

**unesp** 

---

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

**PROGRAMA DE  
PÓS-GRADUAÇÃO  
EM FÍSICA**

**ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM FÍSICA APLICADA**

---

**CÉLIA MAYUMI KUWANA**

**INVESTIGAÇÃO DA DIFUSÃO CAÓTICA EM  
MAPEAMENTOS HAMILTONIANOS**

---

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

**RIO CLARO**

São Paulo - 2018



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Câmpus de Rio Claro

# Investigação da difusão caótica em mapeamentos Hamiltonianos

Célia Mayumi Kuwana

Rio Claro - 2018



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Câmpus de Rio Claro

# Investigação da difusão caótica em mapeamentos Hamiltonianos

Célia Mayumi Kuwana

Dissertação apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador  
Prof. Dr. Edson Denis Leonel

**Rio Claro - 2018**

517.39 Kuwana, Célia Mayumi  
K97i       Investigação da difusão caótica em mapeamentos  
            hamiltonianos / Célia Mayumi Kuwana. - Rio Claro, 2018  
            50 f. : il., gráfs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Orientador: Edson Denis Leonel

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. 2. Equação da  
difusão. 3. Sistema hamiltoniano. 4. Lei de escala. I. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Câmpus de Rio Claro

Célia Mayumi Kuwana

## Investigação da difusão caótica em mapeamentos Hamiltonianos

Dissertação apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Edson Denis Leonel

Prof. Dr. Denis Gouvêa Ladeira

Prof. Dr. Ricardo Egydio de Carvalho

Conceito: Aprovada

Rio Claro - 2018

## Resumo

Neste trabalho apresentaremos e discutiremos algumas propriedades dinâmicas para uma família de mapeamentos discretos que preservam a área no espaço de fases nas variáveis *momentum*,  $I$ , e coordenada generalizada,  $\theta$ . O mapeamento é descrito por dois parâmetros de controle, sendo eles  $\varepsilon$ , ajustando a intensidade da não linearidade, e  $\gamma$ , um parâmetro que fornece a forma da divergência da variável “ $\theta$ ” no limite em que  $I \rightarrow 0$ . O parâmetro  $\varepsilon$  controla a transição de integrabilidade, quando  $\varepsilon = 0$ , para não integrabilidade, no limite em que  $\varepsilon \neq 0$ . O objetivo principal deste trabalho é descrever o comportamento das curvas do *momentum* médio,  $I_{RMS}(\varepsilon, n)$ , em função de  $n$ , a partir de uma função de probabilidade,  $P(I(n))$ , de observar um determinado *momentum*  $I$  em um instante  $n$ . Para tanto, resolveremos a Equação da Difusão analiticamente, considerando os casos: (i) o *momentum* inicial nulo,  $I_0 = 0$ , e (ii) o *momentum* inicial não nulo,  $I_0 \neq 0$ . Nossos resultados descrevem bem os resultados fenomenológicos conhecidos na literatura (*Physics Letters A*, **379**: 1808 (2015)).

**Palavras-chave:** Equação da difusão, Sistema Hamiltoniano, Lei de escala.

## Abstract

In this work we will present and discuss some dynamical properties of a family of mappings that preserves area in the phase space for two variables *momentum*,  $I$ , and generalized coordinate,  $\theta$ . The mapping is controlled by two parameters:  $\varepsilon$ , tuning the intensity of nonlinearity, and  $\gamma$ , that describes the form of divergence of  $\theta$  when  $I \rightarrow 0$ . The parameter  $\varepsilon$  defines a transition from integrability, when  $\varepsilon = 0$ , to nonintegrability, when  $\varepsilon \neq 0$ . The main goal of this work is to describe the curves of average *momentum*,  $I_{RMS}(\varepsilon, n)$ , in terms of  $n$ , from a probability function,  $P(I(n))$ , to observe a determined *momentum*  $I$  at an instant  $n$ . Therefore, we will solve the Diffusion equation analitically considering the cases: (i) the initial *momentum* is null,  $I_0 = 0$ , and (ii) the initial *momentum* is nonzero,  $I_0 \neq 0$ . Our results describe well the known phenomenological results in literature (*Physics Letters A*, **379**: 1808 (2015)).

**Key-words:** Diffusion equation, Hamiltonian system, scaling law.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>O modelo</b>	<b>13</b>
2.1	O modelo e suas propriedades . . . . .	13
2.2	A localização das curvas invariantes <i>spanning</i> . . . . .	16
2.3	Teoria Fenomenológica . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Equação da Difusão</b>	<b>25</b>
3.1	Equação da Difusão . . . . .	25
3.2	Solução da Equação da Difusão . . . . .	27
3.3	Discussão dos resultados . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>47</b>

# Lista de Figuras

1.1	<i>O atrator de Lorenz com a condição inicial <math>(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 0)</math> e os parâmetros <math>\sigma = 10</math>, <math>r = 28</math> e <math>b = \frac{8}{3}</math> (a) <math>z</math> vs. <math>x</math>, (b) <math>y</math> vs. <math>x</math>, (c) <math>z</math> vs. <math>y</math> e (d) <math>y</math> vs. <math>t</math>.</i>	9
2.1	<i>Espaço de fases para o mapa (2.3) com os parâmetros <math>\gamma = 1</math> e (a) <math>\varepsilon = 10^{-2}</math> e (b) <math>\varepsilon = 10^{-3}</math>. As linhas vermelhas, que delimitam o mar de caos, identificam as primeiras curvas invariantes spanning <math>I_{FISC}</math> positiva e negativa.</i>	15
2.2	<i>Espaço de fases do mapa padrão para: (a) <math>K = 0,5</math>, (b) <math>K = 0,9</math> e (c) <math>K = 2</math>.</i>	17
2.3	<i>Gráfico típico de <math>I_{RMS}</math> em função de <math>n</math> com diferentes valores do parâmetro <math>\varepsilon = 10^{-3}, 10^{-4}</math> e <math>5 \times 10^{-4}</math> e <math>\gamma = 1</math>. A condição inicial usada foi <math>I_0 = 10^{-3}\varepsilon</math>. Foram consideradas 3000 diferentes <math>\theta_0 \in [0, 2\pi]</math>.</i>	21
3.1	<i>Espaço de fases para o mapa (2.3) com os parâmetros <math>\varepsilon = 10^{-2}</math> e <math>\gamma = 1</math>. As linhas vermelhas, que delimitam o mar de caos, identificam as primeiras curvas invariantes spanning <math>I_{FISC}</math> positiva e negativa.</i>	26
3.2	<i>Gráfico <math>I_{RMS}</math> em função de <math>n</math> com os parâmetros <math>\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}</math> e <math>\gamma = 1</math>. Símbolos são os dados obtidos por simulação ao passo que a linha contínua identifica os resultados teóricos.</i>	38
3.3	<i>Gráfico de <math>I_{RMS}</math> em função de <math>n</math> com parâmetros <math>\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}</math> e <math>\gamma = 1</math> e diferentes valores para <math>I_0</math>. Símbolos são os dados obtidos por simulação ao passo que a linha contínua identifica os resultados teóricos.</i>	42

# Capítulo 1

## Introdução

Diversos estudos sobre sistemas dinâmicos são e foram feitos em diversas áreas da física além das áreas de biologia [1]. O primeiro livro na área de sistemas dinâmicos foi publicado em 1927 por George Birkhoff (1884-1944) intitulado *Dynamical Systems*. Porém, Jules Henri Poincaré (1854-1912) foi o primeiro cientista a considerar comportamentos irregulares em sistemas dinâmicos ao estudar órbitas planetárias, por volta do ano de 1880.

Mais recentemente, na década de 60, Edward Lorenz (1917-2008), meteorologista no Instituto de Tecnologia de Massachusetts, descobriu o chamado efeito borboleta, que recebeu o nome técnico de dependência sensível das condições iniciais, enquanto trabalhava com previsão do tempo [2]. Suas previsões eram válidas somente para um dia. Para três dias, as previsões eram especulativas e, além de seis dias, eram inválidas.

Como sistemas estudados por Lorenz eram não lineares e dependentes do tempo, a dependência sensível das condições iniciais era inevitável. Lorenz procurou maneiras mais simples de produzir este comportamento sem levar em consideração o tempo. Ele encontrou em um sistema com três equações. O movimento que inspirou estas equações foi a convecção dos fluidos. Então, Lorenz considerou a série idealizada por Barry Saltzman (1931-2001) de sete equações para a convecção [3], eliminou termos de menor importância, porém deixou a não-linearidade. Este sistema não reproduzia a convecção, mas descrevia com precisão, por exemplo, um dínamo elétrico e uma roda d'água.

Lorenz constatou que o movimento deste sistema era descrito por um conjunto de três equações diferenciais acopladas e que veio a ser chamado posteriormente de sistema de Lorenz. O sistema é descrito pelas seguintes

equações:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{dt} = xz + rx - y, \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz. \end{cases} \quad (1.1)$$

onde  $\sigma$ ,  $r$  e  $b$  são parâmetros livres. O parâmetro  $\sigma$  está relacionado ao número de Prandtl e está associado ao número de difusividade de um fluido. O parâmetro  $r$  está relacionado ao número de Rayleigh e associado à diferença de temperatura entre dois extremos de um fluido. Já o parâmetro  $b$  está associado à razão entre a altura e a largura do fluxo convectivo. Os valores utilizados por Lorenz foram  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$  e  $b = \frac{8}{3}$ .

Porém, suas séries temporais apresentaram uma espécie de espiral dupla em três dimensões, similar a uma borboleta com duas asas, o atrator de Lorenz, conforme mostrado na Figura 1.1. Um atrator é um conjunto invariante para o qual órbitas próximas convergem após um tempo suficientemente longo.

Em 1966, Stephen Smale (1930- ) recebeu medalha Fields<sup>1</sup>, em Moscou, pela resolução da hipótese de Poincaré para espaços de cinco ou mais dimensões. Porém, mais tarde, deixou a topologia<sup>2</sup> para estudar sistemas dinâmicos, os quais eram chamados oficialmente de equações diferenciais.

Smale acreditava que um sistema poderia ter um comportamento irregular e que este seria estável. Esta hipótese definiu uma classe de equações diferenciais estruturalmente estáveis, isto é, equações que para qualquer perturbação suficientemente pequena, o fluxo resultante é topologicamente equivalente àquele associado às equações sem a perturbação. Porém, em 1959, Smale recebeu uma carta de Norman Levinson (1912-1975), na qual descrevia um sistema com caos e estabilidade juntos: um circuito eletrônico oscilante. Nesta época, caos e estabilidade eram conceitos que estavam adquirindo definições formais. O caos determinístico ocorre devido à dependência sensível às condições iniciais; algumas características são imprevisibilidade, comportamento aperiódico, invariância de escala, repetição de padrões. A estabilidade pode ser considerada de dois tipos: (i) estabilidade de uma solução

---

<sup>1</sup>Prêmio concedido a matemáticos com até 40 anos de idade durante o Congresso Internacional da União Internacional de Matemática.

<sup>2</sup>Área da matemática que estuda as propriedades de espaços invariantes em relação a homeomorfismos.

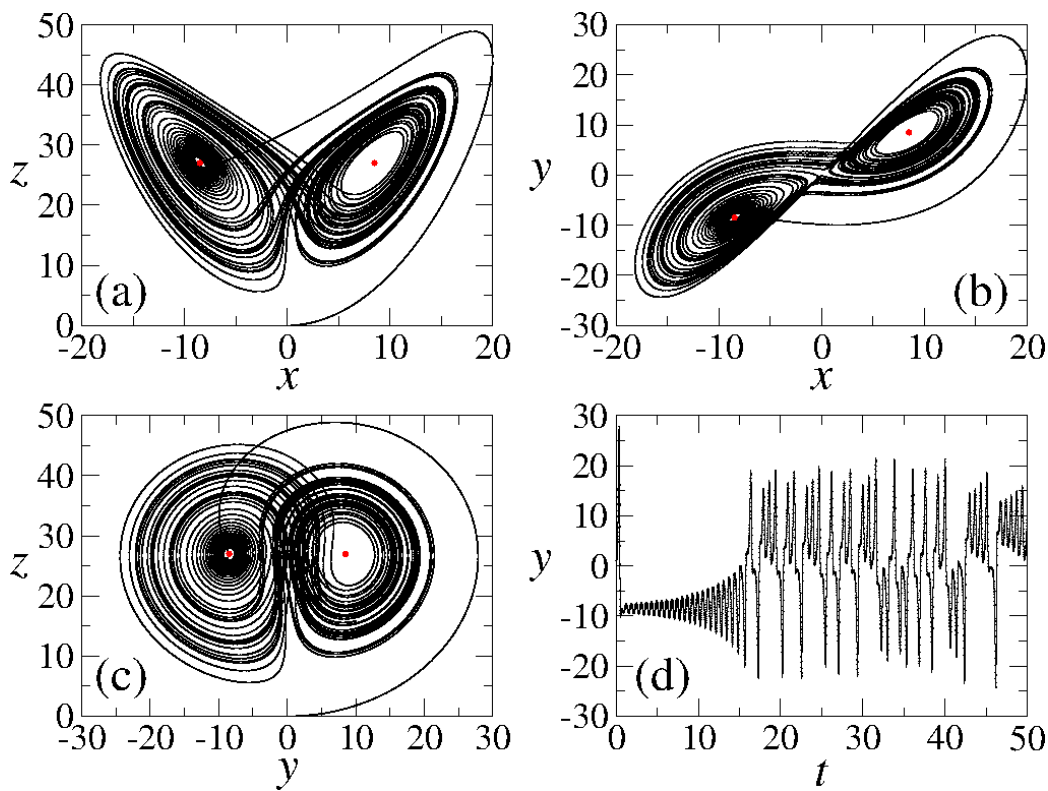


Figura 1.1: O atrator de Lorenz com a condição inicial  $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 0)$  e os parâmetros  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$  e  $b = \frac{8}{3}$  (a)  $z$  vs.  $x$ , (b)  $y$  vs.  $x$ , (c)  $z$  vs.  $y$  e (d)  $y$  vs.  $t$ .

estacionária (ponto fixo), podendo ser classificada em estável, assintoticamente estável e instável; e (ii) estabilidade estrutural, em que se testa a robustez do espaço de fases sob uma perturbação, podendo ser classificada em estável ou instável.

Este exemplo era uma válvula eletrônica que havia sido estudada por Balthasar van der Pol (1889-1959), na década de 20. Para representar a complexidade deste oscilador, Smale criou o modelo da ferradura, conhecido como ferradura de Smale. Este modelo foi base para o entendimento das propriedades caóticas dos sistemas dinâmicos. Quando seu trabalho em sistemas dinâmicos chamou a atenção de ciências menos puras, os físicos compreenderam que Smale havia trazido de volta ao mundo real um ramo da matemática.

Outra contribuição [4] foi de James Yorke (1941- ), que teve conhecimento

dos resultados de Lorenz. Seu amigo Robert May (1936- ), biólogo, estudou uma versão da equação da diferença logística para taxa de crescimento populacional [5], em que observou que para um valor baixo do parâmetro de não-linearidade, o modelo fixava-se num regime estável e para valores altos, a população alternava entre dois valores, ou seja, havia uma bifurcação, uma perda de estabilidade estrutural. Ao aumentar o valor do parâmetro, a população duplicava novamente. May observou que estas bifurcações ocorriam cada vez mais depressa.

Analisando este comportamento, Yorke provou [6] que se um ciclo regular de período três aparece em qualquer sistema unidimensional, então o sistema apresentará também ciclos regulares e ciclos completamente caóticos.

Esta descoberta foi um “choque” para os físicos. Intuitivamente, seria comum que um sistema se repetisse numa oscilação de período três sem produzir caos e Yorke provou que isso era impossível.

Porém, alguns anos depois, em uma conferência internacional, em Berlim, Yorke foi abordado por Alexander N. Sarkovskii (1936-), que disse ter provado o mesmo resultado no trabalho “Coexistência de ciclos de um mapa contínuo de uma linha para si mesma” [7], de 1964.

O desconhecimento da obra se deu por problemas de comunicação entre as ciências soviética e ocidental, tanto pelo idioma quanto pelas restrições de viagens entre os dois lados. Mas, para os soviéticos, a nova ciência não era tão nova, pois existiam obras de Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987), na década de 50, conforme mencionado em [1].

Benoit Mandelbrot (1924-2010) criou a palavra fractal para nomear a geometria que observou quando estudava formas de medir precisamente a linha de um litoral, em 1975.

Ele pôde caracterizar as dimensões fracionadas, pois tinha com ele a vantagem de acesso a recursos de computação e de seus estudos com padrões irregulares, como oscilação dos preços de algodão e ruídos nas transmissões eletrônicas, mostrarem a característica de autossimilaridade em comum. Característica esta encontrada também no atrator de Lorenz.

Um objeto fractal é um objeto cuja dimensão é não inteira e caracterizado pela repetição estrutural em variadas escalas.

Em 1973, Harry Swinney (1939- ) e Jerry Gollub (1944-) resolveram estudar o fluxo de Couette-Taylor<sup>3</sup> para confirmar a ideia de Landau (1908-1968) sobre turbulência. Segundo Landau, uma por vez, frequências surgiriam conforme o fluxo aumentava. Porém, a sequência de Landau havia sido interrompida. Eles observaram um estado bem definido e depois o fluxo se tornou indistinguível.

David Ruelle (1935- ) e Floris Takens (1940-2010) “afirmavam que apenas três movimentos independentes produziriam a complexidade total da turbulência” (GLEICK, 1989, p.135). Juntos, escreveram o artigo intitulado “On the nature of turbulence” [8] para explicar que as ideias de Landau eram falsas e afirmaram que os atratores estranhos descreviam a turbulência e não as superposições de frequências. Segundo Ruelle e Takens, atratores estranhos são atratores que evoluem por um processo de alongamentos e dobras.

Em um mapeamento discreto cuja dinâmica é descrita por  $x_{n+1} = F(x_n)$ , sendo  $x$  a variável dinâmica,  $F$  uma função não linear qualquer e “ $n$ ” o índice,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , um ponto fixo é definido quando  $x^* = F(x^*)$ . Analogamente para um sistema bidimensional,  $(x^*, y^*) = F(x^*, y^*)$ . Podem ser classificados em estável, assintoticamente estável e instável e ciclos limites (soluções periódicas que podem atrair (estável) ou repelir (instável) soluções próximas) são exemplos de atratores mais simples. “O atrator descreve a situação de regime, depois do desaparecimento dos fenômenos transitórios” (RUELLE, 1993, p. 87). Segundo Ruelle (1993), atratores estranhos são objetos de dimensões fractais e apresentam dependência sensível das condições iniciais [9].

O atrator estranho mais esclarecedor veio de Michel Hénon (1931-2013), astrônomo. Para visualizar o espaço de fase, isto é, para visualizar o conjunto de todas as órbitas do sistema, de órbitas estelares, ele fez uso um método parecido ao da elaboração do mapa de Poincaré, em 1962, na Universidade de Princeton, onde teve acesso pela primeira vez aos computadores. Uma órbita de um mapa unidimensional  $x_{i+1} = F(x_i)$  é uma sequência de pontos  $x_0, x_1, x_2, \dots$  com  $x_0$  sendo uma condição inicial. O mapa de Poincaré é um difeomorfismo aplicado em um espaço de fases  $n$ -dimensional e com valores em um espaço de fases  $(n - 1)$ -dimensional, para estudo de fluxo.

Apenas como informação histórica, a primeira conferência sobre caos ocor-

---

<sup>3</sup>Este sistema consiste de um líquido confinado entre dois cilindros verticais, em que o movimento rotativo destes movimenta o líquido.

reu em 1977, em Como, na Itália, organizada por Joseph Ford (1927-1995) e Giulio Casati (1942-).

Processos difusivos são estudados em diversas áreas, além da física [10], [11]. Tais como na medicina [12], como uma droga se espalha pelo sangue até atingir um determinado órgão; na biologia [13], como o pólen de uma planta se espalha até encontrar outra planta; na ecologia, a difusão da poluição [14], sólidos flutuando nos oceanos e viajando através dos continentes [15].

Esta dissertação tem por objetivo descrever as curvas de  $I_{RMS}(n)$  a partir de uma distribuição de probabilidade  $P(I(n))$  de observar uma determinada ação em um instante  $n$ . Para tanto, este trabalho está organizado da seguinte forma:

No capítulo 2, descrevemos o modelo estudado com suas propriedades, localizamos a primeira curva invariante relacionando o mapa estudado com o mapa padrão e apresentamos uma descrição fenomenológica.

No capítulo 3, apresentamos uma solução para a equação da difusão a partir de uma função de probabilidade, considerando os casos em que a condição inicial da ação é nula ou não, ou seja,  $I_0 = 0$  e  $I_0 \neq 0$ .

E, finalmente, no capítulo 4, apresentamos as conclusões e as perspectivas futuras da pesquisa.

# Capítulo 2

## O modelo

Este capítulo é dedicado ao estudo fenomenológico do mar de caos, suas propriedades estatísticas e os expoentes críticos envolvidos nas escalas do modelo.

### 2.1 O modelo e suas propriedades

A dinâmica de um sistema autônomo de dois graus de liberdade pode ser descrita por uma função Hamiltoniana genérica dada por  $H(I_1, I_2, \theta_1, \theta_2) = H_0(I_1, I_2) + \varepsilon H_1(I_1, I_2, \theta_1, \theta_2)$ , onde  $H_0(I_1, I_2)$  representa a parte integrável e  $H_1(I_1, I_2, \theta_1, \theta_2)$ , a parte não integrável e o parâmetro  $\varepsilon$  controla a transição de integrável, quando  $\varepsilon = 0$ , para não integrável, quando  $\varepsilon \neq 0$ . As variáveis  $I_1, I_2, \theta_1$  e  $\theta_2$  representam, respectivamente, *momentum* e coordenada generalizada.

Como a energia é constante, podemos eliminar a variável  $I_2$  e, assim, fazendo uso da seção de Poincaré no plano  $I_1 \times \theta_1$  com  $\theta_2$  constante, obtemos um mapeamento bidimensional. Um mapeamento genérico (ver ref. [16]) que descreve esta dinâmica é dado por:

$$T : \begin{cases} I_{n+1} = & I_n + \varepsilon h(\theta_n, I_{n+1}) \\ \theta_{n+1} = & [\theta_n + K(I_{n+1}) + \varepsilon p(\theta_n, I_{n+1})] \text{ mod}(2\pi) \end{cases}, \quad (2.1)$$

onde  $h(\theta_n, I_{n+1})$ ,  $K(I_{n+1})$  e  $p(\theta_n, I_{n+1})$  são funções não lineares. Este mapa preserva área quando satisfaz a seguinte condição:

$$\frac{\partial p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial \theta_n} + \frac{\partial h(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} = 0. \quad (2.2)$$

Considerando  $p(\theta_n, I_{n+1}) = 0$  e  $h(\theta_n, I_{n+1}) = \sin(\theta_n)$ , podemos citar algumas aplicações conhecidas, tais como:

- o mapa padrão (Chirikov-Taylor) quando  $K(I_{n+1}) = I_{n+1}$  [17];
- o modelo Fermi-Ulam quando  $K(I_{n+1}) = \frac{2}{I_{n+1}}$  [18], [19];
- o modelo bouncer quando  $K(I_{n+1}) = \zeta I_{n+1}$ , com  $\zeta$  constante [20];
- o modelo Fermi-Ulam bouncer quando

$$K(I_{n+1}) = \begin{cases} 4\zeta^2(I_{n+1} - \sqrt{I_{n+1}^2 - \frac{1}{\zeta^2}}), & I_{n+1} > \frac{1}{\zeta} \\ 4\zeta^2 I_{n+1}, & I_{n+1} \leq \frac{1}{\zeta} \end{cases},$$

com  $\zeta$  constante [21], [22], [23];

- o mapa logístico twist quando  $K(I_{n+1}) = I_{n+1} + \zeta I_{n+1}^2$  [24].

O mapa que descreve a dinâmica é dado por:

$$T : \begin{cases} I_{n+1} = I_n + \varepsilon \sin(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = \left( \theta_n + \frac{1}{|I_{n+1}|^\gamma} \right) \text{ mod}(2\pi) \end{cases}, \quad (2.3)$$

onde  $\varepsilon$  é um parâmetro de controle que controla uma transição de integrável para não integrável e  $\gamma > 0$  é um parâmetro livre que controla o comportamento de  $\theta_{n+1}$  no limite em que  $I_{n+1} \rightarrow 0$ .

Se  $\varepsilon = 0$ , o sistema é integrável, ou seja, existem variáveis canônicas  $(Q_i, P_i)$  tais que a função Hamiltoniana do sistema é dada por  $H = H(P_i)$  e  $P_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i} = 0$ , isto é,  $P_i = \text{constante}$ . O espaço de fases é composto por órbitas periódicas, que são órbitas de período  $k$  são definidas por  $k$  pontos tais que  $x_{i+1} = F(x_i)$ ;  $x_{i+2} = F(x_{i+1}) = F^2(x_i)$ ; ...;  $x_{i+k} = F^k(x_i)$ , ou por órbitas quase periódicas, não exibindo assim um período mensurável.

Se  $\varepsilon \neq 0$ , o sistema é não integrável, ou seja, existe uma perturbação agindo sobre o sistema; no modelo estudado, a perturbação é a função  $\sin(\theta)$  e  $\varepsilon$  é o parâmetro que controla a intensidade dessa perturbação. O espaço de fases admite ilhas de periodicidade, curvas invariantes *spanning* e mares de caos. As curvas invariantes funcionam como barreiras que impedem o fluxo de partículas através delas (Figura 2.1).

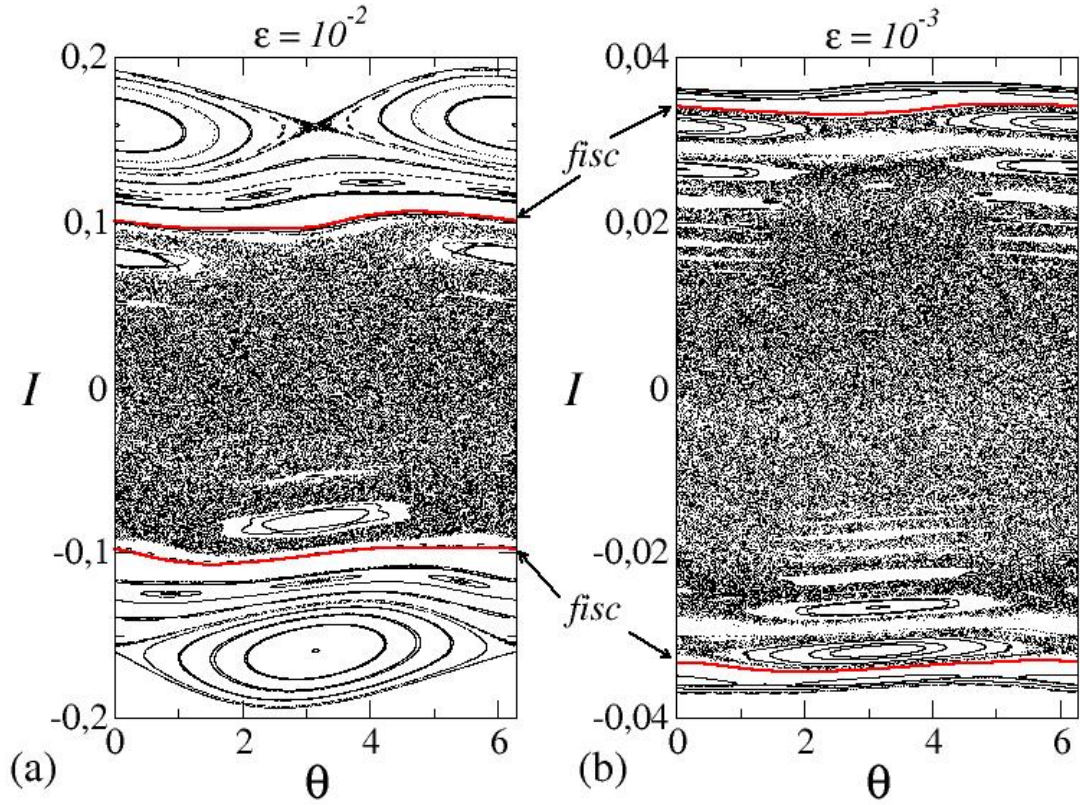


Figura 2.1: Espaço de fases para o mapa (2.3) com os parâmetros  $\gamma = 1$  e (a)  $\varepsilon = 10^{-2}$  e (b)  $\varepsilon = 10^{-3}$ . As linhas vermelhas, que delimitam o mar de caos, identificam as primeiras curvas invariantes spanning  $I_{FISC}$  positiva e negativa.

A matriz Jacobiana é dada por:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

onde os coeficientes são dados por:

- $\frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} = 1$ ,
- $\frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} = \varepsilon \cos(\theta_n)$ ,

- $\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} = -\frac{\gamma}{|I_{n+1}|^{\gamma+1}} \frac{\partial |I_{n+1}|}{\partial I_n} = -\frac{\gamma}{|I_{n+1}|^{\gamma+1}} \text{sinal}(I_{n+1}),$
- $\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} = 1 - \frac{\gamma}{|I_{n+1}|^{\gamma+1}} \frac{\partial |I_{n+1}|}{\partial \theta_n} = 1 - \frac{\gamma}{|I_{n+1}|^{\gamma+1}} \varepsilon \cos(\theta_n) \text{sinal}(|I_{n+1}|),$

onde  $\text{sinal}(I_{n+1}) = \begin{cases} 1, & I_{n+1} > 0 \\ -1, & I_{n+1} < 0 \end{cases}.$

O determinante da matriz Jacobiana é dado por:

$$\det J = \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} - \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n}. \quad (2.5)$$

Logo:

$$\det J = 1 - \frac{\gamma}{|I_{n+1}|^{\gamma+1}} \varepsilon \cos(\theta_n) \text{sinal}(I_{n+1}) - \varepsilon \cos(\theta_n) \left( -\frac{\gamma}{|I_{n+1}|^{\gamma+1}} \text{sinal}(I_{n+1}) \right),$$

$$\Rightarrow \det J = 1. \quad (2.6)$$

Assim, de acordo com o Teorema de Liouville [10], o mapeamento preserva a área no espaço de fases. Isso porque a transformação de área do instante “ $n$ ” para “ $n + 1$ ” se dá conforme  $dA_{n+1} = [\det J] dA_n$ , onde  $dA_n$  é o elemento infinitesimal de área no instante “ $n$ ”. A forma geométrica pode mudar, porém a área é preservada.

## 2.2 A localização das curvas invariantes *spanning*

Para localizar  $I_{FISC}$ , a primeira curva invariante *spanning*, utilizamos uma conexão com o Mapa Padrão (Chirikov-Taylor) [16] dado por:

$$T_{SM} : \begin{cases} I_{n+1} = I_n + K \sin(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = (\theta_n + I_{n+1}) \quad \text{mod}(2\pi) \end{cases}. \quad (2.7)$$

Se  $K = 0$ , o sistema é integrável, ao passo que para  $K \neq 0$  o sistema é não integrável. De acordo com as referências [16] e [25], existe um valor  $K_c \cong 0,9716\dots$  onde o sistema exibe uma transição de caos local para caos global.

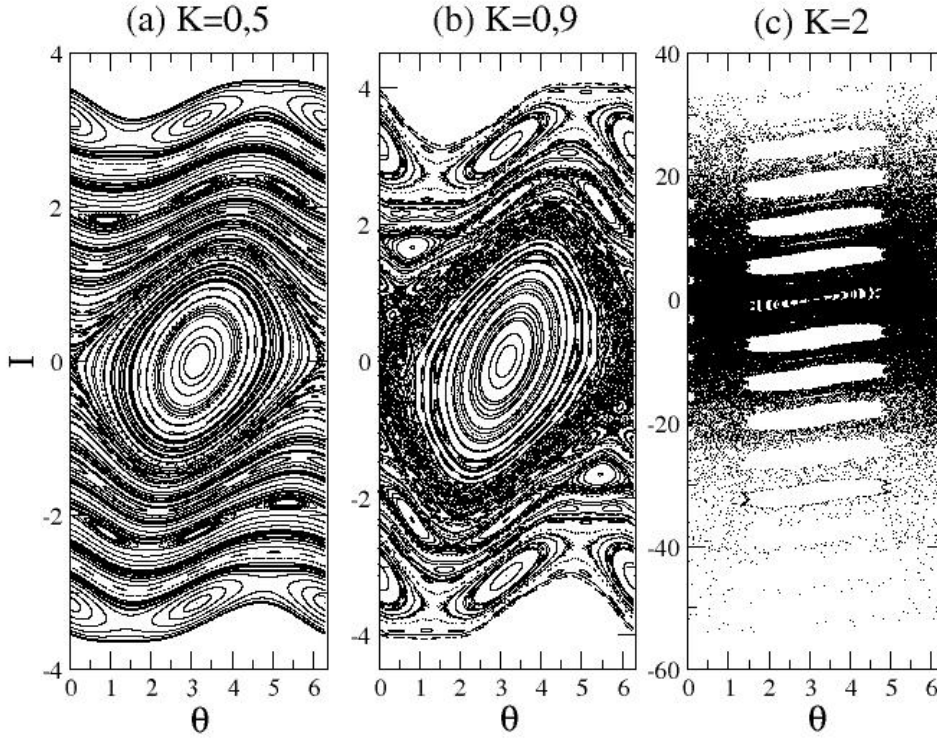


Figura 2.2: Espaço de fases do mapa padrão para: (a)  $K = 0,5$ , (b)  $K = 0,9$  e (c)  $K = 2$ .

Se  $K < K_c$ , o espaço de fases admite caos que está confinado entre curvas invariantes *spanning*. Esse confinamento garante a terminologia de caos local (Figura 2.2(a) e (b)). Se  $K \geq K_c$ , as curvas invariantes *spanning* são destruídas e o caos pode se espalhar ao longo do espaço de fases produzindo difusão ilimitada da variável ação. Utilizamos essa propriedade em  $K = K_c$  para descrever localmente a posição de  $I_{FISC}$ . A figura 2.2(c) foi obtida para  $K = 2$  e curvas invariantes *spanning* não são mais observadas. Assim, devemos reescrever o mapa (2.3) em termos do mapa (2.7) para que a dinâmica local, próxima a  $I_{FISC}$ , possa ser obtida.

Assumindo que  $I_{FISC}$  possa ser escrito como  $I_{FISC} = I^* + \Delta I$ , a variável dinâmica  $I_{n+1}$  ao longo de  $I_{FISC}$  é  $I_{n+1} = I^* + \Delta I_{n+1}$ , onde  $I^*$  é o valor médio de  $I_{FISC}$  e  $\Delta I$  é uma pequena perturbação de  $I^*$ , sendo  $\Delta I \ll I^*$ .

Desse modo, a primeira equação de (2.3) é dada por:

$$\begin{aligned} I^* + \Delta I_{n+1} &= I^* + \Delta I_n + \varepsilon \sin(\theta_n), \\ \Rightarrow \Delta I_{n+1} &= \Delta I_n + \varepsilon \sin(\theta_n). \end{aligned} \quad (2.8)$$

A segunda equação de (2.3) é dada por:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{1}{(I^* + \Delta I_{n+1})^\gamma}, \quad (2.9)$$

onde estamos assumindo, por simplicidade, que  $I_{n+1} > 0$  e estamos também removendo o  $\text{mod}(2\pi)$  para fazer a expansão.

Reescrevendo, temos:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{1}{I^*} \left( 1 + \frac{\Delta I_{n+1}}{I^*} \right)^{-\gamma}, \quad (2.10)$$

onde  $\frac{\Delta I_{n+1}}{I^*} \ll 1$ .

Expandindo em séries de Taylor e considerando apenas termos de 1ª ordem em  $\frac{\Delta I_{n+1}}{I^*}$ , temos:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{1}{I^{*\gamma}} \left[ 1 - \gamma \frac{\Delta I_{n+1}}{I^*} + \underbrace{O^2 \left( \frac{\Delta I_{n+1}}{I^*} \right)}_{\approx 0} \right]. \quad (2.11)$$

Logo, obtemos:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{1}{I^*} - \gamma \frac{\Delta I_{n+1}}{I^{*\gamma+1}}. \quad (2.12)$$

As duas equações resultantes da aproximação são escritas como:

$$\begin{cases} \Delta I_{n+1} = \Delta I_n + \varepsilon \sin(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \frac{1}{I^*} - \gamma \frac{\Delta I_{n+1}}{I^{*\gamma+1}} \end{cases}. \quad (2.13)$$

Denotando  $\frac{1}{I^{*\gamma}} - \gamma \frac{\Delta I_{n+1}}{I^{*\gamma+1}} = J_{n+1}$ , temos que a segunda equação é reescrita como:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + J_{n+1}, \quad (2.14)$$

que está na forma desejada da segunda equação de (2.7).

Para que a primeira equação também possa ser colocada na forma de (2.7), devemos multiplicá-la por  $-\frac{\gamma}{I^{*\gamma+1}}$  e somar  $\frac{1}{I^{*\gamma}}$ , assim, temos:

$$\Delta I_{n+1} = \Delta I_n + \varepsilon \sin(\theta_n), \quad (2.15)$$

o que conduz a :

$$\Rightarrow \underbrace{-\frac{\gamma \Delta I_{n+1}}{I^{*\gamma+1}} + \frac{1}{I^{*\gamma}}}_{J_{n+1}} = \underbrace{-\frac{\gamma \Delta I_n}{I^{*\gamma+1}} + \frac{1}{I^{*\gamma}}}_{J_n} + \left( \frac{-\gamma}{I^{*\gamma+1}} \right) \varepsilon \sin(\theta_n), \quad (2.16)$$

o que resulta em:

$$J_{n+1} = J_n - \frac{\gamma \varepsilon}{I^{*\gamma+1}} \sin(\theta_n). \quad (2.17)$$

Chamando  $K_{ef} = \frac{\gamma \varepsilon}{I^{*\gamma+1}}$ , notamos que a equação resultante tem a mesma forma matemática da primeira equação de (2.7).

Para eliminar o sinal negativo, basta definir uma nova variável:

$$\theta = \phi + \pi. \quad (2.18)$$

Logo:

$$\begin{cases} J_{n+1} = J_n - K_{ef} \overbrace{\sin(\phi_n + \pi)}^{-\sin(\phi_n)} \\ \phi_{n+1} + \pi = \phi_n + \pi + J_{n+1} \end{cases} . \quad (2.19)$$

Assim, temos que:

$$T_{equivalente} : \begin{cases} J_{n+1} = J_n + K_{ef} \sin(\phi_n) \\ \phi_{n+1} = \phi_n + J_{n+1} \end{cases} . \quad (2.20)$$

A posição das curvas invariantes são obtidas quando  $K_{ef} = \frac{\gamma\varepsilon}{I^{*\gamma+1}} \simeq 0,9716\dots$ , ou seja:

$$I^* = \left[ \frac{\gamma\varepsilon}{K_{ef}} \right]^{\frac{1}{\gamma+1}}. \quad (2.21)$$

Se  $\Delta I$  é pequeno, logo  $I_{FISC} \simeq I^*$ , assim:

$$I_{FISC} \cong \pm \left[ \frac{\gamma\varepsilon}{0,9716\dots} \right]^{\frac{1}{\gamma+1}}. \quad (2.22)$$

Este resultado será crucial para a descrição das propriedades médias do mar de caos. Ele mostra que a “amplitude” do mar de caos deve sempre estar confinado à região  $I_{CAOS} \in (-I_{FISC}, +I_{FISC})$ .

## 2.3 Teoria Fenomenológica

Como o espaço de fases é “simétrico”, a boa variável não é  $\bar{I}(n)$ , mas sim  $I_{RMS}(n) = \sqrt{\bar{I}^2(n)}$ .

O termo  $\bar{I}^2$  é obtido a partir de duas médias:

1. ao longo da órbita (média de Birkhoff);
2. ao longo do ensemble de condições iniciais.

Assim, temos:

$$I_{RMS}(n) = \sqrt{\underbrace{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M}_{ensemble} \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n}_{órbita} I_{i,j}^2}. \quad (2.23)$$

A figura 2.3 apresenta o gráfico típico de  $I_{RMS}$  em função de  $n$  considerando os parâmetros  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $10^{-4}$  e  $5 \times 10^{-4}$  e  $\gamma = 1$ . O gráfico apresenta crescimento para valores baixos de  $n$  e saturação para valores altos de  $n$ . A mudança de comportamento ocorre no número de iterações de *crossover*  $n_x$ .

Analisando cuidadosamente a figura 2.3, podemos propôr as seguintes hipóteses de escala:

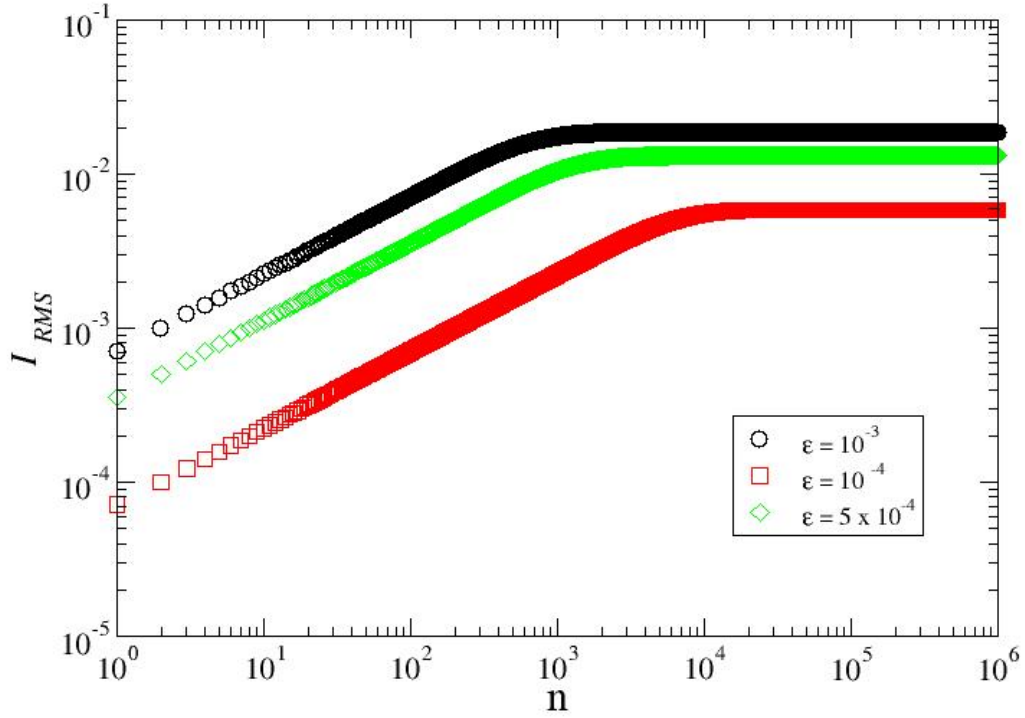


Figura 2.3: Gráfico típico de  $I_{RMS}$  em função de  $n$  com diferentes valores do parâmetro  $\varepsilon = 10^{-3}, 10^{-4}$  e  $5 \times 10^{-4}$  e  $\gamma = 1$ . A condição inicial usada foi  $I_0 = 10^{-3}\varepsilon$ . Foram consideradas 3000 diferentes  $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ .

$$I_{RMS} \sim (n\varepsilon^2)^\beta, \quad (2.24)$$

para  $n \ll n_x$ , onde  $\beta$  é o expoente de aceleração;

$$I_{RMS-SAT} \sim \varepsilon^\alpha, \quad (2.25)$$

para  $n \gg n_x$ , onde  $\alpha$  é o expoente de saturação.

Finalmente:

$$n_x \sim \varepsilon^z, \quad (2.26)$$

onde  $z$  é o expoente dinâmico.

Com base nessas hipóteses de escala, podemos descrever o comportamento de  $I_{RMS}$  usando uma função homogênea generalizada da forma:

$$I_{RMS}(n\varepsilon^2, \varepsilon) = l I_{RMS}(l^{\bar{a}} n \varepsilon^2, l^b \varepsilon), \quad (2.27)$$

onde  $l$  é um fator de escala,  $\bar{a}$  e  $b$  são expoentes característicos.

Como  $l$  é um fator de escala, podemos tomar  $l^{\bar{a}} n \varepsilon^2 = 1$ , o que no leva a:

$$l = (n\varepsilon^2)^{-\frac{1}{\bar{a}}}. \quad (2.28)$$

Substituindo esta expressão em (2.27), temos que:

$$I_{RMS}(n\varepsilon^2, \varepsilon) = (n\varepsilon^2)^{-\frac{1}{\bar{a}}} I_A((n\varepsilon^2)^{-\frac{b}{\bar{a}}} \varepsilon), \quad (2.29)$$

onde  $I_A((n\varepsilon^2)^{-\frac{1}{\bar{a}}} \varepsilon) = I_{RMS}(1, (n\varepsilon^2)^{-\frac{b}{\bar{a}}} \varepsilon)$  e é considerada constante para  $n \ll n_x$ . Comparando (2.29) com (2.24), temos que  $\beta = -\frac{1}{\bar{a}}$ .

Tomando, agora,  $l^b \varepsilon = 1$ , temos que:

$$l = \varepsilon^{-\frac{1}{b}}. \quad (2.30)$$

Substituindo esta expressão em (2.27), temos:

$$I_{RMS}(n\varepsilon^2, \varepsilon) = \varepsilon^{-\frac{1}{b}} I_B(\varepsilon^{-\frac{\bar{a}}{b}} n \varepsilon^2), \quad (2.31)$$

onde  $I_B(\varepsilon^{-\frac{\bar{a}}{b}} n \varepsilon^2) = I_{RMS}(\varepsilon^{-\frac{\bar{a}}{b}} n \varepsilon^2, 1)$  e é considerada constante para  $n \gg n_x$ . Comparando (2.31) com (2.25), temos que  $\alpha = -\frac{1}{b}$ .

O expoente  $z$  aparece quando comparamos as diferentes expressões para o fator de escala  $l$ , como mostrado em (2.28) e (2.30). Assim, destas equações, temos que:

$$(n\varepsilon^2)^{-\frac{1}{\bar{a}}} = \varepsilon^{-\frac{1}{b}},$$

$$\Rightarrow (n\varepsilon^2)^\beta = \varepsilon^\alpha,$$

$$\Rightarrow n = \varepsilon^{\frac{\alpha}{\beta}-2}. \quad (2.32)$$

Comparando (2.32) com (2.26), temos a seguinte relação entre os expoentes críticos:

$$z = \frac{\alpha}{\beta} - 2, \quad (2.33)$$

chamada de Lei de Escala.

O expoente  $\alpha$  deve estar relacionado ao tamanho do mar de caos, logo depende de  $I_{FISC}$ . Assim,  $I_{SAT} \sim I_{FISC}$ .

Comparando com a segunda hipótese de escala, (2.25), temos que:

$$\alpha = \frac{1}{\gamma + 1}. \quad (2.34)$$

O expoente  $\beta$  pode ser obtido a partir da seguinte aproximação. Elevando ao quadrado a primeira equação de (2.3), temos:

$$I_{n+1}^2 = I_n^2 + 2\varepsilon I_n \sin(\theta_n) + \varepsilon^2 \sin^2(\theta_n), \quad (2.35)$$

e tomando a média no ensemble de “ $\theta$ ”, uma vez que  $I$  e  $\theta$  são assumidas variáveis descorrelacionadas, temos:

$$\overline{I_{n+1}^2} = \overline{I_n^2} + 2\varepsilon \overline{I_n \sin(\theta_n)} + \varepsilon^2 \overline{\sin^2(\theta_n)}, \quad (2.36)$$

onde

$$\begin{aligned} \overline{\sin(\theta)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\theta) d\theta = 0 \\ \overline{\sin^2(\theta)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \end{aligned} .$$

Assim, temos:

$$\overline{I_{n+1}^2} - \overline{I_n^2} = \frac{\overline{I_{n+1}^2} - \overline{I_n^2}}{(n+1) - n} \simeq \frac{d\overline{I^2}}{dn} = \frac{\varepsilon^2}{2}. \quad (2.37)$$

Esta é uma equação diferencial ordinária simples e que admite a seguinte solução:

$$\int_{I_0}^{I(n)} d\bar{I}^2 = \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^n dn \Rightarrow \bar{I}^2(n) = \bar{I}_0^2 + \frac{\varepsilon^2}{2}n. \quad (2.38)$$

Se  $I_0 \simeq 0$ , logo:

$$I_{RMS}(n) = \sqrt{\bar{I}^2(n)} = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2}n}. \quad (2.39)$$

Comparando este resultado com a primeira hipótese de escala, (2.24), temos:

$$\beta = \frac{1}{2}. \quad (2.40)$$

Utilizando a Lei de Escala, (2.33), e os valores encontrados de  $\alpha$  e  $\beta$ , obtemos:

$$\begin{aligned} z = \frac{\alpha}{\beta} - 2 &= \frac{2}{\gamma + 1} - 2 = \frac{2 - 2\gamma - 2}{\gamma + 1}, \\ \Rightarrow z &= -\frac{2\gamma}{\gamma + 1}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Assim, os três expoentes críticos são conhecidos a partir do conhecimento de  $\gamma$ .

# Capítulo 3

## Equação da Difusão

Neste capítulo, concentraremos na solução da equação da difusão para descrever o comportamento difusivo da dinâmica caótica utilizando condições de contorno específicas. A solução da equação da difusão fornece  $P(I, n)$ , que é a probabilidade de observar o *momentum*  $I \in [-I_{FISC}, +I_{FISC}]$  no instante  $n$ . A partir do comportamento de  $P(I, n)$ , determinamos  $I_{RMS}$  e comparamos os resultados obtidos com aqueles obtidos no capítulo anterior.

### 3.1 Equação da Difusão

O objetivo da dissertação é descrever as curvas de  $I_{RMS}(n)$  a partir do conhecimento de  $P(I(n))$ , onde  $P(I(n))$  é a distribuição de probabilidade de observar um determinado *momentum*  $I$  em um instante  $n$ .

A dinâmica no mar de caos, ao longo do eixo de  $I$ , pode ser comparada a um processo difusivo normal [25], [26], similar a um problema de caminhada aleatória (*random walk*). Devemos, então, resolver a Equação da Difusão, que na ausência de campos externos é dada por:

$$\frac{\partial P(I, n)}{\partial n} = D \frac{\partial^2 P(I, n)}{\partial I^2}, \quad (3.1)$$

onde  $P$  é a probabilidade e  $D$  é o coeficiente de difusão. A difusão ao longo do mar de caos não é ilimitada, mas sim confinada ao intervalo  $I \in [-I_{FISC}, +I_{FISC}]$ , conforme pode ser visto na figura 3.1. Como as curvas invariantes impedem o cruzamento ou o fluxo de partículas, devemos ter como condições de contorno que:

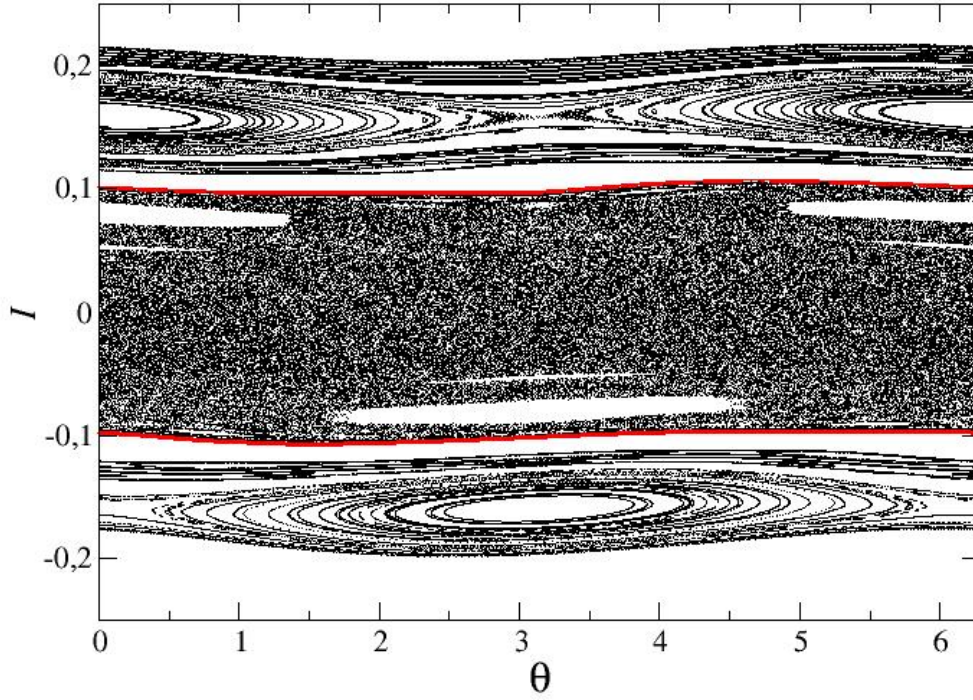


Figura 3.1: *Espaço de fases para o mapa (2.3) com os parâmetros  $\varepsilon = 10^{-2}$  e  $\gamma = 1$ . As linhas vermelhas, que delimitam o mar de caos, identificam as primeiras curvas invariantes spanning  $I_{FISC}$  positiva e negativa.*

$$\left. \frac{\partial P}{\partial I} \right|_{I=\pm I_{FISC}} = 0, \quad (3.2)$$

para  $n \geq 0$ .

A determinação do coeficiente de difusão [25] é simples e escrita como:

$$D = \frac{\Delta \bar{I}^2}{2} = \frac{\varepsilon^2}{4}. \quad (3.3)$$

## 3.2 Solução da Equação da Difusão

Para resolver a equação da difusão, as condições iniciais são escolhidas de forma que estejam todas concentradas em  $I = I_0$  e em  $n = 0$ , logo:

$$P(I_0, n) = \delta(I - I_0), \quad (3.4)$$

onde  $\delta(I - I_0)$  é a função delta de Dirac.

Como estamos estudando a difusão no mar de caos confinado por duas curvas invariantes, então:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial I} \right|_{I=\pm I_{FISC}} = 0. \quad (3.5)$$

Isso garante que não haverá fluxo de partículas através das curvas invariantes. A técnica tradicional para solução da equação da difusão é via separação de variáveis:

$$P(I, n) = X(I)N(n), \quad (3.6)$$

onde  $X(I)$  é uma função que depende apenas de  $I$  e  $N(n)$  depende apenas de  $n$ . Portanto:

$$\frac{\partial P}{\partial n} = X(I) \frac{\partial N}{\partial n}; \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial P}{\partial I} = \frac{\partial X}{\partial I} N(n) \Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial I^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial I^2} N(n). \quad (3.8)$$

Levando estas expressões na equação da difusão (3.1), temos:

$$X(I) \frac{\partial N}{\partial n} = DN(n) \frac{\partial^2 X}{\partial I^2}. \quad (3.9)$$

Reagrupando, temos:

$$\frac{1}{N(n)} \frac{\partial N}{\partial n} = \frac{D}{X(I)} \frac{\partial^2 X}{\partial I^2} = -a, \quad (3.10)$$

onde  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ .

Da forma que está escrita, podemos separar em duas equações diferenciais ordinárias, ou seja:

$$\frac{dN}{N} = -adn, \quad (3.11)$$

$$D \frac{d^2 X}{dI^2} + aX = 0. \quad (3.12)$$

A equação (3.11) tem solução:

$$\begin{aligned} \int_{N_0}^{N(n)} \frac{dN}{N} &= -a \int_0^n dn \Rightarrow \ln(N) \Big|_{N_0}^{N(n)} = -an, \\ &\Rightarrow \ln \left( \frac{N(n)}{N_0} \right) = -an, \\ &\Rightarrow \frac{N(n)}{N_0} = e^{-an}, \\ &\Rightarrow N(n) = N_0 e^{-an}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Considerando que a função  $X(I)$  possa ser escrita como  $X(I) = \tilde{A}e^{\lambda I}$ , as derivadas de primeira e segunda ordem são dadas por:

$$\frac{dX}{dI} = \tilde{A}\lambda e^{\lambda I}, \quad (3.14)$$

e

$$\frac{d^2 X}{dI^2} = \tilde{A}\lambda^2 e^{\lambda I}. \quad (3.15)$$

Levando estas expressões em (3.12), temos:

$$\begin{aligned} D\tilde{A}\lambda^2 e^{\lambda I} + a\tilde{A}e^{\lambda I} &= 0 \Rightarrow D\lambda^2 = -a, \\ &\Rightarrow \lambda^2 = -\frac{a}{D}, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm i \sqrt{\frac{a}{D}}. \quad (3.16)$$

onde  $i = \sqrt{-1}$  é o número imaginário puro.

Com esse resultado, a solução para  $X(I)$  tem a forma:

$$X(I) = Ae^{i\sqrt{\frac{a}{D}}I} + Be^{-i\sqrt{\frac{a}{D}}I}, \quad (3.17)$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes.

Usando a relação de Euler,  $e^{\pm i\theta} = \cos(\theta) \pm i \sin(\theta)$ , podemos reescrever a equação (3.17) como:

$$\begin{aligned} X(I) = & A \left[ \cos \left( \sqrt{\frac{a}{D}}I \right) + i \sin \left( \sqrt{\frac{a}{D}}I \right) \right] \\ & + B \left[ \cos \left( \sqrt{\frac{a}{D}}I \right) - i \sin \left( \sqrt{\frac{a}{D}}I \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Agrupando, temos:

$$X(I) = (A + B) \cos \left( \sqrt{\frac{a}{D}}I \right) + (A - B)i \sin \left( \sqrt{\frac{a}{D}}I \right). \quad (3.19)$$

Para que as soluções sejam reais, devemos ter  $A = B$ . Logo:

$$X(I) = 2A \cos \left( \sqrt{\frac{a}{D}}I \right). \quad (3.20)$$

Uma possível solução para a equação da difusão seria substituindo (3.13) e (3.20) em (3.6) de modo que:

$$P(I, n) = 2A \cos \left( \sqrt{\frac{a}{D}}I \right) N_0 e^{-an}. \quad (3.21)$$

Aplicando a condição inicial em  $n = 0$  e  $I = I_0$ , devemos ter:

$$2A \cos \left( \sqrt{\frac{a}{D}}I_0 \right) N_0 = \tilde{C}_0, \quad (3.22)$$

onde  $\tilde{C}_0$  é constante.

Aplicando as condições de contorno, (3.5), temos:

$$\frac{dP}{dI} = -2A\sqrt{\frac{a}{D}} \sin\left(\sqrt{\frac{a}{D}}I\right) N_0 e^{-an}. \quad (3.23)$$

Esta expressão será nula quando  $\sqrt{\frac{a}{D}}I_{FISC} = k\pi$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Desta expressão, temos que:

$$a = \frac{k^2\pi^2}{I_{FISC}^2} D. \quad (3.24)$$

O caso  $k = 0$  é tratado separadamente. Se  $k = 0$ , então  $a = 0$ . Assim, substituindo o valor de  $a = 0$  em (3.11) e (3.12), obtemos:

$$N = \tilde{N}_0, \quad (3.25)$$

onde  $\tilde{N}_0$  é constante, e:

$$D \frac{d^2 X}{dI^2} = 0 \Rightarrow X(I) = X_0 + bI. \quad (3.26)$$

Substituindo estas soluções em (3.6), outra possível solução seria:

$$P(I) = \tilde{N}_0[X_0 + bI]. \quad (3.27)$$

Da condição de contorno, (3.5), temos:

$$\frac{dP}{dI} = \tilde{N}_0 b = 0 \Rightarrow b = 0. \quad (3.28)$$

Assim, pelo princípio de superposição linear, temos que:

$$P[I(n)] = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos\left[\frac{k\pi I}{I_{FISC}}\right] e^{-\frac{k^2\pi^2 D}{I_{FISC}^2} n}, \quad (3.29)$$

onde  $C_0 = \tilde{N}_0 X_0 + \tilde{C}_0$  e  $C_k = 2AN_0$ . O próximo passo é a determinação dos coeficientes  $C_0$  e  $C_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$

A expressão de  $P[I(n)]$  é uma série convergente pois  $\sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{k\pi I}{I_{FISC}}\right) e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{I_{FISC}^2}}$  é uma série normalmente convergente [27]. De fato, considerando as funções  $f_k(I) = \cos\left(\frac{k\pi I}{I_{FISC}}\right) e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{I_{FISC}^2}}$ , temos que estas satisfazem as relações  $|f_k(I)| \leq e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{I_{FISC}^2}}$ , para todo  $k$ , e  $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{I_{FISC}^2}}$  é uma série convergente pelo teste de D'Alembert para convergência de séries [28]:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e^{-\frac{(k+1)^2\pi^2 Dn}{I_{FISC}^2}}}{e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{I_{FISC}^2}}} &= \lim_{k \rightarrow \infty} e^{-\frac{(k^2+2k+1)\pi^2 Dn}{I_{FISC}^2} + \frac{k^2\pi^2 Dn}{I_{FISC}^2}}, \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} e^{-\frac{(2k+1)\pi^2 Dn}{I_{FISC}^2}}, \\ &= 0 < 1. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Para determinar os coeficientes, multiplicamos a série  $P[I(n)]$  por  $\cos\left(\frac{m\pi I}{I_{FISC}}\right)$ . Assim, temos:

$$\begin{aligned} P[I(n)] \cos\left(\frac{m\pi I}{I_{FISC}}\right) &= C_0 \cos\left(\frac{m\pi I}{I_{FISC}}\right) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos\left(\frac{k\pi I}{I_{FISC}}\right) \cos\left(\frac{m\pi I}{I_{FISC}}\right) e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{I_{FISC}^2}}. \end{aligned} \tag{3.31}$$

A série continua ainda convergente e os coeficientes são obtidos de:

$$\begin{aligned} \int_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} P[I(n)] dI &= \int_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos\left(\frac{k\pi I}{I_{FISC}}\right) e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{I_{FISC}^2}} dI = 1, \\ \Rightarrow C_0 \int_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} dI + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \int_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} \cos\left[\frac{k\pi I}{I_{FISC}}\right] e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{I_{FISC}^2}} &= 1, \\ \Rightarrow 2C_0 I_{FISC} &= 1, \\ \Rightarrow C_0 &= \frac{1}{2I_{FISC}}. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Os coeficientes  $C_k$  (ver ref. [29], [30]) são obtidos da expressão:

$$C_k = \frac{1}{I_{FISC}} \int_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} P(I) \cos\left(\frac{k\pi I}{I_{FISC}}\right) dI. \quad (3.33)$$

Sabemos que a função cosseno é limitada pelo intervalo  $[-1, 1]$ , ou seja:

$$-1 \leq \cos\left(\frac{k\pi I}{I_{FISC}}\right) \leq 1. \quad (3.34)$$

Multiplicando esta expressão por  $P(I, n)$  e integrando em relação à variável  $I$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} -P(I, n) dI &\leq \int_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} P(I, n) \cos\left(\frac{k\pi I}{I_{FISC}}\right) dI \leq \int_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} P(I, n) dI, \\ \Rightarrow -1 &\leq \int_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} P(I, n) \cos\left(\frac{k\pi I}{I_{FISC}}\right) dI \leq 1, \\ \Rightarrow -\frac{1}{I_{FISC}} &\leq \frac{\int_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} P(I, n) \cos\left(\frac{k\pi I}{I_{FISC}}\right) dI}{I_{FISC}} \leq \frac{1}{I_{FISC}}, \\ \Rightarrow -\frac{1}{I_{FISC}} &\leq C_k \leq \frac{1}{I_{FISC}}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Desta expressão, temos as seguintes possibilidades:

$$(i) C_k = -\frac{1}{I_{FISC}};$$

$$(ii) -1 < C_k < 1;$$

$$(iii) C_k = \frac{1}{I_{FISC}}.$$

No caso (i), se  $C_k = -\frac{1}{I_{FISC}}$ , os resultados das expressões para  $P(I, n)$  e  $I_{RMS}$  seriam divergentes aos conhecidos na literatura [11].

No caso (ii), se  $-\frac{1}{I_{FISC}} < C_k < \frac{1}{I_{FISC}}$  e fazendo uso da mesma justificativa da convergência da série  $P[I(n)]$ , temos que:

$$\Rightarrow -\frac{1}{I_{FISC}} \cos\left(\frac{k\pi I}{I_{FISC}}\right) e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{I_{FISC}^2}} < C_k \cos\left(\frac{k\pi I}{I_{FISC}}\right) e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{I_{FISC}^2}} < \frac{1}{I_{FISC}} \cos\left(\frac{k\pi I}{I_{FISC}}\right) e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{I_{FISC}^2}},$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{1}{I_{FISC}} \cos\left(\frac{k\pi I}{I_{FISC}}\right) e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{I_{FISC}^2}} &< \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos\left(\frac{k\pi I}{I_{FISC}}\right) e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{I_{FISC}^2}} < \\ &< \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{I_{FISC}} \cos\left(\frac{k\pi I}{I_{FISC}}\right) e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{I_{FISC}^2}}, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} \frac{1}{2I_{FISC}} + \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{1}{I_{FISC}} \cos\left(\frac{k\pi I}{I_{FISC}}\right) e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{I_{FISC}^2}} dI <$$

$$< \int_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} \frac{1}{2I_{FISC}} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos\left(\frac{k\pi I}{I_{FISC}}\right) e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{I_{FISC}^2}} dI <$$

$$< \int_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} \frac{1}{2I_{FISC}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{I_{FISC}} \cos\left(\frac{k\pi I}{I_{FISC}}\right) e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{I_{FISC}^2}} dI,$$

$$\Rightarrow 1 < \int_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} P(I, n) dI < 1. \quad (3.36)$$

o que é absurdo, pois  $\int_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} P(I, n) dI = 1$ .

Portanto:

$$C_k = \frac{1}{I_{FISC}} \quad (3.37)$$

Logo, substituindo as expressões de (3.32) e (3.37) em (3.29), obtemos:

$$P[I(n)] = \frac{1}{2I_{FISC}} + \frac{1}{I_{FISC}} \sum_{k=1}^{\infty} \cos\left[\frac{k\pi I}{I_{FISC}}\right] e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{I_{FISC}^2}}. \quad (3.38)$$

Esta probabilidade está normalizada, uma vez que:

$$\begin{aligned}
\int_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} P(I, n) dI &= \left\{ \frac{I}{2I_{FISC}} + \frac{1}{I_{FISC}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_{FISC}}{k\pi} e^{-\frac{k^2\pi^2 D n}{I_{FISC}^2}} \sin\left(\frac{k\pi I}{I_{FISC}}\right) \right\} \Bigg|_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}}, \\
&= \frac{I_{FISC} - (-I_{FISC})}{2I_{FISC}}, \\
&= 1.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Calculemos, agora, os observáveis médios. Como o espaço de fase é simétrico, temos que  $\bar{I} = 0$ . De fato:

$$\begin{aligned}
\bar{I}(n) &= \int_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} IP(I, n) dI, \\
&= \int_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} \frac{I}{2I_{FISC}} + \frac{1}{I_{FISC}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2 D n}{I_{FISC}^2}} I \cos\left(\frac{k\pi I}{I_{FISC}}\right) dI, \\
&= \overbrace{\frac{I^2}{4} I_{FISC}}^0 \Bigg|_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} + \frac{1}{I_{FISC}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2 D n}{I_{FISC}^2}} \left\{ -\frac{II_{FISC}}{k\pi} \overbrace{\sin\left(\frac{k\pi I}{I_{FISC}}\right)}^0 \Bigg|_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{I_{FISC}}{k\pi} \int_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} \sin\left(\frac{k\pi I}{I_{FISC}}\right) dI \right\}, \\
&= \frac{1}{I_{FISC}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2 D n}{I_{FISC}^2}} \frac{I_{FISC}}{k\pi} \left[ -\cos\left(\frac{k\pi I}{I_{FISC}}\right) \frac{I_{FISC}}{k\pi} \right] \Bigg|_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}}, \\
&= I_{FISC} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{k^2\pi^2 D n}{I_{FISC}^2}}}{k^2\pi^2} [-\cos(k\pi) + \cos(-k\pi)].
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Como a função cosseno é uma função par, o termo entre colchetes é nulo.  
Logo:

$$\bar{I}(n) = 0. \quad (3.41)$$

Calculemos, então,  $\bar{I}^2$ .

$$\begin{aligned} \bar{I}^2 &= \int_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} I^2 P(I) dI, \\ &= \int_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} \frac{I^2}{2I_{FISC}} + \frac{I^2}{I_{FISC}} \sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{k\pi I}{I_{FISC}}\right) e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{I_{FISC}^2}} dI, \\ &= \frac{I^3}{6I_{FISC}} \Big|_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} + \frac{1}{I_{FISC}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{I_{FISC}^2}} \left\{ \frac{I^2 I_{FISC}}{k\pi} \overbrace{\sin\left(\frac{k\pi I}{I_{FISC}}\right)}^0 \Big|_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{I_{FISC}}{k\pi} \int_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} I \sin\left(\frac{k\pi I}{I_{FISC}}\right) dI \right\}, \\ &= \frac{I_{FISC}^3 + I_{FISC}^3}{6I_{FISC}} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{I_{FISC}^2}} \frac{(-2)}{k\pi} \left\{ -\frac{II_{FISC}}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi I}{I_{FISC}}\right) \Big|_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{I_{FISC}}{k\pi} \underbrace{\int_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} \cos\left(\frac{k\pi I}{I_{FISC}}\right) dI}_0 \right\}, \\ &= \frac{I_{FISC}^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2\pi^2} e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{I_{FISC}^2}} [I_{FISC}^2 \cos(k\pi) + I_{FISC}^2 \cos(-k\pi)]. \quad (3.42) \end{aligned}$$

Como a função cosseno é par, a soma entre colchetes é igual a  $I_{FISC}^2 2 \cos(k\pi)$ . Assim:

$$\begin{aligned} \overline{I^2} &= \frac{I_{FISC}^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2 \pi^2} I_{FISC}^2 \cos(k\pi) e^{-\frac{k^2 \pi^2 D n}{I_{FISC}^2}}, \\ &= I_{FISC}^2 \left[ \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} e^{-\frac{k^2 \pi^2 D n}{I_{FISC}^2}} \right]. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Para compararmos o resultado obtido aqui com aquele do capítulo anterior, devemos notar que as médias realizadas lá foram duas: uma no ensemble e outra ao longo da órbita. A média realizada no resultado obtido via solução da equação da difusão foi apenas no ensemble de condições iniciais. Devemos, então, realizar a média na órbita. Usaremos procedimento semelhante àquele usado em [31]. Da solução da equação da difusão, temos que:

$$\overline{I^2}(n) = I_{FISC}^2 \left[ \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} e^{-\frac{k^2 \pi^2 D n}{I_{FISC}^2}} \right]. \quad (3.44)$$

Como devemos fazer a média em  $n$ , ou seja,  $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\infty} I_j^2$ , podemos notar que apenas o último termo depende de  $n$ , todos os demais sendo constantes com o variar de  $n$ . A soma do termo exponencial é dada por:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2 \pi^2 D n}{I_{FISC}^2}} = \frac{1}{n} \underbrace{\left[ e^{-\frac{k^2 \pi^2 D}{I_{FISC}^2}} + e^{-\frac{k^2 \pi^2 D 2}{I_{FISC}^2}} + e^{-\frac{k^2 \pi^2 D 3}{I_{FISC}^2}} + \dots + e^{-\frac{k^2 \pi^2 D n}{I_{FISC}^2}} \right]}_S. \quad (3.45)$$

Denotemos a soma entre colchetes por  $S$ . Assim, temos:

$$S = e^{-\frac{k^2 \pi^2 D}{I_{FISC}^2}} \underbrace{\left[ 1 + e^{-a} + e^{-2a} + e^{-3a} + \dots + e^{-(n-1)a} \right]}_s, \quad (3.46)$$

onde  $a = \frac{k^2 \pi^2 D}{I_{FISC}^2}$ .

A convergência da soma  $s$  entre colchetes pode ser determinada por:

$$s = 1 + e^{-a} + e^{-2a} + e^{-3a} + \dots + e^{-(n-1)a}. \quad (3.47)$$

Multiplicando (3.47) por  $e^{-a}$ , obtemos:

$$e^{-a}s = e^{-a} + e^{-2a} + e^{-3a} + \dots + e^{-na}. \quad (3.48)$$

Subtraindo (3.48) de (3.47), temos:

$$s - e^{-a}s = (1 + e^{-a} + e^{-2a} + e^{-3a} + \dots + e^{-(n-1)a}) - (e^{-a} + e^{-2a} + e^{-3a} + \dots + e^{-na}). \quad (3.49)$$

Daí, temos que:

$$s(1 - e^{-a}) = 1 - e^{-na}. \quad (3.50)$$

Logo:

$$s = \frac{1 - e^{-na}}{1 - e^{-a}}. \quad (3.51)$$

Assim, a soma  $S$  converge para:

$$S = e^{-\frac{k^2\pi^2 D}{I_{FISC}^2}} \left( \frac{1 - e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{I_{FISC}^2}}}{1 - e^{-\frac{k^2\pi^2 D}{I_{FISC}^2}}} \right). \quad (3.52)$$

Conseqüentemente, o valor de  $\overline{I^2}$  é dado por:

$$\overline{I^2}(n) = I_{FISC}^2 \left\{ \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \frac{1}{n} \left[ e^{-\frac{k^2\pi^2 D}{I_{FISC}^2}} \left( \frac{1 - e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{I_{FISC}^2}}}{1 - e^{-\frac{k^2\pi^2 D}{I_{FISC}^2}}} \right) \right] \right\}. \quad (3.53)$$

Logo,  $I_{RMS} = \sqrt{\overline{I^2}(n)}$  é escrito como:

$$I_{RMS}(n) = I_{FISC} \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} e^{-\frac{k^2\pi^2 D}{I_{FISC}^2}} \left[ \frac{1}{n} \left( \frac{1 - e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{I_{FISC}^2}}}{1 - e^{-\frac{k^2\pi^2 D}{I_{FISC}^2}}} \right) \right]}. \quad (3.54)$$

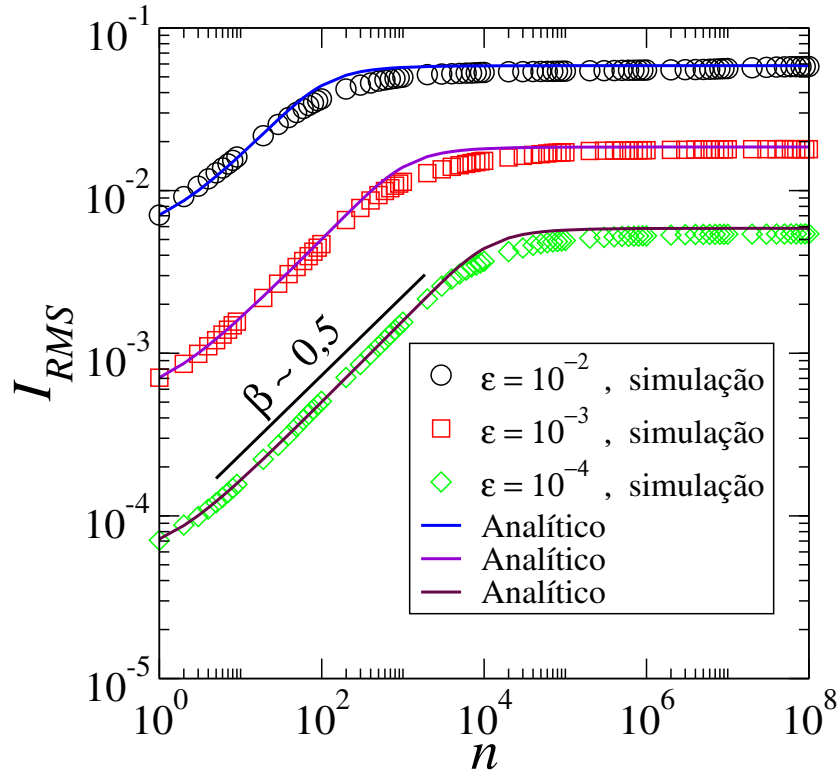


Figura 3.2: Gráfico  $I_{RMS}$  em função de  $n$  com os parâmetros  $\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$  e  $\gamma = 1$ . Símbolos são os dados obtidos por simulação ao passo que a linha contínua identifica os resultados teóricos.

A figura 3.2 mostra o comportamento de  $I_{RMS}$  em função de  $n$  obtido a partir da solução da equação da difusão (linha contínua) juntamente com o resultado obtido por simulação numérica (símbolos) obtido do capítulo anterior. Podemos notar que a concordância entre os resultados é excelente, validando assim o procedimento utilizado via equação da difusão. Os parâmetros de controle usados foram  $\gamma = 1$  e  $\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-3}$  e  $10^{-4}$ .

Até aqui, consideramos  $I_0 = 0$ . Vejamos o caso  $I_0 \neq 0$ . Fazendo a substituição de  $I$  por  $(I - I_0)$  em (3.38), os observáveis médios são:

$$\bar{I} = \int_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} IP(I)dI,$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} \frac{I}{2I_{FISC}} dI + \frac{1}{I_{FISC}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{I_{FISC}^2}} \int_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} I \cos \left[ \frac{k\pi(I - I_0)}{I_{FISC}} \right] dI, \\
&= \frac{1}{I_{FISC}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{I_{FISC}^2}} \left\{ \frac{II_{FISC}}{k\pi} \sin \left[ \frac{k\pi(I - I_0)}{I_{FISC}} \right] - \frac{I_{FISC}}{k\pi} \int_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} \sin \left[ \frac{k\pi(I - I_0)}{I_{FISC}} \right] dI \right\}, \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{I_{FISC}^2}} \frac{\cos \left[ \frac{k\pi(I - I_0)}{I_{FISC}} \right] I_{FISC}}{k\pi} \Big|_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}}, \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_{FISC}}{k^2\pi^2} e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{I_{FISC}^2}} \left\{ \underbrace{\cos \left[ \frac{k\pi(I_{FISC} - I_0)}{I_{FISC}} \right]}_C - \underbrace{\cos \left[ \frac{k\pi(-I_{FISC} - I_0)}{I_{FISC}} \right]}_E \right\}. \tag{3.55}
\end{aligned}$$

Usando a relação trigonométrica  $\cos(X \pm Y) = \cos(X)\cos(Y) \mp \sin(X)\sin(Y)$  em  $C$  e  $E$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
C &= \cos \left[ \frac{k\pi(I_{FISC} - I_0)}{I_{FISC}} \right] = \underbrace{\cos(k\pi)}_{(-1)^k} \cos \left( \frac{k\pi I_0}{I_{FISC}} \right) + \underbrace{\sin(k\pi)}_0 \sin \left( \frac{k\pi I_0}{I_{FISC}} \right), \\
&= (-1)^k \cos \left( \frac{k\pi I_0}{I_{FISC}} \right), \tag{3.56}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E &= \cos \left[ \frac{k\pi(-I_{FISC} - I_0)}{I_{FISC}} \right] = \cos \left[ -\frac{k\pi(I_{FISC} + I_0)}{I_{FISC}} \right] \stackrel{\text{fç. par}}{=} \cos \left[ \frac{k\pi(I_{FISC} + I_0)}{I_{FISC}} \right], \\
&= \underbrace{\cos(k\pi)}_{(-1)^k} \cos \left( \frac{k\pi I_0}{I_{FISC}} \right) - \underbrace{\sin(k\pi)}_0 \sin \left( \frac{k\pi I_0}{I_{FISC}} \right), \\
&= (-1)^k \cos \left( \frac{k\pi I_0}{I_{FISC}} \right). \tag{3.57}
\end{aligned}$$

Assim:

$$\bar{I} = 0. \quad (3.58)$$

Calculemos, agora,  $\bar{I}^2$ :

$$\begin{aligned} \bar{I}^2 &= \int_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} I^2 P(I) dI, \\ &= \int_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} \frac{I^2}{2I_{FISC}} dI + \frac{1}{I_{FISC}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2 \pi^2 Dn}{I_{FISC}^2}} \int_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} I^2 \cos \left[ \frac{k\pi(I - I_0)}{I_{FISC}} \right] dI, \\ &= \frac{I^3}{6I_{FISC}} \Big|_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} + \frac{1}{I_{FISC}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2 \pi^2 Dn}{I_{FISC}^2}} \left\{ \frac{I^2 I_{FISC}}{k\pi} \overbrace{\sin \left[ \frac{k\pi(I - I_0)}{I_{FISC}} \right]}^0 \Big|_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2I_{FISC}}{k\pi} \int_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} I \sin \left[ \frac{k\pi(I - I_0)}{I_{FISC}} \right] dI \right\}, \\ &= \frac{I_{FISC}^3 + I_{FISC}^3}{6I_{FISC}} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2 \pi^2 Dn}{I_{FISC}^2}} \frac{(-2)}{k\pi} \left\{ -\frac{II_{FISC}}{k\pi} \cos \left[ \frac{k\pi(I - I_0)}{I_{FISC}} \right] \Big|_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{I_{FISC}}{k\pi} \underbrace{\int_{-I_{FISC}}^{I_{FISC}} \cos \left[ \frac{k\pi(I - I_0)}{I_{FISC}} \right] dI}_0 \right\}, \\ &= I_{FISC}^2 \left\{ \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{k^2 \pi^2 Dn}{I_{FISC}^2}}}{k^2} \left\{ \underbrace{\cos \left[ \frac{k\pi(I_{FISC} - I_0)}{I_{FISC}} \right]}_C + \underbrace{\cos \left[ \frac{k\pi(-I_{FISC} - I_0)}{I_{FISC}} \right]}_E \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Usando a relação trigonométrica  $\cos(X \pm Y) = \cos(X) \cos(Y) \mp \sin(X) \sin(Y)$  em  $C$  e  $E$ , obtemos:

$$\begin{aligned} C &= \cos \left[ k\pi - \frac{k\pi I_0}{I_{FISC}} \right] = \cos(k\pi) \cos \left( \frac{k\pi I_0}{I_{FISC}} \right) + \overbrace{\sin(k\pi) \sin \left( \frac{k\pi I_0}{I_{FISC}} \right)}^0, \\ &= (-1)^k \cos \left( \frac{k\pi I_0}{I_{FISC}} \right), \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} E &= \cos \left[ -k\pi - \frac{k\pi I_0}{I_{FISC}} \right] = \cos \left[ k\pi + \frac{k\pi I_0}{I_{FISC}} \right], \\ &= \cos(k\pi) \cos \left( \frac{k\pi I_0}{I_{FISC}} \right) - \underbrace{\sin(k\pi) \sin \left( \frac{k\pi I_0}{I_{FISC}} \right)}_0 = (-1)^k \cos \left( \frac{k\pi I_0}{I_{FISC}} \right). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Assim:

$$\bar{I}^2 = I_{FISC}^2 \left\{ \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2 \pi^2 D n}{I_{FISC}^2}} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos \left( \frac{k\pi I_0}{I_{FISC}} \right) \right\}. \quad (3.62)$$

Por processo análogo a (3.45), fazendo a média na órbita temos que:

$$\bar{I}^2(n) = I_{FISC}^2 \left\{ \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos \left( \frac{k\pi I_0}{I_{FISC}} \right) e^{-\frac{k^2 \pi^2 D}{I_{FISC}^2}} \left[ \frac{1}{n} \left( \frac{1 - e^{-\frac{k^2 \pi^2 D n}{I_{FISC}^2}}}{1 - e^{-\frac{k^2 \pi^2 D}{I_{FISC}^2}}} \right) \right] \right\}. \quad (3.63)$$

Assim,  $I_{RMS}(n) = \sqrt{\bar{I}^2(n)}$  é escrito como:

$$I_{RMS}(n) = I_{FISC} \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos \left( \frac{k\pi I_0}{I_{FISC}} \right) e^{-\frac{k^2 \pi^2 D}{I_{FISC}^2}} \left[ \frac{1}{n} \left( \frac{1 - e^{-\frac{k^2 \pi^2 D n}{I_{FISC}^2}}}{1 - e^{-\frac{k^2 \pi^2 D}{I_{FISC}^2}}} \right) \right]}. \quad (3.64)$$

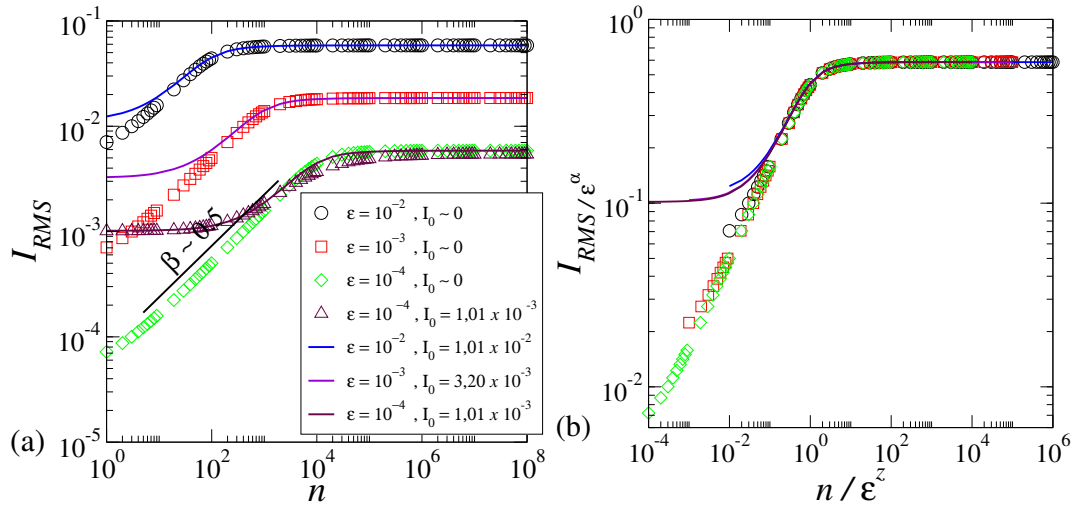


Figura 3.3: Gráfico de  $I_{RMS}$  em função de  $n$  com parâmetros  $\epsilon = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$  e  $\gamma = 1$  e diferentes valores para  $I_0$ . Símbolos são os dados obtidos por simulação ao passo que a linha contínua identifica os resultados teóricos.

A figura 3.3 mostra o comportamento de  $I_{RMS}$  em função de  $n$  usando simulação (símbolos) e solução da equação da difusão (linha contínua) para  $\epsilon = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$ ,  $\gamma = 1$  e diferentes valores para  $I_0$ . Note que as condições iniciais foram consideradas próximas de zero para as simulações e diferentes de zero para os resultados analíticos. Para mostrar o bom acordo entre estes resultados, consideramos a condição inicial  $I_0 = 1,01 \times 10^{-3}$  na simulação numérica (triângulos marrom) e comparamos com o resultado analítico (linha contínua marrom). Podemos notar novamente o bom acordo entre as teorias.

### 3.3 Discussão dos resultados

Nesta seção, vamos discutir o comportamento de  $I_{RMS}(n)$  nos casos limites: (i)  $n \rightarrow \infty$  e (ii)  $n$  pequeno.

Obtivemos, anteriormente, a expressão de  $I_{RMS}$  que é dada por:

$$I_{RMS}(n) = I_{FISC} \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos\left(\frac{k\pi I_0}{I_{FISC}}\right) e^{-\frac{k^2\pi^2 D}{I_{FISC}^2}} \left[ \frac{1}{n} \left( \frac{1 - e^{-\frac{k^2\pi^2 D n}{I_{FISC}^2}}}{1 - e^{-\frac{k^2\pi^2 D}{I_{FISC}^2}}} \right) \right]}. \quad (3.65)$$

(i) Quando  $n \rightarrow \infty$ ,  $I_{SAT}$  é dado por:

$$I_{SAT} = \lim_{n \rightarrow \infty} I_{RMS}. \quad (3.66)$$

Assim:

$$\begin{aligned} I_{SAT} &= \lim_{n \rightarrow \infty} I_{FISC} \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos\left(\frac{k\pi I_0}{I_{FISC}}\right) e^{-\frac{k^2\pi^2 D}{I_{FISC}^2}} \left[ \frac{1}{n} \left( \frac{1 - e^{-\frac{k^2\pi^2 D n}{I_{FISC}^2}}}{1 - e^{-\frac{k^2\pi^2 D}{I_{FISC}^2}}} \right) \right]}, \\ &= \frac{I_{FISC}}{\sqrt{3}}, \\ &\cong \frac{I_{FISC}}{1,732}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Esta expressão está de acordo com os resultados apresentados em [25].

(ii) Quando  $n$  é pequeno, devemos considerar as seguintes expansões em séries de Taylor até os termos de primeira ordem e consideramos  $k = 1$ :

$$\cos\left(\frac{\pi I_0}{I_{FISC}}\right) \cong 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi I_0}{I_{FISC}}\right)^2, \quad (3.68)$$

$$e^{-\frac{\pi^2 D}{I_{FISC}^2}} \cong 1 - \frac{\pi^2 D}{I_{FISC}^2} \cong 1, \quad (3.69)$$

$$1 - e^{-\frac{\pi^2 D}{I_{FISC}^2}} \cong 1 - \left[1 - \frac{\pi^2 D}{I_{FISC}^2}\right] = \frac{\pi^2 D}{I_{FISC}^2}. \quad (3.70)$$

A exponencial em  $n$  deve ser expandida até os termos de segunda ordem por conta do fator  $\frac{1}{n}$ . Logo:

$$1 - e^{-\frac{\pi^2 D n}{I_{FISC}^2}} \cong 1 - \left[1 - \frac{\pi^2 D n}{I_{FISC}^2} + \frac{1}{2} \frac{\pi^4 D^2 n^2}{I_{FISC}^4}\right],$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi^2 D n}{I_{FISC}^2} + \frac{1}{2} \frac{\pi^4 D^2 n^2}{I_{FISC}^4}, \\
&= \frac{\pi^2 D n}{I_{FISC}^2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{\pi^2 D n}{I_{FISC}^2} \right]. \tag{3.71}
\end{aligned}$$

Substituindo as expressões (3.68), (3.69), (3.70) e (3.71) em (3.65), obtemos:

$$\begin{aligned}
I_{RMS} &= I_{FISC} \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\pi I_0}{I_{FISC}} \right)^2 \right] \frac{1}{n} \left[ \frac{\frac{\pi^2 D n}{I_{FISC}^2} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\pi^2 D n}{I_{FISC}^2} \right)}{\frac{\pi^2 D}{I_{FISC}^2}} \right]}, \\
&= I_{FISC} \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\pi I_0}{I_{FISC}} \right)^2 \right] \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{\pi^2 D n}{I_{FISC}^2} \right]}. \tag{3.72}
\end{aligned}$$

Para o caso em que  $I_0 \approx 0$ , obtemos que:

$$\begin{aligned}
I_{RMS} &= I_{FISC} \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{\pi^2 D n}{I_{FISC}^2} \right]}, \\
&= I_{FISC} \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} + \frac{2 D n}{I_{FISC}^2}}. \tag{3.73}
\end{aligned}$$

Considerando a expressão de  $D$  dada em (3.3), temos que:

$$I_{RMS} = I_{FISC} \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} + \frac{\varepsilon^2 n}{2 I_{FISC}^2}}. \tag{3.74}$$

De (2.22), temos que  $I_{FISC} \cong \varepsilon^{\frac{1}{1+\gamma}}$ . Se  $\gamma = 1$ , então  $I_{FISC} \cong \varepsilon^{\frac{1}{2}}$ . Assim:

$$\begin{aligned}
I_{RMS} &\cong \varepsilon^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} + \frac{\varepsilon^2 n}{2 \varepsilon}}, \\
&= \sqrt{\left( \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \right) \varepsilon + \frac{\varepsilon^2 n}{2}}. \tag{3.75}
\end{aligned}$$

Para o caso de  $\gamma$  genérico, temos que:

$$I_{RMS} = \varepsilon^{\frac{1}{1+\gamma}} \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} + \frac{\varepsilon^2 n}{2 \varepsilon^{\frac{2}{1+\gamma}}}},$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2}\right) \varepsilon^{\frac{2}{1+\gamma}} + \frac{\varepsilon^2 n}{2}}. \quad (3.76)$$

Portanto,  $I_{RMS} \propto \sqrt{\frac{\varepsilon^2 n}{2}}$ , o que confirma o expoente  $\beta = \frac{1}{2}$ . O número de *crossover*  $n_x$  é obtido quando  $I_{RMS} = I_{SAT}$ . Ou seja:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\varepsilon^2 n_x}{2}} &= \frac{\varepsilon^{\frac{1}{1+\gamma}}}{\sqrt{3}}, \\ \Rightarrow \frac{\varepsilon^2 n_x}{2} &= \frac{\varepsilon^{\frac{2}{1+\gamma}}}{3}, \\ \Rightarrow n_x &= \frac{2 \varepsilon^{\frac{2}{1+\gamma}}}{\varepsilon^2}, \\ \Rightarrow n_x &= \frac{2}{3} \varepsilon^{-\frac{2\gamma}{1+\gamma}}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Logo:

$$n_x \propto \varepsilon^{-\frac{2\gamma}{1+\gamma}}. \quad (3.78)$$

Daqui, temos o expoente  $z = -\frac{2\gamma}{1+\gamma}$ .

Podemos notar na figura (3.3) que para o caso em que  $I_0 \neq 0$ , o gráfico apresenta um platô para valores pequenos de  $n$ , seguindo um regime de crescimento e, por fim, uma saturação para valores de  $n$  suficientemente grandes.

Considerando as aproximações das equações (3.68), (3.69), (3.70) e (3.71) e  $I_0 \neq 0$ , podemos obter o primeiro número de *crossover*  $n'_x$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\pi I_0}{I_{FISC}} \right)^2 \right] \left[ 1 - \frac{\pi^2 D n'_x}{2 I_{FISC}^2} \right] &= 1, \\ \Rightarrow -\frac{4}{\pi^2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\pi I_0}{I_{FISC}} \right)^2 \right] \left[ 1 - \frac{\pi^2 D n'_x}{2 I_{FISC}^2} \right] &= \frac{2}{3}, \\ \Rightarrow 1 - \frac{\pi^2 D n'_x}{2 I_{FISC}^2} &= -\frac{\pi^2}{6} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\pi I_0}{I_{FISC}} \right)^2 \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Fazendo a expansão em séries de Taylor do termo  $\left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi I_0}{I_{FISC}}\right)^2\right]^{-1}$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 1 - \frac{\pi^2 D n'_x}{2I_{FISC}^2} = -\frac{\pi^2}{6} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi I_0}{I_{FISC}}\right)^2\right], \\
&\Rightarrow \frac{\pi^2 D n'_x}{2I_{FISC}^2} = 1 + \frac{\pi^2}{6} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi I_0}{I_{FISC}}\right)^2\right], \\
&\Rightarrow n'_x = \frac{2I_{FISC}^2}{\pi^2 D} \left\{1 + \frac{\pi^2}{6} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi I_0}{I_{FISC}}\right)^2\right]\right\}, \\
&\Rightarrow n'_x = \frac{2I_{FISC}^2}{\pi^2 D} \left\{1 + \frac{\pi^2}{6}\right\} + \frac{\pi^2 I_0^2}{6D}. \tag{3.79}
\end{aligned}$$

Usando as expressões de  $D$  e  $I_{FISC}$  dadas em (3.3) e (2.22), respectivamente, obtemos:

$$\Rightarrow n'_x = \frac{8\varepsilon^{\frac{2}{\gamma+1}}}{\pi^2 \varepsilon^2} \left\{1 + \frac{\pi^2}{6}\right\} + \frac{2}{3} \frac{\pi^2 I_0^2}{\varepsilon^2}. \tag{3.80}$$

Logo:

$$n'_x \propto \frac{I_0^2}{\varepsilon^2}. \tag{3.81}$$

Este valor é condizente com os resultados apresentados em [32]. Portanto, enquanto  $n_x$  é dependente somente dos parâmetros  $\varepsilon$  e  $\gamma$ ,  $n'_x$  é dependente da condição inicial e de  $\varepsilon$  e de  $\gamma$ .

# Capítulo 4

## Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho, estudamos as propriedades de difusão caótica para o mapa dado por:

$$T : \begin{cases} I_{n+1} = I_n + \varepsilon \sin(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = \left( \theta_n + \frac{1}{|I_{n+1}|^\gamma} \right) \text{ mod}(2\pi) \end{cases} .$$

Com a conexão com o mapa padrão, determinamos a localização das primeiras curvas invariantes *spanning*,  $I_{FISC}$ , em função de  $\varepsilon$  definido assim a região do sistema que transita de caos local para caos global.

Na teoria fenomenológica, comparamos as hipóteses de escala, usamos uma função homogênea generalizada e obtivemos a Lei de Escala e os três expoentes crítico: o expoente de aceleração  $\beta = \frac{1}{2}$ , o expoente de saturação  $\alpha = \frac{1}{\gamma+1}$  e o expoente dinâmico  $z = -\frac{2\gamma}{\gamma+1}$ .

A partir da Equação da Difusão, utilizamos o método da separação de variáveis para obter sua solução analiticamente, considerando os casos em que o *momentum* inicial é nulo,  $I_0 = 0$ , e o *momentum* inicial não nulo,  $I_0 \neq 0$ , sendo a primeira condizente com a solução apresentada na referência [11] e a segunda, nossa contribuição original.

Como perspectivas futuras deste trabalho, pretendemos considerar um fator de correção no intervalo de integração dos observáveis médios para corrigir a translação apresentada no gráfico (3.2), e também adicionar uma dependência temporal explícita no modelo e estudar suas propriedades dinâmicas. Em especial, investigar a situação em que  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon(1 + \eta \cos(\omega\pi n))$ ,  $\eta \in \mathbb{R}$  e  $\omega \in \mathbb{R}$  são parâmetros externos.

# Referências Bibliográficas

- [1] Gleick, J. *Caos - A criação de uma nova ciência*. Editora Campus/Elsevier, 18ª edição, Rio de Janeiro, 1989.
- [2] Lorenz, E. *Deterministic nonperiodic flow*. Journal of the Atmospheric Sciences, **20**: 130, 1963.
- [3] Saltzman, B. *Finite amplitude free convection as an initial value problem*. Journal of the Atmospheric Sciences, **19**: 329, 1962.
- [4] Yorke, J. *Periods three implies chaos*. The American Mathematical Monthly, **82**: 985, 1975.
- [5] May, R.M. *Biological populations with nonoverlapping generations: stable points, stable cycles, and chaos*. Science, **186**: 645, 1974.
- [6] Hilborn, R.C. *Chaos and Nonlinear Dynamics*. Oxford University Press, Nova Yorke, 2000.
- [7] Sarkovskii, A.N. *Coexistence of cycles of a continuous map of a line into itself*. Ukrainian Mathematical Journal, **16**: 61, 1964.
- [8] Ruelle, D., Takens, F. *On the nature of turbulence*. Communications in Mathematical Physics, **20**: 167, 1971.
- [9] Ruelle, D. *Acaso e Caos*. Editora da Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 1993.
- [10] Reif, F. *Fundamentals of statistical and thermal physics*. Waveland Press, Long Grove, 2009.
- [11] Balakrishnan, V. *Elements of Nonequilibrium Statistical Mechanics*. CRC Press, Nova Yorke, 2008.

- [12] Murase, K., Tanada, S., Mogami, H., Kawamura, M., Miyagawa, M., Yamada, M., Higashiro, H., Lio, A., Hamamoto, K. *Validity of microsphere model in cerebral blood flow measurement using N-isopropyl-p(I-123) iodoamphetamine*. Medical Physics, **17**: 79, 1990.
- [13] Morris, W.F. *Predicting the consequences of a plant spacing and biased movement for pollen dispersal by honey bees*. Ecology, **74**: 493, 1993.
- [14] Popp, D. *International innovation and diffusion of air pollution control technologies: the effects of NOX and SO2 regulation in the US, Japan, and Germany*. Journal of Environmental Economics and Management, **51**: 46, 2006.
- [15] Ozmidov, R.V. *Diffusion of contaminants in the ocean*. Springer, 1990.
- [16] Lichtenberg, A.J., Lieberman, M.A. *Regular and stochastic motion*. Spring-Verlag, Nova Yorke, 1983.
- [17] Chirikov, B.V, *A universal instability of many-dimensional oscillator systems*. Physics Report, **52**: 263, 1979.
- [18] Lieberman, M.A., Lichtenberg, J.A. *Stochastic and adiabatic behavior of particles accelerated by periodic forces*. Physical Review A, **5**: 1852, 1971.
- [19] da Silva, J.K.L., Ladeira, D.G., Leonel, E.D., McClintock, P.V.E., Kamphorst, S.O. *Scaling properties of the Fermi-Ulam accelerator model*. Brazilian Journal of Physics, **36**: 700, 2006.
- [20] Pustyl'nikov, L.D. *Stable and oscillating motions in non-autonomous dynamical systems*. Transactions of the Moscow Mathematical Society, **2**: 1, 1978.
- [21] Leonel, E.D., McClintock, P.V.E. *A hybrid Fermi-Ulam bouncer model*. Journal of Physics A, **38**: 823, 2005.
- [22] Ladeira, D.G., Leonel, E.D. *Dynamical properties of a dissipative hybrid Fermi-Ulam-bouncer model*. Chaos, **17**: 013119, 2007.
- [23] Oliveira, D.F.M., Bizão, R.A., Leonel, E.D. *Scaling properties of a hybrid Fermi-Ulam-bouncer model*. Mathematical Problems in engineering, **2009**: 213857, 2009.
- [24] Howard, J.E., Humphreys, J. *Nonmonotonic twist maps*. Physica D, **80**: 256, 1995.

- [25] Leonel, E.D, Penalva, J. Teixeira, R.M.N., Costa Filho, R.N., Silva, M.R., de Oliveira, J.A. *A dynamical phase transition for a family of Hamiltonian mappings: A phenomenological investigation to obtain the critical exponents*. Physics Letters A, **379**: 1808, 2015.
- [26] Leonel, E.D. *Fundamentos da Física Estatística*. Editora Blucher, São Paulo, 2015.
- [27] Lima, E.L. *Curso de análise*, vol.1. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2012.
- [28] Lima, E.L. *Análise Real*, vol.1. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2011.
- [29] Butkov, E. *Física Matemática*. Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1978.
- [30] Arfken, G.B. *Mathematical methods for physicists*. Academic Press, Nova Yorke, 1995.
- [31] Oliveira, D.F.M., Silva, M.R., Leonel, E.D. *A symmetry break in energy distribution and a biased random walk behavior causing unlimited diffusion in a two dimensional mapping*. Physica A, **436**: 909, 2015.
- [32] Leonel, E.D., McClintock, P.V.E., da Silva, J.K.L. *Fermi-Ulam accelerator model under scaling analysis*. Physical Review Letters, **93**: 014101, 2004.