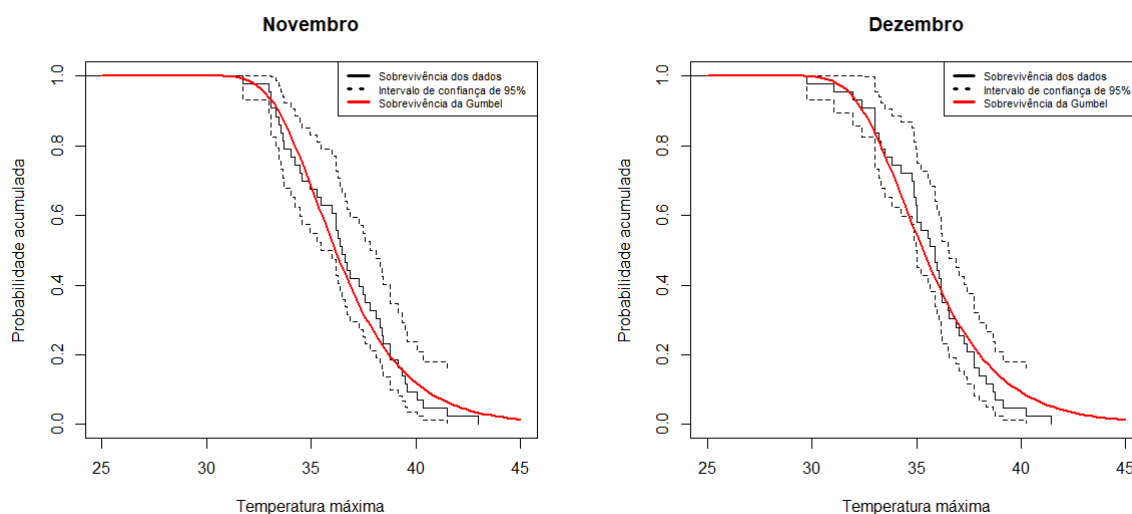
Fonte: POWER(NASA), 2024. Elaboração: Leal (2024). Disponível em: <https://power.larc.nasa.gov/beta/data-access-viewer/>. Acesso em: 30 jul. de 2024.

A curva na cor preta representa a FDA empírica, enquanto a curva na cor vermelha mostra a FDA teórica da distribuição de Gumbel. Observa-se que a distribuição de Gumbel ajusta-se bem aos dados, capturando a tendência geral de acumulação das temperaturas máximas ao longo do período analisado.

Figura 11: Gráficos da Função de Sobrevivência empírica das temperaturas máximas do Parque do Povo (Presidente Prudente-SP), de todos os meses, no período de janeiro de 1981 até dezembro de 2023, comparada com a Função de Sobrevivência da distribuição de Gumbel ajustada



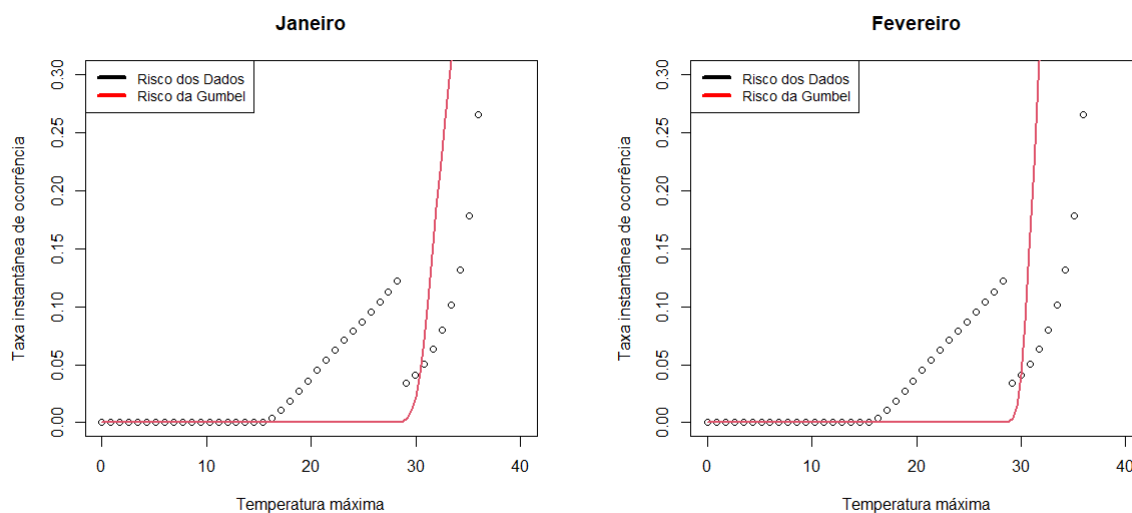


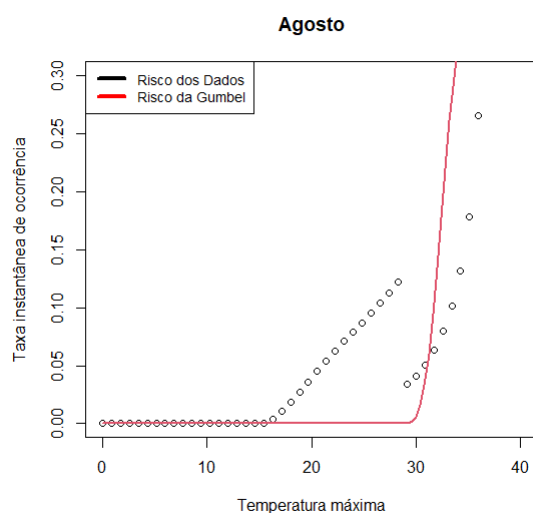
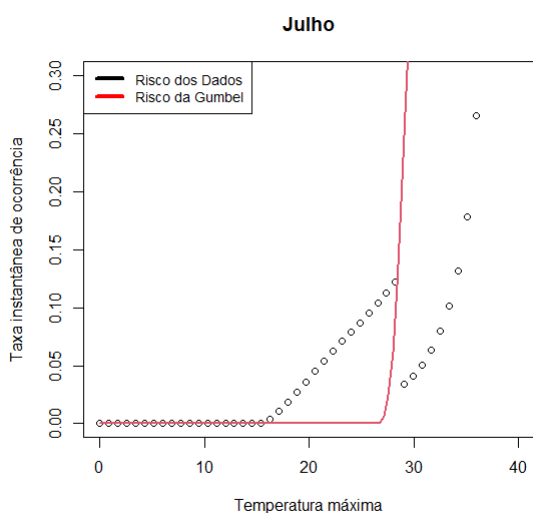
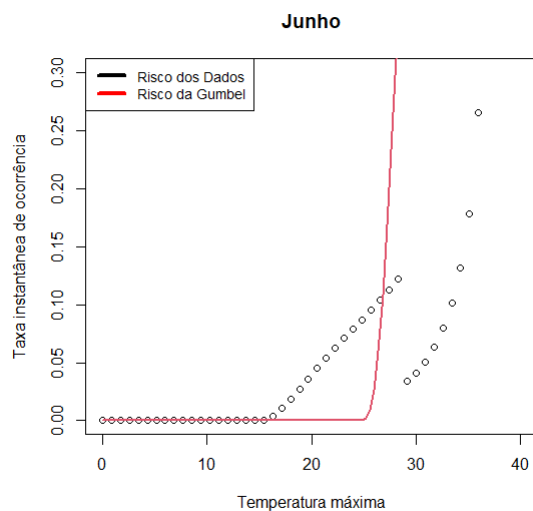
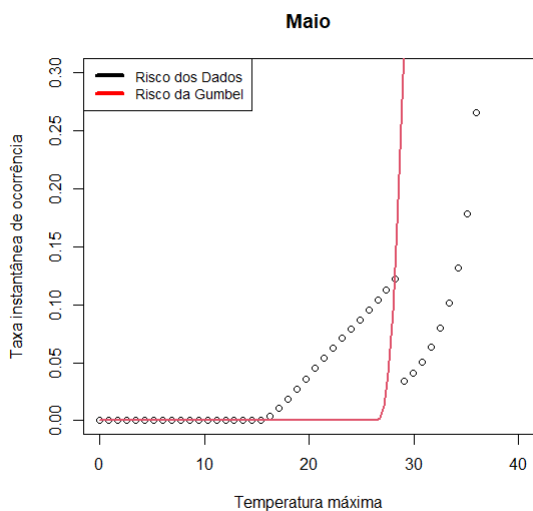
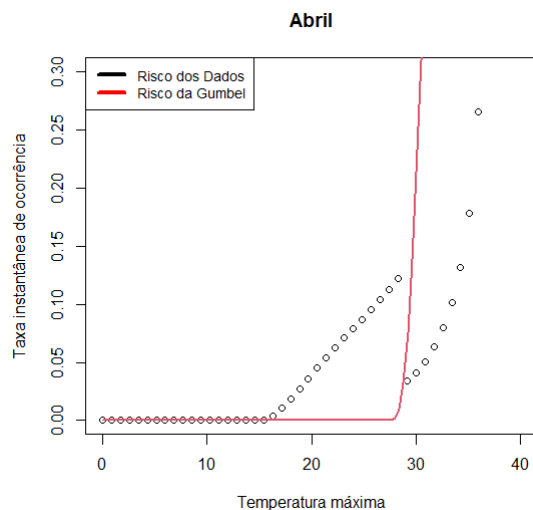
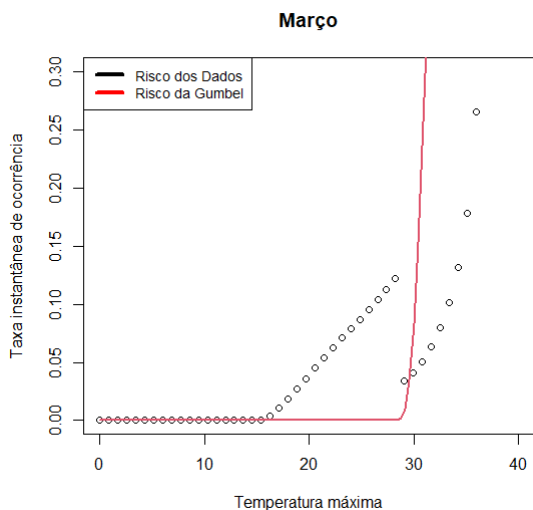


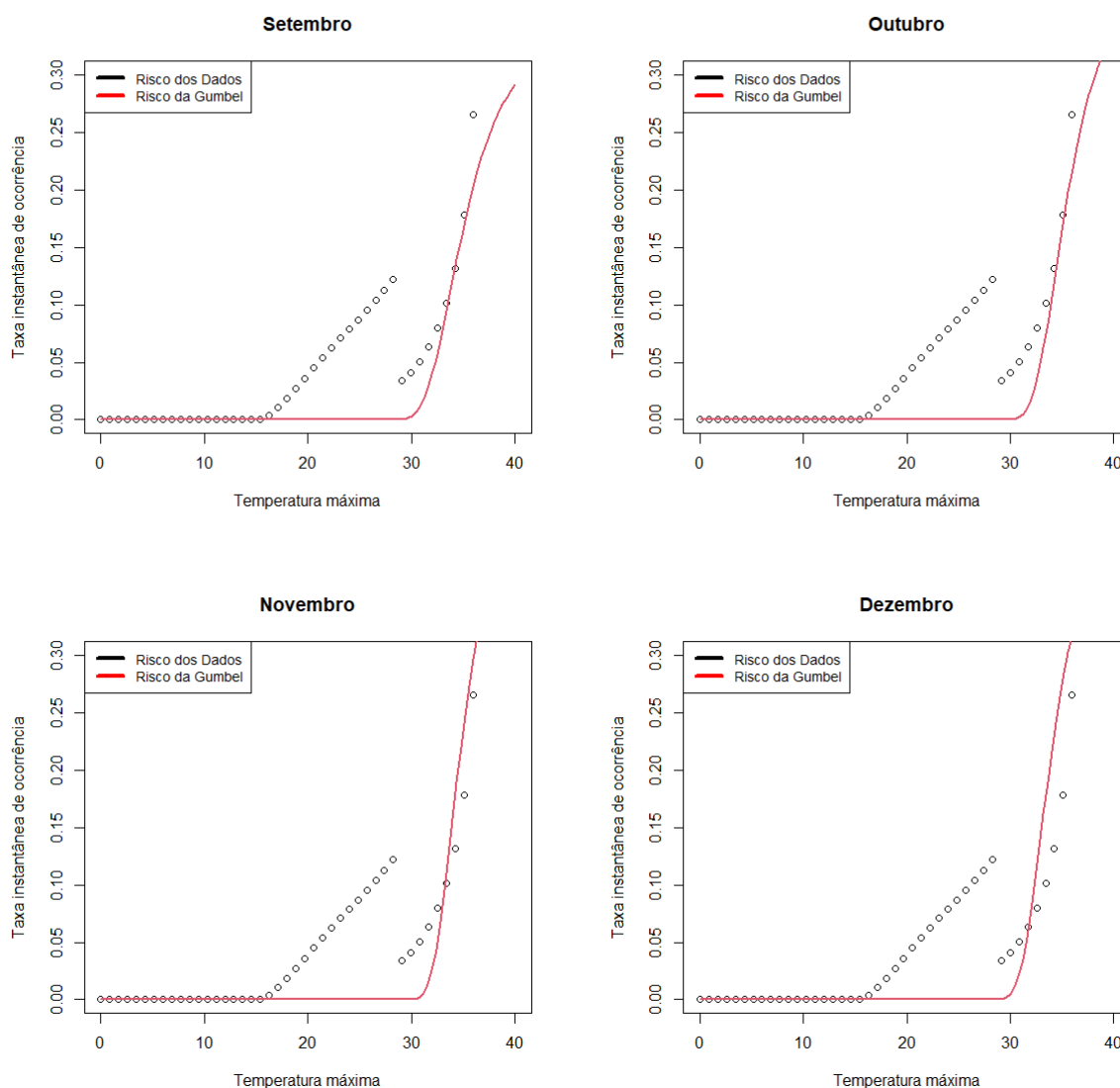
Fonte: POWER(NASA), 2024. Elaboração: Leal (2024). Disponível em: <https://power.larc.nasa.gov/beta/data-access-viewer/>. Acesso em: 30 jul. de 2024.

A curva na cor preta representa a sobrevivência empírica, enquanto a curva na cor vermelha mostra a sobrevivência teórica da distribuição de Gumbel. Observa-se que a distribuição de Gumbel ajusta-se bem aos dados para todos os meses.

Figura 12: Gráficos da Função de risco da temperatura máxima do Parque do Povo (Presidente Prudente-SP), de todos os meses, no período de janeiro de 1981 até dezembro de 2023, comparando os dados empíricos com a função de risco ajustada da distribuição de Gumbel.







Fonte: POWER(NASA), 2024. Elaboração: Leal (2024). Disponível em: <https://power.larc.nasa.gov/beta/data-access-viewer/>. Acesso em: 30 jul. de 2024.

A Figura 12 mostra os gráficos da função de risco das temperaturas máximas no período analisado. A curva preta representa o risco empírico dos dados, enquanto a curva vermelha mostra o risco ajustado pela distribuição de Gumbel, que também é crescente demonstrando que se ajusta relativamente bem aos dados.

6.2 Distribuições conjuntas via cópula

As distribuições conjuntas foram construídas através das distribuições marginais (Gumbel para ambas) e das cópulas selecionadas (mais explicadas no tópico 6.2.1).

6.2.1 Cópulas selecionadas

O pacote “VineCopula” utiliza as marginais selecionadas (Gumbel para ambas as variáveis) e os dados (de precipitação e temperatura máximas) para testar todas as cópulas disponíveis, através da estimação de máxima verossimilhança, do AIC e do BIC, selecionando a cópula que melhor se ajusta aos dados. Além de fornecer também os parâmetros estimados. Os resultados obtidos estão na tabela 4.

Tabela 4 - Cópulas selecionadas e parâmetros estimados através do pacote “VineCopula”, para cada mês de 1981 a 2023.

Mês	Nome da Cópula	θ_1	θ_2
Janeiro	Gumbel rotacionada em 90°	-1.15414	0
Fevereiro	Clayton rotacionada em 270°	-0.33794	0
Março	Joe rotacionada em 90°	-1.14038	0
Abril	T	-0.1984	2.001
Mai	Joe rotacionada em 270°	-1.3155	0
Junho	Gumbel rotacionada em 270°	-1.21454	0
Julho	Joe rotacionada em 90°	-1.53513	0
Agosto	T	-0.38748	2.001
Setembro	Clayton rotacionada em 270°	-1.42988	0
Outubro	T	-0.2674	3.278653
Novembro	Clayton rotacionada em 270°	-0.58178	0
Dezembro	Joe rotacionada em 90°	-1.38568	0

Fonte: POWER(NASA), 2024. Organização: Leal (2024). Disponível em: <https://power.larc.nasa.gov/beta/data-access-viewer/>. Acesso em: 30 jul. de 2024.

6.2.2 Inferência da distribuição conjunta via cópula

Após obter quais são as cópulas de cada mês, foi feita a estimação de máxima verossimilhança para os parâmetros de cada distribuição conjunta pelo comando “optim”, os desvios-padrão e os intervalos de confiança de 95% também.

Tabela 5 – Inferências das cópulas selecionadas para cada mês.

Mês	Cópula	Parâmetros	Estimador	Desvio-Padrão	Intervalo de Confiança
Janeiro	Gumbel rotacionada em 90°	ϕ_p	28.69885	1.524435083	[25.7109620539861; 31.6867475792084]
		φ_p	9.597306	1.175747274	[7.2928408790826; 11.9017701912055]
		ϕ_t	33.10633	0.323497083	[32.47227474071; 33.7403833041299]
		φ_t	2.019289	0.238438945	[1.55194845282812; 2.48662911746234]
		θ_1	-1.15663	0.136485402	[-1,42414097404663; -0,889118197003865]

Mês	Cópula	Parâmetros	Estimador	Desvio-Padrão	Intervalo de Confiança
Fevereiro	Clayton rotacionada em 270°	ϕ_p	20.93537	1.589515864	[17,8199208659144; 24,0508230541454]
		φ_p	9.895946	1.113114048	[7,71424234009034; 12,0776494090445]
		ϕ_t	32.15881	0.236732701	[31,6948115077528; 32,6228036975003]
		φ_t	1.483721	0.181249702	[1,12847174251061; 1,83897057370545]
		θ_1	-0.33056	0.196568622	[-0,715829819188504; 0,0547191805032611]
Março	Joe rotacionada em 90°	ϕ_p	22.25764	1.317572977	[19,6751951599718; 24,8400812278697]
		φ_p	8.204487	0.974524844	[6,29441832992003; 10,1145557198131]
		ϕ_t	31.7271	0.225208625	[31,2856917469408; 32,168509558099]
		φ_t	1.41664	0.175748171	[1,07217404364909; 1,76110687309805]
		θ_1	-1.14273	0.149857126	[-1,43645426189398; -0,849014327721695]
Abril	T	ϕ_p	17.8036	1.411251459	[15,0375429073391; 20,5696486267134]
		φ_p	11.20866	1.237859672	[8,78246001024652; 13,6348699264374]
		ϕ_t	31.15492	0.18088195	[30,8003865409581; 31,5094437853119]
		φ_t	1.552439	0.198913999	[1,16256751832072; 1,94231039344398]
		θ_1	-0.18776	0.185160536	[-0,550675612133389; 0,175153688533704]
		θ_2	1.209062	0.516998682	[0,195745069058719; 2,22237990072185]
Maio	Joe rotacionada em 270°	ϕ_p	18.93076	1.865609309	[15,2741692488126; 22,587357739041]
		φ_p	11.5772	1.369920568	[8,89215869733537; 14,2622473243408]
		ϕ_t	29.61714	0.222854203	[29,1803449910279; 30,0539334656402]
		φ_t	1.398768	0.165145611	[1,07508270579547; 1,72245349967943]
		θ_1	-1.32569	0.215281132	[-1,74763964046601; -0,903737601549305]
Junho	Gumbel rotacionada em 270°	ϕ_p	12.17968	1.828251109	[8,59630354633468; 15,7630478919569]
		φ_p	11.62005	1.461422921	[8,75565626861954; 14,4844341187205]
		ϕ_t	28.53991	0.252102248	[28,0457847205033; 29,0340255329212]
		φ_t	1.553759	0.163172861	[1,23394021135056; 1,87357782545077]
		θ_1	-1.22151	0.137824539	[-1,4916441651095; -0,951371972329605]

Mês	Cópula	Parâmetros	Estimador	Desvio- Padrão	Intervalo de Confiança
Julho	Joe rotacionada em 90°	ϕ_p	8.381173	1.509306296	[5,4229329395758; 11,3394136201802]
		φ_p	9.620745	1.272568317	[7,12651107408599; 12,1149788778084]
		ϕ_t	29.9498	0.236780352	[29,4857065276868; 30,4138855076719]
		φ_t	1.478459	0.165149506	[1,15476644357932; 1,80215250786297]
		θ_1	-1.61254	0.34910637	[-2,29679005433367; - 0,928293084067547]
Agosto	T	ϕ_p	8.621204	1.432965488	[5,81259119553706; 11,4298159085175]
		φ_p	10.29259	1.370979125	[7,60546917369882; 12,9797073449817]
		ϕ_t	33.5036	0.310563373	[32,8948934708983; 34,1123018926382]
		φ_t	1.985324	0.216986768	[1,56003001939979; 2,41061815114447]
		θ_1	-0.39547	0.151917881	[-0,693233490924802; -0,0977153993203982]
		θ_2	1.607018	0.826516186	[- 0,0129535274704932; 3,22698992211678]
Setembro	Clayton rotacionada em 270°	ϕ_p	15.30185	2.104819381	[11,1764011871284; 19,4272931611916]
		φ_p	13.26805	1.693372048	[9,94903736288709; 16,587055791083]
		ϕ_t	35.69475	0.495346444	[34,7238715058345; 36,6656295672339]
		φ_t	3.064589	0.325348374	[2,42690628412883; 3,70227190919974]
		θ_1	-2.19824	0.654808008	[-3,48166260342485; - 0,914815213548761]
Outubro	T	ϕ_p	23.10888	1.604811745	[19,9634452017445; 26,2543072424577]
		φ_p	11.06932	1.396577348	[8,33203296166034; 13,806616164794]
		ϕ_t	35.71363	0.467832603	[34,7966813455316; 36,6305851493904]
		φ_t	2.643985	0.298685926	[2,05856034597261; 3,22940917705783]
		θ_1	-0.2713	0.183710129	[-0,631374117503725; 0,0887695879197335]
		θ_2	2.191594	1.556099619	[-0,858361461336405; 5,2415490460337]
Novembro	Clayton rotacionada em 270°	ϕ_p	22.92234	1.750374499	[19,4916101912939; 26,3530782278936]
		φ_p	10.95716	1.305456821	[8,39846161627584; 13,5158523535589]
		ϕ_t	35.31273	0.36607489	[34,5952201436972; 36,0302337123729]
		φ_t	2.276063	0.267409213	[1,75194113228248; 2,80018524804997]
		θ_1	-0.61922	0.315130253	[-1,23687271780184; - 0,00156212482221995]

Mês	Cópula	Parâmetros	Estimador	Desvio-Padrão	Intervalo de Confiança
Dezembro	Joe rotacionada em 90°	ϕ_p	24.36895	1.573157205	[21,2855604356785; 27,4523366787655]
		φ_p	9.846049	1.251996826	[7,39213566005961; 12,2999632195799]
		ϕ_t	34.40549	0.389211084	[33,6426335163667; 35,168340967348]
		φ_t	2.401814	0.261640432	[1,88899875758456; 2,91462925192471]
		θ_1	-1.44262	0.297011982	[-2,02476480553136; -0,86047783426879]

Fonte: POWER(NASA), 2024. Organização: Leal (2024). Disponível em: <https://power.larc.nasa.gov/beta/data-access-viewer/>. Acesso em: 30 jul. de 2024.

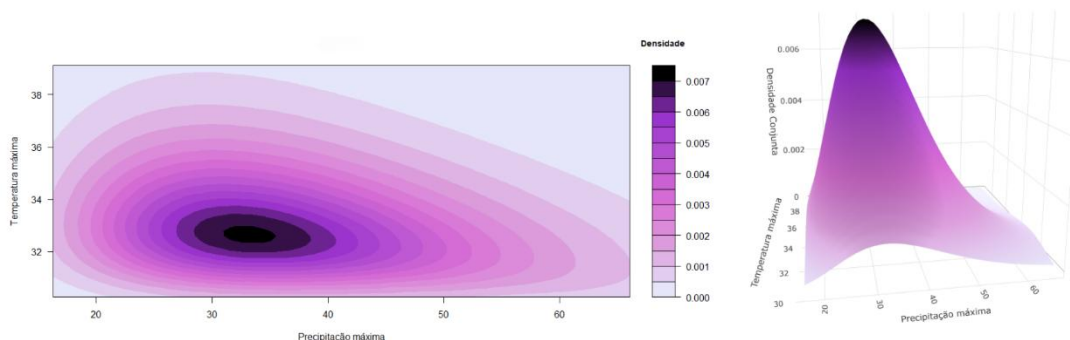
6.2.3 Visualização gráfica das distribuições conjuntas via cópula

As figuras abaixo ilustram as dependências entre variáveis precipitação e temperatura máximas para cada mês durante o período de janeiro de 1981 a dezembro de 2023, por meio da função de densidade conjunta.

A imagem à esquerda se trata do gráfico de contorno, onde as curvas de nível indicam as regiões com maior concentração de densidade para a combinação dessas variáveis, com maior intensidade de cor nas áreas de maior densidade, usando uma escala roxa para melhorar a visualização. E à direita tem-se o gráfico tridimensional da mesma função de densidade conjunta, que oferece uma visão do relevo, evidenciando as áreas de maior densidade.

O artigo “Análise temporal da temperatura e das chuvas a partir da técnica dos quantis aplicada às cidades de Rancharia-SP e Presidente Prudente – SP” (Pereira, Cristiane, Cardozo, 2022) foi utilizado como base climatológica para as análises das densidades conjuntas via cópula.

Figura 13: Gráficos de contorno e de perspectiva 3D da densidade conjunta via cópula de Gumbel rotacionada em 90°, para o mês de janeiro (1981 a 2023).

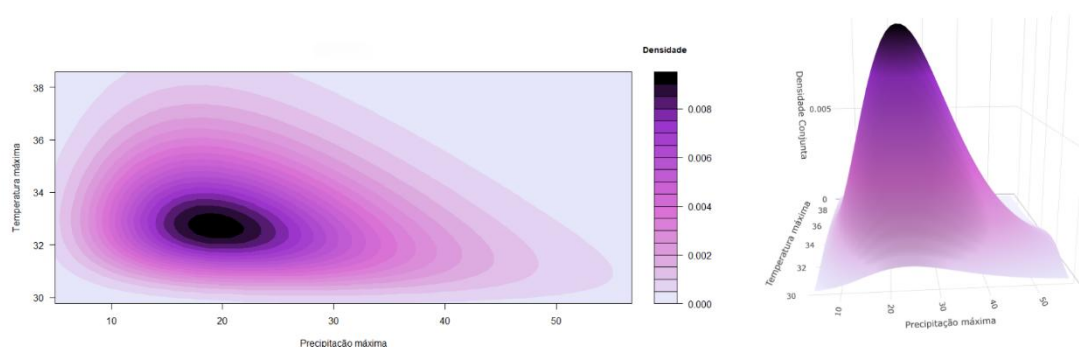


Fonte: POWER(NASA), 2024. Elaboração: Leal (2024). Disponível em: <https://power.larc.nasa.gov/beta/data-access-viewer/>. Acesso em: 30 jul. de 2024.

A densidade conjunta mostra que a probabilidade de ocorrência simultânea dos valores máximos de temperatura e precipitação é maior quando a precipitação máxima está entre 30 e 40 mm e a temperatura máxima está entre 32 e 34°C.

A compactação da densidade em relação à temperatura máxima mostra uma menor variabilidade dessa variável em comparação com a precipitação. Enquanto a temperatura máxima tende a se concentrar em um intervalo relativamente estreito, a precipitação apresenta maior dispersão, indicando uma variação mais ampla nos eventos de precipitação máxima. Essa característica pode ser atribuída ao comportamento climático do mês de janeiro, no qual há uma predominância de altas temperaturas máximas combinadas com episódios de chuvas intensas, que, embora recorrentes, apresentam maior amplitude nos volumes registrados.

Figura 14: Gráficos de contorno e de perspectiva 3D da distribuição conjunta via cópula de Clayton rotacionada em 270°, para o mês de fevereiro (1981 a 2023).

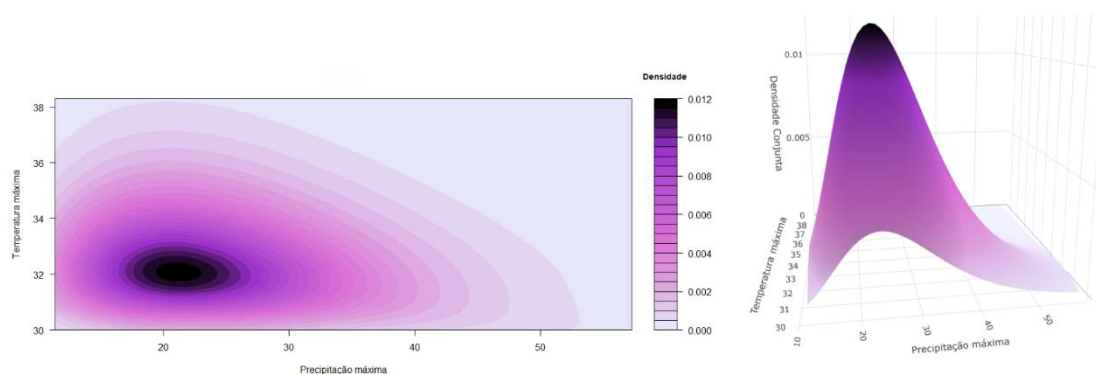


Fonte: POWER(NASA), 2024. Elaboração: Leal (2024). Disponível em: <https://power.larc.nasa.gov/beta/data-access-viewer/>. Acesso em: 30 jul. de 2024.

A densidade conjunta para o mês de fevereiro indica que a probabilidade de ocorrência simultânea dos picos de temperatura e precipitação é maior quando a precipitação máxima varia de 10 a 20 mm e a temperatura máxima oscila entre 32 e 34°C.

Fevereiro mantém um padrão semelhante ao de janeiro, com maior amplitude nos valores máximos de precipitação e menor nos de temperatura.

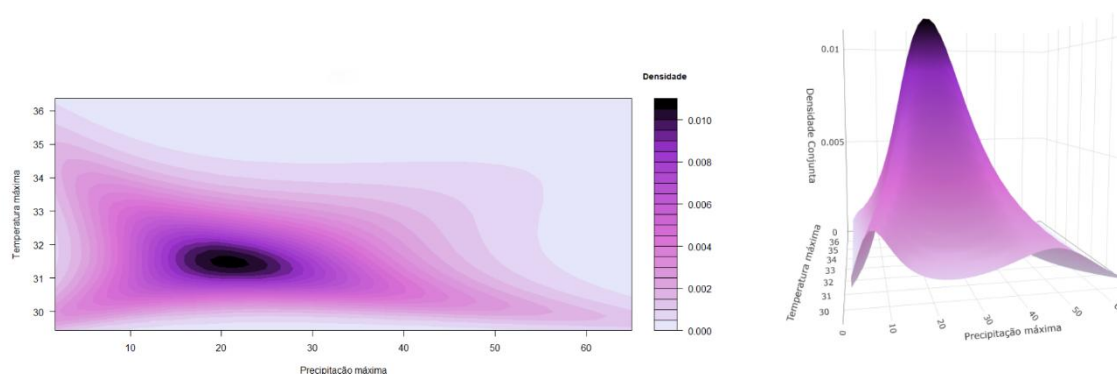
Figura 15: Gráficos de contorno e de perspectiva 3D da distribuição conjunta via cópula de Joe rotacionada em 90°, para o mês de março (1981 a 2023).



Fonte: POWER(NASA), 2024. Elaboração: Leal (2024). Disponível em: <https://power.larc.nasa.gov/beta/data-access-viewer/>. Acesso em: 30 jul. de 2024.

A densidade conjunta para o mês de março mostra que a probabilidade de ocorrência simultânea dos valores máximos de temperatura e precipitação é maior quando a precipitação máxima está entre 18 e 28 mm e a temperatura máxima está entre 31 e 33°C. Essa concentração reflete o padrão climático de transição entre o verão e o outono na área de estudo, caracterizado por chuvas ainda frequentes, mas menos intensas do que nos meses anteriores.

Figura 16: Gráficos de contorno e de perspectiva 3D da distribuição conjunta via cópula T, para o mês de abril (1981 a 2023).

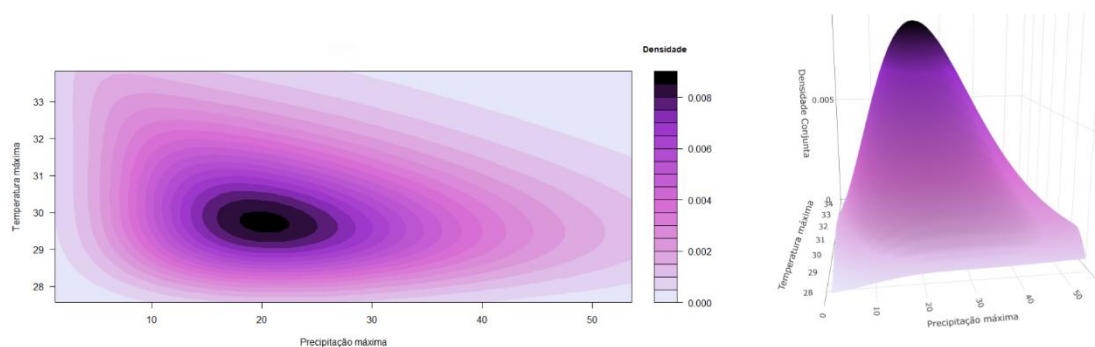


Fonte: POWER(NASA), 2024. Elaboração: Leal (2024). Disponível em: <https://power.larc.nasa.gov/beta/data-access-viewer/>. Acesso em: 30 jul. de 2024.

A densidade conjunta para o mês de abril indica que a probabilidade de ocorrência simultânea dos valores máximos de precipitação e temperatura é maior

quando a precipitação máxima está entre 10 e 20 mm e a temperatura máxima está entre 31 e 33°C.

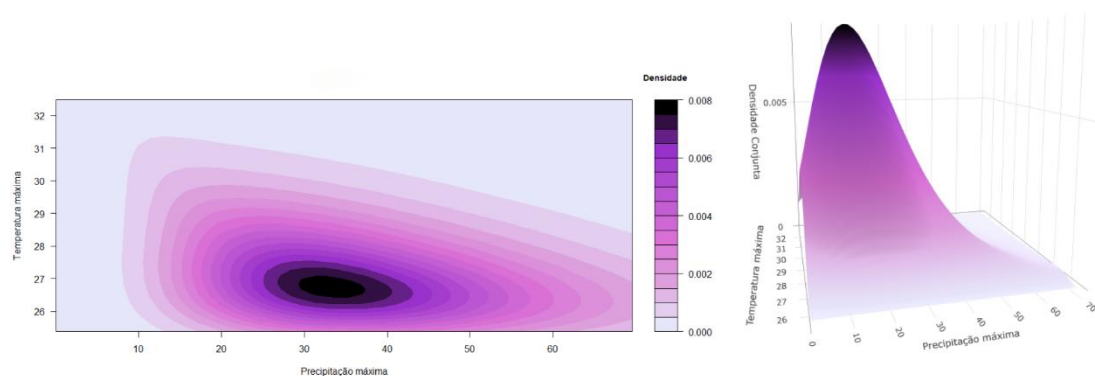
Figura 17: Gráficos de contorno e de perspectiva 3D da distribuição conjunta via cópula de Joe rotacionada em 270°, para o mês de maio (1981 a 2023).



Fonte: POWER(NASA), 2024. Elaboração: Leal (2024). Disponível em: <https://power.larc.nasa.gov/beta/data-access-viewer/>. Acesso em: 30 jul. de 2024

A densidade conjunta para o mês de maio indica que a probabilidade de ocorrência simultânea dos valores máximos de precipitação e temperatura é maior quando a precipitação máxima está entre 10 e 20 mm e a temperatura máxima varia entre 29 e 31°C.

Figura 18: Gráficos de contorno e de perspectiva 3D da distribuição conjunta via cópula de Gumbel rotacionada em 270°, para o mês de junho (1981 a 2023).



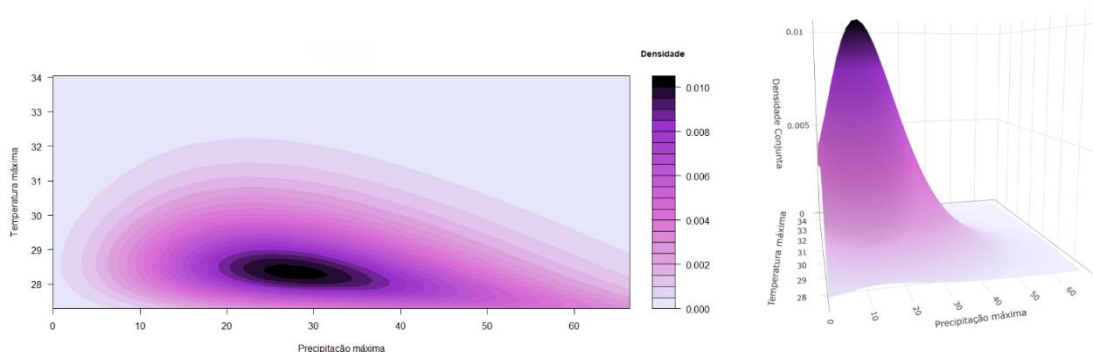
Fonte: POWER(NASA), 2024. Elaboração: Leal (2024). Disponível em: <https://power.larc.nasa.gov/beta/data-access-viewer/>. Acesso em: 30 jul. de 2024.

A densidade conjunta para o mês de junho revela que a probabilidade de ocorrência simultânea dos valores máximos de precipitação e temperatura é maior quando a precipitação máxima está entre 20 e 30 mm e a temperatura máxima varia

entre 26 e 28°C. Esse comportamento pode ser explicado pela influência das massas de ar frio típicas do inverno local, que ao encontrar camadas de ar mais quente e úmido, resultam na formação de chuvas, apesar das temperaturas máximas serem mais baixas.

Esse padrão climático está associado a sistemas atmosféricos de alta pressão que dominam no inverno, mas que ocasionalmente são interrompidos por frentes frias. Quando essas frentes avançam, a umidade acumulada no ar é condensada, produzindo chuvas. Assim, as temperaturas máximas mais baixas geralmente coincidem com os dias de maior precipitação, devido à presença de ar frio e úmido na região.

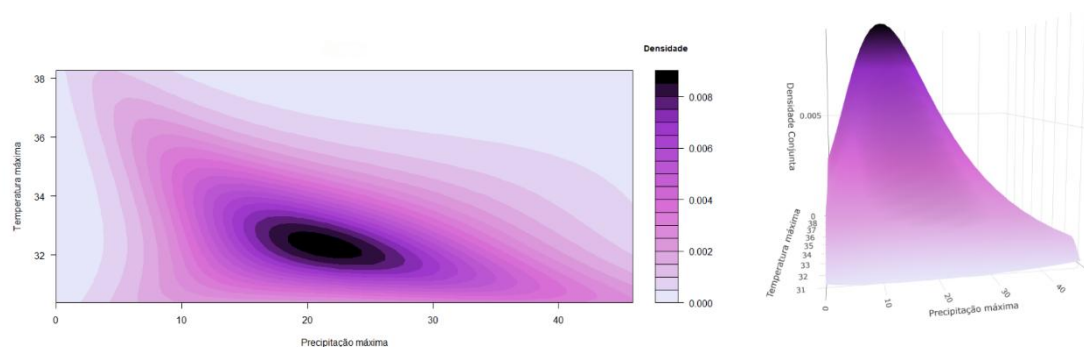
Figura 19: Gráficos de contorno e de perspectiva 3D da distribuição conjunta via cópula de Joe rotacionada em 90°, para o mês de julho (1981 a 2023).



Fonte: POWER(NASA), 2024. Elaboração: Leal (2024). Disponível em: <https://power.larc.nasa.gov/beta/data-access-viewer/>. Acesso em: 30 jul. de 2024.

A densidade conjunta para o mês de julho indica que a probabilidade de ocorrência simultânea dos valores máximos de precipitação e temperatura é maior quando a precipitação máxima está entre 20 e 30 mm e a temperatura máxima varia entre 28 e 29°C, seguindo o mesmo padrão do mês anterior.

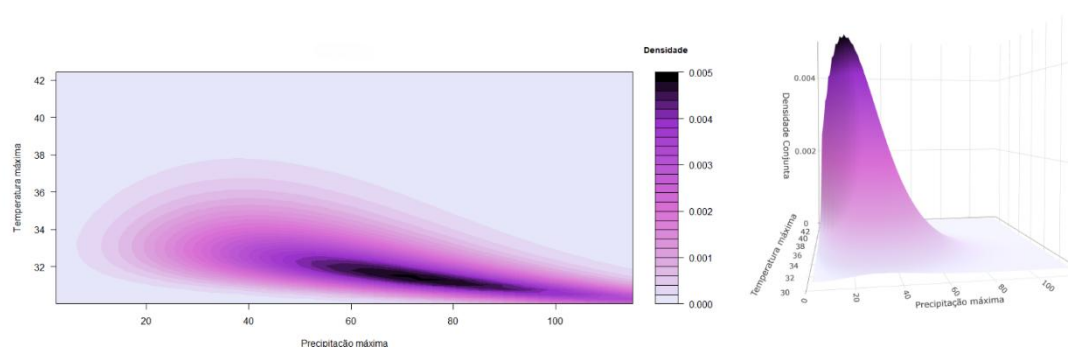
Figura 20: Gráficos de contorno e de perspectiva 3D da distribuição conjunta via cópula T, para o mês de agosto (1981 a 2023).



Fonte: POWER(NASA), 2024. Elaboração: Leal (2024). Disponível em: <https://power.larc.nasa.gov/beta/data-access-viewer/>. Acesso em: 30 jul. de 2024.

A densidade conjunta para o mês de agosto mostra que a probabilidade de ocorrência simultânea dos valores máximos de precipitação e temperatura aumenta quando a precipitação máxima está entre 10 e 20 mm e a temperatura máxima varia entre 31 e 33°C.

Figura 21: Gráficos de contorno e de perspectiva 3D da distribuição conjunta via cópula de Clayton rotacionada em 270°, para o mês de setembro (1981 a 2023).



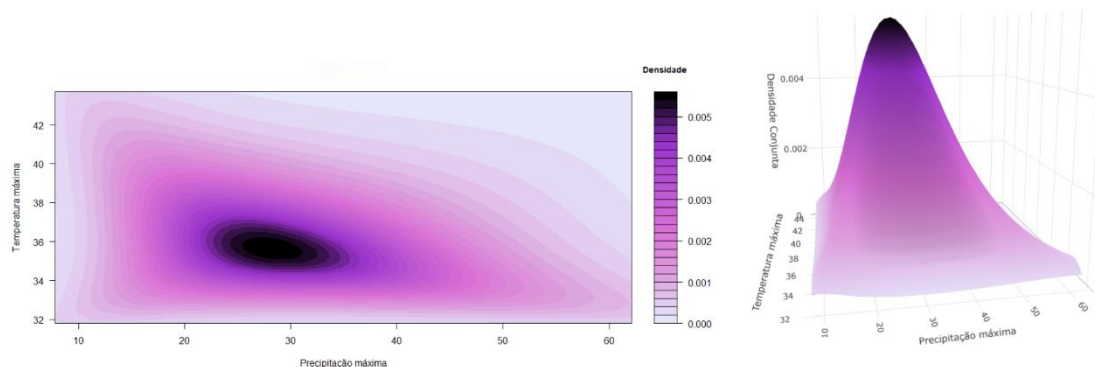
Fonte: POWER(NASA), 2024. Elaboração: Leal (2024). Disponível em: <https://power.larc.nasa.gov/beta/data-access-viewer/>. Acesso em: 30 jul. de 2024.

A densidade conjunta para o mês de setembro mostra que a probabilidade de ocorrência simultânea dos valores máximos de precipitação e temperatura é maior quando a precipitação máxima está acima de 80 mm e a temperatura máxima varia entre 31 e 32°C.

Esse padrão reflete o início da transição para a estação chuvosa, marcada por um aumento significativo na precipitação devido à atuação de sistemas de baixa pressão e frentes úmidas que começam a se intensificar. As temperaturas máximas

continuam relativamente altas, evidenciando o calor acumulado típico da primavera, que favorece a convecção e, conseqüentemente, precipitações volumosas.

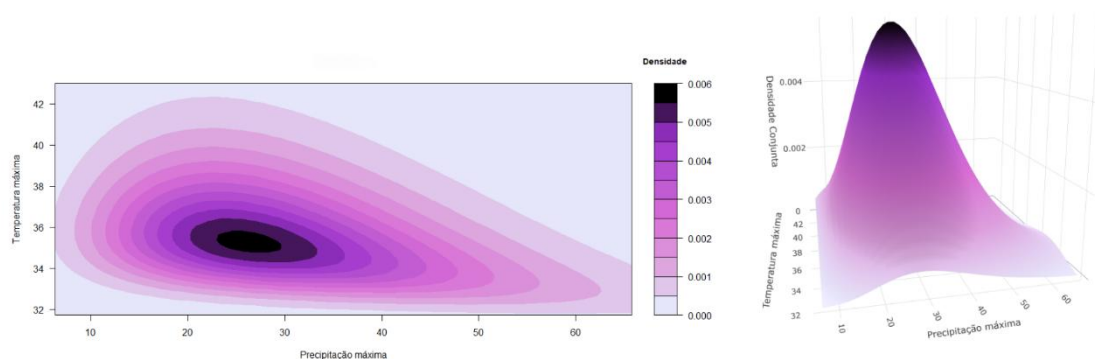
Figura 22: Gráficos de contorno e de perspectiva 3D da distribuição conjunta via cópula T , para o mês de outubro (1981 a 2023).



Fonte: POWER(NASA), 2024. Elaboração: Leal (2024). Disponível em: <https://power.larc.nasa.gov/beta/data-access-viewer/>. Acesso em: 30 jul. de 2024.

A densidade conjunta para o mês de outubro indica que a probabilidade de ocorrência simultânea dos valores máximos de precipitação e temperatura aumenta quando a precipitação máxima está entre 20 e 40 mm e a temperatura máxima varia entre 34 e 38°C. Esse padrão reflete a intensificação da estação chuvosa, que aumenta a umidade e temperaturas máximas.

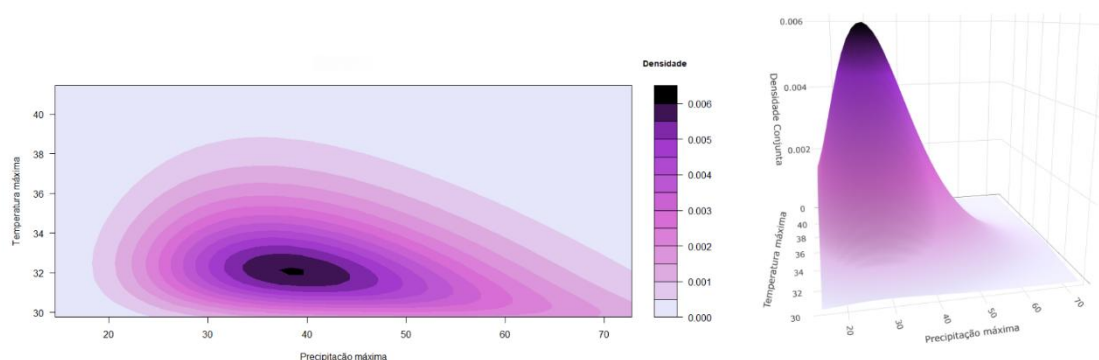
Figura 23: Gráficos de contorno e de perspectiva 3D da distribuição conjunta via cópula de Clayton rotacionada em 270°, para o mês de novembro (1981 a 2023).



Fonte: POWER(NASA), 2024. Elaboração: Leal (2024). Disponível em: <https://power.larc.nasa.gov/beta/data-access-viewer/>. Acesso em: 30 jul. de 2024.

A densidade conjunta para o mês de novembro mostra que a probabilidade de ocorrência simultânea dos valores máximos de precipitação e temperatura é maior quando a precipitação máxima está entre 20 e 40 mm e a temperatura máxima varia entre 34 e 36°C, consolidando o padrão dos últimos meses.

Figura 24: Gráficos de contorno e de perspectiva 3D da distribuição conjunta via cópula de Joe rotacionada em 90°, para o mês de dezembro (1981 a 2023).



Fonte: POWER(NASA), 2024. Elaboração: Leal (2024). Disponível em: <https://power.larc.nasa.gov/beta/data-access-viewer/>. Acesso em: 30 jul. de 2024.

A densidade conjunta para o mês de dezembro mostra que a probabilidade de ocorrência simultânea dos valores máximos de precipitação e temperatura aumenta quando a precipitação máxima está entre 35 e 45 mm e a temperatura máxima varia entre 31 e 33°C. Esse padrão reflete o auge da estação chuvosa, caracterizada por alta umidade e temperaturas máximas elevadas.

6.2.4 Cálculos de probabilidades através das distribuições conjuntas via cópula

Para demonstrar melhor o que as cópulas são capazes, a Tabela 6 contém a probabilidade conjunta de ocorrência de precipitação máxima maior que 10mm e temperatura máxima acima de 30°C.

Tabela 6 - Probabilidade conjunta (Precipitação máxima > 10mm, Temperatura máxima > 30°C).

Mês	Probabilidade conjunta
Janeiro	0.9999974
Fevereiro	0.9998326
Março	0.9997568
Abril	0.9695527

Mês	Probabilidade conjunta
Maio	0.9704492
Junho	0.8411193
Julho	0.8960916
Agosto	0.999274
Setembro	1
Outubro	0.9999479
Novembro	1
Dezembro	0.9999984

Fonte: POWER(NASA), 2024. Organização: Leal (2024). Disponível em: <https://power.larc.nasa.gov/beta/data-access-viewer/>. Acesso em: 30 jul. de 2024.

A probabilidade conjunta mostrou-se elevada durante a maior parte do ano, especialmente nos meses de setembro e novembro, que são meses mais quentes e úmidos no local. Por outro lado, nos meses de junho e julho, a probabilidade conjunta é reduzida, uma vez que as temperaturas máximas são mais amenas devido ao inverno no local, e o clima seco e frio limita a ocorrência simultânea de temperaturas acima de 30°C e precipitações superiores a 10 mm.

A Tabela 7 contém a probabilidade conjunta de ocorrência de precipitação máxima maior que 40mm e temperatura máxima acima de 35°C.

Tabela 7 - Probabilidade conjunta (Precipitação máxima > 40mm, Temperatura máxima > 35°C).

Mês	Probabilidade conjunta
Janeiro	0.52657120
Fevereiro	0.26251075
Março	0.19560224
Abril	0.18640279
Maio	0.16976407
Junho	0.10236667
Julho	0.06884984
Agosto	0.41107054
Setembro	0.84685769
Outubro	0.81918469
Novembro	0.79666949
Dezembro	0.67035819

Fonte: POWER(NASA), 2024. Organização: Leal (2024). Disponível em: <https://power.larc.nasa.gov/beta/data-access-viewer/>. Acesso em: 30 jul. de 2024.

A probabilidade conjunta mostrou-se particularmente elevada nos meses de setembro, outubro e novembro. Esse período, característico da primavera, é marcado por temperaturas mais altas e chuvas intensas na região da área de estudo, o que favorece a ocorrência simultânea desses eventos. Dezembro e janeiro também apresentaram probabilidades relativamente altas, refletindo o clima quente e úmido do início do verão.

Por outro lado, nos meses de inverno, como junho e julho, as probabilidades conjuntas foram substancialmente menores. Isso ocorre devido ao clima mais seco e frio típico desse período, que reduz tanto a frequência de chuvas intensas quanto de temperaturas elevadas.

7 CONCLUSÕES

Este trabalho utilizou técnicas estatísticas para modelar a relação entre temperatura e precipitação máximas em Presidente Prudente, com foco na construção de distribuições conjuntas por meio da teoria de cópulas. E através delas foi possível calcular as probabilidades de ocorrência conjunta das máximas, contribuindo para uma melhor compreensão da interdependência dessas variáveis.

Os resultados mostraram que a distribuição Gumbel ajustou-se bem aos dados de temperatura e precipitação máximas em Presidente Prudente, capturando de forma eficaz as características extremas de cada variável em suas distribuições marginais. As análises também evidenciaram variações sazonais nas dependências entre essas variáveis, com maior interdependência observada nos meses mais quentes e chuvosos, característicos do verão, e menor interdependência nos meses mais frios e secos, típicos do inverno. Esses padrões foram adequadamente representados pelas cópulas rotacionadas, que se mostraram eficazes na captura de diferentes estruturas de dependência ao longo do ano.

As probabilidades conjuntas de ocorrência simultânea de máximas revelaram picos durante as estações primavera e verão, quando condições de calor intenso e chuvas mais volumosas são mais frequentes. Por outro lado, nos meses de inverno, essas probabilidades foram significativamente menores, refletindo a redução tanto na frequência de chuvas quanto em temperaturas máximas.

Os resultados podem orientar gestores públicos e lideranças comunitárias na formulação de estratégias mais eficazes de prevenção, sobretudo em áreas como agricultura, gestão de recursos hídricos, planejamento urbano e prevenção de desastres naturais.

REFERÊNCIAS

- AGHAKOUCHAK, A.; CHENG, L.; MAZDIYASNII, O.; FARAHMAND, A.. **Global warming and changes in risk of concurrent climate extremes: insights from the 1981 California drought**. Geophysical Research Letters, 1981, vol. 41, no. 24, pp. 8847–8852. DOI: <https://doi.org/10.1002/1981GL062308>.
- ALMEIDA, F. E. S. d. [. (2021). **Roteiro prático de aplicação de cópula para o cálculo de dependência utilizando a linguagem R**.
- AYOADE, J. O. **Introdução à Climatologia para os trópicos**. 12ed. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2007.
- AZAD, S.; POONIA, N.. **A new statistical distribution derived from a Clayton copula for modeling bivariate processes**. Journal of Hydrometeorology, [ano de publicação online: 29 set. 2023; publicação impressa: 01 out. 2023], v. 24, n. 10, p. 1659-1678. DOI: <https://doi.org/10.1175/JHM-D-23-0011.1>.
- BRADY, M; CONG, R.G.. **The interdependence between rainfall and temperature: copula analyses**. The Scientific World Journal, 2012, vol. 2012, Article ID 405675, doi: [10.1100/2012/405675](https://doi.org/10.1100/2012/405675).
- CLAYTON, D. G. 1978. “**A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence**.” Biometrika, 65(1), 141–151
- DE LUCA, G.; RIVECCIO, G. **Modeling and Simulating Rainfall and Temperature Using Rotated Bivariate Copulas**. Hydrology 2023, 10, 236. <https://doi.org/10.3390/hydrology10120236>
- DEMARTA, S., MCNEIL, A.J.: **The t copula and related copulas**. Int. Stat. Rev. 73(1), 111–129 (2005)
- DZUPIRE, N. C.; NGARE, P.; ODONGO, L.. **A copula based bi-variate model for temperature and rainfall processes**. Scientific African, 2020, v. 8, e00365, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.sciaf.2020.e00365>
- FERREIRA, J.C.; DANIEL, L.A.; TOMAZELA, M. **Parâmetros para equações mensais de estimativas de precipitação de intensidade máxima para o Estado de São Paulo - Fase I**. Ciência e Agrotecnologia. v. 29, n. 6, 2005.
- GUMBEL, E.J.: **Distributions des valeurs extrême en plusieurs dimensions**. Publ. Inst. Stat. Univ. Paris 9, 171–173 (1960).

Joe, H. **Multivariate Models and Dependence Concepts. Monographs in Statistics and Probability**; Chapman and Hall: London, UK, 1997.

HOUGAARD, P. **Analysis of multivariata survival data**. Editora Springer, 1a ed., 2001.

IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Regiões de Influência das Cidades 2018**. Rio de Janeiro: IBGE, 2020. Disponível em: <https://biblioteca.ibge.gov.br/index.php/bibliotecacatalogo?view=detalhes&id=2101728>.

MELLO, C.R.; SILVA, A.M. **Métodos estimadores dos parâmetros da distribuição de Gumbel e sua influência em estudos hidrológicos de projeto**. Irriga, Botucatu, v. 10, n. 4, p. 318-334, 2005.

MISHRA, V.; WALLACE, J.M.; LETTENMAIER, D.P.. **Relationship between hourly extreme precipitation and local air temperature in the United States**. Geophysical Research Letters, 2012, vol. 39.

NELSEN, R. **An introduction to copulas**. Editora Springer, Nova Iorque, 2006.

PEREIRA DA SILVA, G. H.; CRISTIANE DE COSTA TRINDADE AMORIM, M. ; CARDOZO FRASCA TEIXEIRA, D. **Análise temporal da temperatura e das chuvas a partir da técnica dos quantis aplicada às cidades de rancharia-sp e Presidente Prudente-SP**. Terra Livre,,ano.37, V.1, n.58 2022, p.223-250. Disponível em: <https://publicacoes.agb.org.br/terralivre/article/view/2318>.

POWER. NASA. Disponível em: <https://power.larc.nasa.gov/beta/data-access-viewer/>.

SANSIGOLO, C.A. **Distribuições de extremos de precipitação diária, temperatura máxima e mínima e velocidade do vento em Piracicaba, SP (1917-2006)**. Revista Brasileira de Meteorologia, v. 23, n. 3, p. 341-346, 2008.

TORRES, F. T. P.; MACHADO, P. J. de O. **Introdução à climatologia**. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

VIEIRA, S.R.; LOMBARDI NETO, F.; BURROWS, I.T. **Mapeamento da chuva diária máxima provável para o Estado de São Paulo**. Revista Brasileira de Ciência do Solo, Campinas, v. 15, p. 93-98, 1991.