UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Critérios de Estabilidade para Polinômios

Maria Eduarda Guillen Diomasio

Orientadora: Prof. Dra. Vanessa Avansini Botta Pirani

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, Setembro de 2026

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Critérios de Estabilidade para Polinômios

Maria Eduarda Guillen Diomasio

Orientadora: Prof. Dra. Vanessa Avansini Botta Pirani

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista (UNESP), como requisito para a obtenção do título de Mestre, sob orientação da Profa. Dra. Vanessa Avansini Botta Pirani.

Presidente Prudente, Setembro de 2026

D591c

Diomasio, Maria Eduarda
Critérios de Estabilidade para Polinômios / Maria Eduarda Diomasio. -- Presidente Prudente, 2026
90 p. : il., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente
Orientadora: Vanessa Avansini Botta

1. Modelagem Matemática. 2. Matemática Aplicada. 3. Sistemas Dinâmicos. 4. Dengue. 5. Critério de Routh-Hurwitz. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Dados fornecidos pelo autor(a).

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Presidente Prudente

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Critérios de estabilidade para polinômios

AUTORA: MARIA EDUARDA GUILLEN DIOMASIO
ORIENTADORA: VANESSA AVANSINI BOTTA PIRANI

Aprovada como parte das exigências para obtenção do Título de Mestra em Matemática Aplicada e Computacional, pela Comissão Examinadora:

gov.br Documento assinado digitalmente
VANESSA AVANSINI BOTTA PIRANI
Data: 04/09/2026 14:01:35-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. VANESSA AVANSINI BOTTA PIRANI (Participaçao Presencial)
Departamento de Matemática e Computação / UNESP / Câmpus de Presidente Prudente - FCT

Profa. Dra. LARISSA FERREIRA MARQUES (Participaçao Virtual)
Departamento de Matemática / UNESP / Câmpus de Bauru - FC

Profa. Dra. VANESSA GONÇALVES PASCHOA FERRAZ (Participaçao Virtual)
Câmpus São José dos Campos / Universidade Federal de São Paulo

Presidente Prudente, 04 de setembro de 2026.

A mente que se abre a uma nova ideia
jamais voltará ao seu tamanho original.
Albert Einsten

Resumo

A análise de estabilidade de polinômios desempenha um papel fundamental em diversas áreas da Matemática Aplicada, incluindo sistemas dinâmicos, controle e modelagem matemática. Em particular, a análise da estabilidade de sistemas dinâmicos descritos por equações diferenciais ordinárias está diretamente relacionada à localização de zeros do polinômio característico associado ao modelo matemático. Quando todos os zeros do polinômio possuem parte real negativa, o sistema é considerado assintoticamente estável, caso contrário, podem surgir oscilações ou crescimento não limitado das trajetórias. Dessa forma, compreender as propriedades do polinômio característico e a localização de seus zeros no plano complexo é fundamental para avaliar a estabilidade e prever a evolução temporal do sistema analisado. Portanto, este trabalho propõe-se a investigar o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz e explorar como esse critério pode ser utilizado para analisar modelos matemáticos, especialmente um modelo matemático da Dengue do tipo SIR.

Palavras-Chave: *Estabilidade, Critério de Routh-Hurwitz, Sistemas Dinâmicos, Equações Diferenciais Ordinárias.*

Abstract

The stability analysis of polynomials plays a crucial role in various areas of Applied Mathematics, including dynamical systems, control theory, and mathematical modeling. In particular, the analysis of the stability of dynamical systems described by ordinary differential equations is directly related to the location of the zeros of the characteristic polynomial associated with the mathematical model. When all the zeros of the polynomial have negative real parts, the system is considered asymptotically stable; otherwise, oscillations or unbounded growth of trajectories may occur. Therefore, understanding the properties of the characteristic polynomial and the location of its zeros in the complex plane is essential to assess stability and predict the temporal evolution of the system under analysis. So, this work aims to investigate the Routh-Hurwitz stability criterion and explore how this criterion can be used to analyze mathematical models, especially a mathematical model of Dengue of the SIR.

Keywords: *Stability, Routh-Hurwitz Criterion, Dynamic Systems, Ordinary Differential Equations.*

Lista de Figuras

2.1 Retrato de fase do caso a_1 (nó atrator). 24
2.2 Retrato de fase do caso a_2 (nó instável). 24
2.3 Retrato de fase do caso a_3 (sela). 25
2.4 Retrato de fase do caso b_1 (centro). 25
2.5 Retrato de fase do caso b_2 (foco atrator). 26
2.6 Retrato de fase do caso b_3 (foco instável). 26
2.7 Retrato de fase do caso c_1 (nó atrator impróprio). 26
2.8 Retrato de fase do caso c_2 (nó instável impróprio). 27
2.9 Retrato de fase do caso c_3 (nó atrator imprópio). 27
2.10 Retrato de fase do caso c_4 (nó instável imprópio). 28
2.11 Gráfico de $P(x) = x^2 + 3x + 2$. 42
2.12 Gráfico de $P(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 2$. 42

3.1 Semicírculo no semiplano direito. 47
3.2 Representação dos zeros. 59
3.3 Gráfico de $P(x)$. 59

4.1 Prisma triangular unitário no espaço tridimensional. 70
4.2 Simulação para uma população de 100.000 vetores. 81
4.3 Simulações de diferentes populações de vetores. 82

Lista de Tabelas

2.1 Classificação dos pontos de equilíbrio em sistemas lineares bidimensionais. 28

3.1 Tabela de Routh 49
3.2 Zeros de $P(x) = x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 6x + 4$. 59
3.3 Zeros de $P(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1$. 62
3.4 Zeros de $P(x) = x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 4$. 63

4.1 Parâmetros utilizados no modelo epidemiológico normalizado para a dengue. 80

Lista de Siglas

EDOs: Equações Diferenciais Ordinárias.

EDO: Equação Diferencial Ordinária.

SIR: Suscetíveis, Infectados e Recuperados.

DFE: Equilíbrio Livre da Doença.

EE: Equilíbrio Endêmico.

NGM: Next Generation Matrix.

IBGE: Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística.

Sumário

Resumo **3**

Abstract **5**

Lista de Figuras **6**

Lista de Tabelas **7**

Lista de Siglas **11**

1 INTRODUÇÃO **15**

2 RESULTADOS PRELIMINARES **17**
2.1 Noções básicas de equações diferenciais e sistemas de equações diferenciais 17
2.1.1 Equações Diferenciais Ordinárias 17
2.1.2 Estabilidade do Ponto de Equilíbrio 21
2.1.3 Caso bidimensional 23
2.1.4 Linearização de um Sistema e a Matriz Jacobiana 28
2.2 Introdução à teoria dos Polinômios 30
2.2.1 Equações Polinomiais 31
2.2.2 Relações de Girard ou fórmulas de Viète 34
2.2.3 Soluções das equações quadráticas e cúbicas 36
2.3 Polinômios Estáveis 38

3 CRITÉRIOS DE ESTABILIDADE **43**
3.1 Índice de Cauchy e o Teorema de Sturm 43
3.2 Critério de Routh-Hurwitz 46

4 MODELAGEM MATEMÁTICA DA DENGUE **65**
4.1 Modelo SIR com vetor aplicado à dinâmica da dengue 66
4.2 Análise da Estabilidade 70
4.2.1 Estabilidade do Ponto de Equilíbrio Livre da Doença 70
4.2.2 Estabilidade do Ponto de Equilíbrio Endêmico 74
4.3 Estudo de caso: dinâmica da dengue no município de Presidente Prudente 78

5 CONCLUSÃO **83**

Referências **84**

Capítulo

1

INTRODUÇÃO

A teoria das equações diferenciais tem sido amplamente aplicada em diversas áreas do conhecimento, como a Física, Engenharia e Biologia. Isso se deve ao fato de que as equações diferenciais descrevem os fenômenos naturais por meio da modelagem matemática.

A análise da estabilidade de um sistema dinâmico é um campo de estudo dessa área, fundamental para entender como os sistemas se comportam ao longo do tempo. Em sistemas lineares, essa análise pode ser realizada por meio dos zeros do polinômio característico associado a um conjunto de equações diferenciais que modelam a dinâmica do sistema.

A partir dos zeros do polinômio característico, é possível obter informações sobre o comportamento do sistema, indicando se o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável, instável ou oscilatório. Em sistemas lineares, a análise de estabilidade pode ser realizada através dos autovalores da matriz que descreve o sistema. Quando os autovalores possuem partes reais negativas, o sistema tende a se estabilizar, o que é caracterizado como estabilidade assintótica, enquanto partes reais positivas indicam instabilidade.

Em particular, a estabilidade assintótica dos sistemas dinâmicos descritos por equações diferenciais ordinárias está relacionada diretamente à localização dos zeros dos polinômios característicos associados ao modelo matemático, como ocorre em modelos epidemiológicos. No caso de doenças como a dengue, a análise da estabilidade pode indicar se a doença tende a se erradicar ou persistir na população ao longo do tempo, o que está intimamente relacionado ao número básico de reprodução $\mathcal{R}_0$, parâmetro que indica o potencial de disseminação da infecção. Em geral, quando $\mathcal{R}_0 < 1$, espera-se que a doença tenda a se erradicar na população, enquanto $\mathcal{R}_0 > 1$ indica a persistência. Assim, neste trabalho, o critério de Routh-Hurwitz será aplicado em um modelo matemático da dengue do tipo Suscetíveis-Infectados-Recuperados (SIR), investigando as condições de estabilidade assintótica do modelo estudado e evidenciando a relação com os zeros do polinômio característico e o valor de $\mathcal{R}_0$.

A relevância do presente estudo reside no fato de que o critério de Routh-Hurwitz permanece uma ferramenta clássica e atual na análise de estabilidade de sistemas dinâmicos, sendo amplamente empregado em áreas como teoria de controle, modelagem matemática e epidemiologia. Além disso, o trabalho contribui ao integrar a fundamentação teórica do critério com uma aplicação concreta em um modelo epidemiológico, reforçando o papel da Matemática na compreensão de fenômenos de interesse social e científico.

O Capítulo 2 aborda resultados preliminares que constituem a base teórica para este estudo. Inicialmente, são introduzidos os conceitos fundamentais sobre equações diferenciais ordinárias, uma vez que elas estão diretamente relacionadas ao estudo da estabilidade. Isso ocorre porque muitos sistemas dinâmicos são descritos por esse tipo de equação, e a análise de sua estabilidade depende dos autovalores associados ao polinômio característico

do sistema. Na sequência, o capítulo aborda os principais resultados da teoria dos polinômios, incluindo as relações entre os zeros e coeficientes (Relações de Girard e fórmulas de Viète), bem como a resolução de equações algébricas de segundo e terceiro graus, destacando o papel dos métodos algébricos e numéricos na determinação de soluções. Esses tópicos servem de base para a compreensão da estrutura dos polinômios e da forma como seus zeros se comportam. Posteriormente, são apresentados os conceitos de polinômios estáveis, definidos como aqueles em que seus zeros possuem parte real negativa, com destaque para os polinômios de Hurwitz, fundamentais na teoria de controle e na análise de sistemas lineares. São também discutidos resultados importantes, como o critério de estabilidade para polinômios cúbicos e o teorema que estabelece que, se um polinômio é estável, então todos os seus coeficientes possuem o mesmo sinal.

O Capítulo 3 é dedicado ao critério de estabilidade de Routh-Hurwitz, que fornece condições necessárias e suficientes para que todos os zeros de um polinômio tenham parte real negativa. Esse critério, amplamente aplicado na análise de sistemas dinâmicos, permite determinar a estabilidade assintótica de modelos matemáticos sem a necessidade de calcular explicitamente os zeros do polinômio característico. São apresentados o desenvolvimento teórico do critério, suas implicações, casos particulares e exemplos de aplicação, consolidando assim a relação entre teoria dos polinômios e estabilidade de sistemas dinâmicos, cujos resultados podem ser encontrados em [4].

No Capítulo 4, o critério de Routh-Hurwitz é aplicado à análise de um modelo epidemiológico da dengue, evidenciando sua utilidade na determinação da estabilidade assintótica dos pontos de equilíbrio do modelo e ilustrando como resultados teóricos da Álgebra e das Equações Diferenciais podem ser empregados na compreensão de problemas de relevância prática.

Por fim, na elaboração desta dissertação, a autora contou com o auxílio de ferramentas de inteligência artificial, como ChatGPT e Gemini, utilizadas como recurso complementar ao desenvolvimento do trabalho. Essas ferramentas foram utilizadas como apoio à revisão e ao aprimoramento da escrita, à organização de ideias, à compreensão de conteúdos teóricos e à identificação de possíveis inconsistências no texto.

O conteúdo científico, as análises, os resultados e as conclusões apresentados neste trabalho são de responsabilidade da autora. Todo o conteúdo produzido ou aprimorado com o auxílio dessas ferramentas foi revisado, avaliado e validado pela autora e orientadora.

Capítulo

2

RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo, serão apresentados os conceitos preliminares essenciais para o desenvolvimento deste estudo. Inicialmente, são abordadas as noções fundamentais sobre equações diferenciais ordinárias (EDOs) e sua relação com a estabilidade assintótica de sistemas dinâmicos. Para isso, será discutido como um sistema pode ser representado por equações diferenciais e de que forma a estabilidade está associada às propriedades da equação característica e aos autovalores correspondentes.

Em seguida, serão revisados conceitos básicos sobre polinômios, incluindo operações algébricas, propriedades estruturais e o algoritmo de Euclides, uma ferramenta importante utilizada no capítulo posterior. Também serão discutidas as equações polinomiais e a resolução de casos específicos, como as equações quadráticas e cúbicas, destacando as dificuldades que surgem à medida que o grau do polinômio aumenta.

Por fim, a última seção deste capítulo apresenta o estudo dos polinômios estáveis, abordando sua definição, as condições de estabilidade no caso cúbico, bem como teoremas e exemplos que ilustram suas principais propriedades.

2.1 Noções básicas de equações diferenciais e sistemas de equações diferenciais

Nesta seção, as obras de [3], [17] e [22] foram utilizadas como referências principais. Inicialmente serão apresentados os principais conceitos teóricos que fundamentam a análise qualitativa de sistemas dinâmicos descritos por Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), destacando sua importância na modelagem de fenômenos naturais e de engenharia. Em seguida, é abordado o conceito de estabilidade de pontos de equilíbrio, discutindo os critérios que permitem caracterizar o comportamento das soluções nas proximidades desses pontos. Posteriormente, é analisado o caso bidimensional, com ênfase na classificação dos pontos de equilíbrio por meio dos autovalores do sistema e na interpretação dos respectivos retratos de fase, os quais fornecem uma representação geométrica da dinâmica das trajetórias. Por fim, apresenta-se a matriz Jacobiana, ferramenta fundamental para a linearização de sistemas não lineares e para a investigação local da estabilidade de seus pontos de equilíbrio.

2.1.1 Equações Diferenciais Ordinárias

A seguir serão apresentados a definição de equações diferenciais ordinárias (EDO) e alguns resultados importantes.

Definição 1 *Considere a equação diferencial ordinária (EDO)*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x),$$

onde $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *é uma função dada. Uma função diferenciável* $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *é denominada solução da equação diferencial no intervalo* I *se satisfaz as seguintes condições:*

1. *Para todo* $t \in I$*, o ponto* $(t, \varphi(t))$ *pertence ao domínio* Ω*;*
2. *A função* φ *satisfaz a equação diferencial, isto é,*

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t)), \qquad \forall\, t \in I.$$

A equação acima é considerada uma equação diferencial ordinária de primeira ordem e pode ser denotada por

$$\dot{x} = f(t, x). \tag{2.1}$$

Observação 1 *A ordem de uma equação diferencial ordinária é determinada pela derivada de maior ordem presente na equação.*

Um sistema de EDO's pode ser escrito de forma vetorial. Considere o sistema de equações diferenciais (2.1) onde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ representa o vetor das variáveis de estado e $f = (f_1, \ldots, f_n)$ é uma função vetorial. Uma solução desse sistema é uma função vetorial

$$\varphi(t) = \big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)\big),$$

onde, para cada instante t, suas componentes satisfazem as equações diferenciais do sistema. Em outras palavras, dizer que $\varphi(t)$ é solução de (2.1) equivale a afirmar que cada componente $\varphi_i(t)$ satisfaz a equação

$$\frac{d\varphi_i}{dt}(t) = f_i\big(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\big), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Assim, uma equação diferencial vetorial pode ser entendida como um conjunto de n equações diferenciais escalares. Por esse motivo, o sistema vetorial dado em (2.1) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, \ldots, x_n), \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, \ldots, x_n), \end{cases}$$

para todo $t \in I$.

Definição 2 *Uma equação diferencial ordinária de ordem* n *é dita linear quando é possível escrevê-la da escrita na forma*

$$a_n(t)x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = f(t),$$

em que $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *e* f *são funções contínuas definidas em um intervalo* $I : \alpha < t < \beta$*, com* $a_n(t) \neq 0$ *para todo* $t \in I$.

Em resumo, a função desconhecida x e suas derivadas aparecem apenas na primeira potência e não são multiplicadas entre si. Quando essas condições não são satisfeitas, a equação é denominada não linear. Além disso, uma equação diferencial linear é denominada homogênea quando $f(t) = 0$. Caso contrário, isto é, quando $f(t) \neq 0$, a equação é denominada não homogênea.

Considere um considere um sistema de n equações da forma

$$\begin{cases} \dot{x_1} = a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t), \\ \dot{x_2} = a_{21}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t), \\ \quad \vdots \\ \dot{x_n} = a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t), \end{cases} \tag{2.2}$$

em que os coeficientes a $a_{ij}(t)$ e os termos independentes $b_i(t)$, para $i, j = 1, , n$, são funções contínuas definidas em um intervalo I. Além disso, o sistema (2.2) pode ser reescrito da forma

$$\dot{x_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + b_i(t), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Uma família de funções $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$ (reais ou complexas) cujas componentes são diferenciáveis e satisfazem simultaneamente todas as equações do sistema é solução de (2.2) se

$$\frac{d\varphi_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\varphi_j + b_i(t), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

para todo $t \in I$. O sistema considerado também pode ser escrito na forma matricial

$$\dot{x} = A(t)x(t) + b(t),$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \qquad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix},$$

onde $A(t) = (a_{ij}(t))$ é a matriz de ordem n cujos elementos são a_{ij} e $b(t) = (b_i(t))$ é o vetor coluna de ordenadas b_i. Para $b(t) = 0$ obtém-se um sistema linear homogêneo da forma $\dot{x} = Ax$.

As equações diferenciais podem ser estudadas por meio de três abordagens principais:

- *Análise analítica:* busca determinar expressões explícitas para as soluções das equações diferenciais. Quando essas expressões podem ser obtidas, elas descrevem o comportamento do sistema para quaisquer condições iniciais e valores dos parâmetros. Entretanto, nem sempre é possível encontrar soluções em forma fechada.

- *Análise numérica:* consiste na obtenção de aproximações da solução em pontos discretos da variável independente. Essa abordagem é amplamente utilizada em simulações computacionais, permitindo investigar sistemas para os quais não existem soluções analíticas. Contudo, os resultados dependem das condições iniciais e dos parâmetros considerados.

- *Análise qualitativa:* procura descrever o comportamento das soluções sem determinar sua expressão explícita. Essa abordagem possibilita identificar propriedades importantes do sistema, como estabilidade, convergência e comportamento assintótico das trajetórias, a partir das características da própria equação diferencial.

No caso particular de sistemas lineares da forma

$$\dot{x} = Ax,$$

a análise qualitativa está diretamente relacionada às propriedades da matriz A. Em especial, o comportamento das soluções é determinado pelos autovalores dessa matriz. Esses autovalores são obtidos resolvendo a equação característica

$$\det(A - \lambda I) = 0, \tag{2.3}$$

em que I representa a matriz identidade de ordem n, e λ corresponde aos autovalores da matriz A.

O método para solucionar um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem pode ser estendido para resolver um sistema de ordem n pelo polinômio característico, obtido a partir do determinante definido em (2.3), onde cada autovalor está associado a uma solução fundamental do sistema.

Considere agora equação diferencial linear homogênea com coeficientes constantes

$$L[x] = x^{(n)}(t) + b_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + b_0x(t) = 0 \tag{2.4}$$

cuja matriz associada ao polinômio característico possui ordem n. Considerando $x(t) = e^{\lambda t}$ solução da EDO e substituindo em (2.4), tem-se

$$L[e^{\lambda t}] = e^{\lambda t}(\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0) = e^{\lambda t}Z(\lambda),$$

onde

$$Z(\lambda) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0.$$

Para valores de λ tais que $Z(\lambda) = 0$, tem-se $L[e^{\lambda t}] = 0$. Logo $x(t) = e^{\lambda t}$ é solução da EDO linear.

O polinômio $Z(\lambda)$ é denominado polinômio característico, e a equação $Z(\lambda) = 0$ é a equação característica da equação diferencial. Um polinômio de grau n possui n zeros (reais ou complexos):

- Zeros reais e distintos: Se os zeros $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são reais e distintos, as soluções fundamentais são $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}$. A solução geral é então

  $$x(t) = b_1e^{\lambda_1 t} + b_2e^{\lambda_2 t} + \cdots + b_ne^{\lambda_n t}.$$

  A independência linear dessas soluções pode ser verificada pelo cálculo do método do Wronskiano.

- Zeros complexos: Quando os zeros são complexos, eles aparecem em pares conjugados $\lambda = \alpha \pm i\mu$, pois os coeficientes b_i são reais. Nesse caso, as soluções correspondentes $e^{(\alpha+i\mu)t}$ e $e^{(\alpha-i\mu)t}$ podem ser reescritas como combinações de soluções reais:

  $$e^{\alpha t}\cos(\mu t) \text{ e } e^{\alpha t}\sin(\mu t).$$

Assim, mesmo quando há zeros complexos, a solução geral pode ser expressa como combinação linear de soluções reais.

- Zeros repetidos: Se um zero λ_1 possui multiplicidade $s \leq n$, então além de $e^{\lambda_1 t}$, também são soluções:
$$te^{\lambda_1 t}, t^2 e^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{s-1} e^{\lambda_1 t}.$$
Se o zero repetido for complexo, $\lambda = \alpha + i\mu$, e seu conjugado $\alpha - i\mu$ também se repete s vezes, então as partes reais e imaginárias dessas soluções geram $2s$ soluções reais:

$$e^{\alpha t}\cos(\mu t),\ e^{\alpha t}\sin(\mu t),\ te^{\alpha t}\cos(\mu t),\ te^{\alpha t}\sin(\mu t), \ldots, t^{s-1}e^{\alpha t}\cos(\mu t),\ \text{e}\ t^{s-1}e^{\alpha t}\sin(\mu t).$$

Portanto, a solução geral pode sempre ser expressa como combinação linear de n soluções reais.

A determinação dos zeros de uma equação característica pode envolver o cálculo dos zeros de ordem elevada, inclusive complexas.

Portanto, a estabilidade depende dos autovalores λ_j: a parte real desses autovalores determina o comportamento das soluções ao longo do tempo, enquanto a parte imaginária está associada à ocorrência de oscilações. Assim, a análise dos autovalores permite classificar os pontos de equilíbrio e determinar se as trajetórias são convergentes, divergentes ou permanecem em uma região limitada do espaço de estados.

2.1.2 Estabilidade do Ponto de Equilíbrio

Definição 3 *Um sistema linear $\dot{x} = Ax$ chama-se hiperbólico se todos os autovalores de A tem parte real diferente de zero.*

Definição 4 *Dizemos que x^* é um ponto de equilíbrio quando*

$$\dot{x}(x^*) = 0,$$

com

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*),$$

o que significa que

$$f(x^*) = 0.$$

Considerando o sistema linear $\dot{x} = Ax$ e supondo que A é invertível, então $x^* = 0$ é o único ponto de equlíbrio desse sistema.

Definição 5 *Um ponto de equilíbrio x^* é dito estável quando pequenas perturbações na condição inicial produzem apenas pequenas variações na trajetória do sistema. Dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um número $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que, se a condição inicial satisfaz*

$$\|x(0) - x^*\| < \delta(\varepsilon),$$

então a solução permanece sempre próxima do ponto de equilíbrio, isto é,

$$\|x(t) - x^*\| < \varepsilon, \qquad \forall\, t \geq 0.$$

Em outras palavras, uma trajetória que começa suficientemente próxima de x^* nunca se afasta mais do que uma distância ε escolhida.

Definição 6 *Um sistema autônomo é um conjunto de equações diferenciais, lineares ou não lineares, com parâmetros constantes e sujeitas a funções de entrada que não dependem explicitamente do tempo t.*

Definição 7 *Se algum coeficiente ou função de entrada depende explicitamente do tempo, o sistema é chamado de não-autônomo.*

Definição 8 *Um ponto de equilíbrio x^* é dito assintoticamente estável quando todas as trajetórias que começam suficientemente próximas dele convergem para esse ponto com o passar do tempo. Isto é, existe um número $\delta > 0$ tal que, se*

$$\|x(0) - x^*\| < \delta,$$

então

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t) - x^*\| = 0.$$

Em outras palavras, uma trajetória que começa próxima de x^* não apenas permanece próxima, mas se aproxima cada vez mais do ponto de equilíbrio à medida que o tempo passa.

Definição 9 *Um ponto de equilíbrio x^* é dito instável quando ele não é estável. Isso significa que existe um número $\varepsilon > 0$ tal que, por menor que seja a vizinhança escolhida ao redor de x^*, sempre é possível encontrar uma condição inicial nessa vizinhança cuja trajetória, em algum instante, se afasta mais do que ε do ponto de equilíbrio.*

Teorema 1 *Seja x^* um ponto de equilíbrio de um sistema linear, e sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ os autovalores da matriz associada ao sistema. Diz-se que:*

- *o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável se todos os autovalores possuem parte real negativa, isto é,*

  $$\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

  pois, nesse caso, as soluções tendem ao ponto de equilíbrio quando $t \to \infty$;

- *o ponto de equilíbrio é dito instável se existe pelo menos um autovalor cuja parte real é positiva, isto é,*

  $$\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0$$

  para algum i, uma vez que as soluções associadas se afastam do ponto de equilíbrio à medida que $t \to \infty$.

Essa relação entre os autovalores da matriz A e o comportamento das soluções é a base da análise de estabilidade de sistemas dinâmicos. Compreender como as soluções evoluem em função dos autovalores permitem prever o comportamento do sistema. Em sistemas de maiores dimensões ou não lineares, essa análise exige uma compreensão profunda de como os autovalores se comportam ao longo de diferentes intervalos de tempo, afetando as soluções de maneiras dinâmicas. A estabilidade de sistemas dinâmicos, portanto, está ligada à localização dos autovalores no plano complexo e à interpretação de sua parte real. Esse é o ponto de partida para o estudo de critérios de estabilidade, como o critério de Routh-Hurwitz, que fornecem métodos para verificar a estabilidade de sistemas sem a necessidade de calcular explicitamente os autovalores.

Além disso, a análise de estabilidade dos pontos de equilíbrio desempenha um papel fundamental no estudo dos sistemas dinâmicos, pois fornece uma base para identificar o comportamento das soluções de equações diferenciais. Para estudar a estabilidade do ponto de equilíbrio no caso não linear faz-se a linearização do sistema. A ferramenta matemática para essa análise é a matriz Jacobiana, que será definida posteriormente.

2.1.3 Caso bidimensional

O caso bidimensional merece destaque na análise qualitativa de sistemas dinâmicos, pois permite uma interpretação geométrica completa do comportamento das soluções por meio dos retratos de fase. Além disso, diversos fenômenos observados em sistemas de maior dimensão também podem ser identificados em sistemas de segunda ordem, tornando esse caso fundamental para a compreensão da dinâmica das trajetórias.

Consideremos equações lineares homogêneas com coeficientes constantes da forma

$$\dot{x} = Ax,$$

em que A é uma matriz quadrada de ordem n.

Inicialmente, consideremos o caso $n = 1$. Nessa caso o sistema se reduz a uma única equação de primeira ordem $\dot{x} = Ax$ cuja solução dessa equação é dada por

$$x(t) = ce^{at},$$

onde c é uma constante determinada pela condição inicial e a é o unico elemento da matriz A .

O comportamento das soluções depende exclusivamente do sinal de a. Se $a < 0$, então $e^{at} \to 0$ quando $t \to +\infty$. Consequentemente, todas as soluções tendem para a origem, independentemente da condição inicial. Nesse caso, a solução de $x = 0$ é dita assintoticamente estável. Por outro lado, se $a > 0$, então e^{at} cresce sem limite quando $t \to +\infty$. Assim, qualquer solução não trivial afasta-se da origem à medida que o tempo aumenta, caracterizando a instabilidade do ponto $x = 0$.

Para $n = 2$ segue que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad \det(A) \neq 0.$$

A condição $\det(A) \neq 0$ garante que a matriz A é invertível e, consequentemente, que a única solução da equação $Ax = 0$ é a origem $(0, 0)$. Isso significa que a origem é o único ponto do plano em que o sistema permanece sem movimento. Esse ponto é denominado ponto de equilíbrio, pois uma solução que se inicia exatamente nele permanece nesse estado para todo instante de tempo.

No caso de sistemas bidimensionais, em que A é uma matriz de ordem 2, o polinômio característico também pode ser escrito na forma

$$\lambda^2 - (\text{traço } A)\lambda + \det A,$$

onde o traço de uma matriz quadrada é a soma dos elementos da diagonal principal, isto é, todos os a_{ij} tais que $i = j$. Os autovalores da matriz A associados ao polinômio característico são dados por

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{traço } A \pm \sqrt{(\text{traço } A)^2 - 4 \det A}}{2}.$$

Distingue-se três casos possíveis para os valores de λ_1 e λ_2 da matriz A:

a) Os valores próprios λ_1 e λ_2 são reais e distintos. Nesse caso, necessariamente $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$.

b) Os valores próprios são complexos conjugados, isto é,

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta,$$

com $\beta \neq 0$.

c) Os valores próprios são reais e iguais, ou seja,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda,$$

com $\lambda \neq 0$.

Para cada caso, a classificação dos pontos de equilíbrio de sistemas bidimensionais depende da natureza dos autovalores associados à matriz A.

Caso (a): Autovalores reais e distintos

Caso a_1: $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ (nó atrator): Como os dois valores próprios são negativos, todas as trajetórias se aproximam da origem quando o tempo aumenta. Portanto, a origem é um ponto atrator. Além disso, a aproximação à origem ocorre na direção do autovetor associado ao maior valor próprio λ_1, isto é, na reta E_1. As únicas trajetórias que não seguem esse comportamento são aquelas que estão sobre a reta E_2, gerada pelo autovetor associado a λ_2, e permanecem nela durante todo o movimento, como pode ser visto na figura a seguir

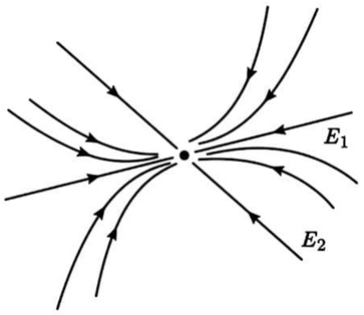


Figura 2.1: Retrato de fase do caso a_1 (nó atrator).
Fonte: Baseado em [22].

Caso a_2: $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ (nó instável): Como os dois valores próprios são positivos, todas as trajetórias se afastam da origem quando o tempo aumenta. Assim, as trajetórias saem da origem seguindo a direção da reta E_2, associada ao maior valor próprio λ_2.

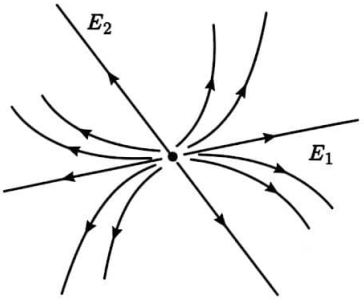


Figura 2.2: Retrato de fase do caso a_2 (nó instável).
Fonte: Baseado em [22].

Caso a_3: $\lambda_2 > 0 > \lambda_1$ (sela): As trajetórias sobre a reta E_1 aproximam-se da origem quando o tempo aumenta, enquanto as trajetórias sobre a reta E_2 afastam-se da origem. As demais trajetórias não convergem para a origem: elas se aproximam da direção de E_1 para valores negativos do tempo e da direção de E_2 para valores positivos.

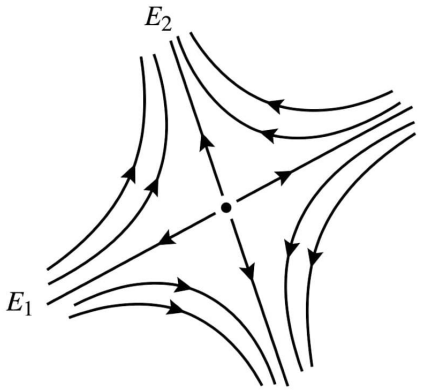


Figura 2.3: Retrato de fase do caso a_3 (sela).
Fonte: Baseado em [22].

Caso (b): Os autovalores são complexos conjugados

Caso b_1: $\alpha = 0$ (centro): A origem é um centro. Todas as trajetórias, exceto a solução nula, são curvas fechadas ao redor da origem. As soluções não se aproximam nem se afastam da origem, permanecendo a uma distância constante dela, conforme a figura abaixo.

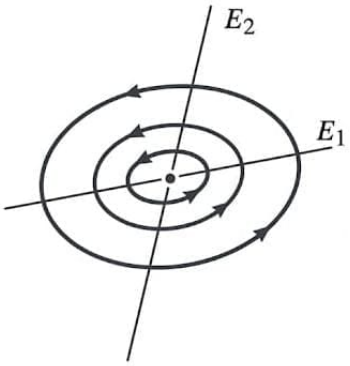


Figura 2.4: Retrato de fase do caso b_1 (centro).
Fonte: Baseado em [22].

Caso b_2: $\alpha < 0$ (foco atrator): A origem é um foco atrator. Todas as trajetórias aproximam-se da origem quando o tempo aumenta, realizando um movimento espiralado ao seu redor.

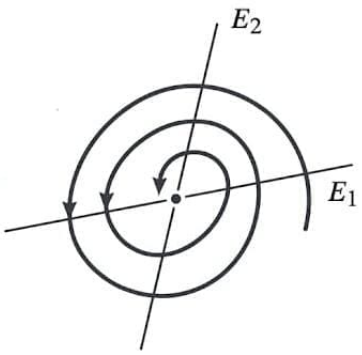


Figura 2.5: Retrato de fase do caso b_2 (foco atrator).
Fonte: Baseado em [22].

Caso b_3: $\alpha > 0$ (foco instável): A origem é um foco instável. As trajetórias afastam-se da origem quando o tempo aumenta, seguindo um movimento espiralado.

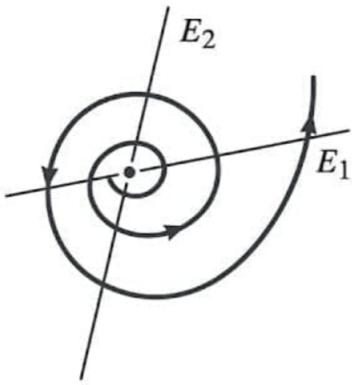


Figura 2.6: Retrato de fase do caso b_3 (foco instável).
Fonte: Baseado em [22].

Caso (c): Autovalores são reais e iguais

Caso c_1: $\lambda < 0$ (nó atrator impróprio): A origem é um nó atrator impróprio. Todas as trajetórias, exceto a solução nula, são semirretas dirigidas para a origem. As soluções aproximam-se da origem quando o tempo aumenta.

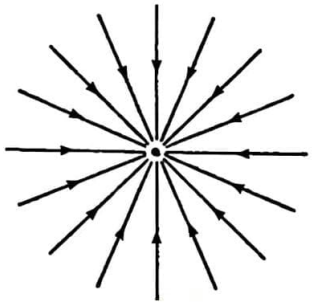


Figura 2.7: Retrato de fase do caso c_1 (nó atrator impróprio).
Fonte: Baseado em [22].

Caso c_2: $\lambda > 0$ (nó instável impróprio): A origem é um nó instável impróprio. Todas as trajetórias, exceto a solução nula, são semirretas que se afastam da origem. As soluções afastam-se da origem quando o tempo aumenta.

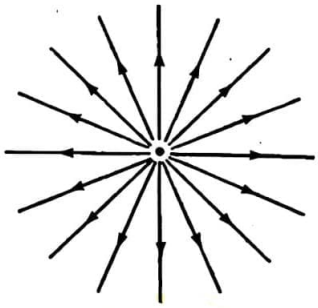


Figura 2.8: Retrato de fase do caso c_2 (nó instável impróprio).
Fonte: Baseado em [22].

Caso c_3: $\lambda < 0$ (nó atrator impróprio): A origem é um nó atrator impróprio. Existe uma única direção própria E_1. Todas as trajetórias que não pertencem a E_1 aproximam-se da origem quando o tempo aumenta, tornando-se cada vez mais tangentes a E_1.

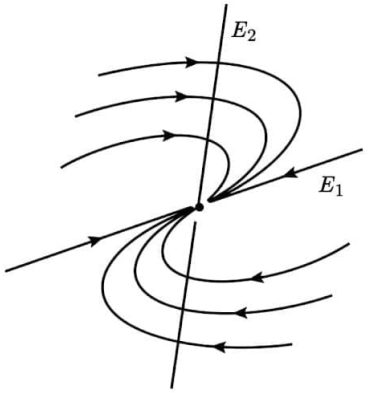


Figura 2.9: Retrato de fase do caso c_3 (nó atrator imprópio).
Fonte: Baseado em [22].

Caso c_4: $\lambda > 0$ (nó instável impróprio): A origem é um nó instável impróprio. Existe uma única direção própria E_1. Todas as trajetórias que não pertencem a E_1 afastam-se da origem quando o tempo aumenta, tornando-se cada vez mais tangentes a E_1.

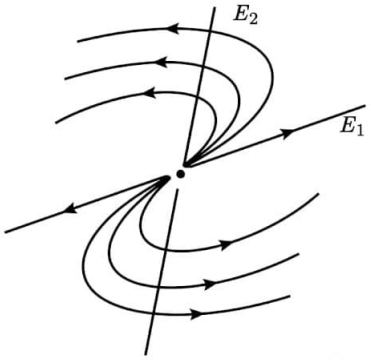


Figura 2.10: Retrato de fase do caso c_4 (nó instável impróprio).
Fonte: Baseado em [22].

Conforme visto anteriormente, o comportamento das trajetórias no plano de fase está diretamente relacionado às propriedades da matriz A. Dessa forma, a análise dos autovalores permite identificar se um ponto de equilíbrio é atrator, repulsor ou possui comportamento oscilatório, fornecendo informações qualitativas sobre a dinâmica do sistema sem a necessidade de determinar explicitamente suas soluções.

Na tabela a seguir, apresenta-se uma classificação dos pontos de equilíbrio em sistemas lineares bidimensionais, considerando as características dos autovalores associados à matriz do sistema. Embora essa classificação seja aplicável a sistemas lineares, muitos sistemas dinâmicos encontrados em aplicações práticas são não lineares. Nesse contexto, torna-se necessário utilizar ferramentas que permitam aproximar localmente o comportamento do sistema, como a linearização por meio da matriz Jacobiana, que será apresentada posteriormente.

Tabela 2.1: Classificação dos pontos de equilíbrio em sistemas lineares bidimensionais.

Autovalores	**Tipo**	**Estabilidade**
$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$	Nó atrator	Assintoticamente estável
$0 < \lambda_1 < \lambda_2$	Nó instável	Instável
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	Sela	Instável
$\lambda = \alpha \pm i\beta,\ \alpha = 0$	Centro	Estável (não assintoticamente)
$\lambda = \alpha \pm i\beta,\ \alpha < 0$	Foco atrator	Assintoticamente estável
$\lambda = \alpha \pm i\beta,\ \alpha > 0$	Foco instável	Instável
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$	Nó impróprio	Assintoticamente estável
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$	Nó impróprio	Instável

2.1.4 Linearização de um Sistema e a Matriz Jacobiana

Conforme visto anteriormente, os comportamento de sistemas lineares é determinado pelos autovalores da matriz associada ao sistema. Em particular, a estabilidade de um ponto de equilíbrio depende da localização desses autovalores no plano complexo. Entretanto, muitos modelos matemáticos utilizados para descrever fenômenos físicos, biológicos, econômicos e de engenharia são naturalmente não lineares, de modo que os resultados obtidos para sistemas lineares não podem ser aplicados diretamente.

Em geral, a determinação da solução exata de um sistema não linear é uma tarefa difícil ou, em muitos casos, impossível por métodos analíticos. Entretanto, quando o interesse está voltado para o comportamento das soluções nas proximidades de um ponto de equilíbrio, é possível associar ao sistema não linear um sistema linear que aproxima sua dinâmica local. Esse procedimento é denominado linearização, sendo a matriz Jacobiana a ferramenta utilizada para construir essa aproximação.

Definição 10 *Seja*

$$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \qquad F(x_1, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{bmatrix}.$$

A matriz Jacobiana de F em um ponto $x = (x_1, \ldots, x_n)$ é a matriz $m \times n$ dada por

$$J_F(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}.$$

Avaliando a matriz Jacobiana no ponto de equilíbrio x^*, obtém-se um sistema linear que representa uma aproximação de um sistema não-linear. Quando o ponto de equilíbrio é hiperbólico, a estabilidade local do sistema não linear é determinada pelo sistema linear obtido pela linearização.

Dessa forma, a estabilidade local do sistema original pode ser investigada por meio dos autovalores da matriz associados ao polinômio caracteristico

$$\det(J_F - \lambda I),$$

e a sua análise permite classificar o sistema da seguinte maneira:

- Se todos os autovalores de $J(x^*)$ possuem partes reais negativas, então x^* é assintoticamente estável.
- Se pelo menos um autovalor possui parte real positiva, então x^* é instável, ou seja, há trajetórias que se afastam de x^*.
- Se algum autovalor possui parte real igual a zero, o ponto x^* não é necessariamente hiperbólico. Neste caso, a estabilidade pode ser determinada através de técnicas como o método de Lyapunov.

Em resumo, observa-se que a análise da estabilidade local de um sistema não linear reduz-se ao estudo dos autovalores da matriz Jacobiana. Como esses autovalores são os zeros do polinômio característico

$$P(\lambda) = \det(J_F(x^*) - \lambda I),$$

o problema da estabilidade pode ser reformulado como um problema de localização dos zeros de um polinômio no plano complexo.

Para polinômios de grau elevado, entretanto, o cálculo explícito dos zeros pode ser inviável por métodos analíticos e até mesmo computacionais. Por esse motivo, tornam-se relevantes os critérios algébricos de estabilidade, que permitem determinar a localização das zeros sem calculá-las explicitamente, o que torna o critério de Routh-Hurwitz uma ferramenta muito importante.

2.2 Introdução à teoria dos Polinômios

Antes de iniciar a teoria dos polinômios estáveis, é fundamental revisar alguns conceitos básicos sobre polinômios. Este estudo preliminar é essencial para fortalecer a base teórica necessária para a compreensão das propriedades dos polinômios estáveis e suas aplicações. Esta seção abordará a definição formal de polinômios, suas operações algébricas e algumas propriedades essenciais do anel de polinômios. Os resultados a seguir se encontram-se em [7] e [15].

Seja F um corpo, o conjunto de polinômios em x com coeficientes em F, denotado por $F[x]$, é definido como o conjunto de todas as expressões da forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0,$$

onde $a_i \in F$ para todo $i = 0, 1, \ldots, n$, e $a_n \neq 0$. O número n é chamado de grau do polinômio $P(x)$ e é denotado por $\deg P(x)$.

No conjunto $F[x]$, definem-se as operações de soma e produto entre polinômios. Para isso, considere dois polinômios dados por:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \quad \text{e} \quad Q(x) = b_m x^m + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0.$$

Definição 11 *Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ polinômios, diz-se que $P(x) = Q(x)$ se, e somente se, $a_i = b_i$ para todo $i \geq 0$.*

Ainda, considerando os mesmos polinômios $P(x)$ e $Q(x)$, as operações polinomiais são definidas:

- **Soma**: Dados $P(x)$ e $Q(x)$,

  $$(P + Q)(x) = P(x) + Q(x) = c_r x^r + c_{r-1}x^{r-1} + \cdots + c_0,$$

  onde $c_i = a_i + b_i$.

- **Produto**: Dados $P(x)$ e $Q(x)$,

  $$(PQ)(x) = P(x)Q(x) = c_s x^s + c_{s-1}x^{s-1} + \cdots + c_0,$$

  onde

  $$c_i = a_i b_0 + a_{i-1}b_1 + \cdots + a_0 b_i, \forall i.$$

Exemplo 1 *Sejam $P(x) = 2x^2 + 3x + 5$ e $Q(x) = x^2 + 4x + 1$ polinômios em $F[x]$ então,*

$$\begin{aligned}(P + Q)(x) &= (2x^2 + 3x + 5) + (x^2 + 4x + 1) \\ &= (2 + 1)x^2 + (3 + 4)x + (5 + 1) \\ &= 3x^2 + 7x + 6.\end{aligned}$$

O produto dos mesmos polinômios é dado por:

$$\begin{aligned}(PQ)(x) &= (2x^2+3x+5)(x^2+4x+1)\\ &= 2x^4+8x^3+2x^2+3x^3+12x^2+3x+5x^2+20x+5\\ &= 2x^4+11x^3+19x^2+23x+5.\end{aligned}$$

Observe que é possível demonstrar que $F[x]$ define um anel comutativo com unidade. Além disso, valem as seguintes propriedades para os graus dos polinômios:

1. Se $P(x), Q(x) \in F[x]$, então $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.
2. Se $P(x) + Q(x) \neq 0$, então $\deg(P+Q) \leq \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$.

Definição 12 *O polinômio nulo é aquele cujos coeficientes são todos iguais a zero:*

$$0(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + \cdots + 0x + 0.$$

Esse polinômio é chamado de polinômio nulo, já os polinômios da forma $P(x) = a_0$, com $a_0 \neq 0$, são chamados de polinômios constantes e têm grau zero.

Uma ferramenta amplamente utilizada no estudo dos polinômios é a propriedade conhecida como o Algoritmo Euclidiano, ou algoritmo da divisão. Dado dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ em $F[x]$ com $Q(x) \neq 0$, existe uma única decomposição:

$$P(x) = Q(x)S(x) + R(x),$$

onde $S(x), R(x) \in F[x]$ e $R(x) = 0$ ou $\deg(R) < \deg(Q)$.

Um polinômio $P(x) \in F[x]$ é chamado mônico se o coeficiente do termo de maior grau for 1. Assim, um polinômio mônico de grau n pode ser escrito como:

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0.$$

Se $P(x), Q(x) \in F[x]$ e $Q(x) \neq 0$, dizemos que $Q(x)$ divide $P(x)$, denotado por $Q(x)|P(x)$, se existir um polinômio $S(x) \in F[x]$ tal que:

$$P(x) = Q(x)S(x).$$

Os polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ são relativamente primos se o máximo divisor comum entre eles for 1. Por fim, um polinômio $P(x)$ de grau positivo é irredutível em $F[x]$ se, para qualquer polinômio $Q(x) \in F[x]$, temos que $P(x)$ divide $Q(x)$ ou $P(x)$ é relativamente primo a $Q(x)$.

Essas definições são essenciais para compreender a estrutura algébrica de $F[x]$, uma vez que o estudo da divisibilidade, da fatoração e da irredutibilidade de polinômios fornece a base para a construção de extensões de campos e para a análise dos zeros de polinômios.

2.2.1 Equações Polinomiais

O estudo das equações polinomiais é um dos principais problemas da Álgebra. A resolução das equações algébricas é a questão central: para polinômios quadráticos, a solução é bem conhecida e pode ser obtida algebricamente para todos os valores possíveis de seus coeficientes. No entanto, a dificuldade de resolver equações aumenta à medida que o grau do polinômio cresce, principalmente devido à complexidade envolvida.

Uma das maiores contribuições para a teoria das equações algébricas veio de Carl Friedrich Gauss, que desenvolveu uma teoria importante sobre equações polinomiais. Gauss provou que todo polinômio de uma variável com coeficientes complexos pode ser fatorado em fatores lineares ou quadráticos, o que se tornou uma base fundamental para a álgebra moderna. Essa descoberta levou à formulação do que hoje conhecemos como o Teorema Fundamental da Álgebra.

O Teorema Fundamental da Álgebra afirma que todo polinômio não constante de uma variável, com coeficientes complexos, tem pelo menos um zero no conjunto dos números complexos. Seguem alguns resultados importantes desse estudo.

Teorema 2 ***(Teorema Fundamental da Álgebra)*** *Seja o polinômio:*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

de grau n com $a_n \neq 0$,. Então existe pelo menos um $r \in \mathbb{C}$ tal que $P(r) = 0$.

Mais detalhes deste teorema em [6].

Isso implica que qualquer polinômio de grau $n \geq 1$, com coeficientes complexos, possui pelo menos uma solução no conjunto dos números complexos. Esse teorema é fundamental porque garante a existência de zeros para qualquer polinômio não constante, permitindo a fatoração dos polinômios em termos de seus zeros.

Teorema 3 (Teorema de D'Alembert) *Um polinômio P é divisível por $x - a$ se, e somente se, a é um zero de $P(x)$, isto é, se e somente se $P(a) = 0$.*

Demonstração. Seja $P(x)$ um polinômio com coeficientes complexos. Queremos mostrar que $P(x)$ possui pelo menos um zero complexo.

Sabemos que um polinômio $P(x)$ é divisível por $(x - a)$ se, e somente se, a é um zero de $P(x)$. Pelo teorema algoritmo da divisão polinomial, ao dividir $P(x)$ por $(x - a)$, obtém-se um quociente $Q(x)$ e um resto R tal que:

$$P(x) = (x - a)Q(x) + R.$$

Para que $(x - a)$ seja um fator de $P(x)$, o resto deve ser zero, ou seja, $R = 0$. Isso implica que $P(a) = 0$, ou seja, a é um zero de $P(x)$.

Agora, seja $P(x)$ um polinômio de grau $n \geq 1$. Se assumirmos que $P(x)$ não possui zeros complexos, então ele não pode ser fatorado em termos lineares na forma $(x - a)$. No entanto, pelo Teorema 2, todo polinômio de grau maior ou igual a 1 com coeficientes complexos admite pelo menos um zero complexo. Isso contradiz nossa suposição inicial, provando que $P(x)$ tem pelo menos uma zero complexo. ■

Teorema 4 ***(Teorema da Decomposição)*** *Seja $P(x)$ um polinômio de grau n, com coeficientes complexos. Então, $P(x)$ pode ser fatorado como o produto de fatores lineares. Ou seja, para um polinômio da forma:*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

com coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ complexos e $a_n \neq 0$, podemos escrever:

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

onde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são zeros do polinômio.

Demonstração. A demonstração do teorema está divida em duas partes

(i) Existência

(a) Seja P um polinômio de grau $n \geq 1$. Pelo Teorema 2, P possui pelo menos um zero r_1. Assim,

$$P(r_1) = 0.$$

Pelo Teorema 3, o polinômio P é divisível por $x - r_1$, ou seja

$$P(x) = (x - r_1)Q_1(x),$$

onde $Q_1(x)$ é um polinômio de grau $n - 1$ com coeficiente a_n. Se $n = 1$, então Q_1 é um polinômio constante, ou seja, $Q_1 = a_n$, e assim:

$$P(x) = a_n(x - r_1),$$

concluindo a prova para este caso.

(b) Se $n > 2$, então Q_1 é um polinômio de grau $n - 1$, e pelo Teorema 2, possui pelo menos um zero r_2. Assim:

$$Q_1(r_2) = 0.$$

Logo, Q_1 também é divisível por $x - r_2$:

$$Q_1(x) = (x - r_2)Q_2(x).$$

Substituindo esta expressão em $P(x)$, tem-se:

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)Q_2(x),$$

onde $Q_2(x)$ é um polinômio de grau $n - 2$ com coeficiente dominante a_n. Se $n = 2$, então $Q_2 = a_n$, logo:

$$P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2).$$

(c) Repetindo este processo n vezes, tem-se:

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)\dots(x - r_n)Q_n(x),$$

onde $Q_n(x)$ tem grau $n - n = 0$ e coeficiente dominante a_n. Assim, $Q_n = a_n$ logo

$$P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\dots(x - r_n).$$

(ii) Unicidade

Suponha que P admita duas decomposições distintas:

$$P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\dots(x - r_n).$$

e

$$P(x) = a'_m(x - r'_1)(x - r'_2)\dots(x - r'_m).$$

Comparando os termos de maior grau em ambas expressões, tem-se:

$$a_n x^n = a'_m x^m.$$

Logo, pela Definição 11, segue:

$$n = m, \quad \text{e} \quad a_n = a'_m.$$

Portanto, as duas decomposições têm o mesmo grau e o mesmo coeficiente dominante. Agora, atribuindo $x = r_1$ em $P(x)$:

$$0 = (r_1 - r'_1)(r_1 - r'_2)\dots(r_1 - r'_n).$$

Como o produto é nulo, pelo menos um dos fatores deve ser zero, isto é, existe um j tal que $r_1 = r'_j$. Reordenando os fatores, podemos assumir $r_1 = r'_1$. Repetindo o processo para $r_2, r_3, \dots, r_n$, conclui-se que $r_i = r'_i$ para todo i. Assim, os zeros coincidem, e a decomposição do polinômio é única, salvo a ordem dos fatores. ■

2.2.2 Relações de Girard ou fórmulas de Viète

Ao longo da história, inúmeros matemáticos contribuíram para o desenvolvimento da teoria das equações. Entre eles, destaca-se François Viète $(1540 - 1603)$, amplamente reconhecido como o fundador da Álgebra moderna. Além disso, identificou a existência de relações entre os coeficientes e os zeros de uma equação, embora sua resistência à aceitação de resultados negativos tenha limitado, em parte, a difusão de suas descobertas na época [1].

Algumas décadas mais tarde, Albert Girard $(1595 - 1632)$ ampliou e aperfeiçoou essas ideias. Em sua obra *Invention nouvelle en l'algèbre* de 1629, formulou o princípio de que toda equação de grau n possui n soluções, enunciado que mais tarde seria consagrado como o Teorema Fundamental da Álgebra. Girard também generalizou as observações de Viète, demonstrando que o termo independente de uma equação é, em módulo, igual ao produto de todos os seus zeros, sejam eles reais ou complexos [2].

Assim, as relações de Girard-Viète tornaram-se fundamentais para a teoria das equações, ao estabelecerem uma conexão direta entre os coeficientes de um polinômio e seus zeros. Essas relações expressam a soma e produto dos zeros em função dos coeficientes, sendo especialmente úteis no estudo das equações algébricas, pois permitem obter informações sobre os zeros de um polinômio sem a necessidade de resolvê-lo explicitamente.

As fórmulas de Girard-Viète decorrem diretamente do Teorema da decomposição, o qual assegura que todo polinômio de grau n, com coeficiente dominante a_n, pode ser fatorado como o produto de termos lineares associados aos seus zeros. Ao expandir essa forma fatorada e compará-la à forma geral do polinômio, obtêm-se as expressões que envolvem as funções simétricas elementares, combinações de somas e produtos dos zeros que podem ser escritas unicamente em termos dos coeficientes do polinômio.

A seguir, serão apresentados alguns casos particulares e, posteriormente, o caso geral dessas relações, que podem ser encontrados em [7] e [15].

Considere a equação do segundo grau:

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \quad (a \neq 0),$$

cujos zeros são r_1 e r_2. É possível reescrevê-la como:

$$a_2(x - r_1)(x - r_2) = 0.$$

Logo, tem-se a identidade

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x - r_1)(x - r_2), \forall x \in \mathbb{C}.$$

Expandindo a equação anterior, tem-se:

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1r_2), \forall x \in \mathbb{C}.$$

Comparando os coeficientes da equação acima, obtem-se:

$$r_1 + r_2 = -\frac{a_1}{a_2}, \quad r_1r_2 = \frac{a_0}{a_2}.$$

Considere agora a equação cúbica:

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

com $a \neq 0$ e zeros r_1, r_2, r_3. A forma fatorada é dada por:

$$a_3(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = 0.$$

Assim,

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3).$$

Expandindo os fatores do lado direito da equação acima, tem-se

$$a_3\left(x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1)x - r_1r_2r_3\right).$$

Comparando com a forma geral, segue que

$$r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{a_2}{a_3}, \quad r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = \frac{a_1}{a_3}, \quad r_1r_2r_3 = -\frac{a_0}{a_3}.$$

As relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação polinomial de grau $n \geq 1$ podem ser deduzidas considerando:

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, \quad (a_n \neq 0),$$

com zeros $r_1, r_2, \ldots, r_n$. O polinômio pode ser escrito como:

$$P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n).$$

Observe que

$$\begin{aligned}
P(x) &= a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\ldots(x - r_n) \\
&= a_nx^n - a_n\underbrace{(r_1 + r_2 + \cdots + r_n)}_{\sigma_1}x^{n-1} + \\
&\quad + a_n\underbrace{(r_1r_2 + r_1r_3 + \cdots + r_{n-1}r_n)}_{\sigma_2}x^{n-2} - \\
&\quad - a_n\underbrace{(r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + \cdots + r_{n-2}r_{n-1}r_n)}_{\sigma_3}x^{n-3} \quad + \cdots + \\
&\quad + (-1)^h a_n\sigma_h x^{n-h} \quad + \cdots + (-1)^n a_n\underbrace{(r_1r_2r_3\ldots r_n)}_{\sigma_n},
\end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{C}$. Portanto, comparando as equações, segue que:

$$\sigma_1 = r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$\sigma_2 = r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + \cdots + r_{n-1}r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n},$$

$$\sigma_3 = r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + \cdots + r_{n-2}r_{n-1}r_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n},$$

$$\sigma_h = (-1)^h\frac{a_{n-h}}{a_n},$$

$$\sigma_n = r_1r_2\ldots r_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}.$$

Essas relações entre os coeficientes e as raízes da equação de $P(x) = 0$, conhecidas também como relações de Girard.

2.2.3 Soluções das equações quadráticas e cúbicas

Uma equação algébrica de grau primo pode ser resolvida por radicais se, e somente se, os zeros conhecidos permitem expressar outros zeros racionalmente. Isso implica que a equação geral de grau 5 não pode ser resolvida por radicais, o que é conhecido como o Teorema de Abel-Ruffini. Embora não seja possível resolver equações de grau 5 ou superior por radicais, métodos numéricos, como o de Newton, podem ser utilizados para encontrar soluções aproximadas quando os coeficientes são dados numericamente.

Embora a solução por radicais não seja possível para equações de grau superior, as equações quadráticas, cúbicas e quárticas podem ser resolvidas por métodos algebricos diretos. A equação quadrática é resolvida pela famosa fórmula de Bhaskara. Já as equações cúbicas e quárticas podem ser resolvidas com o auxílio de fórmulas mais complexas que envolvem radicais e funções simétricas dos zeros.

Considere a equação polinomial quadrática complexa:

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

onde x_1 e x_2 são zeros complexos, representadas por $x_1 = \alpha + \beta$ e $x_2 = \alpha - \beta$. Assim:

$$a_2(\alpha + \beta)^2 + a_1(\alpha + \beta) + a_0 = 0,$$
$$a_2(\alpha - \beta)^2 + a_1(\alpha - \beta) + a_0 = 0.$$

A partir disso, é obtido as seguintes equações:

$$2\alpha = -a_1 \quad \text{e} \quad \alpha^2 - \beta^2 = a_0.$$

Da primeira equação, é possível resolve-la para α:

$$\alpha = -\frac{a_1}{2}.$$

Substituindo α na segunda equação, obtem-se uma equação de primeiro grau para β^2, de onde calcula-se β. Os zeros podem ser então expressos como:

$$x_1 = -\frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 4a_0} \text{ e } x_2 = -\frac{a_1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 4a_0}.$$

Essas expressões são bem conhecidas e correspondem as raízes da equação quadrática.

Agora, considere a equação cúbica complexa:

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0. \tag{2.5}$$

Com uma mudança de variável, colocaremos o polinômio dado em (2.5) em uma forma na qual o termo quadrático seja eliminado. Substituindo x por $y + d$ na equação (2.5), tem-se

$$(y + d)^3 + a_2(y + d)^2 + a_1(y + d) + a_0 =$$
$$= y^3 + (3d + a_2)y^2 + (3d^2 + 2da_2 + a_1)y + (d^3 + d^2a_2 + da_1 + a_0).$$

Colocando $d = -\frac{a_2}{3}$ na expressão acima, segue que

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = y^3 + py + q,$$

onde

$$x = y - \frac{a_2}{3}, \quad p = a_1 - \frac{a_2^2}{3} \quad \text{e} \quad q = \frac{2a_2^3}{27} - \frac{a_1 a_2}{3} + a_0. \tag{2.6}$$

Portanto, para encontrar os zeros de (2.5) basta determinar os zeros da equação abaixo:

$$y^3 + py + q, \tag{2.7}$$

com p e q dados em (2.6) e subtraindo-se $\frac{a_2}{3}$ dessas expressões. Concentrando a resolução na expressão acima, sejam u e v duas novas variáveis auxiliares. Fazendo em (2.7) a mudança de variável $y = u + v$, obtém-se

$$0 = (u+v)^3 + p(u+v)^2 + q = (u^3 + v^3 + q) + (u+v)(p + 3uv). \tag{2.8}$$

Segue-se daí que cada solução (u, v) do sistema

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q, \\ u \cdot v = -\dfrac{q}{3}, \end{cases}$$

nos fornece uma solução de (u, v) de (2.8) e, portanto, uma solução da forma $y = u+v$ de (2.7). Elevando ao cubo a segunda equação do sistema acima, então u^3 e v^3 são soluções da seguinte equação do segundo grau

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0. \tag{2.9}$$

Fixando um dos zeros de $\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}$ e denotando por $\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$, temos que os zeros de (2.9) são

$$z_1 = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad \text{e} \quad z_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Pela simetria do papel que desempenham u e v, podemos supor que $u^3 = z_1$ e $v^3 = z_2$. Escolhendo um dos zeros de z_1 e denotando-a por $\sqrt[3]{z_1}$, segue-se que as soluções de $u^3 = z_1$ são $\sqrt[3]{z_1}$, $w\sqrt[3]{z_1}$, e $w^2\sqrt[3]{z_1}$, em que $w = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ é uma dos zeros cúbicos da unidade. Denotando agora por $\sqrt[3]{z_2}$ a raíz cúbica de z_2 tal que $\sqrt[3]{z_1}\sqrt[3]{z_2} = -\frac{p}{3}$, de modo que a segunda equação do sitema acima seja satisfeita, o referido sistema admite as seguintes soluções:

$$\begin{aligned} u_1 = \sqrt[3]{z_1}, \quad v_1 = \sqrt[3]{z_2}; \\ u_2 = w\sqrt[3]{z_1}, \quad v_2 = w^2\sqrt[3]{z_2}; \\ u_3 = w^2\sqrt[3]{z_1}, \quad v_3 = w\sqrt[3]{z_2}. \end{aligned}$$

Segue-se então, que a equação (2.7) possui como soluções as chamadas fórmulas de Cardan:

$$y_1 = u_1 + v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

$$y_2 = u_2 + v_2 = w\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad \text{e}$$

$$y_3 = u_3 + v_3 = w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + w\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

As fórmulas da equação (2.5) podem ser obtidas pelas fórmulas de Cardan mediantes as subistituições em (2.6).

2.3 Polinômios Estáveis

No contexto de um polinômio característico de uma equação diferencial, especialmente na análise de sistemas lineares invariantes no tempo, um polinômio é dito estável quando todos os seus zeros satisfazem determinadas condições que garantem o bom comportamento do sistema ao longo do tempo.

Em geral, um polinômio pode ser considerado estável em dois casos distintos: quando todos os zeros estão localizados no semiplano esquerdo aberto do plano complexo (ou seja, possuem parte real negativa) ou quando todas os seus zeros pertencem ao disco unitário aberto (ou seja, possuem módulo menor que 1).

A primeira condição está relacionada à estabilidade de sistemas lineares em tempo contínuo, enquanto a segunda está associada à estabilidade de sistemas lineares em tempo discreto. Polinômios que satisfazem a primeira condição são frequentemente chamados de polinômios de Hurwitz, e os que satisfazem a segunda são chamados de polinômios de Schur. Esses polinômios desempenham um papel central na teoria de controle e na teoria matemática de equações diferenciais. A verificação da estabilidade de um polinômio pode ser feita por meio de diversos critérios de estabilidade, como os critérios de Routh-Hurwitz, Jury, entre outros.

Entretanto, neste trabalho, será abordado especificamente os critérios de estabilidade baseado na localização dos zeros no semiplano esquerdo aberto do plano complexo, com ênfase em suas aplicações e implicações para sistemas em tempo contínuo.

O estudo dessa seção foi baseado nas referências [4], [13] e [19].

Definição 13 ***(Polinômios estáveis)*** *Um polinômio é dito estável se todos os seus zeros possuem parte real negativa. Caso um de seus zeros tenha parte real positiva, então o polinômio é dito instável.*

Portanto, sem perder a generalidade, definimos, polinômios da forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0,$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

Um conceito importante na teoria dos polinômios é que os zeros mudam de forma contínua em relação aos seus coeficientes. Essa propriedade é essencial para entender a estabilidade do sistema.

Em seguida, serão analisados alguns exemplos triviais e ilustrativos da teoria dos polinômios estáveis.

Para polinômios da forma

$$P(x) = a_1 x + a_0,$$

observa-se que o polinômio será estável, se e somente se, a_1 e a_0, tem mesmo sinal, visto que $P(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{a_0}{a_1}$.

No caso do polinômio do segundo grau

$$P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

este será estável se, e somente se, os coeficientes a_2 e a_1 tenham o mesmo sinal. Tal fato, decorre diretamente da expressão dos zeros de P em função de seus coeficientes:

$$x_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2},$$

e

$$x_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}.$$

Em resumo, se a_2 e a_1 tem os mesmo sinal, então os zeros x_1 e x_2 tem parte real negativa, garantindo estabilidade.

A seguir analisaremos condições para que o polinômio cúbico seja estável, para isso os resultados a seguir serão importantes.

Proposição 1 *Um polinomio cúbico*

$$P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

com coeficientes reais positivos, possui zeros imaginários puros se, e somente se,

$$a_2a_1 = a_0.$$

Demonstração. A demonstração será divida em duas partes. Reescrevendo-o $P(x)$ de forma fatorada, obtemos:

$$P(x) = (x + a_2)(x^2 + a_1) - a_2a_1 + a_0.$$

(i) Se $i\omega$ ($\omega \neq 0$) é um zero de $P(x)$, então $a_1a_2 = a_0$. Suponha que $i\omega$ seja um zero do polinômio $P(x)$, com $\omega \neq 0$. Nosso objetivo é mostrar que, sob essa condição, deve-se verificar $a_2a_1 = a_0$. Se $i\omega$ é um zero de $P(x)$, então, substituindo $x = i\omega$ na equação, temos:

$$P(i\omega) = (i\omega + a_2)(-\omega^2 + a_1) - a_2a_1 + a_0.$$

Observe que o primeiro termo, $(i\omega + a_2)(-\omega^2 + a_1)$, é um número complexo, pois envolve o termo $i\omega$, enquanto o segundo termo, $-a_2a_1 + a_0$, é um número real. Isso gera uma contradição, pois um número complexo não pode ser igual a um número real. Para evitar essa contradição, devemos concluir que:

$$-\omega^2 + a_1 = 0.$$

Portanto, a expressão $P(i\omega)$ se reduz a:

$$P(i\omega) = (i\omega + a_2)(0) - a_2a_1 + a_0 = -a_2a_1 + a_0.$$

Como sabemos que $P(i\omega) = 0$, segue diretamente que $a_2a_1 = a_0$.
(ii) Se $a_2a_1 = a_0$, então $P(x)$ tem zeros $\pm i\omega$. Agora, suponha que $a_2a_1 = a_0$. Nosso objetivo é demonstrar que, sob essa condição, os zeros de $P(x)$ incluem $\pm i\omega$, com $\omega \neq 0$. Substituindo $a_2a_1 = a_0$ na equação, obtemos:

$$P(x) = (x + a_2)(x^2 + a_1) - a_2a_1 + a_2a_1.$$

Simplificando a expressão, temos:

$$P(x) = (x + a_2)(x^2 + a_1).$$

Para encontrar os zeros de $P(x)$, basta resolver a equação $(x+a_2)(x^2+a_1)=0$. A solução $x+a_2=0$ fornece zero real $x=-a_2$. Os outros zeros são determinadas pela equação:

$$x^2+a_1=0.$$

Resolvendo essa equação, obtemos:

$$x^2=-a_1 \quad \Rightarrow \quad x=\pm i\sqrt{a_1}.$$

Como $a_1>0$, os zeros são puramente imaginários e têm a forma $\pm i\sqrt{a_1}$, como queríamos demonstrar. ■

Em seguida é possível enunciar o principal resultado para o caso cúbico, para estabelecer condições necessárias e suficientes para a estabilidade de polinômios.

Teorema 5 *Seja o polinômio cúbico, dado por:*

$$P(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

com coeficientes reais e positivos. O polinômio é estável se, e somente se, $a_2a_1>a_0$.

Essas condições garantem que os coeficientes do polinômio satisfaçam os critérios de estabilidade, assegurando que todos seus zeros possuem parte real negativa.

Demonstração. A demonstração será dividida em duas partes.

(i) Se $P(x)$ é estável, então $a_2a_1>a_0$.

A prova será feita por contradição, isto é, demonstraremos que se $a_2a_1\leq a_0$, então $P(x)$ não é estável.

Assumimos $a_2a_1\leq a_0$ e analisamos dois casos:

- Se $a_2a_1=a_0$, então, pela proposição anterior, o polinômio $P(x)$ não é estável.
- Se $a_2a_1<a_0$, considerando a_2 e a_1 positivos e variando-os continuamente, a desigualdade se mantém. Assim, à medida que a_2 e a_1 se aproximam de zero, a natureza da estabilidade do polinômio não se altera.

Para $a_2=a_1=0$, o polinômio assume a forma:

$$P(x)=a_3x^3+a_0,$$

cujas zeros são:

$$x_1=\sqrt[3]{a_0}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad x_2=\sqrt[3]{a_0}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad x_3=-\sqrt[3]{a_0}.$$

Como os zeros do polinômio dependem dos coeficientes, para $a_2,a_1>0$, o polinômio permanece estável. Então para $a_2a_1\leq a_0$ segue que $P(x)$ é instável.

(ii) Se $a_2a_1>a_0$, então $P(x)$ é estável.

Consideremos a variação contínua de a_0 positivo. Como discutido anteriormente, se $P(x)$ é estável para um determinado a_0, ele tende a permanecer estável para valores próximos. Da mesma forma, se $P(x)$ não é estável, essa característica persiste para pequenas variações de a_0. Tomando $a_0=0$, o polinômio assume a forma:

$$P(x)=x(a_3x^2+a_2x+a_1).$$

Os zeros são $x = 0$ e as soluções da equação quadrática $a_3x^2 + a_2x + a_1 = 0$. Como $a_2, a_1 > 0$, é evidente que os dois zeros possuem partes reais negativas, garantindo a estabilidade. Para a_0 pequeno e positivo, esses dois zeros permanecem aproximadamente as mesmas, enquanto $x = 0$ se desloca ligeiramente para um valor pequeno, que pode ser positivo ou negativo. O produto dos zeros é dado por $-a_0 < 0$, o que implica que o zero deve ser negativo. Como consequência, o polinômio continua estável. Assim, concluimos a demonstração do teorema. ■

Teorema 6 *Se $P(x)$ for um polinômio estável, então todos os seus coeficientes possuem o mesmo sinal.*

Demonstração.

Seja $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ um polinômio estável, isto é, todas os zeros possuem parte real negativa. Denotemos por $x_1, x_2, \ldots, x_n$ os zeros de $P(x)$. Como os coeficientes de $P(x)$ são reais, os zeros complexos ocorrem em pares conjugados. Pelo Teorema da Decomposição, podemos reescrever $P(x)$ como:

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n).$$

Por igualdade de polinômios, tem-se

$$a_0 + a_1x + ... + a_nx^n = a_n(x^n + (-x_1 - x_2 - ... - x_n)x^{n-1} + ... + (-1)^n x_1x_2...x_n).$$

Expandindo esse produto e aplicando as fórmulas de Girard ou Viète:

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= -a_n(x_1 + x_2 + \cdots + x_n), \\ a_{n-2} &= a_n(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n), \\ &\vdots \\ a_0 &= (-1)^n a_n x_1x_2\cdots x_n. \end{aligned}$$

Como todas os zeros têm parte real negativa, seque gue $\dfrac{a_{n-1}}{a_n} > 0$ o que implica que a_{n-1} e a_n têm o mesmo sinal.

Agora, considere os produtos x_ix_j, que aparecem em a_{n-2}:

(a) Sejam x_k, x_j zeros reais onde $x_k, x_j < 0 \Rightarrow x_kx_j > 0$.

(b) Dados $x_k = a_k + b_ki$, $x_j = a_k - b_ki \Rightarrow x_kx_j = a_k^2 + b_k^2 > 0$.

(c) Sejam x_k, x_j complexos quaisquer:

$$x_kx_j + x_k\overline{x_j} = x_k(x_j + \overline{x_j}) = 2x_kb_j.$$

(d) Agora, dados x_k, x_j complexos onde um não é o conjugado do outro

$$x_kx_j + x_k\overline{x_j} + \overline{x_k}x_j + \overline{x_kx_j} = 4ac > 0.$$

Portanto $\dfrac{a_{n-2}}{a_n} > 0$ o que implica a_{n-2} e a_n têm o mesmo sinal.

Seguindo esse raciocínio, segue que

$$\frac{a_k}{a_n} > 0, \quad \text{para todo } k = 0, 1, \ldots, n.$$

Obtem-se que todos os coeficientes têm o mesmo sinal. ■

A seguir serão apresentados alguns exemplos.

Exemplo 2 *Seja*

$$P(x) = x^2 + 3x + 2.$$

Temos que $P(x)$ é estável, pois todos os seus coeficientes são reais e positivos, e portanto, satisfazem a condição $a_2a_1 > 0$. Os zeros do polinômio são dados por

$$x_1 = -1, \text{ e } x_2 = -2.$$

Observe que todos os zeros possuem parte real negativa, ou seja, de fato o polinômio é estável. A figura a seguir apresenta o gráfico deste polinômio.

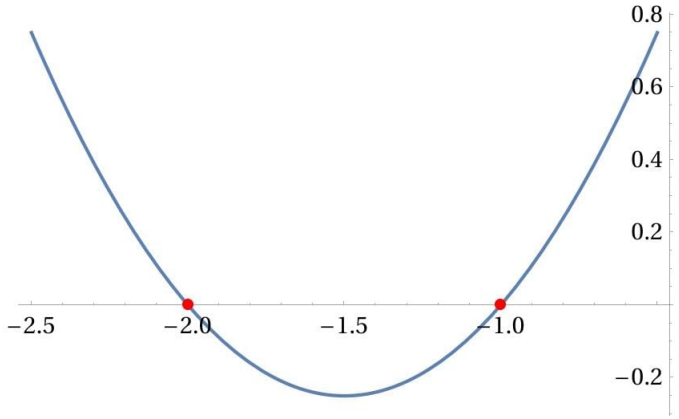


Figura 2.11: Gráfico de $P(x) = x^2 + 3x + 2$.
Fonte: Elaborado pela Autora.

Exemplo 3 *Seja o polinômio*

$$P(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 2.$$

Esse polinômio também é estável, pois todos os seus coeficientes são positivos e satisfazem a condição $a_2a_1 > a_0$. Além disso, todos os zeros possuem parte real negativa, conforme apresentado abaixo:

$$x_1 = -1, x_2 = -1 + i \text{ e } x_3 = -1 - i.$$

Na figura a seguir é possível visualizar o comportamento gráfico do polinômio $P(x)$.

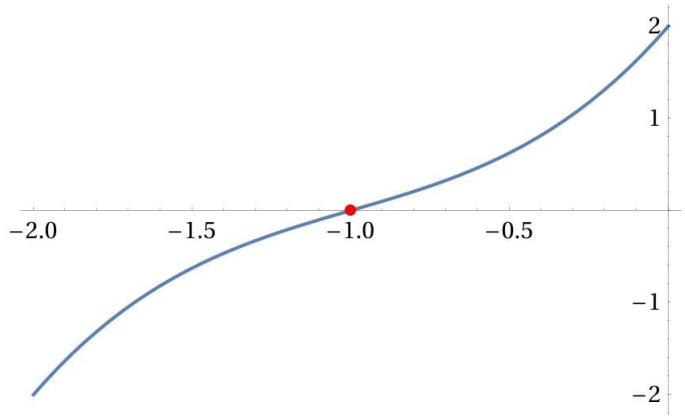


Figura 2.12: Gráfico de $P(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 2$.
Fonte: Elaborado pela Autora.

Capítulo

3

CRITÉRIOS DE ESTABILIDADE

O estudo apresentado nessa seção aborda um dos temas centrais na análise da estabilidade de sistemas lineares: a caracterização dos chamados polinômios de Hurwitz, ou seja, aqueles cujos zeros possuem partes reais estritamente negativas. Esse problema foi originalmente estudado por Routh e Hurwitz, cujas contribuições foram fundamentais para o desenvolvimento de critérios que permitem determinar a estabilidade de sistemas dinâmicos sem a necessidade de calcular explicitamente os zeros de seus polinômios característicos.

O interesse por esse tipo de polinômio surge no contexto da teoria da estabilidade, uma vez que, conforme discutido no capítulo anterior, a estabilidade de um ponto de equilíbrio está diretamente relacionada ao sinal dos autovalores da matriz que descreve o sistema. Dessa forma, garantir que todos os zeros de um polinômio estejam localizados no semiplano esquerdo do plano complexo assegura a estabilidade do sistema associado. O problema em estabelecer condições necessárias e suficientes, sem que seja necessário determinar os zeros explicitamente, é de grande relevância na matemática aplicada [4].

A importância desse problema tornou-se particularmente evidente a partir dos trabalhos pioneiros do físico James Clerk Maxwell e do engenheiro russo J. Vyshnegradskii, que, ao estudarem a teoria de controle de máquinas, formularam critérios de estabilidade válidos para polinômios de até terceiro grau. Posteriormente, em 1877, o físico inglês Edward John Routh, utilizando ferramentas como o Teorema de Sturm e a Teoria dos Índices de Cauchy, desenvolveu um algoritmo capaz de determinar o número k de zeros de um polinômio situadas no semiplano direito.

No final do século XIX, o engenheiro Adolf Hurwitz, motivado por problemas relacionados à teoria dos gases e ao desenvolvimento de turbinas a vapor e, na época, sem conhecimento prévio do trabalho de Routh, retomou o problema de determinar condições que asseguram que todos os zeros de um polinômio possuam parte real negativa.

A abordagem proposta por Hurwitz resultou em um conjunto de desigualdades conhecidas até hoje como as condições de Hurwitz, que se tornaram uma das principais referências na análise de estabilidade de sistemas lineares. Este capítulo tem, portanto, como objetivo apresentar o desenvolvimento teórico desses critérios de estabilidade, com foco nas formulações propostas por Routh e Hurwitz [4].

3.1 Índice de Cauchy e o Teorema de Sturm

Nesse contexto, os índices de Cauchy constituem uma ferramenta importante para o estudo da localização e da contagem de zeros de polinômios. Por meio da variação

do argumento de uma função racional ao longo de um intervalo, esses índices permitem relacionar propriedades analíticas da função à quantidade de zeros e polos.

A apresentação dos índices de Cauchy no início deste capítulo justifica-se por sua contribuição para a compreensão dos métodos de contagem dos zeros desenvolvidos nas seções seguintes. Em particular, esses índices permitem estabelecer uma conexão entre a variação do argumento de um polinômio e a distribuição de seus zeros no plano complexo, fornecendo uma base conceitual para o estudo do critério de Routh-Hurwitz.

Esse critério permite determinar a quantidade de zeros de um polinômio que se encontram no semiplano direito do plano complexo sem a necessidade de calculá-las explicitamente. Dessa maneira, torna-se possível verificar se todos os zeros da equação característica de um sistema contínuo estão localizadas no semiplano esquerdo, condição necessária e suficiente para a estabilidade assintótica do sistema linear invariante no tempo quando a matriz dinâmica é considerada em sua realização usual.

Além disso, o problema da contagem dos zeros também se relaciona com o teorema de Sturm, que permite determinar o número de zeros reais distintas de um polinômio em um intervalo. Embora os métodos utilizem procedimentos distintos, ambos contribuem para o estudo da localização dos zeros de polinômios. Assim, a introdução dos índices de Cauchy estabelece a fundamentação conceitual necessária para compreender os métodos de contagem abordados neste trabalho e suas aplicações à análise de estabilidade de sistemas dinâmicos. O estudo desenvolvido nesse capítulo foi baseado nas referências [4], [18] e [23].

Definição 14 *O índice de Cauchy de uma função polinomial racional real $R(x)$ no intervalo $[a, b]$, denotado por $I_a^b(R(x))$ é definido a partir da decomposição de $R(x)$ na forma:*

$$R(x) = \sum_{i=1}^{p} \frac{A_i}{x - \alpha_i} + R_1(x),$$

onde A_i,$\alpha_i \in \mathbb{R}$ e $R_1(x)$ é uma função racional que não tem polos reais.

Observação 2 *Uma função racional real é expressa como o quociente de dois polinômios com coeficientes reais.*

Desta forma,

$$I_a^b(R(x)) = \sum_{a<\alpha_i<b} \operatorname{sign}(A_i),$$

com $a < b$, onde a função $\operatorname{sign}(A_i)$ vale:

$$\begin{cases} +1, & \text{se } A_i > 0 \\ -1, & \text{se } A_i < 0 \\ 0, & \text{se } A_i = 0. \end{cases}$$

Em particular, considera-se a aplicação envolvendo a derivada de um polinômio. Seja $P(x)$ um polinômio real da forma:

$$P(x) = a_0(x - \alpha_1)^{n_1} \cdots (x - \alpha_m)^{n_m}.$$

Então a razão $\frac{P'(x)}{P(x)}$ se decompõe como a soma dos termos $\frac{n_i}{x-\alpha_i}$, onde cada um está associado a um zero de α_i:

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{x - \alpha_i} + R_1(x).$$

Portanto, o índice $I_a^b\left(\frac{P'(x)}{P(x)}\right)$, conta o número de zeros distintos de $P(x)$ no intervalo $[a, b]$.

Exemplo 4 *Considere o polinômio* $P(x) = (x-2)(x+1)(x-4)$. *Derivando* $P(x)$, *obtém-se:*

$$P'(x) = (x+1)(x-4) + (x-2)(x-4) + (x-2)(x+1).$$

Logo, segue que

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-4}.$$

A função possui pontos de descontinuidade nos polos $x = 2$, $x = -1$ *e* $x = 4$. *Assim, cada polo contribui com:*

$$\begin{cases} +1, & \text{se a função salta de} -\infty \text{ para} +\infty \\ -1, & \text{se a função salta de} +\infty \text{ para} -\infty. \end{cases}$$

Como o numerador é positivo, todos os saltos são de $-\infty$ *para* $+\infty$, *e portanto cada função contribui com* $+1$. *Assim:*

$$I_{-\infty}^{+\infty} = +1 + 1 + 1 = 3.$$

Isso significa que há três zeros reais $x = -1$, $x = 2$ *e* $x = 4$. *Como nem todos os zeros têm parte real negativa, o polinômio é instável.*

Um dos métodos para calcular os índices de Cauchy $I_a^b(R(x))$ é baseado no Teorema de Sturm. Uma sequência de polinômios $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_m(x)$, é chamada de sequência de Sturm no intervalo (a, b), quando:

1. Para todo $x \in (a, b)$, se $P_k(x) = 0$, então as funções adjacentes $P_{k-1}(x)$ e $P_{k+1}(x)$ têm sinais opostos.

2. A última função $P_m(x)$ não possui zeros no intervalo, ou seja, $P_m(x) \neq 0$ em (a, b).

Seja $V(x)$ o número de variações de sinal da sequência de Sturm

$$P_1(x), P_2(x), \ldots, P_m(x),$$

avaliada em um ponto x. A medida que x varia de a até b, o valor de $V(x)$ permanece constante enquanto nenhum dos polinômios da sequência se anula. Portanto, para compreender como esse número varia, é necessário analisar o comportamento da sequência nos zeros de seus elementos.

Inicialmente, considere um zero de um polinômio intermediário $P_k(x)$, com $k = 2, \ldots, m-1$. Pela primeira propriedade da sequência de Sturm, os polinômios adjacentes $P_{k-1}(x)$ e $P_{k+1}(x)$ apresentam sinais opostos nesse ponto. Assim, quando $P_k(x)$ muda de sinal ao atravessar esse zero, o número de variações de sinal entre os termos adjacentes permanece inalterado. Consequentemente, os zeros dos polinômios intermediários não modificam o valor de $V(x)$.

Por outro lado, quando $P_1(x)$ se anula, o comportamento da sequência pode produzir uma alteração no número de variações de sinal. Como $P_1(x)$ aparece no denominador da razão

$$\frac{P_2(x)}{P_1(x)},$$

se $P_2(x)$ não se anula simultaneamente, essa razão apresenta um polo nesse ponto. Ao atravessá-lo, a razão passa de $-\infty$ para $+\infty$, ou de $+\infty$ para $-\infty$, conforme os sinais envolvidos.

Dessa maneira, a variação de $V(x)$ nos zeros de $P_1(x)$ está relacionada ao índice de Cauchy da razão $\frac{P_2(x)}{P_1(x)}$. A diferença entre os valores de $V(x)$ nos extremos do intervalo, portanto, permite determinar esse índice, conforme estabelecido pelo Teorema de Sturm que será enunciado a seguir.

Teorema 7 ***(Teorema de Sturm)*** *Se $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_m(x)$ é uma sequência de Sturm em (a, b) e $V(X)$ o número de mudanças de sinais, então*

$$I_a^b\left(\frac{P_2(x)}{P_1(x)}\right) = V(a) - V(b).$$

Observação 3 *Se todos os termos da sequência de Sturm forem multiplicados pelo mesmo polinômio arbitrário diferente de zero, a sequência resultante é chamada de sequência de Sturm generalizada.*

A sequência de Sturm pode ser construída utilizando o algoritmo de Euclides. Dados dois polinômios $P_1(x)$ e $P_2(x)$, onde o grau de $P_2(x)$ é menor que o grau de $P_1(x)$, então sempre se pode usar o algoritmo de Euclides para construir a sequência de Sturm generalizada. De fato, se denotarmos o resto obtido ao dividir $P_1(x)$ por $P_2(x)$, $P_2(x)$ por $P_3(x)$, o resto obtido ao dividir $P_2(x)$ por $P_3(x)$, $P_3(x)$ por $P_4(x)$ e assim por diante, obtemos a cadeia de identidades

$$\begin{aligned} P_1(x) &= Q_1(x)P_2(x) - P_3(x), \\ P_{k-1}(x) &= Q_{k-1}(x)P_k(x) - P_{k+1}(x), \\ &\vdots \\ P_{m-1}(x) &= Q_{m-1}(x)P_m(x). \end{aligned}$$

O último resto não nulo $P_m(x)$ é o maior fator comum entre $P_1(x)$ e $P_2(x)$, bem como entre todas as funções da sequência construída. Se $P_m(x)$ não se anula no intervalo (a, b), então a sequência obtida pelas identidades satisfaz as condições necessárias e constitui uma sequência de Sturm.

Caso contrário, se $P_m(x)$ possui zeros em (a, b), a sequência é chamada de sequência de Sturm generalizada, pois uma sequência de Sturm pode ser obtida dividindo todos os termos por $P_m(x)$.

Consequentemente, o índice de uma função racional $R(x)$ pode ser determinado pelo Teorema de Sturm. Basta escrever:

$$R(x) = Q(x) + \frac{P_2(x)}{P_1(x)}, \tag{3.1}$$

onde $Q(x)$, $P_1(x)$ e $P_2(x)$ são polinômios e o grau de $P_2(x)$ é, no máximo, o de $P_1(x)$.

A partir daí, constrói-se a sequência de Sturm para $P_1(x)$ e $P_2(x)$, e aplica-se o Teorema de Sturm para determinar o número de zeros reais e distintos de $P_1(x)$ no intervalo (a, b), o que equivale ao valor de $I_a^b R(x) = I_a^b(\frac{P'(x)}{P(x)}) = V(a) - V(b)$.

3.2 Critério de Routh-Hurwitz

Conforme mencionado anteriormente, diversos matemáticos renomados como Routh, Hurwitz, Liénard e Chipart se dedicaram a resolver esse problema sem a necessidade de calcular explicitamente os zeros. Assim, foram desenvolvidos alguns critérios. Nesta seção

trataremos do critério de Routh-Hurwitz, que fornece condições algébricas baseadas nos coeficientes do polinômio característico, permitindo verificar se todos os zeros possuem parte real negativa ou positiva.

Definição 15 *Seja o polinômio*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{3.2}$$

com $a_i \in \mathbb{R}$ para $i = 0, 1, \ldots, n$. Dizemos que $P(x)$ é um polinômio estável quando todos os seus zeros possuem parte real estritamente negativa.

Observação 4 *Um polinômio cujos zeros possuem todas parte real negativa é denominado polinômio de Hurwitz. A classe de todos esses polinômios será denotada por $\mathcal{H}$. Além disso, se $P(x) \in \mathcal{H}$, então $P(0) \neq 0$ e, portanto, $a_0 \neq 0$.*

Os critérios para decidir se um polinômio é de Hurwitz estão relacionados à estabilidade de um sistema linear. Se o polinômio característico de uma matriz for um polinômio de Hurwitz, então o sistema é estável. O objetivo do algoritmo de Routh, é determinar os zeros de um polinômio que estão localizados no semiplano direito (região instável). Assim, o desafio geométrico é: como saber a localização dos n zeros localizados no plano complexo sem calculá-los?

Para um polinômio de grau n, considere o contorno formado por um semicírculo no semiplano direito, cujo raio R está centrado na origem e limitado pelo eixo imaginário, como pode ser visto na figura a seguir.

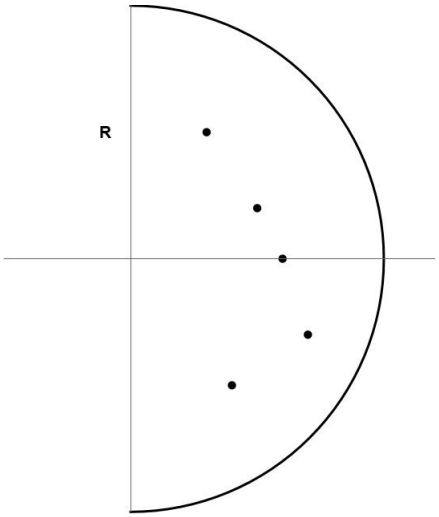


Figura 3.1: Semicírculo no semiplano direito.
Fonte: Baseado em [4].

Seja $P(x)$ um polinômio de grau n, e considere um contorno fechado formado pelo eixo imaginário e por um semicírculo de raio R no semiplano direito. Suponha que o contorno não passe por nenhum zero de P. Para R suficientemente grande, todos os zeros de P que pertencem ao semiplano direito estão contidos no domínio delimitado por esse contorno.

Pelo princípio do argumento, a variação total do argumento de $P(x)$ ao longo do contorno, percorrido no sentido positivo, é igual a 2π vezes o número de zeros de P contidos no domínio, contados com suas multiplicidades. Seja k esse número. Assim, a variação total do argumento ao longo do contorno é

$$\Delta \arg P(x) = 2k\pi.$$

Por outro lado, quando $R \to \infty$, o comportamento de $P(x)$ ao longo do semicírculo de raio R é determinado pelo termo de maior grau, $a_n x^n$. Como o argumento de x varia em π ao percorrer o semicírculo, a variação do argumento do termo dominante é $n\pi$. Portanto,

$$\Delta \arg P(x) \longrightarrow n\pi.$$

Por outro lado, a variação do argumento ao longo do eixo imaginário relaciona-se com o número de zeros no semiplano direito por meio da expressão

$$\Delta_{-\infty}^{\infty} \arg P(iw) = (n - 2k)\pi.$$

Essa igualdade estabelece uma relação entre a variação do argumento de $P(iw)$ ao longo do eixo imaginário, o grau n do polinômio e o número k de zeros localizados no semiplano direito [4].

Observação 5 *Se $k = 0$, a variação do argumento é $n\pi$. Cada zero reduz essa variação em 2π [4].*

Agora, faremos a seguinte consideração. Seja o polinômio $P(x)$ escrito da forma:

$$P(x) = a_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + b_{n-3} x^{n-3} + \cdots, \quad (a_n \neq 0),$$

onde a_i e b_i (com $i = 1, ..., n$) são os coeficientes dos termos pares e ímpares, respectivamente. Além disso, por suposição $P(x)$ não possui zeros no eixo imaginário, ou seja $k = 0$. Considerando $x = iw$, o polinômio $P(iw)$ é dado por

$$P(iw) = U(w) + iV(w),$$

onde $U(w)$ e $V(w)$ são funções reais de w. Essas funções são obtidas a partir dos coeficientes do polinômio, organizados conforme o grau (par ou ímpar).

Definindo $U(w)$ e $V(w)$:

- Se n é par, então:

$$U(w) = (-1)^{\frac{n}{2}} \left(a_n w^n - a_{n-2} w^{n-2} + a_{n-4} w^{n-4} - \dots \right),$$

$$V(w) = (-1)^{\frac{n}{2}-1} \left(b_n w^{n-1} - b_{n-3} w^{n-3} + b_{n-5} w^{n-5} - \dots \right).$$

- Se n é ímpar, então:

$$U(w) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(b_n w^{n-1} - b_{n-3} w^{n-3} + b_{n-5} w^{n-5} - \dots \right),$$

$$V(w) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(a_n w^n - a_{n-2} w^{n-2} + a_{n-4} w^{n-4} - \dots \right).$$

Para qualquer valor de n, tem-se

$$I_{-\infty}^{+\infty} = \frac{b_n w^{n-1} - b_{n-3} w^{n-3} + \dots}{a_n w^{n-1} - a_{n-2} w^{n-2} + \dots} = n - 2k. \tag{3.3}$$

A Tabela de Routh utiliza os índices de Cauchy de funções racionais na forma $\frac{V(w)}{U(w)}$. Para isso utiliza-se a sequência de Sturm, pelo Algoritmo de Euclides, começando com $P_1 = U(w)$ e $P_2 = V(w)$, gerando $P_3, P_4, \dots, P_m$. Seja $P_1(w)$ e $P_2(x)$ os primeiros termos da sequência

$$P_1(w) = a_n w^n - a_{n-2} w^{n-2} + a_{n-4} w^{n-4} - \dots,$$

$$P_2(w) = b_n w^{n-1} - b_{n-3} w^{n-3} + b_{n-5} w^{n-5} - \dots$$

Utilizando o Algoritmo de Euclides, faremos

$$\frac{P_1(w)}{P_2(w)} = P_3(w), \frac{P_2(w)}{P_3(w)} = P_4(w), \dots, \frac{P_{n-1}(w)}{P_n(w)} = P_{n+1}(w).$$

Logo, segue que:

$$P_3(w) = \frac{a_n}{b_n} P_2(w) - P_1(w) = c_n w^{n-2} - c_{n-4} w^{n-4} + \dots,$$

$$P_4(w) = \frac{b_n}{c_n} P_3(w) - P_2(w) = d_n w^{n-3} - d_{n-5} w^{n-5} +, \dots.$$

Analogamente, os outros polinômios podem ser determinados, e assim obtem-se uma sequência de Sturm:

$$P_1(w), P_2(w), P_3(w), \dots, P_m(w), \tag{3.4}$$

onde $m = n + 1$ e P_{n+1} é o maior fator comum da sequência. Além disso, são funções pares e impares com paridade alternada.

Com base nos coeficientes, constroi-se a tabela de Routh, representada a seguir:

Tabela 3.1: Tabela de Routh

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\cdots$
b_n	b_{n-3}	b_{n-5}	$\cdots$
c_n	c_{n-4}	c_{n-6}	$\cdots$
d_n	d_{n-5}	d_{n-7}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Cada elemento da tabela é obtido segundo a seguinte regra: subtraem-se, dos números da linha superior, os correspondentes da linha inferior, multiplicados por um fator adequado de modo que a primeira diferença se anule. Assim, determina-se a linha desejada.

Para o intervalo $(-\infty, +\infty)$, aplicando a sequência (3.4) e utilizando a relação dada em (3.3), obtemos:

$$V(-\infty) - V(+\infty) = n - 2k, \tag{3.5}$$

onde

$$V(+\infty) = V(a_n, b_n, c_n, \dots), \quad V(-\infty) = V(a_n, -b_n, c_n, -d_n, \dots).$$

Da relação acima, segue que

$$V(-\infty) = n - V(+\infty). \tag{3.6}$$

Combinando as equações (3.5) e (3.6), logo:

$$k = V(a_n, b_n, c_n, \dots).$$

Teorema 8 ***(Routh)*** *O número de zeros de um polinômio real $P(x)$ localizadas no semiplano direito ($Re(x) > 0$) é igual ao número de mudanças de sinal na primeira coluna da Tabela de Routh.*

A estabilidade do sistema está garantida se e somente se, todos os elementos da primeira coluna da tabela tem o mesmo sinal (não há mudança de sinais). Além disso, o número de mudanças de sinal na primeira coluna da tabela de Routh indica exatamente quantos zeros estão no semi-plano direito.

Teorema 9 ***(Critério de Routh)*** *Para que todos os zeros do polinômio $P(x)$ tenham partes reais negativas, é necessário e suficiente que todos os coeficientes da sequência de Sturm tenham o mesmo sinal.*

No esquema de Routh, para o caso regular assumimos que todos os elementos da primeira coluna sejam diferentes de zero. Isso evita divisões por zero na construção da tabela, permitindo determinar o número de zeros com parte real positiva (denotado por k) o que indica instabilidade.

No entanto, existem dois casos chamados singulares, nos quais o algoritmo falha. Esses casos ocorrem quando algum dos elementos da primeira coluna é igual a zero.

O primeiro caso, um elemento da primeira coluna é zero, enquanto os demais elementos da linha são não nulos. Para isso, Routh propôs a seguinte solução: substitui-se o zero por um pequeno parâmetro ϵ, com valor positivo, pequeno e de sinal definido. Assim, os elementos subsequentes na primeira coluna se tornam funções racionais de ϵ, e o número de variações de sinal é analisado no limite quando $\epsilon \to 0^+$. Se algum desses elementos for também identicamente zero em função de ϵ, repete-se o processo usando outro pequeno parâmetro.

Esse método equivale a estudar um polinômio denotado por $P(x, \epsilon)$, o qual coincide com o polinômio original $P(x)$ quando $\epsilon = 0$. Se $P(x, \epsilon)$ não possui zeros no eixo imaginário, então pequenas variações em ϵ não alteram o número de zeros no semiplano direito. Portanto, o valor de k permanece constante nesse processo.

Considere o exemplo abaixo que retrata esse caso.

Exemplo 5 *Seja o polinômio:*

$$P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 1.$$

Para verificar a estabilidade desse polinômio, constrói-se a tabela de Routh e deve-se analisar o número de variações de sinal presentes em sua primeira coluna. Para a obtenção dos polinômios necessários à construção da tabela, recorre-se à construção da sequência de Sturm.

Tomemos, então, os dois primeiros polinômios da sequência, definidos por:

$$P_1(x) = x^4 - 2x^2 + 1, \qquad P_2(x) = x^3 - 2x.$$

Aplicando o algoritmo de Euclides para determinar o próximo termo, realiza-se a divisão de $P_1(x)$ por $P_2(x)$:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^3 - 2x} = x + \frac{1}{x^3 - 2x}.$$

Comparando com a forma geral da identidade de Euclides dada em (3.1):

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} = Q_1(x) - \frac{P_3(x)}{P_2(x)},$$

assim

$$Q_1(x) = x, \qquad P_3(x) = 1.$$

Logo, a tabela de Routh é dada por:

$$\begin{array}{c|ccc} x^4 & 1 & 2 & 1 \\ x^3 & 1 & 2 & \\ x^2 & 0 & 1 & \\ \end{array}$$

Note que o primeiro número da linha x^2 é zero, o que caracteriza um caso singular. Portanto, substituímos por ϵ e então:

$$P_2(x) = x^3 - 2x, \qquad P_3(x) = \varepsilon x^2 - 1.$$

Pelo algoritmo de Euclides,

$$\frac{P_2(x)}{P_3(x)} = \frac{x^3 - 2x}{\varepsilon x^2 - 1} = \frac{1}{\varepsilon}x + \frac{\left(\frac{1}{\varepsilon} - 2\right)x}{\varepsilon x^2 - 1}.$$

Comparando com a expressão $\frac{P_2(x)}{P_3(x)} = Q_2(x) - \frac{P_4(x)}{P_3(x)}$, tem-se

$$Q_2(x) = \frac{1}{\varepsilon}x, \qquad P_4(x) = \left(2 - \frac{1}{\varepsilon}\right)x.$$

Dessa forma, a tabela de Routh é dada por

$$\begin{array}{c|ccc} x^4 & 1 & 2 & 1 \\ x^3 & 1 & 2 & \\ x^2 & \epsilon & 1 & \\ x^1 & 2 - \frac{1}{\epsilon} & & \\ x^0 & 1 & & \end{array}$$

A variação de sinais na primeira coluna depende do comportamento quando $\epsilon \to 0^+$. Assim, para ϵ suficientemente pequeno obtemos duas mudanças de sinal, e assim:

$$k = V(1, 1, \epsilon, 2 - \tfrac{1}{\epsilon}, 1) = 2.$$

Portanto, como há duas mudanças de sinais, isso indica que dois zeros estão localizadas no semiplano direito.

No segundo caso singular, todos os elementos da primeira nula são simultaneamente zero. Nessa situação, forma-se um polinômio auxiliar com os coeficientes da última linha não nula da tabela de Routh, calcula-se sua derivada e utilizam-se os coeficientes dessa derivada para preencher a linha seguinte da tabela. A ordem deste polinômio auxiliar é sempre par, pois contém pares de zeros simétricos, e essa ordem indica o número de zeros simétricos em relação à origem.

Exemplo 6 *Considere o polinômio*

$$P(x) = x^{10} + x^9 - x^8 - 2x^7 + x^6 + 3x^5 + x^4 - 2x^2 + x + 1.$$

Para verificar a estabilidade desse polinômio, basta construir a tabela de Routh de modo analogo ao exemplo anterior e analisar o número de mudanças de sinais na primeira coluna, então, segue que:

x^{10}	1	−1	1	1	−1	1
x^9	1	−2	3	−2	1	
x^8	1	−2	3	−2	1	
x^7	0	0	0	0	0	

Observe que os termos da linha x^7 são todos nulos, portanto constrói-se o polinômio auxiliar que será dado pelos coeficientes da linha anterior. Logo o polinômio auxiliar será dado por

$$P(x) = x^8 - 2x^6 + 3x^4 - 2x^2 + 1.$$

Como $P'(x) = 8x^7 - 12x^5 + 12x^3 - 4x$, a tabela de Routh será dada por:

x^{10}	1	−1	1	1	−1	1
x^9	1	−2	3	−2	1	
x^8	1	−2	3	−2	1	
x^7	8	−12	12	−4		
x^6	−1	3	−3	2		
x^5	3	−3	3			
x^4	2	−2	2			
x^3	4	−2				
x^2	−1	2				
x^1	1					
x^0	2					

Como há mudanças de sinal $k = V(1, 1, 8, -1, 3, 2, 4, -1, 1, 2) = 4$, isso indica que há somente 4 zeros no semi-plano direito e, portanto, o polinômio é instável.

Até o momento, discutimos critérios algébricos para determinar a estabilidade de sistemas lineares, utilizando polinômios de Hurwitz e a tabela de Routh. Esses métodos permitem verificar a localização dos zeros de um polinômio característico para avaliar a estabilidade do sistema.

Nesse contexto, surge o método de Lyapunov. A partir das investigações matemáticas de A.M. Lyapunov, publicadas em 1892 em sua monografia (O problema geral da estabilidade do movimento), o teorema oferece uma abordagem que não depende do cálculo direto das soluções. Por meio de funções auxiliares, denominadas funções de Lyapunov, é possível caracterizar a estabilidade de um ponto de equilíbrio, fornecendo condições suficientes (e necessárias, para alguns casos) para que os zeros da equação característica possuam parte real negativa [4].

Esse resultado é fundamental na teoria moderna de sistemas dinâmicos e será enunciado a seguir.

Considere um polinômio arbitrário da forma:

$$P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n, \quad a_0 \neq 0.$$

Esse polinômio pode ser representado como um determinante característico $\det(A - \lambda I)$, e o Teorema de Lyapunov pode ser aplicado a qualquer equação $P(\lambda) = 0$.

Seja dada uma matriz real $A = (a_{ik})$, $i, k = 1, \ldots, n$, onde $k \leq n$, e um polinômio homogêneo de ordem m em relação às variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_m$:

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Assumindo que x é solução da equação diferencial vetorial

$$\frac{dx}{dt} = Ax,$$

a derivada total da função $V(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ em relação a t é dada por $W(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

Ou seja, essa derivada leva a outro polinômio homogêneo $W(x_1, \ldots, x_m)$ de mesma ordem, o que define um operador linear L tal que

$$W = L(V).$$

No caso particular em que $m = 2$, temos $V(x, x)$ e $W(x, x)$ como formas quadráticas nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, e

$$\frac{dV}{dt}(x, x) = V(Ax, x) + V(x, Ax) = W(x, x).$$

Se $V(x, y) = \dot{x}Vy$, então

$$W = \dot{A}V + VA.$$

Teorema 10 (Lyapunov) *Se todos os zeros característicos da matriz real A têm partes reais negativas, então existe uma forma quadrática definida positiva*

$$V(x) = x^T Px,$$

em que P é uma matriz simétrica definida positiva, tal que sua derivada ao longo das trajetórias do sistema

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

seja uma forma quadrática definida negativa. Ou seja, existe uma matriz simétrica definida positiva Q tal que

$$\frac{dV}{dt} = -x^T Qx < 0, \qquad x \neq 0.$$

Reciprocamente, se existirem matrizes simétricas definidas positivas P e Q tais que

$$V(x) = x^T Px, \qquad \frac{dV}{dt} = -x^T Qx,$$

então todos os autovalores da matriz A têm partes reais negativas.

Demonstração. A demonstração será dividida em duas partes.

(i) Se todos os autovalores de A têm partes reais negativas, então existe uma função quadrática V definida positiva cuja derivada ao longo das trajetórias é definida negativa.

Admita que todos os autovalores da matriz A tenham partes reais negativas. Então, para qualquer solução dada por

$$x(t) = e^{At}x_0,$$

tem-se

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

Escolha uma matriz simétrica definida positiva Q e defina

$$P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At}\, dt.$$

Como todos os autovalores de A têm partes reais negativas, a integral converge e define uma matriz simétrica P.

Para todo $x \neq 0$, temos

$$x^T P x = \int_0^\infty (e^{At}x)^T Q (e^{At}x)\, dt > 0.$$

Logo, P é definida positiva. Definindo

$$V(x) = x^T P x,$$

concluímos que V é uma forma quadrática definida positiva.

Além disso, a matriz P satisfaz a equação de Lyapunov

$$A^T P + PA = -Q.$$

De fato, essa identidade resulta da integração da derivada de $e^{A^T t} Q e^{At}$ no intervalo $[0, \infty)$.

Ao longo das trajetórias do sistema, a derivada de V é

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= x^T (A^T P + PA) x \\ &= -x^T Q x < 0, \qquad x \neq 0. \end{aligned}$$

Portanto, V é definida positiva e sua derivada é definida negativa, concluindo a primeira parte.

(ii) Reciprocamente, se existem formas quadráticas V definida positiva e $-W$ definida negativa, então todos os autovalores de A têm partes reais negativas.

Suponha que existam matrizes simétricas definidas positivas P e Q tais que

$$V(x) = x^T P x, \qquad \frac{dV}{dt} = -x^T Q x.$$

Pela regra da derivação ao longo das trajetórias do sistema, essa relação equivale a

$$A^T P + PA = -Q.$$

Seja λ um autovalor de A, e seja $z \neq 0$ um autovetor complexo associado, de modo que

$$Az = \lambda z.$$

Multiplicando a equação de Lyapunov à esquerda por z^* e à direita por z, em que z^* denota a transposta conjugada, obtem-se

$$z^*(A^T P + PA)z = -z^* Q z.$$

Como $Az = \lambda z$ e A é real, segue que

$$2\,\mathrm{Re}(\lambda)\, z^* P z = -z^* Q z.$$

Como P e Q são definidas positivas, também no espaço complexo, temos

$$z^* P z > 0, \qquad z^* Q z > 0.$$

Consequentemente,

$$\mathrm{Re}(\lambda) = -\frac{z^* Q z}{2 z^* P z} < 0.$$

Assim, como λ é um autovalor arbitrário de A, todos os autovalores da matriz A têm partes reais negativas.

Portanto, o sistema é assintoticamente estável, concluindo a demonstração. ■

Exemplo 7 *Seja a matriz A de ordem 2 dada por* $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. *O polinômio característico é dado por*

$$\det(A - \lambda I) = (-2 - \lambda)(-3 - \lambda) = 0.$$

Assim,

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -3.$$

Como ambos têm parte real negativa, o teorema garante que existe uma função $V(x, x) > 0$. Escolhendo uma forma quadrática

$$V(x_1, x_2) = \dot{x}Px,$$

onde $P = I$ afim de simplificação, temos:

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 > 0, \quad \forall x \neq 0.$$

A derivada de V ao longo das trajetórias do sistema é

$$\frac{dV}{dt} = W(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de W são dados por

$$\det(W - \lambda I) = \lambda^2 + 10\lambda + 23,$$

cujos zeros são

$$\lambda_{1,2} = -5 \pm \sqrt{2}.$$

Portanto, ambos negativos, o que implica

$$W(x_1, x_2) = \dot{x}Wx < 0 \quad \forall x \neq 0.$$

Logo, o sistema é estável segundo Lyapunov.

Para a forma $W(x, x)$ no teorema de Lyapunov, pode-se escolher qualquer forma quadrática definida negativa. Neste caso, o teorema assuma a seguinte formulação em termos de matrizes:

Teorema 11 *Para que todos os zeros característicos da matriz real A tenham parte reais negativas, é necessário e suficiente que a equação matricial*

$$\dot{A}V + VA = -E,$$

tenha como solução a matriz de coeficientes de alguma forma quadrática definida positiva de $V(x, x) > 0$.

A técnica de verificar se os zeros têm parte real negativa continuou a ser objeto de estudo e aprimoramento ao longo do tempo. Com esse objetivo, vamos explorar novamente a abordagem de Routh, uma ferramenta clássica e eficaz para avaliar a estabilidade de sistemas

Considerando novamente o polinômio dado na equação (3.2), uma forma clássica de estudar sua estabilidade é por meio do critério de Routh-Hurwitz, que utiliza uma matriz construída a partir de seus coeficientes. Neste trabalho, adota-se a convenção

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

em que $a_n \neq 0$ é o coeficiente do termo de maior grau e a_0 é o termo independente. A partir desses coeficientes, definem-se os determinantes

$$\Delta_1 = \left|a_{n-1}\right|$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix},$$

$$\vdots$$

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & a_{n-2k+1} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & a_{n-2k+2} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & a_{n-2k+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-k+1} \end{vmatrix}$$

Observe que $a_j = 0$ para $j > n$. A partir dessa construição é possível definir a matriz de Hurwitz

Definição 16 *Seja um polinômio $P(x)$ da forma (3.2) com coeficientes reais. Então a matriz quadrada de $P(x)$ de ordem $n \times n$ definida por*

$$\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & a_{n-2k+1} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & a_{n-2k+2} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & a_{n-2k+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_j \end{bmatrix}$$

é conhecida como matriz de Hurwitz.

Os determinantes principais dessa matriz, conhecidos como determinantes de Hurwitz, desempenham papel central no critério de estabilidade formulado por Hurwitz. Por outro lado, o método de Routh fornece um procedimento que permite determinar o número de zeros de $P(x)$ localizadas no semiplano direito, a partir da construção da tabela de Routh.

Aplicando sucessivamente operações elementares à matriz de Hurwitz, subtraindo de cada linha par a linha ímpar anterior obtém-se uma forma simplificada. Esse processo conduz, passo a passo, à eliminação dos elementos abaixo da diagonal principal, resultando em uma matriz triangular superior denominada matriz de Routh, dada da forma:

$$R = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\ 0 & c_n & c_{n-2} & \cdots \\ 0 & 0 & d_n & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Assim, as matrizes de Hurwitz e Routh estão intimamente relacionadas, surgindo da aplicação do esquema de Routh sobre a matriz de Hurwitz, unificando os dois critérios clássicos de estabilidade sob uma mesma estrutura algébrica. Mais detalhes podem ser visto [4].

Teorema 12 *Seja um polinômio real $P(x)$. O número k de zeros no semiplano direito é dado por*

$$k = V\Big(a_0, \Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \frac{\Delta_3}{\Delta_2} \ldots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\Big),$$

ou equivalentemente

$$k = V(a_0, \Delta_1, \Delta_3, \dots) + V(1, \Delta_2, \Delta_4, \dots)$$

onde V representa o número de variações de sinal na sequência.

Observação 6 *Esta formulação assume o caso regular, ou seja,*

$$\Delta_1 \neq 0,\ \Delta_2 \neq 0,\ \dots,\ \Delta_n \neq 0.$$

Como discutido anteriormente, as condições formuladas por Hurwitz são equivalentes ao critério estabelecido por Routh. Devido às contribuições fundamentais desses dois grandes matemáticos, é comum referir-se a essas condições como o critério de Routh-Hurwitz. Para estudar esse critério, faremos algumas considerações:

Seja

$$P(x) = G(x) + H(x),$$

em que

$$G(x) = \frac{1}{2}\big[P(x) + (-1)^n P(-x)\big] = a_n x^n + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots,$$

e

$$H(x) = \frac{1}{2}\big[P(x) - (-1)^n P(-x)\big] = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-3}x^{n-3} + \cdots.$$

Os resultados de tais considerações sem encontram em [18] e [23].

Lema 1 *Sejam*

$$P(x) = G(x) + H(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0,$$

e

$$\begin{aligned} P_1(x) &= a_n H(x) + \big(a_n G(x) - a_{n-1} x\, H(x)\big) \\ &= a_n^2 x^{n-1} + \big(a_n a_{n-2} - a_{n-1}a_{n-3}\big)\, x^{n-2} + \big(a_n a_{n-4} - a_{n-1}a_{n-5}\big)\, x^{n-4} + \cdots \\ &\quad + a_n a_{n-2m+1}\, x^{n-2m+1} + \big(a_n a_{n-2m} - a_{n-1}a_{n-2m-1}\big)\, x^{n-2m} + \cdots + b, \end{aligned}$$

onde

$$b = \begin{cases} a_0 a_{n-1}, & \text{se } n \text{ é par,} \\ a_1 a_{n-1}, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Então, $P(x)$ é estável se, e somente se, $P_1(x)$ é estável.

Seja o polinômio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0,$$

com $a_i \in \mathbb{R}$ e $a_n > 0$. A partir de seus coeficientes, construímos para $k = 1, \dots, n$ os determinantes Δ_k da matriz de Hurwitz.

Analogamente, construimos os determinantes do polinômio:

$$P_1(x) = a_1^2 x^{n-1} + (a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3})x^{n-2} + (a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5})x^{n-4} + \cdots + b.$$

Para $k = 1, \dots, n-1$, construímos os determinantes

$$\delta_1 = |a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}|,$$

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-}1a_{n-2} - a_n a_{n-3} & a_{n-1}^2 \\ a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5} & a_{n-1}a_{n-3} \end{vmatrix},$$

$$\vdots$$

$$\delta_k = \begin{vmatrix} a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3} & a_{n-1}^2 & 0 & \cdots \\ a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5} & a_{n-1}a_{n-3} & a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_1 a_{2m} - a_0 a_{2m+1} & \cdots & \cdots & b_k \end{vmatrix}.$$

Definimos o polinômio auxiliar P_1, relacionado a $P(x)$, com o objetivo de manipulá-los de forma que, ao construirmos a matriz que gera Δ_k e a matriz que gera δ_k, seja possível identificar uma dependência entre Δ_k e δ_k.

O lema a seguir estabelece a relação existente entre esses determinantes.

Lema 2 *Sejam δ_k e Δ_k os determinantes definidos anteriormente. A relação entre eles e dada por:*

$$\delta_k = a_1^{k-1}\Delta_{k+1}, \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

O teorema a seguir pode ser encontrado em [5] e será amplamente utilizado no decorrer deste trabalho.

Teorema 13 *(Críterio de Routh-Hurwitz) Sejam $a_i \in \mathbb{R}$, para $i = 0, 1, \ldots, n$, com $a_n > 0$, e seja o polinômio*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Uma condição necessária e suficiente para que todos os zeros de $P(x)$ tenham parte real negativa é que todos os menores principais líderes da matriz de Hurwitz associada a P, denotados por Δ_k, sejam positivos para todo $k = 1, 2, \ldots, n$. Ou seja, $\Delta_k > 0$.

Demonstração. A demonstração será feita por indução finita.

Se $n = 1$ o teorema é verdadeiro. De fato, se $P(x) = a_1 x + a_0$ é estável, então a_1 e a_0 têm o mesmo sinal, logo $a_0 > 0$. Assim

$$\Delta_1 = \det(a_0) > 0.$$

Agora, se $\Delta_1 > 0$ implica que $a_0 > 0$. Como $a_1 x = -a_0$, isto é,

$$x = -\frac{a_0}{a_1},$$

temos que $\mathrm{Re}(x) < 0$ e o polinômio é estável.

Suponhamos que o teorema seja verdadeiro para $l-1$. Se $P(x)$ é estável, $P_1(x)$ também o é, pelo Lema 1. Portanto

$$\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \ldots, \delta_{l-1} > 0,$$

pela hipótese de indução. Já que

$$\delta_l = a_{l-1}^1 \Delta_{l+1},$$

vemos que

$$\Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \ldots, \Delta_l > 0.$$

Resta mostrarmos que Δ_1 é positivo. Mas $\Delta_1 = a_{n-1} > 0$, pois a_0 tem o mesmo sinal de a_1. Portanto todos os Δ_j são positivos.

Reciprocamente, se

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \ldots, \Delta_l > 0,$$

então

$$\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \ldots, \delta_{l-1} > 0.$$

Portanto, $P_1(x)$ é estável pela hipótese de indução. Logo $P(x)$ é estável, pelo Lema 1. Portanto, o teorema é verdadeiro para l e a indução está completa. ■

Exemplo 8 *Seja $P(x) \in \mathcal{H}$ definido por*

$$P(x) = x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 6x + 4.$$

Este polinômio é de Hurwitz, pois todos os zeros possuem partes reais negativas, como pode ser visto na tabela a seguir.

Tabela 3.2: Zeros de $P(x) = x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 6x + 4$.

Zeros	Parte Real	Parte Imaginária
x_1	-2.52138	0
x_2	-2.00000	0
x_3	-0.23931	0.85787
x_4	-0.23931	-0.85787

Além disso, o gráfico abaixo ilustra o comportamento de $P(x)$ ao longo do eixo real, enquanto a figura apresenta a localização dos zeros do polinômio.

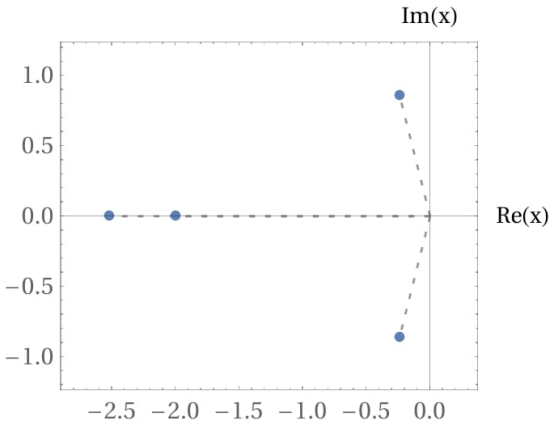


Figura 3.2: Representação dos zeros.
Fonte: Elaborado pela autora.

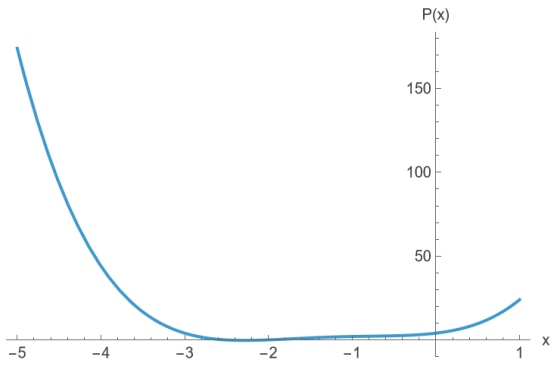


Figura 3.3: Gráfico de $P(x)$.
Fonte: Elaborado pela autora.

Aplicando o Critério de Routh-Hurwitz, calculamos os menores principais da matriz de Hurwitz, representados a seguir:

$$\Delta_1 = 5 > 0;$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 5.8 - 6.1 = 34 > 0;$$
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 8 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 104 > 0.$$

Como todos os determinantes principais até a ordem 3 são positivos, o critério de Routh-Hurwitz confirma que o polinômio é Hurwitz-estável.

A seguir serão apresentados alguns resultados interessantes relacionados ao critério de Routh-Hurwitz que podem ser vistos em [9].

Teorema 14 *Seja $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, um polinômio de Hurwitz. Então o polinômio*

$$Q(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

também é de Hurwitz.

Demonstração. Como todos os coeficientes a_j de $P(x)$ são reais, podemos obter $Q(x)$ a partir de $P(x)$ pela relação

$$Q(x) := x^n P\left(\tfrac{1}{x}\right).$$

Sejam x_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ os zeros de $P(x)$. Assim, podemos escrever

$$P(x) = a_n \prod_{j=1}^{n} (x - x_j).$$

Logo, substituindo na definição de $Q(x)$, tem-se

$$Q(x) = a_n \prod_{j=1}^{n} (1 - x x_j).$$

Os zeros de $Q(x)$ são, portanto,

$$\frac{1}{x_j} = \frac{\overline{x_j}}{|x_j|^2}.$$

Agora, note que se $x_j = x + iy$ é um zero de $P(x)$ com $Re(x_j) = x < 0$, então

$$\frac{1}{x_j} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2},$$

cuja parte real é

$$Re\left(\frac{1}{x_j}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Como $x < 0$ e $x^2 + y^2 > 0$, logo

$$Re\left(\frac{1}{x_j}\right) < 0.$$

Portanto, todos os zeros de $Q(x)$ também estão no semiplano esquerdo do plano complexo, o que garante que $Q(x)$ é um polinômio de Hurwitz. ■

Exemplo 9 *Considere o polinômio*

$$P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6,$$

cujos zeros são $x_1 = -1$,$x_2 = -2$ *e* $x_3 = -3$. *Assim, o polinômio* $P(x)$ *é de Hurwitz pois todos os zeros tem parte real negativa. Invertendo os coeficientes de* $P(x)$ *tem-se*

$$Q(x) = 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1,$$

cujos zeros $x_1 = -1$,$x_2 = -\frac{1}{3}$ *e* $x_3 = -\frac{1}{2}$, *também têm parte real negativa. Portanto,* $Q(x)$ *é de Hurwitz.*

Teorema 15 *Seja* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *um polinômio de Hurwitz de grau* $n \geq 4$. *Então*

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} > \frac{a_{n-3}}{a_{n-2}} \text{ e } \frac{a_2}{a_3} > \frac{a_0}{a_1}.$$

Demonstração. Seja $Q(x)$ o polinômio obtido invertendo a ordem dos coeficientes de $P(x)$. Pelo resultado anterior, P e Q são polinômios de Hurwitz. Da construção da matriz de Hurwitz, segue que o segundo menor principal de P e Q são, respectivamente:

$$\Delta_P^2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} = a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}, \text{ e } \Delta_Q^2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3.$$

Pelo critério de Hurwitz, $\Delta_P^2 > 0$ e $\Delta_Q^2 > 0$. Assim, as desigualdades seguem

$$\Delta_P^2 = a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3} > 0$$
$$\Delta_Q^2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0,$$

onde Δ_P^j é o j-ésimo menor principal da matriz de Hurwitz de $P(x)$. A partir dessas desigualdades são obtidas as relações dadas. ■

Exemplo 10 *Considere*

$$P(x) = x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24,$$

com zeros dados por $x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = -3$ *e* $x_4 = -4$ *todos com parte real negativa.*

Verificando as desigualdades:

$$\frac{a_3}{a_4} = \frac{10}{1} = 10 > \frac{a_1}{a_2} = \frac{50}{35} \approx 1.43$$

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{35}{10} = 3.5 > \frac{a_0}{a_1} = \frac{24}{50} = 0.48.$$

Portanto, as condições do teorema são satisfeitas.

Corolário 1 *Se* $P(x)$ *é um polinômio de Hurwitz de grau 5, então os coeficientes de* $P(x)$ *satisfazem as desigualdades*

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} > \frac{a_{n-3}}{a_{n-2}} > \frac{a_{n-5}}{a_{n-4}}.$$

Observe que este corolário fornece uma maneira de determinar a instabilidade de forma mais simples do que calcular os menores principais da matriz de Hurwitz de $P(x)$.

Teorema 16 (Zahreddine) *Seja* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, *um polinômio estável. Então:*

$$H(z) = a_0 + a_2 z + a_4 z^2 + \cdots,$$

e

$$K(z) = a_1 + a_3 z + a_5 z^2 + \cdots$$

possuem apenas zeros com parte real negativa.

Portanto, o Teorema de Zahreddine implica que um polinômio formado tomando-se os coeficientes alternados de um polinômio estável também é estável.

Exemplo 11 *Considere* $P(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1$ *um polinômio estável, pois todos os seus zeros possuem parte real negativa, como mostrado na tabela abaixo:*

Tabela 3.3: Zeros de $P(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1$.

Zeros	Parte Real	Parte Imaginária
x_1	-0.38196	0
x_2	-0.38196	0
x_3	-2.26180	0
x_4	-2.61803	0

Sejam os polinômios formados pelos coeficientes alternados de $P(x)$*:*

$$H(z) = 1 + 11z + z^2 \quad e \quad K(z) = 6 + 6z.$$

Os zeros de $H(z)$ *são*

$$z_1 = \frac{-11 + 3\sqrt{13}}{2}, \quad z_2 = \frac{-11 - 3\sqrt{13}}{2},$$

e o zero de $K(z)$ *é* $x = -1$*. Observa-se que todos os zeros possuem parte real negativa, em concordância com o Teorema 17.*

Corolário 2 *Seja* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *com* $n \geq 7$*. Se* $P(x)$ *é estável, então valem as seguintes desigualdades:*

$$\frac{a_{n-2}}{a_n} > \frac{a_{n-6}}{a_{n-4}}, \quad \frac{a_{n-3}}{a_{n-1}} > \frac{a_{n-7}}{a_{n-5}}, \quad \frac{a_4}{a_6} > \frac{a_0}{a_2}, \quad \frac{a_5}{a_7} > \frac{a_1}{a_3}.$$

Teorema 17 *Seja*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_n, \quad n \geq 5.$$

Suponha que $\Delta_2 > 0$ *e* $a_n a_{n-7} - a_{n-1}a_{n-6} \geq 0$*, onde assumimos que* $a_k = 0$ *para* $k > n$ *(isto é, se* $n = 5$*, então* $a_{n-6} = a_{n-7} = 0$*). Se*

$$a_{n-2}a_{n-5} - a_{n-3}a_{n-4} \geq 0,$$

então $P(x)$ *é instável. Além disso, se o polinômio possuir coeficiente* $a_n = 1$ *e se*

$$a_{n-5} - a_{n-1}a_{n-4} \geq 0,$$

então $P(x)$ *é instável.*

Demonstração. Consideremos a submatriz principal 4×4 da matriz de Hurwitz associada ao polinômio $P(x)$:

$$\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \end{bmatrix}.$$

Fazendo a expansão por cofatores na primeira coluna e rearranjando os termos, obtemos para o determinante da matriz (isto é, para Δ_4) a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \Delta_4 = & -a_{n-2}(a_n a_{n-5} - a_{n-1}a_{n-4})\Delta_2 - a_{n-4}\Delta_2^2 \\ & -(a_n a_{n-7} - a_{n-1}a_{n-6})\Delta_2 - (a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5})^2 \\ & +(a_n - 1)(a_{n-2}a_{n-5} - a_{n-3}a_{n-4})\Delta_2. \end{aligned}$$

Como todos os coeficientes são assumidos positivos, nota-se que:

- Se $a_{n-2}a_{n-5} - a_{n-3}a_{n-4} \geq 0$, o termo final contribui negativamente e garante que $\Delta_4 < 0$. Assim, pelo critério de Hurwitz, o polinômio é instável.
- Se $a_n = 1$, a condição $a_{n-5} - a_{n-1}a_{n-4} \geq 0$ implica igualmente $\Delta_4 < 0$. Portanto, também nesse caso o polinômio é instável.

Em ambos os cenários, tem-se a desigualdade $\Delta_4 < 0$ o que implica a instabilidade do polinômio $P(x)$. ■

Exemplo 12 *Considere o polinômio*

$$P(x) = x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 4.$$

Este polinômio é instável, pois possui zeros com parte real positiva, como mostra a tabela abaixo:

Tabela 3.4: Zeros de $P(x) = x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 4$.

Zero	Parte Real	Parte Imaginária
x_1	-2.12305	0
x_2	-0.935739	-1.10828
x_3	-0.935739	1.10828
x_4	0.497262	-0.805142
x_5	0.497262	0.805142

Sejam os coeficientes $a_5 = 1, a_4 = 3, a_3 = 3, a_2 = 2, a_1 = 1$ *e* $a_0 = 4$. *Verificando as desigualdades, temos*

$$a_5 a_{-2} - a_4 a_{-1} = 0 \geq 0,$$

$$a_3 a_0 - a_2 a_1 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 1 = 10 \geq 0,$$

$$a_0 - a_4 a_1 = 4 - 3 \cdot 1 = 1 \geq 0.$$

Como todas as condições do Teorema 18 são satisfeitas, de fato $P(x)$ *é instável, ou seja, possui pelo menos um zero com parte real positiva, como diz o teorema.*

Capítulo

4

MODELAGEM MATEMÁTICA DA DENGUE

A análise de estabilidade é fundamental no estudo de sistemas dinâmicos descritos por equações diferenciais, pois o comportamento das soluções pode ser determinado pelos zeros do polinômio característico associado à matriz jacobiana do sistema linearizado. Nesse contexto, o critério de Routh-Hurwitz fornece condições algébricas para verificar se todos os zeros desse polinômio possuem parte real negativa, garantindo a estabilidade assintótica local dos pontos de equilíbrio como já foi visto anteriormente.

Neste capítulo, investiga-se a estabilidade de um modelo de transmissão da dengue, doença viral transmitida principalmente pela picada da fêmea do mosquito Aedes aegypti e Aedes albopictus.

Inicialmente, será apresentado um modelo epidemiológico da dengue descrito por um sistema de equações diferenciais ordinárias do tipo SIR (Suscetíveis, Infectados e Recuperados) com vetor. O modelo será formulado considerando as interações entre a população humana e a população de mosquitos. A partir das hipóteses adotadas, o sistema será reduzido para um conjunto de equações envolvendo as variáveis normalizadas associadas às frações de indivíduos suscetíveis, infectados e mosquitos infectados. Em seguida, serão determinados os pontos de equilíbrio do sistema, com destaque para o equilíbrio livre de doença e o equilíbrio endêmico, além da obtenção do polinômio característico associado à matriz jacobiana do modelo.

Posteriormente, será realizada a análise da estabilidade local do equilíbrio livre de doença, utilizando os critérios algébricos de estabilidade para polinômios. Serão apresentadas as condições necessárias para que os zeros do polinômio característico possuam parte real negativa, bem como a região do espaço de parâmetros na qual o equilíbrio livre de doença é localmente assintoticamente estável. Essa análise permitirá estabelecer uma relação entre a estabilidade do sistema e o número básico de reprodução da doença $\mathcal{R}_0$, parâmetro fundamental para determinar a dinâmica da doença.

Por fim, será analisada a estabilidade do equilíbrio livre da doença e equilíbrio endêmico, considerando as condições de existência desses pontos e a aplicação do critério de Routh-Hurwitz ao polinômio característico obtido pela linearização do sistema no equilíbrio endêmico. A partir dessa análise, serão estabelecidas as condições sobre os parâmetros do modelo que garantem a estabilidade local assintótica do equilíbrio endêmico, demonstrando que a persistência da doença ocorre de forma estável na região de parâmetros em que o número básico de reprodução satisfaz a condição $\mathcal{R}_0 > 1$.

4.1 Modelo SIR com vetor aplicado à dinâmica da dengue

A dengue representa um importante problema de saúde pública, especialmente em países tropicais como o Brasil. Em 2025, o país ultrapassou 1 milhão de casos prováveis da doença, segundo dados do Painel de Monitoramento das Arboviroses do Ministério da Saúde [16], e projeções indicam cerca de 1,8 milhão de casos [12].

Inicialmente serão determinados os pontos de equilíbrio do sistema, e em seguida realiza-se a linearização do modelo nesses pontos. A partir da matriz jacobiana obtem-se o polinômio característico, cuja estabilidade é analisada por meio do critério de Routh-Hurwitz.

Para descrever a transmissão da dengue, ultiliza-se um modelo epidemiológico do tipo SIR com vetor, que representa a interação entre humanos e mosquitos por meio de equações diferenciais ordinárias [24]. Nesse modelo, a população humana é divida em três classes, sendo elas humanos suscetíveis S_h, humanos infectados I_h e humanos recuperados R_h, enquanto a população de mosquistos é dividida em duas classses, mosquistos suscetíveis S_v e mosquistos infectados I_v, assim o sistema inicial é dado por:

$$\begin{cases} \dot{S}_h = \mu_h N_h - \dfrac{\beta_h b}{N_h} I_v S_h - \mu_h S_h, \\ \dot{I}_h = \dfrac{\beta_h b}{N_h} I_v S_h - (\mu_h + \gamma_h) I_h, \\ \dot{R}_h = \gamma_h I_h - \mu_h R_h, \\ \dot{S}_v = \mu_v N_v - \dfrac{\beta_v b}{N_h} I_h S_v - \mu_v S_v, \\ \dot{I}_v = \dfrac{\beta_v b}{N_h} I_h S_v - \mu_v I_v. \end{cases},$$

onde N_h representa a população total de humanos e N_v representa a população total de mosquitos. O parâmetro b corresponde à taxa média de picadas realizadas pelos mosquitos. As constantes β_h e β_v representam, respectivamente, as probabilidades de transmissão da doença do mosquito infectado para o humano suscetível e do humano infectado para o mosquito suscetível. Além disso, μ_h denota a taxa natural de mortalidade humana, μ_v representa a taxa natural de mortalidade dos mosquitos e γ_h corresponde à taxa de recuperação dos humanos infectados.

Assumindo populações totais constantes ao longo do tempo, obtem-se

$$N_h = S_h + I_h + R_h, \quad N_v = S_v + I_v.$$

Dessa forma, as variáveis R_h e S_v podem ser escritas em função das demais variáveis por meio das relações:

$$R_h = N_h - S_h - I_h, \qquad S_v = N_v - I_v.$$

Com isso, o sistema pode ser reduzido para três equações diferenciais envolvendo apenas as variáveis S_h, I_h e I_v. Em seguida, fazendo uma mudança de variáveis, tem-se

$$x = \frac{S_h}{N_h}, \qquad y = \frac{I_h}{N_h}, \qquad z = \frac{I_v}{N_v},$$

onde x representa a fração de humanos suscetíveis, y representa a fração de humanos infectados e z representa a fração de mosquitos infectados. Além disso, os parâmetros são

redefinidos por

$$\alpha = \frac{\beta_h b N_v}{N_h}, \qquad \beta = \gamma_h + \mu_h, \qquad \gamma = \beta_v b, \qquad \delta = \mu_v.$$

Logo, o sistema pode ser reduzido a um sistema normalizado com três variáveis [11]:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu(1-x) - \alpha x z \\ \dot{y} = \alpha x z - \beta y \\ \dot{z} = \gamma(1-z)y - \delta z \end{cases}. \tag{4.1}$$

O parâmetro α representa a taxa de transmissão do mosquito para o humano, γ está relacionado à transmissão do humano para o mosquito, β representa a taxa de recuperação dos humanos infectados, enquanto μ e δ correspondem às taxas naturais de mortalidade das populações humana e de mosquitos, respectivamente.

A análise da estabilidade das soluções do sistema é conduzida a partir do estudo dos zeros do polinômio característico associado à matriz jacobiana do modelo. Essa matriz, obtida pela linearização do sistema em torno de um ponto de equilíbrio, é dada por

$$J(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\mu - \alpha z & 0 & -\alpha x \\ \alpha z & -\beta & \alpha x \\ 0 & \gamma(1-z) & -\gamma y - \delta \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Nesse contexto, o critério de Hurwitz fornece condições algébricas necessárias e suficientes para que todos os zeros do polinômio característico possuam parte real negativa, garantindo a estabilidade local assintótica do ponto de equilíbrio considerado. O sistema considerado admite dois tipos de pontos de equilíbrio: o equilíbrio livre de doença (DFE), no qual não há indivíduos infectados, e o equilíbrio endêmico (EE), caracterizado pela persistência da doença na população.

Para determinar os pontos de equilíbrio, é considerado:

$$\begin{cases} \mu(1-x) - \alpha x z = 0 \\ \alpha x z - \beta y = 0 \\ \gamma(1-z)y - \delta z = 0 \end{cases}.$$

Ao isolar as variáveis x e y na primeira e segunda equações, respectivamente, é possível determiná-los em função dos parâmetros, logo segue que

$$x = \frac{\mu}{\mu - \alpha z} \quad e \quad y = \frac{\alpha x z}{\beta}.$$

Substituindo x na expressão de y, obtem-se

$$y = \frac{\alpha(\frac{\mu}{\mu - \alpha z})}{\beta} = \frac{\alpha \mu z}{\beta(\mu - \alpha z)}.$$

Substituindo essa expressão na terceira equação do sistema, segue que

$$\gamma(1-z)\left(\frac{\alpha \mu z}{\beta(\mu - \alpha z)}\right) - \delta z = 0.$$

Assumindo $z \neq 0$, tem-se

$$\frac{\gamma \alpha \mu (1-z)}{\beta(\mu - \alpha z)} = \delta \implies \gamma \alpha \mu (1-z) = \delta \beta (\mu - \alpha z) \implies z = \frac{\mu(\gamma\alpha - \delta\beta)}{\alpha(\gamma\mu - \delta\beta)}.$$

Observe que, para $z = 0$, tem-se $x = 1$ e $y = 0$. Portanto, o ponto de equilíbrio livre do sistema é dado por $(x, y, z) = (1, 0, 0)$.

Para $z \neq 0$, ao substituir z na expressão de x, será dado por

$$x = \frac{\mu}{\mu + \alpha\left(\frac{\mu(\gamma\alpha - \delta\beta)}{\alpha(\gamma\mu - \delta\beta)}\right)} = \frac{\delta\beta + \gamma\mu}{\gamma(\alpha + \mu)}.$$

Para determinar y faremos a substituição na equação inicial do sistema. Observe que $\mu(1 - x) - \alpha xz = 0$ o que implica $\alpha xz = \mu(1 - x)$, que pode ser substituido na segunda equação. Assim, segue que

$$y = \frac{\mu}{\beta} \cdot \left(1 - \frac{\delta\beta + \gamma\mu}{\gamma(\alpha + \mu)}\right) = \frac{\mu}{\beta} \cdot \frac{\gamma\alpha - \delta\beta}{\gamma(\alpha + \mu)} \implies y = \frac{\mu(\gamma\alpha - \delta\beta)}{\beta\gamma(\alpha + \mu)}.$$

Portanto, o ponto de equilíbrio endêmico é dado por

$$(x, y, z) = \left(\frac{\gamma\mu + \beta\delta}{\gamma(\mu + \alpha)}, \frac{\mu(\alpha\gamma - \beta\delta)}{\beta\gamma(\mu + \alpha)}, \frac{\mu(\alpha\gamma - \beta\delta)}{\alpha(\gamma\mu + \beta\delta)}\right). \tag{4.3}$$

Note que a existência do equilíbrio endêmico requer $\alpha\gamma - \beta\delta > 0$.

Avaliando a matriz jacobiana (4.2) no ponto livre do sistema denotado por $E_0 = (1, 0, 0)$, a matriz será

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & -\alpha \\ 0 & -\beta & \alpha \\ 0 & \gamma & -\delta \end{pmatrix},$$

cujo polinômio característico associado a essa matriz é dado por:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^3 + \lambda^2\beta + \lambda^2\delta + \lambda\beta\delta - \lambda\alpha\gamma + \lambda^2\mu + \lambda\beta\mu + \mu\delta\gamma + \mu\beta\delta - \alpha\gamma\mu \\ &= (\lambda + \mu)\left[\lambda^2 + (\beta + \delta)\lambda + \beta\delta - \alpha\gamma\right]. \end{aligned}$$

Como $\mu > 0$, segue que o autovalor $\lambda_1 = -\mu$ é estritamente negativo. Portanto, a estabilidade do equilíbrio livre de doença passa a depender exclusivamente dos zeros do polinômio quadrático

$$\lambda^2 + (\beta + \delta)\lambda + \beta\delta - \alpha\gamma.$$

Pelo critério de Routh-Hurwitz, todos os zeros desse polinômio possuem parte real negativa se, e somente se, seus coeficientes satisfazem $a_1 > 0$ e $a_2 > 0$. No presente modelo, tem-se $a_1 = \beta + \delta > 0$, uma vez que β e δ representam taxas positivas. Além disso, a condição $a_2 = \beta\delta - \alpha\gamma > 0$ pode ser reescrita como

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} < 1. \tag{4.4}$$

É possível quantificar o potencial de transmissão da doença por meio do parâmetro $\mathcal{R}_0$, conhecido como número básico de reprodução, que pode ser calculado atráves do método Next Generation Matrix (NGM). Esse método, introduzido por Diekmann, Heesterbeek e Metz, consiste em construir uma matriz associada aos termos de novas infecções e aos termos de transição entre os compartimentos infectados do sistema epidemiológico. A partir dessa matriz, calcula-se o número básico de reprodução $\mathcal{R}_0$, definido como o raio espectral da matriz próxima geração, isto é, o maior módulo entre seus autovalores. O valor de $\mathcal{R}_0$ fornece um critério importante para o estudo da estabilidade do ponto de equilíbrio livre da doença: quando $\mathcal{R}_0 < 1$, a doença tende a desaparecer da população, enquanto para $\mathcal{R}_0 > 1$, ocorre a possibilidade de surtos epidêmicos e persistência da infecção [14]. Dessa forma, o método da NGM constitui uma ferramenta fundamental na

análise qualitativa de modelos epidemiológicos. Ou seja, biologicamente $\mathcal{R}_0$ representa o número médio de novos casos produzidos por um indivíduo infectado em uma população suscetível.

Para determinar $\mathcal{R}_0$ pelo metódo NGM, considere a decomposição do sistema na forma $(\dot{y}, \dot{z}) = F - V$, onde F representa a produção de novas infecções e V a saída da classe de infectados (por cura ou morte):

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha xz - \beta y \\ \gamma(1-z)y - \delta z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha xz \\ \gamma y \end{bmatrix}}_{F} - \underbrace{\begin{bmatrix} \beta y \\ \gamma yz + \delta z \end{bmatrix}}_{V}.$$

Calculando o gradiente de F e V com relação a y e z, respectivamente, obtem-se:

$$\nabla F = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \gamma & 0 \end{bmatrix}, \qquad \nabla V = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}.$$

Avaliando essas matrizes no ponto de equilíbrio livre da doença (DFE), dado por $(x, y, z) = (1, 0, 0)$, observa-se que elas permancem iguais. Assim, o inverso de V é dado por:

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\delta} \end{bmatrix}.$$

Multiplicando a matriz V^{-1} por F na qual resulta em:

$$FV^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\alpha}{\delta} \\ \frac{\gamma}{\beta} & 0 \end{bmatrix},$$

cuja equação característica associada a essa matriz é

$$\lambda^2 - \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} = 0.$$

Os autovalores associados a esta matriz permitem determinar o raio espectral. Assim, o raio espectral de FV^{-1}, isto é, o maior valor absoluto entre os autovalores, é dado por:

$$\rho(FV^{-1}) = \sqrt{\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}}.$$

Portanto, dizemos que o número de reprodução do modelo SIR de uma população constante é dado por:

$$\mathcal{R}_0 = \sqrt{\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}}.$$

De acordo com a condição (4.4) temos que $\mathcal{R}_0 < 1$. Portanto, o equilíbrio livre de doença é localmente assintoticamente estável sempre que $\mathcal{R}_0 < 1$, o que implica que a infecção tende a desaparecer da população. Por outro lado, quando $\mathcal{R}_0 > 1$, existe um equilíbrio endêmico, no qual a doença persiste na população. Assim, o número básico de reprodução $\mathcal{R}_0$ atua como um parâmetro limiar que determina a dinâmica da doença: se $\mathcal{R}_0 < 1$, a doença é erradicada, já para $\mathcal{R}_0 > 1$, a infecção se mantém. Esses resultados evidenciam a utilidade de métodos da teoria de estabilidade de polinômios na análise de modelos epidemiológicos.

4.2 Análise da Estabilidade

Nesta seção, será realizada a análise dos pontos de equilíbrio do modelo epidemiológico no equilíbrio livre da doença (DFE) e no equilíbrio endêmico (EE). O estudo dessa seção foi baseado em [11], utilizando técnicas de análise qualitativa de sistemas dinâmicos, linearização e resultados da teoria de estabilidade. Em particular, serão aplicados critérios de estabilidade, como o critério de Hurwitz, para investigar as condições sob as quais os pontos de equilíbrio são localmente assintoticamente estáveis.

Além disso, esta seção complementa e confirma os resultados obtidos anteriormente por meio do número básico de reprodução $\mathcal{R}_0$. Será mostrado que, quando $\mathcal{R}_0 < 1$, o equilíbrio livre da doença é localmente assintoticamente estável, indicando que a infecção tende a desaparecer da população. Por outro lado, para $\mathcal{R}_0 > 1$, existe um equilíbrio endêmico biologicamente viável, no qual a doença persiste no sistema. Dessa forma, a análise dos pontos de equilíbrio e a aplicação do critério de Hurwitz reforçam o papel do número básico de reprodução como parâmetro limiar na dinâmica epidemiológica do modelo.

4.2.1 Estabilidade do Ponto de Equilíbrio Livre da Doença

Para analisar estabilidade do ponto de equilibrio livre da doença e equilibrio endêmico, será considerado o prisma triangular unitário definido por $\mathcal{D} := \{(x, y, z) \in [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \mid x + y \leq 1\}$ cuja região será ilustrada abaixo:

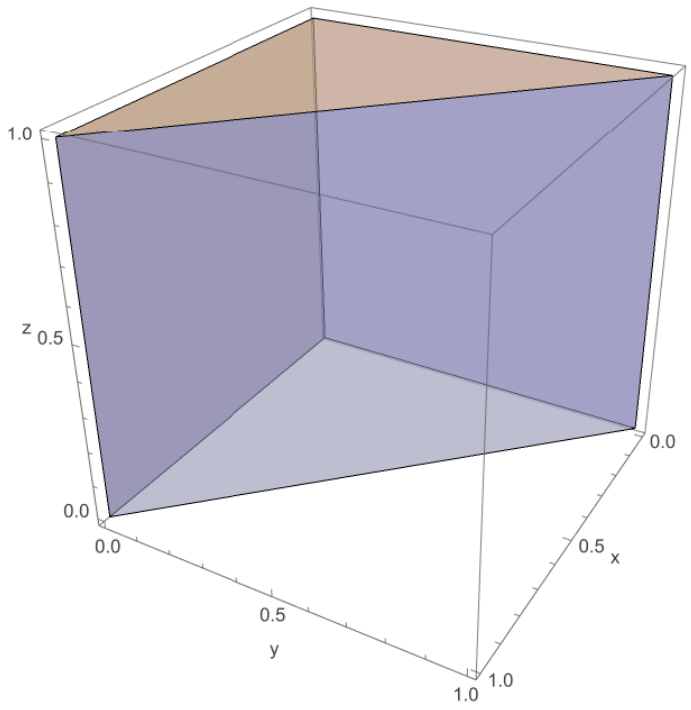


Figura 4.1: Prisma triangular unitário no espaço tridimensional.
Fonte: Elaborado pela autora.

As faces do prisma $\mathcal{D}$ são definidas pelas seguintes regiões:

$$\begin{cases} S_1 := \{(x,y,z) \in [0,1] \times [0,1] \times \{0\} \mid x+y \leq 1\}, \\ S_2 := \{(x,y,z) \in [0,1] \times [0,1] \times \{1\} \mid x+y \leq 1\}, \\ S_3 := \{0\} \times [0,1] \times [0,1], \\ S_4 := [0,1] \times \{0\} \times [0,1], \\ S_5 := \{(x,y,z) \in [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \mid x+y = 1\}. \end{cases}$$

Após a caracterização da região D, é possível análisar o sistema no interior desse domínio. O objetivo é compreender melhor o comportamento das soluções, investigando propriedades como invariância, positividade e estabilidade dos pontos de equilíbrio. Esses aspectos são essenciais, pois garantem que o modelo faça sentido tanto do ponto de vista biológico quanto matemático.

A seguir serão apresentados alguns resultados que servirão de base para a análise de estabilidade e podem ser encontrados em [11].

Lema 3 *O conjunto $\mathcal{D}$ é positivamente invariante com respeito ao campo vetorial associado ao sistema.*

A seguir, apresenta-se apenas um esboço da demosntração deste lema, destacando os principais argumentos.

Demonstração. A prova baseia-se na análise do campo vetorial sobre a fronteira do domínio $\mathcal{D}$, denotada por

$$\partial\mathcal{D} = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5.$$

O objetivo é verificar que, em cada uma dessas faces, o campo de vetores não aponta para fora do domínio, garantindo assim a invariância positiva de $\mathcal{D}$. Inicialmente, consideramos as faces de base e topo. Na face S_1, definida por $z = 0$, observa-se que

$$\dot{z} = \gamma y \geq 0,$$

o que impede que as trajetórias deixem o domínio por essa face. Já na face S_2, correspondente a $z = 1$, tem-se

$$\dot{z} = -\delta < 0,$$

o que força as soluções a retornarem ao interior de $\mathcal{D}$. Em seguida, analisam-se as faces associadas aos planos coordenados. Na face S_3, onde $x = 0$, verifica-se que

$$\dot{x} = \mu > 0,$$

garantindo que as trajetórias entram no domínio. De maneira análoga, na face S_4, onde $y = 0$, observa-se que $\dot{y} \geq 0$ ou que o campo é tangente à fronteira, impedindo que a variável y assuma valores negativos. Por fim, considera-se a face inclinada S_5, definida pela condição $x + y = 1$. Nesse caso, analisa-se a soma das derivadas

$$\dot{x} + \dot{y},$$

de modo a garantir que a dinâmica preserve a restrição populacional total. Sob condições adequadas sobre os parâmetros do modelo, o campo vetorial nessa face aponta para o interior de $\mathcal{D}$ ou permanece tangente à mesma. Dessa forma, como o campo vetorial em

toda a fronteira $\partial\mathcal{D}$ não aponta para fora do domínio, conclui-se que $\mathcal{D}$ é positivamente invariante. ■

A demonstração completa deste lema pode ser vista em [11]. Antes de apresentarmos o próximo lema, para analisar a estabilidade do ponto de equilíbrio livre da doneça, focaremos no subconjunto $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ dado por

$$\mathcal{D}' := \{(x, y, z) \in (0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \mid x + y \leq 1\}.$$

Nesse domínio, a análise da estabilidade é realizada por meio do método de Lyapunov [11]. A escolha da função utilizada a seguir é motivada pela estrutura dos termos do sistema e pela utilização da expressão $x - 1 - \ln(x)$, frequentemente empregada na construção de funções de Lyapunov para modelos de sistemas biológicos. Essa expressão é não negativa para $x > 0$ e se anula em $x = 1$. Os termos lineares em y e z são incorporados de modo a permitir a análise da derivada da função ao longo das trajetórias do sistema.

$$V(x, y, z) = -1 + x - \ln(x) + y + \left(\frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{2\gamma\delta}\right) z.$$

Lema 4 *A função V é definida positiva em $\mathcal{D}'$, satisfazendo $V(1, 0, 0) = 0$ e $V(x, y, z) > 0$ para todo $(x, y, z) \in \mathcal{D}' \setminus \{(1, 0, 0)\}$.*

Demonstração. Seja a função $f(x) = x - \ln(x)$ para $x > 0$. Pela desigualdade elementar $\ln(x) \leq x - 1$ (equivalentemente, $x - \ln(x) \geq 1$), seque que

$$f(x) \geq 1, \qquad \text{para todo } x > 0,$$

com $f(x) = 1$ apenas em $x = 1$. Analogamente, é possível observar que

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}, \quad \text{e} \quad f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0,$$

o que mostra que f é convexa e possui mínimo único em $x = 1$, onde $f(1) = 1$. Definindo a função constante

$$c := \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{2\gamma\delta} > 0,$$

logo, é possível reescrever

$$V(x, y, z) = -1 + f(x) + y + cz \leq -1 + 1 + y + cz = y + cz,$$

com $y \geq 0$ e $z \geq 0$ no domínio $\mathcal{D}$. Logo $V(x, y, z) \geq 0$. Além disso, se $V(x, y, z) = 0$, então necessariamente $y = 0$, $z = 0$ e $f(x) = 1$, o que implica $x = 1$. Assim, o único ponto em que $V(x, y, z) = 0$ é $(1, 0, 0)$.

Portanto, $V(x, y, z) = 0$ e $V(x, y, z) > 0$ para todo $(x, y, z) \neq (1, 0, 0)$ em $\mathcal{D}$. ■

Os próximos lemas apresentam condições importantes envolvendo o número básico de reprodução, sob as quais o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável em uma região definida.

Lema 5 *Se $\mathcal{R}_0 < 1$, então o equilíbrio livre de doença $E_0 = (1, 0, 0)$ é localmente assintoticamente estável em $\mathcal{D}'$.*

Demonstração. Considere a função de Lyapunov $V(x, y, z)$ cujas derivadas parciais são dadas por

$$V_x = 1 - \frac{1}{x}, \quad V_y = 1, \quad V_z = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{2\gamma\delta}.$$

Derivando V ao longo das trajetórias do sistema, obtem-se:

$$\dot{V} = V_x\big(\mu(1-x) - \alpha xz\big) + V_y(\alpha xz - \beta y) + V_z\big(\gamma(1-z)y - \delta z\big).$$

Substituindo as expressões de V_x, V_y, V_z e simplificando, segue que:

$$\dot{V} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\mu(1-x) - \left(\beta - \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{2\delta}\right)y - \left(\frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{2\gamma} - \alpha\right)z - \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{2\delta}yz.$$

Reorganizando os termos, tem-se:

$$\dot{V} = -\frac{(1-x)^2}{x}\mu - \frac{\beta\delta - \alpha\gamma}{2\gamma}z - \frac{\beta\delta - \alpha\gamma}{2\delta}y - \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{2\delta}yz.$$

Como $x > 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$ em $\mathcal{D}'$, e $\mathcal{R}_0 < 1$ implica $\beta\delta - \alpha\gamma > 0$, todos os termos do lado direito são não positivos. Logo,

$$\dot{V} \leq 0 \quad \text{em } \mathcal{D}'.$$

Além disso, $\dot{V} = 0$ se, e somente se,

$$\frac{(1-x)^2}{x} = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

o que implica $x = 1$, ou seja, $(x, y, z) = (1, 0, 0)$.

Portanto, o maior conjunto invariante contido em $\left\{(x, y, z) \in \mathcal{D}' : \dot{V} = 0\right\}$ reduz-se ao ponto de equilíbrio $(1, 0, 0)$.

A função V é positiva definida de acordo com o Lema 4 e contínua em $\mathcal{D}'$. Para qualquer $c > 0$, o conjunto de nível

$$\Omega_c = \{(x, y, z) \in \mathcal{D}' : V(x, y, z) \leq c\}$$

é fechado e limitado, logo compacto. Pelo princípio da invariância de LaSalle [17], todas as soluções do sistema com condições iniciais em $\mathcal{D}'$ convergem para o maior conjunto invariante contido em $\dot{V} = 0$, isto é, $(1, 0, 0)$.

Portanto, o equilíbrio livre de doença $(1, 0, 0)$ é assintoticamente estável em $\mathcal{D}'$. ■

Lema 6 *Se $\mathcal{R}_0 < 1$, então o equilíbrio livre da doença $E_0 = (1, 0, 0)$ do sistema é assintoticamente estável em $S_3 = \{0\} \times [0, 1] \times [0, 1]$.*

Demonstração. O objetivo é mostrar que o equilíbrio livre da doença $E_0 = (1, 0, 0)$ é assintoticamente estável em S_3. Considere as soluções do sistema iniciando em S_3, isto é, com condição inicial da forma $(x_0, y_0, z_0) \in S_3$.

O campo vetorial inicial associado ao sistema é dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} \mu_h \\ -\beta y_0 \\ \gamma(1 - z_0)y_0 - \delta z_0 \end{bmatrix}.$$

Como $(x_0, y_0, z_0) \in S_3 \subset D$, segue dos resultados anteriores que a solução permanece em D. Além disso, como

$$\dot{x} = \mu > 0$$

quando $x_0 = 0$, a variável x cresce inicialmente, fazendo com que a trajetória entre no interior do conjunto admissível. Pelos resultados de estabilidade estabelecidos para esse domínio, conclui-se que as soluções convergem para o equilíbrio $(1, 0, 0)$. Portanto, o equilíbrio livre da doença $E_0 = (1, 0, 0)$ é assintoticamente estável em S_3. ■

Teorema 18 *Se $\mathcal{R}_0 < 1$, então o equilíbrio livre da doença $E_0 = (1, 0, 0)$ é assintoticamente estável no conjunto admissível D.*

Demonstração. Dos resultados anteriores, o equilíbrio livre da doença é assintoticamente estável no interior do domínio admissível. Pelo lema anterior, o equilíbrio também é assintoticamente estável sobre o subconjunto S_3. Como o domínio pode ser escrito como união desses subconjuntos, conclui-se que o equilíbrio livre da doença é assintoticamente estável em todo o conjunto D. ■

4.2.2 Estabilidade do Ponto de Equilíbrio Endêmico

Considere o equilíbrio endêmico dado por (4.3) do sistema (4.1). Será considerado o prisma triangular D, removendo o segmento de reta $\mathcal{L} := [0, 1] \times \{0\} \times \{0\}$, e definindo $\widehat{D} = \{x \in D \,/\, x \neq \mathcal{L}\}$.

Lema 7 *Em $\hat{\mathcal{D}}$, se $\mathcal{R}_0 > 1$, então*

$$\beta\delta < \left(\frac{\mu(\alpha\gamma - \beta\delta)}{(\gamma\mu + \beta\delta)} + \beta + \mu\right)\left(\frac{\mu(\alpha\gamma - \beta\delta)}{\beta(\alpha + \mu)} + \beta + \delta\right)\left(\frac{\mu(\alpha\gamma - \beta\delta)}{\beta(\alpha + \mu)} + \frac{\mu(\alpha\gamma - \beta\delta)}{(\gamma\mu + \beta\delta)} + \delta + \mu\right) \Bigg/ \left(\frac{\mu(\alpha\gamma - \beta\delta)}{\beta(\alpha + \mu)} + \frac{\mu_h(\alpha\gamma - \beta\delta)}{(\gamma\mu + \beta\delta)} + \beta + \delta\right).$$

Demonstração. Para demonstrar a desigualdade, conforme visto anteriormente que $\mathcal{R}_0 > 1$. Como $\mathcal{R}_0 = \sqrt{\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}}$, conclui-se que $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} > 1$, o que implica $\alpha\gamma - \beta\delta > 0$. Além disso, como todos os parâmetros do modelo são positivos, assim expressões

$$\frac{\mu(\alpha\gamma - \beta\delta)}{\gamma\mu + \beta\delta} \quad \text{e} \quad \frac{\mu(\alpha\gamma - \beta\delta)}{\beta(\alpha + \mu)},$$

também são positivas. Então, rearranjando os termos, tem-se

$$\begin{aligned} 0 < &\left(\frac{\mu(\alpha\gamma - \beta\delta)}{\gamma\mu + \beta\delta} + \beta + \mu\right)\left(\frac{\mu(\alpha\gamma - \beta\delta)}{\beta(\alpha + \mu)} + \beta + \delta\right) \\ &\left(\frac{\mu(\alpha\gamma - \beta\delta)}{\beta(\alpha + \mu)} + \frac{\mu(\alpha\gamma - \beta\delta)}{\gamma\mu + \beta\delta} + \delta + \mu\right) \\ &- \beta\delta\left(\frac{\mu(\alpha\gamma - \beta\delta)}{\beta(\alpha + \mu)} + \frac{\mu(\alpha\gamma - \beta\delta)}{\gamma\mu + \beta\delta} + \beta + \delta\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \beta\delta\left(\frac{\mu(\alpha\gamma - \beta\delta)}{\beta(\alpha + \mu)} + \frac{\mu(\alpha\gamma - \beta\delta)}{\gamma\mu + \beta\delta} + \beta + \delta\right) < &\left(\frac{\mu(\alpha\gamma - \beta\delta)}{\gamma\mu + \beta\delta} + \beta + \mu\right) \\ &\left(\frac{\mu(\alpha\gamma - \beta\delta)}{\beta(\alpha + \mu)} + \beta + \delta\right) \\ &\left(\frac{\mu(\alpha\gamma - \beta\delta)}{\beta(\alpha + \mu)} + \frac{\mu(\alpha\gamma - \beta\delta)}{\gamma\mu + \beta\delta} + \delta + \mu\right). \end{aligned}$$

Como

$$\left(\frac{\mu(\alpha\gamma-\beta\delta)}{\beta(\alpha+\mu)}+\frac{\mu(\alpha\gamma-\beta\delta)}{\gamma\mu+\beta\delta}+\beta+\delta\right)>0,$$

dividindo ambos os lados da desigualdade anterior por essa quantidade, conclui-se que

$$\begin{aligned}\beta\delta<&\left(\frac{\mu(\alpha\gamma-\beta\delta)}{(\gamma\mu+\beta\delta)}+\beta+\mu\right)\left(\frac{\mu(\alpha\gamma-\beta\delta)}{\beta(\alpha+\mu)}+\beta+\delta\right)\left(\frac{\mu(\alpha\gamma-\beta\delta)}{\beta(\alpha+\mu)}+\frac{\mu(\alpha\gamma-\beta\delta)}{(\gamma\mu+\beta\delta)}+\delta+\mu\right)\\&\Bigg/\left(\frac{\mu(\alpha\gamma-\beta\delta)}{\beta(\alpha+\mu)}+\frac{\mu_h(\alpha\gamma-\beta\delta)}{(\gamma\mu+\beta\delta)}+\beta+\delta\right),\end{aligned}\tag{4.5}$$

como se pretendia demonstrar. ■

Teorema 19 *Se $\mathcal{R}_0>1$, então o equilíbrio endêmico é localmente assintoticamente estável em $\widehat{D}$.*

Demonstração. Incialmente, mostra-se que o equilíbrio endêmico é localmente assintoticamente estável em $\widehat{D}$ sempre que $\mathcal{R}_0>1$. Para tanto, o critério de Routh-Hurwitz é satisfeito se, e somente se, a condição (4.5) for válida. Pelo lema anterior, essa condição é consequência direta da hipótese $\mathcal{R}_0>1$. Linearizando o sistema no equilíbrio endêmico e considerando a matriz jacobiana dada em (4.2), o polinômio característico é obtido por meio do $\det(\lambda I-J)$:

$$\begin{bmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-\alpha z-\mu_h&0&-\alpha x\\\alpha z&-\beta&\alpha x\\0&\gamma(1-z)&-\gamma y-\delta\end{bmatrix},$$

cujo polinômio característico será

$$P(\lambda)=(\lambda+\alpha z+\mu)(\lambda+\beta)(\lambda+\gamma y+\delta)+\alpha x\alpha z\gamma(1-z)-(-\gamma(1-z)(-\alpha x)(\lambda+\alpha z+\mu)).$$

Efetuando os produtos e agrupando os termos segundo as potências de λ, segue que

$$\begin{aligned}P(\lambda)=&\lambda^3+\lambda^2\big(\gamma y+\delta+\beta+\alpha z+\mu\big)\\&+\lambda\big(\gamma y\beta+\delta\beta+\alpha\gamma yz+\alpha\delta z+\alpha z\beta+\gamma\mu y+\delta\mu+\mu\beta-\alpha\gamma x(1-z)\big)\\&+\alpha\gamma yz\beta+\alpha\delta z\beta+\gamma\mu y\beta+\delta\mu\beta-\alpha\gamma\mu x(1-z).\end{aligned}$$

Observe que tem-se um polinômio do terceiro grau da forma:

$$\lambda^3+a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0,$$

onde

$$\begin{aligned}a_2&=\alpha z+\beta+\delta+\gamma y+\mu,\\a_1&=\alpha\beta z+\alpha\delta z-\alpha\gamma x(1-z)+\alpha\gamma yz+\beta\delta+\beta\gamma y+\beta\mu+\delta\mu+\gamma\mu y,\\a_0&=\alpha\beta\delta z+\alpha\beta\gamma yz-\alpha\gamma\mu x(1-z)+\beta\delta\mu+\beta\gamma\mu y.\end{aligned}\tag{4.6}$$

Construindo a matriz de Hurwtiz

$$H=\begin{bmatrix}a_2&a_0&0\\1&a_1&0\\0&a_2&a_0\end{bmatrix},$$

e calculando os menores principais, obtém-se

$$\Delta_1 = a_2, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ 1 & a_1 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_0, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ 1 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_0 \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ 1 & a_1 \end{vmatrix} = a_0\Delta_2.$$

Pelo critério de Routh-Hurwitz, o polinômio característico é estável se todas os seus zeros possuem parte real negativa, o que garante a estabilidade assintótica local do equilíbrio considerado. Além disso, conforme o Teorema 13, uma condição necessária e suficiente para que todos os zeros de $P(\lambda)$ tenham parte real negativa é que todos os menores principais da matriz de Hurwitz associada a $P(\lambda)$ sejam positivos, $\Delta_k > 0$, onde $k = 1, \ldots, n$. Logo, obtém-se as seguintes condições

$$\begin{cases} a_2 > 0, \\ a_1a_2 - a_0 > 0, \\ a_0 > 0. \end{cases}$$

Substituindo as expressões (4.6) dos coeficiente no sistema acima, obtém-se

$$\begin{cases} \alpha z + \beta + \delta + \gamma y + \mu > 0, \\ (\alpha\beta z + \alpha\delta z - \alpha\gamma x(1-z) + \alpha\gamma yz + \beta\delta + \beta\gamma y + \beta\mu + \delta\mu + \gamma\mu y)(\alpha z + \beta + \delta + \gamma y + \mu) \\ \qquad -(\alpha\beta\delta z + \alpha\beta\gamma yz - \alpha\gamma\mu x(1-z) + \beta\delta\mu + \beta\gamma\mu y) > 0, \\ \alpha\beta\delta z + \alpha\beta\gamma yz - \alpha\gamma\mu x(1-z) + \beta\delta\mu + \beta\gamma\mu y > 0, \end{cases}$$

simplificando e reorganizando os termos

$$\begin{cases} \alpha z + \beta + \delta + \gamma y + \mu > 0, \\ (\beta + \mu + \alpha z)(\beta + \delta + \gamma y)(\delta + \mu + \gamma y + \alpha z) - \alpha\gamma x(1-z)(\beta + \delta + \gamma y + \alpha z) > 0, \\ (\mu + \alpha z)\beta(\delta + \gamma y) - \alpha\gamma\mu x(1-z) > 0. \end{cases}$$

Como todos os parâmetros do modelo são estritamente positivos, a desigualdade da primeira linha é automaticamente satisfeita. Além disso, a partir das desigualdades correspondentes à segunda e à terceira linhas do sistema anterior,tem-se, respectivamente,

$$\frac{(\beta + \mu + \alpha z)(\beta + \delta + \gamma y)(\delta + \mu + \gamma y + \alpha z)}{(\beta + \delta + \gamma y + \alpha z)} > \alpha\gamma x(1-z),$$

e

$$\frac{(\mu + \alpha z)\beta(\delta + \gamma y)}{\mu} > \alpha\gamma x(1-z).$$

Assim as condições de Routh-Hurwitz dependem das desigualdades acima. Logo, basta tomar o minímo entre elas:

$$\alpha\gamma x(1-z) < \min\left(\frac{(\beta + \mu + \alpha z)(\beta + \delta + \gamma y)(\delta + \mu + \gamma y + \alpha z)}{(\beta + \delta + \gamma y + \alpha z)}, \frac{(\mu + \alpha z)\beta(\delta + \gamma y)}{\mu} \right).$$

Assim, o objetivo é mostrar que

$$\frac{(\mu + \alpha z)\beta(\delta + \gamma y)}{\mu} > \frac{(\beta + \mu + \alpha z)(\beta + \delta + \gamma y)(\delta + \mu + \gamma y + \alpha z)}{(\beta + \delta + \gamma y + \alpha z)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{(\mu+\alpha z)\beta(\delta+\gamma y)}{\mu} &\geq \frac{(\mu+\alpha z)\beta(\delta+\gamma y)}{\mu+\alpha z}\\ &= \beta(\delta+\gamma y)\\ &> (\beta+\mu+\alpha z)(\delta+\gamma y+\mu+\alpha z)\\ &= \frac{(\beta+\mu+\alpha z)(\delta+\gamma y+\mu+\alpha z)(\beta+\delta+\gamma y+\alpha z)}{\beta+\delta+\gamma y+\alpha z}\\ &\geq \frac{(\beta+\mu+\alpha z)(\delta+\gamma y+\mu+\alpha z)(\beta+\delta+\gamma y)}{\beta+\delta+\gamma y+\alpha z},\end{aligned}$$

$$\frac{(\mu+\alpha z)\beta(\delta+\gamma y)}{\mu} > \frac{(\beta+\mu+\alpha z)(\delta+\gamma y+\mu+\alpha z)(\beta+\delta+\gamma y)}{\beta+\delta+\gamma y+\alpha z}.$$

Dessa forma,

$$\alpha\gamma x(1-z) < \frac{(\beta+\mu+\alpha z)(\beta+\delta+\gamma y)(\delta+\mu+\gamma y+\alpha z)}{\beta+\delta+\gamma y+\alpha z}$$

Substituindo as coordenadas do equilíbrio endêmico (4.3) na desigualdade acima, obtém-se

$$\begin{aligned}&\alpha\gamma\left(\frac{\gamma\mu+\beta\delta}{\gamma(\mu+\alpha)}\right)\left(1-\frac{\mu(\alpha\gamma-\beta\delta)}{\alpha(\gamma\mu+\beta\delta)}\right)\\ &\qquad< \frac{\left(\frac{\mu(\alpha\gamma-\beta\delta)}{\gamma\mu+\beta\delta}+\beta+\mu\right)\left(\frac{\mu(\alpha\gamma-\beta\delta)}{\beta(\alpha+\mu)}+\beta+\delta\right)\left(\frac{\mu(\alpha\gamma-\beta\delta)}{\beta(\alpha+\mu)}+\frac{\mu(\alpha\gamma-\beta\delta)}{\gamma\mu+\beta\delta}+\delta+\mu\right)}{\frac{\mu(\alpha\gamma-\beta\delta)}{\beta(\alpha+\mu)}+\frac{\mu(\alpha\gamma-\beta\delta)}{\gamma\mu+\beta\delta}+\beta+\delta}.\end{aligned}$$

Observe que para o primeiro membro da desiguldade segue que

$$\alpha\gamma\left(\frac{\gamma\mu+\beta\delta}{\gamma(\mu+\alpha)}\right)\left(1-\frac{\mu(\alpha\gamma-\beta\delta)}{\alpha(\gamma\mu+\beta\delta)}\right) = \frac{\alpha\gamma(\gamma\mu+\beta\delta)}{\gamma(\mu+\alpha)} - \frac{\alpha\gamma(\gamma\mu+\beta\delta)}{\gamma(\mu+\alpha)}\cdot\frac{\mu(\alpha\gamma-\beta\delta)}{\alpha(\gamma\mu+\beta\delta)} = \beta\delta$$

Portanto,

$$\beta\delta < \frac{\left(\frac{\mu(\alpha\gamma-\beta\delta)}{\gamma\mu+\beta\delta}+\beta+\mu\right)\left(\frac{\mu(\alpha\gamma-\beta\delta)}{\beta(\alpha+\mu)}+\beta+\delta\right)\left(\frac{\mu(\alpha\gamma-\beta\delta)}{\beta(\alpha+\mu)}+\frac{\mu(\alpha\gamma-\beta\delta)}{\gamma\mu+\beta\delta}+\delta+\mu\right)}{\frac{\mu(\alpha\gamma-\beta\delta)}{\beta(\alpha+\mu)}+\frac{\mu(\alpha\gamma-\beta\delta)}{\gamma\mu+\beta\delta}+\beta+\delta}.$$

Com o auxílio do software Wolfram Mathematica, foram realizados cálculos simbólicos que permitiram obter a condição (4.5). Essa condição é apresentada a seguir, acompanhada de sua fundamentação matemática. Então, pelo Lema 4.5, essa condição é satisfeita sempre que $\mathcal{R}_0 > 1$. Consequentemente, os menores principais da matriz de Hurwitz satisfazem

$$\Delta_1 > 0, \qquad \Delta_2 > 0, \qquad \Delta_3 > 0.$$

Portanto, pelo Critério de Routh-Hurwitz, todos os zeros do polinômio característico possuem parte real negativa. Logo o equilíbrio endêmico é localmente assintoticamente estável em $\widehat{D}$ sempre que $\mathcal{R}_0 > 1$. ■

4.3 Estudo de caso: dinâmica da dengue no município de Presidente Prudente

Com o objetivo de ilustrar os resultados obtidos na análise de estabilidade do modelo epidemiológico da Dengue, será realizada uma simulação numérica do modelo SIR com vetor aplicado ao município de Presidente Prudente, localizado no estado de São Paulo. Segundo dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), o município apresentou uma população estimada de 234.706 habitantes para o ano de 2025 [8].

A escolha do município como estudo de caso justifica-se pela relevância epidemiológica da dengue na região. De acordo com dados da Secretaria Municipal de Saúde de Presidente Prudente [21], a cidade apresentou um aumento no número de casos da doença, registrando 27.165 casos confirmados nos cinco primeiros meses de 2025. No ano de 2023 foram contabilizados 36.198 casos confirmados, levando o município a uma situação de emergência em saúde pública [20]. Esses dados evidenciam a importância da utilização de modelos matemáticos para compreender a dinâmica de transmissão da doença e auxiliar na análise de possíveis cenários epidemiológicos.

Para a aplicação do modelo, considera-se a população humana estimada pelo IBGE para o ano de 2025. Admitindo que a população total permaneça constante durante o período inicial da epidemia, é possível definir

$$N_h = 234.706, \quad I_h = 27.165, \quad \text{e} \quad R_h = 0.$$

Como a população humana é dividida entre indivíduos suscetíveis, infectados e recuperados, tem-se:

$$N_h = S_h + I_h + R_h.$$

Logo, a quantidade inicial de indivíduos suscetíveis é obtida por

$$S_h = N_h - I_h - R_h \implies S_h = 207.541.$$

Com a população humana total e infectados, é possível deteminar a fração aproximada de humanos suscetiveis e infectados nesse período. Assim realizando a mudança de variável, obtém-se:

$$x = \frac{S_h}{N_h} \cong 0,884259,$$

$$y = \frac{I_h}{N_h} = \frac{27.165}{234.706} \cong 0,115741.$$

Portanto, no instante inicial (cinco primeiros meses) cerca de $88,4\%$ da população se encontrava suscetível a doença enquanto $11,6\%$ da população total corresponde a parcela de indivíduos contaminados no ano de 2025.

A variável z, presente no modelo normalizado, representa a proporção de mosquitos infectados na população vetorial (mosquitos). Como não existem dados disponíveis referentes à quantidade de mosquitos infectados no município durante o período analisado, foi adotada uma condição inicial qualquer que corresponde a uma pequena parcela de mosquitos infectados. Dessa forma, considere $z(0) = 0{,}005$, isto é, aproximadamente $0,5\%$ da população vetorial encontra-se infectada no instante inicial.

Para avaliar a influência da condição inicial da população vetorial sobre a dinâmica da dengue, foi realizada uma análise de sensibilidade considerando diferentes valores para a proporção inicial de vetores infectados, $z(0)$. Foram considerados os valores 0,001, 0,005, 0,010 e 0,020, correspondentes a 0,1%, 0,5%, 1% e 2% da população vetorial infectada,

respectivamente. Para possibilitar a comparação entre os cenários, os demais parâmetros do modelo e as condições iniciais da população humana foram mantidos fixos.

A condição inicial $z(0) = 0{,}005$, correspondente a 0,5% da população vetorial infectada, foi adotada como referência por representar uma hipótese de presença inicial da infecção em uma pequena parcela dos vetores. Ressalta-se que esse valor constitui uma escolha para as simulações numéricas, não sendo apresentado como uma estimativa epidemiológica observada no município estudado. Essa abordagem permite investigar a evolução temporal do sistema e avaliar a influência de diferentes proporções iniciais de vetores infectados sobre a dinâmica da transmissão.

Os resultados numéricos mostram que, para os parâmetros considerados, as trajetórias de $z(t)$ apresentam comportamentos semelhantes, caracterizados por um crescimento inicial, seguido de redução e posterior aproximação de um valor de equilíbrio. A proximidade entre as curvas indica que, no intervalo de tempo analisado, a dinâmica da população vetorial infectada apresenta baixa sensibilidade visual às condições iniciais testadas. Com base nesses resultados, a condição $z(0) = 0{,}005$ foi mantida como referência para as simulações subsequentes.

Por fim, destaca-se que a escolha da condição inicial influencia a trajetória temporal da solução, mas não altera, por si só, os critérios de estabilidade local do equilíbrio, os quais são determinados a partir da linearização do sistema e das condições impostas aos parâmetros do modelo. Assim, a análise de sensibilidade permite avaliar a influência das condições iniciais sobre a evolução da doença, complementando a investigação teórica da estabilidade dos pontos de equilíbrio.

Os demais parâmetros utilizados na simulação foram definidos com base em valores encontrados na literatura para modelos epidemiológicos envolvendo a transmissão da dengue pelo mosquito Aedes aegypti [10] no Brasil. Esses parâmetros representam características biológicas da interação entre humanos e vetores, como as taxas de transmissão, frequência de picadas e mortalidade das populações envolvidas.

A taxa de mortalidade humana foi considerada constante, enquanto os parâmetros relacionados ao vetor foram selecionados conforme estudos matemáticos da dinâmica populacional do mosquito. Além disso, como a densidade populacional de mosquitos não possui uma estimativa direta para o município estudado, foram considerados diferentes valores para N_v, permitindo avaliar como a variação da população vetorial influencia o comportamento do número básico de reprodução $\mathcal{R}_0$ e, consequentemente, a estabilidade do equilíbrio livre de doença.

A tabela a seguir apresenta os parâmetros utilizados nas simulações numéricas do modelo epidemiológico normalizado para a dengue, incluindo suas respectivas descrições, os valores adotados e as fontes de referência. São apresentados tanto os parâmetros relacionados às características biológicas da interação entre humanos e vetores quanto aqueles obtidos a partir das relações estabelecidas na normalização do sistema. Essa organização permite identificar a origem dos valores empregados e compreender como os parâmetros do modelo original foram utilizados para determinar os coeficientes do sistema normalizado. Além disso, a tabela reúne as informações necessárias para a reprodução das simulações e para a análise da influência dos parâmetros sobre a dinâmica da transmissão da doença e a estabilidade dos pontos de equilíbrio.

Tabela 4.1: Parâmetros utilizados no modelo epidemiológico normalizado para a dengue.

Parâmetro	Descrição	Valor	Fonte
N_h	População humana de Presidente Prudente	234706	IBGE
N_v	População estimada de mosquitos	100000	Adotado pela autora
β_h	Transmissão mosquito-humano	$0,75$	[10]
β_v	Transmissão humano-mosquito	1	[10]
b	Taxa de picadas do mosquito	1	[10]
γ_h	Taxa de recuperação humana	$0,25$	[10]
μ_h	Mortalidade natural humana	$0,006$	[10]
μ_v	Mortalidade natural do mosquito	$0,1$	[10]
α	Taxa de transmissão normalizada	$0,3195$	$\beta_h b\frac{N_v}{N_h}$
β	Saída da classe infectada humana	$0,256$	$\gamma_h + \mu_h$
γ	Transmissão humano-mosquito normalizada	1	$\beta_v b$
δ	Mortalidade dos mosquitos	$0,1$	μ_v

Nota: Todas as taxas do modelo estão expressas em dia^{-1}; consequentemente, o tempo é medido em dias.

Considerando inicialmente uma população vetorial de $N_v = 100.000$ mosquitos, os parâmetros normalizados do sistema são obtidos a partir dos valores apresentados na Tabela (4.1), utilizando as relações definidas anteriormente:

$$\alpha = \beta_h b\frac{N_v}{N_h}, \qquad \beta = \gamma_h + \mu_h, \qquad \gamma = \beta_v b, \qquad \delta = \mu_v.$$

Substituindo esses parâmetros em (4.1), obtém-se o sistema normalizado correspondente ao cenário considerado. A partir das condições iniciais estabelecidas, realiza-se a ilustração do comportamento do modelo, permitindo acompanhar a evolução temporal das variáveis x, y e z, que representam, respectivamente, as proporções de indivíduos suscetíveis e infectados na população humana e de vetores infectados.

Essa simulação permite ilustrar o comportamento dinâmico do modelo ao longo do tempo, observando a evolução das proporções populacionais. Os resultados numéricos também possibilitam verificar a compatibilidade entre o comportamento das soluções e as propriedades de estabilidade estabelecidas teoricamente pelo critério de Routh-Hurwitz. Ressalta-se que essa análise constitui uma verificação numérica do modelo, não uma validação epidemiológica baseada em dados observacionais.

A escolha de uma população vetorial de 100.000 mosquitos permite estabelecer um cenário de referência para a análise da dinâmica da dengue. Nesse contexto, a evolução das variáveis depende da interação entre as populações humana e vetorial, uma vez que a transmissão ocorre por meio do contato entre indivíduos suscetíveis e vetores infectados, bem como entre mosquitos suscetíveis e indivíduos infectados. Dessa forma, as trajetórias obtidas numericamente possibilitam analisar como essas interações se refletem na variação das proporções de infectados ao longo do tempo.

A interpretação dos resultados deve considerar, ainda, que as variáveis do sistema representam proporções populacionais, e não números absolutos de indivíduos. Assim, suas trajetórias descrevem a dinâmica relativa dos grupos considerados, de acordo com os parâmetros e as condições iniciais adotados. Esse aspecto é importante para compreender o alcance da simulação e estabelecer uma base de comparação com os cenários seguintes, nos quais a população vetorial será modificada para investigar sua influência sobre a dinâmica do modelo.

A Figura a seguir apresenta os resultados da simulação para esse cenário, considerando uma população vetorial de 100.000 mosquitos.

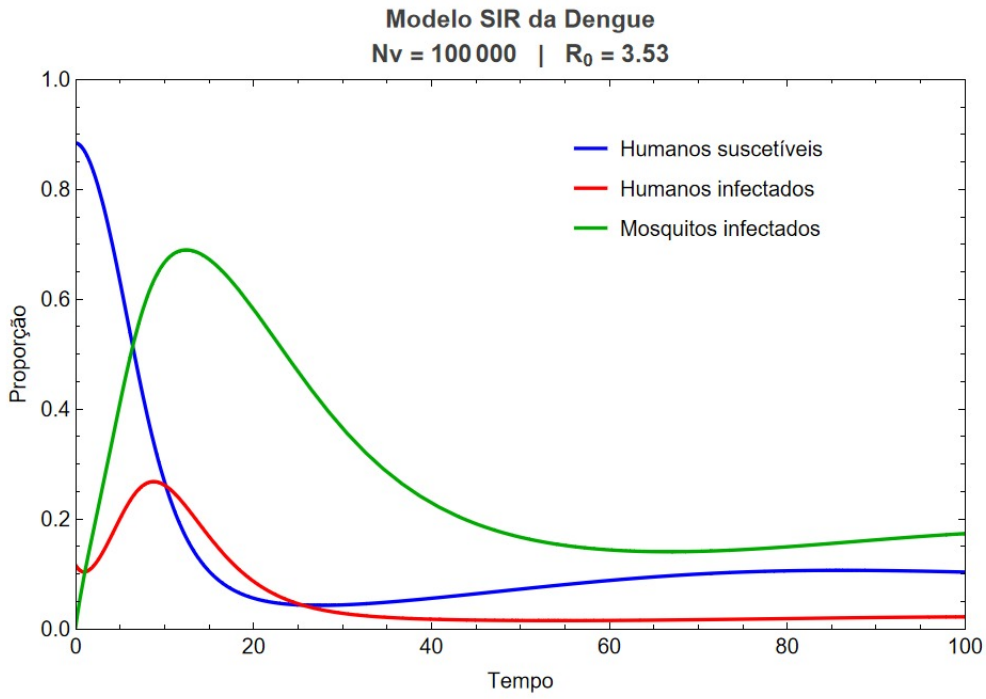


Figura 4.2: Simulação para uma população de 100.000 vetores.
Fonte: Elaborado pela autora.

Observe na figura que no início da contaminação a população de humanos suscetíveis representada apresenta uma redução muito rápida ao passo que a fração de humanos infectados cresce, especialmente quando atinge um pico em um tempo considerado de 10 dias, indicando o momento de maior propagação na epidemia. Simultaneamente, a fração de mosquitos infectados cresce de forma ainda mais acentuada, alcançando valores superiores em relação a população humana, o que reforça o papel do vetor durante a transmissão. Após os picos da epidemia, a fração de humanos e mosquitos infectados passam a decrescer devido a recuperação dos indivíduos infectados, á mortalidade natural e à diminuição da disponibilidade de humanos suscetíveis. Entretanto, nenhuma das duas populações infectadas converge para zero; ambas tendem a valores positivos de equilíbrio, enquanto a fração de suscetíveis estabiliza-se em um nível inferior ao inicial.

Além disso, a partir dos cálculos realizados $\mathcal{R}_0 = 3.53$ indicando instabilidade do equilíbrio livre de doença e a existência de um equilíbrio endêmico, no qual a infecção persiste na população ao longo do tempo já que $\mathcal{R}_0 > 1$.

Para analisar a influência da população de mosquitos na dinâmica da transmissão, foram realizadas simulações numéricas variando o parâmetro N_v. Considerarando cenários com a população de mosquitos $N_v = 1.000$ e $N_v = 10.000$, para verificar o comportamento do sistema diante de uma diminuição da população do vetor. Em seguida, foram analisados outros cenários com populações maiores, considerando $N_v = 300.000$ e $N_v = 500.000$, para investigar o efeito do aumento da população de mosquitos sobre a evolução da doença, especialmente o que ocorre com o número básico de reprodução.

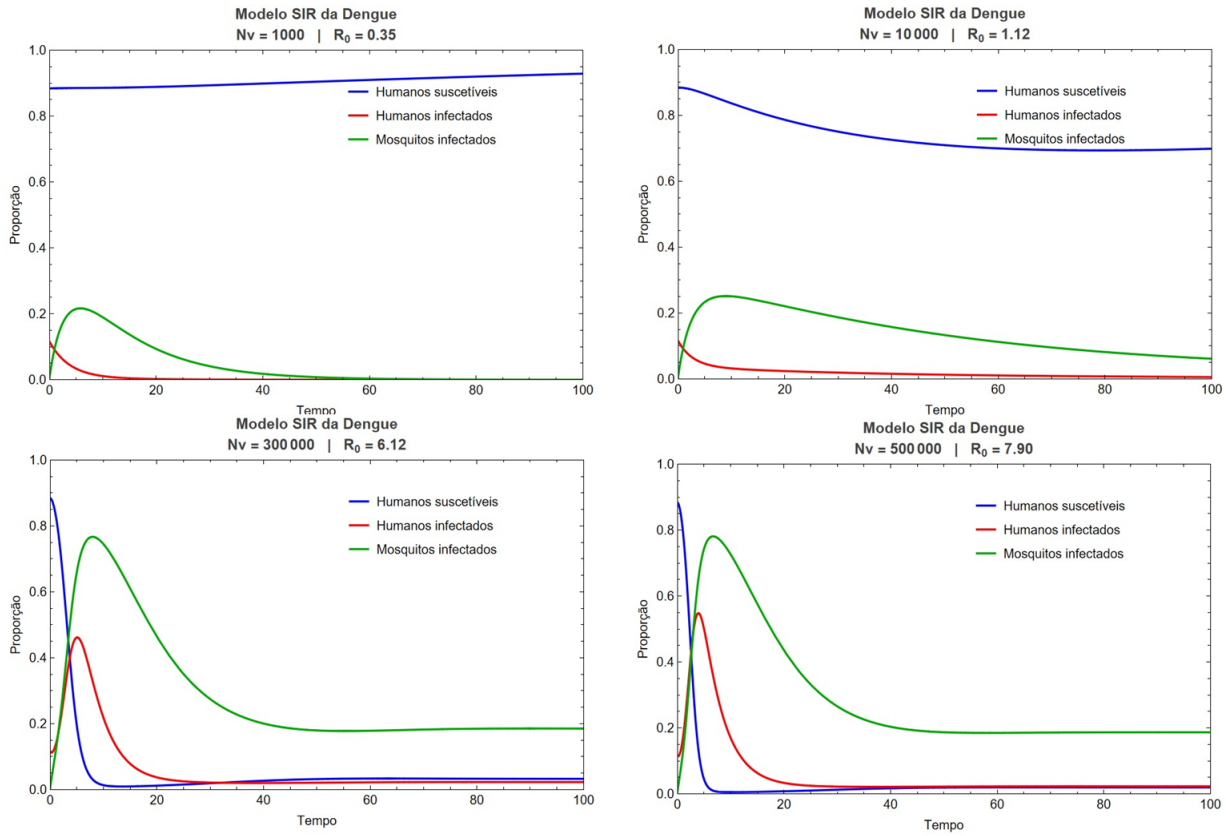


Figura 4.3: Simulações de diferentes populações de vetores.
Fonte: Elaborado pela autora.

A primeira figura mostra que para uma pequena população de mosquitos a população suscetivel quase não se altera e observa-se que o número básico de reprodução $\mathcal{R}_0 = 0.35$ indica que a doença tende a se estabilizar conforme mostrado na população de humanos infectados, o que caracteriza como estabilidade assintótica. Já o segundo gráfico corresponde ao cenário em que a população de mosquitos foi reduzida para $N_v = 1.000$ resultando em um número básico de reprodução de $\mathcal{R}_0 = 1,12$ que permanece ligeiramente maior que 1, a doença ainda consegue se estabelecer na população, porém sua propagação é significativamente menor quando comparada as demais situações. Por fim, os últimos gráficos demonstram que para uma população relativamente grande, há uma alta taxa de humanos infectados e mosquitos infectados, além disso, o valor de $\mathcal{R}_0 > 1$ indicando que a doença tende a persistir

Os resultados das simulações numéricas destacam a influência da população vetorial na dinâmica da transmissão da dengue, de acordo com as hipóteses estabelecidas no modelo. Nos cenários analisados, a redução da população de vetores está associada à diminuição do número básico de reprodução $\mathcal{R}_0$, enquanto seu aumento favorece a persistência da infecção. Esses resultados evidenciam, do ponto de vista matemático, a importância da população vetorial para a dinâmica da doença e permitem investigar possíveis cenários de controle. Entretanto, como não foi realizada uma comparação sistemática entre as soluções simuladas e os dados epidemiológicos observados, os resultados não devem ser interpretados como uma validação da eficácia das medidas de controle adotadas no município.

Capítulo

5

CONCLUSÃO

Neste trabalho foi realizado um estudo sobre a estabilidade de sistemas dinâmicos, com ênfase na teoria de estabilidade de polinômios e em especial o critério de Routh-Hurwitz. Inicialmente, foram apresentados conceitos fundamentais relacionados às equações diferenciais ordinárias, pontos de equilíbrio e estabilidade local, estabelecendo a base teórica necessária para a aplicação dos critérios algébricos de estabilidade.

Em seguida, foi desenvolvido um estudo dos polinômios estáveis, destacando o critério de Routh-Hurwitz, o qual fornece condições necessárias e suficientes para que todos os zeros de um polinômio possuam parte real negativa. Esse resultado constitui uma importante ferramenta na análise dos sistemas dinâmicos, permitindo investigar a estabilidade de pontos de equilíbrio sem a necessidade de determinar explicitamente os autovalores da matriz jacobiana.

Como aplicação da teoria desenvolvida, o critério de Routh-Hurwitz foi empregado na análise de um modelo epidemiológico do tipo SIR com vetor, utilizado para descrever a dinâmica de transmissão da dengue. Inicialmente, foram determinados os pontos de equilíbrio do sistema e obtido o polinômio característico associado à matriz jacobiana. A partir desse polinômio, aplicou-se o critério de Routh-Hurwitz para investigar as condições de estabilidade dos equilíbrios do modelo.

Os resultados obtidos evidenciaram o papel fundamental do número básico de reprodução $\mathcal{R}_0$ na dinâmica epidemiológica do sistema. Demonstrou-se que, quando $\mathcal{R}_0 < 1$, o equilíbrio livre da doença é localmente assintoticamente estável, indicando que a infecção tende a desaparecer da população. Caso contrario, quando $\mathcal{R}_0 > 1$, o equilíbrio endêmico é localmente assintoticamente estável na região considerada, e neste caso a doença tende a persistir na população. Esses resultados foram obtidos por meio da aplicação do critério de Routh-Hurwitz ao polinômio característico associado ao sistema reduzido, estabelecendo uma importante conexão entre a teoria de estabilidade de polinômios e a modelagem matemática de doenças infecciosas.

Com o objetivo de ilustrar os resultados teóricos, foi realizada uma aplicação do modelo ao município de Presidente Prudente, utilizando dados demográficos do município e parâmetros epidemiológicos obtidos na literatura. As simulações numéricas estiveram de acordo com a teoria obtidas ao longo do trabalho, confirmando que o modelo reproduz adequadamente os cenários previstos para diferentes valores do número básico de reprodução.

Ainda, os resultados obtidos reforçam a importância da adoção de medidas de prevenção e controle da dengue. Estratégias que reduzam a taxa de transmissão entre humanos e mosquitos ou diminuam a população do vetor contribuem diretamente para a redu-

ção do número básico de reprodução, evidenciando a necessidade de políticas públicas permanentes de vigilância e combate ao vetor.

Por fim, este trabalho evidencia que critérios clássicos da teoria de estabilidade de polinômios, em especial o critério de Routh-Hurwitz, são ferramentas matemáticas de grande relevância para a análise de modelos dinâmicos. Além de fornecer condições a estabilidade dos pontos de equilíbrio, esses critérios também permitem interpretar matemáticamente fenômenos biológicos. Portanto, reforçam a importância da união entre a Matemática Aplicada e a Epidemiologia, demonstrando que métodos clássicos desempenham um papel fundamental na compreensão da dinâmica de doenças infecciosas e no suporte à tomada de decisões em saúde pública.

Referências

[1] J. T. do Amaral. Método de Viète para resolução de equações do segundo grau. *Revista do Professor de Matemática*, (13). Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/13/4.htm. Acesso em: 3 out. 2023.

[2] W. C. Andrade. Uma abordagem histórica da equação do segundo grau. *Revista do Professor de Matemática*, (43), 2000.

[3] W. E. Boyce and R. C. DiPrima. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 2003.

[4] F. R. Gantmacher. *Applications of the Theory of Matrices*. Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, New York, 1959.

[5] F. R. Gantmacher. *The Theory of Matrices*. Chelsea Publishing Company, New York, 1959.

[6] A. Hefez and M. L. T. Villela. *Polinômios e Equações Algébricas*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1 edition, 2012.

[7] G. Iezzi. *Fundamentos de Matemática Elementar*, volume 6. Atual Editora, São Paulo, 2013.

[8] Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Presidente prudente, 2025. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/cidades-e-estados/sp/presidente-prudente.html. Acesso em: 28 jul. 2026.

[9] E. H. Kim, W. Su, and Y. J. Song. On stability of a polynomial. *Journal of Applied Mathematics and Informatics*, 36(3–4):231–236, 2018.

[10] B. P. Marques, G. B. Candido, I. C. Nunes, and L. F. M. Sant'Ana. Aplicação do modelo sir-vetorial para modelagem da dengue no brasil, 2019. Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI). Disponível em: https://pt.scribd.com/document/414495318/Aplicacao-do-Modelo-SIR-Vetorial-para-Modelagem-da-Dengue-no-Brasil. Acesso em: 28 jul. 2026.

[11] O. McMann. Modeling dengue transmission: Data assimilation, identifiability, reproduction number, and stability analysis, 2025. Senior Thesis, Department of Applied Mathematics and Statistics, Johns Hopkins University, Baltimore, MD.

[12] Medicina S/A. Projeção aponta aumento de casos de dengue no brasil em 2026, 2026. Disponível em: https://medicinasa.com.br/projecao-dengue-2026/. Acesso em: 31 mar. 2026.

[13] L. F. Mello. *Polinômios e funções polinomiais*. 2023. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/375860801. Acesso em: 23 jun. 2025.

[14] M. H. P. L. Mello and R. F. D. Silva. O número básico de reprodução de uma doença e a matriz próxima geração. *Cadernos do IME – Série Matemática*, (13):27–41, 2019. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/337965924. Acesso em: 19 maio 2026.

[15] G. V. Milovanovic, D. S. Mitrinovic, and Th. M. Rassias. *Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 1994. Reprinted in 1999.

[16] Ministério da Saúde. Dengue e monitoramento das arboviroses no brasil, 2025. Disponível em: https://www.gov.br/saude. Acesso em: 31 mar. 2026.

[17] L. H. A. Monteiro. *Sistemas Dinâmicos*. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2 edition, 2006.

[18] M. D. Moreira. Estabilidade de sistemas dinâmicos: Estudo do memristor. Dissertação (mestrado), Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente, 2014.

[19] L. S. Pontryagin. *Ordinary Differential Equations*. Addison–Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1962.

[20] Prefeitura Municipal de Presidente Prudente. Decreto 36.275/2025: Declara situação de emergência na saúde pública do município de presidente prudente, determina atividades preventivas contra o vírus da dengue e dá outras providências, 2025. Diário Oficial Eletrônico do Município de Presidente Prudente. Disponível em: https://diario.presidenteprudente.sp.gov.br/documento/view/9896/decreto-n-362752025. Acesso em: 28 jul. 2026.

[21] Prefeitura Municipal de Presidente Prudente. Casos de dengue caem mais de 99% em prudente nos cinco primeiros meses deste ano, 2026. Disponível em: https://www.presidenteprudente.sp.gov.br/site/noticia/66953. Acesso em: 28 jul. 2026.

[22] J. Sotomayor. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1979.

[23] G. R. Souza. Critério de hurwitz e estabilidade de equilíbrios. Dissertação (mestrado), Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Belo Horizonte, 2005.

[24] S. Syafruddin and S. M. M. Noorani. A sir model for spread of dengue fever disease (simulation for south sulawesi, indonesia and selangor, malaysia). *World Journal of Modelling and Simulation*, 9(2):96–105, 2013.