



Eliel José Camargo dos Santos

TEORIA DO POTENCIAL LOGARÍTMICO E ZEROS DE
POLINÔMIOS

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
Rua Cristóvão Colombo, 2265, 15054-000
São José do Rio Preto - SP - Brasil
Telefone: (17) 3221-2444 - Fax: (17) 3221-2445

Eliel José Camargo dos Santos

TEORIA DO POTENCIAL LOGARÍTMICO E ZEROS DE POLINÔMIOS

Orientador:

Prof. Dr. Dimitar Kolev Dimitrov

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
INSTITUTO DE BIOCIÊNCIAS, LETRAS E CIÊNCIAS EXATAS
CAMPUS DE SÃO JOSÉ DO RIO PRETO

São José do Rio Preto

14 de Março de 2011

Santos, E. J. C..

TEORIA DO POTENCIAL LOGARÍTMICO E ZEROS DE POLINÔMIOS/ ELIEL
JOSÉ CAMARGO DOS SANTOS. SÃO JOSÉ DO RIO PRETO: [S.N.], 2011.

103 f. : il. ; 30 cm.

ORIENTADOR: DIMITAR KOLEV DIMITROV.

DISSERTAÇÃO (MESTRADO) - UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”, INSTITUTO DE BIOCIÊNCIAS, LETRAS E CIÊN-
CIAS EXATAS.

1.POTENCIAL LOGARÍTMICO. 2. MEDIDA DE EQUILÍBRIO. 3.RECUPER-
AÇÃO DA MEDIDA. 4. ASSINTÓTICA I. DIMITROV, D. K. II. INSTITUTO
DE BIOCIÊNCIAS, LETRAS E CIÊNCIAS EXATAS III. TEORIA DO POTENCIAL
LOGARÍTMICO E ZEROS DE POLINÔMIOS.

CDU - xxx

Eliel José Camargo dos Santos

TEORIA DO POTENCIAL LOGARÍTMICO E ZEROS DE POLINÔMIOS

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Análise Aplicada, junto ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Dimitar Kolev Dimitrov
Professor Titular
UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Valdir Antônio Menegatto
Professor Titular
USP - São Carlos

Prof. Dr. Ali Messaoudi
Professor Adjunto
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 14 de Março de 2011.

Aos meus amados pais, José e Ordália.
Aos meus irmãos, Edmilton, Josélia, Érica e Elifaz.
Aos meus queridos amigos.
Dedico.

Agradecimentos

A Deus, pelas oportunidades e pessoas encantadoras que encontro em meu caminho.

A minha família, pelo apoio, compreensão e incentivo contínuo para realização de mais uma conquista.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Dimitar Kolev Dimitrov, pelo apoio, amizade e auxílio durante a orientação deste trabalho.

Aos professores, Prof. Dr. Ali Messaoudi e Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga, pelas inúmeras e valiosas sugestões para esta dissertação.

A Marisa de Souza Costa e Regina da Silva Lamblém, pelas contribuições ao presente trabalho.

Aos professores de graduação e pós-graduação, em especial à Prof^a. Dr^a. Maria Gorete Carrera Andrade, Prof. Dr. Cláudio Aguinaldo Buzzi à Prof^a. Dr^a. Eliana Xavier Linhares de Andrade e ao Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga, pela dedicação, atenção e valiosos ensinamentos.

A todos os colegas de graduação, em especial aos amigos Danilo, Leonardo, Rafael, Rodrigo, Leticia, Marcos William, Thaisa, Renata Rosimeire e Andréia, pela amizade durante quatro anos de convívio.

Aos amigos de pós-graduação Alyne, Cintya, Cristiane Maria, Eduardo 'canetinha', Fábio, Fernando, Guilherme, Heron, Junior, Manuella, Marcos Henrique, Marcos William, Meire, Michelli, Mirela, Regina, Vanessa, Wallace e aos demais colegas, pelos momentos compartilhados nestes dois últimos anos.

Ao moradores do Bloco 2A, de modo especial à Aroldo, Carlos Augusto, Caio, Chico, Clayton, Eduardo, Gustavo, Jonatas, Perdigão, Robson, Vaccari e William e a todos aqueles, agregados e vizinhos, que serão sempre lembrados com muito carinho pelos inesquecíveis momentos de alegria.

Aos amigos Aderbal, Luis Ricardo (Tourinho) e Thiago pela amizade, apoio, incentivo e companheirismo.

Um agradecimento especial aos amigos Alyne, Fernando, Fábio, Guilherme e Michelle , pelos momentos de estudo e distração na “salinha” e “cafezinhos” aproveitados no DCCE, angústias divididas, risos somados, grande amizade e uma preciosa colaboração à realização deste trabalho.

A Clécia pelo apoio e companheirismo dos últimos meses.

A todos os colegas, pessoas e funcionários do IBILCE que, direta ou indiretamente, contribuíram para a elaboração deste trabalho. Em especial aos funcionários do DCCE Esther, Marcos e Olga sempre muito atenciosos e competentes.

A CAPES e à FAPESP, pelo auxílio financeiro.

"(...) Mas a vida, a vida, a vida,
a vida só é possível reinventada. (...)"

Autora: Cecília Meireles

Poesia: Reinvenção

Resumo

Estudamos alguns tópicos da Teoria do Potencial Logarítmico. Enfatizamos o problema de caracterizar a medida de equilíbrio. Provamos um resultado sobre a assintótica da medida contadora de zeros, associada com uma classe de polinômios.

Palavras-chave: potencial logarítmico, medida de equilíbrio, recuperação da medida, assintótica.

Abstract

We study some basic topics of The Theory of the Logarithmic Potential. We emphasize on the problem by characterizing the equilibrium measure. A result on the asymptotics of the zero counting measure associated with a class of polynomials is proved.

Keywords: logarithmic potential, equilibrium measure, recovery of a measure, asymptotics.

Sumário

1	Introdução	p. 12
2	Propriedades Gerais de Funções Complexas	p. 13
2.1	Semi-continuidade	p. 13
2.2	Funções Harmônicas	p. 18
2.3	Representação em Séries de Funções Harmônicas	p. 20
2.4	Fórmula de Poisson	p. 21
2.5	Alguns Teoremas da Teoria da Medida	p. 22
2.6	Funções Super-harmônicas	p. 23
3	O Potencial Logarítmico Energia e Suas Propriedades	p. 26
3.1	Potencial Logarítmico	p. 26
3.2	Energia Logarítmica	p. 29
3.3	Caracterização da Medida de Equilíbrio	p. 33
3.3.1	Teorema da Decomposição de Riesz e Princípio da Dominação	p. 44
3.4	A Medida Extremal	p. 44
3.5	Princípio do Mínimo	p. 48
3.6	Problema de Dirichlet e Funções de Green	p. 54
4	Recuperação da Medida	p. 59
4.1	Teorema da Unicidade	p. 59
4.2	Caracterização do Suporte da Medida de Equilíbrio	p. 62
4.3	Propriedades Geométricas do Suporte da medida de equilíbrio	p. 64

4.4	Exemplos da Determinação do Suporte para Pesos Clássicos	p. 70
4.4.1	Pesos de Jacobi	p. 71
4.4.2	Pesos de Laguerre	p. 73
4.5	Recuperação da Medida de Equilíbrio	p. 74
5	Aplicações	p. 90
5.1	Exemplos de Determinação da Medida de Equilíbrio	p. 90
5.1.1	Pesos de Jacobi	p. 91
5.1.2	Pesos de Laguerre	p. 92
5.2	Convergência da Medida Contadora de Zeros Normalizada	p. 94
5.2.1	Polinômios Extremais	p. 94
	Referências Bibliográficas	p. 101

1 *Introdução*

Vários problemas difíceis da Teoria da Aproximação e da Teoria dos Polinômios Ortogonais e Funções Especiais que permaneceram em aberto por muitos anos, foram resolvidos nas últimas décadas. Uma das características em comum das soluções foi o uso criativo da Teoria do Potencial Logarítmico. Esta dissertação relata nosso estudo sobre alguns tópicos fundamentais desta teoria.

No segundo capítulo estudamos alguns temas da Análise Harmônica e da Teoria da medida. As noções principais da Teoria do Potencial serão tratadas no segundo capítulo. Tais conceitos surgem de um problema que tem a seguinte interpretação eletrostática:

Colocamos cargas positivas unitárias em um conjunto compacto A . Suponhamos que estas cargas repelem entre si com força proporcional a $1/|z - t|$. Se para uma certa configuração dos pontos o mínimo de energia é atingido, então dizemos que nosso sistema está em equilíbrio.

Com isto introduzimos os conceitos de potencial e energia logarítmicos, medida de equilíbrio e suas propriedades são fornecidas no segundo capítulo. O quarto capítulo da dissertação contém resultados que caracterizam o suporte da medida de equilíbrio. Finalmente, no último capítulo, fornecemos alguns exemplos onde determinamos explicitamente a medida de equilíbrio. Fornecemos a demonstração de um resultado interessante sobre a convergência da medida contadora de zeros de uma classe de polinômios.

2 *Propriedades Gerais de Funções Complexas*

Neste capítulo introduzimos conceitos básicos da Teoria da Medida e Análise Funcional. Tais resultados são encontrados por exemplo em [14] e [13].

2.1 Semi-continuidade

Durante todo o nosso trabalho estaremos tratando de funções em $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, conhecida também com esfera de Riemann pelo fato de o conjunto ser homeomorfo a esfera S^2 , homeomorfismo dado pela projeção estereográfica. Portanto $\overline{\mathbb{C}}$ é um espaço topológico com a topologia induzida pelo homeomorfismo.

Definição 2.1. *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, com $X \subseteq \overline{\mathbb{C}}$, definimos o limite inferior da função f como sendo*

$$\liminf_{x \rightarrow z_0} f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \inf_{x \in D_r(z_0) \cap X} f(x) \right\},$$

onde $D_r(z_0) = \{z : |z| < r\}$.

Definição 2.2. *Seja $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida em um conjunto $K \subset \overline{\mathbb{C}}$. Então, f é semi-continua inferiormente em um ponto $x \in K$, em que $\alpha < f(x)$, se existe uma vizinhança U de x tal que $\alpha < f(y)$ para todo $y \in U \cap K$. Dizemos que f é semi-continua inferiormente em K se ela é semi-continua inferiormente em todo ponto de K . Uma função f é semi-continua superiormente em K se $-f$ é semi-continua inferiormente em K .*

Teorema 2.1. *Seja f uma função definida em um disco D , então valem as seguintes equivalências:*

- (1) f é semi-continua inferiormente em D ;
- (2) Para cada $z_0 \in D$, nós temos $f(z_0) \leq \liminf_{z \rightarrow z_0} f(z)$;

(3) Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{z \in D : f(z) > \alpha\}$ é aberto;

Demonstração: Primeiramente vamos provar que (1) $\iff$ (2).

Suponhamos que f é semi-contínua inferiormente em D . Sabemos que $f(z_0) > f(z_0) - \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Portanto pela semi-continuidade inferior de f em D podemos garantir que existe uma vizinhança U_{z_0} tal que $f(y) > f(z_0) - \varepsilon$ para todo $y \in U_{z_0}$. Então, existe um δ tal que para todo $z \in D_\delta(z_0) \subset U_{z_0}$, onde $D_\delta(z_0) := \{z : |z| < \delta\}$, temos que

$$\inf_{z \in D_\delta(z_0)} f(z) \geq f(z_0) - \varepsilon.$$

Assim, sabendo que $\liminf_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \inf_{z \in D_r(z_0)} f(z)$, obtemos

$$\liminf_{z \rightarrow z_0} f(z) \geq f(z_0) - \varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$\liminf_{z \rightarrow z_0} f(z) \geq f(z_0).$$

Para provarmos a implicação contrária, suponhamos que f satisfaça (2), mas que não seja semi-contínua inferiormente em D . Então, existem $\bar{z} \in D$ e $\varepsilon > 0$, tal que, para todo δ , temos $f(\bar{z}) > f(\bar{z}) - \varepsilon$ porém $f(z) \leq f(\bar{z}) - \varepsilon$ para todo $z \in D_\delta(\bar{z})$. Assim, sabendo que $\liminf_{z \rightarrow \bar{z}} f(z) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{z \in D_\delta(\bar{z})} f(z)$, temos que $\liminf_{z \rightarrow \bar{z}} f(z) \leq f(\bar{z}) - \varepsilon$. Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, concluímos que $\liminf_{z \rightarrow \bar{z}} f(z) \leq f(\bar{z})$ o que contrária nossa hipótese. Portanto, as hipóteses de semi-continuidade inferior estão satisfeitas, de onde concluímos que f é semi-contínua inferiormente em D .

Agora vamos provar que (1) $\iff$ (3).

Suponhamos que f seja semi-contínua inferiormente em D . Vamos provar que o conjunto $A := \{z \in D : f(z) > \alpha\}$ é aberto, seja $\bar{z} \in A$, então $f(\bar{z}) > \alpha$, logo pela definição de semi-continuidade inferior existe uma vizinhança aberta $U_{\bar{z}}$, em torno de $\bar{z}$, tal que $f(z) > \alpha$ para todo $z \in U_{\bar{z}}$, ou seja, $U_{\bar{z}} \subset A$. Portanto, A é aberto.

Reciprocamente, seja $\bar{z} \in D$ um ponto tal que $f(\bar{z}) > \alpha$ isto implica que o conjunto $A := \{z \in D : f(z) > \alpha\}$ é não vazio, como por hipótese ele é aberto, basta tomarmos $U = A$ na definição de semi-continuidade inferior para concluirmos que f é semi-contínua inferiormente no ponto $\bar{z}$. $\square$

Teorema 2.2. Se f é semi-continua inferiormente em um conjunto compacto K , então f atinge o mínimo em K .

Demonstração: Por f ser semi-continua inferiormente em um conjunto compacto K , segue do Teorema 2.1 item (3), os conjuntos $U_n := \{z \in K : f(z) > -n\}$, $n \geq 1$ são abertos, e está claro que eles formam uma cobertura de K . Sendo K compacto ele admite sub-cobertura finita. Portanto, f é limitada inferiormente em K .

Seja $M = \inf_K f$. Os conjuntos

$$V_n := \{z \in K : f(z) > M + 1/n\}, \quad n \geq 1$$

não podem cobrir K .

De fato, caso eles cobrissem então eles também admitiriam uma sub-cobertura finita, ou seja, existiriam n_j , $j = 1, \dots, k$ tal que a família dos conjuntos $\{V_{n_j}\}_{j=1}^k$ cobririam K , isto acarreta que para $m > n_k$ os conjuntos $V_m = V_{n_k}$, assim $f(z) > M + 1/n_k$ para todo z e para todo $m > n_k$, portanto $\inf_K f(z) \geq M + 1/m > M$, o que é um absurdo de acordo com a definição de M . Consequentemente, existe z tal que $M \leq f(z) \leq M + 1/n$ para todo $n > 1$, ou seja, $u(z) = M$ para pelo menos um $z \in K$. $\square$

Teorema 2.3. *Se f é semi-continua inferiormente em um conjunto compacto K se, e somente se, ela é limite pontual de uma sequência funções crescentes e contínuas.*

Demonstração: Vamos provar primeiramente a suficiência. Suponhamos que f seja limite pontual de uma sequência de funções contínuas e crescentes f_n . Então, para $y \in K$ tal que $f(y) > \alpha$ implica que $\lim f_n(y) = f(y) > \alpha$ e f_n são funções contínuas, existem $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$, tal que, para $|x - y| < \delta$ devemos ter $f_n(x) > \alpha + \varepsilon$, fazendo $n \rightarrow +\infty$, obtemos que $f(x) \geq \alpha$ para todo x tal que $|x - y| < \delta$. Portanto, segue que f é semi-contínua inferiormente em K .

Reciprocamente, seja f uma função semi-contínua inferiormente não identicamente igual a $+\infty$. Tomemos a sequência de funções

$$f_n(x) := \inf_{y \in K} \{f(y) + n|x - y|\}.$$

Estas funções f_n estão bem definidas uma vez que K é compacto.

Vamos provar que para quaisquer $x, x_0 \in K$, temos

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| \leq n|x - x_0|.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
 f_n(x) &= \inf_{y \in K} \{f(y) + n|x - y|\} = \inf_{y \in K} \{f(y) + n|x - x_0 + x_0 - y|\} \\
 &\leq \inf_{y \in K} \{f(y) + n|x - x_0| + n|x_0 - y|\} \\
 &\leq \inf_{y \in K} \{f(y) + n|x_0 - y|\} + n|x - x_0| = f_n(x_0) + n|x - x_0|,
 \end{aligned}$$

e analogamente podemos provar que $f_n(x) \geq f_n(x_0) - n|x - x_0|$. Desta forma, dado $0 < \varepsilon$ basta tomarmos um $\delta = \varepsilon/n$ e concluiremos que f_n é contínua. E $f_n(x) < f_{n+1}(x)$ para todo x segue diretamente das propriedades de ínfimo de funções.

Precisamos agora provar apenas que $\lim f_n(x) = f(x)$. Para tanto fazendo $y = x$ na definição de f_n podemos ver que $f_n(x) \leq f(x)$ para todo n e x . Resta provar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \geq f(x).$$

De fato, se $f(x) > \alpha$ então existe um disco $D_r(x) \subset K$ de raio r e centro em x , tal que, $f(y) > \alpha$, para todo $y \in D_r(x)$. Vamos provar que $f_n(y) \geq \alpha$. Fazendo $A = \inf_{y \in D_r(x)} \{f(y) + n|x - y|\}$ e $B = \inf_{y \in D_r(x) \setminus K} \{f(y) + n|x - y|\}$ temos

$$f_n(x) = \min(A, B).$$

Note que $A \geq \inf_{y \in D_r(x)} \{f(y)\} > \alpha$. Agora, para $y \in D_r(x) \setminus K$, tomemos $n > (M + \alpha)/r$, onde $-M$ é um limite inferior para f em K , e concluímos que $f(y) + n|x - y| > \alpha$. Portanto, $B > \alpha$. Consequentemente, $f_n(x) \geq \alpha$. Desta forma, basta tomarmos $\alpha = f(x) - \varepsilon$ com $\varepsilon > 0$. Assim, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \geq f(x) - \varepsilon$, fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, chegamos a conclusão desejada. Consequentemente, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. Concluindo a demonstração do teorema. $\square$

Lema 2.1. *Seja f uma função semi-contínua inferiormente em um conjunto $X \subseteq \overline{\mathbb{C}}$. Então, a função $g(x) = \liminf_{y \rightarrow x} f(y)$ também é semi-contínua inferiormente em $X \subseteq \overline{\mathbb{C}}$.*

Demonstração: Vamos usar o item (b) do Teorema 2.1. Pelo fato de f ser semi-contínua inferiormente, segue que $g(x) \geq f(x)$. Portanto,

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} g(x) \geq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0),$$

concluindo a demonstração do lema.

De modo semelhante, podemos provar que $h(x) = \limsup_{y \rightarrow x} f(y)$, é semi-contínua superiormente.

Teorema 2.4. *Se f é semi-contínua inferiormente em um conjunto fechado K , então f*

é contínua em um conjunto $G_\delta \subset K$ denso em K .

Demonstração: Podemos supor que f é limitada, caso contrário basta aplicarmos a função arco tangente a f , pois ela ainda será uma função semi-contínua inferiormente, uma vez que a função arco tangente é contínua, segue que a imagem inversa de conjunto aberto é ainda um conjunto aberto, isto porque $\{z : \arctan(f(z)) > \alpha\} = f^{-1}(\{z : f(z) > \arctan(\alpha)\})$ e temos uma bijeção entre os pontos de descontinuidade de f e os pontos de descontinuidade de $\arctan(f)$.

Definimos a oscilação de f como

$$o_f(z) := \limsup_{w \rightarrow z} f(w) - \liminf_{w \rightarrow z} f(w),$$

então para todo $m = 1, 2, \dots$, o conjunto

$$V_m := \{z \in K : o_f(z) \geq \frac{1}{m}\}$$

é fechado, pois pelo Lema 2.1 o_f é semi-contínua superiormente e pelo análogo do Teorema 2.1 para funções semi-contínuas superiormente segue que V_m é fechado. Ainda V_m não é denso em qualquer subconjunto aberto relativamente a K . Pois se supormos que exista um aberto $U \subset K$, tal que, V_m seja denso em K , então poderemos escolher uma sequência de pontos $x_n \in V_n \cap U$. Assim,

$$o_f(x_{n+1}) \geq \frac{1}{n+1}, \quad n \geq 1,$$

de onde concluímos que

$$\sum_{j=1}^n o_f(x_{j+1}) \geq \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j+1} \right).$$

Logo, o_f não é limitada em K , contrariando o análogo do Teorema 2.2, para funções semi-contínuas superiormente. Portanto, o conjunto V_m tem interior vazio, e segundo o Teorema de Baire, que pode ser encontrado em [12, pag 97], $\cup_{m=1}^\infty V_m$ também tem interior vazio. Portanto, $G = (\cup_{m=1}^\infty V_m)^c$ é um conjunto G_δ , denso em K onde f é contínua. $\square$

O Teorema da Representação de Riesz como em [12, pag 195] que diz que todo funcional limitado em $C(K)$, com K compacto de $\mathbb{C}$ pode ser representado por

$$Lf = \int f d\mu$$

para alguma medida de Borel μ . Além do mais, a norma de L coincide com a massa total

da medida $|\mu|$, a qual é chamada de variação total da medida μ e é definida como

$$|\mu|(E) := \sup \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) : E = \cup_{j=1}^{\infty} E_j, E_i \cap E_j = \emptyset \text{ se } i \neq j \right\}.$$

Isto quer dizer que o dual de $C(K)$ nada mais é do que o espaço $\mathcal{M}_c(K)$, o espaço de todas as medidas complexas de Borel do conjunto K . Agora a topologia *fraca** em $\mathcal{M}_c(K)$ é a topologia que descreve a convergência pontual de funcionais lineares, ou seja, dizemos que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ se

$$\int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu$$

para todo $f \in C(K)$. Quando houver convergência neste sentido diremos que os funcionais convergem fracamente*. Tal topologia é a topologia gerada pela métrica

$$d(\mu, \nu) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j \|f_j\|_K} \left| \int f_j d\mu - \int f_j d\nu \right|$$

onde $\|f\|_K$ denota a norma uniforme de K e $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ é um conjunto enumerável e denso em $C(K)$. Tal conjunto existe e é consequência do Teorema de Stone-Weierstrass que diz que toda função contínua em um compacto pode ser aproximado por um polinômio, e este polinômio pode ser aproximado por um polinômio com coeficientes racionais. Sendo que a convergência na norma implica em convergência pontual podemos deduzir que se $|\mu - \mu_n|(K) \rightarrow 0$, então $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$. Além disso, é possível provar que se toda medida μ_n tem suporte em um compacto $K_1 \subset K$ e $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$, então μ tem suporte em K_1 . Lembramos que suporte de μ é o conjunto dos pontos z tais que $\mu(D_r(z)) > 0$ para todo disco aberto $D_r(z)$ de raio $r > 0$ e com centro em z . Estes são tópicos bastante clássicos da análise funcional que podem ser encontrados em [10].

Teorema 2.5 (Teorema de Seleção de Helly). *Seja $\{\mu_n\}$ uma sequência de medidas complexas em um conjunto compacto K com massa total $|\mu_n|(K)$, então podemos selecionar uma subsequência de $\{\mu_n\}$ que converge fracamente* para uma medida μ .*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [14, pag3] e [16, pag34].

2.2 Funções Harmônicas

Dizemos que um conjunto $D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ é um domínio se ele é aberto e conexo.

Definição 2.3. *Uma função de valores reais $u(z) = u(x, y)$ definida em um domínio D*

do plano complexo é harmônica se $u \in C^2$ e satisfaz a equação de Laplace:

$$u_{xx}(z) + u_{yy}(z) = 0, \quad z \in D. \quad (2.1)$$

Uma função u é harmônica em z_0 se é harmônica em uma vizinhança com centro em z_0 . Consequentemente, u é harmônica em D se é harmônica em cada ponto de D .

Dada uma função analítica f , segue das equações de Cauchy-Riemann que as funções, $u = \operatorname{Re}(f)$ e $v = \operatorname{Im}(f)$, ou seja, as partes reais e imaginárias de f , são ambas harmônicas.

Lema 2.2. *Se u é harmônica em um domínio D , então $g(z) := u_x(z) - iu_y(z)$ é analítica em D .*

Demonstração: Pela equação de Cauchy-Riemann vale

$$u_{xx} = -u_{yy} \text{ e } u_{xy} = u_{yx}.$$

A primeira identidade é satisfeita para toda função harmônica, e a segunda identidade segue do Teorema de Schwarz.

Definição 2.4. *Um domínio D é simplesmente conexo, se para toda curva fechada $\gamma(t)$ em D , existe uma aplicação contínua $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D$, tal que, $H(0, t) = \gamma(t)$ e $H(1, t) = p$, onde p é um ponto de D .*

Teorema 2.6. *Uma função u é harmônica em um domínio simplesmente conexo se, e somente se, existe uma função holomorfa $f(z)$, tal que $f(z)$ toma os mesmos valores em z independentemente do caminho que tomemos em D , no qual tenhamos $u(z) = \operatorname{Re}(f(z))$ em D .*

Demonstração: Como observamos anteriormente $u = \operatorname{Re}(f)$ é harmônica em D se f é analítica em D . Reciprocamente, se u é harmônica em D , pelo Lema 2.2 $g(z) := u_x(z) - iu_y(z)$, desde que D seja simplesmente conexo, é analítica em D . A função

$$F(z) := \int_{z_0}^z g(t) dt$$

é uma função que toma o mesmo valor independente do caminho que tomemos, pois para domínios simplesmente conexos a integral acima independe do caminho. Além disso, $F(z)$

é analítica em D . Então,

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{z_0}^z [u_x - iu_y][dx + idy] \\ &= \int_{z_0}^z u_x dx + u_y dy + i \int_{z_0}^z u_x dy - u_y dx \\ &= u(z) - u(z_0) + i \int_{z_0}^z u_x dy - u_y dx. \end{aligned}$$

Desta forma $u(z)$ é a parte real da função analítica $f(z) := F(z) + u(z_0)$ em D . $\square$

Se u é harmônica em um domínio D e $f = u + iv$ é analítica em D , então v é chamado de conjugado harmônico de u e f é o complemento analítico de u em D . As funções v e f , se elas existem, são únicas a menos de adição de uma constante.

Teorema 2.7 (Propriedade do Valor Médio). *Se u é harmônica em um disco aberto $|z - a| < r$ e contínua em seu fecho, então*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + r \exp(i\theta)) d\theta \quad (2.2)$$

e

$$u(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int \int_{|z-a| \leq r} u(x, y) dx dy. \quad (2.3)$$

Teorema 2.8 (Princípio do Máximo). *Se u é harmônica em um domínio D e atinge seu máximo ou mínimo em D , então u é constante em D .*

Corolário 2.1. *Se u é harmônica no interior de um compacto K e continua em K , então u atinge seu máximo e seu mínimo na fronteira de K .*

2.3 Representação em Séries de Funções Harmônicas

Uma consequência do Teorema 2.6 é o fato de que as funções harmônicas, assim como as funções analíticas, possuem uma representação em série, como podemos ver nos próximos teoremas.

Teorema 2.9. *Se $u(z)$ é harmônica em um disco $D_R(z_0)$, então existem constantes $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ e $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty$, unicamente determinadas, tais que para todo $z = z_0 + re^{i\theta}$, $0 \leq r < R$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$*

$$u(z) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta - \beta_n \sin n\theta) r^n \quad (2.4)$$

Além disso, se $v(z)$ é o conjugado harmônico de $u(z)$ em $D_R(z_0)$, então para alguma constante β_0 ,

$$u(z) = \frac{\beta_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n \cos n\theta + \alpha_n \sin n\theta) r^n. \quad (2.5)$$

Ambas as séries (2.4) e (2.5) convergem uniformemente em todo disco $|z - z_0| \leq \rho < R$.

As constantes α_n , β_n são dadas por

$$u(a) = \frac{1}{\pi \rho^n} \int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{i\theta}) \cos n\theta d\theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

$$u(a) = -\frac{1}{\pi \rho^n} \int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{i\theta}) \sin n\theta d\theta, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

para todo $0 < \rho < R$.

Teorema 2.10. Se $u(z)$ é harmônica em um anel $A := \{z : R_0 < |z - z_0| < R_1\}$, então existem e são únicas as constantes c , $\{\alpha_n\}_{-\infty}^{\infty}$ e $\{\beta_n\}_{-\infty, n \neq 0}^{\infty}$, tal que para $z = z_0 + re^{i\theta}$, $R_0 < r < R_1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$u(z) = c \log r + \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta - \beta_n \sin n\theta) r^n. \quad (2.8)$$

Esta série converge uniformemente em qualquer subconjunto compacto de A .

A partir desta fórmula pode ser deduzido o comportamento qualitativo de funções harmônicas próximos a singularidades isoladas.

Definição 2.5. Dizemos que uma vizinhança de z_0 é furada se ela não contém apenas o ponto z_0 .

Teorema 2.11. Sejam u harmônica em $D'(z_0) := \{z : 0 < |z - z_0| < R\}$ e (2.8) sua expansão em série.

(a) Se $\alpha_n \neq 0$ ou $\beta_n \neq 0$ para algum $n \geq -1$, então para toda vizinhança furada em z_0 , a função u atinge todos os valores reais.

(b) Se $\alpha_n = \beta_n = 0$ para todo $n \geq -1$ e $c \neq 0$, então

$$\lim_{z \rightarrow z_0} u(z) = \begin{cases} \infty & \text{se } c < 0 \\ -\infty & \text{se } c > 0. \end{cases}$$

2.4 Fórmula de Poisson

Teorema 2.12. *Se $u(z)$ é harmônica em um disco aberto $D_R(0) := \{z \mid |z| < R\}$ e contínua em seu fecho $\overline{D_R(0)}$, então*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\phi} - z|^2} u(Re^{i\phi}) d\phi, \quad z \in D_R(0). \quad (2.9)$$

Algumas variações da notação são as dadas abaixo.

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(t, z) U(t) d\phi \\ &= Re \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{t+z}{t-z} u(t) d\phi \right), \quad \text{para todo } t = Re^{i\phi}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Lema 2.3. *O núcleo de Poisson $P(t, z)$ satisfaz*

- (a) $P(t, z) > 0$ para $|z| < |t|$;
- (b) $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(t, z) d\phi = 1$, $|z| < R$, $t = Re^{i\phi}$;
- (c) Se $U(t)$ é integrável em $|t| = R$ e $\beta \in [0, 2\pi]$, então para cada $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow Re^{i\beta} \\ |z| < R}} \int_0^{\beta-\varepsilon} P(t, z) U(t) d\phi + \int_{\beta+\varepsilon}^{2\pi} P(t, z) U(t) d\phi = 0, \quad t = Re^{i\phi}.$$

Teorema 2.13. *Suponha que $U(t)$ é integrável em $|t| = R$ e contínua em $t = Re^{i\alpha}$. Então a função $u(z)$ em (2.10) é harmônica em $D_R(0)$ e satisfaz*

$$\lim_{\substack{z \rightarrow Re^{i\alpha} \\ |z| < R}} u(z) = U(Re^{i\alpha})$$

2.5 Alguns Teoremas da Teoria da Medida

Nesta seção apresentamos alguns teoremas da teoria da medida, que são bastante recorrentes ao longo do Trabalho, não apresentaremos as demonstrações pois são teoremas clássicos, porém suas demonstrações podem ser encontradas em [1], [5] e [12], por exemplo.

Nesta parte X denotará um espaço de medida.

Teorema 2.14 (Teorema da Convergência Dominada). *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções mensuráveis no espaço de medida X , tal que,*

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

existe para todo $x \in X$. Se existir uma função integrável $g(x)$ com respeito a medida μ que satisfaz $|f_n(x)| \leq g(x)$ para todo $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável com respeito a medida μ e

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

Corolário 2.2. Suponha que para todo $t_0 \in K$, com $K \subset X$ compacto, a função

$$\begin{aligned} f : K &\rightarrow X \times K \\ z &\mapsto f(z, t_0) \end{aligned}$$

é integrável em X , com respeito a medida μ , $\partial f / \partial z$ existe em $X \times K$ e que exista uma função integrável g em X , tal que,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) \right| \leq g(z), \quad (z, t) \in X \times K,$$

então, a função

$$F(z) = \int f(z, t) d\mu(t)$$

é diferenciável e

$$\frac{dF}{dz}(z) = \frac{d}{dz} \left(\int f(z, t) d\mu(t) \right) = \int \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) d\mu(t).$$

Teorema 2.15 (Teorema da Convergência Monótona). Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções mensuráveis no espaço de medida X , tal que,

- (i) $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq \infty$ para todo $x \in X$;
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, quando $n \rightarrow \infty$, para todo $x \in X$,

então, f é mensurável, e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

2.6 Funções Super-harmônicas

Definição 2.6. Seja $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função definida no domínio $X \subset \mathbb{C}$. Dizemos que ela é super-harmônica em X se $f(z) \not\equiv +\infty$ e satisfaz as três seguintes condições:

- a) $f(z) > -\infty$ para todo $z \in X$;
- b) f é semi-contínua inferiormente em X ;

$$c) \ f(z) \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta \text{ para todo } z \in X \text{ e } r > 0 \text{ tal que o disco } \overline{D_r(z)} := \{\omega : |\omega - z| \leq r\} \text{ está contido em } X.$$

Uma função f é chamada de *sub-harmônica* se $-f$ é super-harmônica.

Observação 2.1. Do fato de f ser super-harmônica, pelo item (b) da definição e do Teorema 2.3, concluímos que f é limite pontual de uma sequência de funções contínuas e crescentes. Se f for positiva, então a sequência também pode ser tomada positiva e o Teorema da Convergência Dominada, garante que f é mensurável.

Teorema 2.16 (Princípio do Mínimo). Sejam D um domínio limitado e g uma função super-harmônica em D , tal que,

$$\liminf_{z \rightarrow z', z \in D} g(z) \geq m \quad (2.11)$$

para todo $z' \in \partial D$. Então, ou $g(z) > m$ para todo $z \in D$ ou g é constante.

Demonstração: Podemos supor, sem perda de generalidade, que $m = 0$. Vamos mostrar que $g \geq 0$ para todo $z \in D$. Suponhamos que, ao contrário, $g(z) = -\varepsilon < 0$ para algum $z \in D$. Por g ser semi-contínua inferiormente, concluímos que o conjunto

$$E := \{z \in D : g(z) \leq -\varepsilon\}$$

é um conjunto fechado, como consequência das equivalências do Teorema (2.1), e limitado por estar no interior do domínio D . Portanto, E é um compacto não vazio. Pelo Teorema 2.2, segue que g atinge seu mínimo no conjunto compacto E . Consequentemente, existe um $z_0 \in E$, tal que

$$g(z_0) = m_g := \inf_{z \in D} g(z).$$

Pela propriedade a) de funções super-harmônicas devemos ter $m_g > -\infty$. Como $g(z_0 + re^{i\theta}) \geq m_g = g(z_0)$, se integrarmos ambos os lados desta desigualdade com respeito a medida de comprimento de arco, concluímos que

$$g(z_0) = m_g \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

e isto contradiz a propriedade c) de funções super-harmônicas. Esta contradição implica que de fato $g(z) \geq 0$ para todo $z \in D$. Agora definimos os conjuntos

$$A := \{z \in D : g(z) > 0\} \text{ e } B := \{z \in D : g(z) = 0\}.$$

O conjunto A é aberto, pois g é semi-contínua inferiormente. O conjunto B também é

aberto, pois para todo $z_0 \in B$ existe um disco aberto $D_r(z_0)$ de centro em z_0 e raio r suficientemente pequeno tal que $g(z) = 0$ para todo $z \in D_r(z_0)$, ou seja, $D_r(z_0) \subset B$. De fato, suponhamos que tal disco não exista, então, para todo r existe $\bar{z} = z_0 + r_1 e^{i\theta_0} \in A$, $0 < r_1 < r$, isto implica, pelo fato de função g ser semi-contínua inferiormente que existe um disco $D_{\bar{r}}(\bar{z}) \subset D_r(z_0)$ com $D_{\bar{r}}(\bar{z}) \subset A$, ou seja, $g(z) > 0$, $\forall z \in D_{\bar{r}}(\bar{z})$. Assim, pelo Teorema 2.4, g é contínua em um G_δ denso em $\overline{D_{\bar{r}/2}(\bar{z})}$. Portanto,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta > 0 = g(z_0), \quad 0 < \rho < r,$$

o que contraria o fato de g ser super-harmônica. Além disso, esta claro que A e B particiona o domínio D , como ele é conexo chegamos a conclusão de que somente uma das possibilidades pode ocorrer, ou $g(z) > 0$ ou g é constante. □

Exemplo 2.1. Se $p > 0$ e F é analítica em um domínio D , então $|F(z)|^p$ é sub-harmônica em D ; além disso, se F não é identicamente nula, então $\log |F(z)|$ é sub-harmônica.

A primeira parte leva em conta que se $F(z)$ é analítica então também o é a função $F(z)^p$, portanto pela propriedade do valor médio temos que

$$F(z)^p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(z + re^{i\theta})^p d\theta$$

aplicando o módulo em ambos os lado desta identidade e usando o fato de que $|\int| \leq \int | |$ chegamos a

$$|F(z)|^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(z + re^{i\theta})|^p d\theta.$$

Para a outra função sabemos que $\log(F(z))$ é harmônica próximo a um ponto onde $F(z) \neq 0$. Portanto temos a igualdade na desigualdade do valor médio e, caso $F(z) = 0$, então $\log(F(z)) = -\infty$. Assim, a desigualdade é óbvia.

3 *O Potencial Logarítmico Energia e Suas Propriedades*

Nesta capítulo introduzimos a definição do potencial logarítmico e do problema de energia. Fornecemos teoremas que caracterizam a medida de equilíbrio. Nas duas últimas seções falamos do princípio do mínimo generalizado, problema de Dirichlet e funções de Green, relacionando estes conceito com o problema de encontrar o potencial da medida de equilíbrio.

3.1 Potencial Logarítmico

Definição 3.1. *Seja μ uma medida de Borel positiva, finita e de suporte compacto. Seu potencial logarítmico é definido por*

$$U^\mu(z) = \int \log \frac{1}{|z - t|} d\mu(t),$$

onde a integral é tomada sobre $\overline{\mathbb{C}}$.

Esta integral está bem definida na medida em que aceitamos que ela possa atingir o valor $+\infty$.

Lema 3.1. *A função*

$$\int \min \left(M, \log \frac{1}{|z - t|} \right) d\mu(t), \quad (3.1)$$

com $M > 0$, onde a integral é tomada sobre $\overline{\mathbb{C}}$, é contínua e crescente em M , e tende para o potencial logarítmico quando $M \rightarrow \infty$.

Demonstração: Vamos provar primeiramente a convergência. Sabemos que

$$\min \left(M, \log \frac{1}{|z - t|} \right) = \frac{1}{2} \{ (M - \log |z - t|) - |M + \log |z - t|| \}. \quad (3.2)$$

Assim para z e t fixos se tomarmos $M > \log|z - t|$, teremos $|M - \log|z - t|| = M - \log|z - t|$ e $|M + \log|z - t|| = M + \log|z - t|$, ou seja, para M suficientemente grande $\min\left(M, \log \frac{1}{|z - t|}\right) = -\log|z - t|$. A convergência da função definida em (3.1) para a função potencial logarítmica é consequência do Teorema da convergência dominada. A continuidade é óbvia, levando em conta a identidade (3.2), isto pelo fato de a função módulo ser contínua. O fato de ser crescente é de fácil dedução. $\square$

Teorema 3.1. *A função potencial U^μ é super-harmônica em $\mathbb{C}$ e harmônica em cada ponto z não pertencente ao suporte de μ .*

Demonstração: Devemos verificar que a função U^μ satisfaz todos os itens da definição de funções super-harmônicas. O item a) segue do fato que $|z - t|$ não tende para o infinito, pois o suporte da medida é compacto. Para provar b) usamos a identidade (3.2) e o lema anterior no qual provamos que o potencial logarítmico é limite pontual de uma sequência de funções contínuas e crescentes. Portanto pelo Teorema 2.3, concluímos que U^μ é semi-contínua inferiormente.

Para provar o item c) vamos provar primeiramente que $\log(1/|z - t|)$ é super-harmônica em $\mathbb{C}$. Para tanto, sabemos do Exemplo 2.1 que, sendo $|z - t|$ analítica então $\log|z - t|$ é sub-harmônica e portanto $-\log|z - t| = \log(1/|z - t|)$ é super-harmônica. Dessa forma,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \frac{1}{|z + re^{i\theta} - t|} d\theta \leq \log \frac{1}{|z - t|}, \quad z, t \in \mathbb{C}. \quad (3.3)$$

Integrando ambos os lados desta identidade com respeito a $d\mu(z)$, e fazendo uso do Teorema de Fubini-Tonelli, o qual pode ser usado por μ ser finita, concluímos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int U^\mu(z + re^{i\theta}) d\theta &= \int \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \frac{1}{|z + re^{i\theta} - t|} d\theta d\mu(t) \\ &\leq \int \log \frac{1}{|z - t|} d\mu(t) = U^\mu(z), \end{aligned}$$

o que prova a propriedade c).

Para provarmos que $U^\mu(z)$ é harmônica nos pontos $z \notin \text{supp}(\mu)$, vamos usar o Teorema da convergência dominada. Fazendo $z = x + iy$ temos que

$$\left| \frac{\partial(\log(1/|z - t|))}{\partial x} \right| = \left| \frac{-\text{Re}(z - t)}{|z - t|^2} \right| \leq \frac{1}{|\text{Re}(z - t)|},$$

ou seja, o módulo da derivada parcial é limitada por uma função integrável com respeito a medida μ , na variável t , pois $z \neq t$. Isto implica que podemos derivar sob o sinal de integração. De modo análogo, podemos verificar que é possível derivar com respeito a

variável y sob o sinal da integração. Agora

$$\frac{\partial^2(\log(1/|z-t|))}{\partial x^2} = \frac{(\operatorname{Im}(z-t))^2 - (\operatorname{Im}(z-t))^2}{|z-t|^4} \leq \frac{1}{(\operatorname{Re}(z-t))^2},$$

ou seja, a segunda derivada com respeito a x da função $\log(1/|z-t|)$ é limitada pela função integrável $1/(\operatorname{Re}(z-t))^2$, função cuja integrabilidade se justifica pelo fato de $z \neq t$, pois $z \notin \operatorname{supp}(\mu)$, o mesmo se verifica para a derivada segunda com respeito a y . Assim, podemos calcular as segundas derivadas da função potencial, nos pontos $z \notin \operatorname{supp}(\mu)$, sob o sinal de integração. Portanto,

$$\Delta U^\mu(z) = \int \Delta \left(\log \frac{1}{|z-t|} \right) d\mu(t) = 0.$$

Portanto, $U^\mu(z)$ é harmônica em $\overline{\mathbb{C}} \setminus \operatorname{supp}(\mu)$. $\square$

Vamos agora fornecer o exemplo do potencial logarítmico da medida de comprimento de arco normalizada. Tal exemplo é muito importante quando queremos encontrar a medida de equilíbrio para pesos na reta real. Veremos isto nos próximos capítulos.

Exemplo 3.1. Para cada $r > 0$ temos

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{|z - re^{i\theta}|} d\theta = \begin{cases} \log 1/r & \text{se } |z| \leq r \\ \log 1/|z| & \text{se } |z| > r. \end{cases}$$

Para $|z| > r$ a função $\log(1/|z-t|)$ é harmônica como função de t para $|t| \leq r$. Logo, a identidade segue da propriedade do valor médio para funções harmônicas em $t = 0$. Agora, para $|z| < r$ basta fatorar $e^{i\theta}$ e escrever

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{|z - re^{i\theta}|} d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{|ze^{-i\theta} - r|} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{|\overline{z}e^{i\theta} - r|} d\theta = \log \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Finalmente, se $|z| = r$, então para $0 < \rho < r$, temos, pelo Teorema da Convergência Dominada, que pelo que calculamos anteriormente

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{|z - re^{i\theta}|} d\theta = \lim_{\rho \rightarrow r^-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{|z - \rho e^{i\theta}|} d\theta = \log \frac{1}{r}.$$

3.2 Energia Logarítmica

Sejam A um conjunto compacto de $\overline{\mathbb{C}}$ e $\mathcal{M}(A)$ o conjunto das medidas probabilísticas de Borel, finitas, positivas e com suporte compacto $\mathcal{S}$ em A .

A energia logarítmica com respeito a medida μ é dada pela equação

$$I(\mu) = \int \int_A \log \frac{1}{|z - t|} d\mu(z) d\mu(t),$$

e a energia de A por

$$V_A = \inf \{I(\mu) : \mu \in \mathcal{M}(A)\}.$$

A quantidade $\text{cap}(A) = \exp(-V_A)$ representa a capacidade do conjunto A .

Para um conjunto E qualquer a capacidade é definida como

$$\text{cap}(E) = \sup_{K \subset E} \{\text{cap}(K)\},$$

onde o sup é tomado com relação a todos os subconjuntos K compactos, tais que $K \subset E$.

Dizemos que uma propriedade vale para “quase todo ponto” se ela deixa de ser verdadeira apenas em um conjunto de capacidade nula.

Vamos enunciar e demonstrar um teorema que diz como se relaciona conjuntos de medida nula, e conjuntos de capacidade nula.

Teorema 3.2. *Sejam $E \subset \mathbb{C}$ um compacto e $m(E)$ a medida de Lebesgue do conjunto E no plano. Então,*

$$\text{cap}(E) \geq \sqrt{\frac{m(E)}{\pi e}}.$$

Demonstração: Vamos começar definindo $l := m(E) > 0$, e tomemos $r_0 = \sqrt{l/\pi}$.

Agora, fixemos um $x \in E$, e definimos o disco

$$D_{r_0}(x) := \{z : |z - x| < r_0\}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \int_E \log \frac{r_0}{|x - t|} dm(t) &= \int_{E \setminus D_{r_0}(x)} \log \frac{r_0}{|x - t|} dm(t) + \int_{E \cap D_{r_0}(x)} \log \frac{r_0}{|x - t|} dm(t) \\ &\leq \int_{E \cap D_{r_0}(x)} \log \frac{r_0}{|x - t|} dm(t), \end{aligned}$$

onde a desigualdade se justifica pelo fato de que, $|t - x| \geq r_0$, para todo $t \in E \setminus D_r(x)$. Por

consequente, na primeira integral o integrando é uma função negativa, e por consequente a integral também é negativa.

De modo semelhante, temos que em $D_{r_0}(x)$ o integrando é uma função positiva. Portanto, como $E \cap D_{r_0}(x) \subseteq D_{r_0}(x)$, temos

$$\int_E \log \frac{r_0}{|x-t|} dm(t) \leq \int_{D_{r_0}(x)} \log \frac{r_0}{|x-t|} dm(t).$$

Observando que r_0 foi escolhido de modo que $m(E) = m(D_{r_0}(x)) = \pi r_0^2$, temos que

$$\int_E \log \frac{1}{|x-t|} dm(t) + \int_E \log(r_0) dm(t) \leq \int_{D_{r_0}(x)} \log \frac{r_0}{|x-t|} dm(t) + \int_{D_{r_0}(x)} \log(r_0) dm(t).$$

Logo,

$$\int_E \log \frac{1}{|x-t|} dm(t) + \log(r_0)m(E) \leq \int_{D_{r_0}(x)} \log \frac{r_0}{|x-t|} dm(t) + \log(r_0)m(D_{r_0}(x)),$$

ou seja,

$$\int_E \log \frac{1}{|x-t|} dm(t) \leq \int_{D_{r_0}(x)} \log \frac{r_0}{|x-t|} dm(t).$$

Calculando a integral do lado direito da desigualdade, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{D_{r_0}(x)} \log \frac{r_0}{|x-t|} dm(t) &= \int_0^{r_0} r \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{|re^{i\varphi}|} d\varphi dr \\ &= \int_0^{r_0} r \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{r} d\varphi dr + \int_0^{r_0} r \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{|e^{i\varphi}|} d\varphi dr \\ &= \int_0^{r_0} r \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{r} d\varphi dr = -2\pi \int_0^{r_0} r \log r dr. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_E \log \frac{1}{|x-t|} dm(t) \leq l \left(\frac{1}{2} \log \frac{\pi e}{l} \right). \quad (3.4)$$

Se dividirmos por l^2 ambos os lados da desigualdade e integrarmos em E com respeito a medida $m|_E/l$, teremos

$$\frac{1}{l} \int \int_E \log \frac{1}{|x-t|} \left(\frac{dm(t)}{m} \right) \left(\frac{dm(x)}{l} \right) \leq \frac{1}{l} \left(\frac{1}{2} \log \frac{\pi e}{l} \right).$$

Portanto,

$$V \leq \left(\frac{1}{2} \log \frac{\pi e}{l} \right),$$

e

$$\text{cap}(E) = \exp(-V) \geq \exp\left(\frac{1}{2} \log \frac{\pi e}{l}\right) = \sqrt{\frac{m(E)}{\pi e}}.$$

Observação 3.1. *O que este Teorema nos diz é que conjuntos compactos de capacidade nula, também tem medida de Borel Lebesgue nula. Porém, podemos estender este fato para qualquer conjunto de Borel B , pois sendo m uma medida regular interior, então*

$$\begin{aligned} \sqrt{m(B)} = \sup_{K \subseteq B} \{ \sqrt{m(K)} : K \text{ compacto} \} &\leq \sqrt{\pi e} \sup_{K \subseteq B} \{ \text{cap}(K) : K \text{ compacto} \} \\ &= \sqrt{\pi e} \text{cap}(B). \end{aligned}$$

Corolário 3.1. *Seja μ uma medida de Borel, positiva, finita e com energia logarítmica finita, ou seja, $I(\mu) < \infty$. Então, se um conjunto de Borel E tem capacidade nula ele também tem medida $\mu(E)$ nula.*

Demonstração: Basta adaptarmos a demonstração anterior, e escolhermos um r_0 de tal forma que $\mu(D_{r_0}(x)) = \mu(E)$. Também devemos observar que em (3.4), vamos usar o fato de que a medida logarítmica de μ é finita.

As extensão feita na observação logo abaixo do Teorema 3.2 também é válida. Basta aplicarmos o Teorema 2.18 de [12, pag 48], pra concluir que μ é regular interior.

Lema 3.2. *Seja $\mu \in \mathcal{M}(A)$. Então, o potencial logarítmico de μ é tal que*

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} U^\mu(z) + \log |z| = 0.$$

Demonstração: Vamos provar que

$$U^\mu(z) = -\log |z| - O(|z|^{-1}), \text{ quando } z \rightarrow \infty.$$

De fato,

$$\begin{aligned} U^\mu(z) &= \int \log \frac{1}{|z|} d\mu(t) - \int \log \left| 1 - \frac{|t|}{|z|} \right| d\mu(t) \\ &= \mu(\mathbb{C}) \log |z| - \int \log \left| 1 - \frac{|t|}{|z|} \right| d\mu(t) \\ &= \log |z| - \int \log \left| 1 - \frac{|t|}{|z|} \right| d\mu(t). \end{aligned}$$

Além disso, se $|z|$ é suficientemente grande, temos

$$B := |z| \int \log \left| 1 - \frac{|t|}{|z|} \right| d\mu(t) = \int \log \left| 1 - \frac{|t|}{|z|} \right|^{|z|} d\mu(t)$$

pelo fato de que $e^x \geq |1 - x|$, $x \in [0, 1]$, segue que para R é suficientemente grande $|t|/|z| \in [0, 1]$ e

$$B \leq \int |z| \frac{|t|}{|z|} d\mu(t) = \int |t| d\mu(t),$$

Logo,

$$|B| \leq \int |t| d\mu(t) \leq M,$$

pois o suporte de μ é compacto.

Portanto, se fizermos $z \rightarrow \infty$, segue diretamente que

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} U^\mu(z) + \log |z| = 0. \quad \square$$

Definição 3.2. *Seja A um conjunto fechado, com capacidade logarítmica positiva. A função $w : A \rightarrow [0, +\infty)$ é chamada de função peso admissível, se ela satisfaz as três condições seguintes:*

- (i) *w é semi-contínua superiormente;*
- (ii) *$A_0 := \{z \in A : w(z) > 0\}$ tem capacidade positiva;*
- (iii) *Se A é ilimitado, então $|z|\omega(z) \rightarrow 0$ quando $|z| \rightarrow \infty$, $z \in A$.*

Às vezes, por questão de simplificação, vamos usar a função $Q(z) = -\log(w(z))$. Podemos desta forma definir o problema de energia com potencial logarítmico para o caso em que há um corpo externo.

A energia logarítmica com respeito à medida μ e função peso w é definida pela equação

$$I_w(\mu) = \int \int \log \frac{1}{|z - t|} d\mu(z) d\mu(t) + \int Q(z) d\mu(z),$$

e a energia de A por

$$V_w = \inf \{I_w(\mu) : \mu \in \mathcal{M}(A)\}.$$

A medida μ_w que satisfaz $V_w = I(\mu_w)$ é chamada de medida de equilíbrio.

3.3 Caracterização da Medida de Equilíbrio

Nesta seção vamos estabelecer um importante teorema de caracterização da medida de equilíbrio.

Lema 3.3. *Seja μ uma medida de Borel com sinal, de suporte compacto e massa total $\mu(\mathbb{C}) = 0$, com decomposição em termos de medidas positivas, $\mu = \mu_1 - \mu_2$. Suponha ainda que cada uma das medidas positivas μ_1 e μ_2 tem energia logarítmica finita. Então, a energia logarítmica com respeito a μ é não negativa e ela é nula se, e somente se, $\mu = 0$.*

Demonstração: Sejam $z_1 \neq z_2$ dois pontos do suporte de μ , e para R grande definamos a integral

$$F_R(z_1, z_2) := \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < R} \frac{1}{|t - z_1||t - z_2|} dm(t)$$

onde m é a medida de Lebesgue no plano complexo. Fazendo a mudança $t = t + z_2$ e calculando obtemos

$$\begin{aligned} F_R(z_1, z_2) - \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < R} \frac{1}{|t||t - (z_1 - z_2)|} dm(t) = \\ \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < R} \frac{|t||t - (z_1 - z_2)| - |t - z_1||t - z_2|}{|t - z_1||t - z_2||t||t - (z_1 - z_2)|} dm(t) = O\left(\frac{1}{R}\right). \end{aligned}$$

Substituindo $t = re^{i\varphi}$ obtemos

$$\begin{aligned} F_R(z_1, z_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|re^{i\varphi} - z_1 + z_2|} d\varphi dr + O\left(\frac{1}{R}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|re^{i\varphi} - |z_1 - z_2||} d\varphi dr + O\left(\frac{1}{R}\right), \end{aligned}$$

onde o termo $O(1/R)$ independe dos pontos z_1, z_2 escolhidos, a última passagem se justifica devido a simetria entre os pontos z_1, z_2 . Faça $x := |z_1 - z_2|$ e $u = r/x$. A integral acima toma a forma

$$F_R(z_1, z_2) = \int_0^{R/x} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|1 - ue^{i\varphi}|} d\varphi du + O\left(\frac{1}{R}\right).$$

Se supormos que para $u > 0$, temos

$$u(2 + u) > -1 \text{ e } 1 + 1/u > 2.$$

O resultado da integração em função de φ com u fixo é uma função elíptica completa $G(u)$, a qual é integrável no intervalo $[0, 2]$, pois

$$\lim_{u \rightarrow 1} (u - 1)G(u) = 0$$

e 1 é o único polo desta função neste intervalo, e seus dois primeiros termos no desenvolvimento da série de Lorentz é

$$1/u + O(1/u^3),$$

devido ao fato que

$$\lim_{u \rightarrow \infty} uG(u) = 1$$

e

$$\lim_{u \rightarrow \infty} u^3 (G(u) - 1/u) = 1/4.$$

Daí, a integral acima toma a forma

$$\begin{aligned} F_R(z_1, z_2) &= \text{const.} + \int_2^{R/x} \frac{1}{u} + O\left(\frac{1}{u^3}\right) d\varphi du + O\left(\frac{1}{R^2}\right), \\ &= \text{const.} + \log R - \log x + O\left(\frac{1}{R^2}\right), \end{aligned}$$

onde as constantes acima não são necessariamente iguais. Assim,

$$\log \frac{1}{|z_1 - z_2|} = F_R(z_1, z_2) + \text{const.} + \log R + O\left(\frac{1}{R^2}\right).$$

Integrando a última identidade com respeito a $d\mu(z_1)d\mu(z_2)$ e usando o fato $\mu(\mathbb{C}) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} I(\mu) &= \int \int \log \frac{1}{|z_1 - z_2|} d\mu(z_1)d\mu(z_2) \\ &= \int \int \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < R} \frac{1}{|t - z_1||t - z_2|} dm(t) d\mu(z_1)d\mu(z_2) + O\left(\frac{1}{R}\right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Aqui temos a intenção de inverter a ordem de integração desta integral. Para tanto, vamos provar que $I(\mu)$ é absolutamente convergente, ou equivalentemente, $I(|\mu|) < \infty$. Temos que

$$I(|\mu|) = \text{const.} + \|\mu\|^2 \log R + \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < R} \left(\int \frac{1}{|t - z|} d|\mu|(z) \right)^2 dm(t) + O\left(\frac{1}{R}\right).$$

Observe que os primeiros termos não desapareceram pois $\|\mu\|(\mathbb{C}) \neq 0$. Isto mostra que a integral

$$\int \frac{1}{|t - z|} d|\mu|(z)$$

existe para quase todo t . Consequentemente, $I(|\mu|)$ é finita. Portanto, podemos mudar a ordem de integração em (3.5), concluindo que

$$I(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < R} \left(\int \log \frac{1}{|t-z|} d\mu(z) \right)^2 dm(t) + O\left(\frac{1}{R}\right).$$

Por conseguinte, fazendo $R \rightarrow \infty$, chegamos em

$$I(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \left(\int \log \frac{1}{|t-z|} d\mu(z) \right)^2 dm(t), \quad (3.6)$$

e isto prova que $I(\mu) \geq 0$.

Agora, se $I(\mu) = 0$, então a integral

$$H(t) : \int \frac{1}{|z-t|} d\mu(z) \quad (3.7)$$

deve ser zero para quase-todo t , uma vez que funções mensuráveis e positivas cuja integral são nulas devem ser nulas para quase todo ponto. Porém, esta integral é contínua para t grande. Assim, podemos concluir que (3.7) é nula fora de um conjunto compacto. Para R suficientemente grande, de tal forma que $H(t) = 0$ para $|t| \geq R$, vale

$$\begin{aligned} \frac{1}{|z-t|} &= R^{-1} \left(1 - \frac{z}{R} e^{-i\varphi}\right)^{-1/2} \left(1 - \frac{\bar{z}}{R} e^{i\varphi}\right)^{-1/2} \\ &= R^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{1+m} \binom{-1/2}{m} \binom{-1/2}{n} z^m \bar{z}^n e^{-i(m-n)\varphi} R^{-m-n}. \end{aligned}$$

Isto implica que para R grande e $k = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\varphi} \int \frac{1}{|z - Re^{i\varphi}|} d\mu(z) d\varphi \\ &= (-1)^k \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-1/2}{m} \binom{-1/2}{m+k} R^{-2m-k-1} \int z^m \bar{z}^{m+k} d\mu(z). \end{aligned}$$

Pelo fato dos termos fora da integral na série acima não se anular, para R grande, devemos ter

$$\int z^m \bar{z}^{m+k} d\mu(z) = 0$$

para todo $m, k \geq 0$. Tomando o complexo conjugado, podemos deduzir disto que

$$\int z^m \bar{z}^j d\mu(z) = 0$$

para todo $m, j \geq 0$. Porém, os monômios $\{z^m \bar{z}^j\}_{m,j=0}^{\infty}$ geram um subespaço linear denso no espaço das funções contínuas no suporte de μ , este resultado é consequência do Teorema

de Stone-Weiertrass em sua versão para funções reais, consultar [5, pag95]. Consequentemente,

$$\int h d\mu = 0$$

para toda função contínua h , e isto prova que $\mu = 0$ se $I(\mu) = 0$. $\square$

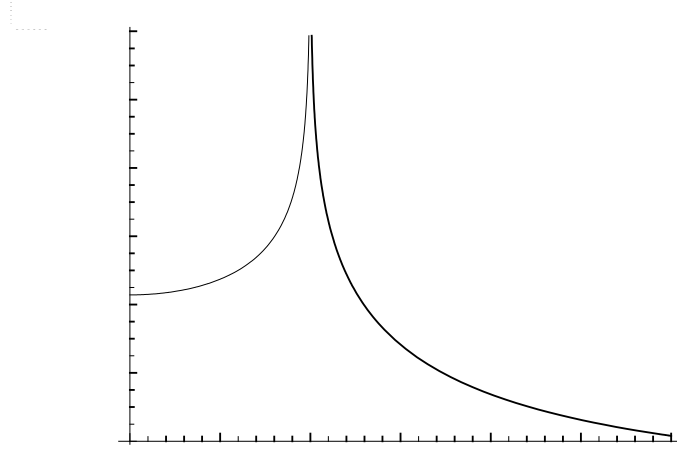


Figura 1: Gráfico da função $G(u)$

Teorema 3.3. *Seja w um peso admissível em um conjunto fechado A e seja $V_w := \inf\{I_w(\mu) : \mu \in \mathcal{M}(A)\}$. Então valem as seguintes propriedades:*

- (a) V_w é finito.
- (b) Existe uma única medida $\mu_w \in \mathcal{M}(A)$ tal que

$$V_w = I_w(\mu_w)$$

e mais ainda, μ_w tem energia logarítmica finita, isto é,

$$-\infty < \int \int \log \frac{1}{|z - t|} d\mu_w(z) d\mu_w(t) < \infty;$$

- (c) O conjunto $\mathcal{S}_w := \text{supp}(\mu_w)$ é compacto, está contido em A_0 e tem capacidade positiva.
- (d) Colocando

$$F_w := V_w - \int Q d\mu_w \tag{3.8}$$

a desigualdade

$$U^{\mu_w}(z) + Q(z) \geq F_w$$

é verdadeira para “quase todo ponto” em A .

(e) *A desigualdade*

$$U^{\mu_w}(z) + Q(z) \leq F_w$$

vale para todo $z \in \mathcal{S}_w$.

(f) *Em particular, para “quase todo ponto” $z \in \mathcal{S}_w$,*

$$U^{\mu_w}(z) + Q(z) = F_w.$$

A constante F_w é chamada de constante de Robin modificada.

Demonstração:

(a) Sabemos que $w(z) \neq \infty$ para todo $z \in A$. Também temos que w semi-contínua superiormente e w é uma função peso admissível. Portanto, é limitada superiormente independentemente se A for limitado ou ilimitado. Se A é limitado segue diretamente do análogo do Teorema 2.2 para funções semi-continuas superiormente, e se A é ilimitado $w(z)|z| \rightarrow \infty$ quando $|z| \rightarrow \infty$, de onde segue que w é limitado superiormente em A . De fato, dado $\varepsilon = 1$ sabemos que existe L tal que, se $L < |z|$, então $w(z)|z| < 1$ ou seja, $w(z) < \frac{1}{L}$ e se $|z| \leq L$, então w é limitado pois w é semi-contínua superiormente no compacto $A \cap \{z : |z| \leq L\}$. Portanto, a função

$$\log[|z - t|w(z)w(t)]^{-1}$$

é limitada inferiormente em $A \times A$. De fato, do que observamos acima, concluímos que $|t|w(z) < 1$ para $|z| > L$ e naturalmente ele é limitado pra $|z| \leq L$ e, sendo M o limite superior para a função peso w , segue que

$$\begin{aligned} \log[|z - t|w(z)w(t)]^{-1} &\geq \log[(|z| + |t|)w(z)w(t)]^{-1} \\ &\geq \log[|z|w(z)w(t)]^{-1} + \log[|t|w(z)w(t)]^{-1} \\ &\geq 2\log M + \log[|z|w(z)]^{-1} + \log[|t|w(t)]^{-1} \\ &\geq 2\log M + \log[K]^{-1} + \log[K]^{-1}, \end{aligned}$$

onde $K = \min \left(1, \sup_{|z| \leq L} (|z|w(z)) \right)$. Consequentemente, a integral de energia $I(\mu)$ está bem definida para toda medida $\mu \in \mathcal{M}(A)$ e $V_w > -\infty$.

Para $\varepsilon > 0$, definimos os conjuntos

$$A_\varepsilon := \{z : w(z) \geq \varepsilon\}. \quad (3.9)$$

Então, A_ε é limitado, pois caso não o fosse, a propriedade (iii) seria contrariada. Logo, sendo fechado por hipótese, A_ε . Daí,

$$A_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1/n}.$$

Sendo w um peso admissível, A_0 tem capacidade positiva, e assim existe um n para o qual $\text{cap}(A_{1/n}) > 0$. Isto quer dizer que existe uma medida de probabilidade μ_n com suporte em $A_{1/n}$ tal que

$$\int \int \log \frac{1}{|z - t|} d\mu_n(z) d\mu_n(t) < \infty.$$

No suporte de μ_n a função peso w é limitada inferiormente por $1/n$. Consequentemente, temos também

$$\int \int \log \frac{1}{w(z)w(t)} d\mu_n(z) d\mu_n(t) < \infty.$$

Portanto $I(\mu_n) < \infty$. Assim $V_w = \min\{I(\mu)\} \leq I(\mu_n) < \infty$. $\square$

(b) Começamos por afirmar que, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno

$$V_w = \inf\{I_w(\mu) | \mu \in \mathcal{M}(A_\varepsilon)\}. \quad (3.10)$$

Mostraremos que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$\log [|z - t|w(z)w(t)]^{-1} > V_w + 1 \quad \text{se } (z, t) \notin A_\varepsilon \times A_\varepsilon. \quad (3.11)$$

Para este propósito, é suficiente provar que, se $\{(z_n, t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ for uma sequência satisfazendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min(w(z_n), w(t_n)) = 0, \quad (3.12)$$

então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log [|z_n - t_n|w(z_n)w(t_n)]^{-1} = \infty. \quad (3.13)$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $z_n \rightarrow z$, $t_n \rightarrow t$ quando $n \rightarrow \infty$, onde z ou t , ou ambos podem assumir o valor $+\infty$. Se z e t são ambos finitos, então (3.13) segue diretamente de (3.12). Se $z = \infty$ e t é finito, então da propriedade (iii) para pesos admissíveis segue que

$$\begin{aligned} 0 \leq |z_n - t_n|w(z_n)w(t_n) &\leq [|z_n| + |t_n|]w(z_n)w(t_n) \\ &= |z_n|w(z_n)w(t_n) + |t_n|w(z_n)w(t_n) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Analogamente segue que, se $t = z = \infty$, então

$$\begin{aligned} 0 \leq |z_n - t_n|w(z_n)w(t_n) &\leq [|z_n| + |t_n|]w(z_n)w(t_n) \\ &= |z_n|w(z_n)w(t_n) + |t_n|w(z_n)w(t_n) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

e isto prova (3.13). A desigualdade (3.11) segue pelo fato de que, dado $V_w + 1 > 0$ por (3.12) temos que existe n_0 , tal que, para todo $n > n_0$ temos $\min(w(z_n), w(t_n)) \leq \exp(V_w + 1)$, e consequentemente $\log [|z_n - t_n|w(z_n)w(t_n)]^{-1} \geq V_w + 1$.

Considere o $\varepsilon > 0$ de (3.10). Mostraremos que para toda medida $\mu \in \mathcal{M}(A_\varepsilon)$ com $\text{supp}(\mu) \cap (\mathbb{C} \setminus A_\varepsilon) \neq \emptyset$ e $I_w(\mu) < V_w + 1$, existe uma medida $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}(A_\varepsilon)$ tal que $I_w(\tilde{\mu}) < I_w(\mu)$. Isto prova (3.10) e, além disso, a igualdade $I_w(\mu) = V_w$ é possível somente se a medida tem suporte em A_ε . De fato, para uma medida μ que satisfaz as condições acima, definimos a medida $\tilde{\mu}$ como $\tilde{\mu} := (\mu|_{A_\varepsilon})/\mu(A_\varepsilon)$ e devido a definição de V_w e $I_w(\mu) < V_w + 1$, devemos ter

$$\begin{aligned} \mu(A_\varepsilon) + V_w\mu(A_\varepsilon) &= \int_{A_\varepsilon} 1 + V_w d\mu(z) > \int_{A_\varepsilon} I_w(\mu)\mu(A_\varepsilon) d\mu(z) \\ &\geq \int_{A_\varepsilon} V_w d\mu(z) = V_w\mu(A_\varepsilon). \end{aligned}$$

Por conseguinte, devemos ter $\mu(A_\varepsilon) > 0$. Agora de (3.11), concluimos que

$$\begin{aligned} I_w(\mu) &= \int \int_{A_\varepsilon \times A_\varepsilon} \log [|z - t|w(z)w(t)]^{-1} d\mu(z)d\mu(t) \\ &\quad + \int \int_{\mathbb{C}^2 \setminus A_\varepsilon \times A_\varepsilon} \log [|z - t|w(z)w(t)]^{-1} d\mu(z)d\mu(t) \\ &> \mu(A_\varepsilon)I_w(\tilde{\mu}) + (V_w + 1)(1 - \mu(A_\varepsilon)^2), \end{aligned}$$

e, sendo $I_w(\mu) < V_w + 1$, obtemos $I_w(\tilde{\mu}) < I_w(\mu)$.

Desta forma, provamos a afirmação feita em (3.10). Agora podemos de fato começar a prova do item (b) do Teorema. Por (3.10) existe uma sequência $\{\mu_n\} \subset \mathcal{M}(A_\varepsilon)$ com

$$I(\mu_n) \rightarrow V_w \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Cada μ_n tem suporte no conjunto compacto A_ε . Consequentemente, pelo Teorema de Helly, podemos selecionar uma sub-sequência que converge fracamente* e, sem perda de generalidade, podemos assumir que a própria sequência converge fracamente* para uma medida $\mu \in \mathcal{M}(A_\varepsilon)$.

Sendo w semi-contínua superiormente, de acordo com o análogo do Teorema 2.3, existe uma sub-sequência $\{w_m\}$ de funções contínuas, tais que, $w_{m+1} < w_m$, $m =$

$1, 2, \dots$, e $w_m(z) \rightarrow w(z)$ quando $m \rightarrow \infty$ para todo $z \in A_\varepsilon$. Desta forma, para todo $(z, t) \in A_\varepsilon \times A_\varepsilon$, a função contínua

$$G_m(z, t) := \log \left[\max \left(\frac{1}{m}, |z - t| \right) w_m(z) w_m(t) \right]^{-1}$$

converge monotonicamente para

$$\log [|z - t| w(z) w(t)]^{-1}.$$

Podemos desta forma usar o Teorema da Convergência Monótona para concluirmos que

$$\begin{aligned} I_w(\mu) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int \int G_m(z, t) d\mu(z) d\mu(t) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int \int G_m(z, t) d\mu_n(z) d\mu_n(t) \right) \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \int \int \log [|z - t| w(z) w(t)]^{-1} d\mu_n(z) d\mu_n(t) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} I_w(\mu_n) = V_w, \end{aligned}$$

onde, na segunda igualdade usamos o fato de G_m ser contínua e, se $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$, então $\mu_n \times \mu_n \xrightarrow{*} \mu \times \mu$ em $\mathcal{M}(A_\varepsilon \times A_\varepsilon)$. Desta forma, $\mu_w := \mu$ é uma medida extremal que procurávamos.

A prova que μ_w tem energia logarítmica finita, segue da desigualdade $I_w(\mu_w) \leq \infty$ e do fato que w é limitada superiormente em A_ε .

Para provarmos a unicidade, suponha que exista $\bar{\mu} \in \mathcal{M}(A)$ que também satisfaça $I_w(\bar{\mu}) = V_w$. Provamos que obrigatoriamente devemos ter $\bar{\mu} \in \mathcal{M}(A_\varepsilon)$ e que $\bar{\mu}$ tenha energia logarítmica finita. Agora, sendo que $(\mu_w - \bar{\mu})(\mathbb{C}) = \mu_w(\mathbb{C}) - \bar{\mu}(\mathbb{C}) = 1 - 1 = 0$, calculamos a energia das medidas $\frac{1}{2}(\mu_w - \bar{\mu})$, na presença de campo externo, gerado por $w(z)$.

$$\begin{aligned} I_w(2^{-1}(\mu_w - \bar{\mu})) &:= \int \int \log [|z - t| w(z) w(t)]^{-1} d(2^{-1}(\mu_w - \bar{\mu}))(z) d(2^{-1}(\mu_w - \bar{\mu}))(t) \\ &= \int \int \log |z - t|^{-1} d(2^{-1}(\mu_w - \bar{\mu}))(z) d(2^{-1}(\mu_w - \bar{\mu}))(t) \\ &\quad + \int \int \log [w(z)]^{-1} d(2^{-1}(\mu_w - \bar{\mu}))(z) d(2^{-1}(\mu_w - \bar{\mu}))(t) \\ &\quad + \int \int \log [w(t)]^{-1} d(2^{-1}(\mu_w - \bar{\mu}))(z) d(2^{-1}(\mu_w - \bar{\mu}))(t) \\ &= \int \int \log \frac{1}{|z - t|} d(2^{-1}(\mu_w - \bar{\mu}))(z) d(2^{-1}(\mu_w - \bar{\mu}))(t). \end{aligned}$$

Na última identidade usamos o fato de que se usarmos a ordem de integração de modo conveniente, nos dois últimos termos da soma, de tal forma que o integrando da primeira integração seja constante, podemos concluir pelo fato de $(\mu_w - \bar{\mu})(\mathbb{C}) = 0$, que os dois termos são nulos.

Consequentemente, pelo Lema 3.3, devemos ter

$$I_w(2^{-1}(\mu_w - \bar{\mu})) \geq 0 \quad (3.14)$$

com igualdade se, e somente se, $\mu_w = \bar{\mu}$. Além disso as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} I_w(2^{-1}(\mu_w + \bar{\mu})) &= \frac{1}{4} \int \int \log [|z - t|w(z)w(t)]^{-1} d\mu_w(z)d\mu_w(t) \\ &+ \frac{1}{4} \int \int \log [|z - t|w(z)w(t)]^{-1} d\mu_w(z)d\bar{\mu}(t) \\ &+ \frac{1}{4} \int \int \log [|z - t|w(z)w(t)]^{-1} d\mu_w(t)d\bar{\mu}(z) \\ &+ \frac{1}{4} \int \int \log [|z - t|w(z)w(t)]^{-1} d\bar{\mu}(z)d\bar{\mu}(t) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} I_w(2^{-1}(\mu_w - \bar{\mu})) &= \frac{1}{4} \int \int \log [|z - t|w(z)w(t)]^{-1} d\mu_w(z)d\mu_w(t) \\ &- \frac{1}{4} \int \int \log [|z - t|w(z)w(t)]^{-1} d\mu_w(z)d\bar{\mu}(t) \\ &- \frac{1}{4} \int \int \log [|z - t|w(z)w(t)]^{-1} d\mu_w(t)d\bar{\mu}(z) \\ &+ \frac{1}{4} \int \int \log [|z - t|w(z)w(t)]^{-1} d\bar{\mu}(z)d\bar{\mu}(t). \end{aligned}$$

Consequentemente, somando estas duas identidades obtemos

$$\begin{aligned} I_w(2^{-1}(\mu_w + \bar{\mu})) + I_w(2^{-1}(\mu_w - \bar{\mu})) &= 2^{-1}(I_w(\mu_w) + I_w(\bar{\mu})) \\ &= 2^{-1}(V_w + V_w) = V_w, \end{aligned}$$

e usando o fato de que

$$I_w(2^{-1}(\mu_w + \bar{\mu})) \geq V_w,$$

que é consequência da definição de energia, podemos concluir que

$$0 \geq I_w(2^{-1}(\mu_w + \bar{\mu})) \geq 0.$$

Dai,

$$I_w(2^{-1}(\mu_w - \bar{\mu})) = 0.$$

Portanto, $\mu_w = \bar{\mu}$. □

(c) Na prova de (b), verificamos que $\mathcal{S}_w \subset A_\varepsilon$ e, sendo A_ε limitado, $\mathcal{S}_w$ deve ser compacto e $\mathcal{S}_w \subset A_0$. Além disso, μ_w tem energia logarítmica finita. Daí, $\mathcal{S}_w = \text{supp}(\mu_w)$ deve ter capacidade positiva. □

(d) Defina

$$T_w(z) := \int \log \frac{1}{|z - t|} d\mu_w(t) + Q(z), \quad z \in A. \quad (3.15)$$

Como U^μ e Q são funções semi-contínuas inferiormente, concluimos que $T_w(z)$ também é semi-contínua inferiormente. Consequentemente, o conjunto

$$E = \{z \in A : T_w(z) \leq \alpha\}$$

é fechado para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Suponhamos que o conjunto $\{z \in A : T_w(z) < F_w\}$, onde F_w é a constante de Robin, tenha capacidade positiva. Então, existe um inteiro n_0 suficientemente grande, tal que o conjunto compacto

$$E_1 := \left\{ z \in A : |z| \leq n_0, T_w(z) \leq F_w - \frac{1}{n_0} \right\}$$

ainda tenha capacidade positiva. Por outro lado, sendo

$$\int T_w(z) d\mu_w(z) = \int \int \log \frac{1}{|z - t|} d\mu_w(z) d\mu_w(t) + \int Q d\mu_w = F_w, \quad (3.16)$$

existe um conjunto compacto $E_2 \subset \mathcal{S}_w$, disjunto de E_1 , tal que

$$T_w(z) > F_w - \frac{1}{2n_0}, \quad z \in E_2,$$

e

$$m := \mu_w(E_2) > 0.$$

Tal conjunto existe, pois

$$\int_{\mathbb{C}} T_w(z) d\mu_w(z) = \int_{E_1} T_w(z) d\mu_w(z) + \int_{\mathbb{C} \setminus E_1} T_w(z) d\mu_w(z), \quad (3.17)$$

e sendo que em E_1 a função definida em (3.15) é menor ou igual a $F_w - 1/n_0$, caso

o conjunto E_2 não existisse, então

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}} T_w(z) d\mu_w(z) &\leq \left(F_w - \frac{1}{n_0}\right) \mu_w(E_1) + \left(F_w - \frac{1}{2n_0}\right) (\mu_w(\mathbb{C}) - \mu_w(E_1)) \\ &= \left(F_w - \frac{1}{n_0}\right) < F_w, \end{aligned}$$

isso contraria (3.16).

Agora tomemos σ uma medida com suporte em E_1 , tal que, $I(\sigma)$ é finito e $\sigma(E_1) = m$. Tal medida existe uma vez que $\text{cap}(E_1) > 0$ e $E_1 \subset A_\varepsilon$ para algum $\varepsilon > 0$. Então, para a medida com sinal σ_1 , definida em A por

$$\sigma_1 = \begin{cases} \sigma & \text{em } E_1 \\ \mu_w & \text{em } E_2 \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

verificamos que para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, a medida $\mu_w + \delta\sigma_1 \in \mathcal{M}(A)$ satisfaz

$$I_w(\mu_w + \delta\sigma_1) < V_w. \quad (3.18)$$

De fato,

$$I_w(\mu_w + \delta\sigma_1) = I_w(\mu_w) + 2\delta \int T_w d\sigma_1 + O(\delta^2) \leq I_w(\mu_w) + \frac{2\delta m}{2n_0} + O(\delta^2) < I_w(\mu_w)$$

para δ pequeno. Isto contradiz a definição de V_w . Portanto, o conjunto E tem capacidade nula, o que prova o item (d) do Teorema. $\square$

(e) Seja $z_0 \in \mathcal{S}_w$ e suponha que

$$T_w(z_0) > F_w,$$

onde T_w foi definida no item anterior. Sendo T_w semi-continua inferiormente, de acordo com a definição existe uma vizinhança U_{z_0} em torno de z_0 , tal que

$$T_w(z_0) > F_w + \varepsilon, \quad z \in U_{z_0} \cap \mathcal{S}_w \quad (3.19)$$

onde $\varepsilon > 0$ qualquer. Agora como a medida μ_w tem energia logarítmica finita, de acordo com o Corolário 3.1, a desigualdade do item (d), é válida para quase todo ponto com respeito a medida μ_w . Consequentemente, temos

$$\begin{aligned} F_w = \int T_w(z) d\mu_w(z) &= \int_{U_{z_0} \cap \mathcal{S}_w} T_w(z) d\mu_w(z) + \int_{\mathcal{S} \setminus (U_{z_0} \cap \mathcal{S}_w)} T_w(z) d\mu_w(z) \\ &\geq \mu_w(U_{z_0} \cap \mathcal{S}_w) [F_w + \varepsilon] + [1 - \mu_w(U_{z_0} \cap \mathcal{S}_w)] F_w. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\varepsilon\mu_w(U_{z_0} \cap \mathcal{S}_w) \leq 0.$$

Assim, $\mu_w(U_{z_0} \cap \mathcal{S}_w) = 0$. Chegamos a um absurdo, pois sendo o conjunto $U_{z_0} \cap \mathcal{S}_w$ relativamente aberto com respeito ao suporte $\mathcal{S}_w$, este deveria ter medida positiva. Este absurdo prova a afirmação (e) do Teorema. $\square$

3.3.1 Teorema da Decomposição de Riesz e Princípio da Dominação

Teorema 3.4 (Teorema da Decomposição de Riesz). *Se f é uma função super-harmônica em um domínio $\mathcal{D}$, então existe uma medida positiva λ em $\mathcal{D}$ tal que para todo sub-domínio $D \in \mathcal{D}$ para o qual $\overline{D} \in \mathcal{D}$ nós temos a representação*

$$f(z) = u_D(z) + \int_D \log \frac{1}{|z - t|} d\lambda(t), \quad z \in D, \quad (3.20)$$

onde u_D é uma função harmônica em D .

Teorema 3.5 (Princípio da Dominação). *Sejam μ e ν duas medidas de Borel finitas e positivas com suporte compacto em $\mathbb{C}$, e suponhamos que a massa total de ν não exceda a de μ . Suponhamos ainda que μ tem energia logarítmica finita. Se para alguma constante c , a desigualdade*

$$U^\mu(z) \leq U^\nu(z) + c,$$

é válida para quase todo ponto com respeito a medida μ , então a desigualdade é válida em todo o plano complexo.

3.4 A Medida Extremal

Definição 3.3. *O ínfimo essencial de uma função f em um conjunto K , denotado por “ $\inf_{z \in K} f(z)$ ” é o maior número L para o qual a função f toma valores menores do que L somente em um conjunto de capacidade nula. Analogamente o supremo essencial “ $\sup_{z \in K} f(z)$ ” é o menor número U para o qual a função f toma valores maiores do que U somente em um conjunto de capacidade nula.*

Com estas definições concluímos, através dos itens (d) e (e) do Teorema 3.3, que valem as identidades

$$\text{“} \inf_{z \in A} \text{”} (U^\sigma(z) + Q(z)) \leq F_w \quad (3.21)$$

e

$$\sup_{z \in \text{supp}(\sigma)} (U^\sigma(z) + Q(z)) \geq F_w. \quad (3.22)$$

Teorema 3.6. *Sejam w um peso admissível e A é um conjunto fechado e de capacidade positiva. Então, para qualquer medida $\sigma \in \mathcal{M}(A)$ com suporte compacto,*

$$“\inf_{z \in A}”(U^\sigma(z) + Q(z)) \leq F_w \quad (3.23)$$

e

$$\sup_{z \in \text{supp}(\sigma)} (U^\sigma(z) + Q(z)) \geq F_w. \quad (3.24)$$

Se ocorrer igualdade em (3.23) e (3.24), então $\sigma = \mu_w$.

Demonstração: Primeiramente suponhamos que para algum L_1 , a desigualdade

$$U^\sigma(z) + Q(z) \geq L_1,$$

seja válida para “quase todo ponto” $z \in A$. Então, somando e subtraindo $U^{\mu_w}(z)$ na desigualdade acima, por (3.22), temos que

$$L_1 \leq U^\sigma(z) - U^{\mu_w}(z) + U^{\mu_w}(z) + Q(z) \leq F_w + U^\sigma(z) - U^{\mu_w}(z),$$

ou seja,

$$-F_w + U^{\mu_w}(z) + L_1 \leq U^\sigma(z) \quad (3.25)$$

para “quase todo ponto” $z \in \text{supp}(\mu_w)$. Portanto, pelo Corolário 3.1 esta desigualdade é válida para quase todo ponto com respeito a medida μ_w , pois μ_w tem energia logarítmica finita. Desta forma, pelo Princípio da Dominação, a desigualdade ocorre para todo $z \in \mathbb{C}$. Fazendo $z \rightarrow \infty$ e usando o Lema 3.2, obtemos $L_1 \leq F_w$. Isto prova (3.23).

Suponha agora que, para todo $z \in \text{supp}(\sigma)$

$$U^\sigma(z) + Q(z) \leq L_2, \quad (3.26)$$

com $L_2 \leq F_w$. Então, L_2 é finito e as desigualdades (3.26) e (3.21) implicam que

$$L_2 \geq U^\sigma(z) - U^{\mu_w}(z) + U^{\mu_w}(z) + Q(z) \geq F_w + U^\sigma(z) - U^{\mu_w}(z).$$

Equivalentemente,

$$-F_w + U^{\mu_w}(z) + L_2 \geq U^\sigma(z) \quad (3.27)$$

para “quase todo ponto” $z \in \text{supp}(\sigma)$. Consequentemente, $L_2 \geq F_w$.

Daí, se $L_1 = L_2 = F_w$, as desigualdades (3.25) e (3.27) implicam que

$$U^\sigma(z) - U^{\mu_w}(z) = 0,$$

isto é,

$$\int U^\sigma(z) - U^{\mu_w}(z) d(\sigma - \mu_w)(z) = I(\sigma - \mu_w) = 0.$$

Portanto, segue do Lema 3.3 que $\sigma = \mu_w$. $\square$

Forneceremos agora um teorema, que utilizaremos para deduzir a capacidade e a medida de equilíbrio do círculo e do intervalo.

Teorema 3.7. *Seja w um peso admissível. Se $\sigma \in \mathcal{M}(A)$ tem suporte compacto e energia logarítmica finita, $U^\sigma(z) + Q(z) = F$ para “quase todo ponto” no suporte de σ e $U^\sigma(z) + Q(z) \geq F$ para “quase todo ponto” em A , então $\sigma = \mu_w$ e $F = F_w$.*

Demonstração: As suposições do Teorema implicam que

$$“\inf_{z \in A}”(U^\sigma(z) + Q(z)) = F$$

e

$$“\sup_{z \in \text{supp}(\sigma)}”(U^\sigma(z) + Q(z)) = F.$$

Do Teorema 3.6, segue que $F_w \leq F \leq F_w$. Portanto, $F = F_w$ e $\sigma = \mu_w$. $\square$

Exemplo 3.2. *Seja A um disco fechado $\overline{D_r(a)}$, de raio r , e sua circunferência $C_r(a) := \{z : |z - a| = r\}$, com $w \equiv 1$. Colocamos $d\sigma = ds/2\pi r$, onde ds é a medida de comprimento de arco de $C_r(a)$. Então, do Exemplo 3.1, temos*

$$U^\sigma(z) = \begin{cases} \log \frac{1}{r} & \text{se } |z - a| \leq r \\ \log \frac{1}{|z - a|} & \text{se } |z - a| > r. \end{cases}$$

Assim, U^σ é constante em A , logo pelo Teorema 3.7, temos que $d\mu_A = ds/2\pi r$, e

$$\log \frac{1}{r} = F_w = \log \frac{1}{\text{cap}(A)}.$$

Portanto, $\text{cap}(A) = r$. □

Exemplo 3.3. *Seja $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$, com $w \equiv 1$. Então, temos*

$$\text{cap}(A) = \frac{b-a}{4} \quad \text{e} \quad d\mu_A(x) = \frac{1}{\pi} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \quad x \in [a, b].$$

De fato, vamos supor, por questão de simplificação, que $A = [-1, 1]$. Seja

$$d\sigma(x) = \frac{1}{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

e calculemos o potencial da medida σ

$$U^\sigma(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \log \frac{1}{|z-x|} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Fazendo a mudança de variável $x = \cos \theta$, obtemos

$$U^\sigma(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \frac{1}{|z - \cos \theta|} d\theta.$$

Vamos aplicar a transformação de Joukowski

$$z = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right).$$

Ela aplica a região $|\zeta| > 1$ na região $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ e, o círculo unitário no intervalo $[-1, 1]$, percorrendo o intervalo duas vezes. Fazendo $t = e^{i\theta}$, temos que

$$|z - \cos \theta| = \left| \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) - \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \right| = \frac{1}{2} |\zeta - t| |\zeta^{-1} - t|.$$

Daí,

$$\begin{aligned} U^\sigma(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \frac{2}{|\zeta - t| |\zeta^{-1} - t|} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log 2 d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \frac{1}{|\zeta - t|} d\theta \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \frac{1}{|\zeta^{-1} - t|} d\theta = \log 2 + U^{\mu_C}(\zeta) + U^{\mu_C}(\zeta^{-1}), \end{aligned}$$

onde μ_C é a medida de equilíbrio do círculo. Consequentemente, pelo fato de a inversa da aplicação ser $\zeta = z + \sqrt{z^2 - 1}$ e pelo exemplo anterior, segue que

$$U^\sigma(z) = \log 2 + \log \frac{1}{|\zeta|} + \log 1 = \log 2 - \log |z + \sqrt{z^2 - 1}|.$$

Como no intervalo $[-1, 1] = \text{supp}(\sigma)$, temos $|\zeta| = 1$, então $U^\sigma(z) = \log 2$, $z \in [-1, 1]$.

Portanto, pelo Teorema 3.7, temos que

$$d\sigma = d\mu_{[-1,1]} \text{ e } \text{cap}([-1,1]) = \exp(-\log 2) = 1/2.$$

Como aplicação dos resultados anteriores demonstraremos agora um teorema que fornece um limite inferior, para o supremo essencial de pesos polinomiais.

Teorema 3.8. *Sejam w um peso admissível e $P_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ um polinômio mônico de grau n . Então*

$$\sup_{z \in \mathcal{S}_w} [w(z)]^n |P_n(z)| \geq \exp(-nF_w).$$

Demonstração: Sejam $\tilde{w} := w|_{\mathcal{S}_w}$, $\tilde{A} := \mathcal{S}_w$. Então, $\mu_{\tilde{w}} = \mu_w$. Além disso, se σ_n é a medida discreta com massa $1/n$ nos zeros de $P_n(z)$, temos

$$U^{\sigma_n}(z) = \int \log \frac{1}{|z-t|} d\sigma_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \frac{1}{|z-z_k|} = \frac{1}{n} \log \frac{1}{(\prod_{k=1}^n |z-z_k|)} = \frac{1}{n} \log \frac{1}{|P_n(z)|}.$$

Portanto, aplicando o Teorema 3.6, ao conjunto $\tilde{A}$, com a função peso $\tilde{w}$ e a medida σ_n , temos que

$$\inf_{z \in \mathcal{S}_w} \left\{ -\frac{1}{n} \log(|P_n(z)|) - \frac{1}{n} \log([w(z)]^n) \right\} \leq F_w,$$

ou seja,

$$\sup_{z \in \mathcal{S}_w} \{ \log(|P_n(z)|[w(z)]^n) \} \geq -nF_w.$$

Aplicando a função exponencial em ambos os lados da desigualdade, obtemos

$$\sup_{z \in \mathcal{S}_w} [w(z)]^n |P_n(z)| \geq \exp(-nF_w).$$

3.5 Princípio do Mínimo

Nesta seção apresentamos alguns lemas que servem de preparação para a demonstração do Princípio do Mínimo Generalizado.

Lema 3.4. *Sejam E um subconjunto fechado e conexo, $z_0 \in \mathbb{C}$ e $S := \{r : r > 0 \text{ e } C_r(z_0) \cap E \neq \emptyset\}$. Se L é o comprimento de S , então $\text{cap}E \geq L/4$.*

Demonstração: Vamos supor, sem perda de generalidade, que $z_0 = 0$. Denotemos por m a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$. Considere a aplicação $T : E \rightarrow [0, L]$ definida por

$T(z) = m(S \cap [0, |z|])$. Segue que T é uma contração bijetiva, pois

$$|T(z) - T(w)| = |m(S \cap [0, |z|]) - m(S \cap [0, |w|])| \leq ||z| - |w|| \leq |z - w|.$$

Se σ é qualquer medida com suporte em E , então podemos definir σ^* , com suporte no intervalo $[0, L]$, como $\sigma^*(B) = \sigma(T^{-1}(B))$ para qualquer conjunto de Borel $B \subset [0, L]$. Vamos provar que qualquer medida $\mu \in \mathcal{M}([0, L])$ pode ser obtida de alguma medida σ , da forma como foi definida acima. Para o caso em que a medida é uma medida do tipo delta de Dirac com massa em um ponto t , basta tomar σ como sendo a medida delta de Dirac com massa em $T^{-1}(t)$. Desta forma podemos nos estender e dizermos que a afirmação é válida para toda medida discreta. Agora seja μ uma medida qualquer. Escolha uma sequência de medidas discretas μ_n convergindo fracamente* para a medida μ . Por exemplo, podemos tomar a medida

$$\mu_n = \sum_{j=0}^n \mu([jL/n, (j+1)L/n]) \delta_{jL/n}.$$

Então, existe uma medida $\sigma_n \in \mathcal{M}(E)$ tal que $\sigma_n^* = \mu_n$, e pelo Teorema de Helly, podemos supor que as medidas $\{\sigma_n\}$ convergem para uma medida $\sigma \in \mathcal{M}(E)$, passando a uma subsequência se necessário. Isto feito, vamos provar que $\mu = \sigma^*$. De fato, seja $f \in C([0, L])$. A função $F(z) = f(T(z))$, sendo F obviamente contínua, possui uma extensão contínua G todo o plano complexo e vale a fórmula

$$\int f d\sigma^* = \int G d\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \int G d\sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\mu_n = \int f d\mu.$$

Logo, como f foi escolhida de forma arbitrária, segue que $\sigma^* = \mu$. Portanto,

$$\text{Para toda } \mu \in \mathcal{M}([0, L]), \text{ existe } \sigma \text{ com } \text{supp}(\sigma) \subseteq E, \text{ tal que } \mu(B) = \sigma(T^{-1}(B)). \quad (3.28)$$

Agora, se $\mu = \sigma^*$, então a integral de energia satisfaz a desigualdade

$$\begin{aligned} I(\sigma) &= \iint \log \frac{1}{|z - t|} d\sigma(z) d\sigma(t) \\ &\leq \iint \log \frac{1}{|T(z) - T(t)|} d\sigma(z) d\sigma(t) \\ &= \iint \log \frac{1}{|z - t|} d\mu(z) d\mu(t) = I(\mu), \end{aligned}$$

onde a última passagem segue de (3.28). Consequentemente, se tomarmos o ínfimo de ambos os lados com respeito a todas as medidas σ e μ concluimos que $V_{[0, L]} \leq V_E$. Segue

que

$$\text{cap}(E) \geq \text{cap}([0, L]) = L/4.$$

O lema está provado.

Lema 3.5. *Seja w uma função peso admissível, definida em A e contínua. Então,*

$$U_w^\mu(z_0) \geq -Q(z_0) + F_w, \quad z_0 \in A.$$

Em particular, se $z_0 \in \mathcal{S}_w$ é um ponto interior de A , então $U_w^\mu(z_0) = -Q(z_0) + F_w$.

Demonstração: Sem perda de generalidade podemos supor que $Q(z_0) < \infty$, caso contrário a conclusão é óbvia. Seja $\varepsilon > 0$ e escolha $\delta > 0$ tal que, para todo $z \in A$ com $|z - z_0| \leq \delta$, temos que

$$|Q(z) - Q(z_0)| < \varepsilon. \quad (3.29)$$

Definimos o conjunto

$$E := \{z \in A : |z - z_0| < \delta \text{ e } U^{\mu w}(z) \leq -Q(z_0) + F_w - \varepsilon\}.$$

Então, E é fechado pois $U^{\mu w}$ é semi-contínua inferiormente. Por (3.29) e pelo Teorema 3.3(d), concluímos que E tem capacidade nula. Desta forma, podemos aplicar o Lema 3.4 para escolher $r \in (0, \delta)$, tal que, $E \cap C_r(z_0) = \emptyset$. Isto significa que

$$U^{\mu w}(z) \geq -Q(z_0) + F_w - \varepsilon, \quad z \in D_r(z_0).$$

Como $U^{\mu w}$ é super-harmônica, podemos concluir que

$$U^{\mu w}(z_0) \geq -Q(z_0) + F_w - \varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ chegamos à conclusão desejada. $\square$

No caso clássico em que A é compacto e $w \equiv 1$, o Lema 3.5 implica que

$$U^{\mu A}(z) = F_w = \log \frac{1}{\text{cap}(A)} \quad (3.30)$$

Lema 3.6 (Teorema de Evans). *Seja E uma união de fechados de capacidade nula. Então, existe uma medida finita μ com suporte compacto, tal que, $U^\mu(z) \equiv \infty$, $z \in E$. Além disso, se $z_0 \notin E$, então $U^\mu(z_0) < \infty$*

Demonstração: Inicialmente vamos supor que E é compacto. Vamos construir μ na

forma

$$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mu_{E_{\delta_k}} =: \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mu_k, \quad (3.31)$$

onde $\{c_k\}$ e $\{\delta_k\}$ são seqüências positivas convenientemente escolhidas e, para cada k , $\mu_{E_{\delta_k}}$ é a medida de equilíbrio de E_{δ_k} . Como a igualdade (3.30) já nos garante que

$$U^\mu(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k U^{\mu_k}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{1}{\text{cap}(E_{\delta_k})}, \quad z \in E. \quad (3.32)$$

Escolheremos as seqüências $\{c_k\}$ e $\{\delta_k\}$ de modo que (3.31) seja convergente e (3.32) divergente. Como

$$\|\mu\| = \sum_{k=1}^{\infty} c_k, \quad (3.33)$$

precisamos, para que (3.31) seja convergente, escolher $\{c_k\}$ de tal forma que (3.33) seja convergente, pois isto implica que (3.31) é absolutamente convergente e como convergência absoluta implica em convergência de séries, segue que (3.31) é convergente. Logo, vamos tomar

$$c_k = \left(\log \frac{1}{\text{cap}(E_{\delta_k})} \right)^{-1/2}.$$

Se pudermos mostrar que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \text{cap}(E_\delta) = 0, \quad (3.34)$$

então $U^\mu(z) = \infty$, pois a série (3.32), com os c_k 's escolhidos acima, será divergente, desde que a seqüência $\{\delta_k\}$ converge para 0 suficientemente rápido.

Suponhamos que (3.34) não seja verdadeira. Então existe uma constante K e uma seqüência $\delta_k \rightarrow 0$, tal que

$$\log \frac{1}{\text{cap}(E_{\delta_k})} \leq K.$$

Pelo Teorema de Helly, existe uma subsequência de $\{\mu_{\delta_k}\}$ que converge fracamente* para uma medida ν . Portanto, podemos supor, sem perda de generalidade, que a própria $\mu_k := \mu_{\delta_k} \xrightarrow{*} \nu$. Então, fazendo uso do Lema 3.1, deduzimos

$$\begin{aligned} I(\nu) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int \int \min \left(M, \log \frac{1}{|z-t|} \right) d\nu(t) d\nu(z) \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \int \int \min \left(M, \log \frac{1}{|z-t|} \right) d\mu_k(t) d\mu_k(z) \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} I(\mu_k) \leq K. \end{aligned}$$

Sendo que ν tem suporte em E , isto contradiz a hipótese de que $\text{cap}(E) = 0$, e esta

contradição prova que $U^\mu(z) = \infty$ em E , quando E é compacto.

Se $z_0 \notin E$, então esta construção pode ser seguida de uma tal forma que z_0 esteja fora do suporte de μ . Consequentemente $U^\mu(z_0) < \infty$, e o lema está provado para conjuntos compactos. Agora consideremos o caso geral, quando E tem capacidade nula e é união de fechados. Então, $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} H_j$, onde cada H_j é compacto e de capacidade zero. Desta forma, para cada H_j , existe uma medida ν_j com suporte em um compacto fixado independente de j tal que $U^{\nu_j}(z_0) < \infty$, mas $U^{\nu_j}(z_0) \equiv \infty$ em H_j . Agora podemos ver que para alguma sequência $\{\alpha_j\}$ tendendo suficientemente rápido para 0, a medida $\mu := \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \nu_j$, satisfaz as hipóteses do lema, provando a existência da medida, para a qual $U^\mu(z) = \infty$, $z \in E$ e $U^\mu(z) = \infty$, $z \notin E$. $\square$

No próximo Teorema vamos fazer uso do fato que funções super-harmônicas são invariantes por aplicações conformes, o qual segue do seguinte lema.

Lembrando que uma aplicação f é uma aplicação conforme se ela preserva ângulos.

Lema 3.7. *Sejam G uma aplicação conforme e g uma função super-harmônica em um domínio D tal que $\text{Im}G \subset D$, então a função $g \circ G$ é super-harmônica em D .*

Teorema 3.9 (Princípio do Mínimo Generalizado). *Sejam $D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ um domínio e g uma função super-harmônica e limitada inferiormente em D e satisfaz*

$$\liminf_{z \rightarrow z', z \in D} g(z) \geq m \quad (3.35)$$

para “quase todo ponto” $z' \in \partial D$. Se g não é constante, então $g(z) > m$, $z \in D$.

Demonstração: Vamos supor, sem perda de generalidade que $m = 0$, e que g não seja constante. Além disso, de acordo com o Lema 3.7, podemos supor que D contém um ponto no infinito e uma vizinhança deste ponto; caso contrário basta aplicar a função inversa em torno de um ponto de D .

O Princípio do Mínimo no Teorema 2.16, provado no primeiro capítulo, afirma que, se uma função super-harmônica atingir seu mínimo em um ponto interior de um domínio, então ela deve ser constante. A diferença entre o Princípio do Mínimo T2.16 e o atual generalizado, é que anteriormente exigíamos que, $\inf g(z) > m$, $\forall z \in D$, enquanto que agora exigimos somente que (3.35) verdade para “quase todo ponto” $z' \in \partial D$. Consequentemente, temos apenas que provar $\inf_D g(z) \geq 0$.

Seja $m_g = \inf_{z \in D} g(z)$ e suponha que $m_g < 0$. Então,

$$\liminf_{z \rightarrow \infty} g(z) \geq g(\infty) > m_g. \quad (3.36)$$

Sejam Δ o disco contendo ∂D no seu interior, o qual denotamos por Δ . Por (3.36) e o Princípio do Mínimo 2.16 sabemos que existe $0 > m_1 > m_g$ tal que

$$\inf_{z \notin \Delta} g(z) > m_1. \quad (3.37)$$

Sejam $m_g < m_3 < m_2 < m_1$, fixamos um ponto $z_0 \in \Delta \cap D$ considere o conjunto

$$E := \{z \in D : g(z) < m_2\}.$$

Usando a semi-continuidade inferior de g , obtemos de (3.37), que o fecho de E está contido em $(\Delta \cap D) \cup \partial D$. Por (3.35) o conjunto $\overline{E} \cap \partial D$ é compacto e tem capacidade zero; conseqüentemente pelo Lema 3.6, existe um potencial U^μ , onde μ é uma medida positiva, finita e de suporte compacto, que toma valor $+\infty$ para todo ponto em $\overline{E} \cap \partial D$ e $U^\mu(z_0) < \infty$. Mas então para todo ponto $z' \in \overline{E} \cap \partial D$, temos que

$$\liminf_{z \rightarrow z', z \in D} U^\mu(z) = \infty;$$

conseqüentemente para todo $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{z \rightarrow z', z \in D} (g(z) + \varepsilon U^\mu(z)) = \infty \quad (3.38)$$

(observamos que g é limitada inferiormente em D). Em outro ponto de $\partial(\Delta \cap D)$ nós temos

$$\liminf_{z \rightarrow z', z \in D} g(z) \geq m_2.$$

Tais pontos existem pois E tem capacidade nula e $\partial(\Delta \cap D)$ tem capacidade positiva. Conseqüentemente, se γ é o limite inferior de U^μ em $\overline{\Delta}$, então para todo $z' \in \partial(\Delta \cap D)$

$$\liminf_{z \rightarrow z', z \in D} (g(z) + \varepsilon U^\mu(z)) \geq m_2 + \varepsilon \gamma \geq m_3 \quad (3.39)$$

contanto que $0 < \varepsilon < (m_2 - m_3)/|\gamma|$.

De (3.38) e (3.39), via o Teorema 2.16, podemos inferir que

$$\liminf_{z \rightarrow z', z \in D} (g(z) + \varepsilon U^\mu(z)) \geq m_3$$

em $\Delta \cap D$. Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, então chegamos a $g(z_0) \geq m_3$, onde $z_0 \in \Delta \cap D$ foi tomado arbitrariamente como no Lema 3.6, obtemos

$$\inf_{z \in \Delta \cap D} g(z) \geq m_3 \quad (3.40)$$

Porém $m_g < m_3$, (3.37) e (3.40) contradiz a definição de m_g , e esta contradição prova o princípio do mínimo generalizado. $\square$

3.6 Problema de Dirichlet e Funções de Green

O Problema de Dirichlet consiste em encontrar uma função harmônica no interior de uma região $\mathcal{D}$ e, que coincida com uma função dada $f(z)$, na fronteira de $\mathcal{D}$. Em resumo isto significa resolver a seguinte problema:

$$\begin{cases} \Delta(u(z)) &= 0 & \text{se } z \in \text{int}\mathcal{D} \\ u(z) &= f(z) & \text{se } z \in \partial\mathcal{D} \end{cases}$$

Forneceremos um teorema, que relaciona a solução de um certo Problema Dirichlet, com potencial logarítmico da medida de equilíbrio. Para estabelecer esta relação definimos e damos algumas características das funções de Green.

Começamos definindo as soluções de Perron-Wiener-Brirot para o problema de Dirichlet.

Seja $\mathcal{D} \subset \overline{\mathbb{C}}$ tal que $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{D}$ tenha capacidade positiva, e suponha que f é uma função Borel mensurável e limitada, definida em $\partial\mathcal{D}$. As classes inferiores e superiores de funções com respeito a f em $\mathcal{D}$ são definidas como

$$\mathcal{H}_f^{u,\mathcal{D}} := \{g : g \text{ é super-harmônica e limitada inferiormente em } \mathcal{D}, \liminf_{z \rightarrow x, z \in \mathcal{D}} g(z) \geq f(x) \text{ para todo } x \in \partial\mathcal{D}\}$$

e

$$\mathcal{H}_f^{l,\mathcal{D}} := \{g : g \text{ é sub-harmônica e limitada superiormente em } \mathcal{D}, \limsup_{z \rightarrow x, z \in \mathcal{D}} g(z) \leq f(x) \text{ para todo } x \in \partial\mathcal{D}\},$$

e as soluções superiores e inferiores, para o problema de Dirichlet com função de fronteira f , são dadas por

$$\overline{H}_f^{\mathcal{D}}(z) := \inf\{g(z) | g \in \mathcal{H}_f^{u,\mathcal{D}}\}, \quad z \in \mathcal{D},$$

e

$$\underline{H}_f^{\mathcal{D}}(z) := \sup\{g(z) \mid g \in \mathcal{H}_f^{l,\mathcal{D}}\}, \quad z \in \mathcal{D}.$$

Se $\overline{H}_f^{\mathcal{D}} \equiv \underline{H}_f^{\mathcal{D}}$, então estas funções denotada por $H_f^{\mathcal{D}}$, a qual é chamada de Perron-Wiener-Brelot para o problema de Dirichlet em E com função de fronteira f .

Teorema 3.10. *Sejam $\mathcal{D} \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ um domínio limitado cuja fronteira $\partial\mathcal{D}$ tem capacidade positiva e, f uma função semi-contínua superiormente ou limitada inferiormente em $\partial\mathcal{D}$. Se u é uma função harmônica limitada em $\mathcal{D}$ tal que para “quase todo” $z \in \partial\mathcal{D}$*

$$\lim_{x \rightarrow z, x \in \mathcal{D}} u(x) = f(z),$$

então u é solução de Perron-Wiener-Brelot do problema de Dirichlet em $\mathcal{D}$ com função de fronteira f .

Demonstração: Vamos supor que $\partial\mathcal{D}$ é compacto. Caso contrário basta aplicarmos uma transformação de Möbius que leva um ponto no infinito em um ponto finito, tal transformação preserva propriedades de f e u . Vamos mostrar que $u \equiv \overline{H}_f^{\mathcal{D}}$, a outra identidade $u \equiv \underline{H}_f^{\mathcal{D}}$ tem demonstração idêntica.

Seja $g \in \mathcal{H}_f^{u,\mathcal{D}}$ uma função superior qualquer. Então, $g - u$ é super-harmônica por ser soma de funções super-harmônicas, limitada inferiormente pelas hipóteses sobre u e, ainda

$$\liminf_{z \rightarrow x, z \in \mathcal{D}} (g(z) - u(z)) \geq f(x) - f(x) = 0, \quad \text{para quasi-every } x \in \partial\mathcal{D}.$$

Consequentemente, segue do Princípio do Mínimo Generalizado Teorema 3.9 que $g(z) \geq u(z)$ para todo $z \in \mathcal{D}$. Como tomamos g de modo arbitrário, a desigualdade

$$u \leq \overline{H}_f^{\mathcal{D}}, \quad z \in \mathcal{D},$$

é válida.

Temos que provar somente a desigualdade contrária. Seja $z_0 \in \mathcal{D}$ fixado. Temos de provar que $u(z_0)$ é o ínfimo dos valores de $g(z_0)$ para toda $g \in \overline{H}_f^{\mathcal{D}}$. Suponhamos que

$$\liminf_{z \rightarrow x, x \in \mathcal{D}} u(z) \geq f(x)$$

é válida para “quase todo ponto” $x \in \partial\mathcal{D}$. Seja $E \subseteq \partial\mathcal{D}$ o conjunto

$$E := \{x \in \partial\mathcal{D} : \liminf_{z \rightarrow x, x \in \mathcal{D}} u(z) < f(x)\}.$$

Afirmamos que E é uma união enumerável de conjuntos fechados. De fato, para o caso em que f é semi-contínua superiormente, cada conjunto da forma

$$E_\varepsilon := \{x \in \partial\mathcal{D} : \liminf_{z \rightarrow x, x \in \mathcal{D}} u(z) \leq f(x) - \varepsilon\}.$$

é fechado, devido a resultado análogo do Teorema 2.1 para funções semi-contínuas superiormente. Portanto $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{1/n}$. Agora, se f for semi-contínua inferiormente, então f é limite pontual de uma sequência de funções contínuas e crescentes $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$. Então, se definirmos

$$E^m := \{x \in \partial\mathcal{D} : \liminf_{z \rightarrow x, x \in \mathcal{D}} u(z) < f_m(x)\},$$

cada E^m é união enumerável de conjuntos fechados, pois cada f_m é contínua. Portanto, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E^n$.

Então, E é união de conjuntos fechados de capacidade nula. Consequentemente, do Lema 3.6 segue que, existe uma medida σ , tal que, $U^\sigma(z) = \infty$ para todo $z \in E$ e $U^\sigma(z_0) < \infty$.

Sendo $\mathcal{D}$ limitado, para cada $\varepsilon > 0$ considere a função

$$g_\varepsilon := u(z) + \varepsilon(U^\sigma(z) - \overline{m}),$$

onde $\overline{m}$ é o ínfimo de $U^\sigma(z)$ em $\partial\mathcal{D}$. Logo, g_ε é uma função super-harmônica, pois é soma de funções super-harmônicas, e segue que g_ε é uma função superior, isto é, $g_\varepsilon \in \overline{H}_f^{\mathcal{D}}$. Fazendo, $\varepsilon \rightarrow 0$, chegamos que $u(z_0)$ é o ínfimo dos valores de $g_\varepsilon(z_0)$, $\varepsilon > 0$. Isto prova a desigualdade contrária. Logo, $u = \overline{H}_f^{\mathcal{D}}$.

Definição 3.4. *Seja $A \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ um conjunto compacto.*

- *O domínio exterior Ω relativo a A é a componente ilimitada de $\overline{\mathbb{C}} \setminus A$;*
- *O conjunto $\partial\Omega$ é chamado de fronteira exterior de A .*
- *O invólucro polinomial convexo de A é definido como sendo $\mathbb{C} \setminus \Omega$ e é denotado por $Pc(A)$.*

Definição 3.5. *Seja A um conjunto compacto e Ω seu domínio exterior. A função de Green com polo no infinito, se existe, é a única função $g_\Omega(z, \infty)$ em Ω com as seguintes propriedades:*

- (a) *g_Ω é não-negativa e harmônica em $\Omega \setminus \{\infty\}$,*

- (b) $\lim_{|z| \rightarrow \infty} (g_\Omega(z, \infty) - \log|z|) = \log \frac{1}{\text{cap}(A)},$
- (c) $\lim_{z \rightarrow z', z \in \Omega} (g_\Omega(z, \infty)) = 0$, para “quase todo ponto” $z' \in \partial\Omega$.

Com os teoremas enunciados e provados anteriormente, podemos provar a existência e unicidade das funções de Green.

A existência e unicidade da função de Green, em conjuntos de capacidade positiva, pode ser provada definindo-se

$$g_\Omega(z, \infty) = -U^{\mu_A}(z) + \log \frac{1}{\text{cap}A}.$$

De fato, (a) segue do Teorema 3.3-(e) para o caso sem corpo externo, ou seja, $Q \equiv 0$. Neste caso, $U^{\mu_A} \leq \log(\text{cap}(A))^{-1}$ e a função de Green é não-negativa e harmônica. De fato, a função potencial é harmônica para $z \notin \text{supp}(\mu_A)$. O item (b) se deve ao fato que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} U^\mu(z) + \log|z| = 0$, como no Lema 3.2. Como $U^{\mu_A} = \log(\text{cap}(A))^{-1}$ para “quase todo ponto” em $\mathcal{S}_w$, e sendo $\mathcal{S}_w$ compacto, temos $\partial\Omega \subset \partial\mathcal{S}_w$. Portanto, devemos ter $\lim_{z \rightarrow z', z \in \Omega} (g_\Omega(z, \infty)) = 0$, para “quase todo ponto” $z' \in \partial\Omega$. O item c segue.

Para provar a unicidade, suponhamos que exista $\tilde{g}$, que satisfaça todas as propriedades definidas acima. Então, $g_\Omega - \tilde{g}$ é harmônica e limitada inferiormente em Ω . Além disso, pela propriedade (c), temos $\lim_{z \rightarrow z', z \in \Omega} (g_\Omega(z, \infty) - \tilde{g}(z)) = 0$, para “quase todo ponto” $z' \in \partial\Omega$. Então, pelo princípio do mínimo generalizado, segue que $g_\Omega(z, \infty) = \tilde{g}(z)$.

Teorema 3.11. *Seja w um peso admissível e E uma componente limitada de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{S}_w$. Então*

$$U^{\mu_w}(z) - F_w \equiv H_{-Q}^E(z), \quad z \in E.$$

Se, entretanto, $E = \Omega$ é a componente ilimitada de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{S}_w$, então

$$U^{\mu_w}(z) - F_w \equiv H_{-Q}^\Omega(z) - g_\Omega(z, \infty), \quad z \in \Omega,$$

onde $g_\Omega(z, \infty)$ denota a função de Green em Ω com polo no ∞ .

Demonstração: Seja E a componente limitada de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{S}_w$. Pelo Teorema 3.3(f), segue que

$$\lim_{z \rightarrow x} (U^{\mu_w}(z) - F_w) = -Q(x), \quad \text{para quasi-every } x \in \partial E.$$

Segundo o Lema 3.5, isto vale para pontos interiores também. Portanto, de acordo com o Teorema 3.10, a função $U^{\mu_w}(z) - F_w$ é solução do problema de Dirichlet, com função de fronteira $-Q$.

Agora, consideremos o problema na componente ilimitada Ω . Neste caso, temos

$$\lim_{z \rightarrow x, z \in E} (U^{\mu_w}(z) + g_{\Omega}(z, \infty) - F_w) = -Q(x), \quad \text{para quasi-every } x \in \partial\Omega.$$

Além disso, $U^{\mu_w}(z) + g_{\Omega}(z, \infty) - F_w$ é harmônica em Ω . Portanto, usando novamente o Teorema 3.10, concluímos a demonstração do teorema.

O problema de Dirichlet não é o foco deste trabalho. Então, para mais detalhes sobre o Problema de Dirichlet sugerimos a referência [11].

4 Recuperação da Medida

Neste capítulo vamos descrever o processo da recuperação da medida, começaremos com um importante teorema de comparação de medidas, e nas três seções seguintes forneceremos uma série de teoremas que nos ajudaram a encontrar o suporte da medida de equilíbrio, para auxiliar na compreensão de tais fatos aplicaremos estes teoremas no problema de encontrar o suporte da medida de equilíbrio para pesos de Jacobi e Laguerre. Na última seção fornecemos teoremas para obtenção da medida de equilíbrio a partir de seu potencial.

4.1 Teorema da Unicidade

Definição 4.1. *Seja h uma função limitada em subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$ e $g \in L_1[\mathbb{C}]$. A convolução $h * g$ de h com g é dada por*

$$h * g := \int h(z - t)g(t)dm(t) \quad (4.1)$$

onde $dm(t)$ denota a medida de Lebesgue em $\mathbb{C}$.

E analogamente se μ é uma medida de suporte compacto, definimos a convolução a direita de h com μ por

$$h * \mu := \int h(z - t)d\mu(t) \quad (4.2)$$

Teorema 4.1 (Teorema da Unicidade). *Sejam μ e ν medidas positivas com suportes compacto em uma região $D \in \mathbb{C}$ cujos potenciais satisfazem*

$$U^\mu(z) = U^\nu(z) + u(z)$$

em quase todo ponto com respeito a medida de Lebesgue no plano, onde u é uma função harmônica em D . Então, as medidas μ e ν coincidem em D .

Demonstração: Para $\varepsilon > 0$ seja

$$D_\varepsilon := \{z \in D : \text{dist}(z, \partial D) > \varepsilon\}$$

$$\chi_\varepsilon(z) := \begin{cases} 1 & \text{se } |z| \geq \varepsilon \\ 0 & \text{se } 0 \leq |z| \leq \varepsilon, \end{cases}$$

e

$$\log_\varepsilon(z) := \min \left(\log \frac{1}{|z|}, \log \frac{1}{\varepsilon} \right) = \begin{cases} \log \frac{1}{|z|} & \text{se } |z| \geq \varepsilon \\ \log \frac{1}{\varepsilon} & \text{se } 0 \leq |z| \leq \varepsilon \end{cases}$$

e também colocamos

$$\mu_\varepsilon := \int \mu(B - t) \chi_\varepsilon(t) dm(t),$$

para todo conjunto de Borel. Então, para esta medida valem as identidades

$$f * \mu_\varepsilon = (f * \mu) * \chi_\varepsilon = (f * \chi_\varepsilon) * \mu.$$

De forma similar definimos a medida ν_ε .

Agora as hipóteses do teorema implicam que

$$U^{\mu_\varepsilon}(z) = U^\mu * \chi_\varepsilon(z) = U^\nu * \chi_\varepsilon(z) + u * \chi_\varepsilon(z), \quad z \in D_\varepsilon. \quad (4.3)$$

Está claro que $u * \chi_\varepsilon$ também é harmônica em D_ε . Sendo $\log |\cdot| * \chi_\varepsilon$ contínua em $\mathbb{C}$, então

$$U^{\mu_\varepsilon} = -(\log |\cdot| * \chi_\varepsilon) * \mu \quad \text{e} \quad U^{\nu_\varepsilon} = -(\log |\cdot| * \chi_\varepsilon) * \nu,$$

também são contínuas em $\mathbb{C}$. Integrando a identidade (4.3) em um círculo $C_\eta(\xi)$, $\eta \leq \varepsilon$, pelo Exemplo 3.1, temos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \frac{1}{|z + \eta e^{i\varphi} - t|} d\varphi = \log_\eta(z - t).$$

Pelo Teorema de Fubini, temos por um lado

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U^{\mu_\varepsilon - \nu_\varepsilon}(z + \eta e^{i\varphi}) d\varphi = \log_\eta * (\mu_\varepsilon - \nu_\varepsilon)(z), \quad z \in C_\eta(\xi)$$

e por outro lado para

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U^{\mu_\varepsilon - \nu_\varepsilon}(z + \eta e^{i\varphi}) d\varphi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u * \chi_\varepsilon(z + \eta e^{i\varphi}) d\varphi \\ &= u * \chi_\varepsilon(z) = U^{\mu_\varepsilon - \nu_\varepsilon}(z) = \log_0 * (\mu_\varepsilon - \nu_\varepsilon)(z), \quad z \in D_{2\varepsilon}. \end{aligned}$$

Note que a segunda igualdade acima segue da propriedade do valor médio para a função harmônica $u * \chi_\varepsilon$ (observe que a função $\log_0 * (\mu_\varepsilon - \nu_\varepsilon)$ está bem definida devido a continuidade de U^{μ_ε} e U^{ν_ε} mencionada anteriormente).

Subtraindo as duas últimas fórmulas, obtemos

$$(\log_0 - \log_\eta) * (\mu_\varepsilon - \nu_\varepsilon)(z) = 0$$

para todo $z \in D_{2\varepsilon}$ e $0 < \eta \leq \varepsilon$. Aplicando o mesmo para η e $\eta_1 \leq \varepsilon$ e fazendo uma outra subtração, concluímos que

$$(\log_{\eta_1} - \log_\eta) * (\mu_\varepsilon - \nu_\varepsilon) \equiv 0$$

em $D_{2\varepsilon}$. Dividindo a última equação por $\log(\eta/\eta_1)$ e tomarmos o limite quando $\eta \rightarrow \eta_1^-$, obtemos do Teorema da Convergência dominada que

$$\chi_\eta * (\mu_\varepsilon - \nu_\varepsilon)(z) = 0, \quad z \in D_{2\varepsilon}, \quad (4.4)$$

pois

$$\lim_{\eta \rightarrow \eta_1^-} \frac{1}{\log(\eta/\eta_1)} (\log_{\eta_1}(z) - \log_\eta(z)) = \chi_{\eta_1}(z),$$

sendo que, a expressão no lado esquerdo está entre 0 e 1 para todo $0 < \eta_1 < \eta$.

Agora seja h uma função contínua que não se anula fora de um subconjunto compacto de D . Então, existe um $\varepsilon_0 > 0$ tal que h não se anula fora do subconjunto compacto $D_{2\varepsilon_0}$. Escolha $0 < \eta \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ arbitrariamente. Multiplicando (4.4) por h e integrando o resultado com respeito a medida de Lebesgue em $\mathbb{C}$, obtemos

$$\int h * \chi_\eta d(\mu_\varepsilon - \nu_\varepsilon) = 0.$$

Como $(h * \chi_\eta)/\pi\eta^2$ tende uniformemente para h quando $\eta \rightarrow 0$, podemos concluir que

$$\int h d(\mu_\varepsilon - \nu_\varepsilon) = 0,$$

isto é,

$$\int h * \chi_\varepsilon d\mu = \int h * \chi_\varepsilon d\nu.$$

Dividindo por $\pi\varepsilon^2$ e aplicando a justificativa anterior, obtemos

$$\int h d\mu = \int h d\nu.$$

Como isto é verdade para toda h com suporte compacto em D , obtemos $\mu|_D = \nu|_D$.

Observação 4.1. *O teorema anterior é que ele nos diz que caso a função potencial é uma soma de funções e caso uma ou mais parcelas forem harmônicas, caso existam, estas parcelas podem ser desconsideradas para a recuperação da medida.*

4.2 Caracterização do Suporte da Medida de Equilíbrio

Para encontrarmos a medida de equilíbrio vamos fazer uso de um método conhecido como método de Fourier, que consiste em determinar o suporte da medida de equilíbrio $\mathcal{S}_w$ e então fazer uso de técnicas de análise harmônica, para encontrarmos o potencial de equilíbrio, que é a solução de um certo problema de Dirichlet, como no Teorema 3.11. Para tanto, precisamos então encontrar o suporte. Forneceremos alguns teoremas que caracterizam o suporte da medida de equilíbrio e ajudaram a encontrá-los.

Começamos definindo uma importante ferramenta para tal.

Definição 4.2. *Seja K um compacto de A . O F -funcional de Mhaskar-Saff-Rakhmanov é definido como*

$$F(K) := \log \text{cap}(K) - \int Q d\nu_K \quad (4.5)$$

onde ν_K é a medida de equilíbrio de K para o caso clássico, ou seja, sem corpo externo ($w \equiv 1$).

O próximo teorema, fornece uma caracterização do invólucro polinomial convexo do suporte da medida de equilíbrio $Pc(\mathcal{S}_w)$.

Teorema 4.2. *Seja w um peso admissível em A . Então valem:*

- (a) *Para todo subconjunto compacto K de A de capacidade positiva, $F(K) \leq F(\mathcal{S}_w)$.*
- (b) *$F(\mathcal{S}_w) = F(Pc(\mathcal{S}_w)) = -F_w$.*
- (c) *Se a igualdade $F(K) = F(\mathcal{S}_w)$ vale em algum subconjunto compacto $K \subset A$ de capacidade positiva, então $Pc(\mathcal{S}_w) \subset Pc(K)$, isto é, $Pc(\mathcal{S}_w)$ é o menor invólucro polinomial convexo que maximiza o F -funcional.*
- (d) *Se A tem interior vazio e complemento conexo, então $\mathcal{S}_w$ é o menor subconjunto de capacidade positiva maximizando o F -funcional.*

Demonstração: Sejam $K \subset A$ um conjunto de capacidade positiva e μ_w a medida de equilíbrio correspondente a w . A desigualdade

$$U^{\mu_w}(z) \geq -Q(z) + F_w$$

deve valer para “quase todo ponto” em K e, como ν_K tem energia logarítmica finita, pelo Corolário 3.1 a propriedade é válida para quase todo ponto com respeito a medida ν_K . Integrando ambos os lados da desigualdade acima, obtemos

$$\int \int \log \frac{1}{|z-t|} d\mu_w(t) d\nu_K(z) \geq - \int Q(z) d\nu_K(z) + F_w, \quad (4.6)$$

ou seja,

$$\int \int \log \frac{1}{|z-t|} d\nu_K(z) d\mu_w(t) \geq - \int Q(z) d\nu_K(z) + F_w, \quad (4.7)$$

onde a mudança na ordem de integração se justifica pelo Teorema de Fubini. Sendo $U^{\nu_K}(z) \leq -\log(\text{cap}(K))$, concluímos que

$$\int -\log(\text{cap}(K)) d\mu_w \geq \int Q(z) d\nu_K(z) + F_w. \quad (4.8)$$

Portanto,

$$F(K) \leq -F_w \quad (4.9)$$

Se $K = \mathcal{S}_w$, então da desigualdade do Teorema 3.3 item (e) temos

$$U^{\mu_w}(z) + Q(z) \leq F_w,$$

ou seja,

$$-\log(\text{cap}(K)) + Q(z) \leq F_w.$$

A passagem acima se justifica devido a igualdade $U^{\nu_K}(z) = -\log(\text{cap}(K))$ para “quase todo ponto” em K . Integrando ambos os lados acima com respeito a medida $d\nu_K$, obtemos a desigualdade contrária em (4.9). Tal fato prova (a) e (b).

Se para algum K nós temos $F(K) = -F_w$, então nos argumentos prévios não podemos aumentar o lado esquerdo de (4.8) e obtemos (4.9), ou seja,

$$U^{\nu_K}(z) = -\log(\text{cap}(K))$$

em quase todo ponto com respeito a medida μ_w . Isto já implica que $\text{Pc}((S)_w) \subset \text{Pc}(K)$.

No caso oposto devemos ter um $z_0 \in \mathcal{S}_w \setminus \text{Pc}(K)$ e uma vizinhança $D_r(z_0)$ de z_0 com $D_r(z_0) \cap \text{Pc}(K) = \emptyset$. Pelo princípio do máximo, U^{ν_K} é estritamente menor do que $-\log(\text{cap}(K))$ em $D_r(z_0)$ (observe que U^{ν_K} é harmônica fora de $\text{Pc}(K)$), e $\mu_w(D_r(z_0)) > 0$, contrariando o que foi dito anteriormente. Isto prova a afirmação (c).

Finalmente, a afirmação (d) segue do fato que, se A tem interior vazio e complemento conexo, então assim o é $\mathcal{S}_w$, e portanto $\text{Pc}(\mathcal{S}_w) = \mathcal{S}_w$. $\square$

O último teorema é importante quando trabalhamos com subconjuntos da reta, pois tais subconjuntos têm complemento conexo em $\overline{\mathbb{C}}$.

4.3 Propriedades Geométricas do Suporte da medida de equilíbrio

Teorema 4.3. *Seja w um peso admissível em A e defina $Q = -\log w$.*

- (a) *Se Q é super-harmônica no interior de A , então $\mathcal{S}_w \subset \partial A$.*
- (b) *Se $A \subset \mathbb{R}$ e Q é convexa em intervalo $I \subset A$, então $I \cap \mathcal{S}_w$ é um intervalo.*
- (c) *Se $A \subset [0, \infty)$ e xQ' é crescente em um intervalo $I \subset A$, então $I \cap \mathcal{S}_w$ é um intervalo.*
- (d) *Se $A \subseteq \mathbb{R}$ e w é simétrico com respeito a origem, então $d\mu_w = d\mu_v/2$ e $F_w = F_v/2$, onde v é um peso em $A^2 := \{x^2 : x \in A\}$ definido por $v(x) = (w(\sqrt{x}))^2$.*

Demonstração: (a) Sabemos do Teorema 3.3, item (d), que

$$\int \log \frac{1}{z-t} d\mu_w(t) + Q(z) \geq F_w \quad (4.10)$$

quasi every-where em A , e

$$\int \log \frac{1}{z-t} d\mu_w(t) + Q(z) \leq F_w \quad \text{para todo } z \in \mathcal{S}_w.$$

Se Q é super-harmônica no interior de A , então os membros esquerdos destas desigualdades também são, pois a função potencial logarítmico é super-harmônica. Pelo Lema 3.5 a desigualdade (4.10) é verdadeira para todo ponto interior de A . Agora (a) segue do fato que uma função super-harmônica que não for constante não pode atingir seu valor máximo em um ponto interior. A outra possibilidade, isto é, que o lado esquerdo de (4.10)

é constante em uma componente conexa B do interior de A , implica que o potencial

$$U^{\mu_w}(z) = \int \log \frac{1}{|z - t|} d\mu_w(t)$$

também é constante em B . Pelo fato da função constante ser harmônica e da unicidade Teorema do 4.1 devemos ter a medida μ_w coincidente com a medida nula em B . Logo, a intersecção $B \cap \mathcal{S}_w$ é vazia. Em outras palavras, como B foi tomado de modo arbitrário, segue que nenhuma componente conexa do interior de A intercepta o suporte da medida de equilíbrio. Portanto, $\mathcal{S}_w \subset \partial A$.

(b) Suponhamos o contrário, que $\mathcal{S}_w \cap I$ não é um intervalo. Então, para todo $a, b \in \mathcal{S}_w \cap I$, com $a < b$, existe $c \in [a, b]$ tal que $c \notin \mathcal{S}_w \cap I$. Então, definindo

$$G(z) = \log 1/|z - t| \quad e \quad F(z) = \int G(z) d\mu_w(t) + Q(z)$$

e usando o fato de $[a, b]$ tem capacidade positiva e o Teorema 3.3, podemos tomar c de tal forma que $F(c) \geq F_w$. Concluimos, pelo fato de G ser estritamente convexa e Q ser convexa, que

$$G(c) < G(a) + \frac{G(b) - G(a)}{b - a}(z - a) \quad (4.11)$$

e

$$Q(c) < Q(a) + \frac{Q(b) - Q(a)}{b - a}(z - a). \quad (4.12)$$

Integrando ambos os lados de (4.11) com respeito a medida μ_w , obtemos

$$\int G(c) d\mu_w(t) < \int G(a) d\mu_w(t) + \frac{z - a}{b - a} \left(\int G(b) d\mu_w(t) - \int G(a) d\mu_w(t) \right). \quad (4.13)$$

Somando (4.12) e (4.13) chegamos a

$$\begin{aligned} \int G(c) d\mu_w(t) + Q(c) &< \int G(a) d\mu_w(t) + Q(a) \\ &+ \frac{z - a}{b - a} \left(\int G(b) d\mu_w(t) + Q(b) - \int G(a) d\mu_w(t) - Q(a) \right) \end{aligned}$$

isto é,

$$F(c) < F(a) + \frac{F(b) - F(a)}{b - a}(z - a).$$

Logo, pelo Teorema 3.3 e do modo como tomamos a, b, c , concluímos que

$$\begin{aligned} F_w \leq F(c) &< F(a) \left(1 - \frac{z-a}{b-a}\right) + F(b) \left(\frac{z-a}{b-a}\right) \\ &\leq F_w \left(1 - \frac{z-a}{b-a}\right) + F_w \left(\frac{z-a}{b-a}\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$1 < 1.$$

Esta contradição prova o item (b) do teorema, ou seja, $\mathcal{S}_w \cap I$ tem que ser um intervalo.

(c) Na demonstração deste item vamos utilizar a mesma notação do item anterior.

A seguinte expressão

$$xF'(x) = \int \frac{x}{x-t} d\mu_w(t) + xQ'(x), \quad (4.14)$$

é verdadeira em todo sub-intervalo $\tilde{I} \subseteq I$ que não intercepte $\mathcal{S}_w$, pois neste caso sendo $x \neq t$ para todo $x \in \tilde{I}$ e $t \in \mathcal{S}_w$, a derivada do integrando da função potencial é limitada, o que justifica o fato de termos derivado sobre o sinal da integral. Como a função $x/(x-t)$ é crescente em x para todo t positivo, concluímos que a função de (4.14) também é crescente. Daí, concluímos que se $F'(x_1) > 0$ para um certo x_1 , pelo fato de (4.14) ser crescente, então $F'(x) > 0$, $x > x_1$. Logo, existem duas possibilidades para $F(x)$; ou ela é monótona em I ou ela é função decrescente até um certo ponto e crescente a partir deste ponto. Agora suponhamos que $I \cap \mathcal{S}_w$ não é um intervalo. Então, existem $a, b \in \mathcal{S}_w$ e um conjunto $B := \{x \in [a, b] : F(x) \geq F_w\}$, confira Teorema 3.3-(e). Este conjunto B deve ter capacidade positiva. Logo, $[a, b]$ contém um intervalo $[\bar{a}, \bar{b}]$, onde podemos supor que $\bar{a}, \bar{b} \notin \mathcal{S}_w$, $F(\bar{a}) \leq F_w$ e $F(\bar{b}) \leq F_w$. Consequentemente, para a primeira possibilidade temos

$$F_w \leq F(c) < F(\bar{a}) \leq F_w, \quad c \in B,$$

o que é um absurdo. Para os demais casos a demonstração é análoga.

(d) Sejam $w(x) = (-Q(x))$, $v(x) = \exp(-q(x))$. Então $Q(x) = q(x^2)/2$. Pelo Teorema 3.3, temos

$$U^{\mu_v}(y) \geq -q(y) + F_v$$

para quasi-everywhere $y \in A^2$, com igualdade para quasi-everywhere $y \in \text{supp}(\mu_w)$. Colocando $d\mu(t) = d\mu_v(t^2)/2$ e $y = x^2$, isto é o mesmo que

$$\int_{t \geq 0} \log \frac{1}{|x^2 - t^2|} 2d\mu(t) \geq -2Q(x) + F_v$$

para quasi-everywhere $x \in A$, com igualdade para quasi-everywhere $x \in \text{supp}(\mu)$. Mas μ é par, assim o lado esquerdo é exatamente

$$\int \log \frac{1}{|x-t|} 2d\mu(t) = 2U^\mu(x).$$

Como μ tem massa total 1, a parte (e) do teorema segue levando-se em conta o Teorema 3.7.

Corolário 4.1. *Se A é a união de um número k de intervalos e w satisfaz uma das propriedades do item (b) ou (c) do Teorema anterior em cada um dos intervalos, então $\mathcal{S}_w$ é a união de vários intervalos e cada uma das componentes pertencem a alguma das componentes de A . Portanto, se K é a união de um número finito de intervalos fechados não-degenerados e $F(K) = F(\mathcal{S}_w)$, então $K = \mathcal{S}_w$.*

Demonstração: A primeira parte do Teorema é uma consequência imediata dos itens (b) e (c). Para provar a segunda parte, suponhamos que K é uma união finita de intervalos fechados e não degenerados e que $F(K) = F(\mathcal{S}_w)$. O Teorema 4.2-(d) nos dá que $\mathcal{S}_w \subset K$. Se esta inclusão é própria, então em algum subintervalo $I \subset K \setminus \mathcal{S}_w$ a desigualdade 4.8 é estrita. Desta forma, permitindo que $\nu_K(I) > 0$, onde ν_K é a medida de equilíbrio do conjunto K , temos desigualdade estrita em (4.6). Pela prova do Teorema (4.2), segue que $F(K) < -F_w = F(\mathcal{S}_w)$. Daí, a igualdade $F(K) = F(\mathcal{S}_w)$ não pode valer.

Como aplicação deste teorema, forneceremos condições analíticas para a localização do suporte da medida de equilíbrio quando o conjunto $A \subset \mathbb{R}$.

Teorema 4.4. *Seja w um peso admissível em um intervalo real $[c, d]$, onde c pode assumir o valor $-\infty$ e d pode assumir o valor $+\infty$. Suponhamos que Q possua uma das propriedades dos itens (b) ou (c) do Teorema 4.3. Então, $\mathcal{S}_w$ é um intervalo $[a, b]$ fechado e finito, cujos pontos extremos satisfazem:*

(i) Se $b < d$, então

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b Q'(x) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx = 1; \quad (4.15)$$

(ii) Se $a > c$, então

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b Q'(x) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} dx = -1; \quad (4.16)$$

(iii) Se $b = d$, então

$$\frac{1}{\pi} \int_a^d Q'(x) \sqrt{\frac{x-a}{d-x}} dx \leq 1; \quad (4.17)$$

(iv) Se $a = c$, então

$$\frac{1}{\pi} \int_c^b Q'(x) \sqrt{\frac{b-x}{x-c}} dx \geq -1. \quad (4.18)$$

Demonstração: Provaremos somente dois destes itens pois as demonstrações dos demais são semelhantes. Vamos demonstrar os itens (i) e (iii).

Pelo Teorema 4.2, sabemos que

$$F(\mathcal{S}_w) = F([a, b]) = \max_{\alpha, \beta} F([\alpha, \beta]).$$

Sabendo que a capacidade e a medida de equilíbrio de um intervalo são

$$\text{cap}([\alpha, \beta]) = \frac{\beta - \alpha}{4}, \quad d\nu_{[a, b]} = \frac{1}{\pi} \frac{dx}{\sqrt{(x - \alpha)(\beta - x)}},$$

o F-funcional toma a forma

$$F([\alpha, \beta]) = \log \frac{\beta - \alpha}{4} - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{Q(x) dx}{\sqrt{(x - \alpha)(\beta - x)}}.$$

O problema de encontrar o suporte neste caso nada mais é do que resolver um problema simples de maximização em $\mathbb{R}^2$ sobre um quadrado $[a, b] \times [a, b]$.

Façamos a seguinte mudança de variável na fórmula do F-funcional

$$x = \frac{\beta + \alpha}{2} + \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right) \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Então,

$$F([\alpha, \beta]) = \log \left(\frac{\beta - \alpha}{4} \right) - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} Q \left(\frac{\beta + \alpha}{2} + \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right) \cos \theta \right) d\theta. \quad (4.19)$$

Podemos calcular as derivadas parciais desta expressão a direita com respeito a β como segue

$$\begin{aligned} \frac{\partial F([\alpha, \beta])}{\partial_+ \beta} &= \left(\frac{1}{\beta - \alpha} \right) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} Q' \left(\frac{\beta + \alpha}{2} + \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right) \cos \theta \right) (1 + \cos \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\beta - \alpha} - \frac{1}{(\beta - \alpha)\pi} \int_{\alpha}^{\beta} Q'(x) \sqrt{\frac{x - \alpha}{\beta - x}} dx, \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde, podemos diferenciar sobre o sinal de integral pelo teorema da convergência monó-

tona pois, se supormos que Q é convexa ou $xQ'(x)$ é crescente, então

$$\frac{Q(x+h) - Q(x)}{h} \searrow Q'(x), \text{ quando } h \rightarrow 0.$$

Tomando $\alpha = a$ e $\beta = b$, segue que, se $b < d$

$$\frac{\partial F}{\partial_+ \beta}([a, b]) = \frac{1}{b-a} - \frac{1}{(b-a)\pi} \int_a^b Q'(x) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx.$$

Um argumento análogo mostra que a derivada a esquerda de β ($\partial F([a, b])/\partial_- \beta$) coincide com a fórmula anterior da derivada a direita. Desta forma, a derivada parcial ($\partial F[\alpha, \beta])/\partial \beta$ existe e, como o máximo é atingido para $\beta = b$, devemos ter

$$\frac{\partial F}{\partial \beta}([a, b]) = 0.$$

Logo, a identidade (4.15) segue facilmente.

Agora suponhamos que $xQ'(x)$ é crescente e $[c, d) \subset [0, \infty)$. Então, Q' é limitada em todo sub-intervalo fechado de (c, d) . Consequentemente, a demonstração segue como no caso em que Q é convexa, porém devemos utilizar o Teorema da Convergência Dominada ao invés do Teorema da Convergência Monótona. Agora se por acaso, $\alpha = c$, então $Q(c)$ tem de ser finito pois caso contrário c , não poderá pertencer ao suporte da medida extremal. De fato, de acordo com a definição de Q , $Q(x) < \infty$ para todo x . Daí, segue da consideração que $xQ'(x)$ é crescente, que $Q'(x)(x-c) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow c^+$ e $c > 0$, enquanto que para $c = 0$ segue que $xQ'(x) \geq 0$. Em todo caso sempre vamos ter que $Q'(x)(x-c)$ é limitada em algum intervalo $[c, b+\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$. Portanto, podemos ainda assim aplicar os mesmos procedimentos da prova anterior, agora usando o Teorema da Convergência Dominada, para derivar sobre o sinal de integral em (4.20).

Para provar (iii). Temos de verificar que (4.20) é válida para $\beta < c$. Quando $\beta \nearrow c$, o lado direito tem o limite

$$\begin{aligned} G &= \left(\frac{1}{c-\alpha} \right) - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi Q' \left(\frac{c+\alpha}{2} + \left(\frac{c-\alpha}{2} \right) \cos \theta \right) (1 + \cos \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{c-\alpha} - \frac{1}{(c-\alpha)\pi} \int_\alpha^c Q'(x) \sqrt{\frac{x-\alpha}{c-x}} dx, \end{aligned}$$

Assim, $(\partial F([a, b])/\partial_+ \beta) \rightarrow G$ quando $\beta \rightarrow c^-$ e, isto mostra que a derivada a esquerda de $F([\alpha, \beta])$ em $\beta = c$ existe e é igual a G . Sabendo que em $\beta = b$ o F-funcional atinge seu máximo, devemos ter $G \leq 0$, e isto prova a afirmação (iii) do teorema.

Corolário 4.2. *Se $w = \exp(-Q)$ é um peso admissível, $A = \mathbb{R}$, Q é par, Q' existe em*

$(0, \infty)$, e a função $xQ'(x)$ é positiva e crescente em $(0, \infty)$, então $\mathcal{S}_w = [-a, a]$ onde os pontos extremos satisfazem a equação

$$\frac{2}{\pi} \int_0^1 at \frac{Q'(at)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 1. \quad (4.21)$$

Demonstração: Seja $v(x) = w(\sqrt{x})^2$, $x \in [0, \infty)$. Então,

$$q(x) = \log(1/v(x)) = \log(w(\sqrt{x})^2) = 2 \log(w(\sqrt{x})) = 2Q(\sqrt{x}).$$

Daí, pelo Teorema 4.3-(d), temos que

$$\mathcal{S}_w = \{x : x^2 \in \mathcal{S}_v\}. \quad (4.22)$$

Mais ainda, como $xq'(x) = \sqrt{x}Q'(\sqrt{x})$ é positiva e crescente em $(0, \infty)$, $\mathcal{S}_v$ é um intervalo. Em vista do Teorema 4.4, seus pontos extremos satisfazem as propriedades (i) e (ii) daquele teorema. Mas, para os pontos extremos a esquerda de $\mathcal{S}_v$ a equação (4.16) não pode valer pois a integral em (4.16) é positiva. Portanto, $\mathcal{S}_v$ é da forma $\mathcal{S}_v = [0, a^2]$. Além disso, para o peso $v(x)$, a equação (4.15) toma a forma

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{a^2} q'(x) \sqrt{\frac{x}{a^2-x}} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{a^2} \frac{Q'(\sqrt{x})}{\sqrt{a^2-x}} dx = 1.$$

Fazendo a mudança de variável $at = \sqrt{x}$ obtemos

$$\frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{atQ'(at)}{\sqrt{1-t^2}} dx = 1.$$

De (4.22), concluímos que $\mathcal{S}_w = [-a, a]$, o que prova o corolário. $\square$

4.4 Exemplos da Determinação do Suporte para Pesos Clássicos

Nesta seção vamos encontrar o suporte da medida de equilíbrio para os pesos de Jacobi e Laguerre.

Antes vamos enunciar um lema que nos ajudará nestes cálculos.

Lema 4.1. Se $0 < b_2 < b_1$, então

•

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log(b_1 \pm b_2 \cos \theta) d\theta &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\log(b_1 \pm b_2 t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
&= \log \left(b_1 + \sqrt{b_1^2 - b_2^2} \right) - \log 2; \quad (4.23)
\end{aligned}$$

•

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{b_1 \pm b_2 \cos \theta} d\theta = \frac{1}{\sqrt{b_1^2 - b_2^2}}; \quad (4.24)$$

•

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \theta}{b_1 \pm b_2 \cos \theta} d\theta = \pm \frac{\sqrt{b_1^2 - b_2^2} - b_1}{b_2 \sqrt{b_1^2 - b_2^2}}. \quad (4.25)$$

4.4.1 Pesos de Jacobi

Os pesos de Jacobi são da forma $w(x) = (1-x)^{\lambda_1}(1+x)^{\lambda_2}$ com λ_1 e λ_2 positivos e $A = [-1, 1]$ logo

$$Q(x) = -\log(w(x)) = -\lambda_1 \log(1-x) - \lambda_2 \log(1+x),$$

e a derivada

$$Q''(x) = \frac{\lambda_1}{(1-x)^2} + \frac{\lambda_2}{(1+x)^2},$$

é positiva no intervalo $(-1, 1)$. Logo, Q sendo convexa em tal intervalo, o Teorema 4.2-(b) implica que o suporte $\mathcal{S}_w$ deve ser um intervalo. A princípio chamaremos tal intervalo de $[a, b]$. Nosso objetivo é determinar os extremos deste intervalo. Como $w(1) = w(-1) = 0$, devemos ter $-1 < a < b < 1$, pois a função $Q(x) = -\log(w(x)) < \infty$. Consequentemente, podemos usar os itens (i) e (ii) do Teorema 4.3 e, suas respectivas identidades (4.15) e (4.16) como segue

$$\frac{1}{\pi} \left[\int_a^b \left(\frac{\lambda_1}{1-x} \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} \right) dx - \int_a^b \left(\frac{\lambda_2}{1+x} \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} \right) dx \right] = 1$$

e

$$\frac{1}{\pi} \left[\int_a^b \left(\frac{\lambda_1}{1-x} \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} \right) dx - \int_a^b \left(\frac{\lambda_2}{1+x} \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} \right) dx \right] = -1.$$

Fazendo a mudança de variáveis $x = (b+a)/2(\cos \theta)(b-a)/2$, $0 \leq \theta \leq \pi$, as fórmulas tomam a forma

$$\frac{\lambda_1}{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1 + \cos \theta}{1 - \left(\frac{b+a}{2}\right) - \left(\frac{b-a}{2}\right) \cos \theta} \right) d\theta - \frac{\lambda_2}{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1 + \cos \theta}{1 + \left(\frac{b+a}{2}\right) + \left(\frac{b-a}{2}\right) \cos \theta} \right) d\theta = \frac{1}{b-a}$$

e

$$\frac{\lambda_1}{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1 - \cos \theta}{1 - \left(\frac{b+a}{2}\right) - \left(\frac{b-a}{2}\right) \cos \theta} \right) d\theta - \frac{\lambda_2}{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1 + \cos \theta}{1 + \left(\frac{b+a}{2}\right) + \left(\frac{b-a}{2}\right) \cos \theta} \right) d\theta = \frac{-1}{b-a}.$$

Usando as identidades (4.24) e (4.25) do lema anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \lambda_1 \left(\sqrt{\frac{1-a}{1-b}} - 1 \right) + \lambda_2 \left(\sqrt{\frac{1+a}{1+b}} - 1 \right) &= 1, \\ \lambda_1 \left(1 - \sqrt{\frac{1-b}{1-a}} \right) + \lambda_2 \left(1 - \sqrt{\frac{1+b}{1+a}} \right) &= -1. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Para resolvermos este sistema, fazemos as seguintes convenções afim de simplificá-lo:

$$\theta_1 := \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1 + \lambda_2}, \quad \theta_2 = \frac{\lambda_2}{1 + \lambda_1 + \lambda_2}. \tag{4.27}$$

Então, (4.26) toma a forma

$$\begin{aligned} \theta_1 \sqrt{\frac{1-a}{1-b}} + \theta_2 \sqrt{\frac{1+a}{1+b}} &= 1, \\ \theta_1 \sqrt{\frac{1-b}{1-a}} + \theta_2 \sqrt{\frac{1+b}{1+a}} &= 1. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema para encontrar θ_1 e θ_2 em função de a, b , obtemos

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \sqrt{(1-a)(1-b)}, \quad \theta_2 = \frac{1}{2} \sqrt{(1+a)(1+b)}.$$

Tomando a soma e a diferença dos quadrados de θ_1 e θ_2 , obtemos

$$ab = 2(\theta_1^2 + \theta_2^2) - 1, \quad a + b = 2(\theta_2^2 - \theta_1^2).$$

Resolvendo este sistema, concluímos que

$$a = (\theta_2^2 - \theta_1^2) - \sqrt{\Delta}, \quad b = (\theta_2^2 - \theta_1^2) + \sqrt{\Delta}, \tag{4.28}$$

onde

$$\Delta := \{1 - (\theta_1 + \theta_2)^2\}\{1 - (\theta_1 - \theta_2)^2\}.$$

Portanto, $\mathcal{S}_w = [(\theta_2^2 - \theta_1^2) - \sqrt{\Delta}, (\theta_2^2 - \theta_1^2) + \sqrt{\Delta}]$. $\square$

4.4.2 Pesos de Laguerre

Os pesos de Laguerre são da forma $w(x) = x^s e^{-\lambda x}$, $A = [0, \infty)$, com $s > 0, \lambda > 0$. Desta forma, $Q(x) = \lambda x - s \log x$ e $Q''(x) = s/x^2$. Daí, a segunda derivada de Q é positiva e concluímos que Q é convexa. Portanto, o suporte $\mathcal{S}_w$ é um intervalo o qual chamaremos em princípio de $[a, b]$. Para $s = 0$, devemos ter $a = 0$, caso contrário isso contrariaria (4.16) no Teorema 4.3. Para $s > 0$, o Teorema 4.2 nos dá

$$F(\mathcal{S}_w) = F([a, b]) = \max_{\alpha, \beta} F([\alpha, \beta])$$

onde F é o F-funcional de Mhaskar-Saff, e portanto devemos maximizar como função de α e β , a função

$$\begin{aligned} G(\alpha, \beta) = F([\alpha, \beta]) &= \log \frac{\beta - \alpha}{4} - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\lambda x - s \log x dx}{\sqrt{(x - \alpha)(\beta - x)}} \\ &\stackrel{(*)}{=} \log \frac{\beta - \alpha}{4} - \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\beta + \alpha}{2} + \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right) \cos \theta \right) d\theta \\ &\quad + \frac{s}{\pi} \int_0^{\pi} \log \left(\frac{\beta + \alpha}{2} + \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right) \cos \theta \right) d\theta \end{aligned}$$

no primeiro quadrante do plano complexo, onde na igualdade $(*)$ fizemos uso da mudança de variável $2x = (\beta + \alpha) + (\beta - \alpha) \cos \theta$. Calculando as integrais acima e usando (4.23), obtemos

$$G(\alpha, \beta) = 2s \log \left(\frac{\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}}{2} \right) - \lambda \left(\frac{\beta + \alpha}{2} \right) + \log \left(\frac{\beta - \alpha}{4} \right). \quad (4.29)$$

A condição necessária para que os pontos a e b sejam pontos de máximo, é que as derivadas parciais de G , nas variáveis α e β , calculadas nos pontos a e b devem ser nulas. Calculando tais derivadas em (4.29) e igualando a zero, chegamos à

$$\begin{aligned} \frac{s}{\sqrt{a}(\sqrt{b} + \sqrt{a})} - \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{b - a} &= 0, \\ \frac{s}{\sqrt{b}(\sqrt{b} + \sqrt{a})} - \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{b - a} &= 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Segue diretamente deste sistema que

$$\sqrt{ab} = \frac{s}{\lambda} \text{ e } a + b = \frac{2}{\lambda}(s + 1),$$

ou seja,

$$a = \frac{1}{\lambda}(s + 1 - \sqrt{2s + 1}), \quad b = \frac{1}{\lambda}(s + 1 + \sqrt{2s + 1}). \quad (4.31)$$

Portanto o suporte para os pesos de Laguerre são os intervalos

$$[\lambda^{-1}(s + 1 - \sqrt{2s + 1}), \lambda^{-1}(s + 1 + \sqrt{2s + 1})].$$

□

4.5 Recuperação da Medida de Equilíbrio

Uma vez conhecido o suporte da medida de equilíbrio $\mathcal{S}_\omega$ podemos obter o potencial de equilíbrio U^{μ_ω} como solução de um certo problema de Dirichlet. Assim, podemos obter a medida de equilíbrio μ_ω a partir de seu potencial.

Começamos com algumas definições do cálculo vetorial que será bastante útil no decorrer desta seção.

Definição 4.3. *O operador Laplaciano Δ , é definido como*

$$\Delta F := \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}.$$

Um resultado que será utilizado nesta seção, o qual não demonstraremos por ser um resultado clássico da análise vetorial, é o Teorema de Green. A versão que utilizaremos é um pouco mais geral pode ser encontrada em [15] e [2].

Seja $\mathcal{D}$ um aberto com bordo $\partial\mathcal{D}$ de classe C^1 , e sejam u e v funções de classe C^2 definidas em uma vizinhança de $\overline{\mathcal{D}}$. Então,

$$\int_R (v\Delta u - u\Delta v) dm = - \int_{\partial R} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds, \quad (4.32)$$

onde m é a medida de Lebesgue em $\mathbb{C}$ e $\partial/\partial n$ é a derivada direcional na direção da normal interior a $\partial\mathcal{D}$.

Uma consequência deste teorema é que se u e v forem harmônicas, então o lado esquerdo da identidade (4.32) se anula obtendo assim uma nova identidade

$$\int_{\partial\mathcal{D}} v \frac{\partial u}{\partial n} = \int_{\partial\mathcal{D}} u \frac{\partial v}{\partial n} \quad (4.33)$$

Teorema 4.5 (Teorema de Gauss). *Seja $\mathcal{D}$ um aberto, limitado com fronteira C^1 e μ uma medida com sinal de suporte compacto e disjunto de $\partial\mathcal{D}$. Então,*

$$\mu(\mathcal{D}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial U^\mu}{\partial n} ds.$$

Demonstração: Inicialmente vamos supor que $\mu = \delta_{z_0}$ com $z_0 \in R$. Podemos remover um pequeno disco $D_r(z_0)$ de centro em z_0 e raio r , com r suficientemente pequeno, de tal forma que o disco esteja inteiramente contido em $\mathcal{D}$. Desta forma podemos aplicar a fórmula de Green (4.32) no domínio $R \setminus D_r(z_0)$ com $u = U^{\delta_{z_0}}$ e $v \equiv 1$. Pelo fato das funções serem harmônicas temos, por (4.33), que

$$\int_{\partial(\mathcal{D} \setminus D_r(z_0))} \frac{\partial U^{\delta_{z_0}}}{\partial n} = 0. \quad (4.34)$$

Note que $\partial(\mathcal{D} \setminus D_r(z_0)) = C_r(z_0) \cup \partial\mathcal{D}$. Em $C_r(z_0)$, a derivada na direção da normal de $U^{\delta_{z_0}} = \log 1/|z - z_0|$ é igual a $-1/r$. Consequentemente, (4.34) implica que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial U^{\delta_{z_0}}}{\partial n} ds + \int_{C_r(z_0)} \frac{\partial U^{\delta_{z_0}}}{\partial n} ds &= \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial U^{\delta_{z_0}}}{\partial n} ds + \int_{C_r(z_0)} -1/r ds \\ &= \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial U^{\delta_{z_0}}}{\partial n} ds - 2\pi = 0, \end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$\int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial U^{\delta_{z_0}}}{\partial n} ds = 2\pi.$$

Portanto,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial U^{\delta_{z_0}}}{\partial n} ds = 1, \quad (4.35)$$

e o teorema é verdadeiro para este caso especial.

De modo análogo podemos mostrar que se $\mu = \delta_{z_0}$ mas $z_0 \notin \overline{\mathcal{D}}$, então

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial U^{\delta_{z_0}}}{\partial n} ds. \quad (4.36)$$

Agora integrando ambas as equações (4.35) e (4.36) com respeito à medida μ no

conjunto $\mathcal{D}$ e somando, concluímos que

$$\begin{aligned}
 \mu(\mathcal{D}) &= \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial U^{\delta_{z_0}}}{\partial n} ds d\mu(z) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial U^{\delta_{z_0}}}{\partial n} d\mu(z) ds \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial n} \left(\int_{\mathcal{D}} \log \frac{1}{|z - z_0|} d\mu(z) \right) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial U^\mu}{\partial n} ds. \quad \square
 \end{aligned}$$

O próximo teorema nos fornece uma forma bastante simples para encontrar a medida de equilíbrio. Ela é aplicável apenas a discos.

Teorema 4.6. *Seja μ uma medida finita, positiva e de suporte compacto no plano. Então, para qualquer z_0 e $r > 0$, o valor médio*

$$L(U^\mu; z_0, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U^\mu(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

existe e é finito. Ainda, $L(U^\mu; z_0, r)$ visto como uma função de r , é não-crescente e absolutamente contínua em qualquer sub-intervalo fechado de $(0, \infty)$. Além disso,

$$\lim_{r \rightarrow 0} L(U^\mu; z_0, r) = U^\mu(z_0). \quad (4.37)$$

Se r é um valor para o qual $\frac{d}{dr}L(U^\mu; z_0, r)$ existe, então

$$\mu(D_r(z_0)) = -r \frac{d}{dr} L(U^\mu; z_0, r). \quad (4.38)$$

Em particular, isto é verdadeiro para todo $r > 0$, exceto para uma quantidade enumerável de valores de r .

Demonstração: Para simplificar vamos tomar $z_0 = 0$ e substituir $L(U^\mu; z_0, r)$ por $L(r)$. Aplicando o Teorema de Fubini, na integral que define $L(r)$, e a fórmula para o potencial no disco, como no Exemplo 3.1, obtemos

$$L(r) = \int \log_r(z) d\mu(z), \quad (4.39)$$

onde

$$\log_r(z) := \begin{cases} \log 1/r & \text{se } |z| \leq r \\ \log 1/|z| & \text{se } |z| > r. \end{cases}$$

Sendo a função acima decrescente com respeito a r , concluímos que $L(r)$ é não-crescente. Pela desigualdade do valor médio para funções super-harmônicas, deduzimos

que $L(r) \leq U^\mu(0)$. Além disso, segue da semi-continuidade inferior de U^μ que

$$\liminf_{r \rightarrow 0^+} L(r) \geq L(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U^\mu(0) d\theta = U^\mu(0),$$

e isto prova (4.37).

Da expressão (4.39),

$$\begin{aligned} L(r+h) - L(r) &= \int_{|z| \leq r+h} \log \frac{1}{r+h} d\mu(z) + \int_{|z| > r+h} \log \frac{1}{|z|} d\mu(z) \\ &\quad - \int_{|z| \leq r} \log \frac{1}{r} d\mu(z) - \int_{|z| > r} \log \frac{1}{|z|} d\mu(z) \\ &= \int_{|z| \leq r} \left(\log \frac{1}{r+h} - \log \frac{1}{r} \right) d\mu(z) \\ &\quad + \int_{r < |z| \leq r+h} \left(\log \frac{1}{r+h} - \log \frac{1}{|z|} \right) d\mu(z) \\ &= \int_{|z| \leq r} \log \frac{r}{r+h} d\mu(z) + \int_{r < |z| \leq r+h} \log \frac{|z|}{r+h} d\mu(z) \\ &= -\log \frac{r+h}{r} \int_{|z| \leq r} d\mu(z) - \int_{r < |z| \leq r+h} \log \frac{r+h}{|z|} d\mu(z), \quad h > 0. \end{aligned}$$

Isto prova que $L(r)$ é absolutamente contínua em qualquer sub-intervalo $[a, b] \subset (0, \infty)$.

Devido ao fato que $\|\mu\| \log[(r+h)/r] \leq \|\mu\| h/r$, temos

$$|L(r+h) - L(r)| \leq \log \frac{(r+h)}{r} \|\mu\| \leq \frac{h}{r} \|\mu\|.$$

Se dividirmos a fórmula obtida anteriormente por h , obtemos

$$\frac{L(r+h) - L(r)}{h} = -\log \left(1 + \frac{h}{r} \right)^{\frac{1}{h}} \int_{|z| \leq r} d\mu(z) - \int_{r < |z| \leq r+h} \log \left(\frac{r+h}{|z|} \right)^{\frac{1}{h}} d\mu(z).$$

Aplicando o Teorema da Convergência Dominada, a derivada a direita de L vale

$$-\frac{1}{r} \mu(\overline{D_r(0)}).$$

De modo análogo, usando agora a fórmula

$$\frac{L(r-h) - L(r)}{-h} = \frac{1}{h} \log \frac{r-h}{r} \int_{|z| \leq r-h} d\mu(z) - \int_{r-h < |z| \leq r} \frac{1}{h} \log \frac{r}{|z|} d\mu(z).$$

e, o Teorema da Convergência Dominada e o Teorema da Convergência Monótona, a derivada a esquerda de L vale

$$-\frac{1}{r}\mu(D_r(0)).$$

Desde que, a medida do círculo que limita $D_r(0)$ seja nula, então as derivadas a esquerda e a direita coincidem. Assim, chegamos que (4.38) é válido exceto em um conjunto enumerável de raios r . $\square$

Vamos apresentar abaixo os análogos às fórmulas de inversão de Stieltjes-Perron, como em [3], e a fórmula de Sokhotskyi, como feito em [4], também conhecida como fórmula de Plemelj. Elas tem por objetivo determinar a medida de equilíbrio em arcos. Para tanto, no que segue quando nos referirmos a uma curva Γ , esta será uma curva simples, ou seja, sem auto-intersecções e não necessariamente fechada.

Teorema 4.7. *Seja $\mathcal{D}$ uma região, onde o potencial U^μ é de classe C^2 . Então, μ é absolutamente contínua com respeito a medida de Lebesgue em $\mathbb{C}$, a qual denotamos por m , ou seja, conjuntos de medida nula com respeito à medida de Lebesgue também tem medida nula com respeito à medida μ . E vale*

$$d\mu = -\frac{1}{2\pi}\Delta U^\mu dm.$$

Reciprocamente, se em uma vizinhança de um ponto z_0 a medida μ tem a forma $d\mu(t) = f(t)dm(t)$ e, a função f é Holder contínua com respeito a uma constante $\alpha > 0$ no ponto z_0 , então $\Delta U^\mu(z_0)$ existe e

$$f(z_0) = -\frac{1}{2\pi}\Delta U^\mu(z_0)dm.$$

Lembramos que uma função f definida em um domínio $\mathcal{D}$ é *Holder contínua*, com respeito a uma constante $\alpha > 0$, em um ponto $z_0 \in \mathcal{D}$, se existe uma vizinhança U_{z_0} e uma constante C , tal que,

$$|f(z) - f(z_0)| \leq C|z - z_0|, \text{ para todo } z \in U_{z_0}.$$

Em particular, quando $\alpha = 1$ a função é chamada de Lipschitziana.

Denotaremos estas classes de funções por, H_α e $\text{Lip}1$.

Demonstração: Inicialmente suponhamos que na região $\mathcal{D}$ o potencial é de classe C^2 , e vamos provar que $d\mu|_{\mathcal{D}} = -\frac{1}{2\pi}\Delta U^\mu dm|_{\mathcal{D}}$.

Tomemos um subdomínio $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$, simplesmente conexo, cujo bordo é uma curva Γ de classe C^1 . Vamos provar que

$$\int_{R_0} (\Delta U^\mu(t)) \log \frac{1}{|z-t|} dm(t) + 2\pi U^\mu(z) \quad (4.40)$$

é harmônica. Daí usando o Teorema 4.1 concluímos que a medida com sinal $(2\pi)^{-1} (\Delta U^\mu) dm|_{R_0} + \mu$ tem seu suporte fora de $\mathcal{D}_0$, pois neste conjunto a medida μ vai coincidir com a medida nula. Assim, teremos

$$d\mu|_{R_0} = -\frac{1}{2\pi} \Delta U^\mu dm|_{R_0}.$$

Seja $z_0 \in \mathcal{D}_0$ um ponto arbitrário e, para $r > 0$ suficientemente pequeno, definimos $\mathcal{D}_r = \mathcal{D}_0 \setminus \overline{D_r(z_0)}$. Com as funções $u = U^\mu$ e $v = \log 1/|z_0 - t|$, podemos usar o Teorema de Green, particularmente a identidade (4.32). Para o lado esquerdo obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}_r} \log \frac{1}{|z_0 - t|} \Delta(U^\mu(t)) - U^\mu(t) \Delta \left(\log \frac{1}{|z_0 - t|} \right) dm(t) &\stackrel{(a)}{=} \int_{\mathcal{D}_0} \log \frac{1}{|z_0 - t|} \Delta(U^\mu(t)) dm(t) \\ &\quad - \int_{D_r(z_0)} \log \frac{1}{|z_0 - t|} \Delta(U^\mu(t)) dm(t) \\ &\stackrel{(b)}{=} \int_{\mathcal{D}_0} \log \frac{1}{|z_0 - t|} \Delta(U^\mu(t)) dm(t) \\ &\quad + O(r^2 \log 1/r). \end{aligned}$$

onde (a) se justifica pelo fato de $\log 1/|z_0 - t|$ ser harmônica por ser parte real da função que é analítica em $R_r \setminus \log 1/(z_0 - t)$, e (b) é uma estimativa baseada no Exemplo (3.1) para potencial em discos e no Lema 3.2. Consequentemente, o segundo termo tende a zero quando $r \rightarrow 0^+$. Portanto, resta apenas o primeiro termo, que é igual ao primeiro termo de (4.40). Usando u e v definidos acima, o lado direito em (4.32) é dado por

$$\int_{\partial \mathcal{D}_0} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds + \int_{C_r(z_0)} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds.$$

A primeira parcela da integral acima é uma função harmônica em z_0 , pois para todo $t \neq z_0$, as funções v e $\partial v / \partial n$ são harmônicas como funções de z_0 . A segunda parte é composta de dois termos, um termo da ordem de $O(r \log 1/r)$ e o segundo termo é

$$\int_{C_r(z_0)} u \frac{\partial v}{\partial n} ds.$$

Como $\partial v / \partial n = -1/r$ em $C_r(z_0)$, concluímos que esta integral tende a $-2\pi u(z_0)$ quando r tende a zero. Portanto a função em (4.40) é harmônica em z_0 . Como este ponto foi tomado de modo arbitrário, ela é harmônica em qualquer $z \in \mathcal{D}_0$.

Vamos provar agora a segunda parte do teorema. Seja f como no enunciado. En-

tão, $f(z_0) = (2\pi)^{-1}\Delta U^\mu(z_0)$, no exterior do disco $D_r(z_0)$, o potencial U^μ é uma função harmônica. Consequentemente, pelo Teorema 4.1, podemos supor que μ é nula fora de $D_r(z_0)$ enquanto que em $D_r(z_0)$ temos $d\mu(t) = f(t)dm(t)$. Se f é constante ao longo de $D_r(z_0)$, então para todo $z \in D_r(z_0)$, obtemos do Exemplo 3.1, que

$$U^\mu(z) = 2\pi \left(\frac{r^2}{2} \log \frac{1}{r} + \frac{r^2}{4} - \frac{|z - z_0|^2}{4} \right) f(z_0),$$

Neste caso a afirmação do teorema é óbvia. Subtraindo $f(z_0)$ de f se necessário, podemos supor que z_0 é uma raiz de f . Este fato mais a condição de f ser Holder contínua com constante α implicam que

$$|f(z)| \leq L|z - z_0|^\alpha. \quad (4.41)$$

Sem perda de generalidade podemos supor que $z_0 = 0$. Sejam $z = x + iy$ e $t = u + iv$. Então,

$$\frac{\partial U^\mu}{\partial x}(z) = - \int_{D_r(0)} f(t) \frac{x - u}{|z - t|^2} dm(t).$$

Observe que a integral converge uma vez que $|x - y| \leq |z - t|$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 U^\mu}{\partial x^2}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \int_{D_r(0)} f(t) \left(\frac{x - u}{|x - t|^2} - \frac{-u}{|t|^2} \right) \frac{1}{x} dm(t) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \int_{D_r(0)} f(t) \left(\frac{x^2 - u^2 + xu}{|x - t|^2 |t|^2} \right) dm(t). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Consideraremos um limite lateral apenas. O outro é calculado de maneira análogo. Definamos

$$\varphi(x, t) = \frac{x^2 - u^2 + xu}{|x - t|^2 |t|^2} = \frac{x^2 - u^2 + xu}{((x - u)^2 + v^2)(u^2 + v^2)}.$$

Usando a desigualdade entre as médias aritméticas e geométricas de números positivos, obtemos

$$|\varphi(x, t)| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{((x - u)^2 + v^2)} + \frac{1}{(u^2 + v^2)} \right).$$

Desta forma, se

$$\Phi(x, t) := \max \left\{ \min \left\{ \varphi(x, t), \frac{9}{u^2 + v^2} \right\}, \frac{-9}{u^2 + v^2} \right\},$$

então isto segue que Φ coincide com φ para cada um dos seguintes valores de parâmetros:

$$\begin{aligned}
x &\geq 2u \text{ (pois neste caso } (x-u)^2 + v^2 \geq u^2 + v^2), \\
u &\geq \frac{3}{2}x \text{ (pois neste caso } (x-u)^2 + v^2 \geq \frac{1}{9}(u^2 + v^2)), \\
\frac{1}{2} &< u < \frac{3}{2}x \text{ e } |v| \geq x \text{ (pois neste caso } (x-u)^2 + v^2 \geq \frac{1}{4}(u^2 + v^2)).
\end{aligned}$$

Consequentemente, Φ e φ pode diferir somente na região $R(x)$ determinada pelas desigualdades

$$\frac{1}{2}x < u < \frac{3}{2}x, \quad |v| < x,$$

Nesta região, temos que $|\varphi - \Phi| \leq |\varphi|$. Escrevendo $\xi = x - u$, temos que

$$|\varphi(x, t)| \leq \frac{1}{(u^2 + v^2)} + \frac{(3/2)x}{|x/2|^2} \frac{|\xi|}{(\xi^2 + v^2)} \leq \frac{4}{x^2} + 6|x|^{-1} \frac{|\xi|}{(\xi^2 + v^2)}, \quad x \in R(x).$$

Integrando e usando (4.41), vem que

$$\int_{R(x)} |\varphi| dm \leq \left| \int_{-x}^x \int_{-x/2}^{x/2} \left(\frac{4}{x^2} + 6|x|^{-1} \frac{|\xi|}{(\xi^2 + v^2)} \right) d\xi dv \right| \leq 8 + 12\pi,$$

isto é,

$$\int_{R(x)} |f\varphi| dm = o(1).$$

O que verificamos até agora é que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_{D_r(0)} f(t) \varphi(x, t) dm(t) = \lim_{x \rightarrow 0} \int_{D_r(0)} f(t) \Phi(x, t) dm(t). \quad (4.43)$$

No entanto, por (4.41), temos (independentemente de x) que

$$|f(t) \Phi(x, t)| \leq 9L|t|^{\alpha-2}.$$

Como o lado direito da desigualdade define uma função integrável com relação a m . Consequentemente, podemos usar (4.42) e (4.43) e o Teorema da Convergência Dominada para deduzir que

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial^2 U^\mu}{\partial x^2}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \int_{D_r(0)} f(t) \Phi(x, t) dm(t) \\
&= \int_{D_r(0)} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(t) \Phi(x, t) \right) dm(t) \\
&= \int_{D_r(0)} f(t) \frac{v^2 - u^2}{(u^2 + v^2)^2} dm(t).
\end{aligned}$$

De uma forma similar, podemos provar que

$$-\frac{\partial^2 U^\mu}{\partial y^2}(0) = - \int_{D_r(0)} f(t) \frac{v^2 - u^2}{(u^2 + v^2)^2} dm(t).$$

Assim,

$$\Delta U^\mu(0) = \frac{\partial^2 U^\mu}{\partial x^2}(0) + \frac{\partial^2 U^\mu}{\partial y^2}(0) = 0 = -2\pi f(0)$$

o que prova o teorema. $\square$

Agora vamos enunciar e provar alguns teoremas de recuperação de medida, para o caso em que o suporte destas medidas forem curvas, tais curvas sera sempre simples e regulares, sem auto-intersecções. Necessitaremos para isto de algumas definições como segue.

Definição 4.4. Dada uma curva $\Gamma := \Gamma(t)$ de classe C^1 , regular, ou seja, $\Gamma'(t) \neq 0$ para todo t , definimos o lado esquerdo de Γ , como sendo o conjunto dos pontos z , tais que,

$$0 \leq \arg \left(\frac{z - z_0}{i\Gamma'(t_0)} \right) < \pi/2$$

com $\Gamma(t_0) = z_0$, para pontos z_0 que não forem pontos extremos. Analogamente, definimos o lado direito de Γ , substituindo o vetor $i\Gamma'(t_0)$ por $-i\Gamma'(t_0)$.

Definição 4.5. Dizemos que uma função $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ é da classe $C^{1+\delta}$ com $\delta > 0$, se f é diferenciável e $f' \in H_\delta$, onde H_δ é a classe das funções Holder contínuas com constante δ .

Definição 4.6. Definimos o limite não-tangencial a esquerda (respectivamente a direita) de uma função F , definida sobre uma curva Γ , na vizinhança de um ponto z_0 , com Γ de classe $C^{1+\delta}$, como sendo o limite

$$F(z_0^+) = \lim_{z \rightarrow z_0, z \in S_+^{(\theta)}} F(z) \text{ (respectivamente } F(z_0^-) = \lim_{z \rightarrow z_0, z \in S_-^{(\theta)}} F(z)).$$

caso este limite exista para todo θ , onde $S_+^{(\theta)}$ (respectivamente $S_-^{(\theta)}$) denotam os setores do lado esquerdo de Γ (respectivamente o lado direito de Γ), no qual todos os seus pontos são tais que, $\arg(i\Gamma'(t_0)/(z - z_0)) = \theta$ para $0 \leq \theta < \pi/2$ (respectivamente $\arg(-i\Gamma'(t_0)/(z - z_0)) = \theta$ para $0 \leq \theta < \pi/2$) com $\Gamma(t_0) = z_0$.

Teorema 4.8. Suponha que $\text{supp}(\mu) \cap D = \Gamma$, onde $D = D_+ \cup D_- \cup \Gamma$ é um domínio e Γ é uma curva de classe $C^{1+\delta}$ com $\delta > 0$. Seja U^μ o potencial definido em $\mathbb{C}$ que é limitado em Γ e H_+ (respect. H_-) funções analíticas, definidas no domínio D_+ (respect. D_-) que estão do lado esquerdo de Γ (respect. lado direito de Γ), com parte real igual a U^μ . Então,

se $z_0, z_1 \in \Gamma$ e z_0 precede z_1 em Γ , a medida de comprimento de arco μ do arco $\Gamma_{[z_0, z_1]}$ entre z_0 e z_1 é dado por

$$\mu(\Gamma_{[z_0, z_1]}) = \frac{1}{2\pi i} \{H_+(z_1^+) - H_+(z_0^+) - H_-(z_1^-) + H_-(z_0^-)\}.$$

Observação: Devemos observar que, de acordo com o Teorema 3.1, o potencial é uma função harmônica nos pontos $z \notin \text{supp}(\mu)$. Logo, o Teorema 2.6 garante a existência de $H_{\pm}(z)$, que nada mais é do que o complemento analítico do potencial $U^{\mu}(z)$ nos domínios $D_{\pm}$.

Demonstração: O potencial $U^{\mu}(z)$ nos pontos $z \notin D$ é uma função harmônica, isso segue do Teorema 3.1. Portanto, o Teorema da Unicidade 4.1 nos diz que podemos ignorar esta parte do potencial, pois nesta parte a medida μ coincide com a medida nula. Consequentemente, podemos supor que o suporte de μ é a curva Γ .

Estas hipóteses sobre μ implicam que as funções analíticas

$$H_{\pm}(z) - \int \log \frac{1}{z-t} d\mu(t)$$

têm parte real nula, e consequentemente são constantes em $D_{\pm}$ respectivamente. Desta forma, podemos supor que

$$H_{\pm}(z) = \int \log \frac{1}{z-t} d\mu(t).$$

Sejam z_0 e z_1 dois pontos em Γ , e para $\theta > 0$, seja $S_{0,\pm}^{(\theta)}$ os setores de $D_{\pm}$, cujos pontos $z \in S_{0,\pm}^{(\theta)}$ forma ângulo θ com o respectivos vetores $i\Gamma'(t_0)$ e $-i\Gamma'(t_0)$, onde $\Gamma(t_0) = z_0$, o setor $S_{1,\pm}^{(\theta)}$ é definido similarmente para z_1 . Para um $h > 0$, escolha pontos $A_h \in S_{0,+}^{(\theta)}$ e $B_h \in S_{0,-}^{(\theta)}$ cujas distâncias de z_0 sejam menores do que h , e os pontos C_h e D_h são escolhidos de modo similar com respeito ao ponto z_1 . Conectemos ainda, D_h e A_h por um caminho suave qualquer $\gamma_+ \in D_+$, e de modo análogo ligamos B_h e C_h por uma curva $\gamma_- \in D_-$. Agora seja γ^* a curva fechada orientada no sentido positivo, ou seja, anti-horário formada por γ_+ e γ_- juntamente com os segmentos $A_h z_0, z_0 B_h, C_h z_1, z_1 D_h$. Confira figura 2.

Como

$$\log \left(\frac{1}{z-t} \right) = \int_{\gamma} \left(\frac{1}{z-u} \right) du, \quad t \in \gamma,$$

para qualquer curva γ . Daí, temos que

$$\begin{aligned}
 H_+(D_h) - H_+(A_h) - H_-(C_h) + H_-(B_h) &= \int_{\Gamma} \int_{\gamma^*} \frac{1}{u-t} dud\mu(t) \\
 &- \int_{\Gamma} \int_{A_h z_0} \frac{1}{u-t} dud\mu(t) - \int_{\Gamma} \int_{z_0 B_h} \frac{1}{u-t} dud\mu(t) \\
 &- \int_{\Gamma} \int_{C_h z_1} \frac{1}{u-t} dud\mu(t) - \int_{\Gamma} \int_{z_1 D_h} \frac{1}{u-t} dud\mu(t).
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

Para as integrais no segmento $A_h z_0$ temos as seguintes estimativas:

$$\int_{A_h z_0} \frac{1}{|u-t|} d|u| \leq \begin{cases} Ch/|t-z_0| & \text{se } |t-z_0| \geq h \\ C + \log Ch/|t-z_0| & \text{se } |t-z_0| < h, \end{cases}$$

Estas estimativas se baseiam no fato de se fizermos um disco em torno de z_0 de raio h , então no primeiro caso o integrando é limitado por $1/|t-z_0|$. Então, de resultado clássico de cálculo com variáveis complexas nos dá que a integral é limitada pelo limitante do integrando multiplicado pelo comprimento da curva onde estamos fazendo a integração. No segundo caso a integral no seguimento é menor do que a integral no disco, de onde segue a desigualdade acima.

Nas desigualdades acima, temos que a constante C independente de h e $t \in \Gamma$, mas pode depender do θ fixado (neste ponto é que necessitamos que o ponto $A_h \in S_{0,+}^{(\theta)}$). Como temos que supor que $U^\mu(z_0)$ é finito, isto é, que $\log 1/|t-z_0|$ é integrável com respeito à medida μ , podemos deduzir pelas mesmas razões que em $z_0 B_h, C_h z_1$ e $z_1 D_h$ o valor da integral interior

$$\int_{\gamma^*} \frac{1}{u-t} du \tag{4.45}$$

é integrável com respeito a $d\mu(t)$. Além disso, se fizermos $h \rightarrow 0$, então os pontos A_h e B_h tendem a z_0 e D_h e C_h tendem a z_1 . Como em ambos os casos a convergência é em sentido oposto, concluímos que tudo se cancela. Daí,

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \int_{A_h z_0} \frac{1}{u-t} dud\mu(t) &+ \int_{\Gamma} \int_{z_0 B_h} \frac{1}{u-t} dud\mu(t) \\
 + \int_{\Gamma} \int_{C_h z_1} \frac{1}{u-t} dud\mu(t) &+ \int_{\Gamma} \int_{z_1 D_h} \frac{1}{u-t} dud\mu(t) = 0,
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

onde supomos apenas que a convergência é não-tangencial.

Fazendo uso da fórmula

$$\int_{\gamma^*} \frac{1}{u-t} du = \begin{cases} 2\pi i & \text{se } t \in \gamma^* \\ 0 & \text{se } t \notin \gamma^*, \end{cases}$$

em (4.45) é $2\pi i$. Finalmente, obtemos de (4.44) e (4.46) que

$$\lim_{h \rightarrow 0} (H_+(D_h) - H_+(A_h) - H_-(C_h) + H_-(B_h)) = 2\pi i \mu(\Gamma_{[z_0, z_1]}).$$

A existência do limite a esquerda mostra que o limite não-tangencial $H_{\pm}(z^{\pm})$ existe em todo ponto de γ , e obtemos a fórmula enunciada no teorema

$$H_+(z_1^+) - H_+(z_0^+) - H_-(z_1^-) + H_-(z_0^+) = 2\pi i \mu(\Gamma_{[z_0, z_1]}). \quad \square$$

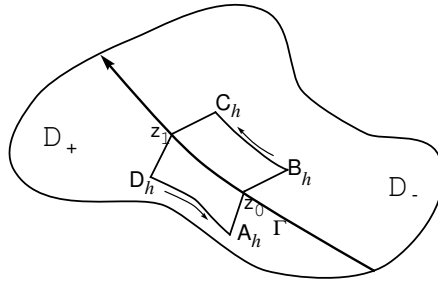


Figura 2: Idéia Geométrica da Demonstração

Definição 4.7. Um ponto $z_0 \in \Gamma$ é um ponto de Lebesgue de uma função f definida em Γ com respeito a medida de comprimento de arco ds se

$$\lim_{z \rightarrow z_0, z \in \Gamma} \frac{1}{s(\Gamma_{[z_0, z]})} \int_{\Gamma_{[z_0, z]}} |f(z) - f(z_0)| ds = 0.$$

No próximo teorema faremos uso de dois resultados que enunciaremos sem demonstração.

Teorema 4.9 (Teorema da Correspondência entre Fronteiras). *Sejam D um domínio simplesmente conexo e limitado de fronteira Γ e, $f(z)$ uma aplicação conforme que aplica D no disco unitário fechado $|z| \leq 1$. Então, esta aplicação leva o interior de D no disco $|z| < 1$ e Γ na fronteira do disco $|z| = 1$.*

Este teorema bem como sua demonstração pode ser encontrada em [12, pag70].

O próximo teorema fornece uma condição para que o limite não-tangencial exista.

Porém ele versa apenas sobre domínios no disco. Para domínios D mais gerais, podemos utilizar o teorema anterior para obter uma correspondência entre o disco e D .

Teorema 4.10 (Fatou). *Seja f uma função harmônica complexa não negativa, definida no disco unitário. Então, f tem limite não-tangencial para quase todo ponto z pertencente ao círculo unitário.*

Este teorema bem como sua demonstração podem ser encontradas em [7, pag48].

Corolário 4.3. *O resultado de Fatou, pode ser estendido para qualquer domínio $\mathcal{D}$ com fronteira Γ .*

De posse destes resultados, estamos prontos para enunciar e demonstrar o principal resultado desta seção.

Teorema 4.11. *Suponhamos que a intersecção de $\mathcal{S}_w$ com o domínio $\mathcal{D}$ é uma curva Γ simples $C^{1+\delta}$, com $\delta > 0$ e denotamos por $n_+(z)$ e $n_-(z)$ respect. a normal a esquerda (respect. a direita) de Γ no ponto $z \in \Gamma$. Suponha que o potencial $U^\mu \in \text{Lip1}$ em uma vizinhança de Γ . Então, a medida μ em Γ é localmente absolutamente contínua com respeito a medida de comprimento de arco ds , e temos a representação*

$$d\mu = -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial U^\mu}{\partial n_+}(s) + \frac{\partial U^\mu}{\partial n_-}(s) \right) ds.$$

Demonstração: Começamos observando que, se o potencial U^μ é Lip1 em uma vizinhança de Γ , então as derivadas direcionais de U^μ nas direções de $n_\pm(z)$ são contínuas em quase todo ponto z com respeito a medida de comprimento de arco. De fato, seja por exemplo $E \subset \mathcal{D}$ um domínio simplesmente conexo com fronteira de classe C^1 , limitada por algum arco $\Gamma' \subset \Gamma$ do lado esquerdo com a propriedade que U^μ é Lip1 em E . Seja h uma função analítica em E com parte real igual a U^μ . Do fato de U^μ ser Lip1 segue que a derivada direcional de U^μ é uniformemente limitada em E . Consequentemente, as Equações de Cauchy-Riemann implicam que h' é limitada em E . Desta forma, de acordo com o Corolário 4.3 o limite não-tangencial do lado esquerdo existe em z para quase todo ponto $z \in \Gamma'$. Portanto, podemos ver que em todo tal z a derivada normal $\partial U^\mu / \partial n_+$ existe e é o limite da derivada direcional de U^μ na direção de $n_+(z)$ quando $z' \rightarrow z$ de forma não-tangencial. Sendo que E foi escolhido de forma arbitrária, a afirmação no que se refere a continuidade da derivada direcional segue em quase todo ponto $z \in \mathcal{D}$ com respeito a medida de comprimento de arco ds .

Para provar o teorema sobre as hipóteses aqui estabelecidas, tomemos dois pontos de $A, B \in \Gamma$ e conectemos A e B por duas curvas suaves de Jordan γ^+ e γ^- posicionadas dos

lados esquerdos e direitos de Γ respectivamente. Seja z_0 qualquer ponto do interior do arco $\Gamma_{[A,B]}$ e construa um pequeno círculo $C_r(z_0)$ de centro em z_0 de raio r suficientemente pequeno para que o disco limitado por $C_r(z_0)$ esteja no interior da região limitada pelas curvas γ^+ e γ^- . Sejam C e D os pontos onde o círculo $C_r(z_0)$ intercepta a curva Γ . Definimos as curvas Γ^+ e Γ^- , onde Γ^+ é a curva formada pelas curvas γ^+ os arcos $\Gamma_{[A,B]}$ e $\Gamma_{[C,D]}$ e a parte do círculo $C_r(z_0)$ que está do lado esquerdo de Γ . A curva Γ^- é composta pelas curvas γ^- os arcos $\Gamma_{[B,D]}$ e $\Gamma_{[B,A]}$ e a parte do círculo $C_r(z_0)$ que está do lado direito de Γ . Além disso, chamamos de $R_\pm$ a região limitada pelas curvas $\Gamma^\pm$. Confira a figura 3.

Fazendo $u = U^\mu$ e $v(z) = \log 1/|z - z_0|$, podemos obter da Fórmula de Green (4.32) que

$$\int_{R_+} (v\Delta u - u\Delta v) dm = - \int_{\Gamma^+} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds. \quad (4.47)$$

De fato, se u for diferenciável em $\Gamma_{[A,B]}$, então (4.47) pode ser obtido da fórmula de Green (4.32). Desta forma, fazendo uso da continuidade das derivadas envolvidas bem como do fato de elas serem limitadas, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{[A,B]}} v \frac{\partial u}{\partial n} ds &- \int_{\Gamma_{[C,D]}} v \frac{\partial u}{\partial n} ds \\ &= \int_{\Gamma^+} u \frac{\partial v}{\partial n} ds - \int_{\gamma^+} v \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_{C_r(z_0)_{[C,D]}} v \frac{\partial u}{\partial n} ds. \end{aligned}$$

A fórmula correspondente para a região R_- é

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{[A,B]}} v \frac{\partial u}{\partial n} ds &- \int_{\Gamma_{[C,D]}} v \frac{\partial u}{\partial n} ds \\ &= \int_{\Gamma^-} u \frac{\partial v}{\partial n} ds - \int_{\gamma^-} v \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_{C_r(z_0)_{[C,D]}} v \frac{\partial u}{\partial n} ds, \end{aligned}$$

onde os arcos $C_r(z_0)_{[C,D]}$ nas duas fórmulas tem sentidos opostos. Somando estas duas fórmulas e fazendo uso do fato que em Γ as duas derivadas nos primeiros termos nos lados direitos tem valores opostos ($\partial v/\partial n$ quer dizer que a direção é na direção da normal interior de R_+ e R_- , respectivamente, e em Γ estas direções são opostas), obtemos

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_{[A,B]}} \left(v \frac{\partial u}{\partial n_-} + v \frac{\partial u}{\partial n_+} \right) ds - \int_{\Gamma_{[C,D]}} \left(v \frac{\partial u}{\partial n_-} + v \frac{\partial u}{\partial n_+} \right) ds \\ &= \int_{\gamma^+ \cup \gamma^-} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds + \int_{C_r(z_0)} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds, \quad z_0 \in \Gamma, \end{aligned} \quad (4.48)$$

onde no lado esquerdo as derivadas $\partial v/\partial n_-$ e $\partial v/\partial n_+$ de u são na direção da direita e da esquerda de Γ , enquanto a diferenciação no lado direito é com respeito as normais

interiores das regiões $R_+ \cup R_-$.

Quando $z_0 \notin \Gamma$, então temos

$$\int_{\Gamma_{[A,B]}} \left(v \frac{\partial u}{\partial n_-} + v \frac{\partial u}{\partial n_+} \right) ds = \int_{\gamma^+ \cup \gamma^-} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds, \quad z_0 \notin \Gamma \quad (4.49)$$

O primeiro termo no lado direito de (4.48) é uma função harmônica de z_0 , na região determinada por γ_+ e γ_- , enquanto que, por

$$\frac{\partial v}{\partial n}(t) = -\frac{1}{r}, \quad t \in C_r(z_0),$$

a segunda integral em (4.48) pode ser escrita como

$$-2\pi u(z_0) + o(1) + O(r \log 1/r),$$

pois o fato de $u = U^\mu$ ser Lip1 implica que as derivadas direcionais são limitadas. Pela estimativa para o potencial feita no Lema 3.2, o segundo termo na esquerda é da ordem de $O(r \log 1/r)$. Consequentemente, quando $r \rightarrow 0$, substituindo z_0 por z obtemos a fórmula,

$$U^\mu(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{[A,B]}} \left(\frac{\partial U^\mu}{\partial n_-}(s) + \frac{\partial U^\mu}{\partial n_+}(s) \right) \log \frac{1}{|z-s|} ds + g(z),$$

onde g é harmônica em uma vizinhança do arco aberto $\Gamma_{[A,B]}$. Portanto, a medida μ , de acordo com o Teorema da Unicidade 4.1, é dada pela fórmula

$$d\mu = -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial U^\mu}{\partial n_-}(s) + \frac{\partial U^\mu}{\partial n_+}(s) \right) ds$$

como afirmamos.

Com isto concluímos a demonstração do teorema.

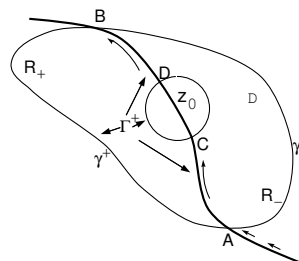


Figura 3: Idéia da Integração no Teorema 4.5

Teorema 4.12. *Suponhamos que a intersecção de $\mathcal{S}_w$ com o domínio D é uma curva Γ*

simples $C^{1+\delta}$. Suponhamos que w seja não-negativa e absolutamente continua com respeito a medida de comprimento de arco e sua derivada de Radon-Nikodyn está em $L^p(ds)$ para algum $1 < p < \infty$. Então,

$$d\mu_w(s) = -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial U^{\mu_w}}{\partial n_+}(s) + \frac{\partial U^{\mu_w}}{\partial n_-}(s) \right) ds$$

onde $\partial/\partial n_{\pm}$ denota a diferenciação nas direções normais à curva γ .

5 Aplicações

Neste capítulo vamos mostrar algumas aplicações dos resultados obtidos anteriormente. Na primeira seção encontraremos a medida de equilíbrio para os pesos de Laguerre e Jacobi. E na segunda seção faremos o estudo assintótico dos zeros dos polinômios extremais.

5.1 Exemplos de Determinação da Medida de Equilíbrio

Agora vamos fazer uso dos teoremas de obtenção da medida de equilíbrio para encontrar a medida de equilíbrio para dois pesos clássicos da teoria de polinômios, os pesos de Jacobi e Laguerre.

Antes vamos enunciar e provar um lema que sera utilizado para a determinação da medida de equilíbrio para os dois tipos de pesos.

Lema 5.1. *Sejam $A = [a, b]$ e*

$$\zeta = \varphi(z) := \frac{\sqrt{z-a} + \sqrt{z-b}}{\sqrt{z-a} - \sqrt{z-b}}, \quad (5.1)$$

onde a raiz é tomada no ramo em que ela se comporta como z no infinito. Então, a função de Green com polo no infinito definida em $\Omega = \overline{\mathbb{C}} \setminus A$ é dada por

$$g_{\Omega}(z, \infty) = \log |\varphi(z)| \quad (5.2)$$

Demonstração: A demonstração se baseia no fato de que

$$g_{\Omega}(z, -\infty) = -U^{\mu_A}(z) + \log \frac{1}{\text{cap}(A)},$$

como já conhecemos a capacidade do intervalo, resta calcular o potencial U^{μ_A} , porém no Exemplo 3.3 calculamos este potencial para o caso em que o intervalo era $[-1, 1]$.

Portanto, precisamos apenas fazer uma mudança de variável para obter 5.2.

5.1.1 Pesos de Jacobi

Os pesos de Jacobi são da forma $w(x) = (1-x)^{\lambda_1}(1+x)^{\lambda_2}$ com λ_1 e λ_2 positivos e $A = [-1, 1]$. Nosso objetivo é mostrar que a medida de equilíbrio para pesos de Jacobi é dada por

$$d\mu_w(x) = \frac{1 + \lambda_1 + \lambda_2}{\pi(1-x^2)} \sqrt{(x-a)(b-x)} dx, \quad a < x < b.$$

Conhecendo o suporte da medida de equilíbrio, que foi encontrado na Seção 4.4.1, podemos encontrar o potencial de equilíbrio através do Teorema 3.11. Para o peso de Jacobi o potencial de equilíbrio é dado por

$$U^{\mu_w}(z) = g(z) - g_\Omega(z, \infty) + F_w = g(z) - \log |\varphi(z)| + F_w,$$

sendo $g(z)$ a solução do problema de Dirichlet com função de fronteira $-Q$, que é dada por

$$g(z) = h(z) - \lambda_1 \log \left| \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta_1 \zeta - 1} \right| - \lambda_2 \log \left| \frac{\zeta - \zeta_{-1}}{\zeta_{-1} \zeta - 1} \right| - (\lambda_1 + \lambda_2) \log |\zeta|,$$

onde $\varphi(z)$ foi definida no Lema 5.1 e $\zeta_{-1} = \varphi(-1)$ e $\zeta_1 = \varphi(1)$, com a, b extremos do suporte da medida de equilíbrio que foram encontrados na seção 4.4.1. Além disso,

$$h(z) := \lambda_1 \log |1-z| + \lambda_2 \log |1+z|,$$

sendo $g(z)$ a solução do problema de Dirichlet com função de fronteira $-Q$.

Para podermos utilizar o Teorema 4.12, temos que calcular as derivadas nas direções normais $\partial U^{\mu_w} / \partial n_\pm$. Primeiramente, vamos calcular

$$\begin{aligned} D(z) &= \frac{d}{dz} \left\{ -\lambda_1 \log \left(\frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta_1 \zeta - 1} \right) - \lambda_2 \log \left(\frac{\zeta - \zeta_{-1}}{\zeta_{-1} \zeta - 1} \right) - (1 + \lambda_1 + \lambda_2) \log(\zeta) \right\} \\ &= \frac{d\zeta}{dz} \left\{ -\lambda_1 \frac{(\zeta_1 \zeta - 1) - \zeta_1(\zeta - \zeta_1)}{(\zeta - \zeta_1)(\zeta_1 \zeta - 1)} - \lambda_2 \frac{(\zeta_{-1} \zeta - 1) - \zeta_{-1}(\zeta - \zeta_{-1})}{(\zeta - \zeta_{-1})(\zeta_{-1} \zeta - 1)} - (1 + \lambda_1 + \lambda_2) \frac{1}{\zeta} \right\} \\ &= \frac{d\zeta}{dz} \left\{ -\lambda_1 \frac{\left(\zeta_1 - \frac{1}{\zeta_1} \right)}{(\zeta - \zeta_1) \left(\zeta - \frac{1}{\zeta_1} \right)} - \lambda_2 \frac{\left(\zeta_{-1} - \frac{1}{\zeta_{-1}} \right)}{(\zeta - \zeta_{-1}) \left(\zeta - \frac{1}{\zeta_{-1}} \right)} - (1 + \lambda_1 + \lambda_2) \frac{1}{\zeta} \right\}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

De (5.1) valem as seguintes identidades

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{dz} &= \frac{\zeta}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}, \quad (\zeta - \zeta_{\pm 1}) \left(\zeta - \frac{1}{\zeta_{\pm 1}} \right) = \frac{4(z \mp 1)\zeta}{b-a}, \\ \zeta_1 - \frac{1}{\zeta_1} &= \frac{4\sqrt{(1-a)(1-b)}}{b-a}, \quad \zeta_{-1} - \frac{1}{\zeta_{-1}} = \frac{4\sqrt{(1+a)(1+b)}}{b-a}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde a raiz é positiva. Consequentemente, substituindo (5.4) em (5.3), obtemos

$$D(z) = \frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \left[-\lambda_1 \frac{\sqrt{(1-a)(1-b)}}{z-1} + \lambda_2 \frac{\sqrt{(1+a)(1+b)}}{z+1} - (1 + \lambda_1 + \lambda_2) \right].$$

Estes resultados, juntamente com os valores de a, b que obtivemos na Seção 4.4.1, mostram que $D(z)$ não se anula nos pontos a e b . Desta forma,

$$\begin{aligned} D(z) &= \frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \left[\frac{(1 + \lambda_1 + \lambda_2)(z-a)(z-b)}{1-z^2} \right] \\ &= (1 + \lambda_1 + \lambda_2) \frac{\sqrt{(z-a)(z-b)}}{1-z^2}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Finalmente, sendo $\partial h / \partial n_+ = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{\mu_w}(x)}{\partial n_+} &= \operatorname{Re} \left\{ \lim_{z \rightarrow x, \operatorname{Im} z > 0} \{iD(z)\} \right\} \\ &= \frac{1 + \lambda_1 + \lambda_2}{1-x^2} \sqrt{(x-a)(b-x)}, \quad a < x < b, \end{aligned}$$

Sendo

$$\frac{\partial U^{\mu_w}(x)}{\partial n_+} = \frac{\partial U^{\mu_w}(x)}{\partial n_-},$$

segue, do Teorema 4.12, que

$$d\mu_w(x) = \frac{1 + \lambda_1 + \lambda_2}{\pi(1-x^2)} \sqrt{(x-a)(b-x)} dx, \quad a < x < b.$$

5.1.2 Pesos de Laguerre

Os pesos de Laguerre são da forma $w(x) = x^s e^{-\lambda x}$, $A = [0, \infty)$, onde $s > 0, \lambda > 0$. Provamos na Seção 4.4.2, que o suporte da medida de equilíbrio para pesos de Laguerre é um intervalo $\mathcal{S}_w = [a, b]$, e calculamos os extremos deste intervalo. Consequentemente,

podemos usar o Teorema 3.11 e encontrar o potencial da medida de equilíbrio, que é dado por

$$\begin{aligned} U^{\mu_w}(z) &= s \log |z| - \lambda \operatorname{Re} z - s \log \left| \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta_0 \zeta - 1} \right| \\ &\quad + \lambda \operatorname{Re} \sqrt{(z-a)(z-b)} - (1+s) \log |\zeta| + F_w, \end{aligned}$$

onde $\zeta = \varphi(z)$ e $\zeta_0 = \varphi(0)$. Podemos usar o Teorema 3.10 para provar que o potencial é de fato dado pela fórmula acima.

Para calcular $\partial U^{\mu_w}(x)/\partial n_+$ vamos supor que $s > 0$ e, procedemos como no caso dos pesos de Jacobi, calculando primeiramente

$$\begin{aligned} H(z) &:= \frac{d}{dz} \left\{ -s \log \left(\frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta \zeta_0 - 1} \right) - (1+s) \log \zeta + \lambda \sqrt{(z-a)(z-b)} \right\} \\ &= \frac{d\zeta}{dz} \left\{ -s \frac{\zeta_0 - \frac{1}{\zeta_0}}{(\zeta - \zeta_0) \left(\zeta - \frac{1}{\zeta_0} \right)} - (1+s) \frac{1}{\zeta} \right\} + \frac{\lambda}{2} \frac{(2z-a-b)}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Das identidades

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{\zeta}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}, \quad (\zeta - \zeta_0) \left(\zeta - \frac{1}{\zeta_0} \right) = \frac{4z\zeta}{b-a}, \quad \zeta_0 - \frac{1}{\zeta_0} = -\frac{4\sqrt{ab}}{b-a},$$

encontramos

$$H(z) = \frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \left(\frac{\lambda(z-a)(z-b)}{z} \right).$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{\mu_w}(x)}{\partial n_+} &= \operatorname{Re} \left\{ \lim_{z \rightarrow x, \operatorname{Im} z > 0} \{iH(z)\} \right\} \\ &= -\frac{\lambda \sqrt{(x-a)(x-b)}}{x}, \quad a < x < b. \end{aligned}$$

Sendo

$$\frac{\partial U^{\mu_w}(x)}{\partial n_+} = \frac{\partial U^{\mu_w}(x)}{\partial n_-},$$

segue, do Teorema 4.12, que

$$d\mu_w(x) = -\frac{\lambda}{\pi x} \sqrt{(x-a)(x-b)} dx, \quad a < x < b.$$

Embora supomos que $s > 0$ nas derivadas acima, a fórmula continua válida para o

caso em que $s = 0$. Para este caso, temos que $a = 0$ e $b = 2/\lambda$. Assim,

$$d\mu_w(x) = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{(2/\lambda) - x}{x}} dx, \quad 0 < x < 2/\lambda.$$

5.2 Convergência da Medida Contadora de Zeros Normalizada

5.2.1 Polinômios Extremais

Nesta seção estudaremos a medida contadora de zeros normalizada dos polinômios extremais.

Começamos fornecendo algumas definições úteis neste contexto.

Como no caso das funções de Green com polo no infinito, podemos definir as funções de Green com polo em um número finito z_0 como segue.

Definição 5.1. *Seja $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ um conjunto domínio de capacidade positiva. A função de Green com polo no ponto $z_0 \in G$, se existe e é única, é a função $g_G(z, z_0)$ em G com as seguintes propriedades:*

- (a) $g_G(z, z_0)$ é não-negativa, harmônica em $G \setminus \{z_0\}$ e limitada em todo conjunto da forma $G \setminus U_{z_0}$, onde U_{z_0} é qualquer vizinhança de z_0 ;
- (b) $\lim_{|z| \rightarrow \infty} (g_G(z, z_0) - \log \frac{1}{|z - z_0|})$ é limitada em uma vizinhança $U_{z_0} \setminus \{z_0\}$;
- (c) $\lim_{z \rightarrow x, z \in G} (g_G(z, z_0)) = 0$, para “quase todo ponto” $x \in \partial G$.

Esta função pode ser obtida a partir de uma função com polo no infinito, da seguinte forma:

$$g_G(z, z_0) = g_{\tilde{G}}\left(\frac{1}{z - z_0}, \infty\right),$$

onde $\tilde{G}$ é o domínio que se obtém como imagem de G pela aplicação de Möbius $1/(z - z_0)$. Para demonstrarmos a existência e unicidade para um domínio G simplesmente conexo, cuja fronteira ∂G tenha capacidade positiva, primeiramente tomamos uma aplicação conforme ψ que transforma G sobre o disco unitário levando z_0 na origem. Em seguida definimos $g_G(z, z_0) = \log(1/|\psi(z)|)$. A função g_G definida desta forma, satisfaz as propriedades definidas acima.

Abaixo fornecemos um Teorema com uma importante propriedade das funções de Green.

Teorema 5.1. *Para todos $z, z_0 \in G$, temos*

$$g_G(z, z_0) = g_G(z_0, z).$$

A demonstração, pode ser encontrada em [13] e [14].

Definição 5.2. *Seja P_n um polinômio de grau exatamente n e $z_1, z_2, \dots, z_n$ seus zeros. A medida contadora de zeros normalizada com respeito ao polinômio P_n é definida como*

$$\nu_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{z_k},$$

onde δ é a medida de Dirac com massa em z_k .

Definição 5.3. *O supremo essencial “sup” $h(z)$ é o menor número U para o qual a função h toma valores maiores do que U somente em um conjunto de capacidade nula.*

Com base nisso é possível definirmos a norma do supremo essencial como segue:

$$\|f\|_H^* := \inf \{U : |f(z)| \leq U \text{ em “quase todo ponto” de } H\}.$$

O Teorema 3.8 nos fornece um limitante inferior para pesos polinomiais, como segue:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (\|w^n T_n\|_A^*) \geq \exp(-F_w).$$

Sejam P_n os polinômios mônicos extremais que satisfazem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|w^n T_n\|_A^*) = \exp(-F_w), \quad (5.7)$$

onde $\|\cdot\|^*$ é a norma do supremo essencial.

Teorema 5.2 (Lema de Benstein-Walsh). *Seja $w : A \rightarrow [0, \infty)$ um peso admissível. Se P_n é um polinômio de grau no máximo n e*

$$|w(z)^n P_n(z)| \leq M, \quad \text{para “quase todo ponto” } z \in \mathcal{S}_w, \quad (5.8)$$

então para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$|P_n(z)| \leq M \exp(n(-U^{\mu_w} + F_w)). \quad (5.9)$$

Este é um teorema que vamos admitir sem demonstração, para que possamos analisar à convergência da medida contadora de zeros normalizada de polinômios extremais. Porém sua demonstração pode ser encontrada em [14], [13] e [17].

Nosso objetivo é estabelecer sob quais condições, a medida contadora de zeros normalizada ν_n com respeito a P_n , converge fracamente* para a medida de equilíbrio μ_w .

Teorema 5.3. *Sejam w um peso admissível tal que $\mathcal{S}_w$ é um conjunto de medida nula com respeito a medida de Lebesgue no plano, $\{P_n\}$ uma sequência de polinômios de grau exatamente n satisfazendo (5.7) e ν_n a medida contadora de zeros normalizada de P_n . Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) $\nu_n \xrightarrow{*} \mu_w$ quando $n \rightarrow \infty$ na topologia fraca*.
- (b) Para toda componente limitada E de $\mathbb{C} \setminus \mathcal{S}_w$ e toda subsequência $\mathcal{N}$ de números naturais há um $z_0 \in E$ e uma subsequência $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty, n \in \mathcal{N}_1} |P_n(z_0)|^{1/n} = \exp(-U^{\mu_w}(z_0)). \quad (5.10)$$

Antes de demonstrarmos, vamos fornecer alguns lemas que serão utilizados na demonstração.

Lema 5.2. *Sejam w um peso admissível, $\{P_n\}$ uma sequência de polinômios mônicos de grau exatamente n satisfazendo (5.7) e ν_n a medida contadora de zeros normalizada associada. Então, $\nu_n(K) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ para todo subconjunto fechado K da componente ilimitada Ω de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{S}_w$.*

Demonstração: Definimos a função

$$g_n(z) = \frac{1}{n} \log |P_n(z)| - \int \log |z - t| d\mu_w(t) + \frac{1}{n} \sum_{z_{n,k} \in \Omega} g_\Omega(z, z_{n,k}),$$

onde $\{z_{n,k}\}$ são os zeros de P_n , $g_\Omega(z, z_{n,k})$ são as funções de Green com pólos nos zeros de P_n e Ω é a componente ilimitada de $\mathbb{C} \setminus \mathcal{S}_w$. Definida desta forma, $g_n(z)$ é harmônica em Ω , inclusive no ∞ , pois a função de Green é harmônica por definição, o potencial é harmônico nos pontos que não pertencem a $\mathcal{S}_w$ e a primeira função, embora não seja harmônica nos zeros, se comporta aproximadamente como uma constante nestes zeros, quando somada à função de Green. Portanto, do Teorema 3.3, item (e), da Propriedade (c) da definição de função de Green e de (5.7), segue que

$$\limsup_{z \rightarrow z', z \in \Omega} g_n(z) = \limsup_{z \rightarrow z', z \in \Omega} g_n(z) + Q(z) - Q(z) \leq \varepsilon_n$$

para “quase todo ponto” $z' \in \partial\Omega$, onde $\varepsilon_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Pelo Princípio do Máximo Generalizado o qual é uma variação do Teorema 3.9, temos $g_n(z) \leq \varepsilon_n$ em Ω . Daí, de

pelo Teorema 5.1, segue que

$$\frac{1}{n} \sum_{z_{n,k} \in \Omega} g_{\Omega}(\infty, z_{n,k}) = \frac{1}{n} \sum_{z_{n,k} \in \Omega} g_{\Omega}(z_{n,k}, \infty) \leq \varepsilon_n,$$

ou equivalentemente,

$$0 \leq \int g_{\Omega}(z, \infty) d\nu_n^{\Omega}(z) \leq \varepsilon_n, \quad (5.11)$$

onde

$$\nu_n^{\Omega} := \frac{1}{n} \sum_{z_{n,k} \in \Omega} \delta_{z_{n,k}},$$

ou seja, é a restrição de ν_n ao conjunto Ω . Portanto,

$$\int g_{\Omega}(z, \infty) d\nu_n^{\Omega}(z) \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Como para todo $K \subset \Omega$ fechado, temos $g_{\Omega}(z, \infty) \geq C > 0$. Então, devemos ter obrigatoriamente $\nu_n(K) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. $\square$

Lema 5.3. *Sejam w um peso admissível, $\{P_n\}$ uma sequência de polinômios mônicos de grau exatamente n satisfazendo (5.7) e ν_n a medida contadora de zeros normalizada associada. Então $\nu_n(K) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$ para todo subconjunto compacto K da componente limitada E de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{S}_w$.*

Demonstração: Se E é a componente limitada de $\mathbb{C} \setminus \mathcal{S}_w$, então consideramos o z_0 do item (b) do Teorema 5.3, e substituímos ∞ por z_0 , e procedemos com a demonstração como no lema anterior. Daí, para todo $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$, existem um conjunto $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}$ e um $z_0 \in E$, tal que

$$\int g_E(z, z_0) d\nu_n^E(z) \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty, n \in \mathcal{N}_1,$$

onde ν_n^E é a restrição de ν_n ao conjunto E . Consequentemente, $\nu_n(K) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, $n \in \mathcal{N}_1$, se $K \subset E$ é compacto. Como isso é verdadeiro para todo $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$, então a sequência $\{\nu_n(K)\}_{n=1}^{\infty}$, tem que convergir para zero. $\square$

Definição 5.4. *Seja $p_n(x)$ um polinômio mônico de grau exatamente n e a um número positivo. Definimos o conjunto lemniscata do polinômio $p_n(x)$, como sendo o conjunto*

$$E_a := \{x : |p_n(x)| \leq a\}.$$

O próximo lema o qual não demonstraremos nos dá um valor para a capacidade dos conjuntos lemniscata.

Lema 5.4. *Seja $p_n(x)$ um polinômio mônico de grau exatamente n . Então, a capacidade do conjunto lemniscata E_a , como definido acima, é dada por*

$$\text{cap}(E_a) = a^{1/n}.$$

A demonstração deste fato pode ser encontrada em [14].

Com estes lemas podemos demonstrar o Teorema 5.3.

Demonstração: Primeiramente, vamos supor (b) e concluir (a). Seja σ a medida limite, no sentido da convergência fraca*, das medidas ν_n , ou seja, $\nu_n \xrightarrow{*} \sigma$, quando $n \rightarrow \infty$, $n \in \mathcal{N}$ para algum $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$. Vamos provar que $\sigma = \mu_w$.

Pelo Lema 5.3, σ é uma medida probabilística de Borel com suporte compacto e, dos lemas 5.2 e 5.3, $\text{supp}(\sigma) \subseteq \mathcal{S}_w$. Assim, temos

$$\begin{aligned} U^{\mu_w}(z) - U^{\nu_n}(z) &= U^{\mu_w}(z) + Q(z) - U^{\nu_n}(z) - Q(z) \\ &\leq F_w - U^{\nu_n}(z) - Q(z), \quad \text{para todo } z \in \mathcal{S}_w, \end{aligned}$$

onde na desigualdade utilizamos o item (e) do Teorema 3.3. Além disso,

$$-U^{\nu_n}(z) - Q(z) = \frac{1}{n} \log |P_n(z)| + \frac{1}{n} \log(w(z)^n).$$

Logo, de (5.7), obtemos

$$U^{\mu_w}(z) - U^{\nu_n}(z) \leq \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0. \quad (5.12)$$

Portanto, de acordo com o Princípio da Dominação, a propriedade (5.12) é válida em $\mathbb{C}$.

Seja $\varepsilon > 0$. Se $\text{dist}(z, \mathcal{S}_w) > 2\varepsilon$, então, de acordo com (5.12),

$$U^{\mu_w}(z) - U^{\bar{\nu}_n}(z) \leq \varepsilon_n + o(1), \quad \varepsilon_n \rightarrow 0,$$

onde $\bar{\nu}_n$ é a medida contadora de zeros normalizada, associada com os zeros de $P_n(x)$ que pertencem ao conjunto $E := \{z : \text{dist}(z, \mathcal{S}_w) \leq \varepsilon\}$, a qual é uma subsequência de ν_n . Portanto, $\bar{\nu}_n$ também converge fracamente* para a medida σ quando $n \rightarrow \infty$, $n \in \mathcal{N}$. Podemos concluir que para todo $z \notin \mathcal{S}_w$

$$U^{\mu_w}(z) - U^\sigma(z) \leq 0. \quad (5.13)$$

O lado esquerdo de (5.13), de acordo com o Teorema 3.1, é uma função harmônica em $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{S}_w$, e de acordo com as hipóteses do item (b) deve ter ao menos um zero em toda componente de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{S}_w$. Consequentemente, a função no lado esquerdo de (5.13) atinge seu máximo em um ponto interior a cada uma das componentes conexas de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{S}_w$. Logo, temos $U^\sigma(z) = u^{\mu_w}(z)$ para todo $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{S}_w$. Isto significa que os potenciais coincidem em quase todo ponto com respeito a medida de Lebesgue, pois por hipótese, o suporte $\mathcal{S}_w$ tem medida nula. Portanto, de acordo com o Teorema da unicidade 4.1, segue que $\sigma = \mu_w$.

Reciprocamente, se supormos que $\nu_n \xrightarrow{*} \mu_w$, de acordo com (5.7) e o Teorema 5.2, temos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |P_n(z_0)|^{1/n} \leq \exp(-U^{\mu_w}(z_0)), \quad z_0 \in \mathbb{C}. \quad (5.14)$$

Seja E a componente limitada de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{S}_w$. Para $\varepsilon > 0$ definimos o conjunto

$$E_\varepsilon := \{z : z \in E, \text{dist}(z, \mathcal{S}_w) > \varepsilon\},$$

e as medidas

$$\nu_n^{(1)} := \frac{1}{n} \sum_{z_{n,k} \in E_\varepsilon} \delta_{z_{n,k}}, \quad \nu_n^{(2)} := \nu_n - \nu_n^{(1)},$$

onde $\{z_{n,k}\}_{k=1}^n$ são os zeros de $P_n(z)$ e δ_z denota a medida delta de Dirac. Como $\nu_n \xrightarrow{*} \mu_w$, então $\nu_n^{(2)} \xrightarrow{*} \mu_w$. Portanto,

$$\int \log |z - t| d\nu_n^{(2)}(t) \rightarrow \int \log |z - t| d\mu_w(t), \quad z \in E_\varepsilon. \quad (5.15)$$

Vamos mostrar que, para $\varepsilon > 0$ pequeno, o conjunto E_ε tem medida positiva de Lebesgue em $\mathbb{C}$ e, para $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{N}$ e para algum $z_0 \in E_\varepsilon$, temos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty, n \in \mathcal{N}} \int \log |z_0 - t| d\nu_n^{(1)}(t) \geq 0. \quad (5.16)$$

Assim, de acordo com (5.15) e (5.14), temos

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty, n \in \mathcal{N}} \log |P_n(z_0)|^{1/n} - \limsup_{n \rightarrow \infty, n \in \mathcal{N}} \int \log |z_0 - t| d\nu_n^{(1)}(t) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty, n \in \mathcal{N}} \int \log |z_0 - t| d\nu_n(t) - \limsup_{n \rightarrow \infty, n \in \mathcal{N}} \int \log |z_0 - t| d\nu_n^{(1)}(t) = -U^{\mu_w}(z_0), \end{aligned}$$

ou equivalentemente,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty, n \in \mathcal{N}} \log |P_n(z_0)|^{1/n} = -U^{\mu_w}(z_0) + \limsup_{n \rightarrow \infty, n \in \mathcal{N}} \int \log |z_0 - t| d\nu_n^{(1)}(t).$$

Logo,

$$-U^{\mu_w}(z_0) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty, n \in \mathcal{N}} \log |P_n(z_0)|^{1/n} \leq -U^{\mu_w}(z_0).$$

Portanto, existe $\mathcal{N}_1 \subseteq \mathcal{N}$, tal que (5.10) é válido. Desta forma, nos resta provar (5.16).

Seja

$$q_n(z) = \prod_{z_{n,k} \in E_\varepsilon} (z - z_{n,k}).$$

Então, denotando por d o grau de q_n , a desigualdade (5.16) é equivalente

$$\limsup_{n \rightarrow \infty, n \in \mathcal{N}} |q_n(z)|^{1/n} \geq 1. \quad (5.17)$$

Agora, tomemos $0 < a < 1$, e consideremos o conjunto lemniscata

$$E_{n,a} := \{z : |q_n(z)| \leq a^n\}.$$

De acordo com o Lema 5.4, temos

$$\text{cap}(E_{n,a}) = a^{n/d}.$$

Assim, podemos escolher uma sequência de $0 < a_n < 1$, com $a_n \rightarrow 1^-$ e uma subsequência de números naturais $\mathcal{N}_1 \subseteq \mathcal{N}$ de tal forma que a série

$$\sum_{n \in \mathcal{N}_1} [\text{cap}(E_{n,a_n})]^2,$$

converja e seu limite seja inferior à $m(E_\varepsilon)/10$, onde m denota a medida de Lebesgue em $\mathbb{C}$. Pelo Teorema 3.2, temos

$$\sum_{n \in \mathcal{N}_1} [m(E_{n,a_n})] < m(E_\varepsilon).$$

Portanto, existem um $z_0 \in E_\varepsilon$, tal que, $z_0 \notin E_{n,a_n}$, e $n \in \mathcal{N}_1$, para o qual (5.17) é válida. Concluindo a demonstração do teorema.

Os Lemas 5.2 e 5.3 também nos diz que, quando $n \rightarrow \infty$, os zeros do polinômio extremal pertencem ao conjunto $\text{supp}(\mu_w)$, ou seja, estes lemas fornecem informações sobre o comportamento assintótico dos zeros do polinômio extremal.

Referências Bibliográficas

- [1] Bartle, R.G, The Elements of Integration and Lebesgue Measure, John Wiley & Sons, Inc. 1995.
- [2] Cohen, P. J, On Green's Theorem, Proceedings of the American Mathematics Society, Volume 10, nº1, 109-112, 1959.
- [3] Henrici, P, Applied and Computational Complex Analysis, Volume II, John Wiley & Sons, 1977.
- [4] Henrici, P, Applied and Computational Complex Analysis, Volume III, John Wiley & Sons, 1977.
- [5] Hewitt, E e Strongberg, K, Real and Abstract Analysis, Springer- Verlag, Primeira Edição, 1965.
- [6] Hille, E, Analytic Function Theory, Volume II, AMS Chelsea Publishing, Segunda Edição, 2000.
- [7] Hoffman, K, Banach Spaces of Analytic Functions, Prentice-Hall Inc, Primeira Edição, 1962.
- [8] Pritsker, I.E, How to Find A Measure From its Potential, Comput. Methods Funct. Theory 8 (2008), 597-614.
- [9] Markushevich, A.I, Theory of Functions of Complex Variable, Volume III, Prentice-Hall, Inc, Primeira Edição, 1967.
- [10] Oliveira, C.R, Introdução a Análise Funcional, Publicações Matemáticas, IMPA, Primeira Edição, 2009.
- [11] Ponce, A.C, Métodos Clássicos em Teoria do Potencial, Publicações Matemáticas, IMPA, Primeira Edição, 2008.
- [12] Rudin, W., Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, New York, Terceira Edição, 1974.
- [13] Ransford, T, Potential Theory in the Complex Plane, London Mathematical Society Student Texts (No. 28), Cambridge University Press, Primeira Edição, 1995.
- [14] Totik, V e Saff, E.B, Logarithmic Potential With External Fields. A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Springer-Verlag, Primeira Edição, 1997.
- [15] Shapiro, V.L, On Green's Theorem, Journal London Mathematical Society, 261-269, 1957.

- [16] M. Tsuji, Potential Theory in Modern Function Theory, maruzen co.,Tóquio, 1959.
- [17] Walsh, J. L, Interpolation and Aproximation by Rational Functions in the Complex Domain, volume 20 of Colloquium Publications. AMS, Providence, 1960.
- [18] Wermer, J, Potential Theory, Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Segunda Edição, 1981.

Autorizo a reprodução xerográfica para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 14 de março de 2011.

Eliel José Camargo dos Santos