



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Câmpus de Rio Claro

# Difusão Caótica em Sistemas Não Lineares

Célia Mayumi Kuwana

Rio Claro - SP  
2022



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Câmpus de Rio Claro

# Difusão Caótica em Sistemas Não Lineares

Célia Mayumi Kuwana

Tese apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutora em Física.

Orientador  
Prof. Dr. Edson Denis Leonel

**Rio Claro - SP**  
**2022**

K97d      Kuwana, Célia Mayumi  
            Difusão Caótica em Sistemas Não Lineares / Célia  
            Mayumi Kuwana. -- Rio Claro, 2022  
            101 p. : il., tabs., mapas

            Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista  
            (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas,  
            Rio Claro  
            Orientador: Edson Denis Leonel

            1. Sistemas Não Lineares. 2. Difusão Caótica. 3.  
            Sistemas Complexos. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp.  
Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro.  
Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Câmpus de Rio Claro

Célia Mayumi Kuwana

# Difusão Caótica em Sistemas Não Lineares

Tese apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutora em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Edson Denis Leonel

Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas

Prof. Dr. Makoto Yoshida

Prof. Dr. Denis Gouvêa Ladeira

Prof. Dr. Silvio Roberto de Azavedo Salinas

Conceito: Aprovada

Rio Claro, SP, 17 de novembro de 2022

Dedico esta tese de doutoramento à minha família.  
Ao meu avô, Kazuyuki Kuwana, que sempre me incentivou.

## **Agradecimentos**

Primeiramente, agradeço a Deus por todas as experiências que me foram proporcionadas até este grande momento da minha vida.

Agradeço à minha família pelo apoio, incentivo e amor incondicional. Aos meus pais, Hiromi Kuwana e Ida Kimiko Yanaga Kuwana, muito obrigada por tudo.

Agradeço ao meu amigo e orientador prof. Dr. Edson Denis Leonel por todos esses anos de parceria, pela paciência, incentivo e compreensão. Toda a minha formação devo a você! Muito obrigada!

Agradeço aos meus amigos que desde sempre estão comigo: Celine Yukari Takita, Kátia Satie Nagaishi e Cesar Hiroyuki Momosaki. Amo vocês!

Agradeço à minha grande amiga Glória Cristina Vieira de Sousa pela amizade, apoio e incentivo! Muito obrigada!

Agradeço aos meus amigos e colegas do Departamento de Física, principalmente do Grupo de Investigação em Sistemas Complexo e Caóticos pelo nosso convívio! Agradeço especialmente à Laura Helena Pozzo, à Yoná Hirakawa Huggler e ao Joelson Dayvison Veloso Hermes!

Agradeço ao prof. Dr. Juliano Antonio de Oliveira. Muito obrigada pela amizade e parceria nesses anos todos!

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## Resumo

Nesta tese, discutiremos algumas propriedades dinâmicas e estatísticas de mapeamentos discretos conservativos e dissipativos. São eles: uma família de mapeamentos Hamiltonianos, o modelo do Poço de Potencial dependente do tempo, o Mapa Padrão Dissipativo e uma família de mapeamentos dissipativos. O primeiro é descrito pelas variáveis dinâmicas ângulo e ação e um parâmetro de não linearidade. O Poço de Potencial é descrito pelas variáveis fase e energia e três parâmetros que dependem da configuração do poço. O Mapa Padrão dissipativo e a família de mapeamentos dissipativos são descritos pelas variáveis ângulo e ação, um parâmetro de não linearidade e um de intensidade de dissipação. O objetivo deste trabalho é descrever o comportamento da difusão caótica nestes mapeamentos. Os mapeamentos conservativos estudados apresentam seus espaços de fases mistos com a coexistência de ilhas de periodicidade, mares de caos e curvas invariantes do tipo *spanning* enquanto os mapeamentos dissipativos apresentam atratores. Apresentaremos detalhadamente os cálculos para a obtenção da solução analítica da Equação da Difusão e estudaremos os casos limites de cada mapeamento.

**Palavras-chave:** Equação da Difusão, Sistemas Não Lineares, Sistema Dissipativo, Sistema Conservativo.

## Abstract

In this work, we will present some dynamical and statistical properties of conservative and dissipative discrete mappings. They are: a family of Hamiltonian mappings, a time dependent Potential Well, a Dissipative Standard Mapping and a family of dissipative mappings. The first one is described by two dynamical variables, angle and action, and a nonlinearity parameter. The Potential Well is described by phase and energy and parameters that depend on the potential configuration. The dissipative Standard Mapping and the family of dissipative mappings are described by angle and action and nonlinearity and intensity of dissipation parameters. The goal of this work is to describe the chaotic diffusion behavior in these mappings. These conservative mappings present mixed phase space with periodicity islands, chaotic sea and invariant spanning curves coexisting while the dissipative Standard Mapping presents only attractors. We will present in detail the calculations to obtain the analytical solution of Diffusion Equation and we will study the limit cases of each mapping.

**Key-words:** Diffusion Equation, Nonlinear Systems, Dissipative System, Conservative System.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Difusão Caótica em uma Família de Mapas Hamiltonianos</b>	<b>12</b>
2.1	O mapeamento e suas propriedades . . . . .	12
2.2	Localização das curvas invariantes <i>spanning</i> e propriedades de escala . . . . .	15
2.3	Equação da difusão e solução analítica . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Difusão Caótica em um Problema de Poço de Potencial Dependente do Tempo</b>	<b>34</b>
3.1	O modelo e suas propriedades . . . . .	34
3.2	Localização das curvas invariantes <i>spanning</i> e propriedades de escala . . . . .	40
3.3	Equação da difusão e solução analítica . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Difusão Caótica no Mapa Padrão Dissipativo</b>	<b>53</b>
4.1	O mapeamento e suas propriedades . . . . .	53
4.2	Propriedades de escala . . . . .	56
4.3	Equação da difusão e solução analítica . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Difusão Caótica em um Mapeamento Dissipativo</b>	<b>69</b>
5.1	O mapeamento e suas propriedades . . . . .	69
5.2	Propriedades de escala . . . . .	71
5.3	Equação da difusão e solução analítica . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>84</b>
<b>A</b>	<b>Cálculo dos observáveis médios do mapeamento (2.1)</b>	<b>90</b>
<b>B</b>	<b>Determinante da matriz Jacobiana para o Poço de Potencial</b>	<b>94</b>
<b>C</b>	<b>Cálculo dos observáveis médios do Poço de Potencial</b>	<b>97</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Os estudos de sistemas dinâmicos procuram definir equações que regem o comportamento, aparentemente aleatório, de partículas ou um conjunto delas, cuja evolução é temporal. O que caracteriza esses tipos de sistemas é a sensibilidade às condições iniciais. Ao iniciarmos as iterações de duas condições muito próximas, suas órbitas se afastam exponencialmente, perdendo a previsibilidade. O primeiro livro publicado desta teoria é o *Dynamical Systems*, de George David Birkhoff (1884-1944), em 1927. Porém, o precursor desta teoria foi Jules Henri Poincaré (1854-1912) com seu estudo sobre órbitas planetárias, por volta de 1880, em que percebeu comportamentos irregulares.

Posteriormente, na década de 1960, Edward Norton Lorenz (1917-2008), em seus estudos sobre previsão do tempo [1], percebeu que o programa que utilizava estava arredondando as casas decimais dos números de seis para três casas, o que acarretou em diferenças nos resultados finais. Esta consequência recebeu o nome de efeito borboleta. O sistema de equações estudado por ele ficou conhecido como Sistema de Lorenz e é dado por:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{dt} = xz + rx - y, \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz, \end{cases} \quad (1.1)$$

em que  $\sigma$  está relacionada ao número de difusividade do fluido de estudo,  $r$  está relacionado à diferença de temperatura entre dois extremos do fluido e  $b$  está associado à razão entre a altura e a largura do fluxo convectivo. Este sistema gera o conhecido atrator de Lorenz considerando os parâmetros  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$  e  $b = \frac{8}{3}$  e apresentado na Figura 1.1.

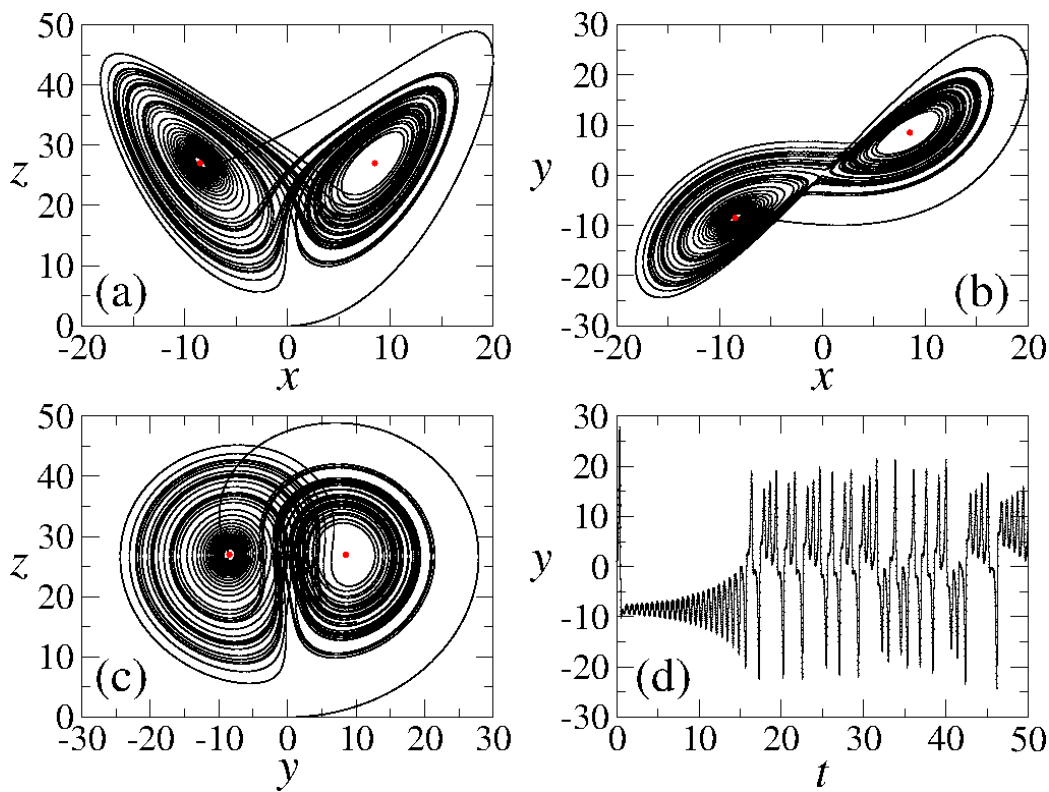


Figura 1.1: O atrator de Lorenz com a condição inicial  $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 0)$  e os parâmetros  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$  e  $b = \frac{8}{3}$  (a)  $z$  vs.  $x$ , (b)  $y$  vs.  $x$ , (c)  $z$  vs.  $y$  e (d)  $y$  vs.  $t$ . Figura retirada da referência [2].

Alguns anos mais tarde, Stephen Smale (1930- ) criou o modelo da ferradura, conhecido como ferradura de Smale, para descrever a complexidade de uma válvula eletrônica estudada por Balthasar van der Pol (1889-1959), na década de 20, e esse modelo foi base para o entendimento de propriedades caóticas de sistemas dinâmicos [3]. A introdução desse modelo se deu a partir de uma carta enviada por Norman Levinson (1912-1975), na qual este descrevia um sistema com caos e estabilidade juntos: um circuito eletrônico oscilante. Na época, os conceitos de sistemas dinâmicos ainda não estavam bem definidos.

Outros nomes importantes são o de James Yorke (1941- ) e o de Robert May (1936-2020). Este último, biólogo, estudou a equação da diferença logística para crescimento populacional [4]. Para valores baixos do parâmetro de não linearidade, o modelo permanecia num regime estável, porém, para

valores altos, a população alternava entre dois valores. Aumentando novamente, havia outra duplicação. Ao analisar este comportamento, Yorke provou [5] que se um ciclo regular de período três aparece em qualquer sistema unidimensional, então o sistema apresentará também ciclos regulares e ciclos completamente caóticos, o que foi uma surpresa para os físicos, uma vez que, intuitivamente, um sistema em oscilações de período três repetiria este comportamento sem a produção de caos. Porém, este trabalho já estava publicado em 1964 [6], por Oleksandr Mykolayovych Sharkovsky (1936- ).

O fato do desconhecimento da obra de Sharkovsky por parte de Yorke ocorreu pela falha de comunicação entre as ciências soviética e ocidental, por conta do idioma e também pelas restrições de viagens entre os dois lados. Porém, para os soviéticos, esta não era uma nova ciência como acreditavam os ocidentais, pois já existiam trabalhos de Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987), na década de 50 [3].

O conceito de turbulência também está relacionado aos sistemas dinâmicos não lineares. Para Lev Davidovich Landau (1908-1968), conforme o fluxo de um líquido aumentava, surgiriam frequências uma a uma. Com o objetivo de confirmar esta ideia, Harry Swinney (1939- ) e Jerry Gollub (1944- ) estudaram o fluxo de Couette-Taylor, em 1973, e este estudo apresentou um estado bem definido e depois o fluxo se tornou indistinguível. Mas foi no trabalho intitulado “On the nature of turbulence” [7] que David Ruelle (1935- ) e Floris Takens (1940-2010) provaram que a turbulência é descrita por atratores estranhos e não por superposição de frequências. Segundo estes autores, atratores estranhos são atratores que evoluem por um processo de alongamentos e dobras. O atrator estranho mais estudado foi introduzido por Michel Hénon (1931-2013), conhecido como Mapa de Hénon [8], com base nos estudos do atrator de Lorenz.

Outro conceito relacionado aos sistemas dinâmicos é o de fractal, introduzido por Benoit Mandelbrot (1924-2010), para nomear a geometria que ele observou para medir precisamente a linha de um litoral, em 1975. Essa caracterização de dimensões fracionadas ocorreu por conta do acesso que Mandelbrot tinha a recursos computacionais e seus estudos com padrões irregulares. Estes apresentaram comportamentos de autossemelhança, ou seja, existe a repetição da estrutura em várias escalas, o que caracteriza o fractal. Esta característica está presente no atrator de Lorenz [1].

Estes sistemas são estudados em diversas áreas além da física [2, 9, 10] como em mercados financeiros [11], medicina [12, 13, 14], biologia [3, 15].

Uma vez que a dinâmica no mar de caos pode ser comparada a um processo difusivo normal, podemos utilizar a Equação da Difusão para estudar analiticamente essa dinâmica. Processo difusivo [16] é um processo de transporte que ocorre a partir de uma determinada região para outra de um sistema. Este processo é descrito por uma equação diferencial da forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad (1.2)$$

em que  $\rho$  é uma densidade do elemento de estudo,  $D$  é denominado coeficiente da difusão, podendo ser constante ou não,  $t$  é o tempo e  $x$  é o eixo em que ocorre a difusão. Esta equação é obtida a partir da Lei de Fick [16, 17], dada por:

$$\vec{J} = -D \vec{\nabla} \rho, \quad (1.3)$$

sendo  $\vec{J}$  o fluxo do elemento de estudo, combinada com a equação da continuidade [17], dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0, \quad (1.4)$$

também denominada de Lei de Conservação de  $\rho$ .

A Lei de Fick quer dizer que a taxa de transferência de um elemento por unidade de área é proporcional ao gradiente de concentração medido na seção normal a esta área e foi proposta por Adolf Eugen Fick (1829-1901), em 1855, para descrever a transferência de calor por condução introduzindo difusão na equação obtida por Jean Baptiste Joseph Fourier (1777-1831), em 1822 [16] quando este estava interessado na maneira como ocorria a difusão de calor em sólidos [18]. Fourier queria uma descrição matemática para o comportamento de ondas e percebeu que poderiam ser representadas por séries de senos e cossenos, surgindo, então, as chamadas Séries de Fourier.

Os processos difusivos podem ser observados em diversos sistemas, tais como o pólen se espalhando pelo ar até encontrar uma flor [19], como um medicamento percorre pela corrente sanguínea até chegar a algum órgão [20], como doenças propagam pelo ar [21, 22, 23], poluição se propagando na atmosfera [24] e nos oceanos [25], memes se espalhando pelas redes sociais [26], influência do clima na propagação de pestes [27], além de aplicações na física [28, 29, 30].

Este trabalho tem por objetivo descrever o comportamento de uma partícula, ou de forma equivalente um *ensemble* de partículas não interagentes, em uma dinâmica caótica em diferentes mapeamentos não lineares. Para tanto, a partir da Equação da Difusão, obtemos a expressão da densidade de probabilidade de encontrar a partícula do sistema com uma determinada ação ou energia em um determinado instante de tempo. A partir do conhecimento da densidade de probabilidade, os principais momentos da distribuição são obtidos, fornecendo os observáveis para a descrição das propriedades estatísticas discutidas na tese.

Organizamos este trabalho da seguinte forma: no Capítulo 2, estudamos a difusão caótica em uma família de mapeamentos Hamiltonianos. O espaço de fases apresentado é misto, com a coexistência de ilhas de periodicidade, mares de caos e curvas invariantes *spanning*. Apresentamos suas propriedades, a localização das primeiras curvas invariantes *spanning* a partir da conexão com o Mapa Padrão conservativo e a solução analítica da Equação da Difusão. Os resultados analíticos e numéricos são comparados e analisados. Este capítulo apresenta os resultados apresentados no artigo [31].

No Capítulo 3, estudamos a difusão caótica no modelo do Poço de Potencial dependente do tempo. O modelo consiste em partículas não interagentes confinadas em um poço experimentando energias potenciais diferentes, dependendo de sua localização. O espaço de fases apresenta coexistência de ilhas de periodicidade, mares de caos e curvas invariantes *spanning*. Apresentamos suas propriedades, a localização da curva invariante *spanning* de menor energia e a solução analítica da Equação da Difusão. Fazemos a comparação entre os resultados obtidos analiticamente e os obtidos por simulação numérica. Este capítulo apresenta os resultados publicados no artigo [32].

Os Capítulos 4 e 5 apresentam os resultados da difusão caótica no Mapa Padrão Dissipativo e em outro mapeamento dissipativo, respectivamente. Ambos os espaços de fases apresentam somente atratores. Apresentamos as suas propriedades e a solução analítica da Equação da Difusão. Comparamos os resultados obtidos analiticamente com os resultados obtidos por simulação numérica. Os resultados do Capítulo 4 foram publicados no artigo [33]. Por fim, no Capítulo 6, apresentamos as conclusões e perspectivas de trabalhos futuros.

## Capítulo 2

# Difusão Caótica em uma Família de Mapas Hamiltonianos

Neste capítulo, são apresentados o modelo e suas propriedades, bem como uma solução analítica da Equação da Difusão que descreve o comportamento na dinâmica caótica. O mapeamento é descrito por duas variáveis, ângulo,  $\theta$  e ação,  $I$ , e por dois parâmetros de controle,  $\varepsilon$  e  $\gamma$ . O parâmetro  $\varepsilon$  controla a intensidade da não linearidade do mapeamento, enquanto  $\gamma > 0$  é um parâmetro livre. Para este mapeamento, o mar de caos está restrito ao intervalo  $[-I_{fisc}, I_{fisc}]$ , ou seja, está confinado entre os valores de ação das primeiras curvas invariantes do tipo *spanning* denotadas por *fisc - first invariant spanning curve*. Com esta condição e as equações que descrevem o mapeamento, podemos determinar a expressão da solução da Equação da Difusão e comparamos com os resultados obtidos numericamente.

### 2.1 O mapeamento e suas propriedades

O mapa estudado é dado por:

$$T : \begin{cases} I_{n+1} = I_n + \varepsilon \operatorname{sen}(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = \left( \theta_n + \frac{1}{|I_{n+1}|^\gamma} \right) \operatorname{mod} (2\pi), \end{cases} \quad (2.1)$$

em que  $\varepsilon$  é um parâmetro que controla a transição de integrável para não integrável e  $\gamma > 0$  é um parâmetro livre que controla o comportamento de  $\theta_{n+1}$  com a variação de valores de  $I_{n+1}$ . A Figura 2.1 apresenta o espaço de fases do mapeamento (2.1) com os parâmetros  $\gamma = 1$  e dois valores distintos para  $\varepsilon$ , isto é, (a)  $\varepsilon = 10^{-2}$  e (b)  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Podemos notar a coexistência das ilhas de periodicidade, do mar de caos e das curvas invariantes *spanning*.

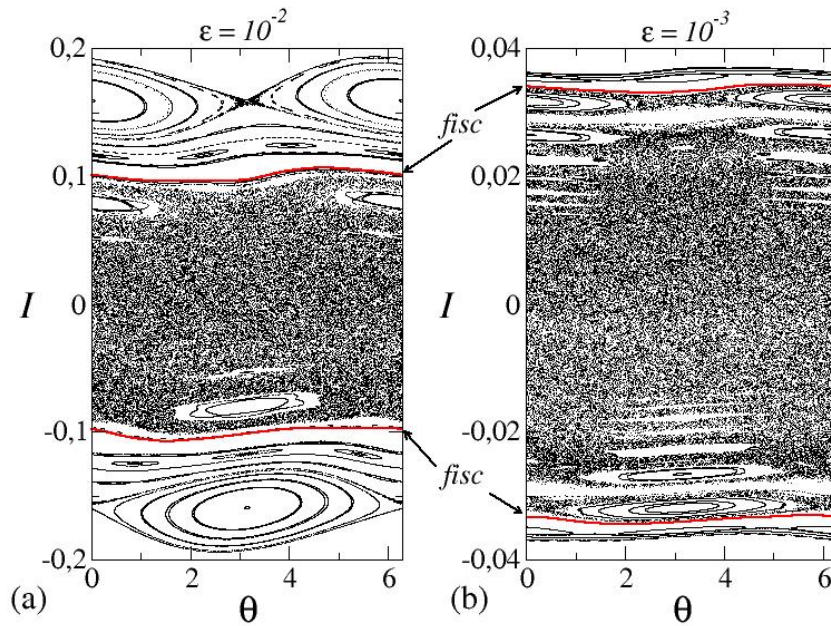


Figura 2.1: Espaço de fases do mapeamento (2.1) com os parâmetros  $\gamma = 1$  e (a)  $\varepsilon = 10^{-2}$  e (b)  $\varepsilon = 10^{-3}$ . As linhas em vermelho representam as primeiras curvas invariantes do tipo *spanning*.

A matriz Jacobiana é dada por:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

em que os seus elementos são dados por:

- $\frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} = 1$ ,
- $\frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} = \varepsilon \cos \theta_n$ ,

- $\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} = -\frac{\gamma}{|I_{n+1}|^{\gamma+1}} \frac{\partial |I_{n+1}|}{\partial I_n} = -\frac{\gamma}{|I_{n+1}|^{\gamma+1}} \text{ sinal}(I_{n+1}),$
- $\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} = 1 - \frac{\gamma}{|I_{n+1}|^{\gamma+1}} \frac{\partial |I_{n+1}|}{\partial \theta_n} = 1 - \frac{\gamma}{|I_{n+1}|^{\gamma+1}} \varepsilon \cos \theta_n \text{ sinal}(I_{n+1}).$

sendo  $\text{sinal}(I_{n+1}) = \begin{cases} 1, & I_{n+1} > 0 \\ -1, & I_{n+1} < 0 \end{cases}.$

Calculando o determinante da matriz Jacobiana, temos que:

$$\det J = \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} - \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n},$$

$$\Rightarrow \det J = 1 - \frac{\gamma}{|I_{n+1}|^{\gamma+1}} \varepsilon \cos \theta_n \text{ sinal}(I_{n+1}) - \varepsilon \cos \theta_n \left( -\frac{\gamma}{|I_{n+1}|^{\gamma+1}} \text{ sinal}(I_{n+1}) \right),$$

$$\Rightarrow \det J = 1.$$

Dessa forma, pelo Teorema de Liouville [9, 28], o mapeamento preserva área no espaço de fases. Isso porque a transformação de área do instante  $n$  para  $n + 1$  se dá por  $dA_{n+1} = [\det J_n] dA_n$ , em que  $dA_n$  é o elemento infinitesimal de área no instante  $n$ . Assim, a forma geométrica pode mudar, mas a área é preservada.



Figura 2.2: Ilustração da transformação de área do instante  $n$  para  $n + 1$ .

## 2.2 Localização das curvas invariantes *spanning* e propriedades de escala

Para obtermos a localização das primeiras curvas invariantes do tipo *spanning*, fazemos uma conexão com o Mapa Padrão, também conhecido como Mapa de Chirikov-Taylor [9], que é dado por:

$$T_{SM} : \begin{cases} I_{n+1} = I_n + K \operatorname{sen}(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = (\theta_n + I_{n+1}) \pmod{2\pi} \end{cases} \quad (2.3)$$

em que  $K$  é o parâmetro que controla a transição de integrável para não integrável. Quando  $K = K_c \cong 0,9716\dots$  [9, 34], o sistema apresenta uma transição de caos local para caos global. Quando  $K < K_c$ , o mar de caos está confinado entre curvas invariantes. Quando  $K \geq K_c$ , as curvas invariantes *spanning* são destruídas e o mar de caos se espalha ao longo do espaço de fases. A Figura 2.3 apresenta essa transição considerando valores diferentes do parâmetro  $K$ .

A transição de caos local para caos global na família de mapeamentos Hamiltonianos se dá nas curvas invariantes *spanning*. Para obter as suas localizações, reescrevemos o mapeamento (2.1) em termos do mapa padrão assumindo que  $I_{fisc}$  possa ser escrita como  $I_{fisc} = I^* + \Delta I$ , em que  $I^*$  é o valor médio de  $I_{fisc}$  e  $\Delta I$  é uma pequena perturbação na ação. Dessa forma, a variável  $I_{n+1}$  é escrita como  $I_{n+1} = I^* + \Delta I_{n+1}$  e, logo, a primeira equação de (2.1) é dada por:

$$\begin{aligned} I^* + \Delta I_{n+1} &= I^* + \Delta I_n + \varepsilon \operatorname{sen}(\theta_n) \\ \Rightarrow \Delta I_{n+1} &= \Delta I_n + \varepsilon \operatorname{sen}(\theta_n). \end{aligned} \quad (2.4)$$

A segunda equação do mapeamento (2.1) é dada por:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{1}{(I^* + \Delta I_{n+1})^\gamma}, \quad (2.5)$$

em que assumimos, por simplicidade,  $I_{n+1} > 0$  e removemos o mod  $2\pi$  para a expansão. Reescrevendo esta equação, fazendo a expansão em série de Taylor, considerando os termos de primeira ordem em  $\frac{\Delta I_{n+1}}{I^*}$ , obtemos:

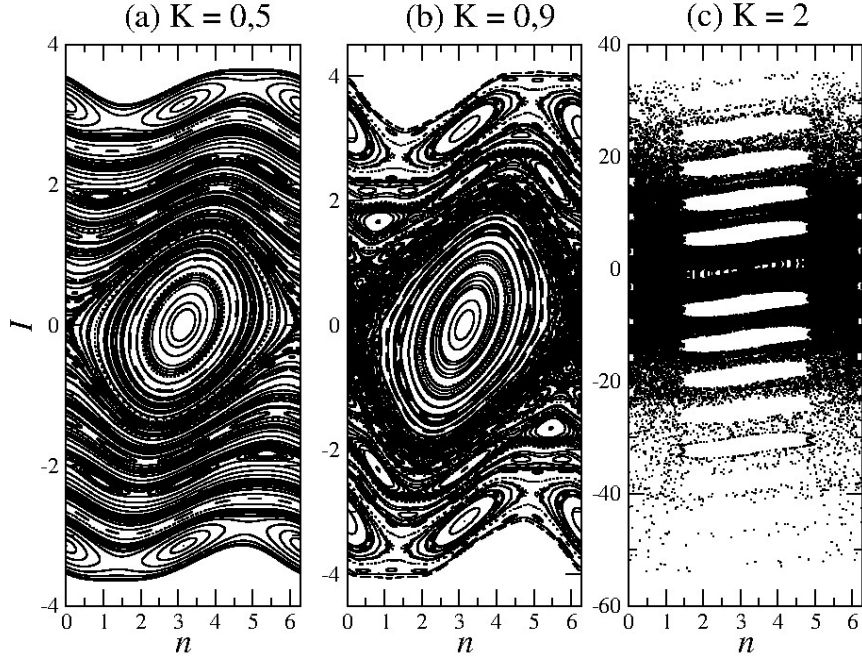


Figura 2.3: Espaço de fases do Mapa Padrão com os parâmetros (a)  $K = 0,5$ , (b)  $K = 0,9$  e (c)  $K = 2$ .

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= \theta_n + \frac{1}{I^{*\gamma}} \left( 1 + \frac{\Delta I_{n+1}}{I^*} \right)^{-\gamma}, \\ \Rightarrow \theta_{n+1} &= \theta_n + \frac{1}{I^{*\gamma}} \left[ 1 - \gamma \frac{\Delta I_{n+1}}{I^*} + O^2 \left( \frac{\Delta I_{n+1}}{I^*} \right) \right], \\ \Rightarrow \theta_{n+1} &= \theta_n + \frac{1}{I^{*\gamma}} - \gamma \frac{\Delta I_{n+1}}{I^{*\gamma+1}}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

As duas equações resultantes são escritas como:

$$\begin{cases} \Delta I_{n+1} = \Delta I_n + \varepsilon \text{sen}(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \frac{1}{I^{*\gamma}} - \gamma \frac{\Delta I_{n+1}}{I^{*\gamma+1}} \end{cases}. \quad (2.7)$$

Denotando por  $J_{n+1} = \frac{1}{I^{*\gamma}} - \gamma \frac{\Delta I_{n+1}}{I^{*\gamma+1}}$  e fazendo as manipulações algébricas, obtemos:

$$\begin{cases} J_{n+1} = J_n - \frac{\gamma\varepsilon}{I^{*\gamma+1}} \text{sen}(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + J_{n+1} \end{cases} . \quad (2.8)$$

Denominamos  $K_{ef} = \frac{\gamma\varepsilon}{I^{*\gamma+1}}$  e eliminamos o sinal negativo definindo  $\theta = \phi + \pi$ . Logo:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \phi_{n+1} + \pi = \phi_n + \pi + J_{n+1} \\ J_{n+1} = J_n - K_{ef} \text{sen}(\phi_n + \pi) \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} \phi_{n+1} = \phi_n + J_{n+1} \\ J_{n+1} = J_n + K_{ef} \text{sen}(\phi_n) \end{cases} . \end{aligned} \quad (2.9)$$

As posições das curvas invariantes são obtidas quando  $K_{ef} = \frac{\gamma\varepsilon}{I^{*\gamma+1}} \simeq 0,9716$ , ou seja:

$$I^* = \left[ \frac{\gamma\varepsilon}{K_{ef}} \right]^{\frac{1}{\gamma+1}} . \quad (2.10)$$

Se  $\Delta I$  for pequeno, então  $I_{fisc} \simeq I^*$ , logo:

$$I_{fisc} \cong \left[ \frac{\gamma\varepsilon}{0,9716\dots} \right]^{\frac{1}{\gamma+1}} . \quad (2.11)$$

Uma vez obtidas as curvas, temos o intervalo em que o mar de caos está confinado, ou seja,  $I_{caos} \in (-I_{fisc}, +I_{fisc})$ . Como o espaço de fases é “simétrico”, ao calcularmos  $\bar{I} = 0$ . Então, utilizamos  $\bar{I}^2$ , obtido a partir de duas médias: uma ao longo do *ensemble* de condições iniciais e outra, na órbita. Matematicamente:

$$\bar{I}^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I_{i,j}^2, \quad (2.12)$$

e observável de interesse que identifica a difusão caótica é dado por:

$$I_{rms}(n) = \sqrt{\bar{I}^2}. \quad (2.13)$$

O gráfico de  $I_{rms}$  em termos de  $n$  é apresentado na Figura 2.4, em que notamos um crescimento inicial e, para valores grandes de  $n$ , uma saturação.

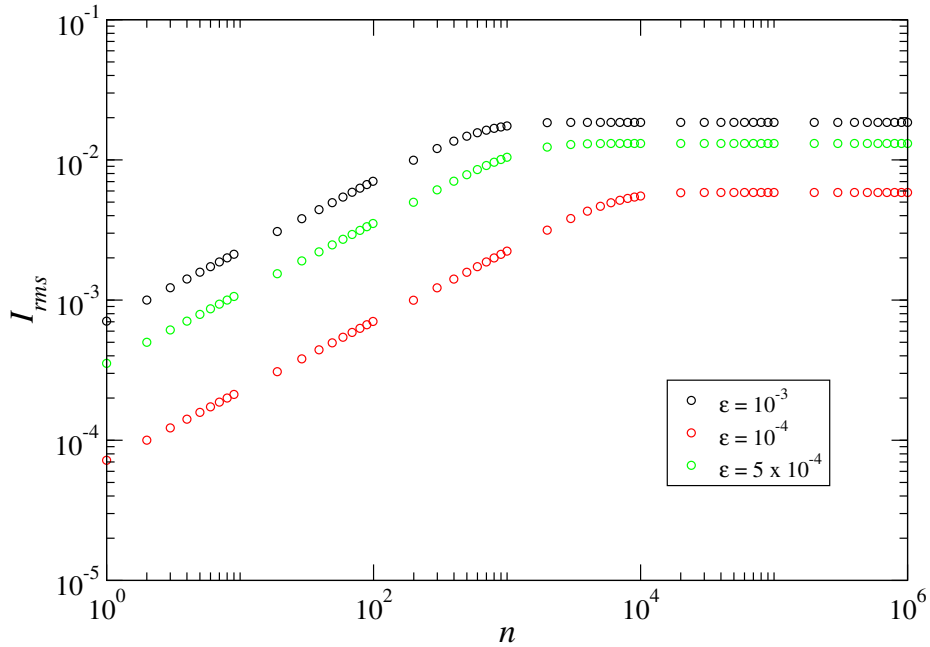


Figura 2.4: Gráfico do comportamento típico de  $I_{rms}$  em função de  $n$  para diferentes valores de  $\varepsilon$ .

A partir deste gráfico, podemos propor:

i) Para  $n \ll n_x$ :

$$I_{rms} \propto (n\varepsilon^2)^\beta, \quad (2.14)$$

em que  $\beta$  é o expoente de aceleração;

ii) Para  $n \gg n_x$ :

$$I_{sat} \propto \varepsilon^\alpha, \quad (2.15)$$

em que  $\alpha$  é o expoente de saturação;

iii) O número de *crossover*  $n_x$ :

$$n_x \propto \varepsilon^z, \quad (2.16)$$

em que  $z$  é o expoente dinâmico.

Com essas três hipóteses de escala, podemos descrever o comportamento de  $I_{rms}$  usando uma função homogênea generalizada do tipo:

$$I_{rms}(n\varepsilon^2, \varepsilon) = l I_{rms}(l^a n\varepsilon^2, l^b \varepsilon), \quad (2.17)$$

em que  $l$  é um fator de escala e  $a$  e  $b$  são expoentes característicos. Como  $l$  é um fator de escala, podemos escolher  $l^a n\varepsilon^2 = 1$ , o que conduz a:

$$l = (n\varepsilon^2)^{-1/a}. \quad (2.18)$$

Substituindo esta expressão na (2.17), temos que:

$$I_{rms}(n\varepsilon^2, \varepsilon) = (n\varepsilon^2)^{-1/a} I_A[(n\varepsilon^2)^{-b/a} \varepsilon], \quad (2.19)$$

em que:

$$I_A[(n\varepsilon^2)^{-b/a} \varepsilon] = I_{rms}[1, (n\varepsilon^2)^{-b/a} \varepsilon] \quad (2.20)$$

que é considerada constante para  $n \ll n_x$ .

Comparando (2.19) com (2.14), temos que  $\beta = -1/a$ .

Escolhendo, agora,  $l^b \varepsilon = 1$ , temos:

$$l = \varepsilon^{-1/b}. \quad (2.21)$$

Substituindo na equação (2.17), temos que:

$$I_{rms}(n\varepsilon^2, \varepsilon) = \varepsilon^{-1/b} I_B(\varepsilon^{-a/b} n\varepsilon^2), \quad (2.22)$$

em que:

$$I_B(\varepsilon^{-a/b}n\varepsilon^2) = I_{rms}(\varepsilon^{-a/b}n\varepsilon^2, 1) \quad (2.23)$$

é considerada constante para  $n \gg n_x$ . Uma comparação com (2.15) nos dá  $\alpha = -1/b$ .

Para determinar o expoente  $z$ , comparamos as equações (2.18) e (2.21):

$$(n\varepsilon^2)^\beta = \varepsilon^\alpha. \quad (2.24)$$

Quando isolamos  $n$  e comparamos com a hipótese de escala (2.16), obtemos a Lei de Escala:

$$z = \frac{\alpha}{\beta} - 2, \quad (2.25)$$

que relaciona os expoentes críticos.

## 2.3 Equação da difusão e solução analítica

A dinâmica no mar de caos, ao longo do eixo de  $I$ , pode ser comparada a um processo difusivo normal, similar a um problema de caminhada aleatória [34, 35] (*random walk*). Então, resolveremos a equação da difusão [29], que na ausência de campos externos é dada por:

$$\frac{\partial P(I, n)}{\partial n} = D \frac{\partial^2 P(I, n)}{\partial I^2}, \quad (2.26)$$

em que  $P$  é a distribuição de probabilidade de observar um determinado *momentum*  $I$  em um instante  $n$  e  $D$  é o coeficiente da difusão.

Uma vez que a difusão ao longo do mar de caos está confinada no intervalo  $I \in [-I_{fisc}, +I_{fisc}]$ , devemos ter como condições de contorno:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial I} \right|_{I=\pm I_{fisc}} = 0, \quad (2.27)$$

ou seja, as curvas invariantes *spanning* impedem o fluxo de partículas.

O coeficiente da difusão é determinado pela expressão [34]:

$$D = \frac{\Delta \overline{I^2}}{2} = \frac{\overline{I_{n+1}^2} - \overline{I_n^2}}{2}. \quad (2.28)$$

Elevando a primeira equação do mapeamento (2.1), temos:

$$I_{n+1}^2 = I_n^2 + 2I_n \varepsilon \sin(\theta_n) + \varepsilon^2 \sin^2(\theta_n),$$

e tomando a média no *ensemble* de “ $\theta$ ”, uma vez que  $I$  e  $\theta$  são assumidas variáveis descorrelacionadas, temos:

$$\overline{I_{n+1}^2} = \overline{I_n^2} + 2\varepsilon \overline{I_n \sin(\theta_n)} + \varepsilon^2 \overline{\sin^2(\theta_n)}, \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \overline{\sin(\theta)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\theta) d\theta = 0 \\ \text{onde} \quad \overline{\sin^2(\theta)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Assim, temos:

$$\overline{I_{n+1}^2} - \overline{I_n^2} = \frac{\overline{I_{n+1}^2} - \overline{I_n^2}}{(n+1) - n} \simeq \frac{d\overline{I^2}}{dn} = \frac{\varepsilon^2}{2}. \quad (2.30)$$

Logo, pela definição (2.28), temos:

$$\Rightarrow D = \frac{\varepsilon^2}{4}. \quad (2.31)$$

A técnica utilizada para obter a solução da equação da difusão é via separação de variáveis:

$$P(I, n) = X(I)N(n), \quad (2.32)$$

em que  $X(I)$  é uma função que depende apenas de  $I$  e  $N(n)$  depende apenas de  $n$ . Assim:

$$\frac{\partial P}{\partial n} = X(I) \frac{dN}{dn}; \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial P}{\partial I} = \frac{dX}{dI} N(n) \Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial I^2} = \frac{d^2 X}{dI^2} N(n). \quad (2.34)$$

Levando estas expressões na equação da difusão (2.26), temos:

$$\begin{aligned} X(I) \frac{dN}{dn} &= DN(n) \frac{d^2 X}{dI^2}, \\ \Rightarrow \frac{1}{N(n)} \frac{dN}{dn} &= \frac{D}{X(I)} \frac{d^2 X}{dI^2} = -\hat{a}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

em que  $\hat{a} \in \mathbb{R}^+$ . Desta forma, temos duas equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{dN}{N} = -\hat{a} dn, \quad (2.36)$$

$$D \frac{d^2 X}{dI^2} + \hat{a} X = 0. \quad (2.37)$$

Resolvendo a equação (2.36), obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{N_0}^{N(n)} \frac{dN}{N} &= -\hat{a} \int_0^n dn \Rightarrow \ln(N) \Big|_{N_0}^{N(n)} = -\hat{a} n, \\ \Rightarrow \ln \left( \frac{N(n)}{N_0} \right) &= -\hat{a} n, \\ \Rightarrow N(n) &= N_0 e^{-\hat{a}n}. \end{aligned}$$

Para determinar a solução da segunda equação, (2.37), consideremos  $X(I) = \tilde{A} e^{\lambda I}$ . Assim, as primeira e segunda derivadas são escritas como:

$$\frac{dX}{dI} = \tilde{A} \lambda e^{\lambda I}, \quad (2.38)$$

e

$$\frac{d^2 X}{dI^2} = \tilde{A}\lambda^2 e^{\lambda I}. \quad (2.39)$$

Substituindo estas expressões em (2.37), obtemos:

$$D\tilde{A}\lambda^2 e^{\lambda I} + \hat{a}\tilde{A}e^{\lambda I} = 0 \Rightarrow D\lambda^2 = -\hat{a},$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = -\frac{\hat{a}}{D},$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{\frac{\hat{a}}{D}}. \quad (2.40)$$

Com isto, a solução para  $X(I)$  pode ser escrita como:

$$X(I) = Ae^{i\sqrt{\frac{\hat{a}}{D}}I} + Be^{-i\sqrt{\frac{\hat{a}}{D}}I}. \quad (2.41)$$

Utilizando a relação de Euler e reagrupando os termos, obtemos:

$$X(I) = A \left[ \cos \left( \sqrt{\frac{\hat{a}}{D}}I \right) + i \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{\hat{a}}{D}}I \right) \right] + B \left[ \cos \left( \sqrt{\frac{\hat{a}}{D}}I \right) - i \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{\hat{a}}{D}}I \right) \right],$$

$$\Rightarrow X(I) = (A + B) \cos \left( \sqrt{\frac{\hat{a}}{D}}I \right) + i(A - B) \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{\hat{a}}{D}}I \right). \quad (2.42)$$

Considerando  $A = \frac{\tilde{a}}{2} - i\frac{\tilde{b}}{2}$  e  $B = \frac{\tilde{a}}{2} + i\frac{\tilde{b}}{2}$ , temos que  $A+B = \tilde{a}$  e  $A-B = -i\tilde{b}$  e podemos reescrever a solução de  $X(I)$  como:

$$X(I) = \tilde{a} \cos \left( \sqrt{\frac{\hat{a}}{D}}I \right) + \tilde{b} \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{\hat{a}}{D}}I \right) \quad (2.43)$$

Aplicando as condições de contorno:

1)

$$\begin{aligned}
\left. \frac{dX}{dI} \right|_{I=I_{fisc}} &= -\tilde{a} \sqrt{\frac{\hat{a}}{D}} \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{\hat{a}}{D}} I_{fisc} \right) + \tilde{b} \sqrt{\frac{\hat{a}}{D}} \cos \left( \sqrt{\frac{\hat{a}}{D}} I_{fisc} \right) = 0, \\
&\Rightarrow -\tilde{a} \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{\hat{a}}{D}} I_{fisc} \right) + \tilde{b} \cos \left( \sqrt{\frac{\hat{a}}{D}} I_{fisc} \right) = 0, \\
&\Rightarrow \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}} = \frac{\operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{\hat{a}}{D}} I_{fisc} \right)}{\cos \left( \sqrt{\frac{\hat{a}}{D}} I_{fisc} \right)}. \tag{2.44}
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
\left. \frac{dX}{dI} \right|_{I=-I_{fisc}} &= -\tilde{a} \sqrt{\frac{\hat{a}}{D}} \operatorname{sen} \left( -\sqrt{\frac{\hat{a}}{D}} I_{fisc} \right) + \tilde{b} \sqrt{\frac{\hat{a}}{D}} \cos \left( -\sqrt{\frac{\hat{a}}{D}} I_{fisc} \right) = 0, \\
&\Rightarrow -\tilde{a} \operatorname{sen} \left( -\sqrt{\frac{\hat{a}}{D}} I_{fisc} \right) + \tilde{b} \cos \left( -\sqrt{\frac{\hat{a}}{D}} I_{fisc} \right) = 0, \\
&\Rightarrow \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}} = \frac{\operatorname{sen} \left( -\sqrt{\frac{\hat{a}}{D}} I_{fisc} \right)}{\cos \left( -\sqrt{\frac{\hat{a}}{D}} I_{fisc} \right)}. \tag{2.45}
\end{aligned}$$

Igualando (2.44) e (2.45), obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{\hat{a}}{D}} I_{fisc} \right)}{\cos \left( \sqrt{\frac{\hat{a}}{D}} I_{fisc} \right)} &= \frac{\operatorname{sen} \left( -\sqrt{\frac{\hat{a}}{D}} I_{fisc} \right)}{\cos \left( -\sqrt{\frac{\hat{a}}{D}} I_{fisc} \right)}, \\
&\Rightarrow \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{\hat{a}}{D}} I_{fisc} \right) = \operatorname{sen} \left( -\sqrt{\frac{\hat{a}}{D}} I_{fisc} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \text{sen} \left( \sqrt{\frac{\hat{a}}{D}} I_{fisc} \right) = -\text{sen} \left( \sqrt{\frac{\hat{a}}{D}} I_{fisc} \right), \\
&\Rightarrow \text{sen} \left( \sqrt{\frac{\hat{a}}{D}} I_{fisc} \right) = 0, \\
&\Rightarrow \sqrt{\frac{\hat{a}}{D}} I_{fisc} = k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\
&\Rightarrow \hat{a} = \frac{k^2 \pi^2 D}{I_{fisc}^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots . \tag{2.46}
\end{aligned}$$

Para o caso em que  $k = 0$ , tratamos separadamente. Quando  $k = 0$ , temos que  $\hat{a} = 0$ . Assim:

- 1)  $\frac{dN}{dn} = 0 \Rightarrow N(n) = \tilde{N}_0$ , em que  $\tilde{N}_0$  é constante;
- 2)  $\frac{d^2 X}{dI^2} = 0 \Rightarrow \frac{dX}{dI} = X_0 \Rightarrow X(I) = X_0 I + X_1$ , em que  $X_0$  e  $X_1$  são constantes.

Daí, temos que:

$$P(I, n) = \tilde{N}_0 (X_0 I + X_1). \tag{2.47}$$

Aplicando as condições de contorno:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial I} \right|_{I=\pm I_{fisc}} = \tilde{N}_0 X_0 \Rightarrow X_0 = 0. \tag{2.48}$$

Dessa forma, uma solução para a equação da difusão seria:

$$P(I, n) = \tilde{N}_0 X_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cos \left( \frac{k\pi I}{I_{fisc}} \right) + b_k \text{sen} \left( \frac{k\pi I}{I_{fisc}} \right) \right] e^{-\frac{k^2 \pi^2 D n}{I_{fisc}^2}}. \tag{2.49}$$

Denotando  $a_0 = \tilde{N}_0 X_1$ , podemos aplicar as condições iniciais em  $P(I, n)$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} P(I, 0) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi I}{I_{fisc}}\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi I}{I_{fisc}}\right), \\ &= \delta(I - I_0). \end{aligned} \quad (2.50)$$

A função delta de Dirac pode ser escrita como [17]:

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\cos(kx) + i \operatorname{sen}(kx)], \\ &= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \cos(kx). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Substituindo  $x$  por  $\frac{\pi I}{I_{fisc}}$ :

$$\delta\left(\frac{\pi I}{I_{fisc}}\right) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{k\pi I}{I_{fisc}}\right). \quad (2.52)$$

Por outro lado, a função delta de Dirac tem a seguinte propriedade:

$$\delta(ax) = \frac{1}{a} \delta(x). \quad (2.53)$$

Assim:

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{\pi I}{I_{fisc}}\right) &= \frac{I_{fisc}}{\pi} \delta(I), \\ &= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{k\pi I}{I_{fisc}}\right). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Desta equação, obtemos:

$$\delta(I) = \frac{1}{2I_{fisc}} + \frac{1}{I_{fisc}} \sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{k\pi I}{I_{fisc}}\right). \quad (2.55)$$

Substituindo  $I$  por  $I - I_0$ , temos:

$$\delta(I - I_0) = \frac{1}{2I_{fisc}} + \frac{1}{I_{fisc}} \sum_{k=1}^{\infty} \cos \left[ \frac{k\pi(I - I_0)}{I_{fisc}} \right].$$

$$\Rightarrow \delta(I - I_0) = \frac{1}{2I_{fisc}} + \frac{1}{I_{fisc}} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \cos \left( \frac{k\pi I}{I_{fisc}} \right) \cos \left( \frac{k\pi I_0}{I_{fisc}} \right) + \text{sen} \left( \frac{k\pi I}{I_{fisc}} \right) \text{sen} \left( \frac{k\pi I_0}{I_{fisc}} \right) \right]. \quad (2.56)$$

Comparando as equações (2.50) e (2.56), temos que:

- $a_0 = \frac{1}{2I_{fisc}};$
- $a_k = \frac{1}{I_{fisc}} \cos \left( \frac{k\pi I_0}{I_{fisc}} \right);$
- $b_k = \frac{1}{I_{fisc}} \text{sen} \left( \frac{k\pi I_0}{I_{fisc}} \right).$

Logo, a probabilidade é escrita como:

$$P(I, n) = \frac{1}{2I_{fisc}} + \frac{1}{I_{fisc}} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \cos \left( \frac{k\pi I}{I_{fisc}} \right) \cos \left( \frac{k\pi I_0}{I_{fisc}} \right) + \text{sen} \left( \frac{k\pi I}{I_{fisc}} \right) \text{sen} \left( \frac{k\pi I_0}{I_{fisc}} \right) \right] e^{-\frac{k^2 \pi^2 Dn}{I_{fisc}^2}}. \quad (2.57)$$

Os cálculos dos observáveis médios são apresentados no Apêndice A. Des-tes cálculos, obtemos:

$$\begin{aligned} 1) \bar{I} &= \int_{-I_{fisc}}^{I_{fisc}} IP(I, n) dI = 0. \\ 2) \bar{I}^2 &= \int_{-I_{fisc}}^{I_{fisc}} I^2 P(I, n) dI, \\ &= \frac{I_{fisc}^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4I_{fisc}^2 (-1)^k}{k^2 \pi^2} \cos \left( \frac{k\pi I_0}{I_{fisc}} \right) e^{-\frac{k^2 \pi^2 Dn}{I_{fisc}^2}}. \end{aligned}$$

Tomemos, agora, a média em  $n$ , isto é,  $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I_j^2$ . Podemos notar que a dependência é apresentada somente na função exponencial. Dessa forma:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{-\frac{k^2 \pi^2 D j}{I_{fisc}^2}} = \frac{1}{n} \left[ e^{-\frac{k^2 \pi^2 D}{I_{fisc}^2}} + e^{-\frac{k^2 \pi^2 D 2}{I_{fisc}^2}} + \dots + e^{-\frac{k^2 \pi^2 D n}{I_{fisc}^2}} \right]$$

Denotando a soma entre colchetes por  $S$ :

$$S = e^{-a}(1 + e^{-a} + e^{-2a} + \dots + e^{-(n-1)a}), \quad (2.58)$$

e por  $s$  a soma entre parênteses:

$$s = 1 + e^{-a} + e^{-2a} + \dots + e^{-(n-1)a}, \quad (2.59)$$

em que  $a = \frac{k^2 \pi^2 D}{I_{fisc}^2}$ , temos que a convergência de  $S$  é obtida da seguinte forma:

multiplicamos  $s$  por  $e^{-a}$  e este é subtraído de  $s$ :

$$\begin{aligned} se^{-a} &= e^{-a} + e^{-2a} + \dots + e^{-na}, \\ \Rightarrow s - se^{-a} &= s(1 - e^{-a}) = 1 - e^{-na}, \\ \Rightarrow s &= \frac{1 - e^{-na}}{1 - e^{-a}}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Logo:

$$S = e^{-\frac{k^2 \pi^2 D}{I_{fisc}^2}} \frac{1 - e^{-\frac{k^2 \pi^2 D n}{I_{fisc}^2}}}{1 - e^{-\frac{k^2 \pi^2 D}{I_{fisc}^2}}}. \quad (2.61)$$

Assim:

$$\overline{I^2} = I_{fisc}^2 \left[ \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos\left(\frac{k\pi I_0}{I_{fisc}}\right) \frac{1}{n} e^{-\frac{k^2 \pi^2 D}{I_{fisc}^2}} \frac{1 - e^{-\frac{k^2 \pi^2 D n}{I_{fisc}^2}}}{1 - e^{-\frac{k^2 \pi^2 D}{I_{fisc}^2}}} \right]. \quad (2.62)$$

Como  $I_{rms} = \sqrt{\overline{I^2}}$ , então:

$$I_{rms} = I_{fisc} \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos\left(\frac{k\pi I_0}{I_{fisc}}\right) \frac{1}{n} e^{-\frac{k^2 \pi^2 D}{I_{fisc}^2}} \frac{1 - e^{-\frac{k^2 \pi^2 D n}{I_{fisc}^2}}}{1 - e^{-\frac{k^2 \pi^2 D}{I_{fisc}^2}}}. \quad (2.63)$$

Para o caso em que  $n \rightarrow \infty$ , temos que:

$$I_{sat} = \lim_{n \rightarrow \infty} I_{rms} = \frac{I_{fisc}}{\sqrt{3}} \cong \frac{I_{fisc}}{1,732}, \quad (2.64)$$

o que condiz com os resultados apresentados em [34]. Como  $I_{fisc} \propto \varepsilon^{1/2}$ , então  $I_{sat} \propto \varepsilon^{1/2}$ , e comparando com a hipótese (2.15), obtemos o expoente  $\alpha = 1/2$ .

Para o caso em que  $n$  é pequeno, fazemos as seguintes considerações:

$$k = 1; \quad (2.65)$$

$$\cos\left(\frac{\pi I_0}{I_{fisc}}\right) \simeq 1; \quad (2.66)$$

$$e^{-\frac{\pi^2 D}{I_{fisc}^2}} \simeq 1 - \frac{\pi^2 D}{I_{fisc}^2} \simeq 1 \Rightarrow 1 - e^{-\frac{\pi^2 D}{I_{fisc}^2}} \simeq \frac{\pi^2 D}{I_{fisc}^2}; \quad (2.67)$$

$$e^{-\frac{\pi^2 D n}{I_{fisc}^2}} \simeq 1 - \frac{\pi^2 D n}{I_{fisc}^2} + \frac{1}{2} \frac{\pi^4 D^2 n^2}{I_{fisc}^4}, \quad (2.68)$$

temos que:

$$I_{rms} = I_{fisc} \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{n} \frac{\frac{\pi^2 D n}{I_{fisc}^2} - \frac{1}{2} \frac{\pi^4 D^2 n^2}{I_{fisc}^4}}{\frac{\pi^4 D^2 n^2}{I_{fisc}^4}}},$$

$$\Rightarrow I_{rms} = I_{fisc} \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{n} \left( n - \frac{1}{2} \frac{\pi^2 D n^2}{I_{fisc}^2} \right)},$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow I_{rms} &= I_{fisc} \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \left(1 - \frac{\pi^2 D n^2}{I_{fisc}^2}\right)}, \\ \Rightarrow I_{rms} &= I_{fisc} \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} + \frac{Dn}{2I_{fisc}^2}}.\end{aligned}\quad (2.69)$$

Substituindo a expressão do coeficiente da difusão  $D = \frac{\varepsilon^2}{4}$ , obtemos:

$$I_{rms} = I_{fisc} \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} + \frac{\varepsilon^2 n}{4I_{fisc}^2}} \simeq \sqrt{\frac{\varepsilon^2 n}{4}}.\quad (2.70)$$

Logo, temos que:

$$I_{rms} \propto (\varepsilon^2 n)^{1/2},\quad (2.71)$$

Comparando com a primeira hipótese de escala (2.14), obtemos  $\beta = 1/2$ .

O número de *crossover*  $n_x$  é obtido pela igualdade das expressões de  $I_{sat}$ , equação (2.64), e  $I_{rms}$  quando  $n$  é pequeno, equação (2.70), ou seja:

$$\sqrt{\frac{\varepsilon^2 n_x}{4}} = \frac{I_{fisc}}{\sqrt{3}}.$$

Pela equação (2.11), temos que  $I_{fisc} \propto \varepsilon^{\frac{1}{1+\gamma}}$ . Logo:

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{\varepsilon^2 n_x}{2} &= \frac{\varepsilon^{\frac{2}{1+\gamma}}}{3}, \\ \Rightarrow n_x &= \frac{2}{3} \varepsilon^{\frac{2}{1+\gamma}-2}, \\ \Rightarrow n_x &= \frac{2}{3} \varepsilon^{-\frac{2\gamma}{1+\gamma}}.\end{aligned}\quad (2.72)$$

Considerando a terceira hipótese de escala, equação (2.16) com os valores de  $\alpha = 1/2$  e  $\beta = 1/2$ , temos que a Lei de Escala é:

$$z = \frac{1/2}{1/2} - 2 = -1 \quad (2.73)$$

e considerando, agora, a expressão (2.72) com  $\gamma = 1$ , obtemos:

$$n_x = \frac{2}{3}\varepsilon^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\varepsilon^{-1}, \quad (2.74)$$

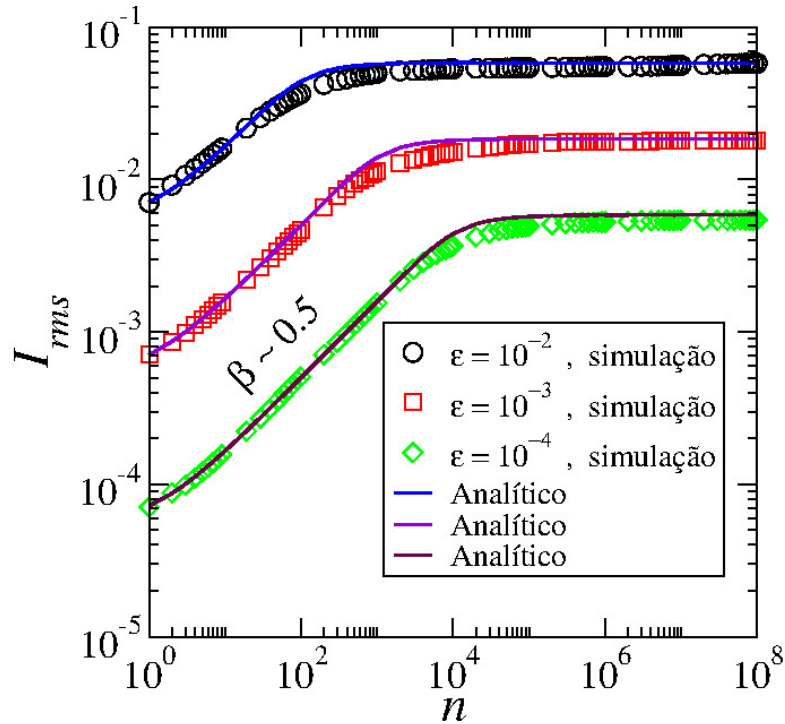


Figura 2.5: Gráfico de  $I_{rms}$  em função de  $n$  com diferentes valores do parâmetro  $\varepsilon$  comparando resultados analíticos e numéricos.

Na Figura 2.5, são apresentados os resultados obtidos analiticamente e por simulações numéricas, para diferentes valores do parâmetro  $\varepsilon$  e considerando a condição inicial  $I_0 \sim 0$ . Os símbolos representam as simulações numéricas

enquanto as linhas contínuas, os resultados analíticos. Podemos notar que os resultados são condizentes.

Analogamente, a Figura 2.6 (a) apresenta os resultados analíticos considerando como condição inicial  $I_0 \neq 0$  e as simulações numéricas. Para os casos em que  $I_0 \neq 0$ , as curvas de  $I_{rms}$  em função de  $n$  apresentam um platô inicial e depois um crescimento. Este primeiro *crossover*,  $n'_x$ , é obtido considerando as aproximações (2.65), (2.66), (2.67) e (2.68), fazendo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\pi I_0}{I_{fisc}} \right)^2 \right] \left[ 1 - \frac{\pi^2 D n'_x}{2 I_{fisc}^2} \right] &= 1, \\ \Rightarrow -\frac{4}{\pi^2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\pi I_0}{I_{fisc}} \right)^2 \right] \left[ 1 - \frac{\pi^2 D n'_x}{2 I_{fisc}^2} \right] &= \frac{2}{3}, \\ \Rightarrow 1 - \frac{\pi^2 D n'_x}{2 I_{fisc}^2} &= -\frac{\pi^2}{6} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\pi I_0}{I_{fisc}} \right)^2 \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Fazendo a expansão em séries de Taylor do termo  $\left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\pi I_0}{I_{fisc}} \right)^2 \right]^{-1}$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \Rightarrow 1 - \frac{\pi^2 D n'_x}{2 I_{fisc}^2} &= -\frac{\pi^2}{6} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi I_0}{I_{fisc}} \right)^2 \right], \\ \Rightarrow \frac{\pi^2 D n'_x}{2 I_{fisc}^2} &= 1 + \frac{\pi^2}{6} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi I_0}{I_{fisc}} \right)^2 \right], \\ \Rightarrow n'_x &= \frac{2 I_{fisc}^2}{\pi^2 D} \left\{ 1 + \frac{\pi^2}{6} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi I_0}{I_{fisc}} \right)^2 \right] \right\}, \\ \Rightarrow n'_x &= \frac{2 I_{fisc}^2}{\pi^2 D} \left\{ 1 + \frac{\pi^2}{6} \right\} + \frac{\pi^2 I_0^2}{6 D}. \end{aligned} \tag{2.75}$$

Usando as expressões de  $D$  e  $I_{fisc}$  dadas em (2.28) e (2.11), respectivamente, obtemos:

$$\Rightarrow n'_x = \frac{8\varepsilon^{\frac{2}{\gamma+1}}}{\pi^2\varepsilon^2} \left\{ 1 + \frac{\pi^2}{6} \right\} + \frac{2}{3} \frac{\pi^2 I_0^2}{\varepsilon^2}. \quad (2.76)$$

$$\Rightarrow n'_x \propto \frac{I_0^2}{\varepsilon^2}. \quad (2.77)$$

A Figura 2.6 (b) apresenta o colapso das curvas apresentadas em a) através da transformação  $n \rightarrow n/\varepsilon^z$  e  $I_{rms} \rightarrow I_{rms}/\varepsilon^\alpha$ . Podemos notar que os resultados são condizentes.

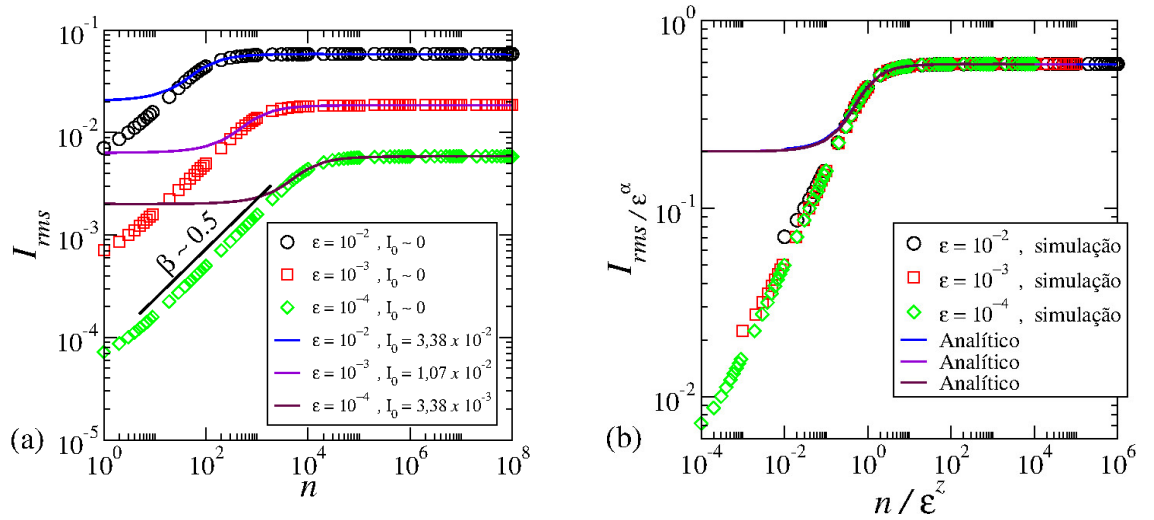


Figura 2.6: (a) Gráfico de  $I_{rms}$  em função de  $n$  considerando  $I_0 \neq 0$  para os resultados analíticos. (b) Colapso das curvas apresentadas em (a).

Estes resultados foram publicados no periódico Journal of Statistical Physics [31].

## Capítulo 3

# Difusão Caótica em um Problema de Poço de Potencial Dependente do Tempo

Neste capítulo, apresentamos o modelo do Poço de Potencial. Este descreve o confinamento de uma partícula em um poço com dependência temporal. São apresentadas suas propriedades e a solução da Equação da Difusão  $P(e, n)$ , que é a densidade de probabilidade de encontrar uma partícula com energia  $e \in [1, e_{fisc}]$  em um instante  $n$ . O modelo é descrito por duas variáveis, energia,  $e$ , e fase,  $\phi$ , e pelos parâmetros  $\delta$ ,  $N_c$  e  $r$ . O parâmetro  $\delta$  define a amplitude de oscilação do poço, enquanto  $N_c$  corresponde ao número de oscilações que o poço completa no intervalo de tempo em que a partícula percorre a distância entre as paredes e  $r$  fornece a simetria do problema. A partir das equações do mapeamento, podemos obter a expressão da solução da Equação da Difusão e fazer a comparação com os resultados numéricos.

### 3.1 O modelo e suas propriedades

Consideramos uma partícula de massa  $m$  confinada em um poço de potencial descrito por:

$$V(x, t) = V_0(x) + V_1(x, t), \quad (3.1)$$

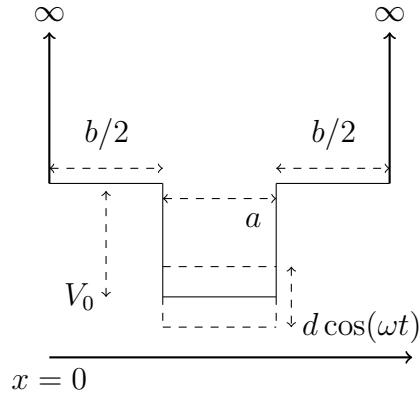


Figura 3.1: Ilustração do Poço de Potencial dependente do tempo.

em que:

$$V_0(x) = \begin{cases} V_0, & \text{se } 0 < x < \frac{b}{2} \quad \text{e } a + \frac{b}{2} < x < a + b \\ 0, & \text{se } \frac{b}{2} \leq x \leq a + \frac{b}{2} \\ \infty, & \text{se } x \leq 0 \quad \text{e } x \geq a + b \end{cases} \quad (3.2)$$

e:

$$V_1(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < \frac{b}{2} \quad \text{e } x > a + \frac{b}{2} \\ d \cos(\omega t), & \text{se } \frac{b}{2} \leq x \leq a + \frac{b}{2} \end{cases}, \quad (3.3)$$

sendo  $a$ ,  $b$ ,  $V_0$ ,  $d$  e  $\omega$  constantes.

Em um tempo inicial  $t_0$ , a energia mecânica da partícula antes de entrar no poço é:

$$E_0 = K_0 + V_0. \quad (3.4)$$

Ao entrar no poço, a partícula sofre uma mudança na energia cinética:

$$K_a = E_0 - d \cos(\omega t_0), \quad (3.5)$$

e se move a uma velocidade dada por:

$$K_a = \frac{1}{2}mv_a^2 \Rightarrow v_a = \sqrt{\frac{2K_a}{m}}. \quad (3.6)$$

O intervalo de tempo que a partícula leva para atingir o outro lado da parede é dado por:

$$\Delta t_a = \frac{a}{\sqrt{\frac{2K_a}{m}}}. \quad (3.7)$$

Multiplicando e dividindo esta expressão por  $2\pi\omega$  e a raiz por  $V_0$ , podemos denominar:

- $\omega\Delta t_a = \Delta\phi_a$ ;
- $\omega t_0 = \phi_0$ ;
- $\frac{E_0}{V_0} = e_0$ ;
- $\frac{d}{V_0} = \delta$ ;
- $N_c = \frac{\omega a}{2\pi} \sqrt{\frac{m}{2V_0}}$ ,

podemos reescrever a equação (3.7) como:

$$\Delta\phi_a = \frac{2\pi N_c}{\sqrt{e_0 - \delta \cos(\phi_0)}}. \quad (3.8)$$

A energia mecânica total da partícula é:

$$E_a = K_a + d \cos[\omega(t_0 + \Delta t_a)]. \quad (3.9)$$

Aqui, temos duas situações possíveis: *(i)* a partícula não tem energia suficiente para deixar o poço,  $E_a < V_0$ , ou *(ii)* a partícula escapa do poço,  $E_a > V_0$ .

Quando a partícula não escapa do poço, ela é refletida para a outra parede até que se satisfaça a seguinte equação:

$$E_a = K_a + d \cos[\omega(t_0 + i\Delta t_a)] > V_0, \quad (3.10)$$

em que  $i$  é o menor inteiro que satisfaz esta equação.

Dividindo esta expressão por  $V_0$ , considerando as denominações anteriormente definidas, podemos reescrevê-la como:

$$e_a = e_0 + \delta[\cos(\phi_0) - \cos(\phi_0 + i\Delta\phi_a)] > 1. \quad (3.11)$$

Quando a partícula escapa da região  $a$ , sua energia cinética é dada por:

$$K_b = E_a - V_0, \quad (3.12)$$

e se move a velocidade:

$$K_b = \frac{1}{2}mv_b^2 \Rightarrow v_b = \sqrt{\frac{2K_b}{m}}. \quad (3.13)$$

O intervalo de tempo que a partícula leva para chegar a outra parede é dado por:

$$\Delta t_b = \frac{b}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_1 - V_0)}}. \quad (3.14)$$

Analogamente ao caso de  $\Delta\phi_a$ , multiplicamos e dividimos esta expressão por  $2\pi\omega$  e na raiz, por  $V_0$  e denominamos:

- $\omega\Delta t_b = \Delta\phi_b$ ;
- $\frac{E_1}{V_0} = e_1$ ;
- $\frac{b}{a} = r$ ;
- $N_c = \frac{\omega a}{2\pi} \sqrt{\frac{m}{2V_0}}$ ,

e podemos reescrever a expressão da seguinte forma:

$$\Delta\phi_b = \frac{2\pi N_c r}{\sqrt{e_1 - 1}}. \quad (3.15)$$

Para medir o tempo, é conveniente fazê-lo em termos do período de oscilações da parede móvel:

$$\begin{aligned}
t_{n+1} &= t_n + i\Delta t_a + \Delta t_b, \\
\Rightarrow \omega t_{n+1} &= \omega t_n + i\omega\Delta t_a + \omega\Delta t_b, \\
\Rightarrow \phi_{n+1} &= \phi_n + i\Delta\phi_a + \Delta\phi_b.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Dessa forma, o mapeamento é dado por [37]:

$$T : \begin{cases} e_{n+1} = e_n + \delta[\cos(\phi_n + i\Delta\phi_a) - \cos(\phi_n)] \\ \phi_{n+1} = [\phi_n + i\Delta\phi_a + \Delta\phi_b] \end{cases} \pmod{2\pi}, \tag{3.17}$$

em que o parâmetro  $\delta \in [0, 1]$  define a amplitude de oscilação do poço, o parâmetro  $N_c$  corresponde ao número de oscilações que o poço de potencial completa no intervalo de tempo em que a partícula percorre a distância  $a$ . A variável  $i$  é o menor número inteiro que satisfaz a equação  $e_n + \delta[\cos(\phi_n + i\Delta\phi_a) - \cos(\phi_n)] > 1$ .

Na Figura 3.2, o espaço de fases do poço de potencial é apresentado considerando os parâmetros  $r = 1$ ,  $\delta = 0,5$  e  $N_c = 33,18$ . Ele exibe a coexistência de ilhas de periodicidade e mar de caos. A curva em vermelho representa a primeira curva invariante do tipo *spanning*, ou seja, a curva de menor energia que confina o mar de caos superiormente. Inferiormente, o mar de caos é delimitado pela energia mínima necessária para que a partícula escape do poço, ou seja,  $e_{min} = 1$ . Dessa forma, o mar de caos está confinado no intervalo  $e \in [1, e_{fisc}]$ . Em outras palavras, as curvas de menor energia e a *spanning* funcionam como barreiras que impedem o fluxo de partículas.

A matriz Jacobiana é dada por:

$$\det J = \begin{bmatrix} \frac{\partial e_{n+1}}{\partial e_n} & \frac{\partial e_{n+1}}{\partial \phi_n} \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial e_n} & \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

em que os seus elementos são dados por:

- $\frac{\partial e_{n+1}}{\partial e_n} = 1 - i\delta \text{sen}(\phi_n + i\Delta\phi_a) \frac{\partial \Delta\phi_a}{\partial e_n}$ ,
- $\frac{\partial e_{n+1}}{\partial \phi_n} = \delta \left[ -\text{sen}(\phi_n + i\Delta\phi_a) - i\text{sen}(\phi_n + i\Delta\phi_a) \frac{\partial \Delta\phi_a}{\partial \phi_n} + \text{sen}(\phi_n) \right]$ ,

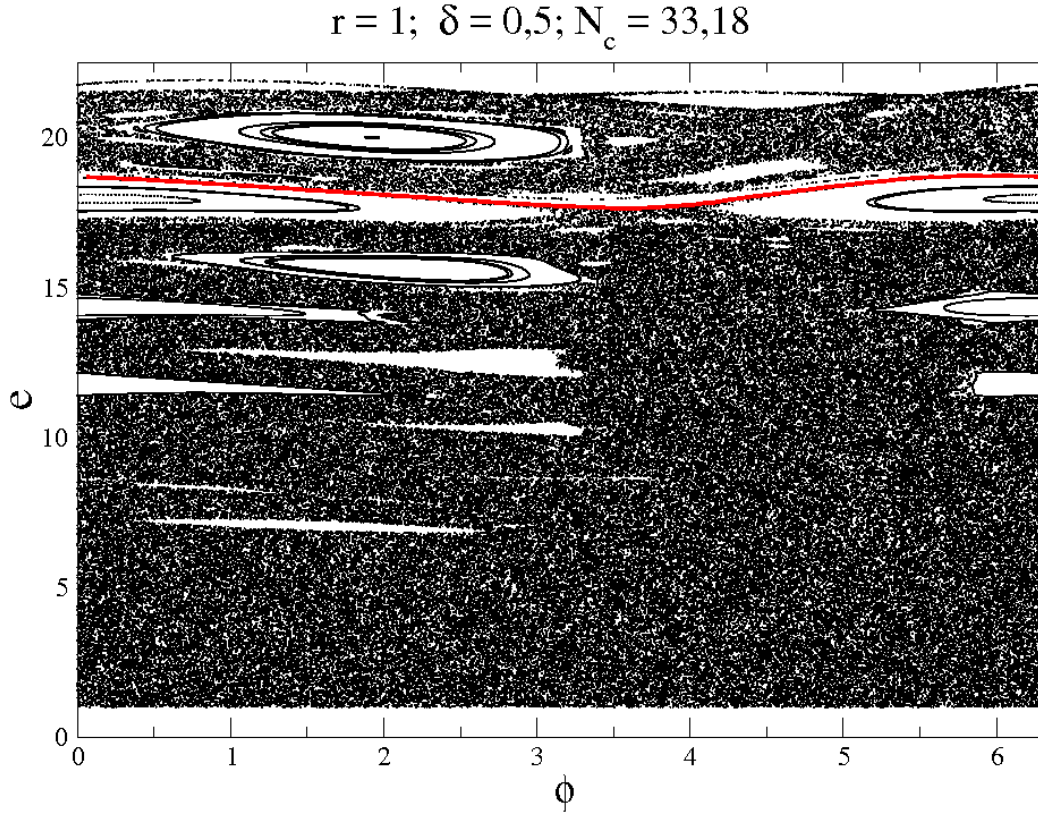


Figura 3.2: Espaço de fases do poço de potencial com os parâmetros  $r = 1$ ,  $\delta = 0,5$  e  $N_c = 33,18$ . A curva em vermelho identifica a primeira curva invariante *spanning*,  $e_{fisc}$ , que delimita o mar de caos superiormente.

- $\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial e_n} = i \frac{\partial \Delta \phi_a}{\partial e_n} + \frac{\partial \Delta \phi_b}{\partial e_n},$
- $\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} = 1 + i \frac{\partial \Delta \phi_a}{\partial \phi_n} + \frac{\partial \Delta \phi_b}{\partial \phi_n}.$

Os cálculos dos elementos e do determinante da matriz Jacobiana são apresentados no Apêndice B. Destes cálculos, obtemos que:

$$\det J = 1, \quad (3.19)$$

o que quer dizer que o espaço de fases preserva área, segundo o Teorema de Liouville [9].

## 3.2 Localização das curvas invariantes *spanning* e propriedades de escala

A localização das primeiras curvas invariantes do tipo *spanning* depende dos parâmetros de controle do mapeamento e é obtida numericamente. O eixo de  $\phi \in [0, 2\pi]$  foi dividido em 100 intervalos iguais e armazenamos o maior valor atingido pela energia em cada um desses subintervalos após  $10^4$  iterações de uma única órbita. A Figura 3.3 apresenta as primeiras curvas invariantes considerando os parâmetros  $r = 1$ ,  $\delta = 0,5$  e diferentes valores de  $N_c$ .

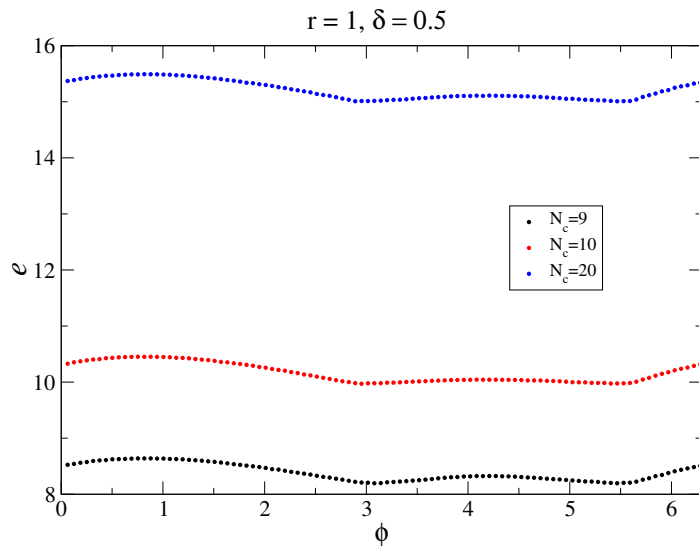


Figura 3.3: Gráfico das curvas invariantes para diferentes valores do parâmetro  $N_c$  considerando  $r = 1$  e  $\delta = 0,5$ .

O observável que identifica a difusão caótica é dado por:

$$e_{rms} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M e_i^2(n)}, \quad (3.20)$$

em que  $M$  define o ensemble de condições iniciais  $\phi_0 \in [0, 2\pi]$ .

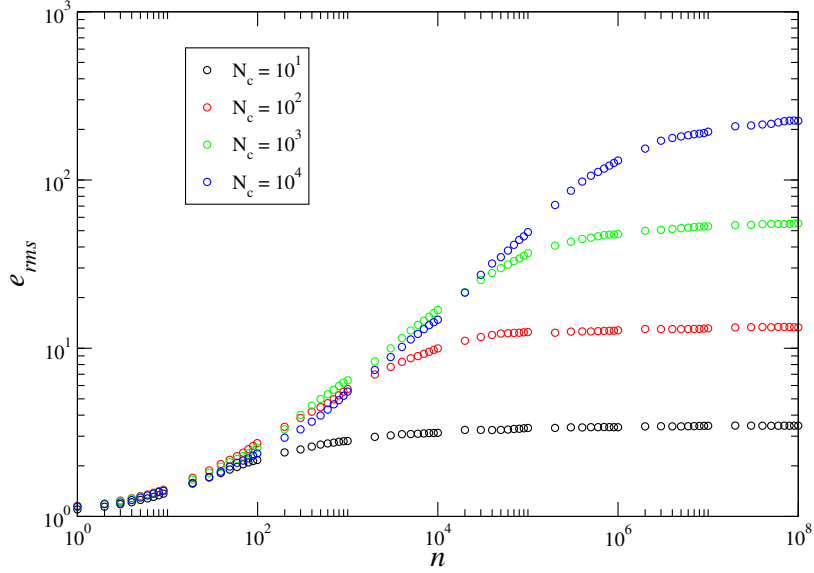


Figura 3.4: Gráfico do comportamento típico de  $e_{rms}$  em função de  $n$  para diferentes valores do parâmetro  $N_c$ .

O comportamento típico de  $e_{rms}$  em função de  $n$  é apresentado na Figura 3.4. Podemos notar um crescimento das curvas de  $e_{rms}$  quando  $n$  é pequeno e uma saturação para valores grandes de  $n$ . A mudança de crescimento para saturação ocorre no número de iterações de *crossover*  $n_x$ . A partir desta Figura, podemos propor as seguintes hipóteses de escala [38]:

i) Para valores de  $n \ll n_x$ :

$$e_{rms}(n) \propto n^\beta, \quad (3.21)$$

$\beta$  é o expoente de crescimento;

ii) Para valores de  $n \gg n_x$ :

$$e_{rms}(n) \propto N_c^\alpha, \quad (3.22)$$

$\alpha$  é o expoente de saturação.

iii) O número de *crossover*  $n_x$ :

$$n_x \propto N_c^z, \quad (3.23)$$

$z$  é o expoente dinâmico.

O procedimento para obter a relação entre os expoentes críticos a partir de uma função homogênea generalizada é análogo ao apresentado no Capítulo 2. Assim, obtemos que a Lei de Escala é escrita como:

$$z = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (3.24)$$

### 3.3 Equação da difusão e solução analítica

A equação da difusão é dada por [29]:

$$\frac{\partial P(e, n)}{\partial n} = D \frac{\partial^2 P(e, n)}{\partial e^2}, \quad (3.25)$$

em que  $P(e, n)$  é a probabilidade de encontrar uma partícula com energia  $e$  em um instante  $n$ .

O coeficiente da difusão é determinado pela expressão [34]:

$$D = \frac{\langle \Delta e^2 \rangle}{2} = \frac{\overline{e_{n+1}^2} - \overline{e_n^2}}{2}. \quad (3.26)$$

Assim, podemos determiná-lo considerando a primeira equação do mapeamento (3.17), analogamente ao Capítulo anterior. E obtemos:

$$D = \frac{\delta^2}{2}. \quad (3.27)$$

Como as curvas de energia mínima,  $e_{min} = 1$ , e a *spanning* de menor energia,  $e_{fisc}$ , confinam o mar de caos, devemos ter como condições de contorno:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial e} \right|_{e=e_{fisc}} = 0, \quad (3.28)$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial e} \right|_{e=1} = 0. \quad (3.29)$$

No tempo inicial, todas as energias iniciais estão localizados em  $e = e_0$  com  $e_{min} < e_0 < e_{fisc}$  e a probabilidade deve satisfazer a função delta de Dirac:

$$P(e, 0) = \delta(e - e_0). \quad (3.30)$$

A técnica utilizada para obter a solução da equação da difusão é via separação de variáveis:

$$P(e, n) = E(e)N(n), \quad (3.31)$$

em que  $E(e)$  é uma função dependente apenas da variável  $e$  e  $N(n)$  depende apenas de  $n$ . Assim:

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{dN}{dn}E; \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial P}{\partial e} = N \frac{dE}{de} \Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial e^2} = N \frac{d^2 E}{de^2}. \quad (3.33)$$

Levando estas expressões na equação da difusão, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dn}E &= DN \frac{d^2 E}{de^2}, \\ \frac{1}{DN} \frac{dN}{dn} &= \frac{1}{E} \frac{d^2 E}{de^2} = -\hat{a}^2, \end{aligned} \quad (3.34)$$

em que  $\hat{a} \in \mathbb{R}$ . Desta forma, temos duas equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dn} = -D\hat{a}^2, \quad (3.35)$$

$$\frac{d^2 E}{de^2} = -\hat{a}^2 E. \quad (3.36)$$

Resolvendo a equação (3.35), obtemos:

$$\int_{N_0}^{N(n)} \frac{1}{N} dN = \int_0^n -\hat{a}^2 D dn \Rightarrow \ln \left( \frac{N(n)}{N_0} \right) = -\hat{a}^2 Dn,$$

$$\Rightarrow N(n) = N_0 e^{-\hat{a}^2 Dn}.$$

Para determinar a solução da segunda equação, (3.36), consideramos  $E(e) = Ae^{\lambda e}$ . Dessa forma, as primeira e segunda derivadas são:

$$\frac{dE}{de} = A\lambda e^{\lambda e}, \quad (3.37)$$

$$\frac{d^2 E}{de^2} = A\lambda^2 e^{\lambda e}. \quad (3.38)$$

Substituindo estas expressões em (3.36), temos:

$$A\lambda^2 e^{\lambda e} = -\hat{a}^2 A e^{\lambda e} \Rightarrow \lambda^2 = -\hat{a}^2,$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm i\hat{a}.$$

Assim, a solução para  $E(e)$  é escrita como:

$$E(e) = Ae^{i\hat{a}e} + Be^{-i\hat{a}e}. \quad (3.39)$$

Utilizando a relação de Euler e reagrupando os termos, temos:

$$E(e) = A[\cos(\hat{a}e) + i\text{sen}(\hat{a}e)] + B[\cos(\hat{a}e) - i\text{sen}(\hat{a}e)],$$

$$\Rightarrow E(e) = (A + B) \cos(\hat{a}e) + i(A - B) \text{sen}(\hat{a}e). \quad (3.40)$$

Considerando  $A = \frac{\tilde{a}}{2} - i\frac{\tilde{b}}{2}$  e  $B = \frac{\tilde{a}}{2} + i\frac{\tilde{b}}{2}$ , temos que  $A+B = \tilde{a}$  e  $A-B = -i\tilde{b}$ , com  $\tilde{a}$  e  $\tilde{b}$  constantes, e podemos reescrever  $E(e)$  da seguinte forma:

$$E(e) = \tilde{a} \cos(\hat{a}e) + \tilde{b} \text{sen}(\hat{a}e). \quad (3.41)$$

Aplicando as condições de contorno:

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{\partial E}{\partial e} \Big|_{e=e_{fisc}} &= -\hat{a}\tilde{a}\text{sen}(\hat{a}e_{fisc}) + \hat{a}\tilde{b} \cos(\hat{a}e_{fisc}) = 0, \\ &\Rightarrow \frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} = \frac{\cos(\hat{a}e_{fisc})}{\text{sen}(\hat{a}e_{fisc})}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \frac{\partial E}{\partial e} \Big|_{e=1} &= -\hat{a}\tilde{a}\text{sen}(\hat{a}) + \hat{a}\tilde{b} \cos(\hat{a}) = 0, \\ &\Rightarrow \frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} = \frac{\cos(\hat{a})}{\text{sen}(\hat{a})}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Igualando (3.42) e (3.43), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\cos(\hat{a}e_{fisc})}{\text{sen}(\hat{a}e_{fisc})} &= \frac{\cos(\hat{a})}{\text{sen}(\hat{a})}, \\ &\Rightarrow \hat{a}e_{fisc} = \hat{a} + k\pi, \\ &\Rightarrow \hat{a} = \frac{k\pi}{(e_{fisc} - 1)}, k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.44)$$

Para o caso em que  $k = 0$ , tratamos separadamente. Quando  $k = 0$ ,  $\hat{a} = 0$ . Logo:

- 1)  $\frac{dN}{dn} = 0 \Rightarrow N(n) = \tilde{N}_0$ , em que  $\tilde{N}_0$  é constante;
- 2)  $\frac{d^2 E}{de^2} = 0 \Rightarrow \frac{dE}{de} = E_0 \Rightarrow E(e) = E_0 e + E_1$ , em que  $E_0$  e  $E_1$  são constantes.

Daí, temos que:

$$P(e, n) = \tilde{N}_0(E_0 e + E_1). \quad (3.45)$$

Aplicando as condições de contorno:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial e} \right|_{e=\begin{cases} e_{fisc} \\ 1 \end{cases}} = \tilde{N}_0 E_0 = 0 \Rightarrow E_0 = 0. \quad (3.46)$$

Dessa forma, uma solução para a equação da difusão seria:

$$\begin{aligned} P(e, n) &= \tilde{N}_0 E_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \tilde{a}_k N_0 \cos\left(\frac{k\pi e}{e_{fisc} - 1}\right) + \tilde{b}_k N_0 \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi e}{e_{fisc} - 1}\right) \right] e^{-\frac{k^2 \pi^2 Dn}{(e_{fisc} - 1)^2}}, \\ \Rightarrow P(e, n) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cos\left(\frac{k\pi e}{e_{fisc} - 1}\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi e}{e_{fisc} - 1}\right) \right] e^{-\frac{k^2 \pi^2 Dn}{(e_{fisc} - 1)^2}}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

em que  $a_0 = \tilde{N}_0 E_1$ ,  $a_k = \tilde{a}_k N_0$  e  $b_k = \tilde{b}_k N_0$

Considerando a probabilidade nas condições iniciais, temos:

$$\begin{aligned} P(e, 0) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cos\left(\frac{k\pi e}{e_{fisc} - 1}\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi e}{e_{fisc} - 1}\right) \right], \\ &= \delta(e - e_0). \end{aligned} \quad (3.48)$$

A função delta de Dirac pode ser escrita como [17]:

$$\begin{aligned} \delta(x - a) &= \frac{1}{2L} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik(x-a)}, \\ &= \frac{1}{2L} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos[k(x - a)] + i \operatorname{sen}[k(x - a)]. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Como a função seno é ímpar, o somatório de termos negativos anulam os positivos. Logo:

$$\delta(x - a) = \frac{1}{2L} \left\{ 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos[k(x - a)] + 1 \right\}. \quad (3.50)$$

Fazendo  $x = \frac{\pi e}{e_{fisc}-1}$ ,  $a = \frac{\pi e_0}{e_{fisc}-1}$ ,  $L = e_{fisc} - 1$ , então, temos que:

$$\begin{aligned} \delta(e - e_0) &= \frac{1}{2(e_{fisc} - 1)} + \frac{1}{e_{fisc} - 1} \sum_{k=1}^{\infty} \cos \left[ \frac{k\pi(e - e_0)}{e_{fisc} - 1} \right], \\ &= \frac{1}{2(e_{fisc} - 1)} + \frac{1}{e_{fisc} - 1} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \cos \left( \frac{k\pi e}{e_{fisc} - 1} \right) \cos \left( \frac{k\pi e_0}{e_{fisc} - 1} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi e}{e_{fisc} - 1} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi e_0}{e_{fisc} - 1} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Aplicando, agora, a condição inicial na expressão da probabilidade, temos que  $P(e, 0) = \delta(e - e_0)$ , logo:

$$\begin{aligned} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cos \left( \frac{k\pi e}{e_{fisc} - 1} \right) + b_k \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi e}{e_{fisc} - 1} \right) \right] &= \frac{1}{2(e_{fisc} - 1)} + \frac{1}{e_{fisc} - 1} \times \\ \times \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \cos \left( \frac{k\pi e}{e_{fisc} - 1} \right) \cos \left( \frac{k\pi e_0}{e_{fisc} - 1} \right) + \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi e}{e_{fisc} - 1} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi e_0}{e_{fisc} - 1} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Comparando termo a termo, temos:

$$a_0 = \frac{1}{2(e_{fisc} - 1)}, a_k = \frac{1}{e_{fisc} - 1} \cos \left( \frac{k\pi e_0}{e_{fisc} - 1} \right), b_k = \frac{1}{e_{fisc} - 1} \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi e_0}{e_{fisc} - 1} \right). \quad (3.53)$$

Assim, a probabilidade é:

$$\begin{aligned} P(e, n) &= \frac{1}{2(e_{fisc} - 1)} + \frac{1}{e_{fisc} - 1} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \cos \left( \frac{k\pi e}{e_{fisc} - 1} \right) \cos \left( \frac{k\pi e_0}{e_{fisc} - 1} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi e}{e_{fisc} - 1} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi e_0}{e_{fisc} - 1} \right) \right] e^{-\frac{k^2 \pi^2 Dn}{(e_{fisc} - 1)^2}} \end{aligned} \quad (3.54)$$

Os cálculos dos observáveis médios são apresentados no Apêndice C. Des-tes cálculos, temos que:

$$\begin{aligned}
1) \bar{e} &= \int_1^{e_{fisc}} eP(e, n)de, \\
&= \frac{e_{fisc}^2 - 1}{4(e_{fisc} - 1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{(e_{fisc}-1)^2}}}{k\pi} \left\{ \cos\left(\frac{k\pi e_0}{e_{fisc} - 1}\right) \left\{ e_{fisc} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi e_{fisc}}{e_{fisc} - 1}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{e_{fisc} - 1}\right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{e_{fisc} - 1}{k\pi}\right) \left[ \cos\left(\frac{k\pi e_{fisc}}{e_{fisc} - 1}\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{e_{fisc} - 1}\right) \right] \right\} + \right. \\
&\quad \left. + \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi e_0}{e_{fisc} - 1}\right) \left\{ -e_{fisc} \cos\left(\frac{k\pi e_{fisc}}{e_{fisc} - 1}\right) + \cos\left(\frac{k\pi}{e_{fisc} - 1}\right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{e_{fisc} - 1}{k\pi}\right) \left[ \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi e_{fisc}}{e_{fisc} - 1}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{e_{fisc} - 1}\right) \right] \right\} \right\}. \\
2) \bar{e^2} &= \int_1^{e_{fisc}} e^2P(e, n)de, \\
&= \frac{e_{fisc}^3 - 1}{6(e_{fisc} - 1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{(e_{fisc}-1)^2}}}{k\pi} \left\{ \cos\left(\frac{k\pi e_0}{e_{fisc} - 1}\right) \left\{ e_{fisc}^2 \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi e_{fisc}}{e_{fisc} - 1}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{e_{fisc} - 1}\right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2\left(\frac{e_{fisc} - 1}{k\pi}\right) \left[ -e_{fisc} \cos\left(\frac{k\pi e_{fisc}}{e_{fisc} - 1}\right) + \cos\left(\frac{k\pi}{e_{fisc} - 1}\right) + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \left(\frac{e_{fisc} - 1}{k\pi}\right) \left[ \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi e_{fisc}}{e_{fisc} - 1}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{e_{fisc} - 1}\right) \right] \right] \right\} \right. \\
&\quad \left. + \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi e_0}{e_{fisc} - 1}\right) \left\{ -e_{fisc}^2 \cos\left(\frac{k\pi e_{fisc}}{e_{fisc} - 1}\right) + \cos\left(\frac{k\pi}{e_{fisc} - 1}\right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2\left(\frac{e_{fisc} - 1}{k\pi}\right) \left[ e_{fisc} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi e_{fisc}}{e_{fisc} - 1}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{e_{fisc} - 1}\right) + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \left(\frac{e_{fisc} - 1}{k\pi}\right) \left[ \cos\left(\frac{k\pi e_{fisc}}{e_{fisc} - 1}\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{e_{fisc} - 1}\right) \right] \right] \right\} \right\}. \tag{3.55}
\end{aligned}$$

O observável de interesse de investigação é  $e_{rms}(n) = \sqrt{e^2(n)}$ . Substituindo a expressão (3.55), obtemos que:

$$e_{rms}(n) = \sqrt{\frac{e^{3f_{isc}} - 1}{6(e^{f_{isc}} - 1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{(e^{f_{isc}} - 1)^2}}}{k\pi} S_k}, \quad (3.56)$$

em que denotamos por  $S_k$  os termos entre chaves. A Figura 3.5 apresenta os gráficos dos resultados obtidos por simulações numéricas, representados pelos símbolos, e os resultados analíticos, representados pelas linhas contínuas, para diferentes valores do parâmetro  $N_c$ .

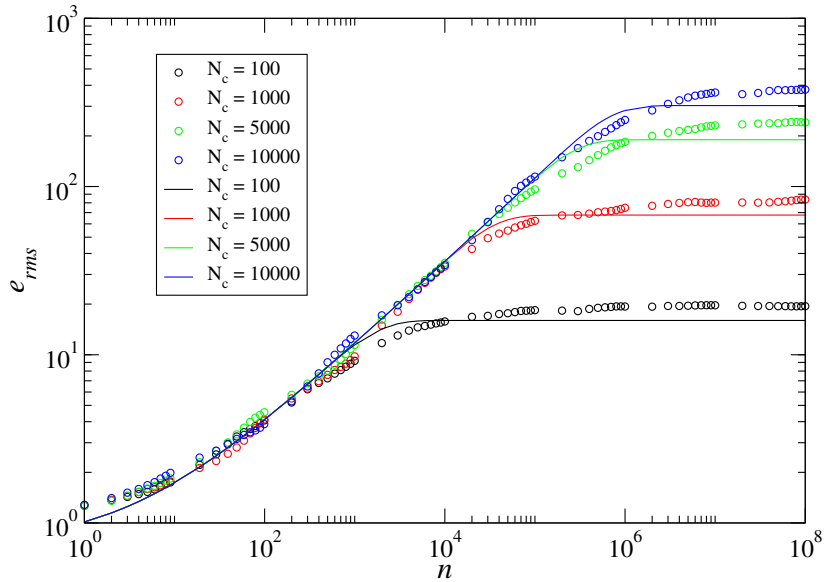


Figura 3.5: Gráfico de  $e_{rms}$  em função de  $n$  para diferentes valores do parâmetro  $N_c$ ,  $\delta = 0,5$  e  $r = 1$ . As linhas contínuas representam os resultados analíticos enquanto os símbolos representam os resultados de simulações numéricas.

Façamos, agora, a análise dos casos limites.

i) Quando  $n$  é pequeno, devemos considerar a expansão do termo exponencial em séries de Taylor até primeira ordem e consideramos  $k = 1$ :

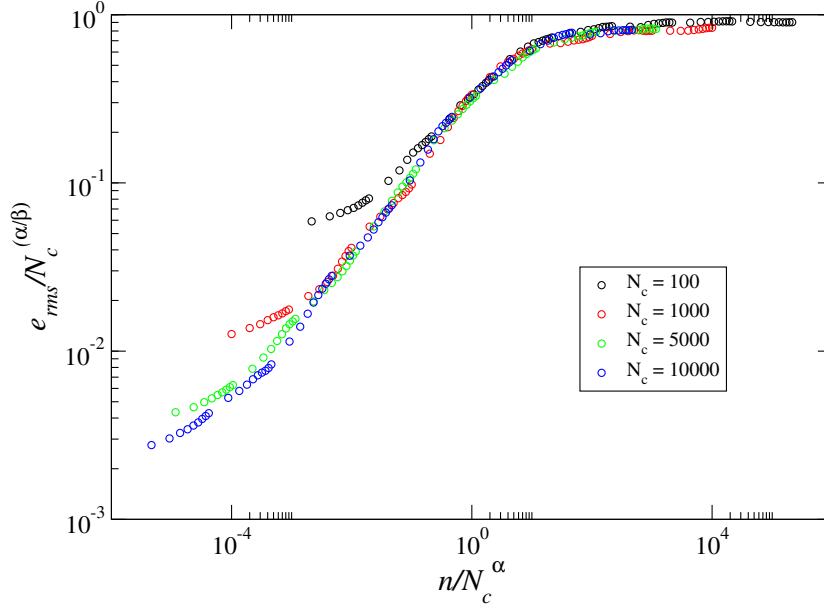


Figura 3.6: Colapso das curvas apresentadas na Figura 3.5.

$$e^{-\frac{\pi^2 Dn}{(e_{fisc}-1)^2}} \simeq 1 - \frac{\pi^2 Dn}{(e_{fisc}-1)^2}. \quad (3.57)$$

Assim:

$$e_{rms} = \sqrt{\frac{e_{fisc}^3 - 1}{6(e_{fisc} - 1)} + \frac{1}{\pi} \left[ 1 - \frac{\pi^2 Dn}{(e_{fisc} - 1)^2} \right] S_1},$$

$$\Rightarrow e_{rms} = \sqrt{\frac{e_{fisc}^3 - 1}{6(e_{fisc} - 1)} + \frac{S_1}{\pi} - \frac{\pi S_1 Dn}{(e_{fisc} - 1)^2}}, \quad (3.58)$$

$$\Rightarrow e_{rms} \propto n^{1/2}. \quad (3.59)$$

Comparando com a primeira hipótese de escala, equação (3.21), obtemos o valor do expoente  $\beta = \frac{1}{2}$ .

ii) No limite em que  $n \rightarrow \infty$ , temos que:

$$e_{sat} = \lim_{n \rightarrow \infty} e_{rms} = \sqrt{\frac{e_{fisc}^3 - 1}{6(e_{fisc} - 1)}}. \quad (3.60)$$

Quando  $e_{fisc} \gg 1$ , temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_{rms} \cong \frac{e_{fisc}}{\sqrt{6}} \propto \frac{N_c^\alpha}{\sqrt{6}}. \quad (3.61)$$

Comparando com a segunda hipótese de escala, equação (3.22), temos que  $e_{sat} \propto N_c^\alpha$ . O valor para  $\alpha$  é obtido numericamente e é aproximadamente  $0,63 \cong 2/3$ , conforme a Figura 3.7, o que está de acordo com [36].

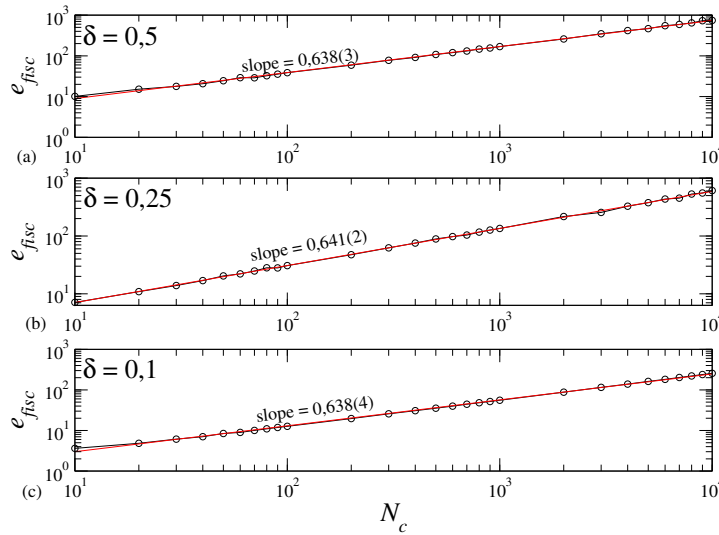


Figura 3.7: Gráfico de  $e_{fisc}$  em função de  $N_c$  considerando  $r = 1$  e (a)  $\delta = 0,5$ , (b)  $\delta = 0,25$  e (c)  $\delta = 0,1$ .

iii) O número de *crossover*  $n_x$  é determinado pela igualdade das expressões de  $e_{sat}$  e  $e_{rms}$ , dadas por (3.60) e (3.58), respectivamente. Logo:

$$\sqrt{\frac{e_{fisc}^3 - 1}{6(e_{fisc} - 1)}} = \sqrt{\frac{e_{fisc}^3 - 1}{6(e_{fisc} - 1)} + \frac{S_1}{\pi} - \frac{\pi S_1 D n_x}{(e_{fisc} - 1)^2}},$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{S_1}{\pi} &= \frac{\pi S_1 D n_x}{(e_{fisc} - 1)^2}, \\ \Rightarrow n_x &= \frac{(e_{fisc} - 1)^2}{\pi^2 D}.\end{aligned}\tag{3.62}$$

Comparando com a terceira hipótese de escala, dada pela equação (3.23), e sabendo que  $e_{fisc} \propto N_c^\alpha$ , obtemos o expoente  $z = 4/3$  [38], o que condiz com a Lei de Escala (3.24).

Estes resultados são condizentes com os apresentados em [39] da teoria de escala. E foram publicados no periódico *Physics Letters A* [32].

# Capítulo 4

## Difusão Caótica no Mapa Padrão Dissipativo

Neste capítulo, apresentamos o Mapa Padrão Dissipativo, suas propriedades dinâmicas e uma descrição analítica do comportamento da difusão caótica no espaço de fases, a partir da Equação da Difusão. O modelo é descrito pelas variáveis ângulo,  $\theta$ , e ação,  $I$ , e pelos parâmetros  $\kappa$ , que controla a intensidade da dissipação, e  $\varepsilon$ , que controla a intensidade da não linearidade do sistema. Das equações que descrevem o mapeamento, obtemos a expressão da solução da Equação da Difusão e fazemos o comparativo entre os resultados obtidos numericamente e analiticamente.

### 4.1 O mapeamento e suas propriedades

O mapeamento é dado da forma:

$$T : \begin{cases} I_{n+1} = (1 - \kappa)I_n + \varepsilon \text{sen}(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = (\theta_n + I_{n+1}) \end{cases} \text{ mod } (2\pi) \quad , \quad (4.1)$$

em que  $\kappa \in [0, 1]$  é o parâmetro que controla a intensidade da dissipação no sistema e  $\varepsilon$  é o parâmetro que controla a não linearidade do sistema. Quando  $\kappa = 0$ , recuperamos o Mapa Padrão ou Mapa de Chirikov-Taylor [9]. A Figura 4.1 (a) mostra o esboço do espaço de fases do Mapa Padrão Dissipativo considerando  $\kappa = 10^{-3}$  e  $\varepsilon = 100$  enquanto (b) apresenta a distribuição normalizada da probabilidade do atrator caótico apresentado em (a).

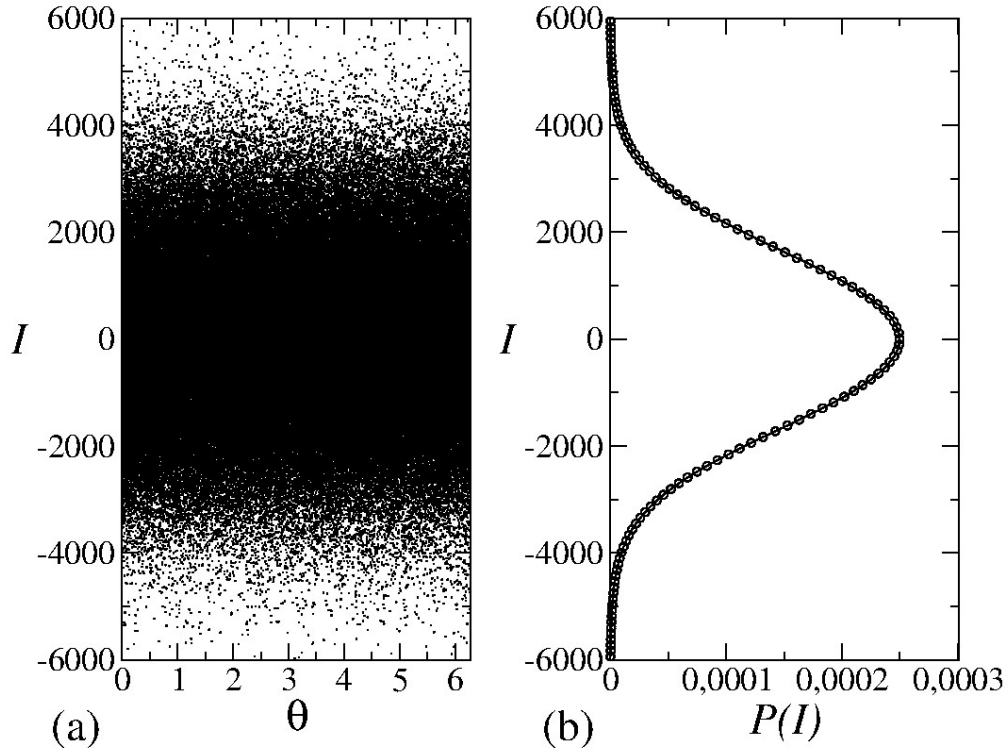


Figura 4.1: (a) Espaço de fases do mapa padrão dissipativo com os parâmetros  $\kappa = 10^{-3}$  e  $\varepsilon = 100$ , (b) distribuição normalizada da probabilidade do atrator caótico apresentado em (a).

A matriz Jacobiana é dada por:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

em que os seus elementos são dados por:

- $\frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} = 1 - \kappa$ ,
- $\frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} = \varepsilon \cos(\theta_n)$ ,
- $\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} = 1 - \kappa$ ,
- $\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} = 1 + \varepsilon \cos(\theta_n)$ .

Assim, o determinante da matriz Jacobiana é:

$$\det J = \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} - \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n},$$

$$\Rightarrow \det J = (1 - \kappa)(1 + \varepsilon \cos(\theta_n)) - (1 - \kappa)\varepsilon \cos(\theta_n),$$

$$\Rightarrow \det J = 1 - \kappa. \quad (4.3)$$

Quando  $\kappa = 0$ , o determinante da matriz Jacobiana é igual a 1 e, pelo Teorema de Liouville [9], há preservação de área no espaço de fases. Quando  $\kappa \neq 0$ , este Teorema é violado e o sistema apresenta atratores no espaço de fases, como podemos ver na Figura 4.2.

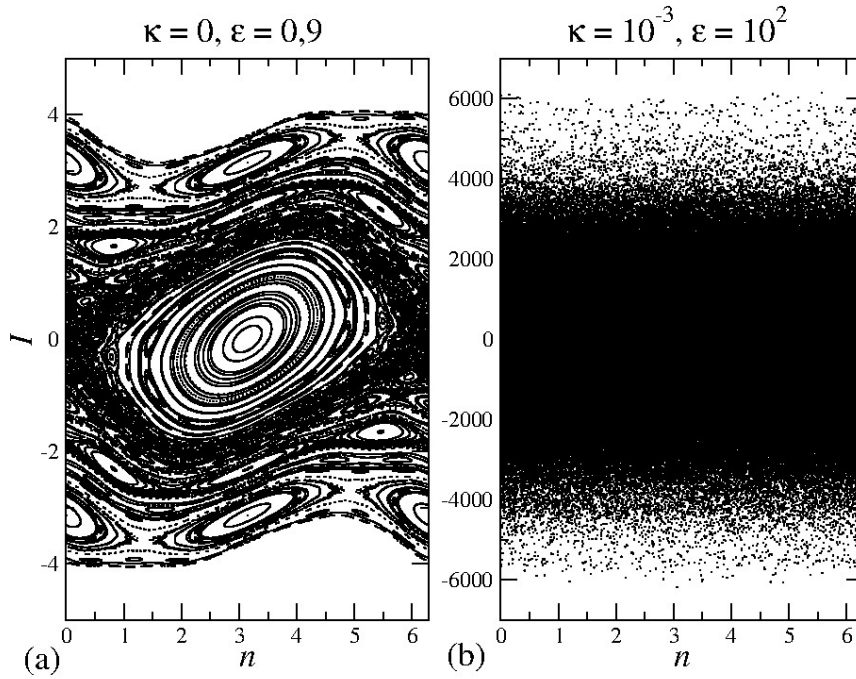


Figura 4.2: Espaço de fases do Mapa Padrão: (a) conservativo,  $\kappa = 0$  e  $\varepsilon = 0,9$  e (b) dissipativo,  $\kappa \neq 0$  e  $\varepsilon = 10^2$ .

## 4.2 Propriedades de escala

O observável que identifica a difusão caótica é dado por:

$$I_{rms}(n) = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I_{i,j}^2}, \quad (4.4)$$

em que o primeiro somatório, em  $M$ , corresponde à média no ensemble de condições iniciais e o segundo, em  $n$ , à média na órbita. O comportamento de  $I_{rms}$  em função de  $n$  é mostrado na figura 4.3, em que podemos notar inicialmente um crescimento e, após atingir o número de iteração de *crossover*, as curvas saturam.

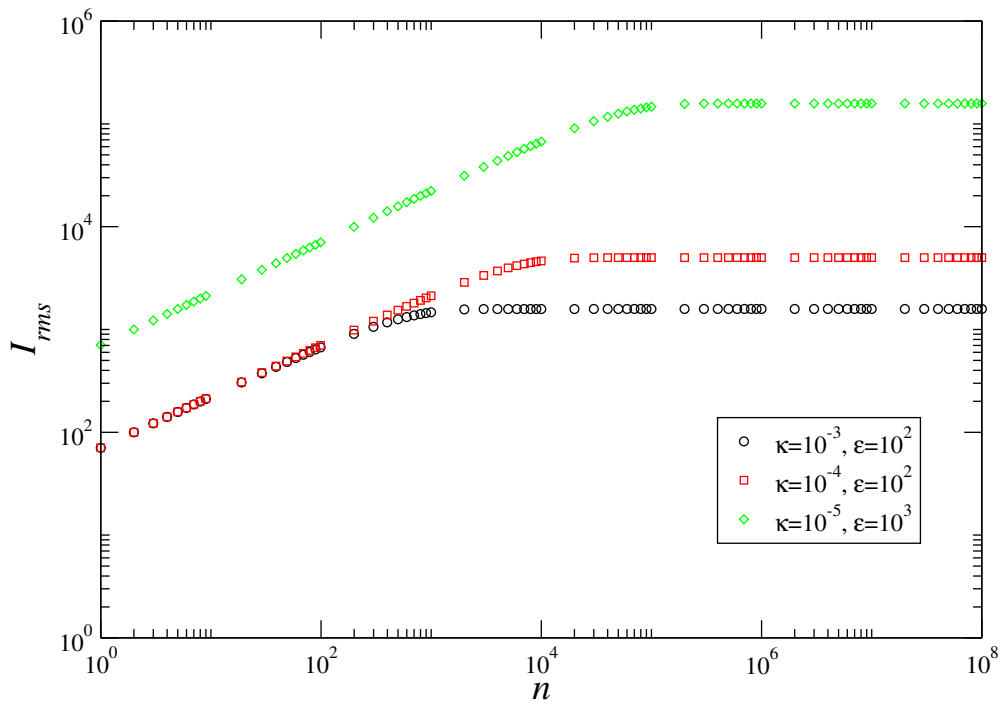


Figura 4.3: Gráfico do comportamento típico de  $I_{rms}$  em função de  $n$  com diferentes valores de  $\kappa$  e  $\varepsilon$ .

A partir deste gráfico, podemos propor as seguintes hipóteses de escala:

i) Para  $n \ll n_x$ :

$$I_{rms}(n) \propto (n\varepsilon^2)^\beta, \quad (4.5)$$

em que  $\beta$  é o expoente de aceleração;

ii) Para  $n \gg n_x$ :

$$I_{sat}(n) \propto \varepsilon^{\alpha_1} \kappa^{\alpha_2}, \quad (4.6)$$

em que  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são os expoentes de saturação;

iii) O número de *crossover*  $n_x$ :

$$n_x \propto \varepsilon^{z_1} \kappa^{z_2}, \quad (4.7)$$

em que  $z_1$  e  $z_2$  são os expoentes dinâmicos.

O procedimento para obter a relação entre os expoentes críticos pela função homogênea generalizada é análogo ao apresentado no Capítulo 2. Deste procedimento, obtemos as seguintes Leis de Escala:

$$z_1 = \frac{\alpha_1}{\beta} - 2, \quad (4.8)$$

$$z_2 = \frac{\alpha_2}{\beta}. \quad (4.9)$$

### 4.3 Equação da difusão e solução analítica

A equação da difusão é dada por:

$$\frac{\partial P(I, n)}{\partial n} = D \frac{\partial^2 P(I, n)}{\partial I^2}, \quad (4.10)$$

em que  $P(I, n)$  é a densidade de probabilidade de encontrar uma partícula com uma determinada ação  $I$  em um instante  $n$ .

Com a introdução de dissipação no sistema, o espaço de fases apresenta atratores e a difusão ilimitada é suprimida. Dessa forma, temos como condições de contorno:

$$\lim_{I \rightarrow \pm\infty} P(I, n) = 0 \quad (4.11)$$

com as condições iniciais:

$$P(I, 0) = \delta(I - I_0). \quad (4.12)$$

O coeficiente da difusão é dado por [34]:

$$D = \frac{\langle \Delta I^2 \rangle}{2} = \frac{\overline{I_{n+1}^2} - \overline{I_n^2}}{2}. \quad (4.13)$$

Para determinar a expressão de  $D$ , consideremos a primeira equação do mapeamento (4.1) e a elevemos ao quadrado:

$$I_{n+1}^2 = (1 - \kappa)^2 I_n^2 + \varepsilon^2 \sin^2(\theta_n) + 2(1 - \kappa)\varepsilon I_n \sin(\theta_n). \quad (4.14)$$

Assumindo independência estatística entre  $I$  e  $\theta$ , obtemos, ao tomar a média em  $\theta \in [0, 2\pi]$ :

$$\begin{aligned} \overline{I_{n+1}^2} &= \overline{I_n^2} + (\kappa^2 - 2\kappa)\overline{I_n^2} + \frac{\varepsilon^2}{2}, \\ \Rightarrow \overline{I_{n+1}^2} - \overline{I_n^2} &= (\kappa^2 - 2\kappa)\overline{I_n^2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = 2D. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Aproximando a equação de diferenças pela equação diferencial, temos:

$$\overline{I_{n+1}^2} - \overline{I_n^2} = \frac{\overline{I_{n+1}^2} - \overline{I_n^2}}{(n+1) - n} \simeq \frac{d\overline{I^2}}{dn}. \quad (4.16)$$

Dessa forma:

$$\frac{d\overline{I^2}}{dn} = (\kappa^2 - 2\kappa)\overline{I^2} + \frac{\varepsilon^2}{2},$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{\bar{I}_0^2}{I_0^2}}^{\bar{I}^2(n)} \frac{1}{(\kappa^2 - 2\kappa)\bar{I}^2 + \frac{\varepsilon^2}{2}} d\bar{I}^2 = \int_0^n dn. \quad (4.17)$$

Fazendo a mudança de variável:

$$u = (\kappa^2 - 2\kappa)\bar{I}^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \Rightarrow du = (\kappa^2 - 2\kappa)d\bar{I}^2 \quad (4.18)$$

e, também, a mudança de intervalo de integração:

$$\begin{cases} \bar{I}^2 = \bar{I}_0^2 & \Rightarrow u_0 = (\kappa^2 - 2\kappa)\bar{I}_0^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \\ \bar{I}^2 = \bar{I}^2(n) & \Rightarrow u(n) = (\kappa^2 - 2\kappa)\bar{I}^2(n) + \frac{\varepsilon^2}{2} \end{cases}, \quad (4.19)$$

temos que:

$$\begin{aligned} & \int_{u_0}^{u(n)} \frac{1}{(\kappa^2 - 2\kappa)u} du = n, \\ & \Rightarrow \ln\left(\frac{u(n)}{u_0}\right) = (\kappa^2 - 2\kappa)n, \\ & \Rightarrow u(n) = u_0 e^{(\kappa^2 - 2\kappa)n}, \\ & \Rightarrow (\kappa^2 - 2\kappa)\bar{I}^2(n) + \frac{\varepsilon^2}{2} = \left[ (\kappa^2 - 2\kappa)\bar{I}_0^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \right] e^{(\kappa^2 - 2\kappa)n}, \\ & \Rightarrow \bar{I}^2(n) = \left[ \bar{I}_0^2 + \frac{\varepsilon^2}{2(\kappa^2 - 2\kappa)} \right] e^{(\kappa^2 - 2\kappa)n} - \frac{\varepsilon^2}{2(\kappa^2 - 2\kappa)}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Precisamos, agora, tomar a média na órbita, ou seja, em  $n$ . Notemos que a dependência nesta variável está somente na função exponencial. Então:

$$\begin{aligned} \langle \bar{I}^2(n) \rangle &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \bar{I}^2(i), \\ \Rightarrow \langle \bar{I}^2(n) \rangle &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \left\{ \left[ \bar{I}_0^2 + \frac{\varepsilon^2}{2(\kappa^2 - 2\kappa)} \right] e^{(\kappa^2 - 2\kappa)i} - \frac{\varepsilon^2}{2(\kappa^2 - 2\kappa)} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle \overline{I^2}(n) \rangle &= -\frac{\varepsilon^2}{2(\kappa^2 - 2\kappa)} + \left( \overline{I_0^2} + \frac{\varepsilon^2}{2(\kappa^2 - 2\kappa)} \right) \frac{1}{n+1} \times \\ &\quad \times [1 + e^{(\kappa^2 - 2\kappa)} + e^{2(\kappa^2 - 2\kappa)} + \dots + e^{n(\kappa^2 - 2\kappa)}] \end{aligned} \quad (4.21)$$

Denotando o termo entre colchetes por  $S$ :

$$S = 1 + e^{(\kappa^2 - 2\kappa)} + e^{2(\kappa^2 - 2\kappa)} + \dots + e^{n(\kappa^2 - 2\kappa)}, \quad (4.22)$$

multiplicando por  $e^{(\kappa^2 - 2\kappa)}$ :

$$S e^{(\kappa^2 - 2\kappa)} = e^{(\kappa^2 - 2\kappa)} + e^{2(\kappa^2 - 2\kappa)} + \dots + e^{(n+1)(\kappa^2 - 2\kappa)}, \quad (4.23)$$

e subtraindo (4.23) de (4.22):

$$S - S e^{(\kappa^2 - 2\kappa)} = S(1 - e^{(\kappa^2 - 2\kappa)}) = 1 - e^{(n+1)(\kappa^2 - 2\kappa)},$$

$$S = \frac{1 - e^{(n+1)(\kappa^2 - 2\kappa)}}{1 - e^{(\kappa^2 - 2\kappa)}}. \quad (4.24)$$

Com esta expressão, podemos reescrever  $\langle \overline{I^2}(n) \rangle$  da seguinte forma:

$$\langle \overline{I^2}(n) \rangle = -\frac{\varepsilon^2}{2(\kappa^2 - 2\kappa)} + \left( I_0^2 + \frac{\varepsilon^2}{2(\kappa^2 - 2\kappa)} \right) \frac{1}{n+1} \left( \frac{1 - e^{(n+1)(\kappa^2 - 2\kappa)}}{1 - e^{(\kappa^2 - 2\kappa)}} \right). \quad (4.25)$$

Substituindo esta expressão na expressão do coeficiente da difusão  $D$ , (4.15), temos:

$$D(n) = \frac{(\kappa^2 - 2\kappa)}{2} \langle \overline{I^2}(n) \rangle + \frac{\varepsilon^2}{4},$$

$$\Rightarrow D(n) = -\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{(\kappa^2 - 2\kappa)}{2(n+1)} \left( I_0^2 + \frac{\varepsilon^2}{2(\kappa^2 - 2\kappa)} \right) \left( \frac{1 - e^{(n+1)(\kappa^2 - 2\kappa)}}{1 - e^{(\kappa^2 - 2\kappa)}} \right) + \frac{\varepsilon^2}{4},$$

$$\Rightarrow D(n) = \frac{(\kappa^2 - 2\kappa)}{2(n+1)} \left( I_0^2 + \frac{\varepsilon^2}{2(\kappa^2 - 2\kappa)} \right) \left( \frac{1 - e^{(n+1)(\kappa^2 - 2\kappa)}}{1 - e^{(\kappa^2 - 2\kappa)}} \right). \quad (4.26)$$

Podemos notar aqui que, diferentemente dos Capítulos anteriores, além de depender dos parâmetros do mapeamento, o coeficiente da difusão depende da iteração  $n$ , ou seja, não é constante. Embora tenha essa dependência em relação a  $n$ , a variação de  $D$  é muito pequena do instante  $n$  para  $n + 1$ . Assim, podemos aproximá-lo de uma constante,  $D(n) \approx D$ . Uma vez obtida a solução da equação da difusão, a expressão de  $D(n)$  dada por (4.26) é incorporada a ela.

Uma técnica para obter a expressão de  $P(I, n)$  é a transformada de Fourier, uma vez que [17]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(I, n) dI = 1, \quad (4.27)$$

que é a condição de normalização da probabilidade.

Podemos definir a função:

$$R(k, n) = \mathcal{F}\{P(I, n)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} P(I, n) e^{ikI} dI. \quad (4.28)$$

Diferenciando em  $n$ , temos:

$$\frac{\partial R(k, n)}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial P(I, n)}{\partial n} e^{ikI} dI. \quad (4.29)$$

Sabemos que a transformada de Fourier obedece à propriedade [40]:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2 P}{\partial I^2}\right\} = -k^2 R(k, n), \quad (4.30)$$

o que permite dizer que  $R(k, n)$  satisfaz a seguinte equação diferencial ordinária:

$$\frac{\partial R(k, n)}{\partial n} = -Dk^2 R(k, n), \quad (4.31)$$

cujas solução é escrita como:

$$\frac{dR}{R} = -Dk^2 dn,$$

$$\Rightarrow R(k, n) = R(k, 0)e^{-Dk^2 n}. \quad (4.32)$$

Pela condição inicial, temos que:

$$R(k, 0) = \mathcal{F}\{\delta(I - I_0)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikI_0}. \quad (4.33)$$

Sendo assim:

$$R(k, n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikI_0} e^{-Dk^2 n}. \quad (4.34)$$

Devemos, agora, fazer a transformada inversa, ou seja:

$$P(I, n) = \mathcal{F}^{-1}\{R(k, n)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} R(k, n) e^{-ikI} dk,$$

$$\Rightarrow P(I, n) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dn}} e^{-\frac{(I-I_0)^2}{4Dn}}. \quad (4.35)$$

Esta é a solução da equação da difusão e satisfaz as condições de contorno e a condição inicial. Satisfaz a condição de contorno, pois aplicando o limite em que  $I \rightarrow \pm\infty$ , a exponencial tende a zero, o que leva a densidade  $P(I, n)$  a zero. E satisfaz a condição inicial, uma vez que  $P(I, 0) = \delta(I - I_0)$ . Se  $I \neq I_0$ ,  $\delta(I - I_0) = 0$ , já que  $n = 0$ . Se  $I = I_0$ ,  $P(I, 0) \rightarrow \infty$ , já que a exponencial vai a zero.

O observável médio de interesse de estudo é:

$$\bar{I}^2(n) = \int_{-\infty}^{\infty} I^2 P(I, n) dI,$$

$$\Rightarrow \bar{I}^2(n) = \int_{-\infty}^{\infty} I^2 \frac{1}{\sqrt{4\pi Dn}} e^{-\frac{(I-I_0)^2}{4Dn}} dI,$$

$$\Rightarrow \bar{I}^2(n) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dn}} \int_{-\infty}^{\infty} I^2 e^{-\frac{(I-I_0)^2}{4Dn}} dI,$$

$$\Rightarrow \bar{I}^2(n) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dn}} \left[ \sqrt{\pi Dn} (2Dn + I_0^2) \operatorname{erf} \left( \frac{I - I_0}{2\sqrt{Dn}} \right) - 2Dn(I + I_0) e^{-\frac{(I-I_0)^2}{4Dn}} \right] \Bigg|_{-\infty}^{\infty},$$

$$\Rightarrow \bar{I}^2(n) = 2Dn + I_0^2. \quad (4.36)$$

Logo:

$$I_{rms} = \sqrt{\bar{I}^2(n)} = \sqrt{2Dn + I_0^2}. \quad (4.37)$$

Substituindo a expressão de  $D$ , dada pela equação (4.26), a expressão de  $I_{rms}$  é reescrita como:

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{n(\kappa^2 - 2\kappa)}{(n+1)} \left( I_0^2 + \frac{\varepsilon^2}{2(\kappa^2 - 2\kappa)} \right) \left( \frac{1 - e^{(n+1)(\kappa^2 - 2\kappa)}}{1 - e^{(\kappa^2 - 2\kappa)}} \right) + I_0^2}. \quad (4.38)$$

A Figura 4.4 apresenta os gráficos de  $I_{rms}$  em função de  $n$  e comparamos os resultados obtidos analiticamente, representados pelas linhas contínuas, e por simulações numéricas, representadas pelos símbolos. A Figura 4.5 apresenta o colapso das curvas apresentadas em (4.4) numa curva universal através da transformação  $n \rightarrow n/(\varepsilon^{z_1} \kappa^{z_2})$  e  $I_{rms} \rightarrow I_{rms}/(\varepsilon^{\alpha_1} \kappa^{\alpha_2})$ .

Analisemos, agora, os casos limites.

i) Quando  $n = 0$ , temos que:

$$I_{rms}(0) = \sqrt{I_0^2} = I_0; \quad (4.39)$$

ii) No limite em que  $n \rightarrow \infty$ , temos que:

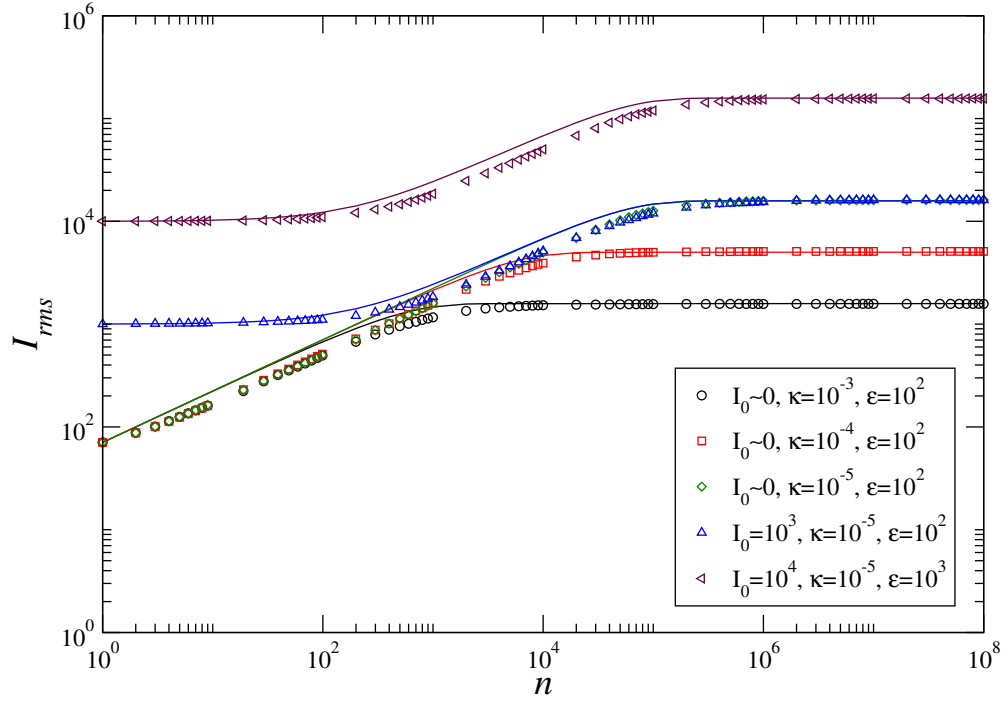


Figura 4.4: Gráfico de  $I_{rms}$  em função de  $n$  para diferentes valores de  $\kappa$  e  $\varepsilon$ . Os símbolos representam as simulações numéricas e as linhas contínuas, os resultados analíticos.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{(n+1)(\kappa^2 - 2\kappa)} \rightarrow 0,$$

uma vez que  $\kappa^2 - 2\kappa < 0$  e também:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

Dessa forma:

$$I_{sat} = \sqrt{I_0^2 + (\kappa^2 - 2\kappa) \frac{1}{1 - e^{(\kappa^2 - 2\kappa)}} \left( I_0^2 + \frac{\varepsilon^2}{2(\kappa^2 - 2\kappa)} \right)}. \quad (4.40)$$

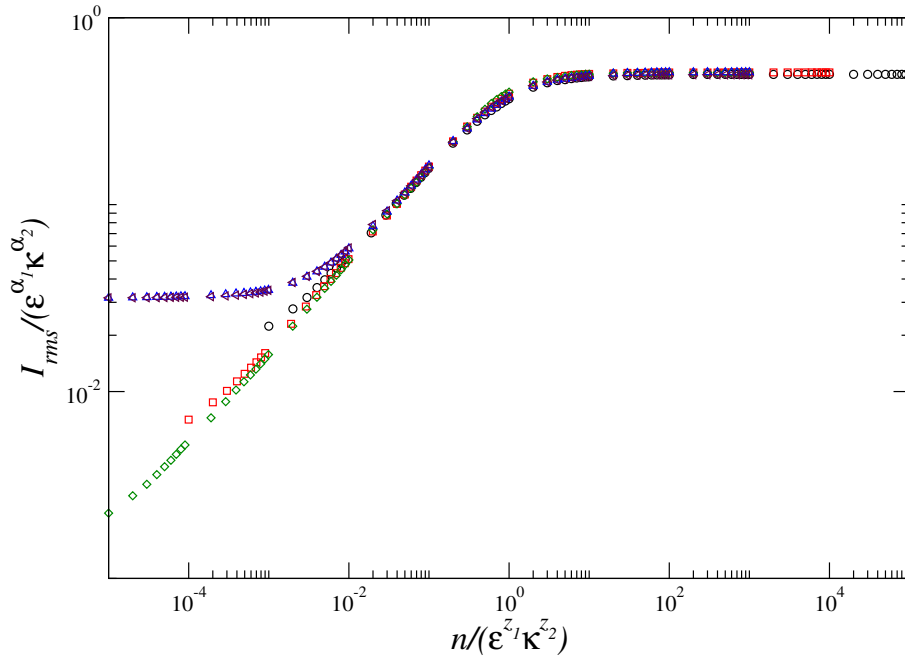


Figura 4.5: Colapso das curvas apresentadas em (4.4).

Fazendo a expansão em séries de Taylor até primeira ordem de  $1 - e^{(\kappa^2 - 2\kappa)}$ :

$$1 - e^{(\kappa^2 - 2\kappa)} \simeq \kappa^2 - 2\kappa,$$

temos que:

$$I_{sat} = \sqrt{I_0^2 + (\kappa^2 - 2\kappa) \frac{1}{\kappa^2 - 2\kappa} \left( I_0^2 + \frac{\varepsilon^2}{2\kappa(\kappa - 2)} \right)},$$

$$\Rightarrow I_{sat} = \sqrt{2I_0^2 + \frac{\varepsilon^2}{2\kappa(\kappa - 2)}},$$

$$\Rightarrow I_{sat} \simeq \sqrt{\frac{\varepsilon^2 \kappa^{-1}}{2(\kappa - 2)}} \propto \varepsilon \kappa^{-1/2}. \quad (4.41)$$

Comparando com a segunda hipótese de escala, equação (4.6), temos que  $\alpha_1 = 1$  e  $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$ .

iii) No caso em que  $I_0 \simeq 0$  e  $n$  pequeno, temos que:

$$I_{rms} \simeq \sqrt{\frac{n(\kappa^2 - 2\kappa)}{n+1} \left( \frac{1 - e^{(n+1)(\kappa^2 - 2\kappa)}}{1 - e^{(\kappa^2 - 2\kappa)}} \right) \frac{\varepsilon^2}{2(\kappa^2 - 2\kappa)}}. \quad (4.42)$$

Como  $n$  é pequeno:

$$1 - e^{(n+1)(\kappa^2 - 2\kappa)} \simeq 1. \quad (4.43)$$

Assim:

$$I_{rms} \simeq \sqrt{\frac{n\varepsilon^2}{2(n+1)} \frac{1}{1 - e^{(\kappa^2 - 2\kappa)}}},$$

$$\Rightarrow I_{rms} \propto (n\varepsilon^2)^{1/2}. \quad (4.44)$$

Comparando com a primeira hipótese de escala, equação (4.5), obtemos  $\beta = \frac{1}{2}$ .

iv) Quando  $0 < I_0 < I_{sat}$ , o número de *crossover*  $n'_x$ , iteração em que ocorre a mudança do platô inicial para o crescimento, é obtido pela igualdade das equações (4.39) e (4.44):

$$\sqrt{I_0^2} = \sqrt{\frac{n'_x \varepsilon^2}{2}}$$

$$\Rightarrow n'_x = \frac{2I_0^2}{\varepsilon^2} \quad (4.45)$$

v) Quando  $I_0 \simeq 0$ , o número de *crossover*  $n_x$ , iteração em que ocorre a mudança de crescimento para a saturação, é obtido pela igualdade das equações (4.41) e (4.44):

$$\frac{\varepsilon^2 \kappa^{-1}}{2(\kappa - 2)} = \frac{\varepsilon^2 n_x}{2}$$

$$\Rightarrow n_x = \frac{\kappa^{-1}}{\kappa - 2}. \quad (4.46)$$

Comparando com a terceira hipótese de escala, equação (4.7), obtemos os expoentes  $z_1 = 0$  e  $z_2 = -1$ .

vi) Quando consideramos  $I_0 \gg \frac{\varepsilon^2}{2(\kappa^2 - 2\kappa)}$ , a equação (4.38) se torna:

$$I_{rms} = \sqrt{I_0^2 e^{(n+1)(\kappa^2 - 2\kappa)} + \varepsilon^2 \frac{1 - e^{(n+1)(\kappa^2 - 2\kappa)}}{2\kappa(2 - \kappa)}}. \quad (4.47)$$

Quando  $n$  é pequeno,  $I_{rms} = I_0 e^{(n+1)\frac{(\kappa^2 - 2\kappa)}{2}}$ , ou seja, temos um decaimento exponencial, enquanto para o estado estacionário  $I_{rms} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2(2-\kappa)}} \kappa^{-1/2}$ . Esse decaimento exponencial é apresentado na Figura 4.6, com valores de parâmetros  $\varepsilon = 10^2$ ,  $\kappa = 10^{-5}$  e condição inicial  $I_0 = 10^5$ . O coeficiente de inclinação obtido numericamente é igual a  $4.054(1) \times 10^{-6}$ , que é próximo ao valor analítico  $\frac{\kappa(2-\kappa)}{2} \cong 9.99995 \times 10^{-6}$ .

Estes resultados foram publicados no periódico *Europhysics Letters* [33].

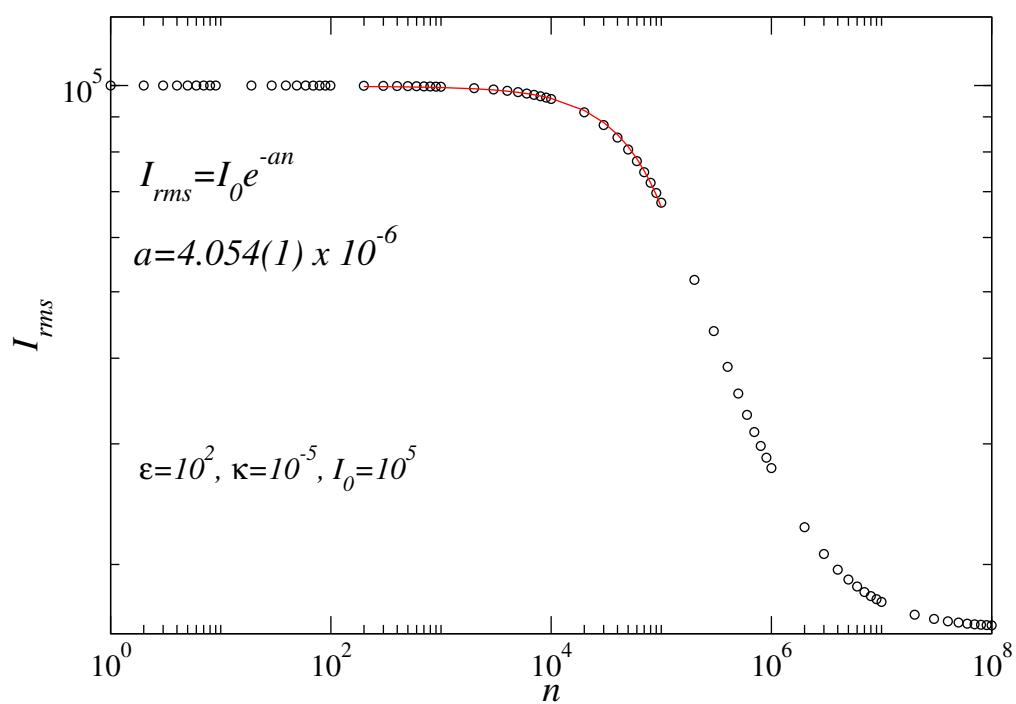


Figura 4.6: *Decaimento exponencial descrito pela equação (4.47) considerando  $I_0 = 10^5$ ,  $\varepsilon = 10^2$  e  $\kappa = 10^{-5}$ .*

# Capítulo 5

## Difusão Caótica em um Mapeamento Dissipativo

Neste capítulo, apresentamos as propriedades dinâmicas de um Mapeamento Dissipativo descrito por duas variáveis dinâmicas, sendo elas ângulo  $\theta$  e ação  $I$ , e por três parâmetros de controle,  $\delta$ ,  $\varepsilon$  e  $\gamma$ . O parâmetro  $\delta$  controla a intensidade da dissipação,  $\varepsilon$  controla a intensidade da não linearidade e  $\gamma > 0$  é um parâmetro livre, que controla o comportamento de  $\theta$  com a variação de  $I$ . Das equações do mapeamento, obtemos a solução da Equação da Difusão e analisamos os resultados numéricos e analíticos.

### 5.1 O mapeamento e suas propriedades

O mapeamento estudado é dado por:

$$\begin{cases} I_{n+1} = \delta I_n - (1 + \delta)\varepsilon \sin(2\pi\theta_n) \\ \theta_{n+1} = [\theta_n + |I_{n+1}|^\gamma] \pmod{1} \end{cases} \quad (5.1)$$

em que  $\delta \in [0, 1]$  é o parâmetro de dissipação,  $\varepsilon$  é o parâmetro que controla a intensidade da não linearidade e  $\gamma > 0$  é um parâmetro livre. Para este estudo,  $\gamma = 1$ . A Figura 5.1 apresenta o espaço de fases do mapeamento (5.1) considerando os parâmetros com valores  $\gamma = 1$ ,  $\varepsilon = 100$  e valores diferentes de  $\delta$  sendo a)  $\delta = 0,99$  e b)  $\delta = 0,999$ .

A matriz Jacobiana é dada por:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

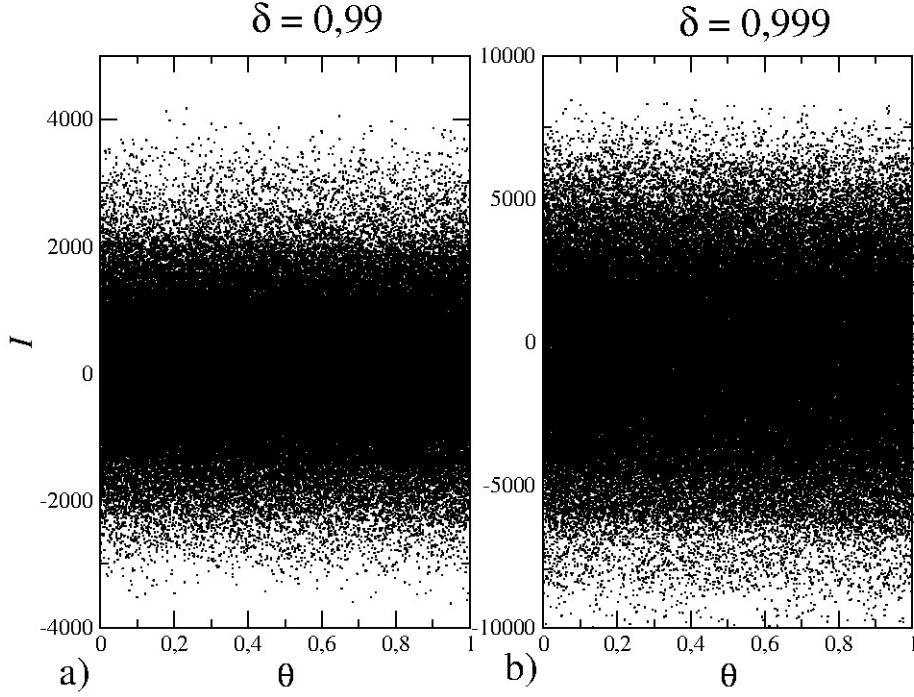


Figura 5.1: Espaço de fases do mapeamento (5.1) com os parâmetros  $\gamma = 1$ ,  $\varepsilon = 100$  e a)  $\delta = 0,99$  e b)  $\delta = 0,999$ .

em que seus elementos são dados por:

- $\frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} = \delta$ ;
- $\frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} = -(1 + \delta)\varepsilon 2\pi \cos(2\pi\theta_n)$ ;
- $\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} = \gamma\delta |I_{n+1}|^{(\gamma-1)} \text{sign}(I_{n+1})$ ;
- $\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} = 1 - \gamma(1 + \delta)\varepsilon 2\pi \cos(2\pi\theta_n) |I_{n+1}|^{(\gamma-1)} \text{sign}(I_{n+1})$ ;

em que  $sign(I_{n+1}) = 1$ , se  $I_{n+1} > 0$  ou  $sign(I_{n+1}) = -1$ , se  $I_{n+1} < 0$ . O determinante da matriz Jacobiana é:

$$detJ = \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} - \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n};$$

$$\Rightarrow detJ = \delta [1 - \gamma(1 + \delta)\varepsilon 2\pi \cos(2\pi\theta_n)|I_{n+1}|^{(\gamma-1)}sign(I_{n+1})] - \\ [- (1 + \delta)\varepsilon 2\pi \cos(2\pi\theta_n)]\gamma\delta|I_{n+1}|^{(\gamma-1)}sign(I_{n+1});$$

$$\Rightarrow detJ = \delta. \quad (5.3)$$

Quando  $\delta = 1$ , pelo Teorema de Liouville, há preservação de área no espaço de fases e possivelmente a difusão das partículas é ilimitada. Quando  $\delta < 1$ , o Teorema é violado e o sistema exhibe atratores no espaço de fases.

## 5.2 Propriedades de escala

O observável de interesse de estudo para a caracterização da difusão caótica é dado por:

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n I_{i,j}^2}, \quad (5.4)$$

em que  $M$  fornece a média no ensemble de condições iniciais e a média em  $n$ , a média na órbita. O gráfico típico de  $I_{rms}$  em função de  $n$  é apresentado na Figura 5.2. A função apresenta um crescimento e, depois de atingir o número de *crossover*, uma saturação.

A partir deste gráfico, podemos propor as seguintes hipóteses de escala [41]:

- Para  $n \ll n_x$ ,

$$I_{rms} \propto (n\varepsilon^2)^\beta, \quad (5.5)$$

em que  $\beta$  é o expoente de aceleração;

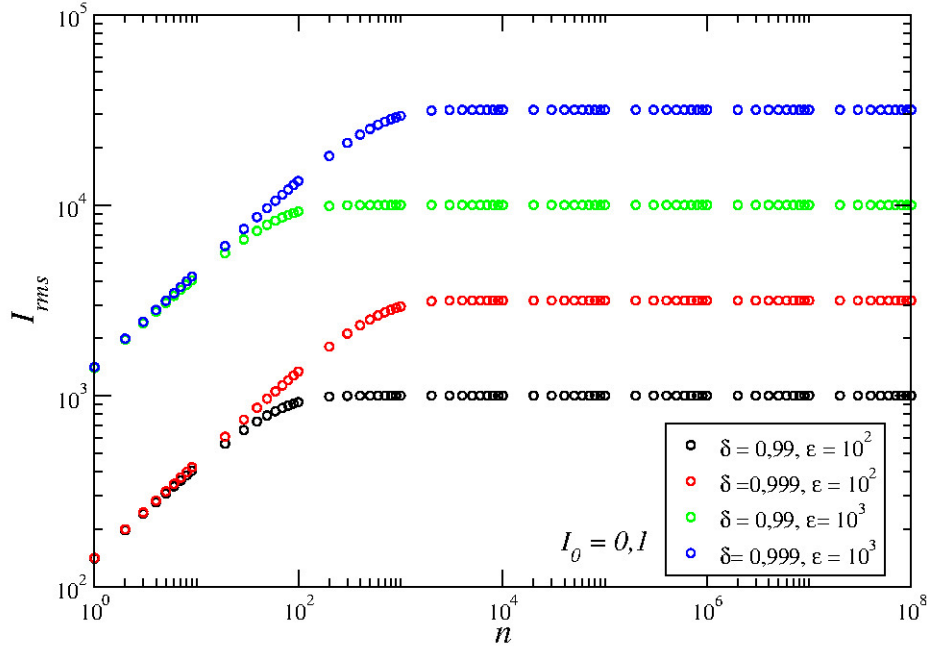


Figura 5.2: Gráfico de  $I_{rms}$  em função de  $n$  considerando diferentes valores dos parâmetros  $\delta$  e  $\varepsilon$ , conforme mostrados na figura, e a condição inicial  $I_0 = 0,1$ .

- Para  $n \gg n_x$ ,

$$I_{sat} \propto (1 - \delta)^{\alpha_1} \varepsilon^{\alpha_2}, \quad (5.6)$$

em que  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são os expoentes de saturação;

- O número de iteração de *crossover*  $n_x$ :

$$n_x \propto (1 - \delta)^{z_1} \varepsilon^{z_2}, \quad (5.7)$$

em que  $z_1$  e  $z_2$  são expoentes dinâmicos.

O procedimento para obter a relação entre os expoentes críticos pela função homogênea generalizada é análogo ao apresentado no Capítulo 2. Assim:

$$z_1 = \frac{\alpha_1}{\beta}, \quad (5.8)$$

$$z_2 = \frac{\alpha_2}{\beta} - 2. \quad (5.9)$$

### 5.3 Equação da difusão e solução analítica

A equação da difusão é dada por:

$$\frac{\partial P(I, n)}{\partial n} = D \frac{\partial^2 P(I, n)}{\partial I^2}, \quad (5.10)$$

em que  $D$  é o coeficiente da difusão e é definido como:

$$D = \frac{\overline{I_{n+1}^2} - \overline{I_n^2}}{2}. \quad (5.11)$$

Então, elevando ao quadrado a primeira equação de (5.1):

$$I_{n+1}^2 = \delta^2 I_n^2 + (1 + \delta)^2 \varepsilon^2 \sin^2(2\pi\theta_n) - 2\delta(1 + \delta)\varepsilon \sin(2\pi\theta_n)I_n;$$

$$\Rightarrow I_{n+1}^2 - I_n^2 = (\delta^2 - 1)I_n^2 + (1 + \delta)^2 \varepsilon^2 \sin^2(2\pi\theta_n) - 2\delta(1 + \delta)\varepsilon \sin(2\pi\theta_n)I_n.$$

Tomando a média de  $I$  e  $\theta$ , considerando que são independentes estatisticamente:

$$\overline{I_{n+1}^2} - \overline{I_n^2} = (\delta^2 - 1)\overline{I_n^2} + (1 + \delta)^2 \frac{\varepsilon^2}{2}; \quad (5.12)$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{I_{n+1}^2} - \overline{I_n^2}}{2} = \frac{(\delta + 1)}{2} \left\{ (\delta - 1)\overline{I_n^2} + (\delta + 1)\frac{\varepsilon^2}{2} \right\}. \quad (5.13)$$

Podemos fazer a seguinte aproximação em (5.13):

$$\overline{I_{n+1}^2} - \overline{I_n^2} = \frac{\overline{I_{n+1}^2} - \overline{I_n^2}}{(n + 1) - n} \cong \frac{d\overline{I^2}}{dn'} = 2D. \quad (5.14)$$

Assim, resolvendo esta EDO, obtemos:

$$(\delta^2 - 1)\bar{I}^2 + (1 + \delta)^2 \frac{\varepsilon^2}{2} \cong \frac{d\bar{I}^2}{dn'};$$

$$\Rightarrow \int_{I_0}^{I(n)} \frac{1}{(\delta^2 - 1)\bar{I}^2 + (1 + \delta)^2 \frac{\varepsilon^2}{2}} d\bar{I}^2 = \int_0^n dn'.$$

Utilizando a substituição de variáveis, temos:

$$u = (\delta^2 - 1)\bar{I}^2 + (1 + \delta)^2 \frac{\varepsilon^2}{2} \Rightarrow du = (\delta^2 - 1)d\bar{I}^2.$$

$$\begin{cases} u_0 = (\delta^2 - 1)\bar{I}_0^2 + (1 + \delta)^2 \frac{\varepsilon^2}{2} \\ u(n) = (\delta^2 - 1)\bar{I}^2(n) + (1 + \delta)^2 \frac{\varepsilon^2}{2} \end{cases} \quad (5.15)$$

Logo:

$$\begin{aligned} \int_{u_0}^{u(n)} \frac{1}{u} \frac{1}{(\delta^2 - 1)} du = n &\Rightarrow \ln u \Big|_{u_0}^{u(n)} = (\delta^2 - 1)n; \\ &\Rightarrow u(n) = u_0 e^{(\delta^2 - 1)n} \end{aligned}$$

Ou seja:

$$(\delta^2 - 1)\bar{I}^2(n) + (1 + \delta)^2 \frac{\varepsilon^2}{2} = \left[ (\delta^2 - 1)\bar{I}_0^2 + (1 + \delta)^2 \frac{\varepsilon^2}{2} \right] e^{(\delta^2 - 1)n};$$

$$\Rightarrow (\delta^2 - 1)\bar{I}^2(n) = \left[ (\delta^2 - 1)\bar{I}_0^2 + (1 + \delta)^2 \frac{\varepsilon^2}{2} \right] e^{(\delta^2 - 1)n} - (1 + \delta)^2 \frac{\varepsilon^2}{2};$$

$$\Rightarrow \bar{I}^2(n) = \left[ (\delta^2 - 1)\bar{I}_0^2 + (1 + \delta)^2 \frac{\varepsilon^2}{2} \right] \frac{e^{(\delta^2 - 1)n}}{(\delta^2 - 1)} - \frac{(\delta + 1)^2 \varepsilon^2}{(\delta^2 - 1) 2}. \quad (5.16)$$

Pelas equações (5.12) e (5.14), temos que:

$$2D = (\delta^2 - 1)\overline{I^2}(n) + (1 + \delta)^2 \frac{\varepsilon^2}{2}. \quad (5.17)$$

Substituindo (5.16) em (5.17) e isolando  $D$ , obtemos:

$$D = \frac{(\delta^2 - 1)}{2} \left\{ \left[ (\delta^2 - 1)\overline{I_0^2} + (1 + \delta)^2 \frac{\varepsilon^2}{2} \right] \frac{e^{(\delta^2 - 1)n}}{(\delta^2 - 1)} - \frac{(\delta + 1)^2 \varepsilon^2}{(\delta^2 - 1) 2} \right\} + (1 + \delta)^2 \frac{\varepsilon^2}{4};$$

$$\Rightarrow D = \left[ (\delta^2 - 1)\overline{I_0^2} + (1 + \delta)^2 \frac{\varepsilon^2}{2} \right] \frac{e^{(\delta^2 - 1)n}}{2} - (1 + \delta)^2 \frac{\varepsilon^2}{4} + (1 + \delta)^2 \frac{\varepsilon^2}{4};$$

$$D = \left[ (\delta^2 - 1)\overline{I_0^2} + (1 + \delta)^2 \frac{\varepsilon^2}{2} \right] \frac{e^{(\delta^2 - 1)n}}{2}. \quad (5.18)$$

Precisamos, agora, calcular a média na órbita, ou seja, a média em  $n$ . Podemos notar que a dependência desta variável está somente na função exponencial. Dessa forma, podemos calcular a média da seguinte forma:

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n e^{(\delta^2 - 1)i} = \frac{1}{n+1} \underbrace{[1 + e^{(\delta^2 - 1)} + e^{2(\delta^2 - 1)} + \dots + e^{n(\delta^2 - 1)}]}_s.$$

Denotando o termo entre colchetes por  $s$  e multiplicando por  $e^{(\delta^2 - 1)}$ , obtemos:

$$se^{(\delta^2 - 1)} = e^{(\delta^2 - 1)} + e^{2(\delta^2 - 1)} + \dots + e^{(n+1)(\delta^2 - 1)}. \quad (5.19)$$

Subtraindo (5.19) de  $s$ , obtemos:

$$s - se^{(\delta^2 - 1)} = s(1 - e^{(\delta^2 - 1)}) = 1 - e^{(n+1)(\delta^2 - 1)};$$

$$s = \frac{1 - e^{(n+1)(\delta^2 - 1)}}{1 - e^{(\delta^2 - 1)}}. \quad (5.20)$$

Utilizando (5.20) em (5.18), temos que a expressão para o coeficiente da difusão  $D$ , neste caso, é dada por:

$$D = \left[ (\delta^2 - 1)\overline{I_0^2} + (1 + \delta)^2 \frac{\varepsilon^2}{2} \right] \frac{1}{2(n+1)} \frac{1 - e^{(n+1)(\delta^2-1)}}{1 - e^{(\delta^2-1)}}. \quad (5.21)$$

Neste caso, o coeficiente da difusão também não é constante. Ele depende dos parâmetros de controle do mapeamento e do número de iteração  $n$ . Analogamente ao Capítulo anterior, uma vez que a variação de  $D$  é muito pequena com a variação de instante de  $n$  para  $n+1$ , consideraremos  $D$  constante para obter a solução da equação da difusão e, então, a expressão obtida em (5.21) é incorporada a ela.

A partir do espaço de fases, temos como condições de contorno:

$$\lim_{I \rightarrow \pm\infty} P(I, n) = 0. \quad (5.22)$$

Uma das técnicas utilizadas para obter a expressão de  $P(I, n)$  é a transformada de Fourier, uma vez que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(I, n) dI = 1, \quad (5.23)$$

que é a condição de normalização.

Podemos definir:

$$R(k, n) = \mathcal{F}\{P(I, n)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} P(I, n) e^{ikI} dI. \quad (5.24)$$

Diferenciando em relação à variável  $n$ , obtemos:

$$\frac{\partial R(k, n)}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial P(I, n)}{\partial n} e^{ikI} dI. \quad (5.25)$$

Segundo [40], a transformada de Fourier obedece à seguinte propriedade:

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\partial^2 P}{\partial I^2} \right\} = -k^2 R(k, n), \quad (5.26)$$

o que permite dizer que  $R(k, n)$  satisfaz a EDO:

$$\frac{\partial R(k, n)}{\partial n} = -D(n)k^2 R(k, n), \quad (5.27)$$

cuja solução é escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{R} &= -Dk^2 dn, \\ \Rightarrow R(k, n) &= R(k, 0)e^{-Dk^2 n}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Pela condição inicial, temos que:

$$R(k, 0) = \mathcal{F}\{\delta(I - I_0)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikI_0}. \quad (5.29)$$

Logo:

$$R(k, n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikI_0} e^{-Dk^2 n}. \quad (5.30)$$

Aplicando a transformada inversa de Fourier, temos:

$$P(I, n) = \mathcal{F}^{-1}\{R(k, n)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} R(k, n) e^{-ikI} dk. \quad (5.31)$$

Aplicando a equação (5.30) na equação (5.31), obtemos:

$$\begin{aligned} P(I, n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikI_0} e^{-Dk^2 n} e^{-ikI} dk; \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Dk^2 n + ik(I_0 - I)} dk; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[Dk^2n + ik(I-I_0) + \frac{(I-I_0)^2}{4Dn} - \frac{(I-I_0)^2}{4Dn}\right]} dk; \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left\{\left[\sqrt{Dn}k + \frac{i(I-I_0)}{2\sqrt{Dn}}\right]^2 + \frac{(I-I_0)^2}{4Dn}\right\}} dk. \tag{5.32}
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável:

$$x = \sqrt{Dn}k + \frac{i(I-I_0)}{2\sqrt{Dn}} \Rightarrow dx = \sqrt{Dn}dk.$$

Assim, a equação (5.32) se torna:

$$\begin{aligned}
P(I, n) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-\frac{(I-I_0)^2}{4Dn}} \frac{1}{\sqrt{Dn}} dx; \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi^2 Dn}} e^{-\frac{(I-I_0)^2}{4Dn}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx; \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi^2 Dn}} e^{-\frac{(I-I_0)^2}{4Dn}} \sqrt{\pi}; \\
\Rightarrow P(I, n) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dn}} e^{-\frac{(I-I_0)^2}{4Dn}}, \tag{5.33}
\end{aligned}$$

que satisfaz a condição inicial e as condições de contorno.

O observável de interesse é dado por:

$$\begin{aligned}
\bar{I}^2(n) &= \int_{-\infty}^{\infty} I^2 P(I, n) dI; \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dn}} e^{-\frac{(I-I_0)^2}{4Dn}} I^2 dI; \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dn}} \left[ \sqrt{\pi Dn} (2Dn + I_0^2) \operatorname{erf} \left( \frac{I-I_0}{2\sqrt{Dn}} \right) - 2Dn(I-I_0) e^{-\frac{(I-I_0)^2}{4Dn}} \right]_{-\infty}^{\infty};
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overline{I^2}(n) = 2Dn + I_0^2. \quad (5.34)$$

Portanto:

$$I_{rms} = \sqrt{\overline{I^2}(n)} = \sqrt{I_0^2 + 2D(n)n} \quad (5.35)$$

juntamente com a expressão do coeficiente da difusão (5.21), obtemos a expressão da ação quadrática média para o mapeamento (5.1):

$$I_{rms} = \sqrt{I_0^2 + \left[ (\delta^2 - 1)I_0^2 + (1 + \delta)^2 \frac{\varepsilon^2}{2} \right] \frac{n}{n+1} \frac{1 - e^{(n+1)(\delta^2-1)}}{1 - e^{(\delta^2-1)}}} \quad (5.36)$$

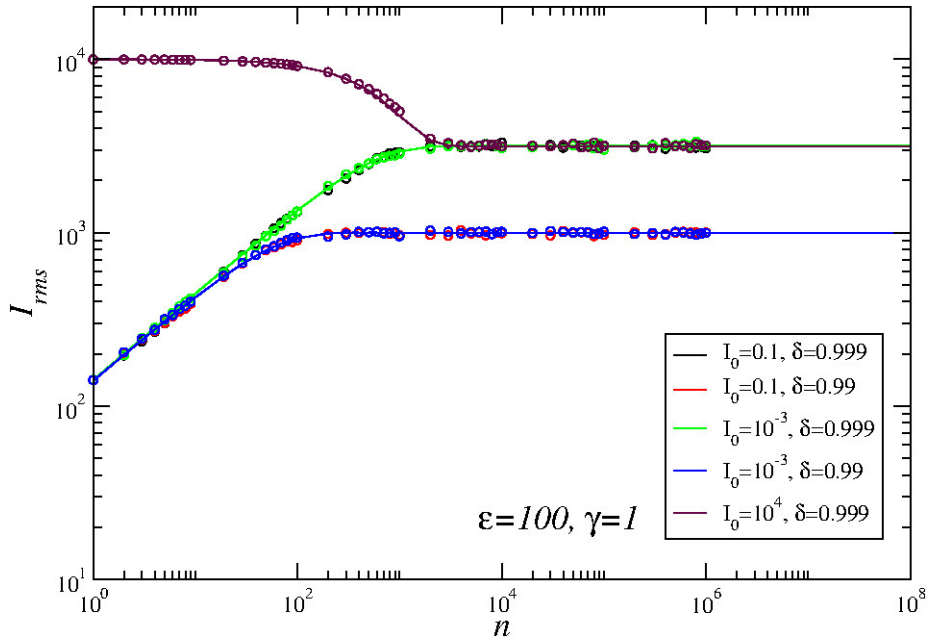


Figura 5.3: Gráfico de  $I_{rms}$  em função de  $n$  para diferentes valores da condição inicial e do parâmetro  $\delta$  com  $\gamma = 1$  e  $\varepsilon = 100$ .

A Figura (5.3) apresenta o gráfico de  $I_{rms}$  em função de  $n$  considerando diferentes valores da condição inicial e do parâmetro  $\delta$  com  $\gamma = 1$  e  $\varepsilon = 100$ ,

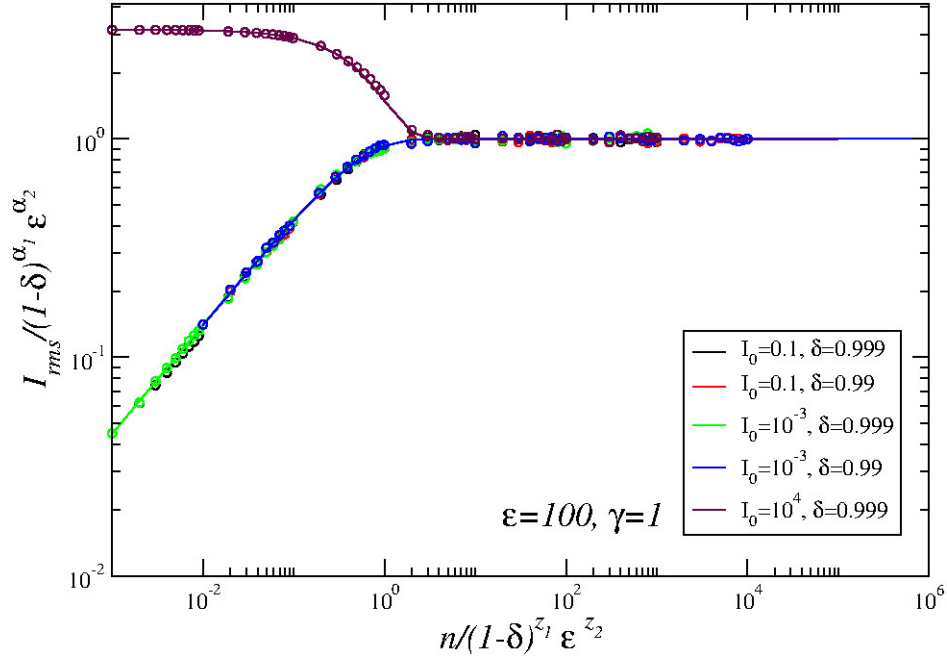


Figura 5.4: Sobreposição das curvas de  $I_{rms}$  em função de  $n$  apresentadas na Figura 5.3.

sendo as linhas contínuas representam os resultados analíticos e os símbolos, os resultados numéricos. Essas curvas apresentam crescimento inicial e depois uma saturação que depende do valor atribuído ao parâmetro  $\delta$ . Para valores elevados da condição inicial, a curva apresenta um decaimento inicialmente e depois uma saturação. A Figura 5.4 apresenta o colapso das curvas apresentadas na Figura 5.3 em uma única curva utilizando as transformações  $I_{rms} \rightarrow I_{rms}/(1-\delta)^{\alpha_1} \epsilon^{\alpha_2}$  e  $n \rightarrow n/(1-\delta)^{z_1} \epsilon^{z_2}$ .

Analisemos, agora, os casos limites:

i) Quando  $n = 0$ , temos que  $I_{rms} = I_0$ ;

ii) No limite em que  $n \rightarrow \infty$ , temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{(n+1)(\delta^2-1)} = 0,$$

uma vez que  $\delta^2 - 1 < 0$  e:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n} + 1} = 1,$$

logo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_{rms} = \sqrt{I_0^2 + \left[ (\delta^2 - 1)I_0^2 + (1 + \delta)^2 \frac{\varepsilon^2}{2} \right] \frac{1}{1 - e^{(\delta^2 - 1)}}}.$$

Fazendo a expansão em séries de Taylor do último denominador, temos que  $1 - e^{(\delta^2 - 1)} \cong 1 - (1 + (\delta^2 - 1)) = 1 - \delta^2$ . Assim:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_{rms} \cong \sqrt{I_0^2 + \left[ (\delta^2 - 1)I_0^2 + (1 + \delta)^2 \frac{\varepsilon^2}{2} \right] \frac{1}{1 - \delta^2}};$$

$$= \sqrt{I_0^2 - I_0^2 + \frac{(1 + \delta)^2 \varepsilon^2}{(1 - \delta^2) 2}};$$

$$= \sqrt{\frac{1 + \delta \varepsilon^2}{1 - \delta} \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow I_{sat} \propto \varepsilon(1 - \delta)^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.37)$$

Comparando com a segunda hipótese de escala (5.6), temos que  $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$  e  $\alpha_2 = 1$ .

iii) Quando  $I_0 \simeq 0$  e  $n$  é pequeno:

$$I_{rms} \cong \sqrt{(1 + \delta)^2 \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{n}{n + 1} \frac{1 - e^{(n+1)(\delta^2 - 1)}}{1 - e^{(\delta^2 - 1)}}};$$

$$\Rightarrow I_{rms} \simeq \sqrt{\frac{\varepsilon^2 n}{2}} \simeq (\varepsilon^2 n)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.38)$$

Comparando com a primeira hipótese de escala (5.5), temos que  $\beta = \frac{1}{2}$ .

iv) Quando  $I_0 \simeq 0$ , o número de *crossover*  $n_x$  é obtido pela igualdade das equações (5.37) e (5.38):

$$\sqrt{\frac{1 + \delta \varepsilon^2}{1 - \delta} \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\varepsilon^2 n_x}{2}};$$

$$n_x = \frac{1 + \delta}{1 - \delta};$$

$$n_x \propto (1 - \delta)^{-1}. \quad (5.39)$$

Comparando com a terceira hipótese de escala, dada pela equação (5.7), temos que  $z_1 = -1$  e  $z_2 = 0$ .

v) Quando  $0 < I_0 < I_{sat}$ , o primeiro número de *crossover*  $n'_x$ , iteração em que a curva está inicialmente num platô e passa a crescer, é obtido da igualdade das equações  $I_{rms}(0) = \sqrt{I_0^2}$  e (5.38):

$$\begin{aligned} \sqrt{I_0^2} &= \sqrt{\frac{\varepsilon^2 n'_x}{2}}; \\ \Rightarrow I_0^2 &= \frac{\varepsilon^2 n'_x}{2}; \\ \Rightarrow n'_x &= \frac{2I_0^2}{\varepsilon^2}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

vi) Para  $I_0^2 \gg \frac{\varepsilon^2}{2}$  e  $n$  pequeno, a equação (5.36) se torna:

$$\begin{aligned} I_{rms} &= \sqrt{I_0^2 + (\delta^2 - 1)I_0^2 \frac{n}{n+1} \frac{1 - e^{(n+1)(\delta^2-1)}}{1 - e^{(\delta^2-1)}}}; \\ \Rightarrow I_{rms} &\simeq \sqrt{I_0^2 + (\delta^2 - 1)I_0^2 \frac{1 - e^{(n+1)(\delta^2-1)}}{(1 - \delta^2)}}; \\ \Rightarrow I_{rms} &\simeq \sqrt{I_0^2 [1 - (1 - e^{(n+1)(\delta^2-1)})]}; \\ \Rightarrow I_{rms} &\simeq I_0 e^{\frac{(n+1)(\delta^2-1)}{2}}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

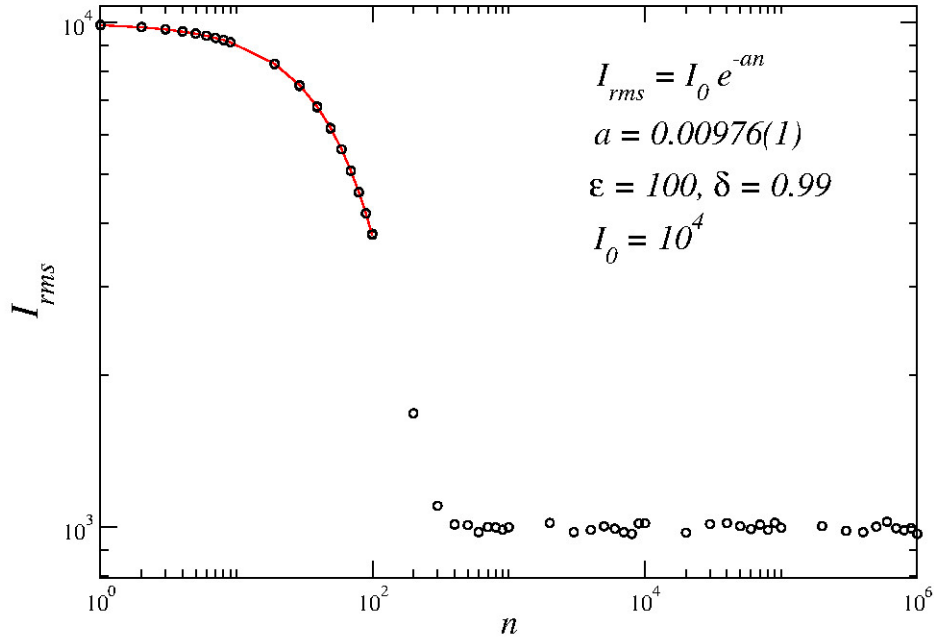


Figura 5.5: *Decaimento exponencial de  $I_{rms}$  em função de  $n$  para condições iniciais altas e considerando  $\varepsilon = 100$  e  $\delta = 0,99$ .*

Este decaimento exponencial é apresentado na Figura 5.5. O coeficiente de decaimento pode ser obtido analiticamente substituindo o valor de  $\delta = 0,99$  na equação (5.40), ou seja,  $\frac{\delta^2-1}{2} = \frac{(0,99)^2-1}{2} = -0,00995$ , que é próximo ao valor obtido pela simulação de  $-a = -0,00976(1)$ .

# Capítulo 6

## Conclusões e Perspectivas

Apresentamos algumas propriedades dinâmicas de mapeamentos conservativos e dissipativos. Apresentamos a solução analítica da Equação da Difusão, considerando as condições de contorno de cada mapeamento. Analisamos os casos limites desses mapeamentos e os resultados analíticos e os resultados de simulações numéricas são condizentes entre si.

No Capítulo 2, foram estudadas as propriedades dinâmicas e de escala de uma família de mapeamentos Hamiltonianos. A localização das primeiras curvas invariantes *spanning*,  $I_{fisc}$ , é obtida analiticamente com a conexão com o Mapa Padrão. Com esta expressão, obtivemos a expressão da solução da Equação da Difusão analiticamente pelo método da separação de variáveis e estudamos os casos limites em que o número de iteração  $n$  era muito pequeno, o número de iteração  $n$  era muito grande,  $n \rightarrow \infty$ , e a obtenção da expressão analítica do número de *crossover*  $n_x$ .

No Capítulo 3, estudamos as propriedades dinâmicas e de escala do Poço de Potencial dependente do tempo. Neste caso, a localização das primeiras curvas invariantes *spanning*,  $e_{fisc}$ , é obtida por simulação numérica. Dessa forma, para a obtenção da solução da Equação da Difusão, utilizamos o valor médio de  $e_{fisc}$ . A solução analítica da Equação da Difusão foi obtida pelo método da separação de variáveis e usando a representação da Função Delta de Dirac.

No Capítulo 4, apresentamos o Mapa Parão dissipativo e estudamos as suas propriedades dinâmicas e de escala. Diferentemente dos Capítulos anteriores, obtivemos o coeficiente da difusão não constante, dependendo, além dos parâmetros do mapeamento, do número de iterações. A técnica utilizada

para obter a solução analítica da Equação da Difusão foi a transformada de Fourier, considerando o coeficiente da difusão constante, e, após a substituição da expressão de  $D(n)$  nessa solução, estudamos os casos limites do mapeamento.

No Capítulo 5, apresentamos, estudamos e analisamos as propriedades dinâmicas e de escala outro mapeamento dissipativo. O procedimento foi análogo ao utilizado para o Mapa Padrão Dissipativo, ou seja, utilizamos o método da transformada de Fourier para obter a solução da Equação da Difusão, também considerando o coeficiente da difusão constante e os casos limites foram estudados com a expressão de  $D(n)$  na solução da equação da difusão.

Uma vez que a difusão utilizada para descrever a difusão caótica das partículas no mar de caos pode ser comparada à caminhada aleatória, podemos utilizar a equação da difusão para descrever esse comportamento da difusão caótica de forma analítica. As comparações destes resultados analíticos com as simulações numéricas podem ser observadas nas Figuras 2.5, 3.5, 4.4, 5.3. O bom acordo entre eles mostra que a abordagem utilizando a equação da difusão é válida, sendo esta a nossa contribuição original e foram publicados em [31, 32, 33].

Como perspectivas, pretendemos aplicar este formalismo de estudo da difusão caótica apresentado em outros mapeamentos, tais como os bilhares [2], além do estudo do Mapa Padrão dissipativo com valores pequenos para o parâmetro de não linearidade  $\varepsilon$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] Lorenz, E. *Deterministic nonperiodic flow*. Journal of the Atmospheric Sciences, **20**: 130, 1963.
- [2] Leonel, E.D. *Invariância de Escala em Sistemas Dinâmicos*. São Paulo: Editora Blucher, 2019.
- [3] Gleick, J. *Caos - A criação de uma nova ciência*. Rio de Janeiro: Editora Campus/Elsevier, 18<sup>a</sup> edição, 1989.
- [4] May, R.M. *Biological populations with nonoverlapping generations: stable points, stable cycles, and chaos*. Science, **186**: 645, 1974.
- [5] Hilborn, R.C. *Chaos and Nonlinear Dynamics*. Nova York: Oxford University Press, 2000.
- [6] Sharkovsky, O.M. *Coexistence of cycles of a continuous map of a line into itself*. Ukrainian Mathematical Journal, **16**: 61, 1964.
- [7] Ruelle, D., Takens, F. *On the nature of turbulence*. Communications in Mathematical Physics, **20**: 167, 1971.
- [8] Hénon, M. *A Two-dimensional Mapping with a Strange Attractor*. Communications in Mathematical Physics, **50**: 69, 1976.
- [9] Lichtenberg, A.J., Lieberman, M.A. *Regular and stochastic motion*. Nova York: Springer-Verlag, 1983.
- [10] Fielder-Ferrara, N., do Prado, C.P.C. *Caos - Uma Introdução*. São Paulo: Editora Blucher, 1994.
- [11] Hsieh, D.A. *Chaos and Nonlinear Dynamics: Application to Financial Markets*. The Journal of Finance, **46**: 1839, 1991.
- [12] Chen, A., Billings, S.A. *Neural networks for nonlinear dynamic system modelling and identification*. International Journal of Control, **56**: 319, 1992.

- [13] Peyrard, M. *Nonlinear dynamics and statistical physics of DNA*. Nonlinearity, **17**: R1, 2004.
- [14] da Costa, D.R., Hansen, M.,F., Batista, A.M. *Parametric perturbation in a model that describes the neuronal membrane potential*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, **515**: 519, 2019.
- [15] Srinivas, N., Parkin, J., Seelig, G., Winfree, E., Soloveichik, D. *Enzyme-free nucleic acid dynamical systems*. Science, **358**: eaal2052, 2017.
- [16] Crank, J. *The mathematics of diffusion*. Oxford: Oxford University Press, 1975.
- [17] Butkov, E. *Física Matemática*. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Dois S.A., 1978.
- [18] Hart-Davis, A., Farndon, J., Green, D., Harvey, D., Johnson, P., Palmer, D., Parkes, S., Sparrow, G. *O Livro da Ciência*. Tradução de Alice Klesck. São Paulo: Editora Globo, 2016.
- [19] Morris, W.F. *Predicting the Consequence of Plant Spacing and Biased Movement for Pollen Dispersal by Honey Bees*. Ecology, **74**: 493, 1993.
- [20] Murase, K., Tanada, S., Mogami, H., Kawamura, M., Miyagawa, M., Yamada, M., Higashiro, H., Lio, A., Hamamoto, K. *Validity of microsphere model in cerebral blood flow measurement using N-isopropyl-p-(I-123) iodoamphetamine*. Medical Physics, **19**: 70, 1990.
- [21] El-Kafrawy, S.A., Corman, V.M., Tolah, A.M., Al Masaudi, S.B., Hassan, A.M., Müller, M.A., Bleicker, T., Harakeh, S.M., Alzahrani, A.A., Alsaaidi, G.A., Alagili, A.N., Hashem, A.M., Zumla, A., Drosten, C., Azhar, E.I. *Enzootic patterns of Middle East respiratory syndrome coronavirus in imported African and local Arabian dromedary camels: a prospective genomic study*. The Lancet Planetary Health, **3**: e521, 2019.
- [22] Xu, Z., Zhang, Y. *Spatial dynamics of a time-delayed reaction and diffusion malaria model*. IMA Journal of Applied Mathematics, **80**: 1124, 2015.
- [23] Lou, Y., Zhao, X.Q. *A reaction-diffusion malaria model with incubation period in the vector population*. Journal of Mathematical Biology, **62**: 543, 2011.

- [24] Popp., D. *International innovation and diffusion of air pollution control technologies: the effects of NOX and SO2 regulation in the US, Japan and Germany*. Journal of Environmental Economics and Management, **51**: 46, 2006.
- [25] Ozmidov, R.V. *Diffusion of contaminants in the ocean*. Springer, 1990.
- [26] Qiu, X., Oliveira, D.F.M., Shirazi, A.S., Flammini, A., Menczer, F. *Limited individual attention and online virality of low-quality information*. Nature Human Behaviour, **1**: 0132, 2017.
- [27] Jo, W.S., Kim, H.Y., Kim., B.J. *Climate Change Alters Diffusion of Forest Pest: A Model Study*. Journal of the Korean Physical Society, **70**: 108, 2017.
- [28] Reif, F. *Fundamentals of statistical and thermal physics*. Long Grove: Waveland Press, 2009.
- [29] Balakrishnan, V. *Elements of Nonequilibrium Statistical Mechanics*. Nova York: CRC Press, 2008.
- [30] Yuan, Y., Guan, Y., Li, D., Molelans, N. *Investigation of diffusion behavior in Cu–Sn solid state diffusion couples*. Journal of Alloys and Compounds **661**: 282, 2016.
- [31] Leonel, E.D., Kuwana, C.M. *An Investigation of Chaotic Diffusion in a Family of Hamiltonian Mappings Whose Angles Diverge in the Limit of Vanishingly Action*. Journal of Statistical Physics, **170**: 69, 2018.
- [32] Leonel, E.D., Kuwana, C.M., Yoshida, M., de Oliveira, J.A. *Chaotic diffusion for particles moving in a time dependent potential well*. Physics Letters A, **384**: 126737, 2020.
- [33] Leonel, E.D., Kuwana, C.M., Yoshida, M., de Oliveira, J.A. *Application of the diffusion equation to prove scaling invariance on the transition from limited to unlimited diffusion*. Europhysics Letters, **131**: 10004, 2020.
- [34] Leonel, E.D., Penalva, J. Teixeira, R.M.N., Costa Filho, R.N., Silva, M.R., de Oliveira, J.A. *A dynamical phase transition for a family of Hamiltonian mappings: A phenomenological investigation to obtain the critical exponents*. Physics Letters A, **379**: 1808, 2015.
- [35] Leonel, E.D. *Fundamentos da Física Estatística*. São Paulo: Editora Blucher, 2015.

- [36] Leonel, E.D., de Oliveira, J.A., Saif, F. *Critical exponents for a transition from integrability to non-integrability via localization of invariant tori in the Hamiltonian system.* Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **44**: 302001, 2011.
- [37] Leonel, E.D., McClintock, P.V.E. *Scaling properties for a classical particle in a time-dependent potential well.* Chaos: **15**: 033701, 2005.
- [38] de Oliveira, J.A., Bizão, R.A., Leonel, E.D. *Finding critical exponents for two-dimensional Hamiltonian maps.* Physical Review E: **81**: 046212, 2010.
- [39] da Costa, D.R., Silva, M.R., de Oliveira, J.A., Leonel, E.D. *Scaling dynamics for a particle in a time-dependent potential well.* Physica A, **391**: 3607, 2012.
- [40] Tyn Myint-U. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics.* Nova York: Elsevier Science Publishing Company, Inc, 1980.
- [41] de Oliveira, J.A., Leonel, E.D. *Dissipation and its consequences in the scaling exponents for a family of two-dimensional mappings* J. Phys. A: Math. Theor. **45** 165101, 2012.

# Apêndice A

## Cálculo dos observáveis médios do mapeamento (2.1)

Neste apêndice, calculamos os observáveis médios  $\bar{I}$  e  $\overline{I^2}$ . Para tanto, foi utilizado o método da integração por partes.

$$\begin{aligned}
 1) \bar{I} &= \int_{-I_{fisc}}^{I_{fisc}} IP(I, n) dI, \\
 &= \frac{I^2}{4I_{fisc}} \Big|_{-I_{fisc}}^{I_{fisc}} + \frac{1}{I_{fisc}} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \cos\left(\frac{k\pi I_0}{I_{fisc}}\right) \int_{-I_{fisc}}^{I_{fisc}} I \cos\left(\frac{k\pi I}{I_{fisc}}\right) dI + \right. \\
 &\quad \left. + \sin\left(\frac{k\pi I_0}{I_{fisc}}\right) \int_{-I_{fisc}}^{I_{fisc}} I \sin\left(\frac{k\pi I}{I_{fisc}}\right) dI \right] e^{-\frac{k^2 \pi^2 D n}{I_{fisc}^2}}, \\
 &= \frac{I_{fisc}^2 - I_{fisc}^2}{4I_{fisc}} + \frac{1}{I_{fisc}} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \cos\left(\frac{k\pi I_0}{I_{fisc}}\right) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left[ I \sin\left(\frac{k\pi I}{I_{fisc}}\right) \frac{I_{fisc}}{k\pi} \Big|_{-I_{fisc}}^{I_{fisc}} - \int_{-I_{fisc}}^{I_{fisc}} \sin\left(\frac{k\pi I}{I_{fisc}}\right) \frac{I_{fisc}}{k\pi} dI \right] + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \text{sen} \left( \frac{k\pi I_0}{I_{fisc}} \right) \left[ -I \cos \left( \frac{k\pi I}{I_{fisc}} \right) \frac{I_{fisc}}{k\pi} \Big|_{-I_{fisc}}^{I_{fisc}} + \int_{-I_{fisc}}^{I_{fisc}} \cos \left( \frac{k\pi I}{I_{fisc}} \right) \frac{I_{fisc}}{k\pi} dI \right] \Bigg\} e^{-\frac{k^2 \pi^2 Dn}{I_{fisc}^2}}, \\
& = 0 + \frac{1}{I_{fisc}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_{fisc}}{k\pi} \left\{ \cos \left( \frac{k\pi I_0}{I_{fisc}} \right) \times \right. \\
& \quad \times \left[ I_{fisc} \overbrace{\text{sen}(k\pi)}^0 + I_{fisc} \overbrace{\text{sen}(k\pi)}^0 + \cos \left( \frac{k\pi I}{I_{fisc}} \right) \frac{I_{fisc}}{k\pi} \Big|_{-I_{fisc}}^{I_{fisc}} \right] + \\
& \quad + \text{sen} \left( \frac{k\pi I_0}{I_{fisc}} \right) \left[ -I_{fisc} \cos(k\pi) + I_{fisc} \cos(-k\pi) + \text{sen} \left( \frac{k\pi I}{I_{fisc}} \right) \frac{I_{fisc}}{k\pi} \Big|_{-I_{fisc}}^{I_{fisc}} \right] \Bigg\} e^{-\frac{k^2 \pi^2 Dn}{I_{fisc}^2}}, \\
& = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \left\{ \cos \left( \frac{k\pi I_0}{I_{fisc}} \right) \frac{I_{fisc}}{k\pi} \overbrace{[\cos(k\pi) - \cos(-k\pi)]}^0 + \right. \\
& \quad + \text{sen} \left( \frac{k\pi I_0}{I_{fisc}} \right) \left[ \underbrace{-I_{fisc} \cos(k\pi) + I_{fisc} \cos(k\pi)}_0 + \frac{I_{fisc}}{k\pi} \left[ \underbrace{\text{sen}(k\pi)}_0 - \underbrace{\text{sen}(-k\pi)}_0 \right] \right] \Bigg\} e^{-\frac{k^2 \pi^2 Dn}{I_{fisc}^2}}, \\
& = 0. \tag{A.1}
\end{aligned}$$

$$2) \overline{I^2} = \int_{-I_{fisc}}^{I_{fisc}} I^2 P(I, n) dI,$$

$$= \frac{I^3}{6I_{fisc}} \Big|_{-I_{fisc}}^{I_{fisc}} + \frac{1}{I_{fisc}} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \cos \left( \frac{k\pi I_0}{I_{fisc}} \right) \int_{-I_{fisc}}^{I_{fisc}} I^2 \cos \left( \frac{k\pi I}{I_{fisc}} \right) dI + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi I_0}{I_{fisc}} \right) \left. \int_{-I_{fisc}}^{I_{fisc}} I^2 \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi I}{I_{fisc}} \right) dI \right\} e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{I_{fisc}^2}}, \\
& = \frac{I_{fisc}^3 + I_{fisc}^3}{6I_{fisc}} + \frac{1}{I_{fisc}} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \cos \left( \frac{k\pi I_0}{I_{fisc}} \right) \times \right. \\
& \times \left[ I^2 \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi I}{I_{fisc}} \right) \frac{I_{fisc}}{k\pi} \Big|_{-I_{fisc}}^{I_{fisc}} - \int_{-I_{fisc}}^{I_{fisc}} \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi I}{I_{fisc}} \right) \frac{I_{fisc}}{k\pi} 2IdI \right] + \\
& + \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi I_0}{I_{fisc}} \right) \left[ -I^2 \cos \left( \frac{k\pi I}{I_{fisc}} \right) \frac{I_{fisc}}{k\pi} \Big|_{-I_{fisc}}^{I_{fisc}} + \int_{-I_{fisc}}^{I_{fisc}} \cos \left( \frac{k\pi I}{I_{fisc}} \right) \frac{I_{fisc}}{k\pi} 2IdI \right] \left. \right\} e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{I_{fisc}^2}}, \\
& = \frac{2I_{fisc}^3}{6I_{fisc}} + \frac{1}{I_{fisc}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_{fisc}}{k\pi} \left\{ \cos \left( \frac{k\pi I_0}{I_{fisc}} \right) \left[ I_{fisc}^2 \overbrace{\operatorname{sen}(k\pi)}^0 - I_{fisc}^2 \overbrace{\operatorname{sen}(-k\pi)}^0 - \right. \right. \\
& -2 \left( -I \cos \left( \frac{k\pi I}{I_{fisc}} \right) \frac{I_{fisc}}{k\pi} \Big|_{-I_{fisc}}^{I_{fisc}} + \overbrace{\int_{-I_{fisc}}^{I_{fisc}} \cos \left( \frac{k\pi I}{I_{fisc}} \right) \frac{I_{fisc}}{k\pi} dI}^0 \right) \left. \right] + \\
& + \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi I_0}{I_{fisc}} \right) \left[ \overbrace{-I_{fisc}^2 \cos(k\pi) + I_{fisc}^2 \cos(-k\pi)}^0 + \right. \\
& \left. +2 \left( I \overbrace{\operatorname{sen} \left( \frac{k\pi I}{I_{fisc}} \right) \frac{I_{fisc}}{k\pi} \Big|_{-I_{fisc}}^{I_{fisc}}}^0 + \int_{-I_{fisc}}^{I_{fisc}} \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi I}{I_{fisc}} \right) \frac{I_{fisc}}{k\pi} dI \right) \right] \left. \right\} e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{I_{fisc}^2}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{I_{fisc}^2}{3} + \frac{1}{I_{fisc}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_{fisc}}{k\pi} \left\{ \cos\left(\frac{k\pi I_0}{I_{fisc}}\right) \frac{2I_{fisc}}{k\pi} [I_{fisc} \overbrace{\cos(k\pi)}^{(-1)^k} + I_{fisc} \overbrace{\cos(-k\pi)}^{(-1)^k}] + \right. \\
&\quad \left. + \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi I_0}{I_{fisc}}\right) \frac{2I_{fisc}}{k\pi} \underbrace{[\cos(k\pi) - \cos(-k\pi)]}_0 \right\} e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{I_{fisc}^2}}, \\
&= \frac{I_{fisc}^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4I_{fisc}^2 (-1)^k}{k^2\pi^2} \cos\left(\frac{k\pi I_0}{I_{fisc}}\right) e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{I_{fisc}^2}}. \tag{A.2}
\end{aligned}$$

## Apêndice B

# Determinante da matriz Jacobiana para o Poço de Potencial

Neste apêndice, calculamos os coeficientes e o determinante da matriz Jacobiana para o poço de potencial.

Para calcular os coeficientes da matriz jacobiana, precisamos calcular:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta \phi_a}{\partial e_n} &= 2\pi N_c \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{[e_n - \delta \cos(\phi_n)]^{3/2}} \\ &= -\frac{\pi N_c}{[e_n - \delta \cos(\phi_n)]^{3/2}},\end{aligned}\tag{B.1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta \phi_a}{\partial \phi_n} &= 2\pi N_c r \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{\delta \operatorname{sen}(\phi_n)}{[e_n - \delta \cos(\phi_n)]^{3/2}} \\ &= -\frac{\pi N_c \delta}{[e_n - \delta \cos(\phi_n)]^{3/2}} \operatorname{sen}(\phi_n),\end{aligned}\tag{B.2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta \phi_b}{\partial e_n} &= 2\pi N_c r \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{(e_{n+1})^{3/2}} \frac{\partial e_{n+1}}{\partial e_n}, \\ &= -\frac{\pi N_c r}{(e_{n+1} - 1)^{3/2}} \frac{\partial e_{n+1}}{\partial e_n},\end{aligned}\tag{B.3}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta \phi_b}{\partial \phi_n} &= 2\pi N_c r \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{(e_{n+1} - 1)^{3/2}} \frac{\partial e_{n+1}}{\partial e_n}, \\
&= -\frac{\pi N_c r}{(e_{n+1} - 1)^{3/2}} \frac{\partial e_{n+1}}{\partial e_n}.
\end{aligned} \tag{B.4}$$

O determinante da matriz Jacobiana é dado por:

$$\det J = \frac{\partial e_{n+1}}{\partial e_n} \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} - \frac{\partial e_{n+1}}{\partial \phi_n} \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial e_n}. \tag{B.5}$$

Utilizando as expressões dos coeficientes apresentados no Capítulo 3 e fazendo as substituições de (B.1), (B.2), (B.3) e (B.4), temos que:

$$\begin{aligned}
A) \frac{\partial e_{n+1}}{\partial e_n} \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} &= \left[1 - i\delta \operatorname{sen}(\phi_n + i\Delta\phi_a) \frac{\partial \Delta\phi_a}{\partial e_n}\right] \left[1 + i \frac{\partial \Delta\phi_a}{\partial \phi_n} + \frac{\partial \Delta\phi_b}{\partial \phi_n}\right], \\
&= 1 + i \frac{\partial \Delta\phi_a}{\partial \phi_n} + \frac{\partial \Delta\phi_b}{\partial \phi_n} - i\delta \operatorname{sen}(\phi_n + i\Delta\phi_a) \frac{\partial \Delta\phi_a}{\partial e_n} - \\
&\quad - i^2 \delta \operatorname{sen}(\phi_n + i\Delta\phi_a) \frac{\partial \Delta\phi_a}{\partial e_n} \frac{\partial \Delta\phi_a}{\partial \phi_n} - i\delta \operatorname{sen}(\phi_n + i\Delta\phi_a) \frac{\partial \Delta\phi_a}{\partial e_n} \frac{\partial \Delta\phi_b}{\partial \phi_n}, \\
&= 1 - \frac{i\pi N_c \delta}{(e_n - \delta \cos(\phi_n))^{3/2}} \operatorname{sen}(\phi_n) - \frac{\pi N_c r}{(e_{n+1} - 1)^{3/2}} \frac{\partial e_{n+1}}{\partial \phi_n} + \\
&\quad + \delta i \operatorname{sen}(\phi_n + i\Delta\phi_a) \frac{\pi N_c}{(e_n - \delta \cos(\phi_n))^{3/2}} + \\
&\quad + \delta i^2 \operatorname{sen}(\phi_n + i\Delta\phi_a) \frac{\pi N_c}{(e_n - \delta \cos(\phi_n))^{3/2}} \left(-\frac{\pi N_c \delta}{(e_n - \delta \cos(\phi_n))^{3/2}} \operatorname{sen}(\phi_n)\right) + \\
&\quad + \delta i \operatorname{sen}(\phi_n + i\Delta\phi_a) \frac{\pi N_c}{(e_n - \delta \cos(\phi_n))^{3/2}} \left(-\frac{\pi N_c r}{(e_{n+1} - 1)^{3/2}} \frac{\partial e_{n+1}}{\partial \phi_n}\right), \\
&= 1 - \frac{i\pi N_c \delta \operatorname{sen}(\phi_n)}{(e_n - \delta \cos(\phi_n))^{3/2}} + \frac{\pi N_c \delta r \operatorname{sen}(\phi_n + i\Delta\phi_a)}{(e_{n+1} - 1)^{3/2}} - \frac{i\pi^2 N_c^2 \delta^2 r \operatorname{sen}(\phi_n + i\Delta\phi_a) \operatorname{sen}(\phi_n)}{(e_n - \delta \cos(\phi_n))^{3/2} (e_{n+1} - 1)^{3/2}} - \\
&\quad - \frac{\pi N_c \delta r \operatorname{sen}(\phi_n)}{(e_{n+1} - 1)^{3/2}} + \frac{i\pi N_c \delta \operatorname{sen}(\phi_n + i\Delta\phi_a)}{(e_n - \delta \cos(\phi_n))^{3/2}} - \left[\frac{i\pi N_c \delta}{(e_n - \delta \cos(\phi_n))^{3/2}}\right]^2 \operatorname{sen}(\phi_n + i\Delta\phi_a) \operatorname{sen}(\phi_n) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{i\pi^2 N_c^2 \delta^2 r \operatorname{sen}^2(\phi_n + i\Delta\phi_a)}{(e_n - \delta \cos(\phi_n))^{3/2} (e_{n+1} - 1)^{3/2}} - \frac{i^2 \pi^3 N_c^3 \delta^3 r \operatorname{sen}^2(\phi_n + i\Delta\phi_a) \operatorname{sen}(\phi_n)}{(e_{n+1} - 1)^{3/2} (e_n - \delta \cos(\phi_n))^3} - \\
& - \frac{i\pi^2 N_c^2 \delta^2 r \operatorname{sen}(\phi_n + i\Delta\phi_a) \operatorname{sen}(\phi_n)}{(e_n - \delta \cos(\phi_n))^{3/2} (e_{n+1} - 1)^{3/2}}. \tag{B.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B) \frac{\partial e_{n+1}}{\partial \phi_n} \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial e_n} &= \delta \left[ -\operatorname{sen}(\phi_n + i\Delta\phi_a) - i \operatorname{sen}(\phi_n + i\Delta\phi_a) \frac{\partial \Delta\phi_a}{\partial \phi_n} + \operatorname{sen}(\phi_n) \right] \left[ i \frac{\partial \Delta\phi_a}{\partial e_n} + \frac{\partial \Delta\phi_b}{\partial e_n} \right], \\
&= \delta \left[ -i \operatorname{sen}(\phi_n + i\Delta\phi_a) \frac{\partial \Delta\phi_a}{\partial e_n} - \operatorname{sen}(\phi_n + i\Delta\phi_a) \frac{\partial \Delta\phi_b}{\partial e_n} - \right. \\
&\quad - i^2 \operatorname{sen}(\phi_n + i\Delta\phi_a) \frac{\partial \Delta\phi_a}{\partial \phi_n} \frac{\partial \Delta\phi_a}{\partial e_n} - i \operatorname{sen}(\phi_n + i\Delta\phi_a) \frac{\partial \Delta\phi_a}{\partial \phi_n} \frac{\partial \Delta\phi_b}{\partial e_n} + \\
&\quad \left. + i \operatorname{sen}(\phi_n) \frac{\partial \Delta\phi_a}{\partial e_n} + \operatorname{sen}(\phi_n) \frac{\partial \Delta\phi_b}{\partial e_n} \right], \\
&= -i \delta \operatorname{sen}(\phi_n + i\Delta\phi_a) \left[ -\frac{\pi N_c}{(e_n - \delta \cos(\phi_n))^{3/2}} \right] - \delta \operatorname{sen}(\phi_n + i\Delta\phi_a) \left[ -\frac{\pi N_c r}{(e_{n+1} - 1)^{3/2}} \frac{\partial e_{n+1}}{\partial e_n} \right] - \\
&\quad - \delta i^2 \operatorname{sen}(\phi_n + i\Delta\phi_a) \left[ -\frac{\pi N_c \delta \operatorname{sen}(\phi_n)}{(e_n - \delta \cos(\phi_n))^{3/2}} \right] \left[ -\frac{\pi N_c}{(e_n - \delta \cos(\phi_n))^{3/2}} \right] - \\
&\quad - \delta i \operatorname{sen}(\phi_n + i\Delta\phi_a) \left[ -\frac{\pi N_c \delta \operatorname{sen}(\phi_n)}{(e_n - \delta \cos(\phi_n))^{3/2}} \right] \left[ -\frac{\pi N_c r}{(e_{n+1} - 1)^{3/2}} \frac{\partial e_{n+1}}{\partial e_n} \right] + \\
&\quad + \delta i \operatorname{sen}(\phi_n) \left[ -\frac{\pi N_c}{(e_n - \delta \cos(\phi_n))^{3/2}} \right] + \delta \operatorname{sen}(\phi_n) \left[ -\frac{\pi N_c r}{(e_{n+1} - 1)^{3/2}} \frac{\partial e_{n+1}}{\partial e_n} \right], \\
&= \frac{i\pi N_c \delta \operatorname{sen}(\phi_n + i\Delta\phi_a)}{(e_n - \delta \cos(\phi_n))^{3/2}} + \frac{\pi N_c r \delta \operatorname{sen}(\phi_n + i\Delta\phi_a)}{(e_{n+1} - 1)^{3/2}} + \frac{i\pi^2 N_c^2 r \delta^2 \operatorname{sen}^2(\phi_n + i\Delta\phi_a)}{(e_{n+1} - 1)^{3/2} (e_n - \delta \cos(\phi_n))^{3/2}} - \\
&\quad - \frac{i^2 \pi^2 N_c^2 \delta^2 \operatorname{sen}(\phi_n + i\Delta\phi_a) \operatorname{sen}(\phi_n)}{(e_n - \delta \cos(\phi_n))^3} - \frac{i\pi^2 N_c^2 r \delta^2 \operatorname{sen}(\phi_n + i\Delta\phi_a) \operatorname{sen}(\phi_n)}{(e_{n+1} - 1)^{3/2} (e_n - \delta \cos(\phi_n))^{3/2}} - \\
&\quad - \frac{i^2 \pi^3 N_c^3 r \delta^3 \operatorname{sen}^2(\phi_n + i\Delta\phi_a) \operatorname{sen}(\phi_n)}{(e_{n+1} - 1)^{3/2} (e_n - \delta \cos(\phi_n))^3} - \frac{i\pi^2 N_c^2 r \delta^2 \operatorname{sen}(\phi_n + i\Delta\phi_a) \operatorname{sen}(\phi_n)}{(e_{n+1} - 1)^{3/2} (e_n - \delta \cos(\phi_n))^{3/2}} - \\
&\quad - \frac{i\pi N_c \delta \operatorname{sen}(\phi_n)}{(e_n - \delta \cos(\phi_n))^{3/2}} - \frac{\pi N_c r \delta \operatorname{sen}(\phi_n)}{(e_{n+1} - 1)^{3/2}}. \tag{B.7}
\end{aligned}$$

Substituindo (B.6) e (B.7) na expressão (B.5), obtemos:

$$\det J = 1. \tag{B.8}$$

## Apêndice C

# Cálculo dos observáveis médios do Poço de Potencial

Neste apêndice, calculamos os observáveis médios  $\bar{e}$  e  $\bar{e}^2$ . Para isto, utilizamos o método da integração por partes.

$$\begin{aligned}
 1) \bar{e} &= \int_1^{e_{fisc}} e P(e, n) de, \\
 &= \int_1^{e_{fisc}} \frac{e}{2(e_{fisc} - 1)} + \frac{e}{e_{fisc} - 1} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \cos\left(\frac{k\pi e}{e_{fisc} - 1}\right) \cos\left(\frac{k\pi e_0}{e_{fisc} - 1}\right) + \right. \\
 &\quad \left. + \sin\left(\frac{k\pi e}{e_{fisc} - 1}\right) \sin\left(\frac{k\pi e_0}{e_{fisc} - 1}\right) \right] e^{-\frac{k^2 \pi^2 Dn}{(e_{fisc} - 1)^2}} de, \\
 &= \frac{e^2}{4(e_{fisc} - 1)} \Big|_1^{e_{fisc}} + \frac{1}{e_{fisc} - 1} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \cos\left(\frac{k\pi e_0}{e_{fisc} - 1}\right) \left[ e \sin\left(\frac{k\pi e}{e_{fisc} - 1}\right) \left(\frac{e_{fisc} - 1}{k\pi}\right) \Big|_1^{e_{fisc}} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \int_1^{e_{fisc}} \sin\left(\frac{k\pi e}{e_{fisc} - 1}\right) \left(\frac{e_{fisc} - 1}{k\pi}\right) de \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \sin\left(\frac{k\pi e_0}{e_{fisc} - 1}\right) \left[ -e \cos\left(\frac{k\pi e}{e_{fisc} - 1}\right) \left(\frac{e_{fisc} - 1}{k\pi}\right) \Big|_1^{e_{fisc}} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \int_1^{e_{fisc}} \cos\left(\frac{k\pi e}{e_{fisc} - 1}\right) \left(\frac{e_{fisc} - 1}{k\pi}\right) de \right] e^{-\frac{k^2 \pi^2 Dn}{(e_{fisc} - 1)^2}}, \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e_{fisc}^2 - 1}{4(e_{fisc} - 1)} + \frac{1}{e_{fisc} - 1} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \cos\left(\frac{k\pi e_0}{e_{fisc} - 1}\right) \left(\frac{e_{fisc} - 1}{k\pi}\right) \left\{ e_{fisc} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi e_{fisc}}{e_{fisc} - 1}\right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{e_{fisc} - 1}\right) + \left(\frac{e_{fisc} - 1}{k\pi}\right) \left[ \cos\left(\frac{k\pi e_{fisc}}{e_{fisc} - 1}\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{e_{fisc} - 1}\right) \right] \right\} + \right. \\
&\quad \left. + \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi e_0}{e_{fisc} - 1}\right) \left(\frac{e_{fisc} - 1}{k\pi}\right) \left\{ -e_{fisc} \cos\left(\frac{k\pi e_{fisc}}{e_{fisc} - 1}\right) + \cos\left(\frac{k\pi}{e_{fisc} - 1}\right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{e_{fisc} - 1}{k\pi}\right) \left[ \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi e_{fisc}}{e_{fisc} - 1}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{e_{fisc} - 1}\right) \right] \right\} \right\} e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{(e_{fisc}-1)^2}}, \\
&= \frac{e_{fisc}^2 - 1}{4(e_{fisc} - 1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{(e_{fisc}-1)^2}}}{k\pi} \left\{ \cos\left(\frac{k\pi e_0}{e_{fisc} - 1}\right) \left\{ e_{fisc} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi e_{fisc}}{e_{fisc} - 1}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{e_{fisc} - 1}\right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{e_{fisc} - 1}{k\pi}\right) \left[ \cos\left(\frac{k\pi e_{fisc}}{e_{fisc} - 1}\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{e_{fisc} - 1}\right) \right] \right\} + \right. \\
&\quad \left. + \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi e_0}{e_{fisc} - 1}\right) \left\{ -e_{fisc} \cos\left(\frac{k\pi e_{fisc}}{e_{fisc} - 1}\right) + \cos\left(\frac{k\pi}{e_{fisc} - 1}\right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{e_{fisc} - 1}{k\pi}\right) \left[ \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi e_{fisc}}{e_{fisc} - 1}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{e_{fisc} - 1}\right) \right] \right\} \right\}. \tag{C.1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) \quad \overline{e^2} &= \int_1^{e_{fisc}} e^2 P(e, n) de, \\
&= \int_1^{e_{fisc}} \frac{e^2}{2(e_{fisc} - 1)} + \frac{e^2}{e_{fisc} - 1} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \cos\left(\frac{k\pi e}{e_{fisc} - 1}\right) \cos\left(\frac{k\pi e_0}{e_{fisc} - 1}\right) + \right. \\
&\quad \left. + \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi e}{e_{fisc} - 1}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi e_0}{e_{fisc} - 1}\right) \right] e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{(e_{fisc}-1)^2}} de, \\
&= \frac{e^3}{6(e_{fisc} - 1)} \Big|_1^{e_{fisc}} + \frac{1}{e_{fisc} - 1} \sum_{k=1}^{e_{fisc}} \left\{ \cos\left(\frac{k\pi e_0}{e_{fisc} - 1}\right) \left[ e^2 \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi e}{e_{fisc} - 1}\right) \left(\frac{e_{fisc} - 1}{k\pi}\right) \right] \Big|_1^{e_{fisc}} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_1^{e_{fisc}} \text{sen} \left( \frac{k\pi e}{e_{fisc} - 1} \right) \left( \frac{e_{fisc} - 1}{k\pi} \right) 2e \, de \Bigg] + \\
& + \text{sen} \left( \frac{k\pi e_0}{e_{fisc} - 1} \right) \left[ -e^2 \cos \left( \frac{k\pi e}{e_{fisc} - 1} \right) \left( \frac{e_{fisc} - 1}{k\pi} \right) \Bigg|_1^{e_{fisc}} + \right. \\
& \left. + \int_1^{e_{fisc}} \cos \left( \frac{k\pi e}{e_{fisc} - 1} \right) \left( \frac{e_{fisc} - 1}{k\pi} \right) 2e \, de \right] \Bigg\} e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{(e_{fisc}-1)^2}}, \\
= & \frac{e_{fisc}^3 - 1}{6(e_{fisc} - 1)} + \frac{1}{e_{fisc} - 1} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \cos \left( \frac{k\pi e_0}{e_{fisc} - 1} \right) \left( \frac{e_{fisc} - 1}{k\pi} \right) \left\{ e_{fisc}^2 \text{sen} \left( \frac{k\pi e_{fisc}}{e_{fisc} - 1} \right) - \right. \right. \\
& - \text{sen} \left( \frac{k\pi}{e_{fisc} - 1} \right) - 2 \left[ -e \cos \left( \frac{k\pi e}{e_{fisc} - 1} \right) \left( \frac{e_{fisc} - 1}{k\pi} \right) \Bigg|_1^{e_{fisc}} + \right. \\
& \left. \left. + \int_1^{e_{fisc}} \cos \left( \frac{k\pi e}{e_{fisc} - 1} \right) \left( \frac{e_{fisc} - 1}{k\pi} \right) de \right] \right\} + \\
& + \text{sen} \left( \frac{k\pi e_0}{e_{fisc} - 1} \right) \left( \frac{e_{fisc} - 1}{k\pi} \right) \left[ -e^2 \cos \left( \frac{k\pi e_{fisc}}{e_{fisc} - 1} \right) + \cos \left( \frac{k\pi}{e_{fisc} - 1} \right) + \right. \\
& \left. + 2 \left[ e \text{sen} \left( \frac{k\pi e}{e_{fisc} - 1} \right) \left( \frac{e_{fisc} - 1}{k\pi} \right) \Bigg|_1^{e_{fisc}} - \int_1^{e_{fisc}} \text{sen} \left( \frac{k\pi e}{e_{fisc} - 1} \right) \left( \frac{e_{fisc} - 1}{k\pi} \right) de \right] \right\} e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{(e_{fisc}-1)^2}}, \\
= & \frac{e_{fisc}^3 - 1}{6(e_{fisc} - 1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{k^2\pi^2 Dn}{(e_{fisc}-1)^2}}}{k\pi} \left\{ \cos \left( \frac{k\pi e_0}{e_{fisc} - 1} \right) \left\{ e_{fisc}^2 \text{sen} \left( \frac{k\pi e_{fisc}}{e_{fisc} - 1} \right) - \text{sen} \left( \frac{k\pi}{e_{fisc} - 1} \right) - \right. \right. \\
& - 2 \left( \frac{e_{fisc} - 1}{k\pi} \right) \left[ -e_{fisc} \cos \left( \frac{k\pi e_{fisc}}{e_{fisc} - 1} \right) + \cos \left( \frac{k\pi}{e_{fisc} - 1} \right) + \right. \\
& \left. \left. + \left( \frac{e_{fisc} - 1}{k\pi} \right) \left[ \text{sen} \left( \frac{k\pi e_{fisc}}{e_{fisc} - 1} \right) - \text{sen} \left( \frac{k\pi}{e_{fisc} - 1} \right) \right] \right] \right\} \\
& + \text{sen} \left( \frac{k\pi e_0}{e_{fisc} - 1} \right) \left\{ -e_{fisc}^2 \cos \left( \frac{k\pi e_{fisc}}{e_{fisc} - 1} \right) + \cos \left( \frac{k\pi}{e_{fisc} - 1} \right) + \right. \\
& + 2 \left( \frac{e_{fisc} - 1}{k\pi} \right) \left[ e_{fisc} \text{sen} \left( \frac{k\pi e_{fisc}}{e_{fisc} - 1} \right) - \text{sen} \left( \frac{k\pi}{e_{fisc} - 1} \right) + \right. \\
& \left. \left. + \left( \frac{e_{fisc} - 1}{k\pi} \right) \left[ \cos \left( \frac{k\pi e_{fisc}}{e_{fisc} - 1} \right) - \cos \left( \frac{k\pi}{e_{fisc} - 1} \right) \right] \right] \right\} \Bigg\} \\
& \hspace{15em} (C.2)
\end{aligned}$$